

# THESE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE  
JOSEPH FOURIER – GRENOBLE 1

SPECIALITE : DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Présentée par Ghislaine GUEUDET-CHARTIER

SUJET DE LA THESE :

Rôle du géométrique dans l'enseignement et  
l'apprentissage de l'algèbre linéaire.

# ANNEXES

JURY :

Maria Alessandra MARIOTTI (Rapportrice)

Aline ROBERT (Rapportrice)

Colette LABORDE

Daniel PERRIN

Jean-Luc DORIER (Directeur de thèse)

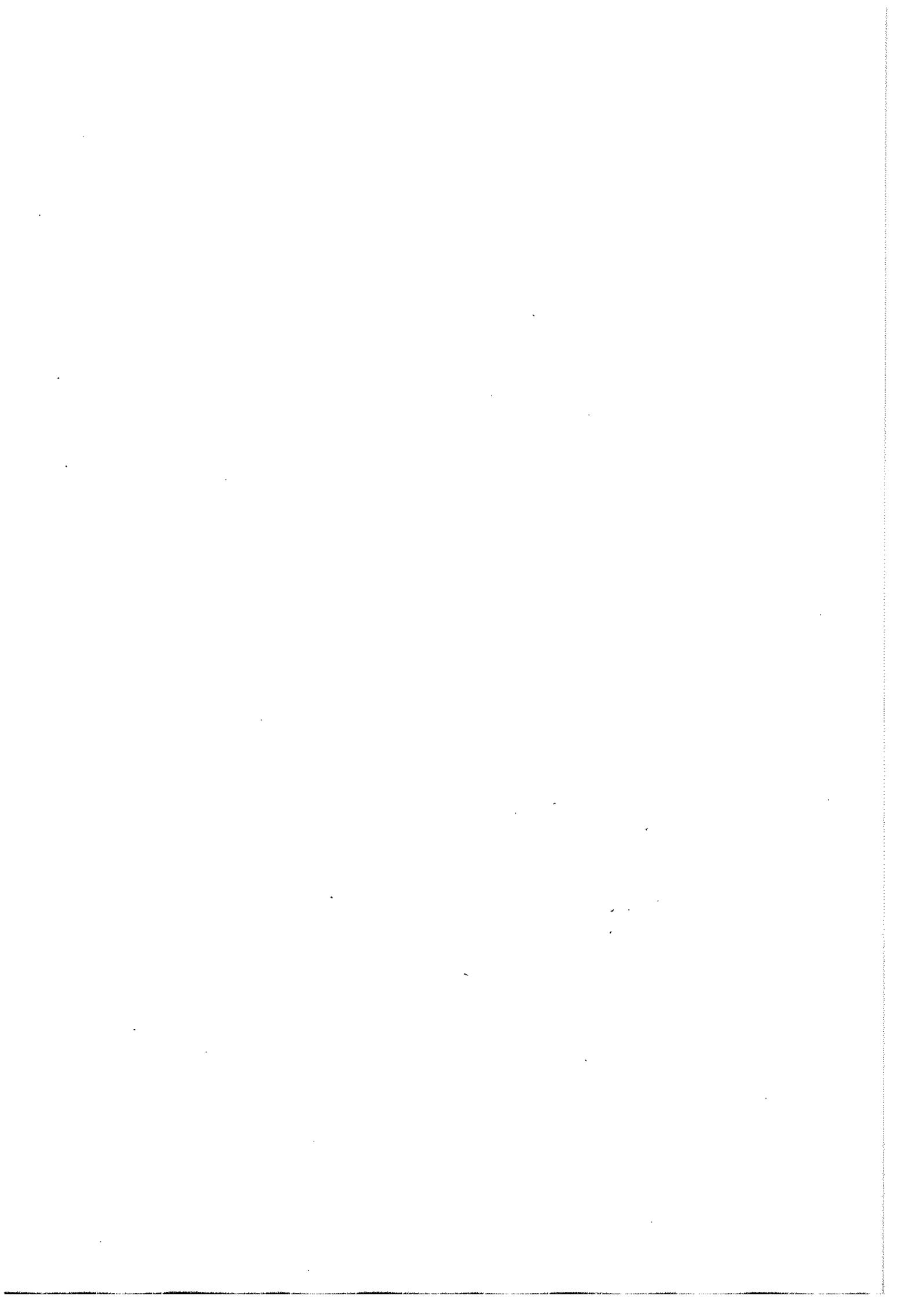
Thèse préparée au sein de l'équipe de  
**Didactique Des Mathématiques, Laboratoire Leibniz - IMAG**  
Avec le soutien du  
**Laboratoire de didactique des mathématiques de l'Université de Rennes 1**



# **ANNEXE 1**

## **DETAIL DES**

### **PRAXEOLOGIES EN DEUG**



Dans cette annexe nous reprenons et complétons l'étude des techniques et technologies associées aux types de tâches évoqués au chapitre 4.

**T<sub>libre</sub> : déterminer si une famille est libre.**

Les techniques employées varieront ensuite en fonction de l'espace étudié ; nous allons examiner en détail quelques exemples.

Exercice D1

Déterminer si  $n$  vecteurs  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  de  $\mathbb{R}^p$  forment une famille libre de  $\mathbb{R}^p$ .

Il est possible d'utiliser plusieurs techniques pour déterminer si la famille est libre.

a) Technique  $\tau_S$  : emploi d'un système linéaire.

Cette technique consiste d'abord à écrire la définition d'une famille libre :

la famille  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  est libre si, étant donnés  $n$  réels  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , l'égalité :

(E)  $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = 0$  implique  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ .

(E) donne un système linéaire, à  $p$  équations et  $n$  inconnues ; il s'agit alors de résoudre ce système pour déterminer s'il admet des solutions non nulles.

Par exemple pour les vecteurs :  $a_1=(1,0,0,1)$   $a_2=(0,1,0,0)$   $a_3=(1,1,1,1)$   $a_4=(1,1,1,0)$  dans  $\mathbb{R}^4$ , on obtient le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système (elle correspond à l'emploi d'une autre technique, comme la méthode de Gauss, sur laquelle nous ne nous attarderons pas) montre que la seule solution est  $(0,0,0,0)$ , la famille est donc libre.

En revanche pour la famille :  $a_1=(1,1,2,1)$   $a_2=(1,0,0,2)$   $a_3=(2,3,4,3)$   $a_4=(0,3,2,1)$ , la résolution du système correspondant montre qu'il existe des solutions non nulles ; cette famille est donc liée.

La technique  $\tau_S$  comporte plusieurs parties : traduction de la définition, résolution du système, et conclusion ; on peut noter que les parties "traduction de la définition" et "conclusion" ont une fonction technologique.

A cette technique correspond une technologie comportant deux aspects : la définition d'une famille libre, et la technologie relative à la méthode de Gauss, ou à toute autre méthode de résolution de système employée ici.

b) Techniques  $\tau_{MC}$  et  $\tau_{ML}$  : emploi d'une matrice

Ces techniques consistent à écrire la matrice dont les colonnes sont les vecteurs  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , puis à échelonner celle-ci selon les lignes ou les colonnes.

La famille est libre si la matrice ne comporte pas de colonnes nulles (échelonnement selon les colonnes) ou de lignes nulles (échelonnement selon les lignes).

Ainsi , pour les vecteurs de l'exemple précédent :  $a_1=(1,0,0,1)$   $a_2=(0,1,0,0)$   $a_3=(1,1,1,1)$   $a_4=(1,1,1,0)$  , on a la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Examinons d'abord l'échelonnement selon les colonnes, c'est à dire la mise en œuvre de la technique  $\tau_{MC}$ .

En appliquant la méthode de Gauss, sans modifier l'ordre des vecteurs, on obtient la matrice :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La technique  $\tau_{MC}$  consiste à effectuer des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice, jusqu'à obtenir une matrice échelonnée.

La technologie associée repose sur le fait que, le rang d'une matrice étant défini comme la dimension du sous-espace engendré par ses vecteurs colonnes, celui-ci n'est pas modifié par des opérations élémentaires sur les colonnes de la matrice.

D'autre part elle suppose connue la définition de matrice échelonnée, et le fait que le rang d'une matrice échelonnée selon les colonnes est égal au nombre de colonnes non nulles de la matrice.

La matrice est ici de rang  $n(=4)$ , et donc le sous-espace engendré par ses colonnes est de dimension  $n$ .

L'échelonnement selon les lignes : technique  $\tau_{ML}$ , est absolument identique à celui selon les colonnes, en termes de difficulté du moins.

Il peut correspondre à deux technologies distinctes :

- L'une reposant sur la résolution et les propriétés d'un système linéaire  $n \times n$  ; il s'agit du système qui est écrit pour la technique  $\tau_S$ , et qui reste implicite ici. Lorsque la matrice de ce système est de rang  $n$ , le système est de Cramer, il a donc une solution unique qui sera nécessairement  $(0,0,\dots,0)$  ; dans le cas contraire, il admet d'autres solutions, ce qui permet de conclure que la famille est liée.

Cette technologie peut également correspondre à la technique  $\tau_{MC}$  ; ceci sera cependant plus rare, car l'idée sous-jacente de système conduit plus naturellement à des manipulations de lignes.

- L'autre technologie possible repose sur la propriété : le rang de la famille des vecteurs colonnes d'une matrice est égal au rang de la famille de ses vecteurs lignes. Cette technologie correspond à une théorie de niveau beaucoup plus élevé que la précédente, le théorème sous-jacent étant l'égalité entre le rang d'une matrice et celui de sa transposée.

On peut noter que ce changement de niveau dans le bloc technologico-théorique n'affecte pas la technique.

### c) Technique $\tau_D$ : Calcul d'un déterminant.

Cette technique consiste à calculer le déterminant de la matrice ci-dessus ; soit celui-ci est non nul, et la famille est libre, soit il est nul, et la famille est liée.

Il y a alors deux parties dans la technologie associée : celle qui fournit la technique de calcul du déterminant, et celle qui repose sur la propriété : une famille ("carrée") est libre si et seulement si son déterminant est non nul ; ces deux propriétés sont issues de la théorie des formes multilinéaires alternées.

L'exemple de l'exercice D1 est central pour le type de tâches  $T_{\text{libre}}$  : en effet, quelle que soit la nature de l'espace considéré, on peut toujours se ramener à  $\mathbb{R}^n$  par l'isomorphisme canonique. Toutes les techniques rencontrées ci-dessus peuvent donc être employées dans tout espace de dimension finie.

Cependant, il existe des techniques spécifiques selon les objets étudiés : polynômes, suites, fonctions... Celles-ci n'étant pas en rapport avec la géométrie, nous nous contenterons de les mentionner sans entrer dans le détail.

#### Exercice D2

Déterminer si  $p$  polynômes à coefficients réels de degré  $\leq n$  donnés forment une famille libre de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Une première technique consiste à traduire la définition de famille libre, et à employer l'unicité des coefficients d'un polynôme, qui fournit un système linéaire ; on retrouve ici la technique  $\tau_S$ , soit sensiblement la même chose que si l'on avait employé l'isomorphisme avec  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Une autre technique, applicable à toute famille de fonctions, consiste à traduire la définition de famille libre, et à attribuer à  $x$  (en considérant la fonction polynôme associée)  $n+1$  valeurs distinctes ; on obtient de même un système linéaire.

Une variante de cette technique consiste à utiliser uniquement la valeur 0 et à effectuer des dérivées successives.

Pour certains cas particuliers de familles de polynômes, on peut également employer les propriétés : une famille de polynômes de degrés (ou de valuations) tous distincts est libre.

**Type de tâches  $T_{\text{base}}$  : déterminer si des vecteurs donnés forment une base d'un espace vectoriel.**

Nous allons étudier ici le cas d'un espace vectoriel qui n'est pas a priori un espace euclidien.

Cette tâche sera effectuée différemment selon que l'on connaît, ou non, la dimension de l'espace.

Si la dimension est connue (et finie), alors soit le nombre de vecteurs de la famille est différent de cette dimension et il suffit de faire cette remarque ; soit ce nombre est égal à la dimension, et il suffit de déterminer si la famille est libre, ou éventuellement génératrice (ce dernier cas de figure étant beaucoup plus rare) : on est donc conduit à effectuer une sous-tâche du type  $T_{\text{libre}}$ .

Il est beaucoup plus rare, quand la dimension de l'espace est connue, de montrer qu'une famille est génératrice<sup>1</sup>.

Ceci ne se présente que lors de la première rencontre avec la notion de famille

génératrice ; on observe alors le type de tâches : "Montrer qu'une famille de vecteurs donnés est une famille génératrice pour un sous-espace donné", comme dans le cas suivant :

Exercice D3 (Grifone p.35)

Montrer que la famille  $\{v_1, v_2\}$  où  $v_1=(1,2)$ ,  $v_2=(-1,1)$  engendre  $\mathbb{R}^2$ . Est-elle une base ?

Dans ce cas la technique associée consiste à résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a \\ 2x_1 + x_2 = b \end{cases} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des réels quelconques.}$$

La technologie correspondante repose sur la définition de famille génératrice : une famille engendre un espace si celui-ci est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de cette famille.

Notons que, généralement, la famille considérée est constituée de vecteurs appartenant à l'espace ; par stabilité, toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de la famille appartiennent aussi à l'espace et il suffit donc de vérifier que tout vecteur de l'espace est combinaison linéaire des vecteurs de la famille donnée.

On demande rarement de justifier que les vecteurs de la famille appartiennent bien à l'espace, qu'il s'agisse d'ailleurs de montrer que la famille est génératrice, ou que c'est une base ; ceci est une importante source d'erreurs, lorsque les vecteurs proposés n'appartiennent pas à l'espace (par exemple pour l'espace des polynômes de degré  $\leq 2$  s'annulant en 1, certains étudiants vont affirmer que  $1, X, X^2$  en est une famille génératrice).

---

<sup>1</sup>Même si, comme nous l'avons vu ci-dessus, l'emploi de la technique  $\tau_{\text{MC}}$  est associé à une technologie reposant sur la notion de famille génératrice ; cette notion reste implicite.

Une fois que l'on a montré que le système admettait des solutions, quelles que soient les valeurs de  $a$  et  $b$ , on a prouvé que la famille était génératrice ; on peut alors conclure qu'elle forme une base de  $\mathbb{R}^2$ , soit en mentionnant l'unicité des solutions du système, soit en s'appuyant sur le fait qu'il s'agit d'une famille génératrice dont le cardinal est égal à la dimension de l'espace.

Il est également possible de résoudre cet exercice en notant que, comme la famille est libre, elle forme une base de  $\mathbb{R}^2$ , et donc en particulier, elle est génératrice ; mais ce n'est évidemment pas la technique attendue ici.

### **$T_{\text{basesev}}$ : déterminer une base d'un sous-espace**

Les techniques employées pour effectuer une tâche de ce type varieront selon la nature des objets considérés, et la manière dont le sous-espace est caractérisé ; nous allons examiner les principaux cas.

- *Déterminer une base d'un sous-espace donné par une famille génératrice.*

Dans le cas d'un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$ , les techniques employées sont des prolongements de celles que nous avons rencontrées pour le type de tâche  $T_{\text{base}}$ .

Une base du sous-espace peut être extraite de la famille génératrice en effectuant une tâche du type  $T_{\text{libre}}$  : déterminer si la famille est libre, puis en supprimant ceux des vecteurs qui s'écrivent comme combinaison linéaire des autres.

Ainsi, il est possible d'employer une technique du type  $\tau_S$  :

écriture de la définition de famille libre, traduction sous forme de système linéaire et résolution de ce système.

Si le système n'admet que la solution nulle, la famille est libre et est donc une base du sous-espace qu'elle engendre ; dans ce cas on est ramené à une tâche du type  $T_{\text{base}}$ .

Si le système admet des solutions non nulles, on est alors amené à effectuer une tâche supplémentaire, avec une nouvelle technique. La dimension de l'ensemble solution du système donne le nombre de vecteurs à supprimer (et le rang de la famille) ; on écrit alors les relations de dépendance linéaire trouvées, et on choisit les vecteurs qui peuvent être enlevés sans modifier le sous-espace engendré.

La technologie associée repose sur la notion de rang d'une famille de vecteurs, et sur la propriété : on ne modifie pas le sous-espace engendré en ajoutant ou en enlevant à une famille de vecteurs un vecteur qui est combinaison linéaire des autres.

Mais on utilisera le plus souvent une technique matricielle, du type  $\tau_{MC}$  ou  $\tau_{ML}$  ; celle-ci donne directement une base du sous-espace engendré, par lecture des colonnes non nulles de la matrice échelonnée dans le cas de  $\tau_{MC}$ , ou en retenant les vecteurs de la famille initiale qui correspondent aux pivots de la matrice finale dans le cas de  $\tau_{ML}$ .

On peut également employer une technique de type  $\tau_D$  avec un déterminant : si le déterminant dont les colonnes sont les vecteurs de la famille est non nul, cette famille est une base (tâche

de type  $T_{\text{base}}$ ) ; sinon, on peut chercher un déterminant non nul extrait, de taille maximale ; les colonnes correspondantes donnent la base cherchée.

Dans un cadre autre que  $\mathbb{R}^n$ , on peut soit se ramener à  $\mathbb{R}^n$  par l'isomorphisme canonique, soit éliminer de la famille les vecteurs qui sont combinaison linéaire des autres, les relations de dépendance linéaire ayant été constatées directement ou par résolution d'un système linéaire.

- *Déterminer une base d'un sous-espace (cadre autre que  $\mathbb{R}^n$ ), donné par une propriété caractéristique de ses éléments .*

Il peut s'agir de matrices symétriques, de polynômes qui s'annulent en 1...

Il faut alors déterminer d'abord une famille génératrice de ce sous-espace, puis en déduire une base.

- *Déterminer une base d'un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  donné par une représentation paramétrique.*

La technique consiste ici à transformer la représentation paramétrique de manière à faire apparaître les éléments du sous-espace comme combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs donnés ; nous noterons cette technique  $\tau_{\text{CL}}$ .

La famille trouvée est alors une famille génératrice du sous-espace, et on peut appliquer les techniques évoquées ci-dessus pour en déduire une base (s'il est clair que la famille est libre, il suffit alors de le justifier).

- *Déterminer une base d'un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  donné par des équations cartésiennes.*

La technique consiste alors à se ramener à une représentation paramétrique ; on retrouve ainsi la tâche ci-dessus.

Cette technique se divise donc en deux sous-techniques : passage du cartésien au paramétrique, que nous noterons  $\tau_{\text{CP}}$ , qui sera suivie de  $\tau_{\text{CL}}$ .

### **$T_{\text{baseorth}}$ : montrer qu'une famille de vecteurs donnés forme une base orthogonale ou orthonormale d'un espace euclidien.**

Nous avons déjà analysé au chapitre 4 des techniques et technologies liées à cette tâche. Nous signalons ici quelques cas particuliers, intéressants en ce qui concerne le lien avec la géométrie du secondaire.

L'exercice suivant est distinct de ceux que nous avons vus auparavant car il porte sur des vecteurs non explicités, dont seule une propriété va permettre de calculer les produits scalaires ; de plus on ne sait pas au départ si le cardinal de la famille est égal à la dimension de l'espace. Cet exercice conduit notamment à une tâche du type  $T_{\text{baseorth}}$ , mais aussi à d'autres tâches ; il présente un lien important avec la géométrie.

Exercice D4 (Rennes, DEUG2)

Soit  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  une famille de  $p$  vecteurs unitaires d'un espace euclidien  $E$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de dimension  $n$ .

Montrer qu'elle forme une base orthonormée si et seulement si, pour tout  $x$  de  $E$ ,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle^2 .$$

Il faut ici dans un premier temps montrer qu'une base orthonormée vérifie cette propriété.

On décompose un vecteur selon la base orthonormée donnée :  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ , et on utilise la

propriété : si  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base orthonormée, les coordonnées d'un vecteur  $x$  sur cette base vérifient  $\lambda_i = \langle x, e_i \rangle$  (conséquence des propriétés du produit scalaire ; voir à ce sujet l'étude des tâches portant sur la décomposition d'un vecteur dans une base).

Or, par le théorème de Pythagore, on a  $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2$ , d'où la propriété voulue.

Cette partie de l'exercice apparaît comme une généralisation "naturelle" de propriétés géométriques connues dès le secondaire : dans une base orthonormée, les coordonnées d'un vecteur sont les produits scalaires de ce vecteur avec les vecteurs de base, et le carré de la norme d'un vecteur est égal aux sommes des carrés de ses coordonnées.

La partie réciproque de l'exercice est une tâche du type  $T_{\text{baseorth}}$  ; elle conduit d'abord à effectuer une tâche du type : montrer qu'une famille est orthogonale.

Cependant les vecteurs ne sont pas donnés par des coordonnées, mais simplement caractérisés par une propriété ; la tâche correspondante est donc en dehors de la portée de la technique  $\tau_{\text{PS}}$ .

Ici, il faut démontrer que les produits scalaires de vecteurs deux à deux distincts sont nuls en utilisant la propriété prise en hypothèse, et non en effectuant un simple calcul comme dans la technique  $\tau_{\text{PS}}$ . Il faut en effet écrire :

$$1 = \|e_i\|^2 = \sum_{j=1}^p \langle e_i, e_j \rangle^2 = \langle e_i, e_i \rangle + \sum_{j \neq i} \langle e_i, e_j \rangle^2, \text{ ce qui montre la nullité des produits } \langle e_i, e_j \rangle.$$

Il faut ensuite montrer de plus que le système est générateur, en prouvant que  $s_j = \sum_{j=1}^p \langle x, e_j \rangle e_j$ ,  $x$  et  $y$  coïncident.

## **ANNEXE 2**

### **TEXTE DU QUESTIONNAIRE AUX**

### **ENSEIGNANTS**





**I Dans les exercices :**

1) L'exercice suivant est fréquemment posé à des étudiants de fin de deuxième année.

Soit  $E$  un espace euclidien, et  $p$  un projecteur de  $E$ .  
 Montrer que  $p$  est un projecteur orthogonal si et seulement si pour tout  $x$  élément de  $E$ ,  $\|x\| \geq \|p(x)\|$ .

La partie  $p$  orthogonal implique  $\|x\| \geq \|p(x)\|$  est immédiate ; pour la réciproque, un enseignant peut notamment proposer à ses étudiants l'une des deux solutions suivantes, consistant à montrer que si  $p$  n'est pas orthogonal, il existe  $x$  appartenant à  $E$  et vérifiant :  $\|p(x)\| > \|x\|$ .

Solution 1 :

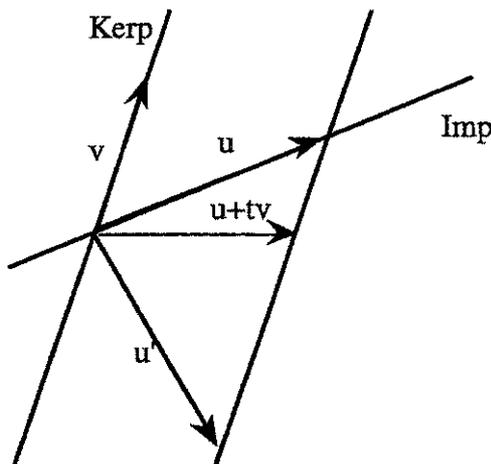
D'après l'hypothèse  $p$  non orthogonal, il existe  $u$  appartenant à  $\text{Imp}$  et  $v$  appartenant à  $\text{Kerp}$  tels que  $\langle u|v \rangle \neq 0$ .

Cherchons  $x$  sous la forme  $u+tv$  ; en effet, un tel vecteur vérifie  $p(x)=u$ , et il suffit donc de montrer qu'il existe des valeurs de  $t$  telles que  $\|u\| > \|u+tv\|$ .

On a :  $\langle u+tv|u+tv \rangle = \|u\|^2 + 2t\langle u|v \rangle + t^2\|v\|^2$ .

Supposons  $\langle u|v \rangle > 0$ , alors, si  $t < 0$  et  $2\langle u|v \rangle + t\|v\|^2 > 0$ , c'est à dire pour  $t$  tel que :

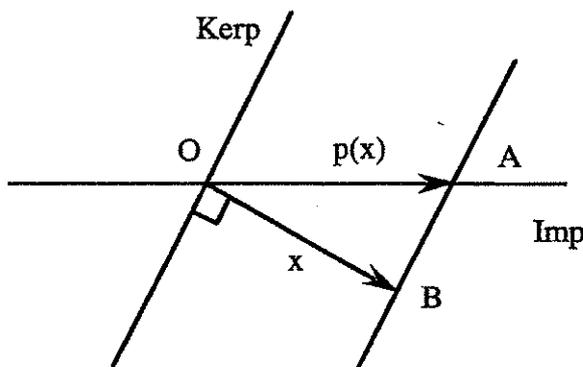
$0 > t > -2 \frac{\langle u|v \rangle}{\|v\|^2}$ , le vecteur  $x=u+tv$  vérifie bien  $\|p(x)\| > \|x\|$  (un argument semblable montre l'existence de  $x$  dans le cas  $\langle u|v \rangle < 0$ ).



Interprétation géométrique :

Tous les vecteurs  $u+tv$  se projettent en  $u$ .  
 Or ceux situés entre  $u$  et  $u'$  sont de norme strictement inférieure à la norme de  $u$ .

Solution 2 :



Soit  $x$  appartenant à l'orthogonal de  $\text{Kerp}$ , et n'appartenant pas à  $\text{Imp}$  (ceci est possible, puisque  $p$  n'est pas un projecteur orthogonal).

Alors le triangle  $OAB$  est rectangle, de côté  $x$  et d'hypoténuse  $p(x)$ .

D'après le théorème de Pythagore, on a donc  $\|p(x)\| > \|x\|$ .

a) Lequel de ces deux corrigés préféreriez-vous proposer à des étudiants de deuxième année et pourquoi ?

b) Que pensez-vous de l'usage du dessin dans chaque solution ?

2) L'exercice suivant est fréquemment posé en première année d'université.

Si les vecteurs  $x, y, z$  sont deux à deux non colinéaires, peut-on affirmer que la famille  $\{x, y, z\}$  est libre ?

a) Cet exercice est posé lors d'une séance de travaux dirigés.

Un étudiant vous appelle, et vous dit qu'il est persuadé que la réponse est affirmative, mais qu'il ne parvient pas à le démontrer.

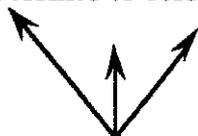
- Que lui dites-vous (précisément) pour l'aider à poursuivre ?

- Expliquez les raisons de votre choix pour l'aide ci-dessus :

b) Le même exercice est posé dans un contrôle. Sur sa copie, l'étudiant a écrit :

"Non. Les vecteurs dessinés ci-dessous donnent un contre-exemple."

et il a dessiné :



- Quelle note lui mettez-vous, sur cinq points ?

- Quelles remarques écrivez-vous sur la copie ?

- Expliquez ici la note choisie et les remarques mentionnées ci-dessus :

## II Géométrie et cours d'algèbre linéaire ou bilinéaire

### 1) Utilisation de la "géométrie du lycée" en algèbre linéaire ou bilinéaire : exemple des notions de base et de projection

#### a) Les bases

Au lycée, les élèves rencontrent les termes de "base" et "base orthogonale" dans le cadre du cours de géométrie du plan et de l'espace (Pour la filière S).

Indiquez, en cochant la case correspondante, si vous êtes d'accord avec l'affirmation suivante :

Certaines connaissances, propriétés, pratiques, savoirs-faire... rencontrées au lycée à propos des bases et des bases orthogonales ne peuvent être utilisés en DEUG dans le cours d'algèbre linéaire ou bilinéaire.      oui          non   

Si vous avez répondu non, explicitez ci-dessous votre point de vue.

Si vous avez répondu oui, citez ci-dessous certaines des connaissances, propriétés, pratiques, savoirs-faire relatifs aux bases et vus au lycée qui vous semblent pouvoir être utilisés en DEUG dans le cours d'algèbre linéaire ou bilinéaire, en expliquant comment et dans quels contextes.

b) Les projections

Au lycée, les élèves rencontrent les termes de "projection" et "projection orthogonale" dans le cadre du cours de géométrie du plan et de l'espace (Pour la filière S).

Indiquez, en cochant la case correspondante, si vous êtes d'accord avec l'affirmation suivante :

Certaines connaissances, propriétés, pratiques, savoirs-faire... rencontrées au lycée à propos des bases et des bases orthogonales ne peuvent être utilisés en DEUG dans le cours d'algèbre linéaire ou bilinéaire.      oui         non  

Si vous avez répondu non, explicitez ci-dessous votre point de vue.

Si vous avez répondu oui, citez ci-dessous certaines des connaissances, propriétés, pratiques, savoirs-faire relatifs aux projections et vus au lycée qui vous semblent pouvoir être utilisés en DEUG dans le cours d'algèbre linéaire ou bilinéaire, en expliquant comment et dans quels contextes.

## 2) Articulation géométrie-algèbre linéaire

a) Le tableau ci-dessous contient une liste de savoirs appartenant au domaine de la géométrie affine ou affine euclidienne en dimension inférieure ou égale à trois.

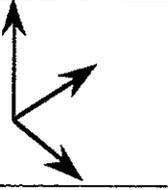
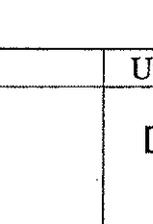
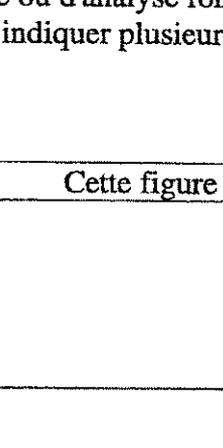
Pour chacun d'entre eux, indiquez en cochant la case correspondante s'il doit être vu avant le cours d'algèbre linéaire (ou bilinéaire s'il s'agit de géométrie affine euclidienne), être intégré dans ce cours, ou être vu après l'algèbre linéaire ou bilinéaire, indépendamment des contraintes du programme habituel du secondaire et du supérieur (si vous pensez que ce savoir ne doit pas être vu, ne cochez aucune case de la ligne correspondante ; si vous pensez qu'il doit être vu plusieurs fois, cochez autant de cases qu'il est nécessaire) .

	Savoir	Avant l'algèbre linéaire ou bilinéaire	Fait partie de l'algèbre linéaire ou bilinéaire	Après l'algèbre linéaire ou bilinéaire
S1	Trois vecteurs (deux à deux non colinéaires) étant dessinés sur une feuille, écrire l'un d'eux comme combinaison linéaire des deux autres (en donnant des valeurs approchées des coefficients avec une calculatrice).			
S2	Déterminer une équation paramétrique d'un plan donné par un point et deux vecteurs et en déduire une équation cartésienne de ce plan.			
S3	Déterminer si trois vecteurs de l'espace sont coplanaires.			
S4	Déterminer l'expression analytique d'une symétrie du plan par rapport à une droite $D_1$ parallèlement à une droite $D_2$ .			
S5	Déterminer la composée de deux rotations du plan de centres distincts.			
S6	Déterminer l'équation réduite d'une conique.			

b) Expliciter votre choix concernant au moins deux des item précédents.

**III A propos des figures :**

1) Pour chacune des figures ci-dessous, indiquez en cochant la case correspondante si vous l'utilisez dans votre cours d'algèbre linéaire, bilinéaire ou d'analyse fonctionnelle, et si oui, pour illustrer quelle notion ou propriété (vous pouvez indiquer plusieurs interprétations pour une même figure).

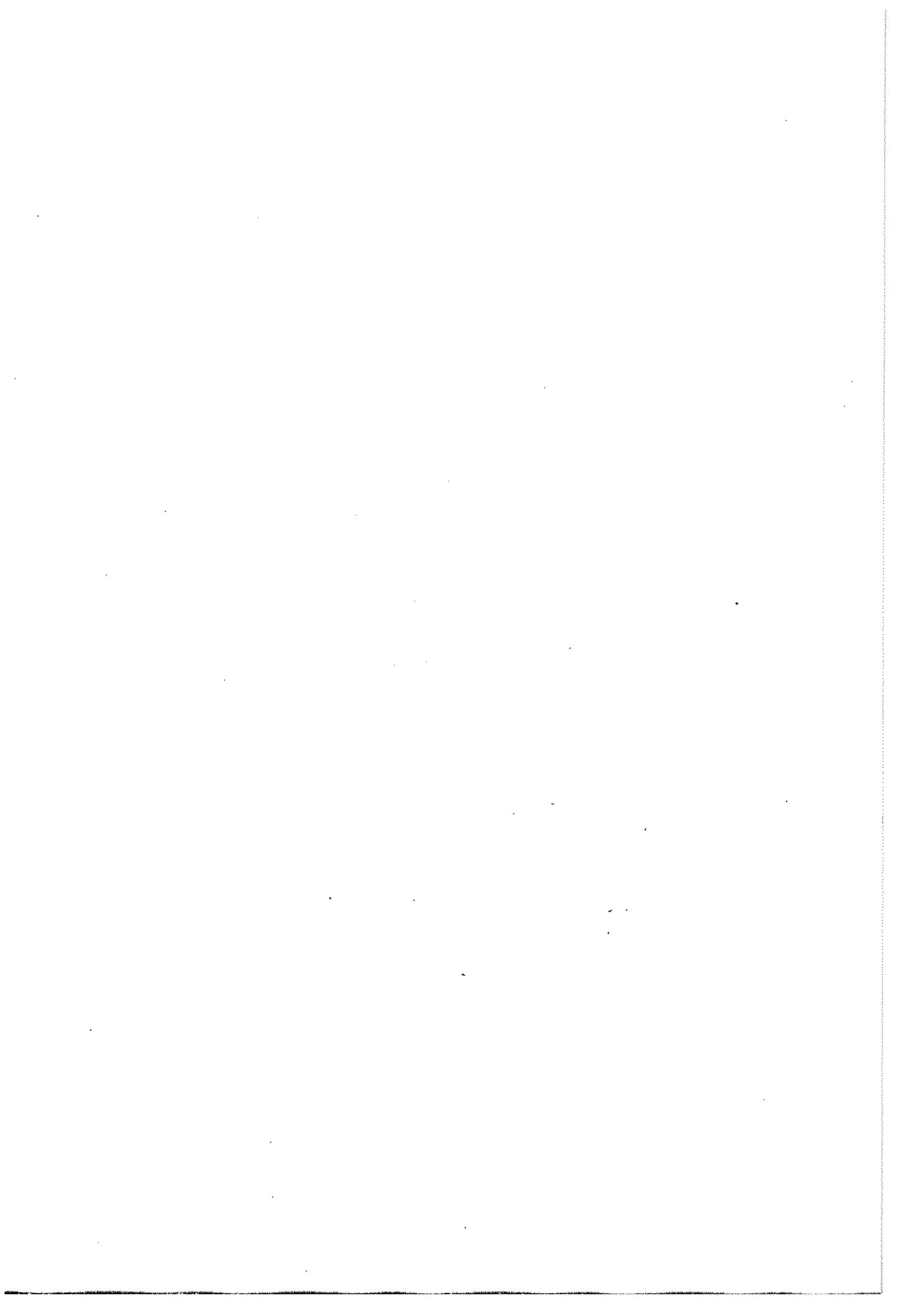
Figure	Utilisée	Cette figure illustre
	<input type="checkbox"/> oui  <input type="checkbox"/> non	
	<input type="checkbox"/> oui  <input type="checkbox"/> non	
	<input type="checkbox"/> oui  <input type="checkbox"/> non	

2) Si vous utilisez de plus d'autres figures, dessinez-les dans le tableau ci-dessous en indiquant ce qu'elles illustrent :

Figure	Cette figure illustre

**IV Commentaires éventuels :**

Vous pouvez ici et au verso vos commentaires sur ce questionnaire...

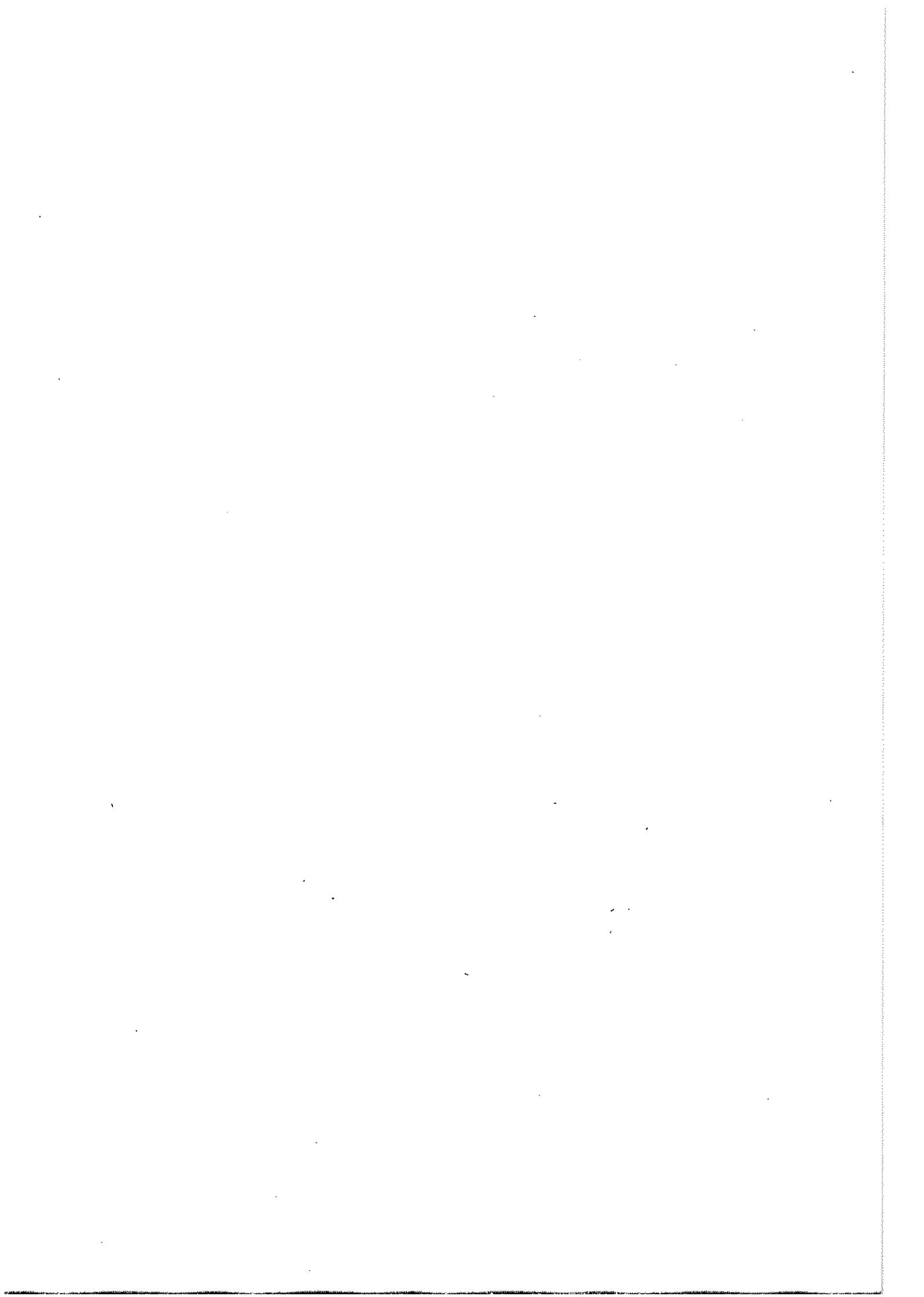


# **ANNEXE 3**

## **DESSINS**

### **PROPOSES PAR**

### **LES ENSEIGNANTS**



Nous présentons ici l'ensemble des réponses faites par les enseignants qui ont proposé des dessins à la question III 2) du questionnaire.

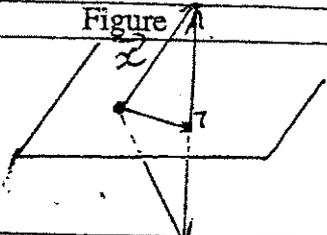
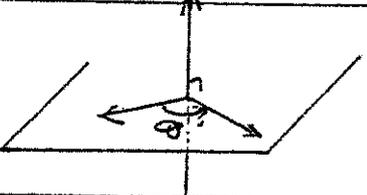
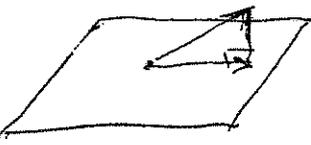
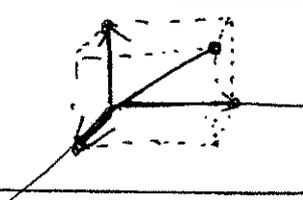
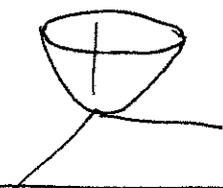
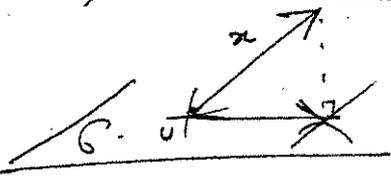
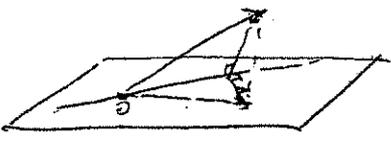
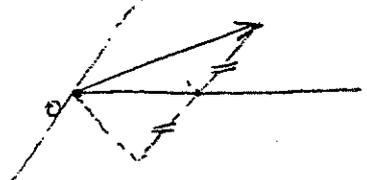
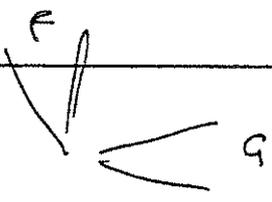
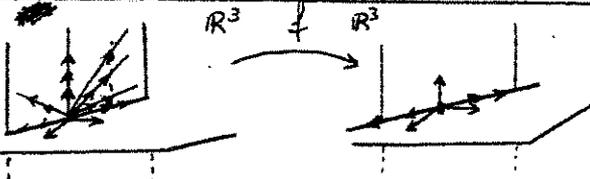
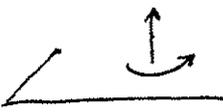
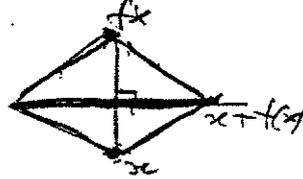
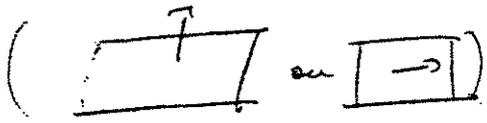
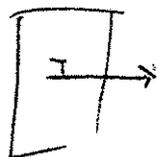
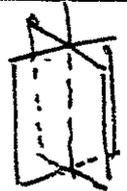
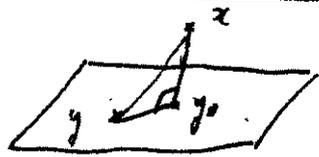
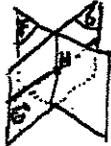
<p>Figure</p> 	<p>Cette figure illustre</p> <p>proj orth. sur un plan Sym. orth.</p>
	<p>ici c'est proj sur un plan parallèle à une droite</p>
	<p>à un plan</p>
	<p>Rotation autour d'un axe</p>
<p>Figure</p> 	<p>Cette figure illustre</p> <p>Notion de projection orthogonale</p>
<p>Figure</p> 	<p>Cette figure illustre</p> <p>Un vecteur et ses 3 coordonnées dans <math>\mathbb{K}^3</math> euclidien.</p>
	<p><math>z = x^2 + y^2</math></p>
	<p><math>x</math> et sa projection <math>\perp</math> sur <math>P</math></p>

Figure	Cette figure illustre
	Gram-Schmidt
	deux s.e.v. supplémentaires
	La réunion de deux s.e.v. rien n'est pas un
	3 vecteurs sont liés en dim 2
	symétric oblique matrice diagonale à via de valeurs propre $\pm 1$ .
Figure	Cette figure illustre
	2 s.e.v. supplémentaires.
Figure	Cette figure illustre
	2 s.e.v. supplémentaires
	Composante d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$

Figure	Cette figure illustre
	la th du noyau et de l'image
	Faisceau de hyperplans et équations linéaires liées
	La formule d'Olind Rodrigues $R_{u,\theta} = \cos\theta I_d + \sin\theta N_u + (1-\cos\theta) P_u$
	graphes d'un opérateur linéaire, projections associées (dém. du th. de graphe fermé, p. ex.)
	Pour des contre exemples voir (ici : x, y, z indép, a est l'indép, <del>mais</del> mais on le comb. lin. de x, y, z, mais (x, y, z, a, b) non lmt indép <sub>2</sub> ---)

Figure	Cette figure illustre
	$F_1, F_2, F_3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ ?
	idem ↑ pour $\mathbb{R}^3$ avec ellipses, coniques, etc. - Je demande aux étudiants Deux 2° MATH de me donner tous (!) les s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ .
dessin + difficile, je n'ai plus le temps ici. ← ---	Réduction d'une conique ds le plan (diagonalisation) -

Figure	Cette figure illustre
	Théorème des 3 perpendiculaires (projection sur un sous-espace)
	relation entre symétrique (oblique) et projection.
Figure	Cette figure illustre
	somme directe de $F$ et $G$
Figure	Cette figure illustre
	exemple pour $\text{Ker } f, \text{Im } f, f(A)$ où $f = \text{projecteur} \dots$
	Au moment de la présentation des rotations dans l'espace.
Figure	Cette figure illustre
	Décomposition d'isométrie en produit de réflexions (dessin demandé en Agrég)

<p>Figure</p> 	<p>Cette figure illustre</p>
	<p>vecteur orthogonal à un hyperplan orthogonalité de fonctions</p>
<p>Figure</p> 	<p>Cette figure illustre</p> <p>multiplication d'un vecteur par un scalaire</p>
<p>Figure</p> 	<p>Cette figure illustre</p> <p>Un cône isotrope qui n'est pas un espace vectoriel.</p>
<p>Figure</p> 	<p>Cette figure illustre</p> <p>projecteurs et symétries sur supplémentaires</p>
	<p>caractérisation du projeté orthogonal.</p>
 <p><math>H = F \cap G</math> <math>G = \text{Supplémentaire de } H \text{ dans } G.</math></p>	<p>Relation de Grassmann (dimension d'une somme)</p>



**ANNEXE 4**

**TEXTE DU**

**QUESTIONNAIRE AUX ETUDIANTS**

**ET DE L'ENTRETIEN**



## Questionnaire aux étudiants de CAPES ou de maîtrise

Ce questionnaire est destiné à une recherche portant sur l'enseignement de l'algèbre linéaire ; il n'est en aucun cas une évaluation.

Il sera éventuellement prolongé par un entretien ; c'est en vue de cet entretien que nous vous demandons les renseignements ci-dessous.

Merci de répondre avec sérieux (et spontanéité !) aux questions posées.

Nom :

Etudes suivies durant l'année universitaire en cours :

### Première partie : Exercices

Nous vous proposons trois exercices de niveau DEUG ; deux en algèbre linéaire et un en algèbre bilinéaire.

Nous vous demandons pour chaque exercice d'écrire à l'endroit prévu à cet effet, non seulement la résolution de celui-ci, mais encore tous les éléments de votre démarche de recherche, y compris ceux qui n'ont pas abouti.

Ne consacrez pas à ces exercices un temps excessif, aux dépens des autres questions ; au delà d'un quart d'heure passé sur un exercice, abandonnez et passez à la suite.

#### Exercice 1

Soient  $u, v, w$  trois vecteurs deux à deux non colinéaires. La famille  $\{u, v, w\}$  est-elle libre ?

#### Exercice 2

Donner une matrice  $4 \times 4$  qui représente une symétrie.

## Deuxième partie : les projections

Vous devez présenter à un étudiant de fin de première année de DEUG la notion de projection sur un sous-espace vectoriel, en expliquant ce qu'est une telle projection, et quelles sont ses propriétés.

Ecrivez ci-dessous (et éventuellement au verso de cette page) tout ce que vous lui diriez à ce sujet.

## Troisième partie : sur l'utilité de la géométrie

Un étudiant de fin de première année de DEUG vous dit que, selon lui, la géométrie ne sert à rien dans les modules d'algèbre.

Vous lui répondez :

- 1) Evidemment, à quoi veux-tu que ça serve ?
- 2) Tu as tort, ça sert beaucoup
- 3) Ca n'est pas indispensable mais ca peut parfois être utile
- 4) Tu changeras d'avis après la deuxième année de DEUG
- 5) Tu changeras d'avis après la licence

Indiquez votre ou vos choix en cochant la ou les cases correspondantes, et écrivez ci-dessous vos arguments.

## Entretien faisant suite au questionnaire CAPES-Maîtrise

Nom :

### I Eclaircissements sur la première partie du questionnaire :

#### **Exercice 1**

- S'ils ont donné un contre-exemple, d'où leur est venue l'idée de ce contre-exemple ?
  
- S'ils ont fait un dessin, ont-ils d'abord pensé au dessin ou à la solution ?
  
  
- Autres commentaires

#### **Exercice 2**

- Qu'est-ce qui assure que la matrice donnée représente bien une symétrie ?
  
  
- Ont-ils un dessin en tête ?

## II A propos des figures : ce que l'on peut dessiner

Pouvez-vous illustrer les notions ou les propriétés ci-dessous par une figure ?  
Si oui, tracez le dessin correspondant et expliquez pourquoi il illustre bien la notion choisie.  
Sinon, expliquez pourquoi vous ne trouvez pas de figure.

1) Soient  $P$ ,  $Q$  et  $R$  les trois polynômes définis par  $P(X)=X$ ,  $Q(X)=X^2$  et  $R(X)=X^3$  ; la famille  $\{P, Q, R\}$  est libre.

2) Un endomorphisme diagonalisable

## III Eclaircissements sur la deuxième partie du questionnaire :

#### **IV Eclaircissements sur la troisième partie du questionnaire :**

On veut savoir ici dans quelle mesure la géométrie peut servir en algèbre linéaire ; comment les enseignants s'en sont servis et comment vous l'utilisez.

S'ils ont dit que c'est utile, c'est en pensant à quel(s) aspect(s) de la géométrie ?

A quel endroit est-ce que ça sert ?

- Premières notions d'algèbre linéaire, ev, sev, bases ...
  
- Applications linéaires, matrices
  
- Algèbre bilinéaire, espaces euclidiens

Comment est-ce que ça sert ?

Que faisaient les profs, dans vos souvenirs ?

## **ANNEXE 5**

# **ANALYSES STATISTIQUES RELATIVES AU QUESTIONNAIRE ETUDIANTS**



Pour chaque partie que nous analysons (exercices 1 et 2, partie I, et partie II), nous donnons :

- La liste des critères retenus pour l'analyse ;
- Les données numériques de l'analyse en composantes principales, soit : les coordonnées des composantes principales, et les pourcentages d'inertie exprimés<sup>1</sup> ;
- La représentation des individus sur le plan principal, et le cercle des corrélations ;
- La classification hiérarchique des individus sous forme d'arbre, classification effectuée avec la méthode « ward ». Dans cette méthode, les individus sont regroupés en classes de moins en moins fines en utilisant la distance euclidienne ; l'indice de dissimilarité entre deux classes est alors égal à la perte d'inertie interclasse résultant de leur regroupement.

---

<sup>1</sup> En ce qui concerne les méthodes d'analyse de données, nous nous rapportons à (Saporta 1990).

## Partie 1, Exercice 1

### Critères retenus :

- J : positif si la réponse est juste ;
- RM : positif si les étudiants ont déclaré s'appuyer sur une représentation mentale ;
- JCP : justification complète
- JICP : seul le fait que les vecteurs ne sont pas deux à deux colinéaires n'a pas été justifié ;
- RG : registre graphique ;
- RSU : registre symbolique u ;
- RSAB : registre symbolique AB ;
- RT : registre tableaux ;
- RLN : registre langue naturelle.

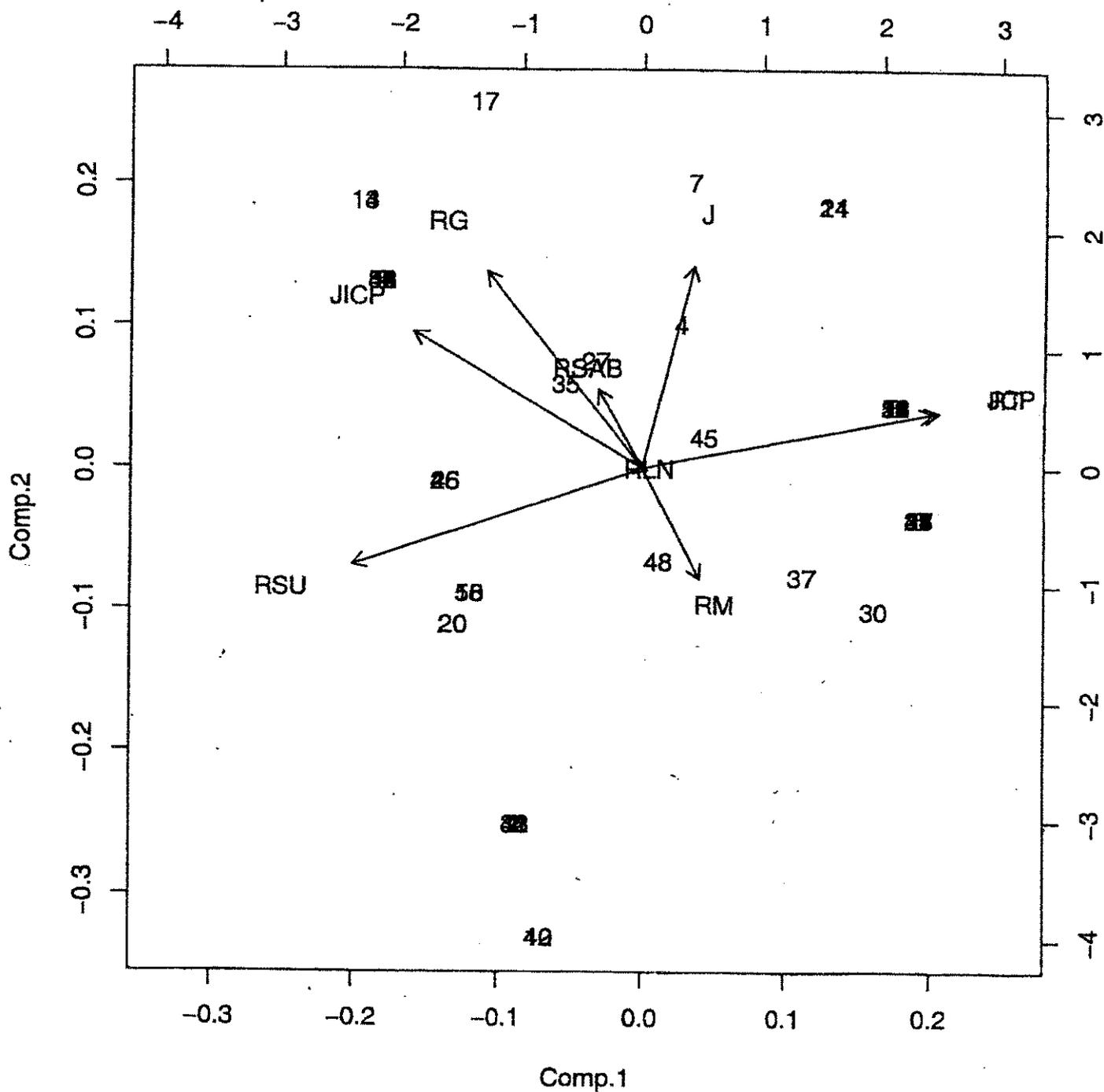
**Données numériques de l'ACP  
(exercice1)**

Comp.1	Comp.2	Comp.3	Comp.4	Comp.5	Comp.6
0.08978020	0.556408032	0.35888012	-0.05725387	-0.33108656	0.35767594
0.10093706	-0.304540800	0.66604899	-0.62616426	0.01883294	-0.23688675
0.50739783	0.156049005	-0.18915028	-0.32389961	-0.27530635	0.32831693
-0.39123603	0.373820729	0.49828394	0.32488793	0.01395436	-0.05579734
-0.26779858	0.540132024	-0.33089775	-0.47748509	-0.06423146	-0.36989276
-0.49540127	-0.267371198	-0.11298717	-0.12907348	-0.55474346	0.03538248
-0.07592111	0.216184332	-0.07841731	-0.24307012	0.63825784	-0.01098169
0.49823674	0.153560735	0.08037250	0.30039305	-0.14685421	-0.56935210
0.00952295	-0.005024779	0.09300892	-0.01435805	0.27061686	0.49263807
Comp.7	Comp.8	Comp.9			
-0.195633997	0.44281721	0.279940264			
0.067027072	-0.01806786	-0.008636521			
-0.143853797	-0.50214802	-0.347958663			
-0.003526157	-0.47704297	-0.349946976			
0.396876885	-0.00673263	0.023517416			
-0.305192925	-0.31408508	0.390998440			
-0.626884771	-0.16338051	0.234726615			
-0.030586083	-0.27343591	0.458315234			
0.540328006	-0.35172247	0.509351014			

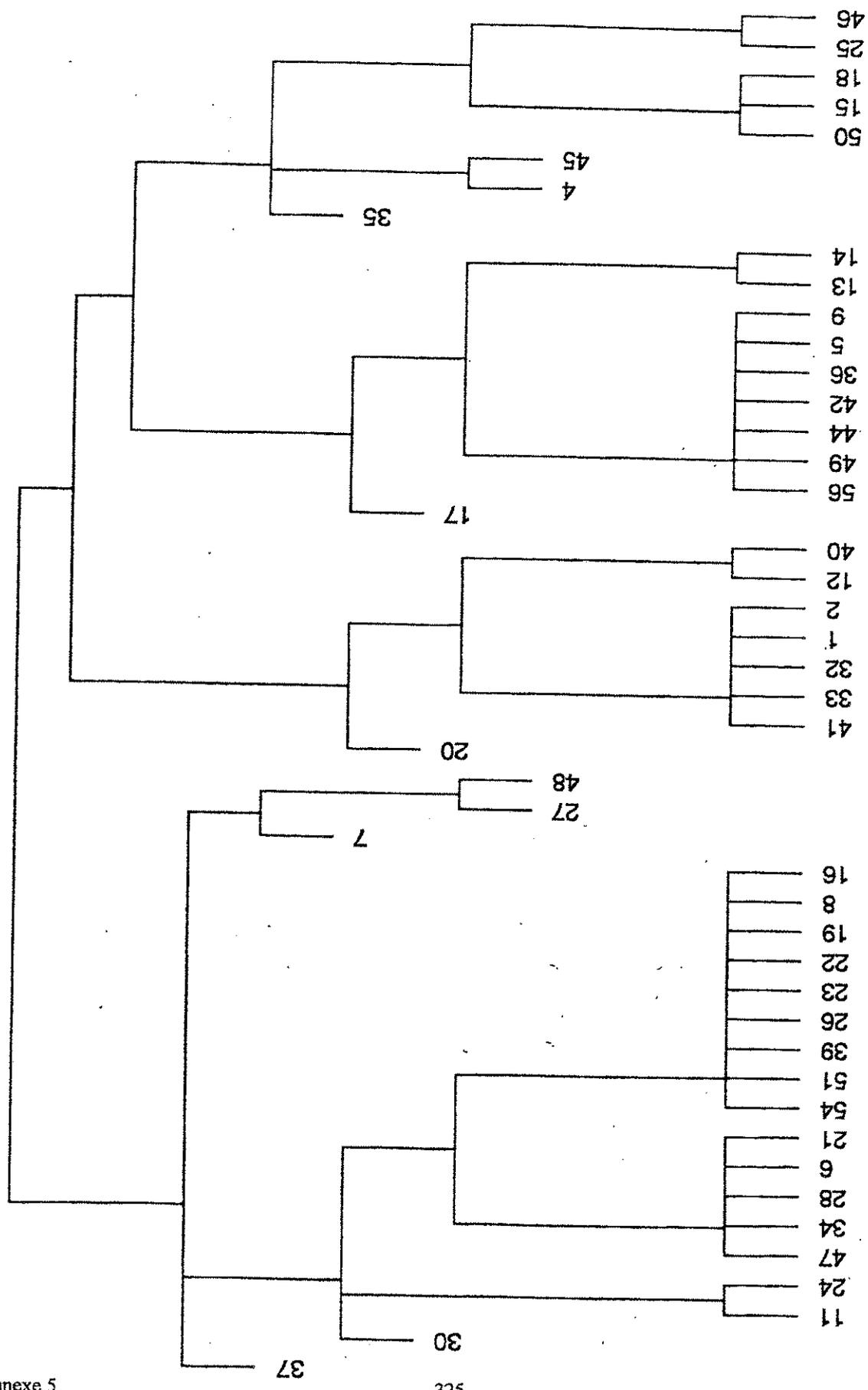
rtance of components:

	Comp.1	Comp.2	Comp.3	Comp.4	Comp.5
andard deviation	0.8860621	0.5602492	0.4813741	0.34250020	0.27930662
ortion of Variance	0.4743707	0.1896497	0.1400087	0.07087796	0.04713592
lative Proportion	0.4743707	0.6640204	0.8040291	0.87490702	0.92204294
	Comp.6	Comp.7	Comp.8	Comp.9	
andard deviation	0.26682322	0.21429456	0.079271925	0.074978796	
ortion of Variance	0.04301667	0.02774673	0.003796893	0.003396772	
lative Proportion	0.96505960	0.99280633	0.996603228	1.000000000	

# Répartition dans le plan principal et cercle des corrélations (exercice1)



Arbre de classification hiérarchique, méthode ward  
(exercice1)



## Partie 1, Exercice 2

### Critères retenus :

- J : réponse juste, la matrice donnée est bien une matrice de symétrie ;
- SC : l'étudiant emploie le terme « symétrie centrale » ;
- SO : l'étudiant emploie le terme « symétrie orthogonale » ;
- SR : l'étudiant parle d'une symétrie par rapport à un sous-espace, suivant un autre ;
- M : l'étudiant donne une matrice, sans aucun commentaire ;
- S2=1 : l'étudiant utilise la caractérisation des symétries par  $\text{tr} = \text{Id}$  ;
- D=-1 : l'étudiant utilise la caractérisation (fausse) des symétries par déterminant = -1 ;
- DA2 : l'étudiant fait un dessin affine ;
- DV2 : l'étudiant fait un dessin vectoriel ;
- COORD : l'étudiant utilise l'expression analytique de la symétrie pour remplir la matrice ;
- BASE : l'étudiant utilise les images des vecteurs de base pour remplir la matrice ;
- RG : l'étudiant utilise le registre graphique avant l'entretien.

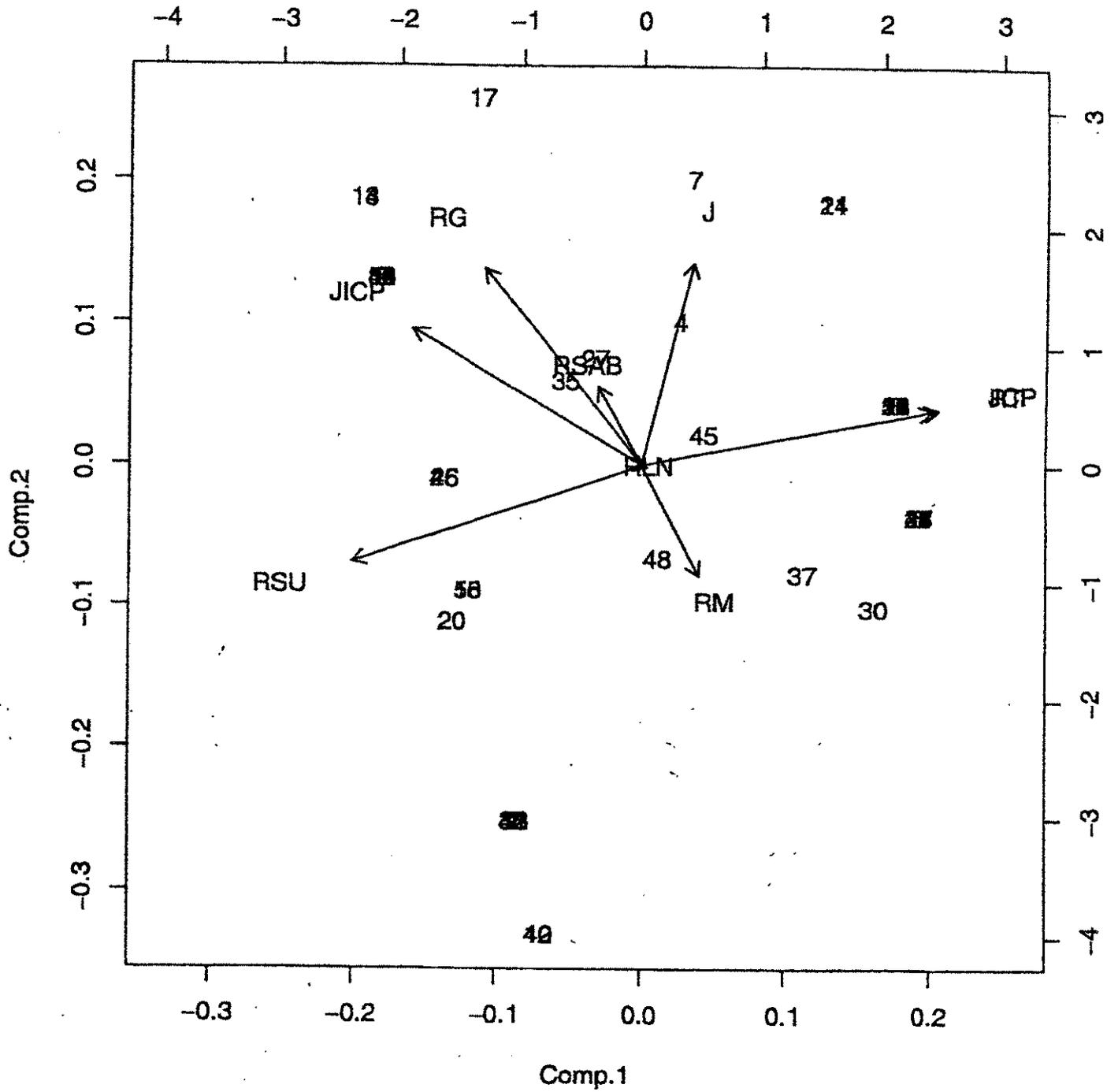
**Données numériques de l'ACP  
(exercice 2)**

	Comp.1	Comp.2	Comp.3	Comp.4	Comp.5	Comp.6
	0.04722611	0.47929776	-0.1050562	-0.01044259	0.45920096	0.21726110
	-0.31758094	0.27971125	-0.6875948	-0.35486301	-0.17710362	-0.01380565
	0.20927195	0.14577290	0.2877361	-0.50267962	0.21956232	-0.10504364
	0.32720069	0.23471789	-0.1365971	0.67218134	-0.07856322	-0.00337350
	-0.07508478	-0.41396386	-0.0592005	0.02771772	0.51819643	0.62451627
	-0.04325809	0.06524415	0.2999027	-0.02205943	0.05745978	-0.13127870
	0.05792851	0.09049704	0.1190425	0.06363263	-0.08300448	0.10256416
	-0.24424549	0.15625554	0.4286023	-0.00428875	-0.51550120	0.44480490
	0.42891986	0.30401210	0.1150043	-0.08822014	0.16844786	-0.15998649
D	-0.45186218	0.52182360	0.1294272	0.23047052	0.20885062	0.12527704
	0.53580217	0.12330922	-0.2186599	-0.15622025	-0.28877428	0.51337023
	0.01734379	0.16594058	0.2135858	-0.28075261	-0.05953782	0.14524808
	Comp.7	Comp.8	Comp.9	Comp.10	Comp.11	Comp.1
	-0.230716087	0.452433277	0.02348157	0.03545351	0.48642383	0.0498730
	-0.076673955	-0.164473249	0.20607055	-0.21185777	-0.07949268	-0.2530515
	0.458787920	0.175247181	0.05257326	0.03887592	-0.17088748	-0.5153243
	0.167707524	0.020217099	-0.04187526	-0.38697703	-0.06840725	-0.4200693
	0.008487579	-0.252323487	0.15357826	-0.19353454	-0.10362852	-0.1570196
	-0.538355995	0.284624939	0.35555040	-0.35793087	-0.50622262	0.0357423
	-0.542735017	-0.259460210	-0.11561086	0.53855751	-0.03004549	-0.5353797
	0.129271461	-0.003496195	0.36353236	-0.11765634	0.31440188	-0.0839433
	-0.036001989	-0.646678541	0.37779470	-0.06605559	0.13952219	0.2501546
D	0.254694372	-0.171389895	-0.12734405	0.22828377	-0.44067249	0.1938395
	-0.018249805	0.176043472	-0.03345503	0.18588341	-0.37509793	0.2661948
	-0.186034878	-0.215784888	-0.70489536	-0.49204673	0.04562966	0.0289590

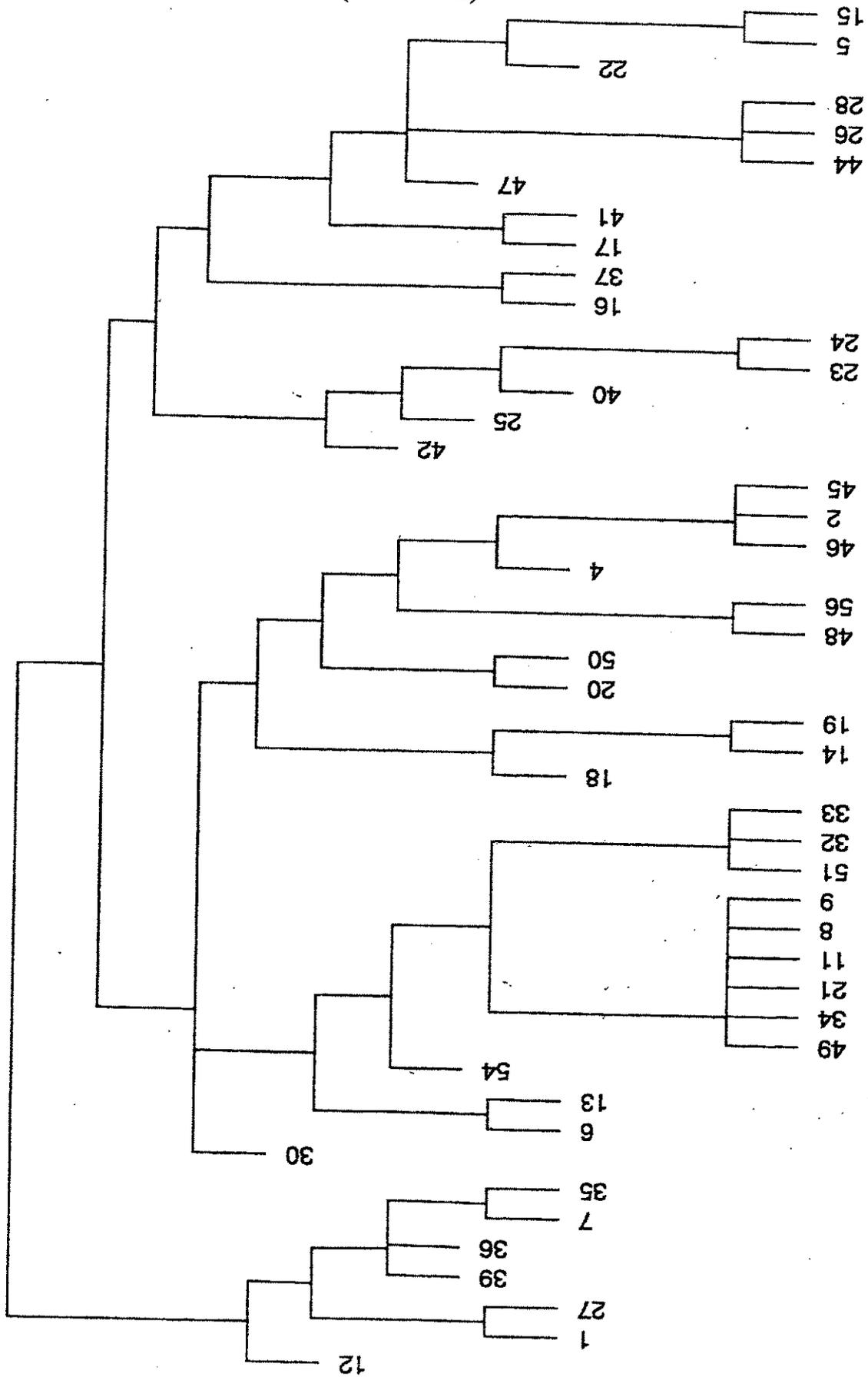
Distance of components:

	Comp.1	Comp.2	Comp.3	Comp.4	Comp.5
Standard deviation	0.7433841	0.5196897	0.4917738	0.40903855	0.36125539
Portion of Variance	0.3084228	0.1507329	0.1349742	0.09337883	0.07283642
Relative Proportion	0.3084228	0.4591557	0.5941298	0.68750866	0.76034508
	Comp.6	Comp.7	Comp.8	Comp.9	Comp.10
Standard deviation	0.34838953	0.29484847	0.27549454	0.22891673	0.20681670
Portion of Variance	0.06774077	0.04851965	0.04235902	0.02924657	0.02387213
Relative Proportion	0.82808585	0.87660550	0.91896452	0.94821110	0.97208322
	Comp.11	Comp.12			
Standard deviation	0.17501990	0.13924161			
Portion of Variance	0.01709601	0.01082077			
Relative Proportion	0.98917923	1.00000000			

## Répartition dans le plan principal et cercle des corrélations (exercice 2)



Arbre de classification hiérarchique, méthode ward  
(exercice 2)



## Partie II

### Rappel des critères retenus :

- TQ : l'étudiant n'avait pas répondu lors du questionnaire ;
- PHK : l'étudiant parle de projection sur un sous-espace suivant une direction ;
- P2=p : l'étudiant cite la propriété  $\text{pop}=p$  ;
- DV : l'étudiant fait un dessin vectoriel ;
- DA : l'étudiant fait un dessin affine ;
- RL : l'étudiant fait référence à des connaissances de lycée sur les projections, en l'occurrence la définition avec le cosinus ;
- DE : le dessin est fait lors de l'entretien ;
- SUPP : l'étudiant parle de sous-espaces supplémentaires ;
- M : l'étudiant donne une matrice de projection ;
- KER : l'étudiant parle du noyau de la projection ;
- LIN : l'étudiant dit que la projection est une application linéaire.

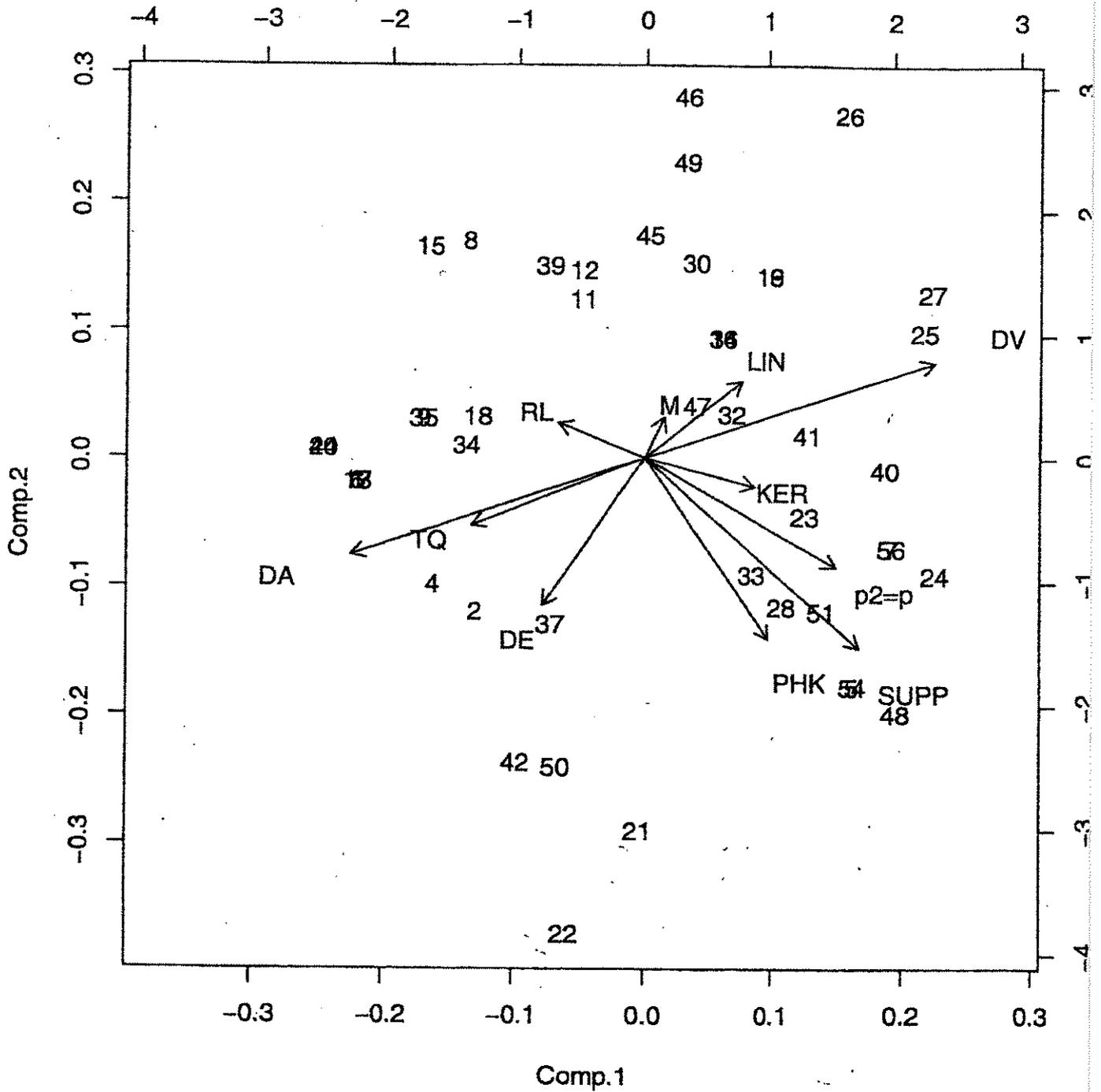
**Données numériques de l'ACP  
(Partie II)**

Comp.1	Comp.2	Comp.3	Comp.4	Comp.5	Comp.6
-0.29357385	-0.18306024	-0.21546542	0.54276373	-0.28906827	0.45457417
0.21637836	-0.49133753	-0.08784453	-0.46012062	-0.26266619	-0.21485638
0.33223363	-0.29545846	0.35872283	0.42168272	-0.53320012	-0.09862057
0.50001396	0.26391876	-0.37953462	0.10575304	-0.04850863	0.03439891
-0.50001396	-0.26391876	0.37953462	-0.10575304	0.04850863	-0.03439891
-0.14686576	0.09660972	-0.04117634	-0.12734161	-0.09790979	0.24089387
-0.17222975	-0.39992410	-0.44070029	0.32786710	0.26082198	-0.57297965
0.37303928	-0.51554518	0.04671321	-0.12789931	0.28595989	0.42460584
0.03368188	0.11278521	0.40970300	-0.01652851	-0.08919531	-0.16466717
0.19142567	-0.07814420	0.31336099	0.32305398	0.62469423	0.11696885
0.16857787	0.21115842	0.25482710	0.22091810	0.02917690	-0.35732874
Comp.7	Comp.8	Comp.9	Comp.10	Comp.11	
0.35767883	-0.17233620	-0.28956901	-0.087196714	1.674810e-17	
0.49051218	0.21449921	-0.30089181	-0.005950923	6.609278e-17	
-0.27898681	0.25227154	0.23109563	0.083178086	-4.854254e-17	
0.02933471	0.03112694	-0.03180309	-0.136841045	-7.071068e-01	
-0.02933471	-0.03112694	0.03180309	0.136841045	-7.071068e-01	
0.40505597	0.31377540	0.74587095	-0.254402498	-1.974693e-16	
-0.05450079	-0.03098094	0.23164058	-0.234014433	-1.082671e-16	
-0.08209354	-0.48957886	0.25724356	-0.043014747	-8.196818e-17	
0.04764055	-0.25732863	-0.14816155	-0.832168682	-1.897013e-16	
0.24251035	0.50109080	-0.19551698	-0.051341641	1.082193e-16	
0.56307020	-0.44977697	0.18398920	0.362653344	1.941294e-17	

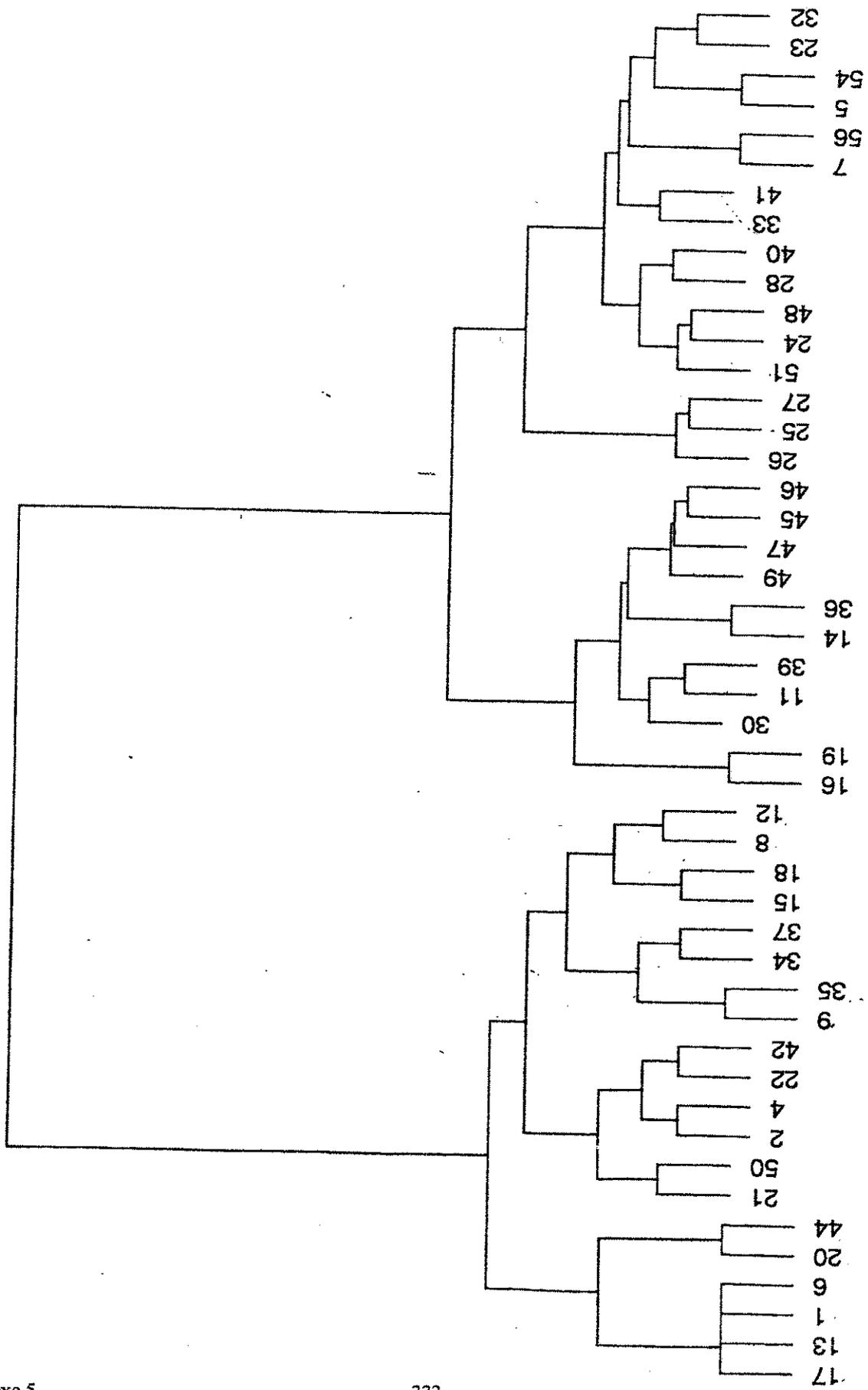
Standard deviation of components:

	Comp.1	Comp.2	Comp.3	Comp.4	Comp.5
Standard deviation	0.8472643	0.5403875	0.5295547	0.4842548	0.40792244
Portion of Variance	0.3368194	0.1370155	0.1315773	0.1100290	0.07807544
Relative Proportion	0.3368194	0.4738349	0.6054122	0.7154411	0.79351659
	Comp.6	Comp.7	Comp.8	Comp.9	Comp.10
Standard deviation	0.36648023	0.32719074	0.30710285	0.24530663	0.2102978
Portion of Variance	0.06301738	0.05022978	0.04425140	0.02823435	0.0207505
Relative Proportion	0.85653397	0.90676375	0.95101515	0.97924950	1.0000000
	Comp.11				
Standard deviation	5.382282e-09				
Portion of Variance	1.359228e-17				
Relative Proportion	1.000000e+00				

## Répartition dans le plan principal et cercle des corrélations (Partie II)



Arbre de classification hiérarchique, méthode ward  
(Partie II)





# **ANNEXE 6**

## **EXEMPLES DE DESSINS**

### **PROPOSES PAR LES ETUDIANTS**

#### **A LA PARTIE *IV* DU QUESTIONNAIRE**

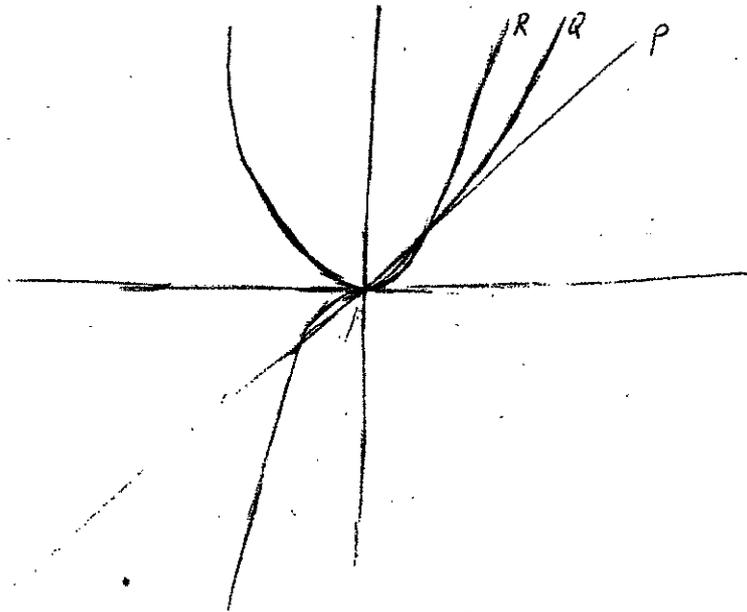


### Question IV 1)

Dessin de courbes, qui doit permettre selon l'étudiant de mettre en évidence l'indépendance linéaire :

Commentaire : «S'il y avait un papier quadrillé, je ferais un zoom pour montrer qu'avec une combinaison linéaire des courbes on n'arrive pas à la troisième.»

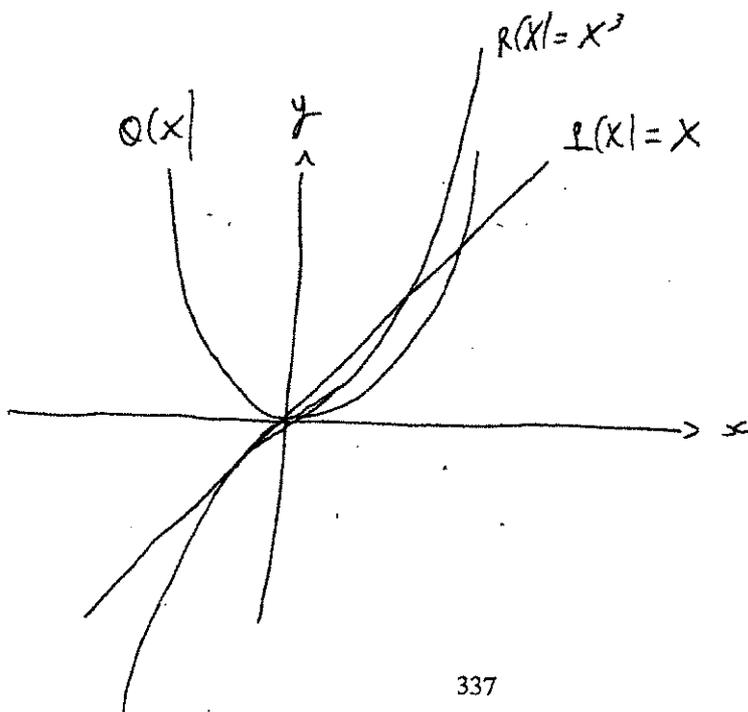
Dessin :



Dessin de courbes ; mais l'étudiant doute que cela permette de montrer l'indépendance linéaire :

Commentaire : «Comment visualiser que la famille est libre à travers un dessin ? On peut tracer les polynômes pour voir. On voit pas trop comment représenter que la famille est libre.»

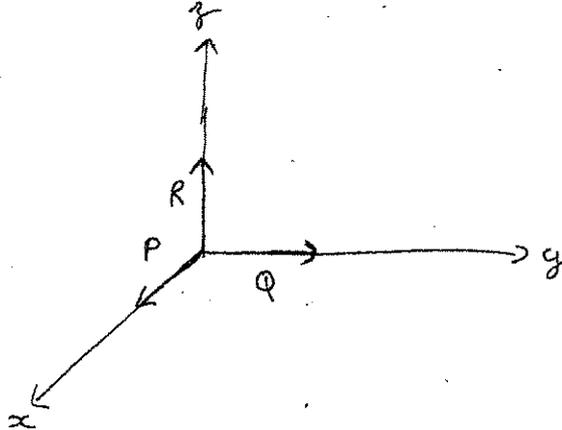
Dessin :



Etudiants qui évoquent  $\mathbb{R}_3[X]$  et la notion de base :

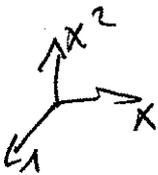
Commentaire : « Pas de dessin naturel.  $\{1, X, X^2, X^3\}$  base de l'espace des polynômes de degré  $\leq 3$ . Mais c'est dans  $\mathbb{R}^4$ . Pour passer à  $\mathbb{R}^3$  on peut se limiter à  $\{X, X^2, X^3\}$ . »

Dessin :



Commentaire : « Pas de dessin a priori. Je pense à  $\mathbb{R}[X]$  comme espace vectoriel de dimension infinie, de base  $\{X^k\}$ . Ou  $\mathbb{R}_3[X]$  de base  $\{1, X, X^2, X^3\}$ . Je ne peux pas faire de dessin, c'est dans  $\mathbb{R}^4$ . Je peux donner l'image traditionnelle de la base dans  $\mathbb{R}^3$ . »

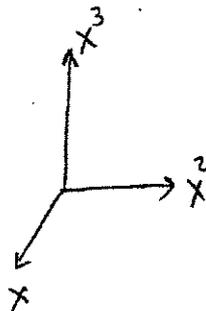
Dessin :



Etudiants qui évoquent simplement la notion de base :

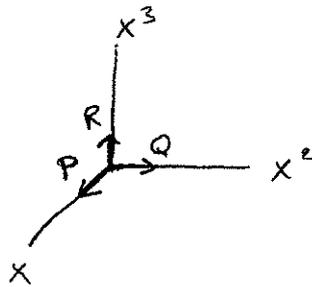
Commentaire : «  $\{1, X, X^2, X^3, \dots\}$  est la base canonique de l'ensemble des polynômes. Ça aurait été mieux s'il y avait eu le 1. »

Dessin :



Commentaire : « On peut considérer  $\{X, X^2, X^3\}$  comme une base de polynômes, donc on peut faire le dessin suivant : »

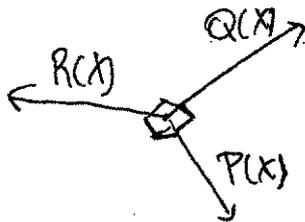
Dessin :



Etudiants qui n'évoquent pas la notion de base :

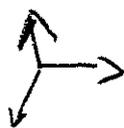
Commentaire : « Pas de dessin qui vient naturellement. En se forçant : on a trois vecteurs, qui ne sont pas colinéaires. Ils sont même orthogonaux. »

Dessin :



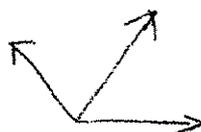
Commentaire : « Je ferais des vecteurs, pour montrer que c'est indépendant les uns des autres. »

Dessin :



Commentaire : « Sans voir P, Q et R comme des polynômes ; représenter juste une famille libre. »

Dessin :



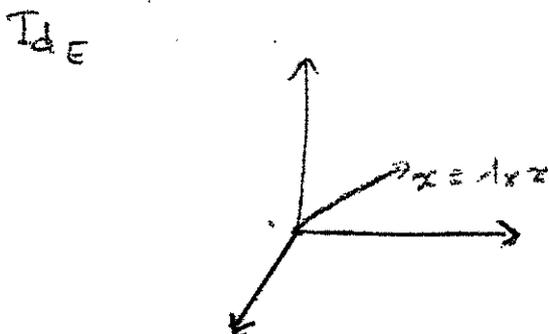


## Question IV 2)

Dans cette question les commentaires faits par les étudiants ont été moins nombreux. Certains étudiants faisaient spontanément un dessin ; d'autres déclaraient ne pas avoir d'idée ; dans ce cas nous leur suggérions de penser à des exemples d'endomorphismes diagonalisables. S'ils avaient un exemple en tête, ils faisaient alors un dessin correspondant à cet exemple ; s'ils ne trouvaient pas d'exemple, nous leur demandions alors s'ils avaient en tête un exemple d'endomorphisme. Nous mentionnons si dessous les indications que nous avons données, ainsi que certains commentaires particuliers faits par les étudiants.

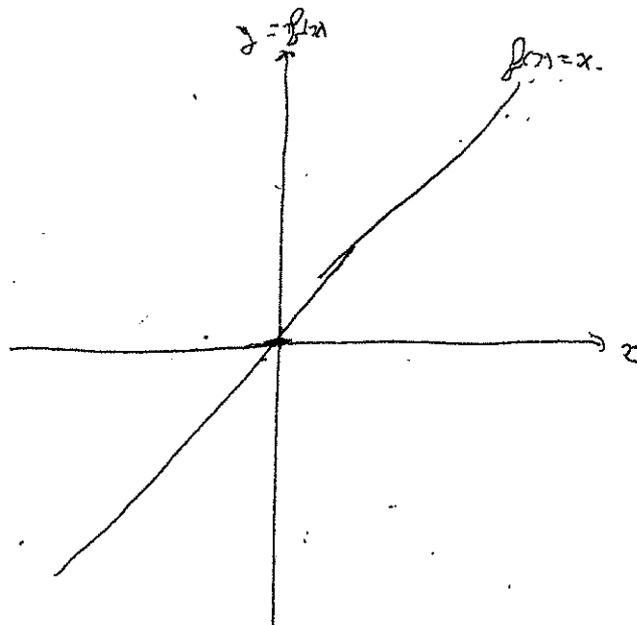
### Identité, dessin vectoriel

Dessin : (sans indications)



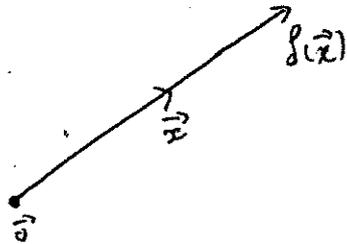
### Identité, dessin d'un graphe cartésien

Dessin : (indications : chercher un exemple d'endomorphisme diagonalisable - chercher un exemple d'endomorphisme. Commentaire de l'étudiant : « oui, une application linéaire ;  $f(x)=x$  »)



Homothétie, dessin vectoriel

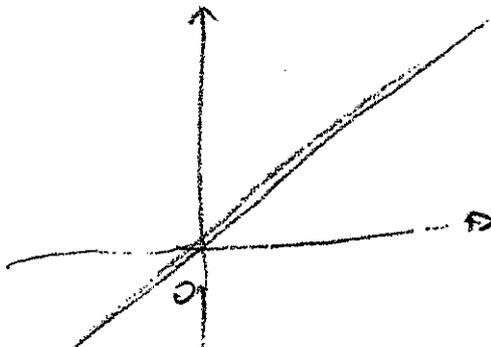
Dessin : (fait sans indications ; commentaire « je pense à une homothétie, en dimension 1 »).



Homothétie, dessin d'un graphe cartésien

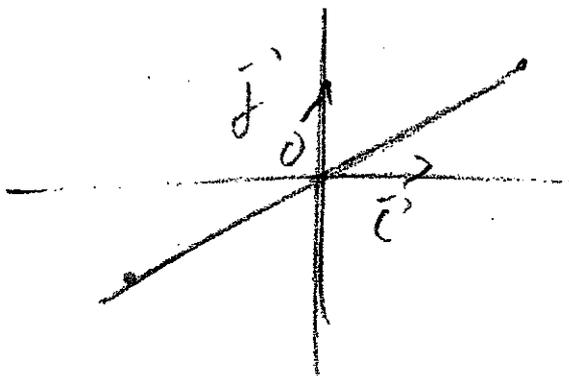
Dessin : (fait sans indications ; commentaire : « Il faut se représenter  $\lambda Id$  dans une certaine base. En dimension 2 ou 3, c'est difficile. Dans  $\mathbb{R}$  : c'est une droite qui passe par l'origine. »)

$\dim E = 2$



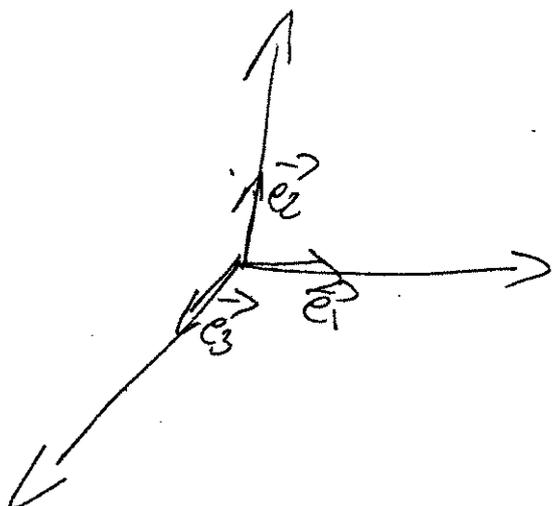
Symétrie centrale

Dessin : (fait sans indications)



symétrie centrale

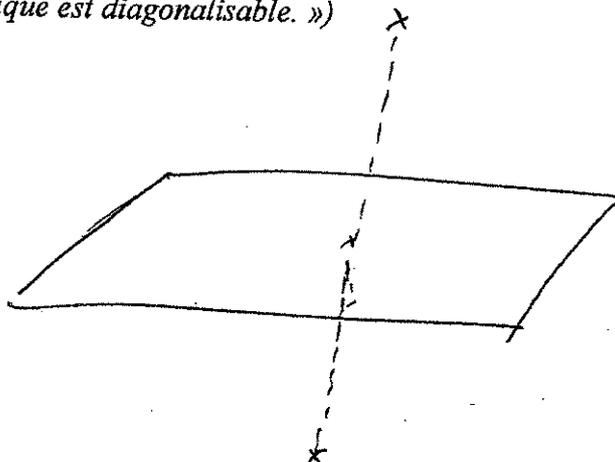
Dessin : (fait sans indications ; commentaire : « c'est comme dans l'exo 2, une symétrie »)



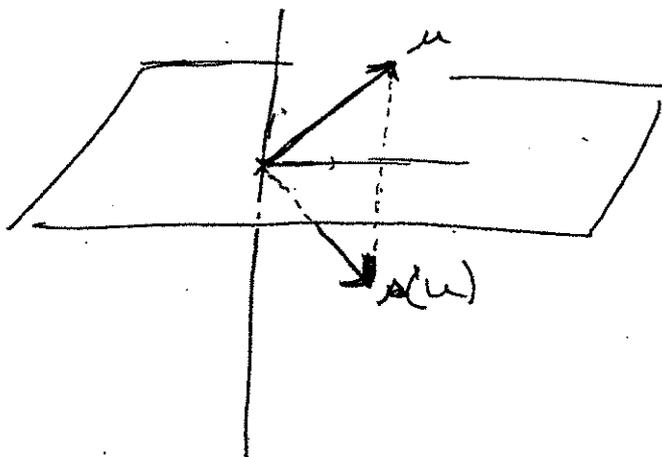
$$\begin{cases} e_1 \rightarrow -e_1 \\ e_2 \rightarrow -e_2 \\ e_3 \rightarrow -e_3 \end{cases}$$

Symétrie par rapport à un plan

Dessin : (fait sans indications ; commentaire : « Je fais une symétrie par rapport à un plan, car une matrice symétrique est diagonalisable. »)

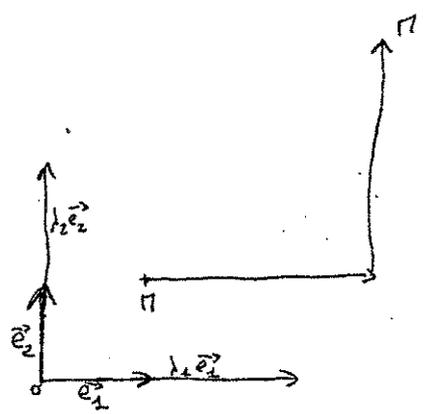


Dessin : (indication : chercher un exemple d'endomorphisme diagonalisable)



Illustrations du cas général

Dessin : (sans indication ; commentaire : « les vecteurs de base seront colinéaires aux vecteurs image »)

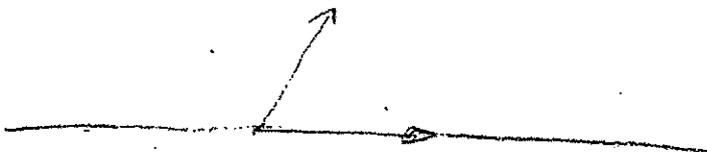


Dessin : (sans indication)

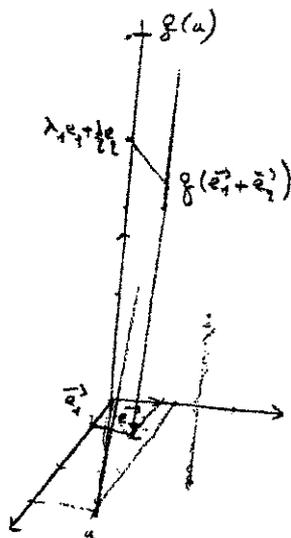
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$



Dessin : (sans indication, commentaire : « Je vais dessiner une base de vecteurs propres. Des vecteurs qui ne sont pas colinéaires, qui forment une base. L'image de celui-là va être sur la droite. C'est tous les vecteurs de même direction mais pas de même longueur. »)

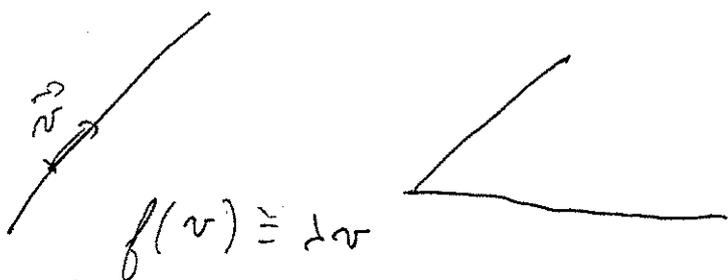


Dessin : (sans indication, commentaire : « Je prends un exemple dans  $\mathbb{R}^2$ , un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , représenté dans  $\mathbb{R}^3$ . A  $e_1$  il associe  $\lambda_1 e_1$ , à  $e_2$  il associe  $\lambda_2 e_2$ . Je dessine  $f(e_1+e_2)$ . »)



$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2$$

qu'on pourra généraliser ? Dans : un endomorphisme avec deux valeurs propres distinctes. Par exemple une droite vectorielle, c'est l'ensemble des  $\lambda v$ . On a  $v$  qui donne  $\lambda v$ . »)





TITRE en anglais : « Using geometry to teach and learn linear algebra »

RESUME en anglais

University teachers often declare that using geometry, and « geometrical intuition », would help students in their learning of linear algebra. Our work aims at investigating the questions raised by such a statement.

In the first chapter, we present theoretical didactical elements we used in our study. A central tool is the work by Fischbein about intuition in mathematics, and especially the use of models; it allowed us to give a definition of “geometrical intuition”.

In the second chapter, we study the interventions of “geometrical intuition” in the birth and evolution of linear algebra. In the third chapter, we analyse the process of “didactical transposition that led to the introduction of linear algebra at university and even secondary school level during the reform of modern mathematics. We show that this process resulted, in France, in a stronger connection between geometry and linear algebra than observed in the historical evolution. Linear algebra is not taught in secondary school anymore. However some geometrical notions and tasks taught in secondary school are then studied within linear algebra. In the fourth chapter, we analyse the evolution in linear algebra courses of such notions and tasks.

In the fifth chapter, we present and analyse questionnaires we submitted to teachers and post-graduate students, in order to draw out the different aspects of geometrical intuition and the various kinds of models they use in their courses and practices of linear algebra.

Finally, on the basis of the different results we obtained, we make some proposals in order to “optimize” the use of geometry in the teaching of linear algebra.

