



**HAL**  
open science

# Diagnostic des zones périphériques d'arcs électriques et des décharges hors-équilibre

Grégoire De Izarra

► **To cite this version:**

Grégoire De Izarra. Diagnostic des zones périphériques d'arcs électriques et des décharges hors-équilibre. Autre [cond-mat.other]. Université d'Orléans, 2013. Français. NNT : 2013ORLE2025 . tel-00933199

**HAL Id: tel-00933199**

**<https://theses.hal.science/tel-00933199v1>**

Submitted on 20 Jan 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ D'ORLÉANS



## ÉCOLE DOCTORALE ENERGIE - MATERIAUX

LABORATOIRE GREMI

THÈSE présentée par :

**Grégoire de Izarra**

soutenue le : **25 septembre 2013**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université d'Orléans**

Discipline/ Spécialité : **Physique des plasmas**

### Diagnostic des zones périphériques d'arcs électriques et des décharges hors-équilibre

THÈSE dirigée par :

Jean-Marie Cormier

Professeur, Université d'Orléans

RAPPORTEURS :

Michel Dudeck

Professeur, UPMC

Gilles Maynard

Directeur de recherche, LPGP

JURY :

Jean-Marie Cormier

Professeur, Université d'Orléans

Michel Dudeck

Professeur, UPMC

Laurent Fulcheri

Professeur, Mines-Paristech

Christophe Laux

Professeur, École Centrale Paris

Mário Lino Da Silva

Chercheur, Inst. de Plasmas e Fusão Nuclear

Gilles Maynard

Directeur de recherche, LPGP

Bartłomiej Pokrzywka

Professeur, Uniw. Pedagogiczny w Krakowie



## Remerciements

Au cours de la thèse, de nombreuses personnes m'ont apporté leur soutien ou leur sympathie. Je tiens ici à les remercier.

Je remercie donc tout d'abord ma famille proche, mes parents et mes frères, qui m'ont supporté et ce quelque soit mon humeur et mes problèmes.

Je souhaiterais remercier chaleureusement M. le professeur Brahim Sarh, directeur de l'IUT d'Orléans, pour m'avoir accueilli dans ses locaux et m'avoir prodigué de précieux conseils. Je remercie aussi Barnabé Tchinda, Renaud Di-Bartelomeo, Karine, Fred et l'ensemble du personnel administratif de l'IUT d'Orléans pour leur gentillesse et les bon moments passés ensemble.

Au cours de mes trois ans de thèse, j'ai eu la chance d'effectuer des enseignements en GTE, un département récent de l'IUT d'Orléans. Sa formidable équipe pédagogique m'a accueilli avec bienveillance et amitié. Je remercie Yannick Blanc et Jean-Noël Blanchard, les directeurs présent et passé du département. Je remercie aussi Toufik Bouchaki, mon tuteur pédagogique, pour sa sympathie et ses conseils avisés sur la préparation des TD de thermodynamique, des examens ... Je remercie Olivier Follain pour les conversations éclectiques concernant les motos-cyclettes soviétiques, les Arduino, les wood-stoves, les simulations de transferts thermiques, les pulso-réacteurs ainsi que pour ses conseils en bricolage "castofollain"... Je remercie Jean-Yves, Homan et Pablo pour les soirées orléanaises animées, les repas de midi avec le vin de pays et les séances d'aviron musclées. Merci aussi à Marie-Lou et Cathy pour leur bonne humeur et leur sympathie.

Je remercie Jean-Marie Cormier pour avoir accepté d'être mon directeur de thèse.

Je souhaite remercier messieurs les professeurs Gilles Meynard et Michel Dudeck pour avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse. Merci aussi à Mario Da-Silva, Laurent Fulcheri, Christophe Laux et Bartłomiej Pokrzywka pour avoir accepté d'être membre de mon jury de thèse.

J'aimerai remercier aussi Gilles Charles et Guy Coudrat pour le soutien technique.

Pour finir, je souhaiterais remercier mes amis de longue date, Damien "Babar" Bardin, Frederic Jay, Romaric Nouat, Vincent "la corne" Dupuis, Fiona Mallet, Amélie Péant, Fanny Racouet pour, entre autre, les soirées au pub Jacques Cœur, les printemps de Bourges épiques, les pendaions de crémaillère, les week-end seul face à la nature ... Merci aussi aux collègues et amis orléanais, Leila, Louiza, Ibrahim, Fatou, Memine, Guillaume, Lionel, Thibault, Mukesh, Hamid, Marie, Valentin, Ismael, Laurent, Hagop, Kadhija.



*Je dédie cette thèse à mes parents et à mes frères.*



# Table des matières

Introduction générale	1
<b>I Généralités sur les plasmas</b>	<b>7</b>
<b>1 Généralités sur les plasmas d'arc</b>	<b>11</b>
1.1 Introduction	11
1.2 Processus élémentaires	12
1.2.1 Collisions élastiques	12
1.2.2 Désexcitation et excitation radiatives	13
1.2.3 Excitation et désexcitation collisionnelles	13
1.2.4 Recombinaison et dissociation radiatives	14
1.2.5 Recombinaison à trois corps	14
1.2.6 Recombinaison diélectronique	14
1.3 Équilibre thermodynamique local	14
1.3.1 Équilibre thermodynamique total	14
1.3.2 Équilibre thermodynamique local	15
1.4 Lois fondamentales	15
1.4.1 Fonction de distribution des vitesses	15
1.4.2 Quasi-neutralité électrique	16
1.4.3 Loi de Boltzmann	16
1.4.4 Loi de Saha	16
1.4.5 Loi de Guldberg-Waage	16
1.4.6 Fonction de partition	17
1.5 Calcul de la composition d'un plasma	17
1.5.1 Établissement du système d'équations	17
1.5.2 Calcul et validation des fonctions de partition de l'argon	18
1.5.3 Résolution du système d'équations	19
1.5.4 Méthode de Newton-Raphson	20
1.5.5 Résultats	20
1.6 Coefficients de transport	21
<b>2 Méthodes de diagnostic classiques</b>	<b>25</b>
2.1 Spectroscopie optique d'émission atomique	25
2.1.1 Profil d'une raie	25
2.2 Méthodes de diagnostic utilisant l'intensité des raies	32
2.2.1 Méthode de l'intensité absolue d'une raie	32

2.2.2	Méthode de Fowler-Milne . . . . .	33
2.2.3	Méthode du graphe de Boltzmann . . . . .	34
2.3	Méthodes de diagnostic utilisant les profils de raies . . . . .	35
2.4	Utilisation du fond continu . . . . .	36
2.5	Conclusion . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Limitations des techniques de diagnostic classiques</b>	<b>39</b>
3.1	Zones périphériques des colonnes d'arcs . . . . .	39
3.2	Arcs à faible intensité de courant . . . . .	42
3.3	Conclusion . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Dispositifs de création d'arcs électriques</b>	<b>45</b>
4.1	Dispositif TIG . . . . .	45
4.2	Plasmatron . . . . .	47
4.3	Décharge pointe-pointe . . . . .	49
4.4	Conclusion . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Inversion d'Abel</b>	<b>51</b>
5.1	Introduction . . . . .	51
5.2	Inversion d'Abel . . . . .	51
5.3	Méthodes de Calcul . . . . .	52
5.3.1	Méthode Stack and slice modifiée . . . . .	53
5.3.2	Méthode d'interpolation par spline . . . . .	55
5.4	Conclusion . . . . .	58
	<b>Bibliographie</b>	<b>61</b>
<b>II</b>	<b>Mesures macroscopiques, modélisation et analyse dimensionnelle</b>	<b>65</b>
<b>6</b>	<b>Mesures macroscopiques</b>	<b>69</b>
6.1	Introduction . . . . .	69
6.2	Mesures électriques . . . . .	70
6.2.1	Mesures électriques moyennes . . . . .	71
6.2.2	Mesures électriques instantanées . . . . .	72
6.3	Autres mesures . . . . .	72
6.3.1	Mesure du volume de la décharge . . . . .	72
6.3.2	Mesure du spot cathodique . . . . .	73
6.3.3	Mesure de la zone perturbée thermiquement . . . . .	74
6.3.4	Mesure acoustique sur un arc . . . . .	75
6.4	Conclusion . . . . .	76
<b>7</b>	<b>Modélisation</b>	<b>77</b>
7.1	Introduction . . . . .	77
7.2	Modèle fluide de colonne d'arc . . . . .	78
7.3	Le modèle d'Elenbaas-Heller . . . . .	79
7.4	Modèle thermique . . . . .	82
7.5	Conclusion . . . . .	84

<b>8</b>	<b>Analyse dimensionnelle</b>	<b>85</b>
8.1	Introduction . . . . .	85
8.2	Théorème Pi . . . . .	86
8.3	Analyse dimensionnelle heuristique . . . . .	88
8.3.1	Energie libérée dans une explosion atomique . . . . .	89
8.4	Analyse inspectionnelle : . . . . .	91
8.4.1	Approximation des fonctionnelles . . . . .	92
8.4.2	Conclusion . . . . .	93
8.5	Order of magnitude scaling . . . . .	93
8.5.1	Méthode de la balance dominante . . . . .	93
8.5.2	Order of magnitude scaling . . . . .	94
8.5.3	Calcul des intégrales . . . . .	98
8.5.4	Limites de la méthode et améliorations . . . . .	98
8.5.5	Conclusion . . . . .	99
8.6	Application de l'analyse inspectionnelle à un arc TIG : . . . . .	99
8.6.1	Dispositif expérimental . . . . .	100
8.6.2	Résultats expérimentaux . . . . .	100
8.6.3	Analyse dimensionnelle . . . . .	104
8.6.4	Exploitation des résultats expérimentaux . . . . .	106
8.6.5	Validation des résultats par simulation numérique . . . . .	108
	<b>Bibliographie</b>	<b>111</b>
<b>III</b>	<b>Exploitation de l'indice de réfraction</b>	<b>113</b>
<b>9</b>	<b>L'indice de réfraction des gaz</b>	<b>117</b>
9.1	Introduction . . . . .	117
9.2	Définition et relations fondamentales . . . . .	118
9.3	L'indice de réfraction dans les plasmas . . . . .	119
9.3.1	Calcul de l'indice de réfraction d'un gaz . . . . .	119
9.3.2	Calcul de l'indice de réfraction des électrons libres . . . . .	121
9.3.3	Indice de réfraction des ions et des états excités . . . . .	122
9.3.4	Indice de réfraction d'un plasma d'Argon . . . . .	122
9.4	Conclusion . . . . .	124
<b>10</b>	<b>Interférométrie</b>	<b>125</b>
10.1	Introduction . . . . .	125
10.2	Théorie . . . . .	125
10.2.1	Mesure de l'indice de réfraction à l'aide d'un interféromètre de Mach-Zehnder . . . . .	129
10.3	Traitement des données . . . . .	130
10.4	Conclusion . . . . .	131
<b>11</b>	<b>L'ombroscopie quantitative</b>	<b>133</b>
11.1	Introduction . . . . .	133
11.2	Théorie . . . . .	134

11.3	Traitement des données . . . . .	137
11.3.1	Résolution de l'équation de Poisson . . . . .	139
11.3.2	Sensibilité à l'erreur de l'équation de Poisson . . . . .	141
11.4	Conclusion . . . . .	143
<b>12</b>	<b>Défectométrie moiré</b>	<b>145</b>
12.1	Rappel sur l'analyse de Fourier . . . . .	145
12.1.1	Définition . . . . .	145
12.1.2	Propriété de la transformée de Fourier . . . . .	146
12.2	Méthode de la phase stationnaire . . . . .	147
12.3	Introduction . . . . .	150
12.4	Théorie : optique géométrique . . . . .	151
12.4.1	Méthode des équations paramétriques . . . . .	151
12.4.2	Méthode de la composition de transmittances . . . . .	156
12.5	Théorie : optique de Fourier . . . . .	160
12.5.1	Élément d'optique de Fourier . . . . .	160
12.5.2	Validité de l'approche géométrique . . . . .	162
12.5.3	Figure d'interférence à la sortie d'un défectomètre vide . . . . .	163
12.5.4	Perturbation des figures d'interférences par un objet à diagnostiquer . . . . .	170
12.5.5	Relation entre la phase et l'angle de déflexion . . . . .	172
12.5.6	Sensibilité d'un défectomètre . . . . .	173
12.6	Traitement des données . . . . .	176
12.7	Conclusion . . . . .	177
	<b>Bibliographie</b>	<b>179</b>
<b>IV</b>	<b>Spectroscopie moléculaire</b>	<b>181</b>
<b>13</b>	<b>Spectre d'une molécule diatomique, le cas du radical OH</b>	<b>187</b>
13.1	Modèle moléculaire vectoriel d'une molécule diatomique . . . . .	188
13.1.1	État électronique d'une molécule . . . . .	188
13.1.2	États rotationnels d'une molécule : le rotateur rigide . . . . .	190
13.1.3	États vibrationnels d'une molécule : l'oscillateur anharmonique . . . . .	192
13.1.4	Interactions vibration-rotation : le rotateur vibrant . . . . .	193
13.1.5	Spectre électronique d'une molécule diatomique . . . . .	193
13.2	Le spectre UV du radical OH . . . . .	199
13.2.1	Le spectre ultraviolet de OH . . . . .	199
13.3	Conclusion . . . . .	204
<b>14</b>	<b>Utilisation du spectre UV d'OH</b>	<b>205</b>
14.1	Simulation du spectre UV du radical OH . . . . .	205
14.1.1	Généralités . . . . .	205
14.1.2	Fonctionnement du programme de simulation . . . . .	207
14.2	Exploitation des résultats . . . . .	209
14.2.1	Influence de la température rotationnelle sur le spectre UV de OH. . . . .	209
14.2.2	Influence de la température vibrationnelle sur le spectre UV de OH . . . . .	210

14.2.3	Influence de la fonction d'appareil globale sur le spectre UV de OH . . .	210
14.2.4	Résultats pour les hautes résolutions . . . . .	211
14.2.5	Résultats pour les faibles résolutions . . . . .	217
14.2.6	Mesure de températures sur un spectre expérimental . . . . .	219
14.2.7	Validation théorique des méthodes de mesures . . . . .	221
14.3	Conclusion . . . . .	222
14.4	Abaques . . . . .	223
14.4.1	Résultats haute résolution . . . . .	223
14.4.2	Basse résolution avec $G_0$ , $G_1$ résolus . . . . .	227
14.4.3	Basse résolution avec $G_{mel}$ . . . . .	230
<b>Bibliographie</b>		<b>235</b>
<b>V Validation des méthodes de diagnostic</b>		<b>237</b>
<b>15 Diagnostic d'un jet de plasma laminaire par interférométrie et ombrosco-</b>		<b>241</b>
<b>pie</b>		
15.1	Jet de plasma d'argon laminaire . . . . .	241
15.2	Spectroscopie UV du radical OH . . . . .	243
15.3	Interféromètre de Mach-Zendher . . . . .	244
15.3.1	Résultats . . . . .	244
15.4	Banc de shadowgraphie quantitative . . . . .	246
15.4.1	Banc d'ombroscopie à laser He-Ne . . . . .	246
15.4.2	Banc d'ombroscopie à lampe à arc . . . . .	247
15.4.3	Résultats . . . . .	248
15.5	Conclusion . . . . .	249
<b>16 Diagnostic d'un jet de plasma laminaire par défectométrie moiré</b>		<b>253</b>
16.1	Dispositif expérimental . . . . .	253
16.2	Validation des résultats théoriques . . . . .	255
16.2.1	Pas des franges de moiré . . . . .	255
16.2.2	Influence de la distance inter-réseaux . . . . .	256
16.2.3	Sensibilité . . . . .	258
16.2.4	Traitement des défectogrammes . . . . .	259
16.3	Mesure du champ de température d'un jet de plasma d'argon laminaire . . . . .	260
16.3.1	Spectroscopie UV de OH . . . . .	261
16.3.2	Défectométrie moiré . . . . .	262
16.4	Conclusion . . . . .	263
<b>17 Diagnostic d'une décharge de faible puissance</b>		<b>267</b>
17.1	Introduction . . . . .	267
17.2	Dispositif expérimental . . . . .	268
17.3	Mesures macroscopiques . . . . .	269
17.3.1	Forme de la colonne de plasma . . . . .	269
17.3.2	Mesures électriques . . . . .	269
17.4	Défectométrie moiré . . . . .	271

17.5 Spectroscopie moléculaire . . . . .	273
17.5.1 Dispositif expérimental . . . . .	273
17.5.2 Résultats . . . . .	273
17.6 Interprétation des mesures moyennes de défectométrie et de spectroscopie . . .	274
17.6.1 Simulation des mesures de défectométrie moiré . . . . .	274
17.6.2 Simulation des mesures du spectre UV d'OH . . . . .	276
17.6.3 Modélisation de la colonne de plasma . . . . .	277
17.7 Conclusion . . . . .	280
<b>Bibliographie</b>	<b>283</b>
<b>Conclusion générale</b>	<b>285</b>

# Introduction générale

Depuis le début du 20<sup>ème</sup> siècle, les arcs électriques ont été très largement étudiés du fait de leur nombreux champs d'applications. Les plus répandus sont le soudage, l'éclairage, la découpe, ou encore la projection thermique. Ces applications sont basées sur les propriétés du centre de la colonne de plasma, là où le gaz est à une température suffisamment élevée pour rayonner fortement et faire fondre des matériaux. De fait, la majorité des méthodes de diagnostic développées aux cours du siècle dernier se focalise sur cette zone. La plupart de ces techniques supposent que le plasma d'arc est à l'équilibre thermodynamique local ; Sous certaine conditions, il est alors possible de relier le rayonnement émis par le plasma à ces propriétés.

Dans les années 1980, un nouveau domaine d'étude a fait son apparition : la plasma-chimie. Mue par l'augmentation du prix des carburants et par les considérations environnementales, le but de ce domaine de recherche est l'utilisation des arcs électriques et des plasmas hors-équilibres pour produire des réactions chimiques. De nombreux projets tels que la production de nano-matériaux, de gaz de synthèse, ou bien de molécules utiles pour la médecine ont vu le jour ; On peut montrer que la plupart des réactions chimiques ont lieu dans les zones où la température est comprise entre 300 et 8000 K ; Ce sont les zones périphériques des arcs électriques ou le centre de décharges hors équilibre, là où malheureusement, les méthodes de diagnostic classiques ne fonctionnent pas. En partant de ce constat, Nous avons choisi d'orienter cette thèse sur la recherche de méthodes de diagnostic adaptées aux zones périphériques et aux décharges hors équilibre à pression atmosphérique.

Pour ce faire, une recherche bibliographique approfondie nous a tout d'abord permis de comprendre les limitations des méthodes de mesure classiques et de choisir des quantités utilisables pour sonder les zones "froides" des arcs. Le développement des nouvelles méthodes de mesure fait la part belle à la théorie : le principe de fonctionnement de la méthode, mais aussi les paramètres de réglage des dispositifs expérimentaux et la procédure de traitement des données doivent être consciencieusement étudiés de manière à obtenir des résultats de qualité. Par exemple, le développement théorique complet de la déflectométrie moiré s'est étendu sur plus de 5 mois. Le dispositif expérimental est ensuite construit, et les résultats théoriques sont validés. Par rapport au travail théorique, cette première approche expérimentale est relativement peu chronophage. Finalement, lorsque le dispositif expérimental est fonctionnel, la plus grosse partie du travail restant est le développement des outils de traitement des données. Pour l'ombroscopie quantitative par exemple, pas moins de cinq programmes ont été écrits pour traiter les clichés obtenus. La durée de développement des logiciels dépend de leur complexité : le programme d'inversion d'Abel basée sur la méthode Reinsch-Glasser a demandé un mois de développement pour être fonctionnel et exempt de bogues. Pour valider la méthode de mesure, l'étape finale consiste à diagnostiquer une zone périphérique d'arc et à comparer les résultats avec ceux de méthodes de référence. Si la source plasma est judicieusement choisie,

cette validation se fait relativement rapidement.

Ce manuscrit de thèse est découpé en cinq parties. La première partie présente quelques généralités sur les décharges d'arcs puis se focalise sur les méthodes de diagnostic classiques. La théorie et les données nécessaires à l'application de ces méthodes sont passées en revue et quelques techniques très connues telle que la méthode de Fowler-Milne sont décrites avec précision. Les derniers chapitres de cette partie mettent en exergue l'importance des zones périphériques ainsi que l'inefficacité des méthodes de mesure classiques pour les diagnostiquer. Quelques solutions et dispositifs expérimentaux sont présentés afin de répondre à la problématique de thèse. Finalement, cette partie se clôt par un chapitre sur l'inversion d'Abel, un outil indispensable pour mener à bien les diagnostics d'arcs

La seconde partie du manuscrit traite des mesures macroscopiques, de la modélisation et de l'analyse dimensionnelle sur des plasmas d'arc. A travers le premier chapitre, on montre que les mesures macroscopiques sont indispensables pour caractériser un dispositif expérimental ou alimenter les simulations. Quelques mesures électriques et géométriques ainsi que les dispositifs expérimentaux associés sont présentés à cette occasion. Le second chapitre de cette partie se focalise sur la modélisation des colonnes d'arcs. Le modèle fluide à l'ETL y est présenté de manière succincte, puis deux modèles simplifiés, le modèle d'Elenbaas-Heller et le modèle thermique sont détaillés. Couplé à des mesures macroscopiques, ces modèles permettent de comprendre les mécanismes à l'œuvre dans la colonne de plasma. Le dernier chapitre de cette partie est consacré à l'analyse dimensionnelle. Ce domaine de la physique autrefois très en vogue est de nos jours supplanté par les simulations numériques. A travers trois méthodes d'analyse dimensionnelle, nous montrons comment, à l'aide de mesures macroscopiques, on peut obtenir des résultats de première importance que ce soit pour la compréhension physique des phénomènes ou pour la recherche et la simplification de modèles. Finalement, afin de prouver l'utilité des méthodes présentées lors de cette partie, l'analyse inspectionnelle est appliquée pour expliquer les caractéristiques courant/tension d'un arc TIG. Les résultats obtenus sont validés à l'aide du modèle Elenbaas-Heller.

La troisième partie de cette thèse porte sur l'utilisation de l'indice de réfraction. Après un bref rappel sur l'indice de réfraction des gaz, trois méthodes de mesure de l'indice de réfraction sont présentées. L'interférométrie à frange finie est étudié au niveau théorique, puis le traitement des interférogrammes est explicité. Deux méthodes innovantes développées au cours de la thèse sont ensuite étudiées en détail : l'ombroscopie quantitative et l'interférométrie moiré. L'ombroscopie est une méthode qualitative de visualisation d'écoulement datant du 18<sup>ème</sup> siècle ; Elle est basée sur la perturbation d'ombres due aux gradients d'indice des milieux transparents à sonder. La théorie qu'elle implique est développée afin de montrer que des mesures quantitative sont possibles. Le traitement des ombrogrammes ainsi que son impact sur la qualité des résultats est examiné, cela permet de développer une procédure standard de traitement numérique des données. La déflectométrie moiré est une méthode de mesure de l'indice de réfraction utilisant des figures d'interférence construites par effet moiré. Trois approches théoriques de complexité croissante sont présentées au cours de la partie 3 ; L'optique géométrique permet d'obtenir des résultats rapidement tandis que l'optique de Fourier nous donne des informations sur le réglage et les limites de résolution d'un déflectomètre. Cette dernière approche permet de lever certaines contradictions présentes dans la littérature et prouve l'exactitude de certaines configuration expérimentales.

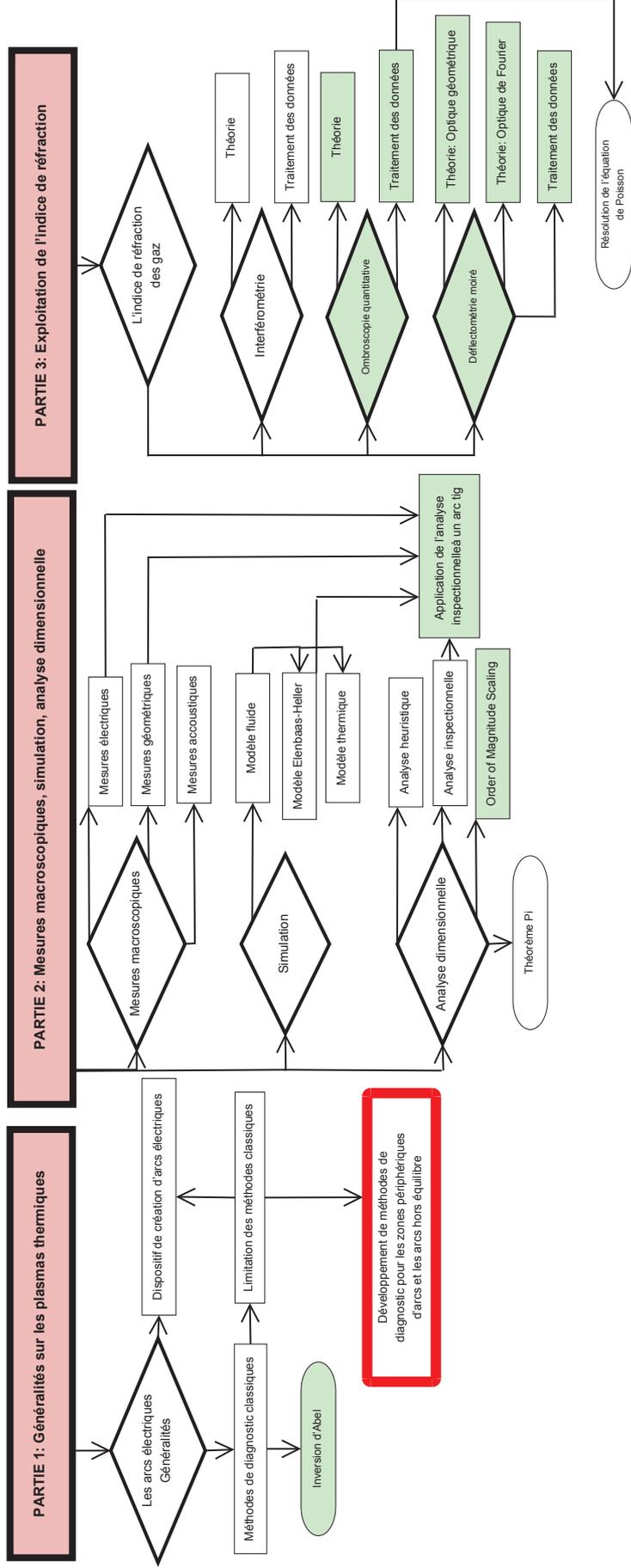
La quatrième partie est dédiée à la spectroscopie moléculaire ; Un chapitre théorique permet l'interprétation des spectres vibroniques d'une molécule diatomique. Un intérêt tout particulier est porté au spectre du radical OH du fait de l'importance de cette molécule dans

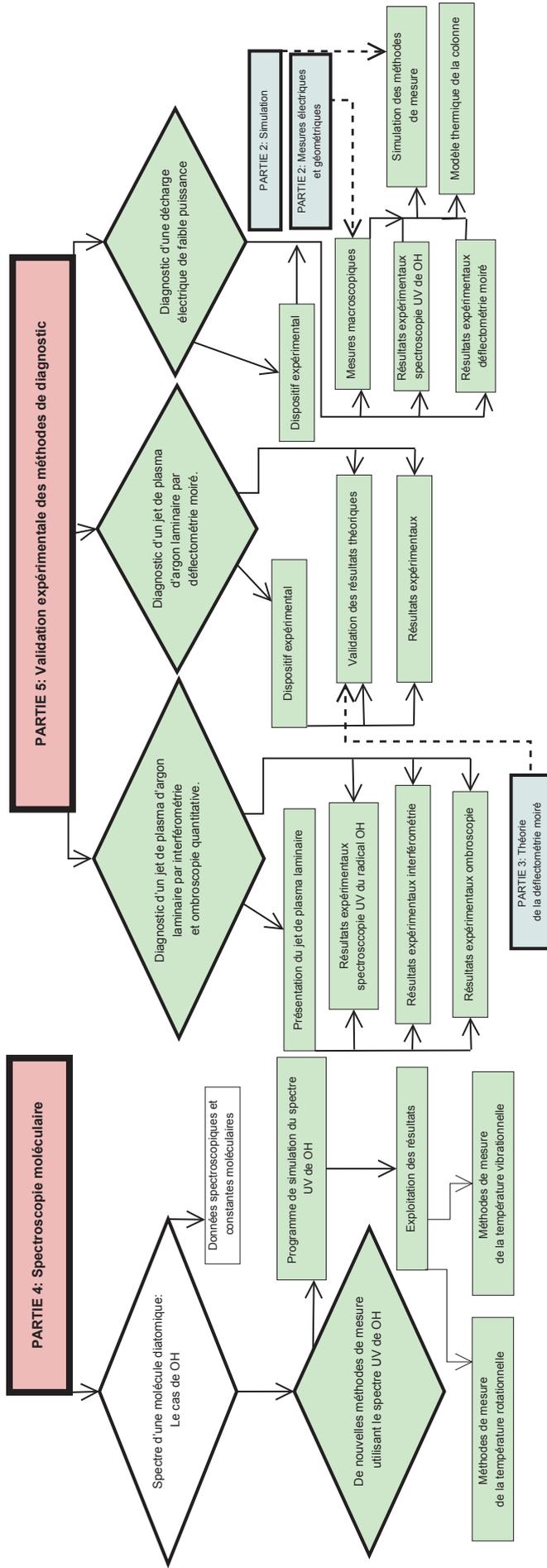
de nombreuses chimies. Finalement, ce chapitre se termine par un résumé des données spectroscopiques concernant le spectre UV du radical OH. Un second chapitre se focalise sur la recherche de méthodes de mesure de températures simples utilisant le spectre UV de OH. Pour ce faire, un programme de simulation de spectres synthétiques est présenté. Les résultats qu'il permet d'obtenir sont analysés puis utilisés pour construire des méthodes de mesure de la température rotationnelle et vibrationnelle à l'aide de grandeurs directement mesurables sur le spectre, sans aucun étalonnage.

La cinquième et dernière partie de la thèse permet de valider expérimentalement l'ensemble des méthodes de mesure développées au cours des parties 3 et 4. Les divers déflectomètres, banc d'ombroscopie et de spectroscopie sont présentés. Pour les méthodes innovantes, un intérêt tout particulier est porté aux réglages et à la mise en place des bancs de mesures. En outre, les résultats théoriques soumis à débats sont validés expérimentalement avant d'appliquer la déflectométrie et l'ombroscopie au diagnostic des zones périphériques. Finalement, l'étude de jets de plasma laminaires d'argon et de décharges hors-équilibre permet de juger de la validité des méthodes développées.

Un résumé du plan de cette thèse est disponible sous forme de diagramme ci-après ; Les parties innovantes sont repérées par la couleur vert.

# ORGANISATION GENERALE DU MANUSCRIT DE THESE







Première partie

Généralités sur les plasmas



# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Généralités sur les plasmas d'arc</b>	<b>11</b>
1.1	Introduction . . . . .	11
1.2	Processus élémentaires . . . . .	12
1.2.1	Collisions élastiques . . . . .	12
1.2.2	Déexcitation et excitation radiatives . . . . .	13
1.2.3	Excitation et déexcitation collisionnelles . . . . .	13
1.2.4	Recombinaison et dissociation radiatives . . . . .	14
1.2.5	Recombinaison à trois corps . . . . .	14
1.2.6	Recombinaison diélectronique . . . . .	14
1.3	Équilibre thermodynamique local . . . . .	14
1.3.1	Équilibre thermodynamique total . . . . .	14
1.3.2	Équilibre thermodynamique local . . . . .	15
1.4	Lois fondamentales . . . . .	15
1.4.1	Fonction de distribution des vitesses . . . . .	15
1.4.2	Quasi-neutralité électrique . . . . .	16
1.4.3	Loi de Boltzmann . . . . .	16
1.4.4	Loi de Saha . . . . .	16
1.4.5	Loi de Guldberg-Waage . . . . .	16
1.4.6	Fonction de partition . . . . .	17
1.5	Calcul de la composition d'un plasma . . . . .	17
1.5.1	Établissement du système d'équations . . . . .	17
1.5.2	Calcul et validation des fonctions de partition de l'argon . . . . .	18
1.5.3	Résolution du système d'équations . . . . .	19
1.5.4	Méthode de Newton-Raphson . . . . .	20
1.5.5	Résultats . . . . .	20
1.6	Coefficients de transport . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Méthodes de diagnostic classiques</b>	<b>25</b>
2.1	Spectroscopie optique d'émission atomique . . . . .	25
2.1.1	Profil d'une raie . . . . .	25
2.2	Méthodes de diagnostic utilisant l'intensité des raies . . . . .	32

2.2.1	Méthode de l'intensité absolue d'une raie . . . . .	32
2.2.2	Méthode de Fowler-Milne . . . . .	33
2.2.3	Méthode du graphe de Boltzmann . . . . .	34
2.3	Méthodes de diagnostic utilisant les profils de raies . . . . .	35
2.4	Utilisation du fond continu . . . . .	36
2.5	Conclusion . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Limitations des techniques de diagnostic classiques</b>	<b>39</b>
3.1	Zones périphériques des colonnes d'arcs . . . . .	39
3.2	Arcs à faible intensité de courant . . . . .	42
3.3	Conclusion . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Dispositifs de création d'arcs électriques</b>	<b>45</b>
4.1	Dispositif TIG . . . . .	45
4.2	Plasmatron . . . . .	47
4.3	Décharge pointe-pointe . . . . .	49
4.4	Conclusion . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Inversion d'Abel</b>	<b>51</b>
5.1	Introduction . . . . .	51
5.2	Inversion d'Abel . . . . .	51
5.3	Méthodes de Calcul . . . . .	52
5.3.1	Méthode Stack and slice modifiée . . . . .	53
5.3.2	Méthode d'interpolation par spline . . . . .	55
5.4	Conclusion . . . . .	58

---

# Chapitre 1

## Généralités sur les plasmas d'arc

L'homme est le seul animal doté de la parole.

Mettant cet avantage à profit, il a appris à parler pour ne rien dire.

Il ne ferme sa gueule qu'en une seule circonstance : devant l'injustice.

---

San Antonio

### 1.1 Introduction

Un plasma est défini comme étant un gaz ionisé, il contient donc des atomes et des molécules neutres, mais aussi des ions et des électrons. La physique des plasmas trouve ses origines à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle dans l'étude des décharges électriques [1] avec les premiers tubes à décharges de Geissler et Crookes. Ce sujet de recherche devient important au début du 20<sup>ème</sup> siècle, lorsque l'on réalise que la ionosphère (Heaviside, 1902) est primordiale dans la propagation des ondes radios. Dans les années 1950, la physique des plasmas connaît un véritable essor grâce au développement des programmes de recherche sur la fusion thermonucléaire et au début de la conquête spatiale. Des expériences pour aller étudier des plasmas spatiaux tels que le vent solaire voient le jour.

Comme nous venons de l'apercevoir, la définition d'un plasma est vaste et englobe des milieux dont le comportement physique peut être totalement différent les uns des autres. En effet, les plasmas denses qui forment le cœur des étoiles n'auront pas les mêmes propriétés que les plasmas à basse pression où la densité de particules est très faible. De même, un arc électrique, dont la température est de l'ordre de 10000 K n'aura pas la même composition qu'un plasma de fusion qui est 1000 fois plus chaud. Afin d'étudier les plasmas, il est donc nécessaire de les différencier. Pour cela, Fauchais et Boulos proposent un diagramme sur lequel sont repérés les différents types de plasma en fonction de leur température et de leur densité électronique (figure 1.1).

Cette thèse porte principalement sur l'étude des plasmas produits par décharge électrique. Là encore, de nombreux régimes de décharge électrique entre deux électrodes sont disponibles en fonction de la pression, de l'intensité du courant et de la tension appliquées aux bornes de celles-ci. Un résumé des différents régimes de décharge est disponible sur la figure 1.2.

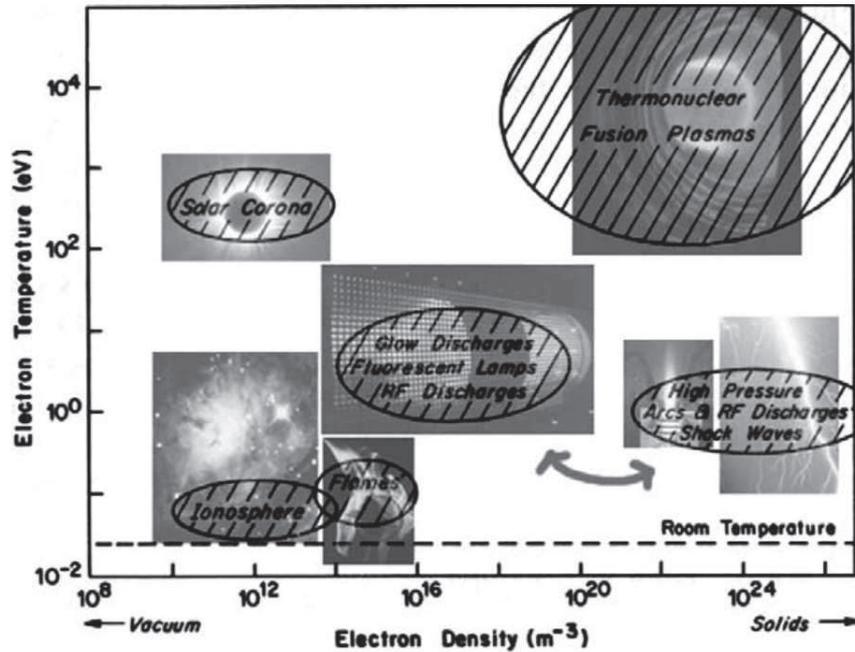


FIGURE 1.1 – Catégorisation des différents types de plasma. Issu de [2].

Nous allons nous intéresser plus particulièrement au régime d'arc. Ce type de décharge est caractérisé pour une faible différence de potentiel aux bornes de la décharge et par une intensité du courant relativement élevée ( $0.1-10^3$  A). La plupart des arcs sont des plasmas thermiques, ils ont comme caractéristique une température des lourds et des électrons de l'ordre de  $10^4$  K et une pression comprise entre  $10^4$  et  $10^6$  Pa. De plus, la température des électrons est proche de celle des lourds.

Afin de bien comprendre comment fonctionnent les méthodes de diagnostic classiques, nous allons passer en revue l'ensemble des processus élémentaires qui ont lieu dans le plasma. Nous nous pencherons ensuite sur les lois fondamentales qui permettent de décrire un plasma thermique et d'interpréter les mesures obtenues par spectroscopie. Finalement nous montrerons comment obtenir la composition d'un plasma à l'équilibre à l'aide de ces lois.

## 1.2 Processus élémentaires

### 1.2.1 Collisions élastiques

Dans un arc électrique, les électrons sont accélérés grâce au champ électrique présent entre les deux électrodes. Les transferts d'énergie entre les électrons et les particules plus lourdes se font majoritairement à l'aide de collisions élastiques.

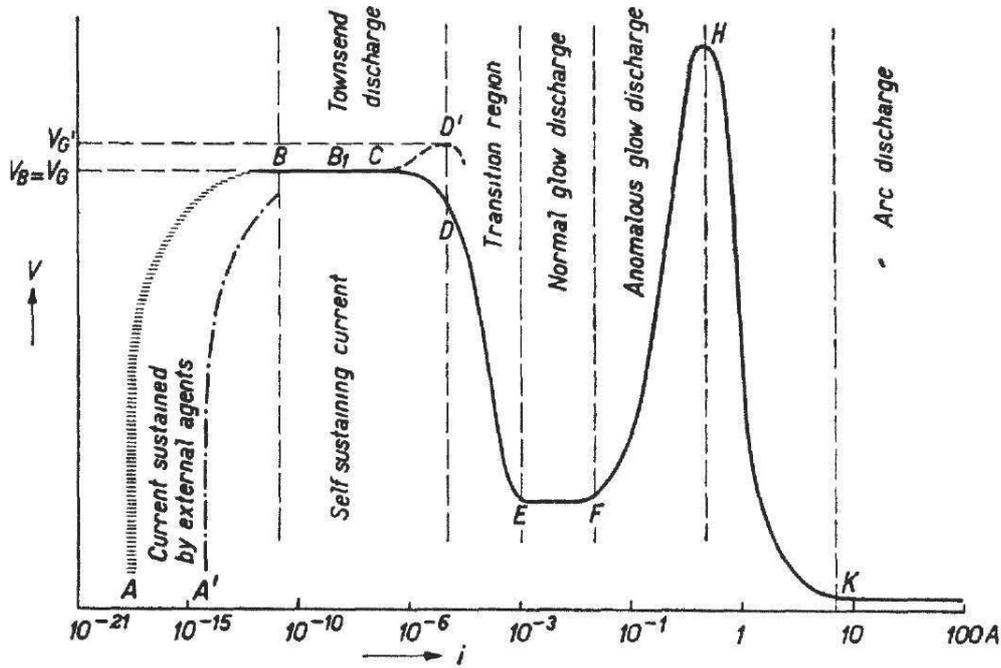


FIGURE 1.2 – Caractéristiques schématisques des différents régimes de décharge possibles entre deux électrodes planes. Issu de [3].

### 1.2.2 Désexcitation et excitation radiatives

Une molécule ou un atome excité sur un niveau  $m$  peut se désexciter spontanément vers un niveau  $n$  si cette désexcitation est permise par les règles de sélection :

$$A(m) \rightarrow A(n) + \text{photon} \quad (1.1)$$

Cette désexcitation est à l'origine de l'émission d'un photon dont la longueur d'onde  $\lambda$  est reliée à la différence d'énergie entre les niveaux  $m$  et  $n$  :

$$\Delta E_{mn} = h \frac{c}{\lambda} \quad (1.2)$$

avec  $h$  la constante de Planck,  $c$  la célérité de la lumière dans le vide.

Pour certains états excités, la désexcitation radiative est interdite par les règles de sélection et la désexcitation se fait généralement par collisions. On appelle ces états « métastables ».

Le processus inverse de la désexcitation radiative existe aussi : l'absorption d'un photon d'énergie égale à celle d'une transition par un atome permet de le faire passer d'un état  $n$  à un état  $m$ . C'est l'excitation radiative ou photo-excitation :

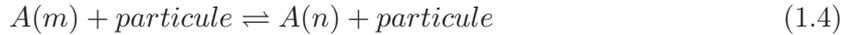
$$A(n) + \text{photon}(\Delta E_{mn}) \rightarrow A(m). \quad (1.3)$$

### 1.2.3 Excitation et désexcitation collisionnelles

Lors d'une collision d'un électron ou d'un atome sur un autre atome, un électron de ce dernier peut être porté à un niveau d'énergie supérieur. C'est une collision inélastique : une

partie de l'énergie cinétique de la particules incidente est transmise à l'atome cible sous forme d'énergie "potentielle".

L'inverse peut aussi se produire. Lors d'une collision, un électron sur un niveau excité peut revenir à un niveau d'énergie inférieur et ainsi transmettre son énergie à la particule incidente sous forme d'énergie cinétique.



### 1.2.4 Recombinaison et dissociation radiatives

La recombinaison radiative a lieu lorsqu'un électron est capturé par un ion pour former un atome excité sur un niveau  $m$ .



L'énergie que l'électron possède en excédent est libérée sous forme de photon. Le spectre du rayonnement émis est alors semi-continu. Le processus inverse est la photo-ionisation.

### 1.2.5 Recombinaison à trois corps

Si un électron collisionne une particule à proximité d'un ion, il suffit qu'il perde suffisamment d'énergie pour pouvoir effectuer une recombinaison :



### 1.2.6 Recombinaison diélectronique

La recombinaison diélectronique suit les réactions suivantes :



Il y a recombinaison entre l'ion et l'électron. Après cette recombinaison, l'atome possède deux électrons dans un état excité et l'atome peut se désexciter soit en se ré-ionisant soit en émettant un photon.

## 1.3 Équilibre thermodynamique local

### 1.3.1 Équilibre thermodynamique total

L'équilibre thermodynamique total peut être défini en considérant un plasma contenu dans une enceinte, le tout à une température  $T$ . L'ensemble des particules du gaz est alors à une température  $T$ , et il nous suffit de cette dernière et de la pression pour décrire totalement l'état du plasma. Dans le gaz ionisé, des phénomènes d'excitation, d'ionisation, etc. ont lieu, mais, du fait de l'équilibre, chaque processus est contrebalancé par son contraire. Plusieurs lois permettent de décrire le plasma lorsqu'il est à l'équilibre thermodynamique. Elle sont toutes fonction de la température et seront présentées dans les sous section suivantes.

### 1.3.2 Équilibre thermodynamique local

Il est relativement rare de trouver dans la réalité un plasma en équilibre thermodynamique total. On peut facilement s'en convaincre en constatant qu'un plasma de laboratoire ne réabsorbe pas la totalité du rayonnement qu'il émet : il y a un déséquilibre au niveau des processus radiatifs. Pour traiter ce genre de plasma, on utilise l'équilibre thermodynamique local. L'ETL stipule que les phénomènes radiatifs sont négligeables par rapport aux phénomènes collisionnels car ces derniers sont le principal mode de transfert d'énergie. Les lois de l'équilibre thermodynamique concernant les processus collisionnels sont donc valides au niveau local, ce qui permet dans ces conditions d'utiliser les lois de peuplement de Boltzmann, les lois de Saha et les fonctions de distribution des vitesses de Maxwell-Boltzmann.

Fondamentalement, deux conditions doivent être réalisées pour que l'hypothèse de l'ETL soit valide. Tout d'abord, il est nécessaire que la densité d'électrons soit suffisamment élevée dans le plasma de manière à ce que les collisions entre les lourds et les électrons dominent les échanges d'énergie par rapport aux processus radiatifs. De plus, il est nécessaire que les gradients de température et de densité soient faibles pour limiter la diffusion des espèces. Avec ces hypothèses validées, on aura  $T_{electron} \approx T_{lourd}$ .

De nombreux critères sont disponibles pour valider l'hypothèse de l'ETL. Griem propose de vérifier que les transitions spontanées dans le plasma entre le premier niveau excité et le niveau fondamental soient en nombre dix fois plus faibles que les transitions par collisions électroniques. La densité électronique minimale pour satisfaire à cette condition est donnée par :

$$N_{e_{min}} = 9 \cdot 10^{11} (\Delta E)^3 T_e \text{ cm}^{-3} \quad (1.8)$$

où  $T_e$  est la température électronique et  $\Delta E$  la différence d'énergie en eV entre le premier niveau excité et le niveau fondamental du gaz plasmagène.

## 1.4 Lois fondamentales

### 1.4.1 Fonction de distribution des vitesses

Du fait de la densité de particules et des chocs entre celles-ci, on sait d'après le théorème de la limite centrale que la vitesse des particules est distribuée selon une loi gaussienne. On appelle cette dernière « loi de distribution des vitesses de Maxwell-Boltzmann ». Elle permet de déterminer la proportion de particules ayant une vitesse comprise entre  $v$  et  $v + dv$

$$f(\vec{v})dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \frac{dn}{n}, \quad (1.9)$$

avec  $m$  la masse de la particule,  $k$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température du plasma.

Si l'on ne s'intéresse qu'à la distribution des particules selon leur module de la vitesse, la fonction de distribution sera de la forme :

$$f^*(v)dv = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv. \quad (1.10)$$

### 1.4.2 Quasi-neutralité électrique

Dans un arc, la densité de charges électriques de signe opposé est égale, on en déduit donc que :

$$\sum n_i q_i = 0; \quad (1.11)$$

Avec  $n_i$  et  $q_i$  respectivement la densité et la charge de l'espèce  $i$ .

### 1.4.3 Loi de Boltzmann

Dans un plasma en équilibre, il y a en permanence une proportion de particules qui sont excitées. La loi de Boltzmann permet de calculer le rapport des populations de deux niveaux énergétiques  $m$  et  $n$  :

$$\frac{n_m}{n_n} = \frac{g_m}{g_n} e^{-\frac{E_m - E_n}{kT}}, \quad (1.12)$$

avec  $g_m$  et  $g_n$  les poids statistiques des niveaux  $m$  et  $n$ ,  $E_m$  et  $E_n$  leurs énergies d'excitations, respectivement.

On peut exprimer le nombre de particules dans un état excité  $m$  en écrivant :

$$n_m = g_m \frac{n}{Z(T)} e^{-\frac{E_m}{kT}}. \quad (1.13)$$

$Z(T)$ , la fonction de partition, est définie par :

$$Z(T) = \sum_i g_i e^{-\frac{E_i}{kT}}, \quad (1.14)$$

où  $g_i$  est la multiplicité du niveau considéré et  $E_i$  son énergie par rapport au fondamental.

### 1.4.4 Loi de Saha

La loi de Saha permet de déterminer la proportion d'ions dans le plasma. Elle est définie par l'équation :

$$\frac{n_i^{s+1} n_e}{n_i^s} = \frac{2Z_{s+1}(T)}{Z_s(T)} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{(E_s - \Delta E)}{kT}}, \quad (1.15)$$

avec  $n_e$ ,  $n_i^{s+1}$ ,  $n_i^s$  respectivement les densités d'électrons, d'ions chargés  $s + 1$  fois et d'ions chargés  $s$  fois.  $Z(T)$  est la fonction de partition de l'ion considéré,  $m_e$  la masse de l'électron et  $\Delta E$  l'abaissement du potentiel d'ionisation.

### 1.4.5 Loi de Guldberg-Waage

La loi de Guldberg-Waage est le pendant de la loi de Saha pour la dissociation de molécules. Elle permet de déterminer la proportion de molécules dissociées dans le plasma :

$$\frac{n_{AB}}{n_A n_B} = \frac{Z_{AB}(T)}{Z_A Z_B} \left( \frac{m_a + m_b}{m_a \cdot m_b} \right)^{3/2} \frac{(2\pi kT)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{(E_{AB} - \Delta E)}{kT}} \quad (1.16)$$

Avec  $Z$  les différentes fonctions de partition,  $E_{AB}$  l'énergie de réaction et  $\Delta E$  l'abaissement de cette énergie.

### 1.4.6 Fonction de partition

La fonction de partition des atomes et des ions intervenant dans la loi de Boltzmann et la loi de Saha est définie par la relation :

$$Z(T) = \sum_i g_i e^{-E_i/(kT)}. \quad (1.17)$$

Ici,  $E_i$  est l'énergie du niveau considéré tandis que  $g_i$  est sa multiplicité. Cette dernière est le poids statistique du niveau, elle correspond au nombre d'états quantiques qui ont la même énergie.  $g_i$  est relié au nombre quantique  $J_i$  par la relation :

$$g_i = 2J_i + 1. \quad (1.18)$$

Lorsque  $i$  tend vers l'infini, l'énergie  $E_i$  tend vers l'énergie d'ionisation  $E_\infty$  et le terme  $g_i e^{-E_i/(kT)}$  ne tend pas vers zéro.  $Z(T)$  diverge donc. Cependant, dans un plasma, l'électron qui se trouve sur les couches électroniques externes d'un atome subit le champ électrique de l'atome, mais aussi le champ électrique des particules chargées entourant ce dernier. Ce champ extérieur a pour effet d'abaisser l'énergie nécessaire pour arracher un électron à un atome d'une quantité  $\Delta E$ . Actuellement, il est très compliqué de mesurer expérimentalement l'abaissement du potentiel d'ionisation, il existe donc un doute quant à la théorie à appliquer. Olsen [4] a tenté de mesurer l'abaissement du potentiel en suivant le fond continu libre-lié pour un plasma d'argon. La valeur mesurée est très élevée par rapport à celles obtenues avec les différentes théories, il est donc difficile de conclure sur la validité des différents résultats. Musiol [5] propose d'utiliser préférentiellement la théorie de Griem et d'Ecker & Kroll pour les plasmas thermiques.

## 1.5 Calcul de la composition d'un plasma

La connaissance de la composition d'un plasma est très importante en simulation et en expérimentation. Dans le premier cas, la composition du plasma en fonction de la température va jouer un grand rôle dans la structure et les propriétés de la décharge. Par exemple, pour un courant donné, un plasma d'argon seul n'aura pas la même forme et la même température qu'un plasma Argon-Hydrogène.

En expérimentation, les méthodes de diagnostic spectroscopiques fournissent souvent des informations sur l'état de peuplement des niveaux énergétiques d'une particule émettrice. Il est nécessaire de connaître la composition afin de relier la température d'excitation mesurée avec la densité électronique, la quantité d'ions, etc. Comme nous le verrons par la suite, des méthodes de diagnostic telle que la méthode de Fowler-Milne sont complètement basées sur la composition du plasma pour fournir des mesures de températures.

Afin de comprendre comment calculer la composition d'un plasma à l'aide des équations fondamentales présentées ci-dessus, on se propose d'obtenir la composition d'un plasma d'argon pour des températures comprises entre 300 et 25000 K.

### 1.5.1 Établissement du système d'équations

Pour cette gamme de température, les particules qui composent le plasma seront les électrons, l'argon neutre ARI ainsi que ses différents ions ARII, ARIII et ARIV. Au total, ce ne sont pas moins de cinq densités ou pressions inconnues qui doivent être obtenues.

Écrivons tout d'abord les lois de Saha pour prendre en compte l'ionisation de l'argon ARI, ARII et ARIII :

$$\frac{Pe PArII}{PArI} = kT \frac{2Z_{ArII}(T) (2\pi m_e kT)^{3/2}}{Z_{ArI}(T) h^3} e^{-\frac{(E_{ArI} - \Delta E(T, Pe))}{kT}}; \quad (1.19)$$

$$\frac{Pe PArIII}{PArII} = kT \frac{2Z_{ArIII}(T) (2\pi m_e kT)^{3/2}}{Z_{ArII}(T) h^3} e^{-\frac{(E_{ArII} - \Delta E(T, Pe))}{kT}}; \quad (1.20)$$

$$\frac{Pe PArIV}{PArIII} = kT \frac{2Z_{ArIV}(T) (2\pi m_e kT)^{3/2}}{Z_{ArIII}(T) h^3} e^{-\frac{(E_{ArIII} - \Delta E(T, Pe))}{kT}}. \quad (1.21)$$

Avec ces trois équations le système est sous-déterminé. Il est nécessaire de faire intervenir deux autres équations si on désire le résoudre. La quasi-neutralité électrique nous donne :

$$Pe - PArII - 2PArIII - 3PArIV = 0. \quad (1.22)$$

Nous avons vu précédemment qu'un système à l'équilibre thermodynamique était complètement défini à l'aide de sa température et de sa pression. Si l'on fixe la pression totale du plasma, on pourra écrire grâce à la loi de Dalton :

$$Pe + PArI + PArII + PArIII + PArIV = P_{plasma}. \quad (1.23)$$

La résolution de ce système d'équation n'est pas triviale et ce pour deux raisons. Tout d'abord, le calcul des fonctions de partition et de l'abaissement du potentiel d'ionisation nécessite une attention particulière afin d'obtenir des résultats corrects. Le choix pour la coupure de la série 1.17 peut poser problème lorsque la température est élevée et que les termes d'ordre élevé sont de moins en moins négligeables. À titre d'exemple, la fonction de partition d'Olsen [6] pour l'ArI calculée en 1959 est supérieure de 10% ou plus à partir de 16000 K à celles calculées par Irwin [7] en 1980 et dans ce présent travail. En outre, la non prise en compte de l'abaissement du potentiel d'ionisation conduit à une erreur sur  $Z$  de l'ordre de 5% pour des températures de l'ordre de 15000 K [6].

La seconde difficulté pour la résolution du système est sa non-linéarité. Des méthodes numériques de recherche de racine de type Newton-Raphson doivent être envisagées pour venir à bout de ce problème.

## 1.5.2 Calcul et validation des fonctions de partition de l'argon

Le calcul des fonctions de partition pour l'argon neutre et ses ions a été mené à l'aide des données spectroscopiques fournies par le NIST et de la théorie de l'abaissement du potentiel d'ionisation d'Ecker et Kröll (satisfaisante pour des plasmas avec  $n_e < 10^{19}$  e/cm<sup>3</sup>).

Les résultats obtenus sont présentés sur le graphique 1.3 où ils sont comparés aux résultats obtenus par Olsen et Irwin. Lors de ces calculs, Olsen [4] stoppait la série lorsque le rayon de l'orbite hydrogénoïde correspondant au nombre quantique principal  $n$  était plus élevé que la moitié de la distance entre plus proches voisins. Pour sa part, Irwin [7] a utilisé un abaissement du potentiel d'ionisation constant de 0.1 eV.

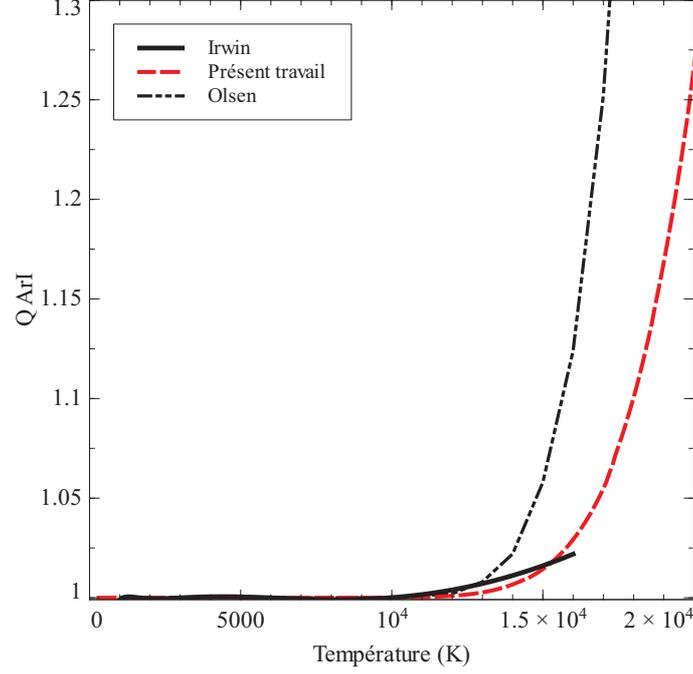


FIGURE 1.3 – Comparaison de la fonction de partition de l'argon I calculé lors de cette étude avec celles obtenues par Irwin [7] et Olsen [4].

## Résultats

Comme on peut le constater, la prise en compte de l'abaissement du potentiel d'ionisation est primordiale dans le calcul de la fonction de partition de l'argon. Sa non prise en compte conduit à des écarts de 5 à 30 % entre les résultats de Olsen et les miens. Cela peut se révéler fâcheux lorsqu'on utilise des méthodes de diagnostic de type Fowler-Milne qui reposent sur une connaissance précise de la composition et de la fonction de partition d'un plasma d'argon à 15000 K. Pour conclure, mes résultats sont proches de ceux obtenus par Irwin, ils semblent donc corrects.

### 1.5.3 Résolution du système d'équations

Le système que l'on doit résoudre est non linéaire et multi-dimensionnel. Pour le résoudre, on peut utiliser une méthode de type Newton-Raphson qui permet la recherche de zéros d'équations non linéaires. Afin de mettre en œuvre cette méthode, il est nécessaire de réécrire toutes les équations pour rendre la recherche de racine explicite ;

$$f(Pe, P_{ArI}, \dots, P_{ArIV}, T) = \frac{Pe P_{ArII}}{P_{ArI}} - kT \frac{2Z_{ArII}(T)}{Z_{ArI}(T)} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{(E_{ArI} - \Delta E(T, Pe))}{kT}}; \quad (1.24)$$

$$g(Pe, PArI, \dots, PArIV, T) = \frac{Pe PArIII}{PArII} - kT \frac{2Z_{ArIII}(T)}{Z_{ArII}(T)} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{(E_{ArII} - \Delta E(T, Pe))}{kT}}; \quad (1.25)$$

$$l(Pe, PArI, \dots, PArIV, T) = \frac{Pe PArIV}{PArIII} - kT \frac{2Z_{ArIV}(T)}{Z_{ArIII}(T)} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{(E_{ArIII} - \Delta E(T, Pe))}{kT}}; \quad (1.26)$$

$$h(Pe, PArI, \dots, PArIV, T) = Pe + PArI + PArII + PArIII + PArIV - P; \quad (1.27)$$

$$k(Pe, PArI, \dots, PArIV, T) = Pe - PArII - 2PArIII - 3PArIV; \quad (1.28)$$

Sous cette forme, les variables solutions du système donneront  $f = g = h = k = l = 0$ .

#### 1.5.4 Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson est une méthode itérative qui consiste à utiliser les développements limités à l'ordre 1 des équations précédentes pour se rapprocher de leur solution.

Considérons deux fonctions  $f(x, y)$  et  $g(x, y)$ . Les variables  $x$  et  $y$  solutions de ce système donnent  $f(x, y) = g(x, y) = 0$ . Le développement limité de ces fonctions autour de zéro est :

$$DL(f(x, y)) = f(x, y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_x \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_y \Delta y = 0 \quad (1.29)$$

$$DL(g(x, y)) = g(x, y) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_x \Delta x + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_y \Delta Y = 0 \quad (1.30)$$

On choisit  $x_i$  et  $y_i$  une position de départ pas trop éloignée de la solution de manière à éviter les minimums locaux et les problèmes de divergence de l'algorithme.

Avec ces variables, on peut évaluer  $g(x_i, y_i)$  et  $f(x_i, y_i)$  ainsi que leurs dérivées partielles. Les inconnues à déterminer sont les  $\Delta x$  et  $\Delta y$ , on les obtient en résolvant le système :

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_i \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_i & \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i(x_i, y_i) \\ g_i(x_i, y_i) \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

$\Delta x$  et  $\Delta y$  sont des pas qui permettent de réduire l'écart entre  $f_i(x_i, y_i)$ ,  $g_i(x_i, y_i)$  et 0.

En posant  $x_{i+1} = x_i + \Delta x$  et  $y_{i+1} = y_i + \Delta y$  et en répétant le processus jusqu'à ce que  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  soient plus petits qu'une erreur fixée, on peut obtenir une solution satisfaisante de ce système.

#### 1.5.5 Résultats

Un code de calcul développé en C++ pour calculer la composition est disponible en annexe. La composition du plasma d'argon que nous avons calculé pour la pression atmosphérique est disponible sur le graphique 1.4. Le gaz ne devient conducteur que pour une température proche de 5000 K puisque c'est à cette température que la densité d'électrons devient quantifiable.

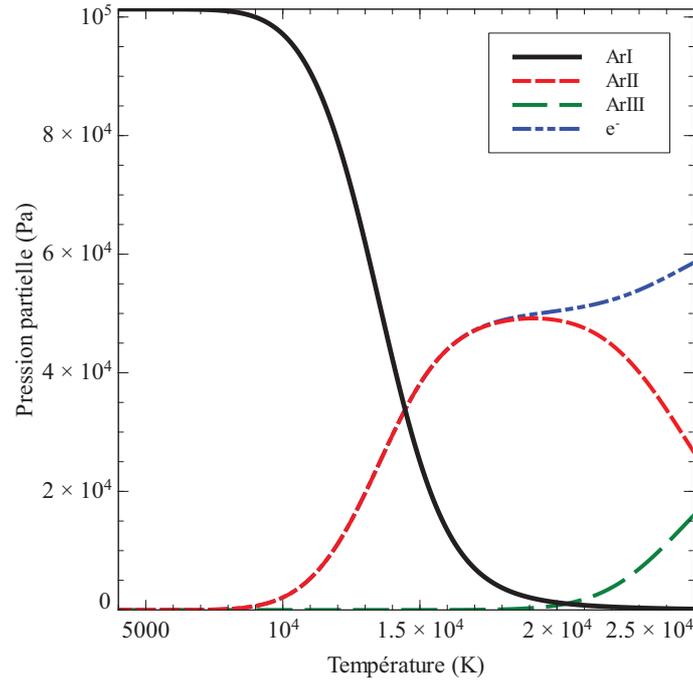


FIGURE 1.4 – Composition d'un plasma d'argon à pression atmosphérique et à l'ETL.

## 1.6 Coefficients de transport

La composition d'un plasma ainsi que ses propriétés thermodynamiques ne sont pas les seules données d'importance lorsqu'on désire mettre au point un procédé plasma ou effectuer une simulation numérique. En effet, dans un arc, l'état stationnaire est atteint grâce à des phénomènes de transport. Par exemple, l'énergie apportée par effet Joule est en partie dissipée via un flux de chaleur dirigé de la colonne vers les régions froides. On remarque aussi que de la diffusion de particules s'établit des zones de fortes densités vers celles de faibles densités. Fondamentalement, l'ensemble des phénomènes de transport dans les plasmas peuvent être décrits en première approximation par des lois de type loi de Fourier (loi de diffusion) de la forme :

$$\vec{\psi} = -x \vec{\nabla} \chi \quad (1.32)$$

où  $x$  est un coefficient de transport.

Pour la diffusion de la chaleur de la colonne vers l'extérieur on aura :

$$\vec{\phi} = -\lambda \vec{\nabla} T, \quad (1.33)$$

Avec  $\phi$  la densité de flux de chaleur,  $\lambda$  la conductivité thermique et  $T$  la température. Pour la densité de courant, la loi d'Ohm généralisée nous donne :

$$\vec{j} = -\sigma \vec{\nabla} V, \quad (1.34)$$

Avec  $\vec{j}$  la densité de courant,  $\sigma$  la conductivité électrique et  $V$  le potentiel électrique.

Les phénomènes de transport de particules sont relativement complexes et nombreux. Sans rentrer dans les détails, les particules constituant le plasma sont soumises à de la diffusion ordinaire, de la diffusion thermique. Dans le cas de particules chargées, un terme dû à la dérive dans un champ électrique s'ajoute à la diffusion ordinaire : c'est la diffusion ambipolaire.

Nous n'allons pas présenter ici les méthodes de calcul utilisées pour obtenir ces coefficients. Nous nous bornerons à lister les coefficients de transports les plus importants et à montrer que leur connaissance est primordiale pour interpréter le comportement des arcs électriques.

### Conductivité électrique

Le transport du courant électrique au travers de la décharge est directement lié à la conductivité électrique. Si à cause de la faible mobilité des ions on néglige la conduction ionique, on peut définir la conductivité électrique comme :

$$\sigma = n_e \mu_e e; \quad (1.35)$$

Avec  $n_e$  la densité électronique,  $\mu_e$  la mobilité électronique et  $e$  la charge élémentaire. On rappelle que la mobilité électronique est donnée par :

$$\mu_e = \frac{e}{m\nu_m}, \quad (1.36)$$

où  $m$  est la masse de l'électron et  $\nu_m$  sa fréquence de collision. La conductivité électrique dépend fortement de la densité électronique et des collision élastiques entre les électrons et les particules lourdes. Par exemple, l'inclusion de vapeurs métalliques dans une décharge entraînera une modification drastique de sa conductivité électrique moyenne due à l'augmentation de la densité électronique. Si l'arc est alimenté par un générateur de courant, cela se traduira par une diminution de la différence de potentiel aux bornes des électrodes.

### Conductivité thermique

La conductivité thermique est une grandeur caractéristique de la propagation de la chaleur dans un corps. Lors de son calcul, plusieurs phénomènes sont à considérer. La conduction de la chaleur est tout d'abord due aux collisions élastiques des électrons et des lourds. Elle est aussi due aux échanges d'énergies internes (vibration/rotation). Finalement, le dernier moyen de transport de chaleur se fait par le biais de réactions. Par exemple, des molécules vont être dissociées en deux ou plusieurs particules dans l'arc puis diffuser pour finalement se recombiner. L'énergie nécessaire pour dissocier les molécules a donc bien été transportée du lieu de dissociation au lieu de recombinaison.

En prenant en compte l'ensemble de ces phénomènes, la conductivité thermique totale s'écrit :

$$\lambda = \lambda_{col \text{ lourde}} + \lambda_{col \text{ elec}} + \lambda_{reac} + \lambda_{intern} \quad (1.37)$$

### Viscosité

La viscosité des plasmas est un paramètre important pour le fonctionnement des torches à plasma. Pour les procédés de projection thermique notamment, la viscosité influe sur l'ensemencement du jet par des poudres. Cette caractéristique est due aux particules lourdes.

Comme les interactions entre particules chargées tendent à diminuer la viscosité, celle-ci présente généralement un maximum autour de 10000 K.

### Influence des coefficients de transport sur le comportement des arcs

De nombreux auteurs ont étudié l'influence des différents coefficients de transport sur le comportement d'arcs [8]. Murphy [9] et al ont étudié un arc pointe plan brûlant dans l'argon, l'hélium l'hydrogène et l'azote. Pour chacun de ces gaz, ils ont mis en évidence l'effet de chaque coefficient de transport sur les propriétés de l'arc (fig.1.5 et fig.1.6).

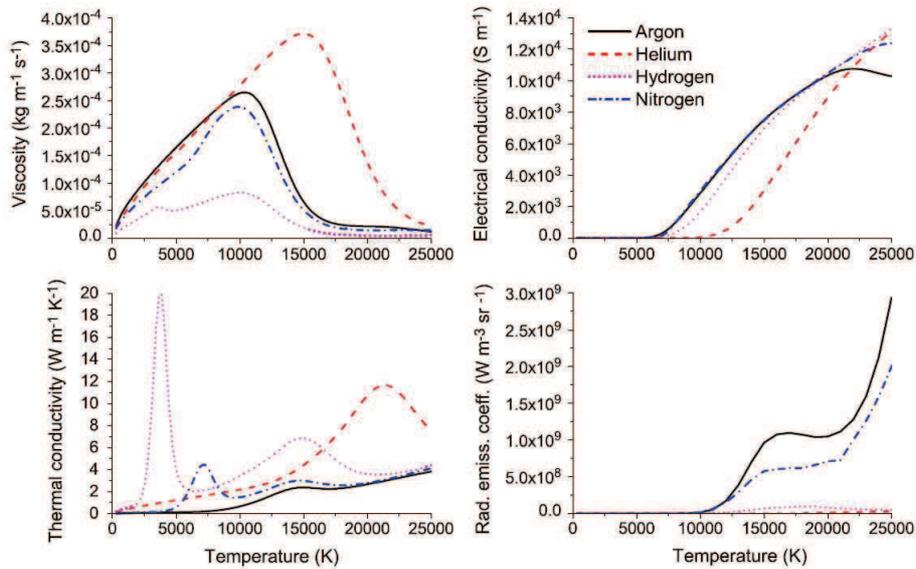


FIGURE 1.5 – Coefficients de transport pour différents gaz plasmagènes. Issu de [9].

Pour conclure, on constate que les coefficients de transports sont indispensables à la compréhension des arcs. Ils permettent d'alimenter les simulations numériques, mais aussi, comme nous le verrons par la suite, de mettre en évidence les différents phénomènes physiques à l'œuvre dans une colonne de plasma à l'aide de l'analyse dimensionnelle.

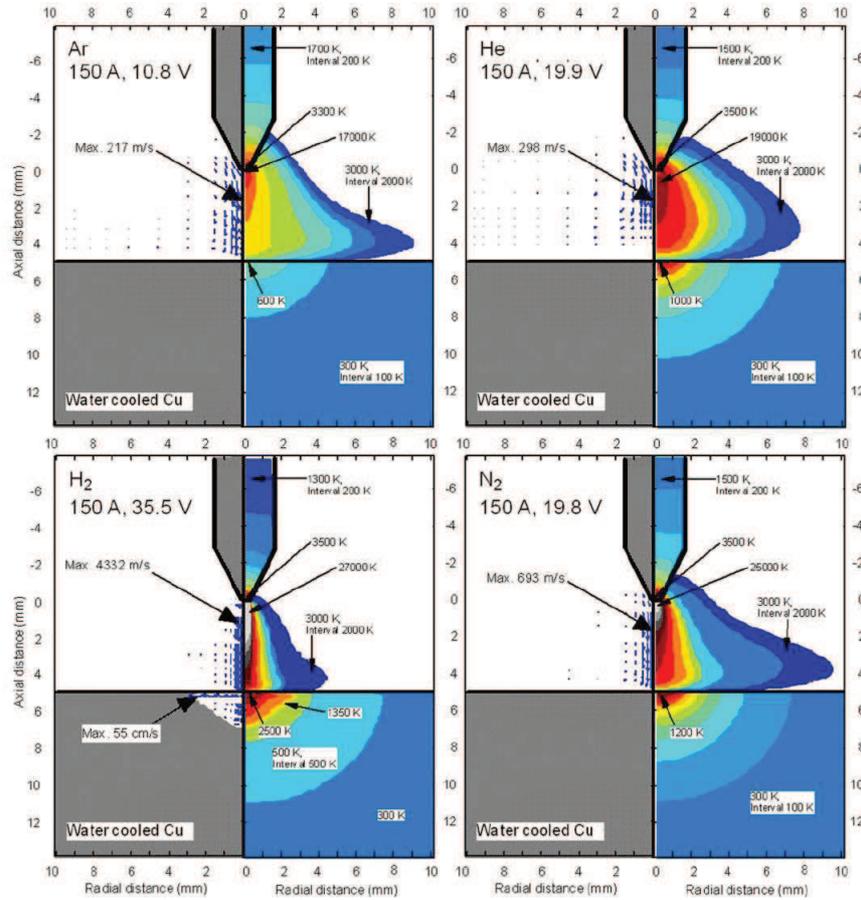


FIGURE 1.6 – Champs de température simulés d'arc TIG brûlant dans différents gaz plasmagènes avec une intensité de courant de 150 A. On constate que les coefficients de transport ont une influence non négligeable sur la forme générale de l'arc et sa température maximum. Issu de [9].

# Chapitre 2

## Méthodes de diagnostic classiques

Je me suis levé avec lassitude. Ma montre dit treize heures, ce qui est un tour de force pour un cadran numéroté jusqu'à douze.

---

San Antonio

Du fait de leur température relativement élevée, le diagnostic des arcs électriques se fait préférentiellement à l'aide du rayonnement électromagnétique qu'ils émettent. Au cours de ce chapitre, nous allons nous pencher sur des méthodes de diagnostic issues pour la plupart de l'astrophysique. La majorité de ces méthodes sont basées sur les lois et les processus fondamentaux présentés dans le chapitre précédent. Nous verrons cependant lors de l'étude de la structure d'un spectre d'émission atomique que ces lois ne sont pas suffisantes pour interpréter un spectre. La spectroscopie moléculaire est hors du champ de cette étude. Cependant, des méthodes comme celle du graphe de Boltzmann sont applicables pour obtenir les températures de rotation et de vibration

### 2.1 Spectroscopie optique d'émission atomique

Le spectre du rayonnement provenant d'un plasma peut être séparé en deux parties aisément identifiables (fig.2.1). La première est appelée spectre de raies et est issue de l'ensemble des désexcitations spontanées des atomes. Elle est constituée de raies dont la longueur d'onde est reliée à l'énergie mise en jeu lors des différentes transitions. La seconde est appelée fond continu ou spectre continu ; elle est due aux rayonnements issus des transitions libres-liées et aux rayonnement de freinage (bremsstrahlung) des électrons.

#### 2.1.1 Profil d'une raie

Le coefficient d'émission d'une raie intégré sur tout le profil est de la forme :

$$\epsilon = \frac{h\nu}{4\pi} A_{ml} n_m, \quad (2.1)$$

où  $A_{ml}$  est la probabilité de transition entre le niveau  $m$  et le niveau  $l$ ,  $n_m$  la densité de particules dans l'état  $m$ ,  $h$  la constante de Planck et  $\nu$  la fréquence associée à la transition  $ml$ .

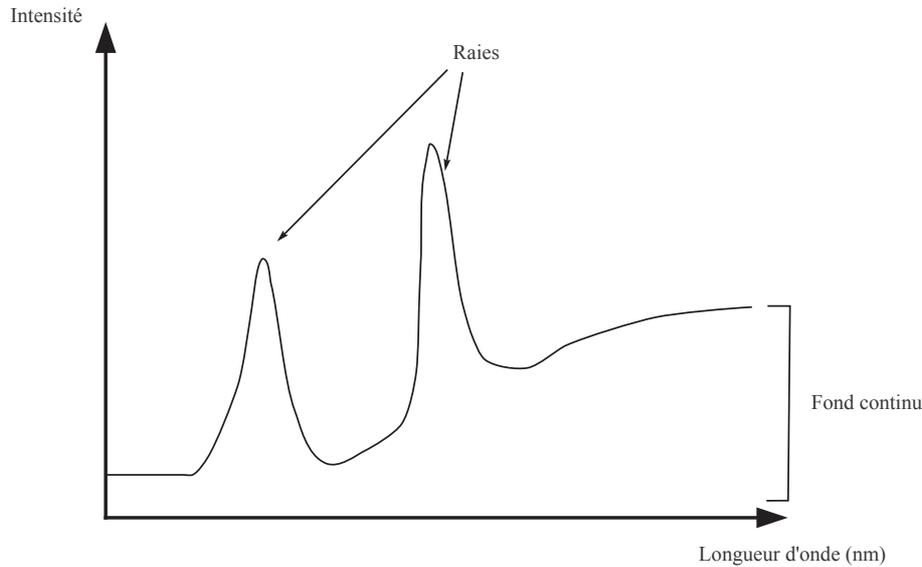


FIGURE 2.1 – Schéma d'un spectre d'émission atomique.

Les raies émises ne sont pas infiniment fines, elles présentent un certain profil qui dépend des conditions dans lesquelles se trouvent les émetteurs. Plusieurs causes sont à l'origine de l'élargissement de ces raies. Le plus évident est tout d'abord le principe d'incertitude temps fréquence. La désexcitation est un phénomène de durée finie, il en résulte un élargissement naturel qui suit la relation :

$$\delta t \delta \nu \approx 1. \quad (2.2)$$

Il est relativement simple de se convaincre de l'existence de l'élargissement naturel en considérant le spectre d'un sinus infini et celui d'un sinus multiplié par une fonction créneau. Le spectre du sinus infini sera des diracs tandis que le spectre d'un sinus fini correspondra à des sinus cardinaux centrés autour de sa fréquence.

Généralement, l'élargissement naturel est négligeable devant les autres sources d'élargissement de raies.

### Élargissement Doppler

L'élargissement Doppler est dû au décalage en fréquence que vont avoir les ondes électromagnétiques émises par une particule en mouvement. La vitesse de la lumière étant constante, si une particule se déplace à une vitesse  $v$  dans la direction de l'observateur, ce dernier perçoit une onde électromagnétique dont la fréquence est décalée par rapport à sa fréquence d'émission "au repos"  $\nu_0$  suivant la relation :

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta \nu}{\nu_0}; \quad (2.3)$$

avec  $c$  la célérité de la lumière.

En considérant que la vitesse des particules suit la relation (1.9), l'élargissement Doppler sera de la forme :

$$I(\nu) = I(\nu_0) e^{-c \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0 \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}}}, \quad (2.4)$$

avec  $m$  la masse des particules émettrices,  $T$  leur température et  $k$  la constante de Boltzmann.

Pour les plasmas à pression atmosphérique, l'élargissement Doppler n'est pas assez perceptible par rapport aux autres sources d'élargissement pour être utilisé à des fins de diagnostic. C'est cependant un effet très utilisé dans le domaine des plasmas basse pression pour étudier les fonctions de distribution des vitesses des éléments du plasma.

### Élargissement par collision

L'élargissement collisionnel est dû à la perturbation de l'émission d'un rayonnement par un choc entre l'émetteur et une autre particule. Deux types d'élargissements collisionnels peuvent être distingués : l'élargissement dû à des particules neutre, l'élargissement de pression, et l'élargissement dû aux particules chargés ou "élargissement Stark". Dans les arcs électriques à pression atmosphérique, c'est généralement l'élargissement Stark qui prédomine. Pecker-Wimel a comparé les différentes sources d'élargissement pour un plasma thermique. Ces résultats, disponibles dans les tableaux ?? montrent bien que l'élargissement Stark est prépondérant dans les plasmas thermiques.

TABLE 2.1 – Élargissement Stark et Doppler pour la raie  $H_\alpha$  ( $\lambda = 656.3 \text{ nm}$ ) calculés à différentes températures pour un plasma d'hydrogène avec  $n_e = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ . Issu de [10].

	$T = 10^4 \text{ K}$	$T = 2 \cdot 10^4 \text{ K}$	$T = 4 \cdot 10^4 \text{ K}$
Élargissement Stark	0.92 nm	0.86 nm	0.64 nm
Élargissement Doppler	0.047 nm	0.066 nm	0.094 nm

TABLE 2.2 – Élargissement Stark et Doppler pour la raie  $H_\beta$  ( $\lambda = 486.1 \text{ nm}$ ) calculés à différentes températures pour un plasma d'hydrogène avec  $n_e = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ . Issu de [10].

	$T = 10^4 \text{ K}$	$T = 2 \cdot 10^4 \text{ K}$	$T = 4 \cdot 10^4 \text{ K}$
Élargissement Stark	4.65 nm	4.7 nm	4.7 nm
Élargissement Doppler	0.035 nm	0.059 nm	0.07 nm

Sans rentrer dans les détails théoriques, les calculs d'élargissement Stark sont menés en considérant la contribution de deux phénomènes différents. L'approximation quasi-statique pose l'hypothèse que les ions sont immobiles pendant la période d'émission de l'onde électromagnétique. De fait, le champ électrique vu par les électrons de l'émetteur sera différent du cas où ce dernier est placé dans un milieu neutre. Les électrons ont une mobilité beaucoup plus élevée que les ions, leur déplacement n'est pas négligeable lors de l'émission de l'onde électromagnétique. On les traite donc via la théorie des impacts pour laquelle on considère que des collisions électron-émetteur vont perturber les niveaux électroniques au cours de l'émission.

Pour plus de détails concernant les calculs d'élargissement Stark, on se reportera aux travaux de H.R. Griem.

### Profil d'une raie

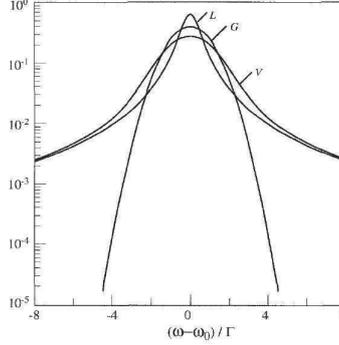


FIGURE 2.2 – Comparaison des profils lorentzien (L), gaussien (G) et du profil de Voigt (V).

Pour les plasmas thermiques, les profils de raies sont généralement un mélange entre un profil gaussien issu de l'élargissement Doppler et un profil lorentzien issu de l'élargissement Stark. La convolution de ces profils est appelée profil de Voigt, sa forme est disponible sur la figure 2.2. Pour séparer les différentes contributions à l'élargissement des raies, il est nécessaire de procéder à une déconvolution, ce qui n'est pas chose aisée. Grâce à un élargissement Doppler négligeable, Musiol [5] propose d'approximer les raies spectrales d'atomes non hydrogénoïde par des lorentziennes. Le fond continu sur lequel peut reposer les raies spectrales est, quant à lui approximé par un polynôme d'ordre 2, cela permet d'effectuer des mesures sur les profils et de calculer les coefficients d'émission de raies avec un minimum d'erreur.

$$\epsilon_{fc}(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 \quad (2.5)$$

$$\epsilon_{raie}(\lambda) = \frac{a_3}{1 + \left(\frac{a_4 - \lambda}{a_5}\right)^2} \quad (2.6)$$

### Épaisseur optique d'un plasma

Il arrive que le plasma soit optiquement épais dans le domaine spectral d'intérêt. Cela peut poser problème lorsqu'on utilise les profils et les coefficients d'émission des raies dans un but de diagnostic car une partie de leur profil peut être absorbée.

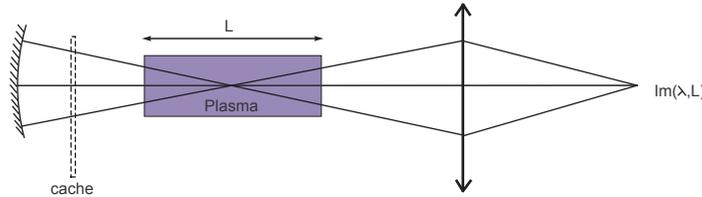


FIGURE 2.3 – Montage optique pour mesurer l'absorption d'un plasma.

Afin de quantifier l'épaisseur optique d'un plasma, Musiol propose le montage présenté sur la figure 2.3. Il se compose d'un miroir concave qui permet de refaire passer la lumière issue du plasma dans ce dernier, d'un cache et d'une lentille.

Comme pour les coefficients d'émission, on peut décomposer l'épaisseur optique d'un plasma en deux composantes :

$$\tau_\lambda = \tau_{raie} + \tau_{fond\ cont.} \quad (2.7)$$

Dans le visible pour un plasma thermique,  $\tau_{fond\ cont.}$  est négligeable et on considère que  $\tau_\lambda = \tau_{raie}$ .

Lorsqu'on se place loin d'une raie, on peut considérer que la réabsorption est négligeable. On a de ce fait, lorsqu'il n'y a pas de cache :

$$I_{miroir} = I(\lambda, L) + rI(\lambda, L), \quad (2.8)$$

où  $r$  la réflectivité du miroir. En enregistrant des intensités sur les bords d'une raie avec et sans le cache, on peut calculer la réflectivité du miroir.

Lorsque la réflectivité du miroir dans le domaine spectral étudié est connue, on s'intéresse à l'absorption près du centre du profil. Sans le cache, on aura :

$$I_{miroir} = I(\lambda, L) + rI(\lambda, L)e^{-\tau_\lambda}. \quad (2.9)$$

On obtient  $I(\lambda, L)$  en cachant le miroir. On a directement une mesure de l'épaisseur optique du plasma pour une longueur d'onde donnée :

$$e^{-\tau_\lambda} = \frac{I_{miroir} - I(\lambda, L)}{rI(\lambda, L)}, \quad (2.10)$$

$$\tau_\lambda = \ln \left( \frac{rI(\lambda, L)}{I_{miroir} - I(\lambda, L)} \right). \quad (2.11)$$

$\tau_\lambda$  correspond à l'absorption le long d'une corde du plasma pour une longueur d'onde donnée :

$$\tau_\lambda = \int_0^L k_\lambda dx, \quad (2.12)$$

où  $k_\lambda$  est le coefficient d'absorption.

### Caractéristiques du fond continu

Comme nous l'avons spécifié précédemment, le fond continu à deux origines, le rayonnement de freinage des électrons ainsi que les recombinaisons libres-liées. Voyons la forme des coefficients d'émission de chacune de ces composantes.

**Rayonnement de Freinage** Le rayonnement de freinage des électrons correspond à l'émission d'ondes électromagnétiques lors de leurs brusques changements de vitesse induits par les collisions. D'après [11, 12, 5], l'émission prépondérante est issue de freinages électron-ion positif. Pour des électrons ayant une fonction de distribution des vitesses maxwellienne et étant

soumis au champ électrique d'un seul ion à la fois (collision binaire), le coefficient d'émission  $\epsilon_{e-i}$  dû aux ions positifs est de la forme :

$$\epsilon_{e-i}(\nu, Te) = \frac{16\pi e^6}{3c^2 \sqrt{6\pi m^3 k} (4\pi\epsilon_0)^3} \frac{N_e}{\sqrt{Te}} \sum_z z^2 N_z G_z(\nu, Te), \quad (SI) \quad (2.13)$$

$$\epsilon_{e-i}(\nu, Te) = \frac{16\pi e^6}{3c^2 \sqrt{6\pi m^3 k} \sqrt{Te}} \sum_z z^2 N_z G_z(\nu, Te), \quad (esu CGS) \quad (2.14)$$

$$\frac{16\pi e^6}{3c^2 \sqrt{6\pi m^3 k} (4\pi\epsilon_0)^3} = 5.46 \cdot 10^{-52}, \quad (SI) \quad (2.15)$$

$$\frac{16\pi e^6}{3c^2 \sqrt{6\pi m^3 k}} = 5.44 \cdot 10^{-39}, \quad (esu CGS) \quad (2.16)$$

avec  $n_z$  la densité d'ions chargés  $z$  fois,  $m$  la masse des électrons,  $G_z(\nu, Te)$  le facteur de Gaunt (facteur correctif à appliquer lorsqu'on utilise une approche classique et non quantique). Dans la théorie classique,  $G_z(\nu, Te)$  est donné par :

$$G_z(\nu, Te) = \int_{x_0}^{\infty} e^{-mv^2/(2kTe)} g_z(u_0) dx, \quad (2.17)$$

avec  $x_0 = h\nu/(kTe)$  et  $u_0 = 2\pi\nu p_0/(mv^2)$ .  $p_0$  est le paramètre d'impact correspondant à une déviation de  $90^\circ$ .

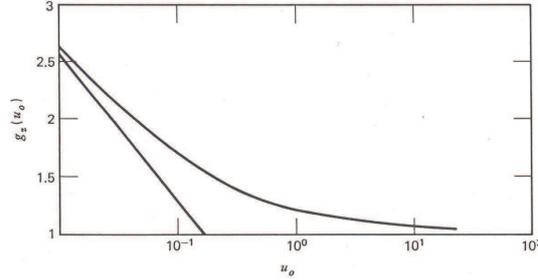


FIGURE 2.4 – Graphe de  $g_z$  en fonction de  $u_0$  issu de [12].

Si l'on considère des hautes fréquences  $h\nu/(kTe) \gg 1$ , on aura  $g_z(u_0) = 1$  et  $G_z(\nu, Te) = e^{-h\nu/(kTe)}$ . Ainsi, l'expression (2.14) donnera :

$$\epsilon_{e-i}(\nu, Te) = \frac{16\pi e^6}{3c^2 \sqrt{6\pi m^3 k} \sqrt{Te}} \sum_z z^2 N_z e^{-h\nu/(kTe)}. \quad (esu CGS) \quad (2.18)$$

Pour le rayonnement de freinage électron-neutre, on suppose que les collisions sont binaires et du type boules de billard, on obtient ainsi :

$$\epsilon_{e-n} = \frac{32e^2}{3c^3} \left( \frac{k}{2\pi m} \right)^{3/2} N_n N_e T_e^{3/2} G_z(\nu, Te). \quad (esu CGS) \quad (2.19)$$

$$\epsilon_{e-n} = \frac{32e^2}{12\pi\epsilon_0 c^2} \left( \frac{k}{4\pi m} \right)^{3/2} N_n N_e T_e^{3/2} G_z(\nu, Te). \quad (SI) \quad (2.20)$$

Cette fois, le facteur de Gaunt est :

$$G_z(\nu, T_e) = \int_{x_0}^{\infty} Q(x)x^3 e^{-x} dx, \quad (2.21)$$

avec  $x = mv^2/2kT_e$  et  $x_0 = h\nu/kT_e$ .  $Q$  est la section efficace de collision électron-neutre qui dépend de la vitesse  $v$  des électrons.

En prenant une valeur moyenne de la section efficace de collision, on peut simplifier l'expression du facteur de Gaunt, on aura ainsi :

$$G(\nu, T_e) = Q(T_e) \left[ 1 + \left( 1 + \frac{h\nu}{kT_e} \right)^2 \right] e^{-h\nu/(kT_e)} \quad (2.22)$$

**Recombinaison radiative** La seconde composante du fond continu est due aux transitions libres-liées. Il s'agit de rayonnement émis lors de la recombinaison entre un ion chargé  $Z$  fois et un électron. Un ion dans l'état fondamental capture un électron d'énergie cinétique  $\frac{m_e}{2}v^2$ . Cette réaction produit un ion de charge  $(Z - 1)$  excité sur un niveau  $n$  et un photon.



La longueur d'onde du photon est donnée par la relation :

$$E_{\infty}^{Z-1} - E_n^{Z-1} + \frac{m_e}{2}v_e^2 = \frac{hc}{\lambda} \quad (2.24)$$

En examinant cette relation, on remarque tout de suite qu'il existe une fréquence de coupure : pour les électrons de vitesse nulle, la fréquence minimale du photon est donnée par  $h\nu = E_{\infty}^{Z-1} - E_n^{Z-1}$ .

Si l'on considère des électrons ayant une distribution de vitesse maxwellienne, le coefficient d'émission pour une recombinaison sur un niveau  $n$  s'écrit :

$$\epsilon_{R:\infty \rightarrow n} = \frac{h^4}{c^2} (2\pi mk)^{-3/2} \frac{N_e N_1^Z}{T_e^{3/2}} \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT_e}} \frac{g_n^{Z-1}}{g_1^Z} \sigma_n^{Z-1}(\nu) \quad (\text{esu CGS}) \quad (2.25)$$

$$\frac{h^4}{c^2} (2\pi mk)^{-3/2} = 3.06 \cdot 10^{-63} \quad (\text{esu CGS}) \quad (2.26)$$

avec  $\sigma_n^{Z-1}(\nu)$  la section efficace de photo-ionisation du niveau  $n$ . Du fait de la fréquence de coupure,  $\sigma_n^{Z-1}(\nu)$  est considérée comme nulle pour des fréquences inférieures à  $\nu = \frac{1}{h}(E_{\infty}^{Z-1} - E_n^{Z-1})$ .

Pour obtenir le coefficient d'émission pour l'ensemble des recombinaisons d'un atome, on procède simplement à la sommation des coefficients d'émission de chacun des niveaux :

$$\epsilon_R = \frac{h^4}{c^2} (2\pi mk)^{-3/2} \frac{N_e N_1^Z}{T_e^{3/2}} \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT_e}} \sum_{n \geq n_0} \frac{g_n^{Z-1}}{g_1^Z} \sigma_n^{Z-1}(\nu) \quad (\text{CGS}) \quad (2.27)$$

En utilisant la section efficace de photo-ionisation de Kramers [12], pour les atomes d'hydrogène on obtient :

$$\epsilon_{R:\infty \rightarrow n}(\nu, T_e) = \frac{128\pi^4 m e^{10}}{h^2 c^3 (6\pi mk)^{3/2}} \frac{N_e N^Z}{T_e^{3/2}} z^4 e^{-\frac{h\nu}{kT_e}} \sum_{n \geq n_0} G_n(\nu) n^{-3} \frac{z^2 E_{H\infty}}{n^2 kT_e} \quad (2.28)$$

Ou  $N^Z$  la densité totale d'ions z, qui est identique à  $N_1^Z$ .

$$\frac{128\pi^4 m e^{10}}{h^2 c^3 (6\pi m k)^{3/2}} = 1.72 \cdot 10^{-33} \quad (esuCGS) \quad (2.29)$$

Avec  $G_n$  le facteur de Gaunt qui permet de prendre en compte l'écart apporté par l'approche non quantique à la loi de Kramers,  $n$  le nombre quantique principal et  $n_0 = z\sqrt{E_{H\infty}/(h\nu)}$ .  $G_n$  est proche de l'unité pour le visible lorsque  $n \geq 3$ .

Dans le domaine visible et proche infrarouge, on aura :

$$\epsilon_{R:\infty \rightarrow n}(\nu, T_e) = \frac{16\pi e^6}{3c^2 \sqrt{6\pi m^3 k} (4\pi\epsilon_0)^3} \frac{N_e N_1^Z}{\sqrt{T_e}} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT_e}}\right) \quad (SI) \quad (2.30)$$

Pour les atomes et les ions non hydrogénoïdes, Schlütter a déterminé les sections efficaces de photo-ionisation. Le coefficient spectral d'émission pour la recombinaison radiative s'écrit de manière générale :

$$\epsilon_{R:\infty \rightarrow n}(\nu, T_e) = \frac{16\pi e^6}{3c^2 \sqrt{6\pi m^3 k}} \frac{N_e N_1^Z}{\sqrt{T_e}} \xi_z(\nu, T_e) \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT_e}}\right) \quad (esu CGS) \quad (2.31)$$

Avec  $\xi_z(\nu, T_e)$  un facteur de correction pour la structure électronique des atomes non hydrogénoïdes (facteur de Biberman). Ici, contrairement aux atomes d'hydrogène, on a  $N_1^Z \neq N_Z$  d'où :

$$N_1^Z = N_Z \frac{g_1^z}{U_z(T)} \quad (2.32)$$

L'établissement des composantes du fond continu (2.14) et (2.27) supposent uniquement que la fonction de distribution des vitesses des électrons est maxwellienne. Ces formules sont donc très précieuses pour le diagnostic plasma puisqu'elles restent valables dans les zones hors ETL [12].

## 2.2 Méthodes de diagnostic utilisant l'intensité des raies

Les méthodes de diagnostic des plasmas basées sur l'intensité des raies atomiques sont parmi les plus anciennes. Il existe à l'heure actuelle de nombreuses méthodes utilisant le coefficient d'émission des raies spectrales, certaines combinent ces mesures avec des mesures du fond continu et/ ou des mesures de profils de manière à obtenir des résultats lorsque le plasma n'est pas dans les conditions de l'ETL. Dans cette partie, nous allons nous focaliser sur trois méthodes de diagnostic historiques. La première est l'utilisation directe de la loi de peuplement de Boltzmann et du coefficient d'émission. La seconde méthode a été développée dans les années 1930 pour les plasmas spatiaux par Fowler et par Milne [13] tandis que la dernière est la méthode très classique du graphe de Boltzmann. Pour chacune de ces techniques, nous verrons leur facilité de mise en œuvre ainsi que leur limitation.

### 2.2.1 Méthode de l'intensité absolue d'une raie

Si l'on reprend l'expression du coefficient d'émission d'une raie, cette dernière dépend du peuplement du niveau haut :

$$\epsilon = \frac{h\nu}{4\pi} A_{ul} n_u. \quad (2.33)$$

Or, il nous est possible grâce à la loi de peuplement de Boltzmann de relier le peuplement de ce niveau à la température. En exprimant  $n_u$  à l'aide de cette loi de peuplement, on obtient :

$$\epsilon = \frac{h\nu}{4\pi} A_{ul} g_u \frac{n(T)}{Z(T)} \exp\left(-\frac{E_u}{kT}\right), \quad (2.34)$$

avec  $A_{ul}$  la probabilité de transition entre le niveau haut et le niveau bas,  $g_u$  et  $E_u$  la multiplicité et l'énergie du niveau  $u$ ,  $n$  la densité de particules et  $Z$  leur fonction de partition. De nombreuses limitations pèsent sur cette méthode. Tout d'abord, la mesure est absolue, il est donc nécessaire d'étalonner précisément son dispositif spectroscopique en intensité avec une lampe à ruban de tungstène afin d'obtenir de bons résultats. La méthode fait intervenir des probabilités de transitions qui sont parfois disponibles dans la littérature avec des incertitudes relativement élevées, de l'ordre de 20 à 50 %. En outre, la mesure de température en utilisant un seul niveau ne permet pas de vérifier si le peuplement des états énergétiques de la particule considérée suit une loi de Boltzmann.

Ce genre de méthode possède de nombreux désavantages et on préfère généralement utiliser une méthode de Fowler Milne ou la méthode du graphe de Boltzmann.

### 2.2.2 Méthode de Fowler-Milne

Nous avons vu précédemment que, lorsqu'un type de particule était à l'équilibre thermodynamique, la densité de population d'un niveau était donnée par :

$$n_m = g_m \frac{n(T)}{Z(T)} e^{-\frac{E_m}{kT}}. \quad (2.35)$$

On peut relier l'intensité d'une raie au peuplement des différents niveaux à l'aide du coefficient d'émission :

$$\epsilon = \frac{h\nu}{4\pi} A_{ml} g_m \frac{n(T)}{Z(T)} e^{-\frac{E_m}{kT}}, \quad (2.36)$$

avec  $A_{ml}$  la probabilité de transition entre le niveau  $m$  et  $l$ ,  $n_m$  le nombre d'atomes dans l'état  $m$ ,  $h$  la constante de Planck et  $\nu$  la fréquence du rayonnement associée à la transition considérée. Examinons comment varient les différents termes de cette expression.  $Z(T)$  ainsi que  $e^{-E_m/(kT)}$  augmentent avec la température. Pour les atomes,  $n(T)$  décroît avec la température tandis que pour les ions,  $n$  commence par croître puis passe par un maximum avant de décroître. Au final, l'émission passe par un maximum pour une température  $T_{max}$  appelée température maximum d'émission[13, 14]. Cette caractéristique est intéressante car si notre plasma possède un maximum d'émission, on peut déterminer la température à l'aide de celui-ci. En effet, pour un plasma de forme cylindrique, on peut écrire :

$$\frac{\epsilon(r)}{\epsilon_{max}} = \frac{n(T)Z(T_{max})}{n(T_{max})Z(T)} e^{-\frac{E_m}{kT}}. \quad (2.37)$$

Le principal intérêt de cette méthode est la non-utilisation des probabilités de transition. En outre, la mesure ne se fait que sur une seule raie et ce de manière relative. Il n'y a donc aucune obligation d'étalonner le dispositif spectroscopique en intensité pour obtenir de bons résultats.

Pour mesurer la température, il est nécessaire de calculer des tables donnant le coefficient d'émission normalisé en fonction de la température. Les coefficients d'émissions relatifs associés à plusieurs raies de l'argon neutre et une fois ionisé sont disponibles sur la figure 2.5 à titre d'exemple. Ils ont été obtenus à l'aide des données présentées dans le chapitre 1. Cette méthode peut être utilisée pour une gamme de température allant de 8000 à 25000 K.

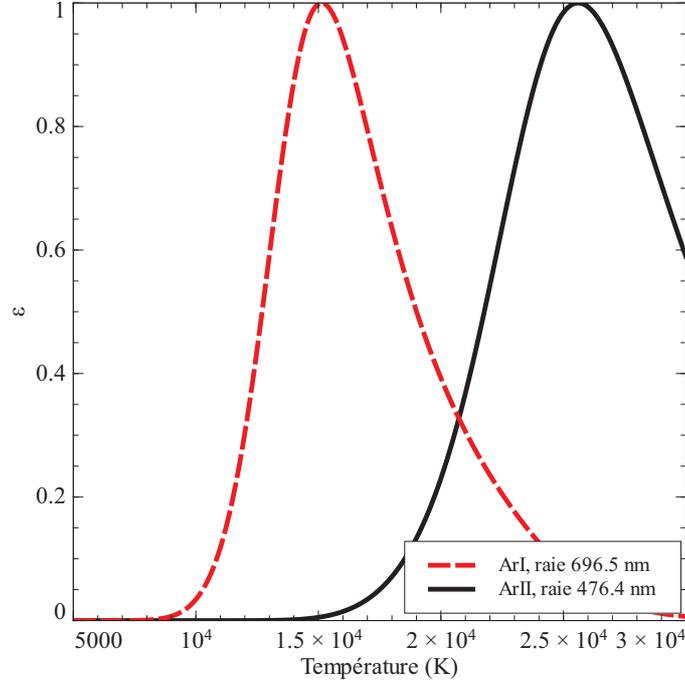


FIGURE 2.5 – Coefficients d'émission relatifs pour la raie 696.5 nm de l'argon I et 476.4 nm de l'argon II. Les coefficients sont calculés pour un plasma d'argon à pression atmosphérique et à l'ETL.

D'après Murphy, La méthode de Fowler Milne est très précise car même si  $n$  et  $Z$  dépendent fortement du nombre de niveaux considérés pour les calculer, le rapport  $n/Z$  y est très peu sensible.

Depuis l'article de Fowler et Milne, de nombreux scientifiques ont adapté cette méthode afin qu'elle fonctionne sur des plasmas multi-éléments. On peut ainsi d'obtenir la composition et la température partout où le plasma est à l'ETL. On se reportera aux travaux de Murphy [15, 16] et de Hiraoka [17, 18] pour plus d'informations.

### 2.2.3 Méthode du graphe de Boltzmann

Reprenons encore une fois l'expression du coefficient d'émission d'une raie et exprimons la population du niveau haut à l'aide de la loi de peuplement de Boltzmann :

$$\epsilon = \frac{h\nu}{4\pi} A_{ml} g_m \frac{n(T)}{Z(T)} e^{-\frac{E_m}{kT}}. \quad (2.38)$$

Pour vérifier si le peuplement des niveaux énergétiques d'un atome suit la loi de Boltzmann et pour obtenir la température, on trace un graphe de Boltzmann. A l'aide de plusieurs raies

d'un même élément, nous allons calculer le logarithme de la relation (2.38) puis le tracer en fonction de l'énergie :

$$\ln\left(\frac{\epsilon\lambda 4\pi}{A_{ml}hc g_n}\right) = -\frac{E_m}{kT} + \ln\left(\frac{n(T)}{Z(T)}\right). \quad (2.39)$$

Si la loi de Boltzmann est respectée, les différents points calculés seront alignés selon une droite de coefficient directeur  $1/kT$ . Si plusieurs droites sont nécessaires pour décrire la relation (2.39), le plasma se trouve en ETL partiel. Cette méthode possède plusieurs avantages, elle permet tout d'abord de vérifier les hypothèses utilisées pour relier la température aux peuplement des niveaux énergétiques d'une particule. En outre, même si elle utilise les probabilités de transition, cette méthode est plus simple à mettre en œuvre et plus précise que la méthode de l'intensité absolue d'une raie car il n'y a pas besoin d'un étalonnage en intensité si les raies sont judicieusement choisies.

## 2.3 Méthodes de diagnostic utilisant les profils de raies

### Utilisation de l'élargissement Doppler

En utilisant la relation (2.4), on peut calculer la largeur à mi-hauteur qui permet d'obtenir facilement la température des lourds à l'aide d'un profil de raie.

$$fwhm_{doppler} = 2\sqrt{\ln(2)}\lambda_0 \left(\frac{2RT}{Mc^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.40)$$

avec  $M$  la masse molaire de l'élément considéré,  $R$  la constante des gaz parfaits,  $c$  la célérité de la lumière et  $\lambda_0$  la longueur d'onde associée à la transition considérée en  $m$ .

Plusieurs problèmes sont inhérents à l'utilisation de cette technique en physique des plasmas. Le premier est le mélange des profils Stark et Doppler. On peut cependant évaluer les profils gaussiens et lorentziens contenus dans les profils de voigt des raies. Le second est la faiblesse de cet élargissement. Par exemple, pour de l'argon à 5000 K, si l'on considère la raie 763.5 nm on aura :

$$fwhm_{doppler} = 0.6112 \text{ pm} \quad (2.41)$$

### Utilisation de l'élargissement Stark

L'élargissement Stark est un phénomène important pour les spectroscopistes des plasmas. Il permet de calculer la densité et la température électronique à partir des profils de raies. L'élargissement Stark étant dû principalement aux électrons, il n'est pas nécessaire d'avoir un plasma en ETL pour appliquer cette technique de diagnostic.

Pour déterminer les paramètres électroniques d'un plasma, on inclut - lorsque cela est possible - une petite quantité d'hydrogène dans le gaz plasmagène. On utilise ensuite l'élargissement des raies de Balmer, et plus particulièrement celui de  $H\beta$  pour évaluer  $N_e$  et  $T_e$ . On utilise l'hydrogène car les calculs qui permettent de relier un profil de raie à une population d'électrons sont fiables et offrent une bonne précision : l'erreur sur les grandeurs obtenues est de l'ordre de quelques pour cent. L'utilisation de l'élargissement Stark sur des raies d'autres éléments est aussi possible même si cela donne des résultats moins précis. Pour obtenir la densité et la température, on se référera aux tables calculées par Griem ou bien par Cardenoso &

al qui donnent les paramètres électroniques en fonction du décalage et de la largeur des raies [19, 20, 21].

## 2.4 Utilisation du fond continu

Nous avons vu précédemment que les phénomènes prépondérants dans la formation du fond continu étaient le rayonnement de freinage électron-ion positif et le rayonnement de recombinaison.

On a donc :

$$\epsilon_{fond\_cont} = \epsilon_{Recomb} + \epsilon_{bremss}. \quad (2.42)$$

pour un plasma ionisé une fois, cela donne :

$$\epsilon_{fc} = C_1 z^2 \frac{N_e N_z}{\sqrt{T_e}} \left[ \xi_z(\nu, T_e) (1 - e^{-h\nu/(kT_e)}) + G_z(\nu, T_e) \right]; \quad (2.43)$$

avec  $z$  la charge de l'ion,  $N_e$  et  $N_z$  les densités d'électrons et d'ions, Voyons quelle forme prend cette équation lorsqu'on considère un domaine spectral particulier. Commençons par le domaine du visible ; si l'on considère des fréquences élevées  $h\nu/(kT_e) \gg 1$ , on peut simplifier la relation précédente en posant :

$$G_z(\nu, T_e) = e^{-h\nu/(kT_e)}; \quad (2.44)$$

$$\epsilon_{fc} = C_1 z^2 \frac{N_e N_z}{\sqrt{T_e}} \left[ \xi_z(\nu, T_e) (1 - e^{-h\nu/(kT_e)}) + e^{-h\nu/(kT_e)} \right]; \quad (2.45)$$

$$\epsilon_{fc} = C_1 z^2 \frac{N_e N_z}{\sqrt{T_e}} \xi_z(\nu, T_e). \quad (2.46)$$

On obtient au final une expression ne contenant qu'un terme issu de la recombinaison électron-ion. Le fond continu que l'on obtient dans le domaine du visible du spectre peut donc être relié uniquement aux phénomènes de recombinaisons radiatives.

Si l'on considère maintenant des fréquences faibles, on aura  $h\nu/(kT_e) \ll 1$ , les termes en exponentiel seront très proches de 1 et on aura :

$$(1 - e^{-h\nu/(kT_e)}) \approx 0. \quad (2.47)$$

On obtiendra ainsi une expression pour le coefficient d'émission du fond continu de la forme :

$$\epsilon_{fc} = C_1 z^2 \frac{N_e N_z}{\sqrt{T_e}} G_z(\nu, T_e). \quad (2.48)$$

Pour les grandes longueurs d'ondes (IR lointain), le fond continu issu de la recombinaison radiative est négligeable et on peut considérer que l'ensemble du fond continu obtenu dans ce domaine spectral est dû au Bremsstrahlung.

D'après Chapelle [14], pour un plasma d'hydrogène,  $\epsilon_{Recomb} = \epsilon_{bremss}$  à 300 nm pour une température de l'ordre de  $1.5 \cdot 10^5$  K. On peut donc sans hésiter utiliser les formules simplifiées

(2.46) et (2.48) pour aller diagnostiquer des plasmas thermiques dont la température maximum est de l'ordre de  $10^4$  K.

L'utilisation des relations (2.46) et (2.48) permet de déterminer soit  $N_e$  soit  $T_e$ , il faut pour cela connaître absolument l'un des deux paramètres pour déterminer l'autre. D'après la forme de la fonction, on se doute qu'il est judicieux de l'utiliser pour déterminer la densité électronique. On peut aisément le prouver en calculant l'incertitude sur  $\epsilon$  :

$$\epsilon(\lambda, T_e) = AN_e^2 T_e^{-1/2}; \quad (2.49)$$

$$\frac{d\epsilon(\lambda, T_e)}{\epsilon(\lambda, T_e)} = 2 \frac{dN_e}{N_e} - 0.5 \frac{dT_e}{T_e}; \quad (2.50)$$

$$\frac{\Delta\epsilon(\lambda, T_e)}{\epsilon(\lambda, T_e)} = 2 \frac{\Delta N_e}{N_e} + 0.5 \frac{\Delta T_e}{T_e}. \quad (2.51)$$

Finalement, on pourra déterminer  $N_e$  précisément en connaissant l'ordre de grandeur de  $T_e$ . Les précautions à prendre pour l'utilisation de ce diagnostic sont assez faibles, il suffit juste de vérifier qu'aux longueurs choisies, le plasma est optiquement mince. C'est souvent le cas dans le domaine visible, cependant dans l'infrarouge lointain, la réabsorption n'est pas à négliger.

Iordanova & al ont utilisé les relations théoriques présentées ici pour développer une technique de mesure de  $n_e$  sur des plasmas créés par micro-ondes [22, 23, 24]. Les résultats qu'ils obtiennent avec cette méthode sont en bon accord avec les autres techniques mises en œuvre telle que la diffusion Thomson ou l'élargissement Stark de raies avec 20 à 30 % d'écart dans les résultats.

Le fond continu peut être aussi utilisé pour mesurer l'abaissement du potentiel d'ionisation. Olsen [4] propose d'utiliser la fréquence de coupure du rayonnement de recombinaison pour le déterminer. Cette approche pour mesurer l'abaissement du potentiel d'ionisation est cruciale puisque ce dernier est difficilement quantifiable. En effet, mesurer l'abaissement potentiel d'ionisation par rapport d'intensité de raies (rapport entre populations d'atomes et d'ions) nécessite la connaissance de la température. Or, la température dépend de l'abaissement du potentiel. Un rapide calcul d'incertitude sur la loi de Saha montre qu'une petite incertitude sur la température rend la détermination de  $\Delta E$  impossible.

## 2.5 Conclusion

À travers l'étude de la structure d'un spectre atomique typique, nous avons été en mesure de présenter différentes méthodes de diagnostic "classiques" mettant en œuvre la spectroscopie d'émission atomique. Les méthodes basées sur l'intensité des raies utilisent les lois développées pour l'équilibre thermodynamique locale et doivent de ce fait être utilisées avec prudence. Les méthodes basées sur le fond continu et sur les profils des raies nécessitent des hypothèses moins contraignantes pour être mises en place mais sont plus complexes au niveau théorique. Au cours de ces trente dernières années, de nombreuses méthodes dérivées de ces techniques classiques ont vu le jour pour tenter de mesurer plusieurs températures différentes, ou pour aller sonder des milieux hors équilibres tels que les plasmas produits par torche ICP par exemple. Malheureusement, comme nous allons le voir par la suite, ces méthodes de mesures

sont particulièrement mal adaptées au diagnostic des zones périphériques des arcs ainsi qu'au diagnostic d'arcs de faible puissance.

# Chapitre 3

## Limitations des techniques de diagnostic classiques

Vous allez croire que la réflexion est mon sport favori. Y a de ça. J'aime bien mettre un jeton dans mon appareil à déduction lorsque je traverse des temps morts.

---

San Antonio

### 3.1 Zones périphériques des colonnes d'arcs

Depuis quelques années, les applications relatives aux arcs électriques ne sont plus limitées à la soudure, aux disjoncteurs et à l'éclairage. On développe de plus en plus de procédés chimiques basés sur les décharges d'arcs. Dans le contexte actuel d'augmentation du coût de l'énergie, des travaux sur la valorisation de la biomasse et d'hydrocarbures lourds par décharges d'arcs fleurissent. Malheureusement, les méthodes de diagnostic que nous avons présenté précédemment ne permettent pas une analyse efficace de l'arc et de son environnement : seule une petite partie, la plus chaude, peut être étudiée.

Afin de bien comprendre la problématique de cette thèse, considérons une décharge d'arc typique établie entre deux électrodes en pointe. L'arc et son environnement peuvent grossièrement être découpés en 3 zones (fig. 3.1). La première zone est le milieu ambiant à la température de l'ordre de 300 K. Son analyse ainsi que des mesures de températures peuvent être aisément menées. La deuxième zone est le cœur "chaud" de la décharge, sa température est comprise entre 8000 et 20000 K. De fait, les méthodes de diagnostic présentées précédemment sont applicables pour mesurer sa composition, sa température.

Le domaine qui nous intéresse se situe entre le cœur de la décharge et le milieu ambiant : c'est la zone périphérique de l'arc. Sa température moyenne est de l'ordre de 4000 K, on comprend donc l'intérêt de cette zone pour la plasma-chimie puisque c'est entre 300 et 8000 K qu'a lieu la majeure partie des réactions chimiques.

Essayons de quantifier son importance en considérant que le cœur de la décharge est un cylindre de rayon  $r_0$  à une température moyenne de  $T_0=10000$  K. On montre expérimentalement que le rayon de la zone périphérique peut être jusqu'à 3-5 fois plus important que le

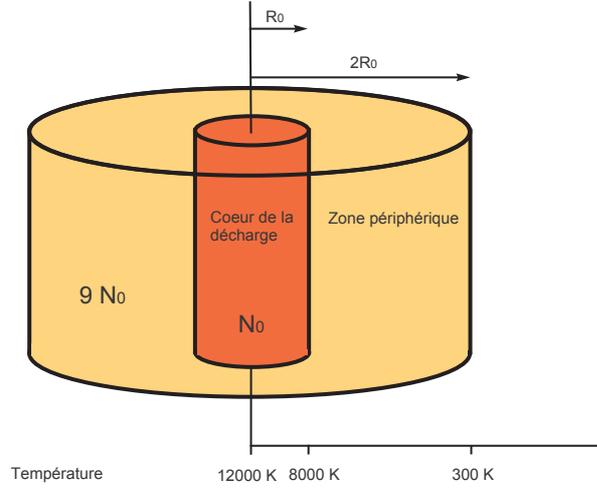


FIGURE 3.1 – Représentation schématique d’une décharge électrique. Le cœur de la colonne est largement moins étendu que la zone périphérique. Du fait de la différence de température moyenne entre les deux zones, on constate que la zone périphérique contient une quantité de particules supérieure de un à deux ordre de grandeur à celle du cœur de la colonne.

rayon du cœur de la colonne [25, 26]. Soyons pessimiste et choisissons un rayon de la zone périphérique de  $2r_0$ . Comme spécifié précédemment, la température moyenne de cette zone est de l’ordre de  $T_1=4000$  K. Comptons le nombre de particules présentes dans chaque domaine ; dans le cœur de la décharge, on aura, en raisonnant grossièrement :

$$\overline{N}_0 = \pi r_0^2 h \overline{n}_0. \quad (3.1)$$

Avec  $h$  la hauteur de la colonne et  $n_0$  la densité de particules moyenne dans la partie chaude. Pour la zone périphérique, on aura :

$$\overline{N}_1 = \pi 3r_0^2 h \overline{n}_1. \quad (3.2)$$

On peut exprimer les densités de particules moyennes en fonction des températures moyennes grâce à la loi des gaz parfaits :  $\overline{n} = P/(k\overline{T})$ . Si l’on compare le nombre de particules dans les deux zones, on aura :

$$\frac{\overline{N}_1}{\overline{N}_0} = 3 \frac{\overline{T}_0}{\overline{T}_1} = 9. \quad (3.3)$$

La zone périphérique de l’arc contient, dans le pire des cas, un nombre de particule supérieur de un ordre de grandeur à celui du centre de la décharge. Ce fait est de première importance car l’ensemble des travaux considérant un volume actif égal au volume du cœur de la décharge sont erronés. Cela pourrait expliquer la sous-estimation de certains rendements de réaction chimique obtenus à l’aide de simulations.

Discutons maintenant du diagnostic de ces zones périphériques. La température maximale est de l’ordre de 8000 K et la température minimale de l’ordre de la température ambiante. Dans la plupart des cas, ces zones présentent de forts gradients de température et de densité ce qui rend l’hypothèse de l’ETL caduque. En outre, les raies atomiques et ioniques sont

difficilement utilisables car peu intenses. Finalement, la densité électronique est peu importante dans cette zone ; pour un plasma d'argon par exemple, le taux d'ionisation à 8000 K est de  $10^{-3}$  tandis qu'il n'est que de  $10^{-5}$  à 6000 K (fig.3.2), le fond continu ainsi que l'élargissement Stark sont donc difficilement perceptibles.

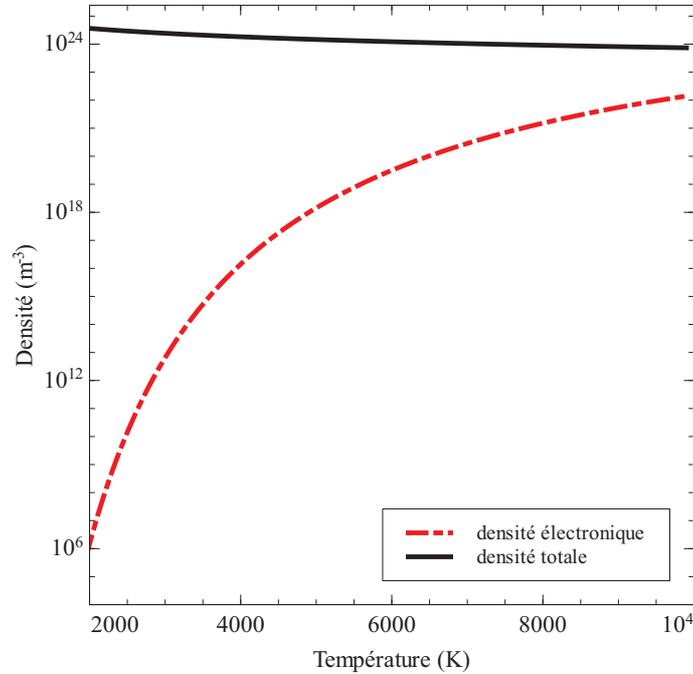


FIGURE 3.2 – Densité électronique en fonction de la température dans un plasma d'argon à pression atmosphérique et à l'ETL.

L'ensemble des méthodes "classiques" basées sur la spectroscopie d'émission atomique sont mises en défaut lorsqu'il s'agit de sonder les zones périphériques. Il en va de même avec des méthodes mises au point pour sonder les décharges hors équilibre.

Afin d'étudier ces zones périphériques, nous avons choisi de mettre en place des méthodes de diagnostic non intrusives basées sur l'indice de réfraction. Comme nous le verrons par la suite, l'indice de réfraction varie fortement avec la température dans un domaine compris entre 300 K et 4000 K. En outre, aucune hypothèse concernant l'équilibre thermodynamique ne doit être faite car l'indice permet, moyennant une connaissance relativement "grossière" de la composition, d'obtenir une mesure de la densité du milieu.

Dans les parties de la zone périphérique assez "chaudes" pour rayonner, nous avons tenté de mettre en place des méthodes de diagnostic basées sur la spectroscopie optique d'émission moléculaire. En effet, il est bien connu que les spectres moléculaires sont observables pour des températures comprises entre 1000 et 8000 K, ce genre de méthode est donc bien adapté pour le diagnostic des bords de colonne. Une des molécules les plus importantes en chimie de l'atmosphère, chimie des hydrocarbures et en combustion, le radical OH, a été choisie pour développer des méthodes spectroscopiques simples de mesure de températures. Elle est souvent présente dans les plasmas et les flammes dès que ces derniers contiennent des traces d'eau ou de chaînes carbonées, ce qui rend son utilisation précieuse pour le développement de procédés.

### 3.2 Arcs à faible intensité de courant

Les problèmes de diagnostic des zones périphériques d'arcs thermiques se retrouvent lors de l'étude d'arcs à faible intensité de courant. Actuellement, ce genre d'arc en déséquilibre thermodynamique est fortement étudié car il permet de produire des radicaux, des ions très réactifs avec un effet thermique réduit. La colonne des arcs de faible puissance rayonne assez pour obtenir des raies atomiques. Cependant, la densité d'électrons est faible et le nombre de collision entre ces derniers et les lourds est tel que l'ETL n'est pas valide. Là encore, les méthodes de diagnostic classiques basées sur l'intensité des raies sont caduques. Quelques méthodes de mesures permettent néanmoins d'obtenir des informations sur ces décharges : Gigosos et al.[19] ont mis au point une méthode basée sur l'élargissement Stark des raies d'hydrogène qui permet de déterminer la température et la densité électronique dans les plasmas hors-équilibre. Jordanova a, quant à lui, développé une méthode pour étudier la température d'excitation de ce genre de décharge [23].

L'utilisation de méthodes de mesure basées sur la spectroscopie moléculaire permettrait peut être de mettre en évidence les températures cinétiques des lourds et des électrons à l'aide des températures rotationnelles et vibrationnelles. Janca [27] a montré, via l'étude des transferts d'énergie de rotation et de vibration pour des décharges dans l'azote pur à pression atmosphérique, que la température rotationnelle et la température vibrationnelle de  $N_2$  étaient assimilables sous certaines conditions aux températures des lourds et des électrons (fig.3.3).

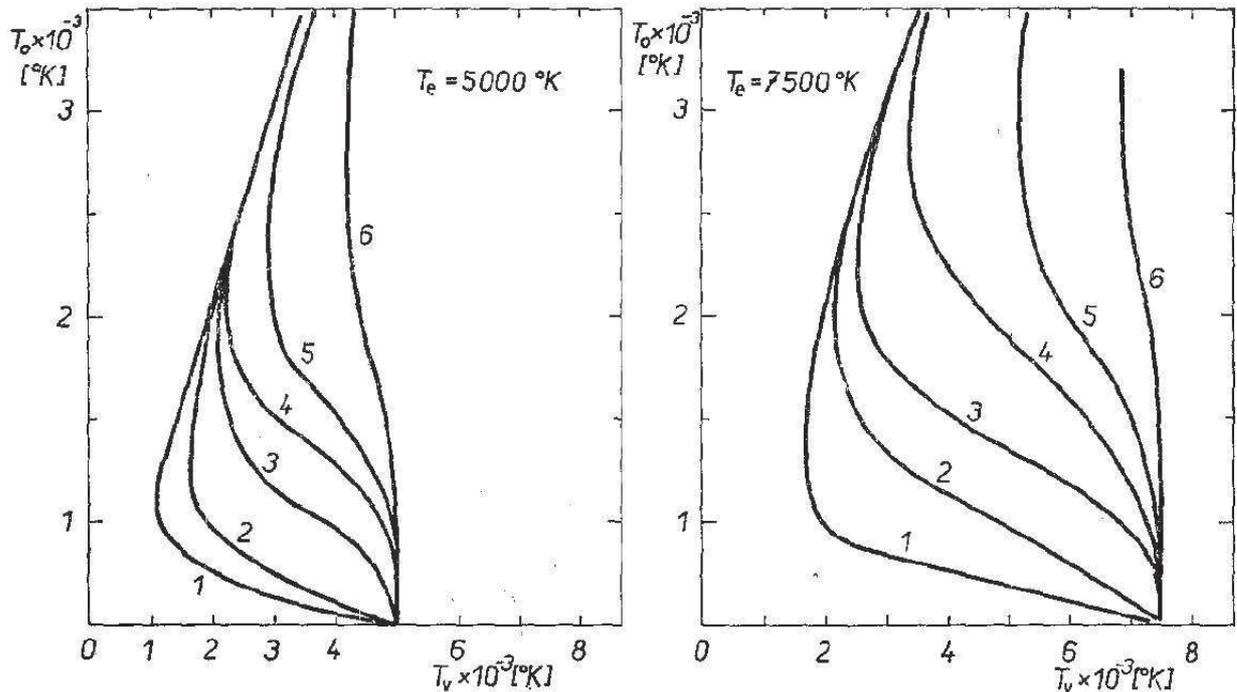


FIGURE 3.3 – Relation entre la température vibrationnelle et la température cinétique en fonction de la densité et de la température électronique pour une décharge à pression atmosphérique dans de l'azote pur.  $N_e$  : 1-  $10^{10} \text{ cm}^{-3}$ , 2-  $10^{11} \text{ cm}^{-3}$ , 3-  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$ , 4-  $10^{13} \text{ cm}^{-3}$ , 5-  $10^{14} \text{ cm}^{-3}$ , 6-  $10^{15} \text{ cm}^{-3}$ . Issu de [27].

La composition de ce genre de décharge contient en proportion relativement peu d'électrons

et d'espèces actives, il serait donc possible de les diagnostiquer à l'aide de méthodes basées sur l'indice de réfraction sans étudier de manière précise la composition des plasmas hors équilibre.

Au cours de ma thèse, j'ai eu l'occasion de travailler sur une décharge à faible intensité de courant. Comme nous le verrons dans la partie 5, les méthodes de mesure développées pour les zones périphériques sont particulièrement bien adaptées pour diagnostiquer ce genre d'objet pourvu que ces dimensions soient raisonnables (dixième de millimètre-dizaine de centimètres).

### 3.3 Conclusion

Les techniques de mesures classiques et la colonne des plasmas thermiques ont été très largement étudiées au cours des cinquante dernières années. Dans la même période, les zones périphériques ont attiré relativement peu d'intérêt du fait des difficultés de diagnostic et de simulation. L'intérêt actuel sur la plasma-chimie ainsi que la relative nouveauté de ce champ d'étude nous a poussé à orienter cette thèse sur le développement de méthodes de mesure adaptées à ces objets.



# Chapitre 4

## Dispositifs de création d'arcs électriques

Vous connaissez tous ma devise ? Elle est la même que celle des Kennedy : "ne jamais se LAISSER ABATTRE!"

---

San Antonio

Depuis la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, de nombreux dispositifs de création d'arcs électriques ont été mis au point pour des applications technologiques allant du soudage au dépôt de matériaux. De part leurs géométries et leur alimentations, ces objets produisent des plasmas dont les propriétés diffèrent grandement. Afin de valider les méthodes de mesure présentées dans cette thèse, nous avons choisi de travailler sur plusieurs de ces dispositifs. Nous allons les présenter ici afin de mettre en évidence leurs caractéristiques principales.

### 4.1 Dispositif TIG

Les dispositifs TIG ont été développés dans les années 1940 pour souder les métaux de manière autogène. Ils sont constitués d'une cathode en tungstène refroidie à l'eau surmontée d'une buse en alumine et d'une anode plane qui correspond aux pièces à souder. Le gaz plasmagène utilisé est généralement un gaz neutre tel que l'argon, il est injecté dans le dispositif au niveau de la cathode. La buse d'alumine permet de diriger le flux de gaz de manière à gagner l'arc électrique et éviter l'inclusion d'oxygène dans la soudure. En laboratoire, on utilise une anode de cuivre refroidie par eau de manière à avoir un plasma suffisamment stable et exempt de vapeur métallique pour prendre des mesures (figure. 4.1).

L'arc alimenté en courant continu qui brûle entre les électrodes est stabilisé à l'aide de l'effet Maecker et, dans une très faible mesure, par l'injection du gaz plasmagène. Grâce à cela, il possède une forme caractéristique de cloche (figure 4.2).

À cause de sa stabilité et du marché potentiel que la soudure représente, la configuration TIG a été très largement étudiée numériquement et expérimentalement depuis les années 1940 [6, 28]. Il a notamment servi à valider les premiers modèles numériques fluides d'arc [?].

Le champ de température dans l'arc a été obtenu par de nombreuses méthodes. Olsen rapporte des températures de l'ordre de  $2.10^4$  K pour un arc alimenté par un courant d'une

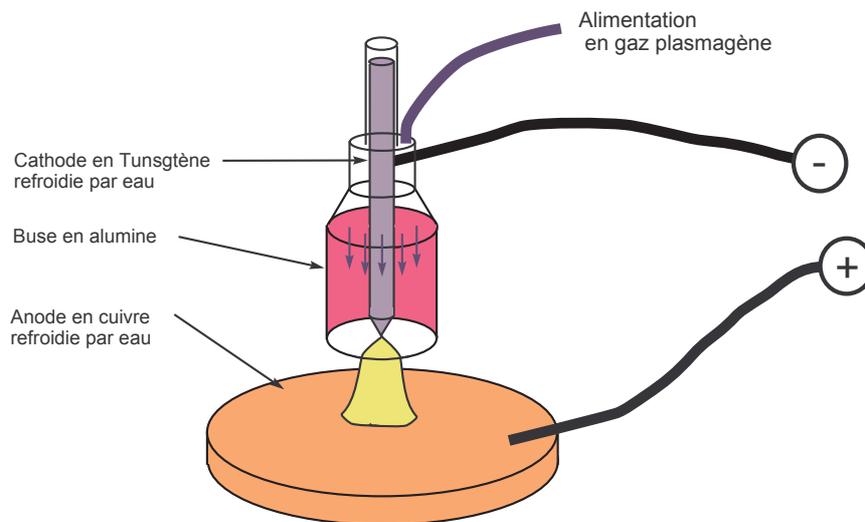


FIGURE 4.1 – Schéma d'un dispositif TIG pour l'étude des arcs pointe-plan en laboratoire.

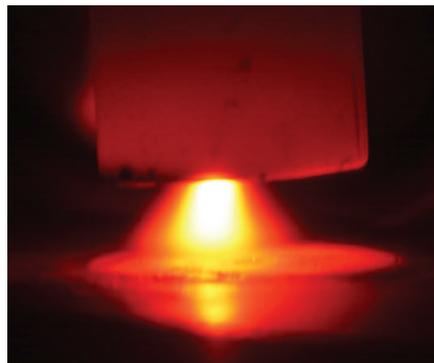


FIGURE 4.2 – Photographie d'un arc TIG brûlant dans l'argon. L'intensité du courant était fixée à 100 A.

intensité de 200 A (fig.4.3). Un effet mirage est présent au niveau de l'anode [29, 30] du fait de sa température. L'électrode, à une température élevée, chauffe le gaz qui l'entoure ; il en résulte un fort gradient d'indice orienté selon la normale à l'anode. En outre, on a rapporté de forts déséquilibres autour de la zone cathodique [31, 32].

Les phénomènes aux électrodes ont aussi été étudiés durant ces dernières années ; que ce soit par analyse dimensionnelle [33, 34] ou par simulation numérique [35].

Du fait de l'effet mirage et des très fortes températures du milieu, ce genre de dispositif n'est pas adapté pour les diagnostics utilisant l'indice de réfraction. Il a cependant été étudié au cours de cette thèse. Cela a permis de démontrer aisément l'intérêt des mesures macroscopiques sur les arcs.

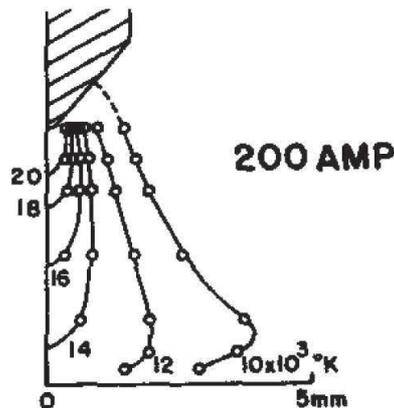


FIGURE 4.3 – Champ de température obtenu par la méthode de Fowler-Milne sur un arc pointe-plan brûlant dans l'argon. L'intensité du courant est fixée à 200 A. Issu de [6].

## 4.2 Plasmatron

Les torches à plasma fonctionnant à pression atmosphérique ont été développées dans les années 1960 pour des applications de projection thermique et de découpe de matériaux. Ses champs d'application couvrent de nos jours la plasma-chimie, l'inertage des déchets, etc.

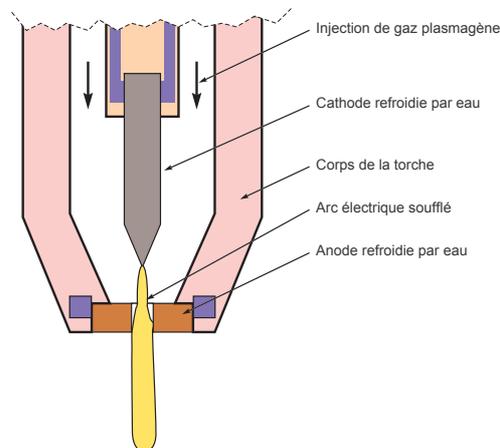


FIGURE 4.4 – Schéma d'une torche à plasma générique.

En fonction de la puissance désirée et du domaine d'application choisi, les torches ont de nombreuses géométries et configurations différentes. La configuration générique d'une torche à plasma est présentée sur le schéma 4.4. Un arc est établi entre une cathode en forme de pointe et une anode percée. Les deux électrodes sont montées sur un corps en matériau diélectrique de manière à ce que le gaz injecté dans la torche souffle le plasma à travers l'anode. Il en résulte un jet de plasma qui peut par exemple être utilisé pour fondre des poudres céramiques.

Il existe deux régimes de fonctionnement pour les torches à plasma. Le régime laminaire

est caractérisé par un jet comprenant un dard lumineux sortant de la torche et une plume de plasma en recombinaison, bien structurée et relativement stable, pouvant atteindre plusieurs dizaines de centimètres. L'émission de ce jet se fait de manière silencieuse.

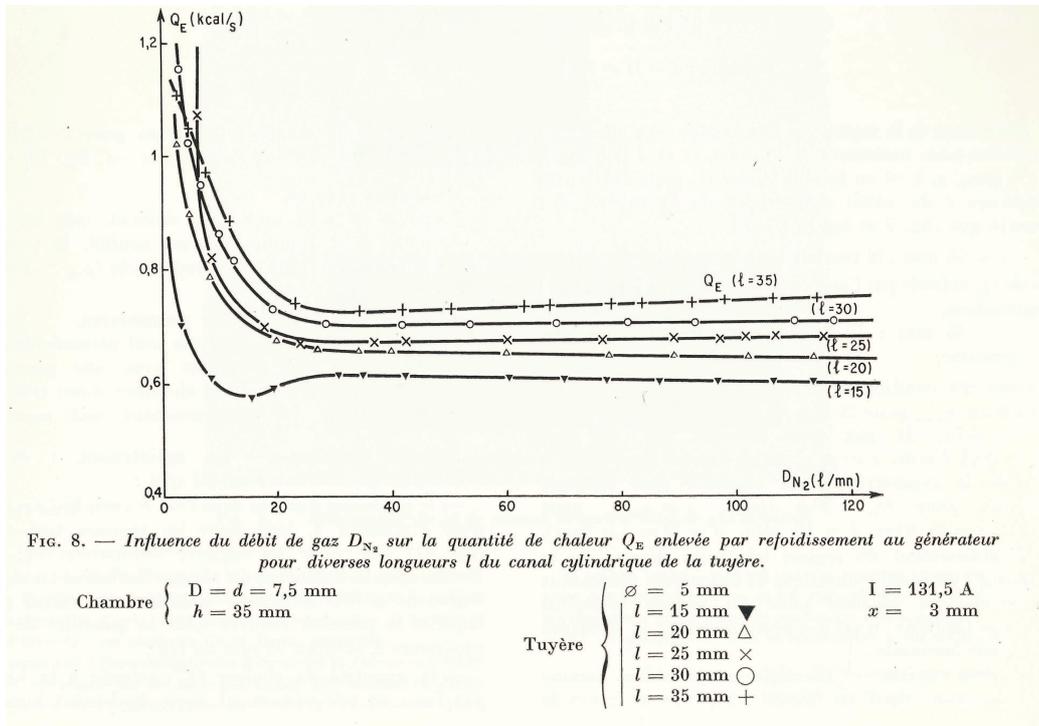


FIGURE 4.5 – Quantité de chaleur enlevée aux électrodes en fonction du débit de gaz plasmagène et de la longueur de la tuyère. Le régime laminaire correspond aux zones où la quantité de chaleur enlevée aux électrodes est maximum. Issus de [36].

La température du dard lumineux est généralement comprise entre 12000 et 20000 K tandis que la plume possède une température comprise entre  $10^4$  K et  $10^3$  K. Pour obtenir ce régime de fonctionnement, il est nécessaire d'utiliser une buse d'un petit diamètre, un débit de gaz plasmagène relativement faible et une forte intensité de courant. D'après les pertes thermiques aux électrodes et les paramètres de fonctionnement, il semble que le changement de régime de fonctionnement soit dû à l'apparition d'une couche de gaz "froid" entourant l'arc. Cette couche de gaz induirait des instabilités de type Kelvin-Helmoltz dans le jet. Le second mode de fonctionnement est le régime turbulent. Il est caractérisé par un jet court et très bruyant. Le rendement de ce régime est élevé car une faible partie de l'énergie passe dans les électrodes (fig.4.5).

Les torches à plasma fonctionnant dans le régime laminaire sont des objets d'étude appropriés pour la validation de nos méthodes de mesures. Tout d'abord, le jet de plasma est très stable, ce qui permet des mesures aisément reproductibles. En outre, il est assez long pour que l'on puisse prendre des mesures loin de l'anode et ainsi éviter les gradients d'indice de réfraction dû à l'échauffement de cette pièce. Finalement, la plage de température du jet de plasma est adapté pour le diagnostic par indice de réfraction ou par spectroscopie moléculaire.

### 4.3 Décharge pointe-pointe

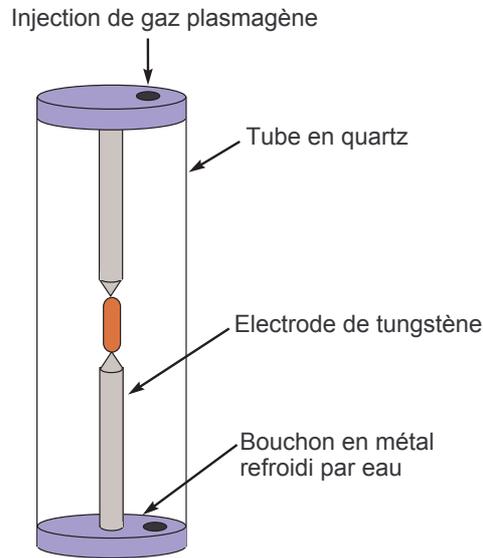


FIGURE 4.6 – Dispositif de décharge pointe pointe typique.

Les décharges pointe-pointe ont été largement étudiées à haute pression, pour produire des lampes à arcs. Cependant, ce type de décharges à pression atmosphérique et à faible intensité de courant demeure relativement peu étudié. Les applications potentielles sont pourtant relativement larges et comprennent la chimie ou la synthèse de matériaux [37]. En outre, ce genre de dispositif permet l'étude aisée de la transition entre le régime luminescent et le régime d'arc.

Un dispositif typique pour la décharge pointe-pointe est présenté sur le schéma 4.6. La température cinétique typique dans ce genre de décharge est généralement inférieure à 6000 K [38](fig.4.7).

Du fait des forts déséquilibres qui règnent dans la décharge [38] et de ses dimensions réduites, ce genre d'objet est bien adapté pour pousser de nouvelles méthodes de diagnostic jusque dans leur derniers retranchements.

### 4.4 Conclusion

Nous avons présenté ici brièvement les caractéristiques principales des dispositifs de création d'arcs électriques. Bien évidemment, il existe de nombreuses autres configurations, mais j'ai choisi de les passer sous silence car elles ne sont pas adaptées pour la validation de méthodes de diagnostic de zones périphériques. Tout les dispositifs de création d'arcs instationnaires tels que les torches triphasées ou les glidarcs ne sont pas intéressantes car on ne contrôle pas la forme et les profils de température de ce genre de plasma. Cela rend la reproductibilité des mesures difficile. Finalement, nous avons choisi de porter notre attention sur des jets de plasma laminaires qui sont, de par leur stabilité et leur champs de températures, des modèles parfaits de zones périphériques d'arc.

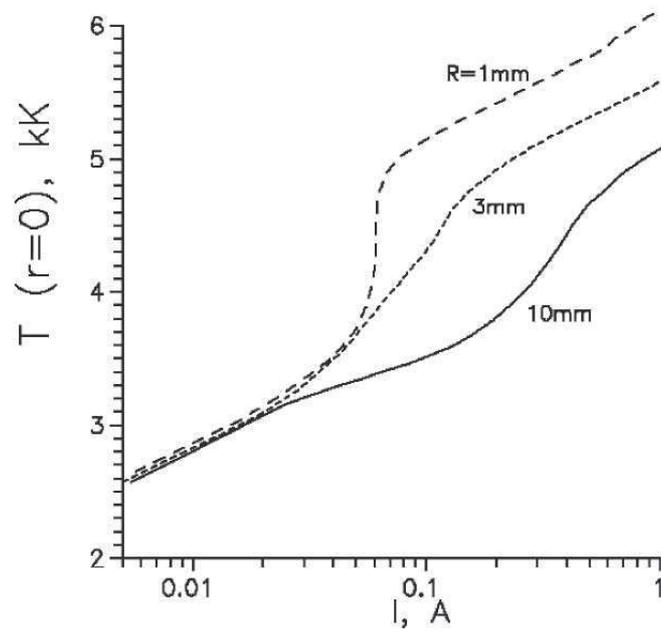


FIGURE 4.7 – Température des lourds sur l'axe d'une décharge pointe-pointe brûlant à pression atmosphérique dans l'air. Le rayon spécifié correspond au rayon des parois limitant la décharge. [38]

# Chapitre 5

## Inversion d'Abel

Le raisonnement est la plus belle  
conquête de l'homme, après le cheval et  
le steak-pommes frites ; alors raisonnons.

---

San Antonio

### 5.1 Introduction

La plupart des techniques non-intrusives comme la spectroscopie, l'interférométrie, l'ombroscopie nous fournissent des grandeurs intégrées  $A$ . Or, pour obtenir des résultats exploitables, il est nécessaire de reconstruire des profils  $a$  à partir de ces projections. Lorsque la géométrie des objets à étudier est quelconque, on doit procéder à une transformée de Radon (tomographie). En physique des plasmas, on travaille souvent sur des objets qui ont des symétries cylindriques ; l'obtention des profils est ainsi simplifiée, elle se fait à l'aide d'une opération appelée "inversion d'Abel" et nécessite une unique projection. Après une brève présentation de l'inversion, nous nous pencherons sur les problèmes que son calcul fait apparaître. Nous verrons enfin quelles techniques de calcul déployer afin de les contourner.

### 5.2 Inversion d'Abel

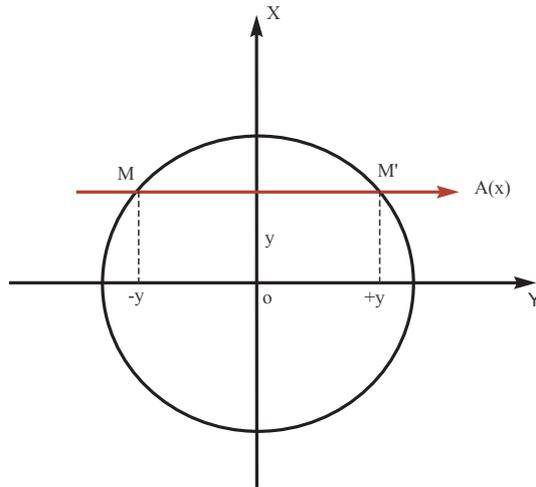
Considérons un cylindre de rayon  $R$  dans lequel existe une grandeur physique  $a(r)$  dépendant du rayon comme présenté sur la figure 5.1. Nous obtenons une information sur cette quantité en enregistrant sa valeur intégrée  $A(x)$  sur la corde  $MM'$  avec  $y = (R^2 - x^2)^{1/2}$  et avec  $A(R) = 0$ .

Formellement,  $A$  est donné par :

$$A(x) = \int_M^{M'} a(r) dy \quad (5.1)$$

Lorsque  $A(x)$  est connu pour  $x$  compris entre  $-R$  et  $R$ , il est possible de calculer  $a(r)$  à l'aide de l'inversion d'Abel qui est définie par :

$$a(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^R \frac{\frac{dA}{dx}}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx \quad (5.2)$$

FIGURE 5.1 – Définition de la valeur intégrée  $A(x)$ .

Comme on peut le constater, le calcul de  $a(r)$  pose quelques problèmes. Tout d'abord, au niveau calculatoire, lorsque le dénominateur de l'expression (5.2) tend vers zéro, le terme de l'intégrale peut être indéfini. De plus, pour mener à bien le calcul, il est nécessaire de déterminer la position où  $r = 0$ . Le second problème qui se pose est lié à l'utilisation de la dérivée de  $A$ . Cette dernière est très sensible au bruit présent sur les mesures : de très petites oscillations sur  $A$  peuvent avoir des conséquences désastreuses sur la précision de  $a$ .

Du fait de ces difficultés, les méthodes d'intégration numériques telles que la méthode des trapèzes ou encore la méthode de Simpson ne sont pas utilisables et il est nécessaire de mettre en place d'autres techniques.

### 5.3 Méthodes de Calcul

Il existe deux grandes familles de méthodes pour calculer l'intégrale d'Abel. Les premières utilisent directement l'expression (5.2) pour obtenir  $a(r)$  grâce à des interpolations polynomiales de  $A$ . L'intégration des fonctions polynomiales se fait généralement de manière analytique, ce qui permet de contourner le problème de calcul lorsque  $x$  tend vers  $r$ . La principale difficulté de ces méthodes se situe sur l'interpolation et le lissage de  $A(x)$ . En effet, l'utilisation de polynômes d'ordre élevé fait apparaître des oscillations (phénomène de Runge), on utilise donc des interpolations par tronçons ou bien un polynôme de faible degré afin d'obtenir des résultats viables.

La seconde famille de méthode est plus "bestiale". On considère une fonction élémentaire  $\delta f(r, R_f)$  dont on connaît l'expression analytique de la projection  $\delta F(x, R_f)$ . Le principe va consister à reconstruire un profil intégré expérimental à l'aide d'une somme de projections de ces fonctions élémentaires [39, 40]. Comme on connaît  $\delta f(r, R_f)$  associée à chaque projection  $\delta F(x, R_f)$  utilisée, on peut aisément obtenir  $a(r)$ . Parmi ces méthodes, on trouve celle de Pearce [41, 12] ou encore la méthode Stack and slice. Elles sont très aisées à implémenter et permettent pour certaines d'entre elles de tenir compte des dissymétries selon une dimension.

Nous allons présenter ici deux méthodes d'inversion d'Abel utilisées au cours de cette

thèse. La première est une méthode Stack and slice modifiée qui a été développée dans un but éducatif tandis que la seconde est basée sur la méthode d'interpolation et de lissage par spline de Reinsch [42].

### 5.3.1 Méthode Stack and slice modifiée

La méthode stack and slice a été proposée par Gottardi en 1979 [43] pour traiter des interférogrammes obtenus sur des tokamaks. Le grand avantage de cette méthode est la prise en compte relativement aisée des dissymétries. Ici, les problèmes auxquels nous faisons face ne présentent pas de fortes dissymétries, cela nous permet de simplifier fortement l'algorithme de la méthode avec, comme nous allons le voir, quelques contraintes. Afin de bien comprendre cette technique, il est nécessaire de s'intéresser au profil intégré d'une fonction constante. Pour cela, considérons une fonction  $f(r)$  telle que :

$$\begin{aligned} f(r) &= \delta a & r \leq R, \\ f(r) &= 0 & r > R. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Calculons sa projection :

$$F(x) = \int_{-y}^y \Delta a dY = \Delta a [Y]_{-y}^y. \quad (5.4)$$

On sait, de par la symétrie du problème, que  $y^2 + x^2 = R^2$ . On a donc :

$$F(x) = 2\Delta a \sqrt{R^2 - x^2} \quad (5.5)$$

On reconnaît dans la projection associée à une fonction constante l'équation d'un demi cercle.

La méthode Stack and slice que nous avons modifiée utilise un demi-profil  $A(x)$  d'une quantité  $a(r)$  intégrée. Pour retrouver la forme de  $a(r)$ , nous allons utiliser des disques d'une épaisseur constante  $\Delta a$  que l'on va empiler (stack) tandis que le profil intégré sera découpé en morceaux (slice) correspondants aux contributions de chacun de ces disques.

Reprenons l'expression (5.1),  $A$  peut être approximé à l'aide de disques d'épaisseur constante :

$$A(x) = \sum^k \delta a_k L_k \quad (5.6)$$

Lorsque les  $L_k$  sont fixés,  $a_k$  est à déterminer : c'est la méthode de Pearce [12]. Ici, l'épaisseur des disques  $\Delta a$  est choisie au début du calcul. De cette quantité dépend la précision de l'inversion, une trop grande valeur conduira à des erreurs importantes tandis qu'une valeur trop faible augmentera le temps de calcul de manière drastique. Comme  $\delta a$  est connue, le problème d'inversion se résume en fait à rechercher le bord des disques que l'on va empiler (recherche des  $L_k$ ). Cela se fait à l'aide du profil intégré  $A(x)$ . On le parcourt jusqu'à trouver une valeur de  $A$  positive. Le bord du disque courant se trouve un point avant cette valeur (fig.5.2). Lorsque le rayon du disque est calculé, on ajoute sa contribution à  $a(r)$  tandis qu'on la retranche au profil intégré à l'aide de l'expression (5.5). En répétant ce processus jusqu'à ce que l'ensemble des valeurs de  $A$  soient nulles ou négatives, on effectue complètement l'inversion d'Abel.

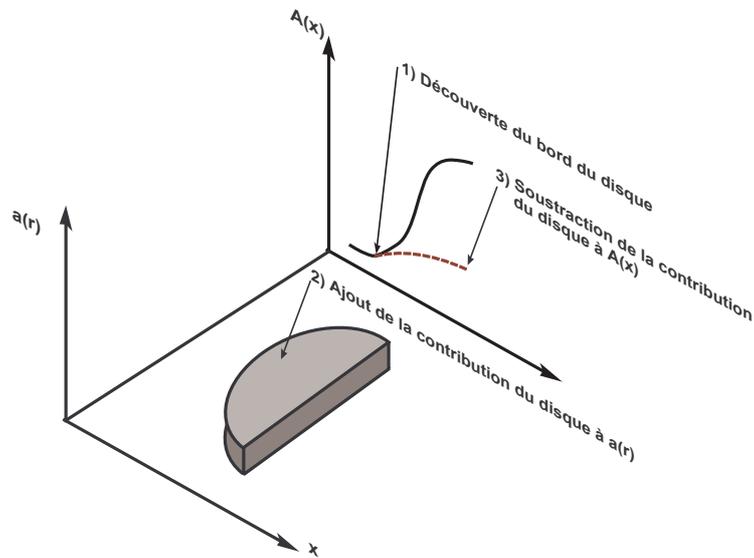


FIGURE 5.2 – Principe de la méthode Stack and slice modifiée. L'algorithme d'inversion d'Abel est basé sur la décomposition des profils intégrés en somme de demi-cercles (étape 1,3). La connaissance de la fonction  $\delta a(r)$  associé au demi-cercle permet d'effectuer l'inversion d'Abel (étape 2).

Il y a quelques contraintes à l'utilisation de cette méthode. Premièrement,  $A(x)$  doit être nul ou négatif en dehors de la zone d'intérêt. Si du bruit de mesure induit des valeurs positives de  $A$  en dehors de celle-ci, de grands disques parasites d'épaisseur  $\Delta a$  seront créés à ce niveau, augmentant de manière significative l'erreur. De plus, les profils intégrés avec un trou au niveau de l'axe ne peuvent pas être traités avec cette méthode. En effet,  $A$  doit être monotone car la détection du bord des disques est basée sur une recherche de valeur non négative ou nulle de  $A$ . Enfin, tous les points doivent être espacés de manière régulière.

Une tâche de première importance lorsqu'on exécute la méthode stack and slice est le choix de  $\Delta a$ . Pour ce faire, on peut évaluer la valeur moyenne de  $A$  en divisant  $A(r=0)$  par  $2R$  puis en n'en prenant une fraction comme  $\delta A$ . Au cours de mes travaux, j'ai choisi  $\Delta a = \langle a \rangle / 100$  de manière à avoir une bonne précision et un temps de calcul raisonnable.

Un code de calcul de l'inversion d'Abel par la méthode Stack and Slice modifiée est disponible en annexe. Il suit l'algorithme suivant pour traiter les profils :

- chargement des points de donnée du demi-profil.
- calcul de  $\Delta r$  et de  $\Delta a = A(r=0)/(2R)/100$
- début de la boucle 1
- pour  $i=\text{premier\_point\_de\_A}$  jusqu'à  $\text{dernier\_point\_de\_A}$
- si( $A(i) > 0$ ) sortie de la boucle "pour"
- fin de la boucle pour
- si( $i=\text{dernier\_point\_de\_A}$ ) sortie de la boucle 1
- pour  $j=i$  jusqu'à  $\text{dernier\_point\_de\_A}$
- $y = \sqrt{((i - \text{dernier\_point\_de\_A}).\Delta r)^2 - ((j - \text{dernier\_point\_de\_A}).\Delta r)^2}$
- $A(j) = A(j) - 2y\Delta a$ .
- $a(j) = a(j) + \Delta a$

- fin de la boucle pour
- fin de la boucle 1

Avec `premier_point_de_A` et `dernier_point_de_A` l'indice du premier et du dernier point du demi-profil.

Finalement, cette méthode fonctionne correctement pour des cas simples où le rapport signal sur bruit est élevé. Lorsqu'on inverse des intensités de raies ou des spectres entiers, les données ne sont pas idéales : certaines zones sont très bruitées, des intensités de raies peuvent présenter des trous ou des plateaux en leur centre. On préfère donc utiliser des méthodes d'inversion d'Abel plus robustes telle que la méthode de Glasser/Reinsch.

L'utilisation d'un profil complet et d'une fonction élémentaire constante de forme quelconque pour la reconstruction de  $a$  permet de ré-obtenir la méthode stack and slice traditionnelle. La recherche du bord des formes ainsi que la reconstruction du profil deviennent alors plus difficiles [39].

On pourrait, si on le désire, complexifier la méthode de manière à la rendre plus efficace. Par exemple, un filtrage des données à l'aide de FFT et de filtres passe bande permettrait de traiter des profils bruités tandis qu'un test sur les valeurs négatives de  $A$  rendrait possible le traitement de profils avec creux.

### 5.3.2 Méthode d'interpolation par spline

Pour résoudre un des deux problèmes calculatoires évoqués précédemment pour l'expression 5.2, on peut utiliser la méthode d'interpolation et de lissage par spline mise au point par Reinsch [42]. Cette technique consiste à approximer le profil intégré  $A(x)$  par tronçon à l'aide de polynômes d'ordre 3. On ajuste la dérivée seconde de ces polynômes de manière à les "tendre" plus ou moins et ainsi contrôler le lissage. Au final, les données sont interpolées par des polynômes cubiques de la forme :

$$A(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad x_i \leq x < x_{i+1}. \quad (5.7)$$

L'inversion d'Abel fait intervenir la dérivée de la grandeur mesurée. Avec la définition de  $A$  précédente, la grandeur intervenant dans l'équation 5.2 serait formellement :

$$\frac{dA(x)}{dx} = c_i + 2b_i x + 3a_i x^2 \quad (5.8)$$

Calculons l'intégrale d'Abel en remplaçant  $\frac{dA(x)}{dx}$  par son expression ; On aura pour  $u$  et  $l$  compris entre  $x_i$  et  $x_{i+1}$  :

$$f_i(l, u, r) = \int_l^u \frac{c_i + 2b_i x + 3a_i x^2}{(x^2 - r^2)^{1/2}} dx. \quad (5.9)$$

L'intégration par partie de la relation précédente nous donne :

$$f_i(l, u, r) = \left[ 3a_i x(x^2 - r^2)^{1/2} \right]_l^u - 3a_i \left[ -\frac{r^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + r^2}) + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - r^2} \right]_l^u \\ + 2b_i \left[ \sqrt{x^2 - r^2} \right]_l^u + c_i \left[ \ln(x + (x^2 - r^2)^{1/2}) \right]_l^u. \quad (5.10)$$

Grâce à l'expression de  $f_i$ , on est en mesure de calculer partie par partie l'intégrale d'Abel [44]. Pour  $r$  compris entre  $x_k$  et  $x_{k+1}$ , on aura :

$$a(r) = -\frac{1}{\pi} \left( f_k(r, x_{k+1}, r) + \sum_{i=k+1}^{N-1} f_i(x_i, x_{i+1}, r) \right). \quad (5.11)$$

Un problème subsiste lorsqu'on désire calculer  $a(r = 0)$ . Les logarithmes de la relation (5.10) deviennent indéfinis, et seul un coefficient  $c_1$  nul permet d'effectuer le calcul. En d'autres termes, il est nécessaire que  $\frac{dA}{dx}|_{r=0} = 0$ . Ce critère est un bon moyen de trouver le centre du profil : il suffit, à l'aide d'une méthode de dichotomie ou d'une recherche de racine sur un trinôme du second degré, de trouver l'endroit où la dérivée de  $A$  s'annule.

Après essai, les logiciels d'inversions d'Abel que j'ai réalisés utilisent une méthode de dichotomie pour obtenir le centre du profil car l'utilisation de la racine d'un polynôme entraîne des erreurs de calcul lorsque les données présentent des plateaux en leur centre.

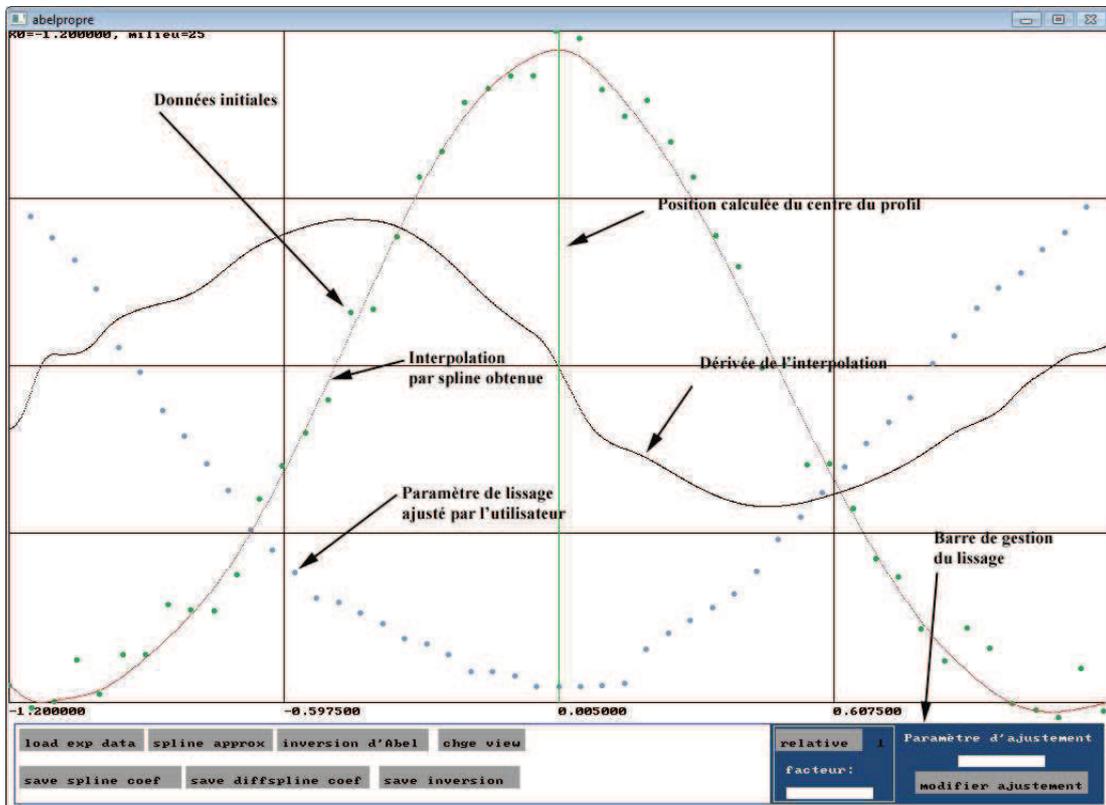


FIGURE 5.3 – Capture d'écran d'un des programmes d'inversion d'Abel réalisés.

Deux programmes différents ont été réalisés pour effectuer des inversions d'Abel classiques au cours de cette thèse. Le premier permet de traiter directement un unique profil tandis que le second va traiter de manière automatique l'ensemble des données issus de matrices CCD. La méthode de lissage de Reinsch permet à l'utilisateur d'adapter l'intensité du lissage à vue d'œil sur chacune des zones du profil via un ensemble de curseurs (fig.5.3). Afin d'avoir une idée de l'asymétrie des mesures, chacune des ailes du profil est traitée de manière distincte.

Pour conclure, l'ensemble des programmes d'inversion ont été validés avec des fonctions tests telles que des gaussiennes ou des demi-cercles. Afin de vérifier la qualité de la méthode

de lissage, des données comportant un bruit blanc d'une intensité d'environ 10% de la hauteur maximum du profil ont été inversées. Les résultats obtenus sont quasi-identiques à ceux obtenus à l'aide de données non bruitées (fig.5.4).

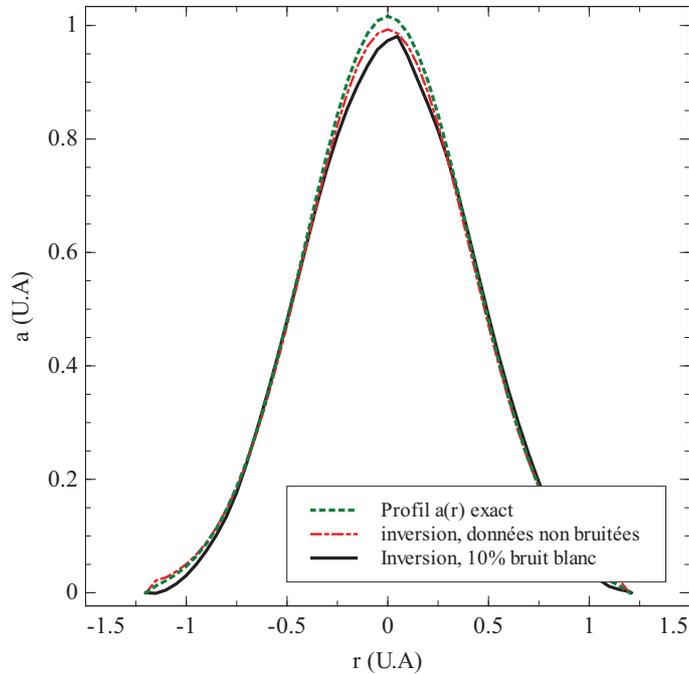


FIGURE 5.4 – Influence du bruit sur l'inversion d'Abel après lissage par la méthode de Reinsch. Le profil théorique est une gaussienne représentée par la courbe pointillée verte. Le profil obtenu après inversion sur des données non bruitées diffère quelque peu du profil théorique car l'inversion se fait sur un rayon relativement réduit (voir l'équation (5.18) et (5.19)). Finalement, le profil calculé sur des données bruitées à l'aide d'un bruit blanc d'amplitude 0.1 est très proche du profil obtenu à l'aide des données parfaites. Cela prouve que la méthode de lissage des données proposée est efficace, et ce même sur un faible nombre de données bruitées.

### Inversion d'Abel pour la déflectométrie moiré

Contrairement aux méthodes de diagnostic comme la spectroscopie ou l'interférométrie, la déflectométrie moiré permet de mesurer directement une grandeur  $dA/dx$ , elle est donc moins sensible au bruit. Nous avons mis au point une méthode d'inversion d'Abel pour cette technique de mesure. Là encore, elle est basée sur l'algorithme de lissage par spline de Reinsch. Du fait de l'utilisation directe de la dérivée, le lissage ne semble pas obligatoire, mais il nous est cependant bien utile pour obtenir des résultats précis lorsque les données sont bruitées. Nous allons présenter ici l'ensemble des calculs formels nécessaires à l'obtention du résultat.

Commençons tout d'abord par calculer l'intégrale d'Abel.

$$a(r) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{\frac{dA}{dx}}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx. \quad (5.12)$$

Nous allons remplacer  $\frac{dA}{dx}$  par son expression. Ce qui nous intéresse ici, c'est de déterminer les primitives obtenues avec  $\frac{dA}{dx}$  un polynôme du troisième degré :

$$\int_l^u \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx = \int ax^3(x^2 - r^2)^{-1/2} dx + \int bx^2(x^2 - r^2)^{-1/2} dx + \int cx(x^2 - r^2)^{-1/2} dx + \int d(x^2 - r^2)^{-1/2} dx = K + L + M + N. \quad (5.13)$$

Calculons tout d'abord le terme K à l'aide d'une intégration par partie :

$$\int_l^u a(x^3 - x_i^3)(x^2 - r^2)^{-1/2} dx = \left[ ax^2(x^2 - r^2)^{1/2} \right]_l^u - \left[ \frac{2}{3} a(x^2 - r^2)^{3/2} \right]_l^u. \quad (5.14)$$

Le terme L donne :

$$\int_l^u bx^2(x^2 - r^2)^{-1/2} dx = \left[ bx(x^2 - r^2)^{1/2} \right]_l^u - b \left[ -\frac{r^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + r^2}) + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - r^2} \right]_l^u. \quad (5.15)$$

Enfin, M et N sont égales à :

$$M = \int_l^u cx(x^2 - r^2)^{-1/2} dx = c \left[ \sqrt{x^2 - r^2} \right]_l^u. \quad (5.16)$$

$$N = \int_l^u d(x^2 - r^2)^{-1/2} dx = d \ln(x + (x^2 - a^2)^{1/2}). \quad (5.17)$$

Nous venons d'obtenir une relation formelle pour un terme  $dA/dx$  correspondant à un polynôme cubique. Le calcul de l'inversion d'Abel se fait de la même manière que précédemment : après avoir trouvé le centre du profil, on utilise  $f'_i(u, l, r)$  avec l'expression (5.11). Cette fois-ci,  $f'$  est similaire à la relation (5.10) mais fait intervenir les intégrales  $K$ ,  $L$ ,  $M$  et  $N$ .

Pour tester la méthode, les dérivées de profils bien connus ont été utilisées. Par exemple, la dérivée du profil suivant à été utilisé :

$$I(x) = \sigma * \sqrt{\pi} * erf((R^2 - x^2)^{0.5}/\sigma) * exp(-x^2/\sigma^2). \quad (5.18)$$

Ce profil test est dû à la projection d'une fonction gaussienne de la forme :

$$a(r) = exp(-r^2/\sigma^2), \quad (5.19)$$

avec  $\sigma = 0.58$  et  $R = 1.2$ . La figure 5.5 compare le profil théorique (5.19) au résultat de notre méthode d'inversion d'Abel. La légère différence au centre du profil (0.5 % d'erreur relative) est due au manque de données sources pour  $R > 1.2$ .

## 5.4 Conclusion

Comme nous le verrons par la suite dans les parties 3, 4 et 5, un bon algorithme d'inversion d'Abel est nécessaire pour obtenir des résultats expérimentaux de qualité. Nous avons présentés ici trois méthodes d'inversion d'Abel différentes, la méthode stack and slice est très simple à mettre en place mais possède de nombreuses limitations qui la rendent compliquée à utiliser

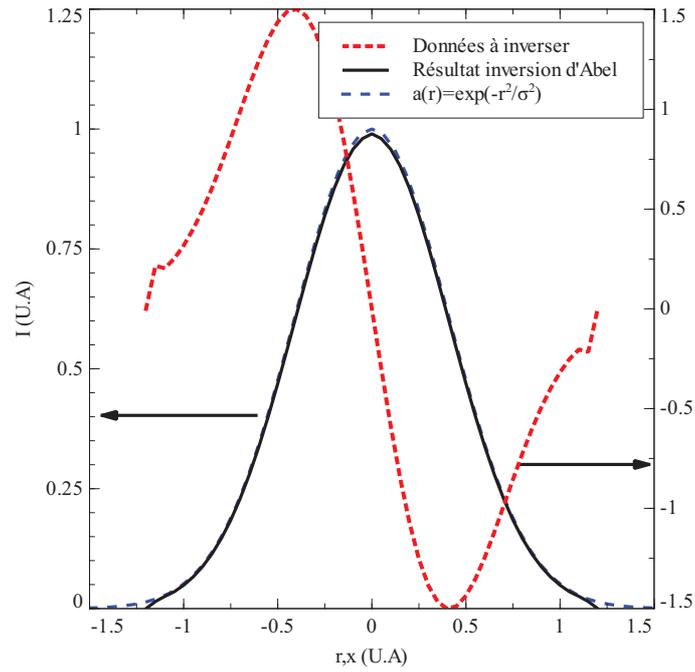


FIGURE 5.5 – Test de la méthode d’inversion d’Abel développée pour la déflectométrie moiré. Les données à inverser sont la dérivée de la relation 5.18 par rapport à  $x$ . Le résultat obtenu est très proche du profil théorique, la faible différence entre les deux résultats résulte de la non prise en compte des bords de la gaussienne.

pour des cas généraux. On a pu montrer cependant que cette méthode fonctionnait correctement pour traiter des résultats d’ombroscopie quantitative. Les méthodes Reinsch/Glasser développées ici sont très stables et ce même sur des données bruitées et en faible nombre. Elles permettent de traiter des profils de formes atypiques. En outre, le traitement indépendant de chacune des ailes des profils permet de mettre en évidence les dissymétries. Les codes sources de logiciels pour effectuer ces trois méthodes d’inversion d’Abel sont disponibles en annexe.



# Bibliographie

- [1] J.L. Delcroix and A. Bers. *Physique des plasmas*. CNRS Editions, 1994.
- [2] C. Tixier, P. Tristant, J. Desmaison, and P. Leprince. Atmospheric pressure plasmas : a review. *Spectrochimica Acta B*, 61 :2–30, 2006.
- [3] M.J. Druyvesteyn and F.M. Penning. The mechanism of electrical discharges in gases of low pressure. *Review of modern physics*, 12 :87–138, 1940.
- [4] H. N. Olsen. Partition function cutoff and lowering of the ionization potential in argon plasma. *Physical review*, 124 :1703–1708, 1961.
- [5] Karol Musiol. Arc plasma in atomic spectroscopy.
- [6] H. N. Olsen. Thermal and electrical properties of an argon plasma. *The physics of Fluids*, 2 :614–623, 1959.
- [7] Alan W. Irwin. Polynomial partition function approximation of 344 atomic and molecular species. *the astrophysical journal supplement series*, 45 :621–633, 1981.
- [8] A.B. Murphy. The effects of metal vapour in arc welding. *Journal of physics D*, 43 :434001, 2010.
- [9] A.B. Murphy, M. Tanaka, K. Yamamoto, S. Tashiro, T. Sato, and J. J. Lowke. Modelling of thermal plasma for arc welding : the role of the shielding gas properties and of metal vapour. *Journal of physics D*, 42 :194006, 2009.
- [10] Charlotte Pecker-Wimel. *Introduction à la spectroscopie des plasmas*. Gordon and Breach, 1967.
- [11] Club E.D.F arc électrique. *L’arc électrique et ses applications*. Editions du CNRS, 1984.
- [12] M. Venugopalan. *Reactions, volume 1*. John Wiley & sons, 1971.
- [13] R. H. Fowler and E. A. Milne. The instensities of absorption lines in stellar spectra and the temperatures and pressures in the reversing layers of stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 83 :403–424, 1923.
- [14] J. Chapelle. Equilibre thermodynamique et diagnostic des plasmas d’arc.
- [15] A. B. Murphy. Modified fowler-milne method for the spectroscopic measurement of temperature and composition of multielement thermal plasmas. *Review of scientific instruments*, 65 :3423–3427, 1994.
- [16] A. B. Murphy and K. Hiraoka. A comparison of measurements and calculation of demixing in free-burning arcs. *Journal of physics D*, 33 :2183–2188, 2000.
- [17] H Hiraoka, T. Shiwaku, and T. Ohji. Determining temperature distribution of gas tungsten arc (tig) plasma by spectroscopic methods. *Welding international*, 11 :688–696, 1997.

- [18] K. Hiraoka. Plasma structure of  $ar - h_2$  mixed gas tungsten arc determined by spectroscopic measurements. *Welding international*, 12 :186–194, 1998.
- [19] V. Cardenoso M. A. Gigoso, M. A. Gonzalez. Computer simulated balmer-alpha, -beta and -gamma stark profiles for non equilibrium plasmas diagnostics. *Spectrochimica Acta B*, 58 :1489–1504, 2003.
- [20] H. R. Griem. Stark broadening of isolated lines from heavy elements in a plasma. *Physical review*, 128 :515–523, 1962.
- [21] P. Kepple and H. R. Griem. Improved stark profile calculation for the hydrogen lines  $h\alpha$ ,  $h\beta$ ,  $h\gamma$  and  $h\delta$ . *The Physical review*, 173 :317–325, 1968.
- [22] E. Iordanova, N de Vries, M Guillemier, and al. Absolute measurement of the continuum radiation to determine the electron density in a microwave-induced argon plasma. *journal of physics D*, 41, 2008.
- [23] E. Iordanova, J. M. Palomares, A. Gamero, and al. A novel method to determine the electron temperature and density from the absolute intensity of line and continuum emission : application to atmospheric microwave induced ar plasmas. *Journal of physics D*, 42, 2009.
- [24] N. de Vries, J. M. palomares, E. I. Iordanova, and al. Polydiagnostic calibration performed on a low pressure surface wave sustained argon plasmas. *Journal of physics D*, 41, 2008.
- [25] C de Izarra, H. Rabat, and M. Pennaneac’h. Thermal perturbation produced by a cylindrical arc plasma at atmospheric pressure. *High temp.Mat. Proc.*, 10 :231–238, 2006.
- [26] H. Rabat. *Utilisation du spectre UV du radical OH pour la métrologie des hautes températures et des plasmas*. PhD thesis, Université d’Orléans, 2004.
- [27] J. Janca. Utilization of rotational and vibrational temperatures for plasma diagnostics of high-pressure discharge. *Czech. J. Phys. B*, 20 :341–351, 1970.
- [28] G.N. Haddad and J.D Farmer. Temperature determination in a free-burning arc : I. experimental techniques and results in argon. *Journal of physics D*, 17 :1189–1196, 1984.
- [29] E. Langlois-Bertrand. *Caractérisation d’un jet de plasma d’argon laminaire :détermination des champs de températures par spectroscopies atomique et moléculaire et mesures de vitesses d’écoulement*. PhD thesis, Université d’Orléans, 2011.
- [30] C. de Izarra E. Langlois-Bertrand, J. M. Bauchier. Optical mirage effect in a free burning arc. In *Gas Discharge 18*, 2010.
- [31] S. Pellerin, B. Pokrzywka, K. Musiol, and J. Chapelle. Diagnostic et étude de la zone cathodique d’un arc électrique. *Journal de physique III*, 5 :2029–2042, 1995.
- [32] Bartholomeg Pokrzywka, Karol Musiol, Stéphane Pellerin, and al. Etude de la zone cathodique d’un arc électrique. *Compte rendue de l’académie des sciences*, 327 :391–398, 1999.
- [33] P. F. Mendez and T. W. Eagar. Estimation of the characteristic properties of the weld pool during high productivity arc welding. In *Mathematical modelling of weld phenomena 5*, 2000.
- [34] P.F. Mendez, M.A. Ramirez, G. Trapaga, and T.W. Eagar. Order-of-magnitude scaling of the cathode region in an axisymmetric transferred electric arc. *Metallurgical and materials transactions B*, 32B :547–555, 2001.

- [35] J. Jenista, J. Heberlein, and E. Pfender. Numerical model of the anode region of high-current electric arcs. *IEEE transaction on plasma science*, 25 :884–890, 1997.
- [36] P. Fauchais. Etude expérimentale d'un générateur à plasma. *Rev. Int. Hautes Tempér. et Réfract.*, 5 :71–87, 1968.
- [37] K. Arabi, O. Aubry, A. Khacef, and J.M. Cormier. Hydrogenated liquids and hydrogen production by non-thermal plasmas. In *ISNTPT-7*, 2010.
- [38] M.S. Benilov and G.V. Naldis. Modelling of low-current discharges in atmospheric-pressure air taking account of non-equilibrium effects. *J. Phys. D : Appl. Phys*, 36 : 1834–1841, 2003.
- [39] J.H. Ha, Y.U. Nam, M.S. Cheon, and Y. S. Hwang. An improved abel inversion method modified for tangential interferometry in tokamak. *review of scientific instruments*, 75 : 3408–3410, 2004.
- [40] X. Feng Ma and T. Takeda. Asymmetric abel inversion by neural network for reconstruction of plasma density distribution. *Nuclear instrument and methods in physics Reasearch A*, 492 :178–189, 2002.
- [41] W.J. Pearce. *Optical Spectrometric Measurements of High Temperatures*, chapter Plasma Jet Temperature Measurement, page 125. U. of chicago press, 1961.
- [42] C. Reinsch. Smoothing by spline functions. *Numerische mathematik*, 10 :177–183, 1967.
- [43] N. Gottardi. Evaluation of electron dansity profiles in plasmas from integrated measurements. *Journal of Applied Physics*, 50 :2647–2651, 1979.
- [44] J. Glasser, J. Chapelle, and J. C. Boethner. Abel inversion applied to plasma spectroscopy : a new interactive method. *Applied Optics*, 17 :3750–3753, 1978.



## Deuxième partie

# Mesures macroscopiques, modélisation et analyse dimensionnelle



# Table des matières

---

<b>6</b>	<b>Mesures macroscopiques</b>	<b>69</b>
6.1	Introduction . . . . .	69
6.2	Mesures électriques . . . . .	70
6.2.1	Mesures électriques moyennes . . . . .	71
6.2.2	Mesures électriques instantanées . . . . .	72
6.3	Autres mesures . . . . .	72
6.3.1	Mesure du volume de la décharge . . . . .	72
6.3.2	Mesure du spot cathodique . . . . .	73
6.3.3	Mesure de la zone perturbée thermiquement . . . . .	74
6.3.4	Mesure acoustique sur un arc . . . . .	75
6.4	Conclusion . . . . .	76
<b>7</b>	<b>Modélisation</b>	<b>77</b>
7.1	Introduction . . . . .	77
7.2	Modèle fluide de colonne d'arc . . . . .	78
7.3	Le modèle d'Elenbaas-Heller . . . . .	79
7.4	Modèle thermique . . . . .	82
7.5	Conclusion . . . . .	84
<b>8</b>	<b>Analyse dimensionnelle</b>	<b>85</b>
8.1	Introduction . . . . .	85
8.2	Théorème Pi . . . . .	86
8.3	Analyse dimensionnelle heuristique . . . . .	88
8.3.1	Energie libérée dans une explosion atomique . . . . .	89
8.4	Analyse inspectionnelle : . . . . .	91
8.4.1	Approximation des fonctionnelles . . . . .	92
8.4.2	Conclusion . . . . .	93
8.5	Order of magnitude scaling . . . . .	93
8.5.1	Méthode de la balance dominante . . . . .	93
8.5.2	Order of magnitude scaling . . . . .	94
8.5.3	Calcul des intégrales . . . . .	98

8.5.4	Limites de la méthode et améliorations . . . . .	98
8.5.5	Conclusion . . . . .	99
8.6	Application de l'analyse inspectionnelle à un arc TIG : . . . . .	99
8.6.1	Dispositif expérimental . . . . .	100
8.6.2	Résultats expérimentaux . . . . .	100
8.6.3	Analyse dimensionnelle . . . . .	104
8.6.4	Exploitation des résultats expérimentaux . . . . .	106
8.6.5	Validation des résultats par simulation numérique . . . . .	108

---

# Chapitre 6

## Mesures macroscopiques

Ah ! c'est coton, la langue française, mon drôlet ! soupire-t-il. On croit la savoir parce qu'on la cause, mais dès qu'tu l'écris, c'est la merde, mec. La merde pur fruit ! Tu voyes, moi, les verbes, jusque z'alors, j'leur pissais su' l'conjugable, et les injectifs j'me branlais d'leur concord'ment : j'causais tel que j'sentais. Mais dès qu'tu rédactionnes, tu l'as dans l'cul véry profondly. Tout c'bordel part en foirade, te chie ent' les doigts. Suffit pas d'avoir d'bioutifoules idées, faut qu'tu pusses les exprimer en pur français... Je risque la grande question à cent francs, toutes taxes incluses - Puis-je savoir ce que tu écris, Alexandre-Benoît ? Il gravifie. - Les mémoires d'mon zob, révèle-t-il.

---

San Antonio

### 6.1 Introduction

De nos jours, la communauté des plasmas de décharge se focalise sur l'utilisation de techniques de diagnostic complexes et coûteuses à mettre en œuvre. Des résultats très pointus sont présentés quelquefois sans discuter de la physique des phénomènes. À cause de cela, les mesures macroscopiques autrefois très présentes dans le domaine ne sont plus au goût du jour.

Malgré leur relative simplicité, ces mesures ne sont pas à négliger. Elles permettent tout d'abord de juger de la qualité d'un dispositif expérimental. De fait, ce genre de mesures devrait être le fondement de tout travail de laboratoire. Couplé à un travail de modélisation, elles donnent des résultats fondamentaux sur les phénomènes physiques à l'œuvre dans les décharges électriques. Il est possible, par exemple, de quantifier l'importance des modes de dissipation d'énergie dans un arc. Finalement, les mesures macroscopiques sont aussi indispensables pour la simulation numérique puisqu'elles fournissent des conditions aux limites ou des grandeurs de comparaison.

Dans ce chapitre, nous allons passer en revues les différentes mesures macroscopiques qui peuvent être réalisées sur une décharge électrique. Le chapitre suivant sera consacré à la modélisation des décharges d'arc. À cette occasion, divers modèles d'arcs seront présentés. Cette partie se conclura par un chapitre consacré à l'art de l'analyse dimensionnelle appliquée aux arcs électriques. Différentes méthodes pour obtenir des relations entre nombres adimensionnés seront présentés. Ce chapitre sera clôt par l'étude d'un arc TIG ; de l'analyse dimensionnelle et une simulation numérique seront utilisées pour expliquer les caractéristiques courant/tension obtenues.

## 6.2 Mesures électriques

Les décharges d'arc sont des plasmas entretenus grâce à de l'énergie déposée par effet Joule ( $\sigma E^2$ ). La conductivité électrique  $\sigma$  est directement reliée aux caractéristiques du plasma telles que sa température ou sa composition. Les mesures électriques qui sont une mesure de  $\vec{j} \cdot \vec{E}$  sur toute la décharge peuvent donc être d'un grand secours lorsqu'on s'intéresse aux bilans énergétiques et au comportement de la colonne.

D'une manière générale, la tension aux bornes d'une décharge peut être décomposée en deux contributions. La première est due à la colonne positive et consiste en une tension qui varie de manière linéaire entre la cathode et l'anode (figure.6.1). La seconde est due aux zones proches électrodes et est considérée constante pour un type de matériau d'électrode, de géométrie et pour une intensité de courant donnée.

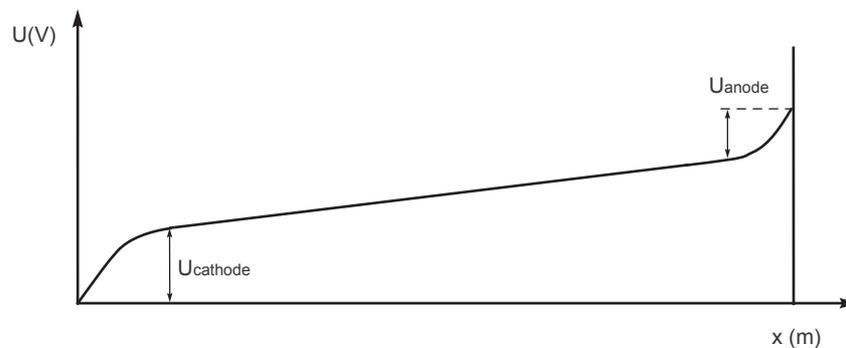


FIGURE 6.1 – Distribution du potentiel électrique typique dans un arc.

Grâce à ces observations, deux types de mesures électriques vont pouvoir être effectuées. Les premières sont des mesures moyennes, elles permettent de caractériser un arc à l'alimentation continue ou quasi-continue pour déterminer les différents processus de dissipation d'énergie. Dans les procédés, ces valeurs moyennes sont aussi un moyen de détecter un changement de composition (inclusion de vapeurs métalliques) ou bien de juger de l'usure des électrodes.

Les secondes sont des mesures instantanées, elles permettent tout d'abord de juger de la qualité de l'alimentation électrique de l'arc, mais aussi de suivre sa forme en fonction du temps.

## 6.2.1 Mesures électriques moyennes

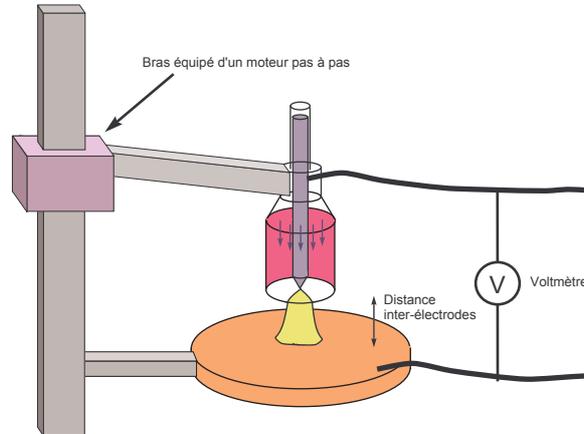


FIGURE 6.2 – Dispositif expérimental pour la mesure des chutes de potentiel aux électrodes.

Le montage présenté sur le graphique 6.2 est utilisé pour déterminer la part de la chute de potentiel due à la colonne et aux zones proches électrodes. Un arc est amorcé entre deux électrodes séparées d'une distance  $L$ . Une des électrodes est montée sur un robot de manière à faire varier précisément la distance inter-électrodes tout en conservant l'arc allumé. Un voltmètre, monté en parallèle aux bornes des électrodes, permet de mesurer la chute de tension en fonction de  $L$ . Au cours de l'expérience, l'intensité du courant est gardé constante de même que les matériaux et la géométrie des électrodes.

La chute de tension aux électrodes étant constante, on aura :

$$U(L) = U_{electr} + U_{col} \cdot L \quad (6.1)$$

La régression d'une droite sur les résultats expérimentaux permet d'obtenir l'ordonnée à l'origine  $U_{electr}$ . En connaissant le volume de la colonne, il est possible de remonter à la puissance dissipée via le coefficient directeur de la droite  $U_{col}$  et l'intensité du courant.

La mesure des chutes de potentiel aux électrodes permet de déterminer le régime de décharge dans les cas où l'intensité du courant est faible. En effet, pour une décharge glow,  $U_{elec}$  sera de l'ordre de la centaine de volts tandis que pour un arc, la chute de potentielle aux électrodes sera relativement faible, de l'ordre de la dizaine de volts [1, 2].

Les caractéristiques courant/tension peuvent être mesurées à l'aide du montage présenté sur le schéma 6.3. Des voltmètres branchés sur un shunt et aux bornes des électrodes permettent de mesurer au même moment le courant et la tension. Une alimentation électrique régulée en courant est utilisée pour balayer une large gamme d'intensité de courant. Les mesures peuvent aussi être prises à l'oscilloscope grâce aux montages présentés sur la figure 6.4. Cette fois-ci, c'est un capteur à effet (Hall LEM LA 205 S par exemple) qui est utilisé pour mesurer l'intensité du courant. On fait varier lentement le courant délivré par l'alimentation de manière à enregistrer toute une caractéristique d'un seul coup. À titre d'exemple, des caractéristiques courants/tension enregistrées sur un arc pointe-plan seront exploitées à l'aide de l'analyse dimensionnelle en fin de chapitre 8 de la présente partie. Les caractéristiques d'arcs peuvent aussi être utilisées pour valider les résultats issus des simulations puisque l'intensité

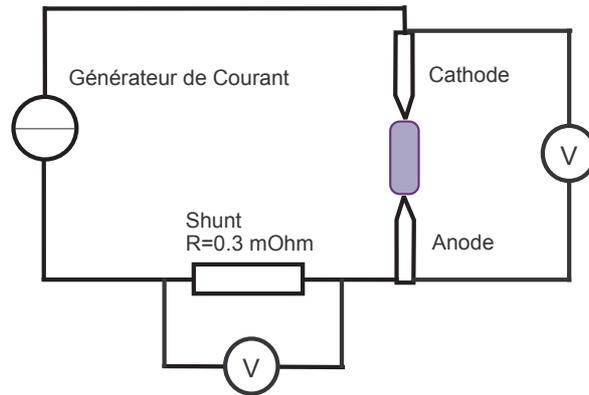


FIGURE 6.3 – Dispositif de mesure de la caractéristique intensité du courant / tension d'une décharge d'arc. Pour les décharges de faible intensité de courant, le shunt pourra être remplacé par une résistance calibrée et le voltmètre équipé d'une sonde haute-tension.

du courant et la tension aux bornes de la colonne positive sont des grandeurs qui peuvent être facilement obtenues dans les modèles d'arc.

### 6.2.2 Mesures électriques instantanées

Les mesures électriques instantanées sont indispensables à tout travail expérimental puisqu'elles permettent tout d'abord de vérifier si l'alimentation a les caractéristiques nécessaires pour produire des arcs selon les conditions choisies (fig.6.4). Si on alimente l'arc en courant continu, on prendra soin d'avoir une intensité correctement lissée et/ou une alimentation adaptée. Les mesures courant-tension donnent aussi accès au terme source dans la cas de décharges AC.

Plus généralement, le suivi de la tension et du courant aux bornes de l'arc donne des informations sur sa géométrie et sur la composition du plasma [3, 4]. Dans un plasmatron par exemple, pour des débits de gaz plasmagènes importants, l'arc s'étire puis re-claque de manière à être plus court. Ce phénomène peut être suivi par mesure instantanée de la tension puisque pour une intensité de courant constante, la différence de potentiel aux bornes de la décharge augmente avec la longueur de la colonne positive [5].

Pour certains procédés [6], la conductivité du gaz plasmagène est modifiée en faisant croître des nanoparticules par exemple. Les paramètres électriques sont directement influencés par leur croissance, leurs suivis permet donc de maîtriser la fabrication.

## 6.3 Autres mesures

### 6.3.1 Mesure du volume de la décharge

La détermination expérimentale du volume d'une décharge électrique n'est pas aisée car il n'existe aucune définition solide du rayon d'une colonne de plasma. Il est cependant communément admis que la décharge est la zone où l'on trouve des électrons libres. Il est possible de caractériser les zones où il y a présence d'électrons en étudiant le Bremsstrahlung. Pour

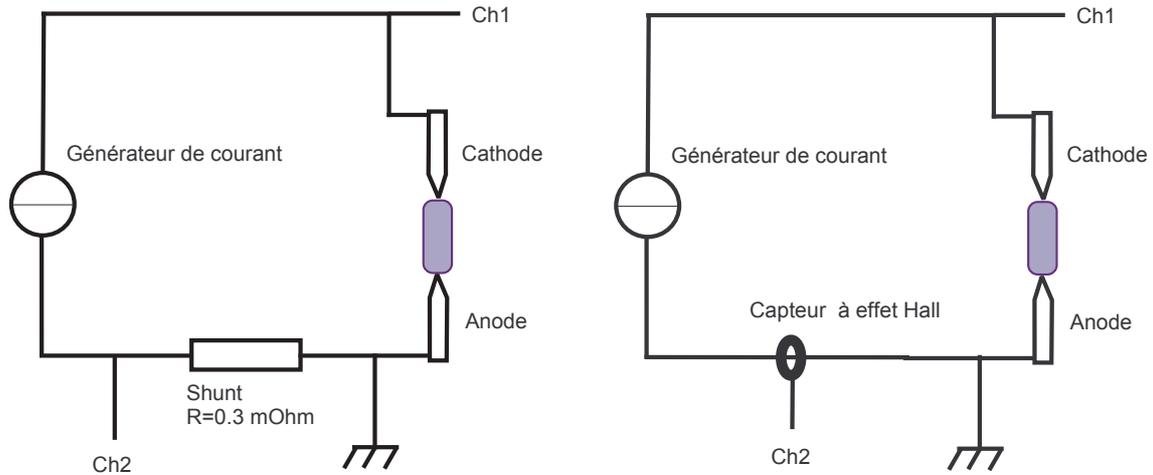


FIGURE 6.4 – Dispositifs de mesure de l'intensité du courant et de la tension instantanées aux bornes d'un arc.

ce faire, on enregistre des clichés de l'arc avec un filtre interférentiel dont la longueur d'onde est choisie pour ne transmettre que le rayonnement de freinage. Dans la plupart des cas, la décharge à une forme cylindrique et son volume peut être correctement approximé par un cylindre. Pour les géométries plus complexes de type pointe plan ou arc soufflé, le volume pourra être approximé par de multiples cylindres ou par des cônes tronqués.

Couplé à des mesures électriques, le volume de la décharge donne une mesure du terme source et de la conductivité moyenne dans la colonne. Cela peut se révéler utile lorsqu'on étudie des arcs hors-équilibre, sans méthodes de mesure de la température et de la densité électronique fiable. Comme nous le verrons par la suite, ces données sont aussi utiles pour simuler des arcs à l'aide de modèles thermiques.

### 6.3.2 Mesure du spot cathodique

La simulation numérique des colonnes d'arc nécessite la connaissance de diverses conditions aux limites pour être menée à bien. La plupart des simulations d'arc pointe-plan prennent comme condition un profil de densité de courant en pointe de cathode. La qualité de cette condition est très importante car elle conditionne le champ de vitesse du gaz à l'intérieur de la colonne. Selon la fonction utilisée pour la densité de courant et la taille du spot cathodique, la vitesse maximum dans l'arc peut varier du simple au triple. Afin d'obtenir une mesure de la tâche cathodique, Hsu & al [7] ont enregistré l'image d'une cathode en tungstène pour un arc pointe-plan brûlant dans l'argon avec une intensité de courant de 200 A (fig.6.5). L'analyse du rayonnement de corps gris a permis de localiser la zone la plus chaude de la cathode et de mesurer son rayon :  $r = 0.51\text{mm}$ . Ce simple résultat macroscopique est d'une importance capitale puisque de nombreuses simulations l'utilisent depuis sa publication [8, 9, 10].

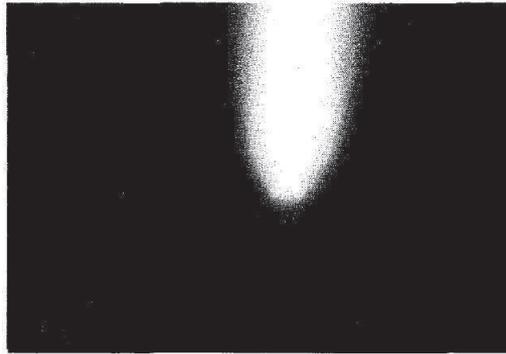


FIGURE 6.5 – Photographie d'une cathode en tungstène prise lorsqu'un arc pointe-plan est en opération. Issu de [7].

### 6.3.3 Mesure de la zone perturbée thermiquement

Pour de nombreux procédés, ce sont les zones périphériques de la décharge qui sont primordiales car leur température est idéale pour les réactions chimiques. Ces zones sont beaucoup plus étendues que la colonne mais aucun critère de mesure du volume n'est communément admis.

Cela pose de nombreux problèmes pour la simulation de procédés : c'est souvent le volume de la colonne qui est pris comme zone de traitement, ce qui conduit à une sous-estimation importante des volumes traités par plasma.

Pour avoir un ordre d'idée de l'importance des zones périphériques, nous avons utilisé l'ombroscopie qualitative pour mesurer la taille de la zone perturbée thermiquement par le plasma.

L'ombroscopie est une méthode qui permet de visualiser les gradients d'indice d'un milieu en les sondant grâce à un faisceau de lumière parallèle. Un écran placé sur le chemin optique, permet d'observer l'intensité lumineuse du faisceau après sa traversée de l'objet à sonder. Si aucun gradient d'indice n'est présent, l'écran est uniformément éclairé tandis que si des gradients d'indice courbent les rayons, des zones avec des surplus et des manques d'intensité lumineuse seront visibles. On peut montrer que l'indice de réfraction est directement relié à la température du gaz plasmagène (partie 3 de la présente thèse).

Le banc d'ombroscopie utilisé est présenté sur la figure 6.6. Si les arcs rayonnent peu, ce montage est à privilégier de par son faible coût de mise en œuvre : Une simple DEL haute puissance et un appareil photographique sont nécessaires pour obtenir des ombrogrammes de bonne qualité. Deux solutions peuvent être envisagées lorsque les arcs rayonnent fortement. On peut tout d'abord choisir une LED dont la majeure partie du spectre d'émission est différente de celui du plasma. En équipant l'objectif de l'appareil photographique d'un filtre interférentiel laissant passer le rayonnement issu de la lampe, il est possible d'augmenter le rapport signal sur bruit. La seconde solution est d'utiliser une source lumineuse assez intense pour obtenir un bon rapport signal sur bruit, typiquement une lampe à arc. Deux ombrogrammes qualitatifs sont proposés sur la figure 6.7. Le premier est un cliché pris lors de l'étude d'une flamme butane/air de chalumeau tandis que le second a été enregistré sur un arc basse intensité brulant dans l'air (Partie 5).

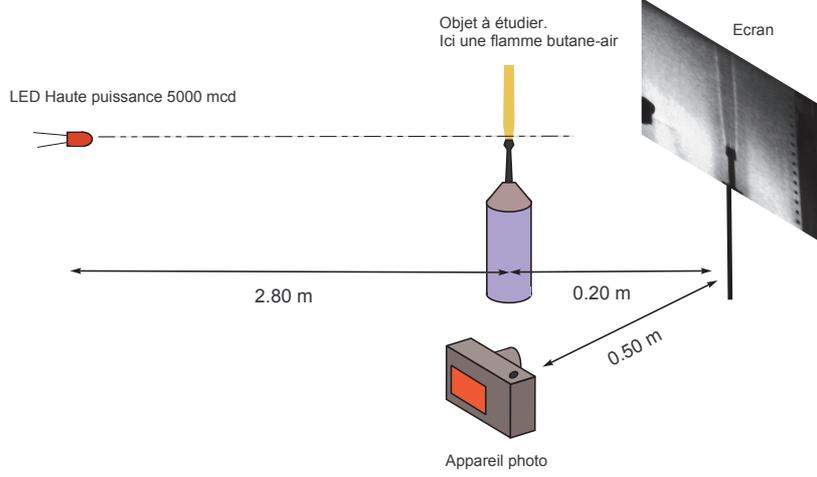


FIGURE 6.6 – Schéma d'un banc d'ombroscopie qualitative. Le banc est peu coûteux car il est uniquement constitué d'un diode électroluminescente de haute puissance, d'un écran et d'un appareil photographique. Afin d'effectuer des mesures correctes, on doit s'assurer que la distance entre la LED et le milieu à sonder est grande devant les dimension de ce dernier.

### 6.3.4 Mesure acoustique sur un arc

À l'aide des équations de conservation de la quantité de mouvement et de la densité des neutres, on obtient, en négligeant la viscosité du gaz, l'équation d'onde suivante [11] :

$$\Delta P = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\gamma - 1}{c^2} \frac{\partial H}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} - \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (6.2)$$

Ici,  $H$  représente l'énergie cédée au gaz par unité de temps et de volume,  $\vec{F}$  la force exercée par unité de volume et  $Q$  le flux de masse volumique. Toute perturbation intervenant dans les transferts entre le plasma et le gaz neutre tend à faire naître des ondes de pression. On montre cependant que dans la plupart des arcs, la source prépondérante des ondes acoustiques est la variation d'énergie cédée dans le temps. Les termes  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$  et  $\frac{\partial Q}{\partial t}$  sont négligeables.

La fonction  $H(\vec{r}, t)$  dépend du temps et de la position et il est bien entendu impossible de déterminer expérimentalement cette fonction. Cela n'est d'ailleurs pas nécessaire si l'on fait l'hypothèse de sources ponctuelles, c'est à dire si les longueurs d'ondes des signaux enregistrés sont grandes devant la taille des arcs étudiés. En première approximation, l'énergie cédée au gaz est proportionnelle à l'énergie électrique totale passant dans la décharge. On en déduit que :

$$H(t) = \langle H(r, t) \rangle = \alpha W, \quad (6.3)$$

avec  $\alpha$  une constante de proportionnalité et  $W$  l'énergie électrique totale cédée à l'arc. En constatant que  $c^2$  varie comme la température du gaz dans l'arc, on obtient une équation de propagation d'onde de la forme :

$$-\Delta P + \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \beta \frac{1}{T} \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (6.4)$$

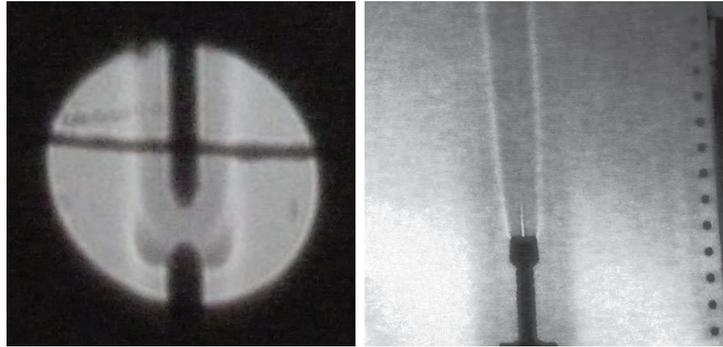


FIGURE 6.7 – À gauche, ombrogramme d’une décharge hors-équilibre établie dans l’air. À droite, ombrogramme d’une flamme butane-air. Ces deux clichés ont été réalisés avec le montage présenté sur la figure 6.6.

À partir de cette relation, plusieurs mesures sont possibles : on remarque tout d’abord qu’en un point donné, on peut, à l’aide de l’amplitude des ondes acoustiques, obtenir des mesures de températures relatives dans le plasma. De plus, on est capable de relier l’amplitude de l’onde acoustique reçue avec la variation de puissance électrique fournie à l’arc. Au niveau industriel, cette relation est très intéressante pour limiter le niveau sonore de diverses installations ou encore contrôler les procédés de fabrication en suivant la puissance fournie [12].

## 6.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons vu que les mesures macroscopiques étaient primordiales en physique de plasmas d’arc. Elles sont indispensables pour caractériser correctement un dispositif expérimental et fournissent de nombreuses données pour alimenter les simulations numériques puis contrôler leurs résultats. Pour conclure, elles sont souvent d’un grand intérêt pour l’industrie où elles permettent un contrôle des procédés au prix d’une installation souvent simple, bon marché et robuste.

# Chapitre 7

## Modélisation

On s'en débarrassera jamais, de la  
connerie ! Plus gluante, plus indélébile  
que le péché universel, elle est !  
L'essuyer, c'est la doper ! Infinie,  
saharienne, océanique, cosmique ! On ne  
peut pas lutter. On a cru qu'avec  
l'instruction obligatoire on allait enrayer  
le fléau : mes choses ! Savoir et  
intelligence ne sont même pas cousins  
germains ! Pas même parents pauvres !  
À l'échelle de la haute instruction, on  
retrouve les mêmes mômeries : le Nobel,  
le doctorat honoris causa, les  
décorations, les grades, les titres, les  
estrades, les lauriers que je vous causais  
y a un instant et qui sont tellement  
mieux à leur place dans le civet de lapin  
que sur le crâne chenu d'un  
savantissimo.

---

San Antonio

### 7.1 Introduction

L'étude expérimentale d'un phénomène ou d'un processus physique n'est que la moitié du travail du physicien. Afin de comprendre la physique et prédire le comportement d'un objet d'étude, il est nécessaire de le modéliser.

Fondamentalement, la modélisation consiste à décrire une partie de la réalité d'un phénomène physique à l'aide d'objets mathématiques et de lois de la physique. Il est virtuellement impossible de décrire complètement un phénomène physique, il existe donc une infinité de modèles qui décriront de manière plus ou moins fidèle une des "facettes" de la réalité.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la modélisation des décharges d'arcs. En fonction des phénomènes ou des processus particuliers étudiés par le chercheur, plusieurs types de modèles existent ; les modèles collisionnels radiatifs se focalisent sur les échanges d'énergies de chaque population de particules au niveau microscopique sans s'intéresser à la répartition

spatiale du plasma. Au contraire, des modèles où le plasma est considéré comme un ou plusieurs fluides permettent d'étudier la répartition et les propriétés de ce dernier. Ce genre de modèle est relativement bien adapté lorsqu'il s'agit de relier les processus physiques aux paramètres microscopiques du plasma [13]. C'est sur ce genre de modèle que nous allons nous focaliser dans le présent chapitre.

Nous avons choisi de nous focaliser sur la simulation des colonnes d'arcs. Dans un premiers temps, nous verrons les différentes hypothèses qui nous permettent de construire un modèle fluide. L'ensemble des équations du modèles sera présenté puis nous étudierons le modèle d'Elenbaas-Heller et un modèle thermique. Comme nous le verrons par la suite, ces modèles, d'intérêt historique, permettent d'obtenir des résultats relativement intéressants lorsqu'ils sont couplés à des mesures macroscopiques.

## 7.2 Modèle fluide de colonne d'arc

D'une manière générale, la simulation complète d'un arc électrique fait intervenir des phénomènes dont l'échelle et la physique diffèrent grandement. L'échange de particules chargées au niveau des électrodes nécessite un traitement particulière du fait de la faible taille de la gaine (quelques dizaines de nanomètres) et des charges d'espace importantes à ce niveau. Les zones d'ionisation et de recombinaison, où l'on montre expérimentalement que la température électronique est supérieure à la température des lourds peuvent être décrites à l'aide d'un modèle fluide multi-températures [14]. Prendre en compte ces zones et l'ensemble de la colonne se révèle souvent complexe, et l'on préfère simplifier la simulation pour se focaliser sur les zones d'intérêt. Du fait de la faible taille des gaines, de nombreux travaux ont été réalisés sur la simulation de la colonne de plasma uniquement [7].

Dans la colonne d'arc, la longueur de Debye est très petite devant les longueurs caractéristiques du système. En outre, ces plasmas sont quasi-neutres et peuvent être considérés comme un milieu unique et homogène. Afin de caractériser le régime d'écoulement, calculons le nombre de Knudsen. Ce dernier est le rapport du libre parcours moyen sur une longueur caractéristique du système :

$$K_n = \frac{l_{pm}}{L} \approx \frac{0.00001}{0.01} \approx 0.001 \quad (7.1)$$

Le Knudsen est inférieur à  $10^{-2}$  ce qui signifie qu'à l'échelle considérée, le plasma peut être assimilé à un fluide et être correctement décrit par l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}P + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{g} + \vec{j} \times \vec{B} \quad (7.2)$$

Où  $\rho \vec{g}$  représente la force de gravitation,  $\vec{j} \times \vec{B}$  la force de Lorentz. On ajoute à cette équation l'équation de conservation de la masse qui est de la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0 \quad (7.3)$$

Les équations de Navier Stokes fournissent juste une information sur la conservation de la quantité de mouvement, elles ne suffisent pas à décrire complètement la décharge. En effet, la caractéristique principale d'un arc est la conduction de l'électricité et son auto-entretien à l'aide de pertes d'énergie par effet Joule. La conduction des charges électriques ainsi que les phénomènes électromagnétiques peuvent être décrits par les équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (7.4)$$

$$\vec{j} = -\sigma \vec{E}; \quad (7.5)$$

avec  $\vec{E}$  le champ électrique défini par  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ .

Afin de prendre en compte l'auto-entretien de la décharge par effet Joule, l'équation de conservation de l'énergie suivante est résolue :

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} h = \vec{\nabla}(\lambda \vec{\nabla} T) + \vec{j} \cdot \vec{E} - Q \quad (7.6)$$

Avec  $\vec{j} \cdot \vec{E}$  le terme source correspondant à l'effet Joule et  $Q$  un terme puits qui représente les pertes radiatives de l'arc.  $\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} h$  est le transport d'enthalpie tandis que  $\vec{\nabla}(\lambda \vec{\nabla} T)$  représente la diffusion de la chaleur. Pour décrire complètement le problème, on doit connaître les coefficients de transport du plasma considéré ainsi que diverses conditions aux limites. On fera l'hypothèse que le plasma est à l'ETL afin de pouvoir utiliser la composition et les différents coefficients d'un plasma à l'équilibre.

Pour conclure, ce modèle fluide est utilisé pour de nombreux travaux aussi bien théoriques que numériques pour décrire les colonnes d'arcs et les jets de plasmas. Suite aux travaux de Yask'o, c'est notamment devenu le modèle de base pour effectuer de l'analyse dimensionnelle sur des plasmas d'arcs.

Depuis les années 1930, de nombreux modèles de colonnes d'arc ont été développés. Que ce soit le modèle d'Elenbaas-Heller ou le modèle d'arc axisymétrique et stationnaire de Pfender et Sue, la plupart des modèles utilisés sont des simplifications du modèle fluide que nous venons de présenter.

### 7.3 Le modèle d'Elenbaas-Heller

Pour certains cas d'étude à la géométrie relativement simple où l'écoulement de gaz plasmagène est négligeable (arcs Maecker, lampes à arcs ...), le modèle fluide est trop complexe et peut être simplifié pour obtenir le modèle d'Elenbaas-Heller. Les hypothèses pour obtenir ce modèle sont les suivantes :

- le plasma est en régime stationnaire et possède une symétrie cylindrique ;
- l'écoulement de gaz plasmagène est négligeable, la pression est uniforme ;
- la diffusion des particules est négligeable ;
- le champ électrique est uniforme dans la colonne ;
- le plasma est à l'ETL.

Ces hypothèses permettent de nous débarrasser des équations de Navier-Stokes pour ne conserver qu'une équation d'énergie simplifiée et la loi d'Ohm généralisée :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \lambda \frac{dT}{dr} \right) = Q - \sigma E^2; \quad (7.7)$$

$$E = \frac{I}{2\pi \int_0^R \sigma(T(r)) r dr}; \quad (7.8)$$

avec  $\lambda$  et  $\sigma$  respectivement la conductivité thermique et électrique du gaz plasmagène,  $E$  le champ électrique,  $I$  l'intensité du courant traversant la décharge.  $Q$  est un terme puits qui

représente les pertes d'énergie par rayonnement. Historiquement, il n'était pas inclus dans le modèle.

Il manque les conditions aux limites pour décrire complètement la décharge. La température sera maximum sur l'axe, on aura donc :

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (7.9)$$

Sur le bord du domaine de calcul on aura :

$$T(R) = T_{bord}. \quad (7.10)$$

Ce modèle peut être modifié pour prendre en compte les déséquilibres thermiques dans la décharge. Pour ce faire, deux équations d'énergies, une pour les électrons et une pour les particules lourdes sont considérées [15].

Le modèle d'Elenbaas-Heller est relativement célèbre dans l'histoire de la physique des décharges car il a fait l'objet de nombreux travaux de résolution analytique et ce bien avant l'avènement de la simulation numérique. Une des méthodes de résolution la plus connue est due à Steenbeck [16] qui propose de résoudre les équations du modèle en supposant qu'à l'équilibre, pour une intensité de courant donnée, la forme de la décharge est celle qui minimise la chute de tension à ces bornes. Le principe du minimum de Steenbeck est aujourd'hui remis en cause. Pour résoudre ce modèle, nous allons nous focaliser sur une méthode numérique de type différences finies.

Pour ce faire, discrétisons le domaine de résolution en  $n$  points séparés d'une distance  $\Delta r$ . Si l'on réécrit la relation (7.7) en équation aux différences finies, on aura, autour d'un point  $i$  du domaine de résolution :

$$\begin{aligned} \sigma_{(i)} E^2 - Q_{(i)} + \frac{1}{r_{(i)}} \left( \lambda_{(i+0.5)} r_{(i+0.5)} \frac{T_{(i+1)} - T_{(i)}}{\Delta r^2} \right) - \\ \frac{1}{r_{(i)}} \left( \lambda_{(i-0.5)} r_{(i-0.5)} \frac{T_{(i)} - T_{(i-1)}}{\Delta r^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

L'indice  $i$  permet de repérer la position à laquelle chaque grandeur est évaluée, par exemple  $\sigma_i$  sera la conductivité thermique au rayon  $r = i \cdot \Delta r$ .

Le calcul du champ électrique est plus simple que celui du champ de température, l'intégrale de  $\sigma$  peut être obtenue à l'aide d'une simple méthode des trapèzes :

$$E = \frac{I}{\sum_{i=0}^{n-1} 0.5 (\sigma_i \cdot i \cdot \Delta r + \sigma_{i+1} \cdot (i+1) \cdot \Delta r) \cdot \Delta r}. \quad (7.12)$$

La résolution de l'équation 7.11 n'est pas triviale puisqu'elle est non-linéaire. La structure de l'équation nous apprend cependant qu'elle est soluble à l'aide d'une méthode de type relaxation. Pour s'en convaincre, exprimons la pour l'ensemble des points du domaine de résolution. On a un système de la forme :

$$\begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? & \dots & ? \\ \frac{\lambda_{0.5} r_{0.5}}{r_1 \Delta r^2} & -\frac{(\lambda_{1.5} r_{1.5} + \lambda_{0.5} r_{0.5})}{r_1 \Delta r^2} & \frac{\lambda_{1.5} r_{1.5}}{r_1 \Delta r^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_{1.5} r_{1.5}}{r_2 \Delta r^2} & -\frac{(\lambda_{2.5} r_{2.5} + \lambda_{1.5} r_{1.5})}{r_2 \Delta r^2} & \frac{\lambda_{2.5} r_{2.5}}{r_2 \Delta r^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ? & ? & ? & ? & \dots & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ -\sigma_1 E^2 + Q_2 \\ -\sigma_2 E^2 + Q_2 \\ \dots \\ ? \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

La matrice des coefficients de ce système est diagonalement dominante, nous sommes donc en mesure de résoudre le problème avec une méthode de Jacobi ou de Gauss-Seidel. La première et la dernière ligne du système manquent pour que celui-ci puisse être résolu. Elles correspondent aux conditions aux limites. La température fixée en  $R$  est introduite dans le système par la relation :

$$(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1) \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_n \end{pmatrix} = T_{bord}. \quad (7.14)$$

Le flux de chaleur nul au niveau de l'axe de la décharge peut être pris en compte en écrivant :

$$(1 \ -1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0) \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_n \end{pmatrix} = 0. \quad (7.15)$$

Le système ainsi complété peut être résolu par méthode de relaxation (voir partie 3 : résolution de l'équation de Poisson pour l'ombroscopie quantitative) en suivant l'algorithme présenté ci-dessous. Pour que ces méthodes convergent, il est nécessaire de leur fournir une solution de départ physiquement réaliste. J'ai choisi d'utiliser une solution initiale de type canal chaud présenté sur le graphique 7.1 afin de calculer des profils de température.

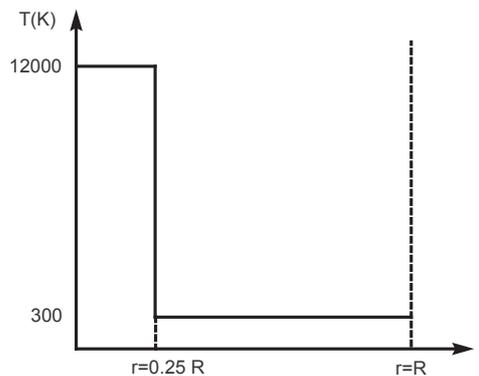


FIGURE 7.1 – Solution de départ pour la résolution des équations du modèle Elenbaas-Heller.

1. Création de la matrice des coefficients  $A$  de taille  $(n, n)$ . Définition de  $\Delta r$  tel que  $R = n\Delta r$ .
2. Création des vecteurs  $b$  et  $T$  de  $n$  éléments. Ils contiendront respectivement les termes sources et la température.

3. Etablissement des conditions initiales pour  $T$  : on place une température de 12000 K autour de l'axe de la décharge et une température de 300 K sur le reste du domaine.
4. Calculs des coefficients de la matrice  $A$ .  

$$A(i, i) = \frac{1}{r_i}(-\lambda_{(i+0.5)}r_{(i+0.5)}\frac{1}{\Delta r^2} - \lambda_{(i-0.5)}r_{(i-0.5)}\frac{1}{\Delta r^2}),$$

$$A(i, i-1) = \frac{1}{r_i}(\lambda_{(i-0.5)}r_{(i-0.5)}\frac{1}{\Delta r^2}),$$

$$A(i, i+1) = \frac{1}{r_i}(-\lambda_{(i+0.5)}r_{(i+0.5)}\frac{1}{\Delta r^2}).$$
5. Calcul de l'intégrale de  $\sigma$  sur le domaine de résolution en utilisant la méthode des trapèzes, puis calcul du champ électrique en utilisant la relation  $E = \frac{I}{\int_s \sigma dS}$ .
6. Calcul des éléments du vecteur  $b$  :  $b(i) = Q(T_{(i)}) - \sigma(T_{(i)})E^2$
7. Mise à jour des températures en utilisant la méthode de Gauss-Seidel :

$$T(i) = T(i) + \frac{(b(i) - \sum_{j=0}^n T(j)A(i, j))}{A(i, i)}.$$

8. Tant que les résidus sont supérieurs à une erreur  $\epsilon$  fixée, on boucle sur l'étape (4).

Le modèle d'Elenbaas-Heller présenté ici à été utilisé pour valider des résultats issus de l'analyse dimensionnelles. Des codes de simulation en C et en langage scilab sont disponible en annexes, ils ont permis d'obtenir les résultats présenté dans la section "application de l'analyse inspectionnelle à un arc TIG".

## 7.4 Modèle thermique

Plutôt que de décrire complètement la décharge, il peut être utile dans certains cas de la considérer comme une source de chaleur quelconque. Ce genre de modèle utilise des résultats issus de mesures macroscopiques pour évaluer la puissance thermique dissipée par la colonne, il est donc loin d'être prédictif mais permet d'obtenir une évaluation des températures du plasma, du volume de la zone perturbée thermiquement. Ces données peuvent être nécessaires dans la validation de nouvelles méthodes de mesures.

Nous allons nous intéresser ici à un modèle qui a été mis en place pour la validation de méthodes de mesure de température sur une décharge électrique brûlant dans l'argon. La description de cette décharge ainsi que les résultats du modèle et des expérimentations sont disponibles dans la cinquième partie de la présente thèse.

Les hypothèses pour ce modèle sont les suivantes :

- la décharge possède une symétrie cylindrique. Le problème peut donc être résolu en utilisant les coordonnées cylindriques  $r$  et  $z$  ;
- le terme source est le même sur toute la colonne ;
- la décharge est stationnaire ;
- la colonne perd de l'énergie par conduction selon deux dimensions et par convection selon une dimension ;
- les électrodes sont négligées.

Leur utilisation permet de réduire le problème à une équation de Navier-Stokes monodimensionnelle et une équation d'énergie :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ \lambda r \frac{dT}{dr} \right] + \frac{d}{dz} \left[ \lambda \frac{dT}{dz} \right] - \rho C_p \frac{dT}{dz} v_z + S = 0, \quad (7.16)$$

avec  $\lambda$ ,  $\rho$  and  $Cp$  respectivement la conductivité thermique, la masse volumique et la capacité thermique du gaz considéré.  $v_z$  est la vitesse du gaz due à la convection tandis que  $S$  correspond au terme source. La masse volumique utilisée est obtenue à l'aide de la loi des gaz parfaits.

Pour décrire la convection, l'équation de Navier-Stokes utilisée est :

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} v_z = \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - (\rho - \rho_0)g. \quad (7.17)$$

Afin de résoudre le problème numériquement, ces équations sont transformées en équations aux différences finies :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{i,j}} \frac{1}{\Delta r} \left[ r_{i+0.5,j} \lambda(T_{i+0.5,j}) \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta r} - r_{i-0.5,j} \lambda(T_{i-0.5,j}) \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta r} \right] + \\ \frac{1}{\Delta z} \left[ \lambda(T_{i,j+0.5}) \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta z} - \lambda(T_{i,j-0.5}) \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta z} \right] - \\ \rho(T_{i,j}) Cp \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta z} Vz = -S_{i,j}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{1}{r_{i,j}} \frac{1}{\Delta r} \left[ r_{i+0.5,j} \frac{Vz_{i+1,j} - Vz_{i,j}}{\Delta r} - r_{i-0.5,j} \frac{Vz_{i,j} - Vz_{i-1,j}}{\Delta r} \right] + \\ \mu \frac{1}{\Delta z} \left[ \frac{Vz_{i,j+1} - Vz_{i,j}}{\Delta z} - \frac{Vz_{i,j} - Vz_{i,j-1}}{\Delta z} \right] + \\ \frac{\rho_{i,j+1} Vz_{i,j+1} - \rho_{i,j} Vz_{i,j}}{\Delta z} Vz_{i,j} = -(\rho(T_{i,j}) - \rho_\infty)g. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Ces équations non-linéaires et ne peuvent être résolues avec des méthodes classiques de type méthode du tir ou inversion de matrice. Si elles sont réécrites sous forme matricielle, il apparaît que la matrice des coefficients est diagonalement dominante. On peut donc résoudre le problème à l'aide d'une méthode de relaxation. L'algorithme utilisé pour résoudre le problème est résumé ci dessous pour une grille 2 dimensions de  $(n \times m)$  nœuds :

1. Création de la matrice des coefficients pour l'équation d'énergie  $A_{hea}$  et pour l'équation de Navier-Stokes  $A_{nav}$  de taille  $(n * m, n * m)$ .
2. Définition de  $\Delta r$  et  $\Delta z$  de manière à ce que  $R = (n - 1)\Delta r$ ,  $H = (m - 1)\Delta z$ .
3. Création des vecteurs  $b_{hea}$  et  $T$  de  $n * m$  éléments qui contiendront respectivement les termes sources pour l'équation d'énergie et la température.
4. Création des vecteurs  $b_{nav}$  et  $V$  de  $n * m$  éléments qui contiendront respectivement la force d'Archimède pour l'équation de Navier-Stokes et la vitesse du gaz selon  $z$ .
5. Mise en place des conditions initiales pour la température  $T$  : 300 K sur tout le domaine de résolution.
6. Mise en place des conditions initiales pour  $V$  : 0 m.s<sup>-1</sup> sur l'ensemble du domaine de résolution.
7. Calcul de des coefficients de la matrice  $A_{hea}$  en utilisant l'équation(7.18).
8. Mise à jour de la température en utilisant la méthode de Gauss-Seidel :

$$T(i) = T(i) + \frac{(b_{hea}(i) - \sum_{j=0}^n T(j)A_{hea}(i, j))}{A_{hea}(i, i)}$$

9. Calcul des coefficient des éléments de la matrice  $A_{Nav}$  en utilisant l'équation (7.19).
10. Calcul de la force d'archimède en utilisant la température à chaque nœud du domaine de résolution.
11. Mise à jour des vitesses en utilisant la méthode de Gauss-Seidel :

$$V(i) = V(i) + \frac{(b_{Nav}(i) - \sum_{j=0}^n T(j)A_{Nav}(i,j))}{A_{Nav}(i,i)}.$$

12. Tant que la somme des résidus est supérieure à  $\epsilon = 1.10^{-2}$ , on boucle sur l'étape (7).

Bien entendu, la résolution de ce problème nécessite des conditions aux limites sur la température et la vitesse. À cause de la symétrie du problème, on peut fixer  $\left. \frac{dT}{dr} \right| = 0$  pour le centre de la colonne. Cela permet en outre de s'affranchir des problèmes de continuité des termes en  $1/r$ . Sur la limite extérieure ainsi que sur le bas du domaine de calcul, on choisit généralement une température fixe. Il n'est pas possible de fixer une température pour le haut du domaine de calcul à cause de la convection. On a donc placé à cet endroit une dérivée de la température nulle selon  $z$ . Cela correspond à une température qui diminue peu avec  $z$ , ce qui est physiquement plausible. Pour les conditions aux limites concernant la vitesse, nous avons fixé en bas et en haut du domaine la condition  $div \vec{v} = 0$  de manière à ce que la conservation de la masse soit vérifiée.

## 7.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté un modèle fluide pour la description d'une colonne positive d'arc électrique. Ce modèle, très largement utilisé, permet d'obtenir de nombreuses données sur le comportement de la décharge. On peut ainsi étudier les processus de dissipation d'énergie, les champs de température, de vitesse, de champ magnétique dans la décharge. Cette description s'avère cependant insuffisante lorsqu'on désire étudier les interactions entre le plasma et les électrodes par exemple.

Deux modèles numériques de colonne d'arc issus de la simplification du modèle fluide ont été étudiés. Ces modèles, bien que basiques, ont fourni des informations utiles pour la validation de deux méthodes expérimentales. Ces résultats seront présentés dans le chapitre 8 de la présente partie ainsi que dans la partie 5 de cette thèse.

# Chapitre 8

## Analyse dimensionnelle

On ne peut pas faire appel à la sportivité d'un homme quand ses piastres sont en jeux. Le fair-play, la galanterie, la dignité humaine ne peuvent faire bon ménage avec l'intérêt. Ce sont d'aimables ponctuations de l'existence, mais sur un chèque il n'y a pas de ponctuation.

---

San Antonio

### 8.1 Introduction

L'analyse dimensionnelle est la quintessence de la modélisation physique, c'est un domaine où l'on étudie les fonctionnelles reliant les différents paramètres physiques d'un problème. Malgré des réussites prodigieuses telles que la mesure de la puissance de la bombe atomique [17, 18], l'étude d'écoulements [19] ou l'utilisation de modèles réduits pour modéliser des problèmes industriels concrets, ce domaine tend à tomber en désuétude au profit de résolutions et d'analyses de problèmes par informatique.

Nous allons voir ici que cette science reste d'une importance capitale, et qu'elle ne peut être substituée par la simulation numérique.

Les informations que l'analyse dimensionnelle et le dimensionnement apportent sont nombreuses. On peut par exemple déterminer les effets prépondérants dans un problème afin d'obtenir un modèle simplifié [20]. On peut trouver des relations semi-empiriques pour des phénomènes relativement compliqués à simuler (abaques de perte de charge, longueur d'un jet de plasma laminaire...). Pour l'optimisation de procédés industriels, son utilisation permet de limiter le nombre d'expériences à effectuer pour trouver les meilleurs paramètres de fonctionnement. Des méthodes raffinées permettent même d'obtenir des ordres de grandeur en utilisant des connaissances qualitatives du problème ou quelques mesures.

On se propose d'étudier ici trois méthodes d'analyse dimensionnelle. La première est basée sur la recherche heuristique des propriétés physiques intervenant dans le problème à traiter. La construction des paramètres des fonctionnelles se fait à l'aide du théorème Pi et à l'instinct ou à l'aide de l'algèbre linéaire. La seconde méthode étudiée est quelquefois appelée analyse

inspectionnelle, elle consiste à s'appuyer sur des modèles connus afin d'obtenir les paramètres des fonctionnelles. Le théorème Pi est là encore utilisé pour obtenir la quantité minimale de nombres adimensionnels à déterminer. Cette approche est intéressante sur le plan qualitatif puisque la signification de chacun des nombres apparaît clairement.

La dernière méthode présentée a été développée au début des années 2000. L'OMS, ou Order Of Magnitude Scaling, allie l'analyse dimensionnelle et l'approche asymptotique, elle consiste à transformer un système d'équations différentielles en système algébrique plus aisé à résoudre. Leur résolution conduit à l'obtention de valeurs caractéristiques qui "capturent" la physique du problème.

Afin d'illustrer les techniques présentées ici, on traitera des mesures macroscopiques issues d'un arc TIG. Pour valider nos dires, les résultats quantitatifs obtenus seront comparés à des données issues d'une simulation numérique.

## 8.2 Théorème Pi

La tâche première d'un physicien est la construction de modèles décrivant le monde et les phénomènes qui l'entourent. Pour ce faire, on utilise un langage qui permet d'obtenir des relations quantitatives : les mathématiques. Si l'on néglige cette écriture, on remarque qu'un modèle n'est pas uniquement un objet mathématique, c'est une entité qui lie différentes quantités physiques. L'étude des relations entre les quantités physiques existe depuis longtemps ; cependant, il a fallu attendre la fin du 19<sup>ème</sup> siècle pour que ce domaine soit correctement formalisé. En 1878, Bertrand tente de mettre en évidence les liens entre quantités en discutant sur l'homogénéité des équations physiques [21]. Plus tard, Rayleigh, Vachy parmi d'autres publieront sur ce domaine de la modélisation. Finalement, c'est Buckingham qui formalisera la recherche de relations entre les quantités physiques par l'intermédiaire du théorème Pi [22].

En physique, d'une manière générale, une équation est une relation qui lie  $n$  quantités physiques différentes. Si plusieurs quantités physiques du même type apparaissent dans la relation, on peut les intégrer dans l'équation en spécifiant la valeur d'une et en faisant apparaître les ratios des autres par celle-ci [22, 23] :

$$f(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, r', r'', \dots) = 0, \quad (8.1)$$

avec  $Q$  les diverses quantités physiques et  $r$  les différents ratios. Si aucune quantité physique n'a été oubliée lors de l'écriture de cette relation fonctionnelle, on dit qu'elle est homogène i.e. que l'ensemble de ces termes possèdent la même unité. Cette relation ne dépend pas du système d'unité choisi puisqu'elle possède la propriété d'être invariante aux redimensionnement d'échelle.

Négligeons pour l'instant les ratios pour ne s'intéresser qu'aux fonctionnelles contenant des quantités physiques. Ces dernières peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\sum C Q_1^{a_1} Q_2^{a_2} Q_3^{a_3} \dots Q_n^{a_n} = 0. \quad (8.2)$$

L'inclusion de fonction telle que des sinus se fait par l'intermédiaire des constantes numériques  $C$ . En effet, il est impossible que ces fonctions aient une signification en terme de grandeur physique. De même, leurs arguments doivent être sans dimension.

Récrivons l'expression (8.2) en prenant soin d'adimensionner les termes de la somme :

$$\sum D Q_1^{b_1} Q_2^{b_2} Q_3^{b_3} \dots Q_n^{b_n} + 1 = 0. \quad (8.3)$$

Les équations étant homogènes, les unités de chacun des termes de la somme satisfont à l'équation :

$$\left[ Q_1^{b_1} Q_2^{b_2} Q_3^{b_3} \dots Q_n^{b_n} \right] = [1] \quad (8.4)$$

Posons  $\Pi$  un nombre adimensionnel vérifiant la relation (8.4). De plus, repérons par  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_i$  l'ensemble des produits adimensionnels indépendants qui peuvent être réalisés avec les  $n$  quantités physiques  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ . À l'aide de ces derniers, l'équation (8.3) peut être écrite sous la forme :

$$\sum E \Pi_1^{y_1} \Pi_2^{y_2} \Pi_3^{y_3} \dots \Pi_i^{y_i} + 1 = 0. \quad (8.5)$$

Aucune contrainte n'est imposée sur la forme de la somme, le nombre de termes qu'elle contient ou bien la valeur de la constante numérique  $E$ . Pour cette raison, cette fonctionnelle peut être écrite de manière plus compacte :

$$\phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_i) = 0. \quad (8.6)$$

Outre sa forme, le nombre de termes adimensionnels que cette fonctionnelle fait intervenir est inconnu, essayons donc de déterminer  $i$ . Notre jeu de quantité physique fait intervenir  $k$  d'unités fondamentales. De ce fait, parmi les  $n$  quantités disponibles, on peut en choisir  $k$  comme unités fondamentales. Les  $(n - k)$  autres seront dérivées de ces dernières. Finalement, il y aura donc  $i = (n - k)$  nombres adimensionnels indépendants. Les résultats obtenus avec l'aide des relations (8.2) et (8.6) ne sont pas généraux car ils proviennent d'un cas particulier de l'équation (8.1) où aucun ratio n'intervient.

L'analyse dimensionnelle ne peut fournir d'informations supplémentaires sur la forme de la fonctionnelle et sur la prise en compte des ratios par celle-ci. Les ratios ne peuvent cependant pas être négligés car ils ne sont pas sans influences sur la fonctionnelle.

La relation (8.6) est correcte lorsque les ratios ont une valeur fixe. On peut généraliser cette relation pour la rendre applicable à tous les ratios  $r, \dots, r'$  en les introduisant comme argument indépendant dans l'expression de  $\phi$ . C'est maintenant une fonction de tous les paramètres physiques de  $n$  types différents :

$$\phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_i, r, r', r'', \dots) = 0. \quad (8.7)$$

Selon le choix des  $k$  unités de référence, il y aura de nombreuses manières de définir les  $\Pi$ . Nous allons nous pencher par la suite sur les différentes techniques déployées pour obtenir ces nombres. Ces procédures sont fondamentales puisque le choix des  $\Pi$  est primordial dans l'interprétation des résultats.

La relation (8.7) signifie que si  $\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_n$  sont constants,  $\Pi_1$  sera constant. On peut donc écrire cette relation sous la forme :

$$\Pi_1 = \psi(\Pi_2, \dots, \Pi_i), \quad (8.8)$$

avec  $\Psi$  une fonctionnelle inconnue.

Pour conclure, le théorème Pi permet juste de mettre en évidence le fait qu'une fonctionnelle entre  $i$  nombres adimensionnels existe et décrit le problème physique. La forme de la fonctionnelle est malheureusement inconnue et des stratégies doivent être mises en place pour la déterminer ou l'approximer. L'art de rechercher ces fonctionnelles et des Pi exploitables a été source de nombreux travaux dont les contributeurs les plus connus sont Bridgman [24], Sedov [23], Taylor et Astarita.

### 8.3 Analyse dimensionnelle heuristique

En fonction de la connaissance physique du problème, il existe plusieurs manières d'obtenir des nombres adimensionnels. La manière la plus naturelle de les obtenir est d'examiner les unités des quantités physiques qui rentrent en jeu. Dans les cas les plus simples, cela se fait de tête, tandis que pour les cas compliqués, on utilisera l'algèbre linéaire pour venir à bout du calcul. Ici, la recherche des quantités physiques et des  $\Pi$  n'est basée que sur l'intuition du physicien, il n'y a donc aucun besoin de modèle pour obtenir des résultats. C'est relativement intéressant dans les cas où rien n'est connu, mais cela présente un désavantage : il est parfois difficile d'interpréter les  $\Pi$  obtenus.

Pour illustrer la recherche heuristique des nombres adimensionnels, nous allons nous pencher sur deux exemples classiques. Le premier correspond à l'étude du pendule simple tandis que le second, plus complexe, s'inspire du travail de Taylor sur le calcul de la puissance de la bombe atomique Trinity. Dans le premier cas, nous verrons l'intérêt de l'analyse dimensionnelle tandis que dans le second, on présentera une méthode générale de calcul de  $\Pi$  : nous verrons que les résultats obtenus sont très généraux et difficiles à interpréter.

#### Problème du pendule simple

Considérons une masse  $m$  accrochée au bout d'un barreau indéformable de masse nulle et de longueur  $l$ . La masse est soumise au champ de pesanteur terrestre  $\vec{g}$ . Finalement, le pendule à un angle initial  $\alpha_0$  par rapport à la verticale.

On cherche à déterminer la période du pendule. Au premier abord, les quantités physiques qui interviendront dans ce problème seront :

- $t_p$  [s] la période du pendule ;
- $g$  [ $m.s^{-2}$ ] l'accélération de la pesanteur ;
- $l$  [m] la longueur du pendule ;
- $\alpha_0$  l'angle initial entre le pendule et la verticale ;
- $m$  [kg] la masse du pendule.

La connaissance du problème ou l'étude des unités des quantités physiques montre que la masse est en trop ici. En effet, en la prenant en compte, il est impossible d'obtenir une équation homogène. L'angle est sans unité car il est défini comme un rapport de longueur.

Finalement, on aura pour ce problème trois quantités physiques faisant intervenir deux unités et un ratio. D'après le théorème Pi, un unique nombre adimensionnel sera nécessaire pour décrire totalement le problème. Son obtention se fait intuitivement :

$$\Pi_1 = t_p \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (8.9)$$

On obtient ainsi :

$$t_p = \sqrt{\frac{l}{g}} \psi(\alpha_0). \quad (8.10)$$

$\psi$  est inconnue, elle doit être déterminée à l'aide d'expériences ou d'un modèle. À titre de comparaison, le résultat exact obtenu avec le principe fondamental de la dynamique nous donne :

$$t_p = \sqrt{\frac{l}{g}} 4.K \left( \sin \frac{\alpha_0}{2} \right), \quad (8.11)$$

avec  $K$  l'intégrale elliptique complète de première espèce :

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \theta}} \quad (8.12)$$

Sans avoir à résoudre d'équation différentielle, le théorème Pi nous apporte des informations relativement complètes sur la forme du résultat. L'obtention des  $\Pi$  est ici trivial puisque un seul nombre est nécessaire pour décrire le problème. Malheureusement, cela n'est jamais aussi facile lorsqu'on traite de cas plus complexes tels que les plasmas où de nombreux phénomènes physiques interviennent [25].

### 8.3.1 Energie libérée dans une explosion atomique

En 1947, des films de l'explosion de la première bombe atomique ont été déclassifiés (fig.8.1). Ces données ont permis à Taylor de déterminer l'énergie libérée lors de l'explosion de Trinity [17]. Pour ce faire, il a considéré que l'explosion consistait en une source ponctuelle d'énergie brusquement libérée. Il en résulte une "boule de feu" cylindrique dont les bords correspondent à une puissante onde du choc. Ces hypothèses ont permis l'obtention des nombres adimensionnels, puis une relation reliant le rayon de la boule de feu à l'énergie libérée.

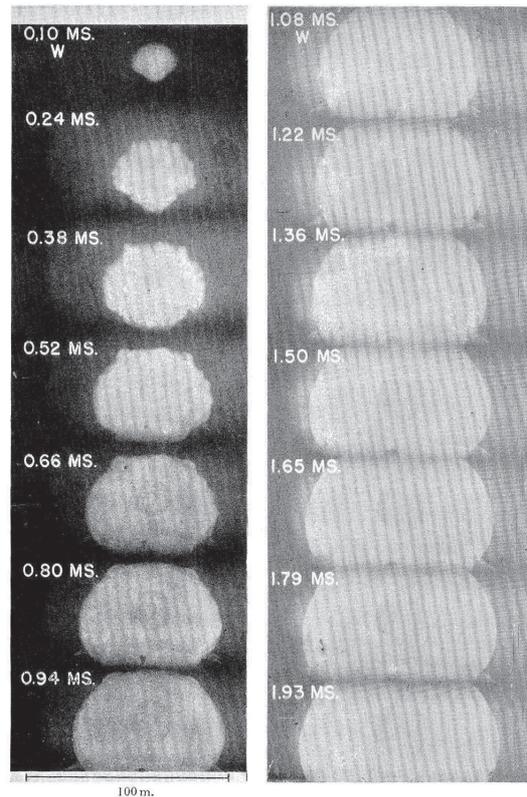


FIGURE 8.1 – Clichés de l'explosion de la bombe atomique Trinity. Issus de [17].

Nous allons reprendre cet exemple ici de manière heuristique afin de voir les avantages et les limites de cette méthode. En utilisant notre sens physique, on sait que les quantités

intervenant dans le problème seront :

- $E$  [ $\text{m}^2.\text{kg}.\text{s}^{-2}$ ] l'énergie libérée par la bombe trinity ;
- $R$  [m] le rayon de la boule de feu à un temps  $t$  ;
- $t$  [s] le temps ;
- $\rho_0$  [ $\text{kg}.\text{m}^{-3}$ ] la masse volumique initiale de l'air ;
- $P_0$  [ $\text{kg} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ] la pression atmosphérique.

Il y a en tout cinq quantités faisant intervenir trois unités. Le nombre de  $Pi$  minimum pour décrire complètement ce problème sera de  $i = 5 - 3 = 2$ .

Si l'on revient sur la définition des  $\Pi$ , on aura :

$$[\Pi] = [E^{a_1} R^{a_2} t^{a_3} \rho_0^{a_4} P_0^{a_5}] = [1] \quad (8.13)$$

Rechercher les nombres adimensionnels revient à rechercher les puissances  $a$  de chacune des quantités physiques avec comme contrainte un résultat sans unité. En ne considérant que les unités, cela est équivalent à la résolution de :

$$\begin{matrix} & E & R & t & \rho & P_0 \\ m & 2 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ kg & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ s & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{matrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = 0, \quad (8.14)$$

avec  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  un vecteur solution non-nul. On recherche en fait le noyau de la matrice des unités. La solution sera de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_4 - a_5 \\ -5a_4 + 3a_5 \\ 2a_4 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

Une infinité de solutions est possible puisque  $a_4$  et  $a_5$  sont à choisir librement avec, comme seule contrainte, l'obtention d'une base de deux vecteurs.

Grâce à son modèle d'explosion cylindrique, Taylor a obtenu les  $\Pi$  suivants qui vérifient la relation (8.15) :

$$\Pi_1 = R\rho_0^{1/5} E^{-1/5} t^{-2/5}, \Pi_2 = \rho_0^{-3/5} E^{-2/5} t^{6/5} P_0. \quad (8.16)$$

Le rayon de l'explosion, directement mesurable sur les films, peut être décrit par :

$$R = \rho_0^{-1/5} E^{1/5} t^{2/5} \psi(\Pi_2). \quad (8.17)$$

Nous entrapercevons ici les limites de l'analyse heuristique, nous aurions pu obtenir une expression similaire à l'aide d'une base du noyau de la matrice des unités. Cependant, la détermination de la fonctionnelle  $\psi$  serait compliquée. Ici, Taylor a mené des expériences avec diverses quantités de TNT afin d'obtenir la forme de  $\psi(\Pi_2)$ . En considérant qu'une bombe atomique possède une énergie extrêmement grande, il a posé  $\Pi_2 = 0$  et a ainsi pu déterminer l'énergie libérée par la bombe.

Pour conclure, l'analyse dimensionnelle heuristique peut être une bonne solution lorsqu'on ne possède pas de modèle pour un problème. Malheureusement, les résultats obtenus

permettent difficilement d'interpréter physiquement les phénomènes à l'œuvre. Comme nous l'avons vu, le choix des nombres adimensionnels peut être compliqué et ce même pour un problème faisant intervenir deux  $\Pi$  uniquement. Il est nécessaire de faire apparaître des nombres adimensionnels connus tel que le Reynolds ou le Nusselt comme vecteurs de base du noyau de la matrice des unités pour espérer obtenir des résultats concluants.

## 8.4 Analyse inspectionnelle :

La recherche de nombres adimensionnels de manière heuristique ne donne pas de bons résultats lorsqu'on doit interpréter les  $\Pi$  obtenus ou lorsqu'il y a beaucoup de quantités physiques intervenant dans le problème. Afin de s'affranchir de ces limitations, l'analyse inspectionnelle permet d'obtenir des nombres adimensionnels à partir des équations du problème. Pour ce faire, trois étapes sont nécessaires. La première consiste à écrire toute les variables dépendantes et indépendantes du problème à l'aide de grandeurs de référence. Cela permet de séparer les unités des opérateurs et fonctions mathématiques dans chacune des équations du problème. Les nombres adimensionnels sont obtenus en divisant les équations par les grandeurs de référence d'un de leur membre. Finalement, le théorème  $\Pi$  donne le nombre minimum de rapports adimensionnels nécessaire pour décrire le problème. On regroupe les nombres adimensionnels redondants de manière à avoir juste le nombre de  $\Pi$  nécessaire.

Pour illustrer cette méthode, intéressons nous tout d'abord à un problème simple tel que la conduction instationnaire de la chaleur en 1 dimension : un flux de chaleur arrive sur la limite gauche d'un échantillon monodimensionnel de longueur  $L$  initialement à température ambiante. Sur la limite droite, il n'y a aucun échange thermique.

On cherche à connaître le temps mis pour que le matériau atteigne une température  $\Delta T$  en  $L$ . Les variables dépendantes et indépendantes du problème peuvent s'écrire :

$$x = L x^*, \quad (8.18)$$

$$\lambda = \lambda_0 \lambda^*, \quad (8.19)$$

$$\rho C p = \rho_0 C p_0 \rho^* C p^*, \quad (8.20)$$

$$T = \Delta T T^*, \quad (8.21)$$

$$t = \Delta t t^*, \quad (8.22)$$

$$\phi = \phi_0 \phi^*. \quad (8.23)$$

Les grandeurs de référence peuvent être constantes ou bien varier comme c'était le cas pour l'obtention des  $\Pi$  dans le problème de la bombe atomique. Cela ne modifie pas la fonctionnelle puisque dans le cas de l'utilisation de grandeurs de référence, les variations de chaque quantité interviendront à l'aide de ratios.

Les équations qui gouvernent le problème sont :

$$\rho C p \frac{dT}{dt} = \lambda \frac{d^2 T}{dx^2}, \quad (8.24)$$

avec  $\rho$ ,  $Cp$  et  $\lambda$  respectivement la masse volumique, la capacité calorifique et la conductivité thermique du matériau considéré. La condition à la limite gauche :

$$\phi = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad (8.25)$$

avec  $\Phi$  la densité de flux de chaleur en  $W.m^{-2}$ . L'introduction des relations (8.18) à (8.23) dans ces équations nous donne :

$$\rho_0 Cp_0 \frac{\Delta T}{\Delta t} \rho^* Cp^* \frac{dT^*}{dt^*} = \lambda_0 \frac{\Delta T}{L^2} \lambda_0 \frac{d^2 T^*}{dx^{*2}} \quad (8.26)$$

À la limite gauche, on a :

$$\phi_0 \phi^* = -\lambda_0 \frac{\Delta T}{L} \lambda_0 \frac{dT^*}{dx^*} \quad (8.27)$$

Finalement, on adimensionne les équations en divisant l'ensemble de leurs termes par un rapport de grandeur de référence.

On en tire ici les nombres adimensionnels suivants :

$$\Pi_1 = \frac{\rho_0 Cp_0 L^2}{\lambda_0 \Delta t}, \quad \Pi_2 = \frac{\phi_0 L}{\lambda_0 T_0} \quad (8.28)$$

Ces nombres adimensionnels sont relativement simples à interpréter. Par exemple,  $\Pi_1$  correspond au rapport du stockage de la chaleur dans le matériau sur la chaleur propagée par conduction. C'est l'inverse du nombre de Fourier bien connu des thermiciens.

Le théorème Pi doit maintenant être appliqué pour repérer les nombres adimensionnels redondant. Ici, le problème de conduction thermique fait intervenir  $n = 7$  paramètres et  $k = 5$  unités fondamentales [24]. Le nombre de Pi nécessaire pour le décrire est de  $i = 7 - 5 = 2$ . Si les  $\Pi$  étaient en nombre supérieur, il aurait fallu faire des combinaison de  $\Pi$  ou en éliminer certains afin d'en obtenir  $i$ . Si le nombre de  $\Pi$  est inférieur à  $i$  cela signifie que des simplifications ont été faites dans le modèle ; une équation reliant les différentes unités fondamentales a été omise et il est nécessaire d'introduire de nouvelles unités. Par exemple, si l'on omet dans un problème la conversion entre l'énergie mécanique et la chaleur, il sera nécessaire d'introduire la chaleur comme unité fondamentale. Ces considérations ont fait l'objet d'un débat scientifique entre Rayleigh et Riabouchinsky [26] dans les années 1915. Finalement, la fonctionnelle qui décrit le problème sera :

$$\frac{\rho_0 Cp_0 L^2}{\lambda_0 \Delta t} = \psi\left(\frac{\phi_0 L}{\lambda_0 \Delta T}, \dots\right). \quad (8.29)$$

#### 8.4.1 Approximation des fonctionnelles

Dans de nombreux cas, la forme de la fonctionnelle est indispensable pour résoudre les problèmes posés. Il est parfois relativement complexe d'obtenir la forme exacte de cette fonction, on préfère donc l'approximer à l'aide d'une loi en puissance de la forme :

$$\Pi_1 = C \Pi_2^a \Pi_3^b \dots \quad (8.30)$$

Les coefficients de la loi en puissance sont obtenus en ajustant la fonction sur des points expérimentaux. Plusieurs contraintes sont liées à l'utilisation de telles approximations ; on doit vérifier tout d'abord que la fonctionnelle approximée est monotone. Si tel n'est pas le cas, c'est

le signe d'un changement de régime pour le problème étudié ; une loi en puissance doit être utilisée pour chaque régime. La seconde contrainte liée à l'utilisation des lois en puissance est la difficulté d'effectuer les régressions. On peut mettre ces lois sous forme linéaire simplement en utilisant des logarithmes, mais dans certains cas, la régression est mal conditionnée et il est nécessaire de faire appel à des méthodes de test de modèles [27].

### 8.4.2 Conclusion

En physique des plasmas, Yask'o a montré que l'analyse inspectionnelle est la méthode qui permet d'obtenir les meilleurs résultats du fait du grand nombre de processus physiques intervenant dans une décharge. Depuis les années 1960, cette méthode a été largement utilisée sur bon nombre de dispositifs de décharge [25]. Cette technique est encore d'actualité puisqu'elle a récemment été mise en œuvre pour caractériser les jets de plasmas laminaires issus de torches à plasma [28].

## 8.5 Order of magnitude scaling

L'ordre of magnitude scaling est une méthode qui permet de transformer les équations différentielles d'un problème physique en équations algébriques plus simples à résoudre. Leur résolution fournit des valeurs caractéristiques qui capturent les phénomènes physiques des domaines considérés. Cette méthode a été développée par P. Mendez au cours de sa thèse de doctorat [29] et de ses nombreuses publications [30, 31]. Elle permet d'automatiser la recherche des phénomènes prépondérants à l'aide de la méthode de la balance dominante [32]. Ainsi, pour les problèmes dont la géométrie est simple et la physique compliquée, il est aisé de trouver les phénomènes importants pour ensuite en déduire des valeurs caractéristiques. Le principe de cette technique est ancien, elle nécessitait un grand sens physique ou des calculs laborieux pour obtenir des résultats probants sur des problèmes complexes.

Nous allons tout d'abord nous pencher sur la résolution d'un système d'équation à l'aide de la méthode de la balance dominante. Cette méthode est la pierre angulaire de l'OMS. L'algorithme de traitement de l'OMS sera présenté puis l'on s'attardera sur les limites de la méthode. Enfin, on tentera de proposer des solutions afin de lever ces limites.

### 8.5.1 Méthode de la balance dominante

La méthode de la balance dominante est une méthode de résolution d'équation approchée, elle permet dans certains cas l'obtention rapide de solutions. Elle consiste tout d'abord à identifier les termes qui semblent petits dans les équations afin de les supprimer. Lorsque le problème simplifié est résolu, on vérifie la consistance de notre solution approchée, c'est à dire que l'on vérifie que les termes négligés sont bien petits.

Afin d'illustrer le fonctionnement de cette méthode, résolvons le système d'équations suivant de manière approchée :

$$\begin{aligned} 30x - 2y &= 13 \\ 4x + 4y &= 6 \end{aligned} \tag{8.31}$$

On remarque sur la première équation que le coefficient devant  $x$  est beaucoup plus grand que le coefficient devant  $y$ . On peut donc omettre le terme en  $y$ , ce qui nous donne  $x \approx$

$13/30 \approx 0.43$ . En remplaçant  $x$  par son expression dans la deuxième équation du système, il vient  $y \approx 1.07$ . Afin de vérifier si l'approximation est consistante, on examine le ratio du second terme sur le terme choisi comme prépondérant :  $2y/30x = 0.16$ . La consistance donne une indication sur le choix des termes prépondérants de l'équation. Si un ratio est supérieur à 1, cela signifie que le terme choisi comme prépondérant ne l'est pas en réalité. Le résultat obtenu est assez proche de la solution exacte du système  $x = 0.5$ ,  $y = 1$ . Comme on peut le constater, cette approximation ne sera bonne que si un terme prépondérant existe dans l'équation. De même, une solution du système consistante n'implique pas forcément que celle-ci soit correcte. On prendra pour preuve des systèmes d'équations mal conditionnés.

## 8.5.2 Order of magnitude scaling

### Principe général

La méthode order of magnitude scaling consiste à transformer un système d'équations différentielles en système d'équations algébriques. Cette transformation se fait grâce à une renormalisation de chaque terme de l'équation de façon à ce que chaque fonction normalisée soit de l'ordre de grandeur de 1 ( $OM(1)$ ). Ainsi, l'importance de chaque terme peut être estimée à l'aide des coefficients de normalisation. Le choix des termes prépondérants se fait à l'aide d'une méthode de la balance dominante modifiée tandis que chaque grandeur inconnue est déterminée par une simple résolution de système algébrique.

Prenons un exemple simple telle que l'équation de conservation de la masse en mécanique des fluides pour illustrer cette méthode. Pour ce problème, on imagine que l'on cherchera à obtenir une estimation de la vitesse selon  $y$  :

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (8.32)$$

$v$ , la vitesse, est une variable dépendante,  $x$  et  $y$  sont des variables indépendantes tandis que  $\rho$  est un paramètre physique.

Sur le domaine d'intérêt, la normalisation des différentes variables se fait de la manière suivante :

$$v_x = v_{xmin} + v_{xc}v_x^*, \quad (8.33)$$

$$v_y = v_{ymmin} + v_{yc}v_y^*. \quad (8.34)$$

$$x = x_{min} + x_c x^*, \quad (8.35)$$

$$y = y_{min} + y_c y^*. \quad (8.36)$$

Les valeurs caractéristiques, repérées par un indice  $c$ , sont choisies sur le domaine de manière à ce que les fonctions adimensionnées soient bornées entre 1 et 0 inclus. Si l'on réécrit les différentes dérivées à l'aide des fonctions normalisées, on obtient :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{dv_x}{dv_x^*} \frac{dv_x^*}{dx^*} \frac{dx^*}{\partial x} = \frac{v_{xc}}{x_c} \frac{\partial v_x^*}{x^*}. \quad (8.37)$$

$$\rho \frac{v_{xc}}{x_c} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho \frac{v_{yc}}{y_c} \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (8.38)$$

Le signe  $\hat{\phantom{x}}$  permet de repérer les grandeurs inconnues. Supposons pour l'instant que les différentes dérivées normalisées sont de l'ordre de grandeur de 1. Le choix des termes prépondérants de l'équation peut se faire à l'aide de la méthode de la balance dominante. Ici, seuls deux termes interviennent dans l'équation, il n'y a donc pas lieu de l'utiliser. Dans les autres cas, on va choisir deux termes supposés prépondérants qui vont servir à l'adimensionnement de l'équation et négliger tous les autres. Cela permettra d'obtenir des estimations d'inconnues que l'on utilisera ensuite pour vérifier la consistance de notre approximation.

Ici, comme il n'y a que deux termes et une inconnue, le terme en  $y$  est choisi pour adimensionner l'équation :

$$\frac{v_{xc}y_c}{x_c\hat{v}_{yc}} \frac{\partial v_{x^*}}{\partial x^*} + 1 \frac{\partial v_{y^*}}{\partial y^*} = 0 \quad (8.39)$$

Les dérivées normalisées sont supposées approximativement égales, on en tire donc que :

$$\frac{v_{xc}y_c}{x_c\hat{v}_{yc}} = 1 \quad (8.40)$$

$$\hat{v}_{yc} = \frac{v_{xc}y_c}{x_c} \quad (8.41)$$

On obtient ainsi une estimation de la valeur caractéristique inconnue. Il est intéressant de remarquer que l'estimation est une fonction en puissance des paramètres physiques et des valeurs caractéristiques connues du problème.

### Généralisation et algorithme

L'intérêt de cette méthode est qu'elle peut être appliquée pour des problèmes impliquant de nombreux phénomènes physiques i.e. de nombreuses équations. Dans ce cas, la recherche des termes prépondérants ne peut pas être menée manuellement et une résolution informatique doit être envisagée. Nous allons pour cela, utiliser le fait que les estimations obtenues sont des lois en puissance.

Considérons un problème hypothétique tel qu'un écoulement de fluide entre deux plaques. Les équations décrivant le problème seront :

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \quad (8.42)$$

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (8.43)$$

$$\rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right); \quad (8.44)$$

Avec  $\rho$  la masse volumique du fluide considéré,  $v_x$  et  $v_y$  les composantes de la vitesse du fluide. Les inconnues seront les vitesses caractéristiques en  $x$  et en  $y$ .

La première étape consiste à normaliser l'ensemble des équations. Supposons toujours que les différentes dérivées normalisées sont de l'ordre de grandeur de 1, ce qui n'est pas forcément le cas, comme nous le verrons plus tard. Pour l'équation (8.42), on aura :

$$C1 = \rho \frac{v_{xc}}{x_c}; \quad C2 = \rho \frac{v_{yc}}{y_c}; \quad (8.45)$$

Pour les équations (8.43) et (8.44) on a :

$$C3 = \rho \frac{v_{xc}^2}{x_c}; C4 = \rho \frac{v_{xc}v_{yc}}{y_c}; C5 = \frac{P_c}{x_c}; C6 = \mu \frac{v_{xc}}{x_c^2}; C7 = \mu \frac{v_{xc}}{y_c^2}; \quad (8.46)$$

Afin de tirer avantage des expressions en puissance des estimations, on définit la matrice des coefficients [C] dont les lignes représenteront le logarithme de chaque coefficient et les colonnes les paramètres et estimations du problème.

$$\begin{array}{l} \ln C_1 \\ \ln C_2 \\ \ln C_3 \\ \ln C_4 \\ \ln C_5 \\ \ln C_6 \\ \ln C_7 \\ \ln C_8 \\ \ln C_9 \\ \ln C_{10} \\ \ln C_{11} \\ \ln C_{12} \end{array} \left( \begin{array}{cccc|cc} \rho & \mu & x_c & y_c & P_c & \hat{v}_{xc} & \hat{v}_{yc} \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (8.47)$$

Pour chaque équation, un coefficient va être choisi comme étant prépondérant, c'est là que débute la méthode de la balance dominante modifiée. Il va servir à adimensionner l'ensemble des coefficients de l'équation restants. Au niveau de la matrice des coefficients, ces calculs reviennent à des soustractions de la ligne du coefficient choisi. La matrice contenant les nombres adimensionnels est notée [N]. Voici un exemple d'une matrice [N] produite en adimensionnant toutes les équations par leur premier terme :

$$\begin{array}{l} \ln N_1 \\ \ln N_2 \\ \ln N_3 \\ \ln N_4 \\ \ln N_5 \\ \ln N_6 \\ \ln N_7 \\ \ln N_8 \\ \ln N_9 \\ \ln N_{10} \\ \ln N_{11} \\ \ln N_{12} \end{array} \left( \begin{array}{cccc|cc} \rho & \mu & x_c & y_c & P_c & \hat{v}_x & \hat{v}_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \quad (8.48)$$

. Seul deux termes vont être considérés dans chacune des équations. Le terme servant à adimensionner est implicitement pris en compte du fait de l'adimensionnement. On sélectionne autant de lignes dans [N] que d'inconnues. On prendra soin de ne se limiter qu'à une ligne par équation et de ne pas sélectionner une ligne de zéro.

Les lignes sélectionnées permettent d'obtenir les estimations des inconnues.

$$\begin{array}{c} \ln N_2 \\ \ln N_4 \end{array} \left( \begin{array}{ccc|cc} & [Np] & & & [Ns] \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \left| \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array} \right. \right) \quad (8.49)$$

$$[E] = -[Ns]^{-1} \cdot [Np] \quad (8.50)$$

Le calcul de  $[E]$ , la matrice des estimations, est une généralisation de la relation (8.41) pour les cas à plusieurs équations. Les lignes de  $[E]$  correspondent au logarithme des estimations tandis que les colonnes correspondent aux différents paramètres du problème. Pour que le système puisse être résolu, il faut que la matrice  $[Ns]$  ne soit pas singulière i.e. que son déterminant soit non nul. Si  $[Ns]$  est singulière, les lignes choisies pour le calcul des estimations sont redondantes, et de nouvelles lignes doivent être sélectionnées.

Lorsque les estimations des inconnues ont été obtenues à l'aide de  $[E]$ , on vérifie la consistance de nos approximations en s'assurant qu'aucun nombre adimensionnel  $N_i$  négligé soit supérieur ou égal à 1. Si ce n'est pas le cas, cela signifie que les termes choisis ne sont pas prépondérants.

On testera tous les adimensionnements et toutes les combinaisons de  $N_i$  possibles afin d'être sûr d'obtenir une estimation correcte. En effet, nous avons mentionné précédemment que la consistance d'une approximation n'était pas suffisante pour prouver que la solution obtenue est correcte. Il est donc nécessaire, lorsque tout les jeux d'estimations possibles ont été trouvés, d'utiliser son sens physique afin d'écartier les résultats qui paraissent farfelus.

### Utilisation des conditions aux limites

Jusqu'à maintenant, nous n'avons pas discuté des conditions aux limites et de leur utilisation. Elles interviennent dans la méthode lors de la normalisation des équations du problème. Elles permettent de déterminer les différentes valeurs caractéristiques et/ou leur emplacement. Par exemple, si l'on reprend le problème de l'écoulement entre deux plaques, on sait grâce aux conditions aux limites que  $vx$  et  $vy$  sont nuls au niveau des parois. Au centre de l'écoulement, la dérivée de  $vx$  est nulle, on en déduit donc que la valeur maximum de  $vx$  se situera au milieu de l'écoulement.

### Normalisation des dérivées

Nous avons supposé jusqu'à présent que les valeurs caractéristiques des dérivées étaient toujours de l'ordre de grandeur de 1 ; ce n'est généralement pas le cas. Pour s'en assurer, nous allons considérer une grandeur qui varie en  $x^3$  pour  $x$  compris entre 0 et 3 :

$$x = x_{min} + x_c x^* \quad x \in [0, 1] \quad (8.51)$$

$$U(x) = Ax^3 \quad x \in [0, 3] \quad (8.52)$$

$$U(x) = U_{min} + U_c u^* \quad U_{min} = 0, \quad U_c = A \cdot 3^3 \quad (8.53)$$

Calculons la dérivée normalisée de cette expression :

$$\frac{dU}{dx} = \frac{U_c}{x_c} \frac{du^*}{dx^*}; \quad (8.54)$$

$$\frac{du^*}{dx^*} = 3x^{*2}; \quad (8.55)$$

Pour  $x^* = 1$ , la valeur de la dérivée normalisée sera de 3. On en déduit donc que :  $\frac{du^*}{dx^*} \neq OM(1)$ . Si l'on se place dans les cas asymptotiques, le fait d'avoir une dérivée qui n'est pas de l'ordre de grandeur de 1 aura pour effet d'augmenter considérablement l'erreur. Il est donc recommandé de calculer analytiquement les dérivées normalisées de manière à corriger les coefficients de normalisation. Ici, il faudrait lui ajouter la constante 1/3 afin d'obtenir des résultats corrects.

L'intérêt de la méthode OMS est de s'affranchir de la recherche de fonctionnelles pour se focaliser sur les valeurs caractéristiques; or, nous venons de voir que l'obtention de valeurs caractéristiques correctes étaient lié à la connaissance des fonctionnelles. Mendez propose de s'affranchir de ce problème en examinant la forme des solutions de problèmes similaires. A cette occasion, il a répertorié les solutions types en coordonnées cartésiennes de nombreux problèmes physiques unidimensionnels [31].

### 8.5.3 Calcul des intégrales

La normalisation des intégrales est soumise aux mêmes difficultés que le calcul des dérivées. Il est nécessaire de connaître la forme des fonctionnelles afin d'obtenir des intégrales correctement normalisées. Là encore, Mendez propose des solutions types unidimensionnelles afin de corriger les coefficients de normalisation.

### 8.5.4 Limites de la méthode et améliorations

La méthode OMS présente de nombreuses limites. Comme nous l'avons vu, il est nécessaire de connaître les fonctionnelles pour normaliser correctement les dérivées et les intégrales. Les fonctions que Mendez propose fonctionnent uniquement pour des problèmes simples en coordonnées cartésiennes. De plus, certaines d'entre elles comme les polynômes sont fournies avec des coefficients de normalisation erronés. Afin de s'affranchir de ces limites, on peut utiliser la symétrie du problème ainsi que les conditions aux limites afin de fabriquer une fonction sensée représenter l'évolution de notre grandeur sur le domaine d'étude. La fonction construite doit être la plus simple possible. Dans les cas où rien n'est connu, on utilisera des relations linéaires en ayant pris soin au préalable de vérifier que ce choix n'engendre pas de problèmes au niveau des équations différentielles (terme de dérivée seconde nul). Par exemple, le choix de vitesses variant de manière linéaire dans un problème de mécanique des fluides entraînera de facto l'omission de termes représentant les contraintes visqueuses.

Une autre limite importante de la méthode concerne le calcul des intégrales en coordonnées cylindriques. Le résultat de l'intégrale dépend de ces bornes et non de la taille du domaine d'intégration. Prenons par exemple l'intégrale d'une fonction affine décroissante  $f(r) = b - ar$  entre  $r_{min}$  et  $r_{max}$ . De manière exacte, on a :

$$I = 2\pi \int_{r_{min}}^{r_{max}} (b - ar)r dr = - \left[ f_{max} + \frac{f_c r_{min}}{r_c} \frac{1}{2} \right] r_{min} + \left[ f_{min} + \frac{f_c r_{max}}{r_c} \frac{1}{2} \right] r_{max}. \quad (8.56)$$

Le coefficient de normalisation pose de gros problèmes car il se présente sous la forme d'une somme. Il nous est impossible d'intégrer correctement ces facteurs dans la méthode, surtout si une des longueurs caractéristiques est inconnue. Si  $f_{min}$  est nul, on obtient :

$$I = - \left[ f_c + \frac{f_c r_{min}}{r_c} \right] r_{min} + \left[ \frac{f_c r_{max}}{r_c} \right] r_{max}; \quad (8.57)$$

$$I = f_c \left[ \frac{r_{max}^2}{2r_c} - r_{min} - \frac{r_{min}^2}{2r_c} \right]; \quad (8.58)$$

La forme de ce résultat sera intéressant seulement si les longueurs caractéristiques sont connues. Si elles ne le sont pas, leur obtention à partir de l'expression de l'intégrale sera impossible. Plus généralement, du fait de la balance dominante, la méthode ne permet pas d'intégrer dans les équations des relations algébriques telles que des additions. Une autre limitation de cette méthode pour la symétrie cylindrique ou sphérique sont les termes qui dépendent d'une puissance négative de  $r$ . Il sera mal aisé de normaliser ces termes puisqu'un simple remplacement de  $r$  par son expression en fonction de  $r^*$  donne une somme au dénominateur. Si le numérateur de ces termes diminue avec  $r$ , leur maximum se trouve là où  $r$  est minimum. La normalisation donnera donc :

$$\frac{a(r)}{r} = \frac{a_c}{r_{min}} \frac{a^*}{r^*}. \quad (8.59)$$

Si le numérateur augmente avec  $r$ , la normalisation est plus difficile à trouver.

### 8.5.5 Conclusion

La méthode OMS a été appliquée avec succès sur divers problèmes de mécanique des fluides, de mécanique, mais aussi de décharges d'arcs. Malgré ces limitations, diverses publications ont montré qu'elle donnait accès à des informations plus complètes qu'une simple analyse inspectionnelle (voir le problème du pendule simple pour de petites et de grandes oscillations [29]). Au cours de cette thèse, nous avons tenté d'appliquer cette méthode pour expliquer la transition entre le régime laminaire et turbulent d'une torche à plasma, le but étant de caractériser une couche de gaz froid entourant le plasma à l'intérieur du corps de la torche. Du fait de la géométrie et de la complexité du problème, ces travaux se sont révélés infructueux. Ils ont tout de même conduit au développement d'un logiciel à même d'effectuer automatiquement l'ensemble des procédures qui constituent l'OMS. Les sources du programme, ainsi qu'un script de démonstration traitant un problème de couche limite sont disponibles en annexe.

## 8.6 Application de l'analyse inspectionnelle à un arc TIG :

L'analyse inspectionnelle est particulièrement bien adaptée aux plasmas d'arcs puisque ces derniers font intervenir de la mécanique des fluides, des transferts thermiques et de l'électromagnétisme. Au cours des années 1950 et 1960, de nombreux cas de plasmas d'arc ont été étudiés à l'aide de l'analyse dimensionnelle. C'est uniquement avec l'approche inspectionnelle que des résultats intéressants ont été obtenus; Yask'o [25] a par exemple traité avec succès des configurations variées telles que les plasmatrans, les arcs pointe-pointe ou encore les arcs Maecker. Plus récemment, des articles sur l'étude des jets de plasma laminaires à l'aide de cette méthode sont parus [33].

J'ai eu l'occasion, au cours de cette thèse, d'étudier un arc TIG. Des mesures électriques moyennes et instantanées ont été prises sur un cet arc alimenté par deux générateurs différents. Très peu d'articles traitent des caractéristiques courant/tension de ce dispositif, On fait néanmoins mention d'une forme de caractéristique de type [34] :

$$U = A + BI^2 \quad (8.60)$$

avec  $A = 10 \text{ V}$  et  $B = 0.04 \text{ V.A}^{-2}$  pour un TIG avec une chute de potentiel inférieure à 24 V. Peu de détails supplémentaires sont fournis. Nous avons choisi d'étudier ces caractéristiques courant/tension à l'aide de l'analyse dimensionnelle. Dans un premier temps, le dispositif expérimental est présenté et des caractéristiques typiques sont fournies. L'analyse inspectionnelle permettra de déterminer les nombres adimensionnels décrivant le problème, ils seront utilisés pour expliquer la forme de la caractéristique. Finalement, on essaiera d'utiliser ces résultats pour obtenir un point de fonctionnement optimal des TIG pour la soudure.

### 8.6.1 Dispositif expérimental

Les mesures de caractéristiques courant/tension ont été menées sur deux montages différant uniquement dans le type d'alimentation électrique utilisé. La première configuration est constituée d'une alimentation Nertabloc TH 260 de la marque SAF filtrée à l'aide d'une cellule LC ( inductance de 27 mH et capacitance de 250  $\mu\text{F}$ ), d'une torche TIG et d'une anode en cuivre refroidie à l'eau (configuration A). Une torche TIG est présentée plus en détail dans la partie 1 de cette présente thèse ; c'est un dispositif utilisé dans la soudure autogène qui est constitué d'une cathode en tungstène entouré d'une buse en alumine. Le gaz plasmagène, ici de l'argon, est injecté au niveau de la cathode puis canalisé par la buse. Ainsi, le plasma est gainé par le gaz inerte, ce qui limite l'inclusion d'oxydes dans la soudure. Dans la seconde configuration (configuration B), le bloc d'alimentation de l'arc est remplacé par un générateur SAF Admiral 350 DC. Des mesures de tensions, de courants instantanées et moyennes ont été obtenues sur ces deux configuration à l'aide des montages présentés au chapitre 6.

### 8.6.2 Résultats expérimentaux

**Configuration (A)** La tension instantanée enregistrée aux bornes de l'arc est présentée sur la figure 8.3. Comme on peut le constater, l'alimentation est relativement stable, seules des oscillations à une fréquence de 100 Hz et d'une amplitude de moins de 10 % de la tension totale sont visibles. La chute de potentiel aux électrodes a été mesurée à l'aide du montage présenté en chapitre 6, il est de  $(10.2 \pm 0.3) \text{ V}$ . Un exemple typique de caractéristique courant tension obtenue avec cette configuration est disponible sur la figure 8.2. Sa forme est relativement singulière puisqu'elle présente un minimum  $U_c$ . Pour les faibles tensions, la différence de potentiel aux bornes de l'arc diminue lorsque l'intensité du courant augmente et ce jusqu'à une valeur critique  $I_c$  où  $U_c$  est atteint. Pour des intensités supérieures à  $I_c$ , la tension aux bornes de l'arc augmente de nouveau avec  $I$ .

Plusieurs hypothèses peuvent expliquer la forme de cette caractéristique et son minimum. Cela peut être par exemple dû au champ magnétique qui contracte le plasma et empêche l'augmentation de son rayon lorsque le courant est important. On peut aussi imaginer que le rayon de l'arc est limité par le rayon de la buse en alumine et par le flux de gaz plasmagène froid.

**Configuration (B)** La tension instantanée aux bornes de l'arc est présentée sur la figure 8.4. On remarque que, contrairement à ce qui est indiqué par le constructeur, l'alimentation n'est pas continue : la tension varie rapidement et des inversions de polarité sont visibles. Les oscillations de la tension aux bornes de l'arc ont une fréquence de l'ordre de 125 kHz et une

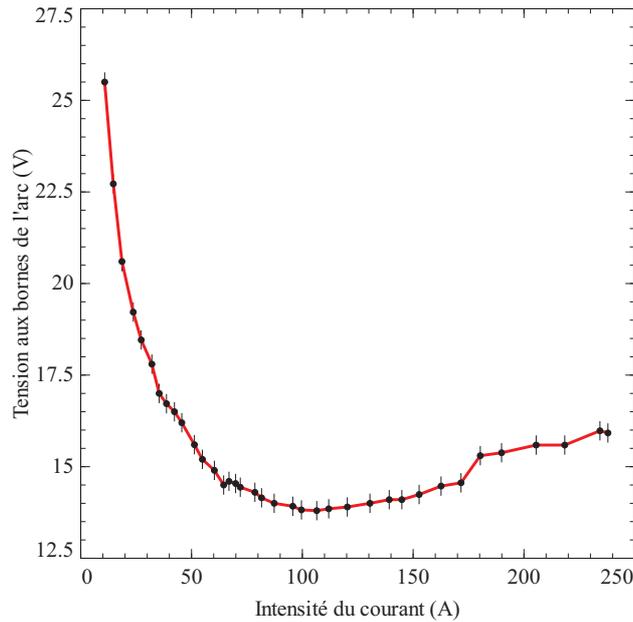


FIGURE 8.2 – Caractéristique courant/tension typique obtenue à l'aide de la configuration (A). Le débit de gaz plasmagène était fixé à  $3\text{sL}\cdot\text{min}^{-1}$  et la distance inter-électrodes à 6 mm.

amplitude moyenne d'environ 20 V. Une caractéristique courant tension typique est présentée sur la figure 8.5. Sa forme est similaire à celle de la figure 8.2, cependant, le minimum est déplacé vers les faibles valeurs d'intensité de courant et la pente de la courbe est plus forte après  $I_c$ . Cela s'explique simplement à l'aide des courbes de tension instantanée : durant la mesure, ce sont uniquement les valeurs moyennes de tension et d'intensité qui ont été enregistrées. En conséquence, aucune information n'est donnée sur la partie oscillante des grandeurs mesurées. On sait que le chauffage par effet Joule correspond à un terme de la forme  $\frac{U^2}{R}$  avec R la résistance du plasma. Si l'on suppose que la tension aux bornes de l'arc est de la forme :

$$U = U_0 + U_1 \cos(2\pi ft); \quad (8.61)$$

La puissance dissipée dans l'arc sera  $(U_0^2 + U_1^2/2)/R$  et non  $U_0^2/R$ . Ainsi, pour les mêmes intensités de courant et tensions aux bornes de l'arc moyennes mesurées, l'alimentation de la configuration (B) peut chauffer le plasma de manière plus efficace qu'un générateur à courant continu.

Lors de la mesure de certaines caractéristiques, le rayon de la colonne TIG au niveau de l'anode a été enregistré. Un exemple typique est présenté sur la figure 8.6 ; il permet de vérifier que le rayon de la colonne se sature pour les fortes valeurs de l'intensité du courant.

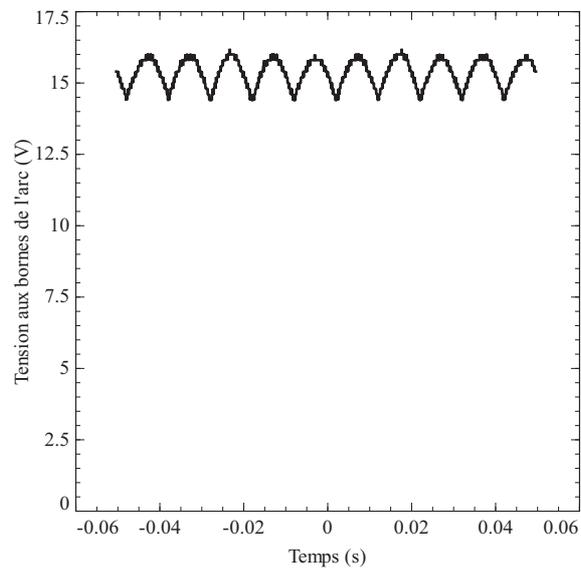


FIGURE 8.3 – Tension instantanée typique mesurée aux bornes du TIG avec l'aide de la configuration (A).

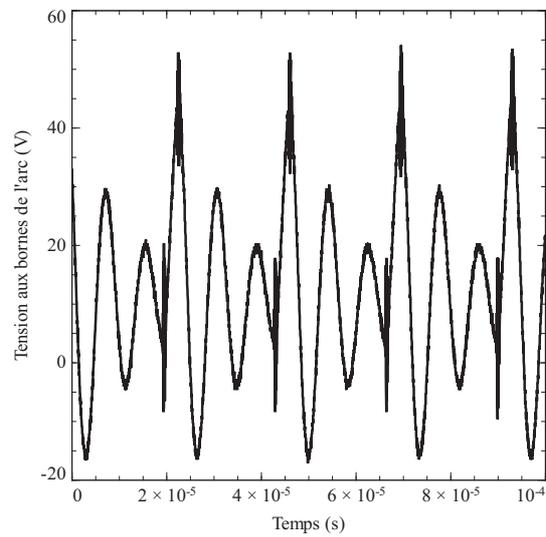


FIGURE 8.4 – Tension instantanée typique mesurée aux bornes du TIG avec la configuration expérimentale (B).

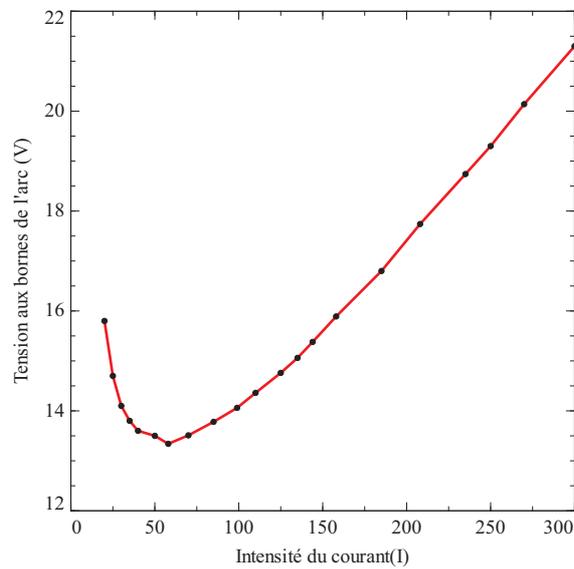


FIGURE 8.5 – Caractéristique courant/tension typique obtenue à l'aide de la configuration (B). Le débit de gaz était fixé à  $5 \text{ sL}\cdot\text{min}^{-1}$  et la distance inter-électrode à 6mm.

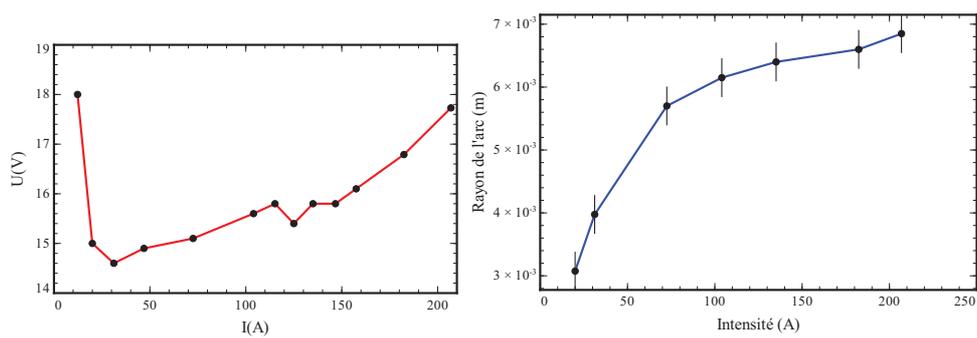


FIGURE 8.6 – À gauche : caractéristique courant tension obtenue sur un arc TIG brûlant dans l'argon avec un débit de gaz plasmagène de  $2.5 \text{ sL}\cdot\text{min}^{-1}$  et une distance inter-électrodes de 6 mm. À droite : rayon de l'arc mesuré au niveau de l'anode en fonction de l'intensité du courant.

### 8.6.3 Analyse dimensionnelle

De nombreux paramètres physiques interviennent dans la description du TIG, il devient compliqué d'obtenir des résultats en recherchant le noyau de la matrice des unités. On préfère donc utiliser l'analyse inspectionnelle. Pour mettre en œuvre cette méthode, écrivons les équations qui décrivent le plasma :

– **Conservation de la quantité de mouvement**

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}P + \mu\Delta\vec{v} + \vec{j} \times \vec{B} \quad (8.62)$$

– **Conservation de l'énergie**

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(h + \frac{1}{2}v^2) = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \cdot \vec{\nabla}T) + \vec{j} \cdot \vec{E} - Q_{rad} \quad (8.63)$$

– **Équations de Maxwell**

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \xi\vec{j} \quad (8.64)$$

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \quad (8.65)$$

Le jeu d'équation n'est pas complet puisqu'il manque la définition des conditions aux limites :

– **Définition de la chute de potentiel :**

$$U = - \int_D \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (8.66)$$

– **Définition de l'intensité du courant :**

$$I = \iint_{section} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (8.67)$$

– **Définition du débit massique :**

$$G = \iint_{section} \rho\vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (8.68)$$

Pour mettre ces équations sous forme adimensionnelle, toutes les variables dépendantes et indépendantes sont écrites en faisant apparaître des grandeurs de référence.

Par exemple,  $\rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}$ .

$$\frac{\rho_0 v_0^2}{D} \rho^* (\vec{v}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{v}^* = -\frac{P_0}{D} \vec{\nabla}^* P^* + \frac{\mu_0 v_0}{D^2} \mu^* \Delta^* \vec{v}^* + j_0 B_0 \vec{j}^* \times \vec{B}^* \quad (8.69)$$

$$\frac{\rho_0 v_0}{D} \rho^* (\vec{v}^* \cdot \vec{\nabla}^*) (h_0 h^* + v_0^2 \frac{1}{2} v^{*2}) - \frac{\lambda_0 T_0}{D^2} \vec{\nabla}^* \cdot (\lambda^* \cdot \vec{\nabla}^* T^*) + Q_0 Q_{rad}^* = j_0 E_0 \vec{j}^* \cdot \vec{E}^* \quad (8.70)$$

$$j_0 \vec{j}^* = \sigma_0 E_0 \sigma^* \vec{E}^* \quad (8.71)$$

$$\frac{B_0}{D} \vec{\nabla}^* \times \vec{B}^* = \xi j_0 \vec{j}^* \quad (8.72)$$

$$U_0 U^* = -E_0 D \int \vec{E}^* \cdot d\vec{l}^* \quad (8.73)$$

$$I_0 I^* = j_0 D^2 \iint \vec{j}^* \cdot d\vec{S}^* \quad (8.74)$$

$$G_0 G^* = \rho_0 v_0 \iint \rho^* v^* \cdot d\vec{S}^* \quad (8.75)$$

Les nombres adimensionnels  $\Pi$  sont obtenus en divisant les termes de l'équation 8.69 par  $\rho_0 v_0^2/D$ , ceux de l'équation 8.70 par  $j_0 E_0$  :

$$\begin{aligned} \Pi_P &= \frac{P_0}{\rho_0 v_0^2}, & \Pi_{rey} &= \frac{\mu_0}{D \rho_0 v_0}, & \Pi_{fem} &= \frac{j_0 B_0 D}{\rho_0 v_0^2}, \\ \Pi_h &= \frac{\rho_0 v_0 h_0}{D j_0 E_0}, & \Pi_{cond} &= \frac{\lambda_0 T_0}{D^2 j_0 E_0}, & \Pi_{ray} &= \frac{Q_0}{j_0 E_0}, & \Pi_{acc} &= \frac{\rho_0 v_0^3}{D j_0 E_0}, \\ \Pi_U &= \frac{E_0 D}{U}, & \Pi_I &= \frac{j_0 D^2}{I}, & \Pi_G &= \frac{\rho_0 v_0 D^2}{G}, & \Pi_{ohm} &= \frac{\sigma_0 E_0}{j_0}, & \Pi_m &= \frac{\xi j_0 D}{B_0}. \end{aligned}$$

Treize paramètres faisant intervenir cinq unités fondamentales rentrent en jeu dans la description de ce problème ( $P_0, \rho_0, v_0, \mu_0, D, j_0, B_0, h_0, E_0, \lambda_0, T_0, Q_0, \sigma_0$ ). Grâce au théorème Pi, on sait que seulement  $13 - 5 = 8$  nombres adimensionnels sont nécessaires pour décrire complètement le problème. On pourra donc utiliser les  $\Pi$  en excédent pour transformer les nombres adimensionnels qui sont non-exploitable sous leur forme actuelle. En effet, des paramètres tels que la vitesse ou la densité de courants varient très fortement dans l'arc et sont difficiles à mesurer. On va donc essayer de supprimer ces quantités au profit de quantités observables telles que l'intensité ou le débit massique :

$$\begin{aligned} \Pi'_U &= \Pi_U \Pi_{ohm}^{-1} \Pi_I^{-1} = \frac{I \cdot D}{U \sigma_0 D^2}, \\ \Pi'_{ray} &= \Pi_{ray} \Pi_{ohm} \Pi_I^2 = \frac{Q_0 \sigma_0 D^4}{I^2}, \\ \Pi'_{cond} &= \Pi_{cond} \Pi_{ohm} \Pi_I^2 = \frac{\lambda_0 T_0 \sigma_0 D^2}{I^2}, \\ \Pi'_h &= \Pi_h \Pi_G^{-1} \Pi_{ohm} \Pi_I^2 = \frac{h_0 G \sigma_0 D}{I^2}, \\ \Pi'_{acc} &= \Pi_{acc} \Pi_G^{-3} \Pi_{ohm} \Pi_I^2 = \frac{G^3 \sigma_0}{D^3 \rho_0^2 I^2}, \\ \Pi'_{fem} &= \Pi_{fem} \Pi_m \Pi_I^{-2} \Pi_G^2 = \frac{D^2 \xi I^2 \rho_0}{G^2}, \\ \Pi'_{rey} &= \Pi_{rey} \Pi_G = \frac{\mu_0 D}{G}, \end{aligned}$$

$$\Pi'_P = \Pi_P \Pi_G^2 = \frac{P_0 \rho_0 D^4}{G^2}.$$

La fonctionnelle décrivant le problème sera de la forme :

$$f(\Pi'_U, \Pi'_{ray}, \Pi'_{cond}, \Pi'_h, \Pi'_{acc}, \Pi'_{fem}, \Pi'_{rey}, \Pi'_P, \dots) = 0, \quad (8.76)$$

$$\Pi'_U = g(\Pi'_{ray}, \Pi'_{cond}, \Pi'_h, \Pi'_{acc}, \Pi'_{fem}, \Pi'_{rey}, \Pi'_P, \dots). \quad (8.77)$$

Ce résultat ne nous apprend pour l'instant rien sur la physique du problème. Tout d'abord, les valeurs de référence incluses dans les  $\Pi$  n'ont pas été déterminées; ensuite la forme de la fonctionnelle est inconnue et ne permet en l'état aucune déduction. À l'aide des résultats expérimentaux, nous allons exploiter les résultats théorique obtenus ici.

### 8.6.4 Exploitation des résultats expérimentaux

#### Configuration expérimentale (A)

Des nombreuses caractéristiques (U,I) ont été prises en faisant varier la distance inter-électrodes et le débit de gaz plasmagène. Il est relativement compliqué d'obtenir la forme exacte de la fonctionnelle reliant les nombres adimensionnels, de ce fait, on l'approxime généralement par une loi en puissance. Ces fonctions sont très pratiques et largement utilisées en analyse dimensionnelle, mais un choix doit être fait entre leur domaine de validité et l'erreur. Dans notre cas, une loi en puissance ne peut pas décrire l'ensemble d'une caractéristique puisque ces dernières ne sont pas monotones. Nous avons donc choisi de diviser les caractéristiques en deux parties monotones de manière à y ajuster des lois en puissance. Le point de séparation des deux branches choisi est  $I_c$ .

Concernant les valeurs de référence, elles sont difficiles à choisir lorsque l'on s'intéresse à des arcs brûlant dans différents gaz plasmagènes car leurs propriétés physiques induiront des phénomènes différents dans l'arc. Ici, on ne travaille qu'avec de l'argon comme gaz plasmagène, le choix des valeurs de références importe peu car la fonction généralisée (8.77) est toujours vérifiée. La température moyenne de la colonne est de l'ordre de 10000 K, nous avons donc choisi comme valeurs de référence les propriétés d'un plasma d'argon à 11500 K :  $Q_0=2.29 \cdot 10^9 \text{ W.m}^{-3}$ ,  $\lambda_0=1.24 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $\sigma_0=4.8 \cdot 10^3 \text{ S.m}^{-1}$ ,  $\mu_0=0.00026 \text{ Pa.s}$ ,  $h_0=5 \cdot 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$ .

L'ajustement des lois en puissance sur les résultats expérimentaux fait apparaître une difficulté supplémentaire. Le problème est mal conditionné et n'est pas soluble avec des méthodes de régression classiques telles que les moindres carrés [35, 27]. On peut aisément se rendre compte des différentes corrélations graphiquement mais malheureusement, cela ne constitue pas une méthode scientifique pour déterminer l'importance des  $\Pi$ . Afin de déterminer si un nombre adimensionnel est significatif pour expliquer les caractéristiques, on a utilisé une méthode de régression "forward-stepwise". Pour inclure un  $\Pi$  dans le modèle, le test de student effectué au cours de cette procédure a un seuil de signification  $\alpha$  de 0.05. Cette méthode de régression, très utilisée en statistiques, permet de tester chaque variable du modèle pour voir si elles ont ou non une influence sur  $\Pi'_U$ .

Comme on utilise une loi en puissance, l'ensemble du travail de régression a été mené avec le logarithme des nombres adimensionnels de manière à ramener le problème à de simples régressions linéaires.

On obtient finalement pour les fortes intensités de courant ( $I > I_c$ ) :

$$\frac{I.D}{U\sigma_0 D^2} = 1.34 \left( \frac{Q_0\sigma_0 D^4}{I^2} \right)^{0.32} \left( \frac{\lambda_0 T_0 \sigma_0 D^2}{I^2} \right)^{0.1} \quad (8.78)$$

Pour les faibles intensités de courant, on aura :

$$\frac{I.D}{U\sigma_0 D^2} = 2.61 \left( \frac{\lambda_0 T_0 \sigma_0 D^2}{I^2} \right)^{0.62} \quad (8.79)$$

### Configuration expérimentale (B)

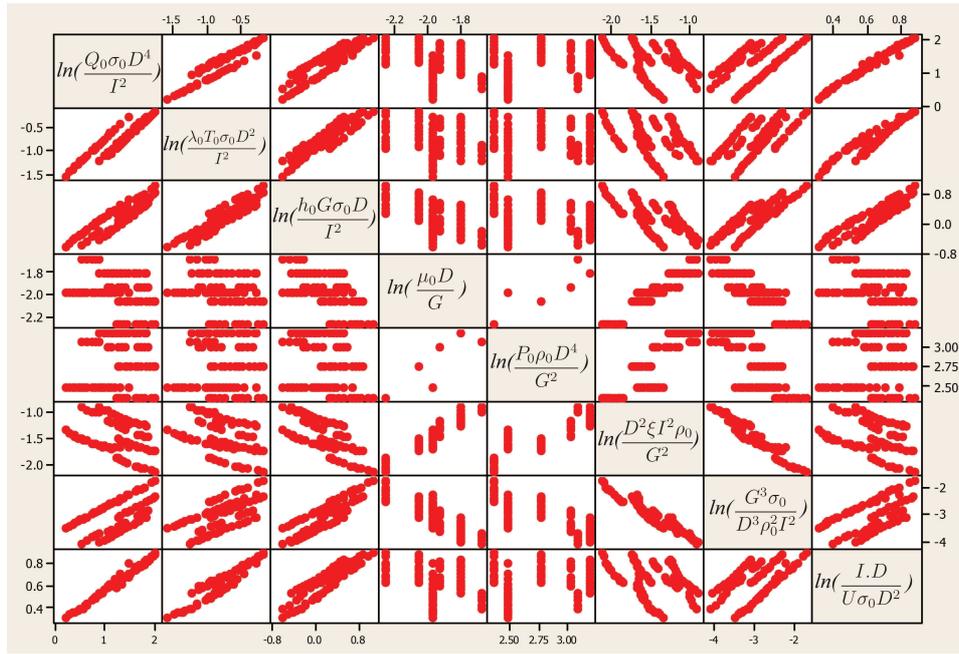


FIGURE 8.7 – Graphe matriciel du logarithme de l'ensemble des nombres adimensionnels pour les fortes intensités de courant. (configuration (B))

Avec le dispositif expérimental (B), les configurations que nous avons étudiées sont les suivantes (débit d'argon en  $\text{sL}\cdot\text{min}^{-1}$ , distance inter-électrodes en mètres) : (2.5;0.005), (2.5;0.006), (5;0.006), (5;0.009), (7.5;0.01), (10;0.01), (16;0.01). Comme précédemment, nous avons ajusté des lois en puissance sur les points expérimentaux. Cette fois-ci, nous avons obtenu pour les fortes intensités de courant ( $I > I_c$ ) :

$$\frac{I.D}{U\sigma_0 D^2} = 1.40 \left( \frac{Q_0\sigma_0 D^4}{I^2} \right)^{0.267} \left( \frac{\lambda_0 T_0 \sigma_0 D^2}{I^2} \right)^{0.069} \quad (8.80)$$

Pour les faibles intensités de courant, on a :

$$\frac{I.D}{U\sigma_0 D^2} = 3.6 \left( \frac{Q_0\sigma_0 D^4}{I^2} \right)^{0.029} \left( \frac{\lambda_0 T_0 \sigma_0 D^2}{I^2} \right)^{0.71} \left( \frac{h_0 G \sigma_0 D}{I^2} \right)^{-0.167} \quad (8.81)$$

Quelques données obtenues pour une forte intensité de courant sont présentées sur le graphe matriciel 8.7. Chaque vignette relie le logarithme du nombre adimensionnel mentionné dans la

colonne de l'abscisse avec le logarithme mentionné en ordonnée. Ce graphe permet de juger des corrélations entre les différents nombres adimensionnel; grâce à l'utilisation des logarithmes, la corrélation peut être déterminée à l'aide de la pente et de la forme de la courbe. Une droite avec une pente importante est signe de forte corrélation entre les  $\Pi$  considérés tandis qu'une pente nulle ou des points très dispersés correspondent à un manque de corrélation. La dernière ligne du graphique 8.7 présente les relations entre le logarithme de  $\Pi'_U$  et le reste des nombres adimensionnels. Au premier coup d'œil, on peut aisément établir que  $\Pi'_U$  est très corrélé avec  $\Pi'_{ray}$ ,  $\Pi'_{cond}$  et  $\Pi'_h$  car les points des courbes sont bien alignés et possèdent une pente non nulle.  $\Pi'_{fem}$  et  $\Pi'_{rey}$  n'ont aucune influence sur la caractéristique courant/tension comme le prouvent les points très dispersés des graphes  $f(\ln(\Pi'_{fem})) = \ln(\Pi'_U)$  et  $f(\ln(\Pi'_{rey})) = \ln(\Pi'_U)$ . La lecture graphique des données permet uniquement ces remarques qualitatives, c'est pour cela que la regression stepwise est indispensable pour obtenir des résultats probants.

La forme de la caractéristique courant/tension est directement reliée à l'effet Joule responsable du chauffage du plasma. Pour le régime où l'intensité du courant est inférieure à  $I_c$ , la perte d'énergie par conduction est dominante tandis que c'est le rayonnement qui dissipe le plus d'énergie pour les fortes intensités de courant ( $I > I_c$ ). Malgré un minimum de tension  $I_c$  et des pentes différentes sur les caractéristiques des configurations (A) et (B), les lois en puissance obtenues sont relativement similaires. Cela signifie que même si les alimentations sont différentes, les phénomènes à l'origine de la forme de la caractéristiques (U,I) sont identiques. Les deux branches de la caractéristique sont expliquées à l'aide de l'analyse dimensionnelle, mais les lois en puissances sont malheureusement inadaptées pour décrire la caractéristique autour de  $I_c$ . Pour prouver que le minimum des caractéristiques correspond à un changement de régime de dissipation d'énergie, nous avons choisi d'effectuer une simulation numérique de la colonne.

### 8.6.5 Validation des résultats par simulation numérique

La colonne de plasma à une géométrie cylindrique, si on l'idéalise et que l'on néglige l'effet Maecker au niveau de la cathode, on peut la représenter par un cylindre. Le problème est stationnaire, et nous avons vu précédemment grâce à l'analyse dimensionnelle que seuls la conduction et le rayonnement devaient intervenir dans le problème. Afin de vérifier si la forme de la caractéristique était due à ces phénomènes, nous avons choisi de résoudre numériquement le modèle d'Elenbaas-Heller présenté précédemment.

### Résultats

À l'aide de l'algorithme développé au chapitre 7, il a été possible d'obtenir la conductivité électrique, le rayon de la colonne, le champ de température, ainsi que les pertes d'énergies et les caractéristiques courant/champ électrique de la décharge pour différents rayons  $R$ . Le pas d'espace utilisé pour effectuer nos calculs était fixé à  $\Delta r = 0.00001$  m de manière à avoir une bonne précision tout en conservant un temps de calcul raisonnable. Le rayon de la colonne a été déterminé par l'examen de la conductivité : une brusque diminution de la conductivité est notable aux bords de la colonne. Afin d'avoir un critère solide, on a fixé le bord de colonne comme étant l'endroit où la conductivité est égale à celle d'un plasma d'argon à 8000 K.

Une caractéristique courant/ champ électrique pour une décharge d'un rayon  $R = 8$  mm est disponible sur le graphique 8.8. On remarque que la forme générale de la caractéristique est similaire à celle obtenue expérimentalement. Cette forme est directement due aux phénomènes

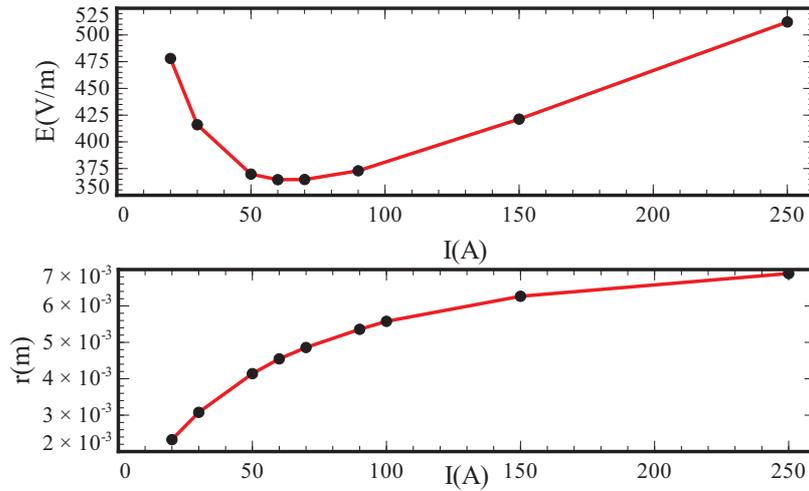


FIGURE 8.8 – Caractéristique courant/champ électrique et rayon de la colonne pour une décharge possédant un rayon maximum de 8 mm.

de dissipation d'énergie dans la colonne. On peut tenter d'utiliser le rayon de la colonne pour donner une explication au minimum des caractéristiques. Tout d'abord, lorsque l'intensité varie, la température à l'intérieur du plasma change très peu, elle reste de l'ordre de 10000 K tandis que le rayon de la colonne augmente. À partir d'une intensité caractéristique  $I_c$  le rayon de la colonne se "sature". À ce moment, si l'on fait passer plus de courant à travers la décharge, la température augmente légèrement puisque la majeure partie de l'énergie supplémentaire fournie est perdue sous forme de rayonnement. La conductivité ne varie quasiment pas et il est donc nécessaire d'augmenter la différence de potentiel aux bornes de la décharge pour faire passer plus de courant.

Le tracé des pertes d'énergie pour une colonne d'un mètre de long permet de conforter cette hypothèse (fig.8.9). En effet les résultats sont similaires à ce qui a été obtenu à l'aide de l'analyse dimensionnelle : pour des intensités de courants inférieurs à  $I_c$ , les pertes par conduction sont prépondérantes tandis que pour des fortes intensités de courant, les pertes par conduction deviennent mineures devant les pertes par rayonnement. Le minimum de la caractéristique correspond au point où les pertes par rayonnement sont aussi importantes que les pertes par conduction.

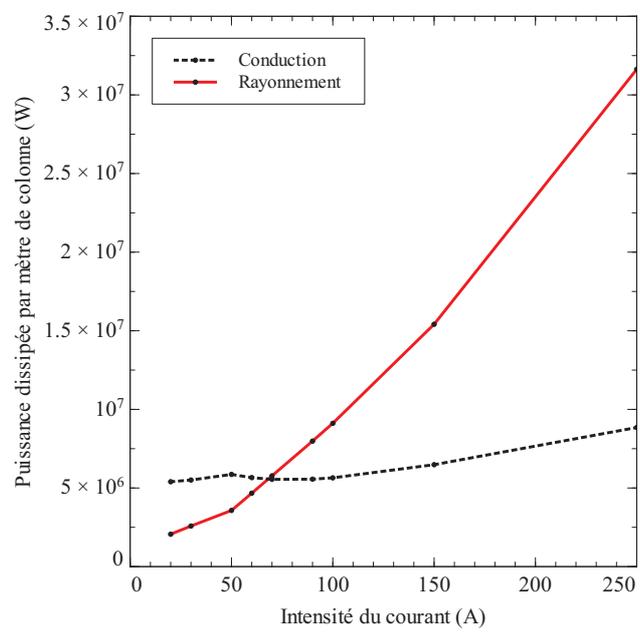


FIGURE 8.9 – Graphes des pertes d'énergie par conduction et rayonnement en fonction de l'intensité du courant. La rayon maximum de la colonne est fixée à 8 mm tandis que sa longueur est de 1 m.

# Bibliographie

- [1] S. Watanabe, S. Saito, K. Takahashi, and T. Onzawa. Observations of the glow-to-arc transition between thoriated tungsten electrodes with a parallel rc circuit. *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 36 :2521–2525, 2003.
- [2] V.L. Chrisler. The low-current arc. part i. *Astrophysical Journal*, 54 :273, 1921.
- [3] A. Czernichowski. Gliding arc. applications to engineering and environment control. *pure and appl. chem.*, 66 :1301–1310, 1994.
- [4] E. Stoffels, A.J. Flikweert, W.W. Stoffels, and G.M. Kroesen. Plasma needle : a non-destructive atmospheric plasma source for fine surface treatment of (bio)materials. *Plasma Sources Sci. Technol.*, 11 :383–388, 2002.
- [5] J. Heberlein. Electrode phenomena in plasma torches. *Annals of the New York academy of sciences*, 891 :14–27, 1999.
- [6] L.C. Chen and S.H. Pai. In situ measurement and control of electric discharge on submerged arc synthesis process for continuous TiO<sub>2</sub> nanoparticle fabrication. *Material transaction*, 45 :3071–3078, 2004.
- [7] K.C. Hsu, K. Etemadi, and E. Pfender. Study of the free-burning high-intensity argon arc. *Journal of applied physics*, 54 :1293, 1983.
- [8] H.G. Fan and Y.W. Shi. Numerical simulation of the arc pressure in gas tungsten arc welding. *Journal of Materials Processing Technology*, 61 :302–308, 1996.
- [9] P. Freton. *Etude d'un arc de découpe par plasma d'oxygène. Modélisation, expérience.* PhD thesis, UNIVERSITE PAUL SABATIER, 2002.
- [10] H. Du, Y. Wei, W. Wang, W. Lin, and D. Fan. Numerical simulation of temperature and fluid in gtaw-arc under changing process conditions. *journal of materials processing technology*, 209 :3752–3765, 2009.
- [11] H. Beji and M. Fitaire. Etude du bruit acoustique d'arcs électriques ; cas des fours à arcs industriels. *Revue Phys. Appl.*, 18 :795–802, 1983.
- [12] E.H. Cayo and S.C. Absi Alfaro. Welding quality measurement based on acoustic sensing. *ABCM Symposium Series in Mechatronics*, 3 :571–579, 2008.
- [13] C.S. Wu, M. Ushio, and M. Tanak. Analysis of the tig welding arc behavior. *Computational materials science*, 7 :308–314, 1997.
- [14] J. Wendelstorf, I. Decker, H. Wohlfahrt, and G. Simon. *Mathematical Modelling of Weld Phenomena*, chapter TIG and Plasma Arc Modelling : a survey. Maney Publishing, 1996.
- [15] T. K. Bose and R. V. Seeniraj. Two-temperature elenbaas-heller problem with argon plasma. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 26 :1163, 1984.

- [16] M. Benilov and G. Naidis. What is mathematical meaning of steenbeck's principle of minimum power in gas discharge physics? *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 43 :175204, 2010.
- [17] G. Taylor. The formation of a blast wave by a very intense explosion i. theoretical discussion. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 201 :159–174, 1950.
- [18] G. Taylor. The formation of blast wave by a very intense explosion. ii. the atomic explosion of 1945. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 201 :175–186, 1950.
- [19] G. Astarita. Dimensional analysis, scaling, and order of magnitude. *Chemical engineering science*, vol 52 :4681–4698, 1997.
- [20] W. B. Krantz. *Scaling analysis in modeling transport and reaction processes*. Wiley, 2007.
- [21] J. Bertrand. Sur l'homogénéité dans les formules de physique. *Compte rendus de l'académie des sciences*, 86 :916–920, 1878.
- [22] E. Buckingham. On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations. *Physical Review*, 4 :345–376, 1914.
- [23] L. I. Sedov. *Similarity and dimensional methods in mechanics*. CRC press, 1993.
- [24] P. W. Bridgman. *Dimensional analysis*. Yale university press, 1949.
- [25] O.I Yas'ko. Correlation of the characteristics of electric arcs. *Journal of applied physics*, 2 :733–751, 1969.
- [26] D. Riabouchinsky. The principle of similitude. *Nature*, 95 :591, 1915.
- [27] V.G. Karolinski, M.I. Sazonov, E.I. Yurinok, and O.L. Yas'ko. Electric-field strength in a cascade argon arc. *Journal of engineering physics and thermophysics*, 73 :953–958, 2000.
- [28] G. Li, W. Pan, X. Meng, and C. Wu. Application of similarity theory to the characterization of non-transferred laminar plasma jet generation. *Plasma sources science and technology*, 14 :219–225, 2005.
- [29] P. Mendez. *Order of Magnitude Scaling of complex engineering problems, and its application to high productivity arc welding*. PhD thesis, Massachusetts institute of technology, 1999.
- [30] P.F. Mendez, M.A. Ramirez, G. Trapaga, and T.W. Eagar. Order-of-magnitude scaling of the cathode region in an axisymmetric transferred electric arc. *Metallurgical and materials transactions B*, 32B :547–555, 2001.
- [31] P.F. Mendez. Characteristic values in the scaling of differential equations in engineering. *Journal of applied mechanics*, 77 :061017, 2010.
- [32] C.C Lin and L.A. Segel. *Mathematics applied to deterministic problems in the natural sciences*. SIAM, 1976.
- [33] G. Li, W. Pan, X. Meng, and C. Wu. Application of similarity theory to the characterization of non-transferred laminar plasma jet generation. *Plasma sources science and technology*, 14 :219–225, 2005.
- [34] R. Cazes. Soudage à l'arc. Technical report, Techniques de l'ingénieur.
- [35] O.I Yas'ko, A.L. Esipchuk, Zhou Quing, and al. On generalization of electric field strength in longitudinally blown arcs. In *Progress in plasma processing of materials 1997 : proceedings of the international thermal plasma processes conference, 4th, athen, july 15-18, 1996*, 1997.

## Troisième partie

# Exploitation de l'indice de réfraction



# Table des matières

---

<b>9</b>	<b>L'indice de réfraction des gaz</b>	<b>117</b>
9.1	Introduction . . . . .	117
9.2	Définition et relations fondamentales . . . . .	118
9.3	L'indice de réfraction dans les plasmas . . . . .	119
9.3.1	Calcul de l'indice de réfraction d'un gaz . . . . .	119
9.3.2	Calcul de l'indice de réfraction des électrons libres . . . . .	121
9.3.3	Indice de réfraction des ions et des états excités . . . . .	122
9.3.4	Indice de réfraction d'un plasma d'Argon . . . . .	122
9.4	Conclusion . . . . .	124
<b>10</b>	<b>Interférométrie</b>	<b>125</b>
10.1	Introduction . . . . .	125
10.2	Théorie . . . . .	125
10.2.1	Mesure de l'indice de réfraction à l'aide d'un interféromètre de Mach-Zehnder . . . . .	129
10.3	Traitement des données . . . . .	130
10.4	Conclusion . . . . .	131
<b>11</b>	<b>L'ombroscopie quantitative</b>	<b>133</b>
11.1	Introduction . . . . .	133
11.2	Théorie . . . . .	134
11.3	Traitement des données . . . . .	137
11.3.1	Résolution de l'équation de Poisson . . . . .	139
11.3.2	Sensibilité à l'erreur de l'équation de Poisson . . . . .	141
11.4	Conclusion . . . . .	143
<b>12</b>	<b>Défectométrie moiré</b>	<b>145</b>
12.1	Rappel sur l'analyse de Fourier . . . . .	145
12.1.1	Définition . . . . .	145
12.1.2	Propriété de la transformée de Fourier . . . . .	146
12.2	Méthode de la phase stationnaire . . . . .	147

12.3	Introduction . . . . .	150
12.4	Théorie : optique géométrique . . . . .	151
12.4.1	Méthode des équations paramétriques . . . . .	151
12.4.2	Méthode de la composition de transmittances . . . . .	156
12.5	Théorie : optique de Fourier . . . . .	160
12.5.1	Élément d'optique de Fourier . . . . .	160
12.5.2	Validité de l'approche géométrique . . . . .	162
12.5.3	Figure d'interférence à la sortie d'un défectomètre vide . . . . .	163
12.5.4	Perturbation des figures d'interférences par un objet à diagnostiquer . .	170
12.5.5	Relation entre la phase et l'angle de déflexion . . . . .	172
12.5.6	Sensibilité d'un défectomètre . . . . .	173
12.6	Traitement des données . . . . .	176
12.7	Conclusion . . . . .	177

---

## Chapitre 9

# L'indice de réfraction des gaz

Faire semblant est un début de réalité.  
Si tu fais de plus en plus semblant,  
t'arrives progressivement à être pour de  
bon ce que tu souhaites paraître.

---

San Antonio

### 9.1 Introduction

Parmi les nombreuses méthodes de diagnostic existantes pour sonder les décharges électriques à pression atmosphérique, les méthodes optiques sont souvent privilégiées car elles sont non-intrusives.

On utilise communément la spectroscopie optique d'émission ou d'absorption pour obtenir des informations sur le plasma. Cependant, de nombreuses contraintes pèsent sur ces techniques, il est tout d'abord nécessaire d'avoir recours à de nombreuses données spectroscopiques telles que les probabilités de transitions qui ne sont quelque-fois pas connues ou entachées d'une grosse incertitude. Le plasma doit être optiquement mince pour les raies considérées. Il doit en outre être à une température assez élevée afin de rayonner suffisamment pour les mesures. Finalement, la plus grosse contrainte de cette méthode est la nécessité de recourir à un modèle pour relier le peuplement des niveaux énergétiques d'un atome ou d'une molécule à une température. C'est souvent l'hypothèse de l'ETL qui est utilisée, malheureusement, elle n'est pas valide pour des décharges à basse intensité de courant et dans les zone périphérique des arcs.

Afin de s'affranchir de ces contraintes, l'indice de réfraction d'un plasma peut être utilisé. Ce dernier est caractéristique de la densité des particules du plasma et ce quel que soit l'état d'équilibre et la gamme de température de ce dernier.

De multiples techniques existent pour sonder l'indice de réfraction ou ses dérivées ; Au cours de cette partie, nous allons présenter le principe de l'interférométrie avant de nous intéresser à deux techniques que nous avons développé : l'ombroscopie quantitative et la déflectométrie moiré.

Avant de se pencher sur ces méthodes de mesure, il est nécessaire de définir l'indice de réfraction d'un plasma.

## 9.2 Définition et relations fondamentales

Dans le vide, la lumière voyage à une vitesse de  $c = 2.998 \text{ m.s}^{-1}$ . Quand celle-ci traverse un milieu transparent contenant des atomes ou des molécules, le champ électrique perturbe le nuage électronique de ces derniers. Des dipôles électriques se forment et oscillent, ce qui a pour résultat d'émettre un rayonnement électromagnétique. Au niveau macroscopique, cela se traduit par une émission d'onde électromagnétique de même fréquence que l'onde incidente, mais avec une longueur d'onde plus faible ; Elle est donc ralentie par rapport à sa vitesse dans le vide. L'indice de réfraction est défini pour un rayonnement électromagnétique monochromatique comme le ratio permettant de mesurer la vitesse de phase de l'onde dans le milieu considéré, il est donné par :

$$n = \frac{c}{v}, \quad (9.1)$$

avec  $c$  et  $v$  respectivement la vitesse de la lumière dans le vide et dans le milieu considéré. Il est évident que l'indice de réfraction d'un gaz dépendra de la densité de particules et, dans une moindre mesure, du type de particules qui constitue le milieu. La loi de Gladstone-Dale permet de relier la densité de particule d'un gaz à l'indice de réfraction. Dans sa plus simple expression (gaz dont la composition ne change pas) pour une longueur d'onde donnée, cette dernière stipule que [1] :

$$(n - 1)_\lambda = K_\lambda \rho, \quad (9.2)$$

où  $K_\lambda$  est une constante qui dépend de la longueur d'onde et du type de particule constituant le gaz,  $\rho$  la masse volumique du gaz et  $n$  l'indice de réfraction. Pour un gaz parfait, la forme de la réfractivité en fonction de la température sera :

$$(n - 1)_\lambda = \frac{\Lambda_\lambda}{T}. \quad (9.3)$$

L'indice de réfraction d'un milieu dépend bien évidemment de la longueur d'onde. En 1871, Sellmeier a proposé une relation semi-empirique de l'indice de réfraction d'un diélectrique en fonction de la longueur d'onde du rayonnement en considérant un milieu composé d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques [2, 3]. Cette relation est de la forme :

$$n(\lambda)^2 = 1 + \sum_j \frac{A_j \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_j^2}. \quad (9.4)$$

Les  $A_j$  sont des constantes qui dépendent des forces d'oscillateurs des particules composant le diélectrique. On peut réécrire cette relation pour faire apparaître une fonction de la forme  $1/(1 - x)$  :

$$n(\lambda)^2 = 1 + \sum_j A_j \frac{1}{1 - \frac{\lambda_j^2}{\lambda^2}}. \quad (9.5)$$

Pour le spectre visible, le terme  $\frac{\lambda_j^2}{\lambda^2}$  est petit, on peut donc faire le développement en série de la relation précédente :

$$n(\lambda)^2 = 1 + \sum_j A_j \left(1 + \frac{\lambda_j^2}{\lambda^2}\right), \quad (9.6)$$

$$n(\lambda) = \sqrt{1 + \sum_j A_j + \frac{\sum_j A_j \lambda_j^2}{\lambda^2}}, \quad (9.7)$$

$$n(\lambda) = \sqrt{1 + \sum_j A_j} \sqrt{1 + \frac{\sum_j A_j \lambda_j^2 / \lambda^2}{1 + \sum_j A_j}}, \quad (9.8)$$

La fraction dans le second terme est toujours petite, on peut donc utiliser le développement limité de  $\sqrt{1 + \epsilon}$ . On obtient finalement ;

$$n(\lambda) = \sqrt{1 + \sum_j A_j} \left( 1 + \frac{\sum_j A_j \lambda_j^2 / \lambda^2}{2 + 2 \sum_j A_j} \right) = C_1 + \frac{C_2}{\lambda^2} \quad (9.9)$$

La relation obtenue est connue sous le nom d'équation de Cauchy, c'est une bonne approximation de l'équation de Sellmeier dans le cas où le rayonnement considéré est dans le domaine du visible.

### 9.3 L'indice de réfraction dans les plasmas

Les relations que nous avons vues précédemment ne s'appliquent pas de manière simple à un plasma. Il y a plusieurs raisons à cela : tout d'abord, un plasma a une composition qui évolue avec sa température. De plus, il possède des particules neutres, mais aussi des particules électriquement chargés dont l'indice de réfraction est d'une forme différente de celle pour les diélectriques.

On peut écrire pour un plasma :

$$(n - 1)_{\text{plasma}} = \sum (n - 1)_{\text{neutres}} + \sum (n - 1)_{\text{ions}} + (n - 1)_{\text{electrons}}. \quad (9.10)$$

Les différentes parties de la réfractivité peuvent être calculées à l'aide des densités et des réfractivités spécifiques de chacun des éléments considérés :

$$(n - 1)_x = \sum_i \rho_i K_i. \quad (9.11)$$

avec  $\rho_i$  et  $K_i$  la densité et la réfractivité spécifique de l'élément  $i$ . Gardiner propose une tabulation de nombreuses réfractivités spécifiques [4]. C'est à l'aide de ces données que nous avons été capable de calculer l'indice de réfraction d'un plasma.

#### 9.3.1 Calcul de l'indice de réfraction d'un gaz

Considérons un gaz transparent dans le visible ; lorsqu'une onde électromagnétique se propage dans ce milieu, la théorie de l'électromagnétisme nous permet d'écrire :

$$\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = 0. \quad (9.12)$$

La vitesse de l'onde dans le milieu considéré est donnée par :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}. \quad (9.13)$$

Si l'on reprend la définition de l'indice de réfraction, on a :

$$n = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \sqrt{K_E K_M}. \quad (9.14)$$

Avec  $K_E$  et  $K_M$  la permittivité et la perméabilité relative. Ici, on s'intéresse uniquement à des diélectriques transparents dans le visible, Ils n'ont pour la plupart pas de propriétés magnétiques particulières. On en déduit donc :

$$K_M = 1. \quad (9.15)$$

L'indice de réfraction se résume à :

$$n = \sqrt{K_E}. \quad (9.16)$$

Pour examiner le comportement des particules du gaz face à une onde électromagnétique, considérons un champ électrique oscillant :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t). \quad (9.17)$$

La longueur d'onde est telle que les particules qui composent le gaz voient un champ uniforme. De plus, la pulsation est grande, les molécules polaires ont une inertie trop grande pour suivre ses variations. Seuls les électrons qui sont contenus dans les nuages électroniques des atomes réagissent au champ électrique en se déplaçant pour former des dipôles électriques.

Considérons que les électrons et le noyau forment un oscillateur. On suppose que le rayonnement incident a une pulsation très différente de la pulsation caractéristique de l'oscillateur de manière à négliger son amortissement. L'équation fondamentale de la dynamique nous donne pour un électron :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = q E_0 \cos \omega t - m \omega_0^2 x, \quad (9.18)$$

où  $m$ ,  $q$  sont respectivement la masse et la charge de l'électron et  $\omega_0$  la pulsation de l'oscillateur harmonique associé à l'atome.

La résolution de cette équation permet de calculer la position relative  $x$  de l'électron à chaque instant :

$$x(t) = \frac{q}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} E_0 \cos(\omega t). \quad (9.19)$$

Tant que la pulsation du champ électrique est inférieure à  $\omega_0$ , le mouvement des électrons est en phase avec celui-ci.

Le moment dipolaire permet de caractériser un dipôle électrique, il est défini comme :

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i. \quad (9.20)$$

Pour traiter un milieu macroscopique on préfère utiliser la polarisation qui correspond à la densité de moment dipolaire par unité de volume. Dans notre cas, la polarisation est donnée par :

$$P = qxN_e, \quad (9.21)$$

$$P = \frac{q^2 N}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} E. \quad (9.22)$$

Pour la plupart des matériaux,  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  sont proportionnels :

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}. \quad (9.23)$$

On en déduit donc :

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{P}{E} = \epsilon_0 + \frac{qN}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (9.24)$$

En reprenant la relation (9.16) on a :

$$n^2 = 1 + \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (9.25)$$

Expérimentalement, on sait qu'il n'y a pas qu'une seule fréquence de résonance. Le système étudié ici est une simplification de la réalité où plusieurs électrons de la couche électronique participent à la formation du dipôle électrique. On peut généraliser l'équation (9.25) en supposant que les particules du gaz contiennent plusieurs oscillateurs avec chacun une pulsation propre :

$$n^2 = 1 + \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)}. \quad (9.26)$$

Ce résultat est similaire à celui obtenu à l'aide de la mécanique quantique. Avec cette approche,  $\omega_{0j}$  correspond à la pulsation à laquelle la particule émet ou absorbe un rayonnement électromagnétique. Les termes  $f_j$  sont appelés forces d'oscillateur. Ils reflètent l'importance de chacun des modes d'oscillation et satisfont de fait à la relation  $\sum f_j = 1$ .

L'expression obtenue pour l'indice de réfraction n'est valable que pour les gaz à des pressions relativement faibles. Pour les gaz à haute pression, les liquides ou les solides, la distance entre atomes ou molécules est réduite. Il en résulte une forte interaction entre les différentes particules. Cela doit être pris en compte lors du calcul du champ électrique vu par chaque oscillateur. Un traitement complet de ce cas mène à la relation bien connue de Clausius-Mozzoti ou de Lorentz-Lorenz.

### 9.3.2 Calcul de l'indice de réfraction des électrons libres

Reprenons l'équation fondamentale de la dynamique pour l'électron lié. Si l'on supprime la force de rappel de cette équation, elle permet de décrire le comportement d'un électron libre soumis à un champ électrique. L'indice de réfraction obtenu sera de la forme :

$$n_e^2 = 1 - \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m \omega^2}. \quad (9.27)$$

Cette expression contient la fréquence plasma  $\omega_p = \sqrt{nq^2/\epsilon_0 m}$  :

$$n_e^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (9.28)$$

Pour des pulsations supérieures à la fréquence plasma,  $n_e$  est réel et le milieu est transparent. Pour un plasma thermique typique dont la densité électronique est de  $10^{22}$  e/m<sup>3</sup>, la fréquence plasma est de l'ordre de  $10^{12}$  Hz tandis que les fréquences optiques sont de l'ordre de  $10^{14}$  Hz. On aura donc bien un indice de réfraction des électrons réel pour les plasmas de laboratoire. Pour une manipulation plus aisée de l'indice de réfraction des électrons libres, un développement de la relation (9.28) peut être effectué :

$$n_e - 1 = -\frac{\omega_p^2}{2\omega^2}. \quad (9.29)$$

Pour conclure, contrairement aux diélectriques, l'indice de réfraction des électrons libres ne suit pas une équation de Cauchy et varie comme  $\lambda^2$  :

$$n_e - 1 = -\frac{\omega_p^2 \lambda^2}{4\pi}. \quad (9.30)$$

### 9.3.3 Indice de réfraction des ions et des états excités

L'indice de réfraction des ions ne contribue que très peu dans l'indice de réfraction total des plasmas étudiés et cela pour deux raisons. Tout d'abord ils sont en faibles proportions dans la plage de température étudiée, par exemple, un plasma d'argon à l'ETL à 10000 K contiendra 2 % d'ions ARII. En outre, leur réfractivité n'est pas très différente de ceux des états fondamentaux. Alpher et White ont montré que l'argon II a une réfractivité de l'ordre de 70 % de celle des atomes d'argon à l'état fondamental [5, 6]. Finalement, l'influence des états excités est relativement faible sur l'indice de réfraction d'un gaz. De Izarra [7] a prouvé que pour un plasma d'argon, la variation de l'indice de réfraction due aux états excités est de 2 ordres de grandeur inférieur à celle due aux ions (tableau 9.1).

Grâce à cela, on peut calculer l'indice de réfraction d'un plasma sans se soucier du peuplement énergétique de la population de particule qui le compose. Seule la composition du plasma en fonction de sa température sera nécessaire.

T (K)	électrons	fondament.	ions	excités	plasma
8000	-0.253690	1.0700951	0.0011709	-0.0000272	1.0458698
9000	-0.0935652	0.9417572	0.0043183	-0.0001569	0.852353
10000	-0.2643414	0.8235904	0.0122001	-0.0006188	0.5708304
11000	-0.6070757	0.697462	0.0280183	-0.0018026	0.01188861
12000	-1.1691857	0.5597631	0.0539613	-0.0040243	-0.5594857

TABLE 9.1 – Réfractivité  $(n - 1)10^5$  d'un plasma d'argon calculé à l'aide de la théorie de l'abaissement de potentiel d'ionisation de Griem. La longueur d'onde du rayonnement est fixée à  $\lambda=6328$  Å. Issu de [7].

### 9.3.4 Indice de réfraction d'un plasma d'Argon

L'ensemble des méthodes de diagnostic développé au cours de cette partie sera testé sur des plasmas d'argon. Afin d'être en mesure de relier l'indice de réfraction mesuré avec la densité

d'espèces puis avec la température, nous avons calculé l'indice de réfraction d'un plasma d'argon en fonction de sa température pour plusieurs longueurs d'onde. Pour ce faire, nous avons utilisé la composition d'un plasma d'argon à pression atmosphérique présenté dans la partie I ainsi que les travaux de Gardiner. Les résultats obtenus pour un rayonnement à 632.8 nm sont disponibles sur les graphique 9.1.

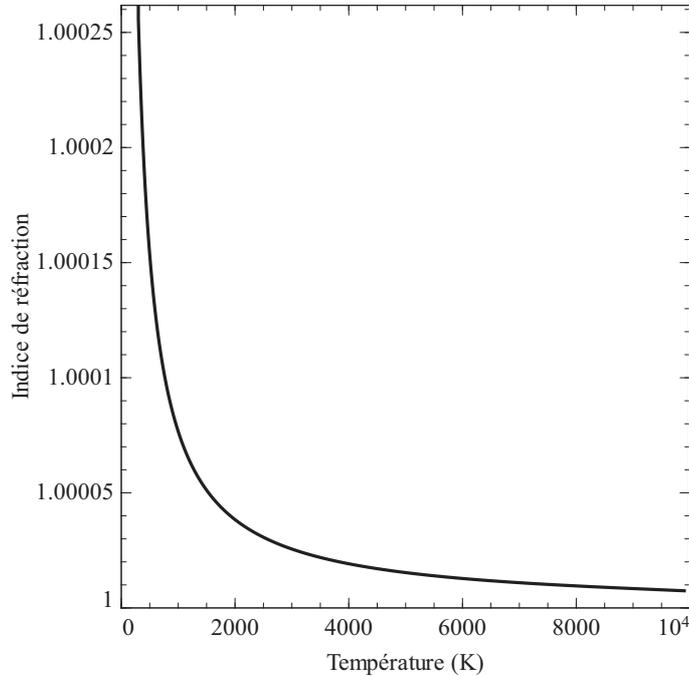


FIGURE 9.1 – Indice de réfraction d'un plasma d'argon à l'ETL en fonction de la température pour un rayonnement électromagnétique dont la longueur d'onde est de 632.8 nm.

Quelque soit la longueur d'onde du spectre visible utilisé, on constate que l'indice de réfraction varie en  $1/T$ . De fait, il ne sera sensible aux variations de température uniquement dans la gamme 300-4000 K. Pour des températures supérieures, l'indice se sature et son utilisation devient hasardeuse et imprécise.

Examinons maintenant l'expression analytique de l'indice de réfraction d'un plasma d'argon.

$$(n - 1)_{plasma} = -neA_e\lambda^2 + n_{Ar}(A_{Ar} + \frac{B_{Ar}}{\lambda^2}) \quad (9.31)$$

L'indice de l'argon à l'état fondamental et ionisé suit une équation de Cauchy tandis que l'indice de réfraction des électrons, comme nous l'avons vu dans la relation (9.30), varie en  $\lambda^2$ . Cela est très intéressant puisqu'en mesurant l'indice de réfraction d'un milieu avec deux rayonnements de longueur d'onde très différente, on est en mesure de discriminer la contribution des électrons. Comme cette dernière dépend de la densité électronique, on est en mesure de l'obtenir simplement. L'utilisation de rayonnement infrarouge permet aussi d'obtenir l'indice de réfraction dû aux électrons. Cette fois-ci, la longueur d'onde est assez grande pour que le terme en  $1/\lambda^2$  s'évanouisse devant le terme électronique.

## 9.4 Conclusion

Comme nous l'avons vu, l'utilisation de l'indice de réfraction pour le diagnostic des plasmas possède de nombreux avantages. Tout d'abord, elle ne nécessite pas d'hypothèse lourde telle que l'ETL pour être déployée, une connaissance de la composition grossière suffit dans de nombreux cas. En outre, la différence entre l'indice de réfraction des diélectriques et des conducteurs nous permet d'imaginer des méthodes de mesures multi-longueur d'onde pour obtenir des données telles que la densité électronique.

Malheureusement, le domaine d'utilisation des méthodes basées sur l'indice de réfraction est limité, comme nous avons pu le constater, cette grandeur possède une bonne sensibilité à la température pour une gamme allant de 300 à 4000 K. Entre 4000 K et 10000 K l'indice est saturé et ne permet pas un diagnostic précis. De ce fait, les méthodes utilisant l'indice de réfraction sont tout à fait adaptées pour le diagnostic de zones périphériques d'arc ou de décharges de faible puissance. Dans la suite de cette partie, nous allons porter notre attention sur différentes méthodes permettant d'obtenir l'indice de réfraction d'un plasma. Aucune mesure multi-longueur d'onde ou dans l'infrarouge n'a été effectuée car cela est hors du domaine d'étude de cette thèse. Il est cependant possible d'obtenir simplement la densité électronique à l'aide de la théorie qui sera développée pour la déflectométrie moiré, en considérant la déflexion d'un faisceau laser  $CO_2$  [8].

# Chapitre 10

## Interférométrie

Y a rien de plus casse-bonbon que les cartésiens : ils vous mettent trop le nez dans la vie ! Et le rêve, alors ? Et le merveilleux ? Ils en font quoi, ces branques ?

---

San Antonio

### 10.1 Introduction

L'interférence de deux ondes lumineuses a été mise en évidence pour la première fois par Newton en 1750 à l'aide de sa fameuse expérience des anneaux. Par la suite, le physicien Thomas Young a étudié un interféromètre très simple constitué de deux fentes. Ses travaux ont permis de mettre en évidence la nature ondulatoire de la lumière et d'ouvrir un nouveau champ d'application pour la métrologie.

De manière générale, l'interférométrie est une méthode qui permet de mesurer le chemin optique d'ondes lumineuses. Lorsque l'indice de réfraction est constant, cette mesure peut être utilisée pour étudier des déplacements ou des distances. Si l'interféromètre est fixe, on peut mesurer des variations d'indice de réfraction et ainsi remonter aux propriétés des matériaux traversés par les faisceaux lumineux. C'est cette application qui nous intéresse ici. Nous avons vu précédemment qu'il était aisé de relier l'indice de réfraction d'un plasma à sa densité d'espèces et à sa composition, voyons maintenant comment obtenir cet indice.

### 10.2 Théorie

Afin de bien comprendre le fonctionnement d'un interféromètre, il est nécessaire de revenir à l'étude d'un cas simple tel que les fentes d'Young.

Considérons pour cela deux fentes séparées par une distance  $d$ . On fait se propager une onde lumineuse plane vers ces fentes (fig.10.1) ; on observe de la diffraction au niveau des deux fentes : d'après le principe de Huygens, des ondes lumineuses sphériques se forment et se propagent avec des vecteurs d'onde  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_2$ . Si l'on s'intéresse uniquement à la composante électrique de ces ondes électromagnétiques, on aura respectivement :

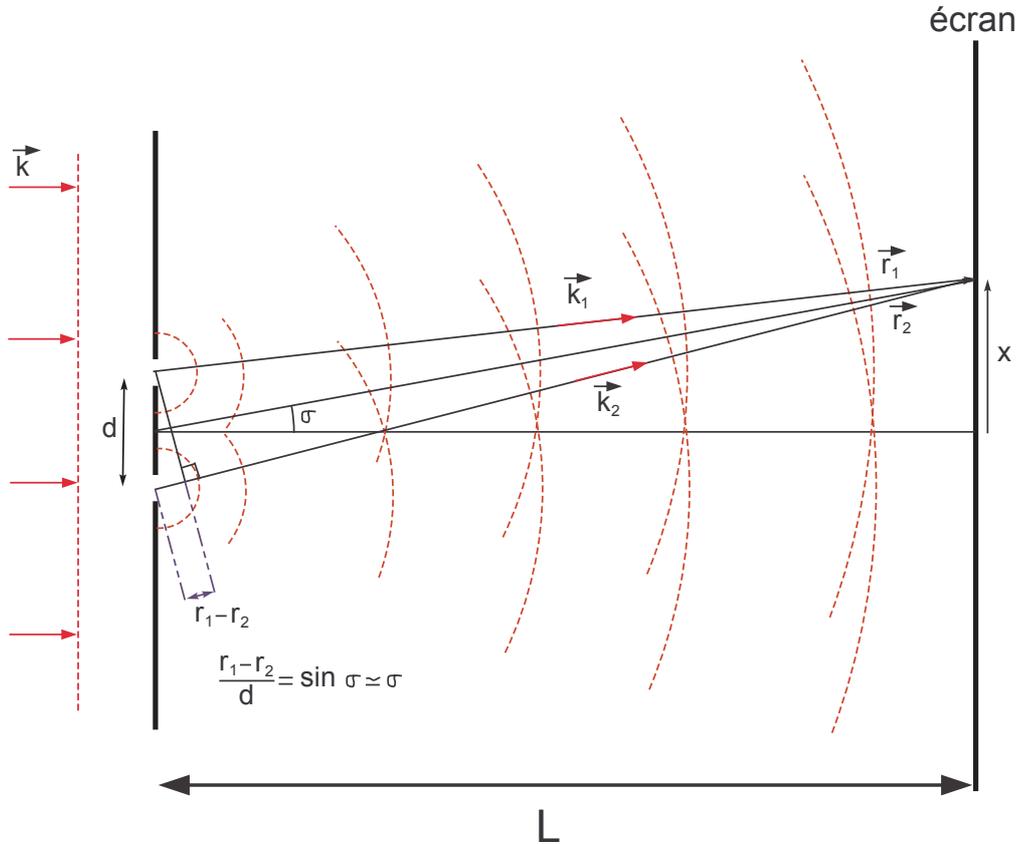


FIGURE 10.1 – Schéma de l'expérience des fentes d'Young. Une onde plane arrive sur un cache muni de deux fentes. Deux ondes sphériques vont être formées au niveau des fentes. Leur interférence est étudiée à l'aide d'un écran placé à une distance  $L$  du cache.

$$E_1 = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 n), \quad (10.1)$$

$$E_2 = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 n), \quad (10.2)$$

avec  $\vec{k}$  les vecteurs d'onde de norme  $2\pi/\lambda$  et  $\omega$  la pulsation. La partie de l'onde contenant  $\vec{k} \cdot \vec{r} n$  s'appelle la phase. Examinons l'amplitude du champ électrique au niveau de l'écran ; ce dernier est placé à une distance  $L$  des fentes, on aura ainsi :

$$E = E_1 + E_2 = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 n) + E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 n). \quad (10.3)$$

En utilisant des relations trigonométriques, on peut séparer la partie temporelle et la partie spatiale des ondes :

$$E = 2E_0 \cos\left(\frac{2\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 n - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 n}{2}\right) \cos\left(\frac{\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 n - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 n}{2}\right). \quad (10.4)$$

Dans le laboratoire, les détecteurs utilisés pour enregistrer des figure d'interférence mesurent souvent une puissance, ce sont des détecteurs quadratiques. On mesure  $I$  tel que :

$$I \propto E^2; \quad (10.5)$$

$$E^2 = 4E_0^2 \cos^2 \left( \frac{2\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 n - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 n}{2} \right) \cos^2 \left( \frac{\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 n - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 n}{2} \right). \quad (10.6)$$

Ici, la partie temporelle ne nous intéresse pas. Elle oscille très rapidement, et seule sa valeur moyenne de 0.5 est mesurable. En moyenne, au niveau de l'écran, on aura :

$$I \propto 2E_0 \cos^2 \left( \frac{\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 n - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 n}{2} \right). \quad (10.7)$$

La distance qui sépare les fentes de l'écran est très grande devant  $d$ , on peut donc appliquer l'approximation de Fraunhofer : les vecteurs d'onde  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_2$  seront considérés comme identiques.

$$\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 n - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 n \approx \vec{k}_0 \cdot \vec{r}_2 n - \vec{k}_0 \cdot \vec{r}_1 n, \quad (10.8)$$

$$\vec{k}_0 \cdot \vec{r}_2 n - \vec{k}_0 \cdot \vec{r}_1 n = k_0 (r_2 - r_1) n. \quad (10.9)$$

Grâce à la figure 10.1, on peut exprimer  $r_2 - r_1$  comme :

$$\frac{r_2 - r_1}{d} = \sigma. \quad (10.10)$$

Avec  $\sigma = x/L$  on a finalement :

$$r_2 - r_1 = \frac{xd}{L}, \quad (10.11)$$

$$I \propto 2E_0^2 \cos^2 \left( \frac{k_0 n xd}{2L} \right). \quad (10.12)$$

Le terme  $xd/L$  représente la différence de distance parcourue par les deux ondes au point  $x$ . Posons,  $\delta = n \frac{xd}{L}$  la différence de chemin optique entre ces dernières et  $\Delta\phi = \delta k_0$  le déphasage entre celles-ci :

$$I \propto 2E_0^2 \cos^2 \left( \frac{\Delta\phi}{2} \right); \quad (10.13)$$

$$I \propto 2E_0^2 \cos^2 \left( \frac{2\pi \delta}{\lambda_0} \right). \quad (10.14)$$

On utilise les relations trigonométrique de manière à exprimer la relation précédente avec un cosinus :

$$I \propto 2E_0^2 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi \delta}{\lambda_0} \right) \right]. \quad (10.15)$$

Finalement, l'intensité au niveau de l'écran sera de la forme :

$$I = I_0 + I_0 \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta \right). \quad (10.16)$$

Lorsque l'on traite de la formation d'interférences de manière générale, on travaille avec la différence de phase  $\Delta\phi$  car l'argument du cosinus  $n \frac{2\pi x d}{L \lambda}$  est spécifique aux fentes d'Young.

Nous disposons des bases de l'interférométrie, nous avons été capable d'obtenir la forme des figures d'interférences lorsque les ondes se propagent dans un milieu homogène. Il nous reste à déterminer comment mesurer un indice de réfraction. Imaginons pour cela l'expérience des fentes d'Young avec cette fois-ci un objet transparent d'indice  $n_1$  placé entre les fentes et l'écran (figure 10.2).

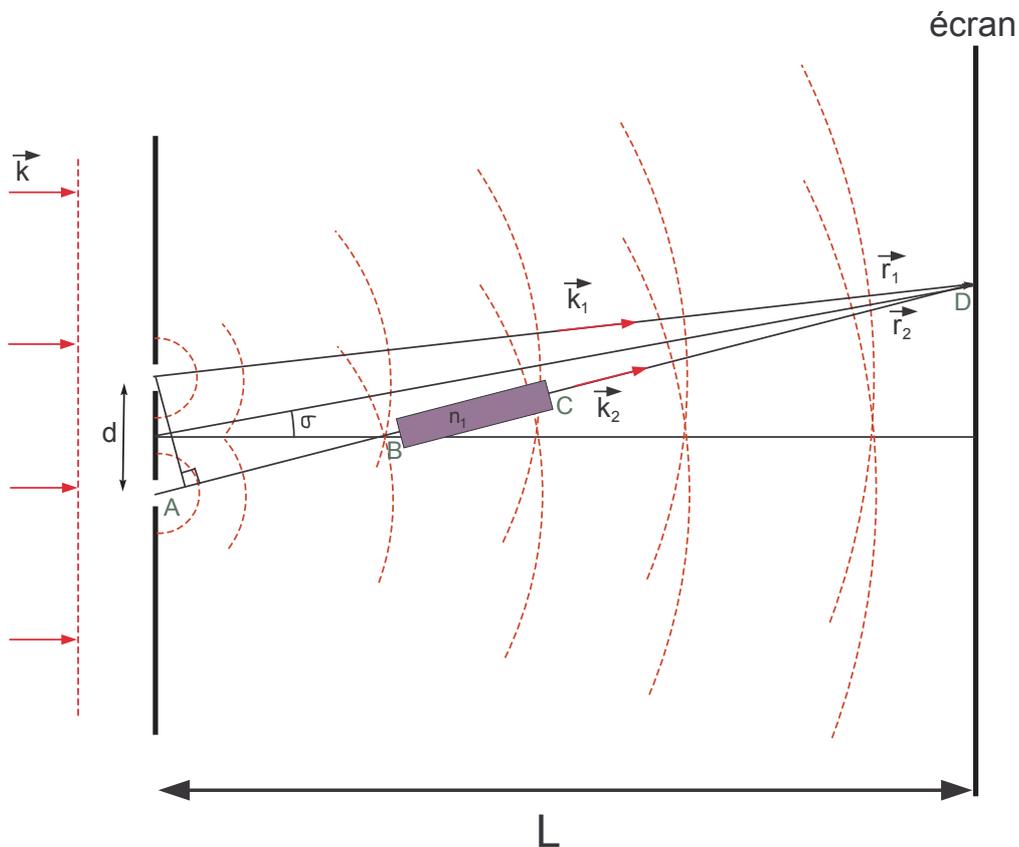


FIGURE 10.2 – Schéma de l'expérience des fentes d'Young avec un objet transparent d'indice  $n_1$  placé entre les fentes et l'écran.

Le déphasage est donné ici par :

$$\Delta\phi_w = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_w, \quad (10.17)$$

avec  $\delta_w = \overline{AB}.n + \overline{BC}.n_1 + \overline{CD}.n$ . En faisant apparaître  $\overline{BC}.n$  et  $-\overline{BC}.n$  dans l'expression de  $\delta_w$ , on a :

$$\Delta\phi_w = \frac{2\pi}{\lambda_0}((r_2 - r_1)n + \overline{BC}(n_1 - n)). \quad (10.18)$$

Pour obtenir  $n_1$ , il est nécessaire d'enregistrer une figure d'interférence de référence sans le milieu test. Sa phase sera :

$$\Delta\varphi_{ref} = \frac{2\pi}{\lambda}((r_2 - r_1)n). \quad (10.19)$$

On pourra déduire  $n_1$  en calculant la différence de phase :

$$\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_{ref} = \frac{2\pi}{\lambda}(n_1 - n)\overline{BC}. \quad (10.20)$$

Pour extraire automatiquement la phase d'une figure d'interférence, les propriétés de la transformée de Fourier sont souvent utilisées (voir rappels sur l'analyse de Fourier dans la présente partie). L'utilisation d'un interféromètre de Young est malaisé lorsque l'on désire mesurer l'indice de réfraction d'un objet. On utilise plutôt des interféromètre de Mach-Zehnder ou de Michaelson.

### 10.2.1 Mesure de l'indice de réfraction à l'aide d'un interféromètre de Mach-Zehnder

Un interféromètre de Mach-Zehnder est un dispositif qui va séparer un faisceau de lumière cohérente en deux faisceaux distincts : un faisceau de travail, où l'on place l'objet à diagnostiquer, et un faisceau de référence. Ces deux faisceaux se rejoignent ensuite pour interférer. Afin d'obtenir une mesure de l'indice de réfraction d'un plasma, On enregistre tout d'abord un interférogramme de référence comme spécifié sur la figure 10.3. La différence de chemin

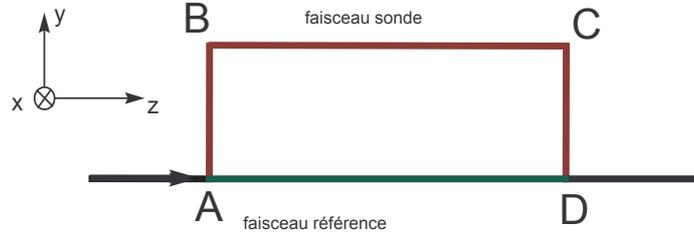


FIGURE 10.3 – Représentation du chemin optique lors de l'enregistrement de l'interférogramme de référence.

optique entre les faisceaux de travail et de référence sera de :

$$\delta_{ref} = [(AB + BC + CD) - AD] n_0. \quad (10.21)$$

La phase de la figure d'interférence sera donnée par :

$$\Delta\phi_{ref} = \frac{2\pi}{\lambda} [(AB + BC + CD) - AD] n_0. \quad (10.22)$$

On place ensuite l'objet d'étude dans l'interféromètre, puis on enregistre un interférogramme de travail (fig.10.4). Cette fois ci, la différence de chemin optique sera :

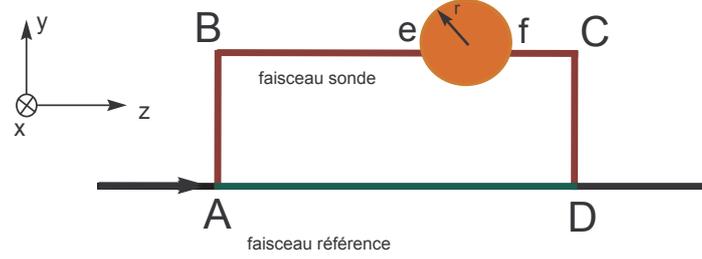


FIGURE 10.4 – Représentation du chemin optique lors de l'enregistrement de l'interferogramme de travail.

$$\Delta\phi_{travail} = \frac{2\pi}{\lambda} [(AB + BC + CD) - AD] n_0 + \int_e^f \frac{2\pi}{\lambda} (n - n_0) dz. \quad (10.23)$$

Finalement, la différence de phase est de :

$$\Delta\phi_{travail} - \Delta\phi_{ref} = \frac{2\pi}{\lambda} \int_e^f \frac{2\pi}{\lambda} (n - n_0) dz. \quad (10.24)$$

Afin d'obtenir une figure d'interférence, il est nécessaire d'avoir un interféromètre légèrement dérégulé, par exemple en tournant très légèrement un miroir. En effet, si deux ondes planes parfaites interfèrent, aucune franges ne sera visible car les phases seront constantes.

### 10.3 Traitement des données

L'obtention de la phase n'est pas chose triviale avec la méthode des franges fines. De nombreuses étapes sont nécessaires. Heureusement, l'informatique a permis d'automatiser au maximum ces tâches : quelques programmes proposent de traiter les données interférométriques simplement.

Lorsque les interférogrammes de référence et de travail ont été enregistrés, on essaye d'obtenir leur phase.

Imaginons que la forme de la figure d'interférence soit :

$$i(x) = i_0 + K(x) \cos(2\pi f_0 x + \phi) \quad (10.25)$$

Avec  $K(x)$  l'amplitude des franges. Formellement, on peut écrire cette relation comme :

$$i(x) = i_0 + \exp(j2\pi f_0 x) c(x) + \exp(-j2\pi f_0 x) c^*(x). \quad (10.26)$$

Avec  $c(x) = K(x) \exp(i\phi)/2$ . Pour isoler la fonction  $c(x)$  contenant la phase, utilisons les propriétés de la transformée de Fourier. La transformée de Fourier de  $i$  donne :

$$I(f) = I_0(f) + C(f - f_0) + C^*(f + f_0) \quad (10.27)$$

Le terme  $I_0$  est centré autour des basses fréquences tandis que  $C$  est positionné au niveau des fréquences  $f_0$  et  $-f_0$ . On applique un filtre passe-bande autour de  $f_0$  de manière à ne

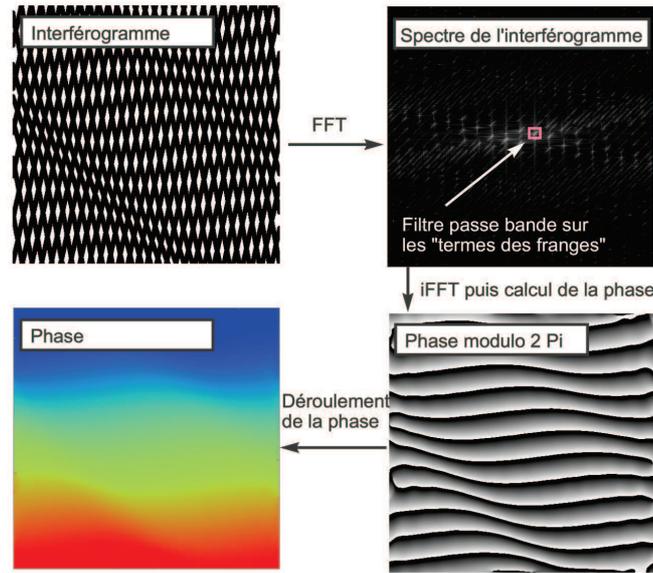


FIGURE 10.5 – Résumé du traitement nécessaire pour obtenir la phase d'un interférogramme.

conserver qu'une partie de l'information portée par les franges. En d'autre termes, ce traitement permet d'isoler  $C(f - f_0)$ . Les termes centrés autour de  $f_0$  sont ensuite placés au niveau de l'origine de manière à supprimer la porteuse.

Pour récupérer la phase, on effectue une transformée de Fourier inverse. On obtiendra ainsi :

$$c(x) = K(x)exp(i\phi) \quad (10.28)$$

Le calcul de la phase modulo  $2\pi$  se fait en utilisant la partie imaginaire et la partie réelle de  $c$  :

$$\phi = Arctan\left(\frac{Im(c)}{Re(c)}\right) \quad (10.29)$$

Finalement, la carte de la phase est obtenue après déroulement de cette dernière par des algorithmes adaptés. Avec cette méthode, il ne sera pas possible de traiter des franges circulaires puisque l'information portée par celles-ci ne sera pas localisé. Un résumé des étapes nécessaires pour obtenir la phase à partir d'un interférogramme est disponible sur la figure 10.5. Au cours de cette thèse, l'ensemble de ces traitements à été fait à l'aide d'un logiciel dédié et gratuit développé à l'université de Graz, IDEA [9].

Lorsque les phases des interférogrammes de travail et de référence ont été calculées, on les soustrait de manière à calculer l'indice de réfraction (eq.10.24).

## 10.4 Conclusion

Malgré la relative simplicité de la théorie de l'interférométrie, cette méthode de diagnostic est relativement compliquée à mettre en œuvre. Au niveau expérimental, de nombreux degrés de liberté jouent sur le réglage d'un interféromètre de Mach-Zehnder, pas moins de quatres

miroirs ou lames semi-transparentes doivent être positionnées correctement pour faire interférer les faisceaux lumineux. De plus, afin d'obtenir des figures d'interférence en sortie de banc de mesure, celui-ci doit être légèrement déréglé. Le traitement des données est compliqué mais de nombreux programmes informatiques permettent maintenant de l'automatiser pourvu que les figures d'interférences présentent des franges quasi-rectilignes.

# Chapitre 11

## L'ombroscopie quantitative

Les souvenirs, c'est le chiendent de  
l'âme. T'as beau les sarcler, ils  
repoussent irrésistiblement.

---

San Antonio

### 11.1 Introduction

L'ombroscopie (ou shadowgraphie) est une très vieille technique de diagnostic des milieux transparents in-homogènes. Nous devons remonter à la fin du 18<sup>ème</sup> siècle pour trouver les premiers documents scientifiques attestant de cette méthode. Ils sont dûs à Jean-Paul Marat, un personnage de la Révolution française très connu pour ses journaux révolutionnaires et ses appels aux meurtres. *L'ami du peuple* est en revanche beaucoup moins connu pour son travail scientifique pourtant foisonnant ; en 1780, il publie un ouvrage intitulé *recherches physique sur le feu* [10] où l'ombroscopie y est pour la première fois décrite et mise en œuvre sur divers objets d'études tels que des flammes de bougie ou des boulets d'acier chauffés (fig.11.1). Un hélioscope, sorte de projecteur solaire de son invention était utilisé pour former un faisceau de lumière parallèle ; ce dernier était employé pour former un ombrogramme sur un écran d'observation. Après la révolution, les actions révolutionnaires de Marat furent largement critiquées, et la majeure partie de son travail scientifique tomba dans l'oubli. Il fallut attendre la fin du 19<sup>ème</sup> siècle pour voir l'ombroscopie réinventé par Vincent Dvorák [11]. Au cours du 20<sup>ème</sup> siècle, cette méthode devient très largement employée du fait du développement rapide de sciences telles que la balistique ou l'aéronautique. Actuellement, cette méthode est surtout utilisée en mécanique des fluides pour étudier qualitativement des écoulements. Cependant, elle peut aussi être utilisée pour obtenir des résultats quantitatifs [12, 13] tels que l'indice de réfraction, la densité de particules ou la température de milieux transparents.

Le principe de la shadowgraphie est relativement simple, comme son nom l'indique elle est basée sur l'étude de l'ombre de milieux in-homogènes. Afin de bien comprendre son principe, considérons un faisceau de lumière parfaitement parallèle se propageant en direction d'un écran (fig.11.2). Lorsque ce faisceau atteint l'écran, le contraste, défini par  $(I - I_0)/I$  est nul car l'intensité lumineuse est partout de  $I_0$ . Imaginons maintenant que l'on place sur le chemin du faisceau lumineux un milieu transparent in-homogène tel qu'une flamme de bougie. Cet objet contient des gradients d'indice qui vont déflécter les rayons lumineux. En conséquence,

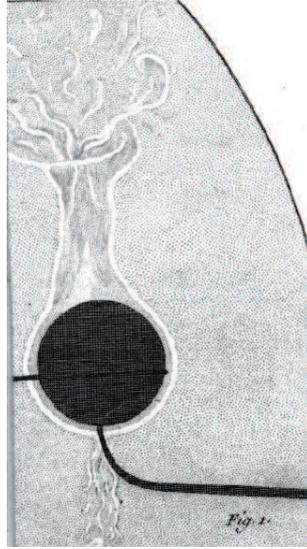


FIGURE 11.1 – Ombrogramme issu de l'ouvrage de Marat [10]. Il représente un boulet en acier chauffé soumis à la convection naturelle.

le contraste observé au niveau de l'écran ne sera plus nul, des zones avec des manques et des surplus de lumière seront discernables.

Nous allons voir au cours de ce chapitre la théorie à mettre en œuvre afin de relier le contraste aux caractéristiques physiques du milieu à diagnostiquer. Nous nous pencherons tout particulièrement sur le traitement mathématique que cette méthode requiert afin d'obtenir des résultats avec une erreur acceptable. Finalement, nous détaillerons la procédure de traitement des données expérimentales.

Les bancs d'ombroscopie développés au cours de la thèse seront présentés dans la partie 5 de ce document. À cette occasion, la méthode de mesure sera validée sur un cas test, avant d'être utilisée sur un jet de plasma laminaire d'argon.

## 11.2 Théorie

Afin de bien comprendre l'ombroscopie, il est nécessaire de revenir aux fondamentaux. Étudions donc la propagation d'un rayon lumineux dans un milieu contenant un gradient d'indice (fig.11.3).

Pendant un temps  $dt$ , le rayon lumineux situé en  $y$  parcourt une distance  $dz$  telle que :

$$dz = \frac{c}{n} dt, \quad (11.1)$$

avec  $c$  la célérité de la lumière dans le vide. En  $y + dy$ , le rayon se propage sur une distance  $(dz + dz^2)$  pendant un temps  $dt$ , on peut donc écrire :

$$dz^2 = dz(y + dy) - dz, \quad (11.2)$$

$$d^2z = \left( \frac{c}{n} dt + c \frac{d(\frac{1}{n})}{dy} dy \cdot dt \right) - \frac{c}{n} dt = c \frac{d(\frac{1}{n})}{dy} dy \cdot dt. \quad (11.3)$$

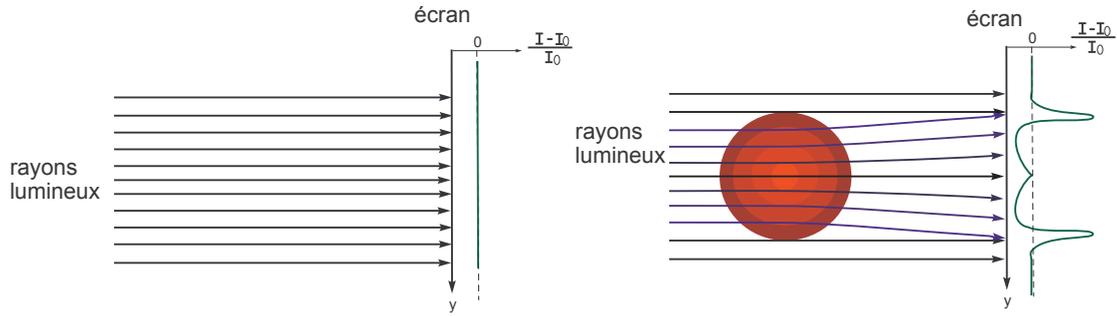


FIGURE 11.2 – Principe de l’ombroscopie. Sur la vignette de droite, les rayons lumineux parallèles traversent un milieu homogène. Sur la vignette de gauche, les rayons lumineux traversent un milieu contenant des gradients d’indice, cela à pour effet de les déformer. Au niveau de l’écran, le contraste ne sera pas nul, des zones avec des surplus et des manques de lumières seront discernables.

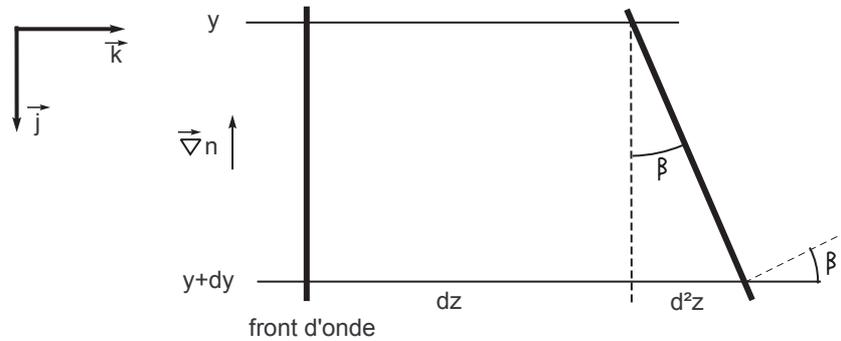


FIGURE 11.3 – Propagation d’un rayon lumineux dans un milieu contenant un gradient d’indice de réfraction.

L’angle de déflexion du rayon est donné par :

$$d\beta \approx \tan\beta \approx \frac{d^2z}{dy}, \tag{11.4}$$

$$d\beta = c \frac{d(\frac{1}{n})}{dy} dt. \tag{11.5}$$

$dt$  peut être exprimé avec l’expression (11.1) de  $dz$ , on obtient ainsi :

$$d\beta = n \frac{d(\frac{1}{n})}{dy} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} dz. \tag{11.6}$$

Si un rayon lumineux parcourt une zone test macroscopique, on aura :

$$\beta = \int \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} dz, \tag{11.7}$$

$$\beta = \int \frac{d \ln(n)}{dy} dz. \tag{11.8}$$

Dans notre cas, on s'intéresse uniquement à des milieux gazeux dont l'indice de réfraction est proche de 1 ; le développement de Taylor de  $\ln(1 + \epsilon) \approx \epsilon$  peut être utilisé.

$$\beta = \int \frac{d(\delta n)}{dy} dz. \quad (11.9)$$

L'angle de déflexion d'un rayon lumineux est relié au gradient d'indice de réfraction. Cette relation est à l'origine de la plupart des méthodes basées sur le gradient d'indice de réfraction telles que le schlieren ou la déflectométrie moiré.

Penchons-nous maintenant sur le fonctionnement d'un banc d'ombroscopie. Des rayons lumineux parallèles se propagent jusqu'à une zone test où ils sont défectés. Finalement, ils viennent frapper un détecteur ou un écran situé à une distance  $L$  de la zone à diagnostiquer .

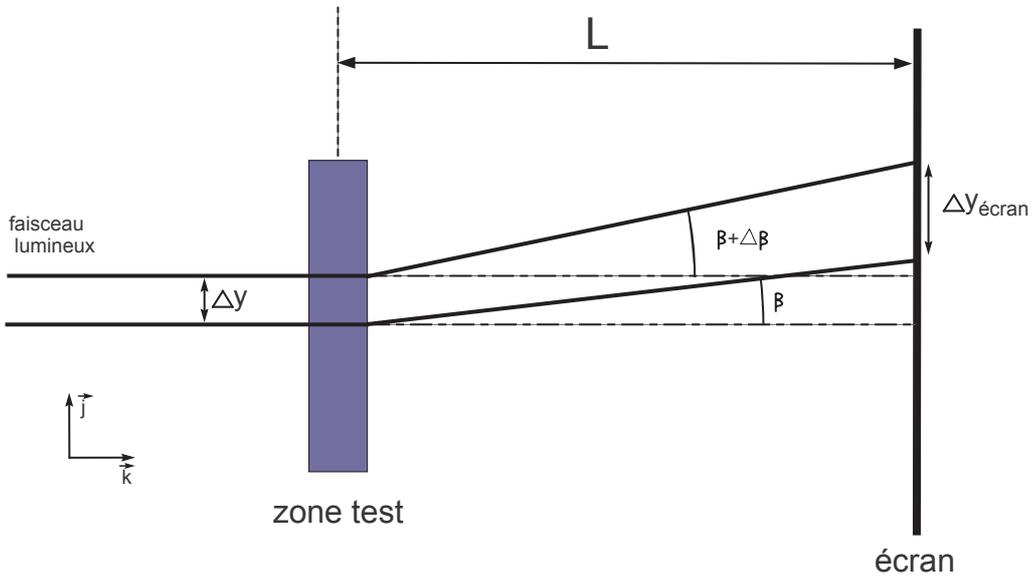


FIGURE 11.4 – Etude du passage d'un faisceau lumineux à travers un banc d'ombroscopie.

Considérons un faisceau lumineux incident d'épaisseur  $\Delta y$  défecté par l'objet test (figure 11.4) ; Il arrive sur l'écran avec une épaisseur  $\Delta y_{\text{écran}}$ . L'intensité lumineuse à ce niveau sera donc de :

$$I = \frac{\Delta y}{\Delta y_{\text{écran}}} I_0, \quad (11.10)$$

où  $I_0$  est l'intensité lumineuse du faisceau au niveau de l'écran lorsqu'il n'est pas défecté. L'expression de  $\Delta y_{\text{écran}}$  peut être obtenu simplement en examinant la figure 11.4 :

$$\Delta y_{\text{écran}} = \Delta y + L \Delta \beta. \quad (11.11)$$

A l'aide de ces résultats, on peut définir l'expression de l'intensité lumineuse relative, aussi appelée contraste :

$$\frac{I - I_0}{I_0} = \frac{\Delta y}{\Delta y_{\text{écran}}} - 1 = \frac{\Delta y}{\Delta y + L \cdot \Delta \beta} - 1. \quad (11.12)$$

Le terme  $L.d\beta$  étant très petit, on peut utiliser le développement limité de  $\frac{1}{1+\epsilon}$  pour réécrire l'équation précédente. On obtient ainsi :

$$\frac{I - I_0}{I_0} = -L \frac{d\beta}{dy}. \quad (11.13)$$

En substituant  $\beta$  par son expression, on obtient finalement :

$$\frac{I - I_0}{I_0} = -L \int \frac{d^2 \delta n}{dy^2} dz. \quad (11.14)$$

Une simplification supplémentaire peut être introduite au niveau de la dérivée seconde ; si l'on considère que les objets à diagnostiquer sont relativement petits, disons d'une épaisseur comprise entre  $10^{-1}$  et  $10^{-3}$  m, le chemin optique des rayons lumineux peut être approximé par une ligne droite avec  $y$  constant car les angles de déflexion ont un ordre de grandeur maximal de  $10^{-4}$  radians. Dans ce cas,  $n$  perd sa dépendance en  $y$  et l'on peut écrire :

$$\frac{I - I_0}{I_0} = -L \frac{d^2}{dy^2} \int \delta n dz. \quad (11.15)$$

On reconnaît dans la relation précédente l'équation de Poisson, une équation très commune en physique. Lorsqu'on enregistre l'intensité relative, deux opérations de traitement des données doivent être effectuées pour accéder à des résultats quantitatifs. On doit tout d'abord résoudre l'équation de Poisson de manière à obtenir l'intégrale de l'indice de réfraction sur les cordes du plasma. Une inversion d'Abel doit être ensuite calculée sur ces résultats afin de trouver une carte de l'indice de réfraction en fonction de  $r$ . Comme nous allons le voir, la résolution de l'équation de Poisson n'est pas si aisée qu'elle n'y paraît ; Un soin particulier doit être apporté au traitement des données afin de ne pas faire exploser l'erreur.

### 11.3 Traitement des données

Le traitement des données est résumé sur la figure 11.5. On commence tout d'abord par enregistrer un ombrogramme avec l'objet à diagnostiquer. Si ce dernier rayonne ou si la mesure n'est pas prise dans l'obscurité, on prendra soin d'enregistrer une image avec les sources lumineuses parasites uniquement afin de supprimer leur contribution du shadowgramme.

Pour de ne pas avoir d'erreurs dans le calcul du contraste, on commence par soustraire la contribution des lumières parasites du shadowgramme (fig.11.5, vignette 1). On choisit ensuite une ligne à traiter puis on recherche l'intensité lumineuse initiale. Si la mesure a été prise judicieusement,  $I_0$  doit pouvoir être mesurée dans les zones où le faisceau lumineux n'a pas été perturbé par les gradients d'indice.

L'obtention de  $I_0$  permet de calculer le contraste. Lors de ce calcul, on prendra soin de vérifier que l'intégrale du contraste sur tout le profil est nul car, comme nous le verrons, l'équation de Poisson y est très sensible. Si les données sont bruitées, il est nécessaire d'ajuster  $I_0$  de manière à avoir une intégrale du contraste nul.

On peut symétriser l'ombrogramme au besoin si une inversion d'Abel doit être effectuée par la suite. Cette opération se fait avant la recherche de  $I_0$ . On considère que toute la lumière en surplus d'un côté du profil provient de l'autre, ce qui permet de moyenniser les surplus et les manques de lumière (fig.11.5, vignette 3).

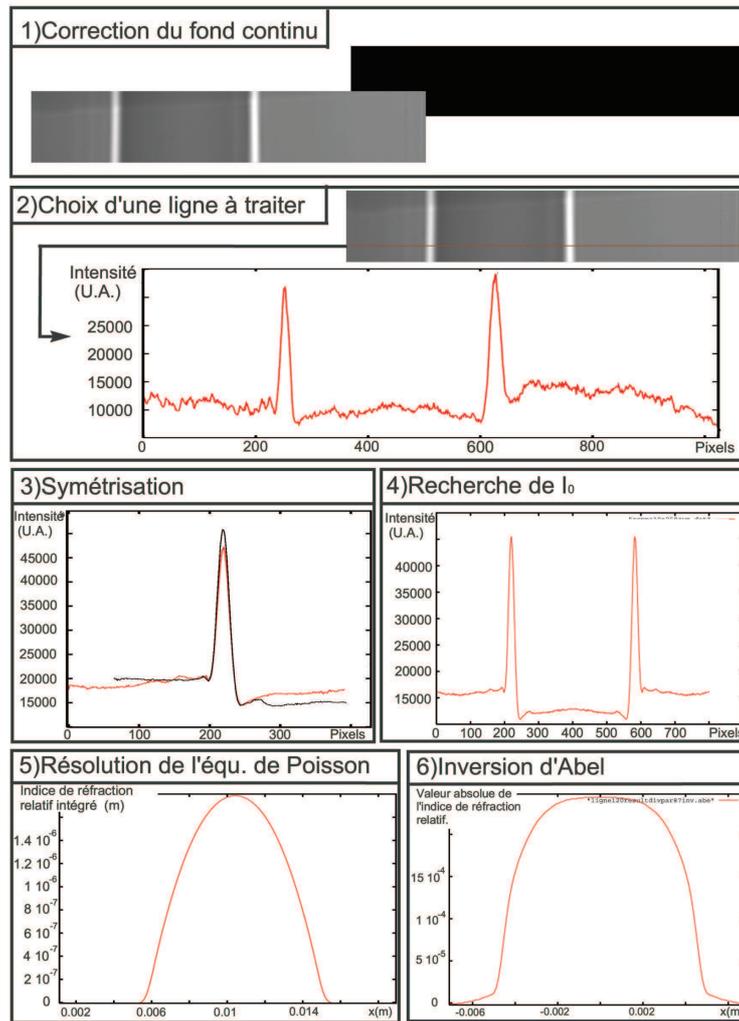


FIGURE 11.5 – Résumé des différentes étapes pour le traitement d'un ombrogramme.

Le contraste fraîchement calculé est utilisé pour résoudre l'équation de Poisson. On obtient au final :

$$\delta N = \int_{\text{corde}} \delta n dz \quad (11.16)$$

Pour les plasmas et les flammes, cette grandeur est négative, ce qui peut poser problème pour certaines méthodes d'inversion d'Abel, il est donc préconisé de travailler avec la valeur absolue de  $\delta N$  pendant tout le processus de traitement des données. Pour les cas où la symétrie est cylindrique, on effectue une inversion d'Abel sur ce résultat de manière à obtenir un champ d'indice de réfraction en fonction de  $r$ . Si la symétrie du profil est quelconque, une méthode plus complexe, la tomographie, doit être implémentée.

### 11.3.1 Résolution de l'équation de Poisson

Nous avons vu précédemment que l'intégrale de l'indice de réfraction du milieu à diagnostiquer était reliée au contraste par une équation de Poisson de la forme :

$$\Delta I = \frac{d^2 \delta N}{dy^2}, \quad (11.17)$$

avec  $\Delta I = \frac{I_0 - I}{I_0 L}$  et  $\delta N = \int \delta n dz$ . Pour obtenir l'indice de réfraction, il est nécessaire de résoudre cette équation; nous proposons pour cela deux méthodes différentes. La première consiste à résoudre l'équation à l'aide d'une méthode aux différences finies et d'un ordinateur tandis que la seconde, plus grossière, est basée sur l'idéalisation d'ombrogrammes puis sur une résolution à la main de l'équation.

#### Résolution de l'équation de Poisson à la main

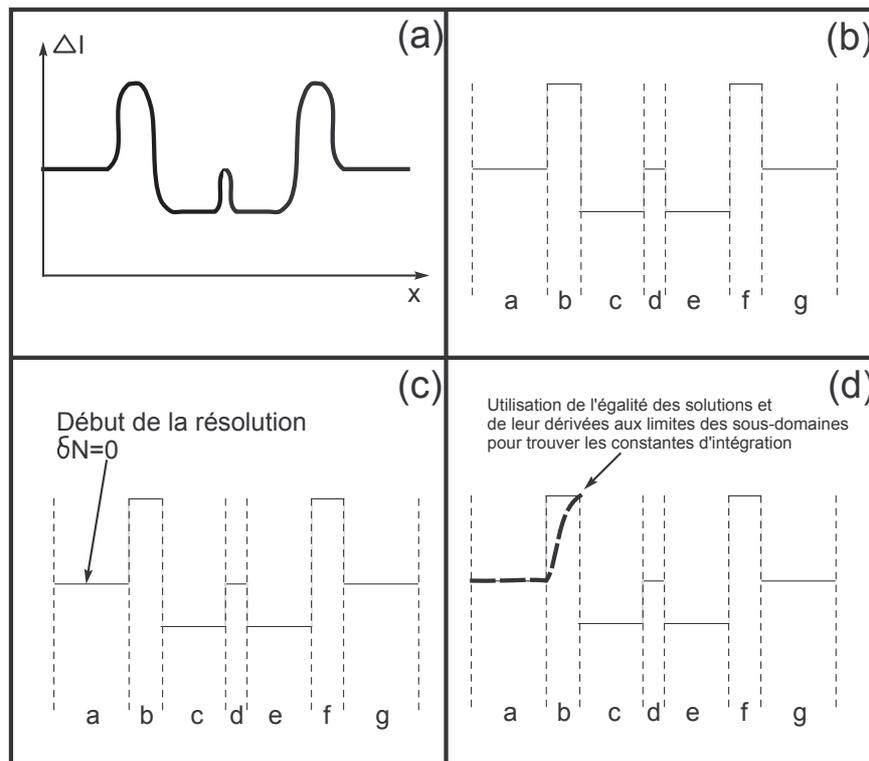


FIGURE 11.6 – Résolution de l'équation de Poisson à la main. Vignette (a) : Contraste sur lequel résoudre l'équation de Poisson. Vignette (b) : découpage du domaine en  $s = 7$  sous-domaines, et approximation du contraste par des polynômes d'ordre zéro. Vignette (c) : début de la résolution sur le sous-domaine à la limite gauche; la connaissance de  $\delta N$  permet de déterminer les constantes d'intégration. Vignette (d) : l'équation de poisson est résolue de sous-domaine en sous-domaine. La continuité de la solution et de ses dérivées aux limites de chaque sous-domaine permet l'obtention des constantes d'intégrations.

Afin de résoudre l'équation (11.17) à la main, on découpe le domaine de résolution en un petit nombre  $s$  de sous-domaines où le contraste sera approximé par un polynôme d'ordre

ou un. Durant cette procédure, on fait en sorte que l'intégrale du contraste approximé soit nulle de manière à limiter l'erreur lors de la résolution. Lorsque l'interpolation est effectuée, on doit résoudre sur tous les sous-domaines des équations de la forme de (11.18) ou de (11.19) en fonction de la méthode d'interpolation choisie :

$$\frac{d^2 \delta N}{dy^2} = a, \quad (11.18)$$

$$\frac{d^2 \delta N}{dy^2} = ax + b. \quad (11.19)$$

La résolution débute généralement sur le sous-domaine qui contient la limite gauche du domaine car nous savons, si l'ombrogramme est judicieusement enregistré, que  $\delta N = 0$  à cet endroit. Lorsque la solution est calculée, on procède à la résolution de l'équation de Poisson sur le sous-domaine adjacent et ainsi de suite jusqu'à ce que la limite droite du domaine soit atteinte. Les constantes d'intégrations sont obtenues en imposant la continuité de  $\delta N$  et de ses dérivées aux limites de chaque sous-domaine. Le résumé des étapes de calculs est disponible sur le graphique 11.6.

### Méthode des différences finies

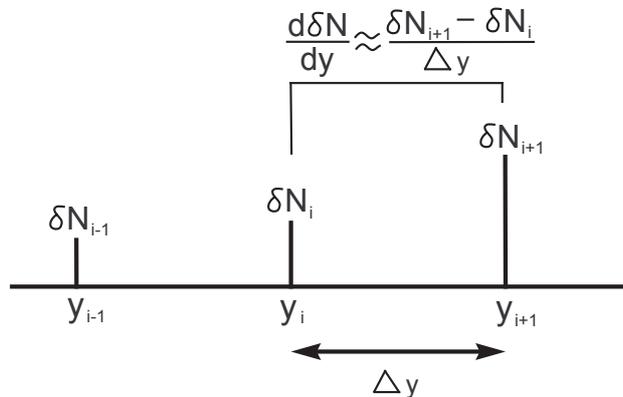


FIGURE 11.7 – Grille de résolution utilisée pour établir l'équation de Poisson aux différences finies.

Cette méthode est la plus simple à mettre en œuvre car elle permet de traiter directement les fichiers de résultats issus des expériences. La méthode des différences finies consiste à convertir l'équation différentielle (11.17) en équation aux différences finies de manière à la résoudre sur une grille de points [14]. La transformation se fait simplement en remplaçant les dérivées par des dérivées numériques, et les grandeurs requises ( $\Delta I$  par exemple) par leur valeurs au nœud considéré. Par souci de simplicité, on considère qu'il y a une distance constante  $\Delta x$  entre chaque nœud de la grille. Ce n'est pas un problème ici puisque, si l'on enregistre un shadowgramme avec une caméra, l'espace entre les pixels est constant.

Sur le  $i^{\text{ème}}$  point d'une grille contenant  $n$  points, l'équation sera donnée par (fig.11.7) :

$$\Delta I_i = \frac{\frac{\delta N_{i+1} - \delta N_i}{\Delta y} - \frac{\delta N_i - \delta N_{i-1}}{\Delta y}}{\Delta y}; \quad (11.20)$$

$$\Delta I_i = \frac{\delta N_{i+1} - 2\delta N_i + \delta N_{i-1}}{\Delta y^2}. \quad (11.21)$$

L'indice  $i$  permet de se repérer sur le domaine de résolution. Si l'on considère l'ensemble des points du domaine, on obtient un système d'équation qui peut être écrit sous forme matricielle :

$$A \cdot \delta N = \Delta I; \quad (11.22)$$

Avec  $A$  la matrice des coefficients,  $\delta N$  un vecteur ligne correspondant à la solution sur le domaine considéré et  $\Delta I$  un vecteur contenant le contraste sur l'ensemble des points du domaine. La matrice des coefficients,  $A$ , est diagonalement dominante, on peut donc utiliser des méthodes de type relaxation pour résoudre le système. De manière formelle, si l'on connaît la solution exacte sur l'ensemble du domaine de résolution excepté en un point  $i$ , on peut écrire pour ce dernier :

$$\delta N_i = \frac{1}{A_{i,i}} \left( \Delta I_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} \delta N_j - \sum_{j=i+1}^n A_{i,j} \delta N_j \right). \quad (11.23)$$

Si la solution du système n'est pas connue, la relation précédente permet de modifier une solution quelconque, itération après itération, jusqu'à ce qu'elle satisfasse aux contraintes du système.

$$\delta N_i^{k+1} = \frac{1}{A_{i,i}} \left( \Delta I_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} \delta N_j^k - \sum_{j=i+1}^n A_{i,j} \delta N_j^k \right). \quad (11.24)$$

Cette relation peut être réécrite en une forme plus simple à manipuler :

$$\delta N_i^{k+1} = \delta N_i^k + \frac{1}{A_{i,i}} \left( \Delta I_i - \sum_{j=1}^n A_{i,j} \delta N_j^k \right). \quad (11.25)$$

Le terme  $\frac{1}{A_{i,i}} \left( \Delta I_i - \sum_{j=1}^n A_{i,j} \delta N_j^k \right)$  est appelé résidu. C'est la différence entre la solution actuelle et la solution exacte, il est donc courant d'utiliser cette grandeur pour suivre la convergence de la solution. Généralement, on arrêtera le calcul lorsque les résidus seront inférieurs à une erreur  $\epsilon$ .

### 11.3.2 Sensibilité à l'erreur de l'équation de Poisson

La qualité des résultats de l'ombroscopie quantitative dépend de la sensibilité à l'erreur de toutes les étapes de traitement des données. L'inversion d'Abel n'est pas un problème puisque nous avons vu dans la partie 1 que des méthodes de lissages existaient pour diminuer sa sensibilité à l'erreur. Nous n'avons pas encore examiné la sensibilité de l'équation de Poisson à l'erreur ; pour ce faire, on étudie une distribution de contraste idéale dont la représentation est disponible sur la figure 11.8. Cette distribution est similaire à celle obtenue lors du diagnostic des flammes et des plasmas. Deux sources d'erreur ont été étudiées, la première correspond

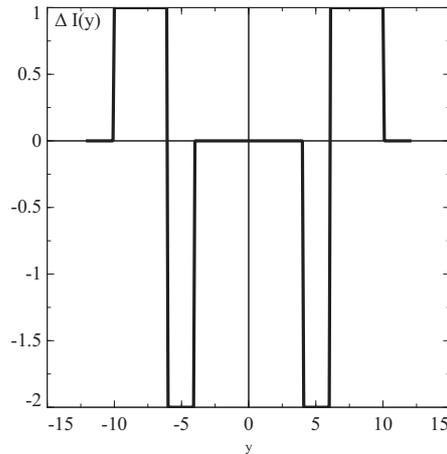


FIGURE 11.8 – Profil de contraste idéal utilisé pour l'étude de la sensibilité à l'erreur de l'équation de Poisson.

à une asymétrie du profil de contraste et la seconde à une valeur moyenne du contraste non nulle.

L'asymétrie a été étudiée en ajoutant sur le côté gauche du profil  $+0.05$  lorsque  $\Delta I$  est positif et  $-0.025$  lorsque  $\Delta I$  est négatif. Sur le côté droit du profil, on a ajouté  $-0.05$  lorsque  $\Delta I$  est positif et  $+0.025$  lorsque  $\Delta I$  est négatif. Le profil ainsi que la solution obtenue à l'aide de la méthode de Jacobi sont présentés sur la figure 11.9. À titre de comparaison, la solution obtenue avec le profil idéal est aussi présentée sur la figure. Comme on peut le constater, l'asymétrie n'influe pas fortement sur la solution de l'équation de Poisson. On remarque cependant que cette dernière a un léger impact sur les bords de la solution. Si l'on désire étudier les zones périphériques des plasmas ou des flammes cylindriques, on prendra soin d'enregistrer des profils les plus symétriques possibles. On pourra aussi symétriser les ombrogrammes afin d'obtenir de meilleurs résultats.

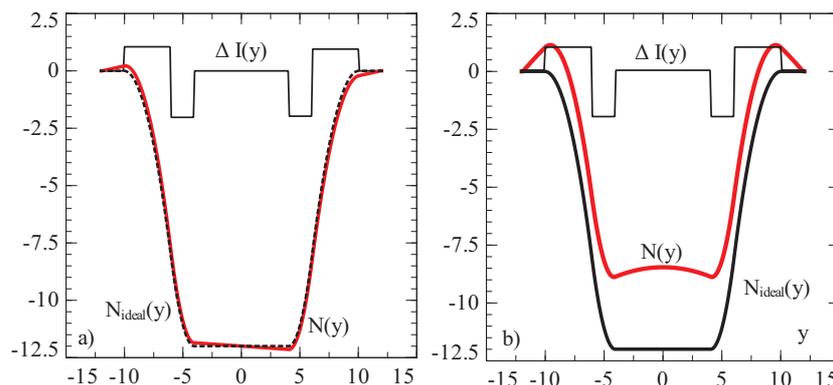


FIGURE 11.9 – Vignette a) : Effet de l'asymétrie d'un profil  $\Delta I$  sur la solution de l'équation de Poisson. La solution idéale est affichée en pointillé à titre de comparaison. Vignette b) : Effet d'une valeur moyenne de  $\Delta I$  non nulle sur la solution de l'équation de Poisson. Ici,  $\langle \Delta I \rangle = 0.05$ .

Pour étudier l'effet d'une valeur moyenne non-nulle, nous avons ajouté  $0.05$  à  $\Delta I$  sur tout

le profil. La solution calculée à l'aide de la méthode de relaxation ainsi que la solution idéale sont présentées sur la figure 11.9. Une valeur moyenne non-nulle a un effet catastrophique sur la solution avec, au centre du profil, des erreurs relatives de l'ordre de 40 %. Cela est tout à fait compréhensible puisque la résolution de l'équation de Poisson se fait en intégrant deux fois  $\Delta I$ . Une petite incertitude sur la valeur moyenne entraînera une erreur importante au niveau du calcul de la surface sous la courbe. Afin d'obtenir de résultats exploitables, il est de première importance d'avoir une valeur moyenne de  $\Delta I$  nulle. Pour ce faire, nous avons écrit un programme qui recherche et corrige légèrement la valeur de  $I_0$  de manière à obtenir une valeur moyenne de contraste nulle.

## 11.4 Conclusion

Malgré sa faible popularité dans le milieu scientifique, l'ombroscopie quantitative est une méthode de choix pour le diagnostic de milieux gazeux in-homogènes. Très peu de matériel et un réglage minimum du banc de mesure sont nécessaires pour obtenir des bons résultats; une caméra et une source lumineuse de qualité suffisent à enregistrer des ombrogrammes. Contrairement à l'interférométrie, cette méthode n'est pas basée sur la différence de marche de rayons lumineux. Il est ainsi possible d'effectuer des mesures sur des objets qui brouillent généralement les franges (turbulence etc...). En outre, l'interférométrie est perturbée par un effet d'ombroscopie qui limite sensiblement le contraste des franges dans les zones présentant de fort gradients d'indice. Avec l'ombroscopie, cela n'est pas un problème.

Finalement, l'intérêt de cette méthode de mesure réside aussi dans son potentiel académique. La théorie nécessaire pour relier le contraste à l'indice de réfraction est abordable pour des étudiants de licence, de même que le traitement des données. On peut donc facilement étudier un banc de shadowgraphie en travaux pratiques [15].

À l'inverse de l'interférométrie, il n'existe pas d'outils standards pour effectuer le traitement des données. Pour combler ce manque, j'ai développé plusieurs programmes au cours de cette thèse; leurs sources sont disponibles en annexe et dans la publication [15].



# Chapitre 12

## Défectométrie moiré

Les minutes s'enchaînent, me  
permettant de mesurer l'inexorabilité de  
la vie qui coule, coule sans trêve,  
indifférente à nos états d'âme. Et,  
crois-le bien, que tu fasses l'amour ou  
des mots croisés, la trotteuse ne flanche  
pas, ne ralentit pas et t'estoque à  
chaque seconde pour, vicieusement, te  
déguiser en mort, toi si peinarde dans  
ton présent d'aujourd'hui.

---

San Antonio

### 12.1 Rappel sur l'analyse de Fourier

La théorie de la déflectométrie moiré fait appel à de nombreuses notions du traitement du signal. Comme nous le verrons par la suite, il s'agit d'étudier la propagation d'ondes lumineuses à travers divers composants optiques. Par souci de simplicité, cela se fait généralement dans l'espace de Fourier et/ou à l'aide de séries de Fourier. Nous allons revenir ici sur les notions de bases de l'analyse de Fourier [16] afin de bien comprendre la théorie développée par la suite.

#### 12.1.1 Définition

La transformée de Fourier d'une fonction  $g$  de deux variables indépendantes  $x$  et  $y$  notée  $TF(g(x, y))$  est définie par :

$$TF(g(x, y)) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp[-j2\pi(f_X x + f_Y y)] dx dy, \quad (12.1)$$

où  $f_X$  et  $f_Y$  sont des variables indépendantes qui correspondent à des fréquences.  $TF(g(x, y))$  est une fonction complexe. De manière similaire, la transformée de Fourier inverse d'une fonction  $G(f_X, f_Y)$  notée  $TF^{-1}(G(f_X, f_Y))$  est définie par :

$$TF^{-1}(G(f_X, f_Y)) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_X, f_Y) \exp[j2\pi(f_X x + f_Y y)] df_X df_Y. \quad (12.2)$$

La transformée de Fourier et son inverse sont symétriques, cette propriété est très importante et sera utilisée par la suite pour déterminer aisément la transformée inverse de certaines fonctions.

Cette transformée a été initialement inventée par Fourier au début du 19<sup>ème</sup> siècle pour résoudre des problèmes de conduction de la chaleur. Elle permet de décomposer une fonction compliquée en une somme de fonctions élémentaires afin de traiter des systèmes linéaires plus simplement. En effet, il suffit de sommer la réponse de chacune de ces fonctions élémentaire pour obtenir la réponse associée à la fonction initiale. Si l'on considère la transformée de Fourier inverse suivante :

$$g(t) = \int G(f) \exp(j.2\pi.f.t) df, \quad (12.3)$$

elle exprime la fonction  $g$  en termes dépendants de son spectre de fréquence.  $g$  est décomposé suivant une base de fonctions élémentaires de la forme  $\exp[j2\pi ft]$ . La fonction  $G(f)$  est un poids qui est appliqué aux fonctions élémentaires de fréquence  $f$ , elle permet de moduler la somme pour produire  $g(t)$ .

### 12.1.2 Propriété de la transformée de Fourier

#### Linéarité

Soit deux fonctions continues  $g(x)$  et  $h(x)$  et deux constantes réelles  $A$  et  $B$  :

$$\begin{aligned} TF(A.g(x) + B.h(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} (A.g(x) + B.h(x)) \exp[-j2\pi fx] dx; \\ &= A \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp[-j2\pi fx] dx + B \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \exp[-j2\pi fx] dx; \\ &= A.TF(g(x)) + B.TF(h(x)). \end{aligned} \quad (12.4)$$

La transformée de Fourier est une opération linéaire.

#### Étirement des axes

On considère une fonction continue  $g(x)$  et une constante réelle  $a$ . On étire l'axe des abscisses grâce à la constante  $a$ , on obtient ainsi :

$$TF(g(ax)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(ax) \exp[-j2\pi fx] dx. \quad (12.5)$$

On effectue un changement de variable  $ax = y$  :

$$TF(g(ax)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \exp\left[-j2\pi f \frac{y}{a}\right] \frac{dy}{a}, \quad (12.6)$$

$$TF(g(ax)) = \frac{1}{a} G(f/a), \quad (12.7)$$

où  $G$  est la transformée de Fourier de  $g$ .

### Décalage de l'axe des abscisses

Soit  $g$  une fonction continue et  $G$  sa transformée de Fourier.  $a$  est une constante réelle. On décide de décaler l'axe des abscisses de  $a$ . Calculons la transformée de Fourier de  $g(x - a)$  :

$$TF(g(x - a)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - a) \exp[-j2\pi f x] dx. \quad (12.8)$$

On effectue le changement de variable  $x - a = y$

$$TF(g(x - a)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp[-j2\pi f(y + a)] dy, \quad (12.9)$$

$$TF(g(x - a)) = \exp[-j2\pi f a] \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp[-j2\pi f(y)] dy, \quad (12.10)$$

$$TF(g(x - a)) = \exp[-j2\pi f a] TF(g(x)). \quad (12.11)$$

### Transformée de Fourier d'une Convolution

## 12.2 Méthode de la phase stationnaire

En optique de Fourier, il n'est pas rare de calculer des intégrales présentant des fonctions oscillantes. Le calcul de ce genre d'intégrale n'est pas trivial et nécessite un traitement spécial par la méthode dite de la "phase stationnaire" [17]. Celle-ci a été développée par Kelvin au début du 19<sup>ème</sup> siècle pour calculer des intégrales rencontrées en hydrodynamique. Elle permet d'estimer des intégrales de fonctions oscillantes et plus particulièrement de fonctions exponentielles complexes de type superchirp  $\exp(j\pi x^n)$ . Son principe est le suivant ; soit une fonction  $I$  telle que :

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(jk g(x)) dx, \quad (12.12)$$

$k$  est une constante réelle très grande. Il est évident que la fréquence d'oscillation de l'exponentielle dépend d'une part de  $k$  et d'autre part de la fonction  $g(x)$ . Comme  $k$  est grand, la fréquence d'oscillation sera grande partout sur le domaine d'intégration sauf là où  $g(x)$  ne varie pas vite ( $dg(x)/dx \approx 0$ ). On en déduit que les endroits où la fréquence d'oscillation de l'exponentielle est beaucoup plus grande que le taux de variation de  $f(x)$  ne contribuent pas beaucoup à l'intégrale.

Autrement dit, la contribution majeure à l'intégrale se fera dans les zones où la phase de l'exponentielle complexe est constante.

Pour bien comprendre cette méthode, traitons le cas où  $g(x) = x^2$  et  $f(x)$  une fonction quelconque idéale.

$$\frac{dg(x)}{dx} = 2x. \quad (12.13)$$

La dérivée de  $g(x)$  est nulle en  $x_0 = 0$ . Développons  $g$  en série de Taylor autour de  $x_0$  pour simplifier l'expression de l'intégrale :

$$DL(g(x_0 + h)) = g(x_0) + \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x_0} h + \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x_0} \frac{h^2}{2!} + \dots, \quad (12.14)$$

avec  $h = (x - x_0)$ . On remplace  $g$  par son développement limité dans l'intégrale :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(jk \left[ g(x_0) + \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x_0} h + \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x_0} \frac{h^2}{2!} + \dots \right]) dx. \quad (12.15)$$

Le premier terme du développement de Taylor est une constante et peut être sorti de l'intégrale :

$$I(x) = \exp(jkx_0) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(jk \left[ \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x_0} h + \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x_0} \frac{h^2}{2!} + \dots \right]) dx \quad (12.16)$$

Si la fréquence  $k$  est assez grande pour que le terme exponentiel oscille de très nombreuses fois lors de la variation de  $f(x)$ , alors on peut approximer l'intégrale. Dans ces conditions,  $f(x)$  contribue de manière significative à l'intégrale au voisinage du point de phase stationnaire :  $f(x)$  peut donc être approximée par  $f(x_0)$ . Cela permet en outre de changer les bornes de l'intégrale initialement infinies en bornes finies qui limitent le calcul au voisinage du point de phase stationnaire.

On obtient ainsi :

$$I \approx f(x_0) \exp(jkg(x_0)) \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \exp(jk \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x_0} \frac{h^2}{2!}) dx. \quad (12.17)$$

On ne prendra en compte dans le calcul que le premier terme non nul d'ordre deux ou supérieur du développement de Taylor car nous avons  $dg/dx = 0$  et  $h^2 \gg h^n$  pour  $n \geq 3$ .

La surface du terme exponentiel de phase quadratique est aussi concentré autour du point stationnaire. Pour effectuer le calcul de l'intégrale, on peut donc en modifier les bornes, on n'induera que très peu d'erreurs supplémentaires en passant à une intégration sur tout  $\mathbb{R}$ .

$$\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \exp(jk \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x_0} \frac{h^2}{2!}) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(jk \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x_0} \frac{h^2}{2!}) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx. \quad (12.18)$$

Pour calculer cette intégrale, on utilise le théorème de l'ordonnée centrale [17]. Il consiste à calculer la transformée de Fourier de  $h(x)$  pour obtenir sa surface. En effet, d'après la définition de la transformée de Fourier, on sait que :

$$G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp(-j2\pi 0x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx. \quad (12.19)$$

On commence par effectuer un changement de variable sur  $h(x)$ , on pose :

$$X^2 = k \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x_0} \frac{h^2}{2\pi}, \quad (12.20)$$

$$X = \sqrt{\left. \frac{k}{2\pi} \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x_0}} (x - x_0). \quad (12.21)$$

$$dX = \sqrt{\left. \frac{k}{2\pi} \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x_0}} dx, \quad (12.22)$$

$$TF(h) = \frac{1}{\sqrt{\left. \frac{k}{2\pi} \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x_0}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\pi X^2) \exp(-j2\pi fX) dX, \quad (12.23)$$

$$TF(h) = \frac{1}{\sqrt{\left. \frac{k}{2\pi} \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x_0}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\pi X^2 - 2fX + f^2 - f^2) dX. \quad (12.24)$$

$$TF(h) = \exp(-j\pi f^2) \frac{1}{\sqrt{\left. \frac{k}{2\pi} \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x_0}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\pi(X-f)^2) dX. \quad (12.25)$$

On peut mettre cette fonction sous la forme d'une fonction gamma d'Euler. Il suffit pour cela d'effectuer le changement de variable suivant :

$$t = -j\pi(X-f)^2; \quad (12.26)$$

$$dt = -j2\pi(X-f)dX; \quad (12.27)$$

$$TF(h) = \exp(-j\pi f^2) \frac{1}{\sqrt{\left. \frac{k}{2\pi} \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x_0}}} 2 \int_0^{\infty} \exp(-t) \frac{dt}{-j\pi 2(X-f)}. \quad (12.28)$$

$(X-f)$  est une partie du terme  $\sqrt{t}$ , on reconnaît du coup la fonction  $\Gamma(1/2)$ .

$$TF(h) = \exp(-j\pi f^2) \frac{1}{\sqrt{\left. \frac{k}{2\pi} \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x_0}}} \frac{2}{-\sqrt{j\pi} \cdot 2} \int_0^{\infty} \exp(-t) \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad (12.29)$$

$$TF(h) = \exp(-j\pi f^2) \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\left. k \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x_0}}} \frac{2}{-\sqrt{j\pi} \cdot 2} \sqrt{\pi} = \exp(-j\pi f^2) \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\left. k \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x_0}}} \frac{1}{-\sqrt{j}} \quad (12.30)$$

$$TF(h) = \exp(-j\pi f^2) \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\left. k \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x_0}}} \sqrt{\exp(j\frac{\pi}{2})} = \exp(-j\pi f^2) \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\left. k \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x_0}}} \exp(j\frac{\pi}{4}) \quad (12.31)$$

L'intégrale de  $h(x)$  sur  $\mathbb{R}$  vaut :

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\left. k \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x_0}}} \exp(j\frac{\pi}{4}) \quad (12.32)$$

Grâce à cela, on obtient :

$$I \approx f(x_0) \exp(jkg(x_0)) \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\left. k \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x_0}}} \exp(j\frac{\pi}{4}) \quad (12.33)$$

## 12.3 Introduction

L'effet moiré peut être observé lorsqu'on superpose deux structures périodiques ou pseudo-périodiques, des franges sombres apparaissent aux endroits où il y a superposition des structures. Ce phénomène apparaît fréquemment dans la vie de tous les jours, on peut l'observer au niveau des replis de certaines étoffes transparentes, ou bien à la télévision, lorsqu'un personnage porte des vêtements rayés. La première mention de l'utilisation scientifique de cet effet remonte à 1874, Lord Rayleigh proposait alors de l'utiliser afin de tester la qualité des copies de réseau de diffraction [18]. Au niveau théorique, cet effet a été très étudié entre la fin du 19<sup>ème</sup> et le début du 20<sup>ème</sup> siècle. En 1887, Righi fut un des premiers à étudier l'influence de la transmittance des structures périodiques sur la formation des franges de moiré [19]. Il traite notamment le cas de franges formées par des réseaux circulaires. Dans les années 1920, Ronchi, Raman et Shuster entre autres étudiaient cet effet à l'aide de divers réseaux.

Le terme "moiré" provient du français, il signifie "ondoyant", qui possède un reflet semblable à de la soie. C'est Mulot, un scientifique français qui lui donna son nom définitif en 1925 à travers son article *Application du moiré à l'étude des déformations du mica* [20].

Jusqu'à la fin des années 1940, l'effet moiré est surtout utilisé pour diagnostiquer des réseaux et pour mesurer des déformations dans les matériaux. La deuxième moitié du XX<sup>ème</sup> siècle marque son essor dans de nombreux domaines. Son utilisation pour la mesure topographique est mise à profit en informatique pour numériser des objets en trois dimensions [21]. En médecine, la mesure de topographie permet de détecter rapidement des maladies telles que les scoliose [22]. Enfin, dans l'industrie, cet effet permet, entre autre, de vérifier la qualité des têtes d'impression à technologie jet d'encre [23] ou bien encore d'effectuer des tests de résistance de composants dans la micro-électronique [24].

Le domaine qui nous intéresse ici, l'interférométrie moiré, est né en 1956 avec la parution du livre *The interference system of crossed diffraction gratings* [25]. Cette technique, aussi appelée défectométrie moiré permet de diagnostiquer des milieux transparents inhomogènes. Elle est très utilisée dans le domaine du test d'optiques ainsi qu'en mécanique des fluides pour visualiser des écoulements.

Depuis les années 1980, de nombreux travaux théoriques ont été menés afin de comprendre la formation des franges de moiré et de déterminer les limites de cette méthode. Kafri, Glatt et quelques autres sont les plus gros contributeurs à cette littérature où de nombreuses approches, aussi bien à l'aide de l'optique géométrique que de l'optique physique, ont permis de maîtriser ce système de mesure.

Nous allons nous pencher ici sur la théorie de la défectométrie moiré. Par souci de simplicité, nous nous limiterons aux cas où des milieux gazeux sont diagnostiqués. Nous introduirons, à l'aide d'approches de complexité croissante, les principes de fonctionnement et les caractéristiques de cette méthode de mesure. Grâce à l'optique géométrique, on mettra en évidence l'existence de figures d'interférences. L'utilisation de l'optique de Fourier soulignera les limites de ces approches géométriques et fournira les paramètres clés intervenant dans le réglage d'un défectomètre. À cette occasion, nous prouverons quelques points qui font débat dans la littérature. Nous montrerons que cette technique peut donner des résultats quantitatifs qui la rendent très utile pour le diagnostic des décharges d'arc [26]. Nous mettrons aussi en exergue les nombreux avantages qu'elle possède comme sa sensibilité réglable, ou bien encore son insensibilité au bruit lors des inversions d'Abel.

## 12.4 Théorie : optique géométrique

Avant de se pencher sur la théorie de la déflectométrie moiré, il est nécessaire de présenter un interféromètre moiré typique. Ce dispositif de mesure, présenté sur la figure 12.1, est constitué uniquement d'une source de lumière monochromatique et parallèle, et de deux réseaux en transmission (réseau de Ronchi)  $G1$  et  $G2$  séparés par une distance  $d$ . Les réseaux sont tournés dans le plan  $yz$  respectivement d'un petit angle  $\alpha/2$  et  $-\alpha/2$  de manière à former des figures d'interférences (figure 12.2). Afin d'observer les franges de moiré, un écran est placé à une

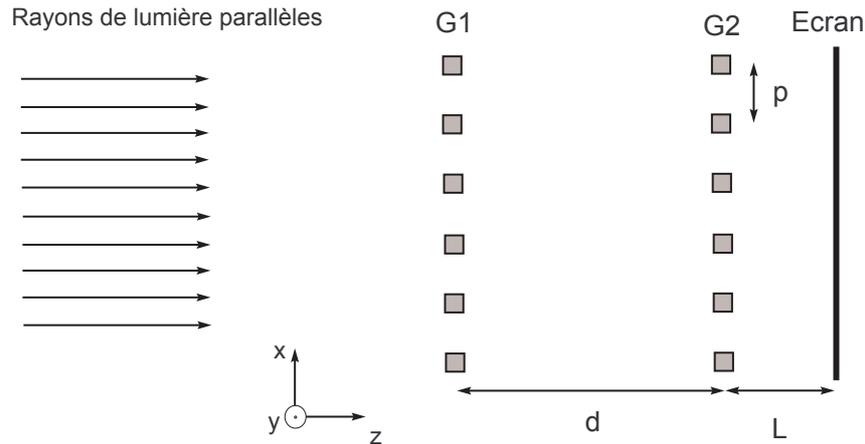


FIGURE 12.1 – Schéma d'un déflectomètre moiré typique.

distance  $L$  de  $G2$ . Souvent, la littérature préconise de placer l'écran juste derrière le second réseau [27]. C'est ce que l'on va postuler pour l'instant, mais nous verrons avec une approche plus complexe que cette condition n'est pas nécessaire. L'objet à diagnostiquer se place avant le réseau  $G1$ .

D'une manière générale, et ce quel que soit le domaine d'application, l'utilisation de l'effet moiré se fait toujours par l'étude de la perturbation des figures d'interférences produites. Dans le cas des mesures topographiques, la perturbation des franges est due aux reliefs de l'objet à étudier qui modifie l'ombre projetée des réseaux. Pour l'étude des déformations d'éprouvettes, c'est la déformation du réseau collé sur ces dernières qui entraîne une modification de la figure d'interférence.

Dans notre cas, les gradients d'indice de l'objet à diagnostiquer vont courber les rayons lumineux; cela aura pour effet de modifier l'ombre de  $G1$  et donc, de perturber les figures d'interférence. Finalement, l'étude des figures d'interférence à la sortie de  $G2$  revient à étudier la superposition de l'ombre de  $G1$  sur le réseau  $G2$ .

### 12.4.1 Méthode des équations paramétriques

Les grilles de Ronchi sont des réseaux en transmission constitués de lignes parallèles complètement opaques. Un réseau dont les traits sont verticaux peut être aisément décrit à l'aide d'une équation paramétrique de la forme :

$$x = mp, \quad (12.34)$$

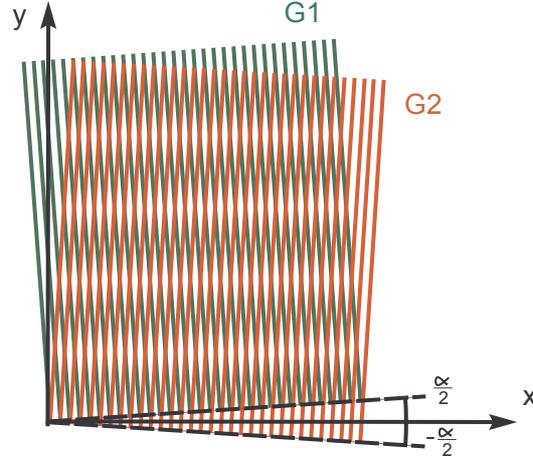


FIGURE 12.2 – Formation de franges de moiré à l'aide de deux structures périodiques similaires aux grilles de Ronchi.

avec  $m$  un nombre entier et  $p$  le pas du réseau.  $x$  correspondra à la position des traits sombres du réseau. Lorsque le réseau est tourné d'un angle  $\alpha/2$ , la configuration obtenue est similaire à celle présentée sur la figure 12.3. Cette fois ci, l'équation paramétrique est :

$$x = \frac{mp}{\cos(\alpha/2)} - b. \quad (12.35)$$

À l'aide de la figure 12.3, on peut définir  $b$  comme :

$$b = y \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}. \quad (12.36)$$

Au final, on obtient :

$$x = \frac{mp}{\cos(\alpha/2)} - y \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}. \quad (12.37)$$

Les figures d'interférences sont obtenues grâce à la superposition de l'ombre de  $G1$  avec  $G2$ . Si le défectomètre ne contient aucun objet à diagnostiquer, l'ombre aura la même équation paramétrique que  $G1$ . Cherchons la position des franges sombres, c'est-à-dire, si l'on examine la figure 12.2, les points où l'ombre et  $G2$  se superposent. Pour l'ombre de  $G1$ , nous avons :

$$x = \frac{mp}{\cos(\alpha/2)} - y \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}. \quad (12.38)$$

Tandis que pour  $G2$ , on écrit :

$$x = \frac{np}{\cos(-\alpha/2)} + y \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}. \quad (12.39)$$

Les points d'intersection des deux réseaux correspondent aux points où  $m \pm n = l$  avec  $l$  un nombre entier. En réécrivant les relations précédentes, on trouve :

$$m = \frac{x \cos(\alpha/2) + y \sin(\alpha/2)}{p}, \quad (12.40)$$

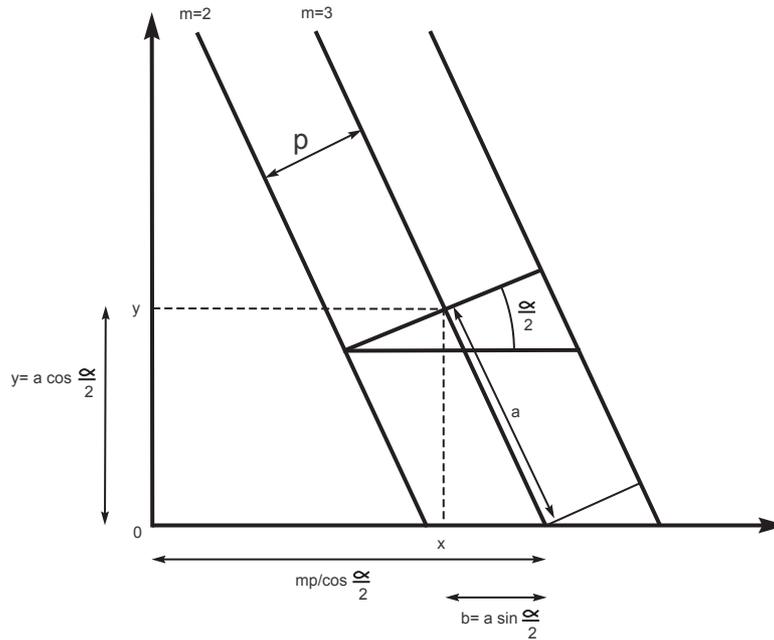


FIGURE 12.3 – Schéma d'un réseau tourné d'un angle  $\alpha/2$ . De la géométrie élémentaire permet d'obtenir l'équation paramétrique du réseau.

$$n = \frac{x \cos(\alpha/2) - y \sin(\alpha/2)}{p}, \quad (12.41)$$

$$l = m - n = \frac{2y \sin(\alpha/2)}{p}. \quad (12.42)$$

La relation que l'on vient de calculer permet de trouver la position des franges de moiré. Si l'on se place dans le cas où l'angle  $\alpha/2$  est petit, on peut assimiler  $\sin(\alpha/2)$  à  $\alpha/2$ . On obtient ainsi :

$$l = \frac{y\alpha}{p}. \quad (12.43)$$

$$y = \frac{lp}{\alpha}. \quad (12.44)$$

Le pas des franges de moiré est de  $p/\alpha$ , il peut être modifié simplement en faisant varier l'angle d'inclinaison des réseaux. Si l'on met un angle nul entre les réseaux, aucune frange n'est visible. Cette configuration particulière est dénommée déflectomètre moiré à frange infinie, elle permet d'obtenir des résultats quantitatifs rapidement interprétables. Nous verrons par la suite comment traiter ce cas.

Imaginons pour le moment qu'un objet contenant des gradients d'indice est placé dans le déflectomètre juste avant  $G1$  comme indiqué sur la figure 12.4. La présence de ces gradients va déflécter les rayons lumineux d'un angle  $\beta$  dans le plan  $z, x$ , perturbant l'ombre de  $G1$  au

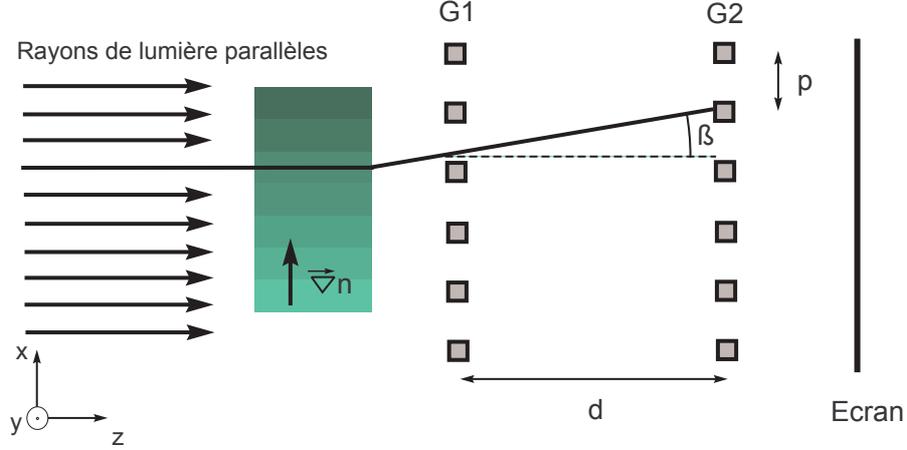


FIGURE 12.4 – Schéma d'un déflectomètre contenant un objet à diagnostiquer. Au niveau de  $G2$ , le décalage d'un point de l'ombre de  $G1$  dû à la déflexion des rayons lumineux est de  $d \cdot \tan(\beta)$ .

niveau de  $G2$ . On aura ainsi pour l'ombre de  $G1$  à cet endroit :

$$x = \frac{mp}{\cos(\alpha/2)} - y \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} + d \tan(\beta). \quad (12.45)$$

L'équation de  $G2$  étant toujours la même, la position des points d'intersection de l'ombre et du réseau sera :

$$m = \frac{(x - d \tan(\beta)) \cos(\alpha/2) + y \sin(\alpha/2)}{p}; \quad (12.46)$$

$$n = \frac{x \cos(\alpha/2) - y \sin(\alpha/2)}{p}; \quad (12.47)$$

$$m - n = l = \frac{-d \tan(\beta) \cos(\alpha/2) + 2y \sin(\alpha/2)}{p}. \quad (12.48)$$

En considérant que les angles  $\beta$  et  $\alpha/2$  sont petits, on pose  $\tan(\beta) \approx \beta$ ,  $\cos(\alpha/2) \approx 1$  et  $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2$ . La relation précédente se simplifie en :

$$l = \frac{-d(\beta) + y\alpha}{p}; \quad (12.49)$$

$$y = \frac{lp + d\beta}{\alpha}. \quad (12.50)$$

Le décalage des franges provoqué par la perturbation est de :

$$\Delta y = \frac{lp + d\beta}{\alpha} - \frac{lp}{\alpha} = \frac{d\beta}{\alpha}. \quad (12.51)$$

Ce résultat est intéressant puisqu'il montre que le déplacement d'une frange est proportionnel à l'angle de déflexion des rayons lumineux et à la distance entre les grilles de Ronchi. En

augmentant la distance inter-réseaux, nous sommes capable de mesurer de très petits angles de déflexion. Jusqu'à maintenant, nous n'avons pas évoqué la mesure d'indice de réfraction orienté selon  $y$ . À cause de la configuration du système, il est évident que leur mesure n'est pas possible puisque  $\alpha$  est petit ; ils seront de fait quasi parallèles aux traits du réseau et n'auront aucune influence sur la figure d'interférence. Lors du traitement théorique de la shadowgraphie quantitative, nous avons mis en évidence la relation entre l'angle de déflexion d'un rayon lumineux et les gradients d'indice. La relation (11.6) nous donne :

$$d\beta = n \frac{d(1/n)}{dy} dz = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} dz. \quad (12.52)$$

Pour un objet macroscopique on obtient :

$$\beta = \int \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} dz = \int \frac{d(\ln n)}{dy} dz. \quad (12.53)$$

Ici, on s'intéresse à des milieux gazeux de faible taille. Leur indice de réfraction est proche de 1 et on peut donc écrire :

$$\beta = \int \frac{d\delta n}{dy} dz, \quad (12.54)$$

avec  $\delta n = n(z) - n_{ambient}$ . À l'aide de cette expression, nous sommes en mesure de calculer l'indice de réfraction d'un milieu à partir de l'angle de déflexion mesuré par déflectométrie moiré.

À cause de sa simplicité, cette approche théorique est très limitée ; tout d'abord, on suppose que les réseaux sont constitués de lignes infiniment fines, ce qui n'est physiquement pas correct. De plus, expérimentalement, on observe des figures d'interférence de forme sinusoïdale qui ne peuvent être décrites à l'aide de l'approche par équations paramétriques. Nous devons donc étudier la transmission de la lumière à travers des réseaux de manière plus détaillée.

### Sur la déflectométrie moiré à franges infinies

La déflectométrie moiré à frange infinie correspond au cas où un angle de rotation nul est fixé entre les réseaux. Dans cette configuration, aucune frange n'est visible, on remarque seulement une zone très lumineuse si les réseaux sont parfaitement alignés, ou bien une zone sombre dans le cas contraire. Si l'on reprend les équations paramétriques des réseaux, lorsqu'un objet à diagnostiquer est placé dans le déflectomètre, les zones d'intersections sont données pour le cas où les grilles de Ronchi sont parfaitement alignées par :

$$l = \frac{d \cdot \tan(\beta)}{p}. \quad (12.55)$$

Les résultats obtenus peuvent être vu comme des cartes d'isocontours où les lignes sombres représentent des angles de déflexion multiples de  $\frac{p}{d}$  (fig.12.5).

L'analyse quantitative précise des résultats pour cette configuration est relativement compliquée car l'information n'est pas portée par un signal bien défini. Comme il n'y a pas de franges de moiré, l'information est contenue autour de la fréquence nulle dans l'espace de Fourier et ne peut pas être isolé par filtrage. Cependant, même si la déflectométrie moiré à frange infinie ne donne pas de résultats quantitatifs exacts, elle peut être utilisée pour obtenir un ordre de grandeur de l'angle de déflexion en comptant les franges sombres. Cela permet par exemple de régler correctement la sensibilité d'un déflectomètre à franges finies.



FIGURE 12.5 – Déflectogramme d'une flamme de bougie obtenue avec une configuration de type frange infinie.

### 12.4.2 Méthode de la composition de transmittances

Afin de montrer l'existence de figures d'interférence de forme sinusoïdale à la sortie d'un déflectomètre, nous avons choisi d'étudier la transmission de la lumière à travers des grilles de Ronchi sans prendre en compte les effets de diffraction. Pour cela, commençons par définir la transmittance d'un réseau  $t(x, y)$ . Cette fonction donne la fraction de lumière traversant l'élément optique considéré au point  $x, y$ . Elle peut prendre comme valeur maximale 1 : toute la lumière passe, et comme valeur minimale 0 : toute la lumière est stoppée par le réseau. Les grilles de Ronchi sont des réseaux binaires, la lumière passe complètement ou ne passe pas du tout. De ce fait, si l'on considère que les réseaux sont infinis, ces derniers peuvent être décrits par une fonction créneau périodique. Comme les fonctions étudiées sont périodiques et que l'on s'intéresse à des fréquences spatiales, il peut être judicieux de décrire la transmittance des grilles de Ronchi par des séries de Fourier [28]. Pour un réseau de pas  $p$  et dont les traits sont perpendiculaires à l'axe  $x$ , on aura :

$$t(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(j \frac{2\pi}{p} nx), \quad (12.56)$$

avec  $C_n$  les coefficients de Fourier complexes,  $n$  un nombre entier et  $p$  le pas du réseau. On peut voir les séries de Fourier comme la décomposition d'une fonction compliquée en une somme de fonctions plus simples : les exponentielles complexes. Les  $C_n$  correspondent à l'intensité à la fréquence  $n/p$  de la fonction décomposée, ils sont définis par :

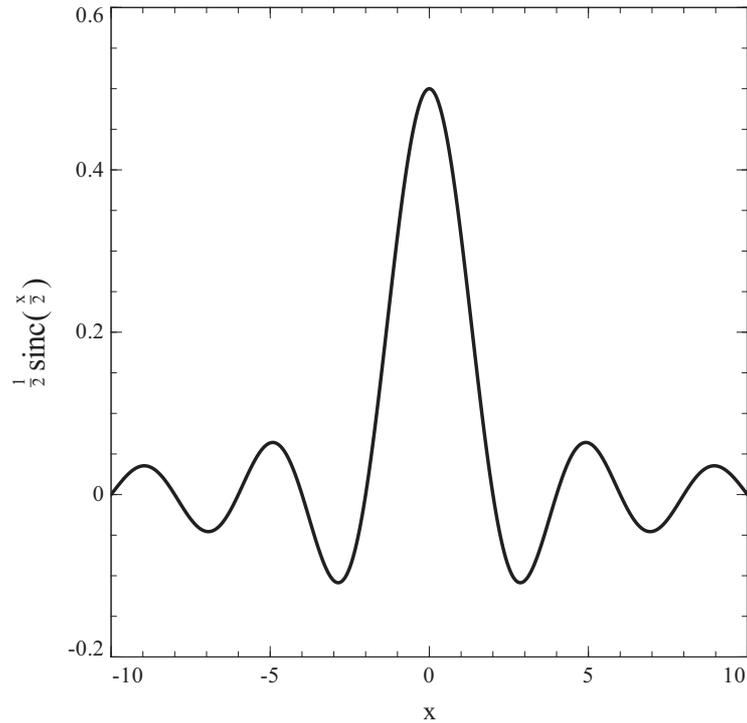
$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \exp(-j \frac{2\pi n}{T} x) dx. \quad (12.57)$$

Dans le cas d'une fonction créneau périodique,  $C_n$  prend la forme d'un sinus cardinal :

$$C_n = \frac{1}{2} \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{\frac{\pi n}{2}} = \frac{1}{2} \text{sinc}(\frac{n}{2}). \quad (12.58)$$

La forme de la fonction  $C_n$  est représentée sur la figure 12.6.

Revenons maintenant au montage présenté dans l'introduction, pour les réseaux  $G1$  et  $G2$ , on a, grâce à la relation (12.56) et à une simple projection :

FIGURE 12.6 – Graphe de la fonction  $\frac{1}{2}\text{sinc}(\frac{x}{2})$ .

$$t_1(x, y) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} C_{n_1} \exp \left[ j \frac{2\pi}{p} n_1 (\cos(\alpha/2)x + \sin(\alpha/2)y) \right]. \quad (12.59)$$

$$t_2(x, y) = \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} C_{n_2} \exp \left[ j \frac{2\pi}{p} n_2 (\cos(\alpha/2)x - \sin(\alpha/2)y) \right]. \quad (12.60)$$

La figure d'interférence à la sortie du défectomètre est une composition des transmittances de  $G_1$  et  $G_2$  :

$$t_1 t_2(x, y) = \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} C_{n_2} C_{n_1} \exp \left[ j \frac{2\pi}{p} (n_1 (\cos(\frac{\alpha}{2})x + \sin(\frac{\alpha}{2})y) + n_2 (\cos(\frac{\alpha}{2})x - \sin(\frac{\alpha}{2})y)) \right]. \quad (12.61)$$

Essayons d'identifier dans cette double somme les termes correspondants aux franges de moiré. Afin d'obtenir une expression plus simple à manipuler, on réécrit l'expression (12.61) en utilisant une somme de Cauchy :

$$t_1 t_2(x, y) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1+n_2=s} C_{n_2} C_{n_1} \exp \left[ j \frac{2\pi}{p} (n_1 (\cos(\frac{\alpha}{2})x - \sin(\frac{\alpha}{2})y) + n_2 (\cos(\frac{\alpha}{2})x + \sin(\frac{\alpha}{2})y)) \right]. \quad (12.62)$$

Le changement de variable  $n_2 = s - n_1$  est effectué pour faire apparaître un produit de convolution discret :

$$t_1 t_2(x, y) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} C_{s-n_1} C_{n_1} \exp \left[ j \frac{2\pi}{p} \left( n_1 \left( \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)x - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)y \right) + (s - n_1) \left( \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)x + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)y \right) \right) \right]. \quad (12.63)$$

Cette somme reste relativement complexe à manipuler. Afin de simplifier notre raisonnement, intéressons-nous uniquement au module de chaque terme de la somme afin de déterminer ceux qui peuvent être supprimés :

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} C_{s-n_1} C_{n_1} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \text{sinc}\left(\frac{s-n_1}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{s}{2}\right) \quad (12.64)$$

Comme on peut le constater sur la figure 12.6, la fonction  $\text{sinc}(n/2)$  est nulle pour tout nombre entier  $n$  pair.

Considérons le cas où  $s$  est impair ; pour cette partie de la somme, si  $n_1$  est pair les termes sont nuls et si  $n_1$  est impaire, alors  $s - n_1$  est pair et les termes sont la aussi nuls. Dans les cas où  $s$  est impair, il résulte que l'ensemble des termes sont nuls sauf ceux avec  $n_1 = 0$  et  $n_1 = s$  :

$$\sum_{k=-\infty, s=(2k+1)}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} C_{s-n_1} C_{n_1} = \sum_{s=(2k+1)}^{\infty} \frac{1}{4} 2 \text{sinc}(s/2) \text{sinc}(0). \quad (12.65)$$

Si l'on réécrit les termes exponentiels jusque là négligés, on a avec  $s$  impair :

$$\sum_{k=-\infty, s=(2k+1)}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \text{sinc}(s/2) \exp \left[ j \frac{2\pi}{p} s \left( \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)x + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)y \right) \right] + \frac{1}{4} \text{sinc}(s/2) \exp \left[ j \frac{2\pi}{p} s \left( \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)x - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)y \right) \right]. \quad (12.66)$$

On reconnaît ici les deux séries de Fourier décrivant la transmittance de chacun des réseaux au terme continu près. Le cas où  $s$  est pair reste à traiter. Si, comme précédemment, on néglige les exponentielles de la somme, il nous reste :

$$\sum_{k=-\infty, s=(2k)}^{\infty} \frac{1}{4} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{s-n_1}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{n_1}{2}\right). \quad (12.67)$$

La partie  $\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} C_{s-n_1} C_{n_1}$  est une convolution discrète, on peut l'estimer en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier. La convolution de deux sinus cardinaux dans l'espace réel donne une fonction rectangle dans l'espace de Fourier. Si l'on retourne dans l'espace réel, la transformée de Fourier inverse d'un rectangle est un sinus cardinal (voir section 12.1). La partie correspondant à l'amplitude des termes dans la somme donne :

$$\sum_{k=-\infty, s=(2k)}^{\infty} \frac{1}{4} \text{sinc}\left(\frac{s}{2}\right). \quad (12.68)$$

Expérimentalement, on sait que les franges de moiré sont intenses et visibles à l'œil nu. De plus, l'approche par équation paramétrique a permis de montrer que leur fréquence spatiale était beaucoup plus faible que celles des réseaux. Avec cela à l'esprit, on en déduit que les seuls termes susceptibles de contenir les franges de moiré sont ceux pour lesquels  $s = 0$  :

$$M(x, y) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} C_{-n_1} C_{n_1} \exp \left[ j \frac{2\pi}{p} (2n_1 \sin(\alpha/2)y) \right]. \quad (12.69)$$

Seuls les termes de basse fréquence ( $n_1 = -1, 1$ ) nous intéressent ici car il contiennent la majeure partie de l'information des franges de moiré.

$$M(x, y) \approx \frac{1}{2} \text{sinc}(1/2)^2 \cos \left[ j \frac{2\pi}{p} (2 \sin(\alpha/2)y) \right]. \quad (12.70)$$

La fréquence du signal obtenu,  $\frac{2 \sin(\alpha/2)}{p}$ , est en accord avec le pas des franges calculé à l'aide des équations paramétriques (eq. 12.42). Afin de bien visualiser la partie du signal qui a été isolée ici, des franges de moiré ont été simulées à l'aide des équations paramétriques de deux réseaux. Elle sont présentées, ainsi que leur transformée de Fourier, sur la figure 12.7. Les points en diagonale sur la transformée de Fourier correspondent aux termes décrivant les deux réseaux de Ronchi. Les fréquences placées à la verticale au centre de la figure correspondent aux

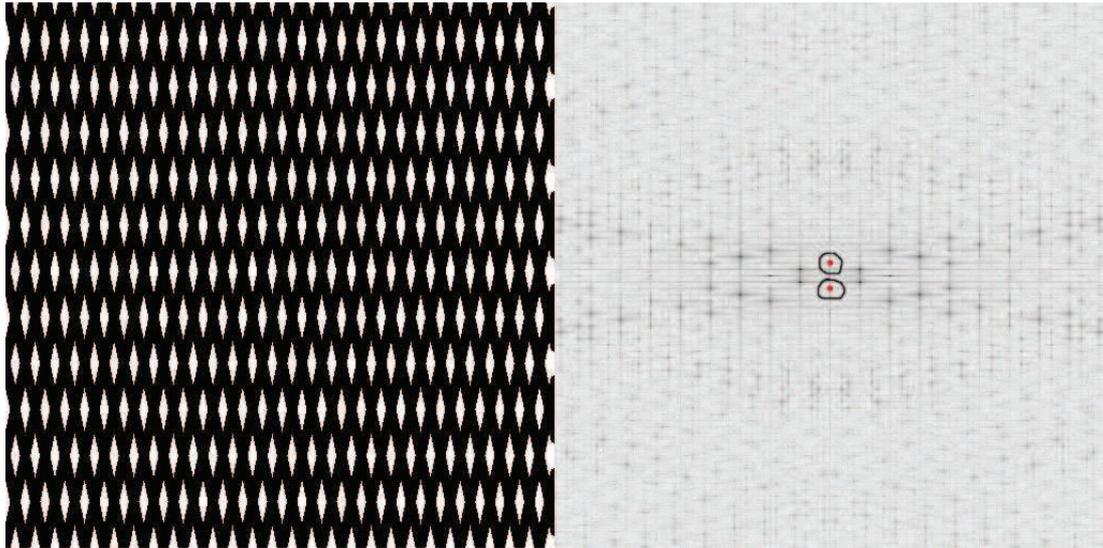


FIGURE 12.7 – Franges de moiré simulées et leur transformée de Fourier. La partie considérée dans l'équation (12.70) correspond aux termes entourés.

termes décrivant les franges de moiré. On a entouré sur cette figure les termes sélectionnés pour écrire l'équation (12.70). On constate aisément que ces deux termes contiennent la majeure partie de l'information sur les franges.

Considérons maintenant le cas où le déflectomètre contient un objet à diagnostiquer ; la lumière qui arrive sur  $G1$  n'est plus parallèle, certains rayons ont été courbés lors de la traversée du milieu contenant des gradients d'indice. Comme précédemment, la perturbation de l'ombre de  $G1$  peut être prise en compte en considérant tout bonnement que c'est la transmittance du premier réseau qui est perturbée.

$$t1(x, y) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} C_{n_1} \exp \left[ j \frac{2\pi}{p} n_1 (\cos(\alpha/2)x + \sin(\alpha/2)y - f(x, y)) \right], \quad (12.71)$$

où  $f(x, y)$  est une fonction représentant la perturbation. Dans le cas de la défectométrie, nous avons vu sur la figure 12.4 que  $f(x, y) = d \tan(\beta(x, y))$ .

Avec cette modification de la transmittance de  $G1$ ,  $M(x, y)$  devient :

$$M(x, y) \approx \frac{1}{4} \text{sinc}(1/2)^2 \exp \left[ j \frac{2\pi}{p} (2 \sin(\alpha/2)y - f(x, y)) \right] + \frac{1}{4} \text{sinc}(1/2)^2 \exp \left[ -j \frac{2\pi}{p} (2 \sin(\alpha/2)y - f(x, y)) \right]. \quad (12.72)$$

$$M(x, y) \approx \frac{1}{2} \text{sinc}(1/2)^2 \cos \left[ \frac{2\pi}{p} (2 \sin(\alpha/2)y - f(x, y)) \right]. \quad (12.73)$$

La phase du signal est de :

$$\varphi = \frac{2\pi}{p} f(x, y). \quad (12.74)$$

Si l'on réécrit l'équation (12.74) en fonction du pas des franges  $p'$ , on a :

$$\varphi = \frac{2\pi}{p'} \frac{f(x, y)}{\alpha}. \quad (12.75)$$

La différence de phase entre un défectogramme de travail avec l'objet à étudier, et un deffectogramme de référence donne :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{p'} \Delta y. \quad (12.76)$$

$\Delta y$  correspond au décalage des franges obtenu à l'aide de la méthode des équations paramétriques. Les deux théories donnent des résultats équivalents; cependant, la méthode de la composition de transmittances fournit directement la forme des figures d'interférences en sortie de défectomètre. À cette occasion, on a remarqué que les informations concernant la déflexion des rayons lumineux par le milieu à diagnostiquer étaient contenues dans la phase du signal. C'est relativement intéressant car cela permet d'utiliser des outils de traitement de données développées pour l'interférométrie classique à frange finie.

Jusqu'à présent, nous avons omis les effets de la diffraction lors de nos approches théoriques. Malheureusement, ces effets ne sont pas négligeables puisque le pas des réseaux utilisés pour le diagnostic des plasmas d'arc est relativement petit. Afin de prendre en compte ces phénomènes, nous avons choisi d'étudier un défectomètre à l'aide de l'optique de Fourier.

## 12.5 Théorie : optique de Fourier

### 12.5.1 Élément d'optique de Fourier

Considérons une onde  $(x, y)$  qui se propage dans la direction des  $z$  positifs. Dans le plan  $z = 0$ , si on ne garde que la phase de l'onde, cette dernière est représentée par la fonction  $u(x, y, 0)$ .

Pour obtenir le spectre de cette fonction en  $z=0$ , on effectue une transformée de Fourier [29, 30, 31] :

$$U(f_X, f_Y, 0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} u(x, y, 0) \exp[-j2\pi(f_X x + f_Y y)] dx dy \quad (12.77)$$

De la même manière que pour les séries de Fourier, on peut interpréter la transformée de Fourier comme la décomposition d'une fonction complexe en une somme de fonctions exponentielles plus simples à manipuler. On peut donc écrire  $u$  comme la transformée de Fourier inverse de son spectre :

$$u(x, y, 0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} U(f_X, f_Y, 0) \exp[j2\pi(f_X x + f_Y y)] df_X df_Y \quad (12.78)$$

À quoi correspond au niveau physique cette manière d'écrire  $u$ ? Que représente  $U$  et comment peut être interprétée la fonction exponentielle complexe? Pour tenter de répondre à ces interrogations, nous allons étudier la propagation d'une onde plane se déplaçant avec un vecteur d'onde  $\vec{k}$ . On rappelle que le module du vecteur d'onde est défini comme :  $k = 2\pi/\lambda$  :

$$w(x, y, z, t) = \exp[j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]. \quad (12.79)$$

La partie temporelle de cette onde ne nous intéresse pas, on la laisse donc tomber pour travailler uniquement avec la phase.

$$W(x, y, z, t) = \exp(j\vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (12.80)$$

En exprimant  $\vec{k}$  avec le repère cartésien  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , on a :  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha\vec{e}_x + \beta\vec{e}_y + \gamma\vec{e}_z)$ . Comme  $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ , on peut réécrire  $W$  :

$$W(x, y, z, t) = \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}(x\alpha + y\beta + z\gamma)\right). \quad (12.81)$$

En remarquant que  $1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ , on peut écrire :

$$W(x, y, z, t) = \exp(j\frac{2\pi}{\lambda}(x\alpha + y\beta)) \exp(j\frac{2\pi}{\lambda}z\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}). \quad (12.82)$$

Si l'on se place en  $z = 0$  et que l'on compare les relations (12.82) et (12.78), on remarque qu'une fonction exponentielle complexe de la forme  $\exp(j2\pi(f_X x + f_Y y))$  peut être considérée comme une onde plane se propageant selon sa direction :

$$\alpha = \lambda f_X \quad \beta = \lambda f_Y \quad \gamma = \sqrt{1 - (\lambda f_X)^2 - (\lambda f_Y)^2} \quad (12.83)$$

L'utilisation du spectre de fréquence angulaire d'une onde revient à la représenter comme une somme d'ondes planes. Les fonctions exponentielles complexes de l'expression de la transformée de Fourier correspondent du coup à des phasors d'onde planes. On tire de l'équation (12.82) que la propagation d'une onde dans l'espace de Fourier se fait simplement à l'aide d'un facteur multiplicateur. Cela permet de simplifier les calculs d'optique; à titre de comparaison, la propagation d'une onde dans l'espace réel se fait à l'aide d'une convolution beaucoup plus complexe à calculer. L'optique de Fourier est un domaine vaste, et seule la représentation fréquentielle des ondes a été abordée ici. On peut se référer aux ouvrages [29, 31] si l'on désire approfondir le sujet.

### 12.5.2 Validité de l'approche géométrique

Les réseaux utilisés pour aller diagnostiquer des milieux gazeux ont des pas très petits (quelques dixièmes ou centièmes de millimètre) du fait des faibles angles de déflexion à mesurer. Avec ces grilles de Ronchi, les effets de la diffraction sont loin de pouvoir être négligés, cependant, l'approche géométrique est valide dans certaines conditions.

Afin de démontrer cela, étudions simplement la traversée d'un réseau par une onde lumineuse. Afin de simplifier le problème au maximum, on considèrera deux dimension uniquement. Une onde plane se propage dans la direction des  $z$  croissants. Sa phase est de la forme :

$$u_1^- = \exp(j\phi). \quad (12.84)$$

Un réseau de Ronchi est positionné en  $z = 0$ . Sa transmittance est définie comme :

$$t(x, y) = \sum_m C_m \exp(j2\pi \frac{m}{p} x). \quad (12.85)$$

Dans l'espace de Fourier, le spectre fréquentiel de l'onde juste avant son entrée dans le réseau est noté  $U_1^-(f_X)$ . Après le réseau, le spectre devient :

$$U_1^+ = \sum_m C_m U_1^-(f_X - \frac{m}{p}). \quad (12.86)$$

Penchons-nous un instant sur les notations, les lettres capitales représentent les spectres fréquentiels des ondes. Le numéro en indice permet de repérer l'élément optique traversé tandis que le signe en exposant indique si le spectre de l'onde est donné à l'entrée ou à la sortie du composant. Faisons maintenant se propager l'onde depuis la sortie du réseau. Cela se fait simplement dans l'espace de Fourier par la multiplication de  $U_1^+$  avec un terme de la forme :

$$\exp(jkz\sqrt{1 - \lambda^2 f_X^2}). \quad (12.87)$$

Après une distance  $z$ , le spectre de l'onde sera :

$$U_2^- = \sum_m C_m U_1^-(f_X - \frac{m}{p}) \exp(jkz\sqrt{1 - \lambda^2 f_X^2}). \quad (12.88)$$

Lors du développement de l'approche géométrique, les résultats étaient obtenus en étudiant l'intersection de l'ombre de  $G1$  avec  $G2$ . Il était d'ailleurs stipulé que l'ombre devait avoir la même forme que le réseau. Pour que cela soit vérifié ici, il faut que la phase de l'onde en  $z$  soit similaire à ce qu'elle était à la sortie du réseau, en  $z = 0$ . Afin de mener ce calcul à bien, il est nécessaire d'effectuer l'approximation de Fresnel. On sait que le développement de Taylor d'une fonction de la forme  $\sqrt{1 + \epsilon}$  avec  $\epsilon \ll 1$  donne :

$$\sqrt{1 + \epsilon} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2 + \dots \quad (12.89)$$

En appliquant ce développement à  $\sqrt{1 - \lambda^2 f_X^2}$ , il vient que :

$$1 - \frac{\lambda^2 f_X^2}{2}. \quad (12.90)$$

$$U_2^+ = \sum_m C_m U_1^-(f_X - \frac{m}{p}) \exp(jkz(1 - \frac{\lambda^2 f_X^2}{2})). \quad (12.91)$$

Le terme en  $\exp(jkz)$  est caractéristique de la propagation d'une onde, il peut donc être mis de côté pour ne s'intéresser qu'au terme  $\exp(-jkz \frac{\lambda^2 f_X^2}{2})$ . Pour que l'onde soit identique à ce qu'elle était en sortie de réseau, l'argument de cette exponentielle doit être un multiple de  $2\pi$  :

$$kz \frac{\lambda^2 f_X^2}{2} = 2\pi l. \quad (12.92)$$

La phase étant une constante, les termes de l'équation 12.91 seront non-nuls uniquement lorsque  $f_X$  sera multiple de  $1/p$ . On en tire donc :

$$z = \frac{2p^2}{\lambda} l. \quad (12.93)$$

L'approche géométrique est valide uniquement si la condition apportée ici sur la distance entre les deux réseaux est validée.  $d$  doit être un multiple de  $\frac{2p^2}{\lambda} l$  afin d'obtenir des résultats expérimentaux concluants. Cette distance est appelée distance de Talbot, elle sépare deux images parfaites (images de Talbot) [32].

### 12.5.3 Figure d'interférence à la sortie d'un défectomètre vide

De nombreux scientifiques se sont penchés sur la description d'un défectomètre à l'aide de l'optique physique. Kafri, Bar-Ziv et Kujawinska [33, 34, 35] utilisent une approche traditionnelle tandis que Song [36, 37] utilise l'optique de Fourier. Parmi les articles publiés au cours des vingt dernières années, les résultats diffèrent et certains semblent discutables. De plus, l'ensemble de ces travaux traitent de défectomètres dont la sortie est filtrée. Il n'est donc pas prouvé que les défectogrammes obtenus à la sortie de  $G2$  soient exploitables. Afin d'obtenir des résultats indiscutables, les calculs des figures d'interférence à l'aide de l'optique de Fourier ont été menés complètement.

Ici encore, nous allons raisonner sur le montage présenté sur la figure 12.1. Afin de rendre le calcul plus simple, nous allons considérer comme précédemment que les ondes incidentes et les réseaux sont infinis. Lorsqu'il n'y a pas d'objet à diagnostiquer dans le défectomètre, une onde plane arrive sur  $G1$ . Si la partie temporelle de l'onde est négligée, on a :

$$w_1^- = \exp(j\phi(x, y)). \quad (12.94)$$

Le passage d'une onde lumineuse à travers un élément optique est réalisé à l'aide de la transmittance de ce dernier. Comme nous travaillerons dans l'espace de Fourier, il peut être intéressant de décrire la transmittance des réseaux à l'aide de séries de Fourier. La transmittance de  $G1$  est donné par :

$$t_1(x, y) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} C_{n_1} \exp \left[ j \frac{2\pi}{p} n_1 (\cos(\alpha/2)x + \sin(\alpha/2)y) \right], \quad (12.95)$$

avec  $C_n$  les coefficients de Fourier complexes obtenus pour une fonction créneau périodique. Dans l'espace réel, le passage de l'onde à travers  $G1$  correspond à une multiplication entre  $w_1^-$

et  $t_1$ . On a :

$$w_1^+(x, y) = w_1^- \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} C_{n_1} \exp \left[ j \frac{2\pi}{p} n_1 (\cos(\alpha/2)x + \sin(\alpha/2)y) \right]. \quad (12.96)$$

Lorsqu'on passe de l'espace réel à l'espace de Fourier, la multiplication des deux termes devient une convolution :

$$w_1^+(x, y) = TF^{-1} \left\{ W_1^- * \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} C_{n_1} \delta \left( f_X - \frac{n_1}{p} \cos(\frac{\alpha}{2}), f_Y - \frac{n_1}{p} \sin(\frac{\alpha}{2}) \right) \right\}. \quad (12.97)$$

La convolution d'une fonction  $f(x)$  par un dirac centré en  $a$ ,  $\delta(x - a)$ , correspond à une translation de  $f$  :  $f(x - a)$ . On obtient à la sortie de  $G1$  :

$$w_1^+(x, y) = TF^{-1} \left\{ \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} C_{n_1} W_1^- \left( f_X - \frac{n_1}{p} \cos(\frac{\alpha}{2}), f_Y - \frac{n_1}{p} \sin(\frac{\alpha}{2}) \right) \right\}. \quad (12.98)$$

L'intérêt de travailler dans l'espace de Fourier apparaît lorsqu'on fait se propager l'onde de la sortie de  $G1$  jusqu'à l'entrée de  $G2$ . Cela se fait simplement en ajoutant le terme  $\exp(jkd\sqrt{1 - \lambda^2(f_X^2 + f_Y^2)})$  au spectre de l'onde. Si celle-ci parcourt une distance  $d$  entre les deux réseaux, on aura juste avant  $G2$  :

$$W_2^- = \exp(jkd\sqrt{1 - \lambda^2(f_X^2 + f_Y^2)}) \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} C_{n_1} W_1^- \left( f_X - \frac{n_1}{p} \cos(\alpha/2), f_Y - \frac{n_1}{p} \sin(\alpha/2) \right). \quad (12.99)$$

L'approximation de Fresnel donne :

$$W_2^- = \exp \left[ jkd \left( 1 - \frac{\lambda^2}{2} (f_X^2 + f_Y^2) \right) \right] \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} C_{n_1} W_1^- \left( f_X - \frac{n_1}{p} \cos(\alpha/2), f_Y - \frac{n_1}{p} \sin(\alpha/2) \right). \quad (12.100)$$

Le réseau  $G2$  est tourné d'un angle de  $-\alpha/2$ , sa transmittance est donnée par :

$$t_2(x, y) = \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} C_{n_2} \exp \left[ j \frac{2\pi}{p} n_2 (\cos(\alpha/2)x - \sin(\alpha/2)y) \right]. \quad (12.101)$$

Derrière  $G2$ , le spectre de l'onde est :

$$W_2^+ = \exp \left[ jkd \left( 1 - \frac{\lambda^2}{2} (f_X^2 + f_Y^2) \right) \right] \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} C_{n_1} W_1^- \left( f_X - \frac{n_1}{p} \cos(\alpha/2), f_Y - \frac{n_1}{p} \sin(\alpha/2) \right) * T_2. \quad (12.102)$$

Ici,  $T_2$  est la transformée de Fourier de la transmittance  $t_2$ . Après le second réseau, l'onde voyage sur une distance  $L$  afin d'atteindre l'écran. Là encore, on doit ajouter le terme multiplicatif correspondant à la propagation de l'onde :

$$W_3^- = \exp \left[ jkL \left( 1 - \frac{\lambda^2}{2} (f_X^2 + f_Y^2) \right) \right] \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \exp \left[ jkd \left( 1 - \frac{\lambda^2}{2} \left( \left( f_X - \frac{n_2}{p} \cos(\alpha/2) \right)^2 + \left( f_Y + \frac{n_2}{p} \sin(\alpha/2) \right)^2 \right) \right) \right] \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} C_{n_1} C_{n_2} W_1^- \left( f_X - \frac{n_1+n_2}{p} \cos(\alpha/2), f_Y - \frac{n_1-n_2}{p} \sin(\alpha/2) \right). \quad (12.103)$$

Cette équation correspond au spectre angulaire de l'onde après son passage dans le déflectomètre moiré. Pour obtenir la forme de l'onde dans l'espace réel, deux approches sont possibles ; on peut tout d'abord choisir de calculer brutalement la transformée de Fourier inverse de  $W_3^-$ , ce qui est relativement complexe. Le calcul numérique ne nous sera d'aucun secours puisque l'on cherche à obtenir une formule analytique exploitable lors des expérimentations. Une autre approche possible consiste à utiliser les propriétés de la transformée de Fourier ainsi que des transformées connues pour simplifier les calculs. C'est cette solution que nous avons choisi ici. Tout d'abord, les termes contenant  $(n_2/p)^2 \cos^2 \alpha/2 + (n_2/p)^2 \sin^2 \alpha/2$  peuvent se simplifier en  $(n_2/p)^2$ . On peut distinguer quatre types de termes différents dans l'expression (12.103) ; les exponentiels avec des constantes en arguments ne posent pas de problèmes lors de la transformée inverse. Il n'en va pas de même pour la fonction  $W_1$  et pour les exponentiels qui contiennent des fréquences en argument. En les regroupant et en exprimant  $k$  par son expression, on obtient :

$$\begin{aligned}
W_3^- = \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \exp [jk(L+d)] \exp \left[ -j2\pi d\lambda \left( \frac{n_2}{p} \right)^2 \right] C_{n_1} C_{n_2} \\
\exp [-j\pi(d+L)\lambda(f_X^2 + f_Y^2)] \\
\exp \left[ j2\pi d f_X \lambda \frac{n_2}{p} \cos \frac{\alpha}{2} \right] \exp \left[ -j2\pi d \lambda \frac{n_2}{p} f_Y \sin \frac{\alpha}{2} \right] \\
W_1^-(f_X - \frac{n_1 + n_2}{p} \cos(\alpha/2), f_Y - \frac{n_1 - n_2}{p} \sin(\alpha/2)) \quad (12.104)
\end{aligned}$$

Les transformées de Fourier des différents termes qui composent la relation (12.104) sont les suivants :

$$\begin{aligned}
TF^{-1}(\exp [-j\pi(d+L)\lambda(f_X^2 + f_Y^2)]) &= \frac{1}{j(d+L)\lambda} \exp \left[ -\pi \frac{x^2 + y^2}{j(d+L)\lambda} \right] \\
&= \frac{1}{j(d+L)\lambda} \exp \left[ j\pi \frac{x^2 + y^2}{(d+L)\lambda} \right]. \quad (12.105)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TF^{-1}(W_1^-(f_X - \frac{n_1 + n_2}{p} \cos(\alpha/2), f_Y - \frac{n_1 - n_2}{p} \sin(\alpha/2))) = \\
w_1^-(x, y) \exp \left[ j2\pi \frac{n_1 + n_2}{p} \cos(\alpha/2)x \right] \exp \left[ j2\pi \frac{n_1 - n_2}{p} \sin(\alpha/2)y \right]. \quad (12.106)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TF^{-1}(W_1^-(f_X - \frac{n_1 + n_2}{p} \cos(\alpha/2), f_Y - \frac{n_1 - n_2}{p} \sin(\alpha/2))) \\
\exp \left[ j2\pi d \lambda \frac{n_2}{p} f_X \cos(\frac{\alpha}{2}) \right] \exp \left[ -j2\pi d \lambda \frac{n_2}{p} f_Y \sin(\frac{\alpha}{2}) \right] = \\
w_1^-(x + d\lambda \frac{n_2}{p} \cos \frac{\alpha}{2}, y - d\lambda \frac{n_2}{p} \sin \frac{\alpha}{2}) \exp \left[ j2\pi \frac{n_1 + n_2}{p} \cos(\frac{\alpha}{2})x \right] \exp \left[ +j2\pi \frac{n_1 - n_2}{p} \sin(\frac{\alpha}{2})y \right]. \quad (12.107)
\end{aligned}$$

Dans l'espace réel, le phasor au niveau de l'écran est donné par la convolution :

$$\begin{aligned}
w_3^- &= \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \exp[jk(L+d)] \exp\left[-j2\pi d\lambda \left(\frac{n_2}{p}\right)^2\right] C_{n_1} C_{n_2} \\
w_1^-(x + d\lambda \frac{n_2}{p} \cos \frac{\alpha}{2}, y - d\lambda \frac{n_2}{p} \sin \frac{\alpha}{2}) &\exp\left[j2\pi \frac{n_1+n_2}{p} \cos(\frac{\alpha}{2})x\right] \exp\left[+j2\pi \frac{n_1-n_2}{p} \sin(\frac{\alpha}{2})y\right] \\
&* \frac{1}{j(d+L)\lambda} \exp\left[-\pi \frac{x^2+y^2}{j(d+l)\lambda}\right]. \tag{12.108}
\end{aligned}$$

Le calcul de cette convolution n'est pas triviale puisqu'elle fait intervenir une fonction de forme inconnue et une fonction exponentielle complexe qui oscille très rapidement. Afin de le mener à bien, on utilise la méthode de la phase stationnaire. Les différentes constantes seront omises lors de ce calcul :

$$\begin{aligned}
&\iint_{t,w=-\infty}^{\infty} w_1^-(x-t+A, y-w-B) \exp\left[j2\pi \frac{n_1+n_2}{p} \cos(\alpha/2)(x-t)\right] \\
&\exp\left[+j2\pi \frac{n_1-n_2}{p} \sin(\alpha/2)(y-w)\right] \cdot \frac{1}{j(d+L)\lambda} \exp\left[-\pi \frac{t^2+w^2}{j(d+l)\lambda}\right] dt dw, \tag{12.109}
\end{aligned}$$

où  $A$  et  $B$  représentent les constantes  $d\lambda n_2/p \cos(\alpha/2)$  et  $d\lambda n_2/p \sin(\alpha/2)$ . Le développement limité de  $t^2 + w^2$  donne :

$$DL(t^2 + w^2) = 0 + (\delta t)^2 + (\delta w)^2. \tag{12.110}$$

La convolution devient :

$$\begin{aligned}
w_1^-(x+A, y-B) \exp\left[j2\pi \frac{n_1+n_2}{p} \cos(\alpha/2)(x)\right] \exp\left[+j2\pi \frac{n_1-n_2}{p} \sin(\alpha/2)(y)\right] \\
\iint_{t,w=-\infty}^{\infty} \frac{1}{j(d+L)\lambda} \exp\left[-\pi \frac{(\Delta t)^2 + (\Delta w)^2}{j(d+l)\lambda}\right] dt dw. \tag{12.111}
\end{aligned}$$

On utilise le théorème l'ordonnée centrale pour calculer l'intégrale précédente avec, comme changement de variable  $T = \frac{1}{\sqrt{(d+L)\lambda}} \Delta t$  et  $W = \frac{1}{\sqrt{(d+L)\lambda}} \Delta w$ .

$$\iint_{t,w=-\infty}^{\infty} ((d+L)\lambda) \exp[j\pi((\Delta T)^2 + (\Delta W)^2)] dT dW = ((d+L)\lambda) \iint_{t,w=-\infty}^{\infty} g(T)h(W) dT dW. \tag{12.112}$$

$$G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(T) \exp(-2\pi j0T) dT = \int_{-\infty}^{\infty} g(T) dT, \tag{12.113}$$

$$H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(W) \exp(-2\pi j0W) dW = \int_{-\infty}^{\infty} g(W) dW. \tag{12.114}$$

$$G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\pi(T)^2) \exp(-2\pi j f T) dT = \int_{-\infty}^{\infty} g(T) dT, \quad (12.115)$$

$$TF(g) = \exp(-2\pi f^2) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\pi(T-f)^2) dT. \quad (12.116)$$

On met cette intégrale sous forme d'une fonction gamma d'Euler en posant le changement de variable suivant :  $\tau = -j\pi(T-f)^2$ .

$$TF(g) = \exp(-2\pi f^2) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau) \frac{d\tau}{-j2\pi(T-f)}, \quad (12.117)$$

$$TF(g) = \exp(-2\pi f^2) 2 \int_0^{\infty} \exp(-\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{(-j\pi)2\sqrt{\tau}}}, \quad (12.118)$$

$$TF(g) = \exp(-2\pi f^2) \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{(-j\pi)}}, \quad (12.119)$$

$$G(0) = \exp(j\pi/4) = H(0). \quad (12.120)$$

À l'aide de ces résultats, nous pouvons écrire la convolution sous la forme :

$$w_1^-(x+A, y-B) \exp \left[ j2\pi \frac{n_1+n_2}{p} \cos(\alpha/2)(x) \right] \exp \left[ +j2\pi \frac{n_1-n_2}{p} \sin(\alpha/2)(y) \right]. \quad (12.121)$$

Au final, la forme de l'onde au niveau de l'écran est donnée par la relation :

$$w_3^- = \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \exp [jk(L+d)] \exp \left[ -j2\pi d\lambda \left( \frac{n_2}{p} \right)^2 \right] C_{n_1} C_{n_2} \\ w_1^-(x + d\lambda \frac{n_2}{p} \cos \frac{\alpha}{2}, y - d\lambda \frac{n_2}{p} \sin \frac{\alpha}{2}) \exp \left[ j2\pi \frac{n_1+n_2}{p} \cos(\frac{\alpha}{2})x \right] \exp \left[ +j2\pi \frac{n_1-n_2}{p} \sin(\frac{\alpha}{2})y \right]. \quad (12.122)$$

En examinant cette relation, on remarque que, contrairement à ce qui est habituellement observé au niveau expérimental, les ordres de diffraction ne se "séparent" pas avec l'augmentation de la distance réseau-écran : ils sont tous confondus. Cela semble être dû au fait que l'on utilise des réseaux et des ondes lumineuses infinis. Il serait nécessaire, pour avoir la séparation des ordres, de considérer des réseaux finis, ce qui complique lourdement les calculs.

Afin d'obtenir des résultats utilisables, ce n'est pas l'amplitude de l'onde que l'on calcule mais plutôt l'intensité lumineuse car la plupart des capteurs mesurent une intensité :

$$I \propto w_3^-(w_3^-)^* \quad (12.123)$$

Plusieurs configurations sont possibles pour le déflectomètre. On peut choisir de placer l'écran directement à la sortie du second réseau comme il est souvent recommandé dans la littérature et comme nous l'avons fait pour l'approche géométrique. On peut aussi choisir de placer l'écran à une distance  $L$  non nulle afin de séparer ou de filtrer les différents ordres de diffraction.

### Écran placé en sortie de défectomètre

Commençons par traiter le cas où l'écran est placé directement en sortie de défectomètre. Afin de ne pas se perdre dans des calculs titanesques, nous allons travailler uniquement avec les termes  $n_1, n_2 = 0, 1, -1$  des ordres 0,1 et -1 de diffraction car ce sont les plus intenses. Lorsque le défectomètre est vide, la phase de l'onde incidente est une constante :

$$w_1^- = \exp(jK). \quad (12.124)$$

En ne considérant que les trois principaux ordres de diffraction, l'amplitude de l'onde au niveau de l'écran est :

$$w_3^- = \exp(jK) (w_{ordre\ 0} + w_{ordre\ 1} + w_{ordre\ -1}). \quad (12.125)$$

Avec :

$$\begin{aligned} w_{ordre\ 0} = & C_0^2 + C_1^2 \exp[jkd] \exp\left[-j2\pi d \frac{\lambda}{p^2}\right] \exp\left[j2\pi \frac{2}{p} \sin(\alpha/2)y\right] + \\ & C_1^2 \exp[jkd] \exp\left[-j2\pi d \frac{\lambda}{p^2}\right] \exp\left[j2\pi \frac{2}{p} \sin(\alpha/2)y\right], \end{aligned} \quad (12.126)$$

$$\begin{aligned} w_{ordre\ 1} = & C_0 C_1 \exp[jkd] \exp\left[-j2\pi d \frac{\lambda}{p^2}\right] \exp\left[j2\pi \frac{1}{p} \cos(\alpha/2)x\right] \exp\left[-j2\pi \frac{1}{p} \sin(\alpha/2)y\right] + \\ & C_0 C_1 \exp[jkd] \exp\left[j2\pi \frac{1}{p} \cos(\alpha/2)x\right] \exp\left[j2\pi \frac{1}{p} \sin(\alpha/2)y\right], \end{aligned} \quad (12.127)$$

$$\begin{aligned} w_{ordre\ -1} = & C_0 C_1 \exp[jkd] \exp\left[-j2\pi d \frac{\lambda}{p^2}\right] \exp\left[-j2\pi \frac{1}{p} \cos(\alpha/2)x\right] \exp\left[j2\pi \frac{1}{p} \sin(\alpha/2)y\right] + \\ & C_0 C_1 \exp[jkd] \exp\left[-j2\pi \frac{1}{p} \cos(\alpha/2)x\right] \exp\left[-j2\pi \frac{1}{p} \sin(\alpha/2)y\right]. \end{aligned} \quad (12.128)$$

Le calcul de l'intensité lumineuse au niveau de l'écran nous donne une somme de 49 termes qui peuvent être regroupés en cosinus et sinus grâce aux formules d'Euler. On obtient au final :

$$\begin{aligned}
I = & 8C_0^2 C_1^2 \cos \left[ 2\pi d \frac{\lambda}{p^2} \right] \cos \left[ 2\pi \frac{2}{p} \sin(\alpha/2)y \right] + \\
& 4C_0^3 C_1 \cos \left[ 2\pi d \frac{\lambda}{p^2} \right] \cos \left[ 2\pi \frac{1}{p} (\sin(\alpha/2)y - \cos(\alpha/2)x) \right] + \\
& 4C_0 C_1^3 \cos \left[ 2\pi d \frac{\lambda}{p^2} \right] \cos \left[ 2\pi \frac{3}{p} (\sin(\alpha/2)y - \cos(\alpha/2)x) \right] + \\
& 4C_0 C_1^3 \cos \left[ 2\pi d \frac{\lambda}{p^2} \right] \cos \left[ 2\pi \frac{1}{p} (\sin(\alpha/2)y - \cos(\alpha/2)x) \right] + \\
& 4C_0^2 C_1^2 \cos \left[ 2\pi d \frac{\lambda}{p^2} \right] \cos \left[ 2\pi \frac{2}{p} \cos(\alpha/2)x \right] + \\
& 2C_0^2 C_1^2 \cos \left[ 2\pi \frac{2}{p} (\sin(\alpha/2)y - \cos(\alpha/2)x) \right] + \\
& 4C_0 C_1^3 \cos \left[ 2\pi \left( \frac{3}{p} \sin(\alpha/2)y - \frac{1}{p} \cos(\alpha/2)x \right) \right] + \\
& 4C_0 C_1^3 \cos \left[ 2\pi \frac{1}{p} (\sin(\alpha/2)y - \cos(\alpha/2)x) \right] + \\
& 2C_1^4 \left( 2 \cos^2 \left( 2\pi \frac{2}{p} \sin(\alpha/2)y \right) - 1 \right) \\
& + C_0^4 + 2C_1^4 + 4C_0^2 C_1^2.
\end{aligned}$$

L'angle  $\alpha/2$  étant très petit, les termes contenant  $\cos(\alpha/2)$  oscilleront beaucoup plus rapidement que les termes  $\sin(\alpha/2)$  représentant les franges de moiré. Ces termes oscillent à une fréquence similaire à celle du réseau. Ainsi, si le pas des réseaux est petit, ces termes de hautes fréquences seront "invisibles" par les détecteurs classiques. Enfin, les termes contenant  $C_1^3$  seront aussi invisible du fait de leur faible amplitude : ils sont deux ordre de grandeur moins intenses que celui d'amplitude  $4C_0^3 C_1$ . Finalement, la forme des figures d'interférences obtenues est similaire à celle obtenue par approche géométrique, c'est la partie en  $\cos[2\pi \frac{2}{p} \sin(\alpha/2)y]$  qui sera observable. Cependant on remarque que l'amplitude de la plupart des termes est modulée par  $\cos[2\pi d \frac{\lambda}{p^2}]$ . Pour obtenir de bons résultats, il faut que ce terme soit maximum. Autrement dit, il est nécessaire que  $d$  soit un multiple de la distance de Talbot pour que les figures d'interférences soient les plus nettes possible. Ce résultat conforte les conditions obtenues avec le travail sur la validité de l'approche géométrique.

### Écran placé à une distance $L$ de $G_2$

Les auteurs traitant le défectomètre moiré par optique ondulatoire préconisent de placer l'écran à une distance  $L$  de la sortie du défectomètre afin de travailler avec l'ordre de diffraction 0 uniquement. Il est sélectionné en filtrant le signal en sortie de défectomètre à l'aide d'un montage  $4f$  ou bien grâce à la séparation naturelle des ordres de diffraction. Voyons quelle sera la forme de la figure d'interférence dans cette configuration ; on s'intéresse uniquement aux trois termes les plus intenses  $n_1, n_2 = -1, 0, 1$  ( $C_0^2=0.25, C_1^2=0.025, C_2^2=0, C_3^2=0.0025$ ) de l'ordre de diffraction 0 :

$$\begin{aligned}
(w_3^-)^* &= C_0^2 \exp(-jK) \exp[-jk(L+d)] + \\
C_1^2 \exp(-jK) \exp \left[ j2\pi d \frac{\lambda}{2} \left( \frac{1}{p} \right)^2 \right] \exp[-jk(L+d)] \exp \left[ -j2\pi y \frac{2}{p} \sin(\alpha/2) \right] \\
&+ C_1^2 \exp(-jK) \exp \left[ j2\pi d \frac{\lambda}{2} \left( \frac{1}{p} \right)^2 \right] \exp[-jk(L+d)] \exp \left[ j2\pi y \frac{2}{p} \sin(\alpha/2) \right]. \quad (12.129)
\end{aligned}$$

L'intensité se résume à :

$$\begin{aligned}
w_3^-(w_3^-)^* &= C_0^4 + 2C_1^4 + 2C_0^2 C_1^2 \exp \left[ j2\pi d \frac{\lambda}{2} \left( \frac{1}{p} \right)^2 \right] \cos \left( 2\pi y \frac{2}{p} \sin(\alpha/2) \right) \\
&+ 2C_0^2 C_1^2 \exp \left[ -j2\pi d \frac{\lambda}{2} \left( \frac{1}{p} \right)^2 \right] \cos \left( 2\pi y \frac{2}{p} \sin(\alpha/2) \right) \\
&+ C_1^4 \left( \exp \left[ 2j2\pi y \frac{2}{p} \sin(\alpha/2) \right] + \exp \left[ -2j2\pi y \frac{2}{p} \sin(\alpha/2) \right] \right) \quad (12.130)
\end{aligned}$$

Les formules d'Euler permettent de faire apparaître des fonctions trigonométriques dans l'expression de l'intensité :

$$\begin{aligned}
w_3^-(w_3^-)^* &= C_0^4 + 2C_1^4 + 4C_0^2 C_1^2 \cos \left( 2\pi d \frac{\lambda}{2} \left( \frac{1}{p} \right)^2 \right) \cos \left( 2\pi y \frac{2}{p} \sin(\alpha/2) \right) \\
&+ 2C_1^4 \cos \left( 4\pi y \frac{2}{p} \sin(\alpha/2) \right). \quad (12.131)
\end{aligned}$$

Comme  $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$ , on réécrit l'expression précédente :

$$\begin{aligned}
w_3^-(w_3^-)^* &= C_0^4 + 4C_0^2 C_1^2 \cos \left[ 2\pi d \frac{\lambda}{2} \left( \frac{1}{p} \right)^2 \right] \cos \left[ 2\pi y \frac{2}{p} \sin(\alpha/2) \right] \\
&+ 4C_1^4 \cos^2 \left[ 2\pi y \frac{2}{p} \sin(\alpha/2) \right]. \quad (12.132)
\end{aligned}$$

Cette expression est très similaire à ce qui a été obtenue avec l'optique géométrique. Là encore, on remarque que les termes décrivant les franges de moiré sont modulés par  $\cos[2\pi d \lambda / 2 (1/p)^2]$ . En faisant varier la distance inter-réseaux, nous devrions observer un défilement des franges dû au changement de signe du terme de modulation. De plus, on constate que le terme en  $4C_1^4$  est très peu intense ; si il n'est pas visible sur les défectogrammes, il devrait être possible de travailler avec des distances inter-réseaux multiples d'une demie distance de Talbot.

#### 12.5.4 Perturbation des figures d'interférences par un objet à diagnostiquer

Considérons maintenant que le défectomètre contient un milieu à diagnostiquer. Lorsqu'une onde plane traverse le milieu contenant des gradients d'indice, son front d'onde se

distord. La phase n'est plus constante et dépend maintenant de la position. L'amplitude de l'onde arrivant sur l'écran contient la forme de l'onde à l'entrée du défectogramme :

$$w_1^-(x + \frac{dn_2\lambda}{p} \cos(\alpha/2), y - \frac{dn_2\lambda}{p} \sin(\alpha/2)) = \exp \left[ j\phi \left( x + \frac{dn_2\lambda}{p} \cos(\alpha/2), y - \frac{dn_2\lambda}{p} \sin(\alpha/2) \right) \right]. \quad (12.133)$$

Malheureusement, l'expression de la phase est ici inconnue. Afin d'obtenir des résultats exploitables, nous allons effectuer le développement limité de cette dernière :

$$\phi(x + h_x, y + h_y) = \phi(x, y) + \frac{\partial\phi}{\partial x} \Big|_x h_x + \frac{\partial\phi}{\partial y} \Big|_y h_y + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \Big|_x \frac{h_x^2}{2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \Big|_y \frac{h_y^2}{2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \Big|_{x,y} h_x h_y \quad (12.134)$$

Les termes du développement limité pour  $n_2 = 0, 1, -1$  sont présentés dans le tableau 12.1.

Terme	$n_2 = -1$	$n_2 = 0$	$n_2 = 1$
$\frac{\partial\phi}{\partial x} \Big _x h_x$	$-\frac{\partial\phi}{\partial x} \Big _x \frac{d\lambda}{p} \cos(\alpha/2)$	0	$\frac{\partial\phi}{\partial x} \Big _x \frac{d\lambda}{p} \cos(\alpha/2)$
$\frac{\partial\phi}{\partial y} \Big _y h_y$	$\frac{\partial\phi}{\partial y} \Big _y \frac{d\lambda}{p} \sin(\alpha/2)$	0	$-\frac{\partial\phi}{\partial y} \Big _y \frac{d\lambda}{p} \sin(\alpha/2)$
$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \Big _x \frac{h_x^2}{2}$	$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \Big _x \frac{(\frac{\lambda^d}{p} \cos(\alpha/2))^2}{2}$	0	$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \Big _x \frac{(\frac{\lambda^d}{p} \cos(\alpha/2))^2}{2}$
$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \Big _y \frac{h_y^2}{2}$	$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \Big _y \frac{(\frac{\lambda^d}{p} \sin(\alpha/2))^2}{2}$	0	$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \Big _y \frac{(\frac{\lambda^d}{p} \sin(\alpha/2))^2}{2}$
$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \Big _{x,y} h_x h_y$	$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \Big _{x,y} \frac{d\lambda}{p} (-\cos(\frac{\alpha}{2}) + \sin(\frac{\alpha}{2}))$	0	$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \Big _{x,y} \frac{d\lambda}{p} (\cos(\frac{\alpha}{2}) - \sin(\frac{\alpha}{2}))$

TABLE 12.1 – Termes du développement limité de la phase pour différentes valeurs de  $n_2$ .

Si, comme précédemment, on s'intéresse uniquement à l'ordre de diffraction 0, on aura en ne conservant que les termes les plus intenses :

$$(w_3^-)^* = C_0^2 \exp(-j\phi) \exp[-jk(L+d)] + C_1^2 \exp \left[ -j \left( \phi - \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{d\lambda}{p} \cos(\alpha/2) + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{d\lambda}{p} \sin(\alpha/2) \right) \right] \exp \left[ j2\pi d \frac{\lambda}{2} \left( \frac{1}{p} \right)^2 \right] \exp[-jk(L+d)] \exp \left[ -j2\pi y \frac{2}{p} \sin(\alpha/2) \right] + C_1^2 \exp \left[ -j \left( \phi + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{d\lambda}{p} \cos(\alpha/2) - \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{d\lambda}{p} \sin(\alpha/2) \right) \right] \exp \left[ j2\pi d \frac{\lambda}{2} \left( \frac{1}{p} \right)^2 \right] \exp[-jk(L+d)] \exp \left[ j2\pi y \frac{2}{p} \sin(\alpha/2) \right]. \quad (12.135)$$

L'intensité au niveau de l'écran sera :

$$\begin{aligned}
(w_3^-)(w_3^-)^* &= C_0^4 + 4C_1^4 \cos^2 \left[ 2\pi y \frac{2}{p} \sin(\alpha/2) - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{d\lambda}{p} \cos(\alpha/2) - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{d\lambda}{p} \sin(\alpha/2) \right] + \\
&4C_0^2 C_1^2 \cos \left[ 2\pi \frac{d\lambda}{2} \left( \frac{1}{p} \right)^2 \right] \cos \left[ 2\pi y \frac{2}{p} \sin(\alpha/2) - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{d\lambda}{p} \cos(\alpha/2) - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{d\lambda}{p} \sin(\alpha/2) \right].
\end{aligned}
\tag{12.136}$$

Contrairement à l'approche géométrique où c'est un angle de déflexion qui est mesuré, ici seule la dérivée de la phase de l'onde peut être obtenue. Cela permet de modifier notre interprétation du phénomène, la dérivée de la phase laisse à penser que les résultats proviennent de l'interférence de deux images légèrement décalées sous l'action des réseaux [33] (interféromètre à décalage latéral). Comme nous le verrons, cette idée se vérifie expérimentalement car des images très décalées peuvent être obtenues lorsqu'on met une grande distance entre les réseaux. Lors de l'approche géométrique, nous avons mentionné que le défectomètre n'était pas sensible aux gradients d'indice de réfraction orientés selon  $y$ ; La relation (12.136) permet de le prouver puisque la dérivée de la phase selon  $y$  est multipliée par une très petite quantité  $\sin(\alpha/2)$  tandis que la dérivée de la phase selon  $x$  est multipliée par presque 1. Que ce soit avec l'approche géométrique ou avec l'optique de Fourier, on remarque que la défectométrie moiré est une technique qui permet de mesurer des dérivées. Cela est particulièrement intéressant pour le diagnostic des plasmas d'arcs où une inversion d'Abel doit être souvent calculée pour obtenir des résultats. En effet, si l'on examine l'expression de l'inversion d'Abel (partie 1, eq 5.2), on constate que celle-ci fait intervenir la dérivée d'une grandeur projetée. L'utilisation de dérivées numériques induit des erreurs dès qu'il y a un peu de bruit sur la mesure et des stratégies doivent être mises en place pour limiter l'erreur sans altérer le résultat final. Ici, la défectométrie permet de s'affranchir du calcul de la dérivée numérique. On peut ainsi obtenir des résultats de bonne qualité et ce relativement simplement.

### 12.5.5 Relation entre la phase et l'angle de déflexion

Les relations obtenues à l'aide de la théorie de la diffraction font intervenir la phase d'une onde. Or, nous avons vu lors de l'approche géométrique que nous mesurons en fait un angle de déflexion à l'aide de l'interférométrie moiré. Les deux théories doivent donner des résultats équivalents, nous devons donc rechercher la relation qui existe entre la déflexion des rayons lumineux et la dérivée de la phase. Commençons par écrire la phase en faisant apparaître l'indice de réfraction :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \cdot \vec{r} n,
\tag{12.137}$$

avec  $\lambda_0$  la longueur d'onde du rayonnement dans le vide et  $n$  l'indice de réfraction. Si l'on considère un milieu homogène infini, une onde plane se propageant selon la direction des  $z$  croissants aura une phase de :

$$\phi_0(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{\lambda_0} n_0 dz.
\tag{12.138}$$

On place maintenant un objet test d'épaisseur  $\overline{AB}$  et d'indice de réfraction  $n(z, x)$  sur le chemin de l'onde, la phase sera cette fois :

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^A \frac{2\pi}{\lambda_0} n_0 dz + \int_A^B \frac{2\pi}{\lambda_0} n(z, x) dz + \int_B^{\infty} \frac{2\pi}{\lambda_0} n_0 dz. \quad (12.139)$$

La différence de phase nous donne :

$$\phi - \phi_0 = \int_A^B \frac{2\pi}{\lambda_0} (n - n_0) dz; \quad (12.140)$$

$$\phi - \phi_0 = \int_A^B \frac{2\pi}{\lambda_0} (n - n_0) dz. \quad (12.141)$$

L'angle de déflexion à ce niveau est donné par la relation (12.53) :

$$\beta(x) = \int_A^B \frac{d((n - n_0))}{dx} dz. \quad (12.142)$$

Les milieux que l'on diagnostique sont d'assez petite taille, de l'ordre du centimètre. De plus, l'indice de réfraction de ces derniers est proche de 1. Du coup, on peut dire que dans le milieu test, la position  $x$  ne varie quasiment pas, ce qui implique que dans l'expression de  $\beta(z)$ ,  $n$  ne dépend pas de  $x$ . On obtient :

$$\beta(x) = \frac{d}{dx} \int_A^C ((n - n_0)) dz. \quad (12.143)$$

Il devient possible de réécrire cette expression en utilisant la différence de phase :

$$\beta(x) = \frac{d}{dx} \frac{\lambda_0}{2\pi} \Delta\phi. \quad (12.144)$$

Si l'on revient maintenant sur la relation obtenue à l'aide de l'optique ondulatoire, on peut réécrire l'argument des cosinus contenant la dérivée de la phase :

$$2\pi y \frac{2}{p} \sin(\alpha/2) - \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{d\lambda}{p} \cos(\alpha/2) = 2\pi (y \frac{2}{p} \sin(\alpha/2) - \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{d\lambda}{p 2\pi} \cos(\alpha/2)). \quad (12.145)$$

Comme  $\alpha/2$  est un angle petit, on peut approximer  $\cos(\alpha/2) \approx 1$  :

$$2\pi (y \frac{2}{p} \sin(\alpha/2) - \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{d\lambda}{p 2\pi} \cos(\alpha/2)) = 2\pi (y \frac{2}{p} \sin(\alpha/2) - \beta \frac{d}{p}). \quad (12.146)$$

La phase des figures d'interférence obtenue avec l'approche ondulatoire est similaire à celle calculée à l'aide de la composition de transmittance (eq.12.74).

### 12.5.6 Sensibilité d'un défectomètre

Comme tout dispositif utilisant le rayonnement lumineux comme moyen de diagnostic, le défectomètre est soumis à une limitation de sa résolution du fait du principe d'incertitude. Nous allons calculer ici la résolution spatiale théorique d'un défectomètre. Pour cela, on considère un défectomètre moiré constitué de deux réseaux de Ronchi d'un pas identique

$p$  séparés d'une distance  $d$ . On place un cache semi-infini au niveau du réseau  $G_1$  dont la transmittance est la suivante :

$$t_0 = 1 - \text{rect}(x). \quad (12.147)$$

La transmittance du réseau  $G_1$  est :

$$t_1(x, y) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} C_{n_1} \exp \left[ j \frac{2\pi}{p} n_1 (\cos(\alpha/2)x + \sin(\alpha/2)y) \right]. \quad (12.148)$$

On utilise le principe de Babinet pour déterminer la transmittance du réseau occulté :

$$t_{G_1} = t_0 t_1. \quad (12.149)$$

Considérons une onde plane qui arrive sur le défectomètre. Avant le premier réseau, la phase de l'onde dans l'espace réel est donnée par :

$$w_1^- = \exp(j\phi), \quad (12.150)$$

où  $\phi$  est une constante. Après  $G_1$ , la phase de l'onde dans l'espace réel est donnée par :

$$w_1^+ = w_1^- t_{G_1}. \quad (12.151)$$

Dans l'espace de Fourier, Le spectre de l'onde en sortie de  $G_1$  est :

$$W_1^+ = \exp(j\phi) \left[ (\delta(f_x) - \text{sinc}(f_x)) * \sum_{n_1} C_{n_1} \delta(f_x - \frac{n_1}{p} \cos(\alpha/2), f_y - \frac{n_1}{p} \sin(\alpha/2)) \right]. \quad (12.152)$$

$$\begin{aligned} W_1^+ &= \sum_{n_1} C_{n_1} \exp(j\phi) \delta(f_x - \frac{n_1}{p} \cos(\alpha/2), f_y - \frac{n_1}{p} \sin(\alpha/2)) \\ &- \left[ (\exp(j\phi) \text{sinc}(f_x)) * \sum_{n_1} C_{n_1} \delta(f_x - \frac{n_1}{p} \cos(\alpha/2), f_y - \frac{n_1}{p} \sin(\alpha/2)) \right]. \end{aligned} \quad (12.153)$$

$$\begin{aligned} W_1^+ &= \sum_{n_1} C_{n_1} \exp(j\phi) \delta(f_x - \frac{n_1}{p} \cos(\alpha/2), f_y - \frac{n_1}{p} \sin(\alpha/2)) \\ &- \left[ \exp(j\phi) \sum_{n_1} C_{n_1} \text{sinc}(f_x - \frac{n_1}{p} \cos(\alpha/2)) \right] \end{aligned} \quad (12.154)$$

On fait se propager l'onde de la sortie de  $G_1$  jusqu'à  $G_2$  :

$$\begin{aligned} W_2^- &= \exp(-jkd(1 - \lambda^2/2(f_x^2 + f_y^2))) \sum_{n_1} C_{n_1} \exp(j\phi) \delta(f_x - \frac{n_1}{p} \cos(\alpha/2), f_y - \frac{n_1}{p} \sin(\alpha/2)) \\ &- \exp(-jkd(1 - \lambda^2/2(f_x^2 + f_y^2))) \left[ \exp(j\phi) \sum_{n_1} C_{n_1} \text{sinc}(f_x - \frac{n_1}{p} \cos(\alpha/2)) \right] \end{aligned} \quad (12.155)$$

La passage de G2 se fait en convoluant la transformée de Fourier de sa transmittance avec le spectre de l'onde à son entrée :

$$\begin{aligned}
W_2^+ &= \exp(-jkd(1 - \lambda^2/2(f_x^2 + f_y^2))) \sum_{n_1} C_{n_1} \exp(j\phi) \delta(f_x - \frac{n_1}{p} \cos(\alpha/2), f_y - \frac{n_1}{p} \sin(\alpha/2)) \\
&\quad * \sum_{n_2} C_{n_2} \delta(f_x - \frac{n_2}{p} \cos(\alpha/2), f_y + \frac{n_2}{p} \sin(\alpha/2)) \\
&\quad - \exp(-jkd(1 - \lambda^2/2(f_x^2 + f_y^2))) \left[ \exp(j\phi) \sum_{n_1} C_{n_1} \text{sinc}(f_x - \frac{n_1}{p} \cos(\alpha/2)) \right] \\
&\quad * \sum_{n_2} C_{n_2} \delta(f_x - \frac{n_2}{p} \cos(\alpha/2), f_y + \frac{n_2}{p} \sin(\alpha/2)) \tag{12.156}
\end{aligned}$$

La première convolution est similaire à celle obtenue avec un réseau sans cache, nous allons donc nous pencher plus en détail sur la seconde convolution qui est due à la présence du cache :

$$\begin{aligned}
W_{2c}^+ &= \sum_{n_2} C_{n_2} \exp \left[ -jkd \left( 1 - \lambda^2/2 \left( (f_x - \frac{n_2}{p} \cos(\alpha/2))^2 + (f_y + \frac{n_2}{p} \sin(\alpha/2))^2 \right) \right) \right] \\
&\quad \exp(j\phi) \sum_{n_1} C_{n_1} \text{sinc} \left[ f_x - \frac{n_1 + n_2}{p} \cos(\alpha/2) \right]. \tag{12.157}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{2c}^+ &= \sum_{n_2} C_{n_2} \exp(-jkd) \exp(jkd \frac{\lambda^2}{2} (f_x^2 + f_y^2)) \exp(jkd \frac{\lambda^2}{2} (\frac{n_2}{p})^2) \\
&\quad \exp(jkd \frac{\lambda^2}{2} (-2f_x n_2/p \cos(\alpha/2) + 2f_y n_2/p \sin(\alpha/2))) \exp(j\phi) \\
&\quad \sum_{n_1} C_{n_1} \text{sinc}(f_x - \frac{n_1 + n_2}{p} \cos(\alpha/2)). \tag{12.158}
\end{aligned}$$

Pour obtenir l'amplitude de l'onde, on repasse dans l'espace réel en effectuant une transformée de Fourier inverse :

$$\begin{aligned}
TF^{-1}(W_{2c}^+) &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} C_{n_1} C_{n_2} \exp(j\phi) \exp \left( j2\pi \frac{n_2 + n_1}{p} \cos(\frac{\alpha}{2}) x \right) \text{rect} \left( x + \frac{kd \lambda^2}{2\pi} \frac{n_2}{2} \cos(\frac{\alpha}{2}) \right) * \\
&\quad \frac{1}{jd} \exp(-jkd) \exp(j\pi \frac{x^2 + y^2}{d\lambda}) \exp(j2\pi (\frac{n_2}{p})^2). \tag{12.159}
\end{aligned}$$

La forme de cette convolution est très intéressante car elle contient la fonction rectangle qui correspond au cache placé sur le premier réseau. On constate que l'argument de cette fonction a été transformé au cours de la traversée du défectomètre. Si l'on réécrit la convolution sous une autre forme, on aura :

$$\begin{aligned}
w_{2c}^+ &= \text{const} \int \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect} \left( X + \frac{d\lambda n_2}{p} \cos(\alpha/2) \right) \exp(j2\pi \frac{n_2 + n_1}{p} \cos(\alpha/2) X) \\
&\quad \exp(j\pi \frac{(x - X)^2 + (y - Y)^2}{d\lambda}) dX dY. \tag{12.160}
\end{aligned}$$

La fonction rectangle vaut 1 pour  $X + \frac{d\lambda n^2}{p} \cos(\alpha/2)$  compris entre -0.5 et 0.5 et zéro sur le reste de  $\mathbb{R}$ . Considérons maintenant les trois premiers termes de l'ordre zéro,  $n^2$  prendra pour l'occasion les valeurs -1,0,1. L'examen de la convolution pour ces termes montre que les bornes d'intégration varient avec  $n^2$ . La limite d'intégration sera décalée de  $d\frac{\lambda n^2}{p} \cos(\alpha/2)$ , ce qui implique que l'image de la limite du cache sera décalée d'autant. Pour l'ordre zéro, la limite du cache ne sera plus franche, on observera sur l'image trois limites bien distinctes séparées de  $\frac{d\lambda}{p}$ . L'incertitude sur la position est donc de  $\frac{d\lambda}{p}$ . Connaissant cette dernière, on peut déterminer l'angle minimum mesurable par un défectomètre à l'aide du principe d'incertitude position/fréquence angulaire :

$$\Delta x \Delta f_x \geq \frac{1}{2\pi}. \quad (12.161)$$

Or on a vu que :

$$\lambda f_x = \sin(\beta), \quad (12.162)$$

avec  $f$  la fréquence angulaire,  $\beta$  l'angle de déflexion du rayon lumineux considéré et  $\lambda$  la longueur d'onde du rayonnement utilisé. On en déduit :

$$\begin{aligned} \Delta\beta &\geq \frac{p}{2d\pi}, \\ \Delta x &\geq \frac{d\lambda}{p}. \end{aligned} \quad (12.163)$$

Ce résultat est de première importance et va à l'encontre de quelques articles qui préconisent de séparer les réseaux d'une distance de Talbot pour limiter l'effet de la diffraction [38]. On voit ici que c'est grâce à la diffraction des réseaux que l'on obtient une information sur l'angle de déflexion. Malheureusement, un gain de sensibilité sur l'angle de déflexion se traduit nécessairement par une perte de sensibilité spatiale. Ceci est tout à fait compréhensible puisque le défectomètre moiré est un interféromètre à décalage latéral (lateral shearing interferometer).

## 12.6 Traitement des données

Il a été montré que l'information sur la déflexion des rayons lumineux était contenue dans la phase de la figure d'interférence. Tout comme l'interférométrie, il est possible d'isoler la phase des autres informations contenues dans un défectogramme à l'aide d'un traitement par transformée de Fourier.

Deux défectogrammes sont nécessaires afin de mener à bien le traitement des données : un défectogramme de référence qui contient uniquement les franges de moiré non-perturbées, et un défectogramme de travail, où l'objet d'étude a perturbé la figure d'interférence.

La phase de la figure d'interférence doit être calculée, pour cela, on effectue une transformée de Fourier des défectogrammes et on ajuste un filtre passe-bande de manière à ne conserver que les fréquences relatives aux franges de moiré (figure 12.8). Typiquement, si les franges de moiré sont horizontales, la position de leur termes sera similaire à celles de la figure 12.7. La phase de la figure d'interférence peut ensuite être calculée après transformée de Fourier inverse en évaluant l'arc-tangente du ratio partie imaginaire sur partie réelle du terme contenant la phase. La phase obtenue est bornée et doit être déroulée.

Finalement, lorsque les phases des défectogrammes de référence et de travail ont été calculées, on les soustrait afin d'obtenir la différence de phase.

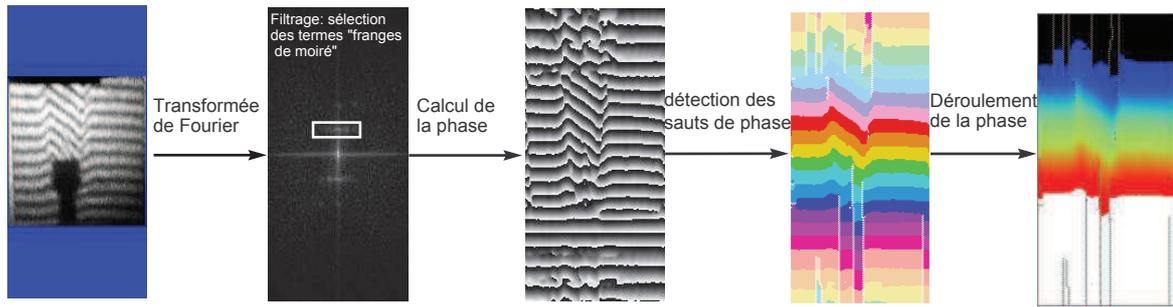


FIGURE 12.8 – Résumé des différentes étapes pour le traitement d’un défautogramme.

Le traitement des données est similaire à ceux des interférogrammes, de nombreux programmes existent déjà pour effectuer l’ensemble de ces tâches de manière simple. Comme précédemment, notre choix s’est porté sur le programme IDEA [9] pour traiter les données.

Pour terminer, la différence de phase est liée aux propriétés physiques de l’objet à étudier via la relation :

$$\Delta\phi = \beta \frac{2\pi d}{p}, \quad (12.164)$$

ou encore, si l’on désire obtenir l’indice de réfraction à l’aide d’une inversion d’Abel :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi d}{p} \int \frac{d\delta n}{dy} dz. \quad (12.165)$$

## 12.7 Conclusion

Nous avons vu au cours de cette partie théorique trois approches permettant d’expliquer le fonctionnement d’un défautomètre moiré. Ces approches, de complexité croissante, ont permis de mettre en relief deux des avantages les plus importants de cette technique : sa sensibilité réglable, et la mesure d’une dérivée qui permet de limiter les erreurs lors de traitements tels que l’inversion d’Abel.

À l’aide de l’optique de Fourier, nous avons montré que la mesure de l’angle de déflexion était équivalente à une mesure de dérivée de phase d’une onde lumineuse. Nous avons prouvé que les défautogrammes pris à la sortie de  $G2$  étaient similaires à ceux contenant uniquement l’ordre de diffraction zéro. Enfin, nous avons montré que, contrairement à bon nombre de publications parues dans les années 1980, la diffraction est le phénomène à l’origine des mesures d’angles et non un phénomène parasite. Ainsi, le défautomètre est soumis à une relation d’incertitude position/fréquence angulaire.

Dans la partie 5 de cette thèse, le défautomètre développé au laboratoire sera présenté. À cette occasion, nous nous focaliserons sur le réglage de ce dispositif. Les différentes relations obtenues dans cette partie théorique seront ensuite démontrées expérimentalement. Enfin, le diagnostic d’un jet de plasma d’argon laminaire à l’aide de cette méthode sera détaillé.



# Bibliographie

- [1] J. H. Gladstone and T. P. Dale. Researches on the refraction, dispersion, and sensitiveness of liquids. *Philosophical Transaction of the Royal Society of London*, 153 :317–343, 1863.
- [2] W. Sellmeier. Zur Erklärung der abnormen Farbenfolge im Spectrum einiger Substanzen. *Annalen der Physik und Chemie*, 219 :272–282, 1871.
- [3] E. Palik. *Handbook of optical constants of solids, Volume 5*. Academic Press, 1998.
- [4] WC Gardiner, Y. Hidaka, and T. Tanzawa. Refractivity of combustion gases. *Combustion and Flame*, 40(2) :213–219, 1981.
- [5] R. Alpher and D. White. Optical refractivity of high temperature gases. I. Effects resulting from dissociation of diatomic gases. *Phys. Fluids*, 2 :153–161, 1959.
- [6] R. Alpher and D. White. Optical refractivity of high temperature gases. II. Effects resulting from ionization of monoatomic gases. *Phys. Fluids*, 2 :162–169, 1959.
- [7] C. de Izarra. *Contribution à l'étude d'une colonne de plasma d'argon dans un domaine étendu de température [2000 K ; 14000K]*. PhD thesis, Université d'Orléans, 1988.
- [8] J. Glasser. *Étude d'un plasma d'argon à fortes corrélations produit dans un arc sous haute pression*. PhD thesis, Université d'Orléans, 1981.
- [9] Technical University Graz. IDEA- Interferometric Data Evaluation Algorithms.
- [10] J P. Marat. *Recherches physiques sur le feu*. Jombert, 1780.
- [11] G. S. Settles. *Schlieren and Shadowgraph Techniques*. Springer, 2001.
- [12] A. Gopal, S. Minardi, and M. Tatarakis. Quantitative two-dimensional shadowgraphic set-up for high-sensitivity measurement of low-density laser-plasmas. *Optics Letters*, 32 (10) :1238–1240, 2007.
- [13] G. de Izarra, N. Cerqueira, and C. de Izarra. Quantitative shadowgraphy on a laminar argon plasma jet at atmospheric pressure. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 44 : 485202, 2011.
- [14] Joe D. Hoffman. *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. Marcel Dekker, 2001.
- [15] G. de Izarra and C. de Izarra. Quantitative shadowgraphy made easy. *Eur. J. Phys.*, 33 : 1821–1842, 2012.
- [16] R. Bracewell. *The Fourier Transform and Its Applications*. McGraw-Hill, 2000.
- [17] Roger Easton. *Fourier Methods in imaging*. John Wiley, 2010.
- [18] O. Kafri and I. Glatt. *The physics of moiré metrology*. John Wiley and sons, 1990.
- [19] A. Righi. Sui fenomeni che si producono colla sovrapposizione di due reticoli e sopra alcune loro applicazioni (sur les phénomènes qui se produisent avec la superposition de deux réseaux et sur certaines de leurs applications). *Il Nuovo Cimento*, 21 :203–228, 1887.

- [20] M. Mulo. Application du moiré à l'étude des déformations du mica. *Revue d'optique théorique et instrumentale*, 1925.
- [21] SW. Kin, YB. Choi, and JT. Oh. Reverse engineering : high speed digitization of free form surfaces by phase-shifting grating projection moiré topography. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 39 :389–401, 1999.
- [22] M El-Sayyad. Comparison of roentgenography and moiré topography for quantifying spinal curvature. *Physical Therapy*, 66 :1078–1082, 1986.
- [23] K. Madanipour and M. Taghi Tavassoly. Application of moiré technique to the measurement of modulation transfert function (mtf) of printing systems. *Optics and lasers in engineering*, 45 :64–69, 2007.
- [24] W.N Sharpe. *Handbook of experimental solid mechanics*. Springer, 2008. chapter 22 pp.
- [25] J. Guild. *The interference system of crossed diffraction gratings : theory of moiré fringes*. Clarendon press, 1956.
- [26] Y. Chen, Y. Song, Z. LI, and A. He. A uniform description of the gas and plasma flow fields' refractive index. *Optics communications*, 283 :4214–4218, 2010.
- [27] I. M. A. Angulo. Campo de temperaturas en chorros de gas por deflectometria moiare. *Ingenieria aeronautica y astronautica*, (334) :32–49, 1994.
- [28] I. Amidror. *The theory of moiré phenomen*. Springer, 2000.
- [29] J. W. Goodman. *Introduction to Fourier optics*. McGraw-Hill, 1996.
- [30] John Cowley. *Diffraction physics*. Elsevier, 1995.
- [31] O. K. Ersoy. *Diffraction, Fourier optics and imaging*. John Wiley, 2007.
- [32] H. F. Talbot. Facts relating to optical science. *The London and Edingurgh philosophical magazine and journal of science*, 9(56) :401–407, 1836.
- [33] E. Keren and O. Kafri. Diffraction effects in moiré deflectometry. *Journal of the Optical Society of America A*, 2 :111–120, 1985.
- [34] K. Paturski and M. Kujawinska. *Handbook of the moiré fringe technique*. ELSEVIER, 1993.
- [35] E. Bar-Ziv. Effect of diffraction on the moiré image. i. theory. *Journal of the Optical Society of America A*, 2 :371–379, 1985.
- [36] Y. Song, Y. Y. Chen, A. He, and Z. Zhao. Theoretical analysis for moiré deflectometry from theory diffraction. *Journal of the Optical Society of America A*, 26 :882–889, 2009.
- [37] Y. Song, Y. Chen, A. He, and Z. Zhao. Spatial phase-shifting characteristic of double grating interferometer. *Optics Express*, 17 :20415–20429, 2009.
- [38] E. Bar-Ziv. Effect of diffraction on the moiré image for temperature mapping in flames. *Applied Optics*, 23 :4040–4044, 1984.

Quatrième partie

Spectroscopie moléculaire



# Table des matières

---

<b>13</b>	<b>Spectre d'une molécule diatomique, le cas du radical OH</b>	<b>187</b>
13.1	Modèle moléculaire vectoriel d'une molécule diatomique . . . . .	188
13.1.1	État électronique d'une molécule . . . . .	188
13.1.2	États rotationnels d'une molécule : le rotateur rigide . . . . .	190
13.1.3	États vibrationnels d'une molécule : l'oscillateur anharmonique . . . . .	192
13.1.4	Interactions vibration-rotation : le rotateur vibrant . . . . .	193
13.1.5	Spectre électronique d'une molécule diatomique . . . . .	193
13.2	Le spectre UV du radical OH . . . . .	199
13.2.1	Le spectre ultraviolet de OH . . . . .	199
13.3	Conclusion . . . . .	204
<b>14</b>	<b>Utilisation du spectre UV d'OH</b>	<b>205</b>
14.1	Simulation du spectre UV du radical OH . . . . .	205
14.1.1	Généralités . . . . .	205
14.1.2	Fonctionnement du programme de simulation . . . . .	207
14.2	Exploitation des résultats . . . . .	209
14.2.1	Influence de la température rotationnelle sur le spectre UV de OH. . . . .	209
14.2.2	Influence de la température vibrationnelle sur le spectre UV de OH . . . . .	210
14.2.3	Influence de la fonction d'appareil globale sur le spectre UV de OH . . . . .	210
14.2.4	Résultats pour les hautes résolutions . . . . .	211
14.2.5	Résultats pour les faibles résolutions . . . . .	217
14.2.6	Mesure de températures sur un spectre expérimental . . . . .	219
14.2.7	Validation théorique des méthodes de mesures . . . . .	221
14.3	Conclusion . . . . .	222
14.4	Abaques . . . . .	223
14.4.1	Résultats haute résolution . . . . .	223
14.4.2	Basse résolution avec $G_0$ , $G_1$ résolus . . . . .	227
14.4.3	Basse résolution avec $G_{mel}$ . . . . .	230

---



La spectroscopie moléculaire a été au cours du XX<sup>ème</sup> siècle un des pans de la physique le plus prolifique. Des prix Nobel tels que Herzberg se sont illustrés dans cette science. Cet engouement, initié par la mécanique quantique et de nouveaux moyens de calcul et de mesure, a permis de mieux comprendre certaines chimies.

En physique des plasmas, la spectroscopie moléculaire est souvent utilisée pour faire le diagnostic de milieux pour lesquels le rayonnement atomique est trop faible, c'est-à-dire pour des zones où la température est comprise entre 300 et 8000 K. On montre sous certaines conditions que la température rotationnelle est proche de la température des lourds et que la température vibrationnelle peut être proche de la température électronique [1, 2].

L'une des molécules la plus étudiée est le radical hydroxyle : OH. C'est une espèce chimique instable qui possède un électron non-apparié, elle a donc une grande réactivité et est très oxydante. On le trouve dans de très nombreuses réactions chimiques, que ce soit lors de combustions ou bien dans la chimie de l'atmosphère.

La production et l'utilisation de OH est un enjeu majeur en physique des plasmas. Il joue un rôle non négligeable dans le diagnostic de décharges et de jets, mais est aussi au premier plan grâce au développement récent des plasmas non-thermiques (plasma-médecine...) : on essaye de produire un maximum de radicaux sans échauffement à l'aide de décharges hors équilibre pour traiter des milieux biologiques ou pour stériliser.

Afin d'étudier ces décharges à l'aide du spectre du radical OH, plusieurs méthodes "classiques" sont actuellement mises en œuvre. La méthode du graphe de Boltzmann permet d'obtenir les différentes températures mais plusieurs difficultés apparaissent avec l'utilisation de cette technique. Tout d'abord, le dispositif spectroscopique utilisé doit posséder une bonne résolution afin de séparer les différentes raies rotationnelles et ainsi obtenir la température rotationnelle. De plus, les bandes vibrationnelles peuvent être mélangées, ce qui complique la mesure de température vibrationnelle. Pour passer outre ces difficultés, les chercheurs comparent leurs spectres expérimentaux à des spectres synthétiques issus de la simulation. Là encore, des complications apparaissent : il est nécessaire d'étalonner précisément le spectre expérimental en longueur d'onde et de connaître parfaitement la fonction d'appareil de son dispositif expérimental pour espérer obtenir des résultats de qualité.

Afin de s'affranchir de ces contraintes, de Izarra a développé une méthode de mesure de la température rotationnelle utilisant uniquement des grandeurs accessibles directement sur le spectre UV du radical OH [3, 4]. Avec l'aide d'une simulation, il a trouvé que l'amplitude de certains groupes de raies non-résolues de la bande 0-0 de la transition  $^2\Sigma - ^2\Pi$  étaient très sensibles à la température rotationnelle et peuvent être utilisés pour la déterminer. Nous allons présenter ici une approche similaire utilisant un programme de simulation de spectre plus complet. Nous verrons qu'il est possible d'obtenir la température rotationnelle mais aussi la température vibrationnelle grâce à des quantités directement mesurables sur un spectre brut.

Dans un premier temps, nous allons nous pencher sur la théorie relative aux spectres moléculaires et à leur interprétation. À cette occasion, nous nous focaliserons sur les molécules diatomiques. La molécule OH sera traitée en particulier. Nous verrons ensuite comment notre programme de simulation de spectre moléculaire a été construit, quelles données ont été utilisées à cette occasion et leurs validités. Enfin, nous présenterons des résultats issus de cette simulation et les méthodes de mesure qui en découlent.



## Chapitre 13

# Spectre d'une molécule diatomique, le cas du radical OH

Le monde est plein de cons qui se chargent d'être décents pour les autres parce qu'ils n'ont rien de mieux à foutre, qu'ils sont étroits de partout et principalement d'esprit, que leurs idées font la coquille d'escargot, que leur âme pue le rance et leur sexe le renfermé.

---

San Antonio

L'étude expérimentale des spectres de bandes a permis de montrer que les termes spectraux d'une molécule pouvaient être écrits comme la somme de trois termes ( $T_e$ ,  $T_v$ , et  $T_r$ ) [5] tels que :

$$T = T_e + T_v + T_r \quad (13.1)$$

En général,  $T_e \gg T_v \gg T_r$ . On sait que la relation entre un terme spectral et l'état énergétique d'une molécule dans un état donné est :  $T = E/(hc)$ . On écrit du coup :

$$E = E_e + E_v + E_r. \quad (13.2)$$

$E_e$  est l'énergie des électrons de valence. Il est similaire à ce que l'on trouve dans les termes spectraux atomiques.  $E_v$  et  $E_r$ , par contre, sont spécifiques aux molécules, il n'y a aucune analogie possible avec les cas atomiques. En effet, contrairement aux atomes, les molécules sont constituées de deux ou plusieurs noyaux qui peuvent osciller et tourner.  $E_v$  et  $E_r$  représentent de ce fait les énergies mises en jeu pour la vibration et la rotation. Cette séparation de l'énergie en trois termes a été justifiée à l'aide de la mécanique quantique par Born et Oppenheimer.

Notre but est ici de simuler des spectres moléculaires en faisant varier le peuplement des niveaux en fonction des températures pour obtenir, à terme, une méthode de mesure simple de ces dernières.

Nous allons donc nous intéresser ici à la structure des états énergétiques des molécules diatomiques en général, et de OH plus particulièrement.

### 13.1 Modèle moléculaire vectoriel d'une molécule diatomique

Considérons ici une molécule diatomique quelconque. Celle-ci sera formée de l'ensemble des électrons des deux atomes ainsi que de leur noyau. Bien entendu, les atomes peuvent être différents comme c'est le cas de OH ou bien de même type comme  $C_2$ . Dans le premier cas, on dit que la molécule est hétéronucléaire tandis que dans le second, c'est une molécule homonucléaire. La ligne que relie les deux noyaux est appelée axe internucléaire. L'ensemble des électrons de la molécule "tournent" autour des noyaux et chacun d'entre eux est soumis à leur champ électrique ainsi qu'au champ produit par les autres électrons. Ce système est beaucoup plus complexe que les atomes seuls. Fort heureusement, on peut considérer avec une bonne approximation que l'ensemble des électrons d'une couche électronique complète de n'importe lequel des deux atomes n'est pas influencé par le champ électrique provenant de l'autre atome. Ils continuent à tourner autour de leur noyau tout en négligeant ce dernier.

Le modèle d'une molécule diatomique est de ce fait largement simplifié. Deux cœurs formés chacun d'un noyau et de couches électroniques fermées créent un champ électrique dans lesquels gravitent les électrons issus des couches électroniques non-complètes. Ces électrons, appelés électrons de valence, ne sont plus attachés à l'un des atomes de la molécule, on doit traiter cette dernière dans son intégralité. Ils assurent la stabilité de la molécule dans la mesure où les deux noyaux, qui sont chargés positivement, se repoussent.

Lorsqu'on utilise le modèle vectoriel pour un atome, on sait que le nombre quantique azimutal total  $J$  d'une couche électronique complète est de 0. De plus, la masse d'un électron est négligeable devant la masse d'un noyau. On peut donc considérer que la masse de chaque cœur est égale à la masse de son noyau pour le traitement de la vibration et de la rotation.

Finalement, lorsqu'on s'intéresse à une molécule, on considère deux cœurs de masses égales à celle de leur noyau, entourés des électrons de valence qui gravitent dans leur champ électrique.

#### 13.1.1 État électronique d'une molécule

Considérons pour l'instant que l'énergie de la molécule ne dépend que des électrons. On admet que le couplage des électrons dans la molécule est un couplage  $LS$ . Les moments angulaires orbitaux des électrons sont couplés pour donner un vecteur résultant  $\vec{L}$  auquel est attaché un nombre quantique  $L$ , entier positif ou nul. Comme le champ électrique autour de la molécule possède une symétrie cylindrique, le vecteur  $\vec{L}$  n'est pas adéquat, et on préfère utiliser sa projection le long de l'axe internucléaire noté lambda ( $\vec{\Lambda}$ ). Un nombre quantique  $\Lambda$  est attaché à ce vecteur tel que :

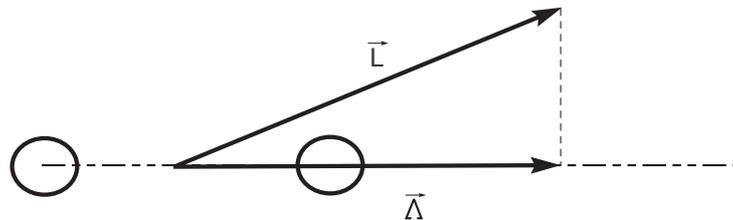


FIGURE 13.1 – Définition du vecteur  $\vec{\Lambda}$ .

$$|\vec{\Lambda}| = \Lambda \frac{h}{2\pi} \quad (13.3)$$

$\Lambda$  est utilisé pour repérer un état électronique, il peut prendre des valeurs entières comprises entre  $L$  et  $-L$ . Comme pour la notation des termes dans le cas du couplage de Russell-Saunders, chaque valeur de  $\Lambda$  correspond à une lettre grecque (tab.13.1).

$\Lambda$	0	1	2	3
Etat	$\Sigma$	$\Pi$	$\Delta$	$\Phi$

TABLE 13.1 – Liste des états correspondants aux différentes valeurs absolues de  $\Lambda$ .

Du fait de la symétrie, lorsque la rotation n'est pas prise en compte, l'énergie électronique d'une molécule ne dépend que de la valeur absolue de  $\Lambda$ . Il est clair que pour  $L = 2$ , les états  $\Lambda = 2$  et  $\Lambda = -2$  auront la même énergie. Les niveaux qui sont définis par une valeur de  $\Lambda$  et son opposé possèdent la même énergie, ils sont doublement dégénérés. C'est le cas pour les états  $\Pi$ ,  $\Delta$ , ... mais pas pour les états  $\Sigma$  puisque  $\Lambda = -\Lambda = 0$ .

Lorsqu'on considère des transitions entre un état fondamental et un état excité, on précise l'état en faisant précéder  $\Lambda$  d'une lettre.  $X$  représente l'état fondamental,  $A$ ,  $B$ , ..., les états excités dans l'ordre des énergies croissantes.

Comme dans le cas du couplage de Russell-Saunders, les spins des électrons sont couplés et donnent un vecteur résultant  $\vec{S}$  auquel est associé un nombre quantique  $S$ . Celui-ci prend des valeurs entières dans le cas où il y a un nombre pair d'électrons (spin  $1/2$ ) ou des valeurs demi entières si ceux-ci sont en nombre impair. Là encore, du fait de la configuration, c'est la projection de  $\vec{S}$  sur l'axe internucléaire qui est important. On définit cette projection par un vecteur  $\vec{\Sigma}$  qui est associé à une valeur  $\Sigma$  suivant la relation :

$$|\vec{\Sigma}| = \Sigma \frac{h}{2\pi}. \quad (13.4)$$

$\Sigma$  prend toute les valeurs entières entre  $S$  et  $-S$ , il a donc  $2S+1$  valeurs possibles.

Le moment angulaire électronique total est noté  $\vec{\Omega}$ , il est obtenu en ajoutant les vecteurs  $\vec{\Sigma}$  et  $\vec{\Lambda}$ . Comme les deux vecteurs sont colinéaires, cette addition se réduit à une simple addition de réel.  $\vec{\Omega}$  est associé au nombre quantique  $\Omega$  :

$$\Omega = |\Lambda + \Sigma|. \quad (13.5)$$

Pour chaque valeur de  $\Lambda$ , il y a  $2S + 1$  valeurs de  $\Omega$ . Cela signifie que pour un  $\Lambda$  donné, il y a en fait  $2S+1$  différents états possibles. Ces états forment un multiplet électronique dont l'énergie est donnée par une relation de la forme :

$$E_{\Sigma} = E_0 + A\Sigma\Lambda, \quad (13.6)$$

avec  $E_0$  l'énergie électronique de la molécule en excluant celle due aux spins,  $A$  une constante indépendante de  $\Sigma$  appelée constante de couplage. On déduit de cette relation que les niveaux d'un multiplet électronique sont équidistants.

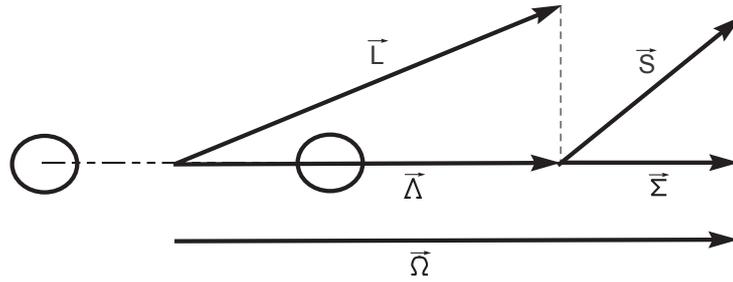


FIGURE 13.2 – Définition de  $\vec{\Omega}$ . Le calcul d'omega correspond à une simple addition de réels car  $\vec{\Lambda}$  et  $\vec{\Sigma}$  sont colinéaires.

### 13.1.2 États rotationnels d'une molécule : le rotateur rigide

Comme nous l'avons vu précédemment, la molécule est un oscillateur rotatif. Pour bien comprendre la provenance de toutes les constantes spectroscopiques, il est nécessaire de traiter d'abord séparément la vibration et la rotation avant de s'intéresser à un rotateur vibrant.

Pour cela, considérons donc une molécule dont la distance internucléaire est invariable et dont le moment angulaire électronique est nul. Les deux noyaux, notés 1 et 2, ont une masse respective de  $m_1$  et  $m_2$  et sont à une distance  $r_1$  et  $r_2$  du centre de masse de la molécule  $G$  de telle sorte que  $r_1 + r_2 = r$ .

La molécule peut tourner avec une fréquence angulaire  $\omega$  autour d'un axe  $D$  perpendiculaire à  $\vec{r}$  et passant par son centre de masse. Ce mouvement est caractérisé par un moment angulaire  $\vec{R}$  colinéaire à l'axe de rotation dont le module est donné par :

$$R = I\omega. \quad (13.7)$$

$I$  est le moment d'inertie, on le définit par :

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2. \quad (13.8)$$

L'énergie rotationnelle est donnée par :

$$E_r = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{R^2}{I}. \quad (13.9)$$

Ces relations sont fournies grâce à la mécanique classique mais elles sont toujours valables pour la mécanique quantique à condition de prendre en compte la quantification du moment angulaire :

$$R = \sqrt{J(J+1)} \frac{h}{2\pi}, \quad (13.10)$$

avec  $J$  (nombre quantique azimutal total) un nombre entier, positif ou nul. En remplaçant  $R$  par son expression dans l'énergie de rotation, on obtient :

$$E_r = \frac{h^2}{8\pi^2 I} J(J+1). \quad (13.11)$$

Les termes rotationnels sont obtenus en divisant  $E$  par  $hc$  :

$$F(J) = \frac{h^2}{8\Pi^2 I_c} J(J+1) = BJ(J+1). \quad (13.12)$$

$B$  est appelée constante rotationnelle. Ce résultat n'est valide que lorsque  $\Lambda$  est égal à 0, c'est-à-dire pour les états  $\Sigma$ . Si on considère d'autres états, il faut tenir compte du moment angulaire électronique total qui est composé, on le rappelle, de  $\vec{\Lambda}$  et  $\vec{\Sigma}$ .

Le couplage entre ces vecteurs sera explicité plus loin ; cependant, on peut s'intéresser au cas qui apparaît le plus fréquemment en spectroscopie. La rotation des noyaux qui est représentée par le moment angulaire de rotation  $\vec{R}$  est couplée avec le moment angulaire total  $\vec{\Omega} = \vec{\Lambda} + \vec{\Sigma}$  pour donner le vecteur moment angulaire total  $\vec{J}$  de la molécule. Le module de  $\vec{J}$  est donné par :

$$|\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)}\hbar. \quad (13.13)$$

D'après le schéma 13.3, on se doute que  $J$  ne pourra pas être plus petit que  $\Omega$ , il prend donc les valeurs :  $J = \Omega, \Omega + 1, \dots$ .  $\vec{R}$  n'est ici pas quantifié car il est complètement déterminé par les vecteurs  $\vec{J}$  et  $\vec{\Omega}$ , de ce fait aucun nombre quantique lui est associé. À l'aide de la définition de l'énergie rotationnelle, on peut écrire :

$$F(J) = \frac{E_r}{hc} = \frac{1}{2} \frac{R^2}{Ihc} = BJ(J+1) + (A - B)\Omega^2. \quad (13.14)$$

$B$  est la constante rotationnelle définie dans la relation (13.12) et  $A$  est une nouvelle constante due aux électrons. Elle est reliée au moment d'inertie des électrons de la même manière que  $B$  est relié à  $I$  :

$$A = \frac{h}{8\pi^2 c I_e}. \quad (13.15)$$

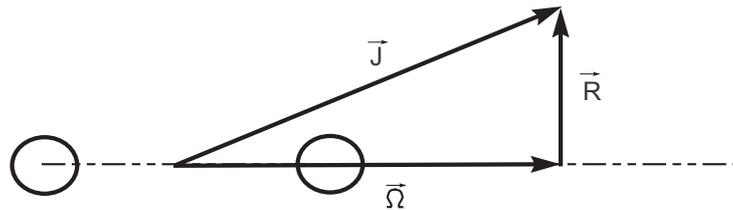


FIGURE 13.3 – Définition de  $\vec{R}$ .

Si la molécule contient un nombre impair d'électrons comme c'est le cas pour OH,  $J$  est un nombre demi-entier comme  $\Omega$  et  $\Sigma$ . Pour dénombrer les niveaux uniquement à l'aide de nombres entiers, on utilise le nombre :

$$K = J - \Sigma. \quad (13.16)$$

Il peut prendre les valeurs  $K = \Lambda, \Lambda + 1, \dots$ . Grâce à  $K$ , on peut dénombrer à l'aide d'une même valeur des niveaux rotationnels issus de diverses composantes d'un multiplet électronique.

Une étude poussée des spectres moléculaires montre que les raies rotationnelles ne suivent pas parfaitement l'expression (13.14). En effet, la distance entre deux niveaux consécutifs tend à diminuer lorsque  $J$  augmente. Cela peut s'expliquer facilement en considérant que la molécule n'est pas parfaitement rigide, sous l'action de la force centrifuge, la distance inter-nucléaire augmente. L'élongation de la molécule est d'autant plus forte que celle-ci tourne rapidement, ou, en d'autres termes, que  $J$  est grand. Du coup, la constante de rotation ne peut plus être considérée comme constante et doit être corrigée : on la remplace par  $B - DJ(J + 1)$ . Les termes rotationnels deviennent :

$$F(J) = BJ(J + 1) - DJ^2(J + 1)^2. \quad (13.17)$$

$D$  est une constante de correction "centrifuge", elle est très petite comparée à  $B$ . Généralement, plusieurs ordres de grandeur les séparent.

### 13.1.3 États vibrationnels d'une molécule : l'oscillateur anharmonique

Considérons maintenant une molécule dénuée de mouvements rotatifs. À l'équilibre, la distance entre les noyaux de la molécule est  $r_e$ . Si pour quelque raison que ce soit, la molécule prend une distance inter-nucléaire différente de  $r_e$ , une force de rappel agit pour ramener les noyaux vers leur position d'équilibre. Sous l'action de cette force, la molécule a un mouvement de vibration. L'énergie potentielle d'une molécule n'est pas représentée par une parabole comme c'est le cas pour les oscillateurs harmoniques car, d'une part, les noyaux ne sont pas inter-pénétrables, la distance inter-nucléaire ne peut donc pas être nulle. D'autre part, si on éloigne les noyaux, l'énergie potentielle ne peut pas augmenter de manière infinie. À partir d'une certaine distance inter-nucléaire, la molécule est dissociée en deux atomes. À ce niveau, l'énergie potentielle ne peut pas être supérieure à l'énergie de dissociation de la molécule.

Lorsque la courbe de l'énergie potentielle n'est pas parabolique, l'oscillateur est dit anharmonique. L'énergie potentielle peut être représentée par un potentiel de Morse [6] :

$$V = D_e \{1 - \exp[-\beta(r - r_e)]\}^2, \quad (13.18)$$

avec :

$$\beta = \omega_e \sqrt{\frac{2\pi^2 c \mu}{h D_e}}. \quad (13.19)$$

$\mu$  est la masse réduite de la molécule tandis que  $D_e$  est l'énergie de dissociation de la molécule prise depuis le minimum de la courbe d'énergie potentielle.  $\omega_e$  est un nombre d'onde qui est associé à la fréquence de vibration d'un oscillateur harmonique classique.

$$\omega_e = \frac{1}{2\pi c} \sqrt{\frac{k}{\mu}}. \quad (13.20)$$

$D_e$  ne doit pas être confondue avec l'énergie de dissociation au sens "chimique" du terme qui correspond à l'énergie nécessaire pour dissocier une molécule à un état vibrationnel  $\nu = 0$  ( $D_0 = D_e - E_0$ ).

En utilisant le potentiel de Morse, les niveaux d'énergies vibrationnels sont donnés par :

$$E = hc\omega_e(\nu + 1/2) - hc x_e \omega_e (\nu + 1/2)^2, \quad (13.21)$$

avec  $x_e\omega_e = \omega_e^2/(4D_e)$ .  $\nu$  est appelé nombre quantique vibrationnel, il peut prendre toute les valeurs entières positives ou nulle. De fait, les termes vibrationnels s'écrivent :

$$G(\nu) = \omega_e(\nu + 1/2) - x_e\omega_e(\nu + 1/2)^2 \quad (13.22)$$

On constate que les niveaux s'écartent petit à petit avec l'augmentation de  $\nu$ .

#### 13.1.4 Interactions vibration-rotation : le rotateur vibrant

Un spectre moléculaire ne peut malheureusement pas être expliqué correctement en juxtaposant les résultats du rotateur rigide et de l'oscillateur anharmonique. En effet, lorsqu'on considère une molécule réelle, celle-ci tourne et vibre en même temps. Comme la fréquence de vibration est beaucoup plus grande que la fréquence de rotation de la molécule, lorsque celle-ci effectue une rotation, elle vibre de très nombreuses fois, ce qui fait varier la distance internucléaire  $r$  suivant les limites imposées par la courbe de potentiel. Cela implique que le moment d'inertie, qui varie avec  $r$ , et la constante rotationnelle ne sont plus des constantes à proprement parler. Comme le nombre de vibrations est très grand pendant une rotation, on peut remplacer  $B$  par sa valeur moyenne sur une vibration. On montre que cette valeur moyenne diminue lorsque le nombre quantique vibrationnel  $\nu$  augmente, on prend cela en compte en remplaçant  $B$  par :

$$B_\nu = B_e - \alpha_e(\nu + 1/2) + \gamma_r(\nu + 1/2) + \dots \quad (13.23)$$

Ou  $B_e$  est la constante rotationnelle du rotateur rigide. Il en va de même pour la constante "centrifuge" qui est remplacée par :

$$D_\nu = D_e + \beta_e(\nu + 1/2). \quad (13.24)$$

#### 13.1.5 Spectre électronique d'une molécule diatomique

Considérons maintenant une molécule dans un état électronique quelconque. Dans cet état qui, on le rappelle, est caractérisé par les vecteurs  $\vec{L}$  et  $\vec{S}$ , la molécule vibre et tourne. L'approximation de Born-Oppenheimer permet d'exprimer l'énergie de la molécule comme la somme des énergies électroniques, de rotation et de vibration, mais nous avons vu précédemment que ces trois "mouvements" interféraient l'un sur l'autre. Le traitement de l'interaction entre la rotation et la vibration a été prise en compte en modifiant les constantes rotationnelles. Il est nécessaire de faire de même pour l'interaction entre la rotation et le "mouvement" électronique ainsi que pour la vibration et les transitions électroniques.

#### Couplage entre moments angulaires

L'interaction entre la rotation et le mouvement électronique se fait via le couplage entre le vecteur  $R, L$  et  $S$ . Hund a étudié cette interaction et a proposé 5 schémas de couplage différents qui doivent être considérés comme idéaux au même titre que le couplage LS des atomes. Les cas les plus fréquemment rencontrés en spectroscopie sont présentés ci-après.

**Cas (a) de Hund** On considère pour ce cas que le couplage entre le mouvement rotationnel des noyaux et le "mouvement" électronique est assez faible pour que les vecteurs  $\vec{S}$  et  $\vec{L}$  continuent à exister. Ainsi, il suffit d'additionner vectoriellement  $\vec{\Omega}$  et  $\vec{R}$  pour obtenir le

moment angulaire total résultant  $\vec{J}$  de la molécule (fig.13.3). Le terme rotationnel est donné par la relation :

$$F(J) = B_v[J(J+1) - \Omega^2] + \Omega^2 A \quad (13.25)$$

Le terme  $A\Omega^2$  est une constante, de ce fait on peut la supposer comme incluse dans le terme électronique :

$$F(J) = B_v[J(J+1) - \Omega^2] \quad (13.26)$$

Pour deux termes de même  $J$  issus d'un même multiplet électronique,  $B_v$  sera identique et seul  $\Omega$  diffère. Les termes appartenant aux éléments de ce multiplet seront donc séparés par un nombre d'onde constant correspondant à la différence de  $\Omega$ .

**Cas (b) de Hund** Pour ce cas de couplage, la rotation des noyaux est assez forte pour découpler le vecteur  $\vec{S}$  de l'axe inter-nucléaire. le vecteur  $\vec{\Sigma}$  n'a plus de signification, de même que  $\vec{\Omega}$ . Le vecteur  $\vec{R}$  est couplé avec  $\vec{\Lambda}$  pour donner le vecteur  $\vec{K}$ . Ce dernier doit être ajouté à  $\vec{S}$  de manière à obtenir le moment angulaire total  $\vec{J}$ . On repère les états vibrationnels à l'aide du nombre quantique  $K$  que l'on a introduit précédemment.

$K$  peut prendre les valeurs

$$K = \Lambda, \Lambda + 1, \dots \quad (13.27)$$

Sans prendre en considération le spin des électrons,  $R$  est définie à l'aide de  $K$  et  $\Lambda$  et on obtient :

$$F(J) = B_v[K(K+1) - \Lambda^2]. \quad (13.28)$$

En réalité, les spins électroniques contribuent très légèrement à l'énergie rotationnelle. Le vecteur de spin  $\vec{S}$  est associé à un nombre quantique  $S$ . le vecteur  $\vec{J}$  est associé à un nombre quantique  $J$  qui peut prendre  $2S+1$  valeurs :

$$J = K + S, K + S - 1, \dots, |K - S|. \quad (13.29)$$

Chaque niveau rotationnel est séparé en  $2S+1$  niveaux. Par exemple pour le niveau  ${}^2\Sigma$  de OH, on a  $\Lambda = 0$  et  $S = 1/2$ ; les termes rotationnels sont donnés par :

$$F_1(K) = B_v K(K+1) + 1/2\gamma K \quad J = K + 1/2, \quad (13.30)$$

$$F_2(K) = B_v K(K+1) - 1/2\gamma(K+1) \quad J = K - 1/2. \quad (13.31)$$

$\gamma$  est appelée constante de séparation, elle est très petite devant  $B_v$ . Cette séparation des niveaux est appelée séparation de spin ou dédoublement de type  $\rho$ , elle n'est pas constante comme dans le cas (a) mais varie de manière linéaire avec  $K$ .

**Cas (c) de Hund** Ce cas se rencontre pour des molécules lourdes. Le couplage entre  $\vec{L}$  et  $\vec{S}$  est beaucoup plus fort que leur couplage respectif avec l'axe internucléaire.  $\vec{L}$  et  $\vec{S}$  forment un vecteur résultant  $\vec{J}_a$  qui, projeté sur l'axe internucléaire, donne  $\vec{\Omega}$ . Enfin,  $\vec{\Omega}$  et  $\vec{R}$  sont associés pour donner  $\vec{J}$ . Les termes rotationnels sont identiques à ceux donnés pour le cas (a) de Hund (relation 13.25).

Les cas de couplages présentés ici sont idéaux, ils sont obtenus en considérant certaines interactions comme négligeables. Dans la réalité, on remarque que les couplages sont souvent des cas intermédiaires entre ceux présentés précédemment. Sur certains spectres dont celui de OH, on constate qu'il existe très souvent un cas intermédiaire entre les couplages (a) et (b). Pour les faibles  $J$ , le couplage sera très proche du cas (a) tandis que pour de fortes valeurs, on se rapprochera du cas (b). Un moyen de déterminer le mode de couplage est d'examiner la distance entre des niveaux rotationnels consécutifs.

### Conséquence du couplage : le dédoublement $\Lambda$

Nous avons remarqué précédemment que les états ayant un  $\Lambda$  différent de 0 étaient dégénérés car  $-\Lambda$  et  $\Lambda$  ont la même énergie. Dans les cas de couplage (a), (b) et (c), nous avons passé sous silence l'interaction entre  $\vec{L}$  et  $\vec{R}$  car celle-ci était négligeable. Cependant, au niveau théorique, cette interaction est d'une importance capitale, elle permet de lever la dégénérescence des niveaux. Lorsque la molécule tourne, les niveaux doublement dégénérés de la molécule au repos sont séparés par une différence d'énergie qui est avec une bonne approximation proportionnelle à  $J(J+1)$ . Cette séparation est appelée dédoublement de type  $\lambda$  ou " $\Lambda$  type splitting". En prenant en compte cet effet, les termes rotationnels s'écrivent :

$$\begin{aligned} F_1(J) &= F(J) + \delta_1 J(J+1) \\ F_2(J) &= F(J) + \delta_2 J(J+1). \end{aligned} \quad (13.32)$$

$F(J)$  est le terme rotationnel sans prise en compte du dédoublement  $\Lambda$  et  $\delta_1, \delta_2$  des constantes très petites devant  $B_v$ .

Cela est vrai pour tous les niveaux sauf pour ceux où  $\Omega = 0$  pour lequel il existe un terme supplémentaire indépendant de  $J$  qui entre en jeu [?].

### Spectre électronique d'une molécule diatomique

Les éléments concernant la structure des niveaux énergétiques d'une molécule diatomique ont été largement passés en revue, or, lorsque l'on s'intéresse à un spectre, on s'intéresse à des transitions entre niveaux plutôt qu'à leur structure directe. Plusieurs paramètres interviennent dans l'intensité de la raie associée à ces transitions. Les règles de sélection nous permettent tout d'abord de déterminer si une transition est possible ou non. Lorsque celle-ci est possible, l'intensité d'une transition est donnée par :

$$I_{e'',v'',J''}^{e',v',J'} = A_{e'',v'',J''}^{e',v',J'} N_{e',v',J'} h \frac{c}{\lambda} \quad (13.33)$$

Avec  $A$  le coefficient d'émission (en  $s^{-1}$ ),  $N$  le peuplement du niveau haut considéré et  $c/\lambda$  la fréquence du rayonnement associé à la transition. D'une manière générale, il est assez difficile de travailler à l'aide d'une quantité absolue d'émetteurs. Comme on s'intéresse souvent au spectre correspondant à une transition électronique particulière, on préférera travailler avec des peuplements de niveaux relatifs et négliger la probabilité de transition électronique qui est constante.

Voyons tout d'abord quelles transitions sont permises avant de nous intéresser aux probabilités de transitions.

### Règles de sélection

La probabilité de transition d'un état électronique à l'autre fait intervenir le couplage entre la rotation, la vibration, et les "mouvements" électroniques. Intéressons-nous pour l'instant aux propriétés rotationnelles des transitions électroniques. Généralement, une transition électronique modifie profondément la structure de la molécule. En outre, celle-ci s'effectue si rapidement que l'état de départ et d'arrivée de la molécule sont similaires. De ce fait, certaines transitions entre des niveaux très différents sont impossibles et des règles de sélection ont été mises en place pour les caractériser. Une transition entre deux états électroniques d'une molécule sera permise quelque soit le couplage lorsque :

$$\Delta J = 0, \pm 1 \text{ avec } J' = 0 \rightarrow J'' = 0 \text{ exclu} \quad (13.34)$$

Pour un couplage de type (a), on aura les restrictions suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta J &= 0, \pm 1 \text{ avec } J' = 0 \rightarrow J'' = 0 \text{ exclu et } \Delta J = 0 \text{ exclu pour } \Omega = 0 \rightarrow \Omega = 0 \\ \Delta S &= 0 \\ \Delta \Sigma &= 0 \\ \Delta \Omega &= 0, \pm 1 \\ \Delta K &= \Delta J \end{aligned}$$

Pour un couplage de type de type (b), on aura :

$$\begin{aligned} \Delta J &= 0, \pm 1 \text{ avec } J' = 0 \rightarrow J'' = 0 \text{ exclu} \\ \Delta S &= 0, \pm 1 \\ \Delta K &= 0, \pm 1 \text{ et } \Delta K = 0 \text{ interdit pour } \Sigma - \Sigma \end{aligned} \quad (13.35)$$

Les règles de sélections présentées ici ne sont valides que pour les transitions entre des états de même couplage. S'il y a transition entre deux couplages différents, il faut que les règles de sélection de la transition soient valides pour les deux cas de couplage.

### Notation de branche

Les règles de sélection que nous venons de présenter sont habituellement utilisées par les spectroscopistes moléculaires pour repérer les transitions rotationnelles. Considérons une transition quelconque entre deux états électroniques. L'état vibrationnel de la molécule est  $v'$  et son état final  $v''$ . On appelle une branche l'ensemble des transitions pour  $\Delta v = v' - v''$  tel que  $\Delta J = cst$ . Les branches qui vérifient la relation  $\Delta J = \Delta K$  sont appelées branches principales tandis que les autres sont appelées branches satellites. Généralement, les branches principales sont les plus intenses. On peut repérer les branches à l'aide de K ou de J à convenance. Pour les cas où le couplage est de type (a), les auteurs utilisent J. Les branches sont repérées par une lettre P Q ou R qui correspond respectivement à  $\Delta J = -1, 0$  ou 1. Un indice permet de repérer quelle partie d'un doublet on considère lors de la transition. Enfin,  $\Delta K$  est repéré par un exposant en préfixe :

$$\begin{aligned}
Q_1 & \Delta J = 0 \quad \Delta K = 0 \quad F_1 - > f'_1 \\
{}^R Q_{21} & \Delta J = 0 \quad \Delta K = 1 \quad F_2 - > f'_1 \\
Q_2 & \Delta J = 0 \quad \Delta K = 0 \quad F_2 - > f'_2 \\
{}^Q P & \Delta J = -1 \quad \Delta K = 0 \\
{}^R R & \Delta J = +1 \quad \Delta K = +1
\end{aligned}
\tag{13.36}$$

Avec  $K$  comme référence, on repère la branche grâce à une lettre de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
O & \Delta K = -2 \\
P & \Delta K = -1 \\
Q & \Delta K = 0 \\
R & \Delta K = 1 \\
S & \Delta K = 2
\end{aligned}
\tag{13.37}$$

Des numéros en indice permettent de repérer les niveaux de départ et d'arrivée de la transition considérée.

Afin d'étudier les différentes branches d'un spectre, on les représente souvent à l'aide d'une parabole de Fortrat. Ce graphique, qui prend en ordonnée le nombre quantique rotationnel  $J$  ou  $K$  du niveau haut des transitions considérées et en abscisse le nombre d'onde de ces dernières.

### Probabilités de transition

Généralement, on travaille en spectroscopie moléculaire sur une transition entre deux états électroniques donnés. De ce fait, si l'on considère que la probabilité de transition entre les deux états électroniques est une constante, on aura :

$$A_{e'',v'',J''}^{e',v',J'} = K \cdot \frac{S_{J''}^{J'}}{2J'' + 1} \cdot P_{J'',v''}^{J',v'} \nu^3
\tag{13.38}$$

$K$  est une constante qui contient toutes les constantes physiques et les données relatives à la transition électroniques.  $\nu$  est le nombre d'onde associé à la transition considéré en  $cm^{-1}$ .  $S$  est le facteur de Holn-London.  $P$  est le facteur de Frank-Condon, en première approximation, ce facteur ne dépend que des états vibrationnels de la transition, cependant, pour simuler des spectres avec précision, il est nécessaire de prendre en compte l'effet de la rotation lors de son calcul.

Afin de bien comprendre à quoi correspondent ces facteurs, il est nécessaire de revenir sur le principe de Frank-Condon. Ce principe stipule que la transition d'un état électronique à un autre est si rapide que l'état de la molécule après le saut électronique est similaire à ce qu'il était juste avant ; les noyaux conserveront donc presque la même position relative et la même vitesse.

Considérons les courbes de potentiel de la figure 13.4. Juste avant le saut électronique, la molécule est dans un état énergétique représenté par le segment A-B. C'est aux points A et

B que la molécule passe le plus de temps, car l'énergie cinétique des noyaux y est minimum. Si lors de la vibration une désexcitation a lieu, la probabilité pour que la molécule soit en A ou B sera donc plus grande que celle d'être sur le reste du segment. Si l'on s'intéresse à une transition qui aura lieu à partir du point A et que l'on applique le principe de Franck-Condon, la transition se fera préférentiellement vers E car les noyaux ont là aussi une énergie cinétique nulle et la molécule conserve la distance internucléaire qu'elle possédait en A. En B, si l'on effectue le même raisonnement, la désexcitation se fera préférentiellement sur le point D. Nous tenons là une explication de l'existence de ce que l'on appelle parabole de Condon (fig.13.5).

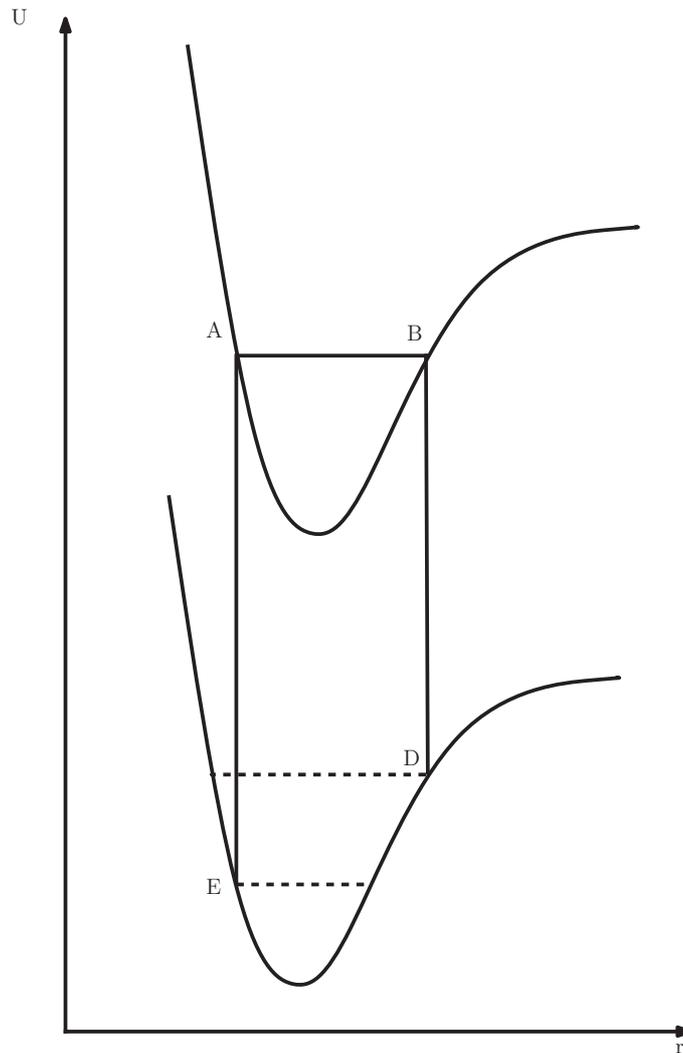


FIGURE 13.4 – Illustration du principe de Franck-Condon.

On comprend bien la notion de "probabilité" de transition que comporte le principe de Franck-Condon. Cependant, la réflexion que nous venons d'exposer ne permet pas d'obtenir des résultats quantitatifs. Il faut pour cela s'intéresser à la formulation ondulatoire du principe.

En mécanique quantique, nous ne pouvons avoir d'oscillateur au repos. Pour chacun des niveaux nous avons une fonction d'onde dont le carré correspond à une densité de probabilité.

Pour quantifier la probabilité de transition entre deux états, on calculera le recouvrement de leur fonction d'onde. Plus le recouvrement sera important plus la probabilité de transition sera forte. La probabilité de transition sera proportionnelle au carré du moment de transition  $\vec{R}$  :

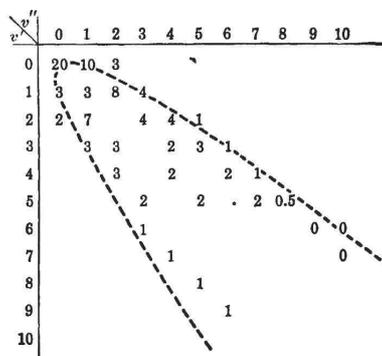


FIG. 90. Intensities and Condon Parabola in the Band System of PN.

FIGURE 13.5 – Intensité des bandes vibrationnelles de PN et parabole de Condon. Issu de [6]. La parabole permet de repérer les transitions les plus probables i.e. les transitions pour lesquelles l'énergie cinétique des noyaux et la distance entre ces derniers reste inchangée.

$$\vec{R} = \int \psi'^* \vec{M} \psi'' d\tau \quad (13.39)$$

Le calcul précis de ces facteurs de Franck-Condon est un travail long et difficile. De nombreux auteurs l'ont mené à bien et proposent leurs données sous forme de tableau.

## 13.2 Le spectre UV du radical OH

### 13.2.1 Le spectre ultraviolet de OH

Le spectre ultraviolet OH est dû à la transition électronique entre le premier état excité et le fondamental. Il contient de nombreuses bandes dont la plus connue et la plus caractéristique est la 0-0 qui débute autour de 306.5 nm. Un spectre expérimental de cette bande, obtenu à l'aide d'un chalumeau acétylène, est présenté sur la figure 13.6. La transition se fait entre un niveau  $^2\Sigma$  et un niveau  $^2\Pi$ . Le premier appartient au cas (b) de Hund tandis que le second, comme tout les états pour lesquels  $\Lambda \neq 0$  à des états rotationnels qui sont entre le cas (a) et le cas (b).

Pour décrire nos états vibroniques, il est judicieux d'utiliser le nombre  $K$  tel que nous l'avons défini dans la relation 13.16 [7]. Le radical OH ne possédant qu'un seul électron non-apparié, son spin total est de  $1/2$ . On caractérisera les composantes des doublets de la manière suivante :

$$F_1(K); f_1(K) : K = J - 1/2 \quad (13.40)$$

$$F_2(K); f_2(K) : K = J + 1/2 \quad (13.41)$$

Les  $F$  seront utilisés pour repérer les niveaux rotationnels de l'état  ${}^2\Sigma$  tandis que  $f$  sera utilisé pour ceux de  ${}^2\Pi$ .

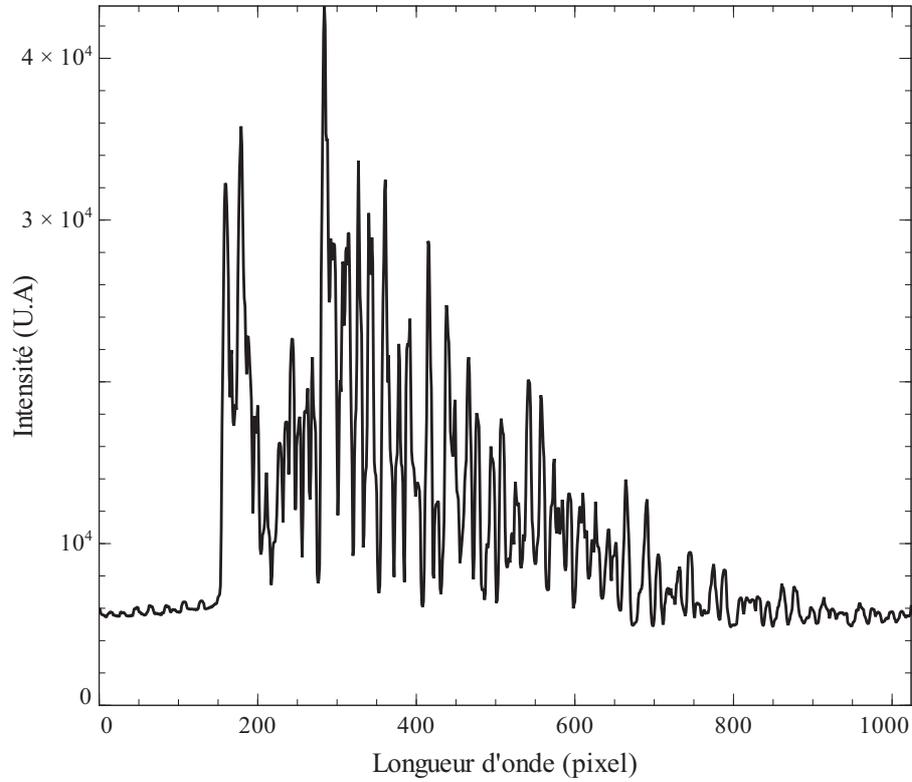


FIGURE 13.6 – Spectre UV typique du radical OH enregistré sur une flamme de chalumeau acétylène.

### L'état ${}^2\Sigma$

L'état  $\Sigma$  est caractérisé par le fait qu'il n'a pas de moment orbital résultant le long de l'axe inter-nucléaire,  $\Lambda = 0$ . Le spin électronique est de fait toujours couplé avec l'axe de rotation. Le mode de couplage correspond au cas (b) de Hund, les termes rotationnels du doublet sont donc donnés par :

$$\begin{aligned} F_1 &= BK(K+1) - DK^2(K+1)^2 + R(K+1/2) \\ F_2 &= BK(K+1) - DK^2(K+1)^2 - R(K+1/2) \end{aligned} \quad (13.42)$$

L'ensemble des constantes dépend du nombre quantique de vibration  $\nu$ .

### L'état ${}^2\Pi$

L'état  ${}^2\Pi$  est caractérisé par  $\Lambda = 1$ . Deux modes de couplage sont à considérer puisque le couplage de cet état est un cas intermédiaire entre (a) et (b). Comme nous l'avons expliqué

dans la section 2.6, le mode de couplage (a) a lieu lorsque  $J$  est assez faible tandis que le cas (b) de Hund apparaît lorsque  $J$  devient important. Hill et Van Vleck ont traité ce cas intermédiaire, ils ont trouvé que les termes rotationnels pour l'état  ${}^2\Pi$  était :

$$\begin{aligned} f_1(K) &= B[(K+1)^2 - 1 - \frac{1}{2}\sqrt{4(K+1)^2 + a(a-4)}] - DK^2(K+1)^2 \quad K = J - 1/2; \\ f_2(K) &= B[K^2 - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{4K^2 + a(a-4)}] - DK^2(K+1)^2 \quad K = J + 1/2; \end{aligned} \quad (13.43)$$

avec  $a$  une constante de couplage calculée à partir de spectres expérimentaux pour chaque niveau vibrationnel. Le terme en  $K^2(K+1)^2$  n'est valide que pour le cas (b), cependant il ne devient important que pour les fortes valeurs de  $J$ , la où généralement le cas (b) est une bonne approximation. Comme  $\Lambda = 1$ , les niveaux rotationnels  $f_1$  et  $f_2$  de  $\Pi$  vont être soumis au dédoublement  $\Lambda$ . Les niveaux issus de ce dédoublement sont appelés  $f$  et  $f'$  et sont séparés d'une distance proportionnelle à  $K(K+1)$ .

### Transition ${}^2\Sigma - {}^2\Pi$

Le repérage des transitions se fait à l'aide du nombre  $K$ . En examinant les règles de sélections communes à l'état  ${}^2\Sigma$  et  ${}^2\Pi$ , on obtient douze branches possibles :

$$\begin{aligned} O_{12}(K) &= F_1(K-2) - f'_2(K) \quad J-1 \rightarrow J \\ P_1(K) &= F_1(K-1) - f_1(K) \quad J-1 \rightarrow J \\ P_2(K) &= F_2(K-1) - f_2(K) \quad J-1 \rightarrow J \\ P_{12}(K) &= F_1(K-1) - f_2(K) \quad J \rightarrow J \\ Q_1(K) &= F_1(K) - f'_1(K) \quad J \rightarrow J \\ Q_2(K) &= F_2(K) - f'_2(K) \quad J \rightarrow J \\ Q_{21}(K) &= F_2(K) - f'_1(K) \quad J-1 \rightarrow J \\ R_{21}(K) &= F_2(K+1) - f_1(K) \quad J \rightarrow J \\ R_1(K) &= F_1(K+1) - f_1(K) \quad J+1 \rightarrow J \\ R_2(K) &= F_2(K+1) - f_2(K) \quad J+1 \rightarrow J \\ S_{21}(K) &= F_2(K+2) - f'_1(K) \quad J+1 \rightarrow J \end{aligned} \quad (13.44)$$

Les branches avec un seul nombre en indice sont les branches principales, ce sont celles qui seront les plus intenses. Ces équations de branches permettent d'obtenir des relations entre les différents niveaux énergétiques de la molécule OH. Ces dernières sont fondamentales puisqu'elles permettent de vérifier la validité des données moléculaires utilisées. Voici un exemple de quelques combinaisons que nous pouvons obtenir :

$$\begin{aligned} R_1(K) - P_1(K) &= Q_{12}(K+1) - O_{12}(K+1) = F_1(K+1) - F_1(K-1) \\ R_1(K-1) - P_1(K+1) &= f_1(K+1) - f_1(K-1) \\ Q_1(K-1) - P_1(K) &= f_1(K) - f'_1(K-1) \end{aligned} \quad (13.45)$$

### Constantes moléculaires

Les équations (13.42) et (13.43) nécessitent les constantes moléculaires  $B$   $D$   $R$  et  $a$  pour le calcul des termes spectroscopiques.

La littérature fournit les relations suivantes pour les calculer [7] :

$$B_v = B_e + \alpha_e(V + 1/2) + \beta(V + 1/2)^2 \quad (13.46)$$

$$D = \frac{4B^3}{\omega} \quad (13.47)$$

L'énergie vibrationnelle est donnée par :

$$\omega_e(V + 1/2) - \omega_e x_e(V + 1/2)^2 \quad (13.48)$$

De nombreux auteurs proposent les constantes moléculaires associées au spectre UV de OH, une étude bibliographique a permis de les regrouper dans les tableaux 13.2 et 13.3

Constante	Herzberg [6]	Dieke et Crosswhite [7]	Crosley et Chidsey [8]	Luque et Crosley[9]
$B_e$	17.355	17.355	17.369	17.389
$\alpha_e$	0.807	0.807	0.8142	0.858
$\omega_e x_e$	94.93	97.84	97.84	92.68
$\omega_e$	3180.5	3184.28	3184.28	3178.3554
$\beta$	-	-0.00825	-	0.0245

TABLE 13.2 – Constantes moléculaires relatives à l'état  $^2\Sigma$  de OH.

Constante	Herzberg	Dieke et Crosswhite	Crosley et Chidsey	Luque et Crosley
$B_e$	18.871	18.871	18.871	18.896
$\alpha_e$	0.714	0.714	0.714	0.72504
$\omega_e x_e$	82.81	82.21	82.81	84.914
$\omega_e$	3735.21	3735.21	3735.21	3737.79
$\beta$	-	0.0035	-	0.00832

TABLE 13.3 – Constantes moléculaires relatives à l'état  $^2\Pi$  de OH.

À l'aide des données de Dieke et Crosswhite, les constantes moléculaires associées aux différents niveaux vibrationnels de  $\Sigma$  et de  $\Pi$  ont été calculées, elles sont disponibles dans le tableau 13.4.

### Forces de raies

Pour calculer une probabilité de transition, il est nécessaire de connaître les facteurs de Holn-London, aussi appelés force de raies rotationnelles, et les facteurs de franck-Condon. Earls est l'un des premiers à avoir fourni les forces de raies rotationnelles pour la transition  $\Sigma - \Pi$  de OH [10]. Dieke et Crosswhite les ont réécrites sous une forme directement utilisable qu'ils nomment "probabilités de transition" [7]. Il s'agit en fait du rapport des facteurs de

${}^2\Sigma$				
v'	0	1	2	3
$B_v$	19.961	16.129	15.287	14.422
D	0.00204	0.00203	0.00208	0.00206
R	0.122	0.1056	0.0997	0.098
${}^2\Pi$				
v''	0	1	2	3
$B_v$	18.515	17.807	17.108	16.414
D	0.00187	0.00182	0.00182	
a	-7.547	-7.876	-8.214	-8.568

TABLE 13.4 – Liste des états correspondant aux différentes valeurs absolues de  $\Lambda$ .

Holn-London sur les multiplicités des niveaux hauts considérés. Ils ont été corrigés par nos soins et sont présentés ci-après.

$$R_2 \quad \frac{2J+1}{2J+2} \left( (2J+1) + U \left[ (2J+1)^2 - 2a \right] \right) \quad (13.49)$$

$$S_{21} \quad \frac{2J+1}{2J+2} \left( (2J+1) - U \left[ (2J+1)^2 - 2a \right] \right) \quad (13.50)$$

$$R_1 \quad \frac{2J+1}{2J+2} \left( (2J+1) + U \left[ (2J+1)^2 + 2(a-4) \right] \right) \quad (13.51)$$

$$Q_{21} \quad \frac{2J+1}{2J+2} \left( (2J+1) - U \left[ (2J+1)^2 + 2(a-4) \right] \right) \quad (13.52)$$

$$Q_2 \quad \frac{2J+1}{2J+2} \frac{(2J+1)^2 - 2 + U \left[ (2J+1)^3 - 8J - 2a \right]}{J} \quad (13.53)$$

$$R_{21} \quad \frac{2J+1}{2J+2} \frac{(2J+1)^2 - 2 - U \left[ (2J+1)^3 - 8J - 2a \right]}{J} \quad (13.54)$$

$$Q_1 \quad \frac{2J+1}{2J+2} \frac{(2J+1)^2 - 2 + U \left[ (2J+1)^3 - 8J + 2(a-4) \right]}{J} \quad (13.55)$$

$$P_{12} \quad \frac{2J+1}{2J+2} \frac{(2J+1)^2 - 2 - U \left[ (2J+1)^3 - 8J + 2(a-4) \right]}{J} \quad (13.56)$$

$$P_1 \quad \frac{2J+1}{2J} \left[ (2J+1) + U \left( (2J+1)^2 - 2a \right) \right] \quad (13.57)$$

$$O_{12} \quad \frac{2J+1}{2J} \left[ (2J+1) - U \left( (2J+1)^2 - 2a \right) \right] \quad (13.58)$$

$$P_2 \quad \frac{2J+1}{2J} \left[ (2J+1) + U \left( (2J+1)^2 - 2(a-4) \right) \right] \quad (13.59)$$

$$Q_{21} \quad \frac{2J+1}{2J} \left[ (2J+1) - U \left( (2J+1)^2 - 2(a-4) \right) \right] \quad (13.60)$$

Avec  $U$  défini par :

$$U = \frac{1}{\sqrt{(2J+1)^2 + a(a-4)}} \quad (13.61)$$

Pour  $J = 1/2$ , l'ensemble des forces de raies rotationnelles sera nul sauf :

$$\begin{aligned} a < 2 \quad R_2 = Q_{12} = 8/3, Q_2 = P_{12} = 16/3 \\ a > 2 \quad R_1 = S_{21} = 8/3, Q_1 = R_{21} = 16/3 \end{aligned} \quad (13.62)$$

### Facteur de Franck-Condon

Les facteurs de Franck-Condon des publications relativement anciennes sont obsolètes car ils sont calculés en ne prenant pas en compte l'influence de la rotation [11]. On a pu remarquer de sérieuses différences entre des spectres expérimentaux et des spectres synthétiques en utilisant les facteurs de Franck-Condon fournis par Dieke et Crosswhite. De nombreux travaux ont été effectués par Luque et Crosley pour calculer, à l'aide de simulations RKR, les facteurs de Franck-Condon de chacune des transitions entre les niveaux  $A^2\Pi$  et  $X^2\Sigma$ . Ils prennent en compte l'élongation de la molécule due à la rotation et sont de ce fait proche de la réalité.

### 13.3 Conclusion

Au cours de ce chapitre, la structure énergétique d'une molécule diatomique a été détaillée. Nous nous sommes penché en particulier sur la molécule OH et nous avons pu, grâce aux différentes relations sur les niveaux énergétiques et les couplages présentés, comprendre comment était formé son spectre ultraviolet. Pour effectuer une simulation de spectre moléculaire, des données importantes telles que l'expression de l'intensité d'une raie, les facteurs de Holn-London ont été fournies. En outre, les équations de branches, primordiales pour juger de la qualité des données spectroscopiques, ont été obtenues.

## Chapitre 14

# De nouvelles méthodes de mesures de température basées sur le spectre UV de OH

Tu piges ? Non ? Tant mieux pour toi. Ce que j'aimerais être abruti, moi aussi, simplement une journée, pour mettre mon caberluche en vacances. Siroter un Campari en survolant le Figaro. Me faire chatoyer le battant de cloche par une dégusteuse de membrane assermentée. Me laisser dorer les noix au Club Med, tout ça. Juste avoir le souci des impôts et de mon cholestérol. Putain, ce panardin ! Qu'au lieu je m'use la gamberge à fourvoyer du cosmos en évoquant les glandus qui m'ont précédé et ont comporté comme s'il n'existait pas ! Sont morts rassurés, leur destin accompli.

---

San-antonio

Au cours du chapitre précédent, la structure énergétique d'une molécule diatomique a été présentée en général, et la molécule OH a été traitée en particulier. Nous avons fait la revue de l'ensemble des données moléculaires disponibles sur cette molécule. Afin de développer des méthodes de mesure de la température rotationnelle et vibrationnelle simples, nous allons utiliser la théorie et les données que nous venons de présenter pour simuler des spectres moléculaires.

### 14.1 Simulation du spectre UV du radical OH

#### 14.1.1 Généralités

Comme nous l'avons fait remarquer précédemment, le spectre UV du radical OH est issu de la transition entre les niveaux électroniques  $A^2\Sigma$  et  $X^2\Pi$ . Construire un spectre synthétique

nécessite fondamentalement le calcul de deux quantités pour chaque transition. La première, le nombre d'onde, permet de positionner la raie sur le spectre tandis que la seconde est son intensité. Les nombres d'onde de chaque transition peuvent être calculés à l'aide des constantes moléculaires présentées précédemment ou bien être obtenus directement à partir de la littérature. Quant à l'intensité de chaque raie, elle est donnée par la relation :

$$I_{ul} = N_u A_{ul} h \nu_{ul}, \quad (14.1)$$

où  $h$  est la constante de Planck,  $\nu_{ul}$  la fréquence du rayonnement associé à la transition  $u \rightarrow l$ ,  $N_u$  le nombre de particules sur le niveau haut et  $A_{ul}$  le coefficient d'émission.

### Coefficient d'émission

Si aucune hypothèse n'est faite sur le coefficient d'émission,  $A$  doit contenir les probabilités de transition entre les états électroniques, vibrationnels et rotationnels. Ici, comme on ne considère qu'une transition entre deux états électroniques, nous n'avons pris en compte que les transitions vibrationnelles et rotationnelles :

$$A = K \cdot \frac{S_{J''}^{J'}}{2J' + 1} P_{v'' J''}^{v' J'} \nu^3, \quad (14.2)$$

$\nu$  est le nombre d'onde associé à la transition considérée.  $K$  contient toutes les constantes physiques et une partie des probabilités de transition électronique,  $f$  est le facteur de Holn-London et  $P$  le facteur de Franck-Condon. Pour alimenter la simulation, j'ai choisi d'utiliser les probabilités de transitions rotationnelles fournis par Earls et corrigés par mes soins [10]; Cette grandeur est proportionnelle au terme  $f_{J''}^{J'} 2J' + 1$ . Ces données ont été validées en les comparant aux facteurs de Holn-London du logiciel de simulation LIFBASE.

Les facteurs de Franck-Condon utilisés sont ceux de Luques et Crosley [12, 9] car les données fournies par Dieke et Crosswhite sont obsolètes, elles ne prennent pas en compte l'influence de la rotation. Ces données sont critiques et conditionnent la qualité des résultats de la simulation. Pour les vérifier, j'ai comparé l'intensité de raies des bandes 0-0, 1-1 obtenues avec ces données à des résultats expérimentaux issus des travaux de Dieke et Crosswhite. Les résultats sont en accord avec 5 à 10 % d'erreur relative (spectre de OH sur une flamme oxo-acétylène à 3000 K).

Les nombres d'ondes utilisés ici et pour le positionnement des raies sont calculés à l'aide des termes rotationnels fournis par Dieke et Crosswhite et corrigés à l'aide des équations de branche. Pour valider les données utilisées, j'ai comparé les nombres d'onde de toutes nos transitions à des résultats expérimentaux [] et à ceux fournis par le logiciel LIFBASE.

### Peuplement des niveaux

Là encore, comme on ne s'intéresse qu'à une seule transition électronique, il est possible de simplifier l'expression du peuplement des niveaux en ne prenant en compte que les niveaux rotationnels et vibrationnels :

$$N_u = N_{rot} N_{vib}. \quad (14.3)$$

$N_{rot}$  est la population du niveau rotationnel considéré tandis que  $N_{vib}$  est la population du niveau vibrationnel. On considère que ces derniers suivent une loi de peuplement de Boltzmann,

on aura donc :

$$N_{rot} = \frac{2(J+1)}{Q_{rot}(T)} \exp(-\Delta E_{rot}/kT_{rot}), \quad (14.4)$$

$$N_{vib} = \frac{1}{Q_{vib}(T)} \exp(-\Delta E_{vib}/kT_{vib}), \quad (14.5)$$

avec  $Q$  les fonctions de partitions,  $J$  le nombre quantique de rotation,  $\Delta E$  la différence d'énergie entre l'état considéré et le fondamental,  $k$  la constante de Boltzmann,  $T_{rot}$  et  $T_{vib}$  respectivement la température rotationnelle et vibrationnelle des molécules. Le calcul du peuplement des niveaux nécessite implicitement la connaissance des fonctions de partitions rotationnelles et vibrationnelles. Nous avons choisi, pour effectuer notre simulation, d'utiliser la fonction de partition rotationnelle fournie par Herzberg. Le dédoublement de type  $\rho$  est pris en compte en prenant une demi-multiplicité pour chaque composante du niveau. La fonction de partition vibrationnelle est quant à elle calculée numériquement.

### Fonction d'appareil globale

Expérimentalement, lorsqu'un spectre UV du radical OH est enregistré, ses raies ne sont pas des delta Dirac, elles sont élargies. L'élargissement à deux origines principales, il provient des phénomènes prenant place dans le gaz émetteur lui même et du dispositif spectroscopique. Dans la plupart des cas, la fonction d'appareil peut être correctement décrite par une gaussienne. Il peut être judicieux, lorsque l'on simule des spectres synthétiques, de prendre en compte tous les types d'élargissement à l'aide d'un profil gaussien normalisé de la forme :

$$G(\lambda) = \frac{2}{\Delta\sqrt{\pi}} \exp\left[-4\frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{\Delta^2}\right]. \quad (14.6)$$

$\Delta$  est appelé fonction d'appareil globale, il correspond à la largeur totale du profil à  $1/e$ .

#### 14.1.2 Fonctionnement du programme de simulation

Pour trouver des méthodes de mesure des températures simples et précises, j'ai choisi de simuler une grande quantité de spectres sur une large gamme de températures et de résolution. Un programme a donc été écrit pour effectuer cette tâche répétitive. Il commence par charger en mémoire l'ensemble des données moléculaires nécessaires aux calculs.

Lorsque les facteurs de franck-Condon et les termes spectroscopiques de chaque état électronique sont en mémoire, la fonction d'appareil puis les températures initiales sont fixées et le calcul débute. Pour chaque transition des bandes  $v'=0 \rightarrow v''=0, 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2$ , le nombre d'onde ainsi que l'intensité de chaque raie sont calculés de manière à former un spectre de delta Dirac. Le calcul des nombres d'onde est une simple soustraction de termes spectroscopiques tandis que l'intensité est calculée à l'aide de l'équation 14.1 et des expressions donnant le peuplement des niveaux rotationnels et vibrationnels (eq. 14.4 et 14.5). Pour chaque triplet  $T_{rot}, T_{vib}, \Delta$ , ce n'est pas moins de 2900 raies qui sont calculées. Elles sont stockées dans un tableau nommé *Tabdirac* qui contient sur chaque ligne, le nombre d'onde et l'intensité d'une transition.

À partir de ces données, il faut calculer un spectre synthétique exploitable. Le programme transforme donc les nombres d'onde dans le vide en longueurs d'onde dans l'air via l'expression de l'indice de réfraction pour un atmosphère standard [?]. Lorsque ceci est fait, on construit un tableau deux dimensions *Spectre* qui va contenir les longueurs d'onde et l'intensité des raies.

Dans ce tableau, la première case correspond à la longueur d'onde  $\lambda_0=300$  nm et le pas de longueur d'onde utilisé est de 0.005 nm. À l'aide d'un algorithme de recherche, l'intensité de chaque raie du tableau *Tabdirac* est positionnée à son emplacement dans le tableau *Spectre*.

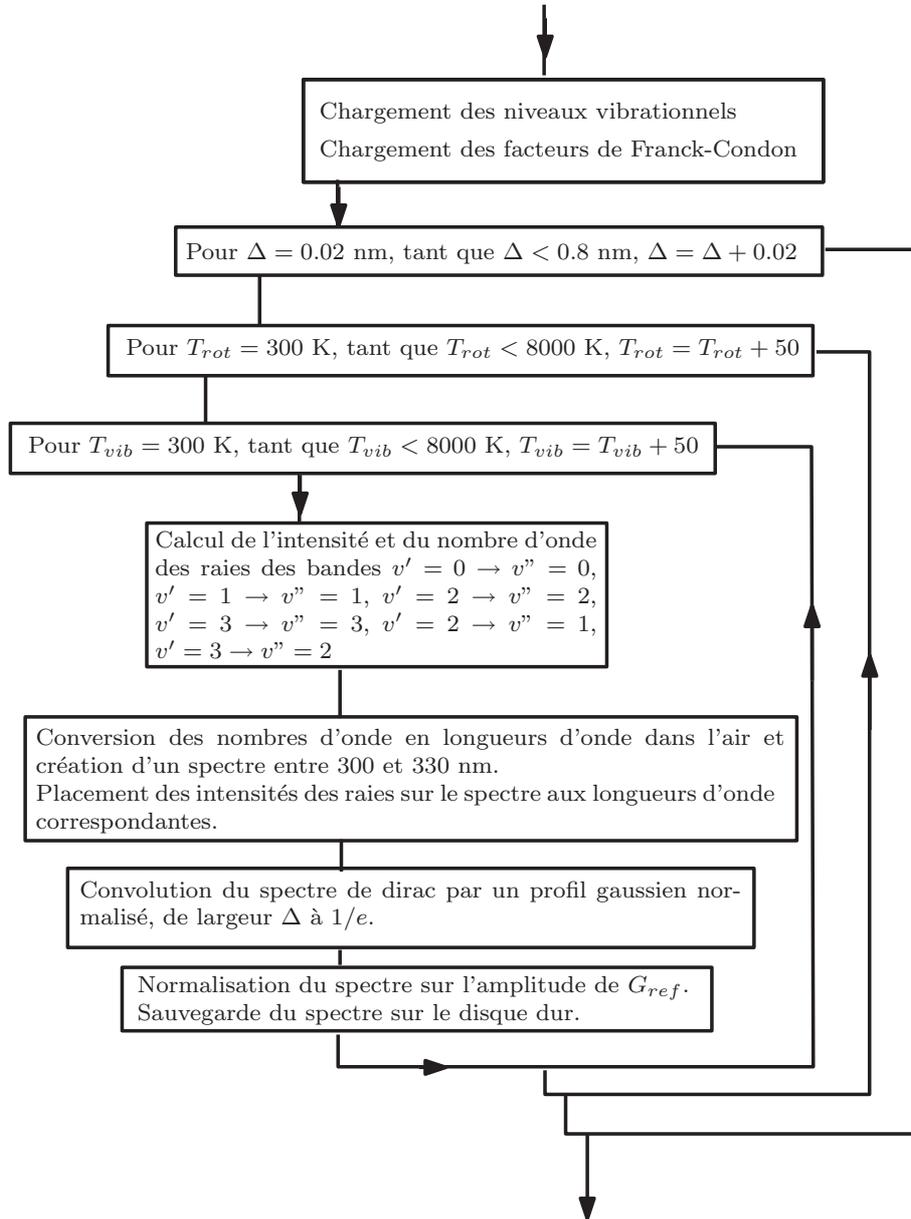


FIGURE 14.1 – Schéma de fonctionnement du logiciel de simulation des spectres UV du radical OH.

Le spectre est finalement convolué avec un profil gaussien  $G(\lambda)$  (eq. 14.6) pour simuler l'élargissement des raies avant d'être normalisé sur l'amplitude du groupe de raie  $G_{ref}$  situé à environ 309 nm. Le spectre terminé est sauvegardé sur le disque et la procédure de calcul est réitérée avec des valeurs de températures et de fonction d'appareil différentes.

Du fait de la convolution, le calcul des spectres pour une gamme complète de fonction

d'appareil et de températures prend beaucoup de temps. Il a fallu environ deux jours de calcul sur cinq ordinateurs dotés de pentium IV 2 Ghz pour obtenir des spectres avec une température vibrationnelle et rotationnelle variant de 300 à 8000 K par pas de 50 ou 200 K et une fonction d'appareil variant de 0.02 nm à 0.8 nm par pas de 0.02 nm. Un résumé du fonctionnement du programme de simulation est disponible sur la figure 14.1.

## 14.2 Exploitation des résultats

Lors de travaux précédents, de Izarra [3, 13] a mis en évidence l'existence de deux groupes de raies sensibles à la température rotationnelle :  $G_0$  et  $G_1$  (fig.14.2). La procédure qu'il a développé pour mesurer la température rotationnelle à partir d'un spectre consiste à normaliser ce dernier sur l'amplitude du groupe de raies  $G_{ref}$ , puis calculer la fonction d'appareil à l'aide de la largeur de  $G_{ref}$  à une hauteur fixée. Grâce à l'amplitude des groupes de raies  $G_0$  et  $G_1$  et à  $\Delta$ , il est possible d'obtenir  $T_{rot}$  via des abaques construits à partir de spectres synthétiques. Cette méthode simple et efficace possède néanmoins plusieurs limitations. Tout d'abord, elle utilise des données expérimentales obtenues sur une flamme oxo-acétylène supposée à l'ETL et à 3000 K. L'évaluation de la température de référence de ce milieu peut être entachée d'erreurs, ce qui induit de fait des incertitudes sur les températures fournies par la méthode. En outre, l'évaluation de la fonction d'appareil, et donc la méthode, n'est valable que pour une gamme réduite de résolutions (0.02-0.2 nm). Finalement, comme cette méthode utilise une partie de la bande 0-0, elle ne donne accès qu'à la température rotationnelle.

Pour calculer les températures rotationnelles et vibrationnelles à partir d'un spectre, nous avons choisi de mettre en place une procédure similaire. En tout et pour tout, 68800 spectres ont été simulés. Afin d'extraire des résultats de ces données brutes, une batterie de programmes a été mise au point. Ils permettent d'obtenir des grandeurs telles que l'amplitude d'un groupe de raies, sa largeur pour une hauteur choisie ou bien encore de calculer une valeur moyenne ou une intégrale sur une partie du spectre. En complément, j'ai aussi écrit des programmes de mise en forme de données et de constructions d'abaques afin de produire des données finales aisément lisibles et exploitables. L'ensemble de ces programmes est disponible en annexe.

Pour choisir les quantités à exploiter, il est nécessaire d'étudier l'évolution du spectre UV du radical OH en fonction de la résolution et des températures.

### 14.2.1 Influence de la température rotationnelle sur le spectre UV de OH.

Le graphique du spectre UV de OH en fonction de la température rotationnelle ( $T_{rot}$ ) est disponible sur la figure 14.2. On remarque que  $T_{rot}$  a une influence sur l'ensemble du spectre. En outre, il apparaît clairement que l'amplitude de certains groupes de raies non-résolus sont sensibles à la température rotationnelle. L'amplitude de  $G_0$  et  $G_1$  augmente de manière monotone avec  $T_{rot}$  pour une gamme de température comprise entre 1000 K et 8000 K. Pour les faibles températures,  $G_0$  et  $G_1$  ne sont pas utilisables car ils sont surtout composés des raies 8-12 des branches R1 et R2. Au contraire, on remarque que  $G_3$  est intense et très sensible à  $T_{rot}$ . Cela s'explique par le fait que ce groupe contient surtout les raies P1(1) et Q1(3), il peut donc être utilisé dans une gamme de température comprise entre 300 et 1600 K. À part ces résultats, aucun groupe de raies n'est réellement remarquable ; certains, intenses et sensibles à  $T_{rot}$  existent après  $G_{ref}$ , mais comme ils sont situés à la limite entre les bandes 0-0 et 1-1, ils peuvent aussi dépendre de la température vibrationnelle.

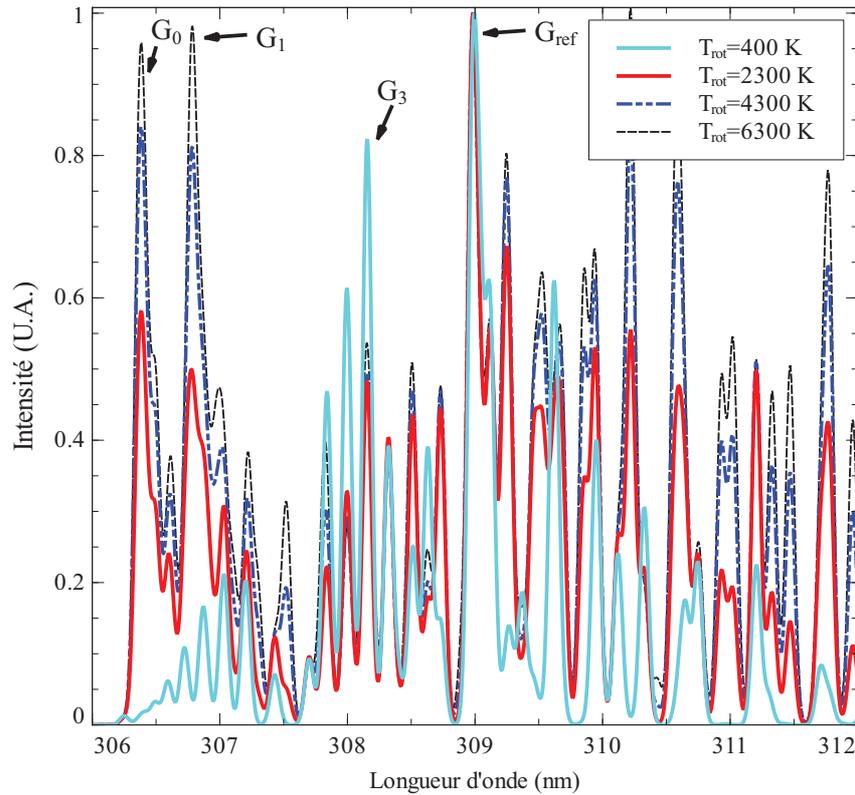


FIGURE 14.2 – Evolution du spectre UV d'OH en fonction de la température rotationnelle.  $T_{vib}$  est fixée à 3100 K et  $\Delta$  à 0.1 nm.

### 14.2.2 Influence de la température vibrationnelle sur le spectre UV de OH

L'influence de la température vibrationnelle sur le spectre UV de OH est présenté sur le graphique 14.3. À cause de la normalisation du spectre sur l'amplitude du groupe  $G_{ref}$  appartenant à la bande 0-0, cette dernière est insensible à la température vibrationnelle. Cela comprend  $G_0$ ,  $G_1$ ,  $G_3$  qui peuvent, de fait, être utilisés pour obtenir la température rotationnelle uniquement. Seul le domaine pour des longueurs d'onde supérieures à 312.2 nm est affecté par la variation de  $T_{vib}$ . Cette partie du spectre présente un intérêt pour la mesure de la température vibrationnelle, mais elle ne possède malheureusement aucun groupe de raies caractéristique. On peut imaginer utiliser une valeur moyenne du spectre pour obtenir  $T_{vib}$ , cependant, cela pose un certain nombre de problèmes pour délimiter et choisir la zone où le calcul est effectué.

### 14.2.3 Influence de la fonction d'appareil globale sur le spectre UV de OH

Comme on peut le vérifier sur le graphique 14.4, la fonction d'appareil a évidemment une influence sur l'ensemble du spectre : une augmentation de  $\Delta$  conduit à des groupes de raies moins résolus. On constate d'ailleurs que pour une fonction d'appareil globale supérieure à 0.44 nm,  $G_0$  et  $G_1$  ne sont plus résolus et forment un groupe de raies que nous avons nommé  $G_{mel}$ .

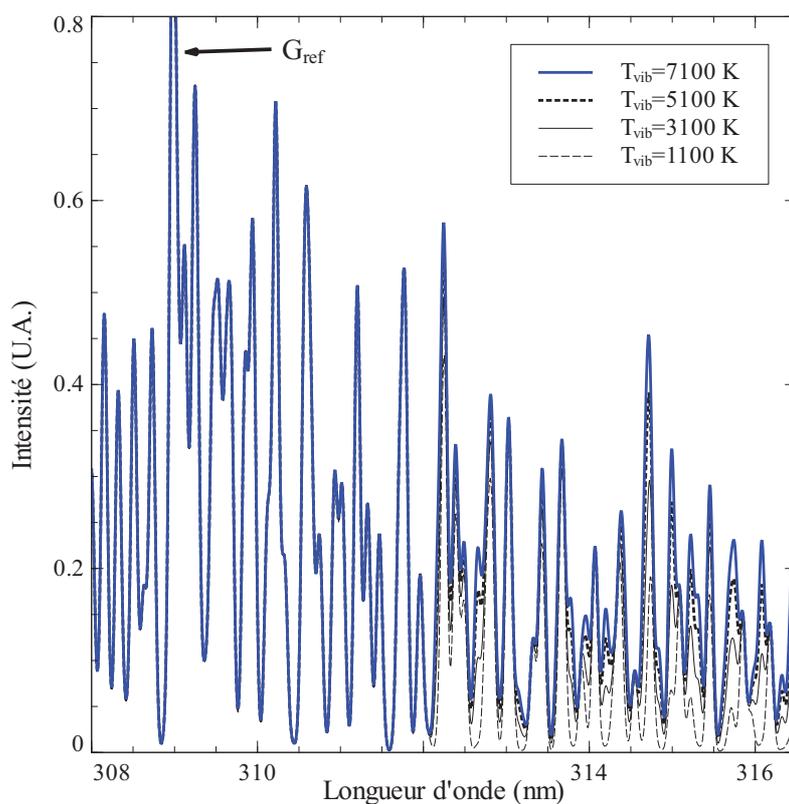


FIGURE 14.3 – Évolution du spectre UV du radical OH en fonction de la température vibrationnelle.  $T_{rot}$  est fixée à 3100 K et  $\Delta$  à 0.1 nm.

$\Delta$  a une influence sur l'amplitude des groupes de raies ; si l'on désire utiliser ces dernières pour mesurer la température rotationnelle, il est indispensable de déterminer la fonction d'appareil avec précision. Après recherche, il apparaît qu'aucune grandeur mesurable sur le spectre ne dépend uniquement de  $\Delta$ . La largeur de  $G_{ref}$  à 0.7 ou 0.8 (L80Gref) ne varie pas avec la température rotationnelle pour les hautes résolutions (fig. 14.5, zone a) mais dépend fortement de celle-ci pour des résolutions plus faibles (fig. 14.5, zone b et c). Quoiqu'il en soit, on remarque que  $L80G_{ref}$  varie de manière monotone avec  $T_{rot}$  et  $\Delta$ , il est donc possible d'utiliser cette grandeur en conjonction avec l'amplitude d'un groupe de raies pour mesurer la température rotationnelle. Pour conclure, aucun paramètre ne permet de mesurer les températures sur l'ensemble du domaine de résolution et de température considéré ; c'est pourquoi nous avons choisi de le diviser en sous-domaines facilement identifiables.

#### 14.2.4 Résultats pour les hautes résolutions

Pour les résolutions élevées, la fonction d'appareil globale peut être facilement reliée à la largeur de  $G_{ref}$  à 0.8 (L80Gref). Une relation entre ces deux quantités a été obtenue en faisant la régression d'une fonction polynomiale sur les points expérimentaux (fig.14.6). On obtient

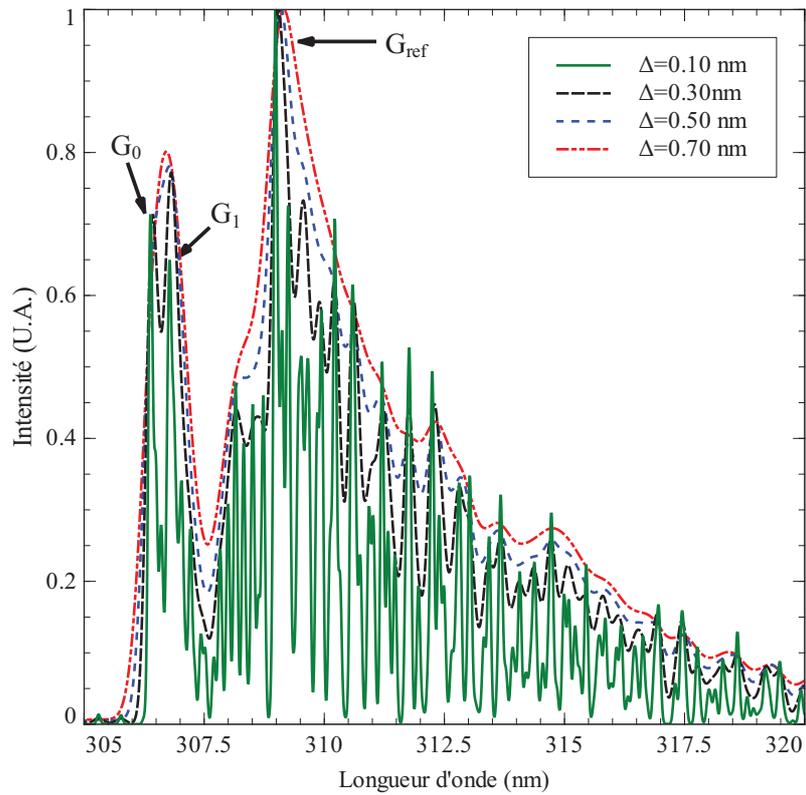


FIGURE 14.4 – Influence de la fonction d'appareil sur le spectre UV d'OH.  $T_{rot}$  et  $T_{vib}$  sont fixés à 3100 K.

ainsi :

$$\begin{aligned} \Delta(L_{80}G_{ref}) &= a.L_{80}G_{ref} + b.(L_{80}G_{ref})^2; \\ a &= 1.870; \\ b &= -3.891; \end{aligned} \quad (14.7)$$

où  $L_{80}G_{ref}$  est la largeur du groupe de raies  $G_{ref}$  at 0.8 exprimé en nanomètre.

### Hautes températures

Pour mesurer des températures rotationnelles élevées, il a été choisi d'utiliser l'amplitude du groupe de raies  $G_0$  ( $A_{G_0}$ ) situé approximativement à 306.4 nm et  $\Delta$ . Comme  $G_0$  ne dépend que de la température rotationnelle et de la fonction d'appareil globale, un abaque a été calculé pour obtenir  $T_{rot}$  à l'aide de  $\Delta$  et  $A_{G_0}$ . Il est disponible dans le tableau 14.1 de la section "Abaque" de ce chapitre. Lorsque les mesures de températures sont effectuées, un soin tout particulier doit être pris pour supprimer le fond continu du spectre. En outre, l'abaque 14.1 ne doit être utilisé que pour des températures rotationnelles comprises entre 1000 et 8000 K. Si aucune information n'existe sur l'ordre de grandeur de la température dans l'objet à diagnostiquer, la forme générale du spectre permet de choisir si les données sont utilisables.

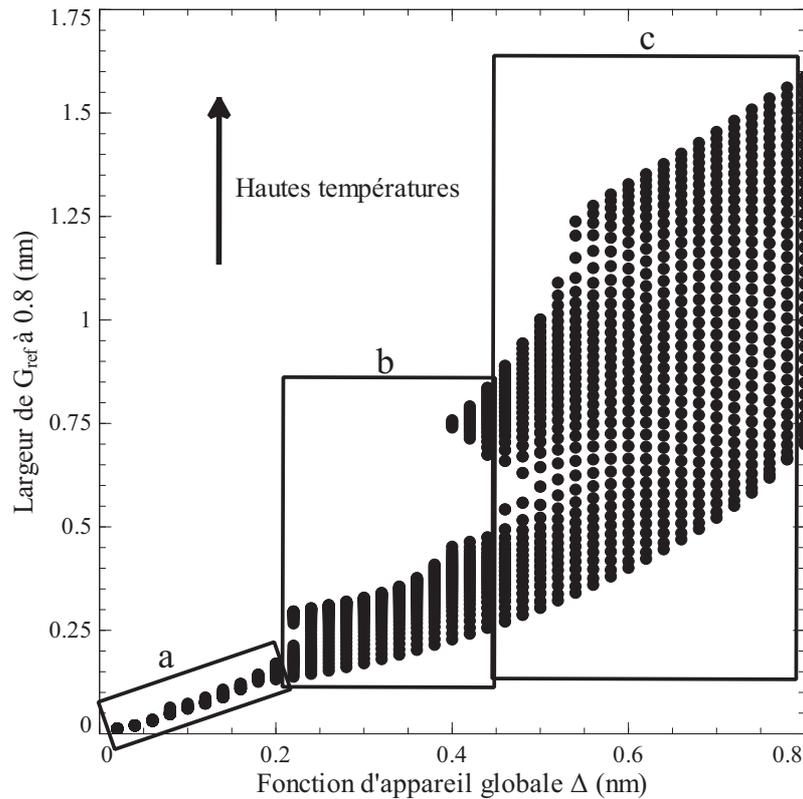


FIGURE 14.5 – Largeur de  $G_{ref}$  à 0.8 en fonction de la fonction d'appareil. L'influence de la température est discernable à l'aide de la superposition des points.

La valeur moyenne du spectre après 312.2 nm doit être utilisée pour mesurer la température vibrationnelle; malheureusement, comme aucun groupe de raies n'est remarquable, une calibration du spectre en longueur d'onde doit être effectuée pour se repérer sur cette zone spectrale. Afin de s'affranchir de cet étalonnage, nous avons choisi de travailler avec des multiples de la distance comprise entre l'amplitude maximum de  $G_0$  et  $G_{ref}$  ( $\lambda_{G_0G_{ref}}$ ). Une analyse détaillée de la valeur moyenne du spectre a été conduite sur plusieurs zones de manière à obtenir la meilleure sensibilité à  $T_{vib}$  possible tout en limitant l'incertitude induite par une mauvaise estimation du fond continu. Quelle que soit la zone sur laquelle la valeur moyenne est calculée, cette dernière dépend autant de la fonction d'appareil que de la température vibrationnelle et rotationnelle (fig.14.7). En conséquence, une toute petite incertitude sur la fonction d'appareil puis sur la température rotationnelle entraînera une erreur considérable sur la température vibrationnelle.

Pour obtenir une méthode de mesure robuste, il est nécessaire de limiter la dépendance de la valeur moyenne à  $\Delta$  et/ou  $T_{rot}$ . La zone spectrale que j'ai choisi d'exploiter se situe à  $1\lambda_{G_0G_{ref}}$  de l'amplitude maximum de  $G_{ref}$  et s'étend sur  $2\lambda_{G_0G_{ref}}$ . En raisonnant grossièrement, on comprend que la valeur moyenne sur cette zone spectrale,  $I$ , dépend de  $\Delta$  de par la normalisation du spectre sur l'amplitude de  $G_{ref}$ . Si telle n'était pas le cas, la surface totale du spectre devrait être constante. Ici, cette surface est multiplié par un facteur dépendant de la fonction d'appareil globale. La valeur moyenne  $I$  est majoritairement due à la bande 1-1;

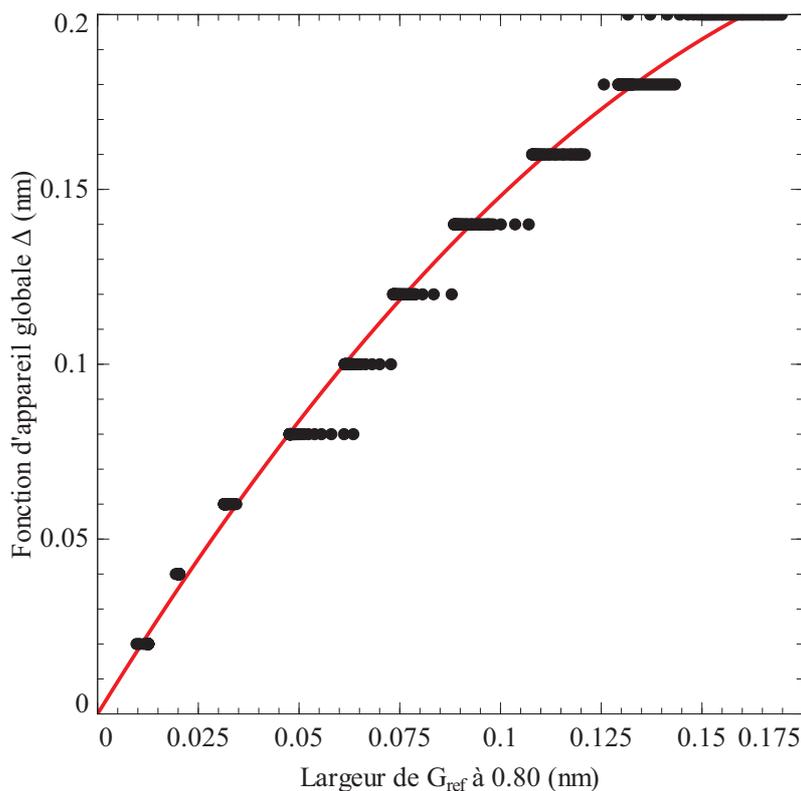


FIGURE 14.6 – Fonction d'appareil globale  $\Delta$  en fonction de la largeur de  $G_{ref}$  à 0.8 pour les hautes résolutions. La courbe présentée ici correspond à la régression d'un polynôme d'ordre 2 sur les points de données simulés.

si l'on s'intéresse uniquement à la contribution de cette dernière, on peut souligner grâce aux équations 14.4 et 14.5, que les variables  $T_{vib}$  et  $T_{rot}$  dont elle dépend sont séparables. Une partie de la bande 0-0 est présente sur la zone que l'on somme, mais, comme le spectre est normalisé sur un morceau de la 0-0, cette contribution ne dépend que de  $T_{rot}$  et de  $\Delta$ .

Grâce à ce raisonnement rapide, et en négligeant les effets de bord, on peut écrire :

$$I = [I_{1-1}(T_{rot})I_{1-1}(T_{vib}) + I_{0-0}(T_{rot})] \cdot C(\Delta), \quad (14.8)$$

où  $I_{1-1}$  et  $I_{0-0}$  sont respectivement les contributions de la bande 1-1 et 0-0 à la valeur moyenne calculée et  $C$  un coefficient multiplicatif correspondant au changement de la surface du spectre avec la fonction d'appareil globale. On remarque aisément que  $C$  est commun à tout le spectre ; de ce fait, la dépendance de  $I$  à  $\Delta$  peut être supprimée tout en gardant la sensibilité à  $T_{vib}$  en la divisant par une valeur moyenne indépendante de  $T_{vib}$  *i.e.* qui est située au début de la bande 0-0. Par souci de simplicité, j'ai choisi la valeur moyenne entre les amplitudes maximum de  $G_0$  et  $G_{ref}$  ( $I_{G_0G_{ref}}$ ). Le ratio de ces deux valeurs moyennes ne dépend plus de  $\Delta$  comme le montre la figure 14.8. Des abaques ont été calculés pour fournir la température vibrationnelle en fonction du ratio  $I/I_{G_0G_{ref}}$  et de la température rotationnelle, ils sont disponibles sur les tableaux 14.2 et 14.3.

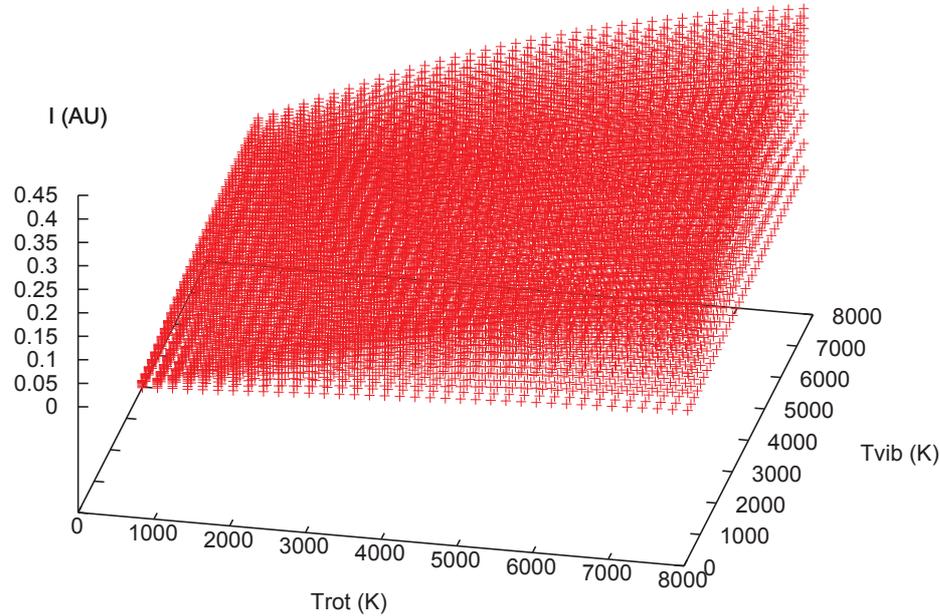


FIGURE 14.7 – Valeur moyenne  $I$  calculée sur  $2\lambda G_0 G_{ref}$  à  $\lambda G_0 G_{ref}$  du maximum d’amplitude de  $G_{ref}$  en fonction de la température rotationnelle et vibrationnelle. Pour un couple de températures données, la superposition des points est caractéristique de la dépendance à  $\Delta$ . Ici, on constate que  $\Delta$  influe autant sur  $I$  que la température rotationnelle et vibrationnelle.

### Faibles températures

Pour les températures inférieures à 1000 K,  $G_0$  et  $G_1$  ne sont pas adaptés pour la mesure à cause de leur manque de sensibilité. C’est pourquoi j’ai choisi d’utiliser l’amplitude du groupe de raies  $G_3$  de manière à mesurer la température rotationnelle entre 300 et 1500 K. Le maximum d’amplitude de  $G_3$  est situé autour de 308.2 nm et est aisément distinguable des autres groupes de raies (fig.14.9). Encore une fois, comme il est dépendant de  $\Delta$ , la fonction d’appareil globale doit être calculée depuis le spectre. Un abaque a été calculé pour donner  $T_{rot}$  à l’aide de l’amplitude de  $G_3$  et de  $\Delta$  comme arguments, il est disponible sur le tableau 14.4.

La fonction d’appareil globale peut être déterminée à l’aide de l’équation 14.9, mais pour plus de précision, la relation suivante peut être utilisée pour l’obtenir lors de mesures de faibles températures (figure 14.10) :

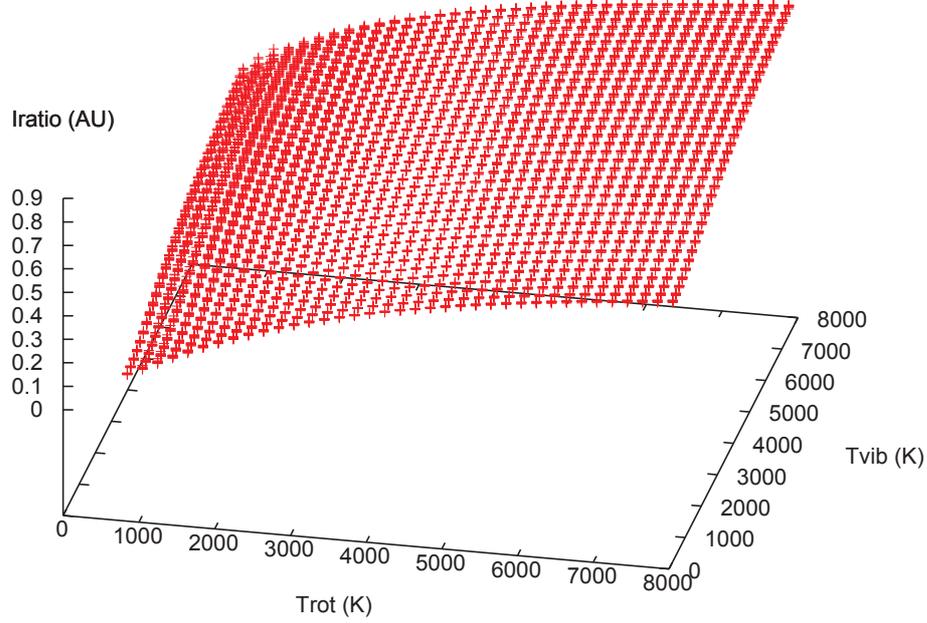


FIGURE 14.8 –  $I/I_{G_0 G_{ref}}$  fonction de la température rotationnelle et vibrationnelle. Pour un couple de températures donné, les points empilés donnent une idée de la dépendance du ratio  $I/I_{G_0 G_{ref}}$  à la fonction d'appareil. On constate que cette dépendance est négligeable partout sauf pour les très faibles températures rotationnelles, où l'utilisation du maximum d'amplitude de  $G_0$  n'est pas judicieux.

$$\begin{aligned}
 \Delta(L_{80G_{ref}}) &= aL_{80G_{ref}} + bL_{80G_{ref}}^2 + c\sin^2(-dL_{80G_{ref}}); \\
 a &= 1.5235; \\
 b &= -1.5131; \\
 c &= 0.0105; \\
 d &= 56.000.
 \end{aligned}
 \tag{14.9}$$

Avec  $L_{80G_{ref}}$  la largeur du groupe de raies  $G_{ref}$  à 0.8 exprimée en nanomètre.

Comme précédemment, la mesure de la température vibrationnelle est menée à l'aide de la valeur moyenne du spectre calculée sur une partie de la bande  $v' = 1 \rightarrow v'' = 1$ . Pour les faibles températures rotationnelles, nous avons choisi de travailler avec la distance entre les maximums d'amplitude de  $G_3$  et  $G_{ref}$  pour repérer et définir la zone où  $I_{basseT}$  doit être calculée. Le calcul de  $I_{basseT}$  débute à  $5\lambda_{G_3 G_{ref}}$  de l'amplitude maximum de  $G_{ref}$  et s'effectue sur un domaine de  $5\lambda_{G_3 G_{ref}}$ .  $I_{basseT}$  est évidemment dépendant de la fonction d'appareil globale. Pour supprimer cette dépendance, cette valeur est divisée par la valeur moyenne calculée entre le maximum d'amplitude de  $G_3$  ( $\lambda_{G_3}$ ) et  $\lambda_{G_3} + 2\lambda_{G_3 G_{ref}}$ .

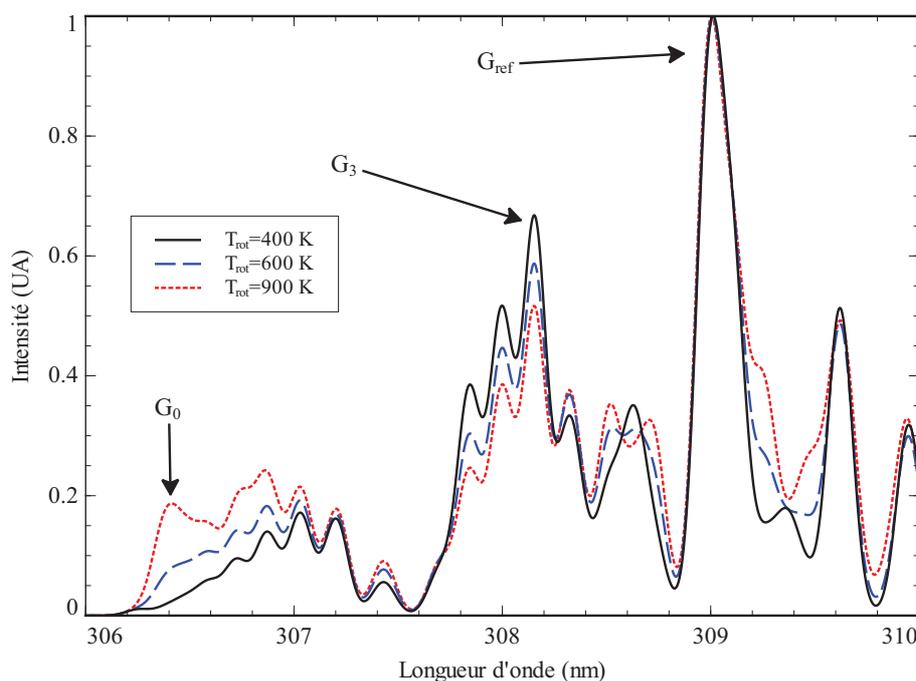


FIGURE 14.9 – Évolution du spectre UV de OH avec la température rotationnelle. Pour des températures comprises entre 300 et 1600 K, l'amplitude de  $G_3$  diminue de manière monotone. La fonction d'appareil est fixée à  $\Delta = 0.1nm$

Les abaques fournissant  $T_{vib}$  en fonction de  $T_{rot}$  et  $I_{basseT}/I_{G_3-G_3+2\lambda G_3 G_{ref}}$  sont disponibles sur les tableaux 14.5 et 14.6.

### 14.2.5 Résultats pour les faibles résolutions

#### Hautes températures avec $G_0$ et $G_1$ définis

Lorsque la fonction d'appareil globale est supérieure à 0.2 nm, il devient impossible de l'obtenir simplement à partir d'un spectre puisqu'aucune quantité ne dépend uniquement d'elle. Heureusement, la largeur de  $G_{ref}$  à 0.8 varie de manière monotone avec  $\Delta$  et  $T_{rot}$  ce qui rend la mesure de  $T_{rot}$  possible grâce à l'amplitude de  $G_0$  et à  $L80G_{ref}$ . Un abaque relativement volumineux a été calculé pour couvrir l'ensemble des résolutions où  $G_0$  et  $G_1$  sont résolus; il est disponible sur les tableaux 14.7-14.11. Pour la mesure de la température vibrationnelle, la même procédure que pour les cas à haute résolution et à haute température est appliquée (abaques 14.2, 14.3).

#### Hautes températures avec $G_{mel}$ défini

Pour une fonction d'appareil globale supérieure à  $\Delta=0.44\text{ nm}$ ,  $G_0$  et  $G_1$  deviennent non-résolus et forment un groupe que nous avons appelé  $G_{mel}$ . Des abaques ont été calculés pour obtenir  $T_{rot}$  en fonction de l'amplitude de  $G_{mel}$  et de la largeur de  $G_{ref}$  à 0.8, ils sont disponibles sur les tableaux 14.12-14.18.

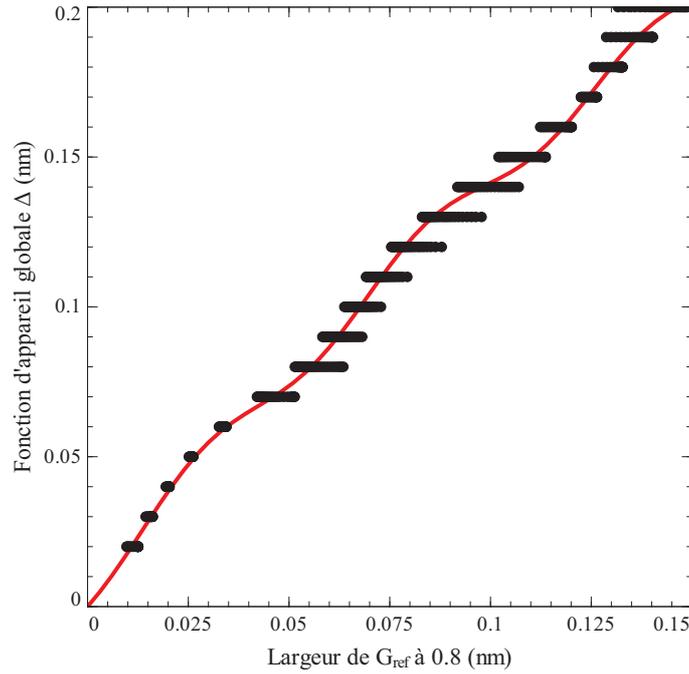


FIGURE 14.10 – Largeur de  $G_{ref}$  à 0.8 en fonction de  $\Delta$  pour une température rotationnelle comprise entre 300 et 900 K. La courbe correspond à la régression de la relation 14.9 sur les données simulées. L'oscillation perceptible est due à la brusque inclusion de raies dans le groupe  $G_{ref}$  induite par la convolution du profil gaussien  $G(\Delta)$ .

Un résultat particulièrement intéressant a été obtenu pendant l'analyse des spectres basse résolution : l'amplitude de  $G_{mel}$  dépend très faiblement de la fonction d'appareil globale (figure 14.11). Cela permet de déterminer directement  $T_{rot}$  uniquement grâce à l'amplitude de  $G_{mel}$  et ce avec une incertitude limitée. Pour des températures inférieures à 5000 K, l'erreur  $\Delta T$  faite en négligeant  $\Delta$  est d'environ 200 K. Pour les hautes températures cependant, l'erreur faite en négligeant l'influence de la fonction d'appareil devient importante ; elle est de  $\Delta T \approx 1000$  K pour une température mesurée de 7000 K. Pour rendre le calcul de la température plus simple, nous avons effectué une régression sur les données présentées sur la figure 14.11. A cause de la forme de la courbe, la relation suivante a été ajustée sur les points :

$$\begin{aligned}
 T_{rot}(A_{G_{mel}}) &= \sqrt{aA_{G_{mel}}} + \exp(bA_{G_{mel}}) + c; \\
 a &= 34486306; \\
 b &= 7.885; \\
 c &= -2659.
 \end{aligned}
 \tag{14.10}$$

Pour conclure, la non prise en compte de  $\Delta$  pour le calcul de la température est une bonne idée si le milieu à diagnostiquer est à une température inférieure à 5000 K. Pour des températures supérieures, il est recommandé d'utiliser les abaques afin de limiter l'incertitude.

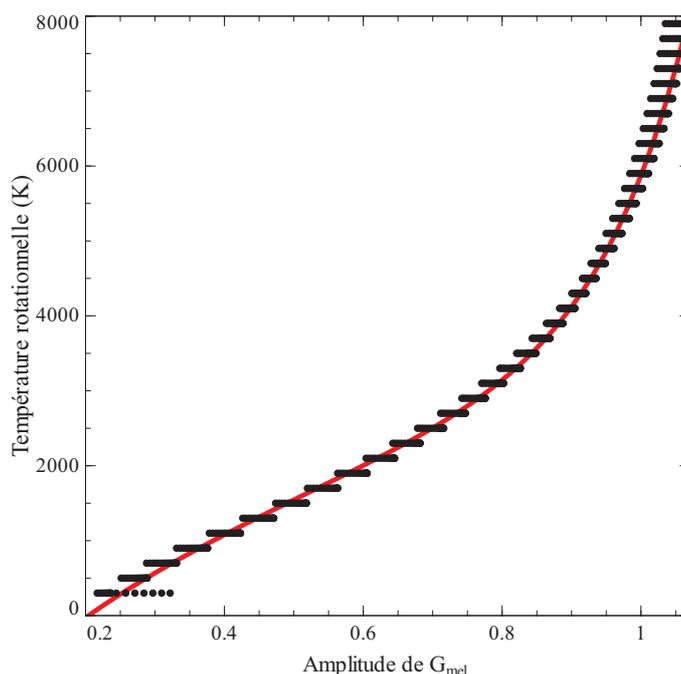


FIGURE 14.11 – Graphe de l'amplitude de  $G_{mel}$  en fonction de la température rotationnelle. Les plateaux sont caractéristiques de la dépendance de  $AG_{mel}$  à la fonction d'appareil globale.

#### 14.2.6 Mesure de températures sur un spectre expérimental

Les méthodes de mesure de la températures sont assez simples pour être appliquées avec un crayon et une règle directement sur un spectre. Cependant, pour obtenir de bons résultats, il est nécessaire de choisir le méthode adaptée et de comprendre comment traiter un spectre.

La procédure de choix de la méthode de mesure est résumée sur la figure 14.12. La fonction d'appareil globale doit tout d'abord être estimée. Si  $G_0$  et  $G_1$  ne sont pas résolus, les méthodes pour les basses résolutions faisant intervenir  $G_{mel}$  devront être utilisées. Si  $G_0$  et  $G_1$  sont résolus, la fonction d'appareil globale est calculée à l'aide de l'équation (14.8). Lorsque  $\Delta$  est supérieure à 0.2 nm, les abaques 14.7-14.11 doivent être choisis, sinon on doit se tourner vers les méthodes de mesure "haute résolution". Dans ce cas, le choix pour les méthodes faible ou haute température peut être déterminé en étudiant le groupe de raie  $G_0$ . Si ce dernier à une amplitude maximum de 0.25 ou moins, les résultats à basses températures doivent être utilisés.

Lorsqu'un spectre UV de OH est enregistré entre 300 et 320 nm, le processus de traitement de ces données débute par la soustraction du fond continu (figure 14.13 (1)). Il n'y a pas de méthodes générales et seule l'habitude et une connaissance parfaite du dispositif expérimental permettent d'obtenir de bons résultats. La totalité des résultats a été obtenue avec des spectres normalisés sur l'amplitude du groupe  $G_{ref}$ . Afin de les utiliser, il est nécessaire de normaliser les spectres expérimentaux sur  $G_{ref}$  (figure 14.13 (2)). Ce groupe est aisément reconnaissable car c'est l'un des plus intense de la bande 0-0. On détermine ensuite sa largeur à 0.8 afin de calculer  $\Delta$  dans le cas de spectres de haute résolution ou bien pour l'utiliser directement dans les abaques lorsqu'il s'agit de spectres de basse résolution (figure 14.13 (3)).

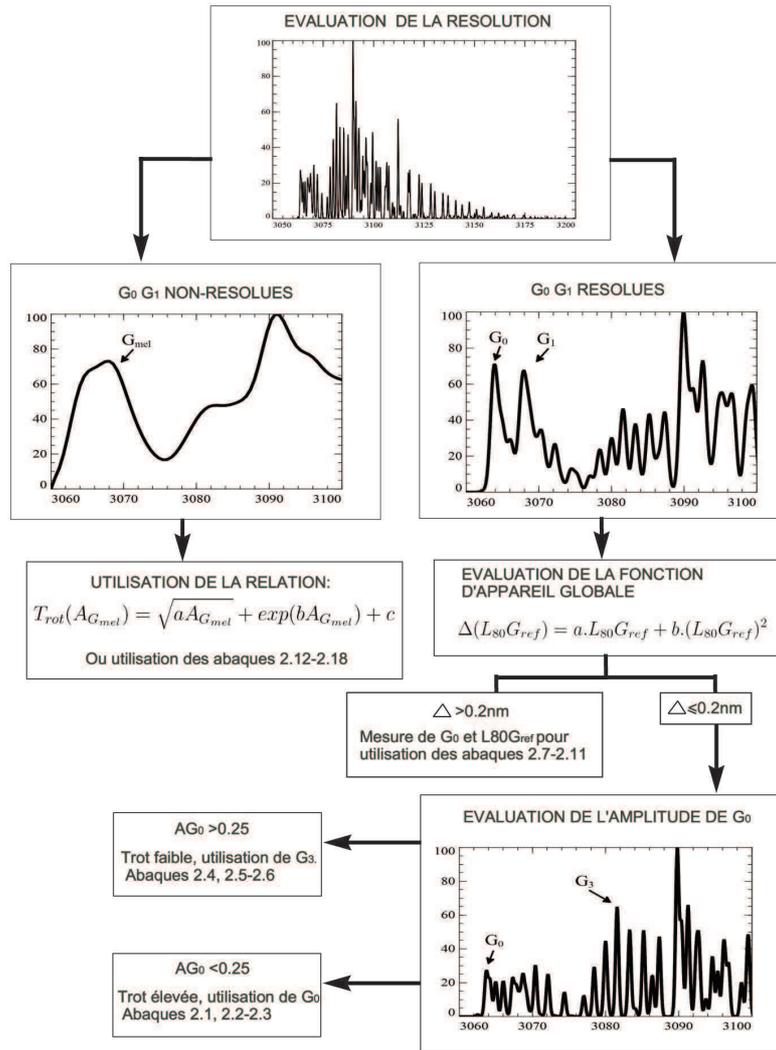


FIGURE 14.12 – Résumé de l'algorithme de choix des méthodes de mesure.

L'amplitude des groupes de raies est nécessaire pour déterminer la température rotationnelle en utilisant les abaques, l'amplitude de  $G_0$ ,  $G_3$  ou de  $G_{mel}$  est donc mesurée en fonction de la configuration expérimentale (figure 14.13 (4)). Finalement, la mesure de la température vibrationnelle requiert  $T_{rot}$ ,  $I$  (figure 14.13 (5)) ou  $I_{basseT}$  et, selon le cas, la valeur moyenne entre  $G_0$  et  $G_{ref}$  ou celle entre l'amplitude maximum de  $G_3$  et  $G_3 + 2\lambda G_3 G_{ref}$  (figure 14.13 (5bis)). Les ratios de valeurs moyennes appropriés doivent être calculés et utilisés comme argument dans les abaques 14.2 et 14.3 pour déterminer  $T_{vib}$ . Pour les hautes températures,  $I$  est calculé à  $\lambda_{G_0 G_{ref}}$  de l'amplitude maximum de  $G_{ref}$  sur  $2\lambda_{G_0 G_{ref}}$  tandis que pour les faibles températures, le calcul de  $I_{basseT}$  se fait à  $5\lambda_{G_3 G_{ref}}$  de  $G_{ref}$  sur un domaine de  $5\lambda_{G_3 G_{ref}}$  de long.

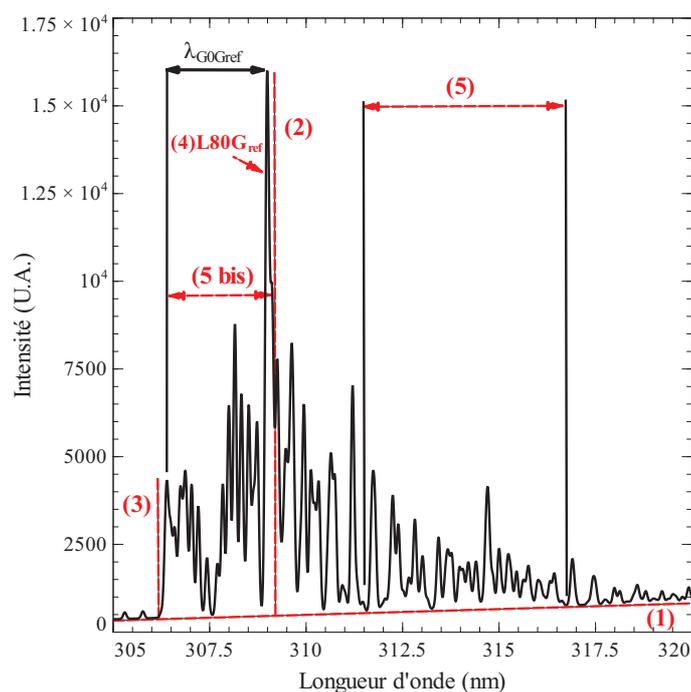


FIGURE 14.13 – Exemple de traitement d’un spectre expérimental. Tout d’abord, le fond continu est soustrait du spectre (1). Celui-ci est ensuite normalisé sur l’amplitude de  $G_{ref}$  (2). L’amplitude de  $G_0$  (3) puis  $L80G_{ref}$  (4) sont mesurées pour obtenir la température rotationnelle. Finalement,  $I$  (5) et  $I_{G_0G_{ref}}$  (5bis) sont calculés afin d’obtenir la température vibrationnelle.

### 14.2.7 Validation théorique des méthodes de mesures

Les méthodes de mesures développées sont trop nombreuses pour être testées correctement de manière expérimentale. Nous ne disposons pas au laboratoire d’un nombre de sources et de monochromateurs suffisant pour valider les résultats sur l’ensemble du domaine d’étude. Pour s’affranchir de ces problèmes matériels et démontrer la qualité des méthodes de mesures, j’ai choisi d’utiliser des spectres simulés à l’aide du programme LIFBASE. Ce dernier permet de produire des spectres avec une température rotationnelle, vibrationnelle et une fonction d’appareil fixée par l’utilisateur.

Pour mener un test non-biaisé, nous avons procédé à un test en aveugle. Une personne simulait des spectres UV de OH aléatoires tandis qu’une autre mesurait les températures avec les méthodes développées précédemment. Une dizaine de spectres synthétiques a été traitée, certains d’entre eux sont disponibles sur la figure 14.14. Comme on peut le constater, les méthodes haute résolution (a,b) donnent des résultats précis sur les températures rotationnelles et vibrationnelles sauf sur le spectre D où une erreur de 300 K est faite sur l’évaluation de  $T_{vib}$ . Deux méthodes basse résolution ont été validées : la méthode (c), qui correspond à l’utilisation de l’équation 14.10 et la méthode (d), basée sur les abaques 14.12-14.18.

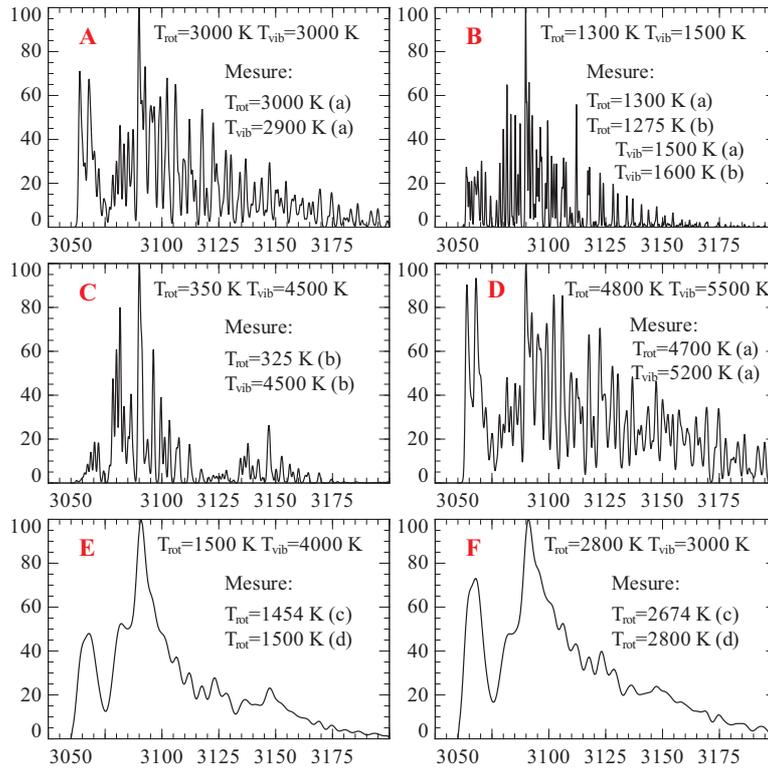


FIGURE 14.14 – Spectres synthétiques produits par LIFBASE [12] pour le blind test. Les longueurs d’onde sont en Angströms. Sur chacune des figures, la température rotationnelle et vibrationnelle exacte est indiquée. Quatres méthodes de mesures ont été utilisées sur ces spectres. La méthode (a) utilise les abaques 14.1, 14.2, 14.3 en conjonction avec la relation (7), Elle est valide pour les hautes températures et les hautes résolutions. La méthode (b) utilise les données obtenues pour les basses températures. Finalement, les méthodes (c) et (d) sont utilisées sur des spectres basse résolution ; elles sont basées respectivement sur l’équation 14.10 et sur les abaques basse résolution.

### 14.3 Conclusion

Par rapport aux travaux précédents, le programme de simulation de spectre moléculaire développé au cours de cette thèse a permis de nombreuses nouveautés. Comme précédemment, l’ensemble de la procédure nécessaire pour obtenir des températures se fait sans étalonnage, directement sur des grandeurs facilement mesurables sur des spectres expérimentaux. Les méthodes développées permettent une mesure aisée de la température rotationnelle mais aussi vibrationnelle pour une large gamme de résolutions et de températures. L’utilisation du groupe de raie  $G_3$  permet une bonne précision pour la gamme de température 300-1500 K où les méthodes précédentes n’étaient pas sensibles. Pour les basses résolutions, une méthode de mesure basée sur l’amplitude du groupe  $G_{mel}$  ainsi que sur l’utilisation d’une formule obtenue par régression permet une estimation rapide de la température rotationnelle. Pour que l’ensemble des données présentées dans cette partie soit utilisable, on doit s’assurer que le peuplement des niveaux rotationnel et vibrationnel suit une loi de Boltzmann. Cela n’est pas toujours le cas,

on montre par exemple que la présence de vapeur d'eau dans le milieu à diagnostiquer induit un taux de désexcitation collisionnelle élevé [14, 15], ce qui perturbe fortement le peuplement des niveaux énergétiques de OH.

## 14.4 Abaques

### 14.4.1 Résultats haute résolution

#### Haute température

Trot/ $\Delta$ (nm)	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.2
900	0.183	0.166	0.166	0.170	0.170	0.166	0.169	0.173	0.174	0.176	0.178	0.180	0.182	0.185	0.187	0.190	0.192	0.194	0.196
1100	0.198	0.180	0.181	0.196	0.213	0.229	0.241	0.246	0.248	0.250	0.252	0.254	0.257	0.259	0.261	0.263	0.265	0.266	0.268
1300	0.233	0.220	0.236	0.254	0.274	0.293	0.307	0.314	0.319	0.321	0.323	0.326	0.328	0.330	0.333	0.334	0.336	0.337	0.338
1500	0.281	0.266	0.285	0.307	0.330	0.352	0.368	0.377	0.383	0.386	0.388	0.392	0.394	0.397	0.399	0.400	0.401	0.402	0.403
1700	0.325	0.308	0.330	0.354	0.380	0.405	0.423	0.434	0.440	0.445	0.447	0.451	0.454	0.457	0.459	0.461	0.462	0.462	0.462
1900	0.364	0.345	0.370	0.396	0.425	0.453	0.473	0.486	0.492	0.498	0.501	0.505	0.508	0.511	0.514	0.515	0.516	0.517	0.517
2100	0.399	0.378	0.405	0.434	0.465	0.496	0.517	0.532	0.539	0.545	0.549	0.553	0.557	0.560	0.563	0.565	0.566	0.566	0.566
2300	0.430	0.408	0.437	0.467	0.501	0.534	0.556	0.573	0.581	0.588	0.593	0.597	0.602	0.605	0.608	0.609	0.610	0.611	0.610
2500	0.459	0.434	0.466	0.498	0.533	0.567	0.592	0.610	0.619	0.627	0.632	0.636	0.641	0.644	0.648	0.649	0.651	0.651	0.650
2700	0.484	0.458	0.492	0.525	0.562	0.598	0.624	0.643	0.654	0.662	0.668	0.672	0.677	0.681	0.684	0.686	0.687	0.687	0.686
2900	0.507	0.480	0.515	0.550	0.588	0.626	0.654	0.674	0.685	0.693	0.700	0.704	0.709	0.713	0.716	0.718	0.720	0.719	0.719
3100	0.528	0.500	0.536	0.572	0.612	0.651	0.680	0.701	0.713	0.722	0.729	0.734	0.739	0.743	0.746	0.748	0.749	0.749	0.749
3300	0.547	0.518	0.555	0.593	0.634	0.673	0.704	0.726	0.739	0.748	0.755	0.760	0.765	0.770	0.773	0.775	0.776	0.776	0.775
3500	0.564	0.534	0.573	0.612	0.654	0.694	0.727	0.749	0.763	0.772	0.779	0.785	0.790	0.794	0.797	0.799	0.800	0.800	0.799
3700	0.580	0.549	0.589	0.629	0.672	0.714	0.747	0.770	0.785	0.794	0.801	0.807	0.812	0.816	0.819	0.821	0.822	0.822	0.821
3900	0.595	0.563	0.604	0.645	0.689	0.731	0.766	0.790	0.805	0.814	0.821	0.827	0.832	0.837	0.840	0.842	0.842	0.842	0.841
4100	0.609	0.576	0.618	0.659	0.704	0.748	0.783	0.808	0.823	0.833	0.840	0.846	0.851	0.855	0.858	0.860	0.861	0.860	0.859
4300	0.621	0.588	0.631	0.673	0.719	0.763	0.799	0.824	0.840	0.850	0.857	0.863	0.868	0.872	0.875	0.877	0.877	0.876	0.875
4500	0.633	0.599	0.643	0.686	0.732	0.777	0.814	0.840	0.856	0.866	0.873	0.879	0.884	0.888	0.890	0.892	0.892	0.892	0.890
4700	0.644	0.609	0.654	0.697	0.744	0.790	0.828	0.854	0.871	0.881	0.888	0.894	0.898	0.902	0.905	0.906	0.906	0.905	0.904
4900	0.654	0.619	0.664	0.708	0.756	0.802	0.841	0.867	0.885	0.895	0.902	0.908	0.912	0.915	0.918	0.919	0.919	0.918	0.916
5100	0.663	0.628	0.673	0.718	0.767	0.813	0.853	0.880	0.897	0.907	0.914	0.920	0.924	0.928	0.930	0.931	0.931	0.929	0.927
5300	0.672	0.636	0.682	0.728	0.777	0.824	0.865	0.892	0.909	0.919	0.926	0.932	0.936	0.939	0.941	0.942	0.942	0.940	0.938
5500	0.681	0.644	0.691	0.737	0.779	0.824	0.875	0.903	0.920	0.931	0.937	0.943	0.947	0.949	0.951	0.952	0.951	0.950	0.947
5700	0.689	0.652	0.699	0.745	0.777	0.822	0.873	0.913	0.931	0.941	0.948	0.953	0.957	0.959	0.961	0.961	0.961	0.959	0.956
5900	0.696	0.659	0.706	0.747	0.776	0.820	0.871	0.918	0.941	0.951	0.957	0.963	0.966	0.968	0.970	0.970	0.969	0.967	0.964
6100	0.703	0.665	0.713	0.745	0.775	0.819	0.870	0.916	0.950	0.960	0.966	0.972	0.975	0.977	0.978	0.978	0.977	0.975	0.972
6300	0.710	0.672	0.720	0.744	0.773	0.817	0.868	0.915	0.951	0.969	0.975	0.980	0.983	0.985	0.986	0.986	0.984	0.982	0.979
6500	0.716	0.678	0.726	0.743	0.772	0.816	0.867	0.913	0.949	0.977	0.983	0.988	0.990	0.992	0.993	0.992	0.991	0.988	0.985
6700	0.722	0.683	0.732	0.742	0.771	0.815	0.865	0.911	0.947	0.976	0.991	0.995	0.998	0.999	1.000	0.999	0.997	0.994	0.991
6900	0.727	0.689	0.738	0.742	0.770	0.813	0.864	0.909	0.945	0.974	0.994	1.002	1.004	1.006	1.006	1.005	1.003	1.000	0.996
7100	0.733	0.694	0.741	0.741	0.769	0.812	0.862	0.908	0.944	0.971	0.992	1.009	1.011	1.012	1.012	1.011	1.008	1.005	1.001
7300	0.731	0.698	0.740	0.740	0.768	0.811	0.861	0.906	0.942	0.969	0.990	1.007	1.017	1.017	1.017	1.016	1.013	1.010	1.006
7500	0.727	0.703	0.739	0.739	0.767	0.810	0.860	0.905	0.940	0.967	0.988	1.005	1.020	1.023	1.022	1.021	1.018	1.015	1.010
7700	0.724	0.707	0.739	0.739	0.767	0.809	0.859	0.904	0.939	0.966	0.986	1.003	1.018	1.028	1.027	1.025	1.022	1.019	1.014
7900	0.720	0.712	0.738	0.738	0.766	0.808	0.858	0.902	0.937	0.964	0.984	1.001	1.016	1.029	1.032	1.030	1.027	1.023	1.018

TABLE 14.1 – Abaque de la température rotationnelle en fonction de l'amplitude de  $G_0$  et de  $\Delta$  pour les hautes résolutions et  $T_{rot}$  supérieur à 1000 K.

Tvib/Trot	900	1100	1300	1500	1700	1900	2100	2300	2500	2700	2900	3100	3300	3500	3700	3900	4100	4300
900	.1136	.1442	.1752	.2030	.2292	.2540	.2773	.2993	.3198	.3392	.3573	.3743	.3903	.4054	.4196	.4330	.4456	.4576
1100	.1201	.1508	.1820	.2099	.2362	.2609	.2843	.3062	.3267	.3460	.3641	.3811	.3971	.4121	.4263	.4396	.4522	.4641
1300	.1294	.1603	.1917	.2196	.2460	.2708	.2941	.3160	.3365	.3558	.3738	.3908	.4067	.4216	.4357	.4490	.4616	.4734
1500	.1408	.1718	.2035	.2316	.2580	.2829	.3062	.3280	.3485	.3677	.3857	.4026	.4184	.4333	.4473	.4606	.4730	.4848
1700	.1536	.1849	.2169	.2451	.2716	.2964	.3197	.3416	.3620	.3811	.3990	.4158	.4316	.4464	.4604	.4735	.4859	.4977
1900	.1672	.1987	.2311	.2594	.2860	.3109	.3342	.3560	.3764	.3954	.4133	.4300	.4457	.4604	.4743	.4873	.4997	.5113
2100	.1812	.2130	.2458	.2742	.3009	.3258	.3491	.3708	.3911	.4101	.4279	.4445	.4601	.4748	.4886	.5015	.5138	.5253
2300	.1953	.2274	.2605	.2891	.3158	.3407	.3640	.3857	.4060	.4249	.4426	.4592	.4747	.4892	.5029	.5158	.5280	.5394
2500	.2092	.2416	.2750	.3038	.3305	.3555	.3788	.4005	.4207	.4395	.4571	.4736	.4890	.5035	.5171	.5299	.5420	.5534
2700	.2229	.2554	.2892	.3181	.3450	.3700	.3932	.4149	.4350	.4538	.4713	.4877	.5031	.5174	.5309	.5437	.5556	.5670
2900	.2361	.2689	.3031	.3321	.3590	.3840	.4073	.4289	.4490	.4677	.4851	.5014	.5167	.5310	.5444	.5570	.5689	.5801
3100	.2489	.2819	.3164	.3455	.3725	.3976	.4208	.4424	.4624	.4811	.4984	.5146	.5298	.5440	.5573	.5699	.5817	.5928
3300	.2612	.2944	.3292	.3584	.3855	.4106	.4338	.4553	.4753	.4939	.5112	.5273	.5424	.5565	.5698	.5822	.5940	.6050
3500	.2729	.3064	.3415	.3708	.3980	.4231	.4463	.4678	.4877	.5062	.5234	.5395	.5545	.5685	.5817	.5941	.6057	.6167
3700	.2842	.3179	.3532	.3827	.4099	.4350	.4582	.4797	.4995	.5180	.5351	.5511	.5660	.5800	.5931	.6054	.6169	.6279
3900	.2950	.3288	.3645	.3940	.4213	.4464	.4696	.4910	.5108	.5292	.5463	.5622	.5770	.5909	.6039	.6161	.6276	.6385
4100	.3052	.3393	.3752	.4049	.4322	.4573	.4805	.5019	.5216	.5400	.5570	.5728	.5876	.6014	.6143	.6264	.6379	.6486
4300	.3151	.3493	.3854	.4152	.4426	.4677	.4909	.5122	.5319	.5502	.5671	.5829	.5976	.6113	.6242	.6362	.6476	.6583
4500	.3244	.3588	.3952	.4251	.4525	.4776	.5008	.5221	.5418	.5600	.5768	.5925	.6072	.6208	.6336	.6456	.6569	.6675
4700	.3334	.3679	.4045	.4345	.4619	.4871	.5102	.5315	.5511	.5693	.5861	.6017	.6163	.6299	.6426	.6545	.6657	.6763
4900	.3419	.3766	.4135	.4435	.4710	.4961	.5193	.5405	.5601	.5782	.5949	.6105	.6250	.6385	.6511	.6630	.6741	.6847
5100	.3501	.3849	.4220	.4521	.4796	.5048	.5279	.5491	.5686	.5867	.6034	.6189	.6333	.6467	.6593	.6711	.6822	.6926
5300	.3579	.3929	.4301	.4603	.4878	.5130	.5361	.5573	.5768	.5948	.6114	.6269	.6412	.6546	.6671	.6788	.6899	.7003
5500	.3653	.4005	.4379	.4681	.4957	.5209	.5440	.5651	.5846	.6025	.6191	.6345	.6488	.6621	.6746	.6862	.6972	.7075
5700	.3725	.4077	.4453	.4756	.5032	.5285	.5515	.5726	.5921	.6099	.6265	.6418	.6560	.6693	.6817	.6933	.7042	.7145
5900	.3793	.4147	.4524	.4828	.5105	.5357	.5587	.5798	.5992	.6170	.6335	.6488	.6629	.6761	.6885	.7000	.7109	.7211
6100	.3858	.4213	.4593	.4897	.5174	.5426	.5656	.5867	.6060	.6238	.6402	.6554	.6696	.6827	.6950	.7065	.7173	.7274
6300	.3921	.4277	.4658	.4963	.5240	.5492	.5722	.5933	.6126	.6303	.6467	.6618	.6759	.6890	.7012	.7127	.7234	.7335
6500	.3981	.4338	.4721	.5026	.5303	.5556	.5786	.5996	.6188	.6365	.6529	.6680	.6820	.6950	.7072	.7186	.7293	.7393
6700	.4039	.4397	.4781	.5087	.5364	.5617	.5846	.6056	.6248	.6425	.6588	.6738	.6878	.7008	.7129	.7242	.7349	.7449
6900	.4094	.4453	.4839	.5145	.5423	.5675	.5905	.6114	.6306	.6482	.6645	.6795	.6934	.7063	.7184	.7297	.7403	.7502
7100	.4147	.4508	.4894	.5201	.5479	.5731	.5961	.6170	.6362	.6537	.6699	.6849	.6987	.7116	.7237	.7349	.7455	.7554
7300	.4199	.4560	.4947	.5255	.5533	.5785	.6015	.6224	.6415	.6590	.6752	.6901	.7039	.7167	.7287	.7399	.7504	.7603
7500	.4248	.4610	.4999	.5307	.5585	.5837	.6067	.6275	.6466	.6641	.6802	.6951	.7089	.7217	.7336	.7447	.7552	.7650
7700	.4295	.4658	.5048	.5356	.5635	.5887	.6116	.6325	.6516	.6690	.6851	.6999	.7136	.7264	.7383	.7494	.7598	.7696
7900	.4341	.4704	.5096	.5404	.5683	.5936	.6164	.6373	.6563	.6737	.6897	.7045	.7182	.7309	.7428	.7538	.7642	.7739

TABLE 14.2 – Abaque de la température vibrationnelle en fonction du ratio  $I/I_{G_0G_{ref}}$  et de  $T_{rot}$  pour une température rotationnelle supérieure à 1000 K.

Tvib/Trot	4500	4700	4900	5100	5300	5500	5700	5900	6100	6300	6500	6700	6900	7100	7300	7500	7700	7900
900	.4689	.4796	.4929	.5026	.5119	.5207	.5291	.5371	.5448	.5522	.5593	.5660	.5726	.5788	.5849	.5907	.5963	.6017
1100	.4754	.4861	.4994	.5091	.5183	.5271	.5355	.5435	.5511	.5585	.5655	.5723	.5788	.5851	.5911	.5969	.6025	.6079
1300	.4847	.4953	.5086	.5183	.5274	.5362	.5445	.5525	.5601	.5674	.5745	.5812	.5877	.5939	.5999	.6057	.6112	.6166
1500	.4960	.5066	.5200	.5295	.5386	.5473	.5556	.5636	.5711	.5784	.5854	.5921	.5985	.6047	.6107	.6164	.6219	.6273
1700	.5088	.5193	.5327	.5422	.5512	.5598	.5681	.5760	.5835	.5907	.5977	.6043	.6107	.6168	.6228	.6285	.6340	.6393
1900	.5223	.5328	.5462	.5556	.5646	.5732	.5814	.5892	.5967	.6038	.6107	.6173	.6237	.6298	.6356	.6413	.6468	.6520
2100	.5363	.5467	.5601	.5694	.5784	.5869	.5950	.6027	.6102	.6173	.6241	.6307	.6370	.6430	.6488	.6545	.6599	.6651
2300	.5503	.5606	.5740	.5833	.5922	.6006	.6087	.6164	.6237	.6308	.6376	.6441	.6503	.6563	.6621	.6677	.6730	.6782
2500	.5642	.5744	.5878	.5970	.6058	.6142	.6222	.6298	.6371	.6441	.6508	.6573	.6635	.6694	.6752	.6807	.6860	.6912
2700	.5777	.5878	.6013	.6104	.6191	.6274	.6353	.6429	.6501	.6571	.6637	.6701	.6763	.6822	.6879	.6934	.6987	.7038
2900	.5908	.6009	.6143	.6234	.6320	.6402	.6481	.6556	.6628	.6697	.6763	.6826	.6887	.6946	.7002	.7057	.7109	.7160
3100	.6034	.6134	.6268	.6358	.6444	.6526	.6604	.6678	.6749	.6818	.6883	.6946	.7007	.7065	.7121	.7175	.7227	.7277
3300	.6155	.6254	.6389	.6478	.6563	.6644	.6721	.6795	.6866	.6934	.6999	.7061	.7121	.7179	.7234	.7288	.7339	.7389
3500	.6271	.6370	.6504	.6593	.6677	.6757	.6834	.6907	.6977	.7045	.7109	.7171	.7230	.7288	.7343	.7396	.7447	.7496
3700	.6382	.6480	.6614	.6702	.6786	.6865	.6942	.7014	.7084	.7150	.7214	.7276	.7335	.7392	.7446	.7499	.7550	.7599
3900	.6487	.6585	.6719	.6806	.6889	.6968	.7044	.7116	.7185	.7251	.7315	.7376	.7434	.7491	.7545	.7597	.7647	.7696
4100	.6588	.6685	.6819	.6906	.6988	.7067	.7142	.7213	.7282	.7347	.7410	.7471	.7529	.7585	.7639	.7690	.7740	.7789
4300	.6684	.6780	.6915	.7000	.7082	.7160	.7235	.7306	.7374	.7439	.7501	.7561	.7619	.7674	.7728	.7779	.7829	.7877
4500	.6776	.6871	.7005	.7091	.7172	.7249	.7323	.7394	.7461	.7526	.7588	.7647	.7705	.7760	.7813	.7864	.7913	.7961
4700	.6863	.6957	.7092	.7177	.7257	.7334	.7407	.7477	.7544	.7609	.7670	.7729	.7786	.7841	.7893	.7944	.7993	.8040
4900	.6946	.7040	.7174	.7258	.7338	.7415	.7488	.7557	.7624	.7687	.7749	.7807	.7864	.7918	.7970	.8021	.8069	.8116
5100	.7025	.7118	.7253	.7336	.7416	.7492	.7564	.7633	.7699	.7763	.7823	.7882	.7938	.7991	.8043	.8093	.8142	.8188
5300	.7101	.7193	.7328	.7411	.7490	.7565	.7637	.7706	.7771	.7834	.7894	.7952	.8008	.8061	.8113	.8163	.8211	.8257
5500	.7173	.7265	.7399	.7482	.7560	.7635	.7706	.7775	.7840	.7902	.7962	.8020	.8075	.8128	.8179	.8229	.8276	.8322
5700	.7242	.7333	.7467	.7550	.7628	.7702	.7773	.7841	.7905	.7967	.8027	.8084	.8139	.8192	.8243	.8292	.8339	.8385
5900	.7307	.7399	.7533	.7614	.7692	.7766	.7836	.7903	.7968	.8030	.8089	.8146	.8200	.8253	.8303	.8352	.8399	.8444
6100	.7370	.7461	.7595	.7676	.7753	.7827	.7897	.7964	.8028	.8089	.8148	.8204	.8258	.8311	.8361	.8409	.8456	.8501
6300	.7431	.7522	.7655	.7735	.7812	.7885	.7955	.8021	.8085	.8146	.8204	.8260	.8314	.8366	.8416	.8464	.8511	.8555
6500	.7488	.7579	.7712	.7792	.7868	.7941	.8010	.8076	.8139	.8200	.8258	.8314	.8367	.8419	.8469	.8517	.8563	.8607
6700	.7543	.7634	.7766	.7846	.7922	.7994	.8063	.8129	.8192	.8252	.8310	.8365	.8418	.8470	.8519	.8567	.8613	.8657
6900	.7596	.7687	.7819	.7898	.7974	.8045	.8114	.8179	.8242	.8302	.8359	.8414	.8467	.8518	.8567</			

## Faible température rotationnelle

$T_{rot}/\Delta(\text{nm})$	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.12	0.14	0.16	0.18	0.2
300	0.9847	1.1261	1.1151	1.0199	0.9073	0.8285	0.7711	0.7289	0.7039	0.6948
350	0.9518	1.0764	1.0608	0.9679	0.8613	0.7877	0.7344	0.6957	0.6727	0.6645
400	0.9255	1.0339	1.0143	0.9244	0.8232	0.7539	0.7039	0.6679	0.6465	0.6388
450	0.9028	0.9957	0.9730	0.8864	0.7906	0.7249	0.6777	0.6438	0.6239	0.6166
500	0.8825	0.9611	0.9357	0.8526	0.7620	0.6996	0.6548	0.6226	0.6039	0.5971
550	0.8642	0.9295	0.9020	0.8224	0.7368	0.6772	0.6346	0.6039	0.5862	0.5797
600	0.8474	0.9007	0.8715	0.7954	0.7144	0.6574	0.6166	0.5873	0.5704	0.5643
650	0.8320	0.8725	0.8439	0.7711	0.6940	0.6391	0.6002	0.5725	0.5563	0.5505
700	0.8178	0.8448	0.8189	0.7493	0.6753	0.6227	0.5854	0.5592	0.5437	0.5382
750	0.8046	0.8197	0.7963	0.7295	0.6585	0.6079	0.5721	0.5469	0.5323	0.5271
800	0.7925	0.7969	0.7757	0.7116	0.6432	0.5945	0.5600	0.5358	0.5220	0.5170
850	0.7767	0.7763	0.7570	0.6954	0.6294	0.5824	0.5490	0.5257	0.5125	0.5079
900	0.7580	0.7575	0.7400	0.6806	0.6168	0.5713	0.5391	0.5165	0.5038	0.4996
950	0.7408	0.7404	0.7245	0.6672	0.6054	0.5612	0.5300	0.5081	0.4959	0.4920
1000	0.7252	0.7248	0.7103	0.6549	0.5949	0.5520	0.5217	0.5004	0.4886	0.4850
1050	0.7108	0.7104	0.6969	0.6436	0.5853	0.5436	0.5141	0.4934	0.4820	0.4785
1100	0.6976	0.6973	0.6841	0.6330	0.5765	0.5359	0.5069	0.4870	0.4759	0.4726
1150	0.6855	0.6851	0.6723	0.6229	0.5684	0.5286	0.5002	0.4810	0.4703	0.4672
1200	0.6743	0.6740	0.6615	0.6137	0.5609	0.5218	0.4941	0.4754	0.4651	0.4621
1250	0.6639	0.6636	0.6515	0.6051	0.5540	0.5155	0.4885	0.4702	0.4603	0.4575
1300	0.6543	0.6540	0.6422	0.5972	0.5474	0.5097	0.4833	0.4654	0.4559	0.4532
1350	0.6454	0.6451	0.6336	0.5899	0.5413	0.5044	0.4785	0.4610	0.4519	0.4493
1400	0.6370	0.6368	0.6256	0.5831	0.5356	0.4994	0.4741	0.4570	0.4481	0.4457
1450	0.6293	0.6290	0.6182	0.5768	0.5303	0.4949	0.4700	0.4532	0.4445	0.4423
1500	0.6220	0.6218	0.6113	0.5710	0.5254	0.4907	0.4662	0.4498	0.4413	0.4393

TABLE 14.4 – Abaque de la température rotationnelle en fonction de l'amplitude de  $G_3$  et de  $\Delta$  pour les hautes résolutions et les faibles valeurs de  $T_{rot}$ .

Trot/Tvib	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
900	.0042	.0047	.0054	.0063	.0075	.0090	.0107	.0126	.0147	.0170	.0195	.0221	.0248	.0277
1100	.0089	.0094	.0100	.0109	.0120	.0135	.0151	.0170	.0191	.0214	.0239	.0265	.0292	.0321
1300	.0155	.0159	.0165	.0174	.0185	.0198	.0215	.0233	.0254	.0277	.0301	.0328	.0355	.0383
1500	.0237	.0240	.0245	.0253	.0263	.0276	.0292	.0310	.0331	.0354	.0378	.0404	.0432	.0460
1700	.0328	.0331	.0335	.0342	.0352	.0364	.0380	.0397	.0418	.0440	.0464	.0490	.0518	.0546
1900	.0426	.0428	.0431	.0437	.0446	.0458	.0473	.0490	.0510	.0532	.0556	.0582	.0610	.0638
2100	.0526	.0527	.0530	.0535	.0543	.0555	.0569	.0586	.0605	.0627	.0651	.0677	.0704	.0733
2300	.0627	.0627	.0629	.0634	.0641	.0652	.0665	.0681	.0701	.0722	.0746	.0772	.0799	.0828
2500	.0726	.0726	.0727	.0731	.0738	.0747	.0761	.0776	.0795	.0817	.0840	.0866	.0893	.0922
2700	.0824	.0823	.0823	.0826	.0832	.0841	.0854	.0869	.0888	.0909	.0932	.0958	.0985	.1014
2900	.0918	.0917	.0917	.0919	.0924	.0932	.0944	.0959	.0977	.0998	.1022	.1047	.1074	.1103
3100	.1010	.1008	.1007	.1008	.1012	.1020	.1032	.1046	.1064	.1085	.1108	.1133	.1160	.1189
3300	.1097	.1095	.1093	.1094	.1097	.1105	.1116	.1130	.1147	.1168	.1191	.1216	.1243	.1272
3500	.1182	.1178	.1176	.1176	.1179	.1186	.1196	.1210	.1227	.1247	.1270	.1295	.1323	.1351
3700	.1262	.1258	.1255	.1254	.1257	.1263	.1273	.1286	.1303	.1323	.1346	.1371	.1398	.1427
3900	.1339	.1335	.1331	.1330	.1332	.1337	.1347	.1360	.1376	.1396	.1419	.1444	.1471	.1500
4100	.1413	.1408	.1403	.1401	.1403	.1408	.1417	.1430	.1446	.1466	.1488	.1513	.1540	.1569
4300	.1483	.1477	.1472	.1470	.1471	.1475	.1484	.1497	.1513	.1532	.1555	.1579	.1607	.1636
4500	.1550	.1544	.1538	.1535	.1536	.1540	.1548	.1560	.1576	.1596	.1618	.1643	.1670	.1699
4700	.1614	.1607	.1601	.1598	.1598	.1602	.1609	.1621	.1637	.1656	.1678	.1703	.1730	.1759
4900	.1675	.1668	.1662	.1657	.1657	.1660	.1668	.1679	.1695	.1714	.1736	.1761	.1788	.1817
5100	.1733	.1726	.1719	.1714	.1713	.1716	.1724	.1735	.1750	.1769	.1791	.1816	.1843	.1872
5300	.1789	.1781	.1774	.1769	.1767	.1770	.1777	.1788	.1803	.1822	.1844	.1868	.1895	.1924
5500	.1842	.1834	.1826	.1821	.1819	.1821	.1828	.1839	.1854	.1872	.1894	.1918	.1946	.1975
5700	.1893	.1885	.1877	.1871	.1868	.1870	.1877	.1887	.1902	.1920	.1942	.1967	.1994	.2023
5900	.1942	.1933	.1925	.1918	.1916	.1917	.1924	.1934	.1948	.1967	.1988	.2013	.2040	.2069
6100	.1989	.1980	.1971	.1964	.1961	.1962	.1968	.1978	.1993	.2011	.2032	.2057	.2084	.2113
6300	.2033	.2024	.2015	.2008	.2005	.2006	.2011	.2021	.2035	.2053	.2075	.2099	.2126	.2155
6500	.2076	.2067	.2057	.2050	.2046	.2047	.2052	.2062	.2076	.2094	.2115	.2140	.2167	.2196
6700	.2118	.2108	.2098	.2090	.2086	.2087	.2092	.2101	.2115	.2133	.2154	.2179	.2206	.2235
6900	.2157	.2147	.2137	.2129	.2125	.2125	.2130	.2139	.2153	.2170	.2192	.2216	.2243	.2272
7100	.2195	.2185	.2174	.2166	.2161	.2161	.2166	.2175	.2189	.2206	.2228	.2252	.2279	.2308
7300	.2232	.2221	.2210	.2202	.2197	.2197	.2201	.2210	.2224	.2241	.2262	.2286	.2313	.2343
7500	.2267	.2256	.2245	.2236	.2231	.2231	.2235	.2244	.2257	.2274	.2295	.2320	.2347	.2376
7700	.2301	.2290	.2278	.2269	.2264	.2263	.2267	.2276	.2289	.2306	.2327	.2352	.2378	.2408
7900	.2334	.2322	.2311	.2301	.2296	.2295	.2298	.2307	.2320	.2337	.2358	.2382	.2409	.2439

TABLE 14.5 – Abaque de la température vibrationnelle en fonction du ratio  $I_{lowtemp}/I_{G_3-G_3+2\Lambda G_3G_{ref}}$  et de  $T_{rot}$  pour une température rotationnelle inférieure à 1500 K.

Trot/Tvib	1000	1050	1100	1150	1200	1250	1300	1350	1400	1450	1500
700	0.0282	0.0313	0.0343	0.0375	0.0406	0.0438	0.0472	0.0505	0.0538	0.0572	0.0605
900	0.0306	0.0336	0.0367	0.0398	0.0430	0.0462	0.0496	0.0529	0.0562	0.0596	0.0630
1100	0.0350	0.0380	0.0411	0.0443	0.0475	0.0507	0.0541	0.0574	0.0608	0.0641	0.0675
1300	0.0413	0.0443	0.0474	0.0506	0.0538	0.0570	0.0605	0.0638	0.0672	0.0706	0.0740
1500	0.0490	0.0520	0.0551	0.0583	0.0615	0.0648	0.0683	0.0716	0.0750	0.0785	0.0819
1700	0.0576	0.0606	0.0638	0.0670	0.0702	0.0735	0.0770	0.0804	0.0839	0.0873	0.0908
1900	0.0668	0.0699	0.0730	0.0762	0.0795	0.0828	0.0864	0.0898	0.0933	0.0968	0.1003
2100	0.0763	0.0793	0.0825	0.0857	0.0890	0.0924	0.0960	0.0995	0.1030	0.1065	0.1101
2300	0.0858	0.0889	0.0921	0.0953	0.0986	0.1020	0.1057	0.1092	0.1127	0.1163	0.1199
2500	0.0952	0.0983	0.1015	0.1048	0.1081	0.1115	0.1153	0.1188	0.1224	0.1260	0.1296
2700	0.1044	0.1075	0.1107	0.1140	0.1174	0.1209	0.1247	0.1282	0.1318	0.1354	0.1391
2900	0.1133	0.1165	0.1197	0.1230	0.1264	0.1299	0.1338	0.1373	0.1409	0.1446	0.1483
3100	0.1220	0.1251	0.1284	0.1317	0.1351	0.1386	0.1425	0.1461	0.1498	0.1535	0.1572
3300	0.1302	0.1334	0.1367	0.1400	0.1435	0.1470	0.1510	0.1546	0.1583	0.1620	0.1657
3500	0.1382	0.1414	0.1447	0.1480	0.1515	0.1550	0.1591	0.1627	0.1664	0.1701	0.1739
3700	0.1458	0.1490	0.1523	0.1557	0.1592	0.1627	0.1668	0.1705	0.1742	0.1780	0.1818
3900	0.1531	0.1563	0.1596	0.1630	0.1665	0.1701	0.1742	0.1779	0.1816	0.1854	0.1892
4100	0.1600	0.1632	0.1665	0.1700	0.1735	0.1771	0.1813	0.1850	0.1888	0.1926	0.1964
4300	0.1666	0.1699	0.1732	0.1766	0.1802	0.1838	0.1880	0.1918	0.1955	0.1994	0.2032
4500	0.1730	0.1762	0.1795	0.1830	0.1866	0.1902	0.1945	0.1982	0.2020	0.2059	0.2098
4700	0.1790	0.1822	0.1856	0.1891	0.1927	0.1963	0.2006	0.2044	0.2082	0.2121	0.2160
4900	0.1848	0.1880	0.1914	0.1949	0.1985	0.2021	0.2065	0.2103	0.2141	0.2180	0.2219
5100	0.1903	0.1935	0.1969	0.2004	0.2040	0.2077	0.2121	0.2159	0.2198	0.2237	0.2276
5300	0.1956	0.1988	0.2022	0.2057	0.2093	0.2130	0.2174	0.2213	0.2251	0.2291	0.2330
5500	0.2006	0.2039	0.2073	0.2108	0.2144	0.2181	0.2226	0.2264	0.2303	0.2342	0.2382
5700	0.2054	0.2087	0.2121	0.2156	0.2193	0.2230	0.2275	0.2313	0.2352	0.2392	0.2432
5900	0.2100	0.2133	0.2167	0.2203	0.2239	0.2277	0.2322	0.2360	0.2399	0.2439	0.2479
6100	0.2144	0.2177	0.2212	0.2247	0.2284	0.2321	0.2366	0.2405	0.2445	0.2485	0.2525
6300	0.2187	0.2220	0.2254	0.2290	0.2326	0.2364	0.2410	0.2448	0.2488	0.2528	0.2569
6500	0.2227	0.2260	0.2295	0.2331	0.2367	0.2405	0.2451	0.2490	0.2530	0.2570	0.2610
6700	0.2266	0.2299	0.2334	0.2370	0.2407	0.2445	0.2490	0.2530	0.2569	0.2610	0.2651
6900	0.2304	0.2337	0.2371	0.2407	0.2444	0.2482	0.2529	0.2568	0.2608	0.2648	0.2689
7100	0.2340	0.2373	0.2407	0.2443	0.2481	0.2519	0.2565	0.2605	0.2645	0.2685	0.2726
7300	0.2374	0.2407	0.2442	0.2478	0.2515	0.2554	0.2600	0.2640	0.2680	0.2721	0.2762
7500	0.2407	0.2441	0.2476	0.2512	0.2549	0.2587	0.2634	0.2674	0.2714	0.2755	0.2796
7700	0.2439	0.2473	0.2508	0.2544	0.2581	0.2620	0.2667	0.2706	0.2747	0.2788	0.2829
7900	0.2470	0.2504	0.2539	0.2575	0.2612	0.2651	0.2698	0.2738	0.2778	0.2819	0.2861

TABLE 14.6 – Abaque de la température vibrationnelle en fonction du ratio  $I_{lowtemp}/I_{G_3-G_3+2\Lambda G_3G_{ref}}$  et de  $T_{rot}$  pour une température rotationnelle inférieure à 1500 K.

### 14.4.2 Basse résolution avec $G_0$ , $G_1$ résolus

Les abaques pour obtenir la température rotationnelle à l'aide de l'amplitude de  $G_0$  et de la largeur de  $G_{ref}$  à 0.8 sont disponibles si dessous. Ils couvrent toutes les résolutions pour lesquelles  $G_0$  et  $G_1$  sont résolus. Ces abaques sont moins précis que les résultats à haute résolution, il est donc recommandé d'utiliser ces tableaux uniquement lorsque  $\Delta$  est supérieur à 0.2 nm.

T/L80	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.1	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19
900	.1664	.1688	.1697	.1694	.1713	.1754	.1779	.1804	.1829	.1853	.1878	.1909	.1944	.1983	.2024	.2065	.2107	.2150
1100	.1815	.2050	.2220	.2354	.2447	.2499	.2531	.2556	.2580	.2602	.2623	.2643	.2665	.2687	.2708	.2730	.2752	.2774
1300	.2355	.2653	.2861	.3032	.3144	.3208	.3244	.3273	.3296	.3318	.3336	.3352	.3366	.3378	.3388	.3398	.3407	.3416
1500	.2851	.3207	.3453	.3658	.3785	.3857	.3899	.3933	.3958	.3981	.3998	.4012	.4021	.4028	.4030	.4033	.4033	.4034
1700	.3297	.3705	.3985	.4224	.4364	.4447	.4496	.4537	.4562	.4586	.4600	.4614	.4620	.4625	.4623	.4621	.4617	.4613
1900	.3695	.4150	.4462	.4729	.4886	.4980	.5037	.5084	.5110	.5136	.5149	.5161	.5164	.5166	.5162	.5158	.5151	.5144
2100	.4051	.4547	.4889	.5179	.5356	.5460	.5525	.5576	.5605	.5632	.5644	.5657	.5657	.5658	.5653	.5647	.5639	.5630
2300	.4370	.4903	.5272	.5584	.5779	.5893	.5964	.6019	.6050	.6078	.6091	.6104	.6103	.6102	.6096	.6088	.6081	.6070
2500	.4657	.5223	.5616	.5948	.6160	.6283	.6359	.6416	.6449	.6479	.6493	.6507	.6505	.6503	.6496	.6487	.6479	.6469
2700	.4915	.5511	.5927	.6278	.6504	.6636	.6716	.6775	.6810	.6841	.6856	.6870	.6867	.6865	.6857	.6848	.6839	.6829
2900	.5148	.5772	.6208	.6576	.6816	.6955	.7039	.7099	.7136	.7167	.7183	.7197	.7194	.7191	.7183	.7174	.7164	.7154
3100	.5360	.6008	.6464	.6848	.7099	.7244	.7331	.7393	.7430	.7463	.7478	.7492	.7489	.7486	.7478	.7468	.7458	.7447
3300	.5553	.6224	.6697	.7095	.7357	.7506	.7596	.7660	.7698	.7731	.7746	.7760	.7756	.7753	.7745	.7735	.7724	.7713
3500	.5730	.6421	.6910	.7321	.7592	.7745	.7837	.7902	.7940	.7974	.7988	.8002	.7998	.7995	.7987	.7976	.7965	.7954
3700	.5892	.6602	.7106	.7529	.7808	.7963	.8057	.8123	.8161	.8195	.8209	.8222	.8218	.8214	.8206	.8195	.8184	.8173
3900	.6041	.6768	.7286	.7720	.8006	.8164	.8258	.8325	.8363	.8397	.8410	.8422	.8418	.8412	.8404	.8393	.8383	.8372
4100	.6179	.6922	.7452	.7897	.8189	.8348	.8443	.8511	.8547	.8581	.8593	.8604	.8599	.8593	.8585	.8574	.8563	.8553
4300	.6306	.7064	.7606	.8060	.8357	.8518	.8613	.8681	.8716	.8750	.8760	.8770	.8765	.8759	.8749	.8739	.8729	.8719
4500	.6424	.7196	.7748	.8211	.8513	.8674	.8770	.8837	.8871	.8905	.8913	.8922	.8916	.8907	.8899	.8894	.8888	.8883
4700	.6535	.7319	.7881	.8352	.8658	.8820	.8915	.8980	.9014	.9046	.9054	.9061	.9055	.9045	.9035	.9030	.9025	.9019
4900	.6637	.7434	.8005	.8482	.8791	.8954	.9049	.9112	.9145	.9175	.9183	.9189	.9183	.9171	.9160	.9154	.9149	.9143
5100	.6733	.7541	.8120	.8605	.8915	.9078	.9173	.9234	.9267	.9295	.9303	.9306	.9300	.9287	.9274	.9268	.9263	.9257
5300	.6823	.7641	.8228	.8719	.9031	.9195	.9289	.9348	.9380	.9405	.9413	.9415	.9407	.9393	.9379	.9373	.9367	.9361
5500	.6908	.7736	.8330	.8826	.9139	.9303	.9397	.9453	.9484	.9508	.9515	.9515	.9507	.9491	.9476	.9469	.9463	.9457
5700	.6987	.7825	.8425	.8926	.9240	.9404	.9498	.9552	.9582	.9603	.9609	.9607	.9599	.9582	.9565	.9557	.9550	.9544
5900	.7062	.7908	.8515	.9021	.9335	.9499	.9592	.9643	.9672	.9691	.9697	.9693	.9684	.9666	.9647	.9638	.9631	.9625
6100	.7133	.7987	.8599	.9110	.9424	.9588	.9681	.9729	.9757	.9774	.9779	.9773	.9763	.9743	.9724	.9713	.9706	.9699
6300	.7200	.8061	.8679	.9194	.9508	.9672	.9764	.9810	.9837	.9851	.9855	.9847	.9837	.9816	.9794	.9782	.9775	.9768
6500	.7263	.8132	.8754	.9273	.9587	.9751	.9843	.9885	.9911	.9923	.9926	.9917	.9905	.9883	.9860	.9845	.9838	.9831
6700	.7323	.8199	.8826	.9348	.9661	.9826	.9917	.9956	.9981	.9991	.9993	.9982	.9969	.9945	.9921	.9905	.9897	.9890
6900	.7380	.8262	.8894	.9419	.9731	.9896	.9987	1.002	1.005	1.006	1.006	1.004	1.003	1.000	.9978	.9959	.9952	.9944
7100	.7434	.8323	.8958	.9487	.9798	.9963	1.005	1.009	1.011	1.011	1.012	1.010	1.008	1.006	1.003	1.001	1.000	.9995
7300	.7486	.8380	.9019	.9551	.9861	1.003	1.012	1.015	1.017	1.017	1.017	1.015	1.014	1.011	1.008	1.006	1.005	1.004
7500	.7535	.8435	.9077	.9612	.9921	1.009	1.018	1.020	1.022	1.022	1.022	1.020	1.018	1.016	1.013	1.010	1.009	1.009
7700	.7581	.8487	.9132	.9670	.9978	1.014	1.023	1.026	1.028	1.028	1.027	1.025	1.023	1.020	1.017	1.014	1.013	1.013
7900	.7626	.8536	.9185	.9725	1.003	1.020	1.029	1.031	1.033	1.032	1.032	1.030	1.027	1.024	1.021	1.018	1.017	1.016

TABLE 14.7 – Abaque de la température rotationnelle de OH en fonction de l'amplitude de  $G_0$  et de  $L80_{G_{ref}}$  pour une température rotationnelle supérieure à 1000 K.

T/L80	.2	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.3	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37
900	.2213	.2286	.2363	.2436	.2504	.2568	.2628	.2683	.2734	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1100	.2797	.2822	.2849	.2879	.2915	.2974	.3043	.3117	.3183	.3244	.3301	-	-	-	-	-	-	-
1300	.3425	.3434	.3445	.3457	.3472	.3492	.3517	.3547	.3584	.3653	.3724	.3788	-	-	-	-	-	-
1500	.4034	.4033	.4032	.4030	.4030	.4033	.4040	.4054	.4072	.4096	.4131	.4179	.4249	-	-	-	-	-
1700	.4607	.4600	.4591	.4581	.4568	.4558	.4549	.4546	.4550	.4561	.4577	.4603	.4641	.4692	-	-	-	-
1900	.5136	.5125	.5114	.5098	.5079	.5057	.5035	.5016	.5004	.5001	.5006	.5018	.5038	.5068	.5102	-	-	-
2100	.5620	.5608	.5593	.5579	.5555	.5527	.5494	.5461	.5433	.5415	.5406	.5409	.5419	.5434	.5460	-	-	-
2300	.6060	.6049	.6034	.6016	.5999	.5965	.5926	.5880	.5835	.5802	.5782	.5772	.5770	.5781	.5796	.5819	-	-
2500	.6458	.6447	.6437	.6417	.6397	.6373	.6329	.6275	.6217	.6166	.6130	.6106	.6099	.6099	.6107	.6124	.6145	-
2700	.6818	.6808	.6798	.6787	.6763	.6738	.6702	.6645	.6573	.6505	.6453	.6420	.6400	.6390	.6395	.6403	.6421	-
2900	.7144	.7134	.7124	.7114	.7104	.7073	.7043	.6985	.6908	.6826	.6757	.6708	.6675	.6662	.6657	.6661	.6673	.6690
3100	.7438	.7428	.7419	.7409	.7400	.7388	.7348	.7305	.7222	.7124	.7037	.6972	.6934	.6911	.6896	.6898	.6902	.6918
3300	.7703	.7694	.7685	.7675	.7666	.7657	.7638	.7587	.7512	.7404	.7302	.7224	.7171	.7137	.7120	.7114	.7115	.7124
3500	.7944	.7934	.7925	.7915	.7906	.7897	.7887	.7849	.7780	.7667	.7549	.7455	.7388	.7345	.7324	.7310	.7310	.7312
3700	.8162	.8152	.8143	.8133	.8123	.8113	.8104	.8094	.8020	.7909	.7777	.7667	.7588	.7541	.7510	.7490	.7487	.7486
3900	.8361	.8351	.8340	.8330	.8320	.8310	.8300	.8289	.8241	.8133	.7993	.7868	.7779	.7720	.7680	.7659	.7648	.7647
4100	.8542	.8532	.8521	.8510	.8499	.8488	.8478	.8467	.8449	.8341	.8194	.8056	.7954	.7884	.7835	.7813	.7795	.7793
4300	.8709	.8699	.8687	.8676	.8664	.8652	.8640	.8629	.8617	.8527	.8379	.8229	.8114	.8034	.7984	.7954	.7932	.7927
4500	.8878	.8872	.8867	.8861	.8856	.8850	.8845	.8827	.8781	.8698	.8548	.8387	.8261	.8172	.8120	.8082	.8060	.8049
4700	.9014	.9008	.9003	.8998	.8992	.8987	.8981	.8976	.8933	.8856	.8705	.8538	.8400	.8306	.8244	.8200	.8177	.8160
4900	.9138	.9133	.9127	.9122	.9116	.9111	.9105	.9100	.9077	.9002	.8850	.8678	.8531	.8428	.8358	.8308	.8285	.8262
5100	.9252	.9246	.9240	.9235	.9229	.9223	.9218	.9212	.9207	.9126	.8984	.8806	.8652	.8541	.8463	.8412	.8383	.8361
5300	.9355	.9350	.9344	.9338	.9332	.9326	.9321	.9315	.9309	.9242	.9103	.8923	.8763	.8644	.8559	.8508	.8473	.8451
5500	.9451	.9445	.9439	.9433	.9427	.9421	.9415	.9409	.9403	.9349	.9213	.9031	.8865	.8739	.8648	.8596	.8555	.8534
5700	.9538	.9532	.9526	.9520	.9514	.9507	.9501	.9495	.9489	.9450	.9314	.9131	.8958	.8826	.8735	.8677	.8630	.8609
5900	.9619	.9612	.9606	.9600	.9593	.9587	.9581	.9574	.9568	.9544	.9407	.9224	.9046	.8908	.8815	.8752	.8702	.8679
6100	.9693	.9686	.9680	.9673	.9667	.9660	.9653	.9647	.9640	.9630	.9493	.9309	.9129	.8987	.8890	.8820	.8771	.8743
6300	.9761	.9754	.9748	.9741	.9734	.9727	.9721	.9714	.9707	.9700	.9572	.9387	.9205	.9060	.8958	.8883	.8835	.8802
6500	.9824	.9817	.9810	.9803	.9796	.9789	.9782	.9775	.9769	.9762	.9645	.9459	.9276	.9128	.9021	.8942	.8893	.8857
6700	.9883	.9876	.9868	.9861	.9854	.9847	.9840	.9832	.9825	.9818	.9709	.9525	.9341	.9190	.9079	.8996	.8948	.8907
6900	.9937	.9930	.9922	.9915	.9907	.9900	.9892	.9885	.9877	.9870	.9768	.9585	.9401	.9247	.9133	.9047	.8998	.8953
7100	.9987	.9979	.9972	.9964	.9956	.9949	.9941	.9933	.9926									

T/L80	.38	.39	.4	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.5	.51	.52	.53	.54	.55
3100	.6933	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3300	.7139	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3500	.7326	.7340	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3700	.7495	.7508	.7521	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3900	.7649	.7662	.7674	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4100	.7792	.7801	.7813	.7825	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4300	.7925	.7929	.7941	.7954	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4500	.8047	.8044	.8058	.8072	.8085	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4700	.8157	.8155	.8163	.8177	.8191	.8206	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4900	.8259	.8256	.8257	.8272	.8287	.8301	.8316	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5100	.8352	.8349	.8347	.8357	.8372	.8387	.8401	.8416	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5300	.8436	.8434	.8432	.8435	.8448	.8462	.8475	.8489	.8503	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5500	.8514	.8512	.8510	.8507	.8510	.8512	.8515	.8518	.8521	.8524	.8527	.8529	.8532	.8535	.8538	.8541	.8543	.8546
5700	.8588	.8583	.8581	.8579	.8579	.8582	.8585	.8588	.8591	.8594	.8597	.8600	.8603	.8606	.8609	.8612	.8615	.8618
5900	.8659	.8649	.8646	.8644	.8642	.8645	.8649	.8652	.8655	.8658	.8661	.8665	.8668	.8671	.8674	.8678	.8681	.8684
6100	.8723	.8709	.8707	.8705	.8703	.8703	.8707	.8710	.8714	.8717	.8720	.8724	.8727	.8731	.8734	.8738	.8741	.8744
6300	.8783	.8764	.8762	.8760	.8758	.8756	.8760	.8764	.8767	.8771	.8774	.8778	.8782	.8785	.8789	.8793	.8796	.8800
6500	.8837	.8818	.8813	.8812	.8810	.8808	.8809	.8812	.8816	.8820	.8824	.8828	.8831	.8835	.8839	.8843	.8847	.8850
6700	.8888	.8869	.8860	.8859	.8857	.8856	.8854	.8857	.8861	.8865	.8869	.8873	.8877	.8881	.8885	.8889	.8893	.8897
6900	.8935	.8917	.8904	.8903	.8901	.8900	.8898	.8897	.8900	.8904	.8909	.8913	.8917	.8921	.8926	.8930	.8934	.8938
7100	.8978	.8960	.8944	.8944	.8943	.8943	.8943	.8943	.8943	.8942	.8942	.8942	.8942	.8942	.8941	.8941	.8941	.8941
7300	.9018	.9001	.8983	.8981	.8980	.8980	.8980	.8980	.8980	.8979	.8979	.8979	.8979	.8979	.8978	.8978	.8978	.8978
7500	.9055	.9038	.9021	.9015	.9014	.9014	.9014	.9014	.9014	.9013	.9013	.9013	.9013	.9013	.9012	.9012	.9012	.9012
7700	.9089	.9073	.9057	.9046	.9046	.9046	.9046	.9045	.9045	.9045	.9045	.9044	.9044	.9044	.9044	.9044	.9044	.9044
7900	.9121	.9105	.9090	.9075	.9075	.9075	.9075	.9075	.9075	.9074	.9074	.9074	.9074	.9074	.9073	.9073	.9073	.9073

TABLE 14.9 – Abaque de la température rotationnelle de OH en fonction de l’amplitude de  $G_0$  et de  $L80_{G_{ref}}$  pour une température rotationnelle supérieure à 1000 K.

T/L80	.56	.57	.58	.59	.6	.61	.62	.63	.64	.65	.66	.67	.68	.69	.7	.71	.72	.73
5500	.8549	.8552	.8555	.8558	.8560	.8563	.8566	.8569	.8572	.8574	.8577	.8580	.8583	.8586	.8589	.8591	-	-
5700	.8621	.8624	.8627	.8630	.8633	.8636	.8639	.8642	.8645	.8648	.8651	.8654	.8657	.8660	.8663	.8666	.8669	-
5900	.8687	.8690	.8694	.8697	.8700	.8703	.8707	.8710	.8713	.8716	.8719	.8723	.8726	.8729	.8732	.8735	.8739	-
6100	.8748	.8751	.8755	.8758	.8761	.8765	.8768	.8772	.8775	.8779	.8782	.8785	.8789	.8792	.8796	.8799	.8802	.8806
6300	.8803	.8807	.8811	.8814	.8818	.8821	.8825	.8829	.8832	.8836	.8839	.8843	.8847	.8850	.8854	.8858	.8861	.8865
6500	.8854	.8858	.8862	.8866	.8870	.8873	.8877	.8881	.8885	.8889	.8892	.8896	.8900	.8904	.8908	.8911	.8915	.8919
6700	.8901	.8905	.8909	.8913	.8917	.8921	.8925	.8929	.8933	.8937	.8941	.8945	.8949	.8953	.8957	.8961	.8965	.8969
6900	.8943	.8947	.8951	.8955	.8960	.8964	.8968	.8972	.8977	.8981	.8985	.8990	.8994	.8998	.9002	.9007	.9011	.9015
7100	.8941	.8940	.8940	.8940	.8940	.8939	.8939	.8939	.8939	.8939	.8938	.8938	.8938	.8938	.8938	.8937	.8937	.8937
7300	.8977	.8977	.8977	.8977	.8977	.8976	.8976	.8976	.8976	.8975	.8975	.8975	.8975	.8975	.8975	.8974	.8974	.8974
7500	.9012	.9011	.9011	.9011	.9011	.9011	.9011	.9010	.9010	.9010	.9010	.9010	.9009	.9009	.9009	.9009	.9009	.9008
7700	.9043	.9043	.9043	.9043	.9043	.9043	.9042	.9042	.9042	.9042	.9042	.9041	.9041	.9041	.9041	.9041	.9040	.9040
7900	.9073	.9073	.9072	.9072	.9072	.9072	.9072	.9072	.9071	.9071	.9071	.9071	.9071	.9070	.9070	.9070	.9070	.9070

TABLE 14.10 – Abaque de la température rotationnelle de OH en fonction de l’amplitude de  $G_0$  et de  $L80_{G_{ref}}$  pour une température rotationnelle supérieure à 1000 K.

T/L80	.74	.75	.76	.77	.78	.79
6100	-	-	-	-	-	-
6300	.8868	-	-	-	-	-
6500	.8923	-	-	-	-	-
6700	.8973	.8977	-	-	-	-
6900	.9019	.9024	.9028	-	-	-
7100	.8937	.8985	.9034	-	-	-
7300	.8974	.8999	.9048	.9097	-	-
7500	.9008	.9012	.9061	.9109	-	-
7700	.9040	.9040	.9071	.9119	.9167	-
7900	.9070	.9069	.9080	.9128	.9175	.9222

TABLE 14.11 – Abaque de la température rotationnelle de OH en fonction de l’amplitude de  $G_0$  et de  $L80_{G_{ref}}$  pour une température rotationnelle supérieure à 1000 K.

### 14.4.3 Basse résolution avec $G_{mel}$

Les abaques ci-dessous permettent d'obtenir la température rotationnelle à l'aide de l'amplitude de  $G_{mel}$  et de la longueur de  $G_{ref}$  à 0.8. Pour des températures rotationnelles inférieures à 5000 K, il est recommandé par souci de simplicité d'utiliser la relation 14.10.

T/L80	0.31	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36	0.37	0.38	0.39	0.4	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48
900	.3328	.3357	.3383	.3409	.3433	.3456	.3476	.3497	.3515	.3534	.3550	.3566	.3581	.3596	.3608	.3621	.3633	.3644
1100	-	.3788	.3815	.3841	.3865	.3889	.3911	.3932	.3953	.3972	.3990	.4008	.4024	.4041	.4055	.4070	.4083	.4096
1300	-	-	-	.4288	.4313	.4336	.4359	.4381	.4402	.4422	.4442	.4460	.4478	.4496	.4512	.4528	.4543	.4557
1500	-	-	-	-	.4758	.4781	.4803	.4825	.4846	.4866	.4886	.4906	.4924	.4942	.4960	.4976	.4992	.5008
1700	-	-	-	-	-	.5213	.5235	.5255	.5275	.5295	.5315	.5334	.5352	.5370	.5388	.5405	.5421	.5437
1900	-	-	-	-	-	-	.5648	.5667	.5686	.5705	.5723	.5741	.5759	.5776	.5793	.5809	.5825	.5841
2100	-	-	-	-	-	.6041	.6058	.6075	.6092	.6109	.6126	.6142	.6158	.6174	.6189	.6204	.6219	
2300	-	-	-	-	-	-	.6427	.6442	.6457	.6472	.6487	.6502	.6516	.6530	.6545	.6558	.6572	
2500	-	-	-	-	-	-	-	.6786	.6800	.6813	.6826	.6839	.6852	.6864	.6876	.6889	.6901	
2700	-	-	-	-	-	-	-	-	.7120	.7131	.7142	.7154	.7165	.7176	.7186	.7197	.7207	
2900	-	-	-	-	-	-	-	-	-	.7428	.7438	.7447	.7457	.7466	.7475	.7484	.7493	
3100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	.7712	.7720	.7728	.7736	.7743	.7751	.7758	
3300	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	.7967	.7974	.7980	.7987	.7993	.7999	.8004	
3500	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	.8210	.8215	.8220	.8225	.8230	.8234	
3700	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	.8433	.8437	.8441	.8444	.8448	
3900	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	.8638	.8640	.8642	.8644	
4100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	.8828	.8829	.8830	
4300	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	.9004

TABLE 14.12 – Abaque de la température rotationnelle de OH en fonction de l'amplitude de  $G_{mel}$  et de  $L80_{G_{ref}}$  pour une température rotationnelle supérieure à 1000 K.

T/L80	.49	.5	.51	.52	.53	.54	.55	.56	.57	.58	.59	.6	.61	.62	.63	.64	.65	.66
900	.3655	.3665	.3674	.3682	.3691	.3698	.3705	.3712	.3718	.3723	.3728	.3733	.3737	.3741	.3744	.3747	.3750	.3752
1100	.4108	.4120	.4131	.4141	.4151	.4159	.4168	.4176	.4183	.4190	.4195	.4201	.4206	.4210	.4215	.4218	.4221	.4224
1300	.4571	.4584	.4596	.4607	.4618	.4628	.4638	.4647	.4655	.4663	.4670	.4676	.4682	.4687	.4692	.4696	.4700	.4702
1500	.5022	.5036	.5050	.5062	.5075	.5086	.5096	.5107	.5116	.5125	.5133	.5140	.5147	.5153	.5159	.5163	.5168	.5171
1700	.5452	.5467	.5481	.5495	.5508	.5520	.5532	.5543	.5553	.5563	.5572	.5581	.5589	.5596	.5603	.5608	.5613	.5618
1900	.5857	.5871	.5885	.5899	.5912	.5925	.5938	.5949	.5961	.5972	.5982	.5992	.6001	.6009	.6017	.6024	.6030	.6036
2100	.6233	.6248	.6262	.6275	.6288	.6301	.6313	.6325	.6337	.6349	.6360	.6370	.6380	.6390	.6399	.6407	.6415	.6422
2300	.6585	.6598	.6611	.6623	.6636	.6648	.6660	.6672	.6683	.6695	.6706	.6717	.6728	.6738	.6748	.6757	.6766	.6775
2500	.6912	.6924	.6935	.6947	.6958	.6969	.6979	.6990	.7001	.7012	.7023	.7034	.7044	.7055	.7065	.7075	.7085	.7095
2700	.7217	.7227	.7237	.7246	.7256	.7265	.7275	.7284	.7294	.7303	.7313	.7323	.7333	.7343	.7353	.7364	.7374	.7385
2900	.7501	.7509	.7517	.7525	.7533	.7541	.7549	.7556	.7564	.7572	.7581	.7589	.7598	.7607	.7616	.7627	.7637	.7647
3100	.7765	.7772	.7778	.7784	.7790	.7796	.7803	.7809	.7815	.7822	.7828	.7835	.7841	.7849	.7858	.7867	.7876	.7885
3300	.8010	.8015	.8021	.8026	.8030	.8035	.8039	.8043	.8048	.8052	.8057	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8105
3500	.8238	.8241	.8245	.8248	.8252	.8255	.8259	.8262	.8266	.8270	.8274	.8278	.8282	.8286	.8290	.8294	.8301	.8309
3700	.8452	.8455	.8457	.8459	.8461	.8463	.8465	.8467	.8469	.8471	.8473	.8475	.8477	.8479	.8481	.8487	.8494	.8500
3900	.8647	.8649	.8651	.8653	.8655	.8657	.8659	.8661	.8663	.8665	.8667	.8669	.8671	.8673	.8675	.8677	.8679	.8681
4100	.8830	.8831	.8832	.8833	.8834	.8835	.8836	.8837	.8838	.8838	.8839	.8840	.8841	.8842	.8843	.8844	.8845	.8846
4300	.9004	.9005	.9006	.9007	.9007	.9008	.9009	.9010	.9010	.9011	.9012	.9013	.9014	.9014	.9015	.9016	.9017	.9017

TABLE 14.13 – Abaque de la température rotationnelle de OH en fonction de l’amplitude de  $G_{mel}$  et de  $L80_{G_{ref}}$  pour une température rotationnelle supérieure à 1000 K.

T/L80	.67	.68	.69	.7	.71	.72	.73	.74	.75	.76	.77	.78	.79	.8	.81	.82	.83	.84
900	.3754	.3756	.3757	.3758	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1100	.4226	.4227	.4229	.4230	.4230	.4231	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1300	.4705	.4707	.4708	.4709	.4709	.4709	.4709	.4708	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1500	.5174	.5176	.5178	.5179	.5179	.5179	.5177	.5176	.5173	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1700	.5622	.5625	.5627	.5629	.5629	.5630	.5629	.5628	.5627	.5624	.5622	.5618	.5614	-	-	-	-	-
1900	.6041	.6045	.6049	.6051	.6053	.6054	.6055	.6054	.6053	.6051	.6049	.6046	.6042	.6037	.6032	.6027	-	-
2100	.6428	.6434	.6439	.6443	.6446	.6449	.6450	.6451	.6451	.6450	.6448	.6446	.6443	.6439	.6434	.6429	.6423	.6416
2300	.6783	.6790	.6797	.6802	.6807	.6811	.6814	.6817	.6818	.6819	.6818	.6817	.6815	.6812	.6809	.6804	.6799	.6793
2500	.7104	.7113	.7121	.7129	.7135	.7142	.7146	.7151	.7154	.7156	.7158	.7158	.7158	.7156	.7154	.7151	.7147	.7142
2700	.7395	.7404	.7414	.7423	.7432	.7440	.7447	.7453	.7459	.7462	.7466	.7469	.7470	.7471	.7470	.7469	.7466	.7463
2900	.7657	.7668	.7679	.7689	.7698	.7708	.7717	.7725	.7733	.7739	.7744	.7750	.7753	.7756	.7757	.7757	.7757	.7755
3100	.7896	.7907	.7918	.7928	.7939	.7950	.7960	.7970	.7979	.7988	.7995	.8003	.8007	.8012	.8016	.8019	.8021	.8021
3300	.8115	.8125	.8135	.8146	.8158	.8169	.8180	.8191	.8202	.8211	.8220	.8230	.8237	.8243	.8249	.8254	.8258	.8260
3500	.8318	.8326	.8336	.8347	.8358	.8369	.8380	.8392	.8403	.8414	.8424	.8435	.8443	.8452	.8460	.8466	.8472	.8476
3700	.8507	.8513	.8523	.8533	.8543	.8554	.8566	.8577	.8588	.8599	.8610	.8621	.8631	.8641	.8649	.8657	.8665	.8671
3900	.8683	.8691	.8700	.8708	.8717	.8728	.8738	.8749	.8760	.8771	.8782	.8792	.8803	.8813	.8822	.8831	.8839	.8847
4100	.8852	.8859	.8865	.8872	.8881	.8890	.8900	.8910	.8920	.8930	.8941	.8951	.8962	.8971	.8981	.8991	.8999	.9008
4300	.9018	.9019	.9022	.9030	.9037	.9044	.9053	.9062	.9071	.9080	.9090	.9100	.9109	.9119	.9129	.9138	.9147	.9155
4500	-	.9168	.9173	.9178	.9184	.9191	.9197	.9205	.9213	.9222	.9230	.9239	.9248	.9257	.9266	.9275	.9283	.9292
4700	-	-	-	.9319	.9324	.9328	.9335	.9341	.9348	.9355	.9363	.9370	.9378	.9387	.9395	.9403	.9411	.9419
4900	-	-	-	-	.9457	.9461	.9465	.9470	.9475	.9481	.9488	.9495	.9501	.9509	.9516	.9523	.9531	.9538
5100	-	-	-	-	-	.9585	.9588	.9592	.9596	.9601	.9606	.9611	.9617	.9624	.9630	.9636	.9643	.9650
5300	-	-	-	-	-	-	.9704	.9707	.9710	.9713	.9718	.9722	.9726	.9732	.9737	.9743	.9749	.9755
5500	-	-	-	-	-	-	-	.9815	.9818	.9820	.9823	.9826	.9830	.9834	.9839	.9844	.9848	.9853
5700	-	-	-	-	-	-	-	.9919	.9921	.9922	.9924	.9928	.9931	.9934	.9938	.9942	.9947	-
5900	-	-	-	-	-	-	-	-	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.003	1.003	1.003	1.004
6100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.010	1.011	1.011	1.011	1.011	1.011	1.011	1.012	1.012
6300	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.019	1.019	1.019	1.019	1.019	1.019	1.019	1.020
6500	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.027	1.027	1.027	1.027	1.027	1.027	1.027
6700	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.034	1.034	1.034	1.034	1.034	1.034
6900	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.041	1.041	1.041	1.041	1.041
7100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.047	1.047	1.047	1.047
7300	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.053	1.053	1.053
7500	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.059	1.059	1.059
7700	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.064	1.064
7900	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.069

TABLE 14.14 – Abaque de la température rotationnelle de OH en fonction de l’amplitude de  $G_{mel}$  et de  $L80_{G_{ref}}$  pour une température rotationnelle supérieure à 1000 K.

T/L80	.85	.86	.87	.88	.89	.9	.91	.92	.93	.94	.95	.96	.97	.98	.99	1	1.01	1.02
2300	.6786	.6779	.6771	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2500	.7136	.7130	.7123	.7115	.7106	.7097	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2700	.7459	.7453	.7448	.7441	.7434	.7425	.7416	.7407	.7396	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2900	.7753	.7750	.7746	.7740	.7734	.7728	.7720	.7712	.7702	.7692	.7682	.7670	-	-	-	-	-	-
3100	.8021	.8019	.8017	.8014	.8009	.8004	.7998	.7991	.7984	.7975	.7966	.7955	.7945	.7933	.7921	-	-	-
3300	.8262	.8263	.8262	.8261	.8259	.8255	.8252	.8246	.8240	.8233	.8226	.8218	.8208	.8198	.8187	.8176	.8163	.8150
3500	.8480	.8483	.8484	.8485	.8484	.8483	.8481	.8477	.8473	.8469	.8463	.8456	.8449	.8440	.8431	.8421	.8411	.8399
3700	.8676	.8681	.8684	.8686	.8688	.8688	.8689	.8687	.8685	.8682	.8677	.8673	.8667	.8660	.8654	.8645	.8636	.8627
3900	.8854	.8859	.8864	.8869	.8871	.8874	.8876	.8875	.8875	.8874	.8872	.8869	.8865	.8860	.8855	.8849	.8842	.8835
4100	.9015	.9022	.9028	.9034	.9038	.9042	.9044	.9046	.9048	.9048	.9047	.9046	.9044	.9041	.9038	.9033	.9028	.9022
4300	.9163	.9171	.9178	.9183	.9189	.9194	.9197	.9201	.9204	.9205	.9206	.9207	.9205	.9204	.9203	.9200	.9196	.9193
4500	.9300	.9307	.9314	.9321	.9327	.9332	.9337	.9342	.9345	.9347	.9350	.9351	.9352	.9352	.9352	.9350	.9348	.9346
4700	.9427	.9434	.9441	.9448	.9454	.9460	.9465	.9470	.9474	.9478	.9481	.9483	.9485	.9486	.9486	.9486	.9486	.9485
4900	.9545	.9553	.9559	.9566	.9572	.9578	.9583	.9588	.9593	.9597	.9600	.9604	.9606	.9608	.9609	.9611	.9611	.9610
5100	.9656	.9663	.9669	.9675	.9681	.9687	.9693	.9697	.9702	.9707	.9711	.9714	.9717	.9720	.9722	.9723	.9724	.9726
5300	.9760	.9766	.9772	.9778	.9784	.9789	.9794	.9799	.9804	.9808	.9812	.9816	.9820	.9822	.9825	.9827	.9829	.9830
5500	.9859	.9864	.9869	.9874	.9879	.9885	.9890	.9894	.9899	.9903	.9907	.9911	.9914	.9917	.9920	.9923	.9924	.9926
5700	.9951	.9956	.9960	.9965	.9970	.9974	.9979	.9983	.9987	.9991	.9995	.9999	1.000	1.001	1.001	1.001	1.001	1.002
5900	1.004	1.004	1.005	1.005	1.005	1.006	1.006	1.007	1.007	1.008	1.008	1.008	1.009	1.009	1.009	1.010	1.010	1.010
6100	1.012	1.012	1.013	1.013	1.013	1.014	1.014	1.015	1.015	1.015	1.016	1.016	1.016	1.016	1.017	1.017	1.017	1.017
6300	1.020	1.020	1.020	1.021	1.021	1.021	1.022	1.022	1.022	1.023	1.023	1.023	1.024	1.024	1.024	1.024	1.024	1.025
6500	1.027	1.027	1.028	1.028	1.028	1.029	1.029	1.029	1.029	1.030	1.030	1.030	1.030	1.031	1.031	1.031	1.031	1.031
6700	1.034	1.034	1.034	1.035	1.035	1.035	1.035	1.036	1.036	1.036	1.036	1.036	1.037	1.037	1.037	1.037	1.038	1.038
6900	1.041	1.041	1.041	1.041	1.041	1.041	1.042	1.042	1.042	1.042	1.042	1.043	1.043	1.043	1.043	1.043	1.044	1.044
7100	1.047	1.047	1.047	1.047	1.047	1.047	1.048	1.048	1.048	1.048	1.048	1.048	1.049	1.049	1.049	1.049	1.049	1.049
7300	1.053	1.053	1.053	1.053	1.053	1.053	1.053	1.053	1.053	1.054	1.054	1.054	1.054	1.054	1.054	1.054	1.055	1.055
7500	1.059	1.059	1.059	1.059	1.059	1.059	1.059	1.059	1.059	1.059	1.059	1.059	1.059	1.059	1.059	1.060	1.060	1.060
7700	1.064	1.064	1.064	1.064	1.064	1.064	1.064	1.064	1.064	1.064	1.064	1.064	1.064	1.064	1.064	1.064	1.064	1.065
7900	1.069	1.069	1.069	1.069	1.069	1.069	1.069	1.069	1.069	1.069	1.069	1.069	1.069	1.069	1.069	1.069	1.069	1.069

TABLE 14.15 – Abaque de la température rotationnelle de OH en fonction de l'amplitude de  $G_{mel}$  et de  $L80_{G_{ref}}$  pour une température rotationnelle supérieure à 1000 K.

T/L80	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.1	1.11	1.12	1.13	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18	1.19	1.2
3500	.8387	.8374	.8360	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3700	.8616	.8605	.8592	.8580	.8566	.8551	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3900	.8825	.8816	.8806	.8794	.8783	.8770	.8756	.8742	.8726	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4100	.9015	.9008	.9000	.8990	.8980	.8969	.8957	.8945	.8931	.8917	.8902	.8885	-	-	-	-	-	-
4300	.9187	.9181	.9176	.9168	.9160	.9151	.9141	.9130	.9119	.9106	.9093	.9078	.9064	.9047	.9031	-	-	-
4500	.9342	.9338	.9334	.9328	.9322	.9316	.9308	.9299	.9290	.9279	.9268	.9255	.9242	.9228	.9213	.9197	.9179	.9162
4700	.9483	.9481	.9478	.9474	.9469	.9465	.9458	.9452	.9445	.9436	.9427	.9417	.9405	.9393	.9380	.9366	.9351	.9334
4900	.9610	.9610	.9607	.9605	.9603	.9599	.9594	.9590	.9585	.9578	.9571	.9563	.9553	.9544	.9532	.9520	.9507	.9493
5100	.9726	.9725	.9725	.9724	.9723	.9720	.9718	.9715	.9711	.9706	.9701	.9695	.9687	.9680	.9671	.9661	.9650	.9638
5300	.9831	.9832	.9833	.9832	.9831	.9830	.9830	.9827	.9825	.9822	.9819	.9814	.9808	.9803	.9796	.9788	.9779	.9769
5500	.9928	.9929	.9930	.9930	.9931	.9931	.9930	.9929	.9928	.9927	.9924	.9921	.9918	.9914	.9908	.9903	.9897	.9888
5700	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.001	1.001	1.001	1.000	.9995
5900	1.010	1.010	1.010	1.010	1.011	1.011	1.011	1.011	1.011	1.011	1.011	1.011	1.011	1.010	1.010	1.010	1.010	1.009
6100	1.018	1.018	1.018	1.018	1.018	1.018	1.018	1.019	1.019	1.019	1.019	1.019	1.019	1.019	1.019	1.018	1.018	1.018
6300	1.025	1.025	1.025	1.025	1.025	1.026	1.026	1.026	1.026	1.026	1.026	1.026	1.026	1.026	1.026	1.026	1.026	1.026
6500	1.032	1.032	1.032	1.032	1.032	1.032	1.032	1.033	1.033	1.033	1.033	1.033	1.033	1.033	1.033	1.033	1.033	1.033
6700	1.038	1.038	1.038	1.038	1.038	1.039	1.039	1.039	1.039	1.039	1.039	1.039	1.039	1.039	1.039	1.039	1.039	1.039
6900	1.044	1.044	1.044	1.044	1.044	1.045	1.045	1.045	1.045	1.045	1.045	1.045	1.045	1.045	1.045	1.045	1.045	1.046
7100	1.049	1.050	1.050	1.050	1.050	1.050	1.050	1.050	1.050	1.050	1.050	1.051	1.051	1.051	1.051	1.051	1.051	1.051
7300	1.055	1.055	1.055	1.055	1.055	1.055	1.055	1.055	1.056	1.056	1.056	1.056	1.056	1.056	1.056	1.056	1.056	1.056
7500	1.060	1.060	1.060	1.060	1.060	1.060	1.060	1.060	1.060	1.060	1.061	1.061	1.061	1.061	1.061	1.061	1.061	1.061
7700	1.065	1.065	1.065	1.065	1.065	1.065	1.065	1.065	1.065	1.065	1.065	1.065	1.065	1.065	1.065	1.065	1.066	1.066
7900	1.069	1.069	1.069	1.069	1.069	1.070	1.070	1.070	1.070	1.070	1.070	1.070	1.070	1.070	1.070	1.070	1.070	1.070

TABLE 14.16 – Abaque de la température rotationnelle de OH en fonction de l'amplitude de  $G_{mel}$  et de  $L80_{G_{ref}}$  pour une température rotationnelle supérieure à 1000 K.

T/L80	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25	1.26	1.27	1.28	1.29	1.3	1.31	1.32	1.33	1.34	1.35	1.36	1.37	1.38
4700	.9317	.9299	.9281	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4900	.9478	.9461	.9444	.9426	.9407	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5100	.9624	.9610	.9594	.9579	.9561	.9543	.9523	.9503	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5300	.9758	.9746	.9732	.9718	.9702	.9686	.9668	.9649	.9630	.9610	-	-	-	-	-	-	-	-
5500	.9879	.9870	.9858	.9846	.9832	.9817	.9802	.9784	.9767	.9748	.9728	.9708	.9687	-	-	-	-	-
5700	.9988	.9981	.9971	.9962	.9950	.9937	.9924	.9908	.9893	.9875	.9857	.9838	.9818	.9798	.9776	-	-	-
5900	1.009	1.008	1.007	1.007	1.006	1.005	1.003	1.002	1.001	.9992	.9976	.9958	.9940	.9921	.9901	.9880	.9858	-
6100	1.018	1.017	1.017	1.016	1.015	1.014	1.013	1.012	1.011	1.010	1.008	1.007	1.005	1.003	1.001	.9996	.9976	.9956
6300	1.026	1.025	1.025	1.025	1.024	1.023	1.023	1.022	1.021	1.019	1.018	1.017	1.015	1.014	1.012	1.010	1.008	1.007
6500	1.033	1.033	1.033	1.032	1.032	1.031	1.031	1.030	1.029	1.028	1.027	1.026	1.025	1.023	1.022	1.020	1.018	1.017
6700	1.039	1.039	1.039	1.039	1.039	1.039	1.038	1.038	1.037	1.036	1.035	1.034	1.033	1.032	1.031	1.029	1.028	1.026
6900	1.046	1.046	1.046	1.046	1.045	1.045	1.045	1.044	1.044	1.043	1.043	1.042	1.041	1.040	1.039	1.037	1.036	1.034
7100	1.051	1.051	1.051	1.051	1.051	1.051	1.051	1.051	1.050	1.050	1.049	1.049	1.048	1.047	1.046	1.045	1.044	1.042
7300	1.056	1.056	1.056	1.056	1.056	1.056	1.056	1.056	1.056	1.055	1.055	1.054	1.053	1.053	1.052	1.050	1.049	-
7500	1.061	1.061	1.061	1.061	1.061	1.061	1.061	1.061	1.061	1.061	1.061	1.060	1.060	1.059	1.059	1.058	1.057	1.056
7700	1.066	1.066	1.066	1.066	1.066	1.066	1.066	1.066	1.066	1.066	1.066	1.066	1.065	1.065	1.064	1.063	1.063	1.062
7900	1.070	1.070	1.070	1.070	1.070	1.070	1.070	1.071	1.071	1.071	1.070	1.070	1.070	1.070	1.069	1.069	1.068	1.067

TABLE 14.17 – Abaque de la température rotationnelle de OH en fonction de l’amplitude de  $G_{mel}$  et de  $L80_{G_{ref}}$  pour une température rotationnelle supérieure à 1000 K.

T/L80	1.39	1.4	1.41	1.42	1.43	1.44	1.45	1.46	1.47	1.48	1.49	1.5	1.51	1.52	1.53	1.54	1.55	1.56
6100	.9934	.9912	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6300	1.005	1.002	1.000	.9981	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6500	1.015	1.013	1.011	1.009	1.007	1.004	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6700	1.024	1.022	1.020	1.019	1.017	1.015	1.012	1.010	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6900	1.033	1.031	1.029	1.028	1.026	1.024	1.022	1.020	1.018	1.016	-	-	-	-	-	-	-	-
7100	1.041	1.039	1.038	1.036	1.034	1.032	1.031	1.029	1.027	1.025	1.023	1.020	-	-	-	-	-	-
7300	1.048	1.047	1.045	1.044	1.042	1.040	1.039	1.037	1.035	1.033	1.031	1.029	1.027	1.025	-	-	-	-
7500	1.055	1.053	1.052	1.051	1.049	1.048	1.046	1.045	1.043	1.041	1.039	1.037	1.035	1.033	1.031	1.029	-	-
7700	1.061	1.060	1.058	1.057	1.056	1.055	1.053	1.052	1.050	1.048	1.047	1.045	1.043	1.041	1.039	1.037	1.035	1.033
7900	1.066	1.065	1.064	1.063	1.062	1.061	1.059	1.058	1.056	1.055	1.053	1.052	1.050	1.048	1.047	1.045	1.043	1.041

TABLE 14.18 – Abaque de la température rotationnelle de OH en fonction de l’amplitude de  $G_{mel}$  et de  $L80_{G_{ref}}$  pour une température rotationnelle supérieure à 1000 K.



# Bibliographie

- [1] A. G. Gaydon. *The spectroscopy of Flames*. Chapman and Hall, 1957.
- [2] J. Janca. Utilization of rotational and vibrational temperatures for plasma diagnostics of high-pressure discharge. *Czech. J. Phys. B*, 20 :341–351, 1970.
- [3] C. de Izarra. UV OH spectrum used as a molecular pyrometer. *Journal of Physics D Applied Physics*, 33 :1697–1704, July 2000.
- [4] Hervé Rabat. *Utilisation du spectre UV du radical OH dans la métrologie des hautes températures des gaz chaud et des plasmas*. PhD thesis, Université d'Orléans, October 2004.
- [5] R. Mavrodineanu and H. Boiteux. *Flame Spectroscopy*. John Wiley, 1965.
- [6] G. Herzberg. *Molecular spectra and molecular structure vol 1 : spectra of diatomic molecules*. D Van Nostrand company, 1963.
- [7] G. H. Dieke and H. M. Crosswhite. The ultraviolet bands of OH. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2 :97–199, 1961.
- [8] D. R. Crosley and I. L. Chidsey. Tables of calculated transition probabilities for the A-X system of OH. Technical report, US army armement research and development command, 1981.
- [9] J. Luque and R. Crosley. Transition probabilities in the  $A^2\Sigma^+ - X^2\Pi_i$  electronic system of OH. *The journal of chemical physics*, 109 :439–449, 1998.
- [10] L. T. Earls. Intensities in  $^2\Sigma - ^2\Pi$  transitions in diatomic molecules. *Physical review*, 48 : 423–424, 1935.
- [11] P. Felenbok. Contribution à l'étude du spectre moléculaire des radicaux OH et OD. *Annales d'astrophysique*, 26 :393–428, 1963.
- [12] J. Luque and D.R. Crosley. LIFBASE : Database and spectral simulation (version 2.0.64). Technical report, SRI International Report MP 99-009, 1999.
- [13] H. Rabat and C. de Izarra. Check of OH rotational temperature using an interferometric method. *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 37 :2371–2375, 2004.
- [14] P. Bruggeman, F. Iza, P. Guns, and al. Electronic quenching of OH(A) by water in atmospheric pressure plasmas and its influence on the gas temperature determination by OH(A-X)emission. *Plasma Sources Science and Technology*, 19 :015016, 2010.
- [15] D. E. Heard and D. A. Henderson. Quenching of OH ( $A^2\Sigma^+, v'=0$ ) by several collision partners between 200 and 344 K. Cross-section measurement and model comparisons. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 2 :67–72, 2000.



## Cinquième partie

# Validation des méthodes de diagnostic



# Table des matières

---

<b>15 Diagnostic d'un jet de plasma laminaire par interférométrie et ombroscopie</b>	<b>241</b>
15.1 Jet de plasma d'argon laminaire . . . . .	241
15.2 Spectroscopie UV du radical OH . . . . .	243
15.3 Interféromètre de Mach-Zendher . . . . .	244
15.3.1 Résultats . . . . .	244
15.4 Banc de shadowgraphie quantitative . . . . .	246
15.4.1 Banc d'ombroscopie à laser He-Ne . . . . .	246
15.4.2 Banc d'ombroscopie à lampe à arc . . . . .	247
15.4.3 Résultats . . . . .	248
15.5 Conclusion . . . . .	249
<b>16 Diagnostic d'un jet de plasma laminaire par déflectométrie moiré</b>	<b>253</b>
16.1 Dispositif expérimental . . . . .	253
16.2 Validation des résultats théoriques . . . . .	255
16.2.1 Pas des franges de moiré . . . . .	255
16.2.2 Influence de la distance inter-réseaux . . . . .	256
16.2.3 Sensibilité . . . . .	258
16.2.4 Traitement des déflectogrammes . . . . .	259
16.3 Mesure du champ de température d'un jet de plasma d'argon laminaire . . . . .	260
16.3.1 Spectroscopie UV de OH . . . . .	261
16.3.2 Défectométrie moiré . . . . .	262
16.4 Conclusion . . . . .	263
<b>17 Diagnostic d'une décharge de faible puissance</b>	<b>267</b>
17.1 Introduction . . . . .	267
17.2 Dispositif expérimental . . . . .	268
17.3 Mesures macroscopiques . . . . .	269
17.3.1 Forme de la colonne de plasma . . . . .	269
17.3.2 Mesures électriques . . . . .	269
17.4 Défectométrie moiré . . . . .	271

17.5	Spectroscopie moléculaire . . . . .	273
17.5.1	Dispositif expérimental . . . . .	273
17.5.2	Résultats . . . . .	273
17.6	Interprétation des mesures moyennes de défectométrie et de spectroscopie . . .	274
17.6.1	Simulation des mesures de défectométrie moiré . . . . .	274
17.6.2	Simulation des mesures du spectre UV d'OH . . . . .	276
17.6.3	Modélisation de la colonne de plasma . . . . .	277
17.7	Conclusion . . . . .	280

---

## Chapitre 15

# Diagnostic d'un jet de plasma laminaire par interférométrie et ombroscopie

Ce que j'ai vécu m'a suffi pour comprendre que l'homme n'est pas un loup pour l'homme, mais seulement une illusion. Les autres, ça n'existe pas. C'est une impression que chacun a, et qu'il entretient pour se sentir moins seul.

---

San Antonio

De nombreux ouvrages de mécanique des fluides expérimentale proposent des plans de bancs de shadowgraphie [1, 2]. Malheureusement, la plupart sont dédiés aux mesures qualitatives et donnent des résultats quantitatifs médiocres voire inutilisables. Nous allons présenter ici le banc d'ombroscopie qui a été développé au cours de cette thèse. Il est très simple de conception et peu coûteux, ce qui a permis son adoption pour une utilisation académique [3]. Un jet de plasma d'argon laminaire, modèle parfait de zone périphérique d'arc, a été étudié à l'aide de la shadowgraphie quantitative afin de valider la méthode de mesure sur les plasmas. Les résultats obtenus à l'aide de cette dernière sont comparés à deux méthodes de diagnostic éprouvées, l'interférométrie et l'utilisation du spectre UV du radical OH comme pyromètre moléculaire.

Nous débuterons ce chapitre en présentant la source plasma à diagnostiquer ainsi que les différents dispositifs expérimentaux développés au laboratoire. Nous nous intéresserons ensuite sur les résultats issus de ces différentes méthodes. À cette occasion, les résultats issus des différentes techniques seront comparés afin d'éprouver l'ombroscopie.

### 15.1 Jet de plasma d'argon laminaire

Afin de valider la shadowgraphie quantitative, nous avons choisi de travailler sur un jet de plasma laminaire plutôt que sur une zone périphérique d'arc. Une torche CPM 600 de la marque Soudure Autogène Française (S.A.F) alimentée en courant continu a été utilisée afin de produire ces jets de plasma. Le schéma de la torche est disponible sur la figure 15.1, elle

est composée d'un corps massif refroidi par eau sur lequel viennent se positionner une cathode en tungstène et une anode en cuivre munie d'une buse pour la sortie du jet de plasma. Les électrodes sont elles aussi refroidies par eau. Le gaz plasmagène est injecté de manière axiale en amont de la cathode. L'alimentation électrique de la torche est constituée d'un générateur Nertabloc TH 260 de la S.A.F et d'un filtre LC (inductance de 27 mH et capacité de 250  $\mu\text{F}$ ) destiné à limiter les fluctuations temporelles de l'intensité du courant.

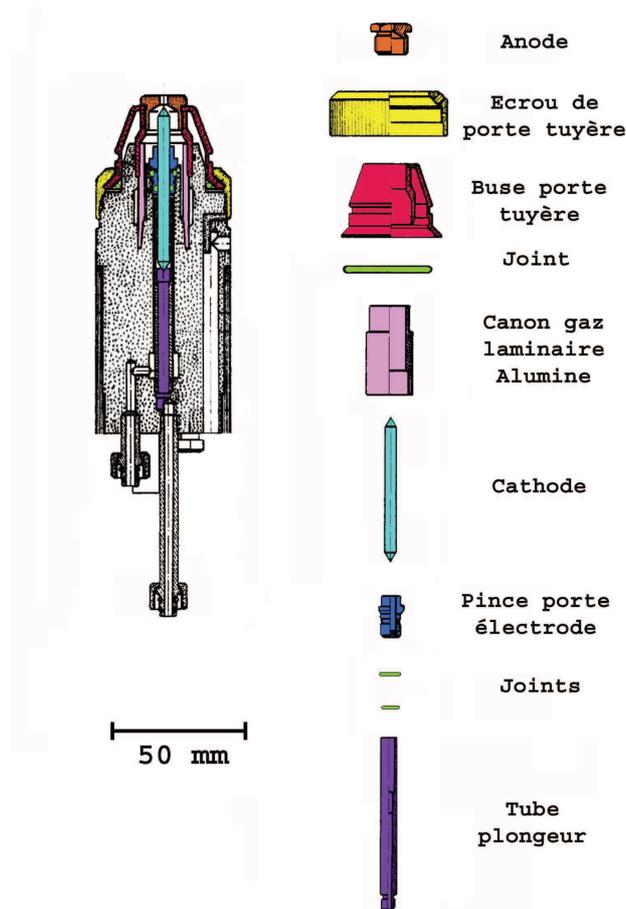


FIGURE 15.1 – Schéma de la torche CPM 600.

Il existe deux régimes de fonctionnement pour les plasmatrons : le régime laminaire et le régime turbulent. Ils dépendent des conditions expérimentales telles que l'intensité du courant, le diamètre de la buse de sortie et le débit de gaz plasmagène utilisé. Le régime turbulent est caractérisé par un jet très court et très bruyant tandis que le régime laminaire développe un jet bien structuré avec un cœur chaud et brillant suivi par un jet en recombinaison dont la longueur peut atteindre plusieurs dizaines de centimètres. Le profil de température axiale d'un jet laminaire montre une décroissance rapide avec la distance ; le cœur est à une température d'environ 12000 K tandis que le jet est, pour sa majeure partie, à une température comprise entre 8000 et 1500 K. C'est donc un modèle parfait de zone périphérique. Lors de nos travaux sur la shadowgraphie, les paramètres expérimentaux choisis pour produire un tel jet de plasma étaient un diamètre d'anode de 4 mm, un débit d'argon de 2 sL.min<sup>-1</sup> et une intensité de

courant de 100 A. Un ombrogramme qualitatif ainsi que le schéma d'un jet produit avec ces paramètres expérimentaux sont disponibles sur la figure 15.2.

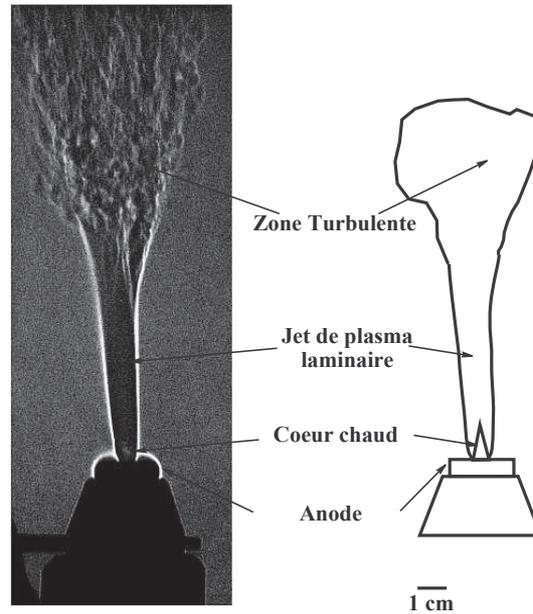


FIGURE 15.2 – Shadowgramme qualitatif d'un jet de plasma laminaire. Les différentes zones de ce jet sont repérées à l'aide du schéma de droite. Ici, c'est la partie laminaire qui va nous intéresser car c'est un modèle parfait de zone périphérique d'arc.

Le jet de plasma brûle dans l'atmosphère ambiante, or on a montré que dans ces conditions, un phénomène de pompage tend à introduire de l'air contenant de la vapeur d'eau, de l'oxygène et de l'azote au sein de la plume. Il est ainsi possible d'observer le spectre UV du radical OH sans ensemercer le plasma par de la vapeur d'eau.

## 15.2 Spectroscopie UV du radical OH

Grâce à l'effet de pompage, le spectre UV de OH est observable dans la plume de plasma. Afin de tirer parti de ce spectre, nous avons mis en place un montage spectroscopique dont le schéma est présenté sur la figure 15.3. Une fibre optique en quartz permet de former l'image du jet et de sélectionner la partie à diagnostiquer. Un monochromateur de marque chromex de 500 mm de focal doté d'un réseau de 2400 traits par mm travaillant dans le premier ordre permet de former les spectres. L'enregistrement de ces derniers est effectué à l'aide d'un OMA III de marque Princeton Instrument possédant une matrice CCD de 512 lignes et 1024 colonnes. Afin que OH soit thermalisé et présent dans l'ensemble de la zone de diagnostic, les mesures ont été effectuées sur l'axe du jet à 1.5 cm de la sortie de l'anode.

Dans ses travaux, de Izarra [4] a montré que le spectre UV du radical OH contenait trois groupes de raies d'intérêt facilement identifiables :  $G_0$ ,  $G_1$  et  $G_{ref}$ . Grâce à la fonction d'appareil globale obtenue à l'aide d'une mesure de la largeur de  $G_{ref}$  et des rapports d'amplitudes  $G_0/G_{ref}$ ,  $G_1/G_{ref}$ , il est possible d'obtenir la température rotationnelle de OH.

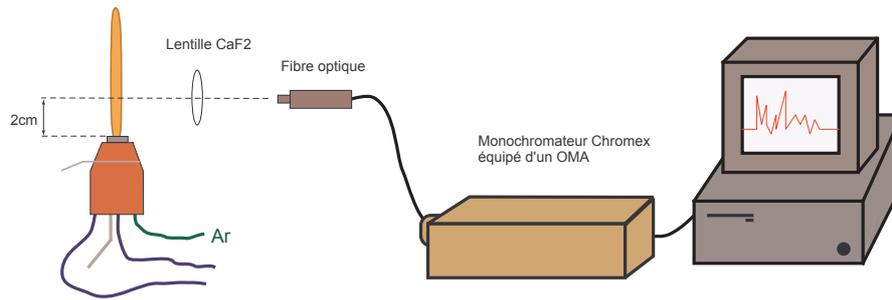


FIGURE 15.3 – Schéma du montage expérimental utilisé pour enregistrer les spectres UV du radical OH.

## Résultats

Un spectre normalisé typique, enregistré avec un temps de pose de 1 seconde est présenté sur la figure 15.4. L'exploitation des spectres fournit une fonction d'appareil globale de 0.08 nm et des rapports d'amplitudes moyens de :  $G_0/G_{ref} = 0.828$ ,  $G_1/G_{ref} = 0.869$ . Ces valeurs correspondent à une température rotationnelle de  $4200 \pm 200$  K. Le peuplement des niveaux hauts des transitions considérées ici varie de manière exponentielle avec la température. De ce fait, la température mesurée est celle de l'axe du jet de plasma.

## 15.3 Interféromètre de Mach-Zendher

Pour le diagnostic des zones périphériques d'un arc, la spectroscopie présente une limite importante, elle ne fonctionne que dans les zones où le gaz est suffisamment chaud pour émettre un rayonnement quantifiable. Le profil de température sur les bords du jet est inaccessible avec cette méthode, nous avons donc porté notre dévolu sur l'interférométrie pour aller sonder ces zones.

Le banc d'interférométrie que nous avons monté pour mesurer l'indice de réfraction dans le jet de plasma d'argon est présenté sur la figure 15.5. Il est composé d'un laser Hélium-Néon Melles-Griot de 30 mW à la longueur d'onde 632.8 nm, d'un jeu d'optiques pour élargir le faisceau et le rendre parallèle; deux miroirs et deux lames semi-transparentes sont utilisés de manière à séparer le faisceau laser en un faisceau sonde et un faisceau de référence. L'enregistrement des figures d'interférence se fait à l'aide d'une caméra CCD Pixis 256 de marque Princeton Instrument surmonté d'un filtre interférentiel à 632.8 nm. Ce dernier a pour but de filtrer l'ensemble de la lumière parasite issue du jet de plasma et du laboratoire. Enfin, un polariseur est placé en sortie de laser de manière à régler l'intensité lumineuse arrivant sur le détecteur.

### 15.3.1 Résultats

De nombreux jeux d'interférogrammes de référence et de travail ont été enregistrés sur le jet de plasma laminaire; un jeu d'interférogrammes typique est présenté sur la figure 15.6. On constate tout d'abord que la mesure est perturbée par un effet d'ombroscopie qui diminue très fortement le contraste des figures d'interférences là où des gradients d'indice existent. Si le contraste est trop faible, cela a une influence sur l'incertitude de la phase; il peut même arriver

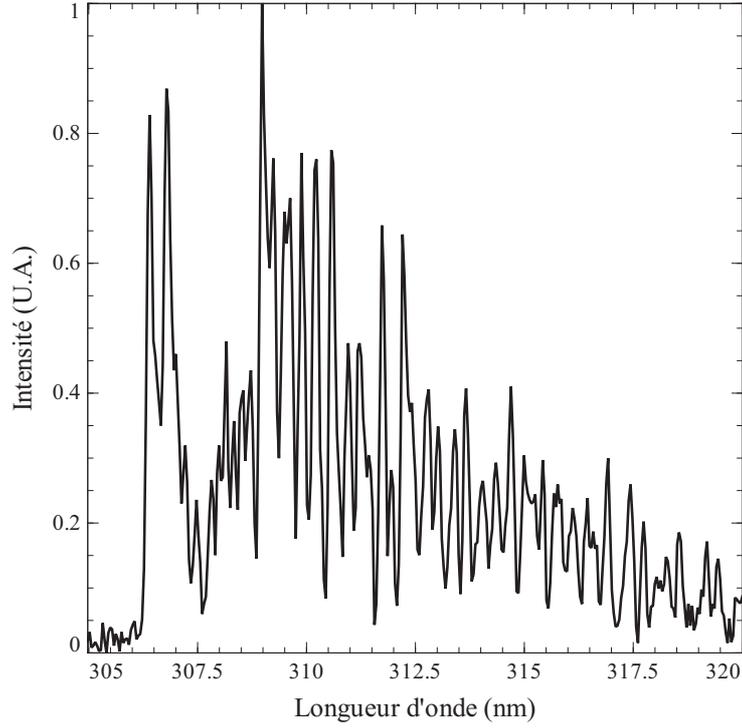


FIGURE 15.4 – Spectre UV du radical OH enregistré sur le jet de plasma d'argon à 1.5 cm de la sortie de l'anode. Il est normalisé sur l'amplitude du groupe de raie le plus intense :  $G_{ref}$ .

qu'il devienne impossible de dérouler la phase correctement. Ici, les forts gradients d'indice sont localisés à l'interface entre l'atmosphère et le jet laminaire.

Malgré l'effet "ombroscopie" parasite, j'ai été en mesure de traiter de nombreux interférogrammes pour obtenir des cartes de différence de phases. Afin de confronter les résultats obtenus à ceux issus de la spectroscopie UV de OH, le champ de température du jet de plasma obtenu à 1.5 cm de la buse a été calculé. Pour ce faire, j'ai fait apparaître l'intégrale de l'indice de réfraction sur une corde de plasma à l'aide de la relation :

$$\int_{corde} (n_0 - n) dz = \Delta\phi \frac{\lambda}{2\pi} \quad (15.1)$$

Afin d'obtenir l'indice de réfraction dans le plasma en fonction de  $r$  le rayon à partir d'une projection, l'inversion d'Abel suivante est calculée :

$$n_0 - n(r) = \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_r^R \frac{\frac{d\Delta\phi}{dy}}{\sqrt{y^2 - r^2}} dy \quad (15.2)$$

Finalement, le profil de température dans la plume de plasma est obtenu en utilisant la loi de Gladstone-Dale. Les profils de températures calculés sont résumés sur la figure 15.7. L'incertitude importante au niveau du centre de la colonne est due à la saturation de l'indice de réfraction de l'argon avec la température.

La température axiale calculée est de  $4400 \pm 400$  K, ce qui est relativement proche de la température obtenue à l'aide de la spectroscopie UV du radical OH. La variation de l'indice

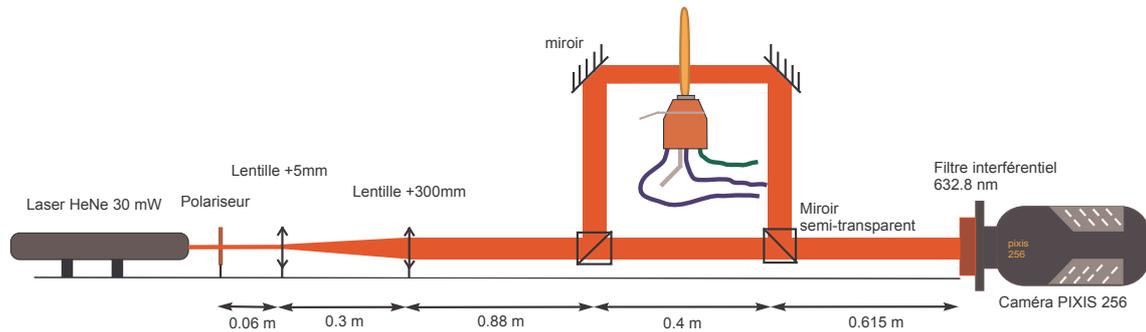


FIGURE 15.5 – Schéma de l'interféromètre de Mach-Zehnder utilisé pour diagnostiquer un jet de plasma d'argon laminaire.

de réfraction en  $1/T$  fait de l'interférométrie une méthode de choix pour diagnostiquer les sources où la température est de l'ordre de 300 à 3000 K.

## 15.4 Banc de shadowgraphie quantitative

Suite à la lecture de nombreux articles traitant de l'ombroscopie, j'ai testé plusieurs types de dispositifs expérimentaux. Settles [2] prône dans son livre les sources de lumières ponctuelles incohérentes ainsi que l'utilisation de miroirs paraboliques afin d'obtenir un faisceau de lumière parallèle. Gopal & al [5] utilisent, quant à eux, des sources laser pour faire des mesures quantitatives sur des bulles de plasma avec, semble-t-il, de bons résultats.

Les montages à base de sources laser ayant donné de bons résultats dans d'autres laboratoires, c'est naturellement vers ceux-ci que je me suis tourné en premier.

### 15.4.1 Banc d'ombroscopie à laser He-Ne

Le banc d'ombroscopie que j'ai monté initialement est très simple ; il s'agit en fait de l'interféromètre de Mach-Zehnder présenté précédemment dont le faisceau de référence est masqué (fig.15.8). Ce montage permet d'effectuer des mesures d'interférométrie et d'ombroscopie de manière quasi-simultanée.

Malheureusement, il est relativement difficile d'obtenir un éclairage uniforme avec ce montage. De plus, à cause des interférences provenant de l'utilisation d'une source de lumière cohérente, les ombrogrammes sont très bruités ce qui peut poser des problèmes lors de la résolution numérique de l'équation de Poisson. Pour obtenir une solution convenable, il faut s'assurer à tout prix que la valeur moyenne du contraste est nulle. C'est rarement le cas avec les données issues de ce banc. Malgré la mise au point d'un programme de recherche de  $I_0$  et de calcul de la valeur moyenne du contraste, il n'a pas été possible d'obtenir des résultats concluants ; les températures maximales obtenues dans le plasma étaient de l'ordre de 500-1000 K.

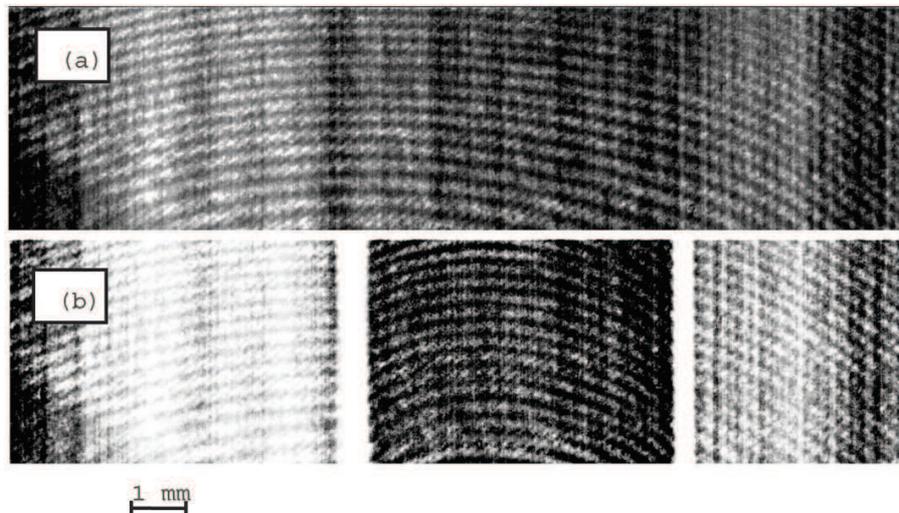


FIGURE 15.6 – Vignette a) : Interférogramme de référence. Vignette b) : Interférogramme de travail. La présence de jet de plasma d'argon perturbe la figure d'interférence. Un effet "ombroscopie" parasite est discernable sur les bords du jet de plasma, ce qui rend la mesure plus compliquée.

#### 15.4.2 Banc d'ombroscopie à lampe à arc

L'échec du banc d'ombroscopie à laser m'a poussé à m'intéresser aux bancs à lumière incohérente proposés par Settle. Afin d'obtenir un bon rapport signal sur bruit, nous avons porté notre dévolu sur une lampe à arc haute pression, source de lumière ponctuelle et intense. Avec cette dernière, il est possible de sonder une plasma rayonnant fortement sans problèmes. L'utilisation de miroir parabolique s'est révélée contraignant et peu avantageuse, j'ai donc choisi de placer la source lumineuse loin de la zone à diagnostiquer de manière à avoir des rayons quasi-parallèles et être en mesure d'utiliser la théorie développée dans la partie 3.

Le schéma du dispositif expérimental est présenté sur la figure 15.9. Ce dernier se compose d'une lampe à arc au Xenon Hamamatsu L2195 de 150 W placée à bonne distance de l'objet à diagnostiquer. Le dispositif d'enregistrement utilisé est une caméra CCD PIXIS 256 de la marque Princeton Instrument. Le spectre de la lampe à arc dans le visible correspond à un plateau; pour obtenir des résultats quantitatifs, on doit donc équiper la caméra d'un filtre interférentiel qui permet de ne travailler qu'avec une longueur d'onde uniquement. Le jet de plasma à diagnostiquer est placé non loin du dispositif d'enregistrement de manière à ce que les rayons lumineux ne se croisent pas. Avec ce montage, l'éclairage obtenu au niveau de la caméra est uniforme et les shadowgrammes sont peu bruités.

Pour vérifier que les rayons lumineux ne se croisent pas lors du diagnostic, j'ai placé une fente oblique après le jet de plasma laminaire. À 4 m de la fente, sur un écran, j'ai pu vérifier que les rayons lumineux ne se croisaient pas ou très peu (fig.15.10). On peut donc utiliser sans problèmes l'équation 11.15 développée dans la partie théorique. Cette observation peut être validée à posteriori en calculant l'angle de déflexion des rayons lumineux à partir des shadowgrammes via la théorie développée par Lewis [6]. La forme générale de la courbe "angle de déflexion en fonction de la position" prouve que les rayons lumineux ne se coupent pas.

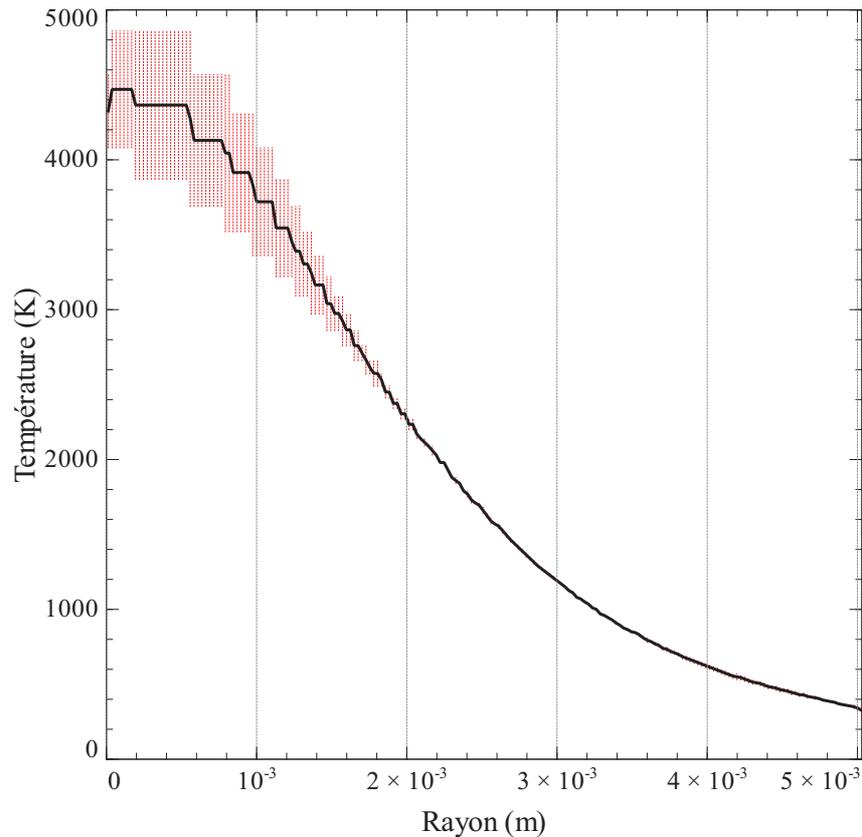


FIGURE 15.7 – Valeur moyenne du champ de température dans le jet de plasma laminaire d'argon à 1.5 cm de l'anode. L'incertitude importante au centre de la colonne est due à la saturation de l'indice de réfraction.

### 15.4.3 Résultats

De nombreux ombrogrammes ont été enregistrés puis traités à l'aide de la procédure décrite dans la partie théorique (partie 3 de la présente thèse). Pour ce faire, des programmes ont été rédigés de manière à automatiser l'ensemble du traitement des données, notamment la recherche de  $I_0$  et la résolution de l'équation de Poisson, deux procédures critiques pour l'obtention de résultats corrects.

Un exemple de shadowgramme typique obtenu à 1.5 cm de l'anode est présenté sur le graphique 15.11. Qualitativement, on peut noter que les gradients d'indice sont orientés du centre du jet vers l'extérieur puisqu'il y a un déficit de lumière autour du centre et un surplus sur les bords. Les rayons lumineux passant par l'axe du jet ne sont pas défectés puisqu'ils ne rencontrent aucun gradient d'indice orthogonal à leur direction de propagation.

Le calcul du contraste puis la résolution de l'équation de Poisson permet d'avoir accès à l'intégrale de l'indice de réfraction sur les cordes du jet. Là encore, une inversion d'Abel doit être effectuée afin d'obtenir des résultats exploitables. Finalement, la loi de Gladstone-Dale permet de calculer le profil de température dans la plume de plasma. À cette occasion, l'indice de réfraction de référence choisi pour effectuer les calculs était celui de l'air à température ambiante. Les résultats obtenus sont comparés au profil de température issu de l'interférométrie sur la figure 15.12.

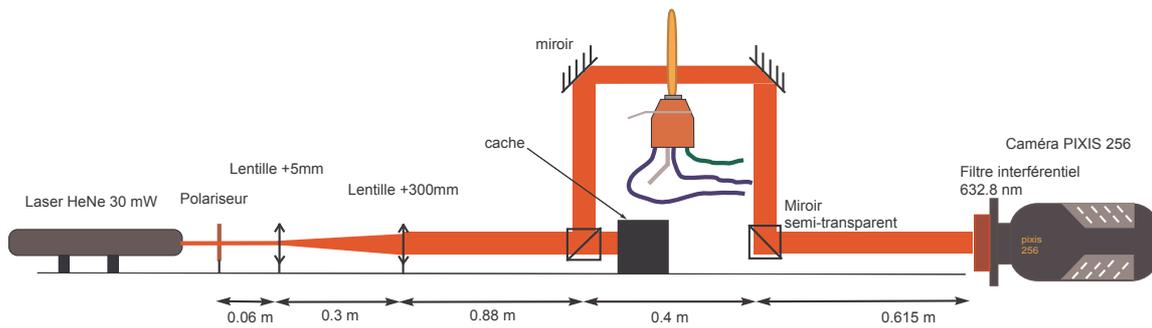


FIGURE 15.8 – Schéma du banc d'ombroscopie à laser Hélium-Néon, il s'agit d'un interféromètre de Mach-Zehnder dont le faisceau de référence a été caché.

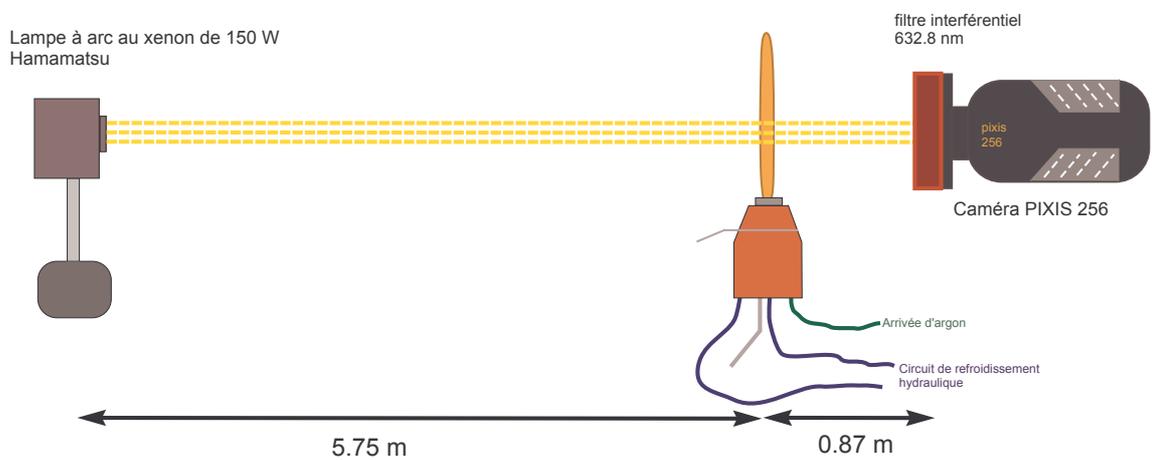


FIGURE 15.9 – Schéma du banc d'ombroscopie quantitative à lampe à arc utilisé pour le diagnostic du jet de plasma laminaire.

On constate que les profils de températures obtenus sont très semblables ; sur l'axe du jet, la température mesurée par ombroscopie est de 4300 K, ce qui est dans l'intervalle de confiance des résultats interférométriques ( $4400 \pm 400$  K) et spectroscopiques ( $4200 \pm 200$  K). Sur le bord du jet, les résultats obtenus par interférométrie et ombroscopie diffèrent légèrement ; cela pourrait s'expliquer par une meilleure sensibilité de l'ombroscopie dans les zones contenant de très forts gradients d'indice.

## 15.5 Conclusion

La shadowgraphie quantitative est une méthode de choix pour la mesure de température dans les zones périphériques de plasmas thermiques, les décharges de faible puissance et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord le dispositif expérimental est simple et peu coûteux, il se révèle en outre beaucoup plus aisé à régler qu'un interféromètre de Mach-Zehnder. Contrairement aux interférogrammes, les ombrogrammes ne sont pas perturbés par les gradients d'indice de

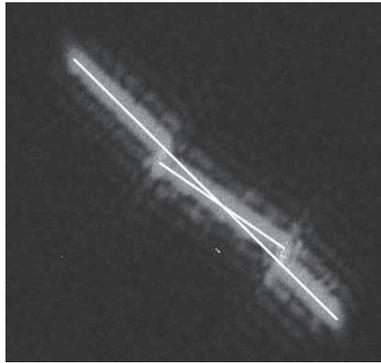


FIGURE 15.10 – Shadowgramme d'un jet de plasma laminaire avec une fente oblique placée devant. L'image à été enregistrée à 4 m du plasma, malgré cela, on constate que les faisceaux lumineux ne se croisent pas.



FIGURE 15.11 – Shadowgramme enregistré sur un jet de plasma laminaire d'argon.

réfraction ce qui rend la méthode particulièrement adaptée pour sonder les bords des colonnes ou des jets. Finalement, même si le traitement des ombrogrammes peut sembler complexe au premier abord, le développement de logiciels pour automatiser le traitement de données au cours de cette thèse a grandement simplifié la procédure. L'obtention des résultats est maintenant chose moins complexe qu'en interférométrie.

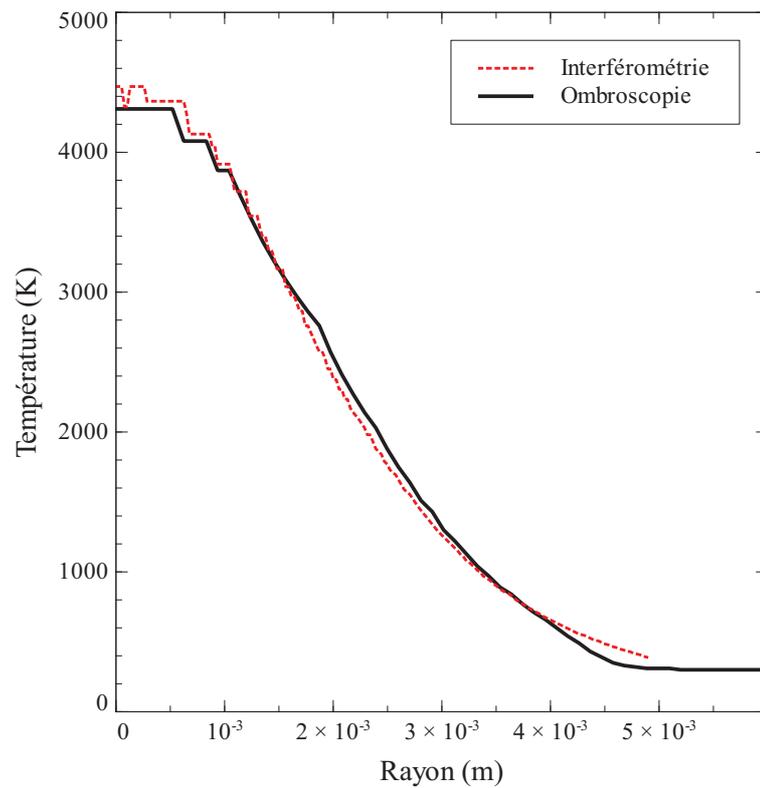


FIGURE 15.12 – Comparaison des champs de température obtenue par ombroscopie quantitative et interférométrie. Les résultats ont été obtenus à 1.5 cm en aval de l’anode.



## Chapitre 16

# Diagnostic d'un jet de plasma laminaire par déflectométrie moiré

Choquer un con, c'est le conforter dans son bonheur d'être con ; c'est apporter de la connerie à son moulin. Au début de mon édifiante carrière, les cons me faisaient mal ; à présent ils me font chaud au coeur. Je comprends combien j'aurais été désemparé sans eux. Quelle triste errance aurait été la mienne sans leurs miséreuses manigances.

---

San Antonio

De nombreux résultats ont été obtenus lors du développement de la théorie de la déflectométrie moiré. Malheureusement, certains résultats concernant notamment la forme des figures d'interférences, la relation entre la phase et l'angle de déflexion, la sensibilité du déflectomètre diffèrent de ce qui a été obtenu dans la littérature. Avant même de tester la déflectométrie moiré sur les décharges électriques et les jets de plasma, nous avons choisi de vérifier expérimentalement un certain nombre de nos résultats théoriques.

Dans un premier temps, nous allons présenter le dispositif expérimental développé au cours de la thèse ; un intérêt particulier sera donné au réglage du banc expérimental. Suite à cela, les relations théoriques développées dans la partie 3 seront vérifiées expérimentalement. Enfin, nous testerons la méthode sur un jet de plasma d'argon laminaire ; les résultats seront confrontés à ceux de la spectroscopie UV de OH afin de les valider.

### 16.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental que j'ai mis en place est simple et peu coûteux (figure 16.1). Il est constitué d'un laser Helium Neon de 10 mW et de deux lentilles qui permettent d'expanser et de rendre parfaitement parallèle son faisceau. Deux grilles de Ronchi de 5 cm de côté et d'un pas de 0.05 mm sont placés sur le trajet du faisceau lumineux. Ils sont montés sur des dispositifs micro-contrôle afin de régler aisément leur angle de rotation. Le premier réseau,  $G_1$ , est monté sur une platine de déplacement micrométrique afin de sélectionner la distance inter-réseaux

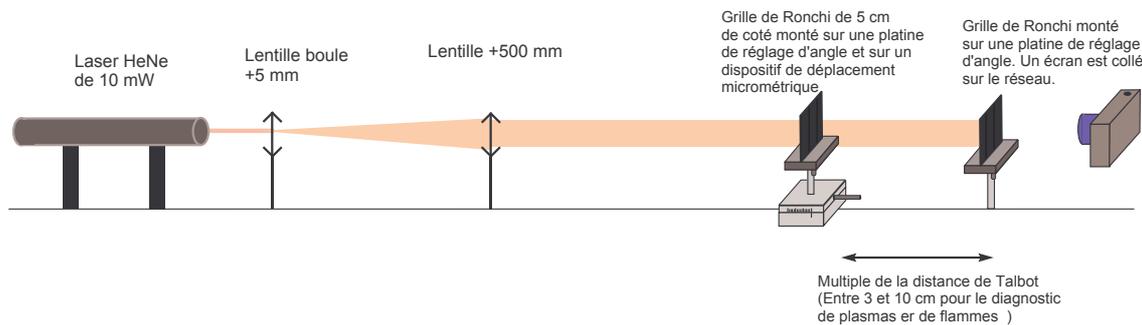


FIGURE 16.1 – Schéma du déflectomètre développé. Le pas des réseaux de Ronchi est de  $p = 0.05\text{mm}$ , de ce fait, la distance idéale à mettre entre les réseaux pour diagnostiquer une flamme ou un plasma est de 3 à 10 cm.

avec précision sans pour autant perturber la mise au point du dispositif d'enregistrement des figures d'interférence. La capture des déflectogrammes se fait à l'aide d'un écran en papier calque placé directement à la sortie de  $G2$  et d'une webcam. Les principaux avantages de ce montage sont la simplicité avec laquelle son réglage se fait, et son coût relativement faible, qui est environ un dixième du prix d'un bon spectroscope.

### Réglage du dispositif expérimental

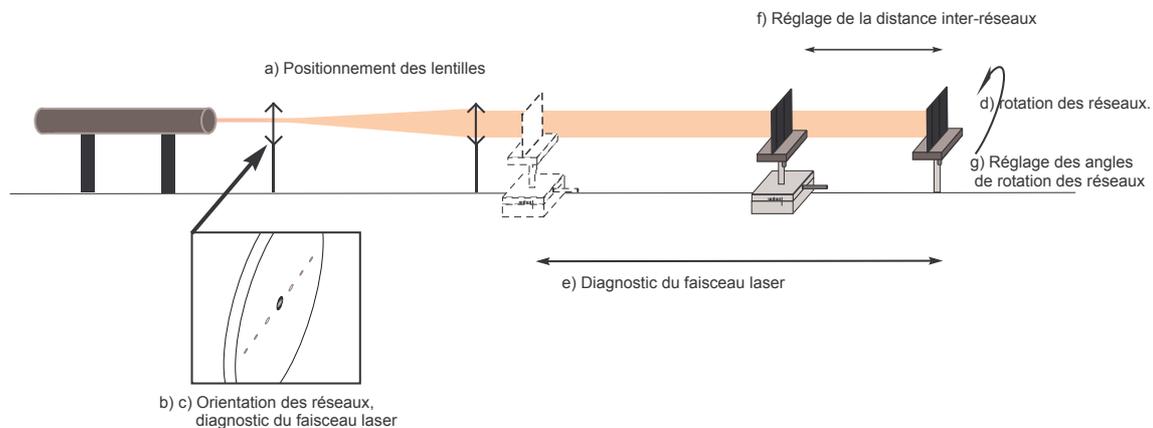


FIGURE 16.2 – Résumé de la procédure de réglage d'un déflectomètre.

Le réglage du dispositif expérimental est résumé sur la figure 16.2. Il débute par la mise en place de la lentille biconvexe et de la lentille de focale +500 mm de manière à élargir puis former un faisceau de lumière parallèle (fig.16.2 :a). Le réseau  $G2$  est ensuite positionné, on règle son angle par rapport à l'axe optique par auto-collimation. L'ordre de diffraction zéro doit être placé au niveau de la lentille biconvexe (fig.16.2 :b). La qualité du faisceau peut être évaluée à cet instant en examinant la forme des ordres de diffraction sur la lentille (fig.16.2 :c). Le réseau

$G1$  est ensuite placé sur l'axe optique, puis son orientation est réglée de la même manière que pour celle de  $G2$ . On tourne légèrement les réseaux et on choisit grossièrement la distance inter-réseau afin de produire des franges de moiré (fig.16.2 :d). Avec des réseaux d'un pas de 0.05 mm, la distance inter-réseaux typique est de l'ordre de 4 cm pour diagnostiquer des flammes et des plasmas.  $d$  peut être choisi en utilisant un déflectomètre moiré à frange infinie, on obtiendra ainsi un ordre de grandeur des angles de déflexion.

On peut au besoin vérifier la qualité du faisceau lumineux en mettant une grande distance inter-réseau puis une petite (fig.16.2 :e). Si le faisceau est parallèle, le pas des franges de moiré sera identique quelque soit la distance inter-réseaux. Si la taille des franges est plus faible lorsque la distance inter-réseaux est grande, c'est le signe d'un faisceau convergeant.

La distance  $d$  doit être réglée à un multiple de la distance de Talbot afin d'obtenir de bonnes conditions expérimentales. Il est difficile de distinguer l'endroit où les franges deviennent intenses, on cherchera donc l'endroit où les franges disparaissent complètement pour ensuite déplacer  $G1$  d'un quart de distance de Talbot (fig.16.2 :f).

Finalement, on tourne les réseaux  $G1$  et  $G2$  respectivement d'un petit angle  $\alpha/2$  et  $-\alpha/2$ . On prendra un soin particulier pour régler la position des franges de moiré : les angles seront identiques si et seulement si les franges de moiré sont parfaitement horizontales (fig.16.2 :g).

## 16.2 Validation des résultats théoriques

### 16.2.1 Pas des franges de moiré

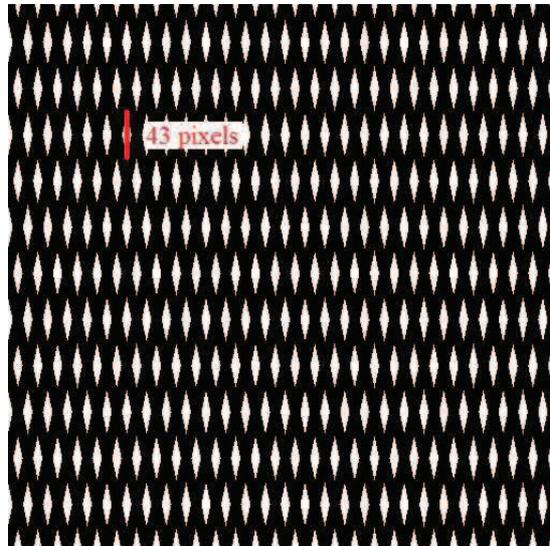


FIGURE 16.3 – Franges de moiré simulées à l'aide de l'équation paramétriques des réseaux. Le pas des réseaux est de 18 pixels tandis que l'angle  $\alpha/2$  est fixé à  $\pi/15$ . Le pas des franges mesuré graphiquement est de 43 pixels.

Pour valider l'expression décrivant les figures d'interférences, j'ai choisi de vérifier le pas des franges de deux manière différentes. La première approche consiste à simuler deux réseaux de Ronchi à l'aide des équation paramétriques. Les réseaux simulés ont un pas de 18 pixels et un angle de rotation de  $\alpha/2 = \pi/15$ . Les franges de moiré produites avec cette simulation

sont disponibles sur la figure 16.3, leur pas est de  $p' = 43$  pixels. Avec la relation du pas des franges, il vient :

$$p' = \frac{p}{\alpha} = \frac{18}{2\pi/15} = 42.97 \text{ pixels}, \quad (16.1)$$

ce qui est en accord avec la valeur mesurée.

La seconde validation est expérimentale, le déflectomètre présenté dans la section 16.1 est utilisé afin de produire une figure d'interférence. Le pas des franges est mesuré, il est de  $p' = 2.3$  mm. On sait que  $p'$  est relié à l'angle de rotation entre les deux réseaux, on mesure donc cet angle  $\alpha$  expérimentalement. Afin d'effectuer la mesure avec une bonne précision, on remplace l'écran présent derrière  $G2$  par une lentille convergente afin d'effectuer la transformée de Fourier du signal en sortie de déflectomètre. Le cliché obtenu est présenté sur la figure 16.4, il est similaire à la transformée de Fourier des franges de moiré présentée dans la partie 3. Grâce à la théorie développée précédemment, on mesure un angle de rotation entre les réseaux de  $\alpha = 0.023 \pm 0.001$ .

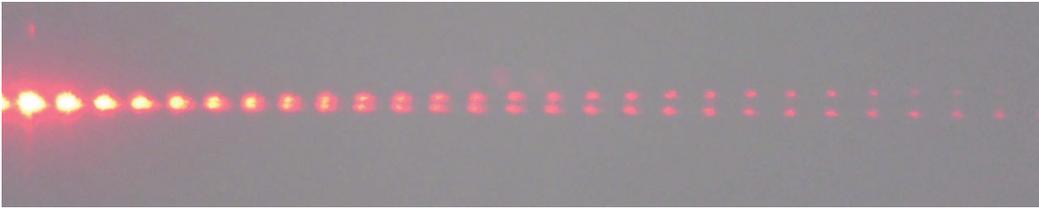


FIGURE 16.4 – Transformée de Fourier du signal en sortie de déflectomètre. L'angle de rotation des réseaux est obtenue grâce aux points lumineux en diagonale qui sont les termes correspondant à  $G1$  et  $G2$ .

Le pas des réseaux étant de  $p = 0.05$  mm, on obtient à l'aide de  $p'$  un angle entre les réseaux de :

$$\alpha = \frac{p}{p'} = \frac{0.05}{2.3} = 0.022 \text{ rad} \quad (16.2)$$

Cette relation fournit un angle de rotation entre les réseaux similaire à celui qui a été mesuré expérimentalement. Cela permet de valider l'ensemble des relations théoriques décrivant les franges de moiré.

### 16.2.2 Influence de la distance inter-réseaux

L'optique de Fourier nous fournit une information fondamentale concernant le réglage d'un déflectomètre. Nous avons vu que l'intensité des franges de moiré était modulée par un terme de la forme :

$$\cos\left(2\pi d \frac{\lambda}{p^2}\right) \cos\left(2\pi \frac{2}{p} \sin(\alpha/2)\right) \quad (16.3)$$

Ce terme, qui n'apparaît pas dans l'approche par optique géométrique de la déflectométrie, dépend de  $p$  le pas des réseaux et de  $\lambda$  la longueur d'onde du rayonnement utilisé. Il est de première importance pour l'obtention de déflectogrammes de qualité puisqu'il intervient directement sur le contraste des figures d'interférences. j'ai choisi de vérifier expérimentalement l'existence de cette modulation en étudiant la forme des figures d'interférences en fonction de

la distance inter-réseaux. Le montage utilisé à cette occasion était assez simple : un écran dépoli placé à la sortie de  $G2$  et une webcam servent à enregistrer les franges de moiré tandis que je faisais varier la position de  $G1$ . Comme il n'est pas facile d'obtenir la distance inter-réseau sans perturber les figures d'interférences, on travaille en distances relatives. Les franges de moiré en fonction de la position de  $G1$  sont disponibles sur la figure 16.5.



FIGURE 16.5 – Influence de la distance inter-réseaux sur les franges de moiré.  $d$  est la distance relative entre  $G1$  et sa position initiale.

La distance  $d$  correspond à la distance relative de  $G1$  depuis sa position d'origine, elle augmente lorsque  $G1$  se rapproche de  $G2$ . Les résultats montrent tout d'abord que les franges "défilent" lorsque l'on passe d'une demi-distance de Talbot à une autre; cela correspondrait à un changement de signe dans le terme de modulation. De plus, lorsque l'on trace l'amplitude des franges les plus intenses en fonction de  $d$  (fig.16.6), on s'aperçoit que celle-ci varie de manière sinusoïdale et passe par un maximum tous les  $(4 \pm 0.4)$  mm. Pour notre dispositif expérimental, la distance de Talbot est de :

$$d_t = \frac{2.(0.05 \cdot 10^{-3})^2}{633 \cdot 10^{-9}} = 0.0079 \text{ m} \quad (16.4)$$

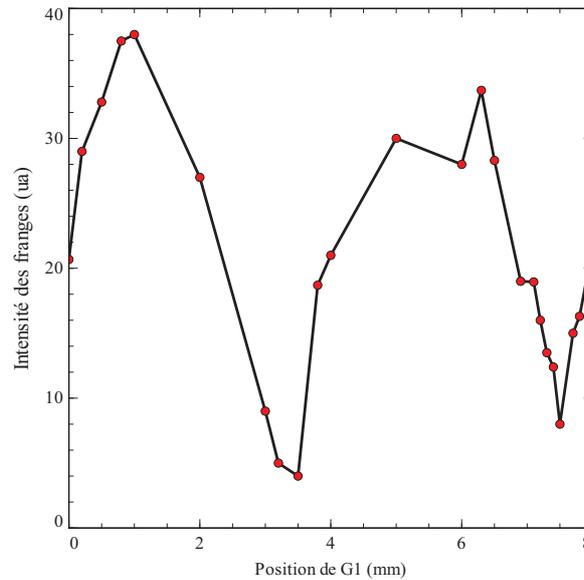


FIGURE 16.6 – Amplitude des franges de moiré les plus intenses en fonction de la position relative de  $G1$ .

La distance séparant deux maximums est bien égale à une demi-distance de Talbot. L'existence du terme de modulation d'amplitude est donc bien vérifiée et on devra se placer à un multiple de la distance de Talbot afin d'obtenir des défectogrammes nets et contrastés.

### 16.2.3 Sensibilité

L'étude du défectomètre à l'aide de l'optique de Fourier a montré que ce dispositif avait une sensibilité nulle pour les gradients d'indice orientés selon  $y$ . Afin de vérifier cela expérimentalement, j'ai choisi d'étudier les défectogrammes d'une flamme issue d'un chalumeau butane-air. Cette dernière possède des gradients de températures majoritairement radiaux. D'après la loi de Gladstone-Dale, les gradients d'indice dans la flamme devraient donc être surtout radiaux.



FIGURE 16.7 – Vignette gauche : défectogramme de référence. Vignette droite : défectogramme avec la torche butane/air à la verticale. Les franges sont fortement perturbées, preuve de forts gradients d'indice orientés selon  $x$ . Vignette centrale : défectogramme avec la torche à l'horizontale, aucun gradient d'indice orienté selon  $y$  n'est visible.

La distance entre les réseaux a été réglée à 6.6 cm afin d'avoir une bonne sensibilité sur les

angles de déflexion. Un défectogramme de la flamme placée verticalement est présenté sur la figure 16.7, il permet de vérifier l'importance des gradients d'indices radiaux. Un second défectogramme a été enregistré avec la flamme placée horizontalement. Avec les gradient d'indice radiaux qu'elle possède, nous devrions voir une perturbation des franges si le défectomètre est sensible aux gradient selon  $y$ . Or il n'en n'est rien ; on distingue uniquement des gradients orientés selon  $x$  qui correspondent à la convection et à la diminution de la température du gaz lorsque celui-ci s'éloigne de la buse.

Afin de vérifier la sensibilité du défectomètre de manière quantitative, les différences de phase sur une coupe située à 1.2 cm de la sortie de la torche ont été calculées. Les résultats sont disponibles sur la figure 16.8. On distingue que la différence de phase mesurée lorsque la torche est à l'horizontale est quasi-nulle alors qu'elle est de 20 au maximum lorsque la torche est placée à la verticale. Cela prouve bien que le défectomètre n'a aucune sensibilité dans la direction  $y$ .

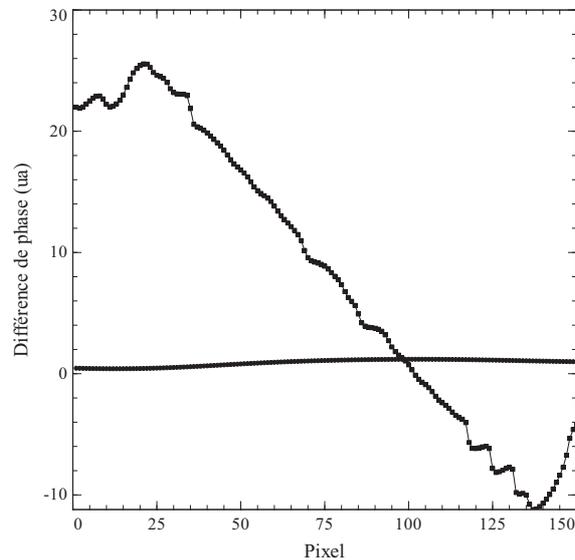


FIGURE 16.8 – Différence de phase mesurée sur une coupe à 1.2 cm de la sortie de la buse. La différence de phase quasi nulle correspond au cas où le chalumeau est placé à l'horizontale.

#### 16.2.4 Traitement des défectogrammes

Lors du traitement théorique de la défectométrie moiré, nous avons mis en évidence la relation entre l'angle de déflexion des rayons lumineux et la phase des figures d'interférences. Afin de vérifier cette relation et la procédure de traitement de données, deux défectogrammes test ont été produits par simulation numérique. Le premier est un défectogramme de référence, il contient l'image de deux grilles non-perturbées d'un pas de 18 pixels. Le second défectogramme est un cliché de travail pour lequel la déformation de l'ombre du réseau G1 a été simulée à l'aide de la perturbation :

$$f(\vec{x}, y) = 6\sin^2(0.01(x + y)) \vec{e}_x \quad (16.5)$$

Les défectogrammes simulés ainsi que le module de  $\vec{f}$  sont représentés sur la figure 16.9.

Pour obtenir la différence de phase, on traite chacun des déflectogrammes à l'aide du logiciel IDEA. Les termes représentant les franges de moiré sont isolés puis utilisés pour calculer la phase. Finalement, les phases des déflectogrammes sont soustraites et on obtient :

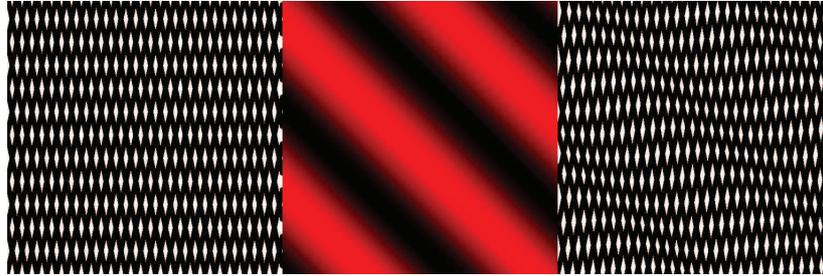


FIGURE 16.9 – Vignette de gauche : déflectogramme de référence simulé à l'aide des équations paramétriques des réseaux. Vignette centrale : carte de l'amplitude de la fonction de perturbation. Vignette de droite : déflectogramme de travail avec un des réseaux dont l'équation paramétrique est perturbée par  $f$ .

$$\delta\phi = 2\pi \frac{f}{p} \quad (16.6)$$

La cartographie de  $f$  obtenue est un sinus carré d'une amplitude maximale de 5.8, ce qui est relativement proche de l'amplitude théorique avec seulement 3% d'erreur relative (fig.16.10). Le traitement des déflectogrammes proposés dans la partie théorie est donc validé, de même que la nature des informations contenues dans la phase des franges de moiré.

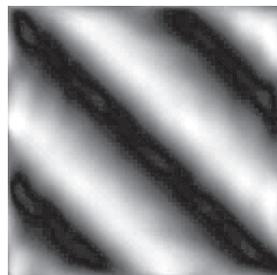


FIGURE 16.10 – Carte de la différence de phase obtenue à l'aide des déflectogrammes de référence et de travail. L'amplitude du sinus carré mesuré est de 5.8, ce qui est proche de la valeur théorique (3% d'erreur relative).

### 16.3 Mesure du champ de température d'un jet de plasma d'argon laminaire

Le dispositif expérimental présenté précédemment a été utilisé pour mesurer le champ de température dans un jet de plasma laminaire d'argon. Ce dispositif présenté dans le chapitre 1 de cette partie est d'une grande importance puisque c'est un modèle idéal de zone périphérique d'arc électrique.

### 16.3.1 Spectroscopie UV de OH

Afin de valider les résultats issus de la déflectométrie moirée, j'ai choisi de les comparer à des résultats obtenus avec une méthode qui a fait ses preuves, la spectroscopie UV du radical OH.

Pour obtenir des spectres, j'ai utilisé un monochromateur CHROMEX de type Ebert-Fastié d'une distance focale de 0.5 m équipé d'un réseau de 2400 t/mm et d'une caméra PIXIS 256. Une lentille de  $CaF_2$  permettait de former l'image du jet de plasma sur la fente du spectroscope. Enfin, la torche était placée horizontalement sur un robot de manière à enregistrer directement la lumière issue d'une tranche cylindrique de plasma. Le dispositif expérimental utilisé est présenté sur la figure 16.11. Comme présenté précédemment, la torche

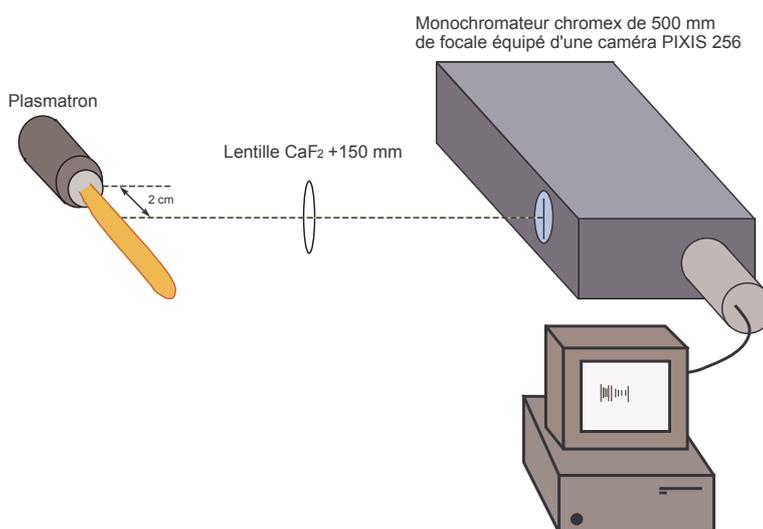


FIGURE 16.11 – Schéma du dispositif expérimental utilisé pour enregistrer des spectres 2 dimension. Une lentille de  $CaF_2$  permet de former l'image d'une tranche de jet de plasma sur la fente d'entrée du monochromateur.

était alimentée en courant par une alimentation SAF NERTABLOC TH 260 équipée d'une cellule LC destinée à réduire les fluctuations de courant. Le diamètre de sortie de l'anode utilisé était de 4 mm tandis que le débit d'argon était de  $3 \text{ sL} \cdot \text{min}^{-1}$  et l'intensité du courant de 105 A de manière à produire un jet de plasma laminaire.

La torche opère directement dans l'atmosphère, sans aucun dispositif pour stabiliser le jet. Ainsi, ce dernier pompe une petite quantité de l'air environnant. Grâce à cela, il a été montré que le spectre UV du radical OH était observable dans le jet sans pour autant l'ensemencer avec de la vapeur d'eau. Pour être certain de la présence de OH correctement thermalisé dans l'ensemble du jet, les spectres ont été enregistrés à 2 cm de la sortie de l'anode. Afin d'obtenir un bon rapport signal sur bruit, le temps de pose pour chaque prise de spectre était de 30 secondes.

L'utilisation du montage de la figure 16.11 donne directement accès à des spectres 2 dimensions avec en abscisse la longueur d'onde, et en ordonnée, la position dans le jet. Pour chaque position, le spectre obtenu correspond à une projection, il est donc nécessaire d'effectuer l'inversion d'Abel de ces spectres 2D afin d'obtenir, à terme, une carte des températures.

Un logiciel développé spécialement pour l'occasion permet d'effectuer ces inversions à la volée. Son code source est disponible en annexe.

Un spectre typique obtenu après inversion d'Abel est présenté sur la figure 16.12. Les groupes de raies  $G_0$  et  $G_1$  ont des amplitudes relativement faibles comparées à celle de  $G_{ref}$ , ce qui dénote une température rotationnelle peu élevée, de l'ordre de 2000-3000 K.

Le profil de température obtenu à l'aide de l'amplitude normalisée de  $G_0$  est disponible sur la figure 16.13. La température axiale du jet est de 2350 K. La mesure de la température est ici limitée à 1500 K car, en dessous de cette température, le plasma ne rayonne plus assez pour obtenir des résultats probants (rapport signal sur bruit trop faible).

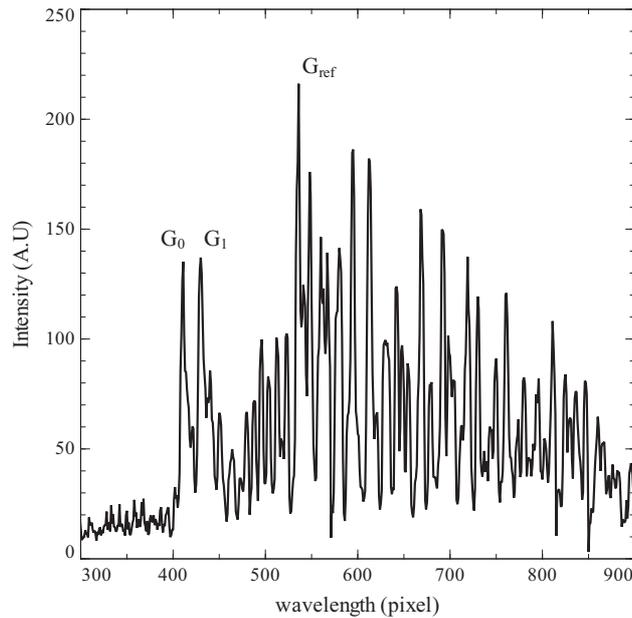


FIGURE 16.12 – Exemple de spectre UV du radical OH obtenu après inversion d'Abel. Les groupes de raies  $G_0$   $G_1$  et  $G_{ref}$  utilisés pour la mesure de la température sont repérés. Le maximum du groupe  $G_0$  est situé à 306.457 tandis que le groupe  $G_{ref}$  est situé autour de 309 nm.

### 16.3.2 Déflectométrie moiré

J'ai diagnostiqué le jet de plasma en utilisant le dispositif présenté précédemment (fig.16.1). La distance inter-réseau choisie pour la mesure était de 3.51 cm afin de bénéficier d'une bonne sensibilité sur l'angle de déflexion tout en conservant une résolution spatiale correcte. Une distance inter-réseaux plus importante "coupait" les franges de moiré, rendant ainsi le traitement informatique impossible. L'enregistrement des déflectogrammes a été réalisé à l'aide d'un appareil photographique grand public. Du fait de la forte luminosité des figures d'interférences, le temps de pose de l'appareil était beaucoup plus faible que le temps typique de fluctuation dû aux 100 Hz de l'alimentation électrique. Afin d'obtenir des résultats similaires à ceux issus de la spectroscopie UV de OH où le temps de pose était de 30 secondes, de nombreux déflectogrammes ont été pris afin d'obtenir des résultats moyens. Au total, pas moins de 70 déflectogrammes ont été enregistrés et traités, un résultat typique est présenté sur la figure 16.15. Comme on peut le constater, la forme du profil de température diffère de celui

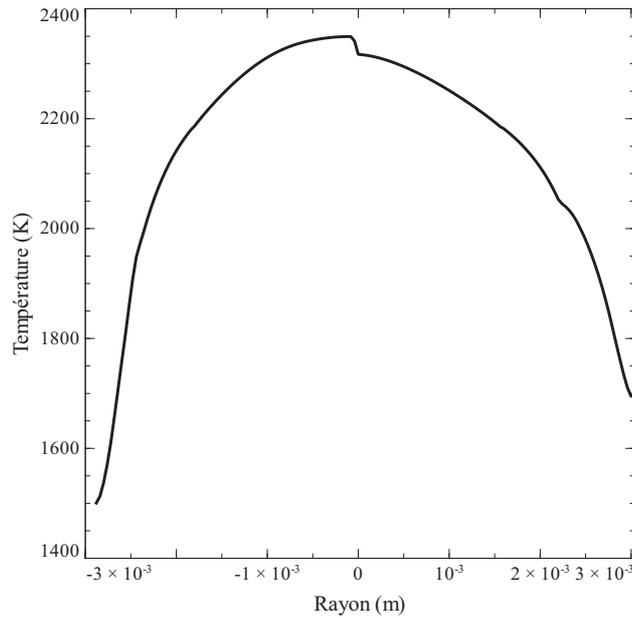


FIGURE 16.13 – Carte de la température d’un jet de plasma laminaire d’argon obtenue à l’aide de la spectroscopie UV du radical OH à 2 cm en aval de l’anode.

obtenue à l’aide de la spectroscopie UV de OH. Cela pourrait s’expliquer par des temps de pose différents. On remarque néanmoins que la température sur l’axe est très proche des 2350 K obtenus par spectroscopie.

Une des caractéristique les plus importantes du jet de plasma est sa température axiale, j’ai donc choisi de calculer la température axiale moyenne obtenue avec la déflectométrie. Toutes les mesures ont été réalisées à 2 cm en aval de la sortie de l’anode afin d’avoir des résultats comparables avec ceux obtenus par spectroscopie. L’indice de réfraction ambiant choisi pour effectuer les mesures est celui de l’air à 20°C, il a été calculé en utilisant les données pour un atmosphère standard du CRC handbook [7].

L’histogramme des indices de réfraction relatifs axiaux est disponible sur la figure 16.14. Il y a de fortes variations d’indice axial en fonction des déflectogrammes considérés, cependant, une valeur moyenne se démarque clairement. Cette dernière correspond à une température axiale de 2600 K. Quelques valeurs d’indice de réfraction aberrantes apparaissent sur l’histogramme. On relève par exemple des indices axiaux relatifs de  $340 \cdot 10^{-6}$  et de  $200 \cdot 10^{-6}$ . Ces valeurs extrêmes doivent être dues au traitement de profils asymétriques. En effet, notre algorithme d’inversion d’Abel traite chacune des ailes d’un profil de manière indépendante. Ainsi, dans le cas d’un profil asymétrique, un aile présentera un indice trop élevée tandis que pour l’autre, l’indice de réfraction sera trop faible.

## 16.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre, l’ensemble des résultats théoriques développés dans la partie 3 de cette thèse a été vérifié expérimentalement. Nous avons montré que la déflectométrie moiré était une méthode de choix pour le diagnostic des zones périphériques d’arc. En outre,

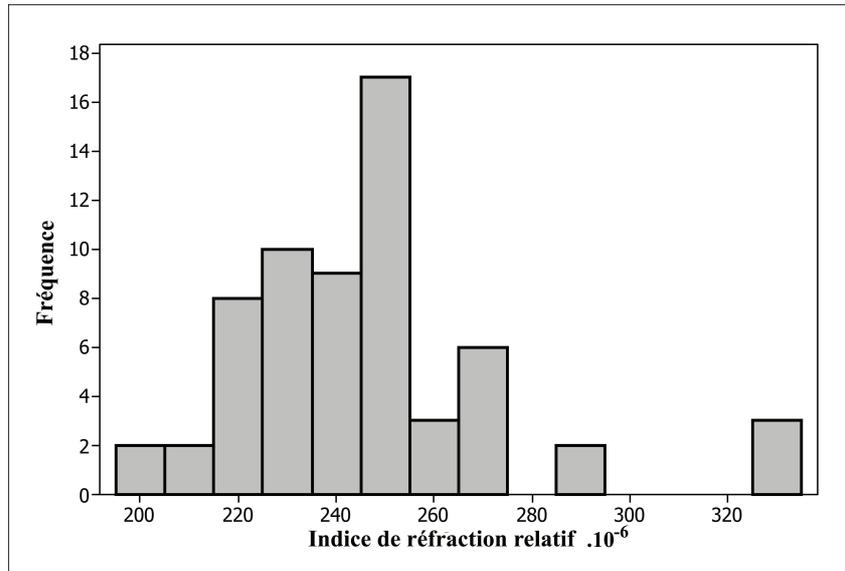


FIGURE 16.14 – Histogramme de la valeur absolue de l'indice de réfraction axial relatif pour un jet de plasma d'argon laminaire à 2cm en aval de l'anode. Les valeurs aberrantes sont issus de l'inversion d'Abel de profils à fort dyssimétrie.

la sensibilité réglable du banc de mesure, ainsi que sa facilité de mise en place font de la déflectométrie une technique de choix pour le diagnostic des décharges hors-équilibre. Dans le chapitre suivant, nous allons nous pencher sur les limites de cette technique en diagnostiquant une décharge hors-équilibre de tout petit diamètre.

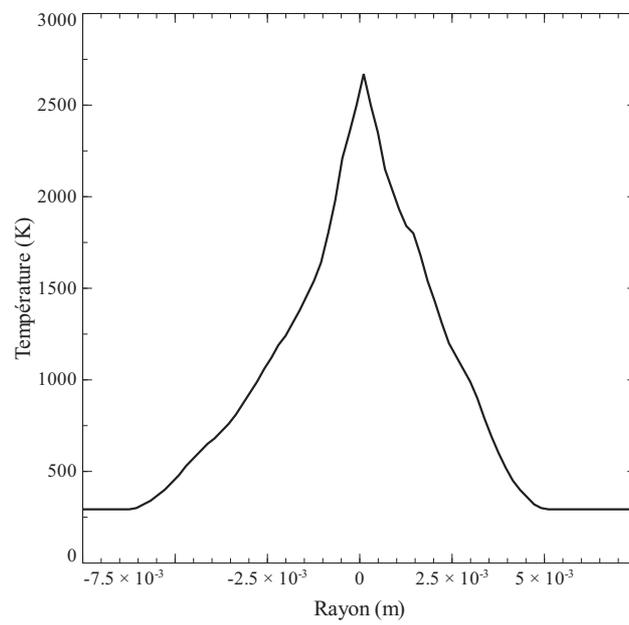


FIGURE 16.15 – Champ de température mesuré par déflectométrie moiré sur un jet de plasma laminaire à 2 cm en aval de l'anode.



## Chapitre 17

# Diagnostic d'une décharge électrique de faible puissance par déflectométrie moirée et spectroscopie UV de OH

Faut toujours emmerder les gens qui ont raison de (ou contre) vous. Voilà une tactique infaillible. La position de repli suprême. La seule véritable force de votre San-A. c'est qu'il emmerde d'instinct et profondément, avec une rare ferveur, tous ceux qui ne sont pas d'accord avec lui.

---

San Antonio

### 17.1 Introduction

Depuis quelques années, les plasmas hors-équilibres sont devenus un sujet d'intérêt croissant. Le développement de ce domaine a donné lieu à de nombreux travaux dans la recherche de nouvelles méthodes de diagnostic utilisables. C'est dans ce contexte que nous avons choisi de développer des méthodes de mesure telle que la déflectométrie ou la spectroscopie UV du radical OH. Jusqu'à présent, les méthodes présentées ont été testées sur des modèles parfaits de zone périphérique d'arc, leur efficacité reste à être prouvée sur des décharges hors équilibre réelles. Nous avons choisi de nous intéresser ici à une décharge de faible intensité de courant brûlant dans l'argon. Après une présentation générale du dispositif expérimental, nous discuterons des mesures macroscopiques qu'il a été possible de réaliser. Deux méthodes de diagnostic ont été utilisées sur la décharge, la déflectométrie moirée et la spectroscopie UV de OH. Nous présenterons les résultats obtenus et nous les comparerons à des données issues d'une simulation

## 17.2 Dispositif expérimental

Le dispositif utilisé ici pour produire une décharge basse intensité est composé d'une alimentation à courant alternatif et d'un petit réacteur plasma (figure 17.1). L'alimentation est constituée d'un auto-transformateur permettant de régler la puissance fournie connecté à un transformateur F.A.R.T capable de délivrer un courant d'une intensité de 100 mA sous une tension de 10 kV. Un pont de diode est utilisé afin de travailler sur une demi alternance uniquement et ainsi conserver les mêmes électrodes comme cathode et anode. Pour cette étude, nous avons choisi de fixer l'intensité du courant moyenne à 50 mA.

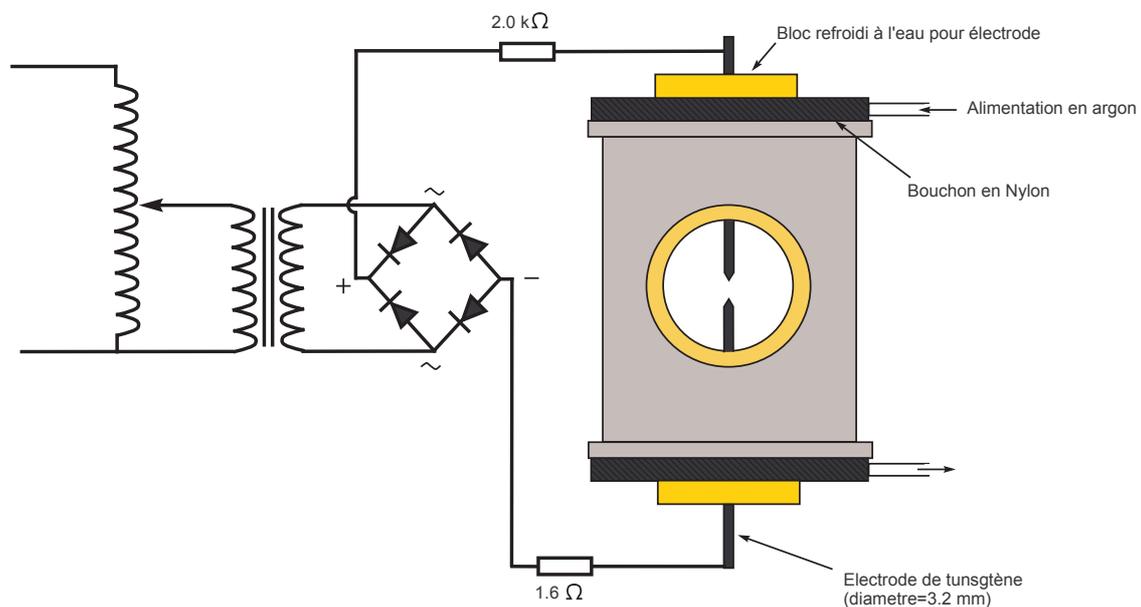


FIGURE 17.1 – Schéma du dispositif expérimental utilisé pour produire la décharge de faible intensité.

Le réacteur plasma est constitué d'un cylindre d'acier inoxydable de 10 cm de diamètre dans lequel deux regards ont été percés. Des bouchons en nylon embarquant des joints toriques sont vissés aux deux extrémités du cylindre de manière à assurer l'étanchéité du réacteur. Des trous dans les blocs de plastique permettent d'alimenter le réacteur en argon.

Deux blocs porte-électrodes en cuivre refroidis par eau sont fixés sur les bouchons en nylon. La distance inter-électrode peut être réglée à l'aide d'une vis de blocage positionnée à l'intérieur de chaque porte-électrode. L'anode et la cathode de notre décharge sont des tiges de tungstène de 3.2 mm de diamètre dont l'extrémité a été taillée en pointe. La distance inter-électrode a été fixée à 5 mm pour cette étude par souci de simplicité de mesure et de stabilité de la colonne.

Afin d'être en mesure d'utiliser le spectre UV du radical OH, les regards ont été dotés de hublots en silice fondue transparents dans l'ultraviolet.

## 17.3 Mesures macroscopiques

Les mesures macroscopiques sont aisées à obtenir. Même si ces dernières sont souvent négligées au profit de méthodes plus complexes, nous avons vu au cours de la partie 2 qu'elles pouvaient fournir des résultats relativement intéressants. La forme de la colonne ainsi que la chute de potentielle aux électrodes peut permettre de catégoriser la décharge tandis que les mesures de courant et de tension fournissent la puissance dissipée dans le plasma. Ces résultats sont de première importance car ils nous permettront d'alimenter une simulation numérique.

### 17.3.1 Forme de la colonne de plasma

Nous avons enregistré la forme de la colonne de plasma grâce à une webcam avec un temps d'exposition ajustable. La fréquence de modulation de l'intensité du courant est de 100 Hz, le temps d'exposition a donc été réglé à 1/100 de seconde de manière à obtenir le rayon maximum de la colonne tout en limitant les artefacts dus aux fluctuations. La figure 17.2 montre que la colonne n'est pas diffuse, la décharge n'est pas de type Glow. D'après la littérature, la décharge étudiée ici se situe dans la zone de transition entre les régimes d'arc et luminescents.



FIGURE 17.2 – Photographie de la décharge prise avec un temps de pose de 1/100 de seconde. La colonne de plasma est quasi-cylindrique et possède un rayon de 0.8 mm.

Le rayon typique de la décharge a été mesuré sur le cliché de la figure 17.2, il est de :

$$r_{column} = 0.82 \pm 0.02 \text{ mm} \quad (17.1)$$

### 17.3.2 Mesures électriques

Les mesures de courant et de tension instantanées ont été enregistrées avec le montage présenté en partie 2 de la thèse. Une sonde haute tension est utilisée pour mesurer la tension entre les électrodes tandis qu'une résistance de 1.6 Ohm permet d'obtenir l'intensité du courant parcourant le circuit. Toutes les mesures ont été faites avec un oscilloscope fonctionnant en potentiel flottant de manière à éviter les fuites de courant vers la terre.

Un enregistrement typique de la chute de potentiel et de l'intensité du courant entre les électrodes en fonction du temps est disponible sur la figure 17.3. A la vue de ces figures, on constate que la chute de potentiel est quasi-constante sur près de 80 % d'une période. Le pic

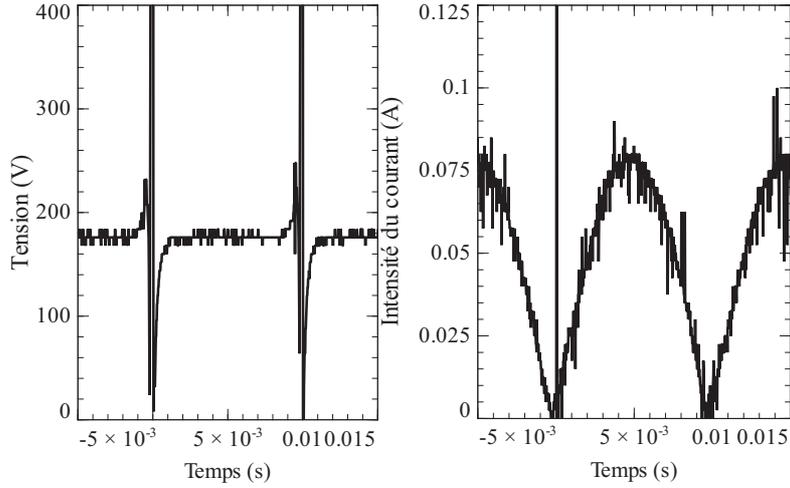


FIGURE 17.3 – Tension et intensité du courant aux bornes de la colonne en fonction du temps. La distance inter-électrodes était fixée à  $l = 5\text{mm}$  et l'intensité moyenne du courant à 50 mA pour cette mesure.

de tension est lié à l'extinction de la décharge. Nous avons mesuré la chute de potentiel pour plusieurs distances inter-électrodes. Même si la valeur moyenne de la tension ne peut être utilisé quantitativement du fait de l'extinction de la décharge, on remarque que cette dernière varie de manière linéaire avec la distance inter-électrodes.

Grâce à ces observations, j'ai décidé d'estimer la puissance injectée dans la colonne de plasma. Ce n'est pas une tâche facile car la tension varie fortement entre le début et la fin de chaque période. J'ai choisi de mesurer la chute de potentiel moyenne dans la zone où  $U$  est presque constant, c'est à dire pour la zone où l'intensité du courant est supérieure à 25 mA.

Pour évaluer la partie de la chute de potentiel due à la colonne, la tension aux bornes des électrodes a été enregistrée pour des distances inter-électrodes comprises entre 1 et 6 mm. Le graphe de la chute de potentiel en fonction de la distance est disponible sur le graphe 17.4.

Une régression linéaire sur ces points expérimentaux donne la chute de potentiel par millimètre de colonne suivante :

$$U_{1mm} = 1.8 \pm 0.2V \quad (17.2)$$

La chute de potentiel aux électrodes est de l'ordre de 160 V, ce qui est caractéristique d'une décharge entre régime luminescent et régime d'arc.

Sur la partie de la période où la tension est quasi-constante, l'intensité du courant moyenne est de :

$$I = 58mA \quad (17.3)$$

Grâce à ces résultats et au rayon de la colonne, on est en mesure de définir une conductivité moyenne pour la décharge. On sait que :

$$I = \int_{Surf} j dS. \quad (17.4)$$

Avec :

$$j = \sigma E. \quad (17.5)$$

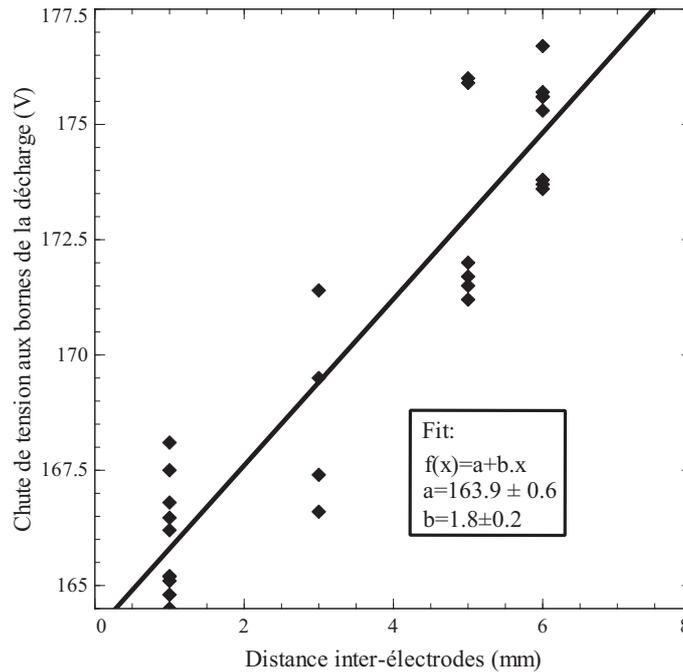


FIGURE 17.4 – Chute de potentiel moyenne aux bornes de la décharge en fonction de la distance inter-électrodes.

On peut donc en déduire :

$$\langle \sigma \rangle = \frac{I}{\pi R^2} \frac{L}{U_{col}} \quad (17.6)$$

$$\langle \sigma \rangle \pm \Delta \langle \sigma \rangle = 16.0 \pm 3.7 \text{ S.m}^{-1} \quad (17.7)$$

Si l'on se réfère aux propriétés d'un plasma d'argon à l'équilibre thermodynamique local, une conductivité électrique de cet ordre correspond à une température du plasma de l'ordre de 5200 K.

## 17.4 Défectométrie moiré

Des mesures de défectométrie moiré ont été menées sur cette décharge de manière à obtenir sa température. Le banc d'interférométrie moiré utilisé est identique à celui présenté dans le chapitre 16 de cette partie. Du fait du volume relativement peu étendu de la décharge, il est difficile de déceler les déflexions de rayons lumineux qu'elle induit. j'ai fait varier la distance inter-réseaux entre 3.5 et 8.6 cm de manière à changer la sensibilité du banc de mesure. Pour une distance inter-réseau de 8.6 cm, la décharge devient perceptible; malheureusement, les franges sont brouillées à son niveau, ce qui empêche toute mesure quantitative sur la colonne. De plus, comme le montrent les ombres des électrodes, l'incertitude sur la position est très élevée du fait de la grande distance inter-réseau.

Il a cependant été possible d'obtenir des résultats quantitatifs avec une distance inter-réseaux plus faible. Comme précédemment, le logiciel IDEA permet d'extraire les phases des

différents déflectogrammes de travail et de référence. La différence de phase est directement reliée à l'indice de réfraction du milieu à sonder :

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{d\beta}{p} = 2\pi \frac{d}{p} \frac{d}{dy} \int_{\text{corde}} \delta n dz. \quad (17.8)$$

Mon programme d'inversion d'Abel a été utilisé pour calculer la carte de l'indice de réfraction à partir de la différence de phase. Finalement, l'indice de réfraction a été relié à la température du milieu grâce à la loi de Gladstone-Dale.

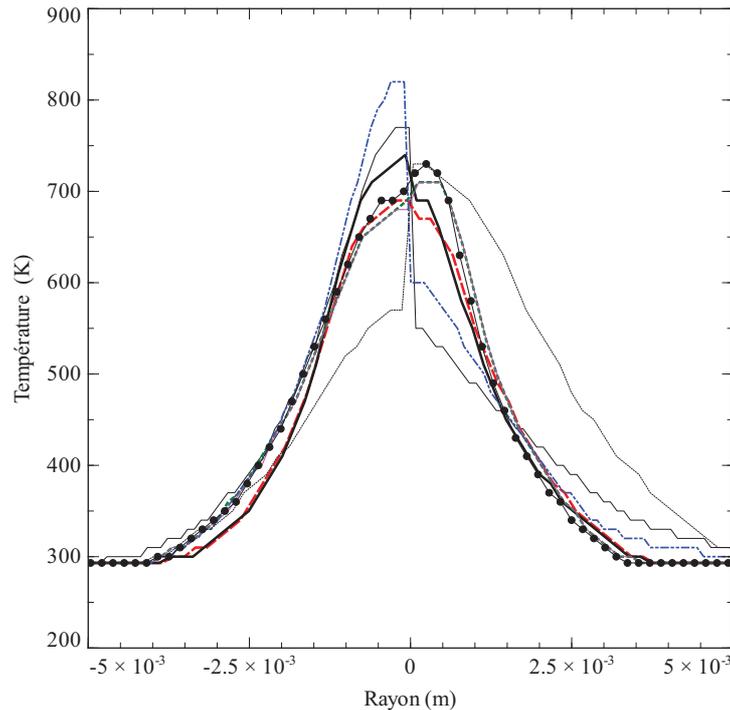


FIGURE 17.5 – Carte de la température obtenue par déflectométrie moiré à 2.5 mm de la cathode. La température maximum mesurée est de l'ordre de 700 K, ce qui semble relativement faible au regard de la conductivité électrique moyenne de la décharge. Le rayon de la zone perturbée thermiquement peut être obtenue en examinant les bords des déflectogramme : on constate que l'argon est à température ambiante pour un rayon de 6 mm. Certains résultats du graphique présentent un saut de température en  $r = 0m$ , cela est due à une asymétrie de la décharge lors de la prise de mesure et à notre algorithme d'inversion d'Abel qui traite indépendamment les ailes droite et gauche des profils.

La figure 17.5 présente quelques cartes de température qui ont été obtenues avec différents déflectogrammes de la décharge. Du fait du manque de sensibilité et de la faible taille de la colonne de plasma, cette dernière n'est pas visible sur les déflectogrammes, il semble donc que sa température ne soit pas mesurée. La température maximum au niveau de l'axe de la décharge est seulement de 700 K, on suppose donc que c'est la température des zones périphériques de la colonne qui est mesurée.

Comme on peut le constater, certains enregistrements ont été effectués lorsque le plasma n'était pas cylindrique. le programme d'inversion d'Abel traite chaque aile du profil obtenu de manière séparée, il en résulte des carte de température avec des dissymétries, reconnaissable par un échelon au centre du profil.

Outre les profils de températures, le résultat le plus intéressant que l'on peut tirer des déflectogrammes est l'ampleur de la zone affectée thermiquement par la colonne : le rayon de la zone chauffée par la présence du plasma est de l'ordre de 5 mm. L'influence de la température des électrodes sur ces résultats est très faible, les mesures étant prises rapidement après l'allumage du plasma de manière à ce que l'échauffement des tiges de tungstène soit négligeable.

## 17.5 Spectroscopie moléculaire

Malgré l'atmosphère d'Argon régnant dans le réacteur, le spectre UV d'OH est observable dans la colonne de plasma. Deux hypothèses permettent d'expliquer la présence du radical hydroxyle : quand le plasma est allumé, les électrodes chauffent jusqu'à une centaine de degré Celsius. Elles traversent les bouchons de Nylon et sont connectées aux refroidisseurs. En conséquence, le Nylon entourant l'électrode peut brûler légèrement et produire des vapeurs de nylon, un précurseur de OH. Une autre explication concernant la présence d'OH dans le plasma pourrait être les traces d'eau dans la bouteille d'argon, dans les circuits d'alimentation et le réacteur.

Quoi qu'il en soit, la présence de OH est une aubaine pour le diagnostic de la décharge puisqu'on a montré que sa température rotationnelle était proche de la température cinétique.

### 17.5.1 Dispositif expérimental

Comme précédemment, une décharge d'intensité moyenne de 50 mA brûlant dans l'argon est étudiée. Là encore, la distance inter-électrodes est fixée à 5 mm et la zone d'étude se situe au centre de la colonne. La chaîne d'acquisition spectroscopique est présentée sur la figure 17.6. Une lentille en  $CaF_2$  est utilisée pour former l'image de la colonne positive tandis qu'une fibre optique en quartz, transparente dans l'UV, est utilisée pour sélectionner la zone à diagnostiquer.

Un monochromateur de type Ebert-Fastié avec une distance focale de 0.5 m et un réseau de 2400 traits par mm permet de former le spectre. Finalement, l'enregistrement des spectres est assuré par une caméra PIXIS 250 munie d'un capteur CCD. Afin de choisir correctement l'emplacement où effectuer le diagnostic, la position de la lentille est réglée de manière à avoir un grossissement de l'ordre de 3. Un écran avec un trou pour la tête de la fibre optique est utilisé afin de repérer le plan focal de la lentille.

Finalement, ce montage permet d'enregistrer la lumière issue de la corde passant par le centre de la décharge.

### 17.5.2 Résultats

De nombreux spectres UV de OH ont été enregistrés au centre de la colonne de plasma. Un résultat typique est présenté sur la figure 17.7. La mesure de température a été effectuée en utilisant les amplitudes des groupes de raies  $G_0$  et  $G_3$ , ce qui conduit à des résultats légèrement différents.

Quelques résultats sont présentés dans le tableau 17.5.2 de manière à montrer la reproductibilité des mesures.

Même si les mesures spectroscopiques ont été effectuées sur toute une corde de la colonne plasma, ce n'est pas la température moyenne qui a été enregistrée. Comme l'intensité des

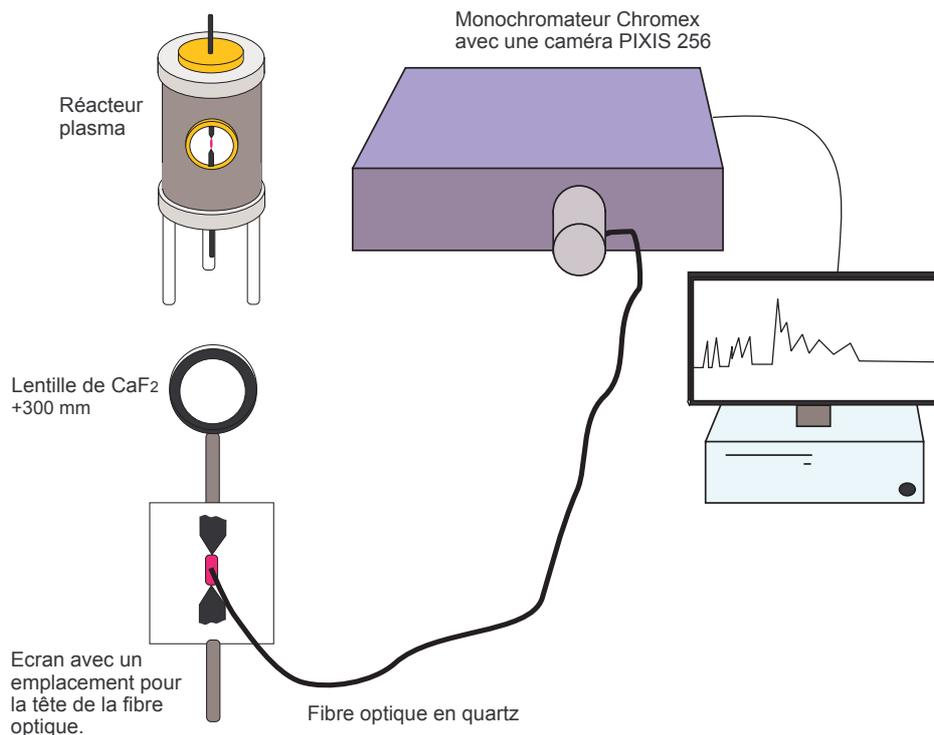


FIGURE 17.6 – Schéma du dispositif expérimental utilisé pour enregistrer les spectres UV d'OH.

raies varie de manière exponentielle avec la température, seule la partie la plus chaude du plasma est observable. La température mesurée est celle sur l'axe de la colonne, elle est de 1400 K environ. Ce résultat est bien loin de la température obtenue en utilisant la conductivité électrique d'un plasma d'argon à l'équilibre thermodynamique local, cela peut s'expliquer par le fort déséquilibre thermodynamique qui règne dans la décharge. On remarque aussi que la température de la décharge obtenue avec la spectroscopie UV de OH est très différente des résultats issus de la déflectométrie moiré. Nous avons vu que la décharge était invisible sur les déflectogrammes ce qui signifie que cette technique n'est pas bien adaptée pour mesurer la température de décharges si petite et si "froide".

De manière à relier les température obtenues avec les deux méthodes, j'ai effectué différentes simulations numériques. Deux simulations serviront à valider nos hypothèses sur les zones diagnostiquées avec les différentes méthodes de mesures tandis qu'une simulation thermique de l'arc permettra de relier les deux jeux de mesures obtenus.

## 17.6 Interprétation des mesures moyennes de déflectométrie et de spectroscopie

### 17.6.1 Simulation des mesures de déflectométrie moiré

Les résultats obtenus avec la déflectométrie moiré et la spectroscopie UV du radical OH sont très différents. Afin de les interpréter et de les relier, j'ai simulé la mesure des quantités

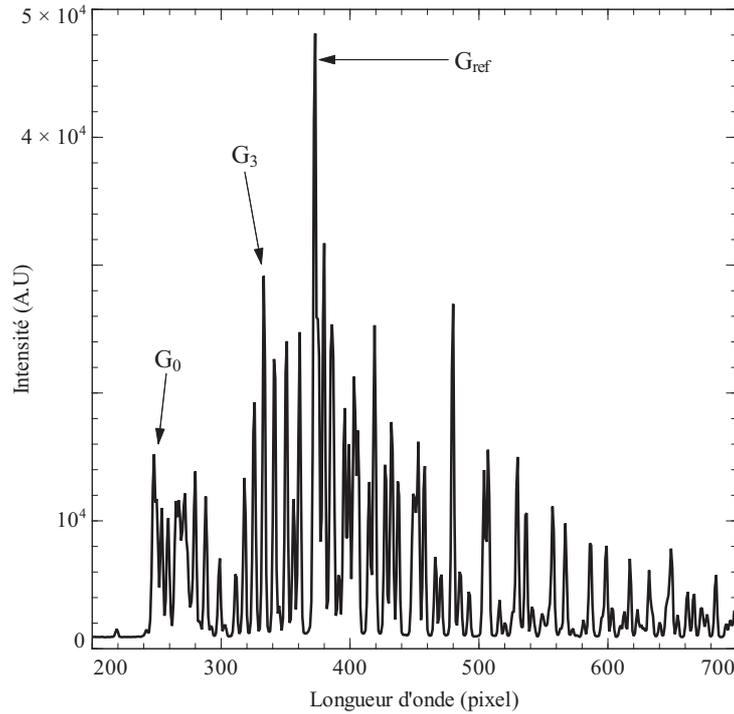


FIGURE 17.7 – Exemple typique de spectre UV du radical OH obtenu au centre de la décharge. L'amplitude importante de  $G_3$  par rapport à  $G_{ref}$  ainsi que la faible amplitude du groupe  $G_0$  est caractéristique d'une température rotationnelle inférieure à 2000 K.

d'intérêts, intensité des raie et gradients d'indice de réfraction, sur une décharge qui fluctue. Grâce aux mesures électriques, on sait que la colonne de plasma s'éteint à une fréquence de 100 Hz. De plus, la déflectométrie nous donne une zone chauffée relativement large, avec au centre, une température maximum de 700 K tandis que la spectroscopie fournit des résultats sur une toute petite zone correspondant au centre de la colonne de plasma. A ce niveau, la température maximum est de 1400 K. A l'aide de ces informations, j'ai construit un profil 2D de température en utilisant deux sinus carrés superposés :  $T_{const}$  et  $T_{osci}$ . Le premier sinus est constant dans le temps et s'annule pour un rayon de  $r = 6mm$  ; Son maximum est de 700K. Le second,  $T_{osci}$  à le même rayon que la colonne de plasma, 0.8 mm, et oscille avec une fréquence de 100 Hz. Son maximum est la aussi fixé à 700 K.

$$T_{const}(r, t) = 293 + 407 \cdot \sin^2 \left[ \frac{2\pi}{0.024} (r - 0.006) \right] \quad r < 0.006 \quad (17.9)$$

$$T_{osci}(r, t) = \frac{1}{2} (1 - \sin(2\pi \cdot 100 \cdot t)) \cdot 700 \cdot \sin^2 \left[ \frac{2\pi}{0.0032} (r + 8.10^{-4}) \right] \quad r < 8.10^{-4} \quad (17.10)$$

Avec la loi de Gladstone-Dale, on est en mesure de calculer la carte d'indice de réfraction relatif au profil de température. J'ai rédigé un programme qui calcule l'intégrale du gradient d'indice de réfraction sur les cordes parallèles à la direction de propagation du faisceau lumineux test. Cette grandeur est fondamentalement la quantité mesurée lorsqu'on effectue des

<i>Spectrum</i>	(G0) $T_{rot}$ (K)	(G3) $T_{rot}$ (K)
A	1400	1350
B	1500	1500
C	1500	1375
D	1400	1450
E	1400	1550

TABLE 17.1 – Résumé des températures rotationnelles obtenues à l'aide de divers spectres de OH au centre de la décharge. Comme le groupe de raie  $G_3$  est le plus sensible dans la gamme de température 300-1600 K,  $T_{rot}$  à été calculé à l'aide de l'amplitude de  $G_3$  et de  $G_0$ . Les mesures sont reproductibles et fournissent une température au centre de la colonne de 1450 K.

mesures par déflectométrie. Trois cas différents ont été simulés afin d'examiner l'influence du comportement transitoire de la colonne de plasma sur les mesures. Le premier correspond au calcul du gradient d'indice de réfraction intégré en prenant en compte  $T_{const}$  uniquement. Pour le second cas,  $t$  a été fixé à zéro de manière à avoir un profil de température constant dans le temps. Finalement, dans le dernier cas, la mesure du gradient d'indice intégré à été menée sur une période de 1/100 de seconde.

Les résultats sont présentés sur le graphique 17.8. Comme l'indice de réfraction varie en  $1/T$ , il est évident que les gradients d'indice dus à la colonne de plasma seront plus faibles que ceux issus des zones chaudes environnantes. Le résultat avec un profil de température constant  $T_{const}(r, t = 0) + T_{osci}(r, t = 0)$  prouve cela de manière claire. De plus, comme le rayon de la colonne est six fois plus faible que le rayon de la zone affectée thermiquement, le gradient d'indice de réfraction intégré sur cette zone est petit.

Si l'on compare les résultats moyens et ceux obtenus avec le profil de température constant, on remarque qu'ils sont presque identiques. La déflectométrie tend à souligner les zones de haute température.

Malheureusement, la configuration de la décharge nous empêche d'effectuer son diagnostic complet car la taille de cette dernière est en dessous de la limite de sensibilité de notre déflectomètre.

### 17.6.2 Simulation des mesures du spectre UV d'OH

Grâce à l'investigation expérimentale de la colonne, on a mis en évidence que seule la partie visible émettait assez de rayonnement pour permettre l'enregistrement du spectre UV du radical OH. j'ai donc choisi d'effectuer une simulation transitoire de la colonne afin de comprendre la mesure de température obtenue à l'aide de la spectroscopie.

Pour cela, on décrit la colonne de plasma grâce à une fonction dépendant du temps uniquement :

$$T_{col} = 1000 + 500.\sin(2\pi.100.t) \quad (17.11)$$

Quatre cas ont été étudiés : les trois premiers correspondent à une température choisie comme constante à 500, 1000 et 1500 K tandis que pour le dernier cas, la température suit la fonction  $T_{col}$ .

Pour simuler le spectre UV du radical OH en fonction de la température de la colonne, nous avons utilisé le programme présenté dans la partie 4 légèrement modifié : l'hypothèse de

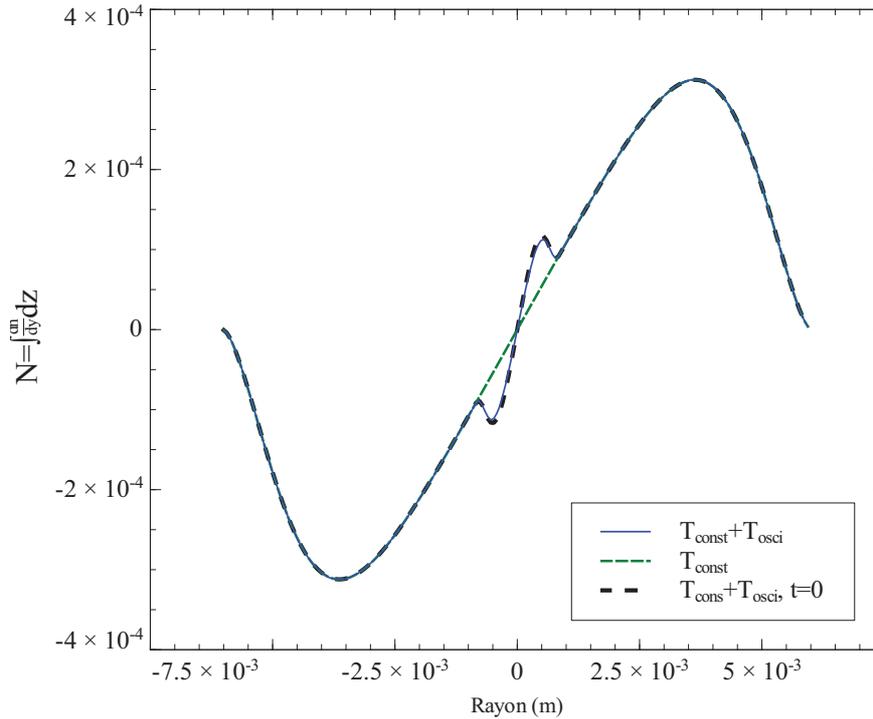


FIGURE 17.8 – Gradient d'indice de réfraction intégré sur les cordes de la colonne pour différents profils de température. On remarque que la valeur moyenne temporelle de  $N$  est proche de celle obtenue avec  $T_{const} + T_{osci}$  pour  $t = 0$ . L'angle de déflexion induit par la colonne de plasma est au minimum d'un ordre de grandeur plus faible que celle induite par les gaz chauds qui l'entourent.

l'ETL était considérée comme valide.

j'ai porté mon dévolu sur la valeur moyenne des raies de la branche Q1 de la transition  $A^2\Sigma, v'' = 0 \rightarrow X^2\Pi, v' = 0$  car ces dernières sont représentatives des zones spectrales utilisées pour la mesure de la température rotationnelle dans la décharge. L'intensité absolue du spectre varie grandement avec la température, cependant, la méthode de mesure de  $T_{rot}$  est uniquement basée sur des rapports d'intensité de raies. En conséquence, en suivant certains ratios de raies de la branche Q1, il est possible de déterminer la température moyenne mesurée dans la colonne. La figure 17.9 présente les raies de Q1 normalisées sur l'intensité de la première raie de la branche. Les résultats obtenus avec la fonction  $T_{col}$  sont très proches de ceux obtenus avec une température constante de 1500 K. En outre, on constate que les résultats obtenus pour une température de 1000 K sont très différents ce qui ne laisse aucun doute sur l'origine de la température mesurée : les mesures spectroscopiques moyennes fournissent des informations sur la température rotationnelle maximum de la colonne.

### 17.6.3 Modélisation de la colonne de plasma

À l'aide de l'intensité du courant moyenne et de la chute de tension par millimètre de plasma, l'accès au terme source de la colonne est aisé. j'ai effectué une simulation axi-symétrique en deux dimensions basée sur les transferts thermiques afin de tenter de relier les mesures issues de la spectroscopie et de la déflectométrie moiré.

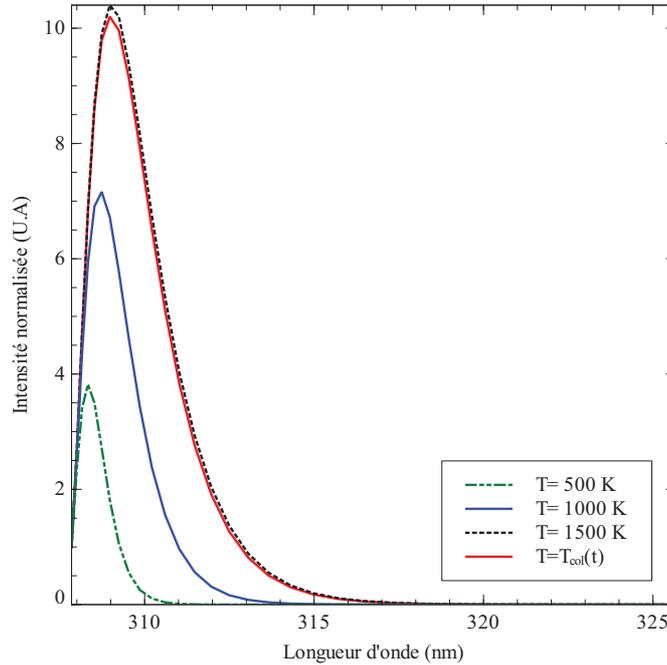


FIGURE 17.9 – Simulation des ratios d'intensité des raies de la branche Q1 de la transition  $A\ ^2\Sigma, v'' = 0 \rightarrow X\ ^2\Pi, v' = 0$  pour différentes températures. La moyenne temporelle des ratios est proche de ceux obtenus pour une température de 1500 K. La mesure spectroscopique au centre de la colonne fournit donc des informations sur la température maximum que peut atteindre celle-ci.

Par souci de simplicité, quelques hypothèses doivent être faites pour mener à bien cette simulation. Tout d'abord, il n'y a pas de gradients de pression dans le réacteur. Ensuite, l'ensemble des mouvements de gaz dans le réacteur sont dus à la convection naturelle. Le volume de la colonne étant très faible par rapport aux dimensions du réacteur, on considère que la convection se fait uniquement selon la direction des  $z$ . Finalement, le problème est défini comme étant stationnaire et le terme source constant dans le temps. Cette hypothèse mène à une surestimation du terme source d'environ 20 % par rapport à la configuration expérimentale.

Les équations et l'algorithme utilisés ici sont présentés dans le chapitre modélisation de la partie 2 de cette thèse : seules une équation d'énergie en deux dimensions et une équation de Navier-Stokes selon  $z$  sont résolues.

On sait, grâce aux mesures de déflectométrie moirée, que l'argon est à température ambiante dans le réacteur pour un rayon supérieur à 6mm du centre de la colonne de plasma. Cela m'a mené à choisir un domaine de calcul d'un rayon de  $R = 6\text{mm}$  et d'une hauteur de  $H = 5\text{cm}$ . Le choix de la condition à la limite  $r = R$  est évidente, on choisit une température constante de 300 K. À cause de la symétrie du problème, la condition à la limite  $r = 0$  pour la température a été choisie comme  $\frac{dT}{dz}|_{z=5\text{cm}} = 0$ . Pour les conditions aux limites de la vitesse, on a fixé en haut et en bas du domaine de calcul la condition  $\text{div}(\rho v_z) = 0$  de manière à assurer la conservation de la masse de fluide. Le terme source a été calculé à l'aide des mesures instantanées de courant et de tension, il est considéré constant en espace et en temps et a été positionné sur le domaine de résolution dans la zone entre  $z = 0.005 - 0.01\text{m}$  et  $r = 0 - 0.0008$

m. Le code source de cette simulation est disponible en annexe.

## Résultats

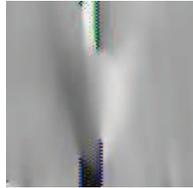


FIGURE 17.10 – Différence de phase obtenue avec la déflectométrie moiré sur la décharge. Celle-ci est proportionnelle à l'indice de réfraction intégré et permet de juger qualitativement de la température du gaz.

La carte de la température de la décharge obtenue à l'aide du modèle est disponible sur la figure 17.11. On remarque premièrement que la forme du profil de température est similaire à celle obtenue par déflectométrie moiré (fig.17.10). Même si la différence de phase présentée sur cette figure n'est pas un indicateur direct de la température, elle est liée au gradient d'indice de réfraction intégré. Grâce à cela, la différence de phase permet de juger qualitativement de la zone perturbée thermiquement. La température obtenue à l'extérieur de la colonne est beaucoup plus élevée que celle mesurée à l'aide de la déflectométrie moiré. À titre d'exemple, la température à  $z=2.5$  mm du centre de la colonne est de 540 K pour la simulation tandis que l'interférométrie moiré donne une température de 360 K. Cette différence de résultat pourrait s'expliquer par le terme source qui est supposé constant dans la simulation.

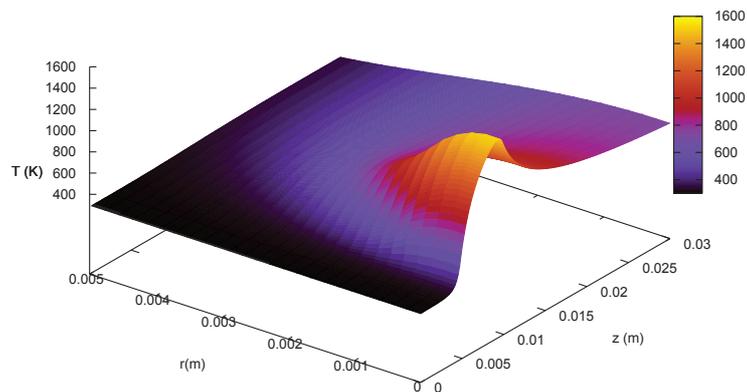


FIGURE 17.11 – Carte de la température de la colonne de plasma d'argon et du gaz environnant obtenu par simulation numérique.

Le profil de température sur l'axe de la colonne est présenté sur la figure 17.12. La température moyenne au centre de la colonne est d'environ 1550 K, ce qui est très proche de la température rotationnelle mesurée par spectroscopie UV du radical OH. La non-prise en compte

des électrodes conduit à une sous-estimation de la température car ces dernières chauffent l'argon et limitent la convection au centre de la colonne.

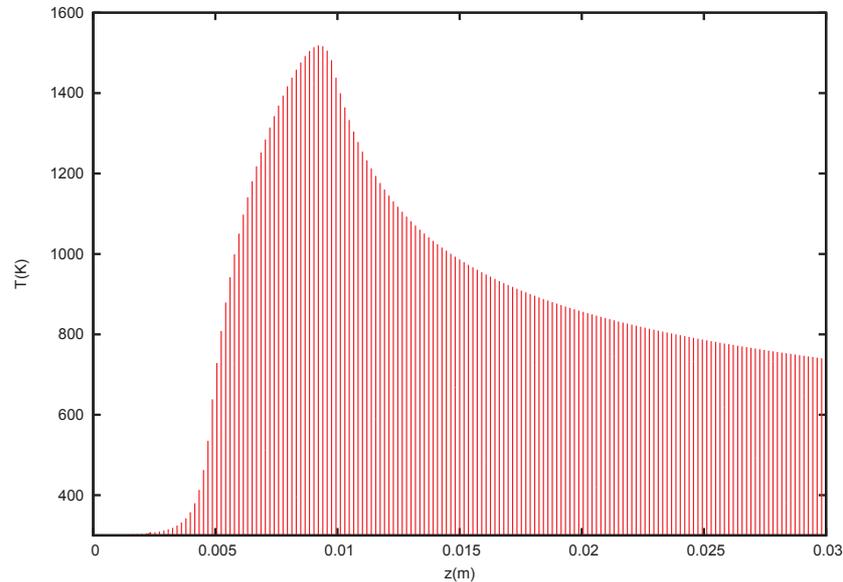


FIGURE 17.12 – Température en fonction de  $z$  obtenue par simulation numérique au niveau de l'axe de la colonne.

## 17.7 Conclusion

Les méthodes de diagnostic développées au cours de cette thèse sont particulièrement bien adaptées au diagnostic de décharges de faible puissance. La déflectométrie fournit des résultats sur la colonne de plasma ainsi que sur le gaz à sa périphérie. Nous avons cependant entraperçus ses limites : il est difficile de sonder des milieux de taille réduite et/ou dont la température est relativement élevée. En effet, comme l'indice de réfraction varie en  $1/T$ , la déflectométrie sera peu sensible pour les hautes températures. De plus, ce sont les gradients d'indice intégrés sur une corde qui permettent la mesure de la température. Une décharge de petite taille donnera, du fait de ces dimensions une intégrale faible, en dessous des limites de détection des systèmes de mesure.

Malgré cela, cette méthode présente l'intérêt de sonder le pourtour de la décharge. Cela présente un fort intérêt en chimie par exemple, où les gradients thermiques autour des décharges contrôlent les réactions chimiques (recuit et formations des précurseurs par exemple).

Dès qu'une décharge rayonne suffisamment et contient des radicaux hydroxyl, il est possible d'obtenir sa température rotationnelle et vibrationnelle. Nous avons vu ici qu'avec un montage simple, nous étions en mesure d'obtenir la température maximum des lourds dans la colonne. Pour obtenir des informations plus complètes telle que la température vibrationnelle, il est nécessaire d'effectuer le diagnostic d'une tranche complète de plasma : la méthode de mesure étant basée sur le rapport de valeurs moyennes de spectres sur la bande 0-0 et 1-1, il est impossible d'obtenir des résultats en utilisant la lumière issue d'une corde : les zones de faible température vibrationnelle fausseraient la mesure. La température des lourds mesurée par

spectroscopie est loin de celle que l'on a calculé avec la conductivité électrique moyenne, ce qui est signe de déséquilibre dans le plasma. En moyenne, il semble y avoir autant d'électrons dans la décharge que pour un plasma à l'équilibre à 5200 K.



# Bibliographie

- [1] R.J. Goldstein. *Fluid mechanics measurements*. CRC, 1996.
- [2] G. S.Settles. *Schlieren and Shadowgraph Techniques*. Springer, 2001.
- [3] G. de Izarra and C. de Izarra. Quantitative shadowgraphy made easy. *Eur. J. Phys.*, 33 : 1821–1842, 2012.
- [4] C. de Izarra. UV OH spectrum used as a molecular pyrometer. *Journal of Physics D Applied Physics*, 33 :1697–1704, July 2000.
- [5] A. Gopal, S. Minardi, and M. Tatarakis. Quantitative two-dimensional shadowgraphic set-up for high-sensitivity measurement of low-density laser-plasmas. *Optics Letters*, 32 (10) :1238–1240, 2007.
- [6] R. W. Lewis, R. E. Teets, J. A. Sell, and T. A. Seder. Temperature measurements in a laser-heated gas by quantitative shadowgraphy. *Applied Optics*, 26(17) :3695–3704, 1987.
- [7] David R. Lide. *CRC Handbook of chemistry and physics*. CRC, 84 edition, 2003.



# Conclusion générale

Au cours de cette thèse, nous nous sommes efforcé de développer des méthodes de diagnostic permettant de sonder les zones périphériques d'arcs électriques et les plasmas hors-équilibre. Notre étude a débuté par la recherche de méthodes de diagnostic communément utilisées afin de mettre en évidence leurs limitations. Nous avons pu montrer à cette occasion que la majorité d'entre elles n'étaient pas exploitables pour aller diagnostiquer les zones périphériques, là où la température est comprise entre l'ambiante et 8000 K.

Avec un raisonnement simple, nous avons démontré que les zones périphériques étaient de première importance pour nombre de procédés puisque le nombre de particules qu'elles contiennent est au bas mot de un ordre de grandeur supérieur à celui du cœur de la colonne.

Pour mesurer les champs de température dans ces zones, nous avons choisi d'exploiter l'indice de réfraction des gaz et la spectroscopie moléculaire. Deux méthodes de diagnostic innovantes basées sur l'indice de réfraction ont ainsi été développées. L'ombroscopie, une méthode réputée qualitative et généralement utilisée pour visualiser des écoulement a été étudiée. Nous avons prouvé à cette occasion que les mesures quantitatives étaient possibles. Le traitement des données, une étape critique pour la qualité des résultats a été développée avec attention. On montre que la résolution de l'équation de Poisson intervenant dans cette procédure est très sensible à la valeur moyenne du contraste. Un banc de shadowgraphie quantitative simple a été présenté puis testé sur un jet de plasma d'argon laminaire. Malgré la simplicité et le coût relativement réduit du dispositif expérimental, les résultats obtenus sont au moins aussi bons que ceux issus de l'interférométrie. En outre, cette méthode n'est pas perturbée par les gradients d'indices, il est donc possible de diagnostiquer les bords de colonne d'arcs sans problèmes. L'étude du jet de plasma fait apparaître une limitation intrinsèque à la méthode : comme l'indice de réfraction varie en  $1/T$ , l'ombroscopie n'est sensible dans le cas de l'argon que pour une gamme de température comprise entre 300 et 4500 K. Il en va bien sur de même pour l'ensemble des méthodes basées sur l'indice de réfraction.

La déflectométrie moiré a été largement développée au cours de cette thèse ; Un long travail théorique a été effectué afin d'obtenir des résultats complets et exploitables aussi bien au niveau académique (optique géométrique) que pour la recherche (optique de Fourier). On a montré par exemple que les déflectogrammes pouvaient être enregistrés directement à la sortie du déflectomètre sans problèmes. On a aussi prouvé que la diffraction n'était pas un phénomène parasite comme mentionné dans divers articles mais était à l'origine de la mesure de la dérivée de la phase. Outre les contraintes de réglage que nous avons souligné, nous avons fait apparaître les avantages de ce genre de dispositif comme sa sensibilité réglable ou bien encore son insensibilité au bruit lorsqu'il s'agit d'effectuer une inversion d'Abel.

Dans la dernière partie de la thèse, le dispositif expérimental développé au laboratoire est présenté et un accent tout particulier est mis sur son réglage. Il a permis dans un premier temps de valider l'ensemble des relations théoriques obtenues et dans un second temps de sonder un jet

de plasma d'argon laminaire. Les résultats sont du même ordre de grandeur que ceux obtenus à l'aide de la spectroscopie UV de OH. Malheureusement, du fait de la différence de temps de pose et des fluctuations du jet, les résultats obtenus ne sont pas identiques. La méthode donne néanmoins des résultats reproductibles comme le montrent les nombreuses mesures obtenues ainsi que l'étude d'une petite décharge hors-équilibre dans l'argon. Cette dernière étude pousse le déflectomètre présenté dans ces derniers retranchements : Les mesures sur un arc fluctuant grandement, de faible température, et dont le rayon est inférieur au millimètre permet de montrer les limites de la déflectométrie moiré ; Il a été impossible d'obtenir des informations sur la colonne de plasma. La méthode reste cependant indispensable pour le diagnostic puisque qu'elle permet de sonder les zones périphériques de cette colonne.

Concernant la spectroscopie moléculaire, nous avons porté notre dévolu sur le spectre UV de OH car le radical hydroxyl se retrouve dans de très nombreuses chimies. À l'aide d'une simulation numérique, nous avons construit des spectres UV de OH synthétiques. L'étude de ces spectres a mené à la construction de méthodes de mesures de la température rotationnelle et vibrationnelle utilisant des amplitudes de groupes de raies, ainsi que des mesures de valeur moyenne sur des zones spectrales données. Afin de s'affranchir des erreurs d'étalonnages, l'ensemble des quantités utilisées est repérable via des grandeurs directement disponibles sur les spectres. Par rapport aux travaux précédents de Izarra, les nôtres fournissent des méthodes utilisables sur une large gamme de résolution, aussi bien pour les très faibles températures rotationnelles (300-1500 K) que pour les températures plus élevées (1000-8000 K). Elles fournissent en outre un moyen d'accéder aux températures vibrationnelles, chose qui n'était jusque là pas faisable simplement.

Du fait de la plage particulièrement étendue de résolution et de température traitée, les méthodes obtenues ont tout d'abord été testées à l'aide de spectres construits à "l'aveugle" sur le logiciel LIFBASE. Les résultats sont très proches des températures théoriques.

Finalement, la méthode de mesure pour les faibles températures rotationnelles a aussi été mise en œuvre lors du diagnostic d'une petite décharge hors équilibre dans l'argon. Les mesures obtenues sont très proches de la température du cœur de la colonne calculée à l'aide de la simulation thermique et des grandeurs macroscopique.

Cette méthode de mesure semble donc bien adaptée aux plasmas hors-équilibre ainsi qu'aux parties des zones périphériques assez chaudes pour rayonner. Afin qu'elle fournisse des résultats vraiment intéressants, il serait nécessaire de se pencher sur les échanges d'énergie vers la vibration afin d'interpréter plus en détails la température vibrationnelle.

Pour conclure, l'ensemble des méthodes de mesure développées au cours de ces trois ans de thèse se sont montrés efficaces sur des modèles parfaits de zones périphériques. Il serait intéressant de les appliquer sur des décharges à buts industriels, où l'indice de réfractif du gaz et la composition sont autrement plus complexes que ceux de nos jets de plasmas d'argon laminaires. Au vu des nombreuses données disponibles dans la littérature, la mesure de température dans des milieux gazeux complexe semble être très accessible. Outre cet aspect transfert de technologie, il serait intéressant de développer les utilisations académiques des méthodes présentées pour mettre au point des travaux pratiques ou des exercices de travaux dirigés. J'ai initié ce travail à travers la construction d'un banc d'ombroscopie abordable (quelques dizaines d'euros) et la publication d'un article didactique : "shadowgraphy made easy". En poursuivant ces travaux avec l'effet moiré, de nombreux domaines tels que la mécanique du solide ou des fluides pourraient ainsi être abordés à travers son utilisation.



Grégoire de Izarra

## Diagnostic des zones périphériques d'arcs électriques

Jusqu'à récemment, la plupart des applications des arcs électriques mettaient en œuvre les propriétés du cœur de la colonne, un effort particulier a donc été effectué pour développer des méthodes de caractérisation de ces zones dont la température moyenne est de l'ordre de 10000 K. Avec le développement de la plasma-chimie, le diagnostic des zones périphériques d'arcs et des décharges hors équilibre est devenu un enjeu primordial. Les méthodes de mesure classiques sont mal adaptées pour cette tâche ; le but du travail présenté dans cette thèse se résume donc au développement et à la validation de techniques de diagnostic adaptées à ces zones, dont la température cinétique n'excède pas 8000 K. Deux méthodes innovantes basées sur l'indice de réfraction, l'ombroscopie quantitative et la déflectométrie moirée, ont été étudiées en détails. Les résultats théoriques ainsi que le traitement des données obtenues ont été validés sur un jet de plasma laminaire d'argon, un modèle parfait de zone périphérique. Pour sonder les décharges hors équilibre, l'utilisation du spectre UV de OH a été aussi envisagée. À cette occasion, un programme de simulation de spectre moléculaire a été développé. L'étude des spectres synthétiques obtenus a permis de mettre au point des méthodes de mesure simples de la température rotationnelle et vibrationnelle pour une large gamme de résolution. Une des méthodes développées a été mise en œuvre sur une décharge à faible intensité de courant. On montre que les résultats obtenus par spectroscopie moléculaire sur le radical OH sont très proches de ceux obtenus à l'aide d'une simulation.

Mots clés : arc électrique, indice de réfraction, spectre UV de OH, ombroscopie, déflectométrie moirée.

### Diagnostic of the electrical arcs' peripheral area.

Until recently, most of electrical arcs applications were dealing with the properties of the centre of the plasma column, a large number of works was then done to develop diagnostic techniques dedicated to those area where the mean temperature is about 10000 K. With the emergence of plasma chemistry, the diagnostic of arc's peripheral areas and un-equilibrium discharges become a goal of prime importance. Classical diagnostic techniques are not adapted to those objects where the maximum temperature is around 8000 K ; the principal aim of this work was to develop and check diagnostic techniques. Two inovating techniques based on refractive index, the quantitative shadowgraphy and the moiré deflectometry were studied extensively and checked on a laminar plasma jet, a perfect model of arc's peripheral area.

To probe unequilibrium discharge, the use of UV OH spectrum was considered. At this occasion, a spectrum simulation software was written. The study of synthetic spectra lead to the creation of simple measurement methods of rotationnal and vibrationnal OH temperature for a large range of resolution. Those methods was checked on a low power electric discharge. It can be shown that result from molecular spectroscopy are close to those obtained by simulation.

Keywords : shadowgraphy, refractive index of gases, moiré deflectometry, UV OH spectrum.

Groupe de Recherche sur l'Énergetique des Milieux Ionisés, Université d'Orléans -  
CNRS, Faculté des Sciences, Site de Bourges, rue Gaston Berger, BP 4043, 18028 BOURGES Cedex,  
France.