HAL
open science

# Modélisation d'objets 3D à l'aide de cônes généralisés profilés et ramifiés et problèmes de raccord de surfaces soulevés par ces cônes

Gautier Vatant

## To cite this version:

Gautier Vatant. Modélisation d'objets 3D à l'aide de cônes généralisés profilés et ramifiés et problèmes de raccord de surfaces soulevés par ces cônes. Synthèse d'image et réalité virtuelle [cs.GR]. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne; Université Jean Monnet - Saint-Etienne, 1997. Français. NNT : 1997STET4022 . tel-00940235

**HAL Id: tel-00940235**

**https://theses.hal.science/tel-00940235**

Submitted on 31 Jan 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DES MINES DE SAINT-ETIENNE

UNIVERSITE JEAN MONNET
DE SAINT-ETIENNE

# THESE

présentée par Gautier Vatant

pour obtenir le grade de

Docteur

de l'Université Jean Monnet de Saint-Etienne et de
l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne

*Spécialité informatique, Synthèse d'images*

# MODELISATION D'OBJETS 3D A L'AIDE DE CONES GENERALISES PROFILES ET RAMIFIES ET PROBLEMES DE RACCORD DE SURFACES SOULEVES PAR CES CONES

1997

Composition du Jury :

| | | |
|---|---|---|
| Monsieur | B. PEROCHE | Président |
| Messieurs | J. SEQUEIRA | Rapporteurs |
| | D. VANDORPE | |
| Mesdames | C. LARGERON | Examinateurs |
| | A. VERROUST | |
| Monsieur | J. AZEMA | |

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DES MINES DE SAINT-ETIENNE

UNIVERSITE JEAN MONNET
DE SAINT-ETIENNE

# THESE

présentée par Gautier Vatant

pour obtenir le grade de

Docteur

de l'Université Jean Monnet de Saint-Etienne et de
l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne

*Spécialité informatique, Synthèse d'images*

# MODELISATION D'OBJETS 3D A L'AIDE DE CONES GENERALISES PROFILES ET RAMIFIES ET PROBLEMES DE RACCORD DE SURFACES SOULEVES PAR CES CONES

Composition du Jury :

| | | |
|---|---|---|
| Monsieur | B. PEROCHE | Président |
| Messieurs | J. SEQUEIRA | Rapporteurs |
| | D. VANDORPE | |
| Mesdames | C. LARGERON | Examinateurs |
| | A. VERROUST | |
| Monsieur | J. AZEMA | |

*A ma marraine*

# *Remerciements*

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont soutenu, directement ou indirectement, au cours de la réalisation de ce travail.

En premier lieu, j'exprime ma profonde reconnaissance à Bernard Peroche, professeur à l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, pour m'avoir proposé les meilleures conditions qu'il soit, pour mener à bien mes recherches au sein de l'équipe. Ses encouragements et sa disponibilité ainsi que son amitié ont été très précieux à la concrétisation de ce travail.

Je remercie sincèrement tous les membres du jury et notamment :

• Denis Vandorpe, Professeur à l'Université Claude Bernard de Lyon, et Jean Sequeira, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille II, qui ont accepté d'être les rapporteurs, malgré leurs emplois du temps bien remplis. J'ai apprécié leurs critiques et surtout leur bonne humeur.

• Anne Verroust, Chargée de recherche INRIA à Rocquencourt et Jean Azéma, Maître de Conférence à l'université Jean Monnet, pour leur concours indispensable.

• Christine Largeron, Maître de conférence à l'université Jean Monnet, pour son soutien qui a dépassé, et de beaucoup, le cadre de la thèse. Je tiens à lui faire part de toute mon amitié. Sans elle, ces quatre années n'auraient pas été les mêmes.

Je n'oublie pas les membres de l'équipe « Images », pour leur présence et leur bonne humeur. Plus particulièrement, Maryline, Jean-Michel, Marc, Philippe et Hervé pour leur compétence et leur patience. Dans un registre différent, je remercie Nicolas, Françoise, Jacques, Gilles et Marion pour les discussions tantôt sérieuses, tantôt légères qui ont contribués à la bonne ambiance générale.

Je remercie toute ma famille et notamment mes parents et ma petite sœur. J'espère que leurs angoisses se trouveront récompensées à travers ces quelques phrases. Je n'oublierai pas leur soutien indispensable.

Enfin, j'associe tous mes amis à la réussite de ce travail. Ils m'ont permis d'oublier, le temps de quelques soirées mémorables, les Cônes Généralisés et les B-splines. Un grand Merci amusé et désordonné à Mazna, Charly, Albert, Philippe, Catherine, Ronald, Gabriel, Toki et Alex ainsi qu'a Béa, Yannick, Petra, Thérèse, Véronique, Valérie et Hubert. Un dernier clin d'œil au Chef et à Bruno pour m'avoir supporté dans tous les sens du terme.

Ma dernière pensée ira à ma femme Murielle, sans qui rien ne serait pareil.

# SOMMAIRE

I INTRODUCTION

## PARTIE 1

II HISTORIQUE ..... II.1

1. Approche de Klok et Post ..... II.1
    1.1. Définition ..... II.1
    1.2. Mathématiques des CG de Klok et Post ..... II.3
    1.3. Déformation de la section ..... II.5
        1.3.1. Déformation en taille ..... II.5
        1.3.2. Déformation en orientation ..... II.7
    1.4. Conclusion ..... II.7
2. Autres approches ..... II.7
2.1 Généralités ..... II.7
    2.2. Formulation mathématique, introduction d'un repère attaché à la trajectoire ..... II.8
        2.2.1. Formulation mathématique ..... II.8
        2.2.2. Construction du CG ..... II.9
    2.3. Calcul de la normale d'un CG ..... II.10
    2.4. Conclusion ..... II.11
3. Approximation d'un CG par une surface B-spline ..... II.11
    3.1. Position du problème ..... II.11
    3.2. Interpolation de la matrice de points par une surface B-spline ..... II.12
    3.3. Conclusion ..... II.14

III NOTRE APPROCHE ..... III.1

1. Principe ..... III.1
    1.1. définition ..... III.1
        1.1.1. Repère de Frenet ..... III.1
        1.1.2. Formulation du CG ..... III.2
    1.2. Introduction de la fonction Profil ..... III.3
        1.2.1. Définition formelle ..... III.3
        1.2.2. Description intuitive ..... III.4

1.2.3. Construction du CG, méthode d'échantillonnage ..... III.4
1.3. Introduction de l'orientation d'une section ..... III.6
1.3.1. Généralités sur l'orientation dans le plan de définition de la section ..... III.6
1.3.2. Orientation d'un CG possédant un profil non monotone ..... III.7
1.3.2.1. Définition formelle d'une fonction O(p) ..... III.8
1.3.2.2. Définition de l'orientation selon $\mathbf{P_x(p)}$ ..... III.8
2. Extensions ..... III.9
2.1. Introduction d'un deuxième profil ..... III.9
2.1.1. Définition ..... III.9
2.1.2. Cas des B-splines ..... III.11
2.1.3. Echantillonnage et discussion ..... III.11
2.1.4. Interprétation géométrique de la matrice $\Pi(p)$ ..... III.12
2.2. Autres déformations en orientation et en taille ..... III.13
2.2.1. Introduction de deux autres déformations en orientation ..... III.13
2.2.2. Introduction d'un troisième profil ..... III.14
2.3. Déformation de la forme de la section ..... III.14
2.3.1. Déformation par jonction ..... III.15
2.3.2. Déformation d'une section le long d'une trajectoire ..... III.15
2.3.2.1. Passage régulier d'une section $C^2$ et $G^2$ à une autre également $C^2$ et $G^2$ ..... III.16
2.3.2.2. Passage régulier d'une section $C^2$ mais non $G^2$ à une autre ..... III.18
2.3.2.3. Discussion ..... III.19
2.4. Calcul d'un CG le long d'une trajectoire B-spline quelconque ..... III.19
2.4.1. Cas général ..... III.20
2.4.2. Cas particuliers ..... III.20
2.4.3. Calcul d'un repère pour une trajectoire B-spline quelconque. III.21
2.4.4. Calcul d'un repère le long d'autre trajectoire ..... III.23
2.5. Conclusion ..... III.25

IV VALIDITE DU MODELE ..... IV.1

1.Définitions ..... IV.1
2. Validité basée sur les courbes ..... IV.1
3. Généralités ..... IV.2
4. Un premier test ..... IV.3
5. Un test plus général dans le cas d'une section plane ..... IV.4

V VISUALISATION PAR TRACE DE RAYON ..... V.1

1. Technique générale : cas du CG classique ..... V.1
2. Calcul de l'intersection du rayon et du CG ..... V.1
2.1. Mise en équations ..... V.1

2.2. Intersection de deux courbes splines ..... V.3
3. Extension au CG profilé orienté avec profil monotone ..... V.4
4. Profils non monotones ..... V.5
5. Trajectoire quelconque ..... V.6
6. Conclusion ..... V.6

VI CG ET QUATERNIONS ..... VI.1

1. Définitions ..... VI.1
2. Représentation d'une rotation par un quaternion ..... VI.2
3. Interpolation linéaire des orientations ..... VI.3
4. Calcul du quaternion de passage du repère canonique à un autre ..... VI.5
5. Modélisation de CG à l'aide de quaternions ..... VI.8
6. Application ..... VI.9

VII CONES GENERALISES RAMIFIES ..... VII.1

1. Introduction ..... VII.1
2. Trajectoire arborescente ..... VII.1
2.1. Définition ..... VII.1
2.2. Problèmes de compatibilité des repères ..... VII.3
3. Modélisation des embranchements ..... VII.4
3.1. Méthodes antérieures ..... VII.4
3.1.1. Modélisation à l'aide de courbes ..... VII.4
3.1.2. Une méthode non symétrique ..... VII.5
3.1.3. Modélisation de l'embranchement à l'aide de surfaces libres .. VII.6
3.1.4. Conclusion ..... VII.7
3.2. Une nouvelle modélisation des embranchements ..... VII.8
3.2.1. Embranchement conservant la correspondance paramétrique . VII.9
3.2.1.1. Positions limites des sections ..... VII.9
3.2.1.2. détermination des demi-sections ..... VII.11
3.2.1.3. Raccord des demi-sections entre elles ..... VII.12
3.2.1.4. Achèvement de l'embranchement ..... VII.13
3.2.2. Embranchement ne conservant pas la correspondance paramétrique ..... VII.16
3.2.2.1. Détermination des demi-sections ..... VII.17
3.2.2.2. Construction de l'armature ..... VII.17
3.2.2.3. Habillage du réseau de courbes ..... VII.18
3.2.2.4. Achèvement de l'embranchement ..... VII.18
3.3. Conclusions ..... VII.19

# PARTIE 2

VIII DISCUSSION SUR LES C ET G CONTINUITES ..... VIII.1

1. Définitions ..... VIII.1
    1.1. Continuité d'une courbe ..... VIII.1
        1.1.1. $C^K$ continuité ..... VIII.1
        1.1.2. $G^K$ continuité ..... VIII.2
    1.2. Continuité des surfaces ..... VIII.3
        1.2.1. $C^K$ continuité ..... VIII.3
        1.2.2. $G^K$ continuité ..... VIII.4
2. Exemples ..... VIII.5
    2.1. Fonction $C^1$ mais non $G^1$ ..... VIII.5
    2.2. Courbe $G^1$ mais non $C^1$ ..... VIII.7
    2.3. Autres exemples ..... VIII.7
3. Discussion ..... VIII.8
4. Reprise d'un exemple précédent ..... VIII.11
5. Conclusions ..... VIII.11

IX CONTRAINTES SUR LES COEFFICIENTS POLYNOMIAUX DECRIVANT UN RACCORD $G^1$ ENTRE PLUSIEURS CARREAUX SURFACIQUES ..... IX.1

1. Raccords entre deux carreaux ..... IX.2
    1.1. Généralités ..... IX.2
    1.2. Cas particuliers ..... IX.8
2. Raccords entre trois carreaux concourant en un point ..... IX.9
    2.1. Cas général ..... IX.9
    2.2. Cas particuliers ..... IX.11
3. Raccord entre quatre carreaux concourant en un point ..... IX.12
    3.1. Cas Général ..... IX.12
    3.2. Cas particuliers ..... IX.14
4.Raccord entre N carreaux concourant en un point ..... IX.14
    4.1. Hypothèse ..... IX.14
    4.2. Formulation générale des contraintes sur les fonctions de raccordement ..... IX.14
    4.3. Cas particuliers ..... IX.18
    4.4. Discussion ..... IX.19

X PROBLEMES DE RACCORD ENTRE PLUSIEURS SURFACES A POLES CONCOURANT EN UN POINT ..... X.1

1. Introduction ..... X.1
2. Raccord $G^1$ continu entre surfaces de Bézier ..... X.1
2.1. Représentation des carreaux de Bézier ..... X.2
2.2. Propriétés géométriques des surfaces de Bézier ..... X.2
2.3. $G^0$ et $G^1$ contraintes entre deux carreaux de Bézier ..... X.3
2.3.1. $G^0$ continuité ..... X.4
2.3.2. $G^1$ continuité ..... X.4
2.3.3. Conclusion ..... X.6
2.4. Cas de N carreaux concourant en un point ..... X.6
2.4.1. $G^0$ continuité ..... X.7
2.4.2. $G^1$ continuité ..... X.7
3. $G^1$ Contraintes entre carreaux B-spline ..... X.8
3.1. Représentation par des B-splines ..... X.8
3.2. B-spline uniformes ..... X.9
3.3. Elévation du degré d'une courbe B-spline ..... X.10
3.3.1. Cas Général ..... X.10
3.3.2. Une approche locale de l'élévation du degré d'une courbe B-spline ..... X.11
3.3.2.1. Description du problème ..... X.11
3.3.2.2. Introduction de la matrice $M^n_{elev}$ ..... X.11
3.3.2.3. Calcul simple de $M^n_{elev}$ ..... X.12
3.4. $G^0$ et $G^1$ contraintes entre deux carreaux B-spline élémentaires ..... X.13
3.4.1. continuité $G^0$ ..... X.13
3.4.2. $G^1$ continuité avec $\gamma(v)$ constant ..... X.14
4. $G^1$ continuité avec $\gamma(v)$ linéaire ..... X.15
4.1. Généralités ..... X.16
4.2. Cas des B-splines de degré 3 ..... X.17
5. Discussion ..... X.17
5.1. Extension aux B-splines de degré quelconque ..... X.18
5.2. Raccord entre carreaux B-splines non élémentaires ($\gamma(v)$ constant ou linéaire) ..... X.18
6. Conclusions ..... X.19

XI RACCORDS ENTRE SURFACES TRIANGULAIRES ET SURFACES RECTANGULAIRES ..... XI.1

1. $G^1$ contraintes entre surfaces triangulaires ..... XI.2
1.1. Surfaces triangulaires de Bézier ..... XI.2
1.1.1. Définition ..... XI.2
1.1.2. Calcul des dérivées transversales ..... XI.2
1.1.3. $G^1$ contraintes entre deux tBB ..... XI.3
1.2. Surfaces triangulaires $G^1$ de Grégory-Bézier (tGB) ..... XI.4
1.2.1. Définition ..... XI.4

1.2.2. Dérivées transversales ..... XI.5
1.2.3. $G^1$ contrainte entre deux facettes tGB ..... XI.6
1.2.4. Raccord entre N facettes tGB ..... XI.10
2. $G^1$ contraintes entre facettes tGB et carreaux de Bézier ..... XI.11
2.1. $G^1$ contraintes entre une facette tGB et un carreau de Bézier ..... XI.11
2.2. Détermination d'une facette tGB délimitée par trois carreaux élémentaires de Bézier ..... XI.13
2.3. Détermination d'une surface triangulaire (composée de facettes tGB) délimitée par plusieurs carreaux de Bézier élémentaires ..... XI.15
2.3.1. Calcul des oreilles ..... XI.16
2.3.2. Calcul du point central et de son plan tangent associé ..... XI.17
2.3.3. Calcul des facettes complétant la surface ..... XI.17
3. Conclusion ..... XI.18

XII CONCLUSION ..... XII.1

REFERENCES

ANNEXES

# Chapitre I : INTRODUCTION

Les Cônes généralisés, introduits pour la première fois par Agin [AGIN 72] et Binford [BINF 71], sont aujourd'hui fréquemment utilisés dans les systèmes de modélisation d'objets tridimensionnels parce qu'ils permettent de décrire une grande famille de formes.

Associés ou non à l'utilisation de surfaces à pôles, ils sont utilisés dans de nombreux domaines. La simplicité de leur représentation, la possibilité d'un traitement interactif permet une large utilisation dans le domaine de la CAO (conception assistée par ordinateur) et de la CFAO (conception et fabrication assistées par ordinateur). Certains logiciels de dessins n'utilisent que des mécanismes d'extrusion (et de déformations simples) pour la création d'objets 3D. L'imagerie médicale (scanographie, échographie, imagerie par résonance magnétique, mesures de paramètres géométriques, aide aux diagnostics, simulation d'interventions chirurgicales,...) utilise aussi les cônes généralisés afin de reconstruire, par exemple, des zones tubulaires ou arborescentes représentant des éléments anatomiques préalablement échantillonnés. Notons aussi leur large contribution dans des domaines variés tels que la robotique ou la reconnaissance de formes 3D dans les systèmes de vision assistés par ordinateur. Une des raisons de ce succès est que, décrits à l'aide de surfaces de formes libres, les cônes généralisés restent des surfaces suffisamment simples pour autoriser l'interactivité.

Un cône généralisé est, grosso modo, l'espace balayé par une section (courbe 3D fermée ou ouverte dont la surface est connexe ou non) pendant son déplacement le long d'une trajectoire donnée (courbe 3D fermée ou ouverte). Afin d'agrandir la famille des objets décrits par une telle extrusion, on peut « jouer » sur différents paramètres :

- la section peut subir pendant son déplacement des variations en taille, en orientation et en forme. L'ensemble des outils destinés à modifier la section (règles de balayage) doit rester simple à définir par l'utilisateur afin de ne pas altérer l'efficacité des cônes généralisés. De nombreux travaux spécifiques aux cônes généralisés ont contribué au développement de ceux-ci, sans pour autant être compatibles entre eux. Un des buts de ce travail est de créer des outils permettant d'utiliser tous ces développements dans un même environnement qui n'obligera pas l'utilisateur à changer de formalisme selon la complexité de l'objet qu'il souhaite créer.

• la trajectoire, qui est une courbe simple dans une méthode classique d'extrusion n'autorise pas la modélisation de formes ramifiées (arbres, réseau sanguin) qui sont pourtant intuitivement descriptibles avec les cônes généralisés. Il nous est donc apparu nécessaire d'offrir à l'utilisateur un formalisme simple lui permettant de construire des formes ramifiées dans le même contexte que celui utilisé pour les cônes généralisés à trajectoire simple. Nous introduirons donc la notion de trajectoire arborescente. Bien sûr, l'apparition de telles trajectoires n'est pas sans poser de problèmes de continuité, notamment au niveau des embranchements. Ces problèmes apparaissent dès que l'on exige plus que la $C^0$ continuité sur l'ensemble du cône.

C'est à partir des deux dernières remarques que nous avons construit l'évolution de la première partie de ce mémoire. Nous exposons, dans le chapitre II, un rapide rappel sur l'évolution des cônes généralisés (approche discrète) durant les 25 dernières années. Nous avons essayé dans le même temps d'introduire le plus possible de notions propres aux cônes généralisés qui nous seront utiles par la suite. Nous introduirons, par exemple, quelques règles de balayage et nous montrerons comment représenter un cône généralisé par une surface B-spline.

Nous donnerons, dans le chapitre III, une définition plus « moderne » (en évoluant vers une approche continue) des cônes généralisés en tenant compte de la gestion des règles de balayage. Une notion importante, le profil, sera introduite résolvant à elle seule le problème de la variation en taille de la section et autorisant un parcours continu quelconque de la trajectoire (un déplacement comportant des allées et venues le long de la trajectoire sera donc possible). Nous fournirons ensuite à l'utilisateur quelques outils permettant sans difficulté de modéliser un nombre d'objets encore plus important. Enfin, nous montrerons les moyens utilisés pour pouvoir calculer un cône généralisé s'appuyant sur une trajectoire B-spline cubique quelconque.

Dans le chapitre IV, nous nous attarderons sur la validité des cônes généralisés construits à l'aide des méthodes précédentes. Nous fournirons des algorithmes, plus ou moins rapides, et donc plus ou moins efficaces, permettant de contrôler la validité des cônes durant leur construction.

Le chapitre V est consacré à la visualisation des cônes généralisés par un algorithme de lancer de rayon. Nous décrirons plus précisément un algorithme calculant l'intersection entre un rayon et un cône généralisé.

Dans le chapitre VI, nous introduirons la théorie des quaternions afin de modéliser des cônes généralisés à l'aide de ceux-ci. Nous montrerons que la puissance des quaternions permet de représenter l'ensemble des cônes généralisés que nous pouvons créer à l'aide des techniques du chapitre III. Nous verrons qu'ils permettent parfois de simplifier le formalisme des cônes généralisés. Nous ferons aussi le parallèle entre cette nouvelle modélisation et les techniques d'animation utilisant elles aussi les quaternions.

Enfin, dans le chapitre VII, nous définirons ce qu'est une trajectoire arborescente, ainsi que les différentes méthodes de raccords que nous pourrons utiliser pour modéliser la

ramification. A ce stade, nous serons en mesure de construire des cônes généralisés profilés, échancrés, orientés et ramifiés à trajectoire B-spline cubique quelconque.

Il nous a semblé intéressant, dès lors que le CG a été construit, de le représenter à l'aide de surfaces de formes libres, ce qui permettra d'obtenir les avantages inhérents à l'utilisation de ce type de surfaces (déformations locales, contrôle du degré des surfaces,...). Cet intérêt justifie la deuxième partie de ce mémoire consacrée aux modèles géométriques pour la création de formes.

Parmi ces modèles géométriques, les modèles surfaciques tiennent une place importante pour la diversité et la complexité des surfaces qu'ils permettent de concevoir. La représentation par surfaces a suscité une abondante littérature. De nombreux modèles de surfaces paramétrées ont été développés et les recherches actuelles portant sur la modélisation de surfaces de formes libres sont très actives.

Au cours de ces dernières années, la C.F.A.O. et la C.A.O. ont utilisé largement la théorie des surfaces paramétriques générales (COONS) [COON 64][COON 67], ainsi que la théorie de surfaces plus particulières dites surfaces à pôles (Bézier, B-spline, β-spline, NURBS, ...) [PERN 92][BART 89].

Les recherches ont d'abord porté sur les carreaux rectangulaires (on entend par là surface à quatre points de singularité $C^1$ et à domaine de définition rectangulaire dans $\Re^2$), puis elles se sont étendues aux carreaux triangulaires (trois points de singularité $C^1$ et domaine de définition triangulaire dans $\Re^3$). Aujourd'hui, les résultats sur les carreaux pentagonaux ou à n cotés sont déjà très avancés, même si leur emploi reste peu fréquent.

Les surfaces sus-citées sont très souvent employées pour représenter des objets tridimensionnels dont la formulation explicite n'est pas possible ou trop coûteuse en degré de représentation. La perte de précision inévitable de la représentation dépend du nombre de surfaces élémentaires (et de leur complexité) employées, car hélas, il est rarement possible de représenter l'objet par un seul carreau surfacique. Il faut donc, en général, un large ensemble de surfaces, de même type ou non, pour modéliser l'objet en question .

La surface de ces objets possède souvent des continuités géométriques spécifiques comme la continuité en position, du plan tangent ou même de la courbure. Lorsque l'on modélise une telle surface par un ensemble de carreaux (qu'ils soient de Bézier ou autres), il faut donc pouvoir contrôler la continuité en chaque point. On peut classer ces dernières en deux catégories :

1. Les points intérieurs à chaque carreau élémentaire. En général, la continuité est assurée par la définition même des carreaux, à condition de choisir le degré adapté à la continuité nécessaire.

2. Les points appartenant aux frontières communes à deux ou plusieurs surfaces adjacentes. Pour ces points, nous sommes inévitablement contraints d'utiliser la lourde théorie des raccords de surfaces.

Les recherches sur ces sujets ont été tellement poussées qu'il est difficile de trouver de nouveaux résultats le temps d'une thèse. Cependant, la création de cônes généralisés à trajectoire arborescente nous a conduit à développer quelques résultats intéressants. Les problème de raccord, suggérés par la partie 1 trouveront leur réponse ici. Nous en avons

profité pour étendre les solutions trouvées dans un cadre plus général, les développements nécessaires à la résolution des difficultés soulevées par la construction de CG n'étant finalement que des cas particuliers d'une méthode plus générale. Cette deuxième partie est donc consacrée aux raccords de surfaces définis par des produits tensoriels et s'organise de la manière suivante :

Le chapitre VIII répond à la question naturelle « Pourquoi la continuité $C^n$ n'implique-t-elle pas la continuité visuelle $G^n$ comme on est en droit de s'y attendre ? ». Les problèmes soulevés par cette question ne sont pas forcément gênants en théorie ; par contre l'application d'algorithmes simples (calculs de tangentes, de courbures par dérivées partielles) entraîne des difficultés inattendues.

Le chapitre IX traite d'une manière générale des conditions sur les coefficients polynomiaux introduits lors des calculs de $G^1$ continuité. Les résultats proposés restent valables quel que soit le type de surface utilisée.

Les résultats obtenus au chapitre précédent trouveront leur justification dans le chapitre X, qui est consacré au raccord $G^1$ continu entre un nombre quelconque de carreaux élémentaires rectangulaires convergeant en un point commun. Les résultats sur les carreaux de Bézier seront rappelés et de nouveaux résultats sur les carreaux rectangulaires B-splines seront présentés, évitant ainsi l'utilisation des algorithmes coûteux de changement de représentation.

Le chapitre XI, similaire au chapitre X, développe des résultats similaires sur les carreaux triangulaires. Nous verrons comment raccorder des carreaux rectangulaires et triangulaires entre eux à l'aide des conclusions obtenues auparavant.

Tout le long des deux derniers chapitres, nous montrerons comment appliquer les recherches précédentes aux embranchements de CG à trajectoire arborescente complétant, ainsi, le chapitre VII.

# PARTIE 1

# CONES GENERALISES

# Chapitre II : HISTORIQUE

Dans ce chapitre, nous introduirons les principales étapes de l'évolution des Cônes Généralisés (CG). Ce ne sont évidemment pas les modèles que nous choisirons par la suite mais nous utiliserons quelques résultats essentiels. Nous décrirons d'abord les CG de Klok et Post avant d'introduire la représentation d'un CG par une surface de forme libre (plus précisément les B-splines).

## 1. Approche de Klok et Post

### 1.1. Définition

Les CG de Klok et Post [POST 86][BRON 89] constituent une approche discrète de l'extrusion. La section 2D, $S$, et la trajectoire, $T$, sont des ensembles de points provenant éventuellement d'un échantillonnage d'une courbe analytique. La section, dans ce cas, représente plutôt un contour et la trajectoire, une ligne brisée continue. Nous notons $S_i$ les points représentant le contour et $T_j$ les points définissant la trajectoire :

$$S = (S_i) \quad i = 1,\dots,m \quad \text{et} \qquad T = (T_i) \quad i = 0,\dots,n$$

Dans le cas où $S$ est fermée, $S_1 = S_m$. Dans la suite, nous ne considérerons que le cas où la trajectoire n'est pas une courbe fermée. Chaque paire de points consécutifs $\{T_i, T_{i+1}\}$ de la trajectoire définit un segment noté $L_i$ : $L_i = [T_i, T_{i+1}]$. Le CG est alors construit de la manière suivante :

• La première section, au point $T_0$, est placée dans le plan perpendiculaire, noté $P_0$, au premier segment $L_1$ (figure II.1). Si la section $S$ est définie dans un plan (O, **x**, **y**), le point O est simplement positionné en $T_0$. Les axes **x** et **y** sont définis de la manière suivante :

- L'axe **x** est positionné sur la droite support définie par l'intersection du plan $P_0$ et du plan contenant les segments $L_1$ et $L_2$. Si $L_2$ n'existe pas (n=2) l'axe **x** est positionné de manière quelconque.

- L'axe **y** est choisi de telle manière que le trièdre (**x**, **y**, $\mathbf{L_1}$) soit direct.

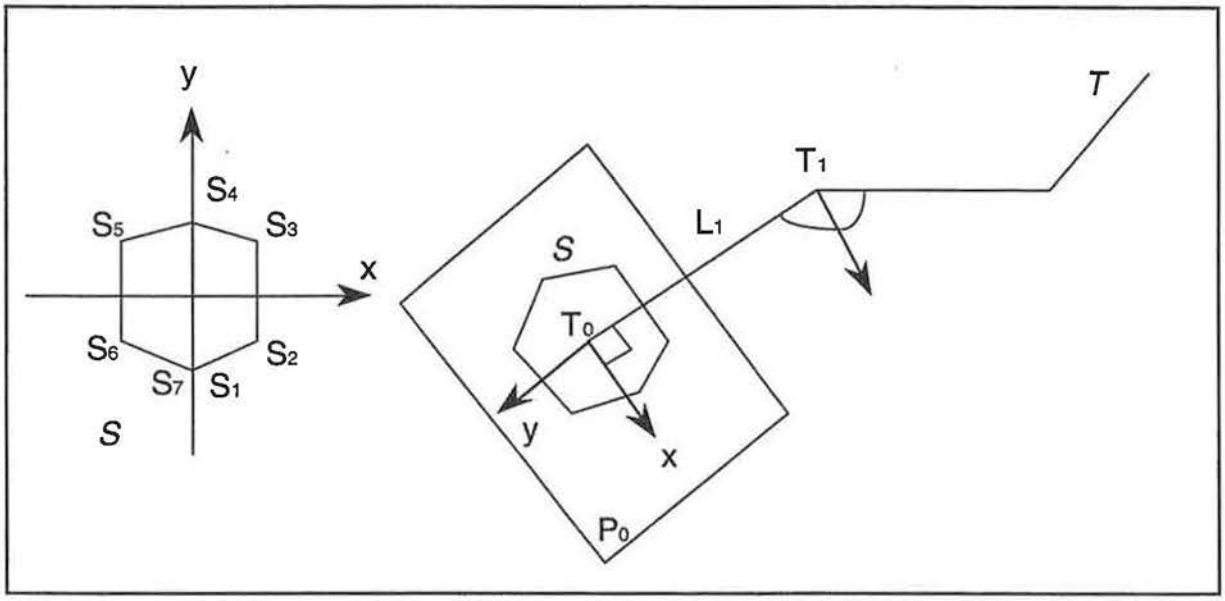



Figure II.1 : *positionnement de la section dans le plan* $P_1$

Les points définissant la section dans le plan $P_0$ sont calculés grâce à la matrice de passage du repère (O, **x**, **y**) au nouveau repère attaché à $T_0$. Ces points seront notés $[H_{i,0}]_{1\leq i\leq m}$, le point $H_{i,0}$ correspondant au point $S_i$ de la section initiale.

• On construit ensuite le CG pas à pas (figure II.2). Nous supposerons que les points $[H_{i,j}]_{1\leq i\leq m}$ positionnés dans le plan $P_j$ ont été calculés.

- Le plan $P_{j+1}$ est calculé comme le plan médiateur des segments $L_j$ et $L_{j+1}$. Les points $H_{i,j}$ sont alors projetés sur le plan $P_{j+1}$ suivant la direction $L_j$, déterminant la section dans le plan $P_{j+1}$.
- Les points décrivant la section dans le plan $P_{j+1}$ sont alors notés $[H_{i,j+1}]_{1\leq i\leq m}$, le point $H_{i,j+1}$ étant le projeté de $H_{i,j}$ sur la plan $P_{j+1}$.

• On obtient, alors, un objet facettisé dont les faces sont définies par des quadruplets de points $(H_{i,j}, H_{i+1,j}, H_{i+1,j+1}, H_{i,j+1})$ qui sont coplanaires puisque définis par projection directe, les vecteurs $\mathbf{H_{i,j}H_{i,j+1}}$ et $\mathbf{H_{i+1,j}H_{i+1,j+1}}$ étant colinéaires (dans la direction $L_j$).

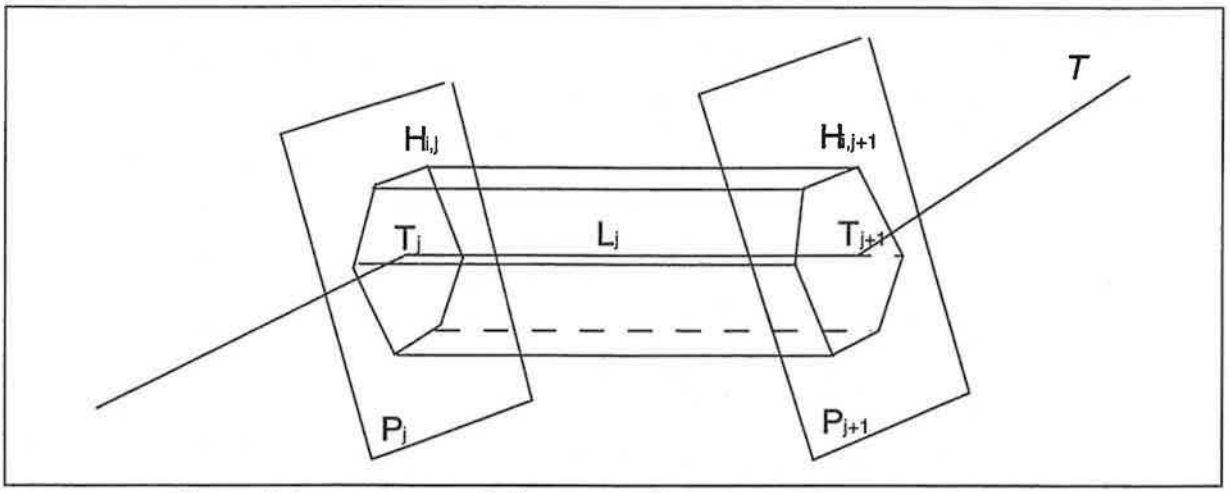



Figure II.2 : *projection de la section d'un plan médiateur sur un autre*

Avec ce procédé, la géométrie de la section est conservée tout le long de la trajectoire. En effet, les plans $P_j$ étant des plans médiateurs, les sections le long de $L_j$ et $L_{j-1}$ sont symétriques par rapport à $P_j$.

Remarquons que dans le cas où $T$ est une trajectoire fermée (ie $T_0 = T_n$), nous pouvons garantir la validité du CG en positionnant la première section dans le plan médiateur à $L_1$ et $L_n$, les plans $P_1$ et $P_n$ étant dans ce cas identiques.

Pour en finir avec la définition des CG de Klok et Post, notons que si l'utilisateur désire que le CG créé soit un volume correctement défini il faut deux conditions :

- La section $S$ doit être fermée (si elle ne l'est pas par définition, il faut ajouter un nouveau point $S_{m+1} = S_1$)

- Si la trajectoire n'est pas fermée, il faut « boucher » le CG aux deux extrémités en introduisant deux faces supplémentaires qui sont définies par le contour dans le plan $P_1$ et par le contour dans le plan $P_n$. Nous reviendrons sur le fait que ces deux faces ne sont pas décrites comme les autres faces composant le CG (quadrilatères) mais comme des faces à m-1 arêtes.

### 1.2. Mathématiques des CG de Klok et Post.

Nous donnons, dans cette section, les calculs liés à la création d'un CG défini par la méthode décrite en 1.1.. Nous introduirons, afin de distinguer les vecteurs des points, le point origine O de coordonnées (0, 0, 0).

• Calcul du plan bissecteur de deux segments consécutifs (figure II.3)

Soient P, Q, R trois points de l'espace. On note **U** le vecteur **QP** unitaire et **V** le vecteur **QR** unitaire. Le plan vectoriel bissecteur est le plan normal au vecteur **N=U-V**, c'est donc le vecteur d'équation **N•OM**=0. Or le plan bissecteur affine passe par le point Q, donc si on note d le paramètre constant du plan affine on obtient l'équation :

$$\mathbf{N} \bullet \mathbf{OQ} + d = 0$$

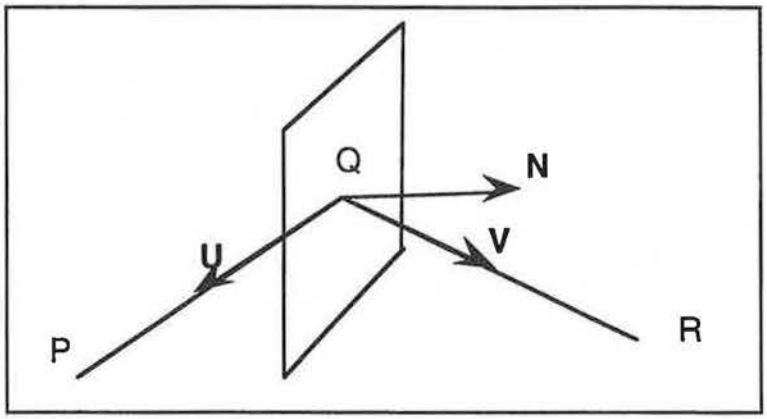



Figure II.3 : *calcul du plan bissecteur de 2 segments consécutifs*

L'équation du plan bissecteur affine devient :

$$\mathbf{N} \bullet \mathbf{OM} - \mathbf{N} \bullet \mathbf{OQ} = 0, \text{ M étant un point du plan.}$$

• Calcul des projections d'un plan $P_j$ sur un plan $P_{j+1}$ :

Soit **U** le vecteur directeur unitaire de $\mathbf{T_j T_{j+1}}$ et $H_{i,j}$ un point de la section appartenant au plan $P_j$. Alors $H_{i,j+1}$ vérifie :

$$\mathbf{H_{i,j} H_{i,j+1}} = \alpha \mathbf{U} \text{ où } \alpha \text{ est un nombre réel positif.}$$

En utilisant les résultats précédents et en notant $\mathbf{N_j}$ la normale au plan bissecteur $P_j$ :

$$\mathbf{N_j} \bullet \mathbf{O H_{i,j+1}} - \mathbf{N_j} \bullet \mathbf{O T_{j+1}} = 0$$

On déduit ensuite facilement $H_{i,j+1}$ de $H_{i,j}$:

$$\mathbf{N_j} \bullet (\mathbf{OH_{i,j}} + \alpha \mathbf{U}) - \mathbf{N_j} \bullet \mathbf{OT_{j+1}} = 0$$

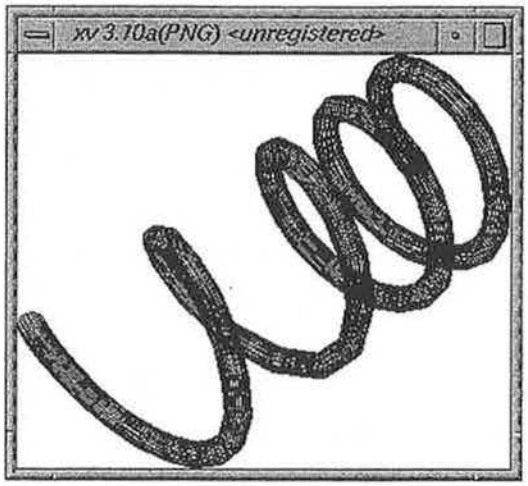
$$\Rightarrow \quad \mathbf{N_j} \bullet \mathbf{OH_{i,j}} + \alpha \mathbf{N_j} \bullet \mathbf{U} = \mathbf{N_j} \bullet \mathbf{OT_{j+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{\mathbf{N_j} \bullet \mathbf{OT_{j+1}} - \mathbf{N_j} \bullet \mathbf{OH_{i,j}}}{\mathbf{N_j} \bullet \mathbf{U}}$$

Nous obtenons finalement :

$$H_{i,j+1} = H_{i,j} + \frac{\mathbf{N_j} \bullet \mathbf{OT_{j+1}} - \mathbf{N_j} \bullet \mathbf{OH_{i,j}}}{\mathbf{N_j} \bullet \mathbf{U}} \mathbf{U}$$

Pour conclure, remarquons que la simplicité des calculs et de la construction se prête naturellement à l'interactivité.




CG de Klok et Post

### 1.3. Déformation de la section

#### 1.3.1. Déformation en taille

Nous étendons, maintenant, la définition des CG de Klok et Post en autorisant les modifications en taille de la section. Supposons, dans un premier temps, que la section d'un plan médiateur $P_j$ à $P_{j+1}$ subisse une simple homothétie de centre $T_{j+1}$ et de rayon $r_{j+1}$. Dans ce cas, les lignes de projection restent parallèles entre elles et donc les facettes constituant le CG restent des quadrilatères. Aucune modification n'est alors à apporter à la facettisation.

La formule permettant de calculer $H_{i,j+1}$ à partir de $H_{i,j}$ devient :

$$H_{i,j+1} = T_{j+1} + r_{j+1}\mathbf{E}_{\mathbf{i,j}} \quad \text{où } \mathbf{E}_{\mathbf{i,j}} = H_{i,j} + \frac{\mathbf{N_j} \bullet \mathbf{OT_{j+1}} - \mathbf{N_j} \bullet \mathbf{OH_{i,j}}}{\mathbf{N_j} \bullet \mathbf{U}}\mathbf{U} - T_{j+1}$$

Nous pouvons définir l'outil permettant d'introduire ces changements d'échelle par un simple vecteur R de dimension $1 \times n$ tel que :

$$R = [r_0, \cdots, r_n]$$

Autorisons maintenant la section à varier en taille selon deux axes. Ces axes peuvent être naturellement les axes initiaux **x** et **y**. On peut attacher à chaque plan $P_j$ un tel repère en projetant de la même manière que les points de la section les axes **x** et **y** obtenus dans le plan

$P_1$. Il nous faut alors définir deux vecteurs décrivant le changement d'échelle en **x** et en **y** : $R_x$ et $R_y$ tels que :

$$R_x = [rx_0, \cdots, rx_n] \qquad \text{et} \qquad R_y = [ry_0, \cdots, ry_n]$$

La relation permettant de calculer $H_{i,j+1}$ à partir de $H_{i,j}$ devient alors, en notant **i** et **j** les vecteurs directeurs des axes **x** et **y** du plan $P_{j+1}$ :

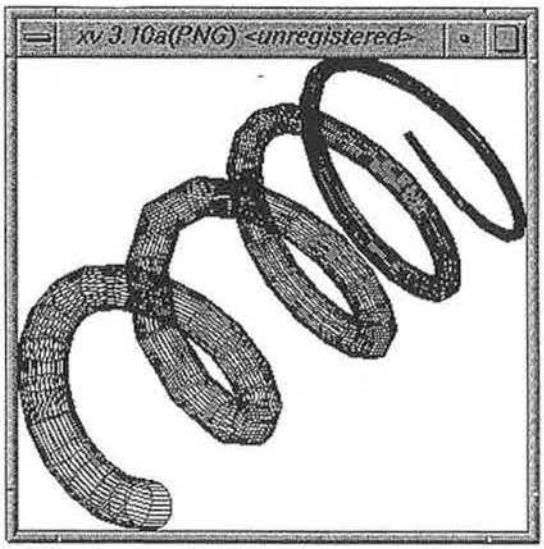
$$H_{i,j+1} = T_{j+1} + rx_{j+1}(\mathbf{E}_{i,j} \bullet \mathbf{i})\mathbf{i} + ry_{j+1}(\mathbf{E}_{i,j} \bullet \mathbf{j})\mathbf{j}$$

Il est facile de constater qu'en utilisant une variation en taille selon deux axes, les quadrilatères $(H_{i,j}, H_{i+1,j}, H_{i+1,j+1}, H_{i,j+1})$ du CG ne sont plus plans et la facettisation utilisée jusqu'à maintenant n'est plus utilisable. On résout facilement ce problème en substituant les deux faces triangulaires $(H_{i,j}, H_{i+1,j}, H_{i+1,j+1})$ et $(H_{i,j}, H_{i+1,j+1}, H_{i,j+1})$ à la face $(H_{i,j}, H_{i+1,j}, H_{i+1,j+1}, H_{i,j+1})$.

Remarque : cette nouvelle approche nous permet de fermer proprement les faces extrémales (plan $P_1$ et $P_n$) lorsque l'on veut que le CG construit représente un volume (voir section 1 de ce chapitre). En effet, il suffit (afin de rester compatible avec l'utilisation de faces triangulaires) de construire les m faces suivantes :

$(T_0, H_{i,0}, H_{i+1,0})$ pour i=1, ..., $m$ (les indices étant pris modulo $m$)

et $(T_n, H_{i,n}, H_{i+1,n})$ pour i=1, ..., $m$ (les indices étant pris modulo $m$)




CG de Klok et Post déformé en taille

### 1.3.2. Déformation en orientation

En reprenant la méthode qui a été utilisée pour introduire une déformation en taille, nous pouvons maintenant définir un vecteur supplémentaire $W=[w_0,\cdots,w_n]$ tel que chaque $w_j$ corresponde à un angle indiquant la rotation qu'effectuera la section dans le plan $P_j$. Cette rotation sera effectuée en regard des axes **x** et **y** précédemment définis dans chaque plan $P_j$.

La relation permettant de calculer $H_{i,j+1}$ en fonction de $H_{i,j}$ devient alors en notant :

$$X=\mathbf{E}_{i,j}\bullet\mathbf{i} \qquad \text{et} \qquad Y=\mathbf{E}_{i,j}\bullet\mathbf{j}$$

$$C=\cos w_{j+1} \qquad \text{et} \qquad S=\sin w_{j+1}$$

$$H_{i,j+1}=T_{j+1}+(rx_{j+1}CX-ry_{j+1}SY)\mathbf{i}+(ry_{j+1}SX-rx_{j+1}CY)\mathbf{j}$$

Remarquons qu'en général l'homothétie est appliquée avant la rotation. Dans le cas contraire, la formule serait légèrement modifiée.

### 1.4. Conclusion

Cette approche discrète est d'une importance fondamentale. Nous verrons plus tard que (dans le pire des cas) certaines méthodes plus fines ne peuvent pas construire correctement certains CG qui seraient modélisés sans aucun problème avec l'approche que nous venons de développer. Cependant, elle est souvent limitée. Par exemple, nous ne pouvons donner une formulation analytique du CG ; les normales à la surface ne sont donc approchées que par les normales aux facettes triangulaires. Un autre problème important est que la section ne garde pas une orientation naturelle pendant son déplacement. Une lecture détaillée des travaux de Klok exposés dans [KLOK 86] montre qu'il revient au même d'associer à la trajectoire le repère de rotation minimum.

## 2. Autres approches

Dans cette section, nous donnons quelques caractéristiques des autres approches. Plutôt que de détailler chacun des principaux travaux, nous donnerons une vision globale des recherches concernées.

### 2.1. Généralités.

Contrairement à Klok et Post, les autres auteurs ont considéré des courbes définies par des formes à pôles (Bézier, B-spline, ...) pour décrire la trajectoire et la section d'un CG. Le CG, au lieu d'être construit par une suite de projections de la section, est plutôt considéré de la manière suivante : la section balaye la trajectoire, du début de celle-ci à la fin, en subissant les déformations décrites par l'utilisateur grâce aux règles de balayage.

La plupart des auteurs ont introduit une courbe altitude pour décrire le vecteur R [RAO 88][AKMA 92] des CG de Klok et Post. L'altitude a été automatiquement associée à une trajectoire linéaire dans [WOOD 86] mais autorisait un parcours quelconque de la trajectoire (des allées et venues étaient donc possibles), ce qui permettait de créer des volumes ayant un contenu. En revanche, aucune déformation en orientation et en taille selon deux axes n'était possible.

D'autres ont introduit des méthodes permettant de construire un CG avec des trajectoires 3D possédant une certaine continuité (d'ordre 2 en général). La fonction altitude permettait toujours des déformations en taille (homothétie) mais le parcours de la trajectoire s'effectuait d'une manière continue et monotone en fonction de l'abscisse curviligne (de $s$=0 à $s$=1) de la trajectoire. Dans ces modèles, une déformation en orientation était toujours possible.

Ces modèles ont souvent été conçus pour des applications précises, chacune ayant sa spécificité et ne nécessitant pas toute la puissance des CG (table 1), ce qui explique leur incompatibilité. Nous donnons dans le tableau ci-dessous les divers domaines ayant suscité l'utilisation des CG et les paramètres utilisés.

| AUTEURS | OBJET | PARAMETRES UTILISES | REMARQUES |
|---|---|---|---|
| AGIN | Modélisation de volumes | trajectoire analytique, section circulaire | |
| MARR | Reconnaissance de formes | trajectoire : polygones sections : polygones | [MARR 77] |
| SHANI | Reconnaissance et habillage de formes | trajectoire B-spline 3D, section : B-spline 2D | [SHAN 84] |
| KLOK,POST | Insertion CG dans un modeleur CSG | trajectoire : polygones sections : polygones | |
| WOODWARD | Modélisation volumique | trajectoire, section B-spline | [WOOD 86] |

**table 1**

### 2.2. Formulation mathématique, introduction d'un repère attaché à la trajectoire

Dans cette section, nous introduisons l'importante notion de repère attaché à la trajectoire. Cette notion a été introduite dès la première apparition des CG. Dans les CG de Klok et Post, la notion de repère était implicite dans le cas où les déformations restaient simples (variation en taille égale dans toutes les directions). Cependant, dès que les déformations devenaient plus complexes, il fallait définir explicitement le repère (**x**, **y**). Par exemple, une déformation en orientation ne peut avoir lieu qu'associée à un repère. Les repères attachés à la trajectoire permettent de positionner convenablement la section en un point de la trajectoire.

Dans la section suivante, nous présentons la formulation classique de CG adoptée par la plupart des auteurs.

### 2.2.1. Formulation mathématique

La trajectoire $T$ est maintenant une courbe paramétrique 3D que l'on peut décrire sous sa forme vectorielle :

$T(t) = \left[T_x(t), T_y(t), T_z(t)\right]$, $t$ pouvant être l'abscisse curviligne de $T$ ou simplement le paramètre de la courbe.

De la même manière, on peut définir $S$, une section 2D par :

$S(s) = \left[S_x(s), S_y(s)\right]$, $s$ pouvant être l'abscisse curviligne de $S$ ou simplement le paramètre de la courbe.

A chaque point $t$ de la trajectoire on associe un repère orthonormé $(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t), \mathbf{Z}(t))$. Le CG résultant du balayage de la section le long de la trajectoire à l'aide du repère associé est donc une fonction à deux paramètres ($s$ et $t$) (figure II.4) :

$$CG(t,s) = T(t) + S_x(s)\mathbf{Y}(t) + S_y(s)\mathbf{Z}(t)$$

Les éventuelles déformations de la section peuvent être soit appliquées dans le repère initial de la section, soit après avoir été transportées dans le repère lié à la trajectoire. Notons $D(t,\bullet)$, l'opérateur des déformations appliquées à la section au point $t$ de $T$. La fonction $CG$ devient alors simplement :

$$CG(t,s) = T(t) + D(t, S_x(s))\mathbf{Y}(t) + D(t, S_y(s))\mathbf{Z}(t) \qquad \textbf{(2.1)}$$

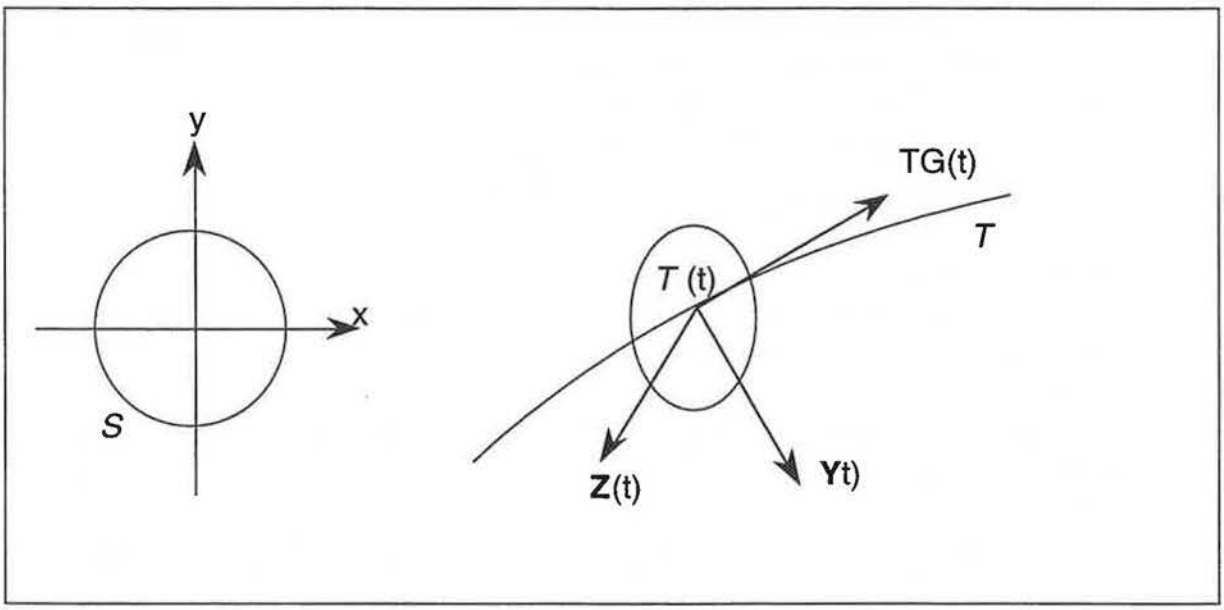



Figure II.4 : *positionnement de la section dans le repère lié à la trajectoire*

### 2.2.2. Construction du CG

Une fois le CG défini comme en 2.2.1., nous pouvons maintenant le construire. Pour cela, nous allons définir un ensemble de facettes triangulaires s'appuyant sur des points appartenant à la surface *CG(t,s)*.

Soient $(t_1,\ldots,t_n)$ et $(s_1,\ldots,s_m)$ des ensembles de valeurs comprises entre 0 et 1 telles que $T(t_1),\ldots,T(t_n)$ et $S(s_1),\ldots,S(s_n)$ soient des échantillons « représentatifs » de la trajectoire $T$ et de la section $S$. Le CG est alors représenté par une matrice de points M de degré $n\times m$ telle que :

$$M_{i,j} = CG(t_i,s_j) \text{ avec } \quad i = 1..n \quad \text{et} \quad j = 1..m$$

Plusieurs possibilités se présentent alors quant à la construction du CG en tant que solide :

- La section $S$ est fermée et $s_1 = s_m$ :

  - T est une courbe ouverte : $T(0) \neq T(l)$ où $l$ est la longueur de $T$

  Entre deux sections consécutives il y a donc $(m\text{-}1)\times 2$ facettes triangulaires, et donc $2(m\text{-}1)\times(n\text{-}1)$ facettes pour tout le CG. Reste à « boucher le CG » dès que l'opérateur de déformation ne réduit pas les sections à un seul point (ie le coefficient de l'éventuelle homothétie est non nul pour $t = 0$ et $t = 1$) ce qui rajoute $2\times(m\text{-}1)$ facettes, soit un total de $2(m\text{-}1)\times n$ facettes.

  - $T$ est une courbe fermée : $T(0) = T(l)$

  Il n'est pas nécessaire de « boucher » le CG et donc le nombre total de facettes est $2(m\text{-}1)\times(n\text{-}1)$.

- La section S est destinée à être fermée, mais $s_1 \neq s_m$ :

  - $T$ est une courbe ouverte : $T(0) \neq T(l)$ où $l$ est la longueur de $T$.

  Le raisonnement est le même que précédemment, mais il faut rajouter $2\times(n\text{-}1)$ facettes soit un total de $2(m\text{-}1)\times$n si le CG ne nécessite pas le calcul des surfaces extrémales et $2(m\text{-}1)\times(n+1)$ facettes dans le cas contraire.

  - $T$ est une courbe fermée : $T(0) = T(l)$.

  Le nombre total de facettes est $2(m\text{-}1)\times n$

- La section $S$ est ouverte :

  Le CG crée n'est plus un volume mais une surface, donc le nombre de facettes est simplement : $2(m\text{-}1)\times(n\text{-}1)$.

Dans tous les cas, les facettes constituant le solide sont alors naturellement définies par les triplets de points suivants :

$$(CG(t_i,s_j), CG(t_i,s_{j+1}), CG(t_{i+1},s_{j+1})) \text{ et } (CG(t_i,s_j), CG(t_{i+1},s_{j+1}), CG(t_{i+1},s_j))$$

pour i=1,...,$n$-1 et j=1,..,$m$ avec les modulo adéquats suivant que la trajectoire ou la section est fermée ou non.

### 2.3. Calcul de la normale d'un CG

Le calcul de la normale à une surface peut s'avérer primordial pour la visualisation (Z-Buffer ou tracé de rayon). Le calcul de la normale d'un CG se fait simplement en considérant le CG sous sa forme paramétrique :

$$CG(t,s) = \left[CG_x(t,s), CG_y(t,s), CG_z(t,s)\right]$$

La droite normale à la surface est classiquement définie par :

$$\frac{x - CG(t,s)}{\begin{vmatrix} \frac{\partial CG_y}{\partial t} & \frac{\partial CG_z}{\partial t} \\ \frac{\partial CG_y}{\partial s} & \frac{\partial CG_y}{\partial s} \end{vmatrix}} = \frac{y - CG(t,s)}{\begin{vmatrix} \frac{\partial CG_z}{\partial t} & \frac{\partial CG_x}{\partial t} \\ \frac{\partial CG_z}{\partial s} & \frac{\partial CG_x}{\partial s} \end{vmatrix}} = \frac{z - CG(t,s)}{\begin{vmatrix} \frac{\partial CG_x}{\partial t} & \frac{\partial CG_y}{\partial t} \\ \frac{\partial CG_x}{\partial s} & \frac{\partial CG_y}{\partial s} \end{vmatrix}}$$

### 2.4. Conclusion

Nous avons présenté dans cette section un aspect général des CG. L'avantage de ces méthodes vis à vis de celle de Klok et Post est de donner une définition analytique du CG. En revanche, l'apparition explicite d'un repère lié à la trajectoire entraîne des problèmes de contrôle de la variation de celui-ci.

## 3. Approximation d'un CG par une surface B-spline

### 3.1. Position du problème

La représentation par une forme à pôles d'une surface présente de nombreux avantages : choix du degré de la précision, éventuelles déformations locales, jonctions éventuelles avec d'autres surfaces, contrôle de continuité, etc... De nombreuses méthodes ont été développées dans le but de représenter les CG par des surfaces de formes libres ([COCQ 87], [BRON 92]). Nous présentons ici, la plus simple des interpolations par des surfaces B-splines. Considérerons le CG construit à l'aide d'une des méthodes précédentes. La surface représentant le CG est donc donnée sous la forme d'une matrice rectangulaire de points d'ordre $n \times m$. Intuitivement, chaque ligne de la matrice représente une occurrence de la section (coupe transversale du CG) et chaque colonne une isoparamétrique du paramètre $s$ (courbe longitudinale du CG)

$$\left[M_{i,j}\right] \quad i,j \in [1,\ldots,n] \times [1,\ldots,m]$$

Le but de cette section est de construire une surface à pôles passant par ces points et possédant un minimum de continuité sur tout le CG. Remarquons que cette étape ne depend pas du mode de définition du CG ou de la méthode employée pour la création du CG. Nous n'avons donc besoin que de la matrice M

### 3.2. Interpolation de la matrice de points par une surface B-spline

Le calcul de la surface à pôle repose sur le principe d'interpolation. On cherche la surface B-spline de degré d définie par :

$$S(u,v) = \sum_{l=1}^{l=L} \sum_{k=1}^{k=K} P_{l,k} N_{l,d}(u) N_{k,d}$$

telle que pour tout couple $(i_0,j_0)$ dans $[1,...,n\ ;1...,m]$ il existe $u_0$ et $v_0$ tels que :

$$M_{i_0,j_0} = S(u_0,v_0)$$

Supposons qu'il existe un opérateur $D$ qui, pour une section $M_{i_0,j}$ avec $j$ dans $[1,...,m]$ fournisse le vecteur de points $DM_{i_0,j}$ de dimension $n+d$-1 qui définit la courbe :

$$C_{i_0}(v) = \sum_{k=1}^{K+d} DM_{i_0,j}\ N_{k,d}(v)$$

vérifiant pour un vecteur nodal uniforme ( $v_i$ ) :

$$C_{i_0}(v_i) = M_{i_0,j} \quad \text{pour}\, i \in [1,\ldots,m]$$

Formons ainsi tous les vecteurs $DM_{i_0,j}$ pour toutes les occurrences des $n$ sections. Nous obtenons alors une matrice $M'_{i,j}$ d'ordre $n\times m+d$-1.

Soit maintenant une coupe longitudinale (colonne) de la matrice $M'$, c'est à dire un vecteur de dimension n que l'on note $M'_{i,j_0}$ et auquel on applique la même interpolation, autrement dit le même opérateur $D$. On obtient ainsi le vecteur de points $DM'_{i,j_0}$ de dimension $m+d$-1 qui définit la courbe :

$$L_{j_0}(u) = \sum_{l=1}^{L+d-1} DM'_{i,j_0} N_{l,d}(u)$$

vérifiant pour un vecteur nodal uniforme ( $u_i$ ) :

$$L_{j_0}(u_i) = M'_{i,j_0} \quad \text{pour}\, i \in [1,\ldots,n]$$

De la même manière que précédemment, nous formons avec tous les vecteurs $DM'_{i,j_0}$ une matrice $M''$ d'ordre $(n+d\text{-}1)\times(m+d\text{-}1)$.

Considérons maintenant la surface B-spline de degré $d$ définie par la matrice $M''$ :

$$S(u,v) = \sum_{l=1}^{l=n+d-1} \sum_{k=1}^{k=m+d-1} M''_{l,k} N_{l,d}(u) N_{k,d}(v)$$

Evaluons $S$ aux valeurs nodales $u_I$ et $v_J$. A l'aide des résultats précédents, on obtient :

$$S(u_I, v_J) = \sum_{l=1}^{l=n+d-1} \sum_{k=1}^{k=m+d-1} M''_{l,k} N_{l,d}(u_I) N_{k,d}(v_J)$$

$$S(u_I, v_J) = \sum_{k=1}^{k=n+d-1} \left( \sum_{l=1}^{l=m+d-1} M''_{l,k} N_{l,d}(u_I) \right) N_{k,d}(v_J)$$

$$S(u_I, v_J) = \sum_{k=1}^{k=n+d-1} M'_{I,k} N_{k,d}(v_J)$$

$$S(u_I, v_J) = M_{I,J}$$

Autrement dit, la matrice de points $P$ cherchée est la matrice $M''$ calculée par une double interpolation. $P$ est donc d'ordre $(n+d-1)\times(m+d-1)$. Remarquons que la surface ainsi obtenue est une surface dont l'isoligne au noeud $u_i$ est une des sections interpolées :

$$S(u_I, v) = C_I(v)$$

Il reste à prouver l'existence de l'opérateur $D$ que nous avons introduit. Dire que $D$ existe revient à dire que l'on peut trouver une courbe de degré d par morceaux de classe $C^{d-1}$ passant par n points déterminés. Or une courbe de degré d possède $d+1$ coefficients, ce qui nous donne une nombre de degrés de liberté de $(n-1)\times(d+1)$ et un nombre de contraintes égal à $d+1$ à chaque noeud, soit un total de $(n-2)\times(d+1)$ contraintes auxquelles il faut ajouter les 2 contraintes de position aux extrémités. Ce qui nous laisse un degré de liberté de $d+1-2$. Dans le cas où $d=3$, il reste deux degrés de liberté qui sont en général utilisés pour contrôler la continuité de la courbure ou de la tangente aux extrémités de la surface.

Nous donnons dans l'annexe 2 les opérateurs $D$ dans les cas où la section est ouverte puis fermée.

L'utilisation des B-splines présente plusieurs avantages par rapport à d'autres surfaces à pôles comme les surfaces de Bézier, les Nurbs, etc... La définition par morceaux autorisera des déformations très locales, ce qui permettra de contourner dans de nombreux cas la relative rigidité (liée au mode de définition) des CG. La non-utilisation de termes rationnels permettra de conserver les algorithmes classiques de subdivision de l'enveloppe convexe. Nous donnons dans l'annexe 1 des méthodes d'évaluation perfectionnées qui permettent de réduire les temps de calcul. Enfin le choix classique des B-splines cubiques se justifie comme un bon compromis entre une relative flexibilité, une continuité de la courbure et un degré raisonnable.

De plus, si la continuité sur toute la surface est dans tous les cas d'ordre $C^2$, il est possible d'introduire des discontinuités d'ordre $G^1$ ou $G^2$ sur la surface. Deux méthodes sont

possibles : augmenter la multiplicité des valeurs nodales ou celle des points de contrôle. L'inconvénient d'augmenter la multiplicité les valeurs nodales est de modifier les courbes de base des B-splines et donc de ne pouvoir conserver les algorithmes classiques d'évaluation. En revanche, doubler ou tripler des points de contrôle revient à introduire des parties linéaires (courbes) ou planes (surfaces) sur le CG.

### 3.3. Conclusion

La représentation choisie par la plupart des auteurs est la représentation par frontières. Une approximation polyédrique du CG qui dépend des pas d'échantillonnage choisis sur la trajectoire et la section est obtenue en joignant les points correspondants entre les occurrences de la section. Cette première représentation peut être modifiée grâce à une interpolation par des surfaces à pôles qui dépend directement du maillage du CG défini lors de la première étape. Du type de traitement que devra subir le CG dépend la finesse de la représentation polyédrique. Par exemple, si on désire effectuer des modifications très locales, il est intéressant que le CG soit décrit par un nombre important de carreaux élémentaires, la déformation ayant alors une répercussion moindre sur le CG.

# Chapitre III : NOTRE APPROCHE

Nous décrivons dans cette section l'approche que nous avons utilisée pour modéliser des CG. Dans la première partie, nous donnerons les principes généraux de notre modélisation dont l'originalité est de ne plus considérer la trajectoire comme l'axe principal du CG. En fait, c'est l'outil qui servait à modifier la taille de la section (altitude pour certains auteurs) qui prendra cette place. Cet outil représentant une ou deux courbes paramétrées et que l'on appellera profils sera à la base de la création du CG. Bien entendu, nous essaierons de conserver les avantages des modélisations décrites dans le chapitre précédent et nous introduirons d'autres outils permettant d'obtenir des formes de plus en plus complexes.

Dans la deuxième partie, nous introduirons des améliorations essentielles comme la déformation en forme de la section ou le calcul d'un CG pour une trajectoire B-spline cubique quelconque. Nous garderons comme objectif la simplicité des données initiales et leur caractère intuitif (le résultat doit rester l'objet attendu par l'utilisateur), mais aussi une création systématique pour éviter que l'utilisateur ait trop de paramètres à spécifier.

Tout le long de ce chapitre, nous évoluerons le plus possible de l'approche discrète (représentation d'un CG par un ensemble de points ou de facettes) vers une approche continue (représentation du CG part des surfaces, gestion des paramètres représentés par des fonctions continues)

## 1. Principe

### 1.1. définition

#### 1.1.1. Repère de Frenet

C'est, pour le moment, le repère que nous avons choisi d'associer à la trajectoire pour deux raisons : il est simple à calculer et il donne une orientation « naturelle », un de ses axes étant dans la direction du rayon de courbure, l'autre dans la direction de la tangente à la courbe.

Nous conservons la représentation de la trajectoire $T$ sous une forme paramétrique. Dans cette section, $T$ est une courbe $C^2$ et $G^2$ définie par :

$$T(t) = \left[T_x(t), T_y(t), T_z(t)\right] \text{ avec } t \in [0,1]$$

Le repère attaché à $T$ est défini par les trois vecteurs **TG**, **B**, **N** représentant le trièdre de Frenet :

- La tangente **TG** :

$$\mathbf{TG}(t) = \frac{T'(t)}{\left|T'(t)\right|}$$

- La normale unitaire intérieure à la concavité du cercle osculateur :

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{TG}'(t)}{\left|\mathbf{TG}'(t)\right|}$$

En utilisant le fait que : $\left|T'(t)\right|' = \dfrac{T'(t) \bullet T''(t)}{\left|T'(t)\right|}$, on a :

$$\mathbf{N}(t) = \frac{T''(t).\left|T'(t)\right|^2 - T'(t).(T(t) \bullet T''(t))}{\left|T''(t).\left|T'(t)\right|^2 - T'(t).(T(t) \bullet T''(t))\right|}$$

- La binormale :

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{TG}(t) \wedge \mathbf{N}(t)$$

Le repère de Frenet ainsi défini sera noté **F**(t) dans la suite.

### 1.1.2. Formulation du CG

Pour définir un CG, nous avons besoin donc du couple ($T$, **F**), de la section $S$ (qui est généralement plane) et de l'opérateur $D(t,.)$ représentant les effets des règles de balayage au point $T(t)$. Nous gardons l'expression analytique **(2.1)** adaptée à notre situation (figure III.1) :

- $S(s) = \left[S_x(s), S_y(s)\right]$

$$\Rightarrow \qquad CG(t,s) = T(t) + D_x(t, S_x(s))\mathbf{N}(t) + D_y(t, S_y(s))\mathbf{B}(t) \qquad \textbf{(3.1)}$$

- $S(s) = \left[S_x(s), S_y(s), S_z(s)\right]$

$$\Rightarrow \qquad CG(t,s) = T(t) + D_x(t, S_x(s))\mathbf{N}(t) + D_y(t, S_y(s))\mathbf{B}(t) + D_z(t, S_z(s))\mathbf{TG}(t) \qquad \textbf{(3.2)}$$

Remarquons que l'expression **(3.1)** est déduite de **(3.2)** dès que l'opérateur $D(t,.)$ est linéaire et que la fonction $S_z$ est nulle.

Notons aussi, sans perte de généralité, que $t$ peut être fonction d'un autre paramètre. Dans la suite, nous utiliserons cette caractéristique en choisissant $t = f(p)$ où $f$ et $p$ restent à préciser.

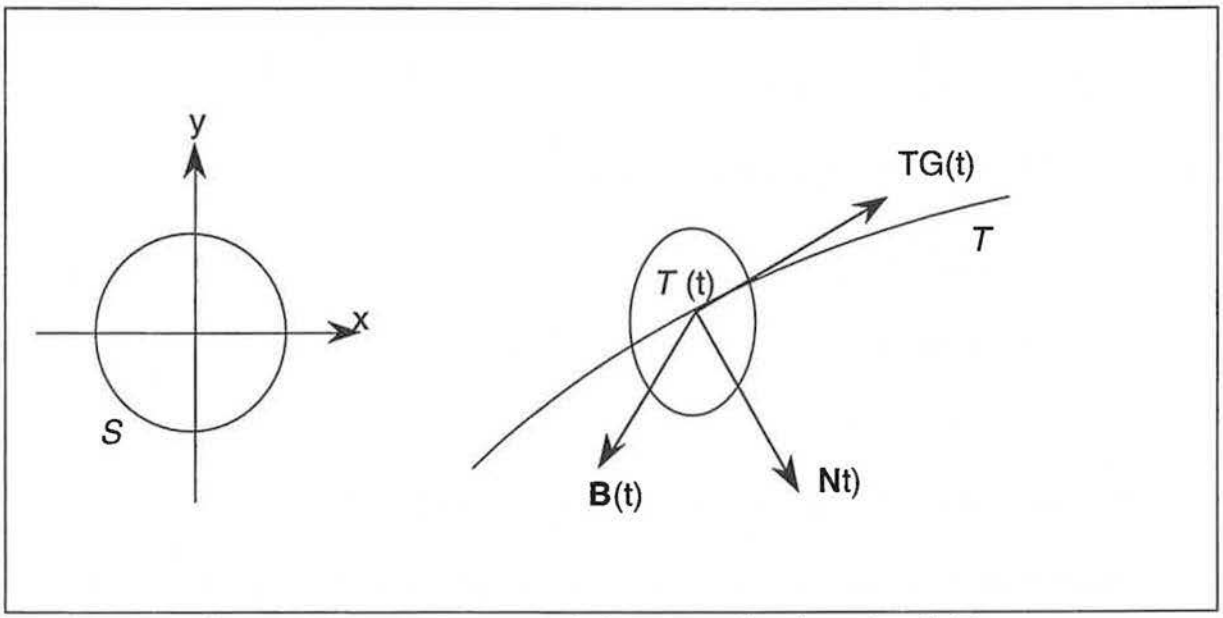



Figure III.1 : *positionnement de la section dans le repère de Frenet*

## 1.2. Introduction de la fonction Profil

### 1.2.1. Définition formelle

Nous introduisons, dans cette section, la fonction principale de notre approche : le Profil $P(p)$ (sans perte de généralité nous choisirons $p$ entre 0 et 1). Introduite par G. Hégron et O. Cousin [HEGR 89], elle n'a pas été, à notre connaissance, exploitée et développée depuis. Cette fonction est une courbe paramétrée 2D définie par l'utilisateur avec les restrictions suivantes (figure III.2) :

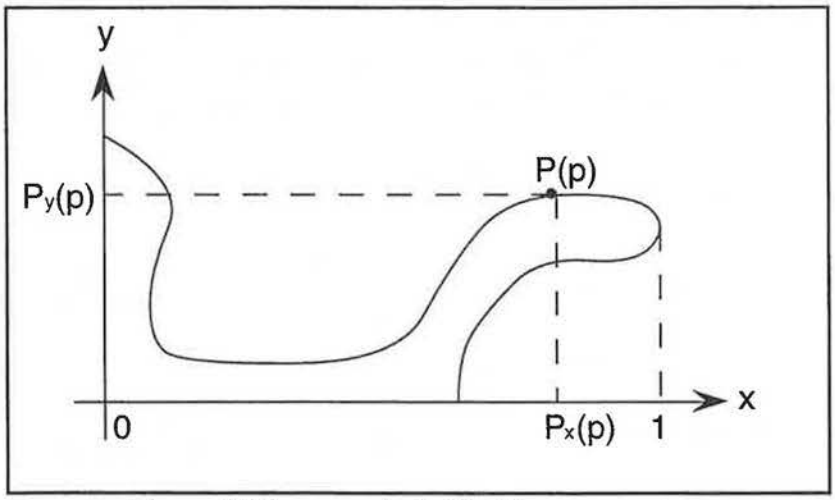



Figure III.2 : *exemple de Profil non monotone*

- $P$ est définie dans un système d'axes (**x**,**y**) et :

$$\inf_{p\in[0,1]} P_x(p) \geq 0$$

$$\sup_{p\in[0,1]} P_x(p) \leq 1$$

- $P$ est au moins de classe $C^0$

- $P$ est positive par rapport aux axes **x** et **y** c'est à dire :

$$\inf_{p\in[0,1]} P_y(p) \geq 0$$

- Il n'existe pas de couple de paramètres $(p_1, p_2)$ tels que :

$$P(p_1) = P(p_2)$$

Autrement dit, le profil n'est pas une courbe s'auto-intersectant.

Nous reviendrons sur le rôle du profil dans la création d'un CG dans la section (1.2.3.). Pour l'instant, nous allons nous contenter de donner une définition intuitive du profil qui éclairera mieux la description mathématique.

### 1.2.2. Description intuitive

La fonction Profil est en fait un substitut au vecteur déformation en taille pour les CG de Klok et Post ou à la fonction altitude pour la définition plus classique. Elle représente la déformation en taille que va subir la section durant le balayage de la trajectoire. Dans le cas où $P$ est monotone en **x** ( $P_x$ croissante), elle correspond exactement à une fonction altitude. Par contre, dans le cas où $P$ est non monotone en **x**, $P$ représente grosso modo le profil du CG modulo la trajectoire et les autres éventuelles déformations. Autoriser un CG à posséder un profil non monotone en **x**, revient à pouvoir créer un CG en déplaçant de manière quelconque (continue tout de même) la section le long de la trajectoire.

Pour finir, on peut, dans le cas où $P$ est monotone et $S$ plane, donner la formulation suivante au CG (en supposant qu'il n'y a pas d'autre déformation et que $t = p$) :

$$CG(t,s) = T(t) + P(t)S_x(s)\mathbf{N}(t) + P(t)S_y(s)\mathbf{B}(t)$$

Cela revient à appliquer la matrice $\Pi(t) = \begin{pmatrix} P(t) & 0 \\ 0 & P(t) \end{pmatrix}$ à la section $S$ avant de la positionner dans son repère au point *T(t)*.

### 1.2.3. Construction du CG, méthode d'échantillonnage

Pour construire un CG, avec les méthodes précédentes, on procédait à un échantillonnage le long de la trajectoire. Il n'est plus possible d'utiliser le même procédé puisque à un $t$ donné peuvent correspondre plusieurs sections. Nous avons donc choisi d'échantillonner le long du

profil. Bien sûr, il faut une relation entre $P(p)$ et la position de la section, qui subit donc une homothétie de rapport $P(p)$ sur la trajectoire. Cette relation entre $p$ et $t$ est la fonction $f$ que nous avons introduite dans la section 1.1.1.. Nous avons choisi la relation suivante : pour chaque $p$, $P_x(p)$ représente l'abscisse curviligne normalisée de la trajectoire. Trouver la position de la section $S$ en $p$ revient à trouver $t$ tel que :

$$\frac{abscisse_curviligne(T(t))}{l} = P_x(t)$$

où $l$ est la longueur de la trajectoire ($l = abscisse_curviligne(T(1))$).

Nous pouvons donc exprimer explicitement $f$ :

$$f(p) = abscisse_curviligne_T^{-1}(P_x(p))$$

où $abscisse_curviligne_T^{-1}(x)$ retourne la valeur du paramètre $t$ tel que l'abscisse curviligne de $T(t)$ soit égale à $x$. Dans la pratique, trouver la fonction $abscisse_curviligne_T^{-1}$ revient à trouver les zéros d'une fonction de degré élevé si les composantes de $T$ sont des fonctions polynomiales. Nous utiliserons donc une méthode classique plus pratique pour trouver le paramètre $t$ :

- Pour un $p$ donné, on calcule $P_x(p)$

- On cherche deux paramètres $t_g$ et $t_d$ tels que :

$$abscisse_curviligne(T(t_g)) \leq P_x(p).l \leq abscisse_curviligne(T(t_d))$$

au pire, nous pouvons choisir $t_g = 0$ et $t_d = 1$

- Par dichotomie sur l'intervalle $[t_g, t_d]$, on recherche le paramètre $t$ tel que :

$$\left| abscisse_curviligne(T(t)) - P_x(p).l \right| \leq \varepsilon$$

où $\varepsilon$ est un paramètre de précision éventuellement donné par l'utilisateur.

Il ne nous reste qu'à préciser le calcul de la fonction abscisse_curviligne. Il s'agit d'un algorithme très classique de calcul de longueur d'un arc de courbe. Le principe est d'approximer la courbe par une ligne brisée suffisamment proche de celle-ci. Le raisonnement est aussi basé sur le principe de dichotomie. Si entre deux points $T(t_g)$ et $T(t_d)$ la courbe n'est pas suffisamment proche du segment $[T(t_g), T(t_d)]$, la longueur de la courbe entre ces deux points sera considérée comme la somme des deux longueurs d'arc $T(t_g)$, $T((t_g + t_d)/2)$ et $T((t_g + t_d)/2)$, $T(t_d)$. Ce qui nous donne l'algorithme :

abscisse_curviligne($T(t_g)$, $T(t_d)$)

Si suffisamment_linéaire( $T(t_g)$ , $T(t_d)$ ) alors

s=s+longueur_du_segment( $T(t_g)$ , $T(t_d)$ )

Sinon

s=abscisse_curviligne( $T(t_g)$ , $T((t_g+t_d)/2)$ )+abscisse_curviligne( $T((t_g+t_d)/2)$ , $T(t_d)$ )

La procédure suffisamment_linéaire estime la linéarité de la courbe entre $T(t_g)$ et $T(t_d)$. Nous avons choisi une méthode qui a l'avantage de donner de bons résultats pratiques. Pour la justifier, plaçons-nous d'abord dans le cas particulier où la courbe est plane. Un moyen simple pour évaluer la « linéarité » de la courbe entre deux points, est de calculer la distance entre l'intersection des tangentes aux points extrémaux et la corde constituée de ces deux points (figure III.3). Si cette distance est inférieure à un certain seuil donné, on considère, si les éléments mis en jeu ne présentent pas de caractère particulier, que la longueur de la courbe est égale à la longueur du segment.

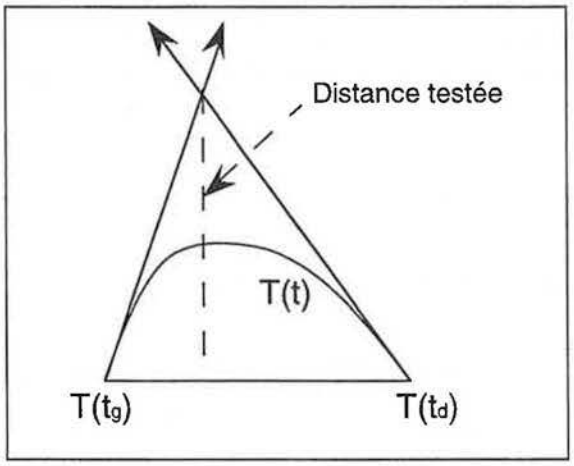



Figure III.3 : *distance testée dans la procédure suffisamment_linéaire*

On utilisera un raisonnement similaire dans le cas où la courbe est 3D, à ceci près que les droites tangentes aux points extrémaux ne sont pas forcément sécantes. Nous calculerons donc l'intersection entre la tangente en un point extrémal et le plan défini par la normale de la courbe pour l'autre point extrémal. Ensuite, nous calculerons la distance entre ce point et la corde. Afin de garder une certaine symétrie, nous ferons les calculs en échangeant les rôles des points extrémaux. La somme des distances entre chacun des points et la corde devra être inférieure à un certain seuil.

### 1.3. Introduction de l'orientation d'une section

#### 1.3.1. Généralités sur l'orientation dans le plan de définition de la section.

L'orientation de la section est plus intuitive lorsqu'elle s'applique dans son plan de définition (**x**, **y**) (si la section est plane). La section va subir, en plus de son orientation naturelle due à l'utilisation du repère de Frenet, une déformation par une rotation définie par l'utilisateur. L'introduction d'un telle fonction est très utile pour pouvoir modéliser des objets

torsadés par exemple, ou encore pour avoir un moyen de contre-balancer l'orientation imposée par le repère de Frenet. Pour fixer les idées, donnons, comme nous l'avons fait avec le profil, la définition formelle du CG dans le cas simple où le profil est monotone, défini par rapport au paramètre $t$ et que l'on échantillonne par conséquent le long de la trajectoire.

Soit $O(t)$ une fonction (nous préciserons les contraintes à satisfaire dans la section suivante) définissant l'orientation que doit prendre la section dans le repère $\mathbf{F}(t)$ au point $T(t)$ :

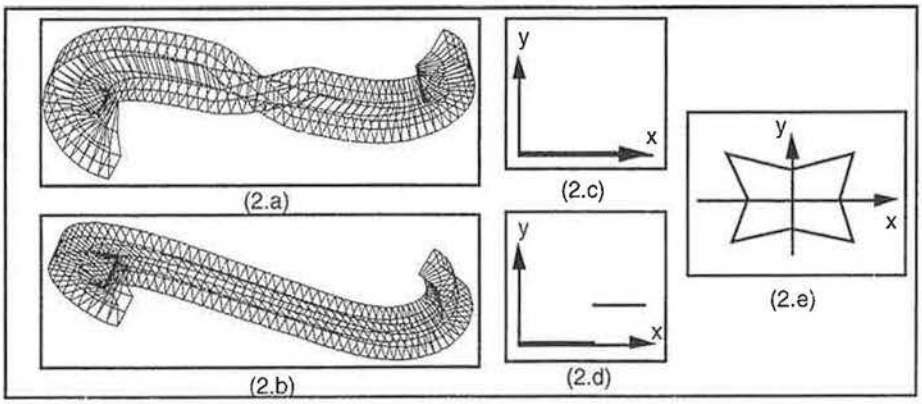
L'opérateur des déformations peut alors s'écrire :

$$D(t,.) = \Omega(t)\Pi(t) = \Pi(t)\Omega(t)$$

$$\text{avec : } \Pi(t) = \begin{pmatrix} P(t) & 0 \\ 0 & P(t) \end{pmatrix} \text{ et } \Omega(t) = \begin{pmatrix} \cos O(t) & -\sin O(t) \\ \sin O(t) & \cos O(t) \end{pmatrix}$$

Le CG peut alors être décrit par la relation **(3.1)**. L'orientation peut être perçue de trois façons différentes par l'utilisateur :

- la section subit la rotation dans son repère initial et est ensuite positionnée dans le repère attaché à la trajectoire ;
- la section est positionnée dans le repère $\mathbf{F}(t)$ et subit ensuite la rotation dans ce repère ;
- le repère $\mathbf{F}(t)$ subit une rotation selon l'axe défini par la tangente et ensuite la section est positionnée dans le repère orienté.




Un exemple de problème d'orientation.
La trajectoire est définie dans un plan, puis, après une portion de droite dans un autre plan, orthogonal au premier.
(2.a) : la continuité de la normale est conservée (orientation 2.C)
(2.b) : l'orientation de la normale est modifiée par l'utilisateur (orientation 2.d)

### 1.3.2. Orientation d'un CG possédant un profil non monotone

Dans ces conditions, il n'est plus possible de définir proprement une fonction $O(t)$. En effet, il faudrait alors que l'utilisateur sache à quelles valeurs de $t$ on rebrousse chemin pendant le parcours de la trajectoire. Dans ces conditions, nous proposons deux méthodes pour définir la fonction $O$.

Les contraintes "naturelles" que nous imposerons à $O$ sont les suivantes (figure III.4):

- $O$ est une fonction monotone en $x$ et :

$$O_x(0) = 0 \text{ et } O_x(1) = 1 \ ;$$

- $O$ est continue (afin d'assurer la validité du CG) ;

- $O$ est $2\pi$ périodique et on peut donc imposer :

$$0 \leq O_y(p) \leq 2\pi$$

#### 1.3.2.1. Définition formelle d'une fonction $O(p)$

Ici $p$ est le paramètre de la fonction Profil. Avec cette définition il n'y a plus de problème pour définir le CG puisque pour chaque $p$ échantillonné sur le Profil, il existe un $t$ correspondant tel que, au point $T(t)$, la section subisse une orientation égale à $O(p)$.

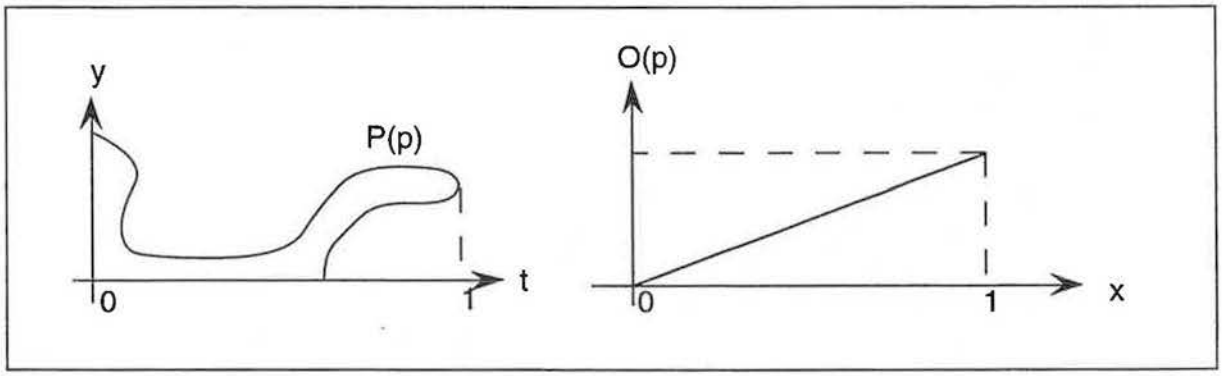



Figure III.4 : *exemple d'orientation définie selon le paramètre p*

Remarquons aussi que, dans le cas où le paramètre $p$ a des comportements non intuitifs (par exemple, si $p$ est loin d'être proportionnel à l'abscisse curviligne du profil, ce qui est souvent le cas lorsque l'on définit le profil par des courbes à pôles), la définition formelle précédente de l'orientation donne parfois des résultats surprenants.

#### 1.3.2.2. Définition de l'orientation selon $P_x(p) = t$

La définition que nous proposons dans cette section est beaucoup plus simple à appréhender pour l'utilisateur. Il définit l'orientation selon l'abscisse curviligne de la trajectoire, ce qui est donc beaucoup plus représentatif. Cependant, en utilisant ce moyen, on concède des degrés de liberté dans le sens où l'on admet que pour une même abscisse curviligne, l'orientation de la section est la même (figure III.5). En ce qui concerne la validité du CG, la définition de l'orientation selon $P_x(p)$ est préférable. En effet, les sections positionnées au point $T(t)$ de la trajectoire ne peuvent se recouper si elles ont la même orientation.

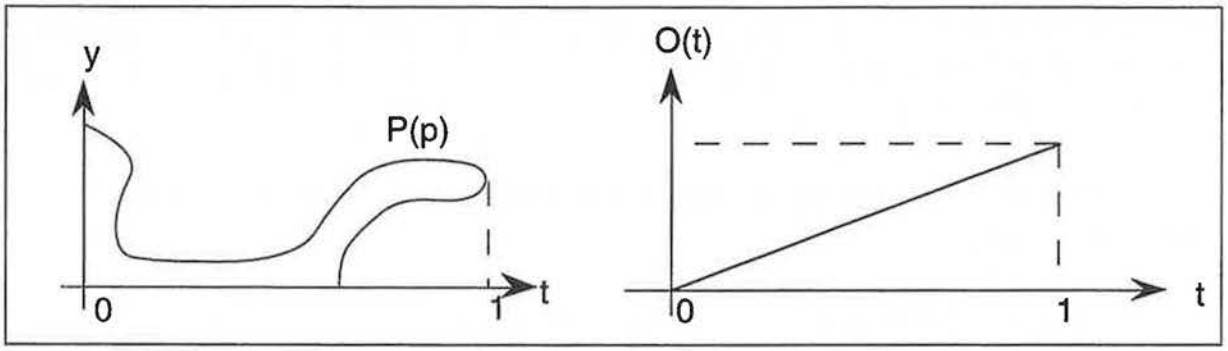
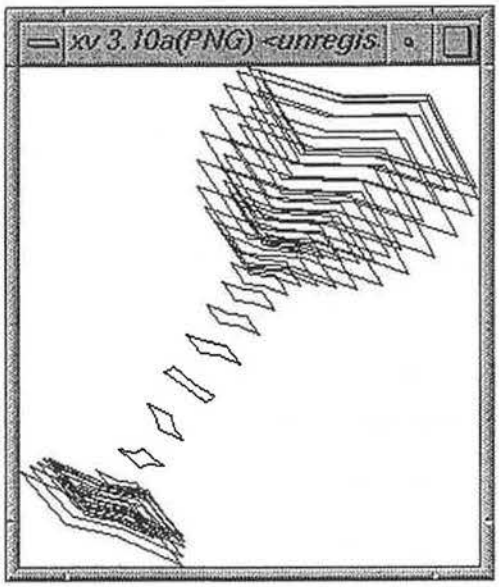



Figure III.5 : *exemple d'orientation définie selon le paramètre* $P_x(p) = s(t)$




CG orienté : coupe vue par sections successives

## 2. Extensions

### 2.1. Introduction d'un deuxième profil

#### 2.1.1. Définition

L'introduction d'un deuxième profil est la partie la plus délicate pour l'utilisateur. En effet, les contrôles des deux profils doivent être rigoureusement associés, contrairement à ce qui se passait pour l'orientation. Il est pratiquement impossible de définir le deuxième profil en fonction du paramètre *p* du premier, les résultats devenant trop imprévisibles.

Nous avons donc choisi d'associer la définition du deuxième profil au mode de définition du premier. Le premier profil indiquera invariablement la déformation en taille selon l'axe des **x** de la section. Il sera défini par l'utilisateur par un ensemble de points qu'il juge représentatifs de la courbe représentant le profil. Ces points seront interpolés par une courbe de formes libres (B-splines, Bézier, ...), les points de contrôle pouvant ensuite être déplacés par l'utilisateur afin de réaliser les ajustements qu'il désire.

Le deuxième profil $P^2(p)$ sera défini de la même manière, avec le même nombre de points que le premier, ces points ayant la même abscisse. Ensuite, les points caractérisant la courbe du profil en **y** seront interpolés par le même style de courbe de formes libres que pour le premier profil avec les contraintes suivantes :

- Toutes les contraintes associées à la définition du profil principal renommé $P^1(p)$ sont conservées.

- Si, pour une abscisse $P_x^1(p)$, la courbe $P^1$ présente une ième tangente verticale, alors $P^2$ possédera à la même abscisse une ième tangente verticale ou un ième point de rebroussement.

- Si, pour une abscisse $P_x^1(p)$, la courbe $P^1$ présente un jème point de rebroussement, alors $P^2$ possédera à la même abscisse une jème tangente verticale ou un jème point de rebroussement.

- On a :

$P_x^1(0) = P_x^2(0)$ et $P_x^1(1) = P_x^2(1)$ pour tous les morceaux de courbes définissant les profils.

- Les points de tangence verticale et de rebroussement sont des extrémités des courbes élémentaires décrivant les deux profils (figure III.6).

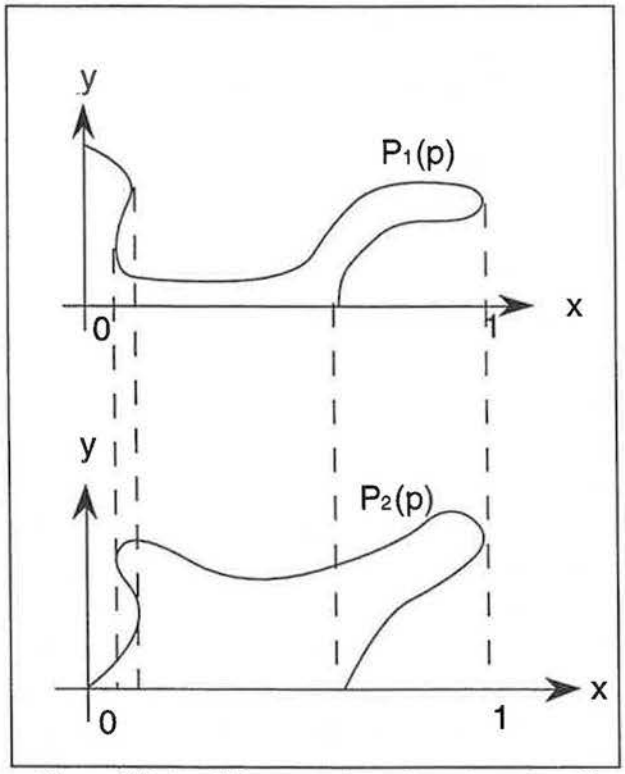



Figure III.6 : *définition d'un deuxième Profil*

### 2.1.2. Cas des B-splines

Pour résoudre les problèmes liés aux contraintes que nous avons fixées dans la section précédente, nous avons choisi de représenter les profils par des B-splines (cubiques en général). On utilise les techniques d'insertion de points de contrôle pour décrire correctement les profils. Nous donnons, ici, les différentes étapes du processus :

- L'utilisateur entre les $n$ points à interpoler du profil principal.

- Les $n+d$-1 points de contrôle de la courbe B-spline de degré $d$ interpolant les points précédents sont calculés.

- Les points de la courbe ayant une tangente verticale sont calculés et un point de contrôle est inséré de telle manière que le point de tangence verticale soit une des extrémités d'une courbe élémentaire composant la B-spline.

- L'utilisateur rentre ensuite les ordonnées des $m$ points composant le deuxième profil, les abscisses étant les mêmes que celles de l'ensemble des points du premier profil et de ceux qui possèdent une tangente verticale.

Les $m$ points du deuxième profil sont interpolés par morceaux, ce qui permet de contrôler les tangentes aux extrémités de ces morceaux. Ces morceaux allant :

- du premier point au premier point de tangence verticale
- du premier point de tangence verticale au second
- ...
- du dernier point de tangence verticale au dernier point de la courbe.

La détection des points de rebroussement se fait soit automatiquement en repérant les morceaux linéaires dans la B-spline, soit directement par l'utilisateur qui peut tripler les valeurs nodales en ce point.

Au cas où les résultats ne seraient pas satisfaisants, l'utilisateur peut à tout moment ajouter des points pour mieux définir un des deux profils. Un point sera alors inséré automatiquement dans la courbe de l'autre profil afin de maintenir la compatibilité de l'échantillonnage.

### 2.1.3. Echantillonnage et discussion

Rappelons que l'échantillonnage s'effectue le long du profil principal. La relation entre les deux profils est simple : pour un $p$ donné, la section subira un changement d'échelle caractérisé par la matrice :

$$\Pi(p) = \begin{pmatrix} P^1(p) & 0 \\ 0 & P^2(p) \end{pmatrix}$$

Il est clair que nous ne pouvons pas prétendre que pour un paramètre $p$ :

$$P_x^1(p) = P_x^2(p).$$

Par contre, le mode de construction nous assure que :

$$\left|P_x^1(p) - P_x^2(p)\right| \leq \alpha \left|P_x^1(0) - P_x^1(1)\right| \text{ avec } \alpha < 1$$

Cette méthode nous évite de trouver une relation entre $P_x^1(p)$ et $P_x^2(p)$ et donne des résultats pratiques satisfaisants. A ce stade, nous pouvons écrire l'opérateur des déformations (orientation et taille) comme une fonction de $p$ :

$$D(p,.) = \begin{pmatrix} \cos O(p) & -\sin O(p) \\ \sin O(p) & \cos O(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_y^1(p) & 0 \\ 0 & P_y^2(p) \end{pmatrix} \text{ si la section est plane,}$$

$$D(p,.) = \begin{pmatrix} \cos O(p) & -\sin O(p) & 0 \\ \sin O(p) & \cos O(p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_y^1(p) & 0 & 0 \\ 0 & P_y^2(p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sinon.}$$

### 2.1.4. Interprétation géométrique de la matrice $\Pi(p)$

Nous pouvons interpréter la matrice $\Pi(p)$ de deux manières différentes :

• comme la composition de deux affinités. En effet, la matrice $\Pi(p)$ peut se décomposer sous la forme suivante :

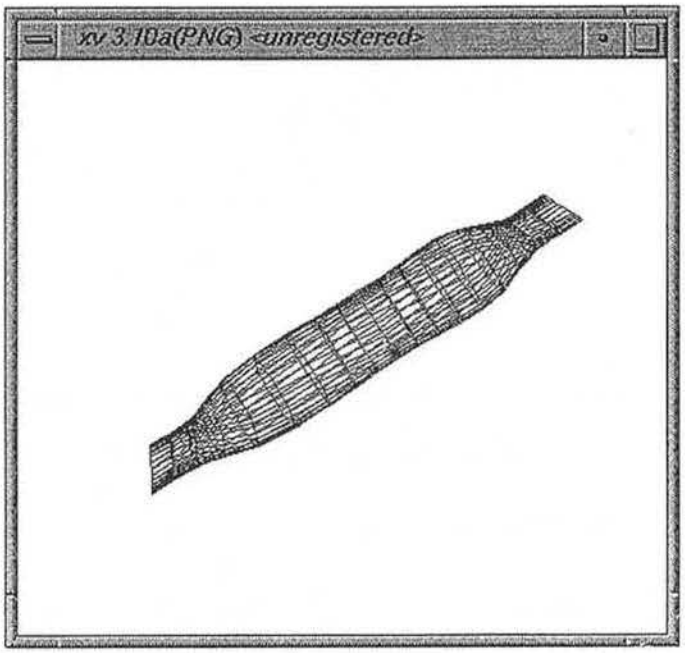
$$\Pi(p) = \begin{bmatrix} P^1(p) & 0 & 0 \\ 0 & P^2(p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^1(p) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P^2(p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La première matrice de la décomposition correspond à une affinité de rapport $P^1(p)$, dont la droite de projection est l'axe des **x**, et la droite directionnelle, l'axe des **y**. La deuxième matrice de la décomposition correspond à une affinité de rapport $P^2(p)$, dont la droite de projection est l'axe des **y**, et la droite directionnelle, l'axe des **x**. Lorsque $P^1(p)=1$ ou $P^2(p)=1$, $\Pi(p)$ correspond à une affinité. Ces cas particuliers sont très attrayants pour l'utilisateur, dans la mesure où ils sont très intuitifs.

• comme la composition d'une affinité et d'une homothétie. En effet la matrice $\Pi(p)$ peut se décomposer sous la forme suivante :

$$\Pi(p)=\begin{bmatrix} P^1(p) & 0 & 0 \\ 0 & P^2(p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P^2(p) & 0 & 0 \\ 0 & P^2(p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{P^1(p)}{P^2(p)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La première matrice de la décomposition correspond à une homothétie de rapport $P^2(p)$, et de centre O. La deuxième matrice de la décomposition correspond à une affinité de rapport $P^1(p)$, dont la droite de projection est l'axe des **x**, et la droite directionnelle, l'axe des **y**. Cette deuxième approche nous semble, en général, plus simple à utiliser dans la mesure où il est assez intuitif de composer une affinité avec une homothétie, surtout dans le cas où $P^1(p)$=k $P^2(p)$ (c'est-à-dire que le rapport de l'affinité est constant).




CG possédant deux fonctions profils

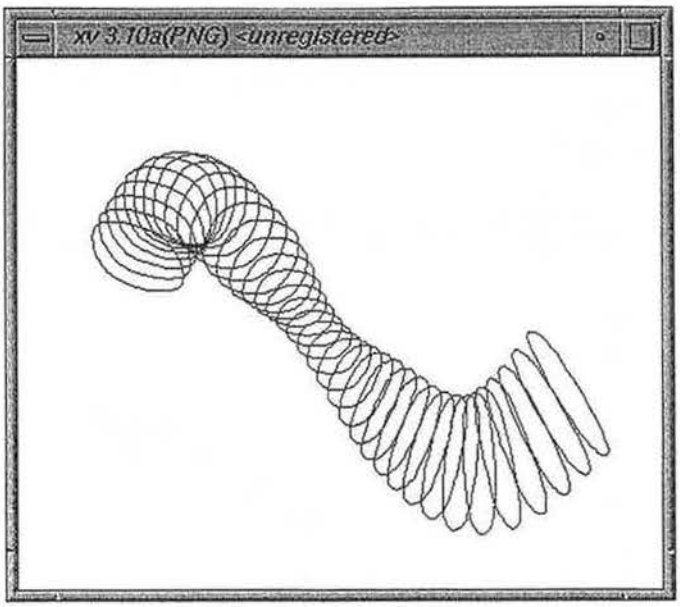
## 2.2. Autres déformations en orientation et en taille

### 2.2.1. Introduction de deux autres déformations en orientation

Nous ne voyons que peu d'intérêt dans l'orientation de la section selon d'autres axes que celui défini par $\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}$, d'autant plus que des problèmes de validité peuvent vite apparaître. Néanmoins, un utilisateur averti peut en avoir besoin pour contrôler le repère de Frenet. Nous donnons donc à l'opérateur des déformations avec les rotations selon les trois axes principaux, les fonctions $O_z$, $O_x$, $O_y$ étant définies comme $O$.

$$D(p,.)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos O_y(p) & \sin O_y(p) \\ 0 & -\sin O_y(p) & \cos O_y(p) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos O_x(p) & 0 & -\sin O_z(p) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin O_z(p) & 0 & \cos O_z(p) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos O_z(p) & -\sin O_z(p) & 0 \\ \sin O_z(p) & \cos O_z(p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_y^1(p) & 0 & 0 \\ 0 & P_y^2(p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En revanche, nous avons cru nécessaire de proposer à l'utilisateur une option simple et très souvent utile. Cette option consiste à attacher le long de toute la trajectoire le repère associé au premier point de la trajectoire. Cette option permet d'obtenir des objets qui intuitivement sont définissables à l'aide des CG mais qui ne le sont pas avec le modèle que nous avons utilisé.




CG possédant deux profils (vue par sections)

### 2.2.2. Introduction d'un troisième profil

Très difficile à manipuler, il pose de plus de profonds problèmes de validité. Il n'est efficace que sur les sections non planes et nous ne voyons qu'un avantage à son utilisation : les sections 3D initiale et finale peuvent être modifiées par rapport à la section de définition. Un troisième profil se définit comme le second et introduit un terme $P^3(p)$ dans la matrice des déformations en tailles.

Notons que d'autres déformations comme par exemple la translation du centre de la section durant le balayage peuvent être prises en compte en modifiant l'opérateur $D$. Cependant, il est plus judicieux de modifier la courbe pour modéliser ces effets.

## 2.3. Déformation de la forme de la section

### 2.3.1. Déformation par jonction

Supposons que nous disposions de deux CG ayant chacun une section (éventuellement différente) $C^i$ et $G^i$ définie avec le même nombre de points. On peut alors construire un seul objet constitué du premier CG, d'un raccord $G^i$ et $C^i$ entre le premier et le deuxième CG et du deuxième CG. Le raccord peut être effectué par simple manipulation de matrices :

- La matrice de points $M_{i,j}$ décrivant le premier CG et la matrice de points $K_{l,j}$ décrivant le second CG sont concaténées pour obtenir une matrice $P_{i+l,j}$.

- La matrice $P_{i+l,j}$ est interpolée par une surface de formes libres. Les caractéristiques de la jonction dépendent du degré utilisé lors de l'interpolation. Si le degré de l'interpolation est 3, la surface totale présentera une continuité d'ordre 2.

Remarque : Si on interpole d'abord les deux matrices *M* et *K*, la concaténation ne peut s'effectuer sur les matrices des points de contrôle sans effectuer des modifications sur les lignes qui régissent les conditions aux limites des surfaces.

Si les sections des deux CG ne sont pas définies par le même nombre de points, on peut, à l'aide d'un algorithme d'insertion de points de contrôle (par exemple l'algorithme d'Oslo), redéfinir les sections de telle sorte que leurs nombres de points de contrôles soient identiques.

*Limite d'une telle démarche :*

La démarche précédente n'est efficace que si l'utilisateur ne désire pas contrôler la trajectoire du raccord. De plus, elle n'est applicable que si la section est régulière. On perd aussi le contrôle des déformations (profil,...) pendant le raccord et ce raccord peut être représenté par des formes différant totalement des sections initiale et finale. Enfin, l'approche CG est délaissée (il n'y a plus de déplacement d'une section le long d'une trajectoire), ce qui peut être gênant si l'on ne veut récupérer que la partie de l'objet représentant le raccord. Pour toutes ces raisons, nous proposerons dans les sections suivantes une autre approche permettant de garder l'esprit CG.

### 2.3.2. Déformation d'une section le long d'une trajectoire

Nous avons choisi d'interpoler les sections à l'aide de B-splines cubiques uniformes. Pour déformer une section pendant le balayage de la trajectoire, les données nécessaires sont :

- une trajectoire et les règles de balayage associées ;

- une section initiale plane notée SI ;

- une section finale plane notée SF.

#### 2.3.2.1. Passage régulier d'une section $C^2$ et $G^2$ à une autre également $C^2$ et $G^2$

Dans toute cette section, nous supposerons que nous avons au point *T(0)* d'une trajectoire la section SI seulement déformée en orientation et en taille par les règles de balayage et qu'en *T(1)* nous avons la section SF aux orientations et aux variations de taille près. En fait, nous ne nous soucierons pas de l'orientation et de la taille de la section aux points *T(0)* et *T(1)*.

Nous donnerons juste une méthode de passage d'un ensemble de points de contrôle (respectivement de points) à un autre ensemble de points de contrôle (respectivement de points). Cette méthode est basée sur une démarche similaire à celle de l'interpolation linéaire en orientation à l'aide des quaternions. Nous ne traiterons que de déformations que nous dirons régulières. On peut définir intuitivement une déformation régulière comme une déformation où chaque point de la section initiale « voit » son homologue sur la section finale (figure III.7).

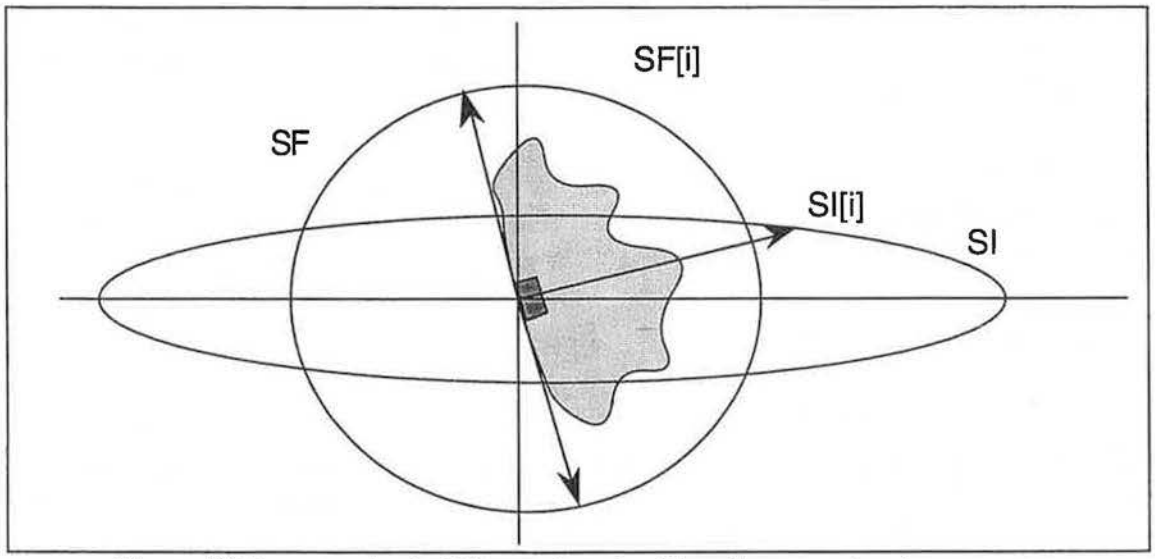



Figure III.7 : *exemple de déformation régulière d'une section à une autre*

*Interpolation linéaire par des quaternions*

Nous utiliserons implicitement, ici, la théorie des quaternions [HAMI 44] (nous l'exposerons en partie dans le chapitre VI). Nous nous contenterons de donner explicitement la formule de base de passage d'un vecteur orientation à un autre.

Soient deux vecteurs $V0$ et $V1$ de la sphère des orientations (donc unitaires). Nous cherchons les vecteurs $V_u$ appartenant à la sphère tels que $V_1 = V0$, $V_1 = V1$ et $V_u$ interpole linéairement l'angle entre $V0$ et $V1$ (figure III.8). On a donc :

$$V_u = \alpha(\theta)V_0 + \beta(\theta)V_1 \text{ avec } \begin{cases} \cos\theta = V_0 \bullet V_1 \\ \sin\theta = V_0 \wedge V_1 \end{cases}$$

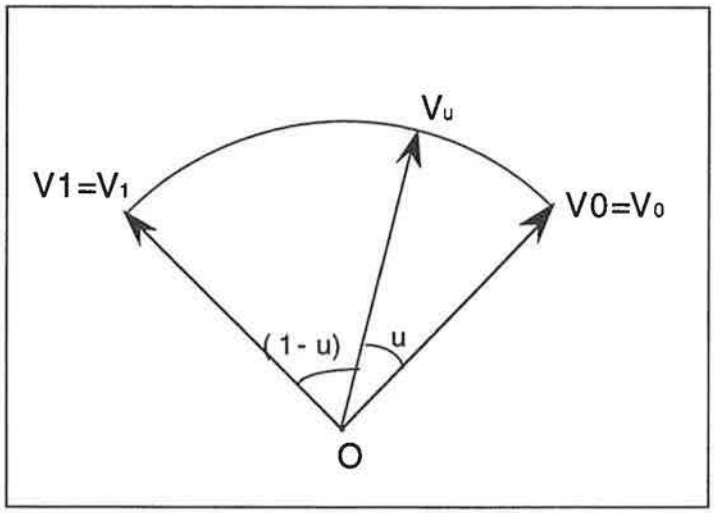



Figure III.8 : *interpolation entre V0 et V1*

On note $\theta u$ l'angle entre $V_0$ et $V_u$ tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta u = V_0 \bullet V_u \\ \sin\theta u = V_0 \wedge V_u \end{cases} \text{ et donc } \begin{cases} \cos(1-\theta)u = V_1 \bullet V_u \\ \sin(1-\theta)u = V_1 \wedge V_u \end{cases}$$

On a donc le système d'équations suivant à résoudre :

$$\begin{cases} V_u \bullet V_0 = \alpha + \beta\cos\theta \\ V_u \bullet V_1 = \alpha\cos\theta + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta u = \alpha + \beta\cos\theta \\ \cos(1-\theta)u = \alpha\cos\theta + \beta \end{cases}$$

Après quelques manipulations, on arrive à :

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\cos\theta - \cos(1-\theta)u\cos\theta}{\sin^2\theta} \\ \beta = -\dfrac{\cos\theta u\cos\theta - \cos(1-\theta)u}{\sin^2\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{\sin(1-\theta)u}{\sin\theta} \\ \beta = \dfrac{\sin\theta u}{\sin\theta} \end{cases}$$

ce qui nous donne la formule de $V_u$ :

$$V_u = \frac{\sin(1-\theta)u}{\sin\theta}V_0 + \frac{\sin\theta u}{\sin\theta}V_1$$

Dans le cas où $V0$ et $V1$ ne sont pas unitaires, on peut garder la même interpolation. Une autre solution consiste à conserver l'orientation fournie par la méthode précédente et à contrôler la norme du vecteur $V_u$. Le contrôle le plus naturel est de prendre pour norme de $V_u$ :

$$|V_u| = |V_0| + u(|V_1| - |V_0|)$$

On obtient donc la formule générale suivante :

$$V_u = (|V_0| + u(|V_1| - |V_0|)).(\frac{\sin(1-\theta)u}{\sin\theta}\frac{V_0}{|V_0|} + \frac{\sin\theta u}{\sin\theta}\frac{V_1}{|V_1|})$$

*Application aux déformations*

Nous supposerons que SI est définie par *n* points SI[i] et que SF est définie par n points SF[j] et que pour tout i (respectivement j) SI[i] et SI[i+1] ne sont pas confondus (respectivement SF[j] et SF[j+1] ne sont pas confondus). Dans le cas d'une interpolation par une B-spline cubique, ceci revient à dire que les sections SI et SF interpolées sont $C^2$ et $G^2$. Nous supposerons aussi que SF[I] et SF[J] sont mis en correspondance, c'est-à-dire que si la courbe interpolant SI est telle que SI($u$) =SI[I] alors SF($u$)=SF[J]. En fait, on peut toujours re-numéroter les points des sections pour que I=J=0. On supposera enfin que les points des sections ont été définis de telle manière que le sens du paramètre $u$ soit le même pour les deux courbes. Avec ces hypothèses, on peut décrire la déformation, durant le parcours de la trajectoire $T(t)$, de la section SI à la section SF :

- Pour tout paramètre $u$ de la trajectoire, la section SU sera définie par les points SU[i] définis par la relation :

$$SU[i] = (|SI[i]| + u(|SF[i]| - |SI[i]|)).(\frac{\sin(1-\theta)u}{\sin\theta}\frac{SI[i]}{|SI[i]|} + \frac{\sin\theta u}{\sin\theta}\frac{SF[i]}{|SF[i]|})$$

- C'est à ces nouvelles sections que seront appliquées les autres déformations (opérateur $D$).

*Cas où les sections n'ont pas le même nombre de points de définition*

Si le nombre de points définissant les deux sections est différent, nous utiliserons un algorithme d'insertion de points sur la section en possédant le moins.

#### 2.3.2.2. Passage régulier d'une section $C^2$ mais non $G^2$ à une autre

Si la déformation reste régulière, les résultats précédents s'adaptent facilement. Il est, cependant, parfois nécessaire de re-numéroter les points de contrôle de la section finale afin que la déformation reste la plus naturelle possible (figure III.9).

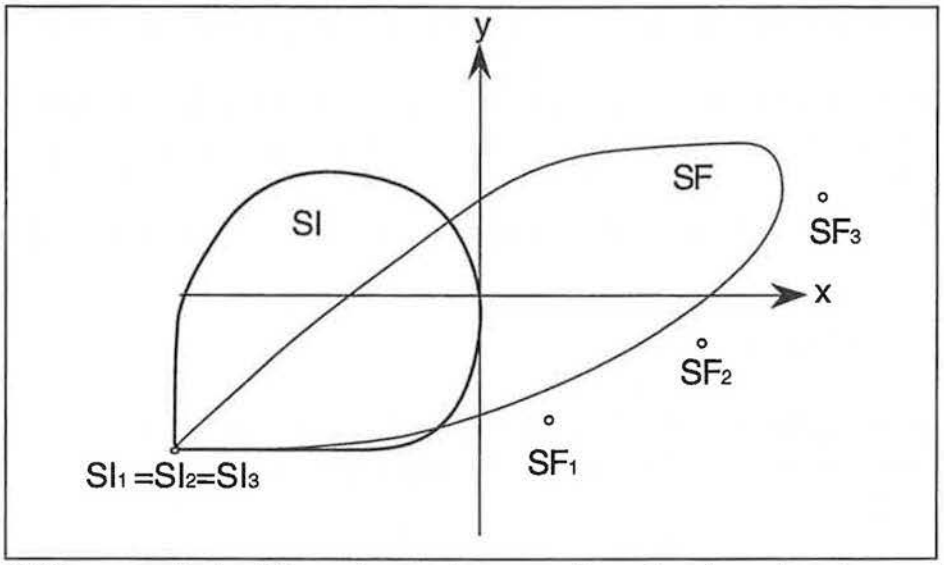
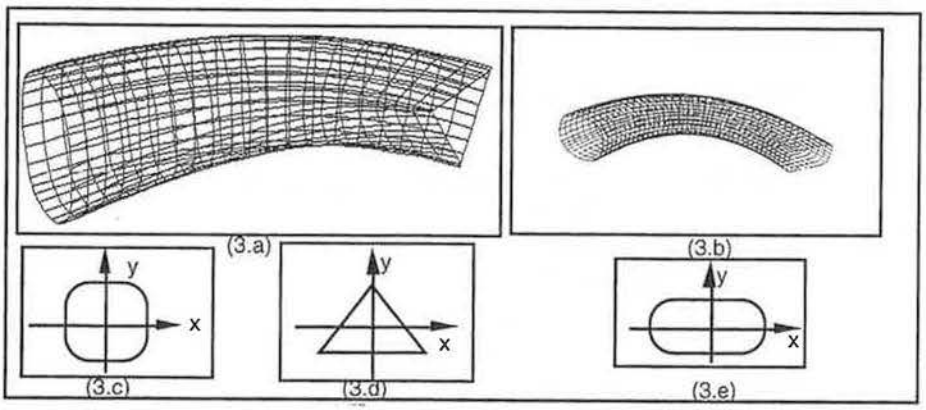



Figure III.9 : *exemple de déformation ou la re-numérotation des points de contrôle est nécessaire*

#### 2.3.2.3. Discussion

Le passage d'une section quelconque à une autre nécessiterait l'utilisation des techniques de base du morphing. Ces techniques n'étant pas explicitement des techniques liées aux CG, nous ne les avons pas développées.




Un exemple de CG déformé.
(3.a) et (3.b) : CG représentés par des surfaces B-splines cubiques uniformes.
Pendant le balayage la section a été déformé de (3.c) à (3.d) pour la figure (3.a) et de (3.c) à (3.e) pour la figure (3.b)

### 2.4. Calcul d'un CG le long d'une trajectoire B-spline quelconque

Nous avons choisi, comme pour les autres courbes, de définir la trajectoire par une courbe B-spline cubique uniforme. Nous donnons, dans cette section, un moyen exhaustif d'associer un repère à la trajectoire. Bien sûr, nous avons basé le choix de notre repère sur le trièdre de Frenet et nous nous sommes donnés le cahier des charges suivant :

- La trajectoire à laquelle les repères vont être associés est une B-spline cubique uniforme ;
- La continuité de la normale sera assurée en tout point où la trajectoire est $G^2$ ou $G^1$ ;
- Si la courbe est seulement $G^0$, nous considérons que l'utilisateur désire un effet de discontinuité $G^1$ sur le CG ;
- Dans le cas où le repère de Frenet peut être défini, notre repère devra coïncider avec lui.

### 2.4.1. Cas général

Dans le cas général, nous utiliserons donc le repère de Frenet qui a l'avantage de donner un aspect naturel aux orientations que prend le repère et donc le CG.

### 2.4.2. Cas particuliers

Les formules données dans la section 1.1.1. n'ont pas toujours de sens. Dans ce paragraphe, nous allons étudier divers cas particuliers où les formules définissant $\mathbf{TG}(t)$ ou $\mathbf{N}(t)$ ne sont plus utilisables sous leur forme classique.

- $T'(t_0)=0$

Ce cas est lié à l'utilisation de courbes paramétrées : si $T'(t_0)=0$, alors $t_0$ est racine des 3 composantes du vecteur dérivé. Par exemple, $T(t)=\left[(t-a)^3,0,0\right]$ donne $T'(a)=0$, bien que la tangente évidente soit $[1,0,0]$. Dans ce cas, la courbe est surparamétrée. Ainsi, pour obtenir la direction de la tangente, nous évaluerons la fonction $\frac{T'(t)}{(t-t_0)}$. Si cette quantité est toujours nulle, alors nous évaluerons $\frac{T'(t)}{(t-t_0)^2}$. Comme $T$ possède des composantes de degré trois, $T'$ est de degré deux et $\frac{T'(t)}{(t-t_0)^2}$ est non nulle.

- $T'(t_0)=0$ et $T''(t_0)$ sont colinéaires

Remarque : nous incluerons dans ce paragraphe le cas où $T''(t_0)=0$ et $T''(t_0\pm\varepsilon)\neq 0$.

Dans ce cas, le calcul de la normale de Frenet n'est plus possible avec les formules classiques et la courbe présente un éventuel point d'inflexion. L'évaluation de l'angle $\alpha$ entre $\mathbf{N}(t_0+\varepsilon)$ et $\mathbf{N}(t_0-\varepsilon)$ indique la conduite à suivre :

- si $\alpha$ est proche de zéro, la normale ne change pas de sens et on choisit : $\mathbf{N}(t_0)=projection_{\mathbf{TG}(t_0)^\perp}(\mathbf{N}(t_0-\varepsilon))$ où $\mathbf{TG}(t_0)^\perp$ représente le plan perpendiculaire à $\mathbf{TG}(t_0)$ en $t_0$.
- si $\alpha$ est proche de 1, il y a discontinuité de la normale de Frenet. On note alors : $\mathbf{N}(t_0)=projection_{\mathbf{TG}(t_0)^\perp}(\mathbf{N}(t_0-\varepsilon))$. Afin de conserver la continuité de la normale, le signe des normales suivantes sera inversé (si, en un certain $t$, le nombre de points d'inflexion rencontrés auparavant est pair alors la normale retrouve son orientation de Frenet ; s'il est impair, la normale de notre repère sera l'opposée de la normale de Frenet).

### 2.4.3. Calcul d'un repère pour une trajectoire B-spline quelconque

L'utilisation des B-splines cubiques uniformes nous incite à distinguer trois cas dépendant de la multiplicité des points de contrôle. En effet, afin d'offrir la gamme la plus large possible de trajectoires, nous autoriserons la trajectoire à posséder des points de contrôle doubles afin de mieux contrôler la forme de la trajectoire ou des points triples afin d'introduire des zones linéaires sur la trajectoire. Remarquons que, quelle que soit la multiplicité des points de contrôle, la trajectoire reste $C^2$ (ceci est directement lié à la définition des B-splines). En revanche, elle n'est que $G^2$ par morceaux. C'est dans les zones non $G^2$ ou $G^1$ que les difficultés de calcul d'un repère se posent.

- *Les points de contrôle sont tous de multiplicité 1*

La trajectoire est donc totalement $C^2$ et $G^2$. Trois cas, où les formules classiques ne suffisent plus, se présentent alors (figure III.10):

- la courbe débute par un segment de droite $V_0\ V_1$ et se poursuit par une courbe :
La normale pour tout point entre $V_0$ et $V_1$ sera celle calculée en $V_1$.

- la courbe se termine par un segment de droite $V_{n-1}\ V_n$ :
La normale pour tout point entre $V_{n-1}$ et $V_n$ sera celle calculée en $V_{n-1}$.

- un segment de droite $V_i\ V_{i+1}$ est intercalé entre deux coubes :
La normale pour tout point entre $V_i$ et $V_{i+1}$ est calculée grâce à une interpolation linéaire en orientation (par exemple par l'intermédiaire de quaternions).

Remarquons qu'un point de jonction entre une courbe et un segment de droite ne possède pas de normale au sens de la normale de Frenet. En effet, le rayon du cercle osculateur en un tel point est infini. On calculera la normale en se reportant à la section précédente ou, ce qui revient au même, la normale en ce point sera alors le vecteur normalisé, appartenant au plan du cercle osculateur, orthogonal à la tangente en ce point.

- *Un point de contrôle est doublé*

Si l'on double un des points de contrôle de la courbe, un point de discontinuité $G^2$ apparaît. En ce point (qui est une extrémité d'un morceau élémentaire), $T'(t_0)$ et $T''(t_0)$ sont colinéaires et **N** n'est plus définie. La normale est alors calculée comme suit, en tenant compte du fait que le point $P_4$ n'est pas pris en compte dans le calcul de $T_i''(1)$ ou de $T_{i+1}''(0)$ : on calcule d'abord la binormale en $T_i(1)$ qui correspond au vecteur perpendiculaire au plan défini par ( $P_0, P_1, P_2$). La normale est ensuite déduite naturellement afin que (**TG**, **N**, **B**) soit un trièdre direct.

- *Un ou plusieurs points de contrôle sont triplés*

Dans ce cas précis, les problèmes, quoique plus compliqués à résoudre, sont moins

ambigus que dans les cas précédents, dans la mesure où l'introduction d'un point de contrôle triple revient à introduire un segment de droite de part et d'autre du point triple par lequel passe la courbe.

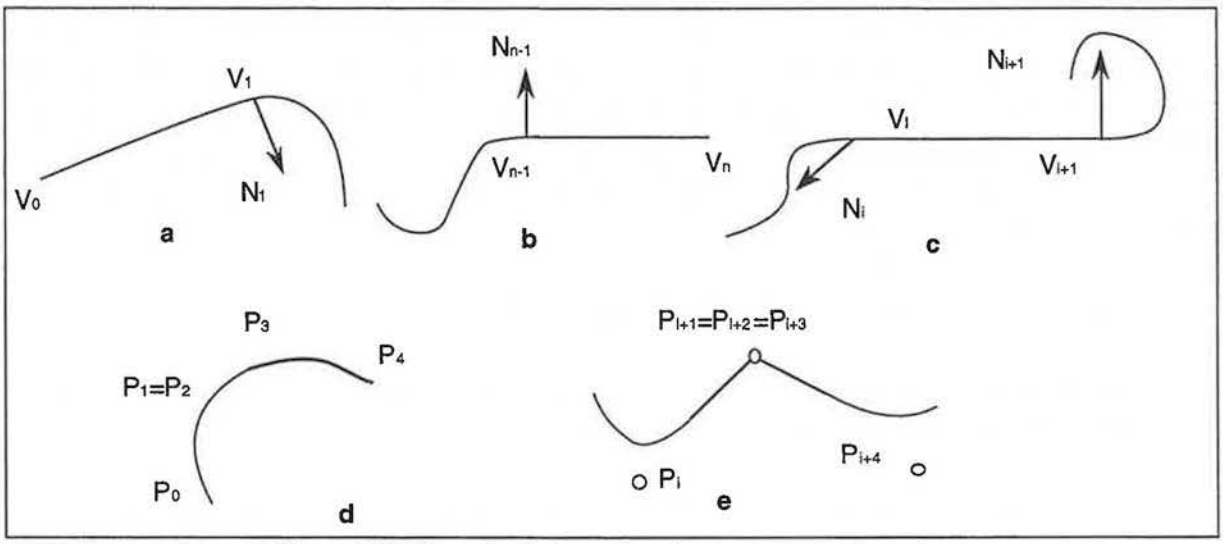



Figure III.10 : *calcul des normales sur une trajectoire*

Le cahier des charges nous incite à respecter le désir de l'utilisateur d'introduire une éventuelle discontinuité $G^1$ dans le CG. Deux principaux cas se présentent alors :

- les points de contrôle triplés sont isolés au début ou à la fin de la trajectoire

Un seul morceau de courbe est linéaire et on se ramène aux cas précédents selon que le segment se trouve au début ou à la fin.

- autres cas

Dans tous les autres cas, la courbe présente une succession de segments. La conduite à tenir dépend de la position de cet ensemble de segments

- Si l'ensemble de segments est situé à la fin de la courbe, nous construisons le CG normalement jusqu'au point initial du premier segment. Ensuite, le CG est construit selon la méthode de Klok et Post jusqu'à la fin, le repère du premier segment étant naturellement défini par la courbe le précédant.

- Si l'ensemble de segments est situé en début de courbe, nous construisons le CG normalement à partir du point final du dernier segment. Le début du CG est construit à rebours à partir de ce point selon la méthode de Klok et Post jusqu'au premier point de la courbe, le repère du dernier segment étant défini par la courbe le suivant.

- Si l'ensemble de segments est situé ailleurs qu'en début ou en fin de trajectoire, il est difficile de donner une définition intuitive du repère le long des segments. Nous pouvons quand même, comme dans le cas où un segment de droite est inséré entre deux courbes, introduire une interpolation en orientation

de la normale en orientant progressivement (selon le nombre de segments ou en tenant compte de la longueur des segments) les normales de la première à la dernière de l'ensemble des segments, les deux normales précitées étant calculées à partir des courbes adjacentes.

Notons que si la trajectoire est un segment, le premier repère est choisi aléatoirement dans la plan perpendiculaire à la trajectoire. Notons aussi que dans les cas où un segment ou un ensemble de segments est situé ailleurs qu'en début ou en fin de trajectoire et que l'angle entre les normales définies au début et à la fin du segment ou de l'ensemble de segments consécutifs est de 180°, on peut considérer qu'il y a pendant le parcours une inversion de la normale (comme pour un point d'inflexion). Les normales suivantes seront donc inversées selon la parité du nombre de situations similaires rencontrées auparavant.

Pour finir, remarquons que l'on peut étendre facilement ces méthodes pour un degré supérieur. Pour des B-splines de degré $d$, les discontinuité $G^2$ apparaissent lorsque les points de contrôle ont une multiplicité égale à $d$-1. Les discontinuités $G^1$, quant à elles, apparaissent lorsque les points de contrôle ont une multiplicité égale à $d$.

### 2.4.4. Calcul d'un repère le long d'autres trajectoires

Parfois l'interpolation ne donne pas de résultats satisfaisants. Si l'utilisateur maîtrise mal les B-splines et qu'il peut fournir la définition exacte de la trajectoire, nous pouvons toujours construire le CG autour de cette trajectoire. Tout ce qui concerne les discontinuités $G^1$ et $G^2$ est conservé, mais d'autres difficultés plus sournoises peuvent apparaître. Par exemple, si les trajectoires sont définies par morceaux non $G^2$, nous décomposerons la trajectoire en autant de morceaux. Nous obtiendrons ainsi plusieurs CG, qui formeront une surface continue si l'utilisateur choisit les bonnes orientations. L'autre problème, plus important, est la gestion des points d'inflexion :

- point d'inflexion pour une trajectoire plane

Pour les courbes planes, les sauts des vecteurs normaux aux points d'inflexion ne sont que de deux types : soit la normale fait un saut d'angle 0 et dans ce cas la normale est définie par continuité, soit la normale fait un saut de $\pi$ et il suffit de prendre l'opposé pour conserver la continuité.

- point d'inflexion pour une trajectoire 3D

Pour les courbes 3D, les sauts de normales peuvent être d'angle quelconque. Avec les B-splines cubiques uniformes, le saut se faisait en douceur puisque il se faisait de part et d'autre d'un morceau linéaire. Dans un autre cadre, le saut peut être brutal. Nous donnons l'exemple de la fonction $C^\infty$ suivante :

$$T(t)=\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ e^{-\frac{1}{t^2}} \end{pmatrix} \text{ pour } t<0, T(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour } t=0, T(t)=\begin{pmatrix} t \\ e^{\frac{1}{t^2}} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour } t>0$$

Il est clair que cette courbe est $C^\infty$ et que les normales pour $t<0$ sont dans le plan (**x, z**) alors que les normales pour $t>0$ sont dans le plan (**x, y**). Le saut de la normale en $t=0$ est donc de 90°. Il est pourtant possible de définir une normale continue En effet, considérons une trajectoire $T(s)$ (qui n'est pas une droite) où s est l'abscisse curviligne de $T$. Si $T(s_0)$ est un point d'inflexion et que $T$ est analytique, on peut écrire :

$$T(s)=T(s_0)+T'(s_0)(s-s_0)+\frac{T^{(k)}(s_0)}{k!}(s-s_0)^k+\frac{T^{(k+1)}(s_0)}{(k+1)!}(s-s_0)^{k+1}+\cdots$$

où $T^{(k)}(s_0)$ est la première dérivée d'ordre supérieur à 1 non nulle (ce qui est toujours possible si T n'est pas une droite). On peut alors écrire :

$$\mathbf{TG}(s)=T'(s)=T'(s_0)+\frac{T^{(k)}(s_0)}{(k-1)!}(s-s_0)^{k-1}+2\frac{T^{(k+1)}(s_0)}{k!}(s-s_0)^k+\cdots$$

et :

$$T''(s)=\frac{T^{(k)}(s_0)}{(k-2)!}(s-s_0)^{k-2}+3\frac{T^{(k+1)}(s_0)}{(k-1)!}(s-s_0)^{k-1}+\cdots$$

On peut réécrire la dernière équation sous la forme :

$$T''(s)=(s-s_0)^{k-2}\left[\frac{T^{(k)}(s_0)}{(k-2)!}+3\frac{T^{(k+1)}(s_0)}{(k-1)!}(s-s_0)+\cdots\right]=(s-s_0)^{k-2}f(s)$$

où f(s) est analytique et $f(s_0)=\frac{T^{(k)}(s_0)}{(k-2)!}\neq 0$. Comme $f$ est continue, il est clair que dans un certain voisinage O de $s_0$, $f(s)$ est non nulle et on peut donc calculer la quantité suivante : $\mathbf{N}(s)=\frac{f(s)}{|f(s)|}$. Le vecteur **N** est unitaire et continu dans le voisinage O, il peut donc servir de normale. Reste à vérifier que $T''$ est un multiple de **N** :

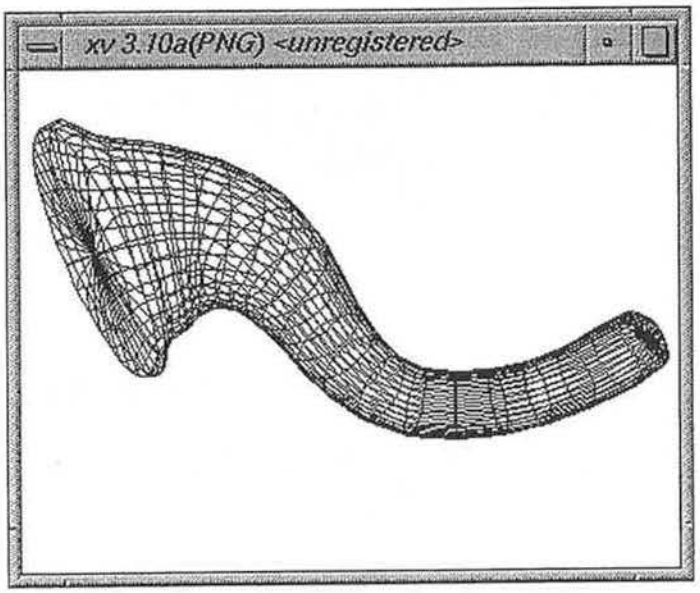
$$T''(s)=(s-s_0)^{k-2}f(s)=(s-s_0)^{k-2}|f(s)|\mathbf{N}(s)$$

Remarquons, pour finir, que si $T$ a pour paramètre $t$, les calculs restent les mêmes en utilisant la relation :

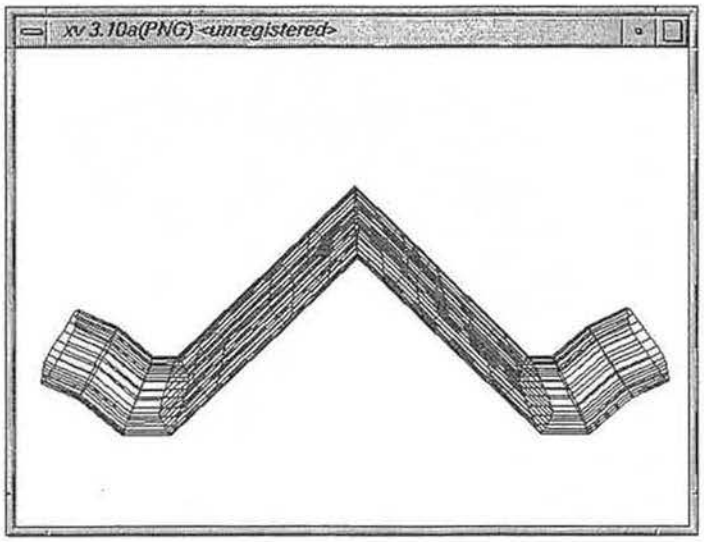
$$\frac{dT(t)}{dt}=T'(s)\frac{ds}{dt}=\mathbf{TG}(t)\left|\frac{dT(t)}{dt}\right|$$

### 2.5. Conclusion

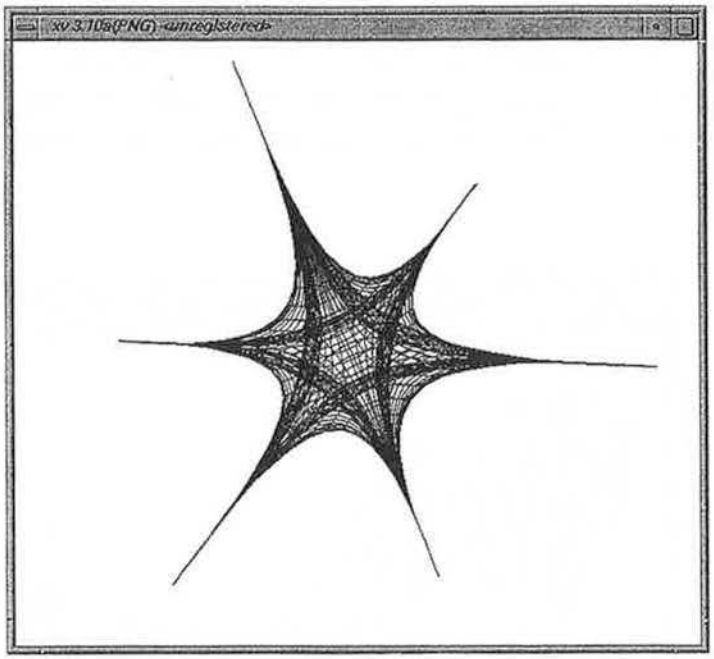
Les nombreuses extensions que nous avons présentées dans cette section ne sont pas exhaustives. Elles sont déjà suffisamment nombreuses pour un utilisateur averti et il ne faudra faire intervenir certaines options (trajectoire autre qu'une B-spline, déformation de la forme de la section) que dans les cas où les résultats (en l'occurrence les CG) obtenus sans ces options sont inutilisables.



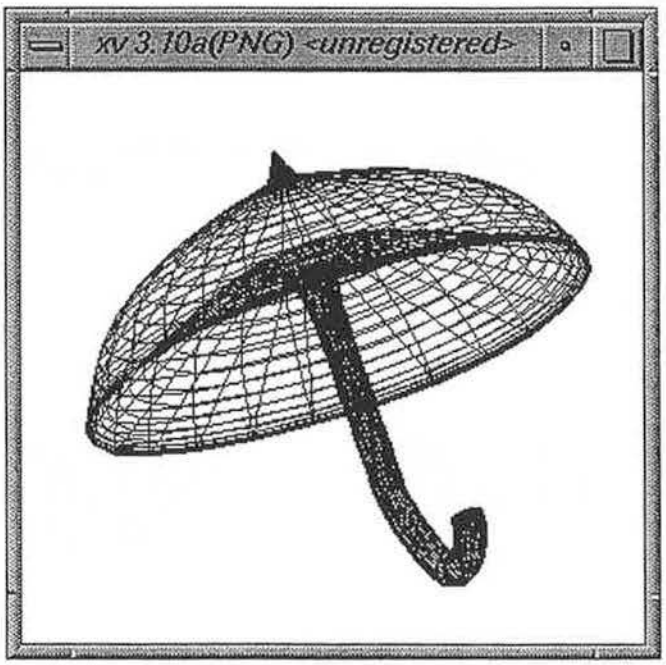

CG dont la trajectoire possède un point d'inflexion



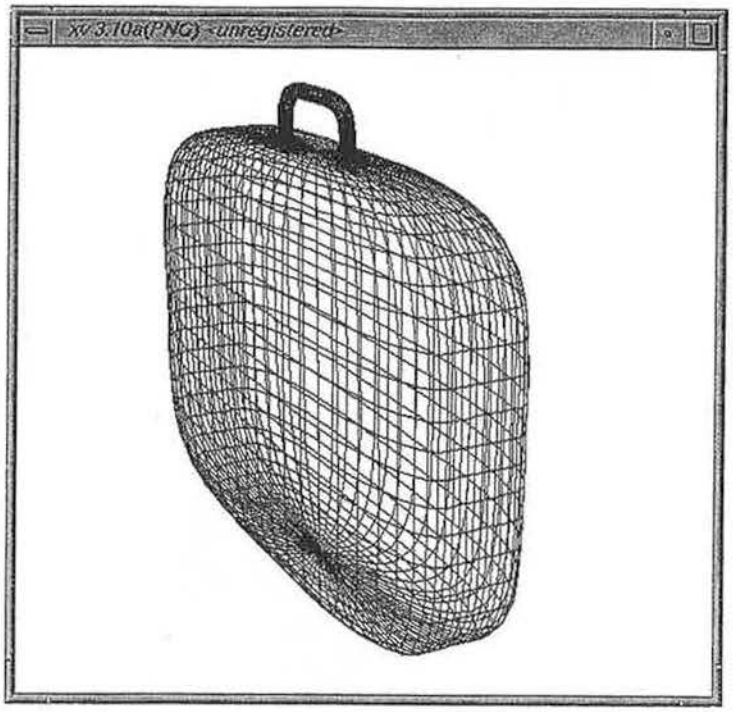

CG dont la trajectoire est une suite de segments

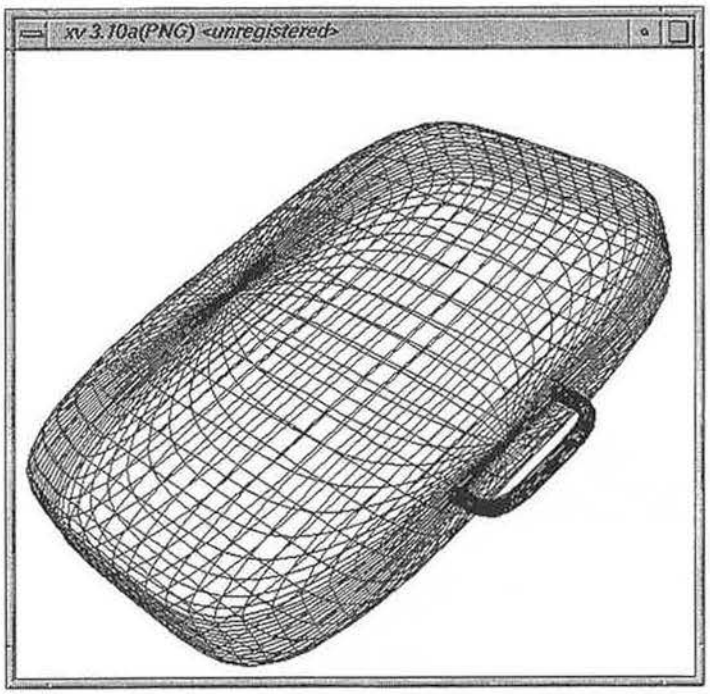



CG à profil monotone

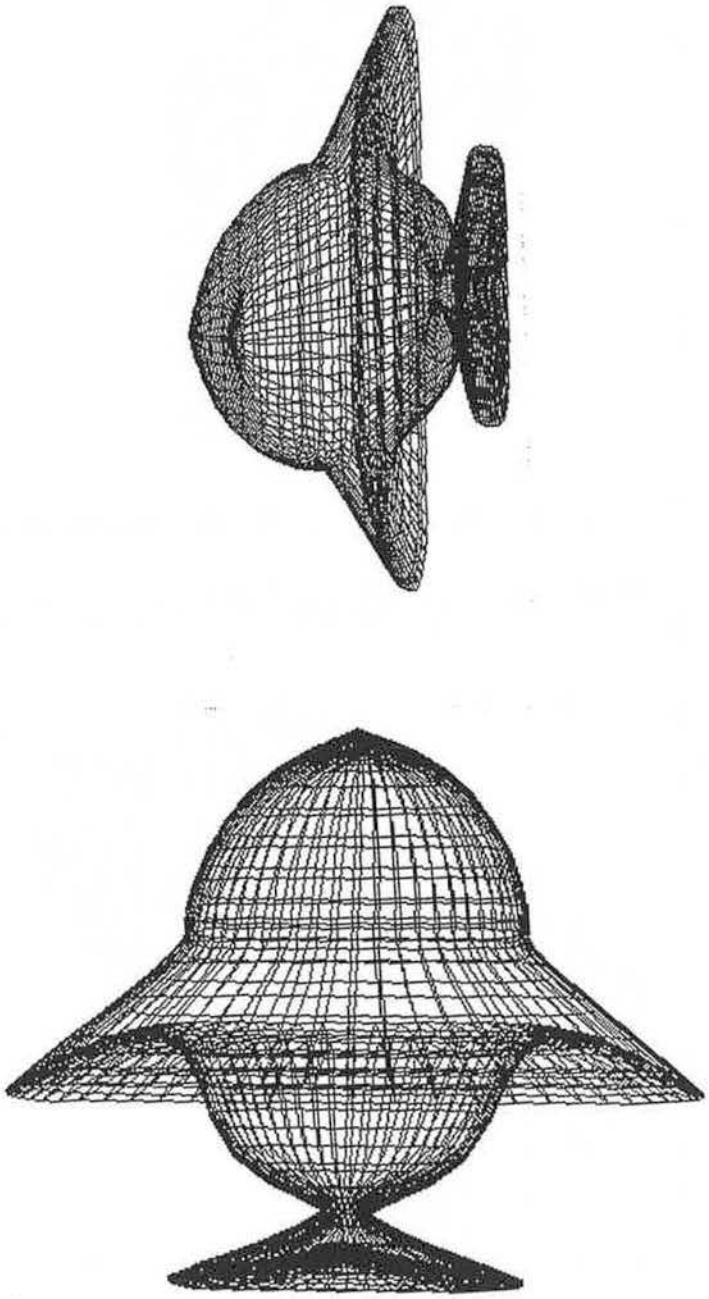



CG échancré (possédant un profil non monotone)




CG non échancré à profil non strictement monotone (2 vues)



CG à deux profils (deux vues)

# Chapitre IV : VALIDITE DU MODELE

Dans ce chapitre, nous abordons les problèmes de validité que nous avons souvent cités pendant les phases de création. En fait, il est difficile de trouver des algorithmes testant la validité des objets et directement liés au modèle de construction CG. Nous pouvons cependant donner quelques méthodes générales permettant de savoir si, grosso modo, le CG peut être correctement défini. Avant de donner les définitions des propriétés des solides, nous ferons l'hypothèse que les CG représentent des solides et non des surfaces.

## 1. Définitions

Certains principes doivent être respectés pour préserver les propriétés des solides. Nous avons retenu les quatre propriétés suivantes :

- La rigidité : un solide doit avoir une forme invariante et indépendante de sa position ou de son orientation ;

- l'homogénéité : un solide doit avoir un intérieur non vide au sens de la topologie euclidienne (en particulier, il ne doit pas posséder de parties pendantes ou de volume nul) ;

- la finitude : un solide occupe une partie finie de l'espace ;

- Le déterminisme des frontières : la frontière d'un solide doit déterminer ce qui se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur du solide ;

## 2. Validité basée sur les courbes

Dans un premier temps, on peut, en observant les courbes définissant les CG, tirer quelques conclusions.

• Si au moins une des courbes (trajectoire, profils , orientations) est discontinue, le solide ne sera pas homogène;

• Si la trajectoire s'auto-intersecte, le CG fera de même et il y aura un inévitable problème de déterminisme des frontières;

• Si le profil s'auto-intersecte, le CG présentera au mieux des parties pendantes, donc l'homogénéité ne sera plus assurée;

• Si un profil est négatif en abscisse ou en ordonnée, les définitions données à ces courbes n'auront plus de sens et la création du CG par les méthodes que nous avons proposées sera impossible;

• Si un profil présente une abscisse supérieure à 1, nous retrouvons un problème similaire au précédent.

• Les orientations appliquées à la section selon les axes **x** et **y** ne peuvent prendre des valeurs supérieures à 90° sans créer de problème de déterminisme des frontières.

On voit qu'en fait les contraintes imposées aux profils et aux orientations ont été mises en place afin de prévenir quelques problèmes de validité évidents.

### 3. Généralités

Dans notre cadre, les propriétés de rigidité et de finitude ne sont pas mises en défaut par le mode de construction des CG. En effet, si les courbes représentant la trajectoire, les profils, les orientations et les sections sont fixées, le CG a une forme invariante qui est indépendante de sa position ou de son orientation. La propriété de finitude est assurée par la définition explicite d'une trajectoire ayant deux extrémités définies et par le fait que la section soit fermée.

Le déterminisme des frontières est assuré si le CG ne s'auto-intersecte pas et si les sections en début et fin de trajectoire sont fermées.

Il reste les problèmes d'homogénéité qui sont de deux sortes :

- Si la section qui balaye la trajectoire se trouve orientée parallèlement à la direction de la tangente de la trajectoire (au point où elle doit être positionnée), des parties pendantes sont créées. En général, ceci n'est pas possible puisque la section est systématiquement placée dans le plan perpendiculaire à la tangente. Seules des orientations trop importantes de la section selon l'axe des **x** ou celui des **y** peuvent générer de telles situations. Une solution simple est de limiter les rotations de la section selon ces axes, rejoignant en cela les remarques de la section précédente.

- Les problèmes de recouvrement qui se divisent eux-même en deux catégories :

  • Pour un paramètre $t$ donné de la trajectoire, il y a risque de recouvrement si le rayon de courbure de la trajectoire est inférieur au diamètre du cercle circonscrit à la section (figure IV.1).

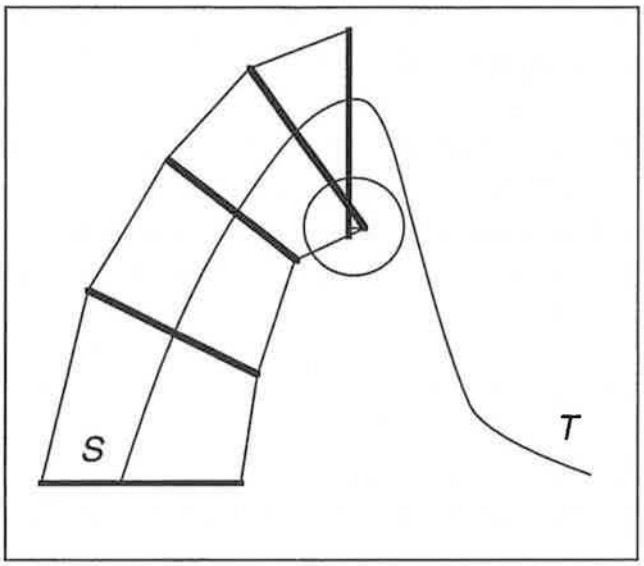



Figure IV.1 : *intersection de deux sections consécutives*

• Si, au cours de la création du CG, la couronne définie par deux occurrences consécutives de la section coupe une partie du CG déjà construite (figure IV.2).

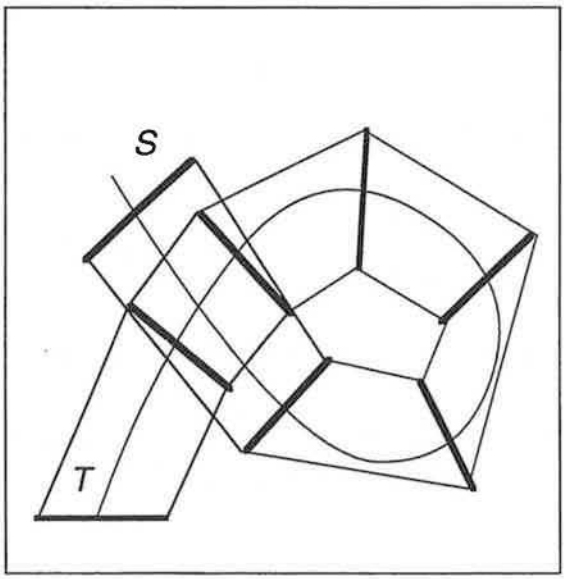



Figure IV.2 : *auto-intesection du CG*

Dans la section suivante, nous analysons ces problèmes et nous fournissons des éléments de réponse satisfaisants dans la pratique.

### 4. Un premier test

Nous proposons un premier test simple qui recouvre la plupart des cas pratiques en ce qui concerne la première catégorie de recouvrement. Il consiste à chaque étape (une étape correspondant au positionnement d'une nouvelle section), à tester si le rayon de courbure de la trajectoire au point où la section va être positionnée est supérieur au diamètre du cercle circonscrit à la section.

• Choix du diamètre du cercle circonscrit $D$

Par souci de simplicité, le diamètre du cercle circonscrit sera choisi comme la distance du point origine au point le plus éloigné définissant la section. Ce diamètre, au même titre que la section, subira le long de la trajectoire des changements de taille en fonction de la valeur du profil principal (on pourra optimiser en choisissant la valeur maximale des trois éventuels profils).

• Calcul du rayon de courbure ρ

Rappelons brièvement les formules permettant le calcul d'un rayon de courbure pour une courbe paramètrée. La courbure est définie quantitativement de la façon suivante : en un point $P$ d'une courbe parmétrée $T(u)$, le cercle qui a même dérivée seconde que la courbe en $P$ est appelé cercle osculateur. Le centre et le rayon de ce cercle en ce point sont dénommés respectivement centre de courbure et rayon de courbure. La courbure en ce point (égale à l'inverse du rayon $\rho$) est égale au module du vecteur :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{T'(t) \wedge T''(t)}{|T'(t)|^3}$$

si on note $T(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, alors la courbure K vérifie :

$$K^2 = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2) - (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2}$$

Si $T''(t)=0$, on donne alors une valeur arbitrairement grande $R$ au rayon de courbure.

La validité du CG sera assurée dès que pour tout $t$ de la trajectoire :

$$\min(R, \rho(t)) \geq D$$

### 5. Un test plus général dans le cas d'une section plane

Nous proposons ici un algorithme plus précis qui a l'avantage de traiter globalement tous les problèmes de recouvrement. Nous approcherons la section par le polygone formé de tous les points définissant la section. Le principe de notre algorithme est le suivant : chaque fois qu'une section $S_i$ est positionnée sur la trajectoire, on vérifie qu'elle ne coupe pas la partie du CG déjà construite (autrement dit, les sections pour j<i). Nous donnons les principales étapes de l'algorithme :

Etape 1 : On calcule le plan $P_i$ dans lequel la dernière section $S_i$ vient d'être positionnée. Le plan affine est le plan formé par $\mathbf{N}(t)$ et $\mathbf{B}(t)$ au point $T(t)$ modulo les orientations selon les axes dirigés par **N** et **B**.

Etape 2 : pour j<i, on calcule les éventuelles droites d'intersection entre les plans $P_i$ et $P_j$. On note $D_{ij}$ ces dernières. La direction de $D_{ij}$ est le produit vectoriel des normales aux plans $P_i$ et $P_j$. Nous pouvons déjà remarquer que si $D_{lk}$ n'existe pas, les sections positionnées dans les deux plans $P_l$ et $P_k$ ne se coupent pas.

Etape 3 : On parcours le polygone représentant la section dans le plan $P_i$, en notant les points d'intersections avec les droite $D_{ij}$. Pour savoir si un segment du polygone coupe $D_{ij}$, on calcule les puissances des deux extrémités du segment. Si elles sont de signe opposé, alors un point d'intersection existe et est calculé. L'ensemble de ces points est stocké dans un vecteur $I_{ij}$. On fait de même pour le polygone représentant la section dans le plan $P_j$, on note le vecteur résultant $I_{ji}$.

Etape 4 : Les points du vecteur $I_{ij}$ sont triés selon une abscisse linéaire arbitraire le long de $D_{ij}$. On obtient ainsi en prenant les points de $I_{ij}$ deux à deux, les segments d'intersection de la droite $D_{ij}$ et de la section. On procède de même pour le vecteur $I_{ji}$ en prenant soin de garder le même sens à l'abscisse linéaire de la droite $D_{ij}$.

Etape 5 : Il reste à déterminer si les intervalles de $I_{ij}$ et de $I_{ji}$ ont des points communs. Ceci est réalisé en cherchant à encadrer les extrémités des segments de $I_{ji}$ par des intervalles de $I_{ij}$. Si cela n'est pas possible, on recommence le processus en inversant les rôles de $I_{ij}$ et $I_{ji}$. Si le résultat reste négatif, les deux sections ne se coupent pas. Dans le cas contraire, il y a des problèmes de recouvrement et la construction du CG est arrêtée.

Bien sûr, l'algorithme n'est pas optimal pour plusieurs raison :

- La section est représentée par un polygone. Le calcul d'une enveloppe polygonale extérieure fournirait des résultats plus sûrs. L'idéal serait de manipuler les courbes elles-mêmes, mais les calculs d'intersection entre courbes seraient trop complexes.

- Les tests d'intersection portent sur les sections. En fait, ils devraient porter sur les couronnes définies par des occurrences de sections consécutives. Par exemple, on ne peut détecté le cas où une section se "glisse" entre deux autres. Cette situation reste cependant exceptionnelle.

- L'algorithme n'est plus valable si la section n'est pas plane. En fait, même un test utilisant les intersections entre courbes ne serait pas correct. A la limite, un test basé sur l'intersection de surfaces pourrait parfois donner des résultats acceptables.

Afin de limiter les pertes de temps, on peut ne tester que les intersections de deux occurrences de sections consécutives. On ne répond ainsi qu'au premier des deux problèmes de recouvrement.

Remarque : on peut, toujours afin de gagner en temps, faire des tests simplificateurs. Par exemple, au lieu de tester les intersections entre les section, on peut se limiter à n'effectuer ce test que sur un contour simple (cercle, quadrilatère) englobant la section. Dans le cas où les tests seraient négatifs la validité du CG est assurée.

# Chapitre V : VISUALISATION PAR TRACE DE RAYONS

Nous présentons, dans cette section, un algorithme de lancer de rayons adapté aux CG. En fait, nous présentons un moyen de calculer rapidement l'intersection entre un rayon et un CG que nous avons construit avec les méthodes présentées précédemment. Nous présentons d'abord cet algorithme dans le cas des CG classiques (ni profilés, ni orientés et ni déformés) avant de l'étendre aux CG orientés, profilés avec un profil monotone en $x$. Nous adapterons finalement l'algorithme aux cas où les CG sont orientés et profilés avec un profil quelconque.

## 1. Technique générale : cas du CG classique

Le problème principal lié à l'utilisation du tracé de rayon est le calcul de l'intersection entre le rayon lancé de l'œil vers l'écran et les objets de la scène. Dans cette section, nous supposerons que les objets sont des CG simples (ni profilés, ni orientés, ni échancrés) et que les repères de Frenet sont toujours valables sur la trajectoire.

Analytiquement, le problème revient à résoudre l'équation suivante :

$$CG(t,s) = r(u)$$

où $CG(t,s)$ est le CG engendré par le déplacement de la section $S$ le long de la trajectoire $T$, et $r$ le rayon d'équation :

$$r(u) = \mathbf{a}u + \mathbf{b}$$

Une solution introduite dans [BRON 85] et [BRON 89] (voir aussi [HSU 94]) consiste à calculer les intersections du rayon $r$ avec les plans qui contiennent la section ($T(t)$, $\mathbf{N}(t)$, $\mathbf{B}(t)$) dans le plan ($T(t)$, $\mathbf{TG}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, $\mathbf{B}(t)$). Une fois la courbe $R_F(t)$ des intersections obtenue, il suffit de trouver les points d'intersection entre $R_F(t)$ et la section $S(s)$ dans le repère initial.

## 2. Calcul de l'intersection du rayon et du CG

### 2.1. Mise en équations

Exprimons tout d'abord, dans le repère de Frenet généralisé le rayon $r$ que nous notons $R(u,t)$. Pour cela, nous utilisons les méthodes générales de changement de repère après avoir déplacé l'origine du repère de O à $T(t)$. Nous obtenons alors l'équation du rayon en fonction de son paramètre $u$ et du paramètre $t$ de la trajectoire :

$$R(u,t) = \begin{pmatrix} \mathbf{TG}(t) \\ \mathbf{N}(t) \\ \mathbf{B}(t) \end{pmatrix}^T trans_{-T(t)}(r(u))$$

où $trans_u$ est l'opérateur de translation de vecteur **u**. On peut encore écrire :

$$R(u,t) = \begin{pmatrix} \mathbf{TG}(t) \\ \mathbf{N}(t) \\ \mathbf{B}(t) \end{pmatrix}^T (\mathbf{a}u + \mathbf{b} - T(t))$$

L'intersection éventuelle de ce rayon $R_F(t)$ et du plan support de la section en $T(t)$ (ie ($T(t)$, **N**(t), **B**(t)) est le point du rayon $R$ dont la première coordonnée (en **TG**($t$)) est nulle. On cherche donc le paramètre u du rayon tel que :

$$R_x(u,t) = 0$$

En omettant d'expliciter les transposés des vecteurs, on peut réécrire l'équation précédente :

$$R(u,t) \bullet \mathbf{TG}(t) = 0$$

Et en remplaçant $R$ par sa définition :

$$(\mathbf{a}u + \mathbf{b} - T(t)) \bullet \mathbf{TG}(t) = 0 \qquad \textbf{(5.1)}$$

En supposant que la tangente à $T$ en $t$ n'est pas perpendiculaire au vecteur directeur de $r$ (ce cas particulier revenant à dire que le rayon est parallèle au plan contenant la section en $T(t)$ - confondu ou non - sera traité plus loin), on peut déduire $u$ en fonction de $t$.

$$u = \frac{T(t) \bullet \mathbf{TG}(t) - \mathbf{b} \bullet \mathbf{TG}(t)}{\mathbf{a} \bullet \mathbf{TG}(t)}$$

En reportant $u$ dans la formule **(5.1)**, on obtient l'expression du rayon dans le repère lié à la trajectoire :

$$R_F(t) = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}(\frac{T(t) \bullet \mathbf{TG}(t) - \mathbf{b} \bullet \mathbf{TG}(t)}{\mathbf{a} \bullet \mathbf{TG}(t)}) + \mathbf{b} - T(t)) \bullet \mathbf{N}(t) \\ (\mathbf{a}(\frac{T(t) \bullet \mathbf{TG}(t) - \mathbf{b} \bullet \mathbf{TG}(t)}{\mathbf{a} \bullet \mathbf{TG}(t)}) + \mathbf{b} - T(t)) \bullet \mathbf{B}(t) \end{pmatrix}$$

Intuitivement, on peut interpréter $R_F(t)$ comme la projection le long de la trajectoire $T$ de toutes les intersections entre le rayon $r$ et les plans contenant la section.

Dans le meilleurs des cas, trouver le point d'intersection entre $r$ et la frontière du CG revient à calculer l'intersection entre la section $S$ et le rayon $R_F(t)$, qui sont deux courbes paramètrées définies dans le plan ($T(t)$, $\mathbf{N}(t)$, $\mathbf{B}(t)$). Remarquons que le rayon $R_F(t)$ tend vers l'infini aux voisinages des points de la trajectoire ayant des plans contenant la section parallèles à la direction du rayon. Ceci n'est pas vraiment gênant puisque nous considérons que la section est finie; nous pouvons donc éliminer les branches infinies sans perte de précision.

Pour conclure, le problème est donc ramené à un problème classique d'intersection entre deux courbes paramétrées. Nous donnons dans la section 2.2. quelques éléments classiques permettant de résoudre ce type de problème.

*Résolution du cas où le rayon et un plan contenant une section sont parallèles*

Nous pouvons distinguer deux éventualités :

- Pour un paramètre $u_0$ : $T'(t) \bullet (r(u_0) - T(t)) = 0$

Cela revient à dire que le rayon $r$ est inclus dans le plan contenant la section en T(t). Remarquons que si, pour un certain $u_0$, $T'(t) \bullet (r(u_0) - T(t)) = 0$, alors quel que soit $u$, on a : $T'(t) \bullet (r(u) - T(t)) = 0$. Ceci est vrai en particulier pour $u = 0$, Nous pouvons donc simplement tester la quantité suivante (qui constituera notre test générique) :

$$T'(t) \bullet (\mathbf{b} - T(t)) = 0$$

Sous cette hypothèse, le problème est simplifié et consiste à résoudre l'intersection de la section et d'une droite.

- Pour un paramètre $u_0$ : $T'(t) \bullet (r(u_0) - T(t)) \neq 0$ et $T'(t) \bullet \mathbf{a} = 0$

Pour les même raisons que précédemment, le test peut être simplifié et écrit sous la forme :

$$T'(t) \bullet \mathbf{a} = 0 \text{ et } T'(t) \bullet (\mathbf{b} - T(t)) \neq 0$$

Dans ce cas, le rayon est parallèle au plan contenant la section au point $T(t)$ et aucune intersection n'est à envisager. Nous pouvons affirmer aussi que, dans un voisinage proche de $t$, l'intersection du rayon et des plans attachés à la trajectoire est

rejetée à l'infini. Ceci n'est vrai que si la trajectoire est $G^2$, ce qui est dans le cadre de nos hypothèses. Le rayon pourra donc être tronqué, les extrémités étant des valeurs appartenant à un voisinage plus ou moins éloigné de $t$.

### 2.2. Intersection de deux courbes splines

Les résultats de la section 2.1. montrent que le problème est ramené au calcul de l'intersection entre deux courbes. Nous proposons une méthode simple, basée sur des techniques de subdivision [LANE 83] permettant de résoudre ces problèmes dans le cas de courbes splines. Nous supposerons que nous devons calculer l'intersection dans le plan de deux courbes notées $S(s)$ et $DT(t)$. Dans notre cadre, $S(s)$ (représentant la section) est une courbe B-spline et $DT(t)$ (représentant $R_F(t)$) une courbe issue d'une transformation de la courbe B-spline $T(t)$ (représentant la trajectoire). Le calcul de l'intersection entre $S(s)$ et $DT(t)$ se décompose en deux étapes.

- Localisation de l'intersection

Dans un premier temps, nous repérons « grossièrement » le (ou les) point(s) d'intersection. Pour cela, les deux courbes $S(s)$ et $DT(t)$ sont approchées par une suite de segments dont les extrémités se situent sur les courbes. La longueur est empiriquement choisie suffisamment faible afin de localiser à coup sûr l'intersection. Nous pouvons, pour décomposer les courbes en segments, appliquer les techniques de subdivision de courbes B-splines aux courbes $S(s)$ et $T(t)$. Nous appliquons ensuite la transformation continue, permettant d'obtenir $DT(t)$ à partir de $T(t)$, aux points de subdivision de $T(t)$.

Des méthodes classiques d'intersection entre segments sont ensuite mises en œuvre pour déterminer les paires de segments localisant les intersections entre les deux courbes.

- Calcul du point d'intersection

Nous supposons que les deux segments localisant l'intersection ont été déterminés. Nous approchons, alors, les deux morceaux de courbes délimités par les extrémités des segments par deux ensembles de points obtenus par subdivision des courbes. Le point d'intersection est alors choisi comme le milieu des deux points les plus proches de ces deux ensembles.

Nous donnons dans l'annexe 3 une méthode classique d'intersection entre deux courbes basée sur la décomposition des courbes selon les tangentes parallèles aux axes ([COLL 76]).

## 3. Extension au CG profilé orienté avec profil monotone

Le fait de se restreindre aux profils monotones nous permet d'assurer que dans un plan donné H ($T(t)$, $\mathbf{N}(t)$, $\mathbf{B}(t)$), il n'y a qu'une occurrence de la section. En revanche, la section subit des déformations en taille et en orientation (on se limitera à des orientations dans le plan de définition de la section). Donc, contrairement au paragraphe précédent, la section n'est plus constante.

Nous pouvons, en compliquant légèrement les équations, garder la même démarche qu'auparavant. Pour tenir compte des modifications que subit la section, il suffit d'appliquer les changements de taille et les rotations inverses pour retrouver la section définie dans son repère initial.

A partir de là, nous pouvons opposer deux points de vue. Si on considère que, puisque les profils sont monotones, on peut définir profils et orientations en fonction du paramètre $t$, alors l'algorithme est le suivant :

Intersection

{

Evaluer $P_1(t)$, $P_2(t)$ et $O(t)$

Calculer les matrices $\Pi(t)$ et $\Omega(t)$

Résoudre $\Pi^{-1}(t)\ \Omega^{-1}(t)S(s)= R_F(t)$

ce qui équivaut à : $S(s)= \Pi(t)\ \Omega(t)\ R_F(t)$

}

Si on considère que profils et orientations sont fonctions de $p$ (paramètre de la fonction Profil) alors :

Intersection

{

$P_1(p)$, $P_2(p)$ et $O(p)$.

Calculer les matrices $\Pi(p)$ et $\Omega(p)$

Résoudre $\Pi^{-1}(p)\ \Omega^{-1}(p)S(s)= R_F(f\ (p))$

ce qui équivaut à : $S(s)= \Pi(p)\ \Omega(p)\ R_F(f\ (p))$

}

Notons que la complexité (par exemple le degré très élevé des courbes à traiter si on utilise des B-splines) des courbes nous empêche d'utiliser certains algorithmes d'intersection entre deux courbes. Notamment ceux qui font appel aux calculs de tangentes horizontales ou verticales où les polynômes définissant les courbes sont d'un degré trop important pour que l'on puisse en extraire facilement les zéros.

### 4. Profils non monotones

Dans le cas de l'utilisation de profils non monotones, on risque, pour un paramètre $t$ ou un paramètre $p$, d'avoir un problème de double intersection à résoudre (figure V.1) et les techniques précédentes ne seraient plus valables. On élimine ce problème en se ramenant dans un cadre compatible avec le précédent en décomposant le profil en courbes monotones.

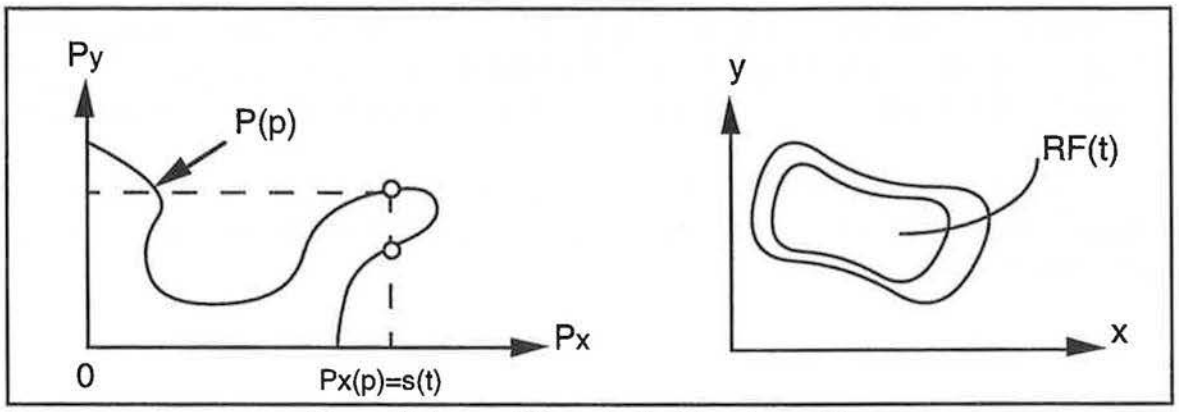



Figure V.1 : *problème de double intersection*

Dans le cas où les profils sont $G^2$, ils sont découpés en morceaux du point initial au premier point présentant une tangente verticale, puis de ce point au deuxième point présentant une tangente verticale, etc... Le calcul des tangentes verticales se fait en recherchant les racines de la composante en y du vecteur dérivé. Par exemple, si les courbes définissant les profils sont de degré 3, le problème se ramène à la recherche des zéros d'un polynôme du second degré.

Dans le cas où le profil présente des discontinuités $G^1$, un simple test sur la direction en **x** de la tangente détermine s'il y a un point de rebroussement, et donc s'il y a nécessité de décomposer la courbe.

### 5. Trajectoire quelconque

• **N**($t$) est définissable en tout point de la trajectoire

Dans ce cas précis, en se référant au chapitre sur le calcul d'un repère le long d'une trajectoire quelconque, on peut s'apercevoir que la normale peut être définie continûment, mais par morceaux. Par exemple, si une partie de la trajectoire est linéaire, **N**($t$) ne correspond pas aux formules de Frenet. La décomposition par morceaux de **N**($t$) entraîne une décomposition similaire du rayon $R_F(t)$.

• **N**($t$) n'est pas définissable.

Cela survient dans les cas très particuliers où la trajectoire présente des discontinuités $G^1$ et où on utilise donc la modélisation de Klok et Post qui ne définit pas explicitement de repère. Les méthodes présentées dans ce chapitre ne sont plus utilisables et nous devons revenir à des procédés plus classiques pour calculer l'intersection entre le rayon et le solide (intersection du rayon avec les facettes constituant le solide).

### 6. Conclusion

Les techniques présentées dans ce chapitre permettent de détecter l'intersection d'un rayon et d'un CG dans la plupart des situations. Une fois toutes les intersections rayon-CG calculées, il ne reste plus qu'à trier les points d'intersection le long du rayon pour déterminer

le point visible par l'œil. Les normales aux CG sont calculées avec l'expression explicite du CG.

Notons que cette étape de visualisation, incompatible avec une quelconque interactivité, intervient en fin de processus, une fois la scène définitivement établie.

# Chapitre VI : CG ET QUATERNIONS

Il a été développé à l'école des Mines de Saint-Etienne [HANO 93] une modélisation des CG utilisant les quaternions. L'auteur, G. Hanotaux, a appliqué des techniques liées à l'animation au formalisme des CG, obtenant des résultats intéressants. L'idée est que pendant l'animation, l'objet décrit un certain volume. Il faut noter que cette interprétation se rapproche de l'idée première de l'extrusion. En reliant les occurrences $S_i$ de la position de l'objet obtenue à des instants $t_i$, on obtient un solide (surface) pouvant être intuitivement assimilé à un CG.

Nous avons déjà utilisé, d'une manière plus ou moins claire, les quaternions pour définir des variations en forme de la section. Nous montrerons, dans cette section, comment insérer les sus-dites méthodes dans un modèle utilisant exclusivement les quaternions. Nous reprendrons les précédentes recherches en montrant comment ôter les limites imposées dans [HANO 93]. Mais tout d'abord, nous rappellerons les définitions essentielles des quaternions.

## 1. Définitions

Les quaternions, introduits par Hamilton [HAMI 44], sont des éléments de $\Re^4$. Ils sont utiles pour représenter des rotations et il permettent de représenter une orientation (voir notamment [SHOM 85]) par rapport à une orientation de référence. Leur intérêt vient de ce qu'ils offrent une représentation des rotations indépendante d'un repère, contrairement aux angles d'Euler par exemple.

Un quaternion est composé d'une partie réelle (un scalaire) et d'une partie imaginaire (un vecteur). On note :

$$q = [w, v]$$

où $w$ est le scalaire, et $v$ le vecteur. $q$ est un vecteur de $\Re^3$ (plus exactement q est isomorphe à un vecteur de $\Re^3$) quand $w$ peut être exprimé en fonction de $v = (x, y, z)$. Par exemple, si $q$ est unitaire alors :

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

donc :

$$w^2 = 1 - x^2 - y^2 - z^2$$

Le produit de deux quaternions s'écrit :

$$q_1 q_2 = [w_1, v_1][w_2, v_2] = [w_1 w_2 - v_1 \bullet v_2, w_1 v_2 + w_2 v_1 + v_1 \wedge v_2]$$

(où $\bullet$ représente le produit scalaire et $\wedge$ le produit vectoriel). Pour des quaternions unitaires, on peut définir $q^{-1}$, l'inverse de $q$ par :

$$q^{-1} = [w, -v]$$

et on a :

$$qq^{-1} = q^{-1}q = [1,0]$$

### 2. Représentation d'une rotation par un quaternion

Les quaternions unitaires sont très pratiques pour représenter les rotations. On peut décrire une rotation d'axe unitaire $v$ et d'angle $\theta$ par le quaternion :

$$q = [\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2} v]$$

La rotation précédente appliquée à vecteur quelconque $v_1$ consiste à considérer ce vecteur comme un quaternion de partie réelle nulle et à lui appliquer la transformation suivante :

$$q[0, v_1]q^{-1}$$

La preuve est simple, quoique laborieuse. On calcule d'abord géométriquement la rotation de $v_1$ autour de $v$. On choisit les notations de la figure VI.1. Le problème se ramène à la rotation de la composante de $v_1$ perpendiculaire à $v$. Après avoir effectué un changement de repère pour pouvoir utiliser les matrices de rotation classiques dans le repère canonique, on additionne la composante sur $v$ de $v_1$. La formule générale est donc (en notant $v_2$ le vecteur image de $v_1$) :

$$v_2 = (v \bullet v_1)v + \begin{pmatrix} \dfrac{(v_1 - (v \bullet v_1)v)}{\left|(v_1 - (v \bullet v_1)v)\right|} \\ \dfrac{v \wedge v_1}{\left|v \wedge v_1\right|} \\ v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left|(v_1 - (v \bullet v_1)v)\right| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

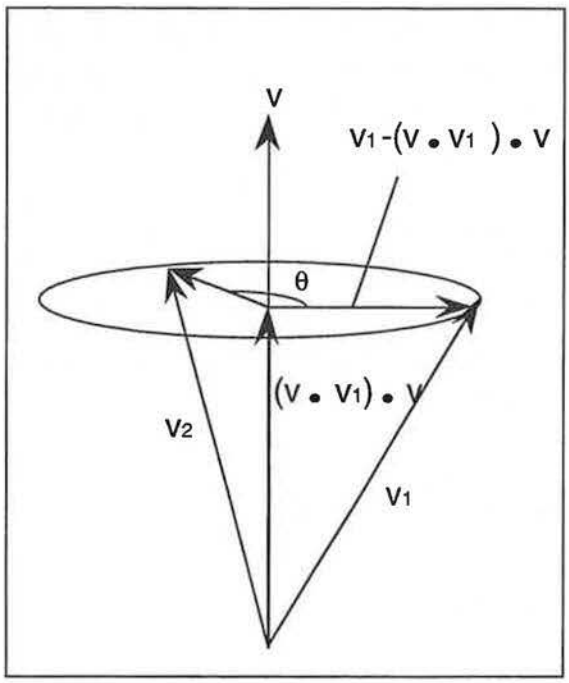



Figure VI.1 : *rotation de $v_1$ autour de l'axe v*

En développant la formule et en remarquant que :

$$|v \wedge v_1| = |(v_1 - (v \bullet v_1)v)|,$$

on obtient une formule logique si on se réfère à la description précédente :

$$v_2 = (v \bullet v_1)v + \cos\theta(v_1 - (v \bullet v_1)v) + \sin\theta v \wedge v_1$$

Nous laisserons au lecteur le soin de calculer la formule en utilisant les quaternions et en utilisant le fait que :

$$(v \wedge v_1) \wedge v = (v \bullet v)v_1 - (v \bullet v_1)v,$$

le quaternion résultant étant le quaternion: $[0, v_2]$

Remarquons, pour finir, que la composée de deux rotations est le produit des quaternions représentant les deux rotations et que les deux quaternions ne commutent pas, sauf si leurs axes sont concourants (ce qui est aussi vrai pour les rotations).

### 3. Interpolation linéaire des orientations.

Notons $P_1$ et $P_2$ deux vecteurs de $\Re^3$. L'interpolation linéaire entre les deux vecteurs est alors donnée par le chemin décrit par $p(u)$ où :

$$p(u) = p_1 + u(p_2 - p_1) \text{ avec } u \in [0,1]$$

On note aussi $p(u)$ comme une fonction de $p_1$, $p_2$ et $u$ : $lerp(p_1, p_2, u)$

En reprenant le même raisonnement que pour les orientations, on obtient une formule similaire en tenant compte du fait que l'on passe d'un groupe additif (les positions) à un groupe multiplicatif (les orientations) :

$$slerp(q_1, q_2, u) = q_1(q_1^{-1}q_2)^u$$

où $q_1^{-1}q_2$ représente la rotation qui permet de passer de $q_1$ à $q_2$ et $(q_1^{-1}q_2)^u$ une fraction de celle-ci. Nous avons vu, dans la section 2.3.2.1., qu'on peut retrouver cette formulation géométriquement (figure VI.2) :

$$slerp(p_1, p_2, u) = \frac{\sin(1-u)\theta}{\sin\theta}q_1 + \frac{\sin u\theta}{\sin\theta}q_2$$

avec $u \in [0,1]$ et $\cos\theta = q_1 \bullet q_2$

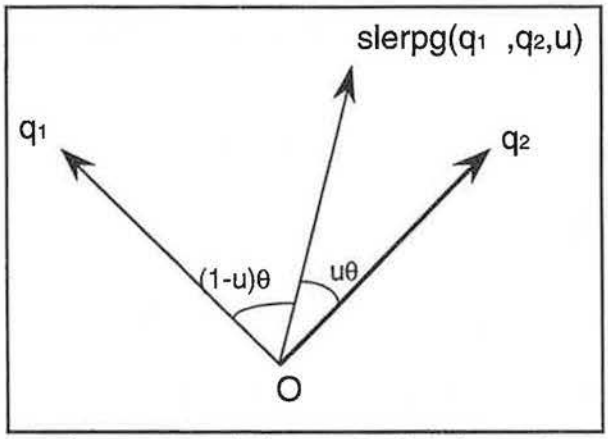



Figure VI.2 : *définition de slerp($q_1$,$q_2$,u)*

Nous avons vu que cette formulation est valable quand $q_1$ et $q_2$ sont unitaires, mais qu'elle reste applicable quand ils ne le sont pas. Nous noterons *slerpg* l'interpolation entre deux orientations non unitaires (figure VI.3). Il faut quand même définir les limites pour que la norme du vecteur interpolant soit égale à celle de $q_1$ pour $u$=0, à celle de $q_2$ pour $u$=1, et monotone croissante ou décroissante selon les valeurs des normes de $q_1$ et $q_2$ le long de l'intervalle [0,1] (c'est impératif pour ne pas avoir des interpolations exotiques). Pour cela, calculons l'expression de la norme du vecteur interpolant $slerpg(q_1, q_2, u)$.

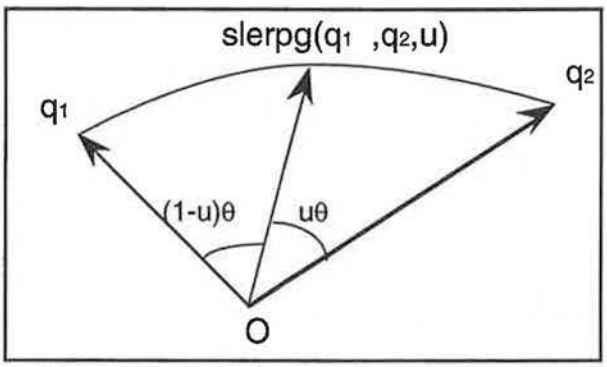



Figure VI.3 : *définition de slerpg($q_1$,$q_2$,u)*

$$\left|slerpg(q_1,q_2,u)\right|^2 = \frac{\sin^2(1-u)\theta}{\sin^2\theta}\left|q_1\right| + \frac{\sin^2 u\theta}{\sin^2\theta}\left|q_2\right| + 2\frac{\sin(1-u)\theta\sin u\theta}{\sin^2\theta} q_1 \bullet q_2$$

Nous calculons la dérivée de cette expression en remarquant que :

$$\left|f(t)\right|' = \frac{f(t)\bullet f'(t)}{\left|f(t)\right|}$$

Après quelques calculs laborieux, nous arrivons à :

$$\left|slerpg(q_1,q_2,u)\right|' = \theta(\sin 2u\theta(q_1^2 - \left|q_1\right|\left|q_2\right|) + \sin 2(1-u)\theta(q_2^2 - \left|q_1\right|\left|q_2\right|)$$

Nous supposerons, sans perte de généralité, que $\theta > 0$ et que $\left|q_1\right| > \left|q_2\right|$, ce qui nous permet de ramener le calcul du signe de la dérivée à celui du signe de l'expression suivante :

$$-(\sin 2u\theta\left|q_1\right| + \sin 2(1-u)\theta\left|q_2\right|)$$

Cette expression est négative dès que $\theta < \frac{\pi}{2}$. C'est la condition que nous garderons. Si elle semble assez restrictive au premièr abord, nous verrons qu'elle ne nous gênera pas lors de la construction des CG.

### 4. Calcul du quaternion de passage du repère canonique à un autre

Nous allons déterminer le quaternion $q = [q_w, (q_x, q_y, q_z)]$ de passage du repère canonique ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) à un repère orthonormé quelconque que l'on notera $((t_x,t_y,t_z),(n_x,n_y,n_z),(b_x,b_y,b_z))$. Nous avons donc à résoudre les équations suivantes :

$$q[0,\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}]q^{-1} = \begin{pmatrix}t_x\\t_y\\t_z\end{pmatrix},\quad q[0,\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}]q^{-1} = \begin{pmatrix}n_x\\n_y\\n_z\end{pmatrix},\quad q[0,\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}]q^{-1} = \begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}$$

Nous obtenons les neuf équations suivantes :

$$t_x = q_x^2 + q_w^2 - q_z^2 - q_y^2 \qquad (6.1)$$
$$t_y = 2q_x q_y + 2q_w q_z \qquad (6.2)$$
$$t_z = 2q_x q_z + 2q_w q_y \qquad (6.3)$$

$$n_x = 2q_x q_y - 2q_w q_z \qquad (6.4)$$
$$n_y = q_y^2 + q_w^2 - q_z^2 - q_x^2 \qquad (6.5)$$
$$n_z = 2q_x q_w + 2q_z q_y \qquad (6.6)$$

$$b_x = 2q_z q_x + 2q_w q_y \qquad (6.7)$$
$$b_y = 2q_z q_y - 2q_x q_w \qquad (6.8)$$
$$b_z = q_z^2 + q_w^2 - q_y^2 - q_x^2 \qquad (6.9)$$

On peut déterminer sans ambiguïté $q_w$ en additionnant les équations (6.1), (6.5), (6.8) et en utilisant le fait que le quaternion est unitaire :

$$q_w^2 = \frac{1}{4}(t_x + n_y + b_z + 1)$$

Si $q_w^2$ est strictement positif on obtient :

$$q_w = \frac{1}{2}\sqrt{(t_x + n_y + b_z + 1)}$$

On obtient, après quelques calculs simples, la partie imaginaire du quaternion :

$$(6.6) \text{ et } (6.8) \quad \Rightarrow \quad q_x = \frac{1}{4q_w}(n_z - b_y)$$
$$(6.1) \text{ et } (6.9) \quad \Rightarrow \quad q_y = \frac{1}{4q_w}(b_z - t_x)$$
$$(6.2) \text{ et } (6.4) \quad \Rightarrow \quad q_z = \frac{1}{4q_w}(t_y - n_x)$$

A ce stade, si $q_w^2$ est strictement positif, on peut trouver des conditions sur certains paramètres du repère défini par $((t_x, t_y, t_z), (n_x, n_y, n_z), (b_x, b_y, b_z))$. Pour que le quaternion $q$ soit unitaire, il faut que :

$$q_w^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 1$$

On arrive, après quelques calculs, à la condition suivante :

$$-t_x - n_y - b_z + n_z b_y - n_y b_z + t_y n_x - t_x n_y + t_x b_z - t_z b_x = 0$$

qui est notamment vérifiée si (d'où la notion de repère orthogonal):

$$t \wedge n = b$$

Dans le cas où la quantité $(t_x + n_y + b_z + 1)$ est nulle, nous choisissons $q_w = 0$ ce qui nous donne, grâce aux équations (6.5) et (6.9) :

$$q_x^2 = \frac{1}{2}(n_y + b_z)$$

Là encore, si $(n_y + b_z)$ est strictement positif, on obtient pour le quaternion la partie imaginaire suivante :

$$q_x = \sqrt{\frac{1}{2}(n_y + b_z)}$$

$$q_y = \frac{n_x}{2q_x}$$

$$q_z = \frac{b_x}{2q_x}$$

Si $(n_y + b_z)$ est nul, on fixe $q_x = 0$ et on obtient grâce à (6.9) :

$$q_y^2 = \frac{1}{2}(1 - b_z)$$

Si la quantité $(1 - b_z)$ est strictement positive, on obtient alors :

$$q_y = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - b_z)}$$

$$(6.6) \quad \Rightarrow \quad q_z = \frac{n_z}{2q_y}$$

Si la quantité $(1 - b_z)$ est nulle, on fixe alors : $q_y = 0$ et on obtient $q_z = 1$ afin de conserver un quaternion unitaire.

*Interprétation géométrique des derniers résultats*

Afin d'assurer la validité des résultats précédents, il faut montrer que $(t_x + n_y + b_z + 1)$ est positive quelles que soient les valeurs $t_x$, $n_y$ et $b_z$. La démonstration n'est pas facile si on

n'utilise pas le fait que le repère défini par $((t_x,t_y,t_z),(n_x,n_y,n_z),(b_x,b_y,b_z))$ peut être représenté par la rotation du repère canonique autour d'un certain axe. Nous noterons l'axe $v$ et l'angle de rotation $\theta$, le nouveau repère étant obtenu par la rotation d'angle $\theta$ autour de l'axe $v$. En reprenant les équations de rotation autour d'un vecteur, on obtient :

$v_2 = (v \bullet v_1)v + \cos\theta(v_1 - (v \bullet v_1)v) + \sin\theta v \wedge v_1 = f(v_1)$. On a donc :

$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rapidement, on obtient :

$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = v_x v + \cos\theta\begin{pmatrix} 1-v_x^2 \\ \times \\ \times \end{pmatrix} + \sin\theta\begin{pmatrix} 0 \\ \times \\ \times \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = v_y v + \cos\theta\begin{pmatrix} \times \\ 1-v_x^2 \\ \times \end{pmatrix} + \sin\theta\begin{pmatrix} \times \\ 0 \\ \times \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = v_z v + \cos\theta\begin{pmatrix} \times \\ \times \\ 1-v_z^2 \end{pmatrix} + \sin\theta\begin{pmatrix} \times \\ \times \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$t_x + n_y + b_z + 1 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + \cos\theta(3 - (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)) + 1$$

Le vecteur $v$ étant unitaire, on peut conclure :

$$t_x + n_y + b_z + 1 = 2(1 + \cos\theta) \geq 0$$

Pour poursuivre quant à la validité du calcul du quaternion de passage, remarquons que si $t_x + n_y + b_z + 1 \geq 0$ alors $n_y + b_z \geq 0$, puisque $|t_x| \leq 1$. Pour finir, $1 - b_z$ est toujours positif ou nul puisque $|b_z| \leq 1$.

L'interprétation géométrique est assez simple. Le cas $q_w = 0$ correspond à la situation où le repère défini par $((t_x,t_y,t_z),(n_x,n_y,n_z),(b_x,b_y,b_z))$ est défini à partir du repère canonique à l'aide d'une rotation d'angle $\pi$ autour d'un axe quelconque. Si, de plus, $q_x = 0$, alors l'axe de la rotation est situé dans le plan (**x**, **y**). Enfin si $q_y = 0$ l'axe de la rotation est l'axe **z**.

Il est clair que, par la suite, le changement de repère permettra de passer du repère contenant la section au repère lié à la trajectoire, donc au repère de Frenet généralisé. Dans la section suivante, nous allons montrer comment modéliser des CG à l'aide des quaternions.

### 5. Modélisation de CG à l'aide de quaternions

Nous gardons pour définir les CG à l'aide des quaternions les mêmes données initiales : la trajectoire, la section et les orientations. Les orientations selon les trois axes peuvent maintenant être caractérisées par un seul quaternion paramétré $q(p)$ au lieu des trois courbes.

Une section au point $T(t)$ subit l'orientation naturelle du repère de Frenet généralisé ainsi que l'orientation supplémentaire imposée par l'utilisateur. En utilisant les caractéristiques des quaternions et en notant $q_{FG}$ le quaternion représentant les orientations du repère de Frenet généralisé, l'ensemble des orientations que subit la section a pour quaternion caractéristique :

$$q(t)q_{FG}(t)$$

La surface engendrée par le CG peut donc s'écrire :

$$CG(t,s) = T(t) + q(t)q_{FG}(t)S(s)(q(t)q_{FG}(t))^{-1}$$

En utilisant le fait que $(q(t)q_{FG}(t))^{-1} = q_{FG}(t)^{-1}q(t)^{-1}$ on arrive à :

$$CG(t,s) = T(t) + q(t)q_{FG}(t)S(s)q_{FG}(t)^{-1}q(t)^{-1}$$

Enfin, si on utilise les règles de balayage $R$(t), on obtient :

$$CG(t,s) = T(t) + q(t)q_{FG}(t)R(t)S(s)q_{FG}(t)^{-1}q(t)^{-1}$$

Nous pouvons introduire maintenant un moyen pour pouvoir représenter les déformations dans ce nouveau mode de représentation : il suffit de considérer chaque point définissant la section comme un quaternion de partie réelle nulle et d'utiliser la fonction *slerp* ou plus généralement *slerpg* pour obtenir une représentation des déformations à l'aide des quaternions.

En supposant que la trajectoire est échantillonnée par le vecteur $[t_1,\ldots,t_n]$, que la section initiale est notée $S_i = [si_1,\ldots,si_m]$, et que la section finale est notée $S_f = [sf_1,\ldots,sf_m]$, la grille recouvrant le CG est définie par :

$$\left\{T(t_i) + q(t_i)q_{FG}(t_i)slerpg(R(t_i)si_j, R(t_i)sf_j, t_i)q_{FG}(t_i)^{-1}q(t_i)^{-1}, 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\right\}$$

ou encore, si on note $SELPG(S_i, S_f, u)$ le passage d'une section à une autre :

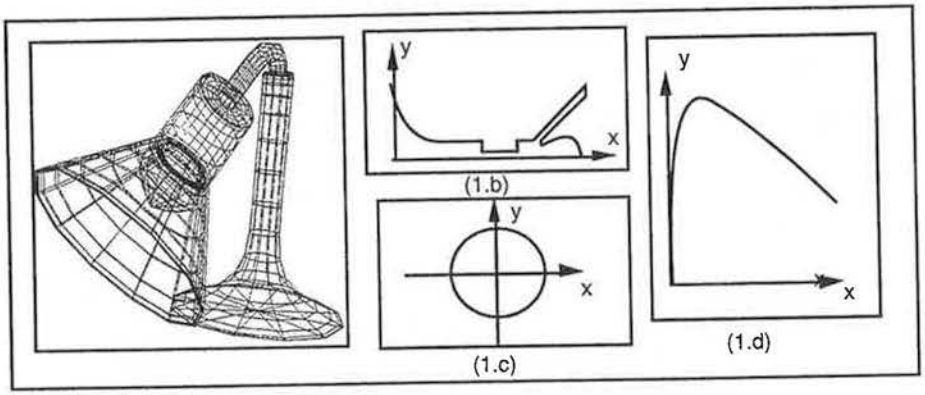
$$CG(t,s) = T(t) + q(t)q_{FG}(t)SLEPG(R(t)S_i(s), R(t)S_f(s), t)q_{FG}(t)^{-1}q(t)^{-1}$$

Si le CG ne subit que des déformations par morceaux, on décompose la trajectoire en séparant les tronçons présentant des déformations de la section des autres tronçons. Enfin, on peut remplacer le paramètre $t$ par le paramètre $p$ d'un profil sans perte de généralité.

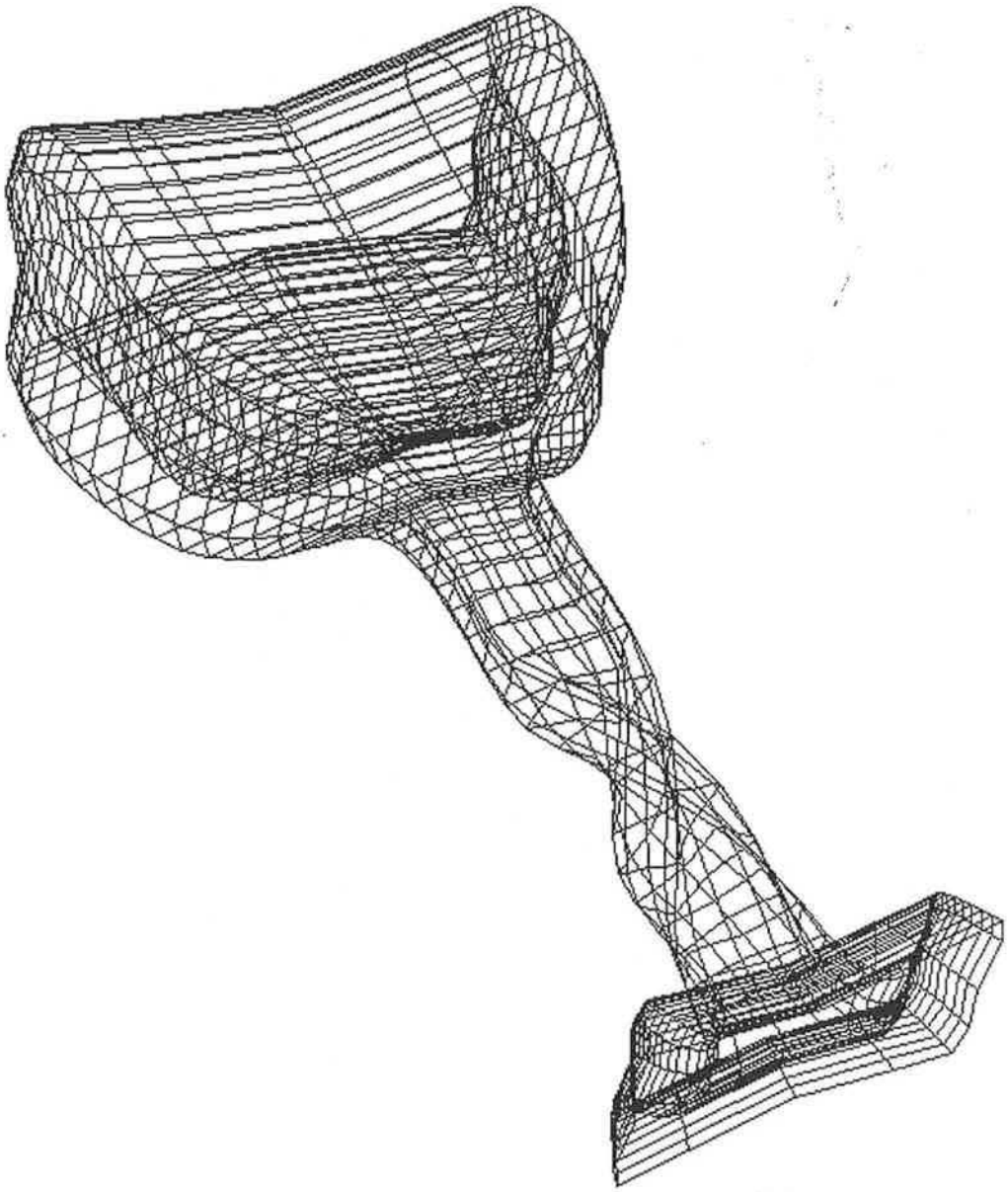
### 6. Application

Modéliser les CG à l'aide des quaternions présente un avantage pour certaines applications où les quaternions sont largement utilisés. Grâce à ce formalisme, les CG prennent une place importante alors que, représentés classiquement, ils offrent moins d'attrait. Nous pensons notamment à l'animation gourmande en interpolation d'orientations et de positions et qui utilise donc dans une large mesure les quaternions.

Par exemple, l'utilisateur fixe un certain nombre de positions clés d'un objet et souhaite obtenir le déplacement (en position et en orientation) qu'effectue l'objet pour aller d'une position clé à une autre. L'utilisateur peut manipuler les positions de chaque repère local associé aux positions clés ainsi que les tangentes en certains points de l'objet. A partir de là, des méthodes classiques permettent de calculer des trajectoires et des courbes supports très faciles à représenter par des quaternions. De ces données, nous pouvons décrire le volume engendré par le déplacement de l'objet comme un CG. Les orientations de l'objet sont, par défaut, celles du repère de Frenet le long de la trajectoire modulo les orientations supplémentaires dues aux orientations des positions clés. Pour plus de détails, nous demandons au lecteur de se reporter à la thèse de G. Hanotaux.




Un exemple de CG echancré
(1.a): CG, (1.b): Profil, (1.c): Section, (1.d): Trajectoire



GC : coupe définie à l'aide de quaternions

# Chapitre VII : CONES GENERALISES RAMIFIES

## 1. Introduction

Ce chapitre est consacré à la modélisation de CG ramifiés. On peut définir un CG ramifié comme un CG possédant une trajectoire arborescente. Si la construction de tels CG ne diffère pas de la construction classique pour sa plus grande partie, de nombreux problèmes se posent aux embranchements, c'est-à-dire là où la trajectoire se divise. Les embranchements sont en général constitués d'un ensemble de surfaces artificiellement supprimées et ajoutées aux parties du CG qui ont été construites par les moyens classiques. Ainsi, les surfaces constituant les embranchements ne sont plus décrites comme des CG. Par conséquent, de nombreuses difficultés au niveau de la validité et de la continuité apparaissent.

A chaque subdivision de la trajectoire correspond un embranchement. Cet embranchement n'est pas unique et de nombreux modèles peuvent être utilisés. Nous nous fixerons les contraintes suivantes : la continuité de l'embranchement doit être d'ordre $G^1$ et le degré des surfaces le constituant doit être limité. De plus, la modélisation de l'embranchement devra être la plus systématique possible et donc être adaptée au maximum de cas afin d'éviter des interventions involontaires de l'utilisateur.

Nous ne traiterons pas explicitement des problèmes de raccord des surfaces constituant les embranchements entres elles ni des problèmes de raccord entre l'embranchement et le reste du CG. Ces difficultés seront traitées dans un cadre plus général dans la deuxième partie du mémoire consacrée aux raccords entre surfaces de formes libres. En revanche, nous détaillerons tout le travail préparatoire à effectuer pour se ramener ensuite à des cas particuliers de ceux que nous décrirons dans la deuxième partie.

Ce chapitre sera structuré de la manière suivante : dans un premier temps nous donnerons la définition de la notion de trajectoire arborescente, puis nous rappellerons les principaux travaux liés à la construction d'embranchements. Enfin, nous présenterons notre approche avec ses avantages et ses difficultés.

## 2. Trajectoire arborescente

### 2.1. Définition

Nous représenterons une trajectoire arborescente par une succession de pseudo-courbes paramétrées $T^i$ (figure VII.1) qui sont chacune caractérisées par un triplet du type :

$(T_i, j, u_j)$ avec

- $T_i$ : courbe en elle-même, c'est-à-dire l'ensemble des éléments caractéristiques de la ième courbe (points de contrôle, équation, points à interpoler tels que $T_i(u)$ représente la valeur de la courbe pour le paramètre $u \in [0,1]$;

- j : numéro de la courbe à laquelle $T_i(u)$ est attachée;

- $u_j$ : paramètre de la courbe $T^j$ qui vérifie : $T_j(u_j) = T_i(0)$.

Nous imposerons, afin de conserver la continuité du repère de Frenet, les deux contraintes suivantes, en notant $\mathbf{TG}_j$ la tangente unitaire à la courbe $T_j(u)$ et $\mathbf{N}_j$ la normale unitaire à la courbe $T_j(u)$ :

$\mathbf{TG}_j(u_j) = \mathbf{TG}_i(0)$, si $T_j(u)$ est au moins $G^1$

$\mathbf{N}_j(u_j) = \mathbf{N}_i(0)$, si $T_j(u)$ est au moins $G^2$

Ces contraintes ont pour but d'obtenir la même continuité pour les deux courbes au point commun. Notons que la courbe naissante n'a pas de raison de posséder une continuité plus importante que la courbe mère. Les contraintes sont, de plus, rendues nécessaires par le fait que la section doit avoir la même orientation au point commun des deux courbes. Nous nous arrêtons à l'égalité des tangentes et des normales puisque le repère de Frenet généralisé ne met pas en jeu d'autres quantités.

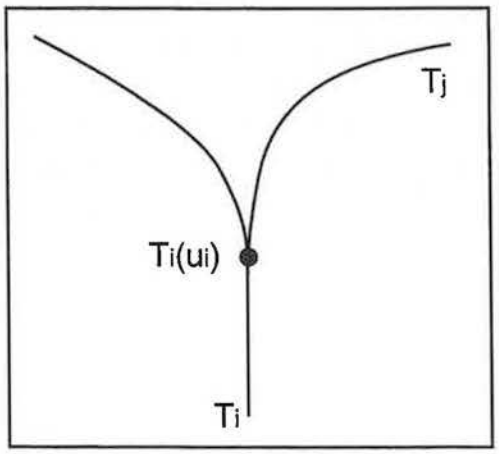



Figure VII.1 : *trajectoire arborescente*

### 2.2. Problèmes de compatibilité des repères

Nous avons déjà commencé à entrevoir les problèmes de compatibilité des repères dans la définition et nous avons déterminé quelques contraintes indispensables au point de ramification afin de conserver une unique position de la section en ce point. A l'aide des deux exemples suivants, nous illustrons un peu plus les difficultés rencontrées fréquemment et les méthodes pour y remédier. Ces deux difficultés sont liées au fait que le point commun aux deux courbes est un point d'inflexion (ou un point de courbure nulle).

• Exemple où la trajectoire est plane

Prenons l'exemple d'école illustré par la figure VII.1. La trajectoire principale $T_1$ commence par une portion droite et continue par une courbe. Au point où la trajectoire passe de la portion droite à la courbe, la courbe $T_2$ débute et sa concavité est opposée à celle de la trajectoire principale. La normale le long du tronçon de droite étant déterminée par les méthodes exposées précédemment, elle est orientée dans le sens de la concavité de $T_1$ après le point O. La normale naturelle de la courbe $T_2$ au point O a une orientation opposée. Il y a donc conflit pour le positionnement de la section (si elle n'est pas symétrique par rapport à l'axe y de son repère de définition). Nous agirons comme si il y avait un point d'inflexion pour la courbe $T_2$ et la normale sera ajustée sur celle de la courbe $T_1$. Pour cela, nous appliquerons en sus des orientations définies par l'utilisateur (qui doivent être les mêmes pour $T_1$ et $T_2$ au point O) une rotation de $\pi$ autour de la tangente. Cette rotation supplémentaire sera, bien entendu, conservée tout le long de la trajectoire $T_2$.

• Exemple où les trajectoires $T_1$ et $T_2$ ne sont pas dans le même plan

Nous avons le même problème que dans l'exemple précédent, à ceci près que si les normales ne sont pas identiques au point O pour la trajectoire $T_1$ et la trajectoire $T_2$, elles ne sont pas non plus colinéaires. En fait, la solution est similaire à la précédente : on ramène artificiellement la normale $\mathbf{N}_2$ à la normale $\mathbf{N}_1$ en introduisant une rotation d'angle $(\mathbf{N}_2, \mathbf{N}_1)$ (si on utilise une représentation par les quaternions, la rotation sera représentée par le quaternion $q_1^{-1}q_2$ où $q_1 = [0,\mathbf{N}_1]$ et $q_2 = [0,\mathbf{N}_2]$). Cette rotation supplémentaire sera conservée tout le long de la trajectoire $T_2$. En fait, il apparaît clairement que le cas précédent est un cas particulier de celui-ci.

Remarquons que ces méthodes très intuitives lorsque le point commun est un point de courbure nulle, restent valables dans les autres situations.

*Cas particulier des B-splines*

Nous avons choisi, en général, de représenter les trajectoires par des B-splines cubiques. On peut toujours faire en sorte que le point de ramification O soit l'extrémité d'une des courbes élémentaires composant $T_1$. Si nous notons $(P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, P_{i+3})$ les points de contrôle définissant cette courbe élémentaire, il est simple de construire une trajectoire $T_2$ prenant sa

source au point $O=\frac{1}{6}(P_{i+1}+4P_{i+2}+P_{i+3})$. En effet, il suffit de choisir pour les trois premiers points de contrôle de $T_2$ les points de contrôle $P_{i+1}, P_{i+2}, P_{i+3}$, ce qui assure les $C^0$, $C^1$ et $C^2$ continuités. Si seul la $G^1$ continuité est nécessaire, on aura alors les contraintes suivantes sur les trois premiers points de contrôle $P_1', P_2'$ et $P_3'$ de $T_2$ :

$$O=\frac{1}{6}(P_{i+1}+4P_{i+2}+P_{i+3})=\frac{1}{6}(P_1'+P_2'+P_3')$$

$$P_{i+3}-P_{i+1}=\alpha(P_3'-P_1')$$

## 3. Modélisation des embranchements

### 3.1. Méthodes antérieures

#### 3.1.1. Modélisation à l'aide de courbes

J. Bloomenthal [BLOO 85] a développé une méthode utilisant uniquement des courbes pour modéliser des embranchements. Les dispositions suivantes sont prises conformément à la figure VII.2.

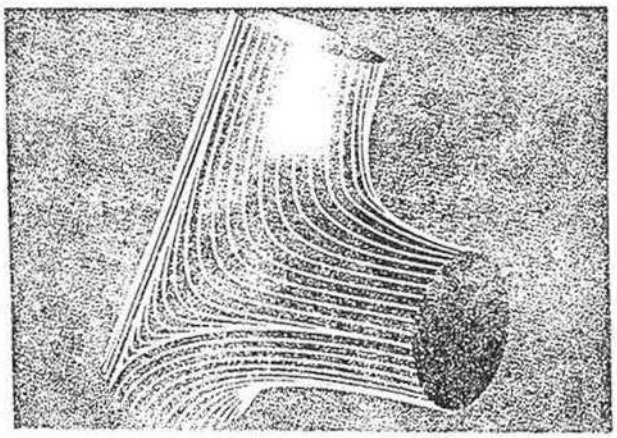


Figure VII.2 : embranchement selon J. Bloomenthal (d'après [BLOO 85])

• Les sections sont positionnées « suffisamment loin » sur les trajectoires afin d'éviter les « interférences », c'est-à-dire afin d'éviter que les sections limites ne se coupent.

• Une spline est construite entre les points les plus proches des deux sections supérieures, en tenant compte des tangentes aux CG en ces points. Cette courbe est appelée toit de l'embranchement.

• Une spline, dite anse, composée de deux morceaux élémentaires, joint les points opposés de la section inférieure et le point le plus éloigné du toit de l'embranchement et du segment formé par les deux points les plus proches des sections supérieures.

• Des splines supplémentaires sont construites des deux demi-sections de la section inférieure jusqu'aux demi-sections extérieures des sections supérieures.

• De nouvelles splines sont construites à partir d'une demi-section intérieure d'une des sections supérieures à la demi-section intérieure de l'autre demi-section supérieure en passant par des points de l'anse de plus en plus bas au fur et à mesure que l'on s'éloigne des points extrêmes du toit.

• Les courbes sont reliées entre elles afin de former le raccord.

Cette méthode, même si elle présente de nombreux points obscurs quant à la continuité, la détermination des demi-sections et la position des splines sur l'anse, permet d'avoir une première idée intéressante sur les décompositions possibles de l'embranchement. La surface d'embranchement n'est pas calculée d'un bloc, ce qui permet de déplacer les problèmes de construction à des problèmes de raccords G-continus.

### 3.1.2. Une méthode non symétrique

Les méthodes non symétriques ([FILI 89], [CHOI 89]) considèrent une trajectoire principale et une trajectoire secondaire. Le CG est entièrement construit le long de la trajectoire principale et le CG construit le long de la trajectoire secondaire va être déformé à l'endroit du raccord. L'embranchement devient une surface supplémentaire destinée à raccorder les deux cônes avec une certaine continuité. Nous allons essayer de regrouper ces méthodes en quelques principaux points :

• Calcul de l'intersection entre les deux CG. Cela revient à calculer la projection de la section du CG construit le long de la trajectoire secondaire sur la surface représentant le CG principal. En général, la courbe d'intersection exacte est de degré très élevé (pour des surfaces définies par des carreaux de degré 3×3, la courbe d'intersection possède un degré supérieur à 300) et son calcul devient difficile. Elle est donc en général approchée par une suite de segments, son calcul se faisant par des méthodes d'approximation classiques d'intersection entre deux surfaces.

• Une surface de raccord en forme de couronne est calculée. Son bord inférieur s'appuie sur le CG principal et son bord supérieur sur le CG secondaire en respectant la continuité désirée et décrivant, grosso modo, la courbe d'intersection dilatée sur le CG principal, décalée sur le CG secondaire. La couronne est approximativement décrite par le déplacement d'une sphère s'appuyant sur les deux CG.

• La partie résiduelle du CG secondaire, de la section positionnée au point de séparation des trajectoires jusqu'au bord de la couronne attachée au CG secondaire, est supprimée.

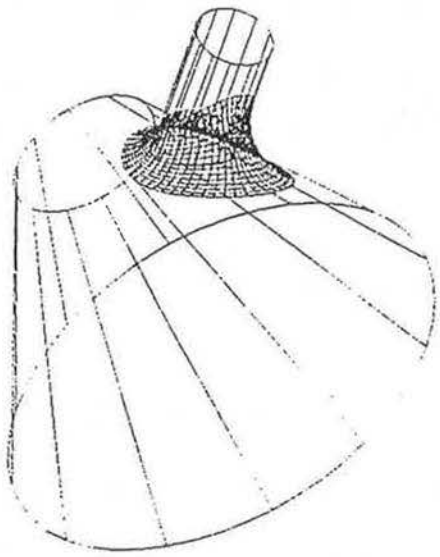


Figure VII.3 Embranchement non symétrique (selon [FILI 89])

*Inconvénients de cette méthode*

Le premier inconvénient évident de cette méthode est de ne pas être symétrique. L'embranchement semble visuellement constitué d'un raccord artificiel et un bras de l'embranchement semble privilégié par rapport à l'autre. D'autre part, le calcul de la courbe intersection est très coûteux. Enfin, dans certain cas, la projection de la section du CG secondaire sur le CG principal n'est pas possible pour de simples raisons de taille. On peut certes alors inverser les rôles des trajectoires, mais cela ne se fait pas sans perte de généralité. En revanche, le contrôle de la continuité est très simple et des raccords $G^2$ peuvent être facilement calculés.

### 3.1.3. Modélisation de l'embranchement à l'aide de surfaces libres

Cette méthode a été présentée par D. Bechman dans [BECH 89]. La notion de trajectoire n'est pas présente dans la modélisation des embranchements, cependant les résultats reflètent les recherches effectuées pendant les années 80. L'embranchement est défini à partir de trois tubes topologiques : un tube principal décrit par une matrice B-spline A suffisamment grande et deux tubes secondaires également décrits par des matrices B-splines B et C, mais de tailles inférieures. Les matrices sont concaténées de la manière suivante :

On décompose la matrice B en deux sous-matrices :

$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} & \mathbf{B'} & \\ \mathbf{BG} & & \mathbf{BD} \end{bmatrix}$ avec **BG** et **BD** de dimension d×m si les B-splines utilisées sont de degré d. On décompose la matrice **C** et la matrice **A** d'une manière similaire :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C'} \\ \mathbf{CB} \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{CB} \text{ de dimension } d \times s$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{AH} \\ \mathbf{A'} \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{AH} \text{ de dimension } d \times s$$

Un embranchement partiel est alors représenté par la surface B-spline ayant pour matrice :

$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{BG} & \mathbf{CB} & \mathbf{BD} \\ & \mathbf{AH} & \end{bmatrix}$ en rajoutant quelques colonnes dans la matrice pour assurer les conditions aux limites. Nous donnons un exemple d'un tel embranchement figure VII.3.

La surface manquante, connexe, est limitée par quatre courbes B-splines composées de deux cubiques sur deux frontières et de trois sur les deux frontières restantes. Cette surface est calculée grâce à six carreaux B-splines ou à d'autres surfaces de formes libres.

L'avantage évident de cette méthode est sa simplicité. En revanche, la $G^1$ continuité ne nous semble pas garantie et l'embranchement prend parfois des allures inattendues.

D. Bechman présente une autre méthode de raccord plus intéressante dans [BECH 89]. L'embranchement est décomposé en deux surfaces situées de part et d'autre du plan constitué par les axes des trois tubes. Chaque surface est délimitée par six arcs B-splines. Trois arcs sont formés d'un certain nombre de courbes B-splines et sont attachés aux demi-sections avant et arrière (contrairement à la première méthode où les demi-sections étaient situées de part et d'autre du plan perpendiculaire à celui contenant les axes des CG). Les trois autres arcs sont composés d'une courbe élémentaire B-spline et représentent les splines de passage d'un tube à l'autre. Les positions et les tangentes limites de ces arcs, les normales aux frontières de la surface, sont calculés en fonction des points de contrôle des tubes à raccorder. Les deux surfaces de raccord sont ensuite calculées à l'aide de surfaces de formes libres.

Cette autre méthode a l'avantage de donner des résultats moins surprenants et clairement $G^1$. Les surfaces restent cependant longues à calculer car formées d'un nombre conséquent de primitives surfaciques. De plus, on a du mal à envisager (dans le sens intuitif) les résultats si les axes des tubes ne sont pas coplanaires.

### 3.1.4. Conclusion

Il existe (par exemple voir [CHAR 84]) bien d'autres méthodes de raccord, sans parler de celle développée par Sequeira et Ebel [EBEL 91], (cf section 3.2.2.), qui nous semble de loin la plus intéressante (quoique construite dans un cadre différent du nôtre) et qui se rapproche le plus de celle que nous proposerons dans la prochaine section. On peut cependant tirer quelques conclusions simples de ce que nous venons de présenter :

• Les domaines de validité des embranchements ne sont pas clairement définis (axes coplanaires ou non, section circulaire ou quelconque, sections de tailles sensiblement égales ou non).

• L'embranchement est souvent décomposé en plusieurs surfaces qui sont ensuite raccordées entre elles. La séparation de la section en deux demi-sections est fréquente et efficace.

• La théorie des raccords entre surfaces paramétrées, notamment la théorie sur la G-continuité paraît le plus souvent utilisée.

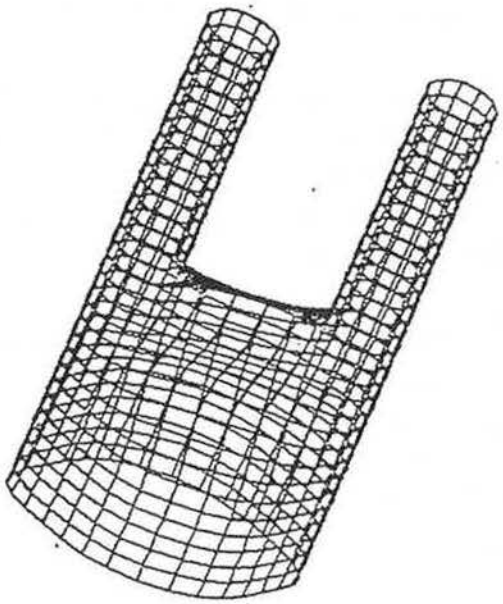


Figure VII.4 : Embranchement à l'aide de surfaces de formes libres (d'après [BECH 89])

### 3.2. Une nouvelle modélisation des embranchements

Nous diviserons cette section en deux sous-sections fondamentales. La première traitera des embranchements conservant la correspondance paramétrique des sections. La deuxième concernera des embranchements ne tenant pas compte de ces correspondances. La création de l'embranchement suivra le chemin suivant :

- Etape 1 : détection des sections limites sur les trajectoires pour pouvoir permettre la réalisation d'un embranchement ;

- Etape 2 : décomposition des sections limites en demi-sections ;

- Etape 3 : création des surfaces raccordant les demi-sections entre elles ;

- Etape 4 : création des surfaces complétant l'embranchement partiel créé par les surfaces précédentes.

Ces quatre étapes sont toutes d'une grande importance. Si les deux dernières relèvent en partie de la théorie des raccords de surfaces (que nous traiterons dans la partie 2), les deux autres sont entièrement liées à la notion d'extrusion et nous intéresseront donc tout particulièrement.

### 3.2.1. Embranchement conservant la correspondance paramétrique

#### 3.2.1.1. Positions limites des sections

Une des principales difficultés à résoudre avant d'effectuer l'embranchement est d'arrêter ou de commencer à temps la construction classique des CG pour rendre possible l'application des techniques de raccord.

Nous nous placerons dans le cadre simplificateur où il n'y a qu'une ramification de la trajectoire. La trajectoire initiale est notée $T_1$ et la seconde trajectoire $T^2 = (T_2, 1, t_1)$. Le CG sera construit classiquement le long de $T_1$ jusqu'au point $T_1(t_1)$. C'est à ce point, qu'intuitivement, l'embranchement doit prendre forme. La section positionnée au point $T_1(t_1)$ sera la première section limite que nous recherchions. Cette section sera notée $S_0$.

Le choix du positionnement des deux autres sections limites à partir desquelles les CG reprendront leur construction classique est plus compliqué. Notons $S_g$ la section limite située sur $T_1$ et $S_d$ la section limite située sur $T_2$ (figure VII.5). Trois solutions naturelles s'offrent à nous pour le choix de $S_g$ et $S_d$ :

• Nous pouvons laisser à l'utilisateur le choix des positions limites des sections $S_g$ et $S_d$, en nous contentant de vérifier que ce choix est cohérent. Les contraintes minimales qui ont été choisies sont :

- un contrôle des paramètres (par exemple, si la section $S_g$ est positionnée au point $T_1(t_2)$, il est nécessaire que $t_2 > t_1$).

- un contrôle de non intersection des positions limites des sections. Cela revient à vérifier que :

$$S_g \cap S_d = S_g \cap S_0 = S_d \cap S_0 = \varnothing$$

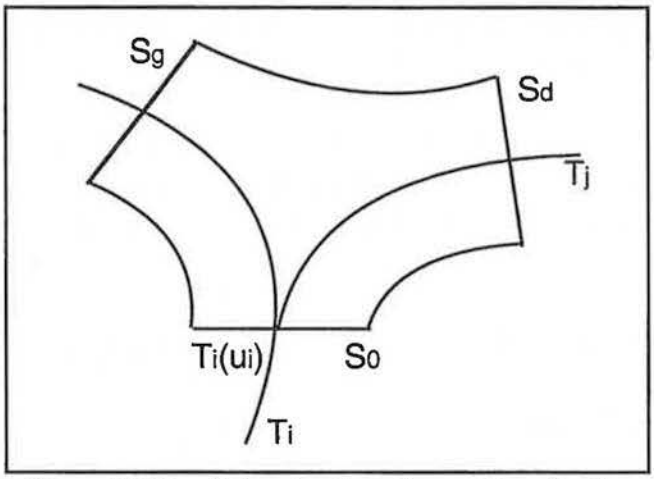



Figure VII.5 : *détermination des sections limites*

L'intérêt de ce contrôle est évident et on peut utiliser les algorithmes que nous avons développés dans le chapitre IV sur la validité des CG.

- un contrôle que nous appellerons contrôle de tangence. Il consiste à tester que la courbe spline déterminée par les deux points de $S_g$ et $S_d$ les plus proches et leurs tangentes respectives définies par les surfaces décrivant les CG est non auto-intersectante. Ce test est justifié par le fait qu'il y a de fortes chances que cette courbe appartienne à l'embranchement et qu'un embranchement présentant des parties réentrantes n'est pas acceptable. Ce test est à comparer avec la courbe « toit » de la méthode de Bloomenthal décrite précédemment. Il n'est pas nécessaire de procéder à un tel test avec la section $S_0$. En effet, $S_0$ et $S_g$, par exemple, appartiennent au CG de trajectoire $T_1$ et il est donc possible de trouver des splines non auto-intersectantes pour passer de $S_0$ à $S_g$.

• Une deuxième solution plus systématique (mais donc forcément moins conforme à ce que souhaite l'utilisateur) est de fixer arbitrairement un paramètre $u_g$ de $T_1$ et un paramètre $u_d$ de $T_2$ correspondant aux sections $S_g$ et $S_d$. On peut par exemple, choisir simplement $u_g = (1-t_1)/2$ et $u_d = 1/2$. Bien entendu, de tels choix peuvent entraîner des résultats non conformes à ce à quoi on s'attend généralement (bras plus étendu qu'un autre, espace volumique ou surfacique trop important par rapport au reste du CG, ...).

Nous proposons un test empirique (mais peut-il en être autrement ?) qui sera utilisé par défaut. Notons $D_0$, $D_g$ et $D_d$ les diamètres des cercles circonscrits aux sections $S_0$, $S_g$ et $S_d$ respectivement. Nous choisissons alors $u_g$ et $u_d$ tels que :

$$B.Min(D_0, D_g) > distance(S_0, S_g / u_g) > A.\ Min(D_0, D_g)$$

$$B.Min(D_0, D_d) > distance(S_0, S_d / u_d) > A.\ Min(D_0, D_d)$$

$$B.Min(D_g, D_d) > distance(S_g / u_g, S_d / u_d) > A.\ Min(D_g, D_d)$$

où *distance* représente une fonction d'éloignement en un certain sens (à titre indicatif nous pouvons prendre la distance euclidienne) et où $A$ et $B$ sont deux scalaires réels.

$$distance(S_0, S_1) = \underset{s_0, s_1 \in [0,1]^2}{Min}\ distance(S_0(s_0), S_1(s_1))$$

On peut interpréter ces formules : si on choisit $A$=1, alors les deux sections les plus proches seront distantes d'au moins le rayon du cercle circonscrit de la plus petite des sections (au sens de l'inclusion des cercles circonscrits). Bien sûr, les tests de la première solution restent valables ici. Remarquons que le test de contrôle de tangence peut être modifié. Ce test revient à assurer la $C^1$ continuité de la courbe spline reliant les points les plus proches des sections $S_g$ et $S_d$. On peut modifier les modules des tangentes des points en question jusqu'à ce que la courbe présente un aspect non auto-intersectant. Cependant les résultats visuels risquent de devenir non homogènes (on remarque facilement les différences de continuité lorsque le module des tangentes est trop faible).

#### 3.2.1.2. Détermination des demi-sections

C'est à cette étape que le fait de conserver les correspondances paramétriques prend toute son importance. En effet, une fois que les points délimitant les demi-sections sont déterminés sur une des sections limites, on les mettra en correspondance paramétique avec les deux autres sections limites.

Nous avons choisi, par un souci de symétrie évident, de décomposer $S_0$. Pour cela, nous avons exploité l'information fournie par les tangentes aux trajectoires au point $T_1(t_1) = T_2(0)$ de ramification (figure VII.6). Si les tangentes $\mathbf{TG}_1(t_1)$ et $\mathbf{TG}_2(0)$ ne sont pas colinéaires, nous noterons $P$ le plan défini par ces deux vecteurs. Dans le cas contraire (cas le plus fréquent), le plan $P$ sera défini comme le plan contenant les vecteurs tangents $\mathbf{TG}_1(t_1 + \varepsilon)$ et $\mathbf{TG}_2(\varepsilon)$.

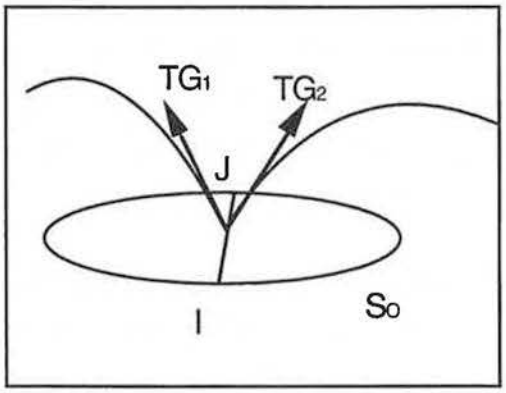



Figure VII.6: *Détermination des deux demi-sections*

Les deux demi-sections de $S_0$ seront définies par deux points notés I et J. Ces deux points seront déterminés par l'algorithme suivant :

Calcul de $P$
Calcul des deux points d'intersection (la section est supposée fermée) du plan perpendiculaire à $P$ passant par $T_1(t_1)$ et de la section positionnée en $T_1(t_1)$.

Le point d'intersection I vérifie $\det(\mathbf{TG}_1(t_1+\varepsilon), \mathbf{TG}_2(\varepsilon), \mathbf{IT}_1(t_1)) > 0$
Le point d'intersection J vérifie $\det(\mathbf{TG}_1(t_1+\varepsilon), \mathbf{TG}_2(\varepsilon), \mathbf{JT}_1(t_1)) > 0$

Remarquons qu'en toute généralité I et J ne sont pas forcément en vis à vis paramétrique. Cela se produit notamment lorsque le centre de la section n'est pas le point origine. Dans la pratique, si la section est centrée et si les points définissant la section sont répartis uniformément, on peut considérer que $T_1(t_1)$ est approximativement le milieu du segment [IJ].

#### 3.2.1.3. Raccord des demi-sections entre elles

Conformément à ce que nous avions annoncé, nous sommes maintenant en mesure de commencer le calcul de l'embranchement. Nous commençons par raccorder les demi-sections deux à deux. Nous proposons une méthode à trois niveaux qui correspondent approximativement à la complexité des raccords à effectuer. Nous commençons par une situation qu'il est intéressant de distinguer des autres, car c'est la plus fréquente.

• *La trajectoire est plane, et la section ne subit pas de transformation du type orientation dans la zone de raccord*

C'est le cas le plus simple. Les surfaces rectangulaires reliant les demi-sections de $S_0$ à $S_g$ et $S_d$ peuvent être construites par des techniques simples de raccord comme la construction d'une surface B-spline avec contrôle des tangentes à deux frontières extrémales opposées. Une autre méthode simple consiste à poursuivre la construction classique des CG pour les demi-sections de $S_0$ à $S_g$ et de $S_0$ à $S_d$. Ceci est possible grâce au fait que les demi-sections sont en correspondance paramétrique ; il n'y a donc pas d'ambiguïté dans la construction du CG.

La construction de la surface reliant la demi-section intérieure de $S_g$ à la demi-section intérieure de $S_d$ est plus compliquée dans la mesure où l'on ne dispose pas de trajectoire autorisant le passage de $S_g$ à $S_d$. A ce stade, on dispose là encore de trois solutions.

- On peut utiliser la construction d'une surface B-spline comme précédemment ;

- On peut choisir comme surface B-spline la surface définie de la manière suivante :

supposons que le CG construit le long de $T_1$ à partir du paramètre $t_g$ soit défini par la matrice :

$\begin{bmatrix} & \mathbf{SGH} & \\ \mathbf{SGG} & \mathbf{SGM} & \mathbf{SGD} \end{bmatrix}$ où **SGM**, de dimension $d \times n$, décrit la demi-section intérieure de $S_g$. Supposons, de la même manière, que le CG construit le long de $T_2$ à partir de $t_d$ soit défini par :

$\begin{bmatrix} & \mathbf{SDH} & \\ \mathbf{SDG} & \mathbf{SDM} & \mathbf{SDD} \end{bmatrix}$ où [**SDG SDD**], de dimension d×n, décrit la demi-section intérieure de $S_d$.

Alors, la surface B-spline cherchée a pour matrice :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{SGM} & \\ \mathbf{SDG} & \mathbf{SDD} \end{bmatrix}$$

La continuité du raccord (si d>2) est alors du type $G^2$ sans aucun ajustement supplémentaire.

- On peut enfin construire artificiellement une trajectoire de $T_1(t_g)$ à $T_2(t_d)$ et construire un CG de section initiale la demi-section intérieure de $S_g$ et de section finale la demi-section intérieure de $S_d$. Si la section n'est pas symétrique, une déformation interviendra lors de la création de ce CG artificiel.

Chaque méthode a ses avantages. Par exemple, si on choisit de visualiser le CG final par un algorithme de tracé de rayon, la construction par CG est plus intéressante puisque l'on pourra utiliser les résultats du chapitre V. Si on attache de l'importance à l'interactivité, la construction par matrice sera la plus rapide. Enfin, la construction classique reste la plus précise et sera utilisée par défaut.

• *La trajectoire est plane et la section subit des déformations en orientation durant le raccord*

• Nous nous restreindrons au cas où il n'y a une déformation en orientation que le long d'une des trajectoires $T_1$ ou $T_2$. Les autres cas donnant des situations atypiques, on ne peut plus conserver la correspondance paramétrique.

Nous nous sommes contraints à garder l'esprit CG. Donc, nous choisirons de poursuivre la construction des CG pour modéliser les surfaces de raccord entre $S_0$ et $S_g$ puis $S_0$ et $S_d$. Comme précédemment, une trajectoire artificielle sera créée de $T_1(t_g)$ à $T_2(t_d)$. Nous créerons alors le CG entre les deux demi-sections intérieures en introduisant une éventuelle déformation si nécessaire et une orientation inverse à celle que subit la section le long d'une des trajectoires. Nous donnons un exemple de résultat ci-dessous. Notons que, dans cette situation, les autres possibilités exposées auparavant sont difficilement applicables.

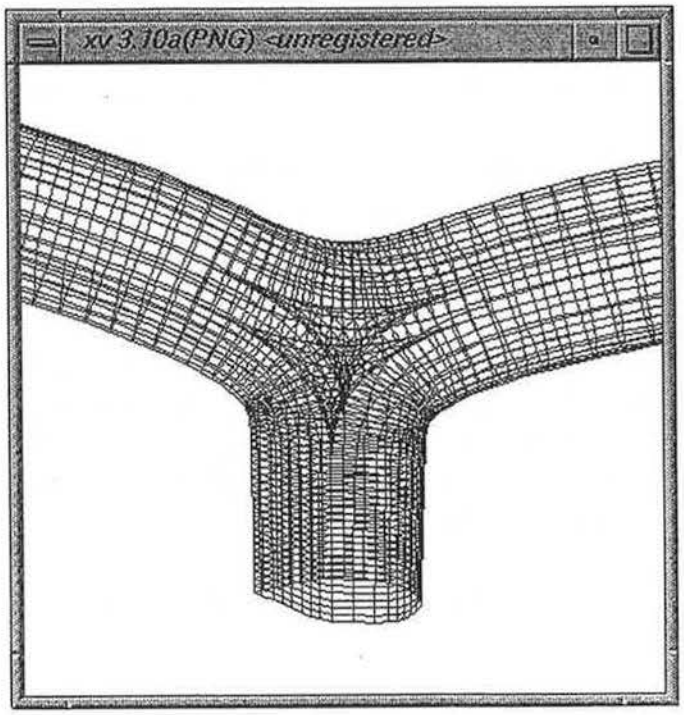
• *La trajectoire est quelconque*

L'embranchement devient peu intuitif, et il est difficile de représenter un raccord conservant la correspondance paramétrique. Des solutions à ce problème seront données dans la section 3.2.2..

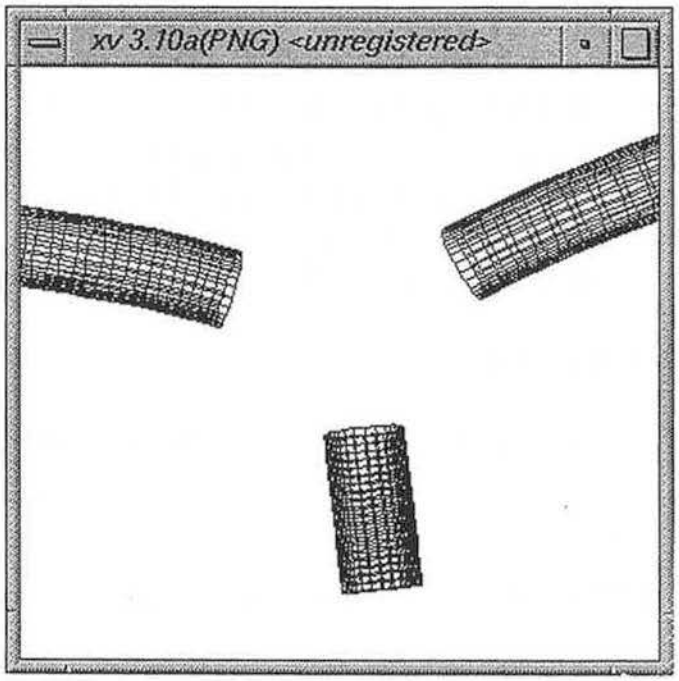
#### 3.2.1.4. Achèvement de l'embranchement

Une fois le raccord partiel (composé de trois surfaces rectangulaires) calculé, il nous reste à le compléter en « bouchant les trous ». Les surfaces manquantes sont deux surfaces triangulaires (trois points de singularité) situées approximativement l'une en face de l'autre.

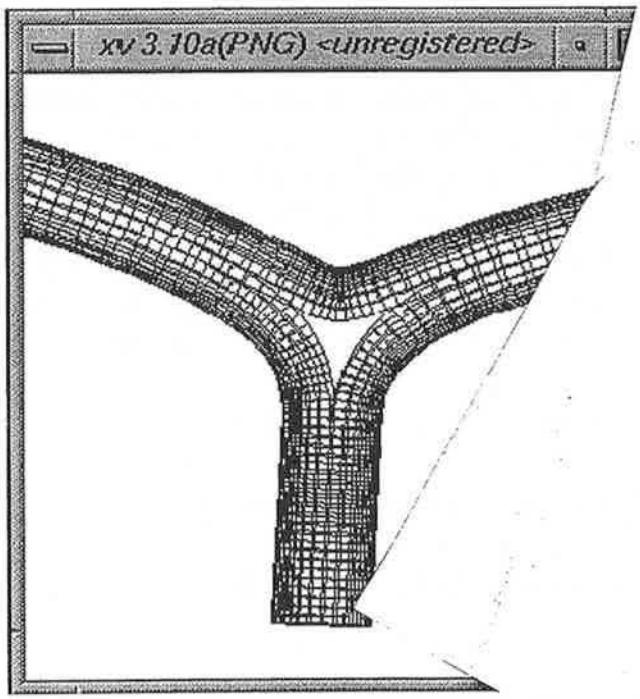
Ces surfaces sont calculées afin d'assurer la $G^1$ continuité de la totalité du CG et de l'embranchement. Nous décrivons le type de surface que nous pourrons utiliser dans la deuxième partie du mémoire. Il n'existe pas, hélas, de surface triangulaire B-spline, ce qui nous forcera à développer des techniques sur les surfaces triangulaires de Bézier, ou de Bézier-Gregory.



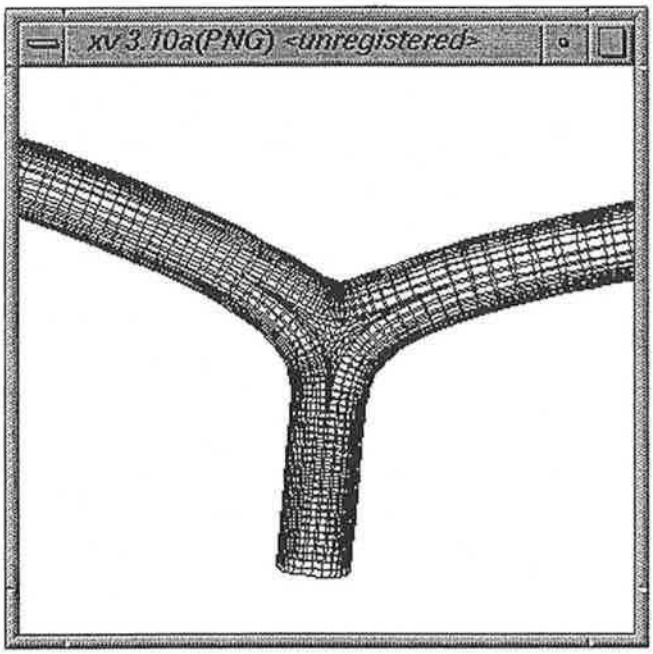

Réalisation d'un embranchement : des déformations interviennent pendant le raccord




Réalisation d'un embranchement : positionnement des tubes




Réalisation d'un embranchement : création des surfaces rectangulaires




Réalisation d'un embranchement : calcul des surfaces triangulaires

### 3.2.2. Embranchement ne conservant pas la correspondance paramétrique

Nous avons vu que, s'il est naturel de modéliser l'embranchement en conservant les correspondances paramétriques entre les demi-sections, ce n'est pas toujours possible. Nous proposons donc un moyen de réaliser un embranchement quelles que soient les positions des sections limites. Pour cela, nous reprendrons des résultats développés par Ebel, Guiard et Sequeira dans [GUIA 95]. Leur approche est un peu différente, dans la mesure où ils ne considèrent pas de trajectoire, les embranchements n'étant effectués qu'à partir des sections limites. Les résultats seront, à cause de la nature différente de l'embranchement, moins conformes à ce que peut attendre un utilisateur exclusif de CG quoique souvent plus naturel.

Les étapes permettant de créer l'embranchement diffèrent légèrement.

Etape 1 : Détermination des demi-sections ;

Etape 2 : Création d'un réseau de courbes représentant l'armature de l'embranchement ;

Etape 3 : Création des surfaces rectangulaires s'appuyant sur l'armature de courbes entre les demi-sections ;

Etape 4 : Calcul des surfaces triangulaires permettant d'achever l'embranchement.

Nous décrirons brièvement chacune de ces étapes, certaines pouvant être assimilées à ce qui a été fait dans la section précédente, et nous essaierons d'insérer la notion de trajectoire à chaque étape.

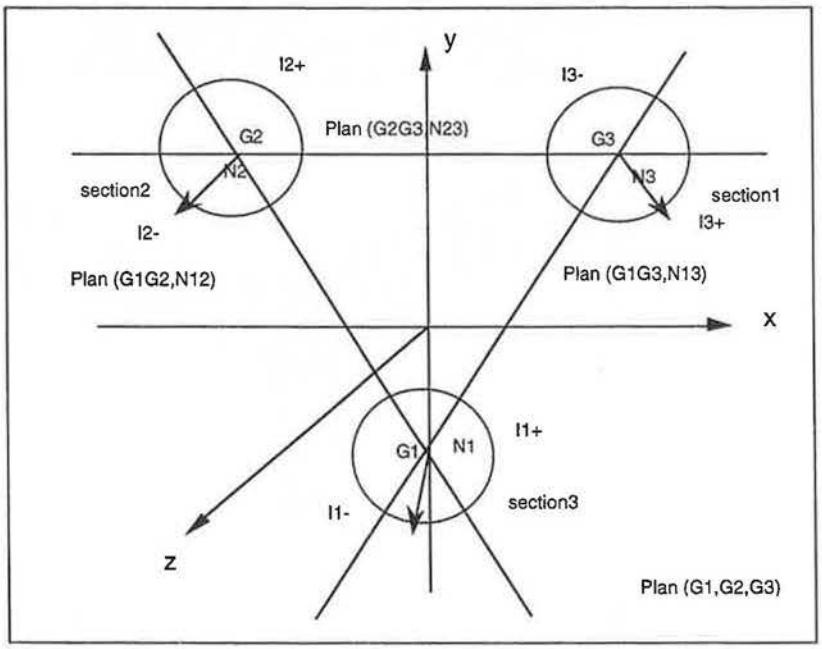



Figure VII.7 : positions des sections limites

#### 3.2.2.1. Détermination des demi-sections

Les six points délimitant les demi-sections sont choisis deux à deux. On calcule dans un premier temps les points d'intersection entre deux des sections limites et le plan défini par le couple de points $(T_1(t_1), T_1(u_g))$ (respectivement $(T_1(t_1), T_2(u_d))$ et $(T_1(u_g), T_2(u_d))$) si on considère les sections $S_0$ et $S_g$ (respectivement $S_0$, $S_d$ et $S_g$, $S_d$) et le plan moyen $\mathbf{TG}_{1g}$ des vecteurs $TG_1(t_1)$ et $TG_1(t_g)$ (respectivement $TG_1(t_1)$, $TG_2(t_d)$ et $TG_1(t_g)$, $TG_2(t_d)$). En considérant les sections deux à deux, on obtient ainsi quatre points d'intersection pour chaque section. On attribue ensuite un signe à chacun de ces points. Ce signe est celui de la quantité (si on considère $S_0$ et $S_g$):

$$\det(T_1(t_1)I, \mathbf{TG}_{12}, \mathbf{N}_{12})$$

dans laquelle $I$ est un point d'intersection et $\mathbf{N}_{1g}$ le vecteur perpendiculaire à $\mathbf{TG}_{1g}$ dirigé vers le demi-espace contenant $S_d$. Sur chaque section, on moyenne les paramètres des deux points de même signe, on obtient ainsi 6 points dits points d'ancrage. Les points déterminant les demi-sections vont être déduits de ces points caractéristiques par des relations de proportion que nous allons détailler.

Nous noterons les points d'ancrage de $S_0$ : $I_0^+$ et $I_0^-$, le signe étant celui défini par la formule précédente. De même, les points d'ancrage associés à $S_g$ et $S_d$ seront notés : $I_g^+$ et $I_g^-$, $I_d^+$ et $I_d^-$.

Les points délimitant les demi-sections seront notés de la même manière : $S_0^+, S_0^-, S_g^+, S_g^-, S_d^+$ et $S_d^-$. Les relations de proportion sont choisies afin de tenir compte des caractéristiques des trois CG partiels en présence (voir figure VII.7):

$$\frac{S_0^+ I_0^+}{S_0^+ I_0^-} = \frac{S_0^+ I_0^+}{S_0^- I_0^-} = \frac{I_g^+ I_g^+}{I_d^+ I_d^-}$$

#### 3.2.2.2. Construction de l'armature

Le réseau de courbes représentant l'armature est construit en mettant les points de même abscisse curviligne unitaire pour chaque demi-section en correspondance par un arc spline. Les tangentes (ou du moins leur norme puisque les directions sont imposées par les parties des CG n'appartenant pas à l'embranchement) aux extrémités de ces arcs sont calculées, par exemple suivant le critère des arcs 2D de Coons [COON 87] qui vise à approximer au mieux un arc de cercle passant par chacun des points extrêmes.

Notons qu'il est dangereux de vouloir assurer la $C^1$ ou $C^2$ continuité puisque contrairement à la situation où les demi-sections sont mises en correspondance paramétrique, nous ne sommes pas sûrs de pouvoir construire un CG passant d'une demi section à une autre.

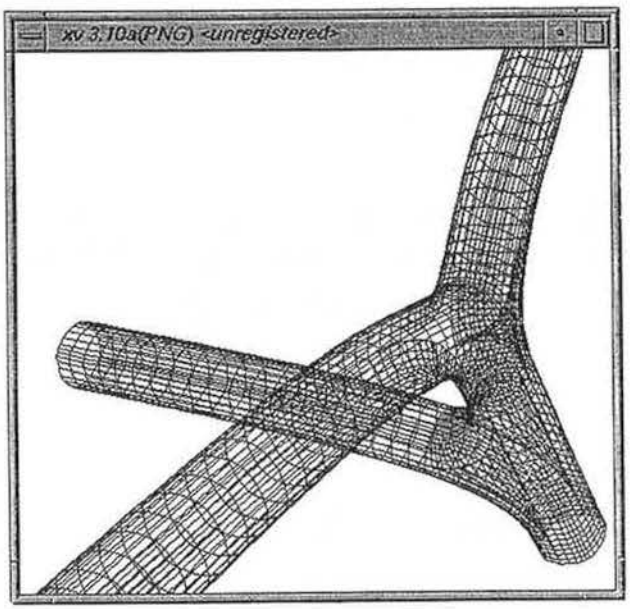
Cette armature représente un support sur lequel les surfaces décrivant l'embranchement vont s'appuyer.

#### 3.2.2.3. Habillage du réseau de courbes

La définition des carreaux recouvrant l'armature commence classiquement par la modélisation de régions rectangulaires. Là encore, des techniques de raccord classiques sont mises en œuvre. Notons que les auteurs ont choisi d'utiliser des carreaux de Bézier-Gregory et de représenter chaque courbe du réseau par une courbe élémentaire (par exemple une seule cubique). Ceci a l'avantage de simplifier le calcul des surfaces triangulaires, mais a l'inconvénient, dans notre cadre, de ne pas pouvoir autoriser des déformations très locales à ce niveau.

#### 3.2.2.4. Achèvement de l'embranchement

Comme auparavant, les surfaces manquantes sont deux surfaces triangulaires approximativement l'une en face de l'autre. Là encore, les calculs relèvent de techniques indépendantes des CG que nous ne développerons pas ici.




CG à trajectoire arborescente (vue partielle)

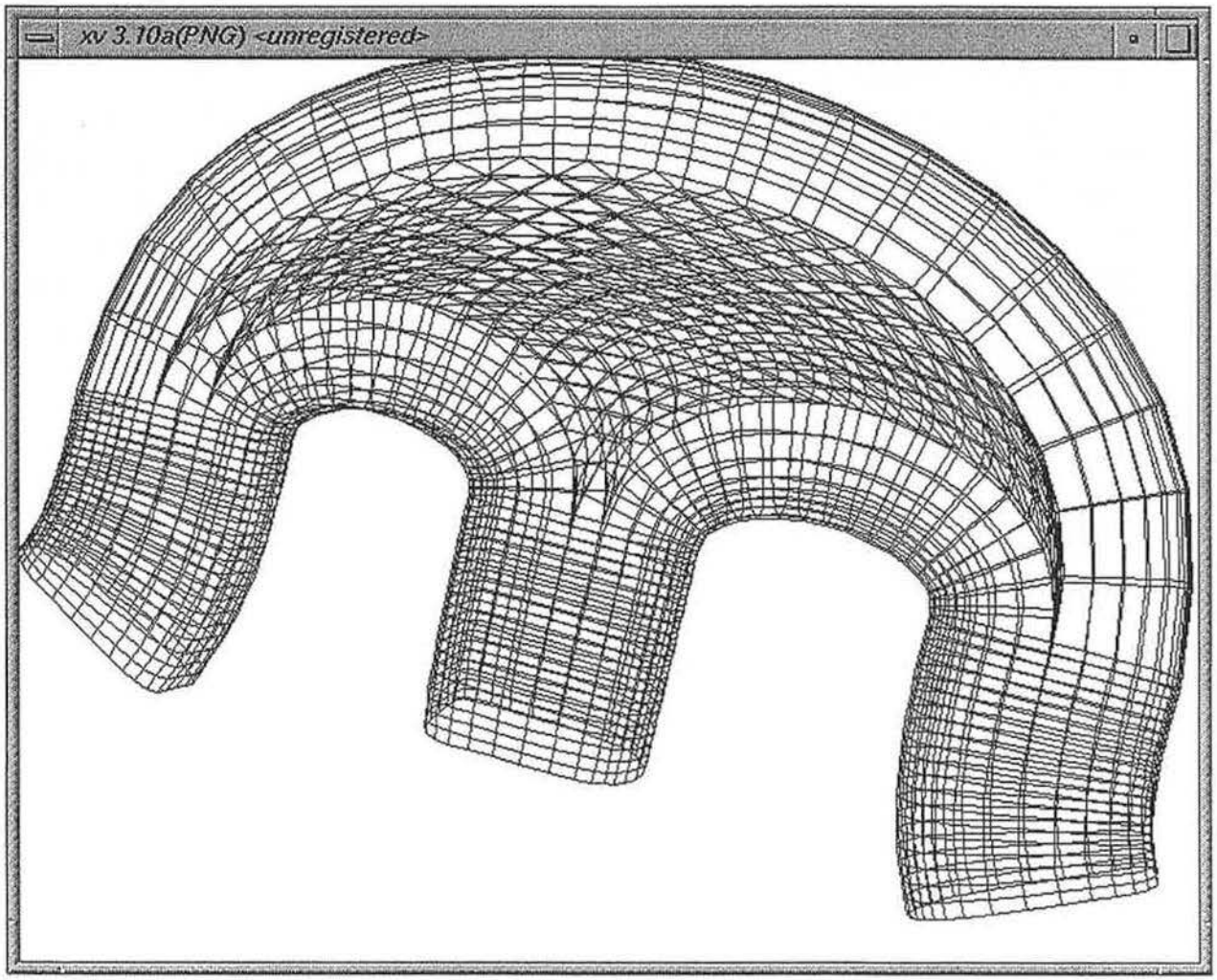
### 3.3. Conclusions

Nous avons étudié la mise en œuvre la plus automatique possible d'embranchements $G^1$ continus le long de trajectoires arborescentes. Nous avons vu qu'il n'est pas possible de conserver dans tous les cas, la correspondance paramétrique des sections. Dans la pratique, ces situations sont assez rares et les méthodes, plus complexes, nécessaires dans ces conditions ne seront employées qu'en dernier ressort.

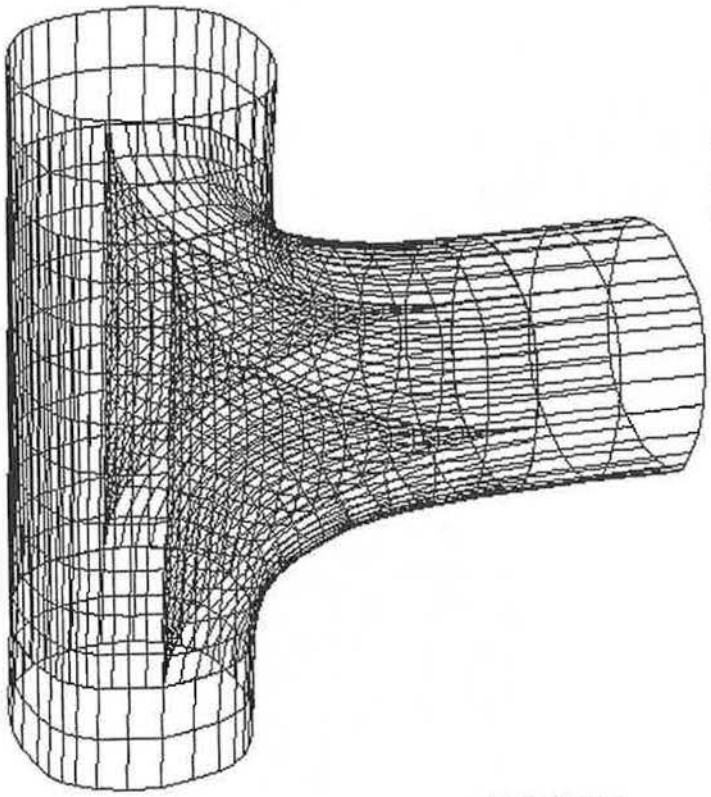
Dans toutes les situations étudiées, l'utilisation de la théorie des raccords de surfaces semble inévitable et si la $G^1$ continuité est assurée, il est possible d'obtenir la $G^2$ continuité en choisissant judicieusement les surfaces de raccord.

Bien sûr, ce travail pourrait se poursuivre en élargissant la notion de trajectoire arborescente et en autorisant la ramification à posséder trois branches. La différence se faisant sur le nombre de points définissant les portions de section (trois tiers de section), le nombre de surfaces rectangulaires (six) et le nombre de surfaces triangulaires (quatre). Cependant, la gestion des règles de balayage deviendrait plus délicate.

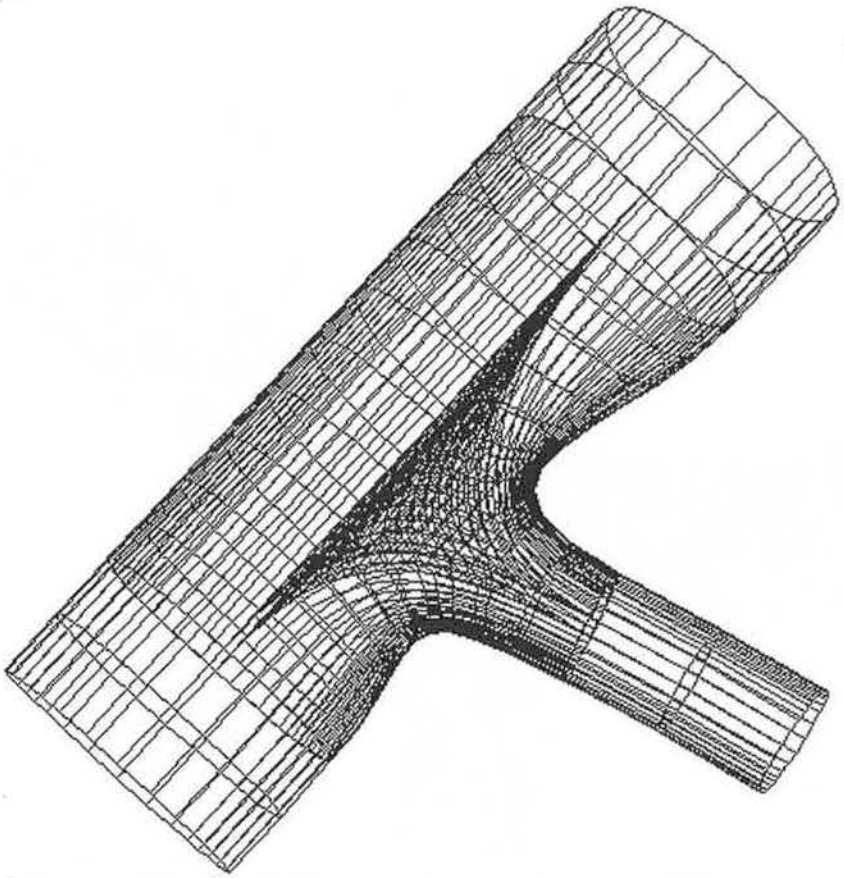
Remarquons aussi, qu'il est difficile d'établir des règles de validité exactes et on rencontre dans la pratique des situations (heureusement rares) où aucune des méthodes présentées n'est applicables. Enfin, on peut s'interroger sur la forme de l'embranchement dans la mesure où notre vision reste très directive dans sa construction (on passe toujours par les quatre mêmes étapes). L'utilisateur peut néanmoins intervenir localement même si la structure reste la même.



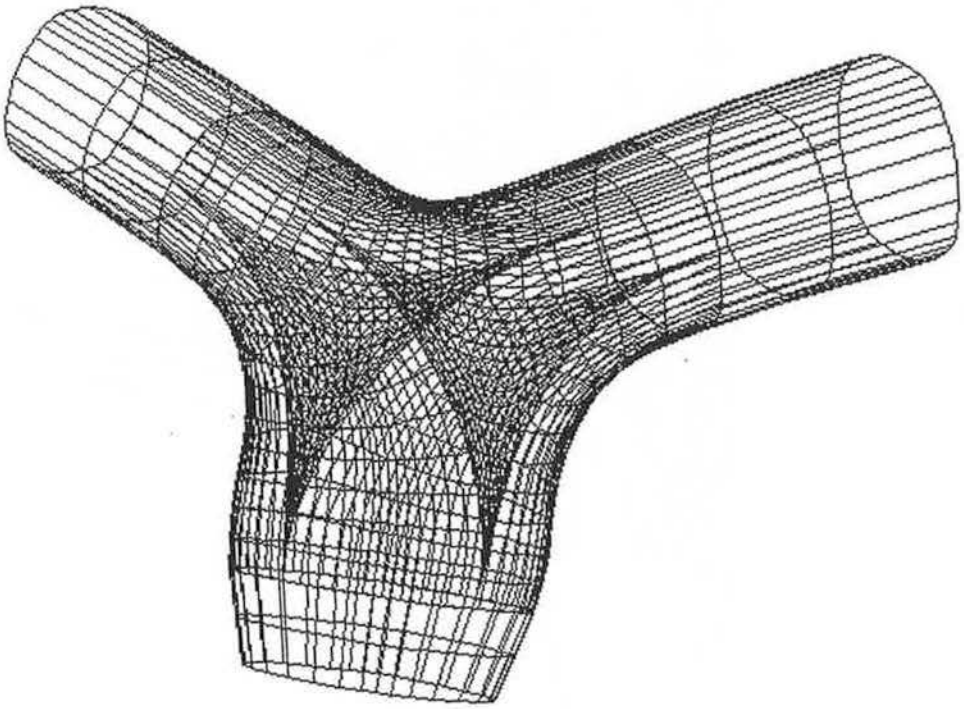

CG ramifié



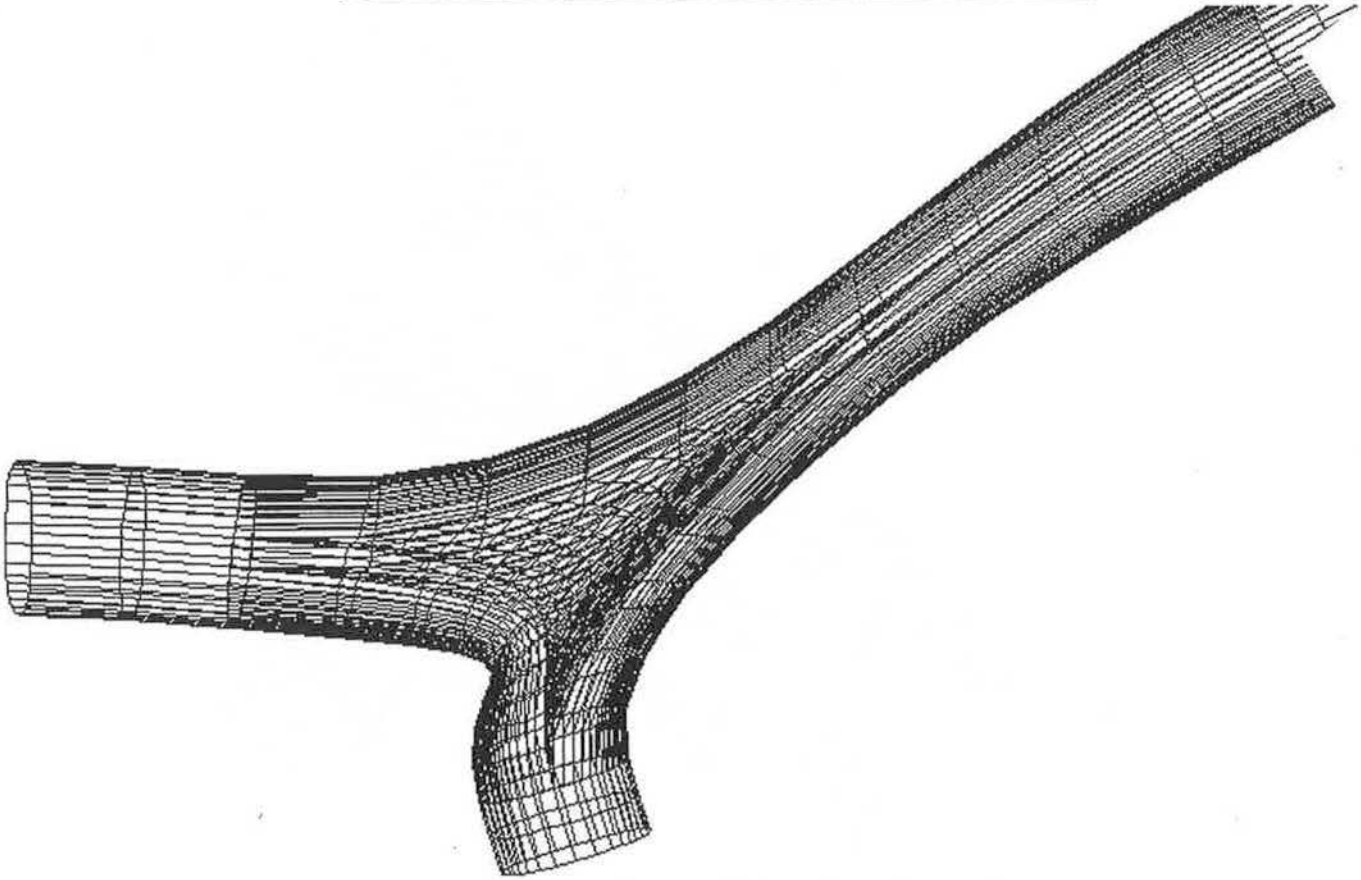
CG ramifié : raccord de deux tubes



CG ramifié : raccord de deux tubes de diamètres différent



CG ramifié: variation du profil du tronc pendant le raccord



CG ramifié : déformation d'un profil d'une branche pendant le raccord

# PARTIE 2

# RACCORDS $G^1$ CONTINUS

# Chapitre VIII : DISCUSSION SUR LES C ET G CONTINUITES

Dans ce chapitre, nous essaierons de donner un cadre plus adapté à nos problèmes en ce qui concerne la continuité. Dans la première partie, nous avons systématiquement précisé les caractères de continuité que devaient présenter les courbes ou les surfaces. Nous essayons de nous affranchir de cette difficulté en définissant rigoureusement les notions de continuité que nous utiliserons. Cette précision nous a semblé indispensable suite aux ennuis que nous avons connus pour développer des algorithmes simples concernant la continuité. Nous avons donc soulevé les difficultés, en y apportant nos réponses, de ce que la littérature classique présente comme évident.

## 1. Définitions.

### 1.1. Continuité d'une courbe

#### 1.1.1. $C^K$ continuité

La définition mathématique générale de la $C^K$ continuité est la suivante :

Une fonction $f(u)$ de $\Re$ dans $\Re$ est $C^K$ continue sur son domaine de définition si elle est continûment dérivable à l'ordre K.

La définition locale est plus géométriquement parlante :

Une fonction $f(u)$ est $C^K$ continue si en tout point $u_0$ appartenant au domaine de définition ouvert :

$$\lim_{\substack{u \to u_0 \\ u<u_0}} \frac{d^k f}{du^k}(u) = \lim_{\substack{u \to u_0 \\ u>u_0}} \frac{d^k f}{du^k}(u) \text{ pour tout } k<K+1$$

Remarquons que les définitions restent valables si $f(u) \in \Re^n$. On peut facilement interpréter la $C^K$ continuité pour K=1 : le vecteur dérivé calculé par la gauche ou par la droite a même direction et même norme. Ce qui est vrai pour les vecteurs dérivés ne l'est cependant pas pour les tangentes qui sont définies quand cela est possible par :

$$\mathbf{TG}^f(u_0) = \lim_{u \to u_0} \frac{\frac{df}{du}(u)}{\left|\frac{df}{du}(u)\right|},$$

où $\mathbf{TG}^f(u_0)$ symbolise la tangente de $f$ au point $u_0$

Remarque : nous admettrons l'abus de notation qui consiste à écrire :

$$\frac{df}{du}(u_0) = \frac{df}{du}(u)\bigg|_{u=u_0}$$

Interpréter la continuité d'ordre deux reste simple : les vecteurs dérivés d'ordre un et deux calculés par la gauche ou par la droite ont de même direction et de même norme. Comme pour la $C^1$ continuité, ce qui est vrai pour les vecteurs dérivés ne l'est pas forcément pour les normales.

### 1.1.2. $G^K$ continuité

La continuité géométrique d'ordre K est présentée comme imposant des contraintes a priori moins fortes que la $C^K$ continuité. Nous verrons qu'en fait les contraintes ne sont pas moins fortes mais différentes. On parle aussi de continuité visuelle pour la $G^K$ continuité (surtout si K=1 ou K=2) car on ne peut voir (à l'œil) la différence entre une courbe $C^K$ et $G^K$ continue et une courbe seulement $G^K$.

Une courbe $g(u)$ de $\Re$ dans $\Re^n$ est $G^1$ continue si le vecteur limite tangent unitaire $\mathbf{TG}^g(u)$ est continu.

Une courbe $f(u)$ est $G^K$ continue si :

- $g(u) = \frac{d^k f}{du^k}(u)$ est $G^1$ continue quel que soit k<K

La littérature donne souvent une interprétation de la $G^1$ continuité comme définition de la $G^1$ continuité. L'interprétation peut être formulée de la manière suivante :

Si $g(u)$ est $G^1$ continue, alors, pour tout $u_0$ on a (si on note respectivement la demi-tangente à gauche et la demi-tangente à droite de $g$ en $u_0$ $\mathbf{TG}_g^g(u_0)$ et $\mathbf{TG}_d^g(u_0)$) :

$$\mathbf{TG}_g^g(u_0) = \mathbf{TG}_d^g(u_0)$$

Et donc, sous certaines conditions (sous lesquelles les limites peuvent être enlevées) :

$$\frac{\frac{df}{du_g}(u)}{\left|\frac{df}{du_g}(u)\right|} = \frac{\frac{df}{du_d}(u)}{\left|\frac{df}{du_d}(u)\right|}$$

Ce qui revient à dire que les vecteurs dérivés à gauche et à droite sont colinéaires :

$$\frac{df}{du_g}(u) = \lambda \frac{df}{du_d}(u)$$

On obtient une expression plus parlante si on considère une courbe $f$ constituée de deux courbes paramétrées $l_1(t)$ et $l_2(s)$ $C^1$ et $G^1$ continues telles que $l_1(1) = l_2(0)$. Alors, si $f$ est $G^1$ continue :

$$\left.\frac{dl_1(t)}{dt}\right|_{t=1} = \lambda \left.\frac{dl_2(s)}{ds}\right|_{s=0}$$

$\lambda$ étant une constante non nulle et positive si $f$ ne présente pas de point de rebroussement au point $l_1(1)$ (figure VIII.1).

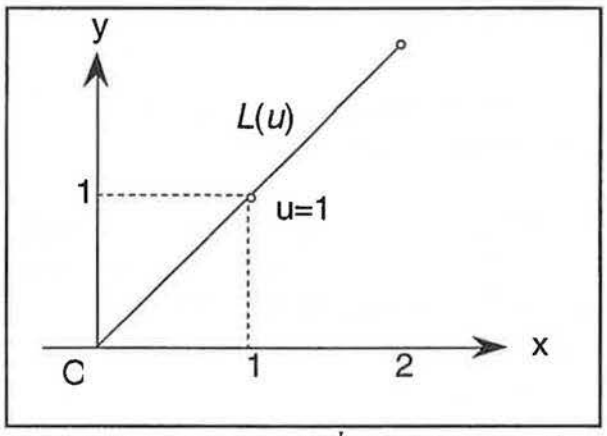



Figure VIII.1 : *raccord $G^1$ entre deux courbes*

### 1.2. Continuité des surfaces

#### 1.2.1. $C^K$ continuité

Les surfaces seront naturellement définies comme des fonctions à deux variables. Afin d'éviter de distinguer les vecteurs dérivés à gauche et à droite (ce qui n'a plus vraiment de sens pour les surfaces), nous étudierons la continuité sur une surface composée de deux surfaces $C^0$ que nous noterons $S(s,t)$ et $T(u,v)$. $S$ et $T$ ont toutes les deux comme domaine le carré unitaire $[0,1]\times[0,1]$ et ont comme frontière commune $L(w)$ telle que :

Graphe $(L(w))$=Graphe$(S(1,t))$=Graphe$(T(0,v))$

Afin de simplifier les notations et de se séparer de la notion de Graphe difficile à manipuler, nous supposerons qu'il existe un reparamétrage de $S$ et $T$ tel que si $P=S(1,w)$ et $Q=T(u,w)$ alors pour tout $w$, $P=Q$. Ce qui revient à dire que :

$$L(w) = S(1,w) = T(0,w) \quad \forall w \in [0,1]$$

Nous considérerons que $S$ et $T$ sont raccordées $C^K$ si :

$$\left.\frac{\partial^k S(s,t)}{\partial s}\right|_{\substack{s=1\\t=w}} = \left.\frac{\partial^k T(u,v)}{\partial u}\right|_{\substack{u=0\\v=w}} \text{ pour tout } k<K+1$$

De la même manière que pour les courbes, l'égalité des vecteurs dérivés dans une direction donnée ne signifie pas l'égalité des tangentes qui sont naturellement définies par :

$$TG_{S(1,.)}(w_0) = \lim_{w \to w_0} \frac{\left.\frac{\partial\ S(s,t)}{\partial s}\right|_{\substack{s=1\\t=w}}}{\left|\left.\frac{\partial\ S(s,t)}{\partial s}\right|_{\substack{s=1\\t=w}}\right|}$$

### 1.2.2. $G^K$ continuité

Nous reprendrons les notations de la section précédente. Nous définissons la $G^1$ continuité de la manière suivante :

Deux surfaces $S$ et $T$ sont raccordées $G^1$ continûment sur leur frontière $L$ si en tout point $w$ de cette frontière, toutes les tangentes directionnelles de la surface sont coplanaires (remarquons le passage de colinéaire pour les courbes à coplanaire pour les surfaces). Autrement dit, les quantités $\mathbf{TG}_S(s_0,t_0,\theta)$, $\mathbf{TG}_T(u,v,\varphi)$, $\mathbf{TG}_L(w,\pm 1)$ pour tout $\theta$ et $\varphi$ sont coplanaires en considérant que :

$$\mathbf{TG}_S(s_0,t_0,\theta) = \lim_{\substack{s,t \to s_0,t_0\\(s-s_0,t-t_0)\equiv\theta}} \frac{\frac{\partial S(s,t)}{\partial \theta}}{\left|\frac{\partial S(s,t)}{\partial \theta}\right|}$$

De la même manière que pour les courbes, on peut interpréter ce dernier résultat. Si $S$ et $T$ sont raccordées de manière $G^1$, alors $\mathbf{TG}_S(s_0,t_0,\theta)$, $\mathbf{TG}_T(u,v,\varphi)$, $\mathbf{TG}_L(w,\pm 1)$ sont coplanaires et sous certaines conditions (sous lesquelles ont peut enlever les limites) cela revient à dire que :

$$\frac{\partial S(s,t)}{\partial \theta}, \frac{\partial T(u,v)}{\partial \varphi} \text{ et } \frac{\partial L(w)}{\partial w} \text{ sont coplanaires.}$$

Or, quelle que soit la direction $\theta$ choisie, on peut exprimer la dérivée partielle par rapport à $\theta$ comme une combinaison linéaire des dérivées partielles par rapport aux paramètres $s$ et $t$.

$$\frac{\partial S(s,t)}{\partial \theta} = \alpha \frac{\partial S(s,t)}{\partial s} + \beta \frac{\partial S(s,t)}{\partial t}$$

De la même manière, on peut écrire que :

$$\frac{\partial T(u,v)}{\partial \varphi} = \alpha \frac{\partial T(u,v)}{\partial u} + \beta \frac{\partial T(u,v)}{\partial v}$$

Enfin, la dérivée partielle de $L$ s'interprète facilement comme :

$$\frac{\partial L(w,\pm 1)}{\partial w} = \pm \frac{\partial L(w)}{\partial w} = \pm \left.\frac{\partial T(u,v)}{\partial v}\right|_{\substack{u=0\\v=w}}$$

Ce qui revient à écrire, en considérant que certaines dérivées partielles de $S$ et $T$ sont égales sur la frontière, que pour tout $w$ il existe trois scalaires tels que :

$$\alpha(w) \left.\frac{\partial S(s,t)}{\partial s}\right|_{\substack{s=1\\t=w}} + \beta(w) \left.\frac{\partial T(u,v)}{\partial u}\right|_{\substack{u=0\\v=w}} + \gamma(w) \left.\frac{\partial T(u,v)}{\partial v}\right|_{\substack{u=0\\v=w}} = 0$$

Notons que si $\alpha(w) = -\beta(w)$ et que $\gamma(w) = 0$, nous retrouvons les conditions de raccord $C^1$.

La $G^K$ continuité se définit par récurrence de la même façon que pour les courbes. La dernière équation n'est qu'une conséquence (sous les conditions définies plus haut) de la $G^1$ continuité et il nous semble approximatif (quoique intuitivement très valable et très efficace) de l'utiliser comme définition dans un cadre rigoureux.

## 2. Exemples

Dans cette section, nous donnons des exemples classiques de courbes ayant différentes propriétés de continuité. Les résultats sont surprenants, car il mettent en défaut très rapidement les idées naturelles que nous nous faisions des C et G continuités.

### 2.1. Fonction $C^1$ mais non $G^1$

Considérons la courbe paramétrée $L$ (figure VIII.2) définie par morceaux de la manière suivante :

$$L \ : \ \Re \to \Re^2$$
$$L(u) = \begin{cases} [2u-u^2, 2u-u^2] & 0 \le u \le 1 \\ [u^2-2u+2, 2u-u^2] & 1 \le u \le 2 \end{cases}$$

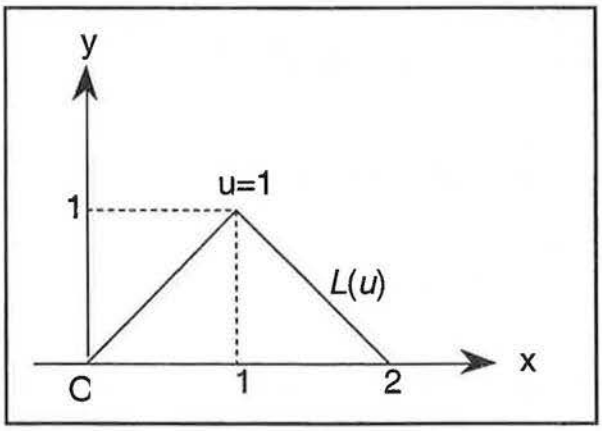



Figure VIII.2 : *Graphe de L*

Il est clair que sur l'intervalle $[0,1[\cup]1,2]$ la $C^1$ continuité des fonctions polynomiales assure la $C^1$ continuité. Le seul problème est au point de paramètre 1. Or :

$$\lim_{\substack{u\to 1\\ u<1}} \frac{\partial L(u)}{\partial u} = [0,0] \text{ et } \lim_{\substack{u\to 1\\ u>1}} \frac{\partial L(u)}{\partial u} = [0,0]$$

Et donc $L$ est clairement $C^1$. La $G^1$ continuité est évidente sur $[0,1[\cup]1,2]$. Nous calculons les tangentes unitaires à gauche et à droite de $u$=1.

A gauche de $u$=1 :

$$TG_L(1) = \lim_{\substack{u\to 1\\ u<1}} \frac{\dfrac{\partial L(u)}{\partial u}}{\left|\dfrac{\partial L(u)}{\partial u}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,1]$$

A droite de $u$=1 :

$$TG_L(1) = \lim_{\substack{u\to 1\\ u>1}} \frac{\dfrac{\partial L(u)}{\partial u}}{\left|\dfrac{\partial L(u)}{\partial u}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,-1]$$

Il est donc clair que $L$ n'est pas $G^1$. Le graphe de $L$ confirme le résultat. Il surprend en revanche par son allure, un point de cassure apparaît clairement ce qui peut surprendre pour une courbe $C^1$.

### 2.2. Courbe $G^1$ mais non $C^1$

Considérons la courbe paramétrée $L$ (figure VIII.3) définie par morceaux de la manière suivante :

$$L \ : \ \Re \rightarrow \Re^2$$
$$L(u) = \begin{cases} [u,u] & 0 \leq u \leq 1 \\ [2u-1, 2u-1] & 1 < u \leq 2 \end{cases}$$

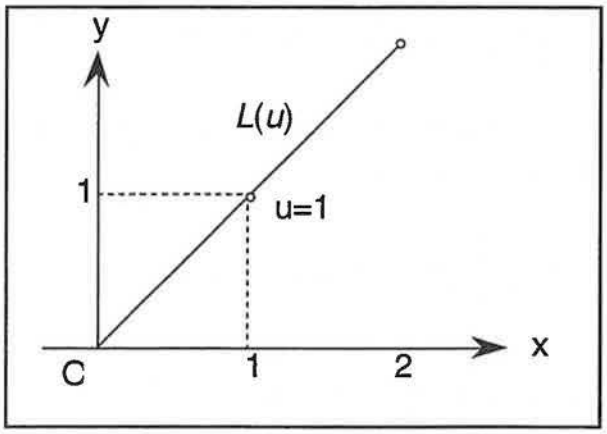



Figure VIII.3 : *Graphe de L*

Vérifions la $C^1$ continuité au point de paramètre u=1 :

$$\lim_{\substack{u \to 1 \\ u<1}} \frac{\partial L(u)}{\partial u} = [1,1] \text{ et } \lim_{\substack{u \to 1 \\ u>1}} \frac{\partial L(u)}{\partial u} = [2,2]$$

Et $L$ n'est donc pas globalement $C^1$. La $G^1$ continuité se vérifie rapidement :

$$TG_L(1) = \lim_{\substack{u \to 1 \\ u>1}} \frac{\dfrac{\partial L(u)}{\partial u}}{\left| \dfrac{\partial L(u)}{\partial u} \right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,1] = TG_L(1) = \lim_{\substack{u \to 1 \\ u<1}} \frac{\dfrac{\partial L(u)}{\partial u}}{\left| \dfrac{\partial L(u)}{\partial u} \right|}$$

Ce résultat n'est quant à lui pas surprenant. En effet, on conçoit facilement, en considérant les définitions, qu'une courbe soit $G^1$ et non $C^1$.

### 2.3. Autres exemples

Nous donnons deux autres exemples (dont nous laisserons la démonstration au lecteur) pour la $C^2$ et $G^2$ continuité. La courbe $L$ est $C^2$ mais pas $G^2$ ni même $G^1$. La courbe $H$ est $G^2$ mais pas $C^2$.

$$L \ : \ \Re \to \Re^2$$

$$L(u) = \begin{cases} [\cos(\frac{\pi}{2}(1-u)^3), \sin(\frac{\pi}{2}(1-u)^3)] & 0 \le u \le 1 \\ [3-2\cos(\frac{\pi}{2}(u-1)^3, -2\sin(\frac{\pi}{2}(u-1)^3)] & 1 \le u \le 2 \end{cases}$$

$$H \ : \ \Re \to \Re^2$$

$$H(u) = \begin{cases} [\sin(\frac{\pi}{2}u^2), \cos(\frac{\pi}{2}u^2)] & 0 \le u \le 1 \\ [\cos(\frac{\pi}{2}(u-1)^2, \sin(\frac{\pi}{2}(u-1)^2)] & 1 \le u \le 2 \end{cases}$$

Nous donnons maintenant un exemple de fonction $G^1$ continue prouvant qu'on ne peut définir par la $G^1$ continuité la condition :

$$\frac{df}{du_g}(u) = \lambda \frac{df}{du_d}(u) \text{ avec } \lambda \text{ non nulle}$$

$$\text{Soit } L(u) = \begin{cases} [(u-1)^2, (u-1)^2] & 0 \le u \le 1 \\ [u^2, u^2] & 1 < u \le 2 \end{cases}.$$

Il est clair que nous avons la dérivée à gauche du point de paramètre $u$=1 égale au vecteur [0,0] et à droite du point de paramètre $u$=1 le vecteur dérivé est égal à [1,1]. Il n'existe évidemment pas de scalaire $\lambda$ non nul permettant de satisfaire la condition précédente. Pourtant, il est clair que $L$ est $G^1$ de tangente [1,1] au point frontière des deux courbes. On pourrait facilement trouver un exemple similaire pour les surfaces.

### 3. Discussion

Comme nous l'avons dit en introduction, plusieurs situations peuvent sembler embarrassantes. La première est que le graphe d'une courbe $C^1$ présente des discontinuités de direction au niveau des tangentes. La deuxième, liée à la première, est que, parfois, le calcul du vecteur dérivé ne fournit pas la direction (sinon la norme) du vecteur tangent à la courbe, ce qui met en cause les algorithmes mal adaptés à ces situations. La troisième situation gênante, qui résume les deux premières, est qu'une courbe $C^1$ ne soit pas $G^1$. Une proposition, souvent avancée, est de considérer qu'une courbe est $C^1$ si, en tout point, les vecteurs tangents à la courbe à gauche et à droite sont égaux. Avec cette définition, les première et troisième situations n'ont plus de raison d'être. En revanche, la deuxième situation reste encore sans réponse.

Nous pensons que ces difficultés proviennent de l'adaptation des définitions valables pour les fonctions classiques (donc de Graphe $[u, f(u)]$) aux fonctions paramétrées. En effet, dans la définition d'une fonction classique, nous sommes sûrs d'obtenir par le vecteur dérivé, la direction du vecteur tangent du fait que la dérivée de la composante en $x$ n'est jamais nulle ce qui n'est pas le cas pour les fonctions paramétrées.

Les problèmes sont simples à analyser. Nous proposons une solution répondant aux trois problèmes simultanément dans le cadre des courbes et surfaces paramétrées à l'aide de polynômes de degré n. En fait, cette solution est très efficace lorsque l'on utilise des surfaces ou des courbes de Bézier, B-splines, ....

Considérons une courbe paramétrée définie par :

$$L(u) = [f(u), g(u)]$$

Sans perte de généralité, nous choisirons pour domaine de définition le segment unitaire [0,1]. Nous pouvons écrire le vecteur dérivé de $L$ en faisant apparaître les racines communes $u_i$ (appartenant au domaine de définition) de la manière suivante :

$$\frac{\partial L(u)}{\partial u} = [\prod_i r(u,u_i) f_{res}(u), \prod_i r(u,u_i) g_{res}(u)]$$

avec les notations : $r(u,u_i) = (u-u_i)$, $g_{res}(u) = \dfrac{\dfrac{\partial g(u)}{\partial u}}{\prod_i r(u,u_i)}$ et $f_{res}(u) = \dfrac{\dfrac{\partial f(u)}{\partial u}}{\prod_i r(u,u_i)}$.

Bien entendu, rien n'exclut la possibilité d'avoir $i$ et $j$ tels que : $u_i = u_j$.

Nous pouvons maintenant définir une méthode de calcul des dérivées : soit $L(u)$ une fonction définie comme précédemment, le vecteur dérivé de $L$ en tout point est donné par la relation :

$$\frac{\partial L(u)}{\partial u} = \begin{cases} [\dfrac{\partial f(u)}{\partial u}, \dfrac{\partial g(u)}{\partial u}] & si\ u \notin \{u_i\} \\ [f_{res}(u), g_{res}(u)] & si\ u \in \{u_i\} \end{cases}$$

Notons **H** l'ensemble des fonctions polynomiales paramétrées dont les vecteurs dérivés sont calculés par la formule ci-dessus. Nous pouvons alors énoncer les propositions suivantes :

•**<u>Proposition 1</u>**. Si $f$ appartient à **H,** alors le vecteur dérivé fournit la direction de la tangente.

*Démonstration* : Rappelons que la tangente unitaire en un point est définie par $\mathbf{TG}_L(u_0) = \lim_{u \to u_0} \dfrac{\dfrac{dL}{du}(u)}{\left|\dfrac{dL}{du}(u)\right|}$. Dans le cas où $u_0 \neq u_i$ la démonstration est claire. Dans le cas contraire, on peut écrire :

$$\mathbf{TG}_L(u_0) = \lim_{u \to u_0} \frac{\frac{dL}{du}(u)}{\left|\frac{dL}{du}(u)\right|} = \lim_{u \to u_0} \frac{[\prod_i r(u,u_i) f_{res}(u), \prod_i r(u,u_i) g_{res}(u)]}{\sqrt{(\prod_i r(u,u_i) f_{res}(u))^2 + (\prod_i r(u,u_i) g_{res}(u))^2}}$$

donc $\mathbf{TG}_L(u_0) = \dfrac{[f_{res}(u_0), g_{res}(u_0)]}{\sqrt{(f_{res}(u_0))^2 + (g_{res}(u_0))^2}}$.

Or, par définition, $f_{res}(u_0) \neq 0$ *ou* $g_{res}(u_0) \neq 0$ donc le dénominateur de la dernière équation n'est pas nul et donc la quantité $[f_{res}(u_0), g_{res}(u_0)]$ donne la direction de la tangente.g

•**Proposition 2.** Si $f$ est une fonction $C^1$ appartenant à **H,** alors $f$ est $G^1$.

*Démonstration* : On reprend la définition de la $C^1$ continuité qui équivaut à la continuité des vecteurs dérivés. Nous venons de voir que le vecteur dérivé donne la direction de la tangente, donc la $C^1$ continuité implique la continuité en direction des tangentes, ce qui revient à écrire que :

$$\left.\frac{dL(t)}{du}\right|_{\substack{t=u \\ t<u}} = \lambda \left.\frac{dL(t)}{du}\right|_{\substack{t=u \\ t>u}}$$

Les vecteurs dérivés indiquant une direction, ils sont forcément non nuls, donc $\lambda$ est non nul aussi. Cette relation implique la $G^1$ continuité. g

•**Proposition 3.** Si $f$ est $G^1$ et appartient à **H**, alors en tout point : $\left.\frac{dL(t)}{du}\right|_{\substack{t=u \\ t<u}} = \lambda \left.\frac{dL(t)}{du}\right|_{\substack{t=u \\ t>u}}$

avec $\lambda$ scalaire non nul.

*Démonstration* : Les deux vecteurs dérivés indiquant la direction de la tangente étant non nuls tous les deux, le résultat est évident. g

Nous n'avons pas modifié les définitions des C et G continuités, mais seulement modifié le calcul des vecteurs dérivés. Avec cette formulation, nous avons une équivalence entre la $C^1$ continuité en un point et l'égalité à gauche et à droite des vecteurs dérivés en ce point. Nous avons aussi l'équivalence entre la $G^1$ continuité en un point et la colinéarité des vecteurs dérivés à gauche et à droite en ce point.

Les définitions de la $C^K$ continuité et de la $G^K$ continuité restent valables avec ce mode de dérivation.

On adapte facilement le mode de dérivation aux dérivées partielles des surfaces. Par conséquent, on obtient, comme pour les courbes, l'équivalence entre la $C^1$ continuité et l'égalité des vecteurs dérivés, ainsi que l'équivalence entre la $G^1$ continuité en un point et la coplanarité des vecteurs dérivés en ce point.

### 4. Reprise d'un exemple précédent

Reprenons l'exemple cité dans la section 2.1. Une courbe était définie de la manière suivante :

$$L \ : \ \Re \rightarrow \Re^2$$
$$L(u) = \begin{cases} [2u-u^2, 2u-u^2] & 0 \leq u \leq 1 \\ [u^2-2u+2, 2u-u^2] & 1 \leq u \leq 2 \end{cases}$$

Cette courbe était, avec une dérivation classique, $C^1$ mais non $G^1$. Vérifions avec notre nouveau mode de dérivation, la $C^1$ continuité :

$$\lim_{\substack{u \to 1 \\ u<1}} \frac{\partial L(u)}{\partial u} = \lim_{\substack{u \to 1 \\ u<1}} [f_{res} = 2, g_{res} = 2] = [2,2] \text{ et}$$

$$\lim_{\substack{u \to 1 \\ u>1}} \frac{\partial L(u)}{\partial u} = \lim_{\substack{u \to 1 \\ u>1}} [f_{res} = 2, g_{res} = -2] = [2,-2]$$

Donc la $C^1$ continuité n'est pas assurée (la $G^1$ continuité non plus), ce qui est plus en conformité avec le graphe de la fonction.

### 5. Conclusions

Dans toute la suite, nous utiliserons ce mode de dérivation, ce qui permettra d'établir les équations de raccord sans se soucier de leur validité. Notons aussi que notre dérivation a l'avantage de rendre les notions beaucoup plus intuitives (une courbe de graphe discontinu en tangente n'est plus $C^1$ et à fortiori encore moins $G^1$) et de définir dans tous les cas un vecteur dérivé non nul indiquant la direction de la tangente.

Outre l'avantage théorique de cette dérivation, l'application pratique n'est pas difficile. Si on utilise des courbes de degré trois ou des surfaces bicubiques, les dérivées partielles sont de degré 2 et la détection des racines est simple. Au lieu de mettre en œuvre systématiquement cette forme de dérivation, on peut auparavant tester la nullité du vecteur dérivé. Si le test est positif, alors on connaît déjà la racine commune aux polynômes constituant la courbe ou la surface, il reste à vérifier si elle est simple ou de multiplicité supérieure.

Un autre avantage pratique est que le calcul d'un plan tangent à une surface se déduit directement des directions indiquées par les vecteurs dérivés selon les paramètres. Nous ne sommes plus obligés, dans la plupart des cas, de calculer les vecteurs dérivés dans des directions supplémentaires ou de faire des calculs de limites (et parfois même de faire des erreurs d'interprétation dans les situations où l'erreur de l'information n'est pas évidente à détecter).

# Chapitre IX : CONTRAINTES SUR LES FONCTIONS DE RACCORDEMENT DECRIVANT UN RACCORD $G^1$ ENTRE PLUSIEURS CARREAUX SURFACIQUES

Lors de la mise en place des équations de raccord entre plusieurs carreaux surfaciques définis par des expressions polynomiales (produits tensoriels par exemple), deux types de contraintes apparaissent :

- des contraintes sur les coefficients 3D des polynômes définissant les surfaces. Par exemple, lorsque les surfaces à raccorder sont des surfaces à pôles classiques (Bézier, ...), les contraintes en question portent sur les positions relatives des points de contrôle entre eux. En effet, la base des polynômes décrivant les surfaces étant définitivement définie, les coefficients des polynômes dépendent entièrement des points de contrôle. Donc, établir des contraintes sur les coefficients revient à établir des contraintes sur les points de contrôle.

- des contraintes sur les fonctions de raccordement permettant de décrire le raccord. Ces fonctions apparaissent lors de l'écriture de la $G^1$ continuité entre les surfaces, qui revient à écrire qu'il existe une combinaison linéaire des vecteurs dérivés nulle. Des contraintes aux limites vont porter sur les coefficients de cette combinaison linéaire (qui sont des fonctions d'une variables à valeur réelle) afin d'autoriser la $G^1$ continuité en tout point. En général, les fonctions de raccordement sont décrites comme des polynômes et par conséquent les contraintes portant sur les fonctions peuvent être affinées afin de porter directement sur les coefficients scalaires de ces fonctions.

Il est nécessaire de distinguer ces deux types de contraintes lors des calculs de degrés de liberté. Une contrainte portant directement sur les surfaces met en jeu des coefficients 3D et donc enlève trois degrés de liberté au système d'équations représentant le raccord. En revanche, une contrainte portant sur les coefficients scalaires des fonctions polynomiales ne met en jeu qu'un seul degré de liberté. Les contraintes portant en général indifféremment sur

des coefficients scalaires ou 3D, nous avons décidé de les séparer autant que possible afin de simplifier les équations décrivant le raccord.

Les sections de ce chapitre sont toutes composées de deux parties. Les premières portent sur les contraintes générales appliquées aux fonctions de raccordement, les deuxièmes sur les cas particuliers où l'on précise le degré choisi pour chacune de ces fonctions.

## 1. Raccords entre deux carreaux

### 1.1. Généralités

Soient deux carreaux $S(s,t)$ et $T(u,v)$ (figure IX.1) de degré $d \times d$ tels qu'il existe un paramètre $w$ vérifiant (hypothèse de $C^0$ continuité) :

$$S(s,w) = T(u,w) \text{ quel que soit } w \in [0,1]$$

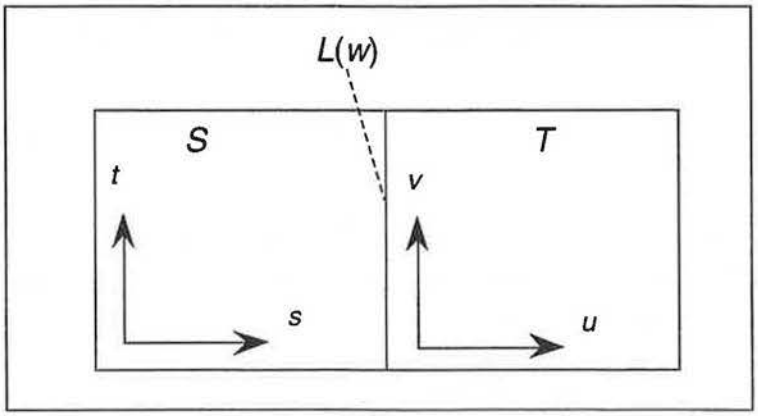



Figure IX.1: *raccord entre deux carreaux*

Nous supposerons aussi que $S$ et $T$ sont raccordés de manière $G^1$. Conformément à ce qui a été dit au chapitre précédent, il existe donc trois fonctions dites fonctions de raccordement $\alpha(w)$, $\beta(w)$ et $\gamma(w)$ non nulles vérifiant la relation que nous appellerons condition de coplanarité :

$$\alpha(w)\left.\frac{\partial S(s,t)}{\partial s}\right|_{\substack{s=1\\t=w}} + \beta(w)\left.\frac{\partial T(u,v)}{\partial u}\right|_{\substack{u=0\\v=w}} + \gamma(w)\,L'(w) = 0$$

en notant, pour simplifier l'écriture $L(w) = S(s,w) = T(u,w)$ . On a donc :

$$L'(w) = \left.\frac{\partial S(s,t)}{\partial t}\right|_{\substack{s=1\\t=w}} = \left.\frac{\partial T(u,v)}{\partial v}\right|_{\substack{u=0\\v=w}}$$

Remarquons que, s'il existe un paramètre $w$ tel $\gamma(w)=0$, cela implique la colinéarité des tangentes transversales aux deux surfaces. Les cas où il existe $w$ tel que $\alpha(w)=0$ implique que toutes les dérivées directionnelles de la surface $T$ au point $T(0,w)$ ont la même direction et donc

que la surface $T$ n'est pas $G^1$. Autrement dit, $\alpha(w)=0$ implique que les autres fonctions de raccordement soient nulles pour ce paramètre. Il est donc nécessaire, pour de tels paramètre, de vérifier indépendamment que :

$$\det\left(\left.\frac{\partial S(s,t)}{\partial s}\right|_{\substack{s=1\\t=w}},\left.\frac{\partial T(u,v)}{\partial u}\right|_{\substack{u=0\\v=w}},L'(w)\right)=0$$

Généralement, les fonctions de raccordement $\alpha(w)$, $\beta(w)$ et $\gamma(w)$ sont choisies comme des polynômes. Afin de conserver une certaine uniformité et d'équilibrer le degré de la relation de coplanarité, le degré de ces polynômes est choisi de la manière suivante :

$$d^\circ\alpha(w)=d^\circ\beta(w)=d^\circ\gamma(w)-1=n$$

L'équilibre en question se traduit par le fait que :

$$d^\circ\left(\alpha(w)\left.\frac{\partial S(s,t)}{\partial s}\right|_{\substack{s=1\\t=w}}\right)=d^\circ\left(\beta(w)\left.\frac{\partial T(u,v)}{\partial u}\right|_{\substack{u=0\\v=w}}\right)=d^\circ(\gamma(w)L'(w))=n+d$$

Supposons, maintenant, que $S$ et $T$ soient $G^1$ continûment raccordées. Nous savons donc qu'il existe $\alpha(w)$, $\beta(w)$ et $\gamma(w)$ permettant de vérifier la condition de coplanarité des vecteurs dérivés. Nous allons montrer que nous pouvons systématiquement trouver des fonctions de raccordement polynomiales d'un degré maximum assurant la condition de coplanarité. Les neuf polynômes décrivant, par groupe de trois, les quantités $\left.\frac{\partial S(s,t)}{\partial s}\right|_{\substack{s=1\\t=w}}$, $\left.\frac{\partial T(u,v)}{\partial u}\right|_{\substack{u=0\\v=w}}$ et $L'(w)$ n'ont pour seule contrainte que la nullité de leur déterminant. A titre indicatif, notons que le degré du déterminant est égal à $3n$-1. Donc, s'il est nul, les $3n$ coefficients scalaires sont tous nuls. Autrement dit, on a $3n$ contraintes sur les neuf polynômes décrivant les surfaces. Si l'on considère que l'une des surfaces est fixée (et par là même la frontière aussi), il ne nous reste que $3n+3-3n=3$ degré de liberté pour déterminer la deuxième surface.

Afin de prouver l'existence des fonctions $\alpha(w)$, $\beta(w)$ et $\gamma(w)$ en tant que polynômes, le plus simple est de les construire. Pour cela, nous utiliserons la théorie des matrices appliquée aux polynômes. Notons **A** la matrice composée des trois vecteurs dérivés $\left.\frac{\partial S(s,t)}{\partial s}\right|_{\substack{s=1\\t=w}}$, $\left.\frac{\partial T(u,v)}{\partial u}\right|_{\substack{u=0\\v=w}}$ et $L'(w)$.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\left.\frac{\partial S_x(s,t)}{\partial s}\right|_{\substack{s=1\\t=w}} & \left.\frac{\partial T_x(u,v)}{\partial u}\right|_{\substack{u=0\\v=w}} & L'_x(w)\\ \left.\frac{\partial S_y(s,t)}{\partial s}\right|_{\substack{s=1\\t=w}} & \left.\frac{\partial T_y(u,v)}{\partial u}\right|_{\substack{u=0\\v=w}} & L'_y(w)\\ \left.\frac{\partial S_z(s,t)}{\partial s}\right|_{\substack{s=1\\t=w}} & \left.\frac{\partial T_z(u,v)}{\partial u}\right|_{\substack{u=0\\v=w}} & L'_z(w)\end{bmatrix}$$

avec $\det \mathbf{A} = 0$, Nous écrivons facilement la co-matrice de **A** sous la forme :

$$
{}^{t}co(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix}
\left.\frac{\partial S_y(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} L'_z(w) - \left.\frac{\partial S_z(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} L'_y(w) & \left.\frac{\partial S_z(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} L'_x(w) - \left.\frac{\partial S_x(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} L'_z(w) & \left.\frac{\partial S_x(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} L'_y(w) - \left.\frac{\partial S_y(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} L'_x(w) \\
\left.\frac{\partial T_y(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} L'_z(w) - \left.\frac{\partial T_z(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} L'_y(w) & \left.\frac{\partial T_z(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} L'_x(w) - \left.\frac{\partial T_x(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} L'_y(w) & \left.\frac{\partial T_x(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} L'_y(w) - \left.\frac{\partial T_y(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} L'_x(w) \\
\left.\frac{\partial T_y(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} \left.\frac{\partial S_z(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} - \left.\frac{\partial T_z(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} \left.\frac{\partial S_y(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} & \left.\frac{\partial T_z(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} \left.\frac{\partial S_x(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} - \left.\frac{\partial T_x(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} \left.\frac{\partial S_z(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} & \left.\frac{\partial T_x(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} \left.\frac{\partial S_y(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} - \left.\frac{\partial T_y(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} \left.\frac{\partial S_x(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0}
\end{bmatrix}
$$

En utilisant le fait que :

$$\mathbf{A}\,{}^{t}co(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}.\mathbf{I} = 0\mathbf{I},$$

il est clair que l'on peut prendre pour $\alpha(w)$, $\beta(w)$ et $\gamma(w)$, les composantes de l'une des trois colonnes de la transposée de la co-matrice, dès que les deux premiers des trois termes de ces colonnes ne sont pas les fonctions nulles. En ce qui concerne les degrés de $\alpha(w)$, $\beta(w)$ et $\gamma(w)$, on peut affirmer que $d^\circ\alpha(w) \leq 2n-1$, $d^\circ\beta(w) \leq 2n-1$, $d^\circ\gamma(w) \leq 2n$ et donc que $d<2n$.

*Interprétation des résultats*

Afin de simplifier les notations, nous écrirons **A** sous la forme suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

Les composantes de **A** sont, bien entendu, des polynômes du paramètre $w$ que nous avons volontairement omis. La transposée de la co-matrice s'écrit alors simplement :

$${}^{t}co(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} (ei-fh) & -(di-fg) & (dh-eg) \\ -(bi-hc) & (ai-cg) & -(ah-bg) \\ (bf-ec) & -(af-cd) & (ae-bd) \end{bmatrix}$$

Nous allons montrer que $\alpha(w)$, $\beta(w)$ et $\gamma(w)$ peuvent toujours être identifiés à une des colonnes de la co-matrice. Il nous faut choisir un $\alpha(w)$ non nul pour des raisons de géométrie évidente (sinon les vecteurs dérivés de $S$ par rapport à $u$ et $v$ devraient être colinéaires pour satisfaire la condition de coplanarité). Les différents choix pour $\alpha(w)$ sont $(ei\text{-}fh)$, $(fg\text{-}di)$ ou $(dh\text{-}eg)$. Supposons que la première quantité soit nulle, nous avons :

$$\det(\mathbf{A}) = a(ei-fh) - b(di-fg) + c(dh-eg) = 0$$

$$\Rightarrow -b(di - fg) + c(dh - eg) = 0$$

Supposons que le polynôme $h$ soit non nul (dans le cas où $h$ est nul, les raisonnements restent les mêmes mais en utilisant un autre polynôme que $h$ ; si tous les polynômes sont nuls, la conclusion est évidente). Multiplions la dernière équation par $h$ :

$$-bh(di - fg) + ch(dh - eg) = 0$$

$$\Rightarrow -b(dhi - fhg) + ch(dh - eg) = 0$$

En utilisant l'hypothèse de départ $(ei - fh) = 0$, on obtient :

$$-b(dhi - eig) + ch(dh - eg) = 0$$

$$\Rightarrow (bi - ch)(dh - eg) = 0$$

Deux hypothèses se présentent alors :

- $(dh - eg) = 0$. Dans ce cas il est facile de constater, en utilisant le fait que $(ei - fh) = 0$, que les vecteurs $(d, e, f)$ et $(g, h, i)$ sont colinéaires. Géométriquement, cela signifie que les vecteurs dérivés en $u$ et $v$ de la surface $S$ sont colinéaires, ce qui, dans notre cadre, n'a pas de sens. Nous pouvons donc exclure l'hypothèse $(dh - eg) = 0$.

- $(bi - ch) = 0$. Dans ce cas, on montrerait facilement que $(bf - ce) = 0$. Cela signifie que les fonctions $\alpha(w)$, $\beta(w)$ et $\gamma(w)$ sont nulles, ce qui nous permet d'affirmer que la seule fonction $\beta(w)$ vérifiant la condition de coplanarité est la fonction nulle, si $\alpha(w)$ est nulle. La réciproque est évidemment vérifiée en inversant les rôles de $\alpha(w)$ et de $\beta(w)$. De telles fonctions ne nous intéressant pas, nous choisirons pour $\alpha(w)$ la quantité $(dh\text{-}eg)$. Dans ces conditions, on obtient $\beta(w)=bg\text{-}ah$ et $\gamma(w)=ae\text{-}bd$.

*Cas particulier où le choix de la première colonne fournit les résultats $\alpha(w)=ei\text{-}fh$, $\beta(w)=ch\text{-}bi$ et $\gamma(w)=bf\text{-}ce=0$.*

Toujours dans le souci de montrer la cohérence du choix des fonctions coefficients, nous allons montrer que si le choix de la première colonne de la transposée de la co-matrice fournit $\gamma(w)=0$, alors toutes les autres colonnes fournissent un $\gamma(w)$ nul. Nous reprenons pour cela les mêmes techniques que précédemment. Choisissons d'exprimer det(**A**) sous la forme :

$$\det(\mathbf{A}) = a(ei - fh) - d(bi - ch) + g(bf - ce)$$

En utilisant le fait que $(bf - ce) = 0$, nous obtenons :

$$a(ei - fh) - d(bi - ch) = 0$$

En multipliant par le polynôme $f$, nous arrivons à :

$$af(ei - fh) - d(bfi - cfh) = 0$$

$$\Rightarrow af(ei - fh) - d(cei - cfh) = 0$$

$$\Rightarrow (af - dc)(ei - fh) = 0$$

En utilisant les mêmes considérations que précédemment, on conclut que :

$$(af - dc) = 0$$

On prouve de la même manière que $(ae - db) = 0$.

Le fait que $\gamma(w)$ soit le polynôme nul, implique que les vecteurs dérivés de $T$ et $S$ par rapport à $s$ et $u$ respectivement sont colinéaires.

*Interprétation des degrés des fonctions $\alpha(w)$, $\beta(w)$ et $\gamma(w)$*

Nous donnons une interprétation succincte des degrés relatifs des polynômes mis en jeu. Nous avons, d'après les résultats précédents :

$$d°\alpha(w) = d°\beta(w) = d°\gamma(w)-1 = 2n-1$$

$$d°a = d°b = d°c = d°d = d°e = d°f = n$$

$$d°g = d°h = d°i = n-1$$

La condition de coplanarité, quant à elle, met en jeu 3 équations polynomiales, chacune de degré $n+2n-1=3n-1$. L'identification des coefficients scalaires de ces trois polynômes au polynôme nul donne lieu à un système de $3n$ équations pour chaque polynôme, et donc un total de 9n équations.

De ces $9n$ équations, il faut soustraire celles prises en charge par la condition det(**A**)=0, où det(**A**) est de degré $3n$-1 , qui après identification au polynôme nul, conduit à $3n$ équations. Donc, nous avons un système de $6n$ équations à résoudre.

Les inconnues de ce système sont les coefficients des polynômes $\alpha(w)$, $\beta(w)$ et $\gamma(w)$ qui sont au nombre de $2n$ pour $\alpha(w)$ et $\beta(w)$, et de $2n$+1 pour $\gamma(w)$. Soit un total de $6n$+1 inconnues. Pour résumer, nous avons donc un système de $6n$ équations pour $6n$+1 inconnues. En fixant une des inconnues, on peut résoudre le système linéaire, les 6n autres inconnues dépendant de la première. On peut interpréter l'inconnue supplémentaire comme un scalaire quelconque (non nul) par lequel on peut multiplier $\alpha(w)$, $\beta(w)$ et $\gamma(w)$ sans en changer le degré. En effet, il est clair que si des fonctions $\alpha(w)$, $\beta(w)$ et $\gamma(w)$ vérifient la condition de coplanarité, alors les fonctions $k\alpha(w)$, $k\beta(w)$ et $k\gamma(w)$, où $k$ est un scalaire réel non nul, la vérifient aussi.

*Transfert des contraintes des fonctions $\alpha(w)$, $\beta(w)$ et $\gamma(w)$ aux surfaces S et T*

Il est difficile de ne pas évoquer dès maintenant les relations entre le choix des coefficients $\alpha(w)$, $\beta(w)$ et $\gamma(w)$ et le contrôle des surfaces $T$ et $S$. Il y a un équilibre entre le contrôle que l'on s'autorise sur les surfaces et les degrés des coefficients. En fait, plus les degrés des polynômes $\alpha(w)$, $\beta(w)$ et $\gamma(w)$ sont élevés, plus les contraintes sur les surfaces $S$ et $T$ sont importantes.

Si on travaille avec des surfaces à pôles, on peut illustrer cette caractéristique en constatant que l'élévation d'une unité des degrés de $\alpha(w)$, $\beta(w)$ et $\gamma(w)$ ajoute une contrainte supplémentaire sur les points de contrôle décrivant les surfaces à raccorder, en vue d'obtenir la $G^1$ continuité. Il est donc, en général, plus intéressant de choisir le degré le plus faible possible pour les fonctions de raccordement. Cependant, certaines applications (dont la modélisation d'embranchements de CG) nécessitent le contrôle précis de la variation des normes des vecteurs dérivés transversaux aux surfaces et donc l'augmentation des degrés de $\alpha(w)$, $\beta(w)$ et $\gamma(w)$ devient inévitable. Cette augmentation de degré doit cependant suivre certaines règles. L'équilibre des degrés, que nous avons succinctement abordé précédemment, doit être respecté. Il n'est pas envisageable que le degré du polynôme formé par la multiplication d'une des fonctions de raccordement et de la dérivée partielle associée (par exemple $\alpha(w)a$) soit supérieur aux degrés des deux autres polynômes de l'équation de coplanarité ($\beta(w)d$ et $\gamma(w)f$). En effet, l'identification au polynôme nul deviendrait incohérente. On peut résumer cette propriété sous la forme suivante :

Si $d$=Max(d°$\alpha(w)$, d°$\beta(w)$, d°$\gamma(w)$) alors on a toujours une des relations suivantes :

$$d = d^\circ\alpha(w) = d^\circ\beta(w) \text{ et } d^\circ\gamma(w) < d+2$$
$$d = d^\circ\alpha(w) = d^\circ\gamma(w)-1 \text{ et } d^\circ\beta(w) < d+1$$
$$d = d^\circ\beta(w) = d^\circ\gamma(w)-1 \text{ et } d^\circ\alpha(w) < d+1$$

Un exemple classique représentant un cas courant est de fixer une des deux surfaces (ce qui revient à fixer les points de contrôle) et de déformer l'autre en vue d'obtenir un raccord $G^1$. Les pertes de degrés de liberté sont alors très importantes puisque l'on ne s'autorise plus qu'à modifier les points de contrôle intérieurs de la deuxième surface. Le choix du degré des fonctions $\alpha(w)$, $\beta(w)$ et $\gamma(w)$ en est fortement réduit et en général le degré de ces fonctions n'excède pas $n$.

Nous reviendrons longuement et de manière précise sur ces transferts de contraintes qui sont à la base de tout raccord lors du prochain chapitre où nous nous attarderons plus précisément sur les surfaces de Bézier et les surfaces B-splines.

### 1.2. Cas particuliers

Un premier cas particulier, très fréquent dans la pratique, nous a semblé important. Supposons que l'on désire raccorder deux surfaces $S$ et $T$ de telle manière que les vecteurs

dérivés transversaux ( $\left.\frac{\partial S(s,t)}{\partial s}\right|_{\substack{s=1\\t=0}}, \left.\frac{\partial T(u,v)}{\partial u}\right|_{\substack{u=0\\v=0}}$ et $\left.\frac{\partial S(s,t)}{\partial s}\right|_{\substack{s=1\\t=1}}, \left.\frac{\partial T(u,v)}{\partial u}\right|_{\substack{u=0\\v=1}}$ ) soient colinéaires aux extrémités de la frontière ( $L(0)$ et $L(1)$ ) sans l'être obligatoirement aux autres points de la frontière. Nous avons donc nécessairement les contraintes suivantes sur $\gamma(w)$ :

$$\gamma(0)=\gamma(1)=0$$

Si nous choisissons $\gamma(w)$ constante ou linéaire, nous n'avons comme choix que la fonction nulle, ce qui signifierait que tous les vecteurs dérivés transversaux à $S$ et $T$ soient colinéaires. Cette contrainte pouvant être trop importante, le degré de $\gamma(w)$ doit être au moins égal à deux (par conséquent, $\alpha(w)$ et $\beta(w)$ seront au minimum de degré un). Autrement dit, si on note $\gamma(w)$ dans la base de Bernstein :

$$\gamma(w) = \gamma_0 w^2 + \gamma_1 2(1-w)w + \gamma_2(1-w)^2$$

alors $\gamma_2 = \gamma_0 = 0$

A ce stade, nous pouvons faire une remarque intéressante. Supposons que $S$ et $T$ soient des surfaces bicubiques. Nous savons que le degré maximum de $\gamma(w)$ est de 2*3=6. Ainsi, si nous imposons au raccord la colinéarité des vecteurs dérivés transversaux en 7 points de la frontière, nous serons contraints de conserver la colinéarité des vecteurs dérivés tout le long de la frontière (un polynôme de degré 6 admettant au plus 6 zéros). Cette remarque se prolonge aisément pour des surfaces de degré supérieur.

Si, en plus de la colinéarité des vecteurs dérivés transversaux, nous exigeons leur égalité, il nous faut imposer des contraintes supplémentaires sur $\alpha(w)$ et $\beta(w)$ :

$$\alpha(0) = \beta(0) \text{ et } \alpha(1) = \beta(1)$$

Là encore, si nous n'imposons pas l'égalité des fonctions $\alpha(w)$ et $\beta(w)$, il nous faudra les choisir de degré supérieur à 1.

On choisit souvent de prendre pour les fonctions $\alpha(w)$, $\beta(w)$ et $\gamma(w)$ les fonctions respectivement constantes, constante et linéaire. Sans perte de généralité, on peut choisir :

$$\alpha(w) = 1,\ \beta(w) = -\beta \text{ et } \gamma(w) = \gamma_1 w + \gamma_0(1-w)$$

Dans ces conditions, la coplanarité des vecteurs dérivés s'écrit :

$$\left.\frac{\partial S(s,t)}{\partial s}\right|_{\substack{s=1\\t=w}} - \beta\left.\frac{\partial T(u,v)}{\partial u}\right|_{\substack{u=0\\v=w}} + \gamma(w)L'(w) = 0$$

Si nous considérons pour $L(w)$ l'orientation inverse, nous pourrions réécrire la dernière condition de la manière suivante :

$$-\beta'\frac{\partial S(s,t)}{\partial s}\bigg|_{\substack{s=1\\t=w}}+\frac{\partial T(u,v)}{\partial u}\bigg|_{\substack{u=0\\v=w}}-\gamma'(w)L'(w)=0$$

Pour garantir l'identité de la condition de coplanarité, les nouvelles constantes doivent vérifier les relations suivantes :

$$\beta'=\frac{1}{\beta},\quad \gamma_0'=\frac{\gamma_1}{\beta},\quad \gamma_1'=\frac{\gamma_0}{\beta}$$

Le cas $\beta$=1 est particulièrement intéressant car il donne une pondération identique des vecteurs dérivés des deux côtés de la frontière.

## 2. Raccords entre trois carreaux concourant en un point

### 2.1. Cas général

De nombreuses publications ont traité des problèmes de raccords entre plusieurs carreaux concourant en un point. Nous nous proposons de formuler ces résultats dans le cadre le plus général possible, c'est-à-dire sans préciser ni la nature des surfaces, ni le degré des fonctions coefficients. Les résultats sur le raccord entre deux carreaux restent souvent valables pour les raccords entre trois carreaux. Cependant, l'apparition d'un point commun engendre des contraintes supplémentaires sur les fonctions coefficients et donc sur les surfaces elles mêmes.

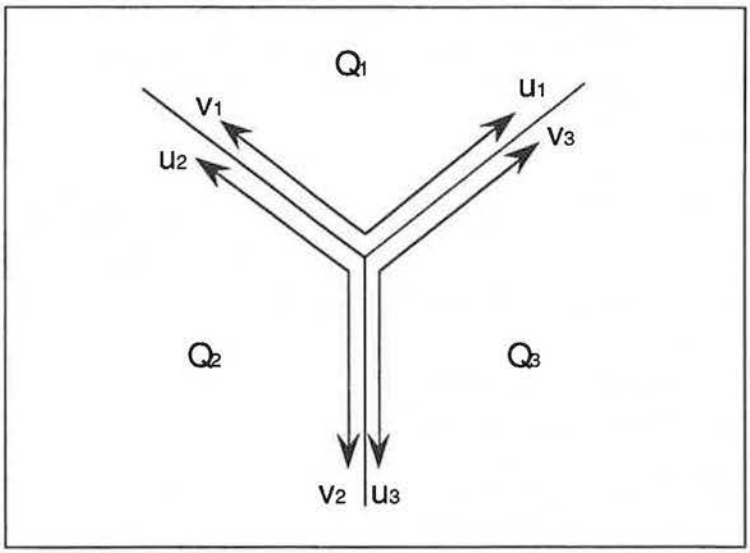



Figure IX.2 : *paramètres des trois carreaux*

Nous noterons les trois carreaux à raccorder $G^1$ continûment $Q_1(u_1,v_1)$, $Q_2(u_2,v_2)$ et $Q_3(u_3,v_3)$. La frontière commune à $Q_i$ et $Q_j$ sera notée $L_{i,j}(w_{ij})=L_{j,i}(w_{ji})$. Les paramètres décriront tout le segment [0,1]. La $G^1$ continuité de la surface constituée des trois carreaux sus cités n'est assurée que si la $G^1$ continuité est respectée le long des trois frontières. Nous

écrivons donc la condition de coplanarité le long de chacune des frontières (les notations sont indiquées sur la figure IX.2).

$$\alpha_1(w_{12})\frac{\partial Q_2(u_2,v_2)}{\partial v_2}\bigg|_{\substack{u_2=w_{12}\\v_2=0}}+\beta_1(w_{12})\frac{\partial Q_1(u_1,v_1)}{\partial u_1}\bigg|_{\substack{v_1=w_{12}\\u_1=0}}+\gamma_1(w_{12})L'_{12}(w_{12})=0$$

$$\alpha_2(w_{23})\frac{\partial Q_3(u_3,v_3)}{\partial v_3}\bigg|_{\substack{u_3=w_{23}\\v_3=0}}+\beta_2(w_{23})\frac{\partial Q_2(u_2,v_2)}{\partial u_2}\bigg|_{\substack{v_2=w_{23}\\u_2=0}}+\gamma_2(w_{23})L'_{23}(w_{23})=0$$

$$\alpha_3(w_{31})\frac{\partial Q_1(u_1,v_1)}{\partial v_1}\bigg|_{\substack{u_1=w_{31}\\v_1=0}}+\beta_3(w_{31})\frac{\partial Q_3(u_3,v_3)}{\partial u_3}\bigg|_{\substack{v_3=w_{31}\\u_3=0}}+\gamma_3(w_{31})L'_{31}(w_{31})=0$$

Le problème reste à peu près identique, qu'il y ait deux ou trois carreaux à raccorder. La seule difficulté réside dans le calcul des vecteurs dérivés au point O. En ce point, le système précédent fournit les relations :

$$\alpha_1(0)\frac{\partial Q_2(u_2,v_2)}{\partial v_2}\bigg|_{\substack{u_2=0\\v_2=0}}+\beta_1(0)\frac{\partial Q_1(u_1,v_1)}{\partial u_1}\bigg|_{\substack{v_1=0\\u_1=0}}+\gamma_1(0)L'_{12}(0)=0$$

$$\alpha_2(0)\frac{\partial Q_3(u_3,v_3)}{\partial v_3}\bigg|_{\substack{u_3=0\\v_3=0}}+\beta_2(0)\frac{\partial Q_2(u_2,v_2)}{\partial u_2}\bigg|_{\substack{v_2=0\\u_2=0}}+\gamma_2(0)L'_{23}(0)=0$$

$$\alpha_3(0)\frac{\partial Q_1(u_1,v_1)}{\partial v_1}\bigg|_{\substack{u_1=0\\v_1=0}}+\beta_3(0)\frac{\partial Q_3(u_3,v_3)}{\partial u_3}\bigg|_{\substack{v_3=0\\u_3=0}}+\gamma_3(0)L'_{31}(0)=0$$

En remarquant que : $L'_{ij}(0)=\dfrac{\partial Q_i(u_i,v_i)}{\partial v_i}\bigg|_{\substack{u_i=0\\v_i=0}}=\dfrac{\partial Q_j(u_j,v_j)}{-\,\partial u_j}\bigg|_{\substack{u_j=0\\v_j=0}}$ *avec* $\{i,j\}\in\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$

on peut en déduire les contraintes sur les fonctions coefficients au point O :

$$\begin{cases}\gamma_1(0)\gamma_2(0)=\alpha_1(0)\beta_2(0)\\ \alpha_1(0)\alpha_2(0)=\beta_1(0)\gamma_2(0)\\ \beta_2(0)\beta_3(0)=\alpha_3(0)\gamma_2(0)\\ \gamma_2(0)\gamma_3(0)=\alpha_2(0)\beta_3(0)\end{cases}$$

Ces contraintes (issue d'un calcul systématique que nous présenterons dans la section 4.) peuvent être réécrites de manière plus attrayante de la manière suivante :

$$\begin{cases} \alpha_1(0)\alpha_2(0)\alpha_3(0) = \beta_1(0)\beta_2(0)\beta_3(0) \\ \gamma_1(0) = \dfrac{\alpha_1(0)\alpha_3(0)}{\beta_3(0)} \\ \gamma_2(0) = \dfrac{\alpha_1(0)\alpha_2(0)}{\beta_1(0)} \\ \gamma_3(0) = \dfrac{\alpha_2(0)\alpha_3(0)}{\beta_2(0)} \end{cases}$$

### 2.2. Cas particuliers

Les contraintes liées au point O ne portent que sur les constantes des polynômes de raccordement, ce qui nous permet de traiter des cas particuliers dans le cadre le plus large possible. Un cas souvent rencontré dans la pratique est de choisir les $\alpha_i$ égaux au polynôme constant 1. Dans ces conditions, nous retrouvons des contraintes bien connues :

$$\begin{cases} 1 = \beta_1(0)\beta_2(0)\beta_3(0) \\ \gamma_1(0) = \dfrac{1}{\beta_3(0)} \\ \gamma_2(0) = \dfrac{1}{\beta_1(0)} \\ \gamma_3(0) = \dfrac{1}{\beta_2(0)} \end{cases}$$

Un autre cas intéressant est d'avoir une pondération identique des vecteurs dérivés transversaux le long des frontières (comme dans le cas de deux carreaux). Cela se traduit par les relations $\alpha_i = \beta_i$ pour i=1,2,3. Dans ces conditions, les contraintes se simplifient :

$$\begin{cases} \gamma_1(0) = \alpha_1(0) = \beta_1(0) \\ \gamma_2(0) = \alpha_2(0) = \beta_2(0) \\ \gamma_3(0) = \alpha_3(0) = \beta_3(0) \end{cases}$$

Dans le cas où $\alpha_i$ et $\beta_i$ sont constants, nous n'avons en tout et pour tout que $3d$ degrés de liberté sur les $\gamma_i$ s'ils sont de degré $d$.

## 3. Raccord entre quatre carreaux concourant en un point

### 3.1. Cas Général

Le raccord entre quatre carreaux est souvent traité à part dans la littérature traitant du raccordement de plusieurs carreaux (ceci est particulièrement vrai pour les surfaces à pôles que nous évoquerons dans le chapitre suivant). En ce qui concerne le calcul des contraintes sur les fonctions de raccordement, il reste similaire à ce que nous avons exposé auparavant. Nous adopterons les notations de la figure IX.3. Comme dans le cas où le nombre de carreaux est égal à trois, nous écrivons les équations de coplanarité :

$$\alpha_1(w_{12})\frac{\partial Q_2(u_2,v_2)}{\partial v_2}\bigg|_{\substack{u_2=w_{12}\\v_2=0}}+\beta_1(w_{12})\frac{\partial Q_1(u_1,v_1)}{\partial u_1}\bigg|_{\substack{v_1=w_{12}\\u_1=0}}+\gamma_1(w_{12})L'_{12}(w_{12})=0$$

$$\alpha_2(w_{23})\frac{\partial Q_3(u_3,v_3)}{\partial v_3}\bigg|_{\substack{u_3=w_{23}\\v_3=0}}+\beta_2(w_{23})\frac{\partial Q_2(u_2,v_2)}{\partial u_2}\bigg|_{\substack{v_2=w_{23}\\u_2=0}}+\gamma_2(w_{23})L'_{23}(w_{23})=0$$

$$\alpha_3(w_{34})\frac{\partial Q_4(u_4,v_4)}{\partial v_4}\bigg|_{\substack{u_4=w_{34}\\v_4=0}}+\beta_3(w_{34})\frac{\partial Q_3(u_3,v_3)}{\partial u_3}\bigg|_{\substack{v_3=w_{34}\\u_3=0}}+\gamma_3(w_{34})L'_{34}(w_{34})=0$$

$$\alpha_4(w_{41})\frac{\partial Q_1(u_1,v_1)}{\partial v_1}\bigg|_{\substack{u_1=w_{41}\\v_1=0}}+\beta_4(w_{41})\frac{\partial Q_4(u_4,v_4)}{\partial u_4}\bigg|_{\substack{v_4=w_{41}\\u_4=0}}+\gamma_4(w_{41})L'_{41}(w_{41})=0$$

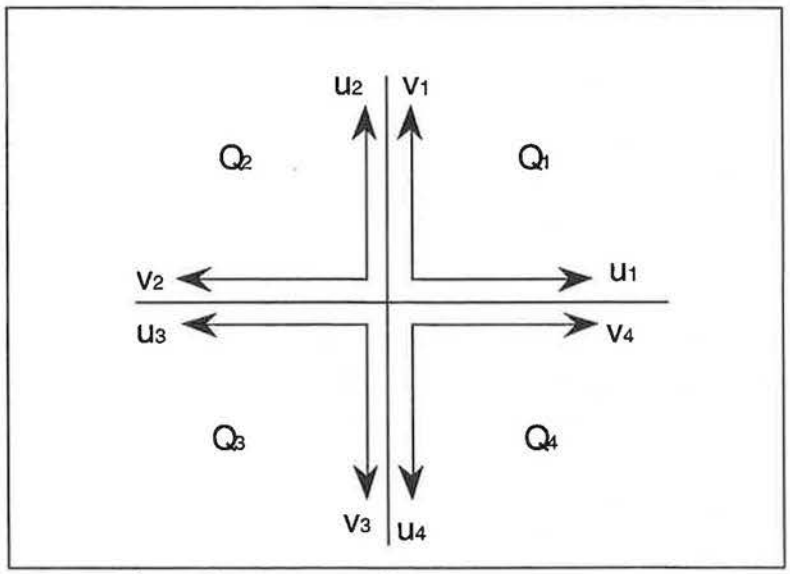



Figure IX.3 : *raccord entre quatre carreaux*

En remarquant que :

$$L'_{ij}(0)=\frac{\partial Q_i(u_i,v_i)}{\partial v_i}\bigg|_{\substack{u_i=0\\v_i=0}}=\frac{\partial Q_j(u_j,v_j)}{\partial u_j}\bigg|_{\substack{u_j=0\\v_j=0}}\quad \text{avec}\quad \{i,j\}\in\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,1\}\}\quad \text{on}$$

peut en déduire les contraintes sur les fonctions coefficients au point O :

$$\begin{cases}\gamma_1(0)(\gamma_2(0)\gamma_3(0)-\alpha_2(0)\beta_3(0))-\alpha_1(0)\beta_2(0)\gamma_3(0)=0\\ \alpha_1(0)\alpha_2(0)\alpha_3(0)+\beta_1(0)(\gamma_2(0)\gamma_3(0)-\alpha_2(0)\beta_3(0))=0\\ \beta_2(0)\beta_3(0)\beta_4(0)+\alpha_4(0)(\gamma_2(0)\gamma_3(0)-\alpha_2(0)\beta_3(0))=0\\ \gamma_4(0)(\gamma_2(0)\gamma_3(0)-\alpha_2(0)\beta_3(0))-\alpha_3(0)\beta_4(0)\gamma_2(0)=0\end{cases}$$

On peut présenter ses contraintes de manière plus attrayante :

$$\begin{cases} \alpha_1(0)\alpha_2(0)\alpha_3(0)\alpha_4(0) = \beta_1(0)\beta_2(0)\beta_3(0)\beta_4(0) \\ \gamma_1(0) = -\dfrac{\alpha_1(0)\alpha_4(0)}{\beta_3(0)\beta_4(0)}\gamma_3(0) \\ \gamma_2(0) = -\dfrac{\alpha_1(0)\alpha_2(0)}{\beta_1(0)\beta_4(0)}\gamma_4(0) \\ \gamma_2(0)\gamma_3(0) - \alpha_2(0)\beta_3(0) = -\dfrac{\alpha_1(0)\alpha_2(0)\alpha_3(0)}{\beta_1(0)} \end{cases}$$

Remarquons que nous avons toujours l'égalité entre le produit des fonctions $\alpha_i$ et $\beta_i$ en 0. Et que les fonctions $\gamma_i$ en 0 ne peuvent plus être exprimées en fonction des seules fonctions $\alpha_i$ et $\beta_i$ évaluées en 0.

### 3.2. Cas particuliers

Comme dans le cas où 3 carreaux sont raccordés, un cas souvent rencontré dans la pratique est de choisir les $\alpha_i$ égaux au polynôme constant 1. Dans ces conditions, nous retrouvons aussi des contraintes bien connues :

$$\begin{cases} \beta_1(0)\beta_2(0)\beta_3(0)\beta_4(0) = 1 \\ \gamma_1(0) = -\beta_1(0)\beta_2(0)\gamma_3(0) \\ \gamma_2(0) = -\beta_2(0)\beta_3(0)\gamma_4(0) \\ \gamma_2(0)\gamma_3(0) = \beta_3(0)(1-\beta_2(0)\beta_4(0)) \end{cases}$$

Un autre situation, issue de la précédente, apparaît lorsque l'on choisit les $\gamma_i(0)$ nulles. Nous avons alors les contraintes :

$$\beta_1\beta_3 = \beta_2\beta_4 = 1$$

Dans certains cas, il est montré dans [DU 88] que la condition de coplanarité et la $G^1$ continuité n'est assurée que si certains vecteurs dérivés sont nuls au point O (cette conclusion n'est pas évidente au vu des résultats énoncés dans [DU 88] mais une étude approfondie nous a permis d'arriver à une telle interprétation). En fait, la condition de coplanarité est certes assurée, mais la surface calculée n'est pas visuellement continue. En utilisant le mode de dérivation que nous avons développé dans le chapitre VIII, la conclusion pour un tel problème est que la condition de coplanarité ne peut être assurée et donc la $G^1$ continuité non plus.

## 4. Raccord entre N carreaux concourant en un point

### 4.1. Hypothèse

Dans tout la suite, nous nous placerons dans le cadre général où les vecteurs dérivés le long des frontières ne sont pas colinéaires. Le cas contraire correspondant à des situations exceptionnelles sera évoqué dans la section 4.3..

### 4.2. Formulation générale des contraintes sur les fonctions de raccordement

Nous supposerons que nous avons cette fois N carreaux concourant en un point O à raccorder $G^1$ continûment. Nous introduirons donc 3N fonctions de raccordement que l'on notera :

$$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \quad avec \quad i \in [1..N]$$

Les conditions de coplanarité s'écrivent alors :

$$\alpha_i(w_{ii+1})\frac{\partial Q_{i+1}(u_{i+1},v_{i+1})}{\partial v_{i+1}}\bigg|_{\substack{u_{i+1}=w_{i+1}\\ v_{i+1}=0}} + \beta_i(w_{ii+1})\frac{\partial Q_i(u_i,v_i)}{\partial u_i}\bigg|_{\substack{v_i=w_{i+1}\\ u_i=0}} + \gamma_i(w_{ii+1})L'_{ii+1}(w_{ii+1}) = 0$$

avec $i \in [1..N]$ choisi de manière cyclique.

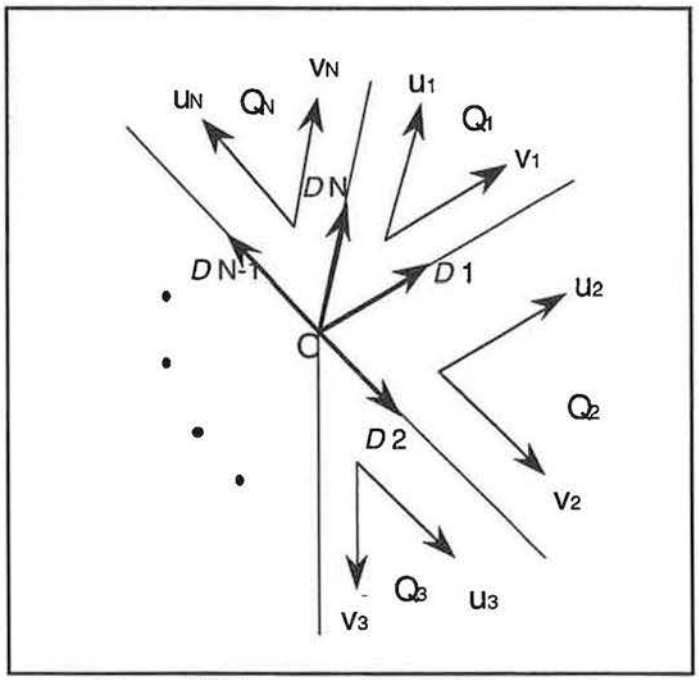



Figure IX.4 : *raccord entre N carreaux*

Les paramètres sont choisis comme sur la figure IX.4 afin de simplifier les notations. Les conditions de coplanarité évaluées au point O deviennent alors :

$$\alpha_i(0)\frac{\partial Q_{i+1}(u_{i+1},v_{i+1})}{\partial v_{i+1}}\bigg|_{\substack{u_{i+1}=0\\ v_{i+1}=0}} + \beta_i(0)\frac{\partial Q_i(u_i,v_i)}{\partial u_i}\bigg|_{\substack{v_i=0\\ u_i=0}} + \gamma_i(0)\,L'_{ii+1}(0) = 0$$

Comme auparavant, nous cherchons à déterminer le nombre de contraintes sur les fonctions $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$. On peut calculer le nombre de contraintes imposées aux fonctions de raccordement en remarquant qu'au point O :

$$L'_{ii+1}(0) = \left.\frac{\partial Q_i(u_i, v_i)}{\partial v_i}\right|_{\substack{u_i=0\\v_i=0}} = \left.\frac{\partial Q_{i+1}(u_{i+1}, v_{i+1})}{\partial u_{i+1}}\right|_{\substack{u_{i+1}=0\\v_{i+1}=0}}$$

La suite du raisonnement est simple. On écrit les conditions de coplanarité pour i=1, i=2 et i=3. En combinant les trois équations deux à deux, nous éliminons les informations concernant la dérivée le long de la trajectoire pour i=2. Nous recommençons le processus en introduisant la condition de coplanarité suivante. L'exemple traité ci dessous est plus parlant. Notons *D*i les dérivées dans la direction i précisée sur la figure IX.4.

$$\alpha_1(0)D3 + \beta_1(0)D1 + \gamma_1(0)D2 = 0$$

$$\alpha_2(0)D4 + \beta_2(0)D2 + \gamma_2(0)D3 = 0$$

$$\alpha_3(0)D5 + \beta_3(0)D3 + \gamma_3(0)D4 = 0$$

De ces trois premières équations, on peut trouver (par des manipulations simples de multiplication et d'addition) une fonction linéaire *f* telle que :

$$f(D1, D2, D4, D5) = 0.$$

Avec la condition suivante : $\alpha_4(0)D6 + \beta_4(0)D4 + \gamma_4(0)D5 = 0$, on peut trouver une nouvelle fonction linéaire, que nous noterons *f* à nouveau, par souci de simplicité, telle que :

$$f(D1, D2, D5, D6) = 0.$$

En procédant ainsi pas à pas, jusqu'à l'avant dernière condition de coplanarité, nous trouvons une fonction f linéaire telle que :

$$f(D1, D2, D(N-1), DN) = 0$$

Il ne nous reste plus qu'à identifier les coefficients de *f* avec les coefficients de la dernière condition de coplanarité : $\alpha_N(0)D2 + \beta_N(0)DN + \gamma_N(0)D1 = 0$. Ceci suppose, bien entendu, que les *D*i ne soient pas confondus. L'identification précédente fournit quatre contraintes sur les fonctions de raccordement.

Maintenant que nous connaissons le nombre de contraintes à déterminer, leur mode de détermination n'a pas d'importance. Nous proposons une méthode systématique basée sur le calcul de déterminants tridiagonaux. Nous pouvons écrire l'ensemble des conditions de coplanarité sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{N-1} & \gamma_{N-1} & \alpha_{N-1} \\ \alpha_N & 0 & 0 & \beta_N & \gamma_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D1 \\ D2 \\ \vdots \\ D(N-1) \\ DN \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(9.1)}$$

Notons $M$ la matrice composée des valeurs en 0 des fonctions de raccordement. La matrice M n'est pas inversible. En effet, si elle l'était, en multipliant les deux membres de l'équation **(9.1)** par $M^{-1}$, on arriverait à la conclusion que le vecteur composé des vecteurs dérivés est le vecteur nul (de dimension 3×N). Ce qui par hypothèse est absurde (rappelons qu'avec le mode de dérivation que nous avons proposé précédemment, le vecteur dérivé indique la direction de la tangente, qui est évidemment non nulle). Nous avons donc la relation suivante :

$$\det(M) = 0$$

Réécrivons l'équation **(9.1)** sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{N-1} & \gamma_{N-1} & \alpha_{N-1} \\ \alpha_N & 0 & 0 & \beta_N & \gamma_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D1 \\ D2 \\ \vdots \\ D(N-1) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_1 DN \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ -\alpha_{N-1} DN \\ -\gamma_N DN \end{bmatrix}$$

En supprimant la dernière colonne et la dernière ligne de la nouvelle matrice constituée des fonctions $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, on aboutit au système suivant :

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \beta_{N-2} & \gamma_{N-2} & \alpha_{N-2} \\ \alpha_{N-1} & 0 & 0 & \beta_{N-1} & \gamma_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D1 \\ D2 \\ \vdots \\ D(N-2) \\ D(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_1 DN \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ -\alpha_{N-1} DN \end{bmatrix}$$

Si $M_{1..N-1,1..N-1}$ représente la matrice $M$ amputée de la ligne $N$ et de la colonne $N$, la dernière équation s'écrit :

$$M_{1..N-1,1..N-1} D_{1..N-1} = V$$

Le déterminant de $M_{1..N-1,1..N-1}$ est nul. Pour le prouver, supposons le contraire. Alors $M_{1..N-1,1..N-1}$ est inversible. D'après le vecteur $V$, cela signifierait que toute dérivée $D$i est colinéaire à $DN$. Or ceci est contraire aux hypothèses de départ. Donc $M_{1..N-1,1..N-1}$ n'est pas

inversible et son déterminant est nul. Nous obtenons ainsi une première contrainte sur les coefficients des fonctions de raccordement :

$$\det(M_{1..N-1,1..N-1}) = 0$$

Nous savons que nous n'avons que quatre contraintes à formuler. Il nous suffit donc d'en trouver trois autres (nous n'utiliserons pas det($M$) =0 pour des raisons de symétrie). Ces trois autres contraintes s'obtiennent en utilisant le même raisonnement pour les matrices : $M_{1..N-1,2..N-1}$, $M_{2..N-1,1..N-1}$ et $M_{2..N-1,2..N-1}$. Les quatre contraintes sont donc finalement :

(1) $\det(M_{1..N-1,1..N-1}) = 0$

(2) $\det(M_{1..N-1,2..N-1}) = 0$

(3) $\det(M_{2..N,1..N}) = 0$

(4) $\det(M_{2..N,2..N}) = 0$

Il est facile de vérifier que ces contraintes sont indépendantes. En effet la contrainte (1) est la seule qui mette en jeu le scalaire $\gamma_i$, la contrainte (2) le scalaire $\beta_1$, la contrainte (3) le scalaire $\alpha_N$ et la contrainte (4) le scalaire $\gamma_N$. Le facteur de ces scalaires dans les contraintes est le même : il s'agit du déterminant de la matrice $M_{2..N-1,2..N-1}$. Si ce déterminant est non nul, les scalaires $\gamma_i, \gamma_N, \alpha_1$ et $\alpha_N$ apparaissent explicitement dans les contraintes confirmant le fait qu'elles sont indépendantes. Le cas où le déterminant de la matrice $M_{2..N-1,2..N-1}$ amène à des conditions triviales où la résolution des contraintes, qui restent indépendantes, est simple.

### 4.3. Cas particuliers

*Compatibilité avec les situations précédentes*

Nous laisserons le soin au lecteur de vérifier la validité des formules pour N=3 et N=4, en se servant des exemples que nous avons donnés dans les sections précédentes.

*Cas où l'on choisit tous les $\gamma_i(0)$ nuls*

Supposons, maintenant, que nous voulions imposer lors des raccords l'égalité des vecteurs dérivés de part et d'autre des frontières. Autrement dit, nous imposons :

$$\begin{cases} \gamma_i = 0 \\ \alpha_i = A \quad \text{pour tout } i \in [1..N] \\ \beta_i = A \end{cases}$$

Nous obtenons alors, pour la matrice $M$, la formulation suivante :

$$M = A\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

D'après la contrainte (3), il faut que $\det(M_{1..N-1,1..N-1}) = 0$. Or on a :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^N \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^N \begin{cases} 0 & \text{si } N\text{-}2 = 2k+1 \\ 1 & \text{si } N\text{-}2 = 4k \\ -1 & \text{si } N\text{-}2 = 4k+2 \end{cases}$$

Nous avons donc nécessairement, pour vérifier la contrainte (3), N multiple de quatre. Les autres contraintes sont liées à cause de la nullité des fonctions $\gamma_i$. Si on continue l'interprétation géométrique des contraintes, on constate que les couples ($D$i, $D$i+2) sont constitués de vecteurs colinéaires. On en arrive à la conclusion que l'ensemble des $D$i où $i$ est pair est finalement constitué de vecteurs colinéaires. Si N>4, cela signifie que plus de trois vecteurs dérivés sont colinéaires, ce qui est contraire aux hypothèses de départ.

En conclusion, on ne peut choisir des $\gamma_i$ nuls que si le nombre de carreaux à raccorder est égal à quatre.

*Contrainte sur les fonctions de raccordement* $\alpha_i$ et $\beta_1$ *évaluées en zéro.*

On peut montrer que pour tout N on a la contrainte :

$$\prod_{i=1}^{N} \alpha_i(0) = \prod_{i=1}^{N} \beta_i(0)$$

En effet nous avons :

$$\det(M_{1..N-1,2,N}) = \det(M_{2..N,1..N-1}) = 0$$

Et donc :

$$\alpha_N \det(M_{1..N-1,2,N}) = \beta_1 \det(M_{2..N,1..N-1})$$

Or des calculs élémentaires nous donnent :

$$\alpha_N \det(M_{1..N-1,2,N}) = \prod_{i=1}^{N} \alpha_i(0) \pm \alpha_N \beta_1 \det(M_{2..N-1,2..N-1})$$

$$\beta_1 \det(M_{2..N,1..N-1}) = \prod_{i=1}^{N} \beta_i(0) \pm \alpha_N \beta_1 \det(M_{2..N-1,2..N-1})$$

Avec ces trois équations, il est clair que :

$$\prod_{i=1}^{N} \alpha_i(0) \pm \alpha_N \beta_1 \det(M_{2..N-1,2..N-1}) = \prod_{i=1}^{N} \beta_i(0) \pm \alpha_N \beta_1 \det(M_{2..N-1,2..N-1})$$

et le résultat en découle.

Cette contrainte est particulièrement exploitable lorsque les $\alpha_i$ sont tous choisis égaux à 1, ce qui est très fréquent dans la pratique.

### 4.4. Discussion

Les raisonnements précédents ne sont plus valables lorsque deux ou trois vecteurs dérivés consécutifs sont colinéaires. Une solution permettant de retrouver des contraintes sur les coefficients similaires aux précédentes serait de perturber certains vecteurs dérivés, dans le plan tangent en O, afin de supprimer les colinéarités gênantes des vecteurs dérivés. Selon les applications, une telle solution ne peut être envisagée. Il faut alors raisonner cas par cas.

- $Di$ et $D(i+1)$ sont colinéaires et $D(i+1) = aDi$ où $a$ est un scalaire réel.

Nous avons, grâce à l'équation **(9.1)**, les relations suivantes (nous omettons les symboles de l'évaluation en 0) :

$$\begin{cases} \alpha_i D(i+1) + \beta_i D(i-1) + \gamma_i Di = 0 \\ \alpha_{i+1} D(i+2) + \beta_{i+1} Di + \gamma_{i+1} D(i+1) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(9.2)}$$

Nous en déduisons facilement les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \beta_i = 0 \\ \alpha_{i+1} = 0 \\ a\alpha_i + \gamma_i = 0 \\ \beta_{i+1} + a\gamma_{i+1} = 0 \end{cases}$$

Le reste des contraintes s'obtient grâce à l'équation **(9.1)**, amputée des relations **(9.2)**, avec les méthodes de réduction utilisées dans la section 4.3.2..

- $D(i-1)$ et $D(i+1)$ sont colinéaires et $D(i+1) = aD(i-1)$ où $a$ est un scalaire réel.

Nous avons, grâce à l'équation **(9.1)**, les relations suivantes (nous omettons les symboles de l'évaluation en 0) :

$$\alpha_i D(i+1) + \beta_i D(i-1) + \gamma_i Di = 0 \qquad \textbf{(9.3)}$$

Nous en déduisons facilement les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \gamma_i = 0 \\ \alpha_i + a\beta_i = 0 \end{cases}$$

Le reste des contraintes s'obtient grâce à l'équation **(9.1)**, amputée de la relation **(9.3)**, avec les méthodes de réduction utilisées dans la section 4.3.2..

- $D(i-1)$, $Di$ et $D(i+1)$ sont colinéaires et $D(i+1) = aDi$, $D(i+1) = bD(i-1)$ où $a$ et $b$ sont des scalaires réels.

Nous avons, grâce à l'équation **(9.1)**, les relations suivantes (nous omettons les symboles de l'évaluation en 0) :

$$\begin{cases} \alpha_{i-1} Di + \beta_{i-1} D(i-2) + \gamma_{i-1} D(i-1) = 0 \\ \alpha_i D(i+1) + \beta_i D(i-1) + \gamma_i Di = 0 \\ \alpha_{i+1} D(i+2) + \beta_{i+1} Di + \gamma_{i+1} D(i+1) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(9.4)}$$

Nous en déduisons facilement les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \beta_{i-1} = 0 \\ b\alpha_{i-1} + a\gamma_{i-1} = 0 \\ \alpha_i + b\beta_i + a\gamma_i = 0 \\ \alpha_{i+1} = 0 \\ a\beta_{i+1} + \gamma_{i+1} = 0 \end{cases}$$

Le reste des contraintes s'obtient grâce à l'équation **(9.1)**, amputée de la relation **(9.4)**, avec les méthodes de réduction utilisées dans la section 4.3.2..

Pour finir, remarquons que nous avons rarement besoin d'utiliser ces contraintes. En effet, en général, il n'y a que peu d'intérêt à déterminer les coefficients des fonctions de raccordement en fonction des surfaces à raccorder. On détermine d'abord les fonctions de raccordement puis ensuite seulement les surfaces adjacentes au point O. Les cas particuliers que nous venons d'étudier ne sont utiles que lorsque l'utilisateur désire explicitement que certains vecteurs dérivés soient colinéaires.

# Chapitre X : RACCORDS ENTRE PLUSIEURS SURFACES A POLES CONCOURANT EN UN POINT

## 1. Introduction

Les surfaces représentées par des produits tensoriels sont les plus souvent utilisées en C.A.O., en raison de la simplicité de leur concept. Parmi ces modèles, deux types de surfaces sont particulièrement attrayants et fréquemment utilisés dans la modélisation de surfaces complexes : les surfaces de Bézier et les surfaces B-splines (et son cortège d'améliorations : Bêta-spline, A-spline,...). Leur attrait est dû à leur manipulation aisée, ainsi qu'à leur intéressantes propriétés géométriques.

Après avoir évoquer (enfin) la définition des carreaux de Bézier, nous mettrons en évidence les principales contraintes permettant de réaliser des raccords $G^1$ continus entre N carreaux concourant en un point. Ces dernières contraintes portent sur les points de contrôle définissant les surfaces et sont à mettre en relation avec les contraintes sur les fonctions de raccordement que nous avons exposées dans le chapitre précédent. Ces contraintes ont largement été étudiées dans la littérature [BEZI 70][BEZI 86][FARI 82][SCHM 87], et nous nous contenterons de synthétiser les résultats importants.

En ce qui concerne les raccords entre carreaux B-splines, les recherches ont seulement consisté à expliciter les transformations permettant de passer d'une représentation B-spline à une représentation de Bézier. Afin d'éviter ces transformations, nous exposerons de nouveaux résultats concernant l'élévation locale du degré d'un carreau ou d'une courbe B-spline. Ces résultats nous permettront d'obtenir les $G^1$ contraintes, sur les points de contrôle des surfaces à raccorder, de manière originale.

## 2. Raccord $G^1$ continu entre surfaces de Bézier

### 2.1. Représentation des carreaux de Bézier

Dans cette section, nous donnons rapidement les définitions des courbes et des carreaux de Bézier. La littérature sur le sujet est très volumineuse, et nous laisserons le lecteur se reporter à [DU 88][BART 88][BOEH 84] pour plus de précisions.

• Une Courbe de Bézier $C(u)$ est définie par la somme de $n$+1 vecteurs clés $P_i$ (ou points de contrôle) pondérée par les fonctions de Bernstein de degré $n$. On peut donc écrire $C(u)$ sous la forme :

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(u)$$

où $B_{i,n}(u)$ est le ième élément de la base de Bernstein Bézier dans l'espace des polynômes de degré $n$ sur le domaine [0,1]:

$$B_{i,n}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$$

Remarquons que $C(0) = P_0$ et que $C(1) = P_n$. Une des principales propriétés de ces courbes est l'inclusion de la courbe dans l'enveloppe convexe de tous les points de contrôle. Cette propriété est due à la relation sur les polynômes de Bersntein :

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u) = 1$$

• Une surface de Bézier $Q(u,v)$ de degré $n \times m$ peut être définie comme le produit tensoriel de deux courbes de Bézier de degré n et m. La surface est représentée par $n \times m$ points de contrôle $P_{ij}$ :

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{ij} B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) \text{ avec } (u,v) \in [0,1]^2$$

La propriété de l'enveloppe convexe est conservée. Notons, enfin, que la surface passe par les quatre points de contrôle situés aux quatre coins de la matrice $P_{ij}$.

### 2.2. Propriétés géométriques des surfaces de Bézier

• Les frontières de la surface $Q(u,v)$ (c'est-à-dire les courbes $Q(0,v)$, $Q(1,v)$, $Q(u,0)$ et $Q(u,1)$) sont des courbes de Bézier définies par des lignes ou des colonnes de la matrice des points de contrôle. Par exemple :

$$Q(0,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{ij}B_{i,n}(0)B_{j,m}(v)$$

$$Q(0,v)=\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}(P_{ij}B_{i,n}(0))B_{j,m}(v)$$

Et comme $B_{i,n}(0)=0$ pour tout i dans $[0..n]$,

$$Q(0,v)=\sum_{j=0}^{m}P_{0j}B_{j,m}(v) \qquad \textbf{(10.1)}$$

• En utilisant la relation :

$$B_{i,n}(u)=(1-u)B_{i,n-1}(u)+uB_{i-1,n-1}(u)$$

on peut élever artificiellement le degré $n$ d'une courbe au degré supérieur. Par exemple si :

$$C(u)=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,n}(u)$$

alors $C(u)=\sum_{i=0}^{n+1}P_i'B_{i,n}(u)$ avec :

$$P_i'=\frac{n+1-i}{n+1}P_i+\frac{i}{n+1}P_{i-1}$$

Notons que deux points fictifs $P_{-1}$ et $P_{n+1}$ apparaissent afin de simplifier les notations.

• La dérivée transversale le long d'une frontière peut être exprimée sous la forme d'une courbe de Bézier dépendant seulement de deux lignes ou de deux colonnes adjacentes dans la matrice des points de contrôle. Par exemple, pour $Q(1,v)$ :

$$\frac{\partial}{\partial u}Q(1,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{ij}\left.\frac{dB_{i,n}(u)}{du}\right|_{u=1}B_{j,m}(v)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}Q(1,v)=\sum_{j=0}^{m}(\sum_{i=0}^{n}P_{ij}\left.\frac{dB_{i,n}(u)}{du}\right|_{u=1})B_{j,m}(v)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}Q(1,v)=m\sum_{j=0}^{m}(P_{nj}-P_{n-1,j})B_{j,m}(v)$$

### 2.3. $G^0$ et $G^1$ contraintes entre deux carreaux de Bézier

Dans cette section, nous donnons explicitement les équations représentant la $G^0$ et $G^1$ continuité entre deux carreaux de Bézier.

Notons (figure X.1) $Q^1(u_1, v_1)$ un carreau de Bézier de degré $n_1 \times m_1$, $Q^2(u_2, v_2)$ un carreau de Bézier de degré $n_2 \times m_2$ et $\Gamma(v)$ la frontière commune à ces deux carreaux, c'est-à-dire que $\Gamma(v) = Q^1(1, v) = Q^2(0, v)$.

Remarquons que nous pouvons choisir $m_1 = m_2 = m$ : si, dans la définition initiale des carreaux, $m_1$ et $m_2$ sont différents, on peut, grâce à la technique de l'élévation du degré, augmenter jusqu'à $m$ le degré du carreau possédant le degré le plus faible.

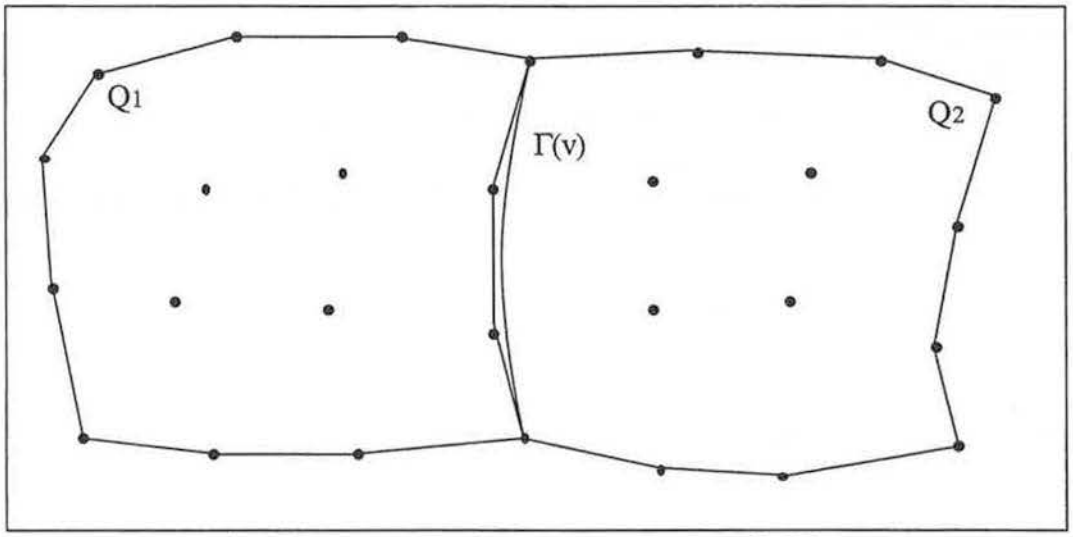



Figure X.1 : *raccord entre deux carreaux de Bézier*

#### 2.3.1. $G^0$ continuité

Les contraintes de continuité en position entre les deux surfaces $Q^1(u_1, v_1)$ et $Q^2(u_2, v_2)$ reviennent à dire que les points de contrôle définissant la frontière commune sont identiques. Cette conclusion est une conséquence directe de la première propriété de la section 2.3. En effet, avec l'équation **(10.1)** nous pouvons écrire que :

$$Q^1(1, v) = \sum_{j=0}^{m} P^1_{n_1 j} B_{j,m}(v) \text{ et } Q^2(0, v) = \sum_{j=0}^{m} P^2_{0j} B_{j,m}(v)$$

D'où : $\sum_{j=0}^{m} (P^1_{n_1 j} - P^2_{0j}) B_{j,m}(v) = 0$ et comme les fonctions de Bernstein représentent une base de l'espace des polynôme de degré $m$, on a la relation :

$$P^1_{n_1 j} = P^2_{0j} \text{ pour } j \in [0..m]$$

### 2.3.2. $G^1$ continuité

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les deux surfaces $Q^1(u_1,v_1)$ et $Q^2(u_2,v_2)$ se raccordent $G^1$ continûment si les dérivées transversales aux deux surfaces sur la frontière et la dérivée le long de la frontière sont coplanaires (conditions de coplanarité). Donc $Q^1(u_1,v_1)$ et $Q^2(u_2,v_2)$ se raccordent de manière $G^1$ continue si les quantités $\frac{\partial}{\partial u_1}Q^1(1,v)$, $\frac{\partial}{\partial u_2}Q^2(0,v)$ et $\Gamma'(v)$ sont coplanaires (avec la convention $Q(0,v)=\frac{\partial}{\partial u}Q(u,v)\Big|_{u=0}$). Cela revient à dire que nous pouvons trouver trois fonctions polynomiales $\alpha(v)$, $\beta(v)$ et $\gamma(v)$ telles que :

$$\alpha(v)\frac{\partial}{\partial u_1}Q^1(1,v)+\beta(v)\frac{\partial}{\partial u_2}Q^2(0,v)+\gamma(v)\Gamma'(v)=0 \qquad \textbf{(10.2)}$$

Avec les égalités suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial u_1}Q^1(1,v)=n_1\sum_{j=0}^{m}(P^1_{n_1 j}-P^1_{n_1-1 j})B_{j,m}(v)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_2}Q^2(0,v)=n_2\sum_{j=0}^{m}(P^1_{1j}-P^1_{0j})B_{j,m}(v)$$

$$\Gamma'(v)=m\sum_{j=0}^{m-1}(P^2_{0j+1}-P^2_{0j})B_{j,m-1}(v)=m\sum_{j=0}^{m-1}(P^1_{n_1 j}-P^1_{n_1-1j})B_{j,m-1}(v)$$

et en notant : $C_j=P^2_{0j}=P^1_{n_1 j}$, on peut réécrire l'équation **(10.2)** sous la forme :

$$\alpha(v)n_1\sum_{j=0}^{m}(C_j-P^1_{n_1-1j})B_{j,m}(v)+\beta(v)n_2\sum_{j=0}^{m}(P^1_{1j}-C_j)B_{j,m}(v)+\gamma(v)m\sum_{j=0}^{m-1}(C_{j+1}-C_j)B_{j,m-1}(v)=0$$

On peut simplifier cette équation pour des choix particuliers des fonctions de raccordement. Si nous choisissons par exemple :

$$\begin{cases}\beta(v)=\beta\alpha(v)\\ \gamma(v)=(\gamma_0(1-v)+\gamma_1 v)\alpha(v)\end{cases}$$

Nous arrivons à :

$$\sum_{j=0}^{m}[n_1(C_j-P^1_{n_1-1j})+\beta n_2(P^1_{1j}-C_j)+\gamma_0(m-j)(C_{j+1}-C_j)+\gamma_1 j(C_j-C_{j-1})]B_{j,m}(v)=0$$

Et comme les $B_{j,m}(v)$ forment une base de l'espace des polynômes de degré $m$, nous obtenons finalement l'ensemble d'équations suivant comme condition de $G^1$ continuité :

$$n_1(C_j - P^1_{n_1-1j}) + \beta n_2(P^1_{1j} - C_j) + \gamma_0(m-j)(C_{j+1} - C_j) + \gamma_1 j(C_j - C_{j-1}) = 0 \qquad \textbf{(10.3)}$$

avec $0 \leq j \leq m$

### 2.3.3. Conclusion

Wen hui DU à montré dans [DU 88] qu'il était relativement aisé d'utiliser la condition **(10.3)** afin d'obtenir des raccords $G^1$. On peut constater aussi que l'élévation d'une unité du degré d'une des fonctions de raccordement provoquerait l'augmentation de m et donc du nombre de contraintes.

De nombreux choix pour les fonctions de raccordement ont été étudiés [BEEK 86][CHIY 83]. Dans tous les cas, on jongle avec les contraintes sur les points de contrôle et les degrés des fonctions de raccordement.

## 2.4. Cas de N carreaux concourant en un point

Nous nous proposons maintenant d'étudier le cas où le nombre de carreaux de Bézier à raccorder est supérieur ou égal à 3. Nous choisirons les notations suivantes :

N : le nombre de carreaux convergeant en O à raccorder
$Q^i(u_i, v_i)$ : carreaux de Bézier
$n_i \times m_i$ : degré du carreau $Q^i(u_i, v_i)$
$\Gamma_i$ : frontière commune des carreaux $Q^i(u_i, v_i)$ et $Q^{i+1}(u_{i+1}, v_{i+1})$
$L_i$ : point de contrôle de $\Gamma_i$ adjacent à O
$E_i$ : point de contrôle de $\Gamma_i$ adjacent à $L_i$
$I_i$ : point de contrôle de $Q^i(u_i, v_i)$ adjacent à $L_i$ et $L_{i+1}$

Ces notations sont résumées sur la figure X.2. Nous choisirons aussi pour les fonctions de raccordement les quantités suivantes :

$$\begin{cases} \beta_i(v) = \beta_i \alpha_i(v) \\ \gamma_i(v) = (\gamma_0^i(1-v) + \gamma_1^i v)\alpha_i(v) \end{cases}$$

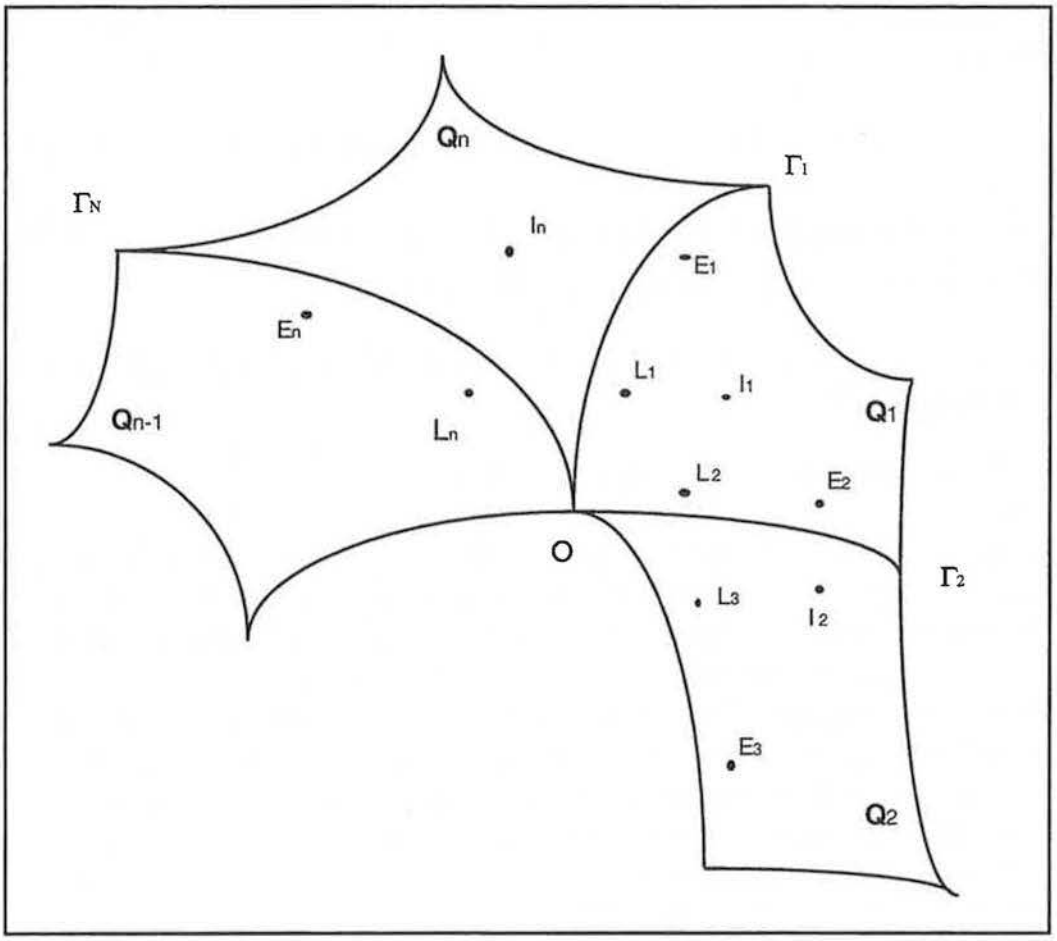



Figure X.2 : *raccord entre N carreaux de Béziers*

### 2.4.1. $G^0$ continuité

Une fois le point O construit, les contraintes de continuité en position le long de chaque frontière $\Gamma_i$ sont indépendantes. Comme dans le cas N=2, ces contraintes impliquent l'égalité des points de contrôle qui définissent les frontières de deux carreaux adjacents. Ce nombre de points doit être le même, ce qui impose pour les degrés des surfaces : $m_i = n_{i+1}$

### 2.4.2. $G^1$ continuité

Pour obtenir la $G^1$ continuité sur la surface composée des N carreaux de Bézier, nous appliquons les contraintes trouvées dans le cas N=2 le long de chaque frontière $\Gamma_i$. Le problème est que les contraintes s'entrelacent autour du point O. Par exemple, le point $I_1$ intervient dans la contrainte le long de la frontière $\Gamma_1$ et le long de la frontière $\Gamma_2$. Nous avons donc un ensemble de N×m contraintes. Les contraintes entrelacées sont les deux premières, les autres relèvent du cas classique du raccord entre deux carreaux. Les deux premières contraintes peuvent s'écrire :

Pour i=0 :

$$n_{j+1}(L_j - O) + \beta n_{j-1}(O - L_{j-1}) + \gamma_0^j (L_j - 0) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq j \leq n$$

Pour i=1 :

$$n_{j+1}(I_j - L_j) + \beta_i n_{j-1}(L_j - I_{j-1}) + \gamma_0^i (n_j - 1)(E_j - L_j) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq j \leq n$$

Afin de satisfaire les $G^1$ contraintes, les points de contrôle O, $I_j$, $L_j$ et $E_j$ devront être calculés de manière à satisfaire les deux dernières contraintes.

Le calcul des points de contrôle lors d'un raccord $G^1$ continu de N surfaces de Bézier est détaillé dans [DU 88].

### 3. $G^1$ Contraintes entre carreaux B-splines

Afin d'éviter les nombreux passages entre la représentation B-spline d'une surface et sa représentation de Bézier, nous proposons une méthode de calcul direct des $G^1$ contraintes entre des carreaux B-splines. Nous avons choisi de travailler les B-splines uniformes, qui sont les plus utilisées dans la pratique.

Nous avons vu, dans la section précédente, l'importance de la relation permettant d'élever le degré d'une courbe. Il est difficile d'élever le degré des fonctions de base B-splines en raison de leur définition par récurrence (rappelons que les polynômes de Bernstein sont définis explicitement). Il est cependant nécessaire de pouvoir élever le degré d'une courbe afin de pouvoir représenter les diverses dérivées mises en jeu dans la condition de coplanarité dans la même base de polynômes. Après avoir rappelé les définitions et les principales propriétés des B-splines, nous proposerons donc une méthode d'élévation du degré dans le cadre des B-splines uniformes. Nous établirons ensuite les $G^1$ contraintes entres deux carreaux B-splines, puis nous discuterons des possibilités de raccords entre plusieurs carreaux B-splines, en tenant compte des caractéristiques des surfaces B-splines (définition par morceaux).

#### 3.1. Représentation par des B-splines

• Les fonctions B-splines de base d'ordre $k$ sont définies par récurrence de la manière suivante (pour plus de précision voir [BART 89] et annexe 1):

$$N_{i,1} = \begin{cases} 1 & \text{pour } u \in [u_i, u_{i+1}] \\ 0 & \text{pour } u \notin [u_i, u_{i+1}] \end{cases}$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k-1} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k} - u}{u_{i+k} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u)$$ pour i>1, $(u_i)_i$ étant le vecteur nodal.

Les caractéristiques des B-splines de base sont rappelées dans l'annexe 1.

• Une courbe B-spline élémentaire d'ordre $k$ peut être définie par :

$$C(u) = \sum_{i=0}^{k-1} V_i N_{i,k}(u)$$

où $\{V_i\}_{o \le i \le k-1}$ représente l'ensemble des $k$ points de contrôle de la courbe. Notons que la courbe $C(u)$ est de degré $k$-1. Les principales caractéristiques des courbes B-splines sont rappelées dans l'annexe 1.

• Une courbe B-spline est composée de plusieurs courbes élémentaires raccordées $k$-2 continûment et peut être représentée de la manière suivante :

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n} V_i N_{i,k}(u)$$

où $\{V_i\}_{o \le i \le n}$ représente l'ensemble des $n$+1 points de contrôle de la courbe

• Un carreau B-spline élémentaire $Q(u,v)$ d'ordre $k_1 \times k_2$ est défini comme le produit tensoriel de deux courbes B-splines, une d'ordre $k_1$, l'autre d'ordre $k_2$.

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^{k_1-1} \sum_{j=0}^{k_2-1} P_{ij} N_{i,k_1}(u) N_{i,k_2}(v)$$

où $\{P_{ij}\}_{o \le i \le k_1-1 \, o \le j \le k_2-1}$ représente l'ensemble des $k_1 \times k_2$ points de contrôle du carreau B-spline.

Une surface B-spline (dite parfois simplement carreau B-spline) $Q(u,v)$ d'ordre $k_1 \times k_2$ est composée de plusieurs carreaux élémentaires raccordés $G^{Min(k_1-2,k_2-2)}$ entre eux. On peut définir en toute généralité $Q(u,v)$ par :

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{ij} N_{i,k_1}(u) N_{i,k_2}(v)$$

où $\{P_{ij}\}_{o \le i \le n, o \le j \le m}$ représente l'ensemble des $n+1 \times m+1$ points de contrôle du carreau B-spline. Une surface B-spline est donc composée de $(n+2-k_1)(m+2-k_2)$ carreaux élémentaires d'ordre $k_1 \times k_2$.

### 3.2. B-splines uniformes

On dit que les fonctions de base B-spline sont uniformes si le vecteur nodal sur lequel elles sont définies est représenté par $\{u_i = i\}_{0 \le i}$ ; la définition initiale des fonctions de base se simplifie :

$$N_{i,k}(u)=\frac{u-i}{k-1}N_{i,k-1}(u)+\frac{i+k-u}{k-1}N_{i+1,k-1}(u)$$

Une fonction $N_{i,k}(u)$ a pour support l'intervalle $[u_i, u_{i+k-1}]$ et est construite par morceaux à l'aide de $k$ fonctions $b_i$ de degré ($k$-1) définies sur les intervalles intermédiaires $[u_i, u_{i+1}]$. Les fonctions $b_i$ sont raccordées $G^{(k-2)}$ continûment.

On peut, à l'aide des coefficients des $b_i$, construire une matrice $M^n_{Bspl}$ qui vérifie les propriétés suivantes pour des courbes et des carreaux élémentaires :

$$C(u)=[U]M^n_{Bspl}[V_i], \text{ où } [U]=[u^n\ u^{n-1}...1]$$

et $$Q(u,v)=[U]\,M^n_{Bspl}[P_{ij}]'M^n_{Bspl}{}'[V]$$

Par exemple, pour des B-splines uniformes d'ordre 4 (de degré 3), on retrouve la matrice bien connue :

$$M^3_{Bspl}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

L'avantages des B-spline uniformes est que l'on obtient les fonctions de base par simple translation de la première fonction $N_{0,k}(u)$. Le calcul des fonctions de base ne nécessite plus l'utilisation des formules de récurrence.

### 3.3. Elévation du degré d'une courbe B-spline

#### 3.3.1. Cas Général

On peut élever le degré d'une fonction de base B-spline $N_{i,k}(u)$ par une formule établie par PRAUTZCH [PRAU 84]] (voir aussi [BARR 88]). Notons qu'il est nécessaire de doubler des valeurs nodales afin de rendre compatibles les domaines de définition (figure X.3). La formule générale est fournie par la relation :

$$N_{i,k}(u)=\frac{1}{k}\sum_{j=i}^{j=i+k}N_{i,k+1}(u|u_j)$$

où $(u|u_j)$ signifie que la valeur nodale $u_j$ a été doublée. Le problème persistant est qu'une fois l'élévation du degré d'une fonction effectuée, on ne peut plus conserver une représentation définie sur un vecteur nodal uniforme. Donc, l'emploi des algorithmes utilisant la matrice $M^n_{Bspl}$ n'est plus possible, ce qui remet en cause de nombreuses applications classiques. Un autre problème est l'apparition de la somme introduisant de nombreux termes supplémentaires dans la représentation d'une courbe :

$$C(u)=\sum_{i=0}^{n}V_i\frac{1}{k}\sum_{j=i}^{j=i+k}N_{i,k+1}(u|u_j)=\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{j=i+k}V_iN_{i,k+1}(u|u_j)$$

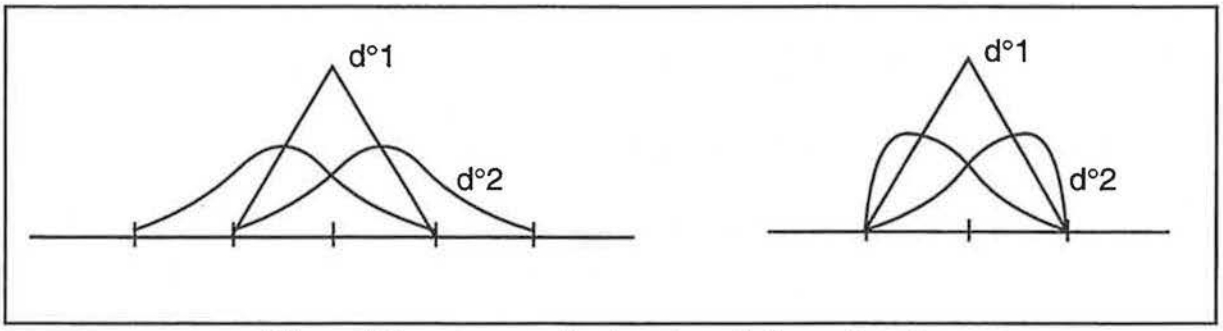



Figure X.3 : *supports des fonctions de bases B-spline*

### 3.3.2. Une approche locale de l'élévation du degré d'une courbe B-spline

#### 3.3.2.1. Description du problème

Pour résoudre les $G^1$ contraintes entre carreaux B-splines, nous avons besoin de pouvoir élever le degré des courbes concernées par la condition de coplanarité. Lorsque les fonctions de raccordement sont choisies avec des degrés rendant les termes de cette condition inégaux quant aux degrés, l'élévation du degré de certains de ces termes devient indispensable. C'est notamment le cas dans la pratique (pour les carreaux de Bézier) où l'élévation du degré de $\Gamma(v)$ est souvent nécessaire.

Nous raisonnerons dans le cas général où $\Gamma(u)$ est une courbe B-spline élémentaire d'ordre quelconque. Nous adopterons les notations suivantes pour $\Gamma(u)$ et $\Gamma'(u)$ :

$$\Gamma(u)=[U]M_{Bspl}^{n}{}^{t}[V_i]$$

$$\Rightarrow \Gamma'(u)=[U']M_{Bspl}^{n}{}^{t}[V_i]$$

Le but de cette section est de pouvoir exprimer, tout en gardant une représentation à l'aide de B-splines uniformes, $\Gamma'(u)$ en fonction de $[U]\,M_{Bspl}^{n}$ et non plus de $[U']\,M_{Bspl}^{n}$.

#### 3.3.2.2. Introduction de la matrice $M_{elev}^{n}$

Dans le but de formuler $\Gamma'(u)$ en fonction de $[U]\,M_{Bspl}^{n}$, il nous faut modifier les points de contrôle $[V_i]$. Nous proposons d'introduire la matrice $M_{elev}^{n}$ (représentant une fonction linéaire) transformant les points de contrôle $[V_i]$ en d'autres points que nous noterons $[V_i']$ de telle manière que :

$$\Gamma'(u) = [U] M_{Bspl}^{n}{}^{t}[V_i']$$

La matrice $M_{elev}^{n}$ représentant une fonction linéaire, nous pouvons écrire que :

$$^{t}[V_i'] = M_{elev}^{n}{}^{t}[V_i]$$

Nous avons donc la relation essentielle :

$$\Gamma'(u) = [U] M_{Bspl}^{n}{}^{t}[V_i'] = [U] M_{Bspl}^{n} M_{elev}^{n}{}^{t}[V_i]$$

Une solution simple pour calculer $M_{elev}^{n}$ est de résoudre le système linéaire à n équations défini par :

$$[U] M_{Bspl}^{n}{}^{t}[V_i'] = [U'] M_{Bspl}^{n} M_{elev}^{n}{}^{t}[V_i] \qquad \textbf{(10.4)}$$

### 3.3.2.3. Calcul simple de $M_{elev}^{n}$

Au lieu de résoudre le système précédent, nous proposons une méthode plus directe pour la résolution de $M_{elev}^{n}$. En fait, $\Gamma'(u)$ peut être simplement exprimée en fonction de $[U]$ (mais non en fonction de $[U]\ M_{Bspl}^{n}$) en introduisant la matrice $K^n$ définie par :

$$K^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous devons alors établir la relation :

$$\Gamma'(u) = [U] M_{Bspl}^{n}{}^{t}[V'_i] = [U] K^n M_{Bspl}^{n}{}^{t}[V_i]$$

Grâce à l'équation **(10.4)**, nous obtenons :

$$[U] K^n M_{Bspl}^{n}{}^{t}[V_i] = [U] M_{Bspl}^{n} M_{elev}^{n}{}^{t}[V_i]$$

En utilisant le fait que $[U]$ est la base canonique de l'espace des polynômes de degré n, et en remarquant que $[V_i]$ est quelconque, nous pouvons conclure que $K^n M_{Bspl}^{n} = M_{Bspl}^{n} M_{elev}^{n}$. Or, la construction de $M_{Bspl}^{n}$ nous assure que $\det(M_{Bspl}^{n}) = 1$. Donc, $M_{Bspl}^{n}{}^{-1}$ existe et nous donne alors pour expression de $M_{elev}^{n}$ :

$$M^n_{elev} = M^n_{Bspl}{}^{-1} K^n M^n_{Bspl}$$

*Exemple :* Dans le cas où $n$=3, la dernière relation nous donne :

$$M^3_{elev} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^3_{elev} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -11 & 18 & -9 & 2 \\ -2 & -3 & 6 & -1 \\ 1 & -6 & 3 & 2 \\ -2 & 9 & -18 & 11 \end{bmatrix}$$

### 3.4. $G^0$ et $G^1$ contraintes entre deux carreaux B-splines élémentaires

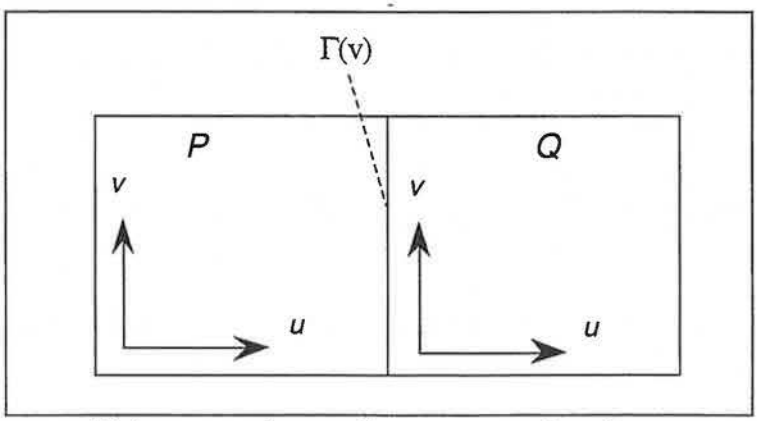
#### 3.4.1. continuité $G^0$

Les résultats des sections suivantes s'appliquent aux carreaux B-splines uniformes. Le traitement dans le cas général étant difficile à formaliser, nous traiterons entièrement le cas où les B-splines sont d'ordre 4. La généralisation n'est cependant pas difficile à obtenir car les raisonnements restent les mêmes que pour les cubiques. De plus, contrairement aux surfaces de Bézier, en pratique nous n'utiliserons que rarement des degrés supérieurs à 5.

Soient $P$ et $Q$ deux surfaces bicubiques (figure X.4) uniformes élémentaires définies par :

$$P(u,v) = [U]\, M^n_{Bspl}[P_{ij}]^t M^n_{Bspl}{}^t[V] \quad (u,v) \in [0,1]^2$$

$$Q(u,v) = [U]\, M^n_{Bspl}[Q_{ij}]^t M^n_{Bspl}{}^t[V] \quad (u,v) \in [0,1]^2$$




X.4 : *raccord entre deux carreaux B-splines*

Afin d'établir la $G^0$ continuité, il est nécessaire de formuler analytiquement le fait que $P$ et $Q$ ont une frontière commune $\Gamma(v)$ :

$$\Gamma(v) = P(1,v) = Q(0,v)$$

Les relations suivantes proviennent directement des définitions des carreaux :

$$Q(0,v) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]\, M^3_{Bspl} [Q_{ij}]^t M^3_{Bspl}{}^t [V]$$

$$\Rightarrow Q(0,v) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} Q_{11} + 4Q_{21} + Q_{31} \\ \vdots \\ Q_{14} + 4Q_{24} + Q_{34} \end{bmatrix}^t M^3_{Bspl}{}^t [V]$$

$$P(1,v) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} P_{21} + 4P_{31} + P_{41} \\ \vdots \\ P_{24} + 4P_{34} + P_{44} \end{bmatrix}^t M^3_{Bspl}{}^t [V]$$

Notons que $P(1,v)$ et $Q(0,v)$ sont des courbes B-splines de degré trois. Dire qu'elles sont confondues revient à dire que leurs points de contrôle sont identiques. D'où la $G^0$ contrainte :

$$Q_{1i} + 4Q_{2i} + Q_{3i} = P_{2i} + 4P_{3i} + P_{4i} \quad i \in [1..4]$$

Dans la suite, nous noterons $R_i$ ces points de contrôle définissant la frontière commune.

### 3.4.2. $G^1$ continuité avec $\gamma(v)$ constant

Comme pour les surfaces de Bézier, la condition nécessaire pour la $G^1$ continuité est satisfaite lorsque les vecteurs suivants sont coplanaires (c'est-à-dire coplanaires en tout point de $\Gamma(v)$) :

$$\frac{\partial}{\partial u} P(u,v)\Big|_{u=1} ; \frac{\partial}{\partial u} Q(u,v)\Big|_{u=0} ; \Gamma'(v)$$

La condition de coplanarité s'écrit donc en choisissant classiquement pour les fonctions de raccordement $\alpha(v)$, $\beta(v)$ et $\gamma(v)$ :

$$\alpha(v)\frac{\partial}{\partial u} P(u,v)\Big|_{u=1} + \beta(v)\frac{\partial}{\partial u} Q(u,v)\Big|_{u=0} + \gamma(v)\Gamma'(v) = 0 \qquad \textbf{(10.5)}$$

Le calcul des vecteurs dérivés s'effectue le long de $\Gamma(v)$ de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial u} P(u,v)\Big|_{u=1} = [U']\, M^3_{Bspl} [P_{ij}]^t M^3_{Bspl}{}^t [V]$$

$$\frac{\partial}{\partial u}P(u,v)\Big|_{u=1} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]M^3_{Bspl}[P_{ij}]^t M^3_{Bspl}{}^t[V]$$

$$\frac{\partial}{\partial u}P(u,v)\Big|_{u=1} = [0 \quad -3 \quad 0 \quad 3][P_{ij}]^t M^3_{Bspl}{}^t[V]$$

Avec la même méthode, nous trouvons :

$$\frac{\partial}{\partial u}Q(u,v)\Big|_{u=1} = [-3 \quad 0 \quad 3 \quad 0][Q_{ij}]^t M^3_{Bspl}{}^t[V]$$

Remarquons que l'égalité des deux dernières relations assure la $C^1$ continuité le long de $\Gamma(v)$. Il reste, maintenant, à calculer $\Gamma'(v)$. Son calcul est une conséquence directe des sections précédentes :

$$\Gamma(v) = [R]^t M^3_{Bspl}{}^t[V] \Rightarrow \Gamma'(v) = [R]^t M^3_{Bspl}{}^t[V']$$

$$\Gamma'(v) = [V]M^3_{elev}M^3_{Bspl}{}^t[R]$$

$$\Gamma'(v) = {}^t([V]M^3_{elev}M^3_{Bspl}{}^t[R])$$

$$\Gamma'(v) = ([R]^t M^3_{elev}{}^t M^3_{Bspl}{}^t[V])$$

Avec ces résultats, l'équation **(10.5)** peut être réécrite sous une forme similaire à celle correspondant aux surfaces de Bézier. La $G^1$ contrainte s'écrit donc sous sa forme finale :

$$[\alpha(v)[0 \quad -3 \quad 0 \quad 3][P_{ij}] + \beta(v)[-3 \quad 0 \quad 3 \quad 0][Q_{ij}] + \gamma(v)^t(M^3_{elev}{}^t[R])]^t M^3_{Bspl}{}^t[V] = 0$$

Il est possible de simplifier la $G^1$ contrainte quand les fonctions de raccordement vérifient : $\beta(v) = \beta\alpha(v)$ et $\gamma(v) = \gamma\alpha(v)$. On aboutit à une formulation plus simple de la $G^1$ contrainte :

$$[0 \quad -3 \quad 0 \quad 3][P_{ij}] + \beta[-3 \quad 0 \quad 3 \quad 0][Q_{ij}] + \gamma^t(M^3_{elev}{}^t[R]) = 0$$

## 4. $G^1$ continuité avec $\gamma(v)$ linéaire

### 4.1. Généralités

Dans cette section, nous choisissons $\gamma(v)$ linéaire ($\gamma(v) = \gamma_0(1-v) + \gamma_1 v$). La matrice d'élévation n'est plus utilisable sous la forme précédente. En effet, le dernier terme de la relation de coplanarité fait apparaître des termes en $v$ et $(1-v)$ :

$$(\gamma_0(1-v)+\gamma_1 v)\Gamma'(v)=\gamma_0(1-v)[V']M_{Bspl}{}^t[V_i]+\gamma_1 v[V']M_{Bspl}{}^t[V_i]$$

La matrice $M^n_{elev}$ ne permet plus d'exprimer la quantité $\gamma(v)\Gamma'(v)$ en fonction du vecteur de paramètre $[V]$. Nous pouvons cependant introduire des matrices similaires à $M^n_{elev}$ pour exprimer la condition de coplanarité en fonction de $[V]$. Nous adoptons une méthode similaire au cas où $\gamma(v)$ est constant.

• Détermination des matrices $K^n_v$ et $K^n_{1-v}$

- La matrice $K^n_v$ vérifie la relation :

$$v[V']=[V]K^n_v$$

De simples calculs nous donnent :

$$K^n_v=\begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- La matrice $K^n_{1-v}$ vérifie la relation :

$$(1-v)[V']=[V]K^n_{1-v}$$

De simples calculs nous donnent :

$$K^n_v=\begin{bmatrix} -n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & -(n-1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

• Détermination des matrices $M^{n,v}_{elev}$ et $M^{n,1-v}_{elev}$

De la même manière que pour le passage de $[V']$ à $[V]$, on établit les relations :

$$M^{n,v}_{elev}=M^{-1}_{Bspl}K^n_v M_{Bspl}$$

$$M^{n,1-v}_{elev}=M^{-1}_{Bspl}K^n_{1-v}M_{Bspl}$$

### 4.2. Cas des B-splines de degré 3

Les calculs des différentes matrices mises en jeu nous donnent :

$$K_v^3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } M_{elev}^{3,v} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -8 & 7 & 0 \\ -2 & 10 & -26 & 18 \end{bmatrix}$$

$$K_{1-v}^3 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } M_{elev}^{3,1-v} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -18 & 26 & -10 & 0 \\ 0 & -7 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

La $G^1$ contrainte reste la même que dans le cas où $\gamma(v)$ est constant ; il suffit de remplacer la matrice $\gamma M_{elev}^3$ par la quantité $\gamma_0 M_{elev}^{3,1-v} + \gamma_1 M_{elev}^{3,v}$. Remarquons que, dans la situation où $\gamma = \gamma_0 = \gamma_1$, on retrouve la condition de coplanarité dans le cas où $\gamma(v)$ est constant grâce à la relation :

$$M_{elev}^3 = M_{elev}^{3,1-v} + M_{elev}^{3,v}$$

Notons que nous donnons les matrices utiles pour le calcul des $G^1$ contraintes pour les B-splines de degré deux et trois (c'est-à-dire les plus employées) dans l'annexe 4.

## 5. Discussion

### 5.1. Extension aux B-splines de degré quelconque

Dans cette section, nous allons montrer que nous pouvons facilement étendre les résultats obtenus pour $k$=4. Nous supposerons que nous avons deux surfaces élémentaires B-spline de degré $k \times k$ (même si, en fait seul l'ordre des B-splines le long de la frontière commune nous intéresse). Nous noterons la matrice B-spline d'ordre k de la manière suivante :

$$M_{Bspl}^k = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k \end{bmatrix}$$

où $L_i$ est un vecteur de dimension $1 \times k$. Les $G^0$ contraintes peuvent alors être exprimées sous la forme :

$$\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_1\\ \vdots\\ L_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{ij}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_1\\ \vdots\\ L_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_{ij}\end{bmatrix}$$

Les propriétés des B-splines nous permettent de simplifier la $G^0$ contrainte :

$$L_k\begin{bmatrix}P_{ij}\end{bmatrix}=\overline{L}_k\begin{bmatrix}Q_{ij}\end{bmatrix}$$

avec la notation $\overline{V}=\begin{bmatrix}a_n & \cdots & a_1\end{bmatrix}$ si $V=\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_n\end{bmatrix}$. Si on sépare les contraintes, on aboutit à :

$$L_k\begin{bmatrix}P_{ij_0}\end{bmatrix}=\overline{L}_k\begin{bmatrix}Q_{ij_0}\end{bmatrix} \text{avec } 0\leq j_0\leq k$$

D'une manière analogue, on peut écrire les $G^1$ contraintes sous la forme :

$$\alpha L_{k-1}\begin{bmatrix}P_{ij}\end{bmatrix}+\beta\overline{L}_{k-1}\begin{bmatrix}Q_{ij}\end{bmatrix}+\gamma'(M_{elev}^{k}{}'[R])=0$$

ou bien, en séparant les contraintes :

$$\alpha L_{k-1}\begin{bmatrix}P_{ij_0}\end{bmatrix}+\beta\overline{L}_{k-1}\begin{bmatrix}Q_{ij_0}\end{bmatrix}+\gamma[R]L_{j_0}^{M_{elev}}=0 \text{ avec } 0\leq j_0\leq k$$

où $L_{j_0}^{M_{elev}}$ est la ligne $j_0$ de $M_{elev}^{k}$

### 5.2. Raccord entre carreaux B-splines non élémentaires ($\gamma(v)$ constant ou linéaire)

Jusqu'à maintenant, nous n'avons considéré que les raccords entre deux carreaux B-splines élémentaires. C'est-à-dire que nous manipulions des matrices de points de contrôle d'ordre *nxn* représentant des surfaces B-splines d'ordre *n*. Considérons maintenant deux matrices de points de contrôle $P_{ij}$ et $V_{ij}$ d'ordre *nxm* (*m*>*n*) définissant des surfaces B-splines d'ordre *n*. Les surfaces décrites par $P_{ij}$ et $V_{ij}$ sont composées de 1x(*m*-*n*+1) surfaces B-spline élémentaires qui sont jointes $C^{n-2}$ continûment. Afin de simplifier les raisonnements suivants, nous travaillerons dans le cas particulier des B-splines d'ordre 4 (de degré 3) et nous choisirons *m*=5. Ainsi, chacune des matrices de points de contrôle est composée de deux surfaces élémentaires.

Pour réaliser la $G^1$ jonction entre les deux surfaces, nous avons un système de 8 équations en zone 1 (figure X.5) : 4 pour la $G^0$ continuité et 4 autres pour la $G^1$ continuité. En zone 2, la $G^0$ continuité impose 4 équations supplémentaires dont trois sont identiques à celles issues de la zone 1. La $G^0$ continuité ne rajoute donc qu'une seule contrainte supplémentaire. Toujours dans la zone 2, la $G^1$ continuité met en jeu 4 équations supplémentaires. Nous avons

donc 5 contraintes pour la $G^0$ continuité et 8 contraintes pour la $G^1$ continuité soit un total de 13 contraintes. Le nombre de points de contrôle impliqués dans le raccord est de 30 (les colonnes de points de contrôle les plus éloignés de la frontière n'interviennent pas), ce qui nous laisse 30-13=17 degrés de liberté pour effectuer le raccord (en fait 17x3=51 degrés de liberté si l'on considère que les points ont trois dimensions). Notons que le problème reste le même si les matrices de points de contrôle décrivant les surfaces à raccorder sont d'ordre $k$x$n$+1 ($k$>$n$), les points de contrôle supplémentaires n'intervenant pas.

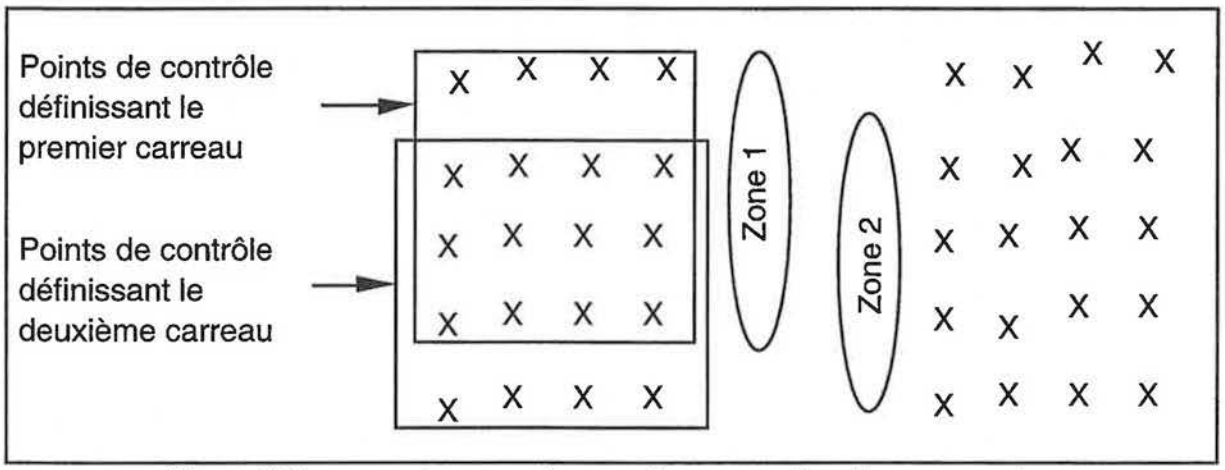



Figure X.5 : *zones de raccords entre 2 carreaux B-splines composites*

### 6. Conclusions

Nous n'avons calculé les $G^1$ contraintes issues du raccord de carreaux B-splines que dans les cas où les fonctions de raccordement $\alpha$ et $\beta$ sont constantes et $\gamma$ constante et linéaire. Le Calcul des $G^1$ contraintes lorsque ces fonctions sont de degré supérieur est similaire. Cependant, nous devons délaisser la représentation cubique pour une représentation de degré 4. Cela implique que le nombre de contraintes augmente (pour la $G^1$ continuité il passe de 4 à 5 pour le raccord entre deux carreaux élémentaires). Ceci est conforme à ce qui se passe pour les surfaces de Bézier c'est-à-dire que plus le degré des fonctions de raccordement est important plus les $G^1$ contraintes (portant sur les points de contrôle) sont nombreuses.

L'intérêt des techniques que nous avons proposée est limité lorsque le nombre de surfaces à raccorder est égal à deux. En revanches, elles montrent leur efficacité dans le cas où les deux surfaces à raccorder sont composées de plusieurs carreaux B-splines élémentaires.

Raccorder N surfaces B-spline concourant en un point pose, comme pour les surfaces de Bézier, des problèmes d'entrelacement des contraintes. Les recherches à venir nous dirons si nous pouvons « désentrelacer » facilement ces contraintes.

# Chapitre XI : RACCORDS ENTRE SURFACES TRIANGULAIRES ET SURFACES RECTANGULAIRES

Dans ce chapitre, nous nous proposons de calculer les $G^1$ contraintes entre plusieurs surfaces triangulaires de Bézier puis entre des surfaces triangulaires et des surfaces rectangulaires de Bézier (rappelons que nous entendons par surface triangulaire (respectivement rectangulaire) une surface dont le domaine des paramètres est un triangle (respectivement un rectangle et même, dans le cas classique, un carré)). Bien entendu, de nombreux travaux ont été développés sur ces sujets [FARI 86][LOUN 92][FARI 90][MANN 92][PETE 90].... Nous essaierons donc de préciser certains aspects particuliers non encore totalement explorés par les différents chercheurs. Par exemple, nous préciserons clairement les contraintes sur les fonctions de raccordement. Nous montrerons, aussi, comment construire une surface triangulaire dont les frontières sont délimités par des carreaux élémentaires ou non. Nous introduirons plus particulièrement les surfaces triangulaires de Grégory-Bézier car elles permettent une gestion plus indépendante des contraintes. Leur aspect rationnel présente certes un inconvénient pour l'utilisation de certains algorithmes (notamment la subdivision de l'enveloppe convexe), mais il évite l'apparition de subdivisions parfois gênantes (augmentation du nombre de contraintes, du nombre de frontières, et du nombre de points de contrôle). Notons qu'il eût été intéressant de pouvoir garder une certaine cohérence dans le cas où les surfaces rectangulaires sont des B-splines mais il est difficile de trouver un modèle basé sur les B-splines, représentant des surfaces triangulaires.

Nous essaierons aussi de bien distinguer les résultats suivant que l'on peut déformer les surfaces ou pas.

# 1. $G^1$ contraintes entre surfaces triangulaires

## 1.1. Surfaces triangulaires de Bézier

### 1.1.1. Définition

Une facette triangulaire de Bézier (on la nomme aussi Bernstein Bézier), notée généralement tBB de degré $n$ et définie par un ensemble de $(m+1)\times(m+2)/2$ points de contrôle, s'exprime de la manière suivante :

$$T(u,v,w) = \sum_{\substack{i,j,k\geq 0 \\ i+J+k=n}} P_{ijk} B_{ijk\,n}(u,v,w)$$

avec $B_{ijk,n}(u,v,w) = \dfrac{m!}{i!\,j!\,k!} u^i v^j w^k$ et $(u,v,w) \in [0,1]^3$, $u+v+w=1$.

Une facette tBB conserve les propriétés de l'enveloppe convexe et ses frontières sont des courbes de Bézier de degré $n$.

### 1.1.2. Calcul des dérivées transversales

Le calcul des dérivées transversales est moins simple que pour les carreaux. En effet, il semble difficile de privilégier une direction de dérivation plus qu'une autre, tandis que pour les carreaux les directions définies par les variations de $u$ et $v$ s'imposaient. De nombreux choix sont possibles et sont exposés dans [CHAR 80]. La direction la plus souvent choisie, car la plus naturelle, est la direction radiale, c'est à dire la direction qui du bord d'une des frontières indique le sommet opposé à ce bord du triangle (nous raisonnons, là, dans le domaine de définition). Rappelons que, dans le cas général, le vecteur dérivé selon une direction $\Theta = (\Theta_u, \Theta_v, \Theta_w)$ s'exprime sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \Theta} T(u,v,w) = \frac{\partial T(u,v,w)}{\partial u}\Theta_u + \frac{\partial T(u,v,w)}{\partial v}\Theta_v + \frac{\partial T(u,v,w)}{\partial w}\Theta_w$$

La direction radiale le long du bord dépendant uniquement du paramètre $v$, nous avons : $\Theta = (1,0,0) - (0,v,1-v) = (1,-v,1-v)$. On en déduit l'expression du vecteur dérivé dans cette direction :

$$\left.\frac{\partial}{\partial \Theta} T(u,v,w)\right|_{u=0} = \left.\frac{\partial T(u,v,w)}{\partial u}\right|_{u=0} + \left.\frac{\partial T(u,v,w)}{\partial v}\right|_{u=0}(-v) + \left.\frac{\partial T(u,v,w)}{\partial w}\right|_{u=0}(v-1)$$

Quelques manipulations simples nous permettent d'exprimer cette dérivée sous une forme attendue :

$$\left.\frac{\partial}{\partial \Theta} T(u,v,w)\right|_{u=0} = n\sum_{j=0}^{n-1} P_{1\,j\,n-1-j} B_{j,n-1}(v) - n\Gamma(v)$$

où $\Gamma(v)$ représente la frontière définie par $u$=0. Le calcul des autres dérivées le long des autres bords s'obtient par permutation circulaire des paramètres $u$, $v$ et $w$ et des indices des points de contrôle impliqués.

### 1.1.3. $G^1$ contraintes entre deux tBB

Soient deux facettes tBB $T_1$ et $T_2$ (figure XI.1) de même ordre ayant une frontière commune notée $\Gamma(v)$. $\Gamma(v)$ est la courbe de Bézier définie par $T_1(u_1=0, v_1=v, w_1=1-v)=T_2(u_2=0, v_2=1-v, w_2=v)$ si on utilise les orientations de la figure XI.. Après quelques calculs simples, la $G^0$ contrainte s'exprime sous la forme :

$C_i^{T_1} = C_i^{T_2}$, (en notant $C_i^{T_j}$ les points définissant $\Gamma(v)$ sur chaque tBB $T_j$).

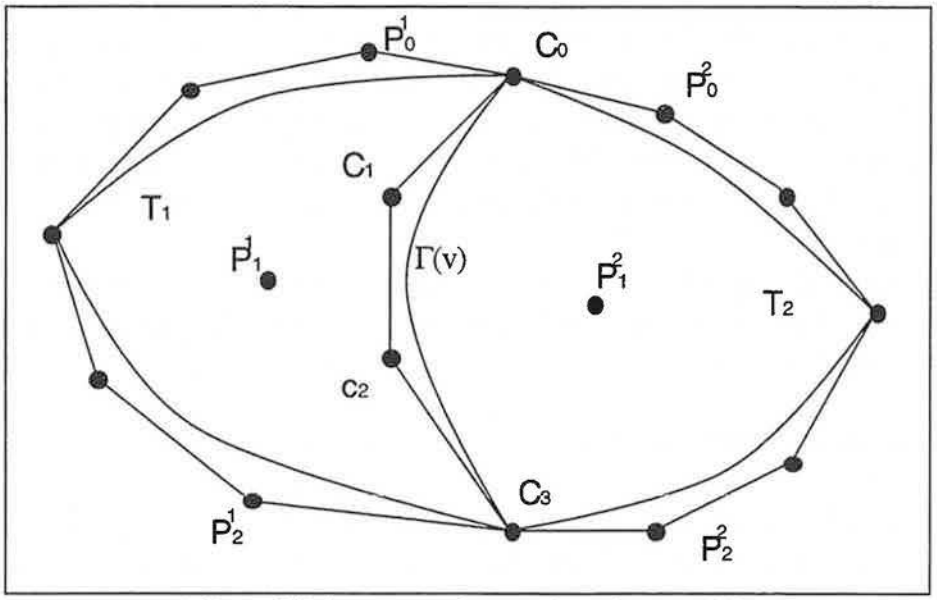



Figure XI.1 : *raccord entre deux facette tBB*

La $G^1$ contrainte est un peu plus compliquée à établir. La condition de coplanarité en choisissant les directions radiales pour les dérivées reste sous la forme :

$$\alpha(v)\frac{\partial T_1(u_1,v_1,w_1)}{\partial \Theta_1}\bigg|_{u_1=0} + \beta(v)\frac{\partial T_2(u_2,v_2,w_2)}{\partial \Theta_2}\bigg|_{u_2=0} + \gamma(v)\Gamma'(v) = 0$$

Afin d'établir les expressions les plus simples des $G^1$ contraintes, nous utiliserons les identités suivantes :

$$\Gamma'(v) = n\sum_{i=0}^{n-1}(C_{i+1}^1 - C_i^1)B_{i,n-1}$$

$$\left.\frac{\partial T_1(u_1,v_1,w_1)}{\partial \Theta_1}\right|_{u_1=0} = n\sum_{i=0}^{n-1}(P_i^1 - C_i^1)B_{i,n-1}(v) - v\Gamma'(v)$$

$$\left.\frac{\partial T_2(u_2,v_2,w_2)}{\partial \Theta_2}\right|_{u_2=0} = n\sum_{i=0}^{n-1}(P_i^2 - C_i^2)B_{i,n-1}(v) - v\Gamma'(v)$$

Nous obtenons, enfin, pour la $G^1$ contrainte :

$$\alpha(v)n\sum_{i=0}^{n-1}(P_i^1 - C_i^1)B_{i,n-1}(v) + \beta(v)n\sum_{i=0}^{n-1}(P_i^2 - C_i^2)B_{i,n-1}(v) + (\gamma(v) - v(\alpha(v)+\beta(v))n\sum_{i=0}^{n-1}(C_{i+1}^1 - C_i^1)B_{i,n-1}(v) = 0$$

Afin d'éliminer le paramètre $v$ de la $G^1$ contrainte, il faut raisonner en fonction des degrés respectifs des fonctions de raccordement. Les relations d'élévation du degré seront bien sûr indispensables. Dans [DU 88] plusieurs cas sont entièrement décrits. Notons pour finir que si les deux facettes ont des degrés égaux, il faut dégénérer une des deux facettes afin d'introduire des points de contrôles supplémentaires et soulager les contraintes pesant sur les fonctions de raccordement. En revanche, si elle n'ont pas le même degré, la dégénérescence d'un bord est inévitable dès l'établissement des $G^0$ contraintes. Les problèmes de dégénérescence prendraient trop de place pour être évoqués ici ; nous laisserons donc le lecteur se référer à [DU 88].

Les contraintes dans le cas où N facettes tBB convergent en un point ressemblent à celles obtenues pour les carreaux élémentaires. Là encore de nombreux travaux ont été développés dans [PIPE 87].

### 1.2. Surfaces triangulaires $G^1$ de Grégory-Bézier (tGB)

Une méthode pour éviter l'entrelacement des $G^1$ contraintes est d'augmenter le nombre de points de contrôle. En général, la dégénérescence est un bon moyen pour y parvenir. Cependant, Gregory a émis l'idée de dédoubler les points de contrôle plutôt que d'en rajouter en augmentant les degrés des facettes triangulaires. Bien sûr, cela ne se fait pas sans frais. Le dédoublement des points de contrôle entraîne l'apparition de termes rationnels. Cependant, les avantages de cette méthode sont suffisamment nombreux pour être fréquemment adoptée. Nous proposons une étude détaillée des facettes tGB et des raccords entre elles. Les résultats de cette section seront d'une importance capitale pour les raccords entre carreaux et tGB.

#### 1.2.1. Définition

Une facette tGB TG est définie par 15 points de contrôle notés comme sur la figure XI.2. On peut l'exprimer explicitement sous la forme :

$$\begin{aligned} TG(u,v,w) = {} & u^3P_0 + v^3P_1 + w^3P_3 + 3u^2v(1-w)P_{01} + 3uv^2(1-w)P_{02} \\ & + 3v^2w(1-u)P_{11} + 3vw^2(1-u)P_{12} + 3w^2u(1-v)P_{21} + 3wu^2(1-v)P_{22} \\ & + 12u^2vwP_{211} + 12uv^2wP_{121} + 12uvw^2P_{112} \end{aligned}$$

avec $(u,v,w) \in [0,1]^3, u+v+w=1$ et

$$P_{211} = \frac{wP^v_{211} + vP^w_{211}}{w+v},\ P_{121} = \frac{uP^w_{121} + wP^u_{121}}{u+w},\ P_{112} = \frac{vP^u_{112} + uP^v_{112}}{v+u}$$

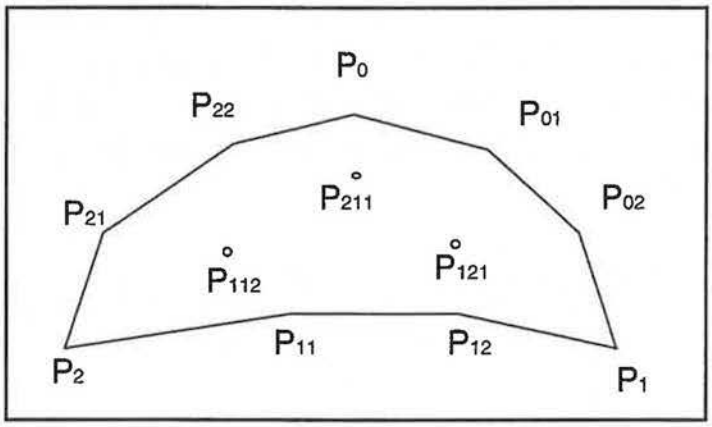



Figure XI.2 : *facette de Gregory-Bézier*

Une facette tGB possède des propriétés géométriques similaires aux tBB, notamment la propriété de l'enveloppe convexe et la propriété qu'un bord (qui est une courbe de Bézier de degré 3) est uniquement déterminé par les points de contrôle extérieurs (à opposer aux points intérieurs que sont $P_{211}$, $P_{121}$ et $P_{112}$).

### 1.2.2. Dérivées transversales

Le vecteur dérivé sur le bord $u$=0 dans la direction radiale peut être exprimé en fonction de la base de Bernstein Bézier de degré 3 :

$$\left.\frac{\partial TG(u,v,w)}{\partial \Theta_u}\right|_{u=0} = 4\left[\frac{3}{4}(1-v)^3(P_{21}-P_2) + 3(1-v)^2 v(P^u_{112}-P_{12}) + 3(1-v)v^2(P^u_{121}-P_{11}) + \frac{3}{4}v^3(P_{02}-P_1)\right]$$

Pour conserver des notations compatibles avec celles des carreaux ou des facettes triangulaires de Bézier, nous conviendrons que :

$$\begin{cases} \{P_2, P_{21}, P_{11}, P_1\} = \{C_i\}_{0\le i\le 3} \\ \{P_{21}, P_{112}, P_{121}, P_{02}\} = \{P_i^T\}_{0\le i\le 3} \end{cases}$$

On peut alors écrire que :

$$\left.\frac{\partial TG(u,v,w)}{\partial \Theta_u}\right|_{u=0} = 4\sum_{i=0}^{3} Coef_i (P_i^T - C_i) B_{i,3}(v)$$

avec :

$$Coef_i = \begin{cases} 1 & pour\ i \in \{1,2\} \\ \dfrac{3}{4} & pour\ i \in \{0,3\} \end{cases}$$

### 1.2.3. $G^1$ contrainte entre deux facettes tGB

Soient deux facettes tGB notées $TG_1$ et $TG_2$. Ces deux facettes sont raccordées $G^0$ si elles possèdent sur leur bord commun, $\Gamma(v)$, les mêmes points de contrôle. La $G^1$ continuité est assurée en imposant la coplanarité des vecteurs dérivés directionnels radiaux le long du bord commun $\Gamma(v)$ :

$$\alpha(v)\frac{\partial TG_1(u_1,v_1,w_1)}{\partial \Theta_1}\bigg|_{u_1=0} + \beta(v)\frac{\partial TG_2(u_2,v_2,w_2)}{\partial \Theta_2}\bigg|_{u_2=0} + \gamma(v)\Gamma'(v) = 0$$

Pour simplifier les équations, nous conviendrons, conformément aux notations qui ont été utilisées précédemment, que :

$$\begin{cases} \{P_2^1, P_{11}^1, P_{11}^1, P_1^1\} = \{C_i\}_{0\le i\le 3} \\ \{P_{21}^1, P_{112}^1, P_{121}^1, P_{02}^1\} = \{P_i^1\}_{0\le i\le 3} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \{P_1^2, P_{11}^2, P_{12}^2, P_2^2\} = \{C_i\}_{0\le i\le 3} \\ \{P_{02}^2, P_{121}^2, P_{112}^2, P_{21}^2\} = \{P_i^2\}_{0\le i\le 3} \end{cases}$$

A l'aide de la section (1.1.2.), nous avons :

$$\frac{\partial TG_1(u_1,v_1,w_1)}{\partial \Theta_{u_1}}\bigg|_{u_1=0} = 4\sum_{i=0}^{3} Coef_i(P_i^1 - C_i)B_{i,3}(v)$$

$$\frac{\partial TG_1(u_1,v_1,w_1)}{\partial \Theta_{u_1}}\bigg|_{u_1=0} = 4\sum_{i=0}^{3} Coef_i(P_i^1 - C_i)B_{i,3}(v)$$

$$\Gamma'(v) = 3\sum_{i=0}^{2}(C_{i+1} - C_i)B_{i,2}(v)$$

Nous allons maintenant écrire les $G^1$ contraintes en fonction des fonctions de raccordement. Nous essaierons, autant que possible, de considérer que la facette $TG_1$ est fixée et nous chercherons ensuite à calculer les points de contrôle intérieurs de la facette $TG_2$ (les points de contrôle extérieurs étant également fixés). Dans le cas général, il nous faudrait considérer des fonctions de raccordement de degré maximum (nous avons vu qu'il était inférieur à 7). En fait, il arrive que certaines conditions de « symétrie » ou plus exactement certaines configurations topologiques permettent d'utiliser des fonctions de raccordement de degré inférieur.

- $\alpha(v) = 1, \beta(v) = \beta, \gamma(v) = \gamma_0(1-v) - \gamma_1 v$

En utilisant les deux identités suivantes :

$$(1-v)\sum_{i=0}^{n-1} A_i B_{i,n-1}(v) = \sum_{i=0}^{n} \frac{n-i}{n} A_i B_{i,n}(v) \qquad \textbf{(11.1)}$$

$$v\sum_{i=0}^{n-1} A_i B_{i,n-1}(v) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} A_{i-1} B_{i,n}(v) \qquad \textbf{(11.2)}$$

nous obtenons pour $G^1$ contraintes :

$$\sum_{i=0}^{i=3}\left[4Coef_i(P_i^1 - C_i) + 4\beta Coef_i(P_i^2 - C_i) + 3\frac{3-i}{3}\gamma_0(C_{i+1} - C_i) + 3\frac{i}{3}\gamma_1(C_{i-1} - C_i)\right]B_{i,3}(v) = 0$$

En utilisant le fait que les fonctions de Bernstein Bézier forment une base dans l'espace des polynômes, nous obtenons finalement :

$$4Coef_i(P_i^1 - C_i) + 4\beta Coef_i(P_i^2 - C_i) + (3-i)\gamma_0(C_{i+1} - C_i) + i\gamma_1(C_{i-1} - C_i) = 0$$

pour i=0,1,2,3.

Nous avons donc 4 contraintes pour 4 triplets de points $(P_i^1, P_i^2, C_i)$ et 3 degrés de liberté supplémentaires fournis par les coefficients des fonctions de raccordement. Soit un total de 3×(8+4)+3=39 variables pour 3×4=12 contraintes dans $\Re$ et donc 27 degrés de liberté. On peut donc sans problème fixer 8 points (24 variables) d'une même facette et calculer la deuxième facette en résolvant une à une les contraintes. On trouve ainsi, si la facette $TG_1$ est fixée :

$$P_i^2 = C_i - \frac{4Coef_i(P_i^1 - C_i) + (3-i)\gamma_0(C_{i+1} - C_i) + i\gamma_1(C_{i-1} - C_i)}{4\beta Coef_i}, \quad i=1,2,3,4$$

soit :

$$P_0^2 = C_0 - \frac{(P_0^1 - C_0) - \gamma_0(C_1 - C_0)}{\beta}$$

$$P_1^2 = C_1 - \frac{4(P_1^1 - C_1) + 2\gamma_0(C_2 - C_1) + \gamma_1(C_0 - C_1)}{4\beta}$$

$$P_2^2 = C_2 - \frac{4(P_2^1 - C_2) + \gamma_0(C_3 - C_2) + 2\gamma_1(C_1 - C_2)}{4\beta}$$

$$P_3^2 = C_3 - \frac{(P_3^1 - C_3) - \gamma_1(C_2 - C_3)}{\beta}$$

Les conditions de « symétrie » associées aux choix des fonctions de raccordement sont assez simples à analyser en disséquant les contraintes pour i=0 et i=3. Ces dernières contraintes impliquent en effet que les angles constitués par les vecteurs

$(P_0^1 - C_0, P_0^2 - C_0, C_1 - C_0)$ sont non nuls et proportionnels aux angles constitués par les vecteurs $(P_3^1 - C_3, P_3^2 - C_3, C_3 - C_2)$. Si ce n'est pas le cas, alors nous sommes contraints de déformer la facette $TG_1$ comme le montre le cas suivant.

- $\alpha(v) = 1, \beta(v) = \beta_0(1-v) + \beta_1 v, \gamma(v) = \gamma_0(1-v) - \gamma_1 v$

Pour de telles fonctions il faut utiliser les relations d'élévation du degré une fois pour la dérivée transversale de la facette $TG_1$ et une fois pour la dérivée le long de la frontière commune. Il nous faut aussi utiliser les relations **(11.1)** et **(11.2)** pour la dérivée transversale de la facette $TG_2$ et pour la dérivée le long de la frontière. On arrive ainsi à exprimer la $G^1$ contrainte dans l'espace des polynômes de degré 4. La base d'un tel espace étant composée de cinq fonctions polynomiales, nous arrivons à un système de cinq contraintes. Le tableau-ci dessous résume le procédé classique permettant d'éliminer le paramètre $v$ des contraintes :

$$\left.\begin{array}{l}
\gamma(v)\Gamma'(v) \text{ de d°3} \Rightarrow \text{1 élévation du degré} \Rightarrow \text{d°4 (Base de Bernstein)} \\
\alpha(v)\left.\dfrac{\partial TG_1(u_1, v_1, w_1)}{\partial \Theta_1}\right|_{u_1=0} \text{ de d°3} \Rightarrow \text{1 élévation du degré} \Rightarrow \text{d°4 (base de Bernstein)} \\
\beta(v)\left.\dfrac{\partial TG_2(u_2, v_2, w_2)}{\partial \Theta_2}\right|_{u_2=0} \text{ de d°4} \Rightarrow \text{à exprimer dans la base de Bernstein}
\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{Contrainte } G^1 \\ \text{dans la base de Bernstein}\end{array}$$

Après quelques calculs, nous arrivons à établir la $G^1$ contrainte de la manière suivante :

$$\sum_{i=0}^{i=4}[(4-i)Coef_i(P_i^1 - C_i) + iCoef_i(P_{i-1}^1 - C_{i-1}) + (4-i)\beta_0 Coef_i(P_i^2 - C_i) + i\beta_1 Coef_{i-1}(P_{i-1}^2 - C_{i-1})$$
$$+\frac{(4-i)(3-i)}{4}\gamma_0(C_{i+1} - C_i) + \frac{(4-i)i}{4}(\gamma_0 - \gamma_1)(C_i - C_{i-1}) + \frac{i(i-1)}{4}\gamma_1(C_{i-2} - C_{i-1})]B_{i,4}(v) = 0$$

Et donc :

$$(4-i)Coef_i(P_i^1 - C_i) + iCoef_i(P_{i-1}^1 - C_{i-1}) + (4-i)\beta_0 Coef_i(P_i^2 - C_i) + i\beta_1 Coef_{i-1}(P_{i-1}^2 - C_{i-1})$$
$$+\frac{(4-i)(3-i)}{4}\gamma_0(C_{i+1} - C_i) + \frac{(4-i)i}{4}(\gamma_0 - \gamma_1)(C_i - C_{i-1}) + \frac{i(i-1)}{4}\gamma_1(C_{i-2} - C_{i-1}) = 0$$

pour i=0,1,2,3,4.

Nous avons donc 5 contraintes pour déterminer les points de contrôle mis en jeu. Comme auparavant, nous avons 36 variables issues des 12 points de contrôle plus 4 degrés supplémentaires fournis par les fonctions de raccordement. Mais nous avons, cette fois, non plus 12 contraintes dans $\Re$, mais 15. A priori, nous ne pouvons plus fixer les 8 points de contrôle de la facette $T_1$. En effet 36-24=12 et il nous manque 3 degrés de liberté. Il nous faut donc jouer sur les coefficients de raccordement pour autoriser un raccord $G^1$. Nous raisonnerons de la façon suivante : nous considérons dans un premier la contrainte pour i=0 :

$$3(P_0^1 - C_0) + 3\beta_0(P_0^2 - C_0) + 3\gamma_0(C_1 - C_0) = 0$$

Avec cette contrainte il nous est facile de déterminer $P_0^2$ :

$$P_0^2 = C_0 - \frac{(P_0^1 - C_0) + \gamma_0(C_1 - C_0)}{\beta_0}$$

Dans un second temps, nous utilisons la contrainte pour i=4 :

$$3(P_3^1 - C_3) + 3\beta_1(P_3^2 - C_3) + 3\gamma_1(C_2 - C_3) = 0$$

$$\Rightarrow P_3^2 = C_3 - \frac{(P_3^1 - C_3) + \gamma_1(C_2 - C_3)}{\beta_1}$$

Il nous reste donc 3 contraintes pour déterminer deux points que l'on peut représenter sous la forme :

$$\begin{bmatrix} 3\beta_0 & 0 \\ 2\beta_1 & 2\beta_2 \\ 0 & 3\beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^2 \\ P_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Pour que le rang de la matrice soit réduit à deux, nous avons trois possibilités :

- $\beta_0 = \beta_1$. On retombe alors dans le cas précédent où $\beta(v)$ est linéaire.

- $\beta_0 = 0$. La contrainte pour i=0 n'est plus vérifiée dans le cas général. En fait, ce choix n'est justifié que si l'angle formé par les vecteurs $(P_0^1 - C_0, C_1 - C_0)$ est nul. Cela est impliqué par la colinéarité du vecteur dérivé le long de la frontière et du vecteur dérivé transversal de la facette $TG_1$en $v$=0.

- $\beta_1 = 0$. La contrainte pour i=4 n'est plus vérifiée dans le cas général. En fait, ce choix n'est justifié que si l'angle formé par les vecteurs $(P_3^1 - C_3, C_3 - C_2)$ est nul. Cela est impliqué par la colinéarité du vecteur dérivé le long de la frontière et du vecteur dérivé transversal de la facette $TG_1$ en $v$=1.

La conclusion est que, dans le cas général (points de contrôle non coplanaires et distincts), nous sommes contraints pour de telles fonctions de raccordement de déformer la facette $TG_1$ (ou au moins un des points de contrôle intérieurs de $TG_1$) afin d'assurer la $G^1$ continuité. Cette solution permettant un contrôle plus important de $\beta(v)$ n'est donc possible que si l'on peut déformer sans gêne les deux facettes.

### 1.2.4. Raccord entre N facettes tGB

Grâce à la séparation des $G^1$ contraintes le long des bords, la détermination des points de contrôle des N facettes (figure XI.3) peut s'effectuer en deux étapes :

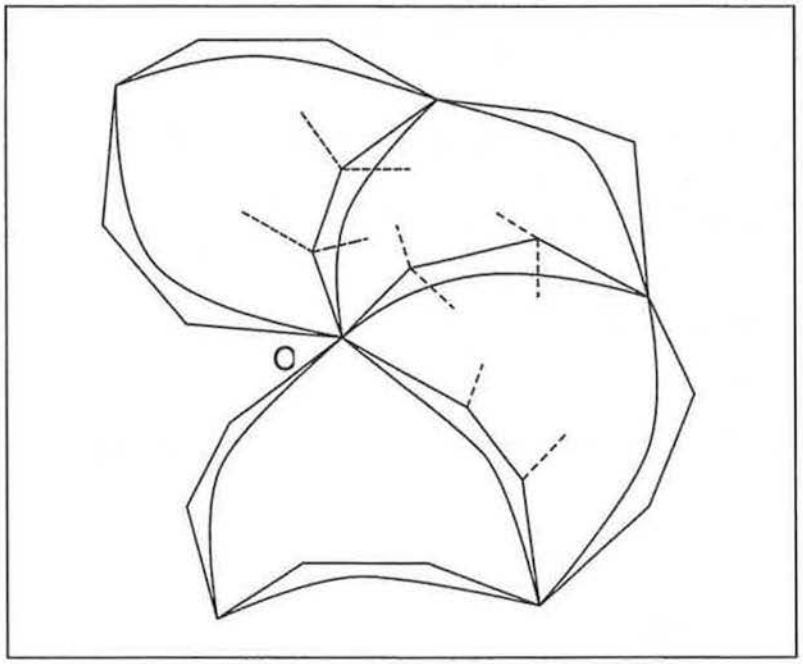



Figure XI.3 : *raccord entre N facettes tGB*

- On détermine d'abord les points de contrôle situés le long des bords.

En fait, les méthodes de calcul sont similaires à celles effectuées sur les carreaux. La figure XI.4 montre la similarité des deux problèmes : raccord entre N carreaux de Bézier et raccord entre N facettes tGB.

- On détermine ensuite les points de contrôle intérieurs.

Les contraintes le long de chaque bord sont indépendantes. Le problème revient donc à raccorder N fois 2 facettes tGB entre elles. Les techniques utilisées sont donc celles qui ont été développées en (1.2.3.).

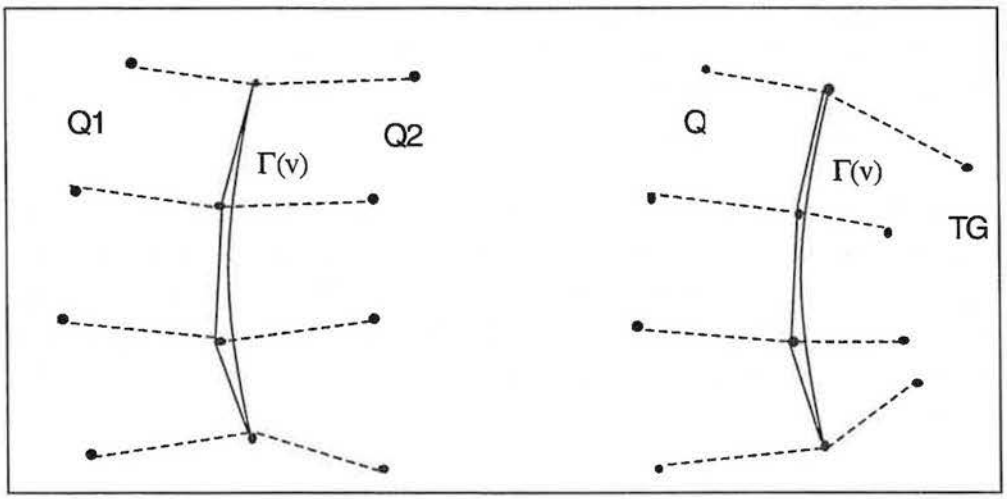



Figure XI.4 : *similarité des raccords entre facette tGB et carreaux de Bézier*

## 2. $G^1$ contraintes entre facettes tGB et carreaux de Bézier.

### 2.1. $G^1$ contraintes entre une facette tGB et un carreau de Bézier.

Nous avons vu, dans la section précédente, que le comportement d'une facette tGB le long d'un bord était similaire à celui d'un carreau de Bézier en raison du même nombre de points de contrôle mis en jeu dans les $G^1$ contraintes. Dans cette section, nous donnons explicitement les $G^1$ contraintes entre un carreau de Bézier et une facette tGB. Soit $Q$ un carreau bicubique de Bézier et $TG$ une facette triangulaire de Gregory-Bézier. $Q$ est défini classiquement par :

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} P_{ij} B_{i,n}(u) B_{j,n}(v)$$

Nous supposerons que $Q$ et $TG$ ont une frontière commune. Les points de contrôle communs à $Q$ et $TG$ seront notés $C_i$. Le calcul des vecteurs dérivés transversaux donne pour les deux surfaces :

$$\left.\frac{\partial Q(u,v)}{\partial u}\right|_{u=0} = \sum_{i=0}^{3} (P_i - C_i) B_{i,n}(v)$$

$$\left.\frac{\partial TG(u,v,w)}{\partial \Theta_u}\right|_{u=0} = 4\sum_{i=0}^{3} Coef_i (P_i^T - C_i) B_{i,3}(v)$$

en notant les points de contrôle adjacents aux points de contrôle définissant la frontière commune $P_i$ pour $Q$ et $P_i^T$ pour $TG$. Nous donnons maintenant les contraintes pour deux jeux de fonctions de raccordement. Le premier jeu est adapté au cas où la surface $Q$ est fixée et où la facette $TG$ est $G^1$ raccordée sans contrainte sur les points $P_0^T$ et $P_3^T$. Le deuxième jeu est particulièrement adapté pour la modélisation des embranchements des CG.

- 1er jeu : $\alpha(v) = 1, \beta(v) = \beta, \gamma(v) = \gamma_0(1-v) - \gamma_1 v$

Les $G^1$ contraintes sont fortement similaires à celles obtenues dans le cadre d'un raccord $G^1$ de deux facettes de Gregory Bézier. Seul le coefficient $Coef_i$ impliqué dans le calcul de la dérivée transversale d'une des facette est supprimé :

$$3(P_i - C_i) + 4\beta Coef_i (P_i^T - C_i) + (3-i)\gamma_0 (C_{i+1} - C_i) + i\gamma_1 (C_{i-1} - C_i) = 0$$

pour i=0,1,2,3.

Le calcul des quatre points $P_i^T$ est immédiat, chaque point $P_i^T$ étant directement issu de la résolution de la contrainte i.

Nous avons vu que le choix de $\beta(v)$ constant impliquait une certaine relation entre les angles formés par les points de contrôle aux extrémités de la frontière. Afin d'éviter ce genre de contrainte, nous proposons d'introduire la fonction de raccordement $\alpha(v) = \alpha_0(1-v) + \alpha_1 v$, en conservant les autres. Les contraintes s'expriment alors sous la forme :

$$(4-i)\alpha_0(P_i^1 - C_i) + i\alpha_{1_i}(P_{i-1}^1 - C_{i-1}) + (4-i)\beta Coef_i(P_i^2 - C_i) + i\beta Coef_{i-1}(P_{i-1}^2 - C_{i-1})$$
$$+\frac{(4-i)(3-i)}{4}\gamma_0(C_{i+1} - C_i) + \frac{(4-i)i}{4}(\gamma_0 - \gamma_1)(C_i - C_{i-1}) + \frac{i(i-1)}{4}\gamma_1(C_{i-2} - C_{i-1}) = 0$$

pour i=0,1,2,3,4.

Dans ces conditions, les contraintes pour i=0 et i=4 deviennent indépendantes grâce à l'apparition de $\alpha_0$ et $\alpha_1$. Notons que si les points $P_0^T$ et $P_3^T$ sont fixés par l'utilisateur de manière compatible, alors les coefficients scalaires des fonctions de raccordement sont totalement déterminés.

• Second jeu : le jeu de fonctions de raccordement suivant est particulièrement adapté aux cônes généralisés. Ce choix est motivé par le fait suivant, spécifique aux embranchements de CG : les vecteurs dérivés de la facette *TG* et de la frontière sont confondus. La contrainte pour i=0 prend donc la forme suivante, quel que soit le degré des fonctions de raccordement :

$$\alpha_0(P_0 - C_0) + \beta_0(P_0^T - C_0) + \gamma_0(C_1 - C_0) = 0$$

Le fait que les vecteurs dérivés de la facette *TG* et de la frontière soient confondus aux extrémités de la frontière implique notamment l'égalité suivante :

$$P_0^T = C_1$$

La dernière contrainte peut alors être réécrite sous la forme :

$$\alpha_{0_i}(P_0 - C_0) + (\beta_0 + \gamma_0)(C_1 - C_0) = 0$$

Dans le cas général, il n'y aucune raison que le vecteur $P_0 - C_0$ soit colinéaire au vecteur $(C_1 - C_0)$, donc nous avons forcément :

$$\alpha_0 = 0$$

On pourrait prouver de la même manière en utilisant la contrainte pour i=*n* (où *n* est le degré des polynômes formant la base dans laquelle les contraintes ont été exprimées) que :

$$\alpha_1 = 0$$

La conclusion est que la fonction de raccordement $\alpha(v)$ est au moins de degré 2. Afin de conserver l'homogénéité des termes constituant la condition de coplanarité, nous choisirons $\beta(v)$ de degré deux et $\gamma(v)$ de degré 3.

- $\alpha(v) = \alpha_0(1-v)^2 + \alpha_{1/2}(1-v)v + \alpha_1 v^2$,
  $\beta(v) = \beta_0(1-v)^2 + \beta_{1/2}(1-v)v + \beta_1 v^2$,
  $\gamma(v) = \gamma_0(1-v)^3 + \gamma_{1/3}(1-v)^2 v + \gamma_{2/3}(1-v)v^2 + \gamma_1 v^3$

Après avoir exprimé la condition de coplanarité à l'aide de la base des polynomes de degré 5 de Berstein-Bézier, et après de longs calculs, on obtient les 6 contraintes suivantes :

$$3\alpha_0 \frac{(5-i)}{5}\frac{(4-i)}{4}(P_i - C_i) + 3\alpha_{1/2}\frac{(5-i)}{5}\frac{i}{4}(P_{i-1} - C_{i-1}) +$$
$$3\alpha_1 \frac{(i-1)}{5}\frac{i}{4}(P_{i-2} - C_{i-2}) +$$
$$4\beta_0 \frac{(5-i)}{5}\frac{(4-i)}{4} Coef_i (P_i^T - C_i) + 4\beta_{1/2}\frac{(5-i)}{5}\frac{i}{4} Coef_{i-1}(P_{i-1}^T - C_{i-1}) +$$
$$4\beta_1 \frac{(i-1)}{5}\frac{i}{4} Coef_{i-2}(P_{i-2}^T - C_{i-2}) +$$
$$3\gamma_0 \frac{(5-i)}{5}\frac{(4-i)}{4}\frac{(3-i)}{3}(C_{i+1} - C_i) + 3\gamma_{1/3}\frac{(5-i)}{5}\frac{(4-i)}{4}\frac{i}{3}(C_i - C_{i-1}) +$$
$$3\gamma_{2/3}\frac{(5-i)}{5}\frac{(i-1)}{4}\frac{i}{3}(C_{i-1} - C_{i-2}) + 3\gamma_1 \frac{(i)}{5}\frac{(i-1)}{4}\frac{(i-2)}{3}(C_{i-2} - C_{i-3}) = 0$$

pour i=0,1,2,3,4,5.

L'analyse des différentes contraintes est la suivante :

- La contrainte pour i=0 (respectivement i=5) implique la colinéarité des vecteurs $(P_0^T - C_0)$ et $(C_1 - C_0)$ (respectivement $(P_3^T - C_3)$ et $(C_2 - C_3)$ ), ce qui est automatiquement satisfait dans notre situation où, par définition, nous avons $P_0^T = \mathrm{C}_1$ (respectivement $P_3^T = \mathrm{C}_3$).

- Les contraintes pour i=1 et i=4 fournissent deux relations déterminant directement les deux points cherchés $P_1^T$ et $P_2^T$. Conjuguées aux contraintes pour i=2 et i=3, elles fournissent un système à quatre équations et deux inconnues. Le système est ramené à deux équations en choisissant correctement les coefficients scalaires de la fonction $\beta(v)$ (par exemple $\beta_{1/2} = 0$). La compatibilité du système est vérifiée dès que les autres contraintes (i=0,1,5,6 par exemple) sont satisfaites et que certains des coefficients scalaires de $\alpha(v)$ et $\gamma(v)$ sont ajustés (nous n'avons donc pas le total contrôle des fonctions de raccordement du fait que nous avons fixé 6 et 8 points intervenant dans les contraintes).

Les trois jeux de contraintes que nous venons de présenter sont ceux qui joueront un rôle dans la modélisation d'embranchement de cônes généralisés. Les sections suivantes répondent aux problèmes de raccords soulevés par les embranchements. Nous les traiterons cependant dans le cadre le plus général possible.

### 2.2. Détermination d'une facette tGB délimitée par trois carreaux élémentaires de Bézier

Les contraintes le long des trois frontières étant indépendantes, le problème du raccord entre la facette tGB et les 3 carreaux de Béziers se subdivise en trois problèmes revenant à raccorder un carreau de Bézier et une facette tGB. Bien sûr, le degré des fonctions de raccordement est à adapter suivant la nature du problème (c'est-à-dire la topologie des surfaces mises en jeu). Nous ferons les remarques suivantes :

- Les raccords le long des trois bords de la facette tGB sont indépendants entre eux grâce à l'utilisation des surfaces rationnelles engendrant des points de contrôle supplémentaires. L'utilisation de carreaux de Bézier classiques aurait nécessité soit une subdivision en plusieurs surfaces triangulaires (comme par exemple l'interpolant de Clought), soit l'utilisation d'un degré plus important que celui des carreaux. Une telle solution génère des problèmes de dégénérescence des frontières de la facette triangulaire toujours difficiles à gérer.

- Il est nécessaire qu'autour de chaque point extrémité de la facette triangulaire, les plans tangents en ce point des deux carreaux adjacents soient confondus. Ceci ce traduit par la coplanarité des points de contrôle adjacents à ce point. La coplanarité de ces points est en effet nécessaire pour satisfaire la contrainte obtenue pour i=0 :

$$\alpha_{0_i}(P_0 - C_0) + \beta_0(P_0^T - C_0) + \gamma_0(C_1 - C_0) = 0$$

Il en serait de même pour la contrainte i=$n$+$d$.

- Les degrés des jeux de fonctions de raccordement le long de chaque bord ne sont pas forcément les mêmes. Ils sont à adapter selon la topologie des carreaux délimitant la facette triangulaire. Dans le cadre des CG, nous sommes contraints d'utiliser des fonctions de raccordement de degré minimum égal à deux.

- Parmi les points de contrôle intérieurs de la facette triangulaire réalisant la $G^1$ continuité, il est souvent préférable de choisir ceux minimisant les oscillations de la surface. Un principe de minimisation classique est de choisir les points de contrôle candidats les plus proches possibles de points de référence. Plusieurs points de référence ont été proposés dans la littérature (Farin []), les plus classiques étant définis par les équations suivantes, en adoptant les notations de la figure XI.5 :

$$P_{ref}^1 = \frac{1}{4}\left[P_{201} + P_{210} + 2P_I\right]$$

$$P_{ref}^2 = \frac{1}{4}\left[P_{021} + P_{120} + 2P_I\right]$$

$$P_{ref}^3 = \frac{1}{4}\left[P_{012} + P_{102} + 2P_I\right]$$

où $P_I$ représente un point central de la facette qui est défini par :

$$P_I = \frac{1}{4}\left[P_{012} + P_{021} + P_{201} + P_{102} + P_{102} + P_{210}\right] + \frac{1}{6}\left[P_{300} + P_{030} + P_{003}\right]$$

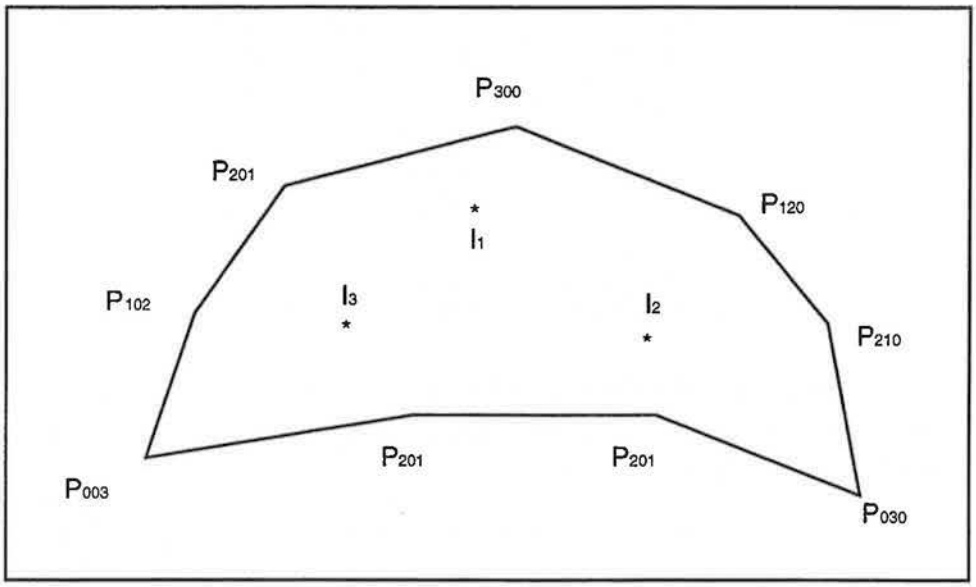



Figure XI.5: *Notations des points caractéristiques*

### 2.3. Détermination d'une surface triangulaire (composée de facettes tGB) délimitée par plusieurs carreaux de Bézier élémentaires

Dans cette section, nous supposerons que la surface triangulaire est délimitée le long de chaque bord par un nombre quelconque de carreaux élémentaires de Bézier. Si le nombre de carreaux délimitant la facette triangulaire n'est pas identique le long de chaque bord, nous pouvons utiliser un algorithme de subdivision afin d'obtenir finalement un nombre N de carreaux élémentaires le long de chaque bord. La facette triangulaire complétant la surface ne peut plus être désormais modélisée par une seule facette tGB ou tB. Nous construirons donc la facette triangulaire à l'aide de plusieurs facettes tGB. Nous proposons une construction possédant trois étapes distinctes :

• Construction des trois « oreilles » A,B et C (cf figure XI.6) de la surface triangulaire. Le calcul de ces surfaces est destiné à rendre la surface « manquante » plus régulière afin d'obtenir une certaine symétrie.

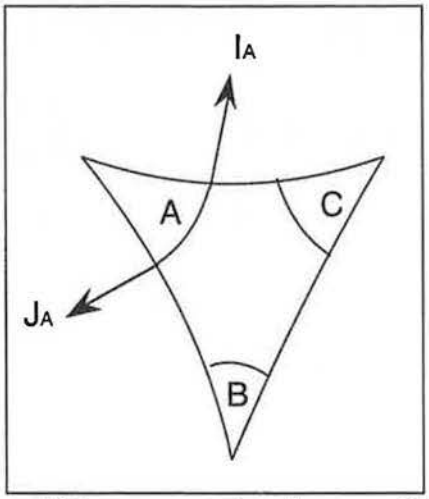



Figure XI. : *construction des « oreilles »*

• Construction d'un point central O (cf figure XI.7) de la surface « manquante » destiné à être un des sommets des facettes tGB qui constitueront la surface finale. Le plan tangent à la surface au point O sera également calculé.

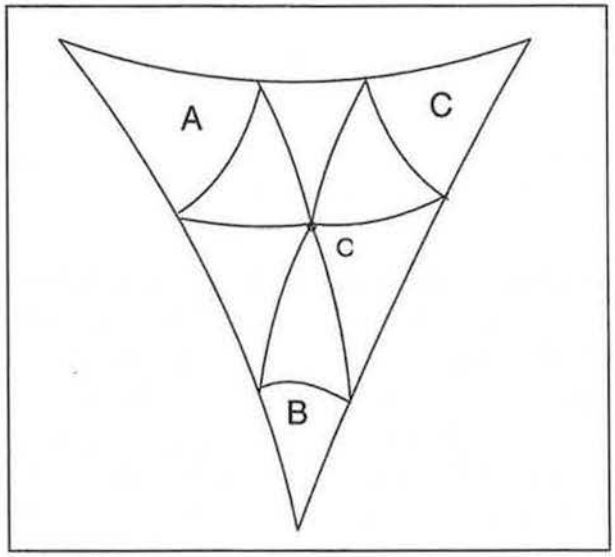



Figure XI.7 : *détermination du point O*

• Construction des facettes tGB autour du point O de manière à compléter la surface manquante et à assurer la $G^1$ continuité. Nous utiliserons bien entendu les résultats concernant le raccord $G^1$ de N facettes tGB concourant en un point.

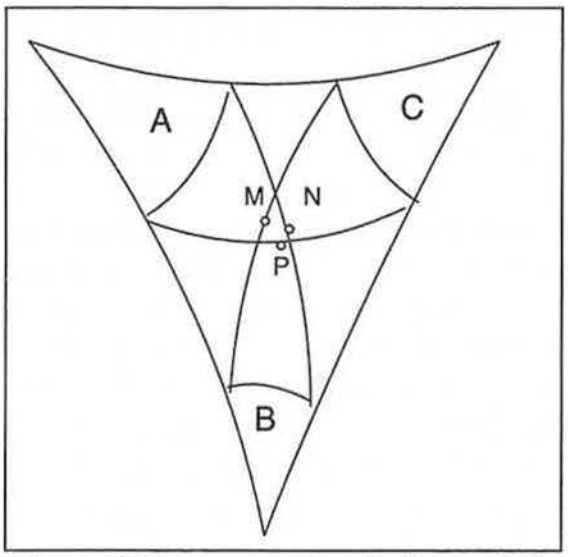



Figure XI.8 : *construction des facette tGB*

Nous détaillons dans les sections suivantes chacune de ces trois étapes.

### 2.3.1. Calcul des oreilles

Le calcul d'une oreille est une version moins contrainte du calcul d'une facette tGB délimitée par 3 carreaux élémentaires. En effet, une oreille n'est délimitée que par deux carreaux élémentaires, on peut donc reprendre les résultats de la section (2.1.). Nous pouvons apporter cependant quelques précisions au niveau des fonctions de raccordement.

Le long des deux bords délimités par des carreaux, nous pouvons choisir les fonctions de raccordement vérifiant les propriétés suivantes :

- $\alpha_0 = 0$, afin de respecter la colinéarité des vecteurs dérivés le long des deux bords au point PA (respectivement PB et PC) dans le cadre des cônes généralisés. Ainsi, on pourra choisir pour $\alpha(v)$ la fonction linéaire $\alpha(v) = \alpha_1 v$ (rappelons qu'il fallait choisir $\alpha(v)$ de degré deux - toujours dans le cadre des cônes généralisés - quand la facette était délimitée le long des trois bords).

- $\gamma_1 = 0$, afin que le troisième bord, non délimité, soit entièrement défini par les tangentes fournies par les frontières des carreaux (cf figure XI.7). Ainsi on pourra choisir $\gamma(v) = \gamma_0(1-v)^2 + \gamma_{1/2}(1-v)v$.

Parmi les 15 points de contrôle d'une facette tGB représentant une « oreille », nous avons donc les 9 points définissant les bords entièrement déterminés et 4 des 6 points intérieurs déterminés par les contraintes de $G^1$ continuité. Les deux points libres restant pourront être utilisés dans la troisième phase de la construction de la surface triangulaire globale.

### 2.3.2. Calcul du point central et de son plan tangent associé

Le calcul du point central O et du plan tangent en ce point est similaire à celui proposé par D.Bechman dans [BECH89]. On considère les 3 cubiques entièrement définies (sur le domaine paramétrique [0,1] par les points IA et JB (respectivement IB et JC, IC et JA) et les tangentes transversales en ces points. Trois points « milieux » MA, MB et MC sont ensuite définis comme les points obtenus pour le paramètre 1/2 sur chacune des cubiques. Le point O est ensuite choisi comme l'isobarycentre des points MA, MB et MC.

Une fois le point O défini, on lui associe un plan tangent qui est donc destiné à contenir un certain nombre de points de contrôle des facettes tGB constituant la surface finale. Il est difficile de trouver un plan optimal minimisant les oscillations de la surface à venir. Le choix le plus intuitif est donc de prendre un plan moyen P d'un échantillon de points sur la frontière (par exemple les points extrêmes des cubiques constituant les 3 bords de la surface à calculer), suivant le critère des moindres carrés, passant par le point O.

### 2.3.3. Calculs des facettes complétant la surface

Les facettes restant à calculer ont un de leurs sommet en O et les deux autres correspondent aux extrémités des cubiques constituant le contour $\Omega$ de la surface à calculer. Pour chaque facette, le bord opposé à O est déterminé et s'appuie sur $\Omega$. La détermination des facettes s'effectue globalement (en non une à une) selon les trois étapes suivantes :

- Détermination pour chaque facette des 8 points de contrôle adjacents à $\Omega$.

Les quatre points décrivant le bord sont évidemment imposés par $\Omega$. Les quatre autres points sont calculés afin de satisfaire la $G^1$ continuité en utilisant pour fonction de raccordement :

$$\alpha(v) = 1,\ \beta(v) = \beta,\ \gamma(v) = \gamma_0(1-v) + \gamma_1 v$$

Notons que $\beta$ est fixé une fois pour toutes et reste le même pour toutes les facettes, et que le type de raccord varie selon que l'on s'appuie sur un morceau de $\Omega$ délimité par un carreau ou par une des trois facettes A, B ou C.

- détermination des points de contrôle restant le long des bords de chaque facette

Ces points appartiennent au plan P puisque le plan tangent de chaque facette en O doit être P. Ayant, sinon, toute liberté pour les choisir, nous nous appuierons sur un critère d'angle. Un point $C_i$ d'une facette sera positionné dès qu'il est possible que (en utilisant les notations de la figure XI.3) :

$$angle(OC_i, OP_0) = angle(P_0O, P_0P_1)$$

Cette condition est imposée afin de donner l'aspect le plus régulier possible aux facettes. En général, il est toujours possible de satisfaire cette condition. Si les segments $OC_i$

issus d'un tel choix ne sont plus ordonnés (les facettes se chevaucheraient alors), les points $C_i$ seront réordonnés de manière à éviter de tels problèmes.

- Détermination des points de contrôle intérieurs

Considérons un bord de deux facettes, noté $\Gamma$, n'appartenant pas à $\Omega$ et donc ayant pour une de ses extrémités le point O. Le long de $\Gamma$, nous avons quatre points de contrôle intérieurs à déterminer. Le long de ce bord, nous sommes contraints de choisir pour fonction de raccordement $\beta(v)$ linéaire. Les coefficients scalaires de $\beta(v)$ sont entièrement déterminés par la topologie des bords calculée lors de l'étape précédente si on choisit $\alpha(v)=1$. Les quatre points de contrôle intérieurs (deux pour chaque facette de part et d'autre de $\Gamma$) sont alors déterminés par les $G^1$ contraintes. Si $\beta(v)$ reste linéaire une fois ses coefficients scalaires calculés, alors nous fixons un des quatre points de contrôle intérieurs, les trois autres étant automatiquement déterminés. Si $\beta(v)$ devient constante, alors nous pouvons fixer deux des points de contrôle intérieurs, les deux autres étant, là encore, totalement déterminés.

## 3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit les $G^1$ contraintes issues du raccord de facettes tB entre elles et tGB entre elles. Si les facettes tB offrent un faible nombre de points de contrôle rendant la résolution des contraintes difficile, les facettes tGB s'apparentent, le long d'un bord, à des carreaux de Bézier, offrant ainsi la possibilité d'utiliser les techniques de raccord exposées dans le chapitre X. Nous avons naturellement décrit ensuite les $G^1$ contraintes issues du raccord entre une facette tGB et un carreau élémentaire de Bézier. Nous avons pris soin de préciser les fonctions de raccordement qu'il est nécessaire d'utiliser en fonction de la topologie des surfaces à raccorder. Enfin nous avons montré comment construire une surface triangulaire délimitée par des carreaux de Bézier. Là encore, nous avons proposé des choix pour les fonctions de raccordement en vue de la modélisation d'un embranchement de cônes généralisés. Ce chapitre apporte ainsi les réponses aux problèmes soulevés par le chapitre VII de la première partie.

Pour finir notons que de nombreux travaux ([BRUN 93] [HAGE 92] [YE 94a] [YE 94b] [YE 95] [JIN 94] [YE 96a] [YE 96b] [YE 96c] [NOWA 92] [HAGE 96] [NOWA 96]) basés sur la minimisation de certaines fonctions (comme l'énergie par exemple), permettent d'interpoler des surfaces d'énergie ou de courbure minimum. Il semble que, malgré le coût des algorithmes associés, ce genres de critères sont de plus en plus souvent retenus.

# Chapitre XII :CONCLUSION

Nous avons développé, à l'école des Mines de Saint-Etienne, un logiciel capable de modéliser des objets 3D à l'aide de cônes généralisés. Nous avons choisi de regrouper, dans un même environnement, tout un ensemble de techniques classiques propres aux cônes généralisés. Nous pensons notamment à l'utilisation de trajectoire $C^2$ et $G^2$ et à la possibilité de faire varier la section en taille et en orientation. Tout en considérant ces éléments comme incontournables, nous avons cherché à introduire des notions rendant encore plus attrayante l'utilisation des cônes généralisés. La fonction profil permet, non seulement de faire varier la section en taille mais, elle autorise aussi des allées et venues de la section le long de la trajectoire. On peut associer à la fonction profil plusieurs fonctions comme une autre fonction profil (autorisant les affinités) ou comme d'autres fonctions d'orientation. Les déformations de la section pendant le balayage, bien que non représentables sous forme matricielle, ont aussi été étudiées.

La panoplie de ces déformations appliquées à la section pendant le balayage de la trajectoire constitue un ensemble de règles de balayage suffisamment complet pour obtenir des objets d'une relative complexité. Il nous semble que ces objets auraient été difficiles à modéliser aussi simplement (du point de vue de l'utilisateur) avec d'autres modeleurs classiques (nous pensons, par exemple, à un modeleur CSG -Constructive Solid Geometry-).

Nous nous sommes attachés à fournir un logiciel permettant d'utiliser un large éventail de trajectoires afin de ne pas pénaliser l'utilisateur. Pour cela, il a été nécessaire d'extrapoler des pseudo - normales aux courbes ne possédant pas de normale de Frenet.

Bien sûr, la complexité des objets obtenus doit être contrôlée. Nous avons donc développé des « gardes fous » simples et rapides, ou plus complexes et plus lents, afin d'assurer la validité des cônes généralisés.

Les cônes généralisés générés sont, en général, représentés par un ensemble de points structurés, et il nous a semblé essentiel de pouvoir interpoler ces points par des surfaces de formes libres. Le nouvel objet ainsi interpolé pourra subir les traitements classiques réservés aux surfaces des formes libres (contrôle de la continuité, déformations locales par déplacement de points de contrôle, représentation par décomposition de l'enveloppe convexe, ...).

Nous avons, enfin, développé la notion de trajectoire arborescente et traité des différentes méthodes de modélisation des embranchements. Pour garder l'esprit des cônes généralisés, nous avons choisi d'étudier une méthode de raccord conservant les correspondances paramétriques et nous avons conservé la possibilité d'utiliser les règles de balayage durant les raccords.

A partir des idées et des méthodes présentées dans ce travail, des développements futurs sont envisageables et ont été parfois évoqués :

• Visualisation par tracé de rayons : nous avons posé les bases de la visualisation de cônes généralisés par tracé de rayons dans le chapitre V. Cet algorithme reste cependant à généraliser dans le cas des cônes généralisés ramifiés.

• Représentation par quaternions : la théorie des quaternions s'adapte particulièrement à la modélisation à l'aide des cônes généralisés. Les travaux déjà développés, à l'école des Mines de Saint-Etienne et dans ce travail, sont précurseurs de nouvelles recherches.

• Intégration dans un modeleur : les cônes généralisés ou, plus généralement l'extrusion, sont les seules techniques de modélisation de certains logiciels (Ray Dream Designer). L'intégration de la « philosophie » cônes généralisés à d'autres modeleurs peut sembler intéressante, même si la réalisation des interfaces soulève de nombreux problèmes.

• Interpolation des cônes généralisés par des surfaces de formes libres : nous avons représenté la majorité des courbes mises en jeu par des B-splines cubiques uniformes. Par exemple, il serait intéressant de pouvoir représenter dans certains cas les courbes par des coniques. L'utilisation des NURBS et plus généralement des courbes rationnelles serait un prolongement de notre travail.

Quoi qu'il en soit, la puissance pratique de la modélisation à l'aide des cônes généralisés semble assurer une certaine continuité dans les recherches à venir.

Le développement des cônes généralisés ramifiés a nécessité l'approfondissement de certaines parties de la théorie des raccords de surfaces de formes libres. Nous avons donc étudié dans une deuxième partie quelques aspects de cette théorie.

Dans un premier temps, nous avons étudié un mode de dérivation permettant d'éviter les problèmes liés au surparamétrage des surfaces à pôles (dû à la multiplicité des points de contrôle). Nous avons pu ainsi inclure l'ensemble des fonctions $C^K$ dans l'ensemble des fonction $G^K$. De ce fait découlent deux résultats :

• l'équivalence entre la $C^1$ continuité d'une fonction et l'égalité des vecteurs dérivés à gauche et à droite en tout point du domaine de définition.

• l'équivalence entre la $G^1$ continuité d'une fonction et la colinéarité des vecteurs dérivés à gauche et à droite en tout point du domaine de définition.

Avec ce mode de dérivation, nous avons pu, en toute tranquillité, décrire les conditions de coplanarité en vue de raccorder $G^1$ continûment des surfaces paramétrées concourant autour d'un point. Nous avons, ensuite, explicité les contraintes sur les coefficients des fonctions de raccordement quel que soit le nombre de surfaces à raccorder. Ces contraintes restent valables quel que soit le type de surfaces utilisées.

Un cas particulièrement pratique est celui des surfaces à pôles. Après avoir déterminé les fonctions de raccordement et plus précisément leurs degrés, nous cherchons à déterminer les points de contrôle réalisant un raccord $G^1$ continu. Pour les surfaces de Bézier, nous avons rappelé les résultats classiques obtenus ces dernières années. Nous avons effectué des recherches analogues pour les surfaces B-splines, ceci dans le but d'éviter les incessantes conversions entre les différents modes de représentation de surfaces. Une des principales difficultés réside dans le fait qu'il est compliqué d'élever le degré d'une B-spline uniforme sans augmenter les multiplicités des valeurs nodales. C'est l'introduction d'une matrice d'élévation qui résout le problème. Les résultats ainsi obtenus sont utiles pour la modélisation de cônes généralisés ramifiés.

Par continuité, nous avons développé des résultats similaires pour les surfaces triangulaires, plus particulièrement, les facettes de Bézier et les facettes de Gregory - Bézier. L'avantage des facettes de Gregory - Bézier réside dans leur souplesse (plus grand nombre de points de contrôle). Même si elles font apparaître des termes rationnels, elles nous ont semblé plus adaptées pour la modélisation des embranchements des cônes généralisés. Il nous a donc fallu préciser les contraintes issues de raccords entre surfaces rectangulaires et facettes triangulaires de Gregory - Bézier.

Les travaux que nous avons développés trouvent une application pour la modélisation à l'aide de cônes généralisés. Cependant, ils peuvent être utilisés dans la reconstruction de surfaces échantillonnées, ou encore, pour la modélisation à l'aide de surfaces de formes libres.

Dans l'avenir, nous pourrons aussi envisager d'établir des critères pour la construction des embranchements. Nous pensons notamment à la minimisation des oscillations des surfaces, à la minimisation de l'énergie (somme des dérivées secondes aux bords des surfaces) ou encore à la minimisation de l'aire des surfaces.

## REFERENCES


[AGIN 72] G.J. Agin, Representation and description of Curved Objects. PhD thesis, StanfordUniversity, October 1972.

[AKMA 92] V. Akma and A. Arslan. Sweeping with all graphical ingredients in a topological picturebook. Computer and Graphics, vol. 16, n°3, 1992, p273-281.

[BARR 88] P. J. Barry and R. N. Goldman. A recursive proof of a B-spline identity for degree elevation. CAGD 5, 1988, p173-175.

[BART 88] R. H. Bartels, J. C. Beatty and B. A. Barsky. An introduction to the use os splines in computers graphics, Morgan Kaufmann Publishers, Inc. ,Los Altos, California, 1988. Traduit par P.E. Bézier comme B-splines et Beta-splines, Hermès Publishing, 1988.

[BART 89] R. H. Bartels, J. C. Beaty, B. A. Barsky. B-Splines, Mathématique et CAO, volume 6, Hermès Publishing, 1986.

[BECH 89] D. Bechman. Définition et manipulation de primitives surfaciques de forme libre. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur de Strasbourg, soutenue le 19 Juin 1989.

[BEEK 86] E. Beeker. Smothing of shapes Designed with Free-Form surfaces, CAD, vol. 18, n°4, May 1986, p224-232.

[BEZI 70] P. E. Bézier. Emploi des machines à commandes numériques, Masson et Cie., Paris 1970. Translated by R. A. Forrest and A. F. Pankhurst as Numerical Control - Mathematical and Applications, J. Wiley and Sons Ltd., London, 1972.

[BEZI 86] P. E. Bézier. Courbes et Surfaces, Mathématique et CAO, volume 4, Hermès Publishing, 1986.

[BINF 71] T.O. Binford. Visual perception by computer. In IEEE Conference on systems andcontrols, Miami, december 1971. Unpublished talk.

[BLOO 85] J. Bloomenthal, The mighty Mapple, SIGGRAPH 1985, vol. 19, n°3, p304-310.

[BOEH 84] W. Boehm, G. Farin and J. Kahmann. A Survey of Curve and Surface Methods in CAGD, CAGD, Vol. 1, n°1, July 1984, p1-60.

[BRON 85] W.F. Bronsvoort and F. Klok. Ray Tracing Generalized Cylinders. ACM Transactions on graphics, vol. 4, n°4, Octobre 85, p291-303.

[BRON 89] W.F. Bronsvoort, P. R. V. Nieuwenhuizen and F. H. Post. Display of profiled sweep object. Visual computer 5, p147-157, 1889.

[BRON 92] W.F. Bronsvoort. A Method for converting the Surface of a Generalized Cylinder into a B-spline Surface. Computer & Graphics . vol. 16, n° 2, p175-178, 1992.

[BRUN 93] G. Brunnett. Variational design of curves and surfaces. Surv. Math. Ind., 3 : 1 - 27, 1993.

[CHAR 84] P. Charrot and J.A. Gregory. A pentagonal surface patch for computer aided geometric design, CAGD 1, 1984, p87-94.

[CHAR 80] P. Charrot. The use of triangular and pentagonal patches in numérical representation of surfaces, Ph. D. thesis, departement of Mathematics, Brunel University.

[CHIY 83] H. Chiyokura and F. kimura. Design of Solids with Free-Form Surfaces, Computer Graphics ACM vol. 17, n°3, 1983, p289-298.

[CHOI 89] B. K. Choi and S. Y. Ju. Constant radius blending in surface modeling. CAD, vol. 21, n°4, May 1989, p213-220.

[COLL 76] G. E. Collins and A. G. Akritas. Polynomial real root isolation using Decartes' rule of signs. In Proceedings of the 1976 ACM symposium on Symbolic and algebraic Computation. ACM, New-York, 1976, p272-276.

[COON 64] S. A. Coons. Surfaces for computer aided Design, design division, Mechanical Engineering Dept., Massachusetts Intitute of Technology, Cambridge, Mass., 1964.

[COON 67] S. A. Coons. Surfaces for computer-Aided Design of space forms, Report MAC-TR-41, Massachusetts Intitute of Technology, June 1967.

[COON 87] S.A. Coons. Méthode matricielle. Hermès 1987.

[COQU 87] S. Coquillart. A control-point-based sweeping technique IEEE Computer Graphics and Applications 7(11), p36-45, 1987.

[DU 88] W.-H. DU. Etude sur la représentation de surfaces complexes : application à la reconstruction de surfaces échantillonnées. Thèse de doctorat, Telecom Paris 1988.

[EBEL 91] R. Ebel et J. Sequeira. Reconstruction interactive d'arborescence 3-D à l'aide de surfaces de forme libre. Journées Graphiques, actes Gros Plan 1991, p31-38.

[FARI 82] G. Farin. A construction for the visual C1 continuity of polynomial surface Patches, Computer Graphics and Image Processing, vol. 20, 1982, p272-282.

[FARI 86] G. Farin. Triangular Bernstein-Bézier Patches, CAGD, vol. 3, n°2, August 1986, p83-127.

[FARI 90] G. Farin. Curves and surfaces for Computer Aided Geometric Design, 2nd ed., academic Press, san Diego, California 1990.

[FILI 89] D. J. Filip. Blending Parametric Surfaces. ACM Transaction on Graphics, vol. 8, n°3,July 1989, p164-173.

[GUIA 95] C. Guiard et J. Sequeira. Etude de la G1 continuité d'embranchement de cylindres généralisés. Revue de CFAO et d'informatique graphique, vol. 10, n°6, 1995, p587-605.

[HAGE 92] H.Hagen and P. Santarelli. Variational Design of Smoth B-spline Surfaces. In H. Hagen, editor, Topics in surface Moddeling, pages 85-94. SIAM, 1992.

[HAGE 96] H. Hagen, S. Heinz and A. Nawotki. Variational Design with Boundary Conditions and Parameter Optimized Surface Fitting. Blauberen II. 1996.

[HAMM 44] Sir W.R. Hamilton. On quaternions ; or on a new system of imaginaries in algebra. Philosophical Magazine, n°XXV, juillet 1844, p10-13.

[HANO 93] G. Hanotaux. Techniques de contrôle du mouvement pour l'animation. Thèse de doctorat. Ecole des Mines de Saint-Etienne, Avril 93.

[HEGR 89] G. Hégon et O. Cousin. Une modélisation des cônes généralisés à l'aide des B-splines. Revue de CFAO et d'infographie. 1989, vol. 4, n°3, p7-27.

[HSU 94] J. Hsu and D. Chelberg. Visible Light and X-Ray Tracing of generalized Cylinders. CVGIP : Graphical Models and Image Processing, vol. 56, n° 5, September, p392-401, 1994.

[JIN 94] F. Jin A Knowledge Based System for the Design and Fairing of Free-Form Surfaces with Tangent Plane Continuity. In German, dissertation, Technical University of Berlin D83, 1994.

[KLOK 86] F. Klok. Two moving Coordinate Frames for sweeping along a 3D Trajectory. CAD 3, 1986, p217-229.

[LANE 83] J. Lane et R. Resenfeld. A geometric proof of the variationdiminishing propertiy of B-spline approximation. J. Approx Theory. 1983.

[LOUN 92] M. Lounbery, S. Mann and T.DeRose. Parametric surface interpolation. IEEE Computer Graphics & Applications, september 1992.

[MANN 92] S. Mann et al.. A Survey of Parametric Scattered Data fitting Using Triangular Interpolants, in Curve and surface Design, H. Hagen, ed., SIAM, Philadelphia 1992, p145-172.

[MARR 77] D. Marr. Analysis of occluding contour. In Proceedings of the Royal Society ofLondon, p441-475, 1977.

[NOWA 92] H. Nowaki, P..D. Kaklis and J.Weber. Curve Mesh Fairing and $GC^2$ surface Interpolation. Modelisation Mathématique et Analyse Numérique, AFCET Gauthier-Villars, Paris vol. 26-1, p113-135, 1992.

[NOWA 96] H. Nowacki, F. Jin and X. Ye. A synthesis Process for Fair Free-Form Surfaces ; Blauberen II. 1996.

[PERN 92] E. Perna. Modèles de surfaces pour la CFAO, raccordement de carreaux définis par produit tensoriel, Thèse de doctorat, Université Claude Bernard - Lyon 1, Octobre 1992.

[PETE 90] J. Peters. Local smooth surface interpolation : a classification. CAGD, vol. 7, 1990, p191-195.

[PIPE 87] B. Piper. Tangent plan continuity between traingular Bézier patches, In G. Farin edited, Geometric Modelling, SIAM, Philadelphia 1987.

[POST 86] F.H. Post and F. Klok. Deformation of Sweept Object in solid Modeling.Eurographics 1986. p103-114.

[PRAU 84] H. Prautzsch. Degree elevation of B-spline curves. CAGD, vol. 18, n°12, 1984, p193-198.

[RAO 88] K. Rao and G. Medioni. Useful geometric properties of the generalized cone. In Proc. Computer Vision and Pattern Recognition. p276-281.June 1988.

[SCHM 87] F. J. M. Schmitt and W.-H. Du. Bézier Patches with local Shape Control Parameters, EUROGRAPHICS' 87, Amsterdam, 24-28 August 1987, p261-274.

[SHAN 84] U. Shani and D. Ballard. Splines as Embeddings for Generalized Cylinders. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 27, p129-156, 1984.

[SHOM 85] K. Shomake. Animating rotation with quaternion curves. Computer Graphics, vol. 19, n°3, 1985, p245-254. Proc. SIGGRAPH'85.

[VATA 96] G. Vatant. Une modélisation à l'aide de cônes généralisés profilés, déformés et ramifiés. Revue internationale de C.F.A.O. et d'informatique graphique. Acte MICAD 1996.

[VATA 96] G.Vatant. Contraintes sur les fonctions de raccordement décrivant un raccord $G^1$ entre plusieurs carreaux surfaciques. Journée de l'A.FIG IV. 1996.

[WOOD 86] C.D. Woodward. Method for cross-sectionnal design of B-spline surfaces. In A.A.G. Requicha (Ed.). Eurographics '86 Procedings. North-Holland, Amsterdam, 129-142 (1986).

[YE 94a] X. Ye Construction and Verification of Smooth Free-Form Surfaces Generated by Compatible Interpolation of Arbitrary Meshes. Dr Köster Publication, Berlin 1994.

[YE 94b] X. Ye and H. Nowaki. $G^1$ Interpolation of Rectangle Cubic curve Mesh Using Biquintic Bézier Patches. Sixth IMA Conf. on Mathematics of Surfaces, in Millineux, G (edition). Mathematics of Surfaces VI. Oxford University Press, U.K., p429-452. 1994.

[YE 95] X. Ye and H. Nowaki. Optimaly Tangent-Plane and Curvature Continuous Modifications od Curves at a Common Nodepoint. Proc. ASME 1995. Conf. on Advances in Design Automatisation, vol. 1, DE-Vol 82. 1995.

[YE 96a] X. Ye and H. Nowaki. Ensuring Compatibility of $G^2$-continuous Surface Patches around a Nodepoint. CAGD 20. 1996.

[YE 96b] X. Ye, Y. Lang and H. Nowaki. Geometric continuity between Adjacent Bézier Patches and their constructions. CAGD 20. 1996.

[YE 96c] X. Ye, H. Nowaki and N. Patrikalakis. CG1 Multisided Bézier Surfaces. Engineering with computers. 1996.

## ANNEXE n°1 : GENERALITES SUR LES B-SPLINES

Les B-splines peuvent jouer un rôle important pour la modélisation des CG. Nous donnons dans cet annexe, (complément du chapitre III de la partie 2), les principales propriétés des B-splines. Pour plus de détails, on se reportera au livre de Bartels, Beaty et Barsky [BART 89].

### Définition

Soit une suite croissante de scalaires $(u_i)_i$ dite vecteur nodal. Les B-splines de base d'ordre 1 et de vecteur nodal $(u_i)_i$ sont définies par :

$$N_{i,1} = \begin{cases} 1 & \text{pour } u \in [u_i, u_{i+1}] \\ 0 & \text{pour } u \notin [u_i, u_{i+1}] \end{cases}$$

Les B-splines de base d'ordre supérieur k sont définies récursivement par :

$$N_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k-1} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k} - u}{u_{i+k} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u) \qquad k>1$$

### Propriétés

- $N_{i,k}(u)$ est nulle hors de l'intervalle $[u_i, u_{i+k}]$. L'intervalle $[u_i, u_{i+k}]$ est donc le support de $N_{i,k}(u)$.

- L'intervalle $[u_k, u_{r+k}]$ est recouvert par k supports de B-splines de base et la somme de ces B-splines sur cet intervalle est égale à l'unité.

- Les B-splines de base d'ordre k sont des fonctions polynomiales de degré k-1 par morceaux. Si toutes les valeurs nodales $u_i$ sont distinctes, alors $N_{i,k}$ est de classe $C^{k-2}$. Si une des valeurs nodales $u_i$ a une multiplicité d'ordre m alors $N_{i,k}$ est de classe $C^{k-m-1}$ en $u_i$.

### Courbes B-spline

Soit un ensemble de points du plan ou de l'espace $\{P_i, i = 1,..,n\}$ dit ensemble de points de contrôle. On peut définir une courbe B-spline $C(u)$ d'ordre k, et de points de contrôle $\{P_i, i = 1,..,n\}$ par une combinaison linéaire des points de contrôles. Les coefficients de la combinaison linéaire sont des B-splines de base d'ordre k :

$$C(u) = \sum_{i=0}^{k-1} P_i N_{i,k}(u) \qquad u \in [\inf(u_i), \sup(u_i)]$$

Nous pouvons formuler quelques remarques élémentaires :

• lorsque u varie dans un intervalle défini par deux valeurs nodales consécutives et donc que seules k B-splines de base ne sont pas nulles dans cet intervalle, on peut réduire la somme à k termes.

• un simple calcul combinatoire (combien il y a-t-il de suites de k termes consécutifs dans un ensemble de n termes) nous donne le nombre de morceaux dont est composée la courbe : n-k+1. Ces morceaux de courbe sont des polynômes et sont raccordés $C^{k-2}$ continûment.

• le fait, que pour tout paramètre *u*, la somme des B-splines de base est égale à 1 nous permet d'affirmer que la courbe *C* est comprise dans l'enveloppe polygonale définie par les points de contrôle.

**Les B-splines cubiques uniformes**

On dit d'une courbe B-spline qu'elle est cubique uniforme lorsque le vecteur nodal est uniforme et que les B-splines de base choisies pour la représentation de la courbe sont d'ordre 4. Une courbe B-spline cubique uniforme est donc composée de n-3 morceaux raccordés $C^2$ continûment entre eux.

Considérons, maintenant, un morceau $C_i(u)$ de la courbe C(u) défini sur l'intervalle $[u_i, u_{i+1}]$. Remplaçons le paramètre *u* par le paramètre *t* tel que :

$$t = \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i},$$

alors $C_i(t)$ est définie sur l'intervalle $[0,1]$. On montre que $C_i(t)$ peut alors s'écrire sous forme matricielle de la manière suivante :

$$C_i(t) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \\ P_{i+2} \\ P_{i+3} \end{bmatrix} \qquad t \in [0,1]$$

L'avantage d'une telle formulation est d'éviter le calcul des B-splines de base, mais aussi de pouvoir facilement formuler les dérivées premières et secondes :

si $6C_i(t) = TM_{Bspl}P$ alors

$6C_i'(t) = T'M_{Bspl}P$ avec $T' = [3t^2 \quad 2t \quad 1 \quad 0]$

et $6C_i'(t) = T''M_{Bspl}P$ avec $T'' = [6t \quad 2 \quad 0 \quad 0]$

**Evaluation de $C_i(t)$**

Si on choisit d'évaluer $C_i(t)$ régulièrement par rapport au paramètre *t*, on peut alors utiliser une méthode simple permettant un gain de temps non négligeable. Supposons que les valeurs $t_j$ du paramètre *t* pour lesquels on évalue $C_i(t)$ soient choisies telles que : $t_j = \frac{j}{m}$. Si on note $\delta = \frac{1}{m}$, on peut alors écrire que :

$$T = [(j\delta)^3 \quad (j\delta)^2 \quad (j\delta) \quad 1].$$

Après quelques calculs matriciels, on peut montrer que l'on peut écrire $T$ à l'aide de matrices triangulaires :

$$T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] L^j N \Delta$$

avec $\Delta = \begin{bmatrix} \delta^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $N = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

On a alors :

$$C_i(t) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] L^j N \Delta M_{Bspl} P.$$

Le produit $N\Delta M_{Bspl}$ n'a besoin d'être calculé qu'une seule fois pour les (n-2)m évaluations, le calcul de $C_i(t)$ devenant ainsi beaucoup plus rapide. Pour finir, remarquons que les coefficients de la matrice $L^j$ sont directement issus des coefficients du triangle de Pascal et que :

$$N\Delta M_{Bspl} = \begin{bmatrix} -6\delta^3 & 18\delta^3 & -18\delta^3 & 6\delta^3 \\ 6\delta^3 + 6\delta^2 & -18\delta^3 - 12\delta^2 & 18\delta^3 + 6\delta^2 & -6\delta^3 \\ -\delta^3 - 3\delta^2 & 3\delta^3 - 3\delta^2 + 3\delta & -3\delta^3 - 3\delta^2 + 3\delta & \delta^3 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## ANNEXE n°2 : INTERPOLATION D'UN ENSEMBLE DE POINTS PAR UNE B-SPLINE PASSANT PAR CES POINTS.

Nous avons largement utilisé l'interpolation d'une ensemble de points par une B-spline cubique uniforme. Nous donnons, dans cette annexe, la conduite à suivre pour déterminer les points de contrôle de la B-spline d'interpolation.

### Position du problème

Soient n points $\{P_i, i = 1,\cdots,n\}$ de $\Re^3$. Nous cherchons à déterminer l'ensemble des points $\{V_i, i = 0,\cdots,m\}$ constituant le polygone de contrôle (ensemble des points de contrôle) de la B-spline cubique uniforme $C$ passant par les points $P_i$. $C$ est cubique par morceaux et si on note le ième morceau de $C$, $C_i$ nous choisirons de vérifier les égalités suivantes :

$$P_i = C_i(0) \text{ et } P_{i+1} = C_i(1) \text{ pour } i = 1,\cdots,n-1$$

On peut, dans un premier temps, remarquer que $m = n+2$.

### Résolution du système

Le système d'équations à résoudre s'établit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
P_1 = C_0(0) &\Rightarrow P_1 = \frac{1}{6}(V_0 + 4V_1 + V_2) \\
&\vdots \\
P_i = C_{i-1}(0) &\Rightarrow P_i = \frac{1}{6}(V_{i-1} + 4V_i + V_{i+1}) \\
&\vdots \\
P_n = C_{n-2}(1) &\Rightarrow P_n = \frac{1}{6}(V_{n-1} + 4V_n + V_{n+1})
\end{aligned}$$

Ce qui revient à écrire que :

$$P_i = \frac{1}{6}(V_{i-1} + 4V_i + V_{i+1}) \text{ pour } i = 1,\cdots,n$$

<u>1^er^ cas</u> : La courbe à interpoler est ouverte c'est-à- dire que $P_1 \neq P_n$.

Nous avons donc n équations pour n+2 inconnues ; nous pouvons donc imposer deux contraintes supplémentaires. Généralement, ces contraintes portent sur la courbure au début et à la fin de la courbe qui est choisie nulle :

$$C_1''(0) = C_{n-2}''(1) = 0$$

Or $C_1''(0) = V_0 - 2V_1 + V_2$, d'où $V_0 = 2V_1 - V_2$, et $C_{n-2}''(1) = V_{n-1} - 2V_n + V_{n+1}$, d'où $V_{n-1} = 2V_n - V_{n+1}$. Avec ces équations supplémentaires, le système peut être mis sous la forme :

$$P = M_O V \text{ avec } M_O = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{cases} V_0 = 2V_1 - V_2 \\ V_{n-1} = 2V_n - V_{n+1} \end{cases}$$

P (respectivement V) étant les vecteurs composés des points $P_i$ (respectivement des points $V_i$). Une méthode simple pour résoudre ce système est de symétriser la matrice $M_O$. Il est clair que $V_1 = P_1$ et $V_n = P_n$. Nous avons aussi $P_2 = \frac{1}{6}(V_1 + 4V_2 + V_3)$, d'où $4V_2 + V_3 = P_2 - 6P_1$. De même on peut écrire que $V_{n-2} + 4V_{n-1} = P_{n-1} - 6P_n$. Le système peut alors être réécrit sous la forme :

$$P' = M'_O V' \quad , \quad V_1 = P_1, \quad V_n = P_n, \quad \begin{cases} V_0 = 2V_1 - V_2 \\ V_{n+1} = 2V_n - V_{n-1} \end{cases} \quad \text{avec}$$

$$M'_O = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$P' = [P_2 - 6P_1, P_3, \cdots P_{n-2}, P_{n-1} - 6P_n] \text{ et } V' = [V_2, \cdots, V_{n-1}].$$

La résolution reste simple du fait que $M'_O$ est tridiagonale à diagonale principale fortement dominante, symétrique et positive.

<u>2ème cas</u> : La courbe à interpoler est fermée, c'est-à- dire que $P_1 = P_n$.

Les conditions aux limites s'imposent, maintenant :

$$\begin{cases} C_0(0) = C_{n-2}(1) \\ C'_0(0) = C'_{n-2}(1) \\ C''_0(0) = C''_{n-2}(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_0 + 4V_1 + V_2 = V_{n-1} + 4V_n + V_{n+1} \\ V_2 - V_0 = V_{n+1} - V_{n-1} \\ V_0 - 2V_1 + V_2 = V_{n-1} - 2V_n + V_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_0 = V_{n-1} \\ V_1 = V_n \\ V_2 = V_{n+1} \end{cases}$$

Le système se simplifie alors et la résolution du système suivant suffit pour déterminer la B-spline d'interpolation :

$$P' = M_F V'$$

avec $M_F = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 1 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $P' = [P_1, P_2, \cdots, P_{n-2}, P_{n-1}]$ et $V' = [V_1, \cdots, V_{n-1}]$.

Là encore, la résolution reste simple dans la mesure où $M_F$ est symétrique, positive et à diagonale fortement dominante.

## ANNEXE n°3 : INTERSECTION DANS LE PLAN DE DEUX COURBES

Nous proposons, dans cette annexe, un algorithme général permettant de calculer l'intersection de deux courbes contenues dans un même plan. Le processus se décompose en deux étapes.

• Dans un premier temps, on repère pour chaque courbe, les points où les tangentes aux courbes sont parallèles aux axes de définition du plan. Chacune de ces paires de points consécutifs définit en quelque sorte une boîte contenant le morceau de courbe dont les extrémités sont les points définissant la boîte (figure a3.1).

• Une fois les boîtes des deux courbes calculées, la procédure d'intersection compare chacune des boîtes des deux courbes entre elles. Si les boîtes n'ont pas de zone commune, la procédure s'arrête (les morceaux de courbes contenus dans les boîtes respectives ne peuvent se couper). Si les boîtes ont une zone commune, deux cas sont à envisager.

- *Les deux boîtes ne sont pas de taille minimum.* On décompose alors chaque boîte en deux sous-boîtes qui ont comme « coins » commun le milieu paramétrique du morceau de courbe contenu dans les boîtes initiales. La décomposition initiale assure que les « demi » morceaux de courbes restent contenus à l'intérieur des sous-boîtes. La procédure est alors relancée récursivement sur les sous-boîtes.

- *Les deux boîtes sont de tailles minimum.* Le point d'intersection est alors trouvé et peut être choisi comme le centre d'une des deux boîtes.

Bien sûr, afin d'améliorer les performances, on peut repérer initialement les paires de boîtes des deux courbes ne se coupant pas. On peut ainsi éviter de lancer la procédure inutilement.

Le pseudo-algorithme peut s'écrire de la manière suivante :

*Intersection* (boîte1, boîte2)

```
Si les boîtes se coupent alors
    Si taille(boîte1)<taille_minimum alors
        Si taille(boîte2)<taille_minimum alors
            Point d'intersection déterminé
        Sinon       Subdiviser(boîte2)
            Intersection (boîte1,première sous-boîte2)
            Intersection (boîte1,deuxième sous-boîte2)
    Sinon       Si taille(boîte2)<taille_minimum alors
            Subdiviser(boîte1)
            Intersection (boîte2,première sous-boîte1)
            Intersection (boîte2,deuxième sous-boîte1)
```

**Sinon** *Subdiviser* (boîte1)

*Subdiviser* (boîte2)

*Intersection*(première sous-boîte1, première sous-boîte2)

*Intersection*(première sous-boîte1, deuxième sous-boîte2)

*Intersection*(deuxième sous-boîte1, première sous-boîte2)

*Intersection*(deuxième sous-boîte1, deuxième sous-boîte2)

## ANNEXE n°4 : MATRICES NECESSAIRES POUR L'ELEVATION DU DEGRE DE COURBES

Nous donnons dans cette annexe les matrices utilisées pour le calcul des $G^1$ contraintes pour le raccord de surfaces B-splines de degré deux, trois et quatre lorsque $\alpha$ et $\beta$ sont constants et $\gamma$ constant ou linéaire (cf chapitre X).

### B-spline de degré 2 (ordre 3)

$$M^2_{Bspl} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (M^2_{Bspl})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^2_{elev} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$K^2_v = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^{2,v}_{elev} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$K^2_{1-v} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^{2,1-v}_{elev} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

### B-spline de degré 3 (ordre 4)

$$M^3_{Bspl} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (M^3_{Bspl})^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 18 & 11 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$K^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^3_{elev} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -11 & 18 & -9 & 2 \\ -2 & -3 & 6 & -1 \\ 1 & -6 & 3 & 2 \\ -2 & 9 & -18 & 11 \end{bmatrix}$$

$$K_v^3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{elev}^{3,v} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -8 & 7 & 0 \\ -2 & 10 & -26 & 18 \end{bmatrix}$$

$$K_{1-v}^3 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{elev}^{3,1-v} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -18 & 26 & -10 & 0 \\ 0 & -7 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

**Matrices de passage entre représentation de Bézier et représentation B-spline**

- B-spline vers Bézier :

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

- Bézier vers B-spline :

$$\begin{bmatrix} 6 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

**B-spline de degré 4 (ordre 5)**

Nous nous contentons de donner les deux matrices principales :

$$M_{Bspl}^4 = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & -4 & 1 \\ -4 & 12 & -12 & 4 & 0 \\ 6 & -6 & -6 & 6 & 0 \\ -4 & -12 & 12 & 4 & 0 \\ 1 & 11 & 11 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{elev}^4 = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} -50 & 96 & -72 & 32 & -6 \\ -6 & -20 & 36 & -12 & 2 \\ 2 & -16 & 0 & 16 & -2 \\ -2 & 12 & -36 & 20 & 6 \\ 6 & -32 & 72 & -96 & 50 \end{bmatrix}$$

### *Résumé*

Les cônes généralisés (CG), introduits pour la première fois au début des années 1970, sont largement utilisés en C.A.O, en C.F.A.O et dans les domaines de l'imagerie médicale, de la robotique et de la reconnaissance de formes. Un CG est représenté, grosso-modo, par l'espace balayé par le déplacement d'une section le long d'une trajectoire. Dans ce mémoire, des méthodes de construction permettant d'obtenir des objets 3D à l'aide de ces CG sont décrites. Plus particulièrement, l'introduction de paramètres définis par l'utilisateur (profils, orientations et déformations de la section) et représentés sous forme de fonctions, permet d'élargir la famille des objets créés par extrusion. Un cadre formel a été défini pour les fonctions définissant les CG, afin d'assurer le plus possible la validité des résultats. Toujours dans le souci d'assurer la validité des objets créés, il a été développé des algorithmes simples et pratiques contrôlant, pendant la construction, les problèmes de recouvrement.

A l'écart des formulations mathématiques traditionnelles des CG, il est présenté une technique permettant de définir les CG à l'aide des quaternions. Cela donne la possibilité d'inclure les paramètres de déformation de la section dans un même cadre mathématique.

Dans la deuxième partie de ce mémoire, sont présentées des méthodes permettant de construire des cônes généralisés ramifiés. La notion de trajectoire arborescente est introduite, ainsi que des méthodes systématiques définissant les parties tubulaires sur lesquelles s'appuiera l'embranchement $G^1$ continu. La réalisation de cet embranchement nécessite l'utilisation de la théorie des raccords de surfaces dès lors que l'on représente les CG avec des surfaces de formes libres. Ainsi, les principales techniques de raccords $G^1$ continus entre facettes rectangulaires et triangulaires de Béziers sont rappelées et étendues aux facettes B-splines. Une étude complète sur les contraintes portant sur les fonctions de raccordement est aussi présentée.

Afin de valider les techniques précédentes dans un cadre précis, une discussion sur les problèmes de C et G continuité est proposée. Son but est de définir un mode de dérivation qui permet d'inclure l'ensemble des fonctions G-continues dans l'ensemble des fonctions C-continues.



***Mots clés*** : Cônes généralisés, embranchement, $G^1$ continuité, fonctions de raccordements.



### *Abstract*

Generalized cylinders, first described at the beginning of the seventies, are frequently used in C.A.O., C.F.A.O., medical applications, robotics and shape recognition. A generalized cylinder is produced by moving a given contour curve along a given trajectory curve. In this thesis, some methods allowing to build 3D objects with the help of these generalized cylinders are described. In particular, some user defined parameters described by functions (profiles, orientation and deformation of the contour curve) allow to extend the family of the objects created by sweeping. A formal framework has been defined for the functions associated to generalized cylinders, in order to provide, as most as possible, the validity of the created objects. Some simple and practical algorithms have been developed, with control covering problems during the bilding of the generalized cylinders.

In a somewhat unusuam way, a method allowing to define generalized cylinder through quaternions is presented. It gives athe ability to include deformation parameters of the contour curve in a same mathematical framework.

In the second part of this thesis, some methods allowing to build arborescent generalized cylinders are described. The notion of arborescent trajectory is introduced and we propose some systematic methods for difined tubular parts of which the junction with G1 continuity is leaning against. The achievement of this junctionis based on the theory of surfaces connections, because generalised cylinders are represented by means offree form surfaces. Thus, the main connection techniques with G1 continuity between rectangular and triangular Bézier patches are reminded and extended to B-splines patches. A conplete study of the constraints with the connecting functions is also described.

In order to validate the previous methods in a given framework, a discussion on C and G continuity problems is proposed. Its purpose is to define a derivation method allowing to include the set of G-continuous functions into a set of C-continuous functions.



***Key-words*** : generalized cylinders, junctions, G1 continuity, connecting functions.