



**HAL**  
open science

# Intégration des données de sismique 4D dans les modèles de réservoir : recalage d'images fondé sur l'élasticité non linéaire

Ratiba Derfoul

## ► To cite this version:

Ratiba Derfoul. Intégration des données de sismique 4D dans les modèles de réservoir : recalage d'images fondé sur l'élasticité non linéaire. Traitement des images [eess.IV]. INSA de Rouen, 2013. Français. NNT : 2013ISAM0024 . tel-00924825

**HAL Id: tel-00924825**

**<https://theses.hal.science/tel-00924825>**

Submitted on 7 Jan 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

en vue de l'obtention du titre de DOCTEUR de l'Institut National des Sciences  
Appliquées de Rouen

Discipline : Mathématiques Appliquées

présentée par

Ratiba DERFOUL

---

INTÉGRATION DES DONNÉES DE SISMIQUE 4D  
DANS LES MODÈLES DE RÉSERVOIR

~

RECALAGE D'IMAGES FONDÉ SUR L'ÉLASTICITÉ  
NON LINÉAIRE

---

Thèse soutenue le 4 octobre 2013 devant le jury composé de :

Thierry COLEOU	Ingénieur de recherche, CGG	Examineur
Sébastien DA VEIGA	Ingénieur de recherche, IFPEN	Encadrant IFPEN
Nicolas FORCADEL	Professeur, INSA de Rouen	Président du jury
Christian GOUT	Professeur, INSA de Rouen	Directeur de thèse
Carole Le GUYADER	MCF HDR, INSA de Rouen	Directrice de thèse
Simon MASNOU	Professeur, Université Lyon I	Rapporteur
Gabriel PEYRE	CR HDR, CNRS et Paris Dauphine	Rapporteur
Elodie TILLIER	Dr de Université Marne la Vallée	Invitée au jury
Luminita VESE	Professeur, UC Los Angeles	Rapporteur

---

---

*À ma mère et à mon père.  
À mes grands-parents.  
À la mémoire de Mima : Zineb Brakni.*

---

---

## Remerciements

Ce manuscrit de thèse est l'aboutissement de trois années de travail, je remercie toutes les personnes qui ont cru en moi et qui m'ont permis d'arriver au bout de cette thèse.

Je tiens à exprimer ma gratitude à mes directeurs de thèse Christian Gout et Carole Le Guyader. Nos discussions et les conseils qu'ils m'ont apportés ces trois dernières années m'ont permis de m'initier à la recherche. La bonne ambiance de nos échanges, leur gentillesse, leur disponibilité et leurs qualités humaines m'ont incité à persévérer dans les moments de doute que chacun connaît durant la thèse. Je remercie Christian Gout pour ses conseils, sa clairvoyance et sa bonne humeur qui m'ont été très précieux. Je le remercie d'avoir participé au bon déroulement de cette thèse et de m'avoir encouragé à publier et à présenter mes travaux dans des conférences internationales. Je remercie Carole Le Guyader qui m'a initiée au recalage d'images et aux calculs de variations. La seconde partie de cette thèse n'aurait pu se faire sans son aide, sa patience et son soutien. Je salue sa compétence et sa rigueur scientifique qui resteront les moteurs de mon travail de recherche.

Je tiens ensuite à remercier les promoteurs de cette thèse au sein de l'IFPEN : Elodie Tillier et Sébastien Da Veiga. Je remercie tout particulièrement Elodie Tillier d'avoir élaboré le sujet et d'avoir choisi Christian Gout pour diriger cette thèse. J'ai beaucoup apprécié notre collaboration durant mon stage de fin d'études et la première année de la thèse. Sa participation à mon jury de thèse était naturelle, je la remercie d'y avoir consenti. Je remercie Sébastien Da Veiga de m'avoir fait confiance et d'avoir cru en moi depuis la période de stage effectuée à l'IFPEN. Je le remercie pour son dynamisme, pour ses qualités pédagogiques ainsi que pour les nombreux conseils qu'il m'a donnés. Je salue son professionnalisme et son esprit critique.

Je remercie très sincèrement Monsieur Simon Masnou, Monsieur Gabriel Peyré et Madame Luminita Vese qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail par leur lecture attentive et leurs remarques judicieuses. Je les remercie tout particulièrement pour l'honneur qu'ils m'ont fait de participer au jury de thèse.

Je remercie également Monsieur Thierry Coléou pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury ainsi que pour ses remarques pertinentes concernant ce manuscrit. Je tiens à adresser mes remerciements à Monsieur Nicolas Forcadel qui a présidé mon jury de thèse. Je le remercie également pour ses remarques concernant la partie théorique de ce travail.

Je remercie Mickaële Le Ravalec, la chef de ce projet à l'IFPEN pour les discussions enrichissantes que l'on a pu avoir ainsi que pour ses idées et ses critiques constructives. Sa bonne humeur et son humour ont été très appréciables.

Je tiens également à remercier Benoit Noetinger, Frédéric Roggero, Véronique Gervais, Alexandre Fornel, Delphine Sinoquet, Frédéric Delbos, Vincent Clochard et Mathilde Adelinet pour les idées et les échanges qui ont pu enrichir ce travail.

---

Un grand merci à tous les doctorants de l'IFPEN et de l'INSA Rouen pour tous les bons moments partagés. Je remercie tout particulièrement Ekaterina Sergienko (alias Katia) avec qui j'ai eu grand plaisir à partager le bureau, Zyed Bouzarkouna et Samir Touzani pour leurs retours d'expérience et leur sympathie ainsi que François Mckee, Franck Ouaki, Caroline Gardet et Benjamin Marteau pour leur agréable compagnie. Je remercie également tous les membres de la division ingénierie de réservoir et mathématiques appliquées ainsi que les membres du Laboratoire de Mathématiques de l'INSA Rouen pour leur accueil chaleureux.

Un immense merci à ma mère, à mon père et à mes deux frères pour leur soutien inconditionnel et pour avoir cru en ma réussite. Un grand merci également à mon oncle Mustapha, à ma tante Zouina et à mes grands-parents pour leur intérêt constant et leur affection. Je souhaite rendre un vibrant hommage à ma grand-mère qui nous a quittés durant cette thèse. Une dernière pensée à Guillaume que je remercie pour son soutien, sa confiance et pour tout ce qu'il m'apporte.

---

## Résumé

Dans une première partie, nous proposons une méthodologie innovante pour la comparaison d'images en ingénierie de réservoir. L'objectif est de pouvoir comparer des cubes sismiques obtenus par simulation avec ceux observés sur un champ pétrolier, dans le but de construire un modèle représentatif de la réalité. Nous développons une formulation fondée sur du filtrage, de la classification statistique et de la segmentation d'images. Ses performances sont mises en avant sur des cas réalistes.

Dans une seconde partie, nous nous intéressons aux méthodes de recalage d'images utilisées en imagerie médicale pour mettre en correspondance des images. Nous introduisons deux nouveaux modèles de recalage fondés sur l'élasticité non linéaire, où les formes sont appréhendées comme des matériaux de type Saint Venant-Kirchhoff et Ciarlet-Geymonat. Nous justifions théoriquement l'existence de solutions ainsi que la résolution numérique. Le potentiel de ces méthodes est illustré sur des images médicales.

## Abstract

In a first part, we propose an innovative methodology for image matching in the context of reservoir simulation. In order to build a model consistent with data collected on the field, we need to evaluate the error between seismic cubes obtained by simulation and seismic cubes acquired in the oil field. Using image processing tools, we develop a new formulation of the error. The application of this new formulation on synthetic reservoir cases demonstrates its efficiency.

In a second part, we address the issue of designing two theoretically well-motivated registration models capable of handling large deformations since they are based on nonlinear elasticity. The shape to be matched are viewed as Ciarlet-Geymonat materials for the first model and as Saint-Venant Kirchhoff materials for the second one. We investigate the efficiency of the proposed matching model for the registration of mouse brain gene expression data to a neuroanatomical mouse atlas.



---

## TABLE DES MATIÈRES

---

<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE</b>	<b>1</b>
<b>PARTIE I : Calage des données sismiques</b>	<b>7</b>
<b>1 Contexte de l'étude</b>	<b>7</b>
<b>2 Caractérisation et modélisation des réservoirs</b>	<b>13</b>
2.1 Le problème direct en géosciences . . . . .	13
2.1.1 Caractérisation des roches . . . . .	14
2.1.2 Caractérisation des fluides et de leurs mouvements . . . . .	14
2.1.3 Acquisition et modélisation des attributs sismiques . . . . .	16
2.2 Problème inverse en géosciences . . . . .	21
2.2.1 Intégration des données statiques . . . . .	22
2.2.2 Intégration des données dynamiques . . . . .	22
<b>3 Présentation du problème et état de l'art</b>	<b>27</b>
3.1 La fonction objectif . . . . .	28
3.2 La simplification de données . . . . .	28
3.3 Comparaison de données . . . . .	30
<b>4 SCDL, une nouvelle formulation de la <i>fonction objectif</i></b>	<b>31</b>
4.1 Filtrage . . . . .	32
4.2 Simplification des données . . . . .	36
4.2.1 Classification d'une image par une méthode statistique . . . . .	36
4.2.2 Segmentation d'une image par une méthode variationnelle . . . . .	37
4.2.3 Comparaison de la classification et de la segmentation . . . . .	49
4.3 Comparaison des données après simplification . . . . .	51
4.3.1 Carte des dissimilarités locales pour les images binaires . . . . .	51
4.3.2 Carte des dissimilarités locales pour les images en niveaux de gris . . . . .	52
4.4 Calcul de la <i>fonction objectif</i> . . . . .	58

<b>5</b>	<b>Application au calage d'historique</b>	<b>61</b>
5.1	Etude de robustesse . . . . .	61
5.1.1	Rotation . . . . .	62
5.1.2	Translation . . . . .	63
5.1.3	Dégradation de la résolution . . . . .	65
5.1.4	Conclusion . . . . .	72
5.2	Application de la SCDL à des cas synthétiques . . . . .	73
5.3	Application sur un cas réaliste . . . . .	77
5.4	Application de l'extention de la SCDL . . . . .	80
 <b>CONCLUSION DE LA PREMIÈRE PARTIE</b>		 <b>85</b>
 <b>Annexes</b>		 <b>87</b>
 <b>PARTIE II : Recalage d'images</b>		 <b>93</b>
<b>6</b>	<b>Introduction à la registration</b>	<b>93</b>
6.1	Mesure de similarité . . . . .	97
6.2	Modèles de déformation . . . . .	101
6.2.1	Modèles élastiques linéaires . . . . .	103
6.2.2	Modèles fluides . . . . .	103
6.2.3	Modèles élastiques non linéaires . . . . .	105
6.2.4	Modèles conjoints de segmentation et de recalage . . . . .	106
6.2.5	Modèles de recalage sous contraintes géométriques . . . . .	107
6.3	Optimisation et schémas multirésolution . . . . .	108
6.3.1	Méthodes d'optimisation . . . . .	108
6.3.2	Schéma multirésolution . . . . .	109
<b>7</b>	<b>Notions et rappels</b>	<b>111</b>
7.1	Espaces $L^p$ et espaces de Sobolev . . . . .	111
7.1.1	Généralités . . . . .	111
7.1.2	Espaces $L^p$ et espace de Sobolev . . . . .	113
7.2	Introduction aux méthodes directes du calcul des variations . . . . .	116
7.2.1	Cas scalaire . . . . .	117
7.2.2	Cas vectoriel . . . . .	121
7.3	Élasticité tridimensionnelle . . . . .	126
7.3.1	Préliminaires . . . . .	126
7.3.2	Loi de comportement des matériaux élastiques . . . . .	129
7.3.3	Matériau de Saint Venant-Kirchhoff . . . . .	130
7.3.4	Hyperélasticité . . . . .	130

## TABLE DES MATIÈRES

---

<b>8</b>	<b>Un modèle de recalage sous contraintes</b>	<b>133</b>
8.1	Modélisation mathématique . . . . .	133
8.2	Existence de minimiseurs . . . . .	137
8.3	Un résultat de convergence . . . . .	140
8.4	Résolution numérique . . . . .	143
8.4.1	Lagrangien augmenté . . . . .	143
8.4.2	Méthode numérique fondée sur le découplage . . . . .	145
8.5	Applications aux images médicales . . . . .	150
8.6	Conclusion . . . . .	152
<b>9</b>	<b>Un problème de recalage relaxé</b>	<b>159</b>
9.1	Modélisation mathématique . . . . .	159
9.2	Résultats théoriques . . . . .	162
9.2.1	Problématique relative à l'existence de minimiseurs . . . . .	162
9.2.2	Introduction du problème relaxé . . . . .	162
9.2.3	Existence de minimiseurs du problème relaxé . . . . .	163
9.2.4	Théorème de relaxation . . . . .	165
9.3	Résolution numérique . . . . .	165
9.4	Description et analyse de la méthode de résolution numérique proposée . . . . .	165
9.5	Schéma numérique . . . . .	172
9.6	Application aux images médicales . . . . .	173
	<b>CONCLUSION GÉNÉRALE</b>	<b>181</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>186</b>



---

## Introduction générale

---

L'exploitation des gisements d'hydrocarbures est un enjeu majeur de notre époque, elle est fortement liée à la croissance de la demande énergétique. L'exploration et l'exploitation pétrolières ont motivé de nombreuses avancées technologiques, et particulièrement en géophysique. La modélisation de réservoir s'est alors rapidement imposée comme étant un outil adéquat pour évaluer le potentiel de production des gisements, et pour optimiser les taux de récupération d'hydrocarbures. En effet, grâce à la construction d'un modèle de réservoir fidèle aux données disponibles, la modélisation de réservoir peut prédire le comportement d'un réservoir d'hydrocarbures.

L'intégration des données passe inévitablement par une étape de comparaison de ces données avec des données collectées sur le champ qui sont appelées données de référence. Généralement, l'erreur entre les données simulées et les données de référence est calculée par une fonctionnelle que l'on appelle *fonction objectif* ou *fonction coût*.

Ces données disponibles sont de deux types : les données statiques qui n'évoluent pas et les données dynamiques qui fluctuent en fonction du temps. Les données statiques sont des données liées aux propriétés intrinsèques des roches et des fluides présents dans le réservoir, tandis que les données dynamiques sont surtout liées aux déplacements des fluides dus à la mise en production du champ. Ces dernières données sont constituées des données de production (débit et pression des différents fluides) et des données sismiques qui sont les réponses à des ébranlements volontaires provoqués. Les données de production sont relativement simples à intégrer au modèle de réservoir car elles sont ponctuelles (puits) et elles peuvent alors être représentées par des courbes en fonction du temps. Dans le cas des données de production, la *fonction objectif* est représentée par une formulation de type moindres-carrés calculant l'erreur point par point. À l'inverse, les données sismiques sont très nombreuses, elles s'étendent sur l'ensemble du réservoir et sont modélisées par des cubes sismiques. L'intégration de ces données au modèle de réservoir est un défi majeur de la modélisation de réservoir car ces données apportent des informations précieuses pour la caractérisation géologique du champ étudié et pour l'évaluation du mouvement des fluides présents dans le réservoir. A ce jour, les formulations classiques de la *fonction objectif* utilisées pour intégrer les données sismiques ne sont pas satisfaisantes, car elles ne permettent pas de quantifier convenablement la différence entre deux cubes de données sismiques. Ainsi, le modèle obtenu ne permettra pas de simuler les données sismiques recueillies sur le terrain.

L'étude présentée dans ce rapport propose de nouvelles formulations de la *fonction objectif* afin d'intégrer de telles données dans les modèles de réservoir.

Les données sismiques sont vues comme des images en deux ou trois dimensions représentant une information physique liée notamment aux impédances acoustiques. C'est pour cette raison que, dans la première partie de ce rapport, nous nous intéressons à l'exploitation des techniques de traitement d'images en vue de répondre à notre problématique qui est, rappelons le, l'intégration des données sismiques dans les modèles de réservoir. Les données sismiques étant très denses et très nombreuses, notre première idée est d'"épurer" ces données pour ne garder que l'information pertinente. Parmi les nombreuses méthodes existantes pour réaliser la réduction des données, nous avons choisi de nous tourner vers les méthodes les plus efficaces de filtrage et de segmentation des données. Cette étape nous permet de nous affranchir du bruit présent dans les données et de nous concentrer sur les données essentielles. L'étape suivante consiste à comparer les données ainsi simplifiées. Nous avons alors choisi de nous intéresser à la définition d'une distance entre deux images (dérivée de la distance de Hausdorff). Cette distance est locale et nous permet de construire une carte localisant et quantifiant les dissimilarités entre deux cartes. La *fonction objectif* calculée entre deux cartes est alors obtenue en sommant la carte des dissimilarités locales précédemment construite. Nous étudions ensuite la robustesse de cette nouvelle formulation de la *fonction objectif* et nous évaluons son potentiel dans le cadre de la modélisation de réservoir par calage des données sur des cas synthétiques réalistes.

Dans la seconde partie de ce rapport, nous nous intéressons à des développements plus théoriques liés aux méthodes de recalage d'images largement utilisées dans le domaine médical (et susceptibles d'être utilisées dans les géosciences). L'objectif de ces méthodes est de mettre en correspondance deux images dans le but de les comparer dans un référentiel commun. Nous nous intéressons plus particulièrement au cadre de l'élasticité non linéaire. Dans ce cadre, les objets contenus dans les images sont appréhendés comme des matériaux hyperélastiques homogènes et isotropes.

Le premier modèle que nous proposons est un modèle de recalage d'images sous contraintes fondé sur la densité d'énergie interne d'un matériau de type Ciarlet-Geymonat que nous modélisons par un problème de minimisation d'énergie. Nous démontrons un résultat d'existence de minimiseurs pour ce problème et un résultat de convergence lorsque le nombre de contraintes tend vers l'infini. Ensuite, nous discutons de la méthode de résolution et proposons un résultat théorique.

Le second modèle est fondé sur la densité d'énergie interne d'un matériau de type Saint Venant-Kirchhoff. Le problème de recalage d'images est également formulé comme un problème de minimisation associé à la densité d'énergie interne du matériau considéré. Nous établissons un résultat théorique d'existence de solutions pour le problème de minimisation relaxé, solutions que l'on qualifie de solutions généralisées du problème initial. Nous proposons également d'analyser une méthode de résolution numérique fondée sur le principe de découplage.

Nous évaluons le potentiel des deux modèles de recalage d'images proposés pour mettre en correspondance des images médicales.

Ce manuscrit se compose de deux parties qui sont elles-même divisées en 9 chapitres résumés ci-après.

### PARTIE 1 : CALAGE DES DONNÉES SISMISQUES

- **Chapitre 1 : Contexte de l'étude**

Ce chapitre introduit le contexte et les fondements nécessaires à la compréhension de la problématique de cette thèse.

- **Chapitre 2 : Caractérisation et modélisation des réservoirs d'hydrocarbures**

Dans ce chapitre, nous présentons la modélisation des réservoirs d'hydrocarbures. Dans un premier temps, nous introduisons les propriétés physiques caractérisant les roches et les fluides présents dans le réservoir ainsi que les lois physiques auxquelles ils sont soumis. En particulier, nous présentons les mécanismes d'acquisition des données. Puis, nous présentons les modèles pétro-élastiques permettant de les simuler. Ces modèles sont utilisés en ingénierie de réservoir pour la modélisation des réservoirs afin de simuler la répartition des propriétés physiques dans le but de prédire la production. En particulier nous allons présenter les outils d'optimisation utilisés pour construire un modèle de réservoir consistant avec les données observées.

- **Chapitre 3 : Présentation du problème et état de l'art**

Dans ce chapitre, on présente la problématique de cette étude qui est l'intégration des données sismiques dans les modèles de réservoir. En particulier, nous introduisons notre approche pour répondre à cette problématique ainsi qu'un état de l'art relatif aux techniques utilisées dans l'approche que nous proposerons.

- **Chapitre 4 : Somme sur la Carte de Dissimilarités Locales (SCDL), une nouvelle formulation de la *fonction objectif***

Dans ce chapitre, nous proposerons une nouvelle formulation de la *fonction objectif* que l'on notera SCDL. L'idée de base est d'abord de réduire le nombre important de données dans les cartes sismiques. Ensuite, nous proposons d'utiliser des outils de traitement d'images permettant la reconnaissance de formes ou d'objets afin de quantifier de façon adéquate la différence entre les cartes simplifiées.

- **Chapitre 5 : Application au calage d'historique**

Dans ce chapitre, nous présentons des tests de robustesse de la SCDL en comparant son comportement avec celui d'autres formulations de la *fonction objectif* vis-à-vis de la translation, de la rotation et de la perte de résolution. Ensuite, trois cas de calage d'historique sont proposés issus de cas de réservoirs synthétiques et réalistes. Les résultats du calage avec la SCDL sont comparés avec ceux de la formulation classique par moindres-carrés.

- **Conclusion de la première partie**

**PARTIE 2 : RECALAGE D'IMAGES**

- **Chapitre 6 : Introduction au recalage d'images**

Dans ce chapitre, après avoir introduit le principe du recalage d'images, nous établissons un état de l'art des techniques existantes en recalage d'images.

- **Chapitre 7 : Rappels mathématiques**

Le but de ce chapitre est d'abord de rappeler les notions mathématiques essentielles qui servent à présenter les modèles des deux chapitres suivants. Les définitions et propriétés relatives aux espaces  $L_p$  et aux espaces de Sobolev sont rappelées. Ensuite, nous introduisons les fondements du calcul de variations. Enfin, une introduction à l'élasticité non linéaire est proposée.

- **Chapitre 8 : Un modèle de recalage d'images sous contraintes fondé sur la densité d'énergie interne d'un matériau de type Ciarlet-Geymonat**

Un premier modèle de recalage est proposé dans ce chapitre. Il est fondé sur la théorie de l'élasticité non-linéaire. Ce cadre permet de générer de grandes déformations. Plus précisément les formes présentes dans les objets sont appréhendées comme des matériaux de type Ciarlet-Geymonat.

- **Chapitre 9 : Un problème de recalage d'images relaxé fondé sur la densité d'énergie interne d'un matériau de type Saint Venant-Kirchhoff**

Dans ce chapitre, nous proposons un modèle original de "registration" fondé sur l'élasticité non linéaire autorisant ainsi de grandes déformations. Les objets contenus dans les images sont appréhendés comme des matériaux hyperélastiques homogènes et isotropes. En particulier, nous proposons d'utiliser ici une variante du matériau de Saint Venant-Kirchhoff pour ses bonnes propriétés physiques et théoriques. Le problème de recalage est formulé comme un problème de minimisation associé à l'énergie interne du matériau considéré.

- **Conclusion et perspectives**

Dans ce chapitre, nous résumons nos principales contributions et nous proposons quelques perspectives à envisager pour poursuivre ce travail.

# **PARTIE I**

## **Intégration des données de sismique 4D dans les modèles de réservoir**



# CHAPITRE 1

---

## Contexte de l'étude

---

Le processus de formation des hydrocarbures<sup>1</sup> prend des millions d'années. Des déchets organiques s'enfouissent dans une roche appelée **roche mère**. Cette accumulation de sédiments riches en matière organique (constituée en majorité de lipides) se fait par gravité. Elle est uniquement possible dans des environnements très particuliers tels que les endroits confinés, et lors de périodes spécifiques telles que les réchauffements climatiques intenses durant lesquels le volume des déchets organiques excède la capacité de recyclage de l'écosystème local. Ces déchets se transforment alors en hydrocarbures tels que le gaz et l'huile<sup>2</sup>. En raison d'une pression élevée, ces hydrocarbures quittent la roche mère et migrent vers la surface, jusqu'à ce qu'ils soient arrêtés dans leur ascension par une roche imperméable, appelée **roche couverture**. Ainsi, les hydrocarbures restent piégés dans une roche appelée **roche réservoir**, poreuse et saline la plupart du temps. Ces pièges se font le plus souvent au niveau d'un pli représentant une convexité vers le haut et dont le centre est occupé par les couches géologiques les plus anciennes. De tels plis sont appelés des anticlinaux et constituent d'excellents pièges à hydrocarbures.

La figure 1.1 schématise la formation d'un réservoir. Celui-ci est constitué d'une ou plusieurs roches plus ou moins poreuses contenant de l'eau, du gaz et/ou de l'huile pouvant être en communication avec une formation aquifère très étendue.

---

1. Le terme hydrocarbure est utilisé pour désigner en général le pétrole ou gaz.  
2. Huile est souvent employée pour désigner le pétrole.

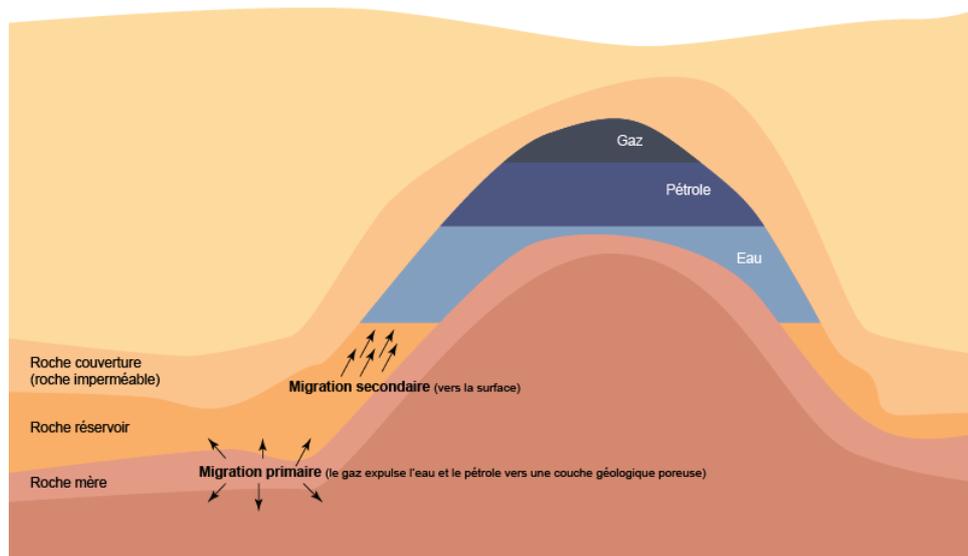


FIGURE 1.1 – Représentation d'un réservoir d'hydrocarbures schématisé. Figure issue de <http://www.connaissancedesenergies.org>.

L'ingénierie de réservoir est dédiée à l'exploitation de ces réservoirs d'hydrocarbures. L'un des objectifs à atteindre est d'en optimiser la production. Le principal axe de recherche de l'ingénierie de réservoir est de concevoir des outils fiables, d'abord pour visualiser le sous-sol afin d'identifier l'emplacement des réservoirs potentiels puis pour décrire la structure d'un réservoir afin de prévoir son comportement au moyen de simulations numériques. Pour ce faire, on s'appuie sur la construction de modèles représentatifs du réservoir. Ces modèles étant établis, on simule numériquement la production à venir en fonction de différents schémas de production. Clairement, ces prédictions sont d'autant plus fiables que le modèle de réservoir respecte les données collectées sur le champ. Les données collectées sont de deux types : les données statiques et les données dynamiques.

Les données statiques sont invariables dans le temps. Ce sont par exemple des mesures de perméabilité et de porosité réalisées en laboratoire sur des échantillons de roche extraits des puits. Les données dynamiques dépendent des déplacements de fluide et varient donc avec le temps. Elles comprennent notamment les données de production et les données de sismiques répétées. Les données dynamiques sont disponibles une fois la phase d'exploitation du réservoir initiée. Les données de production sont les données de pressions et de saturations au niveau des puits. Les données géophysiques sont des données issues des campagnes sismiques. La sismique consiste à exploiter les informations générées par la propagation d'ondes de compression et de cisaillement dans le sous-sol. Ces ondes se réfléchissent partiellement lorsqu'elles rencontrent un fort contraste d'impédance. La figure 1.2 schématise l'acquisition d'une onde sismique se reflétant sur l'intersection de deux couches géologiques.

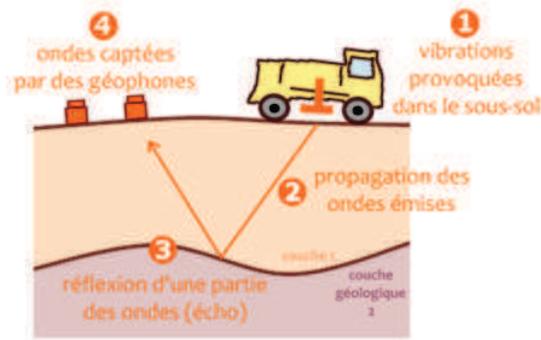


FIGURE 1.2 – Campagne sismique schématisé d'un réservoir d'hydrocarbures.

En exploitant les temps de parcours sources-récepteurs ainsi que l'amplitude du champ d'ondes, par le biais d'un processus d'inversion, on est capable de produire une image structurale des couches géologiques du sous-sol, appelée image sismique. Un exemple de cube d'impédances d'ondes P est donné dans la figure 1.3.

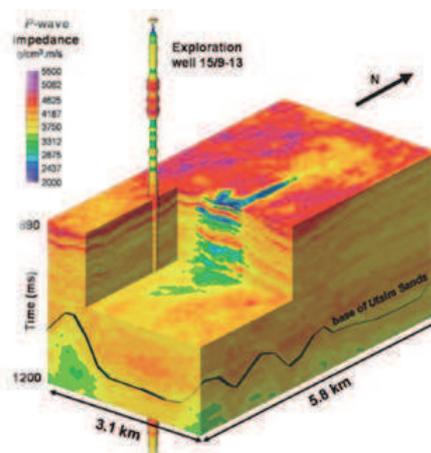


FIGURE 1.3 – Exemple d'image sismique reconstruite pour un site de stockage de CO<sub>2</sub> norvégien en mer du Nord. Vue 3D de la distribution des impédances des ondes P, obtenue après inversion sismique des données acquises en 2006. Le CO<sub>2</sub> est identifié par des valeurs d'impédances plus faibles (couleurs bleu et vert) à l'intérieur du réservoir (d'après [39])

L'image ainsi produite est entachée d'incertitudes dues à la présence de bruit affectant les données et aux erreurs lors de l'acquisition. Néanmoins, elle permet de déterminer la géométrie du réservoir et la position des principales failles. Elle permet aussi d'identifier des tendances dans le réservoir qui influent sur la distribution de perméabilité et de porosité. En répétant ces campagnes sismiques au cours de la production, on obtient des données sismiques dont les variations entre deux temps caractérisent les mouvements des fluides et les changements de pression dans le réservoir.

Les données dynamiques sont intégrées dans un modèle de réservoir par un processus itératif. Un modèle de réservoir est dit fiable lorsqu'il reproduit autant que possible l'ensemble des données

disponibles. Le calage d'historique est le processus itératif permettant de réduire l'erreur entre données dynamiques observées et données dynamiques simulées en modifiant les paramètres du modèle de réservoir, grâce à la minimisation d'une fonctionnelle appelée *fonction objectif*. Les techniques de calage d'historique commencent à être utilisées dans l'industrie pétrolière pour caractériser le réservoir en intégrant les données géologiques, géophysiques et de production. Dans le calage d'historique, on définit d'abord une *fonction objectif* qui mesure les écarts entre les données observées et les données simulées, telles que la production d'huile, la production d'eau d'un ou plusieurs puits ou les impédances sismiques dans une ou plusieurs régions. On choisit aussi des paramètres à optimiser tels que les perméabilités, les porosités, les skins des puits, les connections des failles, etc. Les paramètres peuvent être liés à des régions géométriques, comme les perméabilités ou porosités autour d'un ou de plusieurs puits. Nous insistons sur le fait que les modèles de réservoir ont pour objectif de prédire la production future. C'est pourquoi il est important qu'ils soient consistants avec les données disponibles (voir [85]).

De façon usuelle, la *fonction objectif*, notée OF, est calculée à partir d'une formulation de type moindres-carrés :

$$OF = \frac{1}{2}(d^0 - d^s)^T C^{-1}(d^0 - d^s) \quad (1.1)$$

où :

- $d^0$  est le vecteur des données réelles disponibles,
- $d^s$  est le vecteur des données simulées,
- $C$  est la matrice de covariance quantifiant l'incertitude sur les données et la modélisation.

Cette formulation est efficace dans le cas des données de production, dans le sens où la *fonction objectif* diminue de façon significative pendant le processus de calage. En revanche, elle montre ses limites pour des données en deux ou trois dimensions telles que les données sismiques. En effet, l'erreur calculée avec cette formulation pour ce type de données n'est pas représentative de la différence entre deux images, ni de la qualité de calage souhaitée. Par exemple, pour deux images sismiques identiques mais décalées de quelques pixels, la *fonction objectif* mesurera une différence très grande alors qu'un tel résultat obtenu par calage serait très satisfaisant. La figure 1.4 illustre cette problématique sur un cas très simple où une carte de porosité (image de gauche) est comparée d'abord à une même carte de porosité décalée de quelques pixels (image du centre) puis à une image représentant un blanc aléatoire (image de droite). Bien que les deux cartes de porosités soient très semblables, l'erreur au sens des moindres-carrés entre ces deux cartes est du même ordre de grandeur que la carte qui ne contient que du bruit.

Notre objectif est donc de proposer une formulation de la *fonction objectif* qui prend mieux en compte l'erreur par rapport aux données sismiques. Les données sismiques sont réparties sur l'ensemble du réservoir et constituent un nombre important de données à caler. Nous considérons les données sismiques comme des images en deux ou trois dimensions. Il est important de noter que dans ce travail, nous nous intéressons uniquement à l'intégration des données sismiques après inversion. En particulier, la *fonction objectif* inclura par conséquent les impédances acoustiques P et S, et non les amplitudes sismiques. Ces notions seront précisées au chapitre 2.

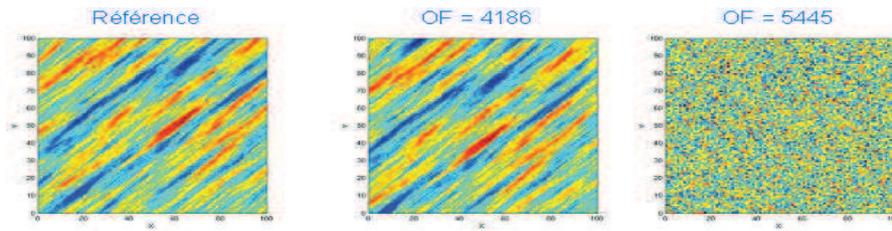


FIGURE 1.4 – Comparaison de la *fonction objectif* entre deux cartes de porosités identiques à une translation près et entre une carte de porosité et un bruit blanc. Gauche : carte de porosité de référence. Centre : carte de porosité translaturée. Droite : bruit blanc.

Cette première partie du manuscrit se décompose en quatre chapitres. Dans un premier chapitre, nous rappellerons les notions nécessaires pour caractériser un réservoir. Dans un second chapitre, nous établirons un état de l'art sur les différents aspects de la problématique : la *fonction objectif*, la simplification des données et la comparaison d'images. Le troisième chapitre est consacré à la présentation de la méthodologie. Nous étudierons d'abord les techniques permettant d'extraire l'information pertinente d'un jeu de données. Pour cela, on propose d'abord de filtrer les données et ensuite de les classer en un nombre réduit d'ensembles afin de ne garder que l'information pertinente. Deux types d'approches seront retenus : la classification statistique et la segmentation par méthode variationnelle. Ensuite, une méthode de comparaison d'images basée sur une distance de Hausdorff modifiée sera étudiée. Finalement, le dernier chapitre est consacré à une étude de robustesse de la méthode proposée et à son application aux données sismiques. Elle sera illustrée par quatre cas de calage d'historique : deux cas synthétiques simples et deux cas réalistes.



---

### Caractérisation et modélisation des réservoirs

---

Les réservoirs d'hydrocarbures sont caractérisés par des propriétés pétrophysiques bien particulières. Ce chapitre, composé de deux parties, a pour but de présenter le processus de simulation de réservoir.

Dans la première partie intitulé *problème direct*, les propriétés des roches et des fluides sont supposées connues. Après avoir donné les définitions de ces propriétés, nous présenterons les lois et les équations régissant le comportement des fluides. Nous verrons également que par la résolution de ces équations il est possible de déterminer la production d'hydrocarbures d'un réservoir. Dans cette première partie, nous allons également présenter le mécanisme d'acquisition des données sismiques puis les modèles permettant de simuler ces données à partir de simulations des écoulements des fluides.

Dans la seconde partie de ce chapitre nous présenterons le problème dit inverse de la modélisation de réservoir. En particulier nous allons présenter les outils d'optimisation utilisés pour construire un modèle de réservoir consistant avec les données observées.

#### **2.1 Le problème direct : la simulation des écoulements des fluides et des attributs sismiques**

Dans cette section, nous nous intéressons au problème dit *direct* de la modélisation de réservoir. Dans un premier temps, les propriétés nécessaires à la caractérisation des roches et des fluides vont être présentées. Ensuite, en supposant que ces propriétés sont connues, nous présenterons les lois régissant les écoulements des fluides et permettant ainsi de les simuler pour déterminer la production (saturations et pressions). Enfin, nous nous intéresserons aux données sismiques, de leur acquisition à leur simulation. La figure 2.1 schématise les principales étapes du problème direct. Ainsi, à partir de la connaissance a priori des propriétés des roches et des fluides, la simulation des écoulements des fluides (correspondant à la résolution de certaines équations) fournit des données de production qui vont permettre de simuler les attributs sismiques.

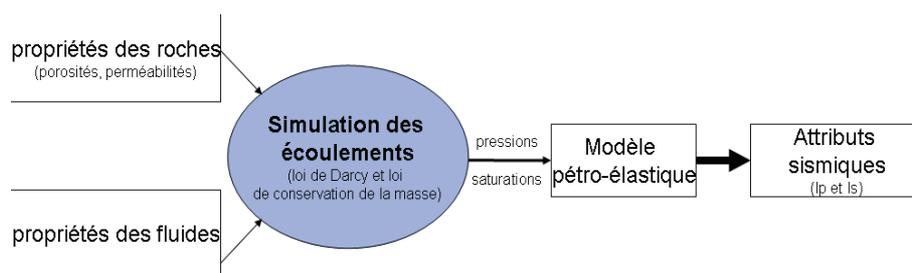


FIGURE 2.1 – Problème direct : simulation de l’écoulement des fluides et des attributs sismiques.

### 2.1.1 Caractérisation des roches

Les propriétés pétrophysiques d’une roche déterminent sa capacité à constituer un réservoir d’hydrocarbures. Les propriétés les plus importantes sont la porosité et la perméabilité. **La porosité** d’une roche, notée  $\phi$ , caractérise la capacité de stockage de la roche. Elle correspond au rapport du volume poreux  $V_{pores}$  et du volume total de la roche  $V_{total}$ . La porosité varie donc entre 0 et 1. Plus une roche est poreuse, plus le nombre de cavités qu’elle renferme est important. C’est dans ces cavités appelées pores que peuvent être stockés les hydrocarbures. **La perméabilité** d’une roche, notée généralement  $K$ , est la capacité de la roche à laisser s’écouler les fluides dont elle est saturée. L’écoulement d’un fluide dans un milieu poreux dépend également de la présence ou non d’un autre fluide dans la roche. Ainsi deux notions ont été introduites :

- la perméabilité absolue qui caractérise la capacité de la roche à laisser s’écouler uniquement un seul fluide à travers ses pores (elle est représentée par un tenseur généralement diagonal).
- Lorsque plusieurs fluides cohabitent dans la même roche le milieu est dit polyphasique. Une perméabilité relative à chaque phase notée  $kr_p$  quantifie la capacité de la phase  $p$  à s’écouler en présence d’autres fluides.

En géologie, en raison des phénomènes de compaction et de sédimentation, les perméabilités verticales sont plus faibles que les perméabilités horizontales. Dans ce cas le milieu est dit anisotrope. La perméabilité se mesure en darcy (D). On rappelle que  $1D = 0,97 \times 10^{-12} m^2$ .

On dit d’une roche qu’elle a de bonnes propriétés pétrophysiques lorsqu’elle est poreuse et perméable, elle est alors une bonne candidate pour être une roche réservoir contenant des hydrocarbures.

### 2.1.2 Caractérisation des fluides et de leurs mouvements

Les fluides présents dans le réservoir se caractérisent par les propriétés des différentes phases dont ils sont constitués. Les différentes phases sont l’eau, l’huile et le gaz. Pour chaque phase on associe une saturation, une viscosité, une fraction massique et une masse volumique. **La saturation** d’une phase  $p$  donnée est le rapport entre le volume  $V_p$  occupé par cette phase sur le volume total occupé par l’ensemble des phases contenues dans la roche. Le volume total occupé, noté  $V_{pores}$  est supposé être égal au volume total des pores. La somme des saturations est égale à 1. Une phase peut être constituée de plusieurs constituants tels que l’eau, l’huile lourde, etc. La fraction massique d’un constituant dans une phase donnée, notée  $X_p^c$ , est le rapport

## 2.1 Le problème direct en géosciences

---

entre la masse du constituant  $c$  dans la phase  $p$  et la masse totale de la phase  $p$ . La somme des fractions massiques dans une phase donnée est égale à 1. **La masse volumique** d'une phase  $p$  notée  $\rho_p$  est le rapport entre la masse de la phase et le volume total. Elle est calculée en  $kg/m^3$ . **La viscosité**  $\mu_p$  mesure la capacité d'une phase à s'écouler. Lorsque la viscosité augmente, la capacité du fluide à s'écouler diminue. Elle dépend de la pression de chaque phase  $P_p$  et de la fraction massique  $X_p^c$ . On la mesure en pascal seconde ( $Pa \cdot s$ ).

### Modélisation des écoulements

Une fois les propriétés des roches et fluides en présence identifiées, on peut simuler l'écoulement des fluides au sein de la roche. En simulation de réservoir ces propriétés sont connues initialement (avant la mise en production du réservoir) grâce aux mesures faites en laboratoire et aux données sismiques. Lorsque le réservoir est mis en production, les hydrocarbures sont produits dans les puits producteurs et de l'eau peut être injectée dans le réservoir pour augmenter la production. Les lois décrivant les mouvements des fluides observés dans le réservoir sont principalement la loi de conservation de la masse et la loi de Darcy généralisée [44]. Ces lois sont locales et applicables dans un milieu poreux non homogène en présence de fluides éventuellement compressibles et s'écoulant de façon non uniforme. Pour simplifier, on suppose qu'il y a plusieurs phases mais que chacune d'elles n'est constituée que d'un composant. Les équations de la conservation de la masse et de Darcy forment un système couplé d'équations non linéaires dont les principales inconnues sont les saturations et les pressions en chacune des phases ( $S_w, S_o, S_g, P_w, P_o, P_g$  avec  $w = water, o = oil, g = gas$ ).

**Loi de conservation de la masse.** Dans le réservoir celle-ci s'obtient en considérant que la variation de la masse d'une phase dans un volume donné du milieu poreux est égale à la différence des quantités entrantes et sortantes de cette phase pendant un temps donné. Pour chaque phase la conservation de la masse est garantie par l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \rho_p S_p \phi \} + \text{div} \left\{ \sum_p \rho_p u_p \right\} + \delta q_p = 0, \quad (2.1)$$

où

- $p$  est la phase considérée ( $w$  pour l'eau,  $g$  pour le gaz,  $o$  pour l'huile),
- $\delta q_p$  désigne le débit d'injection ou de production de la phase  $p$  (appelé généralement terme source),
- $\rho_p$  désigne la densité (dépendante de la pression de la phase considérée  $P_p$ ),
- $u_p$  la vitesse d'écoulement de la phase  $p$ .

**Loi de Darcy.** Elle met en relation la vitesse d'écoulement de chacune des phases  $q_p$  et le gradient de la pression  $\nabla P_p$ . Pour une phase donnée la loi de Darcy est donnée par :

$$u_p = - \frac{kr_p}{\mu_p} K \nabla (P_p - \rho_p g z) \quad (2.2)$$

où

- $kr_p$  est la perméabilité relative à la phase  $p$ ,
- $g$  désigne le vecteur accélération de la pesanteur ( $kg/m^2$ ),
- $K$  le tenseur de perméabilité symétrique du milieu considéré,
- $z$  la profondeur (l'axe  $z > 0$  est orienté vers le bas).

Les équations (2.1) et (2.2) forment un système d'équations couplées non linéaires dont les inconnues sont les saturations et les pressions de chaque phase. Les relations de thermodynamique (PVT) permettent alors d'avoir les débits en fonction de la pression. En pratique dans le cadre de la simulation de réservoir, seules la porosité  $\phi$  et la perméabilité  $K$  sont supposées connues et toutes les autres grandeurs se réécrivent en fonction des saturations et des pressions grâce à différents modèles [5]. Pour résoudre ces équations on a recourt à des schémas de discrétisation généralement en volumes finis (voir [5] et [42] pour plus de détails sur les schémas de discrétisation). Des conditions initiales et des conditions limites doivent alors être prises en compte.

**Les conditions initiales** dépendent du type d'études menées. Durant la phase d'exploration (c'est-à-dire avant la mise en production du champ) ou dans le cas d'un arrêt de production le réservoir est considéré en équilibre hydrostatique. Après la mise en exploitation, on suppose que les cartes de saturations et de pressions sont connues à l'instant de la reprise.

**Les limites du réservoir** sont en général supposées imperméables à l'écoulement. Les puits, localisés aux points de forage, sont caractérisés de manière équivalente soit par les débits de production et les débits d'injection, soit en terme de pressions. Ainsi on peut imposer soit une pression soit un débit en tête de puits ou au fond du puits. Parfois, les ingénieurs réservoir imposent plutôt un rapport entre les différentes phases observées en surface à la sortie des puits producteurs.

La résolution des équations (2.1) et (2.2) permet donc de déterminer les pressions et les saturations pour chacune des phases et donc la production à venir en fonction des conditions limites et initiales imposées. Il est alors envisageable de simuler les attributs sismiques.

### 2.1.3 Acquisition et modélisation des attributs sismiques

Dans cette section, nous allons décrire les méthodes d'acquisition des données sismiques. Puis nous aborderons le problème de la simulation des attributs sismiques. Cette simulation se fait par l'intermédiaire d'un modèle appelé modèle pétro-élastique qui permet de calculer les attributs sismiques grâce aux valeurs de pressions et de saturations calculées par le simulateur d'écoulement des fluides.

#### Principe de la sismique et de la sismique 4D

La sismique est une méthode de prospection géophysique dans laquelle une source émet des ondes élastiques qui pénètrent dans le sol. Ces ondes se propagent à vitesse variable suivant le milieu parcouru et se réfléchissent sur les interfaces séparant différents milieux. Ces interfaces peuvent être soit des séparations des couches géologiques ou des fractures. La sismique donne ainsi la possibilité d'imager le sous-sol. Son pouvoir de pénétration peut atteindre plusieurs dizaines de kilomètres et sa résolution est bien supérieure aux autres méthodes géophysiques.

## 2.1 Le problème direct en géosciences

---

Une description détaillée des différentes méthodes d'acquisition est donnée dans [77].

Il existe trois types de sismique complémentaires permettant une connaissance à plus ou moins grande profondeur : la sismique réflexion, la sismique réfraction et la sismique résonance. Elles permettent de repérer la disposition des structures géologiques dans le sous-sol. Dans les trois cas, un ébranlement est provoqué afin de créer des ondes sismiques qui sont détectées par des capteurs à leur retour sur la surface du sol.

La sismique réflexion émet des ondes qui sont réfléchies sur une surface géologique et remontent vers la surface. Les surfaces de réflexions sont les surfaces de séparation des milieux d'impédance acoustique différente.

La sismique réfraction consiste à provoquer une vibration transitoire en surface et à enregistrer le passage des ondes sismiques dans le temps, à l'aide de capteurs spécifiques. Ces ondes sont réfléchies ou réfractées aux changements d'élasticité ou de densité aux frontières des couches géologiques. Le traitement des données permet de déterminer les vitesses de propagation des ondes sismiques à travers les différentes couches de matériaux. Les surfaces de séparation sont les limites des couches géologiques marquées par des contrastes de vitesse sismique.

La sismique résonance est une nouvelle méthode d'investigation sismique de haute résolution, dédiée à la sub-surface et à faible profondeur. La sismique résonance permet d'obtenir une très haute résolution en faible profondeur, mais ne permet pas l'investigation intermédiaire de moyenne à grande profondeur.

Historiquement, les premières campagnes sismiques menées dans le domaine de l'exploitation pétrolière et gazière ont été réalisées en 1908 par l'allemand Ludger Mintrop. Il procède à Göttingen à la première mesure sismique artificielle, en lâchant d'une hauteur de 14 mètres une charge de 4 tonnes. La première campagne sismique a été mis en œuvre dans les années 1920. En 1924 fut découvert le gisement pétrolier d'Orchard Salt Dome au Texas grâce à la sismique réfraction. Trois années plus tard a été découverte la sismique-réflexion. Elle s'impose rapidement comme la méthode sismique essentielle dans l'exploitation pétrolière. Les premiers enregistrements sur bandes magnétiques sont apparus au milieu de 20<sup>ème</sup> siècle, permettant ainsi un traitement de l'information ultérieur. Depuis lors les progrès des traitements de l'information sismique sont intimement liés aux progrès informatiques (mémoire, vitesse de calcul).

Depuis quelques années la sismique 4D réalisée à partir de plusieurs campagnes sismiques répétées à différents temps est apparue. Plusieurs enregistrements des données sismiques en 3 dimensions sont effectués, la quatrième dimension étant le temps. La 4D consiste simplement à réaliser des séries de mesures à plusieurs mois d'intervalle. En analysant les variations des impédances entre deux temps, il est possible de détecter les changements intervenant dans la distribution des fluides d'un réservoir (eau, huile, gaz) ainsi que les mouvements des fluides en présence. Dans la pratique, la principale difficulté est de se repositionner très précisément au même endroit à chaque série de mesure. La sismique 4D se démocratise petit à petit dans les compagnies pétrolières et tend à devenir une méthode fiable de gestion des réservoirs.

### Des traces sismiques aux impédances

Dans l'industrie pétrolière, la sismique réflexion est la plus utilisée. Des capteurs placés sur le sol enregistrent, en fonction du temps, l'amplitude de ondes réfléchies sur les couches géologiques. Ces enregistrements sont appelés **traces sismiques** et l'ensemble des traces sismiques associées à un même point source constitue une section sismique. Le but d'une campagne sismique étant d'obtenir des données sur une zone étendue du sous-sol, l'étape est répétée sur des nouveaux emplacements de tir afin d'obtenir un ensemble de sections sismiques, appelé cube sismique, couvrant l'ensemble de la zone d'intérêt. En sismique 3D, les sections ne sont pas simplement juxtaposées pour former un cube, le cube résulte d'une migration 3D incorporant beaucoup de traces dans l'espace. L'imagerie sismique a pour but de transformer l'image en temps ainsi obtenue en une image en profondeur.

Il existe deux types de méthodes pour résoudre ce problème : les méthodes de migration et les méthodes par inversion. Dans les deux cas une étape préliminaire de traitement de données est nécessaire. En effet, les cubes sismiques ainsi obtenus sont constitués d'ondes réfléchies mais également d'autres ondes indésirables qui sont assimilées à du bruit (ondes directes, ondes réfractées, ondes de surfaces, bruits naturels de sismiques terrestres). Le pré-traitement des données sismiques consiste à séparer l'information pertinente du bruit. Dans ce but de nombreuses techniques peuvent être appliquées (filtrages et déconvolutions).

Les méthodes de migration en repositionnant en temps ou en profondeur la position des réflecteurs<sup>1</sup> permettent uniquement de déterminer les profondeurs et la géométrie des discontinuités. Les méthodes d'inversion permettent non seulement de déterminer la géométrie du sous-sol mais également d'avoir une estimation des paramètres physiques.

Les méthodes d'inversion font d'abord appel à une modélisation de la propagation des ondes dans le sous-sol, par la définition de ce qui est appelé le problème direct. Celui-ci correspond au calcul du signal enregistré par les récepteurs, connaissant la position et la nature de la source, la position des récepteurs, et la structure du sous-sol. En sismique de prospection (avant la mise en production du champ), aux voisinages des ébranlements les faces inférieures et supérieures subissent des déplacements en réponse aux contraintes provoquées. Ces déplacements peuvent être modélisés grâce à la théorie de l'élasticité. En effet, ces déplacements sont liés aux contraintes via la loi de Hooke par l'intermédiaire des deux constantes de Lamé :  $\lambda$  qui mesure le rapport de la contrainte tangentielle au cisaillement et  $\nu$  le module de cisaillement mesuré en Newton par mètre carré. On modélise ainsi le cube sismique comme un matériau élastique (voir [73] pour plus de détails sur l'élasticité des solides). La force s'exerçant sur le cube résulte de la différence de contraintes entre les faces supérieures et inférieures. On peut alors appliquer le principe fondamental de la dynamique en introduisant la masse volumique  $\rho$  du cube. C'est ainsi que sont obtenues les équations de **propagation des ondes**. Les solutions de ces équations sont deux types d'ondes sismiques :

- les ondes de compression notées  $P$  vibrant dans le sens de propagation à une vitesse de 
$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\nu}{\rho}}.$$

---

1. Il existe de nombreuses techniques de migrations. Les plus connues sont la migration de Kirchhoff, les migrations par transformées de Fourier et les migrations par les équations d'ondes [13].

## 2.1 Le problème direct en géosciences

---

- les ondes de cisaillement notées  $S$  vibrant perpendiculairement à la direction de propagation avec les vitesses  $V_S = \sqrt{\frac{\nu}{\rho}}$ .

On peut alors calculer les impédances  $I = \rho V$  caractérisant la résistance du milieu de masse volumique  $\rho$  au passage d'une onde à la vitesse  $V$ <sup>2</sup>.

### Modèle pétro-élastique

Le modèle pétro-élastique utilisé à l'IFPEN est dérivé des travaux de thèse de Fornel [55]. Le réservoir est supposé être un milieu poreux isotropique et linéairement élastique. Ainsi, les vitesses des ondes  $P$  et  $S$  sont entièrement caractérisées par trois paramètres : le module d'élasticité isostatique (Bulk modulus), le module de cisaillement (shear modulus) et la densité volumique en  $g/cm^3$  (bulk density). La roche comprend une composante solide et une composante poreuse saturée par différents fluides représentant ainsi un milieu réel continu avec des propriétés élastiques moyennes. Pour estimer ces propriétés, on considère d'une part la roche puis les fluides en présence.

### Module d'incompressibilité de la matrice poreuse

Les propriétés élastiques de la roche sèche dépendent de nombreux facteurs géologiques tels que la composition minérale, la structure des pores, la diagenèse et l'histoire sédimentaire. De nombreuses études ont été consacrées à l'estimation de ces propriétés. Parmi elles, on peut citer les travaux de Landau et Lifchitz [74], Hill [65] et de Henyey et Pomphrey [64]. En pratique ce sont plutôt les relations empiriques qui sont utilisées car elles sont plus simples et approximent relativement bien les propriétés des roches. En 1980, Nur [104] propose des relations linéaires pour caractériser les propriétés de la roche sèche. Ces relations, qui sont le plus souvent utilisées, permettent de calculer le module d'élasticité isostatique  $K_{dry}$  et le module de cisaillement  $\mu_{dry}$  de la roche sèche :

$$K_{dry} = K_s \left\{ 1 - \frac{\phi}{\phi_c} \right\} \quad \mu_{dry} = \mu_s \left\{ 1 - \frac{\phi}{\phi_c} \right\} \quad (2.3)$$

où  $\phi_c$  est la porosité critique. Une interprétation physique de la porosité critique peut être la suivante. Si la porosité est assez grande les grains d'une roche sont dispersés et ne sont plus en contact. La rigidité de la roche est alors très faible. Lorsque la porosité de la roche est égale à sa porosité critique, la roche est dans un état de suspension très instable qui précède la compaction des grains. La figure 2.2 illustre la porosité critique dans le cas d'un grès.

### Module d'incompressibilité de roche saturée

Lorsque qu'un fluide évolue dans une roche, il peut s'écouler ou non. Si le fluide s'écoule la pression des pores est supposée constante et la quantité de fluide varie. Dans le cas où le fluide ne s'écoule pas, la masse du fluide reste constante alors que la pression des pores varie.

---

2. Deux autres grandeurs caractérisent le milieu : le rapport des vitesses  $\gamma = \frac{V_P}{V_S} = \frac{I_P}{I_S}$  qui est un indicateur de la pétrophysique de la roche et le coefficient de Poisson  $\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \nu)}$  qui permet de caractériser la contraction de la matière perpendiculairement à la direction de l'effort appliqué. Il peut aussi s'exprimer uniquement en fonction des vitesses.

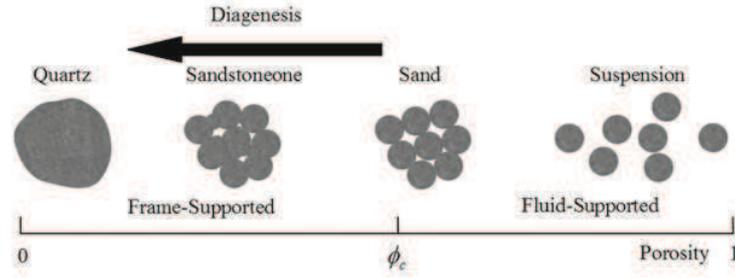


FIGURE 2.2 – Illustration de la porosité critique. Image issue de Nur [104].

Les équations de Gassman [56] relient le module d'incompressibilité de la roche mouillée  $K_u$  avec le module d'incompressibilité du grain  $K_{Gr}$ , le module d'incompressibilité du fluide  $K_F$ , le module d'incompressibilité de la roche sèche  $K_{dry}$ . Ces équations supposent que le solide est un matériau isotopique et homogène :

$$K_u = K_{dry} + \frac{\beta^2 K_F}{\phi + (\beta - \phi) \frac{K_F}{K_S}} \quad \mu_u = \mu_{dry}, \quad (2.4)$$

avec  $\beta = 1 - \frac{K_{dry}}{K_S}$  et la formule de Woods

$$\frac{1}{K_F} = \frac{S_o}{K_o} + \frac{S_w}{K_w} + \frac{S_g}{K_g}$$

### Vitesses et impédances

Une fois que  $K_u$  et  $\mu_u$  sont connues, les vitesses de propagation  $V_p$  et  $V_s$  des ondes sismiques  $P$  et  $S$  peuvent être estimées de la façon suivante :

$$V_P = \sqrt{\frac{K_u + 4/3\mu_u}{3\rho_B}} \quad \text{et} \quad V_S = \sqrt{\frac{\mu_u}{\rho}}. \quad (2.5)$$

Dans ces équations, la densité  $\rho$  est calculée comme une moyenne pondérée (par la porosité) des densités correspondantes aux différentes phases. Elle est donnée par :

$$\rho = (1 - \phi)\rho_S + \phi(S_o\rho_o + S_w\rho_w + S_g\rho_g).$$

Pour prendre en compte les effets de la variation de pression et de saturation sur les vitesses  $V_P$  et  $V_S$ , on applique les formules de Hertz-Mindlin [93] :

$$V_P = \sqrt{\frac{K_u + 4/3\mu_u}{3\rho_B}} \left\{ \frac{P_{cr} - P}{P_{dl}} \right\}^{c_p} \quad \text{et} \quad V_S = \sqrt{\frac{\mu_u}{\rho}} \left\{ \frac{P_{cr} - P}{P_{dl}} \right\}^{c_s}, \quad (2.6)$$

avec

- $P_{cr}$  la pression de confinement,
- $P$  la pression de pore,
- $P_{dl}$  la pression différentielle asymptotique,

## 2.2 Problème inverse en géosciences

–  $c_p$  et  $c_s$  les coefficients de Hertz pour les ondes  $P$  et  $S$ .

Finalement les impédances  $I_P$  et  $I_S$  peuvent être obtenues ainsi :

$$\boxed{I_P = \rho V_p \quad \text{et} \quad I_S = \rho V_S.} \quad (2.7)$$

## 2.2 Problème inverse en géosciences

Le problème inverse en géoscience permet de caler les données simulées par les équations (2.1), (2.2) et (2.7) aux données observées sur le terrain. Il va s'agir dans un premier temps d'intégrer les données statiques disponibles qui ont été observées sur le terrain. On construit ainsi un modèle appelé modèle géologique qui est en fait une grille en trois dimensions. A chaque maille on associe une valeur de données statiques (porosité, perméabilité, ...). Les données statiques observées étant en faible nombre des méthodes d'estimation des données manquantes sont mises en œuvre afin d'associer une valeur à chaque maille.

Une fois qu'un modèle géologique est construit, la simulation des écoulements de fluides et le modèle pétro-élastique permettent de fournir les données de production et les données sismiques simulées. Afin d'évaluer la consistance du modèle avec les données dynamiques de référence on calcule l'erreur entre les données dynamiques simulées par le modèle et les données de références via une *fonction objectif*. Une méthode d'optimisation va alors permettre de réduire la valeur de la *fonction objectif* en modifiant les paramètres utilisés pour construire le modèle géologique. La figure 2.3 schématise ce processus appelé boucle de calage. Une étude de sensibilité des paramètres influant le plus sur le modèle obtenu peut être envisagée pour déterminer les paramètres qui influent le plus sur la répartition des données.

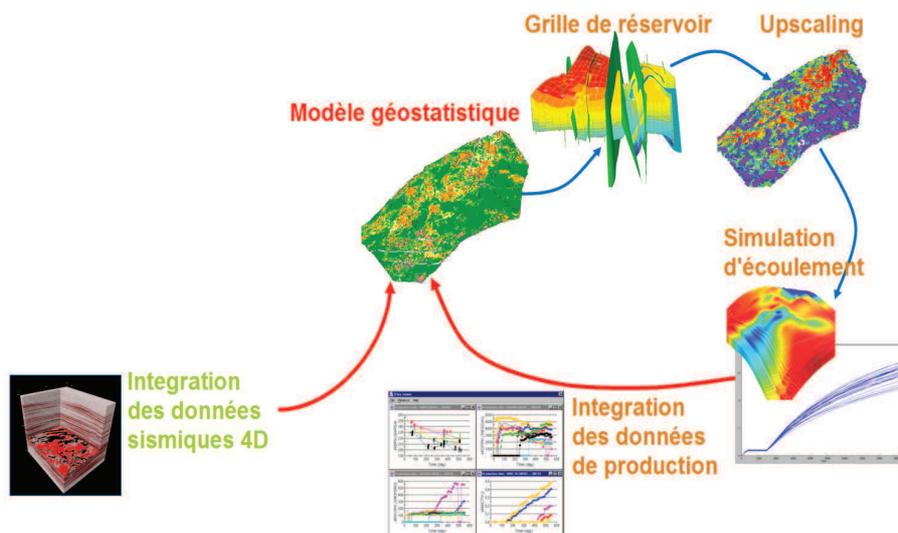


FIGURE 2.3 – Boucle illustrant le calage des paramètres d'un modèle par calage d'historique.

### 2.2.1 Intégration des données statiques

Les données statiques disponibles sont fournies, d'une part, localement, aux puits d'exploration par l'analyse des échantillons de roches et des mesures aux puits et, d'autre part, de manière plus globale sur l'ensemble du réservoir grâce aux campagnes sismiques 3D. L'intégration de ces données se fait généralement en trois étapes qui sont illustrées sur la figure 2.4. D'abord, on construit un modèle stratigraphique grâce aux données qui proviennent essentiellement de la sismique 3D et des mesures aux puits. Ce modèle permet de rendre compte de la structure interne du réservoir (limitations, failles, fractures, chenaux). Dans un second temps, ce modèle est discrétisé sur un maillage fin. Cette étape est appelée la modélisation structurale. Enfin un modèle de faciès déterminant la géométrie et la proportion de chaque faciès en leur attribuant des propriétés pétrophysiques est construit [15], [41]. Il va s'agir d'apporter à chaque maille des informations géologiques concernant la valeur de la porosité, de la perméabilité et du faciès en présence en chacune des mailles de la grille. Les données disponibles provenant des carottes, des diagraphies ou de la sismique sont locales. Au moyen d'outils statistiques, l'ingénieur réservoir extrapole ces données pour déterminer les propriétés pétrophysiques et la distribution des faciès dans chacune des mailles du modèle.

Cette dernière tâche est en fait très compliquée car les mesures sont souvent données à des échelles très différentes [84] et peuvent être issues d'une mesure directe ou non. La figure 2.5 illustre cette problématique sur les mesures de porosités. Ces mesures de porosité peuvent être soit données par une analyse d'échantillons à une échelle microscopique, soit par les diagraphies aux puits à une échelle macroscopique soit par la sismique ou encore par les tests de puits avec cette fois-ci une résolution très faible (allant du centimètre à la centaine de mètres) (voir [41] pour plus de détails). Une mise à l'échelle des données est ensuite faite par l'intermédiaire de la construction d'un maillage plus grossier. Ce dernier modèle est appelé modèle réservoir. Les failles ne sont plus représentées et leur emplacement est caractérisé par la valeur de perméabilité de la maille.

### 2.2.2 Intégration des données dynamiques

L'intégration des données dynamiques dans les modèles de réservoir constitue un problème inverse, qui peut être résolu grâce à un algorithme d'optimisation itératif. A partir d'un modèle géologique initial construit a priori en fonction de caractéristiques observables, on modifie certains paramètres du modèle pour que les données simulées approchent au mieux les données observées sur le terrain.

La figure 2.6 schématise la boucle de calage d'historique développée à IFPEN. Le processus suit les étapes suivantes :

1. Simulation du modèle géologique (faciès, porosités, perméabilités) sur une grille fine. Ce modèle fin est ensuite transformé en un modèle plus grossier (étape d'upscaling) appelé modèle de réservoir. On résout les équations différentielles (2.2) et (2.1) qui régissent l'écoulement des fluides en milieu poreux, ce qui permet d'obtenir les courbes de production, ainsi que les pressions et les saturations dans toutes les mailles du modèle réservoir à

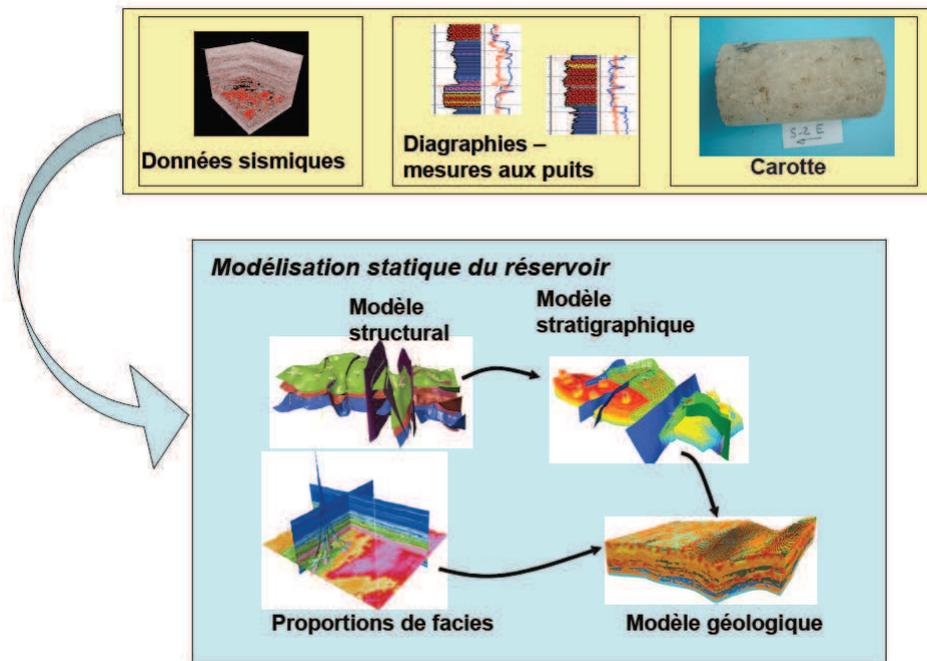


FIGURE 2.4 – Construction du modèle géologique. Figure issue de [115].

différents temps.

2. Simulation des propriétés élastiques (impédances acoustiques P et S) à partir d'un modèle pétro-élastique. Les impédances simulées sont données par les formules (2.7), qui permettent de relier les impédances aux pressions et saturations des différents fluides selon le type de roches considéré.
3. Calcul de la *fonction objectif* qui compare les données sismiques et les données de production simulées avec les données réelles.
4. Répétition des étapes 1, 2 et 3 avec ajustement des paramètres du modèle géologique par un algorithme d'optimisation dans le but de réduire la *fonction objectif*.

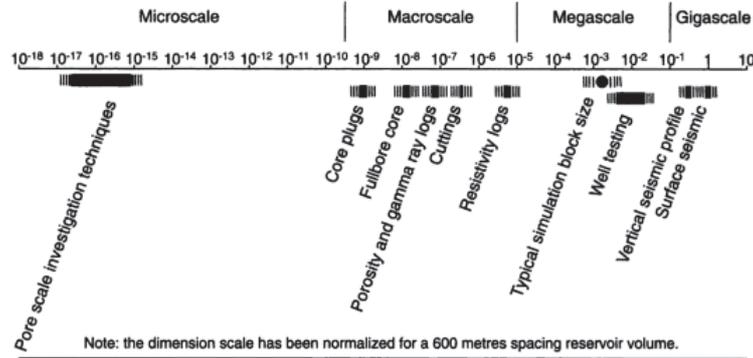


FIGURE 2.5 – Illustration des différences d'échelles des données. Figure issue de [41].

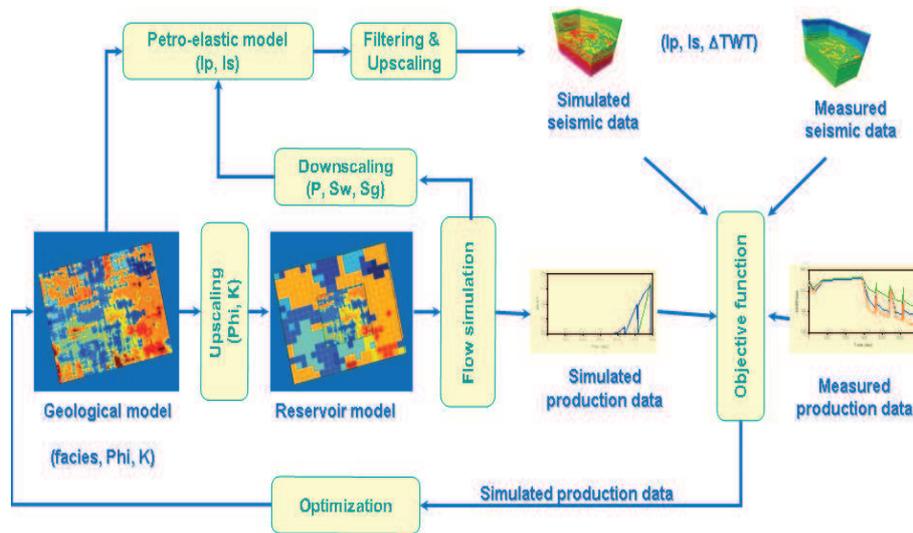


FIGURE 2.6 – Les différentes étapes de la boucle de calage d'historique développée à IFP Energies nouvelles.

De manière générale, le problème d'optimisation est le suivant :

$$\min_{x \in \Omega} F(x), \quad (2.8)$$

où  $F$  est la *fonction objectif* et  $x$  désigne les paramètres du modèle réservoir (paramètres géologiques, porosités, perméabilités, ...). Dans le cadre de la simulation de réservoir, la fonction  $F$  est non linéaire. Pour résoudre ce problème d'optimisation, on peut avoir recours à différentes méthodes d'optimisation (locales ou globales).

**Les méthodes de Quasi-Newton locales** construisent des modèles approchés locaux par le développement de Taylor (jusqu'à l'ordre 2) de  $F$  dans une région de confiance donnée. Si le gradient de  $F$  n'est pas disponible, il est approché par différences finies ou par surface de réponse. La Hessienne de  $F$  peut être estimée par la méthode BFGS ou Gauss-Newton (voir [102] et [53]). L'optimum obtenu est local et dépend fortement de l'initialisation. Pour réduire cette

## 2.2 Problème inverse en géosciences

---

dépendance, plusieurs optimisations sont mises en œuvre à partir de points initiaux différents.

**Les méthodes sans dérivées locales** construisent des modèles quadratiques de la *fonction objectif* en interpolant celle-ci par des polynômes quadratiques dans une région de confiance donnée. On renvoie le lecteur à la thèse de Langouët [75] pour une application dans le domaine de la simulation de réservoir pour plus de détails sur la méthode.

**Les méthodes globales** permettent en théorie d’obtenir un optimum global de la *fonction objectif*. Ces méthodes sont principalement des algorithmes évolutionnaires. Les algorithmes génétiques CMAES (Covariance Matrix Adaptation - Evolution Strategy) introduits par Hansen [62], [63] sont les plus utilisés. L’inconvénient principal de ces méthodes en simulation de réservoir est qu’elles sont très coûteuses en temps de calcul car elles nécessitent un nombre d’appels important au simulateur d’écoulement. De plus, ces méthodes requièrent de nombreux réglages préalables (taille de la population, type de mutations, etc). Pour ces raisons, elles sont en pratique inutilisables en l’état. Des alternatives ont été proposées pour limiter le coût de calcul par l’intermédiaire de modèles approchés. Une d’entre elle a été appliquée pour l’optimisation du placement des puits par Bouzarkouna [22], [21].



---

## Présentation du problème et état de l'art

---

Le problème que l'on veut résoudre dans cette partie est d'intégrer de façon optimale les données sismiques. Pour ce faire, on cherche à définir une *fonction objectif* qui soit représentative de la différence entre deux cubes sismiques.

La figure 3.1 est une autre illustration de cette problématique sur des cartes de variations d'impédances. Cet exemple est issu d'un cas de réservoir d'huile lourde, huile qui est produite grâce à une injection de vapeur. Ce réservoir est décrit dans la section application 5.3. A gauche de la figure 3.1 on dispose d'une carte d'impédances de référence : une chambre de vapeur est identifiable au milieu (en rouge). On choisit de la comparer avec deux cartes générées par deux modèles de réservoirs différents. La première carte contient une chambre de vapeur et la seconde ne présente pas d'injection de vapeur. La *fonction objectif* moindres-carrés calculée entre la carte de référence et celle sans injection est égale à 120. Lorsque l'on compare la carte de référence avec celle du centre, la *fonction objectif* vaut 180. Ainsi, le modèle sans injection de vapeur est considéré comme étant le plus proche du modèle de référence. Ceci ne reflète pas la réalité : la formulation classique n'arrive donc pas à quantifier la différence entre deux cartes sismiques.

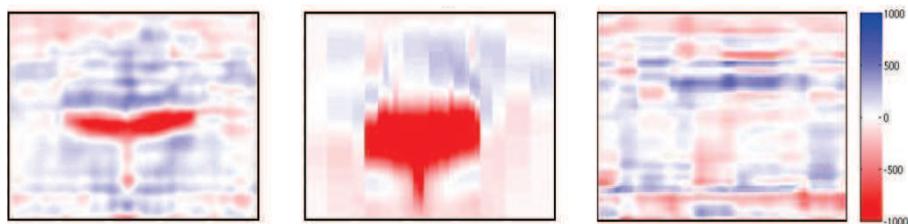


FIGURE 3.1 – Comparaison de la *fonction objectif* sur un cas d'injection de vapeur. Gauche : variations d'impédances P de référence. Centre : variations d'impédances P simulées avec injection de vapeur. Droite : variations d'impédances P simulées sans injection de vapeur (en  $g.cm^{-3}.m.s^{-2}$ ).

Dans ce chapitre, nous allons faire un bref état de l'art des méthodes existantes pour traiter les problèmes abordés dans ce rapport. Dans la première partie, nous rappelons les différents travaux sur la définition d'une *fonction objectif* adaptée aux données sismiques. La seconde partie traite des différentes méthodes pour débruiter les données et pour les simplifier. Enfin, la troisième partie donne un aperçu des techniques développées pour comparer des images.

### 3.1 La fonction objectif

Les différentes études reportées dans la littérature [59], [111] montrent que la minimisation du terme lié aux données sismiques de la *fonction objectif* est très difficile. La difficulté est liée à la nature même des données sismiques qui sont très différentes des données de production. Premièrement, les données sismiques se présentent sous forme de cubes sismiques représentant des millions de données, tandis que les données de production sont quant à elles représentées par des courbes. En utilisant la méthode des moindres-carrés, la *fonction objectif* est la somme des erreurs pixel à pixel entre les données de référence et les données simulées. Traditionnellement, cette somme est pondérée par une matrice de variance-covariance. Étant donné le grand nombre de données sismiques et le grand nombre de termes dans la matrice à spécifier, on fait souvent l'hypothèse d'une matrice diagonale. Cette question a été étudiée par Gosselin et al. [59], où les auteurs mettent en évidence qu'une telle hypothèse n'est pas adaptée aux données sismiques. En effet, la corrélation spatiale des données dans ce cas est négligée. Les auteurs proposent une fonction de corrélation basée sur une formulation exponentielle qui permet d'inverser simplement la matrice de corrélation. Cette méthode est intéressante mais elle s'appuie toujours sur la méthode des moindres-carrés et prend donc en compte l'erreur point par point. Deuxièmement, les attributs sismiques à caler, tels que les impédances acoustiques  $P$  par exemple, sont issus d'une inversion préliminaire des données sismiques, qui crée des incertitudes. De plus, le résultat du processus d'inversion dépend du choix d'un modèle a priori qui est incertain. En considérant ces deux points, essayer de caler chaque valeur d'un pixel, comme le fait la méthode des moindres-carrés, ne semble pas réaliste.

Un autre travail intéressant a été développé par Wu et al. [133] : après avoir justifié que l'erreur point par point n'est pas appropriée pour quantifier la ressemblance intuitive entre deux images, les auteurs proposent d'utiliser la corrélation croisée. Les auteurs proposent d'améliorer la corrélation croisée, qui peut être très faible même si les images sont visuellement très corrélées, en utilisant l'Analyse en Composantes Principales (ACP). Cette méthode est intéressante dans le cas d'une comparaison entre des données de nature différente. Dans le cas du calage d'historique étudié ici, on ne s'intéresse pas à la comparaison entre des données de natures différentes. Dans ce cas, l'utilisation de l'ACP est équivalente à appliquer un filtre à moyenne mobile sur les données.

### 3.2 La simplification de données

Les cubes sismiques contiennent un nombre important de données. Afin de pouvoir les caler, on propose de réduire ce nombre pour n'en garder que l'information essentielle. Cela consiste

## 3.2 La simplification de données

---

en deux étapes : le débruitage des données et la simplification des données. Le débruitage va préparer les données pour l'étape de simplification qui se fera par des méthodes de segmentation de données.

Il existe plusieurs méthodes pour débruiter les données. On renvoie le lecteur à l'article de Buades et al [27] où les auteurs, après avoir défini une méthodologie pour évaluer l'efficacité d'un filtre, étudient les filtres les plus couramment utilisés. Les filtres locaux, le filtre gaussien, le filtre anisotrope, le filtre basé sur la variation totale et le filtre NL-means font partie des filtres étudiés dans cet article.

La deuxième étape permet de réduire le nombre de données différentes. Pour ce faire, différentes méthodes de segmentation ont fait leurs preuves :

- Les méthodes issues de la morphologie mathématique. L'une d'elle est la ligne de partage des eaux. Cette méthode considère une image comme un relief topographique où les niveaux de gris sont assimilés à des altitudes. On inonde la surface à partir des minima locaux, l'eau monte à vitesse constante et uniforme dans les bassins versants. Quand les eaux issues de deux minima différents se rencontrent, on monte une digue pour qu'elles ne se mélangent pas. A la fin de l'immersion, l'ensemble des digues constitue la ligne de partage des eaux. L'image est ainsi segmentée en plusieurs régions séparées par des crêtes. En pratique, on applique la ligne de partage des eaux au module du gradient de l'image à segmenter [16].
- Les méthodes statistiques supervisées ou non supervisées. La classification consiste à affecter à chaque donnée une étiquette. Parmi ces méthodes on retrouve deux familles très différentes : les classifications non supervisées et les classifications supervisées. Les méthodes de classification non supervisée proposent des regroupements selon la structure des pixels présents dans l'image, sans information a priori sur les zones que l'on souhaite identifier, tandis qu'une méthode de classification supervisée cherche à assimiler tous les pixels de l'image aux pixels de zones d'apprentissage, définies géographiquement sur l'image ou sur son histogramme. Géométriquement, cela revient à trouver un moyen de séparer les points les uns des autres, en fonction de leur couleur par exemple. Parmi les méthodes de classification non-supervisée les plus connues, on peut citer l'analyse en composantes principales, l'analyse factorielle des composantes et le  $k$ -means. L'article de review [57] détaille différentes méthodes de classification non supervisée.
- Les méthodes de détection de contours ou de régions. Parmi les nombreuses méthodes existantes, citons les modèles déformables dont le but est de faire évoluer en temps et en espace la représentation du modèle vers la solution du problème de minimisation introduit dans la modélisation, les contours actifs géodésiques (Caselles, Kimmel et Sapiro [32], Caselles et al. [30]) et la méthode des ensembles de niveau (notée méthode "level set" par la suite) développée par Osher et Sethian [105]. Généralement, les méthodes de contours actifs utilisent un détecteur de contour basé sur le gradient de l'image. Lorsque les contours de l'image ne sont pas bien définis, Vese et Chan proposent de combiner ces deux méthodes [33] en utilisant une détection de contours non basée sur le gradient. Cet algorithme utilise une fonction implicite "level set" en dimension supérieure qui fait évoluer la représentation du modèle avec un critère de minimisation basé sur les moyennes à l'intérieur et à l'extérieur de chaque contour. Cet algorithme permet de segmenter l'image en deux régions. Une

extension de cet algorithme proposée par Chan et Vese [128] permet, grâce à l'utilisation de plusieurs fonctions level set, de segmenter l'image en plus de deux régions. Chung et Vese [35] proposent une autre extension du modèle pour déterminer des contours imbriqués.

### 3.3 Comparaison de données

Dans le cadre du calage d'historique, on dispose de données observées et de données simulées. Après avoir simplifié les données sismiques observées et simulées, on souhaite les comparer. Pour comparer deux images binaires, Baudrier [9] propose de calculer une Carte de Dissimilarités Locales (CDL) basée sur une distance locale de Hausdorff. Cette carte de dissimilarités locales est calculée par le biais d'une Transformée en Distance (TeD), qui calcule pour chaque image la distance au pixel noir le plus proche. Molchanov et Terán [96] proposent une extension de la transformée en distance pour les images en niveaux de gris. Ainsi, une carte de dissimilarités locales peut aussi être établie pour les images ayant plus de deux classes. Généralement, nous nous intéressons à la comparaison des images sismiques après simplification en deux ou trois classes suivant les cas. Ainsi, grâce à la TeD classique ou son extension une méthode de comparaison par la CDL peut être envisagée.

En traitement d'images, le recalage est une technique qui consiste en la mise en correspondance d'images, ceci afin de pouvoir comparer ou combiner leurs informations respectives. Cette mise en correspondance se fait par la recherche d'une transformation géométrique permettant de passer d'une image à une autre. Cette technique comprend de nombreuses applications, allant de l'imagerie médicale (afin par exemple de fusionner plusieurs modalités d'imagerie) au traitement de vidéos comme le suivi de mouvement et la compression. Cette technique est efficace pour des images qui sont très semblables mais ne peut pas être appliquée en l'état aux images sismiques [82].

On peut aussi citer les travaux de Bruna et Mallat [26] qui proposent une métrique appropriée pour comparer des signaux en une ou plusieurs dimensions en utilisant des opérateurs de diffusion basés sur des transformées en ondelettes.

---

## Sommation sur la Carte de Dissimilarités Locales (SCDL), une nouvelle formulation de la *fonction objectif*

---

Les cubes sismiques contiennent un nombre important d'informations réparties sur l'ensemble du réservoir, qui sont souvent difficiles à interpréter. Dans le contexte du calage d'historique, pour construire un modèle de réservoir le plus fiable possible, il faut évaluer la différence entre les données générées par le modèle de référence et celles calculées par le modèle simulé par le processus itératif décrit par la figure 2.6. Le choix de la *fonction objectif* mesurant cette différence est donc crucial. L'exemple présenté sur la figure 3.1 montre que la formulation classique de la *fonction objectif* basée sur la méthode des moindres-carrés n'évalue pas correctement la différence entre deux cubes sismiques.

Nous proposons dans ce chapitre une autre formulation que l'on notera SCDL. L'idée de base est d'abord de réduire le nombre important de données présentes dans les cartes sismiques. Ensuite, on propose d'utiliser des outils de traitement d'images permettant la reconnaissance de formes ou d'objets afin de quantifier de façon adéquate la différence entre les cartes simplifiées. Rappelons que l'on dispose de deux cartes sismiques : l'une donnée par la sismique de référence et l'autre simulée par le modèle. Notre nouvelle *fonction objectif*, la SCDL, peut se résumer par les trois étapes suivantes :

1. Simplifier les images pour en extraire l'information prédominante par filtrage et segmentation. Ceci sera appliqué aux deux cubes sismiques (référence et simulé).
2. Construire une carte de dissimilarités locales entre les deux cubes simplifiés pour caractériser leurs différences spatiales.
3. Calculer un scalaire représentatif de la différence entre les deux cartes. Ce scalaire sera finalement la valeur de la *fonction objectif* entre les deux cartes sismiques.

Nous proposons dans une première partie de nous concentrer sur les méthodes efficaces de filtrage pour épurer les cartes. Ensuite, nous étudierons deux méthodes pour réduire le nombre

de données : la classification statistique et la segmentation variationnelle. Finalement, nous présenterons une méthode efficace pour comparer les cartes simplifiées : la SCDL (Somme sur la Carte de Dissimilarités Locales). Celle-ci permettra de calculer la *fonction objectif* entre les deux cartes. Pour illustrer ces étapes, nous utiliserons des cartes sismiques issues de deux modèles de réservoirs. Le premier est un réservoir d'huile lourde dans lequel on injecte de la vapeur pour faciliter l'extraction de l'huile : c'est le procédé SAGD (Steam Assisted Gravity Drainage). Le second est un réservoir contenant des chenaux, qui sont des structures géologiques constituant un passage préférentiel des fluides lors de leur déplacement.

Dans les parties qui suivent, les termes cubes sismiques, images sismiques, cartes sismiques seront utilisés indifféremment pour définir la représentation des attributs sismiques.

## 4.1 Filtrage

Comme mentionné dans l'introduction, les attributs sismiques inversés sont très bruités. Ils sont de plus entachés d'incertitudes dues au processus d'inversion. Parfois, de petites formes peuvent apparaître sur ces images qui sont difficiles à interpréter et ont souvent une moindre importance. Pour ces raisons, un prétraitement des données est nécessaire. Ce prétraitement peut être fait par une méthode de filtrage. Dans cette partie nous présentons et étudions différentes méthodes de filtrage pour déterminer la méthode la plus adaptée aux données sismiques.

Rappelons d'abord que dans le contexte du traitement d'images, l'objectif d'une méthode de filtrage est de trouver le meilleur estimateur non bruité d'une image à partir de sa version bruitée. Une méthode de filtrage se définit par la décomposition suivante :

$$u = D_h(u) + n(D_h, u), \quad (4.1)$$

où  $u$  est l'image bruitée,  $D_h(u)$  est l'image estimée sans bruit,  $n(D_h, u)$  est l'estimation du bruit affectant les données et  $h$  est un paramètre de filtrage. Parmi les méthodes de filtrage locales, certaines sont basées sur l'application d'un masque au niveau du pixel à débruiter (filtre à moyenne arithmétique, filtre gaussien, filtre médian ou filtre basé sur le calcul de variation [113]). Considérons par exemple le filtre à moyenne arithmétique qui remplace la valeur d'un pixel par la moyenne arithmétique de son voisinage, dont la taille est un paramètre. L'application d'un filtre à moyenne mobile  $w_h$  consiste en la convolution de ce filtre  $w_h$  par le signal d'entrée  $u_0$ . Pour une image  $u_0$ , la valeur filtrée  $D_h(u_0)$  au pixel  $(x, y)$  est calculée de la façon suivante :

$$D_h(u_0)(x, y) = \frac{1}{|h|} \sum_{i=-h_1}^{h_1} \sum_{j=-h_2}^{h_2} w_h(i, j) u_0(x + i, y + j) \quad (4.2)$$

où le paramètre  $h = (2 \times h_1 + 1, 2 \times h_2 + 1)$  est la taille du filtre. Concrètement, pour chaque pixel de l'image, il s'agit de faire une moyenne arithmétique pondérée autour de ce pixel. Ici, nous considérons tous les poids égaux. Malgré sa simplicité d'implémentation, l'inconvénient majeur de ce filtre est qu'il ne préserve pas les contours car il les rend flous. L'utilisation d'un

## 4.1 Filtrage

---

filtre médian qui remplace la valeur du pixel considéré par la valeur médiane de son voisinage permet de diminuer cet effet. Cependant comme la plupart des filtres locaux, le filtre médian ne supprime pas l'intégralité du bruit présent dans l'image.

D'autres filtres dits de seuillage méritent également d'être mentionnés : le filtre de Wiener-Fourier, le filtre Yaroslavsky [135] ou les méthodes de seuillage par ondelettes [47]. D'autre part, le filtre à moyennes non locales (ou NL-means) a été introduit par Buades et al. [27]. Le principe de ce filtre, introduit initialement par Efros et Leung [50] pour la synthèse de texture, consiste à rechercher dans une vaste portion de l'image tous les pixels qui ressemblent au pixel que l'on désire débruiter et à en faire une moyenne. L'idée repose sur le fait que les pixels similaires à un pixel donné n'ont pas de raison d'être proches de celui-ci (penser à un motif périodique). Ainsi pour évaluer l'estimation non bruitée en un pixel, ce filtre prend en compte la similitude de ce pixel avec les autres pixels de l'image. Deux pixels sont plus ou moins similaires si les moyennes calculées au voisinage de chaque pixel sont proches. Dans le cas des données sismiques, cette approche semble prometteuse car les images de variations d'impédances sismiques, contrairement aux images naturelles, sont très peu structurées et sont formées par les déplacements de fluide dans tout le réservoir.

Revenant à l'équation (4.1), l'estimation débruitée de l'image obtenue par le NL-means est donnée par :

$$D_h(u_0) = \frac{\sum_{y \in I} \exp \left\{ -\frac{\|U(x) - U(y)\|}{2h} \right\} u_0(y)}{\sum_{y \in I} \exp \left\{ -\frac{\|U(x) - U(y)\|}{2h} \right\}}, \quad (4.3)$$

où  $U(x)$  et  $U(y)$  sont des voisinages ou patches, ayant respectivement  $x$  et  $y$  comme pixel central. La distance entre deux patches est :

$$\|U(x) - U(y)\| = \frac{1}{s} \sum_{|j| \leq \frac{s-1}{2}} |u(x+j) - u(y+j)| \quad (4.4)$$

où  $s$  est la taille du patch. En pratique, le paramètre  $h$  dépend de la variance du bruit. Cette variance est inconnue pour une image donnée  $u$ , mais on peut l'estimer avec la variance empirique donnée par :

$$\sigma^2(u) = \frac{1}{|I|} \sum_{x \in I} (u(x) - \bar{u})^2,$$

où  $I$  est l'ensemble des pixels de  $u$ ,  $|I|$  est le nombre total de pixels et  $\bar{u} = \frac{1}{|I|} \sum_{x \in I} u(x)$ .

L'inconvénient principal de ce filtre est sa complexité. En effet, rechercher pour chaque fenêtre de l'image toutes les fenêtres qui lui sont similaires est très coûteux en pratique car chaque voisinage est de taille  $(2f+1)$ . On peut restreindre la recherche de fenêtres similaires dans une plus grande fenêtre de recherche de taille  $(2s+1)$ , ainsi la complexité totale de l'algorithme est  $N^2 \times (2f+1) \times (2s+1)$  où  $N^2$  est le nombre de pixels de l'image. Dans la pratique, Buades et al. [27] choisissent  $f=3$  et  $s=10$ . De plus, Buades et al. [27] proposent deux modifications de l'algorithme initial qui permettent de réduire significativement le temps de calcul. La première

est fondée sur une version multi-échelle de l'algorithme initial et la seconde sur une version par bloc. La parallélisation de l'algorithme est aussi possible. Par ailleurs, un algorithme rapide de recherche des plus proches voisins a été implémenté par David M. Mount et Sunil Arya (<http://www.cs.umd.edu/mount/ANN/>). Il permettra, après adaptation au NL-means, de réduire le temps de calcul de la recherche de fenêtres similaires.

Pour étudier le comportement du NL-means sur les images sismiques, nous proposons d'en comparer les résultats avec le filtre à moyenne arithmétique et le filtre médian. On fixe le paramètre  $h$  à 0.03 et la taille du voisinage à une fenêtre carré de taille  $5 \times 5$ . Nous illustrons les résultats de ces trois filtres sur un premier exemple : le réservoir avec la chambre de vapeur. On retrouve les variations d'impédances  $P$  d'une coupe verticale sur la figure 4.1, dont les valeurs ont été transférées entre 0 et 255, en haut à gauche. Les résultats obtenus avec les trois filtres sont donnés sur la ligne du haut. Comme attendu, le filtre à moyenne arithmétique filtre trop, ce qui produit des contours et une image floue alors que le filtre médian maintient les contours de la chambre de vapeur. Le filtre NL-means (figure 4.1 - ligne 1, colonne 4) garde également les contours intacts. De plus, on représente sur la ligne du bas le bruit qui a été supprimé dans l'image originale par chaque filtre, c'est-à-dire la différence pixel à pixel entre l'image bruitée et sa version débruitée par chacune des méthodes de filtrage. On peut observer que la structure de l'image est présente dans le bruit supprimé par le filtre à moyenne mobile, ce qui explique la grande perte d'information dans ce cas. Au contraire le filtre médian enlève très peu de bruit : la structure de l'image est préservée mais de petits objets non pertinents ne sont pas supprimés. Entre ces deux comportements, le NL-means fournit une image très claire qui préserve la chambre de vapeur.

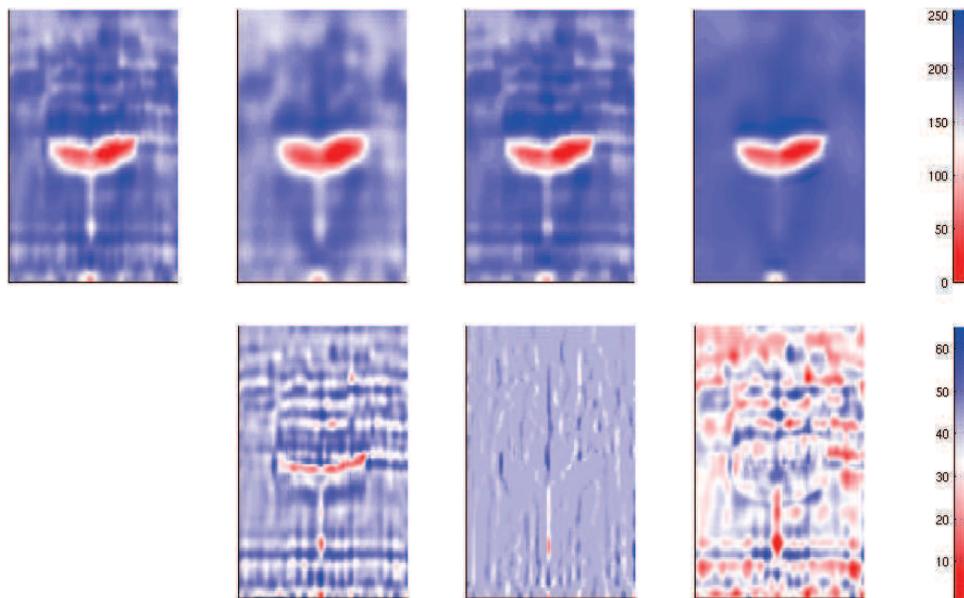


FIGURE 4.1 – Comparaison des trois filtres sur le réservoir SAGD. Première ligne : image de référence et images filtrées. Deuxième ligne : bruit supprimé. De gauche à droite : image de référence, filtre à moyenne mobile, filtre médian et NL-means.

## 4.1 Filtrage

Le second exemple est un réservoir avec différents chenaux qui sont des structures géologiques facilitant le déplacement des fluides. Dans ce cas, les objets sont nombreux et les contours doivent être correctement définis puisque la connectivité entre les chenaux est cruciale pour le déplacement des fluides. Pour plus de détails sur ce réservoir, on renvoie le lecteur à la partie 4.3.2. En haut à gauche de la figure 4.2, l'image de référence est une version bruitée de l'image sismique où les valeurs ont été normalisées entre 0 et 1. On y a ajouté un bruit gaussien avec un écart-type égal à 0.03. Les zones rouges correspondent à un déplacement de gaz dans les chenaux. Les zones bleues correspondent à un déplacement d'eau. Une fois encore, le filtre à moyenne mobile lisse excessivement l'image. Une grande partie de l'information relative à la structure des chenaux et à leurs connections est perdue et se retrouve dans le bruit supprimé. Avec le filtre médian, les chenaux sont moins floutés mais beaucoup de détails sont perdus dans les zones rouges sur la partie diagonale de l'image. Finalement, le bruit supprimé par le NL-means ressemble à un bruit blanc et la structure des chenaux est bien préservée.

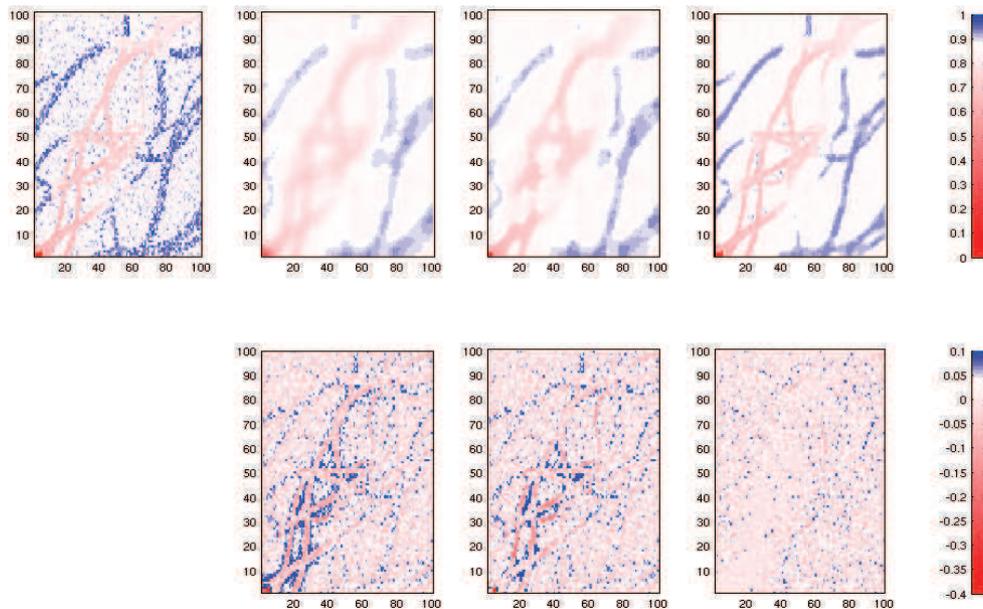


FIGURE 4.2 – Comparaison des résultats des trois filtres sur un réservoir contenant des chenaux. Première ligne : carte de référence et cartes filtrées. De gauche à droite : référence, filtre à moyenne mobile, filtre médian et NL-means.

Ces exemples illustrent parfaitement le large apport du NL-means sur les données sismiques. C'est pour cette raison que nous proposons de l'inclure comme une étape préliminaire du calcul de notre *fonction objectif*. Pour les images sismiques, des informations pertinentes telles que les structures géologiques ou les déplacements de fluides sont observés sur l'ensemble du réservoir et donc sur l'ensemble des images. Pour cette raison, nous suggérons d'appliquer le calcul des poids de l'équation (4.3) sur toute l'image.

## 4.2 Simplification des données

Les données sismiques sont très nombreuses puisqu'elles s'étalent sur l'ensemble du réservoir. Elles sont représentées par un cube sismique. Afin de caler les données simulées par le modèle aux données réelles, nous proposons de réduire l'information présente dans le cube sismique. Pour ce faire, on choisit de classifier les données en deux ou trois ensembles dans le but de ne conserver que l'information pertinente. Par exemple, dans le cas du réservoir produit par SAGD, on souhaite ne conserver que la chambre de vapeur et dans le cas du réservoir à chenaux on souhaite conserver la structure des chenaux. Deux approches sont testées ici. Dans la première partie de cette section, nous nous intéressons à la classification statistique. Dans la seconde partie de cette section, nous allons étudier quelques méthodes variationnelles permettant de segmenter les images.

### 4.2.1 Classification d'une image par une méthode statistique

Pour classifier les données, nous avons choisi d'utiliser l'algorithme du  $k$ -means. C'est un algorithme non supervisé qui se base sur la méthode des centres mobiles [90] pour optimiser localement un critère de type inertie. L'algorithme  $k$ -means est l'algorithme de clustering le plus connu et le plus utilisé du fait de sa simplicité de mise en œuvre. L'algorithme renvoie une partition des données, dans laquelle les objets à l'intérieur de chaque ensemble, appelés cluster, sont aussi proches que possible les uns des autres et aussi loin que possible des objets des autres clusters. Chaque cluster de la partition est défini par ses objets et son barycentre. Dans notre cas, nous cherchons à classifier les cubes sismiques selon les valeurs d'impédances acoustiques.

Le  $k$ -means est un algorithme itératif qui minimise la somme des distances entre chaque objet et le barycentre de son cluster. L'algorithme change les objets de cluster jusqu'à ce que la somme ne puisse plus diminuer. Le résultat est un ensemble de clusters compacts et clairement séparés, sous réserve qu'on ait choisi la bonne valeur  $k$  du nombre de clusters. Les principales étapes de l'algorithme  $k$ -means sont les suivantes :

1. Choisir aléatoirement la position initiale des  $k$  clusters,
2. (Ré-)Affecter les objets à un cluster suivant un critère de minimisation des distances,
3. Une fois tous les objets placés, recalculer les  $k$  barycentres,
4. Répéter les étapes 2 et 3 jusqu'à ce que plus aucune ré-affectation ne soit faite.

La figure 4.3 présente une coupe verticale du cube de variations d'impédances  $P$  du cas SAGD et son histogramme. Les deux barycentres trouvés avec le  $k$ -means pour ces données sont  $k_1 = -714$  et  $k_2 = 55.6$ . Les variations d'impédances sismiques ayant une valeur proche (au sens de la distance euclidienne) de  $-714$  appartiendront au premier ensemble et celles qui sont plus proches de  $55.6$  appartiendront au second ensemble. Après avoir déterminé les barycentres  $k_1$  et  $k_2$  de l'image de référence, on la classifie en deux ensembles distincts A et B, puis, on attribue la valeur 0 à chaque élément de A et la valeur 1 à chaque élément de B. On a ainsi transformé l'image originale en une image binaire. La figure 4.3 présente le résultat de la classification

## 4.2 Simplification des données

effectuée sur cette coupe. On note que le  $k$ -means a bien regroupé les pixels dont la couleur est proche du rouge dans le même ensemble et les pixels dont la couleur est proche du bleu dans l'autre ensemble. Il y a aussi la possibilité de classer les données en plus de deux ensembles. La figure 4.3 présente le résultat de cette classification en trois classes. Nous désirons dans ce cas séparer les variations positives, nulles et négatives. Les barycentres obtenus sont : -756, 151 et -46.7.

Dans le cadre du calage d'historique, pour rendre binaires les images à comparer avec l'image de référence, on utilise les barycentres  $k_1$  et  $k_2$ . Pour chaque pixel de l'image sismique simulée, on calcule les distances à  $k_1$  et à  $k_2$ . Puis, on affecte le pixel considéré à l'ensemble qui lui est le plus proche. On obtient ainsi, pour chaque image, deux ensembles distincts de pixels, auxquels on attribue la valeur 1 ou 0 afin de rendre l'image binaire. Au final, l'algorithme du  $k$ -means est exécuté une seule fois.

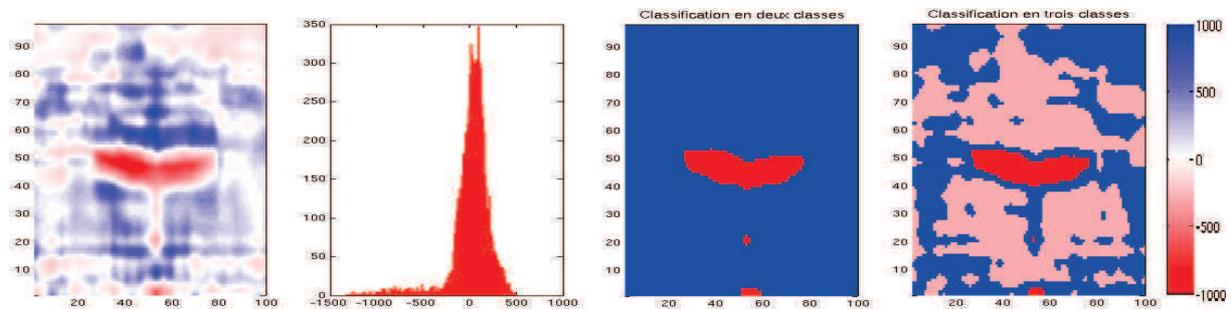


FIGURE 4.3 – Classification d'une coupe de cube sismique de variations d'impédances P (en  $g.cm^{-3}.m.s^{-2}$ ) pour le cas SAGD par méthode du  $k$ -means. De gauche à droite : variations d'impédances P (en  $g.cm^{-3}.m.s^{-2}$ ), histogramme des variations, classification en deux classes et classification en trois classes.

Pour conclure cette partie, notons que la classification statistique par l'algorithme du  $k$ -means donne des résultats très satisfaisants. C'est de plus une méthode facile à implémenter et qui nécessite peu de temps de calcul. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne prend pas en compte la compréhension de l'image à classifier. En effet, on considère chaque pixel comme une valeur indépendante des autres, aucune quantité relative aux formes ou objets présents dans l'image n'est calculée. Ce type de traitement d'image est dit de bas niveau. En effet, les traitements de bas niveau opèrent avec des grandeurs calculées à partir de l'image à traiter sans faire le lien avec la réalité qu'elles représentent. À l'opposé, les traitements dits de haut niveau sont relatifs à l'interprétation et à la compréhension de l'image. C'est précisément le type de traitement que nous étudions dans la section suivante.

### 4.2.2 Segmentation d'une image par une méthode variationnelle

Dans cette section, nous allons présenter quelques méthodes variationnelles permettant de classifier une image basée sur les contours. Ces méthodes sont appelées méthodes de segmentation. Elles permettent de détourner les contours des objets présents dans une image en la divisant en plusieurs régions. La segmentation requière une connaissance de haut niveau, c'est-à-dire qu'elle fait appel à des quantités relatives à une compréhension et une interprétation de l'image. Ces méthodes consistent à minimiser une certaine énergie basée sur la fonction introduite par

Mumford et Shah [100] pour détourer les contours des régions ou objets à segmenter.

Les contours actifs ont été introduits de manière formelle par Kass et Witkin en 1988 [70]. Un modèle de contours actifs est formé d'une série de points mobiles répartis sur une courbe en deux dimensions. La courbe (qui peut être fermée) est placée dans la zone d'intérêt de l'image ou autour d'un objet. Plusieurs équations décrivent son évolution : la courbe se déplace et épouse lentement les contours des objets en fonction de divers paramètres comme l'élasticité, la tolérance au bruit, etc. Cette dynamique est basée sur la notion d'énergie interne et externe, le but étant de minimiser l'énergie totale présente le long de la courbe. Des contraintes permettent de conserver une courbe lisse avec des points équidistants, tout en laissant un certain champ libre pour les déformations. L'énergie interne correspond à la morphologie et aux caractéristiques de la courbe (courbure, longueur, etc.). L'énergie externe provient de l'image, les critères sont variables (présence de bords marqués, bruit, etc.). L'évolution se fait de manière itérative. Dans le cas classique, l'évolution de la courbe est stoppée par un détecteur de contours basé sur la valeur du gradient. Dans le cas des attributs sismiques, lorsque que les données sont altérées par du bruit, les contours ne sont pas nets. Dans ce cas, il existe d'autres détecteurs de contours basés sur la moyenne à l'extérieur et à l'intérieur de la courbe. Tous ces modèles se basent sur le modèle décrit par Chan et Vese [33]. Nous étudierons ces modèles de contours actifs sans contours explicites dans les trois dernières parties de cette section.

Après une brève présentation de la fonctionnelle de Mumford-Shah qui décrit le modèle utilisé par la suite, nous introduirons le concept d'ensemble de niveau ou "level set" qui est l'outil permettant une minimisation rapide de cette fonctionnelle. Ensuite trois parties sont consacrées aux variantes du modèle de contours actifs sans bords explicites permettant de segmenter une image en plusieurs régions.

### La fonctionnelle de Mumford-Shah

Dans cette partie, nous introduisons la fonctionnelle de Mumford-Shah sur laquelle se basent les trois modèles que nous utiliserons par la suite. On définit une segmentation comme une fonction régulière par morceaux. On se donne un domaine  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  et la fonction  $u_o : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  qui représente les niveaux de gris normalisés de l'image à segmenter. On cherche à minimiser une fonctionnelle dépendant de l'image originale donnée  $u_o$ , l'image reconstruite à déterminer  $u$  et de la forme des régions formées par les contours d'un ensemble  $K$ , que l'on suppose compact. La fonction  $u$  est régulière partout sauf aux points de  $K$  où elle peut être discontinue. On cherche donc une paire  $(K, u)$  qui minimise la fonctionnelle suivante :

$$F(u, K) = \int_{\Omega} (u - u_o)^2 dx + \nu \int_{\Omega \setminus K} \|\nabla u\|^2 dx + \mu \times l(K), \quad (4.5)$$

où  $\nabla u$  est le gradient de  $u$ ,  $\nu$  désigne un facteur d'échelle et  $\mu$  un facteur de détection de contraste.  $l(K)$  est la longueur de l'ensemble des bords. On cherche donc à minimiser une somme de trois termes qui traduisent trois propriétés différentes recherchées :

- le premier terme traduit la fidélité aux données,  $u$  doit rester proche de  $u_o$ ,
- le second est un terme de régularisation, il impose que  $u$  soit une approximation régulière

## 4.2 Simplification des données

de  $u_0$ ,

- le troisième terme a un effet régularisant sur les lignes des contours. En minimisant leurs longueurs, les lignes se comportent comme des sortes d'élastiques.

Le troisième terme est l'apport essentiel de la méthode. En effet, sans lui,  $u$  serait une simple régularisation de  $u_0$ .

### Les ensembles de niveaux ou level set

Nous allons maintenant présenter l'approche par des fonctions dites level set, ou ensembles de niveaux, qui permettront de simplifier la minimisation de la fonctionnelle (4.5). En effet, l'utilisation d'une approche level set dans ce modèle permet d'appréhender le problème en terme d'évolution de courbes et non plus en terme de minimisation de fonctionnelle. L'idée de la méthode level set est alors de déduire la propagation du contour actif  $\mathcal{C}$ , à partir de la propagation d'une courbe de dimension supérieure  $\phi$ . En utilisant la méthode level set, la courbe  $\mathcal{C}$  est représentée par le niveau zéro d'une fonction lipschitzienne  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que :

$$\begin{cases} \phi(x, y) > 0 & \text{à l'intérieur de la courbe } \mathcal{C} \\ \phi(x, y) < 0 & \text{à l'extérieur de la courbe } \mathcal{C} \\ \phi(x, y) = 0 & \text{sur la courbe } \mathcal{C} \end{cases}$$

La figure 4.4 illustre un exemple de la fonction level set  $\phi$ .

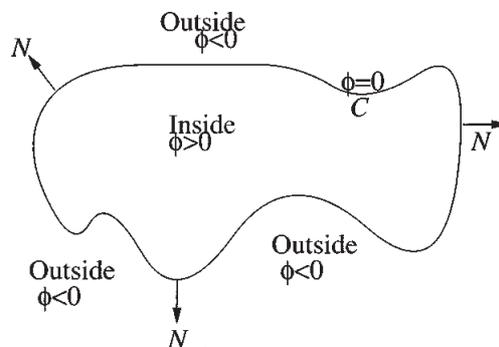


FIGURE 4.4 – La courbe  $\mathcal{C} = \{(x, y), \phi(x, y) = 0\}$  se propage par rapport à sa normale extérieure en fonction de l'évolution de la fonction level set  $\phi$  (voir Chan et Vese [33]).

Dans cette méthode, un front  $\mathcal{C}$  de dimension 2 (séparant par exemple deux régions) évolue suivant sa normale avec une vitesse  $F$  en fonction du temps  $t$ . La méthode level set consiste à considérer  $\mathcal{C}$  comme le niveau zéro d'une fonction  $\phi$  de dimension supérieure, appelée fonction level set. Un exemple de fonction level set  $\phi$  est la distance signée au front  $\mathcal{C}$  donnée par :

$$\begin{cases} \phi(x) = 0 & \text{si } x \in \mathcal{C} \\ \phi(x) = \pm d & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.6)$$

où  $d$  est la distance de  $x$  à la courbe  $\mathcal{C}$ . Le signe positif est choisi si  $x$  est à l'intérieur de la courbe et le signe négatif est choisi s'il est à l'extérieur de la courbe. Ainsi lorsque l'on fait évoluer  $\phi$

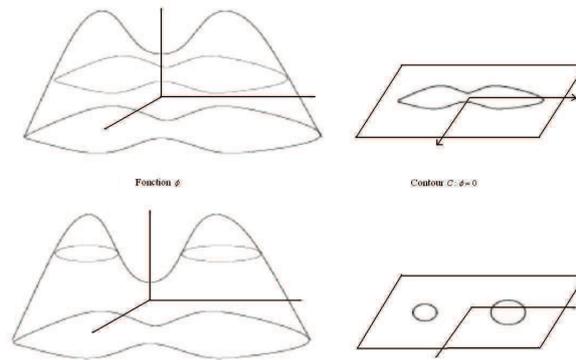


FIGURE 4.5 – Illustration de la méthode level set et du changement de topologie permis (d’après Le Guyader [79]).

pour chaque itération  $t$ , on a :

$$\phi(\mathcal{C}(t), t) = 0.$$

En dérivant cette équation par rapport à  $t$ , on en déduit l’équation d’évolution satisfaite par  $\phi$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + F |\nabla \phi| = 0 \\ \phi(x, t = 0) \text{ donnée.} \end{cases} \quad (4.7)$$

L’approche level set conduit donc à résoudre une équation aux dérivées partielles dans un espace de dimension supérieure par rapport au problème initial. Une fois cette équation aux dérivées partielles résolue, on reconstruit l’interface  $\mathcal{C}(t)$  à chaque instant  $t$  en prenant le niveau zéro de la fonction level set  $\phi(\cdot, t)$ . Les propriétés géométriques intrinsèques du front (telles que la courbure) sont aisément explicitées et le front peut changer de topologie comme on peut le voir dans la figure 4.5. En effet, la courbe initiale représentée en haut à droite peut évoluer vers celle représentée en bas à droite en prenant le niveau zéro de la level set aux deux instants qui sont représentés sur la figure 4.5.

### Contours actifs sans bords explicites

A présent, nous allons décrire un premier modèle s’inspirant de la fonctionnelle de Mumford-Shah. Il a été introduit par Chan et Vese [33]. Il permet de segmenter une image en deux régions distinctes. La particularité de ce modèle est qu’il permet de délimiter des objets dont les contours ne sont pas bien définis. Pour cela, la condition d’arrêt de l’évolution de la courbe n’est pas basée sur le gradient de l’image à segmenter mais sur la moyenne à l’extérieur et à l’intérieur de chaque contour. Expliquons d’abord comment a été construit ce modèle : on considère une courbe  $\mathcal{C}$  dans  $\Omega$  comme la frontière d’un ouvert borné  $K$  de  $\Omega$ . Dans ce qui suit, la région à l’intérieur de la courbe  $\mathcal{C}$  est la région  $K$  et celle à l’extérieur est notée  $\Omega \setminus K$ . On suppose que l’image  $u_0$  est formée de deux régions d’intensités distinctes presque constantes  $u_0^i$  et  $u_0^o$ . On suppose de plus que l’objet à détecter est représenté par la région d’intensité  $u_0^i$ . On note la frontière de cet objet  $\mathcal{C}_0$ . Donc  $u_0 = u_0^i$  à l’intérieur de l’objet et  $u_0 = u_0^o$  à l’extérieur de celui-ci.

## 4.2 Simplification des données

Maintenant, considérons le terme d'attache aux données suivant :

$$F_1(\mathcal{C}) + F_2(\mathcal{C}) = \int_{\text{intérieur}} (u_0(x, y) - c_1)^2 dx dy + \int_{\text{extérieur}} (u_0(x, y) - c_2)^2 dx dy,$$

où les constantes  $c_1, c_2$  sont respectivement la moyenne à l'intérieur et à l'extérieur de la courbe  $\mathcal{C}$ . Dans ce cas, les bords de l'objet  $\mathcal{C}_0$  minimisent ce terme d'attache aux données. On peut donc écrire :

$$\inf_{\mathcal{C}} \{F_1(\mathcal{C}) + F_2(\mathcal{C})\} \simeq 0 \simeq F_1(\mathcal{C}_0) + F_2(\mathcal{C}_0).$$

La figure 4.6 illustre ce principe. Si la courbe  $\mathcal{C}$  est à l'extérieur de l'objet alors  $F_1(\mathcal{C}) > 0$  et  $F_2(\mathcal{C}) \simeq 0$ . Si la courbe  $\mathcal{C}$  est à l'intérieur de l'objet alors  $F_1(\mathcal{C}) \simeq 0$  et  $F_2(\mathcal{C}) > 0$ . Si la courbe est à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de l'objet alors  $F_1(\mathcal{C}) > 0$  et  $F_2(\mathcal{C}) > 0$ . Finalement, le terme d'attache aux données est minimisé lorsque  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$ .

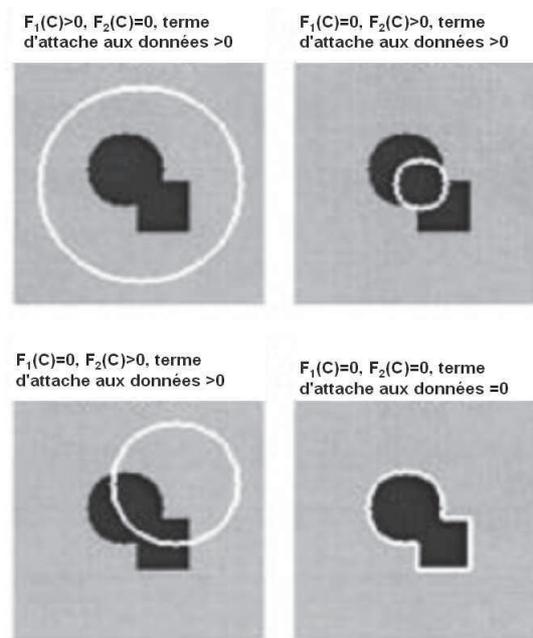


FIGURE 4.6 – On considère les quatre cas possibles, le terme d'attache aux données  $F$  est minimisé uniquement dans le cas où la courbe se trouve aux frontières de l'objet (d'après Chan et Vese [33])

Ajoutons à présent un terme de régularisation des contours, qui peut être par exemple la longueur du contour de la courbe  $\mathcal{C}$  ou l'aire de la région à l'intérieur de la courbe  $\mathcal{C}$ . Dans ce cas, l'énergie à minimiser par rapport à la courbe  $\mathcal{C}$  et par rapport aux quantités  $c_1$  et  $c_2$  est :

$$F(c_1, c_2, \mathcal{C}) = \lambda_1 \int_{\text{intérieur}} (u_0(x, y) - c_1)^2 dx dy + \lambda_2 \int_{\text{extérieur}} (u_0(x, y) - c_2)^2 dx dy + \mu \text{Longueur}(\mathcal{C}) + \nu \text{Aire}(\mathcal{C}), \quad (4.8)$$

où  $\mu \geq 0, \nu \geq 0, \lambda_1, \lambda_2 > 0$  sont des paramètres fixés. Dans la plupart des cas on prendra  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  et  $\nu = 0$ . Les deux premiers termes traduisent la fidélité par rapport aux données et le dernier terme la régularité des contours déterminés. On considère donc le problème de

minimisation suivant :

$$\inf_{\{c_1, c_2, \mathcal{C}\}} F(c_1, c_2, \mathcal{C}),$$

Ce modèle est un cas particulier de la fonctionnelle de Mumford-Shah, qui est vu comme la meilleure approximation de  $u_0$  par une fonction  $u$  ne prenant que deux valeurs :

$$u = \begin{cases} \text{moyenne de } u_0 & \text{à l'intérieur de } \mathcal{C} \\ \text{moyenne de } u_0 & \text{à l'extérieur de } \mathcal{C}, \end{cases}$$

où le seul contour est  $\mathcal{C}$ . On considère donc dans ce modèle que l'image  $u_0$  est représentée par une fonction constante par morceaux prenant la valeur  $c_1$  à l'intérieur du contour et  $c_2$  à l'extérieur.

Pour obtenir la formulation level set de la fonctionnelle (4.8), on remplace  $\mathcal{C}$  par  $\phi$ . En utilisant la fonction de Heaviside  $H$  et la fonction de Dirac en zéro  $\delta_0$  définies par :

$$H(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \delta_0(z) = \frac{d}{dz} H(z),$$

l'énergie  $F(c_1, c_2, \phi)$  peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} F(c_1, c_2, \phi) &= \mu \int_{\Omega} \delta_0(\phi(x, y)) |\nabla \phi(x, y)| \, dx dy \\ &\quad + \nu \int_{\Omega} H(\phi(x, y)) \, dx dy \\ &\quad + \lambda_1 \int_{\Omega} |u_0(x, y) - c_1| H(\phi(x, y)) \, dx dy \\ &\quad + \lambda_2 \int_{\Omega} |u_0(x, y) - c_2|^2 (1 - H(\phi(x, y))) \, dx dy. \end{aligned} \quad (4.9)$$

En utilisant la formulation level set, la solution de notre modèle, notée  $u$ , est alors donnée par :

$$u(x, y) = c_1 H(\phi(x, y)) + c_2 (1 - H(\phi(x, y))), \quad (x, y) \in \overline{\Omega}. \quad (4.10)$$

En supposant  $\phi$  constante, et en minimisant  $F(c_1, c_2, \phi)$  par rapport à  $c_1$  et  $c_2$ , on peut exprimer facilement les constantes  $c_1$  et  $c_2$ . Si  $H(\phi(x, y)) > 0$ , c'est à dire que l'intérieur de la courbe est non nul dans  $\Omega$ , alors

$$c_1(\phi) = \frac{\int_{\Omega} u_0(x, y) H(\phi(x, y)) \, dx dy}{\int_{\Omega} H(\phi(x, y)) \, dx dy}, \quad (4.11)$$

et

$$c_2(\phi) = \frac{\int_{\Omega} u_0(x, y) (1 - H(\phi(x, y))) \, dx dy}{\int_{\Omega} (1 - H(\phi(x, y))) \, dx dy}. \quad (4.12)$$

Si  $1 - H(\phi(x, y)) > 0$ , alors l'extérieur à la courbe est non nul dans  $\Omega$ . Pour le cas dégénéré il n'y a pas de contraintes sur  $c_1$  et  $c_2$ . Les constantes  $c_1$  et  $c_2$  sont en fait données par :

$$\begin{cases} c_1(\phi) = \text{moyenne de } (u_0) & \text{dans } \{\phi > 0\} \\ c_2(\phi) = \text{moyenne de } (u_0) & \text{dans } \{\phi < 0\}. \end{cases}$$

## 4.2 Simplification des données

Dans le but de calculer l'équation aux dérivées partielles satisfaite pour la fonction inconnue  $\phi$ , il faut dériver  $F(c_1, c_2, \phi)$  par rapport à  $t$ . On considère donc des versions régularisées des fonctions  $H$  et  $\delta_0$ . Elles seront notées  $H_\epsilon$  et  $\delta_\epsilon$ . On choisira une régularisation dans  $C^2(\bar{\Omega})$  et qui vérifie  $\delta_\epsilon = H'_\epsilon$ . Deux types d'approximation sont possibles : les approximations à support fini et les approximations à support infini. Chan et Vese [33] remarquent que les approximations à support fini ont tendance à converger plus fréquemment vers un minimum local. L'idée est qu'avec un support fini dans les équations d'Euler-Lagrange, les fonctions  $\phi$  agissent localement, alors qu'au contraire elles peuvent être plus globales avec un support infini pour  $H_\epsilon$ . C'est pourquoi ici nous utilisons, comme dans [33], la fonction à support infini suivante :

$$H_\epsilon(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\pi} \operatorname{atan}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right) \quad \text{et sa dérivée est donnée par :} \quad \delta_\epsilon(x) = H'_\epsilon = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2}.$$

La fonctionnelle régularisée  $F_\epsilon$  est alors donnée par :

$$\begin{aligned} F_\epsilon(c_1, c_2, \phi) &= \mu \int_{\Omega} \delta_\epsilon(\phi(x, y)) |\nabla \phi(x, y)| \, dx dy \\ &\quad + \nu \int_{\Omega} H_\epsilon(\phi(x, y)) \, dx dy \\ &\quad + \lambda_1 \int_{\Omega} |u_0(x, y) - c_1|^2 H_\epsilon(\phi(x, y)) \, dx dy \\ &\quad + \lambda_2 \int_{\Omega} |u_0(x, y) - c_2|^2 (1 - H_\epsilon(\phi(x, y))) \, dx dy. \end{aligned} \quad (4.13)$$

En gardant  $c_1$  et  $c_2$  fixés et en minimisant  $F_\epsilon$  par rapport à  $\phi$ , l'équation d'Euler-Lagrange pour  $\phi$  associée à ce problème est la suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta_\epsilon(\phi) [\mu \operatorname{div}\left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}\right) - \nu - \lambda_1 (u_0 - c_1)^2 + \lambda_2 (u_0 - c_2)^2] = 0 & \text{dans } (0, \infty) \times \Omega \\ \phi(0, x, y) = \phi_0(x, y) & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\delta_\epsilon(\phi)}{|\nabla \phi|} \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{dans } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.14)$$

où  $\vec{n}$  est la normale extérieure à la frontière  $\partial\Omega$ . On renvoie le lecteur à l'annexe 5.4 pour la discrétisation de cette équation.

En résumé, les étapes de l'algorithme sont les suivantes :

1. On initialise  $\phi^0$  à l'itération  $n = 0$ ,
2. On calcule  $c_1(\phi)$  et  $c_2(\phi)$  qui sont donnés respectivement par (4.11) et (4.12),
3. On résout l'E.D.P. en  $\phi$  pour obtenir  $\phi^{n+1}$ ,
4. On ré-initialise la fonction  $\phi$  comme la distance signée à la courbe (étape facultative),
5. On vérifie si la solution est stationnaire. Si elle ne l'est pas, on répète à partir de l'étape 2.

Ainsi, on utilise deux boucles imbriquées : l'une est utilisée pour résoudre l'E.D.P. en  $\phi$ , l'autre change les paramètres  $c_1$  et  $c_2$  de la fonction level set  $\phi$ .

Nous allons maintenant présenter les résultats obtenus sur les cartes issues du réservoir produit par SAGD. Les variations d'impédances sismiques pouvant être négatives, les données sont systématiquement transférées dans un intervalle d'étude positif compris entre 0 et 255 afin de respecter les conventions usuelles des images en niveaux de gris. Cette opération est très importante. En effet, si on autorise des données négatives, en considérant une image dont la moyenne  $c_1$  à l'intérieur du contour de niveau zéro est égale à 100, alors le terme  $(u_0 - c_1)^2$  pénalisera de la même façon les données égales à 50 ou -200. Cela faussera le résultat de la modélisation.

La figure 4.7 représente la segmentation d'une coupe verticale du cas SAGD filtrée avec le NL-means sur une fenêtre de taille  $5 \times 5$ . A gauche est représentée une coupe du cas SAGD après filtrage par le NL-means et à droite est représentée la segmentation obtenue avec l'algorithme de segmentation décrit dans cette section. On observe que la chambre de vapeur est bien identifiée.

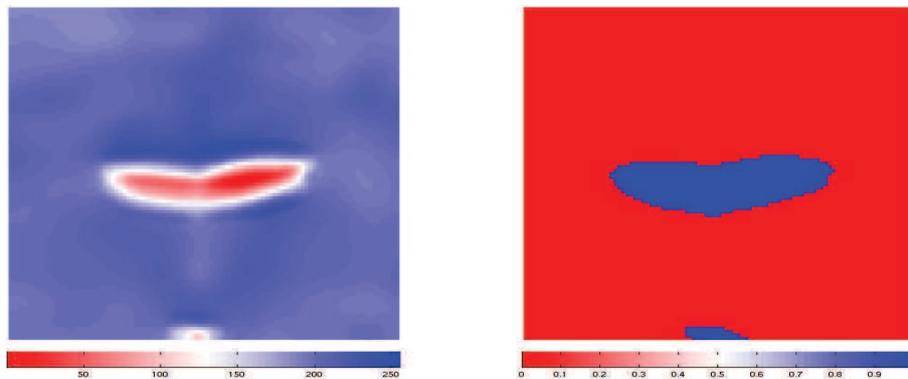


FIGURE 4.7 – Segmentation d'une coupe du réservoir SAGD. A gauche : variations d'impédances  $P$  après filtrage par le NL-means. A droite : résultat de la segmentation (0 : fond, 1 : objet détecté) avec  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 4$ ,  $\mu = 4500$ ,  $\nu = 0$ .

En résumé, ce modèle considère une fonction level set et un seul niveau de seuillage. Il a été généralisé à un nombre quelconque de fonctions level set et de niveaux [35]. Dans la suite du document on s'intéressera uniquement aux extensions à deux fonctions level set avec un niveau et à une fonction level set et deux niveaux.

### Contours actifs sans bords explicites utilisant deux fonctions level set

Le précédent modèle permet de segmenter les objets d'une image en deux régions. Généralement, les variations d'impédances sismiques ont une interprétation physique différente selon qu'elles sont positives, négatives ou nulles. Nous nous sommes donc intéressés à une extension du modèle précédent permettant de déterminer plus de deux classes. Ce modèle est décrit par Chan et Vese [128]. Pour ce faire, les auteurs proposent d'utiliser  $k$  fonctions level set afin de déterminer  $2^k$  régions. On illustre les régions déterminées avec deux et trois fonctions level set dans la figure 4.8.

## 4.2 Simplification des données

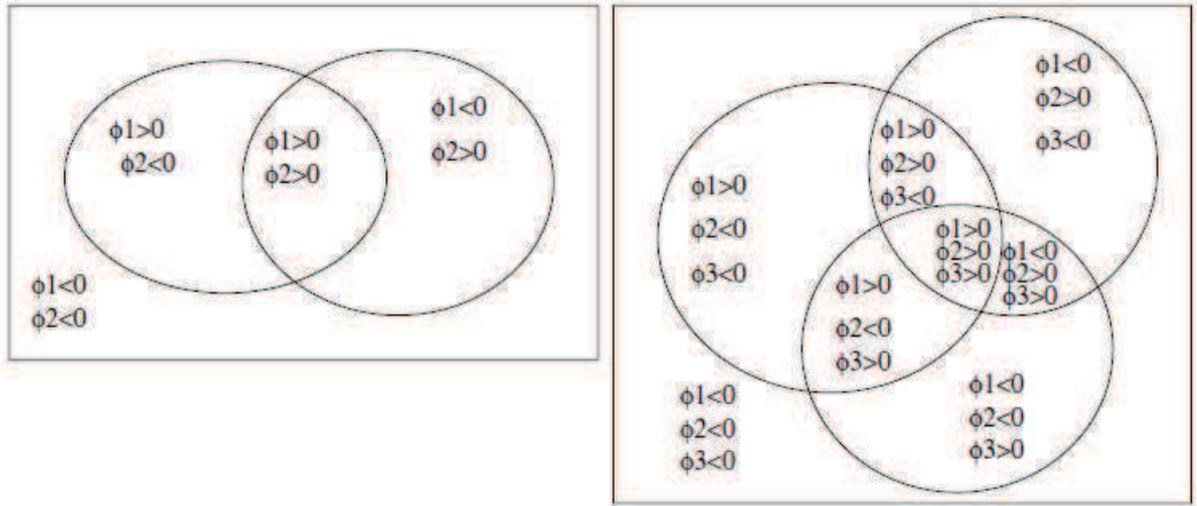


FIGURE 4.8 – L'image de gauche représente la partition du domaine en quatre régions avec deux fonctions level set,  $\phi_1$  et  $\phi_2$ . L'image de droite représente la partition du domaine en huit régions avec trois fonctions level set,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$ . D'après Chan et Vese [128].

A présent, nous allons présenter le modèle avec deux fonctions level set permettant de segmenter l'image en quatre régions distinctes ou non. La formule de l'énergie pour une seule fonction level set que l'on a donnée précédemment en (4.9) se généralise aisément à deux fonctions level set. Dans ce cas, l'énergie à minimiser est donnée par :

$$\begin{aligned}
 F_4(c, \phi) = & \int_{\Omega} (u_0 - c_{11})^2 H(\phi_1) H(\phi_2) dx dy \\
 & + \int_{\Omega} (u_0 - c_{10})^2 H(\phi_1) (1 - H(\phi_2)) dx dy \\
 & + \int_{\Omega} (u_0 - c_{01})^2 (1 - H(\phi_1)) H(\phi_2) dx dy \\
 & + \int_{\Omega} (u_0 - c_{00})^2 (1 - H(\phi_1)) (1 - H(\phi_2)) dx dy \\
 & + \mu \int_{\Omega} |\nabla H(\phi_1)| + \mu \int_{\Omega} |\nabla H(\phi_2)|,
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

où  $c = (c_{11}, c_{10}, c_{01}, c_{00})$  est un vecteur constant et  $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ .

Ainsi l'image segmentée est donnée par :

$$u = c_{11} H(\phi_1) H(\phi_2) + c_{10} H(\phi_1) (1 - H(\phi_2)) + c_{01} (1 - H(\phi_1)) H(\phi_2) + c_{00} (1 - H(\phi_1)) (1 - H(\phi_2)). \tag{4.16}$$

L'équation d'Euler-Lagrange obtenue par minimisation par rapport à  $c$  et  $\phi$  est la suivante :

$$\begin{aligned}
 \phi_1(0, x, y) &= \phi_{1,0}(x, y) \\
 \phi_2(0, x, y) &= \phi_{2,0}(x, y) \\
 c_{11}(\phi) &= \frac{\int_{\Omega} u_0 H_{\epsilon}(\phi_1) H_{\epsilon}(\phi_2) dx dy}{\int_{\Omega} H_{\epsilon}(\phi_1) H_{\epsilon}(\phi_2) dx dy}, \\
 c_{10}(\phi) &= \frac{\int_{\Omega} u_0 H_{\epsilon}(\phi_1) H_{\epsilon}(1 - \phi_2) dx dy}{\int_{\Omega} H_{\epsilon}(\phi_1) H_{\epsilon}(1 - \phi_2) dx dy}, \\
 c_{01}(\phi) &= \frac{\int_{\Omega} u_0 H_{\epsilon}(1 - \phi_1) H_{\epsilon}(\phi_2) dx dy}{\int_{\Omega} H_{\epsilon}(1 - \phi_1) H_{\epsilon}(\phi_2) dx dy}, \\
 c_{00}(\phi) &= \frac{\int_{\Omega} u_0 H_{\epsilon}(1 - \phi_1) H_{\epsilon}(1 - \phi_2) dx dy}{\int_{\Omega} H_{\epsilon}(1 - \phi_1) H_{\epsilon}(1 - \phi_2) dx dy}, \\
 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} &= \delta_{\epsilon}(\phi_1) \left\{ \mu \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \phi_1}{|\nabla \phi_1|} \right) - [((u_0 - c_{11})^2 - (u_0 - c_{01})^2) H(\phi_2) \right. \\
 &\quad \left. + ((u_0 - c_{10})^2 - (u_0 - c_{00})^2) (1 - H(\phi_2))] \right\} \\
 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} &= \delta_{\epsilon}(\phi_2) \left\{ \mu \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \phi_2}{|\nabla \phi_2|} \right) - [((u_0 - c_{11})^2 - (u_0 - c_{01})^2) H(\phi_1) \right. \\
 &\quad \left. + ((u_0 - c_{10})^2 - (u_0 - c_{00})^2) (1 - H(\phi_1))] \right\}. \tag{4.17}
 \end{aligned}$$

Les détails numériques sont similaires au modèle simplifié. On renvoie le lecteur à [128] et à l'annexe 5.4 pour cette partie. Les étapes de l'algorithme sont donc les suivantes :

1. On initialise  $\phi^0$  à l'itération  $n = 0$ .
2. On calcule  $c_{11}(\phi)$ ,  $c_{10}(\phi)$ ,  $c_{01}(\phi)$  et  $c_{00}(\phi)$ .
3. On résout le système d'E.D.P. en  $\phi_1$  et  $\phi_2$  pour obtenir  $\phi_1^{n+1}$  et  $\phi_2^{n+1}$ .
4. On ré-initialise la fonction  $\phi$  comme la distance signée à la courbe (étape facultative).
5. On vérifie si la solution est stationnaire. Si elle ne l'est pas, on répète à partir de l'étape 2.

Une fois de plus, on utilise deux boucles imbriquées : l'une est utilisée pour résoudre l'E.D.P. en  $\phi$ , l'autre re-calcule les paramètres  $c_{11}(\phi)$ ,  $c_{10}(\phi)$ ,  $c_{01}(\phi)$  et  $c_{00}(\phi)$  de la fonction level set  $\phi$ .

Pour illustrer sur un cas simple cet algorithme, nous avons choisi une image contenant deux objets, un disque et un rectangle d'intensité différente. La figure 4.9 illustre la segmentation de ces deux objets avec deux fonctions level set. On a pris  $\mu = 500$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $h = 1$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1$  et  $\epsilon = 1$ .

## 4.2 Simplification des données

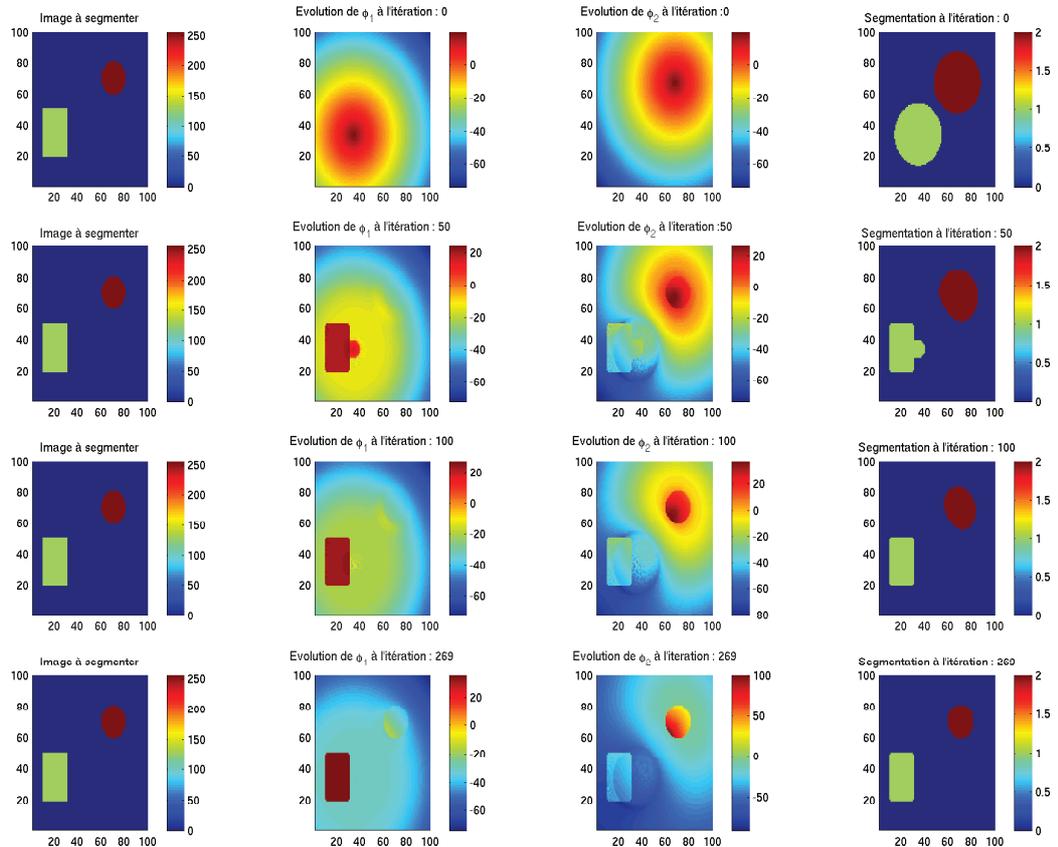


FIGURE 4.9 – Segmentation d’une image avec deux objets d’intensité différente par l’algorithme présenté par Chan et Vese [128]. Les quatre lignes représentent quatre itérations de l’algorithme. La colonne de gauche représente l’image à segmenter, la deuxième colonne représente la fonction  $\phi_1$ , la troisième colonne représente la fonction  $\phi_2$  et la dernière colonne représente le résultat de la segmentation.

La figure 4.9 montre que l’algorithme, en détectant une classe vide, segmente bien l’image en trois ensembles.

### Contours actifs sans bords explicites utilisant une fonction level set et deux niveaux

Nous avons mentionné que dans le cas des variations d’impédances sismiques, nous souhaiterions segmenter l’image en trois classes, qui représenteraient les différences d’impédances positives, négatives et nulles. Parfois, l’algorithme utilisant deux fonctions level set segmente l’image en quatre classes alors que l’on souhaite ici que seulement trois objets soient représentés. C’est la raison pour laquelle nous nous intéressons à un cas particulier de l’algorithme de Chung et Vese [35] qui permet de segmenter une image donnée en trois ensembles. Pour cela les auteurs proposent de prendre en compte plusieurs niveaux d’une même fonction level set.

Considérons donc une seule fonction level set continue et lipschitzienne  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Si l’on considère deux niveaux  $l_1 = 0$  et  $l_2 = l$ , la fonction  $\phi$  partitionne le domaine en trois régions

distinctes :

$$R_1 = \{x : \phi(x) < 0\}, \quad R_2 = \{x : 0 < \phi(x) < l\}, \quad R_3 = \{x : \phi(x) > l\}.$$

L'énergie s'écrit alors :

$$\begin{aligned} F(c_1, c_2, c_3, \phi) &= \int_{\Omega} |f(x) - c_1|^2 H(-\phi(x)) dx \\ &+ \int_{\Omega} |f(x) - c_2|^2 H(\phi(x)) H(l - \phi(x)) dx + \int_{\Omega} |f(x) - c_3|^2 H(\phi(x) - l) dx \\ &+ \mu \left[ \int_{\Omega} |\nabla H(\phi)| + \int_{\Omega} |\nabla H(\phi(x) - l)| \right], \end{aligned} \quad (4.18)$$

où  $c_1, c_2$  et  $c_3$  sont les moyennes dans chacune des régions,  $H$  est la fonction de Heaviside et  $\mu > 0$ . Les termes  $\int_{\Omega} |\nabla H(\phi)|$  et  $\int_{\Omega} |\nabla H(\phi(x) - l)|$  correspondent à la longueur des frontières entre  $R_1, R_2$  et  $R_2, R_3$  respectivement. L'image segmentée est donc donnée par :

$$u(x) = c_1 H(-\phi(x)) + c_2 H(\phi(x)) H(l - \phi(x)) + c_3 H(\phi(x) - l).$$

Pour minimiser cette énergie, on approche la fonction de Heaviside  $H$  par une fonction régulière  $H_\epsilon$ . L'équation de Euler-Lagrange associée au problème de minimisation  $F_\epsilon$  est :

$$\begin{aligned} \phi(0, x) &= \phi_0(x) \\ c_1(t) &= \frac{\int_{\Omega} u(x) H_\epsilon(-\phi(t, x)) dx}{\int_{\Omega} H_\epsilon(-\phi(t, x)) dx}, \\ c_2(t) &= \frac{\int_{\Omega} u(x) H_\epsilon(\phi(t, x)) H_\epsilon(l - \phi(t, x)) dx}{\int_{\Omega} H_\epsilon(\phi(t, x)) H_\epsilon(l - \phi(t, x)) dx}, \\ c_3(t) &= \frac{\int_{\Omega} u(x) H_\epsilon(\phi(t, x) - l) dx}{\int_{\Omega} H_\epsilon(\phi(t, x) - l) dx}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \delta_\epsilon(\phi) \left[ |u - c_1|^2 - |u - c_2|^2 H_\epsilon(l - \phi) + \mu \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \right] \\ &+ \delta_\epsilon(\phi - l) \left[ H_\epsilon(\phi) |u - c_2|^2 - |u - c_3|^2 + \mu \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \right], \\ \frac{(\delta_\epsilon(\phi) + \delta_\epsilon(\phi - l)) \nabla \phi}{|\nabla \phi|} \cdot \vec{n} &= 0 \quad \text{sur } \delta\Omega, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

où  $\vec{n}$  est la normale extérieure à  $\delta\Omega$ . Cette énergie, comme pour les autres modèles, est non-convexe : il peut donc y avoir plusieurs minima locaux. Dans la pratique il n'y a aucune garantie que l'algorithme converge vers un optimum global, ceci dépend de l'initialisation de l'algorithme et du terme de régularisation. C'est pour cette raison qu'en général il est conseillé d'utiliser différentes initialisations et différents termes de régularisation. Concernant la discrétisation de cette équation, elle est analogue au cas classique. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [35] et à l'annexe 5.4.

Pour illustrer le comportement de ce modèle, nous l'appliquons au cas du réservoir avec chenaux. Dans cet exemple, les variations positives correspondent aux déplacements de gaz et les variations négatives correspondent aux déplacements d'eau. Un prétraitement est nécessaire pour

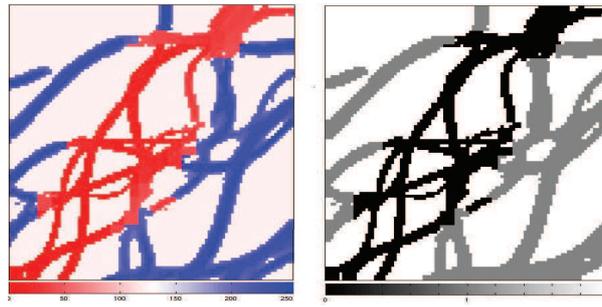


FIGURE 4.10 – Segmentation d’un réservoir avec chenaux. Gauche : carte de variations d’impédances du réservoir après application du filtre NL-means et égalisation d’histogramme. Droite : résultat de la segmentation (0 : première région détectée, 1 : deuxième région détectée, 2 : fond).

garantir un calcul efficace de la moyenne de chaque région. Changer l’intervalle des données n’est pas suffisant pour ce cas, car les variations positives et négatives ne partagent pas le même ordre de grandeur. Un partage équitable entre les variations positives et négatives est possible grâce à l’égalisation d’histogramme [2]. Les données originales sont transformées de telle façon que leur histogramme soit le plus proche d’une distribution uniforme sur  $[0, 255]$ . L’image de gauche de la figure 4.10 est l’image sismique après application du filtre NL-means et de l’égalisation d’histogramme. L’image correspondante après la segmentation en trois classes est donnée à droite dans la figure 4.10. Les trois régions identifiées par la segmentation correspondent parfaitement à ce que l’on attend. En effet, les déplacements de fluides sont correctement extraits de l’image sismique originale.

Étudions maintenant l’influence du paramètre  $\mu$  sur la segmentation d’une coupe verticale du cas SAGD. La figure 4.11 représente le résultat d’une segmentation avec  $\mu = 1000$  et la figure 4.12 représente le résultat de la segmentation avec  $\mu = 50$ . Pour les deux figures, l’image de gauche est la coupe à segmenter, celle du centre illustre la fonction  $\phi$  à la dernière itération et la figure de droite la segmentation obtenue. Les paramètres choisis sont :  $l_1 = 0$ ,  $l_2 = 45$  et  $\delta t = 0.1$ . On remarque que le périmètre des contours des niveaux  $l_1$  et  $l_2$  est inversement proportionnel à la valeur de  $\mu$ . Étant donné que l’on s’intéresse principalement à la chambre de vapeur, on préférera donc les résultats obtenus avec  $\mu = 1000$ , représentés sur la figure 4.11.

Le résultat de la segmentation dépend aussi du terme de régularisation utilisé dans la modélisation. On renvoie le lecteur à l’article de Chung et Vese [35] pour une présentation d’un terme de régularisation différent ainsi que pour une extension de ce modèle à un nombre quelconque de niveaux.

### 4.2.3 Comparaison de la classification et de la segmentation

Dans les exemples précédents, la classification avec le  $k$ -means et la segmentation donnent des résultats équivalents. Cependant la segmentation, qui prend en compte la considération spatiale, est souvent plus précise. Elle calcule également des informations sur les objets présents dans l’image telles que l’aire ou le volume. Nous envisageons d’utiliser les informations calculées lors de la segmentation pour améliorer encore la définition de la *fonction objectif*. Ce point constitue

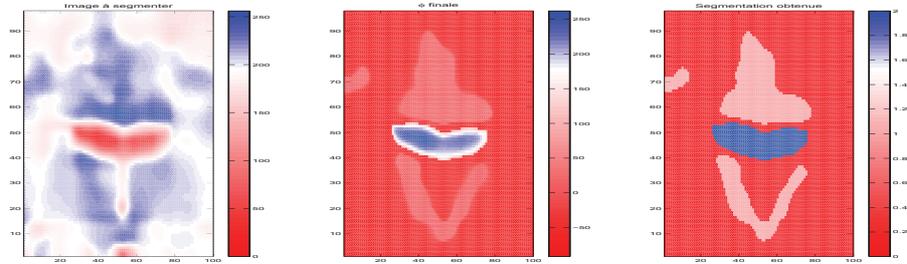


FIGURE 4.11 – Segmentation d’une coupe du cas SAGD en faisant varier le paramètre  $\mu$ . L’image de gauche est l’image à segmenter, celle du centre représente la fonction  $\phi$  finale et l’image de droite est la segmentation obtenue avec l’algorithme de Chung et Vese [35] avec  $\mu = 1000$ ,  $\nu = 0$ ,  $\delta t = 0.1$ ,  $l_1 = 0$ ,  $l_2 = 45$ .

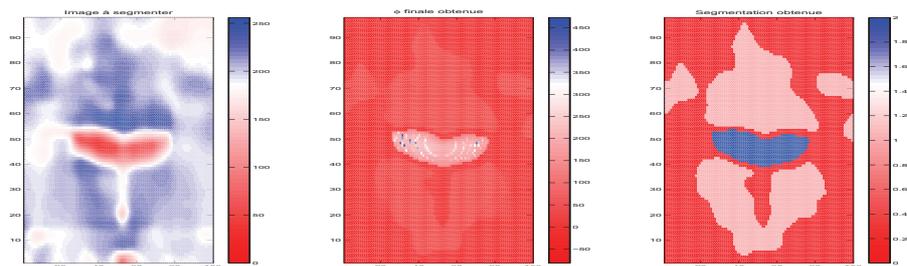


FIGURE 4.12 – Segmentation d’une coupe du cas SAGD en faisant varier le paramètre  $\mu$ . L’image de gauche est l’image à segmenter, celle du centre représente la fonction  $\phi$  finale et l’image de droite est la segmentation obtenue avec l’algorithme de Chung et Vese [35] avec  $\mu = 50$ ,  $\nu = 0$ ,  $\delta t = 0.1$ ,  $l_1 = 0$ ,  $l_2 = 45$ .

une perspective majeure de la thèse et est détaillé en conclusion de ce rapport.

## 4.3 Comparaison des données après simplification

Dans le contexte du calage d'historique, la classification statistique ou la segmentation fournissent deux cartes segmentées en deux ou trois régions. Rappelons que ces cartes segmentées sont issues de la carte sismique de référence et de la carte sismique simulée par le modèle de réservoir. A présent, le but est d'évaluer la différence entre ces deux cartes simplifiées et de calculer une *fonction objectif* qui soit caractéristique de leurs différences. Dans cette section, on présentera le calcul de la carte de dissimilarités locales. Lorsque les cartes sont simplifiées en deux classes, elles sont considérées comme des images binaires. Puis, une extension de cette méthode aux images comprenant plus de deux classes sera présentée. Une valeur représentative de la différence globale sera finalement calculée pour obtenir la *fonction objectif* entre deux images.

### 4.3.1 Carte des dissimilarités locales pour les images binaires

La distance de Hausdorff est reconnue comme étant un outil efficace en comparaison d'images [49] ou en reconnaissance de visage [66]. Étant donné deux ensembles non vides de points  $\mathbf{A} = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^2)^n$ ,  $\mathbf{B} = (b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}^2)^n$  et une distance sous-jacente  $d$ , la distance de Hausdorff entre  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  est donnée par

$$D_H(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \max(h(\mathbf{A}, \mathbf{B}), h(\mathbf{B}, \mathbf{A})), \quad \text{où} \quad h(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \max_{a \in \mathbf{A}} \left( \min_{b \in \mathbf{B}} d(a, b) \right). \quad (4.20)$$

En traitement d'images, cette distance peut être vue comme une mesure de la dissimilarité entre deux images binaires  $A$  et  $B$ . Cette distance a de bonnes propriétés, mais elle est assez sensible au bruit puisqu'elle est représentative des points les plus distants dans  $A$  et dans  $B$ . Zhao [137] référence quelques unes des améliorations qui ont été proposées pour améliorer les propriétés de cette mesure. Cependant, toutes les modifications sont globales et ne prennent pas en compte les différences locales. Pour prendre en considération cet aspect local, Baudier et al [10] ont introduit une Carte de Dissimilarités Locales (CDL) qui compare deux images localement à travers une fenêtre glissante centrée en chaque pixel considéré. Les auteurs proposent aussi un critère pour déterminer, pour chaque pixel, la taille optimale de la fenêtre glissante. Pratiquement, la CDL a une formulation simple par l'utilisation de la Transformée en Distance (TeD). Celle-ci, pour un ensemble de points donné, associe à chaque point sa distance au point le plus proche dans l'ensemble. Concrètement, dans le cas des images binaires, si on considère que le fond est blanc et que l'information est portée par les pixels de couleur noir, la transformée en distance d'un pixel est sa distance au pixel noir le plus proche. Pour mesurer cette distance on peut utiliser n'importe quelle distance, classiquement on choisit la distance euclidienne. En utilisant cette distance, on définit alors la CDL entre deux images binaires  $A$  et  $B$  au pixel  $x$  par :

$$CDL_{A,B}(x) = |A(x) - B(x)| \max(dt_A(x), dt_B(x)), \quad (4.21)$$

où  $dt_A(x)$  et  $dt_B(x)$  sont respectivement les transformées en distance des images  $A$  et  $B$  au pixel  $x$ .

La figure 4.13 illustre le calcul de la CDL entre deux images binaires. Ces cartes sont issues du cas SAGD et ont été segmentées en deux classes. Les cartes de gauche représentent les cartes segmentées à comparer : une chambre de vapeur est représentée en noir dans chacune des images. Les cartes du milieu sont les TeD respectives. Les TeD sont nulles dans la chambre de vapeur et sont de plus en plus élevées pour un pixel situé loin de la chambre de vapeur. Enfin, on représente à droite la CDL. Dans les régions où les images sont identiques, la CDL est nulle. On remarque sur cet exemple que la CDL quantifie bien la différence spatiale entre les images car elle est très élevée là où les images sont visiblement différentes, et faible là où les images sont proches.

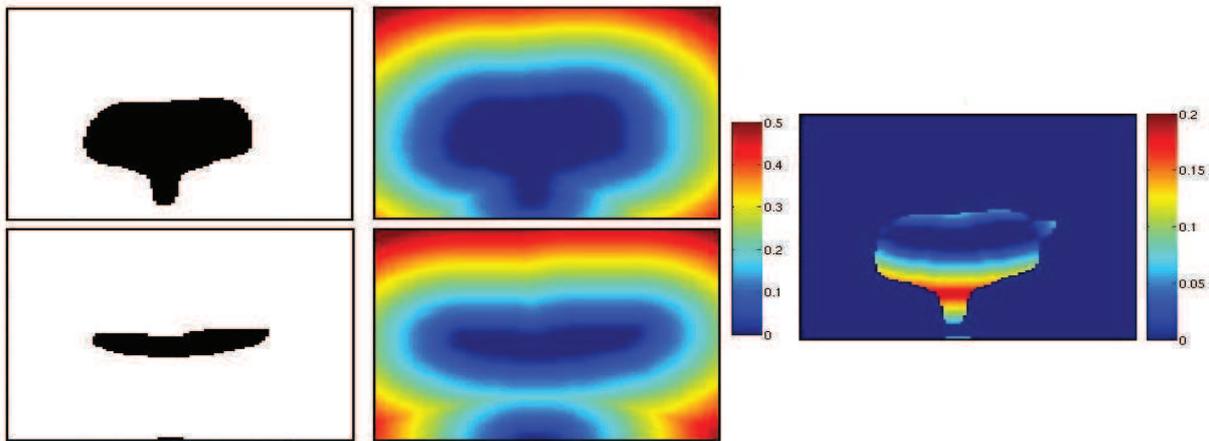


FIGURE 4.13 – Construction de la CDL entre deux images simplifiées en images binaires. A gauche : deux images simplifiées. Au milieu : les TeD correspondantes. A droite : la CDL entre les deux images de gauche.

La définition de la CDL (4.21) peut être directement appliquée aux images en niveaux de gris (dont les pixels prennent plus de deux valeurs). En revanche, la définition de la TeD n'est valable que pour les images binaires. Dans la section suivante nous allons discuter des extensions possibles de la TeD aux images en niveaux de gris.

### 4.3.2 Carte des dissimilarités locales pour les images en niveaux de gris

Si la définition de la TeD est unique pour les images binaires, son extension aux images en niveaux de gris ne l'est plus. L'extension de la TeD aux images en niveaux de gris idéale présenterait les qualités suivantes :

1. Elle a une distance bien définie et interprétable facilement. Cette distance n'est pas nécessairement la distance euclidienne, elle peut être la distance généralisée calculée sur un chemin,
2. Elle est applicable sur des images ne présentant pas nécessairement de fond/forme,
3. Elle tend vers la TeD binaire lorsque l'image tend vers une image binaire.

### 4.3 Comparaison des données après simplification

Pour étendre la définition à des images en niveaux de gris, deux approches sont possibles : adapter la notion de distance entre deux pixels, ou adapter la notion de fond. La Gray Weighted Distance Transform (GWDT), introduite par Rutovitz [114], revient à parcourir un chemin contenant les plus faibles niveaux de gris possibles. La Weighted Distance Transform on Curved Space (WDTACS) [124] revient à parcourir un chemin présentant le moins de variation de niveaux de gris possible. Ces deux approches présentent l'intérêt d'avoir une interprétation claire. Par contre, elles ne sont applicables que lorsque l'image possède une forme exprimée sur un fond, typiquement une image représentant un objet sur un fond uniforme. Ainsi leur utilisation est rarement possible sur une image naturelle (une forêt), où la distinction fond/forme n'existe généralement pas.

Ici, nous considérons l'approche proposée par Molchanov et Teràn [96]. L'idée de base consiste à appréhender une image  $I$  en niveaux de gris définie sur  $\mathbb{R}^2$  comme un volume binaire défini sur  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ . Il s'agit donc d'ajouter une dimension supplémentaire  $t$  et de considérer l'hypographe de  $I$  :

$$\text{hypo } I = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2, I(x) \geq t\}. \quad (4.22)$$

Cet hypographe est donc l'ensemble des images binaires obtenues par tous les seuils possibles de  $I$ . Il suffit donc ensuite d'appliquer la TeD à chaque image binaire, puis de combiner les transformées obtenues en faisant une moyenne. Les auteurs définissent ainsi la transformée en distance  $\nu$ -pondérée :

$$\bar{d}(x, I) = \int_{\inf I}^{\sup I} d(x, \mathcal{I}_t) \nu(dt).$$

où  $d(x, \mathcal{I}_t)$  est la TeD binaire de l'image  $I$  seuillée par un seuil de valeur  $t \in [\inf I, \sup I]$ ,  $\nu$  est une mesure finie sur  $[0,1]$  et  $\mathcal{I}_t = \{x \in \mathbb{R}^2, I \geq t\}$ . Les auteurs fournissent une expression équivalente à base de dilatation (au sens morphologie mathématique) et montrent l'unicité de la transformée ainsi définie. Dans le cas d'images numériques dont les valeurs sont comprises entre 0 et 255 et en supposant que  $I$  prend des valeurs entre  $a$  et  $b$  avec  $0 \leq a < b \leq 255$ , la transformée en distance  $\nu$ -pondérée est alors :

$$\bar{d}(x, I) = \frac{1}{255} \sum_{i=a}^b d(x, \mathcal{I}_i) w_i, \quad (4.23)$$

avec  $I_i = p : I(p) \geq i$ . Deux exemples sont proposés pour les pondérations :  $w_i = 1$  pour une transformée en distance uniforme et une pondération issue de l'histogramme de  $I$ . Dans les deux formulations,  $d$  est la distance d'un point à un ensemble. Le choix le plus classique est donné par  $d(x, F) = \inf\{\rho(x, y), y \in F\}$  pour un point  $x$  donné et un ensemble  $F$ .

La figure 4.14 illustre sur deux exemples classiques en traitement d'images le calcul de la TeD. La première colonne présente deux images en niveaux de gris (Lena et House). Dans la colonne de droite est représenté le calcul de la TeD de chaque image. On remarque que la transformée en distance des points les plus sombres est faible et celle des pixels clairs est élevée.



FIGURE 4.14 – Illustration de la TeD sur des images en niveau de gris : Lena en haut à gauche et House en bas à gauche. A droite sont représentées les TeD de chacune des images.

Cette extension de la TeD présente plusieurs avantages. Tout d'abord, elle peut s'appliquer à des images en niveaux de gris sans aucune hypothèse sur l'image et sans nouvelle notion de fond ou de forme. Finalement, la pondération peut permettre d'ajuster la transformée à un besoin spécifique (par exemple on peut pondérer par l'histogramme). C'est la raison pour laquelle nous avons choisi de l'utiliser pour les images sismiques.

Pour illustrer les effets de l'extension de TeD sur les images sismiques, nous avons choisi de comparer deux configurations d'une section horizontale d'un réservoir avec chenaux où l'on a foré un puits producteur (en haut à droite de la section) et un puits injecteur de gaz (en bas à gauche de la section). La section est discrétisée sur une grille comprenant  $100 \times 100$  mailles espacées de 10 mètres dans chaque direction. Les faciès à l'intérieur des chenaux sont des sables notés  $F_2$ , ils ont de bonnes propriétés pétrophysiques permettant le déplacement des fluides. L'extérieur des chenaux est composé d'un faciès argileux noté  $F_1$  ayant une faible perméabilité. Initialement, le réservoir est rempli d'huile et d'eau. On injecte du gaz durant 1500 jours dans le but d'aider le déplacement de l'huile vers le puits producteur localisé en haut à droite. Dans ce cas, les variations d'impédances permettent de déterminer la migration du gaz durant la production. Le cas de référence noté (M1) est construit en imposant des valeurs spécifiques aux propriétés de chaque faciès. Ces valeurs sont données dans le tableau 4.1. On construit le second cas (M2) en fixant de nouvelles valeurs à ces propriétés, qui sont récapitulées dans le tableau 4.1. Le second modèle a un faciès  $F_1$  plus perméable suivant la direction  $x$  que le modèle (M1).

### 4.3 Comparaison des données après simplification

---

Propriété	Modèle (M1)	Modèle (M2)
Porosité $F_1$	0.05	0.05
Porosité $F_2$	0.1	0.16
Kx $F_1$ (mD)	1	1
Kx $F_2$ (mD)	500	570
Ratio $K_y/K_x F_1$	1	1
Ratio $K_y/K_x F_2$	1	1.1

TABLE 4.1 – Valeur des propriétés pétrophysiques pour les modèles (M1) et (M2) étudiés.  $K_x$  et  $K_y$  sont les perméabilités horizontales et verticales dans la direction x et dans la direction y, respectivement.

On s'intéresse aux différences d'impédances entre deux temps : le début de la production et 1500 jours après. Ces variations sont regroupées en trois classes : les positives représentant le déplacement de l'eau, les nulles représentant l'absence de déplacement et les négatives représentant le déplacement du gaz. La figure 4.15 présente, sur l'image de gauche, la segmentation en trois classes du modèle (M1). Pour appliquer la TeD, on calcule les hypographes par l'équation (4.22). Ils sont au nombre de deux et sont présentés sur la colonne centrale de la figure 4.15. La TeD de chaque image binaire ainsi obtenue est calculée par la formulation classique. On applique la même procédure à (M2), présentée à gauche dans la figure 4.16. Finalement, pour comparer les deux modèles avec la CDL, il faut calculer leurs TeD respectives. La TeD de chaque carte segmentée est obtenue en faisant la moyenne des deux TeD correspondant à leurs hypographes présentés dans la figure 4.16 et la figure 4.15. Elles sont représentées dans la colonne du milieu de la figure 4.17. Aux pixels où les segmentations sont identiques, la CDL est nulle. Aux pixels où elles sont différentes, la CDL est le maximum entre la TeD de (M1) et la TeD de (M2). La CDL finale est représentée à droite de la figure 4.17. Les différences essentielles entre les deux modèles se situent au niveau des chenaux de la diagonale. On retrouve cette information sur la CDL qui est non nulle sur cette même diagonale.

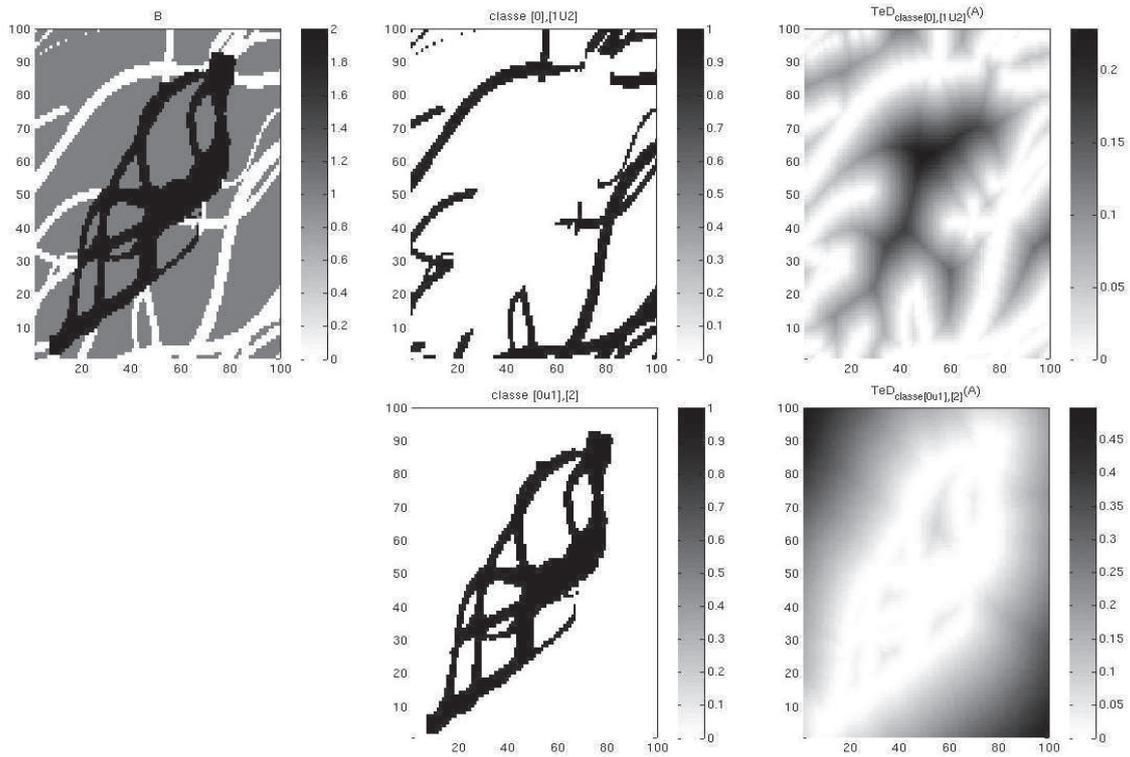


FIGURE 4.15 – Illustration de la TeD sur les variations d'impédances pour le modèle (M1) du réservoir avec chenaux . Gauche : segmentation des variations en trois classes. Centre : les hypographe obtenus. Droite : TeD de chaque hypographe.

### 4.3 Comparaison des données après simplification

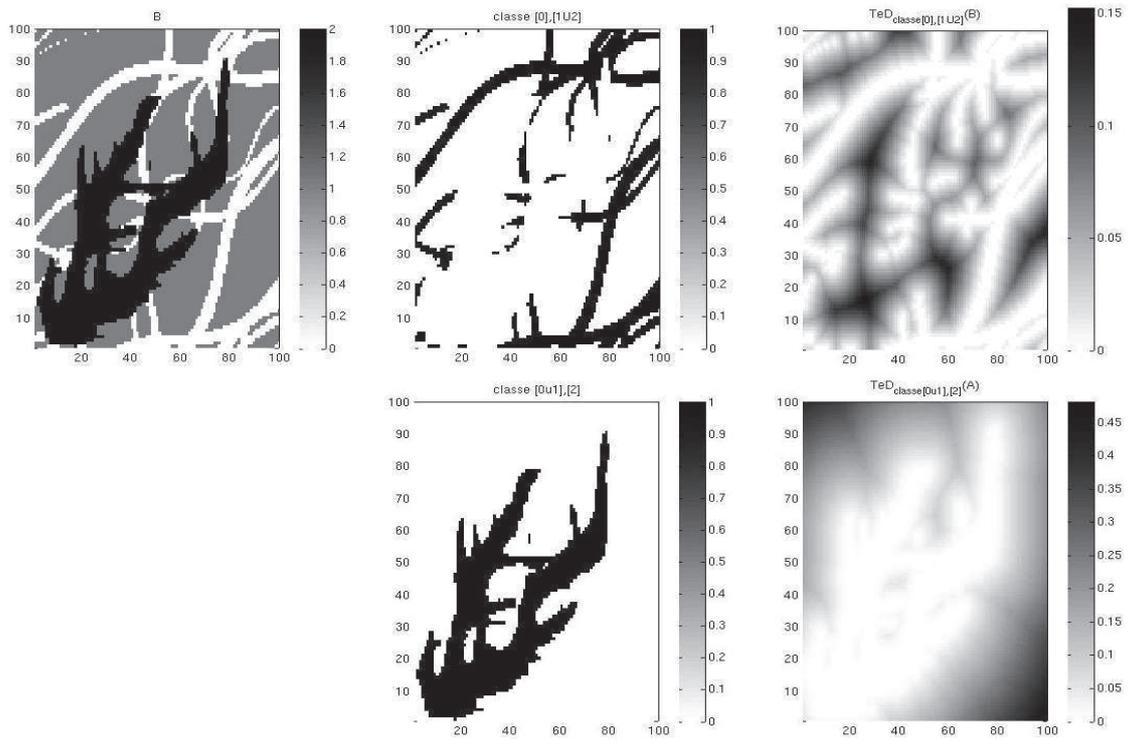


FIGURE 4.16 – Illustration de la TeD sur les variations d'impédances pour le modèle (M2) du réservoir avec chenaux. Gauche : segmentation des variations en trois classes. Centre : les hypographe obtenus. Droite : TeD de chaque hypographe.

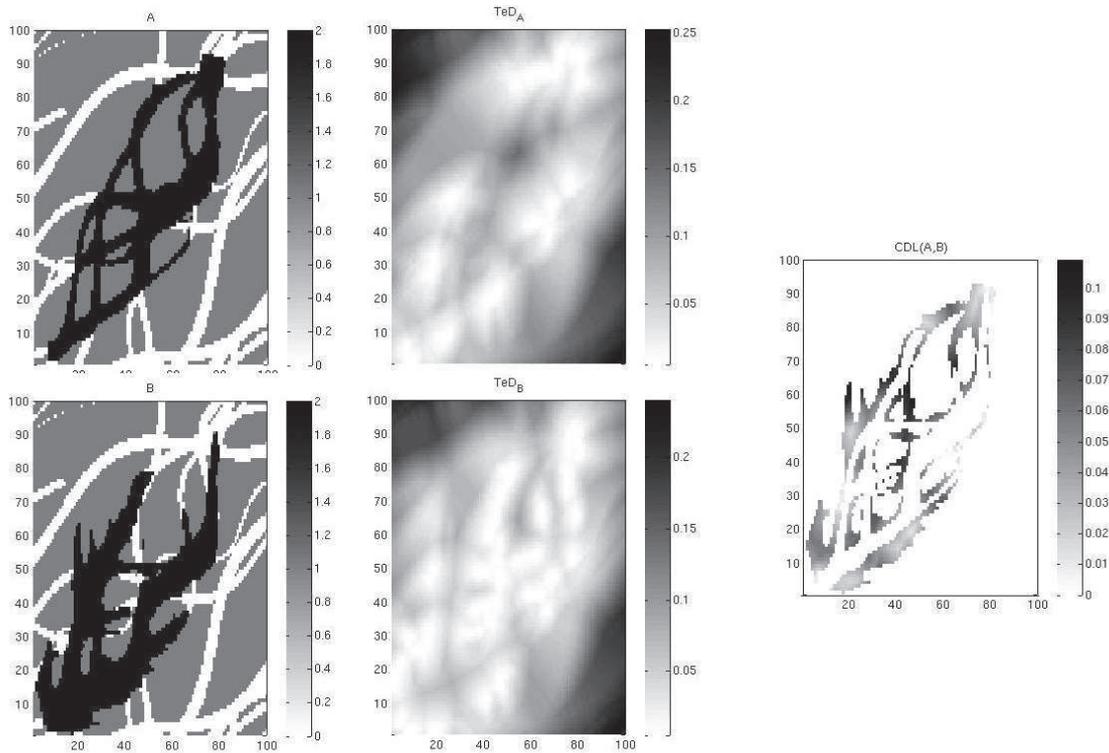


FIGURE 4.17 – Comparaison des modèles (M1) et (M2) avec la CDL. Gauche : segmentation en trois classes des variations d’impédances pour le modèle (M1) en haut et (M2) en bas. Centre : TeD des images segmentées. Droite : CDL entre les images.

#### 4.4 Calcul de la *fonction objectif*

Finalement, la nouvelle formulation adaptée aux données sismiques est composée des étapes suivantes :

1. Application du filtre NL-means sur les attributs sismiques réels et sur les attributs sismiques simulés par le modèle de réservoir.
2. Extraire l’information principale des deux cartes en utilisant au choix :
  - la classification par la méthode du  $k$ -means.
  - la méthode segmentation de Chan et Vese [33] pour deux régions.
  - la méthode de segmentation de Chung et Vese [35] pour trois régions.

Notons que des transformations préliminaires sont parfois nécessaires avec les méthodes de segmentation (linéarisation, égalisation d’histogramme).

3. Calcul de la CDL entre les cartes segmentées avec une transformée en distance appropriée suivant le nombre de classes.
4. Un scalaire final représentant la *fonction objectif* entre les deux cartes sismiques est finalement calculé par sommation de la CDL avec une norme  $L^2$ .

Cette nouvelle formulation est notée SCDL pour Sommaton sur la Carte des Dissimilarités Locales.

#### 4.4 Calcul de la *fonction objectif*

---

La figure 4.18 illustre les différentes étapes sur un exemple issu du réservoir produit par procédé SAGD. La variation d'impédances de référence que l'on cherche à reproduire est représentée en haut à gauche. La variation d'impédance prédite par un modèle choisi au hasard est donnée en haut à droite. La première étape est de simplifier ces deux cartes. Ici, on applique le filtre NL-means et on classe les cartes en deux classes avec l'algorithme  $k$ -means. Le résultat de cette simplification est donné sur la deuxième ligne. On peut remarquer que les cartes ont bien été simplifiées : seules les chambres de vapeur, correspondant à des variations négatives, ont été extraites. Pour chaque image simplifiée, on calcule ensuite la transformée en distance (troisième ligne). Finalement, la CDL combine ces transformées (quatrième ligne). Aux pixels où les images segmentées sont identiques, la CDL est nulle. Aux pixels où les images sont différentes, la CDL correspond au maximum entre les deux TeD. La CDL représente bien les différences entre les deux images segmentées car elle est élevée dans les régions où les chambres de vapeurs sont très différentes.

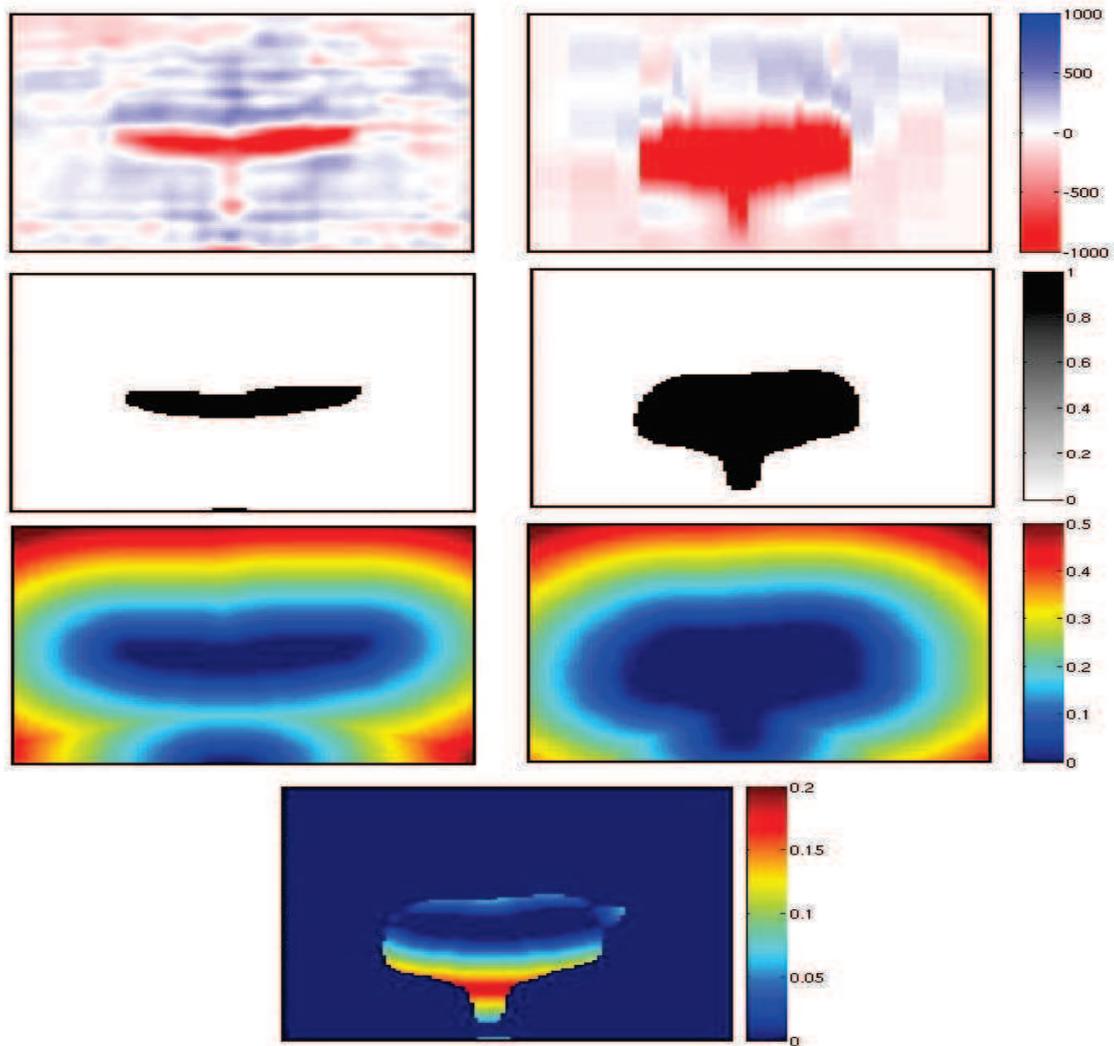


FIGURE 4.18 – Première ligne : variation d'impédances (en  $g.cm^{-3}.m.s^{-2}$ ) de référence (gauche) et simulée par un modèle choisi au hasard (droite). Deuxième ligne : simplification des images sismiques de référence (gauche) et simulée (droite) par filtrage NL-means et classification  $k$ -means en deux classes. Troisième ligne : transformées en distance des images simplifiées. Quatrième ligne : CDL des deux images.

---

## Application au calage d'historique

---

La métrique issue de la SCDL a prouvé son efficacité lors des tests effectués dans le chapitre 4 de ce travail. Il est donc intéressant de la mettre en œuvre dans le cadre du calage d'historique pour évaluer son comportement lors d'un vrai processus de calage des données sismiques. Dans cette partie, dans un premier temps, nous allons effectuer une étude préliminaire sur la robustesse de la nouvelle *fonction objectif* à divers comportements : la translation, la rotation et la perte de résolution. Ensuite, nous allons appliquer la nouvelle *fonction objectif* à trois cas réservoir. Le premier est un cas synthétique en deux dimensions, où l'on souhaite caler les impédances sismiques avant mise en production. Le troisième cas est un cas SAGD plus réaliste. Le dernier cas est un cas synthétique en 3 dimensions. Pour chaque exemple d'application, on comparera les résultats de la SCDL avec la formulation classique basée sur la méthode des moindres-carrés.

### 5.1 Etude de robustesse

Une étude approfondie et comparative de la robustesse de la SCDL est proposée dans cette section. L'invariance de la *fonction objectif* à la translation, à la rotation et au changement de résolution sera étudiée. Pour ce faire, nous construisons plusieurs bases d'images. Chacune d'entre elles est construite à partir d'une image de référence qui sera transformée de plus en plus afin obtenir des images de moins en moins similaires. Dans un premier temps, des techniques simples sont utilisées. On se contente de déplacer l'image : le décalage de l'image va déplacer l'image de quelques pixels dans une direction, la rotation va faire tourner l'image dans le sens horaire ou dans le sens trigonométrique. Des techniques plus sophistiquées peuvent être appliquées à l'image comme la transformée en cosinus discrète et la transformée en ondelettes pour rendre compte du changement de résolution.

Après avoir défini les critères de comparaison, une analyse du comportement des différentes formulations de la *fonction objectif* sera menée. Cette analyse nous permettra de déterminer la formulation la plus pertinente pour les cas considérés.

### 5.1.1 Rotation

Nous commençons ces tests de robustesse en analysant le comportement des *fonctions objectif* vis-à-vis de la rotation. Ce comportement ne se produit pas sur le terrain. Ces tests sont donc destinés uniquement à évaluer le bon comportement de la *fonction objectif*.

En considérant une image de référence incluse dans une image plus grande, on fait subir une rotation de 0 à 25 degrés par rapport à une image de référence pour créer un panel d'images de moins en moins similaires. Les images correspondant aux rotations de 5, 10, 15 et 20 degrés de l'image initiale sont rajoutées à la figure 5.1 pour visualiser la correspondance avec les valeurs de la *fonction objectif*.

La *fonction objectif* est calculée avec les différentes métriques : les moindres-carrés (MC), la corrélation croisée (CC) et la SCDL. Pour assurer la comparaison, les différentes métriques sont normalisées par rapport à leur plus forte valeur obtenue pour être comparables. La courbe représentative de la formulation de type moindres-carrés est celle qui croît le plus rapidement. La courbe représentant l'évolution de la *fonction objectif* basée sur la corrélation croisée croît moins vite que la formulation moindres-carrés. De manière générale, la SCDL donne des valeurs de la *fonction objectif* qui sont inférieures aux autres<sup>1</sup>. La formulation de la *fonction objectif* basée sur la SCDL est donc la moins sensible au phénomène de rotation. On constate que la SCDL avec la norme  $L^2$  est moins sensible à une faible rotation que les autres mesure de similarités.

---

1. Les valeurs de la fonction objectif basée sur la SCDL avec la norme  $L^1$  sont supérieures à celles avec la norme  $L^2$  jusqu'à une rotation de 14 degrés. Au delà, c'est l'inverse.

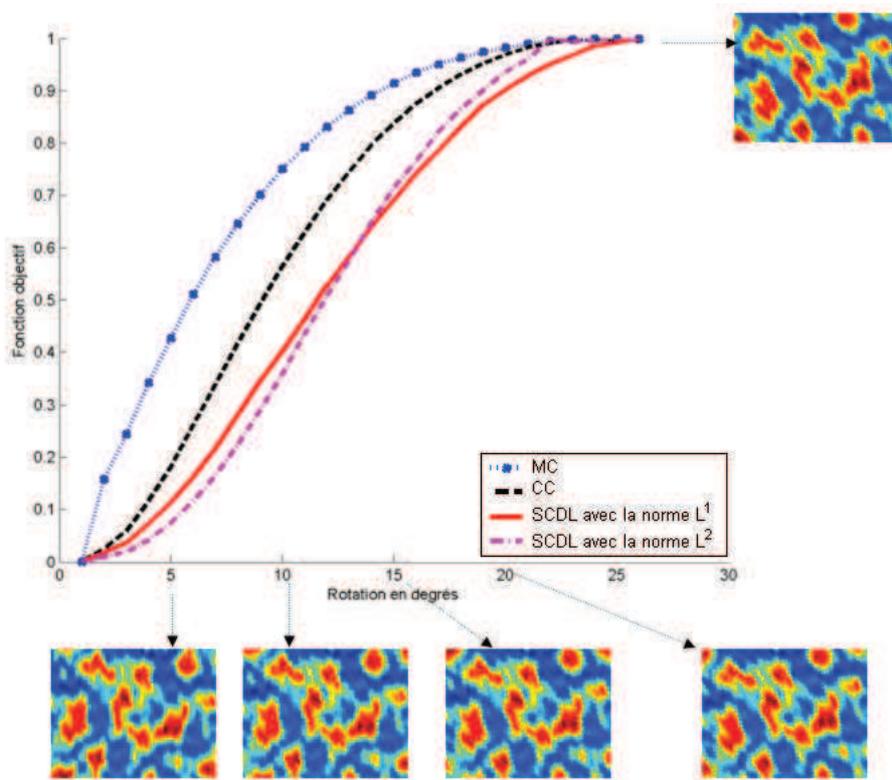


FIGURE 5.1 – Évolution des différentes formulations de la fonction objectif pour une rotation.

### 5.1.2 Translation

Une base d'images est créée en tradant avec un vecteur de même sens et de même direction mais de norme de plus en plus grande une image dite de référence contenue dans une image de plus grande dimension. Une *fonction objectif* pertinente ne devrait pas être trop sensible à ce décalage qui peut avoir lieu lors de l'acquisition des données par exemple. Deux exemples sont présentés ici. Le premier concerne une carte de porosité et le second une carte de variations d'impédances P.

La figure 5.2 présente l'évolution de la *fonction objectif* sur un panel d'images de plus en plus décalées vers la gauche à partir d'une carte de porosité de référence. La *fonction objectif* est calculée avec les différentes métriques : les moindres-carrés (MC), la corrélation croisée (CC) et la SCDL. Une fois de plus, on normalise les métriques par rapport à leur valeur la plus élevée afin qu'elles soient toutes comprises entre 0 et 1. Ceci permet de les comparer. Des images correspondant à un décalage de 5, 10, 15 et 20 ont été ajoutées à la figure pour faciliter la lecture.

La figure 5.3 présente 4 images du panel d'images construit à partir d'une carte de variations d'impédances sismiques qui est vers la gauche de 1 à 40 pixels. On reprend ici la coupe du cas SAGD vue dans le chapitre 4. La figure 5.4 présente quant à elle le comportement des *fonctions objectif* vis-à-vis de cette translation. Les *fonctions objectif* testées pour cet exemple sont les plus pertinentes : les moindres-carrées, la SCDL et la corrélation croisée.

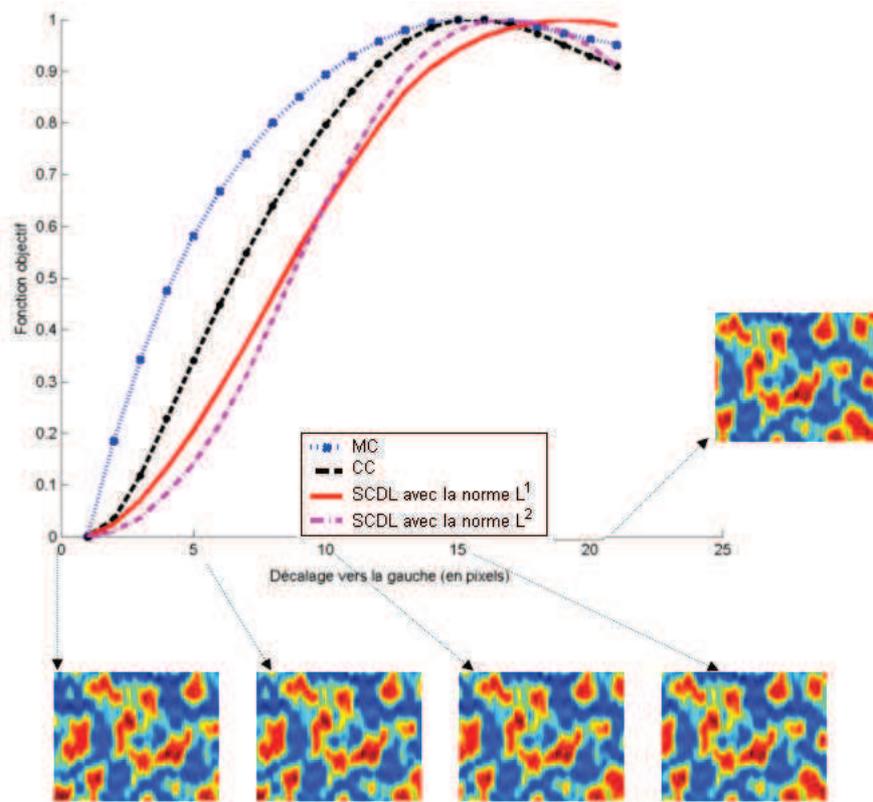


FIGURE 5.2 – Évolution de la fonction objectif pour un décalage vertical de plus en plus grand d'une carte de porosité.

## 5.1 Etude de robustesse

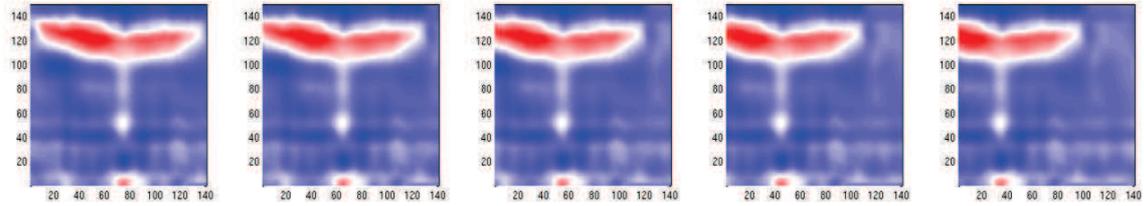


FIGURE 5.3 – Illustration de la translation verticale d’une coupe de variations d’impédances du cas SAGD. De gauche à droite : image de référence, image translatée de 10 pixels, image translatée de 20 pixels, image translatée de 30 pixels, image translatée de 40 pixels.

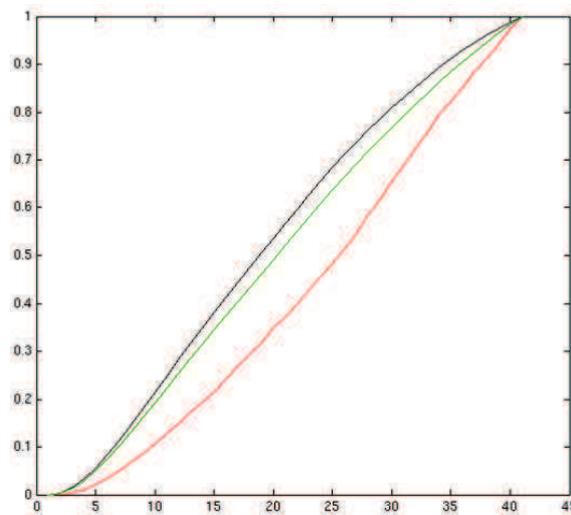


FIGURE 5.4 – Évolution de la *fonction objectif* pour un décalage vertical d’une coupe de variations d’impédances verticale du cas SAGD. Les valeurs de la *fonction objectif* sont données par les moindres-carrés (en noir), la corrélation croisée (en vert) et la SCDL (en rouge).

Dans les deux cas, la courbe représentant la formulation de type moindres-carrés croît le plus rapidement. La *fonction objectif* basée sur la corrélation croisée croît moins rapidement que celle basée sur les moindres-carrés. Les *fonctions objectif* SCDL ont des valeurs inférieures aux autres<sup>2</sup>.

Ainsi, nous pouvons conclure que vis-à-vis de la translation, la formulation basée sur la distance de Hausdorff est la moins sensible au décalage de l’image.

### 5.1.3 Dégradation de la résolution

Nous allons à présent évaluer le comportement des différentes formulations de la *fonction objectif* vis-à-vis de la perte de résolution. Pour ce faire, nous construisons des panels d’images ayant une résolution de moins en moins fine par approximation de la transformée en cosinus discrète, puis par une approximation de la transformée en ondelettes.

2. On remarque que pour l’exemple de la figure 5.2 la courbe représentant la *fonction objectif* utilisant la SCDL basée sur la norme  $L^2$  augmente moins vite que qu’avec la norme  $L^1$ . Ceci nous conforte dans notre choix.

### DCT par blocs

Dans le domaine de la compression d'images, la norme JPEG est l'une des méthodes les plus utilisées. Une succession de transformations est appliquée à l'image que l'on souhaite compresser. La *DCT* (Discrete Cosine Transform) utilisée en compression d'image est une transformée semblable à la transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform) travaillant sur un signal discret. Elle prend un ensemble de points d'un domaine spatial et le transforme en une représentation équivalente dans le domaine fréquentiel. Dans le cas présent, nous allons opérer la *DCT* sur un signal en deux dimensions. En effet, le signal est une image graphique. Les axes X et Y sont les deux dimensions de l'image. L'axe des Z correspond à l'amplitude du signal, c'est-à-dire à la valeur du pixel en un point particulier de l'image. La *DCT* transforme un signal d'amplitude (chaque valeur du signal représente l' "amplitude" d'un phénomène, dans notre exemple la valeur de la porosité) discret bidimensionnel en une information bidimensionnelle de fréquences.

En notant  $Img$  la matrice représentant l'image de taille  $N \times N$ , la *DCT* s'écrit :

$$DCT(i, j) = \frac{\pi}{N} c(i).c(j) \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} [Img(i, j). \cos(\frac{\pi}{N} i(x + \frac{\pi}{N})). \cos(\frac{\pi}{N} \times j(y + \frac{\pi}{N}))] \quad (5.1)$$

La transformation inverse est donnée par :

$$Img(x, y) = \frac{\pi}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} [Img(x, y).c(v).c(u). \cos(\frac{\pi}{N} u(x + \frac{\pi}{N})). \cos(\frac{\pi}{N} .v(y + \frac{\pi}{N}))], \quad (5.2)$$

avec :

$$\begin{cases} c(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } a \leq x \leq b \\ c(w) = 1 & \text{si } w = 1, 2, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (5.3)$$

La compression du signal est obtenue en appliquant la *DCT* sur le signal et en supprimant les plus petits coefficients. Plus on supprime de coefficients, plus l'image est compressée. Le signal reconstruit après application de la transformée inverse est différent du signal original. Pour améliorer la compression de l'image et diminuer le temps de calcul, la *DCT* est appliquée à des blocs et non à l'image entière. La méthode de compression sera donc appliquée indépendamment sur chacun des blocs. Dans notre cas, nous prenons une matrice de taille  $200 \times 200$ . On considère des blocs carrés dont la dimension est un diviseur de 200 pour ne pas avoir de problème de bords. Par exemple, la *DCT* est effectuée sur chaque bloc de taille  $25 \times 25$  de valeurs d'impédances sismiques. Pour chaque bloc, l'élément (0,0) représente la valeur moyenne du bloc et c'est le plus fort coefficient, les autres indiquent la puissance spectrale pour chaque fréquence spatiale. La *DCT* est conservative si l'on ne tient pas compte des erreurs d'arrondis qu'elle introduit. Lorsqu'on travaille avec le signal  $Img(x, y)$ , les axes X et Y représentent respectivement les dimensions horizontale et verticale de l'image. Lorsqu'on travaille avec la transformée en cosinus discrète du signal  $DCT(i, j)$ , les axes représentent les fréquences du signal en deux dimensions.

La compression de l'image, et donc sa dégradation, est obtenue en supprimant les plus

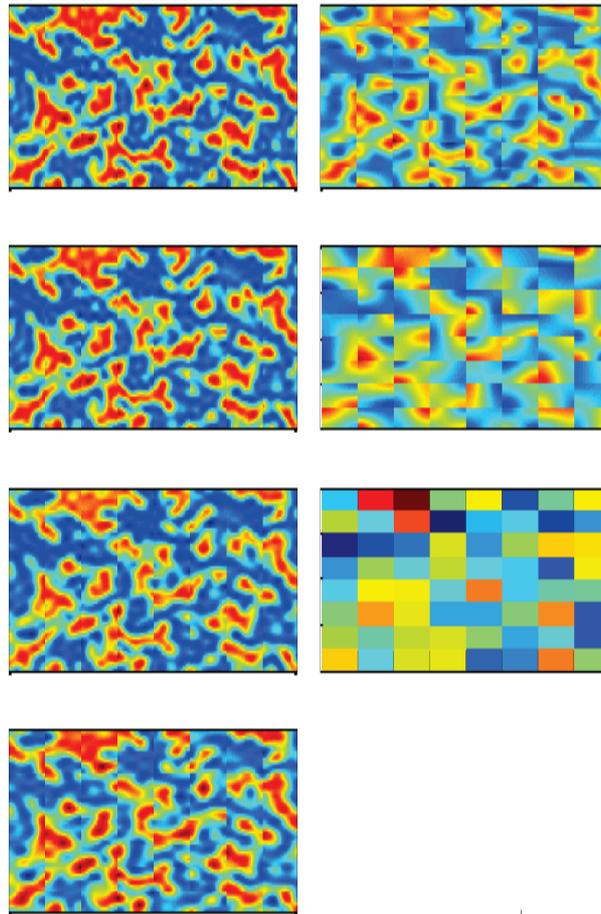


FIGURE 5.5 – Sept dernières dégradations par la DCT par blocs de taille  $25 \times 25$  sur une carte de porosité.

petits coefficients. Ici, nous décidons d'annuler la dernière ligne et la dernière colonne non nulle jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un coefficient par bloc. A chaque suppression de ligne, on applique l'inverse de la *DCT*. Ainsi, on obtient une approximation de l'image de référence, avec une erreur de plus en plus grande. Nous construisons notre base d'images dégradées par DCT.

La figure 5.5 présente une dégradation d'une image. La première image représente la dégradation à un niveau 20, c'est-à-dire que l'on supprime les coefficients des vingt dernières lignes et des vingt dernières colonnes de chaque bloc. De même la dégradation 23 supprime les coefficients des vingt-trois dernières lignes et les vingt-trois dernières colonnes, c'est-à-dire qu'on ne garde que trois coefficients par bloc. Dans la dernière image, on ne garde qu'un seul coefficient par bloc.

On observe qu'en augmentant les dégradations, les blocs  $25 \times 25$  apparaissent au fur et à mesure. A partir d'un certain niveau de dégradation, l'image apparaît de plus en plus discontinue.

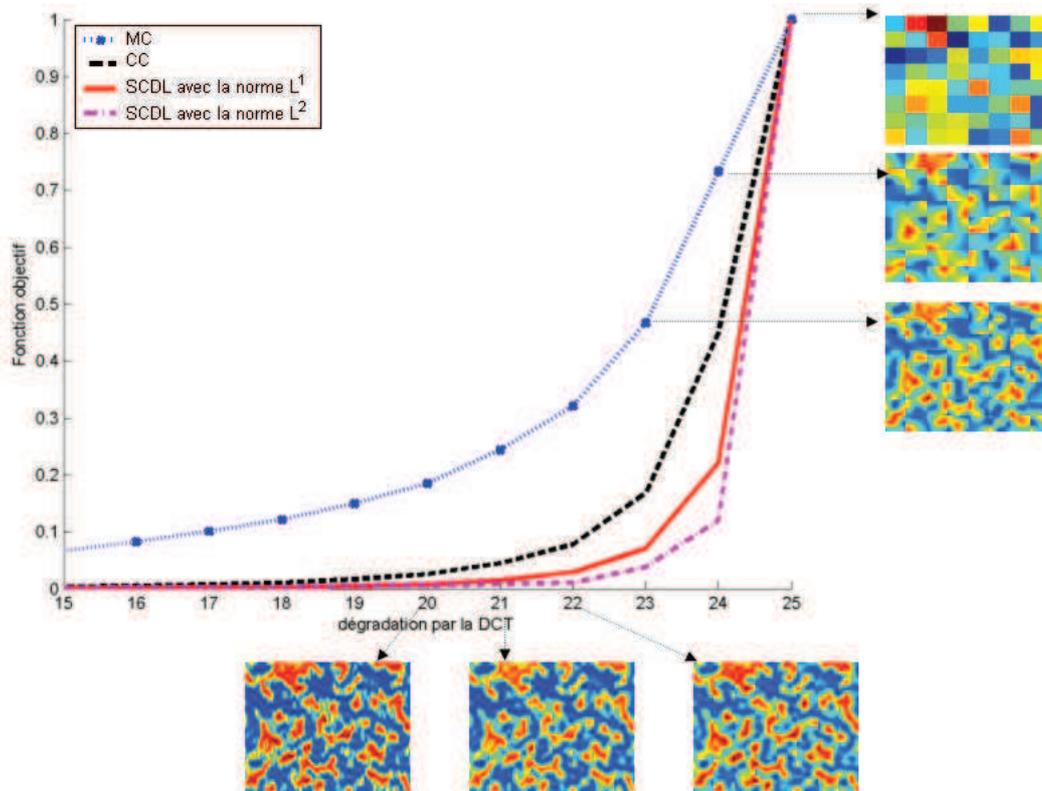


FIGURE 5.6 – Évolution de la *fonction objectif* pour une dégradation par DCT sur une carte de porosité.

La figure 5.6 présente l'évolution de la *fonction objectif* sur le panel d'images construit à partir de la *DCT*. Pour mieux visualiser les dégradations correspondantes aux différentes valeurs des *fonctions objectif*, des images représentant l'image de référence dégradée aux cinq derniers niveaux sont ajoutées au graphique. On a choisi de représenter les courbes à partir de la dégradation 15, car, exceptée la courbe représentant la *fonction objectif* de type moindres-carrés, les autres courbes sont confondues avec l'axe des abscisses. La formulation de type moindres-carrés est celle qui croît le plus rapidement. La corrélation croisée ne dépasse la valeur de 0.1 qu'à partir de la 23<sup>ème</sup> dégradation (il ne reste donc que les neuf plus forts coefficients dans la décomposition). La *fonction objectif* basée sur la SCDL ne dépasse cette valeur qu'à la 24<sup>ème</sup> dégradation. On note que c'est celle qui utilise la norme  $L^2$  qui croît le moins vite.

### Approximation par transformée en ondelettes

La notion d'"ondelettes" ou "wavelets" a été utilisée pour la première fois au début des années 80 par le géophysicien français Jean Morlet [97] pour désigner des fonctions mathématiques utilisées dans la représentation des données sismiques. Les ondelettes sont des fonctions de base de variation multi-échelles, ou multi-résolutions, utilisées pour approcher et/ou compresser des données. La théorie des ondelettes n'est pas tout à fait nouvelle, mais son support mathématique a été considérablement développé dans les vingt dernières années, après que ces fonctions aient été utilisées dans le traitement numérique du signal et en particulier dans l'analyse et la

## 5.1 Etude de robustesse

compression des images. La clef de son succès tient dans le fait que pour une classe de fonctions, la majeure partie de l'information contenue dans la fonction est concentrée dans un petit nombre de coefficients d'ondelettes. La plupart des ondelettes ont été construites dans les années 90. Le principe repose sur la séparation du signal en deux composantes, l'une représentant l'allure générale (les basses fréquences) et l'autre représentant les détails (les hautes fréquences).

La décomposition d'une fonction en ondelettes donne une somme pondérée de fonctions à partir d'opérations simples effectuées sur une fonction principale appelée ondelette-mère. Ces opérations reposent sur des translations et dilatations de la variable. Selon que ces translations et dilatations sont choisies de manière continue ou discrète, on parlera d'une transformée en ondelettes continue ou discrète.

### Définition 5.1.1

Une ondelette est une fonction  $\psi$  de  $L^2(\mathfrak{R})$  de moyenne nulle ie ( $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$ ), normalisée ie ( $\int |\psi(t)|^2 dt = 1$ ), et centrée au voisinage de  $t=0$ .

En fonction de ce que l'on désire réaliser avec le signal, on utilise différents types d'ondelette mère. Par exemple, pour compresser une image de manière sensible et sans trop de perte (l'image est ici un signal carré en deux dimensions), on utilise une ondelette-mère carrée, appelée ondelette de Haar, qui code en quelques coefficients le signal de l'image. Elle est définie par :

$$\psi : x \mapsto \begin{cases} 1 & \forall x \in [0, 1/2] \\ -1 & \forall x \in [1/2, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.4)$$

Le graphe de l'ondelette de Haar est donné dans la figure 5.7 en haut à gauche. En tradant et dilatant cette ondelette on obtient une famille de fonctions, dont quelques-unes sont représentées sur la figure 5.7.

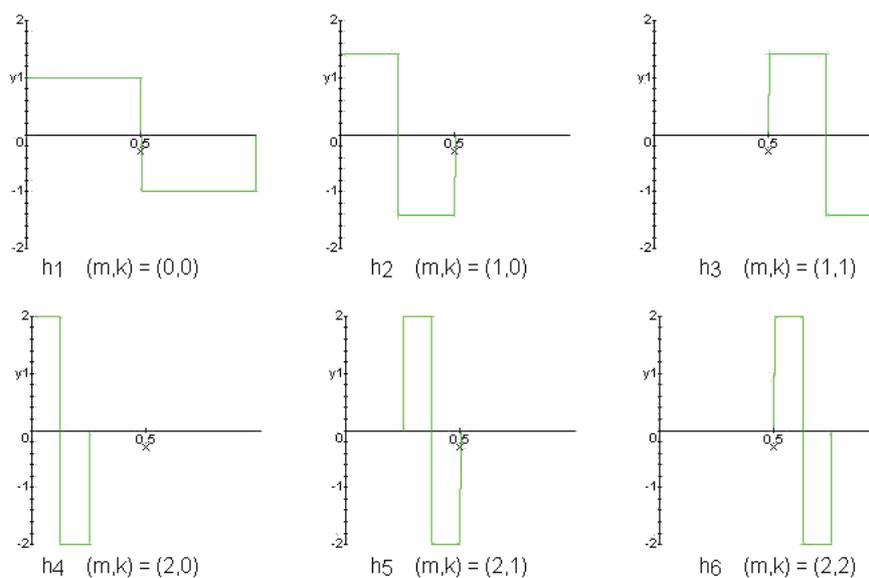


FIGURE 5.7 – Translation et dilatation de l'ondelette de Haar (en haut à gauche) en faisant varier le facteur de dilatation  $m$  de 0 à 2 et le facteur de translation  $k$  de 0 à 2.

Finalement la transformée en ondelettes est donnée par la définition suivante :

**Définition 5.1.2**

Une famille d'éléments temps-fréquence s'obtient en dilatant d'un facteur  $m$  et en traduisant d'un facteur  $k$  l'ondelette :

$$\psi_{m,k} = \frac{1}{\sqrt{m}} \psi\left(\frac{t-k}{m}\right) \tag{5.5}$$

Ces facteurs restent normalisés et nous appelons transformée en ondelettes de  $f$ ,

$$Wf_{m,k} = \sum_{t=-\infty}^{t=\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} f(t) \psi\left(\frac{t-k}{m}\right) \tag{5.6}$$

où  $m$  est le coefficient de dilatation et  $k$  le coefficient de translation.

D'un point de vue algorithmique, nous avons utilisé la toolbox Wavelab (<http://www-stat.stanford.edu/~wavelab/>) qui permet de manipuler et visualiser les transformées en ondelettes dans Matlab. La figure 5.8 présente la dégradation de notre image de référence. La base de décomposition en transformée d'ondelettes doit être dyadique. De ce fait, nous avons changé le maillage de l'image de départ de taille  $200 \times 200$  pour obtenir une image de taille  $256 \times 256$ . Ici, l'ondelette-mère est l'ondelette de Haar. Pour avoir une approximation de l'image de référence, on choisit de ne garder que les premiers coefficients de la transformation en ondelette. L'image 1 représente l'approximation en ne gardant que les  $2^{15}$  premiers coefficients. Pour passer à l'image suivante, on ne garde que les  $2^{14}$  premiers coefficients. On procède de la même façon jusqu'à l'image 8 qui ne garde que  $2^8$  coefficients.

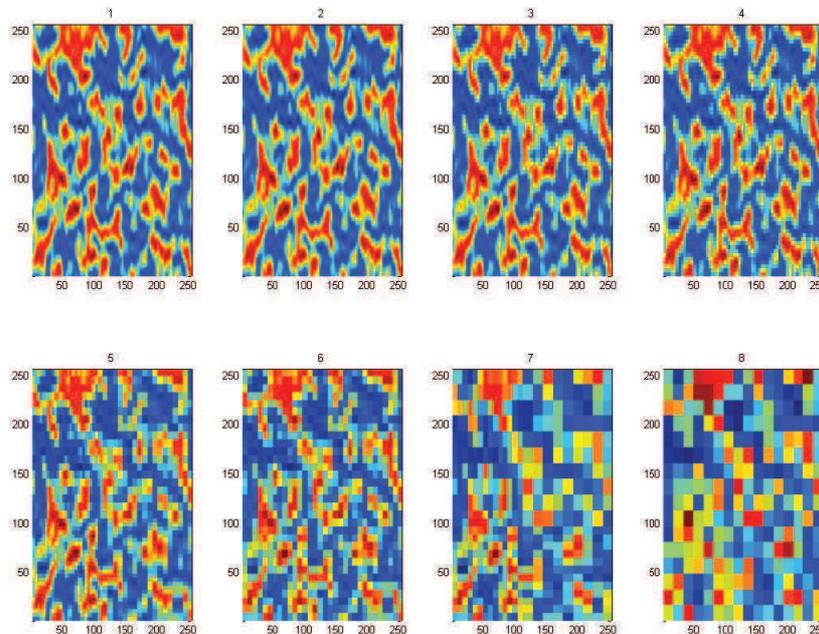


FIGURE 5.8 – Dégradation de la résolution d'une image de porosité par approximation de la transformée en ondelettes.

On observe sur la figure 5.9 que jusqu'à la dégradation 8, l'évolution des courbes est semblable aux autres cas étudiés précédemment. La formulation de la *fonction objectif* basée sur les moindres-

## 5.1 Etude de robustesse

carrés s'élève très rapidement et atteint la valeur de 0.15 à partir de la première dégradation. La *fonction objectif* basée sur la corrélation croisée croît moins rapidement et n'atteint cette valeur qu'à partir de la 5<sup>ème</sup> dégradation. La *fonction objectif* basée sur la SCDL utilisant la norme  $L^1$  et celle utilisant la norme  $L^2$  ont le même comportement et des valeurs quasi-identiques. On note qu'à partir de la 7<sup>ème</sup> dégradation toutes les courbes atteignent des valeurs élevées. Ce comportement est dû au fait qu'à partir de là, les images produites par ce type de compression ne sont plus semblables à l'image de référence. En effet, sur l'image 7 de la figure 5.8 on ne distingue plus les formes présentes dans l'image 1 (l'image de référence).

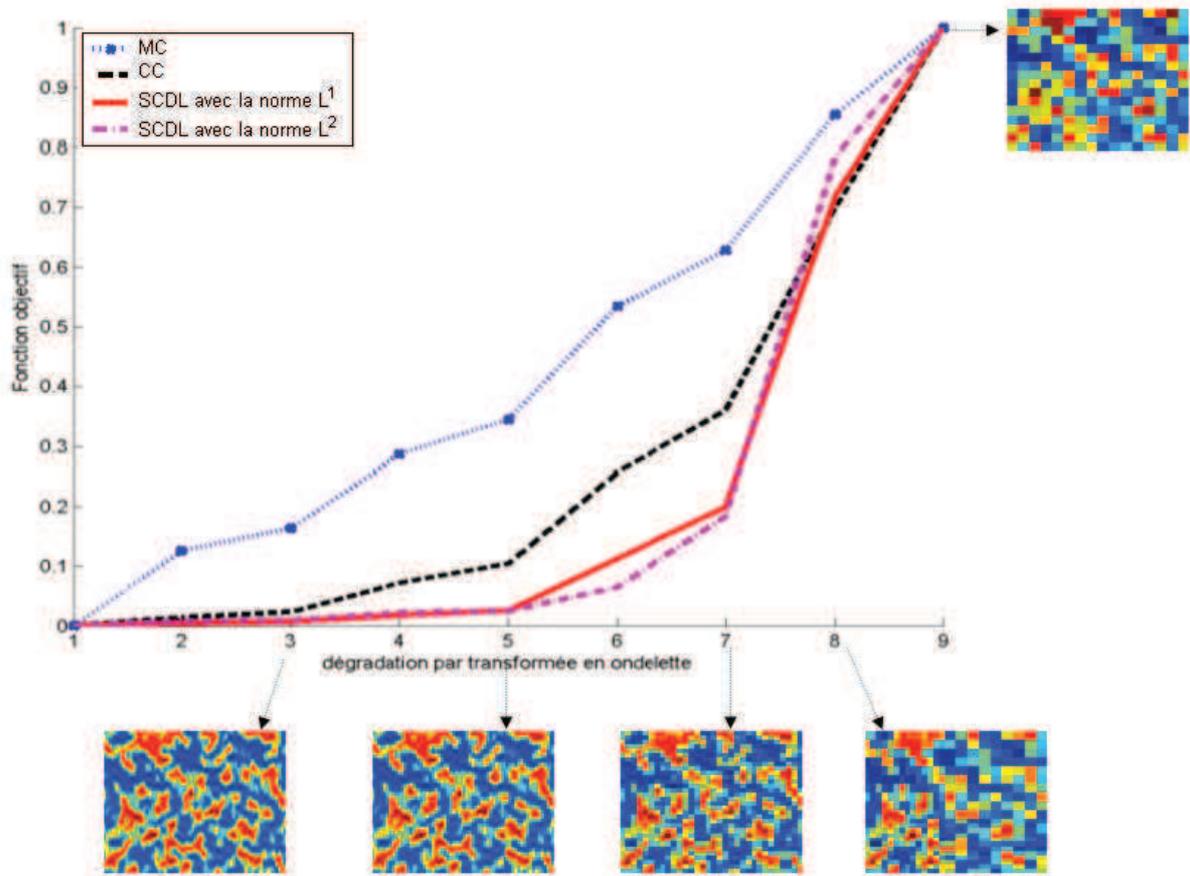


FIGURE 5.9 – Évolution de la *fonction objectif* pour la dégradation par transformée en ondelettes.

Regardons à présent l'évolution des *fonctions objectif* sur une carte de variations d'impédances issue du cas SAGD. La figure 5.10 représente les dégradations obtenues. La figure 5.11 représente l'évolution des différentes formulations de la *fonction objectif* : par moindres-carrés (noir), par la corrélation croisée (en vert) et par la SCDL (en rouge). Une fois de plus les mêmes conclusions peuvent être formulées : la SCDL est la formulation de la *fonction objectif* la moins sensible au changement de résolution.

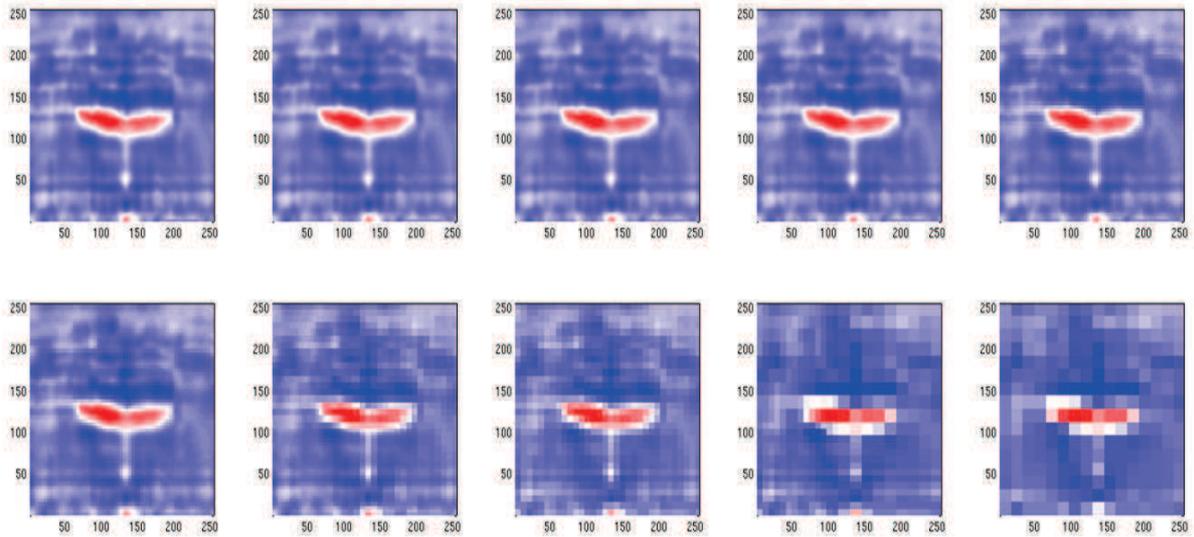


FIGURE 5.10 – Dégradation de la résolution sur une carte de variations d'impédances extraite du cas SAGD. De gauche à droite et de haut en bas : image de référence, images obtenues par approximation par transformée en ondelettes en gardant  $2^{15}$ ,  $2^{14}$ ,  $2^{13}$ ,  $2^{12}$ ,  $2^{11}$ ,  $2^{10}$ ,  $2^9$ ,  $2^8$  coefficients.

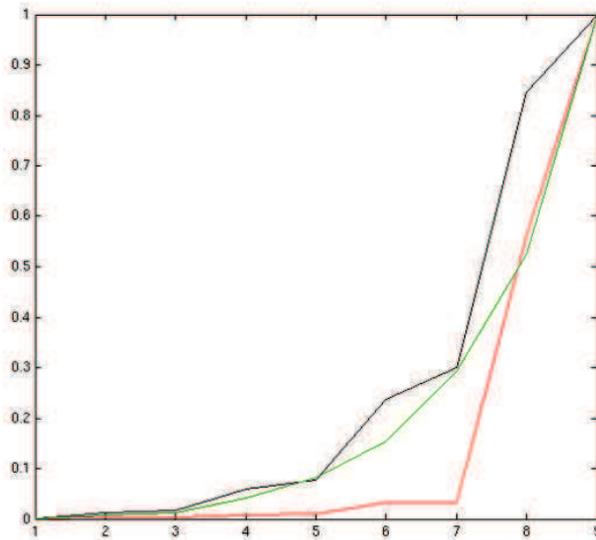


FIGURE 5.11 – Évolution des *fonctions objectif* en fonction de la diminution de la résolution de la coupe SAGD. (Noir : moindres-carrés ; vert : corrélation croisée ; rouge : SCDL.)

### 5.1.4 Conclusion

Chaque panel d'images a été construit de telle sorte que les images soient de moins en moins semblables à l'image de référence. Ainsi, une formulation de la *fonction objectif* adaptée devrait être croissante, ce qui est le cas pour toutes les formulations étudiées. Les premières images sont

## 5.2 Application de la SCDL à des cas synthétiques

---

très proches de l'image de référence. Cela doit se traduire par une valeur de la *fonction objectif* peu élevée. Ainsi la *fonction objectif* la plus adaptée à notre problème doit croître très lentement en ne prenant que de petites valeurs jusqu'aux dernières images qui sont les moins similaires à l'image de référence.

Pour l'ensemble des panels, la *fonction objectif* de type moindres-carrés croît le plus vite. C'est donc la moins adaptée. La *fonction objectif* basée sur la corrélation croisée donne de meilleurs résultats que celle basée sur les moindres-carrés. Cependant, elle s'élève rapidement dans le cas des dégradations par transformée en ondelettes. La *fonction objectif* basée SCDL utilisant la norme  $L^1$  croît moins vite que les deux précédentes. Enfin, la formulation basée sur la distance de Hausdorff utilisant la norme  $L^2$  donne les meilleurs résultats dans l'ensemble. Dans l'ensemble, la *fonction objectif* basée sur la SCDL est plus pertinente que celle basée sur la corrélation croisée et les moindres-carrés.

## 5.2 Application de la SCDL à des cas synthétiques

Nous allons à présent évaluer les performances de la SCDL en situation de calage d'historique. La SCDL sera comparée à la formulation moindres-carrés sur 3 cas de réservoir : un cas synthétique et deux cas réalistes.

### Cas synthétique

Notre premier cas d'application est un cas synthétique où l'on propose de caler les impédances  $P$  avant mise en production avec une technique de paramétrisation différente. Le modèle général en faciès est obtenu en appliquant la méthode des processus gaussiens tronqués [83]. On choisit une réalisation en faciès où les propriétés pétrophysiques et géomécaniques sont supposées connues. Un modèle pétro-élastique est ensuite appliqué pour calculer les impédances  $P$  initiales. La carte en faciès de référence étant fixée et supposée désormais inconnue, le but du calage d'historique est de trouver une réalisation capable de reproduire les impédances  $P$ . A partir d'une réalisation initiale générée aléatoirement, l'objectif est donc de la modifier pour diminuer la *fonction objectif*. Dans ce but, nous choisissons la méthode des points pilotes introduite par LaVenue et al [76]. Cela consiste à modifier la valeur en quelques points (dits points pilotes) du processus gaussien sous-jacent à la réalisation en faciès. Cette modification est propagée ensuite à tout le domaine par krigeage, permettant ainsi de perturber l'ensemble de la réalisation en faciès. Ici, nous définissons 16 points pilotes uniformément distribués dans le réservoir, qui sont alors les paramètres modifiés au cours de l'optimisation. A la différence du premier cas synthétique, les proportions de faciès sont fixées.

La figure 5.12 illustre la carte en faciès de référence qui est composée de deux faciès : un sable (représenté en rouge) avec de bonnes propriétés pétrophysiques et un argile (représenté en bleu) avec de moins bonnes propriétés. Comme pour l'exemple précédent, l'optimisation est faite deux fois : une fois avec la *fonction objectif* moindres-carrés et une seconde fois avec la SCDL. La figure 5.13 donne la carte d'impédances à reproduire (en bas) et la carte d'impédances fournie par le modèle initial (en haut). Dans la figure 5.14, on compare les impédances  $P$  simulées par

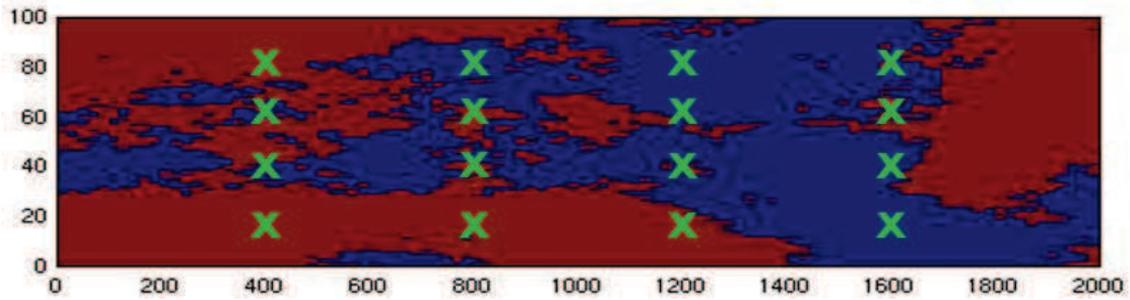


FIGURE 5.12 – Carte en faciès de référence : un sable (rouge) et un argile (bleu). Les points pilotes répartis uniformément sont représentés par des croix.

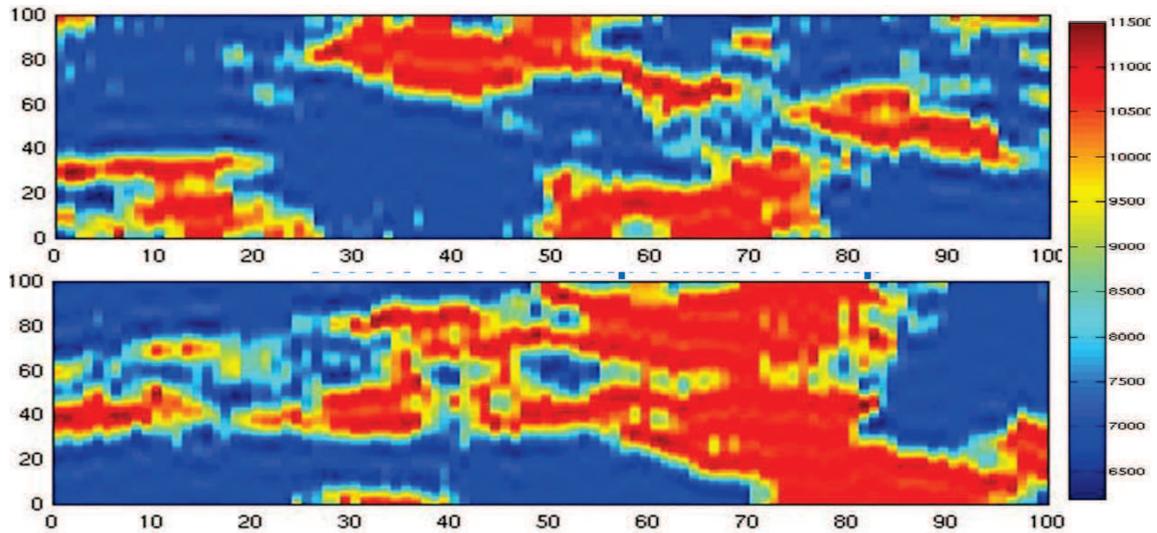


FIGURE 5.13 – Impédances P (en  $g.cm^{-3}.m.s^{-2}$ ) simulées par le modèle initial (haut) et de référence avant production (bas).

les modèles optimaux obtenus avec les deux formulations. Les résultats des deux formulations semblent très proches : ils n'arrivent pas à reproduire les impédances P élevées sur la gauche mais trouvent des formes similaires au centre de la carte.

Maintenant, intéressons-nous à l'évolution des *fonctions objectif*. Elles sont représentées par un graphique dans la figure 5.15. La *fonction objectif* SCDL (en bleu) décroît beaucoup plus rapidement que la *fonction objectif* moindres-carrés (en rouge). Ainsi, la formulation SCDL va permettre de réduire considérablement le nombre de simulations. Cet aspect n'est pas négligeable, en effet pour chaque modèle généré une simulation d'écoulement très coûteuse en temps de calcul doit être effectuée. Cet exemple illustre un autre intérêt de la nouvelle formulation : la décroissance rapide de la *fonction objectif* SCDL durant le processus de calage des données sismiques.

## 5.2 Application de la SCDL à des cas synthétiques

---

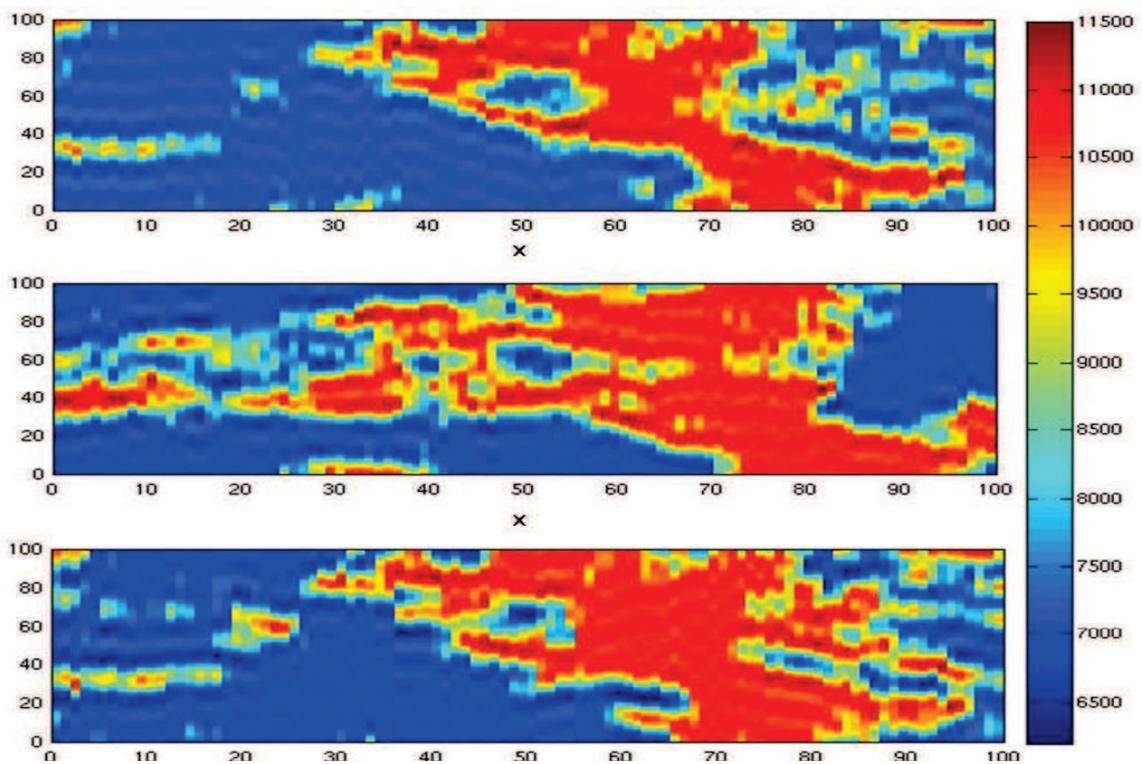


FIGURE 5.14 – Haut : impédances P simulées par le modèle optimal obtenu avec les moindres-carrés. Centre : impédances P de référence. Bas : impédances simulées par le modèle optimal obtenu avec la SCDL. En  $g.cm^{-3}.m.s^{-2}$ .

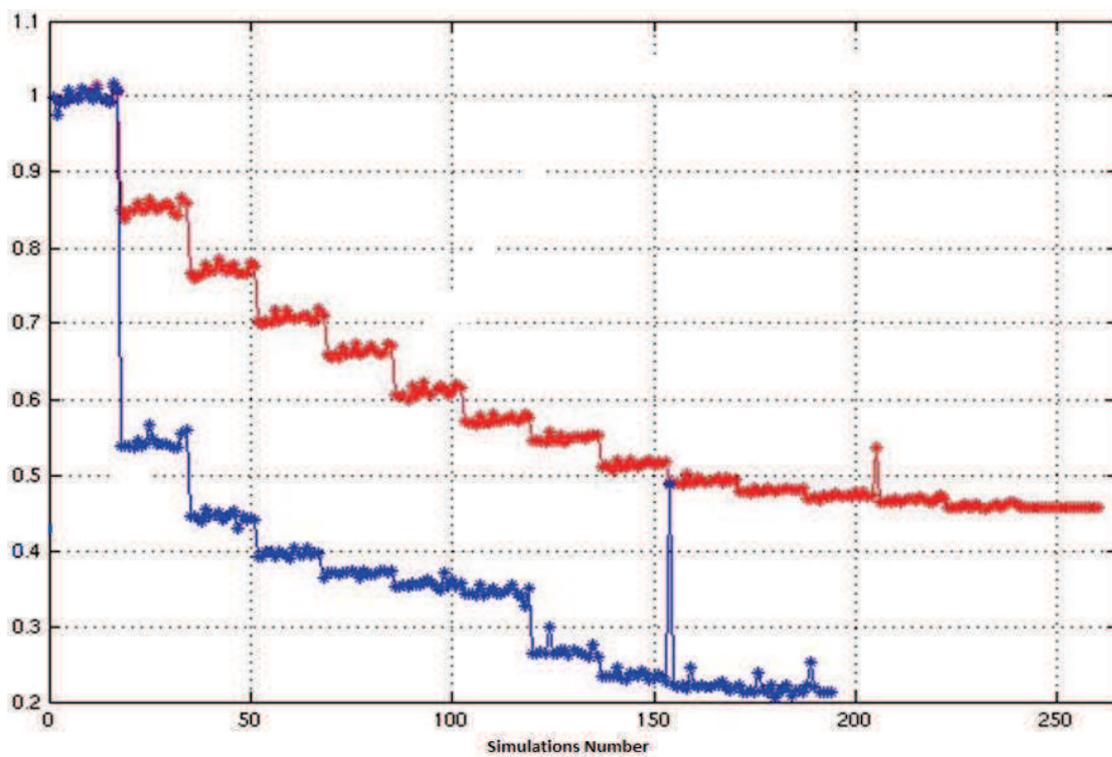


FIGURE 5.15 – Évolution de la *fonction objectif* lors du calage des impédances P. En rouge : formulation moindres-carrés. En bleu : formulation SCDL. Les valeurs sont normalisées par la valeur initiale.

## 5.3 Application sur un cas réaliste

Le cas synthétique étudié dans cette section est réaliste, dans le sens où il est très fortement inspiré d'un champ réel canadien [88]. Ce champ est produit par injection de vapeur afin d'extraire l'huile lourde qu'il contient. Une paire de puits horizontaux et parallèles est placée en bas du réservoir, comprenant un puits producteur et un puits injecteur distants de 5 à 10 mètres. L'injection de vapeur réchauffe l'huile lourde contenue dans le réservoir et diminue ainsi sa viscosité. Par gravité, l'huile chauffée est drainée vers le puits producteur. La profondeur du réservoir est de 260 mètres. Pour notre étude, on considère un sous domaine représenté par une grille de taille  $820 \times 98$  et d'épaisseur 50 mètres. Une cellule de la grille est de taille approximativement  $0.5\text{m} \times 20\text{m} \times 1\text{m}$ . Les 98 couches sont divisées en trois unités : l'unité 1 située en haut du réservoir, l'unité 2 située au milieu du réservoir et l'unité 3 située en bas du réservoir. Ces unités sont composées respectivement de 30, 15 et 53 couches. L'unité 3, qui contient des gros grains de sable, constitue la partie la plus importante du réservoir. L'unité 2 est composée d'un sable avec des grains de taille moyenne. L'unité 1 est constituée par du sable moyen à médian alterné avec de l'argile, ce qui est représentatif d'une mauvaise qualité de réservoir. Les centaines de puits forés dans le champ réel ont fourni beaucoup de données qui permettent d'identifier cinq différents faciès : trois sables et deux argiles. Leurs proportions, supposées constantes par couche, sont estimées à partir des diagraphies. Les diagraphies sont également utilisées pour décrire la variation spatiale des faciès.

La méthode des processus gaussiens tronqués est ensuite appliquée pour générer le modèle de référence en faciès. Une simulation des fluides dans ce modèle fournit la pression, les saturations et les températures sur l'ensemble de la grille du réservoir en différents temps. Les porosités initiales étant connues, elles sont mises à jour sur les bases d'une simulation géomécanique. Puis, on applique le modèle pétro-élastique pour calculer la grille des impédances  $P$  correspondantes. Cette étape est accomplie à l'échelle géologique : les attributs sismiques qui en résultent sont donc donnés à l'échelle géologique. L'ensemble des données sismiques est calculé en trois temps :  $T_0$ ,  $T_1 = 1$  an et  $T_2 = 3$  ans.

Dans un premier temps, dans le souci de mieux comprendre le comportement de la nouvelle *fonction objectif* sur ce type de réservoir, nous allons appliquer la SCDL à différents scénarios possibles sans faire de calage. Pour cela, on considère une carte de référence  $A$  et quatre scénarios d'injection notés  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  et  $S_4$ . La carte  $A$  est représentée en haut à gauche de la figure 5.16. Une chambre de vapeur est clairement visible au centre. On la compare avec quatre cartes simulées  $S_1$  (figure 5.16, deuxième ligne première colonne),  $S_2$  (figure 5.16, deuxième ligne deuxième colonne),  $S_3$  (figure 5.16, deuxième ligne troisième colonne) et  $S_4$  (figure 5.16, deuxième ligne quatrième colonne). Ces cartes sont construites avec le même modèle géologique que  $A$  (sauf pour  $S_2$ ) mais avec des scénarios différents qui sont les suivants :

1.  $S_1$  : il n'y a pas d'injection de vapeur. La variation d'impédances est juste due au bruit.
2.  $S_2$  : la vapeur est injectée, mais la présence d'une fine couche d'argile bloque l'expansion de la chambre de vapeur. La chambre de vapeur est bloquée au niveau du puits d'injection.

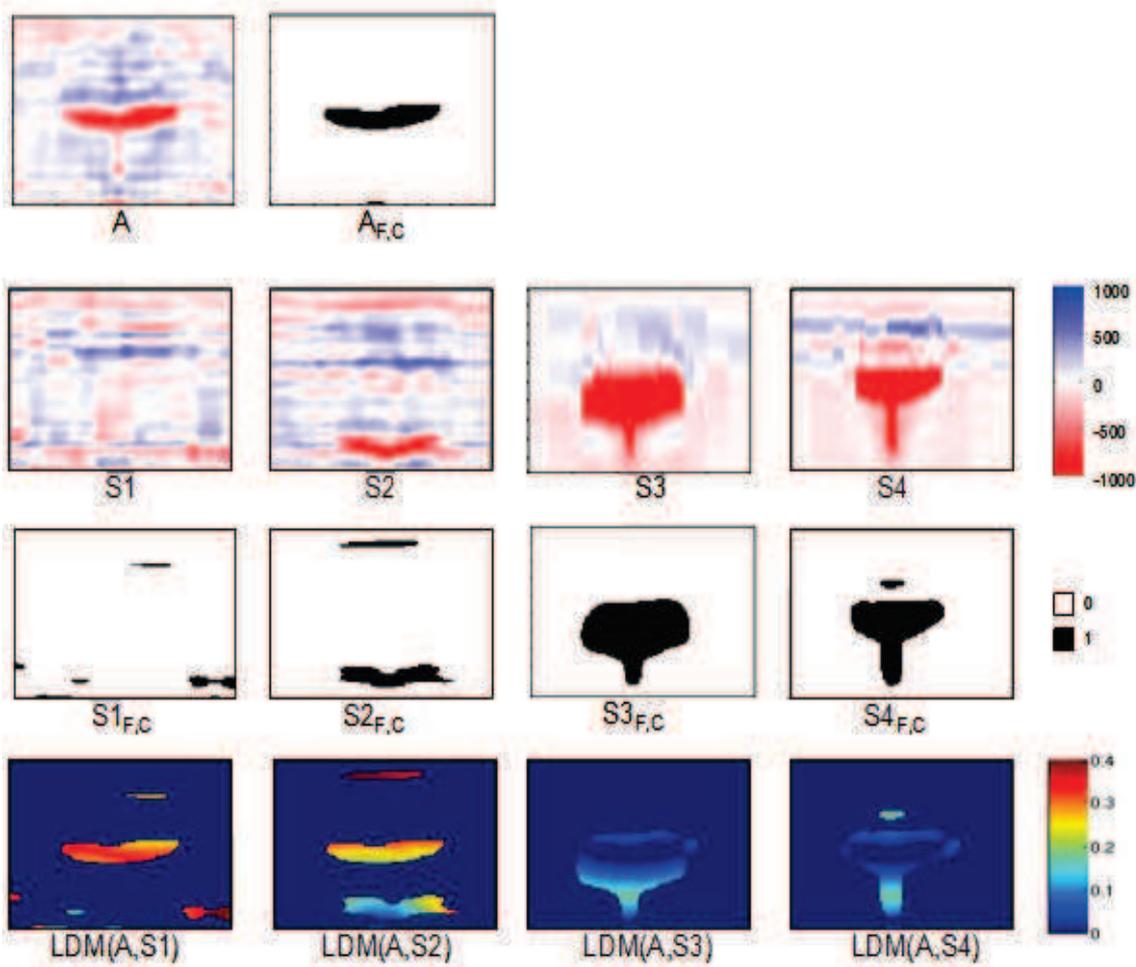


FIGURE 5.16 – Comparaison de quatre cartes de variations d'impédances sismiques P (en  $g.cm^{-3}.m.s^{-2}$ ) ( $S1$  à  $S4$  – 2<sup>ème</sup> ligne) avec une carte de référence ( $A$  – 1<sup>ère</sup> à gauche) par la fonction objectif SCDL. Illustration des résultats de segmentation ( $A_{F,C}$  – 1<sup>ère</sup> ligne à droite - et  $S1_{F,C}$  à  $S4_{F,C}$  - 3<sup>ème</sup> ligne) et les CDL (4<sup>ème</sup> ligne) : entre  $A$  et  $S1$  (1<sup>ème</sup> colonne),  $A$  et  $S2$  (2<sup>ème</sup> colonne),  $A$  et  $S3$  (3<sup>ème</sup> colonne) et  $A$  et  $S4$  (4<sup>ème</sup> colonne).

3.  $S3$  : un grand volume de vapeur est injecté, la taille de la chambre de vapeur est plus importante que celle de la référence.
4.  $S4$  : la bonne quantité de vapeur est injectée : la taille et la forme de la chambre de vapeur sont très proches de celles de la référence.

En considérant la façon dont ces cartes sont construites, on peut affirmer que  $S1$  et  $S2$  sont les plus éloignées des données sismiques de référence  $A$ .  $S3$  et  $S4$  sont les plus proches de la référence.

Appliquons à présent la SCDL entre la carte de référence  $A$  et les quatre autres cartes. Nous commençons donc par simplifier chacune des images en deux classes, par la méthode du  $k$ -means. Les résultats de cette classification pour  $S1$ ,  $S2$ ,  $S3$  et  $S4$  sont donnés sur la troisième ligne de la figure 5.16. La segmentation de  $A$  est présentée par la seconde image de la première ligne de la figure 5.16. Remarquons tout d'abord que la chambre de vapeur est extraite dans chacune

### 5.3 Application sur un cas réaliste

des images. En effet, la chambre de vapeur correspond aux variations très négatives et il est facile de les séparer du fond. Sur chaque classification elle est représentée en noir. Enfin, les CDL sont calculées entre la référence classifiée et chaque carte classifiée. Elles sont représentées sur la troisième ligne de la figure 5.16. En allant de  $S1$  à  $S4$  la CDL indique une différence au niveau de l'image de moins en moins importante. Il y a très peu de dissimilarités pour  $S3$  et  $S4$ , la CDL est presque partout nulle. Calculons maintenant la *fonction objectif* entre la référence et chacune des quatre cartes en sommant les CDL avec la norme  $L^2$ . Les résultats sont reportés dans la figure 5.19. On constate que la *fonction objectif* est grande pour  $S1$  et  $S2$  et elle est plus petite pour  $S3$  et  $S4$ . L'optimiseur considèrera donc que les cartes  $S3$  et  $S4$  sont plus proches de la référence  $A$  que  $S1$  et  $S2$ . Le comportement de la SCDL est donc très satisfaisant sur cet exemple illustratif.

Pour aller plus loin, on peut aussi comparer ces résultats à ceux donnés par la formulation classique moindres-carrés. On représente pour chacune des cartes la *fonction objectif* calculée avec la SCDL et avec les moindres-carrés sur la figure 5.19. La formulation utilisant les moindres-carrés indique une similitude des cartes dans l'ordre inverse de celui espéré et de celui trouvé par la SCDL. Par exemple, la formulation moindres-carrés identifie la carte  $S1$  comme la carte la plus proche de la référence, ce qui n'est pas naturel car il n'y a aucun développement de chambre de vapeur sur  $S1$ . Une fois de plus, la SCDL réussit à les classer dans l'ordre espéré.

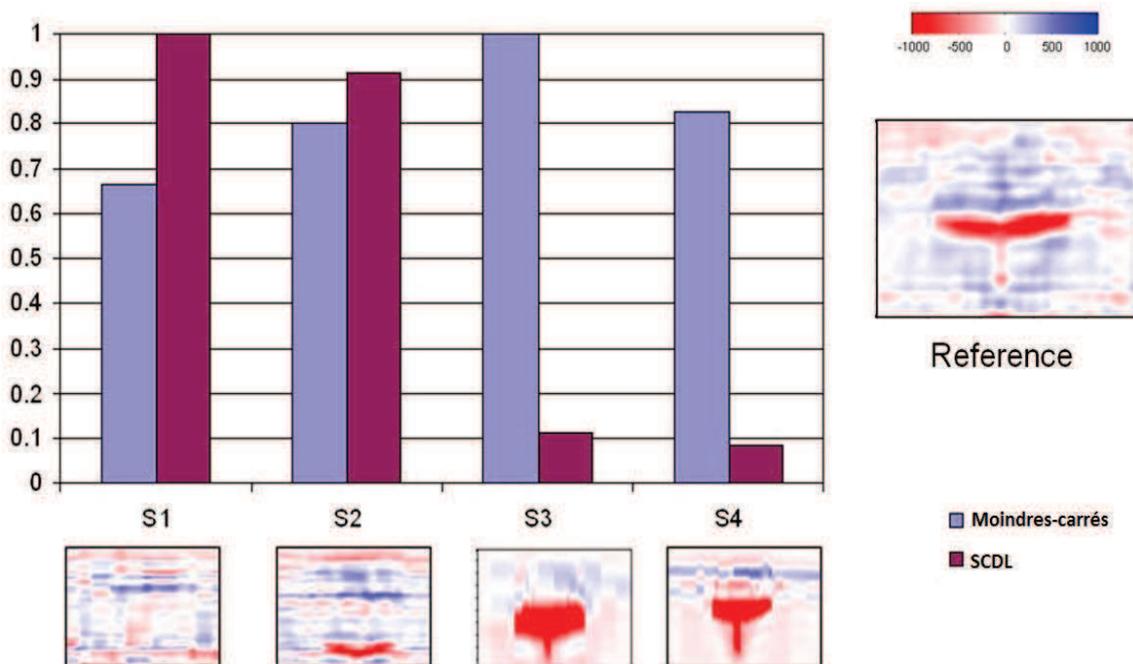


FIGURE 5.17 – Comparaison de la *fonction objectif* calculée avec les moindres-carrés et la SCDL pour  $S1$ ,  $S2$ ,  $S3$  et  $S4$ . La SCDL est représentée en rose (LDM), la *fonction objectif* pour les moindres-carrés est représentée en violet (LSQ). Les valeurs sont normalisées par la valeur maximale pour chaque formulation.

A présent, il est intéressant d'étudier le comportement de la SCDL durant le processus de calage de ce réservoir. Les paramètres d'optimisation sont la perméabilité horizontale notée  $K_h$ ,

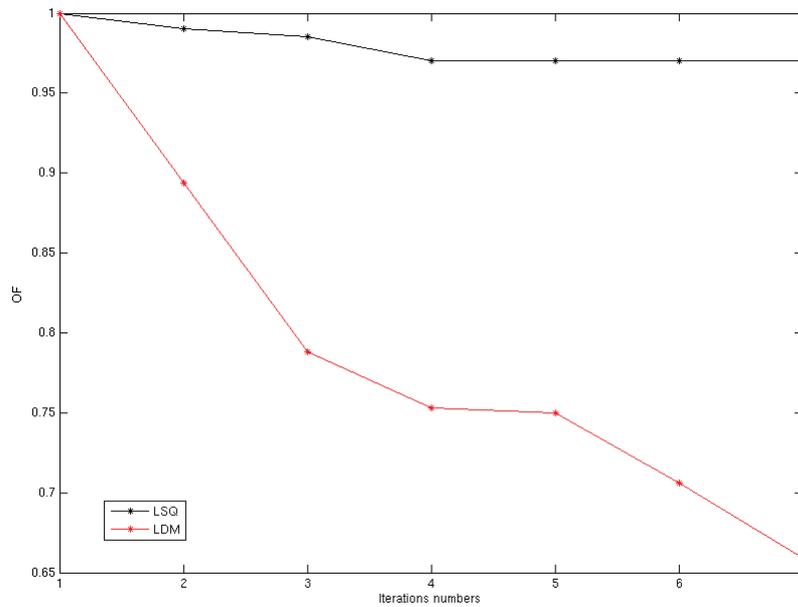


FIGURE 5.18 – Évolution de la *fonction objectif* en fonction du nombre de simulations. Formulation moindres-carrés en noir. SCDL en rouge.

le quotient de la perméabilité verticale sur la perméabilité horizontale noté  $Kv/Kh$ , la longueur de corrélation verticale et les proportions locales de faciès sur l'unité 3 (zones le long des puits). La figure 5.19 représente l'évolution de la *fonction objectif* au cours du calage. Le graphique de gauche représente l'évolution de la *fonction objectif* avec la formulation moindres-carrés et celui de droite représente l'évolution de la *fonction objectif* basée sur la SCDL. Alors que la *fonction objectif* avec la formulation classique diminue très peu durant le processus de calage (diminution de 3 %), la SCDL décroît au cours des simulations jusqu'à réduire la valeur initiale de 30%. La figure 5.19 illustre le modèle optimal obtenu avec chaque formulation sur trois coupes verticales du réservoir. La première colonne de la figure 5.18 présente les variations d'impédances optimales pour les moindres-carrés, la deuxième les variations d'impédances de référence et la troisième les variations d'impédances simulées par le modèle optimal obtenu par la SCDL. On remarque que pour les trois sections présentées, le résultat optimal obtenu par la SCDL est très proche de la référence.

Sur cet exemple réaliste, la nouvelle formulation proposée améliore considérablement les résultats obtenus par rapport à la formulation classique. En effet, non seulement la *fonction objectif* diminue significativement lors du processus de calage d'historique, mais le modèle optimal obtenu produit des données sismiques simulées considérablement plus proches des données de référence.

## 5.4 Application de l'extention de la SCDL

Dans cette section, nous proposons d'étudier le comportement de la SCDL dans le cas de données classifiées en trois ensembles. On s'intéresse à un modèle de réservoir synthé-

## 5.4 Application de l'extention de la SCDL

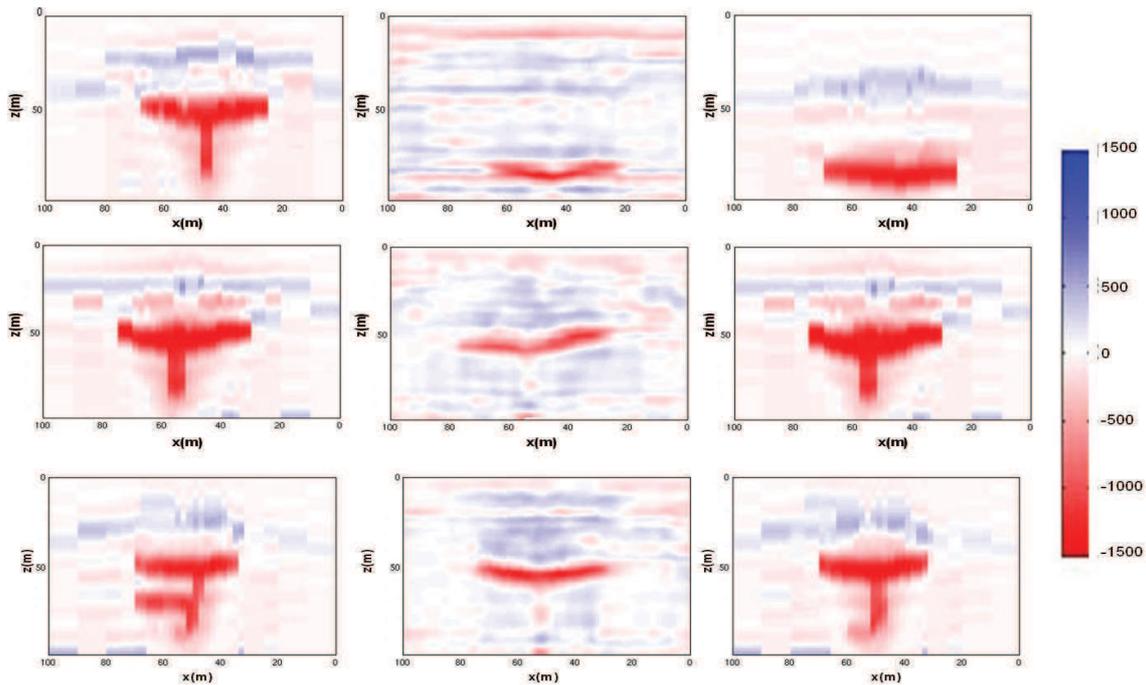


FIGURE 5.19 – Réponses optimales obtenues en 3 sections du réservoir. 1<sup>ère</sup> colonne : cartes sismiques simulées par le modèle optimal obtenu avec les moindres-carrés. 2<sup>ème</sup> colonne : cartes sismiques de référence. 3<sup>ème</sup> colonne : cartes sismiques simulées par le modèle optimal obtenu avec la SCDL. En  $g.cm^{-3}.m.s^{-2}$ .

tique dérivé d'un modèle classique : le PUNQ-S3 (Production forecasting with UNcertainty Quantification). Le modèle PUNQ-S3 est fortement inspiré d'un champ réel de Brent en mer du Nord exploité par Elf. Il a été développé dans le but de devenir une référence pour tester de nouvelles méthodes d'inversion ou d'optimisation. De plus amples détails concernant la construction de ce modèle sont fournis par le site web du Norwegian Computing Centre <http://www.fault-analysis-group.ucd.ie/Projects/PUNQ.html>. Le réservoir décrit par la figure 5.20 est entouré par un aquifère au nord-ouest et il est délimité par une faille au sud-est. Une poche de gaz est située au sommet de la structure en forme de dôme. Les modifications du modèle étudiée ici par rapport au modèle classique PUNQ-S3 sont présentés dans la thèse de [55]. Le modèle géologique est composé de cinq unités indépendantes dont trois unités (unités 1, 3 and 5) ayant de bonnes qualités pétro-physiques (*i.e.* contenant une roche poreuse et perméable). Initialement, six puits producteurs sont localisés autour de la poche de gaz. Aucun puits injecteur n'a été installé en raison de la présence de l'aquifère. Les données dynamiques ont été collectées durant 18 années et se composent de la pression, des débits d'huile et des données de sismiques 4D durant trois temps notés  $t_0$ ,  $t_1$  et  $t_2$ . On choisit 20 paramètres pour l'ensemble du modèle qui sont constitués de la moyenne de porosité, la perméabilité horizontale et la perméabilité verticale de chaque unité. Un cas de référence est construit en imposant des valeurs à chaque paramètre et en collectant les données dynamiques de référence simulées par ce modèle.

A partir de maintenant les paramètres sont supposés inconnus. L'objectif est alors d'ajuster

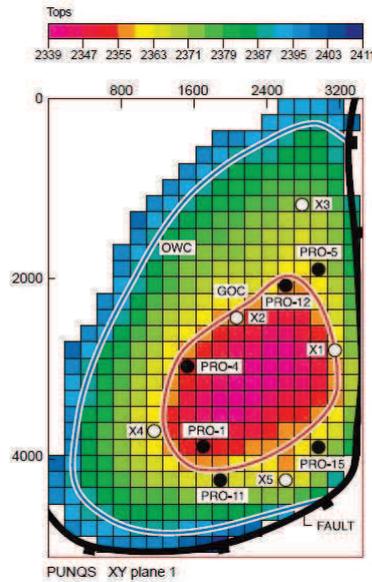


FIGURE 5.20 – Description du cas PUNQ-S3

les valeurs des paramètres afin que le modèle reproduise les données dynamiques de référence. Le calage commence sur un modèle initial. Les formulations moindres-carrés et SCDL vont être comparées durant le calage d'historique. Dans cet exemple nous appliquons l'extension de la SCDL donnée à la section 4.3.2 du chapitre 4. Dans les deux cas la méthode d'optimisation permettant de réduire la *fonction objectif* est une méthode de quasi-Newton.

En fin de simulation, on compare les modèles optimaux fournis par les deux formulations. Plus précisément, nous comparons les variations d'impédances  $P$  aux temps  $t_2$  et  $t_3$  données par les deux modèles. La figure 5.21 montre une section 2D horizontale des variations d'impédances aux temps  $t_2$  et  $t_3$  obtenue par le modèle initial (en haut à gauche), par le modèle de référence (en haut à droite), par le modèle optimal en utilisant les moindres-carrés (en bas à gauche) et par le modèle optimal en utilisant la SCDL (en bas à droite). Les cartes générées par le modèle moindres-carrés sont pratiquement identiques à celles du modèle initial. Ce qui signifie que cette formulation n'a pas réussi à faire varier les paramètres de façon à se rapprocher des cartes de référence. A l'opposé, la formulation SCDL a permis de faire varier les paramètres et d'obtenir des hétérogénéités semblables aux cartes de référence.

Dans un second temps, on s'intéresse à l'évolution des *fonctions objectif* durant le calage d'historique. La figure 5.4 donne l'évolution des deux formulations durant l'optimisation. Après 5 itérations de la méthode d'optimisation la formulation moindres-carrés diminue de 40% alors que la formulation SCDL diminue de 55%. De plus, en s'intéressant à l'évolution des *fonctions objectif* pour chaque terme donnée à droite sur la figure 5.4, on remarque que la formulation SCDL est capable de décroître de 90% l'erreur sur les variations d'impédances aux temps  $t_2$  et  $t_3$ . La décroissance de la *fonction objectif* avec la formulation moindres-carrés pour les mêmes termes est d'environ 10%.

Cet exemple illustre de façon significative que la formulation SCDL de la *fonction objectif* est plus apte à retrouver les données sismiques 4D dans la procédure de calage d'historique. De

## 5.4 Application de l'extention de la SCDL

plus, elle a l'avantage supplémentaire de décroître plus rapidement, ce qui permet d'économiser un temps de calcul conséquent.

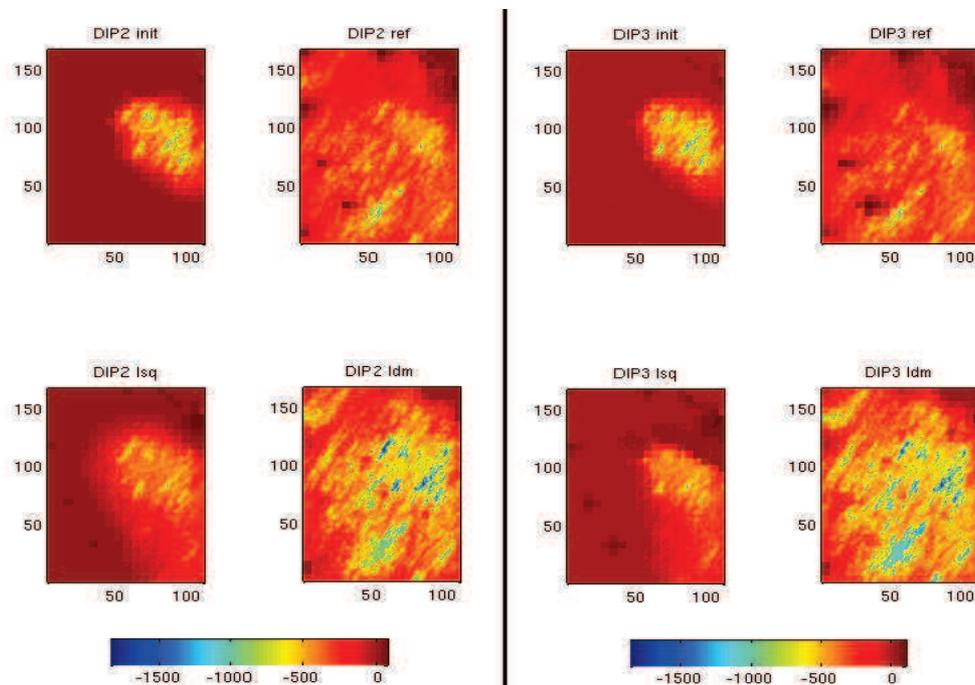


FIGURE 5.21 – Comparaison des modèles optimaux obtenus avec les moindres-carrés et la SCDL. Gauche : variations d'impédances (DIP2) au temps  $t_2$ . Droite : variations d'impédances (DIP3) au temps  $t_3$ . Carte initiale (en haut à gauche), carte de référence (en haut à droite), modèle optimal obtenu avec les moindres-carrés (en bas à gauche) et modèle optimal obtenu avec la SCDL (en bas à droite).

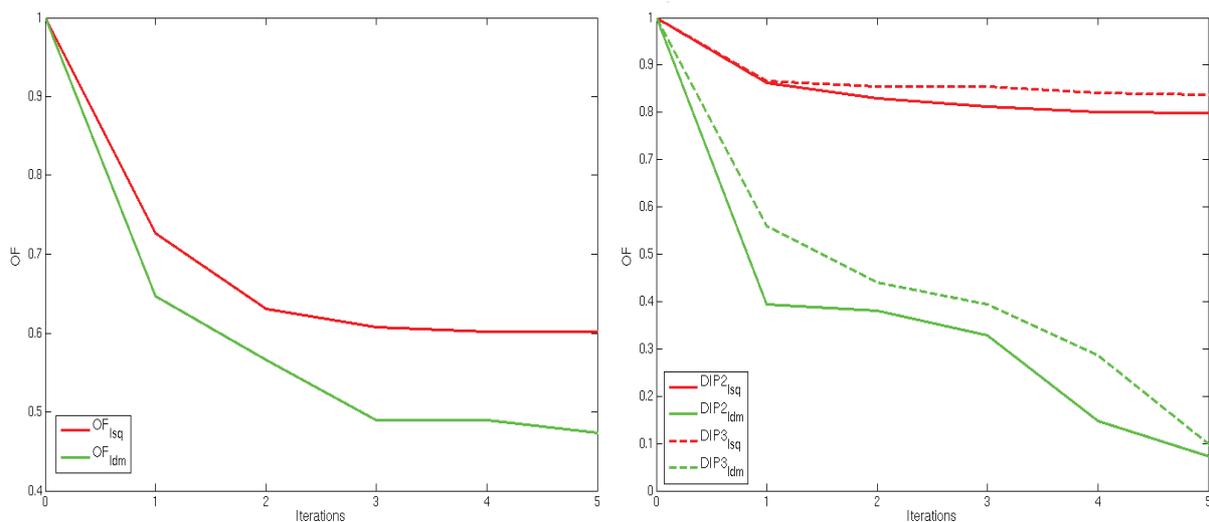


FIGURE 5.22 – Evolution des *fonctions objectif* pour les variations d'impédances globales (à gauche) et par terme pour les variations d'impédances aux temps  $t_2$  et  $t_3$  (à droite).



---

## Conclusion de la première partie

---

Afin de caler convenablement les données sismiques dans le processus de calage d'historique, nous avons vu qu'il est nécessaire de définir une nouvelle formulation de la *fonction objectif* qui soit adaptée à ce type de données. Sur plusieurs exemples, nous avons démontré que la formulation classique des moindres-carrés ne fournit pas une mesure pertinente pour comparer des cubes sismiques. Cela nous conduit donc dans ce travail à proposer une nouvelle méthodologie innovante qui consiste en trois étapes : la simplification des données sismiques, la comparaison des données simplifiées et le calcul d'un scalaire représentant la valeur de la *fonction objectif*. La simplification permet d'épurer les données par application d'une méthode de débruitage et de diminuer le nombre important des données sismiques par des méthodes de segmentation. Cette étape est capable de mettre en évidence les objets présents dans les cubes sismiques de façon pertinente et quasi-automatique. Dans un second temps, la comparaison des données permet de déterminer si deux ensembles de données simplifiées sont proches, au sens d'une mesure qui prend en compte des considérations spatiales. Enfin, cette comparaison est au centre du calcul de la valeur de la *fonction objectif*, qui oriente la procédure d'optimisation dans la boucle de calage d'historique. Durant la première partie de la thèse, nous avons implémenté et testé toutes ces étapes de manière intensive.

Concernant la phase de simplification des données, nous avons choisi une procédure en deux temps : la première étape fait appel à un algorithme de filtrage pour débruiter les données de référence et gommer les détails peu pertinents. Après plusieurs études, la méthode de débruitage qui donne les meilleurs résultats est le filtre NL-means. La seconde étape consiste à segmenter les données filtrées, dans le but d'identifier les objets et structures prépondérants dans les images. Deux approches ont été évaluées ici : la classification statistique et la segmentation variationnelle.

Pour l'approche par classification statistique, nous avons considéré l'algorithme du  $k$ -means. Dans tous les exemples étudiés ici, nous l'avons appliqué aux impédances  $P$ . Il serait intéressant d'améliorer cette étape en considérant plusieurs attributs pour la classification, notamment les impédances  $S$ , ou toute fonction combinant ces deux types d'information. En effet, il est fréquent que des objets ne soient pas discernables si l'on considère uniquement les impédances  $P$ , alors que les impédances  $S$  permettent de les discriminer.

Concernant la segmentation variationnelle, plusieurs méthodes basées sur la fonctionnelle de Mumford-Shah ont été analysées. Les modèles établis par Vese et al ([33], [128]) et Chung et Vese [35] permettent de détourner les contours des objets présents dans une image avec une forte présence de bruit qui ne permet pas de distinguer la frontière entre l'objet et le fond. Ces algorithmes utilisent des fonctions level set pour résoudre une modélisation du problème de segmentation basé sur le calcul de moyenne à l'intérieur et à l'extérieur d'un ou plusieurs niveaux de la fonction level set. Cette résolution permet de trouver une fonction constante par morceaux qui approche le mieux l'image à segmenter. Par exemple, les travaux de Vese et Chan [33] proposent d'approcher l'image à segmenter par une fonction ne prenant que deux valeurs, ce qui permet ainsi de définir deux régions distinctes. L'application de cet algorithme aux données sismiques, comme les impédances acoustiques  $P$ , donne des résultats satisfaisants si les régions à détecter sont juste composées d'un seul fort contraste d'impédances. Dans le cas de la sismique répétée, il peut cependant être intéressant d'essayer de détecter plus de deux régions, par exemple les zones où les variations d'impédances sont négatives, nulles et positives. Deux extensions du modèle précédent proposées par Vese et al [128] et Chung et Vese [35] permettent une segmentation en trois classes. D'après les tests effectués sur deux jeux de données de sismique répétée, il peut arriver que l'algorithme de Vese et Chan, qui utilise plusieurs fonctions level-set, sur-segmente l'image. La comparaison de l'approche par classification statistique et la segmentation variationnelle montre par ailleurs que les deux techniques sont comparables en termes de régions segmentées. Si la classification statistique a l'avantage d'être très peu coûteuse en temps de calcul, la segmentation variationnelle prend en compte des considérations spatiales lors de la segmentation. De plus, elle fournit également des grandeurs spécifiques à l'image segmentée, telles que la longueur des contours ou l'aire des régions. Ce sont des informations qui pourraient être extrêmement utiles pour des améliorations supplémentaires sur la nouvelle *fonction objectif*. En effet, il serait par exemple envisageable d'inclure des distances mesurant l'écart entre les périmètres ou les aires des régions détectées dans les images sismiques de référence et celles simulées par le modèle réservoir.

Enfin, il est nécessaire de construire une mesure pertinente pour comparer les données sismiques après segmentation. Dans ce travail, nous proposons d'utiliser la carte de dissimilarités locales proposée par Baudrier [9]. C'est une distance qui permet de construire une carte dont les valeurs en chaque point est grande si localement les deux images à comparer sont très différentes, et qui est nulle si localement les deux images sont identiques. Il est possible d'appliquer cette méthode pour des images binaires, c'est-à-dire qu'elle est limitée aux cas où seules deux régions ont été identifiées lors de la segmentation. Comme nous l'avons déjà mentionné, il est intéressant de pouvoir travailler avec plusieurs régions dans le cas de la sismique répétée. Par conséquent, nous avons considéré une approche qui généralise la carte de dissimilarités locales pour des images en niveaux de gris. Ce type d'approche est très satisfaisante dans les cas d'application traités.

Dans la suite du manuscrit, nous envisageons d'améliorer encore notre définition de *fonction objectif*, pour développer une méthode robuste dans le plus grand nombre de cas de calage possibles. La première piste d'amélioration concerne l'étape de comparaison des données. Nous proposons pour cela deux nouveaux modèles de recalage d'images.

## Segmentation d'images et discrétisation

Rappelons l'équation d'Euler-Lagrange à discrétiser :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta_\epsilon(\phi) [\mu \operatorname{div}(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}) - \nu - \lambda_1(u_0 - c_1)^2 + \lambda_2(u_0 - c_2)^2] = 0 & \text{dans } (0, \infty) \times \Omega \\ \phi(0, x, y) = \phi_0(x, y) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\delta_\epsilon(\phi)}{|\nabla \phi|} \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} & \text{dans } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.7)$$

où  $\vec{n}$  est la normale extérieure à la frontière  $\partial\Omega$ . Pour discrétiser l'équation différentielle, on utilise un schéma implicite aux différences finies. Soit  $h$  le pas d'espace,  $\Delta t$  le pas de temps et  $(x_i, y_j) = (ih, jh)$  pour  $0 \leq i, j \leq M$ . Soit  $\phi_{i,j}^n$  une approximation de la valeur de la fonction level set  $\phi$  au pixel  $(i, j)$  à l'itération  $n$ . Les différences finies sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta_-^x \phi_{i,j} &= \phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}, & \Delta_+^x \phi_{i,j} &= \phi_{i+1,j} - \phi_{i,j} \\ \Delta_-^y \phi_{i,j} &= \phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}, & \Delta_+^y \phi_{i,j} &= \phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}. \end{aligned}$$

Pour la direction du temps, on va utiliser l'approximation par différences finies suivante :

$$\frac{\delta \phi}{\delta t} \approx \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\Delta t}.$$

L'équation aux dérivées partielles linéaire discrétisée est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\Delta t} = \delta_h(\phi_{i,j}^n) \left[ \frac{\mu}{h^2} \Delta_x \cdot \left( \frac{\Delta_x^+ \phi_{i,j}^{n+1}}{\sqrt{(\Delta_x^+ \phi_{i,j}^2)/(h^2) + (\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n)/(2h)^2}} \right) \right. \\ \left. + \frac{\mu}{h^2} \Delta_y \cdot \left( \frac{\Delta_y^+ \phi_{i,j}^{n+1}}{\sqrt{(\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n)^2/(2h)^2 + (\Delta_y^+ \phi_{i,j}^2)/(h^2)}} \right) \right. \\ \left. - \nu - \lambda_1(u_{0,i,j} - c_1(\phi^n))^2 + \lambda(u_{0,i,j} - c_2(\phi^n))^2 \right]. \end{aligned}$$

Nous devons discrétiser des équations du type :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = m(\phi) \nabla \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) + F(u)$$

où  $F$  est une fonction des  $c_i$  et de l'image de départ  $u_0$ . La difficulté vient de la discrétisation du terme de courbure  $\nabla \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right)$ . On peut décomposer la courbure en deux directions :

$$\nabla \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{|\nabla \phi|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\frac{\partial \phi}{\partial y}}{|\nabla \phi|}.$$

On pose alors :

$$(D_x(\phi))_{i,j} = \frac{(\Delta_x^+ \phi)_{i,j}}{\sqrt{(\Delta_x^+ \phi)_{i,j}^2 + \left( \frac{(\Delta_y^+)_{i,j} + (\Delta_y^-)_{i,j}}{2} \right)^2}} \approx \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{|\nabla \phi|}.$$

Cela revient à décentrer la contribution en  $x$  et à centrer celle en  $y$ . Le paramètre  $\epsilon_0$  est un paramètre machine qui permet de ne pas diviser par zéro. Finalement, on discrétise alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{|\nabla \phi|} \approx (\Delta_x^+(D_x(\phi)))_{i,j}.$$

La contribution en  $y$  étant symétrique à celle en  $x$ , on a donc :

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\frac{\partial \phi}{\partial y}}{|\nabla \phi|} \approx (\Delta_y^+(D_y(\phi)))_{i,j}$$

avec

$$(D_y(\phi))_{i,j} = \frac{(\Delta_y^+ \phi)_{i,j}}{\sqrt{(\Delta_y^+ \phi)_{i,j}^2 + \left( \frac{(\Delta_x^+)_{i,j} + (\Delta_x^-)_{i,j}}{2} \right)^2}} \approx \frac{\frac{\partial \phi}{\partial y}}{|\nabla \phi|}.$$

En développant ces expressions on obtient :

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{i,j} = \frac{1}{h^2} m(\phi_{i,j}) (C_1 \phi_{i+1,j} + C_2 \phi_{i-1,j} + C_3 \phi_{i,j+1} + C_4 \phi_{i,j-1} + (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) \phi_{i,j}) + (F(u))_{i,j}$$

## 5.4 Application de l'extention de la SCDL

---

où les  $(C_i)$  sont ceux donnés par (Chan et Vese [128]) :

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{h}\right)^2 + \left(\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2h}\right)^2 + \epsilon_0}}, \quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{h}\right)^2 + \left(\frac{\phi_{i-1,j+1} - \phi_{i-1,j-1}}{2h}\right)^2 + \epsilon_0}}$$

$$C_3 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2h}\right)^2 + \left(\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{h}\right)^2 + \epsilon_0}}, \quad C_4 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\phi_{i+1,j-1} - \phi_{i,j}}{2h}\right)^2 + \left(\frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{h}\right)^2 + \epsilon_0}}.$$

Reste la discrétisation en temps d'une équation de type :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{i,j} = (L(\phi))_{i,j}.$$

On a utilisé un schéma semi-explicite (plus stable et moins oscillant que le schéma explicite) :

$$\frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\Delta t} = m(\phi_{i,j}^n)(C_1 \phi_{i+1,j}^n + C_2 \phi_{i-1,j}^n + C_3 \phi_{i,j+1}^n + C_4 \phi_{i,j}^n + (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) \phi_{i,j}^{n+1}) + (F(u))_{i,j}$$

où  $C_i = C_i(\phi^n)$

$$C = \frac{\Delta t}{h^2} m(\phi_{i,j}^n)(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)$$

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{C} (\phi_{i,j}^n + m(\phi_{i+1,j}^n)(C_1 \phi_{i+1,j}^n + C_2 \phi_{i-1,j}^n + C_3 \phi_{i,j+1}^n + C_4 \phi_{i,j}^n + (F(u))_{i,j})).$$



## PARTIE II

# Recalage d'images fondé sur l'élasticité non linéaire



---

## Introduction à la registration

---

Le problème de recalage d'images consiste à établir point par point la correspondance entre deux images. Il est souvent défini comme une technique utilisée pour mettre en correspondance ou pour aligner des données prises à des temps différents, pour fusionner plusieurs modalités d'imagerie ou pour comparer une image à une base de données. Étant données deux images, il s'agit de trouver une transformation appelée **déformation** qui transforme la première image de manière à ce qu'elle soit la plus "proche" (dans un sens à définir) de la seconde image.

Comme souligné par Modersitzki [95], il existe deux types de méthodes de recalage : les **méthodes de recalage paramétriques** et les **méthodes de recalage non paramétriques**. Les méthodes non paramétriques, contrairement aux méthodes paramétriques, ne restreignent pas la transformation à un ensemble paramétrable (de dimension finie et généralement petite). Le problème peut, dans ce cas, être formulé comme une minimisation de fonctionnelle où l'inconnue est le champ de déformation  $\varphi$ . Dans ce manuscrit, nous nous intéresserons plus particulièrement aux méthodes non paramétriques.

Soit  $T$  l'image dite **Template** que l'on cherche à déformer et  $R$  l'image **Reference**. En général, la fonctionnelle à minimiser est composée de deux termes principaux. Le premier terme, appelé mesure de similarité ou terme d'attache aux données, mesure la distance entre l'image déformée  $T \circ \varphi$  et l'image *Reference*  $R$ . Pour que le problème soit bien posé, un second terme contrôlant la régularité de la déformation  $\varphi$  est ajouté. Dans de nombreux cas, la connaissance d'informations supplémentaires fait apparaître un troisième terme dit de contrainte. Dans ce cas, on parlera de recalage contraint. Chacun de ces termes va permettre de guider la transformation lors du processus de recalage.

En reprenant la classification des méthodes de recalage d'images initiée par Brown [25], les questions à se poser pour définir une méthode de recalage appropriée sont les suivantes :

- Quelle est l'information que l'on souhaite recalculer ?

- Comment évaluer la similarité entre les images ?
- Comment l'image va être déformée ? Existe-t-il un a priori sur le type de déformation entre les deux images ?
- Comment évaluer la meilleure transformation ?

Ces questions mènent aux quatre critères suivants définis dans la littérature [25] pour caractériser une méthode de recalage :

1. Les **attributs** à considérer pour le recalage (l'ensemble des pixels, les contours des objets présents, des points, lignes, aires ou volumes spécifiques ...).
2. Le **critère de similarité** appelé également terme d'attache aux données quantifiant la ressemblance entre l'image *Template* déformée  $T \circ \varphi$  et l'image *Reference*  $R$ .
3. Le **modèle de déformation** qui définit l'espace dans lequel va évoluer la déformation  $\varphi$ .
4. La **méthode d'optimisation** permettant de déterminer la meilleure transformation dans le domaine de déformation, soit en sélectionnant les paramètres optimaux dans le cas du recalage paramétrique, soit en minimisant une certaine énergie dans le cas non paramétrique.

Avant de développer ces critères et de présenter un état de l'art des méthodes existantes, nous allons présenter quelques notions et généralités nécessaires à la compréhension du problème de recalage.

### Différentes modalités d'imagerie

En imagerie médicale, la modalité d'une image est le plus souvent liée à l'appareil utilisé pour l'acquisition. Ces différentes technologies permettent d'avoir accès à des informations de natures très différentes. On distingue quatre types d'appareils les plus souvent utilisés : le scanner, l'échographie, l'IRM (Imagerie par Résonance Magnétique) et le TEP (Tomographie par émission de positrons). Les radios et le scanner-X utilisent les rayons X. Ils permettent de visualiser la structure osseuse. L'échographie utilise quant à elle des ultrasons qui se réfléchissent sur les différents tissus. Une image est reconstituée à partir des échos des ondes émises. Elle ne peut être utilisée en imagerie cérébrale en raison de la structure osseuse recouvrant le cerveau. L'IRM, qui est plus récente, baigne le sujet dans un champ magnétique très puissant pour orienter les atomes d'hydrogène. L'appareil envoie ensuite à des intervalles brefs et réguliers des signaux à basses fréquences perturbant l'orientation des atomes. En revenant à leur position initiale, les atomes d'hydrogène émettent des signaux électromagnétiques différents suivant leurs propriétés et leur voisinage. Ce sont ces signaux qui permettront de construire l'image. Cette technique d'imagerie permet d'imager avec une grande précision les tissus et les organes mous, mais ne donne aucune information fonctionnelle comme par exemple le débit sanguin. La tomographie par émission de positrons TEP est réalisée par scintigraphie obtenue à l'aide d'un traceur faiblement radioactif. Ce traceur se fixe sur les cellules anormales (cancéreuses) qui consomment plus d'énergie que les cellules saines et les rend ainsi visibles par un traitement informatique.

Pour un panel plus exhaustif et une description plus détaillée des différentes méthodes d'acquisition, on renvoie le lecteur à [116].

---

Aux différentes modalités d'imagerie s'ajoutent **les atlas** qui peuvent être considérés comme une modalité d'imagerie particulière. En effet, les *atlas* sont des images rendant compte de la variété anatomique d'une population donnée. De tels *atlas* sont généralement construits à partir d'une base de données. La moyenne des intensités des images est le moyen le plus simple de construire un *atlas*. Des techniques statistiques plus évoluées permettant la construction d'*atlas* plus pertinents ont été développées [46], [17]. Une nouvelle acquisition est comparée à l'*atlas* dans le but par exemple de détecter une malformation ou une maladie.

Ainsi, le recalage mono-modal permet de suivre l'évolution d'une lésion chez un même patient ou de mettre en correspondance des images de différents patients pour créer un *atlas* de référence. Le recalage multimodal, quant à lui, permet de fusionner des images de modalités différentes dans le but d'identifier des structures anatomiques complexes qui ne sont pas clairement visibles sur l'image.

## Les attributs

Après avoir identifié la nature du recalage à réaliser (mono-modal ou multimodal), il est nécessaire de déterminer l'information utilisée pour effectuer le recalage. Cette étape préliminaire consiste alors à choisir l'information pertinente à extraire qui sera utilisée pour le recalage. Trois grandes approches existent dans la littérature : l'approche géométrique, l'approche iconique et l'approche hybride.

Les **approches géométriques** consistent à extraire à partir des images à recaler des primitives géométriques qui sont constituées de couples de points homologues [19]. Les primitives géométriques peuvent correspondre à des points (voir par exemple [18], [112]), des contours (voir [45]) ou des surfaces (voir par exemple [122], [120]). Ce type de recalage nécessite donc deux étapes : l'extraction des primitives géométriques par exemple par des techniques de segmentation, puis le calcul de la déformation superposant au mieux ces primitives.

Les **approches iconiques** contrairement aux approches géométriques ne nécessitent pas de traitement préalable de l'image. Elles considèrent l'ensemble de l'information contenue dans les images, sans traitement d'extraction préalable. Les attributs sont extraits des niveaux de gris des images. L'appariement peut se faire en comparant directement l'intensité des pixels ou en comparant des valeurs associées aux pixels (comme par exemple des gradients).

Les **approches hybrides ou mixtes** combinent les approches géométriques et iconiques (voir [68], [28]).

Quels que soient les attributs choisis pour le recalage, il est toujours nécessaire d'avoir une version continue des images dans le but de comparer les attributs homologues. On aura alors recours à l'interpolation des données qui est, comme nous le verrons dans la suite, une étape à effectuer sur l'image déformée  $T \circ \varphi$  après chaque itération de l'algorithme de recalage.

## Interpolation ou approximation des images

Le recalage est souvent un processus itératif en raison des algorithmes d'optimisation utilisés. À chaque itération, l'image *Template*  $T$  est transformée en  $T \circ \varphi$ . Chaque pixel  $p$  de l'image *Template*  $T$  sous l'action de la déformation  $\varphi$  subit un déplacement de vecteur  $u(p) = \varphi(p) - p$  vers une nouvelle position qui n'est pas nécessairement entière.

Pour comparer les valeurs de  $T \circ \varphi$  à l'image *Reference*  $R$ , nous avons besoin de reconstruire la grille cartésienne de  $T \circ \varphi$ . Dans ce but, on aura recours à des techniques d'interpolation ou d'approximation des données qui fournissent une version continue de l'image. Les valeurs des points de la grille régulière seront déduites à partir de la version continue de l'image. Parmi les nombreuses méthodes d'interpolation existantes, les plus utilisées en recalage d'images médicales sont l'interpolation linéaire et l'interpolation par splines et par B-splines cubiques [95]; Lehmann et al. [86] présentent un état de l'art et une comparaison des méthodes d'interpolation et d'approximation.

L'interpolation linéaire interpole simplement les données grâce à des fonctions affines par morceaux. Ce type d'interpolation très simpliste crée de nombreux artefacts dans l'image interpolée. En imagerie médicale, l'interpolation polynomiale par morceaux appelée interpolation par splines s'est rapidement imposée par son efficacité. Elle consiste à interpoler les données par des fonctions polynomiales par morceaux appelées splines. Elle permet d'utiliser des polynômes de plus petit degré et de réduire le phénomène d'oscillation (phénomène de Runge) rencontré dans l'interpolation polynomiale classique qui interpole l'ensemble des données par un polynôme. On parlera de splines linéaires lorsque les polynômes sont de degré 1, de splines quadratiques pour des polynômes de degré 2 et de splines cubiques pour des polynômes de degré 3. Les B-splines sont une combinaison linéaire de splines. Lehmann et al. [87] présentent une étude comparative des différentes méthodes d'interpolation et montrent les bonnes performances des B-splines en terme de temps de calcul et de qualité de l'interpolation obtenue. Ainsi l'interpolation par B-splines cubiques s'est rapidement imposée, tant dans le domaine médical que dans l'interpolation des structures en conception assistée par ordinateur (CAO).

Pour la partie numérique des modèles présentés dans les chapitres 8 et 9, nous utilisons une approximation de l'image par B-splines cubiques avec un schéma multi-échelles présenté dans [95], Chapitre 3, section 3.6.1. Nous allons introduire ce modèle en dimension 1. Le problème d'interpolation peut s'écrire comme problème de minimisation sous contraintes où l'objet à minimiser est l'intégrale de la dérivée seconde au carré d'une combinaison linéaire de splines. On cherche alors à réécrire les données dans une base de fonctions splines. On cherche en particulier à minimiser la norme  $L^2$  de la dérivée seconde de la fonction interpolante afin que celle-ci oscille le moins possible [95]. En dimension 1, le problème est le suivant :

$$\min_{c_k} \left\{ \int_{\Omega} (f''(x))^2 \middle/ \quad f(x) = \sum_{k=0}^N c_k b(x-k), \quad f(x_i) = data(i) \quad \forall i \in \Omega \right\}, \quad (6.1)$$

où  $b$  est une spline de base. On prend par exemple la spline cubique suivante [95] :

$$b(x) = \begin{cases} (x+2)^3 & -2 \leq x \leq -1, \\ -x^3 - 2(x+1)^3 + 6(x+1) & -1 \leq x < 0, \\ x^3 + 2(x-1)^3 - 6(x-1)^3 & 0 \leq x < 1, \\ (2-x)^3 & 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.2)$$

En pratique, les données à interpoler sont entachées de bruit, dans ce cas une stricte interpolation des données n'est pas indispensable. Une solution intermédiaire consiste à interpoler des données en atténuant le bruit présent. L'idée est alors de remplacer l'interpolation stricte induite par le problème (6.1) par un problème dit relaxé en introduisant un paramètre  $\theta$  qui pondère l'interpolation et l'atténuation du bruit :

$$\min_{c_k} \left\{ \|f - data\|_{\mathbb{R}^N} + \theta \int_{\Omega} f'' dx \right\}, \quad (6.3)$$

où  $f$  est une spline de la forme  $f(x) = \sum_{k=0}^N c_k b(x-k)$ . En dimension 1, l'interpolation d'un élément ne nécessite le calcul que de 4 coefficients.

Pour des images en dimensions deux, l'interpolation bicubique est utilisée. L'interpolation d'un élément passe par le calcul de 16 coefficients. La formulation matricielle du problème permet de simplifier les écritures. Pour d'avantage de détails, on renvoie le lecteur à l'ouvrage [95], Chapitre 3, section 3.6.1.

La suite de ce chapitre s'articule en trois parties. D'abord, nous présenterons une liste non-exhaustive des différents termes d'attache aux données utilisés en recalage. Ensuite, nous discuterons des différents termes de régularisation existants et nous nous intéresserons plus particulièrement aux problèmes impliquant de larges déformations. Enfin, nous aborderons les différentes méthodes d'optimisation pour résoudre ce problème.

## 6.1 Mesure de similarité

La mesure de similarité, appelée également terme d'attache aux données, permet de quantifier la similarité entre l'image *Template* déformée  $T \circ \varphi$  et l'image *Reference*  $R$ . Elle est caractérisée par une valeur minimale ou maximale dès lors que la ressemblance entre deux images est forte. Nous allons présenter les distances les plus communément utilisées afin d'évaluer la similarité des images dans le cadre d'une approche iconique ou pour comparer les primitives géométriques dans le cadre d'une approche géométrique.

### Norme $L^2$

La norme  $L^2$  (ou *SSD* pour Sum of Squared Distance) ou fonction de similarité quadratique est la somme des erreurs pixel par pixel. Elle est calculée via la formule suivante :

$$SSD(R, T \circ \varphi) = \int_{\Omega} (R(x) - T \circ \varphi(x))^2 dx,$$

où  $R$  et  $T \circ \varphi$  sont respectivement l'image de *Reference* et l'image *Template* déformée,  $\Omega$  l'ensemble des pixels de la configuration de référence. C'est la plus simple des distances, car elle est facile à implémenter et peu coûteuse en temps de calcul. Ce critère de similarité, bien qu'il ait l'inconvénient d'être très sensible aux valeurs aberrantes, est le plus utilisé pour évaluer la ressemblance entre deux images de mêmes modalités.

### Coefficient de corrélation linéaire

En pratique, même dans le cas mono-modal, les valeurs de l'image dépendent de l'instrument de mesure. Il est dans ce cas nécessaire de remettre à l'échelle les intensités des deux images par une relation affine. Le coefficient de corrélation linéaire mesure l'existence d'une relation affine entre les données. Ce critère peut être formulé de la façon suivante :

$$\sigma^2(R, T \circ \varphi) = \frac{\text{cov}(R, T \circ \varphi)}{\text{var}(R)\text{var}(T \circ \varphi)},$$

où  $\text{var}$  est la variance et  $\text{cov}$  la covariance. Ce critère compris entre -1 et 1 permet d'évaluer la corrélation des données. En d'autres termes, elle évalue l'existence ou non d'une relation linéaire entre les données. Un coefficient de corrélation nul signifie que les deux images constituent des réalisations aléatoires non corrélées. Il s'agit au cours du recalage de maximiser ce terme. Ce critère de similarité a également l'inconvénient d'être sensible aux valeurs aberrantes. Dans [71], les auteurs proposent une version plus robuste.

### Relation fonctionnelle

Lorsqu'il s'agit de recalage multimodal, la SSD et les critères de corrélation linéaire ne quantifient pas convenablement les différences entre les deux images. Des critères utilisant des relations fonctionnelles ont été développés. Parmi ces critères, on citera le critère de Woods [132] appliqué aux images IRM et TEP et le rapport de corrélation introduit dans le cadre du recalage par Roche ([110] et [109]).

Le critère de Wood est l'une des premières mesures de similarité proposées dans le traitement des images multimodales. Il est défini par :

$$W(R, T \circ \varphi) = \frac{1}{N} \sum_i N_i \frac{\sigma_i}{m_i} \tag{6.4}$$

avec  $N_i = \text{card } \Omega_i$ ,  $\Omega_i = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = i\}$ ,  $\sigma_i^2 = \frac{1}{N_i} \sum_{\omega \in \Omega_i} Y(\omega)^2 - m_i^2$  et  $m_i = \frac{1}{N_i} \sum_{\omega \in \Omega_i} Y(\omega)$  et  $X = R$  et  $Y = T \circ \varphi$ . Cette mesure de similarité est minimale pour deux images ayant une grande ressemblance.

Le rapport de corrélation similaire est une mesure de similarité semblable au critère de Woods. Il est défini par :

$$1 - \nu(X|Y) = \frac{1}{N\sigma^2} \sum_i N_i \sigma_i^2.$$

## 6.1 Mesure de similarité

---

Le rapport de corrélation généralise le coefficient de corrélation lorsqu'il existe une relation fonctionnelle entre les intensités des deux images. Ces deux mesures ont l'inconvénient d'être asymétriques.

### Information mutuelle

Une autre mesure de similarité provenant de la théorie de l'information est couramment utilisée dans le cadre du recalage multimodal (Wells III et al. [131], Collignon et al. [40], Kim et al. [72]). On renvoie le lecteur intéressé à l'état de l'art sur les méthodes de recalage utilisant l'information mutuelle établi dans [107].

En traitement d'images, l'information mutuelle sera utilisée comme une mesure de similarité à maximiser. Cette mesure est apparue peu de temps après l'introduction par Collignon et Viola des histogrammes conjoints dans le domaine du recalage d'images multimodales puisque le calcul de cette mesure de similarité ne fait intervenir que des probabilités conjointes d'apparition des niveaux de gris dans les images à mettre en correspondance. L'information mutuelle s'affranchit d'une connaissance a priori sur les intensités de l'image et ne suppose pas de relation affine ou fonctionnelle entre les images. De fait, l'information mutuelle peut être adaptée au cas du recalage d'images multimodales.

Pour définir l'information mutuelle, nous aurons besoin de rappeler l'entropie d'une variable aléatoire discrète. En supposant qu'une réalisation  $x_i$  a une probabilité  $p_i$  d'apparaître, l'entropie  $H$  du signal  $X$  est définie par :

$$H(s) = \sum_{i=1}^N f(p_i),$$

où la fonction  $f$  possède un certain nombre de propriétés. L'entropie d'un signal est une mesure de son caractère aléatoire.

La définition de l'entropie la plus populaire est celle de Shannon :

$$H(X) = -\mathbb{E}[\log P(X = x_i)] = -\sum_i P(X = x_i) \log P(X = x_i).$$

Considérant l'image comme une source stationnaire de pixels, l'entropie se mesure donc à partir du seul histogramme de l'amplitude. En d'autres termes, si un signal ne privilégie aucune valeur par rapport à une autre, alors il aura une entropie maximale. En terme d'histogramme, cela se traduit par un histogramme relativement plat.

Si on dispose de deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$ , on définit de façon analogue la quantité  $H(X, Y)$  appelée entropie conjointe :

$$H(X, Y) = -\sum_i P(X = x_i, Y = y_i) \log P(X = x_i, Y = y_i).$$

L'information mutuelle est alors définie comme la réduction d'entropie apportée par la connais-

sance de leurs apparitions communes. Différentes définitions de l'information mutuelle ont été établies dans la littérature. Deux d'entre elles sont souvent utilisées en recalage d'image. La première est fondée sur l'entropie de Shannon :

$$I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y).$$

L'information mutuelle peut aussi être exprimée par la divergence de Kullback-Leiber qui mesure la similarité entre deux densités de probabilité. Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires alors la divergence de Kullback-Leiber entre  $X$  et  $Y$  est définie par

$$D_{KL}(P(x)||P(y)) = \sum_x P_X(x) \log \frac{P_X(x)}{P_Y(x)}.$$

La divergence de Kullback n'est pas symétrique, ce n'est par conséquent pas une mesure. Dans ce cas, l'information mutuelle est donnée par :

$$I(X, Y) = D_{KL}(P(X, Y)||P(X)P(Y)),$$

où  $P(X, Y) = P(X = x, Y = y)$  est l'entropie jointe de  $X$  et  $Y$ . L'information mutuelle mesure la quantité d'information moyenne apportée par une réalisation de  $X$  sur la probabilité de réalisation de  $Y$ . En imagerie médicale, cette mesure est reconnue comme la plus adaptée pour le recalage d'images n'ayant pas la même modalité. Le principal inconvénient de l'information mutuelle est sa complexité en terme de coût de calcul. Cette complexité vient du fait que dans les méthodes de recalage globales, le calcul se fait sur toute l'image et l'information mutuelle nécessite d'évaluer des probabilités conjointes pour chaque niveau de gris. Pour réduire ce temps de calcul, plusieurs méthodes ont été utilisées. Par exemple Viola and Wells III [129] utilisent des fenêtres de Parzen. Un autre inconvénient de l'information mutuelle est sa non convexité et le nombre important de ses minima locaux. Malgré ces défauts, l'information mutuelle reste la référence pour le recalage multimodal.

### Critère de similarité fondé sur le champ du gradient

Haber et Modersitzki [60] proposent un critère fondé sur le champ de gradients des images. Cette approche est motivée par l'idée que les structures de l'image sont portées par les changements d'intensité. Lors du recalage, la similarité entre l'image *Template* déformée  $T \circ \varphi$  et l'image *Reference* est évaluée de la façon suivante :

$$\mathcal{D}(R, T \circ \varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|n_{\epsilon}(R, x) \times n_{\epsilon}(T \circ \varphi(x))\|^2 dx,$$

avec  $n_{\epsilon}(I, x) = \frac{\nabla I(x)}{\|\nabla I(x)\|_{\epsilon}}$  vecteur gradient normalisé,  $\|\nabla I(x)\|_{\epsilon} = \sqrt{\nabla I(x)^T \nabla I(x) + \epsilon^2}$  et  $\epsilon$  une constante strictement positive. Les auteurs comparent ce critère avec l'information mutuelle dans le cadre du recalage paramétrique et montrent des résultats quasi-similaires.

### Critère de similarité fondé sur les lignes de niveau

Droske et Rumpf [48] ont proposé un critère de similarité fondé sur la morphologie des images. Celui-ci consiste à comparer les lignes de niveau des niveaux de gris de l'image. La morphologie  $M[I]$  d'une image  $I$  est définie comme l'ensemble de ses lignes de niveau :

$$M[I] := \{ \mathcal{M}_c^I | c \in \mathbb{R} \},$$

où  $\mathcal{M}_c^I$  est le niveau de gris relatifs à la valeur  $c$ . La morphologie d'une image est donc invariante par une reparamétrisation des niveaux de gris.

La morphologie d'une image peut être définie, de manière équivalente, par le champ des vecteurs normaux  $N_I$  sur  $\mathcal{M}_c^I$ . Ainsi la morphologie d'une image  $I$  peut être déduite de la carte Gaussienne (Gauss map) définie par :

$$\begin{aligned} N_I: \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ x &\mapsto \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Deux images  $I_1$  et  $I_2$  sont alors dites morphologiquement équivalentes si  $M[I_1] = M[I_2]$ . Les lignes de niveau n'étant pas toujours définies, les travaux de Caselles et al. [31] permettent de caractériser la morphologie d'une image par ses hypographes qui sont définis par  $\{ \{x | I(x) \geq \lambda\} | \lambda \in \mathbb{R} \}$ . En recalage morphologique, on recherche à déformer l'image *Template*  $T$  par une déformation  $\varphi$  telle que

$$M[T \circ \varphi] = M[R],$$

où  $R$  est l'image *Reference*. On remarque que ce terme ne change pas si on effectue une reparamétrisation du niveau de gris. Cette propriété le rend adapté au recalage multimodal.

### Bilan sur le terme d'attache aux données

La mesure de similarité quantifiant la ressemblance entre deux images est un critère important dans le processus de recalage. Son choix dépend des relations existant entre les images à recaler (linéaires, fonctionnelles), du type de recalage souhaité (mono-modal ou multimodal) et de son temps calcul. Pour cette dernière raison, en pratique, la SSD est souvent préférée, car elle est rapide et simple à implémenter. C'est le choix que nous avons fait dans les modèles proposés aux chapitres 8 et 9.

## 6.2 Modèles de déformation

Le modèle de déformation ou régularisateur permet de contrôler la déformation  $\varphi$  en définissant un espace fonctionnel dans lequel évoluer. Comme souligné par Fischer et Modersitzki [52], le régularisateur dépend des propriétés requises pour le champ de déformations et est relatif à la

physique du matériau considéré. En général, les modèles de déformation sont classifiés en deux grandes familles :

1. Les modèles de **déformations paramétrables** effectuent une transformation globale de l'image. La déformation évolue dans ce cas dans un ensemble paramétrable défini via un nombre fini de paramètres. Le problème est alors exprimé comme une minimisation de fonctionnelle par rapport aux paramètres du modèle. On parlera de transformation rigide lorsque l'image sous l'action de la déformation ne subit que des rotations et des translations. Dans ce cas, il y a 6 paramètres à faire varier pour caler les deux images en trois dimensions. Le cas des transformations affines quant à lui, nécessite plus de paramètres de déformation.
2. Les modèles de **déformations élastiques** ou déformables considèrent un espace de déformations non paramétrable. Bajcsy et al. [7] introduisent l'idée de considérer des déformations dans des ensembles non paramétriques pour obtenir des distorsions locales et complexes. Dans ce cas, les déformations obtenues sont plus complexes. Le problème est alors formulé comme la minimisation d'une certaine fonctionnelle où l'inconnue est le vecteur déplacement ou la déformation.

La figure 6.1 présente trois exemples de déformation. L'image considérée (à gauche) est issue d'un *atlas* de cerveaux de souris fourni par le Center for Computational Biology <http://qb3.berkeley.edu/ccb>. La seconde image est le résultat d'une transformation affine, la troisième image est le résultat d'une transformation rigide incluant une translation et une rotation. Ces deux techniques sont appropriées au cas du recalage d'images issues du même patient et sans apparition de pathologie, mais avec des appareils de mesure différents ou à des temps différents. L'image de droite est obtenue en utilisant un modèle élastique. Celui-ci est adapté dans le cas d'un recalage d'images issues de patients différents ou dans le cas d'un recalage d'images issues d'un *atlas*. Lorsqu'il s'agit du même patient, ce modèle permet de suivre l'évolution d'une pathologie.

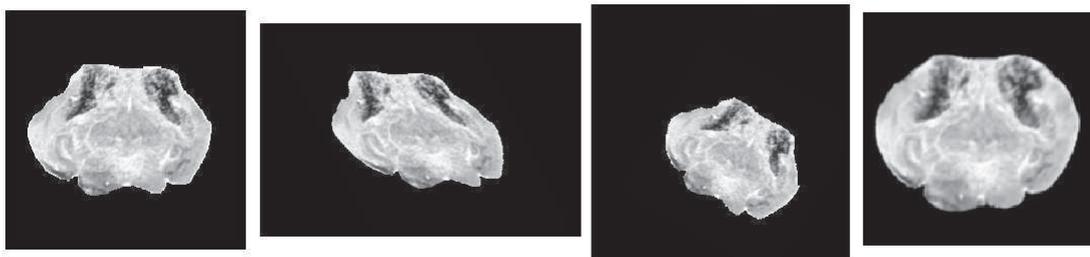


FIGURE 6.1 – Exemples de déformations. De gauche à droite : Image *Reference*, transformation affine, rotation et translation, déformation élastique.

La préservation de la topologie est une propriété importante en recalage d'images. En effet, il n'est pas souhaitable que la structure se déchire. Pour cela, les techniques introduites en recalage d'images tendent à garantir la bijectivité de la transformation en imposant que le déterminant de la matrice jacobienne de la déformation reste proche de 1. Physiquement, celui-ci peut s'interpréter comme la variation locale de volume introduite par la déformation. Si la valeur du déterminant de la matrice jacobienne est inférieure à 1, le volume local est compressé. Si cette

## 6.2 Modèles de déformation

---

valeur est supérieure à 1, le volume local est dilaté.

Les modèles proposés dans les chapitres 8 et 9 utilisent des déformations élastiques. Pour cette raison, dans cet état de l'art, nous nous focaliserons sur cette catégorie de déformation. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [94] pour un état de l'art plus exhaustif incluant les méthodes paramétriques.

### 6.2.1 Modèles élastiques linéaires

Le premier cas de recalage élastique a été introduit en 1981 par Broit [24] puis développé dans Bajcsy et Broit [6] et par Bajcsy et Kovačič [7]. Les objets présents dans les images sont considérés comme des instances du même matériau élastique avant et après avoir été soumis à une déformation dont le comportement est régi par les équations de Navier. Le terme de régularisation  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(u)$  est le potentiel élastique linéarisé du vecteur déplacement  $u = \varphi - Id$ . Son expression prend en compte les propriétés du matériau en intégrant ses coefficients de Lamé  $\mu$  et  $\lambda$  et elle est donnée par :

$$\mathcal{S}(u) = \int_{\Omega} \frac{\mu}{4} \sum_{j,k=1}^n (\partial_{x_j} u_k + \partial_{x_k} u_j)^2 + \frac{\lambda}{2} (\operatorname{div} u)^2 dx, \quad (6.6)$$

où  $n$  est la dimension de l'espace considéré.

L'étape de linéarisation implique deux inconvénients majeurs. Le premier est la perte de la préservation de topologie et le second est la restriction du modèle aux petites déformations.

### 6.2.2 Modèles fluides

Dans le but d'obtenir de larges déformations, Christensen et al. [34] proposent un modèle de fluides visqueux sous une forme non variationnelle. Le principe de ce modèle consiste à appréhender l'image non plus comme un matériau élastique en manipulant le champ vecteurs déplacement, mais comme un fluide en manipulant le champ de vitesse. La relation reliant la vitesse et le déplacement durant une période  $t$ , permet de passer d'une approche lagrangienne ne considérant que le champ de vecteurs déplacement  $u$  à une approche eulérienne ne considérant que le champ de vecteurs de vitesse  $v$  :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{du}{dt}, \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=0}^3 v_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

où  $u$  et  $v$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Le comportement du fluide est régi par les équations de Navier-Stokes :

$$[\mu \nabla^2 v(x, y, z) + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla v(x, y, z)) + F(x, y, z) = 0, \quad (6.8)$$

où les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé associés à la viscosité du fluide considéré.

La force  $F$  tend à mettre en correspondance les deux images  $R$  et  $T$  au sens d'une mesure de similarité. Plus précisément, le problème revient à minimiser le potentiel élastique linéarisé de la vitesse du champ vecteurs de déplacement. Avec le temps,  $u = \varphi + Id$  devient stationnaire et de larges déformations sont théoriquement possibles.

Numériquement, le champ de forces de l'image est calculé à l'instant  $t$  en adoptant un point de vue bayésien de la déformation. Pour un champ de forces  $F$  fixé, les équations aux dérivées partielles linéaires satisfaites par la vitesse sont résolues au moyen d'un schéma de relaxations successives (SOR). Un schéma d'Euler explicite est utilisé pour faire varier le vecteur déplacement en fonction du temps. Un inconvénient de ce modèle est le temps de calcul qui peut aller jusqu'à plusieurs heures. De plus cette méthode ne garantit pas la préservation de la topologie et autorise le déterminant de la matrice jacobienne de la déformation à être négatif.

Parmi les nombreuses recherches menées pour réduire le temps de calcul, on peut citer le recalage par démons proposé par Thirion [121].

### Modèles de diffusion

Thirion [121] propose de voir le recalage non rigide comme un processus de diffusion qui est un cas particulier des méthodes de flot optique utilisées en traitement d'image pour évaluer le mouvement. Il introduit de nouvelles entités appelée démons qui sont en fait des effecteurs poussant localement l'image. L'image 6.2 illustre l'action des démons. Ces travaux s'inspirent de la résolution par Maxwell du paradoxe de Gibbs en thermodynamique. Les contours des objets présents dans l'image sont appréhendés comme des membranes semi-perméables pouvant se mouvoir sous l'action de démons. Cet algorithme montre des résultats très satisfaisants avec des temps de calcul réduits et il permet d'avoir de larges déformations. Cependant, le comportement de cet algorithme n'est pas encore bien compris (voir [51] et [106] pour plus de détails).

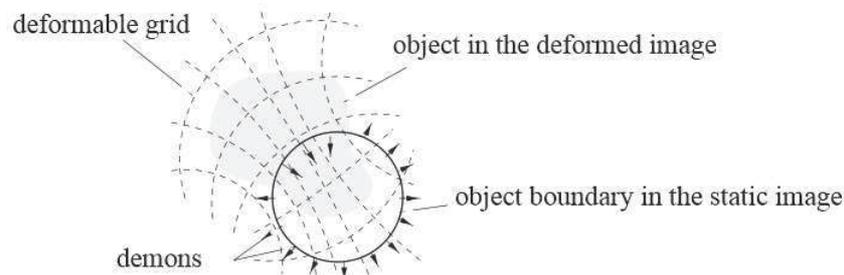


FIGURE 6.2 – Modèle de diffusion : l'image déformée considérée comme une grille déformable est diffusée à travers les contours des objets de l'image *Reference*  $R$  par l'action d'effecteurs appelés démons qui sont localisés dans ces interfaces. Figure issue de [121].

C'est principalement pour cette raison que Fischer et Modersitzki [51] introduisent un nouveau modèle de diffusion. Le terme de régularisation considéré est la semi-norme sur l'espace de Sobolev  $\mathcal{H}^1(\Omega)$  du vecteur déplacement  $u = (u_1, \dots, u_n)^T$  :

## 6.2 Modèles de déformation

---

$$\mathcal{S}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \|\nabla u_i\|^2 dx, \quad (6.9)$$

où  $n$  est la dimension de l'espace considéré,  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . Les auteurs motivent leur choix par des considérations liées aux propriétés de régularisation permettant de minimiser les oscillations de toutes les composantes du vecteur déplacement.

Les mêmes auteurs proposent ensuite dans [52] un modèle fondé sur la courbure

$$\mathcal{S}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (\Delta u_i)^2 dx. \quad (6.10)$$

Tel que mentionné par les auteurs dans [52],  $\Delta u_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  peut être vu comme une approximation de la courbure. Ainsi le problème se réduit à minimiser la courbure ainsi définie des lignes de niveau de chaque composante de  $u$ . On peut noter que pour ce modèle les transformations affines appartiennent au noyau de  $\mathcal{S}(u)$  ce qui n'est pas le cas pour les déformations élastiques, de diffusion ou de fluide visqueux.

On cite également la LDDMM (Large Deformation Diffeomorphic Metric Mapping) introduit dans [11] et [92] où les auteurs proposent un modèle sous forme variationnelle pouvant effectuer de larges déformations.

### 6.2.3 Modèles élastiques non linéaires

L'élasticité non linéaire est utilisée en mécanique pour modéliser des matériaux comme le caoutchouc. Ces matériaux autorisent de grandes déformations sous l'action de forces. Dans le cadre du recalage d'images, Lin et al. [89] ont développé un modèle de recalage fondé sur l'élasticité non linéaire. Le modèle de déformation est associé au matériau de Saint Venant-Kirchhoff qui est le plus simple des matériaux hyperélastiques, homogènes et isotropes (voir 7 pour les définitions de ces notions). Dans [89], les auteurs comparent le modèle de recalage proposé avec le modèle biharmonique de recalage minimisant la courbure du vecteur de déplacement  $u$  introduit dans [52]. Les deux modèles sont comparables dans le sens où ils réussissent tous deux à générer de grandes déformations. Ceci dit, Lin et al. [89] démontrent que dans le cas du recalage d'*atlas* de cerveaux de souris le modèle fondé sur l'élasticité non linéaire permet d'obtenir de meilleurs résultats dans le sens où la mesure de similarité est plus faible. De plus les auteurs incluent dans leurs modèles des informations supplémentaires constituées de points d'intérêt dont les homologues sur l'image *Template* déformée sont connus. Cette contrainte permet d'évaluer la qualité du recalage. En effet, une condition pour que le recalage soit de bonne qualité, est que la somme des distances entre les points d'intérêt dans l'image *Reference* et leurs homologues sur l'image *Template* déformée soit petite. Suivant ce critère supplémentaire d'évaluation, Lin et al. [89] obtiennent de meilleurs résultats avec le modèle basé sur l'énergie interne d'un matériau de Saint Venant-Kirchhoff.

### 6.2.4 Modèles conjoints de segmentation et de recalage

Dans cette section, nous nous intéressons à un cas particulier de l'approche géométrique du recalage qui consiste uniquement à recaler des primitives extraites des images. Plus particulièrement, nous nous intéressons aux modèles de segmentation et recalage simultanés.

Yezzi et al. [136] proposent une approche variationnelle de segmentation et de recalage conjoints. Les auteurs énoncent le problème de la façon suivante : Étant données deux images  $I: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\hat{I}: \hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  contenant un objet commun à segmenter et à recaler, trouver deux courbes fermées  $C$  et  $\hat{C}$  incluses respectivement dans  $\Omega$  et  $\hat{\Omega}$  détournant correctement les objets inclus respectivement dans  $C$  et  $\hat{C}$ , telles que  $\hat{C} = g(C)$  où  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un élément d'un groupe de dimension finie (par exemple le groupe des déplacements rigides). Ainsi il y a deux inconnues à déterminer : la courbe fermée  $C$  et l'application  $g$ . Les auteurs expriment le problème sous forme de minimisation de fonctionnelle. Plus précisément, en faisant usage du modèle de contours actifs proposé par Chan et Vese [33], les auteurs proposent de minimiser l'énergie suivante :

$$\begin{aligned} E(g, C) &= E_1(C) + E_2(g(C)), \\ &= \int_{C_{in}} (I - u)^2 dx + \int_{C_{out}} (I - v)^2 dx + \int_{\hat{C}_{in}} (\hat{I} - \hat{u})^2 dx + \int_{\hat{C}_{out}} (\hat{I} - \hat{v})^2 dx, \\ &= \int_{C_{in}} f_{in} dx + \int_{C_{out}} f_{out} dx + \int_{\hat{C}_{in}} \hat{f}_{in} dx + \int_{\hat{C}_{out}} \hat{f}_{out} dx, \end{aligned}$$

avec  $C_{in}$  et  $C_{out}$  les régions à l'intérieur et à l'extérieur de  $C$ ,  $u$  et  $v$  la moyenne des valeurs de  $I$  dans  $C_{in}$  et dans  $C_{out}$  et  $\hat{C}_{in}$  et  $\hat{C}_{out}$  les régions à l'intérieur et à l'extérieur de  $\hat{C}$ ,  $\hat{u}$  et  $\hat{v}$  la moyenne des valeurs de  $\hat{I}$  dans  $\hat{C}_{in}$  et dans  $\hat{C}_{out}$ . Comme  $\hat{C} = g(C)$ , cette énergie peut aussi s'écrire uniquement en fonction du domaine  $\Omega$  :

$$E(g, C) = \int_{C_{in}} (f_{in}(x) + \hat{f}_{in}(g(x))|g'(x)|) dx + \int_{C_{out}} (f_{out}(x) + \hat{f}_{out}(g(x))|g'(x)|) dx, \quad (6.11)$$

avec  $g'$  la matrice jacobienne de  $g$ . Ce modèle a été étendu aux ensembles des déformations non rigides dans [134], [130] et [125].

Vemuri et al. [126], [127] proposent un modèle de recalage et segmentation conjointe fondé sur un système d'équations différentielles couplées utilisant les lignes de niveaux de l'image déformable  $I$ . Le modèle proposé est basé sur la minimisation de l'énergie suivante inspirée du modèle de segmentation proposé par Chan et Vese [33] :

$$\begin{aligned}
 E(\phi, u^+, u^-, \mu, \mathcal{R}, \mathcal{T}) = & \alpha \int_{\Omega} |u^+ - I|^2 H(\phi) dx + \alpha \int_{\Omega} |u^- - I|^2 (1 - H(\phi)) dx, \\
 & + \beta \int_{\Omega} |\nabla u^+|^2 dx + \beta \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 (1 - H(\phi)) dx + \int_{\Omega} d^2(\mu \mathcal{R}x + \mathcal{T}) \delta(\phi) |\nabla \phi| dx,
 \end{aligned}
 \tag{6.12}$$

où  $I$  est l'image à segmenter,  $\phi$  la fonction level set inconnue,  $d$  est une fonction distance déduite de la segmentation précédente,  $\mu$  est un paramètre d'échelle et  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{T}$  sont respectivement une rotation et une translation. Cet algorithme permet d'obtenir de petites et de larges déformations et son coût de calcul est peu important.

Dans le cadre du recalage élastique non linéaire, Le Guyader et Vese [81] proposent un modèle de recalage et de segmentation simultanés. Les auteurs proposent de joindre le modèle de contours actifs sans bord de Chan et Vese [33] à un recalage d'images dont le terme de régularisation est fondé sur l'élasticité non linéaire. Les objets contenus dans les images sont appréhendés comme des matériaux de Ciarlet-Geymonat. Un problème de minimisation d'énergie est introduit. L'énergie à minimiser est décomposée en deux termes. Le premier terme est relatif à la segmentation et le second terme est issu du modèle de déformation choisi :

$$E(c_1, c_2, u, V) = E_d(c_1, c_2, u) + E_{reg}(u, V),
 \tag{6.13}$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont respectivement la moyenne à l'intérieur et à l'extérieur de la courbe dans  $T$ ,  $u = \varphi - Id$  est le vecteur déplacement.  $V$  est une variable auxiliaire introduite pour simplifier la résolution du problème de minimisation. L'introduction de cette variable  $V$  approximant la matrice jacobienne  $\nabla u$  permet un problème de minimisation contraint plus simple à résoudre que le problème initial. Cette technique de résolution sera développée, étudiée théoriquement et mise en œuvre dans les deux modèles proposés dans ce travail aux chapitres 8 et 9.

### 6.2.5 Modèles de recalage sous contraintes géométriques

Aux modèles de recalage jusqu'ici présentés se sont adjoints des modèles de recalage contraints par la connaissance d'informations supplémentaires. Dans le recalage d'images médicales, cette information est le plus souvent apportée par les praticiens expérimentés qui évaluent des correspondances de points entre les deux images. Johnson et al. [67] proposent un modèle de recalage sous contraintes. Les contraintes sont définies par des points d'intérêt dans l'image  $R$  homologues situés sur les deux images à recaler. Ce modèle est fondé sur un modèle de recalage biharmonique et un critère de similarité SSD. Sorzano et al. [118] proposent un modèle de recalage non linéaire contraint également par des points homologues situés sur les deux images. Le modèle de déformation est fondé sur les B-splines et le critère de similarité est la SSD.

Récemment, Lin et al. [89] ont introduit un modèle de recalage non linéaire fondé sur l'élasticité non linéaire. L'énergie à minimiser est composée de trois termes :

- un terme d'attache aux données SSD  $\int_{\Omega} (R(x) - T \circ \varphi(x))^2 dx$ ,
- un terme de régularisation fondé sur l'élasticité non linéaire  $\int_{\Omega} W(u) dx$ , où  $W$  est la densité d'énergie interne du matériau de Saint-Venant-Kirchhoff (plus de détails sur cette énergie sont donnés dans le chapitre 7),
- et un terme évaluant la correspondance entre les points d'intérêts de l'image *Reference*  $R$  et l'image *Template*  $T$ . Il correspond à la somme des distances géométriques entre chaque paire de points de correspondance.

Ce modèle permet d'obtenir de larges déformations. Cependant, pour maintenir le déterminant de la matrice jacobienne de la déformation  $\det \nabla \varphi$  positif, les auteurs utilisent une méthode numérique dite de "regridding" [34]. Après chaque itération de l'algorithme, si le déterminant de la matrice jacobienne de la déformation est inférieur à une valeur de tolérance positive, l'algorithme est réinitialisé à l'aide de l'itération précédente. Ceci suppose de garder en mémoire le résultat de l'itération précédente, ce qui allonge le temps de calcul. Dans le cadre du recalage contraint, les auteurs comparent le régularisateur introduit à un régularisateur biharmonique. Le régularisateur fondé sur l'élasticité non linéaire montre de meilleurs résultats de recalage.

Dans le chapitre 8, nous introduisons un nouveau modèle de recalage contraint inspiré du modèle proposé par Lin et al. [89]. Les objets présents dans l'image sont appréhendés comme des matériaux de type Ciarlet-Geymonat. Ces derniers ont des propriétés physiques et théoriques plus intéressantes que les matériaux de type Saint-Venant-Kirchhoff, nous permettant de justifier le caractère bien posé du modèle par des résultats d'existence, de convergence théorique et par des résultats théoriques portant sur la méthode de résolution.

## 6.3 Optimisation et schémas multirésolution

### 6.3.1 Méthodes d'optimisation

De manière générale, on peut considérer le problème d'optimisation introduit en recalage d'images formulé comme suit :

$$\min_{\varphi \in X} f(R, T \circ \varphi), \quad (6.14)$$

où  $\varphi$  est la déformation et  $X$  est l'ensemble des déformations admissibles. La fonctionnelle  $f$  est constituée de plusieurs termes : la mesure de similarité, le modèle de déformation et dans le cas de recalage contraint un terme modélisant les contraintes est ajouté. La fonction  $f$  n'est généralement pas convexe et elle est le plus souvent non linéaire. Dans le cadre du recalage paramétrique, la méthode d'optimisation a pour but de trouver la valeur des paramètres pour lesquels la fonctionnelle est minimale. Dans le cadre du recalage élastique, la méthode d'optimisation doit déterminer la déformation dans le domaine des déformations admissibles qui minimise la fonctionnelle  $f$ . Nous renvoyons le lecteur à la partie 2.2.2 pour un descriptif des méthodes d'optimisation utilisées pour déterminer les minima d'une fonctionnelle non linéaire.

### 6.3.2 Schéma multirésolution

Bien souvent, en imagerie médicale, les méthodes d'optimisation sont imbriquées dans un schéma multirésolution. Le principe d'un tel schéma est de résoudre le problème de recalage sur de faibles résolutions puis de propager le champ de vecteurs déplacement estimé à une image de plus haute résolution. L'intérêt de ce schéma est de réduire la sensibilité aux minima locaux. Un panel d'images de résolution de moins en moins fine appelé pyramide de résolution est construit à partir de l'image *Template* à déformer  $T$ . Le problème est alors résolu sur une faible résolution et le résultat obtenu permet d'initialiser la résolution du problème sur le niveau de résolution supérieur. Parmi les différentes méthodes permettant de construire la pyramide de résolution, les plus utilisées sont la décomposition en ondelettes et la décomposition par fonctions splines.

Pour la résolution des modèles que nous proposons aux chapitres 8 et 9, nous adoptons également un schéma multirésolution décrit dans [95], Chapitre 3, section 3.6.1.



Dans ce chapitre, nous présentons les outils mathématiques nécessaires à l'introduction et à la démonstration des résultats d'existence des deux modèles de recalage d'images proposés dans ce rapport. Dans un premier temps, nous ferons un rappel concernant les espaces fonctionnels et plus particulièrement les espaces de Sobolev. Ensuite, nous introduirons la théorie du calcul de variations. Enfin, dans une troisième partie, nous introduirons les matériaux élastiques et hyperélastiques ainsi que les propriétés qui les caractérisent.

## 7.1 Espaces $L^p$ et espaces de Sobolev

Soit  $E$  un espace topologique. Dans un premier temps, nous rappelons quelques généralités sur les espaces topologiques. Ensuite, nous introduirons les espaces  $L^p$  et les espaces de Sobolev. Les rappels de cette partie sont extraits de [23].

### 7.1.1 Généralités

#### Semi-continuité

On considère des fonctions  $\varphi$  définies sur un ensemble  $E$  et à valeurs dans  $] -\infty; +\infty]$ . On désigne par  $D(\varphi)$  le domaine de  $\varphi$  c'est à dire l'ensemble :

$$D(\varphi) = \{x \in E; \varphi(x) < +\infty\}.$$

L'épigraphe de  $\varphi$  est l'ensemble

$$\text{epi}\varphi = \{[x, \lambda] \in E \times \mathbb{R}; \varphi(x) \leq \lambda\} \quad (7.1)$$

**Définition 7.1.1 (Fonction semi-continue inférieurement (s.c.i.))**

Une fonction  $\varphi: E \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  est dite **semi-continue inférieurement (s.c.i.)** si pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  l'ensemble  $[\varphi \leq \lambda] = \{x \in E; \varphi(x) \leq \lambda\}$  est fermé.

Voici quelques propriétés des fonctions s.c.i. :

- (i) Si  $\varphi$  est s.c.i. alors  $\text{epi}\varphi$  est fermé dans  $E \times \mathbb{R}$  et réciproquement.
- (ii) Si  $\varphi$  est s.c.i. alors pour tout  $x \in E$  et pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un voisinage  $V$  de  $x$  tel que :

$$\varphi(y) \geq \varphi(x) - \epsilon \quad \forall y \in V;$$

et réciproquement. En particulier si  $\varphi$  est s.c.i. et si  $x_n \rightarrow x$  alors

$$\liminf \varphi(x_n) \geq \varphi(x).$$

- (iii) Si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont s.c.i. alors  $\varphi_1 + \varphi_2$  est s.c.i.
- (iv) Si  $(\varphi_i)_{i \in I}$  est une famille de fonctions s.c.i. alors l'enveloppe supérieure des  $(\varphi_i)$  est s.c.i. c'est-à-dire que la fonction  $\varphi$  définie par

$$\varphi(x) = \sup_{i \in I} \varphi_i(x)$$

est s.c.i.

- (v) Si  $E$  est compact et si  $\varphi$  est s.c.i. alors  $\varphi$  atteint sa borne inférieure sur  $E$ .

**Topologie**

Soit  $E$  un espace de Banach et  $f \in E'$ . On désigne par  $\varphi_f: E \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$ . Lorsque  $f$  décrit  $E'$  on obtient une famille  $(\varphi_f)_{f \in E'}$  d'applications de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ . Rappelons qu'une topologie sur un ensemble  $E$  est une famille de parties de  $E$  que l'on définit comme des ouverts et vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. l'ensemble vide et l'ensemble  $E$  lui-même font partie des ouverts,
2. toute réunion d'ouverts est un ouvert,
3. toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Une topologie est d'autant plus fine qu'elle contient plus d'ouverts. Des exemples extrêmes sont la topologie grossière (la moins fine), pour laquelle seuls  $\emptyset$  et  $E$  sont des ouverts, la topologie discrète (la plus fine), pour laquelle toutes les parties de  $E$  sont des ouverts. Un exemple moins trivial de topologie est celle engendrée par les boules ouvertes dans un espace métrique : les ouverts sont alors tous les ensembles obtenus comme réunions quelconques d'intersections finies de boules ouvertes. En particulier dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et engendrent la même topologie. On dit qu'une topologie est séparée si pour tout couple de points distincts  $x_1$  et  $x_2$ , il existe des ouverts disjoints  $O_1$  et  $O_2$  tels que  $x_1$  est dans  $O_1$  et  $x_2$  est dans  $O_2$ <sup>1</sup>.

---

1. Une topologie d'espace métrique est toujours séparée (il suffit de prendre pour les ouverts  $O_1$  et  $O_2$  des boules ouvertes de rayon strictement inférieur à la moitié de la distance entre  $x_1$  et  $x_2$ ).

## 7.1 Espaces $L^p$ et espaces de Sobolev

---

### Définition 7.1.2 (Topologie faible $\sigma(E, E')$ )

La topologie faible  $\sigma(E, E')$  sur  $E$  est la topologie la moins fine sur  $E$  rendant continues toutes les applications  $(\varphi_f)_{f \in E'}$ .

### Proposition 7.1.1

La topologie faible  $\sigma(E, E')$  est séparée.

On va maintenant définir une autre topologie sur  $E'$  : la topologie faible \* notée  $\sigma(E', E)$ . Pour chaque  $x \in E$  on considère l'application  $\varphi_x: E' \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f \mapsto \varphi_x(f) = \langle f, x \rangle$ . Lorsque  $x$  parcourt  $E$  on obtient une famille d'applications  $(\varphi_x)_{x \in E}$  de  $E'$  dans  $\mathbb{R}$ .

### Définition 7.1.3 (La topologie faible \*)

La topologie faible \* sur  $E'$  est la topologie la moins fine sur  $E'$  rendant continues toutes les applications  $(\varphi_x)_{x \in E}$ .

Comme  $E \subset E''$ , la topologie  $\sigma(E', E)$  est moins fine que la topologie  $\sigma(E', E'')$ .

### Proposition 7.1.2

La topologie faible \*  $\sigma(E', E)$  est séparée.

## 7.1.2 Espaces $L^p$ et espace de Sobolev

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  muni de la mesure de Lebesgue  $dx$  et soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ .

### Définition 7.1.4 (Espace $L^p$ )

Soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p \leq +\infty$ ; on pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

On pose

$$\|f\|_{L^p} = \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

### Définition 7.1.5 (Espace $L^\infty$ )

On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \exists C \in \mathbb{R} \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ presque partout sur } \Omega\}. \quad (7.2)$$

On note

$$\|f\|_\infty = \inf\{C; |f(x)| \leq C \text{ presque partout sur } \Omega\}.$$

### Théorème 7.1.1

L'espace  $L^p$  est un espace vectoriel et un espace de Banach et  $\|\cdot\|_{L^p}$  est une norme pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ .

Nous rappelons maintenant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Young. Soit  $1 \leq p \leq \infty$  et  $p'$  l'exposant conjugué de  $p$  c'est-à-dire  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

**Théorème 7.1.2 (Inégalité de Hölder)**

Soient  $f \in L^p$  et  $g \in L^{p'}$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ .

Alors  $fg \in L^1$  et

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Rappelons également l'inégalité de Young nécessaire à la démonstration de l'inégalité de Hölder :

**Théorème 7.1.3 (Inégalité de Young)**

Supposons que  $1 < p < \infty$  et que  $p'$  est l'exposant conjugué de  $p$ , alors

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} \quad \forall a \geq 0, \quad \forall b \geq 0.$$

Dans la suite, nous utiliserons l'inégalité de Young avec epsilon sous la forme :

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon)b^{p'} \quad \text{avec} \quad C(\epsilon) = (\epsilon p)^{-q/p} q^{-1}.$$

Nous allons maintenant introduire les espaces de Sobolev.

**Définition 7.1.6 (Espace de Sobolev)**

L'espace de Sobolev  $\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$  (ou de manière équivalente  $\mathbb{W}^{1,p}$ ) est défini par

$$\mathbb{W}^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tels que}$$

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_C^\infty(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, N\}.$$

On pose

$$H^1(\Omega) = \mathbb{W}^{1,2}(\Omega).$$

Pour tout  $u \in \mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$  on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad \text{et} \quad \nabla u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\}.$$

L'espace  $\mathbb{W}^{1,p}$  est muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbb{W}^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

ou parfois de la norme équivalente

$$\|u\|_{\mathbb{W}^{1,p}} = \left( \|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \quad (\text{ si } 1 \leq p < \infty).$$

## 7.1 Espaces $L^p$ et espaces de Sobolev

En particulier, l'espace  $H^1$  est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2},$$

et la norme associée

$$\|u\|_{H^1} = \left( \|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est équivalente à la norme  $\mathbb{W}^{1,2}$ .

### Proposition 7.1.3

L'espace  $\mathbb{W}^{1,p}$  est un espace de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$ . L'espace  $\mathbb{W}^{1,p}$  est séparable pour  $1 \leq p < \infty$  et réflexif pour  $1 < p < \infty$ . L'espace  $H^1$  est un espace de Hilbert séparable.

### Théorème 7.1.4 (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg)

Soit  $1 \leq p < N$ , alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \quad \text{où } p^* \text{ est donné par } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

et il existe une constante  $C = C(p, N)$  telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

### Théorème 7.1.5 (Morrey)

Soit  $p > N$ , alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

avec injection continue.

### Théorème 7.1.6 (Rellich-Kondrachov)

On suppose  $\Omega$  borné de classe  $C^1$ . On a

1. si  $p < N$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^* [$  où  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ ,
2. si  $p = N$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[$ ,
3. si  $p > N$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ ,

avec injections compactes. En particulier  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$  avec injection compacte pour tout  $p$ .

### Théorème 7.1.7 (Inégalité de Poincaré)

On suppose que  $\Omega$  est un ouvert borné et  $1 \leq p < \infty$ . Alors il existe une constante  $C$  (dépendant de  $\Omega$  et de  $p$ ) telle que

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En particulier l'expression  $\|\nabla u\|_{L^p}$  est une norme sur  $\mathbb{W}_0^{1,p}$  qui est équivalente à la norme  $\|u\|_{\mathbb{W}^{1,p}}$ .

On rappelle que :

- $C_c^1(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions continues à support compact,
- $W_0^{1,p}(\Omega)$  désigne la fermeture de  $C_c^1(\Omega)$  (ou de  $C_c^\infty(\Omega)$ ) dans  $\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$  et il est muni de la norme induite par  $\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$ . Par ailleurs, c'est un espace de Banach séparable et réflexif pour  $1 < p < \infty$ .

## 7.2 Introduction aux méthodes directes du calcul des variations

La section suivante est fondée en particulier sur les cours de Serfaty [117] et sur le livre [43].

### Motivation

Le calcul des variations est l'ensemble des méthodes permettant de trouver les points critiques d'une fonctionnelle  $E$  de la forme

$$E(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx \quad (7.3)$$

où

- $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , un point de  $\Omega$  est désigné par  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ;
- $u = (u_1, \dots, u_N) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  appartient à un ensemble de fonctions admissibles  $X$  qui est dans la plupart des cas l'espace de Sobolev

$$\{u_0 + \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N)\} = \{\varphi \in \mathbb{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ telles que } \varphi = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

où  $u_0$  est une fonction donnée ;

- $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(x, u, \epsilon)$  est une fonction donnée.

Rappelons qu'ici,  $\nabla u \in \mathbb{R}^{N \times n}$  désigne la matrice des premières dérivées partielles de  $u$ , c'est-à-dire

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_N} \end{pmatrix}.$$

Il s'agit en fait de résoudre des EDP variationnelles de la forme " $E'(u) = 0$ ". Une classe particulière de points critiques est l'ensemble des minimiseurs de  $E$ . Ces fonctionnelles sont généralement issues de problèmes physiques et dans le cas où  $E$  est non linéaire (c'est le cas auquel on s'intéressera ici), il est plus facile de déterminer les minimiseurs de  $E$  que de résoudre l'équation  $E'(u) = 0$ .

Les méthodes classiques du calcul des variations consistent à déterminer les solutions régulières de la fonctionnelle satisfaisant les équations d'Euler-Lagrange. Ces méthodes ont deux inconvénients. Le premier est que l'on suppose des conditions de régularité sur les solutions du problème. Le second est que l'on ne sait pas si les points critiques trouvés sont des minimiseurs de la fonctionnelle.

## 7.2 Introduction aux méthodes directes du calcul des variations

---

Comme il est rappelé dans [12], les méthodes directes du calcul de variations reposent quant à elles sur les trois points suivants :

(i) Vérifier que  $E$  est minorée dans l'ensemble des fonctions admissibles  $X$ . Ceci assure que

$$\inf \{E(u) ; u \in X, u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\} > -\infty;$$

(ii) Montrer qu'il existe une suite minimisante, c'est-à-dire montrer l'existence d'une suite  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} E(v_k) = \inf E(u)$$

qui soit compacte pour une certaine topologie ;

(iii) Montrer que  $E$  est semi-continue inférieurement vis-à-vis de cette topologie, c'est-à-dire que si  $u_k$  converge vers  $u$  pour la dite topologie, alors

$$\liminf E(u_k) \geq E(u).$$

Ainsi la limite  $v$  obtenue en (ii) fournit un minimum, puisqu'alors :

$$\inf E(u) = \liminf E(v_k) \geq E(v) \geq \inf E(u).$$

En général, l'espace des fonctions admissibles  $X$  est un espace de dimension infinie. Le problème considéré est dit scalaire si  $N = 1$  ou  $n = 1$ , sinon il est dit vectoriel.

L'objectif du calcul des variations est double. D'abord, il s'agit de définir l'espace des fonctions admissibles permettant d'obtenir l'existence de solutions du problème de minimisation. Ensuite, il s'agit de prouver des résultats de régularité que doit satisfaire tout minimiseur de  $E$ . Dans ce rappel (et dans la suite de ce rapport), nous nous intéressons essentiellement au premier point. Cette section est fondée en particulier sur les cours de Serfaty [117] et le livre de Darocogna [43].

### 7.2.1 Cas scalaire

En calcul des variations, l'équation d'Euler-Lagrange est l'outil principal pour déterminer les minimiseurs d'une fonctionnelle.

#### Dérivée au sens de Gâteaux et équation d'Euler-Lagrange

##### Définition 7.2.1 (Fréchet-différentiabilité)

Soit  $X$  un espace de Banach et  $X'$  son dual. Une fonctionnelle  $E$  sur un espace de Banach  $X$  est dite Fréchet-différentiable en un point  $u \in X$  s'il existe une application linéaire continue  $DE(u) \in X'$  appelée différentielle de  $E$  en  $u$ , telle que

$$\frac{|E(u+v) - E(u) - DE(u) \cdot v|}{\|v\|_X} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \|v\|_X \rightarrow 0,$$

$E$  est de classe  $C^1$  si  $u \mapsto DE(u)$  est continue.

**Définition 7.2.2 (Gâteaux-différentiabilité)**

$E$  est dite Gâteaux-différentiable en  $u$  dans la direction  $v$  si  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E(u + tv)$  existe.

Si  $E$  est Fréchet-différentiable en  $u \in X$  alors elle est Gâteaux-différentiable dans toutes les directions (la réciproque est fautive) et  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E(u + tv) = DE(u) \cdot v$ .

**Définition 7.2.3**

Si  $E$  est Fréchet-différentiable,  $u$  est un point critique de  $E$  si  $DE(u) = 0$ .

Donc les points critiques fournissent bien des solutions de l'équation  $DE(u) = 0$  si et seulement si  $\forall v \in X, DE(u) \cdot v = 0$ . Ceci correspond à résoudre l'équation aux dérivées partielles dans un sens plus faible.

**Variation première**

Calculer la variation première de l'énergie consiste en pratique à calculer sa dérivée au sens de Gâteaux  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E(u + tv)$ . Considérons par exemple les énergies qui dépendent au plus des dérivées d'ordre 1.

$$E(u) = \int_{\Omega} L(x, u(x), Du(x)) dx, \tag{7.4}$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert borné,  $x \in \Omega, u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, Du \in \mathbb{R}^{n \times m}, L: \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue appelée *Lagrangien* dans le langage de la mécanique et  $E$  est parfois appelée *action*.  $L$  dépend donc de  $x$ , de  $u^i$  (les coordonnées de  $u$ ) et des dérivées des  $u^i$  notées  $u^i_{\alpha} = \partial_{\alpha} u^i$ .

$$E(u + tv) = \int_{\Omega} L(x, u + tv, Du + tDv) dx.$$

Par le calcul on démontre le lemme suivant :

**Lemme 7.2.1**

Si  $L$  et  $u$  sont suffisamment différentiables alors

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E(u + tv) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial u^i}(x, u, Du) v^i + \sum_{i=1}^m \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial u^i_{\alpha}}(x, u, Du) v^i_{\alpha}.$$

Donc si  $E$  est différentiable en  $u$  (alors  $E$  est Gâteaux-différentiable) et si  $u$  est un point critique de  $E$ , alors  $\forall v \in X$  (espace de définition de  $E$ ) on a  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E(u + tv) = 0$ . En particulier, l'ensemble  $\mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} \mathcal{C}^k(\Omega) \subset X$  (avec  $\mathcal{C}^k(\Omega)$  l'ensemble des fonctions  $k$  fois continûment différentiables sur  $\Omega, k \in \mathbb{N}^*$ ) donc  $\forall v \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$  on a

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial u^i}(x, u, Du) v^i + \sum_{i=1}^m \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial u^i_{\alpha}}(x, u, Du) v^i_{\alpha} = 0.$$

En intégrant par parties, on en déduit

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial u^i}(x, u, Du) - \sum_{i=1}^m \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial L}{\partial u^i_{\alpha}}(x, u, Du) \right\} v^i = 0.$$

## 7.2 Introduction aux méthodes directes du calcul des variations

En prenant  $v = (0, 0, \dots, \varphi, 0, \dots, 0)$  (les coordonnées de  $v$  sont toutes nulles sauf en la  $i$ -ème place où elle est égale à  $\varphi$ ) et  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ , on trouve que  $\forall i \in [1, m]$

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial L}{\partial u^i}(x, u, Du) - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_\alpha^i}(x, u, Du) \right\} \varphi = 0.$$

Ceci veut dire que l'on a :

$$\forall i = 1, \dots, m \quad \frac{\partial L}{\partial u^i}(x, u, Du) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_\alpha^i}(x, u, Du) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Cette dernière expression est appelée système d'**Euler-Lagrange** associé à l'énergie  $E$ .

Réciproquement, si ceci est vérifié, on trouve assez facilement que  $u$  est un point critique de  $E$ .

Ceci est un système quasi-linéaire du second ordre sous forme de divergence :

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial L}{\partial u_\alpha^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial u^i} \quad \forall i.$$

### Lagrangien nul

#### Définition 7.2.4

Le Lagrangien  $L$  est appelé Lagrangien nul si le système d'équations Euler-Lagrange  $\frac{\partial L}{\partial u^i} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_\alpha^i}$  est satisfait pour toute fonction  $u$  assez régulière.

Cela veut dire que l'énergie  $E$  ne dépend en fait que des conditions aux bords.

#### Théorème 7.2.1

Soit  $L$  un Lagrangien nul. Si  $u, \tilde{u} \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$  coïncident sur  $\partial\Omega$  alors  $E(u) = E(\tilde{u})$ .

Si  $m = 1$ , les seuls exemples intéressants de Lagrangien nuls sont de la forme  $A\nabla u + B$  :

$$E(u) = \int_{\Omega} A\nabla u + B \quad \text{où } A \text{ est une matrice constante.}$$

Mais si  $m > 1$  on a d'autres exemples intéressants comme le déterminant. En effet, on a le théorème suivant.

#### Théorème 7.2.2

Le Lagrangien  $L(u) = \int_{\Omega} \det Du$  pour  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est nul.

Autrement dit  $\int_{\Omega} \det Du$  ne dépend que de  $u_{\partial\Omega}$ .

### Existence de minimiseurs

Pour prouver l'existence de minimiseurs de  $E(u)$ , on considère une suite minimisante  $u_n$  telle que  $E(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf_X E$  (celle-ci existe toujours). Pour assurer la convergence de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  il faut savoir que  $E$  est grand quand  $\|u\|_X$  est assez grand : c'est ce que l'on appelle la **condition de coercivité**. Celle-ci assure que  $\|u\|_X$  est bornée. Cependant comme en dimension infinie les

ensembles bornés ne sont pas fortement compacts mais seulement faiblement compacts, il nous faudra une condition supplémentaire qui est la **semi-continuité inférieure faible** de  $E$ .

### Coercivité

Soit  $X$  un espace de Banach (espace vectoriel normé où toute suite de Cauchy converge). On va s'intéresser à  $\inf_X E$  où  $E: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ .

#### **Théorème 7.2.3 (Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki)**

La boule unité fermée de  $X'$  est faiblement  $*$  compacte. Donc si  $X$  est réflexive (i.e.  $X'' = X$ ), sa boule unité est faiblement compacte.

#### **Proposition 7.2.1**

Si  $X$  est séparable, c'est-à-dire que  $X$  admet une famille dénombrable dense, alors toute suite bornée de  $X$  admet une sous-suite faiblement  $*$  convergente.

Dans la suite on travaillera dans la mesure du possible dans des espaces réflexifs et séparables comme  $L^p$  et  $\mathbb{W}^{s,p}$   $1 < p < \infty$ .

#### **Définition 7.2.5**

$E: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  est dite faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement (que l'on notera s.c.i.) sur  $X$  si  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} E(u_n) \geq E(u)$  quand  $u_n \rightarrow u$  dans  $X$ .

On rappelle que  $u_n$  converge faiblement vers  $u$  si  $f(u_n) \rightarrow f(u) \quad \forall f \in X'$ .

#### **Théorème 7.2.4**

Soit  $X$  un espace de Banach réflexif et séparable  $E: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  faiblement s.c.i. et coercive sur  $X$  c'est-à-dire telle que  $\exists \alpha > 0, \exists \beta \in \mathbb{R}, E(u) \geq \alpha \|u\|_X + \beta \quad \forall u \in X$ ; et supposons que  $E \not\equiv +\infty$ . Alors  $E$  a au moins un minimiseur sur  $X$ .

**Preuve** Soit  $u_n$  une suite minimisante telle que  $E(u_n) \rightarrow \inf_X E$ . La coercivité de  $E$  entraîne qu'il existe une constante  $\kappa$  telle que  $\|u_n\|_X \leq \kappa \quad \forall n$ . On peut alors supposer, quitte à extraire une sous-suite, que  $u_n \rightharpoonup u$ . Par s.c.i. faible on a

$$E(u) \leq \liminf E(u_n) = \inf_X E,$$

donc  $u$  est un minimiseur. □

### Convexité

Une condition suffisante pour que  $E$  soit faiblement s.c.i. est la convexité.

#### **Théorème 7.2.5**

Si  $E$  est convexe et s.c.i. (fort) alors elle est faiblement s.c.i. (i.e. s.c.i. pour la topologie faible).

C'est une conséquence du théorème de séparation de Hahn Banach.

### Proposition 7.2.2

Soit  $E: X \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable. Si  $u$  est un minimiseur de  $E$  alors  $DE(u) = 0$  c'est-à-dire que  $DE(u) \cdot v = 0, \forall v \in X$ .

Réciproquement si  $E$  est convexe et  $DE(u) \cdot v = 0, \forall v \in X$ , alors  $u$  minimise  $E$  (ainsi tout point critique est un minimiseur de  $E$ ).

Si  $E$  est strictement convexe, on montre facilement que ce minimiseur est unique. On va à présent s'intéresser aux conditions suffisantes.

Soit  $L(x, u, p)$  un Lagrangien tel que :

$$|L(x, u, p)| \leq a(x, |u|, \|p\|),$$

avec  $a$  localement intégrable, croissante en  $|u|$  et  $\|p\|$ .

### Théorème 7.2.6

On suppose que soit  $m = 1$ , soit  $n = 1$ .

Si  $E$  est convexe sur  $\mathbb{W}_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  alors  $L(x, u, \cdot)$  est convexe pour tout  $x, u$ . Si de plus  $L$  est indépendante de  $u$ , alors on a une équivalence.

Ce résultat est faux dans le cas vectoriel. Prenons par exemple,  $m = n = 2$  et  $E(u) = \int \det u = 0 \forall u \in \mathbb{W}_0^{1,\infty}(\Omega)$  donc convexe, mais la fonction  $f(p) = \det p$  n'est pas convexe.

### Théorème 7.2.7

Supposons que  $L$  vérifie la relation de coercivité :  $L(x, z, p) \geq \alpha|p|^q - \beta$  et que  $L$  est convexe en la variable  $p$ . Supposons également qu'il existe  $\mathcal{A} \neq \emptyset$  tel que

$$\mathcal{A} := \{w \in \mathbb{W}^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^m) / w = g \text{ sur } \partial\Omega \text{ au sens des traces}\},$$

alors  $\min_{\mathcal{A}} E$  a une solution.

Pour mettre en pratique ce théorème, on utilisera souvent l'injection compacte des espaces de Sobolev donnée par le théorème de Rellich-Kondrakov 7.1.6.

### Régularité

Une fois trouvé le minimiseur, qui résout donc l'EDP au sens faible, on peut se demander quelle est sa régularité. Ce point ne sera pas traité ici. On renvoie le lecteur à la théorie de Giorgi-Nash-Moser [119], [99].

### 7.2.2 Cas vectoriel

Un des ingrédients essentiels pour résoudre des problèmes variationnels est la semi-continuité inférieure (faible) de l'énergie que l'on peut obtenir grâce à la coercivité. Cependant dans le cas vectoriel où la fonction  $u$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  avec  $m > 1$ , l'hypothèse de coercivité est trop restrictive pour un grand nombre d'applications. Elle peut être remplacée par une hypothèse plus faible qui garantit la s.c.i. : c'est l'hypothèse de quasi-convexité introduite par Morrey [98]. Mais la quasi-convexité est une notion difficile à caractériser. Ainsi des notions plus fortes et

plus faciles à démontrer, impliquant la quasiconvexité, ont été introduites. Ce sont les notions de polyconvexité et de rang-1 convexité.

### Quasiconvexité, polyconvexité et rang-1 convexité

Dans cette partie, on se concentre sur les Lagrangiens qui ne dépendent que des dérivées premières de  $u$ .

#### Définition 7.2.6 (Fonction quasiconvexe)

Une fonction  $f: \mathbb{R}^{N \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  Borel mesurable et localement bornée est quasiconvexe si pour tout  $D \subset \mathbb{R}^n$ , pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^{N \times n}$  et pour tout  $\varphi \in \mathbb{W}_0^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^N)$

$$f(\xi) \leq \frac{1}{\text{mes}D} \int_D f(\xi + \nabla\varphi(x))dx. \quad (7.5)$$

Une fonction convexe est quasiconvexe. En effet, grâce à l'inégalité de Jensen on obtient l'inégalité de quasiconvexité. Cependant une fonction quasiconvexe n'est pas nécessairement convexe.

Le théorème suivant va permettre de déduire les résultats d'existence de minimiseurs :

#### Théorème 7.2.8 (Morrey)

Si  $E$  est faiblement \* s.c.i. sur  $\mathbb{W}^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , alors  $f$  est quasiconvexe

Ce théorème admet la réciproque suivante.

#### Théorème 7.2.9

Si  $f$  est quasiconvexe, alors  $E$  est faiblement s.c.i. sur  $\mathbb{W}^{1,\infty}$ . Si  $f \geq 0$  et  $|f(A)| \leq C(1 + |A|^p)$ ,  $1 < p < \infty$  alors  $E$  est faiblement s.c.i. sur  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ .

$f$  est faiblement \* s.c.i. sur  $\mathbb{W}^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  alors  $f$  est quasiconvexe. De plus si  $f \geq 0$  et  $|f(A)| \leq C(1 + |A|^p)$  avec  $1 < p < \infty$ , alors  $E$  est faiblement s.c.i. sur  $\mathbb{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ .

On trouvera une preuve de ce théorème dans [98].

Le problème est qu'il est très difficile de montrer qu'une fonctionnelle donnée est quasiconvexe. En effet il n'existe pas de caractérisation des fonctions quasiconvexes. On a donc recours aux notions plus fortes suivantes qui impliquent la quasiconvexité.

#### Définition 7.2.7 (Fonction rang-1 convexe)

On dit que  $f: \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  est **rang-1 convexe** si  $\forall \xi, \nu \in \mathbb{R}^{n \times m}$  avec  $\text{rang}(\nu - \xi) \leq 1$  on a

$$\forall \lambda \in [0, 1] \quad f(\lambda\xi + (1 - \lambda)\nu) \leq \lambda f(\xi) + (1 - \lambda)f(\nu).$$

#### Définition 7.2.8 (Fonction polyconvexe)

On dit qu'une fonction  $f: \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  est **polyconvexe** s'il existe une fonction convexe  $g$  telle que  $f(\xi) = g(T(\xi))$  où  $T(\xi)$ , est l'ensemble des mineurs de tous ordres, que l'on peut extraire de  $\xi$ , ainsi  $T(\xi) = (\xi, \text{adj}_2\xi, \dots, \text{adj}_{n \wedge m}\xi)$ . En d'autres termes,  $f$  est une fonction polyconvexe si elle est une fonction convexe des mineurs de  $\xi$ .

## 7.2 Introduction aux méthodes directes du calcul des variations

---

En dimension  $m = n = 2$  les seuls mineurs sont les  $\xi_{i,j}$  et le déterminant de  $\xi$ , dans ce cas une fonction polyconvexe est une fonction convexe par rapport à  $\xi$  et par rapport à  $\det \xi$ .

### Proposition 7.2.3

Si  $f$  est à valeurs finies, on a les implications suivantes :

$$f \text{ convexe} \Rightarrow f \text{ polyconvexe} \Rightarrow f \text{ quasiconvexe} \Rightarrow f \text{ rang-1 convexe.}$$

Ainsi la polyconvexité est une condition suffisante de quasiconvexité tandis que la rang-1 convexité est une condition nécessaire. On rappelle que  $f$  quasiconvexe  $\Leftrightarrow E$  s.c.i..

**Remarque :** Si  $m = n = 1$ , alors toutes les conditions sont équivalentes.

### Relaxation

Jusqu'ici, nous avons vu que la convexité (ou la quasiconvexité dans le cas vectoriel) de la fonction  $f$  par rapport à la dernière variable est la propriété essentielle pour prouver l'existence de minimiseurs puisqu'elle garantit la semi-continuité inférieure. Dans cette section, on s'intéresse au cas où  $f$  n'est pas convexe (ou quasiconvexe dans le cas vectoriel). L'idée est alors de remplacer le problème de minimisation par un problème dit relaxé où la fonctionnelle à minimiser est convexifi e (ou quasiconvexifi e dans le cas vectoriel).

Avant d'introduire les notions d'enveloppe convexe et d'enveloppe quasiconvexe, nous allons faire un rappel sur les fonctions convexes conjuguées.

### Définition 7.2.9

Soit  $X$  est un espace vectoriel topologique. Soit  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  une fonction. La fonction convexe conjuguée de  $f$  (appelée également transformée de Legendre-Fenchel) est notée  $f^*$  et c'est la fonction sur  $X'$  (dual de  $X$ ) définie par

$$f^*(y) = \sup_{x \in X} \{ \langle x, y \rangle - f(x) \}.$$

### Proposition 7.2.4

On peut définir de même  $f^{**}$  sur  $X''$ . Si  $X$  est réflexif alors  $f^{**}$  est une fonction sur  $X$  et  $f^{**} \leq f$ , avec égalité si et seulement si  $f$  est convexe.

On remarque que :

- $\langle x, y \rangle - f^*(y) \leq f(x) \quad \forall x \in X, y \in X'$  et en fait  $f^*(y)$  est le plus grand élément tel que la fonction affine  $x \mapsto \langle x, y \rangle - f^*(y)$  soit inférieure à  $f$ .
- $f^*$  est le sup de fonctions affines (qui sont convexes) donc  $f^*$  est convexe.
- En utilisant le même argument,  $f^{**}$  est convexe et inférieure ou égale à  $f$ . On peut alors définir

$$f^{**} = \sup \{ g, g \text{ convexe et } g \leq f \}.$$

On peut alors définir l'enveloppe polyconvexe et l'enveloppe quasiconvexe de  $f$ .

### Définition 7.2.10 (Enveloppe polyconvexe)

La polyconvexifi e ou enveloppe polyconvexe de  $f$  notée  $Pf$  ou  $f^P$  est la fonction polyconvexe :

$$Pf = \sup_g \{ g \leq f, g \text{ polyconvexe} \}$$

**Définition 7.2.11 (Enveloppe quasiconvexe)**

La quasiconvexifiée ou enveloppe quasiconvexe de  $f$  notée  $Qf$  ou  $f^Q$  est la fonction quasiconvexe :

$$Qf = \sup_g \{g \leq f, g \text{ quasiconvexe}\}.$$

**Théorème 7.2.10**

Soit  $f: \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  et  $g$  convexe telle que  $f(A) \geq g(T(A))$  alors

$$f^{**}(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n \times m + 1} \lambda_i f(A_i) / \sum \lambda_i A_i = A \right\}$$

$$Pf(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\tau(n,m)+1} \lambda_i f(A_i) / \sum \lambda_i T(A_i) = T(A) \right\},$$

où  $\tau(n, m)$  est le nombre d'entrées dans  $T(A)$ ,

$$Qf(A) = \inf \left\{ \frac{1}{|D|} \int_D f(A + D\varphi) \quad \varphi \in \mathbb{W}_0^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^m) \right\} \quad \text{qui est indépendante de } D.$$

Pour établir les théorèmes de relaxation nous avons besoin des définitions suivantes :

**Définition 7.2.12 (Fonction de Carathéodory (voir [43] page 75))**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  et  $f: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .  $f$  est une fonction de Carathéodory si

- (i)  $\epsilon \rightarrow f(x, \epsilon)$  est continue pour presque tout  $x \in \Omega$ ,
- (ii)  $x \rightarrow f(x, \epsilon)$  est mesurable pour tout  $\epsilon \in \mathbb{R}^n$ .

**Définition 7.2.13 (Condition de croissance (voir [43] page 431))**

Soit  $1 \leq p \leq \infty$  et

$$f: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f = f(x, u, \epsilon),$$

une fonction de Carathéodory. On dit que  $f$  satisfait une condition de croissance  $(G_p)$  s'il existe fonction de Carathéodory

$$g: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g = g(x, u, \epsilon),$$

quasiconvexe en la dernière variable (i.e.  $g$  est quasiconvexe pour presque tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$ ) et telle que

$$g(x, u, \epsilon) \leq f(x, u, \epsilon)$$

pour presque tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $u \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times m}$ . De plus, pour presque tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $(u, \epsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times m}$  on a les inégalités suivantes

- (i) Si  $1 \leq p < \infty$

$$(G_p) \quad |g(x, u, \epsilon)|, \quad |f(x, u, \epsilon)| \leq \alpha(1 + |u|^p + |\epsilon|^p),$$

## 7.2 Introduction aux méthodes directes du calcul des variations

où  $\alpha \geq 0$ .  
(ii) Si  $p = \infty$ ,  

$$(G\infty) \quad |g(x, u, \epsilon)|, |f(x, u, \epsilon)| \leq \beta(x) + \alpha(|u|, |\epsilon|),$$
où  $\alpha, \beta \geq 0$ ,  $\beta \in L^1(\Omega)$  et  $\alpha$  est une fonction continue et croissante en chaque argument.

Nous pouvons à présent énoncer les théorèmes principaux de relaxation. Le théorème suivant est valable dans le cas où la fonctionnelle ne dépend que de  $\nabla u$ .

### **Théorème 7.2.11** (Théorème de relaxation 1 (issu de [43] page 416.))

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $f: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Borel mesurable satisfaisant, pour tout  $1 \leq p < \infty$ ,

$$g(\epsilon) \leq f(\epsilon) \quad \text{et} \quad |g(\epsilon)|, |f(\epsilon)| \leq \alpha_1(1 + |\epsilon|^p) \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}^n \times m, \quad (7.6)$$

où  $g: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  est quasiconvexe et  $\alpha_1 > 0$  est une constante. Lorsque  $p = \infty$ ,  $f$  est supposée localement bornée et minorée par  $g$ . Alors

$$\inf(P) = \inf(QP).$$

Plus précisément pour tout  $p \leq q \leq \infty$  et  $u \in \mathbb{W}^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , il existe une suite  $(u_\nu)_{\nu=1}^\infty \subset u + \mathbb{W}_0^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  telle que

$$u_\nu \rightarrow u \quad \text{dans} \quad L^q(\Omega, \mathbb{R}^m) \quad \text{quand} \quad \nu \rightarrow \infty,$$

$$\int_\Omega f(\nabla u_\nu(x)) dx \rightarrow \int_\Omega Qf(\nabla u(x)) dx \quad \text{quand} \quad \nu \rightarrow \infty.$$

### **Théorème 7.2.12** (Théorème de relaxation dans le cas général (voir [43] page 432))

Soit  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^m$  et

$$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f = f(x, u, \epsilon),$$

une fonction de Carathéodory satisfaisant la condition de croissance  $(Gp)$  (voir définition 7.2.13). Pour presque tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $(u, \epsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times m}$ , on définit l'enveloppe quasiconvexe de  $f$  par rapport à la dernière variable de la façon suivante :

$$Qf(x, u, \epsilon) := \inf \left\{ \frac{1}{\text{mes}D} \int_D f(x, u, \epsilon + \nabla \varphi(y)) dy : \varphi \in \mathbb{W}_0^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^n) \right\}$$

( $D$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^m$ ).

On suppose que

$$Qf: \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$$

est une fonction de Carathéodory.

(i) Soit  $p \leq q \leq \infty$  et  $u \in \mathbb{W}^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^n)$  alors, il existe une suite  $\{u_\nu\}_{\nu=1}^\infty \subset u + \mathbb{W}_0^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^n)$

telle que

$$u_\nu \rightarrow u \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^n) \quad \text{quand } \nu \rightarrow \infty,$$

$$\int_{\Omega} f(x, u_\nu(x), \nabla u_\nu(x)) dx \rightarrow \int_{\Omega} Qf(x, u(x), \nabla u(x)) \quad \text{quand } \nu \rightarrow \infty.$$

(ii) Si l'on suppose de plus que  $1 \leq p < \infty$  et qu'il existe  $\alpha_2 > 0$  et  $\alpha_3 \in \mathbb{R}$  tels que, pour presque tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $(u, \epsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times m}$ ,

$$f(x, u, \epsilon) \geq \alpha_2 |\epsilon|^p + \alpha_3,$$

Alors on a de plus,

$$u_\nu \rightarrow u \quad \text{dans } \mathbb{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \quad \text{quand } \nu \rightarrow \infty.$$

## 7.3 Élasticité tridimensionnelle

Dans cette partie, nous rappelons quelques résultats de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Pour cela on s'inspire largement des livres de Ciarlet ([38] et [36]) et du cours de Le Dret [78].

### 7.3.1 Préliminaires

Un matériau est un ensemble de points matériels (qui sont en fait de petits volumes macroscopiques). Au repos le matériau est modélisé par un ouvert borné connexe  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  que l'on appelle configuration de référence. Ainsi  $\Omega$  représente le volume occupé par le solide non déformé. Lorsque des forces sont appliquées sur le matériau, celui-ci se déforme jusqu'à atteindre une position d'équilibre que l'on appelle configuration déformée et notée  $\varphi(\Omega)$ .

Cette configuration est donc caractérisée par une application  $\varphi: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  suffisamment régulière, injective de façon à interdire l'interpénétration de la matière. On se place dans un repère choisi où l'on travaille en coordonnées cartésiennes. Ainsi pour un point  $x \in \Omega$  la déformation est caractérisée par ses trois coordonnées  $\varphi = (\varphi_i(x))_{i=1\dots 3}$ . La déformation doit également préserver l'orientation dans le sens où il ne doit pas être possible de transformer une main gauche en une main droite. La préservation de l'orientation se traduit par la condition :

$$\det \nabla \varphi(x) > 0 \quad \text{pour tout } x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \bar{\Omega},$$

où la matrice  $\nabla \varphi$ , appelée gradient de la déformation, est défini par  $\nabla \varphi = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_1 & \partial_2 \varphi_1 & \partial_3 \varphi_1 \\ \partial_1 \varphi_2 & \partial_2 \varphi_2 & \partial_3 \varphi_2 \\ \partial_1 \varphi_3 & \partial_2 \varphi_3 & \partial_3 \varphi_3 \end{pmatrix}$

ou plus simplement avec la notation suivante  $(\nabla \varphi)_{ij} = \partial_j \varphi_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ .

L'ensemble  $\varphi(\Omega)$  est la configuration déformée correspondante. D'un point de vue mathématique le passage d'une configuration à l'autre correspond à un changement de variable. À toute

### 7.3 Élasticité tridimensionnelle

déformation  $\varphi$  est associé un déplacement  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  qui est le champ de vecteurs défini par la relation :  $\varphi = Id + u$ .

Cette déformation va créer des tensions entre les différents points matériels constituant le matériau. Nous allons voir comment calculer les éléments de longueur, d'aire et de volume dans une configuration déformée en fonction des quantités correspondantes dans la configuration de référence. On note  $F^T$  et  $F^{-1}$  la transposée et l'inverse d'une matrice  $F$  et  $|\cdot|$  la norme euclidienne. Un tenseur est une matrice carrée d'ordre 3 et  $M_3$  est l'ensemble des tenseurs réels.

#### Élément de longueur dans la configuration déformée

On considère une courbe tracée dans la configuration de référence notée  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$  de longueur  $l$ , de classe  $C^1$  et la courbe déformée  $\varphi \circ \gamma$  de longueur  $\bar{l}$  tracée dans la configuration déformée  $\varphi(\Omega)$  telles que :

$$l = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = \int_0^1 \sqrt{\gamma'(t) \gamma'(t)} dt$$

$$\bar{l} = \int_0^1 |(\varphi \circ \gamma)'(t)| dt = \int_0^1 \sqrt{\gamma'(t)^T C(\gamma(t)) \gamma'(t)} dt$$

où  $C = (\nabla \varphi^T) \nabla \varphi$  est appelé tenseur de déformation ou tenseur de Cauchy-Green à droite. La notion de forme ne varie pas par rotation et par translation. Le tenseur  $C$  permet de caractériser les déformations dites rigides qui sont constituées d'une rotation et d'une translation. En effet, on peut établir les deux propositions suivantes :

#### Proposition 7.3.1

Une déformation de classe  $C^1$  satisfait  $C = I$  si et seulement si elle est de la forme  $\varphi(x) = a + Qx$  où  $a$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  et  $Q$  est une matrice de rotation de  $SO(3)$ .

#### Proposition 7.3.2

Soient  $\varphi$  et  $\tilde{\varphi}$  deux déformations de  $\Omega$ . Alors  $\varphi$  et  $\tilde{\varphi}$  ont le même tenseur  $C$  si et seulement si  $\tilde{\varphi}(x) = Q\varphi + a$  où  $a$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  et  $Q$  est une matrice de rotation de  $SO(3)$ .

Ainsi, si deux déformations ont le même tenseur de Cauchy Green à droite alors elles sont égales à une déformation rigide près. Les deux propositions précédentes montrent le rôle joué par  $C$ . Ainsi, la connaissance du champ  $C$  détermine complètement la déformation à une déformation rigide près.

La différence

$$2E = C - I$$

est une mesure de l'écart entre une déformation donnée et une déformation rigide. Le tenseur  $E$  est appelé tenseur de déformation de Green-Saint-Venant. Ainsi, la déformation  $\varphi$  de classe  $C^1$  est une transformation rigide si et seulement si  $E = 0$ .  $E$  peut s'écrire aussi sous forme de déplacement :

$$E(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) + \frac{1}{2}\nabla u^T \nabla u.$$

### Élément d'aire dans la configuration déformée

Étant donné un champ de tenseur suffisamment régulier  $T : \Omega \rightarrow M_3$ , nous définissons en chaque point de  $\Omega$  sa divergence notée  $\operatorname{div} T$  comme étant le vecteur dont les composantes au sens usuel sont les divergences des vecteurs lignes de la matrice  $T$  :

$$\operatorname{div} T = \partial_j T_{ij}.$$

La propriété fondamentale de la divergence est de bien se prêter à l'intégration par parties ou à la formule de Green. Si un ouvert est suffisamment régulier, par exemple lipschitzien, alors on peut définir une mesure d'aire  $d\sigma$  sur son bord héritée de la mesure de Lebesgue de l'espace ambiant. Il existe alors un vecteur normal unitaire extérieur  $n$  défini presque partout par rapport à cette mesure. De plus dans le cas de la formulation d'intégration par parties usuelle on a :

$$\int_{\Omega} \partial_i f dx = \int_{\partial\Omega} f n_i d\sigma,$$

où  $n_i$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur normal. Dans le cas des tenseurs, on obtient la formule de Green,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} T dx = \int_{\partial\Omega} T n d\sigma.$$

Il en est de même pour un tenseur  $T^\varphi$  défini sur la configuration déformée. A tout tenseur de la configuration déformée  $T^\varphi$  défini en un point  $y = \varphi(x)$  nous associons le tenseur  $T(x)$  défini au point  $x$  de la configuration de référence par la relation

$$T(x) = (\det \nabla \varphi(x)) T^\varphi(y) \nabla \varphi(x)^{-1}.$$

On notera la relation suivante  $(\operatorname{cof} \nabla \varphi)^T = (\det \nabla \varphi) \nabla \varphi^{-T}$ .

#### Définition 7.3.1 (Transformée de Piola)

Soit  $T : \varphi(\Omega) \rightarrow M_3$  un champ de tenseurs sur la configuration déformée. L'application définie par

$$T^\varphi(x) = [T \circ \varphi(x)] \operatorname{cof} \nabla \varphi(x)$$

est sa transformée de Piola.

Le tenseur  $\operatorname{cof} \nabla \varphi$  mesure donc la façon dont  $\varphi$  transforme les vecteurs normaux et les aires.

### Élément de volume dans la configuration déformée

On rappelle la formule de changement de variable pour les intégrales de volume,

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y) dy = \int_{\Omega} f \circ \varphi(x) J(x) dx,$$

pour tout  $f$  intégrable sur  $\varphi(\Omega)$  où  $J$  est le jacobien du changement de variable,  $J(x) = |\det \nabla \varphi(x)|$ . Dans le contexte de notre étude, nous supposons que ce déterminant est positif. Ainsi, nous obtenons la formule

### 7.3 Élasticité tridimensionnelle

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)dy = \int_{\Omega} f \circ \varphi(x) \det \nabla \varphi(x) dx,$$

que l'on abrège en écrivant  $dy = \det \nabla \varphi(x) dx$ . De même en sens inverse,

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\varphi(\Omega)} f \circ \varphi^{-1}(y) dy,$$

avec  $\det \nabla \varphi^{-1}(y) = (\det \nabla \varphi(x))^{-1}$ . En particulier, si  $f(x) = \rho(x)$  représente la masse volumique dans la configuration de référence, la conservation de la masse implique que  $\rho^\varphi(y) = \rho(x)(\det \nabla \varphi(x))^{-1}$ , où  $\rho^\varphi$  est la masse volumique de la configuration déformée.

#### 7.3.2 Loi de comportement des matériaux élastiques

Les considérations faites jusqu'à maintenant étaient indépendantes du matériau considéré. Les équations d'équilibre dans la configuration de référence constituent un problème aux limites de trois équations dont les inconnues sont les six composantes du tenseur de contraintes (compte-tenu des symétries) et les trois composantes de la déformation. Pour le moment, il y a trois équations et 9 inconnues. Les six équations supplémentaires permettant de résoudre ce problème vont être fournies par la nature du matériau. Nous considérons ici une catégorie de matériau pour lesquels les six équations supplémentaires sont obtenues en faisant l'hypothèse additionnelle que le tenseur de contrainte  $T \circ \varphi(y)$  de Cauchy en chaque point  $\varphi(x)$  de la configuration déformée est une fonction du gradient de la déformation  $\nabla \varphi(x)$  au point  $x$  correspondant à la configuration de référence.

Soit  $\mathcal{S}^3$  l'ensemble des matrices symétriques d'ordre 3.

##### Définition 7.3.2 (Loi de comportement)

On appelle loi de comportement par rapport à la configuration de référence  $\Omega$  une fonctionnelle

$$\hat{T}: \Omega \times M_3 \rightarrow \mathcal{S}^3$$

telle que pour toute déformation  $\varphi \in \mathbb{R}^3$  et tout point  $x$  de  $\Omega$ , on ait :

$$T^\varphi(y) = \hat{T}(x, \varphi) \quad \text{pour tout } y = \varphi(x).$$

##### Définition 7.3.3 (Matériau élastique)

Un matériau est dit élastique si sa loi de comportement est de la forme

$$\hat{T}: \Omega \times M_3^+ \rightarrow \mathcal{S}^3$$

avec

$$T^\varphi(y) = \hat{T}(x, \nabla \varphi(x)).$$

Ainsi, un matériau est élastique si sa loi de comportement ne dépend de la déformation que par l'intermédiaire du gradient de la déformation au point considéré.

En terme de tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff un matériau est dit élastique si sa loi de comportement prend les formes :

$$\hat{T}_R: \bar{\Omega} \times M_3^+ \rightarrow M_3$$

avec

$$\hat{T}_R(x, F)F^T = F\hat{T}_R(x, F)^T \quad \text{et} \quad T_R^\varphi(x) = \hat{T}(x, \nabla\varphi(x)),$$

où

$$\hat{\Sigma}: \bar{\Omega} \times M_3^+ \rightarrow \mathcal{S}_3 \quad \text{et} \quad \Sigma^\varphi(x) = \hat{\Sigma}(x, \nabla\varphi(x)).$$

### 7.3.3 Matériau de Saint Venant-Kirchhoff

La première catégorie de matériau élastique s'obtient en négligeant le terme en  $o(E)$  dans l'expression du développement du second tenseur de Piola-Kirchhoff.

#### Définition 7.3.4 (Loi de Saint Venant-Kirchhoff)

On appelle loi de Saint Venant-Kirchhoff la loi de comportement

$$\tilde{\Sigma}(C) = 2\mu E + \lambda(\text{tr } E)I,$$

avec  $C = \nabla\varphi^T\nabla\varphi$  le tenseur de déformation de Cauchy-Green à droite associée à la déformation  $\varphi$  et  $E = \frac{1}{2}(C - I)$  le tenseur de déformation de Green-Saint-Venant.

Si la loi de comportement de Saint Venant-Kirchhoff est linéaire, l'application associée en terme de déplacement

$$u \rightarrow \tilde{\Sigma}(E(u)) \quad \text{avec} \quad 2E(u) = \nabla u + \nabla u^T + \nabla u^T \nabla u$$

est par contre non linéaire. Les matériaux de Saint Venant Kirchhoff sont les matériaux non linéaires les plus simples. Ils sont pour cela souvent utilisés dans le calcul des structures. Cependant, ils ont plusieurs inconvénients. Le premier est de nature théorique et réside dans l'absence de quasiconvexité de la densité d'énergie associée (voir [108]). Ceci implique qu'aucun résultat d'existence n'a pu être établi pour de telles lois de comportement. De plus, d'un point de vue physique, ils ne sont pas admissibles puisqu'ils permettent une compression de la matière avec une énergie finie. En effet, cela est dû à l'absence de pénalisation du terme  $\det \nabla\varphi$  l'empêchant de tendre vers zéro.

### 7.3.4 Hyperélasticité

#### Définition 7.3.5 (Matériau hyperélastique)

On dit qu'un matériau élastique est hyperélastique s'il existe une fonction  $\hat{W}: \bar{\Omega} \times M_3^+ \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable par rapport à  $F \in M_3^+$  telle que :

$$\hat{T}_R(x, F) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial F}(x, F), \quad \text{soit composante par composante} \quad \hat{T}_R(x, F)_{ij} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial F_{ij}}(x, F).$$

### 7.3 Élasticité tridimensionnelle

---

La fonction  $\hat{W}$  est appelée densité d'énergie du matériau. La densité d'énergie d'un matériau hyperélastique n'est déterminée qu'à l'addition d'une fonction arbitraire  $x$  près. La quantité totale d'énergie stockée dans la configuration déformée  $W(\varphi) = \int_{\Omega} \hat{W}(x, \nabla\varphi(x))dx$  est l'énergie interne de la déformation. Tous les matériaux élastiques ne sont pas hyperélastiques.



---

## Un modèle de recalage sous contraintes fondé sur la densité d'énergie interne d'un matériau de type Ciarlet-Geymonat

---

Dans ce chapitre, nous proposons un nouveau modèle de registration sous contraintes fondé sur la théorie de l'élasticité non-linéaire. Le cadre de l'élasticité non-linéaire permet de générer de grandes déformations alors que l'élasticité linéaire concerne uniquement les petites déformations. Les objets contenus dans les images sont appréhendés comme des matériaux hyperélastiques homogènes et isotropes. En particulier, nous proposons d'utiliser les matériaux de type Ciarlet-Geymonat pour leurs bonnes propriétés physiques et théoriques. Le modèle proposé dans ce chapitre est contraint géométriquement par la connaissance des positions de paires de points de contrôle présents sur l'image *Reference* et l'image *Template*.

Dans une première section, nous présentons le modèle de recalage sous contraintes fondé sur la densité d'énergie interne d'un matériau de type Ciarlet-Geymonat que nous modélisons par un problème de minimisation d'énergie. Ensuite, nous démontrons un résultat d'existence de minimiseurs de l'énergie associée et un résultat de convergence lorsque le nombre de contraintes tend vers l'infini. Ce résultat a surtout un intérêt théorique puisqu'il souligne le caractère bien posé du modèle mais a peu d'intérêt en pratique dans la mesure où le nombre de données est généralement limité. Ensuite, nous discutons de la méthode de résolution et proposons un résultat théorique. Enfin des exemples d'applications sont présentés.

### 8.1 Modélisation mathématique

Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^3$ . On désigne par  $R: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'image *Reference* et  $T: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'image déformable dite *Template*. Une transformation  $\varphi: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  est appliquée comme argument de  $T$  dans le but de rendre  $T \circ \varphi$  proche de  $R$  dans le sens où le terme de fidélité et le terme de contraintes géométriques (définis ci-après) sont minimaux. On rappelle qu'une déformation est une application suffisamment régulière, préservant l'orientation et injective, sauf

peut-être sur  $\partial\Omega$ . On suppose que  $T$  est à support compact de manière à ce que  $T \circ \varphi$  soit définie. Dans la suite  $T$  sera supposée continue.

### Terme de fidélité

Le terme de fidélité aux données quantifie la similarité entre l'image *Reference* et l'image *Template* déformée  $T \circ \varphi$ . Pour quantifier la similarité des images, on se focalise ici sur la SSD qui est la norme  $L^2$  de la différence entre l'image *Template* déformée  $T \circ \varphi$  et l'image *Reference* :

$$\frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (T(\varphi(x)) - R(x))^2 dx, \quad (8.1)$$

avec  $\lambda > 0$ . Nous introduisons le facteur  $\lambda$  qui permet d'apprécier l'importance du terme d'attache aux données par rapport aux autres termes.

Bien que dans le cas d'images multi-modales, la SSD n'est pas la mesure la plus adaptée pour quantifier la similarité, nous avons préféré l'utiliser dans un premier temps pour sa simplicité et son faible coût de calcul. Dans ce cas, l'information mutuelle issue de la théorie de l'information constitue une alternative intéressante [95]. Le lecteur est invité à se reporter au chapitre 6 pour un descriptif des termes d'attache aux données les plus souvent utilisés.

### Terme de contraintes géométriques

Les contraintes utilisées dans ce modèle sont géométriques. Elles correspondent à deux ensembles de points de contrôle manuellement choisis dans chaque image : l'un des ensembles est constitué de points de contrôle de l'image *Reference*  $R$  et l'autre ensemble est composé de points homologues sur l'image *Template*  $T$ . Dans le cadre d'une application médicale, pour comparer deux acquisitions de modalités différentes, un praticien identifiera ces correspondances. Le lecteur est invité à revoir la section 6.2.5 pour une brève présentation de quelques travaux incluant des contraintes géométriques. Les points de contrôle sélectionnés sur  $R$  sont définis par  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in (\mathbb{R}^3)^N$  tandis que leurs homologues sur  $T$  sont notés  $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_N) \in (\mathbb{R}^3)^N$ . On souhaite ainsi minimiser la quantité suivante :

$$\langle \rho(\varphi) - \tilde{\omega} \rangle_{3N}^2,$$

où  $\langle \cdot \rangle_{3N}$  désigne la norme Euclidienne dans  $\mathbb{R}^{3N}$  et  $\rho$  est l'opérateur linéaire défini par :

$$\begin{aligned} \rho: \mathbb{W}^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3) &\longrightarrow (\mathbb{R}^3)^N \\ \varphi &\longmapsto (\varphi(\omega_1), \varphi(\omega_2), \dots, \varphi(\omega_N))^T \end{aligned} .$$

Pour que cette définition ait du sens, nous verrons dans la suite qu'un espace adéquat pour  $\varphi$  est :

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = \{ \varphi \in \mathbb{W}^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3) : \text{cof}(\nabla\varphi) \in L^2(\Omega, M_3), \det(\nabla\varphi) \in L^2(\Omega), \\ \varphi = \text{Id} \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } \det \nabla\varphi > 0 \text{ presque partout} \}, \end{aligned} \quad (8.2)$$

## 8.1 Modélisation mathématique

(avec  $M_3 = M_3(\mathbb{R}) = \{A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \in \mathbb{R}\}$ ) et  $\mathbb{W}^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  s'injectant de façon continue dans  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ . On rappelle que l'espace de Banach  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$  est l'espace des fonctions continues sur  $\bar{\Omega}$  équipé de la norme  $\|f\|_{\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} \langle f(x) \rangle_3$  avec  $\langle \cdot \rangle_3$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^3$ .

On peut remarquer que minimiser  $\langle \rho(\varphi) - \tilde{\omega} \rangle_{3N}^2$  par rapport à  $\varphi$  est équivalent à minimiser la quantité :

$$\langle \rho(\varphi) \rangle_{3N}^2 - 2\langle \rho(\varphi), \tilde{\omega} \rangle_{3N},$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{3N}$  désigne le produit scalaire euclidien sur  $\mathbb{R}^{3N}$ .

### Terme de régularisation fondé sur la densité d'énergie d'un matériau de type Ciarlet-Geymonat

Il reste à présent à adjoindre au modèle un terme de régularisation contrôlant le comportement de la déformation  $\varphi$ .

Comme souligné par Fischer et Modersitzki [52], le régularisateur dépend des propriétés requises pour le champ de déformations et est relatif à la physique du matériau considéré. La théorie de l'élasticité linéaire n'est pas un cadre adapté dans le cas présent, dans la mesure où elle suppose de petites déformations et la validité de la loi de Hooke, ces deux éléments n'étant pas vérifiés dans notre cas. Nous proposons donc de nous tourner vers la théorie de l'élasticité non linéaire et d'assimiler les formes à apparier à des matériaux hyperélastiques. Plus précisément, le régularisateur est bâti sur la densité d'énergie d'un matériau de type Ciarlet-Geymonat. Préalablement à l'introduction de l'expression explicite de ce régularisateur, nous rappelons quelques notations et concepts fondamentaux.

Nous avons besoin des notations suivantes :

- $M_3^+(\mathbb{R}) = \{A \in M_3(\mathbb{R}), \det(A) > 0\}$ .
- $A : B = \text{tr} A^T B$ .
- $\|A\| = \sqrt{A : A}$ .
- $\text{cof}(A)$  : la matrice des cofacteurs de  $A$ .

Rappelons également que la densité d'énergie interne d'un matériau hyperélastique, homogène et isotrope est de la forme :

$$W(F) = \widehat{W}(E) = \frac{\lambda'}{2}(\text{tr } E)^2 + \mu \text{tr} E^2 + o(\|E\|^2), \quad F^T F = I + 2E, \quad (8.3)$$

où  $\lambda'$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé. Le tenseur  $E$  est le tenseur de Green-Saint Venant et  $C$  est le tenseur de Cauchy-Green droit. Le tenseur de Cauchy-Green droit est défini par  $C = \nabla \varphi^T \nabla \varphi = F^T F \in \mathcal{S}^3$ , avec  $\mathcal{S}^3 = \{A \in M_3(\mathbb{R}), A = A^T\}$ , ensemble des matrices symétriques d'ordre 3. Physiquement, le tenseur de Cauchy-Green droit peut être interprété comme un quantificateur du carré de l'élongation due à la déformation. Le tenseur de déformation de Green-Saint Venant est défini par  $E = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T + \nabla u^T \nabla u)$ ,  $u$  étant le vecteur déplacement lié à  $\varphi$  par  $\varphi = \text{Id} + u$ . Associé à une déformation donnée  $\varphi$ , il constitue une mesure de la déviation entre  $\varphi$  et une déformation rigide.

La densité d'énergie interne d'un matériau de type Saint Venant-Kirchhoff, notée  $W_{SVK}$ , est donnée par :

$$W_{SVK}(F) = \hat{W}(E) = \frac{\lambda'}{2} \operatorname{tr}(E)^2 + \mu \operatorname{tr}(E^2), \quad F^T F = I + 2E. \quad (8.4)$$

que l'on peut réécrire de la façon suivante :

$$W_{SVK}(F) = -\frac{3\lambda' + 2\mu}{4} \operatorname{tr}(C) + \frac{\lambda' + 2\mu}{8} \operatorname{tr}(C^2) + \frac{\lambda'}{4} \operatorname{tr} \operatorname{cof} C + \frac{6\mu + 9\lambda'}{8}. \quad (8.5)$$

Raoult [108] a prouvé que la densité d'énergie interne d'un matériau de type Saint Venant-Kirchhoff n'est pas polyconvexe. Elle n'est également pas rang-1 convexe et en conséquence pas quasiconvexe, ce qui soulève des difficultés de nature théorique puisqu'on ne peut obtenir la semi-continuité inférieure faible de la fonctionnelle introduite. De même, comme mentionné par Ciarlet [38], la densité d'énergie interne ne contient pas de terme empêchant le Jacobien de  $\varphi$  d'approcher la valeur nulle.

Dans [37], Ciarlet et Geymonat construisent une famille de matériaux d'Ogden dont la densité d'énergie interne est conçue de manière à satisfaire le développement (8.3). Etant donné  $\lambda' > 0$  et  $\mu > 0$  deux coefficients de Lamé, on considère alors le matériau de type Ciarlet-Geymonat dont la densité d'énergie interne est :

$$W : F \in M_3^+(\mathbb{R}) \mapsto W(F) = a_1 \|F\|^2 + a_2 \|F^T F\|^2 + b \|\operatorname{cof}(F)\|^2 + \Gamma(\det(F)) + e, \quad (8.6)$$

qui peut être réexprimée (avec  $C = F^T F$ ) sous la forme :

$$W : F \in M_3^+(\mathbb{R}) \mapsto W(F) = a_1 \operatorname{tr} C + a_2 \operatorname{tr} C^2 + b \operatorname{tr} \operatorname{cof}(C) + \Gamma(\sqrt{\det C}) + e, \quad (8.7)$$

avec  $a_1, a_2 > 0$ ,  $b > 0$ ,  $\Gamma(\delta) = c\delta^2 - d' \ln \delta$ ,  $c > 0$ ,  $d' > 0$ ,  $e \in \mathbb{R}$  et  $\Gamma$  convexe, deux fois dérivable en 1. On a :  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Gamma(\delta) = +\infty$  et  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} W(F) = +\infty$  quand  $\det(F) \rightarrow 0^+$ . L'expression de cette densité d'énergie évoque celle d'un matériau de type Saint Venant-Kirchhoff (8.5). Pour notre modèle, on supposera que  $e = 0$ . On renvoie le lecteur à l'article de Le Guyader et Vese [82] pour le calcul de  $a_1, a_2 > 0$ ,  $b > 0$ .

La norme de la matrice jacobienne de la déformation  $\|F\|$  contrôle le changement moyen de longueur durant la déformation. La norme de la matrice des cofacteurs  $\|\operatorname{cof}(F)\|$  constitue une mesure du changement moyen d'aire. Enfin, la transformation du volume est représentée par  $\det(\nabla\varphi) = \det(F)$ .

### Problème de minimisation général

Nous pouvons, maintenant, introduire le modèle de recalage sous contraintes fondé sur la densité d'énergie interne d'un matériau de type Ciarlet-Geymonat. Celui-ci est modélisé par le problème de minimisation de fonctionnelle suivant :

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{W}} \left\{ I(\varphi) = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (T(\varphi(x)) - R(x))^2 dx + \int_{\Omega} W(\nabla\varphi) dx + \nu < \rho(\varphi) >_{3N}^2 - 2\nu < \rho(\varphi), \tilde{\omega} >_{3N} \right\}, \quad (8.8)$$

## 8.2 Existence de minimiseurs

avec  $W$  définie dans (8.6),  $\mathcal{W}$  défini dans (8.2) et  $\nu > 0$  un paramètre fixé.

Nous montrerons, dans ce qui suit, que le problème (8.8) est bien défini sur  $\mathcal{W}$ . En effet, si  $\varphi \in \mathbb{W}^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $\int_{\Omega} \|\nabla \varphi^T \nabla \varphi\| dx$  est fini. Comme  $\Omega$  est borné,  $\varphi$  est dans  $\mathbb{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et  $\int_{\Omega} \|\nabla \varphi\|^2$  est finie.

De plus, comme  $4 > \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ , l'espace  $\mathbb{W}^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  est inclus dans  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$  avec injection continue (voir [23] Théorème IX.13 page 169). Cela signifie qu'il existe une constante  $c > 0$  dépendant seulement de  $\Omega$  telle que  $\forall u \in \mathbb{W}^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $\|u\|_{\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)} \leq c \|u\|_{\mathbb{W}^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)}$ .

## 8.2 Existence de minimiseurs

L'argument de polyconvexité de la densité d'énergie interne est crucial pour obtenir un résultat d'existence de minimiseurs. On rappelle, en premier lieu, la définition de cette notion.

### Définition 8.2.1

Une densité d'énergie interne  $\widehat{W} : \bar{\Omega} \times M_3^+(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est polyconvexe si pour tout  $x \in \bar{\Omega}$ , il existe une fonction convexe  $\mathbb{W}(x, \cdot, \cdot, \cdot) : M_3(\mathbb{R}) \times M_3(\mathbb{R}) \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\widehat{W}(x, F) = \mathbb{W}(x, F, \text{cof}(F), \det(F)), \text{ pour tout } F \in M_3^+(\mathbb{R}).$$

Dans notre cas, la fonction  $g : H \in M_3(\mathbb{R}) \rightarrow g(H) = \text{tr } H^T H = \|H\|^2$  est convexe donc  $F \in M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{tr } \text{cof}(F)^T \text{cof } F$  est polyconvexe. Il est judicieux d'exprimer  $\|F^T F\|^2 = \text{tr } (F^T F)^2$  à l'aide des valeurs singulières de  $F$ . Si  $v_1, v_2, v_3$  sont les valeurs singulières de  $F$ ,  $\text{tr } (F^T F)^2 = v_1(F)^4 + v_2(F)^4 + v_3(F)^4$ . (On rappelle que les valeurs singulières  $v_1(F)$ ,  $v_2(F)$  et  $v_3(F)$  de  $F$  sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice symétrique définie positive  $F^T F$ .)

On rappelle en second lieu le théorème suivant :

### Théorème 8.2.1 (Ball [8], Thompson and Freede [123] extrait de [38] page 177)

Soit  $\Phi : [0, +\infty[^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe, symétrique et croissante par rapport à chacune de ses variables. Alors la fonction

$$W : F \in M_n(\mathbb{R}) \rightarrow W(F) = \Phi(v_1(F), v_2(F), \dots, v_n(F))$$

est convexe.

Il résulte de ce théorème que la fonction  $F \mapsto v_1(F)^4 + v_2(F)^4 + v_3(F)^4$  est convexe et que la densité d'énergie interne (8.6) est polyconvexe.

Dans [8], Ball démontre les résultats suivants de continuité faible des mineurs.

### Théorème 8.2.2 (extrait de [8])

Pour tout  $p \geq 2$ ,

1. l'application  $\Psi \mapsto \text{cof } \nabla \Psi$  est fortement continue de  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  dans  $L^{p/2}(\Omega, M_3)$ .
2. Si  $\Psi_n \rightharpoonup \Psi$  dans  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et s'il existe  $q \geq 1$  tel que  $\text{cof}(\nabla \Psi_n) \rightharpoonup H$  dans  $L^q(\Omega, M_3)$  alors  $H = \text{cof}(\nabla \Psi)$ .

**Théorème 8.2.3** (*Ball extrait de [8]*)

Soient  $p \geq 2$  et  $q \geq 1$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s} \leq 1$ . Si  $\Psi \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  est telle que  $\text{cof}(\nabla\Psi) \in L^q(\Omega, M_3)$ , alors  $\det(\nabla\Psi) \in L^s(\Omega)$ . De plus, si  $\Psi_n \rightharpoonup \Psi$  dans  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $\text{cof}(\nabla\Psi_n) \rightharpoonup H$  dans  $L^q(\Omega, M_3)$  et  $\det(\nabla\Psi_n) \rightharpoonup \delta$  dans  $L^r(\Omega)$  pour un certain  $r \geq 1$ , alors  $H = \text{cof}(\nabla\Psi)$  et  $\delta = \det(\nabla\Psi)$ .

Muni de ces éléments, on peut désormais énoncer le théorème d'existence de minimiseurs.

**Théorème 8.2.4**

Supposons qu'il existe  $\tilde{\varphi} \in \mathcal{W}$  telle que  $I(\tilde{\varphi}) < +\infty$ . Alors le problème de minimisation (8.8) admet au moins une solution  $\bar{\varphi} \in \mathcal{W}$ .

**Preuve** On remarque que  $\forall \Psi \in \mathcal{W}$ ,  $I(\Psi)$  est bien définie et qu'il s'agit d'un élément de  $\bar{\mathbb{R}}$ . (Comme mentionné ci-après,  $W(F) = \mathbb{W}^*(F, \text{cof}(F), \det(F))$  avec  $\mathbb{W}^*$  convexe et continue sur  $M_3 \times M_3 \times ]0, +\infty[$  et  $\mathbb{W}^*(F_k, H_k, \delta_k) \rightarrow +\infty$  quand  $F_k \rightarrow F$ ,  $H_k \rightarrow H$  et  $\delta_k \rightarrow 0^+$ , de sorte que l'on peut poser  $\mathbb{W}^*(F, H, \delta) = +\infty$  pour  $\delta \leq 0$ ).

Dans une première étape, on démontre que l'infimum est fini en établissant une inégalité de coercivité de la forme :

$$I(\varphi) \geq \alpha \left( \|\varphi\|_{W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)}^4 + \|\text{cof}(\nabla\varphi)\|_{L^2(\Omega, M_3)}^2 + \|\det(\nabla\varphi)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \kappa, \quad (8.9)$$

avec  $\kappa$  une constante réelle et  $\alpha > 0$ .

Utilisant les valeurs singulières de  $F$  notées  $v_1(F)$ ,  $v_2(F)$  et  $v_3(F)$ , puisque pour tout  $\gamma \geq 1$  l'application  $v = (v_i) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (v_1^\gamma + v_2^\gamma + v_3^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}$  est une norme sur  $\mathbb{R}^3$  et puisque toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, il existe une constante  $l > 0$  telle que :

$$\left( v_1(F)^4 + v_2(F)^4 + v_3(F)^4 \right)^{\frac{1}{4}} \geq l \left( v_1(F)^2 + v_2(F)^2 + v_3(F)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

soit

$$\|F^T F\|^2 \geq l^4 \|F\|^4.$$

Par ailleurs,  $\Gamma(\delta) = c\delta^2 - d' \ln \delta = \frac{c}{2}\delta^2 + \frac{c}{2}\delta^2 - d' \ln \delta$ . Sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , la fonction  $\eta : \delta \mapsto \frac{c}{2}\delta^2 - d' \ln \delta$  atteint son minimum en  $\delta = \sqrt{\frac{d'}{c}}$  et  $\eta\left(\sqrt{\frac{d'}{c}}\right) = \frac{d'}{2} - \frac{d'}{2} \ln \frac{d'}{c}$ . Par conséquent,  $\forall \delta \in \mathbb{R}^{+*}$ ,

$$\Gamma(\delta) \geq \frac{c}{2}\delta^2 + \frac{d'}{2} - \frac{d'}{2} \ln \frac{d'}{c}$$

et

$$\begin{aligned} I(\varphi) &\geq a_2 l^4 \|\nabla\varphi\|_{L^4(\Omega, M_3)}^4 + b \|\text{cof}(\nabla\varphi)\|_{L^2(\Omega, M_3)}^2 + \frac{c}{2} \|\det(\nabla\varphi)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{d'}{2} - \frac{d'}{2} \ln \frac{d'}{c} - 2\nu \langle \rho(\varphi), \tilde{w} \rangle_{3N}. \end{aligned}$$

## 8.2 Existence de minimiseurs

L'inégalité de Poincaré généralisée nous donne l'existence d'une constante  $k_1 > 0$  telle que :

$$\|\varphi\|_{L^4(\Omega, \mathbb{R}^3)}^4 \leq k_1 \left( \|\nabla\varphi\|_{L^4(\Omega, M_3)}^4 + \left| \int_{\partial\Omega} \varphi(x) d\sigma \right|^4 \right).$$

Mais  $\varphi = \text{Id}$  sur  $\partial\Omega$  donc  $\|\varphi\|_{L^4(\Omega, \mathbb{R}^3)}^4 \leq k_1 \|\nabla\varphi\|_{L^4(\Omega, M_3)}^4 + k_2$ , avec  $k_2 > 0$  constante et finalement :

$$\|\varphi\|_{W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)}^4 \leq (k_1 + 1) \|\nabla\varphi\|_{L^4(\Omega, M_3)}^4 + k_2.$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} I(\varphi) &\geq \frac{a_2 l^4}{k_1 + 1} \|\varphi\|_{W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)}^4 + b \|\text{cof}(\nabla\varphi)\|_{L^2(\Omega, M_3)}^2 + \frac{c}{2} \|\det(\nabla\varphi)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{d'}{2} - \frac{d'}{2} \ln \frac{d'}{c} - \frac{k_2 a_2 l^4}{k_1 + 1} - 2\nu \langle \rho(\varphi), \tilde{w} \rangle_{3N}. \end{aligned}$$

La dernière partie de cette étape s'appuie sur le résultat d'injection continue de  $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  dans  $C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ . D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle \rho(\varphi), \tilde{w} \rangle_{3N}| \leq \langle \rho(\varphi) \rangle_{3N} \langle \tilde{w} \rangle_{3N}.$$

Par ailleurs,  $\langle \rho(\varphi) \rangle_{3N} \leq \sqrt{N} \|\varphi\|_{C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)} \leq k_3 \sqrt{N} \|\varphi\|_{W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)}$  du fait de l'injection continue de  $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  dans  $C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ ,  $k_3 > 0$  étant une constante indépendante de  $\varphi$ . Enfin, l'inégalité de Young avec  $\varepsilon$  nous permet de conclure que :

$$|\langle \rho(\varphi), \tilde{w} \rangle_{3N}| \leq \varepsilon N^2 k_3^4 \|\varphi\|_{W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)}^4 + C(\varepsilon) \langle \tilde{w} \rangle_{3N}^{\frac{4}{3}},$$

avec  $C(\varepsilon) = (4\varepsilon)^{-\frac{1}{3}} \frac{3}{4}$ .

En prenant  $\varepsilon$  suffisamment petit et en rassemblant les précédents résultats, on aboutit à une inégalité de coercivité du type (8.9).

Dans la deuxième étape, on introduit une suite minimisante  $(\varphi^k) \in \mathcal{W}$ . Par définition, on a donc :

$$I(\varphi^k) \longrightarrow \inf_{\Psi \in \mathcal{W}} I(\Psi) \text{ quand } k \rightarrow +\infty.$$

On a, par hypothèse, l'existence de  $\tilde{\varphi} \in \mathcal{W}$  telle que  $I(\tilde{\varphi}) < +\infty$ . On peut toujours supposer que  $I(\varphi^k) \leq I(\tilde{\varphi}) + 1$  de sorte que l'inégalité de coercivité (8.9) nous donne que  $\varphi^k$  est bornée dans  $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $\text{cof}(\nabla\varphi^k)$  est bornée dans  $L^2(\Omega, M_3)$  et  $\det(\nabla\varphi^k)$  est borné dans  $L^2(\Omega)$ . On peut donc extraire une sous-suite, toujours notée  $(\varphi^k)$ , telle que :

$$\begin{cases} \varphi^k \rightharpoonup \bar{\varphi} & \text{dans } W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3), \\ \text{cof}(\nabla\varphi^k) \rightharpoonup H & \text{dans } L^2(\Omega, M_3), \\ \det(\nabla\varphi^k) \rightharpoonup \bar{\delta} & \text{dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

Le théorème de continuité faible des mineurs nous permet alors de conclure que  $H = \text{cof}(\nabla\bar{\varphi})$  et  $\bar{\delta} = \det(\nabla\bar{\varphi})$ .

La dernière étape consiste à faire tendre  $k$  vers  $+\infty$ . La fonctionnelle  $J$  définie par :

$$J(\Psi, H, \delta) = \int_{\Omega} \mathbb{W}^*(\nabla\Psi(x), H(x), \delta(x)) dx$$

avec  $\mathbb{W}^*(\nabla\Psi, H, \delta) = a_1 \|\nabla\Psi\|^2 + a_2 \|\nabla\Psi^T \nabla\Psi\|^2 + b\|H\|^2 + \Gamma(\delta)$  est définie sur  $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega, M_3) \times L^2(\Omega)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Elle est convexe (grâce à l'argument de polyconvexité) et fortement séquentiellement semi-continue inférieure puisque  $\mathbb{W}^*$  est convexe et continue. Elle est donc faiblement séquentiellement semi-continue inférieure et

$$J(\bar{\varphi}, \text{cof}(\nabla\bar{\varphi}), \det(\nabla\bar{\varphi})) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} J(\varphi^k, \text{cof}(\nabla\varphi^k), \det(\nabla\varphi^k)).$$

Le théorème d'injection de Rellich-Kondrachov nous donne que  $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  s'injecte de façon compacte dans  $C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ , de sorte que la convergence faible dans  $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  implique la convergence forte dans  $C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ . En conséquence, la suite  $(\varphi^k)$  converge uniformément vers  $\bar{\varphi}$ . Il est alors aisé de remarquer que  $\langle \rho(\varphi^k), \tilde{w} \rangle_{3N} \rightarrow \langle \rho(\bar{\varphi}), \tilde{w} \rangle_{3N}$  quand  $k \rightarrow +\infty$  en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De même,  $\langle \rho(\varphi^k) \rangle_{3N}^2 \rightarrow \langle \rho(\bar{\varphi}) \rangle_{3N}^2$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . Pour conclure, comme  $T$  est uniformément continue, on peut prouver que  $(T(\varphi^k) - R)^2$  converge uniformément vers  $(T(\bar{\varphi}) - R)^2$ . Par application du lemme de Fatou, il s'ensuit que  $\frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (T(\bar{\varphi}) - R)^2 dx \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (T(\varphi^k) - R)^2 dx$  et en définitive,  $I(\bar{\varphi}) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} I(\varphi^k)$ . Il reste à démontrer que  $\bar{\varphi} \in \mathcal{W}$ . Par continuité de la trace,  $\bar{\varphi} = \text{Id}$  sur  $\partial\Omega$ . Par ailleurs,  $\bar{\varphi} \in W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $\text{cof}(\nabla\bar{\varphi}) \in L^2(\Omega, M_3)$  et  $\det(\nabla\bar{\varphi}) \in L^2(\Omega)$  puisque  $I(\bar{\varphi}) < +\infty$ . Enfin, comme

$$\mathbb{W}^*(\nabla\bar{\varphi}(x), \text{cof}(\nabla\bar{\varphi}(x)), \det(\nabla\bar{\varphi}(x))) = +\infty \text{ quand } \det(\nabla\bar{\varphi}(x)) \leq 0,$$

l'ensemble sur lequel cela a lieu doit être de mesure nulle. □

### 8.3 Un résultat de convergence

Dans cette section, on établit un résultat théorique de convergence quand le nombre de contraintes géométriques croît vers l'infini. Ce résultat a surtout un intérêt théorique puisqu'il souligne le caractère bien posé du modèle mais a peu d'intérêt en pratique dans la mesure où le nombre de données est généralement limité.

La preuve est fondée sur des travaux antérieurs liés à l'application des  $D^m$ -splines en théorie de l'approximation qui ont été développés dans [3] et [80].

Soit  $D$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^{+*}$  admettant 0 comme point d'accumulation. Soit  $d \in D$  et  $A^d$  un ensemble ordonné de  $N = N(d)$  points distincts de  $\bar{\Omega}$ . On suppose que  $\sup_{x \in \Omega} \delta(x, A^d) = d$ , avec  $\delta$

### 8.3 Un résultat de convergence

la distance euclidienne dans  $\mathbb{R}^3$ . Pour tout  $d \in D$ , on note  $\rho^d$  l'application définie par :

$$\begin{aligned} \rho^d: W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3) &\rightarrow (\mathbb{R}^3)^N \\ \varphi &\mapsto \rho^d(\varphi) = ((\varphi(a))_{a \in A^d})^T. \end{aligned}$$

On note également  $\tilde{\omega}^d = (\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_{N(d)})$  les points de contrôle homologues à  $w^d = (w_1, \dots, w_{N(d)})$  sur l'image *Template*  $T$ . On a donc introduit la nouvelle écriture  $A^d = \{w_1, \dots, w_{N(d)}\}$ .

#### **Théorème 8.3.1**

Supposons qu'il existe  $\hat{\varphi} \in W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  telle que pour tout  $d \in D$ ,  $\rho^d(\hat{\varphi}) = \tilde{\omega}^d$ ,  $\text{cof}(\nabla \hat{\varphi}) \in L^2(\Omega, M_3)$ ,  $\det(\nabla \hat{\varphi}) \in L^2(\Omega)$ ,  $\hat{\varphi} = \text{Id}$  sur  $\partial\Omega$  et  $\det(\nabla \hat{\varphi}) > 0$  presque partout. Pour tout  $d$ , notons  $\varphi^d$  un minimiseur de (8.8). Alors, sous les hypothèses précédentes, on a :

$$\lim_{d \rightarrow 0} \|\varphi^d - \hat{\varphi}\|_{C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)} = 0.$$

**Preuve** La preuve se décompose en trois étapes.

On commence par prouver que la suite  $(\varphi^d)_{d \in D \cap ]0, \eta']}$  ( $\eta' > 0$  fixé) est bornée dans  $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  indépendamment de  $d$ . Pour cela, on remarque que :

$$\frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (T(\varphi^d) - R)^2 dx + \int_{\Omega} W(\nabla \varphi^d) dx + \nu \langle \rho^d(\varphi^d) - \tilde{\omega}^d \rangle_{3N(d)}^2 \leq \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (T(\hat{\varphi}) - R)^2 dx + \int_{\Omega} W(\nabla \hat{\varphi}) dx.$$

Utilisant une inégalité de coercivité du même type que (8.9) (on remarque en particulier que le minimum de la fonction  $\Gamma$  est atteint en  $\sqrt{\frac{d'}{2c}}$  et vaut  $\frac{d'}{2} - d' \ln \sqrt{\frac{d'}{2c}}$ ), on en conclut que  $(\varphi^d)_{d \in D \cap ]0, \eta']}$  est bornée dans  $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  indépendamment de  $d$ . On peut donc extraire une sous-suite  $(\varphi^{d_l})$  avec  $\lim_{l \rightarrow +\infty} d_l = 0$  (puisque 0 est un point d'accumulation de  $D$ ) qui converge faiblement vers un élément de  $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  noté  $\varphi^*$ .

La seconde étape consiste à prouver que  $\varphi^* = \hat{\varphi}$ . Dans cette optique, on raisonne par l'absurde. Supposons que  $\varphi^* \neq \hat{\varphi}$ , c'est-à-dire, qu'il existe un sous-ensemble ouvert non-vide  $\aleph$  inclus dans  $\Omega$  et un réel strictement positif  $\alpha'$  tel que  $\forall x \in \aleph$ ,  $\langle \hat{\varphi}(x) - \varphi^*(x) \rangle_3 > \alpha'$ . Posons alors :

$$\xi = 1 + E \left[ \frac{1}{\nu(\alpha')^2} \left\{ \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (T(\hat{\varphi}) - R)^2 dx + \int_{\Omega} W(\nabla \hat{\varphi}) dx + \max \left( 0, -\frac{d'}{2} + d' \ln \sqrt{\frac{d'}{2c}} \right) \right\} \right],$$

$E[\cdot]$  désignant la partie entière de l'argument.

Soit  $B_0 = \{p_{01}, \dots, p_{0\xi}\}$  un sous-ensemble de  $\xi$  points distincts de  $\aleph$ . On a :

$$\forall i = 1, \dots, \xi, \exists (p_{0i}^d)_{d \in D}, \left( \forall d \in D, p_{0i}^d \in A^d \right) \text{ et } \left( p_{0i} = \lim_{d \rightarrow 0} p_{0i}^d \right).$$

Pour tout  $d \in D$ , soit  $B_0^d$  l'ensemble  $\{p_{01}^d, \dots, p_{0\xi}^d\}$ . Comme  $B_0^d \subset A^d$ , on a :

$$\nu \sum_{i=1}^{\xi} \langle \varphi^{d_i}(p_{0i}^{d_i}) - \widehat{\varphi}(p_{0i}^{d_i}) \rangle_3^2 \leq \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (T(\widehat{\varphi}) - R)^2 dx + \int_{\Omega} W(\nabla \widehat{\varphi}) dx + \max \left( 0, -\frac{d'}{2} + d' \ln \sqrt{\frac{d'}{2c}} \right). \quad (8.10)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \langle \varphi^{d_i}(p_{0i}^{d_i}) - \varphi^*(p_{0i}) \rangle_3 &= \langle \varphi^{d_i}(p_{0i}^{d_i}) - \varphi^{d_i}(p_{0i}) + \varphi^{d_i}(p_{0i}) - \varphi^*(p_{0i}) \rangle_3 \\ &\leq \langle \varphi^{d_i}(p_{0i}^{d_i}) - \varphi^{d_i}(p_{0i}) \rangle_3 + \langle \varphi^{d_i}(p_{0i}) - \varphi^*(p_{0i}) \rangle_3. \end{aligned} \quad (8.11)$$

$\varphi^{d_i} \in W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3) \circ C^{0, \frac{1}{4}}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$  donc il existe une constante  $k_4 > 0$  telle que :

$$\langle \varphi^{d_i}(p_{0i}^{d_i}) - \varphi^{d_i}(p_{0i}) \rangle_3 \leq k_4 \langle p_{0i}^{d_i} - p_{0i} \rangle_3^{\frac{1}{4}}.$$

Mais  $\lim_{l \rightarrow +\infty} d_l = 0$  et  $p_{0i} = \lim_{l \rightarrow +\infty} p_{0i}^{d_l}$  donc

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \langle \varphi^{d_l}(p_{0i}^{d_l}) - \varphi^{d_l}(p_{0i}) \rangle_3 = 0.$$

Le théorème de Rellich-Kondrachov nous donne que  $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  s'injecte de façon compacte dans  $C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ . La convergence faible dans  $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  implique donc la convergence forte dans  $C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$  et  $(\varphi^{d_l})$  converge uniformément vers  $\varphi^*$ , soit :

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \langle \varphi^{d_l}(p_{0i}) - \varphi^*(p_{0i}) \rangle_3 = 0.$$

De la relation (8.11), il vient alors :

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \langle \varphi^{d_l}(p_{0i}^{d_l}) - \varphi^*(p_{0i}) \rangle_3 = 0,$$

c'est-à-dire,  $\lim_{l \rightarrow +\infty} \varphi^{d_l}(p_{0i}^{d_l}) = \varphi^*(p_{0i})$ . Faisant alors tendre  $l$  vers  $+\infty$  dans (9.11), on en conclut que :

$$\nu \sum_{i=1}^{\xi} \langle \varphi^*(p_{0i}) - \widehat{\varphi}(p_{0i}) \rangle_3^2 \leq \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (T(\widehat{\varphi}) - R)^2 dx + \int_{\Omega} W(\nabla \widehat{\varphi}) dx + \max \left( 0, -\frac{d'}{2} + d' \ln \sqrt{\frac{d'}{2c}} \right),$$

et par conséquent,

$$\nu \xi (\alpha')^2 \leq \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (T(\widehat{\varphi}) - R)^2 dx + \int_{\Omega} W(\nabla \widehat{\varphi}) dx + \max \left( 0, -\frac{d'}{2} + d' \ln \sqrt{\frac{d'}{2c}} \right).$$

Cette dernière inégalité contredit le choix de  $\xi$ . D'où  $\varphi^* = \widehat{\varphi}$ . La suite  $(\varphi^{d_l})$  converge donc faiblement vers  $\widehat{\varphi}$  dans  $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , et par suite, uniformément vers  $\widehat{\varphi}$ .

La dernière étape de la preuve consiste à prouver que  $(\varphi^d)_{d \in D \cap ]0, \eta]}$  converge uniformément vers

## 8.4 Résolution numérique

---

$\widehat{\varphi}$  en utilisant, une fois encore, un raisonnement par l'absurde. Supposons que  $\|\varphi^d - \widehat{\varphi}\|_{C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)}$  ne tend pas vers 0 quand  $d$  tend vers 0. Cela signifie qu'il existe un réel  $\alpha > 0$  et une suite  $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} d_k = 0$  et  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\|\varphi^{d_k} - \widehat{\varphi}\|_{C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)} > \alpha. \quad (8.12)$$

Suivant alors les mêmes arguments que précédemment, on construit une sous-suite de  $(\varphi^{d_k})_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge uniformément vers  $\widehat{\varphi}$ , ce qui contredit (8.12).  $\square$

## 8.4 Résolution numérique

L'algorithme exigeant une évaluation de l'image *Template*  $T$  en tout point  $\varphi(x)$ , on considère une version régulière de  $T$  obtenue en interpolant les données fournies par la grille image. On suppose également que  $T$  est nulle en dehors du domaine, c'est-à-dire que  $T(x) = 0$  si  $x \notin \Omega$ . Comme suggéré par Modersitzki dans [95], Chapitre 3, section 3.6.1, on utilise une résolution multi-échelles pour l'étape d'interpolation par B-splines cubiques. Cette approche introduit un paramètre pondérant la régularité et la proximité des données. En particulier, ce paramètre peut être choisi en fonction de la connaissance a priori du bruit présent dans les données. Ainsi, nous utilisons une approche d'interpolation par splines multi-échelles et nous cherchons la spline  $\mathcal{T}$  qui minimise le problème d'interpolation relaxé incluant un terme d'attache aux données et une pénalisation sur les dérivées partielles secondes de  $\mathcal{T}$  avec un facteur de régularité  $\theta$ . Si  $\theta = 0$ , alors le problème est un problème d'interpolation strict. Lorsque  $\theta > 0$ , l'interpolant est lisse mais ne passe pas nécessairement par tous les points de l'image  $T$  (voir chapitre 7 pour plus de détails).

Aussi pour l'étape d'optimisation, nous adoptons également une représentation multi-échelle des données (voir Chapitre 3, section 3.7 de [95]).

Concernant la méthode d'optimisation choisie, nous avons opté pour deux méthodes de résolution fondées sur une technique du découplage.

La première introduit une variable auxiliaire qui permet de se ramener à un problème de minimisation sous contraintes et d'utiliser la méthode du Lagrangien augmenté. De cette façon, la difficulté liée à la résolution des équations de Lagrange en  $\varphi$  est contournée. Malgré la simplicité qu'elle implique, nous verrons que cette résolution n'est pas satisfaisante puisqu'elle ne suppose plus que  $\varphi$  est dans  $\mathbb{W}^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ .

La seconde méthode numérique de résolution s'inspire des travaux de Negrón Marrero [101]. Celle-ci suppose que  $\varphi$  évolue dans  $\mathbb{W}^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Elle est alors plus cohérente avec les résultats théoriques d'existence et de convergence démontrés précédemment.

### 8.4.1 Lagrangien augmenté

Afin de contourner la difficulté de résolution des équations de Euler-Lagrange satisfaites par  $\varphi$ , nous introduisons une variable auxiliaire  $V$  telle que  $V = \nabla\varphi$ . Le régularisateur est ainsi

appliqué non plus à  $\nabla\varphi$  mais à  $V$ . Ceci implique un problème d'optimisation sous contraintes :

$$\min_{\varphi, V} \mathcal{J}(\varphi, V) \quad \text{tel que} \quad V = \nabla\varphi, \quad (8.13)$$

$$\text{avec } \mathcal{J}(\varphi, V) = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (T(\varphi) - R)^2 dx + \nu \langle \rho(\varphi) - \tilde{w} \rangle_{3N}^2 + \int_{\Omega} W(V) dx.$$

On propose alors de résoudre le problème (8.8) par une méthode de Lagrangien augmenté. Cette technique est connue pour être plus robuste qu'une simple méthode de descente (voir [58] et [103] pour plus de détails). Elle a été utilisée dans le cadre du recalage d'images par Lin et al. [89]. Nous nous limitons au cas de la dimension 2, de sorte que la composante  $\|\text{cof}(\nabla\varphi)\|^2$  n'intervienne plus. Introduisons donc les multiplicateurs de Lagrange  $\beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$ , et  $\alpha$  une constante positive. Dans notre cas, ceci conduit au problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\varphi, V} \max_{\beta} \mathcal{L}_{\alpha}(\varphi, V, \beta) &= \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (T(\varphi(x)) - R(x))^2 dx + \nu \langle \rho(\varphi) - \tilde{w} \rangle_{3N}^2 \\ &+ \int_{\Omega} a_1 \|V\|^2 + a_2 \|V^T V\|^2 + \Gamma(\det V) dx \\ &+ \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \|V - \nabla\varphi\|^2 dx + \int_{\Omega} \langle \beta, (V - \nabla\varphi) \rangle dx. \end{aligned}$$

L'algorithme peut être résumé de la façon suivante.

- 1: Initialisation  $\beta^0 = 0$ ,  $V^0 = I_2$  et  $\varphi^0 = Id$ .
- 2: Pour  $k = 0, 1, 2, \dots$ , calculer

$$(\varphi^{k+1}, V^{k+1}) = \arg \min_{\varphi, V} \mathcal{L}_{\alpha}(\varphi, V, \beta^k) \quad (8.14)$$

$$\text{Mettre à jour } \beta^{k+1} = \beta^k + \alpha (V^{k+1} - \nabla\varphi^{k+1}).$$

Algorithme 1: Modèle de recalage sous contraintes fondé sur la densité d'énergie interne d'un matériau de type Ciarlet-Geymonat

Plus précisément, le problème est divisé en deux sous-problèmes, le premier est exprimé en  $V$  et le second en  $\varphi$ . On résout alternativement chaque problème. Numériquement, les équations d'Euler-Lagrange en  $\varphi$  et  $V$  sont résolues en utilisant une méthode de descente de gradient paramétrée par un temps artificiel  $t > 0$ . Pour  $\varphi$  fixée, on résout  $\arg \min_V \mathcal{L}_{\alpha}(\varphi, V, \beta^k)$ .

Puis, on résout  $\arg \min_{\varphi} \mathcal{L}_{\alpha}(\varphi, V, \beta^k)$  pour un  $V$  donné.

Posons  $D = \det(V)$  et  $C = V_{11}V_{12} + V_{21}V_{22}$ . Le premier problème est le suivant :

$$\arg \min_V = \int_{\Omega} a_1 \|V\|^2 + a_2 \|V^T V\|^2 + \Gamma(D) dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \|V - \nabla\varphi\|^2 dx + \int_{\Omega} \langle \beta^k, V \rangle dx. \quad (8.15)$$

Les équations d'Euler-Lagrange associées sont résolues pour chaque composante de la matrice  $V = (V_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$  :

$$\begin{aligned}
 0 &= 2a_1V_{11} + 4a_2V_{11}(V_{11}^2 + V_{21}^2) + 4a_2V_{12}C + \Gamma'(D)V_{22} + \alpha(V_{11} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}) + \beta_{11} \\
 0 &= 2a_1V_{12} + 4a_2V_{12}(V_{12}^2 + V_{22}^2) + 4a_2V_{11}C - \Gamma'(D)V_{21} + \alpha(V_{12} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}) + \beta_{12} \\
 0 &= 2a_1V_{21} + 4a_2V_{21}(V_{11}^2 + V_{21}^2) + 4a_2V_{22}C - \Gamma'(D)V_{12} + \alpha(V_{21} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}) + \beta_{21} \\
 0 &= 2a_1V_{22} + 4a_2V_{22}(V_{12}^2 + V_{22}^2) + 4a_2V_{21}C + \Gamma'(D)V_{11} + \alpha(V_{22} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}) + \beta_{22}.
 \end{aligned}$$

Le second problème est le suivant :

$$\arg \min_{\varphi} \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (T(\varphi) - R)^2 dx + \nu \sum_{i=1}^N \langle \varphi(w_i) - \tilde{w}_i \rangle_{\frac{1}{2}}^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \|V - \nabla\varphi\|^2 dx - \int_{\Omega} \langle \beta^k, \nabla\varphi \rangle dx.$$

On en déduit les équations vectorielles d'Euler-Lagrange pour  $\varphi$  :

$$0 = \lambda(T(\varphi) - R)\nabla T(\varphi) + 2\nu \sum_{i=1}^N (\varphi(w_i) - \tilde{w}_i)\delta_{w_i} + \alpha \begin{pmatrix} \operatorname{div} V_1 \\ \operatorname{div} V_2 \end{pmatrix} - \alpha \Delta\varphi + \begin{pmatrix} \operatorname{div} \beta_1 \\ \operatorname{div} \beta_2 \end{pmatrix},$$

où  $V_1$  est la première ligne de  $V$ ,  $V_2$  la seconde ligne de  $V$  et  $\beta_1$  et  $\beta_2$  la première et la seconde ligne de  $\beta$ .

### 8.4.2 Méthode numérique fondée sur le découplage

Dans ce qui suit, nous proposons une méthode numérique de résolution du problème fondée sur le principe de découplage introduit par Negrón Marrero [101] et nous nous limitons au cas de la dimension 2, de sorte que la composante  $\|\operatorname{cof}(\nabla\varphi)\|^2$  n'intervient plus. Nous conservons l'idée de Negrón Marrero qui consiste à introduire une variable auxiliaire  $V$  représentant la matrice jacobienne de la déformation  $\nabla\varphi$  et à formuler un problème découplé sous contrainte d'inégalité associé au problème initial (8.8). L'idée sous-jacente et qui motive notre travail est d'éliminer une partie de la non-linéarité portant sur les dérivées partielles des composantes de  $\varphi$  apparaissant dans les équations d'Euler-Lagrange. Néanmoins, notre approche est différente de celle développée dans [101] dans la mesure où l'auteur se focalise sur des résultats théoriques relatifs au problème découplé discrétisé *via* une méthode éléments finis et pour lequel l'existence de solutions est garantie.

Par souci de simplicité dans les écritures, nous remplaçons la quantité  $\|\nabla\varphi^T \nabla\varphi\|^2$  par  $\|\nabla\varphi\|^4$ . Rappelons que si nous exprimons  $\|F^T F\|^2$  en termes des valeurs singulières de  $F$ ,  $v_1(F)$  et  $v_2(F)$ ,  $\frac{1}{\|F^T F\|^2} = v_1(F)^4 + v_2(F)^4$ . Puisque pour tout  $\gamma \geq 1$ , l'application  $v = (v_i) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (v_1^\gamma + v_2^\gamma)^\frac{1}{\gamma}$  est une norme sur  $\mathbb{R}^2$  et puisque toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, il existe des constantes  $l_1, l_2 > 0$  telles que :

$$l_1 \left( v_1^2 + v_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( v_1^4 + v_2^4 \right)^{\frac{1}{4}} \leq l_2 \left( v_1^2 + v_2^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

soit,

$$l_1^4 \|F\|^4 \leq \|F^T F\|^2 \leq l_2^4 \|F\|^4.$$

Le problème considéré en dimension 2 est alors défini par :

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{W}} \left\{ I(\varphi) = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (T(\varphi(x)) - R(x))^2 dx + \int_{\Omega} W(\nabla \varphi) dx + \nu \langle \rho(\varphi) - \tilde{\omega} \rangle_{2N}^2 \right\},$$

avec  $W(F) = a_1 \|F\|^2 + a_2 \|F\|^4 + \Gamma(\det(F))$ ,  $a_1, a_2 > 0$ ,  $\Gamma(\delta) = c\delta^2 - d' \ln \delta$ ,  $c > 0$ ,  $d' > 0$ ,  $\Gamma$  étant une fonction convexe, deux fois dérivable en 1, satisfaisant  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Gamma(\delta) = +\infty$  et  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} W(F) = +\infty$  quand  $\det(F) \rightarrow 0^+$ .

Par ailleurs,

$$\mathcal{W} = \{ \varphi \in \mathbb{W}^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2), \det(\nabla \varphi) \in L^2(\Omega), \varphi = \text{Id sur } \partial\Omega \text{ et } \det(\nabla \varphi) > 0 \text{ presque partout} \}.$$

On définit le problème découpé à l'aide de la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} I(\varphi, V) &= \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (T(\varphi(x)) - R(x))^2 dx + \nu \langle \rho(\varphi) - \tilde{\omega} \rangle_{2N}^2 \\ &+ \int_{\Omega} \left\{ a_1 \|\nabla \varphi\|^2 + \frac{a_2}{2} \|\nabla \varphi\|^4 \right\} dx \\ &+ \int_{\Omega} \left\{ \frac{a_2}{2} \|V\|^4 + \Gamma(\det(V)) \right\} dx. \end{aligned} \tag{8.16}$$

On pose :

$$\widehat{\mathcal{W}} = \{ \varphi \in \mathbb{W}^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2), \det(\nabla \varphi) \in L^2(\Omega), \varphi = \text{Id sur } \partial\Omega \}$$

et

$$\widehat{\mathcal{X}} = \{ V \in L^4(\Omega, M_2), \det(V) \in L^2(\Omega), \det(V) > 0 \text{ presque partout} \}.$$

Le problème découpé consiste alors à minimiser (8.16) sur  $\widehat{\mathcal{W}} \times \widehat{\mathcal{X}}$  sous la contrainte  $\int_{\Omega} \|\nabla \varphi(x) - V(x)\|^2 dx \leq \varepsilon$ , avec  $\varepsilon > 0$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  fixé. L'idée est évidemment de faire tendre  $\varepsilon$  vers 0. On a le théorème suivant.

**Théorème 8.4.1**

Soit  $(\varepsilon_j)$  une suite telle que  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \varepsilon_j = 0$ . Soit également  $(\varphi_k(\varepsilon_j), V_k(\varepsilon_j))$  une suite minimisante du problème de minimisation découpé sous contrainte d'inégalité relatif à  $\varepsilon = \varepsilon_j$ . Alors il existe une sous-suite notée  $(\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}), V_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}))$  de  $(\varphi_k(\varepsilon_j), V_k(\varepsilon_j))$  et un minimiseur  $\bar{\varphi}$  de  $I(\varphi)$  sur  $\mathcal{W}$  tels que :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} I \left( \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}), V_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}) \right) = I(\bar{\varphi}) = \inf_{\varphi \in \mathcal{W}} I(\varphi).$$

## 8.4 Résolution numérique

**Preuve** Soit  $\varepsilon > 0$  donné,  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  fixé. Il existe  $\widehat{\varphi}_\varepsilon \in \mathcal{W}$  telle que :

$$\inf_{(\varphi, V) \in \widehat{\mathcal{W}} \times \widehat{\mathcal{X}}} I(\varphi, V) \leq I(\widehat{\varphi}_\varepsilon, \nabla \widehat{\varphi}_\varepsilon) = I(\widehat{\varphi}_\varepsilon) < \inf_{\varphi \in \mathcal{W}} I(\varphi) + \varepsilon \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{W}} I(\varphi) + \varepsilon_0.$$

Par conséquent,

$$\inf_{(\varphi, V) \in \widehat{\mathcal{W}} \times \widehat{\mathcal{X}}} I(\varphi, V) \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{W}} I(\varphi) + \varepsilon. \quad (8.17)$$

Soit  $(\varepsilon_j)$  une suite telle que  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \varepsilon_j = 0$ . Considérons alors une suite minimisante notée  $(\varphi_k(\varepsilon_j), V_k(\varepsilon_j))$  pour le problème découpé défini avec  $\varepsilon = \varepsilon_j$ , soit :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} I(\varphi_k(\varepsilon_j), V_k(\varepsilon_j)) = \inf_{(\varphi, V) \in \widehat{\mathcal{W}} \times \widehat{\mathcal{X}}} I(\varphi, V).$$

En particulier,  $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\left( k \geq N(\epsilon) \implies I(\varphi_k(\varepsilon_j), V_k(\varepsilon_j)) \leq \inf_{(\varphi, V) \in \widehat{\mathcal{W}} \times \widehat{\mathcal{X}}} I(\varphi, V) + \epsilon \right).$$

Prenons en particulier  $\epsilon = \varepsilon_j$ . Il existe donc  $N(\varepsilon_j) \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\left( k \geq N(\varepsilon_j) \implies I(\varphi_k(\varepsilon_j), V_k(\varepsilon_j)) \leq \inf_{(\varphi, V) \in \widehat{\mathcal{W}} \times \widehat{\mathcal{X}}} I(\varphi, V) + \varepsilon_j \right).$$

On pose alors  $k = N(\varepsilon_j)$  et l'on obtient :

$$\begin{aligned} I(\varphi_{N(\varepsilon_j)}(\varepsilon_j), V_{N(\varepsilon_j)}(\varepsilon_j)) &\leq \inf_{(\varphi, V) \in \widehat{\mathcal{W}} \times \widehat{\mathcal{X}}} I(\varphi, V) + \varepsilon_j, \\ &\leq \inf_{\varphi \in \mathcal{W}} I(\varphi) + 2\varepsilon_j. \end{aligned}$$

d'après (8.17). En définitive,

$$I(\varphi_{N(\varepsilon_j)}(\varepsilon_j), V_{N(\varepsilon_j)}(\varepsilon_j)) \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{W}} I(\varphi) + 2\varepsilon_j \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{W}} I(\varphi) + 2\varepsilon_0 < +\infty.$$

En établissant une inégalité de coercivité du même type que (8.9) obtenue dans la preuve du théorème 8.2.4, on montre que :

$$\begin{cases} V_{N(\varepsilon_j)}(\varepsilon_j) \text{ est uniformément bornée dans } L^4(\Omega, M_2), \\ \det(V_{N(\varepsilon_j)}(\varepsilon_j)) \text{ est uniformément borné dans } L^2(\Omega), \\ \varphi_{N(\varepsilon_j)}(\varepsilon_j) \text{ est uniformément bornée dans } W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2). \end{cases}$$

On peut donc extraire une sous-suite notée  $(V_{N(\varepsilon_{\Psi(j)})}(\varepsilon_{\Psi(j)}))$  telle que :

$$\begin{cases} V_{N(\varepsilon_{\Psi(j)})}(\varepsilon_{\Psi(j)}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{V} \text{ dans } L^4(\Omega, M_2), \\ \det(V_{N(\varepsilon_{\Psi(j)})}(\varepsilon_{\Psi(j)})) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{\delta} \text{ dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

De même,  $(\varphi_{N(\varepsilon_j)}(\varepsilon_j))$  est bornée dans  $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2)$  et en conséquence,  $(\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi(j)})}(\varepsilon_{\Psi(j)}))$  l'est également. On peut donc extraire une sous-suite notée  $(\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)}))$  telle que :

$$\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{\varphi} \text{ dans } W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2).$$

On a donc :

$$\begin{cases} V_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{V} \text{ dans } L^4(\Omega, M_2), \\ \det(V_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{\delta} \text{ dans } L^2(\Omega), \\ \text{et } \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{\varphi} \text{ dans } W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2). \end{cases}$$

Posons désormais  $z_j = \nabla \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)}) - V_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})$ . Puisque  $\varepsilon_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$ , la contrainte implique que  $z_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$  dans  $L^2(\Omega, M_2)$  et en conséquence,  $\nabla \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{V}$  dans  $L^2(\Omega, M_2)$ .

En effet,  $\forall \varphi \in L^2(\Omega, M_2)$ ,  $\int_{\Omega} z_j : \varphi \, dx \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$ . Soit,

$$\int_{\Omega} \left( \nabla \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)}) - V_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)}) \right) : \varphi \, dx \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0.$$

Mais  $V_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{V}$  dans  $L^4(\Omega, M_2)$  donc dans  $L^2(\Omega, M_2)$  et  $\forall \varphi \in L^2(\Omega, M_2)$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)}) : \varphi \, dx \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \bar{V} : \varphi \, dx.$$

De même,  $\nabla \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \nabla \bar{\varphi}$  dans  $L^4(\Omega, M_2)$ , donc par unicité de la limite  $\nabla \bar{\varphi} = \bar{V}$ .

Par ailleurs,  $V_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)}) = \nabla \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)}) - z_j$  avec  $z_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$  dans  $L^2(\Omega, M_2)$ . Par conséquent,

$$\det(V_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})) = \det(\nabla \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})) + d_j,$$

avec

$$\begin{aligned} d_j = & (z_j)_{11}(z_j)_{22} - (z_j)_{21}(z_j)_{12} - (z_j)_{22} \frac{\partial \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}^1(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}{\partial x} - (z_j)_{11} \frac{\partial \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}^2(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}{\partial y} \\ & + (z_j)_{21} \frac{\partial \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}^1(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}{\partial y} + (z_j)_{12} \frac{\partial \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}^2(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}{\partial x}, \end{aligned}$$

$((z_j)_{kl})$  désigne l'élément de la  $k^{\text{ème}}$  ligne et de la  $l^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $z_j$  et l'on a posé  $\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)}) = (\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}^1(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)}), \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}^2(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)}))$ .

De fait,

$$\int_{\Omega} |d_j| \, dx \leq \frac{1}{2} \|z_j\|_{L^2(\Omega, M_2)}^2 + \|z_j\|_{L^2(\Omega, M_2)} \|\nabla \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})\|_{L^2(\Omega, M_2)},$$

$\|\nabla \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})\|_{L^2(\Omega, M_2)}$  étant bornée indépendamment de  $j$ . D'où  $d_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$  dans  $L^1(\Omega)$ .

## 8.4 Résolution numérique

Rassemblons alors les précédents résultats :

$$\left\{ \begin{array}{l} \det(V_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{\delta} \text{ dans } L^2(\Omega), \\ \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{\varphi} \text{ dans } W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2), \\ \text{et } \det(V_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})) = \det(\nabla \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})) + d_j \text{ avec } d_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0 \text{ dans } L^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Mais d'après le théorème 1.14, chapitre 1 de [43], si  $\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{\varphi}$  dans  $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2)$  alors  $\det(\nabla \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \det(\nabla \bar{\varphi})$  dans  $L^2(\Omega)$  donc au sens des distributions.

Ainsi,  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \det(V_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})) \varphi \, dx \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \bar{\delta} \varphi \, dx.$$

Mais

$$\int_{\Omega} \det(V_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})) \varphi \, dx = \int_{\Omega} \det(\nabla \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})) \varphi \, dx + \int_{\Omega} d_j \varphi \, dx$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \det(\nabla \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})) \varphi \, dx \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \det(\nabla \bar{\varphi}) \varphi \, dx, \\ \left| \int_{\Omega} d_j \varphi \, dx \right| \leq \|d_j\|_{L^1(\Omega)} \|\varphi\|_{C^0(\bar{\Omega})} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0 \text{ d'après l'inégalité de Hölder.} \end{array} \right.$$

En conséquence,  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \det(\nabla \bar{\varphi}) \varphi \, dx = \int_{\Omega} \bar{\delta} \varphi \, dx$$

et  $\det(\nabla \bar{\varphi}) = \bar{\delta}$  au sens des distributions. Comme  $\det(\nabla \bar{\varphi}) \in L^2(\Omega)$  et  $\bar{\delta} \in L^2(\Omega)$ , on a  $\det(\nabla \bar{\varphi}) = \bar{\delta}$  dans  $L^2(\Omega)$ .

$\mathbb{W}^*(V, \delta) = \frac{a_2}{2} \|V\|^4 + \Gamma(\delta)$  est définie sur  $L^4(\Omega, M_2) \times L^2(\Omega)$  à valeurs dans  $\bar{\mathbb{R}}$ . Cette application est convexe et fortement séquentiellement semi-continue inférieure puisque  $\mathbb{W}^*$  est convexe et continue. Elle est donc faiblement séquentiellement semi-continue inférieure.

En utilisant des arguments analogues à ceux exposés dans la preuve du théorème 8.2.4, on en conclut que :

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{W}} I(\varphi) \leq I(\bar{\varphi}) = I(\bar{\varphi}, \nabla \bar{\varphi}) \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} I\left(\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}), V_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})\right).$$

En effet, puisque le terme de droite est fini, on obtient immédiatement que  $\det(\nabla \bar{\varphi}) > 0$  presque partout. Enfin, par continuité de la trace,  $\bar{\varphi} = \text{Id}$  sur  $\partial\Omega$ . En conséquence,  $\bar{\varphi} \in \mathcal{W}$ .

On a donc obtenu les deux inégalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \inf_{\varphi \in \mathcal{W}} I(\varphi) \leq I(\bar{\varphi}) \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} I\left(\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}), V_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})\right) \text{ et} \\ I\left(\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}), V_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})\right) \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{W}} I(\varphi) + 2\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}. \end{array} \right.$$

En définitive,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} I\left(\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}), V_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})\right) = I(\bar{\varphi}) = \inf_{\varphi \in \mathcal{W}} I(\varphi).$$

□

Pour la partie implémentation et plus précisément concernant l'implémentation de  $\int_{\Omega} \|\nabla \varphi\|^4 dx$ , nous nous sommes inspirés des travaux d'Aubert et Kornprobst [4]. Bien que cette résolution numérique soit plus cohérente avec la théorie, il s'avère, qu'en pratique, les résultats obtenus sont très similaires pour les deux méthodes. Ainsi, pour des raisons coût de calcul, on préférera la résolution fondée sur la méthode du Lagrangien augmenté.

## 8.5 Applications aux images médicales

Dans cette section, nous proposons d'appliquer le modèle de recalage sous contraintes proposé à des images réelles fournies par le Center for Computational Biology <http://qb3.berkeley.edu/ccb>. Plus précisément, nous souhaitons mettre en relation des images représentant l'expression de gènes sur des coupes de cerveaux de souris avec celles issues d'un atlas. Comme souligné dans [69], pour mieux comprendre le développement et les fonctions des mammifères, les biologistes ont commencé à collecter un grand nombre d'expressions de gènes dans les cerveaux de souris. Ils associent ensuite l'activité spécifique d'un gène à sa localisation dans l'anatomie cérébrale, ce qui leur permet d'avoir une meilleure connaissance du rôle de chaque gène.

Le recalage d'images permet, dans ce cadre, de faciliter l'intégration des données anatomiques, génétiques et physiques de plusieurs objets dans un espace d'étude commun. La base de données d'images a été préalablement segmentée dans le but de faciliter le traitement des données. Ainsi les régions qui ne sont pas associées au cerveau ont été supprimées afin d'obtenir un meilleur calage. Plusieurs travaux ont été développés afin de segmenter automatiquement l'expression d'un gène dans un cerveau (voir par exemple [29]).

Le modèle a été testé sur 5 paires d'images, toutes de taille  $210 \times 210$  pixels. Les résultats sont présentés sur les figures 8.1 à 8.5. Pour chaque figure, on représente les résultats de recalage relatifs à une paire d'images. Pour chaque paire, on peut voir :

- L'image *Reference* sur laquelle sont superposés en vert les points de contrôle manuellement sélectionnés (ligne 1, 1<sup>ère</sup> image en partant de la gauche) ;
- L'image *Template* non déformée avec en bleu les points de contrôle homologues manuellement sélectionnés (ligne 1, 2<sup>ème</sup> image en partant de la gauche) ;
- L'image *Template* recalée avec en rose les nouvelles positions de points de contrôle (Ligne 1 : 3<sup>ème</sup> image en partant de la gauche) ;
- L'image *Template* recalée sur laquelle est superposée la grille de déformation en rouge (ligne 2, 1<sup>ère</sup> image en partant de la gauche) ;
- La différence entre l'image *Reference* et l'image optimale obtenue après recalage (ligne 2, 2<sup>ème</sup> image en partant de la gauche).

## 8.5 Applications aux images médicales

---

Les deux premiers tests nous permettent de comparer nos résultats avec ceux présentés par Lin et al. [89]. Concernant les paires 3, 4 et 5, les images *Reference* et *Template* ont été acquises par différents appareils d'imagerie, on parle alors de recalage multimodal. Bien que ces paires d'images n'aient pas la même modalité, nous faisons usage de la norme  $\mathbb{L}^2$  pour évaluer leur similarité dans le but faciliter les calculs et pour diminuer le temps d'exécution. Le nombre d'itérations de l'algorithme est fixé pour l'ensemble des tests, de même que le pas de temps qui est égal à  $dt = 0.01$  et le pas de la discrétisation  $h$  qui est égal à  $h = 1$ . Les valeurs des paramètres relatifs au régularisateur fondé sur l'élasticité non-linéaire sont  $a_1 = 1000$ ,  $a_2 = 3000/4$ ,  $c = 1.0$ ,  $d = 1.0$ .

Pour chaque recalage, on calcule les quantités suivantes :

- le déterminant de la matrice jacobienne de la déformation  $\det \nabla \varphi$  afin de contrôler qu'il reste toujours positif ;
- la distance moyenne entre les points de contrôle homologues donnée par :

$$LD = \frac{1}{n_l} \langle \rho(\varphi) - \tilde{\omega} \rangle_{3N}^2,$$

avec  $n_l$  le nombre de paires de points de contrôle. Cette information permet d'évaluer la qualité du recalage obtenu. Ainsi, le recalage sera d'autant plus satisfaisant que la distance moyenne  $LD$  entre les points de contrôle homologues sera petite ;

- le temps CPU nécessaire à chaque recalage d'images.

On remarque qu'avec notre méthode, le déterminant de la matrice jacobienne reste positif. Comparativement à la méthode de recalage sous contraintes proposée par Lin et al. dans [89], l'algorithme proposé ne nécessite pas d'étape de correction numérique pour maintenir le déterminant de la matrice jacobienne de la déformation positif. Comme mentionné ci-dessus, la qualité du recalage peut être mesurée en comparant les positions des points de contrôle sur l'image *Reference* représentés en bleu avec ceux de l'image *Template* représentés en rouge sur les figures 8.1 à 8.5. Sur ces exemples, on obtient des distances moyennes de paires de points de contrôle similaires à celles de la méthode de recalage proposée par Lin et al [89]. La qualité du recalage peut également être évaluée sur des critères géométriques ou de forme. Les images représentant la différence entre les images recalées et les images *References* présentées sur les figures 8.1 à 8.5 nous permettent de visualiser les principales différences. Concernant les paires d'images de même modalité, paires 1 représentée sur 8.1 et 2 représentée sur 8.2, on remarque que le recalage non linéaire proposé ici permet d'obtenir des formes quasi-identiques. Seules de petites différences subsistent sur le bord des objets. Ainsi le terme d'attache aux données calculé pour ces deux paires d'images est petit. Concernant les paires 3, 4 et 5 illustrées respectivement sur les figures 8.3, 8.4 et 8.5, on remarque le même type de résultats.

Enfin pour la réalisation du recalage de chaque paire, les temps de calcul enregistrés sont très faibles et autour de 11 secondes. Cela a été rendu possible par une implémentation judicieuse de l'algorithme.

### Optimisation de l'algorithme

Pour diminuer le temps de calcul, l'algorithme proposé a été implémenté en C et doublement optimisé de la manière suivante. Dans un premier temps, les bibliothèques de calculs LAPACK et BLAS ont été mises à profit. La bibliothèque Basic Linear Algebra Subprogram (BLAS) est un ensemble de fonctions standardisées réalisant des opérations de base de l'algèbre linéaire comme des additions de vecteurs ou des multiplications de matrices. Le code de calcul de ces fonctions a été très optimisé, notamment par les constructeurs de calculateurs comme Intel et AMD. LAPACK fournit, entre autres, des routines pour résoudre des systèmes d'équations linéaires. Ensuite, le code a été parallélisé en utilisant OpenMP (voir le site web officiel <http://openmp.org/wp/>).

### 8.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un modèle de recalage sous contrainte qui admet des résultats d'existence et de convergence théorique. De plus, ce modèle fondé sur l'élasticité non linéaire permet d'une part de justifier théoriquement le modèle et d'autre part d'obtenir de larges déformations sans pour autant nécessiter un temps d'exécution prohibitif. Ainsi, des résultats théoriques d'existence et de convergence ont été prouvés démontrant le caractère bien posé du problème de minimisation introduit. De plus, la réduction du temps de calcul a été rendu possible par :

1. le choix de la technique de résolution fondée sur le Lagrangien augmenté qui supprime la non linéarité de  $\nabla\varphi$ ,
2. l'utilisation de schémas de type différences finies dans l'étape de discrétisation,
3. la parallélisation du code de calcul.

Enfin, les applications numériques menées sur des images médicales fournissent des résultats de recalage satisfaisants.

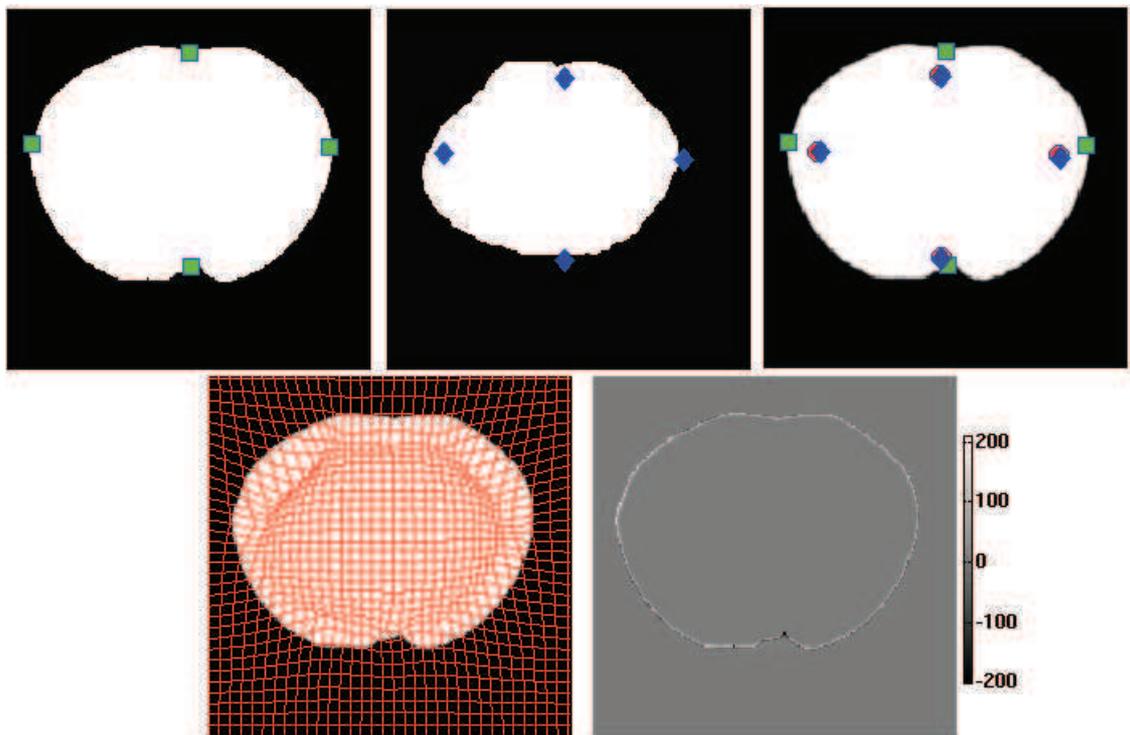


FIGURE 8.1 – Paire 1 : 1<sup>ère</sup> ligne, de gauche à droite : *Reference*  $R$  avec les points de contrôle (en vert) ; *Template*  $T$  avec les points de contrôle homologues (en bleu) ; *Template* déformée  $T \circ \varphi$  avec les points de contrôle homologues en rouge. *Template* déformée sur laquelle est superposée la grille de déformation obtenue ; Différence entre la *Reference* et l'image *Template* déformée par la méthode de recalage  $T \circ \varphi$ . Paramètres :  $\lambda = 1.2$ ,  $\nu = 2.1 \times 10^5$ ,  $\alpha = 6 \times 10^5$ ,  $\min \det \nabla \varphi = 0.1650$ ,  $LD = 0.5733$ , temps d'exécution = 13.13 s.

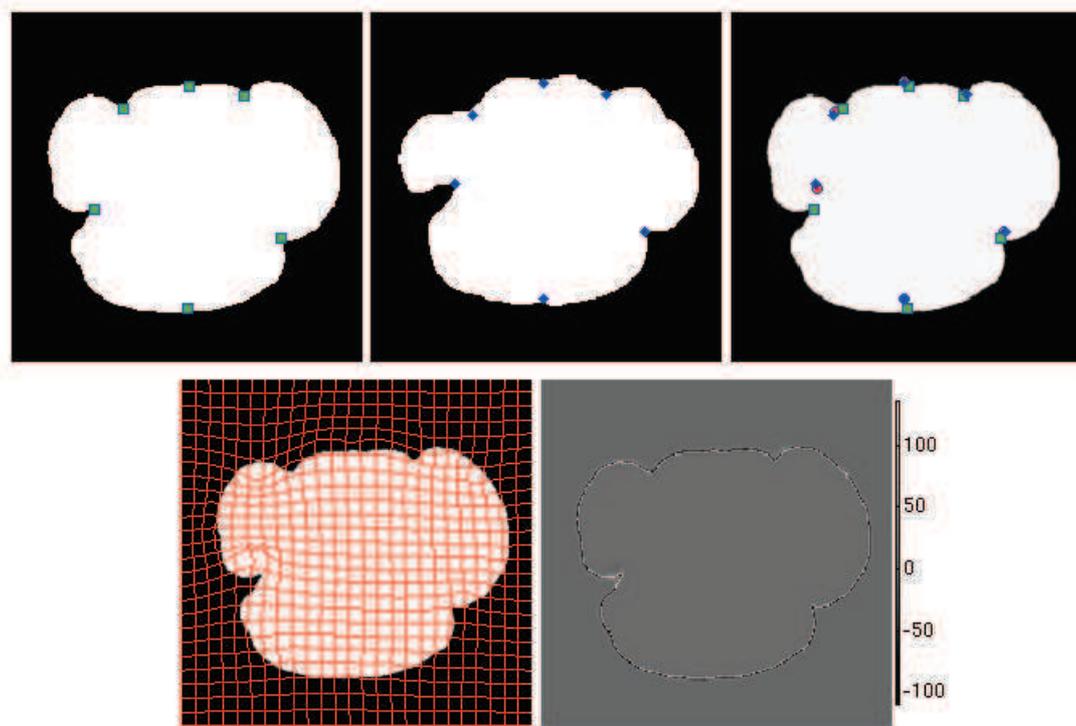


FIGURE 8.2 – Paire 2 : 1<sup>ère</sup> ligne, de gauche à droite : *Reference*  $R$  avec les points de contrôle (en vert); *Template*  $T$  avec les points de contrôle homologues (en bleu); *Template* déformée  $T \circ \varphi$  avec les points de contrôle homologues en rouge. 2<sup>ème</sup> ligne, de gauche à droite : image *Template* déformée sur laquelle est superposée la grille de déformation obtenue; Différence entre la *Reference* et l'image *Template* déformée par la méthode de recalage  $T \circ \varphi$ . Paramètres :  $\lambda = 1$ ,  $\nu = 2 \times 10^4$ ,  $\alpha = 7 \times 10^5$ ,  $\min \det \nabla \varphi = 0.0151$ ,  $LD = 0.2728$ , temps d'exécution = 33s.

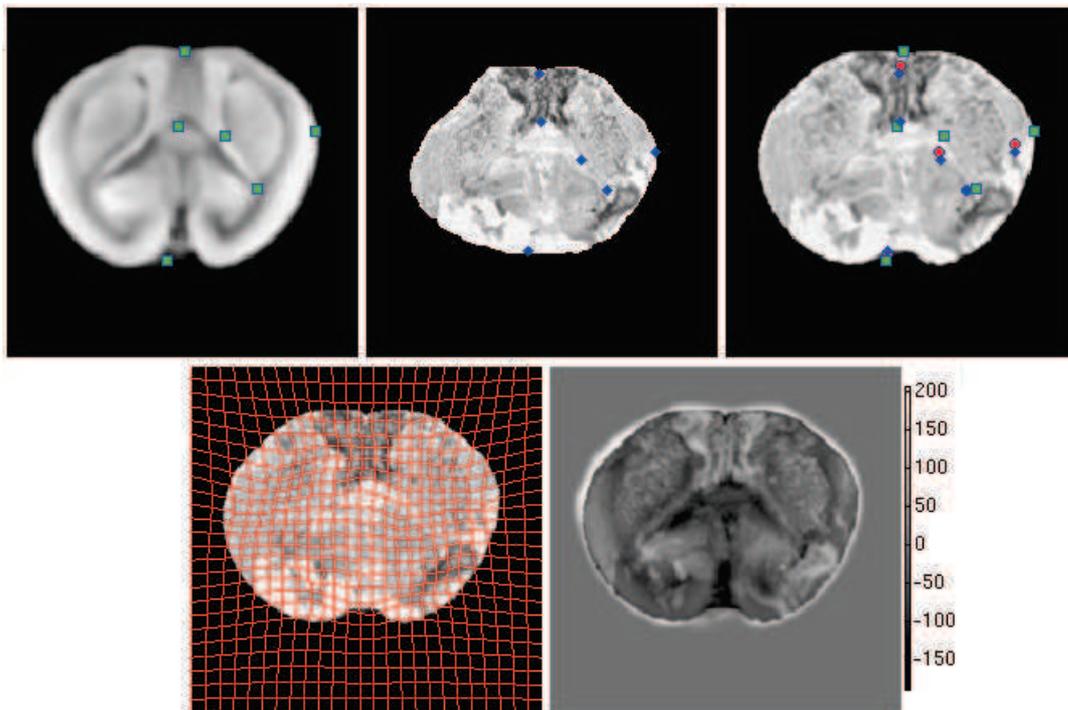


FIGURE 8.3 – Paire 3 : 1<sup>ère</sup> ligne, de gauche à droite : *Reference*  $R$  avec les points de contrôle (en vert); *Template*  $T$  avec les points de contrôle homologues (en bleu); *Template* déformée  $T \circ \varphi$  avec les points de contrôle homologues en rouge. 2<sup>ème</sup> ligne, de gauche à droite : image *Template* déformée sur laquelle est superposée la grille de déformation obtenue; Différence entre la *Reference* et l'image *Template* déformée par la méthode de recalage  $T \circ \varphi$ . Paramètres :  $\lambda = 0.85$ ,  $\nu = 2 \times 10^4$ ,  $\alpha = 7 \times 10^5$ ,  $\min \det \nabla \varphi = 0.0151$ ,  $LD = 0.7392$ , temps d'exécution = 68 s.

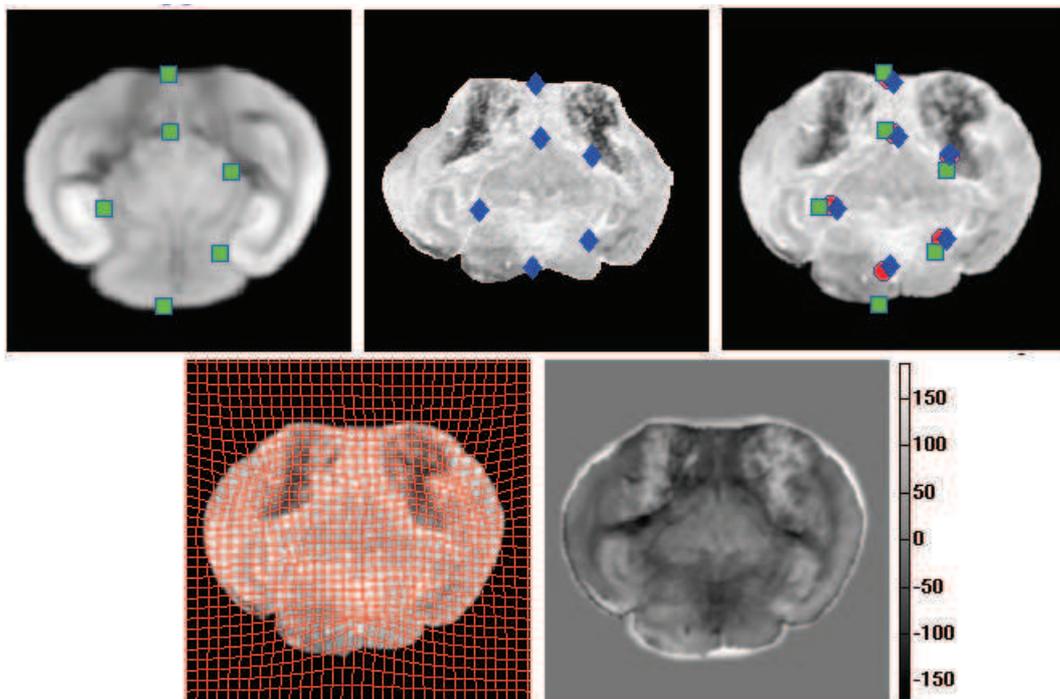


FIGURE 8.4 – Paire 4 : 1<sup>ère</sup> ligne, de gauche à droite : *Reference*  $R$  avec les points de contrôle (en vert); *Template*  $T$  avec les points de contrôle homologues (en bleu); *Template* déformée  $T \circ \varphi$  avec les points de contrôle homologues en rouge. 2<sup>ème</sup> ligne, de gauche à droite : image *Template* déformée sur laquelle est superposée la grille de déformation obtenue ; Différence entre la *Reference* et l'image *Template* déformée par la méthode de recalage  $T \circ \varphi$ . Paramètres :  $\lambda = 0.85$ ,  $\nu = 2 \times 10^4$ ,  $\alpha = 7 \times 10^5$ ,  $\min \det \nabla \varphi = 0.0151$ ,  $LD = 1.6$ , temps d'exécution = 10.82 s.

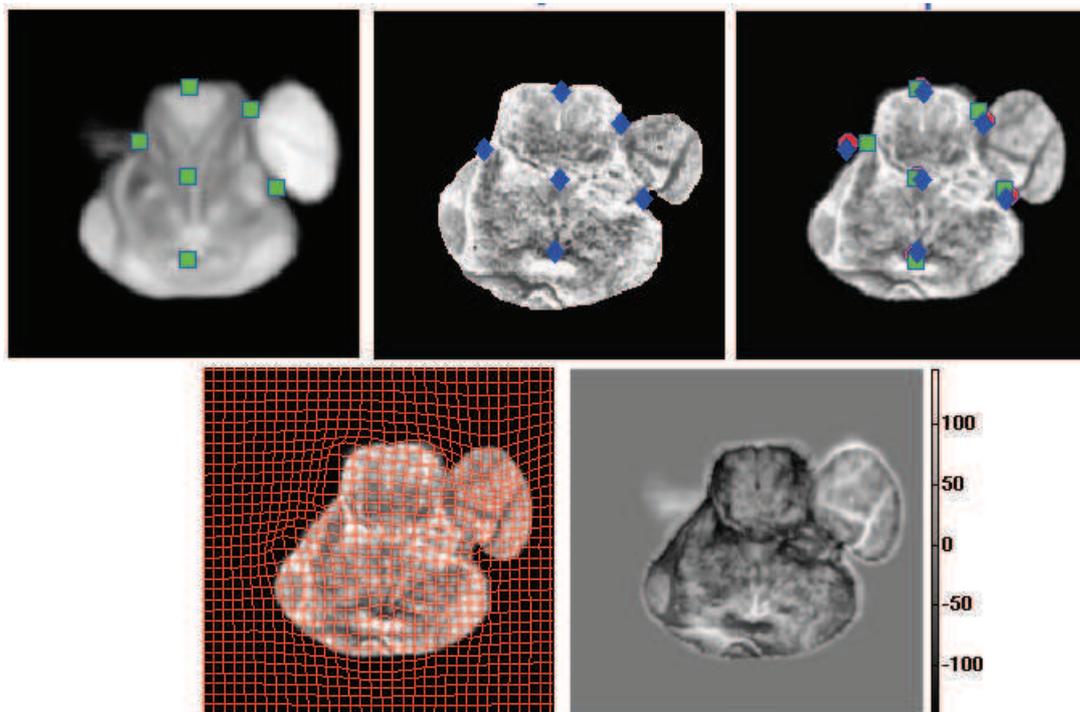


FIGURE 8.5 – Paire 5 : 1<sup>ère</sup> ligne, de gauche à droite : *Reference*  $R$  avec les points de contrôle (en vert); *Template*  $T$  avec les points de contrôle homologues (en bleu); *Template* déformée  $T \circ \varphi$  avec les points de contrôle homologues en rouge. 2<sup>ème</sup> ligne, de gauche à droite : image *Template* déformée sur laquelle est superposée la grille de déformation obtenue; Différence entre la *Reference* et l'image *Template* déformée par la méthode de recalage  $T \circ \varphi$ . Paramètres :  $\lambda = 1.5$ ,  $\nu = 6 \times 10^4$ ,  $\alpha = 6 \times 10^5$ ,  $\min \det \nabla \varphi = 0.1221$ ,  $LD = 1.4$ , temps d'exécution = 11.39s.



---

## Un problème de recalage relaxé fondé sur la densité d'énergie interne d'un matériau de type Saint Venant-Kirchhoff

---

Dans ce chapitre, nous proposons un modèle original de registration fondé sur l'élasticité non linéaire autorisant ainsi de grandes déformations. Les objets contenus dans les images sont appréhendés comme des matériaux hyperélastiques, homogènes et isotropes. En particulier, nous proposons d'utiliser ici un modèle fondé sur la densité d'énergie interne d'un matériau de type Saint Venant-Kirchhoff. Cette idée est inspirée de l'article de Le Guyader et Vese [81] dans lequel les auteurs ont introduit un modèle simultané de recalage et de segmentation d'images utilisant la densité d'énergie interne de ce type de matériau. Le problème de recalage est formulé comme un problème de minimisation associé à la densité d'énergie interne du matériau considéré.

Suite à l'introduction du modèle, nous établirons un résultat théorique d'existence de solutions pour le problème de minimisation relaxé, solutions que l'on qualifie de solutions généralisées du problème initial. Ensuite, nous analyserons une méthode de résolution numérique fondée sur le principe de découplage et dans ce cadre nous établirons un résultat théorique. Enfin, le modèle proposé sera appliqué dans le but de mettre en correspondance l'expression de gènes de cerveaux de souris à des atlas.

### 9.1 Modélisation mathématique

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  à frontière lipschitzienne représentant la configuration de référence et soient  $R : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  l'image *Reference* et  $T$  l'image *Template*. Soit  $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la déformation appliquée en argument de  $T$  de sorte que  $T \circ \varphi$  soit proche de  $R$ , en conformité avec un critère de fidélité aux données. On rappelle qu'une déformation est une application suffisamment régulière, préservant l'orientation et injective, sauf peut-être sur  $\partial\Omega$ . On suppose  $T$  à support compact de manière à s'assurer que  $T \circ \varphi$  est bien définie et on suppose que  $T$  est Lipschitzienne de constante de Lipschitz  $k > 0$ . On suppose également que  $R$  est assez

régulière. On désigne par  $u$  le déplacement associé à  $\varphi$  de sorte que  $\varphi = \text{Id} + u$ . Le gradient de la déformation est donné par  $\nabla\varphi = I_2 + \nabla u$ ,  $\bar{\Omega} \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ , où  $M_2(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices réelles d'ordre 2. Le modèle de recalage est formulé comme un problème de minimisation où l'inconnue est  $\varphi$ . Il est composé d'un terme d'attache aux données et d'un terme de régularisation sur le champ de déformation.

### Terme d'attache aux données

Le terme de fidélité aux données quantifie la similarité entre l'image *Reference* et l'image *Template* déformée  $T \circ \varphi$ . Pour quantifier la similarité des images, on se focalise ici sur la SSD qui est la norme  $L^2$  de la différence entre l'image *Template* déformée  $T \circ \varphi$  et l'image *Reference* :

$$\frac{\nu}{2} \int_{\Omega} (T(\varphi(x)) - R(x))^2 dx, \quad (9.1)$$

avec  $\nu > 0$ . Nous introduisons le facteur  $\nu$  qui permet d'apprécier l'importance du terme d'attache aux données par rapport aux autres termes.

Bien que dans le cas d'images multi-modales, la SSD n'est pas la mesure la plus adaptée pour quantifier la similarité, nous avons préféré l'utiliser dans un premier temps pour sa simplicité et son faible coût de calcul. Dans ce cas, l'information mutuelle issue de la théorie de l'information constitue une alternative intéressante [95]. Le lecteur est invité à se reporter au chapitre 6 pour un descriptif des termes d'attache aux données les plus souvent utilisés.

### Introduction du modèle de recalage fondé sur la densité d'énergie d'un matériau de type Saint-Venant Kirchhoff

Il reste à présent à adjoindre au modèle un terme de régularisation contrôlant le comportement de la déformation  $\varphi$ .

Comme souligné par Fischer et Modersitzki [52], le régularisateur dépend des propriétés requises pour le champ de déformations et est relatif à la physique du matériau considéré. La théorie de l'élasticité linéaire n'est pas un cadre adapté dans le cas présent, dans la mesure où elle suppose de petites déformations et la validité de la loi de Hooke, ces deux éléments n'étant pas vérifiés dans notre cas. Nous proposons donc de nous tourner vers la théorie de l'élasticité non linéaire et d'assimiler les formes à apparier à des matériaux hyperélastiques. Plus précisément, le régularisateur est bâti sur la densité d'énergie d'un matériau de type Ciarlet-Geymonat. Préalablement à l'introduction de l'expression explicite de ce régularisateur, nous rappelons quelques notations et concepts fondamentaux.

Nous avons besoin des notations suivantes :

- $M_2^+(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}), \det(A) > 0\}$ .
- $A : B = \text{tr} A^T B$ .
- $\|A\| = \sqrt{A : A}$ .
- $\text{cof}(A)$  : la matrice des cofacteurs de  $A$ .

## 9.1 Modélisation mathématique

Rappelons que la densité d'énergie interne d'un matériau hyperélastique, homogène et isotrope est de la forme :

$$W(F) = \widehat{W}(E) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr } E)^2 + \mu \text{tr } E^2 + o(\|E\|^2), \quad F^T F = I + 2E, \quad (9.2)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé,  $E$  est le tenseur de Green-Saint Venant et  $C$  est le tenseur de Cauchy-Green droit. Le tenseur de Cauchy-Green droit est défini par

$$C = \nabla\varphi^T \nabla\varphi = F^T F \in \mathcal{S}^2,$$

où  $\mathcal{S}^2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}), A = A^T\}$ , ensemble des matrices symétriques d'ordre 2. Physiquement, le tenseur de Cauchy-Green droit peut être interprété comme un quantificateur du carré de l'élongation due à la déformation. Le tenseur de déformation de Green-Saint Venant est défini par  $E = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T + \nabla u^T \nabla u)$ ,  $u$  étant le vecteur déplacement lié à  $\varphi$  par la relation  $\varphi = \text{Id} + u$ . Associé à une déformation donnée  $\varphi$ , le tenseur de déformation de Green-Saint Venant constitue une mesure de la déviation entre  $\varphi$  et une déformation rigide.

On rappelle que la densité d'énergie interne du matériau de Saint Venant-Kirchhoff, notée  $W_{SVK}$ , est donnée par :

$$W_{SVK}(F) = \widehat{W}(E) = \frac{\lambda}{2} \text{tr}(E)^2 + \mu \text{tr}(E^2), \quad F^T F = I + 2E. \quad (9.3)$$

Ainsi, le matériau de Saint Venant-Kirchhoff est le matériau dont la densité d'énergie interne est la plus simple en conformité avec (9.2). De plus, comme souligné dans [82] et [89], d'un point de vue numérique cette modélisation permet de générer de grandes déformations. Ces deux arguments motivent le modèle que nous proposons dans ce chapitre. Aussi, pour garantir que la déformation ne génère pas de contractions ou de dilatations trop importantes, nous proposons d'ajouter au modèle un terme veillant à ce que le déterminant de la matrice jacobienne de la déformation  $\det \nabla\varphi$  reste proche de 1. Finalement, nous proposons de considérer le problème de minimisation suivant :

$$\inf \left\{ I(\varphi) = \int_{\Omega} f(x, \varphi(x), \nabla\varphi(x)) dx : \varphi \in \text{Id} + W_0^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2) \right\}, \quad (9.4)$$

avec

$$f(x, \varphi, \xi) = \frac{\nu}{2} (T(\varphi) - R)^2 + W(\xi) \quad \text{et} \quad W(\xi) = W_{SVK}(\xi) + \mu (\det \xi - 1)^2. \quad (9.5)$$

La notation  $\varphi \in \text{Id} + W_0^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2)$  signifie que  $\varphi = \text{Id}$  sur  $\partial\Omega$  et  $\varphi \in W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ . Nous justifierons ci-après, l'introduction de l'espace fonctionnel  $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ . Par ailleurs, nous pouvons noter que  $f: \Omega \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \ni (x, \varphi, \xi) \mapsto f(x, \varphi, \xi)$  est une fonction de Carathéodory (voir définition 7.2.12 du chapitre 7) puisque  $(\varphi, \xi) \mapsto f(x, \varphi, \xi)$  est continue pour presque tout  $x \in \Omega$  et  $x \mapsto f(x, \varphi, \xi)$  est mesurable pour tout  $(\varphi, \xi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4$ .

## 9.2 Résultats théoriques

### 9.2.1 Problématique relative à l'existence de minimiseurs

En reprenant les notations de [43] introduites dans le chapitre 7 et les arguments de Dacorogna [43], on cherche à prouver l'existence de minimiseurs pour les problèmes de la forme

$$(P) \quad \inf \left\{ I(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) \right\}. \quad (9.6)$$

La fonctionnelle introduite dans (9.4) présente l'inconvénient théorique de ne pas être quasiconvexe (de fait, on ne peut pas établir la semi-continuité inférieure faible de la fonctionnelle). Dans le cas vectoriel, la quasiconvexité de  $f$  par rapport à la dernière variable joue un rôle majeur (voir Chapitre 9, [43]). Quand  $f$  ne revêt pas cette propriété, une alternative consiste à remplacer le problème initial (P) par le problème dit relaxé (QP). Ainsi, même si la fonction  $f$  n'est pas quasiconvexe, ce qui implique en général que l'infimum de (P) n'est pas atteint, on a  $\inf (P) = \inf (QP)$  et avec quelques conditions supplémentaires de coercivité, on peut prouver que l'infimum de (QP) est atteint.

Dans ce qui suit, on commence par établir l'expression explicite de l'enveloppe quasiconvexe de  $f$  et on déduit le problème relaxé associé. On énonce et on démontre ensuite l'existence de minimiseurs pour le problème relaxé associé, solutions qualifiées de solutions généralisées du problème initial.

### 9.2.2 Introduction du problème relaxé

Puisque la fonction introduite dans le problème de minimisation n'est pas quasiconvexe, nous proposons de remplacer le problème initial (9.4) formulé en termes de l'enveloppe quasiconvexe de  $f$  notée  $Qf$ .

#### Proposition 9.2.1

Le problème relaxé associé à (9.4) est défini par :

$$(QP) \quad \inf \left\{ \bar{I}(\varphi) = \int_{\Omega} Qf(x, \varphi(x), \nabla \varphi(x)) dx : \varphi \in Id + W_0^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2) \right\}, \quad (9.7)$$

où  $Qf$  est l'enveloppe quasiconvexe de  $f$  (par rapport à la dernière variable), donnée par :

$$Qf(x, \varphi, \xi) = \begin{cases} \frac{\nu}{2} (T(\varphi) - R)^2 + W(\xi) & \text{si } \|\xi\|^2 \geq 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}, \\ \frac{\nu}{2} (T(\varphi) - R)^2 + \Psi(\det \xi) & \text{si } \|\xi\|^2 < 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}, \end{cases} \quad (9.8)$$

avec  $\Psi$  l'application convexe telle que  $\Psi : t \mapsto -\frac{\mu}{2} t^2 + \mu (t - 1)^2 + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)}$ .

**Preuve** La preuve est fondée sur la définition de l'enveloppe quasiconvexe de  $f$ , sur une réécriture judicieuse de  $W(\xi)$  et sur le Théorème 3.1, p. 30 de [20]. Par définition (7.2.6 du chapitre 7 de ce rapport extrait du Chapitre 9 page 432 de [43]), pour presque tout  $x \in \Omega$  et pour tout

## 9.2 Résultats théoriques

$(\varphi, \xi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4$ , l'enveloppe quasiconvexe de  $f$  par rapport à la dernière variable est définie par :

$$Qf(x, \varphi, \xi) = \inf \left\{ \frac{1}{\text{meas}(D)} \int_D f(x, \varphi, \xi + \nabla \Phi(y)) dy : \Phi \in W_0^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^2) \right\},$$

$D$  étant un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ . Par conséquent, dans notre cas,  $Qf(x, \varphi, \xi) = \frac{\nu}{2} (T(\varphi) - R)^2 + QW(\xi)$ .

On obtient après quelques étapes de calcul :  $W(\xi) = \beta (\|\xi\|^2 - \alpha)^2 + \Psi(\det \xi)$  avec  $\alpha = 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}$  et  $\beta = \frac{\lambda + 2\mu}{8}$ . Cette réécriture de  $W(\xi)$  suggère que l'espace fonctionnel  $\mathbb{W}^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2)$  est un espace adéquat pour  $\varphi$ . En effet, d'après l'inégalité de Hölder généralisée, si  $\varphi \in \mathbb{W}^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , alors  $\det \nabla \varphi \in L^2(\Omega)$ .

On conclut cette démonstration en appliquant le Théorème 3.1, page 35 de [20] :

### **Théorème 9.2.1** (*Théorème 3.1, page 30 de [20]*)

Soit  $W : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe telle que

$$W(F) = \beta(|F|^2 - \alpha)^2 + \varphi(\det F) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*,$$

alors

$$RW(F) = PW(F) = QW(F) = \begin{cases} W(F) & \text{si } |F|^2 \geq \alpha \\ \varphi(\det F) & \text{si } |F|^2 < \alpha \end{cases},$$

où  $RW(F)$ ,  $PW(F)$  et  $QW(F)$  sont respectivement l'enveloppe rang-1 convexe, l'enveloppe polyconvexe et l'enveloppe quasiconvexe de  $F$ .

□

À présent, il reste à prouver les points suivants :

- l'infimum de  $(QP)$  est atteint ;
- si  $\bar{\varphi}$  est une solution de (9.7), alors il existe une suite minimisante  $\{\varphi_\nu\}$  du problème  $(P)$  telle que  $\varphi_\nu$  converge faiblement vers  $\bar{\varphi}$  et que  $I(\varphi_\nu) \rightarrow \bar{I}(\bar{\varphi})$ .

Par conséquent, les solutions du problème relaxé (9.7) peuvent être définies comme des solutions généralisées du problème initial (9.4), au sens de la convergence faible.

Nous commençons par considérer le problème de l'existence de minimiseurs du problème relaxé (9.7).

### 9.2.3 Existence de minimiseurs du problème relaxé

#### **Théorème 9.2.2**

Le problème (9.7) admet au moins une solution.

**Preuve** La preuve est fondée sur le Théorème 8.29, page 404, Chapitre 8 de [43] que l'on doit à Acerbi-Fusco [1] et Marcellini [91]. De plus, on a l'inégalité double de coercivité et de continuité

suivante :

$$c_3 \|\xi\|^4 - c_4 \leq Qf(x, \varphi, \xi) \leq \left(\beta + \frac{\mu}{2}\right) \|\xi\|^4 + 4K^2 \|\varphi\|^2 + c_2,$$

avec  $c_3$  une constante strictement positive et  $c_2$  et  $c_4$  deux constantes positives définies dans la suite.

Pour l'égalité de droite, on utilise le fait que :

$$\begin{cases} \beta(\|\xi\|^2 - \alpha)^2 \leq \beta\|\xi\|^4 + \beta\alpha^2, \\ \psi(\det \xi) \leq \mu(\det \xi)^2 + 3\mu + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)} \leq \frac{\mu}{2}\|\xi\|^4 + 3\mu + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)}, \end{cases}$$

puisque  $(\det \xi)^2 = \det \xi^T \xi = \frac{1}{2}\|\xi\|^4 - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\xi^T \xi)^2$ . Par ailleurs,

$$\begin{aligned} (T(\varphi(x)) - R(x))^2 &= (T(\varphi(x)) - T(x) + T(x) - R(x))^2, \\ &\leq 2(T(\varphi(x)) - T(x))^2 + 2(T(x) - R(x))^2, \\ &\leq 2K^2 \|\varphi - x\|^2 + 8 \max(\|T\|_{L^\infty(\Omega)}, \|R\|_{L^\infty(\Omega)})^2, \\ &\leq 4K^2 \|\varphi\|^2 + 4K^2 \|x\|^2 + 8 \max(\|T\|_{L^\infty(\Omega)}, \|R\|_{L^\infty(\Omega)})^2, \\ &\leq 4K^2 \|\varphi\|^2 + c_1, \end{aligned}$$

où  $c_1 \geq 0$  dépend de  $\Omega$ .

Pour l'égalité de gauche, on utilise le fait que :

$$\begin{cases} \beta\|\xi\|^2 - \beta\alpha^2 \leq \beta(\|\xi\|^2 - \alpha)^2, \\ -\mu + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)} \leq \psi(\det \xi). \end{cases}$$

Ainsi,

- Si  $\|\xi\|^2 \geq \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)}$ , il suffit d'écrire que  $-\mu + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)} + \frac{\beta}{2}\|\xi\|^4 - \beta\alpha^2 \leq Qf(x, \varphi, \xi)$ .
- Si  $\|\xi\|^2 < 2\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}$ , il suffit de remarquer que

$$-\mu + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)} + \|\xi\|^4 - 4\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\right)^2 \leq -\mu + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)} \leq \psi(\det \xi) = Qf(x, \varphi, \xi).$$

En conclusion, on a que :

$$\min\left(1, \frac{\beta}{2}\right) \|\xi\|^4 - \max\left(\beta\alpha^2 + \mu - \frac{\mu}{2}\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\right), \alpha^2 + \mu - \frac{\mu}{2}\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\right)\right) \leq Qf(x, \varphi, \xi).$$

Nous pouvons conclure grâce au théorème 8.29 page 404 chapitre 8 de [43] qui stipule que si ces deux propriétés sont vérifiées alors le problème (9.7) admet au moins une solution. Ce théorème est rappelé dans le chapitre 7.

□

### 9.3 Résolution numérique

---

Nous sommes alors en mesure d'énoncer le résultat d'existence de solutions généralisées du modèle proposé.

#### 9.2.4 Théorème de relaxation

##### **Théorème 9.2.3**

Soit  $\bar{\varphi} \in W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2)$  un minimiseur du problème relaxé (9.7). Alors il existe une suite

$$\{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty \subset \bar{\varphi} + W_0^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2) \quad \text{telle que} \quad \varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \bar{\varphi} \quad \text{dans} \quad L^4(\Omega, \mathbb{R}^2)$$

et

$$\int_{\Omega} f(x, \varphi_\nu(x), \nabla \varphi_\nu(x)) dx \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \int_{\Omega} Qf(x, \bar{\varphi}(x), \nabla \bar{\varphi}(x)) dx.$$

De plus, on a même :

$$\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \bar{\varphi} \quad \text{dans} \quad W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2).$$

Les solutions du problème (9.7) sont appelées solutions généralisées du problème (9.4).

**Preuve** La preuve est fondée sur la définition 9.7, page 431, et sur le Théorème 9.8 page 432 du Chapitre 9 de [43] qui sont rappelés dans ce rapport au chapitre 7 par le théorème 7.2.12.  $\square$

### 9.3 Résolution numérique

#### 9.4 Description et analyse de la méthode de résolution numérique proposée

Dans ce qui suit, nous proposons une méthode numérique de résolution du problème fondée sur le principe de découplage introduit dans l'article de Negrón Marrero [101]. Nous conservons l'idée de Negrón Marrero qui consiste à introduire une variable auxiliaire  $V$  représentant la matrice jacobienne de la déformation  $\nabla \varphi$  et à formuler un problème découplé sous contrainte inégalité associé au problème relaxé (9.7). L'idée sous-jacente et qui motive notre travail est d'éliminer la non-linéarité portant sur les dérivées partielles des composantes de  $\varphi$  apparaissant dans les équations d'Euler-Lagrange. Néanmoins, notre approche est différente de celle développée dans [101] dans la mesure où l'auteur se focalise sur des résultats théoriques relatifs au problème découplé discrétisé *via* une méthode éléments finis et pour lequel l'existence de solutions est garantie.

Le problème considéré est, on le rappelle, défini par :

$$\inf \left\{ I(\varphi) = \int_{\Omega} f(x, \varphi(x), \nabla \varphi(x)) dx : \varphi \in \text{Id} + W_0^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2) \right\},$$

avec

$$\begin{aligned} f(x, \varphi, \xi) &= \frac{\nu}{2} (T(\varphi(x)) - R(x))^2 + W_{SVK}(\xi) + \mu (\det(\xi) - 1)^2, \\ &= \frac{\nu}{2} (T(\varphi(x)) - R(x))^2 + W(\xi). \end{aligned} \quad (9.9)$$

On rappelle que  $\varphi \in \text{Id} + W_0^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2)$  signifie que  $\varphi = \text{Id}$  sur  $\partial\Omega$  et  $\varphi \in W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ . Par ailleurs, si  $\varphi \in W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , on a  $\det(\nabla\varphi) \in L^2(\Omega)$  par application de l'inégalité de Hölder généralisée. Remarquons que  $f : \Omega \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \ni (x, \varphi, \xi) \mapsto f(x, \varphi, \xi)$  est une fonction de Carathéodory puisque l'application  $(\varphi, \xi) \mapsto f(x, \varphi, \xi)$  est continue pour presque tout  $x \in \Omega$  et l'application  $x \mapsto f(x, \varphi, \xi)$  est mesurable pour tout  $(\varphi, \xi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4$ .

La fonctionnelle introduite dans (9.9) n'est pas quasiconvexe, ce qui induit un problème de nature théorique puisqu'on ne peut obtenir la semi-continuité inférieure faible de la fonctionnelle. L'idée consiste donc à substituer le problème relaxé associé au problème de minimisation (9.9) :

$$(QP) : \inf \left\{ \bar{I}(\varphi) = \int_{\Omega} Qf(x, \varphi(x), \nabla\varphi(x)) dx : \varphi \in \text{Id} + W_0^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2) \right\},$$

$Qf$  désignant l'enveloppe quasiconvexe de  $f$ . Dans le cas considéré, l'enveloppe quasiconvexe est définie par :

$$Qf(x, \varphi, \xi) = \begin{cases} \frac{\nu}{2} (T(\varphi(x)) - R(x))^2 + W(\xi) & \text{si } \|\xi\|^2 \geq 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}, \\ \frac{\nu}{2} (T(\varphi(x)) - R(x))^2 + \Psi(\det(\xi)) & \text{si } \|\xi\|^2 < 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}, \end{cases} \quad (9.10)$$

avec  $\Psi$  la fonction convexe définie par  $\Psi : t \mapsto -\frac{\mu}{2} t^2 + \mu (t - 1)^2 + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)}$ . On a montré précédemment que  $W$  s'exprime également sous la forme  $W(\xi) = \beta (\|\xi\|^2 - \alpha)^2 + \Psi(\det(\xi))$  avec  $\alpha = 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}$  et  $\beta = \frac{\lambda + 2\mu}{8}$ .

En définitive, le problème relaxé relatif à (9.9) est défini par :

$$(QP) : \inf \left\{ \bar{I}(\varphi) = \int_{\Omega} Qf(x, \varphi(x), \nabla\varphi(x)) dx : \varphi \in \text{Id} + W_0^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2) \right\},$$

avec  $Qf$  définie en (9.10). On définit le problème découplé à l'aide de la fonctionnelle suivante :

$$\bar{I}(\varphi, V) = \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} (T(\varphi(x)) - R(x))^2 dx + \int_{\Omega} \mathbb{W}(V) dx, \quad (9.11)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbb{W}(V) = W(V) & \text{si } \|\xi\|^2 \geq \alpha = 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \text{ et} \\ \mathbb{W}(V) = \Psi(\det(V)) & \text{si } \|\xi\|^2 < \alpha = 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}. \end{cases}$$

## 9.4 Description et analyse de la méthode de résolution numérique proposée

On pose :

$$\widehat{\mathcal{W}} = \left\{ \varphi \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2), \varphi = \text{Id sur } \partial\Omega \right\}$$

et

$$\widehat{\mathcal{X}} = \left\{ V \in L^4(\Omega, M_2), \det(V) \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Le problème découplé consiste alors à minimiser (9.11) sur  $\widehat{\mathcal{W}} \times \widehat{\mathcal{X}}$  sous la contrainte

$$\int_{\Omega} \|\nabla\varphi(x) - V(x)\|^2 dx \leq \varepsilon,$$

avec  $\varepsilon > 0$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  fixé. L'idée est évidemment de faire tendre  $\varepsilon$  vers 0. On a le théorème suivant.

### **Théorème 9.4.1**

Soit  $(\varepsilon_j)$  une suite telle que  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \varepsilon_j = 0$ . Soit également  $(\varphi_k(\varepsilon_j), V_k(\varepsilon_j))$  une suite minimisante du problème de minimisation découplé sous contrainte d'inégalité relatif à  $\varepsilon = \varepsilon_j$ . Alors il existe une sous-suite notée  $(\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}, V_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})})$  de  $(\varphi_k(\varepsilon_j), V_k(\varepsilon_j))$  et un minimiseur  $\bar{\varphi}$  de  $\bar{I}(\varphi)$  ( $\bar{\varphi} \in \text{Id} + W_0^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ ) tels que :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \bar{I}(\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}, V_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}) = \bar{I}(\bar{\varphi}).$$

**Preuve** Soit  $\varepsilon > 0$  donné,  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  fixé. Il existe  $\widehat{\varphi}_\varepsilon \in \mathcal{W} = \text{Id} + W_0^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2)$  (grâce à l'inégalité de Hölder, on a immédiatement que  $\det(\nabla\widehat{\varphi}_\varepsilon) \in L^2(\Omega)$ ) telle que :

$$\inf_{(\varphi, V) \in \widehat{\mathcal{W}} \times \widehat{\mathcal{X}}} \bar{I}(\varphi, V) \leq \bar{I}(\widehat{\varphi}_\varepsilon, \nabla\widehat{\varphi}_\varepsilon) = \bar{I}(\widehat{\varphi}_\varepsilon) < \inf_{\varphi \in \mathcal{W}} \bar{I}(\varphi) + \varepsilon \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{W}} \bar{I}(\varphi) + \varepsilon_0.$$

L'argument utilisé ici est que  $W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2) \subset W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ .

Par conséquent,

$$\inf_{(\varphi, V) \in \widehat{\mathcal{W}} \times \widehat{\mathcal{X}}} \bar{I}(\varphi, V) \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{W}} \bar{I}(\varphi) + \varepsilon. \quad (9.12)$$

Soit  $(\varepsilon_j)$  une suite telle que  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \varepsilon_j = 0$ . Considérons alors une suite minimisante notée  $(\varphi_k(\varepsilon_j), V_k(\varepsilon_j))$  pour le problème découplé défini avec  $\varepsilon = \varepsilon_j$ , soit :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{I}(\varphi_k(\varepsilon_j), V_k(\varepsilon_j)) = \inf_{(\varphi, V) \in \widehat{\mathcal{W}} \times \widehat{\mathcal{X}}} \bar{I}(\varphi, V).$$

En particulier,  $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\left( k \geq N(\epsilon) \implies \bar{I}(\varphi_k(\varepsilon_j), V_k(\varepsilon_j)) \leq \inf_{(\varphi, V) \in \widehat{\mathcal{W}} \times \widehat{\mathcal{X}}} \bar{I}(\varphi, V) + \epsilon \right).$$

Prenons en particulier  $\epsilon = \epsilon_j$ . Il existe donc  $N(\epsilon_j) \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\left( k \geq N(\epsilon_j) \implies \bar{I}(\varphi_k(\epsilon_j), V_k(\epsilon_j)) \leq \inf_{(\varphi, V) \in \widehat{\mathcal{W}} \times \widehat{\mathcal{X}}} \bar{I}(\varphi, V) + \epsilon_j \right).$$

On pose alors  $k = N(\epsilon_j)$  et l'on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{I}(\varphi_{N(\epsilon_j)}(\epsilon_j), V_{N(\epsilon_j)}(\epsilon_j)) &\leq \inf_{(\varphi, V) \in \widehat{\mathcal{W}} \times \widehat{\mathcal{X}}} \bar{I}(\varphi, V) + \epsilon_j, \\ &\leq \inf_{\varphi \in \mathcal{W}} \bar{I}(\varphi) + 2\epsilon_j. \end{aligned}$$

d'après (9.12). En définitive,

$$\bar{I}(\varphi_{N(\epsilon_j)}(\epsilon_j), V_{N(\epsilon_j)}(\epsilon_j)) \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{W}} \bar{I}(\varphi) + 2\epsilon_j \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{W}} \bar{I}(\varphi) + 2\epsilon_0 < +\infty.$$

On a :

$$\frac{\beta}{2} \|\xi\|^4 - \beta \alpha^2 \leq \beta (\|\xi\|^2 - \alpha)^2.$$

Par ailleurs,  $\Psi(t) = \frac{\mu}{2}t^2 - 2\mu t + \mu + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)}$ . En conséquence,

$$\frac{\mu}{4}t^2 - 3\mu + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)} \leq \Psi(t).$$

En définitive, si  $\|V\|^2 \geq \alpha$ ,

$$\frac{\mu}{4} (\det(V))^2 + \frac{\beta}{2} \|V\|^4 - \beta \alpha^2 - 3\mu + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)} \leq \mathbb{W}(V)$$

et si  $\|V\|^2 \leq \alpha$ ,

$$\frac{\mu}{4} (\det(V))^2 + \frac{\beta}{2} \|V\|^4 - \frac{\beta \alpha^2}{2} - 3\mu + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)} \leq \frac{\mu}{4} (\det(V))^2 - 3\mu + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)} \leq \mathbb{W}(V).$$

Dans chacun des cas, on a donc :

$$\frac{\mu}{4} (\det(V))^2 + \frac{\beta}{2} \|V\|^4 - \beta \alpha^2 - 3\mu + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)} \leq \mathbb{W}(V).$$

On déduit de ce qui précède que :

$$\begin{cases} V_{N(\epsilon_j)}(\epsilon_j) \text{ est uniformément bornée dans } L^4(\Omega, M_2) \text{ (donc dans } L^2(\Omega, M_2)), \\ \det(V_{N(\epsilon_j)}(\epsilon_j)) \text{ est uniformément bornée dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

## 9.4 Description et analyse de la méthode de résolution numérique proposée

On peut donc extraire une sous-suite notée  $(V_{N(\varepsilon_{\Psi(j)})}(\varepsilon_{\Psi(j)}))$  telle que :

$$\begin{cases} V_{N(\varepsilon_{\Psi(j)})}(\varepsilon_{\Psi(j)}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{V} \text{ dans } L^4(\Omega, M_2), \\ \det(V_{N(\varepsilon_{\Psi(j)})}(\varepsilon_{\Psi(j)})) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{\delta} \text{ dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

Par ailleurs,

$$\|V_{N(\varepsilon_{\Psi(j)})}(\varepsilon_{\Psi(j)}) - \nabla\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi(j)})}(\varepsilon_{\Psi(j)})\|_{L^2(\Omega, M_2)}^2 \leq \varepsilon_{\Psi(j)}.$$

Mais,

$$\begin{aligned} & | \|\nabla\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi(j)})}(\varepsilon_{\Psi(j)})\|_{L^2(\Omega, M_2)} - \|V_{N(\varepsilon_{\Psi(j)})}(\varepsilon_{\Psi(j)})\|_{L^2(\Omega, M_2)} | \\ & \leq \|V_{N(\varepsilon_{\Psi(j)})}(\varepsilon_{\Psi(j)}) - \nabla\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi(j)})}(\varepsilon_{\Psi(j)})\|_{L^2(\Omega, M_2)} \\ & \leq \varepsilon_{\Psi(j)}^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon_0^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

De fait,  $(\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi(j)})}(\varepsilon_{\Psi(j)}))$  est uniformément bornée dans  $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2)$  d'après l'inégalité de Poincaré généralisée. On peut donc extraire une sous-suite notée  $(\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)}))$  telle que :

$$\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{\varphi} \text{ dans } W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2).$$

On a donc :

$$\begin{cases} V_{N(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{V} \text{ dans } L^4(\Omega, M_2), \\ \det(V_{N(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)})) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{\delta} \text{ dans } L^2(\Omega), \\ \text{et } \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{\varphi} \text{ dans } W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2). \end{cases}$$

Posons désormais  $z_j = \nabla\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)}) - V_{N(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)})$ . Puisque  $\varepsilon_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$ , la contrainte implique que  $z_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$  dans  $L^2(\Omega, M_2)$  et en conséquence,  $\nabla\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{V}$  dans  $L^2(\Omega, M_2)$ .

En effet,  $\forall \varphi \in L^2(\Omega, M_2)$ ,  $\int_{\Omega} z_j : \varphi \, dx \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$ . Soit,

$$\int_{\Omega} (\nabla\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)}) - V_{N(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)})) : \varphi \, dx \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0.$$

Mais  $V_{N(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{V}$  dans  $L^4(\Omega, M_2)$  donc dans  $L^2(\Omega, M_2)$  et  $\forall \varphi \in L^2(\Omega, M_2)$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)}) : \varphi \, dx \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \bar{V} : \varphi \, dx.$$

De même,  $\nabla\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \nabla\bar{\varphi}$  dans  $L^2(\Omega, M_2)$ , donc par unicité de la limite  $\nabla\bar{\varphi} = \bar{V} \in L^4(\Omega, M_2)$ .

Par ailleurs,  $V_{N(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)}) = \nabla\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{og}(j)}) - z_j$  avec  $z_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$  dans  $L^2(\Omega, M_2)$ . Par

conséquent,

$$\det(V_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})) = \det(\nabla\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})) + d_j,$$

avec

$$\begin{aligned} d_j = & (z_j)_{11}(z_j)_{22} - (z_j)_{21}(z_j)_{12} - (z_j)_{22} \frac{\partial\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}^1(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}{\partial x} - (z_j)_{11} \frac{\partial\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}^2(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}{\partial y} \\ & + (z_j)_{21} \frac{\partial\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}^1(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}{\partial y} + (z_j)_{12} \frac{\partial\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}^2(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}{\partial x}, \end{aligned}$$

$(z_j)_{kl}$  désigne l'élément de la  $k^{\text{ème}}$  ligne et de la  $l^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $z_j$  et l'on a posé  $\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)}) = (\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}^1(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)}), \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}^2(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)}))$ .

De fait,

$$\int_{\Omega} |d_j| dx \leq \frac{1}{2} \|z_j\|_{L^2(\Omega, M_2)}^2 + \|z_j\|_{L^2(\Omega, M_2)} \|\nabla\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})\|_{L^2(\Omega, M_2)},$$

$\|\nabla\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})\|_{L^2(\Omega, M_2)}$  étant bornée indépendamment de  $j$ . D'où  $d_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$  dans  $L^1(\Omega)$ .

Rassemblons alors les précédents résultats :

$$\left\{ \begin{array}{l} \det(V_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{\delta} \text{ dans } L^2(\Omega), \\ \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{\varphi} \text{ dans } W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2), \\ \text{et } \det(V_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})) = \det(\nabla\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})) + d_j \text{ avec } d_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0 \text{ dans } L^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Mais d'après le théorème de le théorème 1.14, chapitre 1 de [43], si

$$\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \bar{\varphi} \text{ dans } W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2)$$

alors

$$\det(\nabla\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \det(\nabla\bar{\varphi}) \text{ au sens des distributions.}$$

Ainsi,  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \det(V_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})) \varphi dx \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \bar{\delta} \varphi dx.$$

Mais

$$\int_{\Omega} \det(V_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})) \varphi dx = \int_{\Omega} \det(\nabla\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})) \varphi dx + \int_{\Omega} d_j \varphi dx$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \det(\nabla\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})}(\varepsilon_{\Psi_{0g}(j)})) \varphi dx \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \det(\nabla\bar{\varphi}) \varphi dx, \\ \left| \int_{\Omega} d_j \varphi dx \right| \leq \|d_j\|_{L^1(\Omega)} \|\varphi\|_{C^0(\bar{\Omega})} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0 \text{ d'après l'inégalité de Hölder.} \end{array} \right.$$

## 9.4 Description et analyse de la méthode de résolution numérique proposée

En conséquence,  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \det(\nabla \bar{\varphi}) \varphi \, dx = \int_{\Omega} \bar{\delta} \varphi \, dx$$

et  $\det(\nabla \bar{\varphi}) = \bar{\delta}$  au sens des distributions. Comme  $\det(\nabla \bar{\varphi}) \in L^2(\Omega)$  (puisque  $\bar{\varphi} \in W^{1,4}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ ) et  $\bar{\delta} \in L^2(\Omega)$ , on a  $\det(\nabla \bar{\varphi}) = \bar{\delta}$  dans  $L^2(\Omega)$ .

$\mathbb{W}^*(V, \delta) = \begin{cases} \beta (\|V\|^2 - \alpha)^2 + \Psi(\delta) & \text{si } \|V\|^2 \geq \alpha \\ \Psi(\delta) & \text{si } \|V\|^2 < \alpha \end{cases}$  est définie sur  $L^4(\Omega, M_2) \times L^2(\Omega)$  à valeurs

dans  $\bar{\mathbb{R}}$ . Cette application est convexe et fortement séquentiellement semi-continue inférieure puisque  $\mathbb{W}^*$  est convexe et continue. Elle est donc faiblement séquentiellement semi-continue inférieure.

Le théorème d'injection compacte de Rellich-Kondrachov nous donne

$W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2) \underset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega, \mathbb{R}^2)$ ,  $\forall q \in [1, +\infty[$ . En particulier,  $\varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})$  converge fortement vers  $\bar{\varphi}$  dans  $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$  donc dans  $L^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ . Comme  $T$  est supposée lipschitzienne de constante de Lipschitz  $\kappa$ , on a :

$$\int_{\Omega} \left[ \left( T \left( \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}) \right) - R \right)^2 - \left( T(\bar{\varphi}) - R \right)^2 \right] dx = \\ \int_{\Omega} \left( T \left( \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}) \right) - T(\bar{\varphi}) \right) \left( T \left( \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}) \right) + T(\bar{\varphi}) - 2R \right) dx$$

et

$$\left| \int_{\Omega} \left( T \left( \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}) \right) + T(\bar{\varphi}) - 2R \right) dx \right| \\ \leq C_{\|T\|_{L^\infty(\Omega)}, \|R\|_{L^\infty(\Omega)}} \kappa \int_{\Omega} \langle \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}) - \bar{\varphi} \rangle_2 dx,$$

$C_{\|T\|_{L^\infty(\Omega)}, \|R\|_{L^\infty(\Omega)}}$  désignant une constante strictement positive ne dépendant que de  $\|T\|_{L^\infty(\Omega)}$  et  $\|R\|_{L^\infty(\Omega)}$ .

En définitive,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \left( T \left( \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}) \right) - R \right)^2 dx = \int_{\Omega} \left( T(\bar{\varphi}) - R \right)^2 dx.$$

Par passage à la limite quand  $j \rightarrow +\infty$ , on en conclut que :

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{W}} \bar{I}(\varphi) \leq \bar{I}(\bar{\varphi}) = \bar{I}(\bar{\varphi}, \nabla \bar{\varphi}) \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \bar{I} \left( \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}), V_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}) \right).$$

En effet, par continuité de la trace,  $\bar{\varphi} = \text{Id}$  sur  $\partial\Omega$ . En conséquence,  $\bar{\varphi} \in \mathcal{W}$ .

On a donc obtenu les deux inégalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \inf_{\varphi \in \mathcal{W}} \bar{I}(\varphi) \leq \bar{I}(\bar{\varphi}) \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \bar{I} \left( \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}), V_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}) \right) \\ \bar{I} \left( \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}), V_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}) \right) \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{W}} \bar{I}(\varphi) + 2\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}. \end{array} \right. \text{ et}$$

En définitive,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \bar{I} \left( \varphi_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}), V_{N(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)})}(\varepsilon_{\Psi \circ g(j)}) \right) = \bar{I}(\bar{\varphi}) = \inf_{\varphi \in \mathcal{W}} \bar{I}(\varphi).$$

□

## 9.5 Schéma numérique

L'algorithme exigeant une évaluation de l'image *Template*  $T$  en tout point  $\varphi(x)$ , on considère une version régulière de  $T$  obtenue en interpolant les données fournies par la grille image. On suppose également que  $T$  est nulle en dehors du domaine, c'est-à-dire que  $T(x) = 0$  si  $x \notin \Omega$ . Comme suggéré par Modersitzki dans [95], Chapitre 3, section 3.6.1, on utilise une résolution multi-échelles pour l'étape d'interpolation par B-splines cubiques. Cette approche introduit un paramètre pondérant la régularité et la proximité des données. En particulier, ce paramètre peut être choisi en fonction de la connaissance a priori du bruit présent dans les données. Nous cherchons alors la spline  $\mathcal{T}$  qui minimise le problème d'interpolation relaxé incluant un terme d'attache aux données et une pénalisation sur les dérivées partielles secondes de  $\mathcal{T}$  avec un facteur de régularité  $\theta$ . Si  $\theta = 0$ , alors le problème est un problème d'interpolation strict. Lorsque  $\theta > 0$ , l'interpolant est lisse mais ne passe pas nécessairement par tous les points de l'image  $T$  (voir chapitre 7 pour plus de détails).

Nous présentons, maintenant, une discrétisation du problème fondé sur la technique du découplage. Comme nous l'avons mentionné dans la section précédente, pour éviter les difficultés liées au problème de minimisation relaxé (9.7), nous proposons d'introduire une variable auxiliaire  $V$  telle que  $V = \nabla\varphi$ . Le terme de régularisation fondé sur l'élasticité non linéaire n'est plus appliqué à  $\varphi$  mais à  $V$ . On propose donc de minimiser :

$$\inf_{\varphi, V} \bar{\mathcal{J}}_\epsilon(\varphi, V) + \frac{\alpha'}{2} \int_{\Omega} \|V - \nabla\varphi\|^2 dx, \quad (9.13)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{J}}_\epsilon(\varphi, V) = & \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} (T(\varphi) - R)^2 dx + \int_{\Omega} W(V) H_\epsilon \left( \|V\|^2 - 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right) dx \\ & + \int_{\Omega} \psi(\det V) H_\epsilon \left( 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} - \|V\|^2 \right) dx, \end{aligned} \quad (9.14)$$

où  $\alpha'$  est une constante positive pour assurer que  $V$  et  $\nabla\varphi$  soit suffisamment proches au sens de la norme  $L^2$ .

Numériquement, les équations de Euler-Lagrange en  $\varphi$  et  $V$  sont résolues en utilisant une méthode de descente de gradient paramétrisée par un temps artificiel  $t \geq 0$ . On obtient alors un système de deux équations en les composantes de  $\varphi$  et de 4 équations en les composantes de  $V$  que l'on résout par un schéma aux différences finies implicite et semi-implicite avec pour condition de bord  $\varphi = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

### 9.6 Application aux images médicales

Dans cette section, nous proposons d'appliquer le modèle de recalage proposé à des images réelles fournies par le Center for Computational Biology <http://qb3.berkeley.edu/ccb>. On souhaite mettre en relation des images bidimensionnelles représentant l'expression du gène sur des coupes du cerveau de souris avec celles issues d'un atlas provenant de la base de données de Laboratory of Neuro Imaging de UCLA <http://www.loni.ucla.edu/>. Ceci est fait dans le but de faciliter l'intégration des données anatomiques, génétiques et physiques de plusieurs objets dans un espace d'étude commun. Sur chaque image, l'expression du gène a été préalablement segmentée et les régions ne faisant pas partie du cerveau ont été supprimées dans le but d'obtenir une plus forte similitude entre les images.

Pour que la déformation ait du sens physiquement et mécaniquement, elle doit respecter les propriétés du matériau considéré. Ainsi, l'interpénétration de la matière, qui est un indicateur de la non injectivité de la transformation, devrait être interdite. Or, dans la fonctionnelle étudiée (9.8), il n'y a pas de terme interdisant le déterminant de la matrice jacobienne de tendre vers 0+. Une alternative pour forcer le déterminant de la matrice jacobienne à rester positif a été proposée par Christensen et al. [34] dans le modèle de recalage fondé sur la mécanique des fluides. Elle consiste à appliquer une technique dite de *reggridding* qui stoppe l'algorithme dès lors que le déterminant du jacobien de la déformation est négatif. Cette technique est également utilisée dans [89] pour le recalage d'images proches des nôtres.

Le modèle de recalage proposé dans ce chapitre a été testé sur 5 paires d'images représentées sur les figures 9.2 à 9.6. Les images sont toutes de taille  $200 \times 200$  (à l'exception de 9.3 qui est de taille  $220 \times 200$ ). Les deux premières paires illustrées dans les figures 9.2 et 9.3 sont obtenues après segmentation de données réelles. Elles ont déjà fait l'objet de tests dans [89], ce qui nous permet de comparer nos résultats. Comme souligné par Lin et al., les modèles classiques de recalage non paramétrique tels que les modèles fondés sur l'élasticité linéaire, les modèles de diffusion [51] ou ceux fondés sur un terme de régularisation biharmonique [52] échouent à correctement recalibrer ces images. La figure 9.1 tirée de [89] illustre les résultats du recalage de la première paire par ces différents modèles. Le modèle de recalage non linéaire, fondé sur le matériau de Saint Venant-Kirchhoff et proposé par Lin et al. [89], est le seul à fournir une image sans artéfacts (au niveau de l'oreille). La figure 9.2 illustre le résultat de recalage de la paire 1 avec le modèle proposé dans ce chapitre. En le comparant au résultat obtenu dans [89], on constate que notre résultat est plus proche de l'image *Reference*. En particulier, notre modèle donne une image plus lisse et retrace mieux la forme de l'oreille gauche. De plus, contrairement au modèle proposé dans [89], notre algorithme ne nécessite pas d'étape de *reggridding* puisque le déterminant de la matrice jacobienne reste positif. A cela s'ajoute que contrairement au modèle de Lin et al. [89], notre modèle est théoriquement justifié.

Les figures 9.3, 9.4, 9.5 et 9.6 représentent respectivement les résultats du recalage des paires 2, 3, 4 et 5. Les paramètres du modèle varient peu pour l'ensemble des paires, leurs valeurs sont

données dans la légende relative à la figure illustrant le recalage. Le paramètre contrôlant le terme de similarité est fixé entre 1.4 et 2, le coefficient de Lamé  $\lambda$  est fixé à 10 tandis que le coefficient de Lamé  $\mu$  est entre 3000 et 5000. Le paramètre  $\alpha'$  est toujours fixé à 60000 car ce choix donne des résultats satisfaisants. Bien que les paires 3, 4 et 5 soient de modalités différentes, nous utilisons ce critère de similarité fondé sur la norme  $L^2$  de la différence entre les images pour son moindre coût de calcul. Les résultats obtenus sont satisfaisants et le temps d'exécution est très faible. Pour diminuer le temps de calcul, l'algorithme proposé a été implémenté en C et doublement optimisé de la manière suivante. Dans un premier temps, les bibliothèques de calculs LAPACK et BLAS ont été mises à profit. La bibliothèque Basic Linear Algebra Subprogram (BLAS) est un ensemble de fonctions standardisées réalisant des opérations de base de l'algèbre linéaire comme des additions de vecteurs ou des multiplications de matrices. Le code de calcul de ces fonctions a été très optimisé, notamment par les constructeurs de calculateurs comme Intel et AMD. LAPACK fournit, entre autres, des routines pour résoudre des systèmes d'équations linéaires. Ensuite, le code a été parallélisé en utilisant OpenMP (voir le site web officiel <http://openmp.org/wp/>).

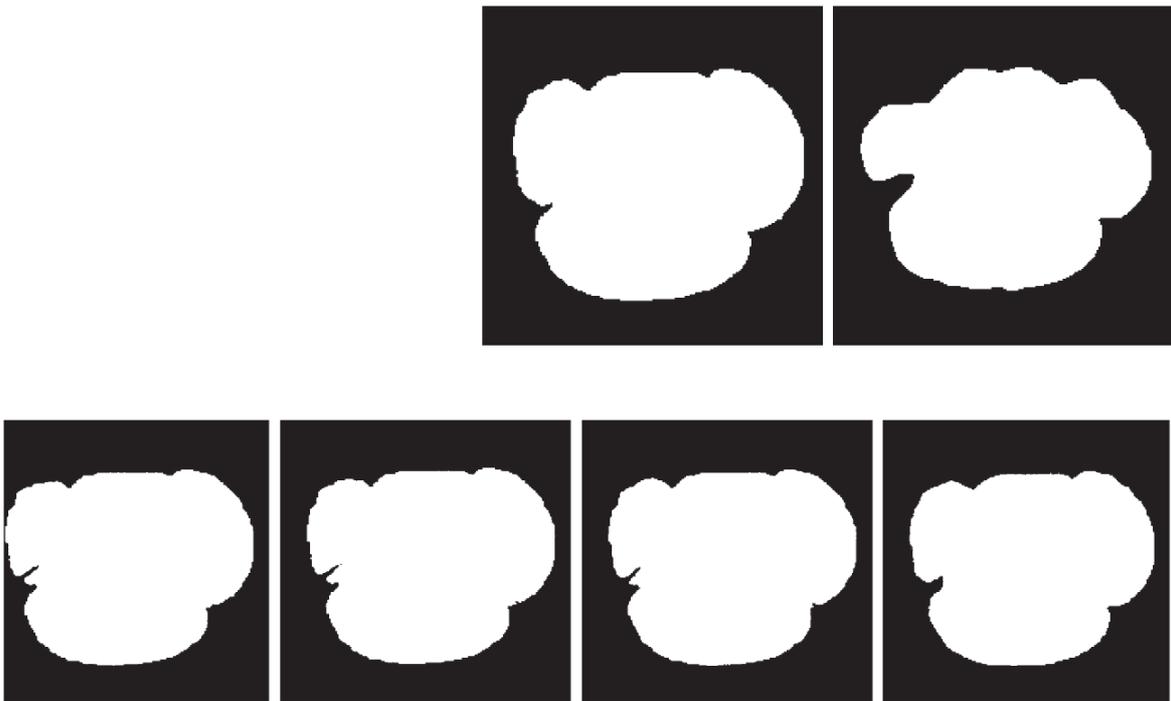


FIGURE 9.1 – Illustration des résultats du recalage de la Paire 1 par différents termes de régularisation. 1<sup>ère</sup> ligne (de gauche à droite) image *Reference* et image *Template*. 2<sup>ème</sup> ligne (de gauche à droite) : image obtenue après recalage par un modèle non linéaire, un modèle de diffusion, un modèle avec régularisation biharmonique et un modèle non linéaire fondé sur le matériau de type Saint Venant-Kirchhoff. Figure provenant de [89].

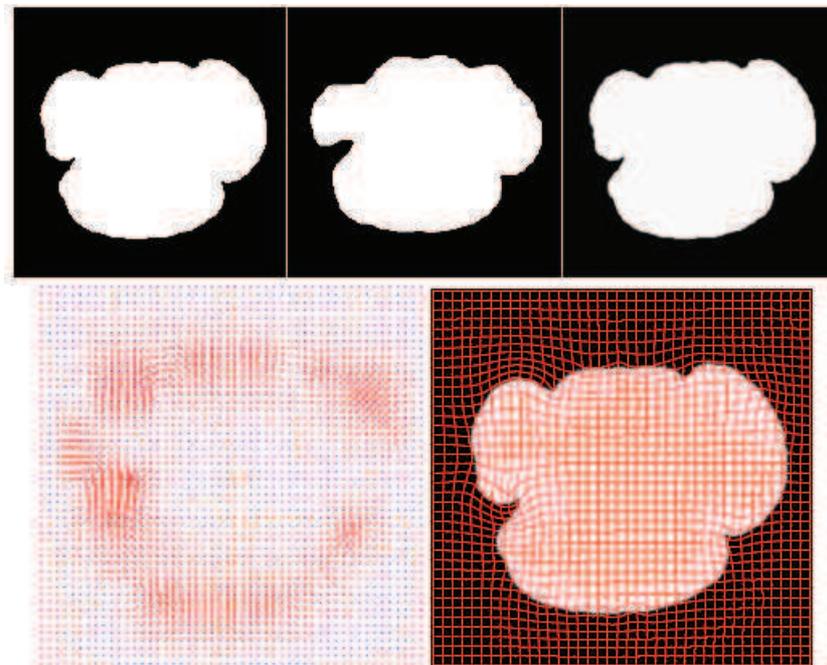


FIGURE 9.2 – Paire 1. 1<sup>ère</sup> ligne (de gauche à droite) : image *Reference*, image *Template*, image obtenue après recalage. 2<sup>ème</sup> ligne (de gauche à droite) : champ de déformation représentant les vecteurs déplacement des noeuds de la grille de la configuration de référence vers la configuration déformée après recalage, déformation de la grille. Paramètres :  $\nu = 2$ ,  $\lambda = 10$ ,  $\mu = 3000$ ,  $\alpha' = 60000$ ,  $\min \det \nabla \varphi = 0.09$ ,  $\min \det \nabla \varphi = 2.27$ , temps d'exécution = 1.8 secondes.

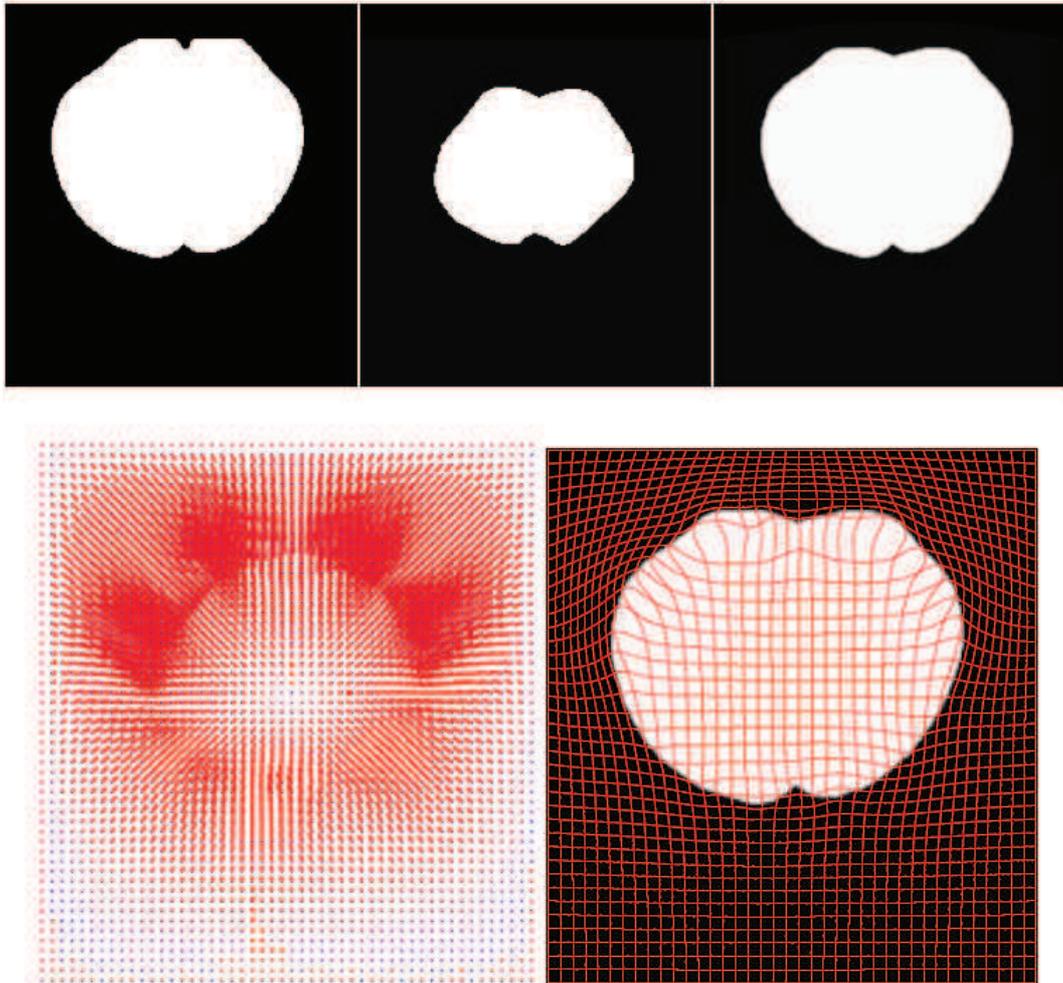


FIGURE 9.3 – Paire 2. 1<sup>ère</sup> ligne (de gauche à droite) : image *Reference*, image *Template*, image obtenue après recalage. 2<sup>ème</sup> ligne (de gauche à droite) : champ de déformation représentant les vecteurs déplacement des noeuds de la grille de la configuration de référence vers la configuration déformée après recalage, déformation de la grille. Paramètres :  $\nu = 1.8$ ,  $\lambda = 10$ ,  $\mu = 4000$ ,  $\alpha' = 60000$ ,  $\min \det \nabla \varphi = 0.02$ ,  $\min \det \nabla \varphi = 2.21$ , temps d'exécution = 8.4 secondes.

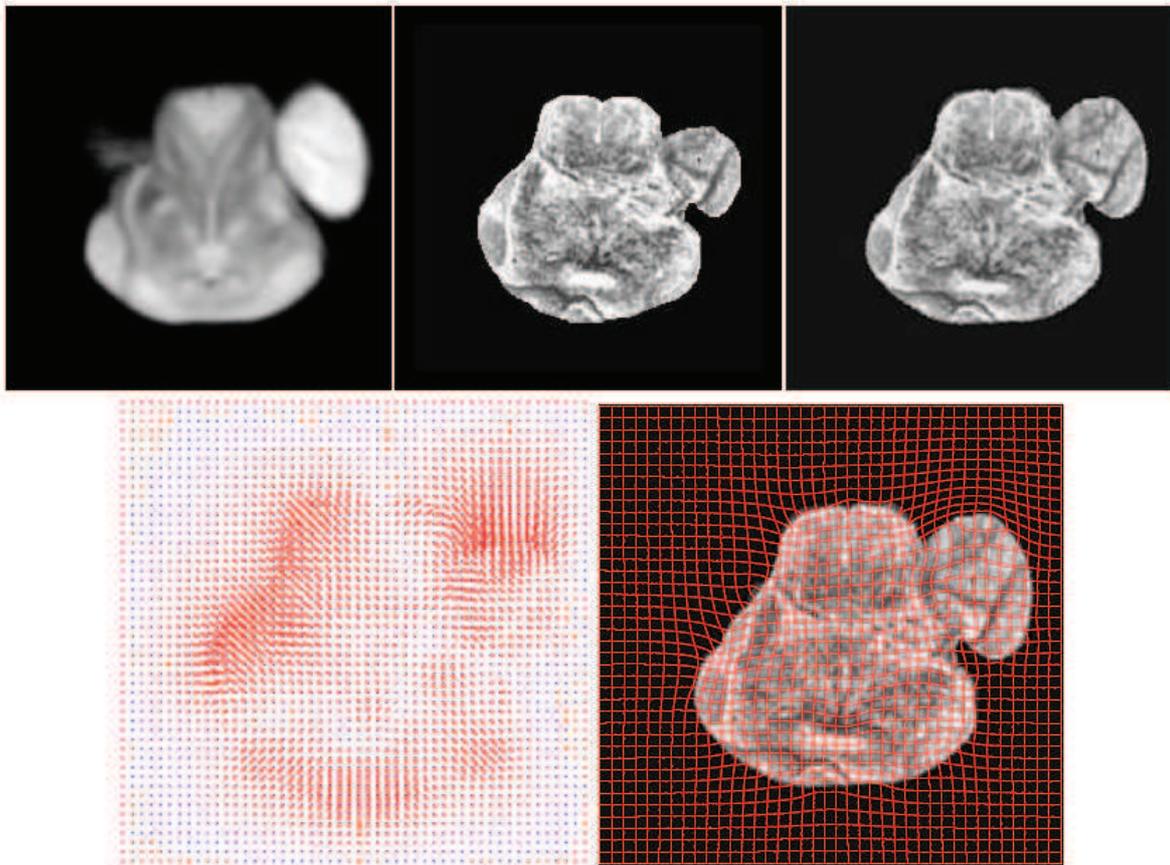


FIGURE 9.4 – Paire 3. 1<sup>ère</sup> ligne (de gauche à droite) : image *Reference*, image *Template*, image obtenue après recalage. 2<sup>ème</sup> ligne (de gauche à droite) : champ de déformation représentant les vecteurs déplacement des noeuds de la grille de la configuration de référence vers la configuration déformée après recalage, déformation de la grille. Paramètres :  $\nu = 2$ ,  $\lambda = 10$ ,  $\mu = 3700$ ,  $\alpha' = 60000$ ,  $\min \det \nabla \varphi = 0.01$ ,  $\min \det \nabla \varphi = 2.18$ , temps d'exécution = 1.8 secondes.

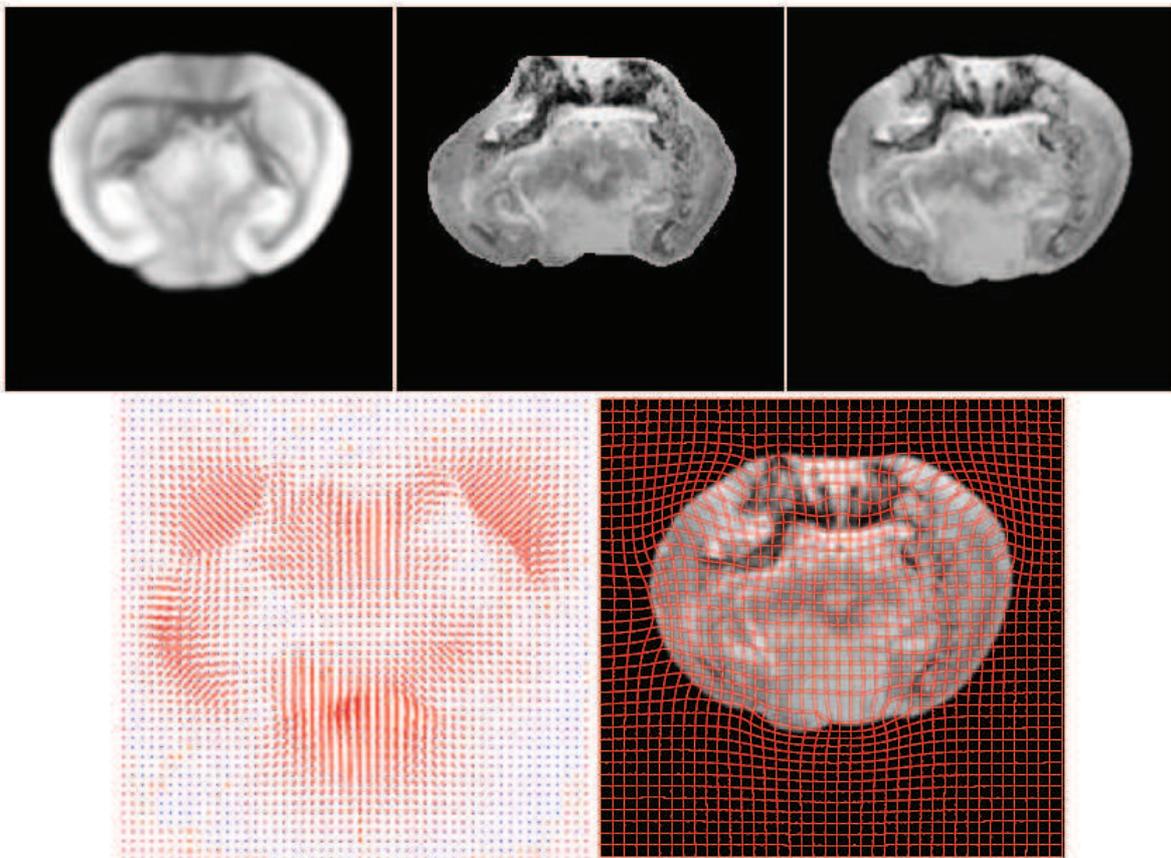


FIGURE 9.5 – Paire 4. 1<sup>ère</sup> ligne (de gauche à droite) : image *Reference*, image *Template*, image obtenue après recalage. 2<sup>ème</sup> ligne (de gauche à droite) : champ de déformation représentant les vecteurs déplacement des noeuds de la grille de la configuration de référence vers la configuration déformée après recalage, déformation de la grille. Paramètres :  $\nu = 2$ ,  $\lambda = 10$ ,  $\mu = 3000$ ,  $\alpha' = 60000$ ,  $\min \det \nabla \varphi = 0.008$ ,  $\min \det \nabla \varphi = 1.96$ , temps d'exécution = 1.9 secondes.

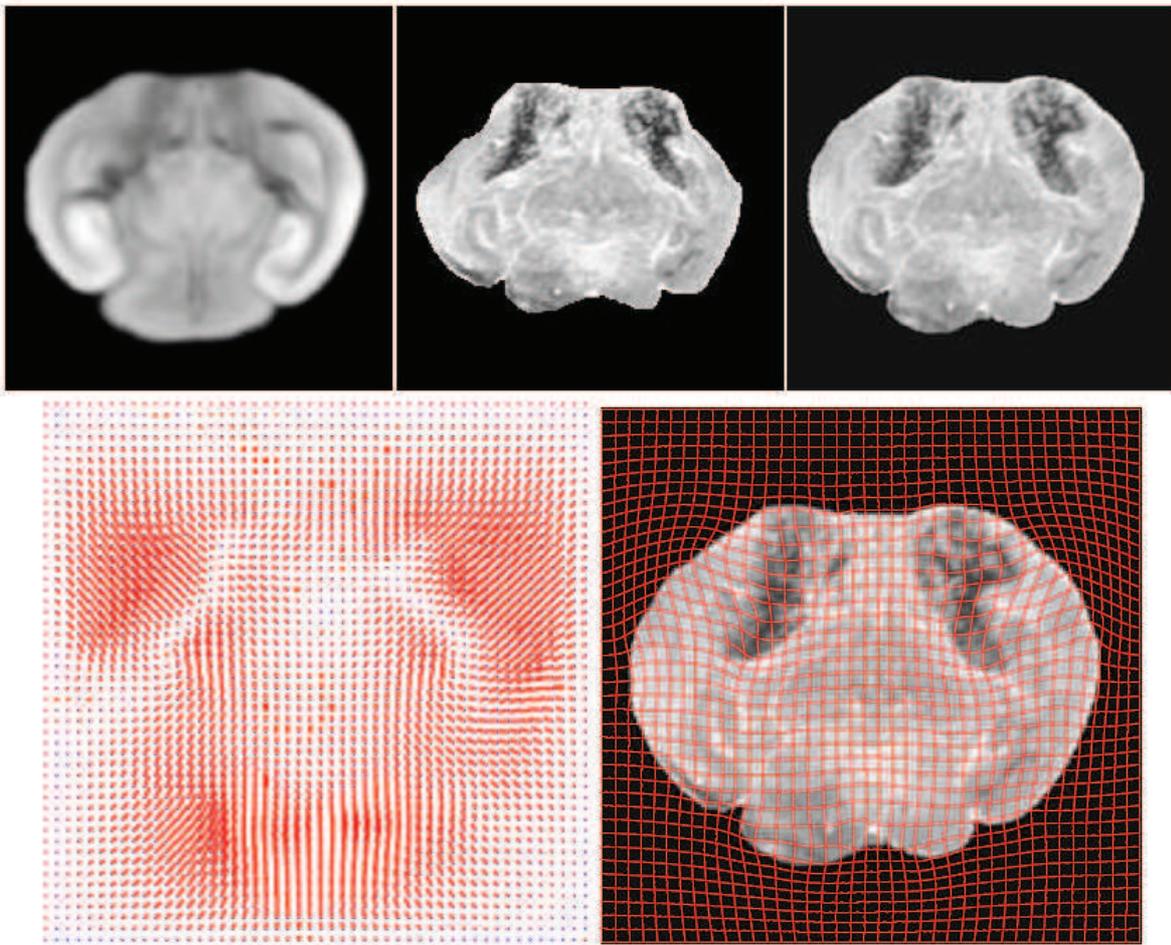


FIGURE 9.6 – Paire 5. 1<sup>ère</sup> ligne (de gauche à droite) : image *Reference*, image *Template*, image obtenue après recalage. 2<sup>ème</sup> ligne (de gauche à droite) : champ de déformation représentant les vecteurs déplacement des noeuds de la grille de la configuration de référence vers la configuration déformée après recalage, déformation de la grille. Paramètres :  $\nu = 1.4$ ,  $\lambda = 10$ ,  $\mu = 5000$ ,  $\alpha' = 60000$ ,  $\min \det \nabla \varphi = 0.02$ ,  $\min \det \nabla \varphi = 1.56$ , temps d'exécution = 9.5 secondes.



---

## Conclusion et perspectives

---

Le travail que nous avons présenté dans ce mémoire s'articule autour de deux thèmes : le calage des données sismiques répétées dans les modèles de réservoir et le recalage d'images. Dans ce qui suit, nous résumons les principales contributions de ce travail et nous présentons les perspectives qui peuvent être envisagées pour poursuivre ce travail.

### Contributions

Afin de caler convenablement les données sismiques dans le processus de calage d'historique, nous avons vu qu'il est nécessaire de définir une nouvelle formulation de la *fonction objectif* qui soit adaptée à ce type de données. Sur plusieurs exemples, nous avons démontré que la formulation classique des moindres-carrés ne fournit pas une mesure pertinente pour comparer des cubes sismiques. Puisque la formulation usuelle de la *fonction objectif* ne quantifie pas correctement la similarité entre deux cubes sismiques, l'objectif premier de ce travail était de fournir une alternative pour mieux évaluer cette similarité. En particulier, nous nous sommes intéressés à des techniques de traitement d'images qui permettent de considérer les cubes sismiques comme une image en 3 dimensions, et ainsi de prendre en compte la répartition spatiale des données. Nous avons alors proposé une nouvelle formulation de la *fonction objectif* fondée d'une part, sur la caractérisation de l'information pertinente pour chaque cube sismique et, d'autre part, sur l'évaluation des dissimilarités présentes entre les deux informations pertinentes apportées par chaque cube.

Pour extraire l'information prépondérante contenue dans les cubes sismiques, nous avons proposé d'appliquer des techniques de classification et de segmentation d'images. Cette étape permet de mettre en évidence les objets présents dans les cubes sismiques de façon pertinente et quasi-automatique. Dans un second temps, la comparaison des données permet de déterminer si deux ensembles de données simplifiées sont proches, au sens d'une mesure qui prend en compte des considérations spatiales. Enfin, cette comparaison est au centre du calcul de la valeur de la *fonction objectif*, qui oriente la procédure d'optimisation dans la boucle de calage d'historique. Durant la première partie de la thèse, nous avons implémenté et testé toutes ces étapes de manière intensive.

Concernant la phase de simplification des données, nous avons choisi une procédure en deux temps : la première étape fait appel à un algorithme de filtrage pour débruiter les données de référence et gommer les détails peu pertinents. Après plusieurs études, la méthode de débruitage qui donne les meilleurs résultats est le filtre NL-means. La seconde étape consiste à segmenter les données filtrées, dans le but d'identifier les objets et structures prépondérants dans les images. Deux approches ont été évaluées ici : la classification statistique et la segmentation variationnelle.

Pour l'approche par classification statistique, nous avons considéré l'algorithme du  $k$ -means. Dans tous les exemples étudiés ici, nous l'avons appliqué aux impédances P. Il serait intéressant d'améliorer cette étape en considérant plusieurs attributs pour la classification, notamment les impédances S, ou toute fonction combinant ces deux types d'information. En effet, il est fréquent que des objets ne soient pas discernables si l'on considère uniquement les impédances P, alors que les impédances S permettent de les discriminer.

Concernant la segmentation variationnelle, plusieurs méthodes basées sur la fonctionnelle de Mumford-Shah ont été analysées. Les modèles établis par Chan et Vese ([33], [128]) et Chung et Vese [35] permettent de détourner les contours des objets présents dans une image avec une forte présence de bruit qui ne permet pas de distinguer la frontière entre l'objet et le fond. Ces algorithmes utilisent des fonctions level set pour résoudre une modélisation du problème de segmentation basé sur le calcul de moyenne à l'intérieur et à l'extérieur d'un ou plusieurs niveaux de la fonction level set. Cette résolution permet de trouver une fonction constante par morceaux qui approche le mieux l'image à segmenter. Par exemple, les travaux de Chan et Vese [33] proposent d'approcher l'image à segmenter par une fonction ne prenant que deux valeurs, ce qui permet ainsi de définir deux régions distinctes. L'application de cet algorithme aux données sismiques, comme les impédances acoustiques P, donne des résultats satisfaisants si les régions à détecter sont juste composées d'un seul fort contraste d'impédances. Dans le cas de la sismique répétée, il peut cependant être intéressant d'essayer de détecter plus de deux régions, par exemple les zones où les variations d'impédances sont négatives, nulles et positives. Deux extensions du modèle précédent proposées par Vese et Chan [128] et Chung et Vese [35] permettent une segmentation en trois classes. D'après les tests effectués sur deux jeux de données de sismique répétée, il peut arriver que l'algorithme de Vese et Chan, qui utilise plusieurs fonctions level-set, sur-segmente l'image. La comparaison de l'approche par classification statistique et la segmentation variationnelle montre par ailleurs que les deux techniques sont comparables en termes de régions segmentées. Si la classification statistique a l'avantage d'être très peu coûteuse en temps de calcul, la segmentation variationnelle prend en compte des considérations spatiales lors de la segmentation. De plus, elle fournit également des grandeurs spécifiques à l'image segmentée, telles que la longueur des contours ou l'aire des régions. Ce sont des informations qui pourraient être extrêmement utiles pour des améliorations supplémentaires sur la nouvelle *fonction objectif*.

Enfin, il est nécessaire de construire une mesure pertinente pour comparer les données sismiques après segmentation. Dans ce travail, nous proposons d'utiliser la carte de dissimilarités locales proposée par Baudrier [9]. C'est une distance qui permet de construire une carte pour laquelle la valeur en chaque point est grande si localement les deux images à comparer sont très différentes, et qui est nulle si localement les deux images sont identiques. Il est possible

d'appliquer cette méthode pour des images binaires, c'est-à-dire qu'elle est limitée aux cas où seules deux régions ont été identifiées lors de la segmentation. Comme nous l'avons déjà mentionné, il est intéressant de pouvoir travailler avec plusieurs régions dans le cas de la sismique répétée. Par conséquent, nous avons considéré une approche qui généralise la carte de dissimilarités locales pour des images en niveaux de gris. Ce type d'approche est très satisfaisante dans les cas d'application traités. Cette nouvelle formulation a été alors implémentée dans un logiciel prototype proposé aux partenaires d'un projet de recherche industriel.

Dans la seconde partie de ce manuscrit, nous nous sommes intéressés aux techniques de recalage d'images qui rencontrent un fort succès dans le domaine médical. Ces techniques ont pour objectif de mettre en correspondance deux images en définissant une transformation pour aller d'une image à l'autre. Nous avons alors proposé deux nouveaux modèles de recalage d'images fondés sur l'élasticité non linéaire puisque dans ce cadre de grandes déformations sont possibles. Une étude théorique a alors été menée pour justifier le caractère bien posé de chaque modèle proposé.

Le premier modèle est un modèle sous contraintes géométriques fondé sur la densité d'énergie d'un matériau de type Ciarlet-Geymonat [37]. Nous avons introduit un problème de minimisation de fonctionnelle pour lequel un résultat d'existence de solutions dans un espace fonctionnel adéquat a été prouvé par des arguments classiques du calcul des variations [43]. Un résultat de convergence lorsque le nombre de contraintes tend vers l'infini a été prouvé en se basant sur des résultats antérieurs, liés à l'application des  $D^m$ -splines en théorie de l'approximation, qui ont été développées dans [3] et [80]. Ce dernier résultat n'a que peu d'intérêt en pratique puisque l'on ne dispose que d'un nombre fini de contraintes. Cependant, il permet de vérifier le caractère bien posé du problème de minimisation introduit. Ensuite, nous avons analysé deux méthodes de résolution numérique fondées sur le principe de découplage. La première est fondée sur la technique du Lagrangien augmenté tandis que la seconde est fondée sur les travaux de Negrón Marrero [101]. Dans ce cadre, nous avons établi un résultat théorique. L'application de ce modèle aux images médicales a donné des résultats satisfaisants et comparables à ceux proposés par Lin et al. [89].

Le second modèle de recalage d'images que nous avons proposé est fondé sur la densité d'énergie du matériau de type Saint-Venant Kirchhoff. Par des arguments du calcul des variations [43], nous avons établi un résultat théorique d'existence de solutions pour un problème de minimisation relaxé, solutions que l'on a qualifié de solutions généralisées du problème initial. Nous avons ensuite analysé la méthode de résolution numérique fondée sur le principe de découplage [101] et dans ce cadre nous avons établi un résultat théorique. Ce modèle a été appliqué avec succès dans le but de mettre en correspondance l'expression de gènes de cerveaux de souris à des atlas.

Nous avons alors conclu la seconde partie de ce rapport en proposant une étude préliminaire de l'application des modèles proposés en géosciences et plus particulièrement pour l'intégration des données sismiques dans les modèles de réservoir.

## Perspectives

Dans la première partie de ce rapport, nous avons proposé une nouvelle formulation de la *fonction objectif* adaptée à l'intégration des données sismiques 4D au modèle de réservoir.

- Pour l'étape de segmentation d'images, nous avons vu que l'approche par classification statistique et la segmentation variationnelle sont comparables en terme de régions segmentées. Si la classification statistique a l'avantage d'être très peu coûteuse en temps de calcul, la segmentation variationnelle prend en compte des considérations spatiales. De plus, elle fournit également des grandeurs spécifiques à l'image segmentée, telles que la longueur des contours ou l'aire des régions. Ce sont des informations qui pourraient être extrêmement utiles pour des améliorations supplémentaires sur la nouvelle *fonction objectif*. En effet, il serait par exemple envisageable d'inclure des distances mesurant l'écart entre les périmètres ou les aires des régions détectées dans les images sismiques de référence et celles simulées par le modèle réservoir.  
On peut également envisager d'améliorer la classification statistique en la probabilisant, ce qui rendrait l'étape de segmentation plus robuste.
- Pour certains cas tests, les ingénieurs réservoir jugent plus approprié de travailler localement par bloc sur le cube représentant le réservoir et d'effectuer une optimisation des paramètres par bloc. Une définition de la SCDL par bloc serait nécessaire en vue d'appliquer cette nouvelle formulation à ces cas particuliers.
- Cette formulation a été testée sur des cas synthétiques et réalistes. Une application de cette méthode à des cas de réservoirs réels nous permettra d'évaluer son potentiel sur des données réelles et le bénéfice que peuvent en tirer les compagnies pétrolières.

Concernant les perspectives liées aux deux modèles de recalage d'images fondées sur l'élasticité non linéaire, on peut citer les perspectives suivantes.

- Pour les deux modèles proposés, il serait pertinent de faire une étude comparative avec d'autres modèles de recalage d'images permettant de grandes déformations.
- L'étude théorique des deux modèles de recalage proposés dans ce travail est également valable pour des images tridimensionnelles. Cependant la méthode de résolution n'est proposée que pour des images bidimensionnelles. Il serait donc intéressant d'étendre le code de calcul à des volumes.
- Il serait également pertinent de s'intéresser au potentiel d'application des méthodes de recalage aux problèmes en géosciences. Le premier champ d'application qu'il serait intéressant d'étudier est celui qui a motivé cette étude, à savoir l'intégration des données sismiques répétées aux modèles de réservoir. Rappelons que dans la première partie de ce rapport, nous avons proposé une nouvelle formulation de la *fonction objectif* pour l'intégration des données sismiques répétées au modèle de réservoir. On pourrait alors envisager une nouvelle formulation de la *fonction objectif* fondée sur le recalage d'images. Plus précisément, il s'agit d'abord d'effectuer le recalage entre les données simulées et les données observées et ensuite d'utiliser les résultats du recalage pour calculer la fonction objectif. L'idée sous-jacente est que le recalage entre deux images similaires nécessite, a priori, de plus petits déplacements

par rapport à deux images moins similaires. Ainsi, le calcul de la *fonction objectif* inclura la norme du champs des vecteurs déplacement. Des tests préliminaires montrent que cette idée a un fort potentiel pour discriminer des images assez proches visuellement. Cependant une étude plus approfondie est nécessaire pour évaluer le potentiel de ces méthodes dans un cadre plus général. En effet, nous avons vu qu'il serait alors nécessaire de redéfinir le terme d'attache aux données dans les deux modèles, puisque la formulation moindre carré n'est pas représentative de la différence entre deux cubes sismiques.

- La seconde application du recalage concerne le recalage des images obtenues par traces sismiques. L'image formée par les traces sismiques est distordue suivant que l'on s'intéresse aux traces des ondes PP ou aux traces des ondes PS. En effet, ces deux types d'ondes n'ayant pas la même vitesse, les traces de l'une sont distordues par rapport à celles de l'autre. Le *warping* des ondes PP et PS consiste à mettre en correspondance les traces des ondes PP et des ondes PS. Peu de travaux ont été fait pour résoudre ce problème et la plupart se basent sur un recalage fondé uniquement sur un terme d'attache aux données [61], [54], [14]. Il serait alors intéressant d'appliquer la méthode de recalage proposée dans ce travail pour le recalage des traces des ondes PP et des ondes PS. Le *warping* n'est pas un processus itératif (contrairement à l'intégration des données dynamiques au modèle de reservoir). Le géophysicien peut alors mettre en correspondance des points d'intérêt sur l'une des images et leur homologue sur la seconde image. Ainsi, l'application du modèle développé dans le chapitre 8 semble appropriée.



---

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

- [1] E. Acerbi and N. Fusco. Semicontinuity problems in the calculus of variations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 86(2) :125–145, 1984.
- [2] T. Acharya and A.K. Ray. *Image processing : principles and applications*. Wiley-Interscience, 2005.
- [3] R. Arcangéli, M.C. López de Silanes, and J.J. Torrens. An extension of a bound for functions in sobolev spaces, with applications to (m, s)-spline interpolation and smoothing. *Numerische Mathematik*, 107(2) :181–211, 2007.
- [4] G. Aubert and P. Kornprobst. Can the nonlocal characterization of sobolev spaces by bourgain et al. be useful for solving variational problems? *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 47(2) :844–860, 2009.
- [5] K. Aziz and A. Settari. *Petroleum reservoir simulation*, volume 476. Applied Science Publishers London, 1979.
- [6] R. Bajcsy and C. Broit. Matching of deformed images. In *Sixth International Conference on Pattern Recognition (ICPR'82)*, pages 351–353, 1982.
- [7] R. Bajcsy and S. Kovačič. Multiresolution elastic matching. *Computer vision, graphics, and image processing*, 46(1) :1–21, 1989.
- [8] J.M. Ball. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 63(4) :337–403, 1976.
- [9] E. Baudrier. *Comparaison d'images binaires reposant sur une mesure locale des dissimilarités. Application à la classification*. PhD thesis, Université de la Rochelle, 2005.
- [10] E. Baudrier, G. Millon, F. Nicolier, and S. Ruan. The adaptative local hausdorff-distance map as a new dissimilarity measure. *Pattern Recognition*, 41 :1461–1478, 2004.
- [11] M F. Beg, M. I. Miller, A. Trouvé, and L. Younes. Computing large deformation metric mappings via geodesic flows of diffeomorphisms. *International Journal of Computer Vision*, 61(2) :139–157, 2005.
- [12] S. Benzoni. Méthodes directe en calcul des variations, quasiconvexité. *Journal de maths des élèves*, 1(3) :121–128, 1995.

- [13] A. J. Berkhout. *Seismic Migration : Imaging of Acoustic Energy by Wave Field Extrapolation : Imaging of Acoustic Energy by Wave Field Extrapolation*. Elsevier, 1984.
- [14] E.D.P. Bernard. A rigid registration method for the study of microgeometry evolution of limestone during dissolution by acidic water. *Advances in x-ray tomography for geomaterials*, page 349, 2010.
- [15] H. Beucher, F. Geffroy, and B. Doligez. Introducing more geology in reservoir stochastic modelling using truncated gaussian approach. In *Memorias del I Congreso Latinoamericano de Sedimentología, Soc. Venezolana de Geol*, volume 1, pages 89–95, 1997.
- [16] S. Beucher. The watershed transformation applied to image segmentation. *SCANNING MICROSCOPY-SUPPLEMENT-*, pages 299–299, 1992.
- [17] D. J. Blezek and J. V. Miller. Atlas stratification. *Medical Image Analysis*, 11(5) :443, 2007.
- [18] F. L. Bookstein. Principal warps : Thin-plate splines and the decomposition of deformations. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 11(6) :567–585, 1989.
- [19] F. L. Bookstein. *Morphometric tools for landmark data : geometry and biology*. Cambridge University Press, 1997.
- [20] M. Bousselsal. *Etude de quelques problèmes de calcul des variations liés à la mécanique*. PhD thesis, 1993.
- [21] Z. Bouzarkouna. *Well placement optimization*. PhD thesis, Université Paris Sud, 2012.
- [22] Z. Bouzarkouna, D. Y. Ding, and A. Auger. Well placement optimization with the covariance matrix adaptation evolution strategy and meta-models. *Computational Geosciences*, 16(1) :75–92, 2012.
- [23] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*, volume 5. Masson, 1983.
- [24] C. Broit. *Optimal registration of deformed images*. PhD thesis, Philadelphia, PA, USA, 1981. AAI8207933.
- [25] L. G. Brown. A survey of image registration techniques. *ACM computing surveys (CSUR)*, 24(4) :325–376, 1992.
- [26] J. Bruna and S. Mallat. Classification with scattering operators. In *Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2011 IEEE Conference on*, pages 1561–1566. IEEE, 2011.
- [27] A. Buades, B. Coll, and J.M. Morel. A review of image denoising algorithms, with a new one. *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation*, 4(2) :490–530, 2005.
- [28] P. Cachier, J.F. Mangin, X. Pennec, D. Rivière, D. Papadopoulos-Orfanos, J. Régis, and N. Ayache. Multisubject non-rigid registration of brain mri using intensity and geometric features. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention–MICCAI 2001*, pages 734–742. Springer, 2001.
- [29] JP Carson, G Eichele, and W Chiu. A method for automated detection of gene expression required for the establishment of a digital transcriptome-wide gene expression atlas. *Journal of microscopy*, 217(3) :275–281, 2005.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

- [30] V. Caselles, F. Catté, T. Coll, and F. Dibos. A geometric model for active contours in image processing. *Numerische Mathematik*, 66(1) :1–31, 1993.
- [31] V. Caselles, B. Coll, and J.M. Morel. Topographic maps and local contrast changes in natural images. *International Journal of Computer Vision*, 33(1) :5–27, 1999.
- [32] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. Geodesic active contours. *International journal of computer vision*, 22(1) :61–79, 1997.
- [33] T.F. Chan and L.A. Vese. Active contours without edges. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 10(2) :266–277, 2001.
- [34] G. E. Christensen, R. D. Rabbitt, and M. I. Miller. Deformable templates using large deformation kinematics. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 5(10) :1435–1447, 1996.
- [35] G. Chung and L. Vese. Energy minimization based segmentation and denoising using a multilayer level set approach. In *Energy minimization methods in computer vision and pattern recognition*, pages 439–455. Springer, 2005.
- [36] P. G. Ciarlet. *Elasticité tridimensionnelle*, volume 1. Masson, 1986.
- [37] P. G. Ciarlet and G. Geymonat. Sur les lois de comportement en élasticité non linéaire compressible. *CR Acad. Sci. Paris Sér. II*, 295 :423–426, 1982.
- [38] P.G. Ciarlet. *Mathematical elasticity : Three-dimensional elasticity*, volume 1. North Holland, 1988.
- [39] V. Clochard, N. Delépine, K. Labat, and P. Ricarte. Co2 plume imaging using 3d pre-stack stratigraphic inversion : A case study on the sleipner field-vincent clochard, nicolas delépine, karine labat and patrice ricarte (ifp) show how tried and tested technology in the oil and gas industry can provide valuable tools for ccs projects. *First Break*, 28 :91, 2010.
- [40] A. Collignon, F. Maes, D. Delaere, D. Vandermeulen, P. Suetens, and G. Marchal. Automated multi-modality image registration based on information theory. In *Information processing in medical imaging*, volume 3, pages 263–274, 1995.
- [41] L. Cosentino. *Integrated Reservoir Studies*. Technip Editions, 2001.
- [42] R. Cossé. *Basics of reservoir engineering*. Gulf Publishing Company, 1993.
- [43] B. Dacorogna. *Direct methods in the calculus of variations*, volume 78. Springer, 2007.
- [44] H. Darcy. Les fontaines publique de la ville de dijon : Paris, v, 1856.
- [45] C. Davatzikos, J. L. Prince, and R. N. Bryan. Image registration based on boundary mapping. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 15(1) :112–115, 1996.
- [46] M. De Craene, A. du Bois d’Aische, B. Macq, and S. K. Warfield. Multi-subject registration for unbiased statistical atlas construction. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention–MICCAI 2004*, pages 655–662. Springer, 2004.
- [47] D.L. Donoho and J.M. Johnstone. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81(3) :425–455, 1994.
- [48] M. Droske and M. Rumpf. A variational approach to nonrigid morphological image registration. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 64(2) :668–687, 2004.

- [49] M.P. Dubuisson and A.K. Jain. A modified hausdorff distance for object matching. In *Pattern Recognition, 1994. Vol. 1-Conference A : Computer Vision & Image Processing., Proceedings of the 12th IAPR International Conference on*, volume 1, pages 566–568. IEEE, 1994.
- [50] A.A. Efros and T.K. Leung. Texture synthesis by non-parametric sampling. In *Computer Vision, 1999. The Proceedings of the Seventh IEEE International Conference on*, volume 2, pages 1033–1038. Ieee, 1999.
- [51] B. Fischer and J. Modersitzki. Fast diffusion registration. *Contemporary Mathematics*, 313 :117–128, 2002.
- [52] B. Fischer and J. Modersitzki. Curvature based image registration. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 18(1) :81–85, 2003.
- [53] R. Fletcher. Practical methods of optimization. 1987.
- [54] S. Fomel and M. M. Backus. Multicomponent seismic data registration by least squares. In *73rd Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts*, pages 781–784, 2003.
- [55] A. Fornel. *Monitoring de reservoir : mise à jour du modèle géologique par des données de production et de sismique 4D*. PhD thesis, Thèse de mathématiques appliquées à l'ingénierie, Université Paris Dauphine, 2006.
- [56] F. Gassmann. Über die elastizität poröser medien : Vierteljahrss-chrift der naturforschenden gesellschaft in zurich 96, 1-23. *Paper translation at <http://sepwww.stanford.edu/sep/berryman/PS/gassmann.pdf>*, 1951.
- [57] Z. Ghahramani and M.I. Jordan. Supervised learning from incomplete data via an em approach. In *Advances in Neural Information Processing Systems 6*. Citeseer, 1994.
- [58] R. Glowinski and P. Le Tallec. *Augmented Lagrangian and operator splitting methods in nonlinear mechanics*, volume 9. Society for Industrial Mathematics, 1987.
- [59] O. Gosselin, S.I. Aanonsen, I. Aavatsmark, A. Cominelli, R. Gonard, M. Kolasinski, F. Ferdinandi, L. Kovacic, and K. Neylon. History matching using time-lapse seismic (huts). In *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, 2003.
- [60] E. Haber and J. Modersitzki. Intensity gradient based registration and fusion of multi-modal images. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention–MICCAI 2006*, pages 726–733. Springer, 2006.
- [61] D. Hale. Dynamic warping of seismic images. *Geophysics*, 78(2) :S105–S115, 2013.
- [62] N. Hansen and S. Kern. Evaluating the cma evolution strategy on multimodal test functions. In *Parallel Problem Solving from Nature-PPSN VIII*, pages 282–291. Springer, 2004.
- [63] N. Hansen and A. Ostermeier. Completely derandomized self-adaptation in evolution strategies. *Evolutionary computation*, 9(2) :159–195, 2001.
- [64] F. S. Henyey and N. Pomphrey. Self-consistent elastic moduli of a cracked solid. *Geophysical Research Letters*, 9(8) :903–906, 1982.
- [65] R. Hill. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(4) :213–222, 1965.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

- [66] O. Jesorsky, K. Kirchberg, and R. Frischholz. Robust face detection using the hausdorff distance. In *Audio-and Video-Based Biometric Person Authentication*, pages 90–95. Springer, 2001.
- [67] H. J. Johnson and G. E. Christensen. Consistent landmark and intensity-based image registration. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 21(5) :450–461, 2002.
- [68] S.C. Joshi, M.I. Miller, and U. Grenander. On the geometry and shape of brain sub-manifolds. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 11(08) :1317–1343, 1997.
- [69] I. A. Kakadiaris, M. Bello, S. Arunachalam, W. Kang, T. Ju, J. Warren, J. Carson, W. Chiu, C. Thaller, and G. Eichele. Landmark-driven, atlas-based segmentation of mouse brain tissue images containing gene expression data. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention–MICCAI 2004*, pages 192–199. Springer, 2004.
- [70] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes : Active contour models. *International journal of computer vision*, 1(4) :321–331, 1988.
- [71] J. Kim and J. A. Fessler. Intensity-based image registration using robust correlation coefficients. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 23(11) :1430–1444, 2004.
- [72] J. Kim, V. Kolmogorov, and R. Zabih. Visual correspondence using energy minimization and mutual information. In *Computer Vision, 2003. Proceedings. Ninth IEEE International Conference on*, pages 1033–1040. IEEE, 2003.
- [73] G. Lamé. *Leçons sur la théorie mathématique et l'élasticité des corps solides*. Bachelier, 1852.
- [74] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Course of theoretical physics*. Pergamon Press, 1965.
- [75] H. Langouët. *Optimisation sans dérivées sous contraintes, deux applications industrielles en ingénierie de réservoir et en calibration de moteurs*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2011.
- [76] A.M. LaVenue, B.S. RamaRao, G. De Marsily, and M.G. Marietta. Pilot point methodology for automated calibration of an ensemble of conditionally simulated transmissivity fields : 2. application. *Water Resources Research*, 31(3) :495–516, 1995.
- [77] M. Lavergne. *Méthodes sismiques*. Editions Technip, 1986.
- [78] H. Le Dret. Méthodes mathématiques en élasticité. notes de cours de dea, 2003-2004.
- [79] C. Le Guyader. Imagerie mathématique : segmentation sous contraintes géométriques~ théorie et applications. 2004.
- [80] C. Le Guyader, D. Apprato, and C. Gout. On the construction of topology-preserving deformation fields. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 21(4) :1587–1599, 2012.
- [81] C. Le Guyader and L. Vese. A combined segmentation and registration framework with a nonlinear elasticity smoother. *Scale Space and Variational Methods in Computer Vision*, pages 600–611, 2009.
- [82] C. Le Guyader and L.A. Vese. A combined segmentation and registration framework with a nonlinear elasticity smoother. *Computer Vision and Image Understanding*, 2011.

- [83] G. Le Loc'h and A. Galli. Truncated plurigaussian method : theoretical and practical points of view. *Geostatistics wollongong*, 96(1) :211–222, 1997.
- [84] M. Le Ravalec, S. Da Veiga, R. Derfoul, G. Enchéry, V. Gervais, and F. Roggero. Integrating data of different types and different supports into reservoir models. *Oil & Gas Science and Technology–Revue d'IFP Energies nouvelles*, 67(5) :823–839, 2012.
- [85] M. Le Ravalec-Dupin. *Inverse stochastic modeling of flow in porous media : applications to reservoir characterization*, volume 1. Editions Technip, 2005.
- [86] T. M. Lehmann, C. Gonner, and K. Spitzer. Survey : Interpolation methods in medical image processing. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 18(11) :1049–1075, 1999.
- [87] T. M. Lehmann, C. Gonner, and K. Spitzer. Addendum : B-spline interpolation in medical image processing. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 20(7) :660–665, 2001.
- [88] O. Lerat, F. Adjemian, A. Baroni, G. Etienne, G. Renard, E. Bathellier, J. Cotton, and E. Forgues. Modelling of the steam chamber growth during sagd-effects of reservoir heterogeneities on 4d seismic. *EAGE*, (June 2010) :14–17, 2010.
- [89] T. Lin, C. Le Guyader, I. Dinov, P. Thompson, A. Toga, and L. Vese. Gene expression data to mouse atlas registration using a nonlinear elasticity smoother and landmark points constraints. *Journal of Scientific Computing*, pages 1–24, 2012.
- [90] D.J.C. MacKay. *Information theory, inference and learning algorithms*. Cambridge University Press, 2003.
- [91] P. Marcellini. Approximation of quasiconvex functions, and lower semicontinuity of multiple integrals. *manuscripta mathematica*, 51(1-3) :1–28, 1985.
- [92] M. I Miller, A. Trouvé, and L. Younes. On the metrics and euler-lagrange equations of computational anatomy. *Annual review of biomedical engineering*, 4(1) :375–405, 2002.
- [93] RD Mindlin. Compliance of elastic bodies in contact. *Journal of applied mechanics*, 16, 1949.
- [94] J. Modersitzki. *Numerical Methods for Image Registration, Numerical Mathematics and Scientific Computation*. Oxford university press, 2004.
- [95] J. Modersitzki. *FAIR : flexible algorithms for image registration*, volume 6. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2009.
- [96] I.S. Molchanov and P. Teran. Distance transforms for real-valued functions. *Journal of mathematical analysis and applications*, 278(2) :472–484, 2003.
- [97] J. Morlet, G. Arens, E. Fourgeau, and D. Glard. Wave propagation and sampling theory-part i : Complex signal and scattering in multilayered media. *Geophysics*, 47(2) :203–221, 1982.
- [98] C. B. Morrey. Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals. *Pacific J. Math*, 2(1) :25–53, 1952.
- [99] J. Moser. A new proof of de giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13(3) :457–468, 1960.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

- [100] D. Mumford and J. Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on pure and applied mathematics*, 42(5) :577–685, 1989.
- [101] P. V. Negrón Marrero. A numerical method for detecting singular minimizers of multi-dimensional problems in nonlinear elasticity. *Numerische Mathematik*, 58(1) :135–144, 1990.
- [102] J. Nocedal and S. Wright. Numerical optimization, series in operations research and financial engineering. *Springer, New York*, 2006.
- [103] J. Nocedal and S.J. Wright. *Numerical optimization*. Springer verlag, 1999.
- [104] A Nur. Critical porosity and the seismic velocities in rocks. *Eos*, 73 :43–66, 1992.
- [105] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of computational physics*, 79(1) :12–49, 1988.
- [106] X. Pennec, P. Cachier, and N. Ayache. Understanding the “demon’s algorithm” : 3d non-rigid registration by gradient descent. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention–MICCAI’99*, pages 597–605. Springer, 1999.
- [107] J. P. W. Pluim, J. B. A. Maintz, and M. A. Viergever. Mutual-information-based registration of medical images : a survey. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 22(8) :986–1004, 2003.
- [108] A. Raoult. Non-polyconvexity of the stored energy function of a saint venant-kirchhoff material. *Applications of Mathematics*, 31(6) :417–419, 1986.
- [109] A. Roche, G. Malandain, N. Ayache, and S. Prima. Towards a better comprehension of similarity measures used in medical image registration. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention–MICCAI’99*, pages 555–566. Springer, 1999.
- [110] A. Roche, G. Malandain, X. Pennec, and N. Ayache. The correlation ratio as a new similarity measure for multimodal image registration. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention—MICCAI’98*, pages 1115–1124. Springer, 1998.
- [111] F. Roggero, D.Y. Ding, P. Berthet, O. Lerat, J. Cap, and P.E. Schreiber. Matching of production history and 4d seismic data–application to the girassol field, offshore angola. In *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, 2007.
- [112] K. Rohr, H. S. Stiehl, R. Sprengel, W. Beil, T. M. Buzug, J. Weese, and M.H. Kuhn. Point-based elastic registration of medical image data using approximating thin-plate splines. In *Visualization in Biomedical Computing*, pages 297–306. Springer, 1996.
- [113] L.I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 60(1-4) :259–268, 1992.
- [114] D. Rutovitz. Data structures for operations on digital images. *Pictorial pattern recognition*, pages 105–133, 1968.
- [115] C. Scheidt. *Analyse statistique d’expériences simulées : Modélisation adaptative de réponses non-régulières par krigeage et plans d’expériences. Application à la quantification des*

- incertitudes en ingénierie des réservoirs pétroliers*. PhD thesis, Université Louis Pasteur Strasbourg I, 2006.
- [116] A. Seret and M. Hoebeke. *Imagerie médicale : bases physiques*. Editions de l'ULG, 2008.
- [117] S. Serfaty. Méthodes variationnelles et gamma-convergence. *Polycopié de cours du master Mathématiques et Applications, UPMC*.
- [118] C. OS Sorzano, P. Thevenaz, and M. Unser. Elastic registration of biological images using vector-spline regularization. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 52(4) :652–663, 2005.
- [119] S. Spagnolo. Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 22(4) :571–597, 1968.
- [120] R. Szeliski and S. Lavallée. Matching 3-d anatomical surfaces with non-rigid deformations using octree-splines. *International journal of computer vision*, 18(2) :171–186, 1996.
- [121] J.P. Thirion. Image matching as a diffusion process : an analogy with maxwell's demons. *Medical image analysis*, 2(3) :243–260, 1998.
- [122] P. Thompson and A. W. Toga. A surface-based technique for warping three-dimensional images of the brain. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 15(4) :402–417, 1996.
- [123] R. C. Thompson and L. J. Freede. On the eigenvalues of sums of hermitian matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 4(4) :369–376, 1971.
- [124] P. J Toivanen. New geodesic distance transforms for gray-scale images. *Pattern Recognition Letters*, 17(5) :437–450, 1996.
- [125] G. Unal and G. Slabaugh. Coupled pdes for non-rigid registration and segmentation. In *Computer Vision and Pattern Recognition, 2005. CVPR 2005. IEEE Computer Society Conference on*, volume 1, pages 168–175. IEEE, 2005.
- [126] B. Vemuri and Y. Chen. Joint image registration and segmentation. In *Geometric level set methods in imaging, vision, and graphics*, pages 251–269. Springer, 2003.
- [127] B. C. Vemuri, J. Ye, Y. Chen, CM Leonard, et al. Image registration via level-set motion : Applications to atlas-based segmentation. *Medical image analysis*, 7(1) :1–20, 2003.
- [128] L.A. Vese and T.F. Chan. A multiphase level set framework for image segmentation using the mumford and shah model. *International Journal of Computer Vision*, 50(3) :271–293, 2002.
- [129] P. Viola and W. M. Wells III. Alignment by maximization of mutual information. *International journal of computer vision*, 24(2) :137–154, 1997.
- [130] F. Wang and B. C. Vemuri. Simultaneous registration and segmentation of anatomical structures from brain mri. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention—MICCAI 2005*, pages 17–25. Springer, 2005.
- [131] W. M. Wells, P. Viola, H. Atsumi, S. Nakajima, and R. Kikinis. Multi-modal volume registration by maximization of mutual information. *Medical image analysis*, 1(1) :35–51, 1996.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

- [132] R. P. Woods, J. C. Mazziotta, S. R. Cherry, et al. Mri-pet registration with automated algorithm. *Journal of computer assisted tomography*, 17(4) :536–546, 1993.
- [133] J. Wu, T. Mukerji, and A.G. Journel. Prediction of spatial patterns of saturation time-lapse from time-lapse seismic. *Geostatistics Banff 2004*, pages 671–680, 2005.
- [134] C. Xiaohua, M. Brady, and D. Rueckert. Simultaneous segmentation and registration for medical image. *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention–MICCAI 2004*, pages 663–670, 2004.
- [135] LP Yaroslavskij. Digital picture processing. an introduction. *Digital picture processing. An introduction. Springer Series in Information Sciences, Vol. 9. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo. 12+ 276 pp. Price DM 112.00 (1985). ISBN 3-540-11934-5 (FR Germany), ISBN 0-387-11934-5 (USA).*, 1, 1985.
- [136] A. Yezzi, L. Zollei, and T. Kapur. A variational framework for joint segmentation and registration. In *Mathematical Methods in Biomedical Image Analysis, 2001. MMBIA 2001. IEEE Workshop on*, pages 44–51. IEEE, 2001.
- [137] C. Zhao, W. Shi, and Y. Deng. A new hausdorff distance for image matching. *Pattern Recognition Letters*, 26(5) :581–586, 2005.