

NNT : 2013 EMSE 0699

# THÈSE

présentée par

Arnaud DEREIMS  
Ingénieur de l'Université de Technologie de Compiègne

pour obtenir le grade de

Docteur de l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne

Spécialité : Mécanique et Ingénierie

## Simulation industrielle des procédés d'élaboration de pièces composites par infusion de résine : couplage fluide / solide poreux très faiblement perméable en grandes déformations

soutenue publiquement à Saint-Étienne, le 08 juillet 2013

### Membres du jury

<i>Président :</i>	Michel POTIER-FERRY	Prof., Université de Lorraine, Metz
<i>Rapporteurs :</i>	Joel BREARD	Prof., Université du Havre, Le Havre
	Frédéric JACQUEMIN	Prof., Université de Nantes, Saint-Nazaire
<i>Directeurs de thèse :</i>	Jean-Michel BERGHEAU	Prof., ENISE & Université de Lyon, Saint-Étienne
	Sylvain DRAPIER	Prof., ENSM-SE, Saint-Étienne
<i>Encadrant industriel :</i>	Patrick de LUCA	Dr., ESI Group, Bordeaux
<i>Invité :</i>	Jean-Marc BERAUD	Ing., Hexcel Reinforcements, Les Avenières

**Spécialités doctorales :**  
 SCIENCES ET GENIE DES MATERIAUX  
 MECANIQUE ET INGENIERIE  
 GENIE DES PROCÉDES  
 SCIENCES DE LA TERRE  
 SCIENCES ET GENIE DE L'ENVIRONNEMENT  
 MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES  
 INFORMATIQUE  
 IMAGE, VISION, SIGNAL  
 GENIE INDUSTRIEL  
 MICROELECTRONIQUE

**Responsables :**  
 K. Wolski Directeur de recherche  
 S. Drapier, professeur  
 F. Gruy, Maître de recherche  
 B. Guy, Directeur de recherche  
 D. Graillet, Directeur de recherche  
 O. Roustant, Maître-assistant  
 O. Boissier, Professeur  
 J.C. Pinoli, Professeur  
 A. Dolgui, Professeur

**EMSE : Enseignants-chercheurs et chercheurs autorisés à diriger des thèses de doctorat (titulaires d'un doctorat d'État ou d'une HDR)**

AVRIL	Stéphane	PR2	Mécanique et ingénierie	CIS
BATTON-HUBERT	Mireille	PR2	Sciences et génie de l'environnement	FAYOL
BENABEN	Patrick	PR1	Sciences et génie des matériaux	CMP
BERNACHE-ASSOLLANT	Didier	PR0	Génie des Procédés	CIS
BIGOT	Jean Pierre	MR(DR2)	Génie des Procédés	SPIN
BILAL	Essaid	DR	Sciences de la Terre	SPIN
BOISSIER	Olivier	PR1	Informatique	FAYOL
BORBELY	Andras	MR(DR2)	Sciences et génie de l'environnement	SMS
BOUCHER	Xavier	PR2	Génie Industriel	FAYOL
BRODHAG	Christian	DR	Sciences et génie de l'environnement	FAYOL
BURLAT	Patrick	PR2	Génie Industriel	FAYOL
COLLOT	Philippe	PR0	Microélectronique	CMP
COURNIL	Michel	PR0	Génie des Procédés	DIR
DARRIEULAT	Michel	IGM	Sciences et génie des matériaux	SMS
DAUZERE-PERES	Stéphane	PR1	Génie Industriel	CMP
DEBAYLE	Johan	CR	Image Vision Signal	CIS
DELAFOSSE	David	PR1	Sciences et génie des matériaux	SMS
DESRAYAUD	Christophe	PR2	Mécanique et ingénierie	SMS
DOLGUI	Alexandre	PR0	Génie Industriel	FAYOL
DRAPIER	Sylvain	PR1	Mécanique et ingénierie	SMS
FEILLET	Dominique	PR2	Génie Industriel	CMP
FOREST	Bernard	PR1	Sciences et génie des matériaux	CIS
FORMISYN	Pascal	PR0	Sciences et génie de l'environnement	DIR
FRACZKIEWICZ	Anna	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
GARCIA	Daniel	MR(DR2)	Génie des Procédés	SPIN
GERINGER	Jean	MA(MDC)	Sciences et génie des matériaux	CIS
GIRARDOT	Jean-jacques	MR(DR2)	Informatique	FAYOL
GOEURIOT	Dominique	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
GRAILLOT	Didier	DR	Sciences et génie de l'environnement	SPIN
GROSSEAU	Philippe	DR	Génie des Procédés	SPIN
GRUY	Frédéric	PR1	Génie des Procédés	SPIN
GUY	Bernard	DR	Sciences de la Terre	SPIN
GUYONNET	René	DR	Génie des Procédés	SPIN
HAN	Woo-Suck	CR	Mécanique et ingénierie	SMS
HERRI	Jean Michel	PR1	Génie des Procédés	SPIN
INAL	Karim	PR2	Microélectronique	CMP
KLOCKER	Helmut	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
LAFOREST	Valérie	MR(DR2)	Sciences et génie de l'environnement	FAYOL
LERICHE	Rodolphe	CR	Mécanique et ingénierie	FAYOL
LI	Jean Michel		Microélectronique	CMP
MALLIARAS	Georges	PR1	Microélectronique	CMP
MOLIMARD	Jérôme	PR2	Mécanique et ingénierie	CIS
MONTHEILLET	Franck	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
PERIER-CAMBY	Laurent	PR2	Génie des Procédés	DFG
PIJOLAT	Christophe	PR0	Génie des Procédés	SPIN
PIJOLAT	Michèle	PR1	Génie des Procédés	SPIN
PINOLI	Jean Charles	PR0	Image Vision Signal	CIS
POURCHEZ	Jérémy	CR	Génie des Procédés	CIS
ROUSTANT	Olivier	MA(MDC)		FAYOL
STOLARZ	Jacques	CR	Sciences et génie des matériaux	SMS
SZAFNICKI	Konrad	MR(DR2)	Sciences et génie de l'environnement	CMP
TRIA	Assia		Microélectronique	CMP
VALDIVIESO	François	MA(MDC)	Sciences et génie des matériaux	SMS
VIRICELLE	Jean Paul	MR(DR2)	Génie des Procédés	SPIN
WOLSKI	Krzystof	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
XIE	Xiaolan	PR1	Informatique	CIS

**ENISE : Enseignants-chercheurs et chercheurs autorisés à diriger des thèses de doctorat (titulaires d'un doctorat d'État ou d'une HDR)**

FORTUNIER	Roland	PR	Sciences et Génie des matériaux	ENISE
BERGHEAU	Jean-Michel	PU	Mécanique et Ingénierie	ENISE
DUBUJET	Philippe	PU	Mécanique et Ingénierie	ENISE
LYONNET	Patrick	PU	Mécanique et Ingénierie	ENISE
SMUROV	Igor	PU	Mécanique et Ingénierie	ENISE
ZAHOUANI	Hassan	PU	Mécanique et Ingénierie	ENISE
BERTRAND	Philippe	MCF	Génie des procédés	ENISE
HAMDI	Hédi	MCF	Mécanique et Ingénierie	ENISE
KERMOUCHE	Guillaume	MCF	Mécanique et Ingénierie	ENISE
RECH	Joël	MCF	Mécanique et Ingénierie	ENISE
TOSCANO	Rosario	MCF	Mécanique et Ingénierie	ENISE
GUSSAROV	Andrey	Enseignant contractuel	Génie des procédés	ENISE

PR 0	Professeur classe exceptionnelle	Ing.	Ingénieur
PR 1	Professeur 1 <sup>ère</sup> classe	MCF	Maître de conférences
PR 2	Professeur 2 <sup>ème</sup> classe	MR (DR2)	Maître de recherche
PU	Professeur des Universités	CR	Chargé de recherche
MA (MDC)	Maître assistant	EC	Enseignant-chercheur
DR	Directeur de recherche	IGM	Ingénieur général des mines

SMS	Sciences des Matériaux et des Structures
SPIN	Sciences des Processus Industriels et Naturels
FAYOL	Institut Henri Fayol
CMP	Centre de Microélectronique de Provence
CIS	Centre Ingénierie et Santé

*à Charlène,  
à ma famille,  
à mes amis*



## Remerciements

Ce document présente l'aboutissement de trois années de thèse passées au sein du département Mécanique et Procédés d'Élaboration (MPE) de l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne et dans les locaux lyonnais de la société ESI Group. Je souhaite remercier, ici, l'ensemble des personnes qui m'ont aidé, soutenu ou encouragé tout au long de ces trois années.

En premier lieu, mes remerciements s'adressent à mes directeurs de thèse, les professeurs Sylvain Drapier et Jean-Michel Bergheau, ainsi qu'à mon encadrant industriel, le Dr. Patrick de Luca, pour avoir, chacun à leur façon et grâce à leurs grandes compétences scientifiques et techniques, permis à ces travaux d'exister et d'être menés à bien. Je vous dois beaucoup à tous les trois.

Je tiens également à remercier Joël Bréard, professeur à l'université du Havre, et Frédéric Jacquemin, professeur à l'université de Nantes, d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail.

J'exprime toute ma gratitude à Michel Potier-Ferry, professeur à l'université de Metz, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant la présidence du jury de cette thèse.

Je remercie également Jean-Marc Béraud, ingénieur chez Hexcel Renforcements, de l'intérêt qu'il a démontré envers ce travail en acceptant de participer au jury.

Cette thèse a, pour partie, été réalisée dans le cadre du projet européen INFU-COMP (European Community's Seventh Framework Program FP7/2009-2013 under grant agreement n°233926), j'adresse donc mes remerciements à l'union européenne ainsi qu'à tous les partenaires du projet (industriels et académiques).

J'adresse également mes remerciements à l'ensemble des membres du département MPE et du centre ingénierie et santé (CIS) installés en J3 pour les moments de détente et les discussions constructives qui m'ont permis d'avancer chaque jour dans ce travail. Je remercie notamment Marc et Maxime qui ont partagé mon bureau stéphanois et dont les connaissances expérimentales m'ont aidées à faire en sorte que ce travail ne s'éloigne pas trop de la réalité des procédés composites. Je remercie également Bernadette, Julie, Olivier et Thierry. Toujours disponibles et souriants, ils œuvrent, chaque jour, dans leurs domaines respectifs pour faciliter notre travail. Enfin, je remercie tous les doctorants que j'ai croisés au cours de ces trois années : Guillaume, Olga, Marc, Hi, Daniel, Lara, Dina, Benjamin, Howatchinou, Fei et Maxime.

Je remercie tous mes collègues au sein de la société ESI Group. Je remercie notamment les équipes lyonnaises qui m'ont accueilli dans leurs locaux avec une mention spéciale pour Jean-Pierre et Armelle qui ont partagés mon bureau lyonnais, ainsi que pour Hong et Julie qui m'ont rendu de grands services. J'adresse un grand merci à Yannick qui depuis son Québec natal m'a beaucoup aidé dans ces travaux en prenant sur son temps pour me former à la librairie et Pro-Flot, répondre à mes nombreuses questions et faire de la revue de code. Sans toi, rien de tout ça n'aurait été possible ! Je remercie également Erwan, Pierre, Laurent et Yann qui en tant que spécialistes des composites au sein d'ESI ont interagit avec moi au cours de ces trois années.

J'adresse mes remerciements à ceux qui comptent le plus, ma famille et mes amis. Je m'adresse tout d'abord à mes amis lyonnais (ou ex-lyonnais), Alexandre, Étienne, Flavien, Guillaume, Guillaume, Marion, Vincent et Siham. Pour toutes les soirées, les week-ends à la montagne, les journées de ski et l'escalade, je vous remercie, à bientôt au tour d'une petite « verveine à Pépé ». Je remercie toute ma famille, ceux qui ont fait le déplacement pour la soutenance : mes parents (Philippe et Michèle), mes beaux parents (Christian et Corinne), Françoise, Jacques, Clément, Sylvie, Thomas et Julien ; ainsi que ceux qui n'ont pas pu le faire mais m'ont soutenu malgré la distance : mes frères (Quentin et Antoine), Alain, Damien, Marjorie, Emma, Léo, Marion, Jean-Baptiste, Mathieu, Stéphanie, Madeline, Sophie, Sylvain, Nicolas, Martine, Michel, Evelyne, Daniel, Annick, Bernard. Un remerciement particulier à mes grands-parents (Robert et Raymonde) qui ont pris le temps de corriger une partie des fautes d'orthographe de ce manuscrit.

Pour finir, je remercie, la personne la plus importante, celle qui chaque jour est à mes côtés, qui m'a soutenu à chaque instant, dans les moments difficiles comme dans les bons, sans qui rien de tout ça n'aurait existé, qui a pris le temps de relire l'intégralité de ce manuscrit : Charlène.

« *If we knew what it was we were doing, it would not be called research, would it?* »  
[Albert Einstein]





## Résumé

Avec l'utilisation de plus en plus massive des matériaux composites dans l'industrie aéronautique, les fournisseurs de pièces composites portent un intérêt grandissant à la simulation des procédés. Parmi les procédés industriels utilisés en phase de production, l'infusion de résine s'impose de plus en plus comme une alternative économique pour la fabrication de grandes pièces ayant un taux de fibres important (pales d'éolienne, voilures d'avion...). Ces procédés consistent à former une pellicule de résine liquide au-dessus ou en-dessous de l'empilement de fibres préalablement placée dans un demi-moule refermé par une bâche à vide. C'est ensuite l'action du vide qui va comprimer le système et provoquer l'infusion de la résine à travers l'épaisseur de la pièce. La souplesse du sac à vide ne permet pas de maintenir une épaisseur constante au cours du procédé. Ainsi, la mauvaise maîtrise des propriétés finales de la pièce moulée est un frein à la démocratisation de ces procédés au niveau industriel. Dans ce contexte, l'ENSM-SE s'associe à ESI Group depuis 2003 et les travaux précurseurs de P. Celle afin de développer un modèle complet pour la simulation de ces procédés.

Nos travaux portent sur la généralisation de ce modèle afin de traiter des cas industriels complexes en trois dimensions, ainsi que sur son extension à la simulation des écoulements « post-infusion ». L'approche repose sur un découpage du domaine en trois zones (drainant, préformes imprégnées, préformes sèches) consistant ainsi à coupler un écoulement de Stokes dans le drainant à un écoulement de Darcy dans les préformes. De plus, l'influence mutuelle de la résine sur le comportement des préformes et de la déformation des préformes sur la perméabilité sont considérées, à travers la loi de Terzaghi et des lois exprimant la perméabilité en fonction de la fraction de fibres, paramètre uniquement accessible par une approche 3D mécanique couplée. Enfin, le procédé est découpé en trois phases : compression initiale des préformes sèches, remplissage et « post-infusion ». Les méthodes numériques, développées dans ces travaux, s'appliquent à des cas réels d'infusion souvent mis de côté dans les publications récentes car inaccessibles, impliquant des perméabilités très faibles ( $10^{-15} m^2$ ), un drainant fin (1 mm) et des géométries complexes (3D avec courbures).

Cette approche innovante a été implémentée dans un code de calcul industriel (ProFlot™), validée analytiquement sur des cas tests et expérimentalement. Enfin, la modularité et la robustesse du modèle proposé permettent d'envisager la simulation d'autres procédés tels que le C-RTM ou la mise en forme de nappes pré-imprégnées.



## Abstract

With the increasing use of composite materials in the aerospace industry, composite parts suppliers carry a growing interest about process simulation. Among the industrial processes used in the production phase, resin infusion appears more and more as an economical alternative to manufacture large parts with an important fiber fraction (wind turbine blade, aircraft wing...). These methods consist in forming a liquid resin film on the top or below the stack of fibers previously disposed in a half mold closed by a vacuum bag. It is then the action of a vacuum system which will compress and cause the infusion of the resin through the thickness of the part. The flexibility of the vacuum bag does not allow maintaining a constant thickness during the whole process. So, the lack of control on the final properties of the part, implying long and expensive process tuning, significantly reduces their advantages. In this context, ENSM-SE joins ESI Group since 2003 and the start of the pioneering work of P. Celle in order to develop a comprehensive model for the simulation of these processes.

Our work focuses on the generalization of this model to handle complex industrial cases in three dimensions, as well as its extension to « post-infusion » flow simulation. The approach is based on three domains decomposition of the field (Distribution medium, impregnated preforms, dry preforms) consisting in coupling a Stokes flow in the distribution medium with a Darcy flow in the preforms. In addition, the mutual influence of the resin on the preforms and of the preforms deformation on the permeability is considered, through Terzaghi's law and models expressing the permeability as a function of the fiber fraction, data only accessible with a 3D coupled mechanical approach. Finally, the process is divided into three phases : initial compression of dry preforms, filling and « post-infusion ». The numerical methods developed in this work, apply to real infusion cases often discarded in recent publications, involving very low permeabilities ( $\approx 10^{-15} m^2$ ), a thin distribution medium ( $\approx 1 mm$ ) and complex geometries (3D curves).

This innovative approach has been implemented in an industrial simulation code (ProFlot™), validated analytically over test cases and experimentally over industrial cases in the European project INFUCOMP.



---

# Table des matières

Table des figures	xvii
-------------------	------

Liste des tableaux	xxiii
--------------------	-------

Introduction générale	1
-----------------------	---

## Chapitre 1

### Contexte de l'étude

1.1	Matériaux composites et procédés de mise en œuvre . . . . .	3
1.1.1	Matériaux composites . . . . .	3
1.1.1.1	La matrice . . . . .	4
1.1.1.2	Les renforts . . . . .	6
1.1.2	Procédés de mise en œuvre . . . . .	7
1.1.2.1	Les procédés par voie sèche : pré-imprégné . . . . .	7
1.1.2.2	Les procédés par voie humide : Liquid Composite Moulding (LCM) . . . . .	9
1.2	Positionnement de l'étude et problématique . . . . .	11
1.2.1	Contexte industriel : ESI Group et le projet INFUCOMP . . . . .	11
1.2.1.1	ESI Group . . . . .	11
1.2.1.2	Le projet INFUCOMP . . . . .	12
1.2.2	Motivations du travail . . . . .	12
1.3	Conclusion . . . . .	13

## Chapitre 2

### Simulation de l'infusion : État de l'art

2.1	Introduction . . . . .	15
2.2	Notion d'échelle . . . . .	15

2.2.1	L'échelle microscopique . . . . .	16
2.2.2	L'échelle mésoscopique . . . . .	16
2.2.3	L'échelle macroscopique . . . . .	16
2.3	Découpage spatio-temporel du procédé LRI . . . . .	17
2.3.1	Les différentes phases du procédé . . . . .	17
2.3.2	L'approche multi-domaines . . . . .	18
2.4	Phénomènes physiques et leurs modélisations . . . . .	18
2.4.1	Comportement des préformes et mécanique du solide en grandes déformations . . . . .	19
2.4.2	L'écoulement de la résine : mécanique des fluides . . . . .	20
2.4.2.1	L'écoulement dans le drainant . . . . .	20
2.4.2.2	L'écoulement dans les renforts . . . . .	21
2.4.2.3	Les écoulements post-infusion . . . . .	21
2.4.3	Les couplages . . . . .	23
2.4.3.1	Couplage de deux écoulements différents . . . . .	23
2.4.3.2	Couplage fluide / solide . . . . .	24
2.5	Conclusion . . . . .	25

### Chapitre 3

#### Déformations du renfort fibreux : grands déplacements et couplage fluide/Structure

3.1	Introduction . . . . .	27
3.2	La formulation lagrangienne réactualisée à chaque itération . . . . .	28
3.2.1	Les différentes configurations . . . . .	28
3.2.2	Description lagrangienne . . . . .	29
3.2.3	Mesures des déformations . . . . .	30
3.2.4	Mesures des contraintes . . . . .	32
3.2.5	Mise en œuvre de la formulation . . . . .	32
3.2.6	Méthode de résolution du problème non-linéaire . . . . .	36
3.2.7	Discretisation par la méthode des éléments finis . . . . .	38
3.2.8	Validation . . . . .	40
3.2.8.1	Sans non-linéarité géométrique . . . . .	40
3.2.8.2	Avec non-linéarités géométriques . . . . .	42
3.3	Lois constitutives des préformes fibreuses . . . . .	43

3.4	Évolution de la porosité en fonction des déformations . . . . .	48
3.4.1	Approche eulérienne . . . . .	49
3.4.2	Approche lagrangienne . . . . .	50
3.4.3	Comparaison entre les deux approches . . . . .	51
3.5	Comportement du renfort imprégné : couplage fluide / structure . . . . .	53
3.5.1	Principe et mise en œuvre : couplage fort itératif . . . . .	54
3.5.2	validation analytique : cas test de Terzaghi . . . . .	55
3.6	Exemple d'application : Compression d'un « $\Omega$ » . . . . .	57
3.7	Conclusion . . . . .	60

## Chapitre 4

### Écoulement de la résine : Remplissage et Post-infusion

4.1	Introduction . . . . .	63
4.2	Écoulement dans la préforme : écoulement incompressible en milieu poreux à faible perméabilité . . . . .	64
4.2.1	Méthode numérique . . . . .	65
4.2.1.1	Formulation Mixte Vitesse/Pression . . . . .	65
4.2.1.2	Stabilisation $P_{1+}/P_1$ . . . . .	67
4.2.2	Validation de la formulation de Darcy : Cas test du convergent sphérique . . . . .	71
4.3	Écoulement dans le drainant : Équation de Stokes . . . . .	71
4.3.1	Discussion et choix du modèle . . . . .	71
4.3.2	Méthode numérique . . . . .	75
4.3.2.1	Formulation Mixte Vitesse/Pression . . . . .	75
4.3.2.2	Stabilisation $P_{1+}/P_1$ . . . . .	77
4.3.3	Validation de la formulation de Stokes : Écoulement de Poiseuille dans un cylindre . . . . .	79
4.4	Couplage Stokes / Darcy . . . . .	79
4.4.1	Principe de mise en œuvre : couplage itératif . . . . .	79
4.4.2	Conditions de couplage . . . . .	81
4.4.3	Problématiques liées au couplage . . . . .	81
4.4.3.1	Imposition des conditions cinématiques . . . . .	82
4.4.3.2	Incompressibilité de la résine . . . . .	83
4.4.4	Validation et tests numériques . . . . .	84

4.4.4.1	Validation analytique . . . . .	84
4.4.4.2	Méthode des solutions manufacturées . . . . .	89
4.5	Evolution du front de fluide . . . . .	92
4.6	Écoulements post-infusion . . . . .	94
4.6.1	Principe et mise en œuvre de la procédure de simulation . . . . .	94
4.6.2	Exemple d'application dans un milieu poreux simple . . . . .	97
4.7	Conclusion . . . . .	101

**Chapitre 5**

**Validation expérimentale, applications industrielles et perspectives**

5.1	Introduction . . . . .	103
5.2	Validation Expérimentale . . . . .	104
5.3	Application Industrielle : Infusion d'une plaque renforcée par un raidisseur en « T » . . . . .	110
5.4	Perspectives de recherche et développement . . . . .	115
5.4.1	Points d'amélioration pour la simulation de l'infusion . . . . .	115
5.4.1.1	Simulation des écoulements « post-infusion » . . . . .	115
5.4.1.2	Autres perspectives pour la simulation de l'infusion . . . . .	117
5.4.2	Vers la simulation d'autres procédés . . . . .	118
5.4.2.1	Compression de pré-imprégnés . . . . .	119
5.4.2.2	Compression Resin Transfer Molding (C-RTM) . . . . .	120
5.5	Conclusion . . . . .	121

**Conclusion générale**

123

**Bibliographie**

**Annexe A**

**Conservation de la masse de la résine**

**Annexe B**

**Solution analytique du cas test de Terzaghi par la méthode des fonction de Airy**

B.1	Principe des Fonctions de Airy . . . . .	135
B.1.1	Détermination des contraintes . . . . .	136



---

B.1.2	Détermination du champ de déplacement . . . . .	136
B.2	Application au cas test de Terzaghi . . . . .	137

**Annexe C**

**Construction des sous-matrices élémentaires pour la discrétisation des équations de Darcy et de Stokes**

C.1	Darcy . . . . .	141
C.2	Stokes . . . . .	142



---

# Table des figures

1.1	Exemple d'application pour les composites : (a) GD - Aston Martin V12 Vanquish, (b) HP - Boeing 787 Dreamliner . . . . .	4
1.2	Une mèche composée de fibres de verre . . . . .	6
1.3	Différentes architectures de renforts : (a) Unidirectionnels, (b) mat, (c) tissu bidimensionnel, (d) tissu tridimensionnel . . . . .	8
1.4	Principe de la mise en œuvre de pré-imprégnés sous autoclave . . . . .	8
1.5	Principe du procédé RTM [12] . . . . .	9
1.6	Principe du Liquid Resin Infusion (LRI) [12] . . . . .	10
2.1	Différentes échelles d'étude . . . . .	17
2.2	Découpage spatial du domaine d'étude . . . . .	18
3.1	Différentes configurations remarquables en mécanique des milieux continus . . . . .	29
3.2	Description lagrangienne du mouvement d'un milieu continu $\Omega$ . . . . .	29
3.3	Illustration de la formulation lagrangienne réactualisée à chaque itération	35
3.4	Illustration graphique des opérateurs de comportement . . . . .	40
3.5	Géométrie du cas test de validation : compression d'un bloc encastré . . . . .	41
3.6	Norme du champ de déplacement obtenu avec une loi élastique linéaire en petites déformations : (a) Géométrie initiale, (b) Abaqus <sup>TM</sup> , (c) ProFlot <sup>TM</sup> . . . . .	41
3.7	Norme du champ de déplacement obtenu avec une loi élastique linéaire en grandes déformations : (a) Géométrie initiale, (b) Abaqus <sup>TM</sup> , (c) ProFlot <sup>TM</sup> . . . . .	42
3.8	Mécanismes de déformations des préformes : (a) Schématisation à l'échelle de la pièce, (b) mode de déformation à l'échelle des mèches [10] . . . . .	43
3.9	Loi de comportement d'un empilement de 100 NC2 [0;90] <sub>100</sub> . . . . .	45

3.10	Définition des différents repères considérés pour le calcul des opérateurs de comportement tangent et sécant : (a) Repère général, (b) repère matériau initial, (c) repère matériau courant . . . . .	47
3.11	Procédure de calcul des opérateurs de comportement tangent et sécant	48
3.12	illustration de l'hypothèse d'incompressibilité des fibres . . . . .	49
3.13	Loi de comportement caractérisée dans les travaux de P. Wang [63] sur une préforme de type NC2 composée de 48 plis G1157E01 $[0_6, 90_12, 0_6]_S$ et de dimension $0.335 \times 0.335 m^2$ . . . . .	52
3.14	Géométrie initiale et conditions limites pour la compression d'un « L » : (a) vue isométrique, (b) vue de côté avec conditions limites . . . . .	52
3.15	Répartition de la porosité dans le « L » après compression : (a) Approche eulérienne, (b) approche lagrangienne . . . . .	53
3.16	Algorithme de couplage fluide-structure . . . . .	56
3.17	Cas test de Terzaghi : Compression d'une préforme imprégnée avec un bord libre . . . . .	56
3.18	Résultats obtenus sur le cas test de Terzaghi : (a) Déformée analytique et numérique de la préforme (b) Norme du champ de déplacement . . . . .	57
3.19	Exemple d'application, compression d'une plaque raidie par un « $\Omega$ » : (a) Schéma (b) Vue isométrique de la géométrie initiale, (c) Vue de côté du maillage et conditions limites . . . . .	58
3.20	Résultats obtenus sur l'exemple d'application : (a) Norme du champ de déplacement vue isométrique (b) Norme du champ de déplacement vue de face, (c) Porosité vue isométrique, (d) Porosité vue de face . . . . .	59
3.21	Compression d'un Omega en 3D : géométrie initiale, géométrie déformée et variation du rapport $\frac{h}{h_0}$ le long du profil . . . . .	60
4.1	Schématization de l'écoulement de la résine dans le drainant et la préforme : (a) écoulement bi-dimensionnel pendant le remplissage du drainant, (b) écoulement transverse dans la préforme lorsque le drainant est rempli . . . . .	64
4.2	Éléments stables pour une formulation mixte en vitesse-pression : (a) Taylor-Hood (P1/P0), (b) Taylor-Hood (P2/P1), (c) Mini-éléments (P1+/P1 et P1-bulle/P1) . . . . .	68
4.3	Fonction de forme bulle : (a) hiérarchique, (b) polynomiale . . . . .	69
4.4	Cas test du convergent sphérique : (a) Comparaison des résultats analytiques et numériques pour le champ de vitesse radiale $v_r(r)$ , (b) Champs de vitesse et de pression obtenus . . . . .	72

4.5	Cas test utilisé pour la comparaison des modèles de Stokes, Brinkman et Darcy pour la simulation des écoulements dans le drainant . . . . .	73
4.6	Comparaison des modèles de Stokes, Darcy et Brinkman pour des perméabilités $K_{xx}$ de $10^{-6} m^2$ , $10^{-7} m^2$ , $10^{-8} m^2$ et $10^{-9} m^2$ sur un cas correspondant à l'écoulement de la résine dans le drainant ( $H = 1 mm$ , $L = 1 m$ , $\eta = 0,058 Pa.s$ et $\Delta p = 1 bar$ ) . . . . .	74
4.7	Cas test de Poiseuille pour $R = 1m$ , $L = 1m$ , $\mu = 1Pa.s$ , $P_i = 1Pa$ et $P_s = 0Pa$ : (a) Comparaison des résultats analytiques et numériques pour le champ de vitesse $v_x(r)$ , (b) Champs de vitesse et de pression obtenus. . . . .	79
4.8	Problème couplé Stokes/Darcy sur un domaine $\Omega$ et condition de couplage en 2D . . . . .	80
4.9	Conditions aux limites cinématiques . . . . .	82
4.10	Cas d'un écoulement perpendiculaire à l'interface : description du problème . . . . .	85
4.11	Norme du champ de vitesse numérique divisé par la norme du champ de vitesse analytique en fonction de $y$ pour différents niveaux de perméabilité : (a) fonction bulle polynomiale, (b) fonction bulle hiérarchique . . . . .	86
4.12	Norme du champ de vitesse obtenue sur le cas test de l'écoulement perpendiculaire avec une perméabilité $K = 10^{-14} m^2$ et donc une solution analytique $v_y = 1,72 \cdot 10^{-8} m/s$ : (a) fonction polynomiale, (b) fonction hiérarchique . . . . .	86
4.13	Cas d'un écoulement parallèle à l'interface : description du problème . . . . .	87
4.14	Cas d'un écoulement parallèle à l'interface, comparaison des solutions analytique (ligne continue) et numérique (points) pour $K = 10^{-15} m^2$ : (a) $\alpha = 0$ , (b) $\alpha = 3.16 \cdot 10^{-4}$ , (c) $\alpha = 3.16 \cdot 10^{-2}$ , (d) $\alpha = 3.16$ . . . . .	88
4.15	Résultat de simulation pour $\alpha = 0$ et $K = 10^{-15} m^2$ : (a) champ de pression, (b) norme du champ de vitesse, (c) zoom pour distinguer la zone de Stokes de la zone de Darcy . . . . .	89
4.16	Isovaleurs obtenues avec $\eta = 1 Pa.s$ , $K = 1 m^2$ et $h = 0,0125 m$ : (a) champ de pression, (b) norme du champ de vitesse. . . . .	91
4.17	Convergence de l'erreur pour les formulations de Darcy et de Stokes : (a) vitesse, (b) pression . . . . .	92
4.18	Algorithme simulation de l'infusion . . . . .	93
4.19	Illustration des écoulements post-infusion . . . . .	95
4.20	Algorithme de calcul pour la simulation des écoulements post-infusion . . . . .	98

4.21	Équilibre transitoire d'un milieu poreux : mise en donnée . . . . .	98
4.22	Résultats obtenus à $t = 0$ s : (a) champ de pression, (b) fraction volumique de résine, (c) champ de vitesse . . . . .	99
4.23	Résultats obtenus à $t = 40$ s : (a) champ de pression, (b) fraction volumique de résine, (c) champ de vitesse . . . . .	100
4.24	Résultats obtenus à $t = 200$ s : (a) champ de pression, (b) fraction volumique de résine, (c) champ de vitesse . . . . .	100
5.1	Montage expérimental de l'essai réalisé par P. Wang [63] . . . . .	104
5.2	Suivi du procédé utilisé par P. Wang [63] : (a) Principe de la méthode de projection de frange, (b) position des micro-thermocouples . . . . .	105
5.3	Résultats obtenus par P. Wang lors de son essai d'infusion couvercle ouvert [63] : (a) variations de température mesurées par les trois thermocouples, (b) variations d'épaisseur mesurées par la méthode de projection de franges . . . . .	106
5.4	Données de simulation pour la plaque de P. Wang : (a) conditions aux limites pour la mécanique du solide, (b) conditions aux limites pour la mécanique des fluides, (c) maillage . . . . .	107
5.5	Propriétés des matériaux utilisés pour l'essai d'infusion : (a) Loi de comportement caractérisée dans les travaux de P. Wang [63] sur une préforme de type NC2 composée de 48 plis G1157E01 $[0_6, 90_{12}, 0_6]_S$ et de dimension $0.335 \times 0.335$ m <sup>2</sup> , (b) viscosité isotherme de la résine RTM6 (Hexcel) . . . . .	108
5.6	Taux de remplissage à différents instant obtenu par la simulation sur le cas de la plaque étudiée par P. Wang . . . . .	108
5.7	Variation de l'épaisseur simulée au cours du remplissage dans le cas de la plaque étudié par P. Wang ( $\Delta h = f(\frac{t}{t_{final}})$ ) . . . . .	109
5.8	Géométrie du panneau auto-raidi par un « T » (Daher-Socata) . . . . .	110
5.9	Description des conditions d'infusion du panneau auto-raidi . . . . .	111
5.10	Infusion d'une plaque renforcée par un raidisseur en « T » : (a) géométrie du problème avec en bleu le maillage utilisé (quart du problème), (b) conditions aux limites fluide, (c) conditions aux limites solide . . . . .	111
5.11	Taux de remplissage obtenu pour le cas de l'infusion d'une plaque renforcée par un raidisseur en « T » . . . . .	112
5.12	Taux de remplissage vu de côté avec la géométrie initiale tracée en noire pour le cas de l'infusion d'une plaque renforcée par un raidisseur en « T »	113
5.13	Variation de l'épaisseur au cours du remplissage cas de l'infusion d'une plaque renforcée par un raidisseur en « T » ( $\frac{h}{h_0}$ ) . . . . .	113

---

5.14	Champ de pression et fraction volumique de résine obtenus grâce à la simulation : (a) cas de la plaque de P. Wang, (b) cas du « T » . . . . .	115
5.15	Nouvel algorithme pour simulation des écoulements « post-infusion » .	117
5.16	Principe de la mise en œuvre de pré-imprégnés sous autoclave . . . . .	119
5.17	Principe du « compression resin transfer molding » (C-RTM) . . . . .	120
B.1	Procédure de calcul des déplacements : Intégration des déformations le long du chemin le plus adapté . . . . .	136
B.2	Cas test de Terzaghi : compression d'une préforme avec bords libres . .	137





---

## Liste des tableaux

1.1	Principales différences entre les matrices thermodurcissables et thermo- plastiques [28] . . . . .	5
1.2	comparaison des différents types de fibres [6, 24] . . . . .	7
3.1	Principales mesures de déformations utilisées en mécanique des mi- lieux continus [12]. . . . .	31
3.2	Comparaison des résultats obtenus avec une loi élastique linéaire en petites déformations : Abaqus <sup>TM</sup> , ProFlot <sup>TM</sup> . . . . .	41
3.3	Comparaison des résultats obtenus avec une loi élastique linéaire en grandes déformations : Abaqus <sup>TM</sup> , ProFlot <sup>TM</sup> . . . . .	42
3.4	Comparaison entre l’approche eulérienne et l’approche lagrangienne pour la mise à jour de la porosité à travers la conservation de la masse des fibres . . . . .	53
4.1	Erreur relative en % sur la norme de la vitesse dans la zone de Stokes en fonction de $y$ pour les différentes valeurs de $\alpha$ ( $K = 10^{-15} m^2$ ). . . . .	89
4.2	Erreurs commises pour la pression et la vitesse en norme $L^2$ dans le domaine de Stokes . . . . .	91
4.3	Erreurs commises pour la pression et la vitesse en norme $L^2$ dans le milieu poreux . . . . .	92



---

# Introduction générale

Les politiques de réduction énergétique incitent les concepteurs à alléger leurs structures, sans pour autant négliger la tenue mécanique de ces ensembles. Dans ce contexte, les matériaux composites prennent une place de plus en plus prépondérante dans l'industrie. Déjà connus et utilisés dans l'aéronautique, ils s'immiscent peu à peu dans l'automobile. Cependant, ces matériaux demeurent une solution coûteuse et restent souvent cantonnés aux applications de pointes. Les industriels doivent donc répondre aujourd'hui à un challenge de taille, réduire les coûts de mise en œuvre, tout en conservant voire en améliorant les propriétés intrinsèques de ces matériaux.

Le coût et les bonnes propriétés mécaniques des pièces finies sont intimement liés aux procédés de fabrication. Dans cette logique de réduction des coûts, les procédés dits par voie humide s'imposent de plus en plus comme une alternative aux procédés classiques utilisant des nappes pré-imprégnées. Parmi ces procédés, les procédés de mise en œuvre des matériaux composites par infusion de résine, malgré leur potentiel, peinent à s'imposer dans les phases de production industrielle et restent cantonnés à des applications très spécifiques. La raison principale est la difficulté de mise au point du procédé, due à la mauvaise maîtrise des propriétés géométriques des pièces, déterminantes dans le comportement mécanique de celles-ci.

Dans ce contexte, de nombreuses études expérimentales sont réalisées dans les laboratoires de recherche mais aussi chez les industriels pour optimiser et mieux comprendre les procédés d'infusion. Cependant, ces études ont un coût non négligeable (consommables, ressources, temps...) et ne permettent pas d'avoir accès à toutes les informations souhaitées. En effet, en ce qui concerne les procédés d'infusion, les mesures expérimentales sont extrêmement difficiles et ont toujours une influence sur le phénomène observé. Ainsi, à titre d'exemple, les capteurs permettant le suivi in-situ du front de fluide modifient les écoulements. Les industriels sont donc demandeurs d'outils de simulation leur permettant de réduire les temps et les coûts de développement des procédés.

Ainsi, ces dernières années, de nombreux travaux de recherche se sont intéressés à la simulation des procédés LCM et plus récemment aux procédés d'infusion. Plu-

sieurs modèles ont été proposés plus ou moins complexes reposant souvent sur des lois empiriques pour intégrer les nombreuses interactions physiques mises en jeu dans ces procédés. Cependant il n'existe pas aujourd'hui d'approche qui puisse être industrialisée et répondant aux attentes des fabricants de pièces composites. Fort de ce constat, l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne s'associe à l'éditeur de logiciel ESI Group depuis 2003 et le début des travaux innovants de P. Celle[12] afin de développer un tel outil. Le modèle imaginé par P. Celle, bien que très prometteur, nécessite de nombreuses améliorations pour pouvoir être utilisé sur des applications « réelles ».

Nos travaux se placent donc autour du développement d'un outil de simulation numérique du procédé Liquid Resin Infusion, en vue d'une intégration dans le logiciel PAM-RTM™, développé par l'éditeur de logiciel ESI Group. En se basant sur les travaux précurseurs de Pierre Celle [12], nous voulons proposer aux professionnels du composite un outil innovant et performant permettant d'appréhender le procédé dans son ensemble. La présentation de ces travaux s'articule autour de cinq chapitres :

- Le premier chapitre présente le contexte dans lequel s'inscrit ce travail, en commençant par une présentation des matériaux composites et de leurs procédés de fabrication, suivie de la description du contexte industriel et en terminant par l'intérêt et les motivations de ce travail.
- Le second chapitre présentera une revue bibliographique des modèles et méthodes numériques utilisés pour la simulation de l'infusion.
- Les deux chapitres suivants présenteront plus en détail le modèle physique ainsi que les méthodes numériques implémentées. Les choix réalisés, les formulations ainsi que leurs validations seront présentés de manière « chronologique » vis-à-vis du procédé. Nous nous intéresserons d'abord à la phase de compression initiale en présentant la formulation non-linéaire de mécanique du solide, puis le couplage fluide/solide par l'approche de Terzaghi (troisième chapitre) et finalement les phases de remplissage et de « post-infusion » en présentant les formulations de mécanique des fluides et leur couplage (quatrième chapitre).
- Le cinquième chapitre sera consacré à la validation expérimentale du code développé et à son application sur des cas industriels. Nous comparerons notamment nos résultats aux travaux expérimentaux de Peng Wang [63]. Enfin, nous proposerons une application industrielle.

# Contexte de l'étude

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Matériaux composites et procédés de mise en œuvre</b>	<b>3</b>
<b>1.2</b>	<b>Positionnement de l'étude et problématique</b>	<b>11</b>
<b>1.3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>13</b>

---

## **1.1 Matériaux composites et procédés de mise en œuvre**

### **1.1.1 Matériaux composites**

On peut définir un matériau composite comme l'assemblage d'au moins deux matériaux non-miscibles, dont l'association conduit à un nouveau matériau ayant des caractéristiques spécifiques supérieures à celles de ses constituants. On limite ici le propos aux matériaux qui nous intéressent dans cette étude, les matériaux composites structuraux à matrice organique. Le principal objectif lié au déploiement de ces matériaux est un gain de masse associé à un meilleur comportement mécanique en comparaison des matériaux classiques tels que les aciers. Cette famille de composites repose sur l'assemblage de deux constituants principaux la matrice et le renfort. Le renfort fibreux, qui contribue à la résistance mécanique de la pièce finie, est noyé dans la matrice qui assure l'orientation et la bonne cohésion des fibres, donnant également sa forme au produit. Enfin, on peut ajouter à cet ensemble des additifs de différentes natures modifiant certaines caractéristiques de la matière. Parmi ces additifs, on retrouve des agents chimiques facilitant certaines étapes du processus de fabrication (catalyseurs, agent démoulant...), des charges visant à améliorer les propriétés mécaniques ou électriques de la matrice (billes de verre, nanotubes de carbone...) ou encore des filtres anti-UV, des pigments, etc. On peut classer les matériaux composites dans

deux catégories en fonction de leurs champs d'application, d'un côté les composites grande diffusion (GD) qui représentent la plupart de la production et de l'autre les composites hautes performances (HP) réservés aux applications de pointe comme l'aéronautique ou l'aérospatial.

**Les composites Grande Diffusion (GD)** représentent 95% de la production. Ce sont généralement des plastiques armés ou renforcés avec des fibres courtes ou des charges. Peu coûteux et faciles à mettre en œuvre, ils conviennent pour réaliser des pièces non travaillantes en grandes séries. La majorité de ces matériaux est composée de fibres de verre et résine thermodurcissable, avec un taux volumique de fibres avoisinant les 30%.

**Les composites Hautes Performances (HP)** représentent 5% de la production. Plus coûteux, en raison des procédés de fabrication et des matériaux utilisés (le prix est en grande partie lié au choix du renfort), ils offrent d'excellentes propriétés mécaniques. Ils sont constitués de renforts à fibres longues avec un taux volumique de fibres compris entre 50 et 70%.

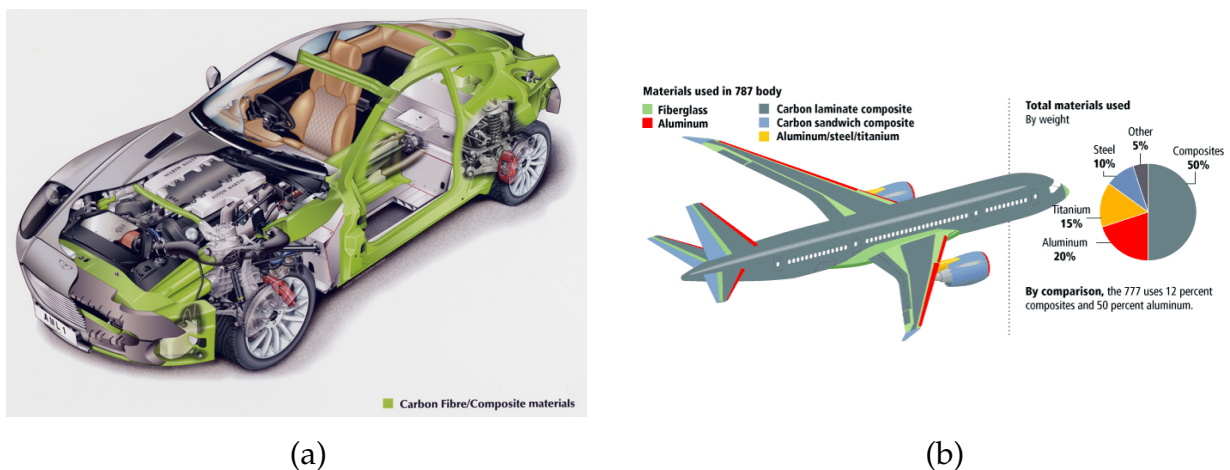


Figure 1.1 – Exemple d'application pour les composites : (a) GD - Aston Martin V12 Vanquish, (b) HP - Boeing 787 Dreamliner

### 1.1.1.1 La matrice

La matrice permet de distribuer les contraintes entre les fibres, de les protéger des agressions extérieures et donne sa forme à la pièce finie. Les matrices organiques sont des polymères et peuvent donc se classer selon deux grandes familles : les thermoplastiques et les thermodurcissables.

**Les matrices thermoplastiques (TP)** sont constituées de chaînes moléculaires courtes

et linéaires liées entre elles par des liaisons de Van der Waals, *i.e.* facilement détruites par une élévation de la température. Ainsi, au-delà d'une certaine température, la disparition des liaisons offre une mobilité relative aux chaînes moléculaires qui se traduit par le passage à un état de gel puis à un état liquide, permettant la mise en forme de la matière. Ces matrices peuvent être fondues et resolidifiées à volonté, elles sont donc recyclables et très faciles à mettre en œuvre, cependant, leur utilisation est limitée à des plages de températures bien définies (tableau 1.1). Parmi ces polymères on retrouve le polyamide (PA) et le polypropylène (PP).

**Les matrices thermodurcissables (TD)** sont constituées de longues chaînes moléculaires tridimensionnelles dont les liaisons sont covalentes-carbone, *i.e.* ne pouvant pas être détruites sans une dégradation de la matière. Ces liaisons sont formées lors de la réticulation de la résine. Cette réaction chimique, activée par des conditions de pression et de température particulières, est aussi appelée cuisson. Le caractère irréversible de la polymérisation rend ces matrices non recyclables et plus difficiles à mettre en œuvre. Cependant, ces matrices offrent de meilleures caractéristiques mécaniques que les thermoplastiques et peuvent être utilisées à des températures plus élevées (tableau 1.1). Parmi ces polymères on retrouve les époxy et les polyesters insaturés (UP).

Matrices	Thermoplastiques (TP)	Thermodurcissables (TD)
État de base	solide prêt à l'emploi	liquide visqueux à polymériser
Stockage	illimité	réduit
Mouillabilité des renforts	difficile	aisée
Moulage	chauffage + refroidissement	chauffage continu
Cycle	court	long
Tenue au choc	assez bonne	limitée
Tenue thermique	réduite	bonne
Chutes et déchets	recyclables	perdus ou recyclés en charges
Conditions de travail	propreté	émanations (LCM)

Tableau 1.1 – Principales différences entre les matrices thermodurcissables et thermoplastiques [28]

### 1.1.1.2 Les renforts

Les renforts apportent les caractéristiques mécaniques à la pièce finie, ainsi que certaines propriétés thermiques ou électriques. Il existe de nombreux types de renforts que l'on peut classer selon leur nature, leurs propriétés ou leur architecture. Les renforts les plus diffusés sont les fibres, organiques ou inorganiques.

**Fibres organiques** Les fibres organiques sont composées de carbone et d'hydrogène, elles peuvent être naturelles (cellulose, lin, soie) ou synthétiques (aramide, polyester). Les fibres d'aramide, plus connues sous leur dénomination commerciale Kevlar, comptent parmi les fibres organiques les plus diffusées dans les composites hautes performances. Offrant une excellente résistance aux chocs et une grande capacité d'absorption des vibrations, on les retrouve dans l'industrie textile (gilet pare-balles), aéronautique (ailes d'avion, coque de bateau) et sportive (réservoirs de formule 1).

**Fibres inorganiques** Les fibres inorganiques peuvent être naturelles (amiante) ou synthétiques. Les fibres inorganiques synthétiques sont les plus connues et les plus utilisées dans les composites GD et HP, on compte parmi elles la fibre de verre et la fibre de carbone. Peu coûteuse et offrant une bonne résistance à la rupture, la fibre de verre est le renfort le plus largement utilisé aujourd'hui dans l'industrie (béton armé, ski/snowboard, raquette de tennis...). Enfin, plus coûteuse mais offrant un module d'élasticité très supérieur aux autres matériaux, la fibre de carbone est utilisée dans toutes les applications structurales de hautes performances.

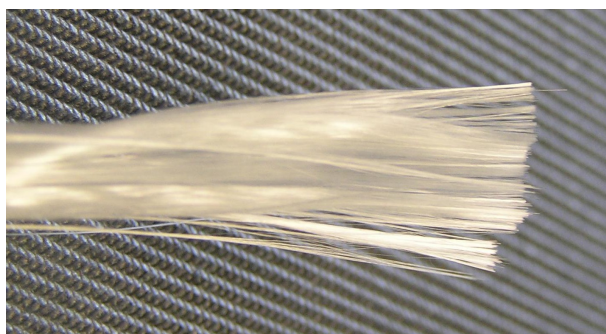


Figure 1.2 – Une mèche composée de fibres de verre

Le tableau 1.2 synthétise les caractéristiques techniques des principales fibres utilisées dans l'industrie (verre E et R, carbone Haute Résistance (HR) et Haut Module (HM) et aramide).



Caractéristiques	Verre E	Verre R	Aramide	Carbone « HR »	Carbone « HM »
Densité	2,54	2,48	1,45	1,78	1,9
Résistance à la rupture en traction (MPa)	3300	4400	3100	2800	2200
Résistance à la rupture en compression (MPa)	1200	1300	500	1800	1300
Module de Young (GPa)	73	86	70 à 130	200	400
Tenue au choc	moyenne	moyenne	excellente	faible	mauvaise
Dilatation thermique ( $10^{-6}$ mm/mm/C)	5	4	0	1	1
Prix relatif	1	4	10 à 15	30	60

Tableau 1.2 – comparaison des différents types de fibres [6, 24]

**Les différents types d'architecture** Étant donné le très faible diamètre des fibres, pour faciliter leur manipulation et leur utilisation les renforts sont commercialisés sous forme de semi-produits contenant plusieurs milliers de fibres, architecturés de différentes manières. On peut classer ces architectures selon le nombre de directions occupées par les fibres : unidirectionnels (UD), bidirectionnels et multidirectionnels (voir figure 1.3). Selon les procédés on pourra se procurer des renforts sous forme de nappes sèches ou pré-imprégnées de résine. La base d'un renfort est constituée de fibres (ou filaments), de l'ordre de quelques micromètres de diamètre, celles-ci, sont regroupées sous forme d'une mèche, toron de plusieurs dizaines de fibres (de l'ordre du mm de diamètre). Ce sont ses mèches qui sont ensuite tissées, cousues, tricotées, etc. pour donner une nappe ou un pli. Enfin, ces nappes sont empilées et mises en forme pour obtenir ce qu'on appelle une préforme, l'ossature de la pièce composite.

## 1.1.2 Procédés de mise en œuvre

### 1.1.2.1 Les procédés par voie sèche : pré-imprégné

Ce sont les procédés historiques concernant ce type de matériaux. Ici, les nappes sont un semi-produit composite contenant déjà les fibres noyées dans une résine solide dont on a préalablement stoppé la polymérisation à l'aide d'additifs chimiques et par une conservation à très basse température. Ainsi, le procédé consiste à déposer successivement des nappes selon les orientations voulues jusqu'à remplissage total

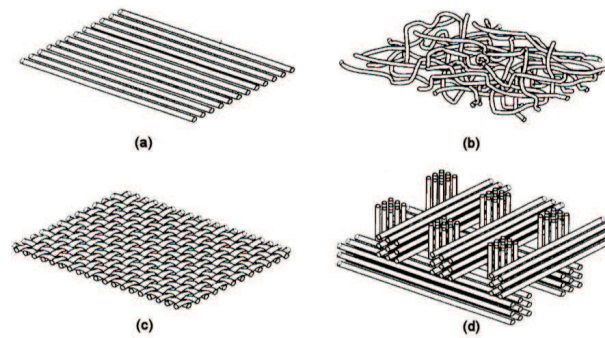


Figure 1.3 – Différentes architectures de renforts : (a) Unidirectionnels, (b) mat, (c) tissu bidimensionnel, (d) tissu tridimensionnel

d'un moule (phase de drapage). Ensuite, on fait subir un cycle de température et pression au système, afin de terminer la polymérisation de la matrice qui va alors lier les nappes entre elles pour donner le produit fini (voir figure 1.4). Ces procédés permettent une excellente maîtrise des propriétés géométriques de la pièce, une répartition très homogène des fibres et un contrôle très précis du taux de fibres. Cependant, ils impliquent des coûts de production très élevés pour plusieurs raisons. D'une part, les nappes sont chères à l'achat. D'autre part, les équipements nécessaires sont lourds en investissement, entretien et utilisation. En effet, ces matériaux étant fournis en cours de réticulation, ils doivent être manipulés avec grandes précisions et notamment stockés à très basse température, dans des chambres froides ou congélateurs de grande taille, puis, mis en œuvre à chaud sous autoclave.

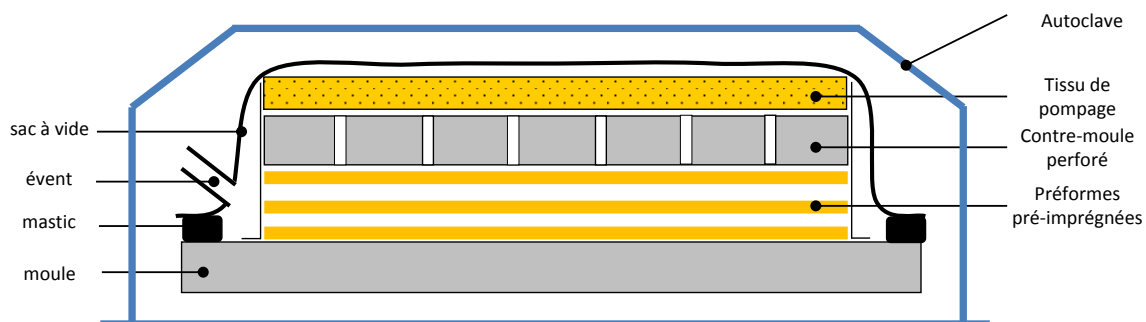


Figure 1.4 – Principe de la mise en œuvre de pré-imprégnés sous autoclave

### 1.1.2.2 Les procédés par voie humide : Liquid Composite Moulding (LCM)

Dans une logique de réduction des espaces de stockage et donc des coûts, les procédés par voie humide, plus souvent désignés par le sigle anglais LCM pour liquid composite moulding, ont été développés depuis les années 80. Ces procédés consistent à introduire la résine liquide non polymérisée dans un moule contenant les préformes sèches. Il existe deux grandes familles de procédés LCM, les procédés d'injection de résine où l'on contrôle le débit à l'aide d'une pompe d'injection et les procédés d'infusion de résine où la résine est introduite dans le moule sous la seule action du vide.

**L'injection** Les procédés d'injection sont empruntés aux procédés de moulage plastique. On place les fibres dans un moule maintenu fermé par une pression, puis on injecte la résine en contrôlant le débit à l'aide d'une pompe. Enfin, la pièce est cuite au cours d'un cycle de température et de pression. La rigidité du moule permet un bon contrôle des propriétés géométriques de la pièce et du taux volumique de fibres. Ces procédés sont aujourd'hui très bien maîtrisés et largement diffusés pour la fabrication de petites pièces de structure, mais ils restent difficiles à mettre en œuvre pour des pièces de grande taille, particulièrement, en raison du temps nécessaire à la résine pour remplir le moule. En effet, la résine peut commencer à réticuler avant le remplissage total du moule, générant des porosités, il faut donc mettre en place des stratégies d'injection complexes pour assurer la bonne imprégnation des fibres. Parmi ces procédés on peut citer le RTM (resin transfer moulding, voir figure 1.5) ou le VARTM (Vaccum assisted resin transfer moulding).

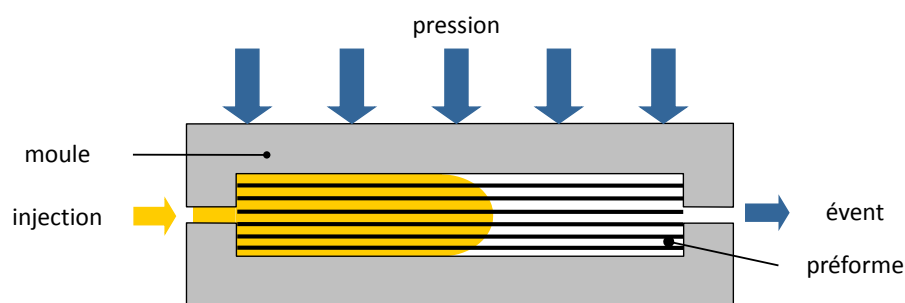


Figure 1.5 – Principe du procédé RTM [12]

**L'infusion** Les procédés d'infusion de résine ont été développés afin d'apporter une alternative économique pour la fabrication de grandes pièces ayant un faible rapport section sur volume, telles que des pales d'éolienne ou des voilures d'avions. Désignés

sous les sigles anglais VIMP pour vacuum infusion molding process ou VARI pour vacuum assisted resin infusion, ces procédés consistent à former une pellicule de résine liquide au-dessus ou en dessous de l'empilement de fibres préalablement placé dans un demi-moule refermé par une bâche à vide. C'est ensuite l'action du vide qui va compacter le système et faire infuser la résine dans l'épaisseur de la pièce (sens transverse). Le fait de parcourir la pièce dans la direction la plus courte permet d'améliorer les temps de remplissage des moules, tout en limitant la formation de porosités. Cependant, la mauvaise maîtrise des propriétés finales de la pièce due à la flexibilité de la bâche à vide et induisant une mise au point du procédé longue et coûteuse, réduit considérablement les avantages précités. Parmi ces procédés nous allons nous attacher à décrire un peu plus précisément le « Liquid Resin Infusion » (LRI) dont la modélisation est l'objet de ce travail.

**Le procédé LRI** (voir figure 1.6) est le procédé d'infusion le plus diffusé à l'échelle industrielle. Dans cette technique, le lit de résine liquide est créé à l'aide d'un tissu très perméable, le drainant, qui est apposé sur ou sous l'empilement de nappes et connecté à l'arrivée de résine. On peut diviser le procédé en quatre étapes bien distinctes. Tout d'abord, la compression initiale des préformes, on tire le vide sans ouvrir l'arrivée de résine. Vient ensuite le remplissage. On ouvre la buse, le drainant se remplit puis les préformes sont infusées dans l'épaisseur. À la fin du remplissage, une phase de repos plus ou moins longue, permet d'obtenir une bonne homogénéité de la pièce. Enfin, on fait polymériser la résine lors de la phase de cuisson.

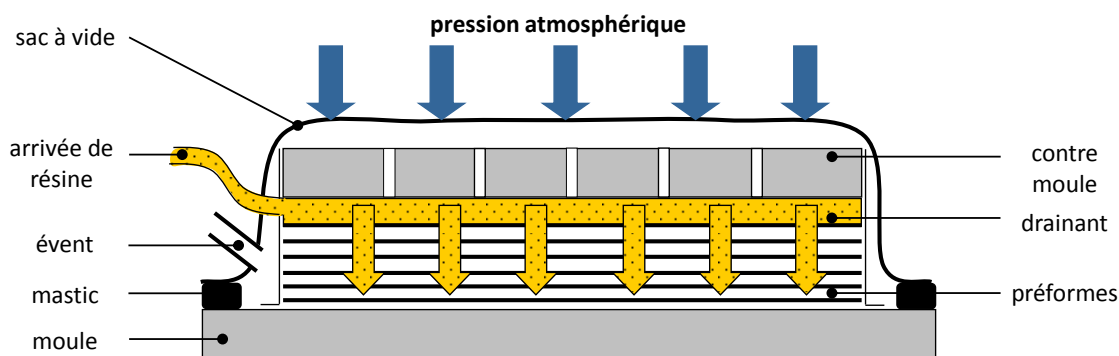


Figure 1.6 – Principe du Liquid Resin Infusion (LRI) [12]

## 1.2 Positionnement de l'étude et problématique

### 1.2.1 Contexte industriel : ESI Group et le projet INFUCOMP

Ce travail de recherche s'inscrit dans le cadre d'un financement CIFRE<sup>1</sup>, via la société éditrice de logiciel ESI Group<sup>2</sup>, ainsi que dans le projet européen INFUCOMP visant au développement de solutions industrielles pour mieux appréhender la simulation des procédés d'infusion et notamment du LRI.

#### 1.2.1.1 ESI Group

ESI Group est un éditeur de logiciels de simulation spécialisé dans l'analyse des performances (comportement des structures, crash test, analyse vibratoire...) et la simulation de procédés de fabrication. Depuis quarante ans, ESI développe des solutions de prototypage virtuel dites « end-to-end » (de bout en bout). L'objectif étant le remplacement progressif des prototypes physiques par des prototypes virtuels, on cherche à prendre en compte l'influence des phases de fabrication et d'assemblage sur les performances finales d'un produit. Dans cette logique, ESI propose une suite logicielle complète appliquée aux matériaux composites, au sein de laquelle on retrouve PAM-RTM<sup>TM</sup>.

**PAM-RTM<sup>TM</sup>**<sup>3</sup> est l'un des principaux logiciels de simulation commerciaux pour les procédés LCM. Il permet avant tout de simuler les procédés d'injection dans des moules rigides, même si des modules existent pour simuler l'infusion, ils ne proposent pas de couplage fort entre la mécanique des fluides et la mécanique du solide et ne permettent pas de prendre en compte des distributions de fraction volumique de fibres complexes. Dans l'optique d'élargir ces possibilités et de répondre aux besoins concernant l'essor des procédés d'infusion dans l'industrie, depuis 2003 et le début des travaux de P. Celle, ESI s'associe à l'ENSM.SE pour développer un module complet de simulation de l'infusion. C'est sur la base de ces travaux que se placent ces recherches.

**ProFlot<sup>TM</sup>** . PAM-RTM<sup>TM</sup> est développé sur la base de la librairie C++ éléments finis ProFlot<sup>TM</sup>, anciennement LCM-FLOT et initialement développée à l'école polytechnique de Montréal par l'équipe du Professeur Trochu [57]. ProFlot<sup>TM</sup> offre tous les

---

1. CIFRE : Convention Industrielle de Formation par la Recherche

2. <http://www.esi-group.com>

3. <http://www.esi-group.com/products/composites/composites-plastics>

outils de base pour construire des formulations éléments finis, ainsi que certains outils spécifiques tels qu'un algorithme de remplissage. C'est à partir de cette librairie que le code de calcul développé dans ces travaux est écrit.

#### 1.2.1.2 Le projet INFUCOMP

Le projet INFUCOMP, soutenu par l'union européenne et géré par ESI GmbH (Allemagne), regroupe quatorze partenaires (industriels et universitaires) de huit pays différents autour de la problématique : solution de simulation pour la fabrication industrielle de grandes pièces composites. Ce projet de quatre ans, se terminant en 2013, doit permettre d'apporter des outils de simulation performants à l'industrie du composite. Vis-à-vis de ce travail, il offre un partenariat privilégié avec certains acteurs majeurs du composite en Europe, permettant, ainsi, d'avoir des applications concrètes pour évaluer les solutions proposées et un retour d'expérience direct quant aux besoins industriels sur le sujet.

### 1.2.2 Motivations du travail

Les défis qu'implique l'utilisation de plus en plus massive des composites dans l'aéronautique et l'automobile sont considérables ; diminution des temps de cycles, automatisation des procédés, amélioration des propriétés mécaniques, le tout pour un coût toujours plus bas. Dans cette logique, les outils de simulation sont une aide précieuse pour comprendre, anticiper et appréhender les difficultés tout au long du cycle de vie d'un produit. Le prototypage virtuel permet de réduire les phases de tests et d'optimiser les procédés de fabrication impliquant un gain de temps non négligeable. L'absence de solution répondant aux besoins des industriels concernant les procédés sous membranes flexibles et en particulier l'infusion est un problème. En effet, il n'existe pas, aujourd'hui, d'outil de simulation industriel capable de prendre en compte de manière satisfaisante l'influence de l'évolution de la géométrie et des variations de perméabilité qui en résulte sur les écoulements de résine au cours de la phase de remplissage.

Le développement d'un tel outil implique la prise en charge de couplages multiphysiques avancés soulevant des difficultés d'ordre numérique. Ainsi, comme décrit dans le chapitre suivant, de nombreux travaux ont été menés ces dernières années pour appréhender ces difficultés. Cependant, ces études se placent trop souvent dans des cas académiques simplifiés qui ne correspondent pas à la réalité industrielle des matériaux composites. Par exemple beaucoup de chercheurs se sont intéressés au couplage Stokes/Darcy, proposant différentes approches, différentes conditions de

couplage mais les applications se limitent à des perméabilités rarement inférieures à  $10^{-8}m^2$ , largement insuffisantes pour les applications composites où les perméabilités peuvent descendre jusqu'à  $10^{-15}m^2$ . Ce travail a pour objectif, sur la base des travaux de P. Celle [12], de proposer des méthodes robustes permettant de simuler l'infusion dans un contexte industriel (gestion de géométries complexe, faibles perméabilités...).

## 1.3 Conclusion

Ce chapitre introductif, dans lequel les matériaux composites et leurs procédés ont été brièvement décrits, a permis de définir le cadre de ce travail. La forte dimension industrielle de ces recherches est un atout qui offre la chance de pouvoir confronter notre modèle à la réalité des applications industrielles auxquelles elles sont destinées. Ainsi, une attention particulière a été apportée à sa validation expérimentale et numérique. Afin de compléter le cadre scientifique de ce travail, dans le chapitre suivant, une revue bibliographique sur la simulation du LRI est présentée.





---

# Simulation de l'infusion : État de l'art

## Sommaire

---

2.1	Introduction . . . . .	15
2.2	Notion d'échelle . . . . .	15
2.3	Découpage spatio-temporel du procédé LRI . . . . .	17
2.4	Phénomènes physiques et leurs modélisations . . . . .	18
2.5	Conclusion . . . . .	25

---

## 2.1 Introduction

Les procédés dits par infusion de résine apportent une solution économique à la réalisation de grandes pièces, en limitant le coût de stockage des matières premières et d'outillage. Cependant, les difficultés liées à leur mise en œuvre, les limitent à une utilisation dans des applications de pointes malgré leur potentiel. Le LRI, à l'instar de tous les procédés d'infusion, ne permet pas le bon contrôle des propriétés géométriques et mécaniques de la pièce finie en raison de la souplesse du sac à vide. C'est pourquoi, au cours de ses dernières années, des modèles ont été proposés afin d'anticiper au mieux les problèmes et donc, de réduire les coûts et les difficultés associés à son utilisation. Ce chapitre présente une synthèse des méthodes de simulation proposées dans la littérature.

## 2.2 Notion d'échelle

Il existe deux contraintes liées à la mise en place d'un modèle. D'une part, la caractérisation expérimentale des paramètres d'entrée, un modèle nécessitant beaucoup

de paramètres n'est pas envisageable pour des applications industrielles, leur détermination étant souvent un problème (moyens de mesure, répétabilité des expériences, coûts des dispositifs expérimentaux...). D'autre part, un modèle avec des considérations trop locales impliquera des maillages et des coûts de calcul incompatibles avec les moyens informatiques actuels. D'une manière générale, plus l'échelle du modèle est fine, plus on se rapproche de la physique fondamentale du problème et moins il faudra déterminer de paramètres expérimentaux. Inversement, plus l'échelle d'observation est grande et plus il faudra déterminer des paramètres qui vont traduire les effets des petites échelles sur l'échelle d'observation. Le choix de l'échelle du modèle est fondamental afin de trouver le meilleur compromis entre ces deux aspects.

Les matériaux composites peuvent être observés à trois échelles différentes : microscopique, mésoscopique et macroscopique.

### 2.2.1 L'échelle microscopique

L'échelle microscopique se réfère à l'échelle d'une fibre (Figure 2.1 (c)). Étant donné le fort gradient d'échelle entre le diamètre d'une fibre ( $\approx 10\mu m$ ) et les dimensions d'une pièce composite (de l'ordre du mètre), cette échelle n'est jamais utilisée pour la simulation des procédés. Elle est utilisée sur des volumes élémentaires représentatifs (VER) afin de simuler les écoulements intra et inter mèches, permettant ainsi de représenter la véritable interaction résine/fibres. Les applications sont la détermination de paramètres difficiles à mesurer expérimentalement tels que la perméabilité ou l'étude de phénomènes locaux comme la capillarité.

### 2.2.2 L'échelle mésoscopique

À l'échelle mésoscopique (Figure 2.1 (b)), on représente les mèches comme un milieu homogène (poreux ou non, déformable ou non). Cette approche est très utilisée pour la simulation et l'analyse du comportement mécanique d'une nappe [34] lors des phases de mise en forme.

### 2.2.3 L'échelle macroscopique

L'échelle macroscopique (Figure 2.1 (a)) correspond à l'échelle de la pièce, les mèches ne sont plus représentées et l'empilement des nappes est vu comme un milieu homogène équivalent. Cette échelle d'observation est la plus adaptée à la simulation de l'infusion sur une pièce industrielle. En effet, les simplifications ainsi induites facilitent la mise en données des problèmes et réduisent les temps de calcul. Cepen-

dant, les caractéristiques physiques de ce milieu ne sont pas évidentes à mesurer car elles dépendent de phénomènes physiques complexes et difficiles à observer, les expériences étant souvent difficilement répétables car contrôlés par des mécanismes locaux.

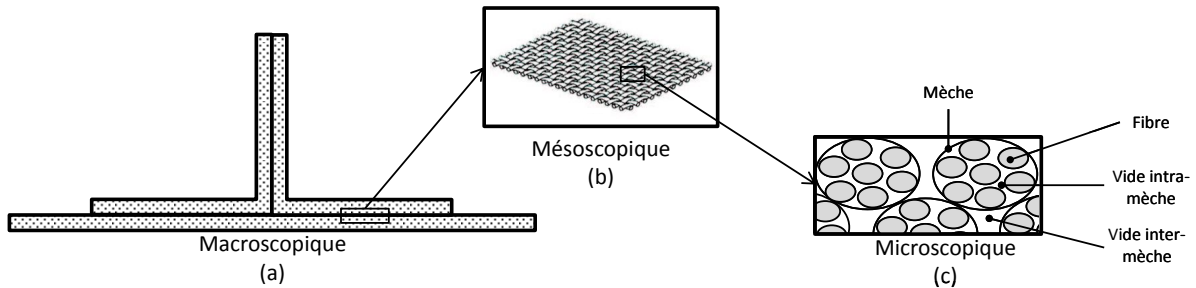


Figure 2.1 – Différentes échelles d'étude

## 2.3 Découpage spatio-temporel du procédé LRI

### 2.3.1 Les différentes phases du procédé

Comme évoqué dans le paragraphe 1.1.2.2, le procédé LRI peut être découpé en quatre phases :

- Compression initiale : phase de mise sous vide du système. La pression atmosphérique s'applique sur les renforts secs, selon leur rigidité, ils peuvent être soumis à des grandes déformations [12, 29] ;
- Remplissage des préformes : phase pendant laquelle le système est alimenté en résine. L'écoulement incompressible de la résine dans les renforts induit une augmentation de la pression sous le sac à vide, impliquant ainsi une relaxation de la préforme [12, 29] ;
- Post-infusion : phase de mise à l'équilibre du système après fermeture de l'arrivée de résine et éventuellement de l'évent [29, 52]. Le gradient de pression résiduel dû à la phase de remplissage implique une répartition non homogène de la résine, celle-ci va donc continuer à s'écouler jusqu'à l'équilibre ;
- cuisson : cycle de pression et température activant et contrôlant la réaction de polymérisation de la résine.

Dans la suite de ces travaux, seules les trois premières phases sont prises en considération.

### 2.3.2 L'approche multi-domaines

En se référant à la description du procédé, on peut remarquer, la présence de deux milieux différents, le drainant et les renforts, partiellement imprégnés par un fluide, la résine. Ainsi, Pierre Celle propose de découper le domaine d'étude en trois zones distinctes (figure 2.2), dont les frontières vont évoluer au cours du temps [12, 14] :

- une zone d'écoulement rapide constituée de la résine et du drainant (Remplissage et Post-Filling), dans la suite de ces travaux on l'appelle la « zone de Stokes » ;
- une zone d'écoulement plus lent constituée du renfort imprégné de résine (Remplissage et Post-Filling), dans la suite on l'appelle « zone de Darcy » ;
- une zone constituée des préformes non encore imprégnées de résines (Compression initiale, Remplissage), dans la suite on l'appelle « zone sèche ».

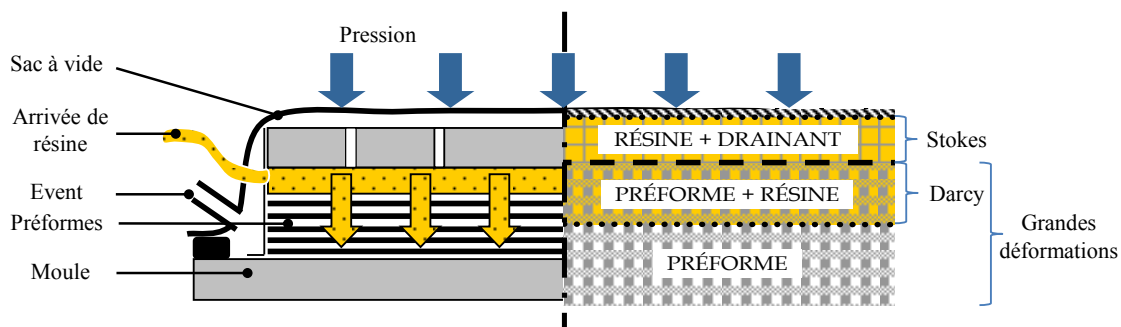


Figure 2.2 – Découpage spatial du domaine d'étude

## 2.4 Phénomènes physiques et leurs modélisations

La modélisation d'un tel procédé fait intervenir des phénomènes multiphysiques qui reposent sur la mécanique des fluides, la mécanique du solide et la conversion thermochimique de la résine. Peu de publications traitent de la modélisation totale du LRI cependant beaucoup de mécanismes sont communs à d'autres procédés et d'autres domaines d'étude tels que la biomécanique et la mécanique des sols. On notera que, ce travail portant sur la simulation isotherme des phases de remplissage et de post-infusion, les aspects thermochimiques sont mis de côté dans cette revue bibliographique.

### 2.4.1 Comportement des préformes et mécanique du solide en grandes déformations

Que ce soit pour évacuer l'excès de résine (autoclave), préparer les fibres à l'injection (RTM, Infusion) ou encore permettre l'imprégnation du renfort (C-RTM, RFI), la phase de compression est une étape nécessaire à tous les procédés pour matériaux composites. Dans le cadre de l'infusion, il faut distinguer deux phases de compression. Dans un premier temps, le préformage des nappes, phase commune à tous les procédés LCM et très étudiée dans la littérature, consiste à donner sa forme au renfort. Dans un second temps, la préforme se comprime lors de la mise sous vide du système, puis se décomprime partiellement lorsque la résine la traverse. C'est cette seconde phase qui nous intéresse dans ces travaux car ce phénomène va modifier localement la perméabilité du renfort et donc influencer sur l'écoulement de la résine.

De manière générale, on peut considérer que d'un point de vue macroscopique, le comportement de la préforme est isotrope transverse non-linéaire [23], la direction transverse correspondant à la normale aux plis. Dans la littérature, on choisit souvent de prendre en compte cette propriété à travers des modèles phénoménologiques ou issus d'hypothèses mécaniques fortes, exprimant la contrainte normale aux nappes en fonction de la fraction volumique de fibres ou de l'épaisseur de l'empilement. On peut notamment citer :

- les lois puissances [43] :

$$\sigma = a(V_f)^b \quad (2.1)$$

- la loi de Gutowski [31] :

$$\sigma = A_s \frac{\left(\frac{V_f}{V_{f0}} - 1\right)}{\left(\frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_\infty}\right)^4} \quad (2.2)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes dans la première équation,  $\sigma$  est la contrainte appliquée aux préformes,  $V_f$  la fraction volumique de fibres,  $V_{f0}$  la fraction volumique de fibres initiale (pour une contrainte nulle),  $V_\infty$  la fraction volumique de fibres maximum et  $A_s$  une constante. Ces lois sont proposées sous une forme unidimensionnelle ne permettant pas une généralisation en trois dimensions. Ainsi, dans un cadre plus générale, certains auteurs [12, 38, 44] choisissent des modèles mécaniques du type :

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{C}}} (\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}) : \underline{\underline{\underline{\epsilon}}} \quad (2.3)$$

où  $\underline{\underline{\underline{\sigma}}}$  est le tenseur des contraintes,  $\underline{\underline{\underline{C}}}$  est le tenseur d'élasticité et  $\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}$  est le tenseur des déformations. Ce genre de modèle nécessite une caractérisation expérimentale

du comportement. Ainsi, des essais ont été réalisés à l'École des Mines de Saint-Étienne et chez Hexcel Reinforcements<sup>4</sup> par S. Drapier [23], P. Celle [12] et P. Wang [63] permettant d'identifier un comportement élastique non-linéaire.

Numériquement, il y a deux niveaux de difficulté pour résoudre le problème mécanique associé à ce type de comportements. D'une part, les non-linéarités matérielles, liées au comportement qui dépend de l'état de déformation courant, et éventuellement géométriques, liées aux grands déplacements, nécessitent de mettre en place un schéma de résolution avancé, comme le schéma de Newton-Raphson [13, 14]. D'autre part, un comportement isotrope transverse implique que le calcul des contraintes et déformations dépend de l'orientation de la matière, et donc de ses éventuelles rotations. Pour simplifier ce calcul, on choisit généralement une formulation corotationnelle comme proposé dans [12]. Dans cette approche, on se place dans un repère qui tourne avec la matière, dans lequel les taux de rotations sont nuls, permettant ainsi de conserver une direction d'orthotropie constante. Le détail et la validation de cette approche, reprise dans ce travail, est explicité dans le chapitre 3.

## 2.4.2 L'écoulement de la résine : mécanique des fluides

### 2.4.2.1 L'écoulement dans le drainant

La résine s'écoule en premier lieu dans le drainant, tissu très perméable, afin de réaliser une couche de résine liquide sur le dessus de l'empilement. L'écoulement dans cette zone est peu décrit dans la littérature, les auteurs préférant prendre en compte son influence par une simple condition limite en pression [17, 29, 40, 46, 58]. P. Celle montre, cependant, la nécessité de prendre en compte cette zone pour garantir la bonne anticipation des temps d'infusion [12]. La prépondérance des vitesses d'écoulement dans le drainant, l'incite à proposer, en première approximation, une représentation via les équations de Stokes :

$$\begin{cases} -\nabla p + \eta \Delta \underline{v} = 0 \\ \operatorname{div} \underline{v} = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $p$  est la pression de la résine,  $\underline{v}$  la vitesse de la résine et  $\eta$  la viscosité de la résine. Cette approche est reprise dans les travaux de thèse de G. Pacquaut [44] et également proposée dans [32]. On notera qu'à l'échelle macroscopique, le drainant peut être vu comme un milieu poreux et que par conséquent les mêmes équations que pour l'écoulement dans les renforts semblent devoir s'appliquer. Dans le chapitre 4, une

---

4. <http://www.hexcel.com/>

étude comparative des différents modèles envisageables pour la simulation de cet écoulement aboutissant sur un choix justifié est proposée.

#### 2.4.2.2 L'écoulement dans les renforts

À l'échelle macroscopique, les renforts peuvent être considérés comme un milieu poreux très faiblement perméable. Henry Darcy fut le grand précurseur de l'étude des milieux poreux, il proposa la fameuse loi qui porte son nom en 1856 dans son ouvrage *Les fontaines publiques de la ville de Dijon* [18]. D'abord utilisée en mécanique des sols pour l'étude du tassement des terrains et des infiltrations [11, 56], elle est aujourd'hui largement utilisée dans les applications composites. Sous sa forme la plus générale, elle s'écrit :

$$\begin{cases} \underline{v} = -\frac{\underline{K}}{\eta} (\underline{\nabla}p - \rho\underline{g}) \\ \text{div}\underline{v} = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

où  $\underline{K}$  est le tenseur de perméabilité,  $\underline{v}$  est la vitesse moyenne macroscopique relative de la résine par rapport au milieu et  $p$  la pression interstitielle de la résine dans les pores. Ainsi, la plupart des travaux portant sur la simulation des procédés composites (prepreg, RTM, CRTM, infusion) repose sur cette loi [1, 2, 9, 12, 31, 36, 44, 58]. Cependant, cette équation ne permet pas de prendre en compte de gradient de vitesse dans le milieu poreux, pour contourner ce problème, l'équation de Brinkman a été proposée :

$$\begin{cases} \frac{\eta}{\phi} \Delta \underline{v} - \eta \underline{K}^{-1} \underline{v} - \underline{\nabla}p = f_v \\ \text{div}\underline{v} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

où  $f_v$  représente les forces volumiques. L'équation de Brinkman est en fait l'équation de Stokes, à laquelle est ajouté un « terme de Darcy » permettant de prendre en compte l'écoulement dans le milieu poreux. Ici, la perméabilité joue le rôle d'un coefficient de pénalité, plus celle-ci est grande et plus le terme est négligeable, on tend alors vers un écoulement de Stokes. À l'inverse, pour des perméabilités faibles, on tendra vers un écoulement de Darcy. Souvent utilisée pour traiter les écoulements à l'échelle mésoscopique, l'équation de Brinkman est de plus en plus envisagée à l'échelle macroscopique. Une étude comparative des trois modèles d'écoulement présentés dans cette revue sera réalisée au chapitre 4.

#### 2.4.2.3 Les écoulements post-infusion

À la fin du remplissage, le système n'est pas équilibré, la différence de pression entre l'évent et l'injection induit des écoulements que l'on qualifie d'écoulements post-infusion. Ces écoulements, peu étudiés dans la littérature, influent pourtant beaucoup

sur la qualité finale de la pièce infusée. En effet, le gradient de pression final, associé à la souplesse du sac à vide, implique une répartition de la résine et une épaisseur non-homogènes. La résine va donc migrer petit-à-petit des zones à faible fraction de fibres vers les zones à forte fraction de fibres afin d'atteindre un équilibre mécanique. La simulation de ces écoulements intéresse beaucoup les industriels.

Cette étape est évoquée principalement dans les travaux de Q. Govignon [29, 30], de P. Šimáček [50, 51, 52] et Y. S. Song [53]. Dans ces travaux, deux mécanismes sont étudiés, d'une part les écoulements macroscopiques correspondant à la mise à l'équilibre du système, d'autre part les écoulements microscopiques correspondant à une éventuelle fin d'imprégnation des mèches.

**Écoulement microscopique (imprégnation des mèches)** Une étude de cet écoulement par une analyse multi-échelles est proposée dans [50], l'auteur ajoute un terme puits, correspondant aux flux de résine pénétrant dans les torons, dans l'équation de conservation de la masse de la résine.

**Écoulement macroscopique (mise à l'équilibre)** Cet écoulement met en jeu la même physique que la phase de remplissage, cependant, selon les cas, les conditions d'évent et d'arrivée de résine sont remplacées par des conditions de parois imperméables [29, 52]. Dans la plupart des travaux concernant la simulation des procédés LCM, le caractère instationnaire du remplissage est géré par une succession d'états quasi-statiques déterminés à l'aide d'algorithmes de remplissage. Cependant lors de la phase de post-infusion, le caractère transitoire du phénomène n'est plus lié à l'évolution du degré de remplissage mais à l'évolution de la fraction volumique de résine. En combinant les équations de conservation de la masse du fluide et des fibres on peut exprimer la divergence de la vitesse de Darcy comme suit (voir annexe A) :

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{1}{V_f} \frac{\partial V_f}{\partial t} \quad (2.7)$$

Ensuite, en exprimant la vitesse de Darcy et la fraction volumique de fibres en fonction de la pression grâce respectivement, à la loi de Darcy et à des mesures de compression sur les renforts humides, on peut obtenir une équation instationnaire en pression de la forme :

$$\operatorname{div} \left( -\frac{K}{\eta} \nabla p \right) = \frac{1}{V_f} \frac{\partial V_f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.8)$$

C'est cette approche qui est proposée dans [29] et [52].



### 2.4.3 Les couplages

Toute la difficulté de la simulation des processus physiques complexes réside dans la gestion des couplages entre les différents phénomènes considérés. Dans le cas de la simulation de l'infusion, il existe deux niveaux de couplage, tout d'abord le couplage entre l'écoulement dans le drainant et celui ayant lieu dans les préformes, puis le couplage fluide / solide.

#### 2.4.3.1 Couplage de deux écoulements différents

Malgré le peu de travaux qui considèrent le drainant dans les simulations d'infusion, le couplage entre deux zones d'écoulements différents a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs ces dernières années. En effet, on retrouve cette problématique dans différent domaine tel que la biomécanique [5], la mécanique des sols [21], la simulation des procédés d'injection pour traiter les phénomènes de « race-tracking<sup>5</sup> » ou pour calculer numériquement la perméabilité à partir d'analyse aux échelles microscopiques et/ou mésoscopiques.

Selon les applications, on va chercher à coupler d'une part des écoulements de fluide pur avec des écoulements en milieu poreux, d'autre part, des écoulements dans plusieurs milieux poreux avec une grande différence de perméabilité.

Dans le premier cas, il s'agit de coupler les équations de Stokes (Eq. (2.4)) ou de Navier-Stokes à l'équation de Darcy (Eq. (2.5)) ou à l'équation de Brinkman (Eq. (2.6)) [5, 16, 20, 21, 22, 48, 60]. Ce type de couplage est réalisé à travers une condition d'interface qui permet de respecter les principes physiques de conservation de la masse et de continuité des contraintes. Outre la continuité de la vitesse normale et de la contrainte normale qui doivent toujours être imposées, certains auteurs proposent des conditions permettant de contrôler la vitesse tangente à l'interface. Parmi ces conditions, on peut citer :

- la condition de non-glissement

$$\underline{v}_S \cdot \underline{\tau} = \underline{v}_D \cdot \underline{\tau} \quad (2.9)$$

- la condition de Beavers-Joseph-Saffman

$$\underline{\tau} \underline{\sigma} \underline{n} = -\alpha \underline{K}^{-\frac{1}{2}} (\underline{v}_S - \underline{v}_D) \cdot \underline{\tau} \quad (2.10)$$

- la condition de Ochoa-Tapia & Whitaker (Stokes/Brinkman)

$$\left( \eta \underline{\nabla} \underline{V}_S \underline{n} - \frac{\eta}{\phi} \underline{\nabla} \underline{V}_D \underline{n} \right) \underline{\tau} = -\eta \alpha \underline{K}^{-\frac{1}{2}} \underline{V}_\Gamma \underline{\tau} \quad (2.11)$$

5. Écoulement de la résine selon des chemins préférentiels plus perméables (fils de couture ou zone purement fluide entre les préformes et les parois du moules ou du sac à vide).

- la condition de Le Bars & Worster est en fait une condition de non-glissement, cependant l'interface est « décalée » à l'intérieur de la zone poreuse à une distance  $\delta = c\underline{K}^{\frac{1}{2}}$  de la véritable interface.

Dans les équations précédentes,  $\underline{v}_S$  est la vitesse de la résine dans la zone de fluide pur,  $\underline{v}_D$  est la vitesse de la résine dans le milieu poreux,  $\underline{n}$  et  $\underline{\tau}$  sont respectivement les vecteurs normal et tangent à l'interface,  $\sigma$  est la contrainte fluide dans la zone de fluide pur,  $\alpha$  un coefficient de glissement et  $c$  une constante.

Dans le second cas, celui qui nous concerne dans le cadre de la simulation de l'infusion, peu de travaux existent. Comme expliqué dans le paragraphe 2.4.2.1, dans [12] et [44], on choisit, en première approximation, de considérer l'écoulement prépondérant de la zone la plus perméable comme un écoulement de fluide pur. On pourrait choisir, cependant, de résoudre un problème d'écoulement en milieu poreux à l'aide de l'équation de Darcy (Eq. (2.5)) ou de Brinkman (Eq. (2.6)) en considérant les perméabilités de chaque milieu. Ces approches, bien que plus respectueuses du véritable phénomène modélisé, induisent des problèmes numériques comme montré dans le chapitre 4.

### 2.4.3.2 Couplage fluide / solide

Lors de l'infusion, la résine s'écoule dans un milieu poreux qui se déforme sous l'action du fluide. Dans la littérature, on retrouve deux approches pour traiter ce problème.

D'une part, l'approche la plus courante consiste à ne pas formuler le problème de mécanique du solide. On se contente de résoudre la loi de Darcy associée à la conservation de la masse de la résine en négligeant ou non les variations de fraction volumique de fibres au cours du temps (voir annexe A et l'équation (2.8)), l'influence réciproque des déformations du milieu sur l'écoulement étant pris en compte à travers des lois de comportements expérimentales [7, 17, 29, 43, 52, 58, 65]. Ainsi, en associant des lois de comportement 1D, telles que la loi de Gutowski ou des lois puissances (voir paragraphe 2.4.1), au principe de Terzaghi [56] (Eq. (2.12)), on peut déduire l'épaisseur et/ou la fraction volumique de fibre directement à partir de la pression de la résine.

$$\underline{\sigma}_{tot} = \underline{\sigma}_{eff} + \beta S p \underline{I} \quad (2.12)$$

avec  $\beta$  le coefficient de biot et  $s$  la saturation. Enfin, la rétroaction du solide poreux sur le fluide est prise en compte à travers l'évolution de la perméabilité qui dépend directement des variations du taux de fibres du milieu, plusieurs lois existent, on peut

notamment citer celle de Carman-Kozeny qui est la plus répandue :

$$\underline{K} = K_{ii} = \frac{d_f^2}{16 k_i} \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2} \quad (2.13)$$

avec  $d_f$  le diamètre moyen de fibre,  $k_i$  les constantes de Kozeny et  $\phi$  la porosité, *i.e.* le taux de vide inter-fibres dans lequel la résine s'écoule ( $\phi = 1 - V_f$ ). Cette approche simplifiée permet de réaliser des modèles dits 2.5D, qui consiste à traiter un problème en deux dimensions sur la surface médiane de la géométrie, l'épaisseur n'étant qu'un paramètre déterminé explicitement. Ce genre de modèle offre des temps de calculs réduits et de bons résultats sur des géométries simples, cependant, leur incapacité à prendre en compte des gradients de propriétés dans l'épaisseur de la pièce ainsi que les distributions de fibres particulières dues aux courbures ne permettent pas d'appréhender des problèmes industriels complexes.

D'autre part, pour palier à ces limitations, certains auteurs [12, 38, 44] choisissent de coupler explicitement la mécanique du solide à la mécanique des fluides. Pour ce faire, on cherche à satisfaire d'une part la conservation de la quantité de mouvement et de la masse du solide associé au principe de Terzaghi et d'autre part, le problème fluide. Le système à résoudre s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \left( \underline{\sigma}_{eff}(\underline{u}) + Sp\underline{I} \right) = 0 \\ -\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \left( (1 - \phi) \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \right) = 0 \\ \underline{v} = -\frac{K}{\eta} \nabla p \\ \operatorname{div} \underline{v} = 0 \end{array} \right. \quad (2.14)$$

où  $\underline{u}$ ,  $\phi$ ,  $\underline{v}$  et  $p$  sont les inconnus du système. Ce genre d'approches, plus lourdes numériquement, permettent de prendre en compte des comportements 3D et de capter les effets des courbures dans la distribution de fibres.

## 2.5 Conclusion

Cette étude bibliographique permet de compléter le cadre de ces recherches en mettant en évidence le manque de travaux concernant un modèle complet et utilisable, à l'échelle industrielle, pour la simulation des procédés d'infusion. Elle dégage, cependant, de nombreux domaines connexes à cette étude dans lesquelles beaucoup des problèmes liés à l'étude du LRI ont été appréhendés.



# Déformations du renfort fibreux : grands déplacements et couplage fluide/Structure

## Sommaire

3.1	Introduction . . . . .	27
3.2	La formulation lagrangienne réactualisée à chaque itération . . . . .	28
3.3	Lois constitutives des préformes fibreuses . . . . .	43
3.4	Évolution de la porosité en fonction des déformations . . . . .	48
3.5	Comportement du renfort imprégné : couplage fluide / structure . . . . .	53
3.6	Exemple d'application : Compression d'un « $\Omega$ » . . . . .	57
3.7	Conclusion . . . . .	60

### 3.1 Introduction

Lors de la mise sous vide du système, la pression atmosphérique s'applique sur la préforme impliquant la redistribution des déformations sous l'action des forces suivies. Les contraintes et déformations ainsi générées sont à l'origine des variations d'épaisseur et de perméabilité observées lors de la phase d'infusion. Il est ainsi nécessaire de prendre en compte la phase de compression initiale dans les simulations.

L'objectif de ces travaux étant la simulation de l'infusion de pièces composites industrielles pouvant atteindre de grandes tailles, il n'est pas envisageable de simuler les contacts et déplacements à l'échelle des fibres, ni même des mèches. Ainsi, nous faisons le choix de représenter la préforme par un milieu homogène équivalent dont

la loi de comportement, mesurée expérimentalement, intègre tous les effets des petites échelles.

Dans ce chapitre nous présentons, dans un premier temps, les méthodes numériques retenues pour résoudre le problème de mécanique du solide, ainsi que leurs validations sur des cas tests. Puis, dans un second temps, nous nous intéressons aux modèles de comportement des préformes, ainsi qu'à des applications aux problématiques de l'infusion.

## 3.2 La formulation lagrangienne réactualisée à chaque itération

Avant toutes choses et dans un souci de clarté, il est nécessaire d'introduire quelques concepts qui nous serviront dans la mise en œuvre de la formulation.

### 3.2.1 Les différentes configurations

En mécanique des milieux continus, on appelle configuration la géométrie du milieu à un instant  $t$ . Cette définition s'appuie sur la notion de point matériel. Un point matériel correspond à un volume élémentaire représentatif, suffisamment petit par rapport au milieu étudié pour que l'on puisse assimiler la vitesse moyenne des particules le constituant à leur vitesse « réelle » (mouvements relatifs négligeables dans l'élément de matière). Ainsi, la représentation des mouvements relatifs de ces points matériels permet de caractériser les déformations et déplacements du milieu. Une configuration  $\Omega_t$  est définie par la position de l'ensemble des points matériels constituant le milieu à un instant  $t$  [39].

On peut identifier trois configurations utiles dans l'étude des milieux continus (figure 3.1). La première, la configuration initiale  $\Omega_0$ , correspond à la géométrie du milieu en l'absence de contrainte. Généralement considérée au temps initial ( $t = 0$ ), cette géométrie est connue. La seconde, la configuration courante ou matérielle, correspond à la géométrie actuelle, au moment de l'observation (à  $t$ ). C'est généralement celle que l'on cherche à déterminer, elle est donc inconnue. Enfin, on peut considérer des configurations intermédiaires, qui correspondent à des géométries connues, antérieures au temps  $t$ , pouvant être utiles à la l'étude du mouvement du milieu. Dans la suite nous noterons en majuscule les variables associées à une configuration de référence connue, dites lagrangiennes, et en minuscule les variables associées à la configuration matérielle ou courante, dites eulériennes.

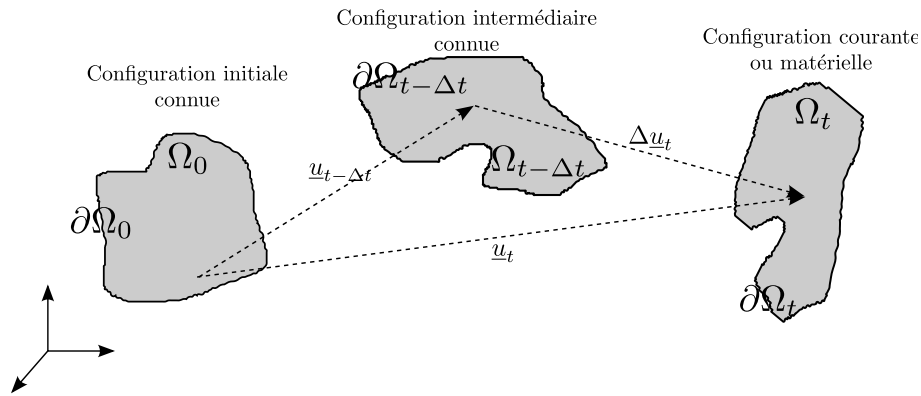


Figure 3.1 – Différentes configurations remarquables en mécanique des milieux continus

### 3.2.2 Description lagrangienne

En mécanique des milieux continus, il existe deux approches différentes pour décrire la forme et le mouvement d'un milieu. D'une part, la description lagrangienne, introduite par Louis Lagrange (1736-1813), se base sur des trajectoires et est définie sur une configuration de référence connue et d'autre part, la description eulérienne, introduite par Léonard Euler (1707-1783), se base sur des vitesses et est définie sur la configuration courante [39]. Dans un souci de clarté du propos, nous nous intéressons ici à la description lagrangienne qui est celle que nous adoptons pour formuler le problème solide.

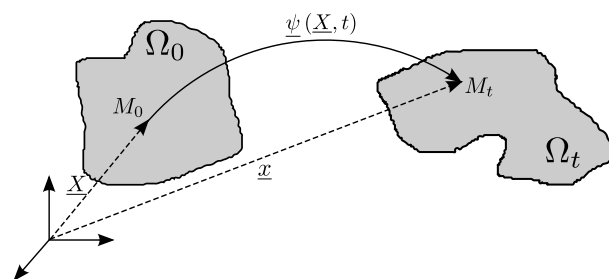


Figure 3.2 – Description lagrangienne du mouvement d'un milieu continu  $\Omega$

La description lagrangienne consiste à représenter le mouvement d'un milieu continu par une transformation  $\underline{\psi}$  définie sur la configuration de référence, notée  $\Omega_0$ , et à valeur dans la configuration matérielle, notée  $\Omega_t$ , qui associe à tout point matériel  $M_0$  de coordonnées  $\underline{X}$  dans la configuration de référence un point  $M_t$  de coordonnées

$\underline{x}$  dans la configuration matérielle (figure 3.2).

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t > 0 \\ \underline{\psi} : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t \\ \underline{x} = \underline{\psi}(\underline{X}, t) \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Cette définition permet de déduire facilement le déplacement  $\underline{u}$  et la vitesse  $\underline{v}$  d'un point matériel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{x} - \underline{X} = \underline{\psi}(\underline{X}, t) - \underline{X} \\ \underline{v}(\underline{X}, t) = \left. \frac{\partial \underline{u}(\underline{X}, t)}{\partial t} \right|_{\underline{X}} = \left. \frac{\partial \underline{\psi}(\underline{X}, t)}{\partial t} \right|_{\underline{X}} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

De plus, on introduit la matrice jacobienne associée à cette transformation, noté  $\underline{F}$ , qui s'écrit comme le gradient lagrangien de  $\underline{\psi}$  :

$$\underline{F} = \underline{\nabla}_{\underline{X}} \underline{\psi} = \left[ \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] \quad (3.3)$$

On note  $J$  son déterminant aussi appelé jacobien de la transformation  $\underline{\psi}$ . Il est important de remarquer qu'afin de définir  $\underline{v}$  et  $\underline{F}$ , la transformation doit être différentiable par rapport à la variable temporelle  $t$  et la variable spatiale  $\underline{X}$ . De plus l'impossibilité pour deux points matériels d'être confondus après la transformation ou de se croiser au cours de celle-ci se traduit mathématiquement par la stricte positivité de  $J$ . Pour plus de détails sur les propriétés mathématiques de  $\underline{\psi}$ ,  $\underline{F}$  et  $J$ , nous renvoyons le lecteur vers des cours de mécanique des milieux continus tels que [25, 39, 49].

À partir des définitions précédentes, il est possible d'introduire les relations de transport entre deux configurations reliées par la transformation  $\underline{\psi}$ .

- transport d'un vecteur élémentaire  $d\underline{X}$

$$d\underline{x} = \underline{F}d\underline{X} \quad (3.4)$$

- transport d'un élément de surface orienté  $\underline{N}dS$

$$\underline{n}ds = J\underline{F}^{-T}\underline{N}dS \quad (3.5)$$

- transport d'un élément de volume  $dV$

$$dv = JdV \quad (3.6)$$

### 3.2.3 Mesures des déformations

D'un point de vue mécanique, les changements de forme jouent un rôle important dans la transformation qui relie la configuration de référence à la configuration courante. Un moyen pratique pour étudier ces changements de forme est d'analyser la



différence entre le produit scalaire de deux vecteurs unitaires de la configuration de référence et son image dans la configuration courante :

$$e = \frac{1}{2} (dx_1 \cdot dx_2 - d\underline{X}_1 \cdot d\underline{X}_2) \quad (3.7)$$

En utilisant les formules de transport explicitées dans le paragraphe précédent on a :

$$d\underline{x}_1 \cdot d\underline{x}_2 = d\underline{x}_1^T d\underline{x}_2 = (\underline{F}d\underline{X}_1)^T \underline{F}d\underline{X}_2 = d\underline{X}_1^T \underline{F}^T \underline{F}d\underline{X}_2 \quad (3.8)$$

On appelle  $\underline{C} = \underline{F}^T \underline{F}$  le tenseur des dilatations ou tenseur de Cauchy-Green gauche, il permet de transporter un produit scalaire de la configuration de référence vers la configuration courante. En injectant l'équation (3.8) dans l'expression (3.7), on a :

$$e = \frac{1}{2} (d\underline{X}_1^T \underline{F}^T \underline{F}d\underline{X}_2 - d\underline{X}_1 \cdot d\underline{X}_2) = d\underline{X}_1^T \frac{1}{2} (\underline{F}^T \underline{F} - \underline{I}) d\underline{X}_2 \quad (3.9)$$

On peut extraire de l'équation précédente le tenseur  $\underline{E}$ , appelé tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$\underline{E} = \frac{1}{2} (\underline{F}^T \underline{F} - \underline{I}) \quad (3.10)$$

Le tenseur gradient de la transformation peut être vu comme la composition d'une rotation et d'une dilatation, c'est ce qu'on appelle la décomposition polaire de  $\underline{F}$ . On peut ainsi définir un tenseur de rotation  $\underline{R}$  et deux tenseurs de dilatation  $\underline{U}$  et  $\underline{V}$  tels que :

$$\underline{F} = \underline{R} \underline{U} = \underline{V} \underline{R} \quad (3.11)$$

À partir de cette décomposition, on peut retrouver les principales mesures de déformation utilisées en mécanique des milieux continus (Tableau 3.1).

Configuration de référence $\Omega_0$	Configuration courante $\Omega_t$
$\underline{E}_i = \frac{1}{i} (\underline{U}^i - \underline{I})$ pour $i \neq 0$	$\underline{e}_i = \frac{1}{i} (\underline{V}^i - \underline{I})$ pour $i \neq 0$
$\underline{E}_0 = \ln \underline{U}$	$\underline{e}_0 = \ln \underline{V}$
$\underline{E}_1 = \underline{U} - \underline{I}$	$\underline{e}_1 = \underline{I} - \underline{V}^{-1}$
$\underline{E}_2 = \frac{1}{2} (\underline{U}^2 - \underline{I})$	$\underline{e}_{-2} = \frac{1}{2} (\underline{I} - \underline{V}^{-2})$

Tableau 3.1 – Principales mesures de déformations utilisées en mécanique des milieux continus [12].

On notera que les tenseurs  $\underline{U}$  et  $\underline{V}$  peuvent s'écrire en fonction de  $\underline{F}$  :

$$\begin{aligned} \underline{U}^2 &= \underline{F}^T \underline{F} \\ \underline{V}^2 &= \underline{F} \underline{F}^T \end{aligned} \quad (3.12)$$

Enfin, dans le tableau 3.1, les mesures de déformations définies sur la configuration de référence sont dites lagrangiennes et celles définies sur la configuration courante sont dites eulériennes.

### 3.2.4 Mesures des contraintes

De même que pour les déformations, on peut définir plusieurs mesures du champ de contrainte en fonction de la configuration sur laquelle elles sont exprimées. La notion de champ de contrainte fut introduite par Augustin Louis Cauchy (1789-1857) en 1822 et caractérise les efforts d'interaction entre deux éléments de surface déformés. La contrainte de Cauchy ou contrainte vraie ( $\underline{\underline{\sigma}}$ ) s'exprime comme une unité de force sur la configuration courante ( $d\underline{f}$ ) par unité de surface déformée ( $d\underline{s}$ ) :

$$d\underline{f} = \underline{\underline{\sigma}} \underline{nds} \quad (3.13)$$

En utilisant les relations de transport définie dans le paragraphe 3.2.2, il est possible de définir d'autres expressions pour le tenseur des contraintes. Ainsi en remplaçant  $\underline{nds}$  dans l'équation (3.13) grâce à la relation (3.5), on obtient :

$$d\underline{f} = \underline{\underline{\sigma}} J \underline{\underline{F}}^{-T} \underline{NdS} = \underline{\underline{P}} \underline{NdS} \quad (3.14)$$

où  $\underline{\underline{P}} = J \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{F}}^{-T}$ , le tenseur des contraintes nominales ou premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff, exprime une unité de force sur la configuration courante ( $d\underline{f}$ ) par unité de surface non-déformée ( $dS$ ). En transportant  $d\underline{f}$  avec la relation (3.4), on obtient :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}} d\underline{f}_0 &= \underline{\underline{\sigma}} J \underline{\underline{F}}^{-T} \underline{NdS} \\ \Leftrightarrow d\underline{f}_0 &= \underline{\underline{S}} \underline{NdS} \end{aligned} \quad (3.15)$$

où  $\underline{\underline{S}} = J \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{F}}^{-T} = \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{P}}$ , le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff (PK2), exprime une unité de force sur la configuration de référence ( $d\underline{f}_0$ ) par unité de surface non-déformée ( $dS$ ). Les tenseurs  $\underline{\underline{S}}$  et  $\underline{\underline{P}}$  sont des mesures lagrangiennes des contraintes car elles sont définies sur la configuration de référence. À l'inverse, le tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}$  est une mesure eulérienne des contraintes.

### 3.2.5 Mise en œuvre de la formulation

Après avoir rappelé certains concepts de base nécessaires, nous pouvons décrire la mise en œuvre de la formulation du problème de mécanique du solide. En négligeant les effets d'inertie, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{f}_v \quad (3.16)$$

avec  $\underline{\underline{\sigma}}$  le tenseur des contraintes de Cauchy et  $\underline{f}_v$  les forces volumiques. Pour définir complètement le problème de mécanique, il faut associer à cette équation des conditions limites qui traduisent les déplacements et chargements imposés au solide. En appelant  $\partial\Omega_t^N$  la frontière soumise à un vecteur contraintes  $\underline{t}$  et  $\partial\Omega_t^D$  la frontière soumise à un déplacement imposé, le système à résoudre, dont l'inconnue est le déplacement  $\underline{u}$ , s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) = \underline{f}_v & \text{sur } \Omega_t \\ \underline{\underline{\sigma}} \underline{n} = \underline{t} & \text{sur } \partial\Omega_t^N \\ \underline{u} = \underline{u}^d & \text{sur } \partial\Omega_t^D \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Pour résoudre ce système par la méthode des éléments finis dits de Galerkin, on écrit la formulation faible, soit le principe des puissances virtuelles (PPV) sur la configuration courante  $\Omega_t$  :

$$\int_{\Omega_t} \underline{\underline{\nabla}} \underline{v}^* : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) \, dv = \int_{\partial\Omega_t^N} \underline{v}^* \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) \underline{n} \, ds + \int_{\Omega_t} \underline{v}^* \cdot \underline{f}_v \, dv \quad (3.18)$$

où  $\underline{v}^*$  est un champ de vitesse virtuelle cinématiquement admissible, *i.e.* tel que  $\underline{v}^*(\underline{x}) = 0$  si  $\underline{x} \in \partial\Omega_t^D$ . On peut remarquer que dans l'équation précédente, le gradient des vitesses virtuelles ( $\underline{\underline{\nabla}} \underline{v}^*$ ) peut se décomposer en la somme d'un tenseur symétrique ( $\underline{\underline{D}}^*$ ) et d'un tenseur anti-symétrique ( $\underline{\underline{W}}^*$ ) comme suit :

$$\underline{\underline{\nabla}} \underline{v}^* = \underbrace{\frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \underline{v}^* + \underline{\underline{\nabla}}^T \underline{v}^*)}_{\underline{\underline{D}}^*} + \underbrace{\frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \underline{v}^* - \underline{\underline{\nabla}}^T \underline{v}^*)}_{\underline{\underline{W}}^*} \quad (3.19)$$

$\underline{\underline{D}}^*$  et  $\underline{\underline{W}}^*$  sont respectivement le tenseur des taux de déformation virtuelle eulérien et le tenseur des taux de rotation virtuelle eulérien. L'équation (3.18) devient ainsi :

$$\int_{\Omega_t} (\underline{\underline{D}}^* + \underline{\underline{W}}^*) : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) \, dv = \int_{\partial\Omega_t^N} \underline{v}^* \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) \underline{n} \, ds + \int_{\Omega_t} \underline{v}^* \cdot \underline{f}_v \, dv \quad (3.20)$$

En raison de la symétrie du tenseur des contraintes pour un milieu continu standard, le terme  $\underline{\underline{W}}^* : \underline{\underline{\sigma}}$  est nul, ce qui permet d'obtenir la forme suivante :

$$\int_{\Omega_t} \underline{\underline{D}}^* : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) \, dv = \int_{\partial\Omega_t^N} \underline{v}^* \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) \underline{n} \, ds + \int_{\Omega_t} \underline{v}^* \cdot \underline{f}_v \, dv \quad (3.21)$$

On obtient finalement la formulation variationnelle faible du système (3.17) sur la configuration courante ; aussi appelée formulation eulérienne, elle s'écrit :

chercher  $\underline{u} \in E_{\underline{u}}$  tel que  $\forall \underline{v}^* \in E_{\underline{v}^*}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_t} \underline{D}^* : \underline{\sigma}(\underline{u}) \, dv = \int_{\partial\Omega_t^N} \underline{v}^* \underline{\sigma}(\underline{u}) \underline{n} \, ds + \int_{\Omega_t} \underline{v}^* \cdot \underline{f}_v \quad \text{dans } \Omega_t \, dv \\ \underline{\sigma} \underline{n} = \underline{t} \quad \text{sur } \partial\Omega_t^N \\ E_{\underline{u}} = \{ \underline{u} \in H^1(\Omega_t) \mid \underline{u} = \underline{u}^d \, \forall \underline{x} \in \partial\Omega_t^D \} \\ E_{\underline{v}^*} = \{ \underline{v}^* \in H^1(\Omega_t) \mid \underline{v}^* = \underline{0} \, \forall \underline{x} \in \partial\Omega_t^D \} \end{array} \right. \quad (3.22)$$

En mécanique du solide, on préfère résoudre ce système en le formulant sur une configuration de référence connue. Pour écrire une telle formulation du problème, que l'on peut qualifier de lagrangienne, on passe à la configuration de référence  $\Omega_{t_{ref}}$ , en utilisant les équations de transport déjà présentées au paragraphe 3.2.2. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{t_{ref}}} \underline{D}^* : \underline{\sigma}(\underline{u}) \, J_{t_{ref} \rightarrow t} \, dV_{t_{ref}} &= \int_{\partial\Omega_{t_{ref}}^N} \underline{v}^* \underline{\sigma}(\underline{u}) \, J_{t_{ref} \rightarrow t} \underline{F}_{t_{ref} \rightarrow t}^{-T} \underline{N} \, dS_{t_{ref}} \\ &+ \int_{\Omega_{t_{ref}}} \underline{v}^* \cdot \underline{f}_v \, J_{t_{ref} \rightarrow t} \, dV_{t_{ref}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

où  $\underline{F}_{t_{ref} \rightarrow t}$  est le gradient de la transformation entre les configurations à  $t_{ref}$  et à  $t$  et  $J_{t_{ref} \rightarrow t}$  le jacobien associé. Une fois le problème écrit sur la configuration de référence, il est commode d'utiliser les grandeurs physiques lagrangiennes à savoir  $\underline{S}$  ou  $\underline{P}$  pour les contraintes et  $\underline{\dot{E}}^*$  pour le tenseur des taux de déformation virtuelle. Ainsi, on peut montrer, en utilisant les définitions des différents tenseurs utilisés et les propriétés du produit tensoriel doublement contracté, que l'équation (3.23) équivaut à :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{t_{ref}}} \underline{\dot{E}}^* : \underline{S}(\underline{u}) \, dV_{t_{ref}} &= \int_{\partial\Omega_{t_{ref}}^N} \underline{v}^* \underline{F}_{t_{ref} \rightarrow t} \underline{S}(\underline{u}) \, \underline{N} \, dS_{t_{ref}} \\ &+ \int_{\Omega_{t_{ref}}} \underline{v}^* \cdot \underline{f}_v \, J_{t_{ref} \rightarrow t} \, dV_{t_{ref}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

où  $\underline{S}(\underline{u})$  est le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff défini sur la configuration  $\Omega_{t_{ref}}$  et  $\underline{\dot{E}}^* = \underline{F}_{t_{ref} \rightarrow t}^T \underline{D}^* \underline{F}_{t_{ref} \rightarrow t}$  est le tenseur des taux de déformation virtuelle lagrangien. La formulation la plus courante est la formulation lagrangienne totale pour laquelle la configuration de référence est la configuration initiale non-déformée ( $t_{ref} = 0$ ). Cependant, dans notre étude, en raison du couplage avec la mécanique des fluides présenté dans le chapitre suivant (Chapitre 4), on adopte une formulation lagrangienne réactualisée à chaque itération, c'est-à-dire que l'on prend comme

configuration de référence, la dernière configuration connue dans un schéma de résolution itératif ( $t_{ref} = t_{i-1}$ ). Dans ce cas, on remarquera, que lorsque l'on tend vers la solution,  $\Omega_{t_{ref}}$  tend vers  $\Omega_t$  (voir figure 3.3) et que par conséquent le gradient de la transformation entre  $t_{ref}$  et  $t$ ,  $\underline{F}_{t_{ref} \rightarrow t}$ , tend vers le tenseur unité  $\underline{I}$ . On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \underline{S} &= J \underline{F}_{t_{ref} \rightarrow t}^{-1} \underline{\sigma} \underline{F}_{t_{ref} \rightarrow t}^{-T} \approx \underline{\sigma} \\ \underline{F}_{t_{ref} \rightarrow t} \underline{S}(\underline{u}) \underline{N} &= J \underline{\sigma} \underline{F}_{t_{ref} \rightarrow t}^{-T} \underline{N} \approx \underline{\sigma}(\underline{u}) \underline{n} \\ J_{t_{ref} \rightarrow t} \underline{f}_v &\approx \underline{f}_v \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ainsi, en posant  $t_{ref} = t_{i-1}$ , on peut écrire la formulation lagrangienne réactualisée à chaque itération du système (3.17) :

chercher  $\underline{u}$  tel que  $\forall \underline{v}^*$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_{t_{i-1}}} \underline{D}^* : \underline{\sigma}(\underline{u}) dV_{t_{i-1}} = \int_{\partial \Omega_{t_{i-1}}^N} \underline{v}^* \underline{\sigma}(\underline{u}) \underline{n} dS_{t_{i-1}} + \int_{\Omega_{t_{i-1}}} \underline{v}^* \cdot \underline{f}_v dV_{t_{i-1}} \quad \text{dans } \Omega_{t_{i-1}} \\ \underline{\sigma} \underline{n} = \underline{t} \quad \text{sur } \partial \Omega_{t_{i-1}}^N \\ E_{\underline{u}} = \left\{ \underline{u} \in H^1(\Omega_{t_{i-1}}) \mid \underline{u} = \underline{u}^d \forall \underline{x} \in \partial \Omega_{t_{i-1}}^D \right\} \\ E_{\underline{v}^*} = \left\{ \underline{v}^* \in H^1(\Omega_{t_{i-1}}) \mid \underline{v}^* = \underline{0} \forall \underline{x} \in \partial \Omega_{t_{i-1}}^D \right\} \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Cette formulation, aussi appelée formulation quasi-eulérienne, a l'avantage de faire apparaître les grandeurs physiques eulériennes, ce qui permet, lors du couplage fluide structure, d'imposer directement la pression hydrostatique de résine comme charge interne sans avoir besoin de la transporter sur la configuration de référence. Le système (3.26) correspond à l'approche qui a été implémentée dans ProFlot™.

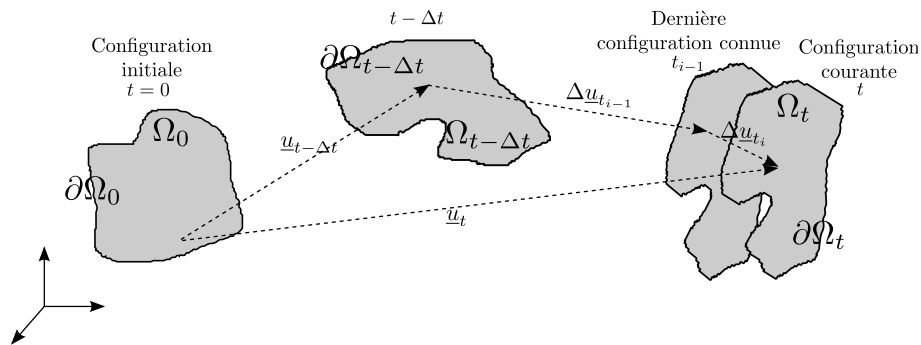


Figure 3.3 – Illustration de la formulation lagrangienne réactualisée à chaque itération

### 3.2.6 Méthode de résolution du problème non-linéaire

Le problème mécanique décrit dans la section précédente est généralement non-linéaire pour deux raisons. D'une part, le comportement des préformes utilisées dans la mise en œuvre des matériaux composites est non-linéaire. D'autre part, la préforme peut être soumise à des grandes déformations au cours de la phase de compression initiale. Ces non-linéarités impliquent une matrice de rigidité du système dépendante de l'état de déformation courant et donc du déplacement. Pour résoudre ce problème, nous utilisons une linéarisation du problème mise en œuvre dans l'algorithme de Newton-Raphson.

L'algorithme de Newton-Raphson repose sur la linéarisation de Newton du problème à l'aide d'un développement limité d'ordre 1. Soit une fonction  $f$  et un réel  $h$  de la dimension de  $x$ . Une approximation de la fonction  $f$  au voisinage de  $x$  peut s'écrire à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 comme suit :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{df}{dx}h + O(h^2) \quad (3.27)$$

À partir de l'équation précédente, on peut approcher  $h$  comme suit :

$$h \approx \left( \frac{df(x)}{dx} \right)^{-1} (f(x+h) - f(x)) \quad (3.28)$$

Supposons maintenant que l'on cherche un zéro de la fonction  $f$ , c'est-à-dire que l'on cherche  $x$  tel que  $f(x) = 0$ . On va alors chercher  $x$  comme la somme d'une prédiction  $x_0$  et d'un incrément de correction  $h$ , en supposant que  $x = x_0 + h$  est solution du problème, on a  $f(x_0 + h) = 0$ . Ainsi en injectant dans l'équation (3.28), on a :

$$x = x_0 + h \approx x_0 - \left( \frac{df(x_0)}{dx} \right)^{-1} f(x_0) \quad (3.29)$$

Finalement, on peut considérer la suite des solutions approchées du problème :

$$x_i = x_{i-1} + h = x_{i-1} - \left( \frac{df(x_{i-1})}{dx} \right)^{-1} f(x_{i-1}) \quad (3.30)$$

Ainsi, l'algorithme de Newton-Raphson, aussi appelé algorithme de prédiction/correction, consiste à corriger la solution  $x_i$  jusqu'à convergence de la suite (3.30), on fixe généralement comme critère de convergence  $f(x_i) < \epsilon$  avec  $\epsilon$  un petit scalaire et on appelle résidu à l'itération  $i$  la quantité  $f(x_i)$ .

On peut appliquer cette procédure de résolution au système (3.26), soit  $R(\underline{u}, \underline{v}^*)$  le résidu :

$$R(\underline{u}, \underline{v}^*) = - \int_{\Omega_{t_{i-1}}} \underline{D}^* : \underline{\sigma}(\underline{u}) dV_{t_{i-1}} + \int_{\partial\Omega_{t_{i-1}}^N} \underline{v}^* \underline{\sigma}(\underline{u}) \underline{n} dS_{t_{i-1}} + \int_{\Omega_{t_{i-1}}} \underline{v}^* \cdot \underline{f}_v dV_{t_{i-1}} \quad (3.31)$$

L'algorithme de Newton-Raphson consiste donc à chercher le déplacement,  $\underline{u}_i = \underline{u}_{i-1} + \Delta \underline{u}_i$ , qui annule le résidu,  $R(\underline{u}, \underline{v}^*)$ , pour un chargement fixé ( $\frac{dR(\underline{u}, \underline{v}^*)}{d\underline{\sigma}}$ ) selon l'équation suivante :

$$\underline{u}_i = \underline{u}_{i-1} - \left( \frac{dR(\underline{u}_{i-1}, \underline{v}^*)}{d\underline{u}} \right)^{-1} R(\underline{u}_{i-1}, \underline{v}^*) \quad (3.32)$$

Il est donc nécessaire de calculer la dérivée du résidu par rapport au déplacement à chaque itération :

$$\begin{aligned} \frac{dR(\underline{u}_{i-1}, \underline{v}^*)}{d\underline{u}} = & - \frac{d}{d\underline{u}} \left( \int_{\Omega_{t_{i-1}}} \underline{D}^* : \underline{\sigma}(\underline{u}_{i-1}) dV_{t_{i-1}} \right) \\ & + \frac{d}{d\underline{u}} \left( \int_{d\Omega_{t_{i-1}}^N} \underline{v}^* \underline{\sigma}(\underline{u}_{i-1}) \underline{n}_{i-1} dS_{t_{i-1}} + \int_{\Omega_{t_{i-1}}} \underline{v}^* \cdot \underline{f}_v dV_{t_{i-1}} \right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Dans le cadre de la simulation des procédés d'infusion, les forces volumiques sont négligeables, dans la suite on considère donc que :

$$\int_{\Omega_{t_{i-1}}} \underline{v}^* \cdot \underline{f}_v dV_{t_{i-1}} = 0. \quad (3.34)$$

De plus, une formulation lagrangienne réactualisée à chaque itération est adoptée, ainsi, au fil de la convergence du problème, les efforts de contact définis sur la dernière configuration connue tendent vers les efforts de contact sur la configuration courante :

$$\left( \int_{d\Omega_{t_{i-1}}^N} \underline{v}^* \underline{\sigma}(\underline{u}_{i-1}) \underline{n}_{i-1} dS_{t_{i-1}} \right) \xrightarrow{\underline{u}_{i-1} \rightarrow \underline{u}_t} \left( \int_{d\Omega_t^N} \underline{v}^* \underline{\sigma}(\underline{u}_t) \underline{n} dS_t \right), \quad (3.35)$$

les variations des efforts de contact par rapport à  $\underline{u}$  deviennent donc faibles, on peut donc négliger la dérivée de l'intégrale de bord, d'où :

$$\begin{aligned} \frac{dR(\underline{u}_{i-1}, \underline{v}^*)}{d\underline{u}} = & - \frac{d}{d\underline{u}} \left( \int_{\Omega_{t_{i-1}}} \underline{D}^* : \underline{\sigma}(\underline{u}_{i-1}) dV_{t_{i-1}} \right) \\ = & - \int_{\Omega_{t_{i-1}}} \frac{d}{d\underline{u}} (\underline{D}^* : \underline{\sigma}(\underline{u}_{i-1})) dV_{t_{i-1}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

### 3.2.7 Discrétisation par la méthode des éléments finis

Dans ce paragraphe nous explicitons les matrices permettant de construire les sous-problèmes élémentaires correspondant à la discrétisation par la méthode des éléments finis de l'équation (3.32).

Soit  $\underline{u}^h$  l'approximation du champ de déplacement et  $\underline{v}^{*h}$  le champ test associé. À partir de l'équation (3.32), on peut tirer la relation entre l'approximation de l'incrément de correction du déplacement  $\Delta \underline{u}^h = \underline{u}_{it}^h - \underline{u}_{it-1}^h$  et le résidu  $R(\underline{u}^h, \underline{v}^{*h})$  :

$$\begin{aligned} \frac{dR(\underline{u}^h, \underline{v}^{*h})}{d\underline{u}} \cdot \Delta \underline{u}^h &= -R(\underline{u}^h, \underline{v}^{*h}) \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega} \frac{d}{d\underline{u}} \left( \underline{D}^* : \underline{\sigma}(\underline{u}^h) \right) dV \cdot \Delta \underline{u}^h &= \int_{\Omega_{t_{i-1}}} \underline{D}^* : \underline{\sigma}(\underline{u}) dV_{t_{i-1}} \\ &\quad - \int_{\partial \Omega_{t_{i-1}}^N} \underline{v}^* \underline{\sigma}(\underline{u}) \underline{n} dS_{t_{i-1}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

où  $\partial \Omega_{t_{i-1}}^N$  est la frontière du domaine soumise à un vecteur contrainte.

Les champs  $\underline{u}^h$  et  $\underline{v}^{*h}$  sont continus et linéaires par élément, ils peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \underline{u}^h(\underline{x}) &= \sum_{i=1}^n [N_i(\underline{x})] \{ \underline{u}_i \} \\ \underline{v}^{*h}(\underline{x}) &= \sum_{i=1}^n [N_i(\underline{x})] \{ \underline{v}_i^* \} \end{aligned} \quad (3.38)$$

où les  $N_i$  sont les fonctions de forme associées au nœud  $i$  de l'élément,  $n$  le nombre de nœuds dans l'élément et les  $\underline{u}_i$  et  $\underline{v}_i^*$  les valeurs nodales de  $\underline{u}^h$  et  $\underline{v}^{*h}$ . En introduisant cette discrétisation dans la relation (3.37) et en se plaçant au niveau élémentaire, on obtient un système matriciel qui peut s'écrire sous cette forme :

$$\langle \underline{v}^{*h} \rangle^e [K_T^e(\underline{u}^h)] \{ \Delta \underline{u}^h \}^e = \langle \underline{v}^{*h} \rangle^e \{ \Psi^e \} \quad (3.39)$$

où  $[K_T^e]$  et  $\{ \Psi^e \}$  sont respectivement la matrice tangente élémentaire et le vecteur résidu élémentaire que nous allons maintenant exprimer en fonction des fonctions de forme et fonctions tests. Pour cela, il nous faut expliciter l'approximation du tenseur des taux de déformation virtuelle eulérien,  $\underline{D}^{*h}$ , en fonction des approximations des champs de déplacement et de vitesses virtuelles :

$$\begin{aligned} \underline{D}^{*h} &= \frac{1}{2} \left( \underline{\nabla}_x \underline{v}^{*h} + \underline{\nabla}_x^T \underline{v}^{*h} + \underline{\nabla}_x^T \underline{v}^{*h} \underline{\nabla}_x \underline{u}^h + \underline{\nabla}_x^T \underline{u}^h \underline{\nabla}_x \underline{v}^{*h} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \underline{\nabla}_x + \underline{\nabla}_x^T + \left( \underline{\nabla}_x^T \underline{u}^h \underline{\nabla}_x \right)^T + \underline{\nabla}_x^T \underline{u}^h \underline{\nabla}_x \right) \underline{v}^{*h} \end{aligned} \quad (3.40)$$



En passant à la notation de Voigt et en introduisant les décompositions nodales de  $\underline{u}^h$  et  $\underline{v}^{*h}$  (3.38) dans l'équation précédente, on peut écrire l'approximation du tenseur  $\underline{D}^*$  sous forme vectoriel discrète pour chaque élément comme suit :

$$\begin{aligned}
 \{D^*\}^e &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( [\underline{\nabla}_x N_i] + [\underline{\nabla}_x N_i]^T + [\underline{\nabla}_x N_i]^T [\underline{\nabla}_x \underline{u}^h] + [\underline{\nabla}_x \underline{u}^h]^T [\underline{\nabla}_x N_i] \right) \{\underline{v}_i^*\}^e \\
 &= [B^e(\underline{u}^h)] \{\underline{v}_i^*\}^e \\
 &= \left( \langle \underline{v}_i^* \rangle^e [B^e(\underline{u}^h)]^T \right)^T
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 [K_T^e] &= - \int_{\Omega^e} \frac{d}{d\underline{u}^h} \left( [B^e(\underline{u}^h)]^T \{\sigma\}^e \right) dV^e \\
 &= - \int_{\Omega^e} \frac{d}{d\underline{u}^h} \left( [B^e(\underline{u}^h)]^T \right) \{\sigma\}^e dV^e - \int_{\Omega^e} [B^e(\underline{u}^h)]^T \frac{d\{\sigma\}^e}{d\underline{u}^h} dV^e \\
 &= - \int_{\Omega^e} \frac{d}{d\underline{u}^h} \left( [B^e(\underline{u}^h)]^T \right) \{\sigma\}^e dV^e - \int_{\Omega^e} [B^e(\underline{u}^h)]^T \frac{d\{\sigma\}^e}{d\{D\}^e} \frac{d\{D\}^e}{d\underline{u}^h} dV^e \\
 &= - \int_{\Omega^e} \frac{d}{d\underline{u}^h} \left( [B^e(\underline{u}^h)]^T \right) \{\sigma\}^e dV^e - \int_{\Omega^e} [B^e(\underline{u}^h)]^T \frac{d\{\sigma\}^e}{d\{D\}^e} \frac{d}{d\underline{u}^h} \left( [B^e(\underline{u}^h)] \{\underline{v}_i\}^e \right) dV^e \\
 &= - \int_{\Omega^e} \frac{d}{d\underline{u}^h} \left( [B^e(\underline{u}^h)]^T \right) \{\sigma\}^e dV^e - \int_{\Omega^e} [B^e(\underline{u}^h)]^T \frac{d\{\sigma\}^e}{d\{D\}^e} [B^e(\underline{u}^h)] dV^e \\
 &\quad - \int_{\Omega^e} [B^e(\underline{u}^h)]^T \frac{d\{\sigma\}^e}{d\{D\}^e} \frac{d}{d\underline{u}^h} \left( [B^e(\underline{u}^h)] \right) \{\underline{v}_i\}^e dV^e
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Dans l'équation précédente,  $[C_T(\underline{u}^h)] = \frac{d\{\sigma\}^e}{d\{D\}^e}$  est l'opérateur de comportement tangent élémentaire qui relie la variation des contraintes de Cauchy à la variation du taux de déformation eulérien dans l'élément courant :

$$d\{\sigma\}^e = [C_T(\underline{u})] d\{D\}^e \tag{3.43}$$

De la même façon, on peut exprimer le vecteur résidu élémentaire  $\{\Psi^e\}$  :

$$\{\Psi^e\} = - \int_{\Omega^e} [B^e(\underline{u}^h)]^T \{\sigma\}^e dV^e \tag{3.44}$$

Dans l'équation précédente, on peut exprimer la contrainte de Cauchy à l'aide de l'opérateur de comportement sécant élémentaire  $[C_S(\underline{u}^h)]$  comme suit :

$$\{\sigma\}^e = [C_S(\underline{u}^h)] \{D\}^e \quad (3.45)$$

La figure 3.4 permet d'avoir une illustration graphique des opérateurs de comportement tangent et sécant dans le cas d'une loi de comportement 1D.

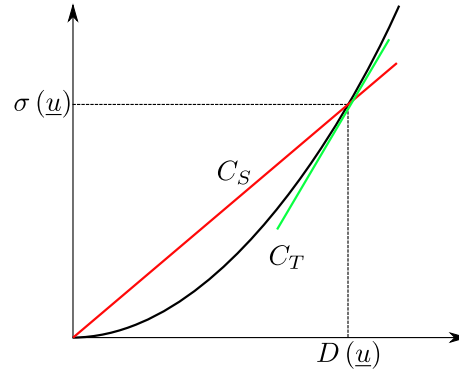


Figure 3.4 – Illustration graphique des opérateurs de comportement

Cette formulation a été implémentée dans la librairie ProFlot™ et ensuite validée sur des cas tests présentés dans le paragraphe suivant.

### 3.2.8 Validation

On se propose de valider l'implémentation de la formulation lagrangienne réactualisée à chaque itération sur un cas de compression d'un matériau élastique linéaire. On considère un pavé droit de section carré de côté  $c = 0,1m$  et de hauteur  $L = 0,15m$ , soumis à une pression de  $1bar$  sur sa face supérieure et ayant sa face inférieure encastree (figure 3.5). De plus, on considère un déplacement normal nul ( $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$ ) sur les deux faces verticales cachées,  $(0; y; z)$  et  $(x; y; 0)$  de la figure 3.5.

On considère un matériau isotrope élastique linéaire de module de Young  $E = 260kPa$  et de coefficient de poisson  $\nu = 0,3$ . Ce cas a été traité avec et sans prise en compte des non-linéarités géométriques. Les résultats obtenus ont été comparés au code de calcul Abaqus™.

#### 3.2.8.1 Sans non-linéarité géométrique

Les résultats obtenus avec une loi élastique linéaire sans prise en compte des non-linéarités géométriques sont présentés dans le tableau 3.2 et sur la figure 3.6, on constate une parfaite corrélation entre les deux codes de calculs.

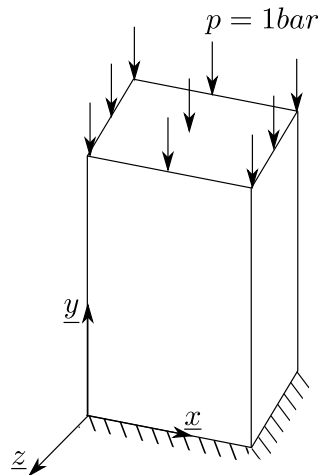


Figure 3.5 – Géométrie du cas test de validation : compression d'un bloc encastré

Compression simple	Abaqus™	ProFlot™	Erreur relative
Déplacement $u_x$ (m)	$1.23 \cdot 10^{-2}$	$1.21 \cdot 10^{-2}$	1.6%
Déplacement $u_y$ (m)	$-5.71 \cdot 10^{-2}$	$-5.65 \cdot 10^{-2}$	1.0%
Déplacement $u_z$ (m)	$1.22 \cdot 10^{-2}$	$1.22 \cdot 10^{-2}$	0.0%

Tableau 3.2 – Comparaison des résultats obtenus avec une loi élastique linéaire en petites déformations : Abaqus™, ProFlot™

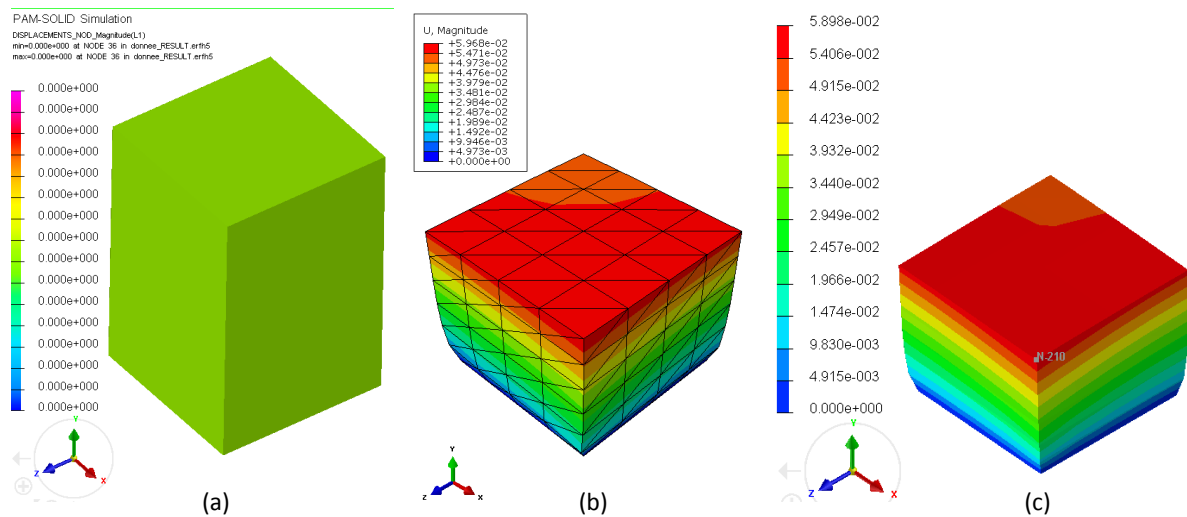


Figure 3.6 – Norme du champ de déplacement obtenu avec une loi élastique linéaire en petites déformations : (a) Géométrie initiale, (b) Abaqus™, (c) ProFlot™

### 3.2.8.2 Avec non-linéarités géométriques

En grandes déformations, la configuration courante est différente de la configuration initiale, il faut donc être attentif aux mesures de contrainte et de déformation utilisées. Ainsi, Abaqus™ considère des contraintes de Cauchy associées aux déformations logarithmiques ( $\ln \frac{l}{l_0}$ ). Nous utilisons donc les mêmes mesures dans ProFlot™ pour faciliter la comparaison des résultats.

Les résultats obtenus, avec une loi élastique linéaire et la prise en compte des non-linéarités géométriques, sont présentés dans le tableau 3.3 et sur la figure 3.7. On constate une bonne corrélation entre les deux codes de calcul avec une erreur inférieure à 2%.

Compression simple	Abaqus™	ProFlot™	Erreur relative
Déplacement $u_x$ (m)	$1.348 \cdot 10^{-2}$	$1.336 \cdot 10^{-3}$	0.9%
Déplacement $u_y$ (m)	$-5.219 \cdot 10^{-2}$	$-5.181 \cdot 10^{-2}$	0.7%
Déplacement $u_z$ (m)	$1.346 \cdot 10^{-2}$	$1.323 \cdot 10^{-3}$	1.7%

Tableau 3.3 – Comparaison des résultats obtenus avec une loi élastique linéaire en grandes déformations : Abaqus™, ProFlot™

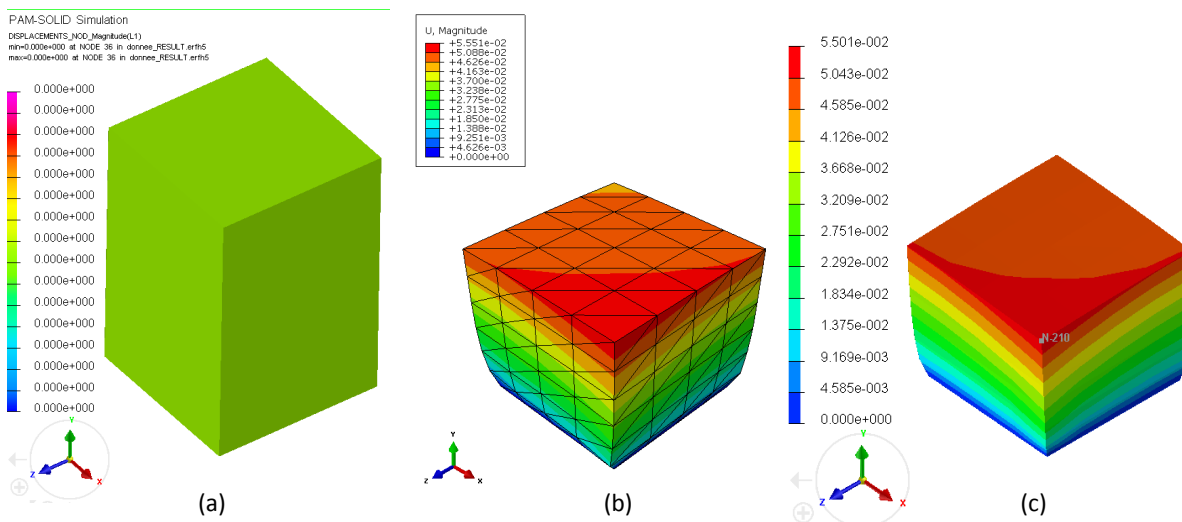


Figure 3.7 – Norme du champ de déplacement obtenu avec une loi élastique linéaire en grandes déformations : (a) Géométrie initiale, (b) Abaqus™, (c) ProFlot™

### 3.3 Lois constitutives des préformes fibreuses

Dans le cadre d'une approche macroscopique telle que celle présentée ici, étant donné la petite taille des fibres et des mèches par rapport à la pièce, il n'est pas possible de les modéliser individuellement. Ainsi, la préforme est considérée comme un milieu homogène équivalent dont la loi de comportement doit être caractérisée expérimentalement. Cette loi de comportement dépend donc des déplacements des fibres et des interactions entre celles-ci aux petites échelles.

Dans la plupart des cas, la préforme est constituée d'un empilement de nappes qui lors de la compression vont se rapprocher et éventuellement s'imbriquer (voir figure 3.8). De plus, on constate que les déformations dans le plan des nappes sont négligeables par rapport à leurs déformations dans la direction transverse. Ainsi, le comportement du milieu homogène équivalent est souvent considéré comme isotrope transverse de plan d'isotropie égal au plan des nappes et de coefficient de poisson nul. Ce qui incite généralement les auteurs à ne s'intéresser qu'au comportement transverse de la préforme. D'autre part, dans les procédés par infusion, c'est essentiellement dans l'épaisseur que les déformations interviennent, ceci, d'autant plus que les rigidités dans cette direction sont beaucoup plus faible que dans le plan.

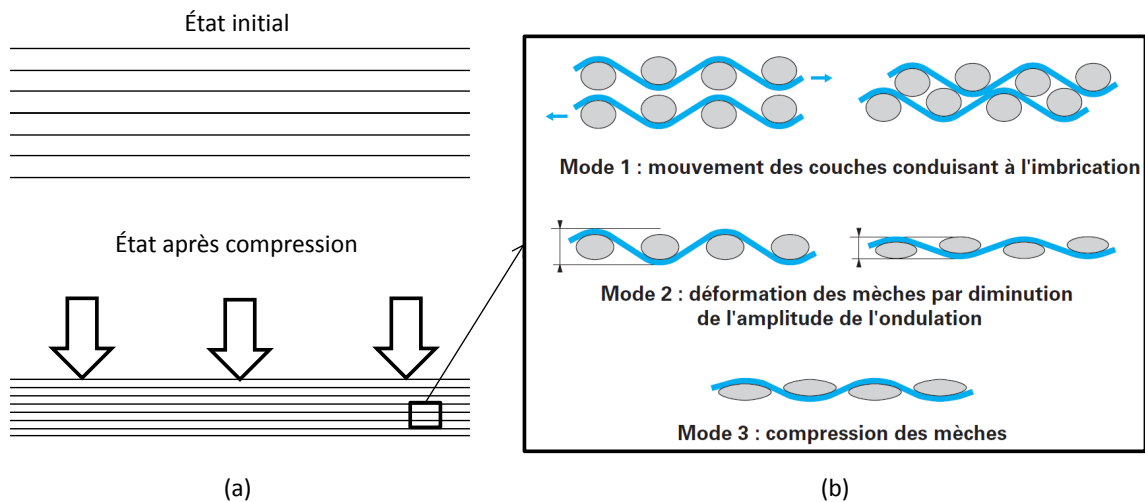


Figure 3.8 – Mécanismes de déformations des préformes : (a) Schématisation à l'échelle de la pièce, (b) mode de déformation à l'échelle des mèches [10]

Dans la littérature plusieurs approches sont utilisées pour caractériser le comportement transverse d'une préforme. D'une part, comme déjà expliqué dans la section 2.4.1 du chapitre 2, des lois reliant la contrainte dans la direction transverse au taux volumique de fibres sont souvent proposées :

– les lois puissances [43] :

$$\sigma = a(V_f)^b \quad (3.46)$$

– la loi de Gutowski [31] :

$$\sigma = A_s \frac{\left(\frac{V_f}{V_{f0}} - 1\right)}{\left(\frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_\infty}\right)^4} \quad (3.47)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes dans la première équation,  $\sigma$  est la contrainte appliquée aux préformes,  $V_f$  la fraction volumique de fibres,  $V_{f0}$  la fraction volumique de fibres initiale (pour une contrainte nulle),  $V_\infty$  la fraction volumique de fibres maximale et  $A_s$  une constante. D'autre part, des lois de comportement explicitant directement la contrainte transverse  $\sigma$  en fonction de la déformation  $\epsilon$ , comme on peut le faire pour des matériaux homogènes classiques, ont été proposées récemment :

$$\sigma(\epsilon) = E(\epsilon) \epsilon \quad (3.48)$$

où  $E(\epsilon)$  est une mesure de la rigidité. On peut notamment citer les travaux réalisés à l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne dans l'équipe de S. Drapier [12, 23, 63]. Dans le cadre de la thèse de P. Celle [12], des essais de compression ont été réalisés sur un empilement de 100 nappes en fibre de carbone de type NC2<sup>6</sup> [0;90] et de grammage 200 g/m<sup>2</sup>. L'empilement a une épaisseur totale de 0,056 m et une surface de 0,585 × 0,385 m<sup>2</sup>. Ces essais mettent en évidence un comportement élastique non-linéaire (voir figure 3.9).

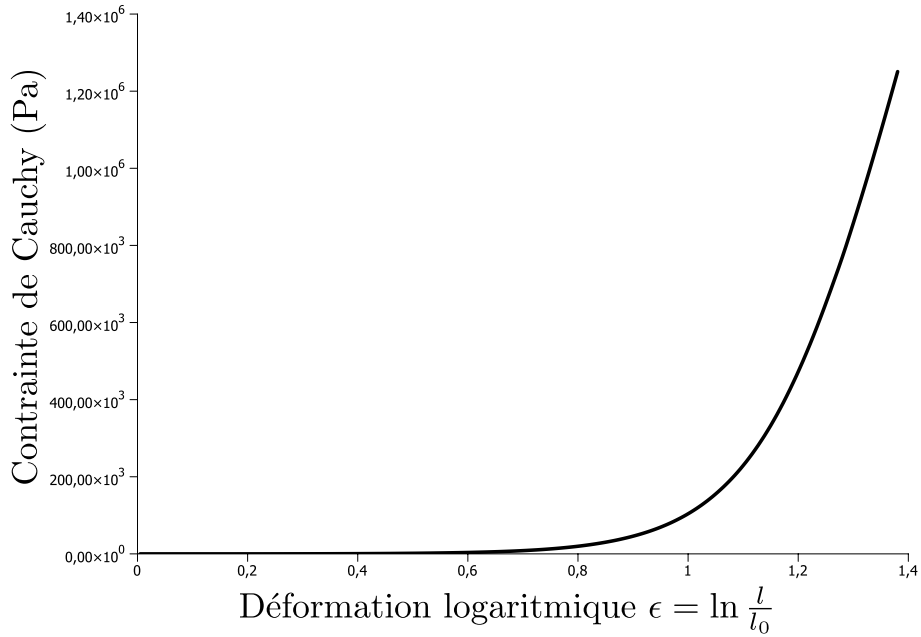
L'approche présentée dans ces travaux étant basée sur un comportement 3D, il n'est pas nécessaire de passer par les lois de comportement simplifiée de type puissance ou Gutowski. De plus, dans la littérature, lorsque ces lois simplifiées sont mesurées, il est rare que toutes les données nécessaires pour les ré-exprimer en fonction d'une déformation équivalente soit communiquées. On préférera donc utiliser des lois directement mesurées en fonction des déformations. Dans le cadre d'une approche volumique comme la nôtre, l'utilisation de lois unidimensionnelles telles que celle présentée en figure 3.9 nécessite quelques hypothèses et précautions pour passer du comportement transverse local de la préforme à un comportement 3D. Dans la suite, le calcul des opérateurs de comportement tangent et sécant nécessaire à la résolution du problème non linéaire (3.26) de mécanique du solide est détaillé.

La loi de Hooke généralisée donne une relation entre le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\epsilon}})$  et le tenseurs des déformations  $\underline{\underline{\epsilon}}$  :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\epsilon}}) = \underline{\underline{\underline{C}}}(\underline{\underline{\epsilon}}) : \underline{\underline{\epsilon}} \quad \text{ou sous forme indicielle} \quad \sigma_{ij}(\underline{\underline{\epsilon}}) = C_{ijkl}(\underline{\underline{\epsilon}}) \epsilon_{kl} \quad (3.49)$$

---

6. Renforts multi-axiaux constitués de nappes unidirectionnelles cousues


 Figure 3.9 – Loi de comportement d'un empilement de 100 NC2 [0;90]<sub>100</sub>

où  $\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{\epsilon}})$  est le tenseur d'élasticité d'ordre 4 qui comporte 81 coefficients, ramenés à 21 pour des matériaux assurant la symétrie des contraintes et déformations. Ainsi, en utilisant la notation de Voigt, il est possible d'écrire la loi de Hooke (3.49) sous forme matricielle. Dans le cas d'un matériau isotrope transverse, on a dans le repère matériau :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu_{tp}\nu_{pt})E_p}{\delta} & \frac{\nu_{tp}+\nu_{tp}\nu_p E_p}{\delta} & \frac{\nu_p+\nu_{tp}\nu_{pt} E_p}{\delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{pt}+\nu_p\nu_{pt} E_t}{\delta} & \frac{(1-\nu_p\nu_p)E_t}{\delta} & \frac{\nu_{pt}+\nu_{tp}\nu_p E_t}{\delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_p+\nu_{tp}\nu_{pt} E_p}{\delta} & \frac{\nu_{tp}+\nu_p\nu_{tp} E_p}{\delta} & \frac{(1-\nu_{pt}\nu_{tp})E_p}{\delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

avec :

$$\delta = \left(1 - 2\nu_{tp}\nu_p^2 - \nu_p^2 - \nu_{tp}\nu_p - \nu_{pt}\nu_p\right)$$

et  $E_p$  le module de Young dans le plan des nappes,  $E_t$  le module de Young transverse,  $\nu_p$  le coefficient de poisson longitudinal,  $\nu_{tp} = \nu_{pt} \frac{E_t}{E_p}$  le coefficient de poisson transverse,  $G_p = \frac{E_p}{2(1+\nu_p)}$  le module de cisaillement longitudinal et  $G_t$  le module de cisaillement transverse. Il est donc nécessaire de déterminer 5 coefficients indépendants ( $E_p$ ,  $E_t$ ,  $\nu_p$ ,  $\nu_{tp}$ ,  $G_t$ ) pour complètement caractériser un comportement isotrope

transverse tel que celui de la préforme. Or les lois de comportement unidimensionnelles présentées dans le paragraphe précédent, nous fournissent uniquement le module d'élasticité transverse ( $E_t$ ). Cependant, en considérant que les déformations dans l'épaisseur de la préforme (direction transverse) sont prépondérantes par rapport aux déformations dans le plan des nappes (directions longitudinales), nous proposons le comportement isotrope transverse équivalent suivant :

$$\begin{aligned} E_p &= \theta E_t(\epsilon) \\ \nu_{tp} &= \nu_p = 0 \\ G_t(\epsilon) &= \frac{E_t(\epsilon)}{2(1+\nu_{tp})} = \frac{E_t(\epsilon)}{2} \end{aligned} \quad (3.51)$$

où  $\theta$  est un coefficient à déterminer.

L'opérateurs de comportement sécant ( $[C_S]$ ) de l'équation 3.45 est construit en injectant le module d'élasticité sécant ( $E_{St}$ ) dans l'expression (3.50). De même l'opérateur de comportement tangent ( $[C_T]$ ) de l'équation (3.43) est construit en injectant le module d'élasticité tangent ( $E_{Tt}$ ) dans l'expression (3.50). Les modules d'élasticité sécant et tangent doivent être interpolés à partir d'une loi de comportement expérimentale telle que celle présentée sur la figure 3.9. On choisi de réaliser cette interpolation à l'aide des polynômes de Lagrange :

$$\begin{aligned} E_{St} &= \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=0}^n \left( \sigma_i \prod_{j=0}^n \frac{\epsilon - \epsilon_j}{\epsilon_j - \epsilon_i} \right) \\ E_{Tt} &= \frac{d\sigma}{d\epsilon} = \sum_{i=0}^n \left( \sigma_i \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_k} \prod_{j=0}^n \frac{\epsilon - \epsilon_j}{\epsilon_j - \epsilon_i} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

où les couples  $(\sigma_i; \epsilon_i)$  correspondent aux points de mesure expérimentale et  $n$  est le nombre de points utilisés pour faire l'interpolation. Dans la pratique, on choisit de fixer  $n$  à 2.

Il est important de remarquer que la direction transverse des nappes n'est pas constante au cours du chargement et dépend de la géométrie de la pièce (voir figure 3.10). Ainsi la loi de comportement utilisée pour calculer les opérateurs de comportement tangent et sécant est locale. Il est donc nécessaire d'opérer des rotations pour passer du repère général d'étude au repère matériau. Concrètement, la procédure de calcul des deux opérateurs, résumée sur la figure 3.11, est la suivante. À partir du déplacement calculé à l'itération précédente, on détermine le gradient de la transformation comme suit :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla}} u_{i-1} + \underline{\underline{I}} \quad (3.53)$$

Il est alors possible de calculer le tenseur des déformations courant ( $\underline{\underline{\epsilon}}$ ) avec les relations du tableau 3.1. Le choix de la mesure utilisée dépend de la loi de comporte-



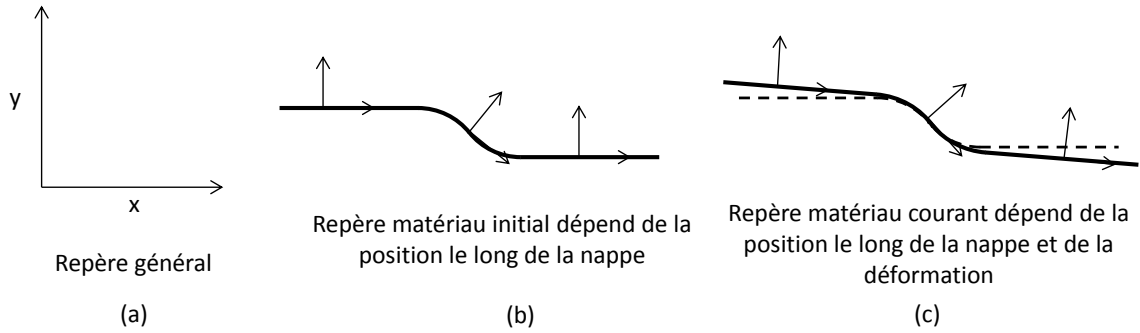


Figure 3.10 – Définition des différents repères considérés pour le calcul des opérateurs de comportement tangent et sécant : (a) Repère général, (b) repère matériau initial, (c) repère matériau courant

ment fournie dans la mise en données. Le tenseur des déformations ainsi calculé est exprimé dans le repère général du problème, il est donc nécessaire de passer dans repère matériau (le repère lié aux nappes), afin de pouvoir utiliser la loi de comportement des nappes. Pour cela, on réalise deux rotations successives. La première permet de passer du repère général au repère matériau dans la configuration initiale (non-déformée) :

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{mat0} = \underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{M}} \quad (3.54)$$

où  $\underline{\underline{M}}$  est la matrice de passage du repère général au repère matériau initial et  $\underline{\underline{\epsilon}}_{mat0}$  la déformation exprimée dans le repère matériau initial. La deuxième projection permet de passer du repère matériau dans la configuration initiale au repère matériau dans la configuration courante (rotation de la matière due aux déformations) :

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{mat} = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{\epsilon}}_{mat0} \underline{\underline{R}} \quad (3.55)$$

où  $\underline{\underline{R}}$  est la matrice de rotation issue de la décomposition polaire du gradient de la transformation  $\underline{\underline{F}}$  (équation (3.11)). Une fois la déformation exprimée dans le repère matériau courant, on peut en extraire la déformation transverse et en déduire les modules transverses sécant ( $E_{St}$ ) et tangent ( $E_{Tt}$ ) grâce à l'interpolation de Lagrange définie dans l'équation (3.52). En injectant ( $E_{St}$ ) et ( $E_{Tt}$ ) dans l'expression (3.50), on obtient alors les opérateurs de comportement tangent et sécant dans le repère matériau courant, il faut alors revenir dans le repère général en appliquant les deux rotations inverses définies respectivement par  $M^{-1}$  et  $R^{-1}$ . Finalement, la matrice tangente et le résidu élémentaires peuvent être calculés à partir des relations (3.42) et (3.44).

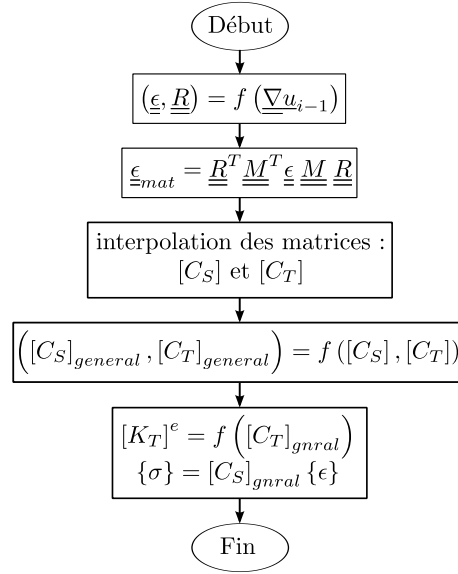


Figure 3.11 – Procédure de calcul des opérateurs de comportement tangent et sécant

### 3.4 Évolution de la porosité en fonction des déformations

Dans cette partie nous détaillons la procédure utilisée pour calculer la fraction volumique de fibres à partir des déformations du milieu homogène équivalent. La fraction volumique de fibres est un des paramètres déterminants la perméabilité, elle influe donc directement sur les écoulements de résine lors de la phase d'imprégnation de la préformes. Ainsi, dans ces travaux de thèse [63], P. Wang a montré qu'il était nécessaire de prendre en compte l'évolution de la perméabilité en fonction des déformations mécaniques pour simuler correctement les temps de remplissage. Pour cela nous faisons l'hypothèse d'un milieu constitué de fibres indéformables, de sorte que toutes les déformations du milieu homogène équivalent correspondent à des réarrangement de fibres à l'échelle microscopique. Cette hypothèse est illustrée sur la figure 3.12

La conservation de la masse ( $m(\Omega)$ ) du milieu homogène équivalent s'écrit :

$$\frac{D}{Dt} (m(\Omega)) = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho dv = 0 \quad (3.56)$$

où  $\frac{D}{Dt}$  fait référence à la dérivée particulaire par rapport au temps et  $\rho$  est la masse volumique du milieu homogène équivalent. Le milieu considéré est en fait un milieu diphasique constitué de fibres (solides indéformables) et d'air ou de résine. En

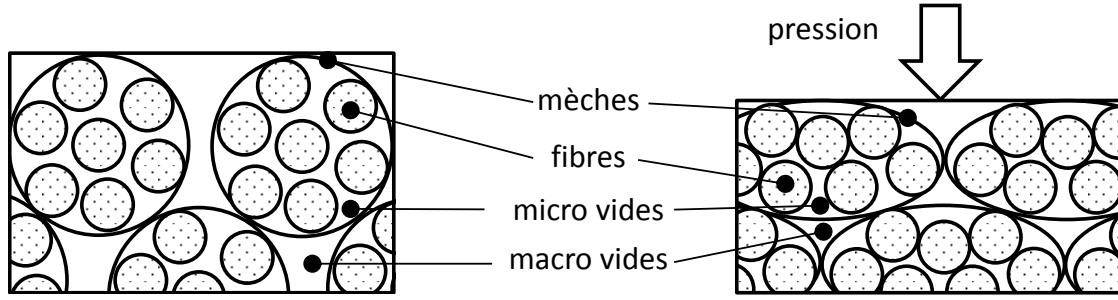


Figure 3.12 – illustration de l'hypothèse d'incompressibilité des fibres

utilisant la loi des mélanges, l'équation (3.56) devient :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} (\rho_s (1 - \phi) + \rho_r \phi) dv = 0 \quad (3.57)$$

avec  $\rho_s$  la masse volumique des fibres,  $\rho_r$  la masse volumique du fluide (la résine si le milieu est saturé ou l'air si le milieu est sec) et  $\phi$  la porosité ou fraction volumique de fluide. En remarquant qu'il n'y a pas de transfert de masse possible entre les deux phases, l'équation (3.57) est équivalente au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho_s (1 - \phi) dv = 0 \\ \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho_r \phi dv = 0 \end{array} \right. \quad (3.58)$$

La première équation du système (3.58), correspond à la conservation de la masse de la phase solide (les fibres), c'est elle que l'on va utiliser pour mettre à jour la porosité ( $\phi$ ) en fonction des déformations du milieu. Cette équation peut être traitée de deux manières différentes, soit par une approche eulérienne, soit par une approche Lagrangienne.

### 3.4.1 Approche eulérienne

Comme expliqué en introduction de ce chapitre, l'approche eulérienne consiste à considérer les équations dans la configuration courante (en mouvement). En utilisant la formule de dérivation d'une intégrale de volume sur un domaine en mouvement, la conservation de la masse de la phase solide devient :

$$\int_{\Omega_t} \frac{D}{Dt} (\rho_s (1 - \phi)) dv + \int_{\Omega_t} \rho_s (1 - \phi) \frac{D}{Dt} (dv) = 0 \quad (3.59)$$

L'équation (3.59), fait apparaître la dérivée d'un élément de volume dans la configuration courante, qui peut être calculée en passant par une configuration de référence comme suit :

$$\frac{D}{Dt}(dv) = \frac{D}{Dt}(JdV_{ref}) = \frac{DJ}{Dt}dV_{ref} = J \operatorname{div} \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \right) dV_{ref} = \operatorname{div} \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \right) dv \quad (3.60)$$

où  $J$  est le jacobien de la transformation entre une configuration de référence  $\Omega_{ref}$  et la configuration courante  $\Omega_t$  et  $dV_{ref}$  est l'élément de volume de référence. De plus la dérivée particulaire du produit  $\rho_s(1 - \phi)$  est donnée par :

$$\frac{D}{Dt}(\rho_s(1 - \phi)) = \frac{\partial \rho_s(1 - \phi)}{\partial t} + \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - \underline{w} \right) \cdot \nabla (\rho_s(1 - \phi)) \quad (3.61)$$

où  $\underline{u}$  est le champ de déplacement total des particules qui constituent le milieu homogène équivalent et  $\underline{w}$  est la vitesse convective du milieu de référence. Or, le problème de mécanique du solide est traité par une approche lagrangienne, le milieu de référence est donc le milieu correspondant aux points matériels ce qui implique  $\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - \underline{w} = \underline{0}$ , d'où :

$$\frac{D}{Dt}(\rho_s(1 - \phi)) = \frac{\partial \rho_s(1 - \phi)}{\partial t} \quad (3.62)$$

En remplaçant dans (3.59) les dérivées particulières de l'élément de volume et du produit de la masse volumique par la fraction volumique de solide par leurs expressions respectives (3.60) et (3.62), on obtient :

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho_s(1 - \phi)}{\partial t} + \int_{\Omega_t} \rho_s(1 - \phi) \operatorname{div} \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \right) dv = 0 \quad (3.63)$$

Finalement, en utilisant l'hypothèse d'incompressibilité des fibres, on a  $\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0$ , d'où :

$$\int_{\Omega_t} -\frac{\partial \phi}{\partial t} + (1 - \phi) \operatorname{div} \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \right) dv = 0 \quad (3.64)$$

### 3.4.2 Approche lagrangienne

Dans le cadre d'une approche lagrangienne, on transporte le problème sur une configuration de référence connue correspondant à un temps antérieur au temps courant. Ainsi, en utilisant la relation de transport d'un élément de volume (3.6), la conservation de la masse de la phase solide devient :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_{ref}} \rho_s(1 - \phi) JdV_{ref} = 0 \quad (3.65)$$

où  $J$  est le jacobien de la transformation entre la configuration de référence  $\Omega_{ref}$  et la configuration courante  $\Omega_t$  et  $dV_{ref}$  est l'élément de volume défini sur  $\Omega_{ref}$ . De la même façon que pour l'approche eulérienne, la vitesse relative entre les points matériels et le milieu de référence est nulle, d'où :

$$\frac{D}{Dt} (\rho_s (1 - \phi) J) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s (1 - \phi) J) \quad (3.66)$$

Ainsi en injectant l'équation (3.66) dans l'équation de conservation de la masse de la phase solide (3.65) et en remarquant que  $dV_{ref}$  est invariant, on a :

$$\int_{\Omega_{ref}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s (1 - \phi) J) dV_{ref} = 0 \quad (3.67)$$

De plus, l'incompressibilité de la phase solide implique :

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0 \quad (3.68)$$

et l'équation (3.67) devient :

$$\int_{\Omega_{ref}} \frac{\partial}{\partial t} ((1 - \phi) J) dV_{ref} = 0 \quad (3.69)$$

Finalement, l'équation (3.69) signifie que le produit  $(1 - \phi) J$  est constant dans le temps, on peut alors en déduire la relation suivante :

$$J(\underline{x}, t + \Delta t) (1 - \phi(\underline{x}, t + \Delta t)) = J(\underline{x}, t) (1 - \phi(\underline{x}, t)) \quad (3.70)$$

### 3.4.3 Comparaison entre les deux approches

Les deux approches ont été implémentées dans ProFlot™. Dans le cas de l'approche eulérienne, l'équation (3.64) est résolue par la méthode des éléments finis, la porosité étant linéaire par élément. Dans le cas de l'approche lagrangienne, la porosité est considérée constante par élément et est directement calculée avec l'équation (3.70). Une comparaison est présentée dans ce qui suit.

On considère une préforme en « L » constituée de nappes NC2 dont le comportement transverse a été caractérisé dans les travaux de P. Wang [63] et est représenté sur la figure 3.13. Cette géométrie correspond à une forme primaire, très courante dans les pièces composites, qui sert notamment à réaliser des raidisseurs en « T ». Ce « L » est soumis à une pression de 1 bar sur sa face intérieure et une condition de contact glissant ( $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$ ) sur sa face extérieure (voir figure 3.14). La porosité initiale est de 60%.

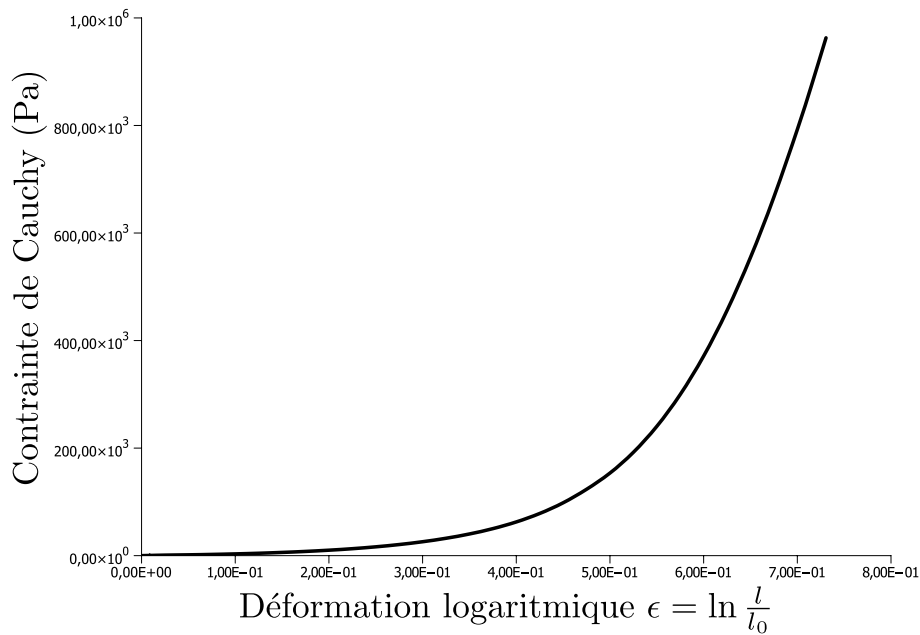


Figure 3.13 – Loi de comportement caractérisée dans les travaux de P. Wang [63] sur une préforme de type NC2 composée de 48 plis G1157E01  $[0_6, 90_12, 0_6]_S$  et de dimension  $0.335 \times 0.335 \text{ m}^2$

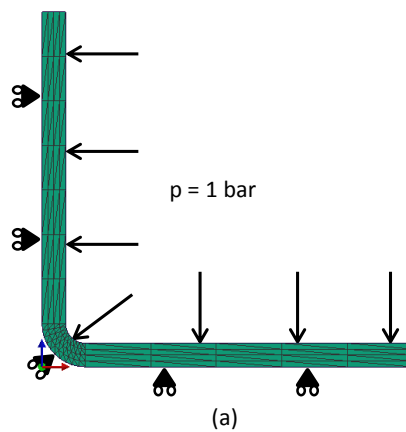


Figure 3.14 – Géométrie initiale et conditions limites pour la compression d'un « L » : (a) vue isométrique, (b) vue de côté avec conditions limites

Les résultats obtenus avec les deux approches sont présentés dans le tableau 3.4 et sur la figure 3.15. On remarquera que les valeurs sont très proches et que par conséquent les deux méthodes peuvent être considérées comme équivalentes.

La notion de porosité étant constante par élément dans PAM-RTM™, il est plus

### 3.5. Comportement du renfort imprégné : couplage fluide / structure

	Approche eulérienne	Approche lagrangienne	Erreur relative
porosité moyenne	37,2%	37,4%	0,5%
porosité maximum	53,6%	52,6%	1,9%

Tableau 3.4 – Comparaison entre l’approche eulérienne et l’approche lagrangienne pour la mise à jour de la porosité à travers la conservation de la masse des fibres

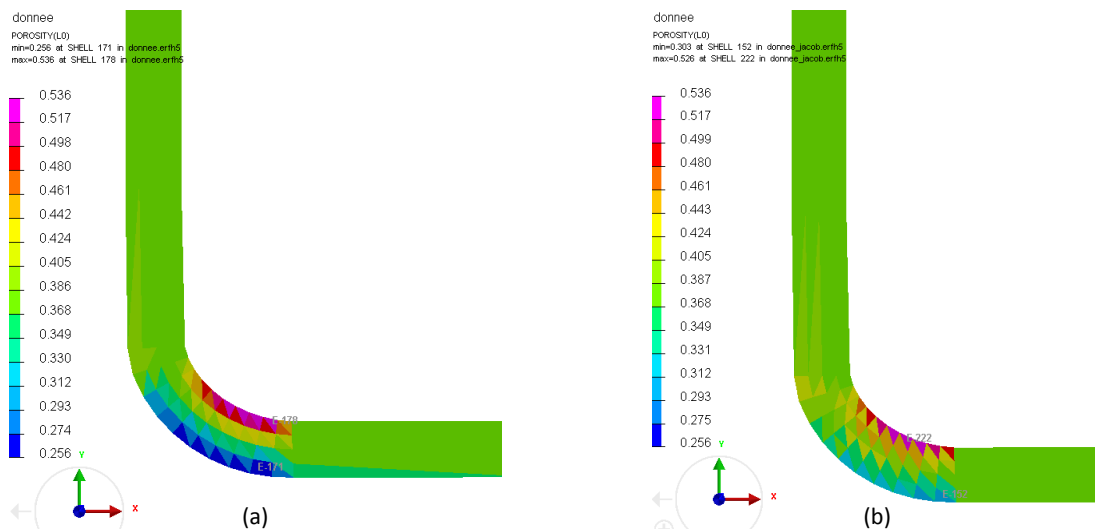


Figure 3.15 – Répartition de la porosité dans le « L » après compression : (a) Approche eulérienne, (b) approche lagrangienne

simple de traiter ce problème avec l’approche lagrangienne qui ne nécessite pas d’évaluer la porosité aux nœuds en début de calcul. De plus, l’évolution de la porosité basée sur la variation du jacobien et donc du volume de chaque élément ne nécessite pas de résoudre une équation différentielle par la méthodes des éléments finis. Elle est donc plus rapide en terme de temps de calcul. Pour ces raisons, nous choisissons l’approche lagrangienne pour la mise à jour de la porosité en fonction des déformations.

## 3.5 Comportement du renfort imprégné : couplage fluide / structure

Lors de la phase de remplissage, la souplesse de la bâche à vide ne permet pas de maintenir une épaisseur constante, induisant ainsi des variations du taux de fibres

et du volume de résine à injecter. Pour prendre en compte ce phénomène dans nos simulations, un couplage fort itératif entre la mécanique du solide et la mécanique des fluides (présentée dans le chapitre 4) est proposé.

### 3.5.1 Principe et mise en œuvre : couplage fort itératif

Il existe deux méthodes pour appréhender le couplage entre deux phénomènes. D'un côté, les approches monolithiques qui consistent à résoudre un seul problème dans lequel on fait intervenir toutes les équations considérées [38]. De l'autre, les approches itératives qui consistent à résoudre les problèmes de manière successive, en prenant en compte les influences mutuelles par des conditions limites ou des lois de comportement, et à boucler jusqu'à satisfaction d'un critère de convergence [12, 13, 14]. La première approche a l'avantage de gérer implicitement les conditions de couplage et de donner le résultat en un seul calcul tandis que la seconde nécessite plusieurs calculs successifs pour converger vers la solution du problème. Cependant, les approches monolithiques peuvent parfois poser des problèmes numériques. En effet, dans le cadre d'un couplage fluide / structure, cela consisterait à construire une formulation en déplacement (solide), vitesse (fluide), pression hydrostatique (fluide) sur le domaine de calcul. Or, l'approximation linéaire en déplacement choisie (3.38) implique que l'approximation du champ de contrainte est constante par élément. Et comme nous le détaillerons dans le chapitre suivant, la formulation du problème fluide est discrétisée avec des éléments finis linéaires en pression (et en vitesse). La pression hydrostatique du fluide étant une contrainte interne pour le problème solide (principe de Terzaghi que nous détaillons dans la suite), son approximation ne serait donc pas compatible avec l'approximation du champ de contrainte solide, générant des difficultés numériques. Une méthode pour éviter ce problème serait de discrétiser la formulation solide avec des éléments quadratiques en déplacement, ce qui doublerait le nombre d'inconnues en déplacement. De plus, une approche monolithique peut poser des problèmes de conditionnement de la matrice de rigidité, si les problèmes couplés sont de natures très différentes. Pour ces raisons et dans l'optique d'avoir un code modulaire, nous choisissons une approche itérative pour gérer le couplage entre le problème poro-élastique et le problème fluide.

Dans le cadre de cette approche itérative, l'influence des déformations du milieu homogène équivalent sur l'écoulement de la résine est prise en compte à travers l'évolution du tenseur de perméabilité ( $\underline{K}$ ) qui dépend de la porosité, elle-même mise à jour à partir des déformations selon la méthode présentée dans l'équation (3.70). Dans la littérature, de nombreux modèles sont proposés pour calculer la perméabilité à partir



de la porosité. On peut notamment citer la loi de Carman-Kozeny :

$$\underline{K} = K_{ii} = \frac{d_f^2}{16 k_i} \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2} \quad (3.71)$$

où les  $k_i$  sont les constantes de Kozeny,  $d_f$  est le diamètre des fibres et  $\phi$  est la porosité du milieu ; ou encore les lois exponentielles du type :

$$\underline{K} = K_{ii} = A_i \exp B_i (1 - \phi) \quad (3.72)$$

où les  $A_i$  et  $B_i$  sont des constantes à déterminer expérimentalement. Dans notre code, la loi à utiliser est spécifiée par l'utilisateur lors de la mise en donnée dans PAM-RTM™.

La rétroaction du fluide sur les préformes est prise en compte à travers le principe de Terzaghi (3.73) :

$$\underline{\sigma}_{tot} = \underline{\sigma}_{eff} + Sp\underline{I} \quad (3.73)$$

avec  $\underline{\sigma}_{tot}$  la contrainte totale appliquée sur le milieu homogène équivalent (fibre saturée de résine),  $\underline{\sigma}_{eff}$  la contrainte effective dans le réseau de fibres,  $p$  la pression hydrostatique de résine et  $S$  la saturation (rapport entre le volume de résine et le volume des pores). Ce principe, initialement développé en mécanique des sols par Karl von Terzaghi [56], est aujourd'hui utilisé dans la plupart des applications poromécaniques impliquant des écoulements de fluide.

Concrètement, le couplage implémenté dans ProFlot™, consiste à résoudre dans un premier temps le problème de mécanique des fluides pour une porosité et donc une perméabilité fixées. Puis, le problème non linéaire en grandes déformations est résolu pour un champs de pression fixée et donc un comportement équivalent au sens de Terzaghi. Le processus itératif est répété jusqu'à ce que la condition de couplage suivante soit vérifiée sur tout le domaine de calcul :

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left( \frac{\|u_j^{i+1} - u_j^i\|}{\|u_j^{i+1}\|} + \frac{\|v_j^{i+1} - v_j^i\|}{\|v_j^{i+1}\|} + \frac{\|p_j^{i+1} - p_j^i\|}{\|p_j^{i+1}\|} \right) < \epsilon \quad (3.74)$$

où  $u_j^{i+1}$ ,  $v_j^{i+1}$  et  $p_j^{i+1}$  sont respectivement les valeurs nodales du déplacement, de la vitesse et de la pression au nœud  $j$  à l'itération courante,  $N$  le nombre de nœud dans le domaine et  $\epsilon$  un scalaire fixé par l'utilisateur. Dans la pratique, on fixe  $\epsilon = 0.005$ . La figure 3.16 résume l'algorithme utilisé pour le couplage fluide-structure.

### 3.5.2 validation analytique : cas test de Terzaghi

Pour valider l'implémentation du principe de Terzaghi, nous avons utilisé le cas test proposé par P. Celle, illustré sur la figure 3.17, qui consiste en la compression

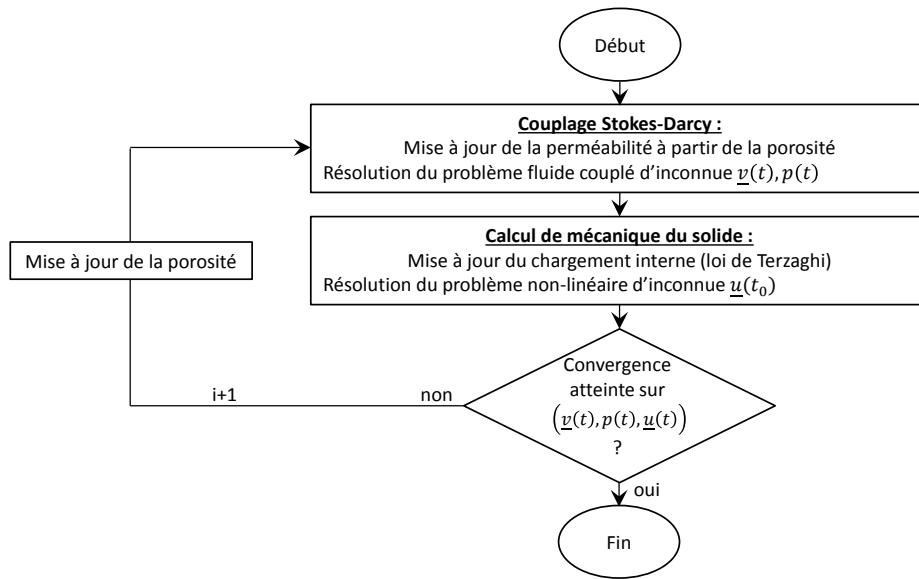


Figure 3.16 – Algorithme de couplage fluide-structure

d'une préforme saturée présentant un bord libre et soumise à un chargement interne induit par la pression du fluide contenu dans les pores.

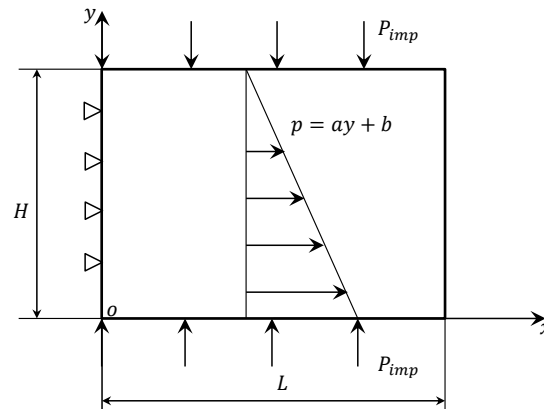


Figure 3.17 – Cas test de Terzaghi : Compression d'une préforme imprégnée avec un bord libre

Soit un domaine de hauteur  $H$  de largeur  $L$ , constitué d'un matériau poreux isotrope de module de Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ . La plaque est soumise à une pression extérieure  $P_{imp}$ , à un chargement interne linéaire  $P_{int}(y) = ay + b$ . On impose, de plus,  $u_x(0) = 0$ . En faisant l'hypothèse des petites déformations et des déformations planes, il est possible de résoudre ce problème grâce à la méthode des fonctions de Airy. Cette méthode ainsi que le développement de la solution analytique

du problème, présentée dans l'équation (3.75), sont présentés dans l'annexe B.

$$\begin{cases} u_x(x, y) = \frac{1+\nu}{E} [(1-2\nu)(ay+b)x + \nu Gx] \\ u_y(x, y) = \frac{1+\nu}{E} \left[ (1-2\nu) \left( \frac{a}{2}y + b \right) y + (\nu-1) Gy - \frac{1-2\nu}{2} ax^2 \right] \end{cases} \quad (3.75)$$

avec  $G = aH + b + P_{imp}$ .

Les résultats obtenus pour  $H = 2 \cdot 10^{-2} m$ ,  $L = 4 \cdot 10^2 m$ ,  $E = 266 kPa$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $P_{imp} = 10^4 Pa$  et  $P_{int}(y) = -5 \cdot 10^5 y + 10^4 Pa$  sont présentée sur la figure 3.18. Ainsi, on remarquera l'excellente corrélation entre la déformée analytique et la déformée calculée numériquement (figure 3.18(a)). La norme du champ de déplacement solide obtenue numériquement est représenté sur la figure 3.18(b). Ces résultats nous permettent de valider la bonne implémentation de l'algorithme de couplage fluide / structure via le principe de Terzaghi.

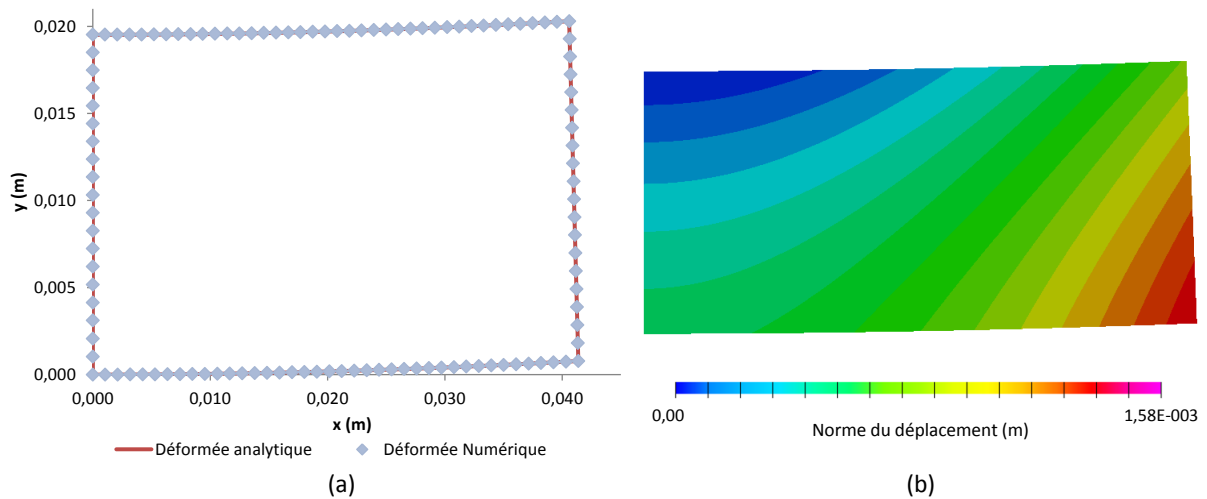
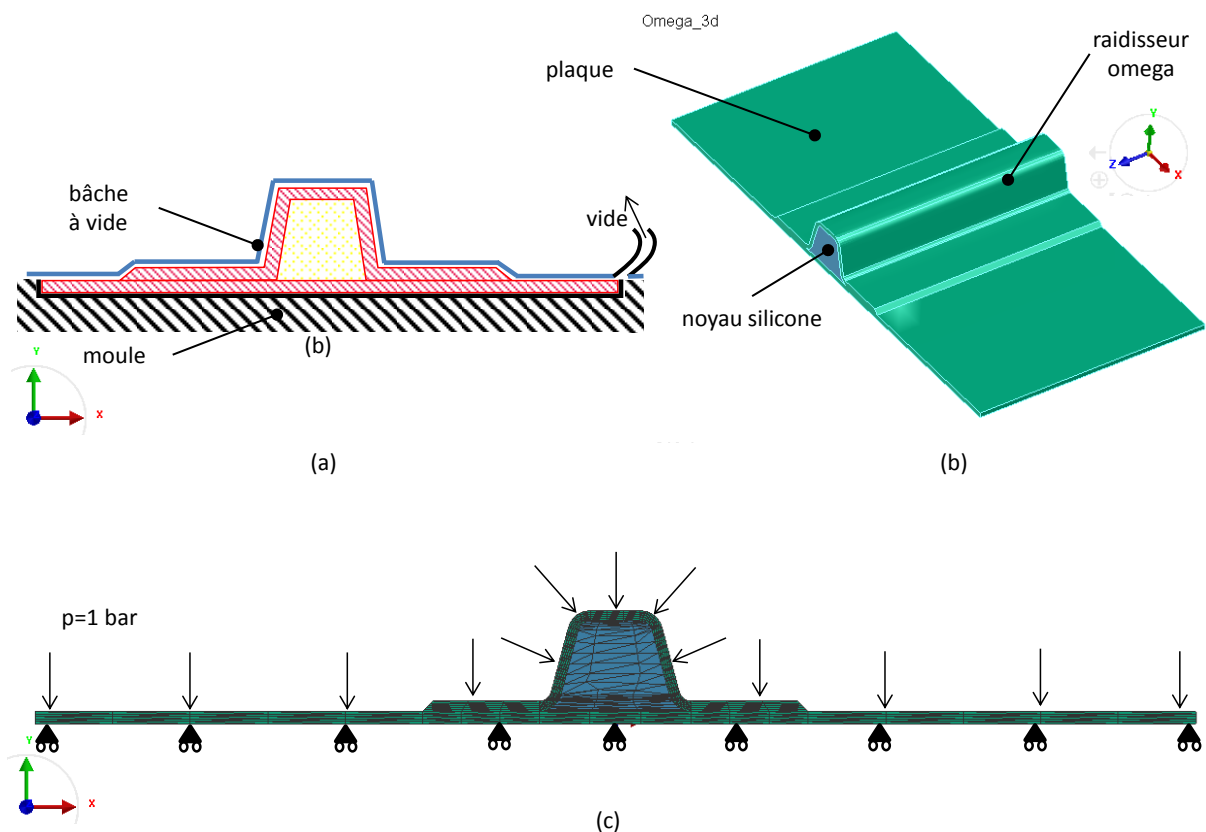


Figure 3.18 – Résultats obtenus sur le cas test de Terzaghi : (a) Déformée analytique et numérique de la préforme (b) Norme du champ de déplacement

### 3.6 Exemple d'application : Compression d'un « $\Omega$ »

Dans cette partie, on se propose de réaliser la simulation de la phase de compression initiale sur une pièce très courante dans l'industrie : une plaque renforcée par un raidisseur «  $\Omega$  ». On commence par décrire la géométrie et les conditions limites introduites pour représenter l'action du moule et de la bache à vide sur la pièce. Puis les résultats sont présentés et analysés.

On considère une plaque de dimension  $0,28 \times 0,14 \text{ m}^2$  et d'épaisseur initiale  $3 \text{ mm}$ , renforcée par un raidisseur «  $\Omega$  » d'épaisseur  $2,5 \text{ mm}$ . La géométrie est présentée sur la figure 3.19. La plaque et son raidisseur sont constitués d'un empilement de nappes NC2 identiques à celles caractérisées dans les travaux de P. Wang. Un noyau en silicone se trouve à l'intérieur du raidisseur pour le maintenir en forme pendant l'infusion, il est considéré comme indéformable dans cette simulation compte tenu des pressions en jeu. La préforme est placée sur un moule et le système est refermé par une bâche à vide selon le schéma 3.19. On se place dans des conditions d'infusion réelles, le vide étant établi sous la bâche, la pression atmosphérique s'applique sur le système. Les conditions limites sont donc une contrainte normale de 1 bar sur la face supérieure de la géométrie et des conditions de contact glissant ( $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ ) sur toutes les autres faces permettant de représenter l'action du moule. La porosité initiale est de 60%.



La figure 3.20 fait apparaître une répartition non homogène de la porosité dans

la pièce. En particulier, on remarquera les gradients de porosité dans l'épaisseur au niveau des courbures. La porosité est plus faible et donc la fraction de fibres plus élevée dans les zones de faible courbure. Ce résultat, bien connu et observé dans la réalité, n'est accessible qu'avec un calcul de mécanique du solide complet. Les approches simplifiées reposant sur une relation empirique directe entre l'épaisseur ou la fraction de fibres et la pression de résine ne permettent pas de simuler ce phénomène primordial pour la bonne évaluation de la perméabilité. Perméabilité, qui sera elle même déterminante dans la simulation de la phase de remplissage présentée au chapitre suivant. Cette remarque est confirmée par la figure 3.21 qui met en évidence une variation d'épaisseur non constante le long de l'«  $\Omega$  ». Ceci s'explique par le fait qu'en raison des courbures, certaines zone sont soumises à de la flexion en plus de la compression générant un champ de déformation particulier. Seule une approche mécanique complète permet d'obtenir ce genre de résultat.

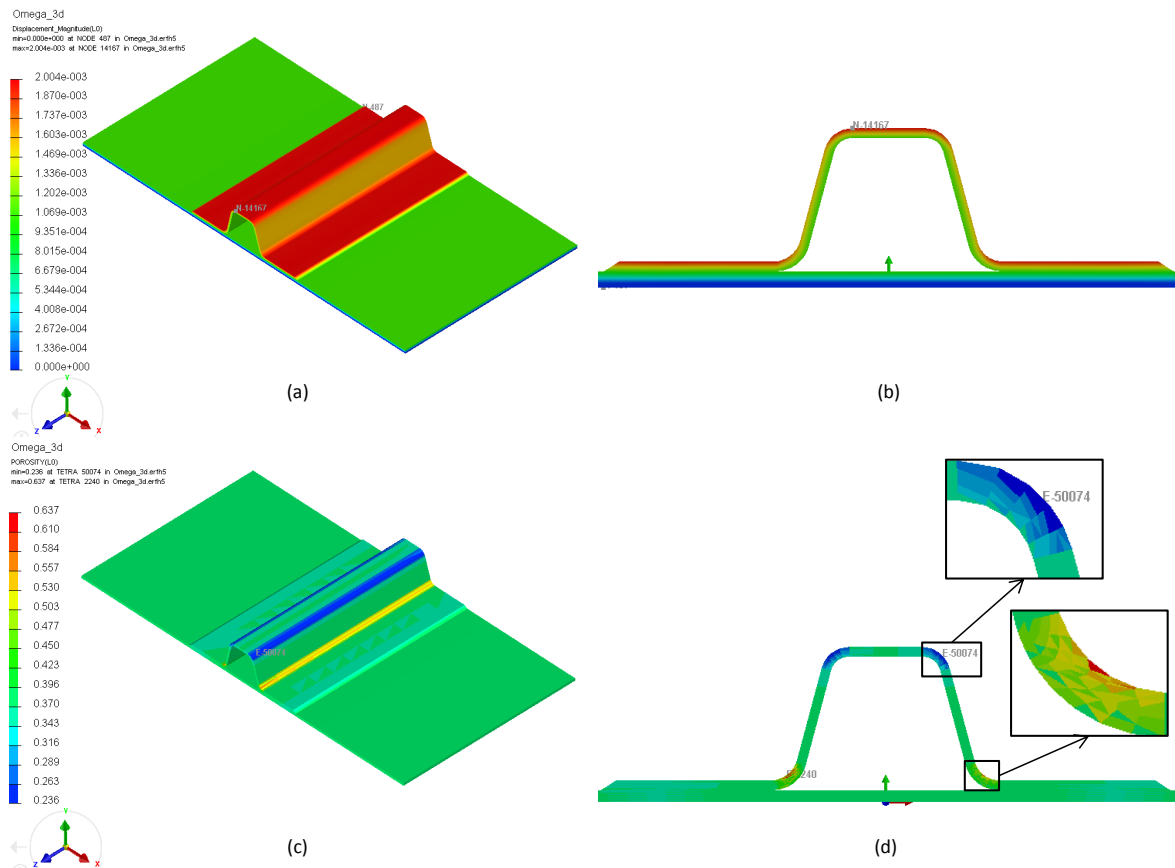


Figure 3.20 – Résultats obtenus sur l'exemple d'application : (a) Norme du champ de déplacement vue isométrique (b) Norme du champ de déplacement vue de face, (c) Porosité vue isométrique, (d) Porosité vue de face

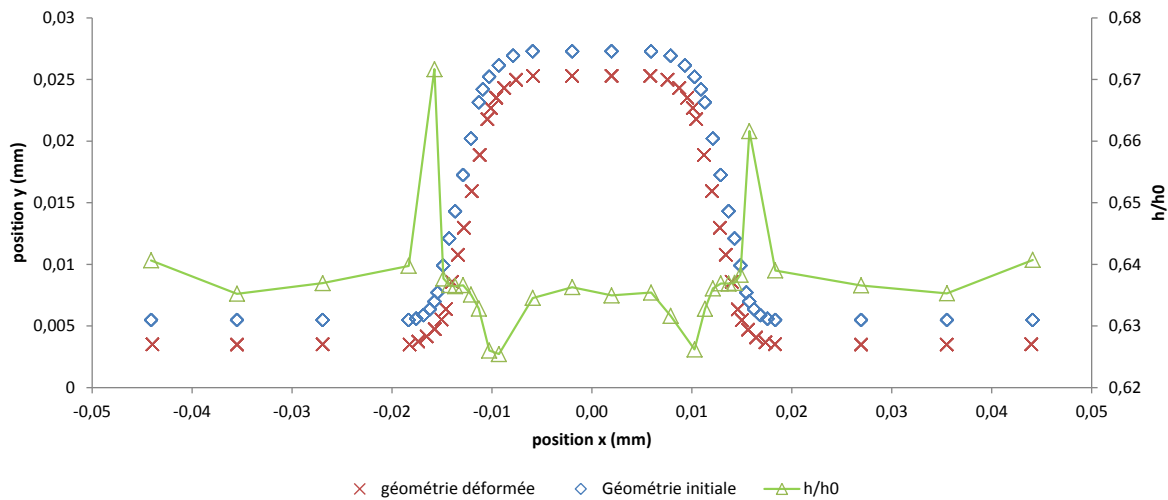


Figure 3.21 – Compression d’un Omega en 3D : géométrie initiale, géométrie déformée et variation du rapport  $\frac{h}{h_0}$  le long du profil

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la formulation lagrangienne réactualisée à chaque itération, aussi appelée formulation quasi-eulérienne, permettant de simuler le comportement non-linéaire en grandes déformations de la préforme. Cette formulation a été validée sur un cas test par comparaison avec un code de calcul commercial, Abaqus™. Nous avons ensuite détaillé la procédure permettant de passer du comportement transverse local des nappes, généralement considéré dans les mesures expérimentales, à un comportement 3D dans le repère général de l’étude. Deux approches, toutes deux reposant sur la conservation de la masse de la phase solide, ont été présentées pour calculer la porosité à partir des déformations mécaniques du milieu homogène équivalent. Nous les avons comparées pour finalement retenir l’approche lagrangienne plus efficace numériquement et plus adaptée à la gestion des données dans PAM-RTM™. Puis, la prise en compte du comportement des préformes saturées de résine à travers le principe de Terzaghi a été présenté et validé sur un cas test dont la solution analytique a été déterminée grâce aux fonctions de Airy. Enfin, un cas de compression sur une géométrie typique des pièces composites réelles a été présenté. Ce cas a permis de mettre en évidence l’intérêt de l’approche volumique pour la détermination des déformations qui ont une influence primordiale sur le problème de remplissage en agissant notamment sur la perméabilité et le volume à remplir.

Dans le prochain chapitre, nous nous intéressons à la phase de remplissage du moule. Les formulations mixtes en vitesse/pression des problèmes fluides considérées sont introduites, puis les couplages nécessaires à la simulation de l’infusion sont

détaillés et validés.





# Écoulement de la résine : Remplissage et Post-infusion

## Sommaire

4.1	Introduction . . . . .	63
4.2	Écoulement dans la préforme : écoulement incompressible en milieu poreux à faible perméabilité . . . . .	64
4.3	Écoulement dans le drainant : Équation de Stokes . . . . .	71
4.4	Couplage Stokes / Darcy . . . . .	79
4.5	Evolution du front de fluide . . . . .	92
4.6	Écoulements post-infusion . . . . .	94
4.7	Conclusion . . . . .	101

## 4.1 Introduction

Après la phase de compression initiale due à la mise sous vide du système, la buse d'injection est ouverte et la résine est aspirée dans le moule. Deux milieux poreux de natures différentes sont présents sous le sac à vide. D'une part, la préforme (structure de la pièce composite finale que l'on cherche à imprégner de résine) constituée d'un empilement de nappes préalablement mis en forme, est très peu perméable. D'autre part, le drainant permet de constituer un film de résine liquide au dessus ou en dessous de la préforme ; généralement constitué d'une nappe en fibre de verre téflonée, il est très perméable. La résine va donc s'écouler préférentiellement dans le drainant avant d'imprégner la préforme à travers son épaisseur (figure 4.1). En raison de la souplesse du sac à vide, la préforme est comprimée lors de la mise sous vide du système.

Au cours de l'imprégnation, la résine va progressivement imposer un chargement mécanique interne provoquant le gonflement de la préforme. Ces déformations ont une influence fondamentale sur l'écoulement de la résine, en effet, la perméabilité et le volume du milieu vont évoluer en fonction de la pression de résine impliquant une interaction entre la mécanique du solide et les écoulements de résine.

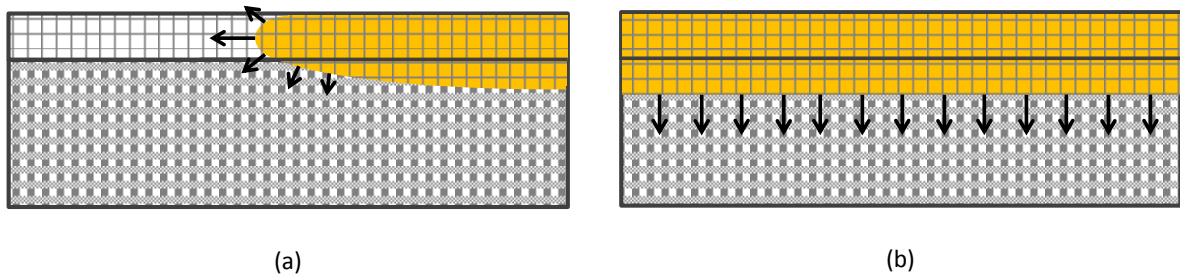


Figure 4.1 – Schématisation de l'écoulement de la résine dans le drainant et la préforme : (a) écoulement bi-dimensionnel pendant le remplissage du drainant, (b) écoulement transverse dans la préforme lorsque le drainant est rempli

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la simulation des écoulements de résine pendant et après le remplissage. Dans un premier temps, nous décrivons les modèles d'écoulement choisis ainsi que leur mise en œuvre par la méthode des éléments finis. Dans un second temps, nous détaillons les méthodes de couplage, et les algorithmes permettant la simulation des phases de remplissage et de post-infusion. Toutes les méthodes numériques sont validées sur des cas tests ayant des solutions analytiques.

## 4.2 Écoulement dans la préforme : écoulement incompressible en milieu poreux à faible perméabilité

L'équation de Darcy permet de représenter l'écoulement laminaire (faible nombre de Reynolds) d'un fluide incompressible dans un milieu poreux. Elle relie la vitesse  $\underline{v}$  du fluide au gradient de la pression  $\underline{\nabla}p$  à travers la perméabilité  $\underline{K}$  comme suit :

$$\begin{cases} \underline{v} = -\frac{1}{\eta}\underline{K}(\underline{\nabla}p - \rho\underline{g}) \\ \text{div}\underline{v} = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

avec  $\eta$  la viscosité de la résine,  $\rho$  la masse volumique de la résine et  $\underline{g}$  l'accélération gravitationnelle. L'incompressibilité du fluide est traduite par la deuxième équation du système (4.1) ; plus de détails sur la conservation de la masse de la résine sont

donnés en Annexe A. Dans la littérature, deux approches existent pour résoudre ce système.

D'une part, l'équation de Richards est souvent proposée. Cette approche consiste à combiner la conservation de la masse et l'équation de Darcy en une seule équation :

$$\operatorname{div} \left( \frac{K}{\eta} (\nabla p - \rho \underline{g}) \right) = 0 \quad (4.2)$$

En négligeant, les forces de volume et les variations spatiales des propriétés physiques du milieu et du fluide, le membre de gauche de l'équation (4.2) correspond au laplacien de la pression :

$$\Delta p = 0 \quad (4.3)$$

C'est sous cette forme que le système (4.1) est le plus souvent résolu dans littérature et notamment dans les codes de calcul tels que PAM-RTM<sup>TM</sup> ou LIMS<sup>TM</sup>. Bien que très efficace numériquement (il n'y a qu'une seule inconnue), cette approche ne permet pas en l'état de coupler des écoulements dans des milieux de perméabilité différente. En effet, à chaque saut de propriété (passage d'un milieu à un autre) correspondra un saut de vitesse et donc une discontinuité du débit. Pour pallier à cette limitation, on se repose généralement sur des algorithmes qui vont déterminer une condition de pression permettant de respecter la conservation de la masse à l'interface entre les deux milieux. Cependant, pour des gradients de perméabilité non négligeables et/ou des formes complexes, ces algorithmes peuvent avoir des difficultés à converger impliquant parfois des problèmes de performance.

D'autre part, le système (4.1) peut être résolu directement avec la pression et la vitesse comme inconnues, c'est ce qu'on appelle une approche mixte. Cette approche à l'avantage d'intégrer implicitement la continuité du débit dans tout le domaine de calcul et ce, quelle que soit la distribution des propriétés physiques du milieu. Dans la suite nous adoptons cette approche mixte pour la simulation des écoulements dans la préforme.

## 4.2.1 Méthode numérique

### 4.2.1.1 Formulation Mixte Vitesse/Pression

Pour définir complètement le problème mixte en vitesse/pression de Darcy, il est nécessaire d'ajouter au système (4.1) des conditions aux limites qui permettent de définir sous quelles conditions le fluide arrive dans le domaine de calcul. En appelant  $\Omega_D$  le milieu poreux dans lequel règne l'équation de Darcy et  $\Gamma_D$  la frontière de ce

domaine, on a :

$$\begin{cases} \underline{v} = -\frac{\underline{K}}{\eta} (\underline{\nabla} p - \rho \underline{g}) & \text{dans } \Omega_D \\ \operatorname{div} \underline{v} = 0 & \text{dans } \Omega_D \\ p = p^d & \text{sur } \Gamma_{D,p} \\ \underline{v} \cdot \underline{n} = v_n^d & \text{sur } \Gamma_{D,v} \end{cases} \quad (4.4)$$

avec  $\Gamma_{D,p}$  un sous ensemble de  $\Gamma_D$  soumis à une pression imposée  $p^d$  et  $\Gamma_{D,v}$  un sous ensemble de  $\Gamma_D$  soumis à une vitesse normale imposée  $v_n^d$ ,  $\underline{n}$  étant la normale sortante de  $\Gamma_{D,v}$ . On notera que  $\Gamma_D = \Gamma_{D,p} \cup \Gamma_{D,v}$  et que  $\Gamma_{D,p} \cap \Gamma_{D,v} = \emptyset$ .

Pour résoudre ce problème par la méthode des éléments finis, on introduit un champ test de vitesse virtuelle ( $\underline{v}^*$ ) tel que  $\underline{v}^*(\underline{x}) = 0$  si  $\underline{x} \in \Gamma_{D,v}$  et un champ test de pression virtuelle ( $p^*$ ) tel que  $p^*(\underline{x}) = 0$  si  $\underline{x} \in \Gamma_{D,p}$ . En multipliant la première équation du système (4.4) par  $\underline{v}^*$ , puis la deuxième par  $p^*$  et finalement, en intégrant les deux équations sur le domaine de calcul ( $\Omega_D$ ), on obtient la formulation forte mixte en vitesse/pression du problème (4.4) en l'absence de forces de volume :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_D} \underline{v}^* \eta \underline{K}^{-1} \underline{v} d\Omega + \int_{\Omega_D} \underline{v}^* \cdot \underline{\nabla} p d\Omega = \int_{\Omega_D} \rho \underline{v}^* \cdot \underline{g} d\Omega \\ \int_{\Omega_D} p^* \operatorname{div} \underline{v} d\Omega = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Dans le cas des équations de Darcy, on passe généralement à une formulation dite faible en réalisant une intégration par parties sur le second terme de la première équation :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_D} \underline{v}^* \eta \underline{K}^{-1} \underline{v} d\Omega + \int_{\Omega_D} p \operatorname{div} \underline{v}^* d\Omega = \int_{\Gamma_{D,p}} p^d \underline{v}^* \cdot \underline{n} d\Gamma_D + \int_{\Omega_D} \rho \underline{v}^* \cdot \underline{g} d\Omega \\ \int_{\Omega_D} p^* \operatorname{div} \underline{v} d\Omega = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

ou encore en réalisant l'intégration par parties sur l'unique terme de la deuxième équation :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_D} \underline{v}^* \eta \underline{K}^{-1} \underline{v} d\Omega + \int_{\Omega_D} \underline{v}^* \cdot \underline{\nabla} p d\Omega = \int_{\Omega_D} \rho \underline{v}^* \cdot \underline{g} d\Omega \\ \int_{\Omega_D} \underline{\nabla} p^* \cdot \underline{v} d\Omega = \int_{\Gamma_{D,v}} p^* v_n^d d\Gamma_D \end{cases} \quad (4.7)$$

Ces deux formulations, dites duale pour la première (4.6) et primale pour la deuxième (4.7). Elles conduisent toutes deux à un système d'équations symétrique. La différence entre ces deux formulations tient dans la façon dont apparaissent les conditions

limites. Les formulations duale (4.6) et primale (4.7) font apparaître la condition de pression respectivement en tant que condition de Neuman et en tant que condition de Dirichlet et la condition de vitesse respectivement en tant que condition de Dirichlet et en tant que condition de Neuman. Dans ces travaux, nous choisissons la formulation primale qui permet de gérer plus facilement les conditions de paroi imperméable (flux nul  $\underline{v} \cdot \underline{n} = 0$ ) sur des géométries complexes puisque c'est une condition naturelle pour cette formulation. Ainsi, la formulation primale du problème (4.4) s'écrit : chercher  $(\underline{v}, p) \in L^2(\Omega_D)^m \times E_p$  tels que  $\forall (\underline{v}^*, p^*) \in L^2(\Omega_D)^m \times E_{p^*}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_D} \underline{v}^* \cdot \eta \underline{K}^{-1} \underline{v} \, d\Omega + \int_{\Omega_D} \underline{v}^* \cdot \nabla p \, d\Omega = \int_{\Omega_D} \rho \underline{v}^* \cdot \underline{g} \, d\Omega \\ \int_{\Omega_D} \nabla p^* \cdot \underline{v} \, d\Omega = \int_{\Gamma_{D,v}} p^* v_n^d \, d\Gamma_{D,v} \end{array} \right. \quad (4.8)$$

avec

$$\begin{array}{l} E_{p^*} = \{p^* \in H^1(\Omega_D) \mid p^* = 0 \text{ sur } \Gamma_{D,p}\} \\ E_p = \{p \in H^1(\Omega_D) \mid p = p^d \text{ sur } \Gamma_{D,p}\} \end{array}$$

où  $m$  est la dimension du problème,  $L^2(\Omega)$  est l'espace de Lebesgue des fonctions de carré intégrable sur  $\Omega$  et  $H^1(\Omega)$  est le premier espace de Sobolev défini comme suit :

$$H^1(\Omega) = \left\{ p \in L^2(\Omega) \mid \nabla p \in L^2(\Omega)^m \right\}$$

#### 4.2.1.2 Stabilisation P1+/P1

La formulation présentée dans la section précédente, comme toutes les formulations mixtes en vitesse-pression, n'est pas stable pour des fluides incompressibles. La raison de cette instabilité est purement mathématique. Afin de simplifier le propos et ne pas perdre le lecteur dans des considérations trop mathématiques, nous retiendrons que pour garantir l'existence et l'unicité de la solution, la formulation doit respecter la condition de Ladyzenskaia-Babushka-Brezzi (LBB) [26]. Un moyen de respecter cette condition est d'utiliser un degré d'interpolation pour l'approximation du champ de vitesse supérieur à celui de l'approximation du champ de pression. Dans la littérature, deux grandes familles d'éléments finis respectent cette condition. D'une part, les éléments de Taylor-Hood [33, 55] consistent à utiliser une approximation linéaire en vitesse associée à une approximation constante par élément en pression (P1/P0 - figure 4.2(a)) ou quadratique en vitesse et linéaire en pression (P2/P1 - figure 4.2(b)). D'autre part, les méthodes de stabilisation multi-échelle (variational multi-scale method - VMS) reposent sur la formulation d'un problème dit « grossier » sur les bords de l'élément et d'un problème dit « fin » à l'intérieur de l'élément, le

problème fin étant généralement condensé en un terme de stabilisation. Parmi ces méthodes, on peut citer les mini-éléments  $P_{1+}/P_1$  ou  $P_1$ -bulle/ $P_1$  [3] (figure 4.2(c)), la « Hughes variational multi-scale method » (HVM) [41, 44], la méthode « Algebraic Subgrid Scale » (ASGS) [4] ou encore la méthode « Orthogonal Subgrid Scale » (OSGS) [15], qui se différencient par la complexité et la dépendance par rapport à la physique et au maillage des termes de stabilisation en vitesse et/ou en pression.

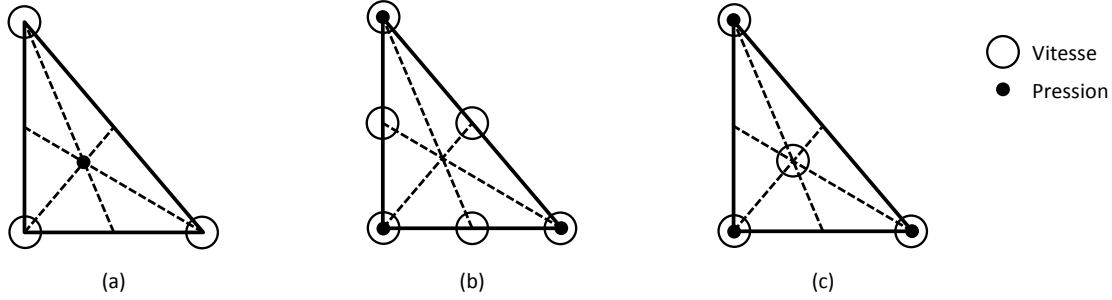


Figure 4.2 – Éléments stables pour une formulation mixte en vitesse-pressure : (a) Taylor-Hood ( $P_1/P_0$ ), (b) Taylor-Hood ( $P_2/P_1$ ), (c) Mini-éléments ( $P_{1+}/P_1$  et  $P_1$ -bulle/ $P_1$ )

Dans ces travaux, nous choisissons la méthode des mini-éléments en raison de sa simplicité d'implémentation et de sa robustesse. En effet, une fois la vitesse « bulle » condensée sous forme d'un terme de stabilisation, la vitesse et la pression ont le même degré d'interpolation, ce qui simplifie notamment l'intégration numérique. De plus, cette méthode n'introduit pas de constante purement mathématique à calibrer comme dans le cas des méthodes HVM, ASGS et OSGS.

La méthode des mini-éléments consiste à enrichir l'approximation du champ de vitesse par l'introduction d'un nœud supplémentaire situé au centre de l'élément (figure 4.2(c)). La fonction de forme . Ce qui implique les décompositions suivantes pour les approximations du champ de vitesse ( $\underline{v}^h$ ) et du champ test associé ( $\underline{v}^{*h}$ ) prises dans les espaces fonctionnels décrits dans le système (4.8) :

$$\begin{aligned} \underline{v}^h(\underline{x}) &= \underline{v}_l^h(\underline{x}) + \underline{v}_b^h(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n^e} [N_i(\underline{x})] \underline{v}_{l_i} + [b_e(\underline{x})] \underline{v}_b \\ \underline{v}^{*h}(\underline{x}) &= \underline{v}_l^{*h}(\underline{x}) + \underline{v}_b^{*h}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n^e} [N_i(\underline{x})] \underline{v}_{l_i}^* + [b_e(\underline{x})] \underline{v}_b^* \end{aligned} \quad (4.9)$$

où les  $[N_i(\underline{x})]$  sont les fonctions de formes de l'élément égales à un au nœud  $i$  et s'annulant aux autres nœuds,  $n^e$  le nombre de nœuds dans l'élément et  $[b_e]$  la fonction de forme bulle qui vaut 1 au centre de l'élément et s'annule sur les bords. Dans la

pratique deux choix sont possibles pour la fonction de forme bulle. On peut choisir une fonction dite hiérarchique (figure 4.3 (a)) :

$$\begin{aligned} b_e &= 3\text{Min}(N_1, N_2, N_3) && \text{en 2D} \\ &= 4\text{Min}(N_1, N_2, N_3, N_4) && \text{en 3D} \end{aligned} \quad (4.10)$$

ou une fonction polynomiale (figure 4.3 (b)) :

$$\begin{aligned} b_e &= 27N_1N_2N_3 && \text{en 2D} \\ &= 256N_1N_2N_3N_4 && \text{en 3D} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Une comparaison des deux fonctions est présentée dans la section 4.4.4 lors de la validation du couplage Stokes/Darcy.

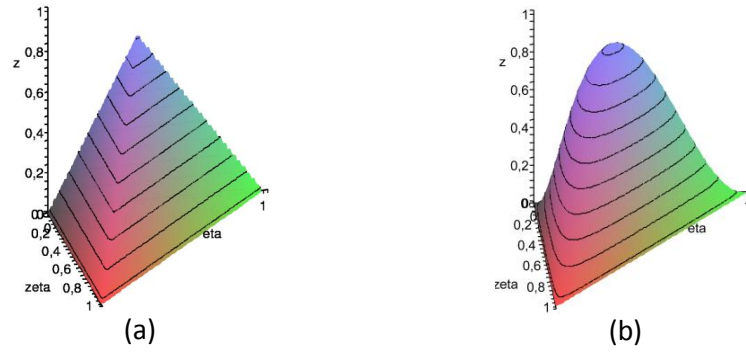


Figure 4.3 – Fonction de forme bulle : (a) hiérarchique, (b) polynomiale

Nous adoptons la décomposition suivante pour les approximations du champ de pression ( $p^h$ ) et du champ test associé ( $p^{*h}$ ) prises dans les espaces fonctionnels décrits dans le système (4.8) :

$$\begin{aligned} p^h(\underline{x}) &= \sum_{i=1}^{n^e} N_i(\underline{x}) p_i \\ p^{*h}(\underline{x}) &= \sum_{i=1}^{n^e} N_i(\underline{x}) p_i^* \end{aligned} \quad (4.12)$$

En introduisant les approximations présentées ci-dessus dans le système (4.8), on peut écrire la formulation primale discrétisée du problème de Darcy comme suit :

chercher  $(\underline{v}_l^h, \underline{v}_b^h, p^h) \in L^2(\Omega_D) \times E_{\underline{v}_b^h} \times E_{p^h}$  tels que  $\forall (\underline{v}_l^{*h}, \underline{v}_b^{*h}, p^{*h}) \in L^2(\Omega_D) \times E_{\underline{v}_b^{*h}} \times$

$E_{p^{*h}}$ ,

$$\begin{cases}
 \int_{\Omega_D} \underline{v}_l^{h*} \eta \underline{K}^{-1} (\underline{v}_l^h + \underline{v}_b^h) d\Omega + \int_{\Omega_D} \underline{v}_l^{*h} \cdot \underline{\nabla} p^h d\Omega = \int_{\Omega_D} \rho \underline{v}_l^{*h} \cdot \underline{g} d\Omega \\
 \int_{\Omega_D} \underline{v}_b^{h*} \eta \underline{K}^{-1} (\underline{v}_l^h + \underline{v}_b^h) d\Omega + \int_{\Omega_D} \underline{v}_b^{*h} \cdot \underline{\nabla} p^h d\Omega = \int_{\Omega_D} \rho \underline{v}_b^{*h} \cdot \underline{g} d\Omega \\
 \int_{\Omega_D} \underline{\nabla} p^{*h} \cdot (\underline{v}_l^h + \underline{v}_b^h) d\Omega = \int_{\Gamma_{D,v}} p^{*h} v_n^d d\Gamma_{D,v}
 \end{cases} \quad (4.13)$$

avec

$$\begin{aligned}
 E_{p^*} &= \{p^* \in H^1(\Omega_D) \mid p^* = 0 \text{ sur } \Gamma_{D,p}\} \\
 E_p &= \{p \in H^1(\Omega_D) \mid p = p^d \text{ sur } \Gamma_{D,p}\} \\
 E_{\underline{v}_b^{*h}} &= E_{\underline{v}_b^h} = \{\underline{v}_b^h \in L^2(\Omega_D)^m \mid \underline{v}_b^h = 0 \text{ sur } \partial Q\}
 \end{aligned}$$

où  $\partial Q$  correspond à l'ensemble des bords des éléments utilisés pour discrétiser le domaine de calcul  $\Omega_D$  (les fonctions tests et fonctions de forme bulles s'annulent sur le bord des éléments). Le système (4.13) peut s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} [A_l] & [A_{lb}]^T & [B]^T \\ [A_{lb}] & [A_b] & [B_b]^T \\ [B] & [B_b] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\underline{v}_l\} \\ \{\underline{v}_b\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\underline{F}\} \\ \{\underline{F}_b\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

En se plaçant au niveau élémentaire, il est possible d'exprimer la vitesse bulle élémentaire ( $\underline{v}_b^e$ ) en fonction des degrés de liberté en pression ( $\{p^e\}$ ) et en vitesse ( $\{\underline{v}_l^e\}$ ) de l'élément comme suit :

$$\underline{v}_b^e = [A_b^e]^{-1} \{\underline{F}_b^e\} - [A_b^e]^{-1} [A_{lb}^e] \{\underline{v}_l^e\} - [A_b^e]^{-1} [B_b^e]^T \{p^e\} \quad (4.15)$$

On peut finalement remplacer  $\underline{v}_b^e$  dans chaque sous système élémentaire du système matriciel global (4.14), cette opération appelée condensation statique de la bulle permet d'obtenir au niveau de chaque élément :

$$\begin{bmatrix} [A_l^e] - [C_1] & [B^e]^T - [C_2]^T \\ [B^e] - [C_2] & -[C_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\underline{v}_l^e\} \\ \{p^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\tilde{\underline{F}}^e\} \\ \{\tilde{\underline{F}}_b^e\} \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

où les  $[C_i]$  sont des termes de stabilisation élémentaires qui s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 [C_1] &= [A_{lb}^e]^T [A_b^e]^{-1} [A_{lb}^e] \\
 [C_2] &= [B_b^e] [A_b^e]^{-1} [A_{lb}^e] \\
 [C_3] &= [B_b^e] [A_b^e]^{-1} [B_b^e]^T
 \end{aligned} \quad (4.17)$$



et où  $\{\underline{\tilde{F}}^e\}$  et  $\{\underline{\tilde{F}}_b^e\}$  sont les seconds membres élémentaires stabilisés, égaux à zéro si la gravité est négligée :

$$\begin{cases} \{\underline{\tilde{F}}^e\} = \{\underline{F}^e\} - [A_{lb}^e]^T [A_b^e]^{-1} \{\underline{F}_b^e\} \\ \{\underline{\tilde{F}}_b^e\} = - [B_b^e] [A_b^e]^{-1} \{\underline{F}_b^e\} \end{cases} \quad (4.18)$$

On remarquera que  $[C_1]$  est proportionnel à la viscosité et inversement proportionnel à la perméabilité,  $[C_2]$  est indépendant de la viscosité et de la perméabilité et  $[C_3]$  est inversement proportionnel à la viscosité et proportionnel à la perméabilité. Ainsi, les termes de stabilisation introduits par la méthode sont complètement définis par la géométrie et les propriétés physiques du fluide et du milieu. Ils sont donc transparents pour l'utilisateur. Les sous matrices élémentaires de l'équation (4.16) sont détaillée dans l'annexe C.

#### 4.2.2 Validation de la formulation de Darcy : Cas test du convergent sphérique

La formulation explicitée ci-dessus a été implémentée dans Pro-flot<sup>TM</sup> et validée sur le cas test du convergent sphérique. Ce cas test, pour lequel il existe également une solution analytique, consiste en une sphère soumise à une différence de pression entre sa face intérieure et sa face extérieure. Ainsi, pour une sphère de rayon intérieur  $R_i$  et de rayon extérieur  $R_e$ , une perméabilité radiale  $K$ , une viscosité  $\mu$ , une pression extérieure  $P_e$  et une pression intérieure  $P_i$ , la vitesse suivant  $r$  s'écrit :

$$v_r(r) = - \frac{K}{\mu} \frac{P_e - P_i}{R_e - R_i} \frac{R_e R_i}{r^2} \quad (4.19)$$

La figure 4.4 présente les résultats obtenus qui ont été comparés avec succès aux résultats analytiques pour  $R_i = 0,1m$ ,  $R_e = 1m$ ,  $K = 10^{-9}m^2$ ,  $\mu = 1Pa.s$ ,  $P_e = 10^5Pa$  et  $P_i = 0Pa$ .

### 4.3 Écoulement dans le drainant : Équation de Stokes

#### 4.3.1 Discussion et choix du modèle

Le drainant, parfois appelé grille de diffusion, est généralement constitué d'une nappe de fibre de verre téflonée dont la perméabilité est très grande devant celle de la préforme. Les fibres pouvant être assimilées à un milieu poreux, la loi de Darcy semble donc appropriée pour simuler cet écoulement. Cependant, dans la littérature,

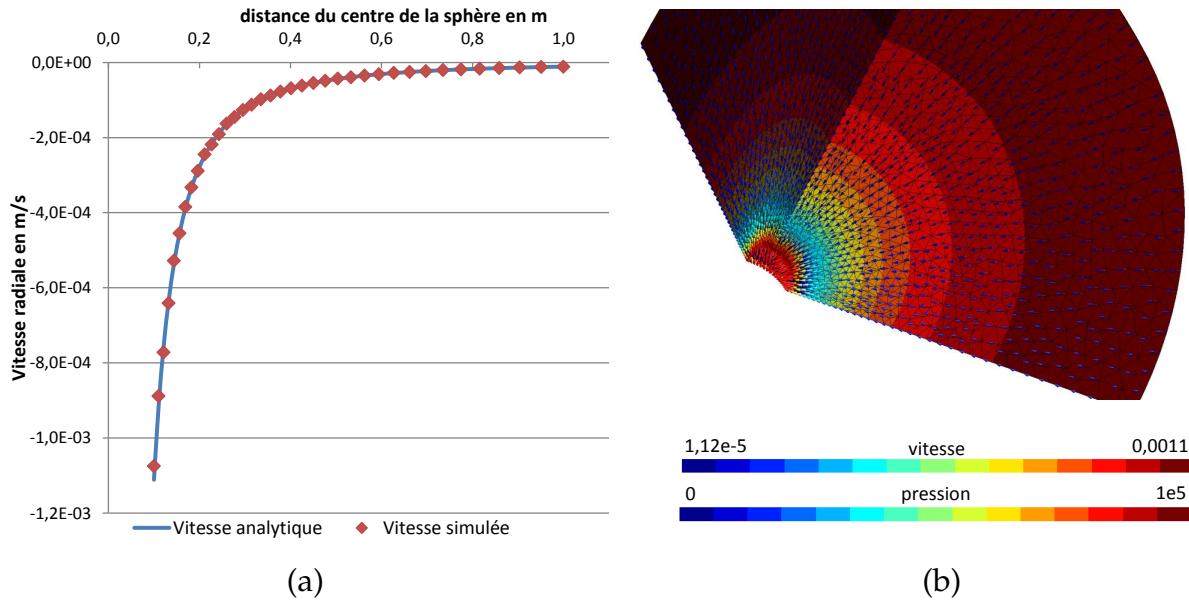


Figure 4.4 – Cas test du convergent sphérique : (a) Comparaison des résultats analytiques et numériques pour le champ de vitesse radiale  $v_r(r)$ , (b) Champs de vitesse et de pression obtenus

on retrouve souvent d'autres approches pour simuler l'écoulement d'un fluide à travers deux milieux poreux ayant une forte différence de perméabilité. Dans le cadre de la simulation de l'infusion, rares sont les travaux qui considèrent cet écoulement. On peut malgré tout citer [12] et [44] qui font l'hypothèse d'un écoulement de Stokes, justifiant ce choix par la prépondérance des écoulements dans cette zone. L'équation de Stokes caractérise l'écoulement laminaire (faible nombre de Reynolds) d'un fluide incompressible pure et s'écrit :

$$\begin{cases} -\nabla p + \eta \Delta \underline{v} = 0 \\ \text{div} \underline{v} = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Dans d'autres applications, telles que l'étude des sols ou la biomécanique, l'équation de Brinkman est souvent proposée. Cette équation correspond à l'équation de Stokes à laquelle on ajoute un terme, dit de Darcy, qui permet de prendre en compte l'influence du milieu poreux sur l'écoulement, *i.e.* une perte de charge complémentaire :

$$\begin{cases} \frac{\eta}{\phi} \Delta \underline{v} - \eta \underline{K}^{-1} \underline{v} - \nabla p = f_v \\ \text{div} \underline{v} = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

avec  $\phi$  la porosité du milieu. Le principal intérêt de l'équation de Brinkman est qu'elle permet de représenter les écoulements à la fois dans la préforme et le drainant. On se

propose d'étudier les modèles de Brinkman, Darcy et Stokes afin d'aboutir à un choix justifié.

En considérant un milieu poreux d'épaisseur  $H = 1 \text{ mm}$ , de longueur  $L = 1 \text{ m}$  et de perméabilité  $K_{xx}$  variant de  $10^{-6} \text{ m}^2$  à  $10^{-9} \text{ m}^2$ , ce qui correspond aux drainants utilisés en infusion, traversé par un fluide de viscosité  $\eta = 0,058 \text{ Pa.s}$ , on peut facilement étudier les solutions analytiques des trois modèles et les comparer. Comme décrit sur la figure 4.5, le fluide est soumis à une différence de pression  $\Delta p = p_1 - p_0$ . Pour les modèles de Stokes et Brinkman on considère une vitesse nulle sur les parois horizontales.

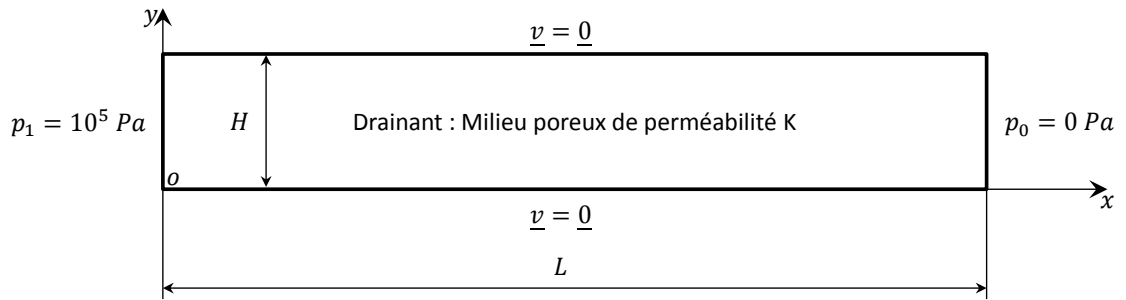


Figure 4.5 – Cas test utilisé pour la comparaison des modèles de Stokes, Brinkman et Darcy pour la simulation des écoulements dans le drainant

Dans ce cas, l'écoulement est unidirectionnel et le système de Brinkman (4.21) se réduit au système d'équations différentielles d'ordre 2 suivant :

$$\begin{cases} \frac{\eta}{\phi} \frac{d^2 v_x}{dy^2} - \frac{\eta}{K_{xx}} v_x = \frac{\Delta p}{L} \\ \frac{dv_x}{dx} = 0 \\ v_x(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{en } y = 0 \text{ et } y = H \quad (4.22)$$

On peut donc facilement déterminer la solution analytique  $v_x(x, y)$  à partir des données du problème :

$$v_x(y) = \frac{K_{xx} \Delta p}{\eta L} \left( \frac{\exp\left(\sqrt{\frac{\phi}{K_{xx}}} y\right) + \exp\left(\sqrt{\frac{\phi}{K_{xx}}}(H-y)\right) - \exp\left(-\sqrt{\frac{\phi}{K_{xx}}} y\right) - \exp\left(-\sqrt{\frac{\phi}{K_{xx}}}(H-y)\right)}{\exp\left(\sqrt{\frac{\phi}{K_{xx}}} H\right) - \exp\left(-\sqrt{\frac{\phi}{K_{xx}}} H\right)} - 1 \right) \quad (4.23)$$

En utilisant le modèle de Stokes, ce cas est un simple écoulement de Poiseuille entre deux parois et la vitesse  $v_x(y)$  est égale à :

$$v_x(y) = \frac{Hy \Delta p}{2\eta L} \left( 1 - \frac{y}{H} \right) \quad (4.24)$$

En utilisant le modèle de Darcy, on obtient le profil de vitesse constant suivant :

$$v_x = -\frac{K_{xx} \Delta p}{\eta L} \quad (4.25)$$

La figure 4.6 présente les résultats obtenus analytiquement avec les trois modèles pour quatre valeurs de perméabilité ( $10^{-6} m^2$ ,  $10^{-7} m^2$ ,  $10^{-8} m^2$  et  $10^{-9} m^2$ ). On peut constater que pour les perméabilités les plus élevées ( $10^{-6} m^2$  et  $10^{-7} m^2$ ) le modèle de Darcy s'éloigne beaucoup des deux autres. À l'inverse pour une perméabilité faible ( $10^{-9} m^2$ ), le modèle de Brinkman tend vers celui de Darcy.

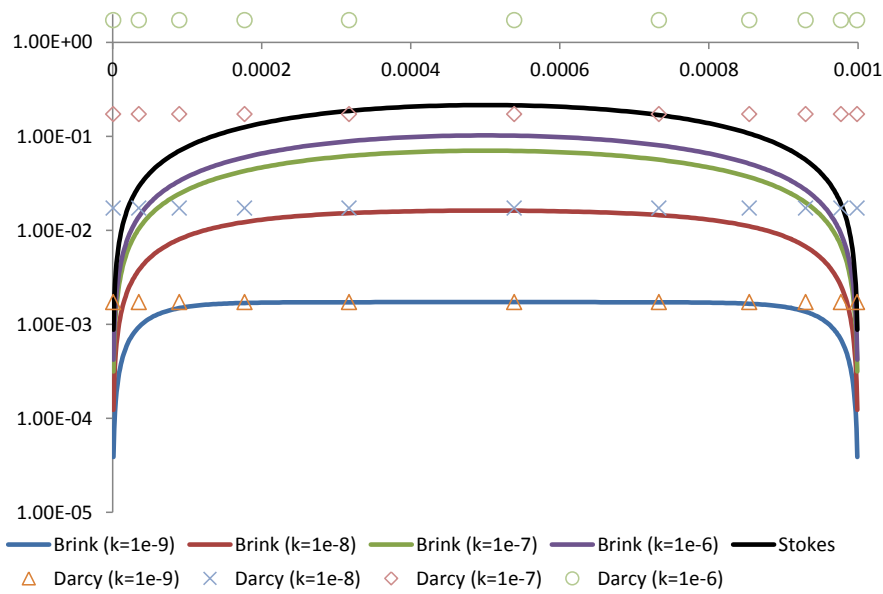


Figure 4.6 – Comparaison des modèles de Stokes, Darcy et Brinkman pour des perméabilité  $K_{xx}$  de  $10^{-6} m^2$ ,  $10^{-7} m^2$ ,  $10^{-8} m^2$  et  $10^{-9} m^2$  sur un cas correspondant à l'écoulement de la résine dans le drainant ( $H = 1 mm$ ,  $L = 1 m$ ,  $\eta = 0,058 Pa.s$  et  $\Delta p = 1 bar$ )

De plus, on notera que la solution analytique de Brinkman tend vers 0 lorsque  $y$  tend vers 0 ou  $H$ . En particulier, pour des perméabilité faibles, l'écoulement de Brinkman diffère de l'écoulement de Darcy au voisinage des parois et donc lorsque :

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{\phi}{K_{xx}}} y = \epsilon \\ \sqrt{\frac{\phi}{K_{xx}}} (H - y) = \epsilon \end{cases} \quad (4.26)$$

où  $\epsilon$  est un réel proche de 0. On remarquera aisément que plus  $K_{xx}$  est faible plus  $y$  (ou  $H - y$ ) doit être petit pour que  $\epsilon$  reste faible. Ceci se traduit, dans des milieux de faible perméabilité, par l'apparition de couches limites de faible épaisseur sur

lesquels la vitesse va brutalement passer de la vitesse de Darcy à 0. Le modèle de Brinkman nécessite donc de raffiner fortement le maillage au voisinage des frontières du domaine, impliquant des performances réduites. Ainsi, il est préférable d'utiliser le modèle de Stokes pour des drainants de perméabilité élevée ( $K > 10^{-7} m^2$ ) et celui de Darcy pour des drainants de perméabilité faible ( $K < 10^{-8} m^2$ ).

Dans ces travaux, nous avons constaté des oscillations sur les vitesses à l'interface drainant/préforme lorsque le modèle de Darcy est utilisé. Ces oscillations pouvant entraîner des problèmes de conservation de masse, nous avons retenu le modèle de Stokes. Cependant, ces problèmes devront être appréhendés dans le futur afin de pouvoir utiliser le modèle de Darcy lorsque les perméabilités sont faibles. Enfin, on notera que l'analyse présentée ici est purement théorique et que ces modèles devraient être comparés à des expériences. Cependant, la finesse du drainant (de l'ordre de 1 mm) et la sensibilité des écoulements aux capteurs existants rendent les analyses expérimentales extrêmement difficiles. Ainsi, à notre connaissance, il n'existe pas de données expérimentales permettant de valider une approche plutôt qu'une autre.

Dans la suite nous présentons la formulations mixte en vitesse-pression du modèle de Stokes implémentée dans ProFlot™ pour la simulation des écoulements dans le drainant.

## 4.3.2 Méthode numérique

### 4.3.2.1 Formulation Mixte Vitesse/Pression

Pour complètement définir le problème mixte en vitesse / pression de Stokes, il est nécessaire d'ajouter des conditions limites au système (4.20). Soit  $\Omega_S$  le domaine dans lequel règne l'équation de Stokes et  $\Gamma_S$  sa frontière, on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(2\eta \underline{D}(\underline{v})) - \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega_S \\ \operatorname{div} \underline{v} = 0 & \text{dans } \Omega_S \\ \underline{v} = \underline{v}^d & \text{sur } \Gamma_{S,v} \\ \underline{\sigma} \underline{n} = \underline{t}^d & \text{sur } \Gamma_{S,t} \end{array} \right. \quad (4.27)$$

avec  $\Gamma_{S,v}$  un sous ensemble de  $\Gamma_S$  soumis à une vitesse imposée  $\underline{v}^d$  et  $\Gamma_{S,t}$  un sous ensemble de  $\Gamma_S$  soumis à une contrainte normale  $\underline{t}$ ,  $\underline{n}$  étant la normale sortante de  $\Gamma_{S,t}$ . On notera que  $\Gamma_S = \Gamma_{S,t} \cup \Gamma_{S,v}$  et que  $\Gamma_{S,t} \cap \Gamma_{S,v} = \emptyset$ .

Pour résoudre ce problème par la méthode des éléments finis, on introduit un champ test de vitesse virtuelle ( $\underline{v}^*$ ) et un champ test de pression virtuelle ( $p^*$ ). En multipliant la première équation du système (4.27) par  $\underline{v}^*$ , puis la deuxième par  $p^*$  et finalement, en intégrant les deux équations sur le domaine de calcul ( $\Omega_S$ ), on obtient

la formulation forte mixte en vitesse/pression du problème (4.27) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_S} \underline{v}^* \underline{\text{div}}(2\eta \underline{D}(\underline{v})) d\Omega - \int_{\Omega_S} \underline{v}^* \cdot \underline{\nabla} p d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega_D} p^* \underline{\text{div}} \underline{v} d\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (4.28)$$

On passe à la formulation faible du problème en réalisant deux intégrations par parties. La première est réalisée sur le terme d'énergie interne du système (4.27) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_S} 2\eta \underline{D}(\underline{v}^*) : \underline{D}(\underline{v}) d\Omega - \int_{\Omega_S} \underline{v}^* \cdot \underline{\nabla} p d\Omega = \int_{\Gamma_{S,t}} \underline{v}^* \underline{\nabla} \underline{v} \underline{n} d\Gamma_{S,t} \\ \int_{\Omega_D} p^* \underline{\text{div}} \underline{v} d\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (4.29)$$

Cette intégration par parties permet d'abaisser l'ordre de dérivation du champ de vitesse autorisant ainsi une approximation linéaire par morceau du champ de vitesse. La seconde intégration par parties, comme pour l'équation de Darcy, peut être réalisée soit sur le second terme de la première équation du système (4.28) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_S} 2\eta \underline{D}(\underline{v}^*) : \underline{D}(\underline{v}) d\Omega - \int_{\Omega_S} p \underline{\text{div}} \underline{v}^* d\Omega = \underbrace{\int_{\Gamma_{S,t}} \underline{v}^* \underline{\nabla} \underline{v} \underline{n} d\Gamma_{S,t} - \int_{\Gamma_{S,t}} p \underline{v}^* \underline{n} d\Gamma_{S,t}}_{\int_{\Gamma_{S,t}} \underline{t}^d d\Gamma_{S,t}} \\ \int_{\Omega_D} p^* \underline{\text{div}} \underline{v} d\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (4.30)$$

soit sur l'unique terme de la seconde équation du système (4.28) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_S} 2\eta \underline{D}(\underline{v}^*) : \underline{D}(\underline{v}) d\Omega - \int_{\Omega_S} \underline{v}^* \cdot \underline{\nabla} p d\Omega = \int_{\Gamma_{S,t}} \underline{v}^* \underline{\nabla} \underline{v} \underline{n} d\Gamma_{S,t} \\ \int_{\Omega_D} \underline{\nabla} p^* \underline{v} d\Omega = \int_{\Gamma_{S,v}} p^* v_n^d d\Gamma_{S,v} \end{array} \right. \quad (4.31)$$

Ces formulations, dites duale pour la première et primale pour la deuxième, permettent d'obtenir un système d'équations symétrique. La formulation duale fait apparaître la contrainte normale ( $\underline{\sigma} \underline{n} = \underline{t}^d$ ) au second membre qui peut donc être imposée faiblement. Tandis que la formulation primale fait apparaître la vitesse normale et le gradient de vitesse normal au second membre. Ceci la rend difficile à manipuler dès lors que l'on veut imposer une vitesse normale différente de 0, ce qui sera le cas

lors du couplage avec Darcy. Pour cette raison dans la suite on utilise la formulation duale du problème (4.28) qui s'écrit :

chercher  $(\underline{v}, p) \in E_{\underline{v}} \times L^2(\Omega_S)$  tels que  $\forall (\underline{v}^*, p^*) \in E_{\underline{v}^*} \times L^2(\Omega_S)$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_S} 2\eta \underline{D}(\underline{v}^*) : \underline{D}(\underline{v}) \, d\Omega - \int_{\Omega_S} p \operatorname{div} \underline{v}^* \, d\Omega = \int_{\Gamma_{S,t}} \underline{t}^d \, d\Gamma_{S,t} \\ \int_{\Omega_D} p^* \operatorname{div} \underline{v} \, d\Omega = 0 \\ \text{avec} \\ E_{\underline{v}^*} = \{ \underline{v}^* \in H^1(\Omega_S) \mid \underline{v}^* = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{S,v} \} \\ E_{\underline{v}} = \{ \underline{v} \in H^1(\Omega_S) \mid \underline{v} = \underline{v}^d \text{ sur } \Gamma_{S,v} \} \end{array} \right. \quad (4.32)$$

#### 4.3.2.2 Stabilisation P1+/P1

Pour les mêmes raisons que dans le cas de la formulation de Darcy, la formulation duale mixte en vitesse / pression des équations de Stokes est instable. En utilisant les mini-éléments P1+/P1 et les décompositions des approximations des champs de vitesse et pression, déjà présentées dans la section 4.2.1.2, on peut écrire le sous problème élémentaire correspondant à la formulation discrétisée du problème de Stokes : chercher  $(\underline{v}_l^h, \underline{v}_b^h, p^h) \in E_{\underline{v}_l^h} \times E_{\underline{v}_b^h} \times L^2(\Omega_S^e)$  tels que  $\forall (\underline{v}_l^{*h}, \underline{v}_b^{*h}, p^{*h}) \in E_{\underline{v}_l^{*h}} \times E_{\underline{v}_b^{*h}} \times L^2(\Omega_S^e)$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_S} 2\eta \underline{D}(\underline{v}_l^{*h}) : \underline{D}(\underline{v}_l^h + \underline{v}_b^h) \, d\Omega - \int_{\Omega_S} p^h \operatorname{div} \underline{v}_l^{*h} \, d\Omega = \int_{\Gamma_{S,t}} \underline{t}^d \, d\Gamma_{S,t} \\ \int_{\Omega_S} 2\eta \underline{D}(\underline{v}_b^{*h}) : \underline{D}(\underline{v}_l^h + \underline{v}_b^h) \, d\Omega - \int_{\Omega_S} p^h \operatorname{div} \underline{v}_b^{*h} \, d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega_D} p^{*h} \operatorname{div}(\underline{v}_l^h + \underline{v}_b^h) \, d\Omega = 0 \\ E_{\underline{v}_l^*} = \{ \underline{v}_l^* \in H^1(\Omega_S) \mid \underline{v}_l^* = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{S,v} \} \\ E_{\underline{v}_l} = \{ \underline{v}_l \in H^1(\Omega_S) \mid \underline{v}_l = \underline{v}_l^d \text{ sur } \Gamma_{S,v} \} \\ E_{\underline{v}_b^*} = E_{\underline{v}_b} = \{ \underline{v}_b \in H^1(\Omega_S) \mid \underline{v}_b = \underline{0} \text{ sur } \partial Q \} \end{array} \right. \quad (4.33)$$

où  $\partial Q$  correspond à l'ensemble des bords des éléments utilisés pour discrétiser le domaine de calcul  $\Omega_S$  (les fonctions tests et fonctions de forme bulles s'annulent sur le bord des éléments). Le système (4.33) peut s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} [A_l] & [A_{lb}]^T & [B]^T \\ [A_{lb}] & [A_b] & [B_b]^T \\ [B] & [B_b] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ \underline{v}_l^h \} \\ \{ \underline{v}_b^h \} \\ \{ p^h \} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{ \underline{F} \} \\ \{ \underline{0} \} \\ \{ 0 \} \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

Dans le cas des équations de Stokes, la formulation discrète peut être simplifiée. En effet, au niveau élémentaire, on peut écrire le produit doublement contracté entre les tenseurs des taux de déformation eulérien associés aux vitesses bulle et nodale comme suit :

$$\int_{\Omega_s^e} \underline{\underline{D}}(\underline{v}_l^{*h}) : \underline{\underline{D}}(\underline{v}_b^h) d\Omega^e = \int_{\Omega_s^e} \underline{v}_l^{*h} \operatorname{div} \left( \underline{\underline{D}}(\underline{v}_b^h) \right) d\Omega^e + \int_{\Gamma_s^e} \underline{v}_l^{*h} \underline{\underline{D}}(\underline{v}_b^h) \underline{n} d\Gamma^e \quad (4.35)$$

La bulle s'annulant par construction sur le bord de l'élément, le terme  $\int_{\Gamma_s^e} \underline{v}_l^{*h} \underline{\underline{D}}(\underline{v}_b^h) \underline{n} d\Gamma^e$  est nul. De plus, en remarquant que l'interpolation en vitesse est linéaire par élément, la divergence du tenseur des taux de déformation eulérien ( $\operatorname{div} (\underline{\underline{D}}(\underline{v}_b^h))$ ) est nulle d'où :

$$\int_{\Omega_s^e} \underline{\underline{D}}(\underline{v}_l^{*h}) : \underline{\underline{D}}(\underline{v}_b^h) d\Omega^e = 0 \quad (4.36)$$

Cette propriété, appelée propriété d'orthogonalité, peut être généralisée à tout tenseur  $\underline{\underline{C}}$  constant sur un élément :

$$\int_{\Omega_s^e} \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{D}}(\underline{v}_b^h) d\Omega^e = 0 \quad (4.37)$$

Ceci implique que les sous-matrices  $[A_{lb}]$  et  $[A_{lb}]^T$  sont nulles, d'où :

$$\begin{bmatrix} [A_l] & [0] & [B]^T \\ [0] & [A_b] & [B_b]^T \\ [B] & [B_b] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\underline{v}_l\} \\ \{\underline{v}_b\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\underline{F}\} \\ \{\underline{0}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

Il est alors possible, au niveau élémentaire, d'exprimer la vitesse bulle ( $\underline{v}_b^e$ ) en fonction des degrés de liberté en pression  $\{p\}$  de l'élément comme suit :

$$\underline{v}_b^e = - [A_b^e]^{-1} [B_b^e]^T \{p^e\} \quad (4.39)$$

Finalement, il est possible de condenser la bulle pour obtenir au de chaque élément :

$$\begin{bmatrix} [A_l^e] & [B^e]^T \\ [B^e] & -[C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\underline{v}_l^e\} \\ \{p^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\underline{F}^e\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

où  $[C] = [B_b^e] [A_b^e]^{-1} [B_b^e]^T$  est un terme de stabilisation inversement proportionnel à la viscosité de la résine. Les sous matrices élémentaires de l'équation (4.40) sont détaillée dans l'annexe C.



### 4.3.3 Validation de la formulation de Stokes : Écoulement de Poiseuille dans un cylindre

La formulation explicitée ci-dessus a été implémentée dans Pro-flot<sup>TM</sup> et validée sur le cas test de Poiseuille. La loi de Poiseuille décrit l'écoulement laminaire d'un fluide newtonien dans une conduite cylindrique. À partir de cette loi on peut définir une solution analytique pour le cas test. Ainsi, pour un cylindre de rayon  $R$ , longueur  $L$ , une viscosité  $\mu$ , une pression d'entrée  $P_i$  et une pression de sortie  $P_s$ , la vitesse le long de l'axe du cylindre s'écrit en fonction du rayon  $r$  :

$$v_x(r) = \frac{R^2}{4\mu} \frac{P_i - P_s}{L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (4.41)$$

La figure 4.7 présente les résultats obtenus qui ont été comparés avec succès aux résultats analytiques pour  $R = 1m$ ,  $L = 1m$ ,  $\mu = 1Pa.s$ ,  $P_i = 1Pa$  et  $P_s = 0Pa$ .

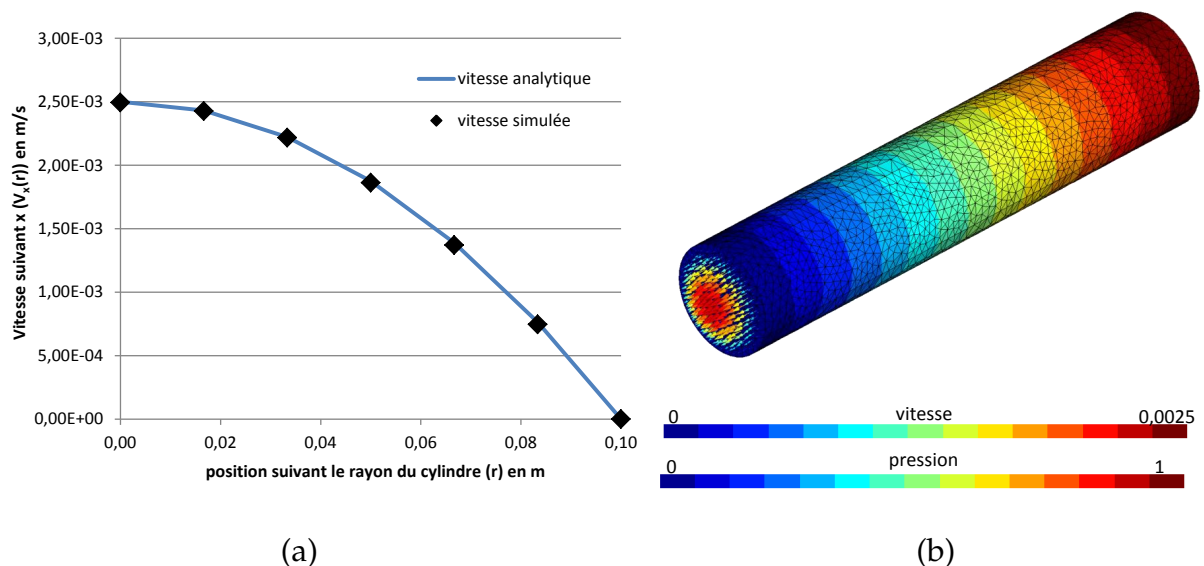


Figure 4.7 – Cas test de Poiseuille pour  $R = 1m$ ,  $L = 1m$ ,  $\mu = 1Pa.s$ ,  $P_i = 1Pa$  et  $P_s = 0Pa$  : (a) Comparaison des résultats analytiques et numériques pour le champs de vitesse  $v_x(r)$ , (b) Champs de vitesse et de pression obtenus.

## 4.4 Couplage Stokes / Darcy

### 4.4.1 Principe de mise en œuvre : couplage itératif

Comme dans le cas du couplage fluide / structure, dans la littérature on retrouve des approches monolithiques [44, 45] et itératives [12, 19]. Pour les mêmes raisons

que celles déjà évoquées dans le chapitre précédent, nous choisissons là encore une approche itérative pour réaliser ce couplage.

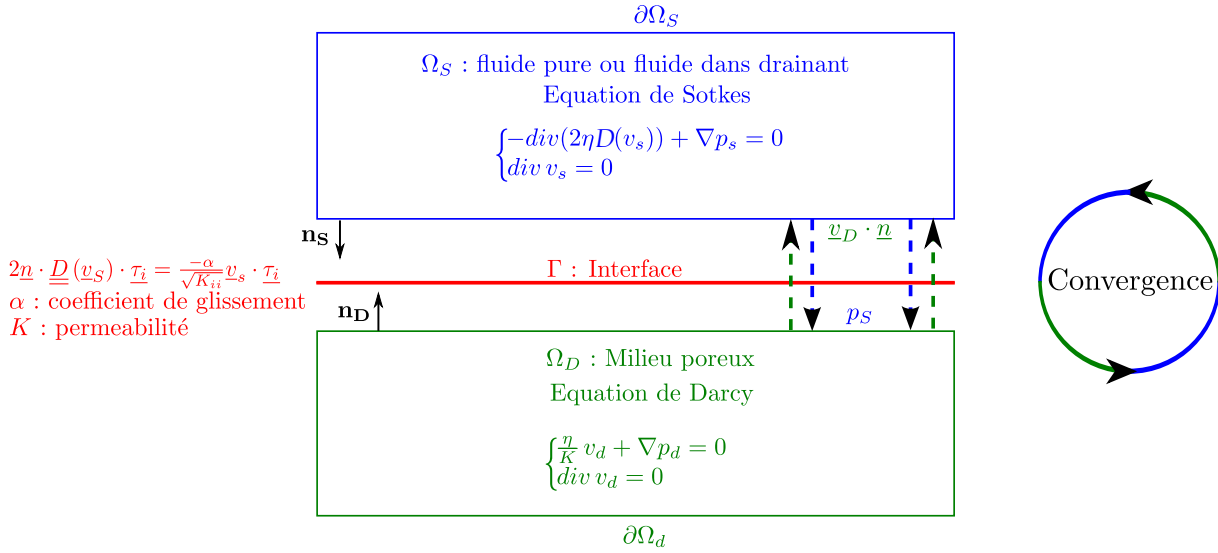


Figure 4.8 – Problème couplé Stokes/Darcy sur un domaine  $\Omega$  et condition de couplage en 2D

La procédure de couplage, résumée sur la figure 4.8, correspond aux blocs ② et ③ de l’algorithme présenté en figure 4.18. Elle consiste à résoudre dans un premier temps le problème de Stokes, puis à résoudre le problème de Darcy en imposant sur l’interface la pression hydrostatique prise dans la zone de Stokes,  $p_S$ , en tant que condition de Dirichlet par élimination (intrinsèque à ProFlot™). Puis le problème de Stokes est à nouveau résolu en imposant sur l’interface la vitesse normale prise dans la zone de Darcy,  $\underline{v}_D \cdot \underline{n}$ , comme condition de Dirichlet par une méthode de pénalité. Le processus itératif est répété jusqu’à ce que la condition de couplage suivante soit vérifiée sur tout le domaine de calcul :

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left( \frac{\|v_j^{i+1} - v_j^i\|}{\|v_j^{i+1}\|} + \frac{\|p_j^{i+1} - p_j^i\|}{\|p_j^{i+1}\|} \right) < \epsilon \quad (4.42)$$

où  $v_j^{i+1}$  et  $p_j^{i+1}$  sont respectivement la vitesse et la pression au nœud  $j$  à l’itération courante,  $N$  le nombre de nœud dans le domaine et  $\epsilon$  un scalaire proche de zéro choisi par l’utilisateur. Dans la pratique, on pose  $\epsilon = 0,005$ .

### 4.4.2 Conditions de couplage

Les deux sous-domaines  $\Omega_S$  et  $\Omega_D$  dans lesquels règnent respectivement l'équation de Stokes et l'équation de Darcy sont séparés par une interface  $\Gamma = \Omega_S \cap \Omega_D$  à travers laquelle la conservation de la masse et la continuité de la contrainte doivent être respectées. On choisit de plus de contrôler le saut de vitesse tangente sur l'interface  $\Gamma$  à travers la condition de Beavers-Joseph-Saffman (BJS) [8]. Cette condition a été proposée dans [8] par G. Beavers et D. Joseph dans le cas du ruissellement d'un fluide sur une surface poreuse et permet de contrôler la vitesse tangente à la surface à travers un coefficient de glissement. Ainsi, la condition de BJS consiste à relier le taux de cisaillement du fluide à la différence entre la vitesse de ruissellement  $v_{Sx}$  et la vitesse d'imprégnation du milieu poreux  $v_{Dx}$  :

$$\left. \frac{\partial v_{Sx}}{\partial y} \right|_{\Gamma} = \frac{\alpha}{\sqrt{K_{xx}}} (v_{Sx}|_{\Gamma} - v_{Dx}|_{\Gamma}) \quad (4.43)$$

où  $\alpha$  est un coefficient de glissement. L'équation (4.43) peut s'écrire sous une forme plus générale faisant intervenir le tenseur des taux de déformation eulérien et les vecteurs unitaires tangents à l'interface  $\tau_i$  :

$$2 \underline{n} \cdot \underline{D}(\underline{v}_S) \cdot \underline{\tau}_i = \frac{-\alpha}{\sqrt{K_{ii}}} (\underline{v}_S - \underline{v}_D) \cdot \underline{\tau}_i \quad (4.44)$$

où  $i$  fait référence aux directions tangentes et  $K_{ii}$  sont les perméabilités associées à ces directions.

Ainsi, pour définir complètement le problème couplé Stokes/Darcy en plus des systèmes d'équations de Darcy (4.4) et de Stokes (4.27), on introduit le système de condition suivant, définis sur l'interface  $\Gamma$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{v}_S \cdot \underline{n} = \underline{v}_D \cdot \underline{n} \\ 2 \underline{n} \cdot \underline{D}(\underline{v}_S) \cdot \underline{\tau}_i = \frac{-\alpha}{\sqrt{K_{ii}}} \underline{v}_S \cdot \underline{\tau}_i \\ p_D = p_S \end{array} \right. \quad (4.45)$$

où  $\underline{n} = \underline{n}_S = -\underline{n}_D$  est la normale sortante de l'interface Stokes/Darcy. La figure 4.8 résume le problème couplé à résoudre.

### 4.4.3 Problématiques liées au couplage

La solution retenue pour le couplage des écoulements de Stokes et Darcy consiste à utiliser deux sous-domaines dont les maillages ne sont pas nécessairement structurés mais doivent être compatibles à l'interface. Numériquement, la méthode de couplage introduite ci-dessus implique certaines précautions dans la construction du système global à résoudre.

### 4.4.3.1 Imposition des conditions cinématiques

Tout d'abord, les conditions aux limites cinématiques (vitesses normales et tangentielles) imposées par une méthode de pénalité impliquent le système matriciel suivant pour une interface quelconque définie par son vecteur normal ( $\underline{n} = n_x \cdot \underline{x} + n_y \cdot \underline{y} + n_z \cdot \underline{z}$ ) :

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & A & B & C & \dots \\ \dots & D + Qn_x & E + Qn_y & F + Qn_z & \dots \\ \dots & G & H & I & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ v_x^i \\ v_y^i \\ v_z^i \\ \dots \end{pmatrix}_{global} = \begin{pmatrix} \dots \\ L \\ M + Qv_D \cdot \underline{n} \\ N \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

où  $Q$  est un coefficient de pénalité. Cependant, d'un côté de grandes valeurs de  $Q$  assurent une bonne imposition de la condition, tandis que de l'autre, cela conduit à un système mal conditionné en raison de termes de pénalité hors diagonale difficiles à gérer pour les solveurs itératifs classiques. Afin d'assurer un bon conditionnement de la matrice de rigidité du système, la condition de Dirichlet peut être imposée dans un repère local attaché au nœud considéré dont la normale à la frontière (ou à l'interface) est un des axes (voir figure 4.9). Dans la pratique, les degrés de liberté en vitesse subissent localement une rotation. Par exemple, pour une interface de normale  $\underline{n} = n_x \underline{x} + n_y \underline{y}$  la rotation du système (4.46) conduit au système à résoudre suivant dont certaine vitesse s'exprime dans le repère local :

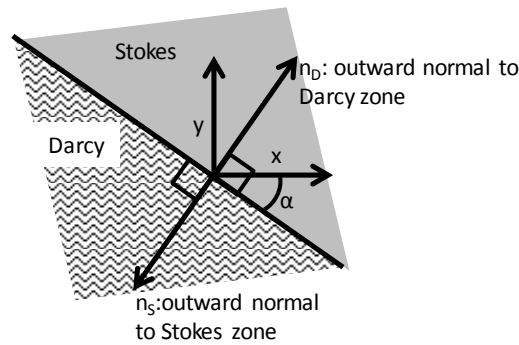


Figure 4.9 – Conditions aux limites cinématiques

$$\begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [R] \end{bmatrix}^T [K^e] \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{V_g\} \\ \{V_l\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [R] \end{bmatrix}^T \{f^e\} \quad (4.47)$$

où  $[R]$  est la matrice de rotation permettant de passer du repère global au repère local,  $\{V_g\}$  les inconnues nodales en vitesse exprimées dans le repère global et  $\{V_l\}$

les inconnues nodales en vitesse exprimées dans le repère local. On obtient localement des relations du type :

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & An_y - Bn_x & An_x + Bn_y & C & \dots \\ \dots & Dn_y - En_x & Dn_x + En_y + Q & F & \dots \\ \dots & Gn_y - Hn_x & Gn_x + Hn_y & I & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ v_x^i \\ v_y^i \\ v_z^i \\ \dots \end{pmatrix}_{local} = \begin{pmatrix} \dots \\ L \\ M + Q\underline{v}_D \cdot \underline{n} \\ N \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

Une fois le système résolu, les vitesses doivent être post-traitées afin d'être exprimées dans le repère global du problème. Il faut également remarquer qu'en raison des très faibles vitesses considérées dans cette étude le coefficient de pénalité doit être choisi en fonction de la perméabilité pour garantir que  $M \ll Q\underline{v}_D \cdot \underline{n}$ . Nous avons vérifié que jusqu'à des perméabilités de  $10^{-15} \text{ m}^2$  un coefficient de pénalité  $Q = \frac{10^5}{\sqrt{K}}$  lorsque  $K < 10^{-6} \text{ m}^2$  donne de bon résultats [59].

#### 4.4.3.2 Incompressibilité de la résine

Un autre point important numériquement, concerne l'utilisation des mini-éléments pour la stabilisation des formulations mixtes. En effet, cette méthode de stabilisation repose sur la relaxation de la contrainte d'incompressibilité et est équivalente à l'équation suivante :

$$\text{div} \underline{v} + C p = 0 \quad (4.49)$$

avec  $C$  le terme de stabilisation proportionnel à  $\frac{1}{\eta}$  dans le cas de Stokes. Lorsque l'on considère un écoulement de Stokes classique,  $C$  est dimensionné par la viscosité et reste suffisamment petit pour pouvoir considérer que  $C p$  est négligeable, garantissant ainsi la quasi-incompressibilité de la résine ( $\text{div} \underline{v} \approx 0$ ). Cependant, dans le cas d'un couplage avec un écoulement de Darcy, la faible perméabilité du milieu poreux peut impliquer une très faible vitesse globale dans le domaine de calcul. Dans ces cas, typiques en simulation de l'infusion, le terme de stabilisation peut ne plus être négligeable du tout, impliquant une divergence de la vitesse non nulle dans la zone de Stokes. L'incompressibilité de la résine n'est plus respectée. Afin d'assurer une incompressibilité acceptable ( $\text{div} \underline{v} \approx 0$ ), il peut être nécessaire d'introduire une viscosité artificielle dans le calcul du terme de stabilisation ( $C$ ) dans l'équation (4.49) ou  $[C]$  dans le système global (4.40). On peut montrer qu'en choisissant la fonction bulle du type hiérarchique et en introduisant une viscosité artificielle égale à dix fois la viscosité réelle du fluide, on garantit l'incompressibilité de la résine pour des perméabilités

de l'ordre de  $10^{-15} \text{ m}^2$  voire inférieure dans certains cas.

Des exemples de validation et des comparaisons entre les différents choix possibles pour la fonction bulle sont présentés dans la section suivante.

#### 4.4.4 Validation et tests numériques

La méthode de couplage présentée ici a été implémentée dans ProFlot™, puis validée, d'une part sur des cas test ayant une solution analytique et d'autre part à l'aide de la méthode des solutions manufacturées [37].

##### 4.4.4.1 Validation analytique

Deux cas ont été considérés. Le premier qui consiste en un écoulement perpendiculaire à l'interface, permet de valider la bonne imposition de la continuité de la vitesse normale ainsi que la méthode de stabilisation  $P_{1+}/P_1$ . Le second qui consiste en un écoulement parallèle à l'interface permet de valider la bonne implémentation de la condition de BJS.

**Écoulement perpendiculaire à l'interface : choix de la fonction bulle.** Dans ce cas, on considère un domaine  $\Omega$  partagé en deux sous-domaines,  $\Omega_S$  et  $\Omega_D$ , dans lesquels règnent respectivement un écoulement de Stokes et un écoulement de Darcy. Le domaine  $\Omega_S$  est de dimension  $H_S = 1 \text{ m}$  par  $L = 5 \text{ m}$  et le domaine  $\Omega_D$  est de dimension  $H_D = 1 \text{ m}$  par  $L = 5 \text{ m}$ . On considère un fluide de viscosité  $\eta = 0.058 \text{ Pa.s}$ . Le domaine est soumis à une différence de pression de  $1 \text{ bar}$  entre sa face supérieure et sa face inférieure comme décrit sur la figure 4.10.

Ce cas particulier à une solution très simple. En effet, la résine ne pouvant pas sortir du drainant ailleurs que par l'interface Stokes/Darcy, l'écoulement est parfaitement vertical (le long de l'axe  $y$ ), ce qui implique que  $v_x = v_z = 0$  dans tout le domaine. Ainsi, dans la zone purement fluide, la conservation de la masse est équivalente à :

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (4.50)$$

Ceci implique que le laplacien de la vitesse est nul ( $\underline{\Delta v} = \underline{0}$ ), et la conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\underline{\nabla} p = \underline{0} \quad (4.51)$$

Les équations (4.50) et (4.51) impliquent que la pression et la composante verticale de la vitesse sont constantes dans le domaine. En appliquant la condition de pression et

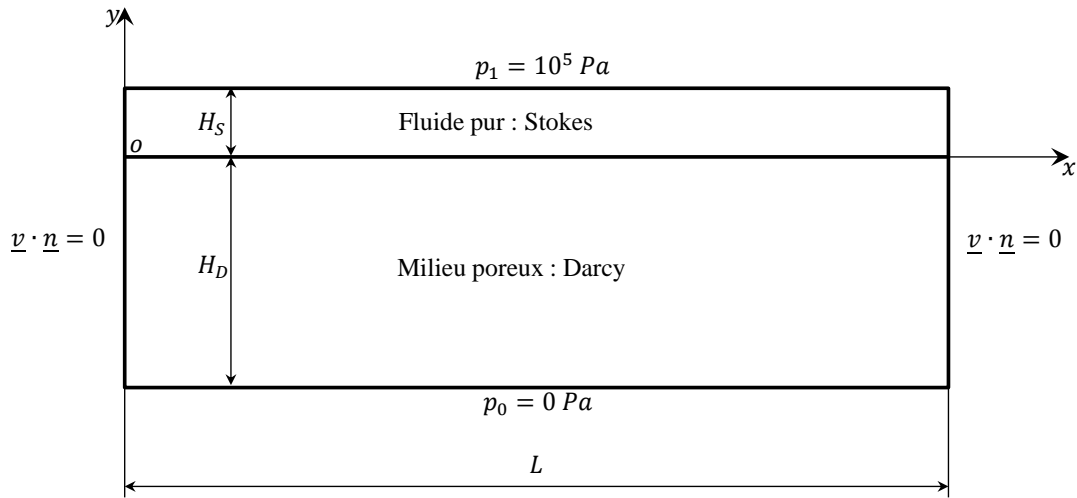


Figure 4.10 – Cas d'un écoulement perpendiculaire à l'interface : description du problème

la condition d'interface on obtient :

$$\left. \begin{array}{l} p(x, y, z) = p_1 \\ \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_D \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \quad (4.52)$$

où  $v_D$  est la composante verticale (normale à l'interface) de la vitesse de Darcy, qui peut être facilement calculée à partir des données du problème :

$$v_D = -\frac{K_{yy}}{\eta} \frac{p_1 - p_0}{H_D} \quad (4.53)$$

Finalement, en introduisant les valeurs numériques, la solution analytique du problème s'écrit :

$$\left. \begin{array}{l} \forall (x, z) \in \Omega \\ p(y) = 10^5 \quad \text{pour } 0 \leq y \leq 1 \\ p(y) = 2 \cdot 10^7 y + 10^5 \quad \text{pour } -1 \leq y \leq 0 \\ \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,72 \cdot 10^6 K_{yy} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall y \end{array} \right\} \quad (4.54)$$

Ce cas permet de mettre en évidence les problèmes numériques évoqués dans la section 4.4.3.2. Nous avons réalisés plusieurs calculs pour des valeurs de perméabilité différentes ( $K_{yy} = 10^{-12} m^2$ ,  $K_{yy} = 10^{-13} m^2$  et  $K_{yy} = 10^{-14} m^2$ ) afin de mettre en évidence l'influence de la stabilisation sur les résultats. Les fonctions bulles polynomiale

et hiérarchique ont été utilisées dans le but de les comparer. La figure 4.11 met en évidence des perturbations dans le champ de vitesse de la zone de Stokes lorsque l'on utilise la fonction bulle polynomiale. Ceci s'explique par le fait que le terme de stabilisation associé à la fonction bulle polynomiale est plus élevé et que par conséquent l'incompressibilité de la résine est moins bien respectée lorsque la vitesse est faible.

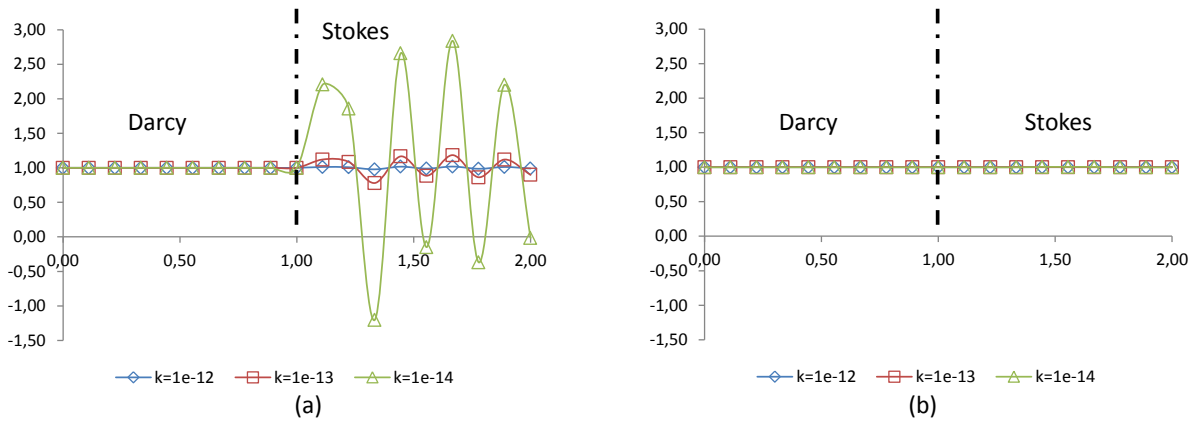


Figure 4.11 – Norme du champ de vitesse numérique divisé par la norme du champ de vitesse analytique en fonction de  $y$  pour différents niveaux de perméabilité : (a) fonction bulle polynomiale, (b) fonction bulle hiérarchique

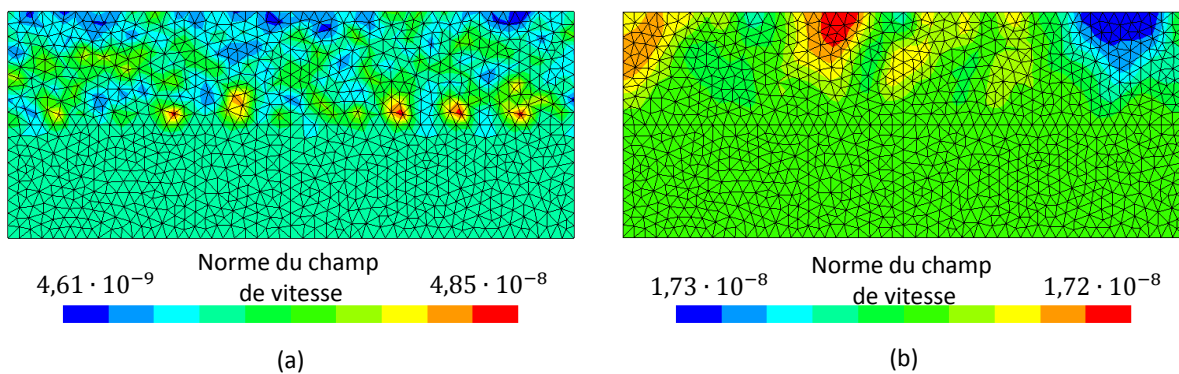


Figure 4.12 – Norme du champ de vitesse obtenue sur le cas test de l'écoulement perpendiculaire avec une perméabilité  $K = 10^{-14} m^2$  et donc une solution analytique  $v_y = 1,72 \cdot 10^{-8} m/s$  : (a) fonction polynomiale, (b) fonction hiérarchique

La figure 4.12 représente la norme du champ de vitesse obtenue numériquement pour une perméabilité de  $10^{-14} m^2$ . On peut remarquer que des petites perturbations



sur le champ de vitesse sont également présentes dans la longueur du domaine même dans le cas de l'utilisation de la fonction bulle hiérarchique. Cependant, elles restent faibles (de l'ordre de 0,2%) et peuvent être atténuées en introduisant dans le terme de stabilisation une viscosité artificielle supérieure à la viscosité réelle du fluide. Ceci nous permet de choisir la fonction bulle hiérarchique pour la stabilisation des équations de Stokes et Darcy. Tous les calculs réalisés dans la suite de ces travaux font appel à cette méthode de stabilisation.

**Écoulement parallèle à l'interface.** Dans ce cas, on considère un domaine  $\Omega$  partagé en deux sous-domaines,  $\Omega_S$  et  $\Omega_D$ , dans lesquels règnent respectivement un écoulement de Stokes et un écoulement de Darcy. Le domaine  $\Omega_S$  est de dimension  $H_S = 1 \text{ mm}$  par  $L = 200 \text{ mm}$  et le domaine  $\Omega_D$  est de dimension  $H_D = 5 \text{ mm}$  par  $L = 200 \text{ mm}$ . On considère un fluide de viscosité  $\eta = 0,058 \text{ Pa.s}$  et un milieu poreux de perméabilité  $K = 10^{-15} \text{ m}^2$ . Le domaine est soumis à une différence de pression de  $1 \text{ bar}$  entre ses deux faces latérales comme décrit sur la figure 4.13.

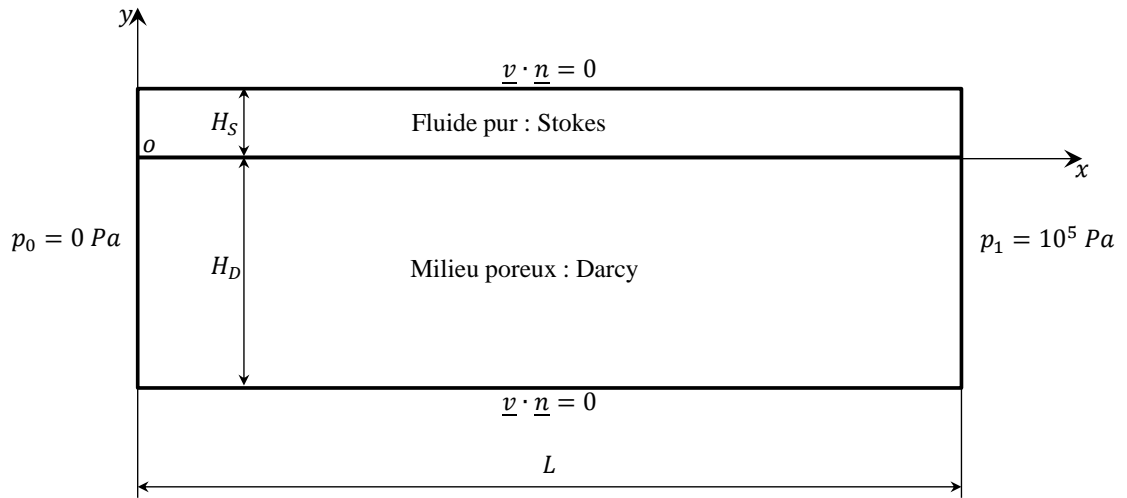


Figure 4.13 – Cas d'un écoulement parallèle à l'interface : description du problème

Ce cas test qui a été étudié dans [44] possède la solution analytique suivante lorsque l'on utilise la condition de couplage de Beavers-Joseph-Saffman :

$$\left\{ \begin{array}{ll} v_x = -\frac{K}{2\eta} \left( \frac{\lambda^2 + 2\alpha\lambda}{1 + \alpha\lambda} \right) \frac{dP}{dx} \left( 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{Ky}} \right) + \frac{1}{2\eta} \left( y^2 + 2\alpha y \sqrt{K} \right) \frac{dP}{dx} & \text{pour } 0 \leq y \leq H_S \\ v_x = -\frac{K}{\eta} \left( \frac{p_1 - p_0}{L} \right) & \text{pour } y < 0 \\ v_y = 0 & \text{pour tout } y \end{array} \right. \quad (4.55)$$

avec  $\lambda = \frac{H_S}{\sqrt{K}} \frac{dP}{dx} = \frac{p_1 - p_0}{L}$  et  $\alpha$  le coefficient de glissement. Une comparaison entre la solution analytique et la solution numérique est présentée sur la figure 4.14 pour différentes valeurs de  $K$ . Les erreurs relatives obtenues sur le profil de vitesse dans la zone purement fluide sont compilées dans le tableau 4.1. Là encore, nous observons une bonne corrélation entre la solution analytique et la solution numérique obtenue avec ProFlot™.

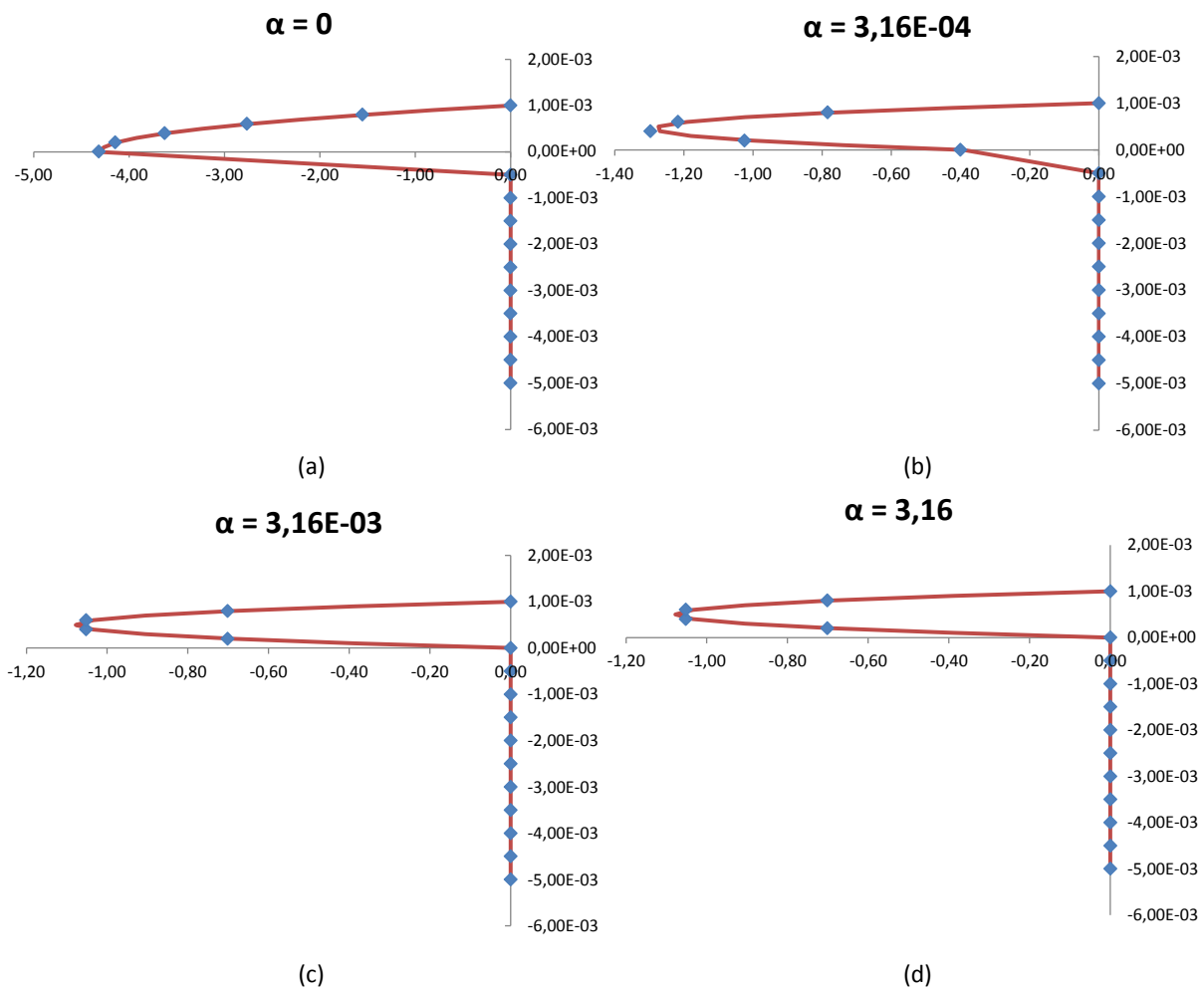


Figure 4.14 – Cas d’un écoulement parallèle à l’interface, comparaison des solutions analytique (ligne continue) et numérique (points) pour  $K = 10^{-15} \text{ m}^2$  : (a)  $\alpha = 0$ , (b)  $\alpha = 3.16 \cdot 10^{-4}$ , (c)  $\alpha = 3.16 \cdot 10^{-2}$ , (d)  $\alpha = 3.16$

La figure 4.15 montre le champ de pression et la norme du champ de vitesse obtenus pour  $\alpha = 0$ .

erreur relative %		$\alpha$			
		0	$3,16 \cdot 10^{-4}$	$3,16 \cdot 10^{-2}$	3,16
y (m)	0	0,17%	2,05%	1,21%	1,75%
	$2,00 \cdot 10^{-4}$	0,19%	2,09%	1,80%	1,72%
	$4,00 \cdot 10^{-4}$	0,20%	2,10%	1,88%	1,72%
	$6,00 \cdot 10^{-4}$	0,20%	2,11%	1,90%	1,72%
	$8,00 \cdot 10^{-4}$	0,21%	2,11%	1,91%	1,72%

Tableau 4.1 – Erreur relative en % sur la norme de la vitesse dans la zone de Stokes en fonction de y pour les différentes valeur de  $\alpha$  ( $K = 10^{-15} m^2$ ).

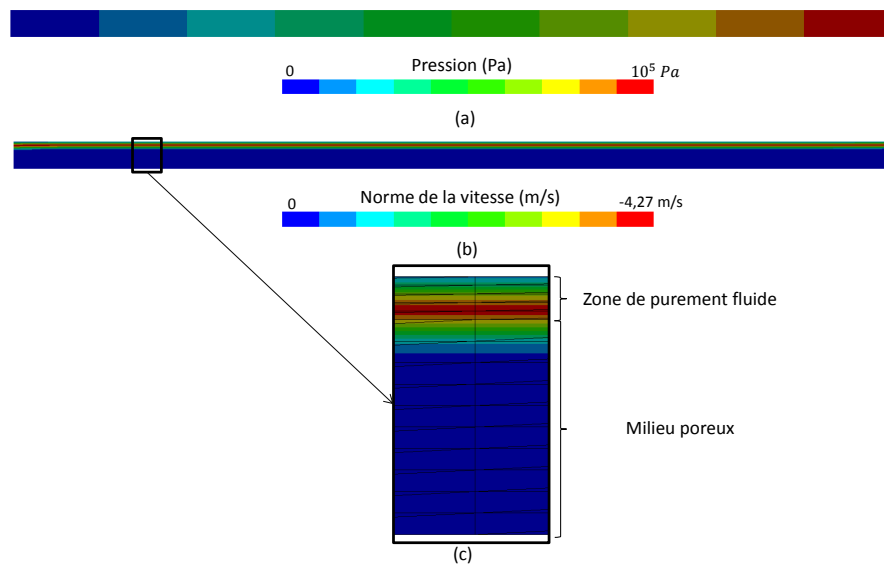


Figure 4.15 – Résultat de simulation pour  $\alpha = 0$  et  $K = 10^{-15} m^2$  : (a) champ de pression, (b) norme du champ de vitesse, (c) zoom pour distinguer la zone de Stokes de la zone de Darcy

#### 4.4.4.2 Méthode des solutions manufacturées

La bonne implémentation de l'algorithme de couplage Stokes/Darcy a été vérifiée également en analysant la vitesse de convergence à l'aide de la méthode des solutions manufacturées [37, 44, 59]. La méthode consiste à construire une solution analytique du problème qui est ensuite introduite dans le système d'équations à résoudre pour en déduire un terme source. À partir de ce terme source le problème éléments finis est résolu. Enfin on calcule l'erreur de la solution discrète par rapport à la solution analytique initiale.

Soit un domaine  $\Omega = (0;1) \times (0;2) m^2$  divisé en deux sous domaines  $\Omega_S = (0;1) \times (1;2) m^2$  régi par les équations de Stokes et  $\Omega_D = (0;1) \times (0;1) m^2$  régi par les équations de Darcy, en contact sur une interface  $\Gamma = \Omega_S \cap \Omega_D$ . On choisit la forme analytique proposée par Discacciati [19] :

$$\begin{cases} \underline{v}_S \cdot \underline{x} = -\cos(\pi/2 y) \sin(\pi/2 x) \\ \underline{v}_S \cdot \underline{y} = \cos(\pi/2 x) \sin(\pi/2 y) - 1 + x \\ p_S = 1 - x \end{cases} \quad (4.56)$$

$$\begin{cases} \underline{v}_D \cdot \underline{x} = \sin(\pi/2 x) \cos(\pi/2 y) + y \\ \underline{v}_D \cdot \underline{y} = \cos(\pi/2 x) \sin(\pi/2 y) + x - 1 \\ p_D = 2/\pi \cos(\pi/2 x) \cos(\pi/2 y) - y(x - 1) \end{cases} \quad (4.57)$$

Nous considérons des maillages réguliers construits à partir de carrés de dimensions  $h \times h$  divisés en deux triangles. Chaque calcul est réalisé sur un maillage de plus en plus fin ( $h$  divisé par deux) en commençant avec  $h = 0,1$  jusqu'à  $h = 0,0125$ . Pour simplifier, on choisit  $\mu = 1 Pa.s$  et  $K = 1 m^2$  comme proposé dans [19]. La figure 4.16 présente les isovaleurs du champ de pression et de la norme du champ de vitesse pour une taille de maille  $h = 0,0125$ .

Pour chaque maillage et solution numérique  $v_h$  et  $p_h$ , les erreurs sont calculées en utilisant la norme  $L^2$  :

$$\|u\|_{0,\Omega} = \left( \int_{\Omega} u^2 d\Omega \right)^{1/2} \quad (4.58)$$

et la norme  $H^1$  :

$$\|u\|_{1,\Omega} = \left( \|u\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{j=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \quad (4.59)$$

Les erreurs ainsi calculées permettent de comparer les taux de convergences obtenus aux taux théoriques fournis dans la littérature [47]. Le taux de convergence dans la zone de Stokes doit vérifier :

$$\|\underline{v} - \underline{v}_h\|_{1,\Omega_S} + \|p - p_h\|_{0,\Omega_S} \leq C_1 h (\|\underline{v}\|_{2,\Omega_S} + \|p\|_{1,\Omega_S}) \quad (4.60)$$

et le taux de convergence dans la zone de Darcy doit vérifier :

$$\|\underline{v} - \underline{v}_h\|_{1,\Omega_D} + \|p - p_h\|_{0,\Omega_D} \leq C_2 h (\|\underline{v}\|_{2,\Omega_D} + \|p\|_{1,\Omega_D}) \quad (4.61)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes. La convergence de la solution a été étudiée et les erreurs calculée sont présentées dans les tableaux 4.2 et 4.3.

La figure 4.17 montre que la pression et la vitesse convergent respectivement avec des taux de 2 et 1,4 dans le domaine Darcy et des taux de 1,8 et 2,2 dans le domaine

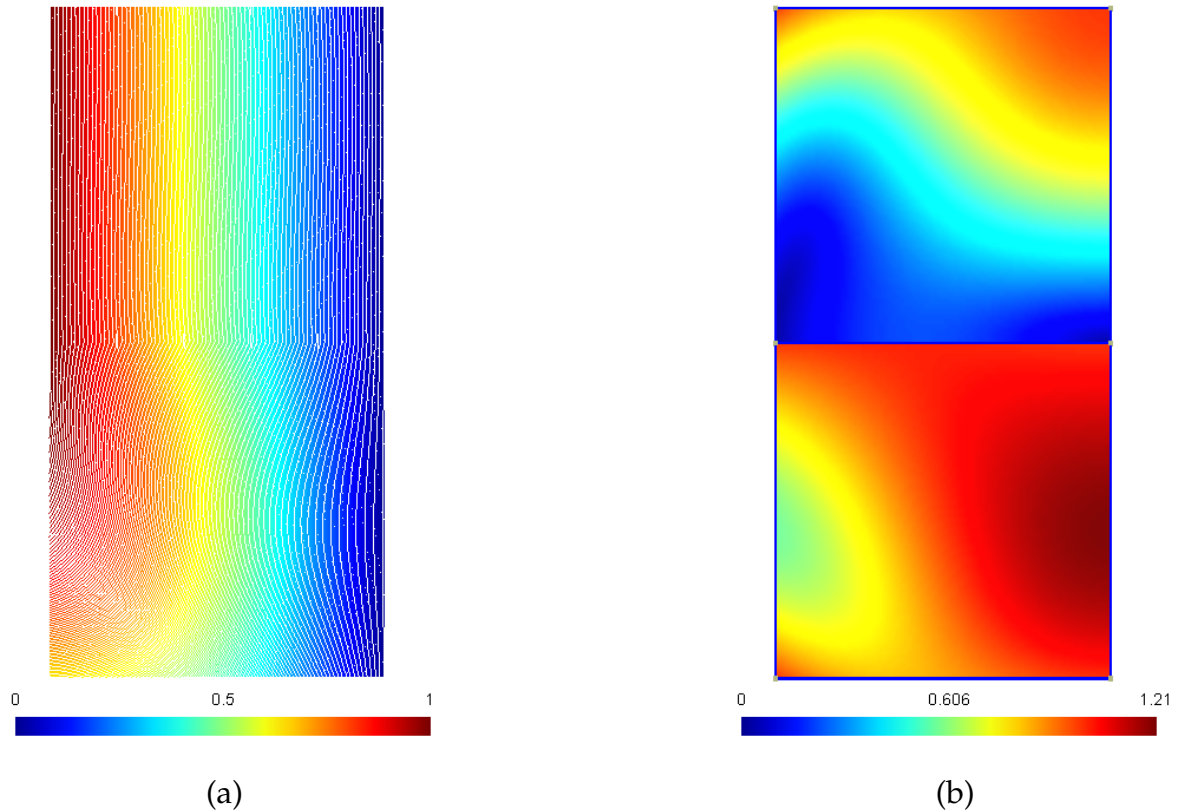


Figure 4.16 – Isovaleurs obtenues avec  $\eta = 1 \text{ Pa.s}$ ,  $K = 1 \text{ m}^2$  et  $h = 0,0125 \text{ m}$  : (a) champ de pression, (b) norme du champ de vitesse.

Maillage	$h, [m]$	$\ p - p_h\ _{0,\Omega}$	$\ v - v_h\ _{0,\Omega}$
$10 \times 10$	0,1	$1,718 \cdot 10^{-3}$	$4,930 \cdot 10^{-5}$
$20 \times 20$	0,05	$4,598 \cdot 10^{-4}$	$1,012 \cdot 10^{-5}$
$40 \times 40$	0,025	$1,210 \cdot 10^{-4}$	$2,193 \cdot 10^{-6}$
$80 \times 80$	0,0125	$3,271 \cdot 10^{-5}$	$5,001 \cdot 10^{-7}$

Tableau 4.2 – Erreurs commises pour la pression et la vitesse en norme  $L^2$  dans le domaine de Stokes

Stokes. Ces résultats sont en accord avec les taux de convergence théoriques déterminés dans la littérature [19, 47, 59] qui sont respectivement de 2 et 2 pour la pression et la vitesse dans la zone de Darcy et respectivement de 1 et 2 pour la pression et la vitesse dans la zone de Stokes.

Maillage	$h, [m]$	$\ p - p_h\ _{0,\Omega}$	$\ v - v_h\ _{0,\Omega}$
$10 \times 10$	0,1	$1,306 \cdot 10^{-3}$	$4,995 \cdot 10^{-3}$
$20 \times 20$	0,05	$3,210 \cdot 10^{-4}$	$1,295 \cdot 10^{-3}$
$40 \times 40$	0,025	$6,908 \cdot 10^{-5}$	$3,324 \cdot 10^{-4}$
$80 \times 80$	0,0125	$1,399 \cdot 10^{-5}$	$1,178 \cdot 10^{-4}$

Tableau 4.3 – Erreurs commises pour la pression et la vitesse en norme  $L^2$  dans le milieu poreux

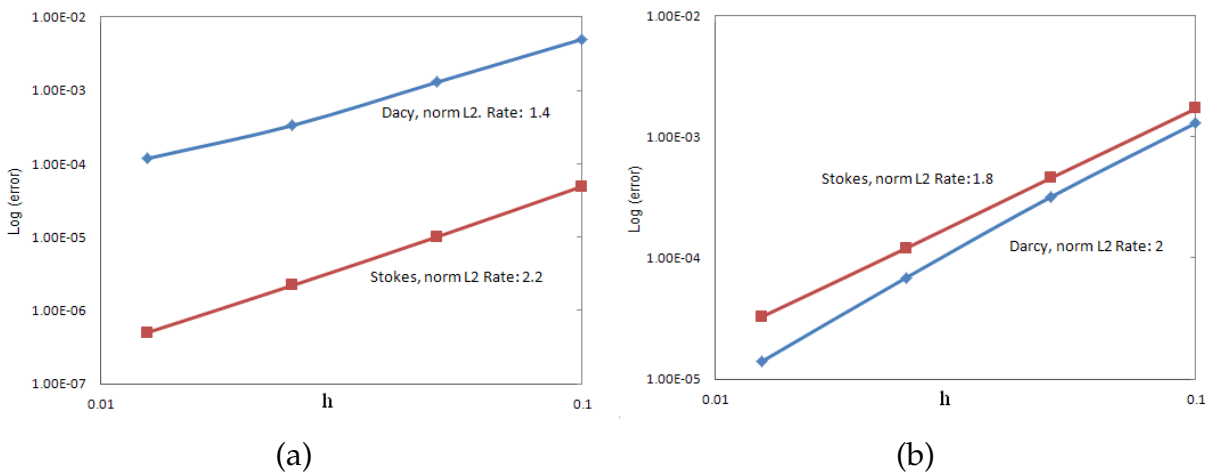


Figure 4.17 – Convergence de l’erreur pour les formulations de Darcy et de Stokes : (a) vitesse, (b) pression

## 4.5 Evolution du front de fluide

Au-delà des couplages complexes évoqués dans les chapitres précédents, le remplissage d’un milieu poreux déformable par un fluide pose des problèmes de conservation de masse, principalement liés aux méthodes employées pour suivre ce phénomène transitoire. En effet, la localisation et le transport de l’interface entre les préformes sèches et imprégnées, *i.e* le front de fluide, dans un domaine discrétisé ne sont pas aisés.

Il existe plusieurs méthodes pour suivre l’évolution du front de fluide telles que la méthode level-set [44] ou la méthode FE-CV[54]. Dans le cadre de ces travaux nous n’avons pas étudié ces méthodes mais avons directement utilisé l’algorithme de remplissage déjà présent dans PAM-RTM<sup>TM</sup>. Cet algorithme repose sur un découpage du phénomène transitoire en une succession d’états quasi-statiques. Les nouveaux éléments remplis entre deux états ou temps de remplissage sont déterminés à partir du champ de vitesse calculé au pas de temps précédent. Un facteur de remplissage

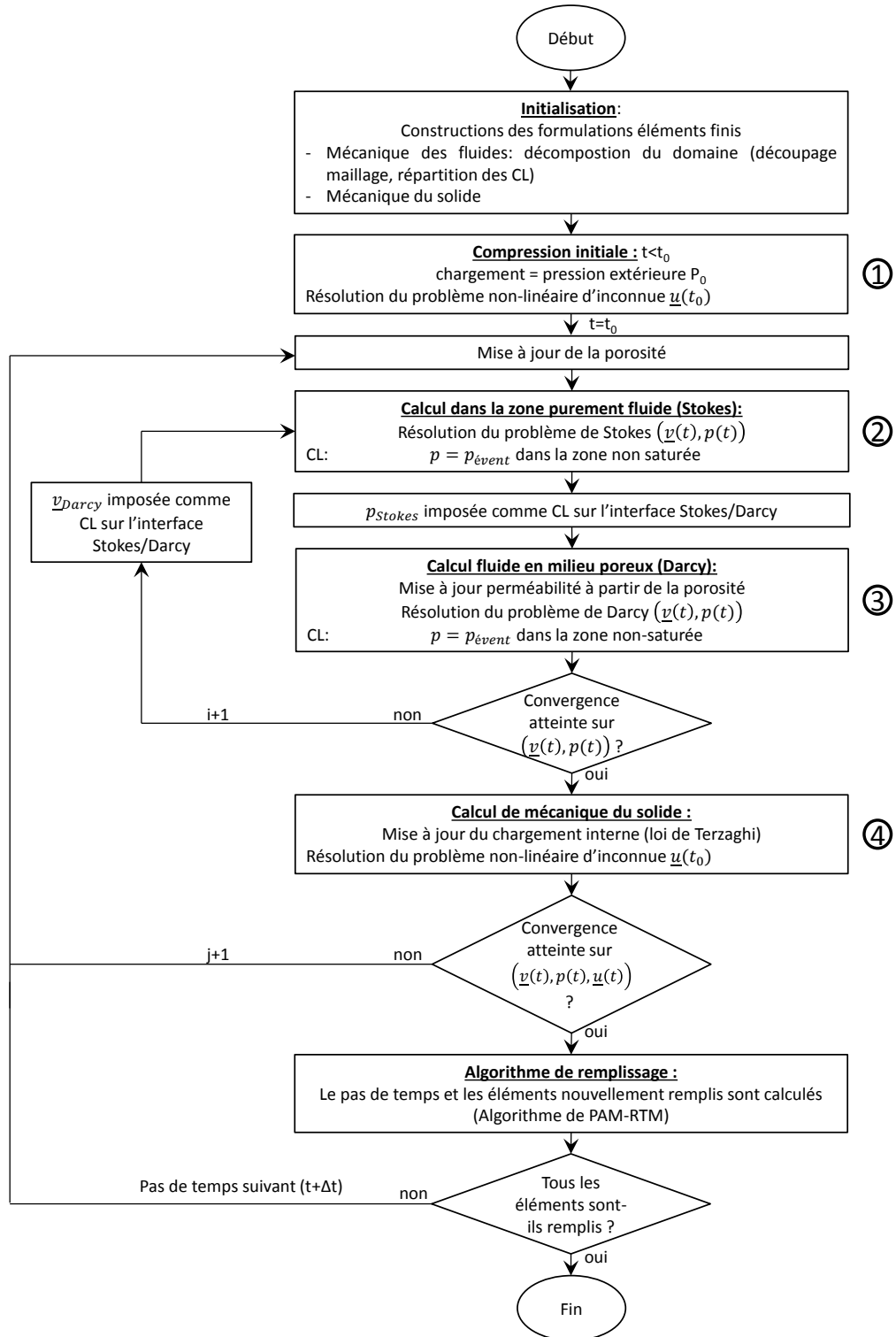


Figure 4.18 – Algorithme simulation de l’infusion

compris entre 0 et 1 est associé à chaque élément. Dans le cas du LRI, le milieu poreux se déforme entre deux itérations, modifiant ainsi, la porosité (voir équation (3.70) du chapitre 3). Le pas de temps étant déterminé avant le calcul, il est nécessaire de le corriger afin que le volume total de résine entrée dans le système corresponde au volume des pores saturés. La correction suivante est proposée :

$$\Delta t = \Delta t_{algo} \frac{V_{t+\Delta t}}{V_t} \quad (4.62)$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps corrigé,  $\Delta t_{algo}$  le pas de temps déterminé par l'algorithme de remplissage,  $V_t$  est le volume de résine qui aurait été injecté dans la préforme entre deux pas de temps si le milieu ne s'était pas déformé et  $V_{t+\Delta t}$  est le volume réellement injecté dans la préforme.

Finalement, la figure 4.18 résume l'algorithme utilisé pour la simulation du remplissage d'une préforme par un procédé d'infusion.

## 4.6 Écoulements post-infusion

Comme on le constate expérimentalement, à la fin du remplissage, le système n'est pas équilibré, la différence de pression entre l'évent et l'injection induit des écoulements que l'on qualifie d'écoulements post-infusion. Ces écoulements, peu étudiés dans la littérature, influent pourtant beaucoup sur la qualité finale de la pièce infusée. En effet, le gradient de pression final, associé à la souplesse du sac à vide, implique une répartition de la résine et une épaisseur non-homogènes. La résine va donc migrer petit-à-petit des zones à faible fraction de fibres vers les zones à forte fraction de fibres afin d'atteindre un équilibre mécanique. Généralement, l'arrivée de résine et l'évent sont clampés puis le système est laissé au repos pour atteindre l'équilibre comme illustré sur la figure 4.19

### 4.6.1 Principe et mise en œuvre de la procédure de simulation

Pour simuler cette phase plusieurs problèmes se posent. D'une part, la pièce étant complètement infusée, il n'y a plus de front de résine à faire évoluer, ainsi, l'algorithme de remplissage présenté dans la section précédente et utilisé pour la phase de remplissage ne permet plus de déterminer les états quasi-statiques successifs. Il est donc nécessaire de mettre en place une nouvelle stratégie. D'autre part, l'évent et l'arrivée de résine étant clampés, il n'y a plus de condition pression pour le problème fluide qui est alors sous-contraint.



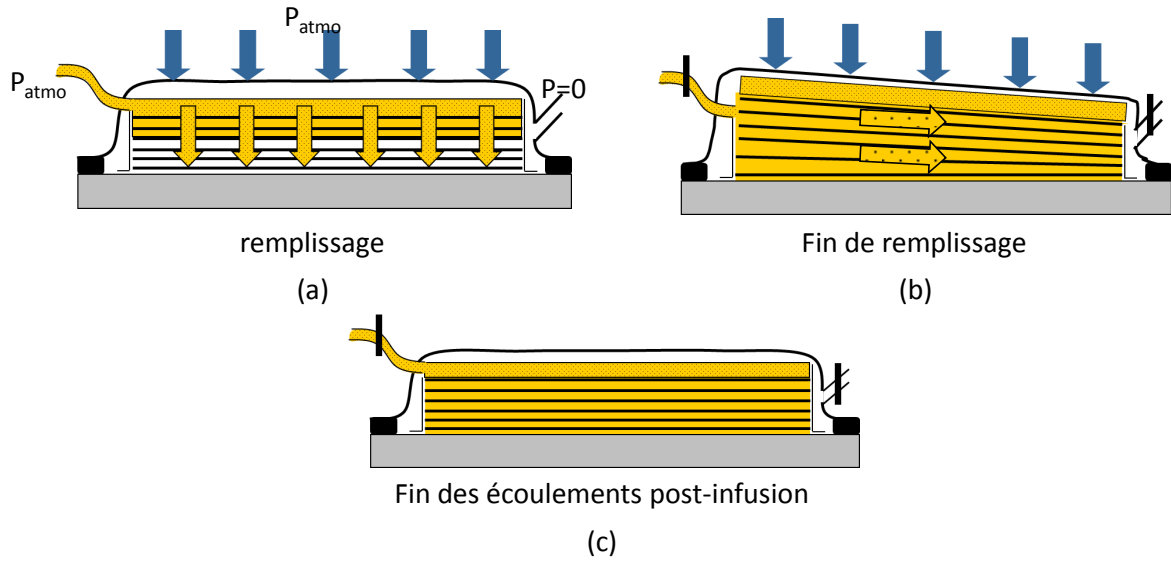


Figure 4.19 – Illustration des écoulements post-infusion

Nous proposons de résoudre un bilan de masse de la résine sur un élément de volume du domaine de calcul. Pour cela, on utilise la conservation de la masse de la phase solide déjà présentée au chapitre précédent (équation (3.70) du chapitre 3) :

$$J_{t+\Delta t} (1 - \phi_{t+\Delta t}) = J_t (1 - \phi_t) \quad (4.63)$$

où  $J$  est le jacobien de la transformation et  $\phi$  la fraction volumique de résine. En multipliant l'équation (4.63) par le volume initial de l'élément et en remarquant que  $J_{t+\Delta t} = \frac{V_{t+\Delta t}^e}{V_0^e}$ , on a :

$$V_{t+\Delta t}^e (1 - \phi_{t+\Delta t}) = V_t^e (1 - \phi_t) \quad (4.64)$$

où  $V^e$  est le volume total (résine + fibre) de l'élément de volume. On peut ainsi exprimer la fraction volumique de résine à  $t + \Delta t$  comme suit :

$$\phi_{t+\Delta t} V_{t+\Delta t}^e = \phi_t V_t^e + V_{t+\Delta t}^e - V_t^e \quad (4.65)$$

L'équation (4.65) traduit le fait que le volume de résine à  $t + \Delta t$  est égal au volume de résine à  $t$  plus la variation de volume de l'élément, ce qui correspond à l'hypothèse d'incompressibilité des fibres qui constituent le milieu poreux homogène équivalent. On remarquera alors que les variations de volume des éléments ne sont dues qu'aux échanges de résine entre ceux-ci :

$$V_{t+\Delta t}^e = V_t^e + \Delta t \sum_{i=1}^{Nb} \underline{v}_{D_i} \cdot \underline{n}_i S_i \quad (4.66)$$

où  $\underline{v}_{D_i}$  est la vitesse de Darcy au centre de la face  $i$  de l'élément,  $\underline{n}_i$  est la normale à la face  $i$  de l'élément,  $S_i$  est l'aire de la face  $i$  de l'élément et  $Nb$  est le nombre de faces de l'élément de volume. Finalement en injectant l'expression (4.66) dans l'équation (4.65), on obtient :

$$\phi_{t+\Delta t} \left( V_t^e + \Delta t \sum_{i=1}^{Nb} \underline{v}_{D_i} \cdot \underline{n}_i S_i \right) = \phi_t V_t^e + \Delta t \sum_{i=1}^{Nb} \underline{v}_{D_i} \cdot \underline{n}_i S_i \quad (4.67)$$

Cette équation permet de déterminer la nouvelle répartition de résine à partir de la géométrie et de la vitesse de Darcy calculées au dernier instant connu. Connaissant la nouvelle distribution de matière dans le domaine, on peut déduire le jacobien de la transformation à  $t + \Delta t$  comme suit :

$$J_{t+\Delta t} = J_t \frac{(1 - \phi_t)}{(1 - \phi_{t+\Delta t})} \quad (4.68)$$

La variation de volume de l'élément n'étant due qu'à la variation du volume de résine contenu dans l'élément, nous faisons l'hypothèse que la déformation associée n'est due qu'à la variation de la pression interstitielle de résine et qu'elle est donc hydrostatique. Ceci nous permet, avec l'équation (4.69), de déterminer un incrément de déformation équivalent  $\Delta\epsilon_{ii}$  :

$$J_{t+\Delta t} = \prod_{i=1}^d (1 + \epsilon_{ii}^{t+\Delta t}) = \prod_{i=1}^d (1 + \epsilon_{ii}^t + \Delta\epsilon_{ii}) \quad (4.69)$$

où  $d$  est la dimension du problème. Pour déterminer l'incrément de pression correspondant à cet incrément de déformation, il est nécessaire d'utiliser la loi de comportement de la préforme. Ainsi, en supposant un comportement isotrope transverse tel que présenté dans le chapitre 3, on peut exprimer les trois (ou deux en 2D) incréments de déformation ( $\Delta\epsilon_{ii}$ ) en fonction de l'unique incrément de déformation transverse comme suit :

$$\Delta\epsilon_{11} = \Delta\epsilon_{33} = \frac{\Delta\epsilon_{22}}{\theta} \quad (4.70)$$

avec  $\theta$  le coefficient, à déterminer, reliant les modules d'élasticité transverse et longitudinaux introduits dans la section 3.3 du chapitre 3. En 2D nous faisons l'hypothèse des déformations planes ce qui implique  $\epsilon_{33} = \Delta\epsilon_{33} = 0$  et permet d'aboutir à l'équation du second degré d'inconnue  $\Delta\epsilon_{22}$  suivante :

$$\frac{(\Delta\epsilon_{22})^2}{\theta} + \Delta\epsilon_{22} \left( 1 + \epsilon_{11} + \frac{1 + \epsilon_{22}}{\theta} \right) + J_t - J_{t+\Delta t} = 0 \quad (4.71)$$

En 3D, on obtient l'équation du troisième degré d'inconnue  $\Delta\epsilon_{22}$  suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{(\Delta\epsilon_{22})^3}{\theta^2} \\ & + (\Delta\epsilon_{22})^2 \left[ \frac{1 + \epsilon_{11}}{\theta} + \frac{1 + \epsilon_{22}}{\theta^2} + \frac{1 + \epsilon_{33}}{\theta} \right] \\ & + \Delta\epsilon_{22} \left[ \frac{(1 + \epsilon_{11})(1 + \epsilon_{22})}{\theta} + (1 + \epsilon_{11})(1 + \epsilon_{33}) + \frac{(1 + \epsilon_{22})(1 + \epsilon_{33})}{\theta} \right] \\ & + J_t - J_{t+\Delta t} = 0 \end{aligned} \quad (4.72)$$

En supposant des pas de temps suffisamment petits pour considérer de faibles incréments de déformation, on néglige  $\Delta\epsilon_{22}^3$  pour se ramener à une équation du second degré plus simple à résoudre. Connaissant l'incrément de déformation résultant de la migration de la résine, il est alors possible de calculer la déformation totale à  $t + \Delta t$ . En utilisant l'opérateur de comportement sécant, introduit dans la section 3.3 du chapitre 3, on peut en déduire la contrainte à  $t$  et à  $t + \Delta t$  et ainsi déterminer l'incrément de pression hydrostatique comme suit :

$$\Delta p = \frac{1}{3} \text{Tr} \left( \underline{\underline{\sigma}}_{t+\Delta t} - \underline{\underline{\sigma}}_t \right) \quad (4.73)$$

On peut alors déduire le champ de pression interstitielle à  $t + \Delta t$ . Connaissant la nouvelle pression de résine, on peut déterminer le déplacement et donc la nouvelle géométrie en résolvant l'équilibre mécanique du milieu homogène équivalent au sens de Terzaghi, comme expliqué dans la section 3.5 du chapitre 3. La géométrie ainsi déterminée permet de calculer la nouvelle fraction volumique de fibre, on vérifie alors que celle-ci correspond bien à la distribution de résine initialement calculée grâce au critère suivant :

$$\sum \frac{\phi_{t+\Delta t}^{it} - \phi_{t+\Delta t}^0}{\phi_{t+\Delta t}^0} < r \quad (4.74)$$

où  $\phi_{t+\Delta t}^{it}$  est la porosité courante calculée à partir du principe de Terzaghi,  $\phi_{t+\Delta t}^0$  la porosité initiale calculée à partir du bilan de masse et  $r$  est un réel proche de 0 à fixer. Finalement, connaissant la nouvelle fraction de fibres et le champ de pression dans tout le domaine on peut en déduire la nouvelle vitesse d'écoulement de la résine ( $\underline{v}_D$ ) à l'aide de l'équation de Darcy. Cette procédure, résumée sur la figure 4.20, est réitérée jusqu'à l'équilibre mécanique ( $\underline{v}_D = \underline{0}$ ).

#### 4.6.2 Exemple d'application dans un milieu poreux simple

L'algorithme présenté ci-dessus a été implémenté dans ProFlot™. Même si aucune validation expérimentale n'a été réalisée pour l'instant et si des améliorations et dé-

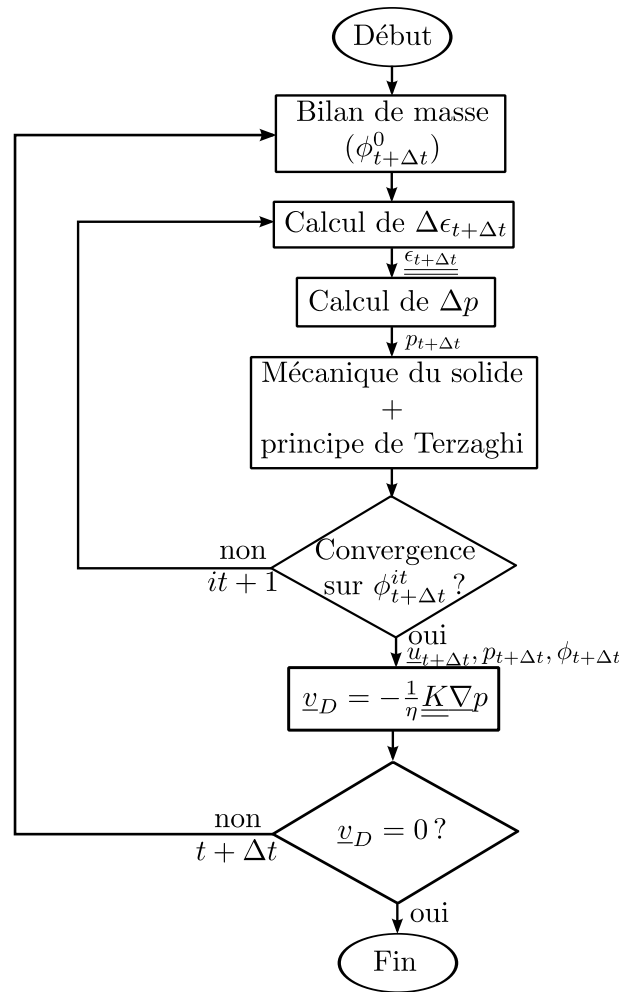


Figure 4.20 – Algorithme de calcul pour la simulation des écoulements post-infusion

veloppements doivent encore être menés, il est possible de présenter un cas simple permettant de montrer le potentiel de l’approche.

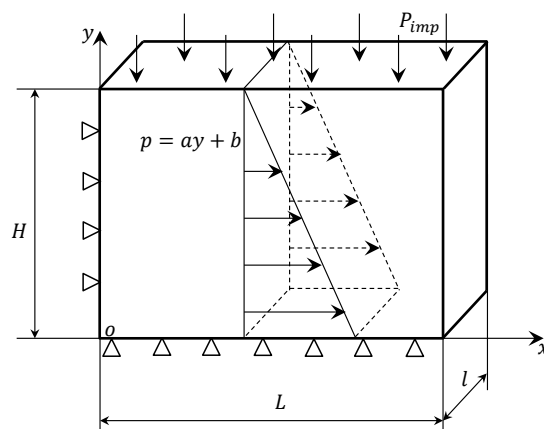


Figure 4.21 – Équilibre transitoire d’un milieu poreux : mise en donnée

Le cas présenté ici correspond à la mise à l'équilibre transitoire d'un milieu poreux soumis initialement à une pression extérieure de  $10^4 Pa$  et une pression interne linéaire  $P_{int}(y) = -5 \cdot 10^6 y + 10^5 Pa$ . Soit un milieu de hauteur  $H = 2 \cdot 10^{-2} m$  de largeur  $L = 4 \cdot 10^{-2} m$  et de profondeur  $l = 5 \cdot 10^{-3} m$ . On considère un comportement isotrope élastique linéaire de module d'Young  $E = 266 kPa$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ . Les conditions aux limites et initiales sont présentées sur la figure 4.21. À l'instant  $t = 0$ , toutes les parois deviennent imperméables et le système s'équilibre progressivement. Ce cas est similaire à celui que nous avons introduit pour la validation du couplage fluide structure dans le chapitre 3. Même si il ne correspond pas un cas réel d'infusion, il permet de mettre en évidence les phénomènes qui ont lieu au cours de la phase de post-infusion.

Les figures 4.22, 4.23 et 4.24 montrent le champ de pression, la répartition de la résine et le champ de vitesse aux instants  $t = 0$ ,  $t = 40 s$  et  $t = 200 s$ . On peut remarquer une importante déformation initiale en raison du chargement interne important ( $10^5 Pa$ ) par rapport à la pression extérieure imposée ( $10^4 Pa$ ). La résine migre petit à petit des zones riches en résine vers les zones pauvres en résine, le gradient de pression et le champ de vitesse s'orientent dans la diagonale de la pièce (voir figure 4.23) et chute au cours du temps. Au bout de 200 s, il n'y a plus d'écoulement, la résine est répartie de manière homogène, la pression s'est équilibrée et la pièce a retrouvé sa forme parallélépipédique.

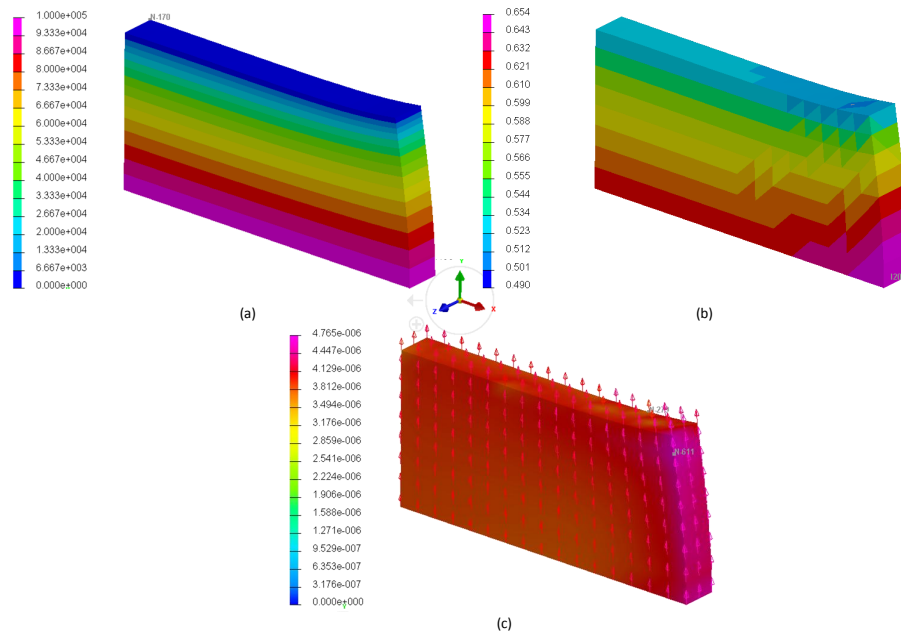


Figure 4.22 – Résultats obtenus à  $t = 0 s$  : (a) champ de pression, (b) fraction volumique de résine, (c) champ de vitesse

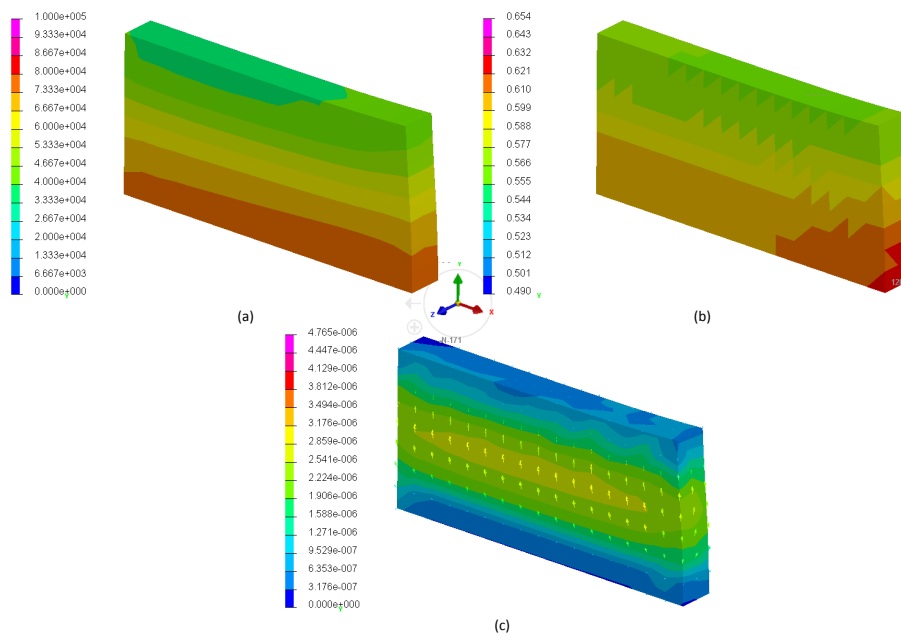


Figure 4.23 – Résultats obtenus à  $t = 40\text{ s}$  : (a) champ de pression, (b) fraction volumique de résine, (c) champ de vitesse

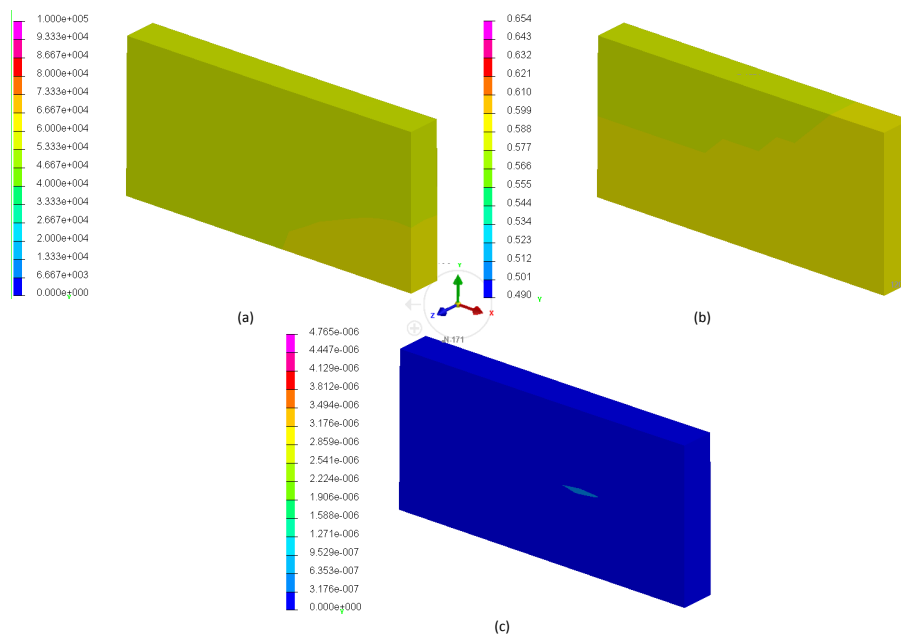


Figure 4.24 – Résultats obtenus à  $t = 200\text{ s}$  : (a) champ de pression, (b) fraction volumique de résine, (c) champ de vitesse

## 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le modèle utilisé pour la simulation des écoulements de résine ayant lieu au cours du procédé d'infusion. Il consiste à coupler un modèle de Stokes pour l'écoulement dans le drainant à un modèle de Darcy pour l'écoulement dans la préforme. Le choix du modèle de Stokes pour les écoulements rapides a été justifié vis-à-vis des problèmes numériques actuellement engendrés par les autres approches du type Brinkman ou Darcy.

Les formulations mixtes en vitesse-pression stabilisées à l'aide du mini-élément  $P_{1+}/P_1$  de Stokes et Darcy ont été validées séparément sur des cas tests analytiques en 3 dimensions. Puis, l'algorithme et les conditions de couplage entre ces deux formulations ont été détaillés et la robustesse de l'approche a été démontrée à l'aide de la méthode des solutions manufacturées.

Enfin, nous avons introduit une approche innovante pour simuler les écoulements post-infusion. Cette approche, dont le potentiel a été illustré sur un exemple, repose sur le calcul de la pression interstitielle à partir de la variation de la fraction volumique de résine. La simulation de ces écoulements, induits principalement par la réponse mécanique des préformes et non plus par une pression imposée, permettent d'envisager la simulation d'autres procédés tels que le CRTM et la compression de pré-imprégnés.

Dans le chapitre suivant une validation expérimentale, ainsi que des exemples d'application sur des cas courants de l'industrie composite sont détaillés, afin de mettre en évidence les possibilités offertes par notre modèle pour la simulation industrielle de l'infusion de résine. Enfin, à la lumière des résultats obtenus, nous concluons sur les points d'amélioration encore nécessaires et les perspectives de recherche et développement telles que les applications à d'autres procédés de fabrication composite.





---

# Validation expérimentale, applications industrielles et perspectives

## Sommaire

---

5.1	Introduction . . . . .	103
5.2	Validation Expérimentale . . . . .	104
5.3	Application Industrielle : Infusion d'une plaque renforcée par un raidisseur en « T » . . . . .	110
5.4	Perspectives de recherche et développement . . . . .	115
5.5	Conclusion . . . . .	121

---

## 5.1 Introduction

Le modèle développé et implémenté dans ProFlot au cours de ces travaux permet la simulation industrielle de l'infusion de pièces complexes en trois dimensions et de perméabilité très faible ( $10^{-15} m^2$ ). Dans cette section nous présentons dans un premier temps une validation expérimentale réalisée à partir des travaux de thèse de P. Wang[63]. Dans un second temps, un exemple d'infusion d'une pièce industrielle typique (panneau auto-raidi par un raidisseur en « T ») est présenté. L'analyse des résultats permet de mettre en évidence les avantages de l'approche développée ici ainsi que les points d'amélioration encore nécessaires du point de vu du modèle autant que des mesures physiques.

## 5.2 Validation Expérimentale

Au cours de la thèse de P. Wang [61, 62, 63, 64], une première validation expérimentale de l'approche proposée par P. Celle [12, 13, 14] a été réalisée. L'essai concernait la réalisation par le procédé LRI d'une plaque constituée d'un empilement de 24 plis  $[90_6, 0_6]_S$  de quasi-UD G1157<sup>7</sup> (Hexcel Reinforcements) et de résine RTM6 (Hexcel). La préforme de surface  $335 \times 335 \text{ mm}^2$  a une épaisseur initiale de 10 mm et un taux de fibre initiale de 40%. La figure 5.1 décrit le montage utilisé pour réaliser cette infusion.

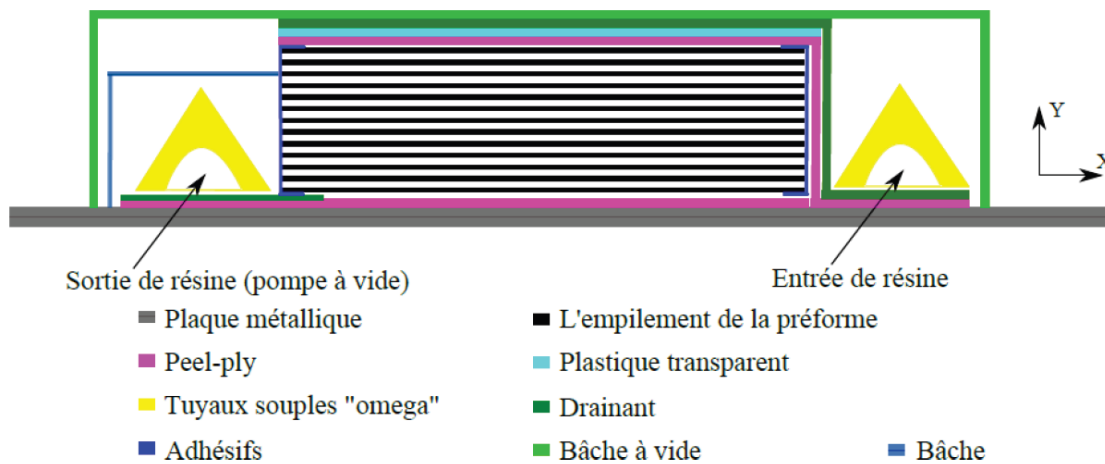


Figure 5.1 – Montage expérimental de l'essai réalisé par P. Wang [63]

On se propose de refaire la simulation et de comparer les résultats à ceux obtenus au cours de la thèse de P. Wang [63]. Cette première simulation nous permet de valider le modèle mis en place pendant cette thèse, sur un exemple simple caractérisé d'un point de vue expérimental, au niveau du matériaux autant que du procédé lui-même.

Le suivi de l'infusion a été réalisé à l'aide d'une méthode de projection de franges [63], pour mesurer la variation d'épaisseur, couplée à trois micro-thermocouples situés entre les plis 21 et 22 (figure 5.2(b)) pour détecter le passage du front de résine. La méthode de projection de franges, décrite sur la figure 5.2(a), consiste à capter les variations de forme d'un objet à partir de la lumière qu'il renvoie et notamment la corrélation de l'intensité lumineuse entre la forme initiale et déformée. Pour cela, on projette des franges de lumière sur l'objet (ici le sac à vide au dessous duquel se trouve la préforme) et on enregistre l'image à l'aide d'une camera CCD. Finalement, les images sont traitées par un logiciel qui en déduit la variation d'épaisseur ( $h(x, z)$ ). Plus de détails sur cette méthode sont donnés dans [42] et [27]. Les micro-

7. 96% en masse de fibres de carbone et 4% en masse de fibres de verre pour le maintien

thermocouples quant à eux permettent de détecter une variation de température due au passage du front de résine. En effet, la résine est infusée à  $80^{\circ}\text{C}$  alors que l'outillage et la préforme sont maintenus à  $120^{\circ}\text{C}$  à l'aide d'une plaque chauffante. Ainsi lorsque le front de résine passe sur le thermocouple, une baisse de la température est enregistrée. Afin de contrôler la température d'infusion, le moule est habituellement placé sous un couvercle permettant une isolation thermique. L'utilisation de la méthode optique nécessite de réaliser l'expérience avec couvercle ouvert, impliquant une température non homogène et non contrôlée dans la préforme. Ce gradient de température induit une variation de la viscosité modifiant la vitesse d'écoulement de la résine et donc le temps de remplissage. Deux expériences ont donc été réalisées la première, couvercle ouvert, afin de capter les variations d'épaisseur à l'aide de la méthode de projection de frange, la seconde, couvercle fermé, afin d'obtenir le temps de remplissage correspondant à une infusion en condition standard. Du point de vue expérimentale, les deux essais semblent être équivalents en terme de scénario de remplissage, seul le temps de remplissage change. Du point de vue numérique, le modèle actuel ne permettant pas la prise en compte des variations de température, on se compare à l'expérience réalisée couvercle ouvert pour les variations d'épaisseur et à l'expérience réalisée couvercle fermée pour le temps de remplissage. Cependant, des précaution doivent être prises vis-à-vis des résultats obtenus puisque nous nous comparons à deux séries de mesures réalisées dans des conditions différentes.

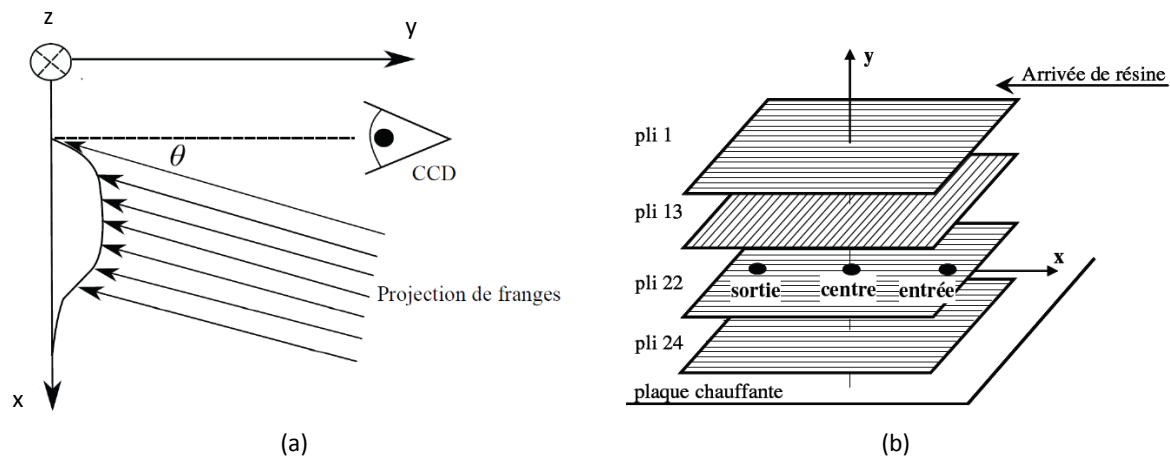


Figure 5.2 – Suivi du procédé utilisé par P. Wang [63] : (a) Principe de la méthode de projection de frange, (b) position des micro-thermocouples

Les résultats observés par P. Wang sont présentés sur la figure 5.3. Trois phases peuvent être identifiées. La première, phase A sur le figure 5.3(b), d'une durée d'en-

viron 2'40", correspond au remplissage du drainant. Ensuite, on peut remarquer que l'épaisseur reste constante pendant environ huit minutes. La résine commence donc à imprégner la préforme sans variation de volume apparente (zone B). À la fin de cette zone, après environ 600 secondes, on peut identifier une augmentation brutale de l'épaisseur d'abord aux points 2,3 et 5 (proches de l'injection et au centre de la plaque) puis aux points 1 et 4 proches de l'évent. En se référant à la figure 5.3(a), on remarquera que la variation de température, correspondant au passage du front, enregistrée par les thermocouples situés à l'entrée et au centre a lieu environ 200 secondes plus tôt (après environ 400 secondes de remplissage). Ceci laisse supposer que le gonflement correspond au moment où la résine atteint le bas de la préforme et vient en contact avec le moule. Puis à la fin de la zone C, l'épaisseur varie plus modérément, ceci correspond à la fin de l'imprégnation de la préforme. Enfin, le remplissage est considéré comme terminé lorsque la résine sort de manière continue dans l'évent après 1400 secondes.

Un deuxième essai a été réalisé couvercle fermé cette fois-ci, afin d'obtenir le temps de remplissage dans des conditions standards d'infusion. Le temps de remplissage mesuré est cette fois de 500 secondes soit 8'20".

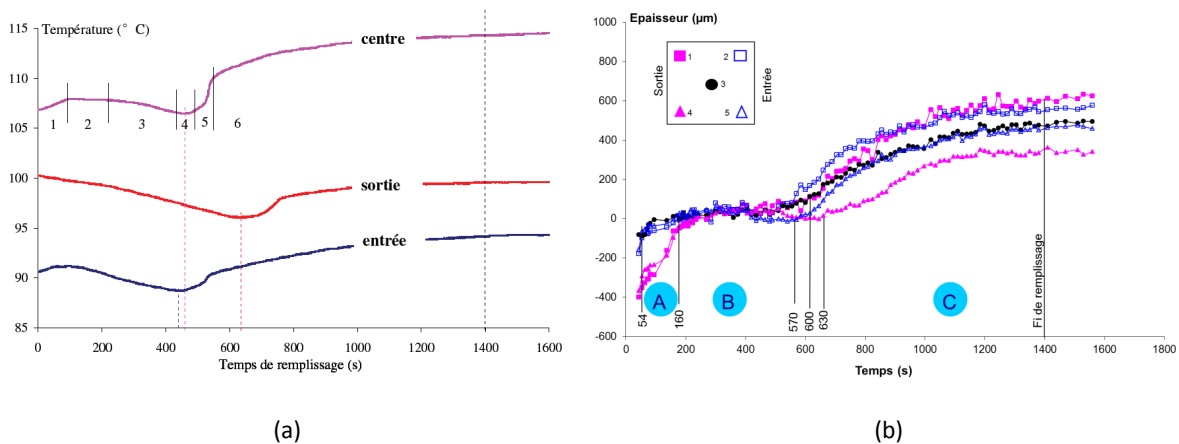


Figure 5.3 – Résultats obtenus par P. Wang lors de son essai d'infusion couvercle ouvert [63] : (a) variations de température mesurées par les trois thermocouples, (b) variations d'épaisseur mesurées par la méthode de projection de franges

Le cas précédent a été simulé à l'aide de l'approche développée dans ces travaux. Pour cela, on considère la géométrie et les conditions aux limites présentées en figure 5.4. Le drainant et le tissu d'arrachage (bleu et rose sur la figure 5.2) sont représentés par des écoulements de résine pure (Stokes) et sont considérés comme indéformables.

Les préformes sont considérées comme un milieu poreux, dont la perméabilité isotrope vaut d'après la loi de Carman-Kozeny :

$$K = 1,5625 \cdot 10^{-13} \frac{(1 - v_f)^3}{v_f^2} m^2 \quad (5.1)$$

. La préforme est déformable et son comportement isotrope transverse non-linéaire dans l'épaisseur, déjà présenté au chapitre 3, est rappelé sur la figure 5.5(a). La résine utilisée est la RTM6 développée et fournie par Hexcel. Elle a une viscosité de  $0,058 Pa.s$  à  $120^\circ C$ . Étant donné le temps d'infusion expérimental (inférieur à  $10 min$ ), on considère que la viscosité est constante au cours de l'essai (voir 5.5(b)).

Le temps total (CPU, lecture des données, écriture des résultats...) nécessaire pour réaliser la simulation est de  $5'28''$  pour un maillage comportant 900 éléments et 496 nœuds sur un des cœurs d'un processeur Intel core I5 quadri-cœurs cadencé à  $2,67 GHz$ .

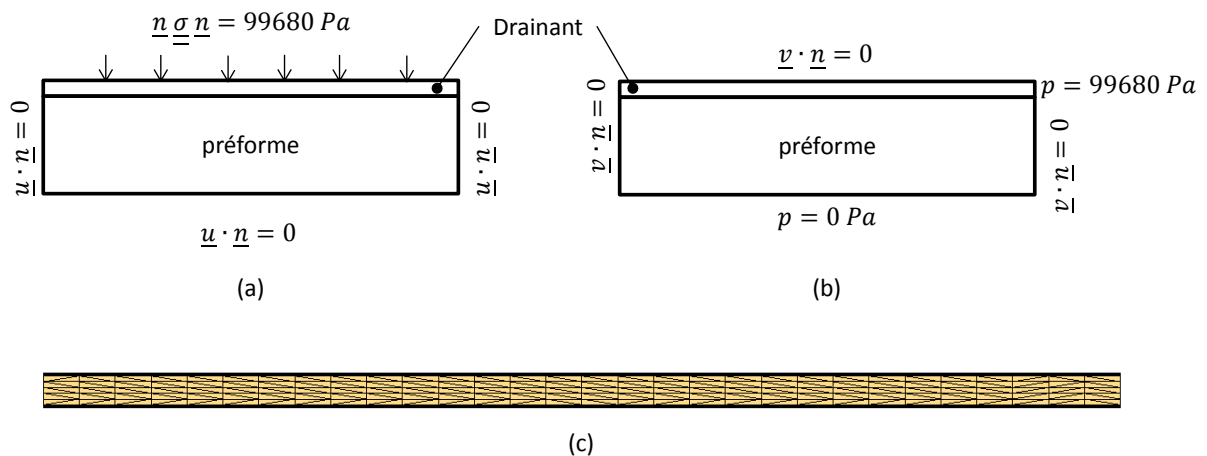


Figure 5.4 – Données de simulation pour la plaque de P. Wang : (a) conditions aux limites pour la mécanique du solide, (b) conditions aux limites pour la mécanique des fluides, (c) maillage

La figure 5.6 montre les résultats obtenus grâce à la simulation à différents instants du remplissage. On peut en déduire le scénario de remplissage décrit dans ce qui suit. La résine s'écoule préférentiellement dans le drainant et commence à imprégner la préforme (écoulement bi-dimensionnel), après  $3,5 s$ , le drainant est complètement rempli. Débute alors un écoulement transverse et la plaque commence à gonfler petit-à-petit. Finalement, l'infusion est terminée après  $507 s$ , ce qui est très proche des  $500 s$  obtenues lors de l'expérience couvercle fermé. L'épaisseur simulée après compression initiale est de  $6,2 mm$ , le gonflement obtenu en fin de remplissage est de  $645 \mu m$

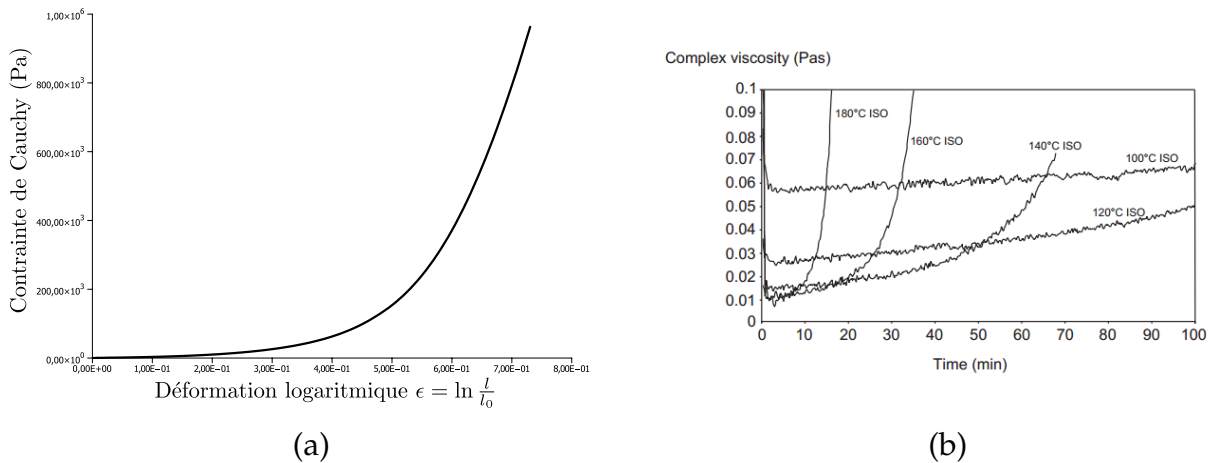


Figure 5.5 – Propriétés des matériaux utilisés pour l’essai d’infusion : (a) Loi de comportement caractérisée dans les travaux de P. Wang [63] sur une préforme de type NC2 composée de 48 plis G1157E01  $[0_6, 90_{12}, 0_6]_S$  et de dimension  $0.335 \times 0.335 \text{ m}^2$ , (b) viscosité isotherme de la résine RTM6 (Hexcel)

pour un taux volumique de fibres de 56% et une masse totale de résine injectée de 369 g. Ces valeurs sont en très bon accord avec l’expérience réalisée couvercle fermé (les variations de viscosité changent le temps de remplissage mais pas les variations d’épaisseur), l’épaisseur après compression initiale mesurée est de  $6 \pm 0,5 \text{ mm}$ , le gonflement moyen mesuré en fin de remplissage est de  $656 \mu\text{m}$  pour un taux volumique de fibres de 56% et une masse totale de résine injectée de 350 g.

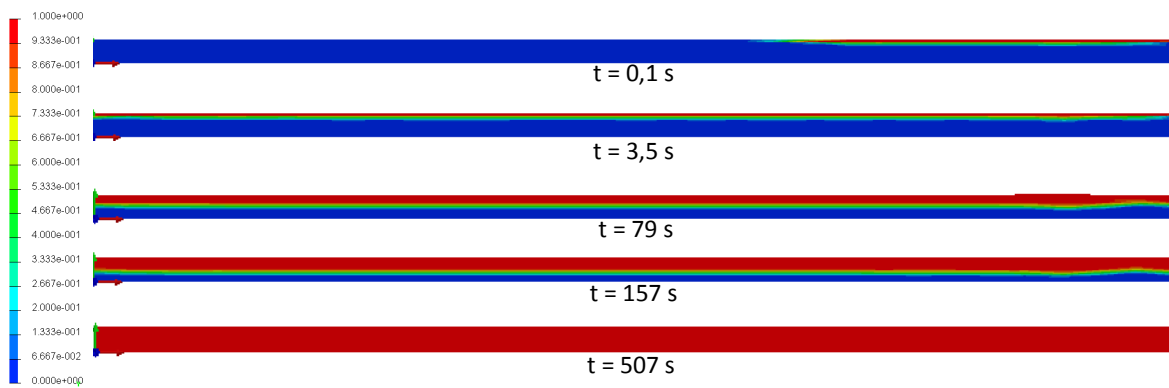


Figure 5.6 – Taux de remplissage à différents instant obtenu par la simulation sur le cas de la plaque étudiée par P. Wang

La figure 5.7 permet de comparer l’évolution de l’épaisseur simulée avec celle observée au cours de l’expérience. Comme expliqué plus haut, les moyens de mesures mise en œuvre pour suivre l’évolution de l’épaisseur nécessitaient de réaliser

l'expérience couvercle ouvert. Ainsi, la température n'a pas pu être contrôlée et par conséquent la viscosité a beaucoup varié impactant les écoulements et donc le temps de remplissage. C'est pourquoi, les courbes de la figure 5.7 ont été tracées en fonction du pourcentage de temps écoulé ( $\frac{t}{t_{final}}$ ). La comparaison permet de valider le modèle utilisé pour simuler l'évolution de l'épaisseur au cours du temps. En effet, la courbe correspondant à la simulation se trouve dans la tendance des courbes expérimentales. Cependant, les trois phases (imprégnation sans gonflement, gonflement brutal et gonflement modéré) observées expérimentalement ne sont pas clairement identifiables sur la courbe issue de la simulation. Plusieurs raisons peuvent expliquer cette différence. D'une part, on peut remarquer que la variation d'épaisseur simulée évolue par paliers nets qui ne semblent pas très réalistes. Ces artefacts numériques qui apparaissent uniquement dans le cas de la plaque, pourraient provenir de l'algorithme de remplissage qui fait évoluer le front de résine élément par élément. D'autre part, les conditions de l'infusion expérimentale ne correspondaient pas aux conditions standards utilisées pour la simulation. En effet, le couvercle étant ouvert, des variations de températures non maîtrisées et non mesurées ont eu lieu. Ceci a eu une influence sur la viscosité de la résine, ce qui a directement impacté les écoulements et donc probablement le mode d'imprégnation de la préforme.

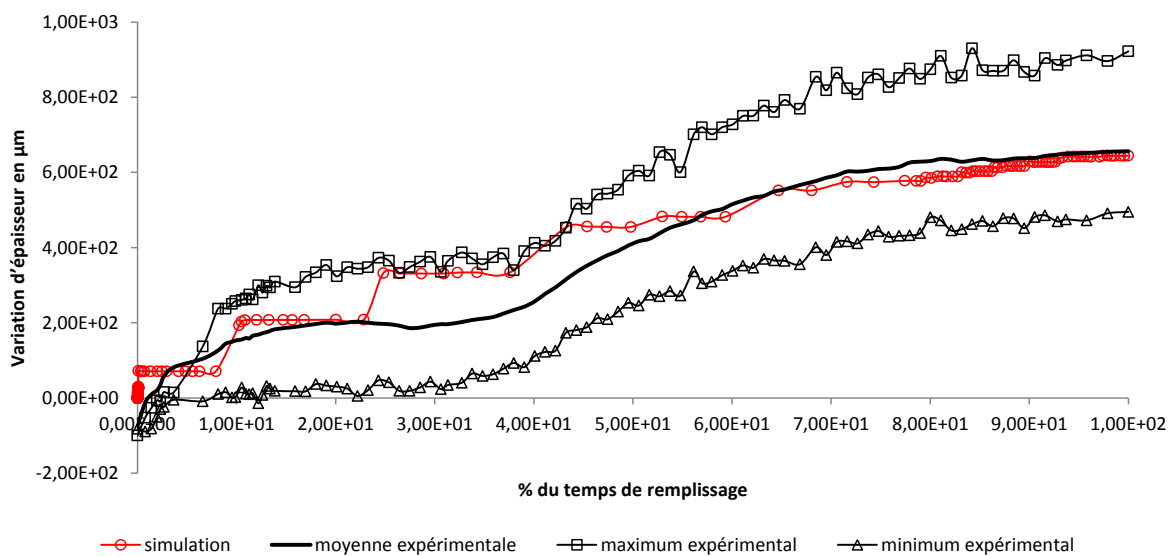


Figure 5.7 – Variation de l'épaisseur simulée au cours du remplissage dans le cas de la plaque étudié par P. Wang ( $\Delta h = f(\frac{t}{t_{final}})$ )

Même si des efforts devront encore être faits pour réaliser une validation expérimentale optimale (suivi du front de résine et de l'épaisseur tout en contrôlant les paramètres d'infusion), ces résultats permettent de montrer l'intérêt et la pertinence

de l'approche présentée dans ces travaux. En effet, le temps de remplissage et la masse de résine injectée dépendent des variations de volume de la préforme et ne peuvent donc être approchés que par un modèle couplé.

### 5.3 Application Industrielle : Infusion d'une plaque renforcée par un raidisseur en « T »

Afin de démontrer la capacité du code développé dans ces travaux à traiter des cas industriels, on se propose de réaliser une simulation complète, avec prise en compte des déformations, sur le cas d'un panneau auto-raidi par un « T » dont la géométrie a été proposée par Daher-Socata dans le cadre du projet INFUCOMP. Cette pièce est constituée d'une plaque de  $380 \times 280 \text{ mm}^2$  et de  $3 \text{ mm}$  d'épaisseur, et d'un raidisseur en « T », lui-même constitué de deux préformes en « L » épaisses de  $3 \text{ mm}$ , comme décrit sur la figure 5.8. Les conditions d'infusion sont présentées sur la figure 5.9. Le

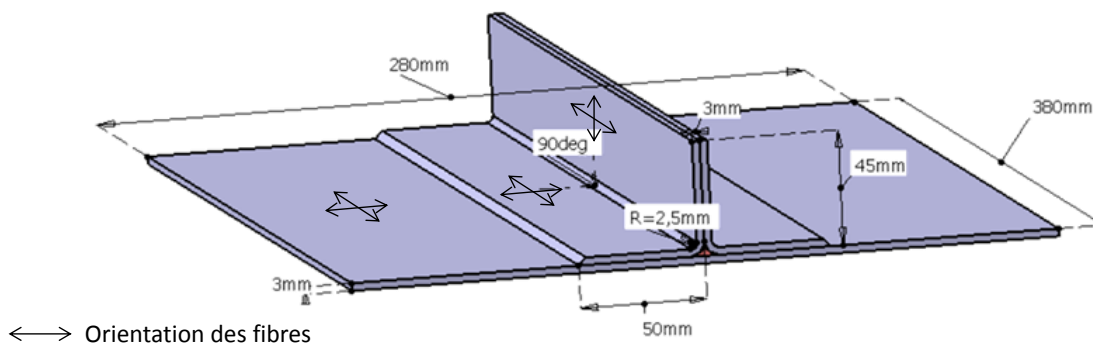


Figure 5.8 – Géométrie du panneau auto-raidi par un « T » (Daher-Socata)

drainant se trouve en contact avec le moule sous la plaque, un second drainant est positionné au-dessus du « T ». La buse d'injection de résine est située au centre de la plaque sous le moule tandis que l'évent se trouve au centre du second drainant au-dessus du « T ».

La préforme utilisée est réalisée avec le tissu carbone fourni par Hexcel Reinforcements de référence 48302 constitué de fibre de carbone T700 12k. La perméabilité orthotrope mesurée par Hexcel Reinforcements est :

$$\begin{cases} K_p = 9,76 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2 & \text{dans le plan des nappes} \\ K_t = 6,75 \cdot 10^{-13} \exp(-9,8 v_f) \text{ m}^2 & \text{dans la direction transverse} \end{cases} \quad (5.2)$$

avec  $v_f$  la fraction volumique de fibres qui permet de prendre en compte l'effet de la déformation transverse sur l'écoulement. La résine utilisée pour les infusions est la



5.3. Application Industrielle : Infusion d'une plaque renforcée par un raidisseur en « T »

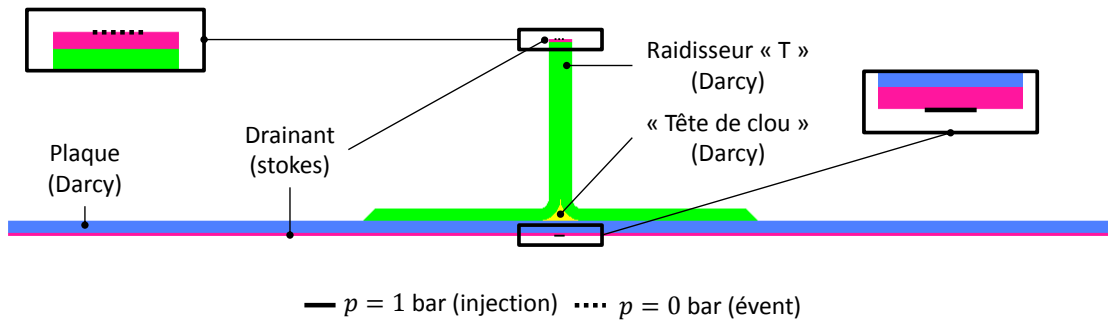


Figure 5.9 – Description des conditions d'infusion du panneau auto-raidi

RTM6 fournie par Hexcel, dont les propriétés ont déjà été présentées dans la section 5.2.

En raison des symétries du problème, on ne s'intéresse ici qu'au quart de la géométrie comme illustré sur la figure 5.10(a). Le maillage utilisé est constitué de 8 100 triangles et de 1 884 nœuds. Le drainant inférieur est représenté par un écoulement de résine pure (zone de Stokes), d'épaisseur 1 mm, il est considéré comme indéformable. La préforme est considérée comme un milieu homogène équivalent orthotrope (zone de Darcy), dont la loi de comportement mécanique n'a pas été mesurée. Ici, pour l'exemple nous considèrerons qu'elle obéit au même comportement que celui mesuré par P. Wang [63]. Cependant, nous avons conscience qu'un empilement de quasi-UD non préformé est bien plus souple qu'une préforme classique, à base de tissus, maintenue en forme par un poudrage epoxy. Par conséquent, les déformations obtenus

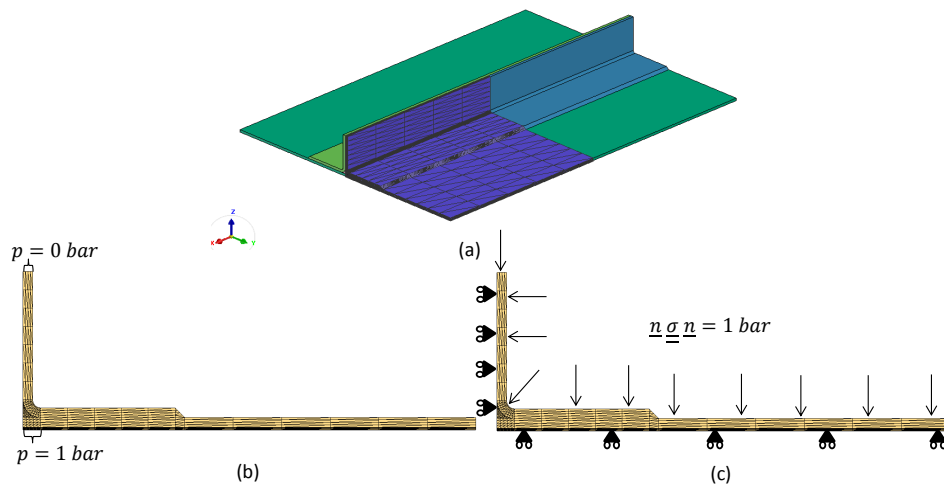


Figure 5.10 – Infusion d'une plaque renforcée par un raidisseur en « T » : (a) géométrie du problème avec en bleu le maillage utilisé (quart du problème), (b) conditions aux limites fluide, (c) conditions aux limites solide

sont plus grandes que celles habituellement observées sur ce genre de cas. La buse d'injection, située au milieu du drainant inférieure (point d'injection central), est représentée par une condition limite en pression de 1 *bar* et l'évent par une condition limite en pression de 0 *bar*. Enfin, les autres conditions de bords correspondent à des parois imperméables ( $\underline{v} \cdot \underline{n} = 0$ ). Les conditions aux limites sont résumées sur les figures 5.10(b) et 5.10(c).

Les figures 5.11 et 5.12 montrent le taux de remplissage aux instants  $t = 1\text{ s}$ ,  $t = 69\text{ s}$ ,  $t = 273\text{ s}$  et  $t = 550\text{ s}$ . Les résultats obtenus traduisent un remplissage rapide du drainant (1 s), puis une infusion transverse de la plaque. Lorsque la résine pénètre dans la préforme, on observe un début de gonflement de la plaque (voir figure 5.13). Après environ une minute de remplissage, la plaque seule est complètement remplie, la pression s'équilibre dans ses extrémités et on peut observer un retour à l'épaisseur initiale (voir figure 5.12 à  $t = 69\text{ s}$ ). Ensuite, la résine commence à migrer dans la base du « T », d'abord dans la direction transverse, puis, lorsqu'elle arrive au niveau de la courbure, dans le plan des nappes (voir figure 5.11 à  $t = 273\text{ s}$ ). Enfin, la résine termine d'imprégner la partie supérieure du T et le remplissage prend fin au bout de 549 secondes (voir figure 5.11 à  $t = 549\text{ s}$ ). On peut remarquer une mauvaise imprégnation au niveau de la base du « T », résultat observé sur certaines infusions réalisées au cours du projet INFUCOMP.

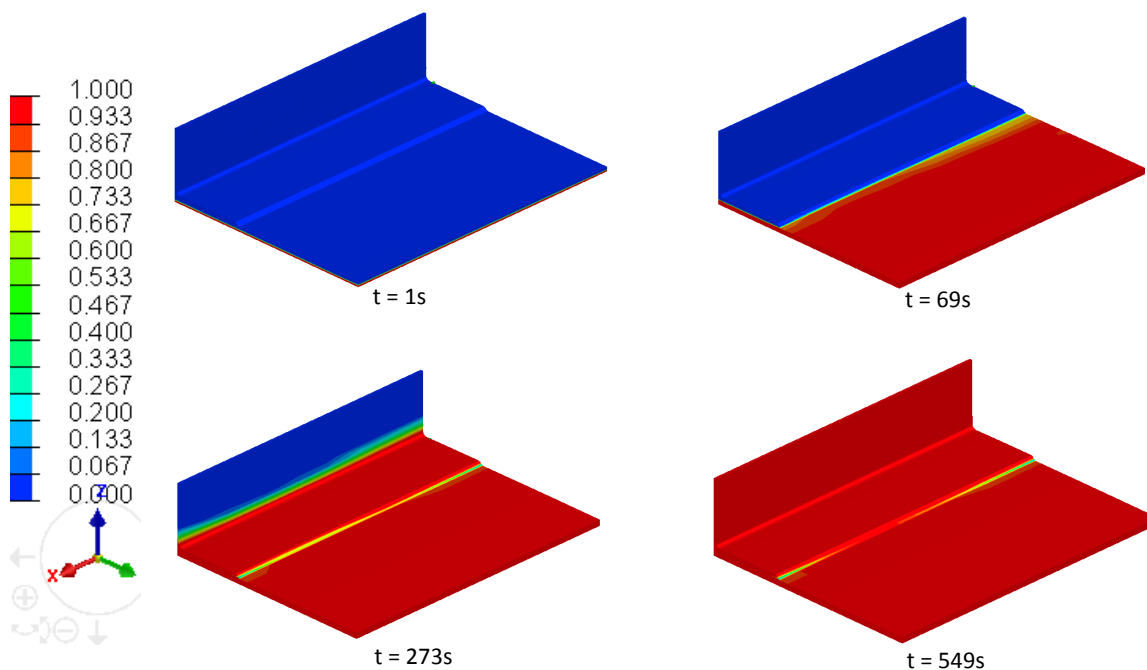


Figure 5.11 – Taux de remplissage obtenu pour le cas de l'infusion d'une plaque renforcée par un raidisseur en « T »

### 5.3. Application Industrielle : Infusion d'une plaque renforcée par un raidisseur en « T »

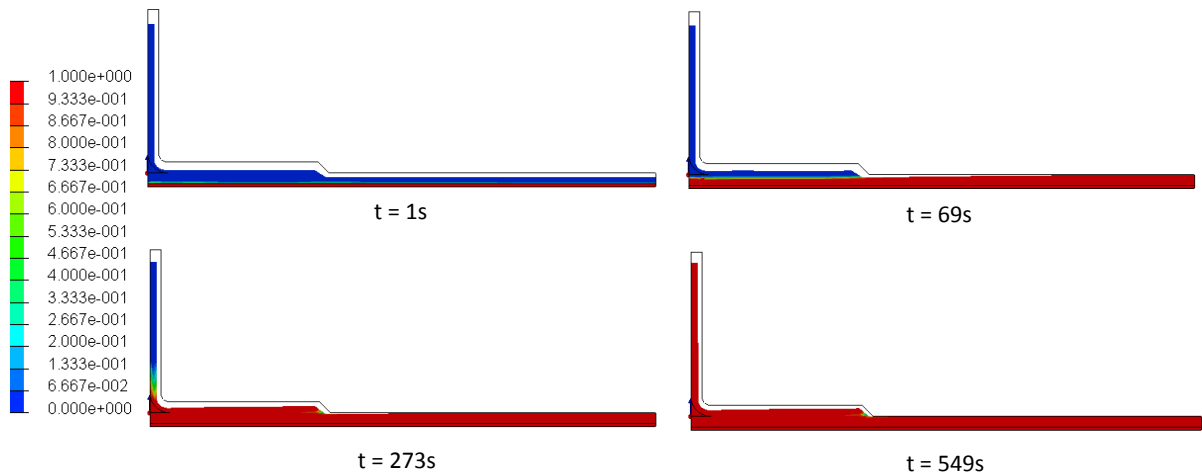


Figure 5.12 – Taux de remplissage vu de côté avec la géométrie initiale tracée en noire pour le cas de l'infusion d'une plaque renforcée par un raidisseur en « T »

La figure 5.13 montre la variation de l'épaisseur au cours du remplissage. On peut remarquer que les zones de la pièce où le remplissage se fait dans le plan des nappes (courbure et partie supérieure du « T ») présentent un gonflement linéaire au cours du temps, tandis que la plaque et la base du « T », qui sont imprégnées transversalement, présentent trois phases distinctes. En effet, comme dans le cas de la plaque étudiée dans la section 5.2, on peut observer une première phase de remplissage avec un faible gonflement. Puis lorsque la zone est complètement saturée, une augmentation brutale de l'épaisseur survient. Finalement, un gonflement linéaire et plus modéré à lieu pendant la fin de l'infusion.

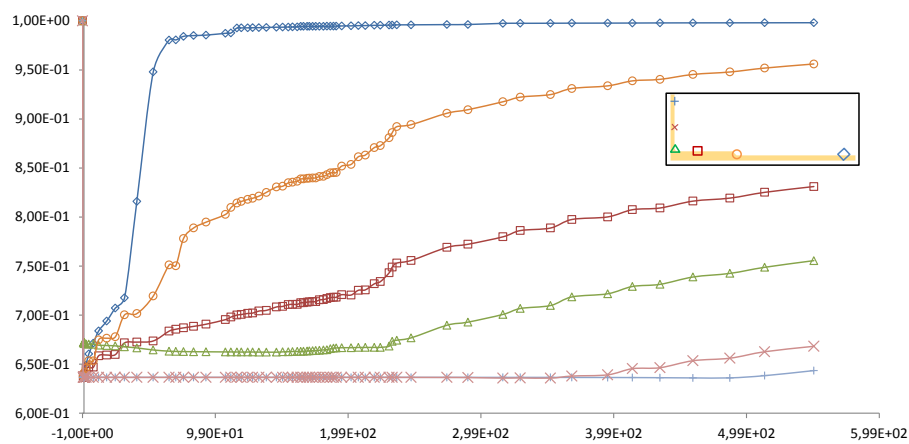


Figure 5.13 – Variation de l'épaisseur au cours du remplissage cas de l'infusion d'une plaque renforcée par un raidisseur en « T » ( $\frac{h}{h_0}$ )

Les résultats expérimentaux des essais d'infusion réalisés par Daher-Socata dans

le cadre du projet INFUCOMP n'ont pas pu être obtenus dans les temps et ne sont donc pas présentés dans cette version du manuscrit.

## 5.4 Perspectives de recherche et développement

### 5.4.1 Points d'amélioration pour la simulation de l'infusion

Les applications présentées dans les sections précédentes ont permis de démontrer la capacité de l'approche développée dans ces travaux à décrire les phénomènes complexes ayant lieu au cours de la fabrication d'une pièce par infusion de résine. Cependant ce modèle, bien que très complet, nécessite encore des développements pour répondre pleinement aux besoins des industriels en matière de simulation de l'infusion, au niveau de la représentation du procédé (« post-infusion », thermique...), comme au niveau de la prise en compte des mécanismes locaux contrôlant les écoulements et donc la qualité de la pièce élaborée.

#### 5.4.1.1 Simulation des écoulements « post-infusion »

La figure 5.14 montre le champ de pression et la fraction volumique de résine en fin d'infusion obtenus grâce à la simulation dans le cas de la plaque de P. Wang (5.14(a)) et du « T » (5.14(b)). Dans les deux cas, on peut constater un gradient de pression non négligeable et une répartition de la résine non-homogène qui vont induire des écoulements résiduels après la fermeture de l'injection et de l'évent.

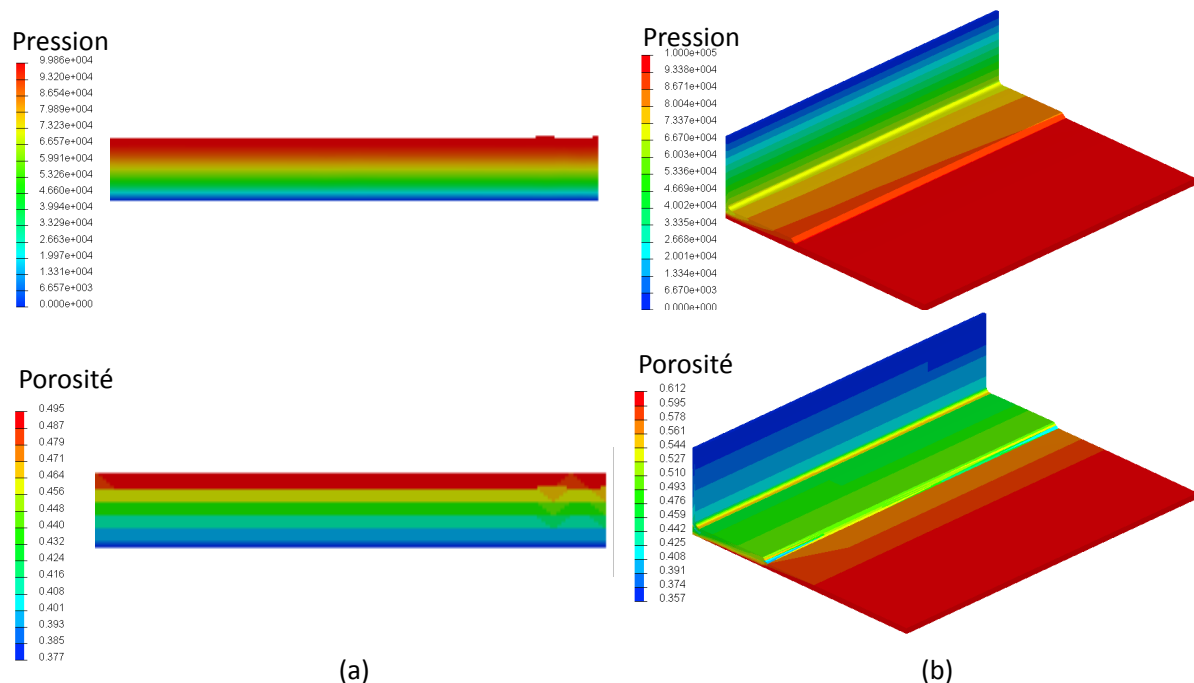


Figure 5.14 – Champ de pression et fraction volumique de résine obtenus grâce à la simulation : (a) cas de la plaque de P. Wang, (b) cas du « T »

L'approche proposée pour la simulation des écoulements « post-infusion » doit être complétée et développée pour être applicable aux cas industriels. Parallèlement, la simulation de ces écoulements peut être appréhendée d'une manière plus rigoureuse et plus générale en utilisant la même procédure de couplage fluide-solide que celle proposée pour la phase de remplissage. L'idée est d'introduire un déséquilibre sur la porosité à partir du bilan de masse déjà présenté dans la première approche :

$$\phi_{t+\Delta t} \left( V_t^e + \Delta t \sum_{i=1}^{Nb} \underline{v}_{D_i} \cdot \underline{n}_i S_i \right) = \phi_t V_t^e + \Delta t \sum_{i=1}^{Nb} \underline{v}_{D_i} \cdot \underline{n}_i S_i \quad (5.3)$$

Puis, plutôt que de chercher l'incrément de déformation et l'incrément de pression associés à la variation de porosité à travers des hypothèses très fortes sur le comportement de la préforme (incrément de déformation hydrostatique), on va chercher à résoudre directement l'équilibre mécanique de l'ensemble résine fibres, comme pour la phase de remplissage. Cependant, lors de la phase de « post-infusion », l'évent et l'injection étant fermé, il n'y a plus de condition de pression et c'est la réponse mécanique des préformes qui contrôle les écoulements. Il est donc nécessaire de prendre en compte la variation de la porosité dans la conservation de la masse du fluide, ainsi le système de Darcy devient :

$$\begin{cases} \underline{v} = -\frac{1}{\eta} \underline{K} (\nabla p - \rho \underline{g}) \\ \text{div} \underline{v} = -\frac{1}{1-\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{cases} \quad (5.4)$$

Une fois le champ de pression et le champ de vitesse connus, on résout le problème mécanique au sens de Terzaghi pour en déduire la porosité selon la même procédure que pour la phase de remplissage (voir chapitre 3). On peut ensuite réinjecter la porosité dans l'équation 5.4, finalement on boucle jusqu'à satisfaction du critère de convergence suivant :

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left( \frac{\|u_j^{i+1} - u_j^i\|}{\|u_j^{i+1}\|} + \frac{\|v_j^{i+1} - v_j^i\|}{\|v_j^{i+1}\|} + \frac{\|p_j^{i+1} - p_j^i\|}{\|p_j^{i+1}\|} \right) < \epsilon \quad (5.5)$$

où  $u_j^{i+1}$ ,  $v_j^{i+1}$  et  $p_j^{i+1}$  sont respectivement les valeurs nodales du déplacement, de la vitesse et de la pression au nœud  $j$  à l'itération courante,  $N$  le nombre de nœuds dans le domaine et  $\epsilon$  un scalaire fixé par l'utilisateur. Dans la pratique, on fixe  $\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ . Une fois la convergence atteinte, on passe au pas de temps suivant, la procédure est réitérée jusqu'à la fin des écoulements ( $\|\underline{v}\| \approx 0$ ). Cette autre approche proposée pour la simulation des écoulements « post-infusion » est résumée sur la figure 5.15.

Cette approche a l'avantage de dépendre uniquement de la physique du problème, et par conséquent, nous semble plus satisfaisante. Cependant, l'implémentation de cet

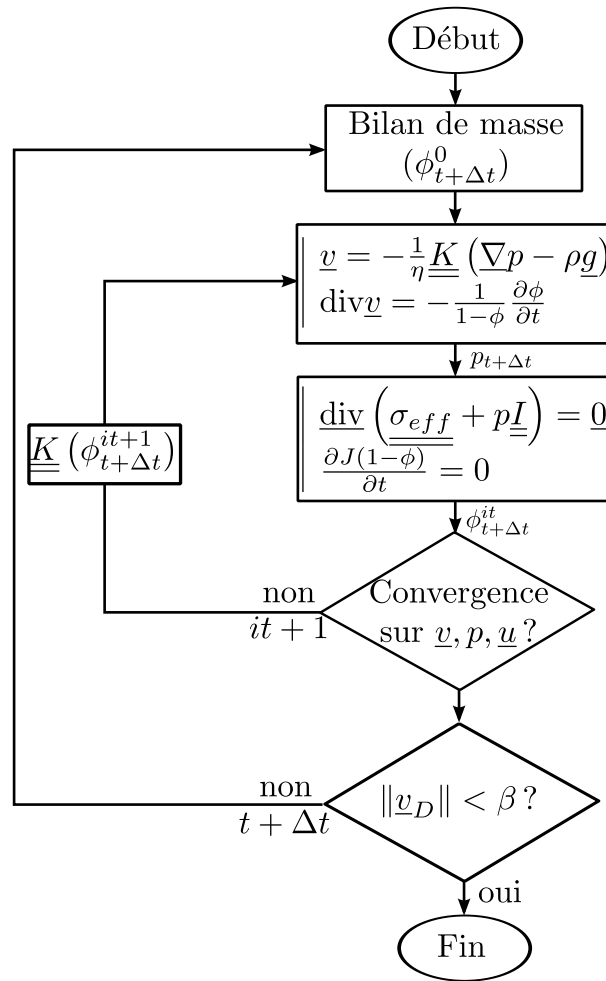


Figure 5.15 – Nouvel algorithme pour simulation des écoulements « post-infusion »

algorithme nécessite quelques précautions, en particulier concernant la gestion de la pression. En effet, la loi de Darcy relie la vitesse au gradient de pression, or si la pression n'est fixée en aucun point du domaine de calcul, celle-ci n'est connue qu'à une constante près. Dans le cadre de ces travaux, des essais avec cet algorithme ont été menés mais aucun résultat satisfaisant n'a pu être obtenu. Ainsi, une réflexion plus approfondie concernant la simulation des écoulements « post-infusion » devra être menée pour aboutir sur une solution robuste.

#### 5.4.1.2 Autres perspectives pour la simulation de l'infusion

Dans ces travaux nous nous sommes intéressés au remplissage isotherme d'une préforme sous un outil flexible (la bêche à vide). Cependant, comme décrit lors des validations expérimentales, les infusions ont rarement lieu dans des conditions isothermes. Les températures de la résine et de l'outillage étant différentes, des échanges

thermiques ont lieu modifiant la viscosité de la résine et donc les écoulements. De plus, pour des pièces de très grande taille, le temps d'infusion peut atteindre plusieurs heures impliquant un éventuel début de gélification de la résine qui aura également des conséquences sur la viscosité de la résine. Ainsi, il est nécessaire de développer un couplage thermo-physico-chimique, afin de prendre en compte l'évolution des propriétés de la résine en fonction de la température et du degré de cuisson. En première approximation, un couplage faible devrait permettre d'appréhender la plupart des cas. Cependant, l'influence de paramètres, tels que la proportion de fibre et de résine (taux volumique de résine), la saturation des pores ou les variations de volume du domaine, devra être étudiée pour conclure sur l'intérêt de passer à un couplage fort. En particulier, une analyse du gain en précision sur les résultats vis-à-vis du surcoût de temps et puissance de calcul devra être menée.

Un autre point important pour les fabricants de pièces composites est la formation de bulles au cours de l'infusion. En effet, dans l'industrie aéronautique, on considère généralement qu'une pièce est bonne lorsqu'elle présente un taux de porosité (ici le terme porosité désigne des défauts d'imprégnation) inférieure à 2,5%. Les porosités peuvent se former à différentes échelles. D'une part, les défauts d'imprégnation macroscopiques dus à des refermetures de front ou des pertes de charges importantes sont déjà représentés par notre modèle. Par contre, les défauts d'imprégnations à l'échelle des nappes et des mèches généralement liés au phénomène de capillarité ne peuvent pas être représentés en l'état avec notre modèle. Ainsi, une analyse approfondie des mécanismes de formations et de transports de ces porosités devra être menée afin de dégager des critères permettant d'obtenir le taux de porosité final d'une pièce à partir d'un modèle macroscopique. Des travaux sont actuellement en cours à l'école des Mines de Saint-Etienne pour développer ce genre de modèle dans ZéBuLoN<sup>8</sup>, un code de recherche (Thèse M. Blais, 2012-2015; et une thèse prévue sur les éco-composites, 2013-2016).

#### 5.4.2 Vers la simulation d'autres procédés

Le modèle présenté dans ces travaux repose sur une approche générique au plus près de la physique évitant ainsi de passer par des hypothèses fortes propres aux procédés d'infusion. De plus, une attention particulière a été prêtée pour réaliser un code très modulaire. Tout ceci permet aujourd'hui d'envisager la simulation d'autres

---

8. Code de simulation par éléments finis modulaire développé par les écoles des Mines de Paris et de Saint-Etienne, l'ONERA et la société Northwest Numerics and Modelling company (Seattle, USA). En particulier la partie concernant la mécanique des fluides et le couplage fluide / milieux poreux est développée par le centre SMS de l'École des Mines de Saint-Étienne



procédés de mise en œuvre des matériaux composites.

#### 5.4.2.1 Compression de pré-imprégnés

Comme décrit dans le chapitre 1 et rappelé sur la figure 5.16, les procédés de mise en œuvre des matériaux composites par voie sèche consistent à empiler plusieurs plis déjà imprégnés de résine dont la réticulation a été stoppée à l'aide d'agents chimiques et par une conservation à très basse température ( $-18^{\circ}\text{C}$ ). Cet empilement subit ensuite un cycle de pression et température (sous autoclave), au cours duquel la résine se liquéfie avant de réticuler pour consolider l'ensemble et former la pièce finie. Ce genre de procédés est de plus en plus développé pour des résines thermoplastiques que ce soit pour des raisons de propriétés mécaniques (résistance aux chocs) ou de coûts et cadences de production. Dans ce cas, la montée en température permet de liquéfier la résine qui va alors s'écouler sous l'action de la pression et de la déformation des nappes. Lorsque la résine et les fibres sont réparties de manière homogène, on fait redescendre la température pour obtenir la pièce finie, solide à température ambiante.

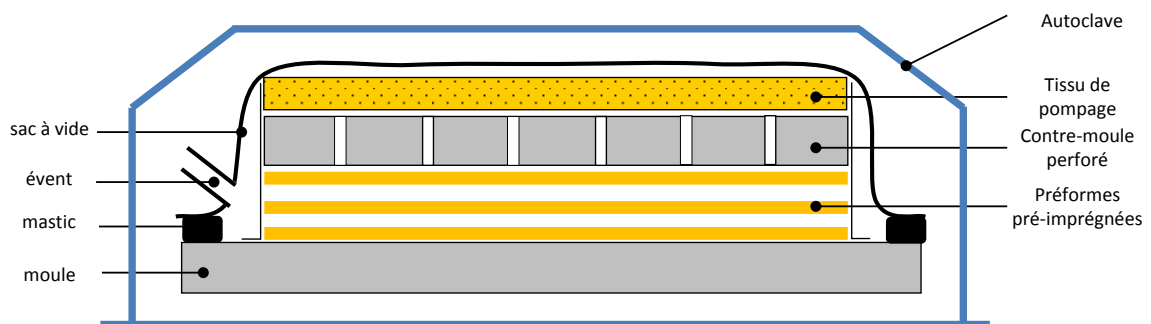


Figure 5.16 – Principe de la mise en œuvre de pré-imprégnés sous autoclave

Quelque soit le type de résine utilisé (thermodurcissable ou thermoplastique), la pression mécanique appliquée sur le système se distribue entre les fibres et la résine et induit des écoulements non-isothermes. Ces écoulements, de part leur origine, sont très similaires à ceux rencontrés au cours de la phase de « post-infusion ». Ainsi, moyennant quelques développements comme la distribution de la contrainte et le couplage thermo-physico-chimique, l'approche proposée à la fin du chapitre 4 est applicable à la simulation des écoulements ayant lieu au cours de la compression de pré-imprégnés.

### 5.4.2.2 Compression Resin Transfer Molding (C-RTM)

Récemment, avec l'arrivée des matériaux composites dans l'industrie automobile, des nouveaux procédés, permettant des remplissages plus rapides et une meilleure maîtrise de la quantité de résine injectée, ont été proposés. Parmi eux, le « compression resin transfer molding » (C-RTM) semble s'imposer comme l'une des solutions de choix pour la future fabrication en série des pièces destinées à l'automobile. Ce procédé (voir figure 5.17) consiste à utiliser un moule rigide comportant une partie mobile. Un espace de quelques millimètres est laissé entre la partie mobile du moule et la préforme. On injecte ensuite le volume de résine nécessaire à la fabrication de la pièce. Finalement, on referme le moule jusqu'à l'épaisseur voulue, la résine est alors forcée à imprégner le réseau de fibres. Une fois l'imprégnation terminée la pièce est cuite pour obtenir la pièce finie.

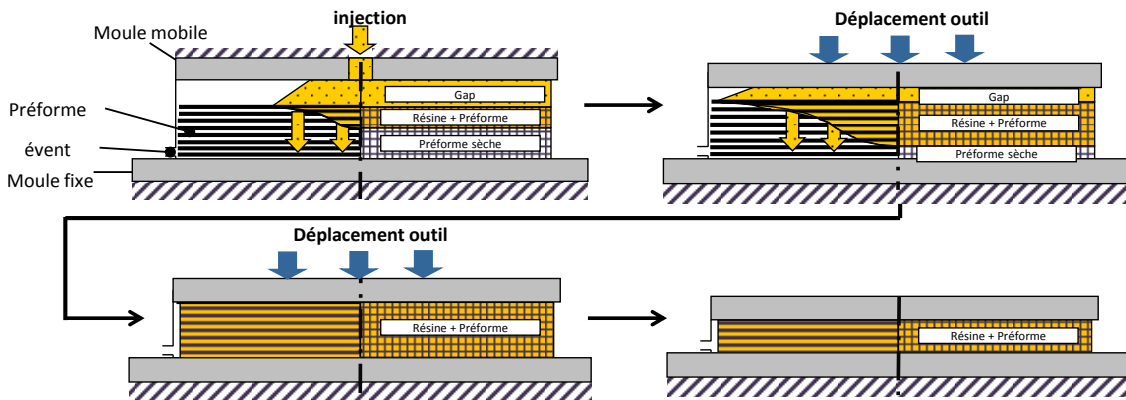


Figure 5.17 – Principe du « compression resin transfer molding » (C-RTM)

La simulation de ce procédé est également envisageable à partir des différents modules développés dans ces travaux. Cependant, il y a plusieurs points qui peuvent encore poser problème. D'une part la gestion de la zone de résine pure qui disparaît à mesure que le fluide pénètre dans la préforme n'est pas quelque chose de simple avec les méthodes éléments finis classiques. On peut ainsi imaginer utiliser une méthode *level-set*, cependant le coût associé à un éventuel remaillage sur les interfaces mobiles à chaque pas de temps n'est pas négligeable. D'autre part, la problématique de contact (en terme de mécanique du solide) entre la zone purement fluide et la préforme puis entre le moule et la préforme n'est actuellement pas gérée dans notre code. Il faudra donc trouver une méthode permettant de calculer la contrainte dans le fluide à partir du déplacement du moule puis permettant de transmettre cette contrainte à la préforme. Ainsi, si toutes les briques sont là pour appréhender ce genre de procédés, une réflexion doit encore être menée pour proposer un algorithme de résolution du

problème.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre final, nous avons présenté dans un premier temps une validation expérimentale sur le cas simple d'une plaque étudiée dans les travaux de P. Wang. Cette étude a permis de mettre en évidence les points forts de notre approche, tels que la prise en compte des déformations sans laquelle les temps de remplissage et la géométrie finale de la pièce ne peuvent pas être approchés. Dans un second temps, le cas de l'infusion d'un panneau renforcé par un raidisseur en « T » a été présenté. Ce cas a permis de mettre en évidence la capacité du code à traiter, en trois dimensions, des cas industriels complexes comportant des courbures.

Finalement, pour complètement satisfaire les besoins en matière de simulation plusieurs points d'amélioration sont nécessaires. Ainsi, l'approche proposée pour la simulation des écoulements « post-infusion » doit être améliorée pour permettre son application à des cas réels. De plus sur la base de cette approche la simulation d'autres procédés pourra être envisagée. Enfin, la prise en compte de phénomènes physiques supplémentaires, tels que la thermique, la physico-chimie de la résine et la formation des micro-porosités, permettra d'obtenir un code complet capable d'appréhender tous les procédés de fabrication de pièces composites.



---

## Conclusion générale

Les procédés de fabrication de pièces composites par infusion de résine, bien que très prometteurs, peinent à se développer pour la fabrication de pièces de structures. L'une des raisons principales est la mauvaise maîtrise des propriétés finales de la pièce (tolérances géométriques, taux de fibres...). En effet, la souplesse du sac à vide ne permet pas de maintenir une épaisseur constante au cours du procédé. Ces variations d'épaisseur jouent sur la qualité dimensionnelle finale de la pièce bien sûr, mais aussi sur les écoulements et donc, sur le temps et la qualité d'imprégnation des fibres. Les difficultés et les coûts associés à l'optimisation expérimentale de ces procédés incitent à développer des outils de simulations.

L'objectif de cette thèse était le développement et la validation d'un outil complet pour la simulation industrielle des procédés d'infusion. Pour cela, nous avons généralisé le modèle initialement proposé par P. Celle [12] afin de traiter des cas industriels complexes en trois dimensions et nous l'avons étendu à la simulation des écoulements « post-infusion ». Le modèle développé consiste en un découpage du domaine de calcul en trois zones (drainant, préforme humide, préforme sèche) et du procédé en trois phases (compression initiale, remplissage, « post-infusion »).

La phase de compression initiale correspond à la mise sous vide du système. Au cours de cette phase, la pression atmosphérique s'applique sur la préforme impliquant la redistribution des déformations sous l'action des forces suiveuses. Les contraintes et déformations ainsi générées sont à l'origine des variations d'épaisseur et de perméabilité observées lors de la phase d'infusion. Ce phénomène est modélisé par une approche macroscopique, dans laquelle la préforme est représentée par un milieu poreux homogène équivalent dont la loi de comportement, mesurée expérimentalement, intègre les effets des petites échelles (comportement des fibres, contact entre les fibres...). Dans certains cas, la souplesse importante de la préforme peut induire des déformations importantes du milieu. Une formulation lagrangienne réactualisée à chaque itération permettant de prendre en compte les grandes déformations a donc été développée. Cette formulation a ensuite été validée par comparaison au code de calcul commercial Abaqus™. L'évolution du taux de fibres est calculée par une ap-

proche lagrangienne basée sur la conservation de la masse de la phase solide (les fibres). Cette approche généralisée permet de capter des phénomènes non-accessibles avec les approches empiriques classiques, tels que la répartition non homogène des fibres dans certaines zones des préformes comme les courbures. Le comportement classique des préformes fibreuses étant isotrope transverse, les contraintes et opérateurs de comportements sont calculés à partir d'une loi expérimentale dans le repère matériaux (local aux éléments) avant d'être exprimés dans le repère général de l'étude. La prise en compte du comportement des préformes saturées de résine repose le principe de Terzaghi. Enfin, la pertinence de cette approche a été illustrée sur le cas d'un panneau renforcé par un raidisseur en  $\Omega$ , pièce composite classique dans l'industrie.

Les phases de remplissage et de « post-infusion » impliquent des écoulements complexes dans un milieu poreux très faiblement perméable soumis à de grandes déformations. Ce contexte très sévère, lorsque l'on considère les paramètres physiques réels des infusions (drainants fins, faibles perméabilités, géométries complexes...), nécessitent des précautions dans la mise en œuvre des méthodes numériques usuelles. Ainsi, comme initialement proposé par P. Celle [12], on se propose de coupler l'équation de Stokes, qui régit les zones d'écoulement préférentiel (drainant ou résine pure) à l'équation de Darcy, qui régit les écoulements dans la préforme. Pour cela, une formulation en vitesse-pression stabilisée par le mini-élément  $P_{1+}/P_1$  est adoptée pour les deux problèmes (Stokes et Darcy). Le couplage, quant à lui, est réalisé par une approche itérative en imposant des conditions d'interfaces (conservation de la masse, continuité de la contrainte et Beavers-Joseph-Saffman). Ainsi, la vitesse normale prise dans la zone de Darcy est imposée par une méthode de pénalité dans les équations de Stokes et la pression hydrostatique prise dans la zone de Stokes est imposée dans les équations de Darcy. Des problèmes de stabilisation et d'imposition des conditions par pénalité ont été mis en évidence et traités pour des perméabilités faibles. Ainsi, nous en avons déduit un choix pour la fonction bulle et un critère pour dimensionner le coefficient de pénalité permettant de valider le couplage jusqu'à des perméabilités de l'ordre de  $10^{-15} m^2$ . Finalement, une approche innovante pour la simulation des écoulements « post-infusion » a été proposée. Cette approche donne des premiers résultats prometteurs mais nécessite encore des développements pour être applicable aux cas réels d'infusion.

Dans le dernier chapitre, nous avons présenté une validation expérimentale sur le cas d'une plaque. Les résultats numériques obtenus sont en excellent accord avec les observations faites par P. Wang[63] lors de son étude expérimentale. Même si des efforts doivent encore être réalisés expérimentalement pour obtenir toutes les informations nécessaires à la validation du modèle dans des conditions standard d'infusion,

---

ces résultats sont très encourageant et démontrent la pertinence et l'intérêt de l'approche développée ici. La simulation tridimensionnelle de l'infusion d'un panneau auto-raidi par un « T » avec prise en compte des déformations a été présentée. Ce cas typique de l'industrie, simulé pour l'une des premières fois à notre connaissance, a mis en évidence le potentiel de cette approche pour une utilisation en bureau d'étude dans les phases de conception.

Des pistes de recherches pour améliorer ce modèle à court terme et donc s'approcher encore plus de la réalité physique des procédés d'infusion ont été introduites. Ainsi, il reste encore un point épineux à traiter, qui concerne le couplage entre plusieurs écoulements de Darcy ayant de fortes différences de perméabilité. En effet, avec l'approche actuelle, des oscillations sur la vitesse sont observées autour des interfaces lorsque la perméabilité varie beaucoup. Or cette stabilisation est nécessaire pour pouvoir gérer des nappes de natures très différentes au sein d'une même préforme. L'approche proposée pour la simulation des écoulements « post-infusion » doit être développée pour permettre son utilisation sur des cas industriels. La simulation de cette phase est primordiale à deux égards. D'une part, elle est importante pour la qualité finale de la pièce infusée. Ainsi, les industriels sont demandeurs d'outils leur permettant de mieux comprendre ce qui se passe après la fermeture de l'injection. D'autre part, les mécanismes d'écoulement mis en jeu dans cette phase sont similaires à ceux rencontrés dans d'autres procédés tels que le C-RTM et la compression de plis pré-imprégnés. Or le C-RTM, qui permet d'envisager des temps de cycle plus courts, intéressent de plus en plus les industriels notamment pour les applications automobiles. Le couplage de ce modèle avec la thermo-chimie de la résine pour prendre en compte les effets de la température et du degré de réticulation sur les écoulements au cours des phases de remplissage, « post-infusion » et cuisson est un point clef pour élargir encore les capacités de cette approche.

On peut finalement conclure de manière plus générale sur les moyens à mettre en œuvre pour mieux appréhender les procédés de fabrication des pièces composites. Ainsi, il apparaît nécessaire de faire progresser en parallèle les modèles complets et les moyens expérimentaux. En effet, les seconds permettent de construire et de valider les premiers, tandis que les premiers donnent accès à des informations souvent inaccessibles jusqu'alors et ouvrent de nouvelles voies de recherches. À titre d'exemple, comme déjà expliqué, les modèles d'écoulements actuels ne suffisent pas pour représenter les mécanismes d'imprégnation locaux et nécessitent des paramètres tels que la perméabilité très difficiles à caractériser expérimentalement. Ainsi, pour modéliser plus finement les procédés, il faudra revisiter les modèles d'écoulements macroscopiques pour y intégrer des phénomènes tels que la mouillabilité et la capillarité. En

parallèle, les moyens de mesures doivent permettre le suivi de phénomènes très locaux tels que la formation des micro-porosités et l'apparition de contraintes internes (Thèse M. Waris soutenue en 2012).

Malgré les points de développement encore nécessaires, suite à ce travail de recherche, l'industrialisation de l'approche est prévue à moyen terme dans les logiciels de simulation proposés par ESI Group. Enfin, une nouvelle collaboration entre l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne et ESI Group est envisagée pour travailler sur les axes de recherches proposés.



---

## Bibliographie

- [1] S. G. ADVANI et P. ŠIMÁČEK. « Modeling resin flow of reactive resins in liquid composite molding ». *10th international Conference on Flow Process in Composite Material (FPCM10)*. 1. Monte Verità, 2010.
- [2] D. AMBROSI, A. FARINA et L. PREZIOSI. « Recent Developments and Open Problems in Composite Materials Manufacturing ». *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2000* (2002), p. 475–487.
- [3] D. N. ARNOLD, F. BREZZI et M. FORTIN. « A stable finite element for the stokes equations ». *Calcolo* 21.4 (1984), p. 337–344.
- [4] S. BADIA et R. CODINA. « Unified Stabilized Finite Element Formulations for the Stokes and the Darcy Problems ». *SIAM Journal on Numerical Analysis* 47.3 (2009), p. 1971–2000.
- [5] S. BADIA, A. QUAINI et A. QUARTERONI. « Coupling Biot and Navier-Stokes equations for modelling fluid-poroelastic media interaction ». *Journal of Computational Physics* 228.21 (2009), p. 7986–8014.
- [6] N. BAHLOULI. *Cours Matériaux Composites*. Cours de l’UFR de Physique et Ingénierie de l’Université de Strasbourg.
- [7] J. M. BAYLDON et I. M. DANIEL. « Flow modeling of the VARTM process including progressive saturation effects ». *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* 40.8 (2009), p. 1044–1052.
- [8] G. S. BEAVERS et D. D. JOSEPH. « Boundary conditions at a naturally permeable wall ». *Journal of Fluid Mechanics* 30.01 (1967), p. 197.
- [9] P. BHAT, J. MEROTTE, P. ŠIMÁČEK et S. G. ADVANI. « Process analysis of compression resin transfer molding ». *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* 40.4 (2009), p. 431–441.
- [10] C. BINÉTRUY. *Physique du moulage des composites avancés : aspects théoriques*. Techniques de l’ingénieur.

- [11] M. A. BIOT. « General theory of three-dimensional consolidation ». *Journal of Applied Physics* 12.2 (1941), p. 155–164.
- [12] P. CELLE. « Couplage fluide / milieu poreux en grandes déformations pour la modélisation des procédés d'élaboration par infusion ». Thèse de doct. École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2006.
- [13] P. CELLE, S. DRAPIER et J.-M. BERGHEAU. « Numerical aspects of fluid infusion inside a compressible porous medium undergoing large strains ». *European Journal of Computational Mechanics* 17.5-6-7 (2008), p. 819–827.
- [14] P. CELLE, S. DRAPIER et J.-M. BERGHEAU. « Numerical modelling of liquid infusion into fibrous media undergoing compaction ». *European Journal of Mechanics - A/Solids* 27.4 (2008), p. 647–661.
- [15] R. CODINA. « Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal subscales ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191.39-40 (2002), p. 4295–4321.
- [16] M. R. CORREA et A. F. D. LOULA. « A unified mixed formulation naturally coupling Stokes and Darcy flows ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198.33-36 (2009), p. 2710–2722.
- [17] N. C. CORREIA, F. ROBITAILLE, A. C. LOOS, C. D. RUDD, P. ŠIMÁČEK et S. G. ADVANI. « Analysis of the vacuum infusion moulding process : I. Analytical formulation ». *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* 36.12 (2005), p. 1645–1656.
- [18] H. DARCY. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Dalmont, 1856.
- [19] M. DISCACCIATI. « Domain decomposition method for the coupling of surface and groundwater flows ». PhD. Ecole Polytechnique Fédéral de Lausanne (EPFL), 2004.
- [20] M. DISCACCIATI. « Iterative methods for Stokes/Darcy coupling ». *Domain decomposition methods in science and engineering* 40 (2004), p. 563–570.
- [21] M. DISCACCIATI. « Mathematical and numerical models for coupling surface and groundwater flows ». *Applied Numerical Mathematics* 43.1-2 (2002), p. 57–74.
- [22] M. DISCACCIATI et A. QUARTERONI. « Convergence analysis of a subdomain iterative method for the finite element approximation of the coupling of Stokes and Darcy equations ». *Computing and Visualization in Science* 6.2-3 (2004), p. 93–103.

- [23] S. DRAPIER, J. MONATTE, O. ELBOUZZAOUI et P. HENRAT. « Characterization of transient through-thickness permeabilities of Non Crimp New Concept (2) multi-axial fabrics ». *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* 36.7 (2005), p. 877–892.
- [24] M. DURSAPT. *Mise en forme matériaux composites*. Cours de l'école Nationale d'Ingénieur de Saint-Etienne (ENISE).
- [25] S. FOREST. *Mécanique des Milieux Continus*. Ecole Polytechnique.
- [26] M. FORTIN et F. BREZZI. *Mixed and Hybrid Finite Element Method*. Springer. Berlin, 1991, p. 350.
- [27] M. GIGLIOTTI, F. JACQUEMIN, J. MOLIMARD et A. VAUTRIN. « Transition Saddle-Cylinder Shape of Thin Unsymmetric [0/90] Square Plates under Hygrothermal Loads : Fringe Projection Method and Variational Approach ». *Applied Mechanics and Materials* 3-4 (2005), p. 217–222.
- [28] *Glossaire des matériaux composites*. Rapp. tech. Centre d'animation régional en matériaux avancés (CARMA), 2006, p. 1–34.
- [29] Q. GOVIGNON, S. BICKERTON et P. A. KELLY. « Simulation of the reinforcement compaction and resin flow during the complete resin infusion process ». *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* 41.1 (2010), p. 45–57.
- [30] Q. GOVIGNON, J. TIMMS, S. BICKERTON et P. A. KELLY. « Deviation from darcy ' s law during the post-filling stage of resin infusion ». *10th international Conference on Flow Process in Composite Material (FPCM10)*. Monte Verità (Suisse), 2010.
- [31] T. G. GUTOWSKI et T. MORIGAKI. « The Consolidation of Laminate Composites ». *Journal of Composite Materials* 21.2 (1987), p. 172–188.
- [32] K. HAN, S. JIANG, C. ZHANG et B. WANG. « Flow modeling and simulation of SCRIMP for composites manufacturing ». *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* 31.1 (2000), p. 79–86.
- [33] A. HANNUKAINEN, M. JUNTUNEN et R. STENBERG. « Computations with finite element methods for the Brinkman problem ». *Computational Geosciences* 15.1 (2010), p. 155–166.
- [34] G. HIVET et P. BOISSE. « Consistent mesoscopic mechanical behaviour model for woven composite reinforcements in biaxial tension ». *Composites Part B : Engineering* 39.2 (2008), p. 345–361.
- [35] A. HOUPEURT. *Éléments de mécanique des fluides dans les milieux poreux*. Paris : Technip, 1974.

- [36] J. KESSELS, A. JONKER et R. AKKERMAN. « Fully 2.5D flow modeling of resin infusion under flexible tooling using unstructured meshes and wet and dry compaction properties ». *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* 38.1 (2007), p. 51–60.
- [37] P. KNUPP et K. SALARI. *Verification of Computer Codes in Computational Science and Engineering*. Chapman & Hall/CRC, 2003, p. 160.
- [38] R. LARSSON, M. ROUHI et M. WYSOCKI. « Free surface flow and preform deformation in composites manufacturing based on porous media theory ». *European Journal of Mechanics - A/Solids* 31.1 (2012), p. 1–12.
- [39] P. LE TALLEC. *Mécanique des Milieux Continus, Notes de Cours*. Ecole Polytechnique, 2005.
- [40] A. C. LOOS, D. RATAZZI et R. C. BATRA. « A Three-Dimensional Model of the Resin Film Infusion Process ». *Journal of Composite Materials* 36.10 (2002), p. 1255–1273.
- [41] A. MASUD. « A stabilized mixed finite element method for Darcy-Stokes flow ». *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 54.6-8 (2007), p. 665–681.
- [42] J. MOLIMARD. *Application de méthodes optiques à la mécanique expérimentale*. Habilitation à diriger des recherches, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2005.
- [43] T. OUAHBI, A. SAOUAB, J. BRÉARD, P. OUAGNE et S. CHATEL. « Modelling of hydro-mechanical coupling in infusion processes ». *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* 38.7 (2007), p. 1646–1654.
- [44] G. PACQUAUT. « Couplage Stokes / Darcy dans un cadre Level-set en grandes déformations pour la simulation des procédés d’élaboration par infusion de résine ». Thèse de doct. École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2010, p. 196.
- [45] G. PACQUAUT, J. BRUCHON, N. MOULIN et S. DRAPIER. « Combining a level-set method and a mixed stabilized P1/P1 formulation for coupling Stokes-Darcy flows ». *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 69.2 (2012), p. 459–480.
- [46] J. PARK et M. K. KANG. « A numerical simulation of the resin film infusion process ». *Composite Structures* 60.4 (2003), p. 431–437.
- [47] P.-A. RAVIART et V. GIRAULT. *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*. Springer, 1979, p. 202.

- [48] H. RUI et R. ZHANG. « A unified stabilized mixed finite element method for coupling Stokes and Darcy flows ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198.33-36 (2009), p. 2692–2699.
- [49] J. SALENÇON. *Mécanique des Milieux Continus Tome I. Concepts Généraux*. Les éditions de l'École Polytechnique, 2005.
- [50] P. ŠIMÁČEK et S. G. ADVANI. « Modeling resin flow and fiber tow saturation induced by distribution media collapse in VARTM ». *Composites Science and Technology* 67.13 (2007), p. 2757–2769.
- [51] P. ŠIMÁČEK, bibinitperiod EKSIK, D. HEIDER, J. W. GILLESPIE JR. et S. G. ADVANI. « Experimental Validation of Post-Filling Flow in Vacuum Assisted Resin Transfer Molding Processes ». *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* (2011).
- [52] P. ŠIMÁČEK, D. HEIDER, J. W. GILLESPIE JR. et S. G. ADVANI. « Post-filling flow in vacuum assisted resin transfer molding processes : Theoretical analysis ». *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* 40.6-7 (2009), p. 913–924.
- [53] Y. S. SONG et J. R. YOUN. « Numerical investigation on flow through porous media in the post-infusion process ». *Polymer Composites* 30.8 (2009), p. 1125–1131.
- [54] H. TAN et K. M. PILLAI. « Numerical simulation of reactive flow in liquid composite molding using flux-corrected transport (FCT) based finite element/control volume (FE/CV) method ». *International Journal of Heat and Mass Transfer* 53.9-10 (2010), p. 2256–2271.
- [55] C. TAYLOR et P. HOOD. « A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique ». *Computers & Fluids* 1.1 (1973), p. 73–100.
- [56] K. TERZAGHI, R. B. PECK et G. MESRI. *Soil mechanics in engineering practice*. Wiley-IEEE, 1956, p. 549.
- [57] F. TROCHU, R. GAUVIN et J.-F. BOUDREAU. « RTMFLOT - An Integrated Software Environment for the Computer Simulation of the Resin Transfer Molding Process ». *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 13.3 (1994), p. 262–270.
- [58] F. TROCHU, E. RUIZ, V. ACHIM et S. SOUKANE. « Advanced numerical simulation of liquid composite molding for process analysis and optimization ». *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* 37.6 (2006), p. 890–902.
- [59] R. TROIAN et S. DRAPIER. *Task 5 . 2 - Modelling of flows in adjacent layers with high permeability ratio*. Deliverable 5.2 du projet européen INFUCOMP, 2012.

- [60] J. URQUIZA, D. NDRI, A. GARON et M. DELFOUR. « Coupling Stokes and Darcy equations ». *Applied Numerical Mathematics* 58.5 (2008), p. 525–538.
- [61] P. WANG, S. DRAPIER, J. MOLIMARD, A. VAUTRIN et J. MINNI. « Numerical and experimental analyses of resin infusion manufacturing processes of composite materials ». *Journal of Composite Materials* 46.13 (2011), p. 1617–1631.
- [62] P. WANG, J. MOLIMARD, S. DRAPIER, A. VAUTRIN et J. C. MINNI. « Monitoring the resin infusion manufacturing process under industrial environment using distributed sensors ». *Journal of Composite Materials* 46.6 (2011), p. 691–706.
- [63] P. WANG. « Etude numérique et expérimentale de procédé d'élaboration des matériaux composites par infusion de résine ». Thèse de doct. École Nationale Supérieure des Mines de Sainte-Etienne, 2010.
- [64] P. WANG, S. DRAPIER, J. MOLIMARD, A. VAUTRIN et J.-C. MINNI. « Characterization of Liquid Resin Infusion (LRI) filling by fringe pattern projection and in situ thermocouples ». *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* 41.1 (2010), p. 36–44.
- [65] B. YENILMEZ, M. SENAN et E. MURAT SOZER. « Variation of part thickness and compaction pressure in vacuum infusion process ». *Composites Science and Technology* 69.11-12 (2009), p. 1710–1719.

## Conservation de la masse de la résine

L'équation de conservation de la masse associée à la résine apparaît, dans la littérature, sous de nombreuses formes selon les approches. Il n'est pas toujours aisé de faire le lien entre ces différentes formes qui traduisent pourtant toutes la même chose mais dans des contextes différents. Nous nous proposons, ici, d'unifier toutes ces approches en repartant de l'équation de conservation de la masse de la phase fluide (eq. A.1) et de la phase solide (eq. A.2) pour un milieu poreux saturé. Dans le cadre de la théorie des mélanges, d'après [35] ces équations s'écrivent :

$$\frac{\partial (\rho_r \phi S)}{\partial t} + \text{div} \left( \rho_r \phi S \frac{\partial \underline{X}_r}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial (\rho_s (1 - \phi))}{\partial t} + \text{div} \left( \rho_s (1 - \phi) \frac{\partial \underline{X}_s}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{A.2})$$

où les indices r et s font respectivement référence à la résine et à la phase solide,  $\rho$  est la masse volumique,  $\phi$  est la porosité,  $S$  est la saturation et  $\underline{X}$  est le déplacement d'une particule de la phase considérée. En remarquant que la vitesse moyenne macroscopique (à l'échelle de la pièce) ou vitesse de Darcy peut s'écrire :

$$\underline{v}_D = \phi \frac{\partial \underline{X}_r}{\partial t} - \phi \frac{\partial \underline{X}_s}{\partial t} \quad (\text{A.3})$$

et en introduisant (A.3) dans (A.1) on obtient la forme générale de l'équation de conservation de la masse de la phase fluide en fonction de la vitesse de Darcy :

$$\frac{\partial (\rho_r \phi S)}{\partial t} + \text{div} \left( \rho_r S \left( \underline{v}_D + \phi \frac{\partial \underline{X}_s}{\partial t} \right) \right) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Ensuite, il suffit d'appliquer les simplifications liées au contexte dans lequel chaque auteur se place, pour retomber sur les différentes formes rencontrées dans la littérature. Voici quelques exemples :

– Pierre Celle [12] :

- les préformes et la résine sont incompressibles  $\rightarrow \rho = \text{cte}$ ,
  - le milieu est complètement saturé  $\rightarrow S = 1$ ,
  - approche quasi-stationnaire, pour chaque itération de calcul les préformes sont indéformables  $\rightarrow \phi = \text{cte}$  et  $\frac{\partial X_s}{\partial t} = 0$ .
- $$\text{div} \underline{v}_D = 0 \quad (\text{A.5})$$

– T. Ouahbi [43] :

- les préformes et la résine sont incompressibles  $\rightarrow \rho = \text{cte}$ ,
- milieu poreux déformable, la porosité ne dépend que de  $t$  et de l'altitude  $\rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} = f(t, z)$ ,
- en combinant A.4 et A.2,  $(1 - \phi) A.4 + \phi A.2$ , on obtient :

$$\text{div} \underline{v}_D = -\frac{1}{1 - \phi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial X_s}{\partial t} \nabla \phi \right) \quad (\text{A.6})$$

– J. Bayldon [7] :

- les préformes et la résine sont incompressibles  $\rightarrow \rho = \text{cte}$ ,

$$\text{div} \left( \underline{v}_D + \phi \frac{\partial X_s}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{A.7})$$



---

## B

# Solution analytique du cas test de Terzaghi par la méthode des fonction de Airy

## Sommaire

---

B.1 Principe des Fonctions de Airy . . . . .	135
B.2 Application au cas test de Terzaghi . . . . .	137

---

### B.1 Principe des Fonctions de Airy

En négligeant les effets d'inerties, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\underline{\text{div}}\underline{\sigma} + \underline{f}_v = \underline{0} \quad (\text{B.1})$$

En Admettant que les forces de volumes dérivent d'un potentiel  $V$  comme suit :

$$\mathbf{f}^v = \left\{ \begin{array}{c} f_x \\ f_y \end{array} \right\} = \underline{\text{grad}} V(x, y), \quad (\text{B.2})$$

la conservation de la quantité de mouvement peut être réécrite ainsi :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial(\sigma_{xx}+V)}{\partial x} + \frac{\sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{yy}+V)}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{B.3})$$

### B.1.1 Détermination des contraintes

Pour déterminer le champ de contrainte, il faut trouver une fonction scalaire bi-harmonique  $\phi(x, y)$  (appelée fonction de Airy) qui satisfasse :

$$\nabla^4 \phi \equiv \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = C(\nu) \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) \quad (\text{B.4})$$

$$\text{avec } C(\nu) = \begin{cases} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & (\text{plane strains}) \\ \frac{1}{1-\nu} & (\text{plane stresses}) \end{cases}$$

la fonction  $\phi$  doit en outre satisfaire les conditions limites en contrainte sur les frontières du domaine :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} n_x - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} n_y &= t_x \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} n_x - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} n_x &= t_y \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Dans un cas 2D en déformations planes, le champ des contraintes est donnée par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - V \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - V \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ \sigma_{zz} &= \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

### B.1.2 Détermination du champ de déplacement

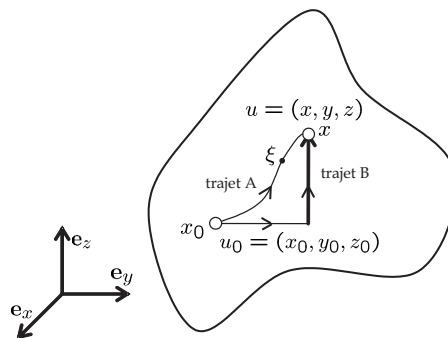


Figure B.1 – Procédure de calcul des déplacements : Intégration des déformation le long du chemin le plus adapté

Connaissant le champ de contrainte, on peut calculer le champ de déformation avec la loi de Hooke. Pour évaluer les déplacements la relation  $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$  est

utilisée. Soit un point  $x_0$  dans le solide, dont les déplacement et rotation sont égales à zéro. On peut calculer les déplacement de tous les points du solide en intégrant les déformation sur le chemin le plus approprié B.1 :

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_{x_0}^x U_{ij}(\mathbf{x}, \xi) d\xi_j \quad (\text{B.7})$$

avec

$$U_{ij}(\mathbf{x}, \xi) = \varepsilon(\xi) + (x_k - \xi_k) \left[ \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\xi)}{\partial \xi_k} - \frac{\partial \varepsilon_{kj}(\xi)}{\partial \xi_i} \right] \quad (\text{B.8})$$

où  $x_k$  sont les composantes du vecteur position du point dont le déplacement est calculé et  $x_i$  sont les coordonnées du point le long du chemin d'intégration.

## B.2 Application au cas test de Terzaghi

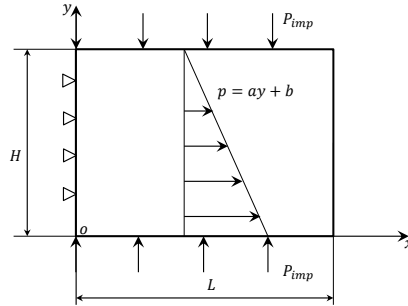


Figure B.2 – Cas test de Terzaghi : compression d'une préforme avec bords libres

Le problème est résumé sur la figure B.2 et les conditions limites sont détaillées ci-dessous :

$$\begin{cases} \sigma_{ij}n_j = 0 \Rightarrow \sigma_{xx} = \sigma_{yx} = 0 & \text{on } x = \pm L \text{ for any } y \\ \sigma_{xy} = 0, \sigma_{yy} = -P_{imp} & \text{on } y = H \text{ for any } x \\ u_x(0,0) = u_y(0,0) = 0 \end{cases}$$

En utilisant la loi de Terzaghi ( $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^e - p_r \underline{\underline{I}}$ ) avec  $p_r(x,y) = V = -(ay + b)$  on peut réécrire la conservation de la quantité de mouvement :

$$\underline{\underline{div}} \underline{\underline{\sigma}}^e + \underline{\underline{f}}_p = 0$$

avec

$$f_{-p} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -a \end{Bmatrix}$$

Ainsi on peut trouver une fonction de Airy qui satisfasse les conditions limites dont la forme est :

$$\phi(x, y) = A_1 x^2 + A_2 x y + A_3 y^2$$

Cette fonction polynomial vérifie l'équation (B.4) quelque soit  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$ . À partir de l'équation (B.6), on obtient les relations suivantes :

$$\sigma_{xx} = 2A_3 + (a y + b)$$

$$\sigma_{yy} = 2A_1 + (a y + b)$$

$$\sigma_{xy} = -A_2$$

Les frontière gauche et droite étant libres,  $\sigma_{xx} = \sigma_{yx} = 0$  sur  $x = \pm L$ , ce qui implique  $A_3 = A_2 = 0$  d'où :

$$\sigma_{xx} = (a y + b)$$

$$\sigma_{yy} = 2A_1 + (a y + b)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 0$$

La dernière constante  $A_1$  peut être déterminée avec les conditions limites sur  $y = H$  ( $\sigma_{yy} = -P_{imp}$ ) :

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= 2A_1 + (a H + b) = -P_{imp} \\ \Rightarrow A_1 &= -\frac{P_{imp} + a H + b}{2} \end{aligned}$$

Finalement, le champ de contrainte dans la plaque est :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = a y + b \\ \sigma_{yy} = -P_{imp} + a (y - H) \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Puis, en utilisant la loi de Hooke on peut déterminer le champ de déformation :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1+\nu}{E} [(1 - 2\nu) (a y + b) + \nu G] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1+\nu}{E} [(1 - 2\nu) (a y + b) + (\nu - 1) G] \\ \varepsilon_{xy} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

avec  $G = a H + b + P_{imp}$ .

En utilisant les équations (B.8), on a :

$$\begin{aligned}
 U_{xx} &= \frac{1+\nu}{E} [(1-2\nu)(a\eta+b) + \nu G] + (y-\eta) \frac{1+\nu}{E} [(1-2\nu)a] \\
 U_{yy} &= \frac{1+\nu}{E} [(1-2\nu)(a\eta+b) + (\nu-1)G] \\
 U_{xy} &= 0 \\
 U_{yx} &= -\frac{1+\nu}{E} (x-\xi) [(1-2\nu)a]
 \end{aligned}$$

On peut finalement déterminer les déplacements  $u_x$  et  $u_y$  en résolvant l'intégrale suivante :

$$\left\{ \begin{aligned}
 u_x(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} U_{xx} d\xi + U_{xy} d\eta \\
 u_y(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} U_{yx} d\xi + U_{yy} d\eta
 \end{aligned} \right.$$

D'où, le champs de déplacement :

$$\left\{ \begin{aligned}
 u_x(x,y) &= \frac{1+\nu}{E} [(1-2\nu)(ay+b)x + \nu Gx] \\
 u_y(x,y) &= \frac{1+\nu}{E} \left[ (1-2\nu) \left( \frac{a}{2}y + b \right) y + (\nu-1)Gy - \frac{1-2\nu}{2}ax^2 \right]
 \end{aligned} \right.$$

avec  $G = aH + b + P_{imp}$



# Construction des sous-matrices élémentaires pour la discrétisation des équations de Darcy et de Stokes

## Sommaire

C.1 Darcy . . . . .	141
C.2 Stokes . . . . .	142

Afin de clarifier le propos, les sous-matrices élémentaires introduites dans le chapitre 4, pour expliquer la mise en œuvre de la stabilisation à l'aide du mini-élément  $P_{1+}/P_1$ , sont explicitées dans le cas des équations de Darcy et de Stokes.

## C.1 Darcy

Après l'introduction de la bulle, la formulation primale des équations de Darcy conduit au système suivant :

$$\begin{bmatrix} [A_l] & [A_{lb}]^T & [B]^T \\ [A_{lb}] & [A_b] & [B_b]^T \\ [B] & [B_b] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v_l\} \\ \{v_b\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{F_b\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

où les différentes sous-matrice s'écrivent en fonction de la perméabilité ( $K$ ), de la viscosité ( $\eta$ ), des fonctions de formes associées à la vitesse ( $N_i$ ) et à la pression ( $M_i$ ) et de la fonction bulle ( $b^e$ ) comme suit :

$$([A_l^e])_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11}^l & a_{12}^l & a_{13}^l \\ a_{21}^l & a_{22}^l & a_{23}^l \\ a_{31}^l & a_{32}^l & a_{33}^l \end{bmatrix}$$

avec  $a_{mn}^l = \int_{\Omega^e} \eta N_i K_{mn} N_j dv,$

$$([A_{lb}^e])_i = \begin{bmatrix} a_{11}^{lb} & a_{12}^{lb} & a_{13}^{lb} \\ a_{21}^{lb} & a_{22}^{lb} & a_{23}^{lb} \\ a_{31}^{lb} & a_{32}^{lb} & a_{33}^{lb} \end{bmatrix}$$

avec  $a_{mn}^{lb} = \int_{\Omega^e} \eta N_i K_{mn} b^e dv,$

$$[A_b^e] = \begin{bmatrix} a_{11}^b & a_{12}^b & a_{13}^b \\ a_{21}^b & a_{22}^b & a_{23}^b \\ a_{31}^b & a_{32}^b & a_{33}^b \end{bmatrix}$$

avec  $a_{mn}^b = \int_{\Omega^e} \eta b^e K_{mn} b^e dv,$

$$([B^e])_{ij} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix}$$

avec  $B_m = \int_{\Omega^e} N_i \frac{\partial M_j}{\partial x_m} dv,$

$$([B^e])_i = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix}$$

avec  $B_m = \int_{\Omega^e} b^e \frac{\partial M_i}{\partial x_m} dv.$

## C.2 Stokes

Après l'introduction de la bulle, la formulation duale des équations de Stokes conduit au système suivant :

$$\begin{bmatrix} [A_l] & [0] & [B]^T \\ [0] & [A_b] & [B_b]^T \\ [B] & [B_b] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v_l\} \\ \{v_b\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

où les différentes sous-matrice s'écrivent en fonction de la perméabilité ( $K$ ), de la viscosité ( $\eta$ ), des fonctions de formes associées à la vitesse ( $N_i$ ) et à la pression ( $M_i$ ) et de la fonction bulle ( $b^e$ ) comme suit :

$$([A_l^e])_{ij} = \begin{bmatrix} 2a_{11}^l + a_{22}^l + a_{33}^l & a_{12}^l & a_{13}^l \\ a_{21}^l & a_{11}^l + 2a_{22}^l + a_{33}^l & a_{23}^l \\ a_{31}^l & a_{32}^l & a_{11}^l + a_{22}^l + 2a_{33}^l \end{bmatrix}$$

avec  $a_{mn}^l = \int_{\Omega^e} \eta \frac{\partial N_i}{\partial x_m} \frac{\partial N_j}{\partial x_n} dv,$



$$([A_{lb}^e])_i = \begin{bmatrix} 2a_{11}^l + a_{22}^l + a_{33}^l & a_{12}^l & a_{13}^l \\ a_{21}^l & a_{11}^l + 2a_{22}^l + a_{33}^l & a_{23}^l \\ a_{31}^l & a_{32}^l & a_{11}^l + a_{22}^l + 2a_{33}^l \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } a_{mn}^{lb} = \int_{\Omega^e} 2\eta \frac{\partial b^e}{\partial x_m} \frac{\partial N_j}{\partial x_n} dv,$$

$$[A_b^e] = \begin{bmatrix} 2a_{11}^l + a_{22}^l + a_{33}^l & a_{12}^l & a_{13}^l \\ a_{21}^l & a_{11}^l + 2a_{22}^l + a_{33}^l & a_{23}^l \\ a_{31}^l & a_{32}^l & a_{11}^l + a_{22}^l + 2a_{33}^l \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } a_{mn}^b = \int_{\Omega^e} 2\eta \frac{\partial b^e}{\partial x_m} \frac{\partial b^e}{\partial x_n} dv,$$

$$([B^e])_{ij} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } B_m = \int_{\Omega^e} M_i \frac{\partial N_j}{\partial x_m} dv,$$

$$([B^e])_i = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } B_m = \int_{\Omega^e} M_i \frac{\partial b^e}{\partial x_m} dv.$$



École Nationale Supérieure des Mines  
de Saint-Étienne

NNT : *Communiqué le jour de la soutenance*

Arnaud DEREIMS

Industrial simulation of composite part manufacturing processes by resin infusion: interaction between fluid and low permeability porous solid undergoing large deformations

Speciality: Mechanics and Engineering

Keywords: composite materials, processes, infusion, LRI: Liquid Resin Infusion, Stokes, Darcy, Brinkman, Terzaghi, coupling, finite element method, finite strain, low permeability

Abstract:

Composite manufacturing processes by resin infusion, despite their many benefits, struggle to establish themselves in the industrial production phases due to difficulties to control them. So, in partnership with ESI Group, a comprehensive model for the simulation of these processes is developed at the ENSM-SE since the pioneering work of P. Celle.

Our work focuses on the generalization of this model to handle complex industrial cases in three dimensions, as well as its extension to “post-infusion” flow simulation. The approach is based on three domains decomposition of the field (Distribution medium, impregnated preforms, dry preforms) consisting in coupling a Stokes flow in the distribution medium with a Darcy flow in the preforms. In addition, the mutual influence of the resin on the preforms and of the preforms deformation on the permeability is considered, through Terzaghi’s law and models expressing the permeability as a function of the fibre fraction, data only accessible with a 3D coupled mechanical approach. Finally, the process is divided into three phases: initial compression of dry preforms, filling and “post-infusion”. The numerical methods developed in this work, apply to real infusion cases often discarded in recent publications, involving very low permeability ( $\sim 10\text{-}15 \text{ m}^2$ ), thin distribution medium ( $\sim 1 \text{ mm}$ ) and complex geometries (3D curved).

This innovative approach has been implemented in an industrial simulation code (ProFlot™), validated analytically over test cases and experimentally over industrial cases in the European project INFUCOMP.

NNT : *Communiqué le jour de la soutenance*

Arnaud DEREIMS

Simulation industrielle des procédés d'élaboration de pièces composites par infusion de résine : couplage fluide / solide poreux très faiblement perméable en grandes déformations

Spécialité: Mécanique et Ingénierie

Mots clefs : matériaux composites, procédés, infusion, LRI : Liquid Resin Infusion, Stokes, Darcy, Brinkman, Terzaghi, couplages, méthode des éléments finis, grandes déformations, faible perméabilité

Résumé :

Les procédés d'élaboration de pièces composites par infusion de résine, malgré leurs nombreux avantages, peinent à s'imposer dans les phases de production industrielle en raison de difficultés pour les maîtriser. Ainsi, en partenariat avec ESI Group, un modèle complet pour la simulation de ces procédés est développé à l'ENSM-SE depuis les travaux précurseurs de P. Celle.

Nos travaux portent sur la généralisation de ce modèle afin de traiter des cas, ainsi que sur son extension à la simulation des écoulements « post-infusion ». L'approche repose sur un découpage du domaine en trois zones (drainant, préformes imprégnées, préformes sèches) consistant ainsi à coupler un écoulement de Stokes dans le drainant à un écoulement de Darcy dans les préformes. De plus, l'influence mutuelle de la résine sur le comportement des préformes et de la déformation des préformes sur la perméabilité est considérée, à travers la loi de Terzaghi et des lois exprimant la perméabilité en fonction de la fraction de fibres, paramètre accessible uniquement dans une approche 3D mécanique couplée. Enfin, le procédé est découpé en trois phases : compression initiale des préformes sèches, remplissage et « post-infusion ». Les méthodes numériques, développées dans ces travaux, s'appliquent à des cas réels d'infusion souvent mis de côté dans les publications récentes car inaccessibles, impliquant des perméabilités très faibles ( $\sim 10^{-15}$  m<sup>2</sup>), un drainant fin ( $\sim 1$  mm) et des géométries complexes.

Cette approche innovante a été implémentée dans un code de calcul industriel (ProFlot<sup>TM</sup>), validée analytiquement sur des cas tests et expérimentalement sur des cas industriels dans le cadre du projet européen INFUCOMP.