UNIVERSITÉ PARIS-SUD

ÉCOLE DOCTORALE : STITS (ED 422)
Laboratoire de Génie Électrique de Paris (LGEP)

DISCIPLINE : Physique

THÈSE DE DOCTORAT

soutenue le 06/12/2013

par

Valentin PRÉAULT

Méthodes d'homogénéisation pour la modélisation électromagnétique de matériaux composites.

Application au blindage de boîtiers d'équipement électronique.

Directeur de thèse :	Laurent DANIEL	MdC (LGEP, Gif-sur-Yvette)

Composition du jury :

Président du jury :	Christian BROSSEAU	Professeur (Lab-STICC , Brest)
Rapporteurs :	Ruth V. SABARIEGO	Professeur (KU Leuven, Leuven-Heverlee)
	Didier TRICHET	Professeur (IREENA – CRTT, St-Nazaire)
Examinateur :	François DE DARAN	Expert CEM (Sagem, Massy)
Encadrants :	Romain CORCOLLE	MdC (LGEP, Gif-sur-Yvette)
	Lionel PICHON	Directeur de recherche au CNRS (LGEP, Gif-sur-Yvette)

Remerciements

En entamant ces trois dernières années je doutais de ma capacité à relever le défi, je craignais de stagner sans pouvoir avancer. Mais ces trois ans de doctorat sont maintenant écoulés et je ressors grandit de cette expérience à la fois humaine et professionnelle. Il est désormais temps de remercier ceux qui m'ont aidé et qui ont contribué à cette réussite.

J'aimerais débuter ces remerciements avec M. Christian Brosseau qui m'a fait le plaisir de présider le jury de ma thèse. J'aimerais également remercier Mme Ruth Sabariego et M. Didier Trichet qui ont accepté d'examiner attentivement mon rapport. Je remercie également M. François De Daran, membre du jury, d'avoir participé activement à la soutenance.

Je remercie mon directeur de thèse Laurent Daniel, ainsi que mes deux encadrants Romain Corcolle et Lionel Pichon, qui m'ont fait confiance en me confiant ce sujet. J'ai beaucoup progressé grâce à la qualité de leur encadrement, de leurs connaissances et pris beaucoup de plaisir à travailler avec eux.

Il m'a été très agréable de travailler au sein du LGEP. Tous ses membres ainsi que son directeur, Frédéric Bouillault, contribuent à l'excellence dans une très bonne ambiance. Mon travail a fait parti du thème MuPhy de l'équipe ICHAMS, que je remercie pour les discussions fructueuses avec lesquelles j'ai beaucoup appris.

Je tiens également à remercier le personnel de Sagem pour sa convivialité pendant les réunions et les différents déplacements.

También quiero agradecer a los dos Raphas y Vicente, que me han acogido en el GREA y abierto las puertas de la investigación científica.

Il y a également les *non-permanents* du LGEP, András, Laïd, Trang, Antoine, Alex et Alex, Xavier ... et surtout Waseem, avec qui j'ai passé de très bons moments au point K, au Cesfo mais également en dehors du LGEP.

Je remercie chaleureusement oncles, tantes, cousins et cousines qui m'ont soutenu et sont venus en nombre à la soutenance. Mais également les amis, ces *vielles branches* comme on les appelle mais sur lesquelles on peut toujours se raccrocher. J'en profite pour saluer les Enimiens qui m'ont encouragé et n'ont cessé de croire en moi.

Je suis infiniment reconnaissant à mes frères et sœurs qui ont toujours été à mes côtés. Ils ont su m'épauler et me soutenir et c'est surtout grâce à eux que le manuscrit contient si peu de fautes.

Pour clore ces remerciements, que j'ai voulu faire tenir sur une page (je prie de m'excuser, ceux que j'ai pu oublier), je termine par mes parents. Ils savent à quel point je leur suis reconnaissant, de m'avoir ouvert l'esprit, guidé, orienté, et que sans leur soutien infaillible je n'en serais pas là aujourd'hui. Mes mots ne suffisent pas à exprimer ce que je ressens alors je vais synthétiser ma gratitude par un grand MERCI.

À mes parents,
à ma fille Elsa

Table des matières

Notations **vii**

Introduction **1**

1 Notions d'électromagnétisme **5**

1.1 Les champs électromagnétiques 6

1.2 Équations de Maxwell 6

1.3 Lois de comportement 7

1.4 Propagation des ondes 7

1.4.1 Équation d'onde 7

1.4.2 Ondes planes progressives monochromatiques polarisées . . . 8

1.4.3 Effet de peau 9

1.4.4 Conditions aux interfaces 10

1.4.5 Relation de passage 11

1.5 Comportement d'une plaque soumise à une onde 12

1.5.1 Onde réfléchie 13

1.5.2 Onde transmise 13

1.5.3 Coefficient de blindage 14

1.5.4 Validation numérique des résultats 15

1.6 Conclusion 16

2 Propriétés effectives, homogénéisation **19**

2.1 Définition du milieu homogène équivalent 20

2.1.1 Volume élémentaire représentatif 21
2.2 Bornes et estimations des propriétés effectives 22
2.2.1 Bornes de Voigt et Reuss 22
2.2.2 Bornes de Hashin et Shtrikman 23
2.2.3 Estimation de Maxwell-Garnett 24
2.2.4 Estimation d'Ollendorff 25
2.2.5 Estimation auto-cohérente 25
2.2.6 Application numérique 26
2.3 Problèmes d'inclusion 27
2.3.1 Définition 27
2.3.2 Problème d'Eshelby 27
2.3.3 Superposition des problèmes d'inclusion 28
2.3.4 Distribution des phases 28
2.3.5 Tenseur dépolarisant 29
2.3.6 Choix du milieu de référence 31
2.3.7 Démarche des méthodes d'homogénéisation basées sur des problèmes d'inclusion 32
2.4 Mise en évidence des limites dynamiques 33
2.5 Conclusion 34

3 Extension dynamique de la méthode d'homogénéisation basée sur des problèmes d'inclusion 37

3.1 Définition de la méthode d'homogénéisation dynamique 38
3.1.1 Influence du milieux de référence sur le comportement du milieu homogène 39
3.1.2 Caractérisation du milieu de référence 40
3.1.3 Définition du milieu de référence 42
3.1.4 Définition de la méthode d'homogénéisation dynamique . . . 44
3.1.5 Validation numérique de la méthode 45
3.2 Définition de la taille caractéristique des fibres 46

3.2.1 Présentation des microstructures étudiées 46
3.2.2 Méthode de calcul de la taille caractéristique 47
3.2.3 Validation numérique 48
3.3 Domaine de validité de la méthode d'homogénéisation dynamique . 50
3.3.1 Diamètre des fibres 50
3.3.2 Taux de fibres 51
3.3.3 Propriétés des constituants 52
3.3.4 Microstructures aléatoires à fibres elliptiques orientées 54
3.3.5 Synthèse 55
3.4 Conclusion 57

4 Prise en compte de l'effet de peau dans les fibres 59
4.1 Limite de la méthode d'homogénéisation dynamique 60
4.2 Définition de la méthode d'homogénéisation dynamique étendue . . 64
4.2.1 Milieu de référence intégrant les pertes par effet Joule 64
4.2.2 Calcul des pertes par effet Joule dans le matériau réel 66
4.2.3 Évaluation des pertes par effet Joule dans le milieu de référence 68
4.2.4 Définition de la conductivité à pertes équivalentes 68
4.2.5 Définition de la méthode d'homogénéisation dynamique étendue 69
4.2.6 Validation numérique de la méthode 70
4.3 Applications numériques 71
4.3.1 Diamètre des fibres 72
4.3.2 Taux de fibres 73
4.3.3 Propriétés des constituants 74
4.3.4 Perméabilité magnétique 77
4.3.5 Synthèse 78
4.4 Conclusion 79

5 Modélisation d'un boîtier de blindage par éléments finis 81

5.1 Présentation du boîtier 82
5.1.1 Description de l'assemblage et des matériaux 82
5.2 Modélisation électromagnétique 84
5.2.1 PML, conditions aux limites et onde incidente 84
5.2.2 Homogénéisation du matériau composite 85
5.2.3 Maillage et résolution 90
5.3 Résultats 91

Conclusion - Perspectives **93**

Bibliographie **97**

Annexes **101**

A Relation de passage d'une onde plane progressive monochromatique **103**
A.1 Définition du problème 104
A.2 Conditions aux limites 105
A.3 Coefficient de Transmission et de Réflexion 106

B Comportement d'une plaque homogène soumise à une onde plane progressive monochromatique **107**
B.1 Définition du problème 108
B.2 Conditions aux limites 110
B.3 Onde réfléchie et transmise 111
B.4 Coefficient de blindage 112

C Tenseur dépolarisant **115**
C.1 Cas général 116
C.2 Facteurs dépolarisants d'ellipsoïdes de révolution 117
C.3 Tenseur dépolarisant d'un cylindre elliptique 118

D Comportement d'une fibre soumise à une onde EM 121

D.1 Définition du problème 122

D.2 Comportement d'une fibre soumise à une onde EM (Hypothèse grande longueur d'onde) 123

D.2.1 Champ magnétique $\mathbf{H}_F$ dans la fibre 123

D.2.2 Champ électrique $\mathbf{E}_F$ dans la fibre 125

D.2.3 Courants $\mathbf{J}_F$ dans la fibre 125

D.3 Comportement d'une fibre soumise à une onde EM (Cas général) . . 125

D.3.1 Champ incident 125

D.3.2 Champs rayonnés 126

D.3.3 Calcul des coefficients des ondes rayonnées 127

D.4 Comparaison des résultats 128

E Développement analytique du modèle de Maxwell-Garnett 131

E.1 Permittivité effective complexe de Maxwell-Garnett 132

E.2 Partie réelle 132

E.3 Partie imaginaire 133

Liste des figures 141

Liste des tableaux 143

Notations

Notation	Signification
$\mathbf{B}$	Champ d'induction magnétique
B_{ni}	Composante normale du champ d'induction magnétique dans le milieu i
$\mathbf{D}$	Champ d'induction électrique
D_{ni}	Composante normale du champ d'induction électrique dans le milieu i
ρ	Densité de charges libres
$\mathbf{E}$	Champ électrique
E_{ti}	Composante tangentielle du champ électrique dans le milieu i
$\mathbf{H}$	Champ magnétique
H_{ti}	Composante tangentielle du champ magnétique dans le milieu i
$\mathbf{J}$	Champ de vecteurs courants
$\overline{\mathbf{B}}$	Moyenne du champ d'induction magnétique
$\overline{\mathbf{D}}$	Moyenne du champ d'induction électrique
$\overline{\mathbf{E}}$	Moyenne du champ électrique
$\overline{\mathbf{H}}$	Moyenne du champ magnétique
$\underline{\underline{\mu}}_i$	Tenseur de perméabilité du milieu i
$\underline{\underline{\epsilon}}_i$	Tenseur de permittivité du milieu i
$\underline{\underline{\sigma}}_i$	Tenseur de conductivité électrique du milieu i
μ_0	Perméabilité du vide
μ_{ui}	Perméabilité de la phase i dans la direction $\mathbf{u}$
μ_r	Perméabilité relative
ϵ_0	Permittivité du vide
ϵ_{ui}	Permittivité de la phase i dans la direction $\mathbf{u}$
ϵ_r	Permittivité relative
σ_{ui}	Conductivité électrique de la phase i dans la direction $\mathbf{u}$

Notation	Signification
$\mathbf{E}_I$	Champ électrique de l'onde incidente
$\mathbf{H}_I$	Champ magnétique de l'onde incidente
$\mathbf{E}_R$	Champ électrique de l'onde réfléchie
$\mathbf{H}_R$	Champ magnétique de l'onde réfléchie
$\mathbf{E}_T$	Champ électrique de l'onde transmise
$\mathbf{H}_T$	Champ magnétique de l'onde transmise
$\mathbf{E}_a$ et $\mathbf{E}_b$	Champs électriques présents dans une plaque soumise à une OPPM
$\mathbf{H}_a$ et $\mathbf{H}_b$	Champs magnétiques présents dans une plaque soumise à une OPPM
E_0	Amplitude du champ électrique de l'onde incidente
H_0	Amplitude du champ magnétique de l'onde incidente
E_R	Amplitude complexe du champ électrique de l'onde réfléchie
H_R	Amplitude complexe du champ magnétique de l'onde réfléchie
E_T	Amplitude complexe du champ électrique de l'onde transmise
H_T	Amplitude complexe du champ magnétique de l'onde transmise
ρ_s	Densité de charges surfaciques
$j_{s\perp}$	Courants surfaciques perpendiculaires
f	Fréquence
ω	Pulsation
λ	Longueur d'onde
δ	Épaisseur de peau
δ_2	Épaisseur de peau des fibres
k_0	Constante de propagation du vide
k_i	Constante de propagation dans le milieu i
n_i	Indice du milieu i
η_0	Impédance caractéristique du vide
η_i	Impédance caractéristique de la phase i
SE	Coefficient de blindage

Notation	Signification
$\mathbf{E}_i$	Champ électrique dans l'inclusion représentative de la phase i
$\mathbf{E}_\infty$	Champ électrique appliqué aux bords du milieu de référence
$\underline{\underline{\epsilon}}_\infty$	Tenseur de permittivité du milieu de référence
$\underline{\underline{\epsilon}}^*_\infty$	Tenseur de permittivité complexe du milieu de référence
ϵ_∞	Permittivité du milieu de référence
$\underline{\underline{\epsilon}}_i$	Tenseur de permittivité de la phase i
$\underline{\underline{\epsilon}}^*_i$	Tenseur de permittivité complexe de la phase i
ϵ^*_{ui}	Permittivité complexe de la phase i dans la direction $\mathbf{u}$
$\widetilde{\underline{\underline{\epsilon}}}$	Tenseur de permittivité effective
$\widetilde{\underline{\underline{\epsilon}}}^*$	Tenseur de permittivité effective complexe
$\widetilde{\epsilon}_u$	Permittivité effective dans la direction $\mathbf{u}$
$\widetilde{\epsilon}^*_u$	Permittivité effective complexe dans la direction $\mathbf{u}$
$\widetilde{\epsilon}_W$	Permittivité effective obtenue avec le modèle de Wiener
$\widetilde{\epsilon}_{HS}$	Permittivité effective obtenue avec le modèle de Hashin et Shtrikman
$\widetilde{\epsilon}_{MG}$	Permittivité effective obtenue avec le modèle de Maxwell-Garnett
$\widetilde{\epsilon}^*_{MG}$	Permittivité effective complexe obtenue avec le modèle de Maxwell-Garnett
$\widetilde{\epsilon}_O$	Permittivité effective obtenue avec le modèle de Ollendorff
$\widetilde{\epsilon}_{AC}$	Permittivité effective obtenue avec le modèle autocohérent
$\widetilde{\epsilon}_{PI}$	Permittivité effective obtenue avec la méthode d'homogénéisation basée sur des problèmes d'inclusion
$\widetilde{\mu}$	Perméabilité effective
$\widetilde{\underline{\underline{\mu}}}$	Tenseur de perméabilité effective
$\widetilde{\sigma}$	Conductivité électrique effective
$\widetilde{\underline{\underline{\sigma}}}$	Tenseur de conductivité électrique effective
$\underline{\underline{N}}_i$	Tenseur dépolarisant de la phase i
N^u_i	Facteur dépolarisant de la phase i dans la direction u

Notation	Signification
w_J^{Fibre}	Énergie locale dissipée par effet Joule dans une fibre
w_J^{∞}	Énergie locale dissipée par effet Joule dans le milieu de référence
W_J^{Fibre}	Énergie totale dissipée par effet Joule dans une fibre
W_J^{∞}	Énergie totale dissipée par effet Joule dans le milieu de référence
q_I	Coefficient de réflexion d'une interface
p_I	Coefficient de transmission d'une interface
q_P	Coefficient de réflexion d'une plaque
p_P	Coefficient de transmission d'une plaque
γ_{eff}	Taille effective de la microstructure
γ	Taille caractéristique de la microstructure
l	Épaisseur de la plaque
$\varnothing$	Diamètre des fibres
R	Rayon des fibres
h	Hauteur des fibres
c	Célérité
$\underline{\underline{A}}$	Tenseur définissant un ellipsoïde
a_1, a_u et a_3	Demi-axes d'un ellipsoïde
τ	Excentricité d'un ellipsoïde de révolution
f_i	Fraction volumique de la phase i
$\mathbf{u}$	Vecteur unitaire
$\underline{\underline{I}}$	Tenseur identité
rot	Opérateur rotationnel
div	Opérateur divergeant
$\mathcal{I}^{(i)}$	Fonction indicatrice de la phase i
$S_2^{(ij)}(\mathbf{r})$	Fonction de probabilité à deux-points
$\chi^{(i)}$	Autocovariance de la phase i
$\mathcal{J}_\alpha(x)$	Fonction de Bessel de première espèce d'ordre α
$\mathcal{Y}_\alpha(x)$	Fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre α
$\mathcal{H}_\alpha^{(2)}(x)$	Fonction de Hankel de deuxième espèce d'ordre α

Abréviations

Abréviation	Signification
EM	*Électromagnétique*
OPPM	*Onde Plane Progressive Monochromatique*
PML	*Perfectly Matched Layer*
MHE	*Milieu Homogène Équivalent*
FADEC	*Full Authority Digital Engine Control*
SE	*Shielding Effectiveness*

Introduction

Depuis l'apparition du torchis au Néolithique, l'homme n'a cessé de développer de nouveaux matériaux composites. Combinant les propriétés de leurs différents constituants, les matériaux composites offrent de nombreux avantages. D'abord introduits dans le génie civil, ils sont aujourd'hui présents dans de très nombreux domaines comme les sports mécaniques, les transports ou l'aérospatiale. Leur principal intérêt réside essentiellement dans le fait qu'ils offrent à la fois de bonnes propriétés et une faible masse.

Depuis plusieurs années, ils sont de plus en plus utilisés par l'industrie aéronautique pour alléger les structures mécaniques. C'est le cas de la structure de l'A350, qui se concrétise par une proportion en masse de 52 % fabriquée en matériaux composites. Principalement utilisés dans la conception du fuselage, des ailes et de la queue, les différentes pièces composites sont généralement constituées de matériaux à base de fibres de carbone noyées dans une matrice epoxy. S'ils offrent cet immense avantage d'être légers tout en étant résistants, il n'en demeure pas moins que leur modélisation est plus compliquée que celle des matériaux homogènes. Mais, si l'utilisation de matériaux composites, pour des applications mécaniques, est rendue possible par l'expertise acquise dans ce domaine depuis plusieurs décennies, l'emploi des composites pour des applications de blindage électromagnétique est en revanche freinée par manque de modèles.

Avant d'envisager l'utilisation de matériaux composites pour fabriquer des boîtiers de blindage d'équipements électroniques, il est nécessaire de développer des modèles appropriés. Pour parvenir à modéliser le comportement électromagnétique de matériaux composites, la méthode retenue dans ce travail de thèse est celle de l'homogénéisation analytique. Il existe de nombreuses méthodes d'homogénéisation numérique, mais le modèle recherché doit être rapide, facilement applicable et basé sur des définitions physiques pour faciliter l'étape de pré-dimensionnement. L'homogénéisation analytique est adaptée à l'optimisation de matériaux compo-

sites et permet d'obtenir rapidement des estimations des propriétés effectives. Le milieu homogène équivalent ainsi obtenu, peut être introduit dans des modèles numériques, afin d'étudier le comportement de structures complètes en évitant de modéliser la microstructure des matériaux utilisés. En effet, le maillage des hétérogénéités rend impossible la modélisation de structures complexes. Les propriétés effectives fournies par certains modèles sont des bornes (supérieure et inférieure), encadrant les propriétés effectives macroscopiques d'un matériau composite. Plus les informations définissant le composite sont riches (propriétés des constituants, répartition, ...), plus les bornes sont restreintes. Il convient ainsi d'appliquer le modèle adapté au composite à étudier car chaque estimation est plus ou moins pertinente en fonction de la microstructure étudiée. Modéliser un matériau hétérogène par homogénéisation, consiste donc à estimer ou encadrer ses propriétés effectives.

Cependant, les modèles analytiques classiques ont été développés pour des sollicitations statiques. Même si certains peuvent être utilisés pour des sollicitations quasi-statiques, ils ne sont pas applicables pour modéliser des phénomènes dynamiques. C'est pourquoi il est nécessaire de développer des méthodes d'homogénéisation dynamique qui permettent d'anticiper le comportement électromagnétique dynamique des matériaux composites. Pour y parvenir, on choisit d'adapter une méthode d'homogénéisation basée sur des problèmes d'inclusion. Dans cette méthode, le comportement de chaque phase du composite, représentée par une inclusion plongée dans un milieu de référence, est étudié séparément. C'est le milieu de référence qui caractérise les interactions entre les différentes phases du composite. En adaptant le choix du milieu de référence, cette méthode permet de tenir compte de nombreux phénomènes (non-linéarité, couplage, ...). L'objectif de cette thèse est de caractériser les phénomènes dynamiques qui interviennent au sein des matériaux composites illuminés par des ondes électromagnétiques. En intégrant ces phénomènes dans le choix du milieu de référence, cette démarche permet de mettre au point des méthodes d'homogénéisation dynamique.

Le premier des cinq chapitres de ce mémoire présente les outils nécessaires à la modélisation des phénomènes électromagnétiques. Les équations de Maxwell ainsi que les lois de comportement décrites permettent de calculer analytiquement le coefficient de blindage de plaques homogènes.

Le deuxième chapitre expose les différents modèles d'homogénéisation analytique fréquemment utilisés. Une application numérique met en évidence leur inaptitude à la modélisation de phénomènes dynamiques. Les différentes étapes né-

cessaires pour appliquer la méthode d'homogénéisation basée sur des problèmes d'inclusion sont détaillées dans une deuxième partie.

Le troisième chapitre décrit la démarche permettant d'obtenir une méthode d'homogénéisation dynamique. Cette méthode étend les modèles d'homogénéisation classiques en intégrant un effet de taille entre les hétérogénéités du composite et la longueur d'onde dans le choix du milieu de référence. Cependant, elle reste limitée par l'apparition de l'effet de peau dans les fibres.

Afin de permettre la modélisation de matériaux composites après l'apparition de l'effet de peau dans les fibres, le quatrième chapitre décrit une deuxième méthode dynamique. Cette méthode d'homogénéisation dynamique étendue prend en compte l'énergie dissipée par les fibres dans le choix du milieu de référence. Cette considération permet d'étendre la modélisation de matériaux composites à toute la gamme de fréquences nécessaire.

La modélisation électromagnétique par éléments finis d'un boîtier de blindage constitué d'un matériau composite, est présentée dans le dernier chapitre. Les différentes étapes nécessaires au calcul par éléments finis y sont détaillées. La méthode d'homogénéisation dynamique étendue est utilisée pour obtenir les propriétés effectives de la pièce en composite en fonction de la fréquence. Les courbes de propriétés effectives sont ensuite introduites dans le modèle numérique. La dernière section de ce chapitre présente les résultats obtenus qui permettent de caractériser l'efficacité de blindage du boîtier en fonction de la fréquence.

Chapitre 1

Notions d'électromagnétisme

Sommaire

1.1 Les champs électromagnétiques 6
1.2 Équations de Maxwell 6
1.3 Lois de comportement 7
1.4 Propagation des ondes 7
1.4.1 Équation d'onde 7
1.4.2 Ondes planes progressives monochromatiques polarisées 8
1.4.3 Effet de peau 9
1.4.4 Conditions aux interfaces 10
1.4.5 Relation de passage 11
1.5 Comportement d'une plaque soumise à une onde . . . 12
1.5.1 Onde réfléchie 13
1.5.2 Onde transmise 13
1.5.3 Coefficient de blindage 14
1.5.4 Validation numérique des résultats 15
1.6 Conclusion 16

Ce chapitre a pour objectif de synthétiser les outils nécessaires à la modélisation du comportement électromagnétique des matériaux. Ces outils serviront premièrement à modéliser des plaques illuminées par des ondes électromagnétiques pour déterminer leurs coefficients de blindage. Ils serviront ensuite à modéliser les phénomènes dissipatifs qui apparaissent à haute fréquence dans les matériaux composites et enfin à modéliser le comportement électromagnétique de boîtiers de blindage.

1.1 Les champs électromagnétiques

Un champ électromagnétique (EM) est la combinaison d'un champ électrique et d'un champ magnétique. Un champ électrique se forme sous l'effet d'une différence de potentiel électrique alors qu'un champ magnétique apparaît lorsqu'il y a circulation de courants. Les champs EM peuvent avoir une origine naturelle comme le champ magnétique terrestre, les phénomènes météorologiques ou encore la lumière. Certains sont artificiels et ont des origines diverses comme les appareils de diagnostic médical, les différents réseaux électriques ou encore les systèmes de télécommunications.

1.2 Équations de Maxwell

Les phénomènes électromagnétiques font apparaître des couplages entre le champ électrique et le champ magnétique. Ces observations expérimentales sont exprimées sous forme mathématique par les équations de Maxwell (Maxwell 1873). Ce sont des équations d'équilibre valables en toutes circonstances. Elles sont indispensables à la modélisation des phénomènes électromagnétiques.

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \tag{1.1a}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \tag{1.1b}$$

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.1c}$$

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{1.1d}$$

Ces quatre équations s'appliquent aux différents champs de vecteurs (tenseurs d'ordre 1) qui composent les champs EM. Elles régissent le champ d'induction magnétique $\mathbf{B}$, le champ magnétique $\mathbf{H}$, le champ électrique $\mathbf{E}$, le champ de vecteurs

courants **J** et le champ d'induction électrique **D**. L'équation de Maxwell-Gauss (1.1b) fait intervenir ρ, la densité de charges libres.

1.3 Lois de comportement

En plus des équations de Maxwell, la modélisation du comportement électromagnétique des matériaux, passe par l'utilisation de lois de comportement. Elles définissent la réponse du milieu face à une sollicitation (électrique, magnétique, mécanique, thermique ...). Les lois de comportement nécessaires à la modélisation du comportement électromagnétique utilisées ici sont linéaires et découplées :

$$\mathbf{B} = \underline{\underline{\mu}}\mathbf{H} \tag{1.2a}$$

$$\mathbf{D} = \underline{\underline{\epsilon}}\mathbf{E} \tag{1.2b}$$

$$\mathbf{J} = \underline{\underline{\sigma}}\mathbf{E} \tag{1.2c}$$

Ces lois de comportement font intervenir des propriétés intrinsèques des matériaux (tenseurs diagonaux d'ordre 2), mettant en relation les champs de vecteurs. Le champ d'induction magnétique **B** et le champ magnétique **H** sont liés par le tenseur de perméabilité magnétique $\underline{\underline{\mu}}$. Le champ d'induction électrique **D** et le champ de vecteurs courants **J** sont liés respectivement au champ électrique **E** par le tenseur de permittivité $\underline{\underline{\epsilon}}$ et le tenseur de conductivité électrique $\underline{\underline{\sigma}}$. Les matériaux modélisés par la suite sont tous considérés isotropes magnétiquement. La loi de comportement magnétique (1.2a) peut être simplifiée par :

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{1.3}$$

1.4 Propagation des ondes

1.4.1 Équation d'onde

Une onde EM est un champ EM fonction du temps et de l'espace. Les ondes EM traduisent un couplage entre un champ électrique et un champ magnétique se propageant à travers l'espace. La définition de l'équation d'onde est l'une des applications principales des équations de Maxwell (Harrington 1961). L'équation du champ électrique dans un milieu homogène est obtenue en prenant le rotationel de

l'équation de Maxwell-Faraday (1.1c), puis en remplaçant **rot H** avec l'équation de Maxwell-Ampère (1.1d). Combinée avec les lois de comportement (1.2), on obtient alors l'équation d'onde suivante :

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \underline{\underline{\epsilon}} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \underline{\underline{\sigma}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \tag{1.4}$$

Les solutions satisfaisant l'équation d'onde (1.4) et les équations de Maxwell (1.1) sont des définitions d'ondes EM possibles.

1.4.2 Ondes planes progressives monochromatiques polarisées

On s'intéressera ici, au cas simple des ondes planes, progressives, monochromatiques (OPPM) avec une polarisation rectiligne. L'adjectif *planes* signifie que les champs des ondes sont uniformes par plans, perpendiculaires à la direction de propagation. Il existe d'autres cas particuliers comme les ondes cylindriques ou sphériques. Le terme *progressives* indique que les ondes se déplacent dans l'espace et *monochromatiques* caractérise des ondes oscillant suivant une seule fréquence f. La *polarisation rectiligne* signifie que les champs n'ont qu'une seule composante.

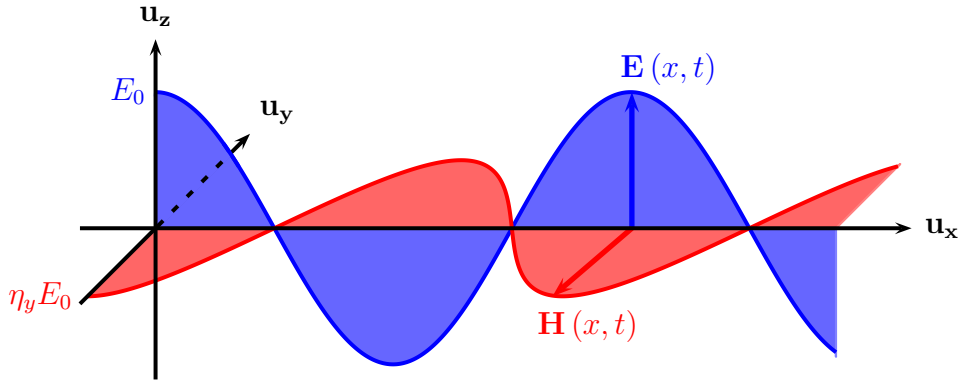


FIGURE 1.1 – *Schéma, à un instant donné, d'une onde électromagnétique plane progressive monochromatique et polarisée suivant* $\mathbf{u_z}$*, se propageant suivant* $\mathbf{u_x}$*.*

Dans le cas d'une OPPM se propageant suivant la direction $\mathbf{u_x}$, polarisée électriquement suivant $\mathbf{u_z}$ (figure 1.1), en fréquentiel l'équation (1.4) devient :

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} + k^2 E_z = 0 \tag{1.5}$$

où $k = \sqrt{\epsilon_z \mu \omega^2 - \jmath \mu \sigma_z \omega}$ est la constante de propagation de l'onde et ω sa pulsation ($\omega = 2\pi f$). Le champ électrique $\mathbf{E}(x,t)$ d'une OPPM d'amplitude réelle E_0 satisfaisant ces équations peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{E}\,(x,t) = E_0 e^{\jmath(\omega t - kx)} \mathbf{u_z} \tag{1.6}$$

Le champ magnétique d'une onde, est en tout point perpendiculaire à son champ électrique. Le champ magnétique associé à (1.6) est obtenu à partir de (1.1d) :

$$\mathbf{H}\,(x,t) = \eta E_0 e^{\jmath(\omega t - kx)} \mathbf{u_y} \tag{1.7}$$

Le rapport $\|\mathbf{E}\|/\|\mathbf{H}\|$ est appelé impédance caractéristique η. Elle est constante en tout point d'un même milieu et dépend de ses propriétés. Dans le cas du vide, l'impédance caractéristique s'écrit $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377\ \Omega$.

1.4.3 Effet de peau

On appelle effet de peau le phénomène qui engendre la concentration des champs à la surface d'un milieu conducteur. En effet, la partie imaginaire de la constante de propagation k, induit une décroissance exponentielle de l'amplitude des champs électromagnétiques dans le matériau. Dans le cas d'un milieu conducteur, on peut simplifier la constante de propagation par $k \approx \sqrt{\jmath \omega \mu \sigma_z}$. L'équation du champ électrique, polarisé suivant $\mathbf{u_z}$, se propageant dans ce milieu suivant $\mathbf{u_x}$ s'écrit :

$$\mathbf{E}\,(x,t) = E_0 e^{\jmath(\omega t - kx)} \mathbf{u_z} \tag{1.8}$$

$$\mathbf{E}\,(x,t) = E_0 e^{-(\sqrt{\omega\mu\sigma_z}/\sqrt{2})x} e^{\jmath(\omega t - (\sqrt{\omega\mu\sigma_z}/\sqrt{2})x)} \mathbf{u_z} \tag{1.9}$$

$$\mathbf{E}\,(x,t) = E_0 e^{-x/\delta} e^{\jmath(\omega t - (\sqrt{\omega\mu\sigma_z}/\sqrt{2})x)} \mathbf{u_z} \tag{1.10}$$

La figure 1.2 montre, à un instant donné, le champ électrique d'une onde électromagnétique se propageant dans un milieu conducteur. L'amplitude du champ électrique, représentée en pointillés, est définie par $e^{-x/\delta}$. La décroissance des champs dans un matériau conducteur se fait en fonction de l'épaisseur de peau δ, qui s'écrit dans ce cas :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma_z}} \tag{1.11}$$

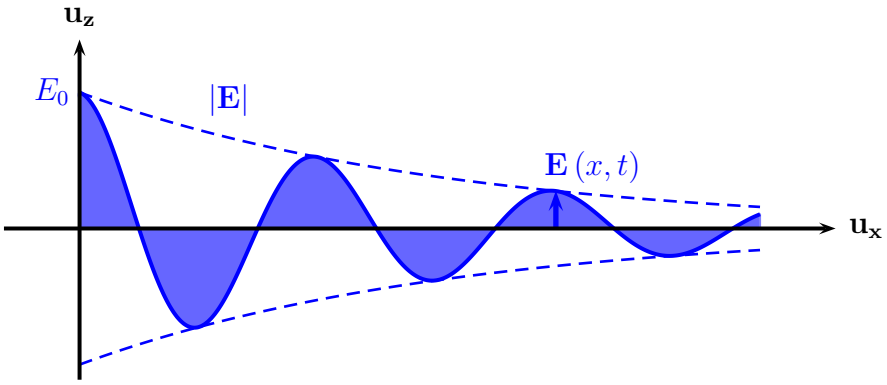


FIGURE *1.2* – *Schéma, à un instant donné, du champ électrique d'une onde électromagnétique polarisée suivant* $\mathbf{u_z}$*, se propageant suivant* $\mathbf{u_x}$ *dans un milieu conducteur. L'amplitude du champ électrique est représentée en pointillés.*

1.4.4 Conditions aux interfaces

Pour modéliser la propagation des ondes électromagnétiques, il est nécessaire de définir les conditions de passage (HARRINGTON 1961). Ces conditions à l'interface satisfont les équations de Maxwell (1.1) et leur formulation dépend de la conductivité électrique des deux milieux. Elles s'appliquent sur les composantes tangentielles ou normales (figure 1.3) des champs à l'interface S des deux milieux. On considère ici, que l'onde se propage du milieu 1 ($\underline{\underline{\epsilon}}_1$, $\underline{\underline{\sigma}}_1$, μ_1) vers le milieu 2 ($\underline{\underline{\epsilon}}_2$, $\underline{\underline{\sigma}}_2$, μ_2), tous deux homogènes.

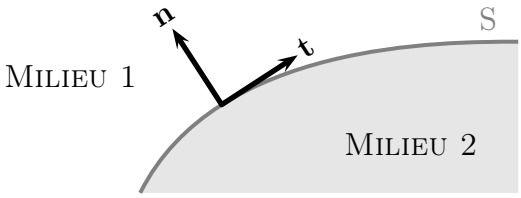


FIGURE *1.3* – *Schéma d'une interface.*

Trois cas apparaissent. Dans le premier, les deux milieux ne sont pas conducteurs ($\sigma_{t1} = \sigma_{t2} = 0$), dans le deuxième, les deux sont conducteurs (σ_{t1} et $\sigma_{t2} < \infty$) et dans le troisième, seul le milieu 2 est considéré comme parfaitement conducteur ($\sigma_{t1} = 0$ et $\sigma_{t2} = \infty$). Les conditions aux limites de ces trois cas sont récapitulées dans le tableau 1.1. Lorsque le milieu 2 est considéré comme parfaitement conducteur ($\sigma_{t2} = \infty$), aucun champ ne pénètre à l'intérieur. Dans ce cas, la discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique s'exprime en fonction des

σ_t	E_t	D_n	H_t	B_n
$\sigma_{t1} = \sigma_{t2} = 0$	$E_{t1} = E_{t2}$	$D_{n1} = D_{n2}$	$H_{t1} = H_{t2}$	$B_{n1} = B_{n2}$
σ_{t1} et $\sigma_{t2} < \infty$	$E_{t1} = E_{t2}$	$(\sigma_{t1} + \jmath\omega\epsilon_{t1})\, E_{n1} =$ $(\sigma_{t2} + \jmath\omega\epsilon_{t2})\, E_{n2}$	$H_{t1} = H_{t2}$	$B_{n1} = B_{n2}$
$\sigma_{t2} = \infty$	$E_{t1} = 0$ $E_{t2} = 0$	$D_{n1} = \rho_s$ $D_{n2} = 0$	$H_{t1} = j_{s\perp}$ $H_{t2} = 0$	$B_{n1} = 0$ $B_{n2} = 0$

Tableau 1.1 *– Conditions aux limites.*

courants surfaciques perpendiculaires $j_{s\perp}$ et la composante normale de l'induction électrique dépend de la densité surfacique de charges ρ_s.

1.4.5 Relation de passage

A partir des conditions aux limites, présentées dans le tableau 1.1, on peut déterminer le coefficient de réflexion et de transmission d'une interface entre deux milieux (figure 1.4). On considère ici, le milieu 1 non conducteur et le milieu 2 bon conducteur (cas 2 du tableau 1.1). L'interface entre les deux milieux est orthogonale à $\mathbf{u_x}$ et illuminée par une OPPM polarisée électriquement suivant $\mathbf{u_z}$, se propageant suivant $\mathbf{u_x}$.

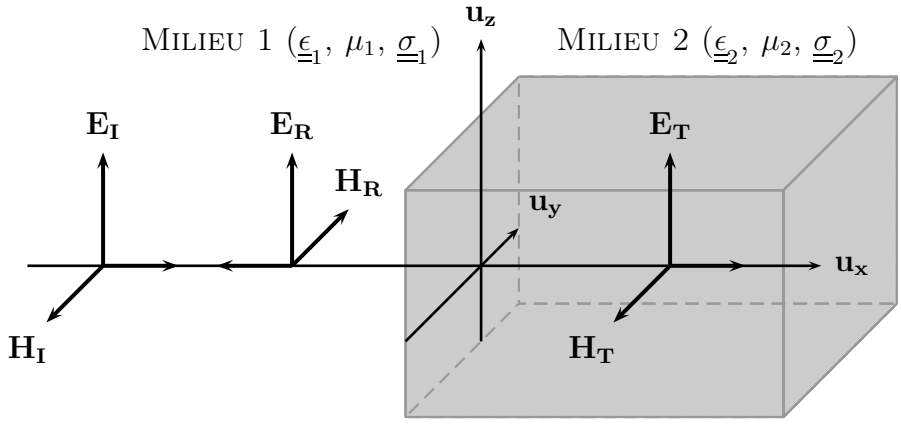


Figure ***1.4*** *– Onde réfléchie et transmise par une interface plane soumise à une OPPM polarisée ayant une incidence normale.*

Le calcul des champs réfléchis et transmis en fonction des champs de l'onde incidente est détaillé en annexe A. On peut en déduire le coefficient de réflexion de

l'interface q_I, défini comme le rapport de l'amplitude complexe du champ électrique réfléchi E_R sur celle du champ électrique incident E_I :

$$q_I = \frac{E_R}{E_I} = \frac{H_R}{H_I} = \frac{\frac{n_1}{\mu_{r1}} - \frac{n_2}{\mu_{r2}}}{\frac{n_1}{\mu_{r1}} + \frac{n_2}{\mu_{r2}}} \tag{1.12}$$

où μ_{ri} est la perméabilité relative du milieu i. L'indice n_i de ce milieu dépend de la vitesse de la lumière c ($n_i = \frac{c}{\omega}k_i = \frac{k_i}{k_0}$). Le coefficient de transmission p_I, est lui défini par le rapport de l'amplitude complexe du champ électrique transmis E_T sur celle du champ électrique incident :

$$p_I = \frac{E_T}{E_I} = \frac{H_T}{H_I} = \frac{2\frac{n_1}{\mu_{r1}}}{\frac{n_1}{\mu_{r1}} + \frac{n_2}{\mu_{r2}}} \tag{1.13}$$

Les normes de ces deux coefficients fournissent respectivement l'amplitude du champ électrique rayonné et celle du champ électrique transmis. Leurs modules donnent le déphasage des ondes avec l'onde incidente.

1.5 Comportement d'une plaque infinie soumise à une onde électromagnétique

Lorsqu'une OPPM illumine avec une incidence normale, une plaque supposée infinie, elles interagissent en fonction de la fréquence de l'onde et des propriétés de la plaque. Une partie de l'onde incidente est réfléchie, une deuxième partie est transmise à travers et une dernière partie est absorbée par la plaque (figure 1.5).

On considère la plaque entourée d'air et constituée d'un matériau homogène linéaire et anisotrope (permittivité et conductivité). En supposant l'onde incidente polarisée électriquement suivant $\mathbf{u_z}$, d'amplitude E_0, se propageant dans l'air suivant la direction $\mathbf{u_x}$:

$$\mathbf{E_I} = E_0 e^{j(\omega t - k_0 x)} \mathbf{u_z} \tag{1.14}$$

avec k_0 la constante de propagation du vide, on peut déterminer l'amplitude complexe relative des différentes ondes. Ces calculs se font à partir des équations de Maxwell (1.1) et des conditions aux limites (tableau 1.1). Les résultats des calculs des différentes amplitudes complexes, effectués en annexe B, sont décrits ci-après. Le cas où l'incidence de l'onde est oblique n'est pas traité ici.

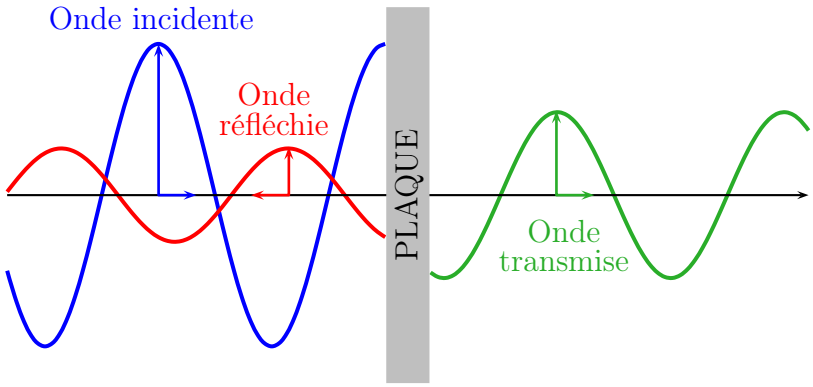


FIGURE 1.5 – *Onde réfléchie et transmise par une plaque homogène à un instant t (incidence normale).*

1.5.1 Onde réfléchie

L'amplitude complexe du champ électrique de l'onde réfléchie E_R est donnée par :

$$E_R = E_0 \frac{n^2 + \mu_r^2}{(n-\mu_r)^2 - (n+\mu_r)^2 e^{2\jmath kl}} \left(e^{2\jmath kl} - 1\right) \tag{1.15}$$

Elle dépend de l'indice ($n = {}^{k}/_{k_0}$) du matériau, de la constante de propagation ($k = \sqrt{\epsilon_z \mu \omega^2 - \jmath \mu \sigma_z \omega}$), de la perméabilité relative μ_r et de l'épaisseur l de la plaque. Son module $|E_R|$ varie entre 0 et E_0. L'onde réfléchie par la plaque se propage dans la direction opposée à l'onde incidente mais ses champs ont conservé les mêmes directions. Le champ électrique de l'onde réfléchie s'écrit alors :

$$\mathbf{E_R} = E_R e^{\jmath(\omega t + k_0 x)} \mathbf{u_z} \tag{1.16}$$

1.5.2 Onde transmise

L'amplitude complexe du champ électrique de l'onde transmise E_T définit la proportion d'onde EM passée à travers la plaque. Son module $|E_T|$ est compris entre 0 et E_0. Il permet ensuite de calculer le coefficient de blindage (paragraphe 1.5.3). L'amplitude complexe du champ électrique de l'onde transmise est définie par :

$$E_T = E_0 \frac{-4\mu_r n}{(n-\mu_r)^2 - (n+\mu_r)^2 e^{2\jmath kl}} e^{\jmath(k_0+k)l} \tag{1.17}$$

L'onde transmise à travers la plaque se propage dans la même direction que l'onde incidente et ses champs ont conservé les mêmes directions. L'équation du champ

électrique de l'onde transmise s'écrit :

$$\mathbf{E_T} = E_T e^{\jmath(\omega t - k_0 x)} \mathbf{u_z} \tag{1.18}$$

1.5.3 Coefficient de blindage

Le coefficient de blindage caractérise l'étanchéité d'une plaque vis-à-vis des ondes EM. Plus il est élevé, plus la plaque empêche la propagation des ondes. Il dépend de la fréquence de l'onde incidente, des propriétés du matériau et de la géométrie de la plaque. Il est défini par le rapport entre l'amplitude du champ incident et le module de l'amplitude complexe du champ transmis :

$$SE = 20 \log_{10} \frac{E_0}{|E_T|} \tag{1.19}$$

Dans le cas de la plaque homogène, anisotrope, infinie, soumise à une OPPM ayant une incidence normale (figure 1.5), il est possible de le calculer analytiquement (voir en annexe B). Il peut être divisé en trois parties $SE = SE_A + SE_B - SE_R$, avec [1] :

$$SE_A = 20 \log_{10} \left| e^{\jmath kl} \right| \tag{1.20a}$$

$$SE_B = 20 \log_{10} \left| 1 - q_P e^{-2\jmath kl} \right| \tag{1.20b}$$

$$SE_R = 20 \log_{10} |p_P| \tag{1.20c}$$

L'atténuation de l'onde est premièrement causée par l'absorption du matériau SE_A. La deuxième partie SE_B correspond aux multiples réflexions à l'intérieur de la plaque et la troisième SE_R, est la partie réfléchie par la plaque. Les coefficients de réflexion q_P et de transmission p_P d'une plaque sont définis par :

$$q_P = \frac{\left(\frac{n}{\mu_r} - 1\right)^2}{\left(\frac{n}{\mu_r} + 1\right)^2} \qquad p_P = \frac{4\frac{n}{\mu_r}}{\left(\frac{n}{\mu_r} + 1\right)^2} \tag{1.21}$$

La contribution des différentes parties est tracée sur la figure 1.6. Les calculs ont été effectués pour une plaque homogène de 6 mm d'épaisseur, de conductivité $\sigma_z = 1\ S.m^{-1}$, de permittivité $\epsilon_z = 5\epsilon_0$ et de perméabilité $\mu = 2\mu_0$.

1. Comme k peut être complexe, $\left|e^{\jmath kl}\right|$ n'est pas forcément égal à 1.

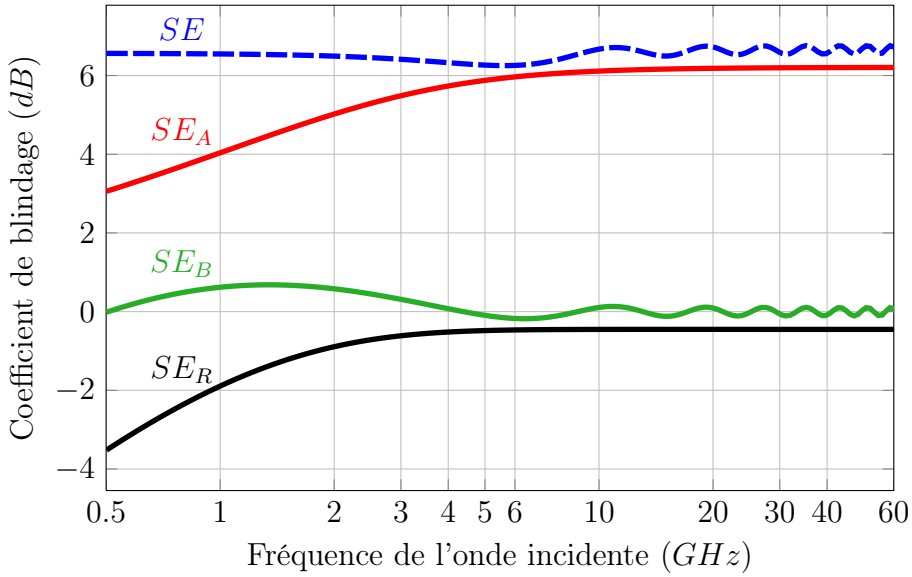


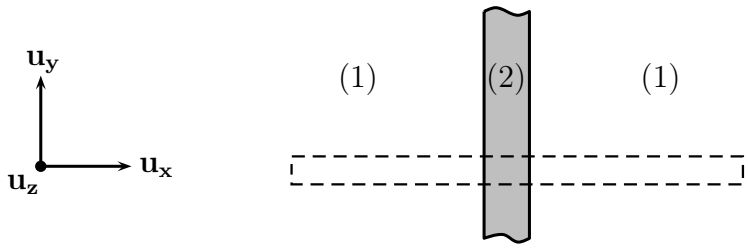
FIGURE 1.6 – *Contribution des différentes parties du coefficient de blindage d'une plaque homogène soumise à une OPPM polarisée ayant une incidence normale ($\sigma_z = 1\ S.m^{-1}$, $\epsilon_z = 5\epsilon_0$ et $\mu = 2\mu_0$).*

1.5.4 Validation numérique des résultats

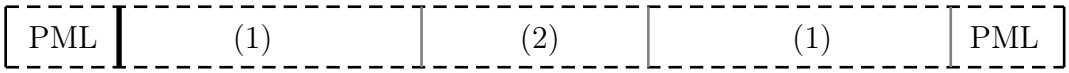
Pour limiter l'utilisation de ressources informatiques, le calcul du coefficient de blindage de plaques homogènes peut être fait analytiquement. La validation de la solution analytique de l'équation (1.19) permet par la suite de se concentrer sur l'étude de l'influence des constituants sur le coefficient de blindage.

La formulation analytique du blindage d'une plaque homogène développée dans la section précédente est comparée à des calculs par éléments finis réalisés à l'aide du logiciel COMSOL MULTIPHYSICS®. Pour réduire le temps de calcul, seule une portion de la plaque infinie (figure 1.7(a)) est modélisée. Des PML (Perfectly matched layer (SACKS et al. 1995)) sont ajoutées aux extrémités du domaine pour simuler l'infini en évitant les réflexions. L'onde ayant une incidence normale, la condition de Neumann est appliquée sur les bords du domaine pour simuler une plaque infinie. Les conditions des calculs numériques sont décrites par la figure 1.7.

Les résultats des calculs du blindage de trois plaques homogènes sont tracés sur la figure 1.8. Jusqu'à une certaine fréquence, les résultats analytiques et numériques sont en bon accord. Les calculs par éléments finis sont limités, car à partir d'une certaine fréquence, l'amplitude de l'onde transmise devient trop faible, d'un ordre de grandeur similaire à celui de l'erreur numérique de COMSOL MULTIPHYSICS®.



(a) Schéma d'une plaque homogène (2) entourée par de l'air (1) et soumise à une OPPM. La zone en pointillés représente le domaine modélisé par éléments finis.



(b) Conditions aux limites (gras : onde incidente, pointillés : condition de Neumann et grisé : condition d'interface).

FIGURE *1.7* – *Conditions des calculs par éléments finis.*

C'est pourquoi, les résultats numériques à haute fréquence ne sont pas tracés. L'utilisation de la méthode analytique pour calculer le coefficient de blindage de plaques homogènes est justifiée.

1.6 Conclusion

Les démarches analytiques permettent de modéliser le comportement de géométries simples illuminées par des ondes EM. Mais le comportement d'un boîtier de blindage est nettement plus compliqué et le recours aux méthodes numériques est indispensable. Cependant, les outils numériques de calcul du blindage électromagnétique nécessitent des ressources informatiques conséquentes en raison des géométries complexes des boîtiers. La modélisation complète d'un boîtier de blindage électromagnétique composite est de ce fait impossible. En effet, le maillage de toutes les hétérogénéités de la structure impliquerait un nombre d'inconnues trop élevé. Une des possibilités pour parvenir à modéliser des structures composites est d'avoir recours à l'homogénéisation. Cette méthode permet d'obtenir des estimations des propriétés effectives du matériau composite. Il sera ensuite possible de modéliser numériquement la structure complète constituée du milieu homogène équivalent obtenu par homogénéisation.

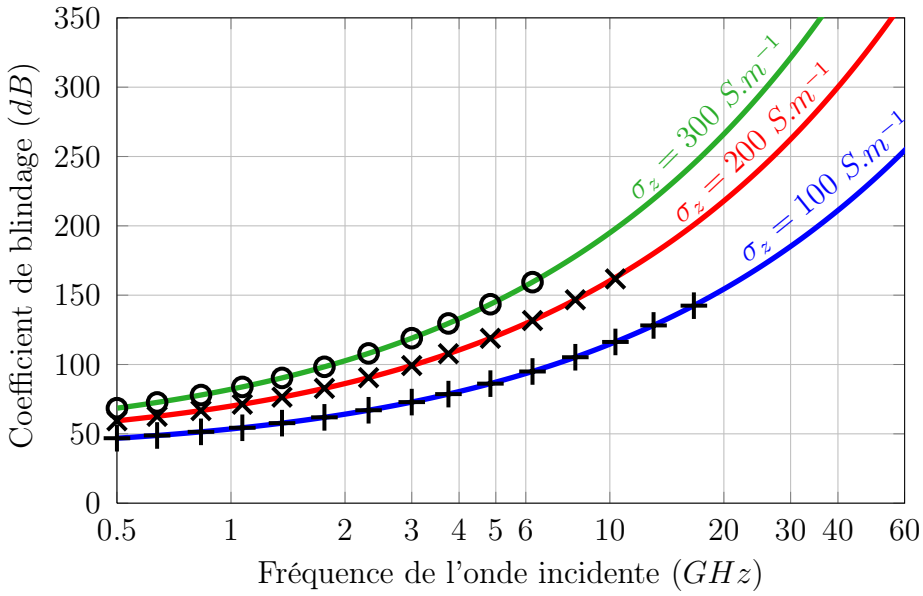


FIGURE *1.8* – *Coefficient de blindage de trois plaques homogènes, de* 6 *mm d'épaisseur, avec différentes conductivités, calculé analytiquement (lignes) et par éléments finis (points)* ($\epsilon_z = \epsilon_0$ *et* $\mu = \mu_0$).

Chapitre 2

Propriétés effectives, homogénéisation

Sommaire

2.1 Définition du milieu homogène équivalent 20
2.1.1 Volume élémentaire représentatif 21
2.2 Bornes et estimations des propriétés effectives 22
2.2.1 Bornes de Voigt et Reuss 22
2.2.2 Bornes de Hashin et Shtrikman 23
2.2.3 Estimation de Maxwell-Garnett 24
2.2.4 Estimation d'Ollendorff 25
2.2.5 Estimation auto-cohérente 25
2.2.6 Application numérique 26
2.3 Problèmes d'inclusion 27
2.3.1 Définition 27
2.3.2 Problème d'Eshelby 27
2.3.3 Superposition des problèmes d'inclusion 28
2.3.4 Distribution des phases 28
2.3.5 Tenseur dépolarisant 29
2.3.6 Choix du milieu de référence 31
2.3.7 Démarche des méthodes d'homogénéisation basées sur des problèmes d'inclusion 32
2.4 Mise en évidence des limites dynamiques 33
2.5 Conclusion 34

L'homogénéisation consiste à remplacer un milieu hétérogène par un milieu homogène ayant le même comportement macroscopique. En électromagnétisme, l'homogénéisation est généralement réalisée avec des méthodes numériques. Ces dernières suscitent un intérêt plus conséquent de la part de la communauté scientifique que les méthodes analytiques, mais elles requièrent des ressources informatiques et des temps de calculs plus élevés. Elles sont principalement basées sur le calcul des champs d'une cellule unitaire par la méthode des éléments finis (Waki et al. 2006 ; Cyr et al. 2009 ; Bottauscio et al. 2009 ; Niyonzima et al. 2012 ; Bordianu et al. 2012 ; Wasselynck et al. 2013). Les méthodes numériques donnent accès à la totalité des champs locaux, permettant ainsi de définir précisément la réponse du matériau en chaque point. Cet avantage peut se transformer en inconvénient si la microstructure présente une forte variabilité, obligeant alors à réaliser un grand nombre de calculs pour atteindre une représentativité statistique suffisante. Les méthodes analytiques quant à elles fournissent des informations locales moins précises mais sont rapides et simples à mettre en œuvre.

L'objectif de ce travail de thèse est de proposer une méthode permettant de faciliter la conception de matériaux composites afin d'anticiper et d'optimiser leur coefficient de blindage sur une large gamme de fréquences. C'est pourquoi l'intérêt s'est porté uniquement sur les méthodes analytiques (type Maxwell-Garnett) qui sont plus adaptées au pré-dimensionnement de matériaux composites.

La première partie de ce chapitre présente la définition du milieu homogène équivalent et des propriétés effectives. La deuxième partie détaille des outils d'homogénéisation analytique existants, principalement ceux appliqués aux sollicitations électromagnétiques, tout en précisant leurs conditions d'utilisation. Une troisième partie met en évidence les limites dynamiques de ces modèles.

2.1 Définition du milieu homogène équivalent

Le comportement effectif d'un matériau composite dépend naturellement de tous ses constituants. Il serait donc attrayant de prendre en compte l'effet de chacune des hétérogénéités qui le composent pour modéliser son comportement exact. Il est très compliqué de procéder ainsi car les capacités de calcul et de modélisation des outils informatiques actuels ne le permettent pas. De plus, les informations locales de la microstructure ne sont pas forcément nécessaires. Il est donc utile, pour modéliser le comportement d'un milieu hétérogène, de définir un milieu homogène

équivalent. Pour cela, il faut faire le lien entre les effets induits par les hétérogénéités à l'échelle microscopique, et le comportement du matériau à l'échelle macroscopique. L'homogénéisation est une méthode de modélisation qui permet de réaliser cette transition d'échelles.

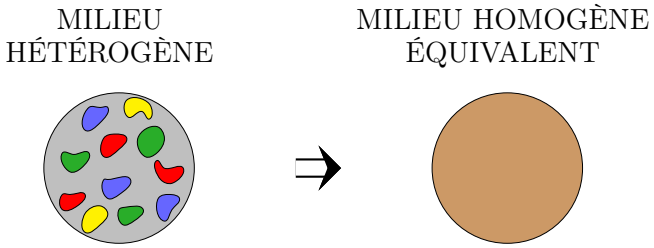


FIGURE *2.1* – *Homogénéisation.*

L'objectif de l'homogénéisation est de définir un milieu homogène équivalent au milieu hétérogène (figure 2.1) à partir d'informations sur les propriétés et la distribution spatiale des constituants du matériau hétérogène. Ce milieu homogène équivalent (MHE) doit présenter la même réponse macroscopique que le milieu hétérogène quand il est soumis aux mêmes sollicitations. Appliquée au comportement diélectrique, l'homogénéisation vise à définir le tenseur de permittivité effective $\underline{\underline{\widetilde{\epsilon}}}$ reliant le champ d'induction électrique moyen[1] $\overline{\mathbf{D}}$ au champ électrique moyen $\overline{\mathbf{E}}$:

$$\overline{\mathbf{D}} = \langle \mathbf{D} \rangle = \underline{\underline{\widetilde{\epsilon}}} \langle \mathbf{E} \rangle = \underline{\underline{\widetilde{\epsilon}}}\, \overline{\mathbf{E}} \tag{2.1}$$

La recherche des propriétés effectives (ou macroscopiques) d'un milieu hétérogène est un problème très ancien et classique dans le domaine de la physique. De nombreux physiciens comme POISSON (1825), FARADAY (1832), MAXWELL (1873), RAYLEIGH (1892) ou encore EINSTEIN (1905) se sont intéressés aux propriétés macroscopiques de certains matériaux hétérogènes.

2.1.1 Volume élémentaire représentatif

L'homogénéisation a pour but de réaliser une transition d'échelles depuis le microscopique jusqu'au macroscopique où le matériau hétérogène pourra être considéré comme homogène. Les différentes échelles doivent respecter un principe de séparation, illustré sur la figure 2.2. Pour le choix de l'échelle microscopique, il

1. L'opérateur $\langle . \rangle$ représente la moyenne volumique.

est nécessaire de prendre en compte la taille caractéristique d des hétérogénéités. La dimension caractéristique l du volume élémentaire représentatif, doit être bien supérieure à celle des hétérogénéités pour pouvoir le considérer représentatif de la microstructure. Toutefois, il faut aussi que cette dimension macroscopique soit bien plus petite que celle de la structure (de taille L), pour ensuite pouvoir traiter la structure comme un milieu homogène.

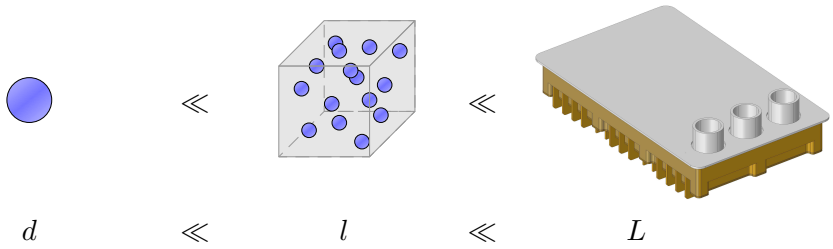


FIGURE *2.2* – *Séparation des échelles.*

2.2 Bornes et estimations des propriétés effectives

Cette partie récapitule les principaux modèles analytiques utilisables en électromagnétisme parmi les nombreux modèles d'homogénéisation existants.

2.2.1 Bornes de Voigt et Reuss

Les approximations de VOIGT (1889) et REUSS (1929) ont été obtenues en modélisant les propriétés élastiques (tenseur de rigidité $\underline{\underline{C}}$ ou de souplesse $\underline{\underline{S}}$) de matériaux composites. L'approximation de VOIGT considère que les déformations sont uniformes dans le matériau alors que celle de REUSS considère que ce sont les contraintes qui sont uniformes. On peut également montrer que ces deux approximations forment des bornes du tenseur effectif. Ces bornes sont optimales car elles sont atteintes dans le cas de microstructures stratifiées.

Les bornes de VOIGT et REUSS appliquées aux comportements électrique et magnétique sont connues sous le nom de bornes de WIENER (1913). Elles sont obtenues en considérant uniforme, soit le champ d'induction électrique :

$$\overline{\mathbf{D}} = \langle \mathbf{D}^i \rangle = \left\langle \underline{\underline{\epsilon}}_i \mathbf{E}^i \right\rangle = \left\langle \underline{\underline{\epsilon}}_i \right\rangle \overline{\mathbf{E}} \tag{2.2}$$

soit le champ électrique :

$$\overline{\mathbf{E}} = \langle \mathbf{E}^i \rangle = \left\langle \underline{\underline{\epsilon}}_i^{-1} \mathbf{D}^i \right\rangle = \left\langle \underline{\underline{\epsilon}}_i^{-1} \right\rangle \overline{\mathbf{D}} \tag{2.3}$$

Le tenseur de permittivité effective $\underline{\underline{\widetilde{\epsilon}}}$ est encadré [2] par :

$$\underline{\underline{\widetilde{\epsilon}}}_{W-} \leqslant \underline{\underline{\widetilde{\epsilon}}} \leqslant \underline{\underline{\widetilde{\epsilon}}}_{W+} \tag{2.4}$$

avec

$$\underline{\underline{\widetilde{\epsilon}}}_{W-} = \left\langle \underline{\underline{\epsilon}}_i^{-1} \right\rangle^{-1} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\widetilde{\epsilon}}}_{W+} = \left\langle \underline{\underline{\epsilon}}_i \right\rangle \tag{2.5}$$

2.2.2 Bornes de Hashin et Shtrikman

Les bornes de HASHIN et SHTRIKMAN (HASHIN 1962 ; HASHIN et SHTRIKMAN 1962, 1963) sont un encadrement des propriétés effectives pour des matériaux biphasés isotropes (isotropie de la répartition des phases ainsi que des propriétés des composants). Elles sont plus restrictives que les bornes de VOIGT et REUSS, car elles font apparaître, en plus des fractions volumiques f_i, l'isotropie du matériau.

Ces bornes sont optimales car il existe des matériaux biphasés isotropes qui admettent ces bornes comme propriétés effectives. C'est le cas de l'assemblage de sphères composites de HASHIN (HASHIN 1962). Les sphères composites (figure 2.3) sont constituées d'un noyau central et d'une enveloppe de matrice concentrique et remplissent totalement le volume de matériau grâce à une répartition fractale aléatoire.

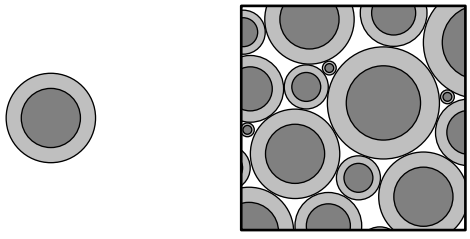


FIGURE *2.3 – Sphère composite (gauche) et assemblage de* HASHIN *(droite).*

2. pour tous tenseurs diagonaux à déterminant non nul (correspondants à des tenseurs de propriétés physiques) du même ordre $\underline{\underline{c}}$ et $\underline{\underline{d}}$, $\underline{\underline{c}} \leqslant \underline{\underline{d}}$ implique que $\left(\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{c}}\right)$ est un tenseur défini positif (BORNERT et al. 2001 ; TORQUATO 2002).

Les bornes de HASHIN et SHTRIKMAN peuvent s'appliquer au comportement diélectrique de matériaux isotropes. En 2D, dans le cas d'un composite biphasé où $\epsilon_2 > \epsilon_1$, la permittivité effective $\widetilde{\epsilon}$ est encadrée par :

$$\widetilde{\epsilon}_{HS-} \leqslant \widetilde{\epsilon} \leqslant \widetilde{\epsilon}_{HS+} \tag{2.6}$$

avec

$$\widetilde{\epsilon}_{HS-} = \epsilon_1 + \frac{f_2}{\dfrac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} + \dfrac{1-f_2}{2\epsilon_1}} \quad \text{et} \quad \widetilde{\epsilon}_{HS+} = \epsilon_2 + \frac{1-f_2}{\dfrac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_2} + \dfrac{f_2}{2\epsilon_2}} \tag{2.7}$$

En 3D, ces bornes s'écrivent :

$$\widetilde{\epsilon}_{HS-} = \epsilon_1 + \frac{f_2}{\dfrac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} + \dfrac{1-f_2}{3\epsilon_1}} \quad \text{et} \quad \widetilde{\epsilon}_{HS+} = \epsilon_2 + \frac{1-f_2}{\dfrac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_2} + \dfrac{f_2}{3\epsilon_2}} \tag{2.8}$$

2.2.3 Estimation de Maxwell-Garnett

L'estimation de MAXWELL-GARNETT (1904) a été développée dans le cas de sollicitations EM quasi-statiques (taille des hétérogénéités petite devant la longueur d'onde). Elle décrit la permittivité complexe effective ($\widetilde{\epsilon}^* = \widetilde{\epsilon} - \jmath\widetilde{\sigma}/\omega$) d'un composite biphasé isotrope, composé de sphères conductrices diluées dans un milieu diélectrique. L'estimation de la permittivité effective complexe $\widetilde{\epsilon}^*_{MG}$ est exprimée en fonction de la fraction volumique des inclusions f_2, de la permittivité complexe de la matrice ϵ_1^* et de celle des inclusions ϵ_2^* :

$$\widetilde{\epsilon}^*_{MG} = \epsilon_1^* + \frac{3f_2\epsilon_1^*\dfrac{\epsilon_2^* - \epsilon_1^*}{\epsilon_2^* + 2\epsilon_1^*}}{1 - f_2\dfrac{\epsilon_2^* - \epsilon_1^*}{\epsilon_2^* + 2\epsilon_1^*}} \tag{2.9}$$

Elle peut également s'écrire en 2D :

$$\widetilde{\epsilon}^*_{MG} = \epsilon_1^* + \frac{2f_2\epsilon_1^*\dfrac{\epsilon_2^* - \epsilon_1^*}{\epsilon_2^* + \epsilon_1^*}}{1 - f_2\dfrac{\epsilon_2^* - \epsilon_1^*}{\epsilon_2^* + \epsilon_1^*}} \tag{2.10}$$

Dans le cas statique, ($\epsilon_i^* = \epsilon_i$), cette estimation est équivalente à une des bornes de HASHIN et SHTRIKMAN. Le modèle de MAXWELL-GARNETT n'est pas symétrique : en effet, la matrice et les inclusions ne contribuent pas de la même manière à la permittivité effective.

2.2.4 Estimation d'Ollendorff

Le modèle d'Ollendorff 1931 a été développé pour des microstructures biphasées anisotropes (anisotropie de la distribution des phases), composées d'ellipsoïdes de révolution magnétiques, dilués dans une matrice amagnétique (constituants isotropes). L'anisotropie est prise en compte par la définition d'un facteur démagnétisant longitudinal N^l et un transversal N^q. Appliqué au cas diélectrique, dans la direction u ($u = l, q$), ce modèle s'écrit :

$$\widetilde{\epsilon}_O^u = \epsilon_0 \frac{\epsilon_0 + (\epsilon_2 - \epsilon_0)\left(N^u\left(1 - f_2\right) + f_2\right)}{\epsilon_0 + (\epsilon_2 - \epsilon_0) N^u \left(1 - f_2\right)} \tag{2.11}$$

Les facteurs dépolarisants, détaillés en annexe C, dépendent de la forme des inclusions (allongées ou aplaties). Ils sont encadrés dans un cas par $0 \leqslant N^l \leqslant 1/3$ et $1/3 \leqslant N^q \leqslant 1/2$ et dans l'autre par $1/3 \leqslant N^l \leqslant 1$ et $0 \leqslant N^q \leqslant 1/3$.

Cette estimation est équivalente (dans le cas statique) aux modèles de Hashin et Shtrikman et de Maxwell-Garnett, lorsque le matériau est biphasé et isotrope ($N^l = N^q = 1/3$ en 3D et $N^q = 1/2$ en 2D).

2.2.5 Estimation auto-cohérente

Cette estimation décrit un milieu dans lequel toutes les phases contribuent de la même manière au comportement effectif. Elle est bien adaptée aux matériaux ayant un grand nombre de phases, dont aucune ne joue un rôle prépondérant (matériaux parfaitement désordonnés), comme les polycristaux.

L'estimation auto-cohérente est aussi appelée estimation de Bruggeman en électromagnétisme (Bruggeman 1935 ; Sihvola 1999). Dans le cas d'un composite isotrope à constituants isotropes, la permittivité effective $\widetilde{\epsilon}_{AC}$ estimée par le modèle auto-cohérent est donnée par (composite à n phases) :

$$\sum_{i=1}^{n} f_i . \frac{\epsilon_i - \widetilde{\epsilon}_{AC}}{2\widetilde{\epsilon}_{AC} + \epsilon_i} = 0 \tag{2.12}$$

Chaque phase se comporte comme plongée dans un milieu homogène. Ce milieu homogène (milieu de référence) étant justement le milieu effectif recherché (Hershey 1954 ; Hill 1965 ; Kröner 1958). Les propriétés du milieu effectif étant par définition inconnues, l'équation (2.12) se ramène à une équation de degré n à résoudre. Il est en général nécessaire d'effectuer un calcul itératif pour obtenir les propriétés du milieu effectif.

De nombreux modèles ont été développés par la suite sur un schéma auto-cohérent (Stroud 1975 ; Floc'h et al. 1995 ; Karkkainen et al. 2000 ; Bariou et al. 2001 ; Queffelec et al. 2005). Ils sont principalement appliqués au comportement électrique et magnétique de polycristaux.

2.2.6 Application numérique

Chacune des méthodes analytiques présentées précédemment a été appliquée pour estimer la permittivité relative effective $\widetilde{\epsilon}_r$ d'un matériau biphasé. Les calculs ont été effectués pour une microstructure 2D isotrope à constituants isotropes. La permittivité relative ϵ_{r1} du milieu 1 est égale à 1, et celle du milieu 2 vaut 10. Les résultats sont présentés sur la figure 2.4 en fonction du pourcentage f_2 de phase 2. Dans cette configuration ($\epsilon_{r1} < \epsilon_{r2}$), les modèles de Maxwell-Garnett et d'Ollendorff sont équivalents à la borne inférieure d'Hashin et Shtrikman ($\widetilde{\epsilon}_{MG} = \widetilde{\epsilon}_O = \widetilde{\epsilon}_{HS-}$). On vérifie bien que l'estimation auto-cohérente est encadrée par les bornes d'Hashin et Shtrikman, elles-mêmes encadrées par les bornes de Wiener.

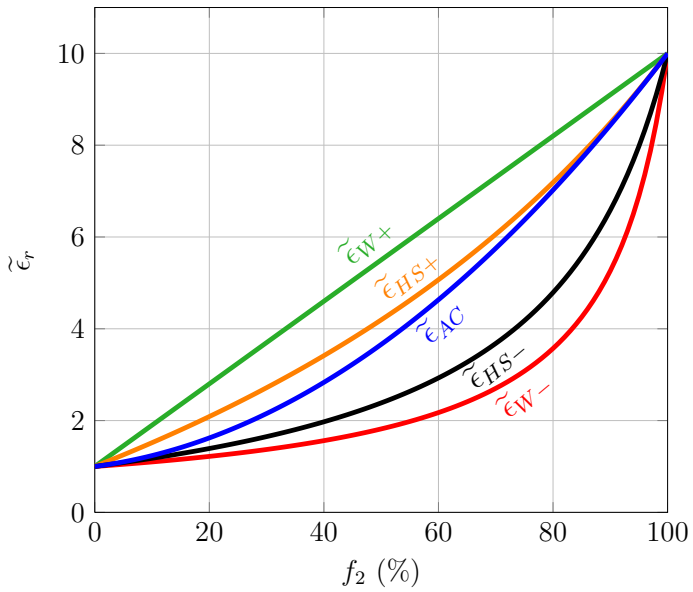


Figure 2.4 – *Application numérique 2D des différents modèles d'homogénéisation ($\epsilon_{r1} = 1$ et $\epsilon_{r2} = 10$).*

2.3 Problèmes d'inclusion

2.3.1 Définition

De nombreux modèles, comme ceux présentés précédemment, peuvent être retrouvés avec une méthode d'homogénéisation basée sur des problèmes d'inclusion (Bornert et al. 2001). Il s'agit alors de définir le comportement de chacune des phases séparément. Dans chaque problème, on étudie le comportement d'une seule inclusion, représentant toutes les hétérogénéités d'une même phase, plongée dans un milieu de référence. Chaque inclusion a les mêmes propriétés que la phase qu'elle représente. La superposition des problèmes d'inclusion (figure 2.5) permet de définir le comportement moyen du matériau. C'est le choix du milieu de référence, que l'on choisit en général commun à tous les problèmes, qui amène à des estimations différentes.

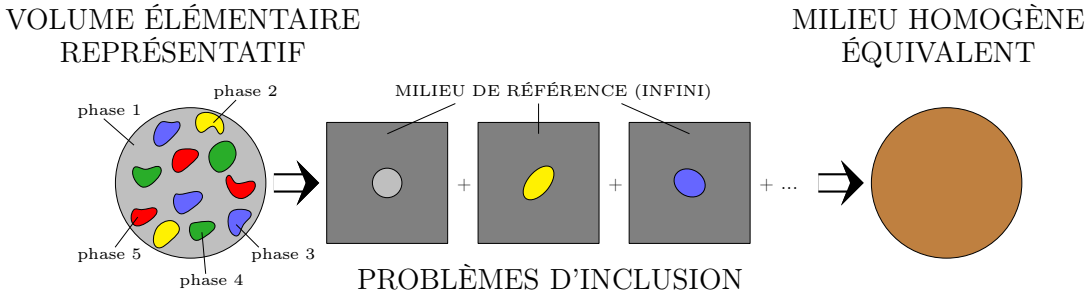


Figure 2.5 – *Schéma de la méthode basée sur des problèmes d'inclusion.*

2.3.2 Problème d'Eshelby

La résolution d'un problème d'inclusion peut s'effectuer analytiquement, si celle-ci est ellipsoïdale, à partir de la solution du problème d'Eshelby (1957). Le champ dans l'inclusion (milieu i) est uniforme et se déduit du champ appliqué au milieu de référence. Dans le cas diélectrique, le champ électrique dans l'inclusion représentative $\mathbf{E}_i$ peut être calculé (Stratton 1941 ; Sihvola et Lindell 1996 ; Daniel et Corcolle 2007) à partir du champ électrique appliqué aux bords du milieu de référence (supposé infini) $\mathbf{E}_\infty$:

$$\mathbf{E}_i = \left(\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\underline{N}}}_i \cdot \underline{\underline{\epsilon}}_\infty{}^{-1} \cdot \left(\underline{\underline{\epsilon}}_i - \underline{\underline{\epsilon}}_\infty\right)\right)^{-1} \cdot \mathbf{E}_\infty \tag{2.13}$$

où $\underline{\underline{\underline{N}}}_i$ est le tenseur dépolarisant de l'inclusion représentative et $\underline{\underline{I}}$ le tenseur identité d'ordre 2.

2.3.3 Superposition des problèmes d'inclusion

En faisant la superposition des problèmes d'inclusion (moyenne des champs dans chacune des phases), on obtient le tenseur de permittivité effective $\underline{\underline{\widetilde{\epsilon}}}_{PI}$ (Corcolle 2009) qui s'exprime :

$$\underline{\underline{\widetilde{\epsilon}}}_{PI} = \left\langle \underline{\underline{\epsilon}}_i \cdot \left(\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\underline{N}}}_i \cdot \underline{\underline{\epsilon}}_\infty{}^{-1} \cdot \left(\underline{\underline{\epsilon}}_i - \underline{\underline{\epsilon}}_\infty \right) \right)^{-1} \right\rangle \cdot \left\langle \left(\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\underline{N}}}_i \cdot \underline{\underline{\epsilon}}_\infty{}^{-1} \cdot \left(\underline{\underline{\epsilon}}_i - \underline{\underline{\epsilon}}_\infty \right) \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \tag{2.14}$$

où $\underline{\underline{\epsilon}}_\infty$ et $\underline{\underline{\epsilon}}_i$ sont les tenseurs de permittivité du milieu de référence et de la phase i. Dans le cas particulier de composites biphasés ($i = 1, 2$) à constituants isotropes, la permittivité effective $\widetilde{\epsilon}^u_{PI}$, dans la direction $\mathbf{u}$ se simplifie :

$$\widetilde{\epsilon}^u_{PI} = \frac{\epsilon_1 \dfrac{f_1}{\epsilon_\infty + N_1^u (\epsilon_1 - \epsilon_\infty)} + \epsilon_2 \dfrac{f_2}{\epsilon_\infty + N_2^u (\epsilon_2 - \epsilon_\infty)}}{\dfrac{f_1}{\epsilon_\infty + N_1^u (\epsilon_1 - \epsilon_\infty)} + \dfrac{f_2}{\epsilon_\infty + N_2^u (\epsilon_2 - \epsilon_\infty)}} \tag{2.15}$$

N^u est la projection du tenseur dépolarisant $\underline{\underline{\underline{N}}}$ dans la direction $\mathbf{u}$ ($N^u = {}^t\mathbf{u} \cdot \underline{\underline{\underline{N}}} \cdot \mathbf{u}$). Pour s'adapter à toute microstructure, ce modèle dépend de la distribution des phases (paragraphe 2.3.4) au travers des tenseurs dépolarisants $\underline{\underline{\underline{N}}}_i$ et du choix des propriétés du milieu de référence $\underline{\underline{\epsilon}}_\infty$ (paragraphe 2.3.6).

2.3.4 Distribution des phases

La forme d'une inclusion représentative dépend de la distribution de la phase qu'elle représente dans le milieu hétérogène. On choisit d'approximer la distribution des phases par une distribution ellipsoïdale pour être en mesure d'utiliser la solution du problème d'Eshelby. L'inclusion représentative d'une phase est donc ellipsoïdale. Elle est en revanche adimensionnelle, seul compte le ratio entre les différents demi-axes. Dans certains cas simples, il est facile d'obtenir la forme de l'inclusion représentative (tableau 2.1). Pour des cas plus compliqués, les fonctions de probabilité à n-points permettent d'obtenir des informations sur la microstructure (Torquato 2002). La fonction de probabilité à un-point permet seulement d'obtenir les fractions volumiques f_i, alors que la fonction de probabilité à deux-points permet d'obtenir beaucoup plus d'informations sur la microstructure.

Elle peut être explicitée par la figure 2.6. C'est la probabilité que les deux extrémités d'un vecteur $\mathbf{r}$, positionné en $\mathbf{x}$, soient dans deux phases définies i et j.

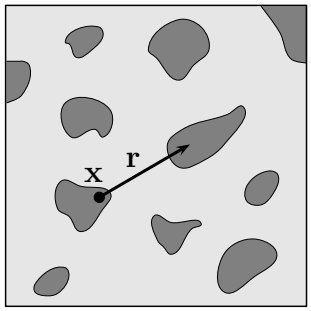


FIGURE 2.6 – *Schéma de la fonction de probabilité à deux-points.*

Elle dépend donc de la norme de $\mathbf{r}$ et de sa direction :

$$S_2^{(ij)}(\mathbf{r}) = \left\langle \mathcal{I}^{(i)}(\mathbf{x})\mathcal{I}^{(j)}(\mathbf{x}+\mathbf{r}) \right\rangle \tag{2.16}$$

où $\mathcal{I}^{(i)}(\mathbf{x})$ est la fonction indicatrice du milieu i ($\mathcal{I}^{(i)}(\mathbf{x}) = 1$ si $\mathbf{x} \in$ phase i et $\mathcal{I}^{(i)}(\mathbf{x}) = 0$ sinon).

TORQUATO (2002) propose la définition d'une taille effective γ_{eff}, calculée à partir de la fonction de probabilité à deux-points d'un même milieu ($i = j$) :

$$\gamma_{eff}^{(i)} = \left\{ \int_0^\infty r\chi^{(i)} dr \right\}^{1/2} = \left\{ \int_0^\infty r \left[S_2^{(ii)}(r) - f_i^2 \right] dr \right\}^{1/2} \tag{2.17}$$

avec $r = \| \mathbf{r} \|$ et $\chi^{(i)}$ l'autocovariance de la phase i :

$$\chi^{(i)}(\mathbf{r}) = S_i^{(22)}(\mathbf{r}) - f_i^2 = \left\langle \left(\mathcal{I}^{(i)}(\mathbf{r}) - f_i \right) \left(\mathcal{I}^{(i)}(\mathbf{x}+\mathbf{r}) - f_i \right) \right\rangle \tag{2.18}$$

En effectuant ce calcul dans plusieurs directions, on peut identifier les trois demi-axes de l'ellipsoïde représentative.

Dans le cas des microstructures biphasées, l'autocovariance de la phase 1 est égale à celle de la phase 2 (TORQUATO 2002) :

$$\chi^{(1)}(\mathbf{r}) = \chi^{(2)}(\mathbf{r}) = S_2^{(11)}(\mathbf{r}) - f_1^2 = S_2^{(22)}(\mathbf{r}) - f_2^2 \tag{2.19}$$

En remplaçant l'équation (2.19) dans (2.17), on montre que la taille effective γ_{eff}, ne fait aucune distinction entre les deux phases. On peut également en déduire, dans le cas précis des composites biphasés, que la forme des inclusions représentatives est identique pour les deux phases.

2.3.5 Tenseur dépolarisant

Une fois la forme de l'inclusion représentative déterminée, il faut ensuite calculer son tenseur dépolarisant. Le tenseur dépolarisant $\underline{\underline{N}}$ d'une inclusion ellipsoïdale

plongée dans un milieu isotrope, peut être calculé à partir de l'intégrale elliptique suivante (STRATTON 1941 ; SIHVOLA et LINDELL 1996) :

$$\underline{\underline{N}} = \frac{det\underline{\underline{A}}}{2} \int_0^\infty \frac{\left(\underline{\underline{A}}^2 + s\underline{\underline{I}}\right)^{-1}}{\sqrt{det\left(\underline{\underline{A}}^2 + s\underline{\underline{I}}\right)}} ds \tag{2.20}$$

où $\underline{\underline{A}}$ est le tenseur symétrique défini positif d'ordre 2 décrivant l'ellipsoïde, défini par $\mathbf{r}^t\underline{\underline{A}}^{-2}\mathbf{r} \leqslant 1$. Pour des cas particuliers, il existe des formulations simplifiées présentées en annexe C. Les tenseurs dépolarisants de quatre distributions simples sont présentés dans le tableau 2.1. Il est important de noter que la trace d'un tenseur dépolarisant est toujours égale à 1.

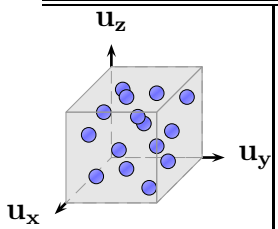
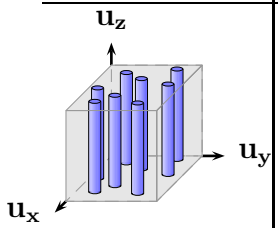
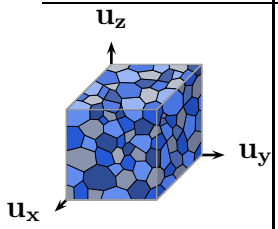
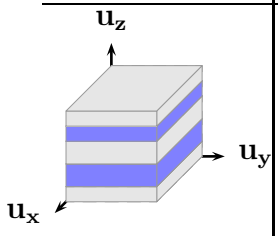
Exemple	Distribution	Inclusion représentative	Tenseur dépolarisant $(\mathbf{u_x}, \mathbf{u_y}, \mathbf{u_z})$
	Isotrope	Sphère	$\underline{\underline{N}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$
	Isotrope transverse	Cylindre infini à section circulaire, orienté suivant l'axe $\mathbf{u_z}$	$\underline{\underline{N}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
	Isotrope	Sphère	$\underline{\underline{N}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$
	Isotrope transverse	Plan infini, orthogonal à $\mathbf{u_z}$	$\underline{\underline{N}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tableau 2.1 – *Tenseurs dépolarisants de microstructures simples à constituants isotropes.*

2.3.6 Choix du milieu de référence

Le choix des propriétés du milieu de référence permet de construire différentes estimations du comportement effectif (2.14). Il permet notamment de décrire les interactions entre phases, mais aussi de modéliser des comportements non-linéaires ou visqueux (Bornert et al. 2001). Les modèles présentés précédemment (section 2.2) peuvent être retrouvés à partir de choix particuliers (Daniel et Corcolle 2007) récapitulés dans le tableau 2.2.

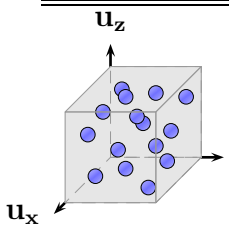
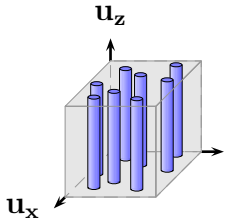
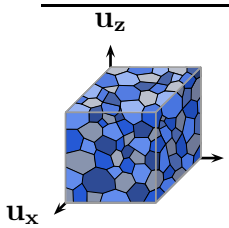
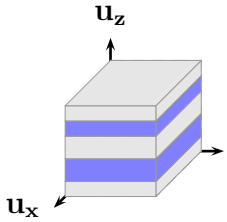
Exemple	Modèles Classiques $(\mathbf{u_x}, \mathbf{u_y}, \mathbf{u_z})$	Milieu de référence des problèmes d'inclusion
	$\underline{\underline{\widetilde{\epsilon}}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\epsilon}_{HS-} & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\epsilon}_{HS-} & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\epsilon}_{HS-} \end{pmatrix}$	$\underline{\underline{\epsilon}}_{\infty} = \underline{\underline{\epsilon}}_{1}$
	$\underline{\underline{\widetilde{\epsilon}}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\epsilon}_{HS-} & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\epsilon}_{HS-} & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\epsilon}_{W+} \end{pmatrix}$	$\underline{\underline{\epsilon}}_{\infty} = \underline{\underline{\epsilon}}_{1}$
	$\underline{\underline{\widetilde{\epsilon}}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\epsilon}_{AC} & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\epsilon}_{AC} & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\epsilon}_{AC} \end{pmatrix}$	$\underline{\underline{\epsilon}}_{\infty} = \underline{\underline{\widetilde{\epsilon}}}$
	$\underline{\underline{\widetilde{\epsilon}}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\epsilon}_{W+} & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\epsilon}_{W+} & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\epsilon}_{W-} \end{pmatrix}$	$\underline{\underline{\epsilon}}_{\infty} = \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tableau 2.2 – *Synthèse des méthodes d'homogénéisation analytique adaptées pour des microstructures simples à constituants isotropes.*

Les bornes de Wiener (Voigt et Reuss) sont obtenues en choisissant respectivement un tenseur à composantes infinies ou nulles comme tenseur de propriété

du milieu de référence. Les bornes de HASHIN et SHTRIKMAN sont retrouvées en appliquant successivement les extremas des propriétés des constituants. Dans le cas de composites biphasés à renforts (distinction inclusions-matrice), l'utilisation du vide comme milieu de référence conduit au modèle d'OLLENDORFF et l'utilisation de la matrice au modèle de MAXWELL-GARNETT. En appliquant les propriétés du milieu effectif obtenu à l'itération précédente au milieu de référence, la répétition de la méthode basée sur des problèmes d'inclusion permet de retrouver l'estimation auto-cohérente. Le choix du milieu de référence est donc un élément essentiel des méthodes d'homogénéisation analytique basées sur des problèmes d'inclusion.

2.3.7 Démarche des méthodes d'homogénéisation basées sur des problèmes d'inclusion

Pour conclure, la démarche des méthodes d'homogénéisation basées sur des problèmes d'inclusion est schématisée sur la figure (2.7).

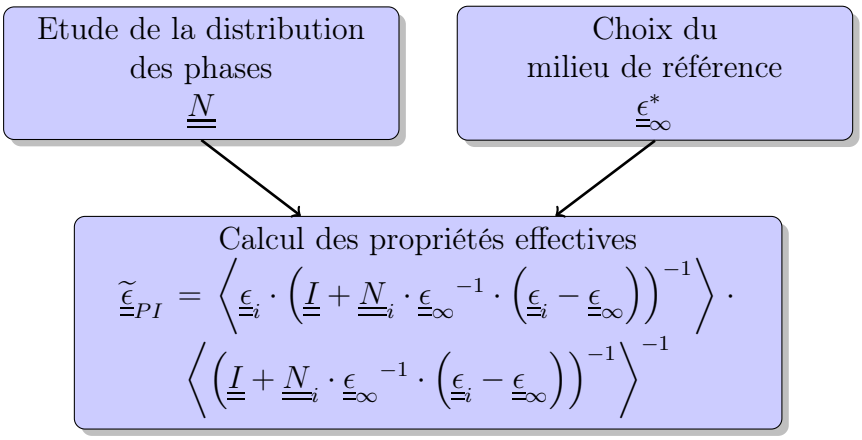


FIGURE *2.7 – Démarche des méthodes d'homogénéisation basées sur des problèmes d'inclusion.*

Les distributions des différentes phases sont intégrées dans les problèmes d'inclusion au travers des tenseurs dépolarisants. Les interactions entre les phases du composite sont prises en compte par l'intermédiaire du milieu de référence. En incorporant ces deux paramètres dans l'équation fournie par la superposition des problèmes d'inclusion, ces méthodes permettent d'obtenir des estimations des propriétés effectives de matériaux composites.

2.4 Mise en évidence des limites dynamiques

Il existe de nombreux modèles permettant de déterminer les propriétés effectives de matériaux composites (Sihvola 1999 ; Milton 2002). Ces modèles ont principalement été développés pour des sollicitations statiques. Mais certains sont utilisés en EM et fournissent des estimations satisfaisantes si la taille des hétérogénéités est petite devant la longueur d'onde (Holloway et al. 2005 ; Kuester et Holloway 1990, 1994).

Pour mettre en évidence les limites dynamiques des modèles présentés précédemment, ils sont appliqués au cas d'une plaque composite soumise à une OPPM. Les résultats obtenus sont comparés à des calculs numériques par éléments finis (figures 2.9 et 2.10). Les calculs par éléments finis ont été réalisés avec les mêmes paramètres que précédemment (figure 1.7), mais en remplaçant la plaque homogène par la microstructure de la figure 2.8. En dynamique, la propriété homogénéisée avec les modèles analytiques est la permittivité complexe $\epsilon^* = \epsilon - \jmath\sigma/\omega$ ($1/\jmath\omega \mathbf{rot}\,\mathbf{H} = \underline{\underline{\epsilon}}^*\mathbf{E}$). Pour une microstructure constituée de fibres parallèles (figure 2.8), le tenseur dépolarisant et le tenseur de permittivité du milieu de référence sont donnés par les deuxièmes lignes des tableaux 2.1 et 2.2.

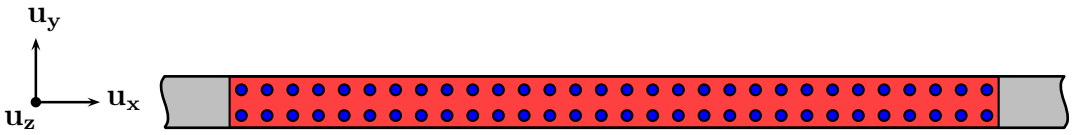


Figure 2.8 – *Plaque de* 6 *mm d'épaisseur, constituée de 30 rangées de fibres parallèles de diamètre* 100 μm.

Lorsque le champ électrique incident est aligné avec les fibres ($\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_z}$ et $k = \sqrt{\epsilon_z\mu\omega^2 - \jmath\mu\sigma_z\omega}$), le milieu effectif fourni par la borne supérieure du modèle de Wiener a un coefficient de blindage comparable aux simulations par éléments finis (figure 2.9). Pour être en mesure de comparer les résultats numériques aux résultats analytiques dans cette configuration, la conductivité des fibres doit rester faible ($\sigma_2 < 200\ S.m^{-1}$) pour ne pas dépasser les limites imposées par le logiciel Comsol Multiphysics®.

Lorsque le champ électrique incident est perpendiculaire aux fibres ($\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$ et $k = \sqrt{\epsilon_y\mu\omega^2 - \jmath\mu\sigma_y\omega}$), le champ électrique au sein de la plaque est contenu dans le plan ($\mathbf{u_x}$, $\mathbf{u_y}$). Dans ce plan, la microstructure peut être considérée isotrope

2D. Dans ce cas, le modèle de MAXWELL-GARNETT (2.10), très utilisé dans la littérature (DE ROSA et al. 2009 ; KOLEDINTSEVA et al. 2009 ; KUZHIR et al. 2012 ; SARTO et al. 2012 ; NISANCI et al. 2012), est adapté. Si la conductivité des fibres reste faible ($\sigma_2 < 100\ S.m^{-1}$) l'estimation de MAXWELL-GARNETT correspond à celle fournie numériquement. Mais comme le montre la figure 2.10, une conductivité des fibres de 1000 $S.m^{-1}$ suffit pour que les propriétés effectives fournies par le modèle de MAXWELL-GARNETT sous-estiment le coefficient de blindage à haute fréquence. Même si cette conductivité n'est pas représentative de la conductivité de renforts conducteurs ($\approx 40000\ S.m^{-1}$), elle est suffisante pour mettre en évidence la limitation des modèles classiques.

Certains modèles permettant d'obtenir les propriétés effectives de matériaux composites pour la modélisation du blindage EM dans une gamme de fréquences plus large sont disponibles dans la littérature. KOLEDINTSEVA et al. (2006) ont étendu le modèle de MAXWELL-GARNETT en y intégrant des effets dynamiques. La résonance et l'effet de peau des inclusions conductrices sont intégrés à l'aide du modèle de Drude. Leur méthode est utilisable dans le domaine optique et limitée aux microstructures aléatoires de nanoparticules conductrices avec un taux d'inclusion en deçà du seuil de percolation. Des modèles numériques ont également été développés pour étendre les gammes de fréquences ou pour modéliser des microstructures différentes. Comme par exemple la méthode de TSANG et KONG (1980) qui inclue l'effet de diffusion des inclusions, ou les modèles de calcul des champs sur une cellule unitaire périodique (SARENI et al. 1997 ; EL FEDDI et al. 1997 ; OUCHETTO et al. 2013). Mais ces méthodes sont limitées en fréquence et nécessitent des ressources informatiques conséquentes.

2.5 Conclusion

Pour homogénéiser les propriétés de matériaux composites, dans le cadre de la compatibilité électromagnétique de boîtiers de blindage, il est nécessaire de prendre en compte les effets dynamiques induits par la microstructure. Les modèles d'homogénéisation analytiques classiques ne prennent pas en compte ces effets et les estimations des propriétés effectives qu'ils fournissent ne sont pas valables à haute fréquence. Il n'est donc pas possible de les utiliser pour modéliser le comportement d'un boîtier composite à renforts conducteurs soumis à des rayonnements électromagnétiques. Pour y parvenir, il est nécessaire d'étendre les domaines de validité des modèles existants.

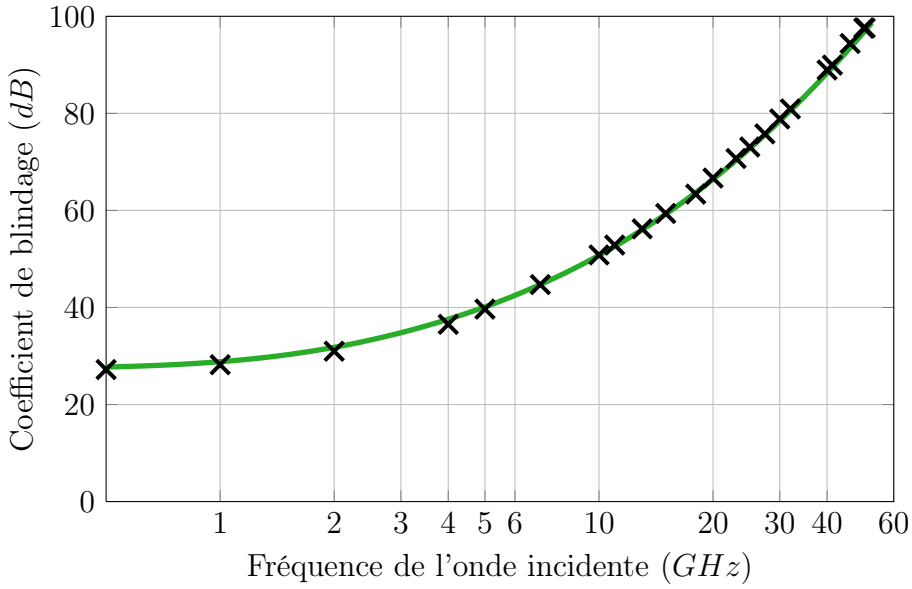


FIGURE *2.9* – *Coefficient de blindage de la plaque composite (figure 2.8) lorsque* $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_z}$, *calculé analytiquement avec le modèle de* WIENER *(ligne) et par éléments finis (×) (*$f_2 = 19.63$ %, $\sigma_1 = 0$ $S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 100$ $S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ *et* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$*).*

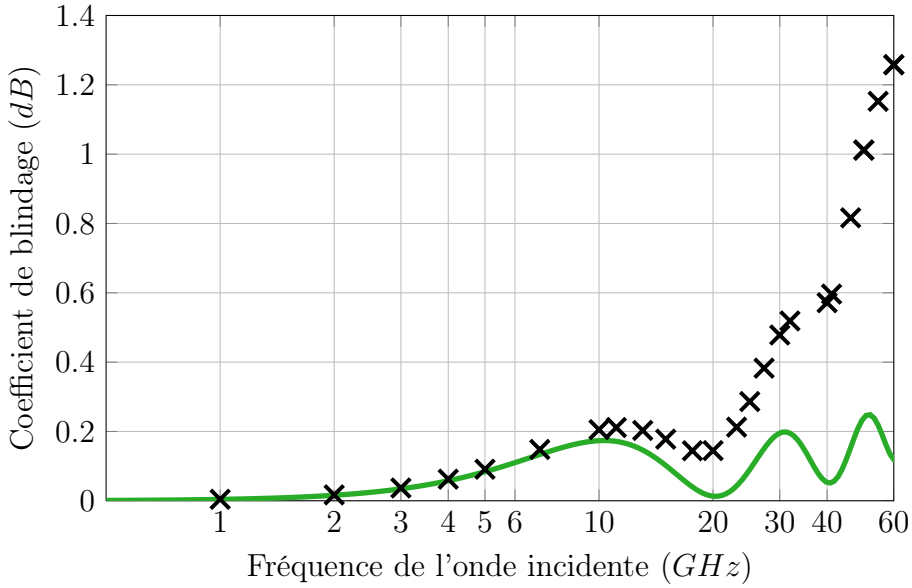


FIGURE *2.10* – *Coefficient de blindage de la plaque composite (figure 2.8) lorsque* $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$, *calculé analytiquement avec le modèle de* MAXWELL-GARNETT *(ligne) et par éléments finis (×) (*$f_2 = 19.63$ %, $\sigma_1 = 0$ $S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 1000$ $S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ *et* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$*).*

Chapitre 3

Extension dynamique de la méthode d'homogénéisation basée sur des problèmes d'inclusion

Sommaire

3.1 Définition de la méthode d'homogénéisation dynamique 38
3.1.1 Influence du milieux de référence sur le comportement du milieu homogène 39
3.1.2 Caractérisation du milieu de référence 40
3.1.3 Définition du milieu de référence 42
3.1.4 Définition de la méthode d'homogénéisation dynamique 44
3.1.5 Validation numérique de la méthode 45
3.2 Définition de la taille caractéristique des fibres 46
3.2.1 Présentation des microstructures étudiées 46
3.2.2 Méthode de calcul de la taille caractéristique 47
3.2.3 Validation numérique 48
3.3 Domaine de validité de la méthode d'homogénéisation dynamique 50
3.3.1 Diamètre des fibres 50
3.3.2 Taux de fibres 51
3.3.3 Propriétés des constituants 52
3.3.4 Microstructures aléatoires à fibres elliptiques orientées . 54
3.3.5 Synthèse 55
3.4 Conclusion 57

L'objectif de ce chapitre est d'obtenir une méthode d'homogénéisation permettant de définir les propriétés effectives de matériaux composites dans le cas de sollicitations électromagnétiques dynamiques. Pour y parvenir, on choisit d'adapter une méthode basée sur des problèmes d'inclusion présentée dans le chapitre précédent. La méthode d'homogénéisation dynamique obtenue sera ensuite appliquée dans plusieurs cas de figures pour identifier son domaine d'application et ses limites.

3.1 Définition de la méthode d'homogénéisation dynamique

Pour étendre les méthodes d'homogénéisation quasi-statiques à la modélisation de matériaux composites soumis à des ondes électromagnétiques, on choisit d'adapter une méthode basée sur des problèmes d'inclusion. C'est une méthode performante et évolutive car elle dépend de deux paramètres, le milieu de référence et le tenseur dépolarisant, qui permettent de l'adapter à de nombreuses configurations. Le tenseur dépolarisant est principalement lié à la distribution des phases. Il apparaît plus judicieux d'adapter les propriétés du milieu de référence pour étendre la méthode aux sollicitations fréquentielles.

La modélisation du blindage de plaques composites à l'aide du modèle de Maxwell-Garnett est limitée par la fréquence de l'onde incidente. Cette limitation est due aux interactions qui surviennent entre la structure du matériau composite et l'onde incidente. Un effet de taille apparaît entre la longueur d'onde et les hétérogénéités du matériau composite. Cependant, aucune notion de dimension n'apparaît dans les différents modèles analytiques existants. Les choix des milieux de référence correspondants aux modèles classiques font seulement apparaître les propriétés des constituants et parfois les fractions volumiques. D'autre part, les termes du tenseur dépolarisant sont adimensionnels et le milieu de référence est supposé infini. L'idée pour étendre la méthode d'homogénéisation basée sur des problèmes d'inclusion est d'introduire un terme dimensionnel dans le choix du milieu de référence.

La première étape consiste à faire varier les propriétés du milieu de référence afin de mettre en évidence leur influence sur le comportement des milieux homogènes obtenus. Cela permet, dans une deuxième étape, de caractériser un milieu de

référence dynamique. Le modèle de MAXWELL-GARNETT étant valable à fréquence faible, le milieu de référence correspondant sera utilisé comme point de départ. On introduit ensuite un terme dimensionnel pertinent, à ce milieu de référence initial, permettant de caractériser l'interaction entre l'onde incidente et la microstructure. À partir d'une étude paramétrique, il sera ensuite possible de définir les propriétés du milieu de référence adapté à la modélisation de matériaux composites illuminés par des ondes électromagnétiques.

3.1.1 Influence du milieux de référence sur le comportement du milieu homogène

L'objectif de cette première étude est de mettre en évidence l'influence des paramètres du milieu de référence sur les propriétés effectives en dynamique. Cette étude se fera uniquement avec la microstructure de la figure 2.8. La matrice et les inclusions sont considérées isotropes avec les mêmes propriétés que l'application numérique de la figure 2.10 ($\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 1000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). Aucun contraste de perméabilité magnétique n'est pris en compte dans cette étude ($\mu_1 = \mu_2$). La plaque est soumise à une OPPM, polarisée électriquement suivant $\mathbf{u_y}$, ayant une incidence normale et une fréquence de 30 GHz.

La microstructure est biphasée et isotrope transverse (axe $\mathbf{u_z}$), ses tenseurs dépolarisants valent :

$$\underline{\underline{N}}_1 = \underline{\underline{N}}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_x},\mathbf{u_y},\mathbf{u_z})} \tag{3.1}$$

Les calculs étant fréquentiels, la permittivité des matériaux introduite dans l'équation (2.14) s'exprime sous forme complexe ($\underline{\underline{\epsilon}}_i^* = \underline{\underline{\epsilon}}_i - \frac{\jmath}{\omega}\underline{\underline{\sigma}}_i$). Le tenseur de permittivité complexe du milieu de référence s'écrit :

$$\underline{\underline{\epsilon}}_\infty^* = \left(\epsilon_\infty - \jmath\frac{\sigma_\infty}{\omega}\right)\underline{\underline{I}} \tag{3.2}$$

Il est choisi isotrope. Mais comme la composante suivant $\mathbf{u_z}$ du tenseur dépolarisant est nulle, l'équation (2.14) se simplifie dans la direction correspondante. La composante suivant $\mathbf{u_z}$ du milieu de référence n'a donc aucune influence sur l'estimation des propriétés effectives.

Le modèle issu des problèmes d'inclusion (équation (2.14)) est appliqué en faisant varier les propriétés du milieu de référence. Elles varient autour des propriétés

du milieu de référence correspondant au modèle de MAXWELL-GARNETT ($\underline{\underline{\epsilon}}^*_\infty = \underline{\underline{\epsilon}}_1$) dans des intervalles supérieurs aux extremas des propriétés des constituants :

$$0 \leqslant \epsilon_\infty \leqslant 10\ \epsilon_0 \tag{3.3}$$

$$0 \leqslant \sigma_\infty \leqslant\ 2\ \sigma_2 \tag{3.4}$$

Les coefficients de blindage des plaques homogènes ayant les propriétés effectives ainsi obtenues sont calculés analytiquement. Ils sont tracés sur la figure 3.1 en fonction de la conductivité et de la permittivité relative du milieu de référence. Le graphique du bas est un zoom de celui du haut dans la zone d'intérêt. Les résultats analytiques forment une surface continue polychrome. Contrairement à la permittivité (ϵ_∞), la conductivité (σ_∞) du milieu de référence a une très forte influence sur le coefficient de blindage du milieu effectif obtenu. Comme le choix de la permittivité du milieu de référence a peu d'influence sur le coefficient de blindage du milieu homogène obtenu, la suite de l'étude portera uniquement sur la caractérisation de la conductivité σ_∞ du milieu de référence.

Le coefficient de blindage de la plaque composite est obtenu numériquement avec COMSOL MULTIPHYSICS®. Le calcul est unique et fournit un seul coefficient de blindage (indépendant de ϵ_∞ et σ_∞) tracé sous forme d'un plan monochrome. L'intersection entre le plan (éléments finis) et la surface multicolore (analytique) donne les couples de propriétés du milieu de référence (ϵ_∞, σ_∞), pour lesquels les plaques constituées des milieux homogènes correspondants ont le même coefficient de blindage que la plaque hétérogène. Cette intersection forme une courbe quasi-parallèle à l'axe des ϵ_∞. Pour obtenir un MHE à la plaque hétérogène, on peut faire varier la permittivité du milieu de référence, mais sa conductivité est unique et supérieure à zéro ($\sigma_\infty > 0$). Avec la méthode des problèmes d'inclusion, le choix de la matrice comme milieu de référence conduit au modèle de MAXWELL-GARNETT. Cette étude montre que ce choix n'est pas adapté à haute fréquence car le milieu de référence doit nécessairement être conducteur pour que la plaque constituée du milieu homogène obtenu ait un blindage similaire à la plaque composite.

3.1.2 Caractérisation du milieu de référence

On base la définition des propriétés du milieu de référence sur le modèle de MAXWELL-GARNETT ($\underline{\underline{\epsilon}}^*_\infty = \underline{\underline{\epsilon}}^*_1$), valable pour des fréquences faibles. Le milieu de référence devant nécessairement être conducteur, il est également défini en fonc-

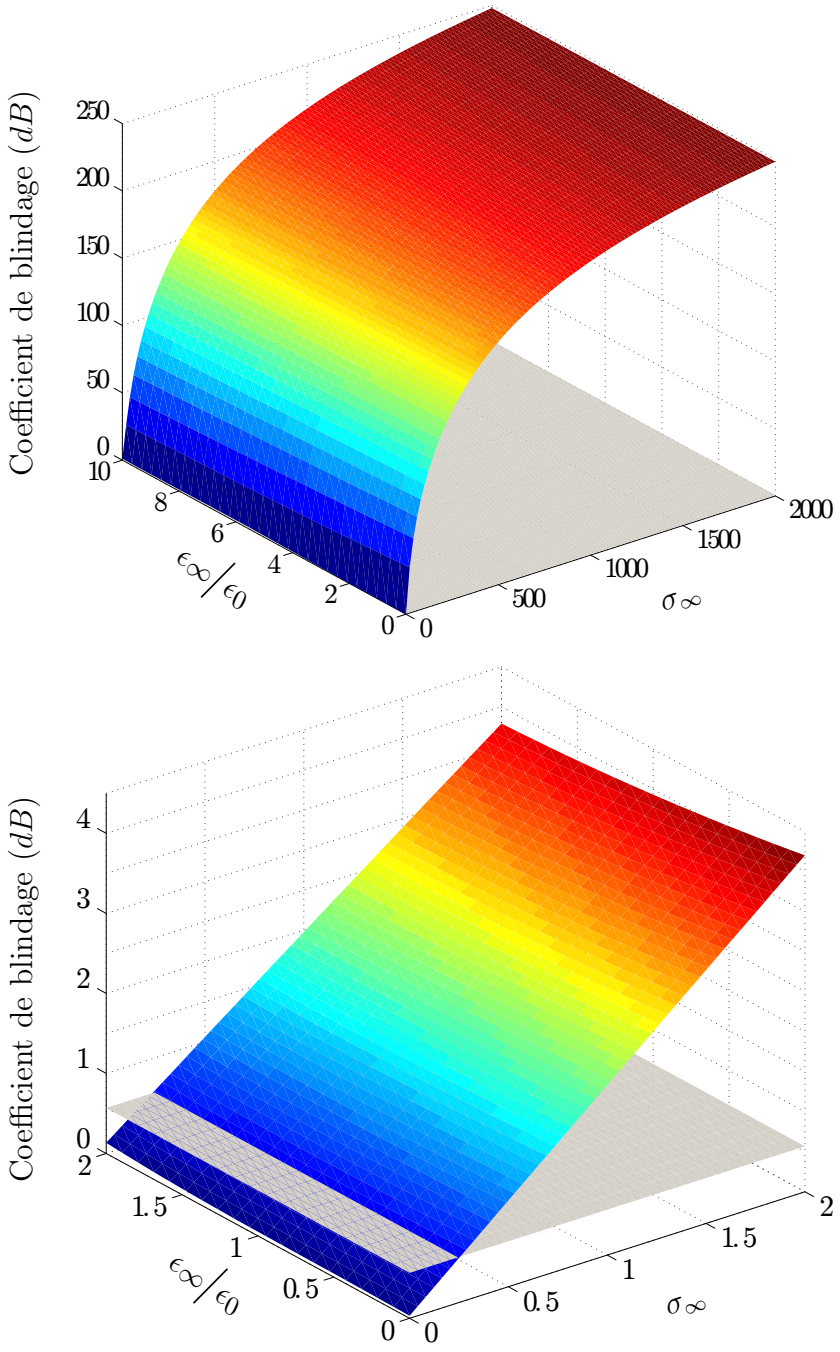


FIGURE ***3.1*** – *Coefficient de blindage des milieux effectifs obtenus en faisant varier les propriétés du milieu de référence. Le plan monochrome représente le coefficient de blindage de la microstructure de la figure 2.8 obtenu par éléments finis ($f = 30\ GHz$, $f_2 = 19.63\ \%$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 1000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$).*

tion de la permittivité complexe $\underline{\underline{\epsilon}}_2^*$ des inclusions. De plus, il est nécessaire de faire apparaître un terme dimensionnel pour tenir compte de l'effet de taille. Le terme retenu pour prendre en compte les interactions entre la microstructure et l'onde incidente est le rapport d'une taille caractéristique de la microstructure et de la longueur d'onde λ dans le matériau homogène. Dans le cas étudié ici, il apparaît naturel de choisir le diamètre $\varnothing$ des fibres comme taille caractéristique de la microstructure. On choisit d'écrire la permittivité complexe du milieu de référence sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\epsilon}}_\infty^* = \underline{\underline{\epsilon}}_1^* + A\underline{\underline{\epsilon}}_2^* \left(\frac{\varnothing}{\lambda}\right)^B \tag{3.5}$$

A basse fréquence, ce choix de milieu de référence se rapporte à celui de Maxwell-Garnett car le terme $\varnothing/\lambda$ tend vers 0. Comme la matrice n'est pas conductrice, la conductivité du milieu de référence σ_∞ s'écrit sous la forme suivante :

$$\sigma_\infty = A\sigma_2 \left(\frac{\varnothing}{\lambda}\right)^B \tag{3.6}$$

La suite de cette partie a pour but d'identifier A et B, et ainsi, de définir un milieu de référence adapté en dynamique (3.5). L'étude paramétrique se fera en fonction de la fréquence de l'onde incidente, du diamètre et de la conductivité des fibres.

3.1.3 Définition du milieu de référence

Les calculs de la figure 3.1 sont répétés pour plusieurs fréquences d'onde incidente. Pour chaque calcul, la conductivité du milieu de référence optimal est donnée par l'intersection des deux surfaces pour une permittivité du milieu de référence correspondant à celle modèle de Maxwell-Garnett ($\epsilon_\infty = \epsilon_1$). Cette conductivité, unique pour chaque simulation, est tracée sur la figure 3.2 en fonction du rapport $\varnothing/\lambda$. Afin de renforcer la représentativité des résultats, l'étude est répétée pour différents diamètres de fibres $\varnothing$ (50, 75, 100, 150 et 200 μm). Pour chaque diamètre, les calculs sont répétés pour différentes conductivités des fibres σ_2 (100, 500, 1000 et 2000 $S.m^{-1}$), tout en conservant identiques les autres propriétés ($f_2 = 19.63$ %, $\sigma_1 = 0$ $S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). Seuls les calculs effectués avec $\sigma_2 = 100$ et 1000 $S.m^{-1}$ sont tracés sur la figure 3.2 pour conserver la lisibilité du graphique, mais des conclusions similaires sont obtenues avec 500 et 2000 $S.m^{-1}$.

On peut voir sur la figure 3.2, que pour une même conductivité des fibres, tous les points sont globalement alignés sur une même droite de pente deux. On

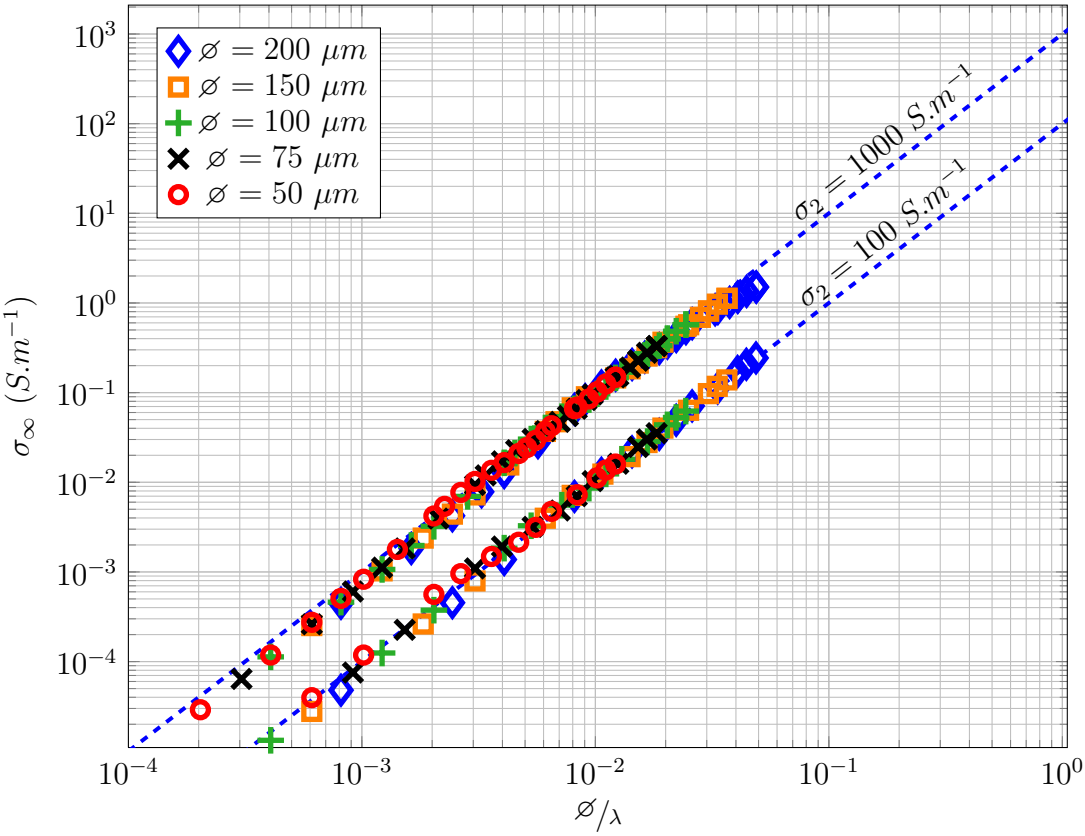


FIGURE 3.2 – *Conductivité du milieu de référence optimal (points), en fonction du rapport $\varnothing/\lambda$ pour cinq microstructures et deux conductivités des fibres, tracée avec des courbes de tendance (pointillés).*

peut conclure, que pour les différent diamètres testés, la conductivité du milieu de référence dépend linéairement de $\left(\varnothing/\lambda\right)^2$. Donc $B = 2$. De plus, si on prolonge cette droite, elle passe par σ_2 lorsque $\varnothing/\lambda = 1$. On peut en conclure que $A = 1$. Les courbes de tendance correspondantes sont tracées sur la figure 3.2. Ces valeurs permettent une bonne approximation. On peut donc réécrire σ_∞ sous la forme suivante :

$$\sigma_\infty = \sigma_2 \left(\frac{\varnothing}{\lambda}\right)^2 \tag{3.7}$$

La permittivité complexe du milieu de référence permettant de prendre en compte les phénomènes dynamiques, s'écrit :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^*_\infty = \underline{\underline{\epsilon}}^*_1 + \underline{\underline{\epsilon}}^*_2 \left(\frac{\varnothing}{\lambda}\right)^2 \tag{3.8}$$

3.1.4 Définition de la méthode d'homogénéisation dynamique

La méthode d'homogénéisation dynamique est définie par l'utilisation du milieu de référence décrit par (3.8) dans la méthode basée sur des problèmes d'inclusion (équation (2.14)). La démarche complète pour obtenir les propriétés effectives de plaques composites est décrite par le diagramme de la figure 3.3.

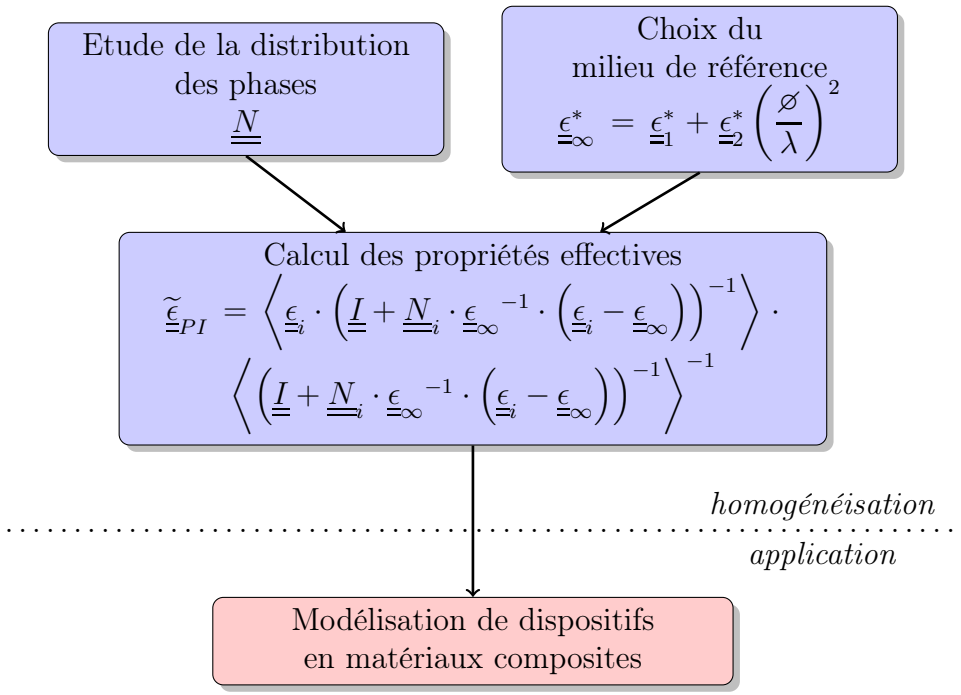


FIGURE *3.3* – *Démarche de la méthode d'homogénéisation dynamique.*

Elle consiste premièrement à calculer le tenseur dépolarisant $\underline{\underline{N}}$ de la microstructure (section 2.3.5). Le choix du milieu de référence est défini par l'équation (3.8). Ce milieu de référence dépend de la taille caractéristique de la microstructure. Il permet de prendre en compte l'effet de taille qui intervient au sein du matériau lorsque la fréquence augmente. Deuxièmement, il suffit de calculer les propriétés effectives en insérant le tenseur dépolarisant calculé, ainsi que le milieu de référence choisi, dans l'équation fournie par la méthode basée sur des problèmes d'inclusion. Il est alors possible d'utiliser les propriétés effectives obtenues pour modéliser le comportement de dispositifs en matériaux composites illuminés par des ondes électromagnétiques.

3.1.5 Validation numérique de la méthode

La méthode d'homogénéisation dynamique est appliquée à la microstructure de la figure 2.8 ($\varnothing = 100\ \mu m$) avec les mêmes conditions que la figure 2.10 ($\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$, $f_2 = 19.63\ \%$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 1000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). Les résultats sont tracés sur la figure 3.4.

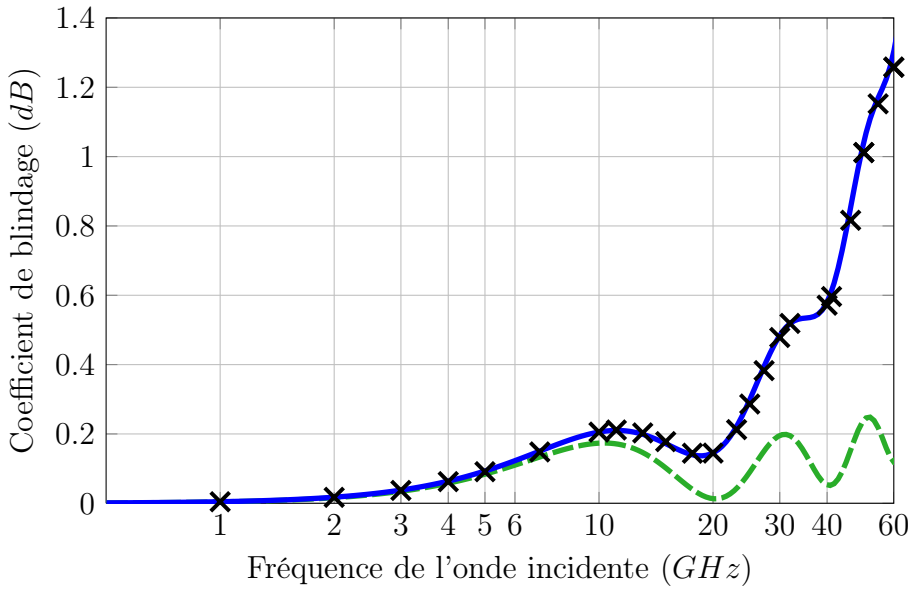


FIGURE *3.4 – Coefficient de blindage de la plaque composite (figure 2.8) lorsque* $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$*, calculé analytiquement avec le modèle de* MAXWELL-GARNETT *(pointillés), la méthode d'homogénéisation dynamique (ligne) et par éléments finis (×) (*$\varnothing = 100\ \mu m$*,* $f_2 = 19.63\ \%$*,* $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$*,* $\sigma_2 = 1000\ S.m^{-1}$*,* $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ *et* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$*).*

Contrairement au coefficient de blindage obtenu avec le modèle de MAXWELL-GARNETT, celui calculé avec le MHE fourni par la méthode d'homogénéisation dynamique est en bon accord avec la simulation par éléments finis. Cette nouvelle méthode étend ainsi la gamme de fréquences de la modélisation de plaques de matériaux composites soumises à des ondes électromagnétiques. On observe également qu'à basses fréquences, elle est équivalente au modèle de MAXWELL-GARNETT, car la longueur d'onde dans le MHE est très grande devant la taille des fibres, donc $\left(\varnothing/\lambda\right)^2$ tend vers 0 et ϵ_∞^* vers ϵ_1^*.

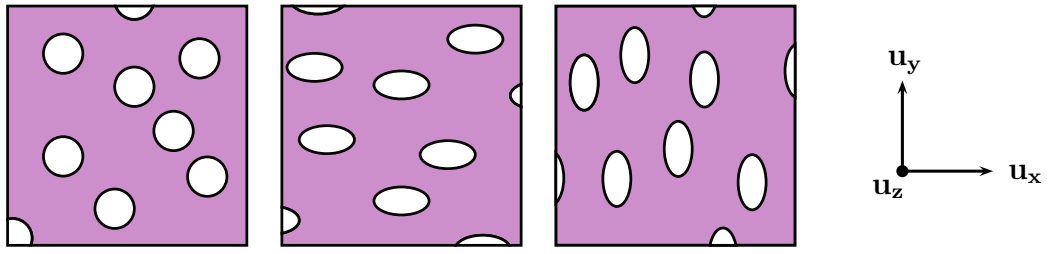
3.2 Définition de la taille caractéristique des fibres

L'extension de la méthode basée sur des problèmes d'inclusion se fait par l'introduction du diamètre des fibres (équation (3.8)) dans la définition des propriétés du milieu de référence. Cette longueur caractérise des fibres circulaires. Pour être en mesure de modéliser d'autre distributions des phases, il est nécessaire de définir plus précisément la taille caractéristique de la microstructure. Cette taille caractéristique γ, permet de tenir compte de l'influence de la forme et de la distribution des fibres dans la définition du milieu de référence. Elle est égale au diamètre des fibres uniquement lorsque la microstructure est constituée de fibres circulaires identiques. Dans le cas général, l'équation (3.8) s'écrit :

$$\epsilon_\infty^* = \epsilon_1^* + \epsilon_2^* \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2 \tag{3.9}$$

La première partie de cette section présente les microstructures étudiées. La deuxième définit la procédure pour déterminer la longueur caractéristique γ à partir de la fonction de probabilité à 2 points. La dernière comporte des applications numériques afin de valider la démarche.

3.2.1 Présentation des microstructures étudiées



(a) Microstructure a
$a_x = 70.7\ \mu m$,
$a_y = 70.7\ \mu m$,
$f_2 = 19.63\ \%$.

(b) Microstructure b
$a_x = 100\ \mu m$,
$a_y = 50\ \mu m$,
$f_2 = 19.63\ \%$.

(c) Microstructure c
$a_x = 50\ \mu m$,
$a_y = 100\ \mu m$,
$f_2 = 19.63\ \%$.

(d) Repère

FIGURE *3.5* – *Microstructures étudiées.*

On s'intéresse ici à trois microstructures (figure 3.5), constituées de fibres conductrices identiques disposées aléatoirement sans chevauchement dans une matrice diélectrique. Les sections des fibres sont soit circulaires (a), soit elliptiques alignées suivant $\mathbf{u_x}$ (b) ou alignées suivant $\mathbf{u_y}$ (c). Le taux de fibres est toujours de 19.63 %.

3.2.2 Méthode de calcul de la taille caractéristique

La taille caractéristique γ est obtenue à partir de la fonction de probabilité à 2 points (Preault et al. 2013b) de la phase des fibres ($i = 2$). C'est la longueur pour laquelle $S_2^{(22)}$ (équation (2.16)) est minimum dans la direction parallèle à l'onde incidente (ici $\mathbf{u_x}$) :

$$\gamma = \| \mathbf{r}_m \| \quad \text{avec} \quad S_2^{(22)}(\mathbf{r}_m) = \min \left(S_2^{(22)}(\mathbf{r}) \right), \mathbf{r} /\!/ \mathbf{u_x} \tag{3.10}$$

Les fonctions de probabilité à 2 points suivant la direction $\mathbf{u_x}$, des trois microstructures, sont tracées sur la figure 3.6. Les calculs ont été effectués sur un carré de 2 mm de coté rempli avec 50 fibres disposées de façon aléatoire. Les courbes sont obtenues à partir d'un tirage de 5000 positions aléatoires $\mathbf{x}$, puis d'un balayage de la microstructure suivant $\mathbf{x} + \mathbf{r}$ (avec $\mathbf{r} /\!/ \mathbf{u_x}$).

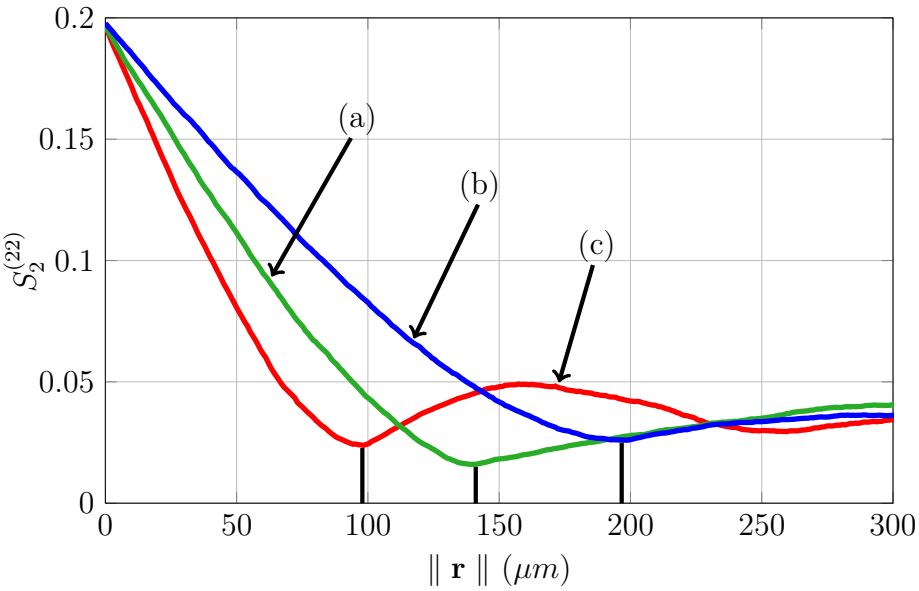


Figure 3.6 – *Fonctions de probabilité à deux points de la phase conductrice (2) de trois microstructures (figure 3.5) dans la direction* $\mathbf{u_x}$ *(direction de l'onde incidente). Les calculs ont été réalisés sur un carré de* 2 *mm de coté remplit avec* 50 *fibres.*

Les tailles caractéristiques des microstructures peuvent être lues à partir des courbes : $\gamma_a = 141.4\ \mu m$, $\gamma_b = 197.5\ \mu m$ et $\gamma_c = 98.25\ \mu m$. La propriété des fonctions de probabilité à 2 points affirmant que $S_2^{(22)}(0) = f_2$ est vérifiée. Pour la microstructure (a), $\gamma_a = 2a_x$, ce qui correspond bien à la définition de l'équation (3.8).

3.2.3 Validation numérique

Pour valider la méthode de calcul de la taille caractéristique de microstructures aléatoires, le coefficient de blindage du MHE calculé analytiquement pour les trois types de microstructures (figure 3.5) est comparé au coefficient de blindage calculé numériquement.

Les tenseurs dépolarisants (voir en annexe C) des trois microstructures valent :

$$\underline{\underline{N}}_a = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_x},\mathbf{u_y},\mathbf{u_z})} \tag{3.11a}$$

$$\underline{\underline{N}}_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_x},\mathbf{u_y},\mathbf{u_z})} \tag{3.11b}$$

$$\underline{\underline{N}}_c = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_x},\mathbf{u_y},\mathbf{u_z})} \tag{3.11c}$$

Les tenseurs de permittivité complexe des milieux de référence s'écrivent :

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{\infty\ a} = \begin{pmatrix} \epsilon_1^* + \epsilon_2^* \left(\frac{\gamma_a}{\lambda}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1^* + \epsilon_2^* \left(\frac{\gamma_a}{\lambda}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_x},\mathbf{u_y},\mathbf{u_z})} \tag{3.12a}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{\infty\ b} = \begin{pmatrix} \epsilon_1^* + \epsilon_2^* \left(\frac{\gamma_c}{\lambda}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1^* + \epsilon_2^* \left(\frac{\gamma_b}{\lambda}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_x},\mathbf{u_y},\mathbf{u_z})} \tag{3.12b}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{\infty\ c} = \begin{pmatrix} \epsilon_1^* + \epsilon_2^* \left(\frac{\gamma_b}{\lambda}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1^* + \epsilon_2^* \left(\frac{\gamma_c}{\lambda}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_x},\mathbf{u_y},\mathbf{u_z})} \tag{3.12c}$$

En incorporant ces tenseurs dans (2.14), il est possible de calculer le MHE des microstructures de la figure 3.5 en tenant compte des dimensions des fibres et de la fréquence de l'onde incidente.

Pour les trois types de microstructure ((a), (b) et (c)), 20 microstructures aléatoires sont modélisées par éléments finis. Le coefficient de blindage de ces 60 microstructures est calculé par éléments finis pour 10 fréquences d'onde incidente. Les résultats des calculs du coefficient de blindage sont présentés sur la figure 3.7.

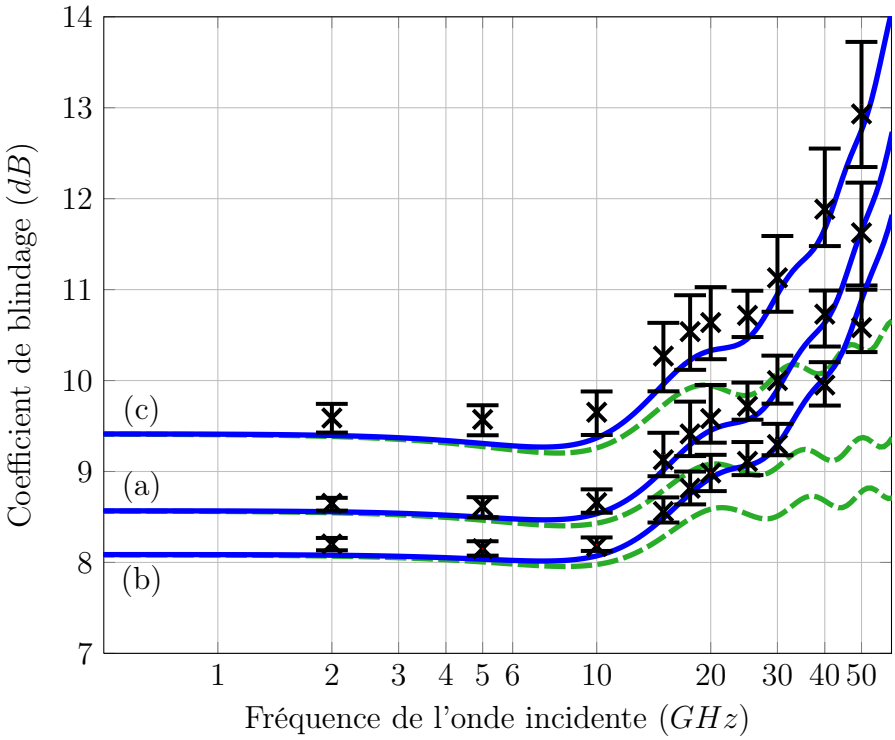


FIGURE 3.7 – *Coefficient de blindage de plaques composites constituées de fibres parallèles à section elliptique (figure 3.5) lorsque* $\mathbf{E}_I \parallel \mathbf{u_y}$*, calculé analytiquement avec le modèle de* MAXWELL-GARNETT *(pointillés), la méthode d'homogénéisation dynamique (ligne) et par éléments finis (×) (*$f_2 = 19.63$ *%,* $\sigma_1 = 1$ $S.m^{-1}$*,* $\sigma_2 = 1000$ $S.m^{-1}$*,* $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$*,* $\epsilon_2 = \epsilon_0$ *et* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$*).*

Les croix et les barres d'erreurs représentent respectivement les moyennes et les extremas du coefficient de blindage des 20 microstructures aléatoires, calculés pour chaque fréquence. Les propriétés des matériaux sont différentes de celles utilisées pour les microstructures périodiques ($f_2 = 19.63\%$, $\sigma_1 = 1$ $S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 1000$ $S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). La conductivité de la ma-

trice est choisie différente de 0 pour diminuer l'amplitude des barres d'erreur. En effet, la fiabilité des résultats effectués avec COMSOL MULTIPHYSICS® sur des microstructures aléatoires diminue lorsque le coefficient de blindage est très faible. C'est pourquoi, pour augmenter le coefficient de blindage des plaques sur toute la gamme de fréquences, la conductivité de la matrice est choisie égale à 1 $S.m^{-1}$.On constate à nouveau que le domaine de validité du modèle de MAXWELL-GARNETT est étendu par la méthode d'homogénéisation dynamique. Le coefficient de blindage calculé avec le MHE obtenu en tenant compte des effets dynamiques est en bon accord avec les résultats éléments finis jusqu'à la limite du tracé (50 GHz).

3.3 Domaine de validité de la méthode d'homogénéisation dynamique

La méthode d'homogénéisation dynamique permet d'évaluer le coefficient de blindage de divers matériaux hétérogènes. Dans cette partie, elle sera appliquée à de nombreux types de microstructures afin de mettre en évidence son domaine d'application et d'en identifier les premières limites. L'étude est restreinte à des plaques composites biphasées à constituants isotropes. Pour simplifier les calculs, on s'intéressera seulement à des microstructures périodiques.

3.3.1 Diamètre des fibres

La figure 3.8 permet de comparer le coefficient de blindage de cinq plaques constituées de fibres circulaires, avec la même fraction volumique ($f_2 = 19.63$ %), mais le diamètre des fibres $\varnothing$ est différent pour chacune des cinq plaques. Les constituants ont les mêmes propriétés que les précédents calculs effectués avec les microstructures périodiques.

Le modèle de MAXWELL-GARNETT n'est pas tracé. Il donnerait le même résultat pour les cinq microstructures puisqu'il ne prend pas en considération le diamètre des fibres. Les calculs par éléments finis montrent que le coefficient de blindage augmente avec le diamètre des fibres. Cet effet est également pris en compte par la méthode d'homogénéisation dynamique. Si le diamètre des fibres est trop grand, on remarque que l'erreur entre les résultats analytiques et numériques augmente avec la fréquence. Cette erreur provient en partie du fait que, à fraction volumique constante, plus le diamètre des fibres augmente, plus leur nombre

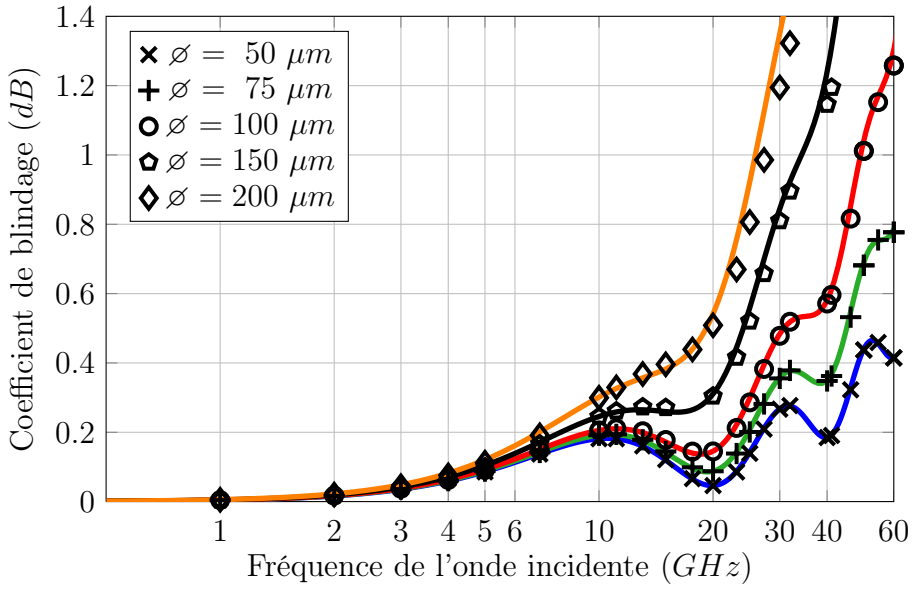


FIGURE *3.8* – *Coefficient de blindage de plaques composites à fibres parallèles lorsque* $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$*, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique (lignes) et par éléments finis (points)* ($f_2 = 19.63$ %, $\sigma_1 = 0$ $S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 1000$ $S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ *et* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$*).*

diminue. Il n'y a plus assez de fibres dans l'épaisseur de la plaque pour que la microstructure puisse être considérée comme un volume élémentaire représentatif. De plus, lorsque le diamètre des fibres est élevé, le ratio γ/λ augmente avec la fréquence. L'effet de taille est alors conséquent et on atteint la limite de validité de la méthode d'homogénéisation dynamique.

3.3.2 Taux de fibres

Sur la figure 3.9, on peut comparer le coefficient de blindage de plaques composites ayant des fibres identiques mais à différentes concentrations. Comme on pouvait s'y attendre, plus la quantité de fibres conductrices est grande, plus le coefficient de blindage est élevé.

Pour des fractions volumiques de fibres supérieures à 20%, la différence entre les deux méthodes de calcul augmente. La raison peut être liée au choix du milieu de référence. Il est en effet connu (SIHVOLA 1999 ; BORNERT et al. 2001) que les modèles de type MAXWELL-GARNETT (ou MORI-TANAKA) ne sont valables que pour des milieu dilués. Dans le cas de fractions volumiques élevées, il serait plus judicieux de s'appuyer sur le modèle auto-cohérent (modèle de BRUGGEMAN).

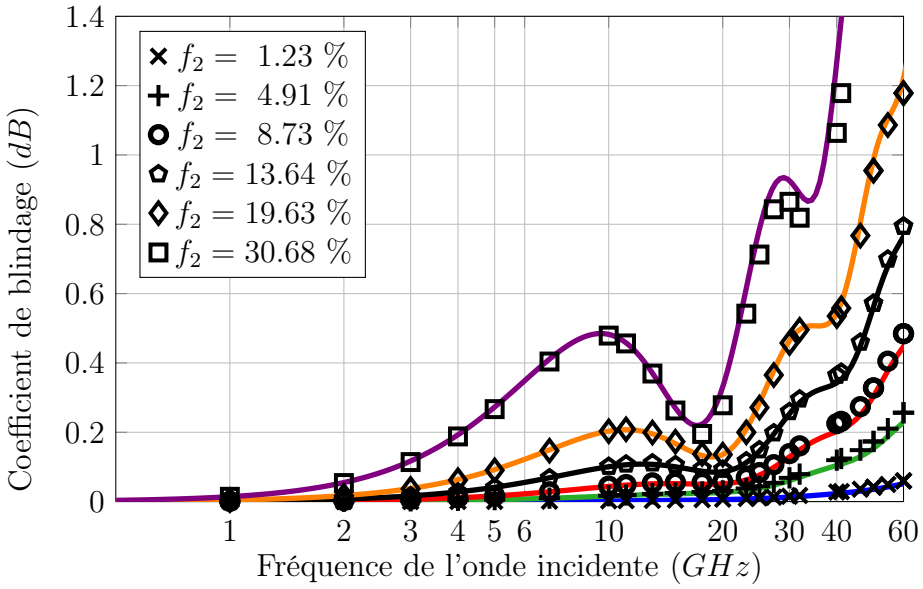


FIGURE ***3.9*** – *Coefficient de blindage de plaques composites à fibres parallèles, lorsque* $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$*, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique (lignes) et par éléments finis (points) (*$\varnothing = 50\ \mu m$*,* $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$*,* $\sigma_2 = 4000\ S.m^{-1}$*,* $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ *et* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$*).*

3.3.3 Propriétés des constituants

La figure 3.10 montre l'effet de la conductivité des fibres sur le coefficient de blindage des plaques, tous les autres paramètres étant conservés constants. L'augmentation de la conductivité des fibres a un effet direct sur le coefficient de blindage. Sans surprise, plus les fibres sont conductrices, plus le coefficient de blindage est élevé. Dans le cas de fibre très conductrices, une différence entre la méthode analytique et la méthode des éléments finis apparaît. Cette observation est commune avec celle de la figure 3.8. La conductivité des fibres augmente la conductivité du MHE et donc le ratio γ/λ. Lorsque la conductivité des fibres est élevée, l'effet de taille augmente et limite la méthode d'homogénéisation dynamique.

La figure 3.11 montre l'effet de la permittivité de la matrice sur le coefficient de blindage des plaques. On peut noter que la permittivité de la matrice augmente l'amplitude des oscillations du coefficient de blindage, de même que la fréquence à laquelle elles apparaissent. Cela peut être expliqué par le fait que la permittivité de la matrice augmente la permittivité du MHE. La partie de l'onde incidente absorbée (SE_A) par la plaque homogénéisée dépend principalement de la conduc-

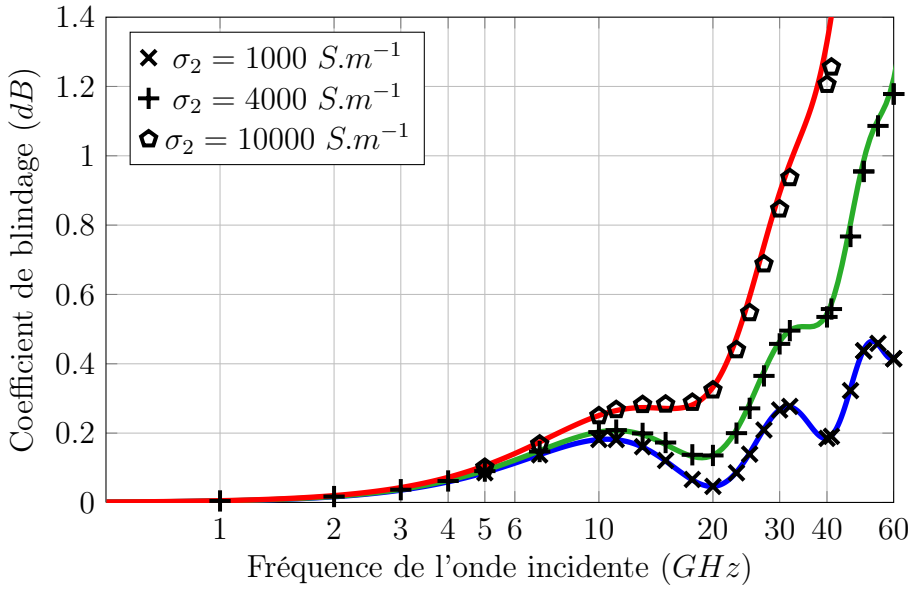


FIGURE 3.10 – *Coefficient de blindage d'une plaque composite à fibres parallèles lorsque* $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$*, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique (lignes) et par éléments finis (points), en faisant varier la conductivité des fibres (*$\varnothing = 50\ \mu m$*,* $f_2 = 19.63\ \%$*,* $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$*,* $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ *et* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$*).*

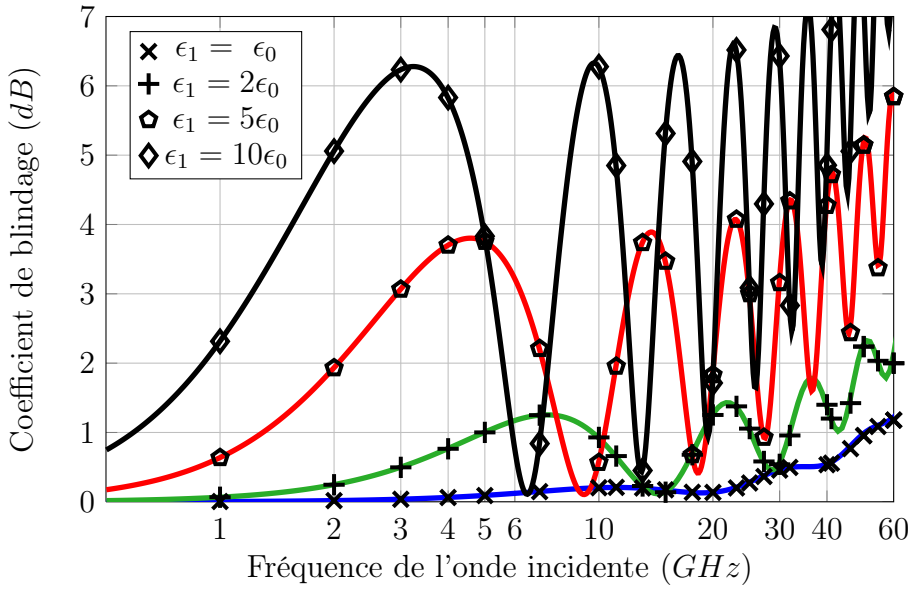


FIGURE 3.11 – *Coefficient de blindage d'une plaque composite à fibres parallèles lorsque* $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$*, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique (lignes) et par éléments finis (points), en faisant varier la permittivité de la matrice (*$\varnothing = 50\ \mu m$*,* $f_2 = 19.63\ \%$*,* $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$*,* $\sigma_2 = 4000\ S.m^{-1}$*,* $\epsilon_2 = \epsilon_0$ *et* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$*).*

tivité (équation (1.20a)), mais très peu de la permittivité de la matrice. Mais la permittivité du MHE favorise les multiples réflexions (SE_B) au sein de la plaque (équations (1.21) et (1.20b)) et modifie la longueur d'onde au sein du MHE. Globalement, le coefficient de blindage augmente, principalement à basse fréquence, avec la permittivité de la matrice car la permittivité du MHE favorise la réflexion de l'onde incidente (équations (1.21) et (1.20c)).

3.3.4 Microstructures aléatoires à fibres elliptiques orientées

Les calculs effectués (section 3.2) sur les microstructures des figures 3.5(b) et 3.5(c) ont été répétés en changeant l'orientation des fibres. Elles sont toujours parallèles à l'axe $\mathbf{u_z}$, mais l'orientation de leurs sections elliptiques varie de 0° (microstructure (b)) à 90° (microstructure (c)). Tous les autres paramètres sont conservés ($f_2 = 19.63$ %, $\sigma_1 = 1\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 1000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). Seuls les résultats des calculs analytiques sont tracés sur la figure 3.12. La concordance du modèle avec les simulations numériques a été vérifiée dans la section 3.2. Ces résultats permettent de caractériser l'influence de la forme et de la disposition des fibres sur le coefficient de blindage.

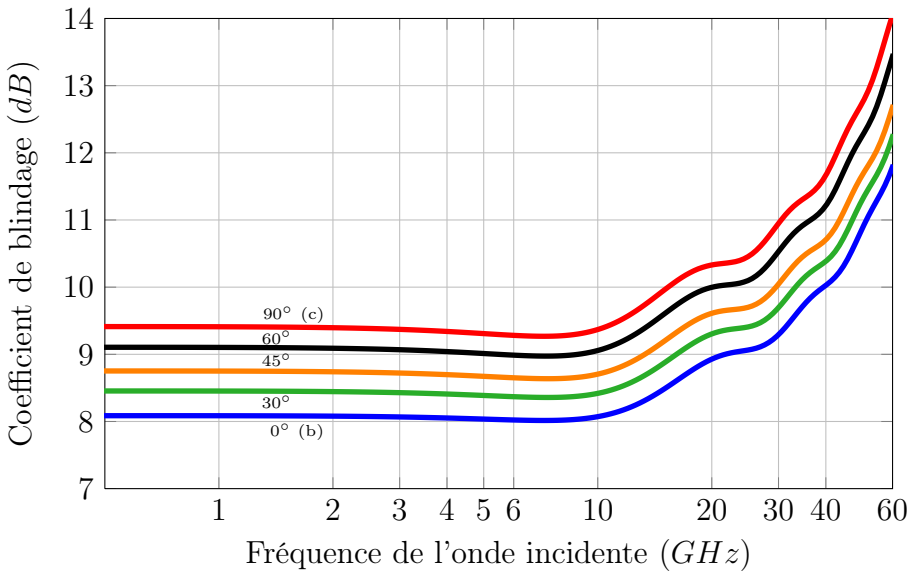


FIGURE 3.12 – *Coefficient de blindage de plaques composites, constituées de fibres parallèles à sections elliptiques disposées aléatoirement (figure 3.5), lorsque* $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$, *calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique* ($f_2 = 19.63$ %, $\sigma_1 = 1\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 1000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$ *et* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$).

Lorsque le grand axe des sections des fibres est aligné avec la direction de propagation de l'onde incidente (microstructure (b)), le coefficient de blindage de la plaque est plus faible. Il augmente progressivement pour atteindre un maximum lorsque le grand axe des sections des fibres est parallèle au champ électrique (microstructure (c)). Dans ce cas, même si la taille caractéristique de la microstructure est plus faible, elle est compensée par l'augmentation du facteur dépolarisant conduisant à un coefficient de blindage plus élevé.

3.3.5 Synthèse

Pour tous les calculs effectués dans ce chapitre, l'erreur de coefficient de blindage mesurée entre les deux modèles analytiques (Maxwell-Garnett et la méthode d'homogénéisation dynamique) et le calcul numérique a été tracée sur la figure 3.13. Le ratio entre la taille des fibres et la longueur d'onde, qui a été introduit dans la méthode d'homogénéisation dynamique, est un critère essentiel pour caractériser l'erreur des modèles d'homogénéisation. Cependant, il ne prend pas en compte la conductivité des fibres qui est également un paramètre essentiel du domaine de validité de la méthode d'homogénéisation dynamique. Pour mettre en évidence le domaine de validité des différents modèles d'homogénéisation en configuration dynamique, les résultats sont tracés en fonction du rapport entre la taille caractéristique γ de la microstructure et l'épaisseur de peau δ_2 des fibres. Ce rapport permet de tenir compte des trois paramètres principaux permettant de définir le domaine de validité des modèles en dynamique : la fréquence, la dimension et la conductivité des fibres.

L'erreur de coefficient de blindage fournie par le modèle de Maxwell-Garnett peut devenir très élevée dès un ratio $\gamma/\delta_2 = 1$. Au dessus de cette valeur, l'estimation du coefficient de blindage de certaines configurations s'écarte de plus de 1 dB. On remarque que les valeurs d'erreur sont toujours positives car le modèle de Maxwell-Garnett sous-estime systématiquement le coefficient de blindage. L'erreur entre la méthode d'homogénéisation dynamique et les éléments finis reste faible dans les conditions de calculs présentées dans ce chapitre. Ces conditions peuvent êtres définies par :

- respecter la séparation des échelles (figure 3.8)
- rapport $\gamma/\delta_2 < 1.5$ (figures 3.8 et 3.10)
- taux de fibres $\leqslant$ 30 % (figure 3.9)

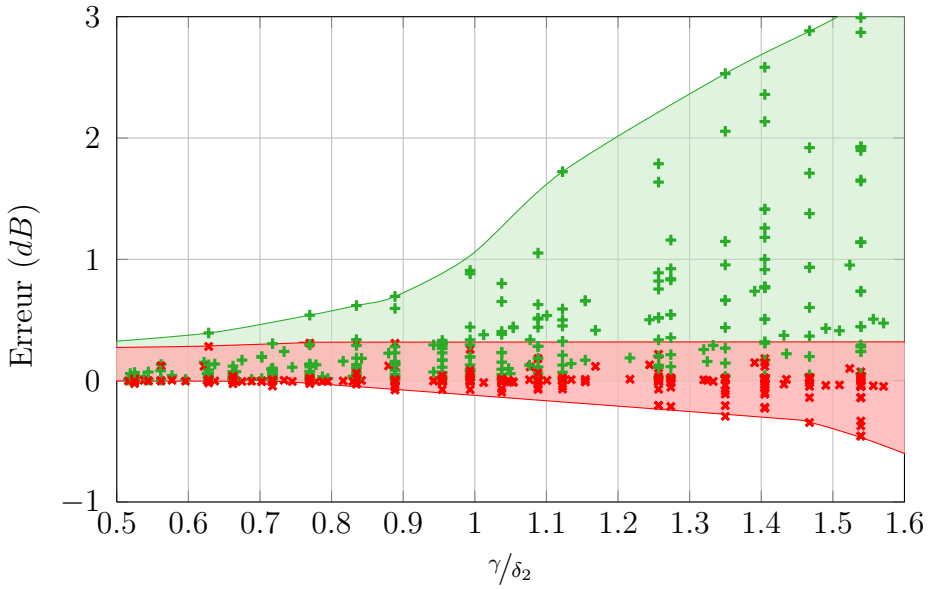


FIGURE ***3.13*** – *Différence, pour chacun des calculs effectués précédemment, entre le coefficient de blindage calculé avec le modèle de* MAXWELL-GARNETT (+)*, la méthode d'homogénéisation dynamique* (×) *et le coefficient de blindage calculé par éléments finis en fonction du rapport entre la taille caractéristique des fibres* γ *et l'épaisseur de peau des fibres* δ_2*.*

La permittivité de la matrice ne fait pas partie de cette liste car elle a peu d'influence sur le domaine de validité des deux modèles. Néanmoins, en augmentant, elle diminue l'écart entre le modèle de MAXWELL-GARNETT et la méthode d'homogénéisation dynamique. En effet, cette augmentation de permittivité réduit la contribution de la conductivité au coefficient de blindage et les deux modèles fournissent la même estimation de permittivité effective.

La méthode d'homogénéisation dynamique permet d'étendre la gamme de fréquence de la modélisation de matériaux composites illuminés par des ondes électromagnétiques, de 5 à 60 GHz pour la configuration de la figure 3.4. Mais elle ne permet pas de modéliser des matériaux dont les fibres ont une conductivité élevée (sauf si leurs diamètres sont très petits pour conserver la condition $\gamma/\delta_2 < 1.5$). De plus, les valeurs de conductivité des fibres utilisées dans ce chapitre ont étés dimensionnées pour mettre en défaut le modèle de MAXWELL-GARNETT. Mais ces valeurs ne sont pas celles de matériaux réalistes comme les fibres de carbone ($\sigma \approx 40000\ S.m^{-1}$).

3.4 Conclusion

Les applications numériques présentées dans ce chapitre montrent que la méthode d'homogénéisation dynamique peut servir à modéliser des plaques composites afin d'obtenir leur coefficient de blindage en tenant compte de nombreux paramètres (taux, forme, dimension et orientation des fibres, propriétés des constituants). C'est une méthode bien adaptée à l'étape de pré-dimensionnement de matériaux composites pour le blindage électromagnétique car elle est rapide et simple à appliquer comparée aux méthodes numériques.

Une application typique de cette méthode est la modélisation d'une plaque constituée de fibres de carbone dans une matrice epoxy. La conductivité du carbone caractérisée par De Rosa et al. 2009, est utilisée pour modéliser une plaque composite (type figure 2.8 avec $\varnothing = 50\ \mu m$), avec des fibres ayant une conductivité réaliste ($\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$). Toutes les autres propriétés sont inchangées ($f_2 = 19.63$ %, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). La conductivité des fibres n'est pas suffisamment élevée pour les considérer comme parfaitement conductrices dans le modèle éléments finis. Cependant, elle implique de fortement raffiner leur maillage. La modélisation de la plaque, par éléments finis, est possible avec Comsol Multiphysics® si le champ incident est perpendiculaire aux fibres ($\mathbf{E}_I \mathbin{/\!/} \mathbf{u_y}$) car son coefficient de blindage est inférieur à 150 dB dans cette direction. Les résultats obtenus avec la méthode d'homogénéisation dynamique et par éléments finis sont tracés sur la figure 3.14.

On peut voir que lorsque la fréquence augmente, pour un ratio de γ/δ_2 supérieur à 2 (axe des abscisses supérieur), les résultats obtenus avec la méthode d'homogénéisation dynamique s'éloignent des estimations calculées numériquement. En effet, dans ces conditions, la distribution des champs n'est pas uniforme dans les fibres à cause de l'effet de peau. Le critère de validité de la méthode d'homogénéisation dynamique est défini par $\gamma < 1.5\delta_2$ (Preault et al. 2013a). Le chapitre suivant propose une méthode pour étendre ce domaine de validité.

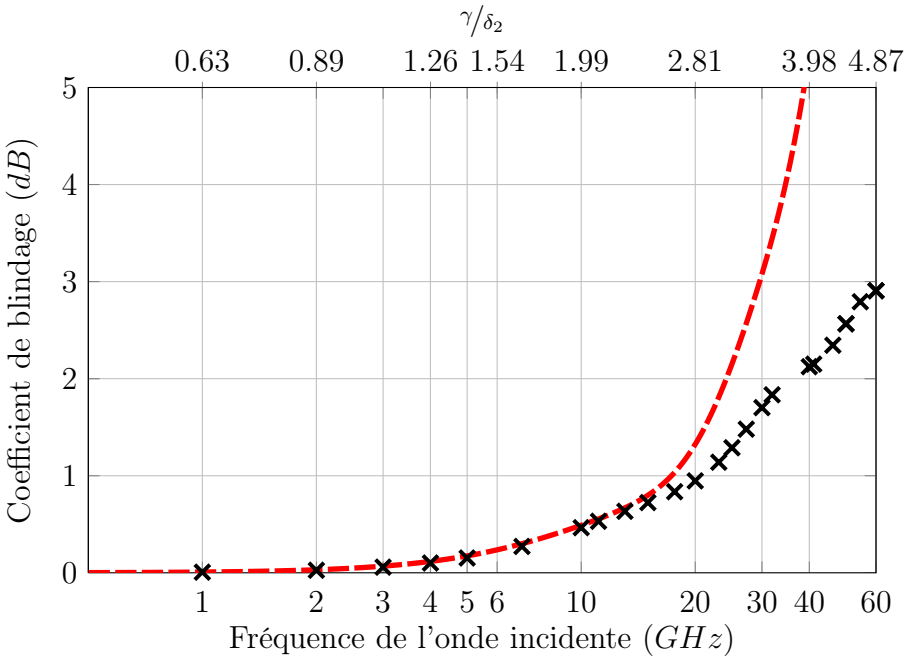


FIGURE ***3.14*** – *Coefficient de blindage d'une plaque composite à fibres parallèles lorsque* $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$*, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique (pointillés) et par éléments finis (×) (*$\varnothing = 50\ \mu m$*,* $f_2 = 19.63\ \%$*,* $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$*,* $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$*,* $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ *et* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$*).*

Chapitre 4

Prise en compte de l'effet de peau dans les fibres

Sommaire

4.1 Limite de la méthode d'homogénéisation dynamique . 60
4.2 Définition de la méthode d'homogénéisation dynamique étendue 64
4.2.1 Milieu de référence intégrant les pertes par effet Joule . 64
4.2.2 Calcul des pertes par effet Joule dans le matériau réel . 66
4.2.3 Évaluation des pertes par effet Joule dans le milieu de référence 68
4.2.4 Définition de la conductivité à pertes équivalentes 68
4.2.5 Définition de la méthode d'homogénéisation dynamique étendue 69
4.2.6 Validation numérique de la méthode 70
4.3 Applications numériques 71
4.3.1 Diamètre des fibres 72
4.3.2 Taux de fibres 73
4.3.3 Propriétés des constituants 74
4.3.4 Perméabilité magnétique 77
4.3.5 Synthèse 78
4.4 Conclusion 79

Les propriétés effectives de matériaux composites utilisés pour garantir la compatibilité EM de dispositifs électroniques, dépendent de l'interaction des champs électromagnétiques avec la microstructure. Pour obtenir une estimation précise des propriétés effectives de ces matériaux, il est nécessaire de prendre en compte ces interactions dans la démarche d'homogénéisation.

La première partie de ce chapitre propose une étude du champ électrique présent dans les fibres en fonction de la fréquence de l'onde incidente et de la conductivité des fibres. Cette étude permet de définir précisément les limites des modèles présentés précédemment. La deuxième partie présente la démarche d'une méthode d'homogénéisation originale. Elle permet d'étendre le domaine de validité de la méthode d'homogénéisation dynamique en intégrant les pertes par effet Joule dissipées dans les fibres dans la définition du milieu de référence. Les calculs nécessaires afin d'obtenir une formulation analytique y sont décrits. De nombreuses applications numériques sont exposées dans la troisième partie afin de valider cette nouvelle méthode et d'en définir le domaine d'application.

4.1 Limite de la méthode d'homogénéisation dynamique

Les modèles d'homogénéisation présentés précédemment sont limités par les effets induits lorsque la fréquence des ondes EM incidentes est conséquente et que les fibres ont une conductivité élevée. Pour comprendre ces limitations, la norme du champ électrique dans une fibre est tracée sur la figure 4.3 pour différentes conductivités et en fonction de la fréquence de l'onde incidente sur la figure 4.4. Les calculs ont été réalisés avec COMSOL MULTIPHYSICS® avec les mêmes conditions de calcul que la figure 3.14 ($\varnothing = 50\ \mu m$, $f_2 = 19.63\ \%$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). Le champ électrique total est la composante suivant $\mathbf{u_y}$ du champ électrique calculé le long du diamètre parallèle à la direction de l'onde incidente $\mathbf{u_x}$ ($E_I = 1\ V.m^{-1}$), d'une fibre centrale de la microstructure (figure 4.1). Ce champ électrique total peut être divisé en deux parties, détaillées sur la figure 4.2. Le champ électrique tournant est défini comme la composante du champ électrique invariante suivant $\mathbf{u}_\theta$. Pour l'obtenir, on mesure la composante suivant $\mathbf{u_x}$ du champ électrique calculé le long du diamètre perpendiculaire à la direction de l'onde incidente. Le champ électrique transmis est la différence entre le champ électrique total et le champ électrique tournant. Il est quasi-uniforme dans

la fibre et n'a qu'une composante suivant $\mathbf{u_y}$.

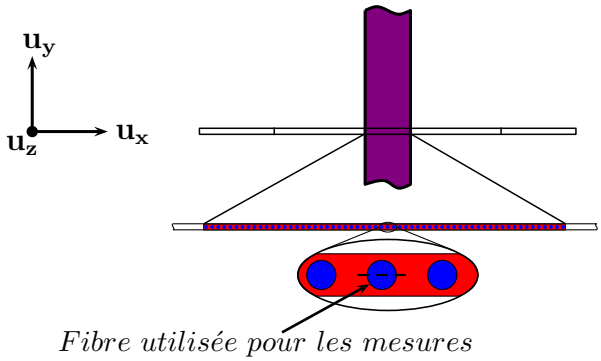


FIGURE 4.1 – *Schéma de la microstructure montrant la fibre utilisée pour les calculs du champ électrique tracé sur les figures 4.3, 4.4 et 4.5 (60 rangées de fibres $\varnothing = 50$ μm dans l'épaisseur (6 mm) de la plaque, $f_2 = 19.63$ %).*

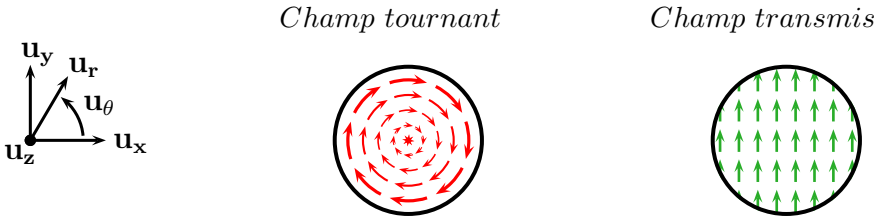
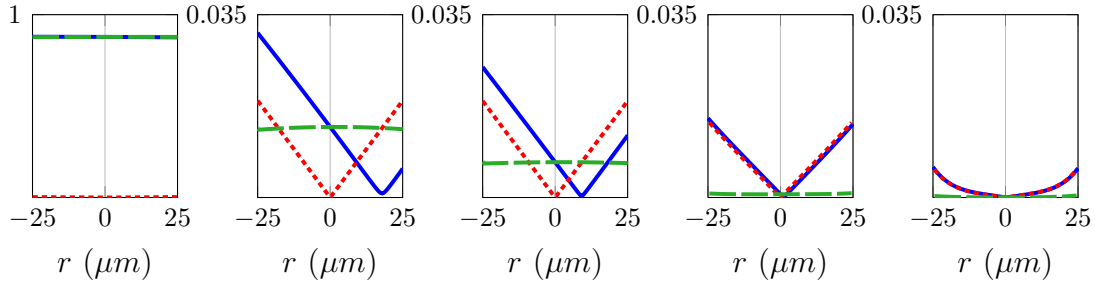


FIGURE 4.2 – *Schéma détaillant les différentes parties du champ électrique dans les fibres.*

Lorsque la conductivité des fibres est faible, le champ électrique incident peut pénétrer au sein des fibres. Sur les figures 4.3(a), 4.3(b) et 4.3(c) on peut voir qu'une partie du champ électrique incident est transmise dans la fibre. L'amplitude de ce champ transmis diminue avec l'augmentation de conductivité. Lorsque la conductivité des fibres est trop élevée, plus aucun champ ne pénètre à l'intérieur (figures 4.3(d) et 4.3(e)). Sur les figures 4.3(b), 4.3(c), 4.3(d) et 4.3(e), la conductivité des fibres est suffisante pour faire apparaître un champ électrique tournant, induit par le champ magnétique de l'onde incidente. Sur la figure 4.3(e), la conductivité est telle que le champ électrique tournant est moins élevé à cause de l'effet de peau.

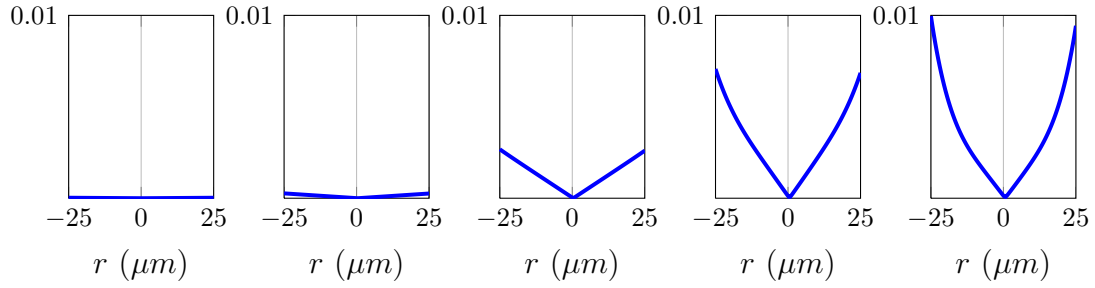
La conductivité utilisée pour les calculs de la figure 4.4 ($\sigma_2 = 40000$ $S.m^{-1}$) est suffisante pour empêcher le champ incident de pénétrer au sein des fibres, même pour la plus petite fréquence (figure 4.4(a) - $f = 100$ MHz). Le champ électrique tournant, induit dans les fibres par le champ magnétique de l'onde incidente,



(a) 1 $S.m^{-1}$ (b) 500 $S.m^{-1}$ (c) 1000 $S.m^{-1}$ (d) 10000 $S.m^{-1}$ (e) 100000 $S.m^{-1}$

FIGURE 4.3 – *Norme du champ électrique ($V.m^{-1}$) le long du diamètre d'une fibre centrale (figure 4.1) de la plaque composite pour différentes conductivités des fibres ($f = 60\ GHz$, $E_0 = 1\ V.m^{-1}$, $\varnothing = 50\ \mu m$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). Norme du champ total (ligne), champ tournant (points) et champ transmis (tirets).*

augmente avec la fréquence. À haute fréquence, le champ électrique tournant se concentre sur le pourtour des fibres à cause de l'effet de peau (figures 4.4(d) et 4.4(e)).



(a) $f = 100\ MHz$ (b) $f = 1\ GHz$ (c) $f = 10\ GHz$ (d) $f = 50\ GHz$. (e) $f = 100\ GHz$

FIGURE 4.4 – *Norme du champ électrique total ($V.m^{-1}$) le long du diamètre d'une fibre centrale (figure 4.1) de la plaque composite ($\varnothing = 50\ \mu m$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$) illuminée par une onde électromagnétique ($E_0 = 1\ V.m^{-1}$) à différentes fréquences.*

Les disques insérés sur la figure 4.5 montrent la distribution du champ électrique dans une fibre centrale de la microstructure (figure 4.1) pour différents calculs du coefficient de blindage. Les conditions de calculs sont celles décrites pour les figures 3.14 et 4.4 ($E_0 = 1\ V.m^{-1}$, $\varnothing = 50\ \mu m$, $f_2 = 19.63\ \%$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$).

On peut observer qu'à partir de $3-4\ GHz$, le modèle de MAXWELL-GARNETT

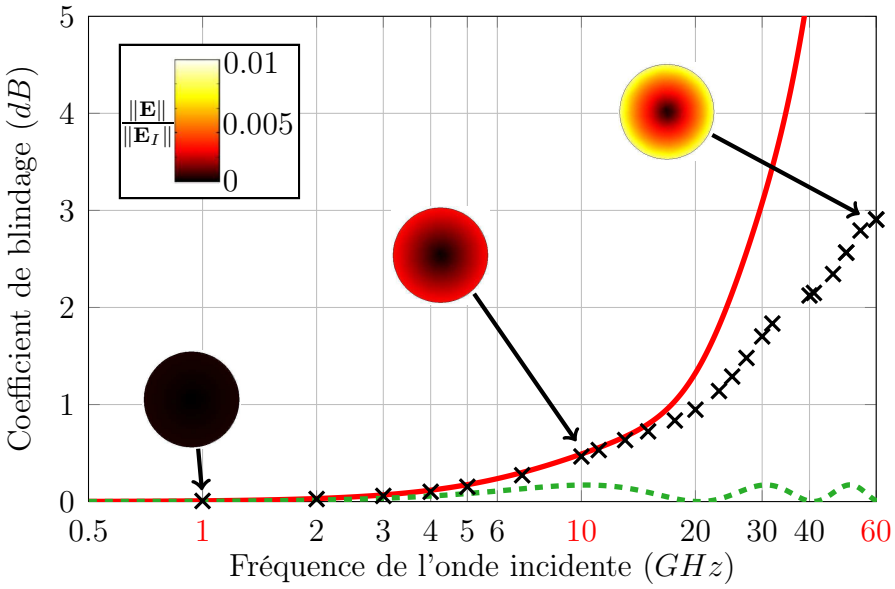


FIGURE 4.5 – *Coefficient de blindage d'une plaque composite à fibres parallèles lorsque* $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$, *calculé avec le modèle de* MAXWELL-GARNETT *(pointillés), la méthode d'homogénéisation dynamique (ligne) et par éléments finis (×) (*$\varnothing = 50\ \mu m$, $f_2 = 19.63\ \%$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ *et* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$*).*

s'écarte de l'estimation obtenue par éléments finis. Comme le montrent les tracés des champs des figures 4.4 et 4.5, cette gamme de fréquences correspond à l'apparition de champs tournants au sein des fibres. La limite de validité du modèle de MAXWELL-GARNETT est définie par l'apparition d'un champ électrique tournant dans les fibres. À partir de 10 GHz, le coefficient de blindage obtenu avec la méthode d'homogénéisation dynamique s'écarte à son tour des résultats numériques. Elle étend le modèle de MAXWELL-GARNETT après l'apparition du champ électrique tournant, mais dès que l'effet de peau est conséquent, le coefficient de blindage qu'elle fournit surestime nettement celui calculé numériquement. La méthode d'homogénéisation dynamique est pertinente si la variation du champ électrique le long du rayon reste linéaire.

Pour être en mesure de modéliser des matériaux composites illuminés par des ondes à haute fréquence, il est nécessaire de prendre en compte les champs induits dans les fibres ainsi que l'effet de peau. Tout en restant fidèle à l'esprit de la méthode d'homogénéisation basée sur des problèmes d'inclusion, la prochaine section propose d'introduire l'effet de peau dans la définition des propriétés du milieu de

référence. Cet effet dynamique est introduit au travers des pertes par effet Joule survenant dans les fibres. Cette méthode sera ensuite appliquée à la microstructure de la figure 4.1 pour mettre en évidence sa concordance avec le calcul de référence réalisé avec la méthode des éléments finis.

4.2 Définition de la méthode d'homogénéisation dynamique étendue

Le coefficient de blindage de matériaux composites dépend entre autres des pertes par effet Joule dans les fibres. Dans chacune des fibres, un champ électrique tournant apparaît sous l'effet du champ magnétique alternatif de l'onde incidente. Ces champs électriques tournants induisent des pertes par effet Joule. En introduisant ces pertes, dans la définition du milieu de référence des problèmes d'inclusion, on obtient un milieu effectif dépendant des effets dynamiques intervenants dans les fibres à haute fréquence.

4.2.1 Milieu de référence intégrant les pertes par effet Joule

La méthode d'homogénéisation dynamique est définie par l'utilisation d'un milieu de référence conducteur. Les effets dynamiques survenant à haute fréquence sont pris en compte par l'introduction de la conductivité des fibres ϵ_2^* et de l'effet de taille γ/λ dans les propriétés du milieu de référence :

$$\epsilon_\infty^* = \epsilon_1^* + \epsilon_2^* \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2 \tag{4.1}$$

Ce milieu de référence ne peut pas être utilisé à haute fréquence car sa partie imaginaire devient trop élevée. Cela conduit à une surestimation de la conductivité effective et du coefficient de blindage. Cette surestimation peut être expliquée par le fait que la proportion de chaque fibre qui interagit avec l'onde incidente diminue avec l'apparition de l'effet de peau. A haute fréquence, il est nécessaire de considérer seulement la proportion de matériaux sollicitée. Cette proportion de fibre ne peut pas être caractérisée seulement avec le champ électrique tournant. Même s'il est principalement distribué sur le pourtour, il n'est pas possible de le négliger au centre des fibres. Le phénomène qui caractérise le mieux la proportion de fibre sollicitée est la dissipation d'énergie par effet Joule. En effet, les pertes par effet Joule sont absentes à basse fréquence puis augmentent avec l'apparition des

champs induits pour disparaître complètement lorsque l'effet de peau est très élevé. Il est possible de faire l'analogie avec les conclusions présentées dans le chapitre précédent. A basse fréquence, il n'est pas nécessaire de prendre en compte les effets dynamiques, cela coïncide avec l'absence de dissipation d'énergie par effet Joule. Lorsque la fréquence augmente, il faut prendre en compte les effets dynamiques qui apparaissent (effet de taille dans le méthode d'homogénéisation dynamique), correspondant avec l'apparition de champs induits dissipant de l'énergie. A haute fréquence, l'effet dynamique diminue, comme les pertes par effet Joule, et n'est plus défini par la taille caractéristique de la microstructure. L'idée retenue pour étendre la méthode d'homogénéisation dynamique, est de choisir un milieu de référence, dont la conductivité est fonction des pertes par effet Joule dans les fibres. Tout comme la méthode d'homogénéisation dynamique, le choix du milieu de référence de cette nouvelle méthode est basé sur celui correspondant au modèle de Maxwell-Garnett ($\underline{\underline{\epsilon}}^*_\infty = \underline{\underline{\epsilon}}^*_1$), valable à basse fréquence. La permittivité complexe du milieu de référence de cette nouvelle méthode s'écrit :

$$\epsilon^*_\infty = \epsilon^*_1 - \jmath\frac{\sigma_\infty}{\omega} \tag{4.2}$$

La conductivité de ce milieu de référence σ_∞, est définie de telle sorte que l'énergie dissipée dans une fibre soit la même que celle dissipée dans un volume équivalent de milieu de référence. Cette équivalence d'énergie est schématisée sur la figure 4.6.

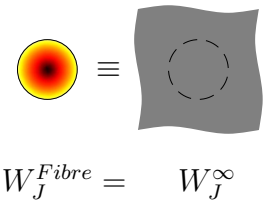


Figure 4.6 – *Représentation schématique de l'équivalence des énergies dissipées.*

L'introduction de la conductivité à pertes équivalentes est inspirée par des études précédentes (Lagarkov et Sarychev 1996 ; Koledintseva et al. 2006). Mais les pertes par effet Joule sont introduites ici par le choix du milieu de référence et non pas par une conductivité renormalisée (*renormalized conductivity*). Les deux sections qui suivent décrivent les calculs requis pour obtenir une estimation des pertes par effet Joule dans une fibre et dans un milieu homogène soumis à

la même sollicitation électromagnétique. Ces calculs sont nécessaires pour définir la conductivité à pertes équivalentes, présentée dans une troisième section.

4.2.2 Calcul des pertes par effet Joule dans le matériau réel

L'objectif de cette section est d'obtenir une estimation pertinente des pertes par effet Joule dans les fibres. Les calculs sont développés uniquement pour des microstructures 2D. Le développement de la méthode d'homogénéisation dynamique étendue est probablement possible en 3D en appliquant la même démarche. Mais la 3D complique fortement le calcul des champs tournants dans les inclusions conductrices et des pertes par effet Joule. Ces calculs, plus difficiles à mettre en œuvre, ne sont pas effectués ici.

4.2.2.1 Configuration des calculs

La microstructure étudiée dans cette partie (figure 4.1) est constituée de fibres parallèles infinies. Afin de limiter les calculs, on considère une seule fibre (ϵ_2, σ_2 et μ_2) entourée par un milieu homogène (ϵ_s, μ_s). Les équations des champs déterminées par la méthode décrite en annexe D.2 sont utilisées pour calculer les pertes par effet Joule dans la fibre :

$$\mathbf{H}_F(r,\omega,t) = \eta_s E_I \frac{\mathcal{J}_0(rk_2)}{\mathcal{J}_0(Rk_2)} e^{\jmath\omega t}\mathbf{u_z} \tag{4.3}$$

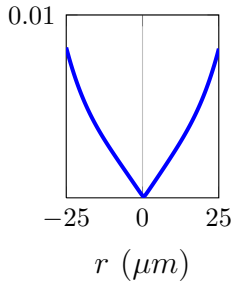
$$\mathbf{E}_F(r,\omega,t) = \frac{k_2}{\sigma_2 + \jmath\omega\epsilon_2}\eta_s E_I \frac{\mathcal{J}_1(rk_2)}{\mathcal{J}_0(Rk_2)} e^{\jmath\omega t}\mathbf{u}_\theta \tag{4.4}$$

$$\mathbf{J}_F(r,\omega,t) = \frac{k_2}{1 + \jmath\omega\dfrac{\epsilon_2}{\sigma_2}}\eta_s E_I \frac{\mathcal{J}_1(rk_2)}{\mathcal{J}_0(Rk_2)} e^{\jmath\omega t}\mathbf{u}_\theta \tag{4.5}$$

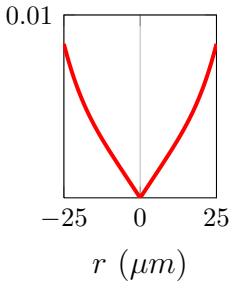
avec $\eta_s = \sqrt{\mu_s/\epsilon_s}$, l'impédance caractéristique du milieu entourant la fibre et $\mathcal{J}_\alpha(x)$, la fonction de Bessel de première espèce d'ordre α. La condition de grande longueur d'onde ($\lambda \gg \varnothing$) est appliquée pour obtenir des équations simplifiées. L'utilisation de cette hypothèse pour tous les calculs effectués dans ce chapitre est justifiée en annexe D.

Il est possible de ne considérer qu'une seule fibre car elles dissipent sensiblement la même quantité d'énergie. L'expression semi-analytique du champ électrique (4.4), obtenue en annexe D, est équivalente à la moyenne du champ électrique présent dans les fibres de la microstructure réelle (figure 4.7). Cette approximation du

champ électrique présent dans une fibre est suffisante pour obtenir une estimation des pertes par effet Joule pertinente.



(a) Moyenne du champ électrique présent dans les fibres de la microstructure de la figure 4.1, calculée par éléments finis.



(b) Champ électrique dans une fibre, calculé à partir de la formule analytique (4.4).

FIGURE 4.7 – *Champ électrique moyen ($V.m^{-1}$) dans les fibres de la microstructure figure 4.1 calculé par éléments finis et analytiquement ($f = 60\ GHz$, $\varnothing = 50\ \mu m$, $\sigma_1 = \sigma_s = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_s = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_s = \mu_0$).*

4.2.2.2 Pertes par effet Joule dans une fibre

L'énergie locale dissipée dans une fibre $w_J^{Fibre}(r,\omega)$ sur une période est donnée par :

$$w_J^{Fibre}(r,\omega) = \int_0^T J_\theta\left(r,\omega,t\right) E_\theta\left(r,\omega,t\right) dt \tag{4.6}$$

$$w_J^{Fibre}(r,\omega) = \frac{\pi}{\omega}\sigma_2 \left|E_\theta\left(r,\omega\right)\right|^2 \tag{4.7}$$

$$w_J^{Fibre}(r,\omega) = \frac{\pi}{\omega}\sigma_2 \left|\frac{k_2}{\sigma_2 + \jmath\omega\epsilon_2}\right|^2 \left|\frac{\epsilon_s}{\mu_s}\right| E_0^2 \left|\frac{\mathcal{J}_1\left(rk_2\right)}{\mathcal{J}_0\left(Rk_2\right)}\right|^2 \tag{4.8}$$

Pour prendre en compte l'influence de toute la microstructure, le milieu entourant la fibre (ϵ_s, μ_s) est choisi comme étant le milieu homogène équivalent de MAXWELL-GARNETT $\epsilon_s = \frac{1+f_2}{f_1}\epsilon_1$ (voir en annexe E) et $\mu_s = \mu_1$. L'équation (4.8) peut être simplifiée en considérant le milieu 2 bon conducteur $(\sigma_2/\omega \gg \epsilon_2)$:

$$w_J^{Fibre}(r,\omega) \approx \pi\epsilon_1 \frac{1+f_2}{f_1} E_0^2 \left|\frac{\mathcal{J}_1\left(rk_2\right)}{\mathcal{J}_0\left(Rk_2\right)}\right|^2 \tag{4.9}$$

L'énergie totale W_J^{Fibre} dissipée dans une fibre est calculée en faisant une intégrale surfacique de l'énergie locale car les champs intégrés ne dépendent que de $\mathbf{r}$:

$$W_J^{Fibre}(\omega) = h \int_0^R 2\pi r w_J^{Fibre}(r,\omega) dr \tag{4.10}$$

$$W_J^{Fibre}(\omega) \approx 2\pi^2 h \epsilon_1 \frac{1+f_2}{f_1} E_0^2 \int_0^R r \left| \frac{\mathcal{J}_1(rk_2)}{\mathcal{J}_0(Rk_2)} \right|^2 dr \tag{4.11}$$

où h est la hauteur des fibres.

4.2.3 Évaluation des pertes par effet Joule dans le milieu de référence

L'énergie locale dissipée par un milieu homogène isotrope infini où règne un champ électrique $\mathbf{E}(\omega,t) = E_0 e^{\jmath\omega t}$ est égale à :

$$w_J^{\infty}(\omega) = \int_0^T \mathbf{J}(\omega,t) \cdot \mathbf{E}(\omega,t)\, dt \tag{4.12}$$

$$w_J^{\infty}(\omega) = \frac{\pi}{\omega} \sigma_{\infty} E_0^2 \tag{4.13}$$

L'énergie dissipée par un volume de ce milieu, égal au volume d'une fibre, s'écrit :

$$W_J^{\infty}(\omega) = \pi R^2 h w_J^{\infty}(\omega) \tag{4.14}$$

$$W_J^{\infty}(\omega) = R^2 h \frac{\pi^2}{\omega} \sigma_{\infty} E_0^2 \tag{4.15}$$

4.2.4 Définition de la conductivité à pertes équivalentes

La conductivité du milieu de référence conduisant à la même quantité d'énergie dissipée par effet Joule est obtenue à partir de l'égalité de (4.11) et de (4.15) :

$$W_J^{\infty} = W_J^{Fibre} \tag{4.16}$$

conduisant à la définition de la conductivité à pertes équivalentes suivante :

$$\frac{\sigma_{\infty}}{\omega} = \frac{2}{R^2} \frac{1+f_2}{f_1} \epsilon_1 \int_0^R r \left| \frac{\mathcal{J}_1(rk_2)}{\mathcal{J}_0(Rk_2)} \right|^2 dr \tag{4.17}$$

Cette conductivité apparaît être surestimée et il a été constaté que les résultats sont améliorés en multipliant ce résultat par la fraction volumique de matrice. Le choix

de la conductivité σ_∞ du milieu de référence de la méthode d'homogénéisation dynamique étendue est alors donné par :

$$\frac{\sigma_\infty}{\omega} = \frac{2}{R^2}(1+f_2)\epsilon_1 \int_0^R r \left| \frac{\mathcal{J}_1(rk_2)}{\mathcal{J}_0(Rk_2)} \right|^2 dr \tag{4.18}$$

Avec la conductivité à pertes équivalentes (4.18) et le choix de milieu de référence (4.2), on peut appliquer la méthode d'homogénéisation dynamique étendue.

4.2.5 Définition de la méthode d'homogénéisation dynamique étendue

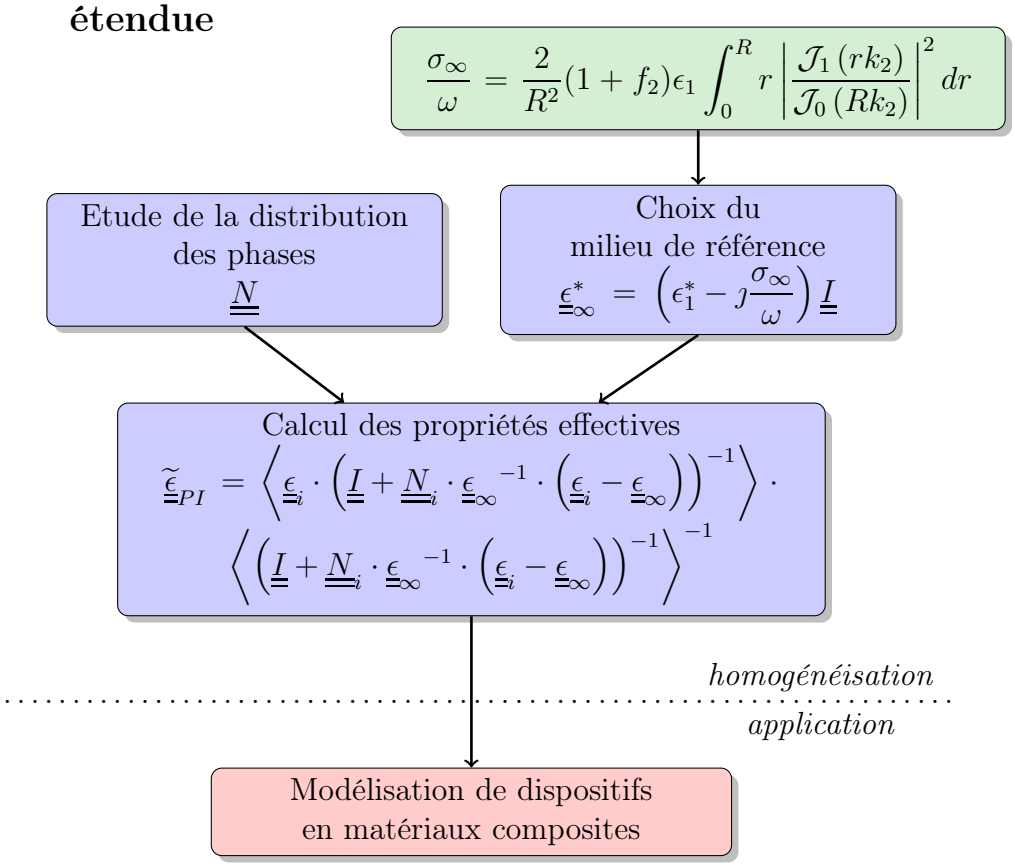


FIGURE *4.8* – *Démarche de la méthode d'homogénéisation dynamique étendue.*

La démarche complète pour obtenir une estimation des propriétés effectives d'un matériau composite biphasé soumis à une onde électromagnétique avec la méthode d'homogénéisation dynamique étendue est schématisée sur la figure 4.8. Comme elle est basée sur les problèmes d'inclusion, il est d'abord nécessaire de calculer le tenseur dépolarisant $\underline{\underline{N}}$ de la microstructure. En considérant chaque

phase plongée dans un milieu de référence défini par (4.2) incluant la conductivité à pertes équivalentes (4.18), on peut calculer les propriétés du milieu homogène équivalent $\underline{\underline{\widetilde{\epsilon}}}$ avec la formule fournie par la méthode des problèmes d'inclusion (2.14).

4.2.6 Validation numérique de la méthode

Pour valider la méthode d'homogénéisation dynamique étendue, elle est premièrement appliquée à la microstructure de la figure 4.1, avec la même configuration que la figure 4.5 ($\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$, $\varnothing = 50\ \mu m$, $f_2 = 19.63\ \%$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$).

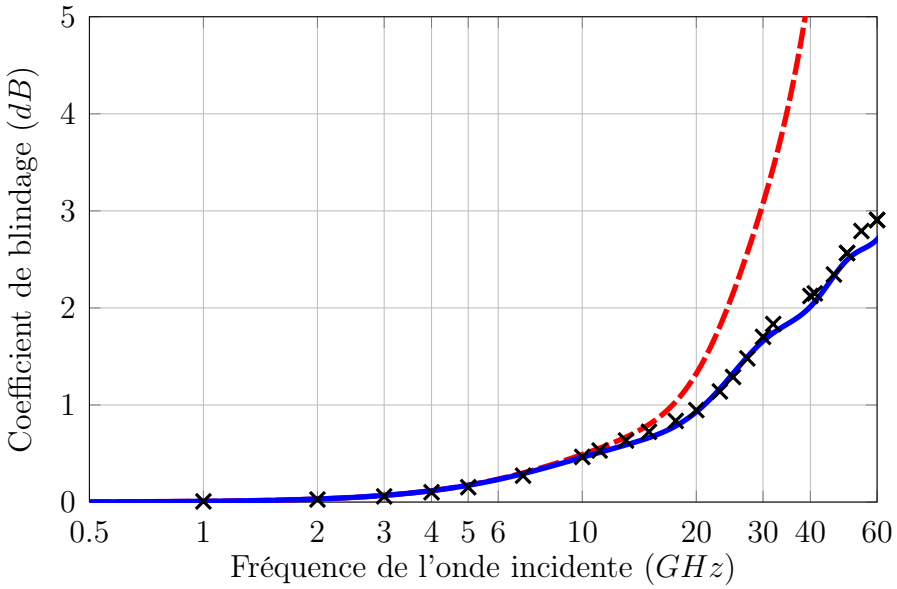


FIGURE 4.9 – *Coefficient de blindage de la plaque composite figure 4.1 lorsque* $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$, *calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique (pointillés) la méthode d'homogénéisation dynamique étendue (ligne), et par éléments finis (×)* ($\varnothing = 50\ \mu m$, $f_2 = 19.63\ \%$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ *et* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$).

On peut voir sur la figure 4.9 que le coefficient de blindage estimé avec la méthode d'homogénéisation dynamique étendue est cohérent avec les résultats numériques, même à des fréquences élevées. L'introduction des pertes par effet Joule dissipées dans les fibres dans la définition du milieu de référence permet de prendre en compte les effets dynamiques au sein du matériau.

Sur la figure 4.10, la permittivité des constituants est modifiée par rapport à la figure 4.9 pour être plus réaliste. Les valeurs utilisées sont celles caractérisées

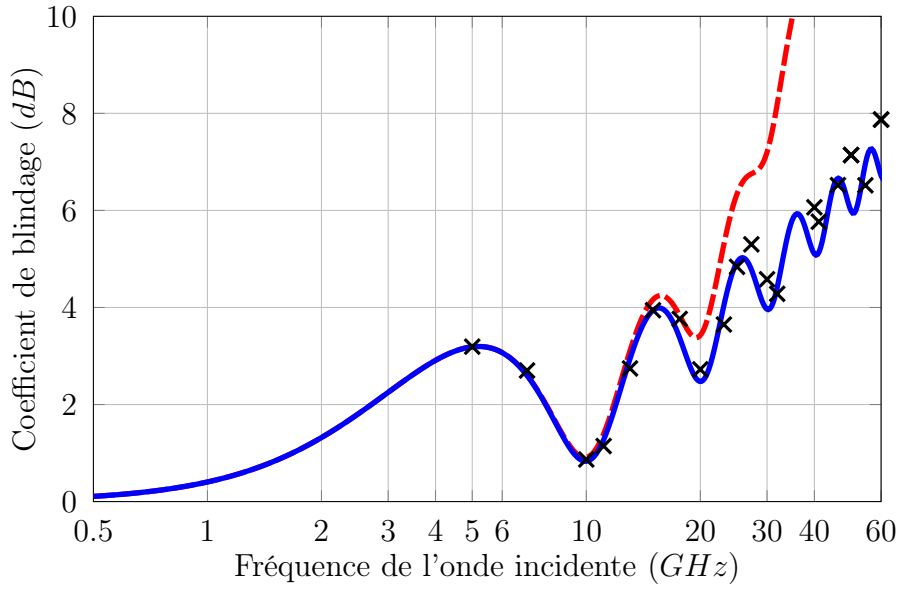


FIGURE 4.10 – *Coefficient de blindage de la plaque composite figure 4.1 lorsque* $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$*, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique (pointillés) la méthode d'homogénéisation dynamique étendue (ligne), et par éléments finis (×) (*$\varnothing = 50\ \mu m$*,* $f_2 = 19.63\ \%$*,* $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$*,* $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$*,* $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$*,* $\epsilon_2 = 2\epsilon_0$ *et* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$*).*

par DE ROSA et al. (2009) pour modéliser un matériau composite constitué de fibres courtes de carbone, diluées dans une résine époxy. Là encore, les prévisions de blindage sont en bon accord avec les calculs par éléments finis.

4.3 Applications numériques

Afin d'évaluer la gamme de validité de la méthode d'homogénéisation dynamique étendue, des calculs ont été effectués avec différentes configurations en fonction du diamètre des fibres, de la fraction volumique de fibres, de la conductivité des fibres, de la permittivité de la matrice et de la perméabilité des deux constituants. Les différentes gammes des paramètres utilisées sont récapitulées dans le tableau 4.1. La matrice est toujours isolante, mais la méthode d'homogénéisation dynamique étendue est valable pour des valeurs de conductivité différentes de 0. Si la conductivité de la matrice est élevée ($\sigma_1 > 5\ S.m^{-1}$), le modèle de MAXWELL-GARNETT coïncide avec la méthode d'homogénéisation dynamique étendue et la méthode des éléments finis car l'influence de la microstructure devient négligeable.

Diamètre des fibres $\varnothing$	Taux de fibres f_2	Conductivité des fibres σ_2	Permittivité de la matrice ϵ_1	Perméabilités $\mu_1 = \mu_2$
de 10 à 100 μm	jusqu'à 30 %	jusqu'à 100000 $S.m^{-1}$	de ϵ_0 à $10\epsilon_0$	de μ_0 à $10\mu_0$

Tableau 4.1 *– Gammes des paramètres matériaux testés pour définir les limites de validité de la méthode d'homogénéisation dynamique étendue.*

4.3.1 Diamètre des fibres

La figure 4.11 montre les résultats obtenus avec la méthode d'homogénéisation dynamique étendue et la méthode des éléments finis pour différents diamètres de fibres, les autres propriétés étant maintenues constantes. Les résultats des deux méthodes sont en bon accord, bien que des différences apparaissent pour les diamètre de 50 et 100 μm. Ces différences peuvent être attribuées au fait que, à fraction volumique constante, lorsque le diamètre des fibres est élevé, leur nombre diminue. La microstructure modélisée par éléments finis n'est donc plus vraiment un volume élémentaire représentatif. Si le calcul était réalisé sur une plaque plus épaisse (plus grand nombre de fibres), les résultats des deux méthodes seraient certainement plus proches. Cette différence de prédiction du coefficient de blindage provient également de la définition de la permittivité du milieu de référence. Elle est basée sur le modèle de Maxwell-Garnett, mais une meilleure concordance des prédictions pourrait être obtenue en adaptant la partie réelle des propriétés du milieu de référence (4.2). En effet, lorsque l'effet de peau est élevé, l'influence de la conductivité du MHE diminue par rapport à la contribution de la permittivité équivalente dans le coefficient de blindage. De plus, ce sont les oscillations du coefficient de blindage en fonction de la fréquence qui ne sont par parfaitement prises en compte par la méthode d'homogénéisation dynamique étendue. Comme ces oscillations dépendent principalement de la permittivité du MHE (équation (1.20b)), et que cette permittivité dépend uniquement de la permittivité du milieu de référence (dans la méthode d'homogénéisation dynamique étendue), il est possible d'obtenir une meilleure estimation des propriétés effectives en basant la définition de la permittivité du milieu de référence sur un autre modèle que celui de Maxwell-Garnett. D'autres définitions des propriétés du milieu de référence peuvent être étudiées, mais la permittivité du milieu de référence à un effet non-négligeable sur la conductivité de MHE. Le choix proposé (4.2) est le meilleur obtenu jusqu'à présent en terme de précision et de polyvalence.

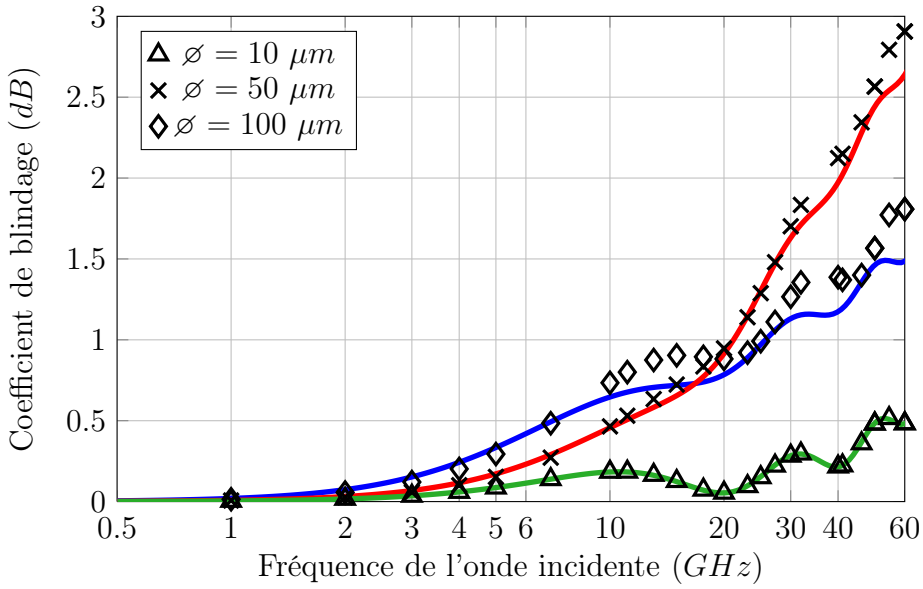


FIGURE 4.11 – *Coefficient de blindage de plaques composites à fibres parallèles lorsque* $\mathbf{E}_I /\!\!/ \mathbf{u_y}$*, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique étendue (lignes) et par éléments finis (points) (*$f_2 = 19.63\ \%$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ *et* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$*).*

On peut également remarquer que le coefficient de blindage n'est pas une fonction monotone du diamètre des fibres. Dans le domaine de validité de la méthode d'homogénéisation dynamique (ici $0.5 - 10\ GHz$), un diamètre de fibre plus élevé accroît la conductivité du milieu de référence (4.1). Le coefficient de blindage augmente ainsi avec le diamètre des fibres (figure 3.8). Cela peut également être expliqué par l'apparition précoce des courants induits dans les fibres qui ont un grand diamètre. Ces courants induits, dissipant des pertes par effet Joule, augmentent la conductivité du milieu de référence et ainsi le coefficient de blindage du composite. Mais à haute fréquence, l'effet de peau dans les fibres devient significatif et les champs induits se concentrent en périphérie des fibres. Les fibres dissipent de moins en moins d'énergie, ce qui diminue le coefficient de blindage par rapport à une microstructure où le diamètre des fibres est plus petit. L'obtention d'un diamètre de fibres optimal est donc un compromis entre ces deux phénomènes concurrents.

4.3.2 Taux de fibres

La figure 4.12 montre les résultats obtenus pour différentes fractions volumiques de fibres, les autres propriétés étant maintenues constantes. Comme prévu, plus la

proportion de fibres conductrices est élevée, plus le coefficient de blindage augmente. Les résultats obtenus avec la méthode d'homogénéisation dynamique sont en bon accord avec les résultats numériques, même si l'erreur s'accroît légèrement avec le taux de fibres. Cette augmentation d'erreur peut être liée au choix de l'approche de MAXWELL-GARNETT pour le choix du milieu de référence. Cette approche est connue pour n'être valable que pour des fractions volumiques faibles (SIHVOLA 1999 ; BORNERT et al. 2001). À haute fraction volumique, une approche auto-cohérente donnerait probablement une meilleure concordance.

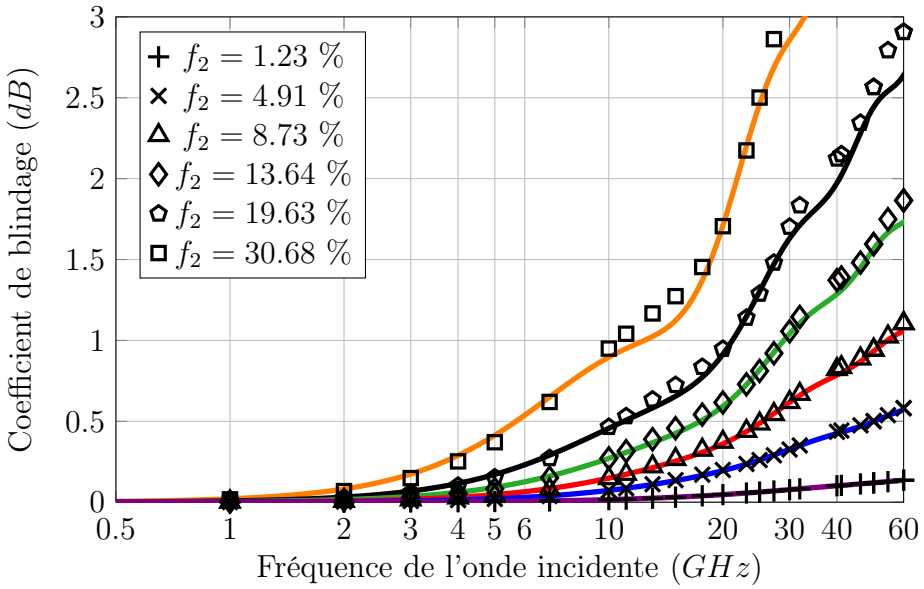


FIGURE *4.12* – *Coefficient de blindage de plaques composites à fibres parallèles, lorsque* $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$*, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique (lignes) et par éléments finis (points)* ($\varnothing_2 = 50\ \mu m$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ *et* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$*).*

4.3.3 Propriétés des constituants

La figure 4.13 montre les résultats obtenus pour différentes conductivités électriques des fibres, les autres propriétés restent inchangées. Les résultats de la méthode d'homogénéisation dynamique étendue sont à nouveau en adéquation avec les résultats numériques même si des différences apparaissent pour les conductivités élevées. Ces différences peuvent là encore être attribuées au choix des propriétés du milieu de référence. Les oscillations du coefficient de blindage en fonction de la fréquence sont très sensibles à la valeur de la permittivité du milieu de référence. Une solution pour réduire cette erreur, consiste à décrire la dépendance de la per-

mittivité du milieu infini, à la conductivité des fibres. Mais la conductivité des fibres influe sur de nombreux paramètres du coefficient de blindage. Caractériser la dépendance de la permittivité du milieu de référence à la conductivité des fibres s'avère compliqué.

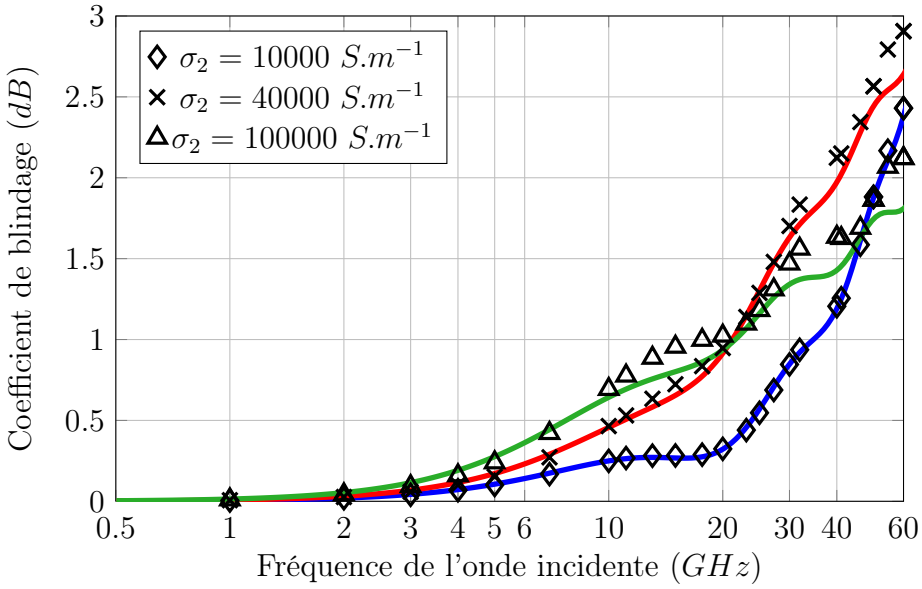


FIGURE *4.13* – *Coefficient de blindage d'une plaque composite à fibres parallèles lorsque* $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$*, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique étendue (lignes) et par éléments finis (points) en faisant varier la conductivité des fibres (*$\varnothing_2 = 50\ \mu m$*,* $f_2 = 19.63\ \%$*,* $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$*,* $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ *et* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$*).*

Là encore, on peut remarquer que le coefficient de blindage n'est pas une fonction monotone de la conductivité des fibres. Dans la gamme de validité de la méthode d'homogénéisation dynamique (ici environ de 0.5 à 10 GHz), plus les fibres sont conductrices, plus la conductivité du milieu de référence augmente (4.1). Ce qui accroît le coefficient de blindage (figure 3.10). Ce phénomène peut être expliqué par le fait qu'à basse fréquence, des courants induits vont apparaître plus rapidement dans les fibres à forte conductivité. Dans ces conditions les pertes par effet Joule seront plus élevées. Mais à haute fréquence, l'effet de peau sera d'autant plus élevé que les fibres sont conductrices. Les champs induits seront donc concentrés sur le pourtour des fibres ce qui limite la dissipation d'énergie par effet Joule. Le coefficient de blindage de matériaux composites dont les fibres ont une conductivité plus grande sera donc plus faible à haute fréquence. Un matériau composite constitué de renforts conducteurs parfaits, aura un coefficient de blindage très faible, car

les champs incidents ne pouvant pénétrer les fibres, aucun courant induit, donc aucune dissipation par effet Joule n'apparaîtra au sein des fibres. Cet effet est pris en compte par la méthode d'homogénéisation dynamique étendue dans le choix du milieu de référence (4.18) qui est moins conducteur lorsque les pertes par effet Joule sont plus faibles. Tout comme le diamètre, la conductivité des fibres permettant d'optimiser le coefficient de blindage sur une large gamme de fréquences est un compromis entre ces deux phénomènes.

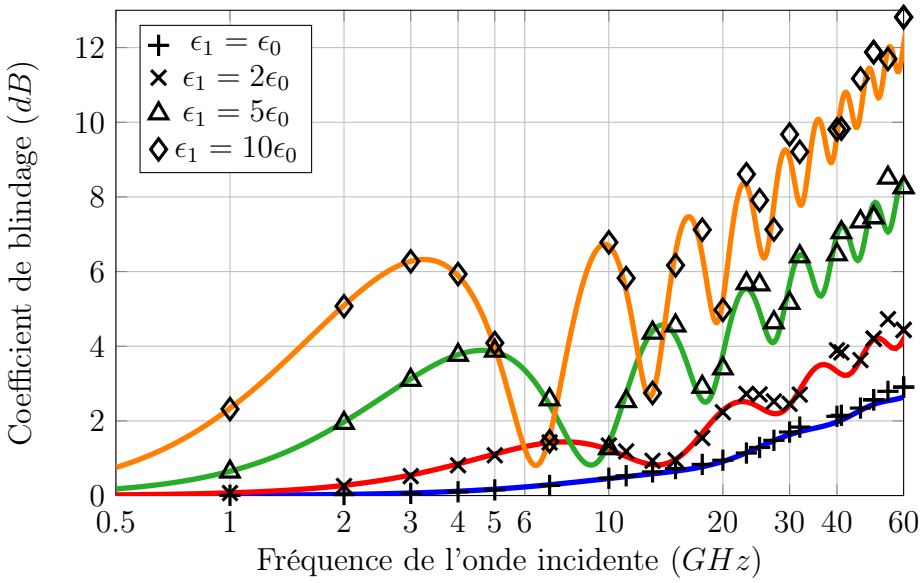


FIGURE 4.14 – *Coefficient de blindage d'une plaque composite à fibres parallèles lorsque* $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$*, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique étendue (lignes) et par éléments finis (points) en faisant varier la permittivité de la matrice (*$\varnothing_2 = 50\ \mu m$*,* $f_2 = 19.63\ \%$*,* $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$*,* $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$*,* $\epsilon_2 = \epsilon_0$ *et* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$*).*

La figure 4.14 montre les résultats obtenus avec la méthode d'homogénéisation dynamique étendue pour différentes permittivités de matrice. L'accord avec les résultats par éléments finis est très satisfaisant. Le rôle de la permittivité de la matrice sur les propriétés effectives est assez complexe. Elle affecte à la fois la permittivité et la conductivité du MHE. Une matrice ayant une permittivité élevée augmente la conductivité du milieu de référence (4.18), tendant à augmenter le coefficient de blindage. D'autre part, les réflexions multiples dans la plaque dépendent fortement de la permittivité et de la fréquence (1.20b). Une matrice à permittivité élevée a tendance à augmenter les oscillations du coefficient de blindage. Cet effet est bien mis en évidence sur la figure 4.14.

4.3.4 Perméabilité magnétique

Le contraste de perméabilité magnétique ($\mu_1 \neq \mu_2$) entre les deux constituants de la plaque composite n'a pas été étudié dans le cadre de ce travail. Lorsque le champ électrique est perpendiculaire aux fibres, le champ magnétique est orienté dans la direction des fibres. Par conséquent, il est tentant d'homogénéiser la perméabilité de la plaque avec le modèle de WIENER. Mais le coefficient de blindage du milieu homogène obtenu avec cette démarche n'est pas cohérent avec les simulations numériques lorsque la fréquence est élevée ($> 10\ GHz$). La méthode d'homogénéisation dynamique étendue peut tout de même être appliquée si les deux perméabilités sont identiques ($\mu_1 = \mu_2$), mêmes si elles sont différentes de celle de l'air (μ_0).

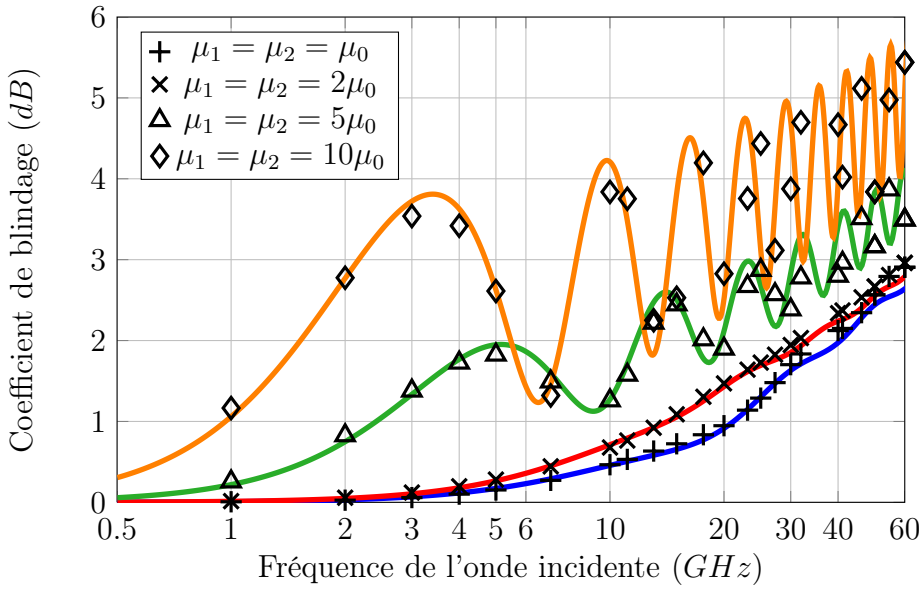


FIGURE 4.15 – *Coefficient de blindage d'une plaque composite à fibres parallèles lorsque* $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$, *calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique étendue (lignes) et par éléments finis (points) en faisant varier la perméabilité des constituants* ($\varnothing_2 = 50\ \mu m$, $f_2 = 19.63\ \%$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$ *et* $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$).

Les résultats des calculs avec différentes perméabilités sont tracés sur la figure 4.15. Le coefficient de blindage calculé analytiquement avec les propriétés effectives est en bon accord avec les résultats éléments finis. On remarque que la perméabilité magnétique de la plaque augmente globalement l'efficacité de blindage du matériau. Tout comme la permittivité, la perméabilité du MHE a une influence sur les

oscillations du coefficient de blindage en fonction de la fréquence. Cette influence est expliquée par la dépendance de l'équation (1.20b) des multiples réflexions au sein de la plaque à la perméabilité du MHE.

4.3.5 Synthèse

La figure 4.16 montre la différence entre le coefficient de blindage obtenu avec les modèles analytiques (MAXWELL-GARNETT, la méthode d'homogénéisation dynamique et la méthode d'homogénéisation dynamique étendue) et les résultats éléments finis pour les différents calculs effectués dans ce chapitre. Les résultats sont tracés en fonction du rapport entre le diamètre des fibres $\varnothing$ et l'épaisseur de peau dans les fibres ($\delta_2 = \sqrt{2/\mu_2\sigma_2\omega}$).

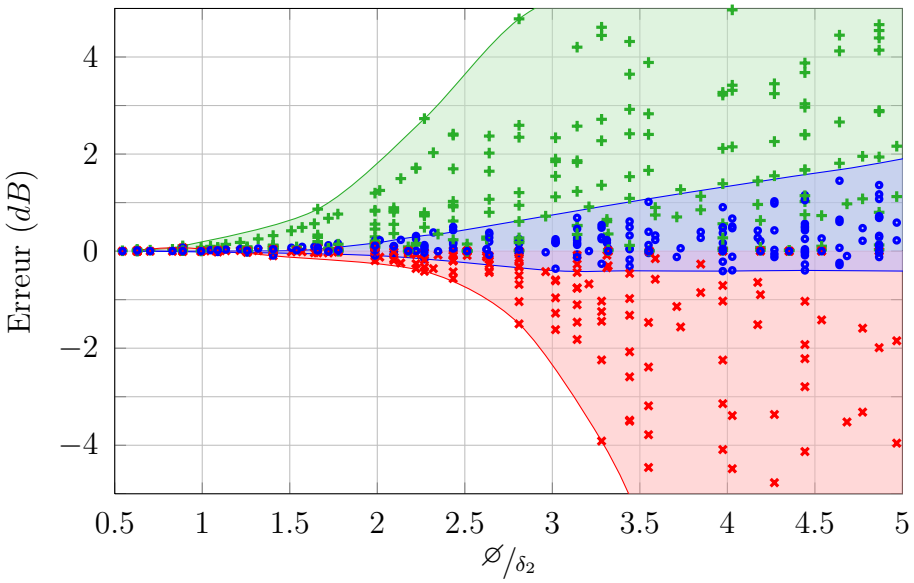


FIGURE *4.16* – *Différence, pour chacun des calculs effectués précédemment, entre le coefficient de blindage calculé avec le modèle de* MAXWELL-GARNETT *(+), la méthode d'homogénéisation dynamique (×), la méthode d'homogénéisation dynamique étendue (o) et le coefficient de blindage calculé par éléments finis en fonction du rapport entre le diamètre des fibres $\varnothing$ et l'épaisseur de peau des fibres δ_2.*

Admettons que le niveau d'erreur acceptable, dans les conditions étudiées, est de 1 *dB*. La gamme de validité du modèle de MAXWELL-GARNETT est définie par $\varnothing/\delta_2 = 1.7$. La méthode d'homogénéisation dynamique étend ce domaine de validité jusqu'à $\varnothing/\delta_2 = 2.6$, l'erreur augmentant alors de manière significative.

La méthode d'homogénéisation dynamique étendue permet d'étendre la plage de validité jusqu'à $\varnothing/\delta_2 = 3.5$. L'erreur fournie par la méthode d'homogénéisation dynamique étendue augmente lentement, les résultats restent pertinents jusqu'à des rapports élevés entre le diamètre des fibres et l'épaisseur de peau. Le coefficient de blindage augmentant avec la fréquence ($\varnothing/\delta_2$ élevé), le pourcentage d'erreur reste faible. Il ressort clairement de la figure 4.16 que l'approche proposée étend considérablement la gamme de validité des approches en champs moyens pour la prédiction du coefficient de blindage de matériaux composites.

4.4 Conclusion

Ce chapitre décrit une méthode d'homogénéisation en champs moyens pour calculer les propriétés effectives de matériaux composites illuminés par des ondes électromagnétiques. Elle est développée dans le but de modéliser des matériaux composites performants pour des boîtiers le blindage de dispositifs électroniques. Le fondement de cette méthode est de décrire les effets dynamiques qui apparaissent au sein de matériaux composites à travers les pertes par effet Joule dans les fibres. La méthode d'homogénéisation développée est basée sur la résolution de problèmes d'inclusion où le choix du milieu de référence permet d'adapter la méthode à de nombreuses applications. Dans la méthode proposée, les pertes par effet Joule dans les fibres sont prises en compte dans la définition du milieu de référence pour modéliser les effets dynamiques. Pour cela, la conductivité du milieu de référence est définie de telle sorte que les pertes dissipées par le milieu de référence soient identiques à celles dissipées dans une fibre. La méthode d'homogénéisation dynamique étendue ainsi obtenue, est semi-analytique, facile à mettre en œuvre et nécessite peu de ressources informatiques. De plus, elle est aisément applicable pour de nombreuses microstructures. Son domaine de validité est limité par son estimation de la permittivité équivalente. En effet, l'étude menant à la méthode d'homogénéisation dynamique étendue ne prend pas en compte l'influence des effets dynamiques dans la définition de la permittivité du milieu de référence. Cela conduit à une estimation de la permittivité équivalente qui n'est pas optimale. Par conséquent, la précision du coefficient de blindage fourni par cette méthode diminue lorsque l'effet de peau dans les fibres est conséquent. Dans ce cas, le coefficient de blindage dépend principalement de la permittivité équivalente estimée.

Contrairement aux modèles d'homogénéisation classiques, cette méthode est valable lorsque la fréquence des sollicitations électromagnétiques est élevée, jusqu'à

plusieurs dizaines de GHz pour les divers applications numériques présentées dans ce mémoire. Dans ces applications numériques, les microstructures modélisées sont toutes biphasées. Elles sont constituées de fibres conductrices diluées dans une matrice diélectrique. Les fibres sont toutes alignées dans la même direction et elles ne sont pas contact les unes des autres. La méthode a été testée pour différents diamètres de fibres (de 10 à 100 μm), pour différentes fractions volumiques de fibres (jusqu'à 30 %), pour différentes conductivités (jusqu'à 100000 $S.m^{-1}$) et pour différentes permittivités de la matrice (jusqu'à $10\epsilon_0$). Ces différentes applications numériques montrent un très bon accord de la méthode avec les calculs par éléments finis réalisés en parallèle, mais avec un coût de calcul beaucoup plus élevé par rapport à la formulation semi-analytique.

Un des points forts de cette étude est qu'elle permet de comprendre et de quantifier l'influence des différents paramètres sur le coefficient de blindage de matériaux composites. Une conclusions intéressantes est que, en comparaison avec les plaques homogènes pour lesquelles une épaisseur et une conductivité élevées maximisent le blindage, la conception d'un matériau composite optimal est un processus plus subtil. Un compromis doit être trouvé entre l'effet de peau et les pertes par effet Joule dans les fibres afin de maximiser le blindage. La méthode d'homogénéisation proposée est un outil adapté pour parvenir à un tel optimum. Elle peut être facilement utilisée durant le processus de pré-dimensionnement ou intégrée dans les outils numériques standards pour modéliser des dispositifs complexes en matériaux composites.

Chapitre 5

Modélisation d'un boîtier de blindage par éléments finis

Sommaire

5.1 Présentation du boîtier 82
5.1.1 Description de l'assemblage et des matériaux 82
5.2 Modélisation électromagnétique 84
5.2.1 PML, conditions aux limites et onde incidente 84
5.2.2 Homogénéisation du matériau composite 85
5.2.3 Maillage et résolution 90
5.3 Résultats 91

Ce chapitre présente la modélisation électromagnétique d'un boîtier de blindage. L'étude est appliquée au cas d'un boîtier de FADEC (Full authority digital engine control). Cette étude permet d'anticiper le comportement du boîtier et de vérifier que le blindage électromagnétique qu'il fournit est suffisant pour ne pas perturber le dispositif électronique qu'il renferme. La géométrie ainsi que les matériaux utilisés ici sont librement inspirés de FADEC existants afin de coller à la réalité. Le boîtier étudié étant constitué d'une pièce en matériau composite, la méthode d'homogénéisation dynamique étendue présentée dans le chapitre précédent est utilisée afin d'obtenir les propriétés effectives de la pièce composite.

5.1 Présentation du boîtier

Les boîtiers d'équipement électronique utilisés dans l'aéronautique ont de nombreuses fonctions. Ils ont tout d'abord un rôle mécanique. Ils servent de support pour les cartes électroniques et les protègent des chocs et d'éventuelles explosions. Ils doivent être étanches à différents fluides (kérosène, huiles, ...) et résistants aux agressions chimiques afin d'éviter d'endommager les systèmes électroniques. De plus, ils sont le support des connecteurs qui servent à relier les cartes électroniques au faisceau électrique. Ils ont également une rôle thermique : en favorisant la dissipation de chaleur, ils évitent la surchauffe des composants électroniques qu'ils renferment. Enfin, les boîtiers doivent garantir la compatibilité électromagnétique du FADEC. Ils doivent protéger le système des ondes externes, mais aussi éviter la réflexion des ondes rayonnées par le dispositif. L'étude menée dans ce dernier chapitre a pour but de vérifier si le boîtier présenté sur la figure 5.1 remplit bien ce rôle.

5.1.1 Description de l'assemblage et des matériaux

Le boîtier à modéliser est constitué de six pièces (figure 5.2). La base, en composite, reçoit la carte électronique en epoxy. Les composants électroniques et les pistes ne sont pas modélisés ici. Trois connecteurs en aluminium sont en contact avec la carte et passent à travers le capot en aluminium qui referme le boîtier. Les vis ainsi que les trous de fixation ne sont pas modélisés afin de simplifier le maillage. En effet, cela nécessiterait de mailler de nombreuses géométries circulaires d'un faible diamètre, ce qui augmenterait considérablement le nombre d'éléments. De plus, il

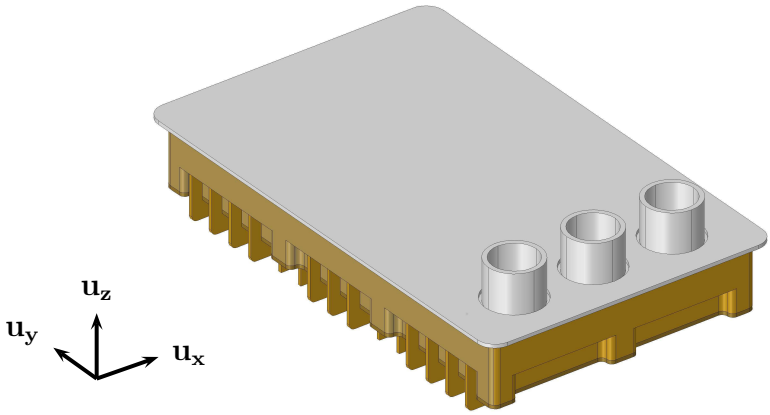


FIGURE 5.1 – *Boîtier à modéliser.*

serait nécessaire de raffiner localement le maillage, ce qui dégraderait la qualité du maillage en induisant une forte disparité entre les éléments. On considère donc que l'influence des vis sur le comportement électromagnétique global du boîtier est négligeable.

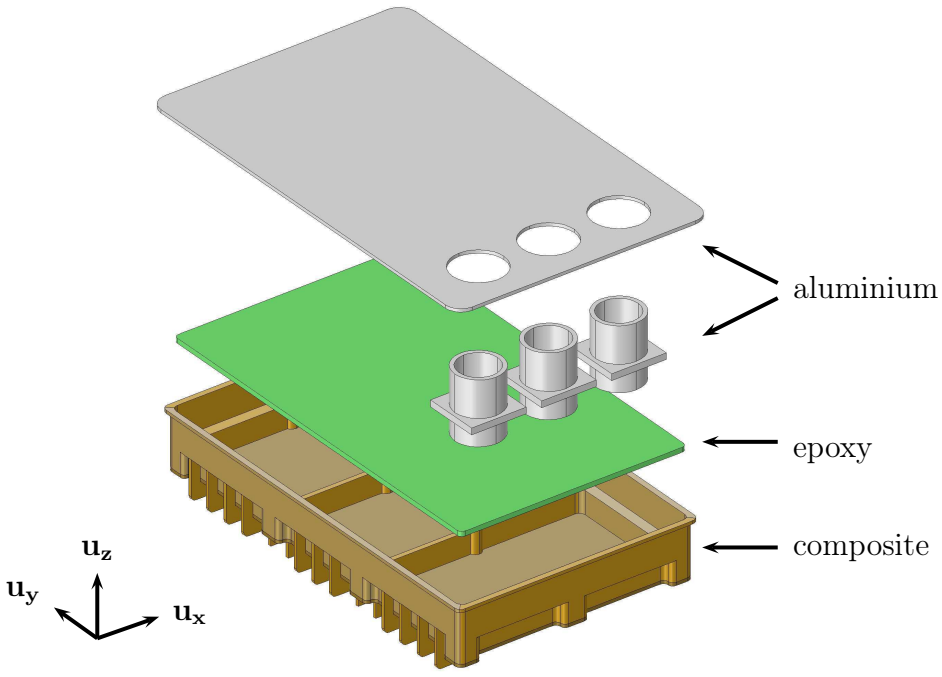


FIGURE 5.2 – *Vue éclatée du boîtier.*

Les pièces en aluminium et en époxy sont considérées isotropes et leurs comportements linéaires. Le matériau composite est constitué de deux plis de 1 *mm*

d'épaisseur et orientés à 90° (figure 5.3). Chacun des plis est constitué de 20 % de fibres longues de carbone d'un diamètre de 10 μm. Elles sont toutes orientées dans la même direction mais disposées aléatoirement dans la matrice epoxy.

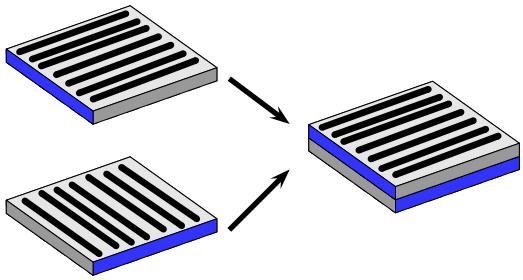


FIGURE *5.3* – *Schéma des plis constituant le matériau composite.*

Les différentes propriétés des matériaux sont récapitulées dans le tableau 5.1.

Matériau	Permittivité	Conductivité ($S.m^{-1}$)	Perméabilité
air	ϵ_0	0	μ_0
aluminium	ϵ_0	37.10^6	μ_0
epoxy	$4\epsilon_0$	0	μ_0
carbone	$2\epsilon_0$	40.10^3	μ_0

Tableau 5.1 – *Propriétés électromagnétiques des matériaux nécessaires à la modélisation du boîtier.*

5.2 Modélisation électromagnétique

La démarche présentée dans cette section est adaptée à la modélisation par éléments finis et à l'utilisation du logiciel COMSOL MULTIPHYSICS®.

5.2.1 PML, conditions aux limites et onde incidente

Pour modéliser le comportement électromagnétique d'un dispositif, il est nécessaire de le placer dans une boîte d'air. Cette boîte d'air délimite la zone où les ondes peuvent se propager. Celle-ci doit être suffisamment grande pour ne pas perturber la solution, mais d'une taille raisonnable pour ne pas engendrer trop d'inconnues supplémentaires. Pour simuler un volume d'air infini, tout en limitant le nombre

d'inconnues, on entoure la boîte d'air de PML (Perfectly matched layer, SACKS et al. 1995). Ces surcouches absorbent les ondes rayonnées et évitent les réflexions. Elles doivent êtres disposées tout autour du domaine d'air (figure 5.4).

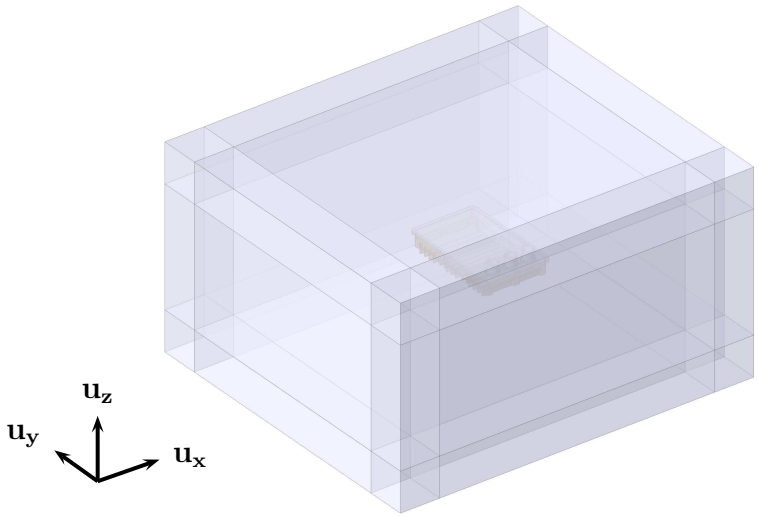


FIGURE 5.4 – *PML et boîte d'air entourant le boîtier.*

La conductivité élevée de l'aluminium contraint à le modéliser comme un conducteur parfait. Prendre en compte l'effet de peau ($\delta_2 \approx 2.6\ \mu m$ à $1\ GHz$) dans les pièces en aluminium imposerait de raffiner le maillage au delà des capacités disponibles. Les différentes surfaces des pièces en aluminium ainsi que les frontières externes des PML sont considérées parfaitement conductrices. Les conditions de continuité sont appliquées à toutes les autres frontières internes.

Le boîtier est illuminé par une onde incidente se propageant suivant $\mathbf{u_x}$ et polarisée électriquement suivant $\mathbf{u_z}$:

$$\mathbf{E}_I = E_0 e^{\jmath(\omega t - k_0 x)} \mathbf{u_z} \tag{5.1}$$

Seule cette configuration d'onde incidente est présentée ici. Pour une étude de compatibilité électromagnétique complète, il serait nécessaire de modifier l'incidence et la polarisation de l'onde incidente.

5.2.2 Homogénéisation du matériau composite

Le matériau composite à modéliser est constitué de deux plis (figure 5.3). La démarche d'homogénéisation explicitée sur la figure 5.5 comporte deux niveaux. Le

premier consiste à homogénéiser chacun des deux plis séparément (étapes (1.a) et (1.b)). Après avoir réuni les deux plis homogénéisés (2), la seconde étape d'homogénéisation (3) permet d'obtenir les propriétés effectives du matériaux composite.

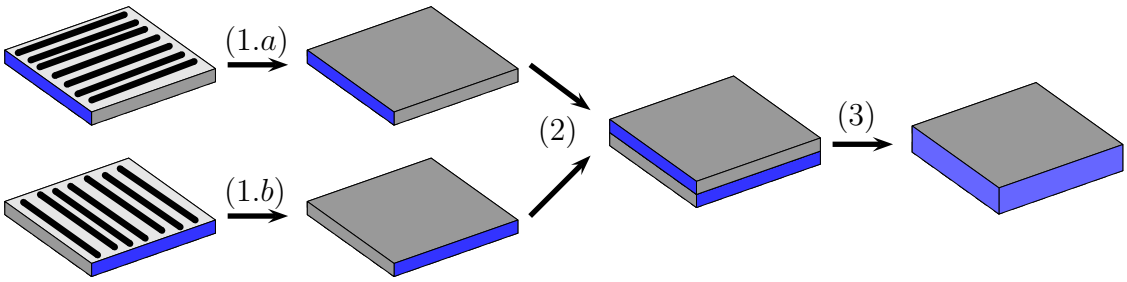


FIGURE 5.5 – *Démarche d'homogénéisation du matériau composite.*

5.2.2.1 Propriétés effectives d'un pli

La démarche présentée est valable pour le pli représenté sur la figure 5.6. Pour le second, il faut répéter cette même démarche en tournant la microstructure de 90°.

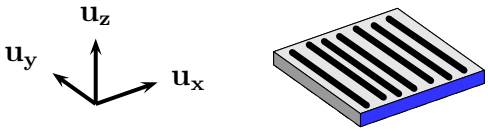
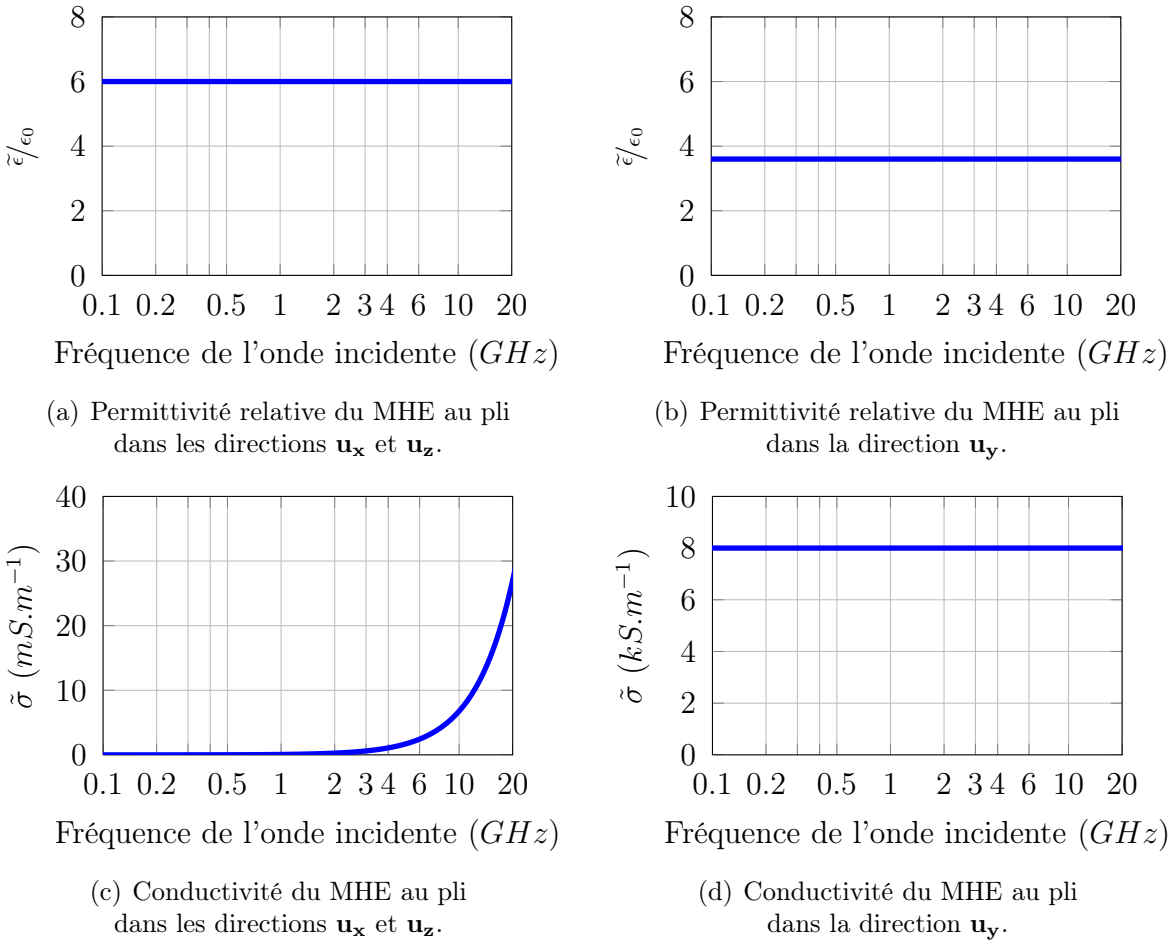


FIGURE 5.6 – *Schéma d'un pli.*

Le pli étudié étant biphasé, les deux phases ont le même tenseur dépolarisant (voir section 2.3.5). La distribution des phases du pli représenté sur la figure 5.6 est un cylindre infini d'axe $\mathbf{u_y}$. Le tenseur dépolarisant des deux phases est égal à :

$$\underline{\underline{N}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_x},\mathbf{u_y},\mathbf{u_z})} \tag{5.2}$$

Après avoir appliqué la méthode d'homogénéisation dynamique étendue (figure 4.8) avec les propriétés complexes des constituants, on obtient les propriétés effectives d'un pli. La permittivité et la conductivité effective sont présentées sur la figure 5.7.



(a) Permittivité relative du MHE au pli dans les directions $\mathbf{u_x}$ et $\mathbf{u_z}$.

(b) Permittivité relative du MHE au pli dans la direction $\mathbf{u_y}$.

(c) Conductivité du MHE au pli dans les directions $\mathbf{u_x}$ et $\mathbf{u_z}$.

(d) Conductivité du MHE au pli dans la direction $\mathbf{u_y}$.

FIGURE 5.7 – *Propriétés du milieu homogène équivalent (MHE) au pli (figure 5.6) obtenues avec la méthode d'homogénéisation dynamique étendue.*

La microstructure du pli étant isotrope transverse, les propriétés du MHE sont équivalentes dans les directions $\mathbf{u_x}$ et $\mathbf{u_z}$ ($\widetilde{\epsilon}_x^* = \widetilde{\epsilon}_z^*$). Contrairement à la permittivité, la conductivité du MHE au pli est fortement anisotrope. Cela est dû à la distribution anisotrope des phases et au fort contraste entre les propriétés des deux constituants. La méthode d'homogénéisation dynamique étendue permet d'obtenir la conductivité effective du pli, dans les directions $\mathbf{u_x}$ et $\mathbf{u_z}$, en fonction de la fréquence de l'onde incidente (figure 5.7(c)). Cependant, elle est très faible devant la conductivité effective dans la direction des fibres (figure 5.7(d)). Dans cette direction ($\mathbf{u_y}$), le modèle basé sur des problèmes d'inclusion correspond à la borne supérieure du modèle de WIENER.

5.2.2.2 Propriétés effectives du matériau composite

Il convient maintenant d'obtenir les propriétés effectives de la plaque constituée des deux plis homogénéisés (étape (3) de la figure 5.5). Les deux plis ont la même épaisseur, ils représentent chacun 50 % du volume de la plaque présentée sur la figure 5.8. La distribution des phases est encore isotrope transverse, mais cette fois-ci, l'inclusion représentative est un plan infini orthonormal à $\mathbf{u_z}$. Le tenseur dépolarisant des deux phases s'écrit :

$$\underline{\underline{N}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_x},\mathbf{u_y},\mathbf{u_z})} \tag{5.3}$$

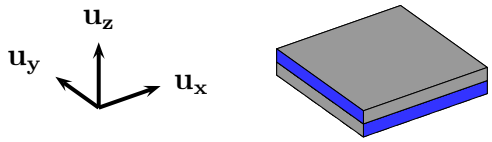
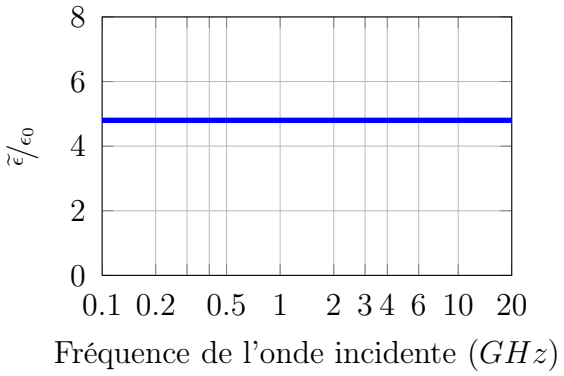


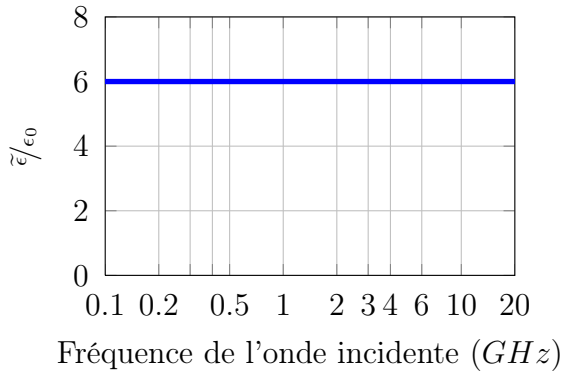
FIGURE 5.8 – *Schéma de la plaque constituée des plis homogénéisés.*

La distribution particulière des phases simplifie cette étape d'homogénéisation. L'équation (2.15) fournie par la superposition des problèmes d'inclusion se ramène aux bornes du modèle de WIENER. Les propriétés effectives dans les directions $\mathbf{u_x}$ et $\mathbf{u_y}$ sont fournies par la borne inférieure et dans la direction $\mathbf{u_z}$ par la borne supérieure. Elles sont tracées sur la figure 5.9. Le milieu homogène équivalent est lui aussi isotrope transverse. Ses propriétés sont identiques dans les directions $\mathbf{u_x}$ et $\mathbf{u_y}$ ($\widetilde{\epsilon}_x^* = \widetilde{\epsilon}_y^*$).

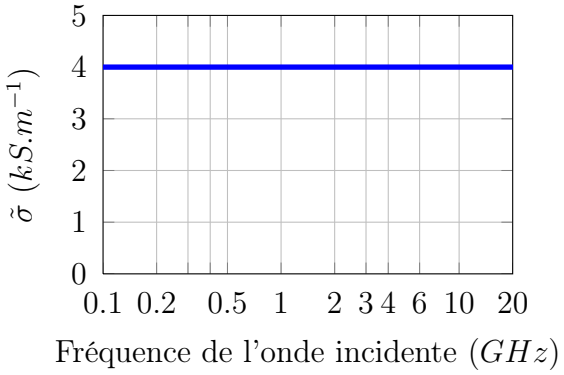
Les deux plis ont les mêmes propriétés effectives suivant $\mathbf{u_z}$ (figures 5.7(a) et 5.7(c)). On retrouve donc ces mêmes propriétés effectives pour la plaque dans la direction $\mathbf{u_z}$ (figures 5.9(b) et 5.9(d)). Le MHE à la plaque a une permittivité quasi-isotrope. Mais sa conductivité est encore fortement anisotrope en raison de l'anisotropie de la conductivité effective des plis homogénéisés. Elle est très faible dans la direction normale à la plaque et assez élevée dans les directions transversales. On remarque sur la figure 5.9(d), que seule la conductivité normale du MHE dépend de la fréquence.



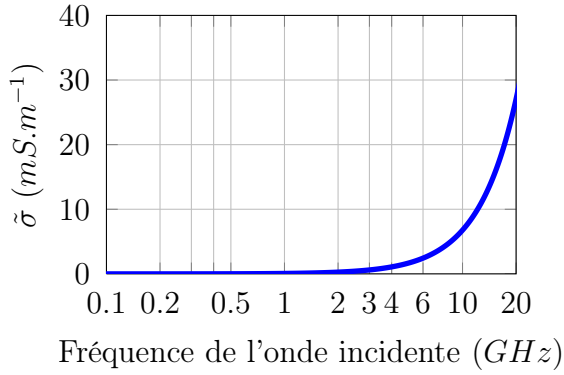
(a) Permittivité relative du MHE à la plaque dans les directions $\mathbf{u_x}$ et $\mathbf{u_y}$.



(b) Permittivité relative du MHE à la plaque dans la direction $\mathbf{u_z}$.



(c) Conductivité du MHE à la plaque dans les directions $\mathbf{u_x}$ et $\mathbf{u_y}$.

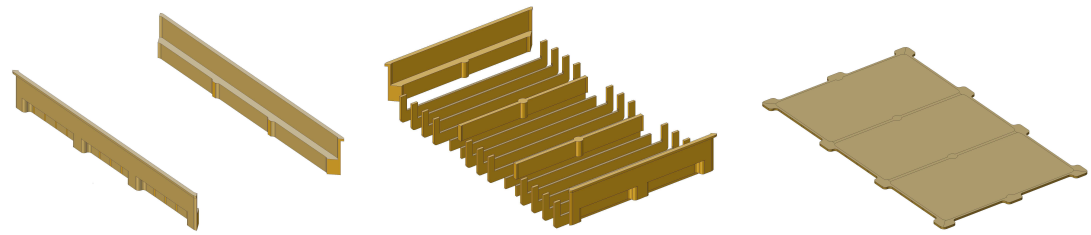


(d) Conductivité du MHE à la plaque dans la direction $\mathbf{u_z}$.

FIGURE *5.9* – *Propriétés du milieu homogène équivalent (MHE) à la plaque (figure 5.8) obtenues avec la méthode d'homogénéisation dynamique étendue.*

5.2.2.3 Découpage de la pièce en composite

Le milieu homogène équivalent à la plaque étant anisotrope, les propriétés effectives à appliquer dépendent de l'orientation des différentes parties du boîtier. Pour y parvenir, le boîtier est découpé en fonction des normales à ses parois (figure 5.10). Toutes les parois ayant la même normale se voient affecter les mêmes propriétés. Ainsi l'anisotropie du matériau composite est prise en compte malgré la complexité de la géométrie du boîtier.



(a) Faces orthonormales à $\mathbf{u_x}$ (b) Faces orthonormales à $\mathbf{u_y}$ (c) Face orthonormale à $\mathbf{u_z}$

FIGURE 5.10 – *Décomposition fictive de la pièce en composites.*

5.2.3 Maillage et résolution

Le maillage de la géométrie (figure 5.11) est limité à environ 200 000 éléments tétraédriques pour ne pas dépasser la capacité du calculateur. Comme l'épaisseur des pièces du boîtier ($\approx 2\ mm$) est faible comparée à la dimension globale de la géométrie à mailler ($250\ mm$), il ne peut y avoir qu'un seul élément dans l'épaisseur. Pour prendre en compte les détails de la microstructure, les éléments du maillage des différentes pièces du boîtier sont compris entre 1 et 6 mm. La dimension des éléments dans l'air augmente progressivement pour atteindre un maximum de 25 mm dans les PML. Les éléments sont d'ordre 1, conduisant le calcul à plus de 12 000 000 de degrés de liberté. Les calculs effectués avec ce maillage convergent jusqu'à une fréquence de 5 GHz. À cette fréquence, la longueur d'onde est égale à $\lambda = 60\ mm$. Pour les fréquences plus élevées, la dimension de la boîte d'air et des PML doit être réduite pour que la taille des éléments dans l'air puisse être inférieur à $\lambda/8$ sans dépasser les capacités de calcul.

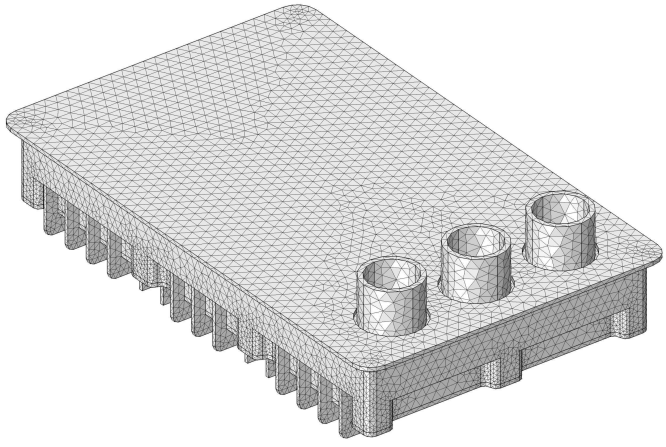


FIGURE 5.11 – *Maillage du boîtier.*

Les calculs sont effectués avec le solveur itératif GMRES pour différentes fréquences d'onde incidente. Le calcul à 3 GHz a nécessité 1040 itérations et plus de 24 heures de calcul pour converger (*tolérance relative* $< 10^{-6}$) sur un ordinateur équipé de deux processeurs INTEL XEON® 4 cœurs à 3.30 GHz.

5.3 Résultats

Les simulations effectuées par éléments finis permettent de calculer le champ électrique en tout point du domaine modélisé (figure 5.12). Il est ensuite possible de le mesurer en plusieurs points précis afin de déterminer si le boîtier remplit son rôle. La norme du champ électrique mesuré au centre du boîtier permet de caractériser le coefficient de blindage (figure 5.13) en fonction de la fréquence. Ce calcul de blindage n'est pas représentatif des différentes valeurs du champ électrique au sein du boîtier, mais il permet de caractériser les fréquences (1 GHz pour ce boîtier), pour lesquelles le blindage du boîtier est critique. Cette configuration seule ne suffit pas à caractériser le comportement électromagnétique du boîtier. Il est nécessaire d'effectuer d'autres simulations, en changeant l'incidence et la polarisation de l'onde incidente.

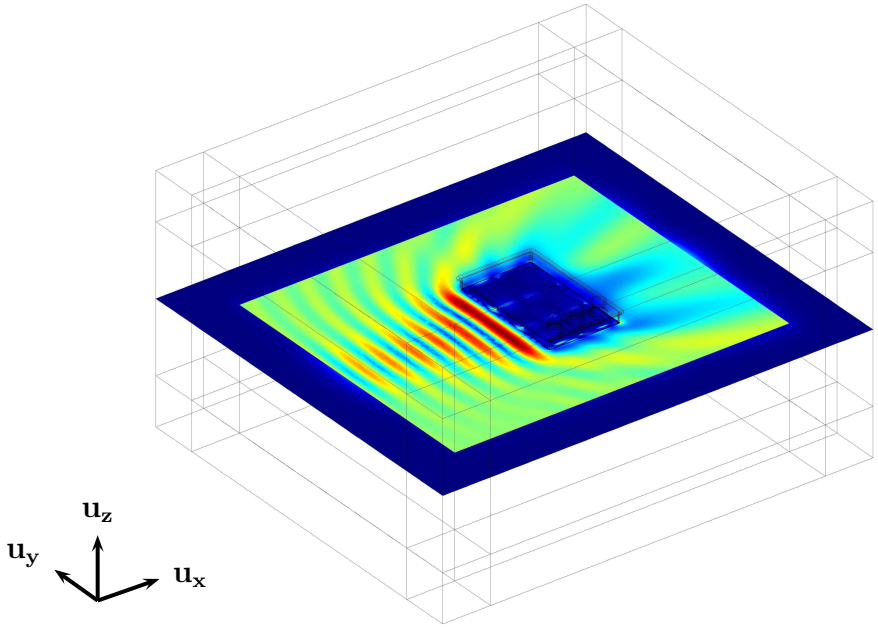


FIGURE 5.12 – *Norme du champ électrique calculé par éléments finis sur un plan du domaine modélisé, pour une onde incidente à* 3 GHz.

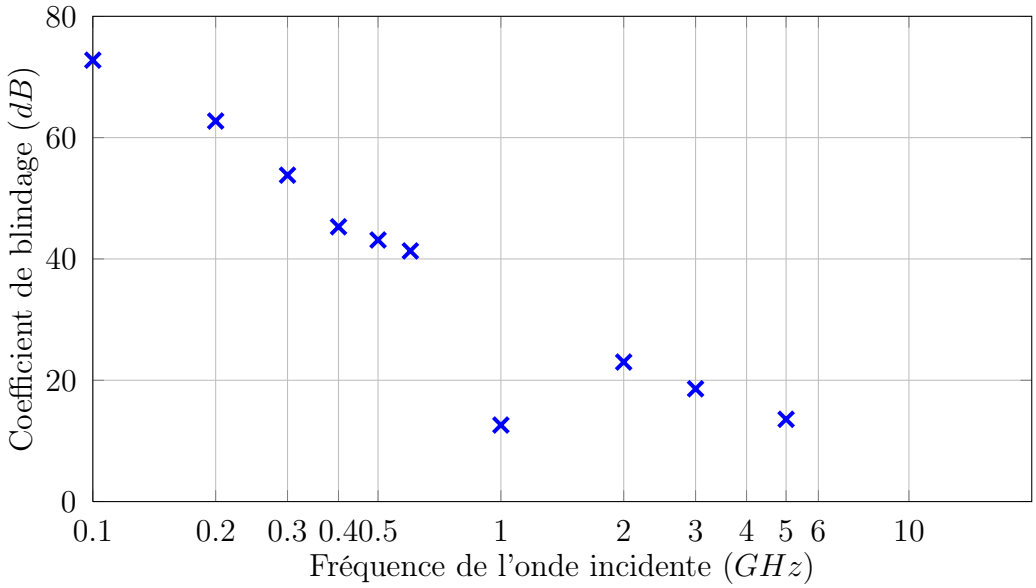


FIGURE *5.13* – *Coefficient de blindage, calculé au centre du boîtier.*

Le boîtier d'un FADEC n'a pas seulement un rôle de blindage électromagnétique. Les différents critères imposés par l'Organisation Européenne pour l'Équipement de l'Aviation Civile (EUROCAE) doivent être pris en compte dès le début de la conception du boîtier. Les méthodes d'homogénéisation développées ici peuvent servir à modéliser différents composites. Mais le choix des matériaux utilisés (carbone/epoxy) n'est pas définitif, compte tenu des critères thermiques, mécaniques et de tenue au feu imposés à un boîtier de FADEC.

Le mode de fabrication de boîtiers à partir de tissages de fibres de carbone implique des incertitudes au niveau des jonctions entre les différentes plaques. En effet, il est possible qu'il y ait des espaces comblés par de la colle le long d'une jonction entre deux plaques, formant de fines zones sans matériau conducteur. Comme les ouvertures dégradent sévèrement les capacités de blindage d'un boîtier fermé, il est impératif d'en tenir compte. Une solution possible pour éviter ces ouvertures est le recours au moulage. Ce procédé de fabrication présente de nombreux avantages qui permettraient d'éviter l'assemblage de tissages. Mais il impose de fabriquer des pièces composites constituées de fibres courtes ou d'inclusions sphéroïdales nécessitant d'étendre les méthodes d'homogénéisation dynamiques à des microstructures 3D.

Conclusion - Perspectives

La modélisation de matériaux composites est un domaine d'étude qui bénéficie d'un intérêt croissant. En effet, la démocratisation de l'utilisation de tels matériaux nécessite de développer de nouveaux modèles afin de mieux comprendre leur comportement. L'industrie aéronautique s'efforce d'optimiser le choix des matériaux en fonction des sollicitations propres à chaque application, afin de réduire la masse des aéronefs. Dans le cas des matériaux composites avec des fonctions de compatibilité électromagnétique, leur généralisation en aéronautique se heurte à la méconnaissance de leur comportement dynamique. C'est pourquoi il est nécessaire de développer des modèles performants pour permettre leur utilisation en toute sécurité.

Ce travail de thèse s'est concentré sur la modélisation de matériaux composites appliqués au blindage de boîtiers d'équipement électronique. Pour parvenir à une modélisation formelle, ce travail repose sur une méthode d'homogénéisation analytique basée sur des problèmes d'inclusion. Cette méthode est simple, rapide à mettre en œuvre et fournit une estimation pertinente des propriétés effectives. Elle repose sur deux paramètres essentiels : la distribution des phases qui permet de définir la forme des inclusions et les propriétés du milieu de référence qui permettent de décrire les interactions entre les phases. Le modèle est ainsi adaptable à une large gamme de microstructures et de phénomènes physiques. Les propriétés effectives obtenues peuvent ensuite être introduites dans des modèles numériques afin d'appréhender le comportement de boîtiers de blindage.

La première méthode d'homogénéisation dynamique, présentée dans ce mémoire, est obtenue en intégrant un effet de taille dans la définition du milieu de référence. En effet, la gamme de validité des modèles classiques est limitée par l'interaction entre l'onde incidente et la structure des matériaux. Cet effet de taille est défini par le ratio entre la taille caractéristique de la microstructure et la longueur d'onde dans le matériau homogène équivalent (γ/λ). La méthode d'homogénéisa-

tion dynamique ainsi obtenue permet d'étendre la gamme de validité du modèle de MAXWELL-GARNETT. Pour caractériser son domaine d'application, elle est utilisée pour modéliser des microstructures constituées de fibres longues conductrices, diluées dans une matrice diélectrique. Pour les différentes applications numériques, le taux de fibres est inférieur à 40 %, leur conductivité est inférieure à 10 000 $S.m^{-1}$ et leur diamètre est compris entre 50 et 200 μm. La gamme de validité de la méthode d'homogénéisation dynamique est limitée par l'effet de peau dans les fibres. L'estimation des propriétés effectives fournie n'est plus valable lorsque l'épaisseur de peau atteint le rayon des fibres ($2\delta_2 = \varnothing$).

La méthode d'homogénéisation dynamique est limitée par les effets induits dans les fibres. Par conséquent, il est nécessaire de prendre en compte ces effets dans la définition du milieu de référence pour étendre son domaine de validité. C'est pourquoi, les pertes par effet Joule sont intégrées à la définition du milieu de référence pour obtenir la méthode d'homogénéisation dynamique étendue. Le milieu de référence de cette méthode d'homogénéisation est défini de telle sorte que les pertes par effet Joule qu'il dissipe soient équivalentes à celles dissipées dans les fibres. Les applications numériques effectuées pour mettre en évidence le domaine de validité de cette méthode sont réalisées sur les mêmes microstructures, mais avec des valeurs de conductivité des fibres plus élevées (jusqu'à 100 000 $S.m^{-1}$). Les estimations du coefficient de blindage obtenues sont en bon accord avec les calculs par éléments finis mais avec un temps de calcul beaucoup plus court. Grâce à cette méthode, la modélisation du comportement électromagnétique dynamique de matériaux composites n'est plus restreinte par les effets dissipatifs qui interviennent dans les renforts conducteurs. L'utilisation de la méthode d'homogénéisation dynamique étendue est principalement limitée par son estimation de la permittivité du milieu homogène équivalent. En effet, seule la conductivité du milieu de référence de la méthode d'homogénéisation dynamique étendue est définie en fonction des effets dynamiques. Lorsque la contribution de la permittivité devient prépondérante, la qualité de l'estimation du coefficient de blindage diminue. Cet effet est observable à haute fréquence. Mais cette restriction ne contrarie pas la modélisation des composites envisagés pour la fabrication de boîtiers de blindage, comme les matériaux constitués de fibres de carbone diluées dans une matrice epoxy.

Les deux méthodes développées permettent une compréhension physique étendue du comportement électromagnétique de matériaux composites. Grâce aux formulations analytiques développées, il est possible de quantifier la contribution de

chacun des paramètres des matériaux au coefficient de blindage. Une des interprétations physiques possibles concerne l'influence des courants induits sur le blindage de plaques composites. En effet, l'apparition de courants induits dans les fibres augmente le coefficient de blindage. Il est donc tentant de les maximiser. Dans ce cas, l'effet de peau apparaîtra d'autant plus rapidement à haute fréquence. Mais l'effet de peau a pour conséquence de concentrer les courants induits sur le pourtour des fibres, ce qui réduit la dissipation d'énergie par effet Joule, donc le coefficient de blindage. Il faut favoriser l'apparition de courants induits tout en limitant l'effet de peau, or ces deux phénomènes sont concurrents. En conclusion, la conception d'un matériau composite ayant un coefficient de blindage optimal sur une large gamme de fréquences est un processus assez subtil. Les méthodes d'homogénéisation dynamique développées sont des outils adaptés pour parvenir à un tel optimum.

Les méthodes d'homogénéisation dynamique développées dans cette thèse sont semi-analytiques. Elles sont rapides et nécessitent peu de ressources informatiques contrairement aux méthodes numériques. Ces méthodes sont simples, faciles à mettre en œuvre et applicables à de nombreux matériaux biphasés. Elles sont bien adaptées à l'étape de pré-dimensionnement de matériaux composites pour le blindage de boîtiers d'équipement électronique. De plus, l'utilisation des milieux homogènes équivalents obtenus, simplifiant l'opération de maillage et la résolution, permettent la modélisation numérique de dispositifs complexes.

La principale piste de développement de la méthode d'homogénéisation dynamique étendue est la prise en compte de renforts conducteurs de géométries différentes. En effet, cette méthode est pour l'instant limitée à la modélisation de fibres longues. La démarche développée en deux dimensions peut être étendue pour calculer les pertes dissipées dans des inclusions sphéroïdales. De plus, il serait intéressant d'étendre la méthode au comportement magnétique. Cela permettrait de modéliser des matériaux comme les SMC (Soft Magnetic Composite).

Le cas des ondes ayant une incidence oblique n'est pas traitée dans ce mémoire. Il serait intéressant d'étudier la validité du modèle, principalement dans le cas où la direction de l'onde incidente n'est pas perpendiculaire aux fibres. Il est également possible d'affiner la prédiction des propriétés effectives du milieu homogène équivalent à hautes fréquences. Cette amélioration nécessite de caractériser la dépendance en fréquence de la permittivité du milieu de référence, et ainsi, étendre la méthode à des fréquences pour lesquelles l'effet de peau est très élevé (par exemple les conducteurs parfaits). Au préalable, pour apprécier l'utilité de cette

amélioration, il convient de comparer la méthode avec des essais expérimentaux. La méthode d'homogénéisation dynamique étendue étant limitée par les fractions volumiques élevées, il est sûrement possible d'étendre son domaine de validité en modifiant la structure du milieu de référence. Une des pistes possibles pour palier à ce problème est de choisir un milieu de référence auto-cohérent. En basant le développement sur la même démarche, il est envisageable d'étendre la modélisation dynamique à des phénomènes physiques différents (thermique, mécanique, ...) et imaginer modéliser des phénomènes couplés ou non-linéaires.

Bibliographie

Bariou, D., P. Queffelec, P. Gelin et M. Le Floc'h (2001). « Extension of the effective medium approximation for determination of the permeability tensor of unsaturated polycrystalline ferrites ». *IEEE Transactions on Magnetics* 37.6, p. 3885–3891.

Bordianu, A., O. de la Barriere, O. Bottauscio, M. Chiampi et A. Manzin (2012). « A Multiscale Approach to Predict Classical Losses in Soft Magnetic Composites ». *IEEE Transactions on Magnetics* 48.4, p. 1537–1540.

Bornert, M., T. Bretheau et P. Gilormini (2001). « Homogénéisation en mécanique des matériaux ». Hermes Science Publications.

Bottauscio, O., M. Chiampi et A. Manzin (2009). « Homogenized Magnetic Properties of Heterogeneous Anisotropic Structures Including Nonlinear Media ». *IEEE Transactions on Magnetics* 45.10, p. 3946–3949.

Bruggeman, D. (1935). « Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. I. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten der Mischkörper aus isotropen Substanzen ». *Annalen der Physik* 416, p. 636–664.

Corcolle, R. (2009). *Détermination de lois de comportement couplé par des techniques d'homogénéisation : Application aux matériaux du Génie Électrique*.

Cyr, C., P. Viarouge, S. Clenet et J. Cros (2009). « Methodology to Study the Influence of the Microscopic Structure of Soft Magnetic Composites on Their Global Magnetization Curve ». *IEEE Transactions on Magnetics* 45.3, p. 1178–1181.

Daniel, L. et R. Corcolle (2007). « A Note on the Effective Magnetic Permeability of Polycrystals ». *IEEE Transactions on Magnetics* 43.7, p. 3153–3158.

De Rosa, I.M., R. Mancinelli, F. Sarasini, M.S. Sarto et A. Tamburrano (2009). « Electromagnetic Design and Realization of Innovative Fiber-Reinforced Broad-Band Absorbing Screens ». *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 51.3, p. 700–707.

Einstein, A. (1905). « A new determination of molecular dimensions ». *Annalen der Physik* 19, p. 289–306.

El Feddi, M., Z. Ren, A. Razek et A. Bossavit (1997). « Homogenization technique for Maxwell equations in periodic structures ». *IEEE Transactions on Magnetics* 33.2, p. 1382–1385.

Eshelby, J.D. (1957). « The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems ». *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 241.1226, p. 376–396.

Faraday, M. (1832). « Experimental Researches in Electricity ». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 122, p. 125–162.

Floc'h, M. Le, J.L. Mattei, P. Laurent, O. Minot et A.M. Konn (1995). « A physical model for heterogeneous magnetic materials ». *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 140–144, Part 3, p. 2191 –2192.

Harrington, R.F. (1961). *Time-harmonic electromagnetic fields*. McGraw-Hill electrical and electronic engineering series. McGraw-Hill.

Hashin, Z. (1962). « The Elastic Moduli of Heterogeneous Materials ». *Journal of Applied Mechanics* 29, p. 143–150.

Hashin, Z. et S. Shtrikman (1962). « A Variational Approach to the Theory of the Effective Magnetic Permeability of Multiphase Materials ». *Journal of Applied Physics* 33.10, p. 3125–3131.

— (1963). « A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials ». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11.2, p. 127–140.

Hershey, A. (1954). « The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals ». *Journal of Applied Mechanics* 21.3, p. 236–240.

Hill, R. (1965). « Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals ». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13.2, p. 89–101.

Holloway, C.L., M.S. Sarto et M. Johansson (2005). « Analyzing carbon-fiber composite materials with equivalent-Layer models ». *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 47.4, p. 833–844.

Karkkainen, K.K., A.H. Sihvola et K.I. Nikoskinen (2000). « Effective permittivity of mixtures : numerical validation by the FDTD method ». *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 38.3, p. 1303–1308.

Koledintseva, M.Y., J.L. Drewniak, R.E. DuBroff, K.N. Rozanov et B. Archambeault (2009). « Modeling of shielding composite materials and structures for microwave frequencies ». *Progress In Electromagnetics Research B* 15, p. 197–215.

Koledintseva, M.Y., R.E. DuBroff et R.W. Schwartz (2006). « A Maxwell Garnett Model for Dielectric Mixtures Containing Conducting Particles at Optical Frequencies ». *Progress In Electromagnetics Research* 63, p. 223–242.

Kröner, E. (1958). « Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls ». *Zeitschrift für Physik* 151.4, p. 504–518.

Kuester, E.F. et C.L. Holloway (1990). « Comparison of approximations for effective parameters of artificial dielectrics ». *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on* 38.11, p. 1752–1755.

— (1994). « A low-frequency model for wedge or pyramid absorber arrays-I : theory ». *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 36.4, p. 300–306.

Kuzhir, P.P., A.G. Paddubskaya, S.A. Maksimenko, V.L. Kuznetsov, S. Moseenkov, A.I. Romanenko, O.A. Shenderova, J. Macutkevic, G. Valušis et P. Lambin (2012). « Carbon Onion Composites for EMC Applications ». *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 54.1, p. 6–16.

Lagarkov, A.N. et A.K. Sarychev (mar. 1996). « Electromagnetic properties of composites containing elongated conducting inclusions ». *Physical Review B* 53 (10), p. 6318–6336.

Maxwell-Garnett, J.C. (1904). « Colours in Metal Glasses and in Metallic Films ». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 203.359-371, p. 385–420.

Maxwell, J.C. (1873). *A Treatise on Electricity and Magnetism*. T. 1. Oxford, United Kingdom : Clarendon Presss.

Milton, Graeme W. (2002). « The Theory of Composites ». Cambridge University Press.

Nisanci, M.H., F. De Paulis, M.Y. Koledintseva, J.L. Drewniak et A. Orlandi (2012). « From Maxwell Garnett to Debye Model for Electromagnetic Simulation of Composite Dielectrics-Part II : Random Cylindrical Inclusions ». *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 54.2, p. 280–289.

Niyonzima, I., R.V. Sabariego, P. Dular et C. Geuzaine (2012). « Finite Element Computational Homogenization of Nonlinear Multiscale Materials in Magnetostatics ». *IEEE Transactions on Magnetics* 48.2, p. 587–590.

Ollendorff, F. (1931). « Magnetostatik der Massekerne ». *Archiv für Elektrotechnik* 25.6, p. 436–447.

Ouchetto, O., H. Ouchetto, S. Zouhdi et A. Sekkaki (2013). « Homogenization of Maxwell's Equations in Lossy Biperiodic Metamaterials ». *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 61.8, p. 4214–4219.

Petit, R. (1989). « Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique ». Masson.

Poisson, S.D. (1825). « Mémoire sur la théorie du magnétisme ». Imprimerie royale.

Preault, V., R. Corcolle, L. Daniel et L. Pichon (2013a). « Effective Permittivity of Shielding Composite Materials for Microwave Frequencies ». *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 55.6, p. 1178–1186.

— (2013b). « Shielding Effectiveness of Composite Materials : Effect of Inclusion Shape ». *IEEE Transactions on Magnetics* 49.5, p. 1941–1944.

Queffelec, P., D. Bariou et P. Gelin (2005). « A predictive model for the permeability tensor of magnetized heterogeneous materials ». *IEEE Transactions on Magnetics* 41.1, p. 17–23.

Rayleigh, J.W.S. (1892). « On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium ». *Philosophical Magazine* 34, p. 481–502.

Reuss, A. (1929). « Calculation of the flow limits of mixed crystals on the basis of the plasticity of monocrystals ». *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 9, p. 49–58.

Sacks, Z.S., D.M. Kingsland, R. Lee et Jin-Fa Lee (1995). « A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition ». *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 43.12, p. 1460–1463.

Sareni, B., L. Krahenbuhl, A. Beroual et C. Brosseau (1997). « Effective dielectric constant of random composite materials ». *Journal of Applied Physics* 81.5, p. 2375–2383.

Sarto, M.S., A.G. D'Aloia, A. Tamburrano et G. De Bellis (2012). « Synthesis, Modeling, and Experimental Characterization of Graphite Nanoplatelet-Based Composites for EMC Applications ». *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 54.1, p. 17–27.

Schelkunoff, S.A. (1943). *Electromagnetic Waves*. Bell Telephone Laboratories series. Van Nostrand.

Sihvola, A.H. (1999). « Electromagnetic Mixing Formulae and Applications ». IEE Publication Series. Institution of Electrical Engineering.

Sihvola, A.H. et I.V. Lindell (1996). « Electrostatic of an Anisotropic Ellipsoid in an Anisotropic Environnement ». *AE International Journal of Electronics and Communications* 50.5, p. 289–292.

Stratton, J.A. (1941). « Electromagnetic Theory ». McGraw-Hill book.

Stroud, D. (oct. 1975). « Generalized effective-medium approach to the conductivity of an inhomogeneous material ». *Physical Review B* 12 (8), p. 3368–3373.

Torquato, S. (2002). « Random Heterogeneous Materials : Microstructure and Macroscopic Properties ». Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer.

Tsang, L. et J.A. Kong (1980). « Multiple scattering of electromagnetic waves by random distributions of discrete scatterers with coherent potential and quantum mechanical formalism ». *Journal of Applied Physics* 51.7, p. 3465–3485.

Voigt, W. (1889). « Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper ». *Annalen der Physik* 274.12, p. 573–587.

Waki, H., H. Igarashi et T. Honma (2006). « Analysis of magnetic shielding effect of layered shields based on homogenization ». *IEEE Transactions on Magnetics* 42.4, p. 847–850.

Wasselynck, G., D. Trichet et J. Fouladgar (2013). « Determination of the Electrical Conductivity Tensor of a CFRP Composite Using a 3-D Percolation Model ». *IEEE Transactions on Magnetics* 49.5, p. 1825–1828.

Wiener, O. (1913). « Die Theorie des Mischkörpers für das Feld der stationären Strömung : Die Mittelwertsätze für Kraft, Polarisation und Energie ». Abhandlungen der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften vol. 1. Hirzel.

Annexes

Annexe A

Relation de passage d'une onde plane progressive monochromatique

Sommaire

A.1 Définition du problème 104
A.2 Conditions aux limites 105
A.3 Coefficient de Transmission et de Réflexion 106

A.1 Définition du problème

Le comportement d'une interface entre deux milieux homogènes distincts, soumise au rayonnement d'une onde EM, peut être modélisé analytiquement (Harrington 1961). Lorsque une onde illumine une interface, une partie de l'onde est réfléchie et le reste passe à travers. L'amplitude complexe du champ électrique de l'onde réfléchie E_R et celle de l'onde transmise E_T peuvent êtres calculées à partir des équations de Maxwell (1.1) et des conditions aux limites présentées dans le tableau 1.1. Pour simplifier les calculs, on considère l'interface illuminée par une OPPM, polarisée électriquement suivant $\mathbf{u_z}$, ayant une incidence normale (figure A.1). Les deux milieux sont considérés magnétiquement isotropes ($\underline{\underline{\mu}}_i = \mu_i \underline{\underline{I}}$).

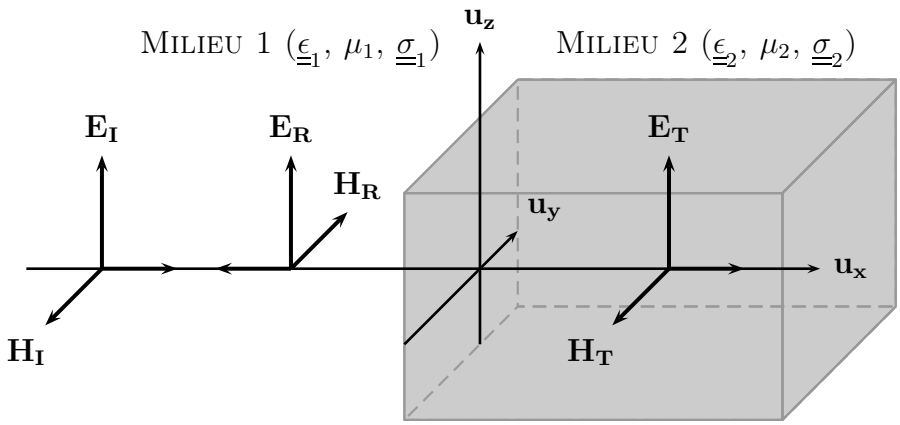


Figure *A.1* – *Onde réfléchie et transmise par une interface plane soumise à une OPPM polarisée suivant* $\mathbf{u_z}$ *ayant une incidence normale.*

Les champs, électrique et magnétique de l'onde incidente, s'expriment :

$$\mathbf{E}_I(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 e^{\jmath(\omega t - k_1 x)} \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_x},\mathbf{u_y},\mathbf{u_z})} \qquad \mathbf{H}_I(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_0 \dfrac{k_1}{\mu_1 \omega} e^{\jmath(\omega t - k_1 x)} \\ 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_x},\mathbf{u_y},\mathbf{u_z})} \tag{A.1}$$

où $k_1 = \sqrt{\epsilon_{z1}\mu_1\omega^2 - \jmath\mu_1\sigma_{z1}\omega}$ est la constante de propagation de l'onde dans le milieu 1. L'onde réfléchie se propage dans le milieu 1 dans la direction opposée de

l'onde incidente. Ses champs peuvent s'écrire :

$$\mathbf{E}_R(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_R e^{\jmath(\omega t + k_1 x)} \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_x},\mathbf{u_y},\mathbf{u_z})} \quad \mathbf{H}_R(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_R \dfrac{k_1}{\mu_1 \omega} e^{\jmath(\omega t + k_1 x)} \\ 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_x},\mathbf{u_y},\mathbf{u_z})} \tag{A.2}$$

L'onde transmise se propage dans le milieu 2 dans la même direction que l'onde incidente. Ses champs peuvent s'écrire :

$$\mathbf{E}_T(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_T e^{\jmath(\omega t - k_2 x)} \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_x},\mathbf{u_y},\mathbf{u_z})} \quad \mathbf{H}_T(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_T \dfrac{k_2}{\mu_2 \omega} e^{\jmath(\omega t - k_2 x)} \\ 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_x},\mathbf{u_y},\mathbf{u_z})} \tag{A.3}$$

avec $k_2 = \sqrt{\epsilon_{z2}\mu_2\omega^2 - \jmath\mu_2\sigma_{z2}\omega}$, la constante de propagation de l'onde dans le milieu 2.

A.2 Conditions aux limites

Pour déterminer les amplitudes complexes des champs rayonnés par l'interface, il faut appliquer les conditions aux limites appropriées. On considère le milieu 1 ($\underline{\underline{\epsilon}}_1$, μ_1, $\underline{\underline{\sigma}}_1$) et le milieu 2 ($\underline{\underline{\epsilon}}_2$, μ_2, $\underline{\underline{\sigma}}_2$) légèrement conducteurs (cas 2 du tableau 1.1) pour que l'onde puisse se propager dans les deux milieux. Dans ce cas, les conditions aux limites s'appliquant sur les composantes tangentielles des champs (électrique et magnétique) s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_I(x_0,t).\mathbf{u_z} + \mathbf{E}_R(x_0,t).\mathbf{u_z} = \mathbf{E}_T(x_0,t).\mathbf{u_z} \\ \mathbf{H}_I(x_0,t).\mathbf{u_y} + \mathbf{H}_R(x_0,t).\mathbf{u_y} = \mathbf{H}_T(x_0,t).\mathbf{u_y} \end{cases} \tag{A.4}$$

Les équations du système à résoudre (A.4) peuvent être simplifiées par $e^{\jmath\omega t}$. Elles deviennent ainsi indépendantes du temps. Pour simplifier les équations, on pose $x_0 = 0$:

$$\begin{cases} E_0 + E_R = E_T \\ -E_0 \dfrac{k_1}{\mu_1} + E_R \dfrac{k_1}{\mu_1} = -E_T \dfrac{k_2}{\mu_2} \end{cases} \tag{A.5}$$

Après résolution, on obtient l'amplitude complexe du champ électrique réfléchi et celle du champ électrique transmis en fonction de celle du champ incident :

$$\begin{cases} E_R = \dfrac{\dfrac{k_1}{\mu_1} - \dfrac{k_2}{\mu_2}}{\dfrac{k_1}{\mu_1} + \dfrac{k_2}{\mu_2}} E_0 \\ E_T = \dfrac{2\dfrac{k_1}{\mu_1}}{\dfrac{k_1}{\mu_1} + \dfrac{k_2}{\mu_2}} E_0 \end{cases} \tag{A.6}$$

Les champs électriques rayonnés par l'interface s'écrivent :

$$\mathbf{E}_R(x,t) = \frac{\dfrac{k_1}{\mu_1} - \dfrac{k_2}{\mu_2}}{\dfrac{k_1}{\mu_1} + \dfrac{k_2}{\mu_2}} E_0 e^{\jmath(\omega t + k_1 x)} \mathbf{u_z} \tag{A.7}$$

$$\mathbf{E}_T(x,t) = \frac{2\dfrac{k_1}{\mu_1}}{\dfrac{k_1}{\mu_1} + \dfrac{k_2}{\mu_2}} E_0 e^{\jmath(\omega t - k_2 x)} \mathbf{u_z} \tag{A.8}$$

A.3 Coefficient de Transmission et de Réflexion

Le coefficient de réflexion q_I de l'interface est défini comme le rapport de l'amplitude complexe du champ électrique réfléchi E_R sur celle du champ électrique incident E_I :

$$q_I = \frac{E_R}{E_I} = \frac{\dfrac{n_1}{\mu_1} - \dfrac{n_2}{\mu_2}}{\dfrac{n_1}{\mu_1} + \dfrac{n_2}{\mu_2}} \tag{A.9}$$

avec n_i et μ_i, respectivement l'indice ($n_i = {}^{k_i}/_{k_0}$) et la perméabilité du milieu i ($i = 1, 2$).

De même pour le coefficient de transmission p_I, défini par le rapport de l'amplitude complexe du champ électrique transmis E_T sur celle du champ électrique incident :

$$p_I = \frac{E_T}{E_I} = \frac{2\dfrac{n_1}{\mu_1}}{\dfrac{n_1}{\mu_1} + \dfrac{n_2}{\mu_2}} \tag{A.10}$$

Annexe B

Comportement d'une plaque homogène soumise à une onde plane progressive monochromatique

Sommaire

B.1 Définition du problème 108
B.2 Conditions aux limites 110
B.3 Onde réfléchie et transmise 111
B.4 Coefficient de blindage 112

B.1 Définition du problème

Le calcul du coefficient de blindage (Shielding Effectiveness) d'une plaque homogène, infinie, soumise à une OPPM ayant une polarisation rectiligne et une incidence normale a une solution analytique. La plupart des solutions analytiques disponibles dans la littérature (Schelkunoff 1943 ; Harrington 1961) ne sont applicables que pour des matériaux ayant une perméabilité égale à celle du vide. Le développement suivant permet de calculer analytiquement le coefficient de blindage d'une plaque homogène avec une perméabilité quelconque ($\underline{\underline{\epsilon}}$, $\underline{\underline{\mu}} = \mu\underline{\underline{I}}$, $\underline{\underline{\sigma}}$).

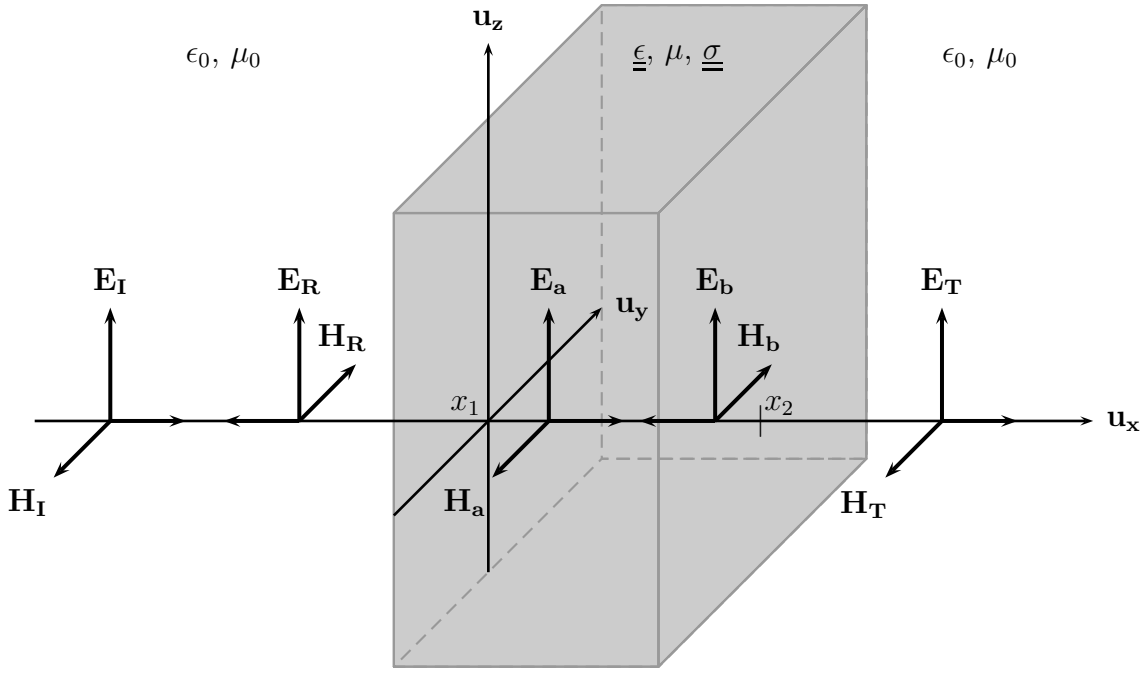


Figure *B.1* – *Onde réfléchie, onde transmise et ondes internes d'une plaque homogène entourée d'air, soumise à une OPPM polarisée suivant* $\mathbf{u_z}$ *ayant une incidence normale.*

Lorsque une plaque est illuminée par une onde électromagnétique, une partie de l'onde est réfléchie, une autre est transmise à travers la plaque et une troisième est absorbée (figure B.1). On considère l'onde incidente se propageant dans la direction

$\mathbf{u_x}$, polarisée électriquement suivant $\mathbf{u_z}$. Son champ électrique s'écrit :

$$\mathbf{E}_I(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 e^{\jmath(\omega t - k_0 x)} \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_x},\mathbf{u_y},\mathbf{u_z})} \tag{B.1}$$

avec $k_0 = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \omega^2}$ constante de propagation dans le vide. Le champ magnétique de l'onde incidente s'écrit :

$$\mathbf{H}_I(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{k_0}{\omega\mu_0} E_0 e^{\jmath(\omega t - k_0 x)} \\ 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_x},\mathbf{u_y},\mathbf{u_z})} \tag{B.2}$$

En amont de la plaque, le champ électrique est la somme du champ incident et du champ réfléchi se propageant dans la direction inverse :

$$\mathbf{E}_I(x,t) + \mathbf{E}_R(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 e^{\jmath(\omega t - k_0 x)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_R e^{\jmath(\omega t + k_0 x)} \end{pmatrix} \tag{B.3}$$

Le champ magnétique dans ce volume d'air s'écrit :

$$\mathbf{H}_I(x,t) + \mathbf{H}_R(x,t) = -\frac{k_0}{\mu_0\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 e^{\jmath(\omega t - k_0 x)} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{k_0}{\mu_0\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ E_R e^{\jmath(\omega t + k_0 x)} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.4}$$

Dans la plaque, les champs sont définis comme la somme de deux champs de directions opposées afin de modéliser les multiples réflexions des ondes :

$$\mathbf{E}_a(x,t) + \mathbf{E}_b(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a e^{\jmath(\omega t - k x)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b e^{\jmath(\omega t + k x)} \end{pmatrix} \tag{B.5}$$

$$\mathbf{H}_a(x,t) + \mathbf{H}_b(x,t) = -\frac{k}{\mu\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ a e^{\jmath(\omega t - k x)} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{k}{\mu\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ b e^{\jmath(\omega t + k x)} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.6}$$

avec $k = \sqrt{\epsilon_z \mu \omega^2 - \jmath \mu \sigma_z \omega}$ la constante de propagation dans la plaque.

En aval de la plaque, l'onde transmise est définie comme une OPPM :

$$\mathbf{E}_T(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_T e^{\jmath(\omega t - k_0 x)} \end{pmatrix} \tag{B.7}$$

$$\mathbf{H}_T(x,t) = -\frac{k_0}{\mu_0\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ E_T e^{\jmath(\omega t - k_0 x)} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.8}$$

B.2 Conditions aux limites

Puisqu'il y a continuité des champs tangentiels aux interfaces (tableau 1.1), on peut écrire le système suivant en $x = x_1$:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_I(x_1,t).\mathbf{u_z} + \mathbf{E}_R(x_1,t).\mathbf{u_z} = \mathbf{E}_a(x_1,t).\mathbf{u_z} + \mathbf{E}_b(x_1,t).\mathbf{u_z} \\ \mathbf{H}_I(x_1,t).\mathbf{u_y} + \mathbf{H}_R(x_1,t).\mathbf{u_y} = \mathbf{H}_a(x_1,t).\mathbf{u_y} + \mathbf{H}_b(x_1,t).\mathbf{u_y} \end{cases} \tag{B.9}$$

et en $x = x_2$:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_a(x_2,t).\mathbf{u_z} + \mathbf{E}_b(x_2,t).\mathbf{u_z} = \mathbf{E}_T(x_2,t).\mathbf{u_z} \\ \mathbf{H}_a(x_2,t).\mathbf{u_y} + \mathbf{H}_b(x_2,t).\mathbf{u_y} = \mathbf{H}_T(x_2,t).\mathbf{u_y} \end{cases} \tag{B.10}$$

Les équations de ces systèmes peuvent être simplifiées par $e^{\jmath\omega t}$. Elles deviennent ainsi indépendantes du temps :

$$\begin{cases} E_0 e^{-\jmath k_0 x_1} + E_R e^{\jmath k_0 x_1} = a e^{-\jmath k x_1} + b e^{\jmath k x_1} \\ -\dfrac{k_0}{\mu_0} E_0 e^{-\jmath k_0 x_1} + \dfrac{k_0}{\mu_0} E_R e^{\jmath k_0 x_1} = -\dfrac{k}{\mu} a e^{-\jmath k x_1} + \dfrac{k}{\mu} b e^{\jmath k x_1} \\ a e^{-\jmath k x_2} + b e^{\jmath k x_2} = E_T e^{-\jmath k_0 x_2} \\ -\dfrac{k}{\mu} a e^{-\jmath k x_2} + \dfrac{k}{\mu} b e^{\jmath k x_2} = -\dfrac{k_0}{\mu_0} E_T e^{-\jmath k_0 x_2} \end{cases} \tag{B.11}$$

Pour simplifier, posons $x_1 = 0$ et $x_2 = l$, où l est l'épaisseur de la plaque. On peut réécrire les équations (B.11) par :

$$\begin{cases} E_0 + E_R = a + b \\ E_0 - E_R = \dfrac{n}{\mu_r} a - \dfrac{n}{\mu_r} b \\ a e^{-\jmath k l} + b e^{\jmath k l} = E_T e^{-\jmath k_0 l} \\ \dfrac{n}{\mu_r} a e^{-\jmath k l} - \dfrac{n}{\mu_r} b e^{\jmath k l} = E_T e^{-\jmath k_0 l} \end{cases} \tag{B.12}$$

avec n l'indice de la plaque. Après résolution du système (B.12), on obtient :

$$\begin{cases} E_R = E_0 \dfrac{(n+\mu_r)(n-\mu_r)}{(n-\mu_r)^2 - (n+\mu_r)^2 e^{2\jmath k l}} \left(e^{2\jmath k l} - 1\right) \\ a = E_0 \dfrac{-2\mu_r (n+\mu_r)}{(n-\mu_r)^2 - (n+\mu_r)^2 e^{2\jmath k l}} e^{2\jmath k l} \\ b = E_0 \dfrac{-2\mu_r (n-\mu_r)}{(n-\mu_r)^2 - (n+\mu_r)^2 e^{2\jmath k l}} \\ E_T = E_0 \dfrac{-4\mu_r n}{(n-\mu_r)^2 - (n+\mu_r)^2 e^{2\jmath k l}} e^{\jmath (k_0 + k) l} \end{cases} \tag{B.13}$$

B.3 Onde réfléchie et transmise

L'équation du champ électrique de l'onde réfléchie par la plaque vaut :

$$\mathbf{E}_R(x,t) = E_0 \frac{(n+\mu_r)(n-\mu_r)}{(n-\mu_r)^2 - (n+\mu_r)^2 e^{2\jmath kl}} \left(e^{2\jmath kl} - 1\right) e^{\jmath(\omega t + k_0 x)} \mathbf{u_z} \tag{B.14}$$

De même pour l'onde transmise, son champ électrique peut s'écrire :

$$\mathbf{E}_T(x,t) = E_0 \frac{-4\mu_r n}{(n-\mu_r)^2 - (n+\mu_r)^2 e^{2\jmath kl}} e^{\jmath(k_0+k)l} e^{\jmath(\omega t - k_0 x)} \mathbf{u_z} \tag{B.15}$$

Les équation précédentes ont été appliquées dans le cas d'une plaque de 6 mm d'épaisseur, de conductivité $\sigma = 1\ S.m^{-1}$, de permittivité $\epsilon = 5\epsilon_0$ et de perméabilité $\mu = 2\mu_0$, illuminée par une OPPM oscillant à 10 GHz. Le champ électrique à un instant t, autour et dans la plaque, calculé analytiquement et par éléments finis, est tracé sur la figure (B.2).

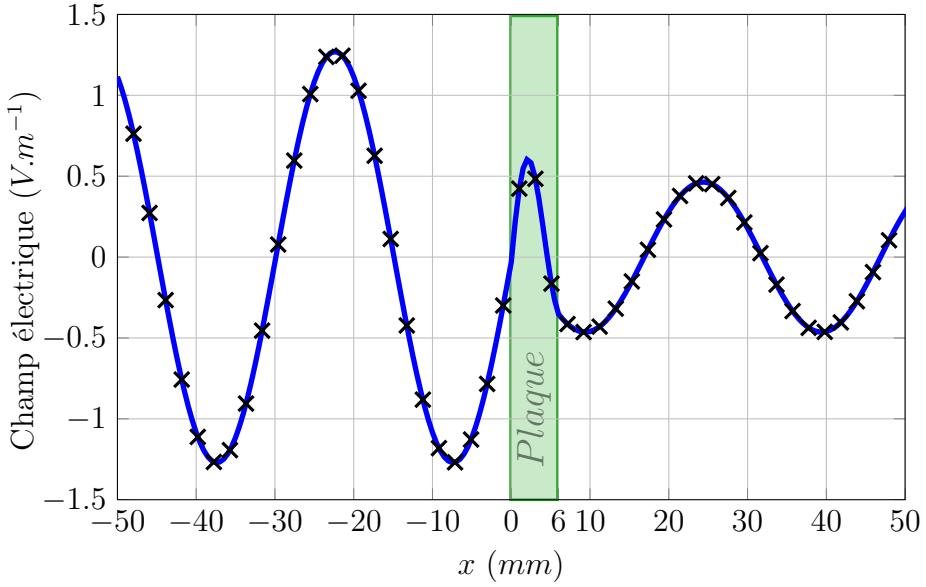


FIGURE B.2 – *Application numérique du champ électrique à un instant t, autour et dans une plaque homogène de 6 mm d'épaisseur, calculé analytiquement (ligne) et par éléments finis (×) ($f = 10\ GHz$, $l = 6\ mm$, $\sigma = 1\ S.m^{-1}$, $\epsilon = 5\epsilon_0$ et $\mu = 2\mu_0$).*

B.4 Coefficient de blindage

Le coefficient de blindage (SE) est défini par le rapport entre l'amplitude du champ électrique incident $\mathbf{E}_I$ et le module de l'amplitude complexe du champ électrique transmis $\mathbf{E}_T$:

$$SE = 20 \log_{10} \frac{E_0}{|E_T|} \tag{B.16}$$

Suite aux résultats précédents, il peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
SE &= -20 \log_{10} \left| \frac{4\dfrac{n}{\mu_r}}{\left(\dfrac{n}{\mu_r}-1\right)^2 - \left(\dfrac{n}{\mu_r}+1\right)^2 e^{2\jmath kl}} e^{\jmath(k_0+k)l} \right| \\
SE &= -20 \log_{10} \left| \frac{4\dfrac{n}{\mu_r}}{\left(\dfrac{n_2}{\mu_r}+1\right)^2} \frac{1}{1 - \dfrac{\left(\dfrac{n}{\mu_e}-1\right)^2}{\left(\dfrac{n}{\mu_r}+1\right)^2} e^{-2\jmath kl}} e^{\jmath(k_0-k)l} \right| \\
SE &= -20 \log_{10} \left| \frac{4\dfrac{n}{\mu_r}}{\left(\dfrac{n}{\mu_r}+1\right)^2} \right| + 20 \log_{10} \left| 1 - \frac{\left(\dfrac{n}{\mu_r}-1\right)^2}{\left(\dfrac{n}{\mu_r}+1\right)^2} e^{-2\jmath kl} \right| + 20 \log_{10} \left| e^{\jmath kl} \right|
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Le coefficient de blindage peut être divisé en trois parties :

$$SE = SE_A + SE_B - SE_R \tag{B.18}$$

L'atténuation de l'onde est premièrement causée par l'absorption du matériau :

$$SE_A = 20 \log_{10} \left| e^{\jmath kl} \right| \tag{B.19}$$

La seconde partie correspond aux multiples réflexions à l'intérieur du matériau :

$$SE_B = 20 \log_{10} \left| 1 - q_P e^{-2\jmath kl} \right| \tag{B.20}$$

avec $q_P = \dfrac{\left(\dfrac{n}{\mu_r} - 1\right)^2}{\left(\dfrac{n}{\mu_r} + 1\right)^2}$, le coefficient de réflexion de la plaque. La troisième partie est réfléchie par la plaque :

$$SE_R = 20 \log_{10} |p_P| \tag{B.21}$$

avec $p_P = \dfrac{4\dfrac{n}{\mu_r}}{\left(\dfrac{n}{\mu_r} + 1\right)^2}$, le coefficient de transmission de la plaque.

Annexe C

Tenseur dépolarisant

Sommaire

C.1 Cas général 116
C.2 Facteurs dépolarisants d'ellipsoïdes de révolution . . . 117
C.3 Tenseur dépolarisant d'un cylindre elliptique 118

C.1 Cas général

En électromagnétisme, le tenseur dépolarisant d'une inclusion plongée dans un milieu homogène (supposé infini) permet de caractériser le champ électrique dans l'inclusion en fonction du champ électrique appliqué et de la polarisation dans l'inclusion. Dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale, plongée dans un champ électrique E_0^u uniforme et parallèle à $\mathbf{u}$, le champ dans l'inclusion E_{Inc}^u est modifié par la polarisation de l'inclusion P_{Inc}^u. Il peut s'écrire (STRATTON 1941) :

$$E_{Inc}^u = E_0^u + N^u P_{Inc}^u \tag{C.1}$$

où N^u est le facteur dépolarisant de l'inclusion dans la direction $\mathbf{u}$. Les facteurs dépolarisants dépendent de la forme de l'inclusion et des propriétés du milieu qui l'entoure. Pour simplifier les calculs, on ne s'intéresse ici qu'à des inclusions plongées dans un milieu isotrope.

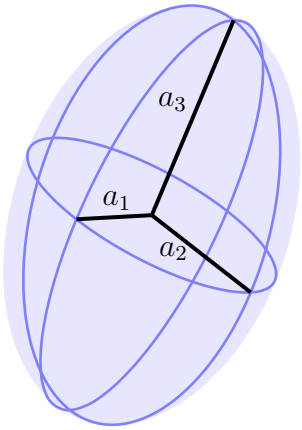


FIGURE C.1 – *Schéma d'une inclusion ellipsoïdale.*

Le tenseur dépolarisant d'une inclusion ellipsoïdale (figure C.1) plongée dans un milieu isotrope est donné par (STRATTON 1941 ; SIHVOLA et LINDELL 1996). Il est défini en fonction de l'intégrale elliptique suivante :

$$\underline{\underline{N}} = \frac{det\underline{\underline{A}}}{2} \int_0^\infty \frac{\left(\underline{\underline{A}}^2 + s\underline{\underline{I}}\right)^{-1}}{\sqrt{det\left(\underline{\underline{A}}^2 + s\underline{\underline{I}}\right)}} ds \tag{C.2}$$

où $\underline{\underline{I}}$ est le tenseur identité d'ordre 2 et $\underline{\underline{A}}$ le tenseur symétrique défini positif d'ordre 2 décrivant l'ellipsoïde :

$$\mathbf{r}^t \underline{\underline{A}}^{-2} \mathbf{r} \leqslant 1 \tag{C.3}$$

avec :

$$det\underline{\underline{A}} = a_1 a_2 a_3 \tag{C.4}$$

où a_1, a_2 et a_3 sont les demi-axes de l'inclusion. Dans le repère principal, $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{N}}$ sont diagonaux et s'écrivent :

$$\underline{\underline{N}} = \begin{pmatrix} N^1 & 0 & 0 \\ 0 & N^2 & 0 \\ 0 & 0 & N^3 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \tag{C.5}$$

et les facteurs dépolarisants vérifient :

$$N^1 + N^2 + N^3 = 1 \tag{C.6}$$

Dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale noyée dans un milieu anisotrope, la définition du tenseur dépolarisant a été étendue par Sihvola et Lindell 1996.

C.2 Facteurs dépolarisants d'ellipsoïdes de révolution

Sans définir la notion de tenseur dépolarisant, Ollendorff (1931) a donné la définition des facteurs dépolarisants d'ellipsoïdes de révolution. Pour des ellipsoïdes allongés ($a_1 = a_2 < a_3$), le facteur dépolarisant longitudinal N^3 est donné par (Sihvola 1999) :

$$N^3 = \frac{1-\tau^2}{2\tau^3}\left(ln\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right) - 2\tau\right) \tag{C.7}$$

où $\tau = \sqrt{1 - \left({}^{a_1}/_{a_3}\right)^2}$ est l'excentricité de l'ellipsoïde. Dans le cas d'une inclusion aplatie ($a_1 = a_2 > a_3$), le facteur dépolarisant longitudinal est donné par :

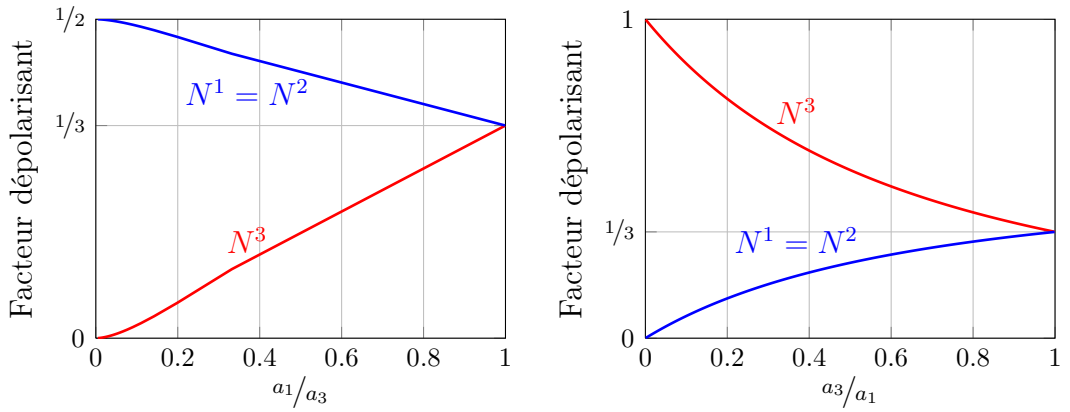
$$N^3 = \frac{1+\tau^2}{\tau^3}\left(\tau - Arctan\,\tau\right) \tag{C.8}$$

où $\tau = \sqrt{\left({}^{a_1}/_{a_3}\right)^2 - 1}$ est l'excentricité de l'ellipsoïde.

Dans les deux cas, les facteurs dépolarisants transversaux sont donnés par :

$$N^1 = N^2 = \frac{1}{2}\left(1 - N^3\right) \tag{C.9}$$

Les facteurs dépolarisants d'ellipsoïdes de révolution sont tracés sur la figure C.2 en fonction de l'excentricité τ. Pour les cas particuliers où l'inclusion est une sphère ($\tau = 0$), un cylindre infini ou un plan infini ($\tau = 1$) on retrouve les valeurs des facteurs dépolarisants de microstructures simples présentées dans le tableau 2.1.



(a) Facteurs dépolarisants d'un ellipsoïde de révolution allongé.

(b) Facteurs dépolarisants d'un ellipsoïde de révolution aplati.

FIGURE C.2 – *Facteurs dépolarisants d'ellipsoïdes de révolution.*

C.3 Tenseur dépolarisant d'un cylindre elliptique

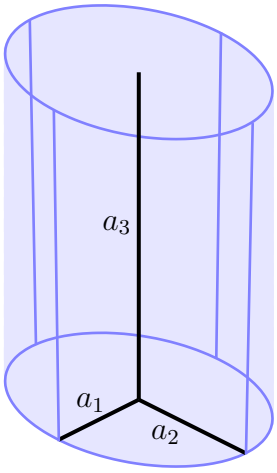


FIGURE C.3 – *Schéma d'un cylindre elliptique.*

Dans le cas particulier d'un cylindre elliptique (figure C.3), le tenseur dépolarisant $\underline{\underline{N}}$ a une formulation simplifiée. Elle est déduite du cas général du tenseur dépolarisant d'une inclusion ellipsoïdale plongée dans un milieu isotrope défini par (C.2). Dans le repère principal, le tenseur $\underline{\underline{A}}$ s'écrit :

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \tag{C.10}$$

Dans le cas du cylindre de la figure C.3, $a_3 = \infty$, par conséquent, le facteur dépolarisant dans la direction 1 peut s'écrire :

$$N^1 = \frac{a_1 a_2}{2} \int_0^\infty \frac{1}{(a_1^2 + s)\sqrt{(a_1^2 + s)(a_2^2 + s)}} ds \tag{C.11}$$

L'intégrale (C.11) à une solution analytique :

$$N^1 = \left[\frac{a_1 a_2 (a_2^2 + s)}{(a_1^2 - a_2^2)\sqrt{(a_1^2 + s)(a_2^2 + s)}} \right]_0^{+\infty} \tag{C.12}$$

$$N^1 = \frac{a_1 a_2}{(a_1^2 - a_2^2)} - \frac{a_1 a_2 a_2^2}{(a_1^2 - a_2^2)\sqrt{a_1^2 a_2^2}} \tag{C.13}$$

$$N^1 = \frac{a_1 a_2 - a_2^2}{a_1^2 - a_2^2} = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \tag{C.14}$$

$$N^1 = \frac{1}{\frac{a_1}{a_2} + 1} \tag{C.15}$$

En répétant la même démarche dans la direction 2, on obtient la définition simplifiée du tenseur dépolarisant d'un cylindre elliptique plongé dans un milieu isotrope :

$$\underline{\underline{N}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\frac{a_1}{a_2} + 1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\frac{a_2}{a_1} + 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.16}$$

On retrouve les valeurs $N^1 = N^2 = 1/2$, présentées dans le tableau (2.1) dans le cas d'un cylindre de révolution, en prenant $a_1 = a_2$.

Annexe D

Comportement d'une fibre soumise à une onde EM

Sommaire

D.1 Définition du problème 122
D.2 Comportement d'une fibre soumise à une onde EM (Hypothèse grande longueur d'onde) 123
D.2.1 Champ magnétique $\mathbf{H}_F$ dans la fibre 123
D.2.2 Champ électrique $\mathbf{E}_F$ dans la fibre 125
D.2.3 Courants $\mathbf{J}_F$ dans la fibre 125
D.3 Comportement d'une fibre soumise à une onde EM (Cas général) 125
D.3.1 Champ incident 125
D.3.2 Champs rayonnés 126
D.3.3 Calcul des coefficients des ondes rayonnées 127
D.4 Comparaison des résultats 128

D.1 Définition du problème

On suppose une fibre de rayon R, infiniment longue suivant $\mathbf{u_z}$ (figure D.1), constituée d'un matériau isotrope avec un comportement linéaire, de permittivité ϵ_2, de perméabilité μ_2 et de conductivité σ_2. Elle est plongée dans un milieu homogène isotrope non conducteur (ϵ_1, μ_1, $\sigma_1 = 0$) de dimensions infinies.

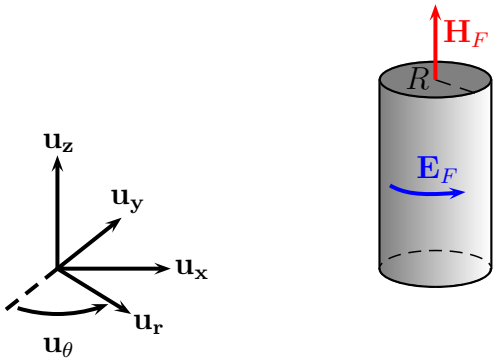


FIGURE *D.1* – *Schéma d'une fibre.*

On considère cette fibre illuminée par une OPPM de fréquence f, se propageant suivant $\mathbf{u_x}$ et polarisée électriquement suivant $\mathbf{u_y}$. Les champs de l'onde incidente s'écrivent :

$$\mathbf{E}_I(x,\omega,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_I e^{\jmath(\omega t - k_1 x)} \\ 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_x},\mathbf{u_y},\mathbf{u_z})} \qquad \mathbf{H}_I(x,\omega,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta_1 E_I e^{\jmath(\omega t - k_1 x)} \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_x},\mathbf{u_y},\mathbf{u_z})} \tag{D.1}$$

Avec $\eta_1 = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$ l'impédance caractéristique du milieu entourant la fibre et $k_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 \omega^2}$ sa constante de propagation.

Le champ magnétique $\mathbf{H}_F$ de cette onde incidente pénètre dans la fibre et engendre un champ électrique tournant $\mathbf{E}_F$ dans celle-ci. L'objectif des deux sections qui vont suivre est de calculer analytiquement ce champ électrique tournant afin d'être en mesure de calculer les pertes dues aux courants induits. Le premier développement se fera dans l'hypothèse où la longueur d'onde du champ incident est grande devant le diamètre de la fibre. Dans le second, aucune hypothèse ne sera admise, conduisant à une formulation plus complexe. Une troisième section permettra de valider les formulations obtenues par comparaison avec un calcul par éléments finis réalisé avec le logiciel COMSOL MULTIPHYSICS®.

Pour les conditions requises dans ce travail de thèse (fréquence, conductivité, dimensions...), les résultats des deux formulations sont équivalents. C'est pourquoi, la première, plus simple, est préférée à la seconde pour calculer les pertes par effet Joule dans les fibres d'un matériau composite.

D.2 Comportement d'une fibre soumise à une onde électromagnétique (Hypothèse grande longueur d'onde)

Dans cette partie, la longueur d'onde du champ magnétique incident, est considérée grande devant la taille des fibres ($\lambda \gg \varnothing$). Le champ magnétique externe ($r > R$) peut être considéré uniforme :

$$\mathbf{H}_I(x,\omega,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta_1 E_I e^{\jmath\omega t} \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_x},\mathbf{u_y},\mathbf{u_z})} \qquad \mathbf{H}_I(r,\omega,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta_1 E_I e^{\jmath\omega t} \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_r},\mathbf{u}_\theta,\mathbf{u_z})} \tag{D.2}$$

On cherche à déterminer les champs internes ($r \leq R$) :

$$\mathbf{E}_F(r,\omega,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_F(r,\omega,t) \\ 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_r},\mathbf{u}_\theta,\mathbf{u_z})} \qquad \mathbf{H}_F(r,\omega,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_F(r,\omega,t) \end{pmatrix}_{(\mathbf{u_r},\mathbf{u}_\theta,\mathbf{u_z})} \tag{D.3}$$

D.2.1 Champ magnétique $\mathbf{H}_F$ dans la fibre

En développant l'équation de Maxwell-Ampère (1.1d) on obtient :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H}_F(r,\omega,t) = \sigma_2 \mathbf{E}_F(r,\omega,t) + \epsilon_2 \frac{\partial \mathbf{E}_F(r,\omega,t)}{\partial t} \tag{D.4}$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H}_F(r,\omega,t) = (\sigma_2 + \jmath\omega\epsilon_2)\,\mathbf{E}_F(r,\omega,t) \tag{D.5}$$

$$\frac{1}{\sigma_2 + \jmath\omega\epsilon_2}\mathbf{rot}\,\mathbf{H}_F(r,\omega,t) = \mathbf{E}_F(r,\omega,t) \tag{D.6}$$

En remplaçant (D.6) dans l'équation de Maxwell-Faraday (1.1c) on obtient :

$$\frac{1}{\sigma_2 + \jmath\omega\epsilon_2}\mathbf{rot}\ (\mathbf{rot}\,\mathbf{H}_F(r,\omega,t)) = -\jmath\omega\mu_2 \mathbf{H}_F(r,\omega,t) \tag{D.7}$$

$$\mathbf{rot}\ (\mathbf{rot}\,\mathbf{H}_F(r,\omega,t)) = \left(\epsilon_2\mu_2\omega^2 - \jmath\mu_2\sigma_2\omega\right)\mathbf{H}_F(r,\omega,t) \tag{D.8}$$

$$\mathbf{rot}\ (\mathbf{rot}\,\mathbf{H}_F(r,\omega,t)) = k_2^2 \mathbf{H}_F(r,\omega,t) \tag{D.9}$$

Avec $k_2 = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2 \omega^2 - \jmath \mu_2 \sigma_2 \omega}$ la constante de propagation dans la fibre.

Étant donné que le champ magnétique $\mathbf{H}_F$ n'a qu'une seule composante suivant $\mathbf{u_z}$ et qu'elle est invariante suivant $\mathbf{u}_\theta$ et $\mathbf{u_z}$ (D.3) en coordonnées cylindriques, on peut développer **rot** (**rot** $\mathbf{H}_F$) de la manière suivante :

$$\mathbf{rot}\ (\mathbf{rot}\,\mathbf{H}_F(r,\omega,t)) = \mathbf{rot}\ \left(-\frac{\partial H_F(r,\omega,t)}{\partial r}\mathbf{u}_\theta\right) \tag{D.10}$$

$$\mathbf{rot}\ (\mathbf{rot}\,\mathbf{H}_F(r,\omega,t)) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H_F(r,\omega,t)}{\partial r}\right)\mathbf{u_z} \tag{D.11}$$

On peut alors réécrire l'équation (D.9) sous la forme d'une équation différentielle :

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H_F(r,\omega,t)}{\partial r}\right) = k_2^2 H_F(r,\omega,t) \tag{D.12}$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial H_F(r,\omega,t)}{\partial r} + r\frac{\partial^2 H_F(r,\omega,t)}{\partial r^2}\right) + k_2^2 H_F(r,\omega,t) = 0 \tag{D.13}$$

$$r^2\frac{\partial^2 H_F(r,\omega,t)}{\partial r^2} + r\frac{\partial H_F(r,\omega,t)}{\partial r} + (rk_2)^2 H_F(r,\omega,t) = 0 \tag{D.14}$$

Les fonctions de Bessel d'ordre zéro de première et deuxième espèces sont solutions de l'équation (D.14). Comme la fonction de Bessel d'ordre zéro de deuxième espèce est singulière à l'origine, elle ne peut être solution de l'équation. La composante axiale du champ magnétique interne s'écrit :

$$H_F(r,\omega,t) = H_F(R,\omega,t)\frac{\mathcal{J}_0(rk_2)}{\mathcal{J}_0(Rk_2)} \tag{D.15}$$

où $\mathcal{J}_\alpha(x)$ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre α. Le champ magnétique au bord de la fibre ($r = R$) est égal au champ magnétique incident car les composantes tangentielles du champ magnétique sont égales à l'interface (tableau 1.1). Le champ magnétique au bord de la fibre vaut :

$$\mathbf{H}_F(R,\omega,t) = \mathbf{H}_I(R,\omega,t) = \eta_1 E_I e^{\jmath\omega t}\mathbf{u_z} \tag{D.16}$$

Le champ magnétique au sein de la fibre s'écrit :

$$\mathbf{H}_F(r,\omega,t) = \eta_1 E_I \frac{\mathcal{J}_0(rk_2)}{\mathcal{J}_0(Rk_2)} e^{\jmath\omega t}\mathbf{u_z} \tag{D.17}$$

D.2.2 Champ électrique $\mathbf{E}_F$ dans la fibre

L'équation du champ électrique tournant dans la fibre s'obtient en remplaçant l'équation (D.17) dans (D.6) :

$$\mathbf{E}_F(r,\omega,t) = \frac{1}{\sigma_2 + \jmath\omega\epsilon_2}\eta_1 E_I \mathbf{rot}\left(\frac{\mathcal{J}_0(rk_2)}{\mathcal{J}_0(Rk_2)}e^{\jmath\omega t}\mathbf{u_z}\right) \tag{D.18}$$

$$\mathbf{E}_F(r,\omega,t) = \frac{k_2}{\sigma_2 + \jmath\omega\epsilon_2}\eta_1 E_I \frac{\mathcal{J}_1(rk_2)}{\mathcal{J}_0(Rk_2)}e^{\jmath\omega t}\mathbf{u}_\theta \tag{D.19}$$

D.2.3 Courants $\mathbf{J}_F$ dans la fibre

Le matériau constituant la fibre étant isotrope et son comportement linéaire, on peut aisément déduire l'équation des courants circulant dans la fibre à partir de (D.19) :

$$\mathbf{J}_F(r,\omega,t) = \frac{k_2}{1 + \jmath\omega\dfrac{\epsilon_2}{\sigma_2}}\eta_1 E_I \frac{\mathcal{J}_1(rk_2)}{\mathcal{J}_0(Rk_2)}e^{\jmath\omega t}\mathbf{u}_\theta \tag{D.20}$$

D.3 Comportement d'une fibre soumise à une onde EM (Cas général)

D.3.1 Champ incident

Pour être en mesure d'effectuer les calculs, il est nécessaire de passer l'équation du champ magnétique incident (D.2) dans le repère cylindrique. Les conditions de continuité des différents champs sont uniquement spatiales. Pour simplifier les calculs, l'équation du champ magnétique incident ($r > R$) est écrite indépendamment du temps :

$$\mathbf{H}_I = \eta_1 E_I e^{-\jmath k_1 x}\mathbf{u_z} = \eta_1 E_I e^{-\jmath k_1 r\cos\theta}\mathbf{u_z} \tag{D.21}$$

Il est possible d'exprimer le champ magnétique incident sous forme d'une série génératrice. Cette série génératrice est une solution de l'équation de Helmholtz de la série de Fourier développée à partir de l'équation (D.21) (Petit 1989) :

$$\mathbf{H}_I = \eta_1 E_I \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-\jmath)^n \mathcal{J}_n(k_1 r)\, e^{\jmath n\theta}\mathbf{u_z} \tag{D.22}$$

avec $\mathcal{J}_\alpha(x)$ la fonction de Bessel de première espèce d'ordre α.

Le champ électrique incident s'obtient à partir de l'équation de Maxwell-Ampère (1.1d) :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H}_I = \epsilon_1 \frac{\partial \mathbf{E}_I}{\partial t} \tag{D.23}$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H}_I = \jmath\omega\epsilon_1 \mathbf{E}_I \tag{D.24}$$

$$\frac{1}{\jmath\omega\epsilon_1}\mathbf{rot}\,\mathbf{H}_I = \mathbf{E}_I \tag{D.25}$$

Le champ électrique de l'onde incidente s'écrit :

$$\mathbf{E}_I = \frac{1}{\omega\epsilon_1}\frac{1}{r}\eta_1 E_I \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\,(-\jmath)^n\,\mathcal{J}_n(k_1 r)\,e^{\jmath n\theta}\mathbf{u_r} - \frac{1}{\jmath\omega\epsilon_1}\eta_1 E_I \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-\jmath)^n\,\mathcal{J}_n'(k_1 r)\,e^{\jmath n\theta}\mathbf{u}_\theta \tag{D.26}$$

D.3.2 Champs rayonnés

D.3.2.1 Champ rayonné externe

Pour représenter le champ magnétique rayonné à l'extérieur de la fibre ($r > R$), $\mathbf{H}_R$ doit prendre la forme d'une expansion cylindrique harmonique. Sous forme d'une série génératrice il s'écrit :

$$\mathbf{H}_R = \eta_1 E_I \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\,(-\jmath)^n\,\mathcal{H}_n^{(2)}(k_1 r)\,e^{\jmath n\theta}\mathbf{u_z} \tag{D.27}$$

avec $\mathcal{H}_\alpha^{(2)}(x) = \mathcal{J}_\alpha(x) - \jmath\mathcal{Y}_\alpha(x)$ la fonction de Hankel de deuxième espèce d'ordre α et $\mathcal{Y}_\alpha(x)$ la fonction de Bessel de deuxième espèce du même ordre. Les coefficients a_n des ondes rayonnées externes sont pour l'instant inconnus. Le champ électrique rayonné $\mathbf{E}_R$ par la fibre n'a qu'une seule composante :

$$\mathbf{E}_R = -\frac{1}{\jmath\omega\epsilon_1}\eta_1 E_I \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\,(-\jmath)^n\,\mathcal{H}_n^{(2)'}(k_1 r)\,e^{\jmath n\theta}\mathbf{u}_\theta \tag{D.28}$$

D.3.2.2 Champ rayonné interne

Le champ magnétique rayonné à l'intérieur de la fibre ($r < R$) prend également la forme d'une expansion cylindrique harmonique mais dans la direction opposée au

champ magnétique rayonné externe. Sous forme d'une série génératrice, il s'écrit :

$$\mathbf{H}_F = \eta_1 E_I \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \left(-\jmath\right)^n \mathcal{J}_n \left(k_2 r\right) e^{\jmath n\theta} \mathbf{u_z} \tag{D.29}$$

Où b_n sont les coefficients des ondes internes. Le champ électrique à l'intérieur de la fibre s'écrit :

$$\mathbf{E}_F = -\frac{1}{\sigma_2 + \jmath\omega\epsilon_2} \eta_1 E_I \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \left(-\jmath\right)^n \mathcal{J}_n^{'} \left(k_2 r\right) e^{\jmath n\theta} \mathbf{u}_\theta \tag{D.30}$$

L'équation des courants induits dans la fibre se déduit de l'équation du champ électrique (D.30). Le matériau étant isotrope et son comportement linéaire, les courants tournants dans la fibre s'écrivent :

$$\mathbf{J}_F = -\frac{1}{1 + \jmath\omega\dfrac{\epsilon_2}{\sigma_2}} \eta_1 E_I \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \left(-\jmath\right)^n \mathcal{J}_n^{'} \left(k_2 r\right) e^{\jmath n\theta} \mathbf{u}_\theta \tag{D.31}$$

D.3.3 Calcul des coefficients des ondes rayonnées

Pour respecter les conditions aux limites, il faut qu'il y ait continuité des champs tangentiels à l'interface :

$$\begin{cases} \mathbf{H}_I \left(R\right) . \mathbf{u_z} + \mathbf{H}_R \left(R\right) . \mathbf{u_z} = \mathbf{H}_F \left(R\right) . \mathbf{u_z} \\ \mathbf{E}_I \left(R\right) . \mathbf{u}_\theta + \mathbf{E}_R \left(R\right) . \mathbf{u}_\theta = \mathbf{E}_F \left(R\right) . \mathbf{u}_\theta \end{cases} \tag{D.32}$$

En remplaçant les équations précédentes dans le système (D.32) on obtient :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-\jmath\right)^n \mathcal{J}_n \left(k_1 R\right) e^{\jmath n\theta} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \left(-\jmath\right)^n \mathcal{H}_n^{(2)} \left(k_1 R\right) e^{\jmath n\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \left(-\jmath\right)^n \mathcal{J}_n \left(k_2 R\right) e^{\jmath n\theta} \tag{D.33}$$

et :

$$\frac{1}{\jmath\omega\epsilon_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-\jmath\right)^n \mathcal{J}_n^{'} \left(k_1 R\right) e^{\jmath n\theta} + \frac{1}{\jmath\omega\epsilon_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \left(-\jmath\right)^n \mathcal{H}_n^{(2)'} \left(k_1 R\right) e^{\jmath n\theta} = \frac{1}{\sigma_2 + \jmath\omega\epsilon_2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \left(-\jmath\right)^n \mathcal{J}_n^{'} \left(k_2 r\right) e^{\jmath n\theta} \tag{D.34}$$

Les fonctions de séries génératrices étant orthogonales, on peut écrire :

$$\begin{cases} \mathcal{J}_n(k_1R) + a_n\mathcal{H}_n^{(2)}(k_1R) = b_n\mathcal{J}_n(k_2R) \\ \dfrac{1}{\jmath\omega\epsilon_1}\mathcal{J}_n^{'}(k_1R) + \dfrac{1}{\jmath\omega\epsilon_1}a_n\mathcal{H}_n^{(2)'}(k_1R) = \dfrac{1}{\sigma_2+\jmath\omega\epsilon_1}b_n\mathcal{J}_n^{'}(k_2r) \end{cases} \tag{D.35}$$

Après résolution du système on obtient :

$$a_n = \frac{\dfrac{1}{\jmath\omega\epsilon_1}\mathcal{J}_n^{'}(k_1R)\,\mathcal{J}_n(k_2R) - \dfrac{1}{\sigma_2+\jmath\omega\epsilon_2}\mathcal{J}_n^{'}(k_2R)\,\mathcal{J}_n(k_1R)}{\dfrac{1}{\sigma_2+\jmath\omega\epsilon_2}\mathcal{J}_n^{'}(k_2R)\,\mathcal{H}_n^{(2)}(k_1R) - \dfrac{1}{\jmath\omega\epsilon_1}\mathcal{H}_n^{(2)'}(k_1R)\,\mathcal{J}_n(k_2R)} \tag{D.36}$$

$$b_n = \frac{\mathcal{J}_n(k_1R)}{\mathcal{J}_n(k_2R)} + \frac{\mathcal{H}_n^{(2)}(k_1R)}{\mathcal{J}_n(k_2R)} \frac{\dfrac{1}{\jmath\omega\epsilon_1}\mathcal{J}_n^{'}(k_1R)\,\mathcal{J}_n(k_2R) - \dfrac{1}{\sigma_2+\jmath\omega\epsilon_2}\mathcal{J}_n^{'}(k_2R)\,\mathcal{J}_n(k_1R)}{\dfrac{1}{\sigma_2+\jmath\omega\epsilon_2}\mathcal{J}_n^{'}(k_2R)\,\mathcal{H}_n^{(2)}(k_1R) - \dfrac{1}{\jmath\omega\epsilon_1}\mathcal{H}_n^{(2)'}(k_1R)\,\mathcal{J}_n(k_2R)} \tag{D.37}$$

Les dérivées des fonctions de Bessel et de Hankel s'écrivent :

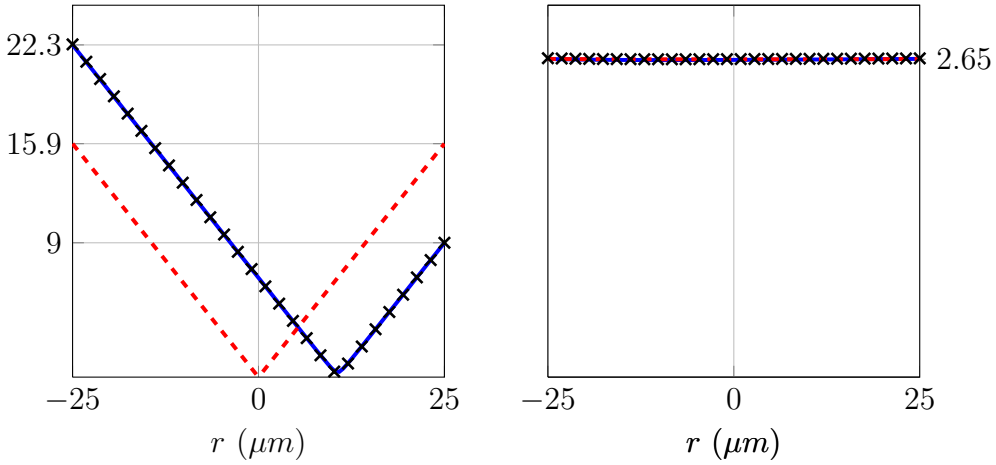
$$\mathcal{J}_n^{'}(k_iR) = k_i\mathcal{J}_{n-1}(k_iR) - \frac{n}{R}\mathcal{J}_n(k_iR) \tag{D.38}$$

$$\mathcal{H}_n^{(2)'}(k_iR) = k_i\mathcal{J}_{n-1}(k_iR) - \frac{n}{R}\mathcal{J}_n(k_iR) - \jmath\left(k_i\mathcal{Y}_{n-1}(k_iR) - \frac{n}{R}\mathcal{Y}_n(k_iR)\right) \tag{D.39}$$

D.4 Comparaison des résultats

Pour valider les formulations obtenues avec deux développements analytiques précédents, elles sont comparées à la méthode des éléments finis. Le champ électrique et magnétique le long du diamètre, parallèle à la direction de propagation de l'onde incidente, est calculé avec chacune des trois méthodes. Les résultats sont présentés sur les figures D.2 et D.3.

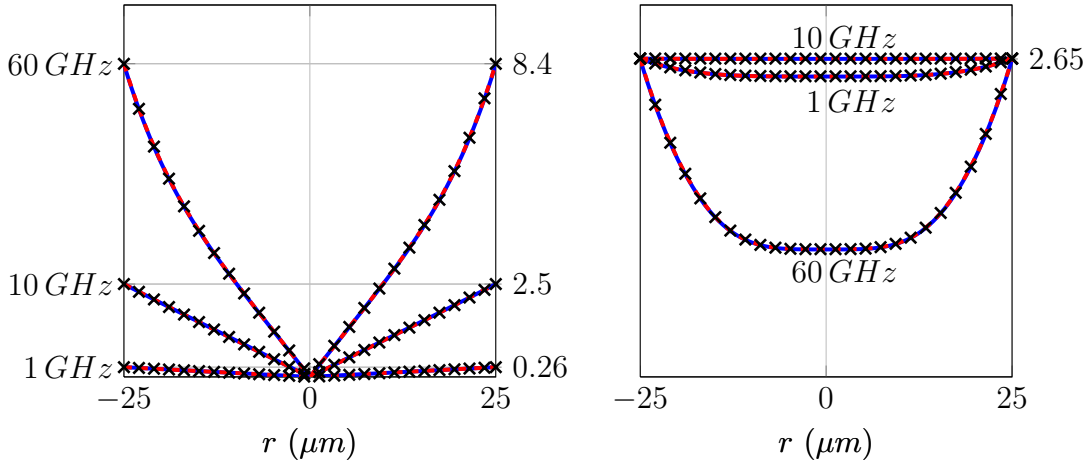
Les calculs ont été effectués pour une fibre de rayon $R = 25\ \mu m$, plongée dans de l'air. Pour la deuxième méthode, la convergence est obtenue pour une sommation de -1 à 1. Lorsque la conductivité de la fibre est plus faible (figure D.2), une partie du champ incident pénètre à l'intérieur. Ce phénomène est bien pris en compte par la deuxième méthode. La première ne fournit que la composante du champ tournant à l'intérieur de la fibre, à cause de l'hypothèse de grande longueur d'onde. Lorsque la conductivité est élevée, la fibre est uniquement parcourue par un champ électrique tournant. Dans ce cas, les trois méthodes donnent des résultats similaires.



(a) $\| \mathbf{E} \|$ $(mV.m^{-1})$. (b) $\| \mathbf{H} \|$ $(mA.m^{-1})$.

FIGURE *D.2* – *Norme du champ électrique et magnétique, le long du diamètre parallèle à la direction de propagation de l'onde incidente, d'une fibre homogène* ($\varnothing = 50\ \mu m$, $\sigma_2 = 1000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_0$ *et* $\mu_1 = \mu_0$) *entourée d'air et illuminée par une onde électromagnétique* ($f = 60\ GHz$, $E_I = 1\ V.m^{-1}$), *calculée avec la première méthode analytique (pointillés), la seconde (lignes) et par éléments finis* ($\times$).

La première méthode, plus simple à appliquer, donne des résultats satisfaisants à haute fréquence malgré l'hypothèse de grande longueur d'onde. C'est pourquoi elle est préférée dans le calcul des pertes par effet Joule dans les fibres.



(a) $\| \mathbf{E} \|$ $(mV.m^{-1})$. (b) $\| \mathbf{H} \|$ $(mA.m^{-1})$.

FIGURE *D.3* – *Norme du champ électrique et magnétique, le long du diamètre parallèle à la direction de propagation de l'onde incidente, d'une fibre homogène ($\varnothing = 50\ \mu m$, $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_0$) entourée d'air et illuminée par une onde électromagnétique ($E_I = 1\ V.m^{-1}$), calculée avec la première méthode analytique (pointillés), la seconde (lignes) et par éléments finis (×) pour trois fréquences d'onde incidente.*

Annexe E

Développement analytique du modèle de Maxwell-Garnett

Sommaire

E.1 Permittivité effective complexe de Maxwell-Garnett 132
E.2 Partie réelle 132
E.3 Partie imaginaire 133

E.1 Permittivité effective complexe de Maxwell-Garnett

La formule du modèle de Maxwell-Garnett, appliquée à une microstructure isotrope 2D, est définie par l'équation (2.10) :

$$\widetilde{\epsilon}^*_{MG} = \epsilon^*_1 + 2f_2\epsilon^*_1 \frac{\epsilon^*_2 - \epsilon^*_1}{\epsilon^*_1 + \epsilon^*_2 - f_2\left(\epsilon^*_2 - \epsilon^*_1\right)} \tag{E.1}$$

$$\widetilde{\epsilon}^*_{MG} = \epsilon^*_1 + 2f_2\epsilon^*_1 \frac{\epsilon^*_2 - \epsilon^*_1}{\epsilon^*_1\left(1 + f_2\right) + f_1\epsilon^*_2} \tag{E.2}$$

Pour la modélisation d'inclusions conductrices (milieu 2) dans une matrice diélectrique (milieu 1), les permittivités complexes des deux constituants s'expriment :

$$\epsilon^*_1 = \epsilon_1 - \jmath\frac{\sigma_1}{\omega} = \epsilon_1 \tag{E.3}$$

$$\epsilon^*_2 = \epsilon_2 - \jmath\frac{\sigma_2}{\omega} \tag{E.4}$$

L'équation (E.2) devient :

$$\widetilde{\epsilon}^*_{MG} = \epsilon_1 + 2f_2\epsilon_1 \frac{\epsilon_2 - \jmath\dfrac{\sigma_2}{\omega} - \epsilon_1}{\epsilon_1\left(1 + f_2\right) + f_1\left(\epsilon_2 - \jmath\dfrac{\sigma_2}{\omega}\right)} \tag{E.5}$$

L'équation (E.5) peut être séparée en deux parties, une imaginaire et une réelle :

$$\widetilde{\epsilon}^*_{MG} = \epsilon_1 + 2f_2\epsilon_1 \frac{\left(\epsilon_2 - \epsilon_1\right) - \jmath\dfrac{\sigma_2}{\omega}}{\left(\epsilon_1\left(1 + f_2\right) + f_1\epsilon_2\right) - f_1\jmath\dfrac{\sigma_2}{\omega}} \tag{E.6}$$

$$\widetilde{\epsilon}^*_{MG} = \epsilon_1 + 2f_2\epsilon_1 \frac{\left(\epsilon_2 - \epsilon_1\right)\left(\epsilon_1\left(1 + f_2\right) + f_1\epsilon_2\right) + f_1\left(\dfrac{\sigma_2}{\omega}\right)^2 + \jmath 2\epsilon_1\dfrac{\sigma_2}{\omega}}{\left(\epsilon_1\left(1 + f_2\right) + f_1\epsilon_2\right)^2 + \left(f_1\dfrac{\sigma_2}{\omega}\right)^2} \tag{E.7}$$

E.2 Partie réelle

La permittivité effective $\widetilde{\epsilon}_{MG}$ estimée par le modèle de Maxwell-Garnett est donnée par la partie réelle de l'équation (E.7). Elle vaut :

$$\widetilde{\epsilon}_{MG} = \epsilon_1 + 2f_2\epsilon_1 \frac{\left(\epsilon_2 - \epsilon_1\right)\left(\epsilon_1\left(1 + f_2\right) + f_1\epsilon_2\right) + f_1\left(\dfrac{\sigma_2}{\omega}\right)^2}{\left(\epsilon_1\left(1 + f_2\right) + f_1\epsilon_2\right)^2 + \left(f_1\dfrac{\sigma_2}{\omega}\right)^2} \tag{E.8}$$

À haute fréquence, $\sigma_2/\omega \gg \epsilon_1 \approx \epsilon_2$, on peut simplifier la permittivité effective par :

$$\widetilde{\epsilon}_{MG} \approx \epsilon_1 + 2f_2\epsilon_1 \frac{f_1\left(\frac{\sigma_2}{\omega}\right)^2}{\left(f_1\frac{\sigma_2}{\omega}\right)^2} \tag{E.9}$$

$$\widetilde{\epsilon}_{MG} \approx \epsilon_1 \frac{1+f_2}{f_1} \tag{E.10}$$

Lorsque la conductivité des fibres et la fréquence de l'onde incidente sont élevées, la permittivité effective fournie par le modèle de Maxwell-Garnett devient indépendante des propriétés du milieu 2 et de la fréquence. Elle dépend uniquement de la permittivité de la matrice et de la proportion des constituants.

E.3 Partie imaginaire

La conductivité effective du modèle de Maxwell-Garnett est donnée par la partie imaginaire de l'équation (E.7) multipliée par la pulsation ω de l'onde incidente :

$$\widetilde{\sigma}_{MG} = -\omega 4 f_2\epsilon_1 \frac{\epsilon_1\frac{\sigma_2}{\omega}}{\left(\epsilon_1\left(1+f_2\right)+f_1\epsilon_2\right)^2 + \left(f_1\frac{\sigma_2}{\omega}\right)^2} \tag{E.11}$$

Dans les conditions de l'étude $\sigma_2/\omega \gg \epsilon_1 \approx \epsilon_2$. On peut donc simplifier le dénominateur :

$$\widetilde{\sigma}_{MG} \approx -\omega 4 f_2\epsilon_1 \frac{\epsilon_1}{f_1^2\frac{\sigma_2}{\omega}} \tag{E.12}$$

La partie imaginaire de la permittivité complexe estimée par le modèle de Maxwell-Garnett est très petite devant la partie réelle lorsque la fréquence de l'onde incidente et que la conductivité des fibres sont élevées :

$$\frac{\widetilde{\sigma}_{MG}}{\omega} \approx \omega 4 f_2 \frac{\epsilon_1^2}{f_1^2\sigma_2} \ll \widetilde{\epsilon}_{MG} \tag{E.13}$$

Pour un matériau composite biphasé à renforts conducteurs, illuminé par une onde électromagnétique à haute fréquence, la conductivité effective fournie par le modèle de Maxwell-Garnett $\widetilde{\sigma}_{MG}$ est négligeable.

Liste des figures

1.1 Schéma, à un instant donné, d'une onde électromagnétique plane progressive monochromatique et polarisée suivant $\mathbf{u_z}$, se propageant suivant $\mathbf{u_x}$. 8

1.2 Schéma, à un instant donné, du champ électrique d'une onde électromagnétique polarisée suivant $\mathbf{u_z}$, se propageant suivant $\mathbf{u_x}$ dans un milieu conducteur. L'amplitude du champ électrique est représentée en pointillés. 10

1.3 Schéma d'une interface. 10

1.4 Onde réfléchie et transmise par une interface plane soumise à une OPPM polarisée ayant une incidence normale. 11

1.5 Onde réfléchie et transmise par une plaque homogène à un instant t (incidence normale). 13

1.6 Contribution des différentes parties du coefficient de blindage d'une plaque homogène soumise à une OPPM polarisée ayant une incidence normale ($\sigma_z = 1\ S.m^{-1}$, $\epsilon_z = 5\epsilon_0$ et $\mu = 2\mu_0$). 15

1.7 Conditions des calculs par éléments finis. 16

1.8 Coefficient de blindage de trois plaques homogènes, de 6 mm d'épaisseur, avec différentes conductivités, calculé analytiquement (lignes) et par éléments finis (points) ($\epsilon_z = \epsilon_0$ et $\mu = \mu_0$). 17

2.1 Homogénéisation. 21

2.2 Séparation des échelles. 22

2.3 Sphère composite (gauche) et assemblage de Hashin (droite). . . . 23

2.4 Application numérique 2D des différents modèles d'homogénéisation ($\epsilon_{r1} = 1$ et $\epsilon_{r2} = 10$). 26

2.5 Schéma de la méthode basée sur des problèmes d'inclusion. 27

2.6 Schéma de la fonction de probabilité à deux-points. 29

2.7 Démarche des méthodes d'homogénéisation basées sur des problèmes d'inclusion. 32

2.8 Plaque de 6 mm d'épaisseur, constituée de 30 rangées de fibres parallèles de diamètre 100 μm. 33

2.9 Coefficient de blindage de la plaque composite (figure 2.8) lorsque $\mathbf{E}_I /\!\!/ \mathbf{u_z}$, calculé analytiquement avec le modèle de WIENER (ligne) et par éléments finis ($\times$) ($f_2 = 19.63$ %, $\sigma_1 = 0$ $S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 100$ $S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). 35

2.10 Coefficient de blindage de la plaque composite (figure 2.8) lorsque $\mathbf{E}_I /\!\!/ \mathbf{u_y}$, calculé analytiquement avec le modèle de MAXWELL-GARNETT (ligne) et par éléments finis ($\times$) ($f_2 = 19.63$ %, $\sigma_1 = 0$ $S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 1000$ $S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). 35

3.1 Coefficient de blindage des milieux effectifs obtenus en faisant varier les propriétés du milieu de référence. Le plan monochrome représente le coefficient de blindage de la microstructure de la figure 2.8 obtenu par éléments finis ($f = 30$ GHz, $f_2 = 19.63$ %, $\sigma_1 = 0$ $S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 1000$ $S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). 41

3.2 Conductivité du milieu de référence optimal (points), en fonction du rapport $\varnothing/\lambda$ pour cinq microstructures et deux conductivités des fibres, tracée avec des courbes de tendance (pointillés). 43

3.3 Démarche de la méthode d'homogénéisation dynamique. 44

3.4 Coefficient de blindage de la plaque composite (figure 2.8) lorsque $\mathbf{E}_I /\!\!/ \mathbf{u_y}$, calculé analytiquement avec le modèle de MAXWELL-GARNETT (pointillés), la méthode d'homogénéisation dynamique (ligne) et par éléments finis ($\times$) ($\varnothing = 100$ μm, $f_2 = 19.63$ %, $\sigma_1 = 0$ $S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 1000$ $S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). 45

3.5 Microstructures étudiées. 46

3.6 Fonctions de probabilité à deux points de la phase conductrice (2) de trois microstructures (figure 3.5) dans la direction $\mathbf{u_x}$ (direction de l'onde incidente). Les calculs ont été réalisés sur un carré de 2 mm de coté remplit avec 50 fibres. 47

3.7 Coefficient de blindage de plaques composites constituées de fibres parallèles à section elliptique (figure 3.5) lorsque $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$, calculé analytiquement avec le modèle de MAXWELL-GARNETT (pointillés), la méthode d'homogénéisation dynamique (ligne) et par éléments finis ($\times$) ($f_2 = 19.63$ %, $\sigma_1 = 1$ $S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 1000$ $S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). 49

3.8 Coefficient de blindage de plaques composites à fibres parallèles lorsque $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique (lignes) et par éléments finis (points) ($f_2 = 19.63$ %, $\sigma_1 = 0$ $S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 1000$ $S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). 51

3.9 Coefficient de blindage de plaques composites à fibres parallèles, lorsque $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique (lignes) et par éléments finis (points) ($\varnothing = 50\,\mu m$, $\sigma_1 = 0$ $S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 4000$ $S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). 52

3.10 Coefficient de blindage d'une plaque composite à fibres parallèles lorsque $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique (lignes) et par éléments finis (points), en faisant varier la conductivité des fibres ($\varnothing = 50$ μm, $f_2 = 19.63$ %, $\sigma_1 = 0$ $S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). 53

3.11 Coefficient de blindage d'une plaque composite à fibres parallèles lorsque $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique (lignes) et par éléments finis (points), en faisant varier la permittivité de la matrice ($\varnothing = 50$ μm, $f_2 = 19.63$ %, $\sigma_1 = 0$ $S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 4000$ $S.m^{-1}$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). 53

3.12 Coefficient de blindage de plaques composites, constituées de fibres parallèles à sections elliptiques disposées aléatoirement (figure 3.5), lorsque $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique ($f_2 = 19.63$ %, $\sigma_1 = 1$ $S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 1000$ $S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). 54

3.13 Différence, pour chacun des calculs effectués précédemment, entre le coefficient de blindage calculé avec le modèle de MAXWELL-GARNETT (+), la méthode d'homogénéisation dynamique (×) et le coefficient de blindage calculé par éléments finis en fonction du rapport entre la taille caractéristique des fibres γ et l'épaisseur de peau des fibres δ_2. 56

3.14 Coefficient de blindage d'une plaque composite à fibres parallèles lorsque $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique (pointillés) et par éléments finis (×) ($\varnothing = 50\ \mu m$, $f_2 = 19.63\,\%$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). 58

4.1 Schéma de la microstructure montrant la fibre utilisée pour les calculs du champ électrique tracé sur les figures 4.3, 4.4 et 4.5 (60 rangées de fibres $\varnothing = 50\ \mu m$ dans l'épaisseur ($6\ mm$) de la plaque, $f_2 = 19.63\ \%$). 61

4.2 Schéma détaillant les différentes parties du champ électrique dans les fibres. 61

4.3 Norme du champ électrique ($V.m^{-1}$) le long du diamètre d'une fibre centrale (figure 4.1) de la plaque composite pour différentes conductivités des fibres ($f = 60\ GHz$, $E_0 = 1\ V.m^{-1}$, $\varnothing = 50\ \mu m$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). Norme du champ total (ligne), champ tournant (points) et champ transmis (tirets). . 62

4.4 Norme du champ électrique total ($V.m^{-1}$) le long du diamètre d'une fibre centrale (figure 4.1) de la plaque composite ($\varnothing = 50\ \mu m$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$) illuminée par une onde électromagnétique ($E_0 = 1\ V.m^{-1}$) à différentes fréquences. 62

4.5 Coefficient de blindage d'une plaque composite à fibres parallèles lorsque $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$, calculé avec le modèle de MAXWELL-GARNETT (pointillés), la méthode d'homogénéisation dynamique (ligne) et par éléments finis (×) ($\varnothing = 50\ \mu m$, $f_2 = 19.63\ \%$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). 63

4.6 Représentation schématique de l'équivalence des énergies dissipées. . 65

4.7 Champ électrique moyen ($V.m^{-1}$) dans les fibres de la microstructure figure 4.1 calculé par éléments finis et analytiquement ($f = 60\ GHz$, $\varnothing = 50\ \mu m$, $\sigma_1 = \sigma_s = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_s = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_s = \mu_0$). 67

4.8 Démarche de la méthode d'homogénéisation dynamique étendue. . . 69

4.9 Coefficient de blindage de la plaque composite figure 4.1 lorsque $\mathbf{E}_I /\!\!/ \mathbf{u_y}$, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique (pointillés) la méthode d'homogénéisation dynamique étendue (ligne), et par éléments finis ($\times$) ($\varnothing = 50\ \mu m$, $f_2 = 19.63\ \%$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). 70

4.10 Coefficient de blindage de la plaque composite figure 4.1 lorsque $\mathbf{E}_I /\!\!/ \mathbf{u_y}$, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique (pointillés) la méthode d'homogénéisation dynamique étendue (ligne), et par éléments finis ($\times$) ($\varnothing = 50\ \mu m$, $f_2 = 19.63\ \%$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 2\epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). 71

4.11 Coefficient de blindage de plaques composites à fibres parallèles lorsque $\mathbf{E}_I /\!\!/ \mathbf{u_y}$, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique étendue (lignes) et par éléments finis (points) ($f_2 = 19.63\ \%$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). . . 73

4.12 Coefficient de blindage de plaques composites à fibres parallèles, lorsque $\mathbf{E}_I /\!\!/ \mathbf{u_y}$, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique (lignes) et par éléments finis (points) ($\varnothing_2 = 50\ \mu m$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). 74

4.13 Coefficient de blindage d'une plaque composite à fibres parallèles lorsque $\mathbf{E}_I /\!\!/ \mathbf{u_y}$, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique étendue (lignes) et par éléments finis (points) en faisant varier la conductivité des fibres ($\varnothing_2 = 50\ \mu m$, $f_2 = 19.63\ \%$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). 75

4.14 Coefficient de blindage d'une plaque composite à fibres parallèles lorsque $\mathbf{E}_I /\!\!/ \mathbf{u_y}$, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique étendue (lignes) et par éléments finis (points) en faisant varier la permittivité de la matrice ($\varnothing_2 = 50\ \mu m$, $f_2 = 19.63\ \%$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). 76

4.15 Coefficient de blindage d'une plaque composite à fibres parallèles lorsque $\mathbf{E}_I \,/\!/\, \mathbf{u_y}$, calculé avec la méthode d'homogénéisation dynamique étendue (lignes) et par éléments finis (points) en faisant varier la perméabilité des constituants ($\varnothing_2 = 50\ \mu m$, $f_2 = 19.63\ \%$, $\sigma_1 = 0\ S.m^{-1}$, $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$ et $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$). 77

4.16 Différence, pour chacun des calculs effectués précédemment, entre le coefficient de blindage calculé avec le modèle de Maxwell-Garnett (+), la méthode d'homogénéisation dynamique (×), la méthode d'homogénéisation dynamique étendue (o) et le coefficient de blindage calculé par éléments finis en fonction du rapport entre le diamètre des fibres $\varnothing$ et l'épaisseur de peau des fibres δ_2. 78

5.1 Boîtier à modéliser. 83

5.2 Vue éclatée du boîtier. 83

5.3 Schéma des plis constituant le matériau composite. 84

5.4 PML et boîte d'air entourant le boîtier. 85

5.5 Démarche d'homogénéisation du matériau composite. 86

5.6 Schéma d'un pli. 86

5.7 Propriétés du milieu homogène équivalent (MHE) au pli (figure 5.6) obtenues avec la méthode d'homogénéisation dynamique étendue. . 87

5.8 Schéma de la plaque constituée des plis homogénéisés. 88

5.9 Propriétés du milieu homogène équivalent (MHE) à la plaque (figure 5.8) obtenues avec la méthode d'homogénéisation dynamique étendue. 89

5.10 Décomposition fictive de la pièce en composites. 90

5.11 Maillage du boîtier. 90

5.12 Norme du champ électrique calculé par éléments finis sur un plan du domaine modélisé, pour une onde incidente à 3 GHz. 91

5.13 Coefficient de blindage, calculé au centre du boîtier. 92

A.1 Onde réfléchie et transmise par une interface plane soumise à une OPPM polarisée suivant $\mathbf{u_z}$ ayant une incidence normale. 104

B.1 Onde réfléchie, onde transmise et ondes internes d'une plaque homogène entourée d'air, soumise à une OPPM polarisée suivant $\mathbf{u_z}$ ayant une incidence normale. 108

B.2 Application numérique du champ électrique à un instant t, autour et dans une plaque homogène de 6 mm d'épaisseur, calculé analytiquement (ligne) et par éléments finis ($\times$) ($f = 10\ GHz$, $l = 6\ mm$, $\sigma = 1\ S.m^{-1}$, $\epsilon = 5\epsilon_0$ et $\mu = 2\mu_0$). 111

C.1 Schéma d'une inclusion ellipsoïdale. 116

C.2 Facteurs dépolarisants d'ellipsoïdes de révolution. 118

C.3 Schéma d'un cylindre elliptique. 118

D.1 Schéma d'une fibre. 122

D.2 Norme du champ électrique et magnétique, le long du diamètre parallèle à la direction de propagation de l'onde incidente, d'une fibre homogène ($\varnothing = 50\ \mu m$, $\sigma_2 = 1000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_0$) entourée d'air et illuminée par une onde électromagnétique ($f = 60\ GHz$, $E_I = 1\ V.m^{-1}$), calculée avec la première méthode analytique (pointillés), la seconde (lignes) et par éléments finis ($\times$). 129

D.3 Norme du champ électrique et magnétique, le long du diamètre parallèle à la direction de propagation de l'onde incidente, d'une fibre homogène ($\varnothing = 50\ \mu m$, $\sigma_2 = 40000\ S.m^{-1}$, $\epsilon_1 = \epsilon_0$ et $\mu_1 = \mu_0$) entourée d'air et illuminée par une onde électromagnétique ($E_I = 1\ V.m^{-1}$), calculée avec la première méthode analytique (pointillés), la seconde (lignes) et par éléments finis ($\times$) pour trois fréquences d'onde incidente. 130

Liste des tableaux

1.1 Conditions aux limites. 11

2.1 Tenseurs dépolarisants de microstructures simples à constituants isotropes. 30

2.2 Synthèse des méthodes d'homogénéisation analytique adaptées pour des microstructures simples à constituants isotropes. 31

4.1 Gammes des paramètres matériaux testés pour définir les limites de validité de la méthode d'homogénéisation dynamique étendue. . . . 72

5.1 Propriétés électromagnétiques des matériaux nécessaires à la modélisation du boîtier. 84

Résumé

Le nombre d'appareils électroniques et de systèmes de communication sans fil a considérablement augmenté au cours des 20 dernières années. Les boîtiers de blindage utilisés pour protéger les appareils électroniques contre les radiations externes, mais aussi pour limiter leurs émissions sont généralement conçus en alliages d'aluminium. Mais la nécessité de réduire le poids des aéronefs incite l'industrie aéronautique à l'utilisation de matériaux composites.

La modélisation de boîtiers de blindage composés de matériaux homogènes est possible par l'utilisation d'outils numériques tels que la méthode des éléments finis. Mais la discrétisation de boîtiers constitués de matériaux composites impliquerait un nombre d'éléments trop important rendant impossible toute modélisation numérique. Le recours à l'homogénéisation semi-analytique est une possibilité pour s'affranchir de cette restriction. Les milieux homogènes équivalents obtenus avec ces méthodes peuvent être insérés dans des outils numériques pour simuler le comportement électromagnétique de boîtiers de blindage complexes. Les modèles d'homogénéisation existants, tel que le modèle de Maxwell-Garnett, sont toutefois limités a des applications quasi-statiques.

La définition des propriétés effectives de matériaux composites illuminés par des ondes électromagnétiques est l'objectif principal de ce travail. Il en résulte deux méthodes d'homogénéisation dynamiques. La première introduit un effet de taille entre les fibres et la longueur d'onde. Elle permet ainsi d'étendre une méthode basée sur des problèmes d'inclusion aux micro-ondes. Mais elle reste limitée par l'apparition de l'effet de peau dans les renforts conducteurs. La seconde est basée sur la définition des pertes par effet Joule dans les fibres, permettant ainsi d'étendre la première méthode après l'apparition de l'effet de peau. Cette dernière est enfin utilisée pour modéliser le comportement électromagnétique d'un boîtier de blindage réaliste.

Mots-clefs :

Homogénéisation, Maxwell-Garnett, problèmes d'inclusion, milieu homogène équivalent, matériaux composites, compatibilité électromagnétique, taille caractéristique, pertes par effet Joule, micro-ondes.

Summary

The number of electronic devices and wireless communication systems has significantly increased over the past 20 years. Shielding enclosures used to protect electronic devices against radiated waves and to limit their emissions are usually designed in aluminum alloys. But the need to reduce the weight of aircraft incites the aerospace industry to the use of composite materials.

Modeling shielding enclosures composed of homogeneous materials is possible by the use of numerical tools such as the finite element method. But considering every details of the microstructure would involve a excessive number of unknowns preventing numerical modelings. The use of semi-analytical homogenization methods is a possibility to overcome this restriction. The equivalent homogeneous mediums obtained with these methods can be inserted into numerical tools to simulate the electromagnetic behavior of complex shielding enclosures. But classical homogenization models such as Maxwell-Garnett model, are limited to quasi-static applications.

Calculating the effective properties of composite materials illuminated by electromagnetic waves is the main objective of this work. This leads to two dynamic homogenization methods. The first one introduces a size effect between the fibers and the wavelength. It allows to extend a method based on inclusion problems to microwave frequencies. However it is limited by the occurrence of the skin effect in conductive inclusions. The second consider Joule losses and extends the first method after the occurrence of the skin effect. This second homogenization method is finally used to model the behavior of a realistic shielding enclosure.

Keywords

Homogenization, Maxwell-Garnett model, inclusion problem, effective medium, heterogeneous material, electromagnetic compatibility, characteristic size, Joule losses, microwave frequencies.