



HAL
open science

Les Écritures Symboliques de l'Algèbre Élémentaire

Jean-Philippe Drouhard

► **To cite this version:**

Jean-Philippe Drouhard. Les Écritures Symboliques de l'Algèbre Élémentaire. Education. Université Paris-Diderot - Paris VII, 1992. Français. NNT : . tel-00925358

HAL Id: tel-00925358

<https://theses.hal.science/tel-00925358>

Submitted on 8 Jan 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DENIS DIDEROT
PARIS 7

THESE DE DOCTORAT

SPECIALITE: DIDACTIQUE DES DISCIPLINES

Présentée par: Jean-Philippe DROUHARD

LES ECRITURES SYMBOLIQUES
DE L'ALGEBRE ELEMENTAIRE

Soutenu le 15 Décembre 1992

JURY:	PRESIDENT:	Jérôme CHASTENET DE GERY
	DIRECTEUR:	Daniel LACOMBE
	RAPPORTEURS:	Hélène BESTOUGEFF
		Jean-Pierre DESCLES
		Colette LABORDE
	EXAMINATEURS:	Bernard DUMONT
		Marc LEGRAND



Aux professeurs Georges Mathé,
Jean-Louis Misset et à leurs équipes.

En tout premier lieu, je tiens à remercier Daniel Lacombe. Ne faisant grâce d'aucun à-peu-près, débusquant les incohérences avec causticité, capable de percevoir dans le fouillis des notations le détail qui invalide la construction ambitieuse mais maladroite, il a eu la patience admirable d'étudier en profondeur les nombreuses versions successives et souvent contradictoires de ce travail. Il m'a ainsi permis de le débarrasser de ses scories pour n'en conserver que l'essentiel.

Je remercie Jérôme Chastenet de Géry, professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers, qui s'est intéressé à cette recherche depuis le début, et m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance de cette thèse.

Je remercie Colette Laborde, professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, d'avoir accepté de rapporter sur ce travail. Ses nombreuses remarques et ses questions pertinentes, à diverses étapes de la rédaction, m'ont permis de clarifier nombre de points importants sur le plan didactique, et ses encouragements m'ont été précieux.

Je remercie Jean-Pierre Desclés, professeur à l'Université Paris-Sorbonne, et Hélène Bestougeff, professeur à l'Université Paris VII, d'avoir accepté de rapporter sur ce travail. Leurs remarques m'ont été précieuses, tant en ce qui concerne la pertinence du travail linguistique, que pour rendre plus présentable une rédaction initiale quelque peu indigeste.

Je remercie Bernard Dumont, professeur à l'Université Paris VII, qui a accepté de faire partie du jury de cette thèse. Il m'a accueilli dans l'équipe qu'il a constituée à l'INRP et qui est à l'origine du travail sur les fractions. Ses remarques sur les chapitres correspondants m'ont été précieuses.

Je remercie Marc Legrand, Maître de Conférences à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, qui a accepté de faire partie du jury de cette thèse. Je lui dois l'impulsion qui est à l'origine de l'étude sur les Discussions

Autour de Problèmes; nous avons eu depuis de nombreuses discussions, qui m'ont permis également d'améliorer la présentation de ce travail.

J'ai mené l'étude des fractions et celle des Discussions Autour de Problèmes en collaboration avec Yves Paquelier, chacun d'entre nous approfondissant un aspect particulier du travail commun. Toutefois, tout ce que ma recherche lui doit, de ces années d'amitié, de travail et de complicité intellectuelle, dépasse de très loin le cadre d'une simple collaboration professionnelle. Qu'il en soit ici remercié.

Je ne peux parler des Discussions Autour de Problèmes sans mentionner également les noms d'Hélène Lymberopoulos et d'Hélène Nikolakarou, qui ont contribué de manière essentielle à cette recherche.

Je remercie également David Kirshner, de la Louisiana State University à Baton Rouge (Louisiane), pour les discussions passionnantes et passionnées que nous avons menées au sujet de la syntaxe des expressions symboliques de l'algèbre, et les encouragements qu'il m'a prodigués.

De nombreux autres professeurs, collègues, et amis, trop nombreux pour être tous cités, m'ont apporté leur aide et leurs soutiens, notamment au sein des équipes de recherche et d'enseignement auxquelles j'ai participé. En particulier, je tiens à remercier vivement Josette Adda (Université Louis Lumière à Lyon), Gérard Azoulay (C.N.E.S.), Michel Bruston et l'équipe d'IES (C.N.A.M.), Régine Douady et le sous-groupe "algèbre" du G.R. Didactique, Linda Gattuso (U.Q.A.M.), Serge Hocquenghem (C.N.A.M.), François Léonard et l'équipe du GECO (Nice), Claire Margolinas (IUFM de Clermont-Ferrand), Jean-François Nicaud et l'équipe d'APLUSIX (Orsay) et Gilbert Sol (Paris VII) et pour les discussions menées et les nombreux encouragements prodigués.

Je tiens également à remercier les personnels de l'UF de Didactique des Disciplines de l'Université Paris 7 et de l'IREM Paris Sud pour leur soutien et leur gentillesse.

Enfin, je remercie mes parents pour l'aide qu'ils m'ont prodiguée, et Annie Texier, pour les nombreuses relectures qu'elle a faites du manuscrit, et surtout pour avoir supporté de partager, de nombreuses années durant, son compagnon avec une thèse.

TABLE DES MATIERES

AVANT-PROPOS.....1

PREMIERE PARTIE: PRESENTATION DU PROBLEME

CHAPITRE I. INTRODUCTION

I.1. Position du problème et thèses3
I.2. Le thème de la recherche7
I.3. Un objet d'étude en évolution: les ESA.8
I.4. Évolution de la méthodologie14
I.5. Les ESA: une étude prodidactique.....20

CHAPITRE II. POSITION DU PROBLEME

II.1. Plan d'étude général23
II.2. Calculateurs Symboliques et Éditeurs de Formules.....29
II.3. Redéfinition du plan d'étude35
II.4. Niveau Typématique.....35
II.5. Procédures et métarègles.....40
II.6. Structures et transformations.....41

CHAPITRE III. L'APPROCHE CHOMSKYENNE DE D. KIRSHNER

III.1. Introduction.....43
III.2. Présentation de l'approche de Kirshner.....44
III.3. Une qualité de ce modèle: la simplicité50
III.4. Quelques inconvénients du modèle de Kirshner53

III.5. Conclusion.....	69
DEUXIEME PARTIE: LE MODELE THEORIQUE DU SYSTEME DES ESA	
CHAPITRE IV. LA GENERATION DES ESAL	
IV.1. Notion de partie générative G d'une syntaxe.....	71
IV.2. Partie Générative des constantes.....	85
IV.3. Variables et des Constantes Littérales.....	88
IV.4. Partie Générative des Expressions Algébriques (ExA)	90
IV.5. Partie Générative des Propositions Algébriques.....	111
CHAPITRE V. VARIABLES, PUISSANCES, RACINES	
V.1. Présentation du problème.....	115
V.2. Graphèmes.....	115
V.3. Puissances.....	120
V.4. Racines.....	130
V.5. Conséquences:.....	131
V.6. Conclusion.....	136
CHAPITRE VI. SOMMES ALGEBRIQUES	
VI.1. La récursivité.....	138
VI.2. Un schéma de règles de réécriture.....	147
CHAPITRE VII. LES PRODUITS	
VII.1. Introduction.....	157
VII.2. Cas d'omission du point ou de la croix.....	160

VII.3. Intuition du Locuteur et Corpus.....	162
VII.4. Les trois fonctions du point (ou de la croix).....	171
VII.5. La notion de pseudo-monôme (Môn).....	182
VII.6. Priorité généralisée.....	185
VII.7. Etude systématique des produits selon le nombre et la catégorisation de leurs facteurs.....	186
VII.8. Remarque sur les transformations.....	188
VII.9. Remarque sur les indices spatiaux.....	188
VII.10. Conclusion.....	190

CHAPITRE VIII. TRANSFORMATIONS

VIII.1. Transformations singulières.....	192
VIII.2. Transformations généralisées.....	210
VIII.3. Conclusion.....	214

TROISIEME PARTIE: DE LA SIGNIFICATION DES ESA (ENQUETES ET ELEMENTS D'ANALYSE THEORIQUE)

CHAPITRE IX. DEUX ENQUETES SUR LES ECRITURES ALGEBRIQUES

IX.1. Première enquête.....	217
IX.2. Seconde enquête.....	249
IX.3. Conclusion.....	261

CHAPITRE X. ELEMENTS POUR UNE SEMANTIQUE DES ESA

X.1. "Sinn" et "Bedeutung".....	265
X.2. Dénotation des ESA.....	267
X.3. Sens (Sinn).....	277

X.4.	Interprétation.....	280
X.5.	Connotation	282
X.6.	Communication sur la signification.....	284
CHAPITRE XI. UNE ENQUETE SUR LES FRACTIONS (1^{ERE} PARTIE)		
XI.1.	Présentation.....	287
XI.2.	Méthodologie	294
XI.3.	Le Codage des transformations	301
XI.4.	Description des items	304
XI.5.	Réussite et non-réponse:	306
XI.6.	Les trois étapes.....	313
XI.7.	Les notions de réponse et de transformation "classiques".....	315
XI.8.	Quelques indications sur les erreurs non-classiques	317
XII. UNE ENQUETE SUR LES FRACTIONS (2^{EME} PARTIE)		
XII.1.	Les enchaînements classiques de Q6.....	324
XII.2.	Les enchaînements classiques de Q7.....	334
XII.3.	Les enchaînements classiques de Q8.....	338
XII.4.	Les enchaînements classiques de Q9.....	345
XII.5.	Les enchaînements classiques de Q10.....	348
XII.6.	Comportements réguliers	351
CHAPITRE XIII. CONCLUSION		
XIII.1.	Des fractions qui ne désignent rien.....	359
XIII.2.	Des ESA qui ne dénotent rien	362
XIII.3.	"Comprendre" les ESA	376

POSTFACE

1.	Le lecteur.....	382
2.	Faits, choix théoriques et signification.....	382
3.	Travail sur les choix et scientificité.....	385
4.	évaluation et appropriation.....	386
5.	Repersonnalisation et recontextualisation	387

REFERENCES

Bibliographie portant sur les ESA.....	391
Bibliographie complémentaire concernant la DAP.....	404
Liste des manuels relevés en référence	406
"Recherche d'une démarche d'enseignement en mathématiques avec des adultes"	II-1-1
"Quelques développements récents des recherches sur la Discussion Autour de Problèmes"	II-2-1
Photocopie du Corpus "brut" d'expressions algébriques (chap. V)	
Corpus détaillé d'expressions algébriques (chap. V).....	C-1
Photocopie d'un questionnaire d'enquête sur l'acceptabilité de certaines expressions algébriques (chap. V)	
Résultats bruts de cette enquête sur l'acceptabilité de certaines expressions algébriques (chap. V)	
Photocopie de tickets de métro de Montréal (chap. VII)	
Photocopie d'un questionnaire sur les écritures algébriques (chap. IX)	
Photocopie d'un questionnaire de la seconde enquête sur les fractions (chap. XII)	

AVANT-PROPOS

Les travaux que nous présentons pour l'obtention du doctorat de didactique des mathématiques portent sur deux domaines d'inégale importance: les Expressions Symboliques de l'Algèbre élémentaire ("ESA") d'une part et les situations de Discussions Autour de Problèmes ("DAP") de l'autre.

Le corps principal de la thèse expose "*les principales caractéristiques de modèles structuraux, didactiquement plausibles, des systèmes d'ESA*" (ces termes précis seront détaillés dans l'introduction). Ces travaux, qui n'ont pas été publiés (sinon sous la forme d'exposés de synthèse), constituent essentiellement ce que nous appelons une recherche "prodidactique". Il ne s'agit pas d'une étude de didactique de l'algèbre au sens strict, qui serait plus ou moins directement applicable à ce qui se passe dans les classes, mais plutôt d'une recherche fondamentale sur la structure des expressions symboliques qu'emploient élèves et professeurs en algèbre élémentaire (ESA), destinée à servir d'outil aux études didactiques ultérieures.

Cette étude est structurée en trois grandes parties. La première (chapitres I à III) expose le problème, le délimite et le resitue par rapport aux travaux existants. La seconde partie (chap. IV à VIII) présente nos propositions, à savoir une grammaire du système des ESA. La troisième et dernière partie (chap. IX à XIII) est la plus proche de la didactique, en ce qu'elle s'appuie sur des résultats d'enquêtes auprès d'élèves pour aborder le domaine de la signification des ESA.

En annexe figurent deux articles:

- "Recherche d'une démarche d'enseignement en mathématiques avec des adultes", réalisé en collaboration avec Y. Paquelier et paru en 1987 dans la revue *Education Permanente*,
- "Quelques développements récents des recherches sur la Discussion

Avant-Propos

Autour de Problèmes”, réalisé en collaboration avec Y. Paquelier, H. Lymberopoulos et H. Nikolakarou et paru en 1988 dans les actes de la douzième conférence annuelle du Groupe International “*Psychology of Mathematics Education*” à Veszprém (Hongrie).

Ces articles présentent une recherche d'ordre didactique (et non “pro-
didactique), qui se situe dans un domaine tout à fait différent, celui de la construction sociale des connaissances en mathématiques, dans le cadre de la classe. Cette recherche a été menée en collaboration avec Y. Paquelier, H. Lymberopoulos et H. Nikolakarou.

Les deux recherches présentées se complètent plus qu'elles ne s'opposent. La première est “pointue” et cherche à analyser en profondeur un domaine réduit, celui des ESA. Cette recherche se situe en amont des problèmes d'enseignement, et vise à apporter des outils conceptuels au didacticien (ou à l'enseignant en tant qu'il porte un regard didactique sur sa propre activité) qui souhaite travailler sur l'enseignement de l'algèbre.

C'est l'étude des Discussions Autour de Problèmes, dans la deuxième partie, qui fait le lien avec les situations d'enseignement réelles et le fameux “terrain”. Il s'est agi pour nous de mettre au point et de théoriser des situations d'enseignement qui conviennent à des séances de travaux dirigés (menées par nous-mêmes) dans des amphithéâtres -extrêmement hétérogènes- contenant parfois plus de cent étudiants! Situation complémentaire de la première, laquelle est un bon exemple de recherche “fondamentale”, plus loin des élèves et des classes, mais comme on le verra, pas moins importante que l'autre.



I. INTRODUCTION.

La recherche a appris à trouver l'étonnant au sein du familier.

H. Montagner¹

PREMIERE PARTIE:

PRESENTATION DU PROBLEME

I.1. Position du problème et thèses

Au tout début de ce travail il y a l'hypothèse très générale qu'en algèbre, à côté de difficultés proprement conceptuelles, l'apprenant est également confronté à des difficultés d'ordre linguistique, liées à la complexité du langage symbolique des mathématiques. En d'autres termes, la "transparence" du langage symbolique² est posée comme illusoire, et un des objectifs de ce travail est précisément de lever cette "illusion de transparence"³.

J'avais choisi initialement⁴ d'étudier pour commencer les erreurs "classiques", dans le cadre de l'algèbre élémentaire. Pour ce faire, il m'a

¹ *l'Attachement*, Odile Jacob, 1988.

² c'est-à-dire l'idée que les obstacles se situent au niveau des concepts algébriques (p. ex. celui de variable) et non des expressions qui servent à les décrire (p. ex. la lettre x), lesquelles "vont de soi"

³ (Bourdieu, Passeron & Chamboredon 1968, Bourdieu, 1984).

⁴ et dans le prolongement de travaux menés au sein de l'Équipe de Didactique des Mathématiques de l'UER de Didactique des Disciplines de l'Université Paris 7 et du CREEM (CNAM), sous la responsabilité conjointe de D. Lacombe et de J. Chastenet de Géry (v. chap. IX)

fallu mettre au point une syntaxe des expressions algébriques correctes, qui devait servir de référence pour l'étude des erreurs.

Ce faisant, j'effectuais un "pas de côté" pour mieux aborder la didactique de l'algèbre, autrement dit je mettais entre parenthèses les questions d'enseignement, pour mieux y revenir ensuite. J'ai pris délibérément le parti de renverser la perspective usuelle, par rapport à nombre d'études didactiques, qui consiste à partir de la situation d'enseignement. J'aurais pu me demander par exemple "qu'est-ce que devrait être une situation (a-)didactique en algèbre?" et construire ma recherche autour de cette problématique. J'ai préféré me poser d'abord la question "qu'est-ce que l'algèbre (en tant qu'elle est enseignée)?" puis préciser cette question en "que sont les écritures symboliques de l'algèbre?" avant d'aborder les questions plus proprement didactiques.

La recherche a alors suivi son propre développement, déterminée par les contraintes propres à l'objet d'étude. Il a fallu définir précisément cet objet, autrement dit déterminer ce que j'ai appelé les Expressions Symboliques de l'Algèbre Élémentaire (ESA) au sein de l'ensemble des écritures mathématiques. J'ai posé comme hypothèse que les ESA pouvaient être décrites par un modèle linguistique (une grammaire). Vu les caractéristiques de ces ESA, tel modèle convient mieux que tel autre: j'ai dû choisir. Si on veut que les mécanismes décrits correspondent à la représentation qu'en ont les "experts", cela impose telle et telle contraintes ("plausibilité"). Si on souhaite que le lecteur puisse s'appropriier les résultats de la recherche et adapter le modèle à ses besoins, cela influe sur la présentation des recherches ("accessibilité" et "adaptabilité") etc. Je ne cacherai pas que ce travail de modélisation, qui était en principe un préalable à l'étude des erreurs, a fini par m'intéresser pour lui-même. Cette modélisation des ESA peut être qualifiée de recherche didactique "fondamentale", ou "pro-didactique"⁵ en tant qu'elle se situe en

⁵ du suffixe grec "πρo-": en avant de

amont de la didactique de l'algèbre proprement dite. Ensuite, ce modèle théorique m'a permis de reprendre des questions spécifiquement didactiques, liées à des expérimentations, qui sont exposées dans les quatre derniers chapitres de cette thèse.

C'est seulement maintenant, à la fin du processus, que je suis en mesure d'énoncer clairement ce qui est spécifique de la didactique de l'algèbre et justifie, a posteriori, la décision initiale de faire ce pas de côté qui m'éloignait pour un temps des situations d'enseignement. En didactique de l'algèbre comme partout ailleurs en didactique des mathématiques, la question du sens est au cœur de la recherche. Cette question est une des mieux partagées dans la communauté des didacticiens. Malheureusement, si ce mot "sens" est employé par tous, au delà même des querelles d'écoles, c'est parce qu'il désigne des notions différentes et fort complexes.

De nombreux travaux de didactique des mathématiques ont pour objectif, implicite ou explicite, de permettre à l'élève de donner du "sens" à des concepts qu'on veut lui faire acquérir. Citons par exemple la présentation que fait M-J. Perrin-Glorian (1992) des recherches parmi lesquelles son travail prend place:

«Un premier élément important concernant l'apprentissage est la prise de sens des concepts pour les élèves. Du travail de G. Brousseau on retiendra à ce sujet ce qui concerne la contextualisation et la décontextualisation du savoir et ce qu'il appelle la "dévolution du problème". C'est aussi le premier souci de R. Douady dans ce qu'elle appelle la Dialectique Outil-Objet; le jeu de cadres contribue aussi à favoriser la prise de sens des concepts⁶ par les élèves ...»

ou encore G. Vergnaud (1991):

«C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant.»

⁶ c'est moi qui souligne

Certes, en algèbre, il y a des concepts qu'il s'agit d'enseigner: le concept de variable, celui d'opération, celui de polynôme ou d'équation, auxquels ce qui vient d'être dit s'applique naturellement. Tout le problème vient de ce qu'en algèbre, certains objets d'enseignement ne sont pas des concepts. L'écriture " $ax + b$ " est une expression bien formée, et comme telle, elle est signifiante. La question de savoir si l'élève attribue effectivement une signification à cette écriture, et laquelle, est cruciale en didactique de l'algèbre. Mais $ax + b$ n'est pas un concept⁷, au même titre que ceux de "multiplication" ou de "plan affine". De même, comme l'a montré Tonnel (1979), la factorisation n'est pas non plus un concept mathématique. On ne peut pas parler de "sens de la factorisation" de la même façon que l'on parle de "sens de la division" ou de celui de l'Intégrale de Riemann.

Si donc on ne peut réutiliser tels quels des outils théoriques développés par ailleurs, il faut reprendre le problème à la base, et commencer par savoir de quoi l'on parle. Si les Écritures Algébriques ne sont pas des concepts alors de quoi s'agit-il, et qu'est-ce que leur signification, dont on a observé qu'elle était essentielle pour les élèves? Cette thèse répond (au moins en partie) à ces deux questions. Etant donné qu'elles ont centrales en didactique de l'algèbre⁸, il faut donc développer une théorie spécifique pour en rendre compte. L'ambition de cette thèse est de poser les premiers linéaments d'une telle théorie de la didactique de l'algèbre.

⁷ il s'agit plutôt d'un nom propre, dans la terminologie de Frege (1971)

⁸ ceci vaut partout (en mathématiques) où l'on enseigne des langages et pas seulement des concepts

1.2. Le thème de la recherche

J'ai toujours eu des difficultés pour expliquer en quelques mots ce que je faisais exactement. Le problème n'est pas de formuler l'intitulé de mon travail; cela peut être fait comme suit:

Mettre en évidence, de manière "accessible", les principales caractéristiques de "modèles structuraux", didactiquement "plausibles", des "systèmes" d'Écritures Symboliques en Algèbre élémentaire.

Toute la difficulté est de permettre à l'interlocuteur de comprendre de quoi il s'agit et quels sont les enjeux. Pourtant, je ne suis pas dans la position difficile du physicien qui développe un modèle hautement abstrait de particules ésotériques. Mon objet n'a rien d'exotique: ce sont les x et les y , les sommes et les produits, les fractions et les équations que manipulent tous les jours les élèves et leurs professeurs. Ce n'est pas l'objet qui est difficile à expliquer, c'est la méthode suivie, le point de vue adopté, et peut-être avant tout, les raisons de s'y intéresser. Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire sont en effet, pour l'enseignant, des objets courants, "transparents". Quel peut donc être l'intérêt d'étudier de tels objets soi-disant banals?

Répondre à cette question revient à exposer les choix qui sous-tendent cette thèse. Or ces choix ont évolué avec le temps. Afin de les replacer dans leur contexte, cette évolution sera retracée dans ce chapitre d'introduction. Pour la clarté de l'exposé, l'énoncé de l'objet de la recherche sera régulièrement repris (en encadré), en mettant en valeur le ou les mots qui sont plus spécialement explicités dans la suite.

J'ai choisi d'inclure de nombreux éléments concernant ma démarche personnelle. Il ne s'agit pas d'exhibitionnisme intellectuel ou de retour sur soi complaisant, mais comme on le verra d'un moyen de rendre les choses plus claires en les re-situant dans leur contexte.

"Méta"-Note:

Le contexte en question ne se réduit pas à une évolution personnelle. Toute recherche prend place et sens au sein d'un ensemble d'autres recherches, de même que le chercheur s'intègre de diverses manières à une communauté de pairs.

Le champ de la Didactique des Mathématiques est, à l'heure actuelle, caractérisé par des clivages relativement profonds, qui prennent leur source, notamment, dans des choix épistémologiques fondamentaux. Or il n'est pas nécessaire de faire de la sociologie de la recherche en Didactique (ce n'est pas l'objet de cette thèse) pour savoir que les références bibliographiques permettent de situer une étude parmi les courants de pensée. En particulier, ne pas citer Tel ou Tel, alors qu'on évoque un point qu'il a lui-même étudié, est interprété comme une ignorance ou un refus.

Un tel état de fait gêne considérablement la rédaction d'un chapitre d'introduction dans lequel on cherche à préciser les hypothèses qui sont à l'origine d'une recherche. De telles hypothèses ne naissent pas par génération spontanée dans l'esprit du chercheur, mais sont une sorte de cristallisation des lectures qu'il a faites, des séminaires auxquels il a assisté, des débats auxquels il a participé, des discussions qu'il a menées... Comment rendre, dans ces conditions, la part qui revient à chacun?

Soit on décide de citer exhaustivement, pour chaque mot-clé, l'ensemble des auteurs par lesquels on a été susceptible d'être influencé, et l'ensemble devient à la fois indigeste et finalement formel, soit on décide, comme ici, de demander au lecteur une certaine connivence pour rendre, chaque fois que c'est clair, à César ce qui revient à César. Par contre, il est évident que les sources seront indiquées chaque fois que je ferai référence à un point particulier d'une étude.

Enfin, il n'y a que dans cette introduction, en raison de son caractère très général, que nous ne citons pas l'ensemble des auteurs qui ont influencé à divers titres la recherche. Partout ailleurs, les sources seront citées conformément à l'usage.

I.3. Un objet d'étude en évolution: les ESA.

Mettre en évidence, de manière accessible, les principales caractéristiques de modèles structuraux, didactiquement plausibles, des systèmes d'Écritures Symboliques en Algèbre élémentaire (ESA).

Cette recherche porte donc sur les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire (ESA) du type $a(b+c)$, $x+3=-5$, ou encore $\frac{x^2-1}{x^2+1} < 3$.

La perspective initiale de la recherche était assez différente. L'objet de ce premier paragraphe est de préciser cette perspective initiale, afin d'éclairer le choix actuel d'étudier les ESA.

I.3.1. Point de départ: un modèle d'erreurs en algèbre élémentaire

Initialement, la recherche avait pour objectif d'établir un modèle unifiant des erreurs "classiques" d'algèbre élémentaire. La perspective était alors celle d'"améliorer" l'enseignement de cette partie des mathématiques, par une prise en compte positive de ces erreurs⁹. Cela suppose que les erreurs ne sont pas le produit fortuit de l'inattention ou de la mauvaise volonté, mais qu'elles ont leurs "raisons" (Krygowska 1987) que l'enseignant (et le didacticien) doivent impérativement connaître.

Ces "erreurs classiques", par ailleurs abondamment décrites dans la littérature¹⁰, sont du type:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

ou:

$$\frac{1-x}{-2} < \frac{3}{-2} \Leftrightarrow 1-x < 3$$

⁹ v. entre autres les *actes XXVème CIEAEM*, Sherbrooke (1987).

¹⁰ v. entre autres Eballard et al. (1982), Kieran (1984, 1985), Al-Lakkis (1985), Aubrée (1985), Sleeman et al. (1989), Blando et al (1989), Avila et al. (1990), etc.

Le modèle consiste à envisager les calculs comme des transformations portant sur des "expressions bien formées"¹¹, soumises à des contraintes¹².

Les erreurs classiques sont alors des transformations opérées en violation de ces contraintes.

Illustrons les termes de cet énoncé par un exemple. Soit la règle d'algèbre (R) suivante:

$$(R): \frac{a}{b} < \frac{c}{b} \Leftrightarrow a < c \quad \text{si } b > 0$$

Cette règle porte sur des nombres réels (désignés par les lettres a , b et c). Considérons maintenant l'écriture:

$$(E): \frac{1-x}{-2} < \frac{3}{-2}$$

Pour pouvoir parler des éléments qui composent cette écriture, il faut distinguer leur fonction de leur forme (ce qu'ils sont). Ici, $1-x$, -2 et 3 ont pour fonction de désigner des nombres. Mais ce ne sont pas des nombres en eux-mêmes: ils sont formés d'un assemblage de chiffres (2 , 3), de lettres (x) et de symboles ($-$).

Le terme "expression bien formée" désigne ces assemblages de chiffres, de lettres et de symboles, qui représentent des nombres.

Cette distinction entre forme et fonction renvoie à l'opposition (traditionnelle en linguistique) signifiant/signifié¹³. Elle est au fondement de la notion de transformation. Je pose en effet l'hypothèse qu'à chaque règle algébrique, portant sur les signifiés (nombres) correspond une transformation, qui porte sur les signifiants (expressions bien formées).

Par exemple, à la règle (R) correspond une transformation [T] qui assure qu'on peut remplacer une inégalité dont les deux membres sont des fractions de même dénominateur, par une inégalité dont les deux membres sont les numérateurs de ces fractions, à condition que le nombre désigné par le dénominateur soit positif. On peut représenter [T] comme suit:

$$[T]: \frac{N_1}{D} < \frac{N_2}{D} \Leftrightarrow N_1 < N_2 \quad \text{si } \text{val}(D) > 0$$

La formulation de [T] diffère de celle de (R) en ceci que les lettres a , b et c désignent dans (R) des nombres réels tandis que " N_1 ", " N_2 " et " D " désignent dans [T] des expressions bien formées.

La condition "si $\text{val}(D) > 0$ " apparaît alors comme une "contrainte" sur la transformation [T]. La "violation" de cette contrainte permet alors d'engendrer l'expression (E'):

$$(E'): 1-x < 3$$

Tout ceci donne donc un "modèle" unique pour de nombreuses "erreurs",

¹¹ au sens des logiciens

¹² Ma conception de la didactique de l'algèbre a évolué entre-temps, mais pas, dans son principe, la modélisation des calculs algébriques par des transformations. C'est pourquoi elle est présentée dans cette introduction, et c'est pourquoi j'utilise le temps présent pour la décrire.

¹³ Je rappelle cette distinction uniquement parce que, dans le discours mathématique, les deux niveaux sont constamment confondus, comme dans l'expression:
Dans tout ce qui suit, a , b et c désigneront des nombres réels positifs
 Comme le fait remarquer D. Lacombe, on ne trouve pas autour des lettres a , b et c de guillemets qui marqueraient explicitement leur statut.

Le lecteur attentif remarquera que je n'use pas non plus de guillemets autour des ESA. Par convention, je fais jouer ce rôle à l'attribut de caractères *italiques*.

dites (par définition) "classiques".

Rendre ce modèle opérationnel supposait d'établir un modèle des transformations correctes, et donc d'abord des expressions bien formées elles-mêmes. Toutefois, au fur et à mesure de l'avancement de ce programme, sont apparus des problèmes relativement coriaces.

Par exemple, la question de la délimitation précise de l'objet d'étude (les expressions bien formées) s'est révélée épineuse, avec la découverte de nombreux cas ambigus ou incertains. Ainsi, l'écriture:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{3}$$

est-elle bien formée? Pour certains: oui; pour d'autres: non; pour d'autres encore, cela dépend du contexte...

Il a donc fallu (re)construire l'objet même de l'étude (chap. V.), dès lors qualifié de **Système des "Expressions Symboliques de l'Algèbre élémentaire" (ESA)**.

I.3.2. Les ESA.

Ce sont les écritures numériques aussi bien que littérales qui figurent explicitement dans les énoncés d'algèbre élémentaire: sommes, produits, fractions, puissances et racines, égalités, inégalités, systèmes etc.

On n'y trouve ni écritures fonctionnelles (de type $f(x)$) ni connecteurs logiques, ni expressions telles que "donc", "or" etc. Ceci fait que le système des ESA est un système formel très incomplet (en particulier, on ne peut pas y faire de déductions). Ainsi l'équivalence:

$$x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x-1=0$$

n'appartient-elle pas au système des ESA au sens strict (on peut toutefois les modéliser autrement, ce qui est montré au chap. VIII).

I.3.3. La modélisation des systèmes d'Écritures Symboliques.

Je pensais initialement qu'il serait facile d'adapter aux ESA les mécanismes (grammaires) qui servent à engendrer et interpréter les langages informatiques tels que le

Basic, le Pascal ou autres, ou mieux encore les langages de calcul formel (chap. II). On trouve en effet dans ces langages des écritures algébriques très proches de celles qui m'intéressent, du type:

$$x=\text{rac}((a*b^2)/2)$$

Or les écritures produites effectivement par les élèves et les professeurs, telles que:

$$x = \sqrt{\frac{ab^2}{2}}$$

sont à la fois plus concises (en ce qu'elles contiennent moins de parenthèses) et typographiquement plus complexes (en ce qu'elles le développent sur deux dimensions) que celles que traitent les machines, et les grammaires formelles usuelles sont mal adaptées à leur traitement. Pour pouvoir en rendre compte, et compte tenu d'autres caractéristiques des ESA, en particulier les sommes algébriques (chap. VI) et les produits (chap. VII) il a fallu redéfinir les mécanismes d'engendrement des grammaires eux-mêmes.

I.3.4. Les modèles de transformations.

La description formalisée des transformations s'est, elle aussi, révélée une source de problèmes insoupçonnés. Les mécanismes de transformation envisagés initialement ne convenant guère, il a fallu les modifier assez radicalement (chap. VIII).

I.3.5. Sémantique et Didactique

Suite à deux enquêtes menées auprès d'élèves de collège (chap. IX) j'ai été amené à me poser la question de la sémantique de ces ESA (chap. X). Après confrontation avec les données d'une autre enquête portant cette fois-ci sur les fractions numériques (chap. XI et XII) je propose un éclairage nouveau pour les problèmes didactiques spécifiques de l'algèbre (chap. XIII).

I.4. Évolution de la méthodologie

Ce qui devait être une étape préliminaire est donc progressivement devenu le sujet central de l'étude, à savoir la structure (riche et complexe) du système des ESA. Les erreurs sont progressivement devenues une application, parmi d'autres, de la recherche (chapitres IX, XI et XII). Parallèlement, la méthode de travail et sa présentation ont évolué: elles font l'objet du présent paragraphe. La postface retracera l'évolution générale de la recherche en matière de méthodologie.

I.4.1. Les hypothèses de travail

En ce qui concerne le modèle des erreurs, j'avais fait le choix de me placer dans le cadre de la **linguistique**. Ce choix reposait sur deux hypothèses emboîtées:

Première Hypothèse: Les ESA ont une structure, et les outils de la linguistique sont bien adaptés pour décrire cette structure.

Je ne souhaite pas dire par là que l'algèbre, voire les mathématiques, est un langage. Un tel énoncé est d'ordre philosophique et sort de notre propos. Je fais simplement l'hypothèse qu'une expression algébrique telle que $ax + b$ a une structure

linguistique, tout comme la phrase *le petit chat est mort*. Ce qui est commun entre les deux, c'est le fait d'avoir une certaine structure (ce terme sera défini plus loin) qui peut être décrite par la linguistique, ce n'est évidemment pas la structure particulière de l'expression ou de la phrase¹⁴.

Seconde Hypothèse: La grammaire générative-transformationnelle de Chomsky¹⁵ est un formalisme adéquat pour décrire la structure des ESA.

La première hypothèse était initialement du domaine du pari. L'existence même de la construction théorique qui forme cette thèse, i. e. le fait que les ESA soient décrits précisément à l'aide d'un modèle de type **linguistique**, valide maintenant cette hypothèse.

La seconde hypothèse (l'adéquation de la théorie Chomskyenne) reposait sur l'analogie suivante:

D'une part, pour décrire les **langues naturelles**, cette théorie apparaît à l'heure actuelle très rudimentaire. D'autre part, pour décrire certains langages informatiques, la théorie (plus élémentaire) des règles de réécriture indépendantes du contexte suffit. Or les ESA me semblaient se situer, pour la complexité, quelque part entre les langages informatiques et les langues naturelles. J'avais donc décidé de les décrire par le modèle de Chomsky, situé lui-même à mi-chemin entre les règles de réécriture indépendantes du contexte et les modèles linguistiques plus sophistiqués.

14 En particulier, je ne cherche pas à montrer une quelconque analogie entre égalités et phrases au contraire de P. E. Matthews (1988) par exemple.

15 Vu l'évolution incessante de la pensée de Chomsky, il importe d'en donner le "millésime". Dorénavant lorsque je parlerai de grammaire générative-transformationnelle, je ferai référence à la théorie présentée dans *Aspects de la théorie syntaxique* en 1965 (trad. 1971 référencée en bibliographie). Les avatars ultérieurs de cette théorie répondent à des questions que la description du système des ESA ne pose pas, et ne répondent pas aux questions qu'il pose, aussi n'en ai-je pas tenu compte.

I.4.2. La méthode de travail

Pour la partie **génération** (la génération des expressions bien formées) j'ai suivi à la lettre, au début, les choix et les méthodes Chomskyennes¹⁶.

A vrai dire, ce formalisme n'est plus à l'heure actuelle spécifique de Chomsky, ayant été repris par de nombreux auteurs pour devenir ce qu'on appelle maintenant la théorie des langages (formels)¹⁷.

J'ai été ensuite conduit à modifier ce formalisme, d'abord sur le plan des notations, ensuite sur quelques points techniques¹⁸, tout en restant dans ce cadre général.

Pour les **transformations**, je suis également parti de la conception Chomskyenne (avec Structure Profonde et Structure de Surface), que j'ai ensuite été conduit à abandonner¹⁹.

Par exemple, les transformations doivent pouvoir porter sur divers composants des écritures à transformer. Dans le cas d'une somme algébrique par exemple, tous les couples de termes (avec leurs signes) doivent pouvoir commuter. Il n'est certes pas difficile de trouver des mécanismes usuels qui permettent cela, mais ces mécanismes ont l'inconvénient majeur de fonctionner selon des modes qui n'ont rien à voir, ou alors de très loin, avec ce que fait l'algébriste compétent (l'enseignant

par exemple) lorsqu'il calcule²⁰. Il a donc fallu proposer d'autres mécanismes, qualifiés de plus "plausibles"²¹.

La grammaire actuelle des ESA étant dépourvue de "Structure Profonde" elle est en fait, dans sa partie transformationnelle, beaucoup plus proche des modèles de Z. S. Harris²².

N'ayant pas eu connaissance à l'époque d'une autre théorie linguistique qui aurait permis de manière évidente de rendre compte de l'ensemble des spécificités des ESA, j'ai préféré modifier "au coup par coup" le modèle que j'avais commencé à développer. La méthode suivie a donc été essentiellement pragmatique. En fonction d'un but visé, j'ai choisi ici ou là ce qui convenait le mieux.

Il y a certes risque d'incohérence épistémologique à juxtaposer des concepts issus de théories différentes, voire concurrentes²³. Toutefois ce

¹⁶ tels qu'ils sont exposés dans ses livres, dans l'*Introduction à la Grammaire générative* de Ruwet (1970) ou encore dans Bach (1973) etc.

¹⁷ v. p. ex. Moreau 1975.

¹⁸ le caractère fini de la partie générative en particulier

¹⁹ pour des raisons qui seront exposées au chapitre III, consacrée à la critique du travail de D. Kirshner (1987a). Celui-ci se situe en effet dans ce cadre "Surface/profondeur".

²⁰ par exemple, de nombreux logiciels de calcul formel commencent par exprimer les expressions, telles que

$$x = \text{rac}((a * b^2) / 2)$$

sous une forme "polonaise" ou "de Cambridge" préfixée:

$$= x \text{ rac} / * a ^ b 2 2$$

²¹ ce terme sera discuté plus loin.

²² v. *Notes du Cours de Syntaxe* (1976). Toutefois, même si j'ai été fortement influencé par la conception de Harris des transformations, je n'ai pas pour autant cherché à en établir un modèle explicitement "Harrisien" (comme j'avais cherché au début à bâtir un modèle Chomskyen pour la partie générative). Il est à noter que Harris s'est intéressé (dans les *Collected Papers on Transformational Grammar*) à la formalisation du langage algébrique.

²³ tel que l'emploi de transformations de type "Harris" sur des expressions engendrées par une partie génératrice de type "Chomsky".

danger concerne plus les théories de linguistique générale²⁴, que les travaux de linguistique appliquée (comme ici, où les objets sont les ESA).

En fait, dans la mesure où cette thèse a pour objet de "mettre en évidence les principales caractéristiques des modèles des ESA", et non un modèle des ESA proprement dit, elle se situe à un niveau **intermédiaire** entre les théories linguistiques **générales** (théories des théories, d'ordre méta-méta-linguistique, par exemple la grammaire générative-transformationnelle de Chomsky) et les théories **particulières** (d'ordre méta-linguistique, par exemple la grammaire transformationnelle du Français de M. Gross, 1977).

En effet, d'une part, (comme on le verra chap. V) il n'y a pas une grammaire **unique** des ESA, mais **des** grammaires qui rendent compte des différents systèmes d'ESA. Le modèle présenté est un discours -général- sur une classe -particulière- de théories (les modèles des ESA), et non pas la théorie particulière d'un système particulier.

D'autre part, si ce discours est d'ordre théorique (parce que de niveau "méta-méta"), il ne revendique pas pour autant le statut de "théorie", qui comporte des exigences bien supérieures d'exhaustivité et de formalisation. A ce niveau intermédiaire donc, il paraît tout à fait tolérable d'importer des notions d'origine différentes, à condition de s'assurer de la cohérence du résultat. Seul le niveau supérieur des théories linguistiques générales exige une plus grande homogénéité épistémologique.

I.4.3. Remarque sur le choix

Après coup, le choix du formalisme Chomskyen s'est avéré relativement malheureux. Tout d'abord d'autres formalismes mieux appropriés (grammaires catégorielles) avaient été déjà développés pour l'étude spécifique des expressions mathématiques (Lambek 1958, 1961) mais je l'ai su plus tard. Ensuite, l'objet étudié s'est avéré plus complexe que prévu. Les ESA présentent en effet des caractéristiques tout à fait spécifiques, par exemple le fait que les transformations portent sur des écri-

²⁴ dont les objets sont les systèmes, plus ou moins formalisés, de représentations métalinguistiques (v. Culioli & Desclés, 1982), et dont la théorie des grammaires génératives-transformationnelles de Chomsky est un exemple

tures de longueur et de complexité indéfinie. Le choix du formalisme Chomskyen m'a pas empêché de percevoir ce genre de questions délicates, et de les résoudre, en le dénaturant d'ailleurs progressivement. Ce choix a eu pour inconvénient majeur de me faire perdre du temps.

I.4.4. Accessibilité du modèle des ESA

Mettre en évidence, de manière accessible, les principales caractéristiques de modèles structuraux, didactiquement plausibles, des systèmes d'Écritures Symboliques en Algèbre élémentaire.

J'ai souhaité que le lecteur ait accès à la manière dont le modèle des ESA a été élaboré.

Ceci est d'autant plus nécessaire qu'il n'y a pas un système unique d'ESA, mais de nombreux systèmes, peut-être même autant que d'individus (chap. V). Le lecteur doit pouvoir, s'il le désire, construire le modèle de la variante qui l'intéresse. Par exemple, il peut vouloir comparer les systèmes d'ESA employés par deux manuels différents sur un même niveau, ou encore comparer les systèmes d'ESA, dans une même collection, à deux niveaux successifs.

En outre, les ESA ne représentent qu'une petite partie des écritures symboliques mathématiques. Si le modèle proposé n'est pas accessible, le lecteur ne pourra pas aisément le transposer à d'autres domaines (telles que les écritures symboliques de l'analyse par exemple).

Cette thèse comprend donc une longue présentation des outils permettant de construire un système tel que celui des ESA. Il énonce les principaux problèmes rencontrés, et les solutions apportées (chapitres II à VIII).

Il est à noter qu'entre la description des ESA d'une part, et la description des outils de cette description (la méta-description) d'autre part, il y a une différence notable d'exhaustivité et de formalisation.

Cela s'explique par deux raisons. D'une part, il est difficile, en pratique, de développer simultanément, au même point, une théorie et sa métathéorie. D'autre part, la nature des objets diffère d'un niveau à l'autre. Les ESA sont en effet modélisables par une grammaire: c'est même la première hypothèse. Par contre, l'élaboration d'une grammaire formelle des

ESA, si elle est soumise aux contraintes théoriques portant sur les grammaires, n'est pas réductible à des règles formelles, mais comporte une part de "savoir-faire" et d'imagination créatrice²⁵.

Cette thèse met en évidence les principales caractéristiques des modèles structuraux des ESA, elle n'a pas l'ambition d'élaborer un méta-modèle formalisé des ESA.

I.5. Les ESA: une étude prodidactique

Quelles relations entretient le modèle des ESA et la didactique de l'algèbre proprement dite? La réponse n'est pas simple, car ces relations ont elles aussi évolué.

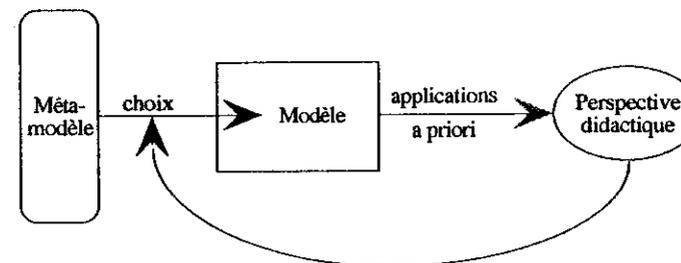
J'avais placé à l'arrière-plan de mes préoccupations la didactique de l'algèbre proprement dite: cela ne veut pas dire que je l'ai supprimée de ma réflexion. Précisons son rôle et sa fonction, et pour commencer ce que j'entends par ce terme ("perspective didactique"). La perspective didactique se présente sous la forme d'applications envisagées a priori (répondant à la question: "à quoi tout cela pourra-t-il bien servir?"), sans travail exhaustif d'élaboration théorique et d'expérimentation²⁶. Il est pourtant essentiel de

²⁵ cf. Chomsky (1971)

²⁶ il ne s'agit donc en rien d'ingénieries didactiques, mêmes "en pensée". J'ai certes mené un certain nombre de séquences d'algèbre au sein de l'expérience de DAP (v.

...suite page suivante...

préciser cette perspective, car elle permet de comprendre les raisons de certains choix au sein du modèle des ESA.



Par exemple, la terminologie employée pour décrire les écritures et leurs transformations ("terme", "facteur", "changement de membre"...) suit au plus près celle que l'usage a consacrée. Or la construction rigoureuse de cette terminologie²⁷ s'est faite, conformément à la décision méthodologique du "pas de côté", hors de tout contexte didactique, strictement à l'intérieur du modèle linguistique. Il n'y a, a priori, aucune raison linguistique pour que la terminologie construite en son sein recoupe les termes préconstruits de l'usage courant. S'il y a adéquation avec cet usage, cela ne vient pas du modèle seul: chaque fois que le modèle laissait une liberté et qu'il y avait donc un choix à faire, la décision a été influencée, entre autres, par la perspective didactique sous-jacente. Ainsi, c'est parce que j'estimais nécessaire de redonner sa légitimité au discours sur les signifiants (voir chap. XIII), en situation d'enseignement, dans la classe, que j'ai été amené à choisir, parmi les structures et les dénominations, celles qui étaient les plus "plausibles" didactiquement, autrement dit à faire coïncider ma terminologie et le discours spontané des enseignants et des élèves sur les écritures. On a donc bien une influence des perspectives didactiques sur la

annexe) mais je ne me suis pas alors donné les moyens d'en tirer autre chose que des opinions quant à la validité des perspectives envisagées.

²⁷ c'est-à-dire le fait de définir le mot "facteur" comme l'"opérande" d'un certain "opérateur" nommé "produit", lui-même défini comme une certaine "suite terminale" engendrée par une "règle de réécriture" bien définie, laquelle etc.

conception du modèle. Cette perspective influe les choix effectués au sein du modèle.

Précisons que, pour aboutir, entre autres, à cette adéquation de la terminologie avec l'usage, cela a pris beaucoup de temps et pas mal d'efforts. A titre de boutade, on pourrait dire qu'une petite partie du temps a été consacrée à bâtir le modèle, et une grosse partie à l'élaguer, le rendre plausible et surtout compréhensible!

Une rapide postface présente une synthèse des principales options méthodologiques que nous nous sommes efforcés de suivre dans ce travail.

II. POSITION DU PROBLEME

Les pratiques scientifiques ont partie liée avec les processus sociaux d'objectivation et d'institutionnalisation: on pense évidemment au rôle de l'écriture, comme instrument de rupture avec l'immédiateté mimétique de la pensée livrée à l'oral, ou au rôle de tous les symbolismes formels, notamment logiques ou mathématiques, qui poussent à leur accomplissement les effets de l'objectivation par l'écrit, en substituant à l'intuition, fût-elle géométrique, "l'évidence aveugle" selon le mot de Leibnitz, qui surgit des symboles mêmes.

Pierre Bourdieu, *Homo Academicus*.

Ce chapitre a pour objet de poser précisément le problème. Il ne s'agit pas d'une approche historique ou méthodologique (ce qui a été fait en introduction) mais de l'élaboration d'un plan d'études par décomposition en différents sous-problèmes. Certains d'entre eux ayant déjà été abordés dans d'autres travaux, le chapitre se clora par une focalisation de la recherche sur les questions qui n'ont pas été traitées ailleurs à l'heure actuelle.

II.1. Plan d'étude général

II.1.1. L'intitulé du problème

Rappelons l'intitulé du problème:

Mettre en évidence, de manière accessible, les principales caractéristiques de modèles structuraux, didactiquement vraisemblables, des systèmes d'Écritures Symboliques en Algèbre élémentaire.

Pour rendre opérationnel cet intitulé, on peut le retraduire comme suit dans le vocabulaire de l'Intelligence Artificielle, ce qui donne:

Élaborer les principales caractéristiques d'un système qui modélise les pratiques effectives des "experts"¹ dans le domaine du calcul algébrique élémentaire formel.

Le but visé n'est pas la performance du système expert dans la réalisation de tâches algébriques. La perspective de ce travail est didactique. Ce modèle² de l'expert doit nous permettre de mieux comprendre la pratique de l'algébriste compétent ("expert"), et éventuellement (avec de nombreuses précautions pour éviter les extrapolations hâtives) du débutant:

«La simulation peut viser à ne reproduire que les résultats observables, ou au contraire chercher à copier la démarche qui est adoptée ou supposée telle par le sujet humain. Dans le premier cas l'ordinateur programmé pour la simulation se présente comme une boîte noire: seules les entrées et les sorties sont pertinentes, les représentations et les procédures internes n'ont aucune signification. Dans le second cas, le programme se veut descriptif d'une activité cognitive.» (Desclés 1989).

Cela impose donc un certain nombre de contraintes.

II.1.2. Les contraintes du système

- Le **domaine** des expressions sera celui de l'algèbre élémentaire. En feront partie les équations (d'un degré quelconque), les inéquations et les systèmes. En seront exclues les fonctions (telles que sin, log...) et les écritures fonctionnelles en général, telles que $f(x)$. Le seul aspect

¹ par exemple, des professeurs; ce point sera rediscuté au chap. VIII.

² le mot "modèle" n'est évidemment pas pris ici dans le sens mathématique de "théorie des modèles", mais dans son sens courant :

«"Représentation simplifiée d'un processus, d'un système" (Dictionnaire *Le Robert*)»

«alors que processus et système font partie du Réel, dans toute sa richesse et sa complexité, et peuvent être plus ou moins bien isolés du reste du Réel, le modèle est entièrement descriptible, cette description étant nécessaire et suffisante pour connaître l'état du modèle et son évolution (au moins en théorie).» Lliboutry L. (1987)

fonctionnel est celui qui correspond implicitement aux opérations de l'algèbre: addition, soustraction ... exponentiation.

- Les expressions elles-mêmes devront être manipulées sous leur **forme effective usuelle**, telles qu'on les trouve dans les manuels ou les cahiers, ou à défaut, dans une forme intermédiaire la plus proche possible de la forme usuelle. Autrement dit, le système devra engendrer et manipuler des expressions du type $4xy^2$, éventuellement $4xy^2$, mais pas $4 * x * y ^ 2$ ou $4 M [x M [y E 2]]$.
- Le mécanisme des transformations devra être "**plausible**", c'est-à-dire utiliser autant que possible des règles que l'expert peut reconnaître comme siennes, de préférence à d'autres règles plus performantes mais éloignées de sa pratique. Cette contrainte, alliée à la précédente, exclut par exemple de mettre d'abord les expressions sous forme préfixée (dite "Polonaise"³), ou les polynômes (par exemple $2x^3 - x^2 + 1$) sous forme de tableaux de couples "(coefficient; degré)" comme le font certains logiciels de calcul formel⁴.
- Par ailleurs, le système devra être autant que possible "**accessible**". Cela suppose que sa présentation soit suffisamment intelligible pour que le lecteur puisse en percevoir l'organisation et la modifier selon ses besoins.

Dans l'introduction, la méthode de travail (à savoir le recours à une grammaire générative) a été présentée. Il reste à voir comment aborder en pratique le problème, compte tenu de ce choix méthodologique et des contraintes que nous venons de voir.

II.1.3. Approche du problème

Avant de songer à transformer les expressions (ESA), il faut les engendrer. Comme cela a été dit en introduction, j'ai choisi de le faire par

³ et/ou "de Cambridge"

⁴ ce qui donnerait dans notre exemple: "((2;3);(-1;2);(1;0))" (Davenport et al. 1987)

une grammaire générative. Toutefois ces grammaires ne traitent que des expressions "linéarisées", c'est-à-dire dont tous les symboles se suivent, le long d'une même ligne, sans décrochement de position verticale ni changement de taille, par ex:

$$4 \times ((y^2) / 3)$$

Cela exclut d'engendrer directement les expressions qui se développent dans les deux dimensions de la feuille: les fractions, les puissances, les racines et les systèmes. L'engendrement des ESA doit donc se faire en deux étapes: d'abord l'engendrement d'expressions symboliques linéarisées ("ESAL") de type:

$$4 \times ((y^2) / 3)$$

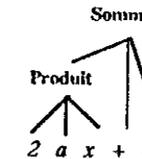
au moyen d'une grammaire générative, puis la transformation de ces ESAL en ESA telles que:

$$4 \times \frac{y^2}{3}$$

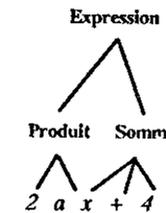
par application des règles de la typographie mathématique.

Les contraintes mentionnées ci-dessus pour la manipulation des ESA correspondent à des contraintes sur l'engendrement des ESAL par une grammaire générative:

- Les ESAL devront couvrir le domaine des ESA, tout ce domaine et rien que ce domaine (qu'il restera à déterminer précisément).
- Les ESAL devront différer le moins possible des ESA, autrement dit les seules différences entre ESAL et ESA devront concerner les fractions, les puissances, les racines et les systèmes (qui s'écrivent en deux dimensions).
- Les ESAL devront avoir une structure "plausible". Cette structure est liée à la grammaire générative qui les engendre; elle peut être représentée par un arbre. Par exemple, une structure arborescente possible pour $2ax + 4$ est:



Il ne suffit pas en effet que la grammaire engendre exactement tous les ESA (et rien qu'eux). Il faut encore que la hiérarchie des sous-expressions au sein de l'ESA (autrement dit, la structure) soit en accord avec l'intuition qu'en ont les "algébristes compétents" (experts). Dans cette optique, une grammaire qui engendrerait $2ax + 4$ par juxtaposition de $2a$ et de $x + 4$:



ne serait pas acceptable.

Les ESAL étant ainsi engendrées, on abordera ensuite la question de leur transformation. Il faudra successivement déterminer:

- un **mécanisme** (plausible) de transformation
- la **liste** des transformations nécessaires pour que le système puisse effectivement résoudre les tâches élémentaires d'algèbre
- la **hiérarchie** des types d'opérations qu'on peut effectuer sur les expressions. Le plus bas niveau est la transformation, mais il y a des niveaux supérieurs, en particulier les enchaînements de transformations (procédures)

- les **méta-règles**, règles portant sur les transformations, en particulier celles qui gouvernent le choix des transformations en fonction de la tâche à effectuer (stratégies, heuristiques).

II.1.4. Décomposition en différents sous-problèmes

En résumé, nous pouvons donc décomposer le travail à effectuer en un certain nombre de sous-problèmes

- Convertir les ESA (bidimensionnelles) en expressions symboliques linéarisées (ESAL) pour pouvoir les traiter et les manipuler ensuite, et inversement.
- Engendrer les ESAL de manière à ce que leur structure et les transformations qui s'y appliquent aient une certaine plausibilité.
- Modéliser le calculs des ESAL, et pour cela:
 - déterminer un mécanisme plausible pour les transformations.
 - établir une liste cohérente des transformations nécessaires
 - établir une liste des enchaînements de transformations (procédures)
 - établir une liste cohérente des règles de niveau méta (stratégies et heuristiques).

Avant de commencer l'étude proprement dite du système des ESA, il reste toutefois une dernière chose à faire: déterminer l'état de l'art en la matière, pour savoir si le problème n'a pas déjà été traité, en totalité ou en partie.

Il y a par exemple l'approche linguistique de D. Kirshner, qui présente de nombreux points communs avec la mienne, et qui sera discutée au chapitre suivant. Mais avant cela, il faut étudier un domaine qui présente de nombreuses parentés avec celui qui nous intéresse, celui du traitement des symboles mathématique par ordinateur: les calculateurs symboliques et les

éditeurs de formules. Cela permettra de resserrer encore le programme d'étude.

II.2. Calculateurs Symboliques et Éditeurs de Formules.

II.2.1. Les calculateurs symboliques

Par "calculateurs symboliques", j'entends les programmes qui calculent non sur des nombres mais sur des symboles mathématiques, p. ex. REDUCE, MACSYMA, MuMATH... (Davenport et al. (1987)). Ces logiciels, apparus dans les années 1960 pour servir d'outils scientifiques de haut niveau (Mounier 1987), se situent aux confins de l'informatique traditionnelle et de l'Intelligence Artificielle. On les trouve à l'heure actuelle dans deux domaines principaux: la recherche dans des domaines mathématisés (ex: physique des hautes énergies), la démonstration automatique de théorèmes (MUSCADET: Pastre 1984)), et l'Enseignement "Intelligemment" Assisté par Ordinateur ("EIAO"): CAMELIA⁵, APLUSIX⁶, NAIAD⁷...

Les mathématiciens professionnels ou les physiciens théoriciens n'ayant guère besoin de l'aide de l'ordinateur pour effectuer des tâches d'algèbre élémentaire, les logiciels qu'ils utilisent professionnellement portent avant tout sur du calcul symbolique de niveau plus élevé. Aussi nous intéresserons-nous plutôt au domaine de l'EIAO, car on y trouve des logiciels d'enseignement de l'algèbre. Si l'on reprend la division des systèmes d'EIAO en trois modules (Chaillot 1984⁸):

⁵ Vivet 1984

⁶ Nicaud 1987

⁷ Joab, Cauzinille-Marmèche, Mathieu (1989)

⁸ cité dans Mounier 1987

3. le caractère unidimensionnel ou non des expressions produites par ce logiciel.

On ne considère donc que les expressions produites et non les expressions saisies. Dans tous les logiciels existants en effet, les expressions sont soit **saisies** sous forme unidimensionnelle, par une combinaison ordonnée de touches de clavier soit construites en deux dimensions à l'aide d'un éditeur graphique ad hoc.

Dans le cas des logiciels qui produisent des ESA (avec tous leurs attributs typographiques dans le plan de l'écran ou de la feuille), que ce soient des Calculateurs Symboliques ou des Éditeurs de Formules, une question importante est celle de l'**image sur l'écran** de ce que l'utilisateur est en train de taper. Dans Macsyma par exemple, l'utilisateur entre des ESAL qui apparaissent comme tels à l'écran, puis le logiciel les reforme en ESA:

(c59) ec3: (a-1)*x-b*y-a*z=0

Time= 54 msec

(d59) - az - by + (a-1)x = 0

Ce qui différencie ces logiciels qui produisent des ESA, c'est la présence ou non à l'écran des caractères intermédiaires servant à l'encodage de l'expression et qui sont absents de l'ESA finale. Dans les Imagelogiciels pour produire 'x²':

il faut taper: $\boxed{x} \boxed{\wedge} \boxed{2}$

l'écran affiche alors: $x \wedge 2$

puis demande confirmation. Après confirmation, 'x ^ 2' s'efface et

l'écran affiche: x^2

Cela permet en outre une construction "pas à pas" des écritures qui peuvent être modifiées à tout moment; l'ESAL (définitive ou intermédiaire) ne peut être mise sous forme d'ESA que lorsque sa syntaxe est correcte.

Par contre, avec le traitement de texte "Word 5" j'utilise pour produire "x²" une combinaison de touches qui n'apparaît pas à l'écran.

Tout ceci n'a pas grande importance sur le plan informatique, mais joue un rôle important pour l'ergonomie des logiciels, laquelle n'est pas sans répercussion sur leur usage didactique (mais ceci n'est pas notre propos).

4. La plausibilité (au sens où nous l'avons définie plus haut; nous pourrions parler aussi "d'anthropomorphisme") de la représentation interne des ESAL manipulées par le logiciel. Nous livrerons ici à un évaluation grossière de cette notion de plausibilité de la représentation interne. Elle est en effet assez complexe, liée au fait qu'il y a des niveaux de représentation emboîtés. A un certain niveau, un polynôme peut être représenté par des tableaux de couples (coefficient, degrés). Mais les nombres correspondant aux coefficients et aux exposants ont eux-mêmes une représentation interne, et ainsi de suite, jusqu'au niveau du langage-machine (qui n'a aucune espèce de "plausibilité" didactique). Nous nous contenterons donc de deux critères, concernant la couche la plus superficielle de représentation interne:

- les ESAL y sont-elles préfixées ou infixées?
- les sommes algébriques et les produits y sont-ils définis de manière récurrente à partir des sommes ou de produits ("binaires") de deux termes ou, de manière plus plausible¹⁵, de manière "n-aires"?

5. la plausibilité du mécanisme de transformation des ESAL (est-il basé sur le filtrage¹⁶ des expressions avec des "formules de transformation"?)
6. l'existence d'une liste de transformations
7. l'existence d'une liste de procédures
8. l'existence d'une liste de métarègles
9. l'usage du logiciel (recherche, outil professionnel ou personnel, EAO...)

¹⁵ v. à ce propos Kirshner 1987b: "The Myth about the Binary Representation in Algebra"

¹⁶ p. ex application de la formule $(ab)^2 = a^2b^2$ à l'expression $(2x)^2$ (Mounier 1989)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
nom	maté-riel	Forme produite	Syntaxe interne	Plaus. transfo.	liste transfo.	liste procéd.	liste métaR.	usage
EDIMATH	Mac	Editeur formules	préfixé n-aire					personn.
Word5	Mac	Ed. formules simplifié	mixte n-aire					personn.
TEX	PC	Editeur formules	?					profess.
MuMATH	PC	ESAL: 2Y*Z^2	MuSimp préfixé	filtrage		OUI fonctions	NON	personn. EAO ¹⁷
MACSYMA	VAX Sun...	ESA: (a-1)b-4a ²	?	?	?	?	?	recherche scientif.
REDUCE	minis "gros"	ESAL 2*Y*Z**2	infixé binaire	?	?	?	?	recherche scientif.
[sans nom] ¹⁸	PC	ESAL A+(B*C)/X	infixé binaire					enseign. info. EAO ¹⁹
EXPRESSIONS	?	arbres	?					
[sans nom] ²⁰	?	ESAL arbres	infixé	OUI	OUI	?	?	EAO
CAMELIA	mini	syntaxe Lisp	?	?	OUI	OUI (plans)	OUI	recherche EIAO
PRESS ²¹	?	ESAL: 2*g*r >= v^2	préfixé binaire	Filtrage (Prolog)	OUI 21 axiomes	>30 procédures		recherche IA
NAIADE ²²	1119000 /350	ESA	Préfixé n-aire	OUI	OUI règles	OUI procédur.	OUI stratégies	recherche EIAO
APLUSIX	Mini Mac	ESA sans fractions	SIM infixé n-aire	apparie-ment de "termes"	OUI	OUI "paquets"	OUI heu-ristiques.	recherche EIAO

II.3. Redéfinition du plan d'étude

De l'étude de ces différents logiciels et des recherches associées²³ il ressort un certain nombre d'orientations pour la recherche. En particulier, certains des sous-problèmes ont été déjà plus ou moins résolus pour élaborer ces logiciels. Nous allons donc les aborder immédiatement.

II.4. Niveau Typématique

Les problèmes de mise en forme typographique des ESA, ou si l'on préfère de passage des ESAL aux ESA (et inversement) ont été bien étudiées pour la réalisation des éditeurs de formules. Précisons toutefois un point de vocabulaire, car le terme "mise en forme typographique" n'est pas rigoureux.

Cette précision provient de ce que nous étudions ici les ESA sous forme écrite.

¹⁷ v. Kunkle & Burch (1984)

¹⁸ Programme de démonstration construit par le groupe "Récursivité" de l'IREM de Marseille (Carmona & Didier 1975, Didier & Roussel 1976).

¹⁹ Thompson & Thompson (1987), Thompson (1989)

²⁰ Programme exposé par Larkin (1989).

²¹ Bundy & Welham (1979)

²² Joab (1990)

²³ Je ne me suis pas livré à une étude exhaustive de l'ensemble des logiciels traitant les expressions symboliques qui existent. Toutefois les orientations qui se dégagent du tableau, à savoir l'attention portée aux procédures et aux stratégies, avec des transformations élémentaires performantes mais peu plausibles semblent suffisamment générales et en accord avec les centres d'intérêt de l'informatique et de l'IA (que la résolution de problèmes intéresse plus que la plausibilité de la représentation des objets, ce qui ressortit plutôt à la psychologie cognitive) pour que je n'aie pas voulu consacrer plus de temps à un inventaire systématique des calculateurs formels.

Une exception notable à ce qui précède est APLUSIX qui définit des opérateurs n-aires et dont les transformations se veulent "plausibles" puisqu'il s'agit d'un logiciel d'EIAO proposant à l'élève des transformations possibles ou détaillant celles qu'il effectue.

II.4.1. Oralisation des ESA

Certes, on peut lire à haute voix des ESA, mais ce qu'on lira n'est pas une simple décalque de ce qui est écrit.

En particulier, pour l'expression des parenthésages, on prononce rarement "ouvrez la parenthèse / fermez la parenthèse" (ce qui serait excessivement lourd et peu intelligible). On utilise d'autres procédés. Ainsi:

$$a(x+2)$$

sera lu dans un contexte algébrique (où a ne dénote pas une fonction):

$$[a \text{ fwa iks plys dø}] \quad (\text{a fois } x \text{ plus } 2)^{24},$$

ou

$$[a \text{ faktøer døe iks plys dø}] \quad (\text{a facteur de } x \text{ plus } 2)$$

tandis que

$$ax+2$$

est lu

$$[a \text{ iks plys dø}] \quad (\text{a } x \text{ plus } 2),$$

ce qui lève l'ambiguïté quant au début de la parenthèse. Au niveau de la parenthèse fermante, l'ambiguïté est plus ou moins bien levée par l'emploi de pauses dans la voix.

Nctons que dans un contexte fonctionnel (où a dénote une fonction) $a(x+2)$ sera lu:

$$[a \text{ døe iks plys dø}] \quad (\text{a de } x \text{ plus } 2).$$

Je pose que la langue orale des ESA est distincte de la langue écrite, qu'elle a sa grammaire propre et qu'il faut l'étudier pour elle-même. Ce travail particulier (grammaire de la langue orale des ESA) n'a pas été abordé dans le cadre de cette thèse²⁵.

²⁴ suivant les conventions linguistiques, la prononciation des phrases est indiquée entre crochets, avec l'Alphabet Phonétique International (A.P.I.).

²⁵ on trouvera des indications dans Bruston (1982)

Toutefois la linguistique des langages oraux nous apporte un concept fondamental, celui de la distinction entre sons (phonétique) et phonèmes (phonématique²⁶):

Le phonème est un segment phonique qui:

- (a) a une fonction distinctive
- (b) est impossible à décomposer en une succession de segments dont chacun possède une telle fonction,
- (c) n'est défini que par des caractères qui, en lui, ont valeur distinctive (...) que les phonologues appellent "pertinents".

Quelques exemples pour montrer combien les phonèmes, en vertu de cette définition, se distinguent des sons (...):

Le r français se prononce, selon les régions (...), soit roulé, soit grasseyé. Mais les deux sons ne commutent pas²⁷ (alors qu'ils commutent en arabe). On dira donc, en vertu de (c), qu'il n'y a qu'un seul phonème français $/r/$. (Ducrot & Todorov, 1972 pp. 221-222)

Cette distinction est également pertinente dans les langages écrits²⁸. En langue naturelle:

«Le graphème alphabétique est une classe abstraite de réalisations matérielles ou *graphes*» (Anis 1988)

- l'équivalent du phonème est le le graphème. Exemple: $/y/$. Ce graphème est défini par un tableau de traits qui le distinguent des autres graphèmes: nombre de "boucles", de "jambes", etc.

²⁶ ou "phonologie" selon les écoles

²⁷ c'est-à-dire que le changement de prononciation n'entraîne pas de changement de signification

²⁸ Les notions qui suivent de "graphème" et de "graphe", les notations $/\text{ }/$ et $[\text{ }]$ sont tirés de l'ouvrage collectif *Pour une théorie de la langue écrite* sous la direction de Nina Catach (1988), en particulier les contributions de J-Ch. Pellat (1988) et J. Anis (1988).

- l'équivalent du son est le "graphe", lettre réalisée sur le papier avec tous ses attributs typographiques variant d'un texte à l'autre. Exemples (réalisations du graphème /"y"/): ["y"]; ["y"]; ["y"]; ["y"]; ["y"].

En mathématiques toutefois, les choses sont un peu plus compliquées, ce qui m'a amené à introduire la notion de "typème".

II.4.2. Graphèmes et Typèmes

Nous pouvons considérer que chaque "graphe" (au sens graphématique du terme), qui est une classe de "graphes", est défini par un tableau d'attributs typographiques. Les principaux attributs (qui intéressent les ESA) sont les suivants:

[Identifiant]	(ex: code ASCII; ici, le graphème)
[Fonte]	(police de caractère)
[Corps]	(en points)
[Décalage vertical]	(± n points au-dessus de la ligne courante)
[Graisse]	(maigre/gras)
[Inclinaison]	(romain/italique)
["Casse"]	(majuscule/minuscule)

Exemple 1: le graphe ["2"] est défini par le tableau suivant:

[Identifiant]	/"2"/
[Fonte]	Times
[Corps]	12 points
[Décalage vertical]	0 point
[Graisse]	maigre
[Inclinaison]	romain
["Casse"]	majuscule

Exemple 2: le graphe ["2"] (en exposant) est défini par le tableau suivant:

[Identifiant]	/"2"/
[Fonte]	Times
[Corps]	10 points
[Décalage vertical]	+ 2 points
[Graisse]	maigre
[Inclinaison]	romain
["Casse"]	majuscule

Pour les ESA, nous avons besoin d'un objet qui soit intermédiaire entre le "graphe" et le graphème. En effet, l'opposition entre ["2"] et ["2"] est pertinente: elle distingue les exposants. Toutefois ce n'est pas au niveau graphématique que cette opposition est marquée: ["2"] et ["2"] sont deux réalisations du même graphème /"2"/. Cette opposition apparaît certes au niveau typographique, mais les seuls traits pertinents (la réduction du corps et le décalage vertical) sont alors noyés au sein de l'ensemble des traits, et en outre n'apparaissent pas de manière relative (à savoir que le corps de ["2"] est immédiatement inférieur à celui de ["2"], quel que soit ce corps).

Je propose donc de nommer "typème" l'ensemble des traits relatifs permettant de marquer des oppositions pertinentes au sein des ESA. Un typème (noté par exemple \^"2") est formé d'un graphème et d'attributs distinctifs typématiques.

Prenons un exemple: l'exposant «carré», dont la réalisation typographique est dans ce texte ["2"] correspond au typème:\^"2", formé du graphème /"2"/ et des attributs typématiques: \décalage vertical égal à +1/3 du corps courant\+réduction au corps immédiatement inférieur au corps courant\ ce qu'on peut reprendre par un tableau de traits relatifs:

graphème	/"2"/
\décalage vertical\	+1/4 du corps courant
\réduction\	corps immédiatement inférieur au corps courant

La réalisation du graphème /"2"/ est le «graphe» ["2"] (ici la fonte courante est "Times", et le corps courant est de 12 points), les réalisations des attributs typématiques étant les attributs typographiques: [décalage vertical vers le haut de 3 points]+[corps 10 points].

Les traits typématiques ne dépendent donc pas des traits typographiques tels que la Fonte ou l'Inclinaison. Ils sont relatifs (aux attributs du texte courant), ce qui permet de les composer et de définir par exemple (aux limitations typographiques près) l'exposant d'un exposant: ["2 aⁿ"].

Remarquons que, pour définir des expressions telles que les fractions, il faut pouvoir parler des caractéristiques typographiques d'une sous-expression toute entière (par exemple, le dénominateur d'une fraction) et parmi celles-ci, définir l'encombrement vertical, l'encombrement horizontal, les coordonnées de son début et les coordonnées de son milieu. Typématiquement en effet, le milieu du dénominateur a même abscisse que milieu du numérateur, tandis que l'ordonnée relative de son milieu doit être telle que son "sommet" doit se trouver n points-au dessous de la barre de fraction.

En résumé, transformer les ESAL en ESA revient à déterminer les attributs typématiques associés aux sous-expressions au sein des ESAL (et réciproquement).

Ce qui précède sert à justifier dans la suite de la thèse l'emploi de l'expression "typématique". Toutefois, il ne sera plus question par la suite du détail de la transformation des ESAL en ESA. Le lecteur qui souhaiterait connaître précisément la structure typématique des ESA est invité à étudier les éditeurs de formules et leurs notices d'instructions²⁹.

II.5. Procédures et métarègles

La modélisation des procédures et des heuristiques associées pose, elle aussi, des problèmes spécifiques. Ces questions, difficiles, sont à l'origine de nombreuses études, au carrefour de l'IA, de la psychologie cognitive et de la didactique. A ces études correspondent des réalisations logicielles couvrant

²⁹ Celle d'EDIMATH par exemple

un domaine plus ou moins étendu de l'algèbre élémentaire (PRESS, NAIADE, APLUSIX...). Contrairement aux éditeurs de formules, ces différentes recherches n'aboutissent pas à un modèle unique et définitif de l'usage par les élèves des procédures et des heuristiques (telle n'est d'ailleurs pas leur ambition). Il demeure que ce problème est distinct de celui de la modélisation plausible des ESA et de leurs transformations. Aussi ai-je décidé de l'écartier du champ de cette thèse, et de renvoyer également le lecteur au riche champ des travaux cités ci-dessus.

II.6. Structures et transformations

Suffirait-il alors de lier un calculateur formel (dont les procédures et les stratégies seraient plausibles) à un éditeur de formules pour que la modélisation du calcul algébrique soit achevée, et cette thèse vidée de son contenu? Bien entendu la réponse est "non", car à l'heure actuelle, aucun calculateur formel ne transforme de manière plausible des expressions structurées également de manière plausible³⁰. Dans une perspective d'EIAO, si l'élève, actuellement, demande à l'ordinateur quelles ont été ses procédures et sa stratégie, ce dernier peut (dans certains cas) lui donner une réponse compréhensible parce que ses procédures et sa stratégie sont plausibles. Si par contre il demande le détail des transformations (et pas seulement leur résultat), il n'obtiendra rien... ou bien des surprises à voir comment la machine s'y prend effectivement. Au niveau de la recherche didactique, la façon dont les transformations s'opèrent précisément, reste également du domaine de la "boîte noire". C'est fâcheux si l'on veut interpréter les discours des enseignants, ou même bâtir un (dis)cours.

En conclusion, l'étude des logiciels qui traitent des symboles mathématiques permet d'évacuer de l'étude du système des ESA les sous-problèmes de la mise en forme d'une part, de la liste des transformations nécessaires, des procédures et stratégies de l'autre. Par contraste, elle permet de se concentrer sur le "noyau dur" de cette étude, à

³⁰ à l'exception partielle d'APLUSIX

savoir l'élaboration d'une syntaxe plausible compatible avec un mécanisme plausible de transformation.

III. L'APPROCHE CHOMSKYENNE DE D. KIRSHNER

Le «rasoir» d'Occam n'est naturellement pas une règle arbitraire, ou une règle justifiée par son succès pratique: elle dit que des unités de signes *non nécessaires* ne signifient rien.

WITTGENSTEIN, *Tractatus Logico-Philosophicus*
(5.47321)

III.1. Introduction.

Nous venons de voir que les approches du Calcul Formel ou de l'E(I)AO ne répondaient pas au problème que nous souhaitons traiter, en raison du caractère en général peu plausible de la représentation des expressions et de leur manipulations. Nous allons maintenant évoquer une autre approche, menée par David Kirshner (Thèse de Ph. D., 1987). Cette approche, basée sur la notion linguistique de grammaire générative-transformationnelle, a pour mérite de traiter les expressions sous leur forme courante, et de poser la question de la validité tant explicative que descriptive du modèle développé. Nous montrerons d'abord, sur un exemple, comment Kirshner modélise les transformations. Nous indiquerons ensuite en quoi ce modèle répond à certaines de nos questions, puis ses limitations.

Nous accordons un chapitre entier à un exposé détaillé des travaux de David Kirshner. Cela s'explique pour deux raisons. D'une part, son travail est à notre connaissance absolument le seul qui ait un large domaine commun avec le nôtre, à savoir la syntaxe des expressions symboliques de l'algèbre élémentaire. D'autre part, certaines des hypothèses sur lesquelles il est fondé (en particulier la distinction forme profonde / forme superficielle) ont été les nôtres dans un état antérieur de notre travail (les deux recherches ont commencé à peu près en même temps, de manière totalement indépendante). En exposant le modèle de Kirshner, nous présentons (par-delà les petites différences de formalisme) les difficultés que nous avons rencontrées en distinguant "surface" et "profondeur", lesquelles nous ont amené à modifier nos hypothèses. Il est à noter que ces difficultés sont également évoquées par Kirshner dans sa thèse, et qu'il évoque sans le

détailler ce que devrait pouvoir engendrer un modèle ultérieur pour résoudre ces difficultés. La syntaxe des ESA que nous présentons ici répond précisément à ce type de spécifications.

III.2. Présentation de l'approche de Kirshner

III.2.1. Position du problème: comment modéliser les transformations?

Le mathématicien compétent sait "développer"

$$(3x^2)^2$$

en:

$$9x^4.$$

Cela suppose qu'il identifie

$$3x^2$$

comme un produit (et non une puissance): pour cela, il doit connaître les règles dites de priorité. C'est seulement après avoir identifié le produit qu'il peut appliquer la transformation usuellement notée

$$(AB)^2 = A^2B^2.$$

Comment modéliser de façon simple un tel savoir-faire formel? Imaginons que nous ayons à construire un logiciel de calcul formel muni de ce savoir-faire.

Ce dernier pourrait être décomposé comme suit:

- 1) Identifier $3x^2$ comme un produit.
- 2) Identifier l'écriture $(3x^2)^2$ avec $(AB)^2$, et donc 3 avec A et x^2 avec B .
- 3) Remplacer A par 3 et B par x^2 dans A^2B^2 .
- 4) Effectuer 3^2 en 9 , et transformer $(x^2)^2$ en x^4 .

Nous ne nous intéresserons pas directement aux étapes (2) et (3). Elles correspondent au mécanisme général dit de "filtrage" ou "pattern-

matching"¹ (Mounier 1988), sans lequel aucune transformation n'est effectuable. Quant à la quatrième étape², elle appelle, de manière récursive, de nouvelles transformations (effectuation d'une exponentiation arithmétique et élévation au carré d'un carré).

L'étape initiale d'identification qui seule nous intéresse ici consiste donc à reconnaître la structure de l'écriture (« $3x^2$ est un produit») afin de permettre son filtrage avec la "formule" de transformation:

$$(AB)^2 = A^2B^2$$

La difficulté provient de l'absence de marque explicite indiquant que l'exposant "2" ne s'"applique" qu'à x et non à $3x$.

La solution retenue par D. Kirshner consiste à enchâsser les divers éléments de l'écriture dans autant de paires de crochets qu'il le faut (mais pas plus) pour exprimer les priorités entre opérations, ce qui donne:

$$3[x^2]$$

Par la même occasion, les opérations sont marquées par des symboles explicites. Par exemple, la multiplication sera notée M et l'exponentiation E ce qui donne:

$$3M[xE2]$$

Nous sommes donc en présence de deux écritures liées entre elles:

- l'une (qualifiée de "forme de surface"):

$$3x^2$$

qui apparaît effectivement dans les textes écrits,

- et l'autre ("forme profonde"):

¹ bien qu'il soit rarement explicite

² qui d'ailleurs n'apparaît jamais séparément en dehors des discours à visée didactique, ce que fait remarquer Kirshner.

$$3M[xE2]$$

sur laquelle opèrent les transformations³.

«A fundamental distinction is made in the grammar between the abstract underlying structure of a sentence (the deep form) and the conventional form in which algebraic language currently happens to be expressed (the surface form). For instance, the surface form, "3x²", implicitly conveys operations of multiplication and exponentiation, as well as a parse for the expression. The deep form, 3 M [x E 2], displays these operations and parse explicitly, where "M" and "E" represent multiplication and exponentiation respectively and parentheses indicate grouping in the usual way.» (op. cit. p. 60)

Ainsi l'identification des éléments à transformer se fait sans difficulté et on peut alors leur appliquer une formule du type:

$$[AMB]E2 \leftrightarrow [AE[2]]M[BE[2]]$$

III.2.2. Brève présentation de la syntaxe de Kirshner

Le modèle de Kirshner génère les écritures algébriques sous leur forme profonde, puis les met en forme superficielle au moyen de "traductions"⁴.

Par exemple, l'expression:

$$\frac{\sqrt{-x^2+3}-5}{4y}$$

³ Remarque: pour les besoins de la présentation, nous avons tiré la dichotomie surface/profondeur d'une contrainte liée aux transformations. Toutefois, nous devons à la vérité méthodologique de signaler que cette idée répond à de nombreux autres problèmes, tels que la génération des écritures ou les mécanismes de leur évaluation, et trouve son origine dans l'opposition Structure Profonde / Structure de Surface posée par CHOMSKY dans *Aspects de la théorie syntaxique* (1971). Ces différents points de vue seront pris en compte dans la discussion qui va suivre de la pertinence de cette dichotomie.

⁴ "translations"

est obtenue par traduction de la forme profonde:

$$[[[2R[[N[xE2]]A3]]S5]D[4My]]$$

III.2.2.A. Génération

Les formes profondes sont engendrées par les règles de réécriture suivantes:

Z → [ZOZ]	Opérateur binaire
O → A;S;M;D;E;R	Opérations terminales (Addition, Soustraction etc.)
Z → [NZ]	Opposé
Z → L	Lettre
L → a;b;c; ... x;y;z	Lettres terminales
Z → Q	Chiffre
Q → .;0;1;...;7;8;9	Chiffres

Les symboles A, S, M, D, E et R correspondent respectivement aux opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division, d'exponentiation et d'extraction de racine. N représente l'opération consistant à convertir un nombre en son opposé, que nous pourrions appeler "opposition"⁵. La dernière règle correspond à une grammaire particulière

⁵ Avec nos notations de type "SRL" (Moreau 1975) exposées au chapitre IV, les six premières règles se présentent sous la forme unique suivante:

des expressions constantes, qui est évoquée sans être explicitée dans le travail de Kirshner (v. plus bas).

Ainsi, l'expression:

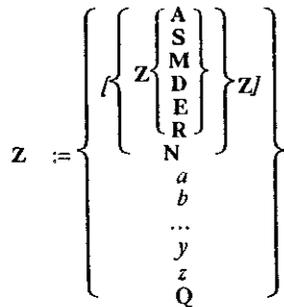
$$[[[2R[[N[xE2]]A3]]S5]D[4My]]$$

qui est la forme profonde de:

$$\frac{\sqrt{-x^2+3}-5}{4y}$$

est générée comme suit:

- Z
- [ZOZ]
- [ZDZ]
- [ZD[ZOZ]]
- [ZD[ZMZ]]
- [ZD[ZMZ]]
- [ZD[4MZ]]
- [ZD[4ML]]
- [ZD[4My]]
- [[ZOZ]D[4My]]
- [[ZSZ]D[4My]]
- [[ZSQ]D[4My]]
- [[ZS5]D[4My]]



- [[[ZOZ]S5]D[4My]]
- [[[ZRZ]S5]D[4My]]
- [[[QRZ]S5]D[4My]]
- [[[2RZ]S5]D[4My]]
- [[[2R[ZOZ]]S5]D[4My]]
- [[[2R[ZAZ]]S5]D[4My]]
- [[[2R[ZAQ]]S5]D[4My]]
- [[[2R[ZA3]]S5]D[4My]]
- [[[2R[[NZ]A3]]S5]D[4My]]
- [[[2R[[N[ZOZ]]A3]]S5]D[4My]]
- [[[2R[[N[ZEZ]]A3]]S5]D[4My]]
- [[[2R[[N[LEZ]]A3]]S5]D[4My]]
- [[[2R[[N[xEZ]]A3]]S5]D[4My]]
- [[[2R[[N[xEQ]]A3]]S5]D[4My]]
- [[[2R[[N[xE2]]A3]]S5]D[4My]]

III.2.2.B. Traduction vers la forme de surface

Le système des traductions de la forme profonde vers la forme de surface est divisé en quatre étapes.

- La première consiste à supprimer les paires de parenthèses redondantes à cause des conventions usuelles de priorité:
[[[2R[[N[xE2]]A3]]S5]D[4My]] devient [[2R[NxE2A3]]S5]D[4My]].

- L'étape suivante met les symboles d'opération sous leur forme de surface:

$$[[2R[NxE2A3]]S5]D[4My]] \text{ devient: } \left[\frac{\sqrt{-x^2+3}-5}{4y} \right].$$

- La troisième étape efface les les parenthèses rendues redondantes par les marqueurs spatiaux d'extension:

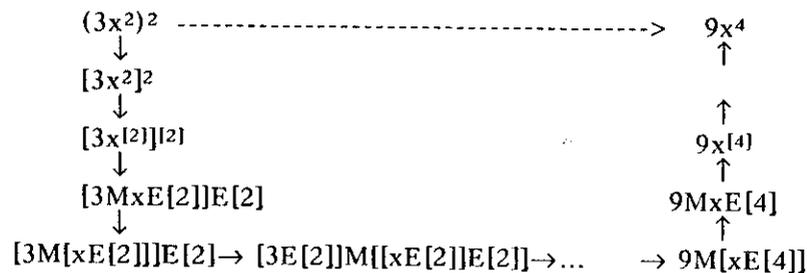
$$\left[\frac{\sqrt{-x^2+3}-5}{4y} \right] \text{ devient } \left[\frac{\sqrt{-x^2+3}-5}{4y} \right]$$

- La dernière étape effectuée des "ajustements mineurs" telles que la suppression des crochets extérieurs et celle de l'ordre "2" de la racine:

$$\left[\frac{\sqrt{-x^2+3}-5}{4y} \right]^2 \text{ devient } \frac{\sqrt{-x^2+3}-5}{4y}$$

III.2.2.C. Transformations

Dans les modèles de Kirshner, la transformation des écritures algébriques se fait via une traduction en forme profonde, une transformation des formes profondes, et une retraduction en formes superficielles, selon le schéma suivant:



III.3. Une qualité de ce modèle: la simplicité

Ce modèle a pour première qualité d'être formellement **simple**. Par cet adjectif, nous voulons dire qu'il est un édifice théorique formé autour d'un **petit** nombre d'objets de base. Pour s'en rendre compte, il suffit de reformuler sa grammaire avec les notations usuelles, comme on le va le voir maintenant.

III.3.1. Génération des expressions

Dans le formalisme usuel de la théorie des grammaires⁶, nous pouvons dire que la partie générative du modèle de Kirshner est un quadruplet:

⁶ v. p. ex. GROSS & LENTIN (1967)

$$\langle \mathcal{V}_n; \mathcal{V}_t; I; \mathcal{R} \rangle$$

tel que:

- Le vocabulaire non-terminal \mathcal{V}_n contient 11 catégories:
 $\mathcal{V}_n = \{ Z; O; N; L; Q; A; S; M; D; E; R \}$
- Le vocabulaire terminal \mathcal{V}_t contient $26 + 10 + 1 + 2 = 38$ éléments:
 $\mathcal{V}_t = \{ a; b; \dots; x; y; z; 0; 1; 2; \dots; 9; \cdot; ; \}$
- Il y a une catégorie initiale I :
 Z
- L'ensemble \mathcal{R} des règles de réécriture contient 7 règles:
 $Z \rightarrow [Z O Z]$ etc.

Pour évaluer cette simplicité, nous nous permettons d'anticiper quelque peu et de comparer le modèle de Kirshner avec celui que nous proposons (chapitre IV)⁷. Ce modèle est indéniablement **plus simple** que le nôtre car, pour engendrer les mêmes expressions⁸, nous ne recourons pas à moins de 19 catégories non-terminales, 85 catégories terminales, et une infinité de règles (engendrées il est vrai par un schéma fini)!

III.3.2. Transformations

La "simplicité" de la grammaire de Kirshner s'étend à la description du mécanisme général de transformation. Les expressions étant entièrement parenthésées, l'étape de filtrage est facile à décrire, et l'algorithme

⁷ Le lecteur pourra également comparer la grammaire de Kirshner avec celles du système PRESS (Bundy & Welham 1979), de l'analyseur syntaxique de Carmona & Didier (1975), ou de REDUCE dans Davenport et al. (1987). Dans l'ensemble, toutes ces grammaires sont également "simples" et du niveau de celle de Kirshner. La construction des expressions (comme des "objets" au sens informatique du terme) dans APLUSIX (Nicaud 1987) est déjà un peu plus complexe.

⁸ ainsi que quelques autres, puisque nous distinguons par exemple entre les fractions telles que $\frac{2}{3}$ et les rapports tels que $2/3$, ce que Kirshner ne fait pas.

correspondant réduit à sa plus simple expression. La transformation qui concerne notre exemple $((3x^2)^2)$ peut être notée⁹:

$$(i) \quad [XMY]E[Z] \leftrightarrow [XE[Z]]M[YE[Z]]$$

L'intérêt de cette formule (i), par rapport à la notation usuelle:

$$(ii) \quad (XY)^Z = X^Z Y^Z$$

est qu'il y a dans (i), au contraire de (ii), peu de contraintes sur X, Y ou Z: ce peuvent être indifféremment des nombres, des lettres ou des expressions entre crochets. La phase initiale d'identification du filtrage se limite donc à la détermination des symboles d'opération (ici M et E), et à un comptage de crochets ouvrants et fermants. On peut même gagner encore en simplicité en usant d'une règle de distribution généralisée¹⁰ de type:

$$(iii) \quad [X\Delta Y]\nabla[Z] \leftrightarrow [X\nabla[Z]]\Delta[Y\nabla[Z]]$$

en identifiant le couple d'opérateurs $(\Delta;\nabla)$ avec l'un des couples: (A;M); (A;D); (S;M); (M;E) etc.

En outre, il est aisé de dériver la plupart des règles de transformation directement des énoncés décrivant la structure de l'ensemble \mathbb{R} des Réels, moyennant une simple "mise en forme". Par exemple, de l'énoncé que l'addition est commutative dans \mathbb{R} :

$$\text{pour tous réels } a \text{ et } b, a + b = b + a$$

on tire la règle de "commutation":

$$[X] + [Y] \rightarrow [Y] + [X] \quad \text{sans contrainte sur } X \text{ ni sur } Y$$

règle que l'on peut d'ailleurs généraliser:

⁹ la flèche double \leftrightarrow note le fait que la transformation est symétrique, c'est-à-dire qu'elle peut être effectuée "dans les deux sens".

¹⁰ "generalized distributive law" (Kirshner 1987a, 1990)

$$[X]\Delta[Y] \rightarrow [Y]\Delta[X] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{sans contrainte sur } X \text{ ni sur } Y \\ \Delta \text{ peut être } A \text{ ou } M \end{array} \right.$$

III.3.3. Sémantique

Enfin, pour déterminer la valeur numérique d'une expression à partir de sa forme profonde, il suffit par exemple (lorsqu'il n'y a pas de variable) de convertir en nombres les écritures numériques et d'effectuer au fur et à mesure les opérations en partant de celles qui sont contenues dans le plus de parenthèses:

$$\begin{array}{c} [[3E2]M2]A2 \\ \downarrow \\ [9M2]A2 \\ \downarrow \\ 18A2 \\ \downarrow \\ 20 \end{array}$$

Toutes les opérations étant indiquées avec leur ordre, l'algorithme (récursif) d'évaluation est très court¹¹.

III.4. Quelques inconvénients du modèle de Kirshner

III.4.1. Le modèle se limite aux seules expressions algébriques

Le domaine couvert par la grammaire de Kirshner est notablement moins étendu que celui que nous voulons étudier: n'y figurent en effet que les **expressions** algébriques (sommes, produits, etc.) mais pas les **propositions** (égalités, inégalités, systèmes). Cela restreint par contre-coup l'ensemble des transformations susceptibles d'être modélisées, puisqu'en sont absents les changements de membre d'un terme ou d'un facteur, et autres

¹¹ d'autres types d'évaluation qui ne commencent pas par le niveau le plus profond sont également possibles; ce n'était qu'un exemple.

transformations spécifiques des équations, et dont l'importance didactique est au moins aussi grande que les développements ou les factorisations.

III.4.2. La simplicité du modèle n'est qu'apparente

Les règles de génération, de traduction et de transformation sont moins simples qu'il n'y paraît de prime abord.

III.4.2.A. Fausse simplicité de certaines règles de génération

Dans la grammaire de Kirshner, une seule règle, associée à une catégorie initiale (Q) et 11 catégories terminales, génère les écritures de nombres décimaux:

$$Q \rightarrow ., 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

Le caractère incomplet de cette règle est indiqué en note:

«Here again the formality of the grammar is compromised. The intended replacements for "Q" are decimal numbers from the given symbols according to a presumed "grammar of arithmetic". This grammar is not supplied here.»

Nous verrons au chapitre suivant qu'une telle "grammaire de l'arithmétique" ne nécessite en fait pas moins de 4 catégories non-terminales, 14 catégories terminales, 2 catégories initiales, et 4 règles de réécriture.

Par ailleurs, certaines catégories ne figurent pas dans la grammaire: il n'y est par exemple pas fait mention du signe "+" à une place que l'on observe dans:

$$x = + 2.$$

De même, les "quotients" écrits en ligne, de type $2:3$ ou $2/3$ ne sont pas engendrés par la grammaire de Kirshner, et rien n'indique comment on pourrait les différencier des fractions telles que $\frac{2}{3}$ (il n'y a qu'une forme profonde [2D3] et une traduction de cette forme en fraction). Or, si les quotients a/b et les fractions $\frac{a}{b}$ désignent bien les mêmes nombres rationnels, les ensembles de transformations applicables à ces écritures au

cours des calculs diffèrent. En particulier, il est très rare qu'on ait à "simplifier" des quotients, contrairement aux fractions.

III.4.2.B. Fausse simplicité de certaines règles de traduction

III.4.2.B.a. Les étapes de la traduction

Dans le modèle de Kirshner, la traduction (de forme profonde en forme de surface) se fait en quatre étapes.

- 1) La première étape ne comporte qu'une règle de suppression de parenthèses, et l'attribution d'une hiérarchie (de 1 à 3) à chacun des sept symboles d'opération (A; S; M; D; E; R et N)¹². Un commentaire, qui joue le rôle d'une métarègle, évoque (sans l'expliciter) l'ordre dans lequel sont effectuées les suppressions de parenthèses.
- 2) La seconde étape comporte sept mises en forme superficielle des symboles ("profonds") d'opération, du type:

$$a D b \rightarrow \frac{a}{b}$$

- 3) La troisième étape comporte six règles de suppression de parenthèses rendues redondantes par les marqueurs spatiaux de portée, du type:

$$\frac{[a]}{b} \rightarrow \frac{a}{b}$$

- 4) Enfin, la quatrième et dernière étape comporte cinq règles de "mise en forme" relativement disparates, telles que:

$$\left[\frac{a}{b} \right] \rightarrow \left(\frac{a}{b} \right)$$

$$^2\sqrt{a} \rightarrow \sqrt{a}$$

¹² A et S ont le niveau 1, M et D le niveau 2 et E et R le niveau 3.

En résumé, ce modèle présente dix-neuf règles de traduction, réparties en quatre étapes, ce qui n'est pas excessif et peut donc être qualifié de relativement "simple". Si toutefois nous regardons un peu plus attentivement, nous constatons que cette simplicité n'est obtenue qu'au prix de l'escamotage d'un certain nombre de difficultés.

III.4.2.B.b. Le cas de la quatrième étape de traduction

Ainsi, D. Kirshner précise (p.77) que sa grammaire ne détaille pas la règle¹³ qui gouverne la sélection du type de parenthèse (crochets, accolades ou parenthèses) et permet d'obtenir par exemple:

$$3\{(1-[(2x)^2+1])\}$$

Cette règle n'est pas forcément très "simple". Si on l'explique en détail, on diminue d'autant la simplicité globale du modèle.

Plus gênant, une seule règle est censée gouverner la mise en forme typématique des expressions qui en "englobent" d'autres. Il s'agit de la règle portant le n° 17:

$$17. \left[\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right] \rightarrow \left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right)$$

Ici par exemple, les parenthèses doivent être agrandies pour englober l'espace occupé par l'expression qu'elles enchâssent. Or cette règle, telle qu'elle figure, sans détail, dans le travail de Kirshner, ne saurait rendre compte à elle seule des mises en forme typématiques des diverses expressions telles que:

$$\left(1 + \frac{a}{b} \right)^2 \quad \text{non seulement les parenthèses doivent grandir, mais encore l'exposant doit être remonté}$$

$$3\{1-[(2x)^2+1]\} \quad \text{les parenthèses et les crochets doivent grandir}$$

¹³ il s'agit en fait d'une métarègle, car elle détermine laquelle des trois règles (qui transforment les crochets respectivement en parenthèses, en crochets et en accolades) doit être mise en œuvre.

$$\sqrt[2]{3}$$

le symbole de racine doit grandir

$$\frac{1}{\frac{1}{2}}$$

la barre de la fraction prioritaire (la plus enchâssée) doit être plus courte que l'autre

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} \text{ etc.}^{14}$$

le symbole de racine doit grandir et la barre s'allonger

Pour traiter effectivement de ces diverses écritures, comme le montre l'étude des éditeurs de formules, il faut bien d'autres règles, assez complexes, qui tiennent compte de nombreuses caractéristiques typématiques telles que l'encombrement vertical et horizontal, la position par rapport à la ligne courante etc., ce qui rend le modèle moins simple qu'il n'y paraît à la seule lecture de la règle N° 17.

III.4.2.B.c. Le cas de la seconde étape de traduction.

Autre exemple plus flagrant encore de règle unique là où il en faudrait plusieurs, la notation par juxtaposition du produit:

$$4. \quad a M b \rightarrow a b$$

Cette règle rend compte de:

$$x y$$

ou de

$$x (1 - y)$$

mais non du fait que

$$23$$

¹⁴ exemple tiré de [BZ3] p. 67

ne représente pas le produit de 2 par 3 . Nous verrons plus loin (chapitre VII) que le traitement effectif de cette question épineuse n'a rien de trivial. Pour la résoudre (ainsi que d'autres problèmes), nous avons été nous-même finalement conduit à renoncer aux modèles à forme profonde. Même si l'on voulait garder une grammaire à forme profonde, la complexité des faits observés (v. en particulier le corpus en annexe) laisse peu d'espoir de rendre compte des données en quelques règles.

III.4.2.C. Fausse simplicité de certaines transformations

Comme nous l'avons vu plus haut le mécanisme général de transformation est décrit de manière relativement simple. Par contre, on ne retrouve pas cette simplicité au niveau du détail des transformations particulières.

III.4.2.C.a. Le système n'est pas complet

Certaines transformations laissent sans structure des expressions. Par exemple, l'application des transformations d'effectuation à "3 A 2" donne:

$$[3A2]Mx \rightarrow [5]Mx$$

or l'expression finale n'est pas engendrée par la grammaire. Il manque donc au moins une règle de suppression des crochets excédentaires.

Plus généralement, je reproche à la grammaire de Kirshner d'introduire des objets "parasites" tels que les crochets redondants, pour les supprimer plus tard. C'est à ces entités ad hoc, effacées peu de temps après avoir été créées, qui n'apparaissent jamais dans les calculs effectifs, que je souhaite appliquer le "rasoir d'Occam", pour les faire disparaître de la théorie même -autant que possible.

Nous allons retrouver ce type d'entité évanescence avec les transformations intermédiaires cachées que Kirshner est obligé d'introduire en raison de la structure (trop) simple qu'il a donné à ses expressions.

III.4.2.C.b. Un exemple

Soit à ordonner suivant les puissances décroissantes de x le polynôme:

$$1+x^3+3x^2+x^4$$

En structure profonde, seuls des binômes (tels que [ZAZ] ou [ZSZ]) sont définis - c'est cela, entre autres qui rend la grammaire simple: il n'y a pas de catégories distinctes pour les trinômes, les "quadrinômes", les "quintinômes" etc.

En effet, la grammaire de Kirshner génère en forme profonde soit: ZA[ZAZ] soit: [ZAZ]AZ mais pas: ZAZAZ

Il nous faut donc exprimer d'abord (par associativité) ce polynôme sous forme de binômes ("parsing")¹⁵. Il y a cinq façons de le faire:

$$[[1+x^3]+3x^2]+x^4$$

$$[1+[x^3+3x^2]]+x^4$$

$$[1+x^3]+[3x^2+x^4]$$

$$1+[[x^3+3x^2]+x^4]$$

$$1+[x^3+[3x^2+x^4]]$$

Quel parenthésage choisir? Certains d'entre eux permettent d'aboutir en moins d'étapes que d'autres à la forme ordonnée souhaitée. Toutefois,

¹⁵ il ne s'agit pas d'une forme profonde au sens que nous avons défini plus haut, mais d'une forme intermédiaire, correspondant à la 1^{ère} étape de "traduction", choisie pour la commodité de la démonstration.

Ceci illustre d'ailleurs un problème d'intelligibilité lié aux notations choisies par D. Kirshner. Il n'est en effet pas aisé pour le lecteur de retrouver, derrière la forme profonde:

$$[[1Ax[E3]]A3M[xE2]]A[xE4]$$

le polynome:

$$1+x^3+3x^2+x^4.$$

une description du mécanisme qui établirait un parenthésage "optimal" (quand il existe) en fonction des transformations à effectuer ensuite, si elle est parfaitement concevable (on en a un exemple lorsqu'on commence le calcul mental de $14 + 98 + 2 + 6$ par l'effectuation de $98 + 2$), a peu de chances d'être simple. Il faut donc définir le parenthésage a priori et indépendamment des transformations à effectuer, sinon la grammaire n'est pas simple.

Déterminons quel doit être ce parenthésage défini a priori. Sachant qu'en l'absence d'opération prioritaire, l'évaluation d'une somme se fait usuellement de gauche à droite, il paraît raisonnable de fixer arbitrairement son parenthésage de façon à privilégier ce sens d'évaluation. Ceci donne à une somme algébrique telle que:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

la structure profonde "binaire" suivante:

$$[[\dots [[a_1 + a_2] + a_3] + \dots] + a_{n-1}] + a_n$$

correspondant à un "arbre" de type:



Ayant donc déterminé un parenthésage a priori, la "représentation binaire" du polynôme à ordonner est donc:

$$[[[1 + x^3] + 3x^2] + x^4]$$

Par ailleurs, les règles portant sur ces binômes sont l'associativité:

$$(A) [a A [b A c]] \leftrightarrow [[a A b] A c]$$

et la commutativité:

$$(C) [a A b] \rightarrow [b A a]$$

Pour ordonner $1 + x^3 + 3x^2 + x^4$, il faut donc le parenthésier en: $[[1 + x^3] + 3x^2] + x^4$, puis effectuer les transformations suivantes:

- "Commutation" (application de la commutativité):

$$\begin{aligned} & [[1 + x^3] + 3x^2] + x^4 \\ & \quad \downarrow \\ & x^4 + [[1 + x^3] + 3x^2] \end{aligned}$$

- "Association" (application de la associativité):

$$\begin{aligned} & x^4 + [[1 + x^3] + 3x^2] \\ & \quad \downarrow \\ & x^4 + [1 + [x^3 + 3x^2]] \end{aligned}$$

- Commutation:

$$\begin{aligned} & x^4 + [1 + [x^3 + 3x^2]] \\ & \quad \downarrow \\ & x^4 + [[x^3 + 3x^2] + 1] \end{aligned}$$

Nous voyons donc que la commutation de 1 et de x^4 , opération banale s'il en est, ne nécessite ici pas moins d'un parenthésage suivi de trois transformations, dont l'apparition telles quelles, sous la plume de l'élève, dans une activité courante de calcul est d'ailleurs peu vraisemblable. En outre, il faut retraduire vers la surface de la forme profonde transformée.

De plus, la "structure" binaire du résultat final:

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \quad \diagup \quad \diagdown \\ x^4 + [[x^3 + 3x^2] + 1] \end{array} \end{aligned}$$

viole de manière tout à fait arbitraire la convention de parenthésage de gauche à droite, et impose donc un ordre d'évaluation que rien ne justifie. Pour retrouver une structure usuelle il faut encore deux associations:

$$\begin{array}{c}
 x^4 + [[x^3 + 3x^2] + 1] \\
 \downarrow \\
 [x^4 + [x^3 + 3x^2]] + 1 \\
 \downarrow \\
 [[x^4 + x^3] + 3x^2] + 1
 \end{array}$$

Ce qui précède illustre simplement le fait qu'une grammaire simple n'est pas concise, en ce sens que les étapes sont nombreuses pour transformer les expressions.

III.4.2.C.c. L'absence de métarègles

Mais notre critique va au-delà de ce point. Nous prétendons que cette simplicité même, pour peu qu'on aille au fond des choses, n'est qu'apparente. En effet, nous avons nous-même "tâtonné" avant d'arriver à la solution "en trois coups" (commutation, association et commutation) pour ordonner le polynôme. D'autres solutions, moins économiques, sont possibles. Pour réduire le nombre de "coups", il faut donc rajouter des règles de niveau "méta", et plus il y a de règles, moins la grammaire est simple.

Supposons que l'on n'exige pas de chaque calcul qu'il s'effectue avec un nombre minimum de transformations. On ne pourrait quand même pas s'en remettre au hasard seul pour "piloter" celles-ci (c'est-à-dire pour déterminer lesquelles s'appliquent, et à quels éléments) car on courrait le risque de "tourner en rond" en appliquant des transformations dont les effets se neutralisent. Dans tous les cas, des métarègles sont donc nécessaires.

«Proving finite termination involves defining a function on expressions and showing that it decreases when the rules are applied. This function is difficult to define when the set has no explicit inclusion criteria [criteria for including a particular rule within the sets of rules]» (Bundy & Welham 1979)

Les règles de transformation, qui forment une collection "simple", ne peuvent donc être "opérationnalisées" au sein de calculs qu'à condition de leur adjoindre les métarègles qui les gouvernent. On y perd donc en simplicité.

En conclusion, la simplicité apparente de la grammaire de D. Kirshner est obtenue en renvoyant implicitement les difficultés dans les règles de traduction et les métarègles de transformation.

III.4.3. Le modèle de Kirshner est touffu

Nous avons remarqué plus haut que la simplicité de ce modèle se faisait au dépens de sa concision (dans le cas de la permutation des termes d'un polynôme par exemple). Précisons ce que nous entendons par ces termes:

III.4.3.A. Vocabulaire: simplicité et concision descriptive

III.4.3.A.a. Simplicité

Précisons la notion de "simplicité" d'une théorie. Nous entendons ce qualificatif dans un sens non pas absolu mais relatif:

Une théorie A est plus simple qu'une théorie B si, pour décrire le même ensemble de faits, elle introduit moins d'objets théoriques ("catégories" et "règles").

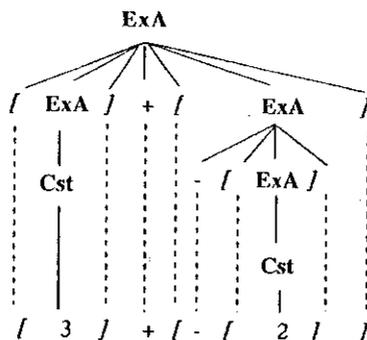
Parmi les "objets" théoriques, nous comptons les notions de base, leurs relations, voire les relations entre relations et ainsi de suite. Dans les théories (de type linguistique) qui nous concernent ici, les catégories (telles que "Constante" ou "Expression Algébrique") sont des objets de base, les règles de réécriture (notées ":=") et les transformations (notées "→") sont des relations. Les métarègles portant sur les réécritures et les transformations sont des relations entre relations.

La notion de simplicité est introduite par Noam Chomsky (1971 p. 64) en tant que critère d'évaluation d'une grammaire :

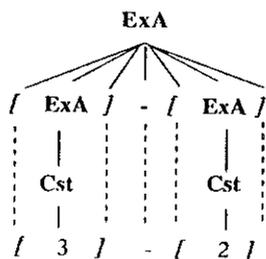
«La mesure numérique évidente que l'on peut appliquer à une grammaire est la longueur, définie sur la base du nombre des symboles.»

l'Expression en différence). On retrouve cette différence de concision dans les indicateurs syntagmatiques ("arbres") correspondants:

Description structurale de $[3] + [-2]$:



Description structurale de $[3] - [2]$:



Le second arbre est plus "concis" que le premier.

III.4.3.A.e. Généralisation

Ce phénomène d'opposition entre simplicité et concision, très général, est pointé par Gladkij & Mel'čuk (ibid.):

«Cette même particularité [la simplicité] a également pour effet de rendre les grammaires formelles extrêmement volumineuses: si nous voulons que les différents types de détails initiaux soient aussi peu nombreux que possible, et que ces détails mêmes soient aussi simples que possible, il est nécessaire d'accumuler un très grand nombre de ces détails, ou plutôt d'exemplaires de ces détails pour pouvoir décrire

des phénomènes de langue naturelle assez complexes. C'est pourquoi les grammaires formelles ne contribuent pas à élever le degré de clarté des description linguistique (...).

III.4.3.B. Simplicité et Concision chez D. Kirshner

Dans le modèle de Kirshner, une seule règle décrit le développement d'un produit dont le second facteur est une somme algébrique:

$$31. a(bO_1cO_2 \dots O_n d) \leftrightarrow a b O_1 a c O_2 \dots O_n a d$$

(où O_i est '+' ou '-')

Une longue note en bas de page précise que les points de suspension représentent "une indication informelle de la possibilité de distribution sur un nombre indéterminé d'opérations".

Supposons que cette distribution soit obtenue par réitération d'une distribution élémentaire:

$$31'. a(bOc) \leftrightarrow a b O a c \text{ (où } O \text{ est } + \text{ ou } -)$$

Ce choix privilégie la simplicité, mais au détriment de la concision descriptive. Soit en effet à développer:

$$(a + b + c) d$$

Il va falloir passer par les étapes suivantes¹⁷:

¹⁷ nous ne faisons figurer que les étapes principales, en sautant un certain nombre de "traductions"!

$$\begin{array}{c}
 (a + b + c) d \\
 \downarrow \\
 [a + b + c] \times d \\
 \downarrow \\
 [(a + b) + c] \times d \\
 \downarrow \\
 d \times [(a + b) + c] \\
 \downarrow \\
 d \times [a + b] + d \times c \\
 \downarrow \\
 d \times a + d \times b + d \times c \\
 \downarrow \\
 a \times d + b \times d + c \times d \\
 \downarrow \\
 a d + b d + c d
 \end{array}$$

Nous laissons au lecteur le soin d'imaginer la concision (!) de la description détaillée du développement de:

$$(-2x^3 + 4x^2 - x + 3)(x^2 - 2x + 1)$$

De telles descriptions posent des problèmes de plausibilité, en ce sens qu'elles ne sont:

- ni concises,
- ni uniques, puisqu'on peut modifier l'ordre de certaines transformations,
- ni "réalistes" enfin, en ce sens que la plupart des étapes n'apparaissent jamais dans la pratique courante du calcul.

Autre possibilité, la distribution peut être obtenue par un mécanisme récursif. Ceci a la préférence de Kirshner qui est parfaitement conscient du problème, mais la nature formelle de ce mécanisme récursif "reste à déterminer" (Thèse p. 86 note 2):

«More formally correct alternatives would be (...) to initiate some sort of formal recursive device to achieve the required generality. The discussion of *non-*

binary operations ¹⁸ (...) expresses skepticism about the explanatory adequacy of the first alternative. If the second has any explanatory validity, it still remains to determine the nature of the correct formal device (as a psychological theory).» .

En réalité, le lecteur verra au chapitre VI qu'un mécanisme récursif présente également un certain nombre d'inconvénients, mais qu'on peut tout de même engendrer des expressions non-binaires (les sommes algébriques et les produits n-aires). Notre modèle des ESA répond donc à la question du "mécanisme formel correct" souhaité par Kirshner.

III.5. Conclusion

En résumé, comment le modèle de Kirshner répond-il aux contraintes que nous avons assignées aux modèles des ESA au chapitre précédent?

III.5.1. Le domaine des expressions

Les expressions sont bien celles de l'algèbre élémentaire: sommes, produits, etc. Toutefois, les propositions algébriques (équations, inéquations et systèmes) ne sont pas prises en charge par ce modèle.

III.5.1.A. La forme des expressions

Les expressions ne sont pas manipulées sous leur forme effective usuelle, mais sous une forme "profonde" artificielle telle que:

$$4M[xM[yE2]].$$

III.5.1.A.a. Plausibilité du mécanisme des transformations

Etant touffu, le mécanisme proposé est peu plausible, en raison du grand nombre d'étapes intermédiaires "parasites" rendues nécessaires par la simplicité de la grammaire.

¹⁸ cf. Kirshner 1987b

III.5.1.A.b. Accessibilité

La partie réellement simple de ce modèle est aisément accessible: le lecteur peut en percevoir l'organisation et la modifier selon ses besoins. Inversement, les parties faussement simples recèlent des difficultés ardues.

III.5.1.A.c. Modèle de Kirshner et syntaxe des ESA.

Il ne faudrait pas voir dans ce qui précède une condamnation sans appel de ce modèle. Avant tout, celui-ci a le mérite d'exister, et David Kirshner est, notre étude mise à part, le seul qui ait dépassé les déclarations d'intention sur la nécessité d'étudier la syntaxe de l'algèbre¹⁹, et qui ait réalisé un tel programme. Par ailleurs, les objectifs de sa recherche diffèrent des nôtres. Il se place dans une perspective psycholinguistique, et de ce point de vue les formes profondes des expressions contiennent des indications sur la sémantique des formes superficielles correspondantes. Les inconvénients de son modèle le sont relativement à nos objectifs plutôt qu'aux siens.

Historiquement, les deux recherches ont débuté de manière indépendante. J'ai eu connaissance de ses travaux en 1987 (date de ses premières publications), soit plusieurs années après avoir commencé, et nous avons eu l'occasion de discuter longuement de nos modèles respectifs. Cette confrontation m'a permis de clarifier un grand nombre de points. Les années qui ont suivi ont vu s'accroître la divergence entre nos recherches, lui poursuivant son étude des aspects psycholinguistiques et moi améliorant le modèle syntaxique, ainsi qu'on le verra dans les chapitres qui suivent.

Nous venons de voir dans ce chapitre les solutions apportées par D. Kirshner aux problèmes de génération et de transformations algébriques, et les critiques que nous faisons à ces solutions. Nous allons maintenant montrer les réponses que nous y avons apportées, et tout d'abord celles qui concernent la question de la délimitation précise de l'objet d'étude (question qui n'apparaît pas dans le modèle de Kirshner).

¹⁹ cf. Norman (1987)



IV. LA GÉNÉRATION DES ESAL

DEUXIEME PARTIE:

LE MODELE THEORIQUE DU SYSTEME DES ESA

L'ordre logique de l'exposition voudrait qu'on présente d'abord les problèmes rencontrés pour engendrer les ESAL, et ensuite seulement la grammaire des ESAL que la solution de ces problèmes nous a permis d'établir. Or ces problèmes, qui concernent par exemple la génération des sommes algébriques ou des puissances, n'ont de sens que dans le cadre (que nous avons posé a priori) d'une grammaire générative. Présenter celle-ci en dernier risquerait de rendre obscure la discussion des difficultés rencontrées, sauf à multiplier des notes explicatives partielles pour tenter de faire comprendre de quoi nous voulons parler.

Nous avons donc préféré, au risque de paraître un peu abrupt, présenter dès ce chapitre IV une première ébauche de grammaire générative des ESAL, ou plus exactement des ESAL, et affiner progressivement cette grammaire au fur et à mesure des chapitres. Avant de présenter cette première grammaire des ESAL, nous indiquerons nos conventions d'écriture, et ferons quelques rappels sur la notion de grammaire générative.

IV.1. Notion de partie générative \mathcal{G} d'une syntaxe

Certaines de nos notations sont spécifiques, en raison du domaine décrit. En effet, nous ne pouvons employer pour notre grammaire que des "métasymboles" qui ne soient pas déjà des symboles algébriques, faute de quoi il y aurait risque de confusion. Cela exclut donc les symboles de type "(", ")", "+", ou " \emptyset ". Nous présentons donc d'abord ces notations particulières, puis la définition de "grammaire générative". Le lecteur familier de la notion pourra donc passer directement à la lecture des paragraphes IV. 2 et suivants qui traitent de la grammaire spécifique des ESAL.

IV.1.1. Conventions et notations

Pour décrire la grammaire générative des ESAL, nous utiliserons la notation dite "SRL", telle qu'elle est décrite dans Moreau (1975). Cette notation est relativement standard en théorie des langages formels. Dans la mesure où elle est plus compacte, nous la préférons à la notation de Backus (dite "BNF", *Backus Normal Form*), plus utilisée dans l'écriture des règles des langages de programmation.

Nous emploierons toutefois quelques notations spécifiques. Certains signes de SRL sont en effet des signes mathématiques. Or le risque de confusion entre symboles et métasymboles, quasi-inexistant lorsqu'il s'agit de décrire des langues naturelles, est réel dès lors qu'on entreprend de décrire des écritures mathématiques. Il nous a donc fallu rechercher des métasymboles qui ne puissent être confondus avec les symboles algébriques.

Inversement, nous avons tenu à limiter au maximum le nombre de symboles inusités ou difficiles à reproduire (cette contrainte étant plutôt contradictoire par rapport aux précédentes). Pratiquement, le seul signe inhabituel est: « ϕ », (la lettre cyrillique "f") pour désigner la suite (ou "chaîne") vide¹. Par ailleurs, nous avons tenté de distinguer soigneusement par des caractéristiques typographiques (graisse, inclinaison), les symboles qui représentent des objets différents.

voici les principaux métasymboles² que nous emploierons:

-
- ¹ Ce symbole ϕ rappelle le caractère d'identité (1) de la suite vide pour la concaténation, et la longueur nulle (0) de cette suite vide.
- ² Les divers auteurs à partir desquels nous avons travaillé [Ruwet (1968), Chomsky & Miller (1971) et Gladkij & Mel'cuk (1972)] utilisent par exemple "+" ou " \cap " pour représenter la concaténation, " \emptyset " ou "e" pour représenter la suite vide, " \rightarrow " ou " \Rightarrow " pour les règles de réécriture et les transformations. Ces métasymboles ne conviennent guère pour représenter des ESAL, car ils font également partie des symboles mathématiques (sauf " \cap ").

Concaténation:	&	(ou exprimée par juxtaposition)
Suite vide:	ϕ	
Règles de réécriture ³ :	:=	
Transformations:	\rightarrow	et \leftrightarrow

Précisons par ailleurs que le caractère "^" (accent circonflexe) désignera ici l'exponentiation.

Afin d'être plus clair, les métasymboles présenteront ici les attributs typographiques des caractères courants, tandis que les symboles de la grammaire (les éléments du vocabulaire) seront, suivant les cas, en romains gras (les catégories) ou en italiques maigres (les *éléments terminaux*).

Les ensembles seront désignés par des lettres capitales (E); parmi eux, les parties de la grammaire seront désignées en cursives (*E*). Pour décrire mathématiquement la structure de la grammaire, nous emploierons les notations mathématiques usuelles.

Généralement:

- les éléments d'un ensemble E seront désignés par:
«x», «x'», «x₁» etc.,
- les suites finies d'éléments de E seront désignées par:
«s», «s'», «t», «t'», «s₁» etc. ,

sauf les suites particulières appartenant aux "paradigmes" (v. plus bas), notées:

«p», «p'», «p₁» etc.

-
- ³ nous avons préféré ":= " à la notation "::=" de SRL où le second ":" n'apporte rien. L'essentiel est pour nous que ce métasymbole ait un caractère asymétrique, en liaison avec la non-symétrie de la règle de réécriture.

Pour tout ensemble E, notons E* l'ensemble des *suites finies* d'éléments de E.

- Dans tout ce qui suit et contrairement à l'usage courant, une suite finie

$$s = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in E^*$$

sera notée:

$$x_1 x_2 \dots x_n .$$

- Par convention, on assimilera E¹ à E.
- Ainsi, par la suite (en particulier pour la définition de la concaténation), les *suites* (x) à un seul élément seront assimilées aux éléments x de E.
- Par convention, on notera E⁰ = {ϕ}, le symbole « ϕ » désignant la suite vide.
- Les éléments s d'un ensemble E* seront dorénavant appelés simplement "suites".
- Les éléments t de T* seront appelés "*suites terminales*" et notées en italiques.
- Enfin, nous noterons PF(E) l'ensemble des *parties finies* de E. Les parties finies de suites [éléments de PF(E*)], encore appelées "paradigmes", seront notées entre accolades verticales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chi} \\ \text{Ent Chi} \end{array} \right\}$$

IV.1.2. Monoïdes

Ce qui suit est bien connu du linguiste ou de celui qui est familier de la théorie des langages formels. Il s'agit d'une présentation sommaire de la notion de partie générative d'une grammaire.

Nous avons tenu toutefois à présenter les outils dont nous allons nous servir pour engendrer les ESAL (et partant les ESA, via des transformations

typématiques), de telle manière que les notations SRL apparaissent relativement naturelles aux yeux du mathématicien non-spécialistes de la théorie des langages.

C'est ainsi que, dans cette présentation, une règle de réécriture s'écrit:

$$c := P$$

où P est un paradigme, c'est-à-dire un ensemble $\left\{ \begin{array}{l} p_1 \\ \dots \\ p_n \end{array} \right\}$ de suites.

De ce fait, l'écriture:

$$c := \left\{ \begin{array}{l} p_1 \\ \dots \\ p_n \end{array} \right\}$$

apparaîtra naturelle au mathématicien (moyennant la convention de présenter verticalement un ensemble), plus naturelle en tous cas que lorsqu'elle lui est présentée comme une notation de la *disjonction* des n règles de réécriture distinctes:

$$\begin{array}{l} c := p_1 \\ c := p_2 \\ \dots \\ c := p_n \end{array}$$

Nous n'avons dans cette présentation nulle prétention à énoncer quelque résultat original que ce soit. Nous renvoyons le lecteur qui voudrait approfondir les notions exposées ci-dessous aux ouvrages classiques de Gross & Lentin (1967) ou de Moreau (1975) ou à tout autre ouvrage plus récent exposant les fondements des théories des langages.

IV.1.2.A. Concaténation

Soit E un ensemble.

On définit sur E* l'opération dite de *concaténation*, notée par juxtaposition, telle que:

$$\&: \left\{ \begin{array}{lll} E^* \times E^* & \rightarrow & E^* \\ (s; s') & \mapsto & ss' \\ (x_1 x_2 \dots x_n, x'_1 \dots x'_m) & \mapsto & (x_1 x_2 \dots x_n x'_1 \dots x'_m) \end{array} \right.$$

(E*, &) est un monoïde, c'est à dire un demi-groupe (& est une opération associative) possédant un élément neutre: ϕ.

IV.1.2.B. Concaténation généralisée

IV.1.2.B.a. Définition

On définit sur $\mathcal{PF}(E^*)$ l'opération suivante, dite *concaténation généralisée*:

$$\left| \&*: \begin{cases} \mathcal{PF}(E^*) \times \mathcal{PF}(E^*) \rightarrow \mathcal{PF}(E^*) \\ (P; P') \leftrightarrow PP' = \{s \in E^* / (\exists p \in P \exists p' \in P') s = pp'\} \end{cases}$$

IV.1.2.B.b. Notation:

Par abus de langage, et de façon cohérente avec l'assimilation de E1 à E, les notations «pP» et «Pp» désigneront les concaténations généralisées: {p}&*P et P&*&{p}.

De même, soient $P = \begin{Bmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_n \end{Bmatrix}$ et $P' = \begin{Bmatrix} p'_1 \\ \dots \\ p'_m \end{Bmatrix}$ deux ensembles finis de suites

finies de E. Nous nous autoriserons à noter « $\begin{Bmatrix} P \\ P' \end{Bmatrix}$ » l'ensemble

$$P \cup P' = \begin{Bmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_n \\ p'_1 \\ \dots \\ p'_m \end{Bmatrix}.$$

IV.1.2.B.c. Exemple:

la notation⁴:

$$\begin{Bmatrix} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{Bmatrix}$$

4 où le signe "=" est un symbole mathématique (élément terminal de la grammaire) et non le métasymbole d'égalité entre les paradigmes. Il devrait apparaître en italiques, malheureusement rien ne ressemble plus à un "=" en italique qu'un "=" en romain!

équivalent à:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cst} = \text{Cst} \\ \text{CLi} = \text{Cst} \\ \text{Var} = \text{Cst} \\ \text{Exa} = \text{Cst} \\ \text{Cst} = \text{CLi} \\ \text{CLi} = \text{CLi} \\ \text{Var} = \text{CLi} \\ \text{Exa} = \text{CLi} \\ \text{Cst} = \text{Var} \\ \text{CLi} = \text{Var} \\ \text{Var} = \text{Var} \\ \text{Exa} = \text{Var} \\ \text{Cst} = \text{Exa} \\ \text{CLi} = \text{Exa} \\ \text{Var} = \text{Exa} \\ \text{Exa} = \text{Exa} \end{array} \right\}$$

Les règles d'interprétation d'une expression telle que la précédente ou celle-ci⁵:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ \text{Ide} \} \\ \{ \text{VAb} \} \end{array} \right\} \setminus \left\{ \begin{array}{l} \{ \text{Ide} \} \\ \{ \text{VAb} \} \end{array} \right\}$$

sont donc les suivantes:

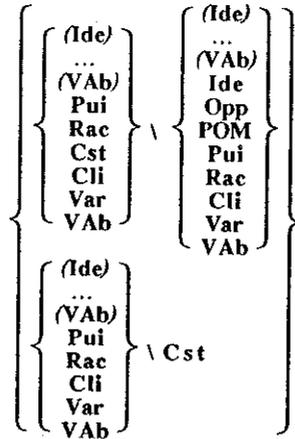
- Deux symboles (simples ou composés) *superposés* au sein d'une même paire d'accolades représentent deux sous-ensembles d'un même ensemble fini de suites finies de E (sachant qu'une suite s est identifiée au singleton {s}).
- La *juxtaposition* de deux symboles (simples ou composés) sur une même horizontale signifie leur concaténation généralisée.

On perçoit clairement le gain de place et la concision dans la description apportée par une telle convention.

5 comme nous le verrons plus bas le symbole "\" sert à noter la barre de fraction.

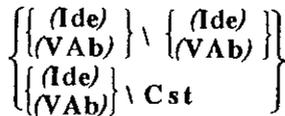
IV.1.2.B.d. Exemple:

Voici le paradigme du second facteur d'un "pseudo-monôme" (v. § VII.5.1)



IV.1.2.B.e. Remarque:

C'est l'interprétation d'ensembles de suites obtenus par concaténation généralisée qui rend préférable la notation verticale des ensembles définis en extension. L'usage montre en effet qu'il est plus aisé d'interpréter le paradigme suivant, lorsqu'il est écrit verticalement:



que s'il était noté linéairement (comme c'est le cas dans la notation BNF, et c'est pour cela que nous ne l'avons pas retenue):

$$\{ \{ (Ide); (VAb) \} & * \{ \} & * \{ (Ide); (VAb) \}, \{ (Ide); (VAb) \} & * \{ \Cst \} \}$$

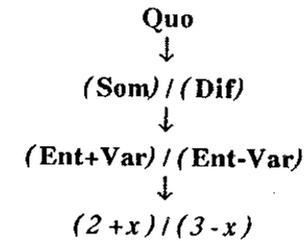
Cette dernière notation est bien plus malaisée à déchiffrer. Le problème est le même que celui de la transcription linéaire des expressions algébriques (sous forme d'ESAL). L'expression:

$$((a+2)/(a-2)^{-((1/2))})/(-((a-1)^{((1/2) \times 3)}))$$

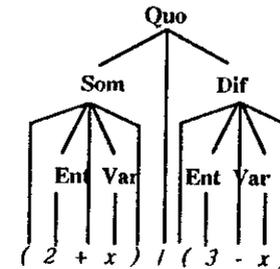
n'est pas ambiguë, mais elle n'est pas vraiment lisible non plus.

IV.1.3. Réécriture

Nous allons maintenant définir la notion de règle de réécriture, qui est une relation dans $\mathcal{PT}(E^*)$ et permet d'engendrer, par applications successives ("dérivations"), les suites dites "terminales" que l'on veut obtenir, par exemple:



A ces dérivations on fait correspondre un "arbre de dérivation" (ou encore "arbre syntagmatique"):



Nous proposons de faire découler la notion de règle de réécriture d'une notion plus générale, que nous appellerons **réécriture**. Ce détour nous permettra de justifier pleinement la présence de paradigmes (i. e. de parties finies de suites finies), définis comme tels et non comme des abréviations de disjonctions de choix, à droite du signe "==" dans les règles de réécritures.

IV.1.3.A. Définition

On considère deux ensembles finis disjoints C et \mathcal{T} , et I une partie de C .

Les éléments de C sont appelés "catégories"; ils seront usuellement notés par des mots de trois lettres en caractères gras.

Ex: "Chi"; "Ent"; "Let" etc.

Les éléments de I sont appelés "catégories initiales".

Les éléments de \mathcal{T} sont appelés "éléments terminaux"; ils seront en italiques.

Ex: "x", "(", "+", etc.

Nous notons donc, pour des questions de lisibilité, " $(C-I)$ " et " \mathcal{T} ", ce qui est noté usuellement \mathcal{V}_n et \mathcal{V}_t . En effet, nous avons plusieurs catégories initiales dans notre grammaire: les écritures d'entiers, les constantes littérales (comme π), les expressions algébriques et les propositions algébriques (comme l'égalité). Nous mettrons alors en indice des sous-ensembles C , I et \mathcal{T} la catégorie initiale correspondante (ex.: \mathcal{T}_{Ent}). Il est net que l'écriture \mathcal{V}_{Ent} serait encore moins lisible.

On appelle **réécriture** toute injection φ :

$$\varphi: \begin{cases} C & \rightarrow \mathcal{PF}((C \cup \mathcal{T})^*) \\ c & \mapsto P = \varphi(c) \end{cases}$$

telle que:

$$\begin{aligned} (\forall c \in C) & \quad \varphi(c) \neq \emptyset \\ (\forall c \in C) (\forall c' \in C) & \quad c' \notin \varphi(c) \end{aligned}$$

Les ensembles $P = \varphi(c)$ sont appelés **paradigmes**⁶.

⁶ Pour l'emploi de ce mot afin de désigner ce qui est, grosso modo, le deuxième membre des règles de réécritures, v. RUWET (1968) : « ... le rapport de choix exclusif qui existe entre les termes compris entre les mêmes accolades correspond au type de rapports dits "paradigmatiques" dans la linguistique postsaussurienne. ». Rappelons que les **réécritures** nous serviront à définir ensuite les **règles de réécriture** comme des couples $(c, \varphi(c))$ formés d'une catégorie c et du paradigme $\varphi(c)$ associé. La réécriture est l'injection qui à toute catégorie associe son paradigme unique.

IV.1.3.B. Commentaire

La définition signifie que:

- A toute catégorie c correspond un paradigme particulier $\varphi(c)$,
- (i) Aucun paradigme n'est vide.
- Aucun paradigme ne contient une suite réduite à une catégorie seule. En particulier, aucun paradigme ne contient la suite vide \emptyset , même si un paradigme peut contenir des ensembles de suites qui contiennent \emptyset ⁷.

La suite vide (\emptyset) nous servira essentiellement à exprimer de façon synthétique le caractère optionnel de la présence de certaines catégories à l'intérieur d'un paradigme. Ainsi, la règle suivante:

$$\left| \text{PrE} := \left\{ \begin{array}{l} \text{Pro} \\ \text{Fra} \\ \text{Pui} \\ \text{Rac} \\ \text{Var} \\ \text{Cst} \\ \text{EPa} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \\ \times \end{array} \right\} \text{EPa} \right.$$

signifie-t-elle que la croix (\times) de multiplication est **facultative** entre **Pro** et **EPa**, entre **Fra** et **EPa**, entre **Pui** et **EPa**, etc...

Chomsky (1971) et Ruwet (1967), notent les suites facultatives entre parenthèses, par exemple:

$$\text{SN} \rightarrow (\text{Dét}) \text{N} (\text{P}')$$

Cette possibilité nous est refusée si nous voulons éviter de risquer de confondre symboles (ici "(" et métasympôles ("(").

⁷ Nous proposons une définition des parties génératives qui convient au système particulier des ESA, et non une définition générale des parties génératives pouvant engendrer des langages d'un type quelconque. Dans ce dernier cas en effet, il faudrait longuement argumenter la pertinence de la définition de la réécriture, par rapport au type du langage susceptible d'être engendré.

La présence d'une suite vide est un puissant facteur de simplification de l'écriture des paradigmes, mais parfois au prix d'une certaine difficulté d'interprétation. Aussi, dans un certain nombre de cas, nous préférons éviter l'usage du ϕ et noter les paradigmes de manière plus redondante mais plus lisible. C'est le cas par exemple de la règle de réécriture des constantes (v. IV.2.3.C.)⁸:

$$Cst := \left\{ \begin{array}{l} \text{Ent} \\ \text{Ent, Ent} \\ \text{Ent, } \overline{\text{Ent}} \\ \text{Ent, Ent } \overline{\text{Ent}} \end{array} \right\}$$

que nous pourrions écrire de manière plus "simple" (en ce sens qu'il y aurait moins de symboles) mais sans doute moins facile à comprendre:

$$Cst := \text{Ent} \left\{ \begin{array}{l} \phi \\ \overline{\text{Ent}} \\ \text{Ent } \left\{ \begin{array}{l} \phi \\ \overline{\text{Ent}} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

IV.1.4. Règle de réécriture (indépendante du contexte)

Soit ϕ une réécriture.

On appelle règle de réécriture tout couple $(c; \phi(c))$ avec $c \in C$.

IV.1.4.A. Notation

$$c := \phi(c)$$

$\phi(c)$ est un paradigme, autrement dit un ensemble fini P de suites finies p_i de symboles terminaux ou non terminaux.

IV.1.4.B. Remarques:

De la définition des réécritures, il s'ensuit qu'on ne peut avoir:

- ni $c := P$ et $c' := P$ (deux catégories distinctes ne peuvent avoir le même paradigme P de réécriture -ce qui ne veut pas dire que leurs paradigmes ne peuvent avoir des éléments communs-)
- ni $c := c'$
- ni $c := c$
- ni $c := \phi$

Cela revient à dire que la grammaire que nous décrivons est du type "non raccourcissant" (Chomsky & Miller 1971).

IV.1.4.C. Exemple de règle de réécriture

Règle de réécriture de la somme (v. IV.4.8.):

$$\text{Som} := \left\{ \begin{array}{l} (\text{Ide}) \\ \dots \\ (\text{VAb}) \\ \text{Ide} \\ \text{Opp} \\ \text{POM} \\ \text{Môn} \\ \text{Prn} \\ \text{Quo} \\ \text{Fra} \\ \text{Pui} \\ \text{Rac} \\ \text{Cst} \\ \text{Cli} \\ \text{Var} \\ \text{VAb} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} (\text{Ide}) \\ \dots \\ (\text{VAb}) \\ \text{Môn} \\ \text{Prn} \\ \text{Quo} \\ \text{Fra} \\ \text{Pui} \\ \text{Rac} \\ \text{Cst} \\ \text{Cli} \\ \text{Var} \\ \text{VAb} \end{array} \right\}$$

IV.1.4.D. Lecture

On dit: "Som peut être réécrit en (Ide) + (Quo) ... ou en Vab + Vab".

⁸ " $\overline{\text{f}}$ " marque le surlignement de la "période" d'une suite décimale périodique illimitée, comme dans "2,1 $\overline{3}$ "

IV.1.5. Partie générative d'une syntaxe

Dans ces conditions, nous dirons que nous sommes en présence de la partie générative \mathcal{G} d'une syntaxe, et nous noterons:

$$\mathcal{G} = (C; \mathcal{T}; \varphi)$$

Nous allons maintenant indiquer comment engendrer à l'aide de parties génératives, les ESAL. Cette présentation sera peu commentée, dans la mesure où les choix que nous avons faits ne posent pas de problème sérieux: nous avons ici une application relativement élémentaire des grammaires formelles. Là où il y a des points réellement délicats, nous renvoyons aux chapitres ultérieurs, dans lesquels ces points sont traités en détail.

La première différence entre les ESAL et les langues naturelles que nous avons ici en tout cinq catégories initiales: les constantes (Cst), les variables (Var), les expressions algébriques (Exa), les propositions algébriques (Pra) et les systèmes (Syn). Les parties génératives correspondantes forment un système hiérarchisé, chaque catégorie initiale d'un niveau faisant partie des catégories non-terminales des niveaux suivants: les constantes et les variables sont des constituants des expressions algébriques, qui forment les membres des propositions algébriques, lesquelles sont les lignes des systèmes⁹.

⁹ En fait, nous avons choisi cette structuration en cinq parties génératives pour la clarté de la présentation, mais on pourrait tout aussi bien considérer qu'il n'y a qu'une seule catégorie initiale (ESAL) et une règle de réécriture:

$$ESAL := \left\{ \begin{array}{l} Cst \\ Var \\ Exa \\ Pra \\ Syn \end{array} \right\}$$

IV.2. Partie Générative des constantes

IV.2.1. Présentation

Les Constantes sans signe (Cst)¹⁰ sont les écritures formées de chiffres, et éventuellement d'une virgule, voire d'une barre située au-dessus d'un certain nombre de chiffres situés le plus à droite de la virgule. Ces écritures désignent des nombres rationnels positifs.

IV.2.2. Exemples

ESAL engendrée:	ESA Correspondante:
02	02
1037	1 037
7,28	7,28...
87,294117┐64	87,294117 64
0,┐9	0, 9

IV.2.3. Génération

IV.2.3.A. catégorie initiale

$$I = \{ Cst \} \quad (\text{Constante sans signe})$$

IV.2.3.B. catégories non-initiales

$$C - I = \{ Chi; Ent \} \quad (\text{Chiffre; écriture décimale d'Entier})$$

IV.2.3.C. Eléments terminaux

$$\mathcal{T} = \{ 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; \overline{} \}$$

¹⁰ Les notations abrégées des catégories font appel à trois lettres en caractères gras. Ces caractères sont en majuscules s'ils sont à l'initiale d'un mot.

(le symbole \ulcorner note le surlignement des chiffres -regroupés en un Ent- qui le suivent)

IV.2.3.D. Règles de réécriture

IV.2.3.D.a. Chiffre

$$\left| \text{Chi} := \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \right\} \right.$$

IV.2.3.D.b. Écriture décimale d'Entier

$$\left| \text{Ent} := \left\{ \begin{array}{l} \text{Chi} \\ \text{Ent Chi} \end{array} \right\} \right.$$

IV.2.3.D.c. Constante

$$\left| \text{Cst} := \left\{ \begin{array}{l} \text{Ent} \\ \text{Ent, Ent} \\ \text{Ent, } \ulcorner \text{Ent} \\ \text{Ent, Ent } \ulcorner \text{Ent} \end{array} \right\} \right.$$

IV.2.4. Remarques

Les écritures -3 ou $+4$ ne sont pas des Cst, car elles sont précédées d'un signe ("-" ou "+"). Nous verrons plus tard qu'elles ressortissent respectivement à la catégorie des "Opposés" (Opp) et à celle des "Identiques" (Ide). C'est pourquoi nous parlons ici de constante sans signe.

Nous n'intégrerons pas à notre étude, dans un premier temps, des écritures du type:

$$87,2941176464,$$

voire:

$$10,273 0..$$

qui sont pourtant attestés dans de nombreux manuels scolaires actuels: Corrieu 3ème [CO3]¹¹ p.38, Clavier CM2 [CLA] p.70.

En toute rigueur, ces expressions prises isolément ne peuvent désigner aucun nombre déterminé. Toutefois, leur ambiguïté est généralement levée par le contexte car elles apparaissent toujours suite à des calculs qui permettent de leur assigner une valeur bien précise. Dans [CO3], l'écriture $10,273 0..$ apparaît comme le "quotient" de la fraction:

$$\frac{32,36}{3,15}$$

et désigne donc, dans ce contexte, un nombre parfaitement déterminé, à savoir le nombre décimal $\frac{3236}{315}$.

De telles écritures semblent pouvoir être interprétées sans problème, du moins dans l'esprit de leurs auteurs, sinon on peut supposer qu'ils ne les emploieraient pas. Toutefois, lorsqu'il faut pour les évaluer faire intervenir le contexte, cela met en jeu des mécanismes bien plus sophistiqués que ceux (indépendants du contexte) qui régissent l'évaluation d'expressions du type: $0, 9$. Aussi les renvoyons-nous à une étude ultérieure.

IV.2.5. Espaces tous les trois chiffres

L'insertion d'espacements pour regrouper les chiffres par "paquets" de trois comme dans:

$$12\ 345\ 678$$

¹¹ l'entrée de référence entre crochets renvoie à la liste des manuels scolaires cités qui se trouve à la fin des références bibliographiques.

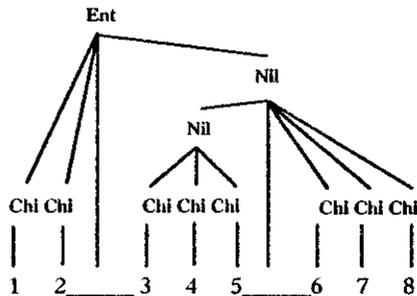
n'est pas traitée ci-dessus. On peut traiter ce problème au niveau des transformations de mise en forme typématique ESAL → ESA. On peut aussi le régler au niveau des ESAL, mais de manière relativement lourde. Il faut alors faire, de manière récursive, des regroupements de 3n chiffres que l'on pourrait appeler des "n-iliers" (par analogie avec le système million-billion-trillion etc.) séparés par des blancs (notés ici "_"):

$$| \quad \text{Nil} := \left\{ \begin{array}{l} \text{Chi Chi Chi} \\ \text{Nil_Chi Chi Chi} \end{array} \right\}$$

puis il reste à ajouter à gauche zéro, un ou deux chiffres:

$$| \quad \text{Ent} := \left\{ \begin{array}{l} \text{Nil} \\ \text{Chi_Nil} \\ \text{Chi Chi_Nil} \end{array} \right\}$$

Exemple: 12 345 678



Il reste encore à régler le cas des regroupements à droite de la virgule (nous ne le traiterons pas ici).

IV.3. Variables et des Constantes Littérales

IV.3.1. Présentation

Par variables (Var) nous entendons toutes les lettres susceptibles d'entrer dans des écritures algébriques, indicées ou non, "primées" ou non et pouvant référer à des nombres réels. Les Constantes Littérales (CLi) désignent des nombres réels particuliers tels que π , ϕ ou e.

IV.3.2. Exemples:

Forme linéaire engendrée:	ESA Correspondante:
x	x
a	a
B	B
u'	u'
$a \downarrow I$	a_I
π	π
ϕ	ϕ^{12}

IV.3.3. Génération

IV.3.3.A. catégorie initiale

$$I = \{ \text{Var} \} \quad \text{Variable}$$

IV.3.3.B. catégorie non-initiale

$$C - I = \{ \text{Gra} \} \quad \text{Graphème}$$

IV.3.3.C. Eléments terminaux et Règles de réécriture

Les problèmes particuliers que posent les éléments terminaux dans le cas des variables sont traités au chapitre suivant (§ V.2.).

¹² lettre grecque "phi"

IV.4. Partie Générative des Expressions Algébriques (ExA)

IV.4.1. Présentation

Les Expressions algébriques sont les écritures construites autour d'un symbole d'opération ("opérateur"), soit:

- les écritures formées à partir d'un opérateur unaire ("arité" 1): celles qui sont précédées d'un signe, et les valeurs absolues
- les écritures issues d'un opérateur binaire (arité 2): sommes, différences, produits, quotients, fractions, puissances, racines¹³. L'ordre de présentation correspond à celui, quand il existe, des priorités entre opérateurs.

IV.4.2. Remarque

Nous verrons au chapitre VI le cas des expressions construites autour des opérateurs n-aires, à savoir les sommes algébriques et les produits au sens large.

IV.4.3. Engendrement (généralités)

IV.4.3.A. catégorie initiale

$$I = \{ \text{ExA} \} \quad \text{Expression Algébrique}$$

IV.4.3.B. catégories non-initiales

$$C - I = \{ \text{Opp; Ide; Som; Dif; Pro; Quo; Fra; Pui; Rac; VAb} \}$$

¹³ par convention nous supposons que le carré et le cube sont des cas particuliers d'exponentiation (ici, par 2 et par 3) et de même que les racines carrées comme $\sqrt{3}$ sont des cas particuliers d'éradication, ici, d'ordre 2: $\sqrt[2]{3}$. On aurait pu faire le choix inverse et considérer les opérations unaires "carré", "cube" et "racine" mais la rédaction des règles de réécriture, pour éviter les ambiguïtés, eût été plus compliquée dans la mesure où dans ce cas "2" et "3" ne peuvent plus faire partie du paradigme des exposants... Le même problème se pose pour l'opérateur unaire "inverse" qu'il faut pouvoir distinguer de la fraction de numérateur "1".

(Opposé; Identique; Somme; Différence; Produit; Quotient; Fraction¹⁴; Puissance; Racine; Valeur Absolue)

IV.4.3.C. Eléments terminaux

$$\mathcal{T} = \{ \dagger; \text{Cst}; \text{CLi}; \text{Var}; (); +; -; \pm; \times; \cdot; /; +; \cdot; \backslash; ^; \sqrt{\quad}; [;]; / \}$$

IV.4.3.D. Préliminaire: une convention de notation des paradigmes

La notation abrégée ci-dessous permettra d'alléger notablement l'écriture des paradigmes, en réunissant tous les symboles catégoriels mis entre parenthèses.

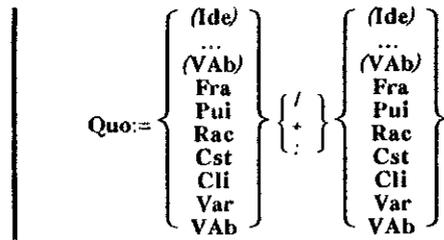
$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{Ide}) \\ (\text{Opp}) \\ (\text{POM}) \\ (\text{Som}) \\ (\text{Dif}) \\ (\text{Pro}) \\ (\text{Quo}) \\ (\text{Fra}) \\ (\text{Pui}) \\ (\text{Rac}) \\ (\text{Cst}) \\ (\text{Cli}) \\ (\text{Var}) \\ (\text{VAb}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (\text{Ide}) \\ (\text{VAb}) \end{array} \right\}$$

La mise entre parenthèses, au sein d'un paradigme, de l'ensemble des symboles catégoriels nous permettra de construire une grammaire plus concise, voire plus élégante. En effet, au sein du paradigme de toute règle de réécritures figureront à la fois l'ensemble des symboles catégoriels mis entre parenthèses, représentés par la liste:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{Ide}) \\ (\text{VAb}) \end{array} \right\}$$

et un certain nombre de symboles sans parenthèses, comme dans la réécriture du quotient:

¹⁴ Les fractions telles que $\frac{a}{b}$ sont engendrées sous forme d'une ESAL "a\b".



Cela permet de noter, de façon simple que, au sein d'un quotient, le dividende ou le diviseur doit être mis entre parenthèses obligatoirement s'il ressortit à certaines catégories, et optionnellement dans d'autres cas. Comme cela, la règle de réécriture des quotients permet d'engendrer:

$(x+2)/3$	$(x+2)13$
$(x \times 2)/3$	$(x \times 2)13$
$x^2/3$	x^213
$(x^2)/3$	$(x^2)13$

mais pas:

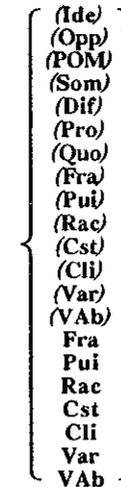
$x+2/3$	$x+213$
---------	---------

qui est acceptable mais n'est pas un quotient.

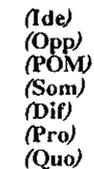
Pour comprendre ce mécanisme de choix des parenthèses, étudions plus en détail le paradigme du dividende. Sous forme abrégée, ce paradigme s'écrit:



Cela correspond au paradigme complet suivant:



Dans ce paradigme, les catégories suivantes apparaissent seulement entre parenthèses:



aussi, pour réécrire le dividende est-on obligé de le mettre entre parenthèses si c'est une de ces catégories qui est choisie. Par contre, toutes les autres catégories apparaissent une fois entre parenthèses et une fois sans parenthèses:

(Fra)
(Pui)
(Rac)
(Cst)
(Cli)
(Var)
(VAb)
Fra
Pui
Rac
Cst
Cli
Var
VAb

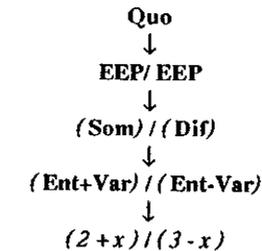
ce qui fait que pour réécrire le dividende avec une de ces catégories, on a le choix de la mettre entre parenthèses ou non. Notons enfin que cette méthode nous permet de rendre compte de certaines écritures dont le parenthésage - redondant en ce qui concerne les priorités - a une fonction didactique¹⁵ [MO5] p. 76:

$$(+ 136,50) + (236,75) = (+ 373,25)$$

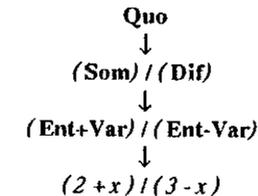
Nous aurions pu obtenir le même résultat en introduisant une catégorie "expression mise entre parenthèses" dont le paradigme eût été:

Expression Entre Parenthèses := {
(Ide)
(Opp)
(POM)
(Som)
(Dif)
(Pro)
(Quo)
(Fra)
(Pui)
(Rac)
(Cst)
(Cli)
(Var)
(VAb)

Toutefois nous avons renoncé à catégoriser les expressions mises entre parenthèses, car cela introduirait une étape supplémentaire dans les réécritures, consistant à réécrire la catégorie "Expression Entre Parenthèses" (EEP) en une expression choisie dans le paradigme, et mise précisément entre parenthèses:



Nous avons donc préféré adopter une description plus concise (en moins d'étapes), au prix d'une plus grande complexité de la grammaire (en alourdissant les paradigmes). La dérivation du quotient est maintenant plus courte d'une étape:



Notons que cette méthode de choix des parenthèses est originale. Habituellement, on fait apparaître les parenthèses comme des auxiliaires obligatoires des symboles d'opérations, destinés à délimiter leurs opérandes lorsque ceux-ci sont complexes. C'est ce que font les logiciens pour définir

¹⁵ fonction d'ailleurs discutable dans le cas envisagé (introduction des nombres négatifs). Rappelons que le but général de ce travail est précisément de nous fournir des outils pour l'étude de telles pratiques.

les expressions bien formées¹⁶, c'est également ce qu'a fait D. Kirshner¹⁷. L'inconvénient d'une telle démarche est de multiplier des parenthèses inutiles, qu'il faut ensuite effacer.

Par exemple, si on définit la catégorie somme (Som) comme suit:

$$\text{Som} := (ExA) + (ExA)$$

la dérivation de $2 + 3$ est alors:

$$\begin{array}{c} \text{Som} \\ \downarrow \\ (ExA) + (ExA) \\ \downarrow \\ (Cst) + (Cst) \\ \downarrow \\ (2) + (3) \\ \downarrow \\ 2 + 3 \end{array}$$

La dernière étape correspond à l'effacement des parenthèses inutiles¹⁸.

¹⁶ en notation dite "infixée", c.à.d. avec des opérateurs situés entre les opérandes. Sous forme "préfixée" les parenthèses sont inutiles - et un bon entraînement est nécessaire pour interpréter les écritures mais il faut ensuite infixer les écritures, ce qui n'est pas plus simple que de déparenthésier des écritures infixées trop parenthésées.

¹⁷ dont la règle de réécriture de base est:

$$Z := \{ZOZ\}$$

où les crochets sont obligatoires.

¹⁸ Dans le formalisme de Kirshner (1987a p. 68) cela donne :

$$Z \rightarrow \{ZOZ\} \rightarrow \{ZAZ\} \rightarrow \{2A3\} \rightarrow 2 + 3$$

avec effacement des crochets inutiles à la dernière étape (les crochets ne sont pas situés au même endroit que dans notre exemple, mais jouent le même rôle).

IV.4.4. Expression Algébrique

IV.4.4.A. Présentation

Les expressions algébriques (ExA) sont des:

Catégorie	Nom	Exemples
Ide	Identique	+4
Opp	Opposé	-b
POM	Plus Ou Moins	$\pm \sqrt{5}$
Som	Somme	a+b
Dif	Différence	x-2
Pro	Produit	2uv
Quo	Quotient	1/2
Fra	Fraction	$\frac{1}{x}$
Pui	Puissance	a ⁻²
Rac	Racine	$\sqrt{b^2-4ac}$
VAb	Valeur Absolue	-x

IV.4.4.B. Génération

$$ExA := \left\{ \begin{array}{l} \text{Ide} \\ \text{Opp} \\ \text{POM} \\ \text{Som} \\ \text{Dif} \\ \text{Pro} \\ \text{Quo} \\ \text{Fra} \\ \text{Pui} \\ \text{Rac} \\ \text{VAb} \end{array} \right\}$$

IV.4.5. Identique

IV.4.5.A. Présentation

Les Expressions identiques (Ide) sont les expressions bien formées précédées d'un signe (+) qui porte sur l'écriture toute entière.

IV.4.5.B. Remarques

La "portée" du signe "+" est celle qui est définie usuellement par les règles de priorité: aussi "+a+2" n'est-elle pas une Expression identique, puisque le signe "+" initial ne porte pas sur "+ 2"; c'est une **Somme**. La notion "portée" des opérateurs est définie sans ambiguïté dans les règles de grammaire et marquée par les parenthèses ou les priorités.

Avec les expressions identiques, nous intégrons à notre domaine des écritures symboliques redondantes telles que: "+ 3", ou encore "+ 0". Elles ne diffèrent pas en cela des écritures "trop" parenthésées vues plus haut, et se justifient de la même façon, comme étapes intermédiaires de calcul, comme issues d'une volonté d'insister sur tel ou tel aspect: écrire "+ 3" marque davantage le caractère positif du nombre "3",

$$x = + \frac{b}{2a}$$

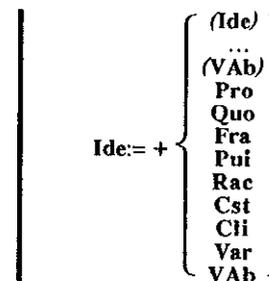
s'oppose à:

$$x = - \frac{b}{2a}$$

IV.4.5.C. Exemples

ESAL engendrée:	ESA Correspondante:
+a	+a
+1/2	+ $\frac{1}{2}$

IV.4.5.D. Génération



IV.4.6. Opposé

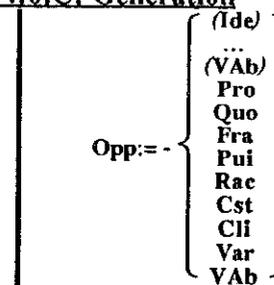
IV.4.6.A. Présentation

Les Opposés (Opp) sont les expressions bien formées précédées d'un signe "-" qui porte sur l'écriture toute entière.

IV.4.6.B. Exemples

ESAL:	ESA:
-(a+2)	-(a+2)
-2ab	-2ab
-3x^2(x+1)	-3x^2(x+1)
-3√4	$-\frac{3}{4}$
-3+4	-3+4

IV.4.6.C. Génération



IV.4.7. Expression en Plus Ou Moins

IV.4.7.A. Présentation

Une Expression en "Plus Ou Moins" (POM) est une expression bien formée précédée d'un signe¹⁹± qui porte sur toute l'expression.

IV.4.7.B. Exemples

±3	±3
±√(b²-4ac)	±√b²-4ac

IV.4.7.C. Remarques

Les écritures du type ± √3 ne désignent évidemment aucun nombre, mais font parties d'expressions composées qui, elles, désignent bien quelque chose. Par exemple l'égalité:

$$x = -2 ± √3$$

équivalent par définition à la disjonction d'égalités:

$$x = -2 - √3 \text{ ou } x = -2 + √3$$

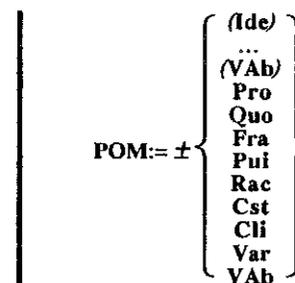
Nous retrouvons ici le même problème que pour les expressions du type 0,33... qui ne désignent rien isolément mais prennent du sens au sein d'une expression qui les contient. Sans vouloir à tout prix établir des comparaisons forcées entre les langues naturelles et les écritures symboliques, nous pouvons noter qu'en français, le syntagme *cinq ou six* ne désigne pas un nombre défini, mais prend son sens au sein d'une phrase telle que:

La tigresse produit, comme la lionne, cinq ou six petits.²⁰

¹⁹ apparu pour la première fois chez Oughtred en 1631 (Cajori 1928)

²⁰ Buffon.

IV.4.7.D. Génération



IV.4.8. Somme

IV.4.8.A. Présentation

Les sommes (Som) sont les Exa construites autour de l'opérateur binaire²¹ "+".

IV.4.8.B. Remarque

Nous considérons arbitrairement que

$$-1 + x$$

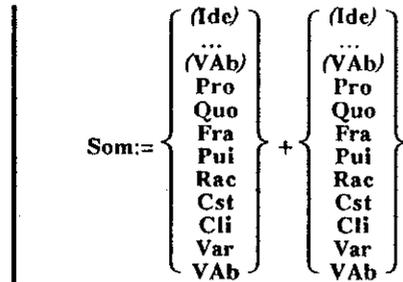
n'est pas une somme (on pourrait également considérer que c'est une différence) et nous rangeons cette ExA dans la catégorie des Sommes Algébriques de deux termes (SA₂). Nos critères sont avant tout formels: pour nous et conventionnellement, dans une somme il n'y a qu'un seul signe "+" (s'il y en a d'autres) ils sont entre parenthèses comme dans (+3) + (-4) qui est une somme). On pouvait faire un autre choix sans problème: le choix est ici contingent.

²¹ apparu à la fin du XVème s. (Cajori 1928)

IV.4.8.C. Exemples

Forme linéaire engendrée:	ESA Correspondante:
$a+b$	$a+b$
$1+(Iv)^n$	$1+\left(\frac{I}{n}\right)^n$

IV.4.8.D. Génération



IV.4.9. Différence

IV.4.9.A. Présentation

Les Différences (Dif) sont les Exa construites autour de l'opérateur binaire "-".

IV.4.9.B. Remarque

De même que pour la somme nous considérons arbitrairement que

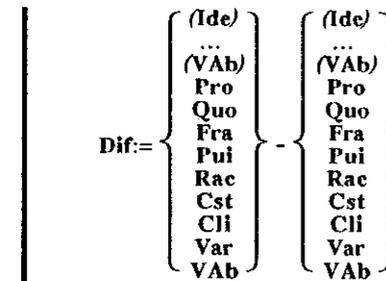
$$-3-4$$

n'est pas une différence ($ni + 3 - 4$).

IV.4.9.C. Exemples:

Forme linéaire engendrée:	ESA Correspondante:
$a-1$	$a-1$
b^2-4ac	b^2-4ac

IV.4.9.D. Génération



IV.4.10. Produit

IV.4.10.A. Présentation

Les Produits (Pro) sont les Exa construites autour de l'opérateur n-aire "x".

IV.4.10.B. Exemples:

3×4	3×4
$a \times 2$	$a \times 2$
$2 \times a$	$2 \times a$
$2 \times \sqrt{3}$	$2 \times \sqrt{3}$
$\sqrt{3} \times 2$	$\sqrt{3} \times 2$

IV.4.10.C. Remarques

Nous considérons arbitrairement les écritures du type:

$$-2 \times x$$

comme des opposés et non des produits, afin de respecter la contrainte de partition des écritures en catégories distinctes. Le choix alternatif eût été possible, mais au prix d'une plus grande lourdeur pour l'expression de la règle de réécriture qui engendre les sommes.

IV.4.10.D. Génération

En raison des difficultés spécifiques ardues posées par la possibilité d'exprimer le produit par juxtaposition, cette catégorie sera étudiée en détail au chapitre VII.

IV.4.11. Quotient

IV.4.11.A. Présentation

Un quotient est une Exa écrit en ligne (contrairement à la fraction) autour de l'opérateur binaire “/”²², “÷” ou “:”²³.

IV.4.11.B. Exemples:

3/2	3/2
a:b	a:b
3+4	3+4
2/(10x+4)	2/(10x+4)

IV.4.11.C. Remarques

La règle de réécriture devra ne pas engendrer les expressions suivantes, qui sont ambiguës:

2/a/x	2/a/x
2x/a	2x/a

Pour cela, il faudra ne pas faire apparaître **Pro ni Quo** (sans parenthèses) dans les paradigmes du dividende et du diviseur. Par contre, dans le corpus que nous avons tiré de la *Petite Encyclopédie des Mathématiques* [PEM] on a priorité de la barre de fraction sur le “/”.

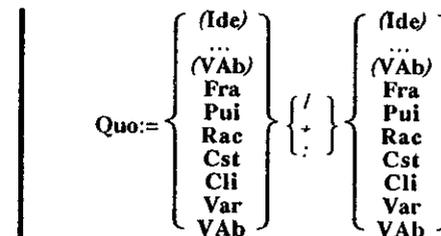
22 intitulé en anglais (d'après le latin) “solidus” (Cajori ibid.)

23 Signalons à la suite de H. Freudenthal [1980, citant Cajori (ibid.)] que la notation “:” nous vient de Leibnitz, et que la notation “/” nous vient de De Morgan.

$1\setminus 2+1\setminus 3$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
-----------------------------	-----------------------------

On fera pour cela apparaître **Fra** (sans parenthèses) dans les paradigmes du dividende et du diviseur.

IV.4.11.D. Génération



IV.4.12. Fraction

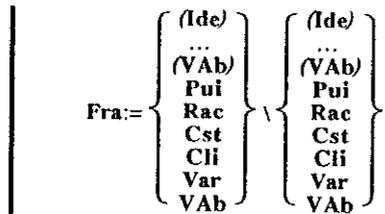
IV.4.12.A. Présentation

Une fraction est une ESA formée d'un couple d'expressions disposées verticalement et séparées par un trait horizontal: nous n'imposons aucune restriction sur la catégorie du numérateur ou du dénominateur. L'ESAL correspondante de la catégorie **Fra** est formée autour de l'opérateur binaire “\” utilisé pour représenter de manière linéaire la barre de fraction.

IV.4.12.B. Exemples:

$a\setminus b$	$\frac{a}{b}$
$(1\setminus 2)\setminus 3$	$\frac{1}{2} \setminus 3$
$0\setminus 0$	$\frac{0}{0}$
$2\setminus(10x+4)$	$\frac{2}{10x+4}$

IV.4.12.C. Génération



IV.4.13. Remarque sur le rôle des parenthèses.

La barre de fraction indique la portée de l'opérateur fraction, ce qui fait qu'il n'est en général pas nécessaire de mettre entre parenthèses le numérateur ou le dénominateur. Le même phénomène se produit pour la barre horizontale du symbole de racine²⁴. Les ESA étant par définition en deux dimensions, il fallait indiquer d'une manière ou d'une autre la portée de l'opérateur "\". Initialement nous avons prévu de mettre entre crochets le numérateur et le dénominateur (ce qui donnait par exemple [2]\[3], le rôle de ces crochets étant de d'indiquer la portée de "\" lors de la transformation typématique en fraction à deux dimensions. Toutefois la description en question n'était guère concise, puis qu'elle ajoutait des crochets destinés à disparaître lors du passage ESAL → ESA.

Nous avons donc appliqué le "rasoir d'Occam" aux crochets et décidé que la portée serait simplement indiquée par les conventions de priorité en vigueur pour les quotients. Ainsi l'ESAL:

$$2 \setminus 3 + 4$$

24 Cajori (op. cit.) signale le rôle historique de la barre horizontale (en anglais "vinculum") comme délimitateur de portée, dont l'usage a précédé de deux siècle celui des parenthèses (XVI^e au lieu de XVIII^e), et dont il ne subsiste aujourd'hui (pour des raisons de commodité typographique qui ont vu progressivement tomber en désuétude les ESA en deux dimensions, plus difficiles à composer pour les imprimeurs) que les barres de fraction et de racine. Avec les éditeurs de formules mathématiques, on peut s'attendre à un retournement de cette tendance.

se transforme-t-elle en:

$$\frac{2}{3} + 4$$

et:

$$2 \setminus (3 + 4)$$

en:

$$\frac{2}{3 + 4}$$

En ce qui concerne le produit nous avons décidé arbitrairement que la fraction serait prioritaire sur la multiplication, ce qui fait que l'ESAL:

$$2 \setminus 3 \times 4$$

se transforme en:

$$\frac{2}{3} \times 4$$

et:

$$2 \setminus (3 \times 4)$$

en:

$$\frac{2}{3 \times 4}$$

Ceci est intégré à la grammaire par le fait que le paradigme des produits contient la catégorie **Fra** tandis que la catégorie **Pr_n** n'apparaît qu'entre parenthèses dans le paradigme des fractions.

IV.4.14. Puissance

IV.4.14.A. Présentation

Les Puissances (Pui) sont les Exa construites autour de l'opérateur binaire "[^]".

IV.4.14.B. Exemples:

x^2	x^2
$10^{(10^{10})}$	$10^{10^{10}}$
$(ab)^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n$
$0^{(-2)}$	0^{-2}

IV.4.14.C. Génération

En raison des difficultés spécifiques posée par la détermination des exposants, cette catégorie sera étudiée en détail au chapitre V.

IV.4.14.D. Parenthèses et portée

En ce qui concerne la portée de l'exponentiation (indiquée par les caractéristiques typématiques de décalage verticale et de diminution relative de corps) nous avons pris les mêmes conventions que pour les fractions et utilisé les règles de priorité et les parenthèses pour les exprimer. Ainsi, l'ESAL:

$$x^2y$$

correspond-elle à l'ESA:

$$x^2y.$$

IV.4.15. Racine

IV.4.15.A. Présentation

Les Racines (Rac) sont les Exa construites autour de l'opérateur binaire "[√]".

IV.4.15.B. Exemples:

Forme linéaire engendrée:	ESA Correspondante:
$\sqrt{(b^2-4ac)}$	$\sqrt{b^2-4ac}$
$[ab]^{\sqrt{n}}$	$\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$
$[n]\sqrt{(ab)}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
$[2]\sqrt{(-4)}$	$\sqrt{-4}$

IV.4.15.C. Génération

De même que les puissances, cette catégorie sera étudiée en détail au prochain chapitre (V).

IV.4.15.D. Parenthèses et Portée

Mêmes remarques que pour les fractions et les puissances: $\sqrt{3x}$ correspond à $\sqrt{3} x$ tandis que $\sqrt{(3x)}$ correspond à $\sqrt{3x}$. Par contre, on verra que l'ordre de la racine doit absolument être mis entre caractères spéciaux (crochets) faute de quoi on ne pourrait distinguer $2\sqrt{3}$ et $\sqrt[2]{3}$.

Précisons que la barre horizontale comme marqueur de portée de la racine a été systématisée par Descartes en 1637, alors qu'il utilisait auparavant des points (cf. chap VII) pour ce faire:

25 "extraction de racine n-ième"

" $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$." est utilisé avant cette date pour noter " $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ " (Cajori, op. cit.).

IV.4.16. Valeur Absolue

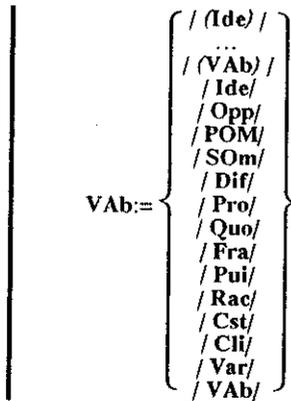
IV.4.16.A. Présentation

La valeur absolue est un opérateur unaire, de niveau maximum de priorité (de ce point de vue, elle fonctionne comme une paire de parenthèses).

IV.4.16.B. Exemples:

$ -4 $	$ -4 $
$ x^2 $	$ x^2 $

IV.4.16.C. Génération

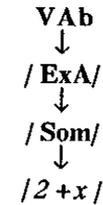


IV.4.16.D. Remarque

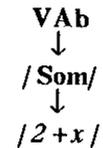
La grammaire serait plus simple si on écrivait:

$$VAb := / ExA /$$

Toutefois la dérivation d'une valeur absolue prendrait dans ce cas une étape de plus, par exemple:



au lieu de:



La grammaire serait donc moins concise.

IV.5. Partie Générative des Propositions Algébriques

IV.5.1. Présentation

Les Propositions algébriques sont formés d'expressions algébriques séparés par des "logogrammes"²⁶ de relation: "=", "<", "≥" etc.

IV.5.2. Génération

IV.5.2.A. catégorie initiale

$$I = PrA \quad \text{Proposition algébrique}$$

²⁶ les logogrammes sont l'équivalent des graphèmes en ce qui concerne les symboles (Anis 1988)

IV.5.2.B. catégories non-initiales

$C-I = \{ \text{Ega; InC; EnC; InD; EnD; NEg} \}$ (Égalité; Inégalité Croissante; Encadrement Croissant; Inégalité Décroissante; Encadrement Décroissant; Non-Égalité)

IV.5.2.C. Eléments terminaux

$\tau = \{ \phi; \text{Cst; CLi; Var; ExA; =; <; \leq; >; \geq; \neq} \}$

IV.5.3. Proposition algébrique

$$\text{PrA} := \begin{Bmatrix} \text{Ega} \\ \text{InC} \\ \text{EnC} \\ \text{InD} \\ \text{EnD} \\ \text{NEg} \end{Bmatrix}$$

IV.5.4. Égalité

IV.5.4.A. Exemples:

$3x^2-2x+1=0$	$3x^2-2x+1=0$
$2+1=4$	$2+1=4$

IV.5.4.B. Remarque

Une égalité peut être fausse, comme dans l'exemple, elle reste une égalité.

IV.5.4.C. Génération

$$\text{Ega} := \begin{Bmatrix} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{Bmatrix}$$

IV.5.5. Inégalité croissante

IV.5.5.A. Exemple

$2x+3 \leq 1-3x$	$2x+3 \leq 1-3x$
------------------	------------------

IV.5.5.B. Génération

$$\text{InC} := \begin{Bmatrix} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{Bmatrix} \{ < \} \begin{Bmatrix} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{Bmatrix}$$

IV.5.6. Encadrement croissant

IV.5.6.A. Exemple

$1 < 2 < 3$	$1 < 2 < 3$
-------------	-------------

IV.5.6.B. Génération

$$\text{EnC} := \begin{Bmatrix} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{Bmatrix} \{ < \} \begin{Bmatrix} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{Bmatrix} \{ < \} \begin{Bmatrix} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{Bmatrix}$$

IV.5.7. Inégalité décroissante

IV.5.7.A. Exemples:

$1x \geq 1$	$\frac{1}{x} \geq 1$
-------------	----------------------

IV.5.7.B. Génération

$$\text{InD} := \begin{Bmatrix} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{Bmatrix} \{ > \} \begin{Bmatrix} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{Bmatrix}$$

IV.5.8. Encadrement décroissant

IV.5.8.A. Exemples:

$1 \setminus 3 > 1 \setminus 2 > 1 \setminus 1$	$\frac{1}{3} > \frac{1}{2} > \frac{1}{1}$
---	---

IV.5.8.B. Génération

$$\left| \text{EnD} := \begin{Bmatrix} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{Bmatrix} \{ > \} \begin{Bmatrix} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{Bmatrix} \{ \geq \} \begin{Bmatrix} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{Bmatrix} \right.$$

IV.5.9. Non-Egalité

IV.5.9.A. Exemples

$x \neq 2$	$x \neq 2$
$2+1=3 \neq 4$	$2+1=3 \neq 4$

mais pas: $5 + 1 = 6 \neq 5 \neq 3 + 3$

IV.5.9.B. Remarque

Il n'y a pas de "Chaîne de Non-Egalités" dans la mesure où la relation de non-égalité n'est pas transitive.

IV.5.9.C. Génération

$$\left| \text{NEg} := \begin{Bmatrix} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{Bmatrix} \neq \begin{Bmatrix} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{Bmatrix} \right.$$

IV.5.10. Autres PrA

Nous n'étudierons pas dans ce chapitre les systèmes de PrA car ce sont des opérateurs n-aires qui relèvent donc d'un mécanisme particulier de génération, comme les sommes algébriques et les produits en général. Ces problèmes particuliers seront l'objet du § VI.2.2.

V. VARIABLES, PUISSANCES, RACINES.

V.1. Présentation du problème

Nous avons précisé en introduction notre objet d'étude, les ESA, dans ses grandes lignes. Or des problèmes fins de délimitation du domaine des ESA se sont posés lors de l'élaboration de leur syntaxe. Nous nous sommes en effet trouvé confronté à un certain nombre d'expressions, en particulier des puissances (p. ex. e^x) et des racines (p. ex. \sqrt{x}), qu'il était aussi difficile d'accepter que de refuser. L'objet du présent chapitre est de montrer ces problèmes et comment nous les avons résolus. Nous présenterons d'abord les difficultés dont la résolution influe sur le choix des graphèmes, puis celles qui influencent la génération des puissances et des racines (de toutes façons les difficultés sont liées).

V.2. Graphèmes

Nous n'avons pas abordé au chapitre précédent la question de savoir quelle était précisément la liste des graphèmes qu'il fallait choisir pour constituer les variables présentes dans les ESAL. Les graphèmes x , n , a ou b figurent dans cette liste (\mathcal{T}_{Var}), cela ne pose aucun problème. Mais qu'en est-il de graphèmes tels que e , i , ϕ ou π ?

Pour résoudre cette question nous allons faire un détour et partir du problème suivant: peut-on, en pratique, éviter que la grammaire ne produise des expressions qui sortent du domaine de l'algèbre pour faire partie de celui des fonctions (que nous appellerons "expressions analytiques", telles que $\sin x$ ou $f(x)$), et si oui, comment?

Certaines expressions analytiques, comme:

$$\int_a^b f(x) dx$$

comportent des symboles spécifiques, ou plus exactement des **logogrammes**¹ (ici \int), c'est-à-dire des graphèmes particuliers qui sont les classes abstraites des réalisations matérielles des symboles correspondants (ici \int)². Le problème de ne pas les engendrer est trivial: il suffit de ne pas faire figurer \int dans \mathcal{T}_{Var} .

Par contre, on ne peut pas résoudre aussi simplement le problème posé par des expressions du type e^x . Cette expression, en effet, n'est attestée dans aucun corpus strictement algébrique. De fait, l'usage associe cette expression à la fonction exponentielle réelle, qui n'entre pas dans le cadre algébrique. Peut-on donc exclure e^x des ESA ou, ce qui revient au même, éviter que la grammaire ne l'engendre?

V.2.1. Exclure certains graphèmes ?

La première solution qui vient à l'esprit consiste à exclure le graphème 'e' du paradigme des Variables. On pourrait souhaiter également en exclure d'autres graphèmes tels que e , i , ϕ ou π qui désignent des nombres particuliers (resp. e , i , $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et π) dont la définition, à l'exception de ϕ , sort du domaine algébrique.

Exclure ces graphèmes se heurte toutefois à un obstacle. Bien que les nombres correspondants soient définis hors de l'algèbre, ces graphèmes sont susceptibles (sauf i) d'un **traitement** strictement algébrique³. Cela ne les distingue donc pas des autres graphèmes plus "usuels", tels que x , a ou n ,

1 Anis (1988)

2 en cela les logogrammes, qui correspondent aux symboles comme \int , s'opposent aux *alphagrammes*, qui correspondent aux graphes alphabétiques tels que \int ou \int .

3 j'entends "algébrique" au sens de l'algèbre élémentaire des nombres réels.

qui peuvent également représenter dans un calcul algébrique des quantités issues de la géométrie (mesure d'angle ou d'aire), de l'analyse ou d'ailleurs. De fait, ces graphèmes sont attestés dans des corpus d'algèbre, où ils désignent suivant le contexte:

- des nombres particuliers extra-algébriques (e , π , etc.),
- des quantités extra-algébriques quelconques (2ϕ : double de la mesure ϕ d'un angle),
- des nombres particuliers définis en algèbre ($\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$),
- ou encore des nombres quelconques, comme dans [MO5] p. 86:

$$s = a - b - c + d + e - f$$

Il n'est donc pas possible d'exclure purement et simplement ces graphèmes du paradigme des Variables. Si l'on souhaite éliminer quand même les expressions composées telle que e^x , il faudra envisager d'autres solutions.

V.2.2. Variables et Constantes Littérales:

Pour construire notre grammaire il est souhaitable de rendre compte de la distinction que nous venons de voir entre la possibilité, pour certains graphèmes, de désigner soit un nombre réel donné soit un nombre réel quelconque suivant le contexte. Nous allons donc introduire deux catégories initiales, les Constantes Littérales (CLi) d'une part, et les Variables (Var) de l'autre.

CLi est une catégorie initiale qui se réécrit en e , ϕ , π ou tout autre graphème représentant un nombre réel défini par ailleurs⁴ (p. ex. C: constante d'Euler). Pour notre grammaire nous nous contenterons des trois premiers.

4 on trouve un catalogue exhaustif de ces nombres "remarquables" dans Le Lionnais & Brette (1983)

IV.5.8. Encadrement décroissant

IV.5.8.A. Exemples:

$1 \setminus 3 > 1 \setminus 2 > 1 \setminus 1$	$\frac{1}{3} > \frac{1}{2} > \frac{1}{1}$
---	---

IV.5.8.B. Génération

$$\left| \text{EnD} := \begin{Bmatrix} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{Bmatrix} \{ > \} \begin{Bmatrix} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{Bmatrix} \{ > \} \begin{Bmatrix} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{Bmatrix} \right|$$

IV.5.9. Non-Egalité

IV.5.9.A. Exemples

$x \neq 2$	$x \neq 2$
$2+1=3 \neq 4$	$2+1=3 \neq 4$

mais pas: $5 + 1 = 6 \neq 5 \neq 3 + 3$

IV.5.9.B. Remarque

Il n'y a pas de "Chaîne de Non-Egalités" dans la mesure où la relation de non-égalité n'est pas transitive.

IV.5.9.C. Génération

$$\left| \text{NEg} := \begin{Bmatrix} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{Bmatrix} \neq \begin{Bmatrix} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{Bmatrix} \right|$$

IV.5.10. Autres PrA

Nous n'étudierons pas dans ce chapitre les systèmes de PrA car ce sont des opérateurs n-aires qui relèvent donc d'un mécanisme particulier de génération, comme les sommes algébriques et les produits en général. Ces problèmes particuliers seront l'objet du § VI.2.2.

V. VARIABLES, PUISSANCES, RACINES.

V.1. Présentation du problème

Nous avons précisé en introduction notre objet d'étude, les ESA, dans ses grandes lignes. Or des problèmes fins de délimitation du domaine des ESA se sont posés lors de l'élaboration de leur syntaxe. Nous nous sommes en effet trouvé confronté à un certain nombre d'expressions, en particulier des puissances (p. ex. e^x) et des racines (p. ex. \sqrt{x}), qu'il était aussi difficile d'accepter que de refuser. L'objet du présent chapitre est de montrer ces problèmes et comment nous les avons résolus. Nous présenterons d'abord les difficultés dont la résolution influe sur le choix des graphèmes, puis celles qui influencent la génération des puissances et des racines (de toutes façons les difficultés sont liées).

V.2. Graphèmes

Nous n'avons pas abordé au chapitre précédent la question de savoir quelle était précisément la liste des graphèmes qu'il fallait choisir pour constituer les variables présentes dans les ESAL. Les graphèmes x , n , a ou b figurent dans cette liste (\mathcal{T}_{Var}), cela ne pose aucun problème. Mais qu'en est-il de graphèmes tels que e , i , ϕ ou π ?

Pour résoudre cette question nous allons faire un détour et partir du problème suivant: peut-on, en pratique, éviter que la grammaire ne produise des expressions qui sortent du domaine de l'algèbre pour faire partie de celui des fonctions (que nous appellerons "expressions analytiques", telles que $\sin x$ ou $f(x)$), et si oui, comment?

Certaines expressions analytiques, comme:

$$\int_a^b f(x) dx$$

comportent des symboles spécifiques, ou plus exactement des **logogrammes**¹ (ici $["f"]$), c'est-à-dire des graphèmes particuliers qui sont les classes abstraites des réalisations matérielles des symboles correspondants (ici $["f"]$)². Le problème de ne pas les engendrer est trivial: il suffit de ne pas faire figurer $["f"]$ dans \mathcal{T}_{Var} .

Par contre, on ne peut pas résoudre aussi simplement le problème posé par des expressions du type e^x . Cette expression, en effet, n'est attestée dans aucun corpus strictement algébrique. De fait, l'usage associe cette expression à la fonction exponentielle réelle, qui n'entre pas dans le cadre algébrique. Peut-on donc exclure e^x des ESA ou, ce qui revient au même, éviter que la grammaire ne l'engendre?

V.2.1. Exclure certains graphèmes ?

La première solution qui vient à l'esprit consiste à exclure le graphème 'e' du paradigme des Variables. On pourrait souhaiter également en exclure d'autres graphèmes tels que e , i , ϕ ou π qui désignent des nombres particuliers (resp. e , i , $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et π) dont la définition, à l'exception de ϕ , sort du domaine algébrique.

Exclure ces graphèmes se heurte toutefois à un obstacle. Bien que les nombres correspondants soient définis hors de l'algèbre, ces graphèmes sont susceptibles (sauf i) d'un traitement strictement algébrique³. Cela ne les distingue donc pas des autres graphèmes plus "usuels", tels que x , a ou n ,

1 Anis (1988)

2 en cela les logogrammes, qui correspondent aux symboles comme $["+"]$, s'opposent aux *alphagrammes*, qui correspondent aux graphes alphabétiques tels que $["a"]$ ou $["x"]$.

3 j'entends "algébrique" au sens de l'algèbre élémentaire des nombres réels.

qui peuvent également représenter dans un calcul algébrique des quantités issues de la géométrie (mesure d'angle ou d'aire), de l'analyse ou d'ailleurs. De fait, ces graphèmes sont attestés dans des corpus d'algèbre, où ils désignent suivant le contexte:

- des nombres particuliers extra-algébriques (e , π , etc.),
- des quantités extra-algébriques quelconques (2ϕ : double de la mesure ϕ d'un angle),
- des nombres particuliers définis en algèbre ($\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$),
- ou encore des nombres quelconques, comme dans [MO5] p. 86:

$$s = a - b - c + d + e - f$$

Il n'est donc pas possible d'exclure purement et simplement ces graphèmes du paradigme des Variables. Si l'on souhaite éliminer quand même les expressions composées telle que e^x , il faudra envisager d'autres solutions.

V.2.2. Variables et Constantes Littérales:

Pour construire notre grammaire il est souhaitable de rendre compte de la distinction que nous venons de voir entre la possibilité, pour certains graphèmes, de désigner soit un nombre réel donné soit un nombre réel quelconque suivant le contexte. Nous allons donc introduire deux catégories initiales, les Constantes Littérales (CLi) d'une part, et les Variables (Var) de l'autre.

CLi est une catégorie initiale qui se réécrit en e , ϕ , π ou tout autre graphème représentant un nombre réel défini par ailleurs⁴ (p. ex. C: constante d'Euler). Pour notre grammaire nous nous contenterons des trois premiers.

4 on trouve un catalogue exhaustif de ces nombres "remarquables" dans Le Lionnais & Brette (1983)

Les variables, ressortissant à la catégorie **Var**, désignent des nombres réels indéterminés⁵. Ces variables sont formées de graphèmes, éventuellement indicés ou primés.

- Les graphèmes sont pris dans les alphabets, majuscule et minuscule, latin et grec⁶.
- Les indices sont des écritures décimales d'Entiers (**Ent**). Ce ne sont pas des nombres à virgule (ce n'est pas attesté) ni surtout des variables. Nous considérons a priori qu'une expression telle que u_n ne relève pas de l'algèbre mais de l'analyse (où elle désigne une suite).

V.2.3. Partie Génératrice des Constantes Littérales

V.2.3.A. catégorie initiale

$$I_{cli} = \{ CLi \}$$

V.2.3.B. Eléments terminaux

$$\mathcal{T}_{cli} = \{ e \phi \pi \}$$

V.2.3.C. Règle de réécriture

$$CLi := \begin{cases} e \\ \phi \\ \pi \end{cases}$$

V.2.4. Partie Génératrice des variables

V.2.4.A. catégorie initiale

$$I_{var} = \{ Var \} \quad \text{Variable}$$

V.2.4.B. catégorie non-initiale

$$C_{var} - I_{var} = \{ Gra \} \quad \text{Graphème}$$

V.2.4.C. Eléments terminaux

$$\mathcal{T}_{var} = \{ '\} \cup \{ \downarrow \} \cup \{ abcdefghijklmnopqrstuvwxyz \} \cup \\ \{ ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ \} \cup \\ \{ \alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu\nu\xi\omicron\rho\sigma\tau\upsilon\phi\chi\psi\omega \} \cup \{ \Gamma\Delta\Theta\Lambda\Xi\Pi\Sigma\Phi\Psi\Omega \}$$

V.2.4.D. Règles de réécriture

V.2.4.D.a. Graphème

Nous noterons exceptionnellement le paradigme en ligne pour gagner de la place.

$$Gra := \begin{cases} abcdefghijklmnopqrstuvwxyz \cup \\ ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ \cup \\ \alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu\nu\xi\omicron\rho\sigma\tau\upsilon\phi\chi\psi\omega \cup \\ \Gamma\Delta\Theta\Lambda\Xi\Pi\Sigma\Phi\Psi\Omega \end{cases}$$

V.2.4.D.b. Variable

$$Var := \begin{cases} \text{Let} \\ \text{Let}' \\ \text{Let}'' \\ \text{Let} \downarrow \text{Ent} \\ \text{Let}' \downarrow \text{Ent} \\ \text{Let}'' \downarrow \text{Ent} \end{cases}$$

Le fait de distinguer Constantes Littérales et Variables nécessite de reprendre l'ensemble de la grammaire, et de rajouter, à chaque paradigme où figurait la catégorie **Var**, une nouvelle catégorie **CLi**. Pour ne pas alourdir inutilement l'exposition nous effectuerons cette modification dans la récapitulation finale de ce chapitre.

Revenons une dernière fois sur les **CLi** et les **Var**: du fait que certains graphèmes se trouvent à la fois dans les paradigmes de **CLi** et de **Var**, la grammaire est ambiguë, en ce sens qu'il n'est pas possible de

⁵ nous verrons aux § X.2.1. et X.2.2.C.c. quelle signification précise attribuer à cette notion de "nombre indéterminé", en termes de "dénotation".

⁶ les emprunt à d'autres alphabets, tels que l'aleph hébreu ou le cha "m" cyrillique (dit "peigne de Dirac") sont rares en mathématiques, et non attestés en algèbre élémentaire.

déterminer, hors contexte, si e est une CLI ou une Var ou, ce qui revient au même, si e désigne précisément le nombre e ou seulement un nombre réel indéterminé. Cela dit, nous ne connaissons pas de cas où le contexte ne lève pas l'ambiguïté.

V.3. Puissances

V.3.1. Les exposants littéraux

Reprenons notre problème des puissances du type: e^x . Puisqu'on ne peut exclure e de \mathcal{T}_{var} , on pourrait essayer de contraindre la grammaire, au niveau des règles de réécriture, à ne pouvoir engendrer des puissances du type: e^x . Or nous allons voir maintenant qu'à partir du moment où l'on accepte, d'une part⁷:

$$a^n \times a^p = a^{n+p}$$

d'autre part⁸

$$s = a - b - c + d + e - f$$

et enfin⁹

$$x > (-7)$$

il devient extrêmement difficile d'interdire à la grammaire qui a engendré les expressions qui précèdent de produire:

$$e^x$$

⁷ [MO5] p. 112

⁸ [MO5] p. 86

⁹ [MO5] p. 94

V.3.1.A. Des contraintes sur les réécritures ?

Comment engendrer en effet e^n et pas e^x ? On aimerait pouvoir imposer des contraintes sur la règle de réécriture des puissances, de telle manière que celle-ci s'exprime sous la forme suivante¹⁰:

$$\text{Pui} := \text{Base} \wedge \text{Exposant}$$

à condition que **Exposant** ne se récrive pas en une expression qui contienne une ou des occurrences du graphème x

Une telle formulation n'a pas de sens, dans la mesure où une catégorie non-terminale telle que "Exposant" ne contient rien du tout; tout au plus, lors des réécritures ultérieures, pourra-t-elle se récrire en une expression qui contiendra des occurrences de x . Mais les règles de réécriture, telles que les définit la théorie des langages formels, ne sont pas "pilotees par l'aval" de cette manière: il n'y a pas de mécanisme qui permette de faire dépendre une réécriture des réécritures ultérieures.

V.3.1.B. Une sous-catégorisation ?

Il y a une solution, qui consiste à "sous-catégoriser" les variables. Pour cela, il faut:

- 1) décider que "x" appartient à la sous-catégorie des "inconnues" et "n" à celle des "paramètres"
- 2) dupliquer toutes les catégories non-terminales en "paramétriques" (ne contenant pas d'inconnue, seulement des constantes ou des paramètres) et "non-paramétriques" (contenant des inconnues).
- 3) dans le paradigme de la réécriture de la puissance, ne mettre en exposant que des catégories paramétriques.

Dans ce cas la grammaire engendrera bien:

$$e^n$$

¹⁰ un peu à la manière d'une règle dite "Dépendante du Contexte"

et:

$$x^{n+m}$$

et:

$$(a+b)^2$$

dont les exposants sont paramétriques dans le sens conventionnel que nous venons de définir, et pas:

$$e^x$$

ni:

$$2^y$$

dont les exposants sont non-paramétriques.

Toutefois cette solution est obtenue au prix d'une complexité rhédibitoire. Non seulement le nombre de règles de réécritures double, mais encore le paradigme de chaque règle de réécriture voit sa taille doubler, puisqu'il faut envisager deux cas (paramétrique et non-paramétrique) là où il n'y en avait qu'un. Bref, la taille globale de la grammaire est multipliée par quatre¹¹!

En réalité c'est seulement le nombre de signes de la grammaire qui quadruple (en gros). Or cette représentation de la grammaire utilise des conventions de type SRL, de telle manière que:

$$| \quad a := \left\{ \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} c \\ d \end{array} \right\}$$

résumé:

$$| \quad a := \left\{ \begin{array}{l} a \ c \\ b \ c \\ a \ d \\ b \ d \end{array} \right\}$$

¹¹ Ceci est lié aux grammaires génératives-transformationnelles Chomskyennes. On ne retrouverait pas ce problème avec les grammaires "catégorielles".

En fait, si on considère non pas les signes, mais les réécritures élémentaires, par exemple ici:

$$| \quad \begin{array}{l} a := ac \\ a := bc \\ a := ad \\ a := bd \end{array}$$

le nombre de ces réécritures élémentaires fait bien plus que quadrupler, dès lors que toutes les catégories sont dédoublées, et que certaines règles de réécritures font intervenir plusieurs accolades verticales.

En outre, une telle sous-catégorisation est figée une fois pour toutes. Or dans tout manuel n joue des rôles différents (on le trouve dans des bases ou des exposants) d'une page à l'autre. On ne peut donc ni exclure les graphèmes tels que e , ni empêcher la grammaire de produire e^x , sauf à la soumettre à des contraintes, difficiles à mettre en œuvre, de sous-catégorisation. Pour toutes ces raisons, nous avons décidé finalement de **ne pas exclure les puissances** telles que e^x , **ni toutes les autres expressions à interprétation analytique**, des ESA. De toute façon, et c'est ce qui importe, qu'elles aient une interprétation analytique n'empêche pas qu'elles aient également une interprétation pleinement algébrique.

V.3.2. Les exposants "trop complexes"

Il n'y a pas que les exposants contenant des x qui posent des problèmes. Dans le même ordre d'idées, peut-on accepter:

$$x^2$$

et refuser:

$$x \frac{a+2}{\sqrt{a}}$$

Nous souhaiterions en effet que la grammaire n'engendre pas de telles expressions, pour deux raisons:

- ces expressions ne sont attestées nulle part dans aucun des corpus que nous avons consultés,

- nous avons des doutes sur le caractère strictement algébrique de ces expressions (autrement dit, relevant de l'algèbre et non de l'analyse).

En effet, elles paraissent plus relever du domaine des fonctions (à plusieurs variables) que de celui de l'algèbre. Bien entendu, toutes les expressions algébriques peuvent être considérées comme dénotant des fonctions (v. X.2.1.): c'est également le cas de

$$x^2.$$

Toutefois, on peut calculer la dénotation de cette dernière expression en fonction de celle de x , par des moyens strictement algébriques, c'est-à-dire à l'aide d'opérations arithmétiques (ici, la multiplication de la dénotation de x , notée $\delta(x)$, par elle-même), ce qui n'est pas le cas de:

$$x \frac{a+2}{\sqrt{a}}.$$

Précisons ce dernier point. Pour distinguer une expression "spécifiquement algébrique" telle que:

$$a + b,$$

d'une expression au caractère algébrique plus hypothétique telle que:

$$x \frac{a+2}{\sqrt{a}}$$

on peut remarquer que la première expression peut être évaluée par un enchaînement d'opérations choisies parmi les sept opérations arithmétiques élémentaires portant sur des nombres entiers, et pas la seconde. Ces sept opérations arithmétiques élémentaires, pour lesquelles il existe, en principe, un algorithme de calcul "à la main", sont:

- l' "opposition" (changement de signe d'une expression)
- l' addition
- la soustraction
- la multiplication
- la division

- l'exponentiation par un exposant entier
- l' "éradication"¹² d'ordre entier¹³

Il est tentant de généraliser ce critère et de qualifier d'algébriques les seules expressions susceptibles d'être évaluées à l'aide des opérations arithmétiques. Ceci paraît d'autant plus naturel qu'un "opérateur" algébrique (tel que "somme", "produit" ou "puissance") représente précisément le résultat d'un certain nombre d'opérations algébriques.

Malheureusement, traduire ce critère au niveau des règles de réécriture, pour éviter d'engendrer des expressions comme:

$$2^{2^{\frac{1}{2}}}$$

qui ne peut être évaluée par des opérations arithmétiques, conduit à des embarras inextricables. On pourrait croire qu'il suffit de décider que les puissances ne peuvent avoir une puissance comme exposant, mais seulement opérateurs "raisonnables", par exemple des sommes ou des produits. Toutefois, si on admet des sommes en exposant, en pensant à des expressions sans surprise comme:

$$2^{2+3},$$

on engendre aussi:

$$2^{\pi + \sqrt{3}}$$

¹² nous introduisons ce néologisme pour qualifier l'extraction de racine

¹³ dans le cas de l'éradication d'ordre entier, les algorithmes, quand ils ont été établis, sont tombés en désuétude... Pour autant, s'il est envisageable de calculer "à la main" la valeur de $\sqrt[4]{5}$ (indépendamment de toute considération sur la pénibilité et les risques d'erreurs associés à cette tâche), il n'en est pas de même pour $\sqrt[2]{\sqrt{5}}$, sauf à utiliser des procédures d'encadrement.

Comment l'éviter? Puisqu'on ne peut pas faire dépendre la réécriture de la puissance des réécritures ultérieures de ses sous-expressions, il faudrait là encore des sous-catégorisations ad hoc, particulièrement artificielles. Donc on ne peut l'empêcher de manière simple. En outre, supposons que les puissances ne puissent avoir une puissance comme exposant. Dans ce cas, on exclut des ESA:

$$2^{2^2}$$

qui est pourtant parfaitement évaluable. On pourrait décider alors de n'exclure que les puissances dont l'exposant est une puissance qui a elle-même pour exposant une fraction (ou un rapport). Hélas, dans ce cas, on évacue:

$$2^3^{2/2}$$

qui vaut pourtant 8, et ainsi de suite: on a une régression à l'infini.

En conclusion, on ne peut mettre a priori de limite à la complexité des exposants, et on doit donc considérer comme algébriques des expressions qui ne peuvent pas être évaluées par les seules opérations arithmétiques. En conséquence, pour évaluer les ESAL, nous devons impérativement disposer également de l'opération d'exponentiation par un réel quelconque (pas forcément rationnel).

Par contre-coup, cela nous fournit la proposition suivante, qui pose l'équivalence du caractère algébrique des expressions et de la possibilité de les évaluer (de calculer leur dénotation, au sens du chap. X) à l'aide des opérations arithmétiques au sens généralisé:

Proposition:

Soit E une expression symbolique mathématique.
E est une ESAL \Leftrightarrow on peut calculer la dénotation de E en n'utilisant pas d'autres opérations que l'opposition et les opérations binaires: addition, soustraction, multiplication, division et exponentiation.

Cette proposition peut être démontrée par récurrence sur la complexité des ESAL. Cela ne peut être fait qu'une fois qu'une grammaire complète des ESAL aura été détaillée, et que la définition rigoureuse de la dénotation des ESAL aura été posée (chap. X).

V.3.3. Généralisation: l'exponentiation

Toutes les difficultés qui précèdent concernent l'exponentiation, et plus précisément l'exposant des puissances. Comment cela se fait-il?

Nous pouvons remarquer a contrario que, sans les puissances (et les racines), le système des ESA, réduit aux sommes (binaires), aux produits (binaires), aux différences et aux fractions serait élémentaire à décrire, et une partie de cette thèse serait quasiment sans objet. Nous allons montrer brièvement en effet deux approches, celle des anneaux des polynômes et un point de vue "catégoricien", qui modélisent fort bien les ESA... sans puissances ni racines en général.

V.3.3.A. Les anneaux de polynômes

Il est parfaitement évident que les anneaux de polynômes sont un cadre naturel pour des expressions du type:

$$a+1$$

ou:

$$x^2+2x+2$$

(Tonnelles 1979). Toutefois, même en effectuant une extension dans le domaine des fractions rationnelles à plusieurs variables, ce qui permet de

décrire $\frac{a+b}{b+1}$, et/ou d'autres types d'extensions vers les racines carrées, on est vite limité lorsqu'on veut décrire dans toute sa généralité l'ensemble des expressions algébriques, qui contient des écritures du type:

$$\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}}$$

où "a" et "b" sont des variables.

En fait, les anneaux de polynômes et leurs diverses extensions ne sont que des cas particuliers d'expressions algébriques, qui en tant que tels sont susceptibles d'être formellement décrits par des grammaires ad hoc.

Cette description nous paraît même un des premiers travaux à faire en prolongement de cette thèse, car elle permettra de mettre à l'épreuve le caractère adaptable de la grammaire, sur un exemple didactiquement intéressant.

Mais pour autant les polynômes, même généralisés, ne sont qu'un cas très particulier d'expressions algébriques et ne peuvent rendre compte des ESA dans leur généralité.

V.3.3.B. Approche en termes de catégories

Nous citerons sans la détailler l'étude menée par B. Charles (1985), à savoir une approche, en termes de catégories, des calculs algébriques qu'on peut opérer sur les structures classiques.

«Lorsqu'on aborde l'étude générale des lois internes, le problème le plus naturel qui se pose est celui de la description des calculs que l'on peut faire à partir d'une famille quelconque d'éléments d'un ensemble muni d'une loi quelconque. Le cadre approprié pour cette étude est la catégorie \mathcal{L} qui a pour objets les ensembles munis d'une loi interne et pour morphismes de E dans F les applications h de E dans F telles que $h(xy) = h(x)h(y) \dots$ » (ibid. p. 1)

«Lorsqu'on considère une catégorie C ayant pour objets des ensembles munis d'un système de lois, il n'est pas trop difficile de décrire les calculs possibles faisant intervenir toutes ces lois.» (ibid. p. 6)

D'un point de vue analogue nous pouvons nous intéresser aux \mathbb{R} -algèbres. Ces structures sont intéressantes car l'existence de deux

multiplications permet de donner une signification à la distinction entre les écritures $2x$ et $2 \times x$.

On a aussi deux notations multiplicatives dans les ensembles de polynômes, mais dans cette théorie $2x$ n'est pas à proprement parler un produit, contrairement à $2 \times x$ qui est le produit du polynôme formel 2 par polynôme formel x.

Certes, on a l'égalité:

$$2 \times x = 2x$$

mais c'est l'égalité d'un produit et d'un polynôme, et non pas de deux produits différents.

Dans les \mathbb{R} -algèbres au contraire, les deux notations correspondent bien à deux produits.

La première écriture ($2x$) peut être interprétée comme répondant à la question «combien y a-t-il de x ?» et la seconde ($2 \times x$) à «combien ça fait en tout?». Toutefois, les problèmes de notation spécifiques du produit par juxtaposition (on ne peut juxtaposer deux chiffres par exemple, v. chap. VII) viennent en quelque sorte "brouiller" l'expression de la distinction entre les deux multiplications, dont l'une s'exprimerait par juxtaposition et l'autre par une croix. Quoiqu'il en soit du produit, les \mathbb{R} -algèbres ne rendent pas mieux compte de l'exponentiation et de l'éradication que les anneaux de polynômes.

En résumé, aucune structure "usuelle" ne prend explicitement en compte le triplet d'opérations (+ ; \times ; \wedge) et les relations qui lient ces opérations deux à deux. L'exponentiation et ses propriétés, et a fortiori l'éradication et les siennes, sont des objets dérivés dans ces structures et abordés de façon marginale.

V.3.4. Règle générative correspondante

Nous n'avons donc pas de restriction en ce qui concerne les expressions pouvant servir d'exposant à une puissance. La règle de réécriture des puissances doit seulement tenir compte du degré supérieur de priorité de l'exponentiation par rapport aux autres opérations, qui nécessite

de parenthéser tout ce qui n'est pas constante, constante littérale, variable ou valeur absolue.

$$\left| \text{Pui} := \left\{ \begin{array}{c} (\text{Ide}) \\ \dots \\ (\text{VAb}) \\ \text{Cst} \\ \text{CII} \\ \text{Var} \\ \text{VAb} \end{array} \right\} \wedge \left\{ \begin{array}{c} (\text{Ide}) \\ \dots \\ (\text{VAb}) \\ \text{Cst} \\ \text{CII} \\ \text{Var} \\ \text{VAb} \end{array} \right\} \right|$$

Notons que les parenthèses servent ici de délimitateurs aussi bien pour l'évaluation (en forçant les priorités d'opérations) que pour la mise en forme typématique: $a^{(2+3)}+a$ est transformé en $a^{2+3}+a$ (les parenthèses disparaissent), et a^2+a l'est en a^2+a (la délimitation de l'exposant suit les mêmes règles de "priorité" que l'évaluation).

V.4. Racines

On retrouve exactement les mêmes difficultés et nous y apportons les mêmes réponses. Nous n'avons donc pas non plus de restriction sur les expressions pouvant servir d'exposant à une racine: n'importe quelle expression peut désigner l'ordre d'une racine, y compris

$$\sqrt{x} \sqrt{x}$$

parce qu'il n'est pas possible de limiter cet ordre à tel ou tel type particulier d'expression. Contrairement aux puissances, l'ordre de la racine est facultatif¹⁴, d'où la présence de la suite vide ϕ dans le paradigme de l'ordre, à gauche du signe de radical. L'ordre (non-vide) est toujours mis entre des délimitateurs spéciaux (crochets), ce qui est noté par la suite verticale:

¹⁴ lorsqu'il n'y a pas d'ordre cela correspond à une racine carrée, autrement dit à une éradication par 2, puisque nous avons pris le choix arbitraire, pour ne pas alourdir les paradigmes en y faisant figurer les racines n^{èmes} et la racine carrée, de ne pas considérer cette dernière comme un opérateur unaire.

$$\left| \begin{array}{c} \phi \\ / \text{Ide} / \\ \dots \\ / \text{VAb} / \end{array} \right|$$

Sinon, on aurait des ambiguïtés et l'on ne saurait dire si une expression (sans crochets) telle que $3\sqrt{2}$ doit être transformée en $3\sqrt{2}$ ou en $\sqrt[3]{2}$.

$$\left| \text{Rac} := \left\{ \begin{array}{c} \phi \\ / \text{Ide} / \\ \dots \\ / \text{VAb} / \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} (\text{Ide}) \\ \dots \\ (\text{VAb}) \\ \text{Cst} \\ \text{CII} \\ \text{Var} \\ \text{VAb} \end{array} \right\} \right|$$

V.5. Conséquences:

V.5.1. Généralisation à toutes les écritures "non définies"

Il n'est ni possible ni souhaitable d'éviter les ESA bien construites mais dépourvues de signification telles que $\frac{1}{0}$ ou 0^0

V.5.1.A. Impossibilité

Ce n'est pas possible parce que sinon nous avons régression à l'infini, du même type que ce que nous avons vu plus haut. On peut interdire:

$$\frac{1}{0}$$

certes, mais comment interdire

$$\frac{1}{1-1} ?$$

Si on refuse d'engendrer des fractions du type

$$\frac{1}{E-E'}$$

comment éviter

$$\frac{1}{1 - \frac{2}{2}}$$

et ainsi de suite? Le nœud du problème provient de ce que nous avons décidé d'engendrer les expressions à l'aide d'une grammaire générative. Or celle-ci ne tient pas compte de la valeur des expressions quand elle les engendre. Il n'est pas possible, dans le cadre d'une telle grammaire, d'écrire une règle de réécriture de type:

| Fra:= Numé \ Déno | à condition que la valeur de Déno soit non nulle

V.5.1.B. Agrammaticalité et absence de signification

Ne pas engendrer des ESA dépourvues de signification (quoique bien construites) n'est pas souhaitable non plus, parce que, du point de vue méthodologique, cela revient à **confondre agrammaticalité et absence de signification**. Or ce n'est pas la même chose.

«... la notion de "grammatical" ne peut être assimilée à celle de "doué de sens" ou "significatif", dans quelque sens sémantique que ce soit. Les phrases (1) et (2) sont également dépourvues de signification¹⁵, mais n'importe quel locuteur anglais reconnaîtra que la première seule est grammaticale.

(1) Colorless green ideas sleep furiously.

(2) *Furiously sleep ideas green colorless

(Chomsky 1969 p. 17)

15 c'est de moins en moins vrai au fur et à mesure qu'on les cite. Quiconque est un peu familiarisé avec la linguistique les connaît par cœur maintenant, et leur attribue précisément une signification en rapport avec l'argumentaire de Chomsky...

Les expressions telles que 0^0 étant bien construites, elles font partie des ESA. En conséquence, la valeur d'une ESA est soit un nombre (connu ou inconnu), soit "Non Défini". Il reste à montrer (au chap. XI) comment le "Non Défini" se propage dans une ESA, autrement dit comment il suffit qu'une sous-expression soit non définie pour que l'expression entière le soit aussi. C'est le cas par exemple d'une égalité dont un des membres contiendrait 0^0 .

V.5.2. Écritures ambiguës

Non seulement le système des ESAL est ambigu à cause des graphèmes partagés par les Variables et les Constantes Littérales, mais encore certaines ESAL sont ambiguës lorsqu'on sort du cadre strict de l'algèbre.

Les principes de délimitation choisis "laissent passer" en effet un certain nombre d'expressions qui, hors de l'algèbre élémentaire, ont une dénotation particulière. Cela poserait toutefois des problèmes inextricables si on voulait les exclure, pour un intérêt minime vu que ce genre d'expression n'est, en pratique, jamais attesté en algèbre.

$f(x)$ Cette ESAL est interprétée comme le produit (bizarrement mais correctement écrit), de f par x

$\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ Le cas où i désigne le nombre $i \in \mathbb{C}$ ne relève pas de l'"algèbre élémentaire", mais nous n'avons pas relevé dans nos corpus d'exemple significatif d'expression où le graphème i jouerait le rôle d'une variable. Toutefois cela ne nous paraît pas suffisant pour l'exclure des ESA.

$\frac{d(2x+3)}{dx}$ pour exclure des ESA cette fraction il faudrait par exemple introduire une catégorie des produits dont le premier facteur est la variable d et le second une somme ne comprenant que la variable x - ce qui ne peut être obtenu que par une sous-catégorisation ad hoc qui compliquerait tout-.

u' ce syntagme est ambigu, car il a deux interprétations concurrentes possibles: dérivée de la fonction u (interprétation analytique) ou seconde variable dans un problème où intervient déjà la variable u (interprétation algébrique). Quoiqu'il en soit, vu que u' a (au moins) une interprétation strictement algébrique, nous l'intégrons au domaine des ESAL. Ce n'est pas le cas de x_n , ni de $(uv)'$ ni de $(u_n)_n$. Nous considérons en effet ces expressions comme des notations seulement analytiques, certes susceptibles d'un traitement algébrique¹⁶, mais ininterprétables si on sort pas du cadre strict de l'algèbre.

$\sin(x)$ cette expression, jamais attestée en algèbre heureusement, est bien formée (mais hautement improbable) en tant que produit dont les facteurs seraient s , i , n et (x) .

V.5.3. Remarque didactique

Il est à noter que l'exponentiation, en tant qu'opération algébrique, est une sorte de "point aveugle" (ou, au moins, amblyope) de l'enseignement. En effet, au niveau du collège, cette opération est définie classiquement (en généralisant les opérations unaires d'élévation au carré et au cube), pour un exposant entier, par répétition de la multiplication. Ce n'est que bien plus tard, en terminale, avec l'étude de la fonction exponentielle, qu'est introduite l'exponentiation par un nombre non-entier... et encore pas dans toutes les classes. Une enquête antérieure¹⁷ (rapportée dans Drouhard 1986) a montré en effet que seuls 10 étudiants non scientifiques sur 102 répondaient correctement à un QCM portant sur l'expression:

$$\sqrt[3]{x} \sqrt[4]{x}$$

Pourtant, ce type de savoir-faire est considéré comme un prérequis allant de soi par bon nombre d'enseignants du supérieur... De fait, intrigué par ce résultat, nous avons alors dépouillé (rapidement) 28 manuels du

¹⁶ dans la mesure où on peut les additionner, les multiplier ...

¹⁷ menée au sein de l'Equipe de Didactique des Mathématiques de l'UER de Didactique (Université Paris 7) et du CREEM (CNAM).

secondaire, et nous nous sommes aperçu que, dans les séries non-scientifiques A et B, deux collections sur trois n'abordaient la notion d'exposant rationnel à aucun moment entre la 3^{ème} et la terminale incluses. Le programme des classes terminales littéraires étant, selon une tradition bien ancrée, obtenue par réduction de celui des classes scientifiques, il se trouve que cette réduction porte précisément entre autres, dans deux manuels sur trois, sur les propriétés de la fonction exponentielle, et en particulier sur la notion d'exposant rationnel.

Il serait intéressant, dans une perspective curriculaire¹⁸, d'étudier comment il se fait qu'il faille attendre l'étude des fonctions exponentielles pour aborder les exposants rationnels, en mettant ce délai en regard avec l'absence de l'exponentiation des structures "classiques". En effet, d'un point de vue conceptuel, les fonctions

$$x \mapsto \sqrt[n]{x} \quad (n > 2)$$

ne sont guère plus difficiles à étudier que la fonction

$$x \mapsto \sqrt{x},$$

laquelle est abordée bien avant la classe terminale. Elles sont même plus simples, quand n est impair! Quant à la notation

$$x^{\frac{a}{b}}$$

elle n'est pas plus difficile à introduire que

$$x^{-a},$$

pour ne pas parler de

$$x^0 !$$

¹⁸ telle que celles que développent T. Assude, Y. Chevallard, A. Mercier et G. Nin (IREM de Marseille) avec la notion d'"écologie des objets d'enseignement"

Autrement dit, le cadre théorique des fonctions exponentielles, qui arrive "trop tard" pour l'algèbre, est également trop puissant. On n'a pas besoin d'une théorie des puissances à exposant réels (et donc, en particulier, irrationnels) pour définir les puissances à exposant rationnels.

V.6. Conclusion

En étudiant des expressions bien formées mais d'un caractère algébrique douteux, nous avons montré qu'il ne pouvait y avoir de restriction sur les exposants des puissances et les ordres des racines, et par contrecoup pas de restriction non plus sur les graphèmes à choisir pour former les variables. Il reste néanmoins un autre problème de limite du domaine des ESA, celui des expressions compréhensibles mais dont il est difficile de déterminer la grammaticalité. En effet, dans ce domaine comme dans celui des langues naturelles, une expression peut être compréhensible sans être grammaticale. C'est le cas du "charabia": «ça être compréhensible mais ça pas être grammatical». Dans l'"idiolecte"¹⁹ de l'auteur, le produit:

$$\frac{1}{2} 3$$

est compréhensible mais pas acceptable, faute de «×». Ce type de difficulté, spécifique des produits, sera abordé au chapitre VII. En attendant, nous allons étudier une autre question, celle des sommes et des produits n-aires.

Quoi qu'il en soit, nous opérons dans ce travail de modélisation syntaxique un renversement de perspective quant à la définition des ESA. Etant donné que nous ne pouvons pas caractériser les ESA par les nombres qu'elles représentent, nous les définirons dorénavant comme les écritures engendrées par notre grammaire, ou si l'on préfère, la définition des ESA correspond strictement aux règles de réécriture qui les engendrent.

¹⁹ c'est-à-dire notre usage personnel des ESA

VI. SOMMES ALGEBRIQUES

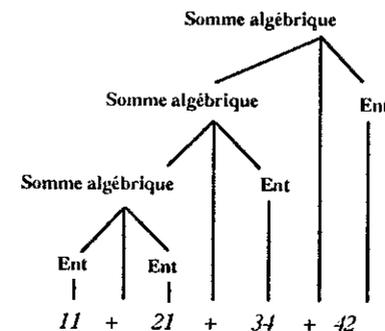
Comment engendrer une somme algébrique de quatre termes telle que:

$$11+21+34+42 ?$$

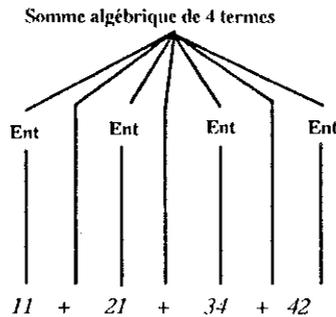
Il y a trois solutions (au moins). La première consiste à générer (en "forme profonde") trois sommes de deux termes enchâssées les unes dans les autres:

$$[[11+21]+34]+42$$

puis à supprimer (en "forme de surface") les crochets surnuméraires. La seconde consiste à engendrer directement (sans passer par une forme profonde) la somme algébrique au moyen d'une règle de réécriture dite "réursive", ce qui lui donne une structure de type:



Enfin, la troisième consiste à mettre dans la grammaire une infinité de règles de réécritures différentes, une pour engendrer les sommes algébriques de trois termes, une pour celles de quatre termes, une pour celles de cinq termes etc. La structure de notre exemple devient:



Nous avons expliqué au chap. III les raisons qui font que nous n'adoptons pas la première solution (forme profonde). Nous allons maintenant présenter en détail les deux autres solutions, qui concernent également les produits de plus de deux facteurs (que nous traiterons en détail au chap. VII).

VI.1. La récursivité.

VI.1.1. Règles de réécriture récursives

Soit à générer, par des règles de réécriture, une somme algébrique du type $+a+b+c+d$. Il suffit pour ce faire d'une règle de réécriture récursive:

$$P := \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \\ P \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \right\}$$

qui se lit:

«P est réécrit "suite-vide" ou P, suivi de +, suivi de a ou b ou c ou d ».

On peut la paraphraser de la manière suivante:

Toute suite de symboles dans laquelle apparaît le symbole P, peut être remplacée par une autre suite de symboles, qui ne diffère de

la première que par le fait que chaque occurrence de P y est remplacée:

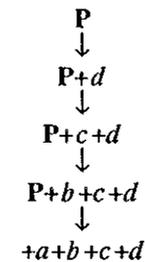
- ou bien par une variable seule, choisie dans $\{ a b c d \}$,
- ou bien par P lui-même, suivi de "+" et d'une variable de $\{ a b c d \}$.

La règle:

$$P := \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \\ P \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \right\}$$

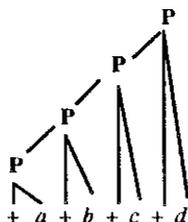
est dite "récursive" car le symbole catégoriel P apparaît simultanément à gauche et à droite¹ du métasymbole " := " de réécriture (Ruwet 1967 p. 48). Ce même mécanisme permettrait aussi bien d'obtenir: $+b+b+b+b$, $+c+b+a$ ou encore $+b$ tout seul.

Voici la dérivation (c'est à dire la suite des expressions obtenues par applications successives de la règle de réécriture) qui aboutit à $+a+b+c+d$:



¹ la présence de P dans l'expression réécrite est optionnelle, ce que marque le symbole \emptyset . Si ce n'était pas le cas, le processus récursif n'aurait pas de fin.

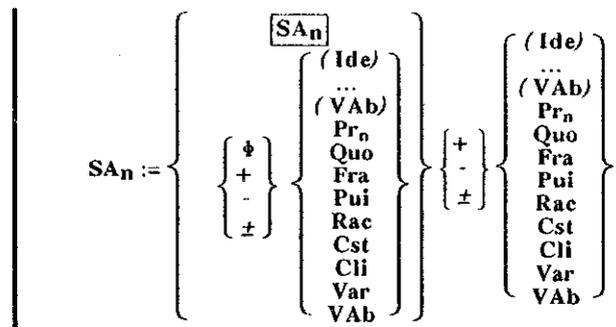
L'indicateur syntagmatique ("arbre") associé à $+a+b+c+d$ est le suivant :



On remarquera la ressemblance entre ce type d'arbre et celui que Kirshner assigne à la forme profonde de $a+b+c+d$ (chap. III). La différence réside uniquement dans l'absence des crochets "parasites".

VI.1.2. Génération récursive des Sommes Algébriques

Générer les Sommes Algébriques à l'aide de règles récursives signifie qu'elles seront réécrites un certain nombre (fini) de fois sous la forme d'un symbole catégoriel SA_n (Somme Algébrique de n termes) suivi d'un terme choisi dans une liste convenable. Voici la règle de réécriture récursive correspondante:



Nous avons encadré le symbole catégoriel SA_n qui figure dans un paradigme à droite du métasybole de réécriture ":", car c'est lui qui rend récursive la règle.

Notons que la catégorie SA_n figure également (de manière sous-entendue au niveau des points de suspension, cf. chap. IV) dans les paradigmes, parmi les symboles catégoriels mis entre parenthèses. De cette façon on peut engendrer une somme algébrique formée d'une variable et d'une autre somme mise entre parenthèses, par exemple:

$$- a + (b + c).$$

VI.1.3. Evaluation

A l'instar du type de structure emboîtée:

$$[[a + b] + c] + d$$

que l'on avait en forme profonde, la récursivité à gauche des règles de réécriture des sommes et des produits privilégie leur évaluation de gauche à droite.

Précisons tout d'abord ce que nous entendons par "récursivité à gauche". Pour CHOMSKY & MILLER (1971) p. 24, «si A est un élément récursif à gauche, il domine une arborescence qui contient A quelque part sur la branche la plus à gauche». GLADKIJ & MEL'ČUK (1972) p. 86 parlent, eux, de "développement à droite" et commentent ainsi cette expression : «On entend ici par direction du développement, la direction dans laquelle sont "rejetés" les symboles terminaux, par exemple "C := Dd" est un développement à droite.»

Le développement à droite de GLADKIJ & MEL'ČUK est donc la récursivité à gauche de CHOMSKY, ce qui n'éclaircit pas la discussion²...

Pour évaluer les sommes définies récursivement comme on vient de le faire il suffit d'un algorithme récursif du type:

Pour évaluer une somme:

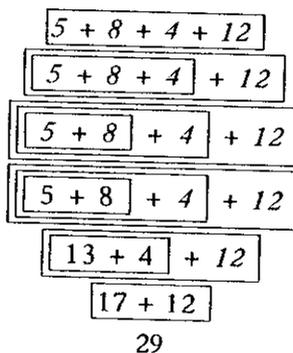
évaluer la somme formée par tous les termes sauf le dernier

² nous avons "traduit" leur exemple avec nos propres conventions d'écriture (signe ":", catégories en gras et symboles terminaux en italiques).

évaluer le dernier terme
 additionner
 fin de l'évaluation

Cet algorithme est récursif³ car il se rappelle lui-même (à l'étape que nous avons soulignée). Il se rappellera ainsi jusqu'à ce que le premier terme à évaluer ne soit qu'une constante: on sera alors à gauche de l'expression. La somme la plus à gauche sera évaluée, le résultat en sera additionné au terme immédiatement à sa droite, et ainsi de suite jusqu'au terme le plus à droite. Autrement dit, l'évaluation ira bien de gauche à droite.

Nous allons illustrer ce processus en **encadrant** les expressions à évaluer, et en notant en chiffres droits les valeurs numériques des constantes (lesquelles sont notées en *italiques*). Soit donc à évaluer $5 + 8 + 4 + 12$:



L'algorithme d'évaluation ne diffère pas de celui qui opérerait sur la forme profonde. Cela fait que les critiques qui s'appliquaient aux crochets en matière d'évaluation sont toujours valables ici. En particulier, ce n'est pas parce qu'on évalue une somme de gauche à droite par défaut qu'il faut empêcher tout autre ordre d'évaluation. Or, le sens de récursivité étant ici fixé (ici: à droite), il devient très difficile de concevoir une règle simple si l'on veut évaluer autrement que de gauche à droite. En effet, pour évaluer **de droite à gauche** l'expression :

³ cf. CARMONA & DIDIER (1975)

$$25 + 1 + 99$$

on peut la décomposer en :

$$25 + \boxed{1 + 99}$$

malheureusement

$$\boxed{1 + 99}$$

n'a pas une **structure** de somme, les seules sommes étant ici

$$25 + 1$$

et

$$25 + 1 + 99$$

(parce que les sommes sont engendrées par une règle récursive à gauche).

Par conséquent, on ne peut pas programmer un algorithme pour qu'il évalue $1 + 99$ **en tant que somme**, comme il le fait pour la somme totale (récursivité). En outre, dans le cadre de l'arithmétique usuelle à l'école, l'évaluation d'une somme telle que:

$$11 + 21 + 34 + 42$$

se fait souvent au moyen d'un algorithme unique, celui de l'addition "en colonnes" qui porte simultanément sur tous les termes, sans en privilégier aucun. Dans ce cas, la décomposition de gauche à droite en sommes de deux termes n'a aucune raison d'être. On a donc intérêt à rechercher des représentations structurales (et donc des règles de réécriture) qui ne privilégient pas l'évaluation de gauche à droite, ou si l'on préfère qui dissocient les problèmes d'évaluation des questions de structure.

VI.1.4. Transformation

Nous allons voir maintenant qu'il est également difficile de transformer de manière simple les structures engendrées récursivement. Toutefois, cet argument repose sur l'idée que la meilleure caractérisation des sous-expressions à transformer est "fonctionnelle", ce que nous allons expliquer préalablement, en anticipant ainsi sur le chapitre VIII pour les besoins de la discussion. Pour comprendre ce qui suit, il suffit de savoir que la notion de "fonction syntaxique" recouvre celle de "terme" dans le cas d'une somme algébrique.

Voici la définition de la fonction syntaxique "s est un terme de S" pour une somme S_2 de deux termes, puis pour une somme S_n (de plus de deux termes) définie récursivement.

VI.1.4.A. Terme d'une somme de deux termes

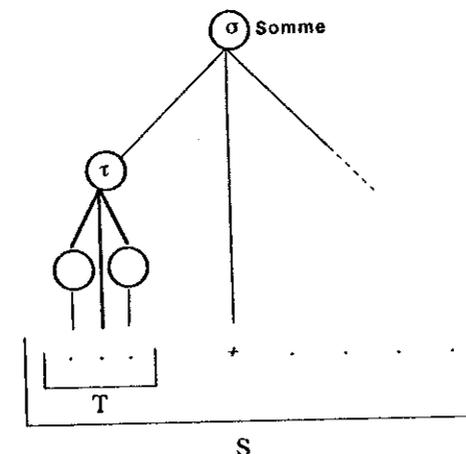
Lorsqu'il n'y a que deux termes, la définition d'un terme est la suivante:

Soit S une suite terminale et T une sous-suite de S

Soit σ un nœud de l'arbre syntagmatique de S

On dit alors que T est un **terme de S**, et on note $T = t^S$, ssi il existe un nœud τ de l'arbre syntagmatique de S tel que:

- (i) T dérive de τ
- (ii) τ est immédiatement dominé par σ
- (iii) σ est étiqueté Somme
- (iv) S dérive de σ



VI.1.4.B. Terme d'une somme de plus de deux termes

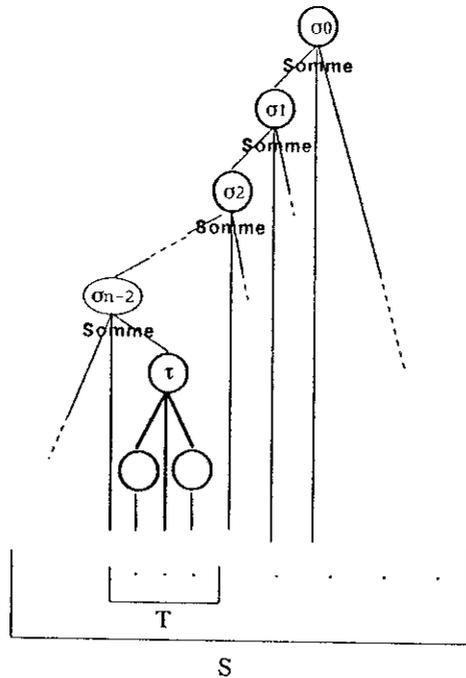
La définition de "terme d'une somme" est nettement plus compliquée lorsque la somme comporte plus de deux termes.

Soit S une suite terminale et T une sous-suite de S

Soient $(\sigma_0; \sigma_1; \dots; \sigma_{n-2})$ une suite de n-1 nœuds de l'arbre syntagmatique de S

On dit alors que T est un **terme de S**, et on note $T = t^S$, ssi il existe un nœud τ de l'arbre syntagmatique de S tel que:

- (i) T dérive de τ
- (ii) τ n'est pas étiqueté Somme
- (ii) τ est immédiatement dominé par σ_{n-2}
- (iii) $\forall i \in [1; n-2]$ σ_i est immédiatement dominé par σ_{i-1}
- (iv) $\forall i \in [0; n-2]$ σ_i est étiqueté Somme
- (v) S dérive de σ_0



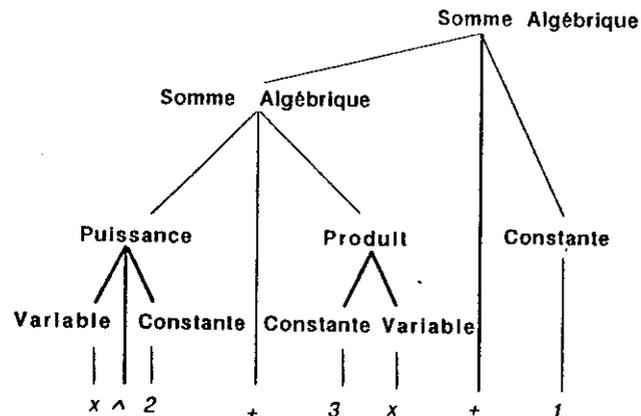
Sur cet exemple, on voit que $3x$ est un terme de $x^2 + 3x + 1$ mais pas 3 (la définition plutôt compliquée qui précède est précisément faite pour cela).

La définition de "terme de" est donc plus complexe lorsqu'une somme, définie récursivement, comporte plusieurs termes. Cette complexité s'accroîtrait encore si nous définissions la fonction syntaxique "i-ème terme de".

En résumé, les arbres définis récursivement sont plutôt touffus. La principale information qu'ils véhiculent, à savoir le fait qu'une somme de plus de deux termes est formée d'une somme et d'un terme n'est jamais utilisée, si ce n'est dans le cas particulier de l'évaluation de gauche à droite. Enfin, pour la plupart des propriétés qui concernent les expressions, comme les transformations ou les fonctions syntaxiques, cette information constitue une gêne dont il faut s'affranchir. Il faut utiliser des mécanismes qui sont autant de « principes "désarborescents", qui rendent inaccessibles certaines précisions, tenues pour superflues ou même génératrices de complications. » (Milner, 1984). Tout ceci nous amène à renoncer aux définitions récursives.

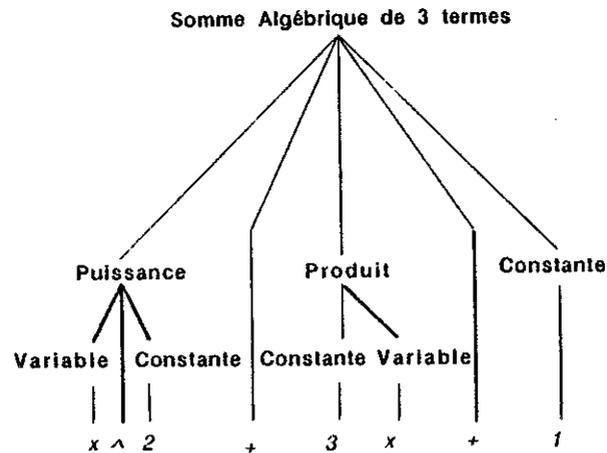
VI.1.4.C. Exemple d'un trinôme:

VI.2. Un schéma de règles de réécriture.

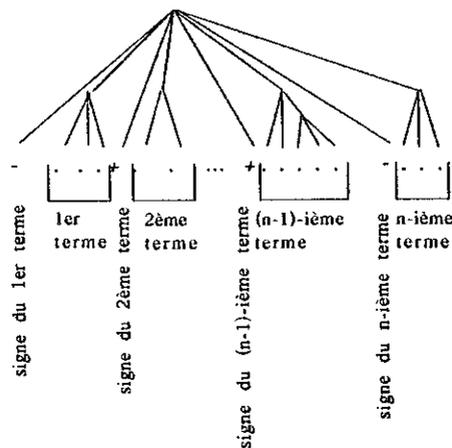


Notre objectif est de concevoir une structure générative non récursive, qui apporte les informations nécessaires à l'identification et à la transformation des écritures, mais pas plus. Cela suppose de renoncer à la catégorie "Somme algébrique" en général, pour la remplacer par de nouvelles catégories intitulées "Somme algébrique de 2 termes", "Somme algébrique de 3 termes", ... "Somme algébrique de n termes", etc. telles que les différents termes soient alors dans le même rapport de fonction syntaxique (au rang près) avec la somme (de i termes) dans son ensemble.

Exemples:



Somme Algébrique de n termes



Cela revient à remplacer une règle de réécriture unique pour toutes les sommes algébriques SA, par une infinité de règles (formant un "schéma"), chaque règle engendrant une somme particulière SA_i à i termes.

Une telle structure permet de définir les fonctions syntaxiques aussi simplement pour une somme de n termes que pour une somme de 2 termes. Elle est en outre plus plausible sur le plan psychologique, car elle se rapproche de la connaissance spontanée qu'ont les algébristes compétents de la structure des objets qu'ils manipulent, telle qu'elle transparait dans le vocabulaire courant. Celui-ci nomme les structures (ex: somme) et les fonctions (ex: "terme de") et ne marque pas de différence hiérarchique entre les termes, qui serait due à une quelconque récursivité de la structure. Tout au plus distingue-t-on les différents termes d'une somme par leur rang (1^{er} terme, 2nd terme, ..., dernier terme).

Concernant l'histoire de notre grammaire, il est intéressant de noter que si nous n'avons pas exploité cette voie plus tôt, c'est qu'elle suppose de fait l'existence d'une infinité virtuelle de règles de réécriture (ce que nous appelons un "schéma de règles"). Or ceci viole formellement un principe qualifié de "fondamental" par Chomsky & Miller (1971 p. 17):

L'ensemble (fini) de règles décrivant un langage particulier constitue la grammaire de ce langage. (...) Il existe un principe fondamental: **une grammaire doit être finie**⁴. Si nous nous autorisons à envisager des grammaires constituées d'ensembles de règles non susceptibles de spécification, nous supprimons le problème entier de la construction des grammaires; nous pouvons seulement adopter un dictionnaire de phrases infini. Mais un tel projet n'aurait aucun sens.

A vrai dire, cet argument, du type "tout ou rien" (tant qu'à envisager une infinité de règles, alors autant faire un dictionnaire de phrases infini) nous paraît faible. Il repose implicitement sur des considérations de simplicité. Certes, du strict point de vue du nombre de signes mis en jeu, toutes les théories dénombrables se valent! Mais cet argument ne tient pas compte, entre autres, de ce que Granger (1979 p.196) appelle l'efficacité productive d'une théorie. De ce point de vue, les grammaires à schémas de règles sont loin d'équivaloir au "dictionnaire de phrases infini" qui n'a aucune efficacité productive (elle engendre toutes les phrases mais n'explique rien).

⁴ c'est nous qui soulignons

De toutes façons, dans les langages de programmation, et en premier lieu dans SIM, le langage de manipulation d'expressions algébriques de APLUSIX (Nicaud 1987), qui traite explicitement des écritures n-aires, on trouve des règles de réécriture dans lesquelles figurent des métasymboles tels que (par exemple) les points de suspension, qui signifient qu'un paradigme peut être répété dans une règle un nombre indéfini de fois.

«les trois points successifs ... indiquent la répétition un nombre de fois quelconque de l'unité syntaxique qui les précède immédiatement.

Exemple

"integer ::= digit ..."

indique qu'un entier est formé d'une chaîne de digits de longueur quelconque.» (Moreau 1975 p. 67)

Or une telle répétition équivaut à un schéma de règles de réécriture au sens strict. La règle:

$$(R) \quad a := b c \dots$$

équivaut de fait à la disjonction infinie des règles suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} (R_1) \quad a := b c \\ (R_2) \quad a := b c c \\ (R_3) \quad a := b c c c \\ (R_4) \quad a := b c c c c \\ (R_5) \quad a := b c c c c c \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

Cela veut dire qu'on dispose d'algorithmes pour engendrer aussi bien que pour analyser les expressions appartenant à cette suite infinie. La difficulté soulevée par Chomsky et Miller est donc un faux problème, à partir du moment où l'on se donne le métasymbole "..." et son interprétation. Sur le plan théorique cela signifie seulement que les règles de réécriture avec "..." équivalent à des schémas de règles. Sur le plan pratique cela ne change rien pour engendrer ou analyser les ESA: celles-ci étant de longueur finie, on peut déterminer leur catégorie (i.e. les analyser) en un temps fini.

Nous allons maintenant donner le schéma de réécriture des sommes algébriques.

VI.2.1. Somme algébrique de n termes

Nous considérons a priori qu'une somme algébrique est formée:

- soit de deux termes précédés chacun d'un signe "+", "-" ou "±"
- soit de plus de deux termes séparés par un signe "+", "-" ou "±", le premier terme étant précédé d'un signe ou non.

Pour alléger les écritures notons "T" le paradigme du terme d'une somme:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} (Ide) \\ \dots \\ (VAb) \\ Prn \\ Quo \\ Fra \\ Pui \\ Rac \\ Cst \\ Clf \\ Var \\ VAb \end{array} \right.$$

Alors le schéma de réécriture des sommes algébriques est:

$$SAn := \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \\ \pm \end{array} \right\} T \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \\ \pm \end{array} \right\} T \\ \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \\ + \\ - \\ \pm \end{array} \right\} T \left\{ \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \\ \pm \end{array} \right\} T \right\} \dots \end{array} \right.$$

Précisons que la notation:

$$\left\{ \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \\ \pm \end{array} \right\} T \right\}$$

signifie que c'est le terme T précédé de son signe qui est répété, et non le terme T seulement, ce qui serait le cas si nous avions noté seulement:

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ - \\ \pm \end{array} \right\} T \dots$$

sans mettre ce paradigme entre accolades.

VI.2.2. Propositions algébriques

Mentionnons également un certain nombre de propositions algébriques de longueur indéfinie qui sont générées de la même manière.

VI.2.2.A. Chaîne de n égalités (n > 2)

VI.2.2.A.a. Exemples:

$\sqrt{(a \cdot 8)} = \sqrt{(a)} \cdot \sqrt{(8)} = \sqrt{(a)} \cdot 2\sqrt{(2)}$	$\sqrt{\frac{a}{8}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{2}}$
$2 + 1 = 3 + 2 = 5 = \sqrt{25}$	$2 + 1 = 3 + 2 = 5 = \sqrt{25}$

VI.2.2.A.b. Génération

$$\left| \text{CEn} := \left\{ \begin{array}{c} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{array} \right\} \left\{ = \left\{ \begin{array}{c} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{array} \right\} \right\} \dots$$

VI.2.2.A.c. Remarque:

Il est assez difficile d'engendrer de manière simple et non ambiguë des suites d'inégalités et d'égalités telles que:

$$2ab - 4a - 4 < 2ab - 4a = 2a(b - 2)$$

En effet une règle telle que

$$\left| \text{CCn} := \left\{ \begin{array}{c} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} < \\ = \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \text{Cst} \\ \text{CLi} \\ \text{Var} \\ \text{ExA} \end{array} \right\} \dots$$

produirait des suites d'égalités, qui sont déjà engendrées par la règle qui précède celle-ci, ce qui conduirait à une ambiguïté. On pourrait certes considérer que les suites d'égalités sont un cas particulier de chaîne croissante, mais on ne pourrait pas éviter qu'une règle qui produit des chaînes décroissantes, du même type que ci-dessus, n'engendre de même des suites d'égalité, d'où à nouveau ambiguïté.

La solution la plus simple pour résoudre ce problème est de recourir à des transformations généralisées (chap. VIII) et à considérer ce type de proposition comme la conjonction des propositions élémentaires:

$$2ab - 4a; 4 < 2ab - 4a$$

et

$$2ab - 4a = 2a(b - 2)$$

La partie générative des PrA devient alors:

VI.2.2.B. Catégories non initiales

C-1 = { Ega; CEn; InC; EnC; InD; EnD; NEg } (Egalité; Chaîne de n Egalités; Inégalité Croissante; Encadrement Croissant; Inégalité Décroissante; Encadrement Décroissant; Non-Egalité)

VI.2.2.C. Règles de réécriture des PrA

$$\left| \text{PrA} := \left\{ \begin{array}{c} \text{Ega} \\ \text{CEn} \\ \text{InC} \\ \text{EnC} \\ \text{InD} \\ \text{EnD} \\ \text{NEg} \end{array} \right\}$$

$$\sum_{i=1}^n$$

mais ils n'apparaît pas au Collège lors de l'introduction à l'algèbre élémentaire. Il est présenté au plus tôt à la fin de la scolarité secondaire, et n'est réellement employé que dans l'enseignement supérieur.

Notons à ce propos, bien que cela sorte du cadre strict de notre étude, que Σ n'est généralement présenté que comme un *outil* et non un *objet* d'enseignement (pour reprendre les termes de Douady 1984). Par exemple, il n'y a pas dans [DIX] (cours de mathématiques du Premier Cycle Universitaire) d'exposé synthétique des propriétés de:

$$\sum_{1 \leq i \leq n} x_i$$

qui est défini au début (§ 2.1.4), puis ne réapparaît que dans le chapitre concernant les polynômes, notamment dans l'égalité (5.1.15) qui concerne l'associativité de la multiplication:

$$\sum_{i+s=n} \alpha_i \left(\sum_{j+k=s} \beta_j \gamma_k \right) = \sum_{i+j+k=n} \alpha_i (\beta_j \gamma_k)$$

mentionnée telle quelle, sans explication, ce qui laisse supposer qu'elle va de soi dans l'esprit de son auteur. On ne trouve nulle part d'exposé systématique des propriétés de Σ , telle que la linéarité ou la relation de Chasles par exemple, qui devraient en toute rigueur être démontrées par récurrence. Ceci permet d'interpréter les difficultés de maniement et d'interprétation de ces opérateurs chez les étudiants, qui avaient été étudiées par J. Gossel†.

VII. LES PRODUITS

«Ce rôle distinctif du morphème zéro¹ n'a rien d'extraordinaire. Le grand linguiste suisse, Saussure, avait déjà constaté qu'il n'était pas toujours nécessaire de marquer "matériellement" un concept grammatical, car "la langue se contente de l'opposition entre quelque chose et zéro".» (Hajdú 1975)

VII.1. Introduction

Du point de vue de l'encombrement typographique, le point de produit est certainement la plus petite unité significative. Ce sont pourtant les relations syntagmatiques de cet objet minuscule avec les autres éléments terminaux qui sont les plus malaisées à décrire. Apparemment le problème est simple: le point (ou la croix²) est obligatoire entre deux entiers, pour éviter de confondre par exemple 43 avec le produit de 4 par 3. Nous allons montrer que les règles qui gouvernent l'absence ou la présence de ce point sont plus complexes qu'il n'y paraît et nous allons en proposer une modélisation. Nous montrerons alors que le point (ou la croix) ont trois fonctions différentes au sein des produits, que nous illustrerons.

Nous ferons au passage des remarques d'ordre méthodologique concernant l'emploi complémentaire de données empiriques issues d'un

¹ i. e. la suite vide ϕ

² dans tout ce qui suit nous parlerons indifféremment du point ou de la croix. Tout ce qui est dit de l'un s'applique à l'autre. Notons avec Cajori que la croix de saint-andré "x" apparaît pour la première fois chez William Oughtred en 1631. Le point a été introduit par G. W. Leibnitz en 1698, en même temps que les deux points ":" pour la division, dans le but d'éviter la confusion avec la lettre "x". On retrouve plus fréquemment la croix dans l'aire anglo-saxonne, où elle évite la confusion avec le point décimal.

$$\sum_{i=1}^n$$

mais ils n'apparaît pas au Collège lors de l'introduction à l'algèbre élémentaire. Il est présenté au plus tôt à la fin de la scolarité secondaire, et n'est réellement employé que dans l'enseignement supérieur.

Notons à ce propos, bien que cela sorte du cadre strict de notre étude, que Σ n'est généralement présenté que comme un *outil* et non un *objet* d'enseignement (pour reprendre les termes de Douady 1984). Par exemple, il n'y a pas dans [DIX] (cours de mathématiques du Premier Cycle Universitaire) d'exposé synthétique des propriétés de:

$$\sum_{1 \leq i \leq n} x_i$$

qui est défini au début (§ 2.1.4), puis ne réapparaît que dans le chapitre concernant les polynômes, notamment dans l'égalité (5.1.15) qui concerne l'associativité de la multiplication:

$$\sum_{i+s=n} \alpha_i \left(\sum_{j+k=s} \beta_j \gamma_k \right) = \sum_{i+j+k=n} \alpha_i (\beta_j \gamma_k)$$

mentionnée telle quelle, sans explication, ce qui laisse supposer qu'elle va de soi dans l'esprit de son auteur. On ne trouve nulle part d'exposé systématique des propriétés de Σ , telle que la linéarité ou la relation de Chasles par exemple, qui devraient en toute rigueur être démontrées par récurrence. Ceci permet d'interpréter les difficultés de maniement et d'interprétation de ces opérateurs chez les étudiants, qui avaient été étudiées par J. Grossel†.

VII. LES PRODUITS

«Ce rôle distinctif du morphème zéro¹ n'a rien d'extraordinaire. Le grand linguiste suisse, Saussure, avait déjà constaté qu'il n'était pas toujours nécessaire de marquer "matériellement" un concept grammatical, car "la langue se contente de l'opposition entre quelque chose et zéro".» (Hajdú 1975)

VII.1. Introduction

Du point de vue de l'encombrement typographique, le point de produit est certainement la plus petite unité significative. Ce sont pourtant les relations syntagmatiques de cet objet minuscule avec les autres éléments terminaux qui sont les plus malaisées à décrire. Apparemment le problème est simple: le point (ou la croix²) est obligatoire entre deux entiers, pour éviter de confondre par exemple 43 avec le produit de 4 par 3. Nous allons montrer que les règles qui gouvernent l'absence ou la présence de ce point sont plus complexes qu'il n'y paraît et nous allons en proposer une modélisation. Nous montrerons alors que le point (ou la croix) ont trois fonctions différentes au sein des produits, que nous illustrerons.

Nous ferons au passage des remarques d'ordre méthodologique concernant l'emploi complémentaire de données empiriques issues d'un

¹ i. e. la suite vide ϕ

² dans tout ce qui suit nous parlerons indifféremment du point ou de la croix. Tout ce qui est dit de l'un s'applique à l'autre. Notons avec Cajori que la croix de saint-andré "x" apparaît pour la première fois chez William Oughtred en 1631. Le point a été introduit par G. W. Leibnitz en 1698, en même temps que les deux points ":" pour la division, dans le but d'éviter la confusion avec la lettre "x". On retrouve plus fréquemment la croix dans l'aire anglo-saxonne, où elle évite la confusion avec le point décimal.

corpus et de l' "Intuition du Scripteur/Lecteur"³, en l'occurrence ici celle de l'auteur.

Commençons par regarder la présentation du produit dans divers manuels scolaires.

Si l'on regarde ce qu' ils indiquent, on découvre qu'il n'y a pas unanimité:

[B24]⁴ p.15

Écritures abrégées des produits

$a \times b$	s'écrit en abrégé	ab . (on écrit parfois aussi $a . b$.) ⁵
$x \times 5$	s'écrit en abrégé	$5x$, et jamais $x5$.
$4 \times (x + 3)$	s'écrit en abrégé	$4(x + 3)$ (...)
$(a + b) \times (c + d)$	s'écrit en abrégé	$(a + b)(c + d)$ (...)
$7 \times x^2$	s'abrège en	$7x^2$

[DL4] p.17

Il n'est pas nécessaire d'écrire le signe \times devant une lettre ou devant une parenthèse.

[MO5] p. 30

Attention !

$a \times b$ peut être noté $a . b$ ou, plus simplement, ab .

$3 \times a$ peut être noté $3 . a$ ou, plus simplement, $3a$.

³ terme construit par analogie à avec l' "intuition du Locuteur" de Chomsky

⁴ les références entre crochets renvoient aux manuels dont la liste figure en fin de bibliographie.

⁵ notons la présence dans la même écriture et avec la même typographie du point multiplicatif et du point final français !

3×5 peut être noté $3 . 5$ mais ne peut pas être noté 35 !

[MO6] p. 45

Lorsque les facteurs d'un produit p sont représentés par des lettres, par exemple a et b , il est souvent commode de noter⁶:

$p = a \cdot b$, ou même: $p = ab$.

On écrit: $6 \times 5 = 30$, ou encore: $6 \cdot 5 = 30$

On écrit: $3 \times a$, ou encore: $3 \cdot a$, ou encore: $3a$.

On n'écrit pas: 65 pour désigner le produit de 6 par 5 .

[MI4] p. 71

Le signe \times ne s'écrit pas en général:

- entre deux lettres: $x \times y$ s'écrit xy
- entre un nombre "connu" et une lettre: $-3 \times x$ s'écrit $-3x$
- entre une parenthèse et une lettre: $(x + y) \times z$ s'écrit $(x + y)z$
- entre deux parenthèses: $(x + y) \times (a + b)$ s'écrit $(x + y)(a + b)$
- entre un nombre "connu" et une parenthèse: $3 \times (x + y)$ s'écrit $3(x + y)$

Le livre du maître correspondant signale (p.6) que:

Nous avons redonné les principaux cas d'écriture où le signe \times est sous-entendu. Leur lecture n'est pas toujours simple pour certains élèves. Il n'est pas rare, en effet, de voir se transformer $2(5 - 3)$ en $2 + 5 - 3$. Il faudra être vigilant.

⁶ Dans cette édition il y a une différence typographique entre les points mathématique et français (que nous avons rendue par «.» et «»), mais elle est moins marquée).

VII.2. Cas d'omission du point ou de la croix.

Dans la mesure où une règle de réécriture du produit comporte toutes les catégories d'expressions à titre de facteurs (parenthésées ou non suivant leur degré de priorité) nous sommes donc obligé de nous poser la question de la possibilité de sous-entendre le signe \times avec toutes les combinaisons de catégories de facteurs. C'est là que les choses se compliquent: il est en effet très difficile de statuer de manière définitive sur l'acceptabilité de certaines combinaisons telles que:

$$\frac{a}{b} \frac{1}{2}$$

Nous avons mené une enquête auprès d'informateurs présumés compétents (des étudiants de DEA de Didactique des Mathématiques). Elle s'avère décevante dans la mesure où les uns jugent inacceptable ce que les autres estiment correct (v. plus bas).

Par ailleurs, les corpus que nous consultons s'avèrent muets ou contradictoires les uns avec les autres, et parfois même d'une ligne à l'autre d'un même texte, p. ex. [QU6] p. 69:

$$\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}$$

$$\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{ca}{b^2}$$

Pour résoudre ces difficultés il nous a fallu prendre un certain nombre de décisions théoriques, et tout d'abord renoncer à l'idée que les ESA présentent une structure unique.

Si l'on met à part les variations d'usage chez un même auteur, on remarque d'abord que d'un auteur à l'autre, des usages réguliers diffèrent. Les uns omettent presque systématiquement le point là où les autres le marquent toujours.

Dans la mesure où il y a régularité d'usages, notre situation est celle d'un linguiste qui tenterait d'établir la grammaire d'une langue à partir de données collectées auprès d'informateurs dont il découvre après coup qu'ils parlent des dialectes différents. Nous devons donc affiner notre hypothèse en posant que le système des ESA est structuré comme une langue qui présente des dialectes.

Comme ces dialectes ne sont pas corrélés à une entité territoriale, mais varient d'un individu à l'autre nous préférons employer le terme d'"idiolecte" (cf. Ducrot & Todorov 1972 p. 79), voire même plus généralement, le terme (moins répandu) de "lecte" forgé par A. Berrendonner).

«Je retiens ce terme, plutôt que celui de dia- ou d'idiolecte, pour éviter toute méprise et bien marquer, par l'absence de préfixe, que les variantes ne font l'objet d'aucun repérage par rapport à quelque donnée de communication que ce soit, et que, par conséquent, leur définition n'est nullement corrélationniste. Les lectes que je poserai ne seront assignés ni à un individu, ni à une catégorie sociale, ni à une aire géographique, ni à un genre particulier de communication. Ils seront étudiés "en soi", dans leurs purs rapports oppositifs à l'intérieur du système.» (1983 p. 20)

Nous pouvons ainsi considérer qu'il y a des usages qui diffèrent selon le "lecte" envisagé, et que notre tâche est de construire une grammaire qui puisse rendre compte, par le choix approprié de "paramètres", de ces différents usages. Nous nous rapprochons du coup de ce que Berrendonner (ibid.) qualifie de "grammaire polylectale". C'est ce que nous qualifions de grammaire "adaptable".

En réalité, le mot "paramètre" n'est choisi que pour sa puissance évocatrice, mais il présente une connotation numérique qui nous semble hors d'atteinte. Une syntaxe **adaptable** est pour nous une syntaxe dont la structure de la partie génératrice peut être aisément modifiée afin de rendre compte des données d'observation ressortissant à chaque usage. Nous pensons que ce but ne peut être atteint que si les (méta)règles de construction de la grammaire sont accessibles, d'où notre insistance portée sur la "clarté" et l'élucidation des démarches qui sont à l'origine de notre travail. Mais qu'on ne s'y trompe pas: nous partageons avec N. Chomsky (1971) la conviction qu'il n'y a pas d'algorithme permettant d'associer

automatiquement à des données une grammaire. L'“adaptation” de la grammaire devra être à chaque fois un travail d'invention original. Nous souhaitons pouvoir le faciliter, mais certes pas l'automatiser.

Retrouvant par la même occasion une perspective “dialectale” au sens géographique du terme, cette notion de grammaire adaptable nous permet maintenant de rendre compte de variations d'usage entre aires culturelles, telles que le point décimal, le $3\frac{1}{2}$ ou l'usage pour désigner la division du “:” (Europe et Amérique Latine) ou du “+” (Grande-Bretagne, ex-dominions britanniques et USA) (v. Cajori)⁷.

La première réponse que nous apportons aux variations entre données expérimentales est donc de nous contenter d'un informateur à la fois et de nous astreindre à ne décrire que son lecte. Toutefois cela ne règle pas tous les problèmes, aussi allons-nous préciser un point de méthode.

VII.3. Intuition du Locuteur et Corpus.

Nous avons vu au chapitre IV le cas des expressions grammaticales mais ambiguës ou non définies. Nous sommes maintenant confronté à une autre difficulté, celle des expressions compréhensibles mais dont il est difficile de déterminer la grammaticalité (“charabia”). Dans notre idiolecte par exemple, le produit:

$$\frac{1}{2}3$$

est compréhensible mais pas acceptable, faute de «x». En principe, il y a deux manières d'aborder le problème de la grammaticalité de ce type d'expressions: soit on regarde si elles sont attestées dans un corpus, soit on recourt à ce que Chomsky appelle l'“intuition du locuteur”, et qui repose sur

⁷ par rapport à l'étude de Cajori (1928) qui montrait une stricte localisation des notations, le “+” se répand actuellement avec les calculettes.

la connaissance intime et intuitive qu'a de cette langue et de sa structuree celui qui la parle.

VII.3.1. Les corpus et leurs limites

Pour régler le problème des expressions de grammaticalité douteuse, on peut chercher à constituer un corpus et voir si elles y figurent.

«La grammaire descriptive d'une langue s'établit à partir d'un ensemble d'énoncés qu'on soumet à l'analyse et qui constitue le corpus de la recherche.» (Dubois et al. 1973).

Toutefois il est plus difficile qu'il n'y paraît de prime abord de trouver un corpus qui soit simultanément:

- homogène (pour qu'il n'y ait pas d'incohérences dues à des variations d'usages entre différents auteurs par exemple),
- vaste (pour qu'il y ait de nombreuses variantes des mêmes structures),
- diversifié (pour qu'on y trouve de nombreuses structures différents),
- et centré sur notre domaine (l'algèbre)

pour permettre de construire une grammaire qui ait un certain degré de généralité. Un chapitre de manuel de collège par exemple (voire même l'ensemble des chapitres d'algèbre d'un manuel) est loin d'être assez vaste pour notre dessein.

Si l'on considère les expressions employées à un niveau donné (par exemple en fin de classe de 4^{ème}) on déborde très rapidement du domaine de l'algèbre. Même en se limitant, dans les ouvrages, aux chapitres concernant l'algèbre⁸, on trouve par exemple des notations ensemblistes (avant les

⁸ ce qui pose des problèmes, dans la mesure où il n'est pas interdit de penser que les écritures symboliques tirées d'autres registres que l'algèbre (la géométrie, les vecteurs ...) influencent la perception qu'ont les élèves des écritures symboliques de l'algèbre, d'autant plus quand les structures en sont proches (cas des vecteurs).

programmes de 1988) ou à leur place, après 1988, tout un fatras de notations (symbolisation de calculs sur calculette, nombres avec unités de mesure) qui témoignent de la

... pulsion empiriste (...), [qui] se traduit dans le reste du cursus du collège, par une poussée vigoureuse du numérique, par l'éparpillement et l'évanouissement de l'apprentissage des outils algébriques (...) c'est dans la seconde rubrique ["travaux numériques"] qu'il faut chercher les x et les y du langage algébrique. Ceux qu'on a bien voulu y laisser survivre y vivent cachés; et leur rare présence semble n'être que le simple effet de cette extravagante générosité de l'empirisme naturaliste qui, se mâtinant de baroque, est enclin à faire fleurir des êtres qui lui sont et apparemment inutiles, et naturellement indifférents. (Y. Chevallard 1989 pp. 43-44)

Inversement si nous tentons de nous limiter à certains thèmes présents dans les livres (par exemple les écritures concernant la factorisation en 3ème), on obtient dans ce cas des corpus extrêmement pauvres, dépourvus par exemple de fractions ou de radicaux.

«dans l'enseignement du premier cycle, les expressions algébriques incorporant le signe $\sqrt{\quad}$ sont rarissimes en dehors du chapitre où il est traité de $\sqrt{\quad}$ - précisément.» (Tonnel 1979 p. 57).

En outre, ce sont en général les expressions les plus incertaines pour l'intuition du scripteur-lecteur qui sont absentes des corpus! Ces corpus limités, issus d'un découpage par niveau des domaines, sont donc largement **insuffisants** pour fournir une base de travail à notre grammaire et régler les cas litigieux⁹. Nous nous sommes donc tourné vers notre "intuition de locuteur".

VII.3.2. L'intuition du locuteur et ses limites

VII.3.2.A. La notion d'intuition du locuteur chez Chomsky

«Pour la grammaire générative, l'intuition des sujets parlants fournit des données dont une grammaire doit rendre compte (par exemple, les jugements que les

sujets doivent porter sur la grammaticalité des phrases, etc.)» N. Ruwet (1967) p. 371.

Chomsky préconise le recours systématique à cette "intuition" en réaction aux limitations des corpus:

«une phrase grammaticale n'est pas la même chose qu'un énoncé observé dans un corpus. Rappelons deux raisons qui imposent cette distinction. Tout d'abord, un corpus, aussi vaste qu'il soit est toujours, par définition, fini. Or les linguistes ont en général admis qu'une grammaire devait être capable de prédire, à partir d'observations en nombre nécessairement limité, un nombre indéfini de phrases qui ne figurent pas dans ces corpus, et qui cependant, si elles viennent à être émises, seront considérées par les sujets parlants comme faisant partie de la langue (c'est-à-dire comme grammaticales). En d'autres termes, une bonne grammaire doit être capable de "projeter le corpus fini et toujours plus ou moins accidentel des énoncés observés sur l'ensemble (présupposé infini) des phrases grammaticales" (Chomsky 1969).

(...) Un corpus comprend généralement, dans une très grande proportion parfois, et abstraction faite même des variations stylistiques et dialectales, toutes sortes de choses - fautes d'inattention, lapsus, répétitions, hésitations, phrases inachevées - dont les sujets parlants, alors même qu'ils les ont produites, sont prêts à admettre l'"incorection". (...) Notons qu'on ne change pas la nature du problème en augmentant la taille du corpus (...) Quant à prétendre qu'il faut recourir seulement à des corpus représentatifs, cela revient, encore une fois, à commettre un cercle vicieux. Car, au nom de quoi décidera-t-on qu'un corpus est représentatif, si ce n'est au nom d'une certaine hypothèse relative à la structure grammaticale et à la grammaticalité?» (ibid. p. 37).

Nous partageons le point de vue de Chomsky selon lequel une étude de la langue ne peut ignorer les données de l'intuition de celui qui la possède, et nous avons donc décidé de nous référer, en matière de grammaticalité des ESA, à notre propre jugement.

Précisons que, travaillant sur une langue écrite, nous parlerons dorénavant de "Scripteur¹⁰-Lecteur" au lieu de "Locuteur-Auditeur".

⁹ Pour autant, cette collecte de donnée est pleine d'enseignements, surtout dans une perspective didactique. Elle permet par exemple de débusquer l'introduction furtive de notations qui n'ont pas été explicitement introduites auparavant.

¹⁰ Catach (1988)

VII.3.2.B. La notion d'algébriste compétent

La question qui se pose alors est de savoir qui, en algèbre, est réputé "compétent" pour juger? Le système des ESA n'est en effet la langue maternelle de personne (heureusement!). Nous sommes donc dans le cas d'une "seconde langue", apprise sur le tard par tous ceux qui la pratiquent.

«A thorny problem which can arise in relation to inter-individual errors is the identifying of competent algebraists. In the natural language paradigm, all normal adults within a language community are taken to be fluent speakers. This is clearly not the case for algebraic language (...)» Kirshner (1987a p. 35).

Ceci dit, on constate qu'à partir d'un certain niveau mathématique, il y a intercompréhension sur l'algèbre élémentaire, en ce sens que la communication entre les individus n'est pas entachée d'ambiguïtés ou de contresens qui résulteraient de différences de codages (que les individus se comprennent pleinement au niveau de la signification des énoncés est un autre problème).

La question du niveau mathématique est tout de même importante: Cl. Gautier (1984) a montré comment des écritures telles que:

$$2 + 1 = 3 \times 4 = 12$$

pouvaient subsister assez longtemps chez des élèves aux performances par ailleurs satisfaisantes.

Pour nous, l'algébriste compétent est typiquement le **professeur** (ou n'importe quel mathématicien professionnel), mais ce peut être également un élève, à condition qu'il ait dépassé depuis longtemps et avec succès le niveau de l'algèbre élémentaire. Nous rejoignons entièrement la position de Kirshner qui parle de "fluent algebraist":

«The grammatical sentences are defined simply to be such sentences as would normally be produced by persons who have fluent mastery of the language. The term "algebraist" will refer, throughout, to one who is fluent in the correct manipulation of algebraic symbols. Students, teachers, scientists, mathematicians or just members of the general public may be algebraists in this sense.» Kirshner (1987a p. 31).

VII.3.2.C. L'intuition du scripteur-lecteur s'use si l'on s'en sert

Néanmoins, le recours à l'intuition du scripteur-lecteur pour déterminer la grammaticalité d'une ESA est limitée par des phénomènes d'"usure". Pour revenir à notre exemple, le produit:

$$\frac{1}{2} 3$$

est-il grammatical ?

Initialement nous considérons que cette expression n'était pas, à notre avis, acceptable. Après réflexion il nous a semblé toutefois qu'elle pouvait l'être, puisqu'elle n'était pas ambiguë et ne pouvait réellement prêter à confusion. Toutefois, il restait la possibilité qu'elle soit écrite en "charabia" c'est-à-dire compréhensible mais mal formée. Arrivé à ce point, notre propre intuition du scripteur-lecteur ne nous était plus d'aucun secours.

Pour nous faire une opinion, nous avons mené deux **enquêtes** et soumis ce problème à un certain nombre d'algébristes réputés compétents (des étudiants et des enseignants du DEA de didactique des mathématiques de Paris 7). Les résultats (reportés en Annexe) sont décourageants dans la mesure où cette expression est jugée:

- choquante par 40% des informateurs
- non-choquante (ou "correctement écrite") par 60% d'entre eux
- compréhensible par 80% des informateurs
- non-compréhensible par 20% des informateurs
- utilisée par 30% des informateurs
- non-utilisée par 50% des informateurs (20% de non-réponses)

Les pourcentages sont extrapolés à partir des réponses de 21 informateurs, et n'ont donc pas de sens à moins de 5 points près. Ces

enquêtes avaient une valeur exploratoire et ne prétendent pas à une quelconque fiabilité statistique. Il n'en demeure pas moins qu'elles établissent clairement, sauf à considérer que les étudiants et les enseignants de didactique sont incompetents en matière de maniement de l'algèbre élémentaire, que l'acceptabilité de $\frac{1}{2} \cdot 3$ est au moins douteuse, au contraire du produit:

$$\frac{2}{7} c$$

lequel est accepté et compris par la totalité des vingt-et-une personnes interrogées.

En pratique, les jugements d'acceptabilité présentent donc une variabilité inquiétante avec le temps ou l'informateur. En outre, au fur et à mesure que l'on travaille sur certaines expressions, elles deviennent familières, au point qu'on finit par les estimer moins inacceptables qu'au début! Là comme ailleurs, l'observation influe sur le phénomène à observer. Chomsky lui-même signale les limites du recours à l'intuition du locuteur dans la remarque paradoxale suivante (1971 p. 38):

«Bien qu'il n'y ait aucun moyen d'éviter l'hypothèse de travail traditionnelle qui fait de l'intuition linguistique du locuteur-auditeur l'étalon suprême déterminant la correction de toute grammaire, de toute théorie linguistique ou de tout test opératoire que l'on propose, il faut souligner une fois encore que cette connaissance implicite peut fort bien n'être pas à la disposition immédiate de l'utilisateur de la langue.»

Cela laisse certes une place au recours à des procédures "non-immédiates" pour appréhender cette intuition; mais Hagège (1976 p. 196) montre bien qu'on ne dispose guère de mécanismes fiables pour ce faire et que les jugements de grammaticalité établis par les linguistes générativistes eux-mêmes sont relativement fluctuants ou discutables.

«dès qu'il s'agit de phrases un peu plus complexes que *the man hit the ball*, les intuitions, d'un linguiste à l'autre, risquent de connaître des écarts considérables.»

En résumé nous dirons que les données de l'ILS sont tout à la fois peu fiables et irremplaçables. Tout ceci fait qu'on est embarrassé si on veut

baser sa grammaire sur les seules données de l'intuition du scripteur-lecteur. Il est alors fort appréciable de pouvoir régler un certain nombre de cas litigieux par le recours complémentaire aux données d'un corpus.

VII.3.2.D. Relativisation de ces limites

Il nous faut relativiser l'importance pratique de la plupart des problèmes d'acceptabilité. Chacune de ces expressions douteuses, par exemple:

$$x \frac{1}{2}$$

peut être remplacée par une expression synonyme¹¹ qui ne pose pas de problème d'acceptabilité, obtenue en insérant une croix:

$$x \times \frac{1}{2}$$

ou bien en commutant les facteurs:

$$\frac{1}{2} x$$

C'est ce que fait le scripteur compétent dans la production courante (performance) des expressions algébriques: il tend à éviter les expressions douteuses au profit de leurs synonymes pleinement acceptables¹². C'est en particulier ce que font les informateurs de nos enquêtes, à qui nous demandions systématiquement quelles expressions synonymes ils employaient lorsqu'ils n'utilisaient pas l'expression douteuse proposée.

¹¹ i. e. ayant une même dénotation (ch. X)

¹² Cf. la remarque de Hagège(1976 p. 77):

Le traitement d'un énoncé comme *Qui a rencontré Pierre ?*, où *qui* serait objet (inacceptable pour Ruwet, compréhensible mais évité dans mon français)» (c'est nous qui soulignons).

Ceci nous permet d'interpréter la rareté des expressions qualifiées de "douteuses" (d'après notre intuition du scripteur-lecteur) dans le corpus que nous avons analysé (v. en annexe). Cette hypothèse ne diminue pas l'importance théorique des choix à faire concernant l'acceptabilité des expressions litigieuses: la question doit nécessairement être tranchée dans un sens ou dans l'autre. Elle limite simplement les **conséquences** pratiques (sur la performance) des choix théoriques (sur la compétence) que nous aurons effectués, car ces choix ne concernent précisément que les expressions qui ont le moins de chances d'être écrites ou lues.

VII.3.3. Complémentarité des approches

VII.3.3.A. La fausse opposition entre corpus et intuition du scripteur-lecteur

Après tout, si Chomsky montre qu'on ne peut se contenter des seuls corpus, il ne dit nulle part qu'on devrait se priver des données qu'ils fournissent. La possibilité de faire appel à un corpus est même inscrite dans la phrase suivante:

«Bien évidemment, les **données effectives de la performance linguistique**, en conjonction avec des renseignements introspectifs (donnés par le sujet parlant ou par le linguiste ayant appris la langue), fourniront beaucoup d'indices pour déterminer la validité des hypothèses concernant la structure linguistique sous-jacente. C'est là une position universellement adoptée dans la pratique, bien que certaines discussions méthodologiques semblent témoigner d'une répugnance à utiliser les **observations de la performance**¹³ ou les renseignements introspectifs pour approcher la réalité sous-jacente.» (Chomsky 1971 p. 35)

La question de savoir quel usage Chomsky lui-même fait des données de la performance et sous quelle forme il les recueille reste évidemment entière. Quoi qu'il en soit, notre propos n'est pas de nous livrer à un commentaire de texte pour savoir si le fondateur de la grammaire générative autorise ou non ses épigones à utiliser les données d'un corpus.

¹³ c'est nous qui soulignons

Nous voulons simplement mettre en évidence qu'il n'y a pas d'incohérence théorique à vouloir utiliser intuition du scripteur/lecteur et corpus.

VII.3.3.B. Le corpus auquel nous nous référons

J'ai eu la chance de trouver un cahier de brouillon qui m'avait servi, quelques années avant ce travail de thèse, à mettre au point des exercices destinés aux élèves des classes (4ème et 3ème) où j'enseignais. Ce corpus est relativement vaste (250 ESA de toutes tailles et de tous types sur 35 pages), diversifié (il couvre une année), centré sur l'algèbre (il n'y a que quelques expressions analytiques ou ensemblistes, qui n'ont pas été prises en compte) et homogène (puisque j'en étais le seul auteur). En outre j'étais présumé "compétent" en algèbre élémentaire (en tant qu'enseignant à titre officiel dans un établissement public).

Par dessus tout, (remarque d'ordre personnel, mais qui est en l'occurrence essentielle) je n'avais pas encore entamé d'études de linguistique, et en particulier pas commencé à étudier la grammaire des ESA, ce qui permet de poser que ce corpus est "naïf", vierge de toute influence perturbatrice liée à la pratique de l'introspection linguistique, ce qui n'est plus le cas de mon intuition de scripteur-lecteur actuelle!

VII.3.3.C. Priorité de l'intuition du scripteur-lecteur sur les données du corpus

En résumé, nous travaillons prioritairement avec l'intuition du scripteur-lecteur parce que nous ne cherchons pas à établir la grammaire particulière d'un usage particulier (qui nous serait donné par un corpus) mais une grammaire générale adaptable à divers usages particuliers. Pour cela, l'intuition du scripteur-lecteur se révèle un instrument d'une souplesse incomparable. Nous avons recours au corpus comme une aide lorsque l'intuition du scripteur-lecteur se révèle inopérante.

VII.4. Les trois fonctions du point (ou de la croix)

Revenons maintenant aux emplois du point de multiplication.

La décomposition de la structure linguistique en lectures et le recours aux données issues de corpus ne résolvent donc pas tous les problèmes, en particulier à cause de limitations des corpus et du fait qu'il y a toujours des cas douteux sur lesquels ils sont muets. Par ailleurs, considérer que le point est obligatoire dans certains cas et facultatif dans d'autres ne fait que déplacer les difficultés sans les résoudre vraiment: facultatif ne veut pas dire aléatoire, et on est en droit de se demander si $a \times b$ est rigoureusement synonyme de ab , et sinon quelle est la différence¹⁴. Après tout, s'il y a d'autres symboles qui apparaissent sous différentes formes¹⁵ (par exemple "/", ":" et "+" pour la division ou ")", "}" ou "]" pour les parenthèses), la croix et le point sont bien les seuls qui peuvent être remplacés par la suite vide (\emptyset), ce qui est quand même assez particulier.

Qu'est-ce qui peut bien justifier les variations d'usage dans les exemples suivants ([PEM] p. 51) ?

$$12u - 18v = 2 \cdot 3 \cdot (2u - 3v)$$

$$2(2u + 3v)$$

Ces questions d'écritures facultatives ne nous écartent pas de notre sujet, qui est la détermination de la grammaticalité d'expressions douteuses absentes du corpus. Si ces expressions sont douteuses, c'est précisément parce qu'il nous semble que dans certaines circonstances le point est nécessaire, et dans d'autres non. Nous pouvons réinterpréter ceci en disant que le point est facultatif dans ces produits litigieux, car quand il est

obligatoire (comme entre les constantes 2 et 3) l'agrammaticalité de ces produits sans point (ex: *23) ne fait pas de doute¹⁶.

Au vu des données que nous avons recueillies et que nous exposerons maintenant, nous proposons l'hypothèse suivante: l'occurrence du point facultatif est déterminé par trois fonctions possibles: désambiguïsation, séparation et mise en relief de la multiplication interne.

VII.4.1. Première fonction du point: lever les ambiguïtés

VII.4.1.A. Premier cas: le second facteur est une constante

C'est le cas d'un produit dont le second facteur est une constante (2) ou commence par une constante (2y, 2³).

a) Si le premier facteur est une constante (3) ou finit par une constante ($\sqrt{3}$) le point évite le risque de confusion avec la construction des nombres entiers par juxtaposition:

- * 32
- * 32y
- * 32³
- * $\sqrt{3}2$
- * $\sqrt{3}2y$
- * $\sqrt{3}2^3$

Dans les trois derniers cas, la barre horizontale est censée prévenir l'ambiguïté. Toutefois, la longueur de cette barre n'est pas toujours suffisamment discriminante. De fait n'avons nous trouvé aucune occurrence de ces trois cas.

On trouve un bel exemple de cet usage du point dans [HL1] p. 105:

$$2^5 + 2 \cdot 2^4 \sqrt{2} + 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^3 \sqrt{2} + 5 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 \sqrt{2} + 5 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 2 + 1$$

¹⁴ Il est à remarquer que le recours des grammaires Chomskyennes à des règles "facultatives" soulève de vives critiques de la part de Hagège(1976 p. 204 sqq.) aussi bien que de Berrendonner (1983)

¹⁵ ou pour s'exprimer plus rigoureusement s'il y a d'autres paradigmes de symboles qui ne sont pas réduits à des singletons

¹⁶ "*23" est grammatical, mais en tant que constante (exprimant le nombre 23) et pas en tant que produit (exprimant le nombre 6).

b) Cas où le premier facteur n'est pas (ou ne finit pas par) une constante, et n'est pas mis entre parenthèses $\left(x, \frac{1}{x}, (ax+b)\right)$

- * x^2
- * x^2y
- * x^2^3
- * $\frac{1}{x}^2$
- * $\frac{1}{x}^2y$
- * $\frac{1}{x}^2^3$

Il n'y a pas dans ce cas de risque de confusion avec la concaténation des constantes. L'interprétation que nous proposons est le risque de confusion à l'oral avec l'exponentiation.

c) Cas où le premier facteur est mis entre parenthèses.

- ? $(ax+b)^2$
- ? $(ax+b)^2y$
- ? $(ax+b)^2^3$

Il semble que l'acceptabilité de ce produit juxtaposé dépende assez fortement du contexte, voire de la situation d'écriture. Personnellement, nous n'avons jamais écrit de tels produits lors de calculs "au propre" (dans des corrigés polycopiés par exemple) mais il nous est arrivé d'en employer dans des calculs au brouillon, alors qu'il n'y avait pas de risque d'ambiguïté (il n'était question que de produits et pas de carrés ou de cubes). Cela ne contredit pas notre hypothèse. Si le point a pour fonction de lever l'ambiguïté, sa présence dépend du risque de confusion, qui n'est pas défini dans l'absolu mais dépend du contexte. On ne s'impose pas la même rigueur (i.e. le même niveau d'ambiguïté tolérée) au brouillon où l'on "se comprend" et dans un texte destiné à d'autres.

Pour ce qui est de la génération des expressions, nous considérerons que nous avons l'équivalent de "niveaux de langues" (au brouillon/au

propre) qui sont autant de lectures engendrés par des variantes de la grammaire. Au brouillon le point est facultatif, au propre il est obligatoire.

VII.4.1.B. Second cas: "nombres fractionnaires"

L'autre ambiguïté à éviter est celle du "nombre fractionnaire" (A. Harlé 1984 p. 63) de type $3\frac{2}{3}$, encore actuelle dans le monde anglo-saxon et archaïque ("nombre brisé") en France¹⁷, dont la structure additive est en conflit avec l'interprétation multiplicative de la juxtaposition.

Les deux cas que nous venons de voir alourdissent considérablement le paradigme de la multiplication. En effet, comme nous l'avons vu au chap. V, on ne peut soumettre la règle de réécriture du produit à une restriction du type "sauf si le premier facteur est une constante et le second une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des constantes". Il faut choisir soigneusement les paradigmes de façon que, lorsque Cst figure dans le paradigme du premier facteur, Cst\Cst ne figure pas dans celui du second, etc.

VII.4.2. Deuxième fonction du point: ponctuation Séparante

Considérons les trois exemples (ad hoc) suivants:

$$ab \cdot (c - d) = ab \cdot c - ab \cdot d$$

$$ab \cdot (c - d) = abc - abd$$

$$ab \cdot (c - d) = a \cdot bc - a \cdot bd$$

Ces trois égalités sont équivalentes, et même à première vue structurellement identiques (même arbre). Pourtant la troisième est moins "naturelle" que les deux autres. Au-delà de sa dénotation, elle attire notre

¹⁷ citons à titre de curiosité l'écriture mixte " $3\frac{1}{2}$ " tracée par un ouvrier du bâtiment anonyme (mais récent) sur une paroi provisoire en plâtre, ou encore le prix figurant sur les tickets du métro de Montréal en 1992 sous la forme: " $1.08 \frac{1}{3} \$$ ", correspondant à 6 tickets pour 6,50 \$ (voir photocopie en annexe).

attention sur le premier facteur a qui se trouve distingué par rapport à b et c qui se retrouvent en quelque sorte au même niveau.

Ce phénomène se retrouve dans les exemples tiré de [PEM] p.55:

$$(3a)^3 = 3a \cdot 3a \cdot 3a = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot a = 3^3 a^3 = 27 a^3$$

et de [QU6] p. 59:

$$\frac{1}{2\sqrt{2px_0}} 2p$$

La forme de ce produit suggère que le facteur 2 est plus "lié" à p qu'à:

$$\frac{1}{2\sqrt{2px_0}}$$

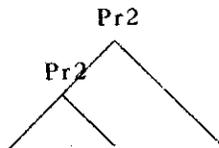
Pour rendre compte de cette intuition, nous proposons l'hypothèse suivante:

Dans un produit de trois facteurs, si les deux premiers facteurs sont juxtaposés, et séparés du troisième par un point, p , ex:

$$2 a \cdot b$$

alors les deux premiers facteurs sont unis au sein d'une sous-structure qui est dominée par la structure de produit.

Structurellement cela correspond à l'arborescence suivante ("Pr2" est le symbole de la catégorie "Produit de 2 facteurs"):



La sous-structure dont dérive $2 a$ se trouve en position d'opérande (facteur) par rapport à la structure globale de produit, ou en d'autres

termes, est en position prioritaire. Cela a pour conséquence que le point qui sépare $2 a$ de b joue le rôle d'une paire de parenthèses autour de $2 a$.

Nous tenons là la clé de notre problème: lorsque le point n'est pas obligatoire (comme entre deux chiffres) il a une fonction de parenthésage: c'est ce qu'on appelle la ponctuation séparante.

Citons H. Freudenthal (1980 p. 910):

«Dans le passé, il y a eu des essais notationnels de structure par séparation. Stevin (1585) employait $/$ comme séparateur. On trouve des points et des colons¹⁸ séparateurs chez M. Rudolff (1525) (...) Même chez L. Euler et J. L. Lagrange il existe de telles notations.»

En fait, Cajori (1928) a établi que le point (ou la virgule), utilisé comme séparateur, a précédé de deux siècles l'usage général des parenthèses. Avant le XVIII^{ème} siècle, celles-ci étaient plutôt employées pour noter les incises dans le discours.

Il donne en exemple la valeur du côté d'un polygone régulier de 128 côtés inscrit dans un cercle de rayon 1, établi en 1605 par le Hollandais C. Debuadius:

$$\sqrt{.2} - \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2} + \sqrt{.2}$$

ce qui donne avec nos notations actuelles:

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}$$

De même, Leibnitz écrit en 1702:

$$c-b, d-b, l$$

pour:

¹⁸ sans doute H. Freudenthal veut-il parler des deux-points

Cet exemple est intéressant car la virgule séparante exprime ici une multiplication. Cajori a remarqué que les ponctuations séparantes avaient connu un regain de faveur au XX^{ème} siècle et cité Peano qui écrivait en 1902:

$$ab.cd : e.fg \therefore hk.l$$

pour:

$$[[(ab)(cd)][e(fg)]] [(hk)l],$$

remarque reprise par Freudenthal¹⁹ (1980):

Des ponctuations séparantes seraient plus économiques et plus faciles à embrasser d'un seul coup d'œil. B. Russel et A.N. Whitehead ont employé d'une manière presque exclusive les ponctuations séparantes dans leurs *Principia Mathematica*. Au lieu de parenthèses de force agrégante graduée, on écrirait des séparateurs de force graduée. Les ponctuation des *Principia Mathematica* sont des groupes de points: tel groupe sépare d'autant plus fortement qu'il compte plus de points.»

En algèbre élémentaire nous n'avons qu'une seule force de séparation, marquée par le point ou la croix. Au-delà, il faut utiliser les parenthèses. Nous avons donc un système mixte à base de ponctuation séparante et de parenthèses.

L'exemple introductif nous paraît révélateur de la fécondité de cette hypothèse de la fonction séparante du point:

$$12 u - 18 v = 2 . 3 . (2u - 3v)$$

$$2 (2u + 3v)$$

Dans la première égalité, le premier point du second membre est rendu nécessaire par la présence de deux chiffres. Le second point semble a priori inutile puisque la deuxième ligne montre que l'usage de l'auteur ne

¹⁹ orfèvre en la matière puisqu'à l'origine d'une proposition de système d'écritures mathématiques intitulé "lincos"

Dans la première égalité, le premier point du second membre est rendu nécessaire par la présence de deux chiffres. Le second point semble a priori inutile puisque la deuxième ligne montre que l'usage de l'auteur ne requiert pas de point entre une constante et une expression mise entre parenthèses. Or si on supprime ce second point on obtient:

$$12 u - 18 v = 2 . 3 (2u - 3v)$$

expression où, selon notre hypothèse, les facteurs 2 et 3 ont des places hiérarchiques différentes. Or ces deux facteurs sont également facteurs communs de

$$12 u$$

et de

$$18 v ,$$

l'auteur ne pouvait donc marquer ce rôle identique qu'en rajoutant un deuxième séparateur entre 3 et

$$(2u - 3v)$$

de façon à éviter toute priorité d'un produit sur l'autre.

VII.4.3. Troisième fonction du point: emphase sur le produit

Là où le point (ou la croix) n'est requis ni en tant que ponctuation séparante ni pour désambiguïser des écritures,

«...la question est de rendre compte de cette double expression, et de voir si elle signifie emploi libre et arbitraire ou au contraire si elle reflète une différence et laquelle.» (Benveniste 1966 p. 161²⁰)

Nous émettons l'hypothèse que la présence du point attire l'attention du lecteur, en raison même du fait qu'il n'est pas obligatoire, sur le fait que

²⁰ au sujet de la phrase nominale

l'expression a une structure de produit. Dans l'exemple suivant, tiré de [PEM]:

$$a = b \cdot q_1 + r_1$$

$$b = r_1 \cdot q_2 + r_2$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n$$

$$r_{n-2} - r_{n-1} \cdot q_n$$

l'accent nous semble mis, dans les deux premières égalités, sur le fait que le premier terme du deuxième membre est un produit. Dans les deux dernières égalités cette mise en évidence disparaît, peut-être au profit des questions d'indice.

Nous avons un indice en faveur de cette hypothèse avec le fait que, dans les chapitres où sont présentées les propriétés de la multiplication, les croix sont beaucoup plus fréquentes que dans les chapitres ultérieurs. Un exemple de présentation est donné dans [PEM] p. 45:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

Précisons ce que nous entendons par "emphasis mise sur le produit". Historiquement, la juxtaposition précède la croix ou le point (Freudenthal 1980 p. 910) à cause de l'analogie entre la multiplication et la "dénomination" (2×6 c'est deux sixaines). Sur le plan de la structure linguistique, nous pouvons considérer qu'il y a deux opérations multiplicatives qu'on pourrait qualifier respectivement d'externe:

$$2x$$

et d'interne

$$2 \times x,$$

l'opération externe provenant de la "dénomination" d'origine historique (exprimant un dénombrement de quantités). Cela permet d'interpréter la dissymétrie entre

$$2x$$

et

$$* x 2$$

autrement qu'en termes de confusion avec la lecture orale des puissances. La "multiplication" externe en effet, conçue comme **dénombrement de quantités**, n'est évidemment pas commutative, en ce qu'elle suit la structure du français où l'adjectif numéral cardinal précède l'objet dénombré (on dit *deux vaches* et non **vaches deux*) (Dubois et al. 1973), contrairement à la multiplication "interne" usuelle dont les deux facteurs sont de même nature. Les algèbres à diviseurs sont un cadre mathématique convenable pour modéliser ces deux multiplications.

De la même façon, cela permettrait d'interpréter le fait qu'on ne puisse juxtaposer des nombres entiers pour les multiplier. Il est en effet difficile d'énumérer des numéraux (*j'ai deux "deux" et deux "trois"*) sans qu'une marque (par écrit, les guillemets) ne vienne mettre les numéraux sur des plans différents, celui du discours et celui du métadiscours. Par exemple:

La phrase « deux et deux font quatre, trois et trois font six » comporte deux "deux" et deux "trois"

Didactiquement, un modèle qui assigne deux catégories distinctes aux opérateurs multiplicatifs ouvre des pistes de recherche intéressantes quant à la signification qu'attribuent les élèves aux écritures qu'ils manipulent. Au-delà de la rituelle condamnation des

«abus didactiques ($2a + 3a = 5a$ parce que 2 vaches + 3 vaches = 5 vaches)»

(H. Freudenthal *ibid.*)

on peut envisager qu'il y a, après tout, une légitimité, tant historique que structurelle, à dénombrer **dans les faits** les x comme des vaches, et qu'il est plus productif de faire prendre conscience aux élèves du domaine de validité de ce type d'interprétation que de vouloir l'extirper.

Je ne prétends nullement qu'il faudrait réhabiliter l'enseignement de la multiplication telle qu'on la présentait jusque vers 1930 (au moins, en distinguant multiplicateur "abstrait" et multiplicande "concret" (Harlé 1984 p.113). J'estime simplement que tout didacticien doit sans cesse veiller à exterminer le Bourbakiste qui sommeille en lui (de par sa formation) pour lequel le dénombrement des "x" n'a rien à voir avec l'algèbre, s'il veut espérer comprendre quelque chose aux représentations que se fait l'élève de l'algèbre.

En résumé, nous pouvons considérer que la troisième fonction du point consiste à marquer le fait que le produit est interne, ce qui apparaît dans la différence entre "2x" et "2.x". Il faut noter que les trois fonctions s'appliquent au point multiplicatif dans un certain ordre. Le point a pour fonction première de lever les ambiguïtés, quand il n'y en a pas il joue le rôle d'une ponctuation séparante, et enfin quand il n'y a rien à agréger (par exemple quand il n'y a que deux facteurs) il marque le fait que l'opération exprimée est la multiplication interne plutôt qu'externe.

VII.5. La notion de pseudo-monôme (Môn)

Reste à donner une formulation qui permette de traduire l'hypothèse de la fonction séparante de la ponctuation en termes de règles génératives. Pour ce faire, nous avons recouru à une analogie naturelle avec le domaine des polynômes. Nous avons donc rajouté à notre modèle une nouvelle catégorie, que nous avons baptisée "Pseudo-Monôme (de n facteurs)" et notée en abrégé $M\delta_n$. La dénotation (v. chap. X) de cette nouvelle catégorie est celle du produit (autrement dit une forme k-linéaire avec $k \leq n$), mais les facteurs du pseudo-monôme sont juxtaposés. Les paradigmes des facteurs sont les mêmes que pour le produit, hormis les limitations spécifiques qui interdisent par exemple que 23 , 3_3^2 ou 42^5 soient des produits.

VII.5.1. Pseudo-Monôme de n facteurs (n>1)

$$M\delta_n = \left\{ \begin{array}{l} (Ide) \\ \dots \\ (Pro) \\ \dots \\ (VAb) \\ Fra \\ Pui \\ Rac \\ Cst \\ Cli \\ Var \\ VAb \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} (Ide) \\ \dots \\ (Pro) \\ \dots \\ (VAb) \\ F \\ P \\ Rac \\ Cli \\ Var \\ VAb \end{array} \right\} \dots$$

Dans le paradigme du deuxième facteur, la lettre "F" représente le paradigme des fractions dont le numérateur et le dénominateur ne sont pas simultanément des Cst:

$$F = \left\{ \begin{array}{l} (Ide) \\ \dots \\ (VAb) \\ Pui \\ Rac \\ Cst \\ Cli \\ Var \\ VAb \end{array} \right\} \setminus \left\{ \begin{array}{l} (Ide) \\ \dots \\ (VAb) \\ Pui \\ Rac \\ Cli \\ Var \\ VAb \end{array} \right\}$$

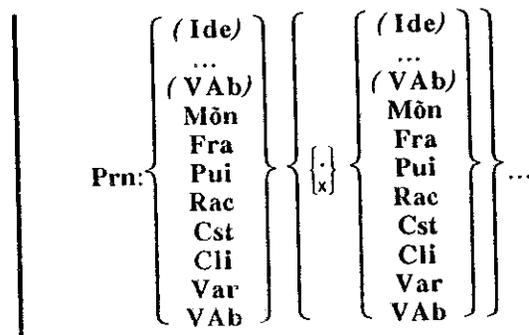
$$\left\{ \begin{array}{l} (Ide) \\ \dots \\ (VAb) \\ Pui \\ Rac \\ Cli \\ Var \\ VAb \end{array} \right\} \setminus Cst$$

tandis que la lettre "P" représente le paradigme des puissances dont la base n'est pas une Cst (ni "F" ni "P" ne sont des catégories; ce sont simplement des abréviations de paradigmes pour gagner de la place et de la lisibilité):

$$P = \left\{ \begin{array}{l} (Ide) \\ \dots \\ (VAb) \\ Cli \\ Var \\ VAb \end{array} \right\} \wedge \left\{ \begin{array}{l} (Ide) \\ \dots \\ (VAb) \\ Cst \\ Cli \\ Var \\ VAb \end{array} \right\}$$

VII.5.1.A. Produit de n facteurs (n>1)

La catégorie Pr_n a un paradigme beaucoup plus simple que la catégorie $M\delta_n$. En effet, tous les facteurs étant séparés par des points, il n'y a pas d'ambiguïté à éviter et il suffit de marquer dans le paradigme les priorités comme nous l'avons déjà fait pour toutes les autres catégories.



Le métasymbole catégoriel $M\delta_n$ de pseudo-monôme figure dans le paradigme des facteurs de produits, tandis que la suite (Prn) -produit mis entre parenthèses- figure dans le paradigme des facteurs de pseudo-monôme, ce qui permet d'assurer la priorité du pseudo-monôme sur le produit.

Il nous faut donner une acception généralisée à la notion de "priorité" pour que la phrase précédente ait un sens. La notion de **priorité** est en effet dérivée usuellement de la notion d'effectuation (une opération prioritaire est effectuée en premier). Comme il n'est pas dit que cela soit le cas avec les pseudo-monômes, nous devons redéfinir (en généralisant) la priorité en termes structuraux.

VII.6. Priorité généralisée

VII.6.1. Définition fonctionnelle

VII.6.1.A. Priorité d'un catégorie

VII.6.1.A.a. Définition

Soient c et C deux catégories

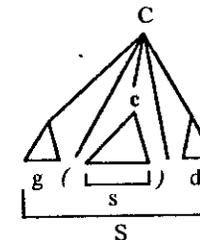
Nous dirons que c est prioritaire sur C si:

$\forall s, S \in \mathcal{T}^*$ (suites terminales) telles que s dérive de c et S dérive de C

si s est un opérande de S alors $(\exists (g,d) \in \mathcal{T}^*)^2 s = g(S)d$

VII.6.1.A.b. Commentaire:

Une catégorie c est dite prioritaire sur C si toute sous-expression s dérivant de c ne peut apparaître dans l'expression S dérivant de C qu'entre parenthèses.



VII.6.1.A.c. Exemple

La catégorie **Produit** est prioritaire sur la catégorie **Somme** dans la mesure où toute somme doit être mise entre parenthèses lorsqu'elle est facteur d'un produit.

VII.6.2. Application aux Pseudo-Monômes

Des règles de réécriture des produits et des Pseudo-Monômes, nous déduisons que les Pseudo-Monômes sont prioritaires sur les Produits.

En effet, tout produit doit être mis entre parenthèses lorsqu'il est facteur d'un pseudo-monôme.

$$2 \left(x \times \frac{1}{2} \right)$$

VII.7. Etude systématique des produits selon le nombre et la catégorisation de leurs facteurs

Pour chacune des structures possibles à deux et à trois facteurs nous faisons figurer les type d'expression correspondants selon que les facteurs sont des constantes ou des variables. Cela permet d'étudier exhaustivement les différents moyens de marquer la même structure, ainsi que les expressions inacceptables (signalées par une astérisque), c'est-à-dire soit non attestées, soit attestées mais pas en tant que produit.

VII.7.1. Deux facteurs

Pr2 	$a \times b$ $2 \times a$ $a \times 2$ 2×3	Mô2 	ab $2a$ $* a2$ $* 23$
---------	--	---------	----------------------------------

Remarquons que cela permet aussi d'attribuer une structure multiplicative à l'expression $(2)(3)^{21}$.

²¹ d'après une suggestion de D. Lacombe

VII.7.2. Trois facteurs

VII.7.2.A. Structure prioritaire à gauche

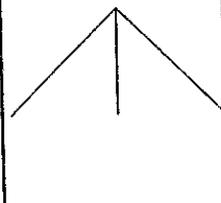
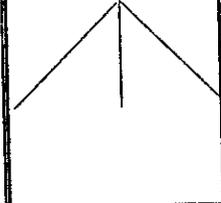
VII.7.2.A.a. Produits

Pr2 	$(a \times b) \times c$ $(a \times b) \times 2$ $(a \times 2) \times b$ $(2 \times a) \times b$ $(a \times 2) \times 3$ $(2 \times a) \times 3$ $(2 \times 3) \times a$ $(2 \times 3) \times 4$	Pr2 	$(ab) \times c$ $ab \times c$ $(ab) \times 2$ $ab \times 2$ $(a2) \times b$ $a2 \times b$ $* (2a) \times b$ $* 2a \times b$ $(2a) \times 3$ $2a \times 3$ $(a2) \times 3$ $* a2 \times 3$ $* (32) \times a$ $* 32 \times a$ $* (23) \times 4$ $* 23 \times 4$
---------	--	---------	--

VII.7.2.A.b. Pseudo-monômes

Mô2 	$(a \times b) c$ $(a \times b) 2$ $(a \times 2) b$ $(2 \times a) b$ $(a \times 2) 3$ $(2 \times a) 3$ $(3 \times 2) a$ $(2 \times 3) 4$	Mô2 	$(ab) c$ $(ab) 2$ $* (a2) b$ $(2a) b$ $* (a2) 3$ $(2a) 3$ $* (32) a$ $* (23) 4$
---------	--	---------	--

VII.7.2.B. Structure sans priorité

Pr3 	$a \times b \times c$ $a \times b \times 2$ $a \times 2 \times b$ $2 \times a \times b$ $a \times 2 \times 3$ $2 \times a \times 3$ $2 \times 3 \times a$ $2 \times 3 \times 4$	Mô3 	abc $* ab2$ $* a2b$ $2ab$ $* a23$ $* 2a3$ $* 23a$ $* 234$
--	--	--	--

VII.7.2.C. Structure prioritaire à droite

Même chose que pour la structure prioritaire à gauche.

VII.8. Remarque sur les transformations

Certaines expressions sans astérisque ayant même dénotation dans chacune des séries verticales que nous avons envisagées, par exemple:

- $(2 \times a) \times b$
- $(2 a) \times b$
- $(2 \times a) b$
- $(2 a) b$
- $2 a \times b$

il nous faut prévoir les transformations permettant de passer des unes aux autres.

VII.9. Remarque sur les indices spatiaux

Kirshner (dans un article de 1989) remarque que les opérations marquées par la juxtaposition sont prioritaires sur celles marquées par un écartement horizontal large. Cela ne concerne toutefois que la multiplication marquée par juxtaposition, qui est effectivement prioritaire par rapport à la

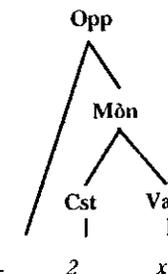
somme et à la différence; dans son travail, Kirshner ne distingue pas les produits des pseudo-monômes.

«In visual terms, the (...) rule means that diagonal juxtaposition²² has higher precedence than horizontal or vertical juxtaposition, which have higher precedence than wide spacing.»

Nous pouvons donc reprendre sa remarque, qui va dans le sens de notre hypothèse de la priorité des pseudo-monômes sur les produits, en la complétant comme suit:

- L'opération marquée par la juxtaposition est prioritaire (au sens généralisé) sur celles marquées par un symbole et un écartement horizontal large (+, -, ×).
- A écartement horizontal égal, le produit (marqué par "×") est prioritaire sur la somme et la différence.

Remarquons que dans le cas d'expressions du type "-2x" la règle précédente va dans le sens du choix que nous avons retenu a priori, à savoir de considérer qu'il s'agit de l'opposé d'un pseudo-monôme et non d'un pseudo-monôme dont le premier facteur est "-2".



Nous avons donc implicitement attribué à $Mô_n$ la priorité sur Opp . Cela dit, le choix de la priorité de Pr_n sur Opp dans "-2×x" reste toujours aussi arbitraire car il n'y a pas ici de juxtaposition.

²² dans le cas des puissances et des racines

VII.10. Conclusion

Nous avons envisagé un certain nombre de phénomènes d'ajustement fin, pour déterminer quels ESA sont grammaticaux et lesquels ne le sont pas. Notre première source de données empiriques est notre intuition de Scripteur/Locuteur. Lorsqu'elle est mise en défaut nous nous référons aux données d'un corpus. En ultime recours, lorsque ce corpus est muet, nous privilégions le choix qui simplifie la description, sans scrupule excessif étant donné que les expressions douteuses sont précisément celles que l'usage évite.

Ces expressions sont ici toutes des produits, et ce qui les rend douteuses est la présence ou l'absence d'un logogramme multiplicatif /"×"/ ou /"·"/. La plupart du temps toutefois, la question de la présence ou de l'absence du point est réglée par les trois fonctions qu'il est amené à remplir: lever l'ambiguïté, agréger des facteurs ou marquer l'aspect interne de la multiplication.

Signalons que ces "trois fonctions du point" sont issues de la double contrainte que nous nous sommes imposée au départ. Nous voulons d'une part faire des ESA une description assez précise pour pouvoir les engendrer par un mécanisme génératif. D'autre part, nous désirons modéliser l'ensemble des ESA, telles qu'on les emploie, avec leurs caractéristiques, et non pas un langage plus ou moins idéalisé pour les besoins de la cause. Pour cela, nous ne pouvons pas nous contenter d'une réponse vague à la question "quand peut-on juxtaposer les facteurs ?", car il faut bien mettre le point multiplicatif à un endroit précis du paradigme du produit. Il nous a donc fallu regarder dans le détail comment sont construits les produits.

VIII. TRANSFORMATIONS

«... il faudrait tempérer le penchant pour les spéculations à partir des "grandes langues maternelles" par une prise de conscience que revêt pour la théorie l'expérience d'affrontement avec le tout d'une langue inconnue à laquelle on est contraint d'adapter ses concepts, et pas seulement ses instruments descriptifs.»

Cl. Hagège (1976) p. 54

La plupart des mécanismes de transformation proposés par les modèles existants d'expressions symboliques nous paraissent didactiquement peu "plausibles" (cf. chap. II et III), en ce sens qu'ils ne correspondent ni aux productions écrites des "algébristes compétents", ni aux représentations qu'ils s'en font, telles qu'elles apparaissent au travers du vocabulaire employé. Le but du présent chapitre est de proposer un mécanisme "plausible" de transformations.

Dans une seconde partie de ce chapitre nous préciserons ce que nous entendons par "transformations généralisée" et en quoi il nous semble plus plausible d'utiliser cette notion pour décrire entre autres des disjonctions d'ESA (telles que " $x=-1$ ou $x=2$ ") que de les engendrer directement par des catégories ad hoc.

Ainsi que nous l'avons indiqué au chap. II ("position du problème"), nous n'irons pas au-delà de l'exposition des mécanismes de transformation (simples et généralisées) et nous laisserons dans l'ombre la détermination de celles qu'utilisent effectivement les élèves. Cette question est en effet à elle seule un thème complet de recherches, où l'approche en termes d'"Intelligence Artificielle" se révèle particulièrement fructueuse. Nous renvoyons donc le lecteur aux études déjà citées sur le sujet (Bruillard, Bundy & Welham, Joab, Nicaud, Vivet etc.¹).

¹ on en trouve une présentation exhaustive dans Delozanne (1992)

VIII.1. Transformations singulières

Lorsque les écritures symboliques sont entièrement parenthésées, ou sont mises sous n'importe quelle autre forme "canonique" (préfixée, post-fixée, sous forme de liste, etc.), le mécanisme de transformation est simple, il s'agit en général d'un filtrage ("pattern-matching"). Par contre, les transformations elles-mêmes ne sont pas concises. En effet, outre le parenthésage-déparenthésage (et plus généralement la mise sous forme canonique et la retraduction) les transformations qui s'appliquent aux expressions canoniques sont minimales ("atomiques") et il faut en combiner plusieurs pour aboutir au résultat souhaité. Or tout cela n'apparaît pas dans la pratique ordinaire des calculs (v. chap. III).

Quel mécanisme proposer pour avoir des transformations concises, c'est-à-dire pour éviter de décomposer plus ou moins arbitrairement les calculs en une foule de transformations atomiques? Lorsqu'on tente de répondre à cette question on s'aperçoit que le coeur du problème réside dans la détermination des sous-expressions à transformer.

Supposons que nous souhaitions commuter " x^2 " et " $x(x+1)$ " dans:

$$x^2 + x(x+1) - 1$$

afin d'obtenir:

$$x(x+1) + x^2 - 1$$

et de pouvoir ainsi mettre en évidence la différence de deux carrés " $x^2 - 1$ ". Comment identifier les deux sous-expressions " x^2 " et

" $x(x+1)$ " de manière à ce que la transformation de commutation porte bien sur elles et pas sur d'autres? Comment éviter par exemple que x^2 ne commute avec x , ce qui donnerait:

$$x + x^2(x+1) - 1?$$

Comment faire pour que ces sous-expressions soient également identifiées dans les expressions suivantes:

$$+x + x^2(x+1) - 1$$

ou:

$$x + (x^2(x+1)) - 1$$

ou encore:

$$(x-1) + x + x^2(x+1) - 1?$$

Il nous a fallu de nombreux tâtonnements avant de déterminer les **invariants** qui identifient les sous-expressions à transformer, indépendamment des différences de forme entre les expressions. Ces invariants, ce sont les **fonctions syntaxiques** ("terme", "facteur", "membre" etc.) que ces sous-expressions remplissent au sein des expressions. L'objet du présent chapitre est de construire de manière rigoureuse cette notion dans le cadre des ESA.

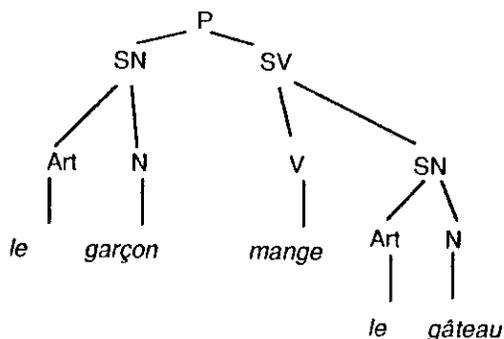
VIII.1.1. A l'origine de la notion de Fonction Syntaxique

VIII.1.1.A. Les fonctions syntaxiques chez Chomsky

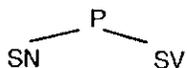
Dans le modèle Chomskyen standard, la **fonction grammaticale** d'un syntagme α déduit de la représentation syntagmatique de la phrase dont il fait partie, et s'exprime en termes de domination de branches dans l'arbre. Selon Ruwet (1967 p. 323), dans:

qu'on peut lui appliquer. Ce type de propriété est explicitement implémenté dans APLUSIX (Nicaud 1987).

² remarquons que "1" n'est pas un carré (il ne ressortit pas à une catégorie Carré). Dire de " $x^2 - 1$ " qu'il est une différence de deux carrés n'est pas une description syntaxique, mais bien une propriété attachée à cette expression, qui sert dans les transformations

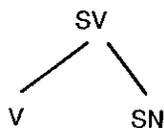


le SN sujet (*le garçon*) est défini comme le SN qui est dominé immédiatement par l'élément P, ou encore comme le SN qui figure dans la configuration:



cette configuration étant elle-même simplement le sous-produit de la règle syntagmatique³ $P := SN SV$.

De même, le SN objet (*le gâteau*) est défini comme le SN figurant dans la configuration qui représente le syntagme verbal et ses constituants:



Voici la définition que fait Noam Chomsky (1971 p. 103 sqq.) de la notion de **fonction syntaxique**:

Supposons une suite de règles de réécriture (...), comprenant en particulier la règle:

³ notée avec nos conventions

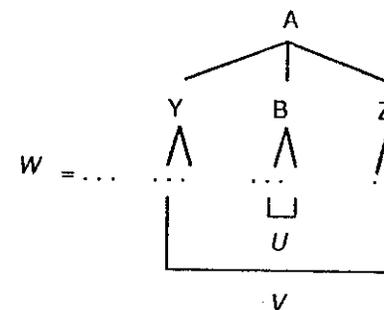
(i) $A := X$

A cette règle est associée toute fonction grammaticale

(ii) $[B, A]$

où B est une catégorie et où $X = YBZ$, pour Y, Z quelconques (éventuellement nuls).

Etant donné un Indicateur de la séquence terminale W, nous disons que la sous-séquence U de W est dans la relation grammaticale $[B, A]$ avec la sous-séquence V de W, si V est dominé par un nœud étiqueté A qui domine directement YBZ, et si U est dominé par cette occurrence de B. Ainsi l'Indicateur en question contient la sous-configuration:



(...). En tous cas, (...) il est clair que l'information concernant les fonctions grammaticales de l'espèce (ci-dessus) peut être tirée directement des règles de réécriture de la base, sans qu'il soit besoin de les étendre ou de les élaborer de manière *ad hoc* pour introduire la mention spécifique des fonctions grammaticales. Outre leur caractère redondant, de telles extensions ont le défaut de ne pas exprimer de manière appropriée le caractère relationnel et elles sont de ce fait inutiles sauf dans les cas les plus simples.

VIII.1.1.B. Les fonctions ne doivent pas être confondues avec les catégories

Les premières tentatives d'écriture d'une partie génératrice des ESAL nous ont posé des difficultés car nous ne distinguons pas les notions de catégorie et de fonction syntaxique.

Par exemple, voici les règles de réécriture⁴ de la Somme Algébrique (SA) dans une version précédente du modèle des ESA.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Somme Algébrique: } SA := \left\{ \begin{array}{l} \phi \\ - \end{array} \right\} T \left\{ \begin{array}{l} \phi \\ S \end{array} \right\} \\ \text{Suite de somme: } S := \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right\} T \left\{ \begin{array}{l} \phi \\ S \end{array} \right\} \\ \text{Terme: } T := \left\{ \begin{array}{l} V \\ EN \\ (SA) \\ MP \\ FR \\ PU \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

Dans cette version, la somme algébrique (SA) apparaît comme une série de "termes" séparés par des signes «+ » ou «- », ce qui correspond bien à une intuition raisonnable.

Toutefois le fait de considérer les "termes" ou les "facteurs" comme autant de catégories (puisque les symboles correspondants apparaissent à gauche des symboles " := " de réécriture) nie l'aspect essentiellement relationnel de ces notions⁵. Un tel amalgame est dénoncé par N. Ruwet (1967 p. 322):

«Certains linguistes (...) ont traité ces notions (les fonctions) dans des termes qui, fondamentalement, reviennent à les confondre avec des catégories grammaticales. En bref, disons que, si on traduit (...) leurs formulations en termes génératifs, on en arrive à introduire des notions telles que «sujet», «prédicat», etc., directement par des règles syntagmatiques, au même titre que les notions de «phrase», de «syntagme nominal» ou de «nom». (...)

Cette formulation a un défaut qui saute aux yeux: elle oblitère le caractère relationnel des notions de «sujet», «prédicat», «objet», etc. En effet le fait d'être

un" syntagme nominal est inhérent à la suite le garçon (ou le gâteau), comme est inhérent à garçon ou à gâteau d'être des noms, (...) etc. Quand on dit que le garçon est sujet de la phrase le garçon mange le gâteau, cependant, on dit tout autre chose; en effet, le fait d'être sujet n'est pas inhérent à cette expression, et, dans d'autres phrases, elle pourrait tout aussi bien être objet direct, ou encore faire partie d'un objet indirect ou d'un circonstantiel, etc. La différence entre les catégories et les fonctions grammaticales est bien exprimée quand on dit, en termes traditionnels, que le garçon "est un" syntagme nominal, mais qu'il est "le-sujet-de" de la phrase le garçon mange le gâteau . C'est cette différence qui disparaît dans la formulation où «sujet», «prédicat», «objet», sont introduits par des règles qui sont formellement du même type que celles qui introduisent SN, SV, V, Art, etc.»

Nous avons donc été conduit à distinguer soigneusement les notions de fonction et de catégorie, et à définir les fonctions syntaxiques des parties des expressions algébriques (telles "le-numérateur-de" ou "le-premier-membre-de") sur le modèle des fonctions syntaxiques des parties de la phrase.

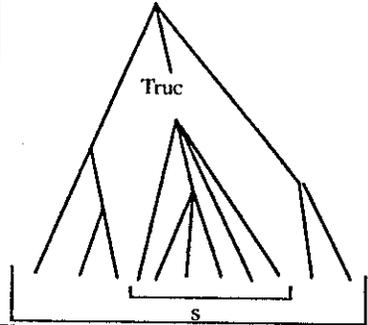
VIII.1.2. Les fonctions syntaxiques au sein des ESAL

Si l'on veut définir les fonctions syntaxiques à partir des éléments de base de la formalisation des grammaires génératives, à savoir les dérivations entre suites de symboles, on se heurte à la difficulté suivante: plusieurs dérivations (qui ne diffèrent entre elles que par l'ordre des dérivations directes) aboutissent à la même suite terminale (Ruwet 1967 p. 123).

Pour éviter cette difficulté, on peut définir, comme le fait Chomsky, les dérivations en termes de dominance entre nœuds d'un arbre. On peut aussi raisonner en termes de dérivations d'occurrences (ce qui est équivalent mais plus lourd). Cela consiste, en gros, à remplacer «la sous-expression s est dominée par un noeud étiqueté "Truc"» par «s a une occurrence dans une expression qui dérive d'une suite où se trouve "Truc"» en précisant bien les conditions sur les dérivations.

⁴ notées avec les conventions actuelles pour la facilité de lecture.

⁵ on retrouve cet amalgame, au moins dans le choix des termes, dans la grammaire des ExA de Carmona & Didier (1975) pp. 47-48.

Définition arborescente	définition en termes de dérivation
	C \downarrow \dots \downarrow $\text{Contexte_gauche "Truc" Contexte_droit}$ \downarrow \dots \downarrow $\text{Ctx_terminal_gauche "s" Ctx_terminal_droit}$

Nous allons définir (en termes d'arbres) la notion d'opérande, donner un exemple dans un cas particulier (le signe d'un terme) puis donner la définition de l'opérande en termes de réécritures.

VIII.1.2.A. opérateur

Nous généralisons la notion de terme d'une somme donnée ou de facteur d'un produit donné en parlant d'"opérande d'un opérateur donné". Nous définissons simplement ici un opérateur comme le couple formé par un ESA et sa catégorie. "x+3" est une ESA, "Som" une catégorie et «la somme x+3» un opérateur (additif). Il ne faut pas chercher de concept profond derrière le mot "opérateur" tel que nous l'employons ici⁶. Cette expression nous permet simplement de parler d'"opérande d'un opérateur": ni l'expression "opérande d'une ESA" ni celle d'"opérande d'une catégorie" ne conviennent en effet pour décrire ce qui généralise le "terme d'une somme".

⁶ pour autant, la question théorique de la relation entre opérations et opérateurs (au sens usuel du terme) en algèbre élémentaire est loin d'être close (cf. Desclés 1981) mais nous ne l'aborderons pas ici.

VIII.1.2.B. opérande d'un opérateur

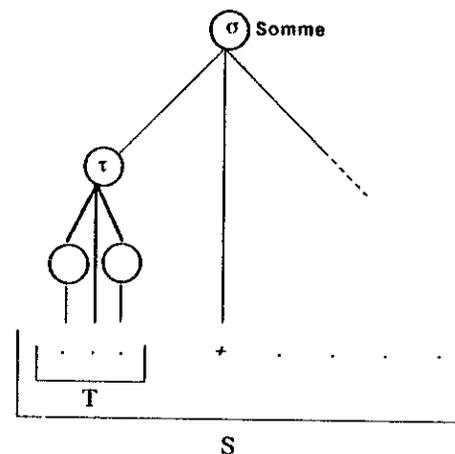
Soit T une suite terminale et t une sous-suite de T

Soit σ un nœud de l'arbre syntagmatique de T

On dit alors que t est un opérande (ou "argument") de T, et on note:

$t = \sigma T$, ssi il existe un nœud τ de l'arbre syntagmatique de T tel que:

- (i) t dérive de τ
- (ii) τ est immédiatement dominé par σ
- (iii) T dérive de σ



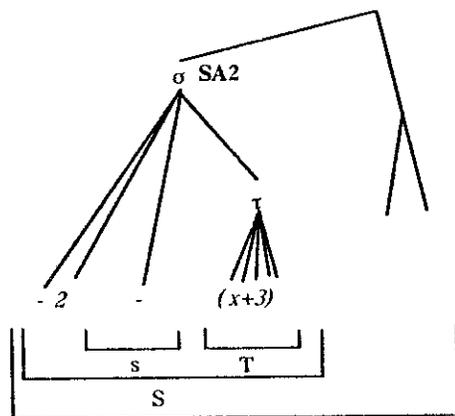
Notons qu'en termes d'arbres il n'est pas très facile de définir la notion de ⁿème opérande d'un opérateur. Ceci justifie entre autres le recours à des définitions faisant appel aux réécritures.

VIII.1.2.C. Exemple: signe d'un terme

Soit S une suite terminale et T une sous-suite de S
 Soit σ un nœud de l'arbre syntagmatique de S
 Soit s un symbole terminal de S choisi dans l'ensemble $\{ + - \pm \}$

On dit alors que s est le signe du terme T , et on note $s = s^T$, ssi
 il existe un nœud τ de l'arbre syntagmatique de S tel que:

- (i) $s\&t$ est une sous-suite de S
- (ii) T dérive de τ
- (iii) τ est immédiatement dominé par σ
- (iv) σ est étiqueté SA_n
- (v) S dérive de σ



Les linguistes remarqueront que l'on peut dire, dans le jargon chomskyen, que le signe s "C-commande" le terme T auquel il correspond. C'est d'ailleurs ici l'unique relation de "C-commande" à laquelle nous ayons affaire.

VIII.1.2.D. Définitions en termes de réécritures

La traduction en termes de réécritures de la notion arborescente de "domination" ne pose pas de problème, celle de "nœud étiqueté" a pour correspondant celle de d'"occurrence d'un symbole catégoriel au sein d'une

suite" etc. Indiquons à titre d'exemple une définition non-formelle, en termes de réécritures, de la notion de $j^{\text{ème}}$ opérande d'un opérateur:

Soit T une suite terminale et t une sous-suite de T
 Soit $Occ_n(t;T)$ la $n^{\text{ième}}$ occurrence de la sous-suite t dans T
 Soient n un entier et i un entier inférieur ou égal à n .

On dit que $Occ_n(t;T)$ est le $j^{\text{ème}}$ opérande de l'opérateur T
 et on note: $Occ_n(t;T) = O_i^T$ ssi:

il existe un symbole catégoriel C tel que:

- (i) la catégorie symbolisée par C est "n-aire", autrement dit les opérateurs ressortissant à cette catégorie admettent n opérandes.
- (i) T dérive du symbole catégoriel C (l'opérateur T ressortit à la catégorie C)
- (ii) La $j^{\text{ème}}$ occurrence de la sous-suite t dans T dérive de la $j^{\text{ème}}$ occurrence d'un symbole catégoriel dans la suite $\delta(C)$ qui dérive directement du symbole catégoriel C .

Exemple:

Montrons que a est le $2^{\text{ème}}$ terme de $2 + a - b$.

Posons:

$$\begin{aligned} T &= 2 + a - b \\ t &= a \\ n &= 3 \\ i &= 2 \\ C &= SA_3 \text{ (Somme Algébrique de trois termes)} \end{aligned}$$

Il n'y a ici qu'une seule occurrence du symbole terminal a .

Alors:

- (i) SA_3 est ternaire (i.e. admet trois termes)

- (ii) $2 + a - b$ dérive de SA_3
- (iii) SA_3 est directement réécrit en $\delta(SA_3) = \text{Cst} + \text{Var} - \text{Var}$.
- (iv) a dérive du symbole catégoriel **Var** (Variable) qui est la deuxième occurrence d'un symbole catégoriel⁷ au sein de $\delta(SA_3)$.

En conséquence a est bien le 2^{ème} terme de $2 + a - b$.

VIII.1.3. Fonctions dans les ESAL

Nous allons voir maintenant la liste des fonctions au sein des ESAL, catégorie par catégorie.

VIII.1.3.A. Fonctions au sein des Constantes:

Catégorie	fonction
Ent	rang (des chiffres des entiers)
Cst	partie entière, partie décimale

VIII.1.3.B. Fonction au sein des Variables:

Catégorie	fonction
Var	indice

VIII.1.3.C. Fonctions au sein des Expressions Algébriques:

Catégorie	fonction
Id	?
Opp	?
POM	?
Som	terme

⁷ les symboles terminaux + et - ne sont pas considérés comme des symboles catégoriels.

Dif	terme
SA_n	terme
Pr_n	facteur (multiplicande, multiplicateur)
$M\delta_n$	facteur (multiplicande multiplicateur)
Quo	dividende, diviseur
Fra	numérateur, dénominateur
Pui	base (mantisse), exposant
Rac	ordre, radicande
VAb	?

VIII.1.3.D. Fonction au sein des Propositions Algébriques:

Catégorie	fonction
PrA	membre

VIII.1.3.E. Fonction au sein des Systèmes:

Catégorie	fonction
Sy_n	ligne

VIII.1.4. Transformations d'opérateurs n-aires

La caractérisation des éléments à déplacer par leur fonction syntaxique permet une description concise des transformations lorsqu'elles portent sur des opérateurs n-aires. Par exemple, une seule transformation dite "commutation du i^{ème} terme et du j^{ème} terme" rend compte de toutes les commutations au sein d'une somme algébrique de n termes. Seule la valeur numérique des indices **i** et **j** change. Il n'est donc plus nécessaire de décomposer cette transformation en transformations élémentaires.

Prenons l'exemple de la commutation. La transformation peut se noter comme suit:

Commutation des i-èmes et j-èmes termes d'une somme:

Soit Σ une somme, n le nombre de ses termes

VIII.1.5. Combinaison de transformations

L'usage des fonctions syntaxiques permet également de résoudre un autre problème épineux, celui des combinaisons de transformations. Dans la pratique courante du calcul en effet, les transformations réellement effectuées peuvent être décomposées en une combinaison de transformations correspondant à des opérations mathématiques élémentaires. Par exemple, le développement de

$$2(x-4)$$

en

$$2x-8$$

peut s'interpréter ainsi:

$$\begin{array}{c} 2(x-4) \\ \downarrow \\ 2(1x-4) \\ \downarrow \\ 2 \times 1x - 2 \times 4 \\ \downarrow \\ 2x-8 \end{array}$$

Or nous souhaiterions ne pas avoir à introduire des transformations intermédiaires "invisibles" (toujours le "rasoir d'Occam"). La caractérisation, en termes de fonctions syntaxiques, des éléments sur lesquels portent la transformation, permet précisément d'éviter cette prolifération de transformations hypothétiques. Dans le cas qui précède, il suffit par exemple de préciser que le $j^{\text{ème}}$ terme de la somme qui est le résultat de la transformations est:

- un pseudomonôme dont le premier facteur est le facteur commun et le second le $j^{\text{ème}}$ terme de la somme initiale si ce $j^{\text{ème}}$ terme de la somme initiale est une variable,

- une constante dont la valeur numérique est le résultat de la multiplication du facteur commun et $j^{\text{ème}}$ terme de la somme initiale si ce $j^{\text{ème}}$ terme de la somme initiale est une constante⁸.

La description de la transformation n'est pas vraiment simple⁹, mais comme d'habitude ce que nous perdons en simplicité, nous le gagnons en concision descriptive puisqu'une seule étape suffit pour rendre compte du résultat.

Cette possibilité de modéliser par une seule transformation formelle à caractérisation fonctionnelle, ce qu'on pourrait interpréter comme une combinaison de transformations élémentaires, que nous avons illustrée à l'aide d'un exemple, se retrouve pour l'ensemble des transformations complexes usuelles.

Certes on peut envisager qu'un élève invente des combinaisons inédites de transformations, dont le modèle ne rend pas compte par une transformation formelle unique. Si cette combinaison est fortuite et ne réapparaît pas, on peut au minimum considérer que sa description nécessite moins de transformations formelles à caractérisation fonctionnelles, qu'elle n'en nécessiterait si on se limitait aux transformations formelles correspondant à des opérations mathématiques élémentaires. Si la combinaison se répète régulièrement, on est alors dans le cas de figure où les données empiriques s'écartent de celles sur lesquelles repose le modèle actuel. Il s'agit alors de modifier le modèle (lequel est prévu pour rendre

⁸ si le $j^{\text{ème}}$ terme de la somme initiale est autre chose qu'une constante ou une variable (par exemple " $2ab$ ") la définition du résultat de la transformation est encore moins simple. Il est possible que ce résultat soit défini de manière récursive, c'est-à-dire que les opérandes partiels soient eux-mêmes les résultats de transformations. Cela ne change rien au fait que la transformation elle-même soit concise en ce sens qu'elle n'a pas besoin d'être décomposée en étapes successives.

⁹ d'autant que nous avons pris en exemple une règle de développement réduite à deux cas simples: les termes de la somme à développer sont des constantes ou des variables

cette opération aussi aisée que possible) pour qu'il rende compte des nouvelles données. Dans ce cas, il est parfaitement envisageable de créer une nouvelle transformation formelle à caractérisation fonctionnelle pour rendre compte de cette combinaison régulière de transformations.

VIII.1.6. Le système des transformations.

Ce qui précède est une illustration de la dernière propriété du système des transformations que nous présentons: il est **complet**, mais n'est pas **minimal**. Par "complet" nous entendons qu'il est possible d'effectuer formellement, par les transformations que nous proposons ici, l'ensemble des calculs¹⁰ algébriques portant sur \mathbb{R} . Ceci provient du fait que l'ensemble des transformations envisagées contient celles qui correspondent aux égalités et équivalences qui régissent la structure de corps de \mathbb{R} .

Par contre, le système de transformations n'est pas minimal, en ceci que plusieurs combinaisons de transformations différentes peuvent aboutir à la même écriture. En particulier, le système étant complet il comporte donc les transformations élémentaires qui, enchaînées, aboutissent au même résultat que les transformations non-élémentaires à caractérisation fonctionnelle. Par exemple, notre système permet d'obtenir

$$2x - 8$$

aussi bien directement à partir de

$$2(x - 4),$$

qu'indirectement via les transformations élémentaires:

$$\begin{array}{c} 2(x - 4) \\ \downarrow \\ 2(1x - 4) \\ \downarrow \\ 2 \times 1x - 2 \times 4 \\ \downarrow \\ 2x - 8 \end{array}$$

En conséquence il y a plusieurs "chemins transformationnels" aboutissant à la même écriture, ce qui fait qu'on ne peut parler de système minimal (au sens où le système des axiomes de \mathbb{R} est minimal).

Rappelons toutefois que le critère de minimalité du système n'a d'intérêt que si l'on envisage de démontrer des propriétés, ce qui n'est pas notre cas. Au contraire, nous construisons un modèle formel des calculs algébriques qui s'approche autant que possible de la pratique effective des algébristes. Leur préoccupation n'est pas, usuellement, d'utiliser le moins de règles possible, mais de faire des calculs rapides et sûrs. La sécurité passe par la redondance, et dans certains cas l'existence de transformations spécialisées (redondantes) permet de gagner du temps. On en trouve un exemple dans le système de calcul formel de Bundy & Welham (1975) qui à côté des transformations usuelles permettant de résoudre - entre autres - les équations du premier degré introduisent la transformation:

$$ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Cette dernière transformation est explicitement introduite en vue d'accélérer les calculs.

VIII.1.7. Fonctions et données typématiques de l'ESA

L'usage des fonctions pour définir les sous-expressions à transformer (autrement dit la définition fonctionnelle des transformations) permet en outre d'opérer directement sur les ESA sans passer par les ESAL.

¹⁰ nous parlons bien d'effectuer les calculs formellement, c.à.d. les manipulations portant sur les ESA, sans connecteurs logiques par conséquent, et non pas les raisonnements qui les accompagnent

Il suffit pour cela de déterminer les fonctions non pas au niveau de l'arborescence des ESAL, mais des marques typématiques des ESA. Ex: le radicande est ce qui est en-dessous de la barre du radical. Lorsqu'il y a des parenthèses, il suffit de compter les parenthèses.

Il se trouve que les attributs relatifs typématiques sont justement définis par les fonctions des sous-expressions auxquels ils s'appliquent. Le type relatif "exposant" s'applique à la sous-expression qui fait fonction d'exposant, et ainsi de suite... Ce qui est un bon indice de la fécondité de la notion de fonction.

VIII.2. Transformations généralisées.

La question est: comment faire pour rendre compte de calculs du type:

$$2xy = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$$

De même, comment faire des changements de variables en employant la méthode dite des "noms auxiliaires" (Chevallard & Conne 1984 p. 27)?

«Il est important de souligner (...) que le recours à des "noms auxiliaires", traditionnellement introduits par les expressions de type *Posons* $x = \dots$, *En posant* $I = \dots$, etc., est omniprésent en mathématiques dans tous les domaines du calcul. L'initiation des élèves à cette pratique essentielle doit donc être vue comme un moment nécessaire et riche de potentialités de leur socialisation mathématique».

Une première solution consiste à créer une catégorie "phrases algébriques" dans laquelle on aurait les conjonctions, disjonctions etc. de propositions algébriques. Reprenons l'exemple:

$$2xy = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$$

Il serait possible de le traiter par une transformation [T] qui transforme une égalité en une écriture qu'on pourrait qualifier de **phrase algébrique** (ici, une **disjonction**). La description de la transformation [T] serait:

[T]: $A \rightarrow A$ [T]

Si

- A est une **égalité**
- Le premier membre de A est un **produit**
- $(\exists n \in \mathbb{N}) (a_1, \dots, a_n \text{ sont des facteurs de A qui ne sont pas des constantes, ni des opérateurs dont les opérands sont des constantes.})$
- Le second membre de A est 0.

Alors:

- A [T] est une **disjonction** de n égalités E_i
- $\forall i \in [1; n]:$
- Le premier membre de E_i est a_i
- Le second membre de E_i est 0.

Nous avons néanmoins décidé de ne pas regrouper les expressions construites autour de connecteurs logiques (*et, ou, si...alors, etc.*), et a fortiori de quantificateurs, en **catégories**, ceci pour des raisons didactiques. Ce choix, qui interdit précisément que des transformations puissent transformer des phrases algébriques, découle de l'hypothèse suivante:

L'attitude en principe "correcte" de l'élève en algèbre, consiste à faire des **calculs** sur les nombres symbolisés par des lettres (autrement dit, utiliser la puissance créatrice des mécanismes formels), et simultanément à faire des **raisonnements** (non-formels) sur les propositions et les phrases algébriques concernant ces nombres.

Que les "raisonnements" en question soient corrects ou non, voire qu'ils se situent dans un registre "juridique" (Lacombe 1988) quand ce n'est pas "magique" (Baruk 1985) est un autre problème, qui est par ailleurs d'une grande importance didactique. Toujours est-il que nous estimons que ces "raisonnements", qui peuvent être plus ou moins algorithmisés, ne sont pas, dans le cadre scolaire, un **calcul formel** sur des propositions ou des phrases algébriques.

En particulier, nous n'avons observé nulle part, ni dans les manuels, ni dans les cours, ni dans les cahiers d'élèves d'exemples de calcul mixte algébrique (sur les ESA) et logique (sur les conjonctions, disjonctions,

implications ou équivalences d'ESA)¹¹. Un tel calcul est pourtant parfaitement imaginable. En voici un exemple ad hoc.

Convention: les conjonctions sont notés comme d'habitude par des systèmes bordés d'une accolade, et nous représenterons les disjonctions par des systèmes bordés d'un grand crochet "[]".

$$\sqrt{2-x} = x \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2-x=x^2 \\ x>0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2+x-2=0 \\ x>0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x-1)(x+2)=0 \\ x>0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ou } \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array} \right. \\ x>0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \text{ou } \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x>0 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x>0 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{ou } \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x>0 \end{array} \right. \\ \text{Faux} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x>0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x=1$$

Nous avons fait passer en 1987 un questionnaire à 57 étudiants du CNAM¹², auxquels il était demandé entre autres de résoudre:

$$x = \sqrt{6-x}.$$

Comme on pouvait s'y attendre, aucun d'entre eux n'a fait de calcul sur les propositions évoquant de près ou de loin ce qui précède. Soit ils n'ont pas vu le problème, soit ils ont raisonné sur les conditions de validité des solutions et ont exprimé leur résultat dans un langage plus ou moins naturel («or x doit être >0 donc...»). En conséquence, la grammaire que nous proposons ne rend pas compte d'expressions telles que

$$x=2 \text{ ou } x=-1$$

de la même façon qu'elle rend compte de:

$$(x+2)(x-1)$$

¹¹ à l'exception de certains calculs sur les égalités dans les systèmes d'équations, que nous n'étudions pas pour éviter de compliquer inutilement notre modèle descriptif.

¹² concernant cette population voir en annexe

à savoir en tant que catégorie, mais pour ce faire elle met en jeu la notion de "transformation généralisée". A l'origine de cette notion, nous nous sommes inspiré encore de Chomsky, qui oppose les transformations "singulières" (*singular transformations*) et transformations généralisées

"qui convertissent un couple de phrases en une phrase unique" (Chomsky cité par Ruwet 1967 p. 208).

Les transformations généralisées sont une relation entre un n-uplet de propositions algébriques. En ce qui concerne les ESA, les transformations généralisées ne portent que sur des propositions algébriques. Dans notre exemple, nous avons une transformation généralisée qui associe à la proposition $(x+1)(x-2)=0$ deux autres propositions (ici, des égalités) à savoir $x+1=0$ et $x-2=0$. De la même façon, c'est une transformation généralisée qui permet de passer de

$$\sqrt{2-x} = x$$

à

$$2-x=x^2$$

et à:

$$x>0.$$

C'est encore une transformations généralisée qui permet la substitution et fait passer de:

$$x = \frac{b^2}{4} \text{ et } b=3$$

à:

$$x = \frac{9}{4}$$

Nous prétendons que, contrairement aux transformations singulières, l'identification des éléments à transformer dans les transformations généralisées se fait par reconnaissance de structure ("filtrage") et non de fonction. Prenons l'exemple de la solution de l'équation du second degré, qui est typiquement une transformation généralisée complexe faisant correspondre à un trinôme et à une inéquation (celle qui représente le signe de Δ) une disjonction d'égalités (les "solutions"). Il serait grotesque en effet,

par exemple, de définir les solutions x' et x'' d'une équation du second degré en termes de fonctions:

"Égalité dont le premier membre est x' et dont le second membre est une fraction.

Son numérateur est une somme algébrique.

Le premier terme de cette somme est le premier facteur du second terme du trinôme;

son signe est « - ».

Le second terme de cette somme est une racine;

son signe est « - ».

Le radicande de cette racine est une somme algébrique.

Le premier terme de cette somme est le carré du premier facteur du premier terme du trinôme" etc.

En conséquence, les transformations généralisées sont décrites par des "formules", comme cela est fait couramment en mathématiques, qui fonctionnent par filtrage, par exemple

$$"ab=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ou } b=0".$$

VIII.3. Conclusion du chapitre

Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre II (position du problème), nous n'avons pas l'intention d'aller ici au-delà d'une détermination générale de mécanismes plausibles pour les transformations. Une étude détaillée et une modélisation rigoureuse des mécanismes en question, qui devraient s'appuyer sur des travaux plus récents et mieux adaptés que ceux que nous avons utilisés ici, dépasseraient le cadre de cette thèse. En outre, nous laisserons également ouverte la question de la liste des transformations souhaitables pour effectuer les calculs algébriques, en arguant de l'existence de nombreux travaux sur ce sujet, en particulier dans le cadre de l'Intelligence Artificielle.

Nous préférons maintenant aborder la question des transformations par une approche plus spécifiquement didactique, au travers d'une enquête portant sur celles qui sont effectivement mises en œuvre et reconnues par les élèves. C'est l'objet du chapitre suivant.



TROISIEME PARTIE:
DE LA SIGNIFICATION DES ESA

(ENQUETES ET
ELEMENTS D'ANALYSE THEORIQUE)

IX. DEUX ENQUETES SUR LES ECRITURES ALGEBRIQUES

Peut-on dire: une *erreur* n'a pas seulement une cause, mais aussi un fondement? Ce qui veut dire à peu près: l'erreur est susceptible de trouver sa place dans ce que sait correctement celui qui se trompe.

Ludwig Wittgenstein, *De la certitude*, 74.

La grammaire des ESA que nous venons d'élaborer est un outil théorique: elle ne donne en soi aucune indication sur les **difficultés** effectivement rencontrées par les élèves lorsqu'ils manipulent des expressions algébriques. Parmi les questions qui se posent, il y a le fait de savoir dans quelle mesure ces difficultés sont liées à la **complexité** des expressions manipulées. Ainsi, la complexité structurale est-elle la seule source de difficulté ou, ce qui est plus probable, la catégorie des expressions joue-t-elle un rôle, et lequel?

Pour apporter un début de réponse à ces questions j'ai choisi de reprendre les résultats d'une étude menée en 1984-1985 par l'Equipe de Recherche sur les Questionnements en Mathématiques¹, dont je faisais partie, sous la direction scientifique de Daniel Lacombe² et de Jérôme Chastenet de Géry.

La partie expérimentale de cette étude a consisté en deux enquêtes sous forme de questionnaires multivariants donnés à des élèves de collège.

Il s'agissait:

¹ J. Chastenet de Géry, B. Dumont, S. Hocquenghem, D. Lacombe, Y. Paquelier et G. Sol ainsi que Ch. Tolla qui a fait passer les questionnaires.

² UER de Didactique des Disciplines de l'Université Paris 7

- d'une part, de tester la capacité des élèves à reconnaître la structure des expressions en leur demandant d'évaluer des expressions numériques de type:

$$2+3\times 5$$

- d'autre part d'avoir une idée des transformations qu'ils jugent acceptables, en leur demandant d'estimer la validité d'un certain nombre d'égalités de type:

$$(a+b)\times c=a+(b\times c)$$

La première enquête a été donnée dans trois classes de Collège. La seconde, qui lui faisait suite, avait pour objectif de confirmer (ou d'infirmer) un certain nombre de faits troublants et d'améliorer la validité des résultats en supprimant certains biais. C'est le cas par exemple des questions de type:

$$(a+b)^2=(a)^2+(b)^2$$

où un "excès" de parenthèses par rapport aux expressions usuelles semblait dérouter les élèves. Ce second questionnaire a été soumis à six classes de Collège de la région Parisienne.

Le but de l'équipe de recherche n'était pas d'établir des résultats quantitatifs fins mais de réaliser une étude qualitative exploratoire. Nous avons donc choisi de mener des enquêtes légères, avec des petites populations (permettant ainsi un travail rapide de dépouillement) et une analyse statistique minimale (pouvant être faite "à la main" ou sur "tableur", sans nécessiter de logiciels d'analyse des données), ce qui permettait des aller-retours rapide entre les hypothèses et les observations.

IX.1. Première enquête

IX.1.1. Objectifs

IX.1.1.A. Expressions numériques

En 1985, nous ne formulons pas les objectifs de l'étude dans les termes mis en place dans cette thèse. Toutefois (et ce n'est évidemment pas dû au hasard) les idées sous-jacentes sont assez proches. A l'époque, nous partions d'une interrogation soulevée par la thèse de Claudine Gautier (1984). Celle-ci proposait d'interpréter un certain nombre d'erreurs commises par les élèves en algèbre par des difficultés liées au fait que les expressions manipulées (telles que " $a(b+cd)$ ") correspondent à des suites d'opérations, c'est-à-dire des fonctions du type:

$$(a,b,c,d) \mapsto a(b+c d).$$

Nous voulions reprendre cette étude avec d'autres types de questionnements que ceux que Cl. Gautier avait proposés aux élèves.

En outre, notre hypothèse était que ce n'est pas tant la suite d'opérations elle-même qui gêne les élèves que la manière dont l'ordre des opérations est exprimée: explicitement (avec des **parenthèses**) ou implicitement (par les **conventions de priorité**). En termes actuels, cela revient à dire que la difficulté d'interprétation des ESA ne réside pas tant dans leur complexité syntaxique (dans la structure de leur arbre, ou encore dans leur "forme profonde" au sens de Kirshner) que dans la manière dont la grammaire intègre les règles de priorité (au niveau de la "forme de surface"). Ceci rejoint les conclusions d'une étude de Blando et al. (1989):

«We found that a small number of errors, particularly precedence (order of operations) errors, were common across students. We also noted that these order of operations errors were masked in problems of the form $a\times b+c$ and were most apparent when the format of the task was changed (i.e. to $a+b\times c$) (...) these students are following the mal-rule "execute operations from left to right"...»

De nombreuses études ont été menées sur la question de la reconnaissance de la structure syntaxique des ESA par les élèves, y compris avec des techniques informatiques assez poussées, incluant par exemple la représentation en arbres (P. Thompson 1989) ou les "tuiles" de J. Larkin (1989) de type:

$$\boxed{2x} - \boxed{\boxed{3} \times (\boxed{5x} - \boxed{7})} = \boxed{4} + \boxed{9x}.$$

Nous avons choisi pour notre part de demander aux élèves d'évaluer (nous leur disions "calculer") des ESA **numériques**. La valeur de la réponse nous renseignait ainsi sur la structure perçue.

Ce dispositif n'est vraiment fiable que lorsque l'élève donne la réponse correcte³ (par exemple "14" pour

$$"2+4 \times 3",$$

ou bien un nombre correspondant à une structure incorrecte clairement identifiée, comme la réponse "18" dans le cas précédent, correspondant à la structure:

$$\{2+4\} \times 3.$$

Un certain nombre de réponses n'ont jamais pu être comprises, en dépit de la sagacité et des efforts d'imagination des membres de l'équipe, particulièrement à cause des erreurs de calcul arithmétiques du type:

$$7 \times 7 = 39.$$

Toutefois ceci n'est pas important par rapport à l'objectif de l'enquête.

³ il peut arriver qu'un élève trouve une réponse correcte à la suite d'un enchaînement heureux d'erreurs qui se compensent, mais c'est peu fréquent

IX.1.1.B. Expressions littérales

La seconde partie de l'enquête portait sur les transformations.

Un certain nombre d'études ont par exemple mis en évidence des erreurs d'algèbre dues à un usage erroné de la distributivité, en particulier dans l'exemple archi-classique:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

(v. p. ex. Al-Lakkis 1985, Kirshner 1990), ou encore de l'associativité (on en trouve un exemple dans Kieran 1989). Nous avons voulu généraliser ces études en explorant les transformations que les élèves jugeaient acceptables dans l'ensemble exhaustif des cas de type

$$a \nabla (b \Delta c)$$

où " ∇ " et " Δ " représentent les symboles "+", "-" et " \times ". En particulier, nous avons proposé au jugement des élèves des énoncés que nous avons qualifiés d'"auto-distributifs" tels que:

$$a + (b + c) = (a + b) + (a + c).$$

En outre, nous demandions de juger un certain nombre de développements erronés (dérivés de fausses distributions ou associations). Nous avons étudié également les carrés, mais pas les fractions, ni les racines.

IX.1.2. Population et variantes

La première enquête concerne 80 élèves répartis en deux classes de 4^{ème} et une classe de 5^{ème}. Chaque élève travaillait sur une des six variantes notées A, B, C, D, E et F. La difficulté et le type des questions était a priori comparables d'une variante à l'autre, en ce que les différentes variantes des questions numériques donnaient des résultats (corrects) identiques ou peu différents, du type:

$$3(7-2)$$

et

3(8-3).

Le nombre d'élèves ayant passé chaque variante est trop faible pour qu'on puisse étudier finement l'influence de la présentation des questions, ou du niveau des élèves, à l'exception de la question portant sur l'opposé d'un carré (cf. infra). Ce n'était de toute façon pas l'objectif de l'étude. Le caractère multivariant nous permettait d'abord d'éviter le phénomène parasite de copiage, qui est une question triviale sur le plan théorique mais aux conséquences pratique bien réelles quant à la fiabilité des résultats des questionnaires lorsque ceux-ci sont passés dans des classes "usuelles" et avec des conditions de travail normales (un seul surveillant, le maître lui-même, les élèves sur des tables rapprochées etc.).

IX.1.3. Questionnaires

Chaque élève devait remplir un questionnaire de deux pages comprenant 23 questions. On trouvera ci-dessous un exemple de questionnaire afin d'avoir une idée des questions posées. Les sept premières questions portaient sur des expressions numériques sans parenthèses, et les neuf suivantes sur des expressions avec parenthèses. Enfin, les sept dernières questions, sur la deuxième page, présentaient des égalités dont il fallait dire si elles étaient "toujours vraies" (auquel cas on répondait "V") ou non (réponse "N"). Nous indiquerons l'ensemble des items proposés aux élèves dans les paragraphes consacrés aux résultats.

Les élèves disposaient d'environ quarante minutes pour remplir le questionnaire.

IX.1.4. Texte d'un questionnaire

		A
NOM:		CLASSE: /
Ecrivez vos résultats dans la colonne de droite .		
I Calculez:	résultat:	
$3 + 2 \times 8$	1	
$- 9^2$	2	
$8 + 2^2$	3	
2×3^2	4	
$8 \times 2 + 4$	5	
$7 + 3 \times 11 - 12$	6	
$6 \times 11 - 9 \times 7$	7	
II Calculez sans développer:		
$(2 \times 3)^2$	8	
$(8 + 4)^2$	9	
$(- 4)^2$	10	
$5 \times (9 - 3)$	11	
$13 + (4 \times 3)$	12	
$(2 \times 3) \times (1 + 5)$	13	
$[2 + (4 \times 2)] \times [8 \times (9 - 8)]$	14	
$9 + (3 \times [8 - (2 \times 3)])$	15	
$(- 3 + 7) + 4$	16	
III Pour chacune des égalités suivantes, écrivez «V» si elle est TOUJOURS VRAIE, «N» sinon.		
		réponse:
$a + (b \cdot c)$	$= (a + b) \cdot (a + c)$	17
$(a + b) \times c$	$= (a \times c) + (b \times c)$	18
$(a \times b) + c$	$= a \times (b + c)$	19
$(- a)^2$	$= a^2$	20
$(a + b)^2$	$= (a^2) + (b^2)$	21
$(a \cdot b) \times (c + d)$	$= a \cdot (b \times c) \cdot d$	22
$a + (b - c)$	$= (a + b) - c$	23

IX.1.5. Expressions numériques: résultats globaux

Nous allons tout d'abord présenter un tableau des items numériques (avec ou sans parenthèses) dans l'ordre de réussite décroissante. Nous détaillerons ensuite les résultats pour chaque question ou groupe de questions.

- La première colonne du tableau ("item") donne la classe d'items en donnant un exemple d'item.
- La seconde colonne donne le nombre de réponses correctes ("rép cor").
- La troisième colonne donne le pourcentage de réponses correctes.
- La quatrième colonne ("err att") donne le nombre d'"erreurs attendues", qui sont sauf exception celles qu'on obtiendrait en effectuant les opérations de gauche à droite sans tenir compte ni des priorités ni des parenthèses.
- La cinquième colonne donne le pourcentage d'"erreurs attendues".
- La sixième colonne ("autres err") donne le nombre d'erreurs qui ne sont pas les erreurs attendues (par exemple, des erreurs de calcul).
- La septième colonne donne le pourcentage d' autres erreurs.
- La dernière colonne ("total") donne le nombre d'élèves ayant passé l'épreuve (en général, 80).

% de réussite à chacun des items numériques, toutes variantes confondues.							
item	rép cor	%	err att	%	autres er	%	total
$5 \times (9 - 3)$	7 6	95%	1	1%	3	4%	80
$13 + (4 \times 3)$	7 6	95%	0	0%	4	5%	80
$(2 \times 3)^2$	7 4	93%	2	3%	4	5%	80
$8 \times 2 + 4$	7 3	91%	3	4%	4	5%	80
$[2 + (4 \times 2)] \times [8 \times (9 - 8)]$	7 2	90%	0	0%	8	10%	80
$(-3 + 7) + 4$	7 1	89%	0	0%	9	11%	80
$(-4)^2$	6 8	85%	8	10%	4	5%	80
2×3^2	6 6	83%	8	10%	6	8%	80
$(2 \times 3) \times (1 + 5)$	6 6	83%	0	0%	14	18%	80
$9 + (3 \times [8 - (2 \times 3)])$	6 5	81%	0	0%	15	19%	80
$8 + 2^2$	6 4	80%	4	5%	12	15%	80
$6 \times 11 - 9 \times 7$	6 4	80%	4	5%	12	15%	80
$(8 + 4)^2$	5 4	81%	0	0%	13	19%	67
$3 + 2 \times 8$	5 0	63%	26	33%	4	5%	80
$7 + 3 \times 11 - 12$	4 0	50%	17	21%	23	29%	80
-9^2	2 0	25%	55	69%	5	6%	80

IX.1.6. Expressions numériques: résultats détaillés

Les résultats détaillés ne seront pas présentés par ordre de réussite mais selon une typologie des expressions qui dépend de leur structure. Nous indiquerons à chaque fois les enseignements principaux que l'on peut en retirer.

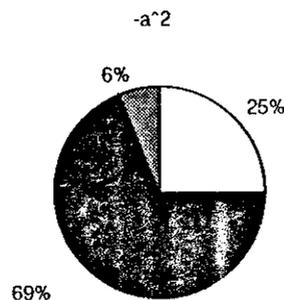
IX.1.6.A. Opposé d'un carré

Items

Nous donnons tout d'abord la liste des items proposés aux élèves. "Va" est la lettre correspondant à la variante et "Q" le numéro de la question (à savoir le numéro d'ordre dans le questionnaire).

	Va	Q
-9^2	A	2
-8^2	B	2
-7^2	C	1
-6^2	D	5
-5^2	E	2
-4^2	F	1

Résultats



- La zone **blanche** donne le taux moyen de réussite (ici extrêmement bas, 25%),
- la zone **noire** les "erreurs attendues",
 $-8^2 = +64$
- et la zone **grisée** les erreurs autres que les erreurs attendues, p. ex.:
 $-8^2 = -16$.

Ce résultat massif (qui sera confirmé par la seconde enquête, ainsi que par une enquête que nous avons menée au CNAM) montre la difficulté qu'il y a pour les élèves à percevoir la structure de -8^2 qu'ils interprètent comme le carré d'un opposé (avec l'argument véhément: "mais un carré est toujours positif!")⁴.

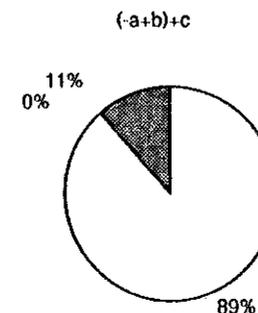
IX.1.6.B. Sommes

IX.1.6.B.a. Le premier terme est une somme algébrique

Items

	Var.	Ques.
$(-2+6)+2$	B	16
$(-2+6)+3$	C	16
$(-2+7)+2$	E	16
$(-2+7)+3$	F	16
$(-3+6)+3$	D	16
$(-3+7)+4$	A	16

Résultats



⁴ Citons une anecdote personnelle: lorsque j'ai abordé la question avec une classe de Seconde que je venais de prendre en mains, un certain nombre d'élèves n'ont tout simplement pas voulu me croire et ont déclaré qu'ils demanderaient à d'autres professeurs plus anciens dans le lycée (ce qu'ils n'ont malheureusement pas fait).

Les conventions de couleur sont les mêmes pour tous les graphiques: les bonnes réponses forment un secteur blanc, les erreurs attendues un secteur noir et les autres erreurs un secteur gris.

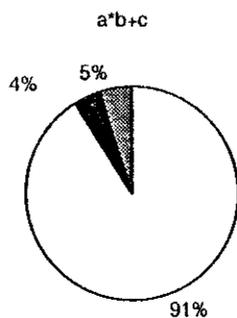
Cette expression ne pose évidemment pas de problème de structure aux élèves. Les seules erreurs (erreurs de calcul etc.) n'ont pas de rapport avec la structure. Il n'y a pas d' "erreurs attendues" dans la mesure où l'ordre de priorité de gauche à droite est renforcée par les parenthèses. Le résultat montre en tout cas que des parenthèses redondantes ne gênent pas les élèves dans le cas numérique.

IX.1.6.B.b. Le premier terme est un produit

Items

6x2+6	F	3
6x3+2	C	5
7x2+5	B	3
7x2+5	E	5
8x2+3	D	1
8x2+4	A	5

Résultats



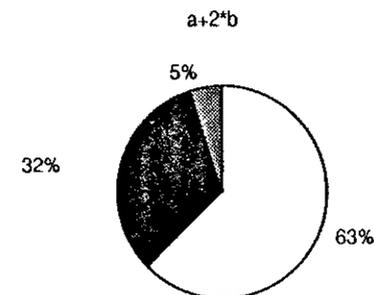
Seuls trois élèves sur 80 violent à la fois la convention de priorité et l'usage de commencer par la gauche. Nous allons pouvoir comparer ce résultat avec les sommes dont le second terme (et non plus le premier) est un produit.

IX.1.6.B.c. Le second terme est un produit

Items

2+2x8	B	4
3+2x7	D	2
3+2x8	A	1
4+2x6	F	4
4+2x7	C	4
5+2x6	E	4

Résultats



On passe à 26 élèves sur 80 qui ne respectent pas la priorité. Ce résultat joint au précédent signifie qu'environ un élève sur trois (de notre population) n'applique pas la priorité de la multiplication sur l'addition.

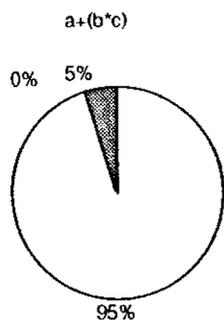
IX.1.6.B.d. Le second terme est un produit parenthésé

Items

Le second membre est toujours un produit, mais cette fois-ci sa priorité est explicitement indiquée par les parenthèses.

10+(4x4)	F	10
10+(5x3)	B	10
11+(5x3)	C	12
11+(7x2)	E	10
13+(4x3)	A	12
13+(6x2)	D	9

Résultats



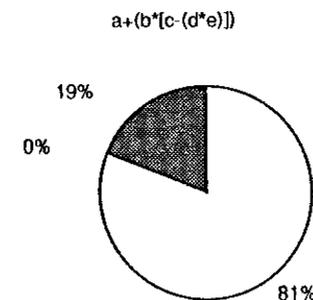
Lorsque la priorité est marquée par les parenthèses, **plus aucun élève ne se trompe sur l'ordre des opérations à effectuer**. Ceci montre assez clairement que la présence ou non des parenthèses joue un grand rôle (un rôle essentiel pour le tiers des élèves) dans la détermination de la structure de l'expression. Nous allons confirmer ce résultat avec une expression structurellement plus complexe mais entièrement parenthésée.

IX.1.6.B.e. Le second terme est un produit "complexe" parenthésé

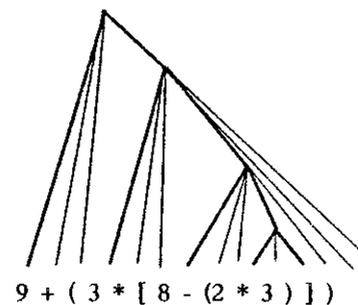
Items

$6 + (3 \times [9 - (2 \times 3)])$	E	15
$7 + (3 \times [9 - (3 \times 2)])$	F	14
$8 + (4 \times [8 - (2 \times 3)])$	B	14
$9 + (2 \times [9 - (3 \times 2)])$	C	15
$9 + (3 \times [8 - (2 \times 3)])$	A	15
$9 + (3 \times [8 - (3 \times 2)])$	D	14

Résultats



On voit donc bien que ce n'est pas la complexité syntaxique qui est en jeu dans la difficulté de reconnaissance structurelle, puisque l'arbre de cette expression est:



qui est à l'évidence plus complexe que celui de "3 + 2 * 8":



même sans tenir compte de la génération des parenthèses! Pourtant, un tiers des élèves échouent à assigner une structure correcte à:

$3 + 2 \times 8$

et aucun à :

$$9 + (3 \times [8 - (2 \times 3)]).$$

La syntaxe des règles de priorité est donc une plus grande cause d'erreur que la complexité des structures.

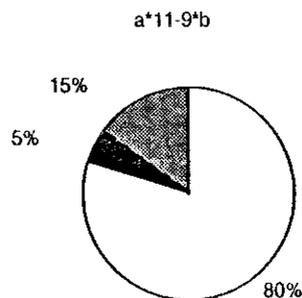
IX.1.6.B.f. Les deux termes sont des produits

Items

Il s'agissait ici de voir l'influence d'une forme "tentante" visant à rendre la soustraction ("11-9") prioritaire sur l'addition, autrement dit de déterminer la capacité des élèves à voir une structure là où elle n'est pas, pour faciliter leurs calculs, ce qui est une "erreur-relais" au sens de Paquelier (1987).

6×11-9×7	A	7
7×11-9×4	C	7
7×11-9×5	D	6
7×11-9×6	E	7
8×11-9×6	B	6
8×11-9×7	F	6

Résultats



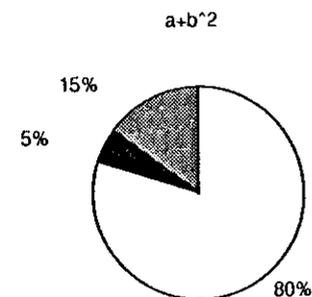
Relativement peu d'élèves (5%) ont été tentés. Les autres erreurs sont soit des erreurs de calcul soit des calculs faits de gauche à droite.

IX.1.6.B.g. Le second terme est un carré

Items

8+2 ²	A	3
8+3 ²	B	1
6+3 ²	C	3
7+3 ²	D	3
6+4 ²	E	4
7+2 ²	F	5

Résultats



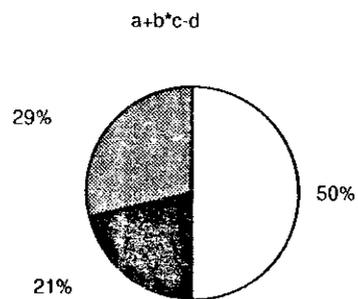
On pourrait dire que l'élévation au carré est "plus prioritaire" que ne l'est la multiplication par rapport à l'addition, dans la mesure où 5% des élèves seulement effectuent de gauche à droite, contre 33% dans le cas de la multiplication.

IX.1.6.C. Somme algébrique de trois termes

Items

4+6×12-11	C	6
5+5×10-11	E	6
5+5×11-12	B	7
6+4×11-10	F	7
6+4×12-11	D	7
7+3×11-12	A	6

Résultats



Par rapport aux items de type:

$$6 \times 11 - 9 \times 7$$

le "piège" est déplacé à la dernière position et il est encore plus tentant: il n'est pas très fatigant de multiplier par "12-11". De ce fait les "erreurs attendues" sont plus nombreuses ici (21% au lieu de 5%). Par contre, nous avons remarqué que plusieurs élèves évitaient cette erreur uniquement pour ne pas avoir à produire de résultat négatif entraîné par le facteur "11-12" (cf. les stratégies d'évitement des négatifs mis en évidence par Gallardo & Rojano 1990). Nous avons repris cet exercice sans ce biais dans la seconde enquête.

IX.1.6.D. Produits

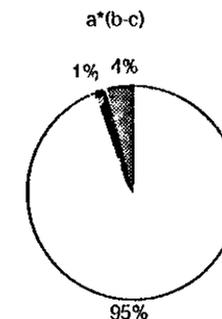
IX.1.6.D.a. Le second facteur est une différence

Nous avons un produit bien parenthésé, sans comparaison possible avec une expression non parenthésée dont un facteur serait une différence.

Items

$5 \times (7 - 1)$	C	10
$5 \times (8 - 2)$	B	11
$5 \times (9 - 3)$	A	11
$6 \times (6 - 1)$	F	8
$6 \times (7 - 2)$	E	9
$6 \times (8 - 3)$	D	10

Résultats



Notons qu'un élève a tout de même réussi à ne pas respecter l'ordre donné par les parenthèses. Cela nous conduit à relativiser nos résultats antérieurs concernant la connaissance des parenthèses et des règles de priorité. Si le rôle structurant des parenthèses est mieux connu que celui des priorités, cela ne signifie pas qu'il est parfaitement maîtrisé par tous les élèves...

IX.1.6.D.b. Le premier facteur est une somme

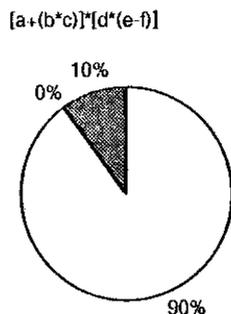
Items

Nous avons là encore une expression complexe et complètement parenthésée.

$[+(3 \times 2)] \times [9 \times (5-4)]$	D	15
$[1+(2 \times 3)] \times [7 \times (6-5)]$	E	14
$[1+(3 \times 3)] \times [7 \times (8-7)]$	C	14
$[2+(3 \times 2)] \times [8 \times (9-8)]$	F	15
$[2+(4 \times 2)] \times [8 \times (9-8)]$	A	14
$[4+(2 \times 3)] \times [9 \times (7-6)]$	B	15

Noter qu'à la suite d'une coquille typographique le premier terme du premier facteur de la première variante a disparu. Nous n'avons pas compté dans les résultats les items correspondants.

Résultats



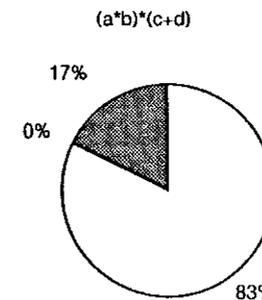
Il n'y a pas d'erreur de priorité dans cette expression bien parenthésée.

IX.1.6.D.c. Le second facteur est une somme

Nous avons une structure identique à la précédente dans les premières branches de l'arbre syntagmatique, mais moins complexe dans la mesure où il y a un niveau d'emboîtement en moins:

$(2 \times 3) \times (1+5)$	A	13
$(2 \times 3) \times (2+4)$	E	13
$(2 \times 4) \times (3+2)$	F	13
$(2 \times 4) \times (4+1)$	B	13
$(3 \times 2) \times (4+2)$	C	13
$(4 \times 2) \times (2+3)$	D	13

Résultat



Pour ce qui est de la reconnaissance de la structure, la variation de la complexité par rapport au cas précédent ne change rien.

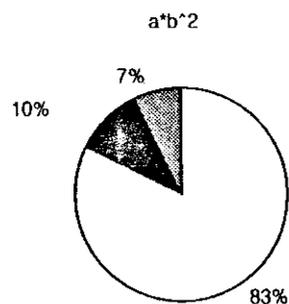
IX.1.6.D.d. Un facteur est un carré

Items

Il s'agissait de voir la priorité du carré sur la multiplication.

2×2^2	F	2
2×3^2	A	4
2×4^2	D	4
3×2^2	B	5
3×3^2	E	1
4×2^2	C	2

Résultats



Il est intéressant de rapprocher ces résultats de ceux des sommes dont un terme est un carré.

$6+3^2$	C	3
$6+4^2$	E	3
$7+2^2$	F	5
$7+3^2$	D	3
$8+2^2$	A	3
$8+3^2$	B	1

Dans ce dernier cas le nombre d'erreurs de priorité tombe à 5% alors qu'il est de 10% avec le produit. Cela confirme notre hypothèse de selon laquelle la priorité du carré est plus "nette" que celle de la multiplication. En effet, de même que les élèves perçoivent mieux la priorité du carré sur l'addition:

$$a+b^2$$

que la priorité de la multiplication sur l'addition:

$$a+b \times c,$$

de même cette priorité du carré sur l'addition:

$$a+b^2$$

est-elle mieux perçue que la priorité du carré sur la multiplication:

$$a \times b^2.$$

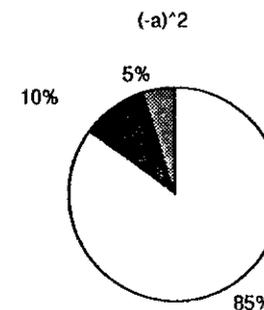
IX.1.6.E. Carrés

IX.1.6.E.a. Carré d'un opposé

Items

$(-4)^2$	A	10
$(-5)^2$	B	9
$(-6)^2$	C	9
$(-7)^2$	D	11
$(-8)^2$	E	8
$(-9)^2$	F	12

Résultats



Cet item est le complément de l'opposé d'un carré. le taux d'échec est bien moindre, sans doute parce qu'il n'y a pas l'influence de la notion de "carré toujours positif".

IX.1.6.E.b. Carré d'une somme et d'une différence

Items et résultats

Nous allons indiquer les résultats item par item car les variations entre items sont plus importantes ici qu'entre les autres questions.

Lecture du tableau:

- La première colonne donne la variante
- La colonne suivante donne l'item correspondant
- Les deux colonnes suivantes indiquent les réponses correctes. La sous-colonne de gauche indique la valeur numérique du résultat correct (en *italiques*), la sous-colonne de droite donne le nombre d'élèves ayant donné la bonne réponse.
- Les deux colonnes suivantes indiquent les réponses correspondant à une distribution du carré sur la somme ou la différence (" $a^2 \pm b^2$ "). La sous-colonne de gauche indique le résultat numérique correspondant pour chaque variante (en *italiques*), la sous-colonne de droite donne le nombre d'élèves ayant donné cette réponse.
- Les deux colonnes suivantes concernent les élèves qui ont fait une pseudo-association: $(a \pm b)^2 \rightarrow a \pm (b^2) \rightarrow a \pm b^2$.
- Les deux colonnes suivantes concernent les élèves qui multiplié par 2 au lieu d'élever au carré.
- Les deux suivantes indiquent les autres types d'erreurs et le nombre d'élèves les ayant faites.
- La dernière colonne donne le nombre total des élèves.

Var.	Item	$(a \pm b)^2$		$a^2 \pm b^2$		$a \pm b^2$		$(a \pm b) \times 2$		Autres erreurs		Total
		=	nb.	=	nb.	=	nb.	=	nb.	=	nb.	
A	$(8+4)^2$	<i>144</i>	9	<i>80</i>		<i>24</i>		<i>24</i>		<i>244</i>	1	10
C	$(7+5)^2$	<i>144</i>	7	<i>74</i>	1	<i>32</i>		<i>24</i>	1	<i>124, 134, 148, 164, 169</i>	5	14
B	$(13-11)^2$	<i>4</i>	13	<i>48</i>		<i>-108</i>		<i>4</i>		<i>147</i>	1	14
D	$(12-10)^2$	<i>4</i>	12	<i>44</i>		<i>-88</i>		<i>4</i>		<i>24, 244</i>	2	14
F	$(13-10)^2$	<i>9</i>	13	<i>69</i>	1	<i>-87</i>		<i>6</i>	1			15
E	$(9+3)$											0
	Total		54		2		0		2		3	61
	Total %		89%		3%		0%		3%		5%	100%

Il était prévu de proposer six items dont trois seraient des carrés d'une somme et trois des carrés d'une différence. Par suite d'une erreur de saisie typographique la dernière somme a perdu son exposant. Tous les élèves ont répondu correctement que " $(9+3)$ " valait 12. Cela confirme s'il en était besoin que les parenthèses redondantes ne les gênent pas, mais nous n'avons évidemment pas intégré ce résultat à notre étude des carrés.

Il restait donc deux carrés de somme et trois carrés d'une différence. Les principaux points remarquables sont les suivants. D'une part, aucun élève n'a fait d'erreur consistant à ne pas tenir compte des parenthèses, erreur que nous qualifions plus bas de pseudo-associativité, et qui consiste à déplacer les parenthèses dans un triplet d'opérandes, en remplaçant " $a \nabla (b \Delta c)$ " par " $(a \nabla b) \Delta c$ ".

Notons qu'on ne pouvait déceler ici d'"erreur attendue" consistant à traiter les opérations de gauche à droite sans tenir compte des priorités indiquées par les parenthèses ou les conventions, dans la mesure où ce traitement donne précisément ici le résultat correct, puisque l'exposant (qui indique le carré que l'on effectue en dernier) est situé par convention à droite de la base. L'ordre des parenthèses est ici celui qui va usuellement de gauche à droite.

Par contre, deux élèves ont fait une erreur consistant à (mal) développer le carré

$$(a+b)^2$$

en

$$a^2 + b^2,$$

puis à effectuer cette dernière expression. L'un a trouvé 74 pour

$$(7+5)^2,$$

l'autre a répondu 69 à

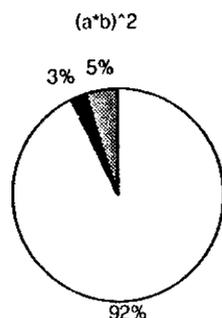
$$(13-10)^2.$$

Il nous a paru intéressant d'étudier un peu plus systématiquement et avec des effectifs supérieurs cette erreur bien connue, aussi avons-nous décidé de reposer la question dans le second questionnaire.

Enfin, nous avons été légèrement surpris de constater qu'il y avait quand même deux élèves de collège pour calculer un carré en multipliant par deux. Ceci méritait également une étude plus détaillée.

IX.1.6.E.c. Carré d'un produit

Résultats



Les résultats sont ici meilleurs que dans le cas du carré d'une somme. L'ordre des opérations indiqué par les parenthèses coïncide également avec l'ordre de gauche à droite, et même si l'élève voulait développer $(ab)^2$ en a^2b^2 le résultat serait encore correct.

IX.1.7. Expressions littérales: résultats globaux

Nous allons donner maintenant les items littéraux dans l'ordre de réussite croissante.

- La première colonne donne le nom de la propriété mise en jeu.
- La seconde colonne donne l'égalité proposée au candidat traduisant la propriété.
- La troisième colonne rappelle la réponse correcte ("V" ou "F").
- La quatrième colonne donne le nombre de réponses correctes.
- La cinquième colonne donne le pourcentage correspondant.

- Les deux dernières colonnes donnent le nombre et le pourcentage de réponses fausses.

propriété	énoncé	s	rép cor	rép inco
dist de + sur x à g.	$a+(bxc) = (a+b)x(a+c)$	N	5 36%	9 64%
dist de x sur + à g.	$a x(bxc) = (axb)x(axe)$	N	11 41%	16 59%
distrib de ² sur +	$(a+b)^2 = (a^2)+(b^2)$	N	21 54%	18 46%
dist de + sur x à d.	$(axb)+c = (a+c)x(b+c)$	N	16 55%	13 45%
assoc de x sur +	$(a+b)xc = a+(bxc)$	N	17 59%	12 41%
autodist de x à d.	$(axb)xc = (axc)+(bxc)$	N	9 64%	5 36%
faux développement	$(a+b)x(c+d) = (axc)+(bxc)+(axd)+(axd)$	N	9 64%	5 36%
assoc de - sur +	$a-(b+c) = (a-b)+c$	N	18 67%	9 33%
assoc de + sur -	$a+(b-c) = (a+b)-c$	V	17 71%	7 29%
développt partiel	$(a+b)x(c+d) = (axc)+(bxd)$	N	10 71%	4 29%
assoc de -	$a-(b-c) = (a-b)-c$	N	21 72%	8 28%
assoc de + sur x	$(axb)+c = ax(b+c)$	N	18 78%	5 22%
autodist de + à d.	$(a+b)+c = (a+c)+(b+c)$	N	11 79%	3 21%
assoc de ² sur opp	$(-a)^2 = -(a^2)$	N	22 79%	6 21%
autodist de + à g.	$a+(b+c) = (a+b)+(a+c)$	N	20 80%	5 20%
déplact de parenth.	$(a+b)x(c+d) = a+(bxc)+d$	N	20 87%	3 13%
distrib de ² sur x	$(axb)^2 = (a^2)x(b^2)$	V	13 88%	16 55%
déplact de parenth.	$(axb)+(cxd) = ax(b+c)+d$	N	36 88%	5 12%
² sur opp	$(-a)^2 = a^2$	V	21 91%	2 9%
assoc de ² sur x	$(axb)^2 = ax(b^2)$	N	25 93%	2 7%
associativité de x	$(axb)xc = ax(bxc)$	V	13 93%	1 7%
associativité de +	$(a+b)+c = a+(b+c)$	V	13 93%	1 7%
dist de x sur + à d.	$(a+b)xc = (axc)+(bxc)$	V	22 96%	1 4%
dist de x sur + à g.	$ax(b+c) = (axb)+(axc)$	V	14 100%	0 0%

IX.1.8. Expressions littérales: résultats détaillés

Signalons que nous avons répartis les items dans les différentes variantes de telle manière qu'un même élève n'ait pas à juger deux égalités contradictoires, par exemple:

$$(ab)c = (ab)(ac)$$

et

$$(ab)c = a(bc).$$

Pour faciliter les comparaisons nous exprimerons les résultats en pourcentages. Le lecteur ne doit pas perdre de vue toutefois que les populations d'élèves ayant répondu à un item donné varient (comme on peut le voir dans le tableau précédent en ajoutant pour chaque item le contenu de la quatrième à celui de la sixième case) entre 14 et 42. Une différence de moins de 2% (pour 42 élèves) ou de moins de 7% (pour 14 élèves) n'a donc aucune signification. Nous rappellerons chaque fois que nécessaire la taille de la population de référence.

IX.1.8.A. Sommes et produits

IX.1.8.A.a. "Pseudo-développements"

Produit de deux sommes

- $(a+b) \times (c+d) = (a \times c) + (b \times c) + (a \times d) + (a \times d)$

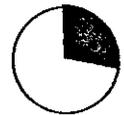


Une coquille typographique (encore une!) a rendu faux ce développement ("a×d" au lieu de "b×d"). Cela a dû dérouter les élèves puisqu'il n'y a eu que 64% de réussite à cette question. On peut y voir un effet d'une coutume⁵ didactique assez naturelle (à laquelle nous nous sommes de fait conformés) qui veut que ce sur quoi on demande le jugement de l'élève soit didactiquement pertinent par rapport aux circonstances: âge, niveau, sujet des dernières leçons, etc. Ainsi le travail pour répondre à une question est supposé mettre en jeu les connaissances qui sont "au programme". Cela apparaît nettement à chaque fois qu'un sujet d'examen présente une bizarrerie: surveillants et élèves se demandent aussitôt s'il s'agit d'une coquille qu'il suffit de rectifier, ou bien si cette étrangeté résulte d'une difficulté profonde, qu'on n'identifie pas immédiatement. On exclut spontanément l'hypothèse que l'auteur du questionnaire ait sciemment posé une question triviale.

⁵ Balacheff (1988)

On peut donc supposer que les élèves ont ici rectifiés d'eux-mêmes la coquille, voire qu'ils ne l'ont même pas remarquée, à l'instar de l'équipe de recherche! Ayant enregistré comme fausse la réponse "V", (ce qui est mathématiquement correct mais didactiquement ambigu) les résultats sont peu significatifs.

- $(a+b) \times (c+d) = (a \times c) + (b \times d)$



Cette égalité fausse a été choisie pour son caractère "symétrique" qui se voulait tentant. Elle n'a été reconnue comme fausse que par 71% des élèves (10/14).

- $(a+b) \times (c+d) = a + (b \times c) + d$



Cette égalité fausse présente une disposition des parenthèses inhabituelle dans le second membre, en ce sens qu'elle n'apparaît dans aucune des identités usuellement enseignées. Nous la supposons donc a priori moins tentante. Elle a été reconnue fausse par 87% des élèves (20/23), ce qui confirme a posteriori l'importance de ce critère de "forme usuelle".

Somme de deux produits

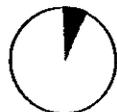
- $(a \times b) + (c \times d) = a \times (b+c) \times d$



La même analyse vaut pour cette égalité qui a été reconnue fausse par 88% des élèves (36/41).

IX.1.8.A.b. Associations généralisées

• $(a+b)+c = a+(b+c)$



• $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

Ces deux identités recueillent le meilleur taux de réussite de l'enquête (93%, soit 26/28). Il s'est tout de même trouvé deux élèves pour les juger fausses.

• $(a \times b) + c = a \times (b + c)$



78 % de réussite (18/23).

• $(a+b) \times c = a+(b \times c)$



Le taux de réussite tombe à 59% (17/29), ce qui signifie qu'il y a 12 élèves sur 29 pour estimer vraie cette égalité. Nous avons une application du critère de forme usuelle, dans le sens opposé des pseudo-développements que nous avons vu plus haut. Les deux fausses associativités ont en effet une disposition connue (quand on ne regarde que les parenthèses) et il semble bien que c'est ce qui a poussé plus du tiers des élèves à valider ces égalités.

• $a+(b-c)=(a+b)-c$



Cette identité n'est reconnue que par 71% des élèves (17/24), peut-être par méfiance excessive qui voudrait que seules la multiplication ou l'addition puissent figurer dans des égalités de ce type.

• $a-(b-c)=(a-b)-c$



• $a-(b+c)=(a-b)+c$



Ces deux égalités sont reconnues comme fausses par respectivement 72% (21/29) et 67% (18/27) des élèves.

• $(-a)^2 = -(a^2)$



Le taux de réussite est de 79% (22/28) contre 91% (21/23) pour:

$$(-a)^2 = a^2$$

toutefois l'écart est peu significatif. Il va dans le sens du fait que, globalement, les identités sont mieux reconnues que les égalités fausses.

• $(a \times b)^2 = a \times (b^2)$



Le taux de réussite est de 93% (25/27) contre 88% (13/16) pour:

$$(a \times b)^2 = (a^2) \times (b^2)$$

toutefois l'écart n'est pas significatif ici (un élève sur 16 représente 6%). Cela dit, nous nous étions demandés si le fait que les facteurs du produit soient mis entre parenthèses pouvait désorienter les élèves. Cela nous a amené à intégrer ce critère (parenthésage redondant) dans la seconde enquête.

En résumé, seules les identités d'associativité de la multiplication ou de l'addition sont bien reconnues. Le taux moyen de réussite pour les autres formules n'est que de 70% (91/132).

IX.1.8.A.c. Distributions généralisées

Distributions vraies

- $a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$: 100% (14/14)
- $(a+b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$: 96% (22/23)
- $(a \times b)^2 = (a^2) \times (b^2)$: 88% (21/24)



Comme précédemment les identités sont bien reconnues, d'autant plus qu'elles sont des objets d'enseignement explicites (en ce qu'elles illustrent des propriétés fondamentales des opérations sur les nombres réels, ici la distributivité).

Il est à noter toutefois que dans les manuels, la propriété

$$(a \times b)^2 = (a^2) \times (b^2)$$

est rarement présentée pour ce qu'elle est, à savoir une distributivité à droite. Ceci est peut-être lié au fait que l'exponentiation n'est pas distributive à gauche (on ne peut alors pas parler de "distributivité" sans préciser la direction). La même raison joue peut-être pour:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{a}{c}$$

Toutefois, l'absence de présentation de la distributivité à droite de l'exponentiation est peut-être également due au fait que cette opération joue un rôle secondaire au sein des structures d'ensembles de nombres (anneaux, corps), comme nous l'avons vu au chapitre V, et que les propriétés telles que l'associativité ou la distributivité sont surtout mises en évidence dans le cours pour les lois "fondamentales" que sont l'addition et la multiplication.

Autodistributions

- $(a \times b) \times c = (a \times c) \times (b \times c)$: 64% (9/14)
- $a \times (b \times c) = (a \times b) \times (a \times c)$: 41% (11/27)
- $(a+b) + c = (a+c) + (b+c)$: 79% (11/14)
- $a + (b+c) = (a+b) + (a+c)$: 80% (20/25)



Les fluctuations des résultats (dont il ne faut pas exagérer l'importance vu la faiblesse des effectifs) ne s'expliquant pas de manière claire, nous avons repris ces items dans le deuxième questionnaire avec une population plus importante et moins de variantes. Nous voulions en effet déterminer si les critères de position (droite ou gauche) de l'opérande à distribuer avaient une influence significative sur les résultats des élèves.

Autres distributions généralisées fausses

- $a + (b \times c) = (a+b) \times (a+c)$: 36% (5/14)



Ce taux de réussite est le plus bas de toute l'enquête.

- $(a \times b) + c = (a + c) \times (b + c)$: 55% (16/29)



Ici encore nous avons une différence selon qu'il s'agit d'une distribution "à droite" ou "à gauche", que nous essayerons de mieux cerner dans le prochain questionnaire.

Visiblement, la "forme"

$$a \nabla (b \Delta c) = (a \nabla b) \Delta (a \nabla c)$$

apparaît comme caractéristique de la distributivité, avec

$$(\nabla; \Delta) = (" \times ", "+")$$

pour 100% des élèves, mais également

$$(\nabla; \Delta) = (" + ", " \times ")$$

pour 51% d'entre eux (21/43, les deux items étudiés ici),

$$(\nabla; \Delta) = (" \times ", " \times ")$$

pour 69% d'entre eux et

$$(\nabla; \Delta) = (" + ", "+")$$

pour 20%.

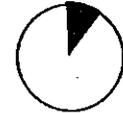


- $(a+b)^2 = (a^2)+(b^2)$: 54% (21/39)

Nous relevons ici un taux important d'élèves (54%) qui pensent que l'exposant (au moins "2") peut être distribué sur les termes de la somme. C'est le cas étudié par Kirshner pour la "Distributive Generalized Law" (il n'envisage pas les autres cas que nous venons de voir). Nous allons également reprendre plus en détail cette étude dans le questionnaire 2, et

observer en particulier quelle réponse à cette question (littérale) fournissent des élèves qui donnent "34" comme valeur pour $(5+3)^2$.

IX.1.8.B. Carrés



- $(-a)^2 = a^2$ 91% (21/23)

Comme les autres identité "classiques" celle-ci est bien reconnue par les élèves.

IX.2. Seconde enquête

IX.2.1. Objectifs

La seconde enquête faisait suite à la première. Celle-ci mettait en évidence un certain nombre d'erreurs troublantes de la part des élèves, mais les faibles effectifs d'élèves ayant répondu, pour chaque item, ne permettaient pas de déterminer précisément les facteurs susceptibles d'influer sur ces réponses. Il a donc été décidé de reposer un certain nombre de questions à plus d'élèves (six classes au lieu de trois) avec moins de variantes (quatre au lieu de cinq).

Nous avons voulu voir également s'il y avait corrélation entre les comportements relevés dans la première enquête concernant les expressions numériques, p. ex.;

$$(5+3)^2 = 34,$$

et ceux concernant les expressions littérales, p. ex.

$$(a+b)^2 = a^2+b^2 \text{ est Vrai.}$$

Il s'agissait enfin de reprendre les questionnaires dans lesquels des coquilles typographiques avaient rendu un certain nombre de données inutilisables.

IX.2.2. Population

Ce second questionnaire se présentait en quatre variantes notées G, H, I et J. Il a été soumis à 172 élèves provenant de six classes de 3^{ème} et d'une classe de 4^{ème} de la région Parisienne. Chaque variante a donc été soumise à 43 élèves.

IX.2.3. Expressions littérales: résultats globaux

Nous indiquons d'abord les résultats concernant les expressions littérales, par type de propriété. Le tableau suivant se lit comme suit:

- La première colonne indique de manière abrégée la propriété mise en jeu.

Ces propriétés sont l'autodistributivité du produit sur lui-même et de la somme sur elle-même et les propriétés des carrés d'un opposé, d'une somme ou d'un produit.

Les critères dont on a voulu étudier l'influence étaient la présence ou non de parenthèses "superflues" (dont nous pensions a priori qu'elles étaient un facteur d'échec pour les élèves à cause de l'aspect inhabituel pris par les égalités proposées) et, pour l'autodistributivité, la position de l'opérande à gauche ou à droite de l'expression.

- La seconde colonne donne l'énoncé proposé au candidat.
- La troisième colonne rappelle la réponse correcte ("V" ou "F").
- La quatrième colonne donne le nombre de réponses correctes et la cinquième le pourcentage correspondant.
- Les deux dernières colonnes donnent le nombre et le pourcentage de réponses fausses.

propriété	énoncé	R	r. corr.	r. incor
autodist + à g avec ()	$a+(b+c)=(a+b)+(a+c)$	N	19 61%	12 39%
autodist x à g avec ()	$ax(bxc)=(axb) \times (axc)$	N	14 45%	17 55%
autodist + à d avec ()	$(a+b)+c=(a+c)+(b+c)$	N	26 84%	5 16%
autodist x à d avec ()	$(axb) \times c=(axc) \times (bxc)$	N	11 37%	19 63%
autodist + à g sans ()	$a+(b+c)=a+b+a+c$	N	24 80%	6 20%
autodist x à g sans ()	$ax(bxc)=axb \times axc$	N	15 45%	18 55%
autodist + à d sans ()	$(a+b)+c=a+c+b+c$	N	26 84%	5 16%
autodist x à d sans ()	$(axb) \times c=axc \times bxc$	N	14 45%	17 55%
dist ² + à d avec ()	$(a+b)^2=(a^2)+(b^2)$	N	23 74%	8 26%
dist ² + à d sans ()	$(a+b)^2=a^2+b^2$	N	20 67%	10 33%
id remarq avec ()	$(a+b)^2=(a^2)+(2ab)+(b^2)$	V	28 90%	3 10%
id remarq sans ()	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	V	31 100%	0 0%
asso ² sur - avec ()	$(-a)^2=(-a^2)$	N	31 51%	30 49%
prio ² sur - sans ()	$(-a)^2=a^2$	V	25 41%	36 59%
asso ² sur x avec ()	$(axb)^2=ax(b^2)$	N	31 100%	0 0%
asso ² sur x sans ()	$(axb)^2=axb^2$	N	29 94%	2 6%
dist ² x avec ()	$(axb)^2=(a^2) \times (b^2)$	V	21 68%	10 32%
dist ² x sans ()	$(axb)^2=a^2 \times b^2$	V	22 73%	8 27%

IX.2.4. Expressions littérales: influence des critères.

IX.2.4.A. Influence des parenthèses superflues

Lors de la précédente enquête il nous avait semblé que les élèves étaient troublés lorsque l'expression littérale qui leur était proposée contenait "trop" de parenthèses. Nous avons donc voulu vérifier cette hypothèse en présentant toutes les expressions de la seconde enquête en versions "avec" et "sans" parenthèses superflues (chaque questionnaire mêlait des expressions "trop" parenthésées et des expressions sans parenthèses). Nous avons ensuite comparé la réussite de tous les items avec parenthèses et sans parenthèse.

Le dépouillement montre que le premier taux (avec parenthèses) est de 66% (204/308) tandis que le second (sans parenthèses) est de 67% (206/308). Autrement dit, et ce résultat nous a relativement surpris dans la mesure où nous nous attendions au contraire, notre hypothèse est totalement infirmée par l'enquête: les parenthèses surnuméraires ne semblent gêner en rien les élèves.

IX.2.4.B. Position de l'opérande à auto-distribuer

Lorsque l'opérande à distribuer est à gauche ("aΔ(bΔc)") la réussite est meilleure (58%: 72/125) que quand il est à droite ("(aΔb)Δc") (44% : 54/123). En d'autres termes, les élèves sont plus tentés (à 66%) d'autodistribuer

$$(a\Delta b)\Delta c$$

que

$$a\Delta (b\Delta c)$$

(à 42%). Ceci dit, la différence des taux d'erreurs n'est pas énorme, et le problème pour la didactique de l'algèbre réside moins dans cette différence que dans le taux moyen de 51%⁶ d'élèves qui acceptent une autodistributivité.

Rappelons que nous avons trouvé 37% d'erreurs globales d'autodistribution dans la 1ère enquête (sur un effectif trois fois plus petit: 30/81).

Dans la première enquête nous avons trouvé des taux de réussite à droite de 71% (20/28) et à gauche de 60% (31/52). Cela va dans le sens contraire, mais les effectifs sont plus petits. Les écarts sont trop étroits pour les techniques statistiques élémentaires que nous nous étions données. Si l'on souhaite établir de manière fiable ces écarts, il faut des populations plus élevées et des outils plus fins d'analyse des données.

IX.2.4.C. Influence des catégories mises en jeu

L'influence des parenthèses semble nul. La place des opérandes à distribuer joue un rôle dans la réussite, mais sans que cela soit massif. Finalement, le critère le plus pertinent est celui de la catégorie des expressions mises en jeu. Par exemple, les carrés d'une somme sont mieux

⁶ correspondant à un taux de $\frac{72+54}{125+123}$ élèves

réussis (83%) que les carrés d'un produit (70%). Plus généralement, les expressions dont un opérande est une somme, de type:

$$a\Delta (b+c)$$

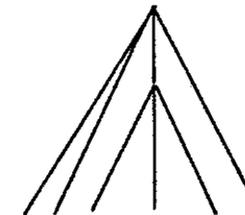
sont mieux réussies (80%) que celles dont l'opérande est un produit:

$$a\Delta (b\times c)$$

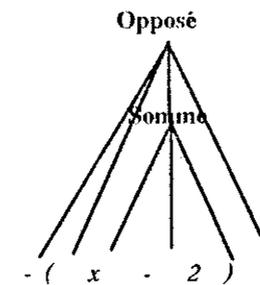
(52%) ou un opposé:

$$a\Delta (b-c)$$

(41%). Cela signifie que la difficulté des élèves n'est pas uniquement une question de structure, autrement dit de forme de l'arbre syntagmatique:



mais qu'elle dépend également des catégories des expressions mises en jeu:



En d'autres termes, pour reprendre la façon dont nous formulons le problème à l'époque, ce n'est pas la notion même de **suite d'opérations**, ni le degré de complexité de ces suites qui posent des problèmes aux élèves. Ce sont les **propriétés** de ces suites d'opérations, telles que la non-

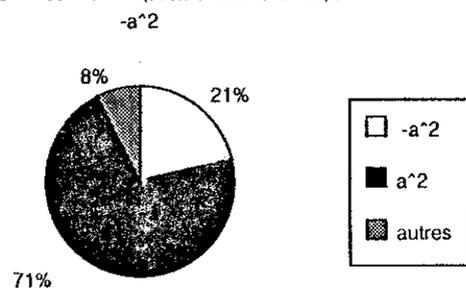
commutation des opérateurs (le carré de la somme n'est pas la somme des carrés) qu'ils maîtrisent mal, propriétés liées à celles des opérations elles-mêmes.

Dans notre terminologie actuelle cela revient à dire que ce n'est ni la complexité ni la structure abstraite des ESA qui gêne les élèves, mais bien les **transformations** de ces ESA complexes (telles que la distribution du carré sur la somme), transformations qui ne peuvent être opérées que sous certaines conditions portant sur les catégories des ESA et de leurs opérandes.

IX.2.5. Expressions numériques

IX.2.5.A. Opposé d'un carré

Cette seconde enquête confirme l'erreur massive apparue dans la première enquête, qui n'est donc pas un artefact. Les items proposés étaient " -6^2 ", " -7^2 ", " -8^2 " et " -9^2 " (total: 122 élèves):



Ce taux n'est pas le même pour tous les items:

- 6²: 73% (22/30)
- 7²: 80% (24/30)
- 8²: 58% (18/31)
- 9²: 74% (23/31)

Ces fluctuations se retrouvent-elles pour des populations plus importantes? Pour le savoir j'ai rassemblé dans un seul tableau les variations de l'erreur attendue:

- pour les deux enquêtes dont il est question dans ce chapitre
- et pour une autre enquête que j'avais menée au CNAM auprès d'adultes en remise à niveau mathématique (v. en annexe).

énoncé	rép cor	%	err att	%	aut err	%	total
-7 ²	12	13%	72	80%	6	7%	90
-8 ²	17	19%	64	70%	10	11%	91
-9 ²	25	32%	52	66%	2	3%	79

Il semble bien que l'erreur soit plus fréquente lorsque la base est plus petite. Ce résultat demande à être confirmé encore sur des populations plus importantes, et avec un domaine plus étendu pour la base. Nous ignorons ce qui se passerait avec une base "petite" ("1", "2" ou "3") ou au contraire supérieure à 10, ou encore non-entière. Si ce phénomène de variation de l'erreur n'est pas un artefact, il restera encore à l'interpréter. La question est à l'heure actuelle ouverte...

Une autre piste pour une étude ultérieure pourrait être de comparer les carrés d'opposés avec des différences dont le second terme est une somme, de type

$$100-8^2.$$

Nous faisons en effet l'hypothèse que la priorité du carré sur la différence apparaît mieux que la priorité du carré sur sur l'opposition.

En tout cas, l'argument selon lequel personne n'évalue à 164 la différence " $100-8^2$ "⁷ est un des seuls qui fasse mouche lorsqu'il s'agit de convaincre des élèves ou des étudiants sceptiques.

⁷ ce qui reste d'ailleurs à prouver tant qu'on n'en aura pas fait l'étude

Il faudrait également poser la question d'évaluer des polynômes de type:

$$100-x^2$$

pour un certain nombre de valeurs de x.

IX.2.5.B. Carré d'une somme

Les items sont " $(4+3)^2$ ", " $(3+4)^2$ ", " $(5+3)^2$ " et " $(3+5)^2$ ".

Les résultats sont assez homogènes d'une variante à l'autre, aussi présenterons-nous les résultats globalement. Nous allons par contre étudier en détail les réponses des élèves à cette questions.

Sur une population de 173 élèves:

- 98 (56%) donnent la réponse correcte.
- Parmi ceux-ci, 26 élèves (15% du total) font figurer sur leur feuille un développement du type:

$$(4+3)^2 = 4^2+24+3^2.$$

Certains ne réduisent d'ailleurs pas cette forme développée, qui leur semble une réponse suffisante.

Les 72 autre élèves ont donné leur résultat correct sans indiquer leur calcul, ce qui n'exclut pas qu'ils aient développé sur un brouillon. En conséquence nous pouvons dire qu'il y a **au moins 15% des élèves qui ont développé**

$$(4+3)^2$$

pour trouver 49.

- 5 élèves (3%) développent en faisant des erreurs de calcul du type:

$$16+24+6^8.$$

- 41 élèves (24%) donnent pour

$$(4+3)^2$$

un résultat qui équivaut à:

$$4^2+3^2$$

soit "25". Que cela figure explicitement sur leur feuille de calcul ou non, ils n'ont pas commencé par effectuer:

$$4+3$$

mais ont d'abord développé (mal) " $(4+3)^2$ ".

- 4 élèves (2%) développent:

$$(4+3)^2$$

sous forme d'une somme de deux carrés mais font des erreurs de calcul de type:

$$16+6=32.$$

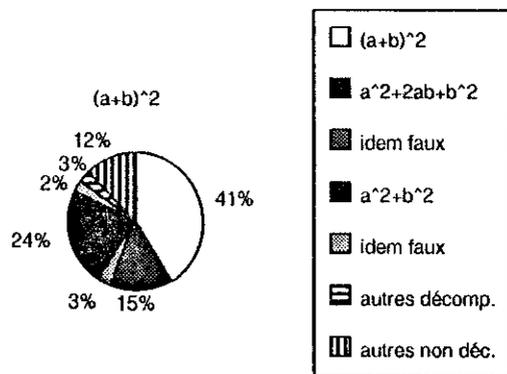
- 5 élèves (2%) développent de manière plus ou moins baroque, p. ex:

$$(4+3)^2 = 4 \times 3^2.$$

- 21 élèves enfin (12%) fournissent sans explication une réponse fausse que nous n'avons pas su analyser. Dans un certain nombre de cas l'hypothèse de l'erreur de calcul $7^2=39$ est plausible

⁸ nous avons pris le parti de considérer que l'élève avait développé " $(a+b)^2$ " en " $a^2+2ab+b^2$ " et fait des erreurs de calcul en instanciant sa formule, d'autant plus que les erreurs en question (de type " $3^2 \rightarrow 6$ ") se retrouvent ailleurs dans notre enquête. Nous aurions pu également prendre le parti opposé; cela ne change rien à ce qui nous intéresse ici, à savoir le fait ou non de développer avant d'effectuer.

La répartition graphique des erreurs est la suivante:



En bref, si nous rassemblons les résultats correspondant aux différents cas de développement, correct ou non, avec erreur de calcul ou non, nous aboutissons au résultat assez étonnant que 47% des élèves (81/173) au minimum développent le carré d'une somme pour l'évaluer.

Cette stratégie maladroite est intéressante, car elle est assez répandue⁹ et typique d'une perversion du raisonnement algébrique. Pour une expression numérique donnée en effet, à tout moment nous avons deux types de transformations possibles:

1) Les transformations d'effectuation qui remplacent les sous-expressions dont les opérands sont des Cst, en Cst dont la valeur est le résultat de l'opération représentée

$$2 + 3 \rightarrow 5$$

Dans ce cas les parenthèses et les conventions de priorité ont pour fonction d'indiquer l'ordre des opérations à effectuer pour évaluer une

⁹ D'autres enquêtes (en particulier auprès d'étudiants du CNAM) nous ont montré cette tendance à développer avant d'effectuer.

ESA. Pour un couple de parenthèses données, ce qui est à l'intérieur doit être effectué avant ce qui est à l'extérieur. Ce type de transformation d'effectuation est typique de la démarche arithmétique telle qu'elle est enseignée tout au long du premier degré.

2) Les autres transformations, qui modifient la structure de l'expression sans effectuer les sous-expressions en écritures de nombres, de type:

$$2 \times (3+4) \rightarrow 2 \times 3 + 2 \times 4,$$

ce qui est une démarche typiquement algébrique, qui prend tout son sens lorsque les expressions sont littérales. Dans ce cas les parenthèses ont pour fonctions d'indiquer la portée des symboles d'opération, autrement dit délimiter leurs opérands au sein d'une ESA.

Nous posons comme hypothèse que la stratégie générale d'évaluation d'une expression comprend une métarègle qui rend prioritaires les effectuations sur les autres transformations. Cela revient à dire par exemple qu'il ne sert à rien de développer

$$2 \times (3+4)$$

pour en calculer la valeur. Des exceptions sont imaginables suivant les valeurs mises en jeu. Ainsi on a intérêt à développer:

$$98 \times 102$$

en

$$(100-2)(100+2),$$

pour l'évaluer aisément. De même, si l'expression à évaluer n'est pas purement numérique, il y a intérêt à développer:

$$2a+3-2(a-4)$$

pour pouvoir l'évaluer.

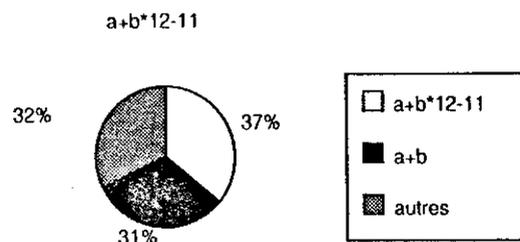
Un peu moins de la moitié des élèves de notre enquête ne respectent donc pas cette (méta)règle qui semble pourtant aller de soi pour les experts.

IX.2.5.C. Somme sans parenthèse avec "piège"

IX.2.5.C.a. Items

- $7+3 \times 12-11$
- $6+4 \times 12-11$
- $5+5 \times 12-11$
- $4+6 \times 12-11$

IX.2.5.C.b. Résultats globaux



L'erreur attendue consistant à effectuer

$$12-11$$

en premier, est faite par 31% des élèves (38/123), ce qui corrobore les résultats de la première enquête (21%). Les autres erreurs sont principalement des erreurs de calcul.

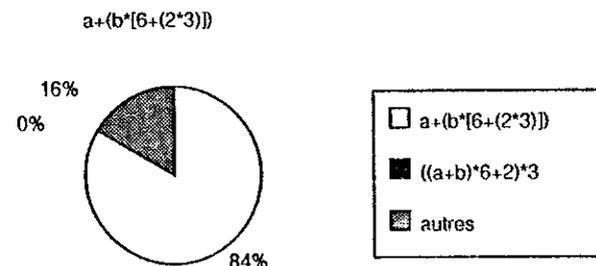
IX.2.5.D. Somme "complexe" bien parenthésée: $a+(b \times [6+(2 \times 3)])$

IX.2.5.D.a. Items

- $11+(6 \times [6+(2 \times 3)])$
- $12+(5 \times [6+(2 \times 3)])$

- $13+(4 \times [6+(2 \times 3)])$
- $14+(3 \times [6+(2 \times 3)])$

IX.2.5.D.b. Résultats



Cette enquête confirme pleinement la précédente: aucun élève (sur 124) ne viole les priorités qui sont exprimées par les parenthèses.

IX.3. Conclusion

IX.3.1. Remarque méthodologique.

Notre but, dans cette étude, n'était pas d'établir des taux d'erreurs valables dans l'absolu et pouvant être extrapolés à n'importe quelle population d'élèves, mais d'observer avant tout des différences quantitatives franches. C'est pourquoi nos outils statistiques sont minimaux, et les populations, restreintes. En tout état de cause, il ne sert à rien de se lancer dans une enquête ambitieuse mobilisant des centaines d'élèves et des techniques sophistiquées d'analyse statistique si l'on a pas une idée précise des phénomènes à observer, et pour cela une étude préalable comme celle que nous avons menée, alliée à une réflexion théorique solide, est indispensable. Cela dit, la voie est maintenant ouverte à une étude fine des phénomènes ici mis en évidence.

IX.3.2. Expressions purement numériques

IX.3.2.A. Parenthèses et conventions

Dans les expressions purement numériques on observe les points suivants:

- quand l'ordre de composition des calculs est indiqué explicitement par des parenthèses, il n'y pas d'erreur autre que les erreurs de calcul. En d'autres termes, il n'y a pas d'erreur liée à l'ordre des opérations à effectuer pour évaluer l'expression.
- Par contre, quand l'ordre de composition des calculs est indiqué implicitement par des conventions de priorité, il y a des erreurs liées à l'ordre des opérations à effectuer pour évaluer l'expression.

En général, ces erreurs résultent de l'application de la règle d'évaluation de gauche à droite, sauf lorsqu'il y a des "pièges" (formes tentantes).

IX.3.2.B. Carrés

Les carrés (et en particulier les carrés de somme) sont moins ressentis comme des expressions qu'il s'agit d'évaluer par élévation au carré de la valeur de la base, que comme des expressions à transformer par application d'une quelconque identité remarquable.

IX.3.3. Expressions littérales

IX.3.3.A. Distributivité et Associativité généralisées:

L'aspect formel des expressions, i.e. les "patterns"

$$a \nabla (b \Delta c) = (a \nabla b) \Delta (a \nabla c)$$

et

$$a \nabla (b \Delta c) = (a \nabla b) \Delta c$$

l'emportent sur les propriétés des opérations +, × et ^ . Nous sommes donc d'accord avec Kirshner concernant la distributivité généralisée.

En fait nous allons plus loin car il ne généralise la distributivité qu'aux seuls cas où les degrés de priorité ne sont pas respectés (p. ex. carré et somme) tandis que nous envisageons la distribution de n'importe quel opérateur avec n'importe quel opérateur y compris lui-même.

Nous mettons également en évidence la possibilité d'une associativité généralisée¹⁰. Nous sommes également d'accord avec son interprétation comme quoi il ne s'agit pas d'une loi **mathématique** (ce que suggérerait "théorème en acte" introduite par G. Vergnaud) portant sur des **nombre**s, mais plutôt d'une loi **formelle**, portant sur des **expressions** (et donc d'ordre linguistique).

IX.3.3.B. Transformations et Effectuation

Près de la moitié des élèves de l'enquête (47% pour le carré de la somme) ne respectent pas la métarègle de priorité de l'effectuation sur les autres transformations lors de l'évaluation d'une expression numérique. Ils se comportent ainsi comme si les écritures de nombres étaient des lettres. Les parenthèses n'indiquent pas pour eux l'ordre des opérations à effectuer (quand c'est le cas il n'y a pas de problème) mais sont les délimitateurs des portées des symboles d'opération qui seront à l'origine des transformations. Tout se passe comme si **seules les expressions** (numériques) **sans parenthèse** pouvaient être évaluées. Les transformations mises en œuvre par les élèves sont en effet toutes des développements qui tendent à diminuer le nombre de parenthèses.

Ceci est à mettre en relation avec la notion de "forme canonique". La plupart des tâches d'algèbre élémentaire peuvent s'apparenter à des mises en "bonne forme". Cette notion de forme canonique est un sujet d'étude (pour laquelle la grammaire des ESA que nous avons développée est particulièrement appropriée) qui sort du cadre de ce chapitre. Nous avons toutefois des exemples immédiats de formes "canoniques",

¹⁰ la distributivité et l'associativité généralisée appliquées à $a \nabla (b \Delta c)$ donnent des résultats différents: $(a \nabla b) \Delta (a \nabla c)$ et $a \nabla (b \Delta c)$. Il serait intéressant d'étudier comment l'élève réagit à cette contradiction.

à savoir les polynômes ordonnés (quand les expressions s'y prêtent, c'est-à-dire qu'il n'y a ni fraction rationnelle ni racine). Même lorsque la tâche consiste à factoriser, les facteurs doivent être des polynômes ordonnés, l'idéal étant des binômes. Plus précisément (ce qui montre bien encore une fois qu'on ne peut raisonner ici en termes d'objets mathématiques mais qu'il faut le faire en termes d'ESA) l'idéal est que les facteurs soient des sommes ou des différences (mais pas des sommes algébriques) dont un terme est un produit d'une écriture de nombre par une lettre et dont l'autre terme est une écriture de nombre (" $2+3x$ ", " $1-x$ ", " $x+3$ " mais ni " $-x+1$ " ni " $-1-x$ ").

De la même façon, le but d'une résolution d'équation est d'aboutir à une forme canonique d'équation telle que le premier membre soit " x " et le second une ExA canonique sans occurrence de " x ".

De notre enquête il ressort donc que pour un certain nombre d'élèves, la tâche de mise sous forme canonique (i. e. sans parenthèses) apparaît comme prioritaire par rapport à la tâche d'effectuation ou, ce qui revient au même, que seules les expressions canoniques sont susceptibles d'être évaluées. Ce qui est intéressant ici, c'est qu'on a une étape intermédiaire sur le chemin qui conduit progressivement les élèves à perdre le "sens" des expressions (mêmes numériques) qu'ils manipulent. Alors que dans le premier degré toute expression, même parenthésée, a une valeur numérique (c'est le but du calcul arithmétique que de découvrir cette valeur), on voit ici des élèves pour lesquelles les expressions parenthésées ne peuvent être évaluées directement: seules les expressions non parenthésées ont une valeur calculable.

Nous verrons au chapitre XII comment cette "dévalorisation" se poursuit au niveau des fractions qui à leur tour n'apparaissent plus que comme des couples de nombres.

IX.3.4. Signification des expressions?

Il nous reste à voir plus précisément ce que nous entendons par "perte de sens" ou "dévalorisation" des expressions, ce que recouvrent les notions de valeur et d'évaluation d'une expression numérique et surtout littérale. Ceci, qui n'est autre que la sémantique des ESA, est l'objet du chapitre suivant.

X. ÉLÉMENTS POUR UNE SÉMANTIQUE DES ESA

Le dieu, dont l'oracle est à Delphes, ne parle pas, ne dissimule pas: ils indiquent.

Héraclite

Ce chapitre a pour objet de présenter les grandes lignes d'une sémantique des ESA. Il ne s'agit pas une étude exhaustive de la question de la signification en algèbre. Pour cela, il ne faudrait pas moins qu'une autre thèse. Notre ambition est plus modeste. Nous voulons voir comment les concepts de "sens" et de "dénotation" développés par G. Frege en 1892 peuvent s'appliquer aux ESA.

Nous verrons que cette approche "Frégéenne" apporte un éclairage nouveau à des questions anciennes qui concernent aussi bien les ESA elles-mêmes (dans ce chapitre) que la didactique de l'algèbre (au chapitre suivant).

X.1. "Sinn" et "Bedeutung"

Je propose de partir de la distinction, établie par Gottlob Frege dans un article publié en 1892¹, entre sens (*Sinn*) et dénotation (*Bedeutung*). Prenons l'exemple des expressions "Neil Armstrong" et "Le premier homme sur la lune". Ces deux expressions désignent le même individu. Cet individu, personne physique, est la dénotation (unique) de ces deux expressions. La dénotation d'une expression est donc son référent dans un

¹ sa traduction française figure dans un recueil de textes, auquel nous ferons constamment référence ici, intitulé "Ecrits logiques et philosophiques" et paru en 1971. La référence figure en bibliographie à "(Frege, 1971)".

univers donné². Par contre, ces deux expressions n'ont pas le même sens (*Sinn*). La première insiste sur l'état-civil de la personne, la seconde sur ce qu'il a fait. Le sens (*Sinn*) est ici la manière dont le référent est présenté, le "point de vue" que l'on adopte pour le décrire.

«Le sens est le mode de donation de la dénotation» (Frege, op. cit.)

X.1.1. Questions de vocabulaire

La traduction des termes allemands "*Sinn*" et "*Bedeutung*", que ce soit en anglais ou en français, a toujours posé des problèmes, et aucune solution ne fait l'unanimité. Je me tiendrai à la position adoptée par le traducteur de Frege (op. cit.), Claude Imbert, qui rend "*Sinn*" par "sens" et "*Bedeutung*" par "dénotation". D'autres choix pour ce dernier mot ("signification" ou "référence" par exemple) sont possibles, mais je préfère utiliser "dénotation" car, appartenant à un vocabulaire technique (celui de la logique philosophique), il risque moins d'égarer le lecteur mathématicien vers des acceptions parasites.

Je réserve par ailleurs ici le mot "signification", dont le champ sémantique me paraît plus flou que les autres, à tous les usages où je ne spécifie pas si je fais référence au sens (*Sinn*), à la dénotation ou à autre chose encore.

X.1.2. Actualité de Frege?

Il en est de la théorie de Frege comme du modèle standard Chomskyen, à savoir qu'elle représente une étape de l'histoire de la sémantique, critiquée puis dépassée par de nombreux auteurs. Je la retiens toutefois pour deux raisons. D'abord, l'opposition *Sinn/Bedeutung* a été appliquée par Frege aux écritures symboliques mathématiques (dans l'article intitulé "Fonction et concept", op. cit.), ce qui n'est pas le cas de bien des théories sémantiques ultérieures. Pour cela au moins, cela justifiait de

² qui peut être l'univers physique (pour la planète Vénus) ou non (pour le personnage mythologique Ulysse).

l'adapter aux ESA. Ensuite, cette distinction est féconde, en ce qu'elle permet, comme on le verra, de clarifier les questions qui portent sur la sémantique des ESA.

X.2. Dénotation des ESA

X.2.1. La dénotation des écritures comme fonction

Nous avons retenu de la lecture de Frege³ l'idée que l'on a intérêt (d'un point de vue logique, mais aussi didactique) à considérer la dénotation d'une expression non pas comme un nombre mais comme une fonction.

Ce point de vue diffère légèrement de l'approche usuelle où l'on parle plutôt de valeur numérique d'une expression, ce que l'on peut définir comme suit.

En algèbre élémentaire, une assignation u est une application de l'ensemble des variables \mathcal{T}_{var} dans \mathbb{R} :

$$u \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}_{\text{var}}}.$$

La valeur d'une expression E pour une assignation u , notée $\text{val}_u(E)$, est celle que l'on obtient en remplaçant chaque variable v par son image $u(v)$ dans l'assignation.

Par exemple, soit u_0 une assignation telle que :

$$u_0(a) = 2 \text{ et } u_0(b) = 3.$$

Alors la valeur de $2a+b$ pour cette assignation, soit :

$$\text{val}_{u_0}(2a+b),$$

est égale à 7.

³ Pour Frege, la dénotation de l'énoncé :

$$\forall a \forall b (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

est la valeur de vérité "Vrai", et celle de :

$$a^2 = 2a$$

est (exprimée avec le vocabulaire actuel) une fonction de \mathbb{R} dans $\{\text{Vrai}; \text{Faux}\}$.

La valeur $\text{val}_u(E)$ d'une expression est donc (quand elle est définie) un nombre réel, qui n'est déterminé que dans la mesure où l'assignation u l'est également. Sinon, on dit qu'il s'agit d'un réel "indéterminé".

Or Frege insiste plutôt sur un autre aspect du même phénomène. Il met en avant le lien fonctionnel δ :

$$u \xrightarrow{\delta} \text{val}_u(E)$$

entre l'assignation u et la valeur $\text{val}_u(E)$. Cela revient à parler de la fonction plutôt que de son image (la valeur). La fonction δ en question, qui fait correspondre les assignations aux valeurs, est précisément la **dénotation** d'une expression.

Ce changement de perspective a un premier intérêt: il permet d'attribuer une interprétation mathématique naturelle à l'énoncé d'ordre épimathématique⁴ "la valeur de E est indéterminée si l'assignation n'est pas déterminée". On passe en effet de la notion un peu vague de double indétermination à celle d'une relation fonctionnelle entre assignation et valeur. Cela joue fortement en didactique de l'algèbre, dans la mesure où la notion de "quantité (in)déterminée" est centrale dans la théorie des équations. Les notions d'inconnue, de paramètre ou de solution en découlent.

En outre, sur le plan didactique, savoir qu'une expression a une **valeur numérique** est une chose, et savoir que cette valeur est une **fonction** de l'assignation, en d'autres termes des valeurs prises par variables, en est une autre. Nous verrons au chapitre suivant l'importance de cette connaissance.

⁴ cet adjectif (introduit par D. Lacombe, v. Rakotovoavy 1983) signifie que "indéterminé" ne renvoie ici à aucun objet mathématique, mais fournit au lecteur une indication sur la manière dont il convient de modifier le texte dans lequel il apparaît, de manière à obtenir une proposition mathématique correcte et complète.

Nous allons maintenant exposer de façon plus détaillée comment construire rigoureusement la notion de dénotation des ESA⁵. Nous venons de dire que la dénotation δ était une fonction des assignations vers les valeurs. Nous allons maintenant, pour définir δ , "court-circuiter" les assignations en les identifiant à leurs images. Si nous supposons en effet que les variables forment un ensemble dénombrable:

$$\mathcal{I}_{\mathbb{N}^r} = \{a; b; c; \dots; z; a'; b'; \dots; z'; a''; \dots; z''; a_1; \dots; z_1; \dots; a_k; \dots; z_k; \dots; a'_1; \dots\}$$

(dénombrable à cause des indices qui peuvent prendre n'importe quelle valeur entière), les images des assignations sont donc des suites de réels:

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

Pour appliquer ce qui précède à la définition de δ , il faut encore prendre trois points délicats en considération.

- Certaines expressions, par exemple:

$$\frac{1}{0}$$

ou:

$$\sqrt{-2}$$

n'ont pas de valeur numérique définie, bien qu'elles soient grammaticales (cf. V.5.). Nous ne pouvons donc pas nous contenter de définir la valeur d'une expression comme un nombre réel.

Il faudra étudier en outre comment le non défini se "propage": une égalité dont un membre est non défini est non définie à son tour, etc.

- Il faut tenir compte du fait que l'ensemble des variables est dénombrable, mais que seul un nombre fini (et petit!) de variables ont

⁵ Cette construction est basée sur la notion usuelle de fonction. Une construction en termes de "λ-calcul" serait également envisageable, et peut-être plus proche de l'optique de Frege.

une occurrence dans une expression donnée. Cela pose d'ailleurs des problèmes aux élèves lorsqu'on leur demande de résoudre "en x" l'équation "y=2".

Nous avons choisi de définir les dénnotations (d'expressions non-indéfinies) comme des applications de l'ensemble des suites de nombres réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers \mathbb{R} , ce qui n'est pas tout-à-fait immédiat et alourdit quelque peu l'exposé.

Nous aurions certes pu considérer les dénnotations comme des applications de l'ensemble des suites finies de réels (p. ex. (x; y)) vers \mathbb{R} . Dans ce cas, la définition de chaque dénnotation aurait été plus concise:

$$\delta(x): \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$$

au lieu de:

$$\delta(x): \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto u_{10}^2 \end{cases}$$

mais alors la définition générale de la dénnotation aurait été moins simple. En effet, la définition de la somme de deux fonctions ayant des variables différentes, ce qui est nécessaire quand on veut établir la dénnotation de "a+b" à partir de celles de "a" et de "b", est plus lourde que celle de la somme de deux fonctions de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans \mathbb{R} ⁶.

Remarquons enfin qu'on peut aisément reformuler toutes nos définitions, pour un ensemble fini (et non pas dénombrable) de variables⁷.

⁶ De la même façon, si on considère que la dénnotation de la variable x est la fonction identique: $x \mapsto x$, il en est alors de même pour la variable y. Toutes les variables (toutes les lettres) ont alors la même dénnotation (la fonction identique) et il devient alors malaisé de définir de manière simple la dénnotation de $x=y$, voire de $x+y$.

⁷ il suffit de remplacer $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par \mathbb{R}^n où "n" désigne le nombre de variables.

- Enfin, il faut distinguer le cas des expressions (Exa) dont la valeur, (resp. la dénnotation), quand elle est définie, est un nombre (resp. une fonction numérique), et celui des proposition (Pra) dont la valeur (resp. la dénnotation) est une valeur de vérité (resp. une fonction booléenne).

« $2^2=4$ » dénote le vrai tout comme « 2^2 » dénote 4» (Frege, fonction et Concept)

X.2.2. Dénnotation des ExA (Expressions algébriques)

X.2.2.A. Notations

Notons $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\text{ND}\}$

"ND" est un pseudo-nombre qui signifie "Non Défini"

$\tilde{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$ représente l'ensemble des suites d'éléments de $\tilde{\mathbb{R}}$.

X.2.2.B. Définition

La dénnotation d'une ExA E, notée $\delta(E)$, est une applications de $\tilde{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$ dans \mathbb{R} définie par récurrence. Nous allons donner les principales étapes de la définition, laissant au lecteur le soin de reconstituer celles qui vont de soi.

X.2.2.C. Opérateurs nullaires

Par convention nous qualifions d'opérateurs nullaires (ou "0-aires"), c'est-à-dire d'opérateurs sans argument, les écritures d'entiers et les variables.

X.2.2.C.a.....Chiffres

- La dénnotation du chiffre 0 est la fonction constante:
- $$\delta(0) = \begin{cases} \tilde{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \tilde{\mathbb{R}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto 0 \end{cases}$$

- La dénotation du chiffre l est la fonction constante:

$$\delta(l) = \begin{cases} \tilde{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \tilde{\mathbb{R}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto l \end{cases}$$

etc.

X.2.2.C.b. Écritures d'entiers

- Soit X une écriture d'entier et $C_n^X; C_{n-1}^X; \dots; C_0^X$ ses chiffres.

Sa dénotation est la fonction constante:

$$\delta(X) = \begin{cases} \tilde{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \tilde{\mathbb{R}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto \sum_{i=0}^n 10^i C_i^X \end{cases}$$

On peut identifier de manière canonique les fonctions constantes avec leur image, que nous qualifierons désormais de "désignation" de l'ESA, pour la distinguer de la dénotation. Dans le cas des ESA strictement numériques, on n'a souvent besoin que de cette désignation. La fonction de dénotation n'est en effet indispensable que pour la sémantique des ESA littérales. Néanmoins, si une ESA numérique est une sous-expression d'une ESA littérale, alors il devient nécessaire de considérer sa dénotation au même titre que le reste de l'expression.

Les dénotations des écritures décimales en générales (catégorie Cst) ainsi que des CLI sont définies de manière identique.

X.2.2.C.c. Variables

L'ensemble dénombrable \mathcal{T}_{var} des variables peut être mis en bijection ψ avec l'ensemble des projections de $\tilde{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$ sur $\tilde{\mathbb{R}}$. Autrement dit, à chaque variable correspond une projection, sa dénotation.

- La dénotation d'une variable v est la projection qui lui correspond par la bijection ψ :

$$\delta(v) = \psi(v) = \begin{cases} \tilde{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \tilde{\mathbb{R}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto u_i \end{cases}$$

La dénotation des variables est donc définie à ψ près. Cette bijection change a priori d'un énoncé de problème à l'autre.

X.2.2.D. Expressions définies et non définies

- Notons nd la fonction constante suivante:

$$nd = \begin{cases} \tilde{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \tilde{\mathbb{R}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto ND \end{cases}$$

- Nous dirons qu'une expression est **non définie** si sa dénotation est la fonction nd , et qu'elle est **définie** si sa dénotation n'est pas la fonction nd .

Ceci va nous servir pour la "propagation" de la valeur ND dans la dénotation d'une expression.

X.2.2.E. Opérateurs unaires

- La dénotation de l'identique d'un terme est la dénotation de ce terme:

$$\delta(+X) = \delta(X)$$

- La dénotation de l'opposé⁸ d'un terme défini est l'opposé⁹ de la dénotation de ce terme.

$$\delta(-X) = -\delta(X)$$

- La dénotation de l'opposé d'un terme non défini est non-défini.
- Valeur absolue: $\delta(|X|) = \delta|(X)|$ si X est défini, nd sinon.

X.2.2.F. Opérateurs binaires

De manière générale, la dénotation d'une somme est la somme des dénotation de ses termes (et nd si un des termes est non défini), de même

⁸ au sens catégoriel

⁹ au sens mathématique

pour la soustraction, etc. Le cas des fractions est légèrement plus délicat, car une fraction est non définie si son dénominateur est nul (c'est-à-dire si la dénotation du dénominateur est $\delta(0)$).

- Soit F une fraction.
Soient N^F et D^F son numérateur et son dénominateur.
si $\delta(N^F) \neq nd$ et $\delta(D^F) \neq nd$ et $\delta(D^F) \neq \delta(0)$ alors $\delta(F) = \frac{\delta(N^F)}{\delta(D^F)}$
sinon $\delta(F) = nd$

On retrouve une définition analogue pour les puissances¹⁰:

$$\delta(P) = nd \text{ si } \delta(B^P) = 0 \text{ et } \delta(E^P) < 0$$

(condition suffisante mais pas nécessaire) et pour les racines¹¹:

$$\delta(R) = nd \text{ si } \delta(R^R) < 0 \text{ et } \delta(O^R) \text{ est pair}$$

(idem).

X.2.2.G. Opérateurs n-aires

Sommes... Algébriques

- Soit X une somme algébrique de n termes.
Soient $t_1^X; t_2^X; \dots; t_N^X$ ses termes
Notons s l'application qui au signe "+" fait correspondre le nombre 1 et au signe "-" fait correspondre le nombre -1.

$$\text{si } \forall i \delta(t_i^X) \neq nd \text{ alors } \delta(X) = \sum_{i=0}^n s(s_i^X) \delta(t_i^X)$$

$$\text{si } \exists i \text{ tel que } \delta(t_i^X) = nd \text{ alors } \delta(X) = nd$$

¹⁰ où B^P représente la base et E^P l'exposant de la puissance.

¹¹ où R^R représente le radicande et O^R l'ordre de la racine.

Même chose pour les produits de n facteurs, en remplaçant Σ par Π .

X.2.3. Dénotation des PrA (Propositions algébriques)

- Soit X une égalité et M_1^X et M_2^X ses deux membres.
- alors si les deux membres sont définis on a:

$$\delta(X) = \begin{cases} \mathbb{R}^N & \rightarrow \{V, F, ND\} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \leftrightarrow \begin{cases} \text{Vrai si } \delta(M_1^X) = \delta(M_2^X) \\ \text{Faux sinon} \end{cases} \end{cases}$$
- si un des deux membres est non-défini alors la proposition est non-définie.

Même chose pour les autres propositions algébriques.

X.2.4. Définition récursive structurale

On pourrait bien entendu ne pas vouloir caractériser les sous-expressions par leur fonction. Dans ce cas, il faudrait, pour une règle de réécriture donnée, autant de règles de calcul de la dénotation qu'il y a de suites dans le paradigme de cette règle.

Par exemple, pour évaluer l'opposé d'une expression (Opp), dont le paradigme contient 26 suites:

$$\text{Opp} := \left\{ \begin{array}{l} (\text{Ide}) \\ \dots \\ (\text{VAb}) \\ \text{Môn} \\ \text{Prn} \\ \text{Quo} \\ \text{Fra} \\ \text{Pui} \\ \text{Rac} \\ \text{Cst} \\ \text{Cli} \\ \text{Var} \\ \text{VAb} \end{array} \right\}$$

il ne faudrait pas moins qu'une liste de 26 règles de calcul de la dénotation:

- La dénotation de \cdot (**Idē**) est l'opposé de la dénotation de **Idē**:

$$\delta(\cdot (\text{Idē})) = -\delta(\text{Idē})$$

- La dénotation de \cdot (**Opp**) est l'opposé de la dénotation de **Opp**:

$$\delta(\cdot (\text{Opp})) = -\delta(\text{Opp})$$

etc.

- La dénotation de \cdot (**Vab**) est l'opposé de la dénotation de **Vab**:

$$\delta(\cdot (\text{Vab})) = -\delta(\text{Vab})$$

- La dénotation de \cdot (**Mōn**) est l'opposé de la dénotation de **Mōn**:

$$\delta(\cdot (\text{Mōn})) = -\delta(\text{Mōn})$$

etc.

- La dénotation de \cdot (**Vab**) est l'opposé de la dénotation de **Vab**:

$$\delta(\cdot (\text{Vab})) = -\delta(\text{Vab})$$

Pour calculer la dénotation d'un pseudo-Monôme de n facteurs ($n > 1$), dont le paradigme est particulièrement imposant, nous avons calculé qu'il ne faudrait pas moins de $23 \times 884^{n-1}$ règles distinctes (soit 17 973 488 règles pour 3 facteurs)!

C'est pour cela qu'il est préférable de définir la dénotation à partir des fonctions syntaxiques (une règle de calcul de la dénotation par règle de réécriture, le schéma infini de règles de la Somme comptant pour un, même chose pour le produit) au lieu de le faire à partir des structures (une règle par élément du paradigme de chaque règle de réécriture).

X.2.5. Critère de respect des transformations

Dans le premier chapitre, consacré à la position du problème, la question de la liste des transformations a été volontairement écartée en raison du fait qu'elle a été étudiée par ailleurs. Il reste toutefois à préciser ici que pour ajouter une transformation à cette liste, il faut s'assurer auparavant qu'elle respecte les dénotations des expressions transformées. C'est ce qu'on peut appeler le "critère de respect":

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T} \text{ est respectueuse} \Leftrightarrow \\ (\forall X \in \mathcal{T}^*) \mathcal{T} \text{ s'applique à } X \Rightarrow \delta(\mathcal{T}(X)) = \delta(X) \end{array} \right.$$

Ce qui peut se symboliser par le schéma:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\mathcal{T}} & \mathcal{T}(X) \\ \delta \downarrow & & \downarrow \delta \\ \delta(X) & = & \delta(\mathcal{T}(X)) \end{array}$$

X.3. Sens (*Sinn*)

«Quel est donc le contenu, la dénotation de "2·2³+2"? C'est la même que la dénotation de "18" ou de "3·6".

Les expressions sont différentes mais correspondent toujours à la même chose, bien qu'elle soit saisie différemment et sous différents aspects.

(Frege, *Concept et Fonction*)

Nous allons aborder cette question épineuse en nous approchant progressivement de la notion de sens par des définitions successives, d'abord très vagues, puis de plus en plus précises.

X.3.1. Une première définition provisoire

Il est beaucoup plus difficile d'établir ce que peut être le sens (*Sinn*) d'une ESA que sa dénotation. Je propose donc une première définition provisoire. Prenons un exemple. D'après ce qui précède, les expressions

$$(i) \quad (x - 2y)^2$$

et

$$(ii) \quad x^2 - 4xy + 4y^2$$

ont la même dénotation, à savoir la fonction f :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^N & \rightarrow \\ (x, y, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots) & \hookrightarrow (x - 2y)^2 \end{cases}$$

L'objet mathématique dénoté est le même: c'est la fonction f . Pourtant, (i) ne nous apporte pas les mêmes informations que (ii). Bien qu'elles aient la même dénotation, il ne nous est pas indifférent, dans un calcul, de considérer l'une plutôt que l'autre. Dans un cas, nous apprenons que le nombre inconnu considéré est obtenu en élevant au carré une certaine quantité. Dans l'autre, ce nombre apparaît comme une somme de trois termes. Certaines transformations (l'éradication par exemple) sont productives avec (i) et sans intérêt pour (ii). Nous proposons donc une caractérisation basée indirectement sur ce qu'on peut "faire" avec les ESA, i.e. sur les diverses transformations susceptibles de leur être appliquées pour une dénotation donnée.

La différence de sens (Sinn) entre deux ESA de même dénotation est liée aux ensembles de transformations qui sont susceptibles de leur être appliquées.

Cette proposition pour définir (de manière différentielle) le sens d'une ESA rejoint pleinement la remarque de Gilles-Gaston Granger (1979 p. 58) concernant les langages symboliques:

«L'information véhiculée par de tels symbolismes n'est pas constituée par un renvoi pur et simple à des objets qui transcendent les signes, mais à des systèmes d'opérations apparemment intérieures au symbolisme»

X.3.2. Sens et métaconnaissances

La détermination du sens (Sinn) d'une ESA est une opération plus complexe que le calcul de sa dénotation. En particulier, déterminer l'ensemble des transformations susceptibles de lui être appliquées met en jeu des connaissances de niveau "méta" (en ce qu'elles portent sur les ESA et sur leur transformations). Dans une situation donnée, il y a en outre des transformations plus intéressantes, ou plus faciles à mettre en oeuvre, que d'autres. Tout cela fait partie des composantes du sens.

Ainsi nous proposons l'énoncé (plus fort) suivant, qui introduit une composante pragmatique, c'est-à-dire liée à la situation (cf. Kirshner 1987a):

Soient X et X' deux ESA ayant même dénotation. La sélection et la hiérarchisation, au sein des ensembles des transformations et procédures qui leur sont applicables, de celles qui sont intéressantes en fonction de la tâche à réaliser, fait partie de la différence de sens entre X et X' .

Le sens (Sinn) se situe donc au niveau des métarègles. Cela éclaire la remarque suivante de Thorpe (1989 p. 18):

«To have a meaning, an expression must be embedded in an equation»

Nous pensons toutefois qu'il n'y a pas que les tâches de résolution d'équations pour donner du sens aux ESA, mais que c'est vrai de toutes les tâches telles que factoriser, simplifier, etc.

Nous n'avons fait qu'approcher la notion de sens, en proposant une caractérisation différentielle qui se situe dans la ligne de Frege, mais sans la définir précisément. Toutefois l'intérêt de cette notion par opposition à celle de dénotation, est qu'elle permet de montrer l'interdépendance entre syntaxe et sémantique. Il y a bien entendu également déjà un lien entre syntaxe et sémantique au niveau de la dénotation, mais ce lien est plus "fruste" en ceci nous avons une relation non injective entre les ESA et leur dénotation. A une dénotation donnée en effet, par exemple la fonction:

$$(x, u_1, \dots) \hookrightarrow x^2$$

correspondent une infinité d'ESA:

$$x^2$$

$$2 \frac{x^2}{2}$$

$$x^2 + 1 - 1$$

$$x \cdot x$$

etc.

Inversement, deux ESA différentes et de même dénotation ne peuvent pas avoir le même "sens", dans la mesure où celui-ci est en rapport avec les transformations applicables, qui diffèrent d'une ESA à l'autre.

Nous n'avons pas l'ambition ici de déterminer exhaustivement tous les aspects du sens ("Sinn") d'une ESA, mais simplement de montrer le lien entre cette notion et la composante **pragmatique** du calcul algébrique, au travers du **projet** de celui qui effectue ces calculs.

X.4. Interprétation

Nous venons de voir comment l'opposition sens (Sinn)/dénotation établie par Frege pouvait s'appliquer aux ESA. Il reste que cette opposition ne couvre pas l'ensemble des phénomènes de signification en algèbre élémentaire. Nous allons voir brièvement deux autres notions, celles d'interprétation et celle de connotation.

J'appelle interprétation d'une ESA X dans un cadre donné tout objet qui "correspond" à la dénotation de X dans ce cadre.

Je prends ici le mot "cadre" dans l'acception que lui donne Régine Douady (1984):

«Le jeu de cadres traduit l'intention d'exploiter le fait que la plupart des concepts peuvent intervenir dans divers domaines, divers cadres physique, géométrique, numérique, graphique ou autres. Un concept se traduit en chacun d'eux en termes d'objets et relations qu'on peut appeler les signifiés du concept dans le cadre. Les signifiants qui leur sont associés peuvent également symboliser d'autres concepts dans le cadre des signifiés.»

Nous introduisons la dénotation dans la définition de l'interprétation dans la mesure où seule la dénotation est un objet mathématique et peut donc être mise en correspondance avec d'autres objets mathématiques dans d'autres cadres.

X.4.1. Exemples

Considérons par exemple l'ESA:

$$4x - 2$$

Parmi les cadres mathématiques, on peut considérer:

- le cadre des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} où cette ESA a pour interprétation la fonction:

$$x \mapsto 4x - 2$$

- le cadre graphique où elle a pour interprétation la droite d'équation

$$y = 4x - 2$$

- le cadre géométrique où elle a pour interprétation le nombre de côtés d'un polynôme
- le cadre arithmétique où elle a pour interprétation un multiple de 4 auquel on enlève 2

etc.

Hors des mathématiques, il y a les cadres des sciences mathématisées (Physique, Chimie, Economie...). L'algèbre élémentaire apparaît comme un outil de modélisation des problèmes qui se posent dans ces différents cadres (Chevallard 1990).

Il faut encore considérer ce qu'on pourrait qualifier de "cadres artificiels" dans lesquels prennent place les problèmes "pseudo-concrets". Dans ce type de cadre, "4x-2" devient par exemple un nombre de pommes, un poids sur une balance à double plateau, l'âge de ma grand-mère ou celui du capitaine¹².

¹² La structure et les contraintes de ces cadres artificiels, les problèmes ardues d'interprétation et de modélisation qu'ils posent aux élèves, la tentation toujours renouvelée d'y avoir quand même recours, y compris avec les meilleures intentions

X.4.2. Interprétation des transformations

Pour peu que le cadre ait une structure suffisamment riche, un certain nombre de transformations y reçoivent également une interprétation.

Ainsi par exemple les transformations mises en œuvre lors de la résolution de systèmes d'équations correspondent-elles à des transformations du plan opérant sur les droites correspondant aux équations. Ces dernières transformations ne sont d'ailleurs pas toujours très intuitives, en sorte que leur pouvoir interprétatif est faible.

De même, le caractère non-respectueux de certaines transformations affectant des égalités (par exemple, l'élevation au carré des deux membres de l'égalité) peut-il être interprété (fonctionnellement) en termes de non-bijectivité de certaines fonctions (ici $x \mapsto x^2$) et graphiquement en termes de propriété de graphes (ici $y = x^2$).

X.4.3. Dénotation et interprétation

Notons que la dénotation est un cas particulier d'interprétation, dans le cadre très particulier des fonctions :

$$\delta: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\text{Vrai;Faux}\}$$

X.5. Connotation

Tout ce qui précède se situe dans une perspective linguistique. Le locuteur en tant que personne en est absent, en ceci que la dénotation et, dans une moindre mesure, le sens (Sinn) attachés à une ESA ne changent pas d'un individu à l'autre. Un individu peut donner plus ou moins d'interprétations différentes, dans des cadres variés, à une ESA (Robert

didactiques du monde, sont une mine d'effets pervers à étudier pour le didacticien (Adda 1987).

1982). Il n'empêche que la nature de ces diverses interprétations ne dépend pas de la personnalité de ceux qui les ont à l'esprit. Associer:

$$4x - 2$$

à une droite du plan, je ne suis pas le seul à le faire, et tous ceux qui le font associent la même droite à la même expression. Au contraire, la manière dont je me **représente** cette droite est liée à de nombreux facteurs personnels, en particulier (mais pas seulement) les différentes facettes de l'enseignement que j'ai reçu.

Plus généralement, tout individu perçoit et interprète un ESA d'une manière spécifique, qui dépend de son expérience, et en particulier des situations par lesquelles il a abordé cet ESA ou des ESA analogues. Je qualifie de **connotation** cette perception et cette interprétation subjectives.

Dans cette proposition de définition, je préfère employer le terme de "connotation" plutôt que celui de "représentation" qu'emploie Frege:

«Il n'y a pas d'obstacle à ce que plusieurs individus saisissent le même sens; mais ils ne peuvent avoir la même représentation...» (ibid. p. 106)

Ce dernier terme est en effet fâcheusement polysémique (système de représentation, représentations graphiques, représentations mentales, représentation des connaissances etc.), aussi ai-je préféré "connotation" qui ressortit au vocabulaire spécialisé de la linguistique, pour éviter encore une fois les significations parasites.

Le terme "connotation" est certes utilisé dans diverses acceptions selon les auteurs, mais qui ne sont en général pas incompatibles avec celle qui nous occupe. Dubois et al. (1974) notent dans leur dictionnaire de linguistique que:

«On pourra, en première approximation, définir la dénotation comme tout ce qui, dans le sens d'un terme, est objet d'un consensus dans la communauté linguistique. Ainsi *rouge* dénote une couleur précise, définissable en termes de longueur d'onde, pour la communauté française. La connotation est alors ce que la signification a de particulier à un individu ou à un groupe donné à l'intérieur de la communauté; par exemple, la connotation politique de *rouge* n'est pas identique pour toute collectivité francophone.»

La nécessité d'une composante de la signification qui tienne compte de l'individu en tant qu'il est à la fois un sujet psychologique et un sujet didactique, répond à l'impératif méthodologique présenté par Léonard et Sackur (1991) d'aborder les questions didactiques d'un triple point de vue mathématique, psychologique et didactique stricto sensu. J'ajouterai à ce propos que cette thèse tend à montrer qu'il est difficile de faire l'économie d'un quatrième point de vue, linguistique (au moins en ce qui concerne l'algèbre).

L'importance donnée aux situations didactiques par lesquelles elles ont été abordées, pour la connotation des ESA, est également à rapprocher d'une hypothèse sur le rôle de ces mises en situation dans la théorisation de la démarche de "Discussion Autour de Problèmes" (v. annexe). Nous avons en effet été amenés à poser l'hypothèse que les situations d'enseignement (tout particulièrement les situations de "DAP") n'ont pas forcément vocation à être oubliées une fois "acquise" la notion qu'elles sont censées introduire. Au contraire, cette "histoire" fait partie intégrante de la signification de cette notion.

Cette prise de position (qui est à rapprocher de la notion de schème, et qui s'oppose conceptuellement à la notion d'"abstraction") vient donc prendre naturellement place dans la composante de connotation de la signification.

X.6. Communication sur la signification

Revenons sur le triplet Sens/Dénotation/Interprétation. Je mettrai le cas de la connotation de côté, dans la mesure où il s'agit plutôt d'une prise en compte des aspects subjectif et didactique, qui recoupe en partie le triplet précédent (on peut avoir une connotation de la dénotation qui provienne d'une certaine mise en situation, etc.).

La première remarque à faire est qu'on peut rapprocher en partie ce triplet de la tripartition proposée par Paquelier (1990) pour interpréter certains phénomènes de communication mathématique:

- Intrigue (qui a trait au rituel, à ce qui se fait et ce qui ne se fait pas)
- Argument (qui a trait à la vérité des énoncés en jeu)
- Herméneutique (qui a trait à leur signification)

En effet, communiquer sur le Sens d'une ESA ressortit à l'ordre de l'intrigue, dans la mesure où ce qui est en jeu est ce qu'on peut et ce qu'on doit faire de l'ESA, quelles sont les transformations adéquates ou non, intéressantes ou non.

Communiquer sur la Dénotation d'une ESA revient à mener un débat de vérité ("Argument"), pour peu que l'ESA en question soit une Proposition Algébrique. Sinon, si l'ESA est une expression (ExA), elle fait partie d'une proposition algébrique, ou au moins d'une proposition en Langue Naturelle dont, in fine, la valeur de vérité, c'est à dire la dénotation est en jeu.

Enfin, une communication sur l'interprétation à donner à une ESA est évidemment d'ordre herméneutique, si ce n'est que la communication herméneutique a pour objet tout ce qui fait signification, autrement dit l'"interprétation" dans un sens large du mot et non restreint comme nous l'avons adopté jusqu'ici; la nuance est tout de même importante et empêche qu'on puisse décalquer exactement notre tripartition sur la sienne. Le sens (Sinn) et la dénotation peuvent être aussi l'enjeu d'un débat herméneutique, par exemple "Qu'est-ce que ça veut dire, que $\sqrt{-2}$ n'est pas défini?".

Nous venons représenter une analyse de la sémantique des ESA dans l'absolu, pour un scripteur-lecteur compétent idéal. Nous allons voir dans les deux chapitres qui suivent ce qu'il en est pour une population bien réelle de 1 500 élèves de collège, dans le cas particulier des fractions.

**XI. UNE ENQUETE SUR LES FRACTIONS.
PREMIERE PARTIE:
PRÉSENTATION ET RÉSULTATS GLOBAUX.**

«Etant donné que l'on peut demander n'importe quoi à n'importe qui et que n'importe qui a presque toujours assez de bonne volonté pour répondre au moins n'importe quoi à n'importe quelle question, même la plus irréaliste, le questionneur qui, faute de théorie du questionnaire, ne se pose pas la question de la signification spécifique de ses questions, risque de trouver trop aisément une garantie du réalisme de ses questions dans la réalité des réponses qu'elles reçoivent.»

Bourdieu, Chamboredon & Passeron, *Le métier de sociologue.*

XI.1. Présentation

Les deux enquêtes présentées au chap. IX portaient principalement sur la **dénotation** des **ExA** et sur un certain nombre de **transformations** posées hors contexte. Nous allons maintenant relater une enquête portant sur les transformations, correctes ou incorrectes, que les élèves appliquent à des expressions particulières mettant en jeu des fractions numériques. Autrement dit, nous allons observer de manière détaillée le **sens** que les élèves attribuent aux écritures mettant en jeu des fractions, en tant qu'il est lié aux transformations, et aux métarègles qui gouvernent leur usage.

Le présent chapitre est consacré à la présentation générale de l'enquête et aux résultats globaux. Le chapitre XII exposera les résultats détaillés question par question. Les conclusions sur les connaissances qu'ont

les élèves observés du sens et de la désignation¹ des écritures qu'ils manipulent seront exposées puis généralisées dans le chap. XIII, qui est la conclusion générale de la thèse.

Ces deux chapitres reprennent les résultats d'une recherche menée de 1987 à 1990 à l'INRP², en collaboration avec Yves Paquelier, au sein d'une équipe dirigée par Bernard Dumont³.

XI.1.1. Objectif du questionnaire

L'ensemble de cette recherche INRP avait pour objectif principal la conception d'un logiciel, FRACT-1, utilisant l'intelligence artificielle, de diagnostic et de traitement des erreurs d'opérations sur les fractions (Dumont 1989). Le "noyau" d'un tel logiciel est constitué d'un système expert d'analyse d'erreurs de l'élève. Pour pouvoir fonctionner, ce système expert doit être muni d'une base de connaissances portant sur les règles, correctes ou non, permettant de produire les résultats effectivement produits par les élèves dans le traitement des opérations portant sur les fractions. L'objectif premier du questionnaire que nous présentons ici consiste donc à établir une telle base de connaissances de règles.

Le "traitement" de l'erreur proposé par FRACT-1 a peu de chances d'avoir une réelle efficacité en profondeur si le diagnostic qu'il pose de l'erreur n'a aucun rapport avec les représentations que l'élève se fait de sa tâche. L'enquête doit fournir une base de connaissance des règles (incorrectes) ayant un minimum de **pertinence didactique**. Cette contrainte, (qui peut parfois aller à l'encontre de la concision informatique), conditionne la validité du "traitement" ultérieur de l'erreur par le logiciel.

¹ Dans la mesure où l'enquête porte sur des expressions strictement numériques, nous parlerons ici de "désignation" plutôt que de "dénotation" (cf. chap. X).

² Institut National de Recherche Pédagogique, Département "Technologies Nouvelles et Enseignement"

³ Ch. Aubertin, J-F. Boudinot, E. Bruillard, B. Dumont, B. Grugeon, Cl. Noblet, Y. Paquelier, C. Terlon et P. Wach.

XI.1.2. Pourquoi une enquête spécifique?

La plupart des études disponibles en français sur les fractions traitent de la signification des écritures fractionnaires, et de leur apprentissage. Rares sont celles qui portent également sur les erreurs de calcul elles-mêmes (voir par exemple Eballard et al. 1982 ou Perrin-Glorian 1992). Tout en servant de base de départ pour la recherche, elles ne font pas une étude exhaustive de toutes les erreurs possibles, ce qui est une nécessité pour une base de (fausses) règles. Nous disposons également de quelques renseignements sur le sujet dans la littérature anglo-saxonne: voir par exemple Fong Ho Keong (1986) ou Nwana & Coxhead (1988). Malheureusement ces données sont peu utiles pour le cas français, car elles concernent en grande partie les écritures du type $2\frac{1}{3}$.

En 1984, une enquête fut menée par l'Équipe de Recherche sur les Questionnements en Mathématiques⁴, dont je faisais partie, sous la direction de Daniel Lacombe et de Jérôme Chastenet de Géry, auprès d'environ 3000 élèves de collège, lycée et L.E.P. (voir Chastenet et al. 1985, Dumont 1989). Une série de questions concernait les sommes et les différences dont au moins un terme est une fraction, une autre série de questions concernait les produits dont au moins un facteur est une fraction.

Ce questionnaire a mis quantitativement en évidence un certain nombre d'erreurs "classiques" de la part des élèves, en particulier:

- l'importance de l'erreur:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a+c}{b+d}$$

- l'influence de la présence d'un "1" au numérateur qui modifie la règle précédente, au profit de:

⁴ J. Chastenet de Géry (responsable) et S. Hocquenghem pour le CREEM (CNAM), B. Dumont, D. Lacombe (responsable) et G. Sol pour l'UER de Didactique des Disciplines (Université Paris7).

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \rightarrow \frac{1}{a+b},$$

que l'on pourrait qualifier de "linéarité de l'inversion".

- l'importance de l'erreur

$$a \times \frac{b}{c} \rightarrow \frac{ab}{ac},$$

qui est une sorte de "distributivité de la multiplication sur la division⁵".

Cette enquête nous a fourni un grand nombre de règles susceptibles de figurer dans la base de connaissances, mais ne pouvait à elle seule remplir l'objectif que nous nous étions assigné (constituer une base de règles ordonnées par la fréquence d'occurrence). En effet, ce questionnaire "balayait large" en proposant un grand nombre d'items différents, afin de recueillir le plus grand nombre d'erreurs significatives, mais n'établissait de variation systématique que pour certains facteurs (afin d'en établir quantitativement l'influence).

En outre cette enquête montrait qu'un grand nombre d'élèves faisait des erreurs de simplification des fractions (avant de commencer les calculs, ou bien pour mettre le réponse sous forme irréductible). Toutefois cette question de la simplification n'était, en tant que telle, abordée dans aucun item.

Il nous a donc fallu mener une nouvelle enquête pour compléter la première, laquelle nous a servi en quelque sorte de pré-test pour déterminer les questions pertinentes à poser. Au sein de l'équipe, Yves Paquelier et moi-même avons été chargés de cette nouvelle enquête. Y. Paquelier s'est occupé plus particulièrement de la partie concernant les simplifications de fractions⁶, tandis que j'ai plutôt traité les transformations de sommes et de

⁵ cf. chap. IX.

⁶ un rapport doit paraître sur ce sujet à l'INRP.

produits dont il est question ici. Le dépouillement des questionnaires et l'analyse des résultats a été fait en commun, en relation avec les autres membres de l'équipe.

XI.1.3. Description du questionnaire.

Le questionnaire était composé de dix questions (Q1 à Q10). Les cinq premières (qui se trouvaient sur la première feuille du questionnaire) ont été passées par 1 500 élèves de la 6ème à la 3ème. Sur cette première feuille, les quatre premières questions (Q1 à Q4) concernaient uniquement la simplification des fractions isolées, traitées par Y. Paquelier. Il n'en sera pas question ici. La cinquième question de la première feuille (Q5) a donc été également passée par les 1 500 élèves. Les cinq dernières questions (Q6 à Q10, seconde feuille du questionnaire), qui sont l'objet du présent chapitre, ont été passées par les classes de quatrième et troisième uniquement (832 élèves). On trouvera en annexe une photocopie d'un questionnaire.

XI.1.3.A. Liste des 6 items: Q5 à Q10

Les élèves devaient donc répondre aux questions Q5 à Q10 qui présentaient les types d'ESA suivants:

$$\frac{5}{3} + \frac{4}{9}$$

$$\frac{5}{2} + \frac{7}{3}$$

$$\frac{4}{9} - \frac{5}{12}$$

$$5 + \frac{3}{2}$$

$$1 - \frac{3}{7}$$

$$\frac{1}{6} \times 8$$

En faisant varier certains paramètres des questions (cf. infra) nous avons construit dix variantes désignées par les lettres A à J. La partie du questionnaire qui nous intéresse porte sur 57 items répartis en six questions. Il y a 6 questions et 10 variantes, ce qui devrait faire 60 items, mais un certain nombre d'items sont communs à deux variantes.

Le fait de créer ainsi des variantes, outre qu'il permet de rendre presque négligeable le phénomène du copiage, était surtout, pour nous, un moyen d'observer l'influence de certains paramètres dans les réponses des élèves. Nous présenterons plus loin les caractéristiques a priori de chaque item.

XI.1.3.B. Consigne:

Pour chaque question il était exigé comme réponse une fraction irréductible ("c'est-à-dire qu'on ne peut plus simplifier", précisait la consigne).

Lors de la toute première enquête évoquée plus haut, nous n'avions pas demandé aux élèves le détail de leurs calculs, ce que nous avons regretté lors du dépouillement, dans la mesure où il nous a souvent été difficile voire impossible de reconstituer le cheminement des élèves. Aussi, lors de cette seconde enquête, on a demandé d'écrire "tous les calculs intermédiaires" et d'utiliser le verso vierge de chaque feuille comme "feuille de brouillon". Nous n'étions certes pas naïfs au point de penser que tous les élèves détailleraient leurs calculs, ni même que, s'ils le faisaient, cela éluciderait tous les problèmes d'interprétation que nous rencontrerions, mais selon le vieux principe du "c'est toujours mieux que rien", nous pensons que les informations ainsi recueillies, même partielles et parfois obscures, apporteraient des indices non négligeables pour l'analyse. Nous verrons plus loin que tel fut bien le cas.

XI.1.4. Description de la population.

Le questionnaire a été passé par 1500 élèves de collège, appartenant à 60 classes de 57 collèges répartis, équitablement entre types de collèges (urbain, rural...), dans toute la France. La répartition selon les quatre niveaux du premier cycle est la suivante:

niveau	nb élèves	nb classes
6ème	265	11
5ème	403	16
4ème	514	20
3ème	318	13
total	1500	60

La passation a eu lieu en juin 1988. Cette date offrait, compte tenu des changements de programme en cours à cette époque, une conjoncture intéressante: les élèves de sixième (suivant le nouveau programme) et de quatrième (encore sous l'ancien programme) avaient suivi, pour la première fois cette année-là, un enseignement sur les fractions; et de même, les élèves de cinquième (nouveau programme) et de troisième (ancien programme) avaient derrière eux, en juin 1988, deux années de "pratique" des fractions. Nous reviendrons sur ce point lors de l'analyse.

La population se répartissait selon les dix variantes de la manière suivante:

Variante	6ème Q5	5ème Q5	4ème Q5 à Q10	3ème Q5 à Q10	Total Q5	Total Q6 à Q10
A	29	37	55	37	158	92
B	28	38	79	34	179	113
C	28	37	52	36	151	88
D	27	39	47	34	149	81
E	27	37	64	32	160	96
F	24	39	45	29	137	74
G	26	38	46	30	138	76
H	27	36	42	28	135	70
I	24	36	41	29	130	70
J	24	67	43	29	163	72
Total	264	404	514	318	1500	832

Indiquons, pour terminer cette présentation, qu'à chaque envoi de questionnaires pour une classe était joint un questionnaire destiné au

professeur de mathématiques de la classe et dont le but était de se faire une idée aussi précise que possible de l'enseignement reçu par les élèves ayant répondu au questionnaire.

XI.2. Méthodologie

XI.2.1. Deux points de vue

En raison de l'objectif exposé dans la partie précédente, nous avons été amenés à adopter deux points de vue complémentaires lors du dépouillement et de l'analyse des réponses des élèves.

XI.2.1.A. L'expertise Informatique

Etant donné un résultat fourni par un élève en réponse à une question particulière, le logiciel doit être capable (dans le plus grand nombre possible de cas) de retrouver un ou plusieurs cheminements permettant de produire ce résultat. Face à l'extrême variabilité des réponses des élèves il faut, d'une part éviter la multiplication de règles trop particulières, et d'autre part orienter l'exploration du système expert en hiérarchisant (par "pondération") ces règles selon certaines caractéristiques de l'exercice et de l'élève.

Le travail de codage obéit alors, entre autres, à un souci d'efficacité informatique. L'analyse des résultats s'intéressera d'abord à l'aspect quantitatif afin d'établir les fréquences d'apparition de certaines règles et de les corréler à certains paramètres. L'heuristique d'exploration du système expert sera alors obtenue en convertissant ces statistiques en probabilités.

XI.2.1.B. Communication didactique

Permettre au système expert de produire, à l'aide de règles explicites, le même résultat que l'élève n'est qu'une étape dans l'élaboration du logiciel. Il s'agit également de faire en sorte que cette production artificielle puisse apparaître comme une explicitation plausible de ce qu'a effectivement fait l'élève (de manière plus ou moins implicite).

Dans le travail de taxonomie de ce que nous appellerons des transformations (voir plus bas), nous chercherons donc à éviter ces deux excès inverses de la seule efficacité informatique ou de la modélisation didactique prématurée. Choisir de décrire la réponse d'un élève à l'aide d'une ou plusieurs transformations, ce sera choisir des règles de production, informatiquement simples et didactiquement plausibles, permettant de produire le même cheminement sans préjuger la signification didactique d'un tel comportement.

Ce sera la tâche de l'analyse quantitative mais surtout qualitative des résultats du questionnaire que de risquer des interprétations en terme de conceptions des élèves dans une perspective de travail sur ces conceptions.

XI.2.2. Terminologie

Pour coder, classer et analyser l'ensemble des productions des élèves, nous avons été amenés à définir un certain nombre de termes. Au lecteur qui trouverait cet attirail linguistique pédant ou pesant nous voudrions préciser que cette terminologie ne fut pas décidée a priori mais s'est imposée à nous pour, à la fois, repérer les phénomènes et communiquer à leur propos avec les autres membres de l'équipe. En effet, le fait de travailler à plusieurs sur cette enquête a mis clairement en évidence la nécessaire clarification du vocabulaire propre à toute entreprise de communication d'un travail de recherche. En définissant ci-dessous les principaux termes employés nous voudrions permettre au lecteur de s'approprier cette terminologie à travers ce qui l'a justifiée et lui faciliter ainsi l'accès aux idées qu'elle permet d'exprimer.

XI.2.2.A. Réponse et résultat

Pour chaque item de la copie d'un élève, nous distinguons la *réponse* de l'élève, constituée par l'ensemble de ce qu'il a écrit pour répondre à l'item⁷, et le *résultat* qui désigne la fraction terminale de la réponse.

⁷ En ce sens une non-réponse est une réponse.

XI.2.2.B. Comportements, Enchaînements, Transformations

Les différentes réponses d'un élève à une même série d'items (questions 1 à 4 d'une part, questions 5 à 10 d'autre part) constituent son **comportement**. Mais dans un premier temps nous nous intéresserons aux réponses indépendamment les unes des autres et nous avons décidé de décrire ces réponses à l'aide de la **notion de transformation telle qu'elle est définie au chapitre VIII**. Une transformation est donc l'opération formelle qui, à partir de l'écriture

$$\frac{a}{b} + c$$

(par exemple), produit l'écriture

$$\frac{a'}{b'}$$

suivant une certaine procédure qui constitue la caractéristique de cette transformation.

Nous appelons "transformations" les étapes élémentaires par lesquelles est passé l'élève. Nous les identifions par les traces qui figurent sur la copie de l'élève. Par exemple, de la réponse:

$$\frac{3}{8} + 1 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

nous "abduisons"⁸ qu'il y a eu deux transformations. L'élève a d'abord transformé la somme en une fraction dont le numérateur est obtenu par addition du numérateur du premier terme, au second terme, puis il a simplifié le résultat. Si les étapes intermédiaires n'apparaissent pas, comme dans:

⁸ cette inférence n'est ni une induction ni une déduction mais une abduction, qui conjecture la cause d'un fait isolé (U. Eco a rappelé que c'était le "raisonnement" de Sherlock Holmes).

$$\frac{3}{8} + 1 = \frac{1}{2}$$

nous les reconstruisons par analogie avec des copies similaires.

Les transformations sont donc "atomiques" en ce sens qu'on ne peut les décomposer. Pour parler de l'ensemble des manipulations que fait subir l'élève à l'énoncé pour trouver son résultat, nous parlons d'**enchaînement** (sous-entendu, de transformations).

Un enchaînement peut être éventuellement réduit à une seule transformation, comme dans:

$$\frac{3}{7} + 1 = \frac{4}{7}$$

Nous nous référons à la pratique des élèves (autrement dit à ce qui apparaît dans leurs copies comme étant les transformations les plus élémentaires) pour savoir si un calcul est une transformation atomique ou non, et non bien entendu aux décompositions possibles en termes de transformations minimales correspondant aux lois du corps \mathbb{R} . Nous retrouvons ici la difficulté soulevée au chap. VIII concernant la description concise des transformations.

Les transformations sont, avant tout, un outil de description et d'analyse. Nous ne prétendons nullement qu'elles sont présentes "dans la tête de l'élève"⁹. C'est une des raisons pour lesquelles nous avons préféré le terme de "transformation" à celui de "règle" qui fait trop référence aux règles réellement présentes dans un moteur d'inférence.

Certes le choix que nous avons fait de ces transformations n'est pas totalement arbitraire. Elles possèdent, de notre point de vue, une certaine pertinence didactique. Si elles constituent une "manière de parler", nous veillons à ce que cette manière puisse intervenir dans un dialogue avec

⁹ Nous ne prétendons pas non plus le contraire ! Cette question nous paraît plutôt hors d'atteinte.

l'élève mais nous nous méfions de la tendance qu'il y a à réifier ce qui n'était au début qu'un instrument de description.

Ceci étant posé nous distinguons divers types de transformations.

XI.2.2.C. Les divers types de transformations

Le premier critère est la conservation de la désignation entre l'expression de départ et l'expression produite. Si la désignation est respectée nous parlerons de transformations conservantes¹⁰, si ce n'est pas le cas de transformations incorrectes¹¹.

Parmi ces dernières nous appelons transformations interprétables celles pour lesquelles nous possédons une description procédurale qui nous paraît présenter une certaine pertinence didactique, en particulier d'après les explications d'élèves, p. ex:

$$\frac{5}{3} + \frac{4}{9} = \frac{9}{12}$$

Parmi les transformations interprétables, nous distinguons

- les transformations classiques¹² dont la description est relativement simple et apparaissent au moins en deux exemplaires, p.ex:

$$5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{40}$$

¹⁰ en ce qu'elles "conservent" la dénotation des expressions. Nous ne mettons pas dans cette catégorie le cas des transformations qui la conservent "par hasard", autrement dit qui ne sont conservantes que pour certaines valeurs des variables, par ex.

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 4}{6 \times 5} = \frac{1}{30} \quad (\text{Chevallard 1990}).$$

¹¹ nous n'avons pas voulu appeler "correctes" les transformations conservantes parce qu'elles peuvent être tout à fait inappropriées à la consigne, tout en étant justes sur le plan de la valeur numérique.

¹² le mot "classique" est à prendre ici dans un sens défini par convention. Cela ne signifie pas par exemple que les erreurs "classiques" telles que nous venons de les définir apparaissent forcément comme telles (au sens imprécis usuel) aux yeux des enseignants.

- les "hapax"¹³ pour lesquelles un certain nombre d'indices nous fournissent la procédure, mais auxquelles leur caractère exceptionnel et unique (et souvent tortueux) confère un statut d'explication ad hoc, statistiquement non représentative, et informatiquement peu productive.

Restent les transformations que nous avons qualifiées mystérieuses dont nous ne possédons aucune description vraisemblable, faute d'indices sur la copie et d'intuition didactique de notre part. Une place à part est faite aux erreurs de calculs (cf. infra) et aux erreurs de transcription (élèves qui écrivent "13" au lieu de "15" parce que leur "3" ressemble à un "5" par exemple)

Du point de vue de l'expertise informatique en revanche, le regroupement est un peu différent. Sont qualifiées de décelables, les transformations que le système expert est susceptible de détecter à partir d'un ensemble de règles relativement réduit. Les transformations indécélables sont celles dont la recherche informatique nécessiterait trop de règles ad hoc (cas des "hapax") ou entraînerait une explosion combinatoire dans l'arbre des possibilités (cas des transformations mystérieuses).

Tout ceci peut se résumer dans le tableau suivant:

Didactique:			Informatique:
Conservantes			Décelables
Incorrectes	Interprétables	Classiques	
		Hapax	
		Erreurs de calcul	
	Ininterprétables	Mystérieuses	Indécélables

¹³ du grec ἄπαξ ("une seule fois"), terme de linguistique désignant une forme, un mot ou une expression dont on ne connaît qu'un exemple dans un corpus défini (Dubois et al. 1973).

XI.2.2.D. Types de réponses

De même, le vocabulaire des transformations va nous permettre de déterminer des sous-ensembles de réponses, ceci afin de pouvoir ramener, dans chaque cas, les données quantitatives à la catégorie de réponses pertinente.

- Nous qualifierons d'**adéquates** les réponses irréductibles obtenues par des transformations conservantes.
- Nous qualifierons d'**inadéquates** les réponses réductibles obtenues par des transformations conservantes: la seule "erreur" ici consiste à ne pas simplifier la fraction.
- Les autres réponses seront qualifiées d'**incorrectes**.
- Parmi les réponses incorrectes nous nous intéresserons particulièrement aux réponses obtenues partiellement ou totalement à l'aide de transformations classiques, que nous appellerons des réponses **classiques**.

Taxonomie des réponses	
Conservantes	Adéquates
	Inadéquates
Incorrectes	Classiques
	non-Classiques

Rappelons, pour finir, que cette terminologie, si elle constitue un préambule nécessaire à l'exposition, a cependant été forgée au cours de l'analyse et prendra donc tout son sens lors de l'étude détaillée des résultats.

XI.3. Le Codage des transformations

XI.3.1. Démarche de dépouillement et d'analyse du questionnaire

Pour respecter le double objectif, quantitatif (fréquence des erreurs) et qualitatif (pertinence de l'interprétation didactique) de notre analyse, nous avons procédé de la manière suivante pour dépouiller les 1500 questionnaires:

- Nous avons d'abord saisi¹⁴, pour chaque élève, le **résultat** fourni pour chaque item et les renseignements d'identification (variante, collège, niveau...). Nous avons pu ainsi obtenir les différents taux de réussite et de non-réponse pour chaque item.
- Ensuite, pour chaque réponse inadéquate (dont la liste nous était fournie par le dépouillement informatique) nous avons regardé la copie en détail (y compris les éventuels calculs au verso) et nous avons codé ces réponses.

Nous avons donc, Y. Paquelier et moi-même, **étudié et codé 3 524 réponses inadéquates** "à la main", travail "de fourmi" long et délicat, mais indispensable pour guider nos interprétations et leur garantir un minimum de pertinence.

- Ces transformations ont été enregistrées, sous forme codée, dans la base de donnée.
- Par dépouillement nous avons alors pu obtenir d'autres résultats statistiques: fréquence d'apparition de telle transformation, nature des enchaînements....

¹⁴ Sur tableur Microsoft/Excel™

- Ces résultats quantitatifs ont mis en évidence un certain nombre de phénomènes que nous avons pu illustrer à l'aide de quelques réponses "représentatives" repérées lors du codage, et étudier alors à nouveau.

Cet aller et retour continu et dynamique entre les aspects quantitatifs et qualitatifs de l'enquête constitue l'axe de notre démarche d'analyse. C'est également le point de vue que nous adopterons pour la présentation des résultats. Avant cela, il nous faut dire quelques mots du travail de codage proprement dit.

XI.3.2. Codage et interprétation

La "notion atomique" que nous avons utilisée pour coder les réponses inadéquates est celle de transformation. Nous avons déjà dit qu'il s'agissait d'un outil d'analyse et non d'une réalité "dans la tête de l'élève". Nous avons interprété un texte (la réponse de l'élève) et non analysé un corps chimique. Ce travail d'interprétation, que nous revendiquons, pose évidemment un certain nombre de problèmes parmi lesquels les deux suivants.

XI.3.2.A. Le choix des transformations

Nous avons, en ce domaine, appliqué la règle suivante: la décision de coder comme transformation spécifique une certaine procédure était soumise à trois conditions:

- (1) l'existence de réponses comportant des indices explicites en faveur d'une telle interprétation. Par exemple, la copie "TChar/6/C6" présente la réponse suivante:

$$\left| \frac{5}{12} + \frac{4}{9} = \frac{45}{48} \right.$$

Nous avons caractérisé cette réponse de "produit en croix" dans la mesure où une croix dessinée au crayon réunit les "extrêmes" et les "moyens" (on la retrouve à l'item suivant C7).

- (2) le caractère plausible (c'est-à-dire relativement pertinent et simple) de cette interprétation par rapport à notre expérience d'enseignement et à l'analyse qui pouvait être menée en termes de représentation de l'objet

fraction. Ainsi, l'exemple précédent du "produit en croix" nous paraît d'autant plus plausible qu'un tel transformation existe dans le cadre des équations.

- (3) le nombre relativement important de réponses pouvant être codées à l'aide de cette transformation. Car, si les conditions (1) et (2) précédentes étaient remplies, nous nous autorisons à coder, à l'aide de la transformation repérée, des réponses sans indices explicites mais que cette transformation permettait de produire.

XI.3.2.B. Le découpage des enchaînements

La transformation est un objet construit. Ce qui nous est donné, c'est la réponse de l'élève. C'est à partir de là que nous reconstruisons un enchaînement possible de transformations. Il n'est pas toujours facile de décider si tel passage entre deux écritures doit être interprété comme une seule transformation ou comme la succession de plusieurs d'entre elles. C'est même un problème didactique crucial, aussi bien pour l'analyse que pour les projets d'informatisation du dialogue avec l'apprenant. Car s'il y a succession, il s'agit de succession "formelle" et non "temporelle" (dans le "temps de calcul" de l'élève) et il nous semble bien naïf d'espérer résoudre les difficultés d'interprétation en demandant à l'élève ses "étapes de calculs". A de rares exception près, en effet, l'élève n'utilise pas explicitement des transformations, il produit un résultat. Le choix du découpage d'une réponse est donc de la responsabilité de celui qui analyse et non de celui qui répond.

Pour déterminer ces découpages, nous avons décidé de ne considérer comme transformation "à part entière" d'un enchaînement que les transformations étant, par ailleurs, apparues de manière isolée.

Tout ce préambule méthodologique a pu paraître bien long et bien abstrait au lecteur. Il nous a semblé indispensable, d'une part afin de faciliter la lecture des analyses qui vont suivre et d'autre part (et plus fondamentalement) parce que nous considérons les réflexions méthodologiques nées d'un tel travail comme devant être transmises au

même titre que l'analyse de l'enquête elle-même; analyse que nous allons maintenant présenter.

XI.4. Description des items

L'enquête comporte donc, dans sa partie consacrée aux opérations, 57 items répartis en six questions (Q5 à Q10) que nous indiquons ici.

XI.4.1. Liste des items

Var\Quest	Q 5	Q 6	Q 7	Q 8	Q 9	Q 10
A	$\frac{5}{3} + \frac{4}{9}$	$\frac{5}{2} + \frac{7}{3}$	$\frac{4}{9} - \frac{5}{12}$	$5 + \frac{3}{2}$	$1 - \frac{3}{7}$	$\frac{1}{6} \times 8$
B	$\frac{8}{10} - \frac{5}{10}$	$\frac{5}{3} + \frac{2}{8}$	$\frac{3}{5} - \frac{3}{7}$	$\frac{1}{2} + 3$	$5 - \frac{3}{2}$	$6 \times \frac{1}{8}$
C	$\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$	$\frac{5}{12} + \frac{4}{9}$	$\frac{5}{3} - \frac{3}{4}$	$\frac{3}{7} + 1$	$3 - \frac{1}{2}$	$5 \times \frac{1}{8}$
D	$\frac{3}{10} - \frac{3}{100}$	$\frac{3}{13} + \frac{7}{6}$	$\frac{7}{9} - \frac{5}{12}$	$7 + \frac{4}{9}$	$\frac{12}{8} - 1$	$8 \times \frac{1}{5}$
E	$3 + \frac{7}{10}$	$\frac{3}{7} + \frac{3}{5}$	$\frac{8}{7} - \frac{6}{9}$	$\frac{1}{3} + 5$	$7 - \frac{4}{9}$	$8 \times \frac{1}{6}$
F	$3 - \frac{1}{10}$	$\frac{3}{4} + \frac{5}{3}$	$\frac{7}{5} - \frac{10}{3}$	$1 + \frac{12}{8}$	$5 - \frac{1}{3}$	$\frac{1}{8} \times 6$
G	$1 - \frac{3}{10}$	$\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$	$\frac{5}{8} - \frac{5}{12}$	$3 + \frac{6}{8}$	$1 - \frac{3}{7}$	$\frac{1}{8} \times 5$
H	$\frac{3}{2} - \frac{5}{4}$	$\frac{8}{7} - \frac{6}{9}$	$\frac{7}{2} - \frac{9}{7}$	$\frac{12}{8} + 1$	$3 - \frac{7}{10}$	$\frac{1}{5} \times 8$
I	$\frac{5}{3} + \frac{4}{6}$	$\frac{10}{13} + \frac{7}{5}$	$\frac{7}{9} - \frac{5}{12}$	$\frac{3}{2} + 5$	$3 - \frac{6}{8}$	$9 \times \frac{1}{6}$
J	$\frac{5}{6} - \frac{2}{3}$	$\frac{13}{6} + \frac{13}{15}$	$\frac{14}{16} - \frac{15}{12}$	$3 + \frac{1}{2}$	$5 - \frac{3}{2}$	$\frac{1}{6} \times 9$

XI.4.2. Caractéristiques a priori des items

Ces items présentent un certain nombre de caractéristiques a priori dont nous voulions mesurer l'effet sur les réponses des élèves.

Dans tout ce qui suit, les items sont notés par un nombre (numéro de la question) et une lettre (la variante), par ex. "8A". Les questions, qui sont des suites de dix items, sont notées par la lettre "Q" suivi du numéro de la question (ex: "Q8")

XI.4.2.A. La catégorie:

- Somme: (5A, 5C, 5E, 5I, Q6, Q8)
- Différence: (5B, 5D, 5F, 5G, 5H, 5J, Q7, Q9)
- Produit : (Q10)

XI.4.2.B. La réductibilité des opérands fractionnaires

L'opérande fractionnaire de (5B, 5I, 6B, 6H, 7E, 7J, 8F, 8G, 8H, 9D, 9I) est réductible, dans les autres items, non.

XI.4.2.C. La catégorie des opérands:

- "type I": deux fractions (5A, 5B, 5C, 5D, 5H, 5I, 5J, Q6 et Q7)
- "type II": une fraction et un entier (5E, 5F, 5G, Q8, Q9, Q10)

XI.4.2.C.a. Pour le type I:

- Le fait que les dénominateurs des deux fractions soient premiers entre eux: (6C, 6J, 7A, 7D, 7G, 7I, 7J)
- ou qu'ils aient un diviseur commun: (5A, 5B, 5C, 5D, 5H, 5I, 5J, 6A, 6B, 6D, 6E, 6F, 6G, 6H, 6I, 7A, 7B, 7C, 7D, 7E, 7F, 7H)

XI.4.2.C.b. Pour le type II:

- Le fait que l'opérande entier soit "1" (5G, 8C, 8F, 8H, 9A, 9D, 9G) ou non.
- Le fait que le numérateur de l'opérande fractionnaire soit l'entier "1" (5F, 8B, 8C, 8E, 8F, 8J, 9C, 9F, Q10) ou non.
- Le fait que le premier opérande soit l'entier (5E, 5F, 5G, 8D, 8F, 8G, 8J, 9A, 9B, 9C, 9E, 9F, 9G, 10B, 10C, 10D, 10E, 10I) ou la fraction.

XI.4.2.D. question 5

La question 5, parce qu'elle était également soumise aux élèves de 6ème et de 5ème, présente en outre la caractéristique supplémentaire suivante:

- Le fait qu'un au moins des dénominateurs soit une puissance de 10: (5B, 5D, 5E, 5F, 5G).

XI.5. Réussite et non-réponse:

XI.5.1. question 5

Comme nous l'avons déjà indiqué, cette question, contrairement aux cinq suivantes, fut posée à l'ensemble des élèves ayant passé le questionnaire. L'objectif était essentiellement de comparer les performances des élèves de 6ème et 5ème (ayant suivi le nouveau programme) d'une part et celles des élèves de 4ème et 3ème d'autre part. Nous allons donc donner les résultats sous cette forme.

XI.5.1.A. Résultats

Les taux de réussite et de non-réponse à la question 5 (tous items confondus) et selon les niveaux, sont les suivants:

niveaux →	6ème	5ème	4ème	3ème
% de réponses adéquates	28	38	76	83
% de non-réponse	11	11	3	3

Les résultats sont donnés en pourcentages, sur la base de 1500 élèves.

XI.5.1.B. Commentaires

Les résultats précédents mettent en évidence une coupure très nette entre les deux premières années de collège et les deux suivantes. Nous ne donnons pas les résultats pour chaque variante afin de ne pas alourdir la rédaction, mais le phénomène se vérifie malgré les caractéristiques

différentes des variantes. Nous verrons cet effet plus en détail dans l'exposé des résultats item par item.

Les taux de non-réponse confirment également l'observation ci-dessus mais ne suffisent pas à expliquer les différences de réussite. Les élèves de 6ème et 5ème, s'ils s'abstiennent plus souvent de répondre à la question Q5, font également un beaucoup plus grand nombre d'erreurs à cette question.

Pour des raisons d'homogénéité de la population et des opérations de chaque question, nous n'étudierons pas davantage cette question Q5 et nous allons analyser maintenant l'ensemble des cinq autres questions auxquelles ont répondu les 832 élèves de 4ème et 3ème.

XI.5.2. questions 6 à 10

XI.5.2.A. Taux de réussite

Les résultats, pour chaque item, sont les suivants:

%	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Moyenne
A	87	54	82	82	62	73
B	82	76	82	85	68	79
C	66	74	77	78	77	74
D	65	53	69	58	67	62
E	84	57	84	73	76	75
F	82	45	74	82	61	69
G	82	70	64	83	68	73
H	54	79	74	77	76	72
I	73	59	87	67	77	73
J	58	28	79	81	69	63
Moyenne	75	60	78	77	70	72

Les taux de réussite indiquent que les variantes ne sont pas de difficulté homogène (de 63% à 79%), contrairement à ce qui avait été prévu au départ. L'item J7:

$$\frac{14}{16} - \frac{15}{12}$$

par exemple, avec un taux de réussite de seulement 28%, est apparu comme exceptionnellement peu réussi. Cela vient sans doute, en grande partie, du fait que cet item cumule plusieurs caractéristiques dont on va voir dans la suite l'influence négative: opération de soustraction avec résultat négatif et réductibilité d'un des opérands (tous les nombres étant de plus supérieurs à 10).

Le taux moyen de non-réponse est relativement faible (3%) et à peu près identique pour chaque variante (entre 2% et 4%).

XI.5.2.B. influence du niveau

Si l'on compare les pourcentages de réussite pour les 514 élèves de 4ème et les 318 élèves de 3ème, on obtient le tableau suivant:

%	question 6	question 7	question 8	question 9	question 10	Moyenne
4ème	75	58	75	74	65	69
3ème	75	64	83	82	80	77

Les élèves de 3ème réussissent légèrement mieux, en moyenne, que les élèves de 4ème. Mais on ne peut pas dire que l'écart soit significatif d'une réelle différence de performance en ce qui concerne les opérations sur les fractions. Pour la question la plus "classique" (question Q6: addition de deux fractions) on a même un taux de réussite identique.

En revanche, l'écart est assez important (15%) lorsqu'il s'agit du produit d'un entier et d'une fraction (question 10). Nous verrons, en effet, que, dans ce cas, 24% des élèves de 4ème utilisent la "distributivité de la multiplication sur la division"

$$a \times \frac{b}{c} \rightarrow \frac{ab}{c}$$

contre 6% des élèves de 3ème, ce qui paraît lié à l'apprentissage systématique de la distributivité lors de l'introduction de l'algèbre en 4ème.

Ce sera le seul cas d'utilisation d'une transformation significativement liée à une classe particulière et c'est pour cela que, par la suite, nous ne distinguerons plus les résultats des élèves de 4ème de ceux de 3ème.

XI.5.2.C. Influence des caractéristiques des items

XI.5.2.C.a. Influence de l'opération: Addition, Soustraction, Multiplication.

Si l'on regroupe les questions selon l'opération y intervenant, on obtient les pourcentages suivants:

ADDITION (Q6 et Q8)	SOUSTRACTION (Q7 et Q9)	MUTIPPLICATION Q10
77	69	70

Il est clair que les sommes sont mieux réussies que les différences, ce qui ne constitue pas une surprise mais confirme nos prévisions. Dans la question Q10, il s'agissait d'une multiplication bien particulière de type:

$$\frac{1}{6} \times 8$$

et le résultat ne peut donc être tenu comme représentatif de la performance des élèves en ce qui concerne cette opération en général.

XI.5.2.C.b. Influence du signe du résultat

Reprenons le tableau des pourcentages de réussite item par item:

%	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
A	87	54	82	82	62
B	82	76	82	85	68
C	66	74	77	78	77
D	65	53	69	58	67
E	84	57	84	73	76
F	82	45	74	82	61
G	82	70	64	83	68
H	54	79	74	77	76
I	73	59	87	67	77
J	58	28	79	81	69

Pour les deux items 7F:

$$\frac{7}{5} - \frac{10}{3}$$

et 7J:

$$\frac{14}{16} - \frac{15}{12}$$

le résultat correct est négatif. Or le taux de réussite moyen de ces deux items est de 37% contre 60% pour l'ensemble de la question Q7, et ils représentent chacun le plus faible taux de réussite de la variante considérée. Cela illustre avec évidence l'influence de ce facteur sur les réponses des élèves. Nous verrons, dans l'étude des transformations, comment les élèves utilisent un certain nombre de règles incorrectes pour "éviter" un résultat négatif.

XI.5.2.C.c. Influence de la réductibilité d'un des opérandes fractionnaires

Exemple (ici, l'opérande réductible est le second terme):

$$\left| \frac{8}{7} + \frac{6}{9} \right|$$

Le tableau suivant permet de comparer le taux de réussite des items dont l'un des opérandes est réductible au taux de réussite global et ceci pour chaque question (le cas ne se présente pas dans la question Q10) afin de ne pas faire intervenir d'autres facteurs:

%	Q6	Q7	Q8	Q9
un opérande réductible	72	45	71	62
réussite globale	75	60	78	77

Les items dont une opérande est réductible sont donc, pour chaque question, moins bien réussis que les autres.

- Si l'élève ne simplifie pas l'opérande (ce qui est presque toujours le cas) et si il effectue une réduction correcte au même dénominateur, il obtient une fraction réductible **qu'il ne pense pas**, la plupart du temps, à **simplifier**. Sa réponse est alors inadéquate selon notre terminologie et n'est donc **pas prise en compte** dans le taux de réussite, puisqu'il n'a pas respecté la consigne.
- S'il simplifie l'opérande ou la fraction obtenue il risque de faire des erreurs de simplification.

Dans tous les cas, la moindre réussite des items à opérande réductible se justifie donc en termes d'erreurs ou d'absence de simplification.

XI.5.2.C.d. Influence du type des opérandes: deux fractions ou une fraction et un entier.

Il s'agit donc de regrouper d'une part les questions 6 et 8, d'autre part les questions 7 et 9:

Type I (Q6 et Q7)	Type II (Q8 et Q9)
68	78

Le type II (un des termes est un Ent) est mieux réussi en pourcentages. Nous verrons, dans l'étude détaillée des erreurs, qu'il n'est en fait pas très significatif de comparer les résultats ces deux types d'items,

dans la mesure où les comportements mis en jeu diffèrent notablement. Les élèves n'utilisent pas forcément les mêmes transformations et ne font donc pas le même type d'erreurs.

XI.5.2.C.e. Influence, pour le type I, du fait que les dénominateurs soient premiers entre eux.

%	Q6	Q7
dénominateurs non premiers	63	52
dénominateurs premiers	77	65

Seules les questions Q6 et Q7 présentent certains items avec des dénominateurs premiers entre eux et d'autres non. Dans les deux cas la réussite est plus élevée quand les dénominateurs sont premiers entre eux.

On retrouve le résultat des opérandes réductibles. La réduction au même dénominateur (en prenant le produit des dénominateurs comme dénominateur commun) donne une fraction réductible qui n'est généralement pas simplifiée par les élèves, et n'est donc pas décomptée parmi les réussites.

XI.5.2.C.f. Influence, pour le type II, du fait que l'opérande entier soit "1".

Le tableau suivant représente l'influence de l'entier "1" comme opérande entier:

%	Q8	Q9
opérande entier égal à 1	75	74,5
Taux global	78	77

Malgré le taux de réussite légèrement plus faible des items où intervient l'opérande entier "1", on ne peut considérer cette caractéristique comme réellement déterminante.

Il est à noter que nous n'avons pas étudié dans cette enquête une erreur qui nous paraissait réellement caractéristique lors de la toute première étude, à savoir la distributivité de l'inversion sur la somme:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$$

Les autres caractéristiques a priori des items ne paraissent pas avoir de réelle influence non plus sur les taux de réussite. Aussi, afin de ne pas alourdir la rédaction, nous ne donnerons pas les différents tableaux illustrant ces comparaisons.

XI.6. Les trois étapes

Pour éviter de confondre des transformations d'un type différent, nous avons scindé l'ensemble des transformations successives possibles en trois étapes que nous illustrerons sur l'exemple (fictif) suivant:

Ex.

$$\boxed{\frac{10}{15} + \frac{5}{6} = \frac{2}{3} + \frac{5}{6}} \quad \boxed{= \frac{2 \times 2}{3 \times 2} + \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6}} \quad \boxed{= \frac{3}{2}}$$

La première étape est une simplification du premier terme. La seconde, une procédure d'addition de deux fractions (mise au dénominateur commun et effectuation). La dernière étape est une simplification de la fraction résultat.

Toutefois les calculs des élèves ne sont pas toujours aussi limpides que l'exemple ad hoc qui précède:

Ex. (Château/21/H9)¹⁵

¹⁵ Les réponses des élèves sont identifiées par un triplet:

identifiant_du_collège/ numéro_de_copie/numéro_d'item.

$$\left| 3 - \frac{7}{10} = \frac{90}{30} - \frac{21}{30} = \frac{69}{30} \right.$$

Faut-il ici mettre la toute première transformation dans la première étape ou dans la seconde? Il nous a fallu trancher en adoptant des critères a priori. Par convention:

XI.6.1. première étape

- La **première étape** est formée d'une transformation (ou d'un enchaînement):
 - i) qui ne modifie pas la **catégorie** de l'expression initiale. En d'autres termes, si l'expression initiale est une somme (resp. une différence ou un produit), elle reste une somme (resp. une différence ou un produit).
 - ii) qui ne porte pas **simultanément** sur les deux opérands de l'expression initiale.

Cette convention repousse par exemple en deuxième étape la simplification en croix des facteurs fractionnaires d'un produit.

p. ex. (B10)

$$\left| 6 \times \frac{1}{8} \rightarrow 3 \times \frac{1}{4} \right.$$

Peu importe d'ailleurs, car il semble (aux erreurs de codage près) qu'aucun élève ayant simplifié en croix (quand il y avait lieu de le faire, soit dans 6 items sur 10) n'ait fait ensuite la moindre erreur.

Le cas le plus fréquent (comme dans l'exemple fictif ci-dessus) est une simplification d'un des opérands. L'élève peut également transformer un opérande entier E en opérande fractionnaire $\frac{E}{1}$ (ce qui est correct) voire en opérande fractionnaire $\frac{E}{E}$ (ce qui l'est moins si $E \neq 1$).

La condition (ii) exclut les mises au dénominateur commun du champ de la première étape, comme dans l'exemple (Château/21/H9). Une telle transformation porte en effet simultanément sur les deux termes de la différence.

XI.6.2. seconde étape

La **seconde étape** est formée de l'enchaînement¹⁶ qui transforme l'expression issue de l'étape 1 (somme, différence ou produit) en une fraction (Fra) ou une écriture décimale de nombres (Cst). La seconde étape modifie donc la **catégorie** de l'expression.

XI.6.3. troisième étape

la **troisième étape** est formée d'une transformation (ou d'un enchaînement), en général une simplification, portant sur le résultat de l'étape 2 lorsque celui-ci est une fraction.

La plupart du temps, nous n'avons rien codé dans les étapes 1 et 3, soit que les fractions (initiales ou finales) aient été irréductibles, soit que l'élève n'ait pas vu qu'elles étaient réductibles. Dans un certain nombre de cas toutefois les élèves ont effectué une simplification, adéquate ou non. Dans ce cas on retrouve grosso modo les erreurs de simplification relevées aux questions Q1 à Q4¹⁷.

Précisons que nous n'avons rien codé non plus lorsque l'élève ne simplifiait pas une fraction initiale réductible (étape 1) car ce résultat en lui-même nous intéressait peu par rapport à notre étude, qui est celle des transformations de sommes, de différences et de produits (étape 2).

XI.7. Les notions de réponse et de transformation "classiques"

La notion de "transformation classique" a été définie plus haut comme incorrecte, interprétable et décelable. Nous allons toutefois étendre ici la notion de "réponse classique", en relation avec les buts de notre enquête.

¹⁶ éventuellement réduit à une seule transformation

¹⁷ Précisons que le taux d'échec moyen à ces questions (relativement élémentaires) de simplification est de 36%.

Si nous reprenons la définition précédente, une réponse classique est d'abord un enchaînement qui n'est pas formé, à l'étape 2, uniquement de transformations indécélabes (hapax, transformations mystérieuses, erreurs de calcul ou erreurs de transcription). Toutefois, nous ne nous intéressons ici qu'aux fréquences relatives d'apparition des **transformations** portant sur des opérations de fractions, et non pas aux erreurs de simplification. Afin de comparer des choses comparables, c'est-à-dire des transformations (à l'étape 2) à d'autres transformations (à l'étape 2), nous excluons en outre de notre base de réponses (dites "classiques"), celles où les élèves ont juste fait une simplification incorrecte avant (étape 1) ou inadéquate après (étape 3) l'effectuation adéquate de l'opération (étape 2).

En résumé, nous ne considérons pas comme réponses classiques:

- Les simplifications **incorrectes** à l'étape 1 suivies aux étapes 2 et 3 de transformations "cohérentes", c'est-à-dire adéquates à l'énoncé ainsi modifié.

incorrect | cohérent | cohérent

Ex. (H9)

$$3 - \frac{7}{10} = 3 - \frac{7 \div 2}{10 \div 2} = 3 - \frac{3}{5} = \frac{15}{5} - \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$$

- Les enchaînements de transformations toutes **indécélabes** à l'étape 2.

quelconque | **indécélabes** | quelconque

Ex. (H9)

$$3 - \frac{7}{10} = \frac{30}{10} - \frac{7}{10} = \frac{13}{10}$$

- Les étapes 1 et 2 adéquates suivies d'une simplification **inadéquate** à l'étape 3.

adéquat | adéquat | **inadéquat**

Ex. (H9)

$$3 - \frac{7}{10} = \frac{30}{10} - \frac{7}{10} = \frac{23}{10} = \frac{11,5}{5}$$

Le tableau ci-dessous donne, question par question, le nombre de réponses incorrectes et le nombre de réponses classiques, auquel nous rapporterons désormais les nombres de transformations classiques relevées.

Question:	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Total
Réponses incorrectes:	197	295	162	150	213	1026
Réponses classiques:	97	149	88	72	139	617

XI.8. Quelques indications sur les erreurs non-classiques.

Avant d'aborder l'étude des erreurs classiques, nous allons présenter rapidement quelques indications quantitatives sur les erreurs non-classiques.

XI.8.1. Les simplifications incorrectes à l'étape 1.

Nous n'avons relevé que les simplifications **incorrectes**, autrement dit non-conservantes. Ceci signifie que nous n'avons pas répertorié les transformations inadéquates, c'est-à-dire les simplifications incomplètes ou carrément omises.

Pour donner un ordre de grandeur, parmi les 162 réponses incorrectes à la question Q8 on trouve 88 réponses classiques et 10 simplifications incorrectes à l'étape 1 (6,2%). Précisons que sur les dix items de Q8, il n'y en a que trois dont un des termes soit réductible. Les proportions sont du même ordre dans les autres questions.

XI.8.2. Enchaînements indécélabes à l'étape 2

Précisons pour commencer que la grande majorité de ces enchaînements indécélabes sont réduits à une seule transformation.

XI.8.2.A. Erreurs de calcul

Les erreurs de calcul, comme on l'a déjà dit plus haut, ne sont pas des transformations autonomes mais des transformations arithmétiques incorrectes qui se surajoutent aux autres transformations (par ailleurs adéquates ou non).

A la question Q6 on trouve parmi les réponses incorrectes 42 transformations comportant une ou plusieurs erreurs de calcul (21,3%). Les erreurs de calcul sont la première cause d'inexactitude en Q6¹⁸, la seconde en Q7¹⁹, la troisième en Q8 et Q9²⁰ et la quatrième en Q10²¹ (en moyenne sur les question Q6 à Q10: 13,6%).

La présence d'erreurs de calcul dépend évidemment des **nombre**s mis en jeu dans l'énoncé. Pour une même question, le nombre d'erreurs de calculs peut varier selon l'item dans des proportions de 1 (ex. [6A]: $\frac{5}{2} + \frac{7}{3}$) à 8 (ex. [6J]: $\frac{13}{6} + \frac{13}{15}$).

XI.8.2.B. Transformations mystérieuses

Il s'agit par définition de transformations que nous n'avons pu interpréter de manière plausible.

Pour donner un ordre de grandeur, parmi les réponses incorrectes à la question Q6 on trouve 9 transformations mystérieuses (en moyenne 4%)²².

¹⁸ ex-æquo avec les simplifications inadéquates à l'étape 3

¹⁹ derrière les simplifications inadéquates à l'étape 3.

²⁰ questions dans lesquelles il n'y a plus que trois nombres mis en jeu, au lieu de quatre en Q6 et Q7: il y a donc "moins de calculs" à faire.

²¹ pour Q10 (avec des énoncés du type: $5 \times \frac{1}{8}$), les calculs arithmétiques étaient nettement plus faciles.

²² 11 sur 295 pour Q7, 9 sur 162 pour Q8, 13 sur 159 pour Q9, 8 sur 213 pour Q10.

XI.8.2.C. Hapax

Il s'agit de transformations interprétables mais n'arrivant qu'une seule fois, de telle sorte qu'on ne peut y trouver une quelconque régularité sous-jacente qui aurait une chance de se reproduire.

Parmi les 197 réponses incorrectes à la question Q6 on trouve 2 hapax (moins de 2%)²³.

XI.8.3. Les simplifications inadéquates à l'étape 3.

Parmi les 197 réponses incorrectes à la question Q6, on trouve 42 simplifications inadéquates à l'étape 3. La plupart du temps il s'agit d'absence de simplification, ou de simplifications partielles.

Les simplifications inadéquates à l'étape 3 sont la **première** cause d'incorrection (questions Q5, Q6²⁴, Q7, Q9 et Q10) ou la **seconde** (question Q8) (en moyenne 30,6% des réponses incorrectes)²⁵.

Précisons que dans la plupart des items, si l'on simplifie tous les termes réductibles à la première étape, puis (lorsqu'il y a somme ou différence) si l'on prend comme dénominateur commun le PPCM des dénominateurs (quand il est distinct du produit), il n'y plus rien à simplifier à la troisième étape²⁶.

Les erreurs de simplification proprement dites sont du même type et dans les mêmes proportions que pour les questions Q1 à Q4. On y retrouve

²³ 7 sur 295 pour Q7 (2%), 4 sur 162 pour Q8 (2%), 2 sur 159 pour Q9 (1%), 2 sur 213 pour Q10 (1%).

²⁴ ex-æquo avec les erreurs de calcul

²⁵ 69 sur 295 pour Q7, 29 sur 162 pour Q8, 27 sur 159 pour Q9 et 52 sur 213 pour Q10.

²⁶ la seule exception est l'item 5C ($\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$). C'est d'ailleurs un des items de la question 5 où les élèves ont fait le plus grand nombre d'erreurs de simplification - en majorité des simplifications *absentes* ou *partielles*.

en particulier des simplifications "hétérogènes", "euclidiennes" etc. Précisons brièvement ce que signifient ces derniers termes:

XI.8.3.A. Simplification hétérogène (SH)

Il s'agit de la division du numérateur et du dénominateur par deux diviseurs différents.

Ex (Gosc/9/2C)

$$\frac{30}{40} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

L'élève effectue d'abord une SH(3;2)²⁷ puis une simplification correcte par 10.

Ex (Sorb/40/4G)

$$\frac{5 \times 9 + 27}{42} = \frac{45 + 27}{42} = \frac{72}{42} = \frac{36}{21} = \frac{18}{10.5} = \frac{9}{5.25} = \frac{1}{0.583}$$

Après avoir calculé le numérateur, l'élève procède à trois SH(2;1) successives, puis à une SH(9;1).

Ex (Alex/9/2D)

$$\frac{72}{75} = (72:4):3 = 6 \quad (75:5):5 = 3 \quad \frac{6}{3}$$

Malgré la disposition curieuse des calculs, on voit que l'élève effectue ici une SH(12; 25).

Pourcentage de simplifications classiques contenant une ou plusieurs SH:

Moyenne %	6ème	5ème	4ème	3ème
32	21	33	43	41

On constate donc que cette transformation (non prévue dans l'analyse a priori) est un phénomène qui est loin d'être négligeable d'autant qu'il semble être plus important lorsque le niveau augmente.

²⁷ Nous notons par SH(a;b) la division du numérateur par a et du dénominateur par b

XI.8.3.B. Simplification euclidienne (SE)

Il s'agit de la division du numérateur et du dénominateur par un même nombre, l'une de ces divisions (ou les deux) étant effectuée(s) "euclidiennement" (sans tenir compte du reste).

Ex (Asp/3/4A)

$$\frac{8 \times 6 + 22}{105} = \frac{70}{105} : 10 = \frac{7}{10}$$

Après avoir calculé le numérateur, l'élève procède explicitement (présence de l'écriture ":10" à chaque "étape" de la fraction) à ce que nous appelons une simplification euclidienne du dénominateur par 10 (105 = 10×10+5)

Ex (Asp/22/2I)

$$\frac{63}{42} = \frac{31}{21}$$

La présence des divisions au verso de la feuille confirme qu'il s'agit bien ici d'une SEN²⁸. D'ailleurs le même élève, pour l'item précédent (1I) a écrit:

$$\frac{75}{45} = \frac{37}{22}$$

Ce qui constitue une SE2 (là aussi les divisions sont explicites au verso).

En ce qui concerne le pourcentage de réponses classiques dans lesquelles interviennent des SE, on a les résultats suivants:

²⁸ Nous notons "SEN2" la simplification euclidienne du numérateur par 2 (de même "SED2" pour le dénominateur et "SE2" lorsqu'il s'agit des deux)

Moyenne %	6ème	5ème	4ème	3ème
16	29	14	5	0

A noter que, comme pour les simplifications hétérogènes, le diviseur 2 est largement privilégié: dans 64% des simplifications classiques contenant des SE on trouve des simplification euclidienne par 2.

Nous allons voir au chapitre suivant le détail des résultats concernant les réponses classiques, exposé question par question.

XII. UNE ENQUETE SUR LES FRACTIONS.

DEUXIEME PARTIE:

LES RÉPONSES CLASSIQUES QUESTION PAR QUESTION.

Nous allons donner dans ce chapitre le détail des réponses "classiques", ainsi que quelques indications sur les enchaînements et les comportements. Les conclusions de l'enquête figurent au chapitre XIII.

Les questions Q6 à Q10 s'opposent entre elles relativement à certains critères décisifs. Ainsi les questions Q6 et Q8 sont-elles des sommes, les questions Q7 et Q9 des différences, la question Q10 un produit. Les questions Q6 et Q7 sont de type I (deux fractions), les questions Q8, Q9 et Q10 de type II (une fraction et un entier) etc. Les enchaînements incorrects relevés diffèrent donc d'une question à l'autre, même si on peut faire des rapprochements entre certaines transformations de même type d'une question à l'autre (cf. infra l'étude des comportements). Pour la commodité de la présentation, nous présenterons donc les enchaînements classiques question par question¹.

Certaines transformations classiques sont toutefois communes à plusieurs questions. Ainsi un élève peut-il transformer un énoncé de type II en énoncé de type I, en transformant par exemple l'entier E en fraction:

$$\frac{E}{1}$$

¹ Nous avons envisagé un moment de présenter ces réponses classiques selon une taxonomie systématique, indépendante de la question. Toutefois une telle présentation, basée sur des critères formels hiérarchisés, convient sans doute mieux à la constitution d'une base de données multicritères qu'à une lecture linéaire, fût-ce par un lecteur averti et de bonne volonté. Ce dernier est rapidement submergé de distinctions subtiles entre sous-classes, au point d'être totalement désorienté. Voilà pourquoi nous avons jugé préférable de présenter les réponses classiques question par question, ce qui est moins satisfaisant pour l'esprit et plus pour le lecteur!

ce qui est la base même de l'enchaînement adéquat. On retrouvera donc des erreurs spécifiques des énoncés de type I dans les énoncés de type II (quoique en moins grand nombre). Nous introduirons ces erreurs communes avec les questions où elles apparaissent de la manière la plus caractéristique, sans les reprendre (autrement que lors des récapitulatifs) pour éviter les redondances.

Par ailleurs nous n'aborderons pas la question Q5 en tant que telle. En effet cette question présente une sorte de "pot pourri" des items qui apparaissent dans les questions Q6 à Q9, modifiés afin d'être accessibles aux élèves de 6ème et de 5ème. Ceci fait que les résultats de la question Q5 peuvent être déduits de ceux des autres questions, à quelques écarts atypiques près. Ces écarts résultent soit des caractéristiques très différentes des populations de 6ème et 5ème par rapport aux deux autres classes, soit de la modification des items dans le sens de la facilité, qui les rend difficiles à comparer avec les items non modifiés des autres questions. C'est le cas de l'item 5B:

$$\frac{8}{10} - \frac{5}{10}$$

évidemment beaucoup plus facile que les autres différences de deux fractions.

XII.1. Les enchaînements classiques de Q6.

Rappelons que la question Q6 propose une somme de deux fractions:

$$\frac{N_1}{D_1} + \frac{N_2}{D_2}$$

XII.1.1. Somme des numérateurs sur somme des dénominateurs

$$[\text{Som/Som}]^2$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Ex (Gay/7/6C):} \\ \frac{5}{12} + \frac{4}{9} = \frac{9}{21} = \frac{7}{3} \end{array} \right.$$

Cette transformation est la plus répandue des transformations classiques parmi les questions faisant intervenir une somme de deux fractions (36% des Q6), avec des taux quasi-identiques en 4ème et en 3ème³.

XII.1.2. Les Combinaisons Linéaires Incorrectes de Numérateurs:

$$[\text{CLIN } \alpha, \beta]$$

On peut considérer que le numérateur de la somme de deux fractions, obtenue par la procédure standard, est une sorte de "combinaison linéaire" des numérateurs N_1 et N_2 des deux termes.

En notant DC le dénominateur commun, on peut donc considérer que la somme de $\frac{N_1}{D_1}$ et $\frac{N_2}{D_2}$ est transformée en:

$$\frac{\alpha N_1 + \beta N_2}{DC}$$

Le "coefficient" multiplicatif α du numérateur N_i est suivant le cas:

- le dénominateur de l'autre terme: D_j
si le dénominateur commun choisi est le produit des dénominateurs, ou

² Nous notons conventionnellement les transformations entre crochets.

³ par la suite, nous ne mentionnerons les classes que si les résultats diffèrent sensiblement.

- le quotient du dénominateur commun par le dénominateur correspondant au numérateur:

$$\frac{\text{PPMC}(D_i;D_j)}{D_i}$$

si les dénominateurs ne sont pas premiers entre eux.

En toute rigueur mathématique le second cas englobe le premier⁴. Dans la pratique courante toutefois, les procédures correspondant aux deux cas définissent différemment les coefficients. Ainsi, dans le premier cas, le coefficient α_i qui multiplie N_i est bien défini comme D_j , et non pas comme:

$$\frac{\text{PPMC}(D_i;D_j)}{D_i}$$

L'expérience courante de tout enseignant de mathématiques est que de nombreux élèves ne choisissent pas convenablement les coefficients α et β . C'est cette impression que nous avons voulu mettre en forme, d'une manière susceptible d'être intégrée dans un système expert: la [CLIN] est une somme $\alpha N_1 + \beta N_2$ dont les coefficients ne conviennent pas.

Il est clair qu'il n'y a pas une seule [CLIN], mais de nombreuses [CLIN $\alpha; \beta$]⁵ possibles, autant que d'erreurs possible sur les coefficients α et β . Pour la clarté de l'exposé, supposons que le dénominateur commun DC soit le produit des dénominateurs D_1 et D_2 . On pourra alors avoir:

⁴ si $\text{PPMC}(D_i, D_j) = D_i D_j$ alors $\frac{\text{PPMC}(D_i, D_j)}{D_i} = \frac{D_i D_j}{D_i} = D_j$

⁵ Nous notons les CLIN : [CLIN $\alpha; \beta$] où α et β sont les coefficients multiplicatifs respectifs des deux numérateurs. Pour désigner à quoi correspondent α et β nous adoptons les notations suivantes pour désigner les opérandes des deux fractions:

$$\frac{N_1}{D_1} \pm \frac{N_2}{D_2}; \text{ "DC" représente le dénominateur commun}$$

Nous aurons donc des [CLIN $D_1; D_2$], des [CLIN $D_2; D_2$] etc.

[CLIN D_1, D_2]

$$\text{Ex (Robert/7/6A):} \\ \frac{5}{2} + \frac{7}{3} = \frac{5 \times 3}{3 \times 2} + \frac{7 \times 2}{2 \times 3} = \frac{31}{6}$$

[CLIN D_2, D_2]

$$\text{Ex (Château/3/6A)} \\ \frac{5}{2} + \frac{7}{3} = \frac{5 \times 3}{2 \times 3} + \frac{7 \times 3}{2 \times 3} = \frac{36}{6}$$

[CLIN D_1, D_1]

$$\text{Ex (Gay/27/6A)} \\ \frac{5}{2} + \frac{7}{3} = \frac{5 \times 2}{3 \times 2} + \frac{7 \times 2}{3 \times 2} = \frac{24}{6}$$

Il faut toutefois également envisager d'autres cas de figure pour lesquels les coefficients α et β ne sont pas seulement intervertis. Dans un certain nombre de cas, ces coefficients sont "oubliés", ce qui, d'un point de vue de simulation informatique, mais certainement pas didactique, revient à les rendre égaux à 1.

[CLIN 1,1]

$$\text{Ex (6A)} \\ \frac{5}{2} + \frac{7}{3} = \frac{5}{3 \times 2} + \frac{7}{3 \times 2} = \frac{12}{6}$$

Cette [CLIN] apparaît comme une reformulation de la transformation [Som/Pro], et c'est sous cette rubrique qu'elle a été comptabilisée. Ce qui apparaît en fait plus fréquemment, ce sont des [CLIN] dans lesquelles un des coefficients est "oublié" tandis que l'autre est correct, ou interverti [CLIN 1, D_1] etc.

Il arrive encore qu'un des numérateurs multiplie l'autre:

[CLIN D₂,N₁]

Ex (6A):

$$\frac{5}{2} + \frac{7}{3} = \frac{5 \times 3}{2 \times 3} + \frac{5 \times 7}{3 \times 2} = \frac{50}{6}$$

En réalité, à peu près toutes les combinaisons sont envisageables. Un coefficient peut également être le dénominateur commun "DC" (v. ci-dessous), ou un de ses multiples, ou tout ce qu'on voudra qui ait un rapport proche ou lointain avec une quelconque des composantes de l'expression.

[CLIN D₂,DC]

Ex (Rolland/23/6H):

$$\frac{8}{7} + \frac{6}{9} = \frac{8}{7} + \frac{2}{3} = \frac{24}{21} + \frac{14}{21} = \frac{38}{21} = \frac{66}{21} = \frac{22}{7}$$

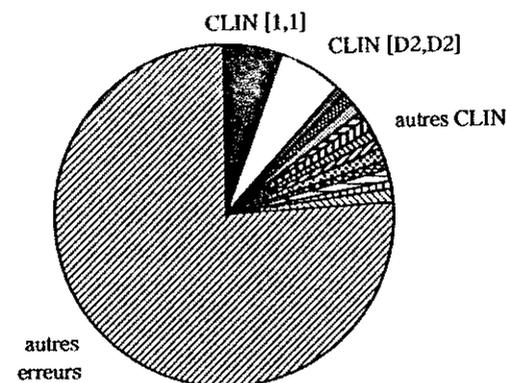
La notion de [CLIN] peut également être étendue aux cas où une des deux fractions "disparaît" purement et simplement (cf. XII.2.8 et XII.2.9.), en considérant qu'on a, à ce moment, un coefficient égal à 0. Informatiquement cela permet d'étendre la combinatoire des [CLIN] pour rendre compte d'un encore plus grand nombre d'erreurs. Didactiquement, la notation [CLIN 0, β] ne signifie évidemment pas qu'un élève ait multiplié le premier numérateur par zéro pour le faire disparaître! Il s'agit simplement d'un comportement (l'oubli de la première fraction) qui par commodité a été rangé parmi les CLIN.

L'ensemble des [CLIN] relevées lors de l'enquête (toutes types confondus) couvre à peu près la totalité de la combinatoire des coefficients possibles. Toutefois, dans une perspective informatique, chacune de ces [CLIN] particulières apparaît trop rarement pour qu'on puisse en ordonner les fréquences de manière fiable, voire même qu'on puisse déceler la moindre régularité dans le choix de telle [CLIN] plutôt que telle autre (à l'exception de [CLIN 1,1] et [CLIN D₂,D₂]). Ce n'est qu'au niveau global, lorsqu'on considère l'emploi des [CLIN] sans chercher à savoir desquelles il s'agit, qu'on atteint des taux étonnamment élevés (24% de Q6, 18% de Q7).

Pour la question Q7 par exemple, il y a globalement plus de [CLIN] que de [Dif/Dif].

Revenons sur les deux [CLIN] qui apparaissent le plus fréquemment (environ 5 fois plus que les autres):

- la [CLIN 1,1] ("sans coefficient"), (6% Q6, 3% Q7)
- la [CLIN D₂,D₂] (coefficient correct pour le premier numérateur, incorrect pour le second) (6% Q6, 3% Q7). Cette dernière est une "vraie" [CLIN], dont les coefficients ne sont ni 1 ni 0.



Dans Q6, les 12 autres [CLIN] qui apparaissent sont tous différentes (1% chacune, pourcentage identique pour Q7).

XII.1.3. Somme des numérateurs sur produit des dénominateurs

[Som/Pro]

Ex (Gau/3/6B):

$$\frac{5}{3} + \frac{2}{8} = \frac{5+2}{8 \times 3} = \frac{7}{24}$$

Cette transformation (9% de Q6) peut être considérée comme une variante incorrecte de la procédure standard d'addition de deux fractions de dénominateurs différents.

XII.1.4. Produit sur Produit

[Pro/Pro]

Cette transformation serait conservante... si l'énoncé était un produit de fractions. Elle apparaît néanmoins dans 5% de Q6.

Certains élèves font preuve d'un comportement systématique qui ne laisse aucune place au doute pour identifier la transformation.

Ex (Barnet/7/ 6B)

$$\frac{5}{3} + \frac{2}{8} = \frac{10}{24} : 2 = \frac{5}{12}$$

Remarque: d'autres élèves aboutissent à un résultat identique après bien des détours:

Ex (Sorbon/14/ 6E)

$$\frac{3}{7} + \frac{3}{5} = \frac{15}{35} + \frac{21}{35} = \frac{3 \times 5}{7 \times 5} + \frac{3 \times 7}{7 \times 5} = \frac{9}{35}$$

XII.1.5. Produit en Croix

[Pro Croix]

Un certain nombre de sommes et de différences sont traitées comme les "produits en croix" qu'on observe dans les équations. Ceci est donc à rapprocher de la suppression des dénominateurs [Sup Dén], qui est un autre comportement typique des équations. Dans le cas des différences, on peut également le rapprocher de la transformation [Opp→Inv] (cf. XII.3.5).

Ex (TChar/6/6C)

$$\frac{5}{12} + \frac{4}{9} = \frac{45}{36}$$

La copie en question est particulièrement instructive en ce qu'une croix dessinée au crayon réunit les "extrêmes" et les "moyens", et qu'on retrouve cette croix à l'item suivant (7C).

Notons qu'il y a deux [Pro Croix] correspondant respectivement à:

$$\frac{N_1 D_2}{N_2 D_1}$$

(6% Q6, 3% de Q7) et à:

$$\frac{N_2 D_1}{N_1 D_2}$$

(1% Q6, 1% de Q7).

XII.1.6. Mise au Même Dénominateur suivie de Somme des numérateurs sur Somme des dénominateurs

[Mise DC] & [Som/Som]⁶

Ex (Gau/3/6A):

$$\frac{5}{2} + \frac{7}{3} = \frac{5 \times 3}{2 \times 3} + \frac{7 \times 2}{3 \times 2} = \frac{15}{6} + \frac{14}{6} = \frac{15+14}{6+6} = \frac{29}{12}$$

Il s'agit ici d'un enchaînement classique plutôt que d'une transformation. Du fait qu'il apparaisse plusieurs fois il nous a paru intéressant de le considérer comme un tout spécifique et non comme un enchaînement aléatoire de transformations répertoriées par ailleurs.

Cet enchaînement, plus rare que la transformation précédente (3% des classiques de Q6) consiste donc à mettre d'abord correctement les deux fractions au dénominateur commun avant d'appliquer la transformation [Som/Som].

⁶ Le métasymbole "&" marque la succession des transformations au sein de l'enchaînement.

XII.1.7. Oubli du premier terme

[Oubli T1]

Cette transformation pourrait être interprétée en termes de limitation de la mémoire de travail (Léonard & Sackur 1991) qui se traduirait par un oubli du premier terme dans un calcul. Cette transformation survient dans 3% des cas de Q6, et dans 1% de ceux de Q7.

$$\text{Ex (Beaulieu/4/6B)} \\ \left| \frac{5}{3} + \frac{2}{8} = \frac{30}{24} + \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \right.$$

Le même élève reprend cette erreur dans l'item suivant.

XII.1.8. Oubli du second terme

[Oubli T2]

Cette transformation, qui s'explique moins bien que la précédente, se traduit par un oubli du second terme dans un calcul. Cette transformation survient dans 2% des cas de Q6, et n'apparaît pas dans Q7.

$$\text{Ex (Château/27/6J):} \\ \left| \frac{13}{6} + \frac{13}{15} = \frac{195}{90} + \frac{78}{90} = \frac{195}{90} = \frac{39}{18} = \frac{13}{6} \right.$$

XII.1.9. Les Combinaisons Linéaires Correctes de Numérateurs, Incohérentes par rapport aux Dénominateurs.

[CLCN ID]

Il peut encore arriver (2% de Q6, 3% de Q7) que la combinaison linéaire des numérateurs soit "correcte"... mais ne corresponde pas aux dénominateur commun choisi.

$$\text{Ex (Lar/12/7D)} \\ \left| \frac{7}{9} - \frac{5}{12} = \frac{7 \times 12}{9 \times 4} - \frac{5 \times 9}{12 \times 3} = \frac{39}{36} = \frac{13}{12} \right.$$

Ici chaque numérateur est multiplié par le dénominateur de l'autre terme, ce qui serait parfaitement correct si le dénominateur commun était le produit des dénominateurs et non leur PPMC!

XII.1.10. Transformation de la somme en différence

[Som → Dif]

Une telle transformation semble parfaitement grotesque, et l'idée ne nous en était jamais venue avant de mener cette enquête, mais on en observe quand même 2% parmi les transformations classiques de Q6.

$$\text{Ex (TChar/22/6J)} \\ \left| \frac{16}{6} + \frac{13}{15} = \frac{65}{30} + \frac{26}{30} = \frac{39}{30} = \frac{13}{10} \right.$$

XII.1.11. Produit sur Somme

[Pro/Som]

$$\text{Ex (Gay/5/ 6B)} \\ \left| \frac{5}{3} + \frac{2}{8} = \frac{10}{11} \right.$$

Transformation rare (2% Q6, absente de Q7).

XII.1.12. Suppression des Dénominateurs

[Sup Dén]

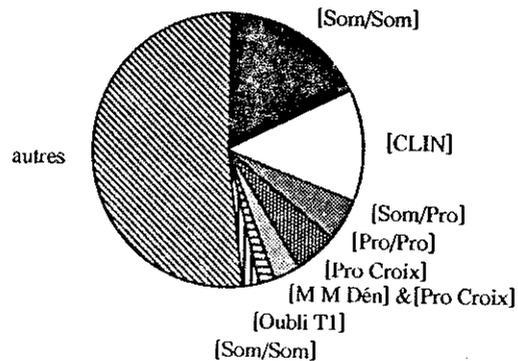
Les dénominateurs sont "simplifiés" ("supprimés"), éventuellement après mise au dénominateur commun, comme dans le cas d'une équation dont les membres sont des fractions. Cette transformation est (heureusement?) rare (1% Q6, 1% de Q7).

$$\text{Ex (6A):} \\ \left| \frac{5}{2} + \frac{7}{3} = \frac{5 \times 3}{2 \times 3} + \frac{7 \times 2}{3 \times 2} = \frac{15}{6} + \frac{14}{6} = 15 + 14 = 29 \right.$$

XII.1.13. Récapitulation:

Nous ne notons dans les récapitulations que les transformations formant plus de 1% des erreurs classiques.

18%:	[Som/Som]
13%:	[CLIN] au sens strict ⁷
5%:	[Som/Pro]
5%:	[Pro/Pro]
3%:	[Pro Croix]
2%:	[M M Dén] & [Som/Som]
2%:	[Oubli T1]



XII.2. Les enchaînements classiques de Q7.

$$\frac{N_1}{D_1} - \frac{N_2}{D_2}$$

⁷ [CLIN] dont les coefficients ne sont ni 0 ni 1.

XII.2.1. Erreurs de Signe

[Err Sign]

Les changements de signe ne sont pas des transformations à proprement parler mais, comme les erreurs de calcul, elles se superposent aux transformations (adéquates ou non). On ne trouve pas moins de 30 % d'erreurs classiques de Q7 comportant des incohérences au niveau du signe (oubli, distribution erronée sur les deux opérands d'une fraction, etc.)

Ex (Robert/29/7J)

$$\frac{14}{16} - \frac{15}{12} = \frac{42}{48} - \frac{60}{48} = \frac{-18}{48} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

XII.2.2. Différence des numérateurs sur différence des dénominateurs

[Dif/Dif]

Ex (TChar/21/7J)

$$\frac{14}{16} - \frac{15}{12} = \frac{2 \times 7}{2 \times 8} - \frac{3 \times 5}{3 \times 4} = \frac{7}{8} - \frac{5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Cette transformation est relativement répandue parmi les questions faisant intervenir une différence de deux fractions (10% de Q7). C'est l'équivalent de [Som/Som] dans Q6. Elle tend toutefois à être **beaucoup moins utilisée** (10 % au lieu de 36%).

On pourrait interpréter cette diminution d'emploi comme un indice en faveur de la loi didactique (?) bien connue qui veut que l'élève ait horreur du négatif (ou nul) (cf. "Avoidance and acknowledgement of negative numbers in the context of linear equations", Gallardo & Rojano 1990). En effet, pour chacun des items de la question Q7, au moins une des deux différences (différence des numérateurs, différence des dénominateurs)

donne un résultat négatif ou nul⁸. Ceci est à rapprocher du nombre important d'erreurs de signe (cf. supra) aboutissant à rendre positives des quantités désagréablement négatives.

XII.2.3. Transformation de la différence en somme

[Dif → Som]

8% des élèves (faisant une erreur classique) transforment les différences de Q7 en sommes, ce qui est encore une autre façon de rentrer dans le cadre rassurant des quantités positives.

XII.2.4. Transformation de la différence en produit

[Dif → Pro]

4% des élèves (faisant une erreur classique) transforment les différences de Q7 en produit.

$$\left| \begin{array}{l} \text{Ex (TChar/14/7F)} \\ \frac{7}{5} - \frac{10}{3} = \frac{70}{15} = \frac{35}{5} \end{array} \right.$$

La moitié de ces élèves (remords tardif?) font précéder ce produit du signe '-':

XII.2.5. Transformation de l'opposé en inverse

[Opp → Inv]

3% des élèves (faisant une erreur classique dans Q7) transforment une différence de deux termes en une somme du premier terme avec l'inverse du second, ce qui permet encore une fois de retourner aux nombres positifs. La transformation de l'opposé en inverse dépasse d'ailleurs largement le

cadre des fractions et est une erreur assez répandue (signalée dans Baruk 1973).

$$\left| \begin{array}{l} \text{Ex (Gay/7/7C)} \\ \frac{5}{3} - \frac{3}{4} = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = \frac{9}{3} = \frac{3}{1} = 3 \end{array} \right.$$

XII.2.6. Différence des numérateurs sur produit des dénominateurs

[Dif/Pro]

$$\left| \begin{array}{l} \text{Ex (TChar/12/7E)} \\ \frac{8}{7} - \frac{6}{9} = \frac{2}{7 \times 3^2} = \frac{2}{63} \end{array} \right.$$

Cette transformation, relativement peu fréquente (3% de Q7), est l'équivalent pour les différences de [Som/Pro].

XII.2.7. Différence des numérateurs sur somme des dénominateurs

[Dif/Som]

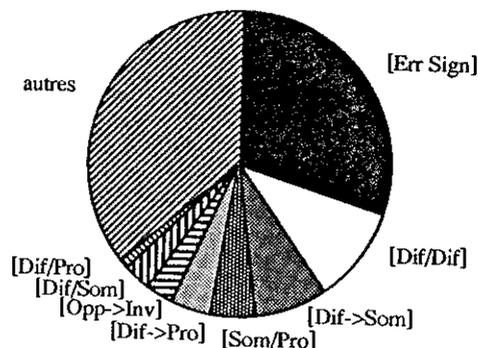
$$\left| \begin{array}{l} \text{Ex (Sellier/18/7J)} \\ \frac{14}{16} - \frac{15}{12} = -\frac{1}{28} \end{array} \right.$$

Cette transformation est peu fréquente (1% Q7). Il est à noter que nous n'avons pas relevé d'occurrence significative d'une transformation "symétrique" [Som/Dif]

XII.2.8. Récapitulation:

⁸ Ceci pourrait servir de base à une future expérimentation sur cette "loi", qui étudierait la corrélation entre l'usage de transformations (adéquates ou non) et le signe des quantités mises en jeu (avec variation systématique).

30%:	[Err Sign]
10%:	[Dif/Dif]
8%:	[Dif→Som]
5%:	[Som/Pro]
4%:	[Dif→Pro]
3%:	[Opp→Inv]
3%:	[Dif/Som]
1%:	[Dif/Pro]



XII.3. Les enchaînements classiques de Q8.

$$\boxed{E + \frac{N}{D}} \text{ ou } \boxed{\frac{N}{D} + E}$$

Les items de la question Q8 sont formés d'expressions de type II (un des opérandes est un Ent). Contrairement aux questions Q6 et Q7, nous observerons donc ici deux types d'enchaînements. Soit l'élève transforme l'entier E en fraction (c'est d'ailleurs le point de départ de l'enchaînement adéquat) soit il transforme directement l'énoncé tel quel, et c'est le cas le plus fréquent parmi les erreurs classiques.

XII.3.1. 1er cas: transformation de l'entier E en fraction

Cet enchaînement est à l'origine de 32% des erreurs classiques à la question Q8. Il y a quatre transformations possibles de l'entier E.

- $\boxed{[Mise\ DC]^9}$:

36% des transformations de l'entier E¹⁰ sont des mises au dénominateur commun (ce qui donne $\frac{ED}{D}$).

- $\boxed{[E/1]}$:

25% des transformations de l'entier E prennent pour dénominateur 1. Ces transformations sont conservantes.

- $\boxed{[E/E]}$:

21% des transformations de l'entier E prennent pour dénominateur E lui-même. Ces transformations ne sont évidemment pas conservantes¹¹:

Ex (suivi de [Som/Som]) (Ferry/5/8B)

$$\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{2} + \frac{3}{3} = \frac{4}{5}$$

- $\boxed{[E/D]}$:

18% des transformations de l'entier E prennent pour dénominateur D, celui de la fraction. Cela donne le même résultat qu'une [CLIN D2,1].

⁹ transformation qui, d'après la définition des étapes, ressortit à la 2ème étape. Les trois autres ressortissent à la première étape

¹⁰ il y a 28 erreurs classiques qui commencent par une transformation de l'entier E. Les pourcentages se rapportent à cette base, et n'ont donc de sens qu'à 4 points près au moins ($1/28 \approx 3,57\%$)

¹¹ sauf si E=1. Dans ce cas (2 réponses soit 7%) la transformation a été mise arbitrairement dans la catégorie précédente.

Après transformation de l'entier E en fraction, nous retrouvons les transformations usuelles de la question Q6. Statistiquement les trois enchaînements les plus fréquents sont:

- 1) pour environ 40%, un enchaînement bâti autour de la transformation [Som/Som]¹².
- 2) pour environ 30%, un enchaînement cohérent, c'est-à-dire adéquat relativement à l'énoncé modifié par une des transformations incorrectes à l'étape 1 ([E/E] ou [E/D]).
- 3) pour environ 10%, un enchaînement bâti autour d'une [CLIN].

Les quatre transformations de E ne se combinent pas en n'importe quelles proportions avec les trois enchaînements ci-dessus, nous les reprendrons dans le tableau récapitulatif. En outre, nous n'avons bien entendu pas codé comme erreur un enchaînement [E/1] suivi d'une transformation cohérente (puisque c'est adéquat). Par contre il est intéressant de noter que seul [E/D] est effectivement suivi d'une transformation cohérente, et non [E/E]:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Ex (Gay/21/8G)} \\ 3 + \frac{6}{8} = \frac{3}{8} + \frac{6}{8} = \frac{9}{8} \end{array} \right.$$

Inversement, avant [Som/Som] nous n'avons pas relevé de [E/D], seulement [E/E] ou [Mise DC] ou [E/1]:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Ex (TChardin/21/8J)} \\ 3 + \frac{1}{2} = \frac{3}{1} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3} \end{array} \right.$$

XII.3.2. 2ème cas: transformation directe de l'énoncé

Nous venons de voir le cas des élèves qui commencent par transformer le terme entier en une fraction pour pouvoir ensuite se ramener

¹² le plus souvent réduits à cette seule transformation.

à une procédure usuelle de somme de deux fractions. Nous allons étudier maintenant les élèves qui transforment directement la somme d'une fraction et d'un entier en fraction. C'est le cas le plus fréquent: 68% des erreurs classiques de la question Q8.

Sur 88 erreurs classiques, il y a 60 transformations directes de l'énoncé. Les pourcentages se rapportent donc à cette dernière base, et n'ont de sens qu'à 2 points près ($1/60 \approx 1,67\%$).

XII.3.2.A. Somme des numérateurs sur le dénominateur

[Som/Dén]

Une transformation incorrecte domine ici largement les autres (76% des transformations directes): la transformation de $E + \frac{N}{D}$ en fraction $\frac{E+N}{D}$.

$$\left| \begin{array}{l} \text{Ex (Vigna/2/8A):} \\ 5 + \frac{3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{array} \right.$$

Nous pouvons proposer une interprétation de cette transformation, qui part du fait qu'un certain nombre d'élèves¹³ appliquent [Som/Som] à la question Q6 et [Som/Dén] à la question Q8. Plusieurs élèves ont même le comportement systématique:

- Q6: [Som/Som]
- Q7: [Dif/Dif]
- Q8: [Som/Dén]
- Q9: [Dif/Dén]

Un tel comportement suggère une analogie profonde entre [Som/Som] et [Som/Dén] (idem avec les différences). On peut rendre compte de cette

¹³ 17 élèves font [Som/Dén] à Q8 et {[Som/Som] à Q6 ou (inclusif) [Dif/Dif] à Q7}, soit 28% des 60 transformations directes, soit encore environ 40% des 44 [Som/Dén].

analogie en postulant deux règles formelles¹⁴ (sur lesquelles nous reviendrons en conclusion) [R] et [R'], portant sur la suite vide "ϕ", telles que:

$$\begin{array}{|l} \text{[R]} \\ \text{[R']} \end{array} \quad \begin{array}{l} a = \frac{a}{\phi} \\ \phi + a = a \end{array}$$

Dans ce cas en effet, l'application successive de [R], de [Som/Som] et de [R'] aboutit au résultat de [Som/Dén]:

$$E + \frac{N}{D} \rightarrow \frac{E}{\phi} + \frac{N}{D} \rightarrow \frac{E+N}{\phi+D} \rightarrow \frac{E+N}{D}$$

Toutefois l'élève peut aboutir à ce résultat en ayant transformé l'entier E en fraction $\frac{E}{D}$ à la première étape et fait ensuite une somme cohérente. Nous avons donc deux interprétations concurrentes pour un même résultat. Comment coder?

- Si l'enchaînement [E/D] & [Cohérent] apparaît nettement sur la copie, il est codé comme tel.
- Si l'élève a fait [Som/Som] à la question Q6 et [Dif/Dif] à la question Q7, ce qui constitue des indices forts en faveur de [Som/Dén], ou s'il n'y a d'indices ni dans un sens ni dans l'autre, cela a été codé par défaut [Som/Dén].

L'interprétation des statistiques globales des réponses classiques devra donc être modulée. Sur l'ensemble des 88 réponses classiques, on relève en effet:

- 44 codes [Som/Dén], dont 17 correspondent à une [Som/Som] en Q6 ou une [Dif/Dif] en Q7.

¹⁴ nous entendons par là qu'elles portent sur la forme des expressions, et n'ont pas de signification sur le plan mathématique (celui des "dénotations").

- 5 codes [E/D]&[Cohérent].

On peut donc en déduire:

- que le nombre de réponses issues directement d'une transformation [Som/Dén] est compris entre 17 (19% des réponses classiques) et 44 (50%)
- que le nombre de réponses issues d'un enchaînement [E/D] & [Cohérent] est compris entre 5 (6%) et 27 (44-17) (31%).

XII.3.2.B. Cas particuliers

Les questions Q8 et Q9 présentent une caractéristique importante, à savoir le fait que le terme entier E, ou le numérateur N de la fraction, est égal à 1 dans certains items. Ce paramètre introduit deux transformations particulières.

XII.3.2.B.a. Oubli du terme entier quand il est le chiffre 1

[Oubli E=1]

Dans 3 items sur les 10 de la question Q8, le terme entier est le chiffre "1". 21 élèves ont donné une réponse inadéquate par transformation directe à ces items, et parmi eux 8 (soit environ 40%) par oubli du terme entier.

Ex (TChar/6/8C):

$$\frac{3}{7} + 1 = \frac{3}{7}$$

Cette transformation pouvait être codée de diverses manières ([Pro/Pro] par exemple) correspondant à autant d'interprétations sur son origine. Dans certains cas en effet, l'enchaînement est explicite, dans d'autres on dispose d'indices du type $\frac{1 \times N}{1 \times D}$ pour penser qu'il s'agit d'un produit. Toutefois, en l'absence de tout indice, comme cette transformation n'apparaît que quand E est le chiffre 1, nous avons préféré lui affecter un code spécifique.

Le paramètre "E est le chiffre 1" modifie évidemment les pourcentages d'occurrence des différentes transformations. Dans ce cas [Som/Dén] passe de 76% à 60%.

XII.3.2.B.b. Oubli du Numérateur quand il est le chiffre 1

[Ent/Dén]

Dans 3 items sur les 10 de la question Q8, le numérateur de la fraction est le chiffre "1". 16 élèves ont donné une réponse inadéquate par transformation directe à ces items, et parmi eux 5 (soit environ 30%) par oubli du numérateur, c'est-à-dire en passant de:

$$E + \frac{1}{D}$$

à:

$$\frac{E}{D}$$

Ex (TChar/11/8E):

$$\frac{1}{3} + 5 = \frac{5}{3}$$

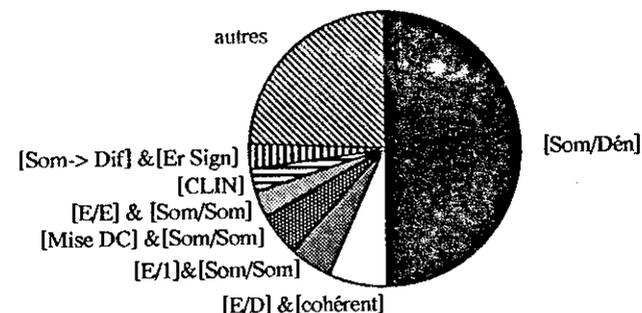
Cette transformation pouvait être codée de diverses manières ([Pro/Dén] par exemple), mais ces codes apparaissent très peu en dehors des cas où le numérateur est "1" ([Pro/Dén] n'apparaît qu'une fois par exemple). Nous avons donc préféré affecter un code spécifique à cette transformation.

Le paramètre "N est le chiffre 1" modifie également les pourcentages d'occurrence des différentes transformations. Dans ce cas [Som/Dén] passe de 76% à 70%.

XII.3.3. Récapitulation

Les résultats qui suivent sont ceux des transformations qui ne sont pas spécifiques des cas N=1 ou E=1. Ils sont rapportés à l'ensemble des 88 réponses classiques. Ne sont indiquées que les transformations qui apparaissent plus d'une fois.

50%:	[Som/Dén]
7%:	[E/D] & [Cohérent]
5%:	[E/1] & [Som/Som]
5%:	[Mise DC] & [Som/Som]
3%:	[E/E] & [Som/Som]
3%:	[CLIN]
3%:	[Som → Dif] & [Er Sign]



XII.4. Les enchaînements classiques de Q9.

$$\boxed{E - \frac{N}{D}} \text{ ou } \boxed{\frac{N}{D} - E}$$

La question Q9 se rapproche de la précédente (en ce qu'elle est de type II) et de la question Q7 (en tant qu'elle est une différence). Nous retrouvons donc la classification de la question Q8: soit l'élève transforme l'entier E en fraction, soit il transforme directement l'énoncé.

Dans le premier cas, on retrouve les enchaînements classiques d'une différence de deux fractions (cf. Q7), et dans le second soit l'équivalent de [Som/Dén], à savoir [Dif/Dén], soit les mêmes cas particuliers si E=1 ou si N=1.

Nous ne détaillerons donc pas les transformations classiques de Q9, à l'exception de la plus importante ([Dif/Dén]) et d'une autre ([Dif → -Pro]), transformation spécifique à cette question

XII.4.1. Différence sur Dénominateur

[Dif/Dén]

C'est l'équivalent de la transformation [Som/Dén], elle représente 38% des erreurs classiques de Q9.

$$\text{Ex (TChar/12/9E)} \\ 7 - \frac{4}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{2 \times 3}$$

Dans cet exemple nous avons en outre une erreur de simplification à la troisième étape.

XII.4.2. Différence → Opposé du Produit

[Dif → -Pro]

$$\text{Ex (TChar/11/9E):} \\ 7 - \frac{4}{9} = -\frac{28}{9}$$

Tout se passe comme si l'élève avait remplacé la différence par un produit, et "conservé" le signe moins (4% de Q9). Cette transformation est à rapprocher de celle qui remplace l'opposé par l'inverse

Remarquons enfin que nous n'avons relevé ni [CLIN] ni [Ent/Dén] dans Q9.

XII.4.3. Simplification en Croix

[Sim Croix]

De telles simplifications sont parfaitement conservantes au sein de produits... mais pas de somme ou de différences, comme dans 3% de Q6, ou 2% de Q7. Il y a par définition deux Simplification en Croix possibles, suivant la "diagonale" où se trouvent les opérandes simplifiables.

$$\text{Ex (Château/24/9I):} \\ 3 - \frac{6}{8} = \frac{3}{3} - \frac{6}{8} = \frac{3}{1} - \frac{2}{8} = \frac{24}{8} - \frac{2}{8} = \frac{22}{8}$$

Noter ici la première étape $3 \rightarrow \frac{3}{3}$ qui apparaît fréquemment dans les énoncés de type II.

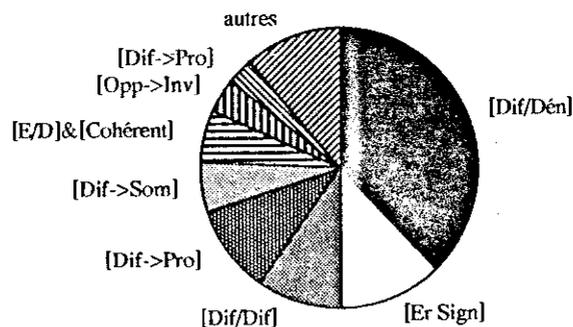
Curieusement ces simplifications en croix n'apparaissent ici qu'aux questions Q8 et Q9, c'est-à-dire associées aux énoncés de type II.

XII.4.4. Récapitulation

Ne sont indiquées que les transformations qui apparaissent plus d'une fois¹⁵.

38%:	[Dif/Dén]
12%:	[Er Sign]
10%:	[Dif/Dif]
10%:	[Dif → Pro]
6%:	[Dif → Som]
6%:	[E/D] & [Cohérent]
4%:	[Opp → Inv]
3%:	[Dif → -Pro]

¹⁵ les transformations indiquées ci-dessous ne forment pas une partition: les erreurs de signe peuvent se combiner avec les [Dif → Som], ce qui est une façon de coder que les différences deviennent des opposés de sommes.



XII.5. Les enchaînements classiques de Q10

$$\boxed{E \times \frac{1}{D}} \text{ ou } \boxed{\frac{1}{D} \times E}$$

XII.5.1. Comportement additif

[Mise DC] & [Pro/DC]

Ce comportement "additif" consiste à mettre les deux fractions au dénominateur commun, puis à faire le produit des numérateurs en conservant le dénominateur commun.

$$\text{Ex (TChar/8/10E)} \\ 5 \times \frac{1}{8} = \frac{40}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{40}{8} = \frac{5}{1}$$

C'est la transformation la plus fréquente (47% des erreurs classiques de Q10).

On dispose parfois seulement d'un indice pour identifier cette transformation, la présence du "1" comme facteur du numérateur comme dans l'exemple ci-dessous:

$$\text{Ex (TChar/1/9A)} \\ \frac{1}{6} \times 8 = \frac{48 \times 1}{6} = \frac{48}{6} = \frac{24}{3} = \frac{8}{1}$$

Dans un certain nombre de cas (6%) on ne dispose toutefois d'aucun indice, et on aboutit au même résultat que ci-dessus sans que le calcul soit explicité. Il nous paraît raisonnable d'amalgamer ces cas aux cas précédents, ce qui donne un taux total de 49%.

XII.5.2. Distribution formelle de l'entier sur la fraction

$$\text{Ex (TChar/12/9E)} \\ 5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

C'est la deuxième transformation la plus fréquente (20% de Q10). Elle est plus répandue chez les élèves de 4ème (24%) que chez ceux de 3ème (6%). Cela fait un cas supplémentaire de distributivité généralisée, à ajouter à ceux des deux enquêtes exposées au chap. IX.

XII.5.3. Autres enchaînements:

Nous donnons maintenant par ordre d'importance les autres enchaînements.

- 8% des élèves transforment le produit en somme, et la moitié de ceux-ci utilisent ensuite la transformation [Som/Dén].

- **[1/ED]:**

6% des élèves aboutissent, par des voies souvent non explicitées, à un résultat qui est l'inverse du produit du terme entier par le dénominateur de la fraction. Ceci peut résulter du fait de remplacer d'abord le facteur entier par son inverse:

$$\text{Ex (Goscy/23/10J)} \\ \frac{1}{6} \times 9 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{54}$$

Ce résultat peut aussi provenir d'un [Pro Croix]:

$$\text{Ex (Barja/1/10A)} \\ \left| \frac{1}{6} \times 8 = \frac{1}{6} \times \frac{8}{1} = \frac{8}{6} \right.$$

• [ED]:

4% des élèves aboutissent, par des voies souvent aussi obscures, à un résultat qui est le produit du terme entier par le dénominateur de la fraction. Ce résultat peut provenir du fait de remplacer d'abord le facteur fractionnaire $\frac{1}{D}$ par son inverse $\frac{D}{1}$:

$$\text{Ex (Barja/10/10E)} \\ \left| 8 \times \frac{1}{6} = \frac{8}{1} \times \frac{6}{1} = \frac{48}{1} \right.$$

Ceci peut également résulter d'un autre [Pro croix] (nous n'en avons pas d'exemple explicite).

• [Mise DC] & [Cohérent]:

Enfin, 2% des réponses témoignent d'un comportement "additif" consiste à mettre les deux fractions au dénominateur commun, suivi d'un produit (cohérent) des deux fractions. Cet enchaînement tiré par les cheveux est néanmoins conservant.

Exemple d'un enchaînement [Mise DC] & [Cohérent] suivi d'une erreur de calcul dans la simplification:

$$\text{Ex (Natio/4/10C)} \\ \left| 5 \times \frac{1}{8} = \frac{40}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{40}{64} = \frac{20}{32} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \right.$$

Il est à remarquer que, vu nos règles de codage, nous n'avons aucun moyen direct de savoir combien de réponses correctes ont été obtenues par cet enchaînement...

Nous ne donnerons pas de tableau récapitulatif, les transformations ayant été traitées dans l'ordre de leur fréquence.

XII.6. Comportements réguliers

Lorsqu'on cherche à coder une réponse pour laquelle l'élève n'a donné aucun détail, on regarde les réponses aux autres questions, à la recherche de régularités susceptibles de fournir un indice. Au fur et à mesure des opérations de codage on en vient à observer un grand nombre de ces régularités. Toutefois ces dernières sont plus difficiles à identifier que les transformations ou les enchaînements, car on n'a pas souvent la chance d'observer ce qu'on pourrait appeler un comportement absolument systématique, dans lequel l'élève utiliserait la même transformation (ou des transformations de même type telles que [Som/Som] et [Dif/Dif]) tout au long des cinq questions Q5 à Q9. Un des rares exemples est la copie Desrousseaux/2 où l'on observe le comportement systématique suivant:

Q5: [Som/Som]
 Q6: [Som/Som]
 Q7: [Dif/Dif]
 Q8: [Som/Dén]
 Q9: [Dif/Dén]

La plupart des copies présentent en fait un comportement qu'on pourrait qualifier de partiellement systématique: sur les cinq questions, deux, trois ou quatre seulement ont des réponses de même type. A moins de faire une analyse statistique extrêmement fine des corrélations entre les réponses, il est assez difficile de rendre compte précisément de ces systématismes partiels. Nous allons toutefois tenter de le faire, en prenant deux approches complémentaires du phénomène: une approche qualitative qui donnera les types idéaux de régularités, et une approche plus quantitative qui montrera les modifications que la prise en compte d'une réponse à une question apportent à la répartition des fréquences à une autre question.

XII.6.1. Systématique et transformations variables

Une des façons systématiques d'opérer consiste à modifier l'énoncé pour le rendre formellement compatible avec la ou les transformations qu'on désire lui appliquer.

Ex. (Gay/7/C):

$$5C: \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{7}{9}$$

$$6C: \frac{5}{12} + \frac{4}{9} = \frac{9:3}{21:3} = \frac{3}{7}$$

$$7C: \frac{5}{3} - \frac{3}{4} = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = \frac{9}{3} = \frac{3}{1} = 3$$

$$8C: \frac{3}{7} + 1 = \frac{3}{7} + \frac{7}{7} = \frac{10}{7}$$

$$9C: 3 - \frac{1}{2} = \frac{6}{2} - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$10C: 5 \times \frac{1}{8} = 5 \times \frac{1}{8} = \frac{5:1}{8:2} = \frac{5}{4}$$

A une exception près en effet (l'item 8C), l'élève ramène toutes les opérations à des additions.

En soi, un tel comportement, consistant à modifier l'énoncé pour pouvoir lui appliquer les transformations connues, est parfaitement légitime... quand les transformations utilisées pour mettre sous forme adéquate l'énoncé sont conservantes! Sinon, l'usage de transformations incorrectes pour arriver à la forme souhaitée peut être qualifiées d'"erreur-relais" (Paquelier 1987), dans une perspective du type "la fin justifie les moyens".

Inversement, on peut penser que l'élève préfère ajuster les paramètres des transformations afin qu'elles s'appliquent aux énoncés. Il suffit en effet de considérer qu'au lieu de transformer toutes les expressions en sommes, l'élève dispose d'une transformation "à géométrie variable" qui, pour additionner $\frac{a}{b}$ à un second terme, donne respectivement:

$$\frac{a+c}{b+d}$$

lorsque ce second terme est une fraction $\frac{c}{d}$, et

$$\frac{a+c}{b}$$

lorsque ce terme est un entier c.

XII.6.2. Approche qualitative des comportements systématiques.

Nous allons indiquer ici les neuf principaux types de comportements systématiques relevés.

XII.6.2.A. Premier type:

Il s'agit du type que nous avons évoqué plus haut;

Q6: [Som/Som]

Q7: [Dif/Dif]

Q8: [Som/Dén]

Q9: [Dif/Dén]

2 copies présentent la série complète, 4 copies une série incomplète de 3. Nous ne faisons pas figurer la question 5 dans cette typologie, étant donné que les différents items de cette question ressortissent à plusieurs catégories.

XII.6.2.B. Second type:

Ce comportement consiste à tout ramener aux seules deux transformations [Som/Som] et [Dif/Dif], notamment en transformant les expressions du type II en expressions du type I.

Q6: [Som/Som]

Q7: [Dif/Dif]

Q8: [Som/Som]

Q9: [Dif/Dif]

1 copie présente la série complète, 3 copies une série incomplète de 3.

XII.6.2.C. Troisième type:

Ce comportement consiste à tout ramener aux seules deux transformations [Som/Som] et [Som/Dén], notamment en transformant toutes les différences en sommes.

Q6: [Som/Som]

Q7: [Som/Som]

Q8: [Som/Dén]

Q9: [Som/Dén]

1 copie présente la série complète, 1 copie une série incomplète de 3.

XII.6.2.D. Quatrième type:

Ce comportement consiste à tout ramener à la seule transformation [Som/Som].

Q6: [Som/Som]

Q7: [Som/Som]

Q9: [Som/Som]

1 copie présente la série de 3.

XII.6.2.E. Cinquième type:

Ce comportement consiste à tout ramener à la seule transformation [Som/Som] par une mise au dénominateur commun.

Q6: [Mise DC] & [Som/Som]

Q7: [Mise DC] & [Som/Som]

Q8: [Mise DC] & [Som/Som]

1 copie présente la série de 3.

XII.6.2.F. Sixième type:

Ce comportement consiste à tout ramener aux transformations respectives [Som/Pro] et [Dif/Pro].

Q6: [Som/Pro]

Q7: [Dif/Pro]

Q8: [Som/Pro]

Q9: [Dif/Pro]

2 copies présentent la série de 4.

XII.6.2.G. Septième type:

Ce comportement ramène tout à [Som/Pro].

Q6: [Som/Pro]

Q7: [Som/Pro]

2 copies présentent la série de 2.

XII.6.2.H. Huitième type:

Ce comportement ramène tout à [Pro Croix].

Q6: [Pro Croix]

Q7: [Pro Croix]

Q8: [Pro Croix]

2 copies présentent la série de 3, deux autres une série de 2.

XII.6.2.I. Neuvième type:

Ce comportement ramène tout à une [CLIN].

Q6: [CLIN]

Q7: [CLIN]

Q8: [CLIN]

3 copies présentent une série de 2. Il est à remarquer que d'une question à l'autre, l'élève reste "fidèle" au même type de [CLIN] ([CLIN N1,N2] etc.).

Notons enfin que nous n'avons pas de copie qui serait totalement non-systématique, qui ferait par exemple un [Som/Som] puis une [CLIN] puis une [Som→Dif] et enfin une [Mise DC]&[Dif/Pro].

XII.6.3. Approche quantitative

Dans l'étude des transformations question par question nous avons pu ranger dans un tableau récapitulatif les transformations par fréquence d'occurrence. Or nous pouvons établir de nouveaux tableaux, si nous considérons les fréquences d'occurrence des transformations à une question donnée, sachant que l'élève a donné une certaine réponse à une autre question. Par exemple, nous pouvons établir le tableau des fréquences d'occurrence des transformations à la question Q6 sachant que l'élève a fait une [CLIN] à la question Q8.

Traduit en termes de probabilités (ce qui était notre perspective, pour établir une base de règles pondérées) cela revient à établir une probabilité conditionnelle d'occurrence d'une transformation à une question, sachant qu'une transformation donnée est apparue à une autre question. Cela a des conséquences bien pratiques pour le choix des règles à tester par le système expert: si l'élève a déjà fait une [CLIN]¹⁶ auparavant à une question de type Q8, et si la question courante est de type Q6, le système a intérêt à essayer d'abord l'hypothèse que l'élève a refait une [CLIN], au lieu de l'essayer en 2ème choix (après [Som/Som]) comme lorsqu'on ne sait rien.

Nous n'avons pas voulu donner l'ensemble des tableaux donnant les fréquences d'occurrences conditionnées, car la lecture en serait fastidieuse.

Nous allons montrer seulement, dans le tableau ci-dessous, comment il faut reconsidérer l'ordre des transformations classiques de Q6, en fonction de quelques réponses données à Q8: [Som/Som], [Som/Dén], [Som/Pro], [Misc DC]&[Som/Som] et [CLIN]:

Si la réponse à Q8 met en oeuvre l'enchaînement:						
	[Som/Som]	[CLIN]	[Som/Pro]	[Misc DC]&[Som/Som]	[Som/Dén]	
Alors l'ordre des enchaînements dans Q6 devient:						
[Som/Som]	1	1	1	2	1	1
[CLIN]	2	2	1	2	3	2
[Som/Pro]	3	2	3	1	3	3
[Pro Croix]	4	2	3	2	3	9
[Som → Pro]	4	2	3	2	1	4
[Misc DC]& [Som/Som]	6	2	3	2	3	9
[Oubli T1]	6	2	3	2	3	9
[Pro/Pro]	8	2	3	2	3	4
[Pro/Som]	8	2	3	2	3	4
[Som → Dif]	8	2	3	2	3	4
[Dif/Dif]	8	2	3	2	3	4

La seconde colonne (en gras) donne l'ordre usuel d'apparition des transformations de Q6, indépendamment des réponses à Q8. Le même nombre est répété lorsque les fréquences sont égales. Nous voyons bien que, d'une colonne à l'autre, l'ordre des occurrences diffère (parfois notablement), autrement dit que les fréquences d'apparition sont bien conditionnées par la réponse à Q8. Nous voyons également que lorsque l'élève a choisi [som/som], [CLIN] ou [som/pro] en Q6, cette transformation arrive en première occurrence en Q8.

Au-delà de ces résultats quantitatifs, le dernier chapitre exposera les conclusions globales qu'on peut tirer quant au rapport qu'entretiennent les élèves de cet enquête avec le sens et la désignation des fractions numériques.

¹⁶ ou plus exactement si le système a déjà diagnostiqué une [CLIN] à une question précédente

XIII. CONCLUSION

80. A la *vérité* de mes énoncés on vérifie la *compréhension* que j'ai de ces énoncés.

81. C'est-à-dire: il y a des énoncés tels que, si je les fais faux, on en vient à se demander si je les comprend.

Ludwig Wittgenstein, *De la certitude*.

XIII.1. Des fractions qui ne désignent rien

Revenons aux "règles" [R] et [R'] vues au chapitre précédent, qui permettent de passer de la transformation [Som/Som] à [Som/Dén]. Quelle est la différence entre [R] et [R'] d'une part:

$$[R] \quad a \leftrightarrow \frac{a}{\phi}$$

$$[R'] \quad \phi \& a \leftrightarrow a$$

et les égalités mathématiques suivantes d'autre part?

$$[E] \quad a = \frac{a}{1}$$

$$[E'] \quad a + 0 = a$$

On pourrait analyser cette différence comme une confusion entre les nombres 0 et 1. Nous pensons à la suite de Baruk (1985), Lacombe (1988) et Léonard & Sackur (1991) que le problème n'est pas là. Les élèves ne confondent pas, dans le cas général, ces deux **nombres**. En particulier, la réponse "7" à la question

$$\langle\langle 7 + 1 = ? \rangle\rangle$$

paraît hautement improbable à ce niveau. C'est que le problème n'est pas d'ordre mathématique (les élèves ne croient pas que $0=1$), mais il se situe bien plutôt au niveau des désignations que les élèves attribuent aux écritures qu'ils manipulent, et en particulier à la suite vide " ϕ ".

Nous pensons qu'un certain nombre de comportements d'élèves, en particulier le non-respect des égalités des valeurs numériques des fractions, peuvent être interprétés par l'hypothèse générale suivante:

Pour ces élèves, une écriture fractionnaire numérique ne désigne pas un nombre; c'est juste un couple d'écritures (qui, elles, désignent bien des nombres)¹.

Tant qu'on suppose qu'une fraction désigne, pour l'élève, un nombre rationnel, les règles [R] et [R'] ne peuvent s'interpréter qu'en termes de "confusion": la suite vide " ϕ " désignerait, selon le cas, le nombre 0 ou le nombre 1, et les élèves glisseraient de l'un à l'autre. Mais c'est encore aller chercher trop loin. En fait, " ϕ " ne désigne rien, tout simplement; ni 0, ni 1, ni quelque nombre que ce soit!

Ce qui précède ne saurait constituer à lui seul un argument irréfragable en faveur de l'hypothèse selon laquelle, pour certains élèves, les fractions ne désignent pas des nombres. Mais il y a un indice extrêmement fort en faveur de cette interprétation dans le phénomène, amplement observé dans cette enquête et ailleurs, de l'indifférence étonnante manifestée par ces élèves pour le non-respect de l'égalité au cours des transformations. Ceci a été particulièrement mis en évidence par Stella Baruk (1985 p. 17) qui interroge un élève sur la production:

$$2 = \frac{10}{5} = \frac{4+6}{4+1} = \frac{6}{1} = 6$$

Comme elle lui faisait remarquer que la suite d'égalités revient à $2 = 6$, l'élève lui répond "*Et alors?*".

¹ c'est ce que B. Dumont appelle "erreur de profondeur infinie".

Pourtant, cet élève sait bien (on le voit dans la suite de l'entretien) que le nombre 2 n'est pas égal au nombre 6. La résolution de cette contradiction réside selon nous dans le fait que pour lui, l'ESA $\frac{10}{5}$ ne désigne pas le nombre 2, ni l'ESA $\frac{6}{1}$ le nombre 6. En effet, si les écritures sont privées de désignation, on ne peut exiger de l'égalité qu'elle respecte cette désignation absente. En conséquence, l'égalité joue vis-à-vis des transformations un rôle identique à celui qui est bien connu en arithmétique, à savoir le signe du résultat d'une opération. Cet usage du signe "égal" n'est ni symétrique ni transitif (Gautier 1984). Ici, le signe "égal" marque le "résultat" de la transformation. Si on appliquait une transformation différente, on obtiendrait un autre résultat. De toutes façons, la question de la désignation n'est pas pertinente pour l'élève (d'où le "Et alors?").

L'absence de désignation des fractions entraîne à terme celle des relations, et en particulier de l'égalité. L'exemple ci-dessus en est une excellente illustration. Pour qu'une égalité désigne une valeur de vérité, encore faut-il que ses membres désignent des nombres. Si ni $\frac{10}{5}$ ni $\frac{6}{1}$ ne désignent des nombres, l'égalité:

$$\frac{10}{5} = \frac{6}{1}$$

a peu de chances de désigner une valeur de vérité (en l'occurrence, "Faux").

Si on tente de faire sauvegarder à l'élève les contraintes formelles portant sur l'égalité (telles que la réflexivité, la symétrie ou la transitivité), c'est la désignation des écritures décimales des nombres mêmes qui risque de devenir à son tour problématique. Dans

« $6=10$ », et alors?»,

ou bien l'égalité ne veut plus rien dire, ou bien ce sont les Cst " 6 " et " 10 " elles-mêmes qui ne désignent plus rien. Nous avons vu au chapitre IX (Enquête sur les écritures algébriques) comment les élèves en viennent à manipuler les écritures de nombres comme si c'était des lettres.

XIII.2. Des ESA qui ne dénotent rien

La perte de désignation dépasse largement le cadre des fractions. Dans un domaine proche, Léonard & Sackur (1981, 1983) ont mis en évidence le fait que les élèves perçoivent les Cst à virgule comme couples d'écritures d'entiers, et les règles fausses employées pour les comparer. Là encore, c'est le fait qu'une Cst à virgule désigne un nombre (décimal) qui est absent.

A la suite des enquêtes du chap. IX, et notamment du comportement consistant à traiter les Cst comme des Var et à développer les expressions avant de les effectuer, je propose d'élargir cette hypothèse. Le déficit de désignation des ESA numériques n'est alors qu'un cas particulier d'un déficit de dénotation des ESA en général de la part d'un certain nombre d'élèves, qualifiés d'"automathes formels".

XIII.2.1. L'"automathe formel"

XIII.2.1.A. Dénotation

L'"automathe formel"² est un élève ne tient pas compte, lorsqu'il manipule des ESA, de leur dénotation.

Pour lui, la question de la validation du résultat ne se pose pas en termes de valeur de vérité de l'écriture obtenue, mais d'abord et avant tout en termes de conformité à des règles et à des procédures. La question de la vérité des identités qui expriment ces règles n'est d'ailleurs pas posée. «Mon résultat est valide, parce que j'ai suivi la procédure correcte». Cela se manifeste par des questions du type: «Est-ce que j'ai "Bon"?».

Précisons, pour éviter les contresens, le rôle que nous assignons à la dénotation lors du calcul. L'élève n'est pas censé passer son temps à calculer la dénotation des écritures qu'il produit. Au contraire,

² le néologisme "automathe" est emprunté à Stella Baruk (1985)

« il faut (...) éviter de se préoccuper du sens³ des grandeurs exprimées à tel ou tel moment de la résolution algébrique » (Vergnaud, Cortes & Favre-Artigue 1987).

Que voulons-nous dire par "ne pas tenir compte de la dénotation"? Il est indispensable de distinguer ici divers niveaux (méta) de connaissances concernant la dénotation:

- savoir que toute ESA a une dénotation
- savoir exprimer que toute ESA a une dénotation
- savoir calculer la dénotation d'une ESA
- et savoir quand il est intéressant de calculer la dénotation d'une ESA.

Le problème de l'automathe formel n'est pas tant de ne pas savoir calculer les dénnotations, que de ne pas savoir qu'il peut le faire à tout moment, et encore plus d'ignorer quand il a intérêt à le faire.

Cela se traduit au niveau de la vérification: l'automathe ignore qu'il vaut mieux commencer vérifier la dénotation du résultat avant de vérifier la conformité du choix des règles par rapport à la procédure. En d'autres termes, il ignore que pour vérifier, la dénotation est prioritaire sur le sens .

La distinction qui précède repose fondamentalement sur l'opposition entre connaissances et métaconnaissances. Ce qui caractérise l'automathe n'est pas une lacune de connaissances, ou des connaissances erronées sur la dénotation, qui se traduiraient par une incapacité par exemple à calculer ce que désigne une ESA numérique: on a vu qu'il en était capable quand l'ESA est bien parenthésée⁴. C'est plutôt une métaconnaissance lacunaire ou

³ je suppose que le mot est employé ici dans l'acception non spécialisée que je donne à "signification".

⁴ la difficulté à évaluer la désignation lorsqu'il faut tenir compte des règles de priorité est un problème didactique, mais il ne concerne pas spécifiquement l'élève qui se comporte comme un "automathe formel": un automate peut parfaitement connaître les règles de priorité et ignorer la désignation. Inversement, de nombreux élèves de notre enquête

erronée (ne pas savoir que les ESA dénotent, ou quand il faut calculer cette dénotation).

L'automathe formel peut ignorer tout à fait que les ESA ont une dénotation. Il peut aussi le savoir hors contexte, mais être incapable de rendre une telle connaissance opérationnelle. Cette coupure entre la connaissance de la dénotation et son usage apparaît nettement dans l'exemple suivant (Krygowska 1987):

« (...) Ce qui a été pour moi frappant, c'est la "transformation" de l'activité réellement exécutée, au cours de l'entretien (les substitutions numériques, les calculs numérique) en citation d'une formule verbale magique, p. ex.:

$$\sqrt{4a^2 - 9b^2} = 2a - 3b,$$

si nous choisissons a et b quelconques, nous obtiendrons l'égalité entre les côtés gauche et droit de cette équation, car ils sont égaux ».

Mais la proposition:

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}) \sqrt{b^2 - 3a^2} = b - 3a,$$

est, selon la même élève, fautive, car malgré le fait que $\sqrt{b^2} = b$,

« ce n'est pas vrai qu'a lieu l'égalité entre le côté gauche et le côté droit de l'équation, car $\sqrt{3a^2}$ n'est pas égal à $3a$, et si nous choisissons deux nombres quelconques et les substituons dans la formule, nous n'obtiendrons pas l'égalité des côtés gauche et droit ». »

XIII.2.1.B. Sens

En général, l'automathe formel n'est pas incohérent: il est cohérent⁵, en ce sens qu'il ignore que ses écritures ont à être cohérentes au niveau de la dénotation. Cela ne l'empêche pas d'argumenter le choix des transformations effectuées. Toutefois la validité de sa réponse passe pour lui par le respect d'une certaine procédure, c'est-à-dire de méta-règles de

ce qui est spécifique du comportement "automatique". Les deux difficultés sont donc disjointes.

⁵ l'expression est de Y. Paquelier

choix. C'est le cas par exemple de cet élève de 6ème (en cours particulier) dont le cas m'a été rapporté, qui a produit le calcul suivant:

$$\begin{aligned} \text{Résoudre } 3 + x + 7 &= 20 \\ x + 3 + 7 &= 10 \\ \text{donc} \\ x + 10 + 20 &= 30 \\ \text{donc } x &= 30 \end{aligned}$$

et a justifié ainsi sa production:

« x ne peut pas être mélangé avec des chiffres, (il) faut trouver x d'abord, c'est le prof qui l'a dit comme ça!! »

De même, l'élève qui accepte:

$$\sqrt{4a^2 - 9b^2} = 2a - 3b,$$

et refuse:

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}) \sqrt{b^2 - 3a^2} = b - 3a,$$

en vertu du fait que $\sqrt{3a^2}$ n'est pas égal à $3a$, montre qu'il ne transforme pas indifféremment n'importe quoi en n'importe quoi. Au minimum, il sait distinguer des transformations acceptables (à ses yeux) de celles qu'il n'accepte pas. Comme le note G. Vergaud (1991):

« L'automatisation n'empêche pas que le sujet conserve le contrôle des conditions sous lesquelles telle opération est appropriée ou non »

Autrement dit, si on associe le choix parmi les transformations syntaxiques au "sens" (Sinn) de ces écritures (qui est alors au niveau des métarègles), alors on peut dire que l'automathe formel "donne un sens" à ce qu'il fait, un "sens" mais pas une dénotation.

L'automathe ne fait pas n'importe quoi; il a une certaine rationalité dans ses choix⁶. Malheureusement, ces décisions sont viciées à la base, car

⁶ Ce n'est pas le cas de tous les élèves. Certains, que nous évoquerons plus bas, n'ont pas cette rationalité minimale.

c'est la conservation de la dénotation qui est le critère ultime du choix des transformations, autrement dit du sens. Sans la dénotation, le sens se réduit à une syntaxe à l'aveuglette.

XIII.2.1.C. Juridisme

Cette attention portée au sens (Sinn) des expressions (au choix des transformations) se manifeste d'ailleurs par l'emploi d'un discours qualifié de "juridique" par D. Lacombe (1988): « il faut trouver x d'abord », « on a le droit de développer... », « on doit appliquer la règle ... » etc. Z. Krygowska (1987) note d'ailleurs que les professeurs ont leur part de responsabilité dans ce discours juridique:

« On cherche à éliminer ces difficultés par un langage plus "opérationnel" où certaines expressions, comme "on peut", "il faut", et même "il est défendu" etc. forment un langage de permissions, d'ordres, d'interdictions qui diminue le nombre des fautes les plus primitives, mais qui souvent approfondit le formalisme dévié, car il fortifie la domination des procédures au dépens de la conscience des faits. »

XIII.2.2. Symptomatologie

On ne peut difficilement demander à un élève, de but en blanc, s'il sait que les écritures ont une dénotation, qu'il peut la calculer à tout moment, et à quel moment il a intérêt à le faire (même en expliquant ce qu'on entend par dénotation)... On ne peut détecter l'automathisme que de façon indirecte, à certains symptômes. Z. Krygowska (ibidem) en dresse une liste:

« Certaines erreurs liées au langage de l'algèbre scolaire extériorisent une déviation négative du processus de l'apprentissage de la mathématique. J'appelle cette déviation "formalisme dévié". Elle peut être caractérisée par les phénomènes observables suivants:

A. la rupture du symbole et de son sens sémantique⁷; entre autres, une telle rupture concerne le symbole d'égalité⁸;

⁷ je parlerais de dénotation

⁸ la question de l'égalité est effectivement liée fondamentalement à la dénotation comme on l'a vu avec les fractions, mais c'est en général un point assez délicat que nous n'aborderons pas ici.

B. les transformations des expressions algébriques faites selon certaines formules fausses, inventées par l'élève parfois ad hoc, mais souvent appliquées consciemment et justifiées par des règles générales, fausses elles aussi;

C. des automatismes faux particulièrement forts, provoqués par les stimulants visuels de l'écriture symbolique et par les stimulants verbaux du langage scolaire, "autour des formules";

D. le (laxisme) concernant les conventions syntaxiques dans l'écriture, dans la lecture et dans l'interprétation du texte symbolique. »

Ceci dit, il n'y a pas de test crucial qui déterminerait sans l'ombre d'un doute qui se comporte en automate formel et qui ne le fait pas: il y a au mieux des faisceaux d'indices. En outre, aucun élève réel ne coïncide exactement avec ce portrait idéalisé que nous avons appelé "automathe formel". L'automathe formel est une catégorie de pensée didactique (qui nous permet de mettre des mots sur des phénomènes), pas un portrait psychologique. La notion didactique d'automathe formel relève de l'analyse a priori⁹, tandis que la question de savoir dans quelle mesure un élève donné a un comportement automathique ressortit à une analyse (clinique) a posteriori, de nature toute différente, autrement subtile et complexe.

XIII.2.3. La réussite paradoxale

Lorsque certaines erreurs se manifestent, on peut diagnostiquer (comme on vient de le voir) que l'élève qui les produit a un comportement d'automathe formel. Il raisonne alors uniquement en termes de règles et de métarègles. Or a priori, cela n'est pas incompatible avec le fait de réussir certains exercices. Les calculateurs formels calculent d'ailleurs parfaitement juste tout en restant (par définition) au niveau formel. En conséquence, lorsque des erreurs ne se manifestent pas, cela ne signifie nullement que l'élève ne se comporte pas en automate formel! Nous parlerons ici de "réussite paradoxale" en ce qu'elle n'est pas l'indice d'une réelle compréhension des ESA et de leur dénotation.

⁹ "a priori" en tant qu'elle n'est pas dépendante en théorie des faits d'expérience, et non pas en tant qu'elle serait préalable à cette expérience (v. Margolinas 1992)

On en trouve un exemple dans un questionnaire soumis à des candidats à un concours de recrutement d'instituteurs à Paris (Drouhard 1986, Lacombe 1988). La tâche consistait à multiplier un polynôme du second degré par un polynôme du troisième degré, et les élèves devaient répondre en remplissant les cases laissées en blanc comme ci-dessous:

$$\square x^6 + \square x^5 + \square x^4 + \square x^3 + \square x^2 + \square x + \square$$

Une case était prévu pour un éventuel coefficient de x^6 pour les erreurs de type:

$$x^2 \cdot x^3 = x^6$$

Or un bon nombre d'étudiants qui avaient trouvé un résultat (correct) de degré cinq n'ont pas rempli la case de " x^6 " par "0", mais l'ont simplement barrée ou laissée en blanc; de même pour le coefficient de " x " qui était "1". Ces élèves ont donc une bonne réussite à la tâche algorithmique formelle de multiplication de polynômes, et plus de difficultés à opérationnaliser la désignation de " ϕ " en "0" ou en "1" suivant le contexte pour répondre à la consigne. Aurait-on demandé aux élèves de répondre en écrivant eux-mêmes le résultat, on n'aurait enregistré que les réussites et nous n'aurions rien su de leur difficultés avec la désignation de " ϕ ".

La plupart des exercices donnés dans les livres ont un pouvoir diagnostique très faible, car lorsqu'ils sont réussis cela n'apporte (presque) aucune information sur l'élève. Ceci nous amène à plaider en faveur de l'emploi systématique des "questions discriminantes", dont l'énoncé qui suit est un exemple classique (Lacombe *ibid.*):

Pour quelle(s) valeur(s) de t l'équation
 $x^2 - tx + 2 = 0$
 admet-elle pour solution $x = 2$?

Une solution "automatique" (calcul de Δ etc.) est évidemment possible, mais sa complexité est sans commune mesure avec celle qui utilise la dénotation (en remplaçant x par 2). A l'occasion d'une enquête menée au CNAM, nous avons pu observer que cet exercice était effectivement

discriminant, car le taux d'étudiants aboutissant à une valeur correcte de t par la procédure "automatique" utilisant Δ était infime.

Toutefois, la réussite paradoxale de l'automathe formel dépend également du niveau de complexité des exercices proposés (et pas seulement de leur caractère défavorisant les automatismes formels).

XIII.2.4. L'automathe formel devant l'accroissement de la complexité

L'automathe formel en effet, contrairement au logiciel de calcul formel, fait des erreurs de calcul. Ceci ne lui est pas spécifique: tout le monde en fait, à commencer par le mathématicien professionnel. Toutefois ce dernier sait détecter et corriger ses erreurs, autrement dit vérifier¹⁰ son travail: c'est même une des caractéristiques de son expertise.

L'automathe formel, lui, est certes capable d'utiliser un certain nombre de techniques de vérification, comme la double résolution (consistant à recommencer le calcul et à comparer les résultats). Toutefois il ne peut (par définition) employer les techniques puissantes qui mettent en œuvre la dénotation, et qui permettent dans un grand nombre de cas, de savoir à peu de frais si un résultat est correct (par exemple, remplacer, dans l'équation initiale, x par la valeur trouvée). Dans le cas du trinôme paramétré ci-dessus, la double résolution est onéreuse, dans la mesure où la procédure "automatique" elle-même est extrêmement fastidieuse.

Or plus la complexité syntaxique des ESA manipulées augmente, et plus le nombre de règles et de métarègles formelles s'accroît, et avec lui le risque d'erreurs. La performance de l'automathe formel doit donc s'affaiblir, en termes de réussites aux exercices scolaires. Ceci permet de

¹⁰ cf C. Margolinas (1989) p. 155:

« processus de vérification: la suite des actions que mène l'élève (seul ou aidé) quand il cherche à s'assurer par une action de la validité d'un résultat et/ou tente de modifier les actions ou raisonnements qui l'ont conduit à proposer ce résultat. »

comprendre les chutes brutales d'efficacité qu'on observe chez certains élèves lorsqu'on passe par exemple des équations aux inéquations.

XIII.2.5. La "survie" aux niveaux élevés de l'automathe formel

Il faut nuancer toutefois ce qui précède. Si l'automathe formel était inéluctablement condamné à voir ses performances diminuer au fur et à mesure de la complexification des domaines étudiés, il n'aurait aucune chance de subsister à un niveau élevé de scolarité. Or ce n'est pas le cas:

« L'étude des erreurs faites par les élèves de classes dites "universitaires" à Cracovie, fréquentées par des élèves particulièrement doués en mathématique, montre comment la rupture du symbole de son sens sémantique conduit à des malentendus frappants dans le contexte mathématique plus raffiné que les éléments primitifs de l'algèbre scolaire. L'analyse de la nature des erreurs faite à ce niveau est beaucoup plus difficile que celle concernant les fautes typiques pour les débutants en algèbre scolaire. Mais (...) nous constatons des phénomènes analogues à ceux qui ont été observés chez les élèves plus faibles, c'est-à-dire la domination des activités concentrées sur les procédures plus que sur les faits. »

Z. Krygowska, *ibid.*

De même, M. Legrand (1988) a insisté sur les problèmes de "perte de signification" qui affectent les étudiants au niveau DEUG, citant entre autres un étudiant qui, au terme d'un long calcul, a donné comme période de rotation de la Lune autour de la Terre, $10 \cdot 6 \text{ s}^{11}$.

Nous n'avons pas l'intention d'étudier ici l'insertion de l'automathe formel au sein du cursus mathématique. Ce problème est lié à la question complexe de la sélection des élèves, de ses modes et de ses fonctions, en liaison avec les techniques d'évaluation. En outre, des régressions sont possibles, et pour diverses raisons.

« Certains (élèves), même doués, se familiarisent facilement au début avec l'arithmétique et avec l'algèbre, en conservant la conscience du sens sémantique du langage symbolique. Mais comme la masse de théorèmes, de conventions, d'automatismes nécessaires croît vite, la mécanisation commence à précéder la

compréhension, et le calcul algébrique, précédemment correct, craque sous ce poids. » (Krygowska 1987)

Un élève, expert dans un domaine, peut acquérir des automathismes ailleurs et ultérieurement (on ne naît pas automathe, on le devient). Nous nous bornerons donc à établir deux constatations.

D'une part, à tout niveau l'automathe est assuré de réussir un minimum d'exercices. En effet, remplacer tous les exercices d'évaluation par des questions discriminantes (dont nous avons vu pourtant qu'elles étaient les plus susceptibles de discriminer les automathes) provoquerait une rupture de la coutume didactique en vigueur dans les classes.

J'ai eu personnellement l'occasion de percevoir de très fortes réticences, de la part d'enseignants, au sujet des "questions discriminantes", en intervenant en formation continue des maîtres lors de la mise en place de l'opération d'évaluation nationale CE2 - 6^{ème}. Tous les participants étaient convenus qu'il ne s'agissait nullement de pénaliser les élèves (en principe!), mais au contraire de les aider en identifiant autant que possible leurs difficultés. En outre, il était clair que des questions discriminantes devaient être posées dans le cadre d'un contrat (didactique) explicite précisant le caractère éventuellement "piégeant" des questions, et la conduite à tenir en ce cas par les élèves. Pour autant, la suggestion revenait régulièrement de "modifier l'énoncé" de telle ou telle question pour le rendre "moins difficile", en l'occurrence pour éviter de disqualifier l'emploi des procédures automatiques standard...

Si toutefois les évaluations comprennent, conformément à la coutume, suffisamment d'exercices pouvant être réussis par l'automathe formel, celui-ci franchira alors sans trop de dommages les étapes de sa scolarité algébrique.

Un des points forts de l'étude de Léonard & Sackur (1981,1983) sur la comparaison des décimaux, que nous avons citée plus haut, est que la majorité des exercices proposés aux élèves dans les manuels ne sont pas discriminants, autrement dit qu'ils peuvent être réussis (de manière

¹¹ Dans ce cas précis il s'agit d'une rupture plutôt avec l'interprétation des écritures qu'avec leur dénotation.

paradoxe) en appliquant des règles "automatiques" incompatibles avec la désignation correcte des Cst à virgule¹².

D'autre part, l'automathe formel s'adapte. Ses connaissances sont essentiellement locales, en ce sens qu'elles sont correctes dans certaines limites, et qu'il ignore ces limites (Léonard & Sackur, 1991). La cohérence globale de l'ensemble de ses connaissances n'est pas le premier de ses soucis, il n'en a d'ailleurs guère les moyens. Ceci permet de comprendre comment il peut "progresser" (dans le cursus) en dépit des difficultés croissantes. A côté de l'accroissement de complexité formelle, sont introduits en effet tout au long du cursus de nouveaux outils et de nouveaux concepts, plus généraux, qui réduisent au contraire cette complexité: voir par exemple la résolution des systèmes d'équations linéaires par les déterminants. L'élève n'a plus qu'à réduire ces outils à de nouveaux automatismes, passer dans notre exemple des recettes pour résoudre les systèmes linéaires par substitution et combinaison, aux recettes pour les résoudre par les déterminants.

L'automathisme formel peut donc soit apparaître tard, soit persister longtemps.

XIII.2.6. Malentendu

Cette représentation "formelle" des ESA (en ce sens qu'elles ne sont pour l'élève que des formes vides dépourvues de dénotation) a pour conséquence immédiate de transformer la plupart des efforts de remédiation en malentendus (Adda 1987). Le maître (ou le logiciel, en tant qu'il est écrit par un mathématicien) se situe au niveau mathématique. Son discours, oral ou écrit, qui porte sur les objets mathématiques, s'exprime au moyen d'expressions (fractionnaires par exemple), qui ne sont pour lui qu'un moyen d'accéder à leur dénotation. L'élève, lui, ignore que ces écritures dénotent, et croit en toute bonne foi que son interlocuteur se situe également au niveau formel. Il dispose de très peu d'indices pour être détrompé.

On peut trouver une analogie entre cette situation et la communication entre un daltonien partiel (pour lequel rouge et brun sont deux nuances d'une même couleur par exemple) et quelqu'un qui ne l'est pas. La plupart des situations de la vie courante n'offrent pas de contrastes colorés tels que l'un voit une différence là où l'autre ne la voit pas. Ce que l'un interprète comme une différence de couleur, l'autre le voit comme une nuance - comme entre carmin et vermillon par exemple-. Il y a donc malentendu en ce sens que les deux individus communiquent sans réaliser qu'ils ne parlent pas de la même chose. Il faut une situation expérimentale ad hoc (test de dépistage) ou un hasard (que la conversation porte sur deux objets de couleur différentes mais que le daltonien ne distingue pas, même en termes de nuance) pour que le malentendu apparaisse aux deux interlocuteurs.

Le malentendu repose ici sur le fait que l'élève ignore que les ESA ont une dénotation, et que le maître ne sait pas que l'élève l'ignore. Le terme "faux" désigne pour le maître la valeur de vérité, et signifie pour l'élève "incorrect". Ce qui entretient le malentendu, c'est que tout calcul correct aboutit à un résultat vrai, et la plupart des calculs incorrects à un résultat faux. Autrement dit, les situations discriminantes pour l'un et pas pour l'autre sont rares.

Les choses seraient peut-être plus simples si le maître s'en tenait strictement à la dénotation. Or pour lui, les ESA ont non seulement une dénotation mais également un sens. Il ne se contente donc pas d'évaluer mécaniquement "vrai", "faux" ou "non défini" le résultat de l'élève, il évalue également la correction des calculs. Il lui est difficile d'écrire "vrai" sans commentaires dans la marge d'une égalité provenant d'un calcul incorrect ou sans rapport avec l'énoncé. Ce serait une rupture de la coutume didactique. En outre, l'usage d'annotations du type «Bien» qui "écrasent" les niveaux de la dénotation et du sens (Paquelier 1990), ajoute encore à la confusion.

On pourrait croire que ce type de situation (résultat vrai issu de calculs incorrects) permet l'amorce d'une prise de conscience du malentendu. Malheureusement, il n'en est rien. L'élève n'est pas déstabilisé, parce que pour lui "résultat vrai" signifie résultat **formellement correct**, i.e. correspondant à la forme attendue. Il n'y a pour lui rien de surprenant à ce que des transformations incorrectes se "compensent" heureusement et aboutissent à la forme correcte. C'est rare mais pas exceptionnel.

¹² notamment l'ordre lexicographique sur les Cst à virgule considéré comme des couples d'entiers.

L'absence de dénotation rend donc très difficile le jugement de correction posé sur une transformation litigieuse. Pour l'élève le débat est perçu comme un échange d'arguments d'autorité:

«Vous me dites que

$$2 = \frac{10}{5} = \frac{4+6}{4+1}.$$

Je veux bien vous croire, mais moi j'ai une autre règle, qui fait que

$$\frac{4+6}{4+1} = \frac{6}{1} = 6.$$

Vous avez raison, et je n'ai pas tort.»

(variante véhémence: "moi, on m'a appris à faire comme ça!"). Hors d'un détour sur la notion de dénotation même (autrement dit un métadiscours sur les expressions mathématiques), le discours reste un dialogue de sourds... On pourrait dire que ces élèves n'ont pas acquis le principe du tiers exclus, mais la difficulté est plus profonde (au sens de Dumont 1989). Pour eux, il y a bien différence mais il n'y a pas contradiction. Pour qu'il y ait contradiction, il faudrait qu'il y ait dénotation.

XIII.2.7. Une profondeur plus qu'infinie

Nous avons dit que l'automathe avait une activité qui n'est pas dénuée de rationalité, même si l'absence de dénotation, qui est une erreur de profondeur infinie dans la classification de B. Dumont (1989), l'empêche d'atteindre la rationalité proprement mathématique. Cela dit, tous les élèves en échec ne sont pas des automathe formels, et certains d'entre eux ne sont même pas au niveau de l'automathisme.

Les uns, devant l'énoncé de l'exercice, restent pétrifiés et n'écrivent rien. D'autre par contre remplissent la feuille d'écritures tout autant dépourvues de dénotation que de sens ou d'interprétation, mais qui, vues de loin, ressemblent à s'y méprendre à des textes mathématiques. Les caractéristiques typographiques demandées par le professeur sont souvent ce qui est le mieux respecté: l'énoncé est en vert, la réponse, ou ce qui en tient

lieu, encadrée de rouge etc. Ce comportement pathétique donne un peu l'impression d'assister à un "Culte du Cargo" Mélanésien¹³.

«Imaginez que vous vivez dans un monde où tout se passe à coup d'invocations, d'évocations, de formules rituelles, que des écritures surgissent du néant, que d'autres tombent du ciel; que le grand manie-tout du sens de ces écritures soit le maître, le magister, le mage qui homologuera les miracles ou y contribuera... Ne serez-vous pas tenté de dire comme tous les autres: "Sésame ouvre-toi" ou "abracadabra", enfin je veux dire "par théorème", "par définition" ou "par Pythagore"?» S. Baruk (1985 p. 192)

La rationalité ne porte même plus sur les règles syntaxiques (pour ces élèves les ESA n'ont ni dénotation ni même sens) mais uniquement sur les formes extérieures: le lexique ou la typographie. Il s'agit toujours d'un malentendu, et qui prend toujours sa source dans la coutume didactique qui veut que la production de l'élève lui sert à prouver qu'il est capable de produire selon les consignes, et qui pousse donc l'élève à chercher à savoir ce que le maître veut qu'il produise. Toutefois le malentendu est ici à sens unique: le maître n'est pas dupe. L'élève, par contre, croit que la désapprobation du maître provient d'une adéquation aux normes lexicographiques ou typographique encore insuffisante (il n'a pas cité le bon théorème ou la bonne formule au bon endroit). Leurs erreurs sont donc plus profondes encore que celles qualifiées par B. Dumont d'"infiniment profondes".

¹³ cultes prophétiques dans lesquels, entre autres, des officiants se livrent à des danses dans de vastes aires dégagées au sein de la forêt, sous de hautes tours en branchages, pour hâter la venue des morts (par exemple) dans leurs magnifiques véhicules aériens chargés de marchandises, instaurant ainsi une ère nouvelle d'abondance et de béatitude. Les ethnologues ont fini par réaliser que les tours reproduisaient les tours de contrôles, les claires des pistes d'atterrissage, et les danses la gestuelle destinée à guider les avions dans les aéroports américains de campagne installés durant la seconde guerre mondiale. (Eliade 1963)

XIII.3. "Comprendre" les ESA

Étymologiquement, "comprendre" c'est "prendre ensemble". Je propose de revenir aux racines du mot en matière de didactique de l'algèbre.

"Com-prendre" les ESA, c'est prendre en compte ensemble leur syntaxe, leur dénotation, leur sens et leur interprétation.

L'adverbe "ensemble" est ambigu. Suivant l'acception qu'on choisira, l'énoncé qui précède peut signifier aussi bien que la compréhension des ESA est un processus collectif ("ensemble" = "à plusieurs"), que l'idée que les trois composantes ne doivent pas être séparées. A vrai dire, nous adhérons aux deux propositions. Toutefois, je me propose d'étudier plus particulièrement les conséquences didactiques de la seconde.

Je prétends en effet que **si l'une des composantes manque, il n'y a pas compréhension.**

XIII.3.1. Légitimité de la syntaxe

En particulier, on ne peut pas parler (aux élèves, aux collègues) de la signification des ESA en faisant l'impasse sur leur syntaxe, comme si celle-ci allait de soi. Certains points importants ne peuvent être mis à jour qu'à l'occasion d'un travail détaillé d'analyse de cette syntaxe, comme dans cette thèse: les trois fonctions du point multiplicatif, ou le rôle central des fonctions syntaxiques dans la description des ESA et de leurs transformations. Sur le plan didactique, cette attention portée à la syntaxe consiste à redonner sa légitimité propre au discours sur les signifiants.

J'estime en effet, suite à l'analyse des ESA faite dans cette thèse, que l'élève peut légitimement dire quelque chose comme:

"je passe x de l'autre côté du signe 'égal' en changeant son signe".¹⁴

Il doit avoir le choix entre un tel énoncé (qui porte sur les signifiants, ici les écritures) et un énoncé qui porte sur les signifiés (ici les nombres) tel que:

"j'additionne de part et d'autre l'opposé du nombre x "

Ce second énoncé n'est ni plus, ni moins "correct", que le premier. Simplement, il porte sur les dénotations au lieu de porter sur les ESA. Ce qui est dangereux, c'est le glissement sans contrôle ni précaution d'un plan vers l'autre (Bauersfeld & Zawadowsky 1981), mais pas le fait de se tenir dans le plan des ESA quand le lien qui l'unit aux objets mathématiques (la dénotation) est par ailleurs bien assuré. En d'autres termes, parler de "changer de membre un terme" n'est pas un abus de langage ou je ne sais quelle métaphore qu'il faudrait proscrire au profit d'une description mathématique convenable. Il s'agit de la description légitime d'une transformation légitime entre ESA, correspondant à une opération mathématique non moins légitime.

Je dois préciser toutefois ce que j'entends par "redonner sa légitimité au discours sur la syntaxe" pour éviter un contresens complet. Jamais je n'ai prétendu que l'enseignement de l'algèbre pourrait se limiter à celui des transformations formelles portant sur des écritures formelles. Jamais je n'ai même envisagé d'évacuer la sémantique au profit du syntaxique. Tout ce chapitre est au contraire un plaidoyer en faveur de l'idée qu'au coeur des difficultés de nombreux élèves en algèbre, il y a une attitude "pseudo-formaliste", consistant précisément à manier des signes réduits à leur seule forme, dans l'ignorance de leur sémantique.

Par contre, je prétends que ce n'est pas aider l'élève à "comprendre" les écritures qu'il manipule que d'exiger de lui qu'il revienne à tout bout de champ à cette sémantique. S'il est indispensable, au début, de justifier par les

¹⁴ il y a certes ambiguïté lexicale sur le mot "signe", mais nous n'y pouvons rien: elle est inscrite dans le langage.

opérations sur les dénnotations, les transformations des écritures, c'est au contraire par la suite un facteur de confusion que d'"écraser" les niveaux en réduisant tout discours sur les signifiants à un discours sur les signifiés.

Le mot-clé, ici, est "systématique" (ou "continuuel"). Les élèves doivent certes pouvoir donner, à chaque fois qu'ils le désirent, une dénnotation, un sens ou une interprétation aux écritures qu'ils manipulent. Mais ce recours à la "signification" doit demeurer optionnel. L'algébriste compétent cesse à certains moments d'interpréter ses calculs, et c'est cette "suspension du sémantique" qui fait précisément la force de l'algèbre (cf. la notion de "calcul aveugle" chez Leibnitz). Interpréter chaque fois qu'on le désire, n'est pas interpréter tout le temps (cela ne doit pas être non plus ne jamais le faire). Il faut donc que l'élève, certaines fois (mais pas toujours), puisse ne pas interpréter les écritures, et donc les considérer d'un point de vue purement syntaxique. C'est cela que j'appelle tenir un discours légitime sur la syntaxe.

XIII.3.2. Contre les réductionnismes

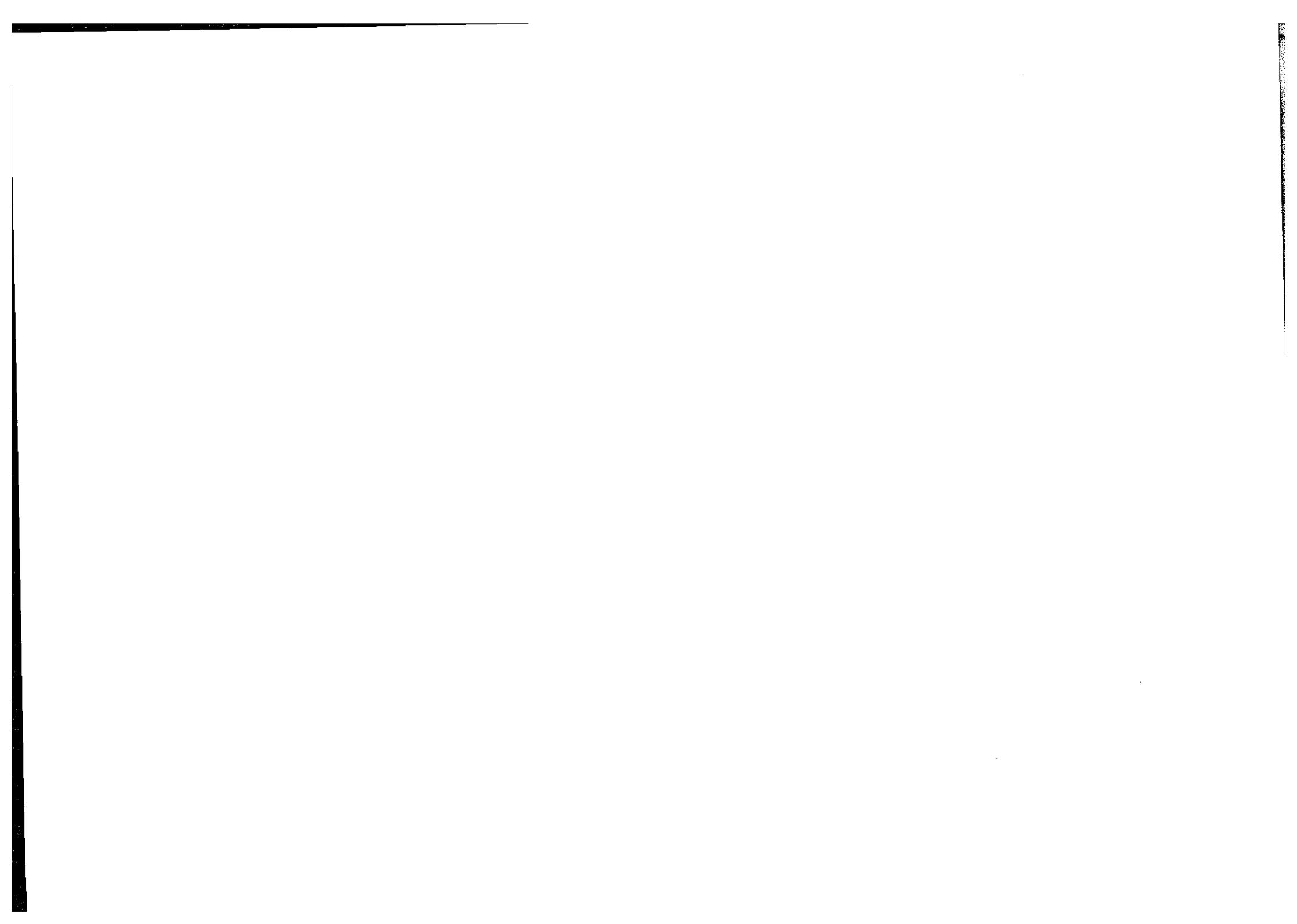
En conclusion, je dirai que mon travail est caractérisé par la **méfiance** vis-à-vis des stratégies réductionnistes d'enseignement ou de remédiation en algèbre.

On ne peut baser l'ensemble de la sémantique de l'algèbre sur les seules interprétations, surtout lorsqu'il s'agit de situations pseudo-concrètes. Autrement dit, en accord avec Booth (1987) je prétends qu'un recours systématique à des interprétations des écritures (et de leurs transformations) en termes de plateaux de balance (par exemple) est loin d'être suffisant pour que les élèves "comprennent" ce qu'il font.

De même, on ne peut prétendre bâtir de logiciels d'EIAO en algèbre autour des stratégies de résolution des tâches, si on ne s'est pas assuré auparavant avec un luxe de précautions que les élèves auquel le logiciel s'adresse sont prémunis contre l'automathisme formel. Sinon, le plus grand danger est paradoxalement de voir les élèves réussir, et apprendre des stratégies pour faire des calculs corrects sur des écritures qui sont à leurs yeux, littéralement, mathématiquement insignifiantes.

Parce que j'ai voulu redonner sa légitimité au discours sur la syntaxe, on m'a souvent attribué le projet de vouloir réduire l'enseignement de l'algèbre à celui des règles de transformation. Bien au contraire, je soutiens qu'il n'y a d'enseignement ou de remédiation réels en algèbre que s'il y a **intégration** harmonieuse de la totalité des composantes, à savoir la syntaxe, la dénnotation, le sens et les interprétations. Mais une synthèse équilibrée de ces composantes suppose qu'on les ait auparavant soigneusement analysées.

Le travail de Thèse que j'ai présenté n'a d'autre ambition que de contribuer à cette analyse.



POSTFACE.

«... ils sont intimidés par le jargon (...) de leurs hôtes, même s'ils pensent (...) que tout cela est probablement de la pure foutaise, bien qu'ils n'en soient pas totalement sûrs car ils ne le comprennent pas très bien.»

David Lodge, *Un tout petit monde* (1991).

Il m'a paru intéressant de les faire figurer en postface, à titre de document permettant au lecteur de comprendre a posteriori certains choix ou parti-pris, quelques réflexions sur la méthodologie de mon travail, menées parallèlement à l'élaboration théorique du système des ESA.

Initialement, je pensais que ce travail de thèse pourrait aboutir rapidement à des propositions pour l'enseignement de l'algèbre qu'on pourrait évaluer en comparant les résultats de pré-tests et de post-tests. Or les séquences d'enseignement d'algèbre que j'ai effectivement menées ont pris place dans le cadre de d'une expérience de "DAP" ("Discussions Autour de Problèmes"¹), qui a soulevé de très nombreuses questions théoriques et méthodologiques. Il n'était plus question d'évaluer cet enseignement par comparaison entre pré- et post-tests, parce que beaucoup trop de paramètres étaient en jeu. Il a donc fallu repenser en profondeur la question de l'évaluation, et par contrecoup certains problèmes de méthodologie didactique (aussi bien pour les ESA que pour la DAP). Certains concepts méthodologiques avancés par P. Bourdieu, J.C. Passeron et J.C. Chamboredon (1983, 1984) ainsi que par J.P. Pourtois et H. Desmet (1988) permettent une mise en perspective et une réorganisation théorique de ces réflexions.

Les questions de méthodologie sont complexes. J'ai choisi, pour la clarté de la présentation, de les aborder par l'interrogation suivante:

¹ v. Annexe

Que faut-il pour qu'un lecteur puisse évaluer un travail didactique?

Cela m'a conduit à aborder la question des critères de rationalité et des contraintes de présentation des recherches didactiques. Il faut toutefois rester modeste: il n'est absolument pas question ici de faire plus qu'*effleurer* l'ensemble de l'épineuse question de la scientificité de la didactique des mathématiques.

1. Le lecteur

Quel est ce "lecteur" virtuel, juge² du travail didactique? Ce n'est pas le passant: cette thèse n'est pas un travail de vulgarisation pour un public qui ignorerait tout des résultats, des méthodes et des débats de la didactique des mathématiques. Au contraire, dans tout ce qui suit, je m'adresse à un lecteur "idéal", familier du domaine, de bonne foi, et soucieux de porter un jugement rationnel, autant que faire se peut, sur ce qu'il lit.

2. Faits, choix théoriques et signification

En bon scientifique, le lecteur pourra penser d'abord à évaluer la recherche en fonction de sa cohérence interne (non-contradiction) et de l'adéquation aux observations.

L'étude de la cohérence tout d'abord ne pose pas de problème profond si cette recherche comporte une part de modélisation, et si les modèles sont simples.

Concernant le rapport aux faits, si le lecteur a lu Popper (1982), il cherchera à savoir si la théorie qu'on lui présente est falsifiable. C'est là que les difficultés commencent (Pourtois & Desmet 1988 p. 45):

² nous emploierons ici indifféremment les termes "jugement" et "évaluation"

J. Habermas, représentant de l'École de Francfort, critique de façon très radicale les positions de K. Popper. La doctrine poppérienne fonde le rejet ou l'acceptation des énoncés scientifiques sur la base des seuls faits observés et non sur la logique, c'est-à-dire, sur la théorie. Or, estime Habermas, les faits ne sont pas indépendants des théories qui les étudient; au contraire, ils sont construits par elles³; elles les déterminent véritablement. Pour Habermas, la thèse de l'indépendance des falsificateurs (c'est-à-dire des faits qui ont proposé le rejet ou l'acceptation de l'énoncé) par rapport aux hypothèses (théories) qu'ils sont destinés à mettre à l'épreuve n'est pas défendable. Sur cette base, il considère que la méthodologie poppérienne doit être modifiée. Habermas oppose au logicisme de Popper une position praxéologique. La validité empirique des propositions de base sera mesurée « à leur valeur informative pour le contrôle et l'élargissement de l'action efficace » (Habermas cité par Malherbe 1976⁴). C'est-à-dire que la décision critique quant à la validité des énoncés doit se faire en analysant de façon rationnelle (recherche rationnelle du sens) les critères qui ont fondé cette décision⁵ et en examinant la pertinence informative de ces énoncés par rapport aux pratiques des acteurs. Habermas apporte une dimension herméneutique à sa conception: « La compréhension implicite des règles du jeu qui guident la discussion des chercheurs lorsqu'ils décident de l'acceptation de propositions de base renvoie à une dimension dans laquelle l'élaboration rationnelle s'inscrit inévitablement dans une démarche herméneutique » (*ibidem*).

D'emblée, Pourtois & Desmet posent donc les contraintes fondamentales à l'évaluation en sciences humaines. D'une part, les faits ne sont pas donnés mais «**conquis, construits, constatés**» (Bourdieu, Passeron & Chamboredon 1983). D'autre part, la rationalité du jugement passe non seulement par l'analyse des énoncés, mais encore par celle des **décisions théoriques** qui sont à leur origine. Ce travail sur les décisions qui fondent la théorie est un travail sur leur **signification**, car les objets (par exemple ici les "calculs algébriques") et les choix (ici celui de la linguistique) sont signifiants pour le chercheur, ils prennent place dans son système de représentations.

³ c'est nous qui soulignons

⁴ *La philosophie de Karl Popper et le positivisme logique*, Paris, PUF.

⁵ c'est nous qui soulignons

Postface

La différence avec l'évaluation d'un travail en sciences exactes est réelle mais subtile, et mérite qu'on s'y attarde (Pourtois & Desmet 1988 p. 15):

« ... les frontières et les critères de démarcation entre les sciences de la nature et les "sciences de la société" deviennent ténus tant l'élaboration conceptuelle des unes et des autres reflète un même champ épistémologique. A. Schütz⁶ différencie sciences naturelles et sciences sociales dans la mesure où en sciences naturelles, les faits, les données, les événements ne sont pas interprétés d'avance. Ils ne contiennent pas en eux de structure de pertinence ou de signification. Par contre, les événements et les données du monde social présentent une structure pertinente et une signification particulière pour les personnes qui y vivent. Ces événements sont interprétés d'avance par les constructions courantes de la réalité de la vie quotidienne. Les considérer dès lors comme des données "naturelles" entraîne la négligence du secteur des constructions et des significations humaines? (...) Néanmoins, ajoute Schütz, il ne faut pas en arriver à la conception que les sciences sociales sont radicalement différentes des sciences naturelles. Certaines règles procédurales qui ont trait à l'organisation correcte et rationnelle de la pensée sont communes à toutes les sciences empiriques.

En Didactique, on ne peut donc se contenter de situer une recherche par rapport aux résultats théoriques communément admis, mais on doit prendre la peine d'interroger les choix et surtout leurs **raisons**, au besoin en exhibant les obstacles et les échecs. Sinon, on court le risque d'y introduire des "prénotions" (ou notions "préconstruites") incontrôlables:

« Ces prénotions, "représentations schématiques et sommaires" qui sont "formées par la pratique et pour elle", tiennent leur évidence et leur "autorité", ainsi que l'observe Durkheim, des fonctions sociales qu'elles remplissent.

L'emprise des notions communes est si forte que toutes les techniques d'objectivation doivent être mises en œuvre pour accomplir une rupture qui est plus souvent professée qu'accomplie» (Bourdieu, Passeron & Chamboredon 1983 p. 28).

Bourdieu, Passeron & Chamboredon proposent, pour rompre avec ces prénotions, un travail d'ordre réflexif: le chercheur doit alors prendre sa

⁶ *Le chercheur au quotidien*, Paris, Méridiens Klincksieck (1975)

⁷ c'est nous qui soulignons

recherche même comme objet d'étude. C'est ce que Bourdieu (1984 p. 18) appelle "objectiver l'objectivation":

« Je ne suis pas loin de penser que la vertu principale du travail scientifique d'objectivation consiste en ce qu'il permet, à condition, bien sûr, qu'on sache en analyser le produit, d'objectiver l'objectivation. En effet, pour le chercheur soucieux de savoir ce qu'il fait, le code, l'instrument d'analyse, devient objet d'analyse: le produit objectivé du travail de codification devient, sous le regard réflexif, la trace immédiatement lisible de l'opération de construction de l'objet, la grille qui a été mise en œuvre pour construire le donné, le système plus ou moins cohérent des catégories de perception qui ont produit l'objet de l'analyse scientifique(...) ».

Pour en revenir à l'évaluation de la recherche, le travail d'objectivation de l'objectivation doit être non seulement effectué par le chercheur, mais encore **explicité** à l'intention du lecteur. Dans le cas contraire, ce dernier risque bien involontairement de « réduire à leur sens ordinaire les mots communs à la langue savante et à la langue ordinaire » (ibid. p. 13) et de faire rentrer par la fenêtre de l'interprétation en termes ordinaires, les prénotions qui avaient été chassées par la porte (par exemple) du formalisme. La notion de "signification" d'une expression algébrique, qui a été construite au chap. X, est un bon exemple de terme hautement signifiant pour le lecteur, dont les multiples acceptions incontrôlées (prénotions) risquent de parasiter la lecture. On voit bien que, si l'on n'explicité pas ce travail d'objectivation de l'objectivation, le critère d'adéquation aux observations est inopérant. Comment savoir sinon si les faits observés ne sont pas des artefacts liés à des prénotions?

3. Travail sur les choix et scientificité

Tout ce qui précède a fortement à voir avec la question des critères de scientificité de la didactique des mathématiques, dans la mesure où (en principe!) l'étude mutuelle et le débat scientifique sont les mécanismes institutionnels, au sein de la communauté, de validation des travaux. Cela nécessite donc que ces travaux soient accessibles aux lecteurs. Nous retrouvons les contraintes d'explicitation des choix et de leur signification que nous venons de voir:

«le chercheur (...) doit rendre compte explicitement de sa démarche afin que chacun puisse en mesurer les limites et en apprécier la scientificité» (Pourtois & Desmet 1988 p. 30).

La nécessité d'explicitation sa démarche ne tient pas seulement au risque d'introduire subrepticement des prénotions. Elle vise également à réduire les risques de malentendu ou d'incompréhension, qui sont autant d'obstacles au débat scientifique. En effet, vu le lien entre les options (d'ordre méta-didactique) qui fondent la démarche, et l'histoire personnelle des individus, la probabilité que deux didacticiens partagent des options absolument toutes identiques est faible⁸. Il est donc dangereux de se reposer sur une communauté de pensée supposée pour laisser implicites les options méta-didactiques. On aboutit au mieux à un consensus illusoire (où chacun met à la place de l'implicite de l'autre ce qui l'arrange), au pire à une absence de communication (où les uns ne comprennent pas les choix des autres). La possibilité d'un débat scientifique au sein d'une communauté didactique passe donc nécessairement par l'explicitation de ces options métadidactiques.

4. Evaluation et appropriation

Lorsque le lecteur ne dispose pas, implicitement ou explicitement, des raisons et de la signification des choix du chercheur, il lui est difficile de tirer quelque chose du discours didactique. Il risque d'avoir du mal à "rentrer" dans la problématique, et de n'en percevoir clairement ni les tenants ni les aboutissants. Même s'il en suit le fil, il est gêné pour la relier à une problématique qui le concerne. A plus forte raison, il lui est malaisé d'évaluer la recherche qu'il lit. Il peut difficilement, alors, émettre un jugement critique profond sur ce travail.

La présentation d'un travail de recherche doit donc avant tout le rendre "accessible" au lecteur. Explicitation des raisons et les significations

⁸ il n'est que d'assister à un débat de Didactique entre chercheurs pour voir apparaître (parfois avec éclat) les différences entre options implicites!

des décisions, revient à repersonnaliser et recontextualiser, au moins un temps, le méta-discours didactique. C'est le parti retenu, pour leur Thèse, par des auteurs aussi divers que G. Brousseau (1986):

«Il est indispensable avant de discuter cette thèse de présenter brièvement la suite des expériences qui ont étayé ma propre conviction (...) Il semblera peu académique d'extraire cette histoire et ces réflexions personnelles du tissu des notions et concepts qui ont traversé le champ de la didactique depuis ces trente dernières années.»

B. Dumont (1989):

«Pour aider le lecteur dans sa compréhension d'un itinéraire de plus de dix années de recherche en didactique des mathématiques nous avons pensé à lui indiquer quelques points de repère sur un curriculum vitae dont la linéarité, autre que temporelle, n'est pas évidente.»

ou C. Margolinas (1989):

«Cette thèse pourra sembler singulière au lecteur par bien des aspects. Un de ces aspects est son caractère essentiellement théorique, inusuel pour une thèse d'Université de didactique des mathématiques. Pour cette raison, je crois bon de dire quelques mots de la genèse de ce travail⁹.»

parmi d'autres trop nombreux pour être cités.

Pour rendre le modèle des ESA "accessible" dans le sens qui précède, j'ai été conduit à privilégier la description des problèmes rencontrés et des solutions apportés, au détriment d'une présentation "lisse" et décontextualisée de l'état final du modèle.

5. Repersonnalisation et recontextualisation

La nécessité de repersonnaliser et de recontextualiser le discours didactique contredit le modèle usuel de la transmission des connaissances scientifiques (en sciences dites "exactes", voire "dures"), qui passe par la

⁹ c'est nous qui soulignons.

dépersonnalisation et la décontextualisation. Dans une thèse de mathématiques, cela n'intéresse a priori pas le lecteur de connaître les errements et les fourvoiements de l'auteur¹⁰. En didactique par contre, décontextualiser et dépersonnaliser une théorie revient à l'installer dans un lit de Procuste, en supprimant précisément ce qui la rend intelligible et critique. Le didacticien, s'il souhaite être accessible, se retrouve donc dans la position doublement inconfortable de devoir s'écarter des canons de la présentation "scientifique" la plus respectable, et ce faisant, de s'exposer sur ses options qui sont par principe personnelles (ce qui ne signifie évidemment pas qu'elles sont irrationnelles). Toutefois, il ne semble pas qu'il ait vraiment le choix.

Tout cela a joué dans la présentation de cette thèse: la présente postface est un exemple d'entorse aux canons académiques de rédaction dépersonnalisée.

Remarquons qu'il est question ici de "re-personnaliser" et "re-contextualiser" et non simplement de "personnaliser" et "contextualiser". Il est en effet difficile de faire la part de la rationalisation a posteriori dans cette activité. Je ne suis moi-même pas du tout certain d'être parvenu à donner une image fidèle des perspectives métathéoriques qui m'ont amené à faire mes choix il y a plusieurs années de cela. En réalité, je suis presque certain du contraire! La rédaction de cette thèse a été l'occasion d'un exercice d'anamnèse, puis de *reconstruction* après-coup d'une métathéorie.

Quoi qu'il en soit, la *fidélité* d'une telle reconstitution n'est pas si importante. Il en est d'elle comme de la "genèse fictive" par laquelle on introduit les concepts mathématiques: peu importe qu'elle corresponde à la vérité historique ou non, pourvu qu'elle soit signifiante pour l'apprenant, et qu'épistémologiquement elle ne soit pas grossièrement fausse.

De même, en didactique, pour que le lecteur puisse s'approprier une recherche, il doit disposer d'un *récit* de démarche, autrement dit d'une

métathéorie contextualisée et personnalisée, qui fasse sens pour lui. Or, comme pour la genèse fictive d'ailleurs, l'exigence de "significativité" est contradictoire avec celle de fidélité. Le récit minutieux et exhaustif de toutes les hésitations, confusions, revirements et abandons ayant jalonné et finalement déterminé les décisions de recherche ne serait pas seulement décourageant, mais encore et surtout n'éclairerait pas les choix finals.

Il a donc fallu arbitrer sans cesse entre ces deux exigences contradictoires de fidélité et de significativité, et faire un travail de synthèse a posteriori, forcément réducteur, pour donner au lecteur les moyens d'une lecture critique.

¹⁰ sauf, peut-être, les historiens ou les épistémologues. En tous cas cela n'est pas censé intéresser, en général, les mathématiciens.



ANNEXES

REFERENCES

Bibliographie portant sur les ESA

- ADDA J. (1987): "Erreurs provoquées par les représentations", in *Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique*, Compte-rendu de la 39^{ème} rencontre internationale de la CIEAEM, Les Editions de l'Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec.
- AL-LAKKIS Gh. (1985): *Les automatismes dans le calcul algébrique en classe de seconde*, Thèse de doctorat de 3^{ème} cycle, Université Paris 7.
- ANIS J. (1988): "Une graphématique autonome?", in: *Pour une théorie de la langue écrite*, Nina Catach (Dir.), Ed. du CNRS.
- ARZARELLO F. (1991): "Procedural and Relational Aspects of Algebraic Thinking", *Actes du congrès international PME XV*, (Assisi), Furinghetti F. (Dir.), Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova, Italie.
- AUBREE M. (1985): "Etude de modèles erronés utilisés par les élèves du premier cycle en algèbre, un essai thérapeutique", *Petit x.*, 8, IREM de Grenoble.
- AVILA A., GARCIA F. & ROJANO T. (1990): "Algebraic Syntax errors: a Study with Secondary School Children", *Actes du congrès international PME XIV*, Booker G., Cobb P. & de Mendicutti T. N. (Dir.), México.
- BALACHEFF N. (1988) "Le contrat et la coutume", *Actes du premier colloque franco-allemand de Didactique des mathématiques et de l'informatique*, C. Laborde (Dir.), La Pensée Sauvage, Grenoble.
- BARUK S. (1973): *Echec et Maths*, Ed. du Seuil, Paris.

- BARUK S. (1985): *L'Age du capitaine*, Ed. du Seuil, Paris.
- BAUERSFELD H. & ZAWADOWSKI W. (1981): *Metaphors and Metonymics in the teaching of mathematics*; Occasional Paper 11, Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld.
- BENVENISTE E. (1966): *Problèmes de linguistique générale*, T. 1, Coll. TEL, Gallimard.
- BERRENDONNER A., LE GUERN M. & PUECH G. (1983): *Principes de grammaire polylectale*, Presses Universitaires de Lyon.
- BLANDO J. A., KELLY A. E., SCHNEIDER B. R. & SLEEMAN D. (1989): "Analyzing and Modeling Arithmetic Errors", *Journal for Research in Mathematics Education*, 20/3, 301-308.
- BOOTH L. (1987): "Equations Revisited", *Actes du congrès international PME XV*, J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Dir.), Montréal.
- BOURDIEU P. (1984): *Homo Academicus*, Minit.
- BOURDIEU P., CHAMBOREDON J.-Cl. & PASSERON J.-Cl. (1983): *Le métier de sociologue*, Mouton, La Haye et EHESS, Paris.
- BROUSSEAU G. (1986): "Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 33-115.
- BROUSSEAU G. (1988): *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Bordeaux I.
- BRUILLARD E. (1991): *EIAO et Mathématiques: une vision hypertexte des environnements d'apprentissage*, Thèse de l'Université du Maine.
- BRUNELLE L. et BARATAUD D. (1986): *De l'erreur à la réussite en mathématiques Références et pratiques*, Fernand Nathan, Paris.

- BRUSTON M. (1982): *Dossier de Fiches "Introduction aux enseignements Scientifiques" Algèbre-Analyse, Niveau 3, Première Année*, Document Polycopié, CNAM, Paris.
- BUNDY A. & WELHAM B. (1979): *Using meta-level descriptions for selective application of multiple rewrite rules in algebraic manipulation*, DAI research Paper N°121 Edinburgh (ou DAI Working paper N°55, ou Artificial Intelligence Journal 1979).
- BUNDY A. (1975): *Analysing Mathematical Proofs*, DAI research Paper N°2, Edinburgh.
- CAJORI F. (1928): *A History of Mathematical Notation, Volume 1, Notations in Elementary Mathematics*, The Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois, 1974.
- CARMONA J. & DIDIER F. (1975): *Récurtivité*, IREM de Marseille.
- CATACH N. (1988): "L'écriture en tant que plurisystème ou théorie de L Prime", in *Pour une théorie de la langue écrite*, Nina Catach (Dir.), Ed. du CNRS.
- CEDILLO T., GUZMAN J. & ROJANO T. (1987): « Enseñanza del álgebra simbólica » *Memorias de la 1a reunion centroamericana y del caribe sobre formación de profesores e investigación en matematica educativa*, Merida (Yucatan), México.
- CHARLES B. (1985): *L'enseignement de l'algèbre*, conférence d'introduction à la table ronde sur l'enseignement de l'algèbre, 110^{ème} congrès national des sociétés savantes, Montpellier (document polycopié).
- CHASTENET DE GERY J., DROUHARD J.-Ph., DUMONT B., HOCQUENGHEM S., LACOMBE D. & SOL S. (1985): "Computer Assisted Testing by Questions and Answers", *Computers in Education*, K. Duncan & D. Harris (Dir.), Elsevier (North-Holland).

- CHASTENET DE GERY J., DROUHARD J-Ph., IIOCQUENGHEM S., et al. (1987): "Enquête sur les acquis...", Actes du colloque *Orientation et échecs dans l'enseignement supérieur...*, Université de Paris-Dauphine.
- CHEVALLARD Y. & CONNE F. (1984): "Jalons à propos d'algèbre", *Interactions Didactiques*, n°3, Universités de Genève et de Neuchâtel.
- CHEVALLARD Y. (1985): *La Transposition Didactique*, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- CHEVALLARD Y. (1989): "Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège", deuxième partie, *Petit x*, n° 19, IREM de Grenoble.
- CHEVALLARD Y. (1990): "Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège", troisième partie, *Petit x*, n° 23, 5-38, IREM de Grenoble.
- CHOMSKY N. & MILLER G.A. (1971): *L'analyse formelle des langues naturelles*, Gauthier-Villars, Paris, Mouton, Paris, La Haye.
- CHOMSKY N. (1969): *Structures syntaxiques*, coll. Points, Le Seuil, Paris.
- CHOMSKY N. (1971): *Aspects de la théorie syntaxique*, Le Seuil, Paris.
- CULIOLI A. & DESCLES J-P. (1982): "Traitement formel des langues naturelles", *Mathématiques et Sciences Humaines*, 77, EHESS.
- DAVENPORT J., SIRET Y. & TOURNIER E. (1987): *Calcul Formel*, Masson.
- DELOZANNE E. (1992): *Explications en EIAO: études à partir d'Elise, un logiciel pour s'entraîner à une méthode de calcul des primitives*, Thèse de l'Université du Maine.
- DESCLES J-P. (1981): "De la notion d'opération à celle d'opérateur ou A la recherche de formalismes intrinsèques", *Math. Sci. Hum.*, 76, 5-32.

- DESCLES J-P. (1989): "Informatique et sciences humaines", *L'informatique en Perspective*, Fall K. et Vignaux G. (Dir.), Presses de l'Université du Québec, pp. 141-160.
- DIDIER F. & ROUSSEL Ph. (1976): *Groupe Récursivité*, IREM de Marseille.
- DOUADY R. (1984): *Jeux de cadre et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques-une réalisation dans tout le cursus primaire*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris 7.
- DROUHARD J-Ph. (1986): *Test de niveau mathématique pour des étudiants de DEUG en novembre 1985 à Paris*, Rapport, U.F. de Didactique des Disciplines, Université Paris VII.
- DROUHARD J-Ph. (1987): "Approche linguistique d'une distinction intuitive: erreurs régulières vs sporadiques", in *Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique*, Comptendu de la 39^{ème} rencontre internationale de la CIEAEM, Les Editions de l'Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec.
- DUBOIS J. et al. (1973): *Dictionnaire de Linguistique*, Larousse.
- DUCROT O. & TODOROV T. (1972): *Dictionnaire Encyclopédique des sciences du langage*, Seuil.
- DUMONT B. (1989): *Questionnements et interprétation des erreurs en mathématiques*, Thèse d'Etat, Université Paris 7.
- EBALLARD J-C., LAIZE M. & LAURA M. (1982): *Simplifions...*, IREM Paris-Nord.
- ELIADE M. (1963): *Aspects du Mythe*, coll. Idées, Gallimard.
- FILLOY E. Y. (1987): "Modelling and teaching of algebra", *Actes du congrès international PME XI*, J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Dir.), Montréal.

Références

- FONG HO KEONG (1986): "Computer-Aided Diagnosis and remediation in fractions" *Actes du congrès international PME XI*, J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Dir.), Montréal.
- FREGE G. (1971): *Ecrits logiques et Philosophiques*, trad. Cl. Imbert, Seuil.
- FREUDENTHAL H. (1980): "Notation Mathématique", in *Encyclopædia Universalis*.
- GALLARDO A. & ROJANO T. (1990): "Avoidance and acknowledgement of negative numbers in the context of linear equations", *Actes du congrès international PME XIV*, Booker G., Cobb P. & de Mendicutti T. N. (Dir.), México.
- GAUTIER Cl. (1984): *Etude de quelques pratiques d'élèves autour de l'emploi de "suites d'opérations"*, Thèse de doctorat de 3^{ème} cycle, Université Paris 7.
- GLADKIJ A.V. & MEL'ČUK I. A. (1972): *Éléments de linguistique mathématique*, Dunod.
- GRANGER G-G. (1979): *Langages et épistémologie*, Coll. Horizons du Langage, Klincksieck.
- GROSS M. & LENTIN A. (1967): *Notions sur les Grammaires Formelles*, Gauthier-Villars¹.
- GROSS, M. (1977): *Grammaire transformationnelle du français, syntaxe du nom*, Larousse.
- HAGEGE Cl. (1976): *La grammaire générative Réflexions critiques*, Presses Universitaires de France, coll. le linguiste.
- HAIJÚ P. (1975): "L'arrière-fond linguistique de la parenté", in *Uráli népek, Nyelvrokonaink kultúrája és hagyományai*, Corvina kiadó (Budapest), Horvát (Roanne).
- HARLÉ A. (1984): *L'arithmétique des manuels de l'enseignement élémentaire français au début du XX^{ème} siècle*, Thèse de doctorat de 3^{ème} cycle, Université Paris 7.
- HARRIS Z.S. (1965): « Transformational theory », *Language* XLI 363-401.
- JOAB M., CAUZINILLE-MARMECHE E. & MATIHEU J. (1989): "NAIADE, un système d'aide au calcul algébrique", *Actes de la convention IA*, Paris.
- KIERAN C. (1984): "Cognitive mechanisms underlying the equation-solving errors of algebra novices", *Actes du congrès international PME VIII*.
- KIERAN C. (1985): "The equation-solving errors of novices and intermediate algebra students", *Actes du congrès international PME IX*, (Utrecht).
- KIERAN C. (1989): "The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective", *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, S. Wagner & C. Kieran (Dir.), Lawrence Erlbaum Associates & National Council of Teachers of Mathematics, Reston (Va).
- KIERAN C. (1991): "A Procedural-Structural Perspective on Algebra Research", *Actes du congrès international PME XV*, (Assisi), Furinghetti F. (Dir.), Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova, Italie.
- KIRSHNER D. (1987a): *Linguistic analysis of symbolic elementary algebra*, Unpublished Doctoral Dissertation, University of British Columbia.

1 épuisé

- KIRSHNER D. (1987b): "The Myth about Binary Representation in Algebra", *Actes du congrès international PME XV*, J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Dir.), Montréal.
- KIRSHNER D. (1989): "The Visual Syntax of Algebra", *Journal for Research in Mathematics Education*, 20/3, 276-287.
- KIRSHNER D. (1990): "Acquisition of Algebraic Grammar", *Actes du congrès international PME XIV*, Booker G., Cobb P. & de Mendicutti T. N. (Dir.), México.
- KRYGOWSKA A. Z. (1987): "Etude de certains types d'erreurs liés au langage symbolique de l'algèbre scolaire", in *Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique*, Compte-rendu de la 39^{ème} rencontre internationale de la CIEAEM, Editions de l'Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec.
- KUNKLE D. & BURCH Ch. I. (1984): "Symbolic Computer Algebra: The Classroom Computer Takes a Quantum Jump", *Mathematics Teacher*, March 1984, 209-214
- LABORDE C. (1982): *Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*, Thèse d'Etat, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- LACOMBE D. (1984): "Spécificités du langage mathématique et difficultés pédagogiques résultantes", in *Signes et Discours dans l'Education Scientifiques*, Actes des 9^{èmes} J.E.S., A. Giordan & J-L. Martinand (Dir.), UF de Didactique des Disciplines, Université Paris VII.
- LACOMBE D. (1987): "Commentaire sur l'enquête précédente", Actes du colloque "Orientation et échecs dans l'enseignement supérieur...", Université de Paris-Dauphine.
- LAMBEK J. (1958): "The Mathematics Sentences Structure", *American Math. Monthly*, 65, 154-165.
- LAMBEK J. (1961): "On the Calculus Syntactic Types", *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, Vol. XII, Am. Math. Soc., Providence, RI, 166-178.
- LARKIN (1989): "Robust Performance in Algebra: the Role of the Problem Representation", *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, S. Wagner & c. Kieran (Dir.), Lawrence Erlbaum Associates & National Council of Teachers of Mathematics, Reston (Va).
- LE LIONNAIS F. & BRETTE J. (1983): *Les nombres remarquables*, Hermann.
- LEGRAND M. (1988): "Genèse et étude sommaire d'une situation codicactique: le débat scientifique en situation d'enseignement", *Actes du premier colloque franco-allemand de Didactique des mathématiques et de l'informatique*, C. Laborde (Dir.), La Pensée Sauvage, Grenoble.
- LEONARD F. & SACKUR C. (1991): "Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2-3, 205-240.
- LEONARD F. & SACKUR-GRISVARD C. (1981): "Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs", *Bulletin de l'APMEP*, 59, 47-60.
- LINCHEVSKI L. & SFARD A. (1991): "Rules without Reasons as Processes Without Objects: the case of Equations and Inequalities", *Actes du congrès international PME XV*, (Assisi), Furinghetti F. (Dir.), Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova, Italie.
- LINCHEVSKI L. & VINNER S. (1990): "Embedded Figures and Structures of Algebraic Expressions", *Actes du congrès international PME XIV*, Booker G., Cobb P. & de Mendicutti T. N. (Dir.), México.

- LLIBOUTRY L. (1987): "Petit Glossaire Méthodologique", *Modèles et Simulation*, Actes des 9èmes J.E.S., Giordan A. & Martinand J.-L. (Dir.), Université Paris 7.
- MARGOLINAS Cl. (1989): *Le point de vue de la validation: essai d'analyse et de synthèse en Didactique des Mathématiques*, Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.
- MARGOLINAS Cl. (1992): "Éléments pour l'analyse du rôle du maître: les phases de conclusion", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, 113-158.
- MATTHEWS P. E. (1988): *Language Development and Mathematics Education, The Learning of Elementary Algebra*, Document polycopié distribué au congrès ICME-6 à Budapest (Topic Group 8, resp. C. Laborde), Mt Hood Community College, Insham (OR).
- MILNER J-C. (1984): "De l'inutilité des arbres en linguistique", *T.A. Informations*, 25/1, 5-12, repris dans la coll. ERA 642 (1985), Laboratoire de Linguistique Formelle, D.R.L., Université Paris 7.
- MONNET F. & PAQUELIER Y. (1991): "Les Imagiciels: une approche expérimentale en Mathématiques", *Aster*, N°13, INRP.
- MOREAU R. (1975): *La théorie des Langages*, Hachette.
- MOUNIER G. (1987): "Calcul Symbolique sur Micro-Ordinateur et Enseignement des Mathématiques", document polycopié.
- MOUNIER G. (1989): "Le filtrage", *Bulletin de liaison de la commission Inter-IREM Mathématiques et Intelligence Artificielle*, IREM de Toulouse.
- NICAUD J-F. (1987): *APLUSIX: un système expert de résolution pédagogique d'exercices d'algèbre*, Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud.

- NORMAN F. A. (1987): "A Psycholinguistic Perspective on Algebraic Language", *Actes du congrès international PME XV*, J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Dir.), Montréal.
- NWANA & COXHEAD (1988): "Towards an Intelligent Tutoring System for Fractions", *Actes du congrès "Systèmes d'EIAO"*, 403-408, Montréal.
- PAQUELIER Y. (1986): "Argumentation et situations didactiques: une démarche", *publication annuelle du séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, U.S.T.M.G, Grenoble.
- PAQUELIER Y. (1990): "Penser, en termes d'ouverture, la pratique des imagiciels dans l'enseignement des mathématiques", *Université d'été "pratique d'un enseignement ouvert en mathématiques" (Lille)*, CREEM, CNAM, Paris.
- PASTRE D. (1984): *MUSCADET, un système de démonstration automatique utilisant connaissances et métaconnaissances en mathématiques*, Thèse de Doctorat d'état, Université Paris VI.
- PELLAT J-Ch. (1988): "Indépendance ou interaction de l'écrit et de l'oral? Recensement critique des définitions du graphème", *Pour une théorie de la langue écrite*, Nina Catach (Dir.), Ed. du CNRS.
- PERRIN-GLORIAN M-J. (1992): *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté au niveau CM-6ème.*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris VII.
- PITRAT J. (1990): *Métaconnaissance Futur de l'Intelligence Artificielle*, Hermès.
- POURTOIS J-P. & DESMET H. (1988): *Epistémologie et instrumentation en sciences humaines*, Pierre Mardaga, Bruxelles.

- RAKOTOVOAVY F. (1983): *Difficultés linguistiques et pédagogiques soulevées par l'emploi, dans les textes mathématiques, de certains adjectifs marqueurs de variance*, Thèse de 3^{ème} cycle, Université Paris 7.
- ROBERT A. (1982): *L'acquisition des notions de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur*, Thèse d'état, Université Paris 7.
- RUWET N. (1967): *Introduction à la grammaire générative*, Plon, Paris.
- SACKUR-GRISVARD C. & LEONARD F. (1981): "Résurgence de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux positifs", *Bulletin de l'APMEP*, 340, 450-459.
- SCHIEBER S.M., FERNANDO C.N. PEREIRA, KARTTUNEN L. & KAY M. (1986): *A compilation of papers on Unification-Based Grammar Formalisms Center for the Study of language and Information*, Leland Stanford Junior University.
- SLEEMAN D., KELLY A. E., MARTINAK R., WARD R. D. & MOORE J. L. (1989): "Studies of Diagnosis and Remediation with High School Algebra Students", *Cognitive Science*, 13, 551-568.
- THOMPSON P. W. & THOMPSON A. G. (1987): "Computer representation of structures in algebra", *Actes du congrès international PME XI*, J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Dir.), Montréal.
- THOMPSON P. W. (1989): "Artificial Intelligence, Advanced Technology and Learning and Teaching Algebra", *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, S. Wagner & c. Kieran (Dir.), Lawrence Erlbaum Associates & National Council of Teachers of Mathematics, Reston (Va).

- THORPE J. A. (1989): "Algebra: What Should We Teach and How Should We Teach It?", *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, S. Wagner & c. Kieran (Dir.), Lawrence Erlbaum Associates & National Council of Teachers of Mathematics, Reston (Va).
- TONNELLE J. (1979): *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*, Mémoire de DEA de Didactique des Mathématiques, IREM de Bordeaux et IREM d'Aix-Marseille.
- VERGNAUD G. (1991): "La théorie des champs conceptuels", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2-3, 133-169.
- VERGNAUD G., CORTES A. & FAVRE-ARTIGUE P. (1988): "Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles: problèmes épistémologiques et didactiques", *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques - Actes du Colloque de Sèvres - Mai 87*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- VIVET M. (1984): *Expertise mathématique et pédagogique: CAMELIA, un logiciel pour raisonner et calculer*. Thèse d'Etat, Paris VI.

Bibliographie complémentaire concernant la DAP.

- ARSAC G. (1990): "les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France", *Recherches en didactique des mathématiques*, 9/3.
- ARSAC G., GERMAIN G. & MANTE M. (1988) *Problème ouvert et situation problème*, IREM de LYON, Université Lyon 1.
- BALACHEFF N. (1988): *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège*, Thèse d'Etat, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- BARTOLINI BUSSI M. G. (1989 a): "Evaluation of teaching sequences that include individual and collective activities: two case studies", *Proceedings of the first italian-german bilateral symposium on didactics of mathematics*, BAZZINI L. & STEINER H.-G. (Dir.), Pavie, (Italie).
- BARTOLINI BUSSI M. G. (1989 b): "La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica", *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate*, 12 (1).
- BARTOLINI BUSSI M. G. (1989 c): "La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica: analisi di due casi", *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate*, 12 (5).
- BARTOLINI BUSSI M. G. (1990): "Mathematics Knowledge as Collective Enterprise", *IVth SCTP*, Université de Modène, (Italie).
- DROUHARD J-Ph. & PAQUELIER Y. (1986): « Linguistique et didactique de l'algèbre élémentaire: une expérimentation au C.N.A.M. », *Actes de la IVème école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique*, IREM Paris 7.
- GATTUSO L. & LACASSE R (1989): *Les maths, Le coeur et la raison: un modèle d'intervention dans une classe de mathématique au collégial, cégep du Vieux-Montréal*, Montréal.
- HOYLES C. (1985): "What is the point of group discussion in mathematics?", *Educational Studies in Mathematics*, 16 (1985).
- LEGRAND M. (1989): *La crise de l'enseignement: un problème de qualité*, Aleas Ed., Lyon.
- LEGRAND M. (1990): "Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique", *Recherches en didactique des mathématiques*, 9/3.
- LEGRAND M. et al. (1987): Introduction au débat scientifique dans un cours de première année du DEUG A, *Actes du colloque "Orientation et échecs dans l'enseignement supérieur..."*, Université Paris-Dauphine.
- LEGRAND M., GRENIER D., RICHARD F. (1985): Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A 1ère année, *Cahier de didactique des mathématiques*, N°22, IREM Paris Sud.
- SCHOENFELD Alan H. (1985): "Metacognitive and Epistemological Issues in Mathematical Understanding", in *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspective*, E.A. SILVER (Dir.), pp. 361-380, Lawrence Erlbaum, Hillsdale (NJ), London.
- WATZLAVICK P., HELMICK BEAVIN J. et JACKSON, DON D. (1972): *Une logique de la communication*, Ed. du Seuil (Coll. "Points"), Paris.

Liste des manuels relevés en référence

- [BZ4] BAREIL H. & ZEHREN Chr. (1983): *Mathématiques 4^{ème}*, Hachette.
- [CO3] CORRIEU L. et al. (1980) *Mathématiques classe de 3^{ème}*, Fernand Nathan.
- [CLA] CLAVIER Y. et al. (1990): *Enseigner les mathématiques au Cours Moyen*, Coll. "Objectif Calcul", CM2, livre du maître, Hatier.
- [DIX] DIXMIER J. (1976): *Cours de Mathématiques du premier cycle, première année*, Gauthier-Villars.
- [DL4] Collection "faire des mathématiques" (1988): DELEDICQ A., LASSAVE C. & MISSEWARD C. & D. (1988): *Mathématiques 4^{ème}*.
- [HL1] HOCQUENGHEM S. & LORIERES P. (1983): *Exercices résolus d'Eléments de Mathématiques*, tome I, Atelier Alpha Bleue.
- [MI4] Collection MISTRAL (1988): FAUVERGUE P., CUREL P., RIEU R. & SARNETTE A.: *Mathématiques 4^{ème}*, ISTRAL, Casteilla.
- [MO3] Collection MONGE (1980): MONGE M., BEGOT M. & AUDOUIN M-Cl.: *Mathématiques 3^{ème}*, Belin.
- [MO4] Collection MONGE (1979): MONGE M., BEGOT M. & AUDOUIN M-Cl.: *Mathématiques 4^{ème}*, Belin.
- [MO5] Collection MONGE (1978): MONGE M., BEGOT M. & AUDOUIN M-Cl.: *Mathématiques 5^{ème}*, Belin.
- [MO6] Collection MONGE (1977): MONGE M., BEGOT M. & AUDOUIN M-Cl.: *Mathématiques 6^{ème}*, Belin.
- [PEM] COLLECTIF (1980): *Petite Encyclopédie des Mathématiques*.

- [QU6] Collection QUINET (1966): QUINET J., *Cours élémentaire de Mathématiques Supérieures*, Tome VI, Dunod.

