



HAL
open science

Analyse et optimisation de la fiabilité d'un équipement opto-électronique équipé de HUMS

Camille Baysse

► **To cite this version:**

Camille Baysse. Analyse et optimisation de la fiabilité d'un équipement opto-électronique équipé de HUMS. Probabilités [math.PR]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2013. Français. NNT: . tel-00938744

HAL Id: tel-00938744

<https://theses.hal.science/tel-00938744>

Submitted on 29 Jan 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° ordre :

Thèse

présentée à

l'Université Bordeaux 1

ECOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par

Camille Baysse

pour obtenir le grade de

Docteur

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

**Analyse et optimisation de la
fiabilité d'un équipement
opto-électronique équipé de HUMS**

Soutenue le 7 novembre 2013 devant la commission d'examen composé de

M. Didier BIHANNIC	ING.	Thales Optronique	Encadrant
Mme Benoîte de SAPORTA	MCF-HDR	Université Bordeaux IV	Examinateur
Mme Mitra FOULADIRAD	MCF	Université de Technologie de Troyes	Examinateur
M. Olivier GAUDOIN	PROF.	Institut Polytechnique de Grenoble	Rapporteur
Mme Anne GÉGOUT-PETIT	PROF.	Université de Lorraine	Dir. de thèse
M. Antoine GRALL	PROF.	Université de Technologie de Troyes	Rapporteur
M. Michel PRENAT	ING.	Thales Optronique	Examinateur
M. Jérôme SARACCO	PROF.	Institut Polytechnique de Bordeaux	Dir. de thèse

Remerciements

Je tiens à remercier Anne Gégout-Petit, Didier Bihannic et Jérôme Saracco pour la qualité de leur encadrement, leur disponibilité, leur sympathie, ainsi que leur envie communicative d'aller toujours plus loin dans la réflexion et le raisonnement. Je les remercie également pour l'intérêt et l'enthousiasme qu'ils ont accordés à mon travail. Merci de m'avoir fait confiance, écoutée, guidée, encouragée... Pendant ces trois années de thèse, j'ai beaucoup appris et progressé et c'est en partie grâce à vous. J'ai eu la chance et le plaisir de travailler sous votre direction.

Je remercie également Benoîte de Saporta, François Dufour et Michel Prenat pour leur aide et leurs conseils. Merci à toutes les personnes du Support et Service Client de Thales Optronique, qui ont su m'accueillir, répondre à mes questions, et m'aider à me sentir à l'aise, afin que ces trois années se déroulent dans des conditions idéales.

J'adresse mes remerciements à Olivier Gaudoin, Antoine Grall pour avoir accepté d'être rapporteurs de mes travaux et pour les commentaires qu'ils ont apportés. Je remercie également Mitra Fouladirad qui a accepté d'évaluer ce travail.

Je voudrais remercier très sincèrement tous mes collègues, amis avec qui j'ai partagé une excellente ambiance de recherche. Je garderai toujours en mémoire la bonne humeur et l'entraide qui régnaient dans ce bureau.

Mes derniers remerciements vont à ma famille, mon mari, pour m'avoir toujours soutenue et encouragée dans mes choix.

Table des matières

1	Introduction Générale	9
1.1	Introduction	9
1.2	Contexte industriel	10
2	Le cas industriel	13
2.1	Un équipement opto-électronique : la caméra thermique	13
2.2	Problématique	14
2.2.1	Présentation des données : lien entre le temps de mise à froid et l'état du système	15
2.2.2	Début de la modélisation : Analyse des données	16
3	Chaîne de Markov cachée pour la détection d'un mode de fonctionnement dégradé	19
3.1	Introduction	19
3.2	Modèle mathématique	20
3.2.1	Généralités	20
3.2.2	Equations du filtrage et estimation des paramètres	22
3.3	Mise en oeuvre pratique sur des simulations	24
3.3.1	Estimation de la probabilité d'être dans un état dégradé	25
3.3.2	Estimation du paramètre A	26
3.3.3	Estimation du paramètre c	27
3.3.4	Etude de la sensibilité du filtre $P(X_t = e_2 \mathcal{Y}_t)$ aux paramètres A et c	28
3.4	Application aux données réelles	29
3.4.1	Les données	29
3.4.2	Influence de la température interne sur le temps de mise à froid	31
3.4.3	Lissage des données	32
3.4.4	Estimation des paramètres A et c	34
3.4.5	Estimation à partir des données réelles de la probabilité que le système soit dans un état dégradé	35
3.5	Critère de décision	38
3.6	Méthode du CUSUM pour la détection d'un changement d'état du système	41
3.7	Conclusion	48

4	Arrêt optimal pour la maintenance	49
4.1	La maintenance	52
4.1.1	Généralités	52
4.1.2	Etat de l'art sur la maintenance conditionnelle	53
4.2	Cas industriel	55
4.3	Modèle mathématique	57
4.3.1	Présentation d'un PDMP	57
4.3.2	Présentation de notre cas d'étude	59
4.4	Problème d'arrêt optimal	60
4.4.1	Principe de l'arrêt optimal d'un PDMP	60
4.4.2	Choix de la fonction de performance g	61
4.5	Méthode numérique d'arrêt optimal	64
4.5.1	Principe	64
4.5.2	Discretisation du temps	65
4.5.3	Quantification de la chaîne de Markov $(\theta_n)_{n \in \{0,1,2\}}$	66
4.5.4	Approximation de la fonction valeur	69
4.5.5	Approximation du temps d'arrêt quasi optimal	72
4.6	Mise en oeuvre numérique	74
4.6.1	Simulation des données	74
4.6.2	Création de la grille de quantification optimale	76
4.6.3	Algorithme d'arrêt optimal	76
4.6.4	Politique de maintenance pour une nouvelle trajectoire	79
4.6.5	Probabilité d'échec d'une mission donnée	79
4.7	Résultats	80
4.7.1	Performance	80
4.7.2	Résultats pour une fonction de performance $g = g_1$	80
4.7.3	Résultats pour une fonction de performance $g = g_2$	83
4.7.4	Exemple de résultats de risque de panne avant une mission	86
4.8	L'arrêt optimal pour minimiser une fonction de coût	86
4.9	Conclusion	88
5	Application industrielle	91
5.1	Implémentation dans le logiciel SMARTFLEET de la détection d'état	91
5.2	Proposition d'un date de maintenance pour les groupes de climatisation	94
6	Conclusion et perspectives	99
7	Annexe	101
7.1	Annexe A : Démonstrations	101
7.1.1	Démonstrations d'existence de \bar{P} et des propriétés qui en découlent	101
7.1.2	Démonstration des équations de filtrage	103

Table des matières

7.2	annexe B : journal de bord d'une caméra	110
7.3	Annexe C : Codes du chapitre 3 sous Matlab	111
7.4	Annexe D : Code arrêt optimal sous R	116

1 Introduction Générale

Sommaire

1.1 Introduction	9
1.2 Contexte industriel	10

1.1 Introduction

Leader mondial des Systèmes d'Information critiques, Thales conçoit, développe et réalise des solutions de très haute technologie qui répondent aux besoins de sécurité, de communication et d'information de pays du monde entier. Thales intervient en tant qu'équipementier, systémier ou bien encore maître d'œuvre partout où l'électronique et l'informatique jouent un rôle déterminant. Du composant à l'architecture de grands systèmes, Thales propose des solutions clés en main ou sur mesure. Au sein de la Division Systèmes Terres Interarmées (Land & Joint), Thales Optronique S.A conçoit, développe, réalise et commercialise des équipements et systèmes optroniques de surveillance, reconnaissance et désignation aéroportés, terrestres et navals. L'entreprise mène depuis de nombreuses années une politique d'investissements dans les technologies et les concepts les plus récents tels que l'imagerie infrarouge appliquée aux autodirecteurs et les caméras thermiques. Les équipements développés et commercialisés au sein de la division Land Défense de Thales sont souvent exploités aux limites de leurs possibilités.

Trois grandes valeurs sont primordiales pour Thales :

- l'obsession du client : être à l'écoute des clients, comprendre leurs besoins, bâtir avec eux une relation durable,
- en équipe améliorer la performance : coopérer par-delà les différences, savoir travailler dans un environnement multinational, encourager la diversité, capitaliser le savoir et le partager,
- innover, décider et agir avec rapidité : innover pour créer de la valeur, savoir décider et agir rapidement pour être les premiers sur le marché.

Pour servir au mieux l'ensemble de ses divisions opérationnelles, Thales a développé un réseau de centres de recherche à vocation transversale « Thales Research and Technology ». Les centres ont pour missions de :

1 Introduction Générale

- développer les technologies de détection de rupture,
- contribuer à la constitution du portefeuille de propriété intellectuelle du groupe,
- offrir une plateforme d'innovation,
- attirer et former de jeunes scientifiques,
- assurer une veille scientifique et technologique.

La recherche constitue un levier essentiel de la compétitivité de Thales et sa stratégie consiste à nouer de solides partenariats au sein d'écosystèmes industriels et scientifiques.

1.2 Contexte industriel

L'exploitation de technologies aux limites de leurs possibilités augmente le risque de pannes. Les pannes génèrent des coûts importants et de l'indisponibilité opérationnelle. Pour les clients qui subissent des pannes en exploitation, les conséquences sont les suivantes :

- échecs de mission,
- pertes de confiance du client vis-à-vis des équipements,
- dégradation de l'image de marque et difficultés dans l'obtention de nouveaux contrats,
- stress des utilisateurs provoqué par l'appréhension d'une panne.

S'il est difficile voire impossible d'éviter les pannes, il est possible de maîtriser certaines d'entre elles. La maîtrise de la panne consiste à détecter l'état dégradé la précédant (diagnostic) et à indiquer la date de maintenance optimale en fonction du vécu de l'équipement et de différents paramètres. Les pannes maîtrisables sont celles d'usure et de fatigue. La maîtrise de ces pannes consiste alors à arrêter le système avant l'occurrence du défaut et choisir le moment le plus opportun d'un point de vue coût/efficacité.

Thales s'est fixé comme objectif d'optimiser le rapport disponibilité/coût. Thales souhaite réduire le taux de pannes de ses produits (équipements) en faisant évoluer le concept de maintenance de ses produits d'une logique de réparation des défauts vers une logique d'anticipation de ces défauts. Dans le cadre de l'optimisation de la fiabilité, Thales intègre désormais des systèmes d'observation de l'état de santé des produits. Cette fonction est réalisée par des HUMS (Health & Usage Monitoring System, [22]). Le HUMS permet :

- d'enregistrer les conditions d'environnement et d'utilisation de l'équipement,
- d'évaluer l'état de santé de l'équipement,
- d'anticiper et d'alerter sur les dérives de fonctionnement,
- d'optimiser les opérations de maintenance.

Si dans le passé le HUMS se heurtait aux problèmes de l'espace mémoire et de capacité de traitement des données opérationnelles, aujourd'hui ces contraintes ne sont plus bloquantes. Il est désormais possible d'embarquer des systèmes de calcul sophistiqués dans tous les produits. Il faut alors modéliser les données enregistrées afin d'en extraire les indicateurs qui permettront de satisfaire les objectifs affichés.

Thales s'engage auprès de ses clients et utilisateurs de plus en plus exigeants, sur la qualité de ses équipements, la fiabilité de l'information et la précision. La satisfaction du client est un enjeu important pour l'entreprise. C'est pourquoi Thales souhaite intégrer au sein de ses caméras thermiques, un système HUMS capable d'enregistrer les conditions d'environnement, d'analyser l'état du système et de donner à chaque démarrage de l'équipement, une estimation de son état de fonctionnement ainsi qu'une date de maintenance adaptée à son état. Ainsi, les équipements ne seront pas rappelés de façon périodique ou lors de pannes mais lorsque le système annoncera une potentielle future défaillance. Ceci permettra de ne pas envoyer un équipement en mission lorsque le système ne prévoit pas d'être en capacité d'effectuer la totalité de la mission dans les meilleures conditions. De plus, ce système pourrait par la suite être intégré à d'autres équipements.

L'objectif de la thèse est de développer des modèles mathématiques et leurs analyses qui permettront de déterminer le potentiel de vie d'un produit en fonction de l'évolution des paramètres environnementaux (par exemple température ambiante), des grandeurs physiques trahissant l'état de santé des produits (par exemple temps de mise à froid) et de proposer une politique de maintenance adaptée. A terme, un produit devra être capable d'indiquer à son utilisateur :

- son capital de vie résiduel,
- la probabilité de réussir une mission donnée compte tenu de son état,
- la date optimale de maintenance.

Nous travaillons dans un cadre spécifique. En effet, nous nous intéressons au HUMS d'un équipement en exploitation : les caméras thermiques, dans un contexte particulier et avec des questions précises. Nous devons répondre aux objectifs du HUMS pour ces équipements. Même si le premier objectif du HUMS d'enregistrer les paramètres environnementaux était déjà réalisé par Thales avant le début de ce travail, il reste à définir un modèle mathématique intégrant ces informations afin de détecter un changement d'état du système, d'anticiper les pannes et proposer une politique de maintenance adaptée à l'état estimé du système.

Les experts Thales ont sélectionné les variables pertinentes à retenir dans les enregistrements du HUMS pour la construction du modèle. Ces variables sont celles les plus corrélées à l'état de santé du système. Grâce à la sélection des variables, à partir de données opérationnelles, un premier travail d'analyse de données a permis de confirmer l'intérêt du modèle des chaînes de Markov cachées pour la détection d'un mode de fonctionnement dégradé. Par ce modèle nous sommes capable d'estimer à chaque instant l'état du système.

La seconde étape est l'optimisation de la maintenance. Pour cela, nous utilisons d'une part la modélisation du système par des PDMP, et d'autre part l'arrêt optimal sur ces

1 Introduction Générale

processus pour mettre au point une méthode numérique d'optimisation du temps de maintenance pour ce type de processus en fonction de l'état estimé du système (par la méthode des chaînes de Markov cachées). Il s'agit en particulier dans le contexte de cette application d'exploiter ce modèle afin de trouver l'algorithme de calcul du meilleur instant pour effectuer une maintenance sur un système dynamique complexe et d'y associer une notion de risque d'échec de mission. Une maintenance effectuée trop tôt peut être inutilement coûteuse, mais une maintenance trop longtemps différée peut mener à la panne totale du système, ce qui n'est pas non plus souhaitable. Il faut donc trouver un équilibre entre ces deux politiques de maintenance extrêmes. Pour cela, nous nous appuyons sur les travaux [14] et [15].

Ce mémoire de thèse est composé de six parties. Le chapitre 2 est consacré à la problématique industrielle et au travail préliminaire d'analyse des données. Nous présentons au chapitre 3, le modèle mathématique de type chaînes de Markov cachées pour la détection d'un mode de fonctionnement dégradé. Cette étape nous permet d'estimer l'état du système à chaque instant connaissant l'histoire des paramètres d'un équipement (enregistré par le HUMS) jusqu'à cet instant. Puis, dans le chapitre 4, nous supposons l'état du système connu (par la méthode précédente) et nous présentons l'arrêt optimal sur les PDMP. Cette méthode nous permet de donner une date de maintenance optimale et dynamique en fonction de l'état estimé de l'équipement. Une politique de maintenance sera alors proposée ainsi qu'un algorithme de calcul du risque d'échec d'une mission. Au chapitre 5, nous illustrons ce travail par son application dans l'entreprise. Pour finir, dans le dernier chapitre, nous présentons les conclusions de ce mémoire de thèse ainsi que les perspectives.

2 Le cas industriel

Sommaire

2.1	Un équipement opto-électronique : la caméra thermique . . .	13
2.2	Problématique	14
2.2.1	Présentation des données : lien entre le temps de mise à froid et l'état du système	15
2.2.2	Début de la modélisation : Analyse des données	16

2.1 Un équipement opto-électronique : la caméra thermique

Un équipement opto-électronique ou optronique est un équipement qui combine l'optique et l'électronique. L'optronique est basée sur l'utilisation de longueurs d'ondes micro-métriques situées dans l'infrarouge qui permettent une visualisation performante de jour comme de nuit. Associée à la technologie du laser, l'optronique permet d'atteindre des puissances et des précisions supérieures. Les applications de l'optronique sont multiples. A l'origine exclusivement pour le domaine militaire dans des fonctions de détection, d'identification et de reconnaissance, elles sont de plus en plus nombreuses dans le civil, en particulier dans le domaine médical.

Dans le cadre de notre recherche nous nous sommes intéressés aux caméras thermiques « Sophie », utilisées pour détecter, identifier et localiser un élément de jour comme de nuit. Bien que son utilisation principale soit d'ordre militaire, elle est aussi embarquée sur des navires afin de pouvoir par exemple localiser un homme qui serait tombé à la mer et permettre d'aider les secours. Cet équipement optronique a deux grands rôles :

- établir la situation : détection, reconnaissance, identification, localisation...
- protéger : alerte, aide au pilotage...

L'équipement Sophie (caméra) est destiné à la détection, la reconnaissance et l'identification de cibles de nuit comme de jour, même en cas de mauvaises conditions climatiques. Conçu pour une mise en oeuvre simple et rapide, l'équipement peut servir aussi bien en autonome de jumelle portative thermique, que de caméra thermique montée par fixation rapide sur un support mécanique. Toute cible potentielle est caractérisée par une signature



du système afin de proposer une action de maintenance avant la panne.

2.2.1 Présentation des données : lien entre le temps de mise à froid et l'état du système

Chaque équipement possède un journal de bord qui fournit les informations suivantes à chaque mise en marche : le nombre d'utilisations, le temps de fonctionnement cumulé de l'équipement (compteur horaire), sa température initiale avant sa mise à froid et le temps de mise à froid. Ce temps de mise à froid est le temps de passage du système d'une température initiale (en général la température ambiante) à une température de 77K. Cet abaissement de la température est nécessaire au fonctionnement de l'équipement et se fait à chaque mise en marche. Cette mise à froid est possible grâce à une compression/décompression d'hélium dans un système sous vide. Pour les experts, une augmentation du Tmf traduit une détérioration du système.

Prenons un exemple de journal de bord pour illustrer ces propos. Dans le cas présent, l'équipement choisi est un équipement qui est tombé en panne à la fin de l'étude. Nous pouvons observer l'évolution de ses variables au cours du temps grâce à son journal de bord présenté dans le Tableau 2.1. L'intégralité de ce journal de bord est donnée en annexe.

Nombre d'utilisations	Compteur horaire (min)	Tmf (s)	Température initiale (C)
1	1852	288	10
2	1866	284	6
3	1871	267	7
4	1955	262	4
5	2000	291	12
6	2178	299	12
...
83	17902	321	16
84	18130	321	21
85	18138	335	18
86	18264	318	12
87	18286	317	16
88	18313	318	12
89	panne	panne	panne

TABLEAU 2.1: Journal de bord d'une caméra.

A ce Tableau 2.1, nous pouvons associer la courbe brute du Tmf en fonction du temps, sans tenir compte de la température initiale de l'équipement (Figure 2.2).

2 Le cas industriel

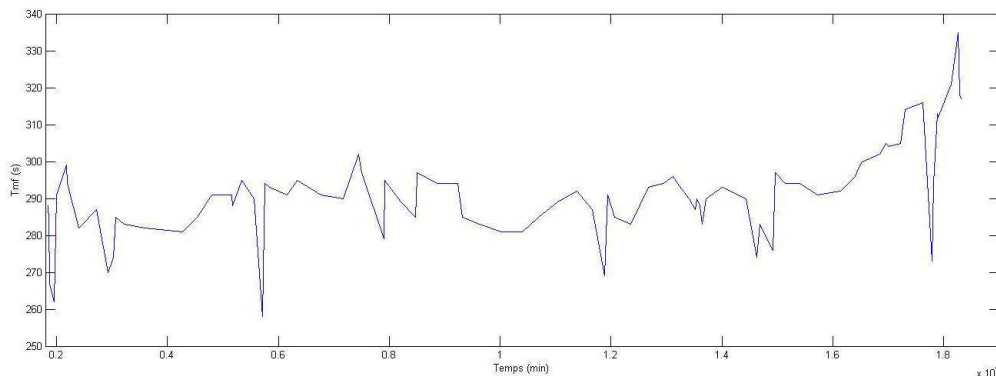


FIGURE 2.2: Courbe brute du Tmf en fonction du temps.

Cet équipement est tombé en panne au bout de 89 utilisations (ou 18313 min d'utilisations cumulées). Si nous observons le Tableau 2.1, nous remarquons que les Tmf ont tendance à être plus élevés à la fin qu'au début de l'étude. D'autre part, si nous observons la courbe précédente, nous pouvons remarquer que pendant un certain temps, le Tmf reste presque constant puis augmente progressivement. Pour les experts, cette élévation du Tmf traduit une dégradation du matériel, une fuite au sein du système vide/hélium de l'équipement. Nous faisons alors l'hypothèse que la dégradation du système entraîne une élévation du temps de mise à froid de l'équipement et qu'une observation attentive de l'évolution de ces Tmf nous permettrait de déterminer l'état du système et ainsi de prévenir la panne. Donc nous nous intéresserons à la dynamique du Tmf qui semble être un bon indicateur de l'état du système.

2.2.2 Début de la modélisation : Analyse des données

Nous supposons que le système a trois états possibles :

- un état stable : le Tmf est constant. Cela traduit un bon fonctionnement du système. Aucune anomalie n'est signalée.
- un état dégradé : le Tmf augmente au cours du temps, ce qui traduit une dégradation du système.
- un état de panne : le système est arrêté.

Le système passe toujours, au cours du temps, de l'état stable à l'état dégradé pour aboutir à l'état de panne. Cependant, puisqu'un système en état dégradé ne peut revenir à un état stable, nous nous intéresserons seulement à la première transition. En effet, notre but est de détecter l'entrée de la caméra en mode dégradé, afin de déterminer le plus tôt possible la survenue d'une panne. Pour cela, nous posons $X_t = e_1$ lorsque le système est stable à l'instant t et $X_t = e_2$ lorsqu'il se dégrade à l'instant t . Comme expliqué précédemment, nous n'observerons pas directement l'état de notre système mais indirectement au travers

de l'évolution du Tmf. En effet, nous savons que le Tmf est un bon indicateur de l'état du système vide/hélium de l'équipement : une élévation de ce temps de mise en froid sera considérée comme le signal d'une dégradation de l'état du système.

Nos objectifs sont les suivants :

- estimer à chaque instant l'état du système mesuré par la probabilité que l'équipement soit dans un état dégradé connaissant l'histoire des Tmf jusqu'à cet instant. D'un point de vue mathématique, on cherche à estimer :

$$P(X_t = e_2 | Tmf_s, s \leq t),$$

- détecter le plus tôt possible la dégradation du système pour mettre en place une action de maintenance adaptée avant la panne.

Afin de répondre à la première problématique, traitée dans le prochain chapitre, nous utiliserons un modèle de chaînes de Markov cachées en temps continu.

3 Chaîne de Markov cachée pour la détection d'un mode de fonctionnement dégradé

Sommaire

3.1	Introduction	19
3.2	Modèle mathématique	20
3.2.1	Généralités	20
3.2.2	Equations du filtrage et estimation des paramètres	22
3.3	Mise en oeuvre pratique sur des simulations	24
3.3.1	Estimation de la probabilité d'être dans un état dégradé	25
3.3.2	Estimation du paramètre A	26
3.3.3	Estimation du paramètre c	27
3.3.4	Etude de la sensibilité du filtre $P(X_t = e_2 \mathcal{Y}_t)$ aux paramètres A et c	28
3.4	Application aux données réelles	29
3.4.1	Les données	29
3.4.2	Influence de la température interne sur le temps de mise à froid	31
3.4.3	Lissage des données	32
3.4.4	Estimation des paramètres A et c	34
3.4.5	Estimation à partir des données réelles de la probabilité que le système soit dans un état dégradé	35
3.5	Critère de décision	38
3.6	Méthode du CUSUM pour la détection d'un changement d'état du système	41
3.7	Conclusion	48

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons poser un cadre mathématique général pour résoudre notre problème. Nous devons détecter une rupture dans le comportement de la variable T_{mf}

3 Chaîne de Markov cachée pour la détection d'un mode de fonctionnement dégradé

présentée en 2.2.1. Il existe différentes méthodes pour traiter ce genre de problème comme par exemple la méthode du CUSUM (voir les travaux de Basseville et Nikiforov[3]). Parmi toutes ces méthodes, nous avons choisi de nous intéresser plus particulièrement à un modèle de chaînes de Markov cachées. Ce modèle est souvent utilisé en génomique dans la détection d'un point de mutation dans l'ADN (voir par exemple les travaux de Fridlyand *et al.*[19]). Il est aussi utilisé en fiabilité comme le montrent les travaux de Vrignat *et al.* [33] qui l'utilisent comme une aide à la décision permettant à l'expert de contrôler le niveau de dégradation du processus.

Nous présenterons tout d'abord le modèle choisi dans un cadre général et les conclusions qui en découlent (Section 3.2). Nous mettrons en oeuvre le modèle à partir de données simulées (Section 3.3) puis nous l'appliquerons à l'analyse de nos données réelles (section 3.4). Enfin nous comparerons cette méthode à celle du CUSUM (Section 3.5).

3.2 Modèle mathématique

Nous proposons de modéliser l'état du système au temps t par une chaîne de Markov X_t . Cet état ne sera pas observé directement mais indirectement au travers du temps de mise à froid $Tmf(t)$, une fonction bruitée de cette chaîne. Nous allons voir que de ce modèle mathématique découle des équations de filtrage qui vont nous permettre d'estimer l'état du système.

3.2.1 Généralités

Chaîne de Markov en temps continu

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une chaîne de Markov homogène en temps continu, définie sur (Ω, F, P) muni de l'espace d'état suivant : $S = \{e_1, e_2, \dots, e_N\} \subset \mathbb{R}^N$. Par commodité, nous suivrons les hypothèses de *Elliott et al.* ([17, p.182]) en posant $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, de sorte que S est ainsi une base orthonormée de \mathbb{R}^N . Notons $p_t^i = P(X_t = e_i)$ pour $1 \leq i \leq N$ et posons $p_t = (p_t^1, p_t^2, \dots, p_t^N)$. Il est facile de monter à partir de l'équation (avant) de Chapman-Kolmogorov, qu'il existe une matrice A telle que le vecteur p_t vérifie l'équation suivante (voir [17, p.337] ou [9, p.251]) :

$$\frac{dp_t}{dt} = A^T p_t.$$

Cette matrice $A = (a_{ij})$ est par définition la Q-matrice de ce processus. Elle vérifie $a_{ii} = -\sum_{j \neq i} a_{ij}$ et si $i \neq j$, $a_{ij} \geq 0$ telle que :

$$a_{ij} = \lim_{s \rightarrow 0_+} \frac{\Phi_{ij}(t+s, t) - \Phi_{ij}(t, t)}{s}.$$

a_{ij} représente l'intensité de saut de e_i vers e_j , c'est à dire que $\frac{1}{a_{ij}}$ est le temps moyen passé dans l'état e_i avant de passer dans l'état e_j . Si nous notons la matrice de transition associée $\Phi(t, s)$ où $(\Phi(t, s))_{ij} = P(X_t = e_j | X_s = e_i)$ et I la matrice identité d'ordre \mathbb{N} alors nous avons les relations suivantes ([17, p.337],[9, p.247-248]) :

$$\begin{cases} \frac{d\Phi(t,s)}{dt} = A\Phi(t, s) , \Phi(s, s) = I, \\ \frac{d\Phi(t,s)}{ds} = -\Phi(t, s)A , \Phi(t, t) = I, \end{cases}$$

$$\text{donc } \Phi(t, s) = \exp((t - s)A).$$

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration complète, continue à droite engendrée par $\sigma(X_r : 0 \leq r \leq t)$. X_t se décompose comme une \mathcal{F}_t semi-martingale :

$$X_t = X_0 + \int_0^t A X_r dr + V_t \quad (3.1)$$

avec $\int_0^t A_r X_r dr$ un processus à variation finie et V_t une martingale.

Démonstration. X_t est une semi-martingale. En effet, si nous supposons $0 \leq s \leq t$ alors :

$$\begin{aligned} E[V_t - V_s | \mathcal{F}_s] &= E[X_t - X_s - \int_s^t A_r X_r dr | \mathcal{F}_s] \\ &= E[X_t - X_s - \int_s^t A_r X_r dr | X_s] \text{ car } X_t \text{ est une chaîne de Markov.} \\ &= E[X_t | X_s] - X_s - \int_s^t A_r E[X_r | X_s] dr \\ &= \Phi(t, s)X_s - X_s - \int_s^t A_r \Phi(r, s)X_s dr \\ &= \Phi(t, s)X_s - X_s - \int_s^t \frac{d\Phi(r, s)}{dr} X_s dr \\ &= \Phi(t, s)X_s - X_s - \int_s^t d\Phi(r, s)X_s \\ &= \Phi(t, s)X_s - X_s - \Phi(t, s)X_s + \Phi(s, s)X_s \\ &= \Phi(t, s)X_s - X_s - \Phi(t, s)X_s + X_s \\ &= 0. \end{aligned}$$

V_t est une martingale par rapport à la filtration \mathcal{F}_s et par conséquent une martingale locale. Donc grâce à l'équation (3.1), X_t se décompose comme une semi-martingale. \square

Processus d'observation

X_t n'est pas observée directement, mais indirectement à partir du processus Y_t donné par la formule suivante :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t c(X_r)dr + W_t \quad (3.2)$$

avec :

- W_t un brownien sur (Ω, F, P) indépendant de X_t ,
- $c(X_t) = \langle X_t; c \rangle$ ($\langle ; \rangle$ est le produit scalaire dans \mathbb{R}^N) puisque X_t prend ses valeurs dans S et c est un vecteur : $c = (c_1, \dots, c_N)$; donc c_i est la pente moyenne des Y_t lorsque le système est dans l'état e_i . Notons pour la suite, $C = \text{diag}(c)$.
- $(\mathcal{Y}_t)_{t>0}$ la filtration complète continue à droite engendrée par $\sigma(Y_s : 0 \leq s \leq t)$,
- $(G_t)_{t>0}$ la filtration complète continue à droite engendrée par $\sigma(X_s, Y_s : 0 \leq s \leq t)$.

Nous verrons par la suite, que le processus Y_t représente les Tmf lissés, dont on a corrigé l'effet de la température et c_i la pente moyenne de ce dernier lorsque le système est dans l'état e_i .

Remarque 3.1. *En moyenne, l'accroissement du processus observé Y_t dépend de l'état de X_t au travers de $c(X_t)$. Cet accroissement déterministe est bruité par le mouvement Brownien. $c(X_t)$ représente donc la pente des Y_t en fonction de l'état du système X_t . Si $X_s = e_i$ pour $s \in [t - \Delta_t, t]$, $c(X_s) = c_i$ et $Y_t - Y_{t-\Delta_t} = c_i \Delta_t + (W_t - W_{t-\Delta_t})$.*

Rappelons que notre objectif est d'estimer l'état du système à chaque instant t , connaissant les trajectoires de Y_t jusqu'à cet instant. Pour cela, nous considérons les probabilités conditionnelles : $P(X_t = e_i | \mathcal{Y}_t)$ pour $1 \leq i \leq N$. Or, si nous notons $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^N)^T$,

$$P(X_t = e_i | \mathcal{Y}_t) = P(X_t^i = 1 | \mathcal{Y}_t) = E[X_t^i | \mathcal{Y}_t] = (E[X_t | \mathcal{Y}_t])_i.$$

Donc nous allons nous intéresser à l'espérance conditionnelle $E[X_t | \mathcal{Y}_t]$.

3.2.2 Equations du filtrage et estimation des paramètres

Le filtrage est une technique permettant de calculer la loi (conditionnelle à l'histoire du processus observé) d'un processus partiellement observé. Tout d'abord, nous donnons les équations du filtrage pour les espérances conditionnelles de fonctionnelles de X_t , connaissant l'histoire des Y_t . Ceci nous permet d'avoir la meilleure information sur l'état du système puisque X_t n'est pas directement observé. Puis nous verrons comment à partir de ces équations, il est possible d'estimer les paramètres A et c des équations (3.1) et (3.2) ainsi que la probabilité d'être dans un état $e_{i \in \{1, \dots, N\}}$ sachant \mathcal{Y}_t .

Equations du filtrage

Elliott *et al.* (voir [17], [4, p.183-187]) ont établi les équations de filtrage non normalisées de différentes fonctionnelles de X_t . Pour la suite, nous noterons $\sigma(F(X_t)) = \bar{E}[\bar{\Lambda}_t F(X_t) | \mathcal{Y}_t]$ une espérance conditionnelle sous \bar{P} défini par le changement de probabilité suivant :

$$\frac{dP}{d\bar{P}} \Big|_{\mathcal{G}_t} = \bar{\Lambda}_t = \exp\left(\int_0^t \langle c; X_r \rangle dY_r - \frac{1}{2} \int_0^t \langle c; X_r \rangle^2 dr\right).$$

Ce changement de probabilité est une technique standard de filtrage. Sous \bar{P} , Y_t est un mouvement brownien, indépendant de X_t et la dynamique de ce filtre est plus facile pour écrire les équations stochastiques. La démonstration de l'existence de \bar{P} et des propriétés qui en découlent est donnée en Annexe A.

Les équations de filtrage concernent :

- l'état du système :

$$\sigma(X_t) = \sigma(X_0) + \int_0^t A\sigma(X_r)dr + \int_0^t C\sigma(X_r)dY_r,$$

- le nombre de transitions de X_t de e_i à e_j sur l'intervalle $[0; t]$ donné par ζ_t^{ij} :

$$\sigma(\zeta_t^{ij} X_t) = \int_0^t \langle \sigma(X_r); e_i \rangle a_{ji} e_i dr + \int_0^t A\sigma(\zeta_r^{ij} X_r)dr + \int_0^t C\sigma(\zeta_r^{ij} X_r)dY_r,$$

cette équation nous permettra d'estimer les paramètres a_{ij} de la matrice A .

- le temps d'occupation de l'état e_i sur l'intervalle $[0, t]$ donné par ϑ_t^i :

$$\sigma(\vartheta_t^i X_t) = \int_0^t \langle \sigma(X_r); e_i \rangle e_i dr + \int_0^t A\sigma(\vartheta_r^i X_r)dr + \int_0^t C\sigma(\vartheta_r^i X_r)dY_r,$$

cette équation nous permettra d'estimer les paramètres a_{ij} de la matrice A et les coordonnées du vecteur c .

De même, nous pouvons avoir des informations sur la pente grâce aux équations de filtrage sur la dérivée définie par $T_t^i = \int_0^t \langle X_r; e_i \rangle dy_r$:

$$\sigma(T_t^i X_t) = c_i \int_0^t \langle \sigma(X_r); e_i \rangle e_i dr + \int_0^t A\sigma(T_r^i X_r)dr + \int_0^t [\langle \sigma(X_r); e_i \rangle e_i + C\sigma(T_r^i X_r)] dY_r,$$

cette équation nous permettra d'estimer les coordonnées du vecteur c .

Ces équations concernant ζ^{ij} , ϑ^i , T^i sont très utiles pour l'estimation de A et c quand Y_t est observé suffisamment longtemps. Notons que ce sont des équations différentielles stochastiques dont les solutions peuvent être approchées grâce au schéma d'approximation d'Euler (voir par exemple [24, Part 10.2]).

Estimation des paramètres et de la probabilité que le système soit dans un état

$e_{i \in \{1, \dots, N\}}$

Grâce aux équations du filtrage, nous pouvons estimer la probabilité du système d'être dans un état par la formule suivante :

$$E[X_t | \mathcal{Y}_t] = \frac{\bar{E}[X_t \bar{\lambda}_t | \mathcal{Y}_t]}{\bar{E}[\bar{\lambda}_t | \mathcal{Y}_t]} = \frac{\sigma(X_t)}{\sigma(1)}. \quad (3.3)$$

Si par exemple, $X_t = e_1$ lorsque le système fonctionne correctement et $X_t = e_2$ lorsqu'il se dégrade, alors

$$(E[X_t | \mathcal{Y}_t])_2 = P(X_t^2 = 1 | \mathcal{Y}_t) = P(\ll \text{le système est dégradé} \gg | \mathcal{Y}_t).$$

Cependant, nous avons besoin d'estimer les paramètres A et c des équations (3.1) et (3.2) car $\sigma(X_t)$ dépend d'eux. Donc nous estimons ces paramètres par maximum de vraisemblance à partir des observations de Y_s pour $0 < s \leq t$. Ces estimateurs sont donnés par la formule suivante :

$$\begin{cases} \hat{a}_{ij} = \frac{\sigma(\zeta_t^{ij})}{\sigma(\vartheta_t^i)}, \\ \hat{c}_i = \frac{\sigma(T_t^i)}{\sigma(\vartheta_t^i)}. \end{cases} \quad (3.4)$$

D'après Elliott *et al.* ([17, p.187-188]), ces estimateurs sont consistants. Ils convergent en probabilité quand t tend vers l'infini. Cependant, ces paramètres A et c sont présents dans chaque filtre $\sigma(\zeta_t^{ij} X_t)$, $\sigma(\vartheta_t^i X_t)$ et $\sigma(T_t^i X_t)$. Nous aurons alors besoin d'un algorithme EM pour les estimer. Ce sont les points fixes de cet algorithme EM dont le principe est décrit dans la Section 3.3.2. La convergence des estimateurs est développée par Dembo et Zetouni [36].

Remarque 3.2. *Les équations de filtrage ne donnent pas directement $\sigma(\zeta_t^{ij})$, $\sigma(T_t^i)$, $\sigma(\vartheta_t^i)$ et $\sigma(1)$ mais $\sigma(\zeta_t^{ij} X_t)$, $\sigma(T_t^i X_t)$, $\sigma(\vartheta_t^i X_t)$ et $\sigma(X_t)$. Pour passer de l'un à l'autre, il suffit de faire le produit scalaire de ces derniers éléments avec le vecteur $(1, \dots, 1)^T$ pour obtenir $\sigma(\zeta_t^{ij})$, $\sigma(T_t^i)$, $\sigma(\vartheta_t^i)$ et $\sigma(1)$ (voir [17, p.173]).*

Illustrons maintenant ces résultats sur des données simulées.

3.3 Mise en oeuvre pratique sur des simulations

Nous nous plaçons dans le cadre suivant. Le processus a deux états possibles : un état stable ($X_t = e_1$) et un état dégradé ($X_t = e_2$) avec des transitions de e_1 vers e_2 et inversement. X_t oscille donc entre ces deux états. Quand $X_t = e_1$ (respectivement $X_t = e_2$), sa première coordonnée $X_t^1 = 1$ et sa seconde coordonnée $X_t^2 = 0$ (respectivement $X_t^1 = 0$ et $X_t^2 = 1$).

3.3.1 Estimation de la probabilité d'être dans un état dégradé

Notre but est de détecter le plus tôt possible un état dégradé afin de prévenir la panne et de proposer une action de maintenance. Nous nous intéressons donc à l'estimation de la probabilité du système d'être dans un état dégradé ($X_t = e_2$). Pour cela, nous utiliserons l'équation (3.3). Nous voulons estimer cette probabilité à chaque instant t à partir de l'observation des Y_s pour $s \leq t$. Cette estimation est alors réalisée par un algorithme récursif codé en annexe C. Nous utilisons le schéma d'Euler pour les valeurs approchées de l'EDS. Une illustration du bon comportement numérique du processus de calcul est donnée par la Figure 3.1. Nous avons choisi de présenter sur cette figure une partie de la trajectoire de X_t^2 (choisie arbitrairement) et de $\hat{p}_t^2 = \hat{E}[X_t^2 | \mathcal{Y}_t]$. Nous observons clairement que le filtre fournit une évaluation correcte de l'état du système X_t^2 : $\hat{E}[X_t^2 | \mathcal{Y}_t]$ est proche de 1 lorsque $X_t^2 = 1$ et de 0 lorsque $X_t^2 = 0$.

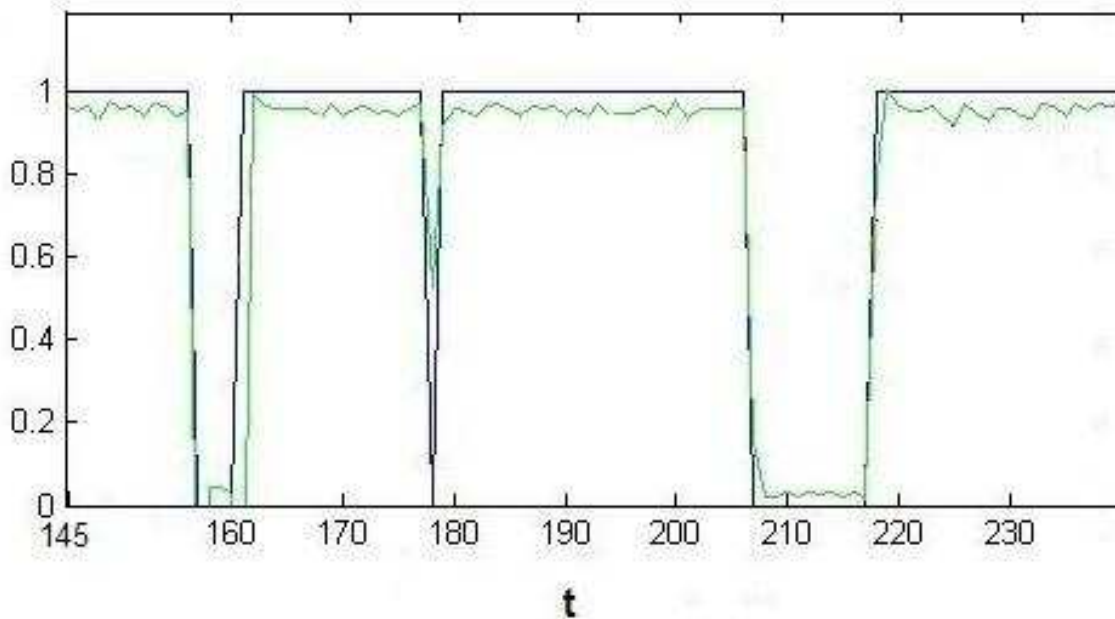


FIGURE 3.1: Exemple de trajectoire de X_t^2 (trait noir) et de l'estimation de $P(X_t^2 = 1 | \mathcal{Y}_t)$ (trait vert).

Cependant, au cours de cette première étude de simulations, les paramètres A et c étaient supposés connus. Ce qui n'est pas le cas en pratique. Donc il est nécessaire d'estimer A et c avant d'estimer la probabilité d'être dans un état dégradé.

3.3.2 Estimation du paramètre A

Nous supposons le vecteur c connu et nous cherchons à estimer les valeurs de la matrice A à partir de l'observation des Y_t . Pour cela nous utilisons la formule suivante :

$$\hat{a}_{ij} = \frac{\sigma(\varsigma_t^{ij})}{\sigma(\vartheta_t^i)}.$$

Toutefois, l'une des difficultés de cette estimation réside dans le fait que les équations qui régissent $\sigma(\varsigma_t^{ij})$ et $\sigma(\vartheta_t^i)$ sont aussi gouvernées par A . Donc selon Zeitouni et Dembo [36], nous avons développé un algorithme itératif capable d'approcher A en partant d'un A_0 arbitraire. Cet algorithme (codé en annexe C) fonctionne de la façon suivante : à l'étape k , nous utilisons \hat{A}_{k-1} pour calculer \hat{A}_k via les équation de filtrage (3.4). La convergence de ces éléments a été démontrée par Zeitouni et Dembo [36]. Notre critère d'arrêt de cet algorithme EM est donné par une différence entre deux valeurs successives inférieure à 10^{-2} .

Remarque 3.3. *Nous nous intéressons essentiellement à la première ligne de cette matrice car elle reflète le passage de l'état stable à l'état dégradé (aboutissant à une panne). Tandis que la deuxième ligne correspond au passage de l'état dégradé à l'état stable. Or dans notre cas pratique, il n'y a pas de retour à un état stable après dégradation du système. L'enregistrement des données est arrêté dès qu'une panne survient.*

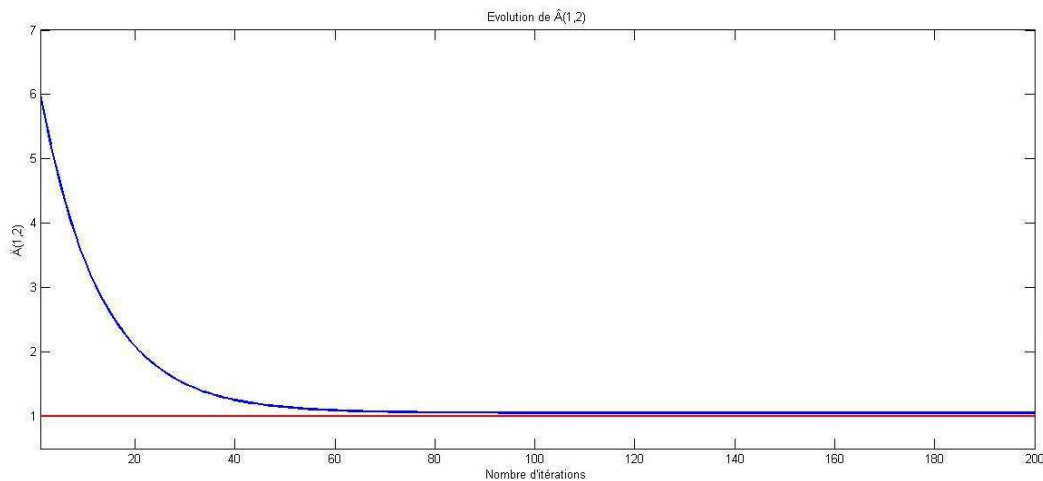


FIGURE 3.2: Evolution de $\hat{A}_k(1,2)$ au cours des itérations (en rouge, la vraie valeur)

Exemple 3.1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$ et $c = (-1, 1)$. Posons arbitrairement $A_0 = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$. Par le programme précédent, nous avons obtenu après 200 itérations :

$$\hat{A}_{200} = \begin{pmatrix} -1.0541 & 1.0541 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Regardons à la Figure 3.2 maintenant l'évolution des termes $\hat{A}_k(1,2)$ au cours des 200 itérations. On observe qu'à partir du terme $A_0(1,2)$ arbitraire, nous obtenons une estimation convenable de $A(1,2)$ au bout d'une centaine d'itérations.

3.3.3 Estimation du paramètre c

Nous supposons maintenant la matrice A connue et nous cherchons à estimer les éléments du vecteur c à partir de l'observation des Y_t . Pour cela nous utilisons la formule suivante :

$$\hat{c}_i = \frac{\sigma(T_t^i)}{\sigma(\vartheta_t^i)}.$$

Une fois encore, l'une des difficultés de cette estimation réside dans le fait que les équations qui régissent $\sigma(T_t^i)$ et $\sigma(\vartheta_t^i)$ sont aussi gouvernées par c . Le but est alors de développer un algorithme itératif capable d'approcher c en partant d'un vecteur c_0 arbitraire. Cet algorithme suit le même principe que celui présenté précédemment. Il est codé en annexe C.

Exemple 3.2. Soit $c = (0, 1)$ et $A = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.05 & -0.05 \end{pmatrix}$. Posons arbitrairement $c_0 = (0, 3)$. Nous obtenons par le programme prog.2, l'estimation de c suivante (après 100 itérations) :

$$\hat{c}_{100} = (0, 0.9942).$$

Regardons maintenant la Figure 3.3 décrivant l'évolution de la deuxième coordonnée de ce vecteur \hat{c}_k au cours des 100 itérations. On observe qu'en partant de la valeur c_0 , donnée ci-dessus, nous pouvons avoir une estimation correcte de c . Notons que nous nous intéressons essentiellement à la deuxième coordonnée du vecteur c , qui représente la pente des Y_t lorsque le système se dégrade. La première coordonnée du vecteur c est connue, elle est nulle dans notre cas, d'après les experts Thales. Notons que le principe reste le même pour estimer la première coordonnée du vecteur c .

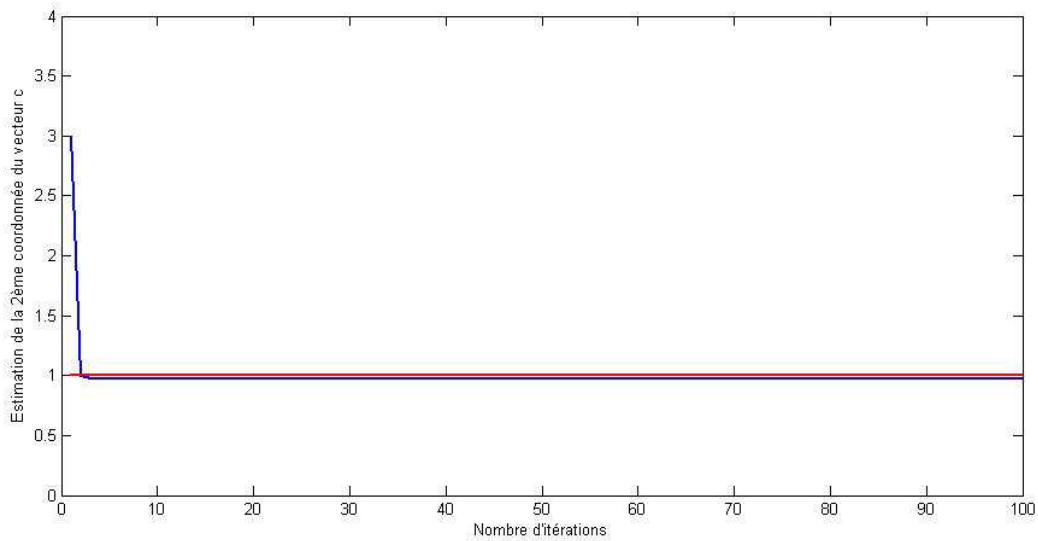


FIGURE 3.3: Evolution de la deuxième coordonnée de \hat{c} au cours des itérations.

Remarque 3.4. *L'algorithme pour estimer les paramètres A et c est très sensible au choix des paramètres initiaux A_0 et c_0 , dans le sens où, le choix de la matrice A_0 et du vecteur c_0 peut avoir une influence sur la convergence du système. Nous avons fait le choix de ne pas pousser plus loin cette étude de sensibilité, car nous allons voir par la suite, que le choix de ces paramètres impacte peu l'estimation de la probabilité que le système soit dans un état donné. De plus, dans le cadre de l'application industrielle considérée, comme le système n'oscille pas entre les états, cette technique d'estimation ne sera pas utilisée.*

3.3.4 Etude de la sensibilité du filtre $P(X_t = e_2 | \mathcal{Y}_t)$ aux paramètres A et c

Les valeurs de A et c étant inconnues dans la réalité, il nous a semblé important d'étudier l'impact d'une erreur d'estimation de A et c sur le calcul de la probabilité $P(X_t = e_2 | \mathcal{Y}_t)$. Nous simulons X_t et donc Y_t pour des valeurs de A et c données : par exemple, $A = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.05 & -0.05 \end{pmatrix}$ et $c = (-1, 1)$. Puis nous estimons la probabilité d'être dans un état dégradé.

Dans un premier temps, nous considérons deux matrices A_1 et A_2 résultant chacune d'une perturbation de la véritable matrice A : $A_1 = \begin{pmatrix} -0.01 & 0.01 \\ 0.04 & -0.04 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 \\ 0.08 & -0.08 \end{pmatrix}$. A partir des trois matrices A , A_1 et A_2 , nous calculons la probabilité d'être dans un état dégradé. La Figure 3.4(a) nous donne ces trois estimations. Nous observons clairement

que ces erreurs sur A et c influencent peu l'estimation de cette probabilité.

Maintenant, nous considérons trois vecteurs $c_1 = (-0.5, 0.5)$, $c_2 = (-1, 0.5)$ et $c_3 = (0, 1)$ résultant chacun d'une perturbation du véritable vecteur c . A partir des quatre vecteurs c, c_1, c_2 et c_3 , nous estimons la probabilité d'être dans un état dégradé. La Figure 3.4(b) nous donne ces quatre estimations. Une fois encore nous observons que ces perturbations influencent peu l'estimation de cette probabilité.

Conclusion : Il est possible d'estimer les paramètres d'intérêt ainsi que la probabilité que le système soit dans un certain état à partir de l'observation des Y_t , par cette méthode. De plus, nous avons vu qu'une erreur sur l'estimation des paramètres influence peu l'estimation de la probabilité du système d'être dans un état. Cependant, dans notre étude nous devons estimer les paramètres A et c avec peu de données disponibles et dans un contexte spécifique puisque le processus est arrêté à sa première transition vers l'état dégradé (il n'oscille pas entre ces deux états), ce qui nous empêche de les estimer avec la méthode donnée dans ce chapitre. Toutefois, nous avons observé qu'une erreur sur ces paramètres semble peu impacter la valeur du filtre $P(X_t = e_2 | \mathcal{Y}_t)$. Nous pouvons maintenant évaluer la cohérence de la méthode sur nos données réelles.

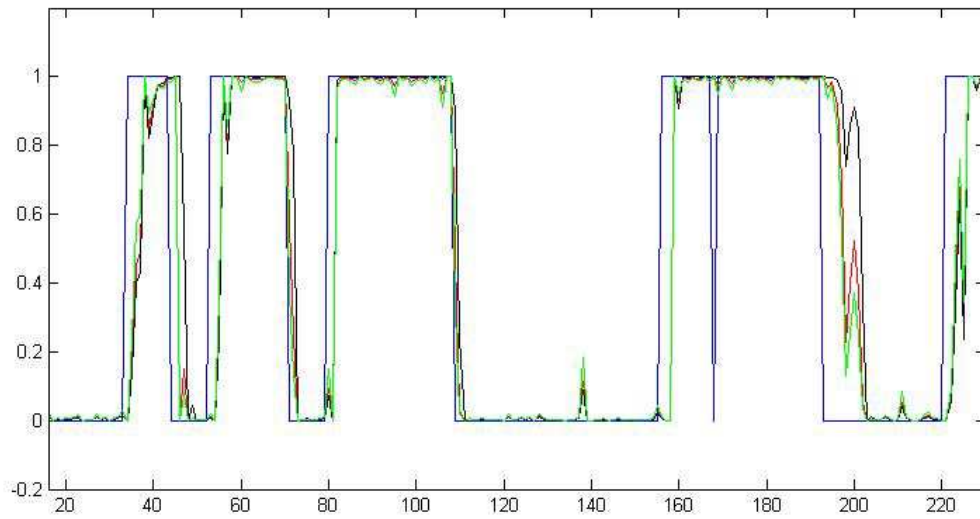
3.4 Application aux données réelles

3.4.1 Les données

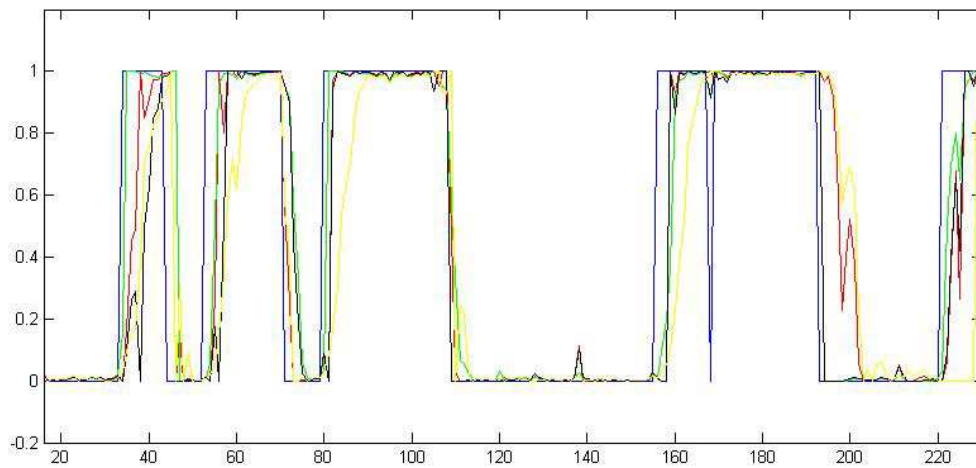
Nous avons à notre disposition le journal de bord de 28 caméras. Sur ces 28 équipements, 5 tombent en panne suite à une défaillance mécanique du système de mise à froid (système vide/hélium). Quant aux autres équipements leurs pannes sont des pannes non mécaniques. Elles ne sont pas liées à un effet d'usure, donc elles sont considérées comme non prévisibles. Le plus souvent, il s'agit de pannes électroniques. Nous ne considérons pas alors ces équipements comme ayant subi des pannes au sein du système vide/hélium mais comme des équipements dont le système sous vide fonctionne correctement.

Nous avons pour chaque équipement, son journal de bord qui nous fournit les informations suivantes à chaque mise en marche : le nombre d'utilisations, le temps de fonctionnement cumulé de l'équipement (compteur horaire), sa température initiale avant sa mise à froid et le temps de mise à froid (Tmf). A partir de ces éléments nous pouvons tracer l'évolution du Tmf en fonction du nombre d'utilisations pour tous les équipements. Reprétons l'exemple du journal de bord donné dans le Tableau 2.1. A partir de ce tableau, nous avons représenté à la Figure 3.5, la courbe brute du Tmf en fonction du nombre d'utilisations, sans tenir compte de la température initiale de l'équipement. Nous observons un signal fortement bruité et nous sommes amenés à nous poser la question de l'influence de la température initiale sur le Tmf.

3 Chaîne de Markov cachée pour la détection d'un mode de fonctionnement dégradé



(a)



(b)

FIGURE 3.4: (a) Evolution de X_t^2 (trait bleu) et de son estimateur $P(X_t^2 = 1 | \mathcal{Y}_t)$ pour la vraie matrice A (trait rouge) et les différentes matrices A : A_1 (trait noir), A_2 (trait vert). (b) Evolution de X_t^2 (trait bleu) et de son estimateur $P(X_t^2 = 1 | \mathcal{Y}_t)$ pour le vrai vecteur c (trait rouge) et les différents vecteurs c : c_1 (trait vert), c_2 (trait noir) et c_3 (trait jaune).

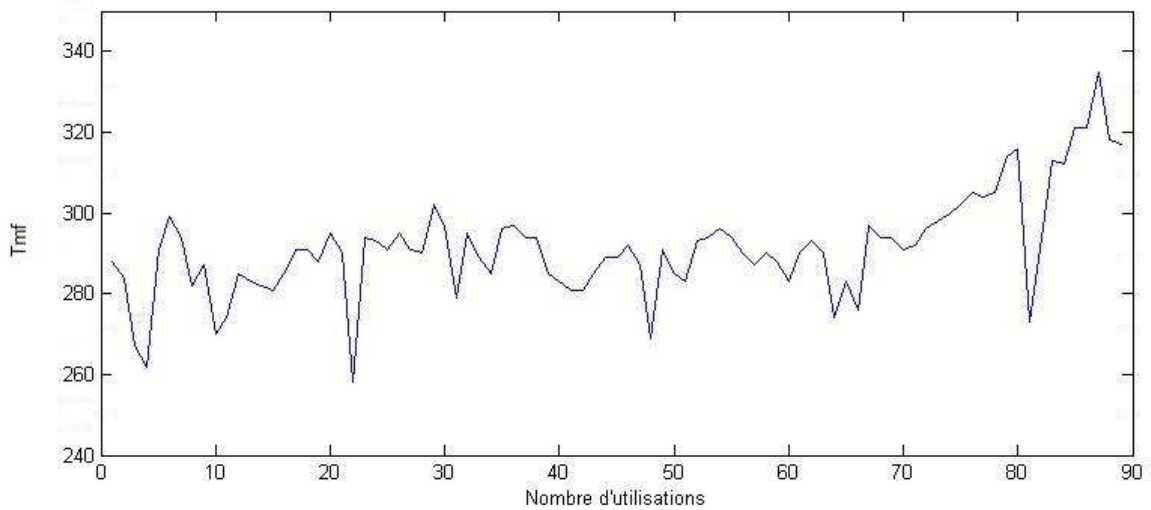


FIGURE 3.5: Courbe brute du Tmf en fonction du nombre d'utilisations

3.4.2 Influence de la température interne sur le temps de mise à froid

A partir du journal de bord de chaque équipement, nous pouvons récupérer la valeur du Tmf et la température initiale à chaque démarrage. Ces deux variables sont potentiellement liées, la température initiale influence le Tmf. En effet, si la température initiale est élevée, l'équipement mettra plus de temps pour atteindre les 77K, inversement, une température basse permettra d'atteindre cette température plus rapidement. Il est donc nécessaire de corriger les valeurs brutes du Tmf : pour cela on propose de faire une régression simple du Tmf en fonction de la température initiale de la caméra. Nous utilisons cette régression pour ramener ce problème à un cadre où la température initiale est constante. Pour la suite nous notons ce Tmf corrigé, Tmf_r .

Pour « caler » le modèle de régression, nous prenons les mesures des 9 caméras en état stable tout au long de l'étude et ayant le plus de données (au moins 200 démarrages). Nous réalisons une régression simple du Tmf en fonction de la température initiale pour chacun des 9 enregistrements. Puis nous faisons une moyenne des coefficients des pentes et nous obtenons la valeur 1.31 pour cette pente moyenne. Nous avons procédé ainsi car toutes les caméras ne sont pas calibrées de la même façon. En effet toutes les caméras semblent avoir le même comportement mais elles ne sont pas soumises aux mêmes températures (tout dépend du lieu de la mission) et pour une même température les temps de mise à froid diffèrent (certaines caméras ont des valeurs proches de 280s d'autres proches de 310s pour une température de 15°C). Si nous avons réalisé une régression simple directement sur

3 Chaîne de Markov cachée pour la détection d'un mode de fonctionnement dégradé

l'ensemble des équipements, nous n'aurions pas eu une droite représentative de la réalité.

Maintenant, utilisons ce modèle pour ramener les données du Tmf à un cadre où la température initiale est constante, égale à 10°C . Soit T la température initiale de l'équipement. Le temps de mise à froid corrigé, noté Tmf_r , sera calculé de la façon suivante :

$$Tmf_r = Tmf - 1.31 \times (T - 10).$$

Nous pouvons observer sur la Figure 3.6, l'évolution du temps de mise à froid corrigé pour un équipement. Nous remarquons que le signal est toujours fortement bruité. Les pics bas peuvent être la conséquence d'un « on/off/on » trop brutal de l'équipement : le système en fonctionnement est éteint puis rallumé à l'instant suivant sans que l'équipement n'ait pu atteindre la température ambiante. Sa température interne étant restée basse, son temps de mise à froid est alors plus faible. Pour atténuer ce phénomène, nous avons choisi de lisser nos données.

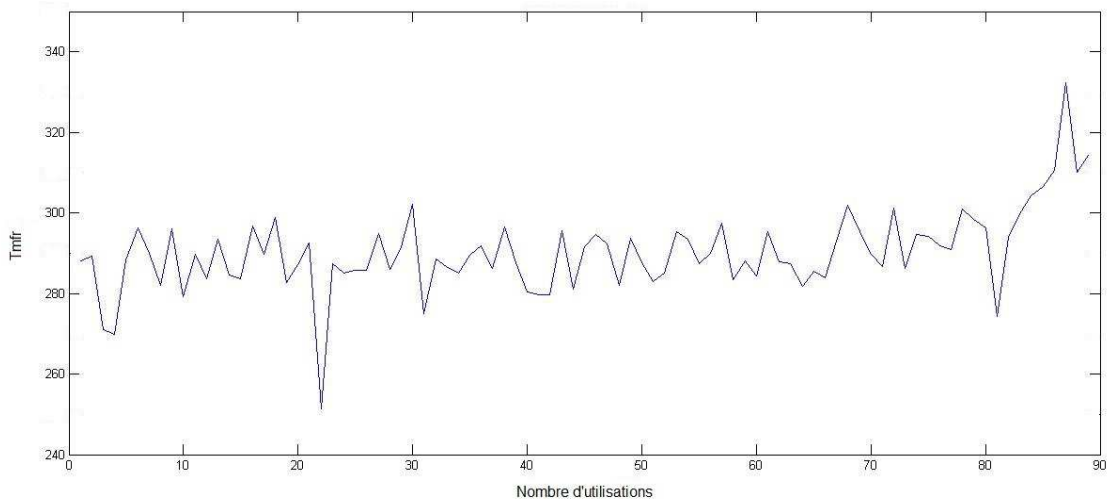


FIGURE 3.6: Evolution du Tmf_r à 10°C en fonction du nombre d'utilisations

3.4.3 Lissage des données

Nous voulons lisser les données afin d'atténuer ce phénomène de bruit car un bruit trop important n'est pas compatible avec cette procédure de filtrage. En effet, un bruit trop important sur nos données entrainerait l'apparition de pics de probabilité d'être dans un état. Par exemple l'équipement serait considéré dans un état dégradé puis l'instant suivant dans un état stable, or dans la réalité un équipement dans l'état dégradé ne peut revenir

dans un état stable. Il apparaîtrait alors de nombreuses fausses détections. Nous voulons éviter cette situation. Cette étape de lissage est donc nécessaire.

Notons Tmf_l le Tmf corrigé après lissage. Pour lisser les données, nous utilisons la moyenne mobile sur 20 observations, c'est à dire : $\forall j \in \mathbb{N}^*$,

$$Tmf_l(j) = \frac{\sum_{i=j}^{20+j-1} Tmf_r(i)}{20},$$

où $Tmf_r(i)$ est la valeur du Tmf_r au $i^{\text{ème}}$ démarrage et $Tmf_l(j)$ la valeur du Tmf corrigé et lissé au temps j . Dans notre modèle nous prendrons alors $Y_t = Tmf_l(t)$, c'est à dire que c'est ce processus lissé qui reflète l'état du système. Ainsi, sur la Figure 3.7, nous avons tracé l'évolution des Tmf corrigés et lissés de l'équipement considéré. Nous observons alors très clairement une augmentation du Tmf_l au cours du temps, signe précurseur d'une défaillance du système de mise à froid.

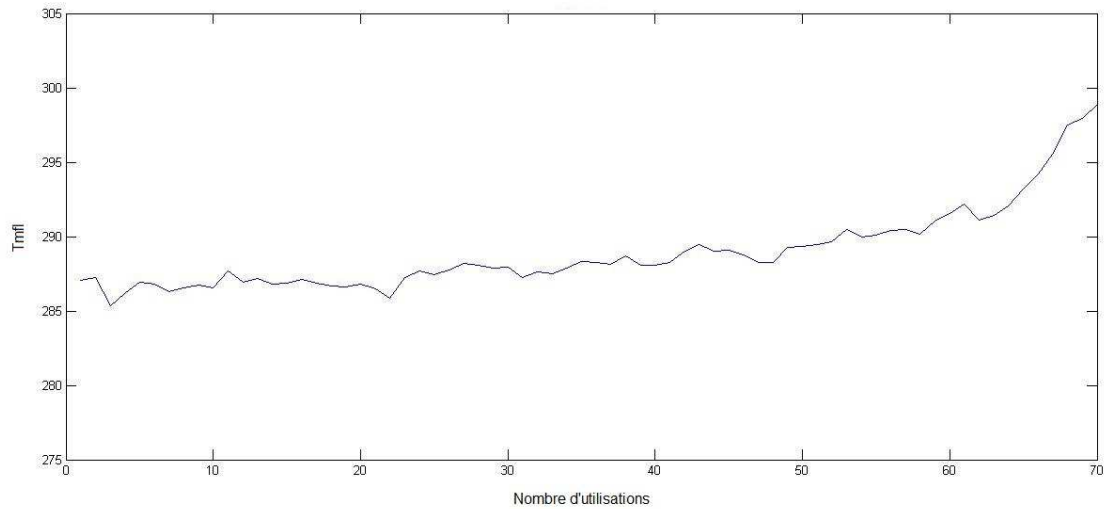


FIGURE 3.7: Lissage du Tmf_r

Remarque 3.5. : *en pratique, il est nécessaire d'attendre 20 démarrages avant de pouvoir commencer à calculer la probabilité d'être dans un état dégradé. Mais l'équipement étant testé en atelier et livré en état de marche, ceci ne devrait pas poser de problème majeur dans la détection d'une dégradation de l'équipement.*

Maintenant que les temps de mise à froid sont corrigés et lissés et que le bruit du signal est nettement atténué, nous pouvons calculer la probabilité que le système soit dans un état dégradé. Pour cela nous devons tout d'abord estimer les paramètres inconnus A et c du modèle sous-jacent.

3.4.4 Estimation des paramètres A et c

Supposons un modèle commun pour tous les équipements (c'est à dire A et c ont la même valeur quelle que soit la caméra et les histoires des temps de mise à froid sont mutuellement indépendantes). La meilleure approche serait l'utilisation de la méthode d'estimation de la Section 2.3. Cependant, contrairement à nos simulations, notre système réel n'oscille pas entre deux états car il est arrêté après sa première transition de l'état stable à l'état dégradé. Nous allons donc proposer une autre méthodologie pour le choix des paramètres c et A .

D'après les experts, la pente de la courbe lissée est proche de 0 lorsque le système est en état stable et est strictement positive lorsqu'il se dégrade. De plus, d'après l'observation de différents graphiques sur l'évolution du $Tmfi$, la pente est proche de 1 lorsque le système est dans un état dégradé. Donc nous avons choisi de poser $\hat{c} = (0, 1)$, en sachant que la valeur de c influence peu la probabilité d'être dans un état dégradé.

Quant à la Q-matrice $A = \begin{pmatrix} -a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{21} \end{pmatrix}$, a_{12} est le paramètre de la loi exponentielle du temps de bon fonctionnement (avant son passage dans l'état dégradé). Grâce à une méthode standard de survie qui tient compte des censures, nous pouvons obtenir une estimation de a_{12} . En effet, si nous posons Tb_i le temps de bon fonctionnement de l'équipement i et To_i le temps d'observation de celui-ci, nous faisons alors l'hypothèse que Tb_i suit une loi exponentielle de paramètre λ et nous souhaitons estimer λ . On a alors $\hat{\lambda} = \frac{(N-n)}{T}$ avec N le nombre d'équipements, n le nombre d'équipements n'ayant pas eu de panne au cours de son utilisation et $T = \sum_{i=1}^N (To_i \mathbb{1}_{To_i < Tb_i} + Tb_i \mathbb{1}_{To_i \geq Tb_i})$.

Dans notre cas $N = 28$, $n=23$ et $T=4978$. Donc $\hat{\lambda} = \frac{5}{4978} \approx \frac{1}{1000}$. Nous avons donc obtenu par cette méthode une première estimation de a_{12} égale à $\frac{1}{1000}$. Cependant, afin de détecter le plus tôt possible ce changement d'état (contrainte imposée par Thales) et d'après nos études de sensibilité, nous avons choisi de prendre $\hat{a}_{12} = \frac{1}{100}$.

Le coefficient a_{21} est le paramètre de la loi exponentielle concernant le temps passé dans l'état dégradé avant son passage dans l'état stable. Ce coefficient devrait être égal à zéro car le système en état dégradé ne peut pas retourner dans l'état stable. Cependant, dans les équations de filtrage, le filtre $P(X_t = e_2 | Y_t)$ doit être réversible pour pouvoir permettre de revenir dans un état stable lors d'une fausse détection, donc nous avons choisi une valeur très faible $\hat{a}_{21} = \frac{1}{1000}$. Pour ce choix d'estimation, la probabilité qu'un équipement en état dégradé retourne dans un état stable est extrêmement faible. De plus, à partir d'expériences numériques, nous avons observé que le choix de $\hat{a}_{21} = \frac{1}{1000}$ donne des résultats cohérents.

Finalement nous prenons $\hat{A} = \begin{pmatrix} -1/100 & 1/100 \\ 1/1000 & -1/1000 \end{pmatrix}$.

Avec ces paramètres \hat{c} et \hat{A} , nous pouvons maintenant estimer la probabilité que le système soit dans un état dégradé à partir des observations des temps de mise à froid corrigés et lissés.

3.4.5 Estimation à partir des données réelles de la probabilité que le système soit dans un état dégradé

Grâce aux équations de filtrage, nous avons obtenu des résultats concernant la probabilité pour X_t d'être dans un état donné, à l'instant t , connaissant l'histoire des Y_s , $s \leq t$. Maintenant, appliquons ces résultats sur l'analyse de nos données réelles pour ce choix de A et c et vérifions la cohérence de ces résultats. Rappelons tout d'abord la formule permettant d'estimer la probabilité d'être dans un état dégradé :

$$P(X_t = e_2 | \mathcal{Y}_t) = (E[X_t | \mathcal{Y}_t])_2.$$

L'estimation de cette probabilité est réalisée avec $\hat{A} = \begin{pmatrix} -1/100 & 1/100 \\ 1/1000 & -1/1000 \end{pmatrix}$ et $\hat{c} = (0, 1)$.

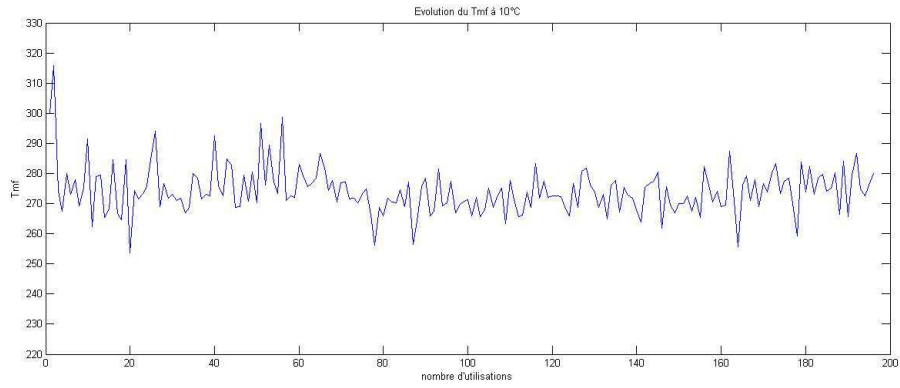
Regardons ce que donne cette estimation sur l'une de nos caméras sans panne notée E_s . La Figure 3.8 nous donne respectivement l'évolution du Tmf_r , du Tmf_l de cet équipement E_s et sa probabilité d'être dans un état dégradé. Nous observons clairement un Tmf_l plutôt constant au cours des utilisations ainsi qu'une probabilité d'être dans un état dégradé très faible (proche de zero).

Maintenant intéressons nous à un équipement noté E_d qui se dégrade et tombe en panne à la fin de l'étude. Regardons l'évolution de son Tmf_r , Tmf_l et de sa probabilité d'être dans un état dégradé (Figure 3.9). A la Figure 3.9(b), nous observons un Tmf_l plutôt constant pendant les premières utilisations. Ensuite, ce temps de mise à froid augmente puis diminue pour revenir à son niveau de départ. D'après les experts, ce phénomène est dû à une détérioration du système de roulement à billes. Cette détérioration entraîne une augmentation du Tmf_l mais n'a pas d'influence sur le système de mise à froid. Par la suite, le système de roulement à billes s'autocorrige (ce qui entraîne une diminution du Tmf_l). Enfin nous remarquons une élévation brutale du Tmf_l au moment où le système se dégrade (vers la 260^{ème} utilisation). Simultanément, nous remarquons à la Figure 3.9(c) que la probabilité d'être dans un état dégradé est très faible lorsque le Tmf_l est constant puis augmente fortement avec le Tmf_l pour atteindre la valeur 1.

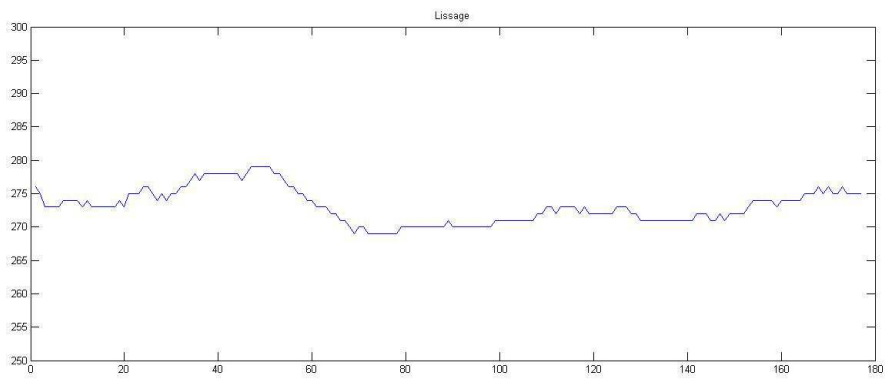
Conclusion : ces deux exemples illustrent bien l'intérêt du modèle théorique présenté précédemment et le bon fonctionnement numérique de l'approche préconisée.

Intéressons nous maintenant à un critère de décision qui nous permette de détecter le plus tôt possible un état dégradé (sans pour autant générer trop de faux positifs) et ainsi rappeler en usine les équipements concernés afin de réaliser une action de maintenance avant la panne.

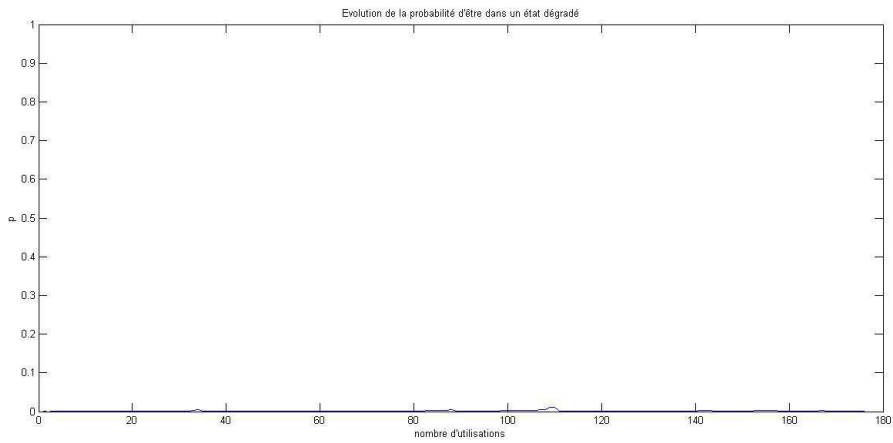
3 Chaîne de Markov cachée pour la détection d'un mode de fonctionnement dégradé



(a)



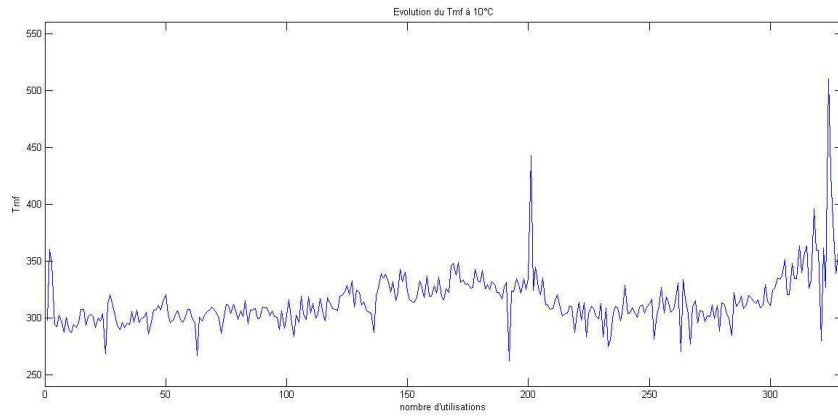
(b)



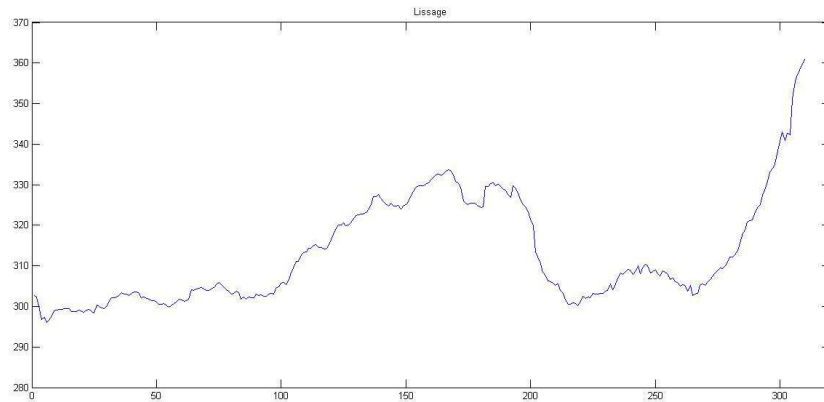
(c)

FIGURE 3.8: (a) Evolution du Tmf_r pour l'équipement E_s (b) Evolution du Tmf_l pour l'équipement E_s (c) Evolution de la probabilité d'être dans un état dégradé pour E_s

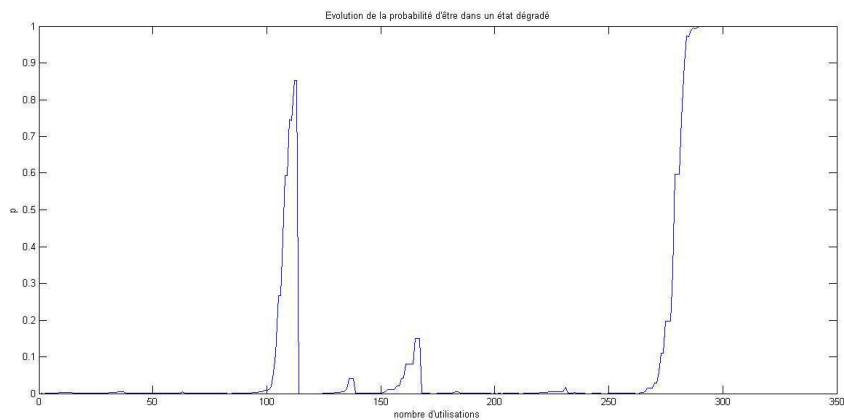
3.4 Application aux données réelles



(a)



(b)



(c)

FIGURE 3.9: (a) Evolution du Tmf_r pour l'équipement E_d (b) Evolution du Tmf_l pour l'équipement E_d (c) Evolution de la probabilité d'être dans un état dégradé pour E_d

3.5 Critère de décision

Il s'agit de déterminer maintenant un critère de décision pour maintenance. L'exemple de la caméra E_d montre que le fait qu'une probabilité d'être dans un état dégradé augmente n'est pas suffisant pour détecter un changement d'état responsable d'une future panne. Nous avons évalué différentes règles basées sur le fait que la probabilité que le système soit dans un état dégradé doit franchir un certain seuil pour un nombre d'utilisations consécutives. Nous avons évalué différents seuils et durées. A chaque fois, nous avons enregistré le nombre de fausses détections et de bonnes détections. Il est important de limiter les détections de faux positifs et de faux négatifs.

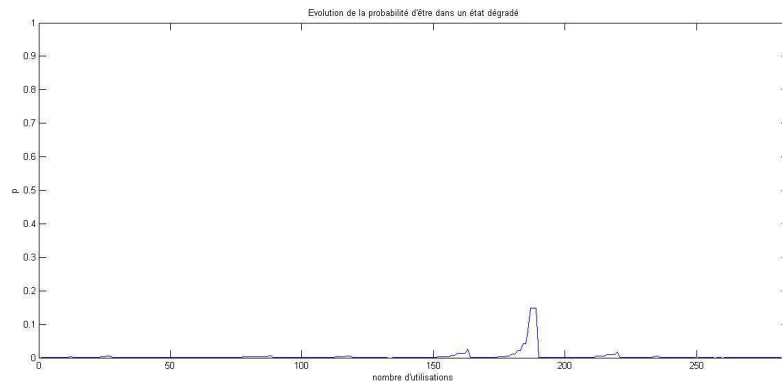
Suite à l'évaluation de ces différentes méthodes, nous avons retenu le critère de décision d'arrêt suivant : l'équipement est renvoyé en maintenance lorsque la probabilité que le système soit dans un état dégradé $P(X_t = e_2 | \mathcal{Y}_t) = 1$ sur une durée d'au moins trois utilisations consécutives. Nous avons appliqué cette règle de décision sur les 28 équipements et nous avons obtenu les résultats présentés dans le Tableau 3.1.

Critère de décision : $p=1$ pour une durée ≥ 3 utilisations	Panne	Non panne
Panne future détectée	3	0
Panne future non détectée	2	23
Total	5	23

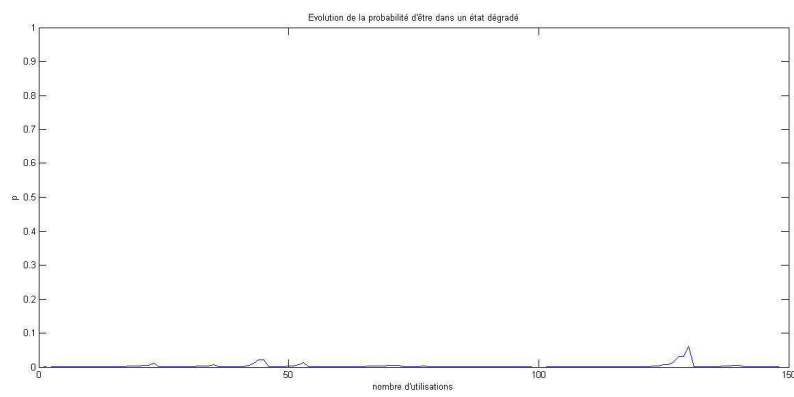
TABLEAU 3.1: Résultats du critère de décision pour maintenance

Ce critère de décision nous donne 26 bonnes détections sur 28. Il n'y a pas de fausses détections : les 23 équipements qui n'ont pas eu de panne n'ont pas été détectés comme étant dans un état dégradé. Les équipements n'ayant pas eu de panne ont tous une probabilité d'être dans un état dégradé strictement inférieure à 0.5 au cours des utilisations. La Figure 3.10 nous donne des exemples d'évolutions de probabilité d'équipements en état stable. Quant aux 5 autres équipements qui sont tombés en panne à la fin de l'étude, 3 d'entre eux sont détectés dans un état dégradé (annonçant une future panne). Nous sommes amenés à penser qu'une solution à ce problème serait de diminuer la valeur du seuil de probabilité mais il en résulterait une augmentation du nombre de fausses détections. De plus, d'après les experts, les deux équipements qui n'ont pas été correctement identifiés, ne sont pas tombés en panne suite à une dégradation du système de mise à froid. Ils n'ont pas pu être détectés par cette méthode puisque la panne n'est pas liée à un effet d'usure. Il s'agit donc d'une panne dite aléatoire.

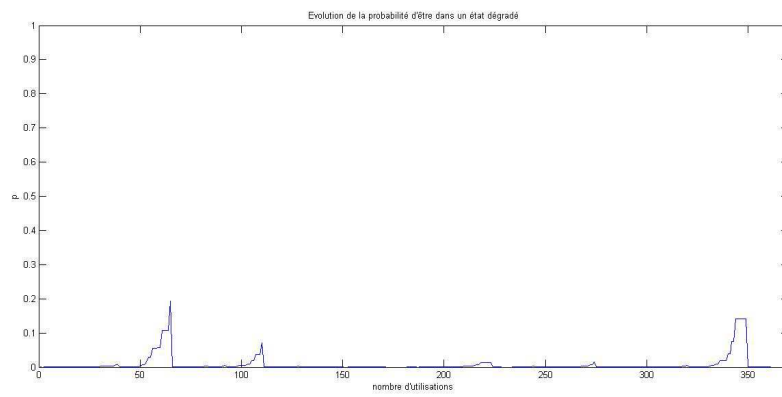
3.5 Critère de décision



(a)



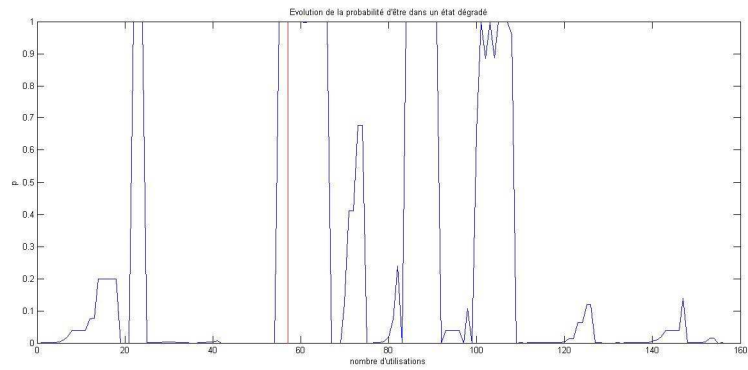
(b)



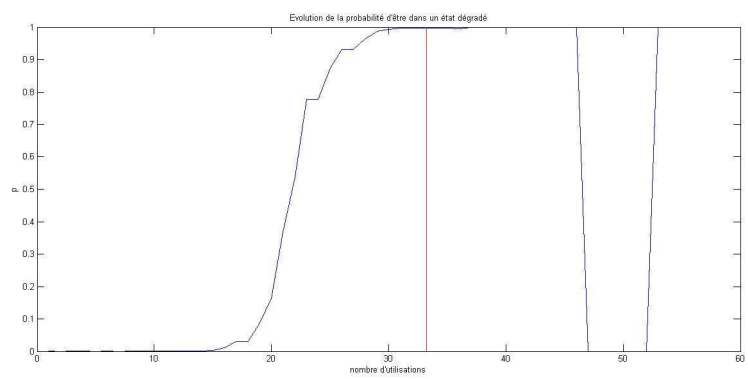
(c)

FIGURE 3.10: Evolution de la probabilité d'être dans un état dégradé pour différents équipements stables.

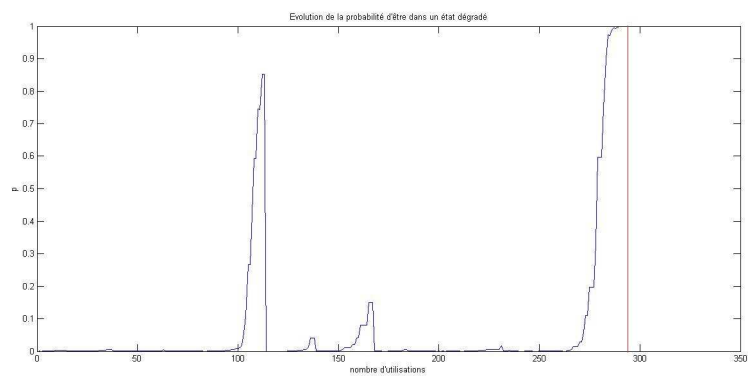
3 Chaîne de Markov cachée pour la détection d'un mode de fonctionnement dégradé



(a)



(b)



(c)

FIGURE 3.11: Exemples d'évolution de la probabilité d'être dans un état dégradé (trait noir) pour trois équipements ayant une panne à la fin de l'étude, avec le temps de détection associé (trait rouge).

3.6 Méthode du CUSUM pour la détection d'un changement d'état du système

Ceci permet alors de rappeler ces équipements avant une future panne pour une action de maintenance. En effet, nous pouvons observer l'évolution de cette probabilité d'être dans un état dégradé pour ces 3 équipements dont on a détecté une panne sur les Figures 3.11. L'équipement (a) est détecté en état dégradé (annonçant donc une future panne) à la 57^{ème} utilisation, l'équipement (b) à la 33^{ème} et l'équipement (c) à la 291^{ème}. Ces équipements sont tombés en panne respectivement à la 156^{ème}, 57^{ème} et 312^{ème} utilisation.

Remarque 3.6. *Nous imposons pour ce critère de décision que cette probabilité soit égale à 1 sur plusieurs utilisations afin d'éviter qu'un pic atteignant la valeur 1 une seule fois soit détecté à tort comme une future panne.*

Cette méthode nous permet donc d'estimer l'état d'un système à chaque instant t connaissant l'histoire de ses Tmf jusqu'à ce temps t et de prévoir une action de maintenance sur l'équipement avant la panne.

3.6 Méthode du CUSUM pour la détection d'un changement d'état du système

Nous venons de voir comment à partir des chaînes de Markov cachées, il est possible de détecter une dégradation de la machine à froid des caméras. Maintenant, nous voulons confronter notre méthode à celle du CUSUM. Le test du CUSUM est un test statistique très souvent utilisé dans la détection de rupture dans un système dynamique. Il a été développé par Page en 1954 dans [28] pour détecter un changement de valeur d'un paramètre dans la densité d'une suite d'observations indépendantes. Puis par la suite, cette méthode a été adaptée à des systèmes plus complexes (voir Basseville et Nikiforow [3]). Dans le cadre de notre recherche nous resterons dans un cas simple. En effet, notre objectif est de détecter le plus tôt possible le passage d'un état de fonctionnement normal ou stable (état initial), appelé régime H_0 , à un état de fonctionnement anormal (dégradation du système), appelé régime H_1 . Pour cela, nous cherchons à caractériser ce changement de régime par un changement de valeur d'un paramètre θ dans la modélisation du système. Ce paramètre va passer de la valeur c_1 sous H_0 à c_2 sous H_1 . Nous rappelons que le vecteur c représente la pente des Tmf_l (temps de mise à froid corrigés et lissés) selon l'état du système.

Nous posons alors ces deux hypothèses :

$$H_0 : \theta = c_1,$$

$$H_1 : \theta = c_2.$$

3 Chaîne de Markov cachée pour la détection d'un mode de fonctionnement dégradé

Nous considérons une suite de variables aléatoires $(l_k)_{k \in \mathbb{N}}$ indépendantes et de même loi, de densité $f_\theta(l)$ et définies de la façon suivante :

$$l_k = Y_{k+1} - Y_k = Tmf_l(k+1) - Tmf_l(k) = \int_k^{k+1} c(X_s)ds + W_{k+1} - W_k$$

où Y_k est définie par l'équation (3.2). La variable aléatoire l_k suit une loi gaussienne de moyenne c_1 sous le régime H_0 et c_2 sous le régime H_1 et de même variance σ^2 dans les deux régimes. Ces deux paramètres sont supposés connus : $c_1 = 0$ et $c_2 = 1$ (voir Section 2.4.4). Quant à la variance σ^2 , elle est égale à 1 ($W_{k+1} - W_k \sim N(0, 1)$). Nous cherchons donc à détecter ce changement de moyenne. La Figure 3.12 est un exemple d'évolution de la fonction $(l_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour un équipement qui tombe en panne à la fin de l'étude. On suppose qu'au début de l'étude le système est stable (régime H_0) et suit une loi $N(c_1 = 0, 1)$ puis vers la fin de l'étude il se dégrade (régime H_1) et suit une loi $N(c_2 = 1, 1)$. Nous voulons détecter le plus tôt possible ce changement de loi. Pour détecter ce changement de loi, nous allons utiliser un algorithme de détection basé sur le logarithme du rapport de vraisemblance $s(l)$ défini de la façon suivante :

$$s(l) = \ln \left(\frac{f_{c_2}(l)}{f_{c_1}(l)} \right).$$

Si nous notons E_{c_1} (respectivement E_{c_2}) l'espérance d'une variable aléatoire sous la densité f_{c_1} (respectivement f_{c_2}), alors

$$E_{c_1}(s(l)) < 0 \text{ et } E_{c_2}(s(l)) > 0.$$

Donc le changement du paramètre θ peut être considéré comme un changement de signe de la valeur moyenne du logarithme du rapport de vraisemblance. Elle est négative avant ce changement d'état et positive après ce changement. Pour définir un critère de décision nous allons définir la statistique de test r_k :

$$r_k = S_k - m_k$$

où

$$S_k = \sum_{i=1}^k s(l_i),$$

$$m_k = \min_{1 \leq i \leq k} S_j.$$

Le temps d'arrêt associé à la filtration engendrée par les $(r_n)_{n \leq k}$ est noté T_a . Il correspond au moment où la fonction r_k dépasse un seuil noté h :

$$T_a = \min \{k : r_k \geq h\} = \min \{k : S_k \geq m_k + h\}.$$

3.6 Méthode du CUSUM pour la détection d'un changement d'état du système

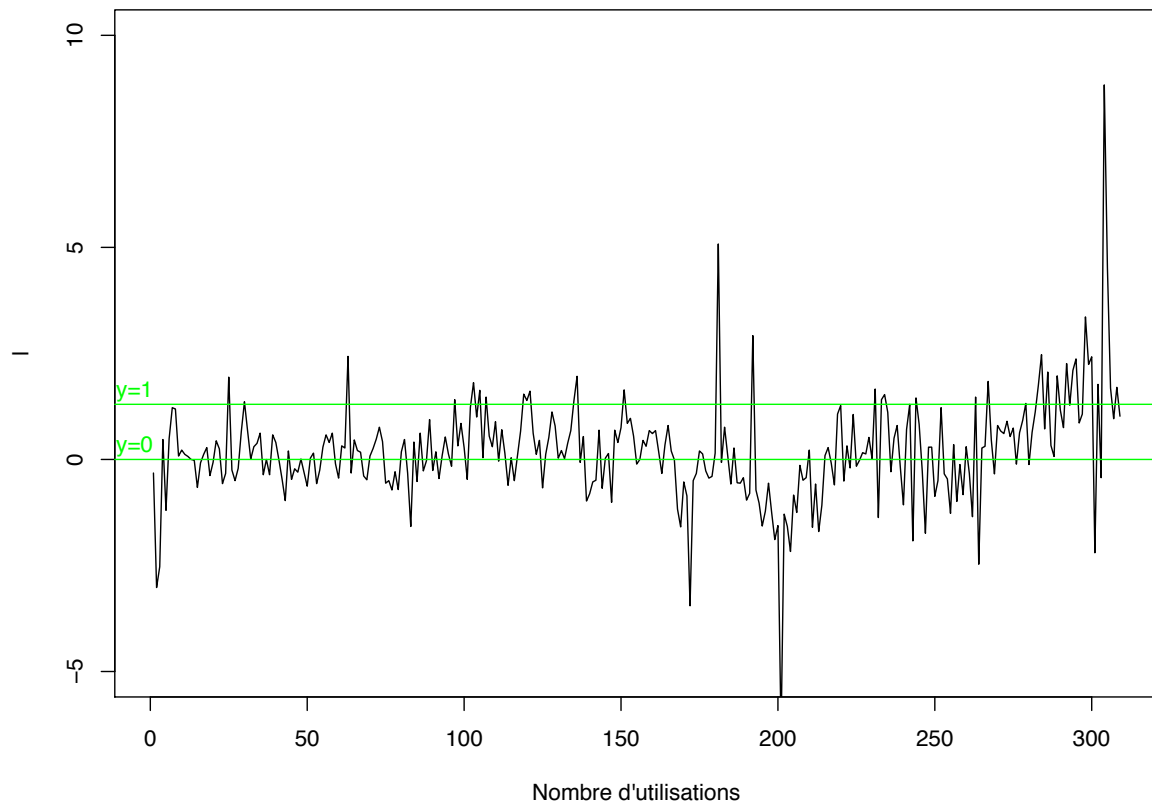


FIGURE 3.12: Evolution du processus l d'un équipement qui tombe en panne à la fin de l'étude

L'instant où le paramètre θ passe de la valeur c_1 à c_2 est inconnu. Cet instant est estimé par T_a . La règle du CUSUM est alors définie comme le premier instant où la statistique de test r_k , en moyenne proche de 0 sous H_0 , positive et croissante sous H_1 , franchit un seuil h fixé par l'expérimentateur. Dans notre cas, ce seuil est fixé à $h = 10$ (suite à l'évaluation de différents seuils). La Figure 3.13 nous donne la statistique de test de l'équipement précédent, utilisé pour la Figure 3.12. Cette caméra est l'équipement E_d de la Section 2.5.5.

Remarque 3.7. *Nous utilisons les temps de mise à froid corrigés et lissés car nous avons remarqué empiriquement que dans le cas où les données ne sont pas lissées, nous obtenons parfois lors du calcul de la statistique de test, des sauts de grande amplitude. Comme pour le modèle des chaînes de Markov cachées, cette procédure ne peut donc pas être utilisée*

3 Chaîne de Markov cachée pour la détection d'un mode de fonctionnement dégradé

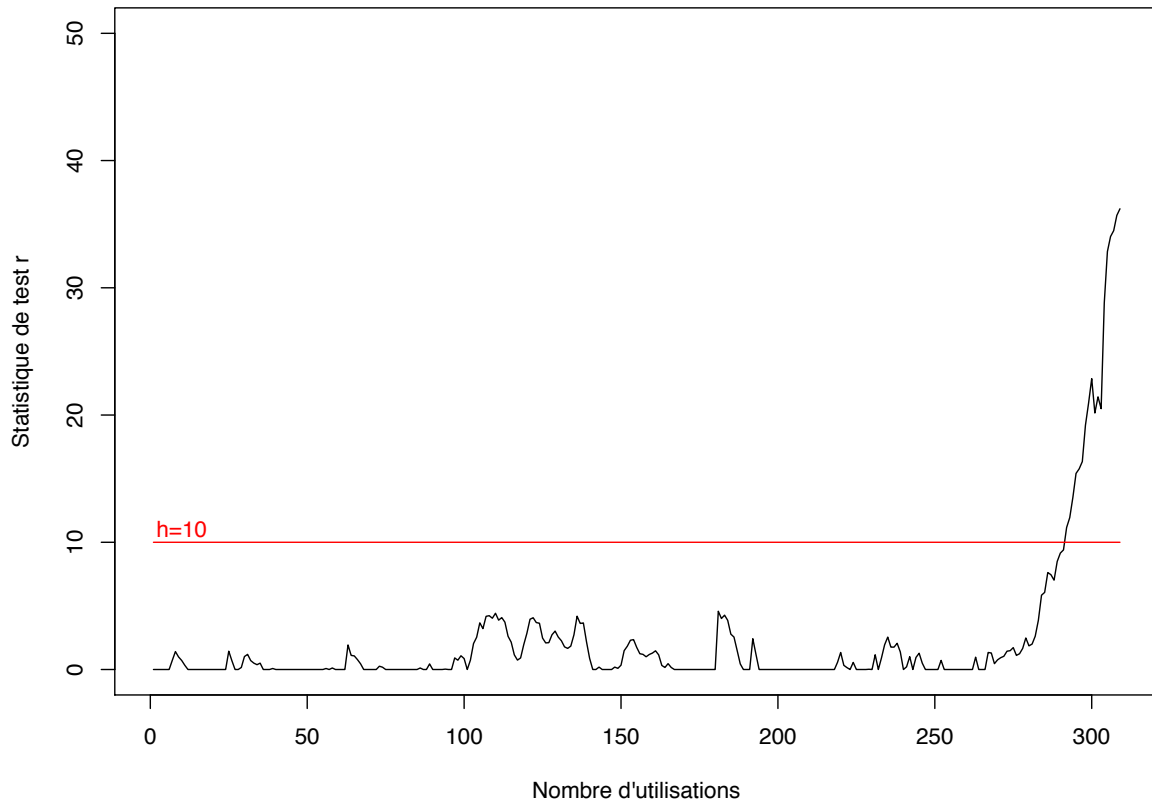


FIGURE 3.13: Evolution de la statistique de test d'un équipement qui tombe en panne à la fin de l'étude

lorsqu'il y a trop de bruit.

Dans notre cas, on a : $p_{\theta}(l) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(l-\theta)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(l-\theta)^2}{2}}$ donc,

$$s(l_i) = \ln \frac{p_{c_2}(l_i)}{p_{c_1}(l_i)} = (c_2 - c_1)\left(l_i - \frac{c_1 + c_2}{2}\right) = l_i - \frac{1}{2},$$

$$S_k = \left(\sum_{i=1}^k l_i\right) - \frac{1}{2}k,$$

$$r_k = \left(\sum_{i=1}^k l_i\right) - \left(\frac{1}{2}k + m_k\right).$$

3.6 Méthode du CUSUM pour la détection d'un changement d'état du système

Nous avons appliqué cette règle de décision sur les 28 équipements et nous avons obtenu les résultats présentés dans le Tableau 3.2. Cette règle de décision nous donne 26 bonnes détections sur 28. Il n'y a pas de fausses détections : les 23 équipements qui n'ont pas eu de panne n'ont pas été détectés comme étant dans un état dégradé. Quant aux 5 autres équipements qui sont tombés en panne à la fin de l'étude, 3 d'entre eux sont détectés dans un état dégradé (annonçant une future panne). Les deux équipements qui n'ont pas été correctement identifiés, sont les même que ceux qui n'ont pas été correctement identifiés par le critère de décision du chapitre 2.6.

Règle de décision du CUSUM : $r_k \geq h$	Panne	Non panne
Panne future détectée	3	0
Panne future non détectée	2	23
Total	5	23

TABLEAU 3.2: Résultats de la règle du CUSUM

Cette méthode semble ne pas détecter sur nos données des pics n'ayant pas de conséquences sur la durée de vie du système de mise en froid puisqu'il n'y a pas de fausses détections, comme le montre la Figure 3.13. En effet, l'équipement concerné correspond à l'équipement E_d de la Section 2.5.5 (équipement représenté dans la Figure 3.10). Cet équipement a une forte augmentation du $Tm.f_l$ au niveau de la 110^{ème} utilisation correspondant à un problème de roulement à billes qui n'influence pas l'état du système de mise à froid. Or par la méthode du CUSUM, cette augmentation n'est pas détectée. La détection d'une future panne sur cet équipement se fait à la 292^{ème} utilisation. Il s'agit d'un équipement qui tombe effectivement en panne à la fin de l'étude.

La Figure 3.14 montre trois exemples d'évolutions de statistique de test pour des équipements qui ne sont pas tombés en panne à la fin de l'étude. Nous avons repris les mêmes équipements que ceux présentés dans la Figure 3.10, c'est à dire que l'équipement (a) (respectivement (b) et (c)) de la Figure 3.14 correspond à l'équipement (a) (respectivement (b) et (c)) de la Figure 3.10.

A la Figure 3.15, nous pouvons observer l'évolution de la statistique de test des trois équipements qui sont tombés en panne et qui ont été détectés. Nous avons, là encore, repris les mêmes équipements que ceux présentés dans la Figure 3.11, c'est à dire que l'équipement (a) (respectivement (b),(c)) de la Figure 3.15 correspond à l'équipement (a) (respectivement (b),(c)) de la Figure 3.11. Par la méthode du CUSUM, l'équipement (a) est détecté en état dégradé à la 57^{ème} utilisation (de même par la méthode des chaînes de

3 Chaîne de Markov cachée pour la détection d'un mode de fonctionnement dégradé

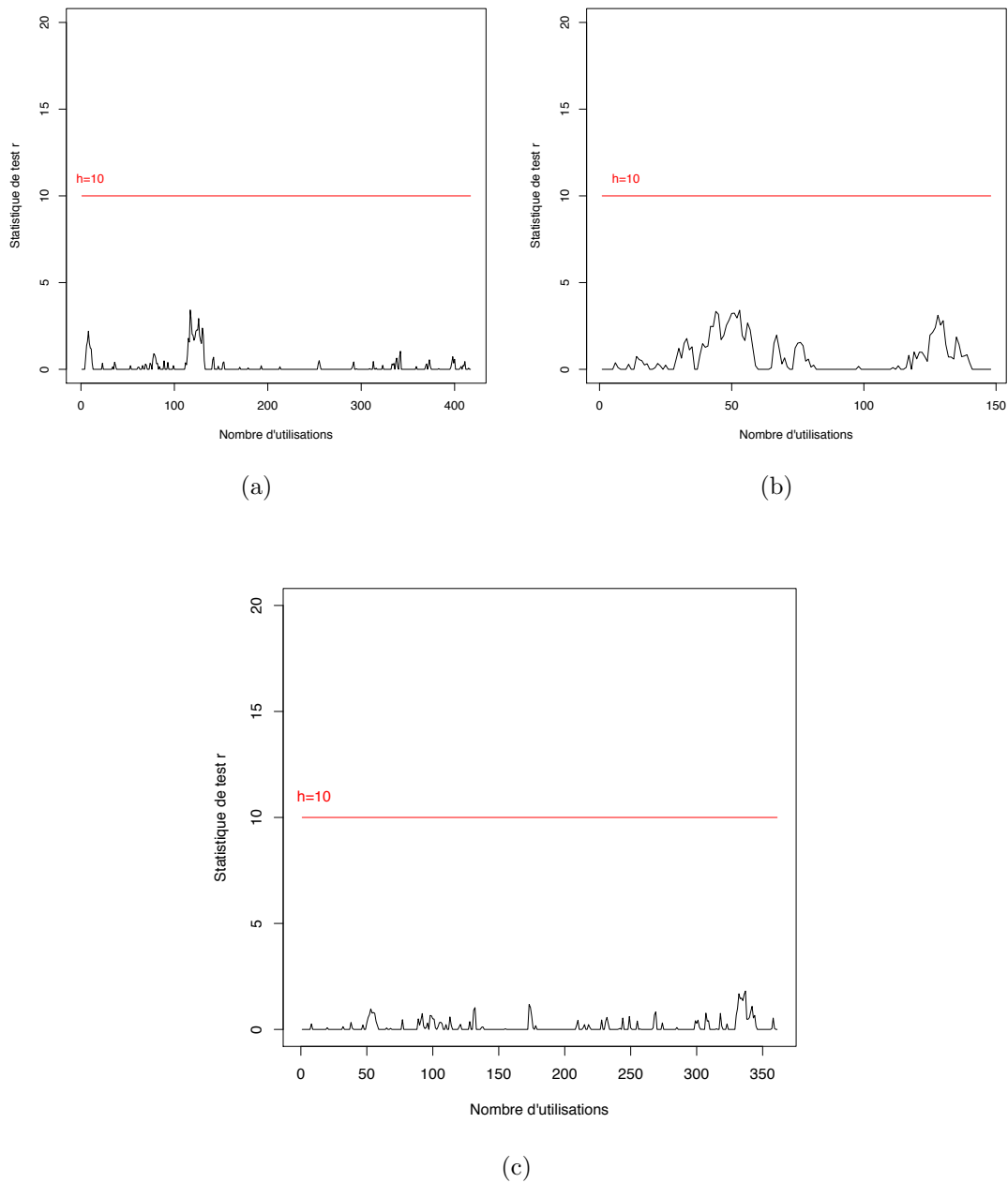


FIGURE 3.14: Evolution de la statistique de test pour différents équipements stables

Markov cachées), l'équipement (b) à la 29^{ème} utilisation (au lieu de 33^{ème} utilisation) et l'équipement (c) à la 292^{ème} utilisation (au lieu de la 291^{ème} utilisation). Les instants de détections sont proches dans les deux méthodes.

3.6 Méthode du CUSUM pour la détection d'un changement d'état du système

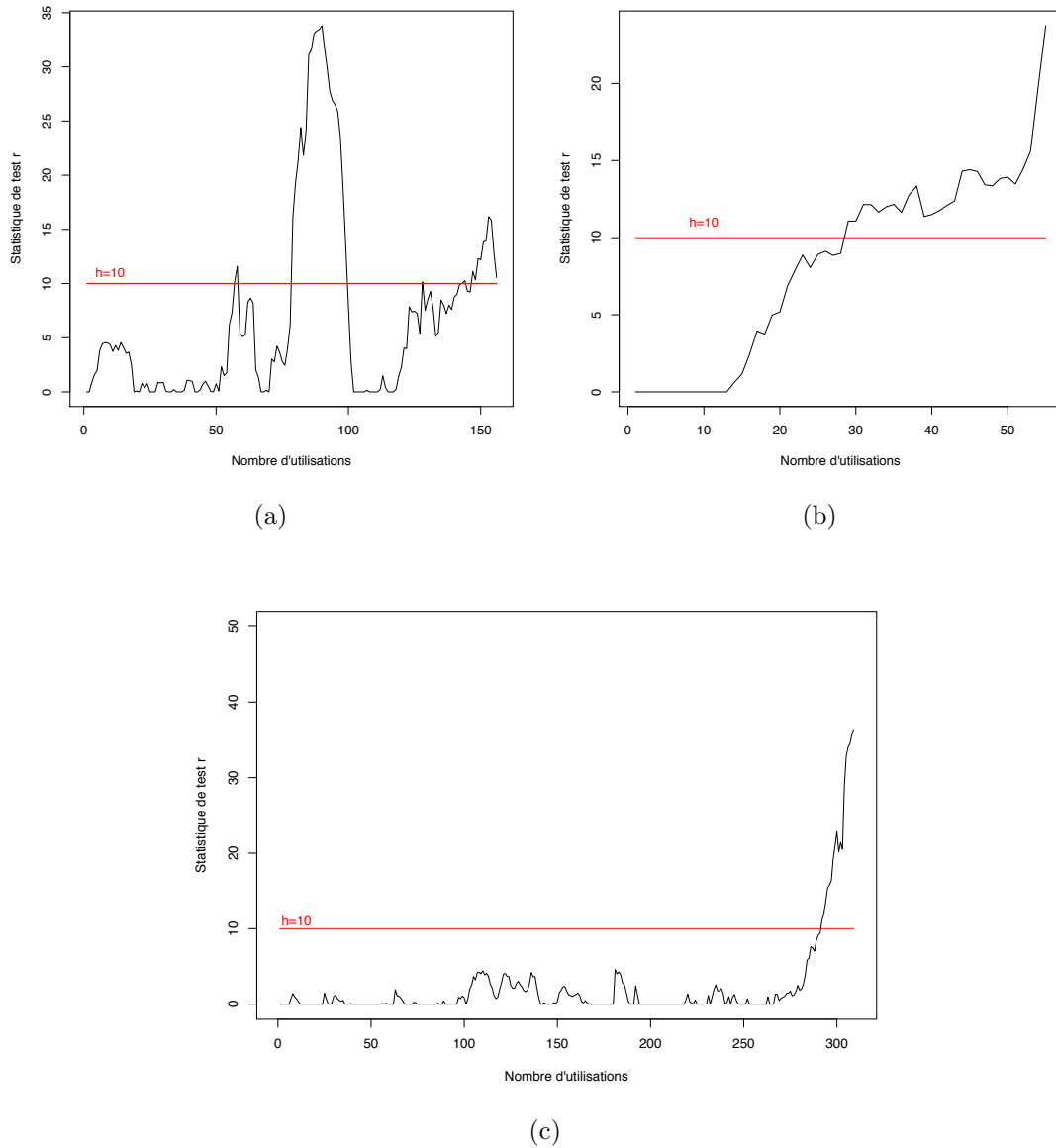


FIGURE 3.15: Evolution de la statistique de test pour des équipements ayant une panne à la fin de l'étude

Les deux approches (chaînes de Markov cachées et CUSUM) semblent donner des résultats similaires : mêmes équipements détectés en état dégradé à des instants très proches. Cependant la méthode du CUSUM ne semble pas mettre clairement en évidence l'évolution du système. En effet l'augmentation du temps de mise à froid dû à un problème

de roulement à billes de l'équipement E_d des Figures 3.11 et 3.13, n'est pas visible par la méthode du CUSUM (contrairement à la méthode des chaînes de Markov). Ce phénomène indique une faiblesse du système de roulement à billes. Cette information ne doit pas être négligée. De plus le seuil h de la méthode du CUSUM est fixé par l'expérimentateur, ce qui laisse à penser que son franchissement n'est pas forcément très représentatif de la réalité. La méthode des chaînes de Markov semble donc donner une meilleure interprétation du potentiel de vie du système. Pour la suite de ce travail de recherche, nous avons donc choisi d'utiliser la règle de décision présentée dans le chapitre 2.6 et non la règle du CUSUM.

3.7 Conclusion

En modélisant l'état du système par une chaîne de Markov (X_t) en temps continu et en observant cette chaîne bruitée par un brownien ($Y_t = tmf_l(t)$), nous pouvons estimer l'état de l'équipement à chaque instant t . En effet, grâce aux équations de filtrage, nous avons obtenu des résultats sur la probabilité qu'un équipement soit dans un état de dégradé au temps t , connaissant l'histoire de ses temps de mise à froid jusqu'à cet instant. Nous avons évalué le comportement numérique de notre approche sur des données simulées. Ensuite, nous avons appliqué cette méthode sur nos données réelles et nous avons vérifié que les résultats soient conformes à la réalité.

L'estimation de l'état du système, associée à la règle de décision pour maintenance permet de détecter le passage d'un état stable vers un état dégradé, annonçant l'arrivée d'une future panne. Pour la suite, nous allons nous intéresser à une politique de maintenance plus générale, qui prenne en compte le fonctionnement global du système c'est à dire non seulement les pannes prévisibles (liées à un effet d'usure) mais aussi les pannes aléatoires.

4 Arrêt optimal pour la maintenance

Sommaire

4.1	La maintenance	52
4.1.1	Généralités	52
4.1.2	Etat de l'art sur la maintenance conditionnelle	53
4.2	Cas industriel	55
4.3	Modèle mathématique	57
4.3.1	Présentation d'un PDMP	57
4.3.2	Présentation de notre cas d'étude	59
4.4	Problème d'arrêt optimal	60
4.4.1	Principe de l'arrêt optimal d'un PDMP	60
4.4.2	Choix de la fonction de performance g	61
4.5	Méthode numérique d'arrêt optimal	64
4.5.1	Principe	64
4.5.2	Discretisation du temps	65
4.5.3	Quantification de la chaîne de Markov $(\theta_n)_{n \in \{0,1,2\}}$	66
4.5.4	Approximation de la fonction valeur	69
4.5.5	Approximation du temps d'arrêt quasi optimal	72
4.6	Mise en oeuvre numérique	74
4.6.1	Simulation des données	74
4.6.2	Création de la grille de quantification optimale	76
4.6.3	Algorithme d'arrêt optimal	76
4.6.4	Politique de maintenance pour une nouvelle trajectoire	79
4.6.5	Probabilité d'échec d'une mission donnée	79
4.7	Résultats	80
4.7.1	Performance	80
4.7.2	Résultats pour une fonction de performance $g = g_1$	80
4.7.3	Résultats pour une fonction de performance $g = g_2$	83
4.7.4	Exemple de résultats de risque de panne avant une mission	86
4.8	L'arrêt optimal pour minimiser une fonction de coût	86
4.9	Conclusion	88

4 Arrêt optimal pour la maintenance

La notion de maintenance au sens de dépannage d'un équipement a toujours existé. Au début, il s'agissait de réparer un équipement en panne et non de prévoir et anticiper la panne. La notion de maintenance au sens « préventif » est récente. Elle est apparue avec l'automatisation des systèmes, l'augmentation des enjeux économiques et industriels, le durcissement de la réglementation concernant la protection des individus et de l'environnement. Le choix de la stratégie de maintenance a des répercussions directes sur l'exploitation du système, la production et le budget. Elle concerne tout le cycle d'exploitation de l'équipement.

Dans ce chapitre, nous étudions la méthodologie pour développer une politique de maintenance pour des équipements optroniques et plus précisément les caméras thermiques. Cette politique de maintenance doit prendre en compte à la fois les pannes liées à un phénomène de dégradation du système de mise à froid (pouvant être détecté par la méthode décrite au chapitre précédent) et celles dites « aléatoires » (non liées à l'usure du système de mise à froid). Nous voulons estimer le meilleur instant pour effectuer une maintenance sur un équipement optronique. Une maintenance réalisée trop tôt peut être inutilement coûteuse et gênante pour le client mais une maintenance trop tardive peut entraîner la survenue d'une panne totale qui endommagerait le reste de l'équipement et pourrait être responsable de l'échec d'une mission. Il est donc nécessaire de trouver un compromis entre ces deux politiques de maintenance.

Pour cela, nous modélisons l'état du système par un processus Markovien déterministe par morceaux (PDMP pour Piecewise Deterministic Markov Process). Ces processus ont été introduits, dans les années 1980, par Davis [10], [11] en théorie des probabilités pour modéliser des systèmes physiques dont la dynamique peut être perturbée par des événements ponctuels et aléatoires. Ces processus appartiennent à une classe de processus hybrides stochastiques. Dans son livre, Davis souligne l'importance d'introduire une classe générale de processus de type non-diffusion pour permettre de traiter de façon globale un grand nombre d'applications pratiques. En effet, un grand nombre de problèmes de modélisation concernant différents domaines d'applications, comme la sûreté de fonctionnement, la fiabilité, la maintenance d'unités de production, conduit à l'étude de processus mathématiques de type non diffusion. Dans le cadre de cette thèse, l'état de santé d'un système est modélisé par un PDMP. Cette modélisation rend possible le passage de l'état stable vers l'état de panne directement (cause aléatoire) ou en passant par l'état dégradé (détérioration de l'appareil de mise à froid) (voir par exemple la Figure 4.3). L'état du PDMP est estimé par la méthode des chaînes de Markov cachées, du chapitre précédent et dépend des variables enregistrées par le HUMS. Il sera alors possible de se servir de ce nouveau modèle pour répondre aux objectifs du HUMS cités dans la Section 1.2.

L'aspect économique reste de manière générale l'une des raisons majeures d'optimiser cette stratégie. Il faut donc définir les dates de maintenance et les actions à effec-

tuer afin d'optimiser sur le long terme les objectifs fixés. On parle alors, d'un point de vue mathématique, de contrôle impulsif. Cette étape qui consiste à choisir l'action à réaliser pour optimiser la maintenance est très compliquée. Nous simplifions, dans ce travail, ce problème en ne cherchant que l'instant qui optimise la maintenance des équipements optroniques sur un seul cycle, c'est à dire du temps $t = 0$ à l'instant t_m de maintenance/réparation. Dans notre modèle mathématique, l'équipement réparé ne repart pas dans l'état stable au temps t_m . Cette procédure est toutefois envisageable mais complique le processus d'optimisation de la maintenance. L'optimisation de la date de maintenance sur un cycle est réalisée grâce à l'arrêt optimal. Nous envisageons donc le problème de maintenance comme un problème d'arrêt optimal (pour la maintenance) dont l'objectif est de maximiser une fonction de performance qui tient compte du temps passé en fonctionnement, des coûts de maintenance, de réparation et d'immobilisation. L'intérêt de cette méthode est de proposer une date de maintenance qui soit optimale, c'est à dire qui maximise une fonction de performance g , et dynamique puisqu'elle tient compte de l'état du système. Des travaux récents ont été réalisés sur l'arrêt optimal. De Saporta & al [15] posent les fondements théoriques de la méthode que nous utilisons dans cette étude. Dans [15] et [6], une méthode de calcul du meilleur instant pour effectuer une maintenance sur un système dynamique complexe a été implémentée et analysée. Cette méthode a récemment été appliquée à un cas pratique de réservoir [13].

Pour le client, il est nécessaire d'associer à cette date de maintenance, une notion de risque d'échec de mission. En effet, l'idée est de développer un outil d'aide à la décision qui calcule la date optimale et qui permet de déterminer le risque encouru à utiliser un système sur une mission donnée. La date optimale calculée pouvant être avant, pendant ou après la mission. L'intégration de cette méthode au sein des HUMS, devrait permettre à l'entreprise Thales d'améliorer sa politique de maintenance, de réduire ses coûts d'exploitation et d'améliorer la satisfaction du client.

Après quelques rappels sur la maintenance et les travaux qui ont été réalisés sur ce sujet en Section 4.1, nous présenterons notre cas d'étude (les caméras thermiques) en Section 4.2 ainsi que le modèle mathématique (les processus de Markov déterministes par morceaux) adapté à cette problématique en Section 4.3. Puis, nous formulerons le problème d'arrêt optimal pour ces processus en Section 4.4 et nous donnerons sa résolution théorique en Section 4.5. En Section 4.6, nous décrirons l'algorithme de calcul associé à l'arrêt optimal ainsi que l'algorithme permettant de calculer le risque encouru à utiliser un équipement sur une mission donnée. Nous présenterons les résultats obtenus pour notre cas d'étude en Section 4.7. Pour finir, nous exposerons une autre interprétation de l'arrêt optimal en Section 4.8. Dans cette Section, l'objectif est de déterminer une date de maintenance toujours dynamique et optimale mais cette fois, au lieu de maximiser une fonction de performance, elle minimise un coût horaire.

4.1 La maintenance

4.1.1 Généralités

Il existe deux grandes catégories de maintenance : la maintenance corrective et la maintenance préventive.

La maintenance corrective est la maintenance réalisée à la suite d'une défaillance de l'équipement. Cette stratégie est souvent utilisée lorsque le coût d'une panne est le même que celui d'une réparation ou quand il n'y a pas de contraintes de sécurité ou de disponibilité.

La maintenance préventive est la maintenance réalisée avant la panne du système. Ce type de maintenance est intéressant lorsque les coûts de maintenance sont plus faibles que ceux de la réparation ainsi que lorsque la perte de performance du système a d'importantes conséquences en terme de coûts, de sécurité ou de relation client. L'ensemble des politiques de maintenance préventive est donné dans [32]. Il existe trois catégories de maintenance préventive :

- la maintenance systématique : la date de maintenance est fixée selon un calendrier déterminé a priori. Ces dates sont déterminées en fonction d'un planning opérationnel (nombre de cycles de fonctionnement, disponibilité du matériel, des pièces...).
- la maintenance prévisionnelle : il s'agit de donner une date de maintenance à partir d'une estimation du temps de bon fonctionnement de l'appareil. Remarquons que ce temps n'est pas forcément calendaire mais il peut être une durée de fonctionnement, un nombre d'utilisations...
- la maintenance conditionnelle dont la définition au sens de la norme européenne est la suivante :

« maintenance préventive basée sur une surveillance du fonctionnement du bien et/ou des paramètres significatifs de ce fonctionnement intégrant les actions qui en découlent. » (extrait norme NF EN 13306 X 60-319)

La date de maintenance est fixée en fonction des paramètres du système. Ces paramètres sont des indicateurs de l'état de santé de l'équipement (dégradation, performance...). Le plus souvent, lorsqu'ils dépassent un certain seuil appelé seuil de décision, l'appareil est envoyé en maintenance. Cette maintenance conditionnelle offre de nombreux avantages parmi lesquels une réduction des coûts. Des économies sont en effet réalisées sur les coûts d'exploitation grâce à une détection précoce des défaillances du système qui permet d'optimiser les plannings de maintenance, de mieux gérer le parc d'équipements disponibles. De plus, elle permet d'accroître la fiabilité des systèmes.

A partir de la deuxième moitié du 20^{ème} siècle, beaucoup de travaux ont été réalisés sur la modélisation de la maintenance [34]. Le plus souvent, il s'agissait de minimiser la fonction coût et de maximiser le temps de fonctionnement. La majorité de ces travaux concernait l'optimisation de la maintenance préventive et très peu de ces travaux portaient

sur la maintenance conditionnelle pourtant intéressante lorsque le système est soumis à un phénomène d'usure, de vieillissement.

Au niveau industriel, actuellement, la maintenance prévisionnelle prédomine. Cependant, il existe toujours une part incompressible de maintenance corrective. Le plus souvent la date de maintenance est fixée en fonction des contraintes budgétaires. Elle se base sur les retours d'expérience, réalisés par les fabricants, utilisateurs... Nous pouvons citer par exemple FIDES qui propose une méthode de calcul du taux de défaillance des cartes électroniques, mais aussi EIReDA pour les appareils mécaniques et électroniques... Les industriels bénéficient de logiciels d'aide à la décision tel que GMAO (Gestion de Maintenance Assistée par Ordinateur) mais il s'agit de résultats statistiques qu'il faut interpréter afin d'en déduire une politique de maintenance.

Une approche intéressante pour l'industrie, et très peu développée, est la maintenance préventive conditionnelle qui permet d'intégrer dans le processus de décision, des informations concernant l'état du système, éventuellement ses conditions d'utilisation, et donc de mieux s'adapter au comportement réel de l'appareil. Dans ce cas, la maintenance ne sera pas seulement déclenchée lors de l'atteinte d'un seuil prédéterminé (seuil physique), selon un échancier prédéfini ou lors d'une panne, mais à une date déterminée en fonction du vécu réel de l'équipement et des critères de performance.

4.1.2 Etat de l'art sur la maintenance conditionnelle

La maintenance conditionnelle est réalisée lorsqu'un équipement est soumis à une dégradation. Généralement, pour réaliser une maintenance conditionnelle, la dégradation du système est modélisée en considérant que la défaillance d'un équipement survient lorsque le niveau de dégradation dépasse un certain seuil. On parle de modèle de dégradation lorsque l'espace des états dans lequel peut se retrouver un appareil n'est pas réduit aux états de bon fonctionnement (état stable) et de panne. On suppose alors qu'il existe des états intermédiaires de dégradation entre l'état stable et l'état de panne.

Pour modéliser cette dégradation, on doit distinguer deux classes de dégradation :

- les modèles à dégradation discrète : il s'agit de dégradations de type chocs. Les incréments de dégradation s'ajoutent jusqu'à la panne du système. Souvent on identifie un certain nombre d'états transitoires de dégradation classés par ordre croissant de l'état stable vers l'état de panne. La dégradation est modélisée par des processus markoviens ou semi-markoviens de type sauts ([18],[23],[25]). Les occurrences forment un processus de Poisson. L'instant de défaillance est défini lorsque le niveau de dégradation est supérieur à un seuil donné ([18],[23]) ou obéit à une loi de probabilité qui dépend du niveau de dégradation et du temps de séjour dans cet état [25]. Et dans ce dernier cas, à chaque état correspond une règle de décision qui donne la durée maximale permise dans cet état.

4 Arrêt optimal pour la maintenance

- les modèles à dégradation continue : il s’agit comme leur nom l’indique, d’une dégradation continue qui nécessite de connaître la loi des incréments de dégradation afin d’estimer le niveau de dégradation à tout instant. Généralement, le processus de dégradation est supposé stationnaire. Dans ce cas, les propriétés d’indépendance et de stationnarité des incréments poussent à modéliser la dégradation par les processus de Levy [1]. Souvent, sont utilisés les processus de Wiener mais le problème est qu’il existe dans cette modélisation des trajectoires de dégradation non monotones [35]. Pour conserver la propriété de monotonie, il faut un modèle de dégradation basé sur un processus de sauts, au risque de perdre la propriété de continuité. Notons que les processus de Lévy ne permettent pas de modéliser une dégradation continue et croissante. La solution la plus couramment utilisée est de considérer un processus de sauts avec un nombre infini de sauts sur un espace de temps fini. La loi des incréments est généralement donnée par la loi Gamma [27]. Notons que des travaux récents s’intéressent à des processus de dégradation non stationnaires comme par exemple Fouladirad et al [26].

Lorsque la dégradation est modélisée, il faut définir une politique de maintenance. Un équipement est remplacé lorsqu’une panne survient ou lors d’une inspection lorsque le niveau de dégradation dépasse un certain seuil critique fixé. En général le niveau de dégradation du système est connu soit en continu soit lors d’inspections. Le but est alors de trouver le seuil critique et de déterminer les fréquences d’inspections qui minimisent le coût moyen de maintenance à long terme par unité de temps. Ces inspections peuvent être périodiques [31] ou non [16]. Les inspections périodiques sont utilisées pour des systèmes très complexes ne pouvant pas être inspectés à tout moment (avions...) mais pour des systèmes moins complexes pouvant être plus facilement inspectés à n’importe quel moment, l’inspection séquentielle est plus adaptée. De plus, il est plus intéressant de surveiller plus régulièrement un système qui commence à se dégrader et moins un système neuf, lorsque c’est possible. Castanier et al [7], Dieulle et al [16], Grall et al [21] proposent un calendrier d’inspections séquentielles qui s’adapte à l’état dégradé du système. Le temps entre deux inspections est déterminé par une fonction d’inspection qui est décroissante, de façon à augmenter les fréquences d’inspections lorsque le système se dégrade.

Notons qu’il existe des travaux qui modélisent la défaillance non pas par le biais d’une modélisation de l’évolution de la dégradation mais par le biais d’une variable d’état fonction d’un environnement aléatoire stressant comme par exemple les travaux de Gaudoin et Soler [20]. Ces deux modes de défaillances peuvent être considérés simultanément pour optimiser une politique de maintenance. Deloux et al [12] combinent la maintenance conditionnelle et la surveillance de la variable de stress pour construire une politique de maintenance.

4.2 Cas industriel

Selon l'état du système et le type de panne, le coût d'une maintenance ou d'une réparation n'est pas le même. De plus la panne d'un équipement entraîne forcément des désagréments puisqu'il peut être responsable de l'échec d'une mission. Nous allons donc devoir proposer une politique de maintenance qui prenne en compte toutes les exigences industrielles. Nous étudions cette politique de maintenance sur des équipements spécifiques : les caméras thermiques dont nous avons parlé dans le chapitre précédent. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à cet appareil dans son ensemble, c'est à dire que nous ne sommes pas restreints aux composants se dégradant (la machine à froid), nous prenons en compte toutes les autres défaillances possibles (panne de la carte électronique, du roulement à billes). Le but est de déterminer le meilleur instant pour déclencher une maintenance sur cet équipement en fonction de son état (estimé par la méthode des chaînes de Markov cachées développée dans le chapitre précédent). Dans cette section, nous définissons notre cas d'étude.

Notons t le temps d'utilisation cumulé de l'appareil et m_t l'état du système au temps t . L'étude porte sur un équipement optronique que nous considérons à cinq états :

- un état stable : $m_t = 1$,
- un état dégradé : $m_t = 2$,
- un état de panne de roulement à billes : $m_t = 3$,
- un état de panne électrique : $m_t = 4$,
- un état de panne de l'appareil de mise à froid (noté MAF) : $m_t = 5$.

L'équipement est en état stable au début de l'étude. Puis il passe :

- soit dans un état de panne électronique avec un taux instantané de survenue de cette panne λ_1 ,
- soit dans un état de panne du roulement à billes avec $\lambda_3(t)$ le taux instantané de survenue de cette panne,
- soit dans un état dégradé avec $\lambda_0(t)$ le taux de survenue de cette dégradation. Notons que $\lambda_0 \neq a_{12}$ de la matrice A de la Section 3.4.4 puisque λ_0 dépend ici du temps d'utilisation cumulé contrairement au paramètre a_{12} qui est estimé en fonction du nombre d'utilisations. De l'état dégradé, la transition vers l'état de panne électronique ou de roulement à billes est toujours possible aux taux de panne respectifs λ_1 et $\lambda_3(t)$. A ces deux transitions s'ajoute celle du passage du système dans l'état de panne de l'appareil de mise à froid avec un taux λ_2 .

Lorsque l'appareil est dans un état autre que l'état stable, il ne peut revenir dans cet état initial. La Figure 4.1 illustre le fonctionnement du système.

D'autre part, les experts nous ont donné un horizon de temps de 25.000h correspondant à un temps cumulé d'utilisation maximal de l'équipement. En conséquence, nous notons

4 Arrêt optimal pour la maintenance

pour tout appareil dans l'état m_t au temps t (d'utilisation cumulé), son temps d'utilisation maximal restant $t^*(m_t, t) = 25000 - t$.

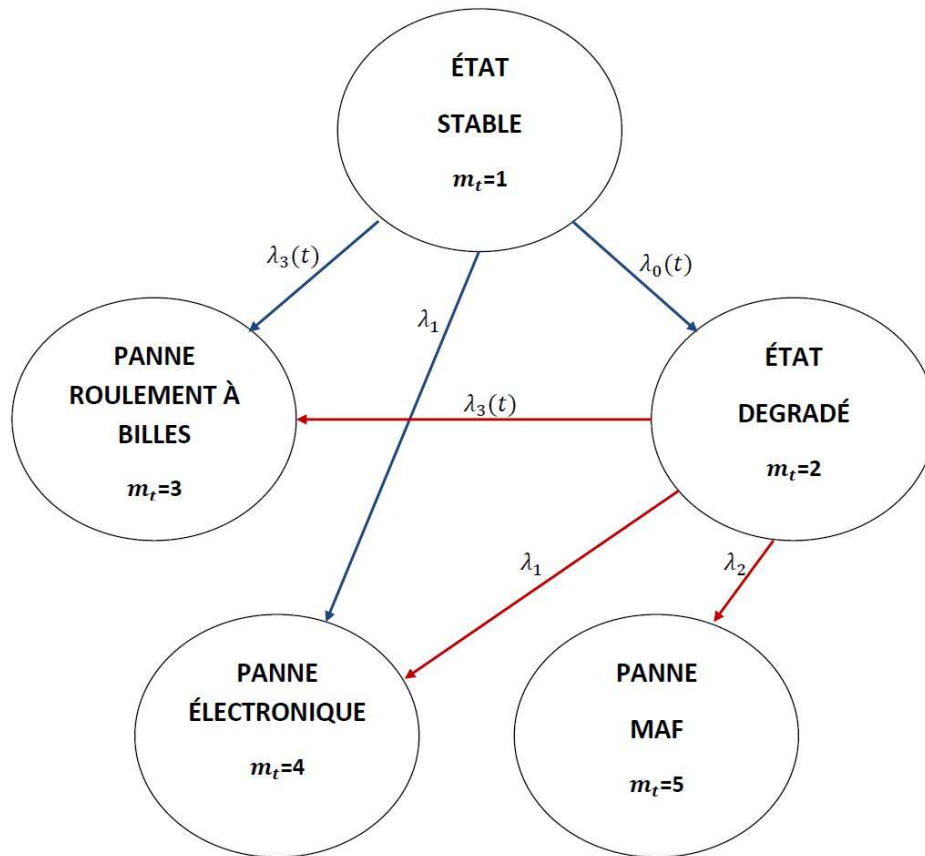


FIGURE 4.1: Illustration du fonctionnement du système étudié

Nous devons prendre en compte toutes ces informations pour se rapprocher au mieux de la réalité. Nous cherchons à modéliser ce système par un processus capable de décrire l'état de fonctionnement et l'âge de l'équipement. Le processus m_t décrit dans cette Section, est un processus de sauts en temps continu mais non markovien car certains taux de sauts dépendent du temps t ($\lambda_0(t)$, $\lambda_3(t)$). Nous allons donc introduire dans la section suivante un PDMP et nous verrons pourquoi ce processus est un processus adapté à notre problématique.

4.3 Modèle mathématique

4.3.1 Présentation d'un PDMP

La notion de PDMP a été introduite par Davis [11]. Les PDMP sont des processus à trajectoires déterministes, ponctués par des sauts aléatoires les faisant passer d'un régime d'évolution à un autre. Un PDMP est un processus hybride à deux composantes, qui se note de façon générale $\xi_t = (m_t, s_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Sa première composante m_t est une variable discrète à valeurs dans un espace fini ou dénombrable M (ensemble des régimes possibles du système). Elle décrit le mode ou l'environnement de fonctionnement du système à l'instant t (système en mode stable, dégradé, panne...). Sa deuxième composante s_t , continue à valeurs dans E_m , un ouvert de \mathbb{R}^n , décrit l'évolution ou l'état physique du système dans le mode m_t par ses variables physiques (par exemple pression, niveau, âge du système...). Un processus partant à l'instant initial d'un mode (m_0) et d'un état physique (s_0) , a une trajectoire déterministe donnée par les lois de la physique jusqu'à un instant de saut. Ce saut peut être soit aléatoire (changement de mode, panne...) soit déterministe (une grandeur physique dépasse un seuil donné comme par exemple un temps maximal d'utilisation...). Le processus redémarre alors dans un nouveau mode et un nouvel état, et ainsi de suite. Il est possible de construire ainsi un PDMP qui prend en compte l'évolution dynamique et aléatoire du système.

Plus précisément, un PDMP est défini sur $E = \{z = (m, s); m \in M \text{ et } s \in E_m\}$. Nous noterons \bar{E} l'ensemble fermé $E \cup \partial E$ où ∂E est la frontière de l'espace d'état E et $B(E)$ l'ensemble des fonctions bornées, mesurables sur E . Un PDMP est caractérisé par trois éléments :

- le flot ϕ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, continu, tel que $\phi(\cdot, t)$ est un homéomorphisme pour chaque $t \in \mathbb{R}$, vérifiant $\phi(\cdot, t + s) = \phi(\phi(\cdot, s), t)$. Le flot décrit le mouvement déterministe entre les sauts.
- le taux de saut λ de $\bar{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$, une fonction mesurable qui caractérise la fréquence des sauts, telle que, pour tout $\xi \in E$, il existe $\epsilon > 0$ avec $\int_0^\epsilon \lambda(\phi(\xi, s)) ds < \infty$.
- la mesure de transition Q sur $(\bar{E}, B(E))$ qui permet de sélectionner la nouvelle position du processus après les sauts et qui vérifie que pour tout $\xi \in \bar{E}$, $Q(\xi, E - \{\xi\}) = 1$.

On note $t^*(\xi) \doteq \inf \{t > 0 : \phi(\xi, t) \in \partial E\}$ le temps déterministe d'atteinte de la frontière ∂E de l'espace d'état E partant de ξ . A partir de ces caractéristiques, la loi du premier temps de saut T_1 du processus $\{\xi_t\}$ partant d'un point $\xi \in E$ est donnée par l'équation suivante :

$$P_\xi(T_1 > t) = \begin{cases} e^{-\int_0^t \lambda(\phi(\xi, s)) ds} & \text{si } t < t^*(\xi), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Tant que $t < T_1$, le processus suit le flot déterministe $\xi_t = \phi(\xi, t)$ et lorsque $t = T_1$,

4 Arrêt optimal pour la maintenance

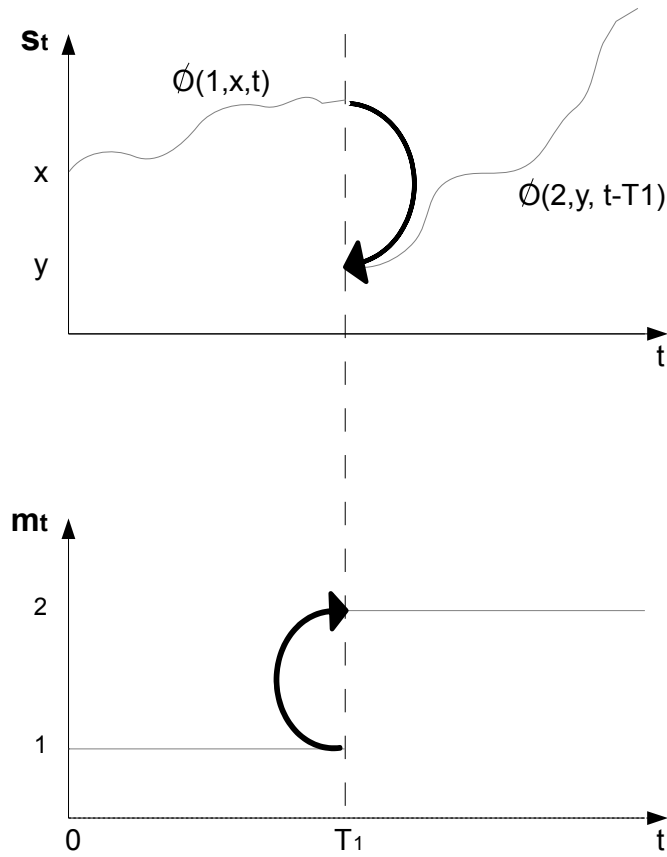


FIGURE 4.2: Schéma d'évolution d'un PDMP partant de $\xi = (1, x)$ et sautant à $t = T_1$ en $Z_1 = (2, y)$

le processus saute en $\xi_{T_1} = Z_1$ suivant le noyau de transition Q . La distribution de Z_1 est donnée par $Q(\phi(\xi, T_1), \cdot)$, c'est à dire $P_\xi(Z_1 \in A) = Q(\phi(\xi, T_1), A)$. La trajectoire de $\{\xi_t\}$ est donnée par l'équation (4.2).

$$\xi_t = \begin{cases} \phi(\xi, t) & \text{si } t < T_1, \\ Z_1 & \text{si } t = T_1. \end{cases} \quad (4.2)$$

Le processus se définit de manière itérative : si on se place en $\xi_{T_1} = Z_1$, le saut suivant a lieu en $t = T_2$ et $\xi_{T_2} = Z_2$. Le temps entre ces deux sauts est noté $S_2 = T_2 - T_1$. De manière générale la valeur du processus au temps de saut T_k , ξ_{T_k} sera notée Z_k et $S_k = T_k - T_{k-1}$ avec T_k le $k^{\text{ème}}$ temps de saut du processus. Le processus discret $\theta_n = (Z_n, S_n)$ associé à $(\xi_t)_t$ est une chaîne de Markov, appelée chaîne induite au PDMP. La chaîne $(\theta_n)_{n \geq 0}$ détermine parfaitement la trajectoire du processus $(\xi_t)_{t \geq 0}$ et cette représentation sera particulièrement utile dans l'étape d'optimisation. La Figure 4.2 illustre un exemple d'évolution d'un PDMP.

4.3.2 Présentation de notre cas d'étude

L'étude porte sur une caméra qui passe de l'état stable directement vers l'état de panne ou par l'intermédiaire d'un état dégradé. Son fonctionnement est décrit en Section 4.2. Nous rappelons que cette caméra peut se trouver dans cinq états :

- un état stable : $m_t = 1$,
- un état dégradé : $m_t = 2$,
- un état de panne de roulement à billes : $m_t = 3$,
- un état de panne électrique : $m_t = 4$,
- un état de panne de l'appareil de mise à froid (noté MAF) : $m_t = 5$.

Le PDMP considéré ici décrit l'état de fonctionnement et l'âge de l'équipement : $\xi_t = (m_t, s_t = t) \in E = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times [0, T^*]$ où $T^* = 25000$. Il est caractérisé par les trois paramètres suivants (qui vérifient les hypothèses précédentes) :

$$\begin{aligned} & - \phi(m_t, t; s) = (m_t, t + s) \mathbb{1}_{m_t \in \{1, 2\}} + (m_t, t) \mathbb{1}_{m_t \in \{3, 4, 5\}}, \\ & - \lambda(m_t, t) = \begin{cases} \lambda_0(t) + \lambda_1 + \lambda_3(t) & \text{si } m_t = 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3(t) & \text{si } m_t = 2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ & - Q(m_t, t; \{m\} \times \{t\}) \\ & = \begin{cases} \left(\frac{\lambda_0(t)}{\lambda_0(t) + \lambda_1 + \lambda_3(t)} \right) \mathbb{1}_{[m=2]} + \left(\frac{\lambda_3(t)}{\lambda_0(t) + \lambda_1 + \lambda_3(t)} \right) \mathbb{1}_{[m=3]} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0(t) + \lambda_1 + \lambda_3(t)} \right) \mathbb{1}_{[m=4]} & \text{si } m_t = 1, \\ \left(\frac{\lambda_3(t)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3(t)} \right) \mathbb{1}_{[m=3]} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3(t)} \right) \mathbb{1}_{[m=4]} + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3(t)} \right) \mathbb{1}_{[m=5]} & \text{si } m_t = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Selon les avis d'experts, les taux λ_0 et λ_3 dépendent de l'âge t de l'équipement contrairement aux autres taux de défaillances. C'est pourquoi le processus $(m_t)_{t \geq 0}$ n'est pas

4 Arrêt optimal pour la maintenance

markovien. En revanche, le processus $\xi_t = (m_t, s_t = t)_{t \geq 0}$ est markovien et il s'agit d'un PDMP. Ce PDMP ainsi défini fait au maximum deux sauts et nous considérons le processus $\theta_n = (Z_n, S_n) = (m_{T_n}, T_n, S_n)$ pour $n = \{0, 1, 2\}$. Grâce à ces informations, nous pouvons maintenant aborder l'étape d'optimisation de la maintenance que nous considérons comme un problème d'arrêt optimal.

4.4 Problème d'arrêt optimal

Dans cette partie, nous nous intéressons à un problème d'arrêt optimal pour un PDMP. Il s'agit de trouver une politique de maintenance optimale qui soit un compromis entre faire une maintenance trop précoce et le risque de panne du système. Ces deux politiques extrêmes sont clairement trop coûteuses : en prix de remplacement d'un équipement encore en bon état de fonctionnement dans le premier cas, en défaut de fonctionnement pouvant engendrer un échec de la mission de l'équipement dans le second cas. Il s'agit donc de déterminer la date de maintenance optimale. Cette date est choisie de manière à minimiser une fonction coût, autrement dit, à maximiser une fonction de performance. De plus, cette optimisation doit prendre en compte le caractère aléatoire des pannes et de l'évolution du système. Une bonne politique de maintenance permet aussi de gérer en amont un parc d'équipements. Nous nous basons sur les travaux récents réalisés par de Saporta & al concernant l'arrêt optimal sur les PDMP. Dans [14], les auteurs posent les fondements théoriques de la méthode que nous utilisons dans cette étude et dans [15], une méthode de calcul du meilleur instant pour effectuer une maintenance sur un système dynamique complexe a été implémentée et analysée.

4.4.1 Principe de l'arrêt optimal d'un PDMP

Le principe de l'arrêt optimal sur les PDMP est compliqué. Si nous considérons que l'équipement après réparation de l'élément en panne repasse dans un état stable au temps $t > 0$ (plusieurs cycles), nous réalisons du contrôle impulsif à l'inverse, si le système est arrêté au moment de la panne, nous réalisons de l'arrêt optimal. Mais pour simplifier la présentation théorique, nous nous plaçons dans notre cas d'étude présenté en Section 4.3.2, c'est à dire que le PDMP fait au plus deux sauts ($N=2$) et qu'il est arrêté lorsqu'il est dans l'état de panne (un seul cycle). Soit $\xi_0 = (m_0, 0)$ le point de départ de notre processus (ξ_t) . Notre but est de trouver un instant $\tau < t^*(\xi_0)$ qui maximise la fonction $E_{\xi_0=(m_0,0)} [g(m_\tau, \tau)]$ où g est la fonction de performance du système et τ un temps d'arrêt adapté à la filtration du PDMP ξ_t . Ce problème est typiquement un problème d'arrêt optimal qui consiste à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$v_0(m_0, 0) = \sup_{\tau \leq t^*(m_0, 0)} E_{\xi_0=(m_0, 0)} [g(m_\tau, \tau)]. \quad (4.3)$$

La fonction v_0 s'appelle la fonction valeur du problème. Elle représente la performance maximale que l'on peut atteindre en partant de $\xi_0 = (m_0, 0)$. Elle peut être calculée de manière récursive en utilisant le procédé général suivant ([15]) :

$$\begin{aligned} v_N &= g, \\ v_k &= L(v_{k+1}, g) \quad \text{pour } 0 \leq k \leq N - 1, \end{aligned} \tag{4.4}$$

où l'opérateur L , permettant (partant de v_N) de calculer les v_k jusqu'à la fonction valeur v_0 (solution de notre problème), est défini de la façon suivante :

$$L(v, g)(\xi) = \sup_{t \leq t^*(\xi)} \{E_\xi [v(Z_1)\mathbf{1}_{S_1 < t}] + g(\phi(\xi; t))P_\xi(S_1 \geq t)\} \vee E_\xi [v(Z_1)]. \tag{4.5}$$

La fonction v appartient à l'ensemble $B(E)$, l'ensemble des fonctions bornées, mesurables sur E . L'opérateur L consiste à regarder la performance moyenne si on décide de réaliser une maintenance en t (premier terme), la performance moyenne si on laisse le système fonctionner seul (deuxième terme) et de retenir le maximum. Il s'agit d'un opérateur complexe qui dépend des caractéristiques du PDMP. On peut cependant constater qu'il ne dépend du PDMP qu'au travers de la chaîne de Markov sous-jacente θ_n . Pour une fonction de performance donnée et partant de Z_0 , nous cherchons la performance maximale $v_0(Z_0)$ (au sens de l'espérance). Pour l'atteindre, nous n'avons besoin que de connaître $v_1(Z_1)$, grâce à la propriété de Markov et la définition de L . Quant à $v_1(Z_1)$, elle ne dépend que de $v_2(Z_2)$. Dans notre cas d'étude, où $N=2$, nous pouvons réécrire ces équations de la façon suivante :

$$\begin{cases} v_2 = g, \\ v_1 = L(v_2, g), \\ v_0 = L(v_1, g). \end{cases} \tag{4.6}$$

Dans la pratique, le v_0 optimal existe mais le temps optimal n'existe pas forcément. Nous pouvons cependant grâce à un algorithme de calcul approcher la fonction de coût optimale et les temps d'arrêt quasi optimaux, d'après [15]. C'est à dire que nous pouvons trouver des temps d'arrêt dont la fonction valeur s'approche de la performance optimale d'aussi près que l'on veut.

4.4.2 Choix de la fonction de performance g

La fonction de performance est choisie en fonction des exigences industrielles. Pour notre étude, nous avons choisi de nous intéresser à deux fonctions de performances g_1 et g_2 . Ces deux fonctions privilégient un temps long d'utilisation mais la première pénalise fortement la possibilité d'une panne (quel que soit le type de panne) avant sa date de maintenance contrairement à la seconde.

Fonction de performance $g = g_1$ sans différenciation des pannes

Nous avons choisi dans un premier temps, d'étudier le cas d'une fonction de performance $g = g_1$ qui privilégie un temps long d'utilisation mais qui s'annule si le système tombe en panne. Dans ce cas, nous choisissons la fonction de performance suivante :

$$g_1(m_t, t) = \begin{cases} t & \text{si } m_t = 1 \text{ ou } 2, \\ 0 & \text{si } m_t = 3, 4, 5. \end{cases} \quad (4.7)$$

Nous voulons optimiser l'espérance $E_{\xi_0} [g_1(m_\tau, \tau)]$, ce qui revient à laisser le système fonctionner le plus longtemps possible mais pas trop car si le système tombe en panne, nous « perdons » tout (performance nulle).

Dans ce cas, les pannes ne sont pas différenciées, c'est à dire que le système à trois états : stable, dégradé, panne. Le système donné à la Figure 4.1 se simplifie puisque les cas de pannes sont confondus.

Nous considérons alors que cet équipement est en état stable au début de l'étude. Puis il passe soit dans un état de panne, soit dans un état dégradé.

- s'il passe directement dans un état de panne, la cause de cette panne directe est électrique ou due à un problème de roulement à billes ; les taux instantanés de survenue de ces pannes sont respectivement λ_1 et $\lambda_3(t)$,
- s'il passe dans un état dégradé, c'est suite à une usure du système de mise à froid. Le taux de survenue de la dégradation est noté $\lambda_0(t)$. De l'état dégradé, la transition vers l'état de panne due à une cause électrique ou de roulement à billes est toujours possible. A ces deux causes s'ajoute la panne de l'appareil de mise à froid de taux λ_2 ,
- lorsque l'appareil est dans un état de panne ou un état dégradé, il ne peut revenir dans un état stable.

L'équipement optronique que nous considérons a alors trois états :

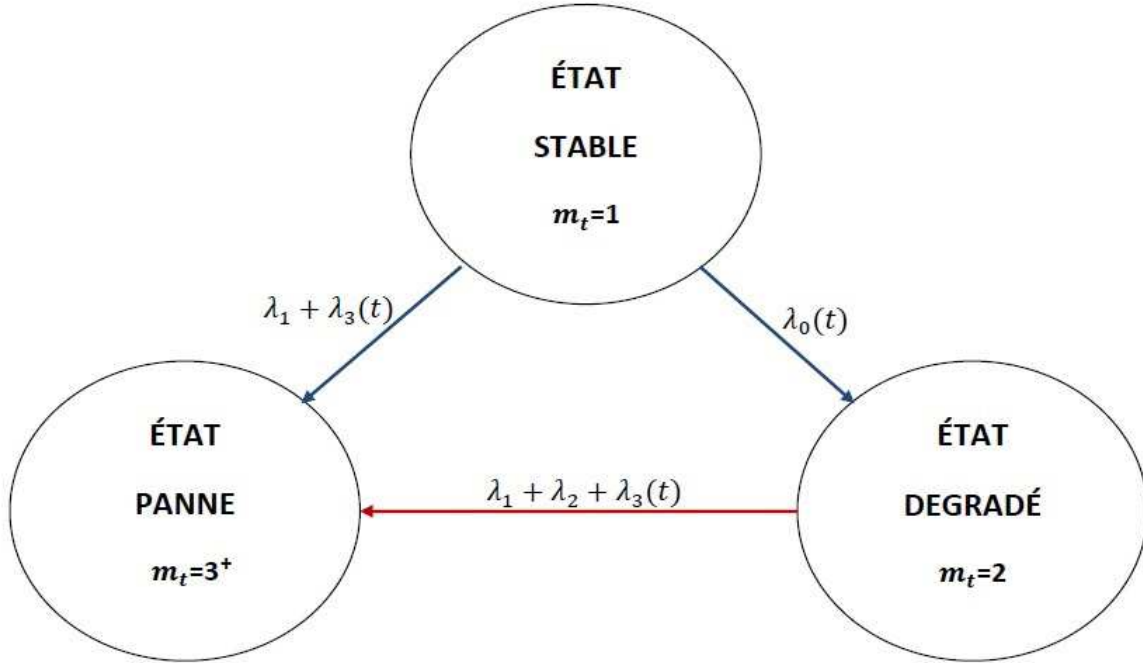
- un état stable : $m_t = 1$,
- un état dégradé : $m_t = 2$,
- un état de panne : $m_t = 3^+$.

La Figure 4.3 illustre le fonctionnement du système.

Le processus $\xi_t = (m_t, s_t = t)_{t \geq 0}$ décrivant le fonctionnement et l'âge de l'équipement est markovien et il s'agit d'un PDMP. Il est caractérisé par les trois paramètres suivants (qui vérifient les hypothèses précédentes) :

- $\phi(m_t, t; s) = (m_t, t + s)$,

$$\begin{aligned}
 - \lambda(m_t, t) &= \begin{cases} \lambda_0(t) + \lambda_1 + \lambda_3(t) & \text{si } m_t = 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3(t) & \text{si } m_t = 2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\
 - Q(m_t, t; \{m\} \times \{t\}) &= \begin{cases} \left(\frac{\lambda_0(t)}{\lambda_0(t) + \lambda_1 + \lambda_3(t)}\right) \mathbb{1}_{[m=2]} + \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_3(t)}{\lambda_0(t) + \lambda_1 + \lambda_3(t)}\right) \mathbb{1}_{[m=3^+]} & \text{si } m_t = 1, \\ \mathbb{1}_{[m=3^+]} & \text{si } m_t = 2. \end{cases}
 \end{aligned}$$


 FIGURE 4.3: Illustration générale du fonctionnement du système étudié pour $g = g_1$

Le PDMP ainsi défini fait lui aussi au maximum deux sauts. Le processus $\theta_n = (Z_n, S_n) = (m_{T_n}, T_n, S_n)$ est donc considéré pour $n = \{0, 1, 2\}$.

Fonction de performance $g=g_2$ avec différenciation des pannes

Nous prenons une fonction de performance $g = g_2$ qui privilégie un temps long d'utilisation en tenant compte des coûts de maintenance et de réparation selon l'état du système. Les pannes sont différenciées et nous considérons que le système a cinq états : stable,

4 Arrêt optimal pour la maintenance

dégradé, panne de roulement à billes, panne électronique et panne de la MAF. La fonction de performance est définie de la façon suivante :

$$g_2(m_t, t) = \frac{t}{pr_{m_t}}, \quad (4.8)$$

avec $m_t \in \{1, 2, \dots, 5\}$, pr_1 (respectivement pr_2) le prix d'une maintenance dans l'état stable (respectivement dans l'état dégradé), et pr_3 (respectivement pr_4 et pr_5) le coût de réparation du système de roulement à billes (respectivement électronique et de la MAF). Par convention $g_2(., +\infty) = 0$.

Exemple 4.1. *Dans le cas des caméras thermiques, le prix d'une réparation lors d'une panne de roulement à billes ou de la machine à froid est 11 fois plus important que le prix d'une maintenance ou d'une réparation lors d'une panne électronique.*

Dans ce cas, nous voulons optimiser l'espérance $E_{\xi_0} [g_2(m_\tau, \tau)]$, ce qui revient là encore, à laisser le système fonctionner le plus longtemps possible mais pas trop pour éviter la panne. Cependant pour cette fonction de performance la panne n'annule pas la performance (ce qui n'est pas vrai pour $g = g_1$), c'est à dire, que selon le type de panne la performance sera plus ou moins faible. Par exemple, nous savons que le coût d'une maintenance électronique est le même que celui d'une panne électronique. En effet la maintenance de la carte électronique consiste à remplacer cette dernière par une nouvelle. Dans ce cas, cette fonction de performance va privilégier un temps long d'utilisation jusqu'à l'apparition de la panne électronique. Pour les pannes de roulement à billes et de la machine à froid, la situation est différente puisque le coût d'une maintenance est plus faible que celui d'une réparation. Donc la fonction de performance doit dans ce cas privilégier un temps suffisamment long d'utilisation mais pas trop long puisqu'il faut éviter une panne. Ainsi, cette nouvelle fonction de performance g_2 prend en compte toutes ces situations. Elle va dépendre des coûts de maintenance/réparation selon les états.

Donc selon les exigences industrielles nous choisirons la fonction de performance g_1 ou g_2 . Selon ce choix, la méthode reste la même mais les résultats seront différents. En effet, puisque g_1 pénalise fortement l'état de panne du système, le temps d'arrêt associé à cette fonction sera plus faible que celui associé à g_2 .

4.5 Méthode numérique d'arrêt optimal

4.5.1 Principe

Pour résoudre ce système d'optimisation, nous allons introduire une suite de variables aléatoires $(V_n)_{n \in \{0;1;2\}}$ telles que $V_n = v_n(Z_n)$. Ceci permet de remplacer la récurrence 4.4

qui porte sur des fonctions, par une récurrence qui porte sur des variables aléatoires plus facile à traiter numériquement. Pour approcher les valeurs de cette suite, nous utilisons les deux étapes suivantes : la discrétisation et la quantification.

La première étape consiste à discrétiser le temps sur une grille de temps régulière notée $G(\xi)$ avec $\xi \in E$, associée à l'intervalle $[0, t^*(\xi)]$. Ainsi l'opérateur L sera maximisé sur un nombre fini de points et non sur un intervalle de temps continu. La seconde étape est l'étape de quantification qui permet de transformer cette chaîne de Markov $(\theta_k)_{0 \leq k \leq N}$ à espace d'état continu en des variables aléatoires discrètes. La quantification permet de construire des grilles adaptées à la loi du processus et non de discrétiser l'espace d'état du processus de façon régulière et arbitraire.

Suite à ces deux étapes, l'opérateur L est approché par les opérateurs \hat{L}_k^d pour $k \in \{1, \dots, N\}$ définis à la Section 4.5.3.c, dans Définition 4.3.

4.5.2 Discretisation du temps

Nous donnons les définitions plus précises des grilles de temps notées $G(\xi)$ avec $\xi \in E$.

Définition 4.1. Pour $\xi \in E$, $\Delta(\xi) \in]0, t^*(\xi)[$. On définit $n(\xi) = \text{int}(\frac{t^*(\xi)}{\Delta(\xi)}) - 1$ avec $\text{int}(x)$ la partie entière de x . L'ensemble des points $(t_i)_{i \in \{0, \dots, n(\xi)\}}$ avec $t_i = i\Delta(\xi)$ est noté $G(\xi)$. Cette grille est associée à l'intervalle $[0, t^*(\xi)]$.

Remarque 4.1. Pour tout $\xi \in E$, $t^*(\xi) \notin G(\xi)$ et $\max G(\xi) \leq t^*(\xi) - \Delta(\xi)$. Il s'agit d'une propriété nécessaire à la preuve de la convergence de l'algorithme itératif de calcul approché de la fonction valeur v_0 .

Nous maximisons ensuite l'opérateur L sur l'espace discret $G(\xi)$ avec $\xi \in E$ et non sur l'intervalle de temps continu. Ce nouvel opérateur discrétisé est noté L^d .

Définition 4.2. Soit $w \in B(E)$ et $\xi \in E$,

$$L^d(v, g)(\xi) = \max_{s \in G(\xi)} \{E[v(Z_1)\mathbf{1}_{\{S_1 < s\}} + g(\phi(\xi, s))\mathbf{1}_{\{S_1 \geq s\}} | Z_0 = \xi]\} \vee E[v(Z_1) | Z_0 = \xi].$$

Cela signifie que pour chaque $\xi \in E$, c'est à dire pour chaque état et chaque instant de saut dans cet état, nous associons une grille de temps $G(\xi)$, elle même associée à l'intervalle $[0, t^*(\xi)]$. Pour chaque ξ , l'opérateur L^d sera maximisé sur la grille $G(\xi)$.

Il a été démontré dans [6] que dans ces conditions, le problème d'arrêt optimal peut être approché par le problème d'arrêt optimal associé à la chaîne de Markov en temps discret. Cependant, toujours pour des raisons d'optimisation sur un espace discret, nous allons discrétiser cette chaîne par la méthode de quantification.

4.5.3 Quantification de la chaîne de Markov $(\theta_n)_{n \in \{0,1,2\}}$

a. Principe de quantification

Nous présentons la méthode de quantification de la chaîne de Markov θ_n afin de transformer chacune des variables aléatoires θ_n à espace d'état continu en une variable aléatoire discrète $\hat{\theta}_n$ prenant un nombre fini de valeurs. Comme nous l'avons dit, le principe de quantification prend en compte la loi de probabilité du processus. Le principe de la quantification consiste dans un premier temps à quantifier vectoriellement les marginales de cette chaîne de Markov, c'est à dire pour chaque $n \in \{0, 1, 2\}$, on se donne une grille (que nous noterons par la suite Γ_n^θ) de N_n points $w_n = (w_n^1, \dots, w_n^{N_n})$ dans \mathfrak{R}^3 à laquelle est associée la partition de Voronoi $C_i(w_n)$, $i = 1, \dots, N_n$ définie de la façon suivante : $C_i(w_n)$ est une partition borélienne de \mathfrak{R}^3 telle que,

$$C_i(w_n) \subset \left\{ y \in \mathfrak{R}^3 : |y - w_n^i| = \min_{1 \leq j \leq N_n} |y - w_n^j| \right\}.$$

On considère alors pour tout n , le quantifieur de Voronoi de θ_n sur la grille w_n , la variable aléatoire $\hat{\theta}_n^{w_n}$:

$$\hat{\theta}_n^{w_n} = Proj_{w_n}(\theta_n) := \sum_{i=1}^{N_n} w_n^i 1_{C_i(w_n)}(\theta_n).$$

Pour une grille donnée w_n , nous noterons alors $\hat{\theta}_n^{w_n} = (\hat{Z}_n^{w_n}, \hat{S}_n^{w_n}) = (\hat{m}_{\hat{T}_n}^{w_n}, \hat{T}_n^{w_n}, \hat{S}_n^{w_n})$ la projection de θ_n sur la grille w_n .

Nous appelons la distorsion (quadratique), l'erreur résultante au carré de quantification quadratique, définie de la façon suivante :

$$D_{N_n}^{\theta_n}(w_n) = E \left| \theta_n - \hat{\theta}_n^{w_n} \right|^2.$$

Le problème de quantification optimale consiste à minimiser la distorsion, en cherchant une grille optimale w_n . On notera alors $\hat{\theta}_n$ le quantifieur optimal de θ_n tel que :

$$E \left| \theta_n - \hat{\theta}_n \right|^2 = \inf_{w_n \in (\mathfrak{R}^3)^{N_n}} D_{N_n}^{\theta_n}(w_n) =: \underline{D}_{N_n}^{\theta_n}.$$

Le théorème d'existence de $\hat{\theta}_n$ est donné dans [29]. Ce quantifieur optimal fournit la meilleure approximation quadratique de la variable aléatoire θ_n par une variable aléatoire discrète de support à au plus N_n points.

Remarque 4.2. La théorie de la quantification assure que $\underline{D}_{N_n}^{\theta_n}$ tend vers 0 quand le nombre de points dans la grille de quantification (N_n) tend vers l'infini ([29]).

Nous notons Γ_n^θ , la grille de quantification optimale associée au quantifieur optimal $\hat{\theta}_n$. $\hat{\theta}_n = (\hat{Z}_n, \hat{S}_n) = (\hat{m}_{\hat{T}_n}, \hat{T}_n, \hat{S}_n)$ est donc la projection au plus proche voisin de θ_n sur la grille $\Gamma_n^\theta \subset E \times \mathfrak{R}^+$ et nous noterons Γ_n^Z la projection de Γ_n^θ sur l'espace d'état E . Notons que cette application n'est pas injective et que le processus $(\hat{\theta}_n)_{n \in \{0,1,2\}}$ ne conserve pas la propriété de Markov. Nous définissons toutefois des matrices de probabilité de transition à partir de $\hat{\theta}_n$. Pour $n \in \{1, 2\}$, $i = 1, \dots, N_n$ et $j = 1, \dots, N_{n-1}$:

$$\begin{aligned} P(\hat{\theta}_n = w_n^i | \hat{\theta}_{n-1} = w_{n-1}^j) &= \frac{P((\hat{\theta}_n, \hat{\theta}_{n-1}) = (w_n^i, w_{n-1}^j))}{P(\hat{\theta}_{n-1} = w_{n-1}^j)} \\ &= \frac{P((\theta_n, \theta_{n-1}) \in C_i(w_n) \times C_j(w_{n-1}))}{P(\theta_{n-1} \in C_j(w_{n-1}))} \end{aligned}$$

et nous faisons l'hypothèse que cette loi ne charge pas les hyperplans.

Les probabilités marginales sont induites par la loi de $(\theta_n)_{n \in \{0,1,2\}}$. Elles sont appelées, les masses des cellules de Voronoi. Pour plus de détails sur la méthode de quantification, voir [2],[29],[30].

b. Grille de quantification optimale

Nous donnons ici une méthode pratique pour déterminer la grille de quantification optimale. L'idée pour créer cette grille de quantification optimale est de dériver la fonction de distorsion $D_{N_n}^{\theta_n}$ pour ensuite construire un algorithme de gradient stochastique. La fonction distorsion peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} D_{N_n}^{\theta_n}(w_n) &:= E \left| \theta_n - \hat{\theta}_n^{w_n} \right|^2 \\ &= E \left[\min_{i=1, \dots, N_n} |\theta_n - w_n^i|^2 \right] \\ &= \int_{\mathfrak{R}^3} d_{N_n}(w_n, u) P_{\theta_n}(du) \end{aligned}$$

avec $d_{N_n} : (\mathfrak{R}^3)^{N_n} \times \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^+$ la distorsion locale définie par :

$$d_{N_n}(w, u) = \min_{i=1, \dots, N_n} |u - w^i|^2.$$

Il est possible alors d'écrire :

$$\begin{aligned} \nabla D_{N_n}^{\theta_n}(w_n) &= E [\nabla_{w_n} d_{N_n}(w_n, \theta_n)] \\ \nabla_{w_n} d_{N_n}(w_n, \theta_n) &= 2((w_n - \theta_n) \mathbb{1}_{C_i(w_n)})_{i=1, \dots, N_n} \end{aligned}$$

4 Arrêt optimal pour la maintenance

Pour une taille de grille de quantification fixée (N_n), nous simulons $(\delta_n^k)_{k>0}$ une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. de même densité que θ_n et nous définissons, partant d'une grille $\Gamma_n^{\theta,0}$, une suite de grilles $(\Gamma_n^{\theta,k})_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

$$\Gamma_n^{\theta,k+1} = \Gamma_n^{\theta,k} - \frac{\varsigma_{k+1}}{2} \nabla_{w_n} d_{N_n}(\Gamma_n^{\theta,k}, \delta_n^{k+1}),$$

avec $(\varsigma_k)_{k>0}$ une suite décroissante vérifiant :

$$\sum_{k>0} \varsigma_k = +\infty \text{ et } \sum_{k>0} \varsigma_k^2 < +\infty.$$

En pratique, si nous notons $\Gamma_n^{\theta,k} = \{w_n^{1,k}, \dots, w_n^{N_n,k}\}$, cet algorithme se déroule en deux phases. Une phase dite de compétition où nous sélectionnons l'indice j_{k+1} (l'indice à l'étape $k+1$ de la procédure) de la cellule du plus proche voisin :

$$j_{k+1} = \arg \min_i |w_n^{i,k} - \delta_n^{k+1}|$$

et une phase d'apprentissage qui permet de mettre à jour les points de la grille en modifiant le point le « plus proche » de la valeur simulée δ_n^{k+1} et en laissant inchangés les autres points, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} w_n^{j_{k+1},k+1} = w_n^{j_{k+1},k} - \delta_n^{k+1}(w_n^{j_{k+1},k} - \delta_n^{k+1}), \\ w_n^{i,k+1} = w_n^{i,k} \text{ si } i \neq j_{k+1}. \end{cases}$$

Cet algorithme est l'algorithme de Kohonen ou connu sous le nom de Competitive Learning Vector Quantization (CLVQ). Il a été démontré dans [29] et [2] que cet algorithme converge (presque sûrement) lorsque la loi de probabilité est à support compact en dimension 1. En dimension supérieure, sous l'hypothèse d'une densité à support compact, la convergence (presque sûrement) est montrée partiellement dans le sens où la convergence est assurée si les composantes de cette grille restent séparées asymptotiquement. Cette hypothèse a toujours été observée lors de simulations. Dans notre cas, la loi de probabilité de θ_n est à support compact (le temps de fonctionnement maximal est fixé à T^* , donc $(T_n, Z_n) \subset [0, T^*]^2$, et le nombre d'états est fini) et l'hypothèse sur la séparation des composantes de la grille a bien été observée au cours de nos simulations. Donc quand k tend vers l'infini, $\Gamma_n^{\theta,k}$ converge (presque sûrement) vers Γ_n^θ .

Remarque 4.3. *La première interrogation concerne le choix de la suite $(\varsigma_k)_{k>0}$. D'après [30], le pas suivant est bien adapté :*

$$\varsigma_k = \varsigma_0 \frac{a}{a + \varsigma_0 b k}$$

avec $a = 4(N_n)^{1/d}$, $b = \pi^2(N_n)^{-2/d}$, $\varsigma_0 = 1$ et $d = 3$ la dimension de θ_n . Cela permet d'avoir un pas à peu près constant lorsque k est petit et d'avoir un comportement asymptotique en $O(1/k)$ lorsque k est grand.

La seconde interrogation concerne l'initialisation de la grille. Une des solutions consiste à choisir N_n vecteurs tirés aléatoirement suivant la loi de θ_n .

c. Opérateur associé à $(\hat{\theta}_n)$

La grille $\Gamma_n^\theta \subset E \times \mathfrak{R}_+$ est la grille de quantification optimale associée au processus (θ_n) c'est à dire, une grille adaptée à la loi de ce processus. Nous définissons alors l'opérateur \hat{L}_k^d pour $k \in \{1, 2\}$.

Définition 4.3. Pour $k \in \{1, 2\}$, $v \in B(\Gamma_n^Z)$, $\xi \in \Gamma_{k-1}^Z$, et $s \in \mathfrak{R}_+$, posons

$$\hat{J}_k(v, g)(\xi, s) = E[v(\hat{Z}_k)\mathbf{1}_{\{\hat{s}_k < s\}} + g(\phi(\xi, s))\mathbf{1}_{\{\hat{s}_k \geq s\}} | \hat{Z}_{k-1} = \xi].$$

Si nous notons $\hat{K}_k(v)(\xi) = E[v(\hat{Z}_k) | \hat{Z}_{k-1} = \xi]$ alors l'opérateur \hat{L}_k^d est défini par :

$$\hat{L}_k^d(v, g)(\xi) = \max_{s \in G(\xi)} \left\{ \hat{J}_k(v, g)(\xi, s) \right\} \vee \hat{K}_k(v)(\xi).$$

L'opérateur L est ainsi approché par les opérateurs \hat{L}_k^d pour $k \in \{1, 2\}$. Cet opérateur est la version de L adaptée aux variables quantifiées et au temps discrétisé.

4.5.4 Approximation de la fonction valeur

Pour résoudre ce système d'optimisation, nous avons introduit une suite de variables aléatoires $(V_k)_{k \in \{0;1;2\}}$ telles que $V_k = v_k(Z_k)$. Pour approcher les valeurs de cette suite, nous utilisons l'opérateur \hat{L}_k^d pour $k \in \{1, 2\}$, construit à partir des deux étapes précédentes de discrétisation et de quantification.

Nous pouvons maintenant construire une séquence de variables $(\hat{V}_k)_{k \in \{0;1;2\}}$ qui approchent $(V_k)_{k \in \{0;1;2\}}$.

Définition 4.4. Considérons $\hat{v}_2(\xi) = g(\xi)$ où $\xi \in \Gamma_2^Z$ et pour $k \in \{1, 2\}$

$$\hat{v}_{k-1}(\xi) = \hat{L}_k^d(\hat{v}_k, g)(\xi) \text{ où } \xi \in \Gamma_{k-1}^Z.$$

L'approximation de V_k proposée dans [15] est donnée par :

$$\hat{V}_k = \hat{v}_k(\hat{Z}_k)$$

pour $k \in \{0, \dots, 2\}$.

Il est démontré dans [15] que l'erreur d'approximation de la fonction valeur $|\hat{V}_0 - V_0|$ peut être rendue arbitrairement petite par un choix adéquat des paramètres de discrétisation. Dans [15], une méthode de calcul du temps d'arrêt arbitrairement proche de l'optimal est également proposée.

a. Approximation de la fonction valeur pour la fonction de performance $g = g_1$

Intéressons nous à l'approximation des V_k pour la fonction de performance $g = g_1$ donnée par l'équation (4.7). Dans ce cas, les \hat{v}_k pour $k \in \{0, 1, 2\}$ sont définies de la façon suivante :

$$\begin{cases} \hat{v}_2(z) = g_1(z) & \text{si } z \in \Gamma_2^Z, \\ \hat{v}_1(z) = \hat{L}_2(\hat{v}_2, g_1)(z) & \text{si } z \in \Gamma_1^Z, \\ \hat{v}_0(z) = \hat{L}_1(\hat{v}_1, g_1)(z) & \text{si } z \in \Gamma_0^Z. \end{cases} \quad (4.9)$$

L'approximation des $V_{k \in \{0,1,2\}}$ est réalisée par $\hat{V}_k = \hat{v}_k(\hat{Z}_k)$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$. Calculons \hat{V}_2 , \hat{V}_1 et \hat{V}_0 pour cette fonction de performance $g = g_1$.

$$\hat{V}_2 = \hat{v}_2(\hat{Z}_2) = \hat{v}_2(\hat{m}_{\hat{T}_2}, \hat{T}_2) = g_1(3^+, \hat{T}_2) = 0.$$

En effet, compte tenu de la Figure 4.4, si le processus fait deux sauts alors $m_t = 3^+$.

$$\hat{V}_1 = \hat{v}_1(\hat{Z}_1) = \hat{L}_2^d(\hat{v}_2, g_1)(\hat{Z}_1)$$

$$= \max_{s \in G(\hat{Z}_1)} \left\{ \hat{J}_2(\hat{v}_2, g_1)(\hat{Z}_1, s) \right\} \vee \hat{K}_2(\hat{v}_2)(\hat{Z}_1)$$

or $\hat{K}_2(\hat{v}_2)(\hat{Z}_1) = E[\hat{v}_2(\hat{Z}_2) | \hat{Z}_1] = E[g_1(\hat{Z}_2) | \hat{Z}_1] = 0$. Donc,

$$\hat{V}_1 = \max_{s \in G(\hat{Z}_1)} E[\hat{v}_2(\hat{Z}_2) \mathbf{1}_{\{\hat{s}_2 < s\}} + g_1(\phi(\hat{Z}_1, s)) \mathbf{1}_{\{\hat{s}_2 \geq s\}} | \hat{Z}_1]$$

$$= \max_{s \in G(\hat{Z}_1)} E[g_1(\hat{m}_{\hat{T}_1}, \hat{T}_1 + s) \mathbf{1}_{\{\hat{s}_2 \geq s\}} | \hat{Z}_1]$$

$$= \max_{s \in G(\hat{Z}_1)} E[(\hat{T}_1 + s) \mathbf{1}_{\{\hat{m}_{\hat{T}_1} = 2\}} \mathbf{1}_{\{\hat{s}_2 \geq s\}} | \hat{Z}_1]$$

$$= \max_{s \in G(\hat{Z}_1)} \left\{ (\hat{T}_1 + s) \mathbf{1}_{\{\hat{m}_{\hat{T}_1} = 2\}} P(\hat{S}_2 \geq s | \hat{Z}_1) \right\}.$$

$$\hat{V}_0 = \hat{v}_0(\hat{Z}_0) = \hat{L}_1^d(\hat{v}_1, g_1)(\hat{Z}_0) = \hat{L}_1^d(\hat{v}_1, g_1)(1, 0) \text{ car tous les équipements partent de } Z_0 = (1, 0).$$

$$= \max_{s \in G(\hat{Z}_0)} \left\{ \hat{J}_1(\hat{v}_1, g_1)(\hat{Z}_0, s) \right\} \vee \hat{K}_1(\hat{v}_1)(\hat{Z}_0)$$

$$= \max_{s \in G(\hat{Z}_0)} E[\hat{v}_1(\hat{Z}_1) \mathbf{1}_{\{\hat{s}_1 < s\}} + g_1(1, \hat{T}_0 + s) \mathbf{1}_{\{\hat{s}_1 \geq s\}} | \hat{Z}_0] \vee \hat{K}_1(\hat{v}_1)(\hat{Z}_0)$$

$$= \max_{s \in G(\hat{Z}_0)} \left\{ E[\hat{v}_1(\hat{Z}_1) \mathbf{1}_{\{\hat{T}_1 < s\}} | \hat{Z}_0] + sP(\hat{T}_1 \geq s | \hat{Z}_0) \right\} \vee \hat{K}_1(\hat{v}_1)(\hat{Z}_0).$$

b. Approximation de la fonction valeur pour la fonction de performance $g = g_2$

Intéressons nous maintenant à l'approximation des V_k pour la fonction de performance $g = g_2$ donnée par l'équation (4.8). Dans ce cas, les \hat{v}_k pour $k \in \{0, 1, 2\}$ sont définies de la façon suivante :

$$\begin{cases} \hat{v}_2(z) = g_2(z) & \text{si } z \in \Gamma_2^Z, \\ \hat{v}_1(z) = \hat{L}(\hat{v}_2, g_2)(z) & \text{si } z \in \Gamma_1^Z, \\ \hat{v}_0(z) = \hat{L}(\hat{v}_1, g_2)(z) & \text{si } z \in \Gamma_0^Z. \end{cases} \quad (4.10)$$

Nous rappelons que $T_2 = \min \{t \geq T_1, m_t \neq m_{T_1}\}$. Par convention, $\min \{\emptyset\} = +\infty$. Nous calculons \hat{V}_2 , \hat{V}_1 et \hat{V}_0 pour cette fonction de performance $g = g_2$.

$$\hat{V}_2 = \hat{v}_2(\hat{Z}_2) = \hat{v}_2(\hat{m}_{\hat{T}_2}, \hat{T}_2) = g_2(\hat{m}_{\hat{T}_2}, \hat{T}_2) = \frac{\hat{T}_2}{pr_{m_{\hat{T}_2}}} \text{ avec la convention } g_2(\cdot, +\infty) = 0.$$

$$\begin{aligned} \hat{V}_1 &= \hat{v}_1(\hat{Z}_1) = \hat{L}_2^d(\hat{v}_2, g_2)(\hat{Z}_1) \\ &= \max_{s \in G(\hat{Z}_1)} \left\{ \hat{J}_2(\hat{v}_2, g_2)(\hat{Z}_1, s) \right\} \vee \hat{K}_2(\hat{v}_2)(\hat{Z}_1) \\ &= \max_{s \in G(\hat{Z}_1)} \left\{ E[\hat{v}_2(\hat{Z}_2) \mathbf{1}_{\{\hat{S}_2 < s\}} + g_2(\phi(\hat{Z}_1, s)) \mathbf{1}_{\{\hat{S}_2 \geq s\}} | \hat{Z}_1] \right\} \vee \hat{K}_2(\hat{v}_2)(\hat{Z}_1) \end{aligned}$$

or si $m_{\hat{T}_1} \in \{3, 4\}$ alors $\hat{S}_2 = +\infty$, $\mathbf{1}_{\{\hat{S}_2 < s\}} = 0$, $\hat{K}_2(\hat{v}_2)(\hat{Z}_1) = E[\hat{v}_2(\hat{Z}_2) | \hat{Z}_1] = 0$

et dans ce cas,

$$\hat{V}_1 = \max_{s \in G(\hat{Z}_1)} E[g_2(\phi(\hat{Z}_1, s)) | \hat{Z}_1] = \max_{s(\hat{Z}_1)} E[g_2(\hat{Z}_1) | \hat{Z}_1] = g_2(m_{\hat{T}_1}, \hat{T}_1)$$

sinon, nous sommes dans la situation où $m_{\hat{T}_1} = 2$ et

$$\begin{aligned} \hat{V}_1 &= \max_{s \in G(\hat{Z}_1)} \left\{ E[\hat{v}_2(\hat{Z}_2) \mathbf{1}_{\{\hat{S}_2 < s\}} | \hat{Z}_1] + E[g_2(\phi(\hat{Z}_1, s)) \mathbf{1}_{\{\hat{S}_2 \geq s\}} | \hat{Z}_1] \right\} \vee \hat{K}_2(\hat{v}_2)(\hat{Z}_1) \\ &= \max_{s \in G(\hat{Z}_1)} \left\{ E[\hat{v}_2(\hat{Z}_2) \mathbf{1}_{\{\hat{S}_2 < s\}} | \hat{Z}_1] + E[g_2(2, \hat{T}_1 + s) \mathbf{1}_{\{\hat{S}_2 \geq s\}} | \hat{Z}_1] \right\} \vee \hat{K}_2(\hat{v}_2)(\hat{Z}_1) \\ &= \max_{s \in G(\hat{Z}_1)} \left\{ E[\hat{v}_2(\hat{Z}_2) \mathbf{1}_{\{\hat{S}_2 < s\}} | \hat{Z}_1] + \frac{\hat{T}_1 + s}{pr_2} P(\hat{S}_2 \geq s | \hat{Z}_1) \right\} \vee \hat{K}_2(\hat{v}_2)(\hat{Z}_1). \end{aligned}$$

4 Arrêt optimal pour la maintenance

$$\begin{aligned}
\hat{V}_0 &= \hat{v}_0(\hat{Z}_0) = \hat{L}_1^d(\hat{v}_1, g_2)(\hat{Z}_0) = \hat{L}_1^d(\hat{v}_1, g_2)(1, 0) \\
&= \max_{s \in G(\hat{Z}_0)} \left\{ \hat{J}_1(\hat{v}_1, g_2)(\hat{Z}_0, s) \right\} \vee \hat{K}_1(\hat{v}_1)(\hat{Z}_0) \\
&= \max_{s \in G(\hat{Z}_0)} \left\{ E[\hat{v}_1(\hat{Z}_1) \mathbf{1}_{\{\hat{S}_1 < s\}} + g_2(1, \hat{T}_0 + s) \mathbf{1}_{\{\hat{S}_1 \geq s\}} | \hat{Z}_0] \right\} \vee \hat{K}_1(\hat{v}_1)(\hat{Z}_0) \\
&= \max_{s \in G(\hat{Z}_0)} \left\{ E[\hat{v}_1(\hat{Z}_1) \mathbf{1}_{\{\hat{S}_1 < s\}} | \hat{Z}_0] + E[g_2(1, s) \mathbf{1}_{\{\hat{S}_1 \geq s\}} | \hat{Z}_0] \right\} \vee \hat{K}_1(\hat{v}_1)(\hat{Z}_0) \\
&= \max_{s \in G(\hat{Z}_0)} \left\{ E[\hat{v}_1(\hat{Z}_1) \mathbf{1}_{\{\hat{S}_1 < s\}} | \hat{Z}_0] + E\left[\frac{s}{pr_1} \mathbf{1}_{\{\hat{S}_1 \geq s\}} | \hat{Z}_0\right] \right\} \vee \hat{K}_1(\hat{v}_1)(\hat{Z}_0) \\
&= \max_{s \in G(\hat{Z}_0)} \left\{ E[\hat{v}_1(\hat{Z}_1) \mathbf{1}_{\{\hat{S}_1 < s\}} | \hat{Z}_0] + \frac{s}{pr_1} P(\hat{S}_1 \geq s | \hat{Z}_0) \right\} \vee \hat{K}_1(\hat{v}_1)(\hat{Z}_0).
\end{aligned}$$

Remarque 4.4. Ces espérances sont calculées grâce aux grilles de quantification et leurs probabilités de transition associées aux cellules de la grille. Par exemple, pour $i = 0$ ou 1 et \hat{Z}_i donnée, on a le résultat suivant :

$$E[\hat{v}(Z_{i+1}) \mathbf{1}_{\{\hat{S}_{i+1} < s\}} | \hat{Z}_i] = \sum_{(Z,S) \in \Gamma_{i+1}^\theta} \hat{v}_{i+1}(Z) \mathbf{1}_{\{S < s\}} P((Z, S) | \hat{Z}_i).$$

Il s'agit donc d'une somme finie.

Nous pouvons approcher la fonction valeur de notre cas d'étude aussi près que l'on veut grâce à \hat{V}_0 calculée précédemment. Il nous reste maintenant à trouver le temps d'arrêt τ qui réalise le maximum de cette fonction valeur.

4.5.5 Approximation du temps d'arrêt quasi optimal

Nous présentons ici la méthode pour estimer le temps d'arrêt optimal à notre problème, adapté à la trajectoire du PDMP et qui change de valeurs à chaque saut (i.e changement d'état). Pour construire ce temps d'arrêt, nous devons tout d'abord définir pour tout $n \in \{1, 2\}$ $s_n^*(Z, S)$ et $r_{n,\beta}(Z, S)$ pour tout $(Z, S) \in E \times \mathfrak{R}_+$:

$$s_n^*(Z, S) = \min \left\{ t \in G(\hat{Z}_{n-1}) | \hat{J}_n(\hat{v}_n, g)(\hat{Z}_{n-1}, t) = \max_{u \in G(\hat{Z}_{n-1})} \hat{J}_n(\hat{v}_n, g)(\hat{Z}_{n-1}, u) \right\},$$

$$r_{n,\beta}(Z, S) = \begin{cases} t^*(Z) & \text{si } \hat{K}_n(\hat{v}_n)(\hat{Z}_{n-1}) > \max_{u \in G(\hat{Z}_{n-1})} \hat{J}_n(\hat{v}_n, g)(\hat{Z}_{n-1}, u), \\ s_n^*(Z, S) \mathbf{1}_{\{s_n^*(Z, S) < t^*(Z)\}} + (t^*(Z) - \beta) \mathbf{1}_{\{s_n^*(Z, S) \geq t^*(Z)\}} & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $(\hat{Z}_{n-1}, \hat{S}_{n-1})$ la projection de (Z, S) sur la grille Γ_{n-1}^θ .

Le temps $s_n^*(Z, S)$ représente l'instant qui maximise la fonction de performance (au sens de l'espérance) lorsqu'au $n - 1$ ^{ième} saut, le système est défini par $\theta_{n-1} = (Z, S)$. Quant à $r_{n,\beta}(Z, S)$, il vaut pour ce même système :

- le temps d'utilisation maximal $t^*(Z)$ si sa performance est meilleure quand nous laissons le système évoluer,
- sinon, il correspond au meilleur instant $s_n^*(Z, S)$ pour arrêter le système à condition que $s_n^*(Z, S) < t^*(Z)$. Dans le cas où cette condition n'est pas remplie, $r_{n,\beta}(Z, S)$ sera égal au temps d'utilisation maximal moins un certain β fixé.

Remarque 4.5. *Nous avons tendance à penser que $s_n^*(Z, S) < t^*(Z)$ or il est vrai que comme $s_n^*(Z, S) \in G(\hat{Z}_{n-1})$, $s_n^*(Z, S) < t^*(\hat{Z}_{n-1})$ mais $t^*(\hat{Z}_{n-1})$ n'est pas forcément plus petit que $t^*(Z)$. En effet, si $\hat{T}_{n-1} < T_{n-1}$ alors $T^* - \hat{T}_{n-1} > T^* - T_{n-1}$ et donc $t^*(\hat{Z}_{n-1}) > t^*(Z)$. Cependant pour que $s_n^*(Z, S) \geq t^*(Z)$ il faut en plus que la performance soit maximale (au sens de l'espérance) lorsqu'on s'approche de $t^*(\hat{Z}_{n-1})$. Dans notre cas, ceci est très rarement observé si T^* est très grand car la probabilité que tous les équipements soient tombés en panne au temps T^* est très grande et la performance est au plus bas à cet instant. Nous pouvons en déduire que la probabilité que $\hat{K}_n(\hat{v}_n)(Z_{n-1}) \leq \max_{u \in G(Z_{n-1})} \hat{J}_n(\hat{v}_n, g)(Z_{n-1}, u)$ est très grande.*

A partir de ces éléments nous construisons une suite de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n \in \{1,2\}}$, telle que :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= r_{2,\beta}(Z_0, S_0) \wedge T_1 \\ &\text{et} \\ \tau_2 &= \begin{cases} r_{1,\beta}(Z_0, S_0) & \text{si } T_1 > r_{1,\beta}(Z_0, S_0), \\ T_1 + \tau_1 \circ \theta_{T_1} & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\text{avec } \tau_1 \circ \theta_{T_1} = r_{2,\beta}(Z_1, S_1) \wedge (T_2 - T_1).$$

Le temps d'arrêt optimal est τ_2 . Le principe est le suivant :

- à l'instant initial ($t=0$), nous calculons une première date $R_1 = r_{1,\beta}(Z_0, S_0)$ qui dépend des $\theta_0 = (Z_0, S_0)$ des équipements. Dans notre étude tous les équipements sont au temps $t = 0$ dans l'état 1 ($Z_0 = (1, 0)$) et $S_0 = 0$. Donc la date $R_1 = r_{1,\beta}(1, 0, 0)$ est calculée une seule fois, elle est la même pour toutes les caméras. Cette date R_1 correspond au temps τ qui maximise $E_{\xi_0} [g(m_\tau, \tau)]$. Donc au temps $t = 0$, une date de maintenance fixe R_1 est annoncée pour tous les équipements.
- nous laissons évoluer le système jusqu'au temps $R_1 \wedge T_1$ (où T_1 est le premier temps de saut). Si $R_1 \leq T_1$ alors notre date de maintenance est R_1 , l'équipement est envoyé en maintenance sinon nous adoptons la démarche suivante.

4 Arrêt optimal pour la maintenance

- à l’instant T_1 , nous calculons une deuxième date $R_2 = r_{2,\beta}(Z_1, S_1)$. Cette date correspond au temps qui maximise $\hat{v}_1(\hat{Z}_1)$ si ce temps est inférieur à $t^*(Z_1)$ et $\hat{K}_2(\hat{v}_2)(\hat{Z}_1) < \max_{u \in G(\hat{Z}_1)} \hat{J}_2(\hat{v}_2, g)(\hat{Z}_1, u)$. D’après la remarque précédente, pour notre choix de T^* ces deux conditions sont vérifiées.
- nous laissons ensuite évoluer le système jusqu’au temps $(R_2 + T_1) \wedge T_2$ (où T_2 est le deuxième temps de saut). Si $(R_2 + T_1) \leq T_2$ alors notre date de maintenance est $R_2 + T_1$ sinon cela signifie que l’équipement est tombé en panne avant cette date de maintenance proposée.

Remarque 4.6. *Dans le cas plus général d’un équipement à $N > 2$ sauts, si $(R_2 + T_1) > T_2$ alors il suffit d’adopter la même démarche jusqu’au $N^{\text{ème}}$ temps de saut où sera effectuée la maintenance si elle n’a pas déjà eu lieu avant.*

En d’autres termes, nous avons alors la politique de maintenance suivante :

- au temps $t = 0$, une date de maintenance est annoncée à une date fixe R_1 pour tous les équipements,
- si un équipement passe dans l’état dégradé au temps T_1 avant cette date R_1 , ce temps de maintenance est recalculé et remplacé par un nouveau temps R_2 dépendant de T_1 .

4.6 Mise en oeuvre numérique

Nous présentons les étapes de calcul des temps d’arrêt ainsi que la probabilité d’échec d’une mission donnée.

4.6.1 Simulation des données

A partir des taux de défaillance $\lambda_0(t), \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(t)$ fournis par les experts, nous avons construit un simulateur de trajectoires du processus. Pour chacune d’entre elles, nous avons les informations suivantes : le temps passé dans l’état stable S_1 (et le temps de saut $T_1 = S_1$), le type de saut (m_{T_1}) ainsi que le temps passé dans ce nouvel état S_2 s’il s’agit d’un passage dans l’état dégradé. Donc pour un appareil qui se dégrade et tombe en panne à la suite, nous avons $T_1 = S_1$, $m_{T_1} = 2$ et T_2 ($S_2 = T_2 - T_1$), $m_{T_2} \in \{3, 4, 5\}$ lorsqu’il est en panne. Quant aux équipements qui tombent en panne directement après l’état stable, nous avons $T_1 = S_1$, $m_{T_1} \in \{3, 4\}$. Nous rappelons que les experts nous ont donné un temps d’utilisation cumulé maximal $T^* = 25000$. Donc nous avons $\forall m_t, t^*(m_t, t) = T^* - t$.

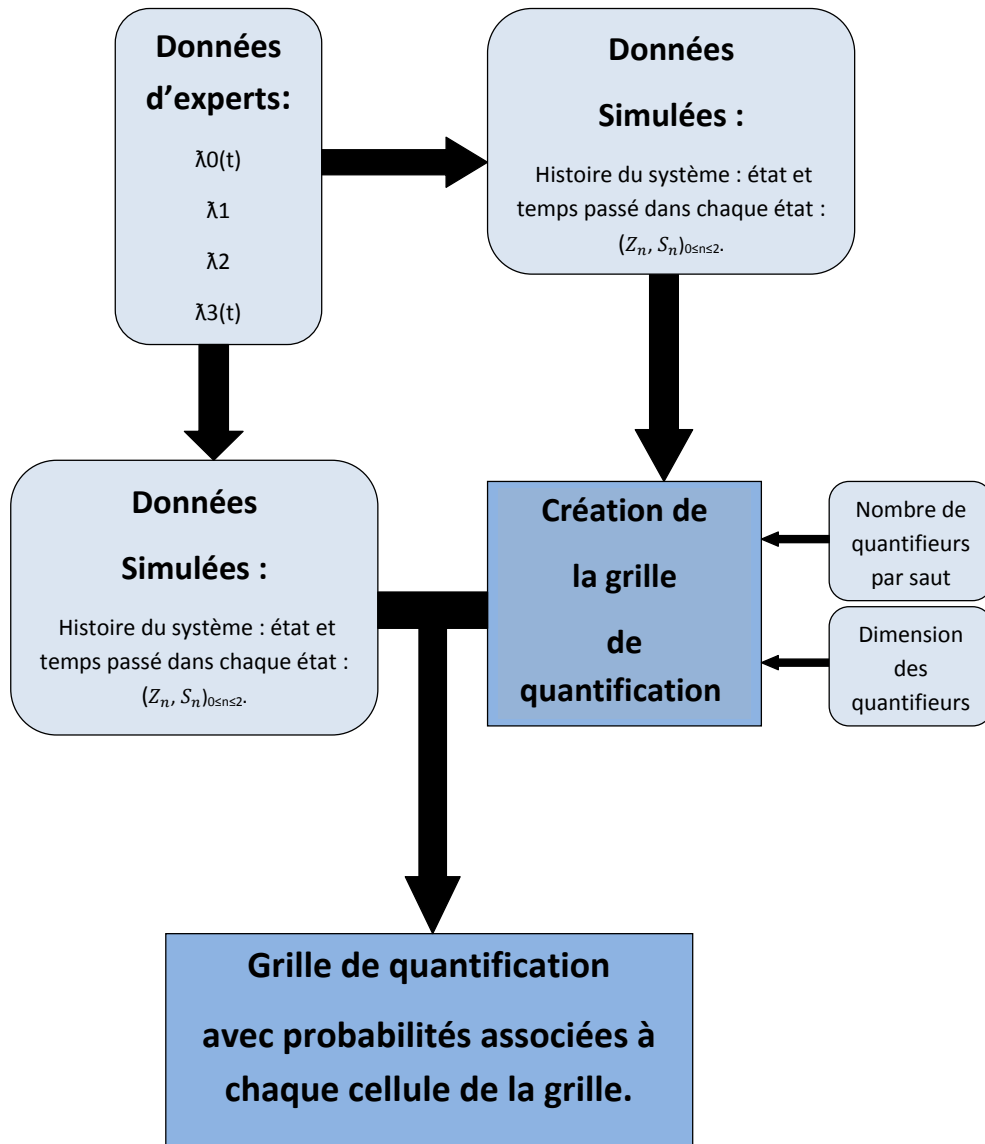


FIGURE 4.4: Schéma de quantification des données simulées

4.6.2 Création de la grille de quantification optimale

A partir de ce simulateur, nous créons une grille de quantification $\Gamma_{n \in \{0,1,2\}}^\theta \subset E \times [0, T^*] = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times [0, T^*]^2$ telle que $\hat{\theta}_0 = (\hat{Z}_0, \hat{S}_0)$ est la projection de $\theta_0 = (Z_0, S_0) = (m_{T_0}, T_0, S_0) = (1, 0, 0)$ sur la grille Γ_0^θ composée d'un seul élément, le même point $(1, 0, 0)$ puisque tous les équipements au temps $t = 0$ sont dans l'état stable. $\hat{\theta}_1$ est la projection de $\theta_1 = (m_{T_1}, T_1, S_1 = T_1)$ sur la grille $\Gamma_1^\theta \subset \{2; 3; 4\} \times [0, T^*]^2$ composée de $N_{q,1}$ quantifieurs de dimension 3 et enfin $\hat{\theta}_2$ est la projection de $\theta_2 = (m_{T_2}, T_2, S_2)$ sur la grille $\Gamma_2^\theta \subset \{3; 4; 5\} \times [0, T^*]^2$ composée de $N_{q,2}$ quantifieurs de dimension 3.

Nous simulons à nouveau les trajectoires d'équipements et nous les quantifions en les projetant sur la grille de quantification précédente. A chaque cellule de la grille $\hat{\theta}_n = (\hat{Z}_n, \hat{S}_n)$, nous pouvons à présent associer la probabilité de la cellule et de son saut vers une autre cellule ainsi qu'une grille de temps $G(\hat{Z}_n)$.

Une représentation schématique du principe de quantification des données simulées est présentée dans la Figure 4.4. Pour quantifier ces éléments, il suffit de lancer l'algorithme de quantification (décrit en annexe D) sur ces éléments et de renseigner le nombre de quantifieurs souhaité par saut et la dimension de ces quantifieurs. La grille de quantification est calculée une fois pour toute à l'aide des simulations.

4.6.3 Algorithme d'arrêt optimal

Tous les éléments concernant les cellules de la grille de quantification vont nous permettre de calculer \hat{V}_0 et les \hat{V}_1 (respectivement \hat{V}_2) s'il s'agit d'un premier saut (respectivement d'un deuxième saut) ainsi que les temps qui les maximisent. Nous rappelons que \hat{V}_2 dépend de Z_2 , \hat{V}_1 dépend de Z_1 et \hat{V}_0 est déterministe puisque pour tous les équipements $Z_0 = \hat{Z}_0 = (1, 0)$. Pour chaque cellule de la grille Γ_2^θ , nous calculons sa performance $\hat{V}_2 = \hat{v}_2(\hat{Z}_2)$. Remarquons que dans le cas où le système est en panne, il est arrêté. De même, pour chaque cellule de la grille Γ_1^θ , nous calculons $\hat{v}_1(\hat{Z}_1)$ et le temps d'arrêt quasi-optimal R_2 qui lui est associé. Quant à l'unique point de la grille Γ_0^θ , nous avons un seul V_0 donc un seul temps d'arrêt quasi-optimal R_1 à associer à cette cellule. Les $\hat{V}_{n \in \{0,1,2\}}$ sont calculés par la méthode présentée au chapitre 3.5.3 et les temps d'arrêt sont obtenus par l'utilisation de la méthode décrite au chapitre 3.5.4. Une présentation générale de cet algorithme de calcul est donnée par la Figure 4.5 et son code est présenté en annexe D. Donc pour chaque cellule de la grille de quantification, nous pouvons lui associer un temps d'arrêt quasi optimal. Il suffira donc de projeter les données d'un équipement choisi sur cette nouvelle grille pour proposer le temps d'arrêt qui lui sera associé, comme le résume la Figure 4.6.

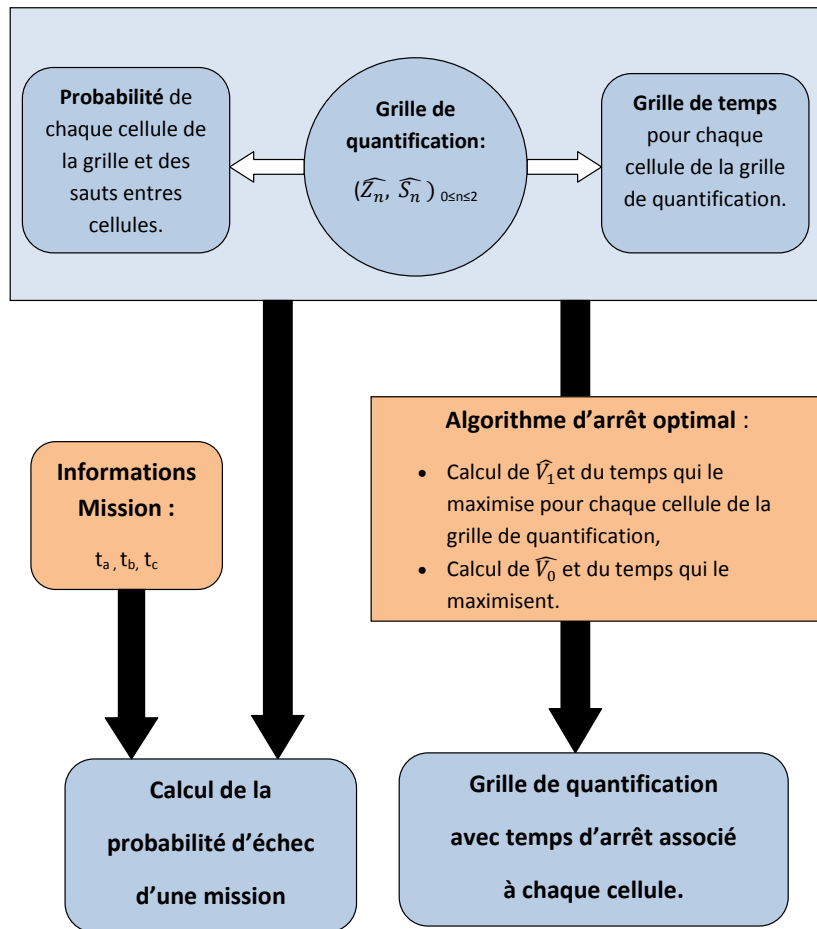


FIGURE 4.5: Représentation schématique de l'algorithme de calcul du temps d'arrêt quasi-optimal et de la probabilité d'échec d'une mission

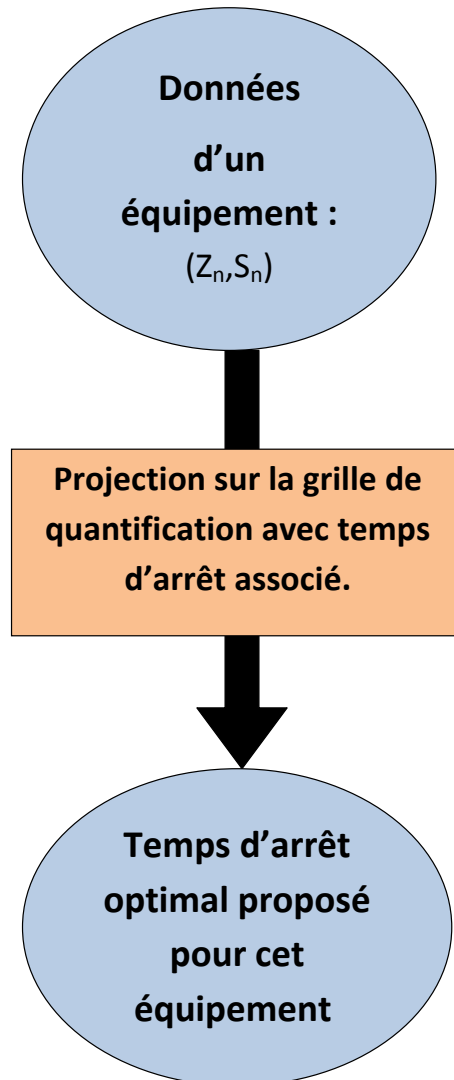


FIGURE 4.6: Exemple d'utilisation de cet algorithme de calcul du temps d'arrêt quasi-optimal

4.6.4 Politique de maintenance pour une nouvelle trajectoire

Nous rappelons que la politique de maintenance obtenue est de la forme suivante : au démarrage, une date de maintenance est annoncée à une date fixe R_1 pour tous les équipements. Cette date correspond au temps d'arrêt associé à la cellule $\hat{\theta}_0 = (1, 0, 0)$. Cette première étape est réalisée une seule fois. Si jamais un équipement passe dans l'état dégradé au temps T_1 avant cette date fixe R_1 , la date de maintenance est recalculée et remplacée par un nouveau temps dépendant de T_1 . Ce temps est donné par le temps d'arrêt associé à la cellule $\hat{\theta}_1 = (m_{\hat{T}_1} = 2, \hat{T}_1, \hat{S}_1 = \hat{T}_1)$ (la projection de $\theta_1 = (m_{T_1}, T_1, S_1 = T_1)$ sur la grille).

Remarque 4.7. *En pratique, la projection de θ_1 sur la grille de quantification suffit puisque le deuxième saut correspond à une panne et l'équipement est arrêté au temps T_2 . Cependant, il a quand même fallu quantifier les θ_2 pour calculer les \hat{V}_1 (voir Définition 3.4).*

4.6.5 Probabilité d'échec d'une mission donnée

A partir de ces résultats, nous pouvons estimer à chaque instant t_a , la probabilité d'échec d'une mission effectuée sur un intervalle de temps $[t_b, t_c]$ connaissant l'état du système à cet instant t_a . La probabilité à l'instant t_a qu'il y ait une panne pendant une mission réalisée entre la date t_b et t_c , sachant que l'équipement (à t_a) est dans un état stable, est définie de la façon suivante :

$$P(\ll \text{Echec mission} \gg | m_{t_a} = 1) = \frac{P(\{m_{t_a} = 1\} \cap \{m_t \in \{3, 4, 5\}, t \in [t_b, t_c]\})}{P(m_{t_a} = 1)}. \quad (4.12)$$

Il suffit pour estimer cette probabilité, d'utiliser la grille de quantification précédente pour calculer ce ratio : somme des poids des cellules en état de panne avant t_c moins celles en état de panne avant t_b , le tout divisé par la somme des cellules en état stable au temps t_a . Notons qu'un équipement en panne à l'instant t_p , est arrêté donc $m_{t_p+\Delta t}$ n'existe pas. Remarquons que si une panne survient entre t_a et t_b , l'équipement ne sera pas envoyé en mission mais remplacé par un nouvel équipement neuf. La probabilité d'échec de la mission est recalculée en fonction de ce nouvel appareil. L'intérêt de calculer cette probabilité est industriel. Le client souhaite savoir les risques d'échec d'une mission. De plus, si la date de maintenance optimale est prévue pendant une mission, le calcul de cette probabilité d'échec de mission, associé à la fonction de performance du système pendant la mission, pourra en fonction des résultats pousser le client à effectuer une maintenance juste avant ou juste après la mission. Une présentation générale du calcul de cette probabilité est donnée par la Figure 4.5

4.7 Résultats

4.7.1 Performance

L'intérêt de cette méthode est de prendre en compte l'état du système afin d'améliorer sa performance. En effet, si nous cherchons à trouver un instant t déterministe qui maximise $E[g(m_t, t)|\xi_0]$, approchée de façon empirique par la méthode de Monte Carlo, nous obtenons une performance plus faible comme le montre la Figure 4.7. En effet, ce système ne propose qu'une seule date de maintenance quel que soit l'état du système, contrairement à l'arrêt optimal qui en propose une au départ puis la révisé à chaque saut du PDMP. De plus, cette différence s'explique aussi par le fait que le calcul itératif de V_0 prend en compte la performance moyenne maximale V_1 lorsque le système a déjà effectué un premier saut.

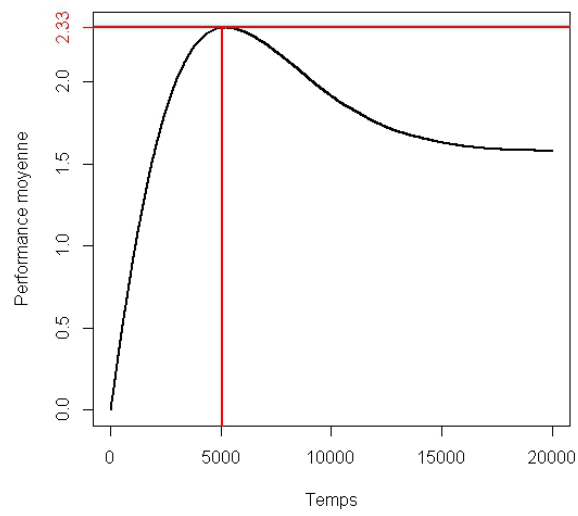
La Figure 4.7(a) montre l'évolution de la performance moyenne (pour une fonction $g = g_2$), calculée à chaque instant de façon empirique par $\frac{\sum_{k=1}^{100000} g(\xi_t^k)}{100000}$ où ξ_t^k est la $k^{\text{ème}}$ trajectoire simulée. Nous pouvons observer que la performance maximale pour cette fonction $g = g_2$ est de 2.33 et est atteinte pour un temps d'utilisation égal à 5050h, lorsque l'on calcule $E[g(m_t, t)|\xi_0]$ de façon empirique. Par la méthode de l'arrêt optimal, la performance optimale moyenne $V_0 = \sup_{\tau \leq t^*(\xi_0)} E[g(m_\tau, \tau)|\xi_0]$ est approchée par $\hat{V}_0 = \hat{L}_1^d(\hat{v}_1, g_2)(\xi_0)$. \hat{V}_0 vaut 3.25 et cette valeur est atteinte pour un temps d'utilisation égal à 8800h. Cette performance optimale est obtenue en maximisant sur $t \in G(\xi_0)$, la fonction $\hat{J}_1(\hat{v}_1, g_2)(\xi_0, t)$, définie dans la Section 4.5.3.c et représentée par la Figure 4.7(b).

Remarque 4.8. *Les résultats sont similaires lorsque nous prenons $g = g_1$, c'est à dire que la performance est meilleure lorsque nous utilisons l'arrêt optimal.*

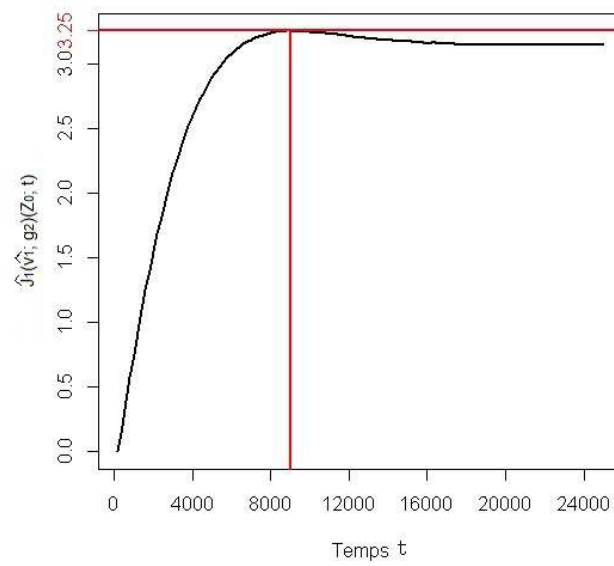
4.7.2 Résultats pour une fonction de performance $g = g_1$

Pour illustrer les résultats de cette méthode dans un cas pratique, nous avons choisi de regarder 10 trajectoires simulées d'équipements, dans le cas où $g = g_1$. Nous considérons donc le système à trois états : stable, dégradé et panne. Au temps $t = 0$, les équipements sont tous dans un état stable ($m_0 = 1$). Puis, pour chaque appareil, nous avons son 1^{er} temps de saut T_1 ainsi que son nouvel état (dégradé : $m_{T_1} = 2$, ou panne : $m_{T_1} = 3$) et son 2^{ème} temps de saut T_2 s'il était dans un état dégradé. En parallèle nous avons lancé l'algorithme d'arrêt optimal pour construire le temps d'arrêt τ_2 pour chaque équipement. Les résultats sont présentés dans le Tableau 4.1.

Au démarrage, une date de maintenance est annoncée à une date fixe $R_1 = 5160$ h pour tous les équipements. Si jamais l'équipement passe dans l'état dégradé au temps T_1 avant 5160h d'utilisation cumulée, la date de maintenance proposée est recalculée et remplacée



(a)



(b)

FIGURE 4.7: Evolution de la performance moyenne au cours du temps pour $g = g_2$, par méthode empirique (a) par l'arrêt optimal(b)

4 Arrêt optimal pour la maintenance

Equipement	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 ^{er} temps de saut T_1 (en h).	6899	3767	6802	2238	7091	3432	4162	3800	4212	2579
Etat m_{T_1}	2	2	3	2	3	3	2	2	2	2
2 ^{ème} temps de saut T_2 si $Z_1 = (2, T_1)$	6981	3834	-	2598	-	-	4309	3885	4393	2627
Date de maintenance proposée (en h)	5160	3827	5160	2508	5160	5160	4192	3860	4242	2679
Date de panne (en h)	-	-	-	-	-	3432	-	-	-	2627
Performance	5160	3827	5160	2508	5160	0	4192	3860	4242	0

TABLEAU 4.1: Exemple de résultats pour une fonction de performance $g = g_1$

par le temps d'arrêt donné par projection de $\theta_1 = (m_{T_1}, T_1, S_1 = T_1)$ sur la grille de quantification.

Nous avons 4 cas de figure :

- soit la maintenance a lieu avant son 1^{er} saut (équipements $n^o1, 3, 5$). Remarquons que pour les équipements 3 et 5, le 1^{er} saut aurait conduit à une panne définitive.
- soit la maintenance a lieu entre le 1^{er} et le 2^{ème} saut, lorsqu'il est dans l'état dégradé $m_{T_1} = 2$ (cas $n^o2, 4, 7, 8, 9$). Une fois encore, la maintenance a lieu avant la panne totale.
- soit l'équipement tombe en panne au premier saut avant la date de maintenance $R_1 = 5160h$. En effet, l'algorithme prévoyait de stopper l'appareil n^o6 au bout de $5160h$ or cet équipement est tombé en panne avant cette date. Dans ce cas, la performance atteinte est nulle.
- soit l'équipement tombe en panne au deuxième saut, avant la date de maintenance R_2 (qui dépend de Z_1). En effet, l'algorithme prévoyait de stopper l'appareil n^o10 aux environs de $2679h$ or il est tombé en panne avant cette date (d'où une performance nulle).

Des études de simulation nous ont permis d'estimer la proportion d'équipements dans chaque cas. Nous avons simulé 100000 réalisations du processus. La Figure 4.8(a) nous donne les résultats lorsque nous laissons le système évoluer sans réaliser de stratégie de maintenance. Nous obtenons alors les proportions suivantes :

- 58% des équipements tombent en panne directement : 18% des équipements à cause d'une panne de roulement à billes et 40% des équipements à cause d'une panne électronique,
- 42% passent dans un état dégradé. Parmi ces équipements, 98.5% ont par la suite une panne de l'appareil de mise à froid, 1% une panne électronique et 0.5% une panne de

roulement à billes.

Si nous mettons en place une politique de maintenance pour une fonction de performance $g = g_1$, nous obtenons les résultats présentés à la Figure 4.8(b). Au temps $t = 0$, nous avons une première date de maintenance R_1 , donnée par l'algorithme précédent. Dans notre cas, cette date est $5160h$. A cette date, la situation est la suivante :

- 38% des équipements sont en panne avant cette date : 30% des équipements ont une panne électronique et 8% des équipements sont tombés en panne de roulement à billes avant cette date,
- 36% des équipements sont envoyés en maintenance à cette date $R_1 = 5160h$,
- 26% des équipements sont passés dans un état dégradé avant cette date. A ce moment là, une nouvelle date de maintenance est donnée à ces équipements. Pour ceux passés dans cet état, on peut noter que :
 - 5% tombent en panne avant cette nouvelle date de maintenance,
 - 95% sont envoyés en maintenance à cette nouvelle date.

Donc l'utilisation de cette politique de maintenance pour une fonction de performance $g = g_1$ nous permet de rappeler 61% des équipements avant la panne. Mais si nous ne prenons pas en compte les pannes électroniques, 87% des équipements sont envoyés en maintenance avant la panne. En effet, nous ne pouvons pas réaliser de maintenance sur des pièces électroniques, nous ne pouvons que les remplacer par des nouvelles. Lorsque la partie électronique d'un équipement tombe en panne, elle n'endommage pas le reste de l'équipement, pour la réparer, il suffit de la remplacer comme en maintenance. Donc nous avons tout intérêt à ne pas faire de maintenance sur les éléments électroniques.

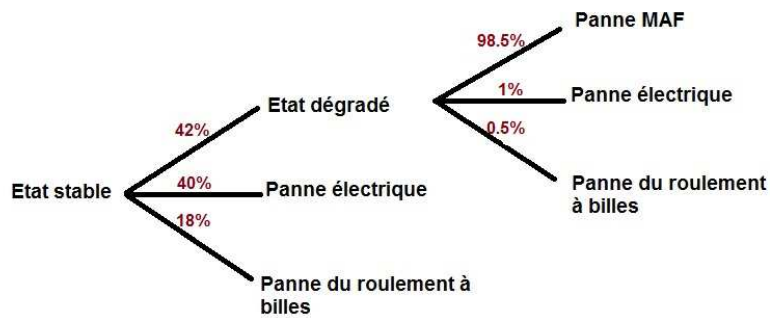
La performance enregistrée à la fin de l'étude est de 2285.81 si on réalise une maintenance basée sur l'arrêt optimal. Si au contraire, aucune maintenance est réalisée, tous les équipements tombent en panne donc la performance est nulle.

4.7.3 Résultats pour une fonction de performance $g = g_2$

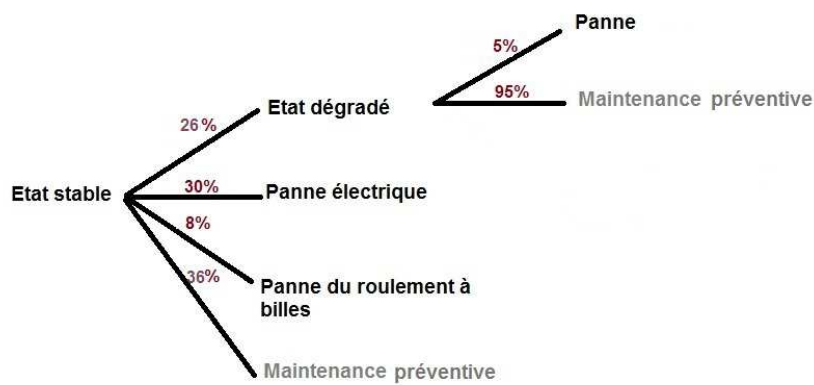
Si maintenant, nous différencions les pannes et que nous nous plaçons dans le cas où le système a 5 états, en mettant en place une politique de maintenance pour une fonction de performance $g = g_2$, nous obtenons les résultats présentés à la Figure 4.9(c). Au temps $t = 0$, nous avons une première date de maintenance R_1 donnée par l'algorithme précédent. Dans notre cas cette date de maintenance est : $R_1 = 8800h$. Remarquons que cette date de maintenance est supérieure à celle donnée pour la fonction de performance g_1 ($5160h$) puisque la fonction de performance g_2 pénalise moins fortement la panne. En effet, g_2 n'annule pas la performance lorsqu'il y a panne, contrairement à la fonction g_1 . A cette date R_1 , la situation est la suivante :

- 38% des équipements ont eu une panne électronique,
- 15% des équipements sont tombés en panne de roulement à billes,

4 Arrêt optimal pour la maintenance



(a)

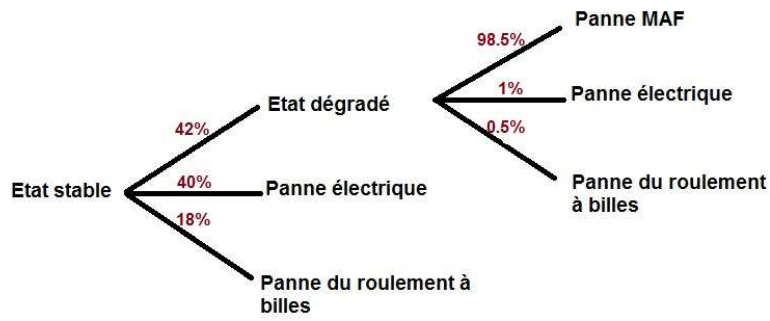


(b)

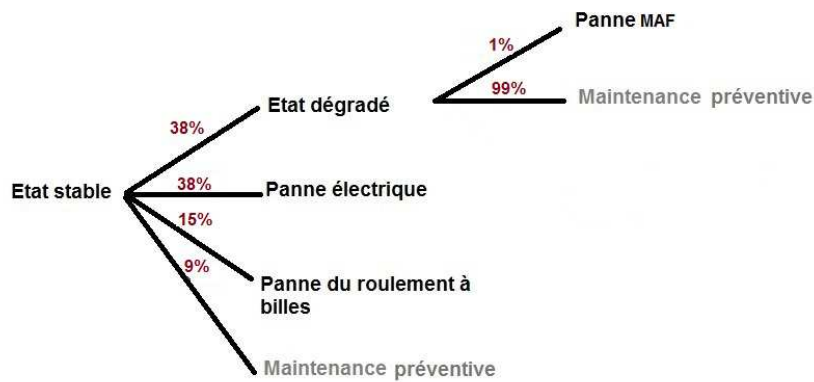
FIGURE 4.8: Résultats de 100000 histoires simulées (a) sans politique de maintenance (b) avec politique de maintenance pour $g = g_1$

- 9% des équipements sont envoyés en maintenance à cette date,
- 38% des équipements sont passés dans un état dégradé avant cette date. A ce moment là, une nouvelle date de maintenance est donnée à ces équipements. Pour ceux passés dans ce nouvel état, on note que :

- 1% tombent en panne de machine à froid avant cette nouvelle date de maintenance,
- $< 0.01\%$ des équipements ont une panne électronique ou de roulement à billes,
- 99% sont envoyés en maintenance à cette nouvelle date.



(a)



(b)

FIGURE 4.9: Résultats de 100000 histoires simulées (a) sans politique de maintenance (b) avec politique de maintenance pour $g = g_2$

4 Arrêt optimal pour la maintenance

Donc l'utilisation de cette politique de maintenance pour une fonction de performance $g = g_2$ nous permet de rappeler 47% des équipements avant la panne. Mais si nous ne prenons pas en compte les pannes électroniques, 78% des équipements sont envoyés en maintenance avant la panne. Remarquons que ce taux est plus faible que lorsque la politique de maintenance est réalisée pour une fonction de performance g_1 puisque la fonction g_2 pénalise moins la panne.

La performance enregistrée à la fin de l'étude est de 3.25 si on réalise une maintenance basée sur l'arrêt optimal. Si au contraire, aucune maintenance est réalisée, c'est à dire que nous laissons les équipements tomber en panne pour les réparer, la performance est de 1.58. Notons que l'ordre de grandeur de la performance n'est pas le même pour les fonctions g_1 et g_2 car pour la fonction g_2 , la performance est divisée par le coût de la maintenance/réparation.

4.7.4 Exemple de résultats de risque de panne avant une mission

Prenons l'exemple d'un client qui a utilisé sa caméra thermique pendant 4400h et qui souhaite encore l'utiliser pendant 100h avant de l'envoyer en mission. Pendant cette mission, la caméra devra fonctionner 500h. Notons alors $t_a = 4400$ le moment présent, $t_b = 4400 + 100 = 4500$ le moment de début de mission et $t_c = 4500 + 500 = 5000$ celui de la fin de mission. Le client souhaite connaître la probabilité que le système tombe en panne pendant la mission ($[t_b, t_c]$) sachant qu'à l'instant t_a le système fonctionne correctement (état stable $m_{t_a} = 1$). Par l'équation (4.12), cette probabilité est estimée à 14,11%. Si la date de maintenance optimale est annoncée pendant la mission :

- soit le client a la possibilité d'effectuer la maintenance sur place (en emportant les pièces nécessaires),
- soit le client choisit de faire la maintenance avant la mission, dans ce cas, la performance moyenne à l'instant t_b est plus faible, égale à 2.73,
- soit le client choisit de faire la maintenance après la mission en prenant le risque que l'équipement tombe en panne pendant la mission. Dans ce cas la performance moyenne en t_c est plus grande, égale à 2.89.

Il est évident que l'augmentation de la durée de mission entraîne une augmentation du risque d'échec de celle-ci. En effet, si pour l'exemple précédent $t_c = 5500$ (soit une utilisation de 1000h de la caméra pendant la mission), le risque que le système tombe en panne pendant la mission sachant qu'à l'instant $t_a = 4400$ il fonctionnait correctement, est de 25.96%.

4.8 L'arrêt optimal pour minimiser une fonction de coût

L'arrêt optimal est le plus souvent utilisé pour maximiser une fonction de performance. Toutefois, il est possible par la même méthode de minimiser une fonction coût, comme

4.8 L'arrêt optimal pour minimiser une fonction de coût

par exemple, le coût horaire d'utilisation, connu à la fin de l'histoire du système. Cette fonction est notée g_3 et est définie par :

$$g_3(m_t, t) = \begin{cases} \frac{pr_{m_t}}{t} & \text{si } t > 0, \\ Pr & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec $m_t \in \{1, 2, \dots, 5\}$, pr_{m_t} le prix d'une maintenance/réparation selon l'état du système et $Pr \in \mathbb{R}_+$ une valeur suffisamment grande, par exemple $Pr = \max_{i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}} pr_i$. On considère le même processus ξ_t et $(\theta_n)_{n \in \{0, 1, 2\}}$ la chaîne de Markov associée à ce processus. Notre but est cette fois, de trouver un instant $\tau < t^*(\xi_0)$ qui minimise la fonction $E_{\xi_0=(m_0, 0)} [g_3(m_\tau, \tau)]$ où g_3 est la fonction coût horaire et τ un temps d'arrêt adapté à la filtration du PDMP. Ce problème est là encore, un problème d'arrêt optimal qui consiste à résoudre un problème d'optimisation. La fonction valeur v_0 est alors définie de la façon suivante :

$$v_0(m_0, 0) = \inf_{\tau \leq t^*(m_0, 0)} E_{\xi_0=(m_0, 0)} [g_3(m_\tau, \tau)]. \quad (4.13)$$

La fonction v_0 représente maintenant le coût horaire moyen minimal que l'on peut atteindre. Elle peut être, là encore, calculée de manière récursive en utilisant le processus suivant :

$$\begin{aligned} v_N &= g, \\ v_k &= L(v_{k+1}, g) \text{ pour } k \leq N - 1, \end{aligned} \quad (4.14)$$

où l'opérateur $L(w, g)(x)$ est maintenant défini par :

$$L(w, g)(x) = \inf_{\tau \leq t^*(x)} \{E_x [w(Z_1) \mathbb{1}_{S_1 < \tau}] + g_3(\phi(x; \tau)) P_x(S_1 \geq \tau)\} \wedge E_x [w(Z_1)],$$

avec $w \in B(E)$ l'ensemble des fonctions bornées, mesurables sur $E = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times [0, T^*]$. Comme dans l'exemple précédent, l'opérateur L est un opérateur complexe qui dépend des caractéristiques du PDMP. On peut constater qu'il ne dépend du PDMP qu'au travers de la chaîne de Markov sous-jacente $\theta_n = (Z_n, S_n)$. Nous rappelons que dans notre cas, il y a au maximum $N = 2$ sauts.

Pour résoudre ce système d'optimisation, nous introduisons la même suite de variables aléatoires $(V_n)_{n \in \{0; 1; 2\}}$ telles que $V_n = v_n(Z_n)$. Pour approcher les valeurs de cette suite, nous utilisons les deux étapes définies précédemment : la discrétisation et la quantification. Ces deux étapes restent inchangées, c'est à dire que nous avons la même grille de temps et la même grille de quantification que précédemment. Suite à ces deux étapes, l'opérateur L est approché par les opérateurs discrétisés et quantifiés \hat{L}_k^d pour $k \in \{1, 2\}$. Nous pouvons alors construire la séquence de variables $\hat{V}_k = \hat{v}_k$ qui approchent (V_k) pour $k \in \{0, 1, 2\}$. Nous rappelons que $\hat{v}_2 = g_3$ et pour $k \in \{1, 2\}$, $\hat{v}_{k-1} = \hat{L}_k^d(\hat{v}_k, g)$. Il faut remarquer que même si la construction est la même, les valeurs de ces variables seront différentes.

4 Arrêt optimal pour la maintenance

Quant à la construction du temps d'arrêt optimal, elle se réalise de la même façon que précédemment (voir Section 3.2.2.d) et la stratégie de maintenance s'interprète de la même façon, c'est à dire :

- au temps $t = 0$, une date de maintenance est annoncée à une date fixe R_1 pour tous les équipements. Cette date correspond au temps qui minimise \hat{V}_0 ,
- si un équipement passe dans l'état dégradé au temps T_1 avant cette date R_1 , ce temps de maintenance est recalculé et remplacé par un nouveau temps dépendant de T_1 , qui correspond au temps qui minimise \hat{V}_1 .

Après simulation de 100000 trajectoires, si nous restons dans le même environnement que précédemment, c'est à dire que nous considérons le même équipement optronique, avec les mêmes pannes et les mêmes coûts de maintenance/réparation, nous obtenons un coût horaire moyen minimal égal à 1.46. Ce minimum est atteint pour 3000h d'utilisation cumulée. La Figure 4.10 nous donne l'évolution du coût horaire moyen lorsque l'on réalise une politique de maintenance basée sur l'arrêt optimal. Ce coût horaire moyen est calculé grâce à l'opérateur $\hat{J}_1(\hat{v}_1; g_3)(Z_0; t)$ défini dans la Section 4.5.3.c.

Remarque 4.9. Notons que la date de maintenance annoncée à l'instant $t = 0$ (3000h) est différente de celle annoncée lorsque la fonction $g = g_2$ (8800h) puisque la fonction $E_{\xi_0}[g_3(m_t, t)] \neq \frac{1}{E_{\xi_0}[g_2(m_t, t)]}$. La date de maintenance est plus précoce dans le cas de $g = g_3$ car cette fonction décroît très fortement au début contrairement à la fonction g_2 qui croît de façon constante au cours du temps.

4.9 Conclusion

Par conséquent, quelle que soit la fonction g choisie (performance ou coût horaire), l'utilisation de l'arrêt optimal pour réaliser la maintenance des équipements optroniques, nous permet d'optimiser la performance ou le coût horaire, selon les critères industriels (temps d'utilisation long, coût faible, ...). Il est évident, que selon les exigences industrielles, la fonction de performance ou le coût horaire, et donc la date de maintenance seront différents. La date de maintenance est donc optimale et dynamique puisqu'elle est modifiée à chaque fois que le système change d'état. Remarquons que le calcul de la grille de quantification avec temps d'arrêt associés, qui nous permet de donner la date de maintenance à chaque équipement tout au long de son utilisation, se fait une fois pour toute, au tout début de l'étude. D'autre part, si la date de maintenance optimale est prévue pendant une mission, le calcul de la probabilité d'échec d'une mission associé à la fonction de performance, ou de coût horaire du système pendant la mission, pourra en fonction des résultats, pousser le client à effectuer une maintenance juste avant, pendant ou juste après la mission.

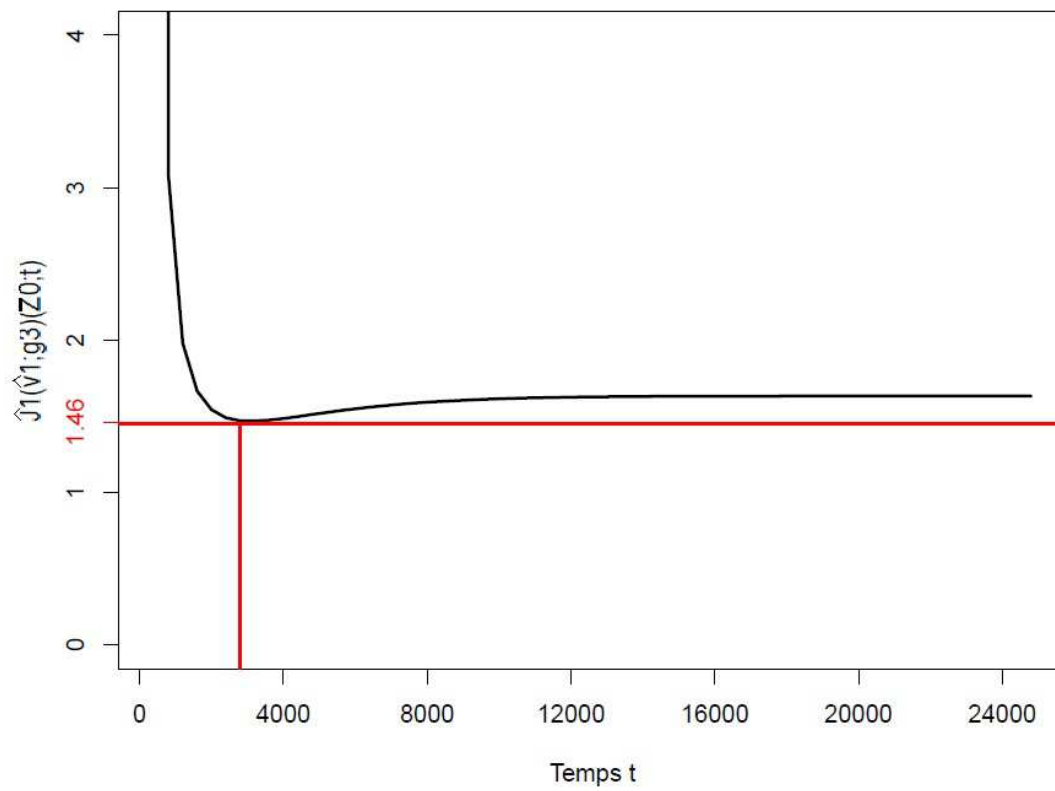


FIGURE 4.10: Coût horaire moyen pour une politique de maintenance basée sur l'arrêt optimal

5 Application industrielle

Sommaire

5.1 Implémentation dans le logiciel SMARTFLEET de la détection d'état	91
5.2 Proposition d'un date de maintenance pour les groupes de climatisation	94

Nous présentons dans ce dernier chapitre les utilisations de ce travail dans l'entreprise. Dans la Section 5.1, nous montrons l'utilisation du modèle de chaînes de Markov cachées pour l'estimation de l'état des caméras thermiques. Cet algorithme est implémenté dans un logiciel appelé SMARTFLEET pour permettre de voir à distance l'état du parc de ces équipements. Dans la Section 5.2, nous utilisons la méthode de l'arrêt optimal pour déterminer la date de maintenance optimale mais cette fois d'un autre équipement : les groupes de climatisation.

5.1 Implémentation dans le logiciel SMARTFLEET de la détection d'état

L'entreprise Thales intègre l'algorithme de calcul de la probabilité d'être dans un état dégradé (donné dans le chapitre 3) dans un logiciel appelé SMARTFLEET. Ce logiciel est un logiciel de gestion de maintenance assistée par ordinateur déjà implanté sur certains équipements. Toutes les informations collectées par le HUMS sont transmises à ce logiciel, qui analyse et estime l'état de l'équipement à chaque instant. Même si au départ, il était prévu d'intégrer ces algorithmes dans les HUMS directement, pour des raisons techniques, il a été décidé que les algorithmes de calcul seraient gérés au sein de l'entreprise Thales. Notons que les informations du HUMS sont envoyées à l'entreprise régulièrement.

Nous avons choisi d'illustrer les résultats de ce logiciel sur six caméras thermiques à différents instants : 20, 40, 100 et 300 utilisations. Les caméras 550001, 550002 et 550003 correspondent aux caméras (a), (b) et (c) de la Figure 3.10 qui fonctionnent correctement (état stable). Les caméras 550004, 550005 et 550006 correspondent aux caméras (a), (b) et (c) de la Figure 3.11 dont on a détecté un état dégradé (et qui sont tombées en panne).

La Figure 5.1 nous donne les informations transmises par ce logiciel pour six caméras simultanément. La partie gauche de la Figure 5.1 représente l'état de fonctionnement des



FIGURE 5.1: Résultats du logiciel sur les six caméras après 20 utilisations

six caméras thermiques après 20 utilisations. Leur potentiel est représenté sous chaque équipement. Il correspond à la probabilité d'être dans un état stable connaissant l'histoire des temps de mise à froid (corrigés et lissés). Nous pouvons observer que le potentiel des caméras est égal à 100% pour toutes les caméras sauf la 550005 dont le potentiel est à 84%. Au centre de la figure est représenté le nombre d'équipements par catégorie de potentiel avec en vert ceux dont le potentiel est le plus grand ($> 75\%$) et en noir le plus faible ($< 5\%$). A droite de la figure est représenté le potentiel moyen (la moyenne des potentiels) qui vaut 97%.

La Figure 5.2 représente l'état de ces six caméras thermiques après 40 utilisations. Nous observons un potentiel à 100% pour toutes les caméras, sauf la caméra 550005 qui a été envoyée en maintenance puisque elle a été détectée dans un état dégradé. Au centre de la figure, les 5 caméras avec le potentiel à 100% sont comptabilisées en vert et la sixième en noir. Quant au potentiel moyen, il est abaissé à 83%.

Après 100 utilisations, nous pouvons observer sur la Figure 5.3 que la caméra 550004 a été détectée en état dégradé et doit être envoyée en maintenance. Cependant cette caméra a continué à être utilisée avant d'être envoyée en maintenance d'où un potentiel de 35% (supérieur à 5%). Il y a donc un équipement en maintenance (comptabilisé dans la colonne noire), quatre équipements avec un potentiel supérieur à 75% (trois à 100% et un à 97%), comptabilisés en vert et un équipement comptabilisé en orange. Le potentiel moyen est alors de 71%.

5.1 Implémentation dans le logiciel SMARTFLEET de la détection d'état



FIGURE 5.2: Résultats du logiciel sur les six caméras après 40 utilisations



FIGURE 5.3: Résultats du logiciel sur les six caméras après 100 utilisations



FIGURE 5.4: Résultats du logiciel sur les six caméras après 300 utilisations

Après 300 utilisations, nous pouvons observer sur la Figure 5.4 que les caméras 550001 et 550002 n'apparaissent plus car elles ont été utilisées moins de 300 fois. Quant aux autres équipements, trois sont en maintenance à ce moment là (dont la 550004 qui aurait du être envoyée avant en maintenance) et une caméra (550003) est en fonctionnement avec un potentiel de 100%. Le potentiel moyen est alors de 25%.

Donc par l'application de l'algorithme de calcul de la probabilité d'être dans un état dégradé et de détection d'état, dans le logiciel SMARTFLEET, Thales a des informations sur le parc d'équipements, lui permettant de mieux gérer le stock d'équipements disponibles et d'anticiper les actions de maintenance.

5.2 Proposition d'un date de maintenance pour les groupes de climatisation

L'entreprise a testé l'algorithme de calcul du meilleur instant pour réaliser la maintenance (développé dans le chapitre 4) sur d'autres équipements : les groupes de climatisation notés GDC. Ces équipements sont utilisés pour refroidir un système. La Figure 5.5 est une image d'un GDC.

Cet équipement peut subir des pannes directes comme les pannes électroniques (taux

5.2 Proposition d'un date de maintenance pour les groupes de climatisation



FIGURE 5.5: Image d'un GDC

de panne λ_1) et les pannes d'électrovanne (taux de panne $\lambda_3(t)$). Cette dernière panne est liée à un phénomène d'usure contrairement à la première. L'appareil peut aussi subir une dégradation de son roulement à billes entraînant la panne du système. Le taux de survenue de cette dégradation est $\lambda_0(t)$. De l'état dégradé, la transition vers l'état de panne électronique ou d'électrovanne est toujours possible. A ces deux transitions s'ajoute celle du passage du système dans l'état de panne du roulement à billes avec un taux λ_2 . Cette panne est due à la dégradation du système de roulement. Notons que ce système de roulement à billes n'est pas le même que celui présenté dans les caméras thermiques (chapitre 4).

Nous considérons donc que le GDC peut se trouver dans cinq états :

- un état stable : $m_t = 1$,
- un état dégradé : $m_t = 2$,
- un état de panne de l'électrovanne : $m_t = 3$,
- un état de panne électronique : $m_t = 4$,
- un état de panne du roulement à billes : $m_t = 5$.

Une présentation générale du fonctionnement du GDC est donnée dans la Figure 5.6.

Les experts Thales nous ont fourni les informations suivantes concernant les taux de pannes (et dégradation) :

- le taux de survenue d'une dégradation $\lambda_0(t)$ est une Weibull de paramètre $\alpha = 3368$ et $\beta = 1.4$,
- le taux de panne de l'électrovanne $\lambda_3(t)$ est une Weibull de paramètre $\alpha = 34300$ et $\beta = 1.15$,

5 Application industrielle

- le taux de panne électronique $\lambda_1 = \frac{1}{16500}$,
- le taux de panne du roulement à billes $\lambda_2 = \frac{1}{500}$.

Nous savons aussi que le prix d'une maintenance, quel que soit l'état, est de 6 €, le prix d'une réparation lors d'une panne électronique est de 3.5 €, lors d'une panne d'électrovanne 5 € et lors d'une panne de roulement à billes 12 €. Notons que pour des raisons de confidentialité, ces valeurs ne sont pas les vraies valeurs, seul le rapport entre les différents prix est juste.

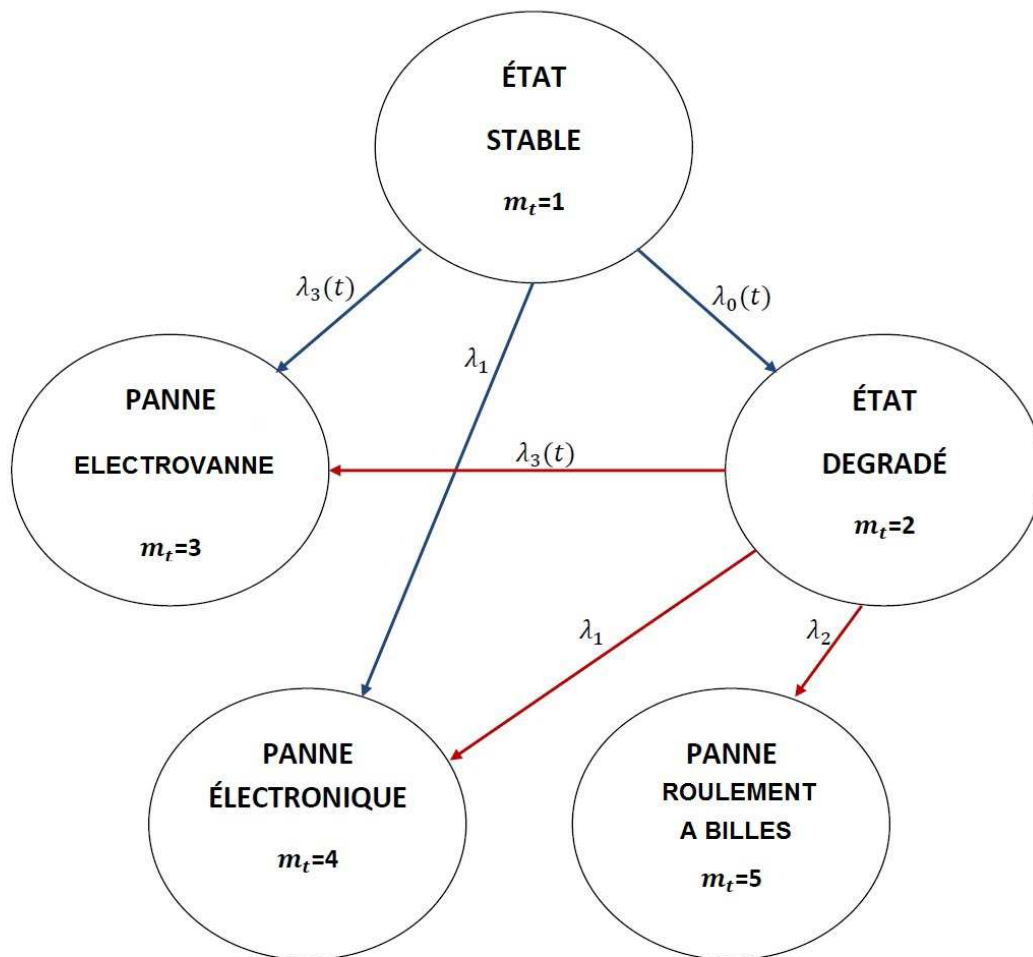


FIGURE 5.6: Illustration du fonctionnement d'un GDC

5.2 Proposition d'un date de maintenance pour les groupes de climatisation

Grâce à toutes ces informations nous pouvons lancer l'algorithme de calcul de la date optimale de maintenance pour la fonction de performance g_2 , donnée par l'équation (4.8). Le résultat est le suivant : ne pas réaliser de maintenance avant que le système passe dans un état dégradé. Ce résultat est en accord avec nos informations puisque le coût d'une réparation d'une panne directe est plus faible que celui d'une maintenance. Donc la politique de maintenance est la suivante : nous laissons le système évoluer sans réaliser de maintenance sauf s'il passe dans un état dégradé. Dans ce cas une date de maintenance est annoncée dès que l'appareil est dans un état dégradé. La Figure 5.7 nous donne les résultats de cette politique sur des trajectoires simulées d'équipements. Au temps $t = 0$, tous les équipements sont dans l'état stable (puisque'ils sont neufs). La date de maintenance annoncée est $R_1 = T^*$ qui correspond au temps maximal d'utilisation. Le système ensuite évolue. Puis, 15% des GDC ont une panne électronique, 5% ont une panne d'électrovanne et 80% passent dans l'état dégradé. Nous supposons que l'état dégradé est détecté par la méthode des chaînes de Markov cachées. Chaque équipement qui tombe dans l'état dégradé a une date de maintenance qui lui est propre. Pour ces équipements en état dégradé, 99,5% d'entre eux sont envoyés en maintenance, 0,4% tombent en panne de roulement à billes avant la date de maintenance et 0.1% en panne électronique ou d'électrovanne.

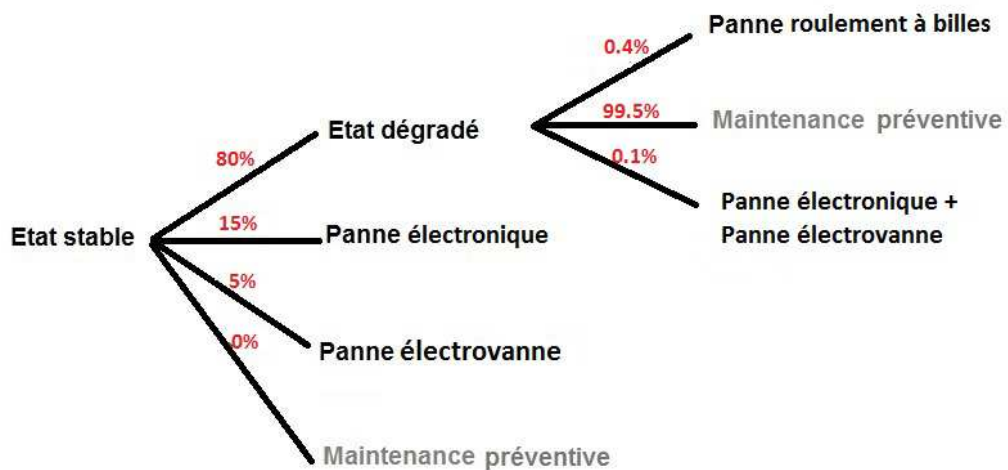


FIGURE 5.7: Résultats de l'arrêt optimal sur les GDC

5 Application industrielle

Donc 79.6% des équipements devraient être envoyés en maintenance avant de tomber en panne. Si nous ne prenons pas en compte les pannes électroniques, nous passons à 93.6% d'arrêts avant la panne.

6 Conclusion et perspectives

Dans ce travail, pour répondre à la demande spécifique de l'entreprise Thales, d'optimiser la maintenance d'un équipement optronique, nous nous sommes intéressés au HUMS d'un équipement en exploitation : les caméras thermiques, dans un contexte particulier. Nous avons répondu aux objectifs du HUMS d'évaluer l'état du système, de détecter les dérives de fonctionnement et d'optimiser les opérations de maintenance, en combinant deux procédés de traitement des données opérationnelles (collectées sur chaque appareil grâce au HUMS) et prévisionnelles (issues des analyses de fiabilité et des coûts de maintenance/réparation). L'utilisation du modèle de chaînes de Markov cachées, développé dans le chapitre 2, permet à partir des données opérationnelles d'estimer à chaque instant l'état du système, et ainsi détecter un mode de fonctionnement dégradé du système. Quant à l'arrêt optimal, développé dans le chapitre 3, il consiste à rechercher l'optimum d'une performance d'un équipement et la date de maintenance la plus adaptée à l'état estimé du système par le modèle précédent. Cette méthode s'appuie sur les processus markoviens déterministes par morceaux (PDMP). La date d'arrêt optimal est déterminée à partir des données collectées par le HUMS, les coûts, le modèle fiabiliste et l'état estimé du système. Nous avons aussi développé à partir de toutes ces informations, un système d'évaluation du risque d'échec d'une mission.

L'estimation de l'état du système associée à l'arrêt optimal sur les PDMP et aux méthodes d'évaluation de l'échec d'une mission, devrait permettre d'adapter les politiques de maintenance à l'état observé du système et aux missions, en détectant les pannes prévisibles et en annonçant une date de maintenance optimale (pouvant être modifiée selon le type de mission effectuée). L'entreprise est en mesure de définir un protocole de maintenance conditionnelle à l'état estimé du système afin d'améliorer son système de maintenance et de mieux gérer le parc d'équipements disponibles. L'entreprise Thales Optronique pourra ainsi améliorer la disponibilité des équipements au meilleur coût et améliorer la satisfaction de ses clients.

Dans ce travail,

- nous développons des technologies de détection de rupture (chaîne de Markov cachée, CUSUM),
- nous apportons une innovation par l'association de trois méthodes (estimation de l'état du système par les chaînes de Markov cachées, optimisation de la maintenance en fonction de l'état estimé du système par l'arrêt optimal et évaluation de l'échec

6 Conclusion et perspectives

d'une mission),

- nous contribuons à la constitution d'un portefeuille de propriété intellectuelle du groupe, puisque nous venons de déposer un brevet sur un outil d'aide à la décision qui calcule la date optimale de maintenance en fonction de l'état estimé du système et qui permet ainsi de déterminer le risque encouru à utiliser un système sur une mission donnée. La date optimale pouvant être avant, pendant ou après la mission. Cet outil s'appuie sur l'ensemble de ces travaux de thèse.

Ce travail est en cours d'utilisation. La méthode d'estimation de l'état du système est actuellement implémentée dans le logiciel SMARTFLEET. Quant aux méthodes d'arrêt optimal et d'évaluation de l'échec d'une mission, elles sont en période de test sur d'autres équipements que les caméras thermiques. Même si ces recherches portent sur un équipement spécifique : les caméras thermiques, elles peuvent être étendues à d'autres appareils ayant plus d'états, plus de deux sauts avant la panne...

Une autre perspective serait de travailler sur plusieurs cycles et sur les actions à mener à la date de maintenance. Nous sommes amenés à nous poser les questions suivantes :

- que se passe t-il lorsque l'équipement sort d'une maintenance ? Est il dans un état stable ou dans un état intermédiaire ?
- que devons nous faire à la date de maintenance optimale ? Changer toutes les pièces, seulement une ? Si une seule laquelle ?

Il serait vraiment intéressant de poursuivre ces interrogations. Le contrôle impulsif serait donc une suite logique à ce travail, cependant, il s'agit d'un sujet très complexe qui nécessitera un important travail de recherche.

7 Annexe

Sommaire

7.1	Annexe A : Démonstrations	101
7.1.1	Démonstrations d'existence de \bar{P} et des propriétés qui en découlent	101
7.1.2	Démonstration des équations de filtrage	103
7.2	annexe B : journal de bord d'une caméra	110
7.3	Annexe C : Codes du chapitre 3 sous Matlab	111
7.4	Annexe D : Code arrêt optimal sous R	116

7.1 Annexe A : Démonstrations

7.1.1 Démonstrations d'existence de \bar{P} et des propriétés qui en découlent

On introduit maintenant \bar{P} tel que $\bar{P} \ll P$ et $\frac{d\bar{P}}{dP} \Big|_{G_t} = \Lambda_t$ où Λ_t est la dérivée de Radon-Nikodym de \bar{P} par rapport à P sur G_t :

$$\frac{d\bar{P}}{dP} \Big|_{G_t} = \Lambda_t = \exp\left(-\int_0^t \langle X_r; c \rangle dW_r - \frac{1}{2} \int_0^t \langle X_r; c \rangle^2 dr\right).$$

En effet, d'après l'énoncé du *théoreme de Girsanov*, comme $L_t = -\int_0^t \langle X_r, c \rangle dW_r$ est une martingale locale (car drift nul) continue et $\exp(L_t - \frac{1}{2} \langle L_t; L_t \rangle)$ est une martingale locale strictement positive car :

$$\begin{aligned} \exp(L_t - \frac{1}{2} \langle L_t; L_t \rangle) &= \exp\left(-\int_0^t \langle X_r; c \rangle dW_r - \frac{1}{2} \left\langle -\int_0^t \langle X_r; c \rangle dW_r, -\int_0^t \langle X_r; c \rangle dW_r \right\rangle\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^t \langle X_r; c \rangle dW_r - \frac{1}{2} \int_0^t \langle X_r; c \rangle^2 \langle dW_r; dW_r \rangle\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^t \langle X_r; c \rangle dW_r - \frac{1}{2} \int_0^t \langle X_r; c \rangle^2 dr\right) \\ &= \Lambda_t \end{aligned}$$

7 Annexe

alors nous pouvons définir \bar{P} tel que $\frac{d\bar{P}}{dP}|_{G_t} = \Lambda_t$. De plus, d'après le *théorème de Novikov*, pour $t < T$ (on suppose l'expérience finie pour un temps T donné), comme $E_P[\exp(\langle L_t; L_t \rangle)] = E_P[\exp(\int_0^t \langle X_r; c \rangle^2 dr)] < +\infty$, Λ_t est une martingale sous P et donc $\bar{P} = \bar{P}|_{G_t}$. Donc il existe \bar{P} telle que $\frac{d\bar{P}}{dP}|_{G_t} = \Lambda_t$.

D'autre part, en utilisant le théorème d'îto (appliqué à la fonction $f(x) = \exp(-x)$) nous obtenons une nouvelle équation de Λ_t :

$$\Lambda_t = 1 - \int_0^t \Lambda_r \langle X_r; c \rangle dW_r.$$

Démonstration.

$$\Lambda_t = \exp(-Z_t) = f(Z_t) \text{ avec } Z_t = \int_0^t \langle X_r; c \rangle dW_r + \frac{1}{2} \int_0^t \langle X_r; c \rangle^2 dr$$

$$\begin{aligned} \Lambda_t &= f(Z_0) + \int_0^t -\exp -Z_t dZ_t + \frac{1}{2} \int_0^t \exp -Z_t d \langle Z_t; Z_t \rangle \\ &= 1 - \int_0^t \Lambda_r (\langle X_r; c \rangle dW_r + \frac{1}{2} \langle X_r, c \rangle^2 dr) + \frac{1}{2} \int_0^t \Lambda_r \langle X_r, c \rangle^2 dr \\ &= 1 - \int_0^t \Lambda_r \langle X_r; c \rangle dW_r \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \Lambda_t = 1 - \int_0^t \Lambda_r \langle X_r; c \rangle dW_r. \quad \square$$

Théorème de Girsanov : soit W_t un mouvement brownien dans \mathfrak{R}^d sur (Ω, F, P) , Φ un processus F -adapté tel que $\int_0^T |\Phi|^2 ds < +\infty$ P -ps, $Z_t = \exp \int_0^t \Phi_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\Phi|^2 ds$. Supposons de plus que $E[Z_T] = 1$, alors $\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \Phi_s ds$, $t \leq T$ est un mouvement brownien sous $dQ = Z_t dP$ sur F_T .

Or dans notre cas :

- W_t est un mouvement brownien dans \mathbb{R}^d sur (Ω, F, P) ,
- $\langle c; X_r \rangle$ processus F -adapté tel que $\int_0^T |\langle c; X_r \rangle|^2 dr < \infty$,
- $\Lambda_t = \exp(-\int_0^t \langle c; X_r \rangle dr - \frac{1}{2} \int_0^t |\langle c; X_r \rangle|^2 dr)$,
- Λ_t est une martingale, $E[\Lambda_T] = E[\Lambda_0] = E[\exp(0)] = 1$,
- $\frac{d\bar{P}}{dP} = \Lambda_t$ sous G_t .

Donc $Y_t - Y_0 = W_t + \int_0^t \langle c; X_r \rangle dr$ est un mouvement brownien sous \bar{P} .

Soit $\bar{\Lambda}_t = \exp(\int_0^t \langle c; X_r \rangle dY_r - \frac{1}{2} \int_0^t \langle c; X_r \rangle^2 dr)$. Par le même raisonnement que précédemment, $\bar{\Lambda}_t = \int_0^t \langle X_r, c \rangle dY_r$ est une martingale locale (processus de Wiener sous \bar{P}) continue, donc $\bar{\Lambda}_t$ est une martingale locale strictement positive et continue. Or

comme $E[\exp(\frac{1}{2} \langle \bar{L}_t; \bar{L}_t \rangle)] < \infty$ pour tout $t < T$, par Novikov on obtient que $\bar{\Lambda}_t$ est une martingale sous \bar{P} . D'autre part, en utilisant le *théorème d'ito* appliqué à la fonction $f(x) = \exp(x)$ ($\bar{\Lambda}_t = \exp(Z_t) = f(Z_t)$) nous obtenons une nouvelle équation de $\bar{\Lambda}_t$:

$$\bar{\Lambda}_t = 1 + \int_0^t \bar{\Lambda}_r \langle X_r; c \rangle dY_r. \quad (7.1)$$

Appliquons maintenant la formule d'intégration par parties pour calculer $\bar{\Lambda}_t \Lambda_t$:

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_t \Lambda_t &= 1 + \int_0^t \Lambda_r d\bar{\Lambda}_r + \int_0^t \bar{\Lambda}_r d\Lambda_r + \langle \bar{\Lambda}; \Lambda \rangle_t \\ &= 1 + \int_0^t \Lambda_r \bar{\Lambda}_r \langle X_r, c \rangle dY_r - \int_0^t \bar{\Lambda}_r \Lambda_r \langle X_r; c \rangle dW_r + \langle \bar{\Lambda}; \Lambda \rangle_t \\ &= 1 + \int_0^t \Lambda_r \bar{\Lambda}_r \langle X_r, c \rangle (dW_r - \langle c; X_r \rangle dr) - \int_0^t \bar{\Lambda}_r \Lambda_r \langle X_r; c \rangle dW_r \\ &\quad + \langle \bar{\Lambda}; \Lambda \rangle_t \\ &= 1 - \int_0^t \Lambda_r \bar{\Lambda}_r \langle X_r, c \rangle^2 dr + \int_0^t \Lambda_r \bar{\Lambda}_r \langle X_r, c \rangle^2 dr \\ &= 1 \end{aligned}$$

7.1.2 Démonstration des équations de filtrage

Considérons le processus H_t tel que :

$$H_t = H_0 + \int_0^t \alpha_r dr + \int_0^t \beta'_r dV_r + \int_0^t \delta_r dW_r$$

avec :

- α, β, δ F -prévisible, de carré intégrable,
- $\alpha_r, \delta_r \in \mathbb{R}$,
- $\beta_r \in \mathbb{R}^N$,
- C matrice avec diagonale (c_1, c_2, \dots, c_N) .

X_t et H_t étant des semi-martingales càdlàg, par la formule d'ito pour les semi-

martingales càdlàg, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
H_t X_t &= H_0 X_0 + \int_0^t X_{s-} dH_s + \int_0^t H_{s-} dX_s + [H, X]_t \\
&= H_0 X_0 + \int_0^t X_{s-} (\alpha_s ds + \beta'_s dV_s + \delta_s dW_s) \\
&\quad + \int_0^t H_{s-} (A_s X_s ds + dV_s) + [H, X]_t \\
&= H_0 X_0 + \int_0^t X_s \alpha_s ds + \int_0^t X_{s-} \beta'_s dV_s \\
&\quad + \int_0^t X_{s-} \delta_s dW_s + \int_0^t H_s A_s X_s ds \\
&\quad + \int_0^t H_{s-} dV_s + [H, X]_t
\end{aligned}$$

Calculons $[H, X]_t$:

$$[H, X]_t = \sum_{0 < r \leq t} \Delta H_r \Delta X_r.$$

Or, nous pouvons observer que les sauts de H_t sont les sauts de sa partie martingale (le reste étant continu), donc :

$$[H, X]_t = \sum_{0 < r \leq t} (\beta'_r \Delta V_r) \Delta X_r.$$

Mais les sauts de V_r sont aussi ceux de X_r ,

$$[H, X]_t = \sum_{0 < r \leq t} (\beta'_r \Delta X_r) \Delta X_r.$$

De plus, X_r prend ses valeurs dans $S = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}$,

$$[H, X]_t = \sum_{0 < r \leq t, i, j} (\beta'_r \Delta X_r) (e_j - e_i).$$

Considérons ΔX_t comme un vecteur avec que des 0 sauf à la $j^{\text{ème}}$ ligne où nous observons un 1 et à la $i^{\text{ème}}$ ligne un -1 . Notons ζ_t^{ij} le nombre de sauts de e_i vers e_j

sur $[0, t]$ et définissons la martingale V_t^{ij} :

$$\begin{aligned}
 V_t^{ij} &= \int_0^t \langle X_{s-}; e_i \rangle e'_j dV_s \\
 &= \int_0^t \langle X_{s-}; e_i \rangle e'_j dX_s - \int_0^t \langle X_{s-}; e_i \rangle e'_j A_s X_{s-} ds \\
 &= \zeta_t^{ij} - \int_0^t \langle X_{s-}; e_i \rangle e'_j A_s X_{s-} ds \\
 &= \zeta_t^{ij} - \int_0^t \langle X_s; e_i \rangle a_{ji}(s) ds
 \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 [H, X]_t &= \sum_{i,j} \int_0^t (\beta_r^j - \beta_r^i) \langle X_{r-}, e_i \rangle \langle dV_r, e_j \rangle (e_j - e_i) \\
 &\quad + \sum_{i,j} \int_0^t \langle (\beta_r^j - \beta_r^i) X_r; e_i \rangle a_{ji} dr (e_j - e_i).
 \end{aligned}$$

Conclusion 1.

$$\begin{aligned}
 H_t X_t &= H_0 X_0 + \int_0^t X_s \alpha_s ds + \int_0^t X_{s-} \beta'_s dV_s + \int_0^t X_{s-} \delta_s dW_s \\
 &\quad + \int_0^t H_s A_s X_s ds + \int_0^t H_{s-} dV_s \\
 &\quad + \sum_{i,j} \int_0^t (\beta_r^j - \beta_r^i) \langle X_{r-}, e_i \rangle \langle dV_r, e_j \rangle (e_j - e_i) \\
 &\quad + \sum_{i,j} \int_0^t \langle (\beta_r^j - \beta_r^i) X_r; e_i \rangle a_{ji} dr (e_j - e_i)
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Notons $\sigma(H_t X_t) = \bar{E}[\bar{\lambda}_t H_t X_t | \mathcal{Y}_t]$.

Théorème 1.

$$\begin{aligned}
 \sigma(H_t X_t) &= \sigma(H_0 X_0) + \int_0^t \sigma(X_s \alpha_s) ds + \int_0^t A \sigma(H_s X_s) ds \\
 &\quad + \int_0^t \sum_{i,j=1}^N \langle \sigma(\beta_s^j X_s - \beta_s^i X_s); e_i \rangle a_{ji} ds (e_j - e_i) \\
 &\quad + \int_0^t (\sigma(\delta_s X_s) + C \sigma(H_s X_s)) dy_s
 \end{aligned}$$

Démonstration. Appliquons la formule d'ïto au produit de $\bar{\Lambda}_t$ et $H_t X_t$:

$$\bar{\Lambda}_t H_t X_t = \bar{\Lambda}_0 H_0 X_0 + \int_0^t H_{r-} X_{r-} d\bar{\Lambda}_r + \int_0^t \bar{\Lambda}_{r-} d(X_r H_r) + [XH, \bar{\Lambda}]_t.$$

Puis en développant cette formule à partir de l'équation (7.2), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_t H_t X_t &= H_0 X_0 + \int_0^t H_{r-} X_{r-} d\bar{\Lambda}_r + [XH, \bar{\Lambda}]_t \\ &+ \int_0^t \bar{\Lambda}_r (X_r \alpha_r dr + \beta_r X_{r-} dV_r + \delta_r X_{r-} dW_r + H_r A X_r dr + H_{r-} dV_r \\ &+ \sum_{i,j=1}^N (\beta_r^j - \beta_r^i) \langle X_{r-}; e_i \rangle \langle e_j; dV_r \rangle (e_j - e_i) \\ &+ \sum_{i,j=1}^N \langle \beta_r^j X_r - \beta_r^i X_r; e_i \rangle a_{ji} dr (e_j - e_i)) \\ &= H_0 X_0 + \int_0^t H_{r-} X_{r-} d\bar{\Lambda}_r + [XH; \bar{\Lambda}]_t \\ &+ \int_0^t \alpha_r \bar{\Lambda}_r X_r dr + \int_0^t \beta_r \bar{\Lambda}_{r-} X_{r-} dV_r + \int_0^t \delta_r \bar{\Lambda}_{r-} X_{r-} dW_r \\ &+ \int_0^t \bar{\Lambda}_r H_r A X_r dr + \int_0^t \bar{\Lambda}_{r-} H_{r-} dV_r \\ &+ \sum_{i,j=1}^N \int_0^t (\beta_r^j - \beta_r^i) \langle \bar{\Lambda}_{r-} X_{r-}; e_i \rangle \langle e_j; dV_r \rangle (e_j - e_i) \\ &+ \sum_{i,j=1}^N \int_0^t \langle \beta_r^j \bar{\Lambda}_r X_r - \beta_r^i \bar{\Lambda}_r X_r; e_i \rangle a_{ji} dr (e_j - e_i) \end{aligned}$$

Or par l'équation (7.1), nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^t H_{r-} X_{r-} d\bar{\Lambda}_r &= \int_0^t H_{r-} X_{r-} \bar{\Lambda}_r \langle X_r; c \rangle dY_r \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\int_0^t \langle X_r \bar{\Lambda}_r; e_i \rangle c_i H_r dy_r \right) e_i \end{aligned}$$

et nous pouvons aussi remarquer que :

$$\begin{aligned}
 [XH, \bar{\lambda}]_t &= \left[H_0 X_0 + \int_0^t X_s \alpha_s ds + \int_0^t X_s \beta'_s dV_s + \int_0^t X_s \delta_s dW_s; 1 + \int_0^t \bar{\lambda}_r \langle X_r; c \rangle dY_r \right] \\
 &= \int_0^t \delta_r X_r \bar{\lambda}_r \langle X_r; c \rangle dr \\
 &= \sum_{i=1}^N \int_0^t \delta_r \langle \bar{\lambda}_r X_r; e_i \rangle dr c_i e_i
 \end{aligned}$$

Maintenant, introduisons ces deux nouvelles valeurs dans l'équation générale :

$$\begin{aligned}
 \bar{\lambda}_t H_t X_t &= H_0 X_0 + \sum_{i=1}^N \left(\int_0^t \langle X_r \bar{\lambda}_r; e_i \rangle c_i H_r dY_r \right) e_i \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N \int_0^t \delta_r \langle \bar{\lambda}_r X_r; e_i \rangle dr c_i e_i + \int_0^t \alpha_r \bar{\lambda}_r X_r dr \\
 &\quad + \int_0^t \beta_r \bar{\lambda}_r X_r dV_r + \int_0^t \delta_r \bar{\lambda}_r X_r dW_r \\
 &\quad + \int_0^t \bar{\lambda}_r H_r A X_r dr + \int_0^t \bar{\lambda}_r H_r dV_r \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^N \int_0^t (\beta_r^j - \beta_r^i) \langle \bar{\lambda}_r X_r; e_i \rangle \langle e_j; dV_r \rangle (e_j - e_i) \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^N \int_0^t \langle \beta_r^j \bar{\lambda}_r X_r - \beta_r^i \bar{\lambda}_r X_r; e_i \rangle a_{ij} dr (e_j - e_i)
 \end{aligned}$$

Calculons pour chaque élément l'espérance conditionnelle sachant \mathcal{Y}_t :

$$- E[\bar{\lambda}_t H_t X_t | \mathcal{Y}_t] = \sigma(H_t X_t)$$

– Les éléments « en dr » :

$$\begin{aligned}
E[\bar{\lambda}_t H_0 X_0 + \int_0^t \alpha_r \bar{\lambda}_r X_r dr | \mathcal{Y}_t] &= \sigma(H_0 X_0) + \int_0^t \sigma(\alpha_r X_r) dr, \\
E[\int_0^t \bar{\lambda}_r H_r A X_r dr | \mathcal{Y}_t] &= \int_0^t \sigma(H_r A X_r) dr, \\
E[\sum_{i=1}^N \int_0^t \delta_r \langle \bar{\lambda}_r X_r; e_i \rangle dr c_i e_i | \mathcal{Y}_t] &= \int_0^t \sum_{i=1}^N \langle \sigma(\delta_r X_r); e_i \rangle dr c_i e_i, \\
E[\sum_{i,j=1}^N \int_0^t \langle \beta_r^j \bar{\lambda}_r X_r - \beta_r^i \bar{\lambda}_r X_r; e_i \rangle a_{ij} dr (e_j - e_i) | \mathcal{Y}_t] \\
&= \int_0^t \sum_{i,j=1}^N \langle \sigma(\beta_r^j X_r - \beta_r^i X_r); e_i \rangle a_{ji} dr (e_j - e_i).
\end{aligned}$$

– Les éléments « en dV_r » :

$$\begin{aligned}
E[\int_0^t \beta_r \bar{\lambda}_{r-} X_{r-} dV_r | \mathcal{Y}_t] + E[\sum_{i=1}^N \int_0^t (\beta_r^j - \beta_r^i) \langle \bar{\lambda}_{r-} X_{r-}; e_i \rangle \langle e_j, dV_r \rangle (e_j - e_i) | \mathcal{Y}_t] \\
= E[\int_0^t \beta_r \bar{\lambda}_{r-} X_{r-} dV_r + \sum_{i=1}^N \int_0^t (\beta_r^j - \beta_r^i) \langle \bar{\lambda}_{r-} X_{r-}; e_i \rangle \langle e_j, dV_r \rangle (e_j - e_i)]
\end{aligned}$$

car V_t indépendante de Y_t .

$$= 0$$

puisque pour $t \leq T$ (avec T un temps donné qui correspond à la durée de l'expérience), V_t est une martingale finie, continue par morceaux (nombre fini de morceaux).

– Les éléments « en dW_r » : En remplaçant $dW_t = dY_t - c(X_t)dt$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
E[\sum_{i=1}^N (\int_0^t \langle X_r \bar{\lambda}_r; e_i \rangle c_i H_r dY_r) e_i + \int_0^t \delta_r \bar{\lambda}_{r-} X_{r-} dW_r | \mathcal{Y}_t] \\
= E[\sum_{i=1}^N (\int_0^t \langle X_r \bar{\lambda}_r; e_i \rangle c_i H_r dY_r) e_i \\
+ \int_0^t \delta_r \bar{\lambda}_{r-} X_{r-} (dY_r - c(X_r) dr) | \mathcal{Y}_t] \\
= \int_0^t (\sigma(\delta_s X_s) + C \sigma(H_s X_s)) dY_s - E[\int_0^t \delta_r \bar{\lambda}_{r-} X_{r-} c(X_r) dr | \mathcal{Y}_t]
\end{aligned}$$

par le théorème de fubini de Wong et Hajek (1985).

Alors,

$$\begin{aligned}
\sigma(H_t X_t) &= \sigma(H_0 X_0) + \int_0^t \sigma(\alpha_r X_r) dr + \int_0^t \sigma(H_r A X_r) dr \\
&+ \int_0^t \sum_{i,j=1}^N \langle \sigma(\beta_r^j X_r - \beta_r^i X_r); e_i \rangle a_{ji} dr (e_j - e_i) \\
&+ \int_0^t (\sigma(\delta_s X_s) + C \sigma(H_s X_s)) dY_s \\
&- E \left[\int_0^t \delta_r \bar{\lambda}_{r-c}(X_r) dr \middle| \mathcal{Y}_t \right] \\
&+ \int_0^t \sum_{i=1}^N \langle \sigma(\delta_r X_r); e_i \rangle dr c_i e_i
\end{aligned}$$

Or $E \left[\int_0^t \delta_r \bar{\lambda}_{r-c}(X_r) dr \middle| \mathcal{Y}_t \right] + \int_0^t \sum_{i=1}^N \langle \sigma(\delta_r X_r); e_i \rangle dr c_i e_i = 0$. Donc,

$$\begin{aligned}
\sigma(H_t X_t) &= \sigma(H_0 X_0) + \int_0^t \sigma(\alpha_r X_r) dr + \int_0^t \sigma(H_r A X_r) dr \\
&+ \int_0^t \sum_{i,j=1}^N \langle \sigma(\beta_r^j X_r - \beta_r^i X_r); e_i \rangle a_{ji} dr (e_j - e_i) \\
&+ \int_0^t \sum_{i=1}^N \langle \sigma(\delta_r X_r); e_i \rangle dr c_i e_i \\
&+ \int_0^t (\sigma(\delta_r X_r) + C \sigma(H_r X_r)) dY_r
\end{aligned}$$

□

7.2 annexe B : journal de bord d'une caméra

Nombre d'utilisations	Compteur horaire (min)	Temperature initiale (C)	Durée mise en froid (s)
1	1852	10	288
2	1866	6	284
3	1871	7	267
4	1955	4	262
5	2000	12	291
6	2178	12	299
7	2191	13	294
8	2400	10	282
9	2719	3	287
10	2933	3	270
11	3030	-2	274
12	3075	11	285
13	3227	2	283
14	3593	8	282
15	4279	8	281
16	4538	1	285
17	4794	11	291
18	5164	4	291
19	5181	14	288
20	5344	16	295
21	5567	8	290
22	5718	15	258
23	5758	15	294
24	5847	16	293
25	6157	14	291
26	6337	17	295
27	6769	7	291
28	7165	13	290
29	7447	18	302
30	7504	5	297
31	7901	13	279
32	7926	15	295
33	8209	12	289
34	8474	10	285
35	8495	15	296
36	8503	14	297
37	8858	16	294
38	9242	8	294
39	9323	8	285
40	9630	12	283
41	10023	11	281
42	10400	11	281
43	10695	2	285
44	11032	16	289
45	11038	8	289
46	11384	8	292
47	11668	6	287
48	11877	0	269
49	11940	8	291
50	12067	8	285
51	12353	10	283
52	12674	16	293
53	12957	9	294
54	13123	12	296
55	13197	15	294
56	13403	10	290
57	13524	2	287
58	13553	15	290
59	13607	10	288
60	13640	9	283
61	13709	6	290
62	14002	14	293
63	14440	12	290
64	14623	4	274
65	14694	8	283
66	14915	4	279
67	14958	13	297
68	15136	4	294
69	15402	9	294
70	15717	11	291
71	16134	14	292
72	16407	6	296
73	16461	19	298
74	16526	14	300
75	16846	16	302
76	16960	20	305
77	17006	20	304
78	17222	13	305
79	17296	22	314
80	17615	25	316
81	17788	9	273
82	17821	10	294
83	17879	20	313
84	17902	16	312
85	18130	21	321
86	18138	18	321
87	18264	12	335
88	18286	16	318
89	18313	12	317

FIGURE 7.1: Journal de bord d'une caméra

7.3 Annexe C : Codes du chapitre 3 sous Matlab

Pour simuler X_t et Y_t , nous simulons les temps de saut ($s(n,a,b)$) où n est le nombre de sauts, $a = a_{12}$ et $b = a_{21}$ les paramètres de la matrice A . Sachant que le système à l'instant $t=0$ est dans l'état stable, nous pouvons construire X_t . Puis grâce à l'équation de Y_t (3.2) nous pouvons simuler cette variable.

```
%Simulation des sauts:
```

```
function y=s(n,a,b)
    if mod(n,2)==1
        y=-(1/a)*log(rand);
    else
        y=-(1/b)*log(rand);
    end
end
```

```
=====
%Simulation de X:
```

```
a= ; %Choix de la matrice A
b= ;
c= ; %Choix du vecteur c
d= ;
p=0.1;
A=[-a,a;b,-b];
C=[d,c];

Tr(1)=s(1,a,b);
N=10000;
for i=2:1:N
    Tr(i)=Tr(i-1)+s(i,a,b);
end

i=1;
for j=1:2:10000
    while (p*i<=Tr(j))
        Xr(i)=0;
        i=i+1;
    end
    while (p*i<=Tr(j+1))
        Xr(i)=1;
```



```

        i=i+1;
    end
end
=====
%Simulation de y(t):
Yr(1)=sqrt(p)*randn(1);
for i=2:1:10000
    if (Xr(i-1)==1)
        Yr(i)=Yr(i-1)+c+sqrt(p)*randn(1);
    else
        Yr(i)=Yr(i-1)+d+sqrt(p)*randn(1);
    end
end
end

```

Programme pour l'estimation de la matrice A sous matlab :

L'estimation de la matrice A est réalisée à partir des équations de filtrage (3.4).

```

a=;           %Choix de A0:
k(1)=a;
b=;
A=[-a,a;b,-b];
d=;           %1ere coordonnee du vecteur c
c=;           %2eme coordonnee du vecteur c

for w=2:1:700 %Boucle pour l'estimation de a

e=[0 1];
f=[d 0;0 c];
g=[1;0];
h=[1 0];
SX=[1;0];
SSa=[1;1];
SOa=[1;0];

    for i=2:1:1000

        SX=SX+A*SX*p+f*SX*(Yr(i+1)-Yr(i)); %Sigma(X)
        %Calcul du numerateur de l'estimateur de a:
    end
end

```

7.3 Annexe C: Codes du chapitre 3 sous Matlab

```
SSa=A*SSa*p+A(1,2)*(g*(h*SX))*p+(f*SSa)*(Yr(i+1)-Yr(i))+SSa;
%Calcul du denominateur de l'estimateur de a
S0a=(h*SX)*[1;0]*p+A*S0a*p+(f*S0a)*(Yr(i+1)-Yr(i))+S0a;

end

a=([1 1]*SSa)/([1 1]*S0a); %Calcul de l'estimateur de a
A=[-a a;b -b];
k(w)=a;
end
plot(k) %Evolution de l'estimateur de a
A      %Matrice A
```

Programme pour l'estimation du vecteur c sous matlab :

L'estimation du vecteur c est réalisée à partir des équations de filtrage (3.4).

```
a=;
b=;
A=[-a,a;b,-b]; %Matrice A
d=;           %1ere coordonnee du vecteur c
c=;           %2eme coordonnee du vecteur c
p=1;         %Le pas

Tr(1)=s(1,0.1,0.05); %Simulation des X
N=10000;
for i=2:1:N
    Tr(i)=Tr(i-1)+s(i,0.1,0.05);
end
i=1;
for j=1:2:10000
    while (p*i<=Tr(j))
        Xr(i)=0;
        i=i+1;
    end
    while (p*i<=Tr(j+1))
        Xr(i)=1;
        i=i+1;
    end
end
```

7 Annexe

```
end

Yr(1)=sqrt(p)*randn(1);      %Simulation des Tmf
for i=2:1:10000
    if (Xr(i-1)==1)
        Yr(i)=Yr(i-1)+c+sqrt(p)*randn(1);
    else
        Yr(i)=Yr(i-1)+d+sqrt(p)*randn(1);
    end
end

c= ;                          %Choix de la 2eme coordonnee de c0
cc(1)=c;
p=0.1;                         %Pas pour le calcul de l'integrale

for w=2:1:400                  %Boucle pour l'estimation de c
    e=[0 1];                   %Initialisation
    f=[d 0;0 c];
    g=[1;0];
    h=[1 0];
    SX=[1;0];
    SOb=[0;1];
    STT=[0;1];

    for i=2:1:3

        SX=SX+A*SX*p+f*SX*(Yr(i+1)-Yr(i)); %Sigma(X)
        %Denominateur de l'estimateur de c:
        SOb=(e*SX)*[0;1]*p+A*SOb*p+(f*SOb)*(Yr(i+1)-Yr(i))+SOb;
        %Calcul du numerateur de l'estimateur de c:
        if (Xr(i)==0)
            STT=(A*STT)*p+(e*SX)*[0;1]*(Yr(i+1)-Yr(i))
                +(f*STT)*(Yr(i+1)-Yr(i))+STT;
        else
            STT=(c*p*SX)+(e*SX)*[0;1]*(Yr(i+1)-Yr(i))
                +(A*STT)*p+(f*STT)*(Yr(i+1)-Yr(i))+STT;
        end
    end
end
c=([1 1]*STT)/([1 1]*SOb);
cc(w)=c;
```

```

end
C=[d,c];      %Vecteur c
plot(cc)      %Evolution de l'estimateur de c

```

Programme pour le calcul de la probabilité conditionnelle que le système soit en état dégradé sous matlab :

Ce calcul est réalisé à partir des équations de filtrage (3.3).

```

%Matrice A:
A= ;
%Vecteur c:
d=;
c=;
C=[d,c]

p=0.1;
f=[d 0;0 c];
SX=[1;0];
sigm(1)=1;
sigms(1)=0.5;
r(1)=0;

l=;          %vecteur des donnees lissees:
s=size(l);
s=s(1)-1;

for i=1:1:s
    SX=SX+A*SX*p+f*SX*(l(i+1)-l(i));
    sigm(i)=[1 1]*SX;
    sigms(i)=[0 1]*SX;
    z=sigms(i)/sigm(i); %Probabilite d'etre dans un etat degrade
    if (z>=0)&(z<=1)
        r(i)=z;
    else
        if z<0
            r(i)=0;
        else r(i)=1;
        end
    end
end

```

```

    end
end
plot(r)                %Graphique de la probabilite d'etre dans
                        %un etat degrade au cours des iterations

```

7.4 Annexe D : Code arrêt optimal sous R

```

#1ere partie: simulation des temps de panne
landaM <- fonction(t,A,B,l1,lA,lB)  #somme des lambdas pour un systeme
{
    #dans l'etat stable: 1er saut.
    landaM <- (l1+(lB/lA)*(t/lA)^(lB-1)+(B/A)*(t/A)^(B-1))
    landaM
}
landaD <- fonction(t,A,B,l1,l2)    #somme des lambdas pour un systeme
{
    #dans l'etat degrade: 2eme saut
    landaD <- (l1+l2+(B/A)*(t/A)^(B-1))
    landaD
}

simuT1<-fonction(A,B,l1,lA,lB)     #simulation du 1er temps de saut T1
{
    p<-0
    T1<-NULL
    M<-0

    while ((is.null(T1))&(M>=0))
    {
        P<-200
        M<-max(landaM(c(p+1:P+p),A,B,l1,lA,lB))
        n=rpois(1,(M*P))
        U<-NULL
        if (n != 0)
        {
            u<-runif(n,min=p,max=p+P)
            v<-runif(n,min=0,max=M)
            U<-u[v<=landaM(u,A,B,l1,lA,lB)]

            if (sum(v<=landaM(u,A,B,l1,lA,lB)) != 0)
            {
                x<-min(U)
            }
        }
    }
}

```

```

    T1<-x
  }
      else
        {p<-P+p}
    }
      else
        {p<-P+p}
  }
T1
}

simuS2<-function(A,B,l1,l2,T1)      #simulation du 2eme temps de saut
{
p<-0
S2<-NULL
M<-0

while ((is.null(S2))&(M>=0))
{
P<-100
M<-max(landaD(c(T1+p+1:T1+P+p),A,B,l1,l2))
n=rpois(1,(M*P))
U<-NULL
if (n != 0)
  {
    u<-runif(n,min=p,max=p+P)
    v<-runif(1,min=0,max=M)
    U<-u[v<=landaD(u + T1,A,B,l1,l2)]

    if (sum(v<=landaD(u+T1,A,B,l1,l2)) != 0)
      {
        x<-min(U)
        S2<-x
      }
      else {p<-P+p}
  }
else
{p<-P+p}
}
S2

```

7 Annexe

```
}
```

```
=====
=====
```

```
#2eme partie: simulation des donnees X=(ETAT,T1)
```

```
A=12000 #parametre alpha weibull pour bille
B=2      #parametre beta weibull pour bille
l1=1/10000 #lambda pour panne electrique
l2=1/95   #lambda pour panne d'usure maf
lA= 8375  #parametre alpha weibull pour degradation maf
lB=1.4    #parametre beta weibull pour degradation maf
Ns= 100000 #nombre de trajectoires simulees
```

```
X=NULL
```

```
MD<-0
```

```
#creation d'un tableau(4 lignes et Ns colonnes)de valeurs note X:
```

```
#1ere ligne du tableau represente son etat au temps T1,
```

```
#2eme ligne du tableau represente le 1er temps de saut,
```

```
#3eme ligne du tableau represente son etat au 2eme saut,
```

```
#4eme ligne du tableau represente le temps dans le 2eme etat (S2).
```

```
for (i in 1:Ns)
```

```
{
```

```
T<-simuT1(A,B,l1,lA,lB) #T1
```

```
MD<-((lB/lA)*(T/lA)^(lB-1))/(l1+((lB/lA)*(T/lA)^(lB-1))+(B/A)*(T/A)^(B-1))
```

```
MPE<-l1/(l1+((lB/lA)*(T/lA)^(lB-1))+(B/A)*(T/A)^(B-1))
```

```
MPB<-((B/A)*(T/A)^(B-1))/(l1+((lB/lA)*(T/lA)^(lB-1))+(B/A)*(T/A)^(B-1))
```

```
Z<-t(1:3)%*%rmultinom(1,1,c(MD,MPB,MPE))+1 #ETAT au temps T1
```

```
X<-cbind(X,c(Z,T)) #matrice de vecteurs (ETAT T1, T1)
```

```
}
```

```
X3<-NULL
```

```
S2<- NULL
```

```
T2<-NULL
```

```
for (i in 1:Ns)
```

```
{
```

```
if (X[1,i]==2)
```

```
{
```

7.4 Annexe D: Code arrêt optimal sous R

```

S2<-simuS2(A,B,l1,l2, X[2,i])
T2<-X[2,i]+S2          #2eme temps de saut T2=S2+T1
MPM<-l2/(l1+l2+(B/A)*(T2/A)^(B-1))
MPE<-l1/(l1+l2+(B/A)*(T2/A)^(B-1))
MPB<-((B/A)*(T2/A)^(B-1))/(l1+l2+(B/A)*(T2/A)^(B-1))
Z<-t(1:3)%*%rmultinom(1,1,c(MPB,MPE,MPM))+2 #Etat au temps T2

}
else
{
          S2<- 0
          Z<-X[1,i]

}
X3<-cbind(X3,c(Z,S2)) #matrice des vecteurs (ETAT au temps T2, S2)
}

X<-rbind(X,X3)

=====
=====
#3eme partie: QUANTIFICATION

# Variables :
# p (norme L^p)
# N (nombre de quantifieurs)
# X (realisations selon la loi qu on souhaite quantifier)
#d la dim

d=
p=
N=
# fonctions preliminaires:la distance
distancel2<-function(x,y)
{
  d<- length(x)
  vec<- c(3000000,rep(1,d-1))
  distancel2<-sqrt(sum((vec*(x-y))^2));
}

```


7 Annexe

```
#fonction delta
delt<-function(n,N)
{
a<-4*N^(1/d)
b<-((pi)^2)*N^(-2/d)
d0<-1
delt<-d0*a/(a+d0*b*n)
}

#fonction qui permet de retrouver le couple dans la grille
C<-function(grille,x,N){
d<-length(x)
  dis<-NULL;
matx<- matrix(rep(x,N),ncol=N)
dis<- c(900000000,rep(1,d-1))%*%((matx-grille)*(matx-grille))
j<-which(dis==min(dis))
j<-j[1]
  if (d>1)
  {
      C<-list(grille[,j],j)
  }
  else
  {
      C<-list(grille[j],j)
  }
}

#fonction gradient
grad<-function(p,grille,x,N)
{
  d<-length(x)
  u<-C(grille,x,N)[[1]]
  y<-C(grille,x,N)[[2]]
  r <- matrix (rep(rep(0,d),N), ncol=N)
  if (any (x!=u))
  {
    if (d>1)
    {
      r[,y]<- p*( ((u-x)/distancel2(x,u))*((distancel2(x,u))^(p-1)))
    }
  }
}
```

```

    }
    else
    {
        r[y]<- p*((u-x)/distancel2(x,u))*((distancel2(x,u))^(p-1))
    }
}
grad<-r
}

#Quantification
quantif<-function(p,N,data1)
{
    d<-length(data1[,1]) #dimension de l espace sur lequel on travaille
    if (d>1) #initialisation de la grille
    {g<-data1[,1:N]}
    else
    {g<-data1[1:N]} #chaque colonne de simu est une realisation
    #selon la loi
    nbre<-length(data1[1,])#nombre d iterations

    for (s in (N+1):nbre) #iterations
    {
        simu<-data1[,s]
        g<-g-(delt(s,N)/p)*grad(p,g,simu,N);
    }
    quantif<-g
}

=====
#grille de quantification:

#grille de quantification pour T1
QT1<-NULL
QT11<-NULL
QT2<- NULL
QT22<- NULL
QT11<-quantif (2,N,X[1:2,])
trans<-t(QT11)
QT1t<-trans[order(trans[,2]),]

```

7 Annexe

```

QT1<-t(QT1t)

#grille de quantification pour T2
QT22<-quantif (2,N,X[3:4,])
trans<-t(QT22)
QT2t<-trans[order(trans[,2]),]
QT2<-t(QT2t)

=====
#nouvelles simulations pour calculer les probabilités de chaque cellule

X=NULL
MD<-0
for (i in 1:Ns) # On simule nouveau Ns trajectoire pour realiser
{
# une nouvelle matrice X (cf precedemment).
T<-simuT1(A,B,l1,lA,lB)
#print(i)
MD<-((1B/lA)*(T/lA)^(1B-1))/(11+((1B/lA)*(T/lA)^(1B-1))+(B/A)*(T/A)^(B-1))
MPE<-11/(11+((1B/lA)*(T/lA)^(1B-1))+(B/A)*(T/A)^(B-1))
MPB<-((B/A)*(T/A)^(B-1))/(11+((1B/lA)*(T/lA)^(1B-1))+(B/A)*(T/A)^(B-1))
Z<-t(1:3)%*%rmultinom(1,1,c(MD,MPB,MPE))+1
X<-cbind(X,c(Z,T))
}

X3<-NULL
S2<- NULL
T2<-NULL
for (i in 1:Ns)
{
if (X[1,i]==2)
{
S2<-simuS2(A,B,l1,l2, X[2,i])
T2<-X[2,i]+S2
MPM<-12/(11+12+(B/A)*(T2/A)^(B-1))
MPE<-11/(11+12+(B/A)*(T2/A)^(B-1))
MPB<-((B/A)*(T2/A)^(B-1))/(11+12+(B/A)*(T2/A)^(B-1))
Z<-t(1:3)%*%rmultinom(1,1,c(MPB,MPE,MPM))+2
}
else
{

```

7.4 Annexe D: Code arrêt optimal sous R

```

                S2<- 0
                Z<-X[1,i]
    }
X3<-cbind(X3,c(Z,S2))
}

X<-rbind(X,X3)

=====
=====
# 4eme partie: allocation des points a la grille

proj<-function(mat,grille,N)
{
vchap<-NULL
for (i in 1:dim(mat)[[2]])
{j<-C(grille,mat[,i],N)[[2]]
vchap<-cbind(vchap,c(grille[,j],j))
}
proj<-vchap
}

# on note X1 le vecteur (ETAT au temps T1, T1)
# on note X2 le vecteur (ETAT au temps T2, S2)

X1chap<-NULL
X2chap<-NULL
X1chap<- proj(X[1:2,],QT1,N) #projection de X1 sur la grille QT1
X2chap<- proj(X[3:4,],QT2,N) #projection de X2 sur la grille QT2
Xc <- rbind(X, X1chap[2,],X2chap[2,],X1chap[3,],X2chap[3,])
#Xc est une matrice dont les 4 premieres lignes sont celles
#de la matrice X, la 5eme et 6 eme ligne represente T1 et S2 quantifies
#et la 7eme et 8eme lignes leurs coordonnees dans la grille des temps G.

=====
=====
#5eme partie: calcul des probabilites des points de la grille de
#quantification:

#tableau crois

```

7 Annexe

```
XD <- Xc[, which(X[1,]<2.5)]

cum<-function(vec1,vec2)
{
prd<- table(vec1,vec2)
M<-table(vec1,vec2)
for (i in 1:dim(prd)[[1]])
{
M[i,]=cumsum(prd[i,])/sum(prd[i,])
}
cum<-M
}
#tableau des probabilites de passer dans l'etat panne sachant T1chap
prd2<- cum(XD[5,],XD[6,])

#probabilites des T2 sachant T1
prt2<-table(XD[5,],XD[6,])/length(XD[1,])

#probabilites de passer a l'etat 2 avant t:
pd<-table(XD[5,])/Ns
frd<-cumsum(pd)

#probabilites de sauter avant t
p1t<-table(Xc[5,])/Ns
frt<- cumsum(p1t)

#probabilites de passer a l'etat 3 au temps T1
Xr<- Xc[, which((X[1,]<3.5)&(X[1,]>2.5))]
pr<-table(Xr[5,])/Ns

#probabilites de passer a l'etat 4 au temps T1
Xe<- Xc[, which(X[1,]>3.5)]
pe<-table(Xe[5,])/Ns

XD2ordre<-unique(sort(XD[6,]))
mat2d<-XD[c(3,6),(order(XD[6,]))]
XD1ordre<-unique(sort(XD[5,]))
```

```
=====
=====
```

7.4 Annexe D: Code arrêt optimal sous R

```
#5eme partie: Calcul des V

#grille des temps dans l'etat degrade au temps T1 quantifie, note GT1D
tetoile<-40000 #t*#
delta1<-90
delta2<-20      #delta t #

GT1D<-NULL
GT1D<- list(rep(0,N))
for (i in (which(QT1[1,]<2.5)))
{
  GT1D[[i]]<-c(seq(0,(floor((tetoile-QT1[2,i])/delta2)-1)*delta2,delta2))
}

#grille des temps dans l'etat stable, note GT0
GT0<-seq(0,(floor(tetoile/delta1)-1)*delta1,delta1)

#on pose etat stable=1
#on pose etat degrade=2
#on pose etat Panne R.B=3 et r prix panne r.b
#on pose etat Panne Electronique=4 et e prix panne electronique
#on pose etat Panne maf=5 et m prix panne maf
#c1 prix 1ere maintenance
#c2 prix 2eme maintenance
#N nombre d'elements dans la grille
#Ns nombre de simulations
#nZ1 la taille de t1
r=
e=
m=
c1=
c2=

V2<-function(etatpanne, T2chap) #fonction de performance
{
  if (etatpanne==4)
    {V2<-T2chap/e}
  else
```

7 Annexe

```
        {if (etatpanne==3)
          {V2<-T2chap/r}
          else
          {V2<-T2chap/m}

}

V1<-function(etatT1,T1chap,indicet1quantif,t1 ) #fonction V1(Z1)
{
partieA<-NULL
partieB<-NULL

if (etatT1>3.5)
  {
  V1<-c(T1chap/e,1,T1chap)
  }

else{
if ((etatT1<3.5)&(etatT1>2.5))
  {
  V1<-c(T1chap/r,1,T1chap)
  }

else
  {

for (j in 1:length(t1))
  {
ga<-0
for (i in 1:length(QT2[1,]))
  {
  ordre2<-which(XD2ordre==QT2[2,i])
  ordre1<-which(XD1ordre==T1chap)

partieB<-partieB+V2(QT2[1,i],QT2[2,i]+T1chap)*prt2[ordre1,ordre2]

if (QT2[2,i]-t1[j]<0)
  {ga<- ga+V2(QT2[1,i],QT2[2,i]+T1chap)*prt2[ordre1,ordre2]}
```

7.4 Annexe D: Code arrêt optimal sous R

```

        else
          {ga<-ga+0}
        }
ind2<-sum((XD2ordre-t1[j]<0))
if (ind2==0)
  {partieA<-c(partieA,(T1chap+t1[j])/c2)}
  else
  {partieA<-c(partieA,ga+(T1chap+t1[j])/c2*(1-prd2[ordre1,ind2]))}
}

if (max(partieA)==max(max(partieA),partieB))
  {V1<-c(max(partieA),which.max(partieA),t1[which.max(partieA)]+T1chap)}
  else
  {V1<-c(partieB,0,T1chap)}
}
}
}

#Creation de la Matrice MATRICEV1 dont la 1ere ligne represente
#l'etat au temps T1 quantifie, la 2eme les T1 de la grille de
#quantification, la 3eme les V1 et la 4eme les temps qui maximisent V1
#(temps d'arret dans l'etat degrade)
MATRICEV1<-NULL
MATRICEV1<-matrix(0:0,nrow=4,ncol=N)
j=1
for (i in 1:N)
{print(j)
MATRICEV1[,i]<-c(QT1[1,i],QT1[2,i],V1(QT1[1,i],QT1[2,i],j,GT1D[[i]]))[c(1,3)]}
if (QT1[1,i]<2.5)
  {j<-j+1}
}

#creation de la fonction V0 pour calculer le temps d'arret dans l'etat stable
V0<-function(grilleT1,t0)
{
V<-NULL
for (i in 1:length(t0))
  {
v<-0

```


7 Annexe

```

indT<-sum((grilleT1[2,]-t0[i])<0)
if (indT==0)
{v<-0 + t0[i]/c1}
else
{
      M1<-MATRICEV1[,1:indT]
      M1e<-M1[3,which(M1[1,]>3.5)]
      M1r<-M1[3,which((M1[1,]>2.5)&(M1[1,]<3.5))]
      M1d<-M1[3,which(M1[1,]<2.5)]

v<-sum(M1d*pd[1:length(M1d)]) +sum(M1r*pr[1:length(M1r)])+sum(M1e*pe[1:length(M1e)]
+ (t0[i]/c1*(1-frt[[indT]])) #moyenne de V1 pour T1 plus petit que s plus s P(T1>

}

V<-c(V,v)

}
VB<-sum(MATRICEV1[3,which(M1[1,]<2.5)]
*pd[1:length(MATRICEV1[3,which(M1[1,]<2.5)])])
+sum(MATRICEV1[3,which((M1[1,]>2.5)&(M1[1,]<3.5))]
*pr[1:length(MATRICEV1[3,which((M1[1,]>2.5)&(M1[1,]<3.5)])])
+sum(MATRICEV1[3,which(M1[1,]>3.5)]
*pe[1:length(MATRICEV1[3,which(M1[1,]>3.5)])])
if (VB<max(V))
{V0<-c(max(V),which.max(V),t0[which.max(V)])}
else
{V0<-c(VB,0,0)}

}
Vzero<-V0(QT1,GTO)
#vecteur (performance max, coordonnees du temps qui le maximise,
#temps qui le maximise)

=====
=====
#6 eme partie: temps d'arret:

#renvoi le temps d'arret et l'indicateur d'arret avant panne de la trajectoire

```

7.4 Annexe D : Code arrêt optimal sous R

```
#en fonction de la matrice V1 et de la trajectoire projetee
TA<-function(grilopt,vec)
{
t<-NULL
pan<-NULL
t<-(vec[1]>2)*(min(vec[2],Vzero[3])) + (vec[1]<3)*(Vzero[3]*
(Vzero[3]<vec[2])+(1-(Vzero[3]<vec[2])))
*( (grilopt[4,vec[7]]>grilopt[2,vec[7]])*grilopt[4,vec[7]] +
(grilopt[4,vec[7]]==grilopt[2,vec[7]])*min(grilopt[4,vec[7]],(vec[4]+vec[2])))
pan<-(t<vec[4]+vec[2])
TA<-rbind(t,pan)
}

#calcul pour toutes les trajectoires
TAcomp<-function(grilopt,mat)
{
V<-NULL
for (i in 1:length(mat[1,]))
{
v<-TA(grilopt,mat[,i])
V<-cbind(V,v)
}
TAcomp<-V
}

#calcul pour toutes les trajectoires
MM<- NULL
MM<-TAcomp(MATRICEV1,Xc)
Xfin<- rbind(Xc,MM)
#Matrice dont les 8 premieres lignes sont celles de Xc,
#la 9eme le min(temps d'arrêt propose, temps de panne)
#et la 10eme vaut 1 si le systeme est arrete avant la panne
#0 sinon.
```


Bibliographie

- [1] S. Asmussen, *Applied Probability and Queues* volume 51 of Applications of mathematics - Stochastic Modelling and Applied Probability, Springer, 2nd edition, 2003.
- [2] V. Bally, G. Pagès, *A quantization algorithm for solving discrete time multi-dimensional optimal stopping problems*, Bernoulli, 9, 1003-1049, 2003.
- [3] M. Basseville and I.V. Nikiforov, *Detection of Abrupt Changes : Theory and Application*, Prentice-Hall, April 1993.
- [4] C. Baysse, Mémoire de Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées Université Paul Sabatier Toulouse, *Modélisation stochastique et fiabilité d'un équipement optronique*, 2010.
- [5] C. Baysse, D. Bihannic, A. Gégout-Petit, M. Prenat, J. Saracco, *Detection of a degraded operating mode of optronic equipment using Hidden Markov Model*, ESREL, 2012.
- [6] A. Brandejsky, B. de Saporta, F. Dufour, *Numerical method for expectations of piecewise-deterministic Markov processes*, CAMCoS 7(1), pp63-104, 2012.
- [7] B. Castanier, C. Bérenguer, A. Grall, *A sequential condition-based repair/replacement policy with non-periodic inspections for a system subject to continuous wear*, Applied Stochastic Models in Business and Industry, 19(4) :327-347,2003.
- [8] J. Chiquet, N. Limnios, *A method to compute the transition function of a Piecewise Deterministic Markov Process with application to reliability*, Statistics and Probability Letters, Vol 78, n 12, 2008.
- [9] C. Coccozza-Thivent, *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*, Edition Springer, 1997.
- [10] M.H.A. Davis, *Piecewise-deterministic Markov Process : A General Class of Non-diffusion Stochastic Models*, Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), London, 1984.
- [11] M.H.A. Davis, *Markov Models and Optimization*, Chapman and Hall, London, 1993.

- [12] E. Deloux, B. Castanier, C. Berenguer, *Optimisation de la politique de maintenance pour un système à dégradation graduelle stressée*, 7^{ème} édition du congrès international pluridisciplinaire Qualita, Tanger, 2007.
- [13] B. de Saporta, H. Zhang, *Predictive maintenance for the heated hold-up tank*, Reliability Engineering and System Safety, 2013.
- [14] B. de Saporta, F. Dufour, C. Elegbede, H. Zhang, *Arrêt optimal pour la maintenance prédictive*, LambdaMu 17, La Rochelle, 2010.
- [15] B. de Saporta, F. Dufour, K. Gonzales, *Numerical method for optimal stopping of piecewise deterministic Markov processes*, The Annals of Applied Probability, Vol 20, n 5, 2010.
- [16] L. Dieulle, C. Bérenguer, A. Grall, M. Roussignol, *Sequential condition-based maintenance scheduling for a deteriorating system*, European Journal of Operational Research, 150 :451-461, 2003.
- [17] R.J. Elliott, L. Aggoun, J.B. Moore, *Hidden Markov Models*, Edition Springer, 1995.
- [18] R.M Feldman, *Optimal Replacement with Semi-Markov Shocks Models*, Journal of Applied Probability, 13 :108-117, 1976.
- [19] J. Fridlyand, A.M. Snijders, D. Pinkel, D.G. Albertson, A.N. Jain, *Hidden Markov models approach to the analysis of array CGH data*, Journal of Multivariate Analysis 90,132153, 2004.
- [20] O. Gaudoin, J.L. Soler, *Failure rate behavior of components subjected to random stresses*, Reliability Engineering and System Safety, vol.58, 1997.
- [21] A. Grall, C. Bérenguer, L. Dieulle, *A condition-based maintenance policy for stochastically deteriorating systems*, Reliability Engineering and System Safety, 76 :167-180,2002.
- [22] Health and Usage Monitoring Capability for Land Platforms (HUMS), Ministry of Defence Standard 25-24, United Kingdom, 2004.
- [23] E.P.C. Kao, *Optimal Replacement Rules when Changes of State are Semi-Markovian*, Operations Research, 22(4) :1231-1249, 1973.
- [24] P. Kloeden, E. Platen, H.Schurz, *Numerical solution of SDE* Edition Springer-Verlag, 1992.
- [25] C.T. Lam and R.H. Yeh. *Optimal Replacement Policies for Deteriorating Systems Under Various Maintenance Strategies*, IEEE Transactions on Reliability, 43 :423-430, 1994.

- [26] M. Fouladirad, A. Grall, L. Dieulle, *On the use of on-line detection for maintenance of gradually deteriorating systems*, Reliability Engineering System Safety, 93(12) :1814-1820, 2008.
- [27] J.M. van Noortwijk, *A survey of the application of gamma processes in maintenance*, Reliability Engineering and System Safety, 94(1) :221, 2009.
- [28] E.S. Page, *Continuous inspection schemes*, Biometrika, vol.41, pp.100-115, 1954.
- [29] G. Pagès, *A space quantization method for numerical integration*, Journal of computational and applied mathematics 89 1-38, 1997.
- [30] G. Pagès, J. Printems, *Optimal quadratic quantization for numerics : The gaussian case*, Monte Carlo Methods Appl., 9(2) :135-165, 2003.
- [31] K.S Park. *Optimal Continuous-Wear Limit Replacement under Periodic Inspections*, IEEE Transactions on reliability, 37(1) :97-102, 1988.
- [32] M. Rausand, A. Hoyland, *System Reliability Theory-Models, Statistical Methods, and Applications*, Wiley, second edition, 2004.
- [33] P. Vignat, M. Avila, F. Duculty, B. Robles, S. Begot, F. Kratz, *Indicators generation as part of a policy of conditional preventive maintenance*, Congrès de Maîtrise des Risques et Sûreté de Fonctionnement, $\lambda\mu$ 18, 34 :890-893,2012.
- [34] H. Wang, *A Survey of Maintenance Policies of Deteriorating Systems*, European Journal of Operational Research, 139 :469-489, 2002.
- [35] G.A. Whitmore, *Estimating Degradation by a Wiener Diffusion Process Subject to Measurement Error*, Lifetime Data Analysis, 1 :307-319, 1995.
- [36] O. Zeitouni, A. Dembo, *Exact filters for the estimation of the number of transitions of finite-state continuous time Markov processes*, IEEE Transactions on Information Theory 34 :890-893, 1988.