



HAL
open science

Modélisation numérique par éléments finis d'un problème aéroacoustique en régime transitoire : application à l'équation de Galbrun

Xue Feng

► **To cite this version:**

Xue Feng. Modélisation numérique par éléments finis d'un problème aéroacoustique en régime transitoire : application à l'équation de Galbrun. Autre. Université de Technologie de Compiègne, 2013. Français. NNT : 2013COMP2089 . tel-00935560

HAL Id: tel-00935560

<https://theses.hal.science/tel-00935560v1>

Submitted on 23 Jan 2014

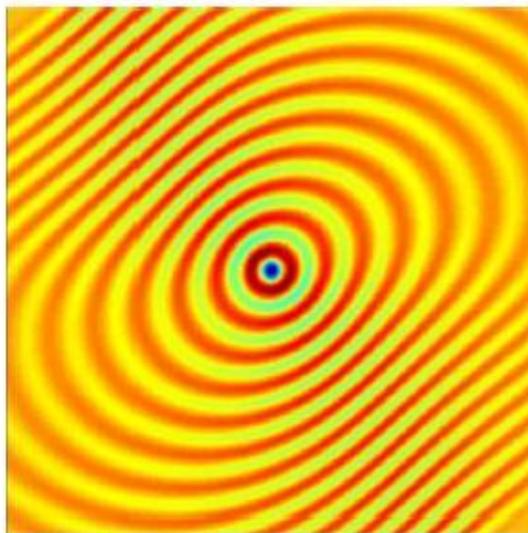
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Par Xue FENG

Modélisation numérique par éléments finis d'un problème aéroacoustique en régime transitoire : application à l'équation de Galbrun

Thèse présentée
pour l'obtention du grade
de Docteur de l'UTC



Soutenue le 20 juin 2013
Spécialité : Mécanique avancée

D2089

Université de Technologie de Compiègne

Ecole doctorale Sciences et Technologies

Champ disciplinaire : Mécanique Avancée

(Acoustique et vibrations / Matériaux et surfaces /

Modélisation numérique en mécanique)

Mémoire de thèse

Modélisation numérique par éléments finis d'un problème aéroacoustique
en régime transitoire : application à l'équation de Galbrun

Par Xue Feng

Directeur de thèse : Mabrouk Ben Tahar



Laboratoire Roberval, *Unité de Recherche en Mécanique*, UMR CNRS 7337
Equipe Acoustique et Vibrations, Département de Génie Mécanique

Centre de Recherches de Royallieu - BP 20 529 - 60205 Compiègne Cedex France
Tél. : (33) 3 44 23 45 46 Tél. secrétariat : (33) 3 44 23 45 27
Télécopie : (33) 3 44 23 52 87

Résumé : Les travaux de cette thèse concernent la modélisation et la simulation numérique de la propagation d'ondes acoustiques en présence d'un écoulement. Le modèle retenu pour ces études est l'équation de Galbrun. Les travaux faits sur l'équation de Galbrun ont essentiellement porté sur le régime harmonique. En revanche, la plupart des études mathématiques et numériques du problème de l'aéroacoustique est en régime transitoire. C'est pourquoi, il est intéressant pour nous d'étudier l'équation de Galbrun en régime transitoire. Pour résoudre cette équation en régime transitoire, notre approche a reposé sur la transformée de Laplace, qui nous permet de faire l'échange entre le domaine harmonique et le domaine réel.

Un autre sujet abordé dans cette thèse est celui du traitement des conditions aux limites non réfléchissantes en écoulement uniforme et non-uniforme. Nous proposons la méthode PML pour l'équation de Galbrun. Inspirée par la méthode de Hu, nous proposons un nouveau modèle PML associé à l'équation de Galbrun, qui a toujours conduit à une solution exponentiellement décroissante dans la couche, même en présence d'ondes inverses. Les simulations acoustiques montrent étonnamment d'erreur de convergence pour les deux modèles classiques et nouveaux. Nous validons notre modèle PML à travers plusieurs exemples numériques dans l'écoulement uniforme et non-uniforme.

Le dernier objectif est de proposer des modèles de sources aéroacoustiques associées à l'équation de Galbrun. Après une présentation en détail des modèles existants, on adapte une méthode hybride (EIF) à l'équation de Galbrun. Pour assurer la validité de l'approche globale, certains tests classiques sont choisis parmi la littérature et les résultats sont comparés avec les approches existantes et les solutions analytiques.

Mots clés : aéroacoustique, équation de Galbrun, régime transitoire, couche parfaitement adaptée, transformée de Laplace, modèle de source

Abstract : The work of this thesis is about the numerical modeling and simulation of the propagation of acoustic waves in the presence of a flow. The model used for these studies is the equation of Galbrun. The work done on the Galbrun equation focused on the harmonic regime. In contrast, most of the mathematical and numerical studies of the aeroacoustics problems are in the transient regime. That is why it is interesting for us to study the Galbrun equation in the transient regime. To solve this equation in the transient regime, our approach is based on the Laplace transform, which allows us to exchange between the frequency domain and the real domain.

Another topic discussed in this thesis is the treatment of non-reflecting boundary conditions in uniform and non-uniform flow. We propose the Perfectly Matched Layer method for the Galbrun equation. Inspired by the Hu's method, we propose a new PML model associated with the Galbrun equation, which always leads to an exponentially decreasing solution in the layer, even in the presence of reverse waves. Acoustic simulations show surprisingly error convergence for both classic and new models. We validate our PML model through several numerical examples in uniform and non-uniform flow.

The final objective is to propose models for aeroacoustics sources associated with the Galbrun equation. After presenting in detail the existing models, we adapt a hybrid method (Expansion about Incompressible Flow) in Galbrun equation. To ensure the validity of the overall approach, some classical tests are selected from the literature and the results are compared with existing approaches and analytical solutions.

Key words : aeroacoustics, Galbrun's equation, transient regime, Perfectly Matched Layer, Laplace transform, source modeling

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent bien évidemment à Monsieur Mabrouk Ben Tahar. Je lui suis infiniment reconnaissante pour ses conseils, sa patience, sa rigueur scientifique. J'ai beaucoup progressé pendant ces trois années grâce à lui. J'ai énormément appris auprès de lui et je tiens à lui faire part de toute ma gratitude.

Il n'a pas été évident de réunir six personnalités dans ce jury, et je suis touchée que chacune des personnes sollicitées ait accepté d'en faire partie, malgré un emploi du temps souvent chargé. Je tiens à les remercier tous et plus particulièrement Monsieur Antoine Lavie et Monsieur Samir Assaf, qui ont accepté d'être rapporteurs pour ma thèse. Je les remercie vivement de leurs remarques et de l'attention qu'ils ont portée à mon manuscrit.

C'est grâce à Monsieur Phillippe Gatignol que j'ai connu la méthode de transformée de Laplace, je lui suis reconnaissante pour son aide. Je tiens également à remercier tous ceux qui m'ont permis de progresser dans la compréhension de cette méthode : Patrick Saillard, Erliang Zhang ...

Je remercie également Benoit Nanning, Emmanuel Lefrancois, Pierre Feissel pour leurs conseils et l'intérêt qu'ils ont pu porter à mon travail. Leurs questions et leurs remarques m'ont certainement permis de clarifier ma présentation.

Au cours de cette thèse, j'ai beaucoup apprécié les nombreuses discussions que j'ai pu avoir avec Gaetan Hello et Yingqiao Guo.

Mon travail a été grandement facilité par l'ambiance détendue et sympathique dans laquelle j'ai pris plaisir à travailler dans le Laboratoire de Roberval. Je remercie tous les membres du Laboratoire, pour l'aide qu'ils m'ont apportée en mathématique et en informatique, et également pour leur disponibilité et leur amitié.

Pour finir je voudrais remercier ici mes amis et mes parents pour le soutien qu'ils m'ont apporté durant toutes ces années.

Table des matières

Introduction	11
Chapitre 1	15
Propagation des ondes en présence d'un écoulement non potentiel. 15	
1.1 Équations générales.....	16
1.2 Méthodes de perturbation.....	18
1.2.1 Perturbations eulériennes.....	19
1.2.2 Perturbations mixtes	21
Chapitre 2	25
Résolution de l'équation de Galbrun en régime transitoire	25
2.1 Travaux antérieurs.....	26
2.2 Formulation variationnelle : discrétisation spatiale par éléments finis.....	28
2.3 Transformée de Laplace : discrétisation en temps.....	29
2.4 Discrétisation.....	31
Annexe 2A : Conditions aux limites associées à l'équation de Galbrun.....	33
Annexe 2B : Transformée de Laplace	34
Chapitre 3	39
Couche parfaitement adaptée (Perfectly Matched Layer) associée à l'équation de Galbrun.....	39
3.1 État de l'art	40
3.2 Aspects théoriques de PML classique	42
3.2.1 Formulation classique	42
3.2.2 Application à l'équation de Galbrun.....	44
3.2.2.1 Premier exemple : sans écoulement	46

3.2.2.2	Deuxième exemple : écoulement unidirectionnel	50
3.2.3	Analyse de l'instabilité	53
3.2.4	Conclusion.....	56
3.3	Modèle de PML généralisée pour un écoulement	57
3.3.1	Formulation en écoulement uniforme	57
3.3.1.1	Application à l'équation de Galbrun.....	58
3.3.1.2	Analyse de stabilité.....	61
3.3.1.3	Exemples de validation	62
3.3.1.4	Analyse des paramètres PML.....	75
3.3.2	Formulation en écoulement oblique.....	76
3.3.2.1	Application à l'équation de Galbrun.....	78
3.3.2.2	Exemple de validation	80
3.3.3	Formulation en écoulement non-uniforme.....	83
3.3.3.1	Application à l'équation de Galbrun.....	83
3.3.3.2	Exemple de validation	84
3.4	Études de l'échange d'énergie.....	87
3.4.1	Introduction	87
3.4.2	Écoulement uniforme	88
3.4.3	Écoulement de couche de mélange	90
3.4.4	Conclusion.....	92
3.5	Conclusion.....	93
Chapitre 4	95
Modèles de sources aéroacoustiques	95
4.1	Modèles des sources aérodynamiques.....	96
4.1.1	Simulation numérique directe	96
4.1.2	Analogies aéroacoustiques.....	97
4.1.2.1	Introduction.....	97

4.1.2.2	Analogie de Lighthill.....	98
4.1.2.3	Équations de Phillips et Lilley.....	100
4.1.2.4	Équations de Powell et Howe	101
4.2	Méthodes EIF	103
4.2.1	Introduction	103
4.2.2	Approche de Hardin et Pope	104
4.2.3	Approche de Shen et Sørensen	107
4.2.4	Application de la méthode EIF à l'équation de Galbrun	107
4.2.4.1	Exemple : sphère pulsante	109
4.2.4.2	Exemple : tourbillons en co-rotation	112
4.3	Conclusion.....	117
	Conclusion et perspectives.....	119
	Références.....	123

Introduction

L'interaction d'une onde acoustique avec un écoulement non potentiel est un sujet de grand d'intérêt dans de nombreux problèmes, en particulier dans l'ingénierie des transports (aéronautique, automobile, etc.). La compréhension de cette interaction onde/écoulement permet de mieux appréhender le problème du bruit pour une nacelle de réacteur, un système de climatisation dans une voiture, etc. La qualité d'un modèle se juge par sa capacité de répondre à cette question (sans parler encore des problèmes qui peuvent se poser pour sa résolution). L'aéroacoustique, discipline qui traite l'interaction onde/écoulement, est une discipline relativement jeune par rapport à d'autres domaines plus classiques de la mécanique. Elle aborde le problème sur deux aspects : création de l'acoustique à partir de l'écoulement, et/ou propagation de l'onde dans l'écoulement. C'est ce deuxième aspect qui nous intéresse dans ce travail de thèse. Il s'agit de considérer un écoulement (connu, généralement stationnaire) et de considérer le bruit comme une perturbation (généralement linéaire) autour de cet état. Dans le premier aspect, l'écoulement est à l'origine du bruit, différentes approches sont proposées :

La première fait appel à « simulation numérique directe » (Direct Numerical Simulation, DNS), dans laquelle le mouvement du fluide et le son généré sont directement calculés par les équations de Navier-Stokes. Un des avantages de la DNS est sa capacité à calculer la production et les processus de propagation sans souffrir de restrictions telles qu'un nombre de Mach faible, un nombre de Reynolds élevé...etc. Toutefois, cette méthode nécessite d'énormes ressources de calcul en particulier lorsque le nombre de Mach est faible. Il est donc difficile de calculer la propagation des ondes sur de longues distances. Par conséquent, cette approche est utilisée pour l'étude aéroacoustique à condition que le nombre de Mach soit relativement plus élevé. Elle est surtout utilisée comme référence pour d'autres méthodes approchées.

La seconde se sert de l'analogie acoustique (source directe, propagation simplifiée). Parmi celles-ci, la plus célèbre est l'analogie de Lighthill. La réécriture des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement permet d'obtenir une équation d'onde non homogène dans un milieu au repos. Fowcs Williams et Hawkings ont généralisé l'analogie de Lighthill pour inclure les effets des surfaces en mouvements arbitraires. Powell et Möhring ont mis en avant la théorie du vortex pour prédire le bruit de tourbillon compact de deux et trois dimensions. Ces approches permettent de calculer la directivité du bruit d'une manière économique, car l'écoulement en champ lointain est en plus uniforme. Cependant, toutes les analogies acoustiques sont basées sur diverses hypothèses telles qu'une source compacte et un nombre de Mach faible.

La troisième approche qui utilise la méthode du couplage aérodynamique/acoustique est dite approche hybride (CAA pour Computational AeroAcoustic). Elle fait des hypothèses sur le calcul de la source (exemple : un calcul incompressible non-stationnaire) et un opérateur de propagation (linéaire ou non) par perturbation. Cette méthode de couplage est proposée par Hardin et Pope et elle a en outre été modifiée par Shen et Sørensen. Seo et Moon ont révisé cette méthode de couplage hydrodynamique/acoustique à travers un examen de l'équation de transport de la vorticité perturbée. Plus récemment, Ewert et Schröder estiment plusieurs formulations du terme source pour permettre la simulation acoustique basée sur les solutions de l'écoulement incompressible et compressible. Cette approche permet le calcul de la génération de bruit aéroacoustique et la propagation dans les écoulements visqueux instationnaires dans des domaines complexes. En outre, par rapport aux théories d'analogie acoustique, le son est obtenu directement dans cette approche. Par conséquent, à la fois son rayonnement et la dispersion peuvent être représentés simultanément. D'autre part, le c ut de calcul nécessaire est beaucoup plus faible que celle de la solution de la méthode DNS dans le domaine d'écoulement subsonique en fonction du temps. Dans la même catégorie, on trouve aussi tous les travaux qui sont basés plutôt sur le développement d'un opérateur de propagation, indépendamment de l'origine de la source ( coulement ou autre).

Les équations de perturbation pour décrire le problème peuvent être obtenues de deux manières : soit à partir d'une perturbation eulérienne (la plus utilisée dans la littérature) donnant les équations d'Euler linéarisées (Linear Euler Equations, LEE), soit à partir d'une perturbation lagrangienne que nous allons adopter et qui va nous donner l'équation de Galbrun. Les équations d'Euler linéarisées donnent un système d'équation aux dérivées partielles du premier ordre, écrit en fonction des valeurs de l'écoulement stationnaire à savoir : la vitesse de cet écoulement, la densité de masse volumique, la pression et des valeurs

perturbées à savoir : la vitesse, la pression et la densité de la masse volumique [1-3]. Ce système a été beaucoup utilisé pour effectuer des simulations dans le domaine temporel, en utilisant des méthodes de différences finies [4-6] ou des méthodes de type Galerkin discontinu [7-11]. La deuxième approche (perturbation lagrangienne), souvent associée à l'équation de Galbrun, a été initialement étudiée pour l'acoustique par [12-14]. Elle est obtenue par une perturbation lagrangienne des équations d'Euler et on parlera de représentation mixte. Elle donne une équation écrite en fonction des valeurs de l'écoulement stationnaire à savoir : la vitesse, la densité de masse volumique, la pression de cet écoulement et la seule perturbation du déplacement lagrangien. Cette équation est de second ordre en espace et en temps. Ces deux approches sont équivalentes sur le plan de la physique et décrivent les mêmes phénomènes. Son traitement numérique a été beaucoup moins abordé dans la littérature et cela est dû aux difficultés qu'elle pose lorsqu'elle est traitée directement par éléments finis. En effet, l'existence de solutions parasites peut totalement polluer la solution physique. Ce problème se trouve dans d'autres équations similaires en électromagnétisme et en élasticité. Pour pallier ce problème, A. S. Bonnet *et al.* dans le laboratoire POEMES, proposent une approche par régularisation qui consiste à introduire une fonction de vorticité (composante rotationnelle du champ de déplacement) mais cette approche est difficilement applicable dans des problèmes réels [15-18]. M. Ben Tahar *et al.* dans notre laboratoire, proposent une formulation mixte qui consiste à ajouter au système initial une relation pression-déplacement [19-25]. Cette approche est facilement implantée dans les problèmes acoustiques et elle ne nécessite pas la résolution d'un problème préliminaire.

Comme nous l'avons signalé au début de ce paragraphe, en outre le choix de l'approche et de l'opérateur, la proposition d'un modèle complet pose beaucoup d'autres questions : la loi d'état, les conditions de passage dans les milieux inhomogènes, le problème de conditions aux limites, les conditions de couplages en présence d'une structure élastique (problème important pour la vibroacoustique), le modèle d'impédance (problème important dans le traitement acoustique), les conditions de rayonnement (problème important pour le bruit extérieur). Dans la suite du document nous allons tenter d'apporter une réponse à certaines de ces questions dans le cadre du modèle que nous proposons.

Ce mémoire sera organisé de la manière suivante :

- Dans le premier chapitre, nous présenterons les équations générales de la mécanique des fluides. Deux méthodes de perturbation seront ensuite introduites : l'une eulerienne et l'autre lagrangienne. La représentation lagrangienne introduit une nouvelle variable, le déplacement lagrangien. La représentation eulérienne nous donne

directement les équations d'Euler linéarisées. La représentation mixte (eulérienne-lagrangienne) nous conduit à l'équation de Galbrun, l'équation qui sera utilisée dans cette thèse. Cette équation est une équation différentielle d'ordre 2 en espace et en temps, dont la seule inconnue est le déplacement lagrangien. Nous avons estimé qu'il y avait plus d'avantages à utiliser cette équation plutôt que les équations d'Euler linéarisées.

- Le second chapitre est consacré à la résolution numérique de l'équation de Galbrun en régime transitoire. Bien que l'équation de Galbrun soit initialement écrite uniquement en terme de perturbation de déplacement lagrangien, une formulation mixte en déplacement-pression est employée afin d'éviter un phénomène de blocage numérique. Cette formulation mixte a déjà été testée avec succès [19-25] pour les problèmes harmoniques en temps. Enfin, nous introduirons les notions de transformée de Laplace en temps que nous utiliserons dans l'équation de Galbrun pour la résolution en régime transitoire. Cette méthode mathématique peut être utilisée (le problème est linéaire) car nous considérerons que tous les champs moyens sont stationnaires.
- Dans le troisième chapitre, nous nous sommes intéressés aux conditions aux limites absorbantes. Nous avons fait le choix de la méthode PML (Perfectly Matched Layer). L'objectif est de proposer une formulation PML efficace associée à l'équation de Galbrun en écoulement stationnaire et non potentiel. Une brève bibliographique est faite pour introduire la méthode PML. Nous avons testé la formulation PML classique associée à l'équation de Galbrun, qui nous donne un résultat instable. Proposée par Hu pour les LEEs, basée sur la cohérence des signes entre les vecteurs lenteurs et les vitesses de groupe, nous présenterons une formulation PML stable associée à l'équation de Galbrun. Plusieurs exemples dans l'écoulement uniforme (unidirectionnel et oblique) et non-uniforme démontrent des résultats satisfaisants et l'efficacité de cette formulation. Enfin, nous nous intéresserons particulièrement à l'échange d'énergie entre acoustique et vorticités dans l'écoulement cisailé.
- Le quatrième chapitre a pour l'objectif de proposer un modèle de sources aéroacoustiques associées à l'équation de Galbrun. Ce modèle repose sur l'approche EIF (Expansion about Incompressible Flow), qui consiste à faire une première résolution en incompressible pour déterminer un terme source. Deux exemples connus dans la littérature sont simulés pour valider notre approche.

Enfin, nous proposerons une conclusion et présenterons les perspectives envisagées au vu de la thèse.

Chapitre 1

Propagation des ondes en présence d'un écoulement non potentiel

Ce premier chapitre a pour objectif de définir le cadre théorique de nos travaux. Dans un premier temps, les équations générales de la dynamique des fluides sont rappelées. Dans un second temps, on introduit deux méthodes de perturbations principalement utilisées pour linéariser ces équations. On fait l'hypothèse que tous les effets non-linéaires sont négligés et on étudie seulement la propagation des ondes acoustiques linéaires dans un écoulement porteur stationnaire non potentiel. Dans le cadre de la représentation eulérienne, on présente les équations d'Euler linéarisées ainsi que leurs principales caractéristiques. Ensuite, la représentation mixte et l'obtention de l'équation de Galbrun sont détaillées. Une analyse de conservation d'énergie ainsi que d'autres avantages de l'équation de Galbrun par rapport aux équations d'Euler linéarisées sont spécifiés.

1.1 Équations générales

En mécanique des fluides, les équations de conservation pour un fluide parfait (équation d'Euler) sont données par :

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = m \quad (1.1)$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \rho \mathbf{f} \quad (1.2)$$

Conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho e + p) \mathbf{u}] = \nabla \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) \quad (1.3)$$

où ρ est la densité, \mathbf{u} est la vitesse, p est la pression, m est la source de masse, \mathbf{f} est la densité de force extérieure, e est l'énergie totale par unité de masse. L'opérateur $\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ en 3D est donné par :

$$\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} = \rho \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_2 u_1 & u_2^2 & u_2 u_3 \\ u_3 u_1 & u_3 u_2 & u_3^2 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

où u_1 , u_2 et u_3 représentent respectivement la vitesse de l'écoulement selon les directions x , y et z . L'énergie totale e peut se décomposer en énergie interne e_i et en énergie cinétique :

$$e = e_i + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \quad (1.5)$$

Ce qui donne en fonction de l'énergie interne :

$$\rho \left(\frac{\partial e_i}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla e_i \right) = -p \nabla \mathbf{u} \quad (1.6)$$

La relation thermodynamique en fonction de la température T et l'entropie spécifique s nous donne :

$$de_i = T ds - p d(1/\rho) \quad (1.7)$$

Cette dernière relation permet d'établir une équation de bilan pour l'entropie à partir de l'Eq. (1.3) :

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla s \right) = -p \nabla \mathbf{u} \quad (1.8)$$

Equation d'état

En se servant de la caractérisation de l'état thermodynamique d'un fluide par les variables d'état, nous choisissons d'écrire que la pression p est une fonction d'état des variables thermodynamiques indépendantes ρ et s . Ceci se traduit par la loi d'état suivante :

$$p = \mathcal{P}(\rho, s) \quad (1.9)$$

Les variations de p , ρ et s sont reliées par :

$$dp = \left. \frac{\partial \mathcal{P}(\rho, s)}{\partial \rho} \right|_{s=cste} d\rho + \left. \frac{\partial \mathcal{P}(\rho, s)}{\partial s} \right|_{\rho=cste} ds = c^2 d\rho + \beta ds \quad (1.10)$$

où la célérité du son isentropique c et le coefficient de dilatation thermique isentropique β sont définis par :

$$c^2 = \left. \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho} \right|_s \quad \beta = \left. \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial s} \right|_\rho \quad (1.11)$$

Écoulement isentropique

En thermodynamique, un écoulement isentropique est un écoulement au cours duquel l'entropie du système reste constante ($ds = 0$). Le niveau d'entropie de chaque particule ne change pas avec le temps, mais peut changer d'une particule à une autre. L'équation de conservation de l'entropie se réduit à :

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad (1.12)$$

En conséquence, d'après l'Eq. (1.10), les variations de pression et densité sont directement proportionnelles :

$$dp = c^2 d\rho \quad (1.13)$$

Écoulement homentropique

Pour un écoulement homentropique, la célérité du son c est fixe et l'entropie est constante pour toutes les particules à tout moment. L'équation de conservation de l'entropie (1.12) devient inutile.

Gaz parfait

L'équation d'état thermodynamique d'un gaz parfait s'écrit :

$$p = \rho RT \quad (1.14)$$

où $R = c_p - c_v$ est la constante du gaz parfait. Les capacités calorifiques sont définies par :

$$c_p = T \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_p \quad c_v = T \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_v \quad (1.15)$$

On note $\gamma = c_p / c_v$ le rapport des capacités calorifiques. On tire facilement de ces deux relations :

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad c_v = \frac{R}{\gamma - 1} \quad (1.16)$$

L'équation d'état d'un gaz parfait peut aussi être exprimée à partir de l'entropie spécifique :

$$s - s_\infty = c_v \ln \left[\frac{p}{p_\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{-\gamma} \right] \Leftrightarrow p = \mathcal{P}(\rho, s) = p_\infty \exp \left(\frac{s - s_\infty}{c_v} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{-\gamma} \quad (1.17)$$

où $(s_\infty, p_\infty, \rho_\infty)$ sont l'entropie, la pression et la densité dans le fluide au repos. Pour une évolution isentropique ($s = s_\infty$), il est intéressant d'écrire l'Eq. (1.17) sous la forme :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C^{ste} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \quad (1.18)$$

et dans ce cas, la célérité du son c et le coefficient de dilatation thermique isentropique β ont pour expressions :

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \quad \beta = \frac{p}{c_v} \quad (1.19)$$

1.2 Méthodes de perturbation

Les équations d'Euler sans la source de masse et la densité de force extérieure s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0 \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho e + p) \mathbf{u}] = 0 \quad (1.22)$$

Nous pouvons ainsi écrire les équations d'Euler dans un espace à trois dimensions sous la forme matricielle :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho e \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \rho u_1 \\ \rho u_1^2 + p \\ \rho u_1 u_2 \\ \rho u_1 u_3 \\ (\rho e + p) u_1 \end{pmatrix} + \partial_y \begin{pmatrix} \rho u_2 \\ \rho u_1 u_2 \\ \rho u_2^2 + p \\ \rho u_2 u_3 \\ (\rho e + p) u_2 \end{pmatrix} + \partial_z \begin{pmatrix} \rho u_3 \\ \rho u_1 u_3 \\ \rho u_2 u_3 \\ \rho u_3^2 + p \\ (\rho e + p) u_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.23)$$

où ρ , $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, e et p correspondent respectivement à la masse volumique, à la vitesse du fluide, à l'énergie totale et à la pression et les opérateurs représentent :

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_z = \frac{\partial}{\partial z}$$

Pour un gaz parfait, en écoulement isentropique, l'équation d'énergie (1.22) est remplacée par l'équation de Gibbs :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.24)$$

Et l'équation d'état des équations s'écrit :

$$p = \mathcal{P}(\rho) \quad (1.25)$$

Dans le cadre de cette thèse, on ne considère que les effets linéaires pour modéliser la propagation acoustique dans l'écoulement. Notre domaine d'étude reste pour les écoulements subsoniques. En plus, on ne prendra pas compte les effets thermiques produit par l'entropie.

1.2.1 Perturbations eulériennes

La perturbation linéaire eulérienne est définie comme la différence entre la quantité dans l'écoulement porteur et sa configuration perturbée au même point géométrique situé en x_0 :

$$\varepsilon \psi^E(x_0, t) = \psi(x_0, t) - \psi_0(x_0, t) \quad (1.26)$$

où ε est un coefficient sans dimension très petit devant 1 qui caractérise l'amplitude de la perturbation et ψ est une quantité (scalaire ou tensorielle) satisfaisant les équations générales. On décompose cette quantité ψ comme la superposition d'un champ moyen ψ_0 et d'un champ perturbé de petite amplitude ψ^E .

En introduisant le développement dans les équations d'Euler (1.20), (1.21) et (1.24) et en ne conservant que les termes d'ordre ε^0 , on obtient :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_0) = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{u}_0) + \nabla p_0 = 0 \\ \mathbf{u}_0 \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

où $(\rho_0, \mathbf{u}_0, p_0)$ sont les champs moyens stationnaires dans l'écoulement. Ainsi, on pourra obtenir l'équation d'état et la célérité du son c_0 par la même façon dans les équations (1.25), on trouve :

$$p_0 = \mathcal{P}(\rho_0) \quad (1.28)$$

Ce problème d'ordre 0 est supposé connu où $(\rho_0, \mathbf{u}_0, p_0)$ vérifie le système. Généralement des hypothèses simplificatrices sont prises à ce niveau : écoulement stationnaire, écoulement incompressible, ...

Les équations d'Euler linéarisées (LEE) sont obtenues en décomposant les variables (ρ, u, p) en leur champ moyen (ρ_0, u_0, p_0) et en leurs fluctuations eulériennes au premier ordre (ρ^E, u^E, p^E) . Nous obtenons alors :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} + H = 0 \quad (1.29)$$

avec le vecteur inconnu U et les trois vecteurs de flux E, F et G :

$$U = \begin{pmatrix} \rho^E \\ \rho_0 u_1^E \\ \rho_0 u_2^E \\ \rho_0 u_3^E \\ p^E \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} \rho^E u_{01} + \rho_0 u_1^E \\ u_{01} \rho_0 u_1^E + p^E \\ u_{01} \rho_0 u_2^E \\ u_{01} \rho_0 u_3^E \\ u_{01} p^E + \gamma p_0 u_1^E \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \rho^E u_{02} + \rho_0 u_2^E \\ u_{02} \rho_0 u_1^E \\ u_{02} \rho_0 u_2^E + p^E \\ u_{02} \rho_0 u_3^E \\ u_{02} p^E + \gamma p_0 u_2^E \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} \rho^E u_{03} + \rho_0 u_3^E \\ u_{03} \rho_0 u_1^E \\ u_{03} \rho_0 u_2^E \\ u_{03} \rho_0 u_3^E + p^E \\ u_{03} p^E + \gamma p_0 u_3^E \end{pmatrix}$$

Le vecteur H , directement associé aux inhomogénéités de l'écoulement moyen, est donné par l'expression suivante :

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ (\rho_0 u_1^E + \rho^E u_{01}) \frac{\partial u_{01}}{\partial x} + (\rho_0 u_2^E + \rho^E u_{02}) \frac{\partial u_{01}}{\partial y} + (\rho_0 u_3^E + \rho^E u_{03}) \frac{\partial u_{01}}{\partial z} \\ (\rho_0 u_1^E + \rho^E u_{01}) \frac{\partial u_{02}}{\partial x} + (\rho_0 u_2^E + \rho^E u_{02}) \frac{\partial u_{02}}{\partial y} + (\rho_0 u_3^E + \rho^E u_{03}) \frac{\partial u_{02}}{\partial z} \\ (\rho_0 u_1^E + \rho^E u_{01}) \frac{\partial u_{03}}{\partial x} + (\rho_0 u_2^E + \rho^E u_{02}) \frac{\partial u_{03}}{\partial y} + (\rho_0 u_3^E + \rho^E u_{03}) \frac{\partial u_{03}}{\partial z} \\ p^E (\gamma - 1) \left(\frac{\partial u_{01}}{\partial x} + \frac{\partial u_{02}}{\partial y} + \frac{\partial u_{03}}{\partial z} \right) - (\gamma - 1) \left(u_1^E \frac{\partial p_0}{\partial x} + u_2^E \frac{\partial p_0}{\partial y} + u_3^E \frac{\partial p_0}{\partial z} \right) \end{pmatrix}$$

Les équations d'Euler linéarisées constituent un opérateur de propagation acoustique complet car elles prennent en compte toutes les interactions entre les champs moyens et les

fluctuations. Les effets de convection des ondes acoustiques par l'écoulement moyen sont notamment calculés à partir des flux E , F et G . Les effets de réfraction liés aux gradients de l'écoulement moyen sont également traités à travers les flux E , F , G et le terme H . Plus souvent, on écrit les équations d'Euler linéarisées, pour un gaz parfait, sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{d_0 \rho^E}{dt} + \mathbf{u}^E \nabla \rho_0 + \rho^E \nabla \cdot \mathbf{u}_0 + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}^E = 0 \\ \rho_0 \frac{d_0 \mathbf{u}^E}{dt} + \rho^E \frac{d_0 \mathbf{u}_0}{dt} + \rho_0 \mathbf{u}^E \nabla \mathbf{u}_0 + \nabla p^E = 0 \\ \frac{d_0 p^E}{dt} + \mathbf{u}^E \nabla p_0 + \gamma p^E \nabla \cdot \mathbf{u}_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{u}^E = 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

Dans le cas particulier d'un milieu homogène en écoulement isentropique, on peut écrire l'équation d'état :

$$p^E = c_0^2 \rho^E \quad (1.31)$$

Les équations d'Euler linéarisées représentent le modèle le plus général pour les ondes acoustiques linéaire. Elles prennent la forme particulière (1.30) et (1.31) pour un gaz parfait dans un écoulement isentropique. Le système final que nous allons exploiter par la suite, est alors donné par :

$$\frac{d_0 \rho^E}{dt} + \mathbf{u}^E \nabla \rho_0 + \rho^E \nabla \cdot \mathbf{u}_0 + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}^E = 0 \quad (1.32)$$

$$\rho_0 \frac{d_0 \mathbf{u}^E}{dt} + \rho^E \frac{d_0 \mathbf{u}_0}{dt} + \rho_0 \mathbf{u}^E \nabla \mathbf{u}_0 + \nabla p^E = 0 \quad (1.33)$$

$$p^E = c_0^2 \rho^E \quad (1.34)$$

A ce système, il faut ajouter souvent, les sources acoustiques, les conditions aux limites, les conditions de rayonnement dans le cas de milieu non borné et les conditions initiales.

1.2.2 Perturbations mixtes

A la différence de LEE, décrite ci-dessus, l'équation de Galbrun est basée sur une perturbation lagrangienne des équations d'Euler. Ce qui revient à considérer que la perturbation d'une grandeur est associée à la même particule plutôt qu'à un même point géométrique (Figure 1.1). On parlera alors d'une représentation mixte (une configuration eulérienne et une perturbation lagrangienne). La perturbation est définie comme la différence entre la quantité dans l'écoulement porteur et sa configuration perturbée à la même particule de fluide :

$$\varepsilon\psi^L(x_0, t) = \psi(x, t) - \psi_0(x_0, t) \quad (1.35)$$

A partir des deux définitions (1.26) et (1.35), on peut facilement démontrer une relation entre la perturbation eulérienne et lagrangienne, au premier ordre :

$$\psi^L(x_0, t) = \psi^E(x_0, t) + \mathbf{w}^L \cdot \nabla \psi_0(x_0, t) \quad (1.36)$$

où \mathbf{w}^L désigne le déplacement lagrangien. Ce déplacement est caractérisé par la relation suivante :

$$\mathbf{w}^L(x_0, t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t) \quad (1.37)$$

L'expression (1.36) indique que la différence entre la perturbation eulérienne et lagrangienne est due au déplacement lagrangien. On peut constater que les deux types de perturbations sont équivalents si la quantité est uniforme dans la configuration non perturbée. Il est à noter que les perturbations eulériennes peuvent être récupérées à partir des perturbations lagrangiennes, mais en général, l'inverse n'est pas possible.

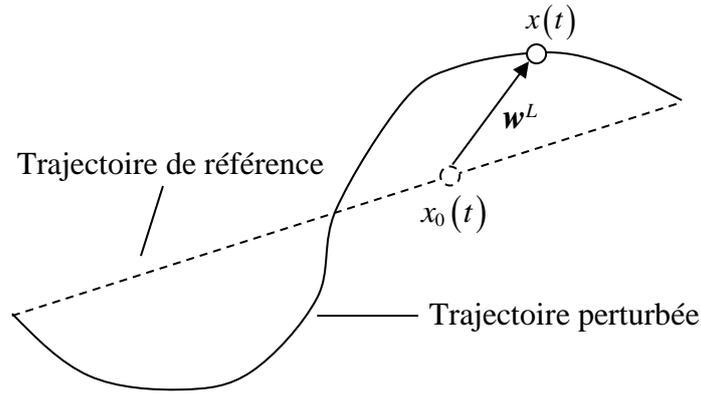


Figure 1.1 Définition de la représentation eulérienne-lagrangienne

Une manière d'obtenir l'équation de Galbrun est de partir des équations d'Euler linéarisées et d'utiliser la relation entre les deux types de perturbation, soit :

$$\rho^L = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{w}^L \quad (1.38)$$

$$\rho_0 \frac{d_0 \mathbf{u}^L}{dt} + \rho^L \frac{d_0 \mathbf{u}_0}{dt} - {}^T \nabla \mathbf{w}^L \nabla p_0 + \nabla p^L = 0 \quad (1.39)$$

$$p^L = c_0^2 \rho^L \quad (1.40)$$

où d_0 / dt est la dérivée matérielle dans l'écoulement moyen et on définit :

$$\mathbf{u}^L = \frac{d_0 \mathbf{w}^L}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \nabla \right) \mathbf{w}^L \quad (1.41)$$

Ce système, écrit en représentation mixte, est équivalent aux LEE. En utilisant les équations (1.38) et (1.40) dans l'Eq. (1.39), pour éliminer les variables de densité et vitesse lagrangien, on arrive à l'équation de Galbrun [26] :

$$\rho_0 \frac{d_0^2 \mathbf{w}^L}{dt^2} - \nabla (\rho_0 c_0^2 \nabla \cdot \mathbf{w}^L) + (\nabla \cdot \mathbf{w}^L) \nabla p_0 - {}^T \nabla \mathbf{w}^L \nabla p_0 = 0 \quad (1.42)$$

Cette équation est une équation différentielle de second ordre en espace et en temps, comparé aux LEE qui sont du premier ordre. D'une manière différente, cette équation a été obtenue par Hayes [27] et Godin [12]. Poirée a développé la théorie de second ordre perturbations d'un écoulement non visqueux homogène, dans le cadre de la description mixte eulérienne-lagrangienne [14].

L'équation de Galbrun présente certains avantages. En effet, l'équation de Galbrun s'exprime avec une seule variable (le déplacement lagrangien), tandis que les LEE nécessitent l'utilisation des trois variables (pression, vitesse, densité). Elias et *al.* [28, 29] ont trouvé une densité lagrangienne directement par l'intégration de l'équation de Galbrun. Cette densité lagrangienne leur a permis de donner une expression de la densité d'énergie acoustique. Par ailleurs, certains de ces résultats sur l'énergie ont également été trouvés par Godin [13]. Il a montré que l'Eq (1.42) découle d'une densité lagrangienne et dérivé des expressions exactes pour la densité d'énergie et de flux. De telles expressions n'existent pas pour les LEE. Récemment, Brazier [30] a fait une étude d'un bilan énergétique exacte pour l'équation de Galbrun dans le cas d'un écoulement moyen compressible. Les perturbations énergiques ont été obtenues au second ordre, ce qui permet de construire une densité lagrangienne régissant l'équation de Galbrun.

Chapitre 2

Résolution de l'équation de Galbrun en régime transitoire

La résolution numérique directe de l'équation de Galbrun, décrite dans le chapitre 1, présente des problèmes de blocage numérique lorsqu'elle est discrétisée par éléments finis classiques d'ordre faible (thèse F. Treyssède [19] et thèse de H. Bériot [25]). Ces solutions parasites se trouvent dans d'autres problèmes comme en électromagnétisme, en élasticité membranaire, etc. Pour pallier cette difficulté, une formulation mixte déplacement-pression a été proposée et étudiée au sein de notre laboratoire [19-25]. Ces différents travaux sont développés en fréquentiel. Notre travail constitue à étendre ces travaux au régime transitoire. Nous allons proposer une méthode de résolution de l'équation de Galbrun en temps. Nous rappelons dans un premier temps les solutions proposées pour lever le problème de blocage dans le domaine fréquentiel, et nous présentons le problème transitoire. Nous rappelons dans un deuxième temps la formulation mixte, les conditions aux limites et les conditions initiales. Dans un troisième temps, nous présentons la formulation variationnelle. Enfin, nous développons la transformée de Laplace et la transformée inverse pour le traitement du régime transitoire.

2.1 Travaux antérieurs

Dans le laboratoire de Roberval, une formulation variationnelle mixte est d'abord proposée par Treyssède [19] pour pallier ce problème. Celle-ci est ensuite discrétisée par une méthode des éléments finis avec la fonction de bulle. Les solutions numériques obtenues sont validées avec des cas semi-analytiques obtenus par résolution de l'équation de Pridmore-Brown généralisées. L'adéquation des résultats montre la capacité de la méthode à tenir compte des effets de convection et de réfraction. Gabard [24] a réalisé une analyse des propriétés de dispersion et de stabilité pour différents types d'éléments finis en écoulement uniforme. L'analyse de dispersion a mis en évidence que l'élément fini mixte nommé $T4-3c$ pour l'équation de Galbrun est stable et précis pour des nombres de Mach inférieurs ou égaux à 0.6. H. Bériot [25] a poursuivi ces travaux en étudiant le comportement de l'opérateur de Galbrun discrétisé à l'aide des éléments finis hiérarchiques d'ordre élevé. Il a cherché au cours de sa thèse à développer des éléments plus efficaces et surtout dont la stabilité soit assurée pour tous les types d'écoulements. L'analyse de dispersion montre les excellentes propriétés des éléments d'ordre élevés et l'erreur de dispersion d'ordre $2P$ a toujours été observée même pour des nombres de Mach importants. Les travaux faits sur l'équation de Galbrun, au laboratoire, ont porté uniquement sur le régime harmonique et ont répondu d'une manière très satisfaisante à beaucoup de questions qui se posent en aéroacoustique : écoulement complexes, conditions aux limites, couplage vibroacoustique, traitement acoustique, en 2D, en axisymétrique et en 3D. Des éléments finis de différents types ont été proposés : éléments classiques, éléments d'ordre élevé, éléments hiérarchiques. Quelques conditions de non-réflexions plus au moins performantes ont été proposées. Notre travail constitue une suite de ces différents travaux, il présente deux aspects : Le premier est le régime temporel et le second l'utilisation des couches PML comme traitement pour les domaines non bornés. Enfin, nous allons aborder brièvement l'aspect de source d'origine aérodynamique et nous restons dans les configurations de 2D.

Pour lever le blocage, Bonnet *et al.* [15-18] ont proposé une méthode de régularisation valable pour des écoulements uniformes ou stratifiés (écoulements cisailés mais uniformes par morceaux). Toutefois, cette technique est difficilement applicable à un écoulement quelconque.

Pour les problèmes aéroacoustiques en régime transitoire, la plupart des études du problème sont basées sur les équations d'Euler linéarisées, en utilisant des méthodes de

différences finies ou des méthodes de type Galerkin discontinu. Berriri [17] a étudié le régime transitoire pour l'équation de Galbrun en se basant sur la technique de régularisation de Bonnet *et al.*

Pour alléger les expressions, sans perdre la généralité de nos développements (l'équation de Galbrun est applicable dans un cadre beaucoup plus général [19]), nous allons travailler sous les hypothèses suivantes : un fluide parfait, l'écoulement moyen satisfait les équations d'Euler d'un fluide incompressible stationnaire. La formulation mixte en déplacement-pression associée à l'équation de Galbrun est donnée par :

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{d_0^2 \mathbf{w}^L}{dt^2} + \nabla p^L + (\nabla \cdot \mathbf{w}^L) \nabla p_0 - {}^T \nabla \mathbf{w}^L \cdot \nabla p_0 = \mathbf{f} \\ p^L + \rho_0 c_0^2 \nabla \cdot \mathbf{w}^L = g \end{cases} \quad (2.1)$$

Où $\mathbf{w}^L(x, t)$ est le vecteur déplacement lagrangien perturbé "acoustique", $d_0/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u}_0 \nabla$ désigne une dérivée matérielle, $\mathbf{f}(x, t)$ et $g(x, t)$ sont des sources extérieures en déplacement et pression.

A ce système d'équations s'ajoute des conditions aux limites, voir la Figure 2.1 : frontière à déplacement imposé désigné par Γ_1 , frontière à déplacement normale donnée désigné par Γ_2 (déplacement normal donné non nul pour la paroi vibrante, nul pour la paroi rigide), frontière avec traitement acoustique (localement réactif, défini par une impédance Z) sur Γ_{2t} et frontière non bornée (le traitement numérique fera l'objet du chapitre 3).

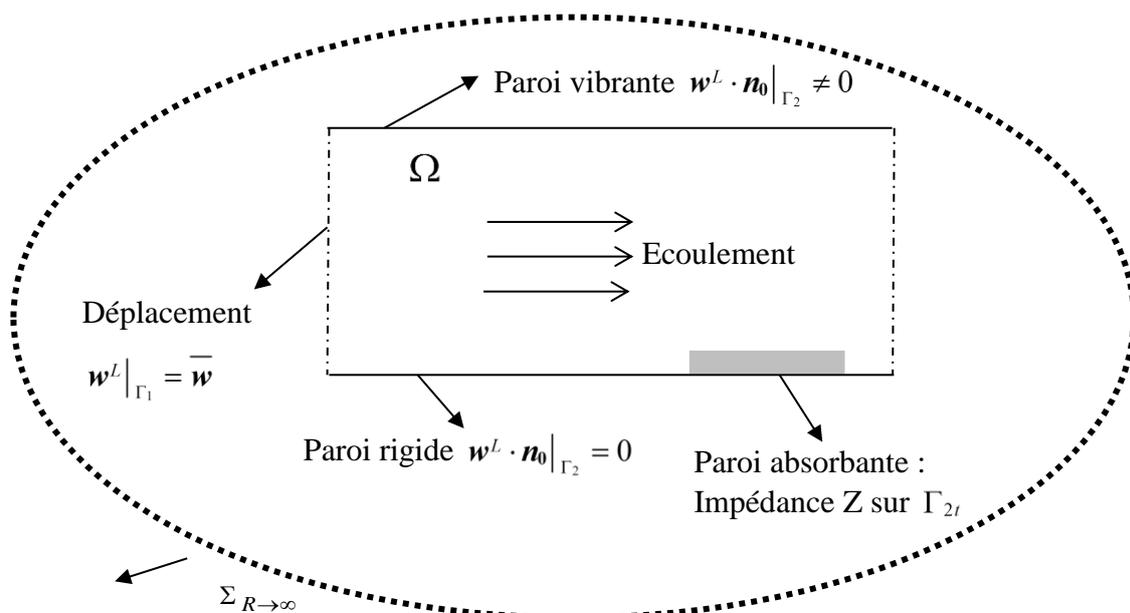


Figure 2.1 Conditions aux limites dans un problème aéroacoustique liées à l'équation de Galbrun

2.2 Formulation variationnelle : discrétisation spatiale par éléments finis

Comme nous l'avons signalé ci-dessus, la discrétisation spatiale de ce système d'équation est faite par éléments finis. Pour cela nous associons à ce système une formulation variationnelle en multipliant les deux équations dans le système (2.1) respectivement par deux champs tests notés \mathbf{w}^* et p^* , puis intégrées sur tout le domaine d'étude, en développant la dérivée matérielle on obtient pour $\forall \mathbf{w}^*$ et $\forall p^*$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{w}^* \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{w}^L}{\partial t^2} \right\} d\Omega + \underbrace{\int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{w}^* \left\{ 2\mathbf{u}_0 \nabla \frac{\partial \mathbf{w}^L}{\partial t} \right\} d\Omega}_{I_1} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{w}^* \left\{ \mathbf{u}_0 \nabla (\mathbf{u}_0 \nabla \mathbf{w}^L) \right\} d\Omega}_{I_2} \\ + \int_{\Omega} \mathbf{w}^* \{ \nabla p^L \} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{w}^* \{ \nabla \cdot \mathbf{w}^L \nabla p_0 \} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w}^* \{ {}^T \nabla \mathbf{w}^L \cdot \nabla p_0 \} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w}^* \{ \mathbf{f} \} d\Omega \quad (2.2) \\ \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} p^* p^L d\Omega + \underbrace{\int_{\Omega} p^* \nabla \cdot \mathbf{w}^L d\Omega}_{I_3} = \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} p^* g d\Omega \end{array} \right.$$

La deuxième équation a été divisée par $\rho_0 c_0^2$ afin d'homogénéiser les deux équations. Ensuite, l'intégrale I_1 est divisée en deux parties, la première reste inchangée et la deuxième partie est intégrée par partie. Les intégrales I_2 et I_3 sont également intégrées par partie afin de faire apparaître les termes sur le bord du domaine. L'expression ci-dessus aboutit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{w}^* \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{w}^L}{\partial t^2} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{w}^* \left\{ \mathbf{u}_0 \nabla \frac{\partial \mathbf{w}^L}{\partial t} \right\} d\Omega - \int_{\Omega} \rho_0 \left\{ \mathbf{u}_0 \nabla \mathbf{w}^* \right\} \frac{\partial \mathbf{w}^L}{\partial t} d\Omega \\ - \int_{\Omega} \rho_0 \left\{ \mathbf{u}_0 \nabla \mathbf{w}^* \right\} \left\{ \mathbf{u}_0 \nabla \mathbf{w}^L \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{w}^* \{ \nabla p^L \} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{w}^* \{ \nabla \cdot \mathbf{w}^L \nabla p_0 \} d\Omega \\ - \int_{\Omega} \mathbf{w}^* \{ {}^T \nabla \mathbf{w}^L \cdot \nabla p_0 \} d\Omega + \int_{\Gamma} \rho_0 \mathbf{w}^* (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_0) \left\{ \frac{d_0 \mathbf{w}^L}{dt} \right\} ds = \int_{\Omega} \mathbf{w}^* \{ \mathbf{f} \} d\Omega \quad (2.3) \\ \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} p^* p^L d\Omega - \int_{\Omega} \{ \nabla p^* \} \cdot \mathbf{w}^L d\Omega + \int_{\Gamma} p^* (\mathbf{w}^L \cdot \mathbf{n}_0) ds = \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} p^* g d\Omega \end{array} \right.$$

où \mathbf{n}_0 est la normale unitaire sortante du domaine fluide.

Une deuxième fois et afin d'alléger les équations, sans limiter le raisonnement, on suppose que les variables thermodynamiques moyennes sont constantes ($\nabla \rho_0 = \nabla p_0 = 0$) et que les parois traitées ou vibrante (rigide ou non) sont non permmissibles ($\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = 0$), d'autre part nous allons soustraire la deuxième équation de la première pour former la forme variationnelle faible en $(p, \mathbf{w}^L, p^*, \mathbf{w}^*)$:

Où $W^L(x, s)$ et $P(x, s)$ sont les transformées de la place de $w^L(x, t)$ et $p(x, t)$, $F(x, s)$ et $G(x, s)$ sont les transformées de la place de $f(x, t)$ et $g(x, t)$. Où $u_0^L(x)$ est la dérivée par rapport au temps de la fonction $\partial w^L(x, t) / \partial t$ à l'instant $t = 0$ et $w_0^L(x)$ est la valeur initiale de la fonction $w^L(x, t)$ à l'instant $t = 0$. Ce qui donne l'équation précédente sous forme :

$$\begin{aligned}
& s^2 \int_{\Omega} \rho_0 W^* W^L d\Omega + s \int_{\Omega} \rho_0 W^* \{u_0 \nabla W^L\} d\Omega - s \int_{\Omega} \rho_0 \{u_0 \nabla W^*\} W^L d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \rho_0 (u_0 \nabla W^*) \{u_0 \nabla W^L\} d\Omega + \int_{\Omega} W^* \{\nabla P^L\} d\Omega + \int_{\Omega} \{\nabla P^*\} W^L d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} P^* P^L d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_2} P^* \bar{W}_n dS = \int_{\Gamma_1} P^* (\bar{w} \cdot \mathbf{n}_0) dS + \int_{\Omega} W^* \{F\} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} P^* G d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \rho_0 W^* \{s w_0^L + u_0^L\} d\Omega + \int_{\Omega} \rho_0 W^* \{u_0 \nabla w_0^L\} d\Omega - \int_{\Omega} \rho_0 \{u_0 \nabla W^*\} w_0^L d\Omega
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\left(\nabla P^*, \nabla W^* / W^* = 0 \Big|_{\Gamma_1} \right)$$

Maintenant, on introduit la condition d'impédance et sa transformée de Laplace. La condition d'impédance sous l'hypothèse de paroi imperméable est donnée par [19] :

$$p^L = Z(\mathbf{u}^L \cdot \mathbf{n}_0) = Z\left(\frac{\partial w^L}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_0\right) \tag{2.9}$$

Et sa transformée de Laplace est :

$$\begin{aligned}
P^L &= Z([s W^L - w_0^L] \cdot \mathbf{n}_0) = sZ(W^L \cdot \mathbf{n}_0) - Z(w_0^L \cdot \mathbf{n}_0) \\
\Rightarrow \\
W^L \cdot \mathbf{n}_0 &= \frac{1}{sZ} \{P^L + Z(w_0^L \cdot \mathbf{n}_0)\} = \frac{1}{sZ} P^L + \frac{1}{s} (w_0^L \cdot \mathbf{n}_0)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Là aussi, une fois de plus, et afin d'alléger les équations, sans limiter le raisonnement, on suppose que les parois traitées sont non vibrante, on a alors :

$$W^L \cdot \mathbf{n}_0 = \frac{1}{sZ} P^L \tag{2.11}$$

Ce qui nous donne finalement une forme variationnelle avec l'application des conditions aux limites complètes :

$$\begin{aligned}
& s^2 \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{W}^* \mathbf{W}^L d\Omega + s \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{W}^* \{ \mathbf{u}_0 \nabla \mathbf{W}^L \} d\Omega - s \int_{\Omega} \rho_0 \{ \mathbf{u}_0 \nabla \mathbf{W}^* \} \mathbf{W}^L d\Omega \\
& - \rho_0 \int_{\Omega} (\mathbf{u}_0 \nabla \mathbf{W}^*) \{ \mathbf{u}_0 \nabla \mathbf{W}^L \} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{W}^* \{ \nabla P^L \} d\Omega + \int_{\Omega} \{ \nabla P^* \} \mathbf{W}^L d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} P^* P^L d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_2} P^* \overline{W}_n dS - \frac{1}{s} \int_{\Gamma_{2r}} \frac{1}{Z} P^* P^L dS = \int_{\Gamma_1} P^* (\overline{W} \cdot \mathbf{n}_0) dS + \int_{\Omega} \mathbf{W}^* \{ \mathbf{F} \} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} P^* G d\Omega \quad (2.12) \\
& + \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{W}^* \{ s \mathbf{w}_0^t + \mathbf{u}_0^t \} d\Omega + \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{W}^* \{ \mathbf{u}_0 \nabla \mathbf{w}_0^t \} d\Omega - \int_{\Omega} \rho_0 \{ \mathbf{u}_0 \nabla \mathbf{W}^* \} \mathbf{w}_0^t d\Omega \\
& \qquad \qquad \qquad \left(\nabla P^* , \nabla \mathbf{W}^* / \mathbf{W}^* = 0 \Big|_{\Gamma_1} \right)
\end{aligned}$$

Où Γ_{2r} est la frontière de la paroi traitée acoustique.

2.4 Discrétisation

Nous allons utiliser pour la discrétisation spatiale la méthode des éléments finis, en adaptant les différents éléments développés au laboratoire pour le régime fréquentiel [19]. Dans la suite de développement dans cette thèse, nous restons sur le cas 2D. Pour nos validations, notre choix s'est fixé sur l'élément triangulaire dénommé *T4-3c* pour sa simplicité et ses performances. D'autres éléments peuvent être également utilisés [19, 25]. Dans cet élément, la pression est interpolée linéairement et le déplacement est interpolé avec une base linéaire enrichie par un degré de liberté interne à l'élément associé à une fonction bulle, voir la Figure 2.2.

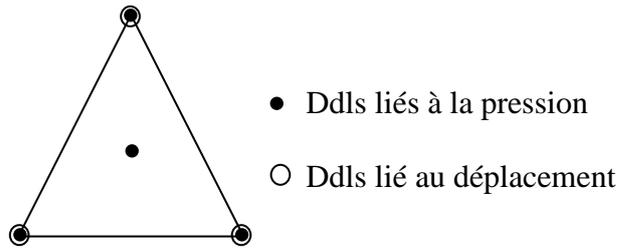


Figure 2.2 Élément fini utilisé pour la discrétisation spatiale, nommé *T4-3c*

Après assemblage pour l'Eq. (2.12), on aboutit finalement à un système matriciel du type :

$$\begin{bmatrix} s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{C} + \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} + 1 / s \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{W}^L \\ \mathbf{P}^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} + \Phi_0 \\ \mathbf{G} + \mathbf{B}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

où $\{ \mathbf{W}^L, \mathbf{P}^L \}$ sont les vecteurs inconnus du déplacement et de la pression. Les matrices utilisées dans les matrices globales assemblées ci-dessus correspondent respectivement à :

$$\begin{aligned}
{}^T \mathbf{W}^* \mathbf{M} \mathbf{W}^L &= \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{W}^* \mathbf{W}^L d\Omega \\
{}^T \mathbf{W}^* \mathbf{C} \mathbf{W}^L &= \int_{\Omega} \rho_0 \left[\mathbf{W}^* \{ \mathbf{u}_0 \nabla \mathbf{W}^L \} - \{ \mathbf{u}_0 \nabla \mathbf{W}^* \} \mathbf{W}^L \right] d\Omega \\
{}^T \mathbf{W}^* \mathbf{K}_{11} \mathbf{W}^L &= - \int_{\Omega} \rho_0 (\mathbf{u}_0 \nabla \mathbf{W}^L) \{ \mathbf{u}_0 \nabla \mathbf{W}^* \} d\Omega \\
{}^T \mathbf{W}^* \mathbf{K}_{12} \mathbf{W}^L &= \int_{\Omega} \mathbf{W}^* \{ \nabla P^L \} d\Omega \\
{}^T \mathbf{P}^* \mathbf{K}_{21} \mathbf{P}^L &= \int_{\Omega} \{ \nabla P^* \} \mathbf{W}^L d\Omega \\
{}^T \mathbf{P}^* \mathbf{K}_{22} \mathbf{P}^L &= - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} P^* P^L d\Omega \\
{}^T \mathbf{P}^* \mathbf{B}_1 \mathbf{P}^L &= - \int_{\Gamma_2} \frac{1}{Z} P^* P^L dS \\
{}^T \mathbf{W}^* \mathbf{F} &= \int_{\Omega} \mathbf{W}^* \{ \mathbf{F} \} d\Omega \\
{}^T \mathbf{W}^* \Phi_0 &= \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{W}^* \{ s \mathbf{w}_0^L + \mathbf{u}_0^L \} d\Omega + \int_{\Omega} \rho_0 \left[\mathbf{W}^* \{ \mathbf{u}_0 \nabla \mathbf{w}_0^L \} - \{ \mathbf{u}_0 \nabla \mathbf{W}^* \} \mathbf{w}_0^L \right] d\Omega \\
{}^T \mathbf{P}^* \mathbf{G} &= - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} P^* G d\Omega \\
{}^T \mathbf{P}^* \mathbf{B}_2 &= \int_{\Gamma_1} P^* (\overline{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{n}_0) dS + \int_{\Gamma_2} P^* \overline{\mathbf{W}}_n dS
\end{aligned}$$

Finalement, d'un point de vue algébrique, il s'agit de résoudre le système suivant pour un s fixé :

$$[\mathbf{K}_{eq}(s)] \{ \mathbf{U}_{eq}(s) \} = \{ \mathbf{F}_{eq}(s) \} \quad (2.14)$$

Ce système peut être résolu pour trouver la solution $\mathbf{U}_{eq}(s)$. Avec l'inverse de la transformée de Laplace, on trouve finalement la solution $\mathbf{U}_{eq}(t)$ en fonction du temps. Notre objectif est surtout de travailler sur l'aspect temporel et sa validation.

Annexe 2A : Conditions aux limites associées à

l'équation de Galbrun

L'équation de Galbrun est donnée par :

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{d_0^2 \mathbf{w}^L}{dt^2} + \nabla p^L + (\nabla \cdot \mathbf{w}^L) \nabla p_0 - {}^T \nabla \mathbf{w}^L \cdot \nabla p_0 = \mathbf{f} \\ p^L + \rho_0 c_0^2 \nabla \cdot \mathbf{w}^L = g \end{cases} \quad (2.15)$$

Dans le Tableau 1, nous résumons les différentes conditions aux limites associées au système ci-dessus :

Type	Expression	Conséquence	Terme de bord à calculer
Déplacement	$\mathbf{w}^L _{\Gamma_1} = \overline{\mathbf{w}}$	$\mathbf{w}^* _{\Gamma_1} = 0$	$-\int_{\Gamma_1} P^* (\overline{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{n}_0) dS$
Paroi vibrante	$\mathbf{w}^L \cdot \mathbf{n}_0 _{\Gamma_1} = \overline{w_n}$	$p^* _{\Gamma_1} \neq 0$ $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = 0$	$-\int_{\Gamma_1} P^* \overline{W}_n dS$
Paroi rigide	$\mathbf{w}^L \cdot \mathbf{n}_0 _{\Gamma_2} = 0$	$\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = 0$	0
Paroi absorbante	$\mathbf{W}^L \cdot \mathbf{n}_0 _{\Gamma_{2t}} = \frac{1}{sZ} P^L$	$\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = 0$	$\frac{1}{s} \int_{\Gamma_{2t}} \frac{1}{Z} P^* P^L dS$

Tableau 1. Types de conditions aux limites associées à l'équation de Galbrun

Annexe 2B : Transformée de Laplace

Notre choix c'est porté sur l'utilisation d'une transformation de Laplace pour résoudre le problème en temps. Ce choix est dicté d'une part par les performances des éléments développés en régime fréquentielle et en variables complexes et de l'utilisation d'une méthode de type éléments finis et d'autre part par les difficultés qui peuvent résulter d'une utilisation d'un schéma différences finies pour un opérateur de second ordre en temps. Toutes fois, l'utilisation de cette transformation, ne nous dispense pas d'autres difficultés que nous mentionnerons ci-dessous. Dans notre problème l'excitation acoustique, la fonction $f(t)$, quel que soit son origine est réelle et définie pour $t > 0$ avec des conditions initiales pour nos deux variables déplacement et pression. L'utilisation de méthode de transformation de Laplace a été étudiée dans le cadre de solutions d'éléments finis en électromagnétisme dans le passé [32].

1. Définition

Par définition, la transformée de Laplace pour la fonction $f(t)$ donne :

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \text{avec } s = a + ib \in \mathbb{C} \quad (2.16)$$

où F est appelé une image de la fonction f .

Les dérivées de la transformée de Laplace sont données par :

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right] = sF(s) - f(0) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}\right] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (2.17)$$

où $f(0)$ et $f'(0)$ sont les conditions initiales de la fonction $f(t)$. Avec la méthode de transformée de Laplace, nous pouvons toujours prendre en compte des conditions initiales non nulles.

La transformée inverse de Laplace est donnée par la formule intégrale de Bromwich :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{st} ds \quad (2.18)$$

où $f(t)$ = fonction en temps t , $F(s)$ = fonction de Laplace en s . Le contour d'intégration dans le plan complexe s est une droite parallèle à l'axe imaginaire b d'abscisse a positive. Le contour de Bromwich est représenté sur la Figure 2.3. L'évaluation de cette intégrale a été étudiée en détail dans la littérature [33-37].

L'accélération de calcul peut se faire par une déformation de ce contour en s'appuyant sur le théorème de Cauchy. On peut aussi modifier le trajet d'intégration Br comme indiqué

sur la Figure 2.3. Le changement de la direction d'intégration sur l'axe réel fait décroître très vite la fonction l'exponentielle dans la transformée inverse de Laplace et accélère donc la convergence. Pour le calcul numérique, on tronque ce trajet selon trois segments : AB , BC et CD . Le choix des paramètres géométriques b_1 et b_2 restent à définir. Il est nécessaire que ce nouveau trajet contienne les pôles.

En plus, l'Eq. (2.18) peut aussi être écrite par :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_0^{a+i\infty} F(s)e^{st} ds + \int_{a-i\infty}^0 F(s)e^{st} ds \right\} \quad (2.19)$$

En tenant compte du fait que la fonction $f(t)$ est toujours réelle et que la fonction $F(s)$ a une partie réelle paire et une partie imaginaire impaire, on peut donc simplifier l'intégration (2.18) en intégrant que les moitiés des points. Dans ce cas, on économise le temps de calcul et CPU pour chaque simulation numérique. L'Eq. (2.18) se simplifie par :

$$f(t) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{a+i\infty} F(s)e^{st} ds \quad (2.20)$$

Pour toutes les simulations numériques faites pendant cette thèse, nous avons choisi d'intégrer que sur la ligne aC à cause de la complicité de ce nouveau trajet et l'intégrale (2.20) est utilisée. Une amélioration et une optimisation de l'intégration de Bromwich peut être faites dans le cadre des futurs travaux.

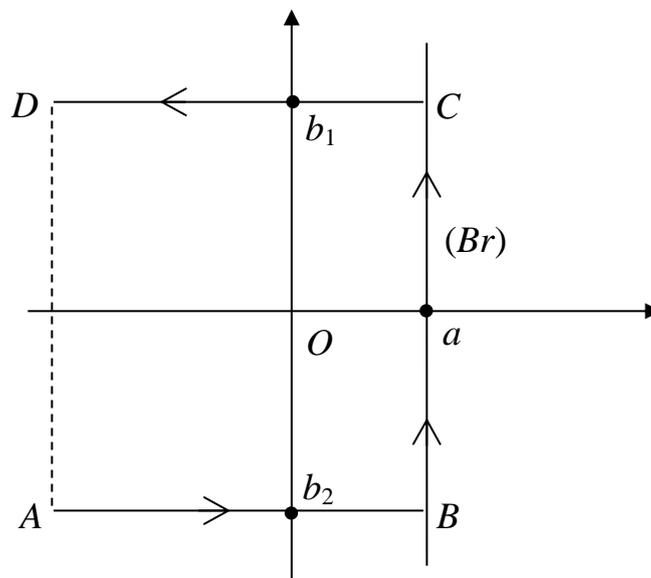


Figure 2.3 Le chemin d'intégration sur le plan complexe s

2. Influence des paramètres sur le plan complexe

- Paramètre de la partie réelle de s : a

Il est important de signaler que le choix de a est très important. a doit obligatoirement être choisi dans le demi-plan où la transformée de Laplace est holomorphe [110-112]. La transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ est dite holomorphe si :

$$|f(t)| < Me^{x_0 t} \quad \forall s = a + ib, a > x_0 \quad (2.21)$$

Mais le paramètre a ne peut pas être choisi arbitrairement grand, non plus. Prenons un exemple d'un signal sinus $f(t) = \sin(\omega t)$ où $\omega = 20$. Nous allons faire une transformation de Laplace de ce signal et le retransformer avec la transformée inverse de Laplace pour comparer avec le signal original. Dans ce cas, le paramètre b est choisi suffisamment grand pour l'intégration ($b > \omega$) et Δb est suffisamment petit pour stabiliser le schéma. En choisissant un a très petit (arbitrairement) $a = 0.001$ et un a très grand (arbitrairement) $a = 10$, on obtient les résultats respectivement sur la Figure 2.4 (a) et (b). Les deux cas montrent qu'on ne peut pas choisir un a arbitrairement très petit ou très grand. Plusieurs tests sont donc nécessaires avant de commencer à faire des simulations numériques. En effet, quand a est très grand, l'intégrale (2.20) croît rapidement de façon exponentielle et ne converge pas.

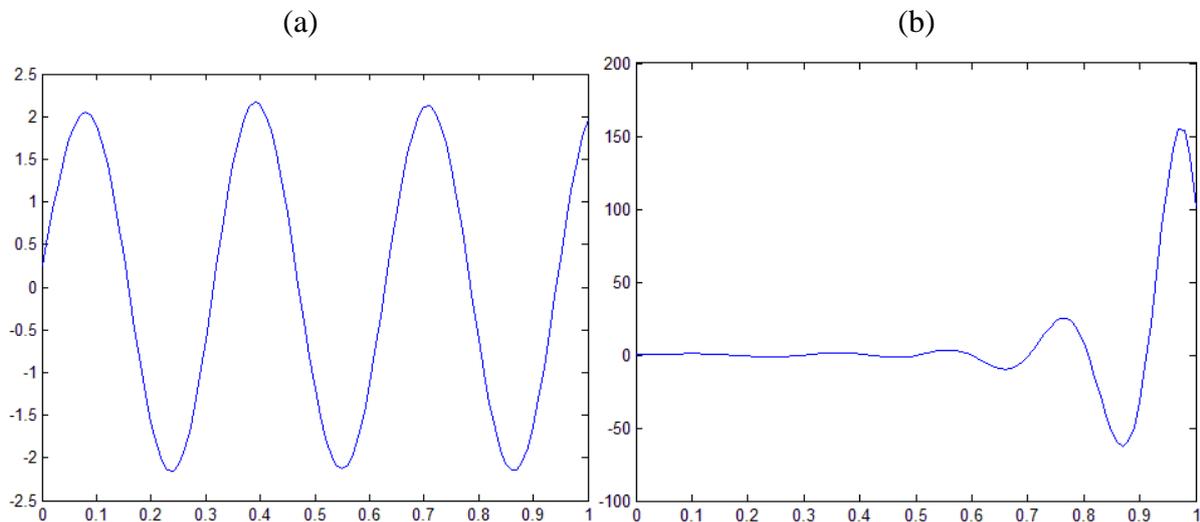


Figure 2.4 Signal sinus avec l'influence de paramètre a : (a) $a = 0.001$ et (b) $a = 10$

- Paramètre de la partie imaginaire de s : b

Sur l'axe imaginaire, les limites d'intégration doivent contenir les pôles. Typiquement, pour un signal sinus, les pôles se trouvent sur l'axe imaginaire $b = \pm\omega$. En fixant $a = 0.1$ (déjà testé), nous allons prendre le même signal sinus, et voir l'influence de b quand on prend l'intégrale relativement courte $b = 15$ et quand on prend l'intégrale relativement longue $b = 60$ (Figure 2.5). Théoriquement, plus grand est le paramètre b , plus petit sera l'erreur. Et Δb doit être suffisamment petit pour assurer la stabilité du schéma. Mais en pratique, on ne peut pas choisir un b arbitrairement grand à cause du coût de calcul.

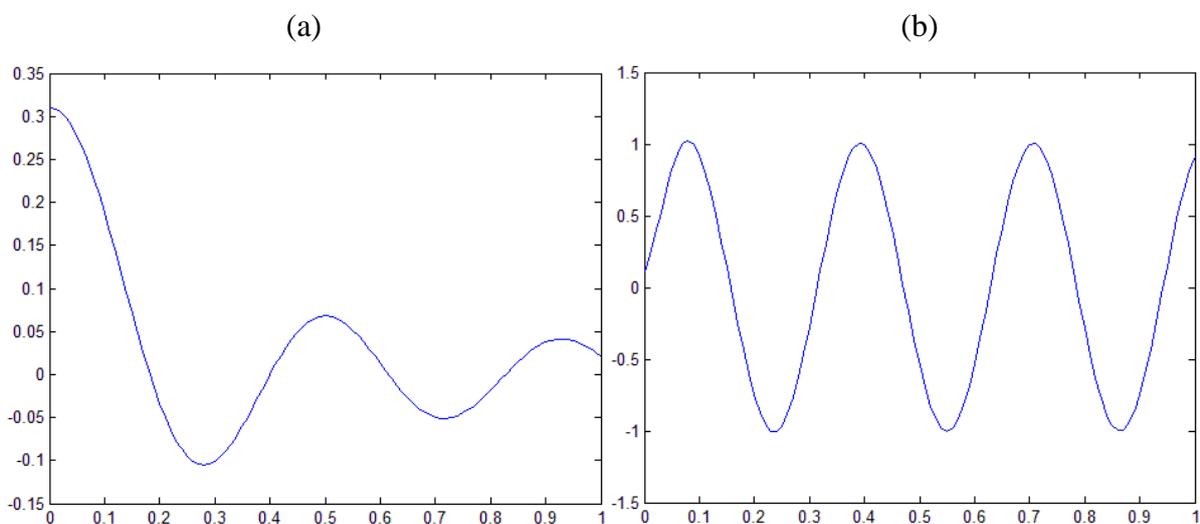


Figure 2.5 Signal sinus avec l'influence de paramètre b : (a) $b = 15$ et (b) $b = 60$

Chapitre 3

Couche parfaitement adaptée (Perfectly Matched Layer) associée à l'équation de Galbrun

Dans le chapitre 2, nous avons traité les conditions aux limites associées à l'équation de Galbrun excepté la condition de rayonnement en milieu non borné. Dans ce chapitre nous allons exposer une méthode basée sur les couches parfaitement adaptées (ou PML, Perfectly Matched Layer) associée à l'équation de Galbrun. Nous présentons tout d'abord une rapide synthèse bibliographique concernant les méthodes de traitement de la condition de rayonnement et nous détaillons les couches PML plus particulièrement associées aux équations d'Euler linéarisées. Nous développons ensuite notre formulation et nous la validons par un certain nombre d'exemples.

3.1 État de l'art

Pour résoudre les équations acoustiques ou aéroacoustiques dans un domaine non borné, plusieurs approches sont développées dans la littérature. On peut les classer en deux grandes catégories.

La première est celle des conditions de surface, où l'objectif est de mettre une condition de non-réflexion sur une surface d'un domaine tronqué. Les représentations (Boundary Element Method, BEM) qu'on peut considérer exactes mais limitées à des domaines homogènes (sans écoulement ou en présence d'un écoulement uniforme) consistent à reporter la représentation intégrale de surface sur la surface délimitant le domaine inhomogène. Les conditions DtN (Dirichlet-to-Neuman) sont des approximations de cette dernière basées sur des décompositions sur des fonctions propres tronquées [38, 39]. Il s'agit de traduire par approximation la condition de rayonnement de Sommerfeld. L'inconvénient majeur de ces approches est qu'elles sont non locales en espace et en temps. Elles sont donc, par nature, très coûteuses en espace mémoire et en temps de calcul. C'est pour cette raison qu'on trouve aussi des conditions aux limites approchées qui tentent de minimiser les réflexions sur les frontières artificielles. On parle alors de Conditions aux Limites Absorbantes (CLA). Les premiers travaux reviennent à Engquist et Majda [40] pour les ondes acoustiques en transitoire. Depuis, de nombreux travaux ont été réalisés [41-45].

La deuxième classe consiste à entourer le domaine d'intérêt par une couche absorbante. Dans cette couche on cherche à satisfaire deux objectifs : le premier (du moins en théorie) est de ne pas avoir de réflexion à l'interface entre domaine d'intérêt et couche absorbante et le deuxième est de ne pas avoir de réflexion en bout de couche. On trouve dans cette classe les éléments infinis, les couches absorbantes ou les couches parfaitement adaptées (PML). Cette dernière approche est basée sur une simulation d'une couche d'absorption de matériau d'amortissement virtuel entourant le domaine d'intérêt. Cette méthode est dite «parfaitement adaptée» car l'interface entre le domaine physique et la couche absorbante ne produit pas, en théorie (en pratique, la couche PML doit être tronquée à une distance finie du domaine d'intérêt), de réflexions parasites à l'intérieur du domaine d'intérêt. Elle a été utilisée par Bérenger [46] (1994) en variables séparées physiques pour la propagation des ondes électromagnétiques. Cette condition est maintenant largement utilisée dans de nombreux secteurs de l'ingénierie, en particulier dans la propagation des ondes acoustiques. Pour l'équation de Helmholtz, son utilisation est désormais largement répandue [47, 48], mais son application en aéroacoustique est moins courante. En effet, son application sous la forme

originale (variables séparées ou non séparées) devient plus compliquée et c'est notamment en raison de la complication de la physique elle-même comme nous allons le voir. Pour surmonter cette difficulté, de nouvelles formulations PML ont été développées dans la littérature. Hesthaven [49] a développé des couches ayant le même type de comportement que les PML pour stabiliser les équations, en ramenant artificiellement le nombre de Mach progressivement à zéro dans la couche. Ces couches ne sont toutefois plus parfaitement adaptées. Par la suite, Abarbanel *et al.* [50] ont analysé l'origine des instabilités de la forme classique constatées lors des premières tentatives de son application aux LEE et ont proposé une transformation appropriée pour le cas d'un écoulement uni-axiale avec des variables physiques non découplées. Tam et Bécache [51, 52] ont lié cette instabilité à la présence d'ondes inverses, dont les vecteurs de lenteur et les vitesses de groupe ont des signes opposés. Cela conduit à l'émergence de la croissance exponentielle des solutions dans la couche et pollue ainsi la solution du domaine d'intérêt. Ce n'est qu'un peu plus tard que Hu [53] revient sur la cause de l'instabilité, offre une explication et propose vraiment une nouvelle famille stable de la formulation PML. Pour les LEE, il fait une transformation spatio-temporelle avant d'appliquer la technique PML classique de sorte que dans les coordonnées transformées toutes les ondes aient des vecteurs de lenteur et des vitesses de groupe cohérents. Les LEE sont résolues numériquement par un schéma aux différences finies. Basé sur la même idée, dans le domaine temporel, Diaz [58] propose une analyse d'un des modèles PML pour l'équation d'advection acoustique. Cette méthode a également été récemment appliquée à l'équation de l'eau peu profonde en géophysique [54]. Hu [55, 56, 57] a depuis étendu ses travaux aux écoulements moyens non-uniformes pour les équations d'Euler non linéaires et au cas d'un écoulement bidirectionnel. Bécache *et al.* [18, 59], à l'aide de la méthode de Cagniard-Hoop, ont développé avec succès des PML pour l'équation de Galbrun en utilisant la technique de régularisation.

En se basant sur l'ensemble de ces travaux, nous présentons dans ce chapitre une formulation PLM associée à la formulation mixte de l'équation de Galbrun développée au chapitre 2. Notre démarche s'inspire de celle de Hu [53, 56]. Pour la valider, nous l'appliquons, pour différents types de sources (rotationnel et irrotationnel), et des exemples choisis dans la littérature. Nous étudierons d'abord le cas de l'écoulement uniforme, ensuite nous présenterons le cas de l'écoulement non-uniforme.

3.2 Aspects théoriques de PML classique

3.2.1 Formulation classique

On introduit une couche dissipative $\Omega_2 = [|x| \geq x_0, |y| \geq y_0]$ qui entoure le domaine acoustique d'intérêt $\Omega_1 = [|x| < x_0, |y| < y_0]$, afin d'absorber les ondes sortantes. On note $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, l'ensemble du domaine numérique. Cette couche dissipative peut être vue comme milieu visqueux équivalent [60]. Mais elle peut être vue (ce qui est souvent présenté dans la littérature), d'un point de vu mathématique, comme un changement de variables appliqué au système. On introduit les variables complexes dans le domaine harmonique suivantes (avec la convention $e^{-i\omega t}$) :

$$x \rightarrow x + \frac{i}{\omega} \int_{x_0}^x \sigma_x(x) dx \quad \text{et} \quad y \rightarrow y + \frac{i}{\omega} \int_{y_0}^y \sigma_y(y) dy \quad (3.1)$$

où σ_x et σ_y sont des coefficients positifs d'absorption. On définit également γ_x et γ_y tels que :

$$\gamma_x = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < x_0 \\ 1 + \frac{i\sigma_x}{\omega} & \text{si } |x| \geq x_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \gamma_y = \begin{cases} 1 & \text{si } |y| < y_0 \\ 1 + \frac{i\sigma_y}{\omega} & \text{si } |y| \geq y_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

et on obtient alors les transformations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \frac{1}{\gamma_y} \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.3)$$

Dans les coins, les deux absorptions se conjuguent, voir la Figure 3.1. Ces coefficients d'absorption peuvent être des fonctions respectives de x et y . Pour éviter qu'il se produise des réflexions sur les frontières externes, beaucoup de choix et d'études d'optimisation sont proposés. Si le choix d'une valeur constante pour σ_x et/ou σ_y assure le caractère adapté à l'interface pour le problème continu, il n'en est pas de même pour le problème discret. Pour cette raison il faut choisir des valeurs qui dépendent de x et y .

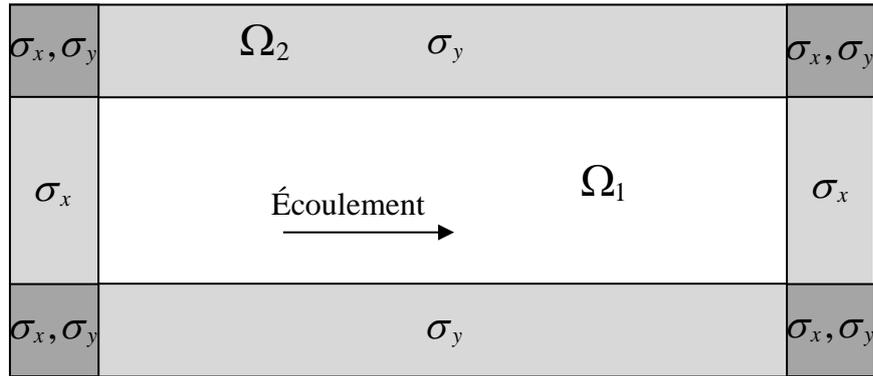


Figure 3.1 Domaine de calcul avec la couche PML

Généralement dans la littérature, des fonctions quadratiques sont utilisées :

$$\begin{aligned}\sigma_x(x) &= \beta_x (|x| - x_0)^2 & \forall |x| \geq x_0 \\ \sigma_y(y) &= \beta_y (|y| - y_0)^2 & \forall |y| \geq y_0\end{aligned}\quad (3.4)$$

Les paramètres du domaine PML peuvent être ajustés pour une absorption optimale. Hu [56] propose par exemple les fonctions σ_x et σ_y :

$$\sigma = \beta_m \left(\frac{d}{D} \right)^n \quad (3.5)$$

où D est l'épaisseur du domaine PML, d est la distance entre un point de PML et l'interface, β_m est la valeur maximum de β et n est la puissance de la fonction. Les paramètres du domaine PML peuvent être ajustés pour une absorption optimale. Ils peuvent également être déterminés indépendamment de la taille du domaine acoustique. L'expérience [56] montre qu'une valeur comme :

$$\frac{\beta_m D}{n+1} \approx 8 \quad (3.6)$$

peut être un résultat satisfaisant. Typiquement, dans notre cas ($n = 2$), on aura $\beta_m D \approx 24$. Mais cette relation reste à vérifier dans nos exemples numériques. Dans la section 3.2, nous allons tenter de faire une analyse des paramètres PML. Le but est de trouver une relation entre l'épaisseur de la couche PML, le coefficient d'absorption et la pulsation. Une étude plus approfondie, peut faire l'objet d'une extension de ce travail.

3.2.2 Application à l'équation de Galbrun

Dans cette section, nous allons appliquer la formulation de PML classique à l'équation de Galbrun en formulation mixte avec les hypothèses physiques simplificatrices retenues dans le chapitre 2 (un fluide parfait, l'écoulement moyen satisfait les équations d'Euler d'un fluide incompressible stationnaire, ...). De plus, dans ce chapitre, nous allons travailler avec des valeurs adimensionnelles. Les valeurs de références suivantes ρ_0, c_0 et $L_0 = 1$. Ce qui nous donne par exemple :

$$\vec{w}^L = \frac{\vec{w}^{ph}}{L_0}, \vec{u} = \frac{\vec{u}^{ph}}{c_0}, \vec{u}_0 = \frac{\vec{u}_0^{ph}}{c_0} = \vec{M}, \rho = \frac{\rho^{ph}}{\rho_0}, p = \frac{p^{ph}}{\rho_0 c_0^2}, t = \frac{c_0}{L_0} t^{ph}, \omega = \frac{L_0}{c_0} \omega^{ph}$$

Où la grandeur f^{ph} est la grandeur physique réelle de la variable adimensionnelle f utilisée pour le calcul dans les exemples de validation. L'équation de Galbrun en représentation mixte pour un nombre de Mach M constant dans la direction x s'écrit simplement :

$$\begin{cases} \frac{d_0^2 \mathbf{w}^L}{dt^2} + \nabla p^L = \mathbf{f} \\ p^L + \nabla \cdot \mathbf{w}^L = g \end{cases} \quad \text{avec} \quad \frac{d_0}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.7)$$

où

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{w}^L = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$$

\mathbf{f} et g sont respectivement les sources extérieures pour le déplacement lagrangien et la pression acoustique.

La transformation PML est d'abord appliqué à l'opérateur (3.7). En développant la dérivée matérielle on obtient :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{M}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w_x^L + \frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial p^L}{\partial x} = f_x \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{M}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w_y^L + \frac{1}{\gamma_y} \frac{\partial p^L}{\partial y} = f_y \\ p^L + \frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial w_x^L}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_y} \frac{\partial w_y^L}{\partial y} = g \end{cases} \quad (3.8)$$

L'application de la démarche présentée au chapitre 2 sur cette forme, simplifiée et modifiée, du système mixte nous donne une forme variationnelle :

$$\begin{aligned}
& s^2 \int_{\Omega} \gamma_x \gamma_y W_x^* W_x^L d\Omega + s \int_{\Omega} \gamma_y M \left(W_x^* \frac{\partial W_x^L}{\partial x} - \frac{\partial W_x^*}{\partial x} W_x^L \right) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\gamma_y}{\gamma_x} M^2 \left(\frac{\partial W_x^*}{\partial x} \frac{\partial W_x^L}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \gamma_y W_x^* \frac{\partial P^L}{\partial x} d\Omega = \Phi_{0x} + \int_{\Omega} \gamma_x \gamma_y W_x^* F_x d\Omega \\
& s^2 \int_{\Omega} \gamma_x \gamma_y W_y^* W_y^L d\Omega + s \int_{\Omega} \gamma_y M \left(W_y^* \frac{\partial W_y^L}{\partial x} - W_y^L \frac{\partial W_y^*}{\partial x} \right) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\gamma_y}{\gamma_x} M^2 \left(\frac{\partial W_y^*}{\partial x} \frac{\partial W_y^L}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \gamma_x W_y^* \frac{\partial P^L}{\partial y} d\Omega = \Phi_{0y} + \int_{\Omega} \gamma_x \gamma_y W_y^* F_y d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \gamma_x \gamma_y P^* P^L d\Omega + \int_{\Omega} \left(\gamma_y W_x^L \frac{\partial P^*}{\partial x} + \gamma_x W_y^L \frac{\partial P^*}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \gamma_x \gamma_y P^* G d\Omega
\end{aligned} \tag{3.9}$$

avec

$$\Phi_0 = \int_{\Omega} \gamma_x \gamma_y W^* (s w_0^L + u_0^L) d\Omega + \int_{\Omega} \gamma_y M \left(W^* \frac{\partial w_0^L}{\partial x} - \frac{\partial W^*}{\partial x} w_0^L \right) d\Omega$$

Quand $\gamma_x = 1$ et $\gamma_y = 1$ (dans le domaine acoustique), on retrouve les termes des conditions initiales dans l'Eq. (2.12). Quand $\gamma_x \neq 1$ et $\gamma_y \neq 1$ (dans le domaine artificiel PML), on peut prendre les conditions initiales de toutes les variables transitoires nulles. A l'interface du domaine acoustique et la couche PML, il n'y a pas d'intégrale de frontière à calculer. En effet, c'est la continuité qui est vérifiée, puisque la couche est adaptée. Aux frontières extérieures de la couche PML, toutes les variables dans l'Eq. (3.9) sont imposés à zéro (l'hypothèse généralement prise). La formulation variationnelle finale est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
& s^2 \int_{\Omega} \gamma_x \gamma_y W_x^* W_x^L d\Omega + s \int_{\Omega} \gamma_y M \left(W_x^* \frac{\partial W_x^L}{\partial x} - \frac{\partial W_x^*}{\partial x} W_x^L \right) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\gamma_y}{\gamma_x} M^2 \left(\frac{\partial W_x^*}{\partial x} \frac{\partial W_x^L}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \gamma_y W_x^* \frac{\partial P^L}{\partial x} d\Omega = \Phi_{0x} + \int_{\Omega} W_x^* F_x d\Omega \\
& s^2 \int_{\Omega} \gamma_x \gamma_y W_y^* W_y^L d\Omega + s \int_{\Omega} \gamma_y M \left(W_y^* \frac{\partial W_y^L}{\partial x} - W_y^L \frac{\partial W_y^*}{\partial x} \right) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\gamma_y}{\gamma_x} M^2 \left(\frac{\partial W_y^*}{\partial x} \frac{\partial W_y^L}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \gamma_x W_y^* \frac{\partial P^L}{\partial y} d\Omega = \Phi_{0y} + \int_{\Omega} W_y^* F_y d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \gamma_x \gamma_y P^* P^L d\Omega + \int_{\Omega} \left(\gamma_y W_x^L \frac{\partial P^*}{\partial x} + \gamma_x W_y^L \frac{\partial P^*}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} P^* G d\Omega
\end{aligned} \tag{3.10}$$

avec

$$\Phi_0 = \int_{\Omega} W^* (s w_0^L + u_0^L) d\Omega + \int_{\Omega} M \left(W^* \frac{\partial w_0^L}{\partial x} - \frac{\partial W^*}{\partial x} w_0^L \right) d\Omega$$

3.2.2.1 Premier exemple : sans écoulement

Le premier exemple, que nous étudions, simule la propagation d'une source irrotationnelle placée au centre du domaine de calcul, sans écoulement moyen [17] :

$$f(r,t) = T(t) \nabla E(r) \quad (3.11)$$

$$\text{Où } T(t) = \begin{cases} e^{-\pi^2 f_0^2 (t-t_0)^2} & \text{si } t \leq 2t_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad E(r) = \begin{cases} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^3 & \text{si } r \leq r_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $f_0 = 10/3$, $t_0 = 1/f_0$, $r_0 = 0.5$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Nous rappelons ici que tous les calculs sont faits en grandeurs adimensionnelles. Des tests ont été réalisés pour trouver les bonnes valeurs de a et b du plan complexe de s dans la transformée de Laplace pour bien décrire le signal, (voir les Figures 3.2 et 3.3). Le spectre du signal est pris pour une durée de temps de $t = 15$. Nous avons $a = 0.01$, $b = [0:0.1:400]$ et $\Delta t = 0.01$. Notons que la partie réelle du spectre est symétrique par rapport à l'axe centrale, en revanche la partie imaginaire est antisymétrique par rapport à l'axe centrale.

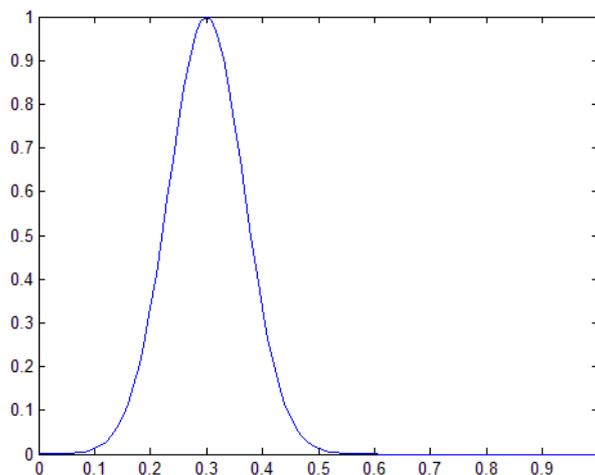


Figure 3.2 Signal temporel en fonction du temps t

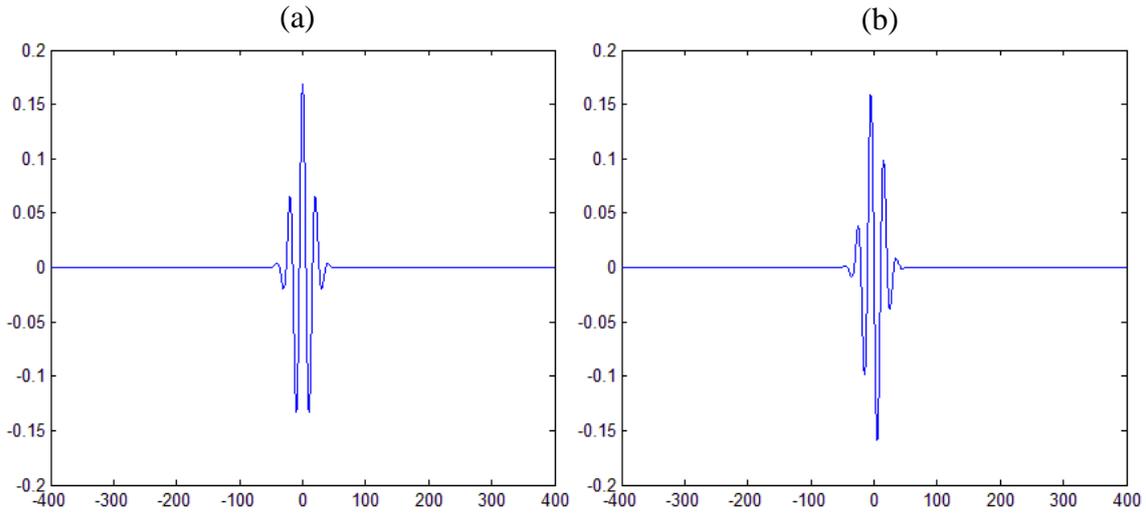


Figure 3.3 Spectre du signal en fonction de b : (a) partie réelle et (b) partie imaginaire

Notre domaine de calcul acoustique est un rectangle de $\Omega_1 = [-2,2] \times [-1,1]$. Nous considérons un maillage non-régulier composé des éléments triangulaires du côté maximal $\Delta x = 0.05$ pour le domaine PML et un maillage régulier composé des éléments triangulaires du côté maximal $\Delta x = 0.05$ pour le domaine de calcul acoustique, voir la Figure 3.4. Ce maillage correspond à $\lambda/5$, où λ est la longueur d'onde. Nous avons choisi $E_{pml} = 1$. La couche PML se trouve aux quatre côtés de domaine acoustique.

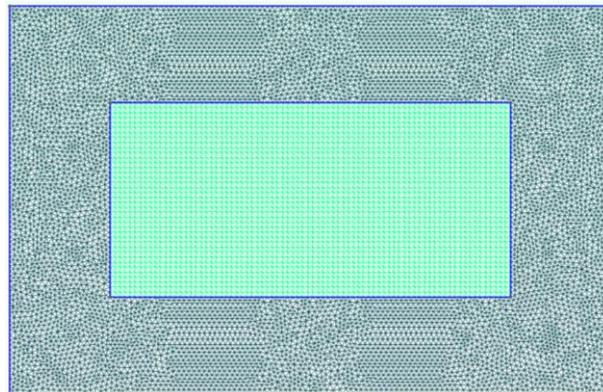


Figure 3.4 Le maillage du domaine PML et acoustique

Nous avons fixé les constantes d'absorption $\beta_x = \beta_y = \beta = 5$ pour les directions x et y . Ces coefficients sont obtenus après plusieurs tests numériques. Les Figures 3.5 et 3.6 représentent les résultats pour les champs de pression acoustique et de déplacement lagrangien aux différents moments. On note que les ondes acoustiques sont absorbées parfaitement par la couche. Il n'y a pas de réflexion.

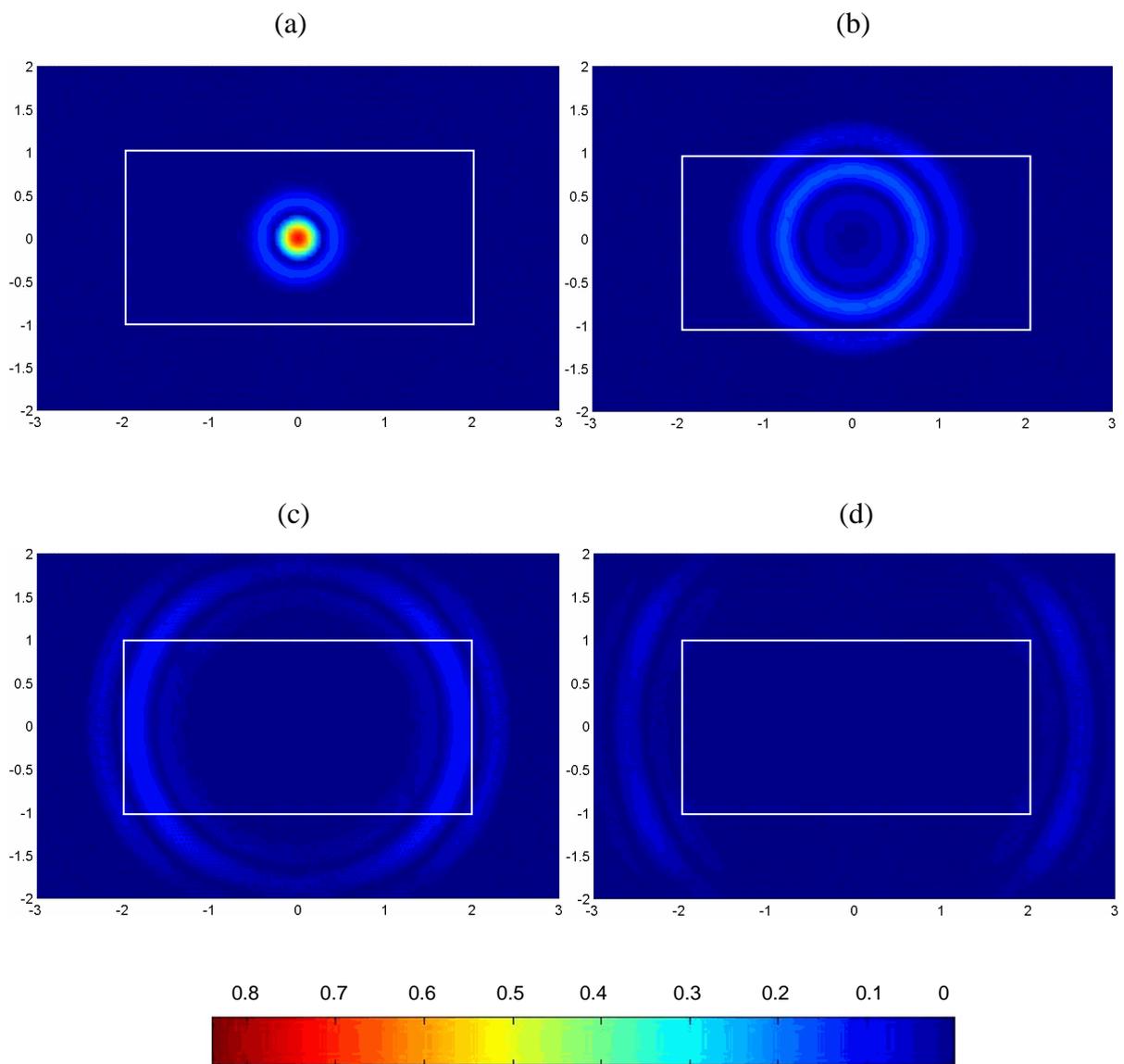


Figure 3.5 Le champ de pression acoustique à $M = 0$ avec la formulation PML classique :

(a) $t = 0.45$ (b) $t = 1.23$ (c) $t = 2.21$ (d) $t = 3.06$

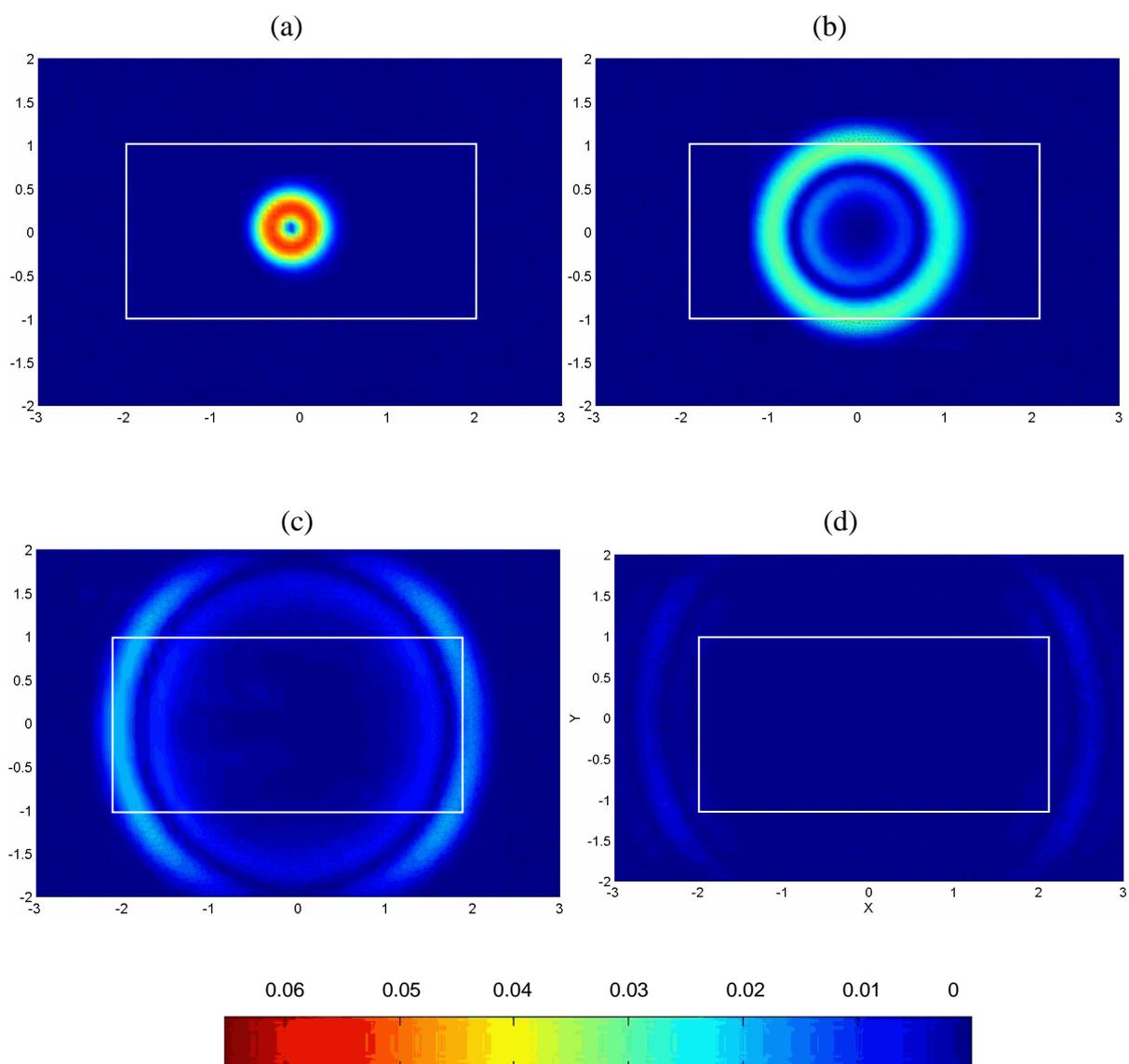


Figure 3.6 Le champ de déplacement lagrangien correspondants à $M = 0$ avec la formulation PML classique : (a) $t = 0.45$ (b) $t = 1.23$ (c) $t = 2.21$ (d) $t = 3.06$

3.2.2.2 Deuxième exemple : écoulement unidirectionnel

Dans cette section, nous allons voir l'influence de l'écoulement sur la formulation PML classique. Nous reprenons l'exemple précédent en présence d'un écoulement unidirectionnel suivant la direction x avec un nombre de Mach $M = 0.5$. Avec l'expérience précédente, nous fixons $\beta_x = \beta_y = \beta = 5$. Les Figures 3.7 et 3.8 représentent les résultats pour les champs de pression acoustique et de déplacement lagrangien aux différents moments à $M = 0.5$. On observe que même si pour la pression les résultats restent globalement acceptables, le déplacement est complètement erroné. Une instabilité existe dans la couche PML pour ce champ et elle se manifeste surtout à l'amont de l'écoulement. La formulation PML classique n'est plus valable en présence de l'écoulement. Ce résultat attendu a été constaté et l'origine a été analysée par beaucoup d'auteurs [48, 51, 52, 108, 109]. Nous allons ici seulement le vérifier sur le cas de notre formulation mixte. Nous rappelons dans le paragraphe suivant l'origine et l'explication présentées dans la littérature de la défaillance de la formulation classique.

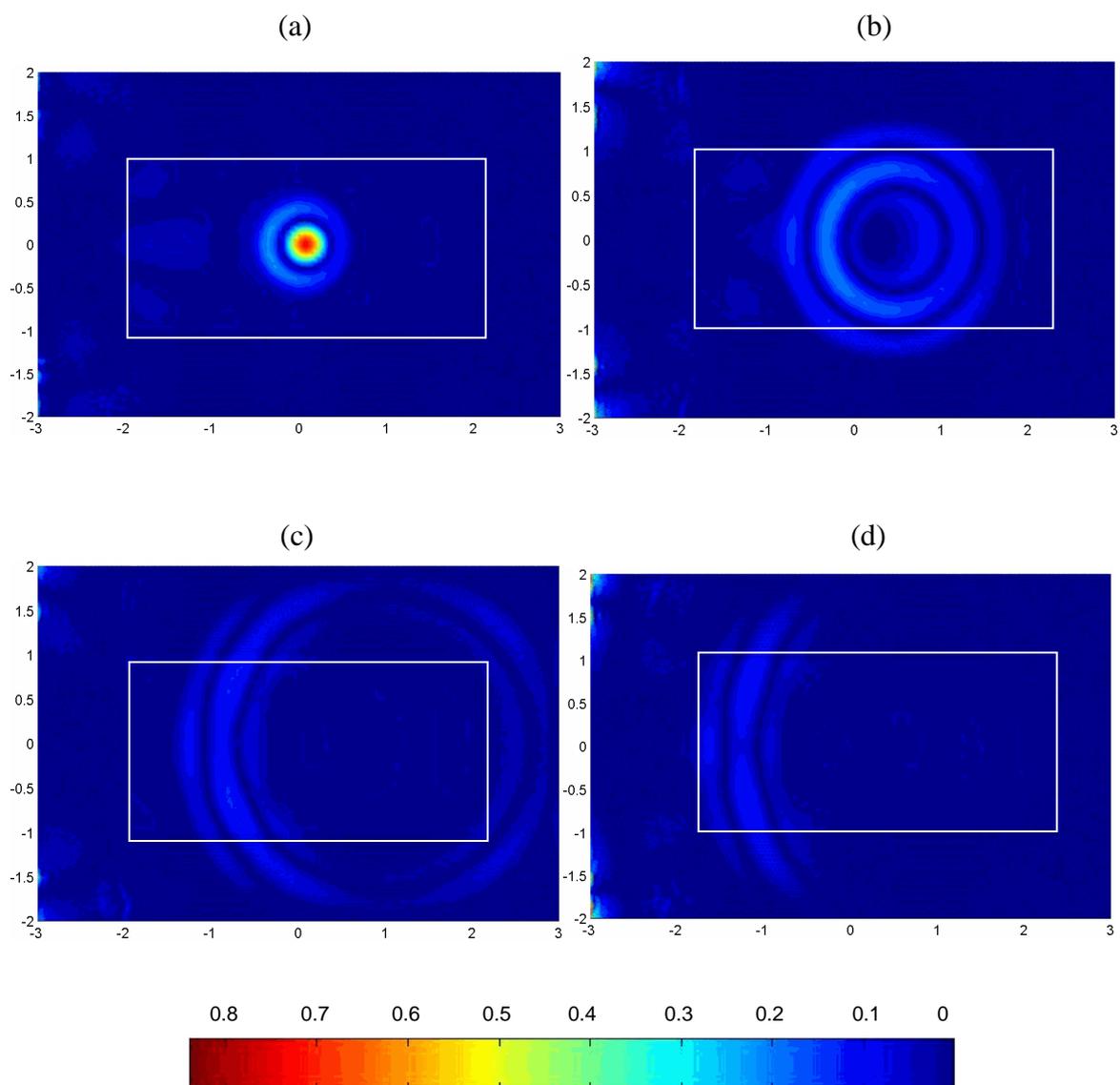


Figure 3.7 Le champ de pression acoustique à $M = 0.5$ avec la formulation PML classique :

(a) $t = 0.45$ (b) $t = 1.23$ (c) $t = 2.21$ (d) $t = 3.06$

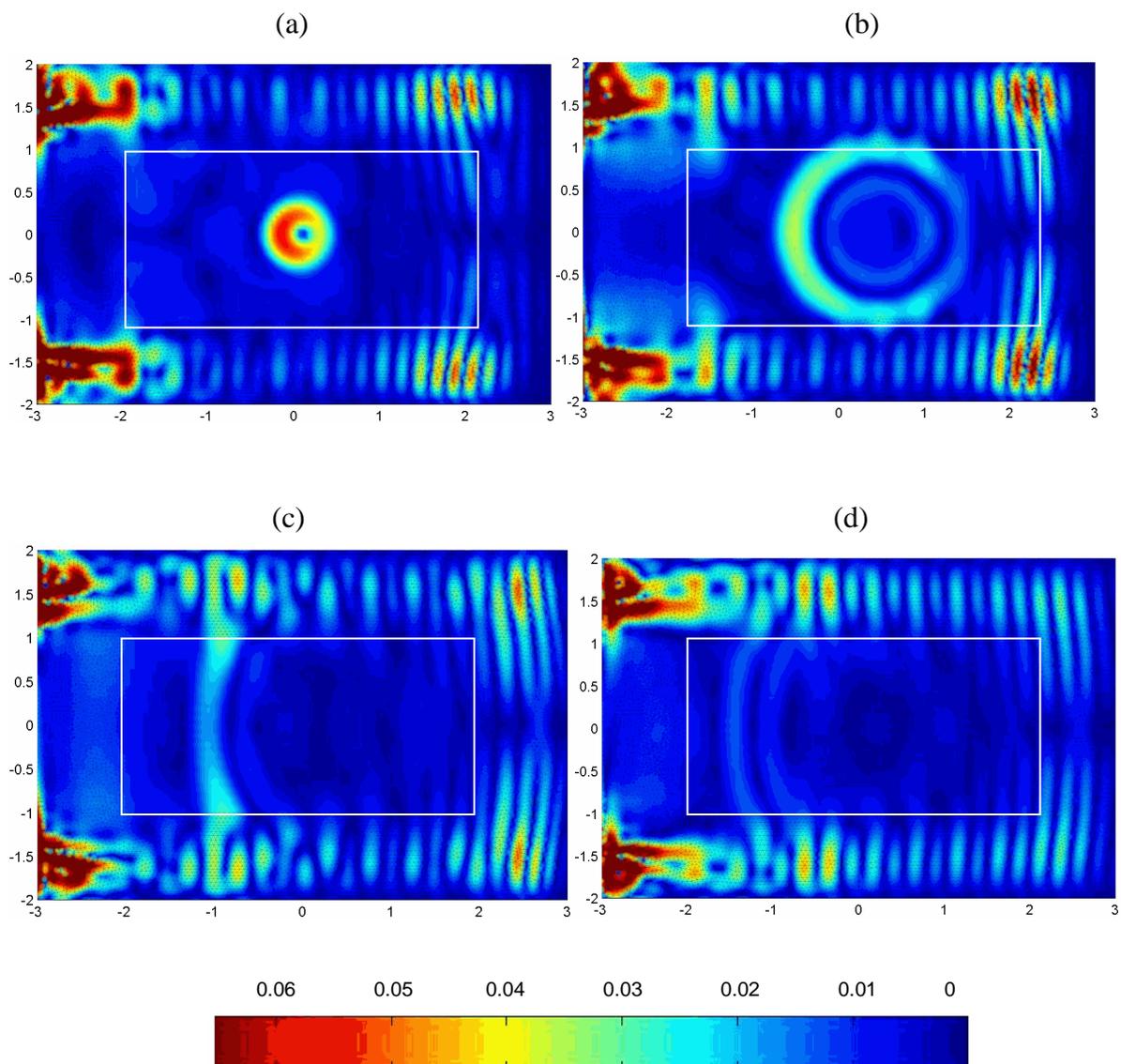


Figure 3.8 Le champ de déplacement lagrangien correspondants à $M = 0.5$ avec la formulation PML classique : (a) $t = 0.45$ (b) $t = 1.23$ (c) $t = 2.21$ (d) $t = 3.06$

3.2.3 Analyse de l'instabilité

Pour comprendre l'origine de cette instabilité, nous allons utiliser la démarche suivie par HU [53, 56, 61] et l'appliquer à la formulation mixte. Pour cela, on va mettre en évidence les différents modes physiques qui sont portés par l'équation de Galbrun de la formulation mixte (3.7) dans le cas d'un écoulement uniforme et uniaxial. Pour cela, on va chercher des solutions sous une forme d'onde plane :

$$\begin{cases} w_x^L = w_x^* e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \\ w_y^L = w_y^* e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \\ p^L = p^* e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \end{cases} \quad (3.12)$$

où k_x et k_y sont les nombres d'onde selon la direction x et y , et ω est la pulsation. En introduisant l'expression (3.12) dans l'équation de Galbrun (3.7), on obtient un système linéaire noté :

$$\left[\begin{array}{c} \mathbb{Q} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} w_x^* \\ w_y^* \\ p^* \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbb{Q} = \begin{bmatrix} -(\omega - Mk_x)^2 & 0 & ik_x \\ 0 & -(\omega - Mk_x)^2 & ik_y \\ ik_x & ik_y & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Ce système linéaire n'admet de solutions non triviales que pour :

$$(\omega - Mk_x)^2 \left[(\omega - Mk_x)^2 - k_x^2 - k_y^2 \right] = 0 \quad (3.14)$$

En particulier, la relation de dispersion pour les ondes acoustiques, dites ondes advectives, est :

$$(\omega - Mk_x)^2 - k_x^2 - k_y^2 = 0 \quad (3.15)$$

ou

$$\left(1 - M \frac{k_x}{\omega} \right)^2 - \left(\frac{k_x}{\omega} \right)^2 - \left(\frac{k_y}{\omega} \right)^2 = 0 \quad (3.16)$$

La relation de dispersion pour le mode hydrodynamique (mode de vorticité), est :

$$\omega - Mk_x = 0 \quad (3.17)$$

ou

$$\frac{k_x}{\omega} = \frac{1}{M} \quad (3.18)$$

Il s'agit d'un mode transversal, sa direction est perpendiculaire au sens de propagation. Par conséquent, sa contribution à la pression est nulle, il est purement rotationnel.

Il est maintenant bien connu, dans la littérature, que cette instabilité est attribuée aux modes amont-inverses [51-53]. Ces modes sont caractérisés par un signe opposé entre la

projection sur la direction de l'écoulement de la vitesse de groupe (sens du flux de l'énergie) et celui de la vitesse de phase. Ce critère peut être identifié sur la courbe de dispersion décrite dans le plan des vecteurs de lenteur, par exemple, dans le plan $(k_x / \omega, k_y / \omega)$ représenté dans la Figure 3.10. Dans notre cas, il s'agit d'une ellipse centrée au point $(-M / (1 - M^2), 0)$ pour les ondes acoustiques et d'une ligne d'équation $k_x / \omega = 1 / M$ pour les ondes de vorticité. La vitesse de groupe et le vecteur lenteur sont définis respectivement, par $v_g = \nabla_k \omega$ et $l = [k_x / \omega, k_y / \omega]$. Le décentrage de l'ellipse fait apparaître de tels modes instables (en rouge). La zone d'instabilité est pour $-M / (1 - M^2) < k_x / \omega < 0$.

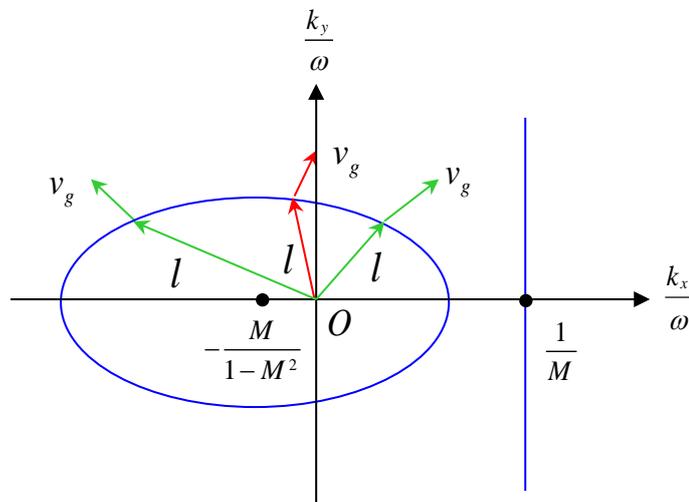


Figure 3.10 Courbes de lenteur de la formulation PML classique

Nous pouvons également observer cette instabilité dans la couche PML. Les relations de dispersion pour (3.15) et (3.17) se transforment, en remplaçant k_x et k_y avec les expressions :

$$k_x \rightarrow \frac{k_x}{1 + i\sigma_x / \omega} \quad \text{et} \quad k_y \rightarrow \frac{k_y}{1 + i\sigma_y / \omega} \quad (3.19)$$

Et on obtient :

$$\left(\omega - M \frac{k_x}{1 + i\sigma_x / \omega} \right)^2 - \left(\frac{k_x}{1 + i\sigma_x / \omega} \right)^2 - \left(\frac{k_y}{1 + i\sigma_y / \omega} \right)^2 = 0 \quad (3.20)$$

et

$$\omega - M \frac{k_x}{1 + i\sigma_x / \omega} = 0 \quad (3.21)$$

Pour l'Eq. (3.21), $\omega = Mk_x - i\sigma_x$ avec une partie imaginaire toujours négative (en assurant le coefficient d'absorption σ_x toujours positive). Cela donne une solution exponentiellement décroissante et permet une stabilité. Pour certaines valeurs réelles de k_x et k_y dans l'Eq. (3.20), nous obtenons certaines fréquences complexes de ω avec une partie imaginaire positive comme solution, ce qui donne donc des solutions exponentiellement croissantes instables.

Dans la Figure 3.11, nous traçons les contours de la partie imaginaire de ω en fonction de k_x et k_y en prenant $M = 0.5$, $\sigma_x = 5$ et $\sigma_y = 0$. Ainsi, dans les calculs pratiques, il serait difficile de supprimer l'instabilité survenant dans l'écoulement avec un nombre de Mach élevé. Dans les cas particuliers, à $k_y = 0$, on trouve $\omega = k_x(M \pm 1) - i\sigma_x$ et à $k_x = 0$, on trouve $\omega = \pm k_y - i\sigma_y$. Les coefficients d'absorption sont des valeurs positives et on retrouve la partie imaginaire de ω toujours négative.

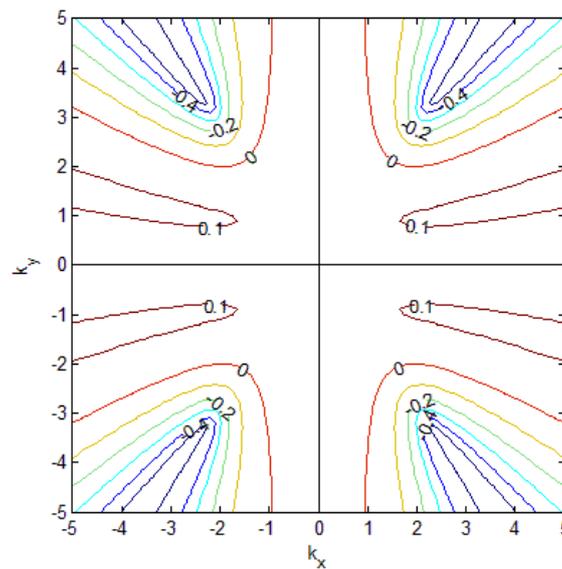


Figure 3.11 Contour de la partie imaginaire de ω pour la méthode PML classique

3.2.4 Conclusion

Dans cette section, nous avons d'abord testé l'efficacité de la formulation PML classique associée à l'équation de Galbrun. Elle est efficace si l'écoulement est nul. Une instabilité est confirmée lorsque l'écoulement est uniforme ($M \neq 0$). Cette instabilité se produit dès le début de la simulation (instant zéro) et surtout dans la couche PML en amont de l'écoulement. Le déplacement lagrangien est plus sensible à l'instabilité que la pression acoustique. Les ondes acoustiques se propagent correctement dans le domaine de calcul. A l'interface du domaine, les ondes acoustiques sont perturbées à cause de l'instabilité. Nous avons analysé la relation de dispersion et confirmé les causes mentionnées dans la littérature de cette instabilité. Les vecteurs de lenteur et les vitesses de groupe permettent l'identification de cette zone. Pour certaines fréquences, des solutions exponentiellement croissantes peuvent apparaitre dans la couche et polluer la solution.

3.3 Modèle de PML généralisée pour un écoulement

3.3.1 Formulation en écoulement uniforme

Après d'étude de stabilité, réalisé par Hu [52, 55, 56], il propose un nouveau changement de variables qui permet d'obtenir la cohérence requise entre les vecteurs lenteurs et les vitesses de groupe. Ceci revient à appliquer une translation avant la similitude. Ce changement de variables a pour conséquence de translater l'ellipse par $(-M / (1 - M^2), 0)$ pour que son centre soit situé à l'origine. On introduit donc de nouvelles inconnues tels que :

$$\frac{\bar{k}_x}{\bar{\omega}} = \frac{k_x}{\omega} + \frac{M}{1 - M^2} \quad (3.22)$$

Si l'on impose $\bar{\omega} = \omega$, cette relation devient :

$$\bar{k}_x = k_x + \frac{M}{1 - M^2} \omega \quad (3.23)$$

Ce changement de variables peut aussi être exprimé à travers des variables spatio-temporelles :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} - \alpha \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{M}{1 - M^2} \quad (3.24)$$

Suite à ces transformations similaires, on définit aussi une nouvelle \bar{k}_y tel que :

$$\bar{k}_y = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}} k_y \quad (3.25)$$

Pour résumer, les nouvelles variables sont définies comme suivantes :

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = \sqrt{1 - M^2} y, \quad \bar{t} = t + \alpha x \quad (3.26)$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \alpha \frac{\partial}{\partial \bar{t}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sqrt{1 - M^2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \quad (3.27)$$

On retrouve l'expression de la nouvelle matrice \mathbb{Q} dans le système linéaire (3.13) tel que :

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\bar{\omega}}{1 - M^2} - M\bar{k}_x\right)^2 & 0 & i\bar{k}_x - i\bar{\omega}\alpha \\ 0 & -\left(\frac{\bar{\omega}}{1 - M^2} - M\bar{k}_x\right)^2 & i\bar{k}_y\sqrt{1 - M^2} \\ i\bar{k}_x - i\bar{\omega}\alpha & i\bar{k}_y\sqrt{1 - M^2} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Ainsi que les nouvelles relations de dispersion pour les ondes advectives :

$$\frac{1}{(1-M^2)^2} - \left(\frac{\bar{k}_x}{\bar{\omega}}\right)^2 - \left(\frac{\bar{k}_y}{\bar{\omega}}\right)^2 = 0 \quad (3.29)$$

et pour les ondes de vorticité :

$$\frac{\bar{k}_x}{\bar{\omega}} = \frac{1}{M(1-M^2)} \quad (3.30)$$

Comme on peut le voir, les ondes acoustiques sont désormais non convectives dans le nouveau plan des variables transformées et, en outre, les directions de propagation pour les ondes de vorticité ne sont pas altérées (Figure 3.12).

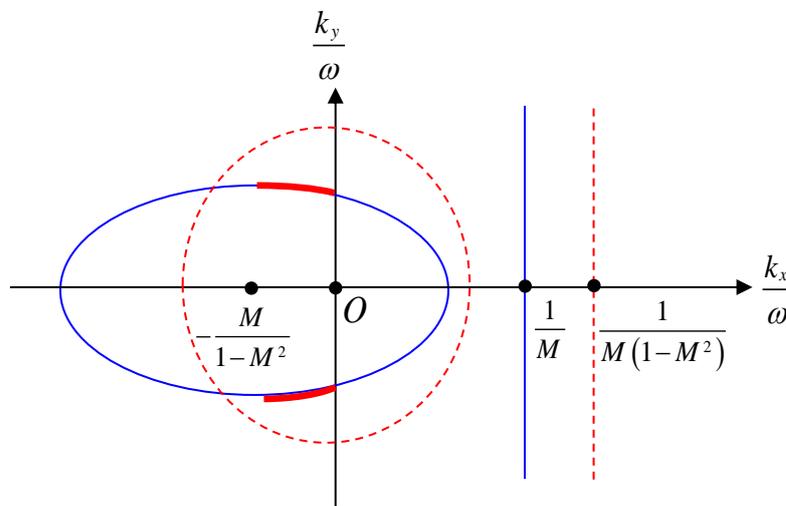


Figure 3.12 Courbes de vitesse avant (en bleu continu) et après (en rouge pointillé) le changement de variables

3.3.1.1 Application à l'équation de Galbrun

Nous appliquons, en trois étapes, ce nouveau modèle PML à l'équation de Galbrun (3.7) en absence des sources dans l'ensemble du domaine numérique $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, voir Figure 3.1.

Dans la première étape, nous appliquons, le changement de variables (3.27) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[(1 + \alpha M) \frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 w_x^L + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right) p^L = 0 \\ \left[(1 + \alpha M) \frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 w_y^L + \sqrt{1 - M^2} \frac{\partial p^L}{\partial y} = 0 \\ p^L + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right) w_x^L + \sqrt{1 - M^2} \frac{\partial w_y^L}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Dans une deuxième étape, la transformation PML classique (3.3) dans les deux directions x et y :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[(1 + \alpha M) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{M}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 w_x^L + \left(\frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right) p^L = 0 \\ \left[(1 + \alpha M) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{M}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 w_y^L + \frac{\sqrt{1 - M^2}}{\gamma_y} \frac{\partial p^L}{\partial y} = 0 \\ p^L + \left(\frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right) w_x^L + \frac{\sqrt{1 - M^2}}{\gamma_y} \frac{\partial w_y^L}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (3.32)$$

Et en troisième étape, le système précédent est réécrit en fonction des coordonnées originales (x, y, t) , ce qui revient à faire :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} - \alpha \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.33)$$

On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[(1 + \alpha^* M) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{M}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 w_x^L + \left(\frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} + \alpha^* \frac{\partial}{\partial t} \right) p^L = 0 \\ \left[(1 + \alpha^* M) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{M}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 w_y^L + \frac{1}{\gamma_y} \frac{\partial p^L}{\partial y} = 0 \\ p^L + \left(\frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} + \alpha^* \frac{\partial}{\partial t} \right) w_x^L + \frac{1}{\gamma_y} \frac{\partial w_y^L}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (3.34)$$

avec

$$\alpha^* = \alpha \left(1 - \frac{1}{\gamma_x} \right)$$

Après application de la transformée de Laplace sur la forme variationnelle et en tenant compte que des conditions initiales sont nulles dans le domaine PML, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases}
s^2 \int_{\Omega} \gamma_x \gamma_y (1 + \alpha^* M)^2 W_x^* W_x^L d\Omega + s \int_{\Omega} \gamma_y (1 + \alpha^* M) M \left\{ W_x^* \frac{\partial W_x^L}{\partial x} - W_x^L \frac{\partial W_x^*}{\partial x} \right\} d\Omega \\
- \int_{\Omega} \frac{\gamma_y}{\gamma_x} M^2 \left\{ \frac{\partial W_x^*}{\partial x} \frac{\partial W_x^L}{\partial x} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \gamma_y W_x^* \frac{\partial P^L}{\partial x} d\Omega + s \int_{\Omega} \gamma_x \gamma_y \alpha^* W_x^* P^L d\Omega = \Phi_{0x} \\
s^2 \int_{\Omega} \gamma_x \gamma_y (1 + \alpha^* M)^2 W_y^* W_y^L d\Omega + s \int_{\Omega} \gamma_y M (1 + \alpha^* M) \left\{ W_y^* \frac{\partial W_y^L}{\partial x} - W_y^L \frac{\partial W_y^*}{\partial x} \right\} d\Omega \\
- \int_{\Omega} \frac{\gamma_y}{\gamma_x} M^2 \left\{ \frac{\partial W_y^*}{\partial x} \frac{\partial W_y^L}{\partial x} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \gamma_x W_y^* \frac{\partial P^L}{\partial y} d\Omega = \Phi_{0y} \\
- \int_{\Omega} \gamma_x \gamma_y P^* P^L d\Omega + \int_{\Omega} \left\{ \gamma_y W_x^L \frac{\partial P^*}{\partial x} + \gamma_x W_y^L \frac{\partial P^*}{\partial y} \right\} d\Omega + s \int_{\Omega} \gamma_x \gamma_y \alpha^* P^* W_x^L d\Omega = 0
\end{cases} \quad (3.35)$$

avec

$$\Phi_0 = \int_{\Omega} W^* [s w_0^L + u_0^L] d\Omega + \int_{\Omega} M \left\{ W^* \frac{\partial [w_0^L]}{\partial x} - \frac{\partial W^*}{\partial x} [w_0^L] \right\} d\Omega$$

Remarque 3.1 : on peut vérifier la dégénérescence de ce modèle complet au cas particulier ($M = 0$) :

$$\begin{cases}
s^2 \int_{\Omega} \gamma_x \gamma_y W_x^* W_x^L d\Omega + \int_{\Omega} \gamma_y W_x^* \frac{\partial P^L}{\partial x} d\Omega = \Phi_{0x} \\
s^2 \int_{\Omega} \gamma_x \gamma_y W_y^* W_y^L d\Omega + \int_{\Omega} \gamma_x W_y^* \frac{\partial P^L}{\partial y} d\Omega = \Phi_{0y} \\
- \int_{\Omega} \gamma_x \gamma_y P^* P^L d\Omega + \int_{\Omega} \left\{ \gamma_y W_x^L \frac{\partial P^*}{\partial x} + \gamma_x W_y^L \frac{\partial P^*}{\partial y} \right\} d\Omega = 0
\end{cases} \quad (3.36)$$

avec

$$\Phi_0 = \int_{\Omega} W^* [s w_0^L + u_0^L] d\Omega$$

On retrouve l'équation de Galbrun avec la formulation PML classique à $M = 0$.

Remarque 3.2 : Nous avons suivi la démarche de Hu, qui applique un changement de variable spatio-temporel à la fois dans le domaine de calcul et dans la PML. Il n'a donc pas besoin d'imposer des conditions de transmission sur l'interface. Cependant, après avoir construit le modèle PML, il doit appliquer un changement de variable inverse sur tout le domaine pour retrouver les variables originales et cette inversion complique légèrement les équations de la PML.

3.3.1.2 Analyse de stabilité

Pour montrer qu'il n'y a pas de solutions exponentiellement croissantes, on doit seulement montrer qu'il n'y a pas de ω dont la partie imaginaire est positive pour n'importe quelle valeur réelle de k_x et k_y . La relation de dispersion du système permet de trouver les valeurs de ω . Il suffit de remplacer k_x et k_y dans (3.15) et (3.17) par les expressions suivantes :

$$k_x \rightarrow \frac{1}{1+i\sigma_x/\omega} \left(k_x + \frac{M}{1-M^2} \omega \right) - \frac{M}{1-M^2} \omega \quad \text{et} \quad k_y \rightarrow \frac{k_y}{1+i\sigma_y/\omega} \quad (3.37)$$

Nous trouvons pour les ondes advectives :

$$\frac{(\omega+i\sigma_x)^2 (\omega+i\sigma_y)^2}{(1-M^2)^2} - (\omega+i\sigma_y)^2 \left(k_x + \frac{M}{1-M^2} \omega \right)^2 + \frac{(\omega+i\sigma_x)^2 k_y^2}{1-M^2} = 0 \quad (3.38)$$

Et pour les ondes de vorticité :

$$\omega + \frac{i\sigma_x}{1-M^2} - Mk_x = 0 \quad (3.39)$$

Clairement, l'Eq. (3.39) est stable. Comme la solution de ω est obtenue directement par la relation $\omega = Mk_x - i\sigma_x / (1-M^2)$ et la partie imaginaire de ω reste toujours négative. La stabilité de l'Eq. (3.38) est présentée dans la Figure 3.13 par tracer le contour maximale de la partie imaginaire de ω , en fonction de k_x et k_y . Nous prenons $M = 0.5$, $\sigma_x = 5$ et $\sigma_y = 5$. Il faut noter que toutes les valeurs de la partie imaginaire de ω sont négatives. L'Eq. (3.38) est désormais stable car elle ne permet pas de solution exponentiellement croissante. Comparé avec la Figure 3.11, le changement de variable permet d'éliminer les solutions exponentiellement croissantes (la partie imaginaire positive). Le système est donc devenu stable.

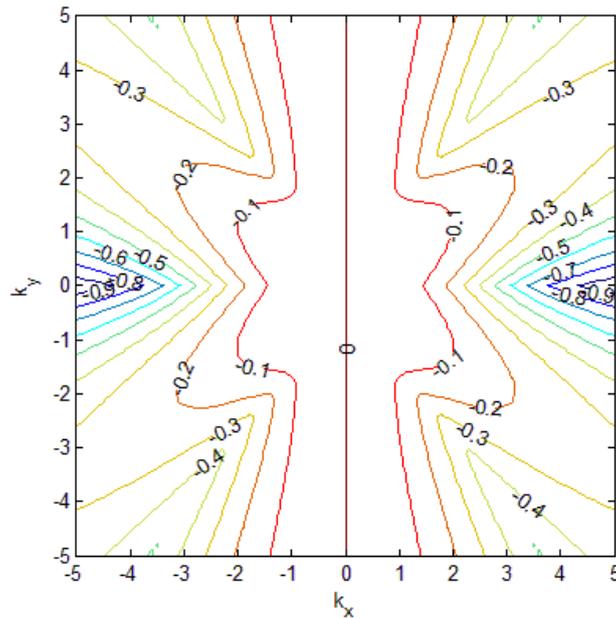


Figure 3.13 Contour de la partie imaginaire de ω pour la méthode PML améliorée

3.3.1.3 Exemples de validation

- **Source irrotationnelle**

Nous allons d'abord refaire l'exemple de la source irrotationnelle (3.11) donné au début du chapitre avec la nouvelle formulation PML dans un écoulement uniforme à $M = 0.5$. On choisit $E_{pml} = 1$ et $\beta = 5$. Le maillage de tout le domaine est présenté dans la Figure 3.4. Les solutions numériques à quatre moments différents au cours du temps sont présentées dans les Figures 3.14 et 3.15 pour les champs de pression acoustique et de déplacement lagrangien, respectivement. L'instabilité a disparue à cause d'un nouveau changement de variables spatio-temporel. Les ondes acoustiques entrent proprement à l'interface du domaine. Les solutions numériques ne sont pas perturbées. Néanmoins, la Figure 3.15 montre qu'il y a un peu d'instabilité sur le champ déplacement lagrangien, cette instabilité ne perturbe pas la solution numérique.

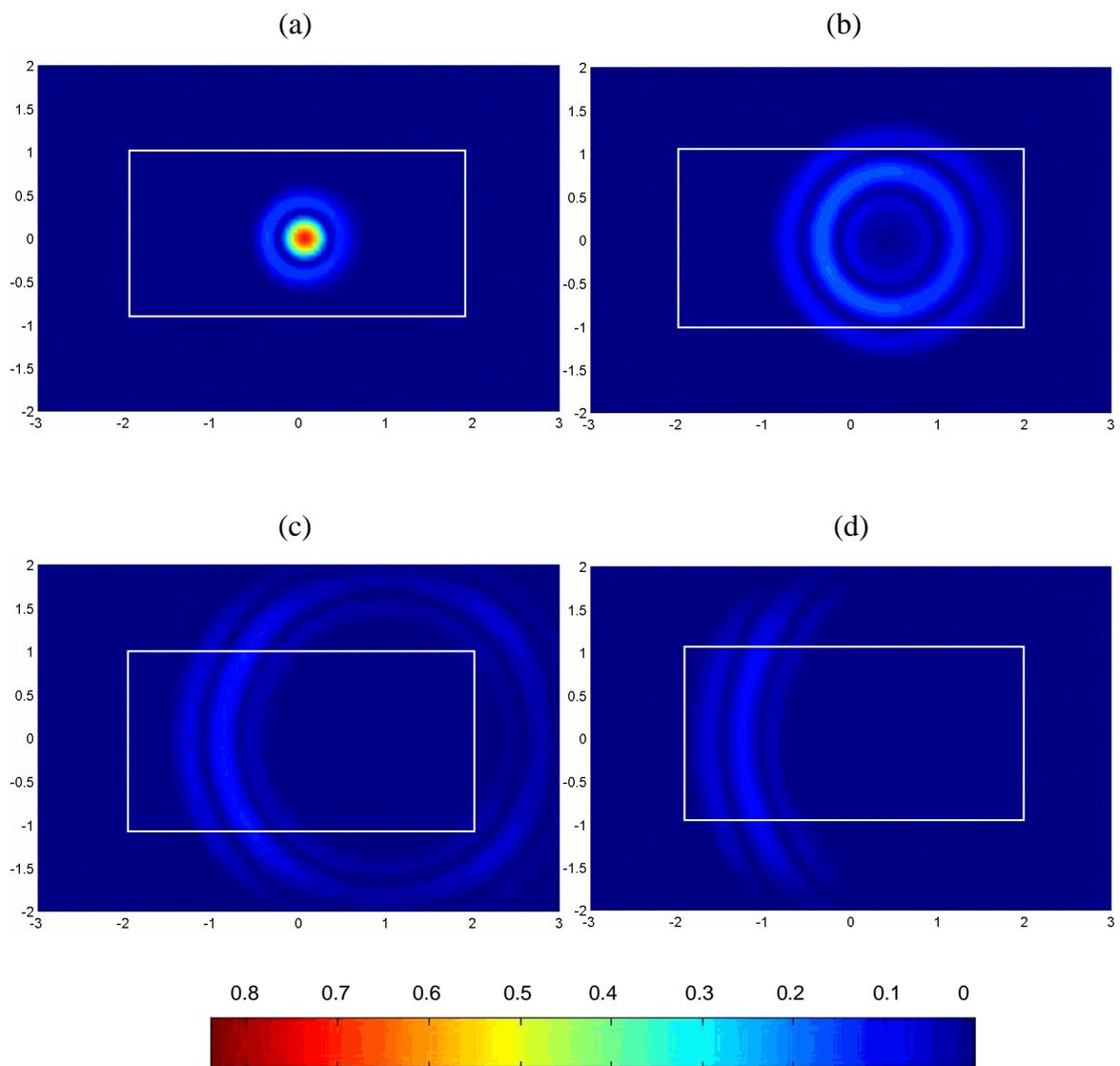


Figure 3.14 Le champ de pression acoustique à $M = 0.5$ avec la nouvelle formulation PML :

(a) $t = 0.45$ (b) $t = 1.23$ (c) $t = 2.31$ (d) $t = 3.06$

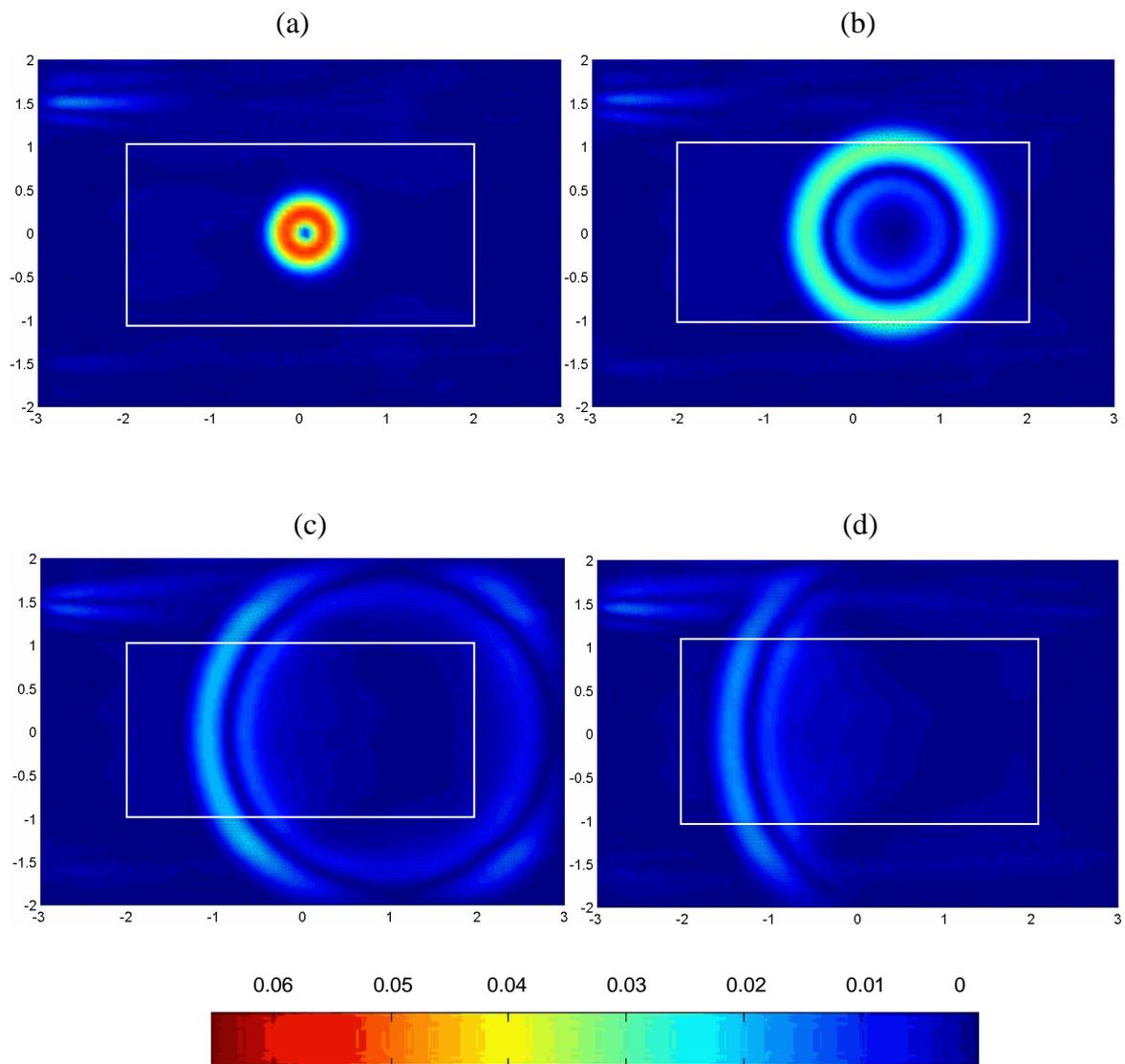


Figure 3.15 Le champ de déplacement lagrangien à $M = 0.5$ avec la nouvelle formulation PML : (a) $t = 0.45$ (b) $t = 1.23$ (c) $t = 2.31$ (d) $t = 3.06$

Nous avons représenté également la pression acoustique suivant l'axe $Y = 0$ à trois moments différents dans la Figure 3.16. $t = 0.8$ correspond au début de la propagation des ondes acoustiques, $t = 1.4$ est le moment où les ondes amonts sont entrées dans le domaine PML et $t = 6$ correspond à longtemps après la propagation dans le domaine. Avec la nouvelle formulation, les ondes acoustiques se propagent correctement dans l'écoulement, et il n'y a presque pas de réflexion. Toutes les ondes sont absorbées correctement par la couche PML.

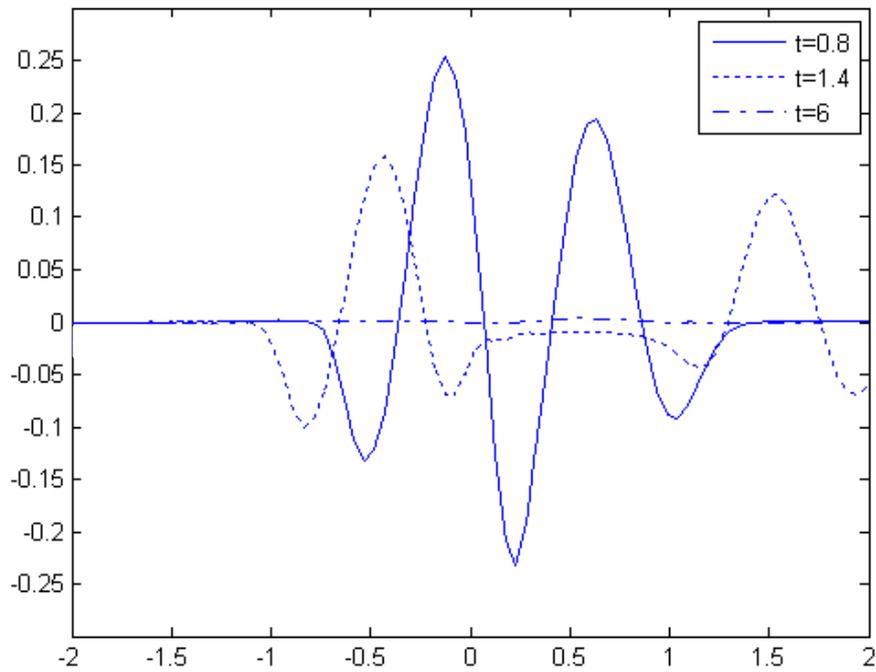


Figure 3.16 Les champ de pression acoustique suivant $Y = 0$ à $M = 0.5$ pour la nouvelle formulation PML : $t = 0.8$, $t = 1.4$ et $t = 6$

- **Source rotationnelle**

Nous considérons une source rotationnelle de données initiales concentrées à l'origine de domaine de calcul dans un écoulement uniforme dans la direction x avec $M = 0.3$. Nous avons les conditions initiales ci-dessous :

$$\begin{aligned} u_{0x}^L &= -\pi^2 y \exp[-\pi^2(x^2 + y^2)] \\ u_{0y}^L &= \pi^2 x \exp[-\pi^2(x^2 + y^2)] \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ces équations contiennent une impulsion de vorticité. Contrairement au cas précedent, on a ici une source rotationnelle qui correspond aux ondes de vorticité convectées par l'écoulement. Ce type de source est déjà présenté par [1, 48] pour les LEE. Nous avons choisi les éléments triangulaires non-r guli rs dans tout le domaine de côté maximale $\Delta x = 0.06$, voir la Figure 3.17. L'épaisseur de la couche PML est égale à 1 et le coefficient d'absorption est $\beta = 5$. Le domaine de calcul est $\Omega_1 = [-1,1] \times [-1,1]$. Les paramètres du plan complexe s suivants sont choisis : $a = 0.01$, $b = [0:0.1:500]$, $\Delta t = 0.01$.

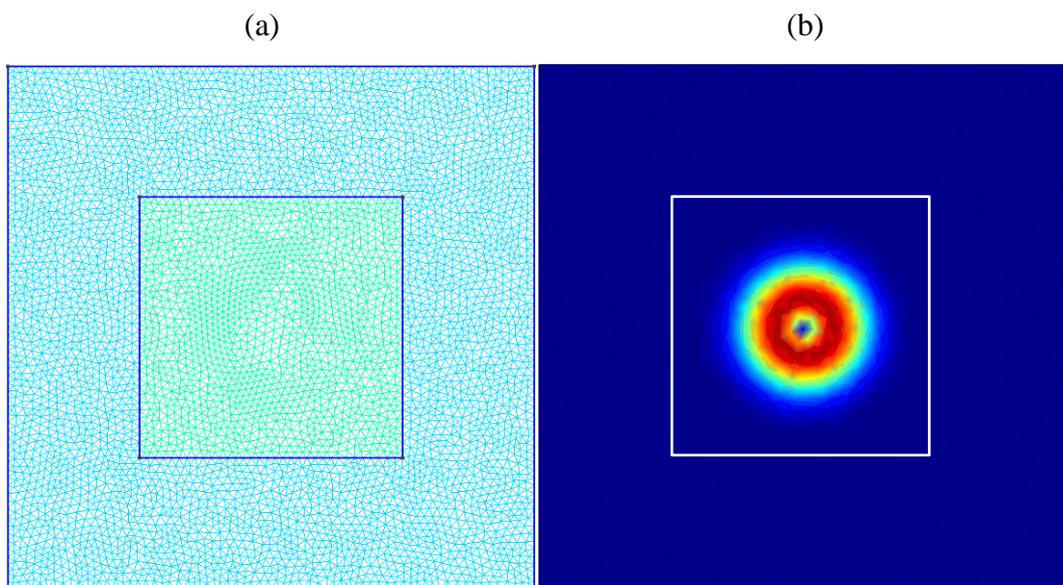


Figure 3.17 (a) Maillage du domaine PML et acoustique pour la source rotationnelle
(b) source rotationnelle

Les solutions obtenues pour les ondes de vorticité sont satisfaisantes (Figure 3.18). Les ondes de vorticité sont transl t es par l'écoulement, à une vitesse égale à celle de l'écoulement. A $t = 1.02$, le centre des ondes de vorticité se déplacent $1.02 \times 0.3 = 0.306$ et la distance mesurée est 0.32. A $t = 1.83$, le centre des ondes de vorticité se déplacent de 0.549 et la distance mesurée est 0.55. Les ondes de vorticité se déplacent donc correctement.

Lorsque l'écoulement est uniforme, il n'y a pas de couplage entre les deux types d'onde (acoustique/vorticité). Dans ce cas, ce type de source ne doit générer une pression (Figure 3.19). La couche PML ne présente pas d'effets parasites de couplage à ce niveau.

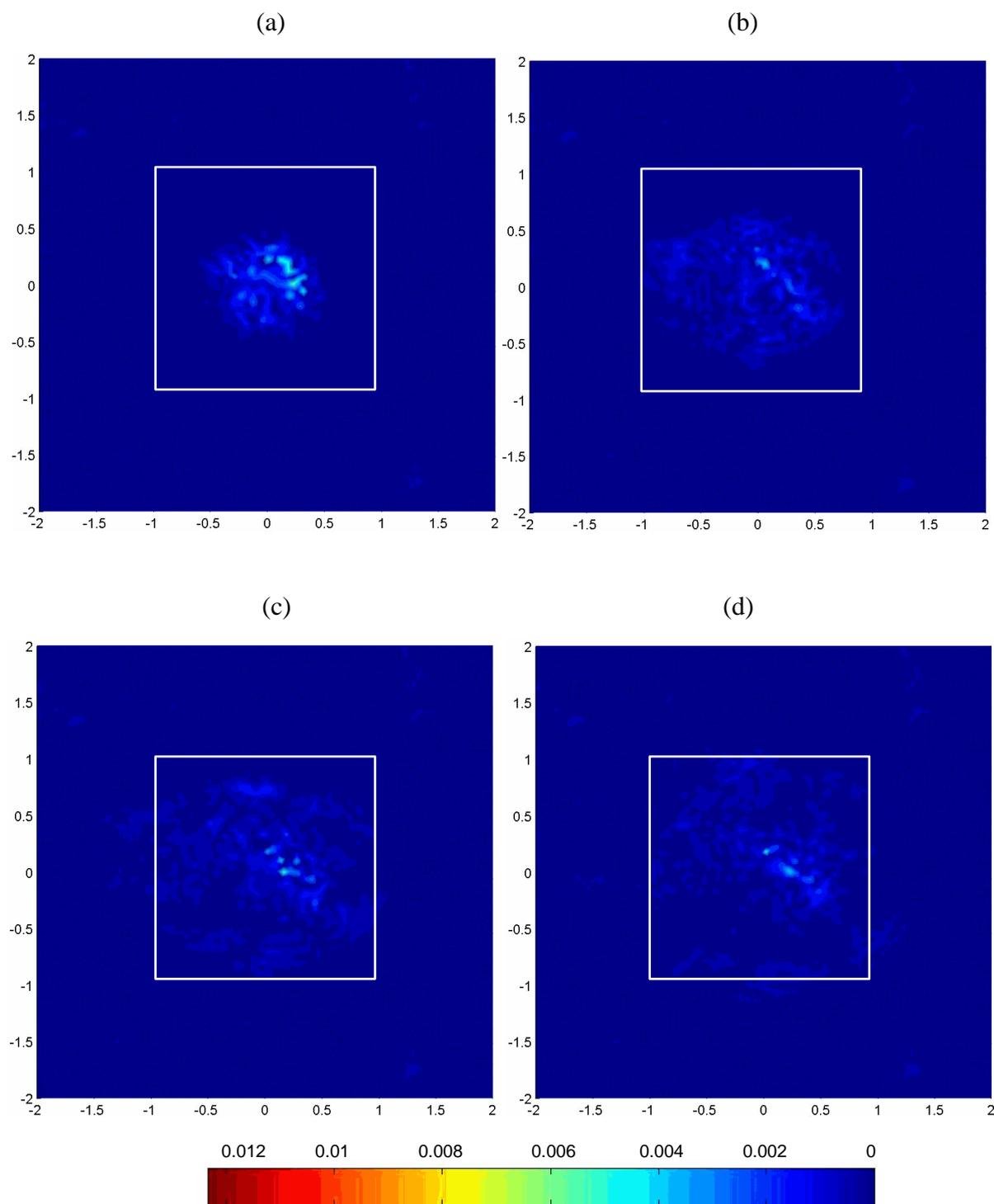


Figure 3.18 Le champ de pression acoustique avec une source rotationnelle :

(a) $t = 0.24$ (b) $t = 1.02$ (c) $t = 1.83$ (d) $t = 3.69$

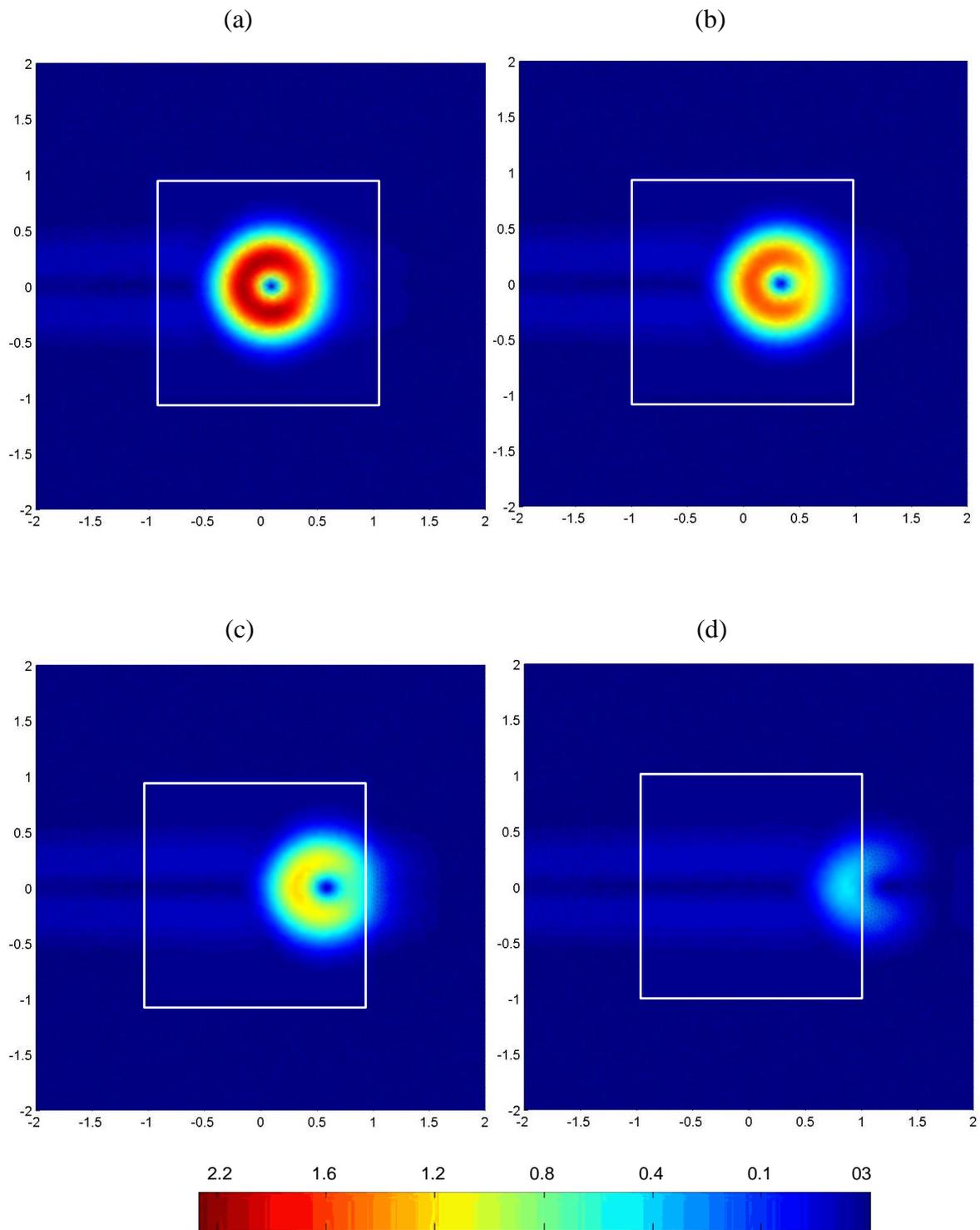


Figure 3.19 Le champ de déplacement lagrangien avec une source rotationnelle :

(a) $t = 0.24$ (b) $t = 1.02$ (c) $t = 1.83$ (d) $t = 3.69$

- **Source mixte (irrotationnelle + rotationnelle)**

Nous traitons dans ce cas la coexistence des deux types de sources. Même si le problème est linéaire, nous avons voulu tester le comportement de notre développement vis-à-vis d'une telle situation. Nous considérons une source mixte (irrotationnelle + rotationnelle) de données initiales concentrées en deux points de domaine de calcul (l'impulsion acoustique est $(x_a, y_a) = (-0.5, 0)$ et celui pour l'impulsion de vorticité est $(x_b, y_b) = (0.5, 0)$ dans un écoulement uniforme dans la direction x avec $M = 0.3$.

Nous avons les conditions initiales (rotationnelles) pour la vitesse ci-dessous :

$$\begin{aligned} u_{0x}^L &= -(y - y_b) \exp\left[-60\left((x - x_b)^2 + (y - y_b)^2\right)\right] \\ u_{0y}^L &= (x - x_b) \exp\left[-60\left((x - x_b)^2 + (y - y_b)^2\right)\right] \end{aligned} \quad (3.41)$$

et les conditions initiales (irrotationnelles) pour le déplacement de type (3.11) mais translaté au point (x_a, y_a) , on rappelle que cette excitation est de forme :

$$f(r, t) = T(t) \nabla E(r) \quad (3.42)$$

$$\text{où } T(t) = \begin{cases} e^{-\pi^2 f_0^2 (t-t_0)^2} & \text{si } t \leq 2t_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad E(r) = \begin{cases} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^3 & \text{si } r \leq r_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $f_0 = 10/3$, $t_0 = 1/f_0$, $r_0 = 0.5$ et $r = \sqrt{(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2}$.

Nous avons choisi les éléments triangulaires non-réguliers dans tout le domaine de côté maximale $\Delta x = 0.06$, (Figure 3.20). Les paramètres du plan complexe s suivants sont choisis : $a = 0.01$, $b = [0:0.1:500]$, $\Delta t = 0.01$.

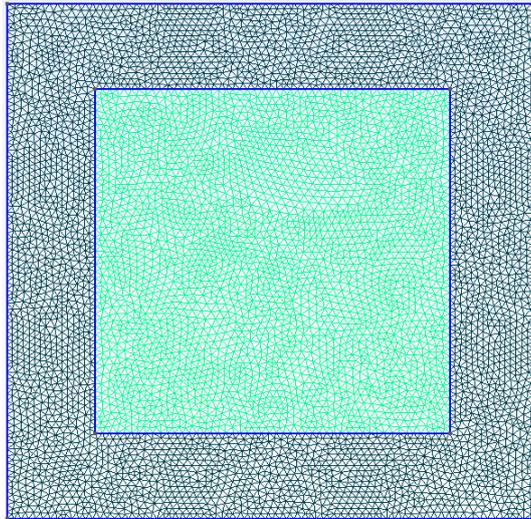


Figure 3.20 Maillage du domaine PML et acoustique pour la source mixte

Les solutions obtenues pour les ondes acoustiques et de vorticité sont très satisfaisantes. La Figure 3.21 montre le champ de pression, les ondes de vorticité sont nulles dans ce champ. Uniquement les ondes acoustiques sont observées. Sur la Figure 3.22, on voit clairement que les deux types d'onde ne se g nent pas au cours de la simulation. A $t = 1.02$, par exemple, le centre des ondes de vorticité se déplacent $1.02 \times 0.3 + 0.5 = 0.806$ et la distance mesurée est 0.8. A $t = 1.83$, le centre des ondes de vorticité se déplacent $1.83 \times 0.3 + 0.5 = 1.049$ et la distance mesurée est 1. Les ondes de vorticité se déplacent correctement avec l'écoulement. La Figure 3.22 (b) montre le moment de l'interaction entre eux. Les deux types d'onde quittent le domaine de calcul sans avoir de réflexion. La couche PML peut donc à la fois absorber les ondes acoustiques et de vorticité.

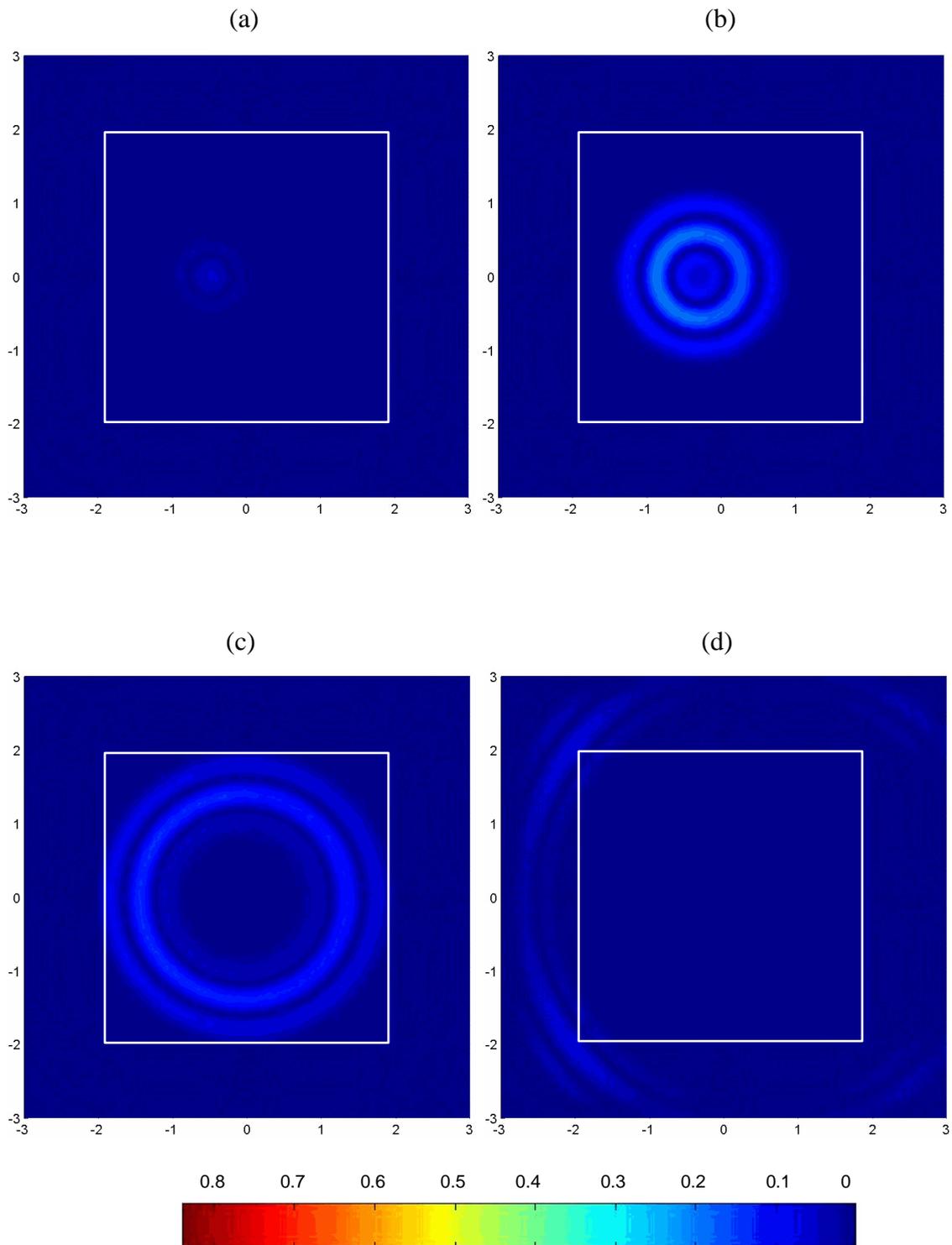


Figure 3.21 Le champ de pression acoustique avec une source mixte :

(a) $t = 0.24$ (b) $t = 1.02$ (c) $t = 1.83$ (d) $t = 3.69$

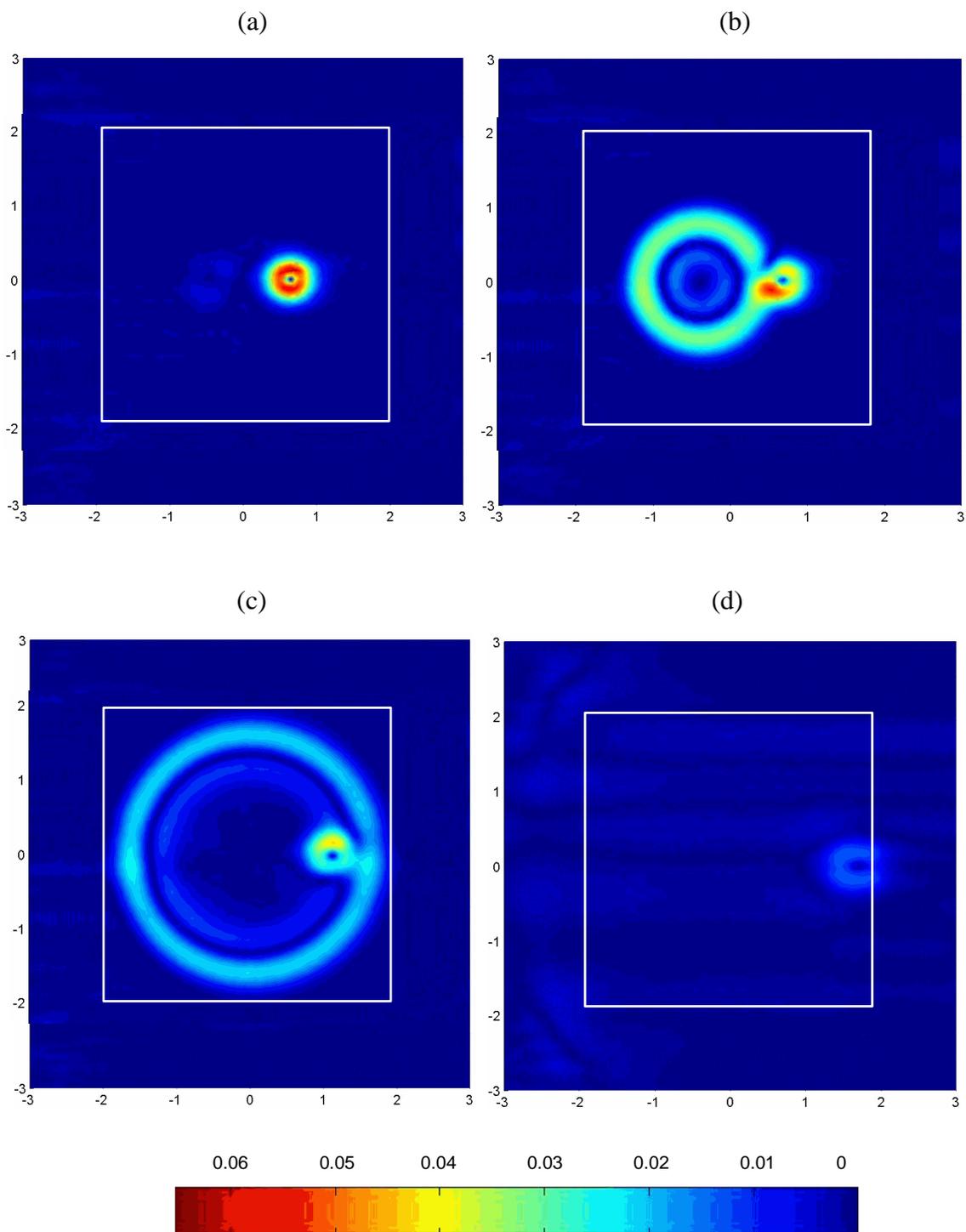


Figure 3.22 Le champ de déplacement lagrangien avec une source mixte :

(a) $t = 0.24$ (b) $t = 1.02$ (c) $t = 1.83$ (d) $t = 3.69$

- **Paroi rigide**

On s'intéresse maintenant à la propagation acoustique qui se produit au sein d'un conduit rigide ouvert des deux côtés de dimension $[-2, 2] \times [-1, 1]$. Le conduit est posé dans un milieu non borné. L'excitation est une source irrotationnelle, dont le profil est choisi en sinusoïdal et centré à l'intérieur du conduit :

$$f(r, t) = \nabla E(r) \sin \omega t \quad \text{où} \quad E(r) = \begin{cases} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^3 & \text{si } r \leq r_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.43)$$

et $\omega = 10$. On s'intéresse alors à l'établissement de l'onde acoustique dans le conduit et dans le milieu non borné sous cette excitation. Pour cela, une condition de non-réflexion (PML) est posée au tour du domaine non borné. Le domaine d'étude non borné est $[-4, 4] \times [-4, 4]$. L'épaisseur de la couche PML est égale à 1 et le coefficient d'absorption est $\beta = 5$. L'écoulement à l'intérieur du conduit est uniforme et sur la direction x avec $M = 0.3$. Les paramètres du plan complexe s suivants sont choisis : $a = 0.1$, $b = [0:0.1:400]$, $\Delta t = 0.01$. Le maillage est présenté en Figure 3.23. La Figure 3.24 montre le champ de déplacement dans le domaine acoustique. Avec la paroi rigide, l'harmonie s'établit avec le temps dans le conduit.

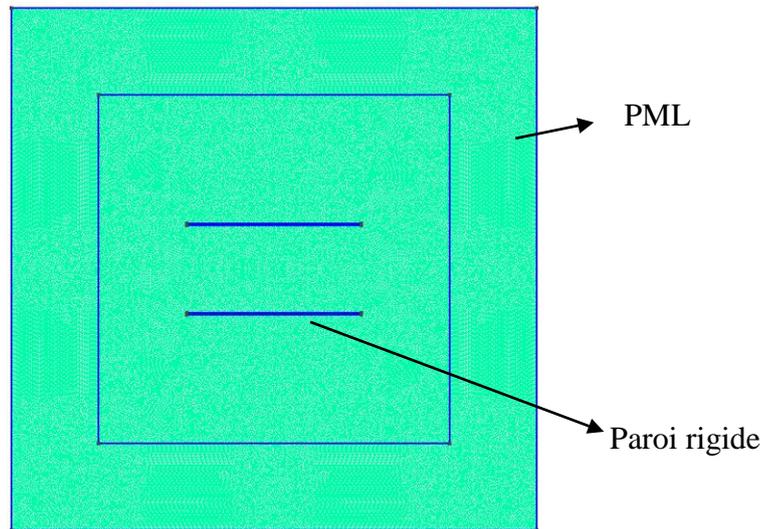


Figure 3.23 Maillage d'un conduit dans le milieu non borné, correspondant à $\lambda/10$

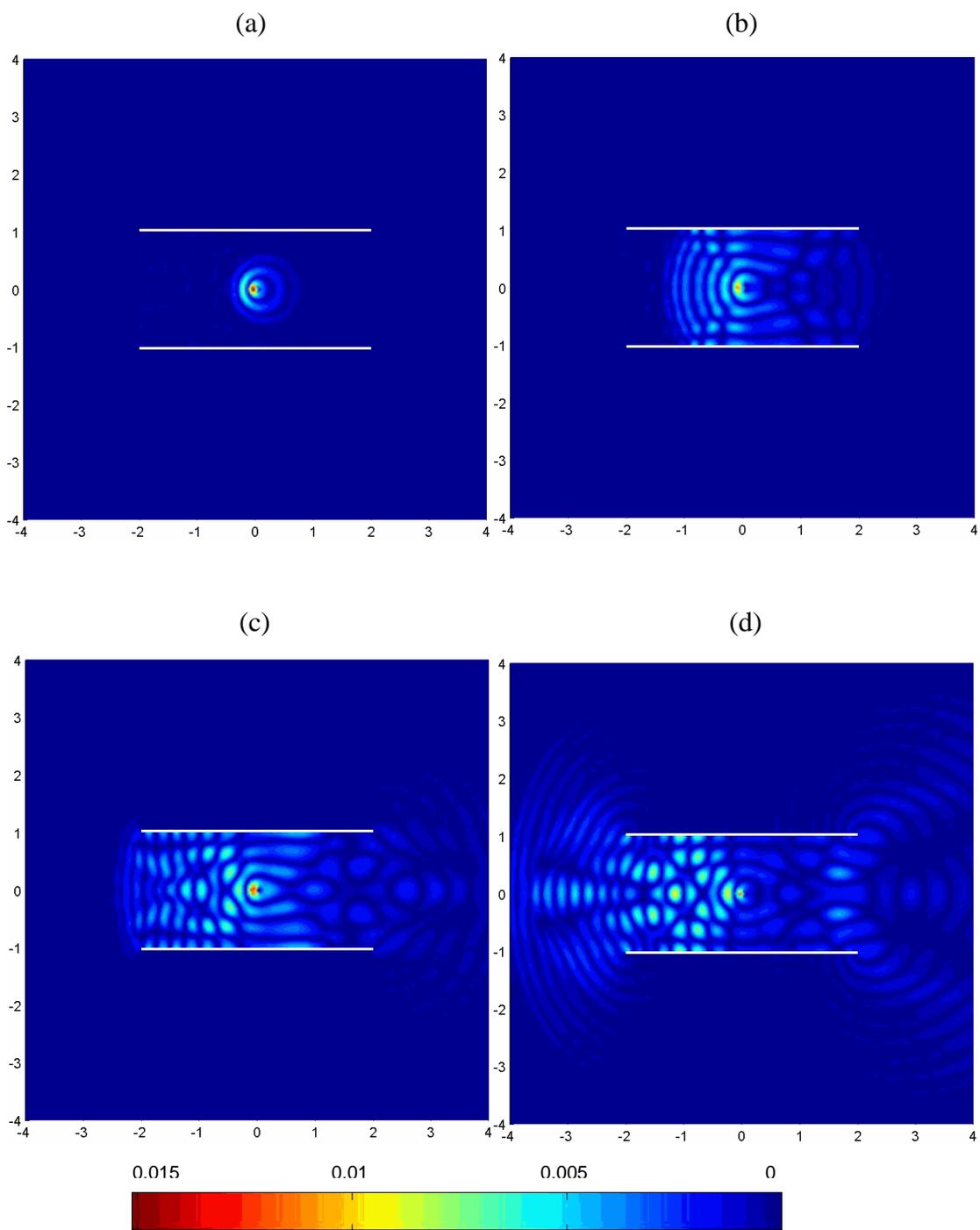


Figure 3.24 Le champ de déplacement lagrangien d'un conduit ouvert :

(a) $t = 0.69$ (b) $t = 1.83$ (c) $t = 3.39$ (d) $t = 5.7$

3.3.1.4 Analyse des paramètres PML

Le test précédent (source irrotationnelle) nous aide à trouver les bons coefficients d'absorption pour une épaisseur de la couche PML donnée. Comme nous l'avons signalé dans les développements et les résultats ci-dessus, quel que soit le modèle PML retenu, son efficacité va dépendre d'un certain nombre de paramètres : l'épaisseur de la couche, les conditions aux limites au fond de couche, le coefficient d'absorption et la loi d'évolution dans la couche. Pour répondre partiellement à cette question, Hu [56] a proposé une formule par tests numériques pour calculer le coefficient d'absorption en fonction de l'épaisseur de la couche PML et la distance d'un point du domaine à l'interface. Dans certains tests que nous avons simulés, cette formulation s'est avérée non efficace dans nos cas. Nous étions amenés chaque fois à faire nos propres tests numériques. Nous allons essayer de présenter une analyse non exhaustive de l'influence de différents paramètres. Une analyse plus fine aurait pu aboutir à définir les critères d'une optimisation de la formulation.

L'exemple choisi est un cylindre infini pulsant modélisant une source mono-polaire cylindrique où la solution analytique existe en présence d'un écoulement uniforme. On suppose un cylindre de rayon a qui pulse avec une vitesse constante V_0 normale à sa surface. Une couche de PML est construite autour du domaine acoustique. Nous allons fixer l'épaisseur du domaine PML à 1 ($E_{pml} = 1$, un paramètre adimensionalisé) afin de réduire le nombre de paramètre, et ne faire varier que β entre 2 et 60 et ω entre 0.1 et 40. La solution analytique de rayonnement de la sphère peut être obtenue facilement en régime harmonique :

$$p(r) = -i\omega\rho_0 \frac{V_0}{kH_1^1(kr)} H_0^1(kr) \quad (3.44)$$

où H est la fonction de Hankel.

Nous allons construire un tableau d'erreur relative par rapport à la solution analytique en posant $\beta = [2:2:60]$ et $\omega = [0.1:2:40]$. La Figure 3.25 représente l'erreur relative par rapport à la solution de référence. On constate que si β est très petit ($\beta < 5$), il y aura forcément la réflexion pour perturber la solution. La solution numérique dans ce cas est complètement fautive car PML n'absorbe pas assez d'ondes. Globalement, quand β atteint une valeur suffisamment grande ($\beta > 5$), l'erreur est systématiquement inférieure à 5% pour toutes les fréquences. En basses fréquences ($\omega < 10$), un coefficient d'absorption faible obtiendrait un meilleur résultat. Pour une fréquence supérieure à 10, le choix du coefficient d'absorption n'a aucune influence sur les résultats. La relation mathématique entre le coefficient d'absorption et la pulsation n'est pas linéaire.

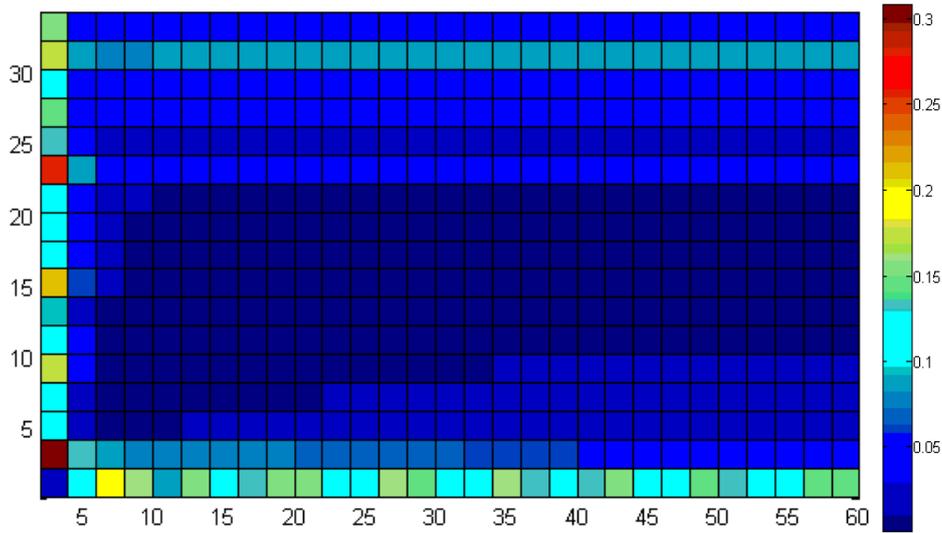


Figure 3.25 Erreurs relatives : l'axe x est β et l'axe y est ω/L

3.3.2 Formulation en écoulement oblique

Nous généralisons dans ce paragraphe la formulation ci-dessus au cas d'un écoulement, toujours uniforme, mais bidirectionnel avec deux composantes : un nombre de Mach M_x sur la direction x et M_y sur la direction y . Il s'agit, là d'une généralisation de la démarche appliquée ci-dessus dans le cas d'un écoulement unidirectionnel. Cette approche a été déjà appliquée par [58, 62, 63].

Nous réécrivons la relation de dispersion associée à l'équation de Galbrun en présence d'un écoulement oblique. Nous cherchons des solutions sous une forme d'ondes planes. En l'introduisant dans l'équation de Galbrun (3.7), on obtient un système linéaire noté :

$$\left[\begin{array}{c} \mathbb{Q} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w_x^* \\ w_y^* \\ p^* \end{array} \right\} = 0 \text{ avec } \mathbb{Q} = \begin{bmatrix} -(\omega - M_x k_x - M_y k_y)^2 & 0 & ik_x \\ 0 & -(\omega - M_x k_x - M_y k_y)^2 & ik_y \\ ik_x & ik_y & 1 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Ce système linéaire n'admet de solutions non triviales que pour :

$$(\omega - M_x k_x - M_y k_y)^2 \left[(\omega - M_x k_x - M_y k_y)^2 - k_x^2 - k_y^2 \right] = 0 \quad (3.46)$$

La relation de dispersion pour les ondes acoustiques est :

$$(\omega - M_x k_x - M_y k_y)^2 - k_x^2 - k_y^2 = 0 \quad (3.47)$$

ou

$$\left(1 - M_x \frac{k_x}{\omega} - M_y \frac{k_y}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{k_x}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{k_y}{\omega}\right)^2 = 0 \quad (3.48)$$

La relation de dispersion pour les ondes hydrodynamiques est :

$$\omega - M_x k_x - M_y k_y = 0 \quad (3.49)$$

ou

$$\frac{k_x}{\omega} = \frac{1}{M_x} - \frac{M_y}{M_x} \frac{k_y}{\omega} \quad (3.50)$$

Clairement, l'existence de M_y crée une plus grande instabilité pour les ondes de vorticité. Un changement de variables supplémentaire est utilisé sur les bases de travaux de Hu [55]. Ce changement de variables est fait de façon suivante :

$$x = x, \quad y = y - M_y t, \quad \hat{t} = t \quad (3.51)$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \hat{t}} - M_y \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.52)$$

Pour comprendre l'utilité d'une telle transformation, on rappelle les courbes de lenteur dans le plan $(k_x / \omega, k_y / \omega)$, représentées dans la Figure 3.26. On remarque que la courbe associée aux ondes advectives est une ellipse décentrée et la courbe associée aux ondes de vorticité est une ligne avec une pente $-M_x / M_y$. Comme nous l'avons dit précédemment, les instabilités produites par la couche PML peuvent être expliquée par le fait que le centre de cette ellipse et la courbe associée aux ondes de vorticité ne sont pas à l'origine des axes. Cela provoque une présence d'ondes dites inverses (en rouge continu), dont les vecteurs de lenteur et les vitesses de groupe sont de signe opposé. Ce changement de variables permet de déplacer l'origine de l'ellipse sur l'axe x (on retrouve la Figure 3.12 partie ellipse) et de déplacer l'origine de la courbe associée aux ondes de vorticité directement sur le centre du repère dans un premier temps, ensuite il permet de translater l'origine de l'ellipse au centre du repère.

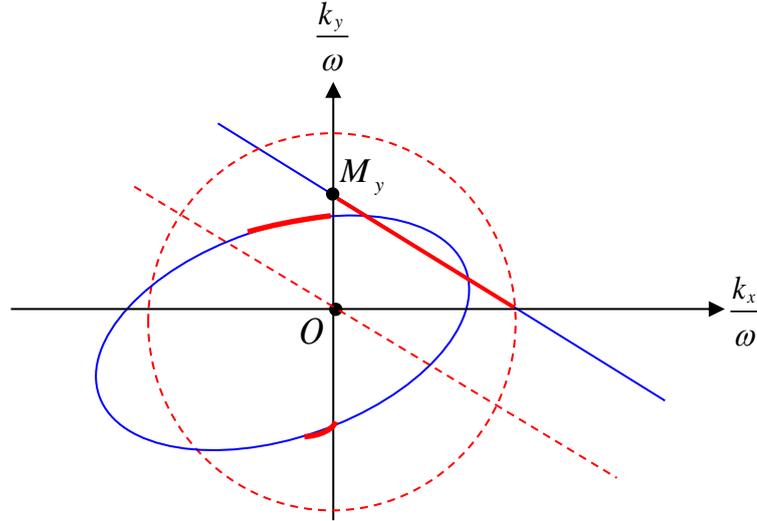


Figure 3.26 Courbes de lenteur pour l'écoulement oblique avant (en bleu continu) et après (en rouge pointillé) le changement de variables

Maintenant, on pourra faire une analyse de stabilité avec la nouvelle formulation PML. On remplace simplement ω par l'expression suivante :

$$\omega \rightarrow \omega - M_y k_y \quad (3.53)$$

On calcule à nouveau les équations (3.40) et (3.41). Nous trouvons pour les ondes advectives :

$$\frac{(\omega - M_y k_y + i\sigma_x)^2}{(1 - M_x^2)^2} - \left[k_x + \frac{M_x (\omega - M_y k_y)}{1 - M_x^2} \right]^2 + \frac{(\omega - M_y k_y + i\sigma_x)^2 k_y^2}{(1 - M_x^2)(\omega - M_y k_y + i\sigma_y)^2} = 0 \quad (3.54)$$

Et pour les ondes de vortacité :

$$\omega - M_y k_y + \frac{i\sigma_x}{1 - M_x^2} - M_x k_x = 0 \quad (3.55)$$

L'Eq. (3.55) est stable et ω est obtenu par la relation $\omega = M_x k_x + M_y k_y + i\sigma_x / (1 - M_x^2)$. La partie imaginaire de ω reste toujours négative. La stabilité de l'Eq. (3.54) dépend du contour maximale de la partie imaginaire de ω . Or, la partie imaginaire de la solution de l'Eq. (3.54) est celle de l'Eq. (3.20). La seule différence est leurs parties réelles du fait de rajouter le terme $M_y k_y$.

3.3.2.1 Application à l'équation de Galbrun

L'équation de Galbrun en absence des sources pour l'écoulement oblique en développant la dérivée matérielle s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_x \frac{\partial}{\partial x} + M_y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 w_x^L + \frac{\partial p^L}{\partial x} = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_x \frac{\partial}{\partial x} + M_y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 w_y^L + \frac{\partial p^L}{\partial y} = 0 \\ p^L + \frac{\partial w_x^L}{\partial x} + \frac{\partial w_y^L}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (3.56)$$

Nous allons d'abord appliquer un changement de variables (3.52) aux équations (3.56) et on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{t}} + M_x \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w_x^L + \frac{\partial p^L}{\partial x} = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial \hat{t}} + M_x \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w_y^L + \frac{\partial p^L}{\partial y} = 0 \\ p^L + \frac{\partial w_x^L}{\partial x} + \frac{\partial w_y^L}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (3.57)$$

Ce changement de variables donne une équation de Galbrun identique à celle obtenue dans le cas de l'écoulement unidirectionnel. Ensuite, nous allons réaliser un changement de variables comme (3.27). Le paramètre α est devenu dans ce cas :

$$\alpha = \frac{M_x}{1 - M_x^2} \quad (3.58)$$

puis nous l'appliquons à la transformation classique PML (3.3), on obtient pour l'instant la même forme que le système (3.32) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[(1 + \alpha M_x) \frac{\partial}{\partial \hat{t}} + \frac{M_x}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 w_x^L + \left(\frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \right) p^L = 0 \\ \left[(1 + \alpha M_x) \frac{\partial}{\partial \hat{t}} + \frac{M_x}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 w_y^L + \frac{\sqrt{1 - M_x^2}}{\gamma_y} \frac{\partial p^L}{\partial y} = 0 \\ p^L + \left(\frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \right) w_x^L + \frac{\sqrt{1 - M_x^2}}{\gamma_y} \frac{\partial w_y^L}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (3.59)$$

Finalement, l'équation précédente est écrite dans les coordonnées originales (x, y, t) :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} - \alpha \frac{\partial}{\partial t} - \alpha M_y \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_x^2}} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial}{\partial t} + M_y \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.60)$$

Ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[(1 + \alpha^* M_x) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{M_x}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} + M_y (1 + \alpha^* M_x) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 w_x^L + \left(\frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} + \alpha^* \frac{\partial}{\partial t} + \alpha^* M_y \frac{\partial}{\partial y} \right) p^L = 0 \\ \left[(1 + \alpha^* M_x) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{M_x}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} + M_y (1 + \alpha^* M_x) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 w_y^L + \frac{1}{\gamma_y} \frac{\partial p^L}{\partial y} = 0 \\ p^L + \left(\frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} + \alpha^* \frac{\partial}{\partial t} + \alpha^* M_y \frac{\partial}{\partial y} \right) w_x^L + \frac{1}{\gamma_y} \frac{\partial w_y^L}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (3.61)$$

où

$$\alpha^* = \alpha \left(1 - \frac{1}{\gamma_x} \right)$$

Si on prend $M_y = 0$, on retrouve le formule PML associé à l'équation de Galbrun en écoulement unidirectionnel (3.34).

3.3.2.2 Exemple de validation

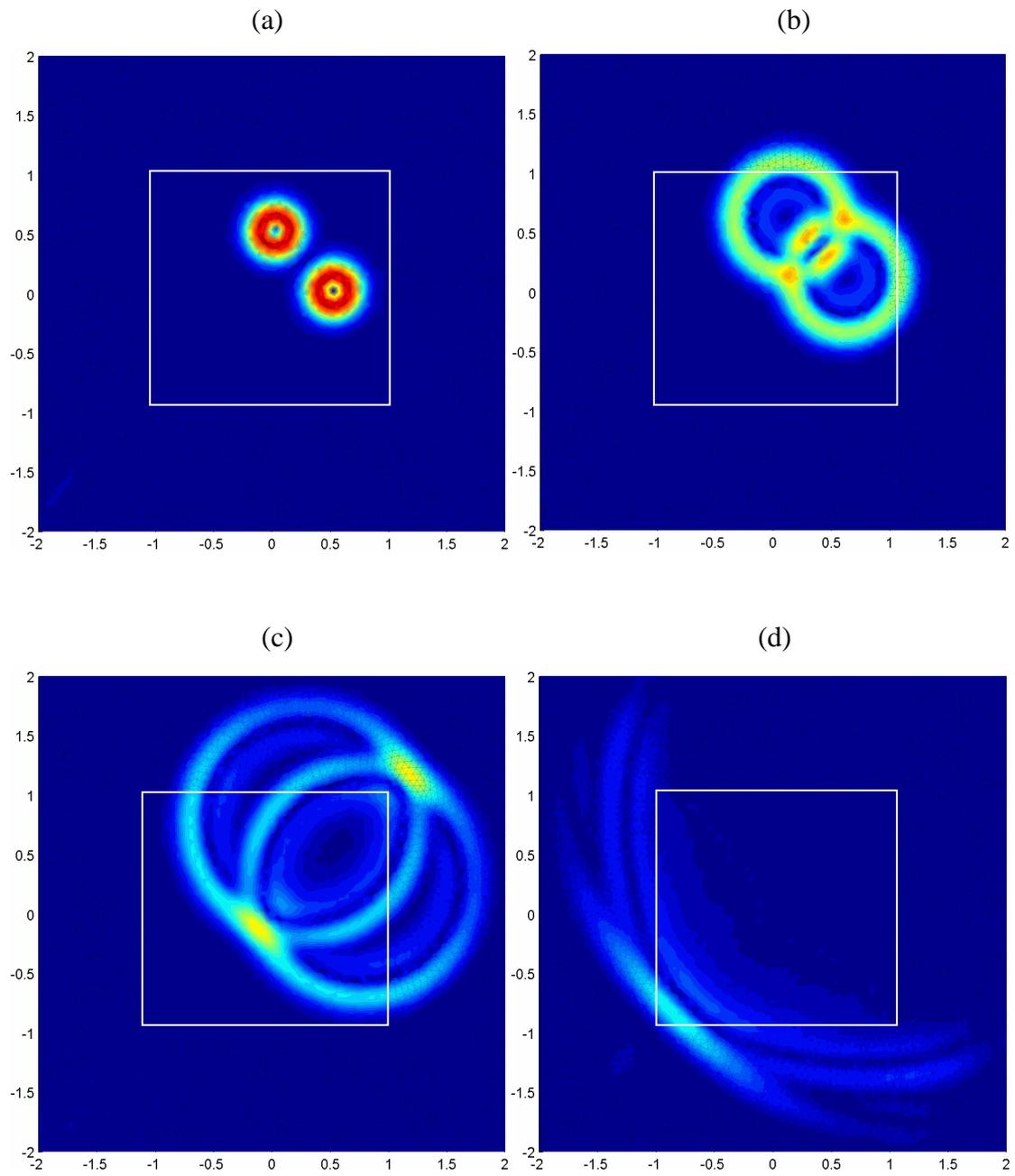
Pour voir les effets des couches PML dans les coins, nous évaluons l'efficacité d'une couche PML de l'épaisseur $E_{pml} = 1$ et du coefficient d'absorption $\beta = 5$ pour l'équation de Galbrun. Une source en pression acoustique est testé dans l'écoulement uniforme et oblique avec $(M_x, M_y) = (0.3, 0.3)$. Le domaine de calcul est $\Omega_1 = [-1, 1] \times [-1, 1]$, discrétisé par les éléments triangulaires non-réguliers $\Delta x = \Delta y = 0.06$, voir la Figure 3.17. Nous avons $a = 0.1$ et $b = [0:0.1:400]$. Une impulsion en pression acoustique est appliquée en deux points $(0.5, 0)$ et $(0, 0.5)$. Ce type d'impulsion similaire est déjà étudié [1, 49] pour les équations d'Euler linéarisées. La source en pression est donnée par :

$$g = \left\{ \exp \left[-40 \left((x - 0.5)^2 + y^2 \right) \right] + \exp \left[-40 \left(x^2 + (y - 0.5)^2 \right) \right] \right\} \times T(t) \quad (3.62)$$

avec

$$T(t) = \begin{cases} e^{-\pi^2 f_0^2 (t-t_0)^2} & \text{si } t \leq 2t_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La Figure 3.27 représente le champ du déplacement lagrangien aux différents moments. Les ondes acoustiques se propagent radialement. A l'interface, les ondes sont entrées correctement sans réflexion. Au cours du temps, la symétrie par rapport l'axe $y = x$ des deux ondes acoustiques est vérifié. La célérité amont aval est aussi vérifiée.



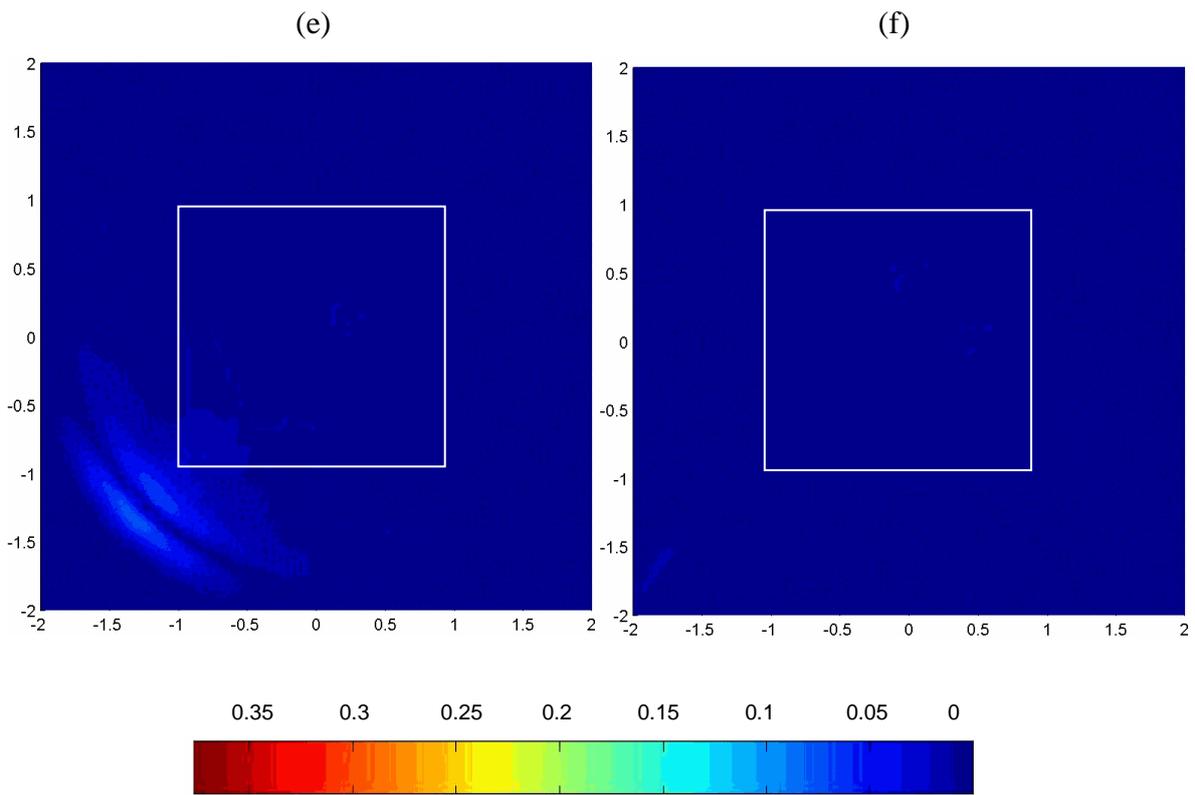


Figure 3.27 Le champ de déplacement lagrangien dans l'écoulement oblique $M = (0.3, 0.3)$:
 (a) $t = 0.12$ (b) $t = 0.45$ (c) $t = 0.96$ (d) $t = 2.67$ (e) $t = 4.11$ (f) $t = 6$

3.3.3 Formulation en écoulement non-uniforme

Le modèle PML associée à l'équation de Galbrun en écoulement uniforme a été implantée avec succès. Le problème principal est de savoir comment choisir a priori la bonne transformation de l'espace-temps de telle sorte que toutes les ondes prises en charge par l'équation ont des vecteurs de lenteur et des vitesses de groupe cohérentes dans les coordonnées transformées. Hu [55] a étendu la technique utilisée dans [52] pour un écoulement non-uniforme. La non-uniformité de l'écoulement est uniquement suivant une direction. Cette formulation est une généralité de PML dans l'écoulement uniforme et non-uniforme unidirectionnel. Inspiré par sa méthode, nous développons la formulation PML associée à l'équation de Galbrun en écoulement moyen non-uniforme. L'efficacité de l'approche est démontrée pour les couches de mélanges.

3.3.3.1 Application à l'équation de Galbrun

Dans toutes les transformations, présentées dans les paragraphes ci-dessus, l'écoulement moyen est considéré constant dans tout le domaine PML. En effet, nous avons par exemple le paramètre α dans l'Eq. (3.24) qui est un nombre critique pour assurer la stabilité de la formulation PML et obtenu par la relation de dispersion. La question, peut alors se poser lorsque l'écoulement n'est pas uniforme particulièrement à l'interface entre le domaine acoustique et le domaine PML. Dans [64, 65], une extension de PML à l'écoulement non-uniforme a également été accordée, où une valeur équivalente pour α , qui s'appelle μ , a été ajusté par des expériences numériques qui donnent des solutions stables. Hu par exemple [55, 56] propose de se baser sur une valeur moyenne de l'écoulement. Après une étude de la relation de dispersion, il présente une forme pour α :

$$\alpha = \frac{U_m}{1 - U_m^2} \quad (3.63)$$

où U_m est la vitesse moyenne de l'écoulement non-uniforme. Il est calculé à partir de :

$$U_m = \frac{1}{b-a} \int_a^b U(y) dy \quad (3.64)$$

pour un domaine de l'écoulement de $y \in [a, b]$.

En résumé, la méthode PML associée à l'équation de Galbrun implique essentiellement trois étapes :

- Première étape, nous appliquons une bonne transformation en espace-temps :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{U_m}{1-U_m^2} \quad (3.65)$$

- Seconde étape, nous appliquons le changement de variables complexe de la formulation PML classique :

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \frac{1}{\gamma_y} \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.66)$$

- Troisième étape, nous réécrivons les équations à l'original des variables d'espace et de temps :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} - \alpha \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.67)$$

L'équation de Galbrun avec la formulation PML en écoulement non-uniforme suivant la direction y est devenue finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[(1 + \alpha^* U) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{U}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 w_x^L + \left(\frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} + \alpha^* \frac{\partial}{\partial t} \right) p^L = 0 \\ \left[(1 + \alpha^* U) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{U}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 w_y^L + \frac{1}{\gamma_y} \frac{\partial p^L}{\partial y} = 0 \\ p^L + \left(\frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} + \alpha^* \frac{\partial}{\partial t} \right) w_x^L + \frac{1}{\gamma_y} \frac{\partial w_y^L}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (3.68)$$

avec

$$\alpha^* = \alpha \left(1 - \frac{1}{\gamma_x} \right)$$

3.3.3.2 Exemple de validation

Pour valider le cas d'un écoulement non-uniforme, nous présentons ci-dessus l'exemple de la propagation d'une source mono polaire de type pression dans une couche de mélange. Cet exemple a été traité par Ewert [66]. Un domaine de calcul de 201×201 points équidistants en espace $\Delta x = \Delta y = 0.01$ de grille allant de -1 à 1 dans les deux directions est utilisé. Ce maillage correspond à $\lambda/5$, où λ est la longueur d'onde. On a choisi $\beta = 10$ et $E_{pml} = 1$. Le profil d'écoulement moyen est donné analytiquement :

$$U(y) = \Delta u \tanh(2y / \delta) \quad (3.69)$$

où la vitesse maximum est fixée à $\Delta u = 0.5$ et δ est l'épaisseur de la couche de mélange. Le profil de l'écoulement de couche de mélange avec une vitesse de convection à zéro est donné en Figure 3.28. L'épaisseur de la couche de mélange δ est fixée à 0.5 .

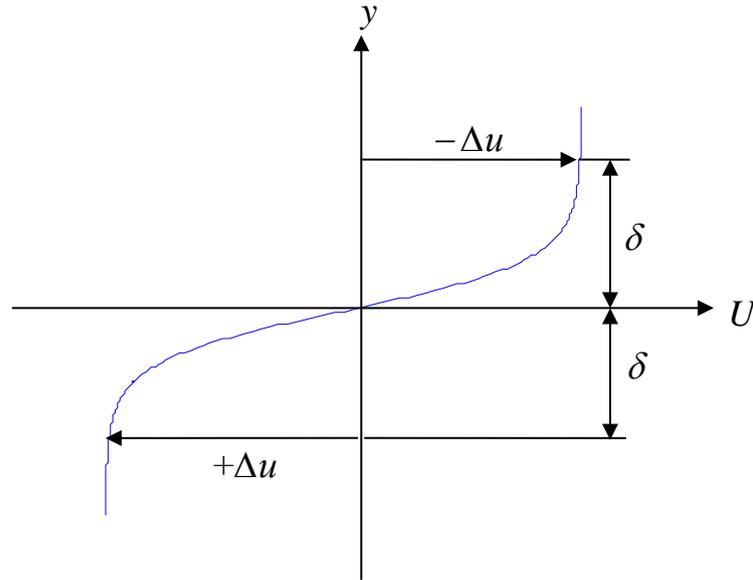


Figure 3.28 Profils de l'écoulement de couche de mélange

D'après l'Eq. (3.64), nous calculons d'abord analytiquement la vitesse moyenne de l'écoulement de couche de mélange :

$$U_m = \frac{1}{1-0} \int_0^1 \Delta u \tanh(2y / \delta) dy = \Delta u \cdot \delta / 2 \left[\ln(\operatorname{ch}(2y / \delta)) \right]_0^1 = 0.41 \quad (3.70)$$

et $\alpha = 0.41$.

La source irrotationnelle est un monopole décrit par :

$$g = \exp\left[-\ln(2) \frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right] \cdot \cos(\omega t) \quad (3.71)$$

avec $\sigma^2 = 0.0009$ et la pulsation $\omega = 50$. Cette source est centrée à l'origine $(0, 0)$ du domaine de calcul. La partie temporelle de cette source est une fonction cosinus. La transformée de Laplace de cette fonction est analytiquement donnée,

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (3.72)$$

et on prend une durée de signal $T = 6$ et $\Delta t = 0.01$. Les pôles sur l'axe imaginaire b sont données par : $(b = \pm \omega)$, il faut que le chemin d'intégration contienne les deux pôles. Nous avons $a = 0.1$ et $b = [0:0.2:70]$. Nous allons comparer nos résultats avec les résultats de Ewert [66]. La Figure 3.29 représente un instantané de la perturbation de la pression de notre simulation et le résultat d'Ewert. Il y a un accord parfait entre les deux résultats. Ce résultat est confirmé par la comparaison de la distribution de la pression acoustique suivant l'axe $Y = 0.7$, voir la Figure 3.30. Les solutions des deux graphiques sont très proches.

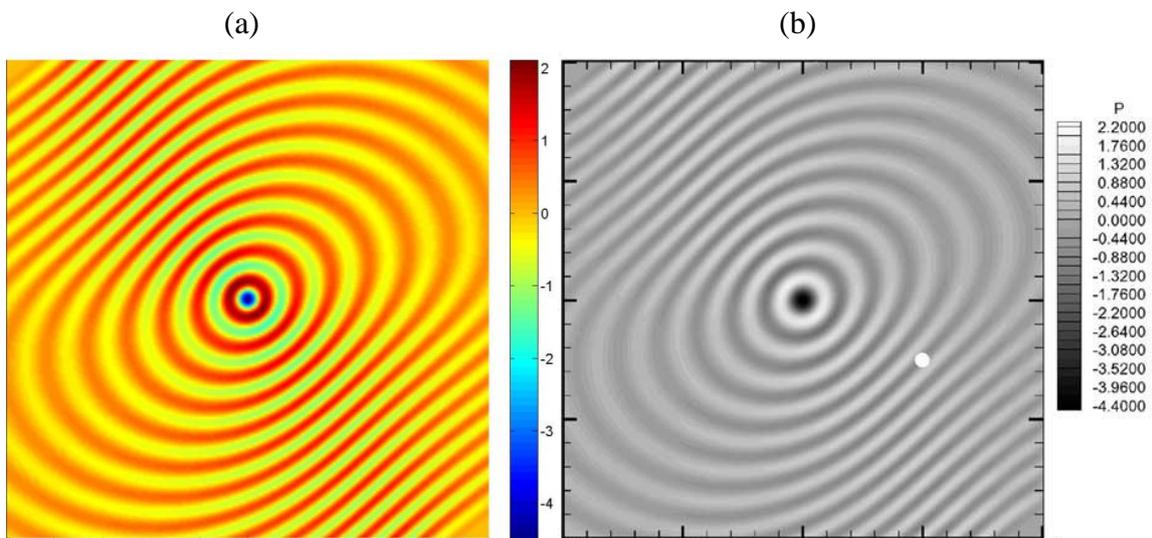


Figure 3.29 Les champs de pression acoustique résultant d'un monopole dans l'écoulement de couche de mélange à $t = 1.8$: (a) Simulation présentée (b) Solution d'Ewert

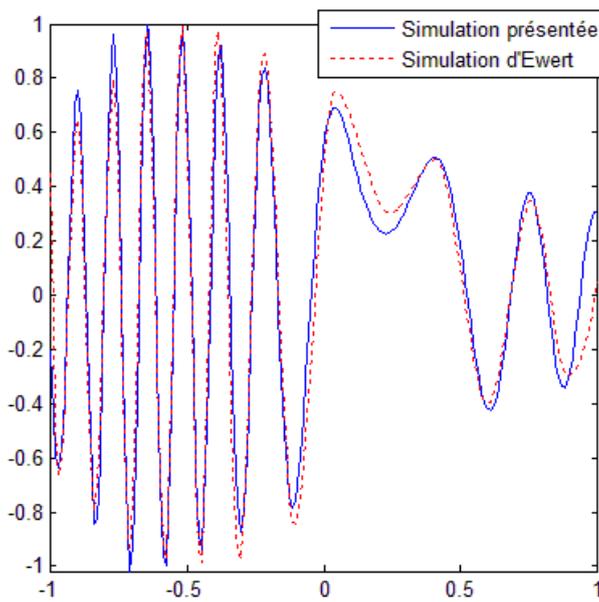


Figure 3.30 Comparaisons de la pression acoustique suivant $Y = 0.7$ dans l'écoulement de couche de mélange à $t = 1.8$

3.4 Études de l'échange d'énergie

3.4.1 Introduction

Lorsque l'écoulement moyen est uniforme, une excitation irrotationnelle (acoustique) conserve son caractère irrotationnel au cours de la propagation et il en est de même pour une excitation rotationnelle, elle garde son caractère rotationnel. La première se propage à célérité différente en amont et en aval. La seconde est simplement convectée par l'écoulement. Pour un écoulement non uniforme, ce caractère dans deux natures physiques ne conserve plus. Il y a un échange d'énergie entre les deux types. Nous allons prendre l'exemple de propagation dans une couche de mélange pour vérifier ce transfert. Deux types de sources (irrotationnelle et rotationnelle) seront émis dans deux écoulements (uniforme et couche de mélange). Nous présentons chaque fois la pression (acoustique) et le rotationnel du déplacement (vorticité) pour vérifier ces différents aspects.

Un domaine de calcul de $[-1,1] \times [-1,1]$ discrétisé par les triangles non-régulières de $\Delta x = \Delta y = 0.01$ est utilisé. Les conditions aux limites sont imposées par l'utilisation d'une couche PML et les conditions initiales sont imposées à zéros. L'équation de Galbrun adimensionalisée à résoudre est :

$$\begin{cases} \frac{d_0^2 \mathbf{w}^L}{dt^2} + \nabla p^L = \mathbf{f} \\ p^L + \nabla \cdot \mathbf{w}^L = g \end{cases} \quad (3.73)$$

Les deux types de sources sont donnés par :

- La source irrotationnelle est donnée par :

$$g = \exp\left[-\ln(2)\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right] \cdot \cos(\omega t) \quad (3.74)$$

où $\sigma^2 = 0.0009$ et la pulsation $\omega = 50$.

- La source de vorticité est imposée au centre du domaine acoustique, donnée par :

$$\mathbf{f} = \text{rot}\left[-\pi^4(x^2 + y^2)\right] \cdot \cos(\omega t) \quad (3.75)$$

où la pulsation $\omega = 50$.

Pour ces deux sources, une durée de signal $T = 6$ et $\Delta t = 0.01$ sont utilisées et nous avons également $a = 0.01$ et $b = [0:0.2:70]$ pour les points d'intégration sur le plan complexe s . Dans les simulations numériques précédentes, on a déjà vu des résultats satisfaisants avec ces deux types de source.

3.4.2 Écoulement uniforme

Dans un premier temps, des simulations numériques dans l'écoulement uniforme avec $M = 0.3$ sont réalisées suivant l'axe x . Comme on le voit sur la Figure 3.31 (b), avec une source irrotationnelle, le rotationnel de déplacement est presque nul. De la même manière, avec la source rotationnelle, le champ de pression est presque nul, voir la Figure 3.32 (a). Les propriétés mentionnées sont bien conservées dans l'écoulement uniforme.

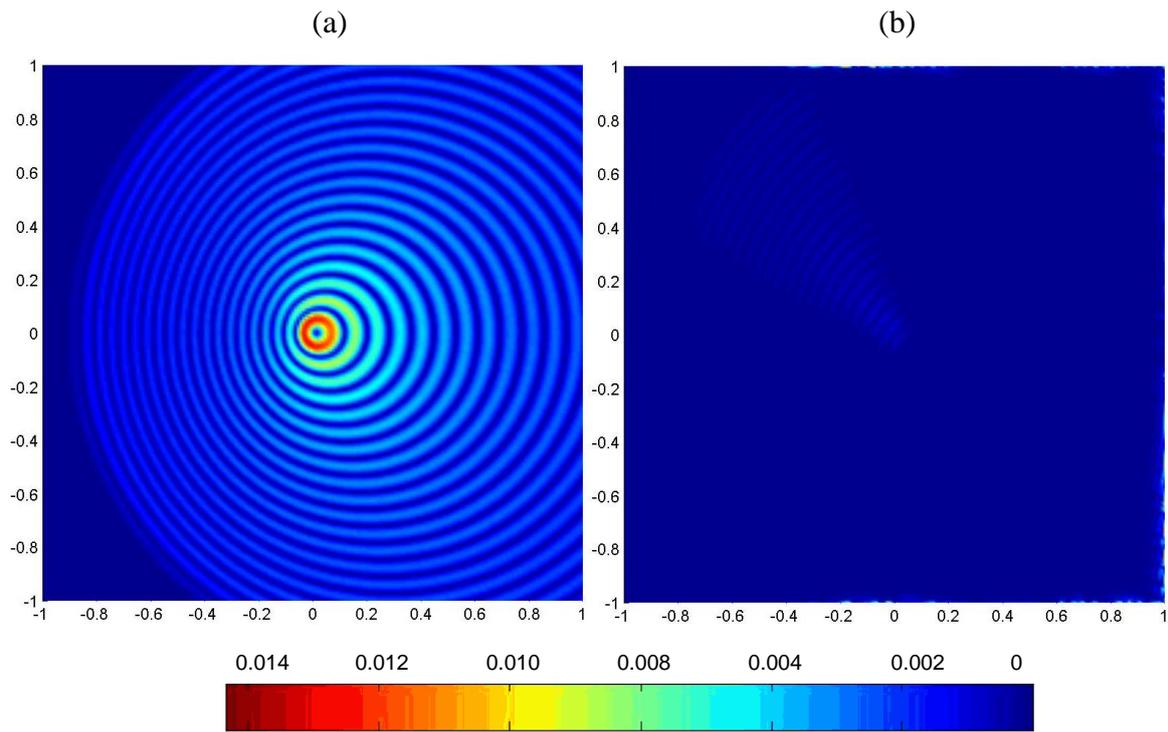


Figure 3.31 Source irrotationnelle dans l'écoulement uniforme à $t = 1.25$:
 (a) Champ de pression (b) Rotationnel du champ de déplacement

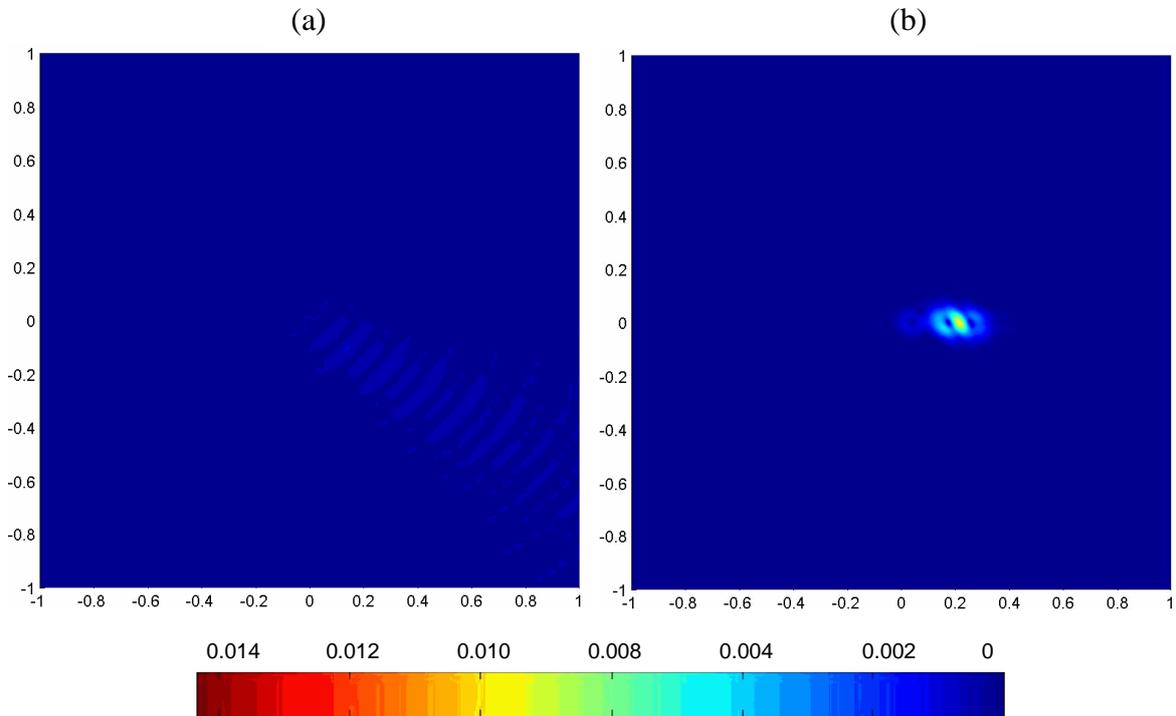


Figure 3.32 Source rotationnelle dans l'écoulement uniforme à $t = 1.25$:
 (a) Champ de pression (b) Rotationnel du champ de déplacement

3.4.3 Écoulement de couche de mélange

Dans un second temps, les simulations numériques dans l'écoulement de couche de mélange sont réalisées. Le profil de vitesse de couche de mélange général est donné en tangente hyperbolique :

$$U(y) = \bar{U} + \frac{\Delta U}{2} \tanh\left(\frac{2y}{\delta}\right) \quad (3.76)$$

où δ est l'épaisseur de la couche de mélange. $\bar{U} = (U_1 + U_2) / 2$ et $\Delta U = U_2 - U_1$ sont la moyenne et la différence des vitesses de pointe U_1 et U_2 entre deux écoulements. Nous avons choisi un profil d'écoulement cisailé avec $\delta = 0.5$, $U_1 = 0.5$ et $U_2 = 0.1$, voir la Figure 3.33.

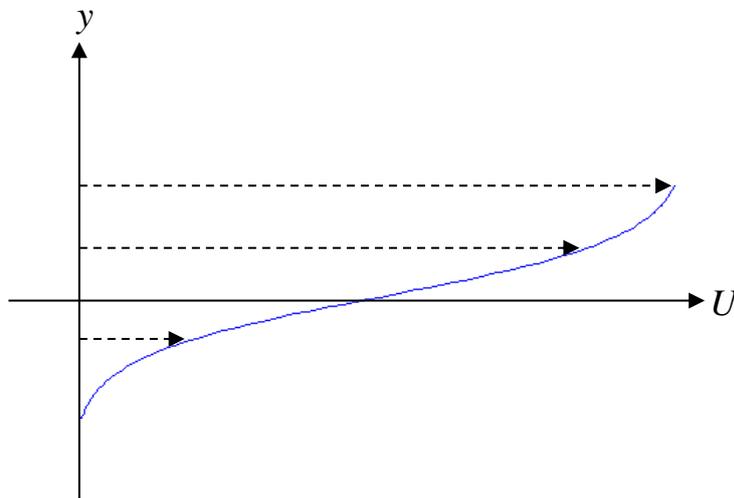


Figure 3.33 Profil de l'écoulement de couche de mélange

La Figure 3.34 montre le champ de pression avec la source irrotationnelle et le rotationnel de déplacement n'est pas nul dans l'écoulement de couche de mélange. En effet, l'opérateur rotationnel exercé sur le déplacement fait apparaître un champ irrotationnel. La Figure 3.35 (a) montre que le champ de pression avec la source rotationnelle est devenu non nul.

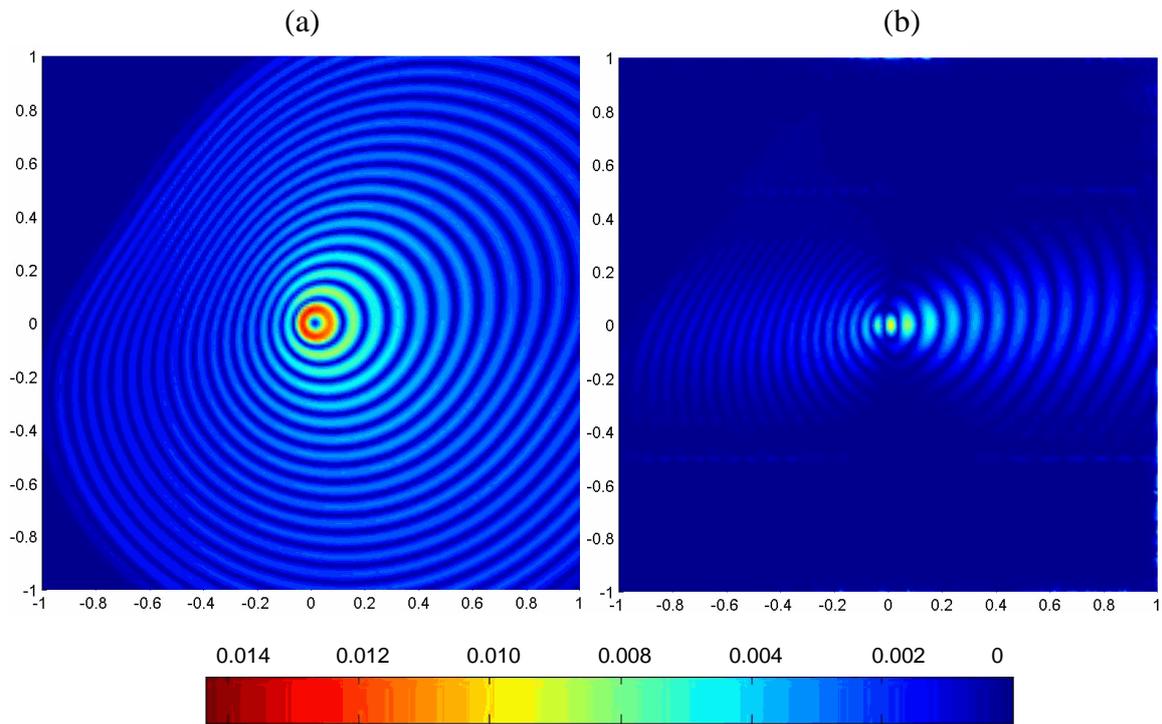


Figure 3.34 Source irrotationnelle dans l'écoulement de couche de mélange à $t = 1.25$:
 (a) Champ de pression (b) Rotationnel du champ de déplacement

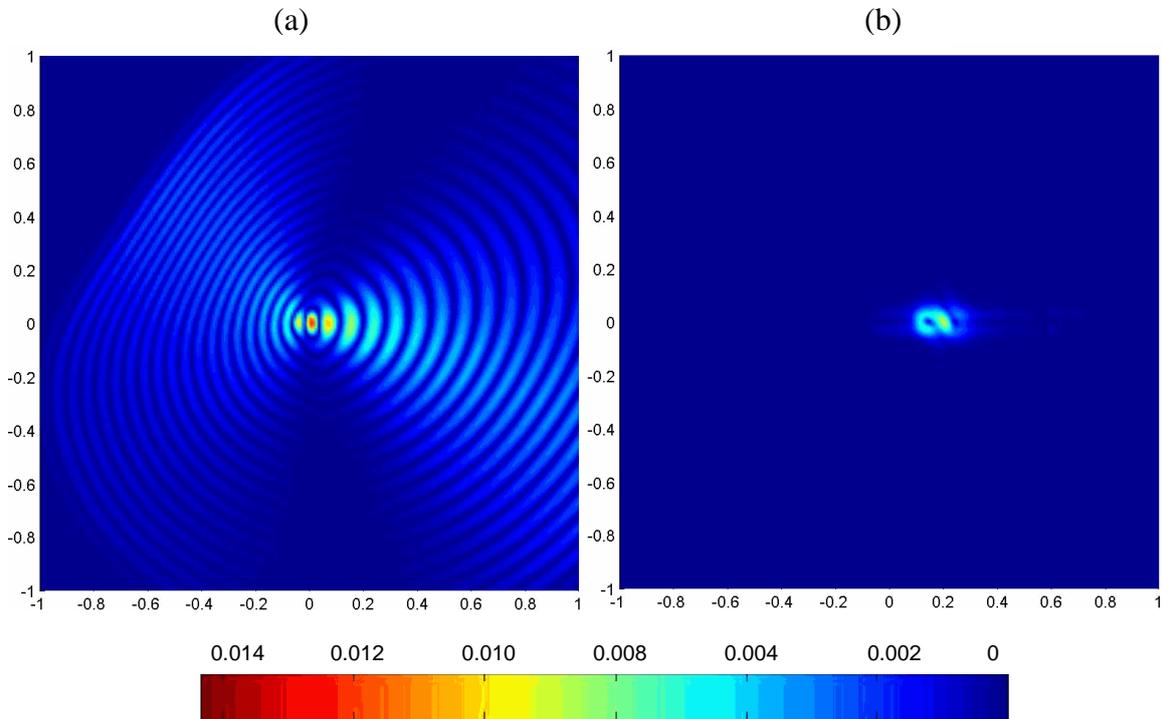


Figure 3.35 Source rotationnelle dans l'écoulement de couche de mélange à $t = 1.25$:
 (a) Champ de pression (b) Rotationnel du champ de déplacement

3.4.4 Conclusion

La propagation des ondes acoustiques dans un écoulement de couche de mélange est un phénomène intéressant à étudier. Elle nous a permis ici de valider la notion d'échange d'énergie entre les différents types de sources, en particulier la génération du bruit par une source tourbillonnaire. En effet, dans un problème réel une couche de mélange crée des tourbillons (même des instabilités [104-107]). La création de ces tourbillons par la couche de mélange (écoulement non uniforme) peut comme on vient de le montrer transformer une partie de l'énergie de la source en énergie acoustique et créer du bruit qui s'est rayonné. Avec deux types de source différents (acoustique et vorticité), on constate qu'une onde acoustique génère de la vorticité et crée un champ irrotationnel dans l'écoulement cisailé. Une source irrotationnelle crée un champ rotationnel. Le cas de l'écoulement uniforme confirme la propriété spéciale de l'écoulement cisailé. Dans l'écoulement uniforme, les ondes acoustiques restent à leurs états originels et l'échange d'énergie n'a pas lieu, ce qui est le cas, au contraire, dans l'écoulement cisailé. Cette étude met notamment en évidence des couplages importants entre acoustique et vorticité.

3.5 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre une condition de transparence pour la troncature d'un domaine acoustique non-borné basée sur les couches absorbantes parfaitement adaptées ou PML. Nous avons vérifié que la formulation classique pour une équation d'onde non convectée n'est pas stable. Une analyse de la relation de dispersion permet d'identifier les causes de cette instabilité. En se basant, entre-autre sur les travaux de Hu pour les LEE, nous avons proposé une formulation valable pour un écoulement uniforme et non-uniforme et appliquée à la représentation mixte de l'équation de Galbrun. Là aussi, l'analyse de la dispersion permet de comprendre les origines des instabilités et l'apport de cette nouvelle formulation pour y remédier. Les tests numériques ont porté sur différents types de sources (acoustique et de vorticité).

Dans un premier temps, la nouvelle formulation de PML associée à l'équation de Galbrun en présence d'un écoulement uniforme et unidirectionnel est étudiée. Cette configuration simple nous permet de bien comprendre le phénomène et la difficulté de construire une couche PML afin de déduire une formulation générale pour un écoulement uniforme. Dans un second temps, les équations de PML sont appliquées en présence d'un écoulement non uniforme (une couche de mélange). Un exemple dans la littérature est choisi, avec lequel les résultats qu'on a obtenus sont comparés. L'accord est parfait entre les deux simulations. La modélisation et la simulation de la propagation des ondes acoustiques dans un écoulement cisailé sont faites pour mettre en évidence l'échange entre acoustique et vorticité. Dans la dernière partie nous avons fait une ébauche d'analyse de paramètres dont l'objectif est de montrer qu'il serait intéressant de faire une étude plus approfondie d'optimisation de la couche pour réduire les temps de calculs.

Chapitre 4

Modèles de sources aéroacoustiques

Dans les chapitres précédents, la source acoustique (ou plus exactement la perturbation) était donnée. Dans des problèmes aéroacoustiques l'origine du bruit peut être l'écoulement lui-même par effet de turbulence, d'interaction avec un obstacle, ... Dans ce cas un calcul de mécanique de fluide (équations de Navier-Stokes, équations d'Euler, ..) est nécessaire. Il peut être mené sur une zone très limitée (moyens de calcul limités) et/ou avec des simplifications (fluide incompressible, fluide parfait, modèles empiriques). Nous allons tenter de proposer un modèle simplifié associé à l'équation de Galbrun qui peut traiter ce type de problème. Dans un premier temps, nous allons présenter, brièvement, les différentes approches proposées dans la littérature : la simulation numérique directe avec ces différentes formes et ensuite les différentes formes des analogies acoustiques. Nous présentons d'une manière plus détaillée la méthode EIF (Expansion about Incompressible Flow) que nous adoptons par la suite pour développer le terme source associé à l'équation de Galbrun. Deux exemples sont choisis pour tester l'efficacité de notre approche et les résultats sont comparés à ceux de la littérature.

4.1 Modèles des sources aérodynamiques

4.1.1 Simulation numérique directe

La façon la plus précise pour simuler les problèmes aéroacoustiques est d'utiliser la simulation numérique directe (DNS). Dans ce cas, l'écoulement et la propagation des ondes sont obtenues directement en résolvant les équations de Navier-Stokes. Mais, l'utilisation des équations de Navier-Stokes n'est souvent pas possible en raison de la non-linéarité élevée, et le domaine de calcul large dans de nombreuses applications pratiques, telles que dans l'aéronautique. Avec cette méthode, il est possible de décrire avec précision la génération du son en champ proche ainsi que la propagation en champ lointain. Mais il est difficile de distinguer les variations de pression du bruit généré car les perturbations acoustiques sont généralement plus faibles que les perturbations hydrodynamiques correspondantes. Cependant, cette méthode reste une référence pour la validation d'autres approches. Elle permet aussi la compréhension du mécanisme physique de la génération du son. Pour résoudre le problème, un maillage très fin et une discrétisation de haute précision dans l'espace et le temps sont nécessaires.

Les limites de la méthode DNS peuvent être surmontées dans une certaine mesure à l'aide de Large Eddy Simulation (LES). La méthode LES ne résout pas toutes les échelles du mouvement et les échelles non résolues du mouvement sont représentées par un modèle, appelé modèle de sous-maille. Une variété de modèles sous-maille ont été proposées [67]. Le principal problème est l'influence de ces modèles sur le champ sonore. En général, il est supposé que le son est généré par une modulation à de grandes échelles et les petites échelles ne sont pas capturées dans LES. Des maillages plus relâchés peuvent être utilisés dans ce cas, ce qui permet de simuler des écoulements avec un nombre de Reynolds élevé. Il existe une troisième méthode, appelée Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS). Dans cette approche, l'opération de moyenne est appliquée aux équations du mouvement d'un fluide, les équations de Navier-Stokes moyennées, qui décrivent dans l'évolution des quantités moyennes. Toutes les échelles de la turbulence sont intégrées et les moyennes ne sont pas toujours bien représentatives du comportement de l'écoulement. Pour résumer, les avantages et les inconvénients des méthodes DNS, LES et RANS sont représentés dans le tableau 2.

Approche	Avantages	Inconvénients
DNS	<ul style="list-style-type: none"> - pas de modélisation de l'interaction des perturbations hydrodynamique /acoustique - modèle de référence 	<ul style="list-style-type: none"> - coût numérique prohibitif (maillage fin, schéma numérique précis) - utilisation limitée
LES	<ul style="list-style-type: none"> - nombre de Reynolds élevé - configuration complexe 	<ul style="list-style-type: none"> - maillage plus dense (/ RANS) - nécessite des codes précis - coût numérique
RANS	<ul style="list-style-type: none"> - maillage grossier - coût numérique réduit 	<ul style="list-style-type: none"> - seulement les champs moyens - perte de précision

Tableau 2. Avantages et inconvénients des méthodes DNS, LES, RANS pour la simulation numérique directe

4.1.2 Analogies aéroacoustiques

4.1.2.1 Introduction

D'une manière générale, CAA (Computational AeroAcoustics) permet de réaliser l'estimation du bruit rayonné par un écoulement en découplant les phénomènes aérodynamiques des phénomènes acoustiques. Plusieurs approches, avec différents types de décomposition de la totalité du champ, ont été mises au point. Elles sont basées sur une décomposition de domaine et/ou la décomposition d'opérateur de propagation avec une linéarisation ou non.

L'analogie de Lighthill est l'une de ces approches [68, 69]. Elle est à la base de toute une classe d'approches. Elle consiste à faire une réorganisation des équations de conservation de telle sorte à obtenir un opérateur de propagation sans écoulement et de mettre le reste des termes en second membre comme sources acoustiques. Sous cette forme, l'analogie de Lighthill ne traduit pas explicitement la convection des ondes par l'écoulement, ni leur réfraction. Plus tard, Curle [70] a étendu la théorie de Lighthill en incluant l'influence des frontières rigides statiques. Fowcs Williams et Hawkins [71] ont généralisé l'analogie de Lighthill pour inclure l'influence des frontières en mouvement arbitraire. Pour prendre en compte l'interaction entre le champ aéroacoustique et les ondes acoustiques, Phillips [72] et

Lilley [73], entre autres, prennent en considération les effets de l'interaction entre écoulement moyen et la turbulence d'une part et celle de la turbulence avec elle-même d'autre part. Notons que même si ces formulations apportent une aide significative quant à l'interprétation des résultats, elles sont beaucoup plus complexes que la formulation de Lighthill et par conséquent d'utilisation et de mise en œuvre numérique plus délicate. Pour séparer complètement les termes sources et le champ acoustique rayonné, Powell [74], Howe [75] ou Möhring [76] présentent des analogies basées sur la vorticité.

4.1.2.2 Analogie de Lighthill

L'équation de Lighthill est obtenue par la recombinaison des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, de manière à faire apparaître un opérateur d'onde, décrite par :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial y_i^2} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \quad (4.1)$$

où $T_{ij} = \rho u_i u_j + (p - c_0^2 \rho) \delta_{ij} - \tau_{ij}$ est le tenseur de Lighthill et c_0 est la célérité du son. Cette équation est exacte car elle est construite à partir des équations de la mécanique des fluides sans hypothèse. Le membre gauche décrit une équation de propagation des ondes acoustiques dans un milieu homogène et au repos. Le membre droit représente le terme source généré par des écoulements. Le tenseur de Lighthill peut être décomposé en trois contributions. Tout d'abord, le terme en $\rho u_i u_j$ qui correspond au bruit dû à la turbulence et qu'on peut décomposer en deux composantes dites bruit de cisaillement et bruit propre, le terme en τ_{ij} qui correspond à la production de bruit dû aux fluctuations du tenseur des contraintes de viscosité et la compressibilité, et enfin le terme en $(p - c_0^2 \rho) \delta_{ij}$ qui représente le bruit d'entropie associé aux échanges de chaleur. Sans effet thermiques et en négligeant la viscosité, on montre que le tenseur de Lighthill peut être approximé par une expression incompressible et isentropique :

$$T_{ij} = \rho_0 u_i u_j \quad (4.2)$$

où ρ_0 est la masse volumique du fluide.

L'idée de base des analogies aéroacoustiques est de découper le problème en deux étapes : aérodynamique puis acoustique. D'autre part, l'espace est découpé en deux domaines : une zone source, où sont concentrés les phénomènes aérodynamiques, à l'origine de la génération de bruit, et une autre zone où le seul phénomène physique susceptible d'être présent est la propagation des ondes acoustiques, voir Figure 4.1. A l'opposé, on considère que dans la zone source, les fluctuations acoustiques sont noyées dans les fluctuations

aérodynamiques. En réalisant ce découpage de l'espace, on impose donc implicitement que le domaine de calcul acoustique est un champ lointain.

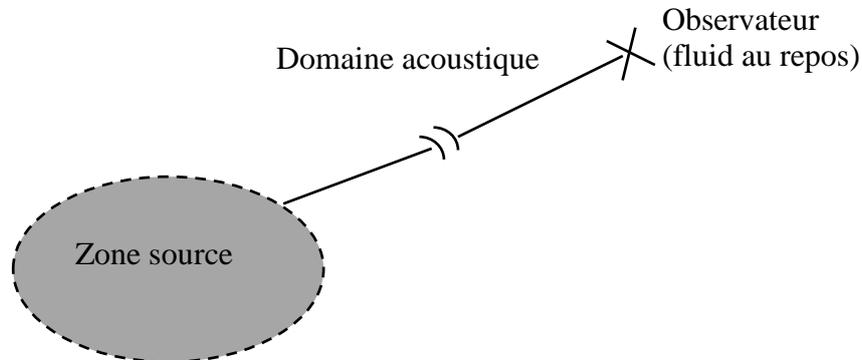


Figure 4.1 Découpage de l'espace pour l'analogie de Lighthill

Solution de l'équation de Lighthill

Comme toute équation d'onde inhomogène, l'équation de Lighthill peut être résolue à l'aide de la fonction de Green en espace libre :

$$\rho = \int \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} G(y, t, \bar{y}, \bar{t}) d\bar{y} d\bar{t} \quad (4.3)$$

Il existe de nombreuses expressions de fonctions de Green de champ libre, dépendant du nombre de dimensions spatiales du problème (2D, 3D, voire 1D), du domaine (temporel ou fréquentiel). Une des grandes limitations des analogies aéroacoustiques, est l'impossibilité, a priori, de calculer le champ directement dans la zone source. Cette problématique a pourtant longtemps été d'actualité. Dès 1959, Frantz [79], puis Ollerhead [80] proposent une solution valable en champ proche de la zone source. Ces solutions restent cependant limitées à des champs hors du domaine source. Plus récemment, en 2007, Schram *et al.* [81] présente une solution adaptée de l'analogie de Curle dans le domaine fréquentiel, valable pour un point dans la zone source, et dans le cas où l'obstacle n'est pas forcément à géométrie compacte.

Approche de type Ribner

Jusqu'à présent, toutes les solutions d'analogies aéroacoustiques présentées reposent sur la résolution d'une équation d'onde pour la masse volumique. En 1964, Ribner [81] est le premier à retravailler les équations de Navier-Stokes afin d'écrire directement une équation d'onde en fonction de la pression, physiquement plus représentative que la masse volumique.

En suivant une démarche similaire à celle de Lighthill, on peut aboutir à l'équation d'onde inhomogène pour la pression :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = \frac{\partial^2 \rho_0 u_i u_j}{\partial y_i \partial y_j} \quad (4.4)$$

Ribner décompose la pression p en deux parties : une pression compressible (acoustique, $p^{(1)}$) et une autre pression incompressible (ou pseudo-son, $p^{(0)}$). Avec une démarche similaire à la méthode EIF, il obtient finalement l'équation d'onde pour la pression compressible $p^{(1)}$:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial t^2} - \nabla^2 p^{(1)} = -\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial t^2} \quad (4.5)$$

Ribner montre ainsi que la pression compressible est la conséquence des fluctuations de la pression pseudo-son, qui peut aussi être considérée comme des sources du rayonnement de pression acoustique.

4.1.2.3 Équations de Phillips et Lilley

L'interaction entre le rayonnement acoustique et l'écoulement moyen est indirectement prise en compte dans le terme source de Lighthill. Or les effets de propagation d'ondes en écoulement ne peuvent être considérés comme des sources pures. Pour modéliser un milieu de propagation en mouvement arbitraire, Phillips a formulé une analogie en définissant une nouvelle variable $\Pi = \gamma^{-1} \ln(p/p_0)$ où p_0 est une pression de référence (généralement constante) à partir des équations du gaz parfait. L'équation de Phillips s'écrit :

$$\frac{d^2 \Pi}{dt^2} - \frac{\partial}{\partial y_i} \left(c^2 \frac{\partial \Pi}{\partial y_j} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \frac{\partial u_j}{\partial y_i} - \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial y_j} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{c_p} \frac{ds}{dt} \right) \quad (4.6)$$

Les effets de convection sont intégrés dans les dérivées particulières. L'opérateur de propagation est une équation de propagation dans un écoulement où la célérité du son peut être variable. Le membre de droite représente le terme source : le premier terme représente le bruit dû aux fluctuations de vitesse dans l'écoulement et les deux autres décrivent le bruit des fluctuations des contraintes visqueuses et d'entropie.

L'équation de Phillips présente l'intérêt de faire disparaître la densité ρ du terme source. Cependant, comme le souligne Lilley, l'interprétation de Phillips n'est pas strictement correcte car le terme à gauche ne contient pas tous les interactions de l'écoulement moyen avec le champ acoustique. Dans le but d'obtenir un opérateur de propagation dans lequel contient tous les effets liés à la propagation, Lilley dérive l'équation de Phillips en appliquant l'opérateur d/dt dans les deux côtés de l'Eq. (4.6) :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{d^2 \Pi}{dt^2} - \frac{\partial}{\partial y_i} \left(c^2 \frac{\partial \Pi}{\partial y_j} \right) \right] + 2 \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(c^2 \frac{\partial \Pi}{\partial y_j} \right) = -2 \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \frac{\partial u_j}{\partial y_k} \frac{\partial u_k}{\partial y_i} + \Psi \quad (4.7)$$

avec

$$\Psi = 2 \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial y_k} \right) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial y_j} \right) \right] + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{c_p} \frac{ds}{dt} \right)$$

où la fonction Ψ représente les effets des fluctuations des contraintes visqueuses et les fluctuations d'entropie. Pour un écoulement moyen cisailé et unidirectionnel, le terme de droite ne possède aucun terme linéaire en fluctuations et peut effectivement être considéré comme une quantité de source. Cette dernière analogie permet de séparer parfaitement les termes sources, mais la résolution de cette équation différentielle est difficile (équation d'ordre trois non linéaire). Cela conduit le plus souvent à procéder à diverses simplifications avant d'entreprendre sa résolution. Néanmoins, Colonius *et al.* [83] ont utilisé cette équation pour étudier le bruit généré par une couche de mélange bidimensionnelle simulée par la méthode DNS. Ils ont linéarisé le membre de gauche et transféré tous les termes non-linéaires vers les sources. Pour poursuivre ces idées, Goldstein [84, 85] propose une formulation dans un cas particulier d'un écoulement porteur parallèle cisailé, l'approximation de l'équation de Lilley devient :

$$\frac{d_0}{dt} \left[\frac{d_0^2 \Pi}{dt^2} - c_0^2 \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y_i \partial y_j} \right) \right] + 2c_0^2 \frac{du_0}{dy_2} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y_1 \partial y_2} \right) = \frac{d_0}{dt} \frac{\partial S}{\partial y_i} - 2 \frac{du_0}{dy_2} \frac{\partial S}{\partial y_1} \quad (4.8)$$

où $S = \partial u_i u_j / \partial y_j$ et Π représente la quantité de fluctuation. Cette expression est utile car l'opérateur de propagation est exact pour un écoulement porteur parallèle cisailé (c'est l'équation de Pridmore-Brown). Le second membre peut donc être considéré comme un terme source quadripolaire, ce qui n'est pas le cas de l'Eq. (4.7).

4.1.2.4 Équations de Powell et Howe

Powell décide de lier les aspects aérodynamiques et acoustiques en se basant sur le rayonnement associé aux sources tourbillonnaire. La formulation de Powell consiste à réécrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement, en posant le vecteur rotationnel $\varpi = \nabla \times u$ pour avoir finalement :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \rho = \nabla \cdot (\rho \varpi \times u + \rho \nabla \frac{u^2}{2} - \frac{\partial \rho}{\partial t} u) \quad (4.9)$$

C'est une équation exacte en négligeant la viscosité et la conductivité thermique. Powell constate que le terme source aérodynamique vient des fluctuations de la vorticité et que le

champ de pression acoustique issu de cette expression est un bruit tourbillonnaire. Pour un nombre de Mach faible, les deux derniers termes sont négligeables. Dans ce cas, la force de Coriolis $\rho \varpi \times u$ joue un rôle fondamental dans la production du bruit aérodynamique. Les variations de cette force produisent deux dipôles centrés sur les tourbillons. Avec l'hypothèse de tourbillon compacte ($M_r \ll 1$), le champ acoustique formé dans le champ lointain correspond effectivement à un quadripôle qui tourne avec les deux tourbillons.

Depuis les travaux de Powell, le rayonnement acoustique des tourbillons en co-rotation a fait l'objet de nombreuses analyses théoriques et numériques. En développant la solution de l'Eq. (4.9), Möhring [76] a exprimé le champ acoustique lointain engendré par un tourbillon compact. Il a également fait une analyse analytique pour la pression acoustique des tourbillons en co-rotation dans le domaine temporel en coordonnées polaires :

$$p(r, \theta, t) = \frac{\rho_0 \Gamma^4}{64\pi^3 R_0^4 c_0^2} \left[J_2 \left(\frac{4\pi f_0 r}{c_0} \right) \sin(2\theta - 4\pi f_0 t) - Y_2 \left(\frac{4\pi f_0 r}{c_0} \right) \cos(2\theta - 4\pi f_0 t) \right] \quad (4.10)$$

où J_2 et Y_2 sont les fonctions de Bessel du premier et second types au second ordre. Ce champ de pression provient d'un tourbillon quadripolaire tournant avec une fréquence f_0 . On peut aussi remarquer que la fréquence de la pression acoustique est $2f_0$ car le problème est symétrique par rapport à l'axe de rotation des tourbillons. La solution n'est valable que pour $M_r \ll 1$. Yates [86] a montré l'invalidité de la solution quand $M_r > 0.1$. La démonstration de la solution de Möhring pour deux tourbillons en co-rotation est présentée par Mitchell *et al.* [87]. Ils donnent aussi un bilan plus détaillé des différentes solutions analytiques existantes.

Howe propose une nouvelle formulation de la vorticité en utilisant une nouvelle variable l'enthalpie de Bernoulli $B = h + 1/2u^2$ où h est l'enthalpie. Pour un fluide parfait, Howe aboutit à l'équation suivante :

$$\left[\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{c_0^2} \frac{du}{dt} \cdot \nabla - \Delta \right] B = \nabla \cdot (\varpi \times u - T \nabla s) - \frac{1}{c_0^2} \frac{du}{dt} \cdot \nabla (\varpi \times u - T \nabla s) + \frac{d}{dt} \left(\frac{T}{c_0^2} \frac{ds}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c_p} \frac{ds}{dt} \right) \quad (4.11)$$

Doak [88] a proposé une autre formulation de l'Eq. (4.11) basée sur les fluctuations de l'enthalpie. Par rapport à la théorie de Lighthill, le modèle de Howe permet de prendre en compte les effets d'un écoulement porteur irrotationnel sur la propagation acoustique, mais les effets de réfraction par un écoulement porteur cisailé ou tournant ne peuvent être pris en compte.

4.2 Méthodes EIF

4.2.1 Introduction

Une autre approche consiste à résoudre la génération et la propagation du son à partir des données fournies par un calcul fluide incompressible, appelé la méthode EIF (Expansion about Incompressible Flow). Cette approche est basée sur le fait que, à faible nombre de Mach, le rayonnement sonore d'un écoulement peut être calculé facilement en utilisant l'incompressibilité de l'écoulement dans une analyse linéarisée. Selon l'hypothèse d'un faible nombre de Mach, les quantités perturbées représentent la différence entre les écoulements compressibles et incompressible. Les variables se décomposent en deux parties : d'un côté, l'écoulement incompressible, de l'autre, les perturbations compressibles. La partie « écoulement incompressible » peut être stationnaire ou instationnaire et la partie « perturbations compressibles » peut être linéaire ou non-linéaire. Par conséquent, les variables de la perturbation sont les inconnues dans les équations acoustiques tandis que toutes les quantités incompressibles sont connues. De plus, la rétroaction du champ acoustique sur le champ d'écoulement incompressible est négligée.

Hardin et Pope [89], ont proposé une formulation non-linéaire : l'écoulement est obtenu à partir des équations de Navier-Stokes incompressibles instationnaires et une correction de la densité hydrodynamique est définie. Les perturbations non-linéaires sont obtenues par le développement des équations d'Euler. Les quantités perturbées représentent la différence entre l'écoulement compressible et l'écoulement incompressible « corrigé ». Shen et Sørensen [90] ont toutefois montré quelques incohérences dans l'approche de Hardin et Pope. Ils suggèrent une autre approche en améliorant les variables perturbées. Dans un cas comme dans l'autre, la transition de l'écoulement incompressible à un écoulement compressible et le traitement de l'équation d'état sont heuristiques. Il est important de noter que les équations d'Euler perturbées sont non-linéaires et qu'un effet de couplage est autorisé entre les variables de l'écoulement incompressibles et les quantités perturbées. Slimon *et al.* [91] utilise une expansion de Janzen-Rayleigh comme une méthode d'analyse des perturbations asymptotiques (en utilisant différents ordres dans la variable de perturbation proportionnelle au carré du nombre de Mach, pour évaluer l'effet de compressibilité), qui leur permet de présenter une relation simple entre la pression hydrodynamique et la densité hydrodynamique. En outre, quelques approches de l'évaluation des sources acoustiques, par le

couplage d'un solveur CFD avec un solveur acoustique, ont été proposées. Seo et Moon [92] ont examiné la démarche hydrodynamique/acoustique à travers l'équation de transport. Ewert et Schröder [66] ont développé plusieurs formulations basées sur une décomposition modale avec un filtrage approximatif des termes sources.

Souvent dans la littérature, l'opérateur de propagation est dérivé à partir des équations d'Euler linéarisées (LEE). Cet opérateur de propagation est exact pour tout type d'écoulement et peut prendre en compte toutes les interactions entre le champ acoustique et aérodynamique. Bailly *et al.* [4-6] ont proposé un terme source pour LEE en suivant la démarche de Lilley. Cette méthode a été appliquée à un jet circulaire. Longatte *et al.* [93] ont ensuite fait une ouverture de la modélisation des termes sources associés aux LEE d'un champ turbulent stochastique en trois dimensions. C'est l'approche retenue dans le modèle SNGR (Stochastic Noise Generation and Radiation). Lee *et al.* [94] quant à eux ont utilisé des schémas optimisés et compacts de hautes performances dans l'acoustique de la cavité pour le jet supersonique. Nous présentons dans ce chapitre, l'approche EIF en l'associant à l'équation mixte que nous avons développé dans les chapitres précédents. Pour valider nos développements, nous comparons nos résultats à ceux présentés dans la littérature.

Nous commençons par détailler les modèles de Hardin et Pope et de Shen et Sørensen sur lesquels nous nous sommes basés pour développer le terme source associé à l'équation de Galbrun. Nous présentons ensuite la formulation mixte avec le terme source associé.

4.2.2 Approche de Hardin et Pope

Les équations utilisées de la méthode EIF pour calculer les fluctuations acoustiques sont les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et d'état. Notons que l'équation de conservation de l'énergie n'est pas nécessaire pour obtenir les fluctuations acoustiques, l'ensemble des équations utiles s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) + \nabla p = 0 \\ p = \mathcal{P}(\rho, s) \end{cases} \quad (4.12)$$

où ρ , \mathbf{u} , p et s sont la densité, la vitesse, la pression et l'entropie, respectivement. Hardin et Pope [95] proposent de décomposer les variables des équations d'Euler en deux composantes: l'une incompressible, qui est considérée comme le terme source dans l'opérateur de

propagation acoustique et l'autre compressible, qui contient les fluctuations acoustiques. Ils introduisent également une densité « corrigée » pour la partie incompressible, qui peut être calculée à partir du champ de pression moyen. La décomposition des variables du problème est sous la forme :

$$\begin{aligned}\rho(y,t) &= \rho_\infty + \rho_1(y,t) + \rho^E(y,t) \\ \mathbf{u}(y,t) &= \mathbf{u}_0(y,t) + \mathbf{u}^E(y,t) \\ p(y,t) &= p_0(y,t) + p^E(y,t)\end{aligned}\quad (4.13)$$

où p_0 et \mathbf{u}_0 sont la pression et la vitesse hydrodynamique dans l'écoulement incompressible, ρ_∞ est la densité dans le fluide au repos, ρ_1 est une correction de compressibilité, ($p^E, \rho^E, \mathbf{u}^E$) sont les perturbations acoustiques. Les équations de perturbation acoustique sont obtenues en trois étapes :

- La première étape consiste à calculer l'écoulement porteur incompressible ($p_0, \mathbf{u}_0, \rho_\infty$). L'ensemble des équations du mouvement à résoudre est alors :

$$\begin{cases} \rho_\infty \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} + \rho_\infty (\mathbf{u}_0 \nabla) \mathbf{u}_0 + \nabla p_0 = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \end{cases}\quad (4.14)$$

- Ensuite, Hardin et Pope proposent de calculer la correction de compressibilité ρ_1 à partir de :

$$p_1(y,t) = p_0(y,t) - \overline{p_0}(y) \quad \text{où} \quad \overline{p_0}(y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p_0(y,t) dt \quad (4.15)$$

et en supposant que les perturbations acoustiques sont isentropiques, on obtient :

$$\rho_1(y,t) = \frac{1}{c^2} p_1(y,t) \quad (4.16)$$

où c signifie la vitesse du son dans le fluide.

- Enfin, le système d'équations qui caractérise les fluctuations compressible ($p^E, \rho^E, \mathbf{u}^E$) est obtenu en introduisant la décomposition (4.13) dans les équations d'Euler (4.12), puis en prenant en compte les solutions de l'écoulement incompressible :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho^E}{\partial t} + \frac{\partial f_i}{\partial y_i} = -\frac{d_0 \rho_1}{dt} \\ \frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_j} [f_i u_j + (\rho_\infty + \rho_1) u_{0i} u_j^E + p^E \delta_{ij}] = -\frac{\partial \rho_1 u_{0i}}{\partial t} - \frac{\partial \rho_1 u_{0i} u_{0j}}{\partial y_j} \\ \frac{\partial p^E}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \rho^E}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \end{cases}\quad (4.17)$$

où $f = \rho u^E + \rho^E u_0$. Ces équations sont exactes car tous les termes non linéaires ont été conservés. Si l'on linéarise l'opérateur de propagation pour les variables (p^E, ρ^E, u^E) , on obtiendra alors les équations d'Euler linéarisées. Notons que les termes sources sont caractérisés uniquement par la correction de compressibilité ρ_1 .

Hardin et Pope ont appliqué leur modèle pour simuler le bruit produit par une sphère pulsante ainsi qu'un écoulement autour d'une cavité [95]. Ekaterinaris [96] a proposé une méthode de résolution des équations de Hardin et Pope basée sur des schémas de différences finies « upwind ». Il a validé cette méthode de calcul dans le cas des deux tourbillons en co-rotation. Enfin, le même auteur a formulé les équations de Hardin et Pope sous une forme conservative [97]. Cela permet d'utiliser les nombreux schémas numériques adaptés à ce type de formulation. Il étend également le modèle au cas des écoulements non isentropiques.

Remarque 4.1 : Dans la théorie de Hardin et Pope, la vitesse du son est calculée par la relation isentropique pour un gaz parfait :

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = \frac{\gamma (p_0 + p^E)}{\rho_\infty + \rho_1 + \rho^E} \quad (4.18)$$

Cette relation est exacte si l'on suppose que l'écoulement est entièrement isentropique. Or, la partie incompressible de l'écoulement ne dépend que de l'entropie et n'est pas supposée isentropique, seulement la partie compressible est isentropique. Cela induit que l'écoulement n'est pas entièrement isentropique. Cette façon de calculer la vitesse du son nous semble donc incorrecte. Dans la pratique, Hardin et Pope simplifient le problème avec la valeur de c_∞^2 qui est calculée par $c_\infty^2 = \gamma p_\infty / \rho_\infty$.

Remarque 4.2 : L'existence de ρ_1 peut s'expliquer par le fait que :

$$\frac{\rho_1}{\rho_\infty} = M^2 \frac{p_1}{\rho_\infty u_\infty^2} \quad (4.19)$$

où $M = u_\infty / c_\infty$ et u_∞ désigne la vitesse constante de l'écoulement. A un faible nombre de Mach, la fluctuation de densité ρ_1 peut être négligée dans le calcul du champ de pression incompressible. Toutefois, cette fluctuation de densité hydrodynamique peut être très importante en comparaison avec la fluctuation de densité acoustique ρ^E .

4.2.3 Approche de Shen et Sørensen

Shen et Sørensen [98] ont mis en évidence une certaine incohérence dans le modèle de Hardin et Pope. Ils pensent que les effets de compressibilité sur l'écoulement sont totalement ignorés et que l'introduction de la correction de la densité aérodynamique ne contient aucune information nouvelle. Ils suggèrent de décomposer les variables du problème sous la forme:

$$\begin{aligned}\rho(y,t) &= \rho_\infty + \rho^E(y,t) \\ \mathbf{u}(y,t) &= \mathbf{u}_0(y,t) + \mathbf{u}^E(y,t) \\ p(y,t) &= p_0(y,t) + p^E(y,t)\end{aligned}\quad (4.20)$$

De ce fait, ils n'introduisent pas une correction sur la compressibilité du fluide. La variable ρ^E contient maintenant toute la fluctuation de la densité. L'écoulement incompressible est toujours caractérisé par les équations (4.14). En suivant la même démarche que Hardin et Pope, ils aboutissent au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho^E}{\partial t} + \frac{\partial f_i}{\partial y_i} = 0 \\ \frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_j} (f_i u_j + \rho_0 u_{0i} u_j^E + p^E \delta_{ij}) = 0 \\ \frac{\partial p^E}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \rho^E}{\partial t} = - \frac{\partial p_0}{\partial t} \end{cases} \quad (4.21)$$

où $f = \rho u^E + \rho^E u_0$. Le seul terme source, qui concerne l'équation d'état, est caractérisé par les fluctuations de pression hydrodynamique dans l'écoulement porteur incompressible.

Ce modèle a été appliqué pour simuler le rayonnement acoustique d'un écoulement turbulent et d'un écoulement laminaire autour d'un cylindre [98, 99]. Pour améliorer les résultats, Shen et Sørensen [100] utilisent un schéma de différences finies d'ordre plus élevé pour résoudre les équations acoustiques. Dans leurs travaux plus récents [101], ils proposent de maintenir la viscosité dans les équations acoustiques. Les calculs autour d'un cylindre circulaire et d'un profil d'aile montrent qu'un couplage visqueux/visqueux est plus naturelle et donne d'excellents résultats par rapport à ceux obtenus dans les calculs précédents basés sur le couplage visqueux/non visqueux.

4.2.4 Application de la méthode EIF à l'équation de Galbrun

Nous allons utiliser le modèle de source aéroacoustique développé par Shen et Sørensen pour aboutir à un modèle de source pour l'équation de Galbrun. Dans leur modèle, Shen et Sørensen ont utilisé une représentation eulérienne pour les fluctuations. Ainsi, en

adoptant une représentation mixte, on remplace chaque perturbation eulérienne dans le système (4.21) par sa perturbation lagrangienne, et en négligeant les termes de perturbation d'ordre 2, on obtient un nouveau système linéarisé ci-dessous :

$$\rho^L + \rho_\infty \nabla \cdot \mathbf{w}^L = 0 \quad (4.22)$$

$$\rho^L \frac{d_0 \mathbf{u}_0}{dt} + \rho_\infty \frac{d_0 \mathbf{u}^L}{dt} + \nabla p^L - {}^T \nabla \mathbf{w}^L \nabla p_0 = 0 \quad (4.23)$$

$$p^L - c_\infty^2 \rho^L = p_\infty - p_0 \quad (4.24)$$

où \mathbf{w}^L est le déplacement lagrangien. On rappelle que l'écoulement porteur incompressible (\mathbf{u}_0, p_0) est caractérisé toujours par les équations (4.14) :

$$\begin{cases} \rho_\infty \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} + \rho_\infty (\mathbf{u}_0 \nabla) \mathbf{u}_0 + \nabla p_0 = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \end{cases}$$

Il est important de souligner que p_0 ne satisfait pas l'équation d'état. On définit la pression ambiante $p_\infty = \mathcal{P}(\rho_\infty)$. La linéarisation de l'équation d'état pourra être écrite :

$$p = \mathcal{P}(\rho) = \mathcal{P}(\rho_\infty) + \left. \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_\infty} \times \rho^L = p_\infty + c_\infty^2 \rho^L \quad (4.25)$$

Finalement, si l'on combine l'Eq. (4.22), l'Eq. (4.24) et l'Eq. (4.14) dans l'Eq. (4.23) pour éliminer les variables de la densité lagrangienne, la vitesse lagrangienne et la pression lagrangienne, on aboutit à l'équation de Galbrun avec second membre :

$$\rho_\infty \frac{d_0^2 \mathbf{w}^L}{dt^2} - \nabla (\rho_\infty c_\infty^2 \nabla \cdot \mathbf{w}^L) + (\nabla \cdot \mathbf{w}^L) \nabla p_0 - {}^T \nabla \mathbf{w}^L \nabla p_0 = \nabla p_0 \quad (4.26)$$

Comme la méthode EIF, cette équation est applicable pour les écoulements à faibles nombres de Mach. Une propriété intéressante de ce modèle est qu'il décrit la propagation aéroacoustique dans un écoulement porteur instationnaire. On modélise ainsi les effets de l'évolution temporelle de l'écoulement porteur sur la propagation.

Pour résoudre l'Eq. (4.26), on propose une formulation mixte en pression-déplacement. En introduisant l'Eq. (4.22) dans l'Eq. (4.23) et l'Eq. (4.24) et en posant $\mathbf{u}^L = d_0 \mathbf{w}^L / dt$, on obtient alors :

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{d_0^2 \mathbf{w}^L}{dt^2} + \nabla p^L + (\nabla \cdot \mathbf{w}^L) \nabla p_0 - {}^T \nabla \mathbf{w}^L \nabla p_0 = 0 \\ p^L + \rho_\infty c_\infty^2 \nabla \cdot \mathbf{w}^L = p_\infty - p_0 \end{cases} \quad (4.27)$$

Le terme source est la variation la pression hydrodynamique autour de la pression ambiante.

4.2.4.1 Exemple : sphère pulsante

Dans cette section, un exemple à une dimension est donné pour notre première validation du terme source. Le problème de la génération de son d'une sphère pulsante est examiné. Shen et Sørensen ont également étudié cet exemple [98]. L'avantage de cet exemple est que les solutions de l'écoulement incompressible sont données analytiquement. L'analyse présentée est une sphère de rayon r dont la surface est mise en vibration avec la vitesse radiale $u_0(r_0, t) = U_0 \sin \omega t$. La solution dans l'écoulement incompressible est donnée par :

$$\begin{cases} u_0(r, t) = U_0 \frac{r_0^2}{r^2} \sin \omega t \\ p_0(r, t) = p_\infty + \rho_0 \omega U_0 \frac{r_0^2}{r} \cos \omega t - \frac{1}{2} \rho_0 U_0^2 \frac{r_0^4}{r^4} \sin^2 \omega t \end{cases} \quad (4.28)$$

où ρ_∞ est la densité ambiante et $r_0 = 1$.

Afin de résoudre les fluctuations acoustiques, l'équation de Galbrun (4.27) est d'abord écrite en coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{d_0^2 w^L}{dt^2} + \frac{\partial p^L}{\partial r} + \left(\frac{2}{r} w^L \right) \frac{\partial p_0}{\partial r} = 0 \\ p^L + \rho_0 c_0^2 \left(\frac{\partial w^L}{\partial r} + \frac{2}{r} w^L \right) = p_\infty - p_0 \end{cases} \quad (4.29)$$

Pour résoudre le système ci-dessus en régime transitoire, nous allons d'abord simplifier le calcul du système. On considère que les termes d'ordre supérieur ou égal à $1/r^2$ sont petits par rapport aux autres grandeurs et qu'ils ont peu influence sur la solution. En suivant ce principe, la solution de l'écoulement incompressible est devenue :

$$\begin{cases} u_0(r, t) = 0 \\ p_0(r, t) = p_\infty + \rho_0 \omega U_0 \frac{r_0^2}{r} \cos \omega t \end{cases} \quad (4.30)$$

L'écoulement est donc négligé, ce qui donne une nouvelle équation simplifiée de Galbrun à résoudre :

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial^2 w^L}{dt^2} + \frac{\partial p^L}{\partial r} = 0 \\ p^L + \rho_0 c_0^2 \left(\frac{\partial w^L}{\partial r} + \frac{2}{r} w^L \right) = -\rho_0 \omega U_0 \frac{r_0^2}{r} \cos \omega t \end{cases} \quad (4.31)$$

L'équation de Galbrun en coordonnées sphériques est ensuite résolue en utilisant la méthode des éléments finis dans l'espace et la transformée de Laplace dans le temps, comme introduite dans le chapitre 2. Les conditions initiales pour tous les variables sont zéro. Les conditions

aux limites du domaine de calcul sont également nécessaires. En plus, la solution analytique de l'acoustique linéaire classique de ce problème est donnée par :

$$p - p_\infty = \rho_\infty c_\infty U_0 \frac{r_0}{r} \cos \varphi_a \sin(\omega t - k(r - r_0) + \varphi_a) \quad (4.32)$$

où $\varphi_a = \arctan(1/ka)$ et $k = \omega/c_\infty$. A partir de cette solution, nous pouvons trouver une valeur exacte en pression aux limites.

La simulation numérique est exécutée pour un nombre de Mach compris entre 0,1 et 0,5 dans le domaine d'un maillage uniforme de 501 points, dont $\Delta r = 0.05r_0$. Les paramètres du plan complexe s sont $a = 0.1$ et $b = [0 : 0.1 : 100]$. La Figure 4.2 nous donne les résultats de la fluctuation de la densité avec 3 méthodes différentes : DNS, l'approche de Shen et Sørensen (nommé SS sur les graphiques) et l'approche avec l'équation de Galbrun (nommé Galbrun sur les graphiques). Notons que les résultats de l'approche de Shen et Sørensen sont très similaires à DNS. En raison de la linéarité du système de Galbrun, la différence entre notre approche et deux autres approches devient grande avec l'augmentation du nombre de Mach. Lorsque le nombre de Mach est inférieur à 0,3, les résultats de toutes les approches sont semblables. Au-delà de ce nombre, les deux autres approches deviennent insuffisantes pour générer la fluctuation dans l'écoulement. En effet, la décomposition de l'approche de Shen et Sørensen est basée sur la compressibilité d'écoulement. Comme le nombre de Mach augmente, la composante incompressible devient moins exacte.

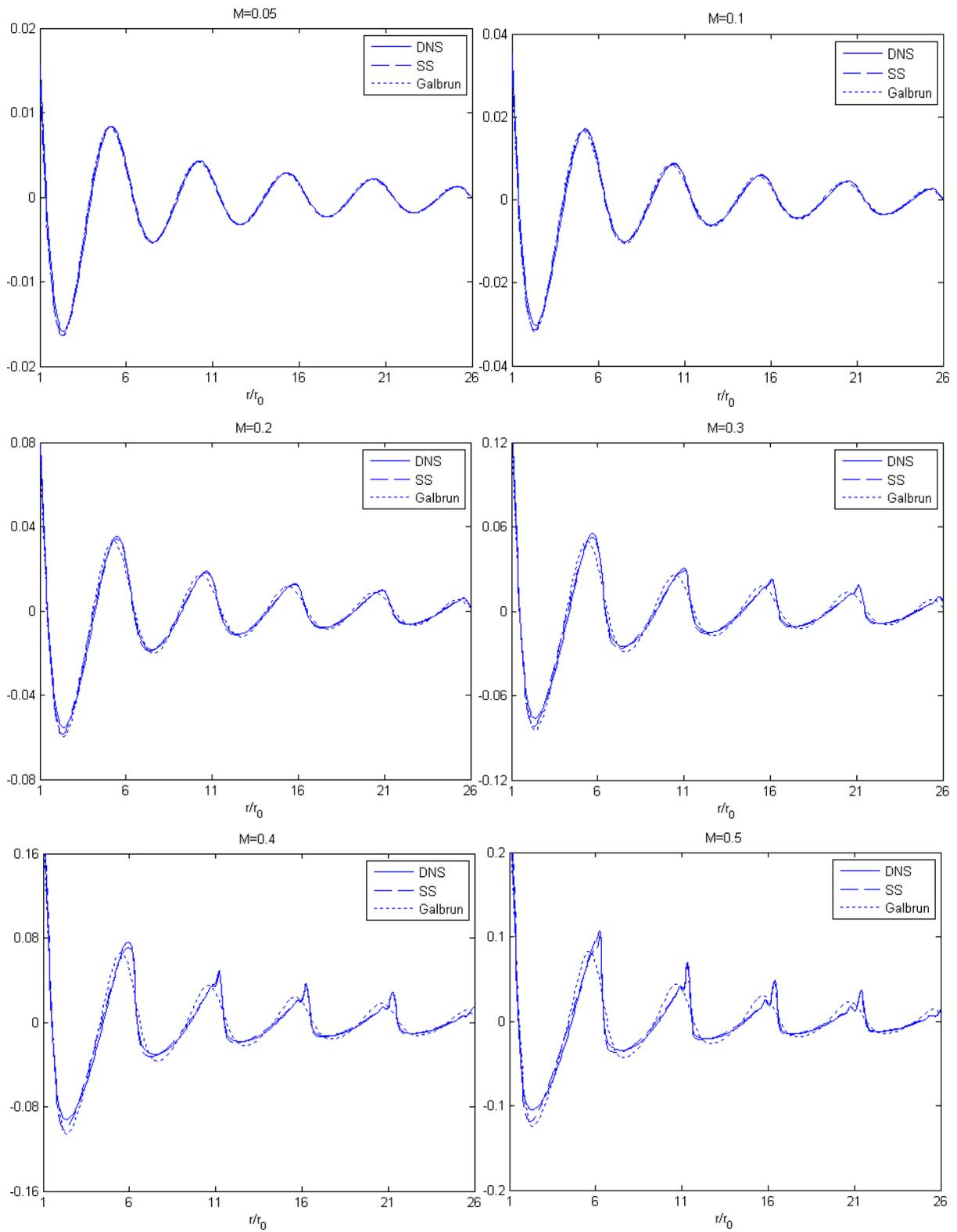


Figure 4.2 Variation de la densité avec le nombre de Mach différent

4.2.4.2 Exemple : tourbillons en co-rotation

Dans cette section, nous présentons des résultats obtenus pour le problème de deux tourbillons en co-rotation en deux dimensions. Cet exemple est souvent cité dans la littérature [87, 102, 103]. L'avantage de ce problème est qu'il existe des solutions analytiques pour l'écoulement et pour le champ acoustique rayonné en champ lointain. Tout d'abord, nous présenterons le problème et les notations utilisées. Ensuite, nous analyserons les solutions numériques obtenus en détail.

Deux tourbillons ponctuels de même circulation Γ sont situés en x_1 et x_2 . Ils sont séparés d'une distance $2R_0$ (Figure 4.3). Chaque tourbillon ponctuel engendre un écoulement incompressible défini par :

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_n}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\|^2} \quad (4.33)$$

Le champ de vitesse total pour l'écoulement incompressible produit par ces deux tourbillons a pour expression :

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) = -\sum_{n=1}^2 \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_n}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\|^2} \quad (4.34)$$

Les tourbillons s'entraînent mutuellement dans un mouvement de rotation et se déplacent sur un cercle de rayon R_0 avec une vitesse $u = \Gamma / (4\pi R_0)$. On définit le nombre de Mach caractéristique du problème par $M_r = u / c_0$ et on note $f_0 = \Gamma / (8\pi^2 R_0^2)$ la fréquence de rotation des tourbillons.

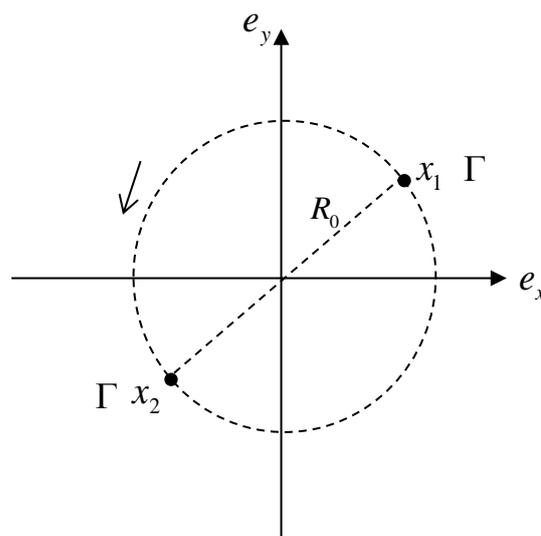


Figure 4.3 Deux tourbillons en co-rotation

Ainsi, le champ de vorticité pour ces deux tourbillons $\boldsymbol{\omega}_0 = \nabla \times \mathbf{u}_0$ est donné par :

$$\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^2 \Gamma \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \quad (4.35)$$

Pour retrouver le champ de pression dans l'écoulement incompressible, on doit tout d'abord faire une analyse vectorielle. L'équation de conservation de la quantité de mouvement dans l'écoulement incompressible s'écrit :

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 \right) + \nabla p_0 = 0 \quad (4.36)$$

On peut maintenant utiliser l'identité vectorielle :

$$\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 = \nabla \frac{\mathbf{u}_0^2}{2} + (\nabla \times \mathbf{u}_0) \times \mathbf{u}_0 \quad (4.37)$$

L'Eq. (4.35) peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} + \rho_0 \nabla \frac{\mathbf{u}_0^2}{2} + \rho_0 (\nabla \times \mathbf{u}_0) \times \mathbf{u}_0 + \nabla p_0 = 0 \quad (4.38)$$

En introduisant le vecteur tourbillon $\boldsymbol{\omega}_0 = \nabla \times \mathbf{u}_0$, la divergence de l'équation précédente s'écrit :

$$\Delta \left(\rho_0 \frac{\mathbf{u}_0^2}{2} + p_0 \right) + \nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{u}_0) = 0 \quad (4.39)$$

Finalement, une solution de l'Eq. (4.39) est proposée dans la littérature [21, 40, 41] pour le champ de pression :

$$p_0(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_0}{4\pi^2} \sum_{n, m \neq n} \Gamma_n \Gamma_m \frac{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m}{\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|^2} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_n}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\|^2} - \frac{1}{2} \rho_0 \|\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)\|^2 \quad (4.40)$$

Dans le cas des deux tourbillons en co-rotation, on a $N = 2$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$. Il est intéressant de présenter le champ incompressible : la pression incompressible qui est le terme source dans l'équation de Galbrun et la vitesse de l'écoulement, voir la Figure 4.4. La simulation numérique est appliquée à un domaine circulaire de diamètre de $100R_0$ pour $M_r = 0.08$. Un maillage d'éléments triangulaires non-r guli rs avec $\Delta x = 0.03$ est utilisé. Le domaine de calcul est $-100 \leq X/R_0 \leq 100$ et $-100 \leq Y/R_0 \leq 100$. A partir de ces données, on détermine d'abord (4.34) l'écoulement moyen en chaque point du maillage, ou tout simplement sur une partie du domaine vue que la décroissance de ce champ est très rapide. On en déduit ensuite le champ de pression dans tout le domaine (4.40).

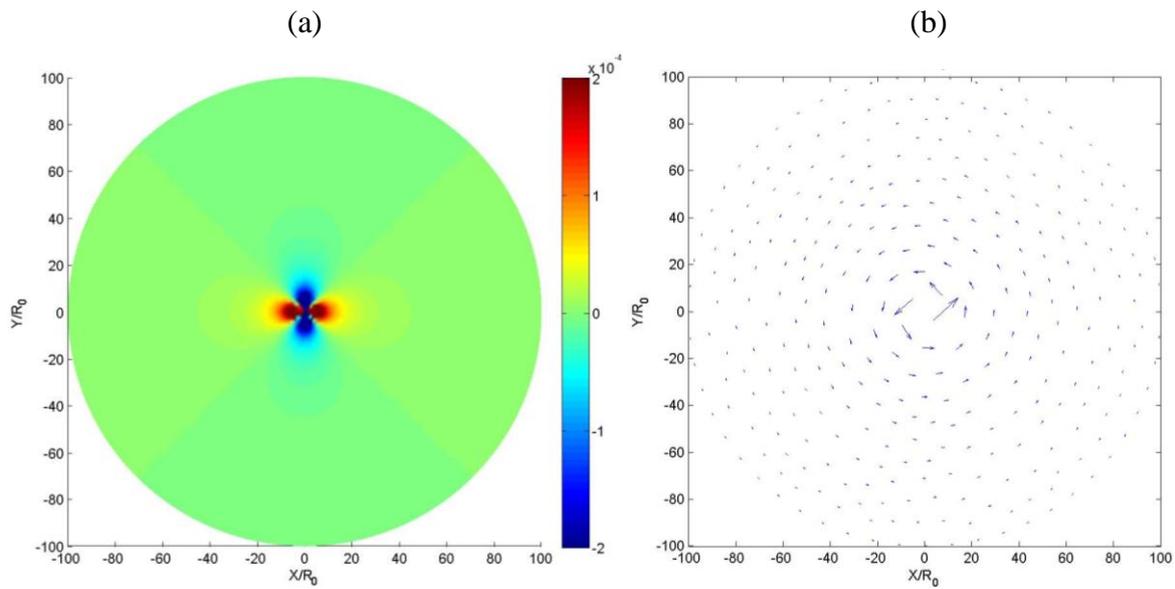


Figure 4.4 Les champs incompressibles : (a) pression et (b) vitesse
échelle = [0, 0.0023]

Dans le domaine d'application de ce modèle ($M_r \ll 1$), les effets de l'évolution temporelle de l'écoulement sur la propagation sont généralement limités. Ils ont peu d'influence sur les ondes acoustiques et on peut donc considérer que l'écoulement est presque nul. De plus, comme le nombre de Mach est faible, on considère que les gradients moyens de pression sont négligeables. Le système à résoudre adimensionné devient alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{w}^L}{\partial t^2} + \nabla p^L = 0 \\ p^L + \nabla \cdot \mathbf{w}^L = p_\infty - p_0 \end{cases} \quad (4.41)$$

Une transformée de Laplace est d'abord appliquée pour l'expression de la source (4.40) sur chaque point de maillage pour chaque simulation en utilisant $a = 0.1$, $b = [0: 0.05 : 30]$ et $\Delta t = 0.02$. Sur la Figure 4.5, un point du maillage est choisi pour montrer la transformée de Laplace de la source en fonction du point de l'intégration b .

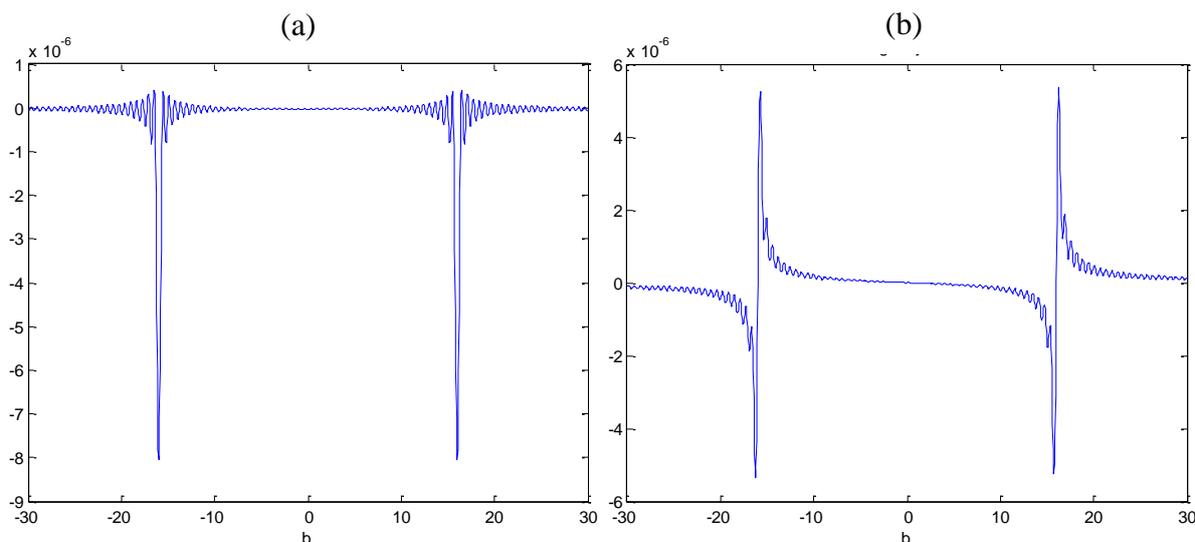


Figure 4.5 La transformée de Laplace de la source au point $(x,y) = (0.3, 0)$:
 (a) partie réelle et (b) partie imaginaire

On peut observer que la transformée de Laplace de la fonction $p_0(x,t)$ a, sur l'axe imaginaire, deux pôles simples $b = \pm i\omega = \pm i(4\pi f_0)$. En effet, les pôles représentent la fréquence de rotation du système tourbillonnaire. Avec un nombre de Mach faible ($M_r \ll 1$), l'Eq. (4.34) et la Figure 4.4 montrent que le champ source est compact et peut être limité à une petite zone. Ici, la fréquence fondamentale du champ acoustique rayonnée par deux tourbillons est $2f_0$. Il est nécessaire que le chemin d'intégration contienne les pôles à l'intérieur, voir la Figure 4.6.

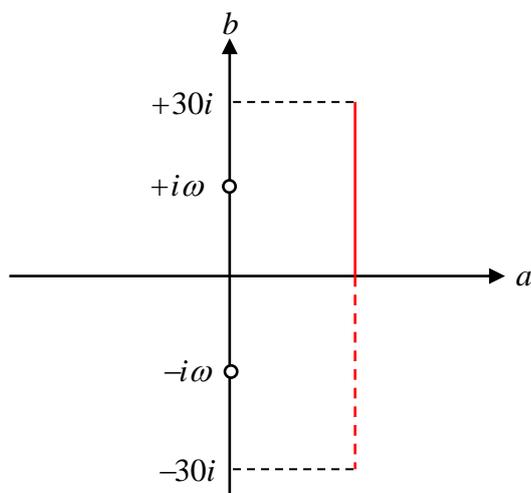


Figure 4.6 Le chemin d'intégration sur le plan complexe s

Les conditions initiales de toutes les variables sont fixées à zéro. Pour les conditions à la limite extérieure, une couche PML est imposée pour absorber toutes les ondes réfléchissantes. La solution analytique donnée par Möhring [76] en champ lointain est utilisée comme une solution de référence :

$$p(r, \theta, t) = \frac{\rho_0 \Gamma^4}{64\pi^3 R_0^4 c_0^2} \left[J_2 \left(\frac{4\pi f_0 r}{c_0} \right) \sin(2\theta - 4\pi f_0 t) - Y_2 \left(\frac{4\pi f_0 r}{c_0} \right) \cos(2\theta - 4\pi f_0 t) \right] \quad (4.42)$$

La Figure 4.7 (a) représente des résultats suivant l'axe $Y = 0$. Un accord général est trouvé entre les données simulées et analytiques. Près du cœur des tourbillons, il existe un point singulier pour la solution de référence. Une autre comparaison est illustrée en Figure 4.7 (b) où la pression acoustique est en accord entre notre simulation (moitié inférieure du domaine) et la solution de référence (moitié supérieure du domaine) à la fois en amplitude et en phase.

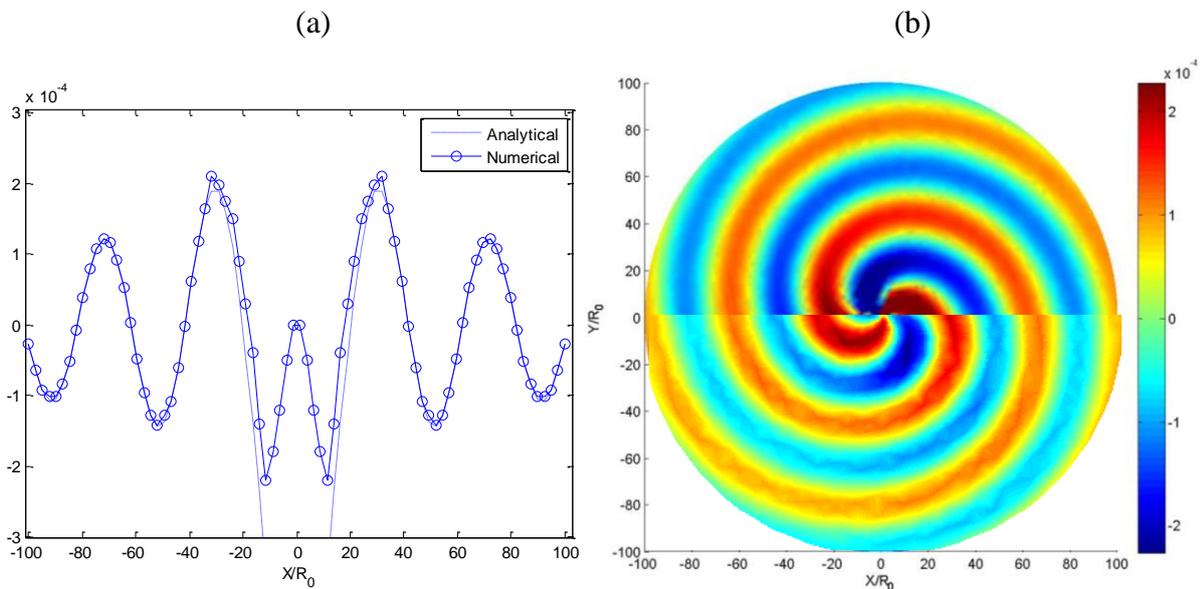


Figure 4.7 Pression acoustique: (a) suivant l'axe $Y = 0$ et (b) tous les points (moitié supérieure du domaine : solutions analytiques, moitié inférieure du domaine : notre simulation)

4.3 Conclusion

Pour calculer le rayonnement acoustique, deux méthodes sont principalement utilisées : méthodes de calcul directes et méthodes hybrides. La Figure 4.8 illustre quelques applications possibles dans les deux catégories. On s'intéresse particulièrement aux méthodes hybrides. Les méthodes hybrides consistent aux calculs en deux étapes qui dissocient la détermination des champs aérodynamique et celle des ondes acoustiques, afin d'adopter pour chacune les techniques numériques les plus appropriées. Nous avons choisi un opérateur de propagation qui décrit exactement le même phénomène physique que LEE : l'équation de Galbrun. Des modèles de source associées à cette équation sont basées sur la méthode EIF (Expansion about Incompressible Flow), qui utilise les champs de vitesse obtenus par un calcul incompressible pour des écoulements à nombres de Mach peu élevés. Deux exemples différents sont choisis pour tester l'efficacité de notre approche et les résultats comparés avec les approches existantes et les solutions analytiques montrent la validité de notre démarche.

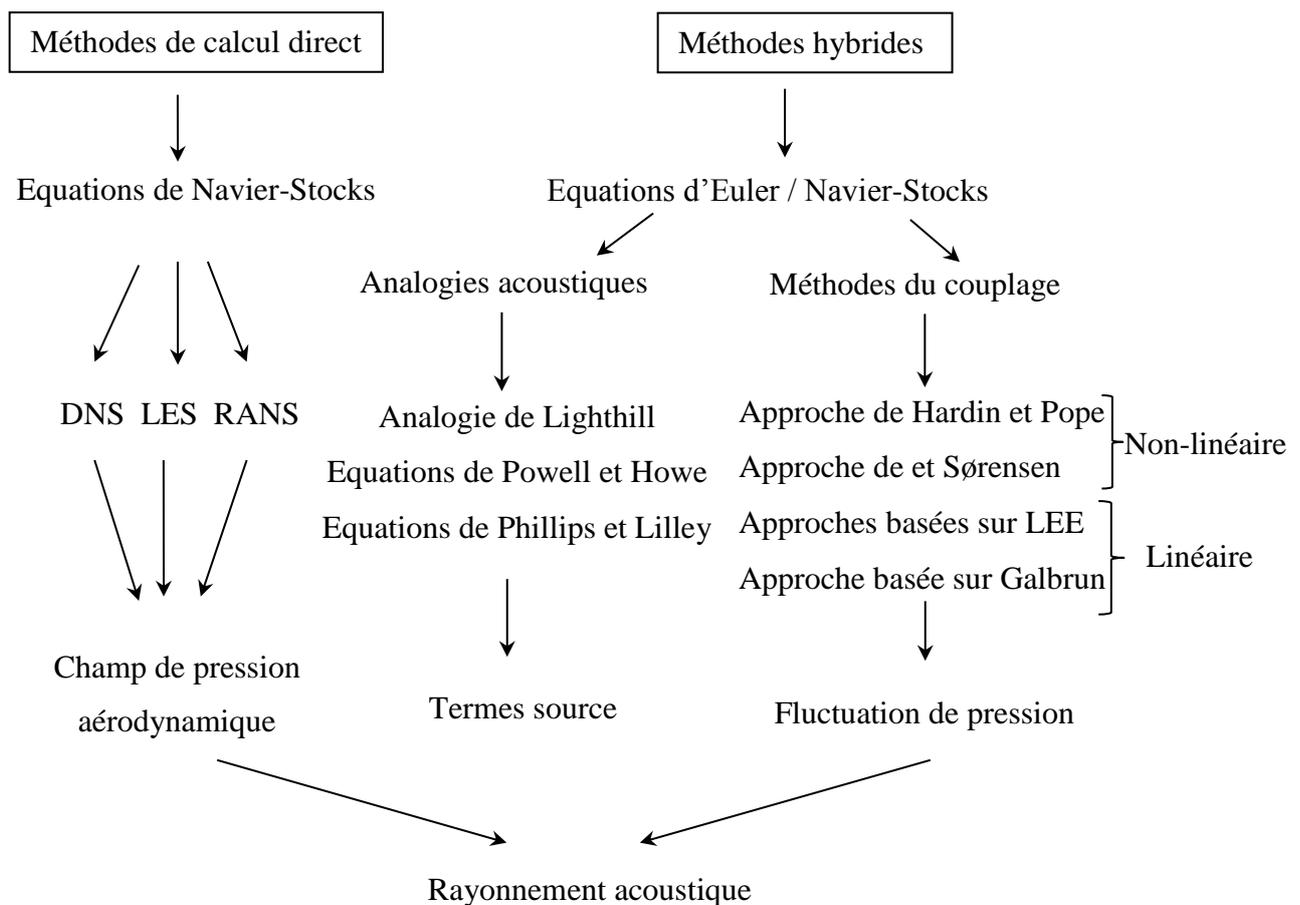


Figure 4.8 Méthodes existantes de calcul du rayonnement acoustique

Conclusion et perspectives

Les travaux de cette thèse concernent la modélisation et la simulation numérique de la propagation d'ondes acoustiques en présence d'un écoulement non potentiel. Le modèle retenu pour ces études est l'équation de Galbrun, qui décrit la propagation linéaire d'ondes dans un fluide parfait en écoulement moyen stationnaire non potentiel. Ce modèle s'obtient en utilisant une description mixte eulérienne-lagrangienne pour la linéarité. L'équation de Galbrun est une équation aux dérivées partielles de second ordre, qui est écrite uniquement en termes de perturbation lagrangienne de déplacement. Peu d'ouvrages traitent de cette équation, malgré le fait qu'elle a certains avantages par rapport aux LEEs : un gain d'un à deux inconnues par rapport aux équations d'Euler linéarisées, la disponibilité des expressions exactes de l'intensité acoustique et de l'énergie. Les simulations numériques montrent qu'une méthode des éléments finis classique ne permet pas de résoudre cette équation. Les résultats sont fortement pollués à cause des modes parasites. Le choix d'une formulation variationnelle mixte en déplacement-pression combinée avec un élément fini satisfaisant la condition *inf-sup* évite le phénomène de blocage. Le modèle développé en FEM (Finite Element Method) est applicable à tout type d'écoulement et il a déjà été testé avec succès pour la propagation des ondes acoustiques dans un écoulement cisailé et dans le couplage de vibro-acoustique en régime harmonique. En revanche, la plupart des études mathématiques et numériques du problème de l'aéroacoustique est en régime transitoire. C'est pourquoi, il est intéressant pour nous d'étudier l'équation de Galbrun en régime transitoire. Pour résoudre cette équation en régime transitoire, notre approche a reposé sur la transformée de Laplace. L'avantage par rapport à la transformée de Fourier est qu'elle prend en compte des conditions initiales.

Un autre sujet abordé dans cette thèse est celui du traitement des conditions aux limites non réfléchissantes (ou transparentes) pour l'aéroacoustique et l'acoustique en écoulement uniforme et non-uniforme. Pour des problèmes de propagation d'onde en régime

transitoire, ces conditions artificielles doivent être en mesure de simuler une condition de rayonnement à l'infini. Ce sujet reste aujourd'hui une recherche importante dans l'étude et la simulation numérique de l'ensemble des phénomènes de propagation d'onde, et plus particulièrement en aéroacoustique. La méthode PML pour l'équation de Galbrun dans l'écoulement uniforme et non- uniforme a été développée. En présence d'ondes inverses, la solution peut être instable avec la formulation PML classique. Pour comprendre pourquoi une telle instabilité existe, une analyse de relation de dispersion est réalisée. La cause principale de cette instabilité est l'incohérence (signe opposée) entre les vecteurs de lenteur et les vitesses de groupe. Inspirée par la méthode de Hu, nous avons proposé un nouveau modèle PML associé à l'équation de Galbrun, qui a toujours conduit à une solution exponentiellement décroissante dans la couche, même en présence d'ondes inverses. Nous avons validé notre modèle PML à travers plusieurs exemples numériques dans l'écoulement uniforme et non-uniforme. Ainsi, le couplage entre les ondes acoustiques et de vorticité dans l'écoulement cisailé a été étudié. Afin de comprendre les différents comportements des paramètres PML, nous avons présenté une analyse sur l'épaisseur de la couche PML, le coefficient d'absorption et la pulsation. Quand le coefficient d'absorption atteint à une valeur suffisamment grande, l'erreur est systématiquement très faible pour toutes les fréquences. En revanche, nous n'avons pu établir une optimisation systématique de la couche et de ses propriétés.

Le dernier chapitre a été consacré au développement de modèles de sources aéroacoustique. Après avoir présenté en détail les modèles existants (direct et hybride), on a adapté une méthode hybride (EIF)   l'équation de Galbrun. Les termes source sont obtenus en résolvant les équations d'Euler incompressibles. L'approche proposée par Shen et S rensen s'applique directement à l'équation de Galbrun et permet de définir une source aéroacoustique caractérisée par les fluctuations de pression hydrodynamique dans l'écoulement incompressible. Pour assurer la validité de l'approche globale, des tests classiques sont choisis parmi la littérature et les résultats sont comparés avec les approches existantes et les solutions analytiques.

Les perspectives de ce travail sont nombreuses. Il sera tout d'abord intéressant de développer d'autres méthodes mathématiques pour résoudre l'équation de Galbrun en régime transitoire. L'application de la transformée de Laplace à l'équation de Galbrun pose toutefois des contraintes. Il faut que les champs moyens (vitesse et pression) soient stationnaires. Une méthode pour résoudre l'équation de Galbrun avec les champs moyens instationnaires sera utile pour la simulation des problèmes aéroacoustiques. Ensuite, il sera utile de poursuivre

l'analyse de l'optimisation systématique de la couche PML et de ses propriétés et d'en proposer d'autres conditions aux limites transparentes. Enfin, il est nécessaire de poursuivre des modèles de source aéroacoustiques associé à l'équation de Galbrun présentés au dernier chapitre.

Références

- [1] C. K. W. Tam and J. C. Webb, *Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Aeroacoustics*, Journal of Computational Physics, 107: 262-281, 1993.
- [2] John W. Goodrich and Thomas Hagstrom, *Accurate Algorithms and Radiation Boundary Conditions for Linearized Euler Equations*, AIAA, 96-1660, 1996.
- [3] C. P. A. Blom, B. T. Verhaar, J. C. van der Heijden and B. I. Soemarwoto, *A Linearized Euler Method Based Prediction of Turbulence Induced Noise using Time-averaged Flow Properties*, AIAA-Paper 2001-1100, 39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, 2001.
- [4] C. Bailly, C. Bogey and D. Juve, *Computation of the flow noise using source terms in linearized Euler's equations*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 40: 235-243, 2002.
- [5] C. Bailly and D. Juve, *A stochastic approach to compute subsonic noise using Linearized Euler's Equations*, 5th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Seattle, WA, AIAA, 99-1872, 10-12 May, 1999.
- [6] C. Bailly, P. Lafon and S. Candel, *A stochastic approach to compute noise generation and radiation of free turbulent flows*, 16th AIAA Aeroacoustics Conference, Munich, Germany, AIAA, 95-092, June 1995.
- [7] B. Cockburn and C. -W. Shu, *TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II: general framework*, Mathematics of Computation, 52: 411-435, 1989.
- [8] B. Cockburn, S. Hou and C. -W. Shu, *The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: the multidimensional case*, Mathematics of Computation, 54: 545-581, 1990.
- [9] F. Q. Hu and H. L. Atkins, *Eigen solution Analysis of the Discontinuous Galerkin Method with Non-Uniform Grids*, AIAA-Paper 2001-2195, 7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Maastricht, 2001.
- [10] C. P. A. Blom, R. Hagmeijer, A. Biesheuvel and H. W. M. Hoeijmakers, *Three-dimensional Quadrature-free Discontinuous Galerkin Method for Computational*

Aeroacoustics, AIAA-Paper, 2001-2198, 7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Maastricht, 2001.

[11] B. Marc and P. Serge, *Méthode de type Galerkin discontinu appliquée aux équations d'Euler linéarisées en écoulement uniforme ou non*, INRIA Research Report RR 4932, INRIA 2003.

[12] O. A. Godin, *On the small-amplitude waves in an inhomogeneous moving medium*. *Physics–Doklady*, 41: 521-524, 1996.

[13] O. A. Godin, *Reciprocity and energy theorems for waves in a compressible inhomogeneous moving fluid*, *Wave Motion*, 25: 143-167, 1997.

[14] B. Poirée, *Les équations de l'acoustique linéaire et non-linéaire dans un écoulement de fluide parfait*, *Acustica*, 57: 5-25, 1985.

[15] A. -S. Bonnet-Ben Dhia, E. -M. Duclairoir and J. -F. Mercier, *Numerical simulation of acoustic propagation in a shear flow in the frequency domain*, In Brown university, editor, 7th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave propagation WAVES, 2005.

[16] G. Legendre, *Rayonnement acoustique dans un fluide en écoulement: analyse mathématique et numérique de l'équation de Galbrun*, PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2003.

[17] K. Berriri, *Approche analytique et numérique pour l'aéroacoustique en régime transitoire par le modèle de Galbrun*, PhD thesis, Université Paris Dauphine, 2006.

[18] A. -S. Bonnet-Ben Dhia, E. -M. Duclairoir, G. Legendre and J. -F. Mercier, *Time-harmonic acoustic propagation in the presence of a shear flow*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 204: 428-439, 2007.

[19] F. Treyssède, *Etude de la propagation acoustique en présence d'écoulement non uniforme par une méthode d'élément finis mixtes basée sur l'équation de Galbrun*, PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, 2002.

[20] F. Treyssède, G. Gabard and M. Ben Tahar, *A mixed finite element method for acoustic wave propagation in moving fluids based on an Eulerian Lagrangian description*, *Journal of the Acoustical Society of America*, 113: 705-716, 2003.

[21] G. Gabard, F. Treyssède and M. Ben Tahar, *A numerical method for vibro-acoustic problems with sheared mean flows*, *Journal of Sound and Vibration*, 272: 991-1011, 2004.

[22] F. Treyssède and M. Ben Tahar, *Comparison of a finite element model with a multiple-scales solution for sound propagation in varying ducts with swirling flows*, *Journal of the Acoustical Society of America*, 115: 2716-2730, 2004

- [23] G. Gabard, R. J. Astley and M. Ben Tahar, *Stability and accuracy of finite element methods for flow acoustics II: Two-dimensional effects*, Int. J. Num. Methods Eng. 63: 947-973, 2005.
- [24] G. Gabard. *Méthodes numériques et modèles de sources aéroacoustiques fondés sur l'équation de Galbrun*, PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, 2003.
- [25] H. Beriot, *Eléments finis d'ordre élevé pour l'opérateur de Galbrun en régime harmonique*, PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, 2008.
- [26] H. Galbrun, *Propagation d'une onde sonore dans l'atmosphère terrestre et théorie des zones de silence*, Gauthier-Villars, Englewood Cliffs, 1931.
- [27] W. Hayes, *Conservation of action and modal waves action*, Proceedings of the Royal Society of London, A: 187-208, 1970.
- [28] C. Peyret and G. Elias, *Finite-element method to study harmonic aeroacoustics problems*, Journal of the Acoustical Society of America, 110: 661-668, 2001.
- [29] G. Elias, *Nouvelles expressions pour l'énergie et l'intensité acoustique dans un écoulement non uniforme*, Technical Report RT 22/3641 PY, ONERA, 1996.
- [30] J. -Ph. Brazier, *Derivation of an exact energy balance for Galbrun equation in linear acoustics*, Journal of Sound and Vibration, 330: 2848-2868, 2011.
- [32] C. L. Bennett and W. L. Weeks, *Transient scattering from conducting cylinders*, IEEE Trans., AP (9): 627-633, 1970.
- [33] W. Weeks, *Numerical inversion of Laplace transforms using Laguerre functions*, J. ACM, 13 (3): 419-426, 1966.
- [34] R. Piessens and M. Branders, *Numerical inversion of the Laplace transform using generalized Laguerre polynomials*, Proc. IEEE, 118 (10): 1517-1522, 1971.
- [35] J. N. Lyness and G. Giunta, *A modification of the weeks method for numerical inversion of the Laplace transform*, Math. Comput., 47 (175): 313-322, 1986.
- [36] B. Gabutti and P. Lepora, *The numerical performance of Tricomi's formula for inverting the laplace transform*, Numer. Math., 51: 369-380, 1987.
- [37] S. I. Hariharan, Scott Sawyer and D. Dane Quinn, *Laplace transform/potential-theoretic method for acoustic propagation in subsonic flows*, Journal of Computational Physics, 185: 252-270, 2003.
- [38] D. Givoli, *Non-Reflecting Boundary Conditions*, Journal of Computational Physics, 94: 1-29, 1994.
- [39] R. L. Higdon, *Numerical Absorbing Boundary Conditions for the Wave Equation*, Math. Comp. 49: 65-90, 1987.

- [40] B. Engquist and A. Majda, *Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves*, Math. Comp., 31: 629-651, 1977.
- [41] T. Ha Duong and P. Joly, *A generalized image principle for the wave equation with absorbing boundary conditions and application to fourth order schemes*, Num. Methods for P.D.E., 10: 411-434, 1994.
- [42] T. Ha Duong and P. Joly, *On the stability analysis of boundary conditions for the wave equation by energy methods; part i : The homogeneous case*, Math. of Comp., 62: 539-563, 1994.
- [43] T. Ha Duong and P. Joly, *The Energy Method for the Heterogeneous Wave Equation with High Order Boundary Conditions*, SEA Bull. Math., 19: 71-76, 1994.
- [44] T. Hagstrom, *On High-order Radiation Boundary Condition*, Math. Appl., Springer-Verlag New York, Inc., vol. 86 of IMA Vol.: 1-21, 1997.
- [45] T. Hagstrom, *Radiation Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves*, Acta Numerica, 8, 1999.
- [46] J. N. Berenger, *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*, Journal of Computational Physics, 114: 195-200, 1994.
- [47] F. Collino and P. B. Monk, *Optimizing the perfectly matched layers*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 164: 157-171, 1998.
- [48] E. Becache, A. -S. Bonnet-Ben Dhia and G. Legendre, *Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equations*, SIAM J. Numer. Anal., 42 (1): 409-433, 2004.
- [49] J. S. Hesthaven, *On the analysis and construction of perfectly matched layers for the linearized Euler equations*, Journal of Computational Physics, 142: 129-147, 1998.
- [50] S. Abarbanel, D. Gottlieb and J. S. Hesthaven, *Well-posed perfectly matched layers for advective acoustics*, Journal of Computational Physics, 154 (2): 266-283, 1999.
- [51] C. K. W. Tam, L. Auriault and F. Cambuli, *Perfectly matched layers as an absorbing boundary condition for the linearized Euler equations in open and ducted domains*, Journal of Computational Physics, 144: 213-243, 1998.
- [52] E. Becache, S. Fauqueux and P. Joly, *Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves*, Journal of Computational Physics, 188: 399-433, 2003.
- [53] F. Q. Hu, *A stable perfectly matched layer for linearized Euler equations in unsplit physical variables*, Journal of Computational Physics, 173 (2): 455-480, 2001.
- [54] S. Abarbanel, D. Stanescu and M. Y. Hussaini, *Unsplit variable perfectly matched layers for the shallow water equation with coriolis forces*, Comput. Geosci., 7 (4): 265-294, 2003.

- [55] F. Q. Hu, *A perfectly matched layer absorbing boundary condition for linearized Euler equations with a non-uniform mean flow*, Journal of Computational Physics, 208 (2): 469-492, 2005.
- [56] F. Q. Hu, *Development of PML absorbing boundary conditions for computational aeroacoustics*, A progress review, Computers & Fluids In Turbulent Flow and Noise Generation, 37: 336-348, 2008.
- [57] S. A. Parrish, and F. Q. Hu, *PML absorbing conditions for the linearized and nonlinear Euler equations in the case of oblique mean flow*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 60: 565-589, 2009.
- [58] J. Diaz and P. Joly, *A time domain analysis of PML models in acoustics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195 (29-32): 3820-3853, 2006.
- [59] E. Bécache, A. -S. Bonnet-Ben Dhia and G. Legendre, *Perfectly matched layers for the time-harmonic acoustics in the presence of uniform flow*, SIAM J. Numer. Anal. 44 (3): 1191-1217, 2006.
- [60] P. Joly, *Une introduction aux méthodes PML pour la propagation d'ondes en régime transitoire*, INRIA, 2003.
- [61] F. Q. Hu, *On Absorbing Boundary Conditions for Linearized Euler Equations by a Perfectly Matched Layer*, Journal of Computational Physics, 129: 201-219, 1996.
- [62] D. Appelo, T. Hagstrom and G. Kreiss, *Perfectly matched layers for hyperbolic systems: general formulation, wellposedness and stability*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 67 (1): 1-23, 2006.
- [63] F. Nataf, *A new approach to perfectly matched layers for the linearized Euler system*, Journal of Computational Physics, 214 (2): 757-772, 2006.
- [64] T. Hagstrom and I. Nazarov, *Absorbing layers and radiation boundary conditions for jet flow simulation*, AIAA paper 2002-2606, 2002.
- [65] T. Hagstrom and I. Nazarov, *Perfectly matched layers and radiation boundary conditions for shear flow calculations*, AIAA paper 2003-3298, 2003.
- [66] R. Ewert and W. Schröder, *Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering*, Journal of Computational Physics, 188: 365-398, 2003.
- [67] B. J. Boersma, *Large Eddy Simulation of sound field of a round turbulent jet*, Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 19: 161-170, 2005.
- [68] M. J. Lighthill, *On the sound generated aerodynamically. I: General Theory*, Proceedings of the Royal Society of London, 211: 564-587, 1952.

- [69] M. J. Lighthill, *On the sound generated aerodynamically. II: Turbulence as a source of sound*, Proceedings of the Royal Society of London, 223: 1-32, 1954.
- [70] N. Curle, *The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound*, Proceedings of the Royal Society of London, 231, 505-514, 1955.
- [71] J. E. Fowcs Williams and D. L. Hawkings, *Sound generated by turbulence and surfaces in arbitrary motion*, Philosophical Transactions of the Royal Society, 264: 321-342, 1969.
- [72] O. M. Phillips, *On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers*, Journal of Fluid Mechanics, 9(1): 1-28, 1960.
- [73] G. M. Lilley, *The generation and radiation of supersonic jet noise. Vol IV Theory of turbulent generated jet noise, noise radiation from upstream sources, and combustion noise. Part II: Generation of sound in a mixing region*, Air Force Aero Propulsion Laboratory, AFAPLTR-53, 1972.
- [74] A. Powell, *Theory of vortex sound*, Journal of the Acoustical Society of America, 16: 177-195, 1964.
- [75] M. S. Howe, *Contributions to the theory of aerodynamic sound, with applications to excess jet noise and the theory of the flute*, Journal of Fluid Mechanics, 71(4): 625-673, 1975.
- [76] W. Mörhing, *On vortex sound at low Mach number*, Journal of Fluid Mechanics, 85: 685-691, 1978.
- [77] W. Mathieu, *Investigation des méthodes directes en aéroacoustique automobile par résolution temporelle rapide des équations intégrales*, Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2010.
- [78] D. G. Crighton, *Basic principles of aerodynamic sound generation*, Progress in Aerospace Sciences, 16 (1): 31-96, 1975.
- [79] G. J. Frantz, *The near-sound field of the turbulence*, Report 982, NS, 715-102, 1959.
- [80] J. B. Ollhead, *On the prediction of the near field noise of supersonic jets*, NASA, CR-857, 1967.
- [81] C. Schram, P. Martinez-Lera and M. Tournour, *Two-dimensionnal in-duct vortex leapfrogging as a validation benchmark for internal aeroacoustics*, 13th AIAA/CEAS Aeroacoustics conference, AIAA, 2007-3565, 2007.
- [82] H. S. Ribner, *The generation of sound by turbulent jets*, Institute of aerophysics, University of Toronto, 103-182, 1964.
- [83] T. Colonius, S. K. Lele and P. Moin, *Sound generation in a mixing layer*, Journal of Fluid Mechanics, 330: 375-409, 1997.

- [83] M. E. Goldstein, *Aeroacoustics*, McGraw-Hill, 1976.
- [85] M. E. Goldstein, *Aeroacoustics of turbulent shear flows*, *Ann. rev. Fluid Mech*, 16: 263-285, 1984.
- [86] J. E. Yates, *Application of the Bernoulli enthalpy concept to the study of vortex noise and jet impingement noise*, Contractor report 2987, NASA, 1978.
- [87] B. E. Mitchell, S. K. Lele and P. Moin, *Direct computation of the sound from a compressible co-rotating vortex pair*, *Journal of Fluid Mechanics*, 285: 181-202, 1995.
- [88] P. E. Doak, *Fluctuating total enthalpy as a generalized acoustic field*, *Acoustical Physics*, 44(5): 677-685, 1995.
- [89] J. C. Hardin and D. S. Pope, *An acoustic/viscous splitting technique for computational aeroacoustics*, *Theoretical Computational Fluid Dynamics*, 6: 323-340, 1994.
- [90] W. Shen and J. N. Sørensen, *Comments on the aeroacoustic formulation of Hardin and Pope*, *AIAA Journal*, 37(1): 141-143, 1999.
- [91] Scot A. Slimon, Marios C. Soteriou and Donald W. Davisy, *Development of Computational Aeroacoustics Equations for Subsonic Flows Using a Mach Number Expansion Approach*, *Journal of Computational Physics*, 159: 377-406, 2000.
- [92] J.-H. Seo and Y. J. Moon, *Perturbed compression equations for aeroacoustic noise prediction at low Mach numbers*, *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 43: 1716-1724, 2005.
- [93] E. Longatte, P. Lafon and S. Candel, *Computation of noise generation by turbulence in internal flows*, 4th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Toulouse, France, AIAA, 98-2332, June 2-4, 1998.
- [94] D. J. Lee, I. C. Lee, D. N. Heo and Y. N. Kim, *Numerical analysis of aerodynamic noise from feedback phenomena using computational aeroacoustics (CAA)*, Proceedings of the 12th Asian Congress of Fluid Mechanics, 18-21 August 2008, Daejeon, Korea.
- [95] J. C. Hardin and D. S. Pope, *Sound generation by flow over a two-dimensional cavity*, *AIAA Journal*, 33(3): 407-412, 1995.
- [96] J. A. Ekaterinaris, *An upwind scheme for the computation of acoustic fields generated by incompressible flow*, *AIAA Journal*, 35(9): 1448-1455, 1997.
- [97] J. A. Ekaterinaris, *New formulation of Hardin-Pope equations for aeroacoustic*, *AIAA Journal*, 37(9): 1033-1039, 1999.
- [98] W. Shen and J. N. Sørensen, *Aeroacoustic modelling of low-speed flows*, *Theoretical Computational Fluid Dynamics*, 13: 271-289, 1999.

- [99] W. Shen and J. N. Sørensen, *Aero-acoustic modelling of turbulent airfoil flows*, AIAA Journal, 39: 1057-1064, 2001.
- [100] W. Shen and J. N. Sørensen, *Computational aero-acoustic using high-order finite-difference schemes*, Journal of Physics, 2007.
- [101] W. Shen and J. N. Sørensen, *A collocated grid finite volume method for aeroacoustic computational of low-speed flow*, Journal of Computational Physics 107: 262-281, 2004.
- [102] Ting H. Zheng, Shiu K. Tang and Wen Z. Shen, *Simulation of vortex sound using the viscous/acoustic splitting approach*, Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, 35, No. 1, 2011.
- [103] D. J. Lee and S.O. Koo, *Numerical study of sound generation due to a spinning vortex pair*, AIAA Journal, 33(1): 20-26, 1995.
- [104] C. K. W. Tam and F. Q. Hu, *On the three families of instability waves of high-speed jets*, Journal of Fluid Mechanics, 201: 447-483, 1989.
- [105] C. K. W. Tam and F. Q. Hu, *Acoustic and instability waves of a confined supersonic mixing layer*, Journal of Fluid Mechanics, 203: 51-76, 1989.
- [106] L. M. Mack, *On the inviscid acoustic-mode instability of supersonic shear flows*, Theor. Comput. Fluid Dynamics, 2: 97-123, 1990.
- [107] F. Q. Hu, *A numerical study of wave propagation in a confined mixing layer by eigen function expansions*, Phys. Fluids, A5(6): 1420-1426, 1993.
- [108] S. Abarbanel and D. Gottlieb, *A mathematical analysis of the PML method*, Journal of Computational Physics, 154: 266-283, 1997.
- [109] L. Zhao and A. C. Cangellaris, *GT-PML: generalized theory of Perfectly Matched Layers and its application to the reflectionless truncation of finite-difference time-domain grids*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 44: 2555-2563, 1996.
- [110] S. D. Chatterji, Cours d'analyse (vol. 2), Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1997.
- [111] Spiegel, Variables complexes (cours et problèmes), Série Schaum, McGraw Hill., 1973
- [112] N. Dobigeon, Variable complexe - Transformée de Laplace, cours, Université de Toulouse IRIT/INP-ENSEEIH.