



HAL
open science

Optimisation des plans d'essais accélérés Application à la tenue en fatigue de pièces métalliques de liaison au sol

Pauline Beaumont

► To cite this version:

Pauline Beaumont. Optimisation des plans d'essais accélérés Application à la tenue en fatigue de pièces métalliques de liaison au sol. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université d'Angers, 2013. Français. NNT: . tel-00942280

HAL Id: tel-00942280

<https://theses.hal.science/tel-00942280v1>

Submitted on 5 Feb 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Pauline BEAUMONT

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université d'Angers
sous le label de l'Université de Nantes Angers Le Mans*

*Discipline : Sciences pour l'Ingénieur
Laboratoire : Laboratoire en Sécurité de fonctionnement **Qualité et Organisation (LASQUO)***

Soutenue le

École doctorale : 503 (STIM)
Thèse n° : 1332

Optimisation des plans d'essais accélérés Application à la tenue en fatigue de pièces métalliques de liaison au sol

JURY

Rapporteurs : **M. Léo GERVILLE RÉACHE**, Maître de conférences, HdR, Université de Bordeaux
M. Alaa CHATEAUNEUF, Professeur, Université Blaise Pascal

Examineur : **M. Maurice LEMAIRE**, Professeur Émérite, IFMA

Directeur de thèse : **M. Fabrice GUÉRIN**, Professeur, ISTIA, Université d'Angers

Co-encadrants de thèse : **M. Pascal LANTIERI**, Docteur Agrégé, ENSAM, Angers
M. Matteo Luca FACCHINETTI, Docteur Ingénieur, PSA
M. Guy MARTIN BORRET, Docteur Ingénieur, PSA

Remerciement

Je tiens tout d'abord à remercier Matteo Luca FACCHINETTI et Guy MARTIN BORRET, pour leur complémentarité dans l'encadrement et leur soutien tout au long de mes travaux, pour leur capacité à m'avoir intégrée au sein de PSA PEUGEOT CITROEN, et pour m'avoir permis de découvrir leurs métiers, leurs passions et leur indescriptible sympathie.

Je souhaite adresser mes plus sincères remerciements à Fabrice Guérin, mon directeur de thèse et plus encore mon soutien tout au long de ces trois années. Je lui suis reconnaissante pour sa disponibilité malgré toutes ses activités et le remercie de m'avoir transféré sa connaissance scientifique et pédagogique. Je ne saurai trouver les mots pour caractériser sa patience, son enthousiasme, son optimisme et sa confiance qui m'ont aidée à avancer et à apprendre chaque jour.

Je remercie particulièrement Pascal LANTIERI, pour avoir co-encadré ma thèse, et avoir mis à ma disposition tout son travail et sa connaissance. Je le remercie de son soutien théorique et universitaire indispensable à tout travail de recherche et pour le temps qu'il a consacré à mon encadrement.

Je remercie très sincèrement Abdessamad KOBİ, directeur du Laboratoire en Sécurité de fonctionnement, Qualité et Organisation (LASQUO), de l'Université d'Angers de m'avoir accueillie si chaleureusement au sein de l'équipe si agréable du laboratoire.

Je remercie sincèrement M. Alaa CHATEAUNEUF et M. Léo GERVILLE-REACHE qui ont accepté d'être rapporteurs pour ma thèse et de l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux.

Je remercie M. Maurice LEMAIRE de me faire l'honneur d'être président de mon jury de thèse, et d'avoir accepté de juger mes travaux.

Une pensée particulière va à tous les membres des équipes EVV2 et ACT pour m'avoir intégré aussi chaleureusement, professionnellement et personnellement et avec toute la bonne humeur qui les caractérise. Je félicite certains de m'avoir supportée et je me félicite

d'en avoir supporté certains chaque jour durant trois ans. Je les remercie tous encore du soutien qu'ils m'ont apporté et m'apportent encore aujourd'hui.

Enfin, j'adresse mes plus belles pensées à ma famille et mes amis. La première est pour mes parents, pour qui, un millier de mercis ne seraient suffisants pour exprimer tout ce que je leur dois, exemple, soutien, aide, amitié et amour sincère, sans quoi je ne serai pas ce que je suis devenue aujourd'hui. A mes frères et ma soeur adorés, j'adresse mes remerciements sincères, chacun pour leur présence et leur soutien bien au-delà de ces trois années, et qui seront toujours un magnifique exemple à suivre pour leur petite soeur. Mes dernières pensées et non les moindres vont à mes amis et à Willy, qui ont été des piliers durant ces trois années, et des points de repère depuis plus de 20 ans et que je porterai à jamais dans mon coeur.

Table des matières

1	Introduction générale	1
1.1	Contexte Général	1
1.2	Contexte Automobile (PSA)	3
1.3	Présentation du manuscrit	6
2	Concepts de la fiabilité en mécanique	9
2.1	L'aspect probabiliste de la fiabilité	9
2.1.1	La fonction de fiabilité d'un système	9
2.1.2	Le cycle de vie d'un système	10
2.1.3	Quelques lois de probabilité courantes	12
2.1.4	Théorie de l'estimation	15
2.2	La physique de l'endommagement	24
2.2.1	Les phénomènes de dégradation en mécanique	24
2.2.2	Le phénomène de fatigue	25
2.3	Evaluation de la fiabilité mécanique	33
2.3.1	L'approche déterministe	34
2.3.2	L'approche probabiliste	35
3	Estimation de la fiabilité par les essais	45
3.1	Protocoles d'essais utilisés chez PSA	46
3.1.1	StairCase	46
3.1.2	Locati	47
3.1.3	StairCase-Locati	48
3.2	Méthodes d'estimation de la fiabilité	49
3.2.1	La méthode PSA	49
3.2.2	La méthode MLE	52
3.2.3	La méthode SVA	55
3.3	Conclusion	59
4	Comparaison des méthodologies globales de qualification en fatigue	61
4.1	Plan d'EXpérience numérique	61
4.1.1	Plan de simulation numérique	61

4.1.2	Hypothèses pour la simulation numérique	62
4.1.3	Simulation des protocoles d'essai	67
4.2	Critère de comparaison des méthodes	69
4.3	Résultats du PEX numérique	71
4.3.1	Effet de la taille d'échantillon en conditions « idéales »	72
4.3.2	Effet des hypothèses en conditions « dégradées »	78
4.4	Conclusions sur les méthodologies de qualification	89
4.4.1	Résultats observés	89
4.4.2	Amélioration «Kaizen» : Le Locati+	93
5	Optimisation d'un plan d'essai	99
5.1	Objectif	99
5.2	Méthodologie d'optimisation	101
5.3	Résultats et plan optimisé	102
5.3.1	Qualité de l'estimation	104
5.3.2	Gain attendu	105
5.4	Validation expérimentale	106
5.4.1	Choix du système	106
5.4.2	Résultats des expérimentations	108
6	Estimation de la fiabilité par les méthodes Bayésiennes	111
6.1	Estimation Bayésienne de la limite d'endurance	112
6.1.1	à partir de données StairCase	112
6.1.2	à partir de données Locati	122
6.2	Estimation Bayésienne dans le cadre des SVA	127
6.2.1	à partir d'un Locati	127
6.2.2	à partir du plan d'essai optimisé	131
6.2.3	Application à des données d'essai	132
6.3	Conclusion	134
6.3.1	Application chez PSA	134
6.3.2	Exemple d'application	135
7	Conclusion Générale et Perspectives	137
	Annexes	143
A	Application des SVA au Locati	145
A.1	Cas de la loi LogNormale	145
A.2	Cas de la loi de Weibull	146
B	D'autres méthodes d'estimation de la probabilité de défaillance	147

Bibliographie

152

Glossaire

MV Maximum de Vraisemblance

SVA Standards de Vie Accélérées (Modèles)

MLE Maximum Likelihood Estimation

PEX Plan d'EXpérience

V.A. Variable Aléatoire

LAS Liaison Au Sol

RETEX RETour d'EXpérience

Liste des tableaux

2.1	Quelques modélisations de la courbe de Wöhler	30
4.1	Paramètres des lois de tirage pour la simulation	65
4.2	Paramètres des lois des nombres de cycles	67
4.3	Nombre de cycles moyen nécessaire à chaque protocole	92
4.4	Récapitulatif des analyses sur les méthodologies globales de qualification	93
5.1	Gain en nombre de cycles du plan d'essai optimisé	106
5.2	Retour d'expérience sur le triangle	107
5.3	Résultats de l'essai optimisé sur triangle	108
5.4	Résultats de l'essai en contrainte constante sur triangle	109
5.5	Résultats de l'estimation LogNormale de durée de vie du triangle	109
6.1	Exemples de lois conjuguées Bayésiennes	113
6.2	Connaissance à priori	115
6.3	Exemple de résultats numériques obtenus par estimation Bayésienne à partir d'un StairCase à 7 pièces	116
6.4	Connaissance à priori très informatif et cohérent	118
6.5	Connaissance à priori très informatif et incohérent	119
6.6	Connaissance à priori informatif et incohérent	121
6.7	Estimation Bayésienne après pondération de l'a priori	122
6.8	Connaissance a priori informatif et cohérent	124
6.9	Estimation Bayésienne à partir d'un Locati 7 pièces	125
6.10	Estimation Bayésienne et par MLE à partir d'un Locati 7 pièces	125
6.11	Connaissance a priori incohérent	126
6.12	Estimation Bayésienne, après pondération, à partir d'un Locati 7 pièces	126
6.13	Connaissance a priori pour le Locati	128
6.14	Exemple de résultats numériques obtenus par estimation Bayésienne à partir d'un Locati (SVA) à 7 pièces	128
6.15	A priori incohérent pour le Locati	129
6.16	Estimation Bayésienne sans pondération d'un a priori incohérent à partir d'un Locati (SVA) à 7 pièces	130

6.17 Estimation Bayésienne avec pondération d'un a priori incohérent à partir d'un Locati (SVA) à 7 pièces	131
6.18 Estimation Bayésienne avec pondération d'un a priori incohérent à partir d'un Locati (SVA) à 7 pièces	131
6.19 Estimation Bayésienne à partir d'un a priori cohérent pour le plan optimisé à 7 pièces	132
6.20 Estimation Bayésienne à partir d'un a priori incohérent pour le plan optimisé à 7 pièces	133
6.21 Estimation Bayésienne à partir d'un a priori pondéré incohérent pour le plan optimisé à 7 pièces	134
6.22 Estimations classiques à partir d'un Locati+ à 7 specimens	135
6.23 Comparaison des estimations Bayésienne (6 pièces) et classiques (PSA et MLE à 7 pièces)	135

Table des figures

1.1	Cycle en V pour la conception de véhicules	4
1.2	Périmètre de la Liaison Au Sol	4
1.3	Pièces de Liaison Au Sol	5
1.4	Défaillance d'un triangle	6
2.1	Représentation de la fiabilité	10
2.2	Courbe en baignoire	11
2.3	Courbe du cycle de vie d'un composant mécanique	11
2.4	Comparaison des lois de distribution	15
2.5	Principe de l'approche Bayésienne (cours Fiabilité F.GUERIN)	19
2.6	Représentation des densités de probabilité du théorème de Bayes	19
2.7	Poids de l'a priori	20
2.8	Détermination du coefficient de pondération normalisé	21
2.9	Exemples de structures	26
2.10	Caractéristiques mécaniques	26
2.11	Caractéristiques d'un cycle de contrainte	27
2.12	Propagation de fissure en fonction du temps sous une contrainte S	27
2.13	Exemple de propagation de fissure	28
2.14	Fissuration pied de cordon de soudure entre composants en tôle d'acier d'organe LAS	28
2.15	Construction de la courbe de Wöhler à 50% de rupture	29
2.16	Propriétés de la courbe de Wöhler à 50% de rupture	31
2.17	Règle d'endommagement selon Miner	32
2.18	Essais de fatigue	33
2.19	Approche déterministe	35
2.20	Approche probabiliste - méthode Contrainte-Résistance	36
2.21	Construction de la distribution des Contraintes	39
2.22	Détermination de la résistance objectif par l'introduction du Client de ré- férence	40
2.23	Intervalle de confiance sur la moyenne en fonction de la taille d'échantillon	41
2.24	Positionnement de la résistance objectif par rapport au F_n	42

2.25	Exploitation du calcul numérique dans l'approche probabiliste	42
2.26	Exemples de résultats de calculs par éléments finis (Cd) sur maillages de modèles de LAS	43
2.27	Représentation de l'espace Contrainte/Résistance. Le risque de défaillance correspondant à l'intégrale sur la zone de défaillance	44
3.1	La procédure StairCase	47
3.2	Exemple de résultat d'une procédure StairCase	47
3.3	Exemple d'une pièce testée en protocole Locati	48
3.4	Représentation des fonctions G et H [Dixon and Mood, 1948]	51
3.5	Résultats d'un protocole StairCase	53
3.6	Résultats d'un protocole Locati	54
3.7	Principe des modèles SVA	56
3.8	Définition du modèle de régression	56
4.1	Principe des simulations du plan d'expérience	62
4.2	Paramètres de génération des essais et d'estimation de la fiabilité	63
4.3	Identification de la loi de distribution en nombres de cycles	67
4.4	Représentation des distributions selon l'axe d'étude	70
4.5	Représentation des résultats des estimations	72
4.6	Effet de la taille d'échantillon sur les estimations de moyenne	74
4.7	Distribution des estimations de la moyenne de 1000 StairCase à 7 pièces	75
4.8	Effet de la taille d'échantillon sur les estimations de l'écart-type	77
4.9	Effet de la loi de tirage sur les estimations de moyenne (StairCase)	79
4.10	Effet de la loi de tirage sur les estimations d'écart-type (StairCase)	80
4.11	Effet du premier niveau d'effort sur les estimations à partir d'un StairCase (n=50)	82
4.12	Effet de l'incrément d'effort sur les estimations à partir d'un StairCase (n=50)	83
4.13	Effet du premier niveau sur les estimations d'un StairCase (n=7)	84
4.14	Effet de l'incrément sur les estimations d'un StairCase (n=7)	85
4.15	Effet des paramètres du Locati sur l'estimation PSA (n=7)	86
4.16	Effet des paramètres du Locati sur l'estimation MLE (n=7)	87
4.17	Effet des paramètres du Locati sur l'estimation SVA (n=7)	87
4.18	Effet de basquin sur les estimations d'un Locati (n=7)	89
4.19	Comparaison des estimations de probabilité de défaillance pour un StairCase	90
4.20	Comparaison des estimations de probabilité de défaillance pour un Locati	91
4.21	Qualité d'estimation des modèles SVA à deux paramètres à partir d'un protocole Locati	91
4.22	Estimation de la probabilité de défaillance par SVA avec b fixé (Locati 7 pièces)	92

4.23	Configurations du protocole Locati	94
4.24	Effet de la pente Basquin et du niveau de départ de l'effort d'un protocole Locati à 7 pièces, sur l'estimation de la moyenne de la limite d'endurance par la méthode PSA	95
4.25	Effet de la pente Basquin et du niveau de départ de l'effort d'un protocole Locati à 7 pièces, sur l'estimation de l'écart-type de la limite d'endurance par la méthode PSA	95
4.26	Comparaison des nombres de cycles totaux pour des campagnes d'essai à 7 pièces selon les différents protocoles	96
4.27	Estimation des paramètres de la limite d'endurance par MLE à partir d'un Locati+	97
4.28	Estimation PSA des paramètres de la limite d'endurance à partir d'un Locati+	97
4.29	Estimation PSA et MLE de la moyenne à partir d'un Locati+	98
4.30	Choix de la méthode d'estimation en fonction du résultat	98
5.1	Fiabilité en fonction du plan d'essai en contraintes échelonnées décroissantes	100
5.2	Variance asymptotique de la fiabilité en fonction de τ et S_2	104
5.3	Valeurs du plan d'essai optimisé	104
5.4	Qualité d'estimation des modèles SVA sur le plan optimisé (7 pièces)	105
5.5	Qualité d'estimation des modèles SVA sur le plan optimisé (7 pièces), hypothèse de b fixé	105
5.6	Triangle pour validation expérimentale	107
5.7	Contraintes de Von Mises par calcul éléments-finis sur le triangle	107
5.8	Plan d'essai de validation appliqué au triangle	108
5.9	Estimation de la fonction de Fiabilité à $1,27F_n$	109
5.10	Locati ⁻¹ appliqué au triangle	110
6.1	Représentation du théorème de Bayès pour l'estimation de la limite d'endurance	114
6.2	Intervalles de confiance sur l'estimation de la moyenne	114
6.3	Estimation Bayésienne des moyenne et écart-type d'un SC (7pièces)	117
6.4	Comparaison des estimations PSA, MLE et Bayésienne des moyenne et écart-type de 1000 SC (7pièces)	117
6.5	Estimation bayésienne à partir d'un StairCase, en considérant un a priori cohérent et informatif	118
6.6	Comparaison de l'estimation PSA, MLE et Bayésienne avec a priori cohérent et informatif (StairCase)	119
6.7	Estimation bayésienne à partir d'un StairCase, en considérant un a priori incohérent et informatif	120

6.8	Comparaison de l'estimation PSA, MLE et Bayesienne avec a priori <i>incohérent et informatif</i> (StairCase)	120
6.9	Étapes de translation de l'a priori pour l'estimation du facteur de compatibilité K	121
6.10	Estimation Bayesienne de la moyenne après pondération de l'a priori	122
6.11	Résultats d'un protocole Locati	123
6.12	Estimation Bayesienne des paramètres de la limite d'endurance, Locati 7 pièces	125
6.13	Estimation Bayesienne sans pondération, Locati 7 pièces	126
6.14	Estimation Bayesienne pondérée, Locati 7 pièces	126
6.15	Estimation Bayesienne des paramètres des SVA à partir d'un Locati (7pièces)	129
6.16	Estimation Bayesienne sans pondération, Locati SVA 7 pièces	129
6.17	Translation de l'a priori pour la détermination du facteur de pondération, Locati SVA 7 pièces	130
6.18	Estimation Bayesienne avec pondération de l'a priori, Locati SVA 7 pièces	130
6.19	Estimation Bayesienne à partir d'un a priori cohérent, selon le plan d'essai optimisé	132
6.20	Estimation Bayesienne à partir d'un a priori incohérent, selon le plan d'essai optimisé	133
6.21	Estimation Bayesienne à partir d'un a priori pondéré incohérent, selon le plan d'essai optimisé	134

Introduction générale

1.1 Contexte Général

Dans l'industrie, le développement d'un produit s'effectue selon un cahier des charges précis qui demande à ce que le système réponde à une performance de qualité durant un certain temps. Cependant le risque de ne pas répondre à ces exigences existe toujours : une défaillance redoutée n'est jamais impossible, mais se doit d'être maîtrisée.

Le concept de fiabilité permet d'évaluer si le système remplira bien sa mission, dans certaines conditions, pour la durée demandée et en garantissant le risque de défaillance maîtrisé.

Le fiabilité d'un système peut être assurée :

- à partir de l'existant : des produits similaires déjà opérationnels, le retour d'expérience (e.g. retour garantie), des avis d'experts...
- au cours de la conception d'un nouveau produit : par des calculs et/ou des essais.

On note ici que, comme il sera décrit dans la suite de ce mémoire, il est nécessaire de provoquer les défaillances redoutées afin de les cerner.

Pour n'importe quel produit (destiné à l'automobile, au nucléaire, à l'aviation, au ferroviaire, etc.) il est important de connaître les caractéristiques de fiabilité, afin de prévoir, selon les cas et l'utilisation, la maintenance, les durées de vie, les procédures de sécurité, la prévision de la garantie ... L'objectif établi dans tous ces secteurs reste de garantir la fiabilité des systèmes à moindre coût, à savoir une fiabilité au juste nécessaire.

Dans un objectif de réduction des coûts, il est assez aisé de comprendre que des systèmes, ayant une durée de vie très longue, ne peuvent être testés dans les conditions de sollicitations usuelles pour en observer la durée de vie. Cela engendrerait des durées de test très longues impliquant un coût de conception très élevé. Des travaux sur la dimi-

nution des temps d'essai ont donc naturellement vu le jour. Il existe deux moyens d'y parvenir :

1. Réduction du Volume. Cette approche ne réduit pas singulièrement la durée du test, mais agit uniquement sur le nombre d'essais. Elle est notamment applicable si l'entreprise possède un produit similaire, ou pour lequel les caractéristiques sont proches, à partir duquel on peut alors en déduire de l'information qui permettra de tester de plus petits échantillons [Procaccia et al., 1992], [Clarotti, 1998], [Robert, 1992]. Cependant le temps d'essai reste potentiellement très long, si l'on effectue ces essais dans des conditions d'utilisation de systèmes très fiables.
2. Réduction du temps d'essai. La sévérisation des conditions d'essai est un moyen très utilisé pour accélérer les processus de défaillances, et donc obtenir plus rapidement les informations recherchées pour déterminer la durée de vie [Dixon and Mood, 1948], [Elsayed, 2006], [Nelson, 1990], [Pham, 2003]. Par sévérisation on entend par exemple, des températures, des taux d'humidité ou encore des cycles de contrainte plus endommageants, à savoir plus élevés que ceux mesurés en conditions d'utilisation usuelle. Des protocoles d'essais accélérés ont donc été développés.

Dans le domaine mécanique, il est avéré qu'il est plus difficile, plus long et plus coûteux de déterminer la fiabilité d'un système que dans le domaine électronique [Brissaud et al., 2007], et ce pour plusieurs raisons :

- a. les modes de défaillances sont complexes ;
- b. les facteurs de contrainte (variables exprimants la sévérité de l'usage) sont difficiles à prévoir ;
- c. les durées de vie sont plus longues face à l'obsolescence des systèmes électroniques ; on peut citer comme exemple la différence entre les durées de vie des téléphones (plutôt de 2 ans) et celles des automobiles (plutôt de 15 ans) ;
- d. on dispose de très peu de bases de données (NPRD [RIAC, 2011], NWS, ...) : en mécanique les propriétés des systèmes ne dépendent pas uniquement des composants ou du matériau, mais aussi de la géométrie, des différents traitements de la matières (e.g. traitement de surface), des assemblages, des procédés de fabrication (e.g. soudure, emboutissage, ...), etc. alors qu'en électronique les bases de données (norme MIL-HDBK-217F, FIDES...) existent et sont conséquentes, validées et prouvées depuis de nombreuses années. Elles permettent une évaluation simple de la fiabilité d'un système à partir des données de ses composants, issues des recueils, et donc de réduire le volume d'essais au vue de la connaissance déjà établie ;
- e. et enfin, les prix des essais et des prototypes sont plus élevés et entraînent des coûts de développement plus importants.

Par conséquent, en mécanique, pour faciliter la conception par rapport aux coûts induits, la validation des prototypes fait de plus en plus appel aux calculs numériques, grâce au développement de modèles CAO représentant les systèmes, puis les conceptions sont validées par les essais, qui sont toujours requis dans le dossier de conception final (e.g. première homologation).

Dans l'automobile, la combinaison de ces deux expertises (calculs numérique et essais) est très généralement développée. Dans le contexte actuel du marché automobile, il est plus que nécessaire de réduire les coûts au maximum, tout en conservant la fiabilité des systèmes, pour garantir la sécurité des véhicules, et la qualité pour honorer l'image de marque, qui est un dû au client et qui est notoirement appréciée lorsqu'elle n'est pas au rendez-vous.

1.2 Contexte Automobile (PSA)

Dans le secteur automobile, la sûreté de fonctionnement doit s'appliquer à toutes les attentes clients, en termes de *FMDS* :

- Fiabilité : bon fonctionnement du véhicule, dans les conditions données, durant un intervalle de temps donné (l'ordre de grandeur de la durée de vie d'un véhicule est d'environ 15 ans ou 300 000 km, la garantie allant de 2 à 7 ans selon les constructeurs),
- Maintenabilité : capacité du véhicule à être entretenu et réparé à moindre coût,
- Disponibilité : le véhicule doit être en état de marche à l'instant souhaité,
- Sécurité : le client ne doit pas être mis en danger par l'utilisation du véhicule, et bénéficier de protection en cas d'erreur.

A noter que, pour l'automobile, il n'existe pas de maintenance programmée obligatoire, contrairement à d'autres secteurs industriels comme l'aéronautique ou le nucléaire : les approches fiabilistes reposent donc essentiellement sur l'établissement préalable de profils de mission. En effet, les dégradations d'un véhicule sont liées à l'usage qui en est fait par les clients. Par profils de missions on entend la représentation de cet usage. Pour dimensionner correctement les systèmes il est nécessaire de représenter au mieux la distribution statistique des sollicitations en clientèle. Il s'agit également de pouvoir justifier que la distribution des résistances des systèmes satisfassent les sollicitations des clients selon un risque admis donné.

La validation de ce risque, autrement dit une probabilité de défaillance (très faible dans l'automobile, on parle souvent de probabilité au plus de l'ordre de la probabilité de survie de l'être humain hors du véhicule), repose sur une approche probabiliste qui nécessite d'être validée à chaque étape du cycle de conception : véhicule, sous-systèmes

(e.g. Liaison Au Sol (LAS)) et organes [Bignonnet and Thomas, 2004] comme le montre la figure 1.1.

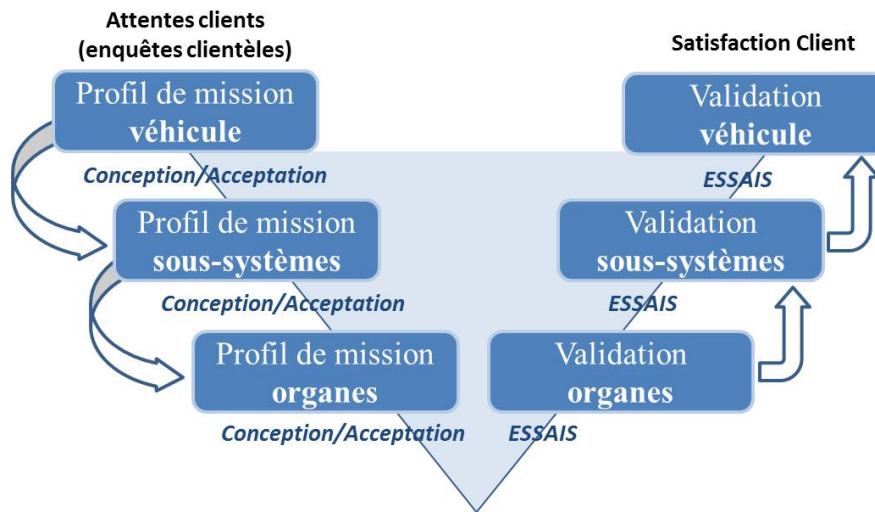


FIGURE 1.1: Cycle en V pour la conception de véhicules

La Liaison Au Sol (cf. figure 1.2), est l'ensemble des organes qui relient le châssis du véhicule à la route, répartis en deux systèmes : le train avant et le train arrière.

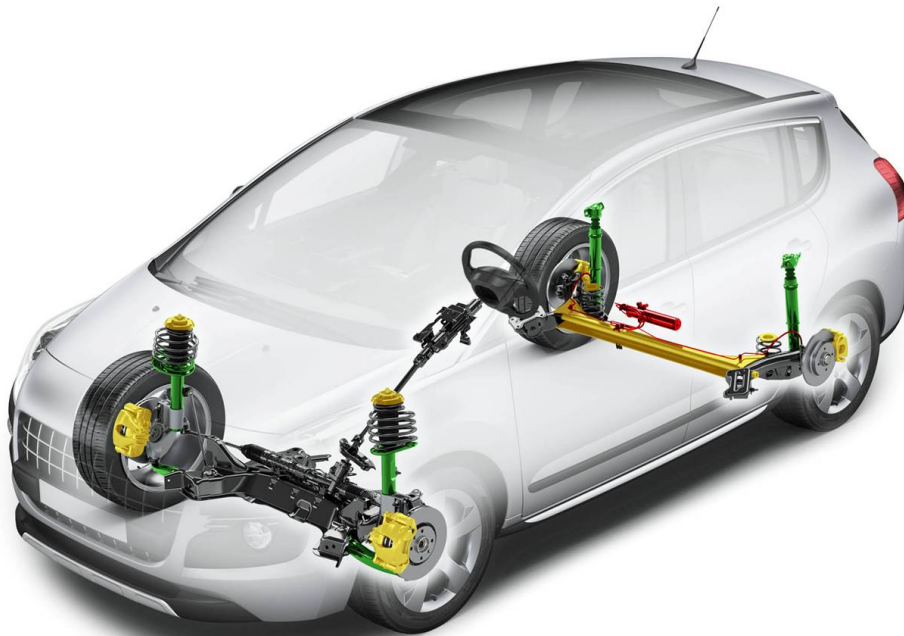


FIGURE 1.2: Périmètre de la Liaison Au Sol

Les trains roulants sont des systèmes mécatroniques qui assurent les fonctions de suspension verticale, de direction et de freinage, par les différents sous-systèmes définis par : les essieux, la suspension, le pneu et la roue, la direction, et les organes de freinage. Les essieux, représentés en figure 1.3, sont les éléments sur lesquels porte le sujet de cette thèse.

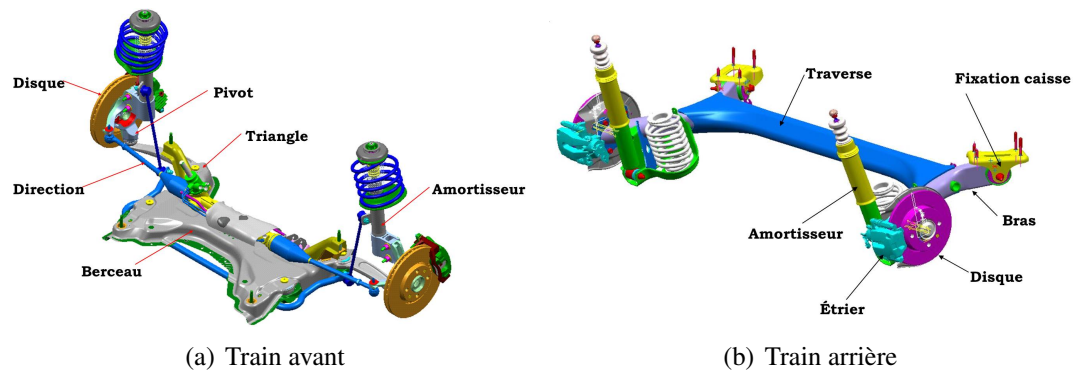


FIGURE 1.3: Pièces de Liaison Au Sol

La plupart des composants de train (e.g. Berceau, Triangle figure 1.4(a)) sont des organes de sécurité, c'est à dire, dont les défaillances peuvent entraîner un évènement redouté de différente gravité [cf. norme ISO 26 262], selon son taux d'exposition (situations de vie), sa contrôlabilité (par une réaction client ou non), et sa sévérité (blessure critique, sérieuse, mineure, ...).

Environ 70% des évènements redoutés qui pourraient survenir à un client pourraient avoir une origine en liaison au sol. En écartant par défaut les dysfonctionnements des systèmes pilotés (ABS, ESP,...) on ne considère ici que ceux liés à une cause mécanique. Les mécanismes de défaillance les plus redoutés pour les pièces de LAS sont issus des phénomènes de fatigue à grand nombre de cycles (figure 1.4(b)). La fiabilité est déterminée par des calculs numériques et des essais de validation (figure 1.4(c)) ; l'estimation de la tenue des systèmes est basée sur des hypothèses physiques et statistiques liées aux phénomènes de fatigue. Considérons ici l'exemple d'un train avant (cf. figure 1.3(a)), et en particulier d'un triangle (figure 1.4(a)) dont le mode de défaillance principal est une fissuration par fatigue (figure 1.4(b)) qui est maîtrisé par un essai de fatigue (figure 1.4).

C'est sur la partie essais de validation que porte le sujet de la thèse : en effet les méthodologies existantes ont fait leurs preuves chez PSA depuis de nombreuses années, mais possèdent désormais certaines limites :

- a. Un essai même sur pièce simple peut durer 3 mois. Compte-tenu de la contraction des temps de développement, il existe le risque de dégrader les procédures pour respecter le délai.
- b. Le volume d'essai réalisé chaque année chez PSA est très important et correspond

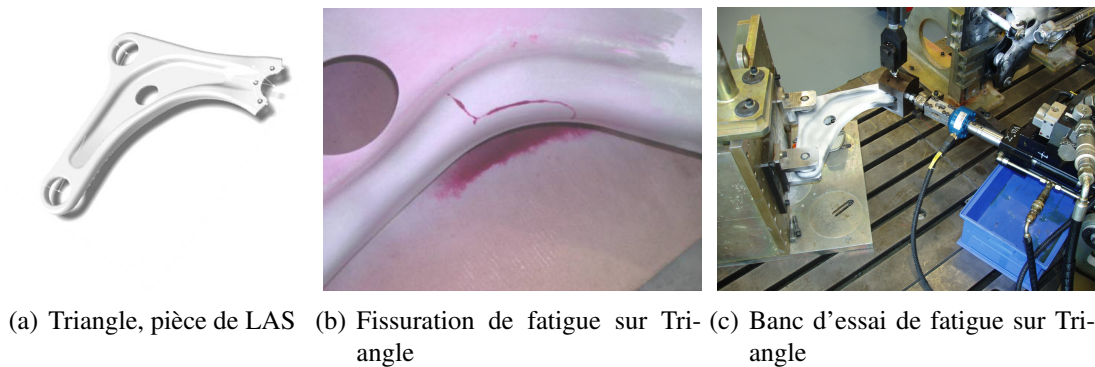


FIGURE 1.4: Défaillance d'un triangle

environ à 300 millions de cycles (le double si l'on inclus les essais réalisés chez les fournisseurs) ce qui représente un coût très conséquent.

- c. Les méthodologies n'ont pas été modernisées depuis plus de 15 ans, alors que les recherches sur les méthodes d'accélération d'essais ont progressé dans le domaine académique.

L'objectif finale de la thèse est une réduction du volume globale et du temps d'essais, ce qui aura un impact favorable direct sur les délais de validation, mais aussi sur les coûts induits. Cela sous la contrainte de fournir des informations statistiques au moins aussi fiables que celles pratiquées actuellement.

1.3 Présentation du manuscrit

Dans le contexte de qualification des pièces de LAS en fatigue, le travail de thèse porte principalement sur la recherche d'une méthodologie globale d'essai au moins aussi efficace que l'existant, mais permettant d'obtenir un gain en terme de temps. Le premier objectif est de bien comprendre le contexte industriel et théorique de la fiabilité appliquée à la mécanique, et de comprendre les phénomènes physiques qui régissent toute la conception des pièces de LAS. Cela fait l'objet du chapitre 2, dans lequel seront présentées successivement :

- a. les notions statistiques fondamentales à la compréhension de l'aspect probabiliste de l'évaluation de la fiabilité,
- b. les propriétés mécaniques influant sur la durée de vie des composants d'un système mécaniques, avec un focus sur le phénomène de fatigue, principal mécanisme responsable des défaillances sur les pièces de LAS,
- c. et enfin les méthodes d'évaluation de la fiabilité en mécanique, selon deux approches différentes (déterministe et probabiliste). L'approche probabiliste utilisée actuellement chez PSA sera ici détaillée.

Une fois connues les notions de base, nécessaires à la compréhension du sujet, une étude des méthodologies globales d'évaluation de la fiabilité doit être effectuée. Pour cela on se propose de considérer deux axes d'étude. En effet, pour qualifier une pièce en fatigue par les essais, on se doit d'appliquer une méthodologie globale de qualification, constituée séquentiellement :

1. d'un protocole d'essai : processus ou gamme opératoire à faire subir à une ou plusieurs pièces pour en observer la réponse physique.
2. d'une méthode d'estimation : algorithme de calcul qui permet de définir la tenue des pièces à partir des résultats d'un certain protocole d'essai.

En ce qui concerne les protocoles d'essai, dans un premier temps, seuls les protocoles historiquement utilisés chez PSA sont étudiés. On y applique d'abord différentes méthodes d'estimation pour observer les qualités d'estimation liées à chaque méthodologie globale de qualification en fatigue. La présentation des protocoles ainsi que des diverses méthodes d'estimation font l'objet du chapitre 3.

Le but étant de définir une méthodologie globale d'essai satisfaisant une qualité d'estimation au moins aussi efficace que celles qui sont utilisées actuellement, il s'agit de comparer les différentes méthodes sur un axe coût-qualité d'estimation. Cette comparaison fait l'objet du chapitre 4, dans lequel on définit un critère de comparaison à partir duquel on peut estimer la ou les méthodes les plus efficaces. Pour cela on se propose de créer un plan d'expérience numérique permettant de juger à la fois de la qualité d'estimation, mais aussi de la robustesse de chaque méthode aux différents paramètres aléatoires des méthodologies. Une fois les méthodes d'estimation comparées par leur qualité d'estimation et leur robustesse, il s'agit de définir un protocole qui permettra d'appliquer la méthode la plus efficace, tout en permettant d'obtenir un gain en termes de temps d'essai par rapport aux protocoles historiquement utilisés chez PSA. L'optimisation du plan d'essai est décrite au chapitre 5.

Les méthodologies globales de qualification chez PSA reposent sur des hypothèses, issues des avis d'experts, du RETEX, etc. Ainsi, nous proposons dans la dernière partie (chapitre 6) d'inclure la connaissance, les avis et les hypothèses dans les méthodologies de qualification en fatigue, par l'application de la théorie Bayésienne [Voiculescu et al., 2009], [Bernardo and Smith, 1994], [Robert, 1992], [Robert, 2001], [Congdon, 2001], [Clarotti, 1998], [Procaccia, 1998].

Concepts de la fiabilité en mécanique

Dans toute étude de sûreté de fonctionnement, l'analyse de la fiabilité est indispensable pour décrire la capacité d'un produit à remplir sa fonction pour une durée de vie souhaitée. La fiabilité est désormais un concept clé pour définir la qualité et la robustesse d'un produit quelque soit sa fonction (composant, système...), sa technologie (électronique, mécanique...) ou son secteur d'application (transport, énergie, bâtiment...).

En mécanique, l'analyse de la fiabilité permet de caractériser, de garantir et d'améliorer la performance d'un produit tout au long de son cycle de vie, afin d'optimiser la qualité d'usage perçue par le client. Elle permet d'étudier son comportement, de le qualifier et d'améliorer sa conception. La fiabilité en mécanique permet de répondre à de multiples critères : sécurité, éviter les risques majeurs, disponibilité, minimiser les périodes de pannes et d'entretien et maintenabilité par l'analyse des inspections des structures.

2.1 L'aspect probabiliste de la fiabilité

Différents outils et caractéristiques permettent de mesurer la fiabilité. Ces outils sont a priori indépendants des différents domaines d'activités ou pour les différents types de produits, mais peuvent présenter des spécificités et des adaptations. Nous allons dans la suite présenter les concepts essentiels pour la mesure de la fiabilité en conception mécanique.

2.1.1 La fonction de fiabilité d'un système

La fonction de fiabilité d'un système permet de définir la probabilité que le système fonctionne sans défaillance pendant une durée t .

En considérant le temps de bon fonctionnement du système, caractérisé par la variable

aléatoire T , on peut exprimer la fiabilité par la fonction $R(t)$ telle que

$$R(t) = \text{Prob}(T \geq t) = 1 - F(t) \quad (2.1)$$

Avec $F(t)$ fonction de répartition de la variable aléatoire T . La fonction de répartition est la caractéristique duale de la fiabilité : elle caractérise la défiabilité du système autrement appelée probabilité de défaillance. Naturellement, la fiabilité $R(t)$ (cf. figure 2.1(a)) et la défiabilité $F(t)$ (cf. figure 2.1(b)) varient entre 0 et 1 de manière monotone décroissante et croissante, respectivement.

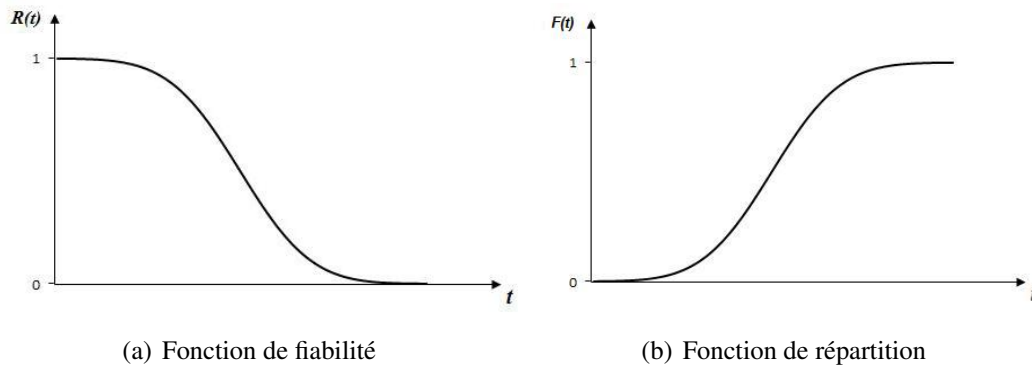


FIGURE 2.1: Représentation de la fiabilité

2.1.2 Le cycle de vie d'un système

Un système peut traverser différentes phases dans son cycle de vie, généralement décrites par le taux de défaillance. Le taux de défaillance noté $\lambda(t)$, représente l'intensité de défaillance en fonction du temps. C'est la probabilité conditionnelle, divisée par dt , de tomber en panne sur un intervalle de temps $[t; t + dt]$ sachant qu'au temps t l'entité n'est pas défaillante.

$$\lambda(t) = \frac{dR(t)/dt}{R(t)} \quad (2.2)$$

On admet généralement que :

- a. au début le système traverse une période de jeunesse, durant laquelle son taux de défaillance, étant alors élevé, diminue rapidement avec le temps,
- b. le taux de défaillance se stabilise ensuite à un niveau que l'on souhaite de préférence moindre, pendant ce qui représente sa période de vie utile,
- c. en fin de vie le produit entre dans la période de vieillissement ou d'usure au sens large durant laquelle son taux de défaillance devient croissant.

Cette évolution du taux de défaillance est caractérisée par une courbe appelée courbe en baignoire (figure 2.2).

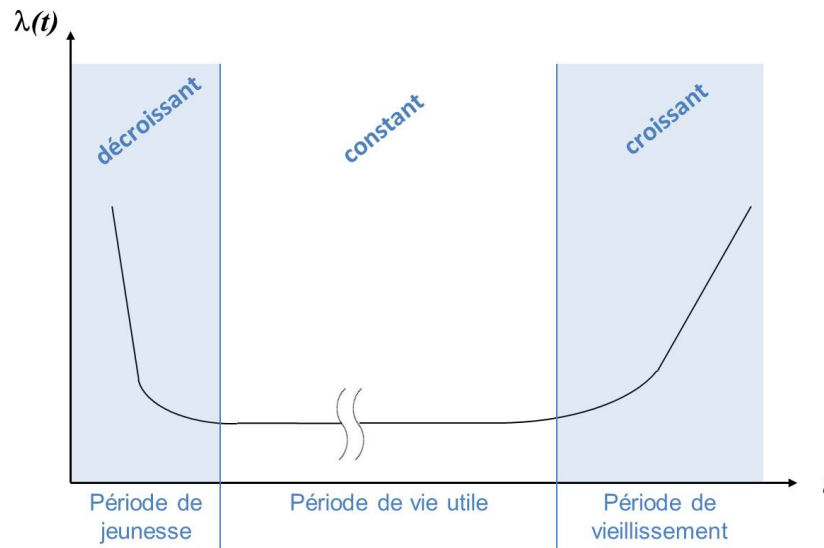


FIGURE 2.2: Courbe en baignoire

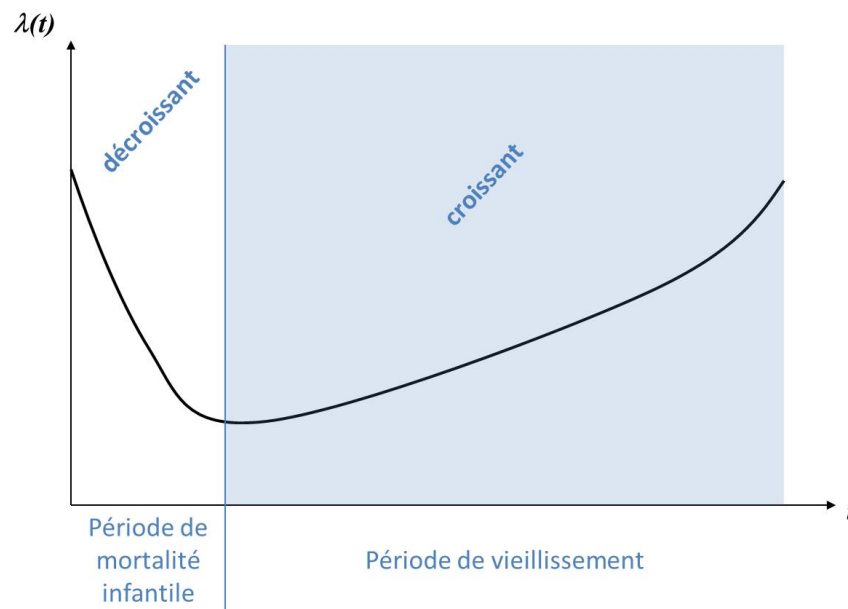


FIGURE 2.3: Courbe du cycle de vie d'un composant mécanique

En mécanique, la spécificité du cycle de vie d'un système est sa soumission au phénomène de vieillissement ou d'usure dès le début de sa vie. Il n'y a pas, ou peu, de période de vie utile, le taux de défaillance est donc une fonction non linéaire du temps dans chacune des phases de sa vie (figure 2.3)[McLean, 2000]. La première phase est la période de

mortalité infantile. Il s'agit d'une phase très courte pendant laquelle le taux de défaillance diminue rapidement. Elle correspond à une amélioration des caractéristiques internes du système. Suit la phase qui définit le vieillissement, qui peut être issu de divers phénomènes, combinés ou non : corrosion, usure, fatigue. . .

En mécanique la fiabilité est toujours déterminée en fonction du temps puisque le taux de défaillance des systèmes en dépend durant tout son cycle de vie. Pour les calculs de fiabilité on utilisera des lois de fiabilité dont le taux de défaillance est fonction du temps, e.g. Weibull.

Les ordres de grandeur des taux de défaillance sont spécifiques aux types de systèmes étudiés. En défaillances par heure, les ordres de grandeurs pour des composants électroniques sont par exemple, 10^{-8} pour une résistance ou un condensateur, $8, 3 \cdot 10^{-6}$ pour une lampe incandescente ou encore $4, 8 \cdot 10^{-7}$ pour des lampes néon. Dans le domaine automobile on exprimera les taux de défaillance plutôt en nombre de défaillances par client (partie par million - ppm) plutôt qu'en durée de vie comme d'autres secteurs à moindres productions comme l'aéronautique ou encore le nucléaire.

2.1.3 Quelques lois de probabilité courantes

En fiabilité, de nombreuses lois statistiques sont utilisées pour analyser les données de vie [Ayyub and McCuen, 2011], [Nikulin et al., 2007a], [Birolini, 1997], [Pages and Gondran, 1980]. Comme cité précédemment, les lois qui nous intéressent ici seront les lois statistiques les plus fréquemment utilisées et définies par un taux de défaillance non constant.

2.1.3.1 La loi normale (Laplace-Gauss)

La loi normale est le modèle probabiliste le plus utilisé pour décrire de très nombreux phénomènes (on peut notamment citer la modélisation de la limite d'endurance pour un système mécanique) grâce à la propriété du *Théorème central limite* [Laplace, 1809]. En effet, elle correspond au comportement de toute suite d'expériences aléatoires lorsque le nombre d'expériences est très élevé.

Une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ strictement positif admet pour densité de probabilité :

$$f(t) = \varphi \left(\frac{t - \mu}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \quad (2.3)$$

Avec φ la fonction de densité de la loi normale centrée réduite ($\mu = 0$ et $\sigma = 1$).

La fonction de répartition de la loi normale s'écrit :

$$F(t) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^t \varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) dx = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (2.4)$$

Avec Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Propriétés

- L'espérance mathématique est μ et correspond au moment d'ordre 1. La variance est l'écart-type au carré [$E(t) = \mu; Var(t) = \sigma^2$]. Ces deux caractéristiques sont notamment intéressantes du fait de leur facilité d'estimation (respectivement la moyenne empirique et la moyenne des carrés des écarts à la moyenne) et de leur représentativité physique.
- La somme algébrique de deux variables aléatoires normales indépendantes $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$ est une variable aléatoire normale suivant

$$X \sim \mathcal{N}\left(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right) \quad (2.5)$$

Inversement, si deux variables aléatoires indépendantes sont telles que leur somme soit normale, elles sont normales.

- Le taux de défaillance ne s'exprime pas si facilement que pour d'autres fonctions (e.g. Weibull), il s'écrit à un instant t comme le rapport entre la fonction de densité et la fonction de fiabilité :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad (2.6)$$

2.1.3.2 La loi Log-normale

La loi Log-normale est souvent utilisée pour représenter la distribution des durées de vie d'un phénomène de fatigue mécanique. Une variable aléatoire continue et positive T suit une loi Log-normale si son logarithme népérien est distribué selon une loi normale. La fonction de densité d'une loi Log-normale de moyenne μ et d'écart-type σ positifs s'écrit :

$$f(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(t) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), t > 0 \quad (2.7)$$

La fonction de répartition de la loi Log-normale s'écrit :

$$F(t) = \Phi\left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma}\right) \quad F(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (2.8)$$

Avec Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Propriétés

- L'espérance mathématique et la variance sont respectivement :

$$E(t) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad (2.9)$$

$$Var(t) = e^{2\mu + \frac{\sigma^2}{2}} (e^{\sigma^2} - 1) \quad (2.10)$$

- La somme algébrique de deux variables indépendantes distribuées normalement étant normale, le produit de deux variables indépendantes distribuées lognormalement suit une loi lognormale.

2.1.3.3 La loi de Weibull

La loi de Weibull est une des lois les plus populaires dans de nombreux domaines : grâce à sa flexibilité, elle permet de représenter une infinité de lois de probabilité.

La variable aléatoire T suivant une loi de Weibull de paramètres β , η et γ a pour densité de probabilité :

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad (2.11)$$

Où : β est le paramètre de forme ($\beta > 0$)

η est le paramètre d'échelle ($\eta > 0$)

γ est le paramètre de position

La fonction de répartition s'écrit :

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad (2.12)$$

Le taux de défaillance a pour expression en fonction du temps :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} \quad (2.13)$$

Propriétés

Comme cité précédemment, la loi de Weibull est très flexible :

- elle s'adapte facilement aux différentes phases du cycle de vie d'un système. En effet, selon les différentes valeurs de β le taux de défaillance est soit décroissant ($\beta < 1$), constant ($\beta = 1$) ou croissant ($\beta > 1$);

- un γ supérieur à 0 correspond à des systèmes dont la probabilité de défaillance est nulle jusqu'à un certain temps γ ;
- elle s'ajuste à d'autres loi, on peut citer par exemple le cas de $\{\gamma = 0 \text{ et } \beta = 1\}$ qui correspond alors à une loi exponentielle.

2.1.3.4 Distinction entre les lois

Comme nous venons de l'énoncer, les différentes lois peuvent être similaires selon la valeur de leurs différents paramètres. Cependant, pour les ordres de grandeur manipulés dans ces travaux (e.g. Probabilité de défaillance inférieure à 10^{-6}), les estimations se situent plutôt au niveau des queues de distribution. Or, des lois semblant identiques au centre, ne le seront pas forcément aux extrêmes (cf. figure 2.4) et cela engendre un impact direct sur les calculs de probabilité de défaillance. Ces aspects seront abordés plus en détails dans le chapitre 4.

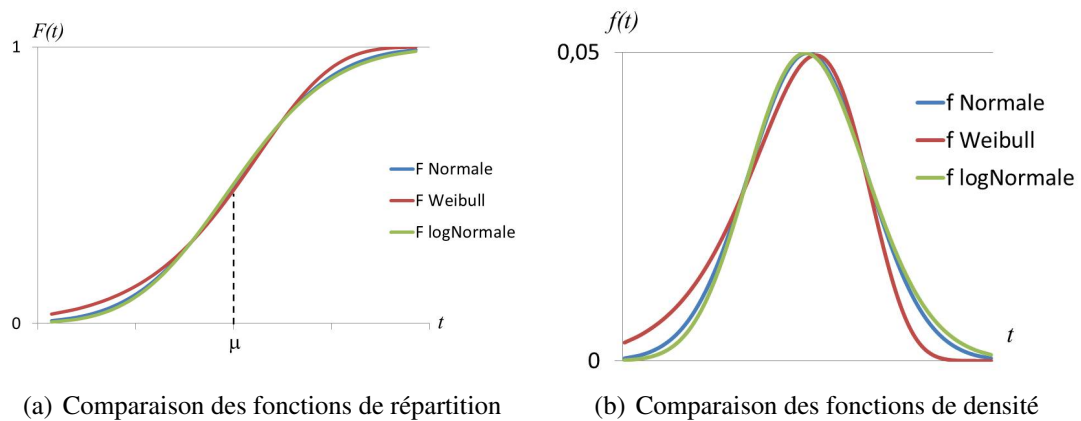


FIGURE 2.4: Comparaison des lois de distribution

On peut également citer d'autres lois : Gamma, Birnbaum-Saunders, Logistique... qui permettent de modéliser un taux de défaillance croissant.

2.1.4 Théorie de l'estimation

Ici, on présente quelques notions de base de la théorie de l'estimation utiles dans la suite de ce mémoire.

A partir d'observations suivant un mécanisme dirigé par des paramètres et une fois la classe de loi de ces observations définie, la démarche statistique permet d'obtenir les estimations des paramètres inconnus. Par estimation d'un paramètre on entend à la fois l'estimateur ponctuel ainsi que son intervalle de confiance. Dans la suite on présentera des techniques spécifiques qui permettent d'obtenir ces estimations.

2.1.4.1 Estimateur ponctuel

On s'intéresse à une caractéristique X d'une population dont la loi appartient à une famille paramétrique de lois dépendant d'un paramètre réel inconnu $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p, p \geq 1$. Pour une variable continue X , on note $f_\theta(x)$ la densité de la loi de X au point x .

On considère un sondage de taille n de la population (l'observation de X sur n individus), noté (x_1, \dots, x_n) . Soit, $X = (X_1, \dots, X_n)$ l'échantillon aléatoire associé à ce sondage, dont une réalisation particulière est (x_1, \dots, x_n) . On appelle statistique toute Variable Aléatoire (V.A.) qui dépend de l'échantillon (X_1, \dots, X_n) mais qui ne dépend pas du paramètre inconnu θ . On peut citer par exemple la moyenne empirique \bar{X}_n ou encore $\sum_{j=1}^n X_j$.

Soit g_n une application sur Θ . On appelle estimateur (ponctuel) de $g(\theta)$ toute statistique T prenant ses valeurs dans $g(\Theta)$. Ici on utilise l'indice n pour souligner la dépendance de l'estimateur à la taille de l'échantillon X .

Si l'on considère un échantillon simple suivant une loi normale,

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R}^+ \quad (2.14)$$

on peut inférer sur les valeurs de l'espérance μ et de la variance σ^2 , de la fonction de répartition de la loi normale : $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

On détermine donc l'estimateur $\hat{\theta}$ de θ grâce à la moyenne empirique comme estimateur de l'espérance et la variance empirique comme estimateur de la variance.

2.1.4.2 L'estimation par Maximum de Vraisemblance

La méthode du Maximum de Vraisemblance (MV) (Maximum Likelihood Estimation (MLE) en anglais [Le Cam, 1990]) consiste à évaluer la vraisemblance $\mathcal{L}(t, \theta)$ des n observations, ce qui revient par exemple à évaluer la probabilité d'avoir obtenu k défaillances à t (t_1, t_2, \dots, t_k) et $(n - k)$ censures t_c pour un échantillon x donné. En considérant les fonctions de densité et de fiabilité de paramètres $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$, en vertu de l'indépendance des occurrences, on définit la fonction de vraisemblance par le produit des probabilités de chaque occurrence :

$$\mathcal{L}(t, \theta) = \left(\prod_{j=1}^k f(t_j, \theta) \right) R(t_c, \theta)^{(n-k)} \quad (2.15)$$

Par définition [Nikulin et al., 2007b], $\hat{\theta}$ est appelé estimateur du maximum de vraisemblance si sa valeur offre à la fonction de vraisemblance sa valeur maximale :

$$\hat{\theta} = \operatorname{arg}_{\theta} \max (\mathcal{L}(t, \theta)) \quad (2.16)$$

Généralement on maximise la logvraisemblance $\ln \mathcal{L}(t, \theta)$ par rapport à θ par soucis de

simplicité et sans altérer le point de maximisation de la fonction, la fonction logarithme permettant de transformer les produits en sommes, et la fonction exponentielle en variable simple, ce qui facilite les opérations calculatoires. Si la fonction de logvraisemblance est dérivable par rapport à θ alors l'estimateur du maximum de vraisemblance vérifie :

$$\left(\frac{\partial \ln \mathcal{L}(T, \theta)}{\partial \theta} \right)^T = \left(\frac{\partial \ln \mathcal{L}(T, \theta)}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial \ln \mathcal{L}(T, \theta)}{\partial \theta_r} \right)^T = 0 \quad (2.17)$$

Dans la méthode de détermination des intervalles de confiance, on utilise l'information de Fisher sous l'hypothèse de normalité [Nikulin et al., 2007a]. Elle est définie comme la matrice des dérivées d'ordre deux de la logvraisemblance calculée pour $\theta = \hat{\theta}$ qui satisfait l'équation 2.17. Elle est alors définie comme la matrice de covariance :

$$I(\theta_i \theta_j) = E_{\theta} \left[\left(\frac{\partial \ln f(T, \theta)}{\partial \theta_i} \right) \left(\frac{\partial \ln f(T, \theta)}{\partial \theta_j} \right) \right] \quad (2.18)$$

On suppose que $\psi(\theta)$ est le vecteur d'estimateur de $E(T)$ avec $T = (T_1, \dots, T_n)^T$, de matrice de covariance cov_{θ} . Si la matrice d'information de Fisher $I(\theta)$ est définie positive, la borne de Cramer-Rao impose :

$$cov_{\theta}(T) \geq \frac{\partial \psi(\theta)}{\partial \theta} [I(\theta)]^{-1} \left(\frac{\partial \psi(\theta)}{\partial \theta} \right)^T \quad (2.19)$$

avec :

- les matrices A et B telles que, $A \geq B$ si la matrice $A - B$ est une matrice semi-définie
- $\partial \psi(\theta) / \partial \theta$ est une matrice qui a le $ij^{\text{ème}}$ élément donné par $\partial \psi_i(\theta) / \partial \theta_j$.

D'après Fisher, si T est un estimateur sans biais de θ , c'est à dire que $\psi(\theta) = \theta$, alors l'inéquation 2.19 est simplifiée par

$$cov_{\theta} \geq I(\theta)^{-1} \quad (2.20)$$

La variance de $\hat{\theta}$, $Var(\hat{\theta})$ est calculée par la matrice de Fisher qui s'écrit, si la logvraisemblance $L_i(t_i, \theta_i)$ est dérivable d'ordre deux, telle que :

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_1^2} & -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \cdots & -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_1 \partial \theta_r} \\ -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \ddots & & -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_2 \partial \theta_r} \\ \vdots & & \ddots & \dots \\ -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_r \partial \theta_1} & -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_r \partial \theta_2} & \cdots & -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_r^2} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

La matrice inverse de Fisher représente la matrice estimée de Variance – Covariance

$$\hat{\Sigma} = \hat{F}^{-1} = \begin{bmatrix} Var(\hat{\theta}_1) & Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) & \dots & Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_r) \\ Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) & \ddots & & Cov(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_r) \\ \vdots & & \ddots & \dots \\ Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_r) & Cov(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_r) & \dots & Var(\hat{\theta}_r) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

La construction des intervalles de confiance se base sur l'hypothèse de normalité de distribution d'un paramètre, issue du fait que les évaluations de MV sont asymptotiquement normales. Ainsi, pour un paramètre θ dont l'estimateur de MV à partir d'une grande taille d'échantillon est $\hat{\theta}$, on a :

$$z = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{\hat{\theta}}} \quad (2.23)$$

avec :

$$P(x \leq z) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (2.24)$$

Pour un niveau de confiance α donné, on peut encadrer z par :

$$P(z_{min} < z < z_{max}) = \alpha \quad (2.25)$$

Soit, à partir de l'équation (2.24) :

$$P\left(-\omega_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{\hat{\theta}}} < \omega_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \alpha \quad (2.26)$$

avec ω_α définit par $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

On obtient donc les limites de confiance de θ pour un niveau de confiance α donné en simplifiant (2.26)

$$\hat{\theta} - \omega_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{Var(\hat{\theta})} < \theta < \hat{\theta} + \omega_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{Var(\hat{\theta})} \quad (2.27)$$

2.1.4.3 L'estimation Bayésienne

Les méthodes précédentes permettent d'évaluer les paramètres d'une loi de probabilité dans son intervalle de confiance. L'approche Bayésienne [Bernardo and Smith, 1994], [Robert, 1992], [Robert, 2001], [Congdon, 2001], [Pages and Gondran, 1980] permet d'améliorer une estimation en se basant sur un jugement d'experts, ou sur des connaissances a priori. C'est-à-dire que cette méthode nous permet d'évaluer la distribution de probabilité d'un paramètre (connaissance a posteriori) à partir de la connaissance a

priori. Grace au théorème de Bayes, il est possible de combiner l'information subjective et l'information objective (déterminée par l'échantillon).

La notion de probabilité postérieure considérée ici est la probabilité de l'hypothèse θ (vecteur de paramètres) sachant les données $X : g(\theta|X)$, probabilité conditionnelle de θ sachant X .

La probabilité postérieure d'une hypothèse peut-être interprétée comme la probabilité que cette hypothèse soit vraie sachant les données. Le principe est représenté par le schéma 2.5

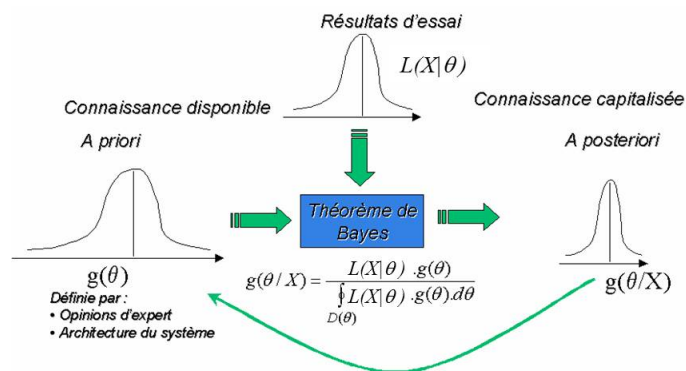


FIGURE 2.5: Principe de l'approche Bayésienne (cours Fiabilité F.GUERIN)

La probabilité postérieure d'une hypothèse pouvant être calculée par le théorème de Bayes, elle apparaît être fonction de la vraisemblance $\mathcal{L}(X|\theta)$ et de la probabilité a priori $g(\theta)$ de cette hypothèse :

$$g(\theta|X) = \frac{\mathcal{L}(X|\theta) \cdot g(\theta)}{\int_{D_\theta} \mathcal{L}(X|\theta) \cdot g(\theta) \cdot d\theta} \tag{2.28}$$

où $\mathcal{L}(X|\theta)$ est la fonction de vraisemblance, $g(\theta)$ la probabilité a priori de l'hypothèse, comme représentée en figure 2.6.

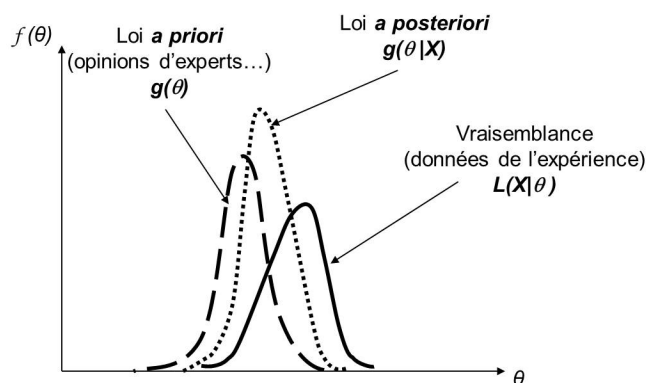


FIGURE 2.6: Représentation des densités de probabilité du théorème de Bayes

Pondération de l'a priori

Il est tout de même nécessaire de vérifier la cohérence de l'a priori et des résultats de l'essai, en donnant un poids à l'a priori. On peut caractériser la "force" de celui-ci par le ratio :

$$\varphi = \frac{\text{Variance}}{\text{Moyenne}} = \frac{\text{Var}(\theta)}{E(\theta)} \quad (2.29)$$

On peut donc qualifier l'a priori de "fort" ou "faible" (cf. figure 2.7)

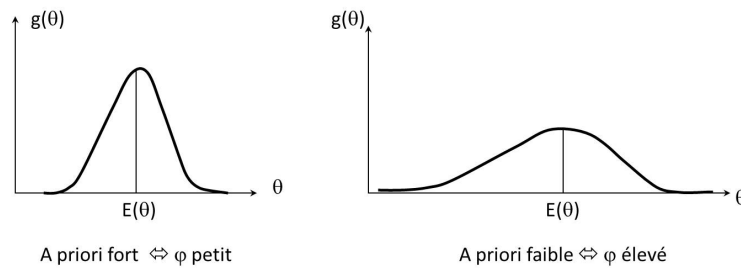


FIGURE 2.7: Poids de l'a priori

La méthodologie présentée ci-après [Usureau, 2001, Fatemi, 2012], permet de déterminer un facteur de compatibilité K , normalisé et compris entre 0 et 1. Ce facteur permet de mesurer la similitude entre la distribution a priori modélisée à partir des avis d'experts ou encore de données existantes, et la fonction de vraisemblance représentant les données de l'essai.

Principe de calcul du facteur de compatibilité K

On définit le réel $C(\delta)$ (voir figure 2.8) représentant le produit de convolution entre l'a priori $g(\theta)$ et la vraisemblance $\mathcal{L}(\theta)$ soit :

$$C(\delta) = \int_{D_\theta} g(\theta)\mathcal{L}(\theta - \delta) d\theta \quad (2.30)$$

La valeur $C(\delta)$ permet bien d'évaluer la similitude entre l'a priori et la vraisemblance puisqu'elle lui est proportionnelle. En effet, plus $C(\delta)$ est élevé, plus les distributions de l'a priori et de la vraisemblance sont similaires et inversement.

Afin de réaliser la pondération de la distribution a priori, on pose le facteur K tel qu'il évolue entre 0 et 1, en normalisant l'expression de $C(\delta)$. On a donc le facteur :

$$K = \frac{C(0)}{C_{max}(\delta)} \quad (2.31)$$

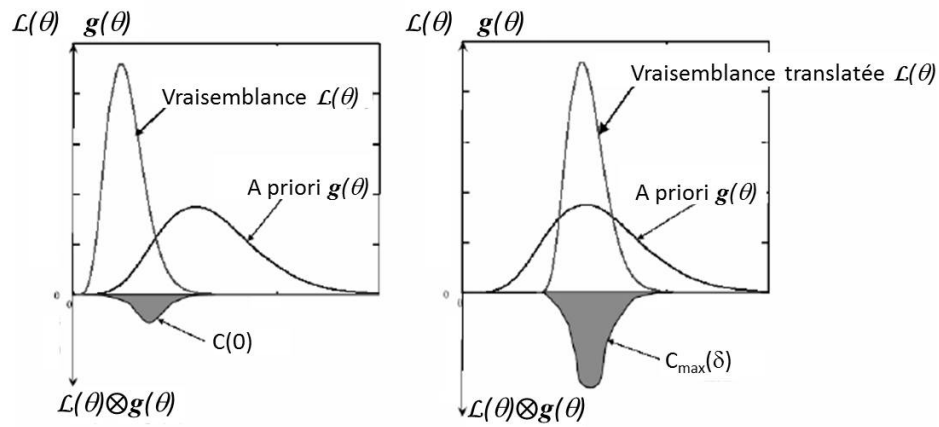


FIGURE 2.8: Détermination du coefficient de pondération normalisé

Avec (cf. figure 2.8) :

- $C(0)$ obtenu pour $\delta = 0$,
- $C_{max}(\delta)$ la valeur maximale de $C(\delta)$ obtenue lorsque la similitude entre les deux distributions est la plus importante.

K est donc le facteur de compatibilité entre la distribution a priori et la distribution de vraisemblance.

Utilisation du facteur de pondération

Le facteur K permet de statuer sur la pertinence de l'a priori, et aussi de pondérer cette connaissance afin d'en améliorer la compatibilité avec la vraisemblance. En fonction de la valeur de K , on intégrera plus ou moins la connaissance dans l'inférence bayésienne. En effet, plus K est proche de 1, plus la connaissance a priori sera intégrée, et à l'inverse plus il sera proche de 0, moins elle sera intégrée.

Comme introduit précédemment, c'est la variance (espérance des carrés des écarts à la moyenne) qui donne le poids à une distribution : ainsi une distribution à espérance égale à une autre, mais dont la variance sera plus grande sera plus étalée et donc affaiblira le poids de la distribution.

Ainsi quelle que soit la distribution a priori, on ne modifiera donc pas le mode de la distribution a priori, mais la variance sera $1/K$ fois plus grande. On aboutit donc à un a priori pondéré.

Pour l'application pratique de cette méthode de pondération, on peut distinguer deux cas :

1. le cas simple de résolution directe des équations décrivant les moments d'ordre 1 et 2, telle qu'une distribution de type gamma $\mathcal{G}(x|\alpha, \theta)$ d'espérance $\alpha\theta$ et de variance $\alpha\theta^2$. La pondération de l'a priori par le facteur K donne une nouvelle distribution

de paramètres $(\alpha'; \theta')$ tels que :

$$\begin{cases} \alpha\theta = \alpha'\theta' \\ \alpha\theta^2 = K\alpha'\theta'^2 \end{cases} \quad (2.32)$$

Soit $\alpha' = K\alpha$ et $\theta' = \theta/K$

- le cas plus complexe où la résolution doit être numérique, comme pour le cas de la loi de Weibull à deux paramètres η et β , avec pour espérance $\eta\Gamma(1 + 1/\beta)$ et pour variance $\eta^2\Gamma(1 + 1/\beta) - (\eta\Gamma(1 + 1/\beta))^2$. La pondération de l'a priori donne une nouvelle distribution de paramètres η' et β' vérifiant :

$$\begin{cases} \eta\Gamma(1 + 1/\beta) = \eta'\Gamma(1 + 1/\beta') \\ \eta^2\Gamma(1 + 1/\beta) - (\eta\Gamma(1 + 1/\beta))^2 = K\eta'^2\Gamma(1 + 1/\beta') - (\eta'\Gamma(1 + 1/\beta'))^2 \end{cases} \quad (2.33)$$

On résout numériquement pour obtenir les paramètres η' et β' .

La nouvelle distribution a priori est alors utilisée dans l'inférence Bayésienne permettant d'estimer les paramètres a posteriori.

Estimation des paramètres

Dans le cas où chaque variable θ_i est indépendante, la distribution a priori de θ peut alors s'écrire comme le produit des fonctions de densité associées à chaque paramètre θ_i :

$$g(\theta) = \prod_{i=1}^r g_i(\theta_i) \quad (2.34)$$

Deux considérations peuvent être effectuées :

- Cas d'un a priori sans connaissance, dans lequel on utilisera une loi non informative de type loi uniforme. Les fonctions de densité devenant alors indépendantes des paramètres θ_i .
- Cas d'un a priori avec connaissance (loi informative, Beta, Gamma, Exponentielle...)

Nous verrons plus précisément le développement de ces approches dans le chapitre 6.

Dans le cas de lois non informatives, la fonction de densité a posteriori dépend uniquement de la vraisemblance :

$$g(\theta|X) = \frac{\mathcal{L}(X|\theta)}{\int_{D_\theta} \mathcal{L}(X|\theta) \cdot d\theta} \quad (2.35)$$

La fonction de densité $g_i(\theta_i)$ d'un paramètre θ_i s'écrit :

$$g_i(\theta_i) = \int_{j=1:n, j \neq i} \dots \int g(\theta|X) \cdot d\theta_j \quad (2.36)$$

On a alors l'estimateur ponctuel et la variance de ce paramètre, qui correspondent respectivement au moment initial d'ordre 1 et le moment centré d'ordre 2 :

$$\hat{\theta}_i = \int_{D_{\theta_i}} \theta_i g_i(\theta_i) d\theta_i \quad (2.37)$$

$$Var(\theta_i) = \int_{D_{\theta_i}} (\theta_i - \hat{\theta}_i)^2 g_i(\theta_i) d\theta_i \quad (2.38)$$

L'intervalle de confiance bilatérale symétrique au niveau de confiance $1 - \alpha$ peut alors être défini grâce à la variance par l'équation 2.27 ou bien défini tel que :

$$prob(\theta_{i_{min}} \leq \theta_i \leq \theta_{i_{max}}) = 1 - \alpha \quad (2.39)$$

avec $\theta_{i_{min}}$ et $\theta_{i_{max}}$ solutions de :

$$\int_{D_{\theta_i}}^{\theta_{i_{min}}} g_i(\theta_i) d\theta_i = \alpha/2 \quad (2.40)$$

$$\int_{D_{\theta_i}}^{\theta_{i_{max}}} g_i(\theta_i) d\theta_i = 1 - \alpha/2 \quad (2.41)$$

Estimation de métriques de Fiabilité

On considère une métrique M , par exemple une probabilité de défaillance ou un MTTF (Mean Time To Failure, temps moyen de fonctionnement avant panne) avec $M = g(\theta)$, où $g(\bullet)$ est une fonction tirée de la fonction de fiabilité permettant d'estimer la métrique M . Pour l'exemple du MTTF selon une loi de Weibull, on a par exemple $MTTF = \int_0^{\infty} R(t) dt = \eta \Gamma(1/\beta + 1)$.

L'estimateur ponctuel de la métrique est :

$$\hat{M} = g(\hat{\theta}) \quad (2.42)$$

et sa variance :

$$Var(M) = \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta_i} \right)_{\hat{\theta}}^2 Var(\hat{\theta}_i) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1, j \neq i}^r \left(\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta_i} \right) \left(\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta_j} \right) Cov(\theta_i, \theta_j) \quad (2.43)$$

2.2 La physique de l'endommagement

Comme énoncé précédemment (§.2.1.2), c'est notamment durant la phase de vieillissement qu'apparaissent les divers phénomènes physiques de dégradation pour des systèmes mécaniques. Les différents modes de dégradation font intervenir de nombreux paramètres physiques tant extérieurs qu'intrinsèques au système, e.g. caractéristiques du matériau, géométrie du système, sollicitations extérieurs (température, vibration, chargement...).

L'analyse de la fiabilité des systèmes mécaniques dépend de ces différents phénomènes physiques et des paramètres associés.

2.2.1 Les phénomènes de dégradation en mécanique

Nous connaissons de nombreux modes de dégradation que l'on peut dissocier par les mécanismes qu'ils engendrent, et par les sollicitations externes qui les provoquent [Lannoy and Procaccia, 2005].

2.2.1.1 Le fluage

Le fluage est un mécanisme de dégradation qui intervient lorsqu'un système est sollicité en chargement et en température, pendant une durée suffisamment longue, ce qui conduit à une déformation progressive et irréversible du matériau. Généralement, on observe ce mécanisme lorsque la température du matériau devient 0,3 à 0,4 fois la température de fusion (environ 400°C pour les aciers). Les températures d'usage des organes de LAS, même s'ils sont placés à proximité des organes moteur (thermique et/ou électrique) permettent de négliger ce phénomène.

2.2.1.2 L'usure

L'usure correspond à la perte progressive de matière de la surface active d'un corps, par suite du mouvement relatif d'un autre corps sur cette surface. Cette perte de matière est mesurable. Il existe plusieurs types d'usure : l'adhésion/grippage, l'abrasion, le matage, le fretting, l'érosion, etc. Ces différents types d'usures apparaissent suivant la nature du mouvement de surfaces en contact. Bien qu'il existe des mouvements relatifs entre organe de LAS (permettant notamment le débattement vertical de la suspension et le braquage)

cela ne concerne que des articulations localisées dont les défaillances ne sont pas abordées dans ce mémoire.

2.2.1.3 La corrosion

La corrosion des métaux est un phénomène naturel et courant. Dans la grande majorité des cas, il s'agit d'une réaction électrochimique, les réactifs étant la pièce manufacturée et l'environnement. Les paramètres concernant ce mécanisme de dégradation sont le matériau (sa composition chimique, sa microstructure, les traitements de surface,...) et l'environnement (sa composition chimique, sa pression, sa température, humidité,...). La corrosion peut se combiner avec d'autres effets mécaniques (e.g. corrosion sous contrainte, fatigue-corrosion,...). Par souci de simplicité, la prise en compte de ce phénomène est usuellement découplée du suivant, et par conséquent ne sera pas davantage évoqué.

2.2.1.4 La fatigue

La fatigue est un mécanisme qui modifie les propriétés locales d'un matériau et peut entraîner la formation de fissures de dimension croissante pouvant conduire à la rupture de la structure, sous l'action de contraintes ou déformations variables (cycliques) dans le temps. La fatigue est notamment caractérisée par une étendue de variation de contrainte bien inférieure à la résistance à la traction du matériau.

Dans la suite nous détaillons ce phénomène et nous nous intéressons uniquement à ce mécanisme de dégradation puisque pour les pièces métalliques de liaison au sol, les principaux modes de défaillances dans l'usage normal sont caractérisés par la fatigue.

2.2.2 Le phénomène de fatigue

Comme cité précédemment, le phénomène de fatigue désigne une évolution locale et progressive, mais irréversible, i.e. une dégradation ou un endommagement, de l'état d'une structure soumise à des contraintes et des déformations variables et répétées (cycliques). Ce processus peut conduire à des dommages croissants qui peuvent :

- être maîtrisés et non influents sur la fonction du système,
- conduire à une manifestation visible alertant l'utilisateur,
- mener à terme directement à la rupture complète de la structure.

Par structure on entend soit :

- a. une pièce à géométrie complexe, usinée, sur lesquelles des efforts F sont appliqués au cours de son utilisation (cf. figure 2.9(a))
- b. une éprouvette à géométrie normalisée (cf. figure 2.9(b)) censée isoler les caractéris-

tiques d'un matériau sur laquelle s'exerce une contrainte σ

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.44)$$

représentant un effort surfacique exercé sur une section A de l'éprouvette.

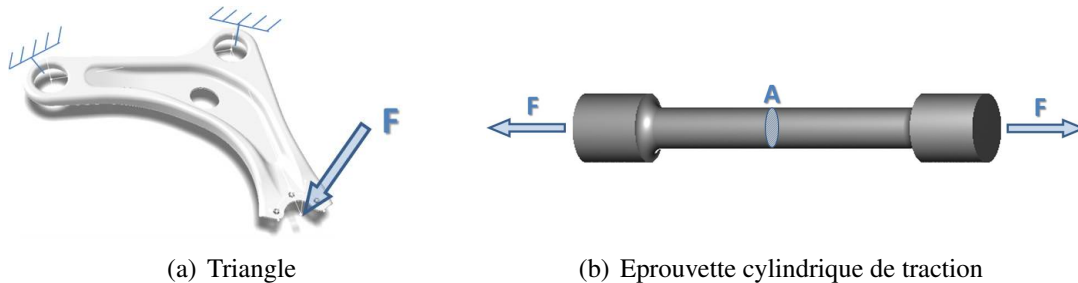


FIGURE 2.9: Exemples de structures

Dans la suite on note S , la contrainte au sens large (σ, F). Elle est exprimée en fonction :

- de la déformation, usuellement en condition quasi-statique ce qui porte à identifier une courbe monotone croissante (cf. figure 2.10(a))
- du nombre N de cycles de contrainte ce qui aboutit à une courbe monotone décroissante (cf. figure 2.10(b))

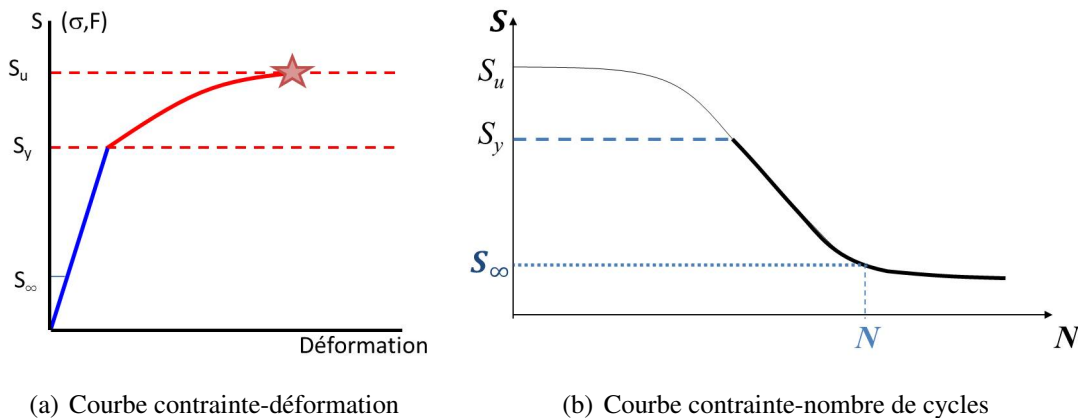


FIGURE 2.10: Caractéristiques mécaniques

Les caractéristiques mécaniques S_i représentées ici sont :

- S_u est la résistance à la rupture, valeur maximale attribuable à S (valeur "ultime"),
- S_y est la limite d'élasticité : c'est la contrainte qui marque la fin du domaine élastique réversible et le début du domaine plastique irréversible,
- S_∞ est la limite de fatigue, elle représente la plus grande amplitude de contrainte pour laquelle il n'est pas observé de rupture après un nombre infini de cycles, au-

trement dit, l'absence d'endommagement appréciable après un nombre fini, mais suffisamment élevé, de cycles (e.g. 10^6).

2.2.2.1 Description

La tenue à la fatigue d'un matériau est approchée par l'étude de son comportement sous l'action de sollicitations répétées cycliques [Bompas-Smith, 1973a], [Kececioglu et al., 1998], [Little and Ekvall, 1979], [Shigley, 1972], [Lalanne, 1999], [Jabbado, 2006]. Un cycle de contrainte est défini par (cf. figure 2.11(a)) :

- une contrainte moyenne σ_m ,
- une amplitude de contrainte σ_a ,
- une contrainte maximale, σ_{max} et une contrainte minimale, σ_{min} ,
- une étendue de variation de contrainte $\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}$,
- le rapport de charge $R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$,

ce qui permet de caractériser les différents types de cycles (cf. figure 2.11(b)).

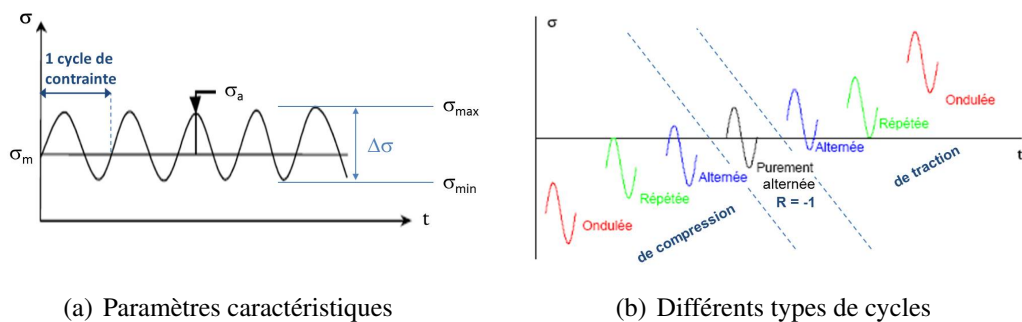


FIGURE 2.11: Caractéristiques d'un cycle de contrainte

Généralement, [Stephens et al., 2001] pour les matériaux métalliques la rupture par fatigue comprend plusieurs étapes issues de la propagation d'une fissure au cours du temps (cf. figure 2.12).

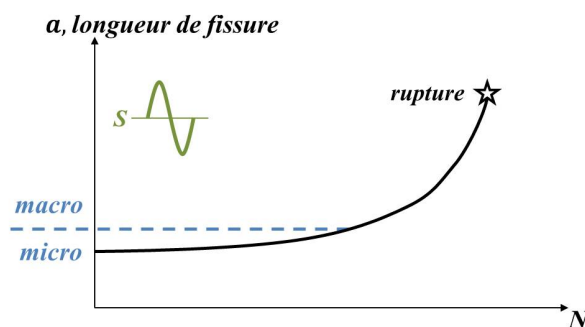


FIGURE 2.12: Propagation de fissure en fonction du temps sous une contrainte S

Généralement on observe les phases suivantes :

- a. Fissuration microscopique (échelle du grain de la structure métallique) ;
- b. Propagation de la fissure à l'échelle microscopique ;
- c. Amorçage d'une fissure macroscopique, dépassement d'un seuil visible (e.g. de l'ordre du millimètre) ;
- d. Propagation de la fissure macroscopique en fonction du temps et selon une certaine vitesse ;
- e. Rupture finale.

La figure 2.13 et 2.14 représentent des exemples de rupture par fatigue et le détail de la propagation de fissure, respectivement pour une pièce massive et pour un cordon de soudure.

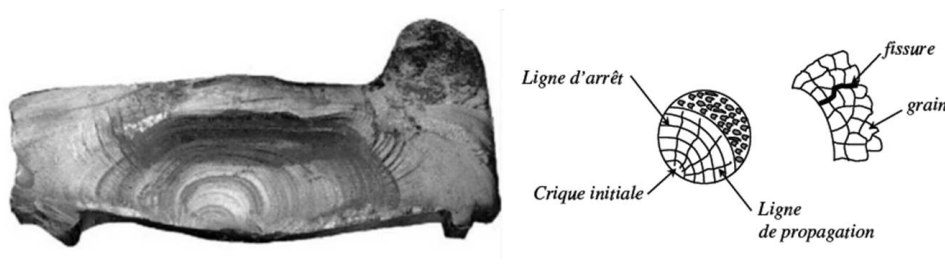


FIGURE 2.13: Exemple de propagation de fissure

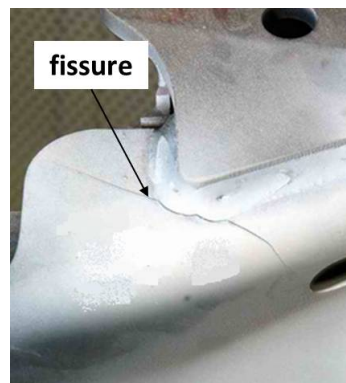


FIGURE 2.14: Fissuration pied de cordon de soudure entre composants en tôle d'acier d'organe LAS

2.2.2.2 La courbe de Wöhler

Pour un chargement cyclique élémentaire, le comportement du système en fonction du temps est défini par la courbe de Wöhler (figure 2.15). Pour une contrainte moyenne ou statique σ_m donnée, cette courbe traduit l'évolution des nombres de cycles à rupture N en fonction de l'amplitude de la contrainte appliquée σ_a (voir figure 2.11(a)). On se

positionnera désormais, pour les besoins de la problématique, dans le cas d'une contrainte purement alternée soit, $\sigma_m = 0$.

Définie expérimentalement, par des essais effectués à des niveaux de contrainte constants S_i jusqu'à observation de rupture à N_i cycles pour chacune des pièces, la courbe de Wöhler (ou courbe S-N) est généralement une moyenne qui représente une probabilité de rupture de 50% pour la durée de vie et le niveau d'amplitude choisis (figure 2.15).

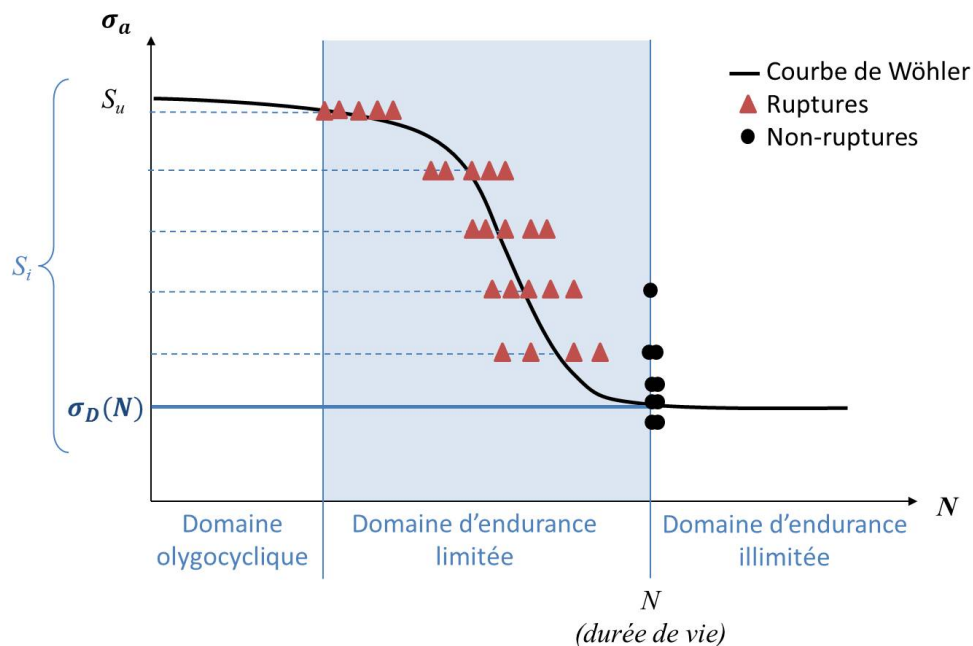


FIGURE 2.15: Construction de la courbe de Wöhler à 50% de rupture

Cette courbe représente la séparation entre les deux zones : de rupture (au dessus de la courbe de Wöhler) et de non rupture (sous la courbe de Wöhler). Elle couvre tout le domaine de fatigue :

- le domaine de fatigue oligocyclique, considéré en général pour des nombres de cycles entre 0 et 10^4 cycles ;
- le domaine de fatigue polycyclique, d'endurance limitée, où N est compris entre 10^4 et 10^6 (ou 10^7) cycles ;
- le domaine d'endurance illimitée, dans lequel N tend pragmatiquement vers l'infini.

La limite de fatigue S_∞ définie précédemment est idéalement l'asymptote à cette courbe dans le domaine d'endurance illimitée. Souvent, cette limite est mal définie ou difficile à atteindre (N trop grand), c'est pourquoi dans l'industrie, pour le dimensionnement, on a souvent recours à la définition de la limite d'endurance, $\sigma_D(N)$ [Brand et al., 1992], [Bathias and Baïlon, 1997], [Lalanne, 1999] qui est l'amplitude de contrainte à ne pas dépasser pour que le système ne soit pas défaillant à un nombre donné de cycles, représentatif de la durée de vie (figure 2.15), e.g. de l'ordre de 10^6 .

De nombreux auteurs ont essayé de caractériser cette valeur de limite d'endurance par rapport aux caractéristiques en traction statique du matériau concerné. Pour les aciers on peut citer [Rabbe et al., 2000a] :

$$\text{Mailander : } \sigma_D = (0, 50 \pm 0, 10)S_u$$

$$\sigma_D = (0, 65 \pm 0, 20)S_y$$

$$\text{Rogers : } \sigma_D = 0, 40S_y + 0, 25S_u$$

$$\text{Heywood : } \sigma_D = 0, 50S_u$$

$$\sigma_D = 150 + 0, 43S_y$$

$$\text{Brand : } \sigma_D = 0, 32S_u + 121$$

Propriétés

Il a été montré [Lalanne, 1999], [Bompas-Smith, 1973b], [Shigley, 1972], qu'à une amplitude de contrainte donnée on observe une distribution Log-normale des nombres de cycles à défaillance, et qu'à un nombre de cycles donné la contrainte d'amplitude suit une loi normale (figure 2.16). D'après la littérature (notamment [Jakubczak et al., 2006]), l'écart-type de la distribution des contraintes varie selon la géométrie du système et son coefficient de variation varie de 0,05 à 0,1 pour les systèmes non soudés et de 0,1 à 0,2 pour les assemblages soudés. En ce qui concerne la distribution Log-normale des nombres de cycles à rupture, son écart-type est supposé constant quel que soit le niveau de contrainte.

La courbe de Wöhler peut-être modélisée par différentes lois analytiques, soit dans un domaine particulier, soit dans son ensemble. Nous citons :

Nom de modèle	Domaines modélisés	Equation
Basquin	endurance limitée	$N\sigma_a^B = A$
Strömeyer	endurances limitée et illimitée	$\sigma_a = \sigma_D + \left(\frac{A}{N}\right)^B$
Bastenaire	Fatigue oligocyclique, endurances limitée et illimitée	$(N+B)(\sigma_a - \sigma_D)e^{A(\sigma_a - \sigma_D)} = C$

TABLE 2.1: Quelques modélisations de la courbe de Wöhler

avec N nombre de cycles, A , B , C constantes déterminées à partir des données expérimentales, σ_a l'amplitude de contrainte et σ_D limite d'endurance.

Dans l'expression du modèle de Basquin [Basquin, 1910], la contrainte tend vers 0, lorsque N tend vers l'infini, elle est donc représentative de la courbe de Wöhler dans le domaine d'endurance limitée. La modélisation de Strömeyer, permet de définir la courbe de Wöhler à la fois dans le domaine d'endurance limitée et illimitée puisque la contrainte tend vers la limite d'endurance lorsque N tend vers l'infini. Tout comme Strömeyer, la

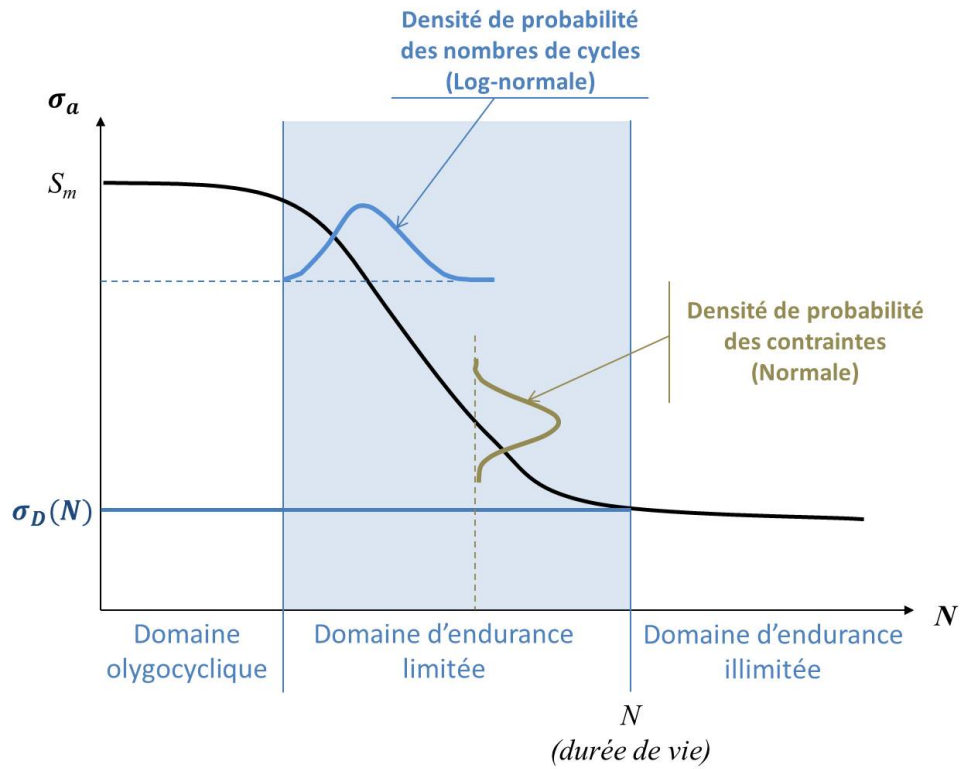


FIGURE 2.16: Propriétés de la courbe de Wöhler à 50% de rupture

modélisation de Bastenaire décrit plus largement la courbe de Wöhler, mais fait intervenir plus de paramètres.

2.2.2.3 Le cumul de dommage

La courbe de Wöhler sert notamment au calcul de l'endommagement D (voir figure 2.17) variable scalaire qui représente le degré de dommage subi par une pièce de la valeur initiale nulle (pièce parfaitement intègre) jusqu'à $D = 1$, moment de la défaillance. La loi de cumul d'endommagement la plus utilisée est celle de Miner [Miner, 1945], [Lalanne, 1999], dans laquelle il n'existe pas d'effet d'histoire. La méthode de Miner repose sur l'hypothèse de cumul d'endommagement linéaire suivante :

- l'application de n_i cycles au niveau de sollicitation i conduit à un endommagement D_i :

$$D_i = \frac{n_i}{N_i} \quad (2.45)$$

N_i représentant le nombre de cycles conduisant à la rupture si l'unique chargement de sollicitation est σ_i ;

- la rupture intervient lorsque la somme des endommagements devient égale à 1.

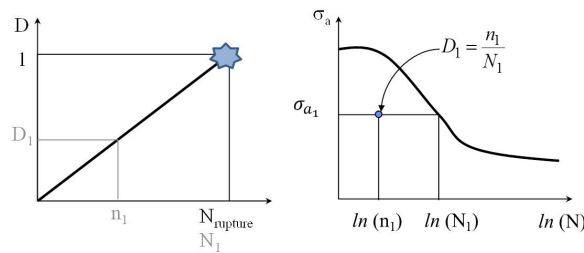


FIGURE 2.17: Règle d'endommagement selon Miner

La courbe de Wöhler étant supposée donnée, si un chargement $\{(\sigma_1; n_1); \dots; (\sigma_k; n_k)\}$ conduit à la rupture de la pièce, on peut alors déterminer le niveau de tenue de cette pièce $\sigma_{\text{équivalent}}$ pour tout nombre de cycles N donné.

2.2.2.4 Les essais

L'objectif d'un essai de fatigue est soit de comparer entre eux des matériaux ou procédés de fabrication (approche relative), soit d'obtenir les données nécessaires à la prévision des durées de vie (approche absolue). Pour appliquer des essais de fatigue à un système il faut tout d'abord bien étudier les sollicitations auxquelles il est soumis, afin de pouvoir observer son comportement et définir la procédure d'essai adéquate [Rabbe et al., 2000a], [Rabbe et al., 2000b].

Les essais de fatigue sont réalisés sur des éprouvettes, sur des pièces ou des assemblages mécaniques afin de caractériser leur comportement face à des contraintes représentatives de celles qu'ils subissent en service. L'objectif est le plus souvent de contrôler que la tenue des pièces est supérieure à un certain nombre de cycles d'amplitude de contrainte donné.

L'essai de fatigue le plus simple permet l'obtention de la courbe de Wöhler. Il consiste à soumettre chaque éprouvette (ou système) à des cycles d'efforts périodiques, d'amplitude et de fréquence constantes, comme illustré en figure 2.18 respectivement pour les pièces (2.18(a)) et structure (2.18(b)) de la figure 2.9. Ainsi sont obtenues les nombres de cycles à défaillance à chaque niveau de contrainte, aboutissant ainsi à une courbe de Wöhler (figure 2.15).

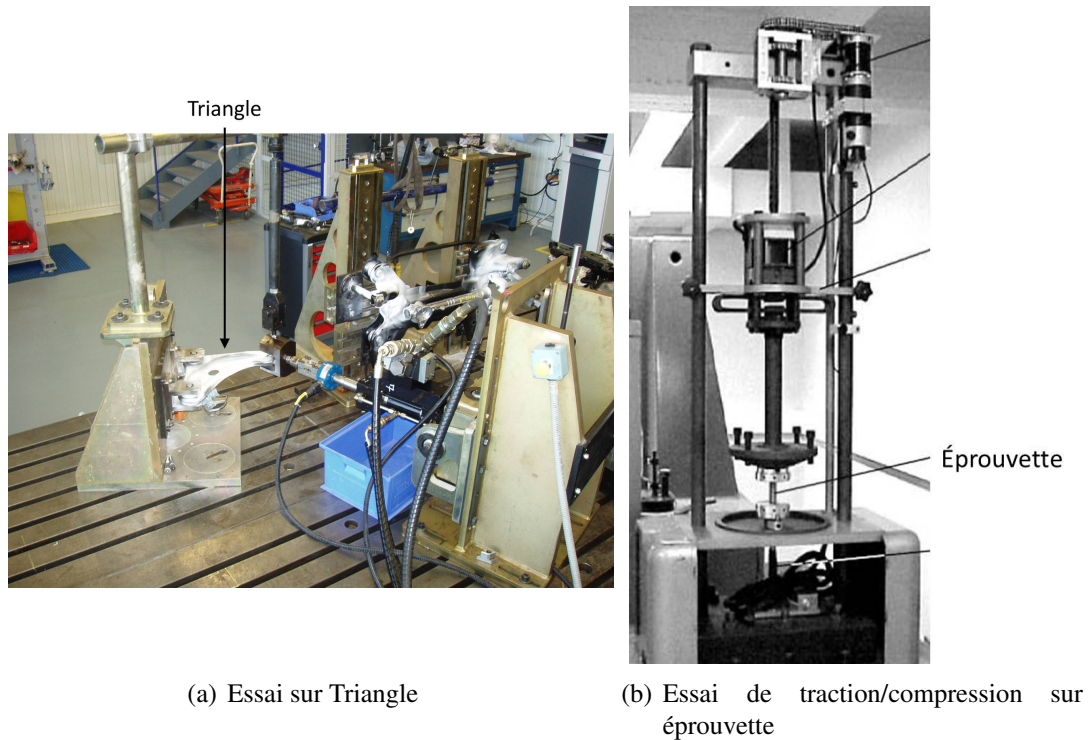


FIGURE 2.18: Essais de fatigue

2.3 Evaluation de la fiabilité mécanique

Le critère de fiabilité porte sur la tenue du système soumis à des charges aléatoires. A noter que la validation de la fiabilité des systèmes mécaniques du domaine automobile est assurée essentiellement sur prototypes pendant la conception et seulement après sur des pièces issues de la production de masse. L'évaluation de la fiabilité est effectuée sous forme d'une probabilité de défaillance. L'évaluation et l'optimisation de cette caractéristique permet de concevoir des produits de plus en plus performants.

Contrairement à d'autres domaines, en mécanique les bases de données ne permettent pas d'obtenir des modèles simples pour estimer la fiabilité, puisque les taux de défaillance ne sont pas constants. L'estimation de la fiabilité passe donc par des méthodes plus complexes.

Par définition, la fiabilité est la caractéristique d'un dispositif exprimée par la probabilité que ce dispositif accomplisse une fonction requise dans des *conditions d'utilisation* et pour *une période de temps* déterminés [AFNOR, 1984]. Par conditions d'utilisation on entend les contraintes physiques subies par le système au cours de sa vie. La période de temps est exprimée de manière courante en nombres de cycles, mais peut être n'importe quelle caractéristique qui exprime une durée de vie. Pour exprimer la fiabilité deux approches sont possibles :

1. La variable aléatoire est la contrainte, donnée à un temps fixé. Par exemple, pour un nombre de cycles fixé, la contrainte est une variable aléatoire de distribution normale. (cf. propriété page 30)
2. La variable aléatoire est le nombre de cycles, donné à une contrainte fixée. Par exemple, pour une contrainte fixée, les nombres de cycles à rupture suivent une loi log-normale. (cf. propriété page 30)

Pour le calcul de cette fiabilité deux méthodes sont utilisées : l'approche déterministe et l'approche probabiliste.

2.3.1 L'approche déterministe

Le principe de l'approche déterministe est basé sur l'utilisation d'un coefficient de sécurité, impliquant a priori un surdimensionnement du système. La prise en compte de toutes les incertitudes et marges de sécurité est ramenée à un seul coefficient ([Huther, 2004]) usuellement imposé par des normes : ces coefficients ont été établis par l'expérience (e.g. recensement des accidents). Typiquement on retrouve cette application dans le domaine du génie civile.

Le dimensionnement des structures est basé sur un mode de défaillance donné et un modèle mécanique associé qui décrit l'état du système en fonction de diverses variables de conception : chargement, géométrie, caractéristiques matériaux, environnement, etc. [AFCIQ, 1981], [Ligeron, 1979]. Le calcul déterministe du coefficient de sécurité permet de relier ces variables à travers l'expression de ses deux termes : C et R , composantes de la méthode appelée "Contrainte-Résistance".

Le premier terme C représente la Contrainte. Il condense en un seul scalaire les variables de sollicitation représentant le mode de ruine du système (chargement, géométrie, environnement. . .). Le second terme R représente la Résistance, et caractérise la capacité du système à résister à la Contrainte. A partir de ces termes le coefficient de sécurité s'écrit :

$$K = \frac{\text{Résistance}}{\text{Contrainte}} = \frac{R}{C} \quad (2.46)$$

Les termes C et R du coefficient de sécurité son représentatifs de moyennes, prenant en compte par exemple l'erreur de mesure, l'environnement, l'hétérogénéité de la matière. . .

ou de valeurs spécifiques comme par exemple une sollicitation extrême C^* appliquée pour représenter C . (figure 2.19)

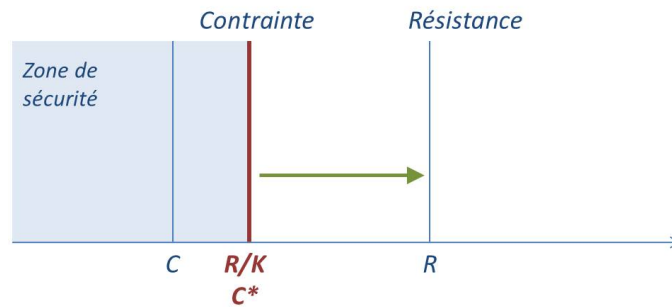


FIGURE 2.19: Approche déterministe

La valeur du coefficient de sécurité est comparée à une valeur seuil imposée par des normes. L'issue de la comparaison est binaire : si le coefficient de sécurité K est supérieur à ce seuil, le dimensionnement est acceptable, s'il est inférieur, le dimensionnement est inacceptable.

Comme cité précédemment, l'utilisation d'un tel coefficient conduit souvent à un surdimensionnement de la structure. La réduction de ce coefficient de sécurité est très souvent envisagée, pour des questions de coût, poids, etc. Dans ce cas, le risque de défaillance augmente, et il est impossible de le quantifier. C'est à cause de cette limite que l'approche probabiliste a été développée en conception mécanique.

2.3.2 L'approche probabiliste

Afin de prendre en compte les variations sur les variables qui agissent sur les systèmes mécaniques, la méthode probabiliste d'évaluation de la fiabilité a été développée depuis de nombreuses années [Mayer, 1926]. Chaque paramètre impliqué dans la conception des systèmes mécaniques est considéré comme une variable aléatoire, suivant une distribution de probabilité.

Cette démarche permet donc de prendre en compte les incertitudes sur la fiabilité du système à travers une variable quantifiable qui est la probabilité de défaillance, notée P_f . Parmi les approches probabilistes développées jusqu'à présent, la méthodologie la plus utilisée dans les démarches de conception en mécanique est l'approche probabiliste de la théorie "Contrainte-Résistance" [Lemaire, 2008].

2.3.2.1 La méthode Contrainte-Résistance

La méthode Contrainte-Résistance ("Stress-Strength method") est plus particulièrement utilisée en mécanique, puisqu'elle permet d'estimer la fiabilité d'un système pour lequel ni les modèles ni les données ne sont connues [Pages and Gondran, 1980]. De manière générale, par des études préliminaires il est nécessaire de définir :

- le profil de mission du système pendant sa durée de vie, C représentant de manière simplifiée ce profil,
- les modes de défaillances du système, issus d'avis d'expert, de calculs, d'essais de qualification, de retour d'expérience sur des systèmes reconduits. . . ,
- la probabilité de défaillance à assurer par ce système.

Contrairement à l'approche déterministe, qui considère les deux variables C et R comme des valeurs déterministes dont le ratio est le coefficient de sécurité, l'approche probabiliste considère ces deux variables comme aléatoires. La probabilité de défaillance est estimée à partir de ces deux variables aléatoires, comme la probabilité que la résistance à la contrainte soit inférieure à la contrainte appliquée durant la durée de vie du système (figure 2.20).

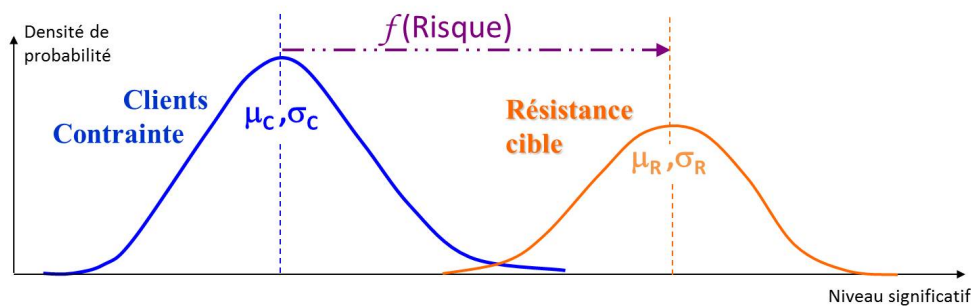


FIGURE 2.20: Approche probabiliste - méthode Contrainte-Résistance

Le calcul de la probabilité de défaillance s'écrit comme la somme, sur tous les couples (R, C) tels que $R \leq C$, de la probabilité de rencontrer ce couple.

$$\begin{aligned}
 P_f &= \text{Prob}(R \leq C) \\
 &= \int \int_{\{(r,c)|r \leq c\}} f_{R,C}(r, c) dr dc
 \end{aligned}
 \tag{2.47}$$

Dans le cas où R et C sont des variables indépendantes, le risque ou probabilité de défaillance s'écrit :

$$P_f = \int_{c=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{r=0}^c f_R(r) dr \right) f_C(c) dc \quad (2.48)$$

$$= \int_{r=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{c=r}^{+\infty} f_C(c) dc \right) f_R(r) dr \quad (2.49)$$

L'intégration peut être numérique, suivant par exemple la simulation de Monte-Carlo [AFCIQ, 1981], [Ayyub and McCuen, 2011], mais dans le cas où l'on peut représenter les deux distributions par des modèles simples, des solutions analytiques existent. Par exemple, si R et C suivent des lois normales de moyenne μ_R (resp. μ_C) et d'écart-type σ_R (resp. σ_C), on peut écrire :

$$\begin{aligned} P_f &= Prob(R \leq C) = Prob(Z \leq 0) \\ &= \Phi \left(-\frac{\mu_R - \mu_C}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_C^2}} \right) \\ &= \Phi \left(-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \right) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Où Φ est la fonction de répartition de la loi normale standard.

2.3.2.2 L'approche probabiliste chez PSA

PSA Peugeot-Citroën a choisi une approche probabiliste du dimensionnement en fatigue de ses composants de Liaison Au Sol [Bignonnet and Thomas, 2004]. La démarche est basée sur la méthode "Contrainte-Résistance" et repose sur quelques données fondamentales :

- une connaissance de l'usage client, représentée par une distribution des clients selon une variable scalaire (cas type : un effort appliqué à la roue dans une direction donnée). On appelle cette distribution la Contrainte.
- une connaissance de la distribution de tenue des composants, selon la même variable scalaire. On appelle cette distribution la Résistance.
- le risque ou la probabilité de défaillance acceptable pour le composant considéré. En général, ce risque repose sur des arbres de défaillance déclinés au composant, qui figent le niveau de risque au composant, à partir d'exigences fonctionnelles établies par des normes (e.g. ISO 26262).

Définition de la Contrainte

La contrainte est une donnée non négociable. Elle est acquise au terme :

- d'études en clientèle, exhaustives et longues, incluant des mesures embarquées sur véhicules ;

- de démarches qui permettent d’interpréter ces mesures et de les simplifier au maximum selon une probabilité d’usage et de sorte à pouvoir être comparée à une contrainte.

Par exemple, à partir d’enquêtes on peut décrire le comportement de tous les clients en virage en fonction d’une variable qui peut-être une accélération transversale, un effort transversal, ou une mise en roulis du châssis selon ce que l’on trouvera le plus pertinent. Pour la Liaison Au Sol et dans le domaine de la fatigue, la variable est en général un effort équivalent (scalaire mesurable) pour l’organe considéré et qui correspond à un nombre de cycles normalisé par défaut à 10^6 (durée représentative de l’objectif de durée de vie).

Pour la plupart des sollicitations de fatigue en liaison au sol et par défaut, l’ensemble des clients est représenté par une loi normale. La construction de cette loi repose sur plusieurs étapes (cf. schéma 2.21 [Martin Borret, 2006]) pour chaque client :

1. A partir d’enregistrement de cycles de sollicitations mesurées sur véhicules, les signaux enregistrés sont comptés à partir de la méthode Rainflow. Cette méthode permet de compter le nombre de cycles en fonction de leur amplitude et de leur moyenne (cf. schéma 2.21-1).
2. La parabole de Gerber [Gerber and Fuchs, 1968] (cf. schéma 2.21-2) est utilisée ensuite pour caractériser l’amplitude de contrainte (σ_a) en fonction de la contrainte moyenne (σ_m), la limite d’endurance (σ_D) et la résistance à la traction (R_m), c’est à dire passer en cycles purement alternés. On peut donc représenter les résultats sous la forme de l’amplitude de contrainte en fonction du nombre de cycles n_i (cf. schéma 2.21-3).
3. En considérant la courbe de Wöhler du composant connue (cf. schéma 2.21-4) il est possible, par le cumul d’endommagement selon Miner, de déterminer la courbe de Wöhler minimale nécessaire pour que le client ne risque pas la défaillance au kilométrage fixé (représenté par le nombre de cycles N_0). Cette courbe caractérisée par la valeur S_{D_0} à N_0 correspond à un cumul d’endommagement tel que $\sum_i \frac{n_i}{N_i} = 1$. Ce client i est alors caractérisé par une valeur S_{D_0} nommée *fatigue équivalente* à N_0 cycles (cf. schéma 2.21-5).

Ce sont les valeurs S_{D_0} qui construisent la distribution normale des contraintes (clients) (cf. schéma 2.21-6). L’hypothèse de normalité de la distribution des résistances, caractérisée par sa moyenne μ_R et son écart-type σ_R est également établie.

Par convention, plutôt que de décrire extensivement la loi normale des clients par sa moyenne et son écart-type, on préfère exploiter un point de référence précis. Ce point particulier est appelé " client référence " et quand il s’agit d’un effort on l’appelle en général "*F_n*".

Définition du client de référence, *F_n*

Le client de référence est un outil qui permet de simplifier l’approche et d’adimensionner

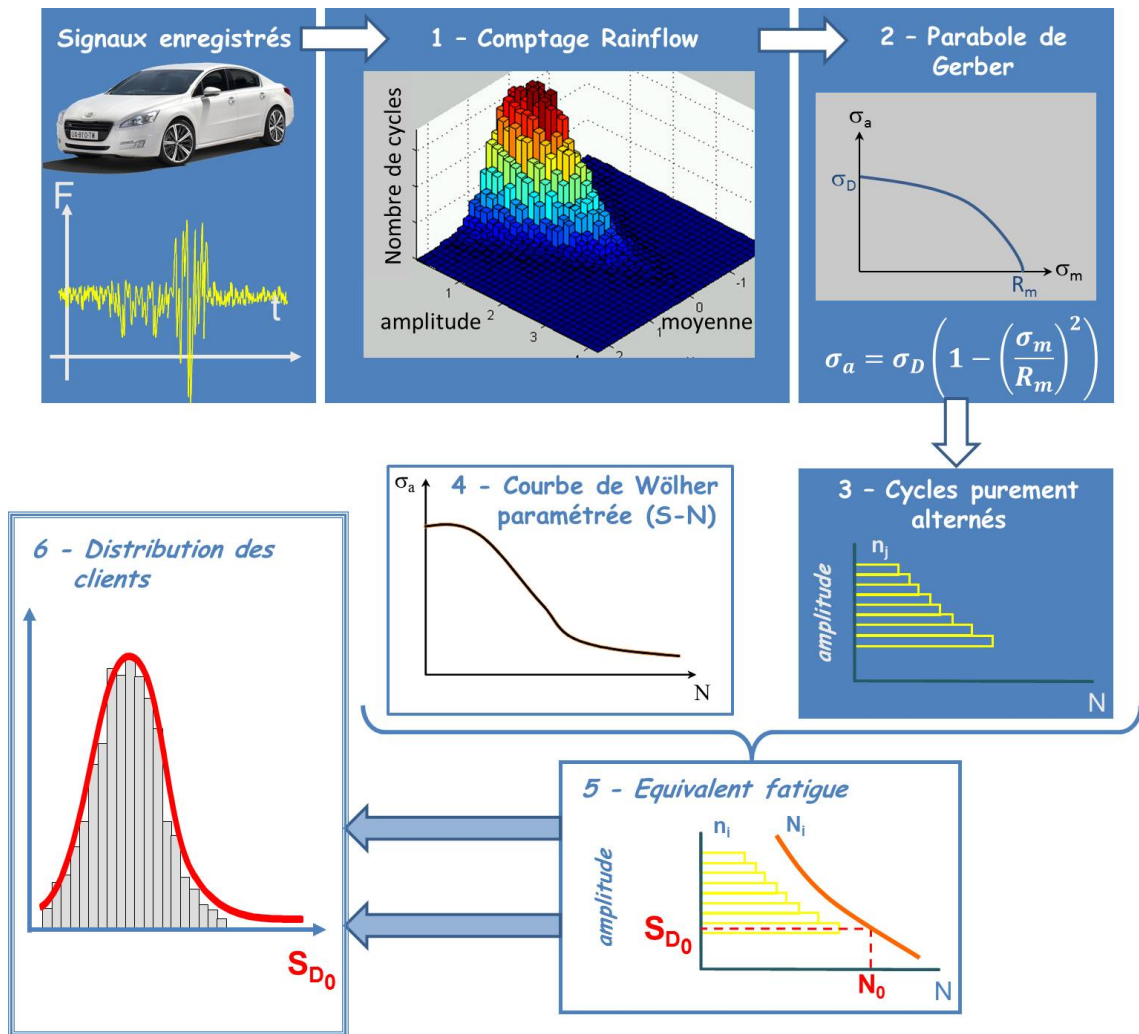


FIGURE 2.21: Construction de la distribution des Contraintes

le problème pour définir la position de la distribution de résistance afin de garantir la tenue en service. Cette référence a une position arbitraire qui ne modifie en rien le calcul du risque. Le choix de la position du F_n est donc gouverné par d'autres considérations (représentativité des clients sévères, recalage piste ou banc d'essai...). On définit sa position par rapport à la distribution des contraintes. On dit par exemple qu'il représente le client tel que la probabilité qu'un client soit plus sévère est de γ .

En Liaison Au Sol, la pratique historique PSA définit F_n par un décalage de la moyenne de +4,1 écarts-types, soit une probabilité de 1/50000 qu'un client soit plus sévère que cette référence client (cf. figure 2.22).

Le F_n n'est donc pas "le client le plus sévère" ni "le client représentatif", ce n'est qu'un client particulier qui sert à transformer le calcul de probabilité de défaillance en spécifications pour le calcul et l'essai. Le F_n est donc positionné à α écarts-types de la moyenne de la contrainte. C'est à partir de cette borne qu'est positionnée la distribution des résistances pour garantir le risque de défaillance acceptable.

Au lieu de placer la distribution des résistances directement par rapport à la distribution

des contraintes en satisfaisant une probabilité de défaillance (i.e. positionner la moyenne des résistances en fonction de la moyenne des contraintes en tenant comptes des écart-types de chacune des distributions), l'approche par le client référence permet de positionner la moyenne des résistances par rapport à la borne (F_n).

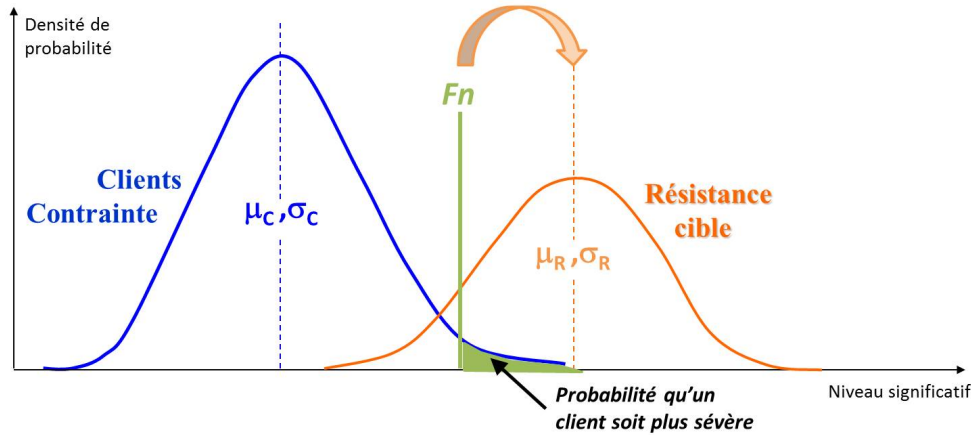


FIGURE 2.22: Détermination de la résistance objectif par l'introduction du Client de référence

Définition de la résistance cible

La résistance réelle des pièces est déterminée par des essais de validation, dont les résultats seront comparés à la résistance cible, celle-ci étant supposée suivre une loi normale. Garantir un certain risque de défaillance est donc équivalent à positionner cette distribution et donc à déterminer la moyenne μ_R et l'écart-type σ_R de la résistance cible.

Dans le calcul du risque de défaillance, il est nécessaire de prendre en compte les incertitudes d'estimation, notamment lorsqu'on travaille avec des tailles d'échantillon faibles. Au niveau de confiance γ , l'intervalle de confiance sur la moyenne estimée d'un échantillon de taille n est décrit par :

$$m_R - t_{1-\gamma/2} \frac{s_R}{\sqrt{n}} \leq \mu_{1-\gamma} \leq m_R + t_{1-\gamma/2} \frac{s_R}{\sqrt{n}} \quad (2.51)$$

On montre, en figure 2.23, l'intervalle de confiance à 90% sur l'estimation de la moyenne en fonction de la taille de l'échantillon.

Chez PSA, on considère que le nombre d'essais est suffisant pour obtenir une bonne estimation m_R de la moyenne : il apparaît bien (cf. figure 2.23) que l'erreur d'estimation sur la moyenne existe, mais paraît négligeable pour des tailles d'échantillon de 7 pièces (échantillon de référence à PSA). On ne considère donc par défaut pas d'erreur sur l'estimation de la moyenne par rapport à la moyenne effective.

En revanche, le nombre d'essais étant insuffisant pour obtenir une bonne estimation

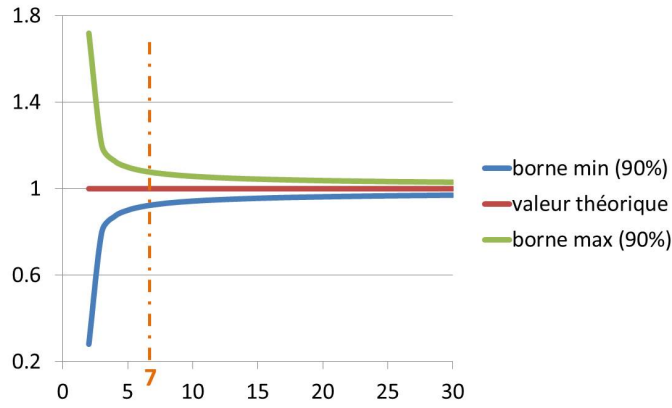


FIGURE 2.23: Intervalle de confiance sur la moyenne en fonction de la taille d'échantillon

de l'écart-type, on cherche à majorer cette valeur pour un niveau de confiance γ souhaité.

$$s_R = \hat{\sigma}_R \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi_{(n-1)}^2 (1-\gamma)}} \quad (2.52)$$

On considère ici une seule équation, celle de la probabilité de défaillance, mais il existe deux inconnues, qui sont l'écart-type et la moyenne. Pour palier au problème, l'hypothèse physique du coefficient de variation q constant et connu (spécifique au couple produit-process) est appliquée :

$$q = \frac{\sigma_R}{\mu_R} \quad (2.53)$$

Comme cité précédemment, l'introduction du client de référence permet de positionner la distribution des résistances. Pour cela un changement de variable est effectué. On pose $F_n = \mu_C + \alpha\sigma_C$ et $\mu_R = F_n + \beta\sigma_R$ comme le montre la figure (2.24), en appliquant l'hypothèse de coefficient de variation constant on écrit également $F_n = \mu_C (1 + \alpha q_C)$ et $F_n = \mu_R (1 - \beta q)$. On peut donc décrire l'équation du risque (2.50) par :

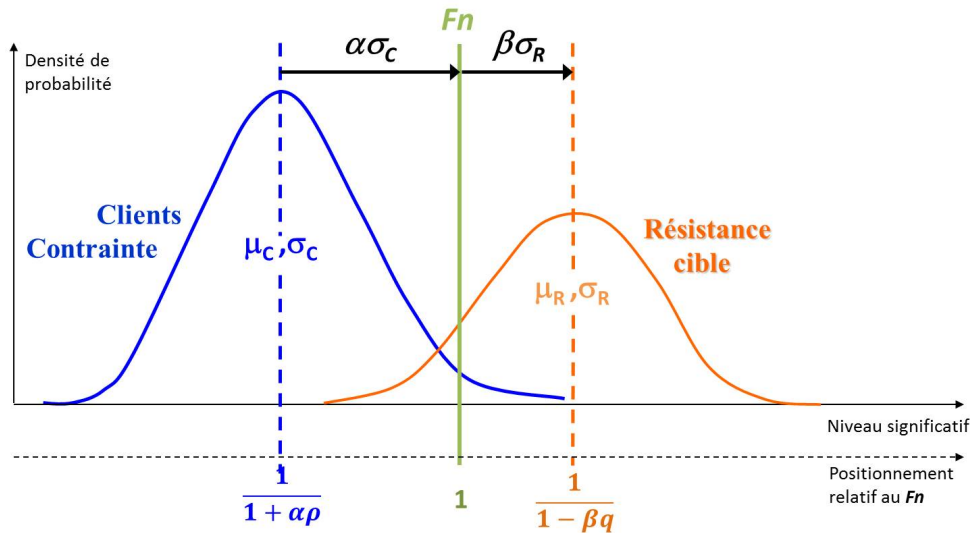
$$P_f = \Phi \left(\frac{F_n \left[\left(\frac{1}{1-\beta q} \right) - \left(\frac{1}{1-\alpha q_C} \right) \right]}{\sqrt{\left(\frac{q F_n}{1-\beta q} \right)^2 \frac{n-1}{\chi_{(n-1)}^2 (1-\gamma)} + (q_C \mu_C)^2}} \right) \quad (2.54)$$

En considérant q connu, il ne reste plus qu'une seule inconnue β , à déterminer pour positionner la distribution cible de la résistance.

Calcul de la fiabilité prévisionnelle

La fiabilité du système au cours de la conception est assurée par les calculs numériques et par les essais de validation [Bignonnet and Thomas, 2004].

Les calculs de dimensionnement sont réalisés en appliquant notamment la méthode par éléments finis. On considère l'effort F_n , et le critère d'acceptation du matériau est choisi

FIGURE 2.24: Positionnement de la résistance objectif par rapport au F_n

sur l'iso-probabilité β écart-types sous la moyenne. Chez PSA, le critère d'acceptation du calcul numérique de fatigue est basé sur le critère de Dang Van [Dang Van, 1973], qui se présente sous la forme d'une droite dans un plan de contraintes au sens de Cauchy (amplitude de cisaillement, pression hydrostatique). Cette droite doit donc être identifiée sur des limites de fatigue à $-\beta$ écart-types, comme le montre le schéma 2.25. C'est à partir de l'appréciation de ce critère déterministe qu'il est valable d'appliquer les critères de fiabilité

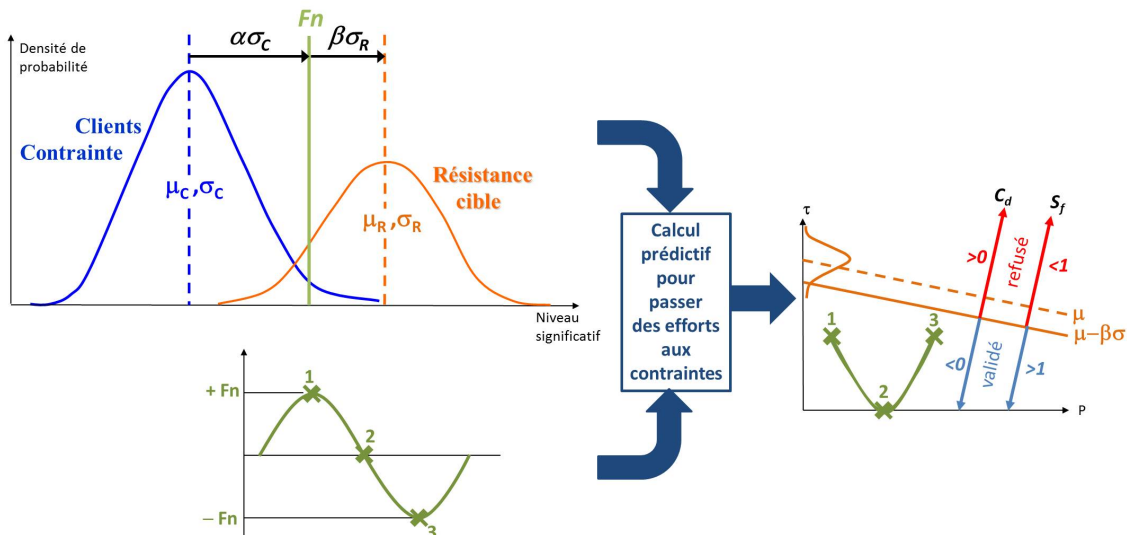


FIGURE 2.25: Exploitation du calcul numérique dans l'approche probabiliste

F_n est une sollicitation cyclique constituée de plusieurs instants de chargements décrivant ce cycle e.g. $(0, +F_n, 0, -F_n)$ (cf. figure 2.25), éventuellement précédée de l'histoire de mise en oeuvre de la structure (process, serrage, frettage, chargement initial, ...)

avant sa mise en service. En tout point de la structure, on détermine un trajet de chargement dans le plan de Dang Van (τ, p) (τ : contrainte de cisaillement, et p : pression hydrostatique) correspondant à l'histoire des contraintes (cf. figure 2.25). Grâce à la notion de coefficient de danger C_d (cf. figure 2.25), on a à disposition la valeur qui permet l'appréciation déterministe du critère de Dang Van : en considérant le coefficient de danger comme la distance entre la droite de Dan Van à $-\beta$ écart-types et le point du trajet de chargement le plus sévère (cf. figure 2.25 droite) si $C_d < 0$, la conception de la pièce est acceptée sinon elle est refusée. Le coefficient de danger est l'équivalent du facteur de sécurité (S_f , Safety Factor, qui est plus généralement utilisé). On accède ainsi aux zones critiques et à la fiabilité prévisionnelle de la pièce calculée. La figure 2.26 montre des exemples de coefficients de danger issus de calculs numériques sur des éléments de Liaison Au Sol.

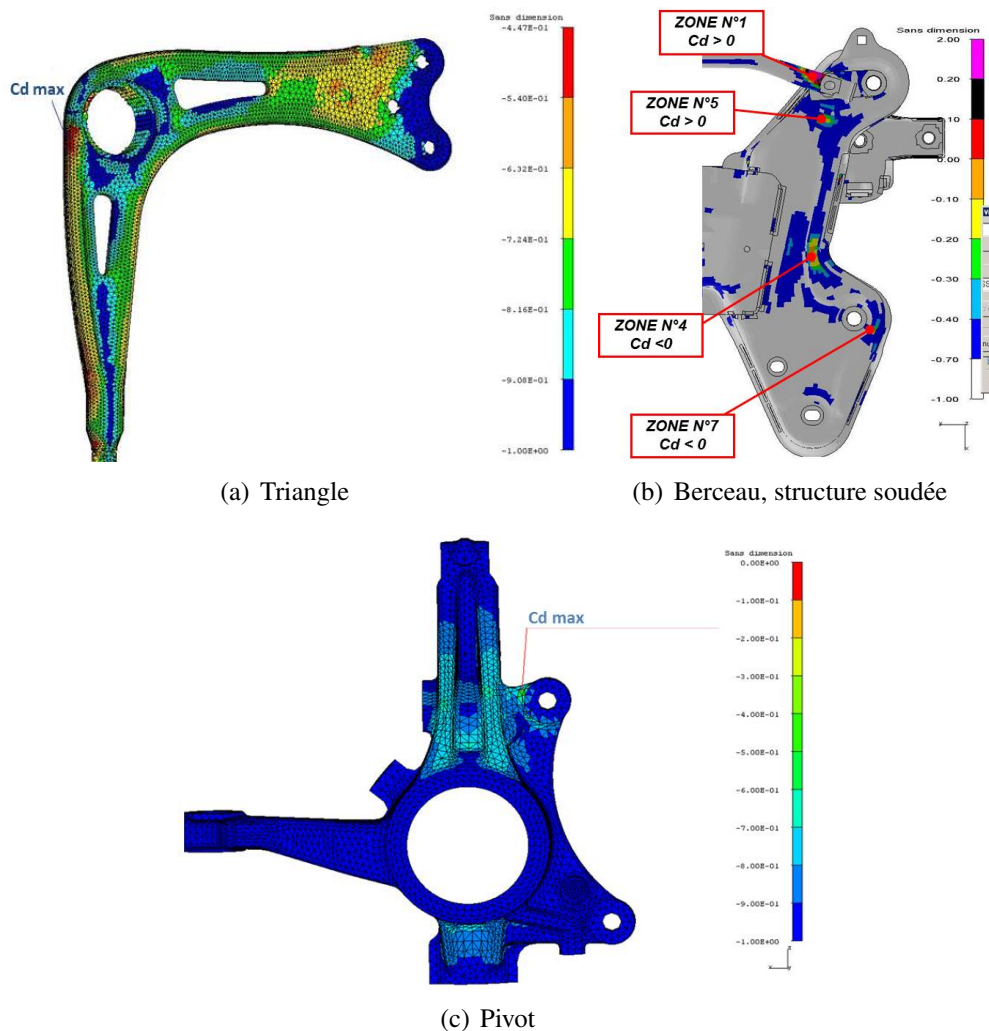


FIGURE 2.26: Exemples de résultats de calculs par éléments finis (C_d) sur maillages de modèles de LAS

Le calcul permet une validation rapide d'un modèle de conception, mais reste dépendant de nombreuses hypothèses de modélisation, de données matériau, ... La validation

de la conception à chaque stade du développement du système repose sur les résultats d'essais de fatigue. Si, à partir des résultats d'essais, la résistance confirme sa position par rapport à la distribution recherchée, la conception est validée pour un risque donné.

À l'essai, le choix de positionner la tenue au F_n n'est pas pertinent, car on risquerait de ne jamais atteindre la rupture (cf. figure 2.27, [Raoult, 2009]) et par conséquent de ne pas conclure quand à la probabilité de défaillance. L'essai est établi au niveau de la moyenne des résistances, qui est l'observable statistique le mieux identifié avec un nombre de pièces limité, et qui permet d'approcher une probabilité d'occurrence plus importante qu'au F_n .

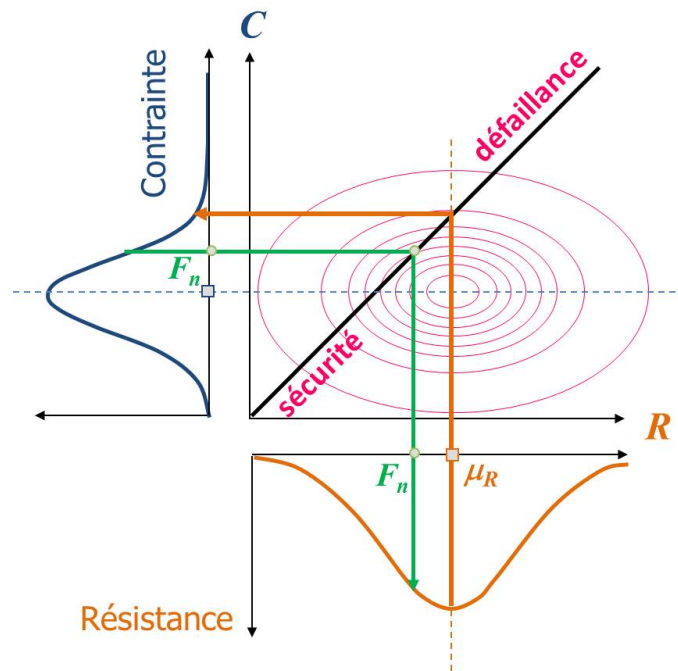


FIGURE 2.27: Représentation de l'espace Contrainte/Résistance. Le risque de défaillance correspondant à l'intégrale sur la zone de défaillance

L'estimation de la fiabilité par les essais fait l'objet du chapitre suivant, chapitre 3, décrivant différents protocoles d'essai et méthodes d'estimation de la fiabilité.

Estimation de la fiabilité par les essais

Les méthodes d'estimations de la fiabilité permettent de montrer si la valeur d'une caractéristique de fiabilité d'un système est conforme ou non aux objectifs fixés.

L'objectif global des essais de fatigue est bien la qualification ou non des pièces de Liaison Au Sol (LAS). Le critère de qualification est actuellement une valeur de probabilité de défaillance à respecter mais, comme présenté en paragraphe 2.3.2.2 ce critère a été simplifié par l'unique positionnement (tenant compte de la dispersion des résultats à l'aide d'abaques) de la moyenne de la limite d'endurance par rapport à une valeur objectif (e.g. positionner la moyenne à $1, X F_n$ lorsqu'on a une dispersion de $Y\%$).

On montre ici différentes méthodologies de qualification de pièces soumises à la fatigue par les essais. Par méthodologie de qualification on entend la combinaison entre :

1. un protocole d'essai (cf. section 3.1), permettant de reproduire les conditions d'utilisation du produit, et donc d'obtenir des données de durées de vie ;
2. une méthode d'estimation de la fiabilité (cf. section 3.2), permettant de définir les caractéristiques de fiabilité du système dans le domaine de fatigue, de manière à déterminer si la conception respecte ou non les objectifs. Ces méthodes d'estimation sont construites soit dans l'espace des contraintes (estimation de la limite d'endurance à un nombre de cycles fixé), soit dans l'espace des durées de vies (estimation des nombres de cycles à défaillance à une contrainte fixée).

Le critère de qualification de positionnement unique de la moyenne de la limite d'endurance devient alors obsolète. Pour la suite, le critère sera basé sur le positionnement à la fois de la moyenne et de l'écart-type estimés, permettant le calcul de probabilité de défaillance.

Dans ce chapitre, les protocoles utilisés actuellement chez PSA seront en premier lieu présentés (partie 3.1), suivis par les méthodes d'estimation applicables à ces protocoles

(partie 3.2) : tout d'abord les méthodes actuellement appliquées chez PSA, puis des méthodes alternatives (MLE, SVA).

L'analyse des différentes méthodologies globales de qualification (protocole + méthode d'estimation) fera l'objet du chapitre 4.

3.1 Protocoles d'essais utilisés chez PSA

Trois protocoles d'essai sont utilisés actuellement chez PSA [Martin Borret, 2008]. Le StairCase est utilisé dans les phases avancées de conception, lorsque l'on dispose d'un nombre suffisant de pièces (7), pour l'estimation unique de la moyenne de la limite d'endurance. Le Locati est utilisé dans les premières phases de conception pour obtenir une idée rapide de la limite d'endurance, il est assez courant d'effectuer un essai sur 3 pièces en Locati. Le StairCase-Locati permet la validation finale de la conception. Il est effectué sur 7 pièces pour obtenir l'estimation à la fois la moyenne et l'écart-type de la limite d'endurance.

Chez PSA, ces méthodes sont en place depuis plus de 15 ans et ont fait leurs preuves mais possèdent désormais certaines limites, principalement en termes de temps et donc de coût d'essai.

3.1.1 StairCase

Le protocole StairCase [Dixon and Mood, 1948], [Zhao and Yang, 2008], [Lin et al., 2001] est une procédure d'essais répétés de fatigue dont l'objectif est d'estimer les paramètres (moyenne et écart-type) de la distribution normale de la limite de fatigue avec un minimum de pièces. Cette méthode est basée sur un principe itératif. Plusieurs pièces sont testées, l'essai de fatigue sur la pièce en cours dépend du résultat de l'essai sur la pièce précédente, selon l'algorithme détaillé en figure 3.1, où :

- F_{d0} est le premier niveau d'effort de l'échantillon. Au début de la procédure F_{d0} est choisi a priori le plus proche possible de la moyenne de la limite d'endurance cherchée.
- d est un incrément d'effort entre 2 niveaux consécutifs. Au début de la procédure il est défini aussi proche que possible de l'écart type de la limite de fatigue envisagé.
- N est le nombre de cycles à réaliser avant d'établir le diagnostic de défaillance ou non défaillance, ici $N = 10^6$ cycles.

L'exemple suivant (figure 3.2) montre le résultat d'une procédure StairCase à 7 pièces, avec un premier niveau de contrainte F_{d0} , et un incrément d égal à $0,1F_{d0}$. Par convention, les ruptures avant N cycles sont notées X et les non ruptures O .

Il s'agit de la méthode d'essai la plus courante, utilisée chez PSA et citée dans les normes japonaise, anglaise et française. Les premiers essais de ce type ont été effectués sur des explosifs par Dixon & Mood [Dixon and Mood, 1948] puis développés par Little

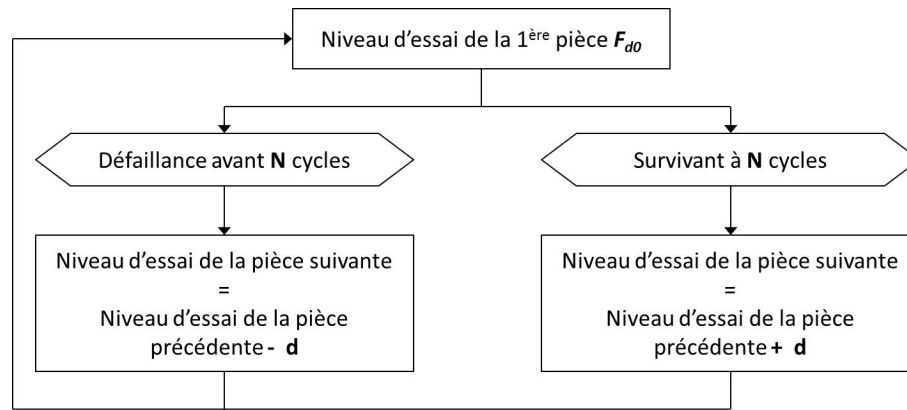


FIGURE 3.1: La procédure StairCase

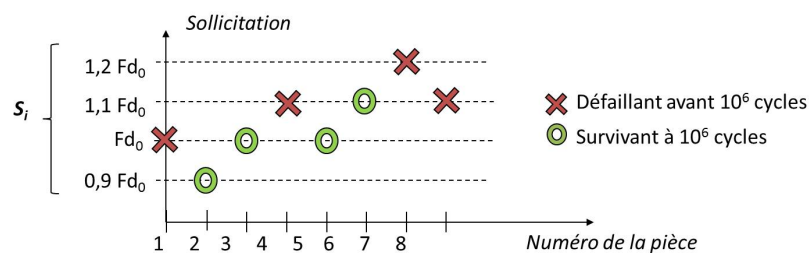


FIGURE 3.2: Exemple de résultat d'une procédure StairCase

[Little, 1972] pour l'application aux essais de fatigue. L'avantage de cette méthode est qu'elle ne fait pas appel aux phénomènes physiques, mais uniquement aux lois de probabilité. Par ailleurs, le protocole est reconnu parmi ceux qui nécessitent moins de pièces.

3.1.2 Locati

Le protocole [Locati, 1955] est principalement utilisé lorsqu'on dispose de peu de pièces (en théorie une seule suffit [Brevet et al., 1978]). L'objectif est le même que pour le StairCase à la différence que le Locati intègre des hypothèses sur la physique du phénomène de rupture. Il utilise le principe de cumul d'endommagement selon Miner (§.2.2.2.3) et la courbe de Wöhler, modélisée par l'équation de Basquin (voir Table 2.1) dans le cas de PSA (mais peut être définie par une autre modélisation).

Grâce à ces deux principes on a l'hypothèse suivante : si un chargement $\{(S_1; n_1); (S_2; n_2); \dots; (S_k; n_k)\}$ conduit à la rupture de la pièce, on peut alors déterminer le niveau de tenue de cette pièce S_{eq} pour tout nombre de cycles N_{ref} donné. La pièce est testée pendant L cycles au niveau d'effort S . A l'issue de ce palier, on augmente l'effort de λ . On continue à solliciter la même pièce à ce niveau d'effort pendant L cycles. Le processus est poursuivi, avec des incréments d'effort λ tous les L_i cycles

($S_i = S_{i-1} + \lambda$) tant que la pièce n'est pas rompue (cf. figure 3.3). Le nombre de cycles L habituellement retenu pour l'application du protocole Locati est de $0,3 \cdot 10^6$.

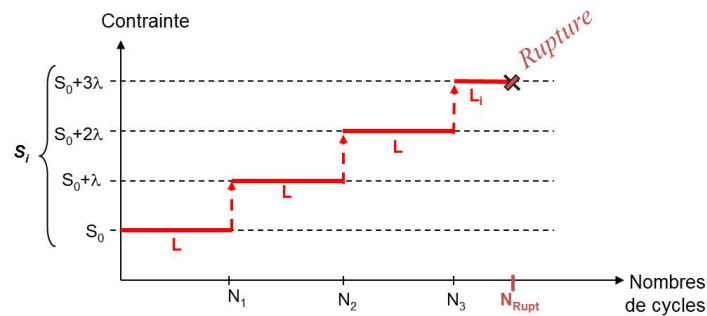


FIGURE 3.3: Exemple d'une pièce testée en protocole Locati

Le premier niveau d'effort de la première pièce S_0 est défini comme la moyenne théorique de la limite d'endurance minorée de deux incréments λ . En général, on définit S_0 :

- à partir des résultats antérieurs, sur d'autres campagnes d'essais de fatigue sur la même pièce ou une pièce très proche,
- à partir d'un diagnostic d'expert, basé en général sur des données d'essais et de calculs.

A la i -ème pièce testée, l'ensemble des $(i-1)$ essais précédents dans le processus Locati permet de définir la tenue moyenne S_m du lot déjà testé. L'essai suivant est défini au niveau S_{i+1}

$$S_{i+1} = S_m - 2\lambda \quad (3.1)$$

La méthode Locati peut être utilisée de deux façons différentes :

- dans un contexte décisionnel plutôt que de validation : on cherche une information rapide sur la tenue en fatigue de la pièce pour se positionner par rapport à un objectif ;
- dans un contexte de validation, au cours de l'essai StairCase. Dans ce cas, on décide de porter à rupture les pièces non rompues lors du StairCase et d'ajouter à l'analyse du StairCase les informations complémentaires liées à la durée de vie effective de toutes les pièces (Méthode StairCase-Locati, §.3.1.3).

3.1.3 StairCase-Locati

Sans altérer la qualité du résultat du protocole StairCase, on peut poursuivre l'essai de fatigue sur les pièces non-rompues par une procédure Locati. La méthode est fondamentalement une méthode du StairCase. La procédure d'essai est pilotée par la procédure StairCase pour définir les conditions d'essais successifs des pièces. Les paramètres du Locati en sont donc dépendants :

- incrément d'effort $\lambda = d$

- premier niveau $S_0 = S_i$ du StairCase + d
- $L < N$ dans un rapport d'au moins 2 (ici $N = 10^6$ et $L = 0,3 \cdot 10^6$)

La procédure est la suivante : lorsqu'une pièce testée dans le cadre du StairCase est non rompue au bout de N cycles, elle continue à être testée avec un premier niveau d'effort dans le Locati qui est $S_i + \lambda$ pendant L cycles.

3.2 Méthodes d'estimation de la fiabilité

Dans la littérature on retrouve de nombreuses méthodes d'estimation de la fiabilité appliquées aux différents protocoles d'essais. Nous nous intéressons ici à trois catégories de méthodes d'estimation :

- les méthodes pratiquées historiquement chez PSA, appelées dans la suite simplement "méthodes PSA" par souci de simplicité : estimation par Dixon & Mood pour le StairCase (§.3.2.1.1), et le calcul de tenue équivalente pour le Locati (§.3.2.1.2) et le StairCase-Locati (§.3.2.1.3). Ces trois méthodes d'estimation permettent d'estimer la distribution de la limite d'endurance à un nombre de cycle donné,
- les méthodes appelées par la suite MLE, qui permettent par maximum de vraisemblance d'estimer la distribution de la limite d'endurance à un nombre de cycle donné,
- les méthodes appelées par la suite SVA, qui permettent par maximum de vraisemblance et à partir d'un modèle d'accélération d'estimer la distribution des nombres de cycles à défaillance à un niveau de contrainte donné.

Nous montrons ici les méthodes d'estimation appliquées à chacun des protocoles d'essai développé précédemment.

3.2.1 La méthode PSA

3.2.1.1 Le StairCase par Dixon & Mood

On connaît différentes méthodes d'analyse de résultats d'un protocole StairCase [Zhao and Yang, 2008], [Lin et al., 2001]. Chez PSA la méthode appliquée est l'estimation par Dixon & Mood [Dixon and Mood, 1948]. A partir des résultats d'un essai StairCase, la moyenne m , et l'écart-type s , de la limite d'endurance sont déterminés d'après les estimateurs de D&M de la manière suivante :

$$m = \left[F_0 + d \left(\frac{A}{N_e} \pm \frac{1}{2} \right) \right] \quad (3.2)$$

$$s = 1,62 \cdot d \cdot \left(\frac{N_e \cdot B - A^2}{N_e^2} + 0,029 \right) \quad (3.3)$$

Où l'équation 3.3 est appliquée uniquement si : $\frac{N_e \cdot B - A^2}{N_e^2} > 0,3$

avec :

F_0	niveau de sollicitation le plus faible utilisé au cours de l'essai
N_e	nombre des éventualités (rupture ou non) les moins fréquentes pour l'ensemble des séquences d'essai
$A = \sum in_i$	utilisé pour le calcul de la moyenne
$B = \sum i^2 n_i$	utilisé pour le calcul de l'écart type
i	indice du niveau de contrainte : le niveau 0 correspond à F_0
n_i	le nombre de fois où l'on observe l'éventualité la moins fréquente au niveau i
$-1/2$	si la rupture est la moins fréquente
$+1/2$	si la rupture est la plus fréquente

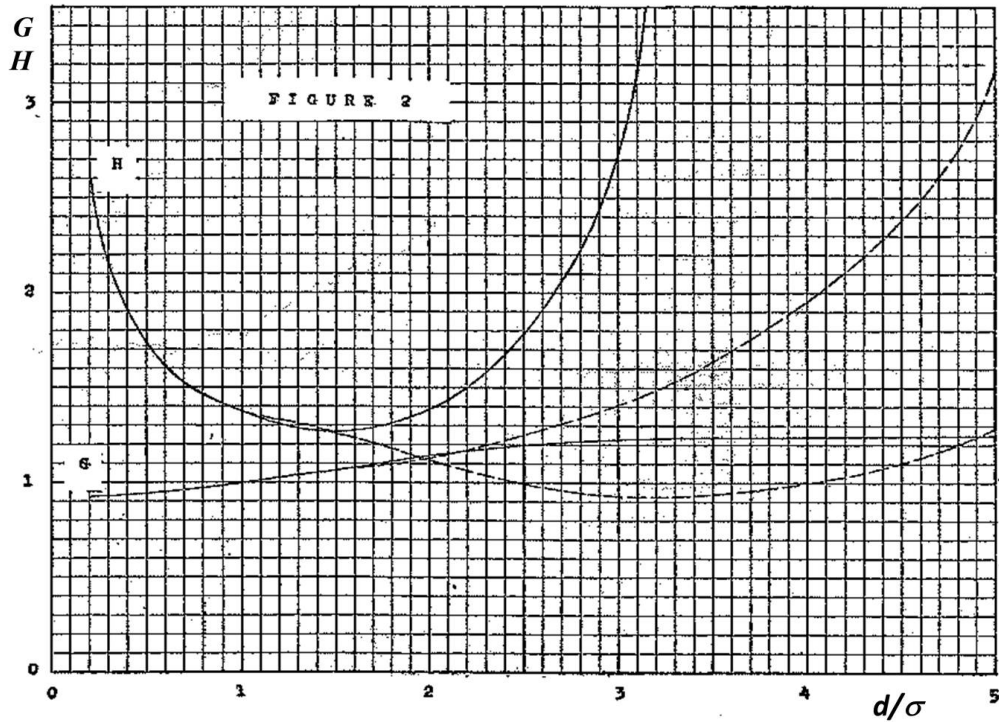
Chez PSA, il est courant d'utiliser 7 pièces pour estimer la moyenne de la limite de fatigue, mais l'écart-type n'est pas déterminé par cette méthode d'essai.

Les intervalles de confiance donnés par Dixon & Mood, pour un risque α donné, sont respectivement pour la moyenne et l'écart-type :

$$m \in \hat{m} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \left(G \frac{\hat{s}}{\sqrt{N-1}} \right) \quad (3.4)$$

$$s \in \hat{s} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \left(H \frac{\hat{s}}{\sqrt{N-1}} \right) \quad (3.5)$$

Avec G et H des fonctions définies dépendantes du rapport d/s représentées en figure 3.4.

FIGURE 3.4: Représentation des fonctions G et H [Dixon and Mood, 1948]

3.2.1.2 Le Locati par le calcul de tenue équivalente

Les paramètres de la limite d'endurance sont calculés basiquement à partir d'un essai Locati comme la moyenne et l'écart-type des différentes tenues équivalentes (S_{eq}) de chacune des pièces. La détermination de la distribution de la limite d'endurance est basée sur les hypothèses du cumul de Miner (§.2.2.2.3) et du modèle de Basquin pour la courbe de Wöhler (voir Table 2.1). Pour chaque pièce ayant été testée à des niveaux de contraintes successif S_i pendant L_i cycles, on a la tenue équivalente à un nombre de cycles donné N_{ref} :

$$S_{eq} = \left[\sum \left(\frac{L_i}{N_{ref}} \cdot S_i^b \right) \right]^{\frac{1}{b}} \quad (3.6)$$

On écrit donc la moyenne m et l'écart-type s de la limite d'endurance à N_{ref} cycles :

$$m = \overline{S_{eq}} \quad (3.7)$$

$$s = \sqrt{Var(S_{eq})} \quad (3.8)$$

Chez PSA, l'estimation à partir d'un protocole Locati est utilisé lorsqu'on veut déterminer la moyenne et l'écart-type de la limite d'endurance avec moins de pièces que lors d'un StairCase (par exemple trois prototypes).

Les intervalles de confiance pour un risque α donné sont respectivement pour la

moyenne et l'écart-type :

$$m \in \hat{m} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\hat{s}}{\sqrt{N-1}} \right) \quad (3.9)$$

$$s \in \hat{s} \pm \sqrt{\frac{(n-1)\hat{s}^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2}} \quad (3.10)$$

3.2.1.3 Le StairCase-Locati par le calcul de tenue équivalente

Le StairCase-Locati est une combinaison des deux protocoles précédents. A partir de leurs résultats, on peut déterminer la moyenne et l'écart-type aussi bien par la méthode de D&M (cf. §. 3.2.1.1), puisque l'application du protocole Locati n'influe en rien sur la procédure du StairCase, ainsi que par la méthode d'équivalent fatigue à la suite du Locati. Chez PSA, le StairCase-Locati s'appuie sur les résultats de l'équivalent fatigue, notamment pour obtenir un estimateur de l'écart-type souvent impossible par D&M, et permet de comparer l'estimation de la moyenne obtenue par D&M.

3.2.2 La méthode MLE

Dans ce paragraphe, l'estimation par Maximum de Vraisemblance (MV) (Maximum Likelihood Estimation (MLE)) est utilisée afin de déterminer les meilleures valeurs de moyenne et d'écart-type de la limite d'endurance, par optimisation de la fonction de vraisemblance.

3.2.2.1 Application du MLE au StairCase

Conformément au paragraphe 3.1.1, on considère un protocole StairCase, avec un premier niveau d'essai F_{d0} et un incrément d . A la fin de la procédure on observe des résultats avec :

- i niveaux d'effort S_i ($=F_{d0}, F_{d0} + d, F_{d0} - d, \dots$),
- à chaque niveau S_i on observe j pièces testées,
- N_{ij} sont les nombres de cycles à défaillance au niveau S_i pour la pièce j ,
- C_i est le nombre de pièces censurées à $C = 10^6$ cycles au niveau S_i .

Comme le montre l'exemple suivant (figure 3.5) :

Basé sur l'hypothèse de normalité de la distribution de la limite de fatigue, on écrit la fonction de vraisemblance :

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma) = \prod_1^i \left[\prod_1^j \left(\Phi \left(\frac{S_{ij} - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\delta_i} \times \left(1 - \Phi \left(\frac{S_{ij} - \mu}{\sigma} \right) \right)^{1-\delta_i} \right] \quad (3.11)$$

Où Φ est la fonction de répartition de la loi normale standard, et $\delta_i = 1$ si la pièce (ij) est rompue, ou $\delta_i = 0$ si la pièce (ij) est censurée.

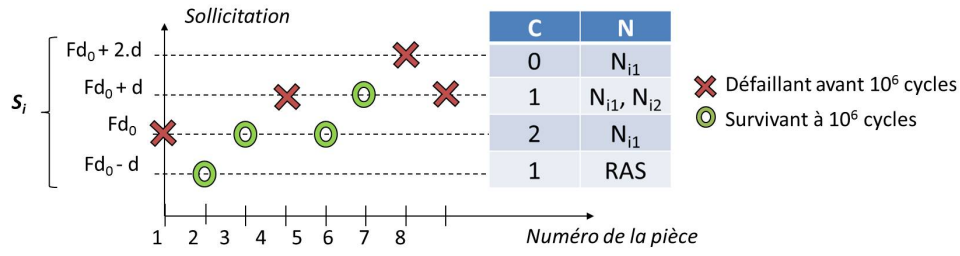


FIGURE 3.5: Résultats d'un protocole StairCase

En maximisant la fonction de vraisemblance on obtient alors les estimateurs $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}$ de la distribution de la limite d'endurance.

On peut également intégrer une information supplémentaire dans la fonction de vraisemblance puisqu'on connaît le nombre de cycles à défaillance pour chacune des pièces non censurées. Il faut pour cela considérer la loi d'accélération basée sur le modèle de Basquin et le cumul d'endommagement selon Miner. On écrira donc la vraisemblance :

$$L(A, b, \sigma(N)) = \prod_1^i \left[\prod_1^j \left(\varphi \left(\frac{S_{ij} - \mu(N_{ij})}{\sigma(N_{ij})} \right) \right)^{\delta_i} \times \left(1 - \Phi \left(\frac{S_{ij} - \mu(N_c)}{\sigma(N_c)} \right) \right)^{1-\delta_i} \right] \quad (3.12)$$

où :

- φ et Φ sont respectivement les fonctions de densité et de répartition de la loi normale standard,
- $\mu(N) = \left(\frac{A}{N}\right)^{\frac{1}{b}}$,
- $\sigma(N) = \text{constant}$ ou $\sigma(N) = q\mu(N)$ selon l'hypothèse considérée, respectivement constance de l'écart-type ou du coefficient de variation de la distribution des sollicitations.

On maximise la vraisemblance par l'estimation de \hat{A} , \hat{b} et $\hat{\sigma}$ pour obtenir l'estimation de la moyenne m et l'écart-type s à $N_{ref} = N_c$:

$$m = \left(\frac{\hat{A}}{N_c} \right)^{\frac{1}{\hat{b}}} \quad (3.13)$$

$$s = \hat{\sigma}(N_c) \quad (3.14)$$

3.2.2.2 Application du MLE au Locati

Comme pour la section précédente, on applique l'optimisation par maximum de vraisemblance à partir des résultats d'essai d'un protocole Locati, à la suite duquel nous obtenons les différents niveaux de contraintes avec un nombre de cycles associé, subit par chacune des pièces, comme le montre la figure 3.6.

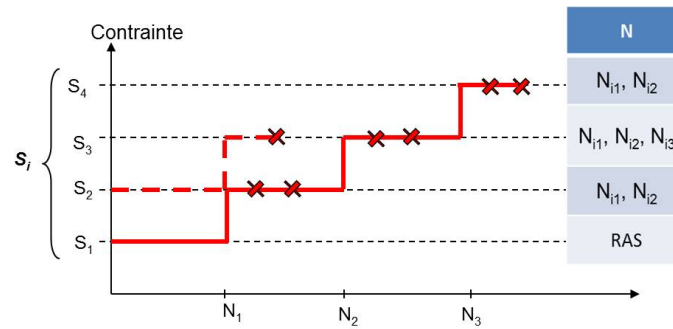


FIGURE 3.6: Résultats d'un protocole Locati

On observe :

- i niveaux de contrainte S_i consécutifs pour chaque pièce j
- N_i cycles à chaque niveau
- N_{ij} cycles au niveau S_{ij} auquel on observe la défaillance

On n'observe pas de censure dans un protocole Locati, ainsi, on écrit la vraisemblance :

$$L(A, b, \sigma(N)) = \prod_1^i \left[\prod_1^j \left(\varphi \left(\frac{S_{ij} - \mu(N_{ij})}{\sigma(N_{ij})} \right) \right) \right] \quad (3.15)$$

où :

- $\mu(N_{ij}) = \left(\frac{A}{N_{eq}} \right)^{\frac{1}{b}}$, avec :

$$N_{eq} = N_{ij} + \left[\sum_{k=1}^{i-1} \left(N_k \cdot \left(\frac{S_k}{S_{ij}} \right)^b \right) \right] \quad (3.16)$$

- $\sigma(N_{ij}) = \text{constant}$ ou $\sigma(N_{ij}) = q\mu(N_{ij})$ selon l'hypothèse considérée (constance de l'écart-type ou du coefficient de variation).

Comme pour le StairCase, on maximise la vraisemblance par l'estimation de \hat{A} , \hat{b} et $\hat{\sigma}$

$$\left(\hat{A}, \hat{b}, \hat{\sigma} \right) = \text{Argmax} \left(\mathcal{L}(A, b, \sigma) \right) \quad (3.17)$$

pour obtenir l'estimation de la moyenne m et l'écart-type s à N_{ref} :

$$m = \left(\frac{\hat{A}}{N_{ref}} \right)^{\frac{1}{b}} \quad (3.18)$$

$$s = \hat{\sigma}(N_{ref}) \quad (3.19)$$

3.2.2.3 Application du MLE au StairCase-Locati

Le MLE appliqué à un protocole Locati est immédiatement transposable aux résultats d'un StairCase-Locati. En fait, on observe les mêmes résultats à la fin de ces deux procédures :

- i niveaux de contrainte S_i consécutifs pour chaque pièce j
- N_i cycles à chaque niveau
- N_{ij} cycles au niveau S_{ij} auquel on observe la défaillance

à la différence que le premier palier des pièces poursuivies en Locati correspond à la censure du StairCase ($N_1 = N_c$) et que les pièces rompues avant la fin de la procédure StairCase n'ont subi qu'un seul palier S_1 pendant N_{1j} cycles. Comme pour le Locati on n'observe pas de censure et la fonction de vraisemblance est la même (cf. équations 3.15 à 3.19)

3.2.3 La méthode SVA

La méthode appelée ici SVA est basée sur une analyse en durée de vie, i.e. construite sur l'axe des nombres de cycles, contrairement aux méthodes PSA (§. 3.2.2) et MLE (§. 3.2.1) qui sont construites sur l'axe des contraintes. Cette méthode utilise l'optimisation par maximum de vraisemblance et les modèles Standards de Vie Accélérée (SVA). On présente ici tout d'abord les généralités sur les modèles SVA, puis l'application aux différents résultats d'essais.

3.2.3.1 Les modèles Standards de Vie Accélérée

Les SVA définis par Bagdonavicius et Nikulin ([Nikulin et al., 2007a], [Bagdonavicius et al., 2000], [Tebbi, 2005], [Voiculescu et al., 2009]) sont des modèles basés sur une fonction de transfert et qui permettent d'obtenir les fonctions de fiabilité à partir de résultats d'essais effectués à des niveaux de contraintes plus élevés que les conditions nominales d'utilisation (cf. figure 3.7). Ce qui permet a priori de réduire la durée de l'essai (d'où son "accélération").

On considère un ensemble de contraintes, pour lequel on dit que plus la contrainte augmente, plus la fiabilité devient faible. L'objectif des essais accélérés [Dodson and Schwab, 2006] est de déterminer l'évolution de la fonction de fiabilité en fonction de l'évolution de la contrainte. On suppose que la durée de vie T_s d'un produit sous le stress S est une variable aléatoire de fonction de fiabilité :

$$R_S(t) = \text{Prob}(T_S > t), t > 0 \quad (3.20)$$

Soit R_{S_0} la fiabilité au niveau d'effort nominal S_0 , et R_S la fiabilité sous un stress constant S , le modèle SVA décrit

$$R_S(t) = R_{S_0}(r(S) \cdot t) \quad (3.21)$$

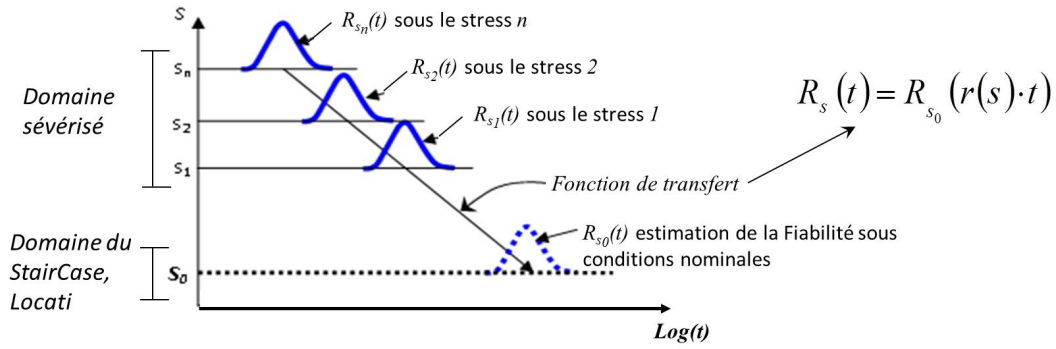


FIGURE 3.7: Principe des modèles SVA

Où r représente la fonction de transfert et $r(S_0) = 1$ (voir figure 3.8). Si la fonction de transfert est complètement inconnue, il devient impossible d'estimer la fiabilité sous conditions nominales. C'est pourquoi r est choisie dans une certaine classe de fonction (e.g. Arrhenius, Eyring [Voiculescu et al., 2009], [Tebbi, 2005]). Pour l'analyse de la durée de vie le modèle log-linéaire est souvent choisi pour définir le modèle de régression.

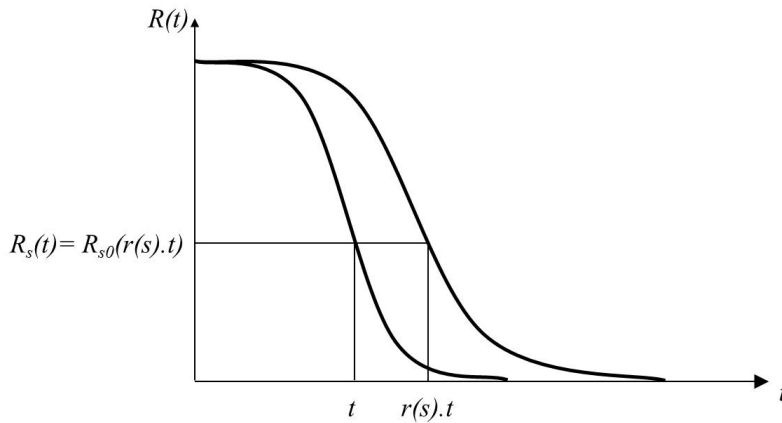


FIGURE 3.8: Définition du modèle de régression

Considérons un plan d'essai classique [Nelson, 1990] consistant à utiliser plusieurs niveaux de contraintes constantes S_1, S_2, \dots, S_k avec $S_1 < S_2 < \dots < S_k$ et $S_0 (S_0 < S_1)$ la contrainte usuelle qui ne sera pas utilisée. On considère r dans une certaine classe de fonctions. Nikulin et Bagdonavicius considèrent une forme exponentielle. Si le modèle (3.21) est vérifié sur l'ensemble des contraintes considérées, alors pour tout S_1, S_2 appartenant à cet ensemble :

$$R_{S_2}(t) = R_{S_1}(\rho(S_1, S_2)t) \tag{3.22}$$

où $\rho(S_1, S_2) = \frac{r(S_2)}{r(S_1)}$.

Supposons une contrainte (stress) unidimensionnelle S appartenant à l'ensemble consi-

déré. Le taux de changement d'échelle est déterminé par la dérivée :

$$\delta(S) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\rho(S, S + \Delta S) - \rho(S, S)}{\Delta S} = \frac{d \log(r(S))}{dS} \quad (3.23)$$

On a donc pour tout S de l'ensemble

$$r(S) = e^{\int_{S_0}^S \delta(\nu) d\nu} \quad (3.24)$$

Supposons que $\delta(S)$ soit proportionnelle à une fonction connue $u(S)$ de la contrainte :

$$\delta(S) = \beta_1 u(S), \quad \beta_1 > 0 \quad (3.25)$$

Alors,

$$r(S) = e^{\beta_0 + \beta_1 z(S)} \quad (3.26)$$

où $z(S)$ est une fonction primitive de $u(S)$, β_0 et β_1 sont des paramètres inconnus.

Dans le cas particulier de $\delta(S) = \frac{\beta_1}{S}$, alors

$$r(S) = e^{\beta_0 + \beta_1 \log(S)} = \alpha S^{\beta_1}, \quad (3.27)$$

avec $\alpha = e^{\beta_0}$. Ce modèle correspond au modèle de puissance inverse de Basquin (cf. Table 2.1), où $A = \alpha$ et $b = \beta_1$. Ainsi, l'équation (3.21) s'écrit

$$R_S(t) = R_{S_0} \left(e^{\beta^T z t} \right) \quad (3.28)$$

Où $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_m)^T$ est le vecteur de paramètres et $z = (z_0, \dots, z_m)$ le vecteur de primitives (avec $z_0 = 1$) de u_1, \dots, u_m , avec $\delta(s) = \beta_1 u_1(s) + \dots + \beta_m u_m(s)$.

On trouve dans la littérature de nombreuses applications des modèles SVA, principalement dans l'électronique [Caruso and Dasgupta, 1998], [Nelson, 1990] mais beaucoup moins en mécanique.

En considérant l'application des modèles SVA au phénomène de fatigue, on définit la fonction de fiabilité $R_{S_0}(n)$ des nombres de cycles à défaillance par

$$R_{S_0}(n) = 1 - \Phi \left(\log \left(\left(\frac{n}{\eta} \right)^\nu \right) \right) \quad (3.29)$$

avec Φ la fonction de répartition de la loi normale standard, ν et η les paramètres de loi.

Alors, pour un stress constant S , la loi de fiabilité définie par la relation (3.28) s'écrit

$$R_{S_0}(n) = 1 - \Phi \left(\log \left(\left(\frac{r(S)n}{\eta} \right)^\nu \right) \right) = 1 - \Phi \left(\log \left(\left(\frac{e^{\beta^T z} \cdot n}{\eta} \right)^\nu \right) \right) \quad (3.30)$$

Soit,

$$R_S(n) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(n) - \gamma^T z}{\sigma}\right) \quad (3.31)$$

où $\gamma^T = (\gamma_0, \dots, \gamma_m)$, $\gamma_0 = \ln(\eta) - \beta_0$, $\gamma_i = -\beta_i$ et $\nu = 1/\sigma$. Nous retrouvons la définition d'une distribution log-normale des nombres de cycles à défaillance.

Dans le cas des essais des fatigue sur les pièces de liaison au sol, l'unique chargement subi par les pièces est une contrainte cyclique et la loi d'accélération associée est basée sur la modélisation de Basquin. On peut donc définir dans (3.31) :

$$\gamma^T z = (\gamma_0 - \gamma_1 \ln(S)) \quad (3.32)$$

où $\gamma_0 = \ln(A)$ et $\gamma_1 = b$.

3.2.3.2 Application des SVA au StairCase

A partir des résultats d'un protocole StairCase (cf. figure 3.5), on applique la méthode SVA. On a i niveaux d'effort S_i ($=F_{d0}, F_{d0} + d, F_{d0} - d, \dots$), auxquels on observe j pièces testées. Une pièce j est défaillante à N_{ij} cycles et on a C_i pièces censurées à $C = 10^6$ cycles. La vraisemblance dans le cas d'une distribution LogNormale des nombres de cycle s'écrit :

$$L(\gamma, \sigma) = \prod_1^i \left[\prod_1^j \left(\frac{1}{N_{ij} \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(N_{ij}) - \gamma^T z^{(ij)}}{\sigma} \right)^2} \right) \times \left(1 - \Phi \left(\frac{\ln(C) - \gamma^T z^{(e)}}{\sigma} \right) \right)^{C_i} \right] \quad (3.33)$$

Par MV les paramètres $\hat{\gamma}$ et $\hat{\sigma}$ sont déterminés, ce qui permet de décrire la fonction de fiabilité en conditions nominales

$$R_{S_0}(N) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(N) - \hat{\gamma}^T z^{(0)}}{\hat{\sigma}}\right) \quad (3.34)$$

3.2.3.3 Application des SVA au Locati

De même que pour le StairCase on écrit la fonction de Vraisemblance à partir des résultats d'un essai Locati, où l'on aura observé i niveaux de contrainte S_i consécutifs pour chaque pièce j avec N_i cycles à chaque niveau et N_{ij} cycles au niveau S_{ij} auquel on observe la défaillance.

A partir du modèle 3.31 on peut écrire dans le cas général d'une fonction de répartition appelée F de paramètres θ :

$$\begin{cases} R_{S_1}(N_{1j}) = 1 - F(N_{1j}|\theta, S_1) \\ R_{S_2}(N_{2j}) = 1 - F(N_{2j} - N_1 + N_1^*|\theta, S_2) \\ \dots \\ R_{S_i}(N_{ij}) = 1 - F(N_{ij} - N_{i-1} + N_{i-1}^*|\theta, S_i) \end{cases} \quad (3.35)$$

Où $N_{i-1}^* = R_{S_i}^{-1}(R_{S_{i-1}}(N_{i-1} - N_{i-2} + N_{i-2}^*))$

On peut donc définir la vraisemblance par :

$$L(\theta) = \prod_1^j \left[\prod_1^i f(N_{ij} - N_{i-1} + N_{i-1}^*|\theta) \right] \quad (3.36)$$

où f est la fonction de densité correspondante à F . Par MV on définit les paramètres $\hat{\theta}$ de

$$R_{S_0}(N) = 1 - F(N|\hat{\theta}) \quad (3.37)$$

Les cas d'application à des lois LogNormale et Weibull sont présentés en Annexes [A](#)

3.2.3.4 Application des SVA au StairCase-Locati

Les résultats d'un StairCase-Locati sont identiques à ceux d'un Locati simple, à la différence que la durée premier palier pour chaque pièce diffère, et que les pièces défaillantes dans le StairCase ne subissent qu'un seul palier. On a donc une fonction de vraisemblance identique à celle du Locati (voir équation 3.36) qui permet d'obtenir la fonction de fiabilité en conditions nominales S_0 par sa maximisation.

3.3 Conclusion

L'estimation de la fiabilité des pièces de LAS est basée sur une méthodologie de qualification comprenant un protocole d'essai à partir duquel les résultats sont analysés selon une méthode d'estimation.

Les différents protocoles présentés dans cette partie (section 3.1) tiennent compte d'un paramétrage particulier selon lequel tous les essais sont initialisés.

Les méthodes d'estimation de la fiabilité actuellement utilisées chez PSA (cf. section 3.2.1) sont, elles, basées sur des hypothèses physiques et statistiques :

1. une distribution de la limite d'endurance suivant une loi normale,
2. un coefficient de variation de la distribution des contraintes constant,
3. une pente de Basquin dont la valeur est fixée à 8,
4. une variance sur l'estimation de la moyenne nulle : le calcul de probabilité de défaillance ne prenant donc pas en compte l'erreur d'estimation de la moyenne.

Les méthodes d'estimation MLE et SVA, développées en sections 3.2.2 et 3.2.3, sont également basées sur certaines hypothèses, mais laissent également plus de liberté sur ces dernières :

1. la distribution de la limite d'endurance suit une loi donnée, mais pas forcément normale,
2. le choix d'un coefficient de variation ou d'un écart-type de la distribution des contraintes constant peut être envisagé,
3. l'hypothèse sur la valeur de la pente de Basquin est relâchée, puisque estimée.

La suite de ce mémoire a pour but de comparer la qualité d'estimation de ces différentes méthodologies de qualification au regard des différentes hypothèses, avérées ou non. Pour cela, un plan d'expérience numérique est mis en place. Il est décrit dans la partie suivante et permet d'étudier la convergence des estimations, ainsi que la robustesse face aux hypothèses de paramétrage des protocoles, ainsi qu'aux hypothèses physiques et statistiques liées à chaque méthode d'estimation.

Comparaison des méthodologies globales de qualification en fatigue

Comme cité dans la section précédente, chaque méthodologie globale de qualification fait appel à des hypothèses, physiques, statistiques et méthodologiques. L'objectif de cette partie est maintenant de pouvoir comparer la qualité de l'estimation effectuée à partir d'un protocole d'essai (i.e. StairCase, Locati, StairCase-Locati) pour lequel on applique une méthode d'estimation (i.e. PSA, MLE, SVA). Pour cela, des résultats de protocole d'essai sont simulés numériquement selon diverses hypothèses et des méthodes d'estimation sont appliquées à ces résultats. A partir de ce plan d'expérience numérique on pourra ainsi estimer la convergence des estimations (diminution de l'erreur commise sur l'estimation lorsque la taille d'échantillon augmente) ainsi que leur robustesse face aux diverses hypothèses (e.g. une valeur hypothétique a peu d'impact sur l'estimation même lorsqu'elle est erronée) et ainsi libérer ou non certaines hypothèses, et enfin conclure sur l'efficacité de chaque méthodologie globale de qualification.

4.1 Plan d'EXpérience numérique

4.1.1 Plan de simulation numérique

Les différentes méthodes d'estimation de la fiabilité (PSA, MLE, SVA) développées précédemment (§.3.2) sont applicables à chacun des différents protocoles d'essai (StairCase, Locati, StairCase-Locati) également présentés précédemment (§.3.1), donnant ainsi lieu à une méthodologie globale de qualification en fatigue. Pour pouvoir estimer et comparer la performance des différentes méthodologies (i.e. protocole d'essai + méthode d'es-

timation) il est nécessaire d'en comparer les résultats de manière homogène. De plus, il est essentiel de prendre en compte les différents paramètres appelés par chaque protocole et chaque méthode (paramètres physiques et paramètres intrinsèques aux méthodes).

L'approche par simulation numérique permet à la fois d'observer la qualité de l'estimation et la robustesse des méthodologies vis à vis des erreurs sur les hypothèses, ainsi que le temps moyen nécessaire à chaque protocole. On développe ici un générateur d'essai permettant de simuler des résultats d'essai à partir de différentes hypothèses sur la loi de distribution de la limite de fatigue. Dans le domaine de fatigue on choisit de caractériser la loi de distribution de la limite de fatigue respectivement par des lois Normale, Log-Normale ou de Weibull. A partir d'une hypothèse, e.g. connaissance a priori des moments (μ, σ) , on génère des échantillons selon l'un des protocoles et l'on estime la fiabilité à partir d'une des méthodes d'estimation (cf. figure 4.1). A partir de la même hypothèse de départ on simulera aléatoirement 1000 fois la même méthodologie globale pour obtenir une distribution représentative des résultats de l'estimation. Pour information, les développements numériques ont été réalisés dans l'environnement de programmation Scilab [Scilab,].

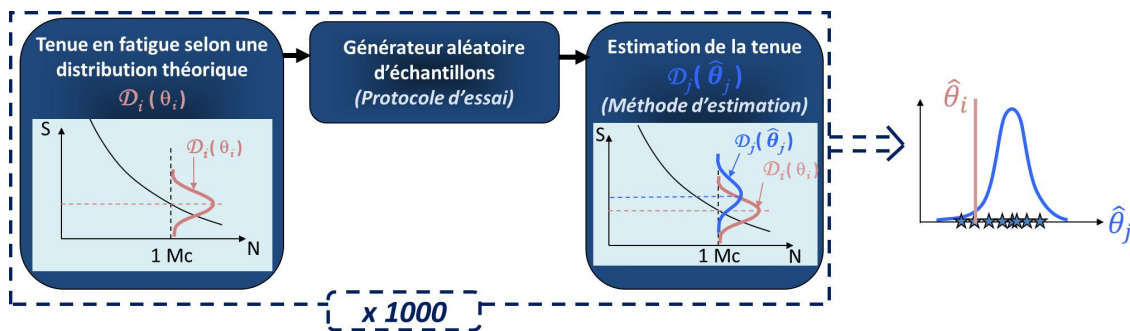


FIGURE 4.1: Principe des simulations du plan d'expérience

4.1.2 Hypothèses pour la simulation numérique

Comme cité précédemment, pour pouvoir comparer les méthodologies globales d'essai on doit observer la qualité d'estimation dans toutes les situations d'essai imaginables. On se doit donc d'observer la qualité de l'estimation à la fois dans des conditions dites "idéales" (e.g. pente de Basquin connue, loi de distribution connue...), dans lesquelles l'estimation est supposée convergente et sans biais, ainsi que dans des conditions d'essai dites "dégradées", c'est à dire différentes des hypothèses considérées dans la réalité (e.g. hypothèse erronée de la pente de Basquin, mauvaise loi de distribution...). Dans la suite, on décrit les différents paramètres qui varient dans le plan de simulation (cf. figure 4.2), ce qui fait l'objet du plan d'expérience.

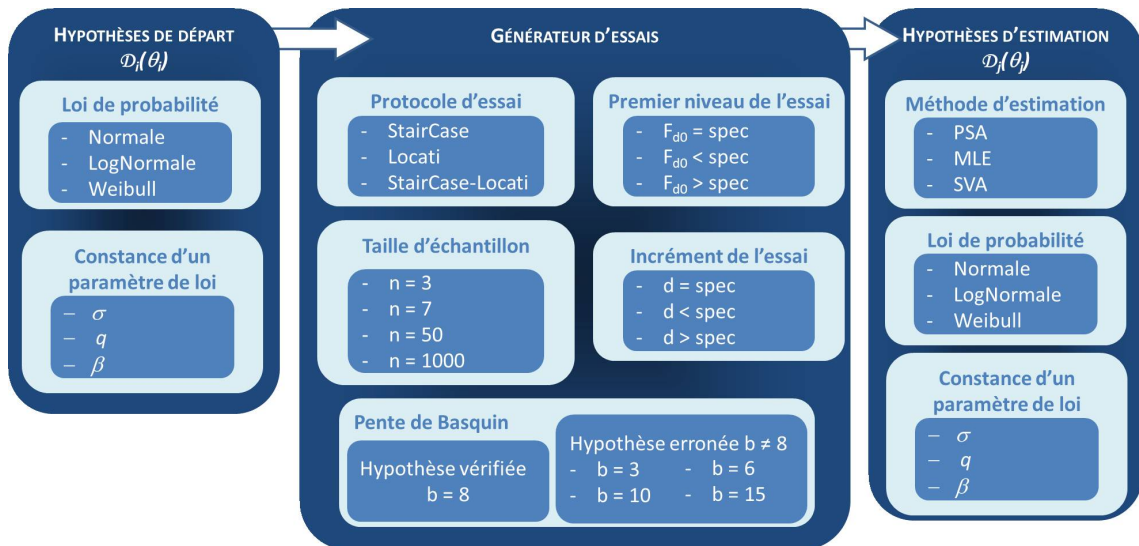


FIGURE 4.2: Paramètres de génération des essais et d'estimation de la fiabilité

4.1.2.1 La taille d'échantillon

Généralement les faibles tailles d'échantillon sont défavorables à une bonne estimation des paramètres de loi. En effet, pour de faibles tailles d'échantillon, les données se retrouvent centrées dans la distribution et on retrouve très peu de données au niveau des queues de distribution (valeurs extrêmes) ce qui empêche une bonne estimation des paramètres de dispersion. Dans la littérature on suggère souvent des tailles d'échantillon supérieures à 30. Ici on utilisera les tailles d'échantillons suivantes :

- $n = 3$, pour représenter les essais Locati effectués lors des premières phases de conception, usuellement sur des pièces prototypes rares et coûteuse,
- $n = 7$, pour les essais standards réalisés en fin de conception en StairCase et StairCase-Locati, sur des pièces issues de pré-série,
- $n = 50$, qui représente le nombre d'essais physiquement réalistes considéré accessible à terme pour des contrôles de production en série, et à partir duquel l'erreur d'estimation est supposée négligeable,
- $n = 1000$, pour observer la convergence des méthodes, considéré comme une taille d'échantillon virtuellement infinie.

4.1.2.2 Les paramètres de la méthode

Les deux paramètres intrinsèques aux différents protocoles sont les mêmes pour chacun d'entre eux (StairCase, Locati et StairCase-Locati). Il s'agit du premier niveau d'effort appliqué à la première pièce (F_{d0}) et de l'incrément d , soit entre deux pièces pour le StairCase, soit entre deux paliers pour le Locati.

Conditions « idéales » d'essai

Premièrement les simulations sont effectuées dans des conditions dites « idéales » d'essais pour vérifier la convergence de chaque méthode. Ce qui signifie :

1. Pour le *StairCase*, un incrément d'effort d égal à l'écart-type théorique σ_S , et un premier niveau d'effort F_{d0} égal à la moyenne théorique μ_S .
2. Pour le *Locati*, un incrément d'effort d égal à l'écart-type théorique σ_S , un premier niveau d'effort F_{d0} égal à deux incréments sous la moyenne théorique $F_{d0} = \mu_S - 2\sigma_S$.
3. Pour le *StairCase-Locati*, les mêmes paramètres que pour le *StairCase*, soit, un incrément d'effort d égal à l'écart-type théorique σ_S (pour la partie *StairCase*, comme pour la partie *Locati*), et un premier niveau d'effort F_{d0} égal à la moyenne théorique μ_S .

Conditions « dégradées » d'essai

Ces mêmes simulations sont effectuées ensuite dans des conditions dites « dégradées », c'est-à-dire :

1. Pour un incrément d fixé idéal, le premier niveau d'effort F_{d0}^* est imposé, soit inférieur, soit supérieur au niveau F_{d0} idéal, $F_{d0}^* = [F_{d0} - 3d; F_{d0} + 3d]$;
2. Pour un niveau d'effort F_{d0} fixé idéal, l'incrément d'effort d^* est différent de l'écart-type théorique d , $d^* = [0, 5d; 2d]$;
3. Les deux paramètres sont imposés conjointement en conditions dégradées.

Ceci est effectué dans le but d'observer la robustesse des résultats de l'estimation.

4.1.2.3 La pente de Basquin

La valeur historique de la pente de Basquin $b = 8$, est une hypothèse forte dans le calcul de tenue équivalente des méthodes d'estimation du *Locati* et *StairCase-Locati* chez PSA. Elle est également utilisée dans la simulation des données du *StairCase*, mais l'estimation de D&M, étant une estimation purement statistique, ne fait pas intervenir cette hypothèse. A noter qu'elle est également présente dans la définition de la contrainte (§.2.3.2.2, figure 2.21). Ici on va chercher à observer l'erreur sur l'estimation de la fiabilité si l'on effectue une hypothèse erronée de la valeur de cette pente (on ne cherchera pas à définir la robustesse de l'estimation par D&M à partir d'un *StairCase*).

1. Pour l'estimation par les méthodes PSA, les tirages aléatoires seront effectués à partir de différentes valeurs de la pente : $b = [3; 15]$, mais l'estimation sera effectuée sous l'hypothèse faite actuellement chez PSA de $b = 8$. On note ici que pour le *StairCase*, la méthode d'estimation associée (D&M) n'inclut aucune hypothèse sur la valeur de la pente de Basquin.

2. Pour les méthodes MLE et SVA, on effectue également les tirages aléatoires selon les différentes valeurs de b , mais ces méthodes permettent de relâcher l'hypothèse, en faisant apparaître b comme paramètre à estimer.

4.1.2.4 Les lois de distribution (loi de tirage et loi d'estimation)

L'hypothèse de loi de distribution de la limite d'endurance faite chez PSA est que pour tout N du domaine d'endurance limité, la distribution des contraintes suit une loi Normale de moyenne μ_S et d'écart-type $\sigma_S = q \cdot \mu_S$, avec q constant. Nous cherchons ici à observer si l'application d'autres lois de tirage des échantillons a un impact sur l'estimation. Nous considérons trois lois pour la limite d'endurance : Normale, LogNormale, et Weibull (à deux paramètres). Afin d'être homogène avec les observations faites chez PSA et dans le but de normaliser les résultats, nous utilisons comme hypothèse de départ les paramètres de la limite d'endurance à 10^6 cycles selon la loi normale telle que $\mu_S = 100$ et $q = 8\%$, soit $\sigma_S(10^6) = 8$, afin de rester homogène avec les hypothèses PSA et permettre de représenter l'erreur d'estimation simplement. Par la méthode des moindres carrés nous estimons les paramètres respectifs pour des tirages de distribution Weibull et LogNormale par référence à la distribution Normale. On retrouve les valeurs pour la simulation dans le tableau 4.1, ainsi qu'une comparaison normalisée des fonctions de répartition et densité en figure 2.4.

TABLE 4.1: Paramètres des lois de tirage pour la simulation

Loi Normale	Loi LogNormale	Loi de Weibull
moyenne : $\mu_S = 100$ écart-type : $\sigma_S = 8$	moyenne : $\mu_S = 4,603$ écart-type : $\sigma_S = 0,078$	paramètre d'échelle : $\eta_S = 102,95$ paramètre de forme : $\beta_S = 14,34$

On connaît donc les valeurs des paramètres théoriques à comparer selon la loi utilisée dans la méthode d'estimation.

Équivalent des distributions en nombre de cycles

La problématique des lois de distribution est également abordée lorsqu'on utilise l'estimation par les modèles SVA. En effet, lorsque l'on applique la méthode SVA à n'importe quel protocole, on travaille sur l'axe des nombres de cycles : ainsi, la distribution théorique ne sera donc pas la distribution de la limite d'endurance à 10^6 cycles, mais bien la distribution des nombres de cycles à rupture à un niveau de contrainte S_0 que l'on considère comme la moyenne théorique $\mu_S = S_0 = 100$. On présente ici deux exemples d'équivalence pour le changement de repère, un exemple par résolution analytique basé sur une loi de Weibull, un autre, celui qui nous intéresse, sur un support de loi Normale, résolu numériquement.

On considère par exemple la limite d'endurance suivant une loi de Weibull et l'on cherche la loi de distribution des nombres de cycles N_{eq} équivalente.

Soit, $S(N_i) \sim W(\eta_S, \beta_S)$, quel que soit N_i du domaine de fatigue polycyclique. On considère le modèle de Basquin, soit

$$N_i S_i^b = A = N_j S_j^b \quad (4.1)$$

D'où

$$N_{eq} = N_i \left(\frac{S_i}{S_{eq}} \right)^b \quad (4.2)$$

A N_i fixé, $\forall S_0$, on a :

$$Prob(S_i \geq S_0) = e^{-\left(\frac{S_0}{\eta_S}\right)^{\beta_S}} \quad (4.3)$$

Sous l'hypothèse de paramètre de forme de la loi de Weibull constant, on peut écrire à S_{eq} donné :

$$\begin{aligned} Prob(N_{eq} \geq N_0) &= Prob\left(N_i \left(\frac{S_i}{S_{eq}}\right)^b \geq N_0\right) \\ &= Prob\left(S_i \geq S_{eq} \left(\frac{N_0}{N_i}\right)^{\frac{1}{b}}\right) \\ &= e^{-\left(\frac{S_{eq} \left(\frac{N_0}{N_i}\right)^{\frac{1}{b}}}{\eta_S}\right)^{\beta_S}} \\ &= e^{-\left(\frac{N_0}{N_i \left(\frac{\eta_S}{S_{eq}}\right)^b}\right)^{\frac{\beta_S}{b}}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

On peut donc conclure facilement sur la distribution des nombres de cycles à défaillance à un niveau S_{eq} qui suit une loi de Weibull :

$$N_{eq} \sim W\left(N_i \left(\frac{\eta_S}{S_{eq}}\right)^b ; \frac{\beta_S}{b}\right) \quad (4.5)$$

Par ailleurs, sous l'hypothèse de normalité de la limite d'endurance, de la même manière, il n'est pas aussi facile de déterminer la distribution des nombres de cycles.

Soit, $S(N_i) \sim N(\mu_S, \sigma_S)$, quel que soit N_i du domaine de fatigue polycyclique, avec $q = \sigma_S/\mu_S = \text{constante}$. De la même manière que pour la loi de Weibull, on en déduit :

$$Prob(N_{eq} \geq N_0) = 1 - \Phi\left(\frac{S_{eq} \left(\frac{N_0}{N_i}\right)^{\frac{1}{b}} - \mu_S}{q\mu_S}\right) \quad (4.6)$$

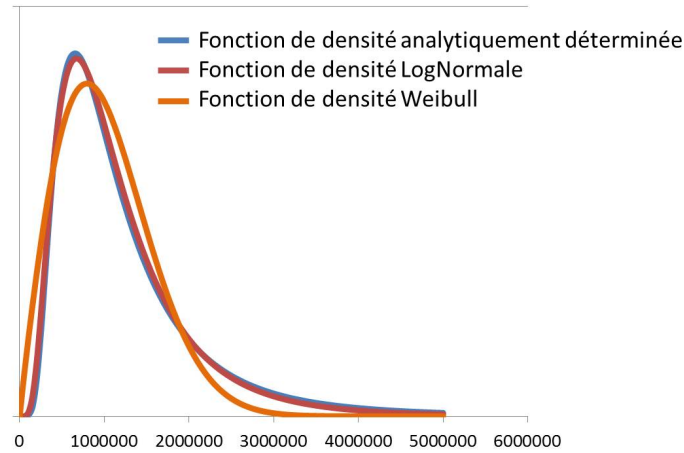


FIGURE 4.3: Identification de la loi de distribution en nombres de cycles

En résolvant numériquement, par identification au sens des moindres carrés, on montre que la distribution des nombres de cycles est le plus approchée par une loi log-normale de moyenne μ_N et d'écart-type constant σ_N (cf. figure 4.3).

Les valeurs des paramètres de la distribution des nombres de cycles sont données dans le tableau 4.2.

TABLE 4.2: Paramètres des lois des nombres de cycles

Loi Normale	Loi LogNormale	Loi de Weibull
Non pertinent	moyenne : $\mu_N = 13,81$ écart-type : $\sigma_N = 0,625$	paramètre d'échelle : $\eta_N = 1,27 \cdot 10^6$ paramètre de forme : $\beta_N = 1,8275$

4.1.3 Simulation des protocoles d'essai

Les différents protocoles sont simulés numériquement à partir des différentes hypothèses citées dans le paragraphe précédent [Beaumont et al., 2011b]. Particulière attention est apportée à l'algorithme de génération aléatoire, au sein de chaque protocole, puis entre plusieurs (1000) réalisations du même protocole.

4.1.3.1 Simulation numérique du StairCase

On génère des échantillons, représentant des résultats d'essais à partir de différentes hypothèses ; ici on prendra l'exemple de la simulation :

1. à partir des données dites « idéales » (F_{d0} et d) (cf.§.4.1.2.2),
2. avec une pente de basquin $b = 8$,
3. une hypothèse de normalité de la limite d'endurance, de moyenne $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 8$,

4. et une taille d'échantillon n .

On tire aléatoirement n valeurs de limite d'endurance μ_i , pour chacune des n pièces, auxquelles on applique le protocole du StairCase (cf. 3.1.1). Ces μ_i valeurs correspondent chacune à une probabilité de défaillance p_i selon la loi a priori $N(\mu, \sigma)$. La première pièce subit un premier effort $F_i = F_{d0}$, correspondant à une probabilité de défaillance p_0 selon la loi normale a priori. Cette valeur de probabilité est comparée à la probabilité de la limite d'endurance tirée aléatoirement p_i , le diagnostic étant le suivant :

1. si p_i est supérieure à p_0 , on n'a pas de rupture à 10^6 cycles pour cette pièce. La pièce suivante est testée à $F_i = F_{d0} + d$,
2. si p_i est inférieure à p_0 , on observe une rupture avant 10^6 cycles pour cette pièce. Le nombre de cycles à rupture est donc déterminé et la pièce suivante est testée à $F_i = F_{d0} - d$.

Le même algorithme est poursuivi jusqu'à la pièce n . La simulation numérique est conçue pour analyser 1000 itérations de la procédure, aboutissant à 1000 résultats pour chaque combinaison des hypothèses de départ, dans le but d'appliquer les méthodes d'estimation et donc d'obtenir 1000 estimations de chacun des paramètres.

4.1.3.2 Simulation numérique du Locati

La simulation numérique du Locati est basée sur la génération d'une limite d'endurance à 10^6 cycles, générée aléatoirement à partir des différentes hypothèses : on prendra ici le même exemple que pour la simulation du StairCase au paragraphe ci-dessus. On génère n valeurs de limite d'endurance μ_i , pour chacune des n pièces, auxquelles on applique la procédure du Locati (cf.§.3.1.2), ces μ_i valeurs correspondant chacune à une probabilité de défaillance p_i tirée aléatoirement selon la loi a priori $N(\mu, \sigma)$. Un premier palier S_i de L_i cycles étant effectué au début de l'essai, on cherche à observer si la probabilité p_0 d'obtenir une rupture à L_i cycles est supérieure ou inférieure à p_i , avec :

$$p_0 = \Phi \left(\frac{S_i - \mu_{L_i}}{\sigma_{L_i}} \right) \quad (4.7)$$

Sachant que l'on considère la modélisation de Basquin ainsi qu'une hypothèse de coefficient de variation q constant de la distribution des contraintes en fonction du nombre de cycles, on a :

$$\mu_{L_i} = \mu_i \left(\frac{10^6}{L_i} \right)^{\frac{1}{b}} \quad (4.8)$$

$$\sigma_{L_i} = q \mu_{L_i} \quad (4.9)$$

Le diagnostic est le suivant :

1. si p_i est inférieure à p_0 , on observe une rupture avant L_i cycles pour cette pièce.

Le nombre de cycles à rupture est déterminé à partir de la règle de Miner du cumul d'endommagement et de la courbe de Wöhler décrite par Basquin ;

2. si p_i est supérieure à p_0 , on n'a pas de rupture à L_i cycles pour cette pièce. On calcule donc le dommage équivalent :

$$d_i = \frac{L_i}{N_i}, \quad \text{avec } N_i = AS_i^b \quad (4.10)$$

qui doit être inférieur à 1, compte-tenu de la non-défaillance. En augmentant le niveau d'effort d'un incrément durant L_i cycles à nouveau, on augmente le dommage :

$$d_{i+1} = d_i + \frac{L_{i+1}}{N_{i+1}} \quad (4.11)$$

Lorsque le dommage dépasse 1, on connaît le niveau S_i de la défaillance et le nombre de cycles est calculé par conséquent par :

$$N_{rupt} = \left[1 - \sum_{j=1}^{S_i-1} \left(\frac{L_j}{AS_j^{-b}} \right) \right] \times AS_i^{-b} \quad (4.12)$$

La pièce suivante suit le même principe avec un premier palier à $S_i = F_m - 2d$, et ceci jusqu'à la pièce n . Le même principe d'itérations que la simulation du StairCase est appliqué, dans le but d'obtenir 1000 estimations de chaque paramètre.

4.1.3.3 Simulation numérique du StairCase-Locati

Pour le StairCase-Locati on utilise exactement le même procédé de simulation que pour les deux protocoles StairCase et Locati, à la différence que la simulation du Locati à la suite du StairCase prend en compte un premier palier de 10^6 cycles au lieu de L_i cycles, dont les niveaux sont ceux du StairCase.

4.2 Critère de comparaison des méthodes

Afin de comparer les trois méthodes d'estimation de la fiabilité, un critère unique, commun à toutes les méthodes doit être mis en place. Ce critère est a priori basé sur le calcul de la probabilité de défaillance, critère fondateur de la méthode de qualification chez PSA. En effet, même si le critère actuel est le positionnement de la moyenne de la limite d'endurance par rapport à la contrainte (cf. partie 2.3.2.2, figures 2.22 et 2.24), ce positionnement relatif permet de garantir une probabilité de défaillance inférieure à 10^{-6} . Ce nouveau critère permettra de prendre en compte l'éventuelle compensation entre les erreurs faites sur la moyenne et sur l'écart-type, et de plus, la probabilité de défaillance

est une valeur calculable quelle que soit la distribution, et quel que soit le repère des estimations (contraintes ou nombres de cycles). En effet, dans les deux premières méthodes d'estimation (PSA et MLE) on estime les paramètres de la limite d'endurance, c'est à dire, la distribution des contraintes à un nombre de cycles fixé. En revanche dans la méthode SVA, il s'agit de déterminer les estimateurs de la distribution des nombres de cycles à rupture à une valeur de contrainte donnée. Le calcul de probabilité de défaillance permet donc de prendre en compte les deux types d'estimation.

Comparaison des probabilités de défaillance

Les estimations par les méthodes PSA et MLE permettent de calculer facilement les probabilités de défaillance tel que décrit par l'approche probabiliste au paragraphe 2.3.2. On dispose de la distribution de la contrainte, soit la représentation client. On la fixe de sorte que la probabilité de défaillance Pf_S , dans le cas où la résistance suit une loi normale de moyenne $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 8$ (hypothèse de départ des simulations), soit égale à 10^{-6} avec comme contrainte un coefficient de variation de la distribution des contrainte égal à 0,15. On obtient donc les valeurs des paramètres de la distribution des contraintes tels que :

$$\mu_C = 48,57 \quad (4.13)$$

$$\sigma_C = 0,15\mu_C = 7,3 \quad (4.14)$$

Le calcul de probabilité de défaillance est moins intuitif lorsqu'on a à disposition la distribution des clients en contrainte et les estimations par les modèles SVA en nombres de cycles comme décrit sur le schéma 4.4.

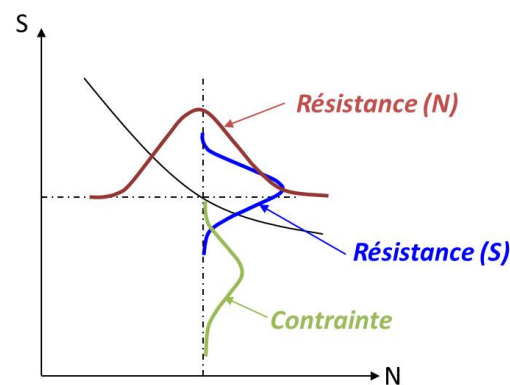


FIGURE 4.4: Représentation des distributions selon l'axe d'étude

Le calcul de la probabilité de défaillance (Pf_N), à partir de la distribution en nombre de cycles ($F_R(N|\theta, C)$) s'établit numériquement, en tenant compte de la variabilité des

sollicitations définies par la distribution $f_C(c)$, telle que :

$$Pf_N = \int_{D_C} F_R(N|\theta, C) f_C(c) dc \quad (4.15)$$

Avec :

- $F_R(N|\theta, C) = F_R(10^6|\mu_R(C), \sigma_R)$ la fonction de répartition des résistances selon une loi LogNormale dont la moyenne est issue de l'équation de Basquin $\mu_R(C) = \mu_{estimee} + b_{estimee} \cdot (\ln(S_0) - \ln(C))$,
- $f_C \in [-\infty; +\infty]$ la fonction de densité des contraintes de moyenne μ_C et d'écart-type σ_C ,
- $C \in [S_\infty; S_y]$.

Or, il s'avère qu'en appliquant le calcul de probabilité de défaillance en nombre de cycles (Pf_N), une fois réalisé le changement de variable montré en section 4.1.2.4, on apprécie une valeur différente de celle déterminée en contrainte (Pf_S). Cela peut être justifié par le fait que l'équivalence des distributions en nombre de cycles (d'une loi normale en contrainte à une loi log-normale en durée de vie) est basée sur une approximation de premier ordre qui affecte notamment les queues de distributions et ainsi le calcul de probabilité de défaillance. En effet, on constatera dans la suite que les estimations en durée de vie (Pf_N) sont plus optimistes (probabilités plus faibles) qu'en contrainte, $2 \cdot 10^{-7}$ au lieu de 10^{-6} .

4.3 Résultats du PEX numérique

Dans le but d'observer la qualité d'estimation et la robustesse des méthodes, les différents protocoles d'essai et méthodes d'estimation sont appliqués et leurs résultats sont comparés. On commence tout d'abord par observer la convergence des estimations dans chacun des cas « idéaux », puis les différents paramètres des méthodologies sont dégradés pour en observer la robustesse.

A noter que la quantité de données simulées est très importante ; en terme de temps CPU, la génération d'un échantillon selon un protocole d'essai est très rapide (de l'ordre de la seconde), en revanche, l'obtention des estimations prennent plus de temps, i.e. pour 1000 échantillons l'estimation par SVA prend 5 à 6 heures pour les faibles tailles d'échantillons et jusqu'à 15 heures pour les grandes tailles d'échantillon. De plus, la totalité des données simulées (i.e. échantillons et résultats des estimations) représente également un quantité très importante, soit environ 35 Go.

Les résultats sont présentés dans cette partie par des figures représentant des « boîtes-à-moustaches ». Elles permettent d'illustrer pour chaque configuration la distribution des 1000 valeurs des paramètres estimés sous forme simplifiée (cf. figure 4.5) avec :

- le trait **vert** représentant la médiane des 1000 estimations,

- la droite **noire** représente la moyenne des 1000 estimations,
- la boîte **bleue** s'étendant du quartile 0,25 au quartile 0,75,
- les moustaches **bleues** s'étendant par défaut jusqu'à la valeur distante d'au maximum 1,5 fois la distance inter-quartile, les **étoiles** représentant les valeurs extrêmes,
- le trait **rouge** représentant la valeur théorique à observer.

Chaque boîte-à-moustache représente la distribution des 1000 paramètres estimés ; pour certaines configurations, certaines boîtes à moustaches seront détaillées (cf. figure 4.5). La distribution des 1000 estimations est représentée par un histogramme (en **noir**), la moyenne des estimations par une droite **bleue** et l'estimateur théorique par une droite **rouge**.

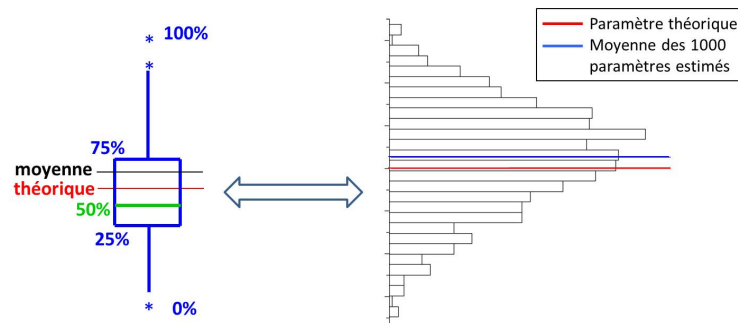


FIGURE 4.5: Représentation des résultats des estimations

4.3.1 Effet de la taille d'échantillon en conditions « idéales »

On se positionne pour cette étude dans les conditions idéales, c'est à dire dans lesquelles toutes les hypothèses effectuées s'avèrent justes. On est dans le cas suivant :

1. une limite d'endurance suivant une loi normale de moyenne $\mu_S = 100$ et d'écart-type $\sigma_S = q\mu_S = 8$ avec $q = 8\%$ constant,
2. la pente de basquin est égale à 8,
3. les conditions d'essai sont idéales.

On cherche ici à observer la convergence des méthodes, c'est à dire si l'on observe bien une amélioration de la qualité des estimations lorsque le nombre de spécimens d'un échantillon augmente.

4.3.1.1 Sur l'estimation de la moyenne

On présente ici la qualité d'estimation de la moyenne à partir de différents protocoles et différentes méthodes d'estimation (figure 4.6). La figure 4.6(a) représente les estimations de moyenne à partir d'un essai StairCase, la figure 4.6(b) à partir d'un Locati et la figure 4.6(c) à partir d'un StairCase-Locati. Pour chaque protocole on présente la qualité d'estimation de la moyenne en fonction de la méthode d'estimation. Pour chaque sous-figure on a :

- en haut, l'estimation de la moyenne de la limite d'endurance (loi normale) à partir de la méthode PSA,
- au milieu, la même moyenne à partir de la méthode d'estimation MLE,
- en bas, la moyenne des log nombres de cycles à rupture par la méthode SVA.

Les différentes simulations confirment les conclusions de la littérature [Little, 1972], [Pollak et al., 2006], [Bastenaire and Regner, 1983], [Lin et al., 2001]. On note que toutes les méthodes appliquées aux différents protocoles d'essai dans les conditions idéales vérifient la convergence sur l'estimation de la moyenne. On observe bien que l'estimateur de la moyenne est d'autant meilleur que la taille d'échantillon devient importante. On notera également que les estimateurs déterminés à partir des protocoles Locati et StairCase-Locati sont meilleurs que les estimations à partir d'un StairCase, et que les performances du protocole StairCase-Locati sont plutôt dues à celles du Locati qu'à celles du StairCase [Beaumont et al., 2012a].

StairCase Figure 4.6(a)

Les estimations sont plus dispersées que pour les autres protocoles, notamment pour de faibles tailles d'échantillon, ce qui nous intéresse particulièrement dans cette étude. L'estimation par MLE (figure du milieu) donne lieu à des valeurs extrêmes isolées, mais très éloignées de la valeur théorique du paramètre, tendance qu'on retrouve également pour la méthode SVA (figure du bas) [Beaumont et al., 2012b], [Beaumont et al., 2011a], [Beaumont et al., 2012c]. En revanche pour la méthode PSA (figure du haut), i.e. D&M, on observe une médiane non centrée sur la valeur théorique. De plus, on observe (cf. figure 4.7) que les estimations se situent dans des classes de valeurs, du fait de la constante $\pm 1/2$ de l'expression de la moyenne par D&M (eq.3.2), et qu'on ne retrouve jamais la valeur théorique, même si l'on a une bonne estimation moyenne sur l'ensemble des tirages.

Locati Figure 4.6(b)

On observe une bonne estimation de la moyenne quelle que soit la méthode d'estimation utilisée, avec tout de même beaucoup plus de valeurs extrêmes pour les estimations par la méthode SVA. On peut faire l'hypothèse que ces résultats beaucoup plus dispersés sont liés au fait que l'on estime pour cette méthode trois paramètres au lieu de deux pour la méthode PSA, le paramètre supplémentaire étant la pente de Basquin, et que la dispersion théorique des nombres de cycles est plus importante que la dispersion de la limite d'endurance.

StairCase-Locati Figure 4.6(c)

Les résultats des estimations de moyenne à partir d'un protocole StairCase-Locati sont semblables à ceux issus d'un Locati seul, tant en termes de convergence que de dispersion

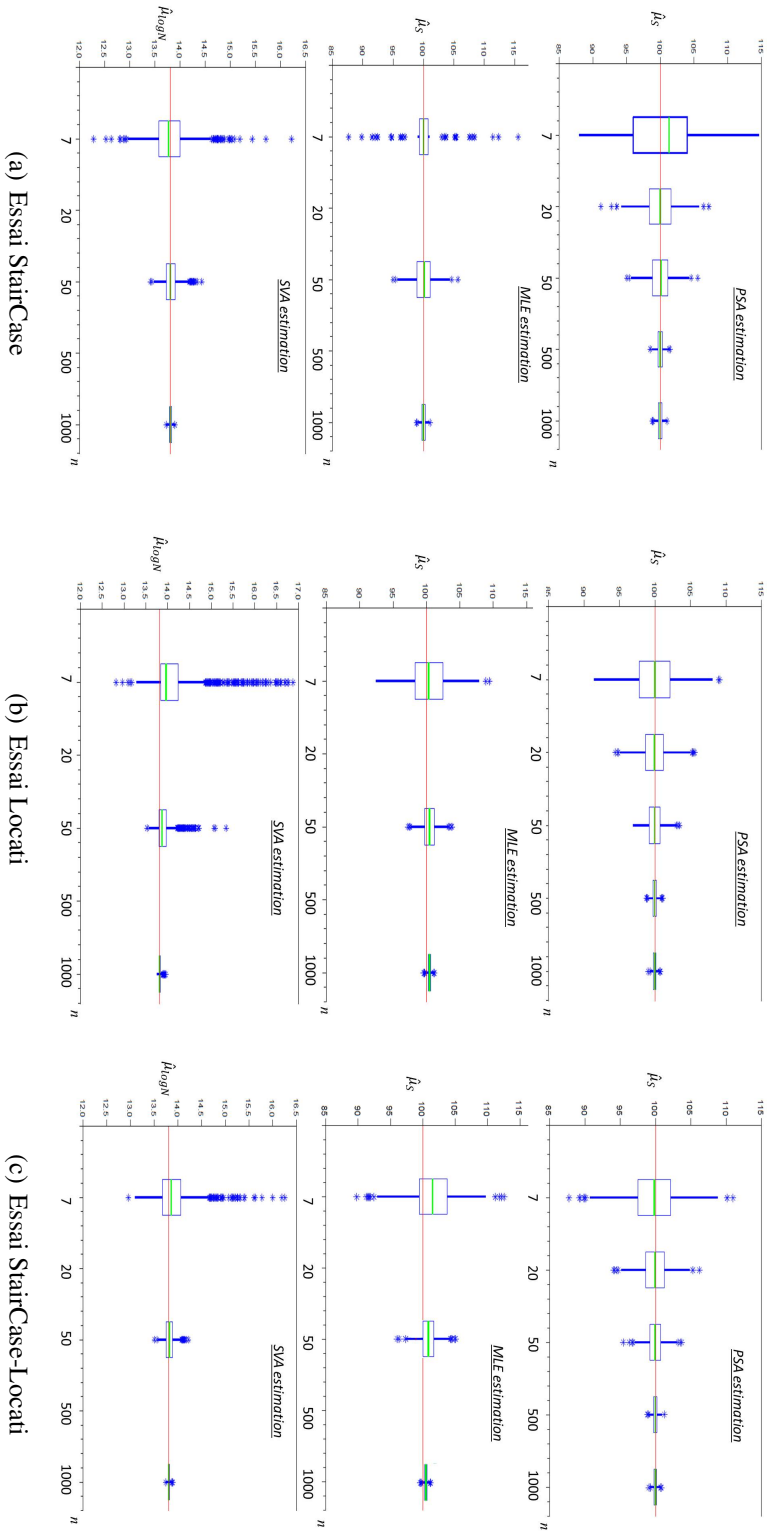


FIGURE 4.6: Effet de la taille d'échantillon sur les estimations de moyenne

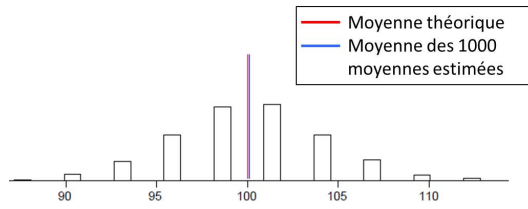


FIGURE 4.7: Distribution des estimations de la moyenne de 1000 StairCase à 7 pièces

des résultats. Ainsi, les désavantages notés pour le StairCase apparaissent mitigés par les performances du Locati.

4.3.1.2 Sur l'estimation de l'écart-type

En figure 4.8 est représentée la qualité d'estimation de l'écart-type à partir de différents protocoles et différentes méthodes d'estimation. Tout comme pour l'estimation de la moyenne, la figure 4.8(a) représente les estimations de moyenne à partir d'un essai Stair-Case, la figure 4.8(b) à partir d'un Locati et la figure 4.8(c) à partir d'un StairCase-Locati. De même, pour chaque protocole on présente la qualité d'estimation de l'écart-type en fonction de la méthode d'estimation. Pour chaque sous-figure on :

- en haut, l'estimation de l'écart-type de la limite d'endurance (loi normale) à partir de la méthode PSA,
- au milieu, le même écart-type à partir de la méthode d'estimation MLE,
- en bas, l'écart-type des log nombres de cycles à rupture par la méthode SVA.

De même que pour l'estimation de la moyenne, on observe ici une convergence sur les estimations de l'écart-type. Comme pour la moyenne, lorsqu'on se situe dans des conditions idéales d'essais les estimations sont meilleures, et dans le cas de faibles tailles d'échantillon, nettement meilleures pour un protocole Locati ou StairCase-Locati que pour un protocole StairCase, quelle que soit la méthode d'estimation utilisée.

StairCase Figure 4.8(a)

Pour de petits échantillons, l'écart-type est clairement impossible à estimer à partir de l'estimation de D&M (cf. figure haut) : ceci est notamment lié au fait que dans la plupart des cas d'un échantillon de 7 spécimens la conditions d'application de la formule de D&M (cf. §.3.2.1 équation 3.3) n'est pas validée. Les méthodes MLE et SVA ne permettent pas non plus d'obtenir une bonne estimation de l'écart-type à partir de données StairCase, même en moyenne.

Locati Figure 4.8(b)

L'estimation de l'écart-type par les différentes méthodes est très dispersée mais en moyenne bonne. La méthode PSA paraît être la méthode qui permet la meilleure estimation de l'écart-type même pour de faibles tailles d'échantillon, ceci toujours dans les conditions d'essai idéales. En revanche, comme pour l'estimation de la moyenne, la dispersion des estimations de l'écart-type par la méthode SVA est nettement plus importante que pour les autres méthodes ; l'influence du nombre de paramètres paraît en être la cause.

StairCase-Locati Figure 4.8(c)

De même que pour l'estimation de la moyenne, les résultats de l'estimation à partir d'un StairCase-Locati sont semblables à ceux issus d'un Locati seul. Cependant, on observe deux différences notables :

1. L'estimation par MLE est biaisée : même avec une taille d'échantillon considérée

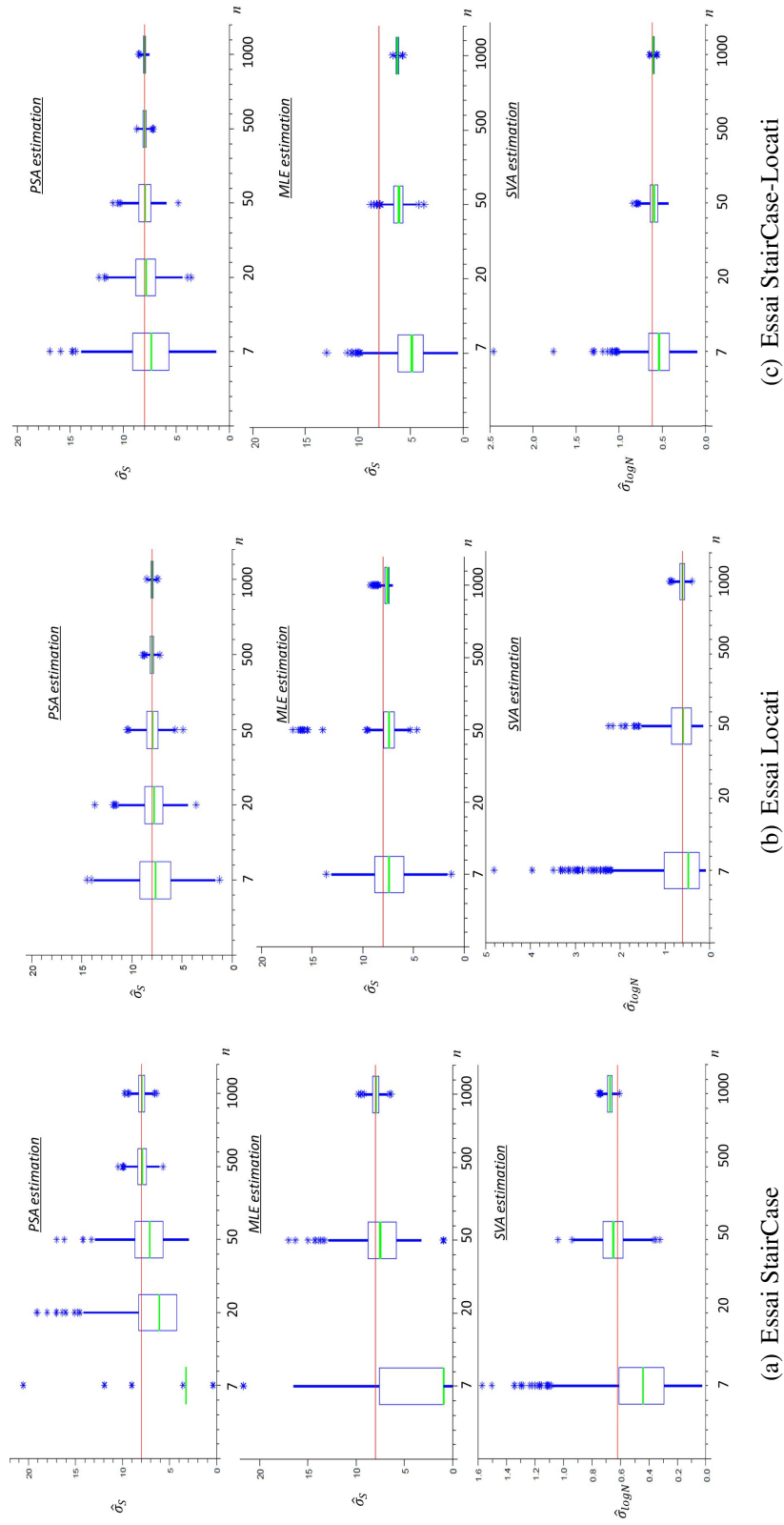


FIGURE 4.8: Effet de la taille d'échantillon sur les estimations de l'écart-type

comme infinie (i.e. $n = 1000$) l'estimation de l'écart-type n'est jamais égale à la valeur théorique (cf. figure milieu). On peut donc estimer que la durée des paliers à une conséquence sur un protocole Locati.

2. Les estimations par la méthode SVA sont légèrement moins dispersées pour un StairCase-Locati que pour un Locati.

4.3.2 Effet des hypothèses en conditions « dégradées »

Ici, on représente les qualités d'estimation dans les conditions dégradées, c'est à dire dans lesquelles au moins une des hypothèses posées est fautive. On détaille les résultats intéressants tout d'abord pour chaque hypothèse erronée prise séparément, puis pour des combinaisons d'hypothèses erronées.

On cherche ici à observer la robustesse des méthodes, c'est à dire la qualité des estimations en fonction de l'éloignement d'une hypothèse de la réalité.

Les différentes combinaisons font l'objet d'un plan d'expérience conséquent : ici on représente seulement quelques résultats de ce plan d'expérience et les conclusions de l'ensemble des simulations. Par soucis de synthèse, on s'intéresse notamment aux deux seules tailles d'échantillon, $n = 7$ pour représenter une petite taille d'échantillon et conformément aux pratiques usuelles chez PSA, et $n = 50$ pour une grande taille d'échantillon, représentant la taille minimale pour laquelle on suppose que la taille d'échantillon a un effet négligeable sur l'estimation, et qui est accessible au regard des procédures de suivi de productions en série.

4.3.2.1 Effet de la loi de distribution

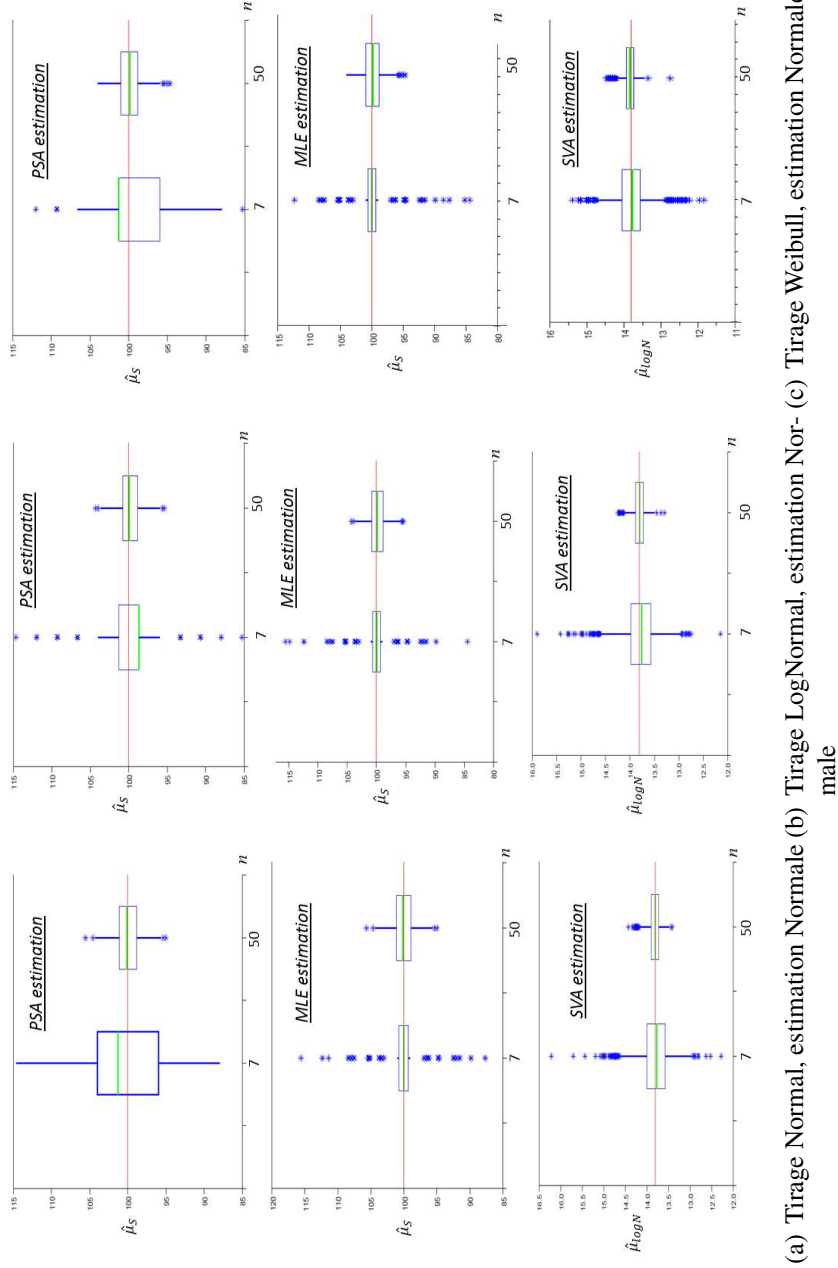
Les hypothèses de cette étude sont basées sur :

- une limite d'endurance suivant une loi Normale de moyenne μ_S et d'écart-type $\sigma_S = q\mu_S$, avec q constant,
- les nombres de cycles à rupture selon une loi LogNormale de moyenne μ_N et d'écart-type σ_N constant.

La question que l'on pose ici est de savoir si, sous l'hypothèse que la caractéristique étudiée (selon l'axe de l'étude, N ou S) suit une autre loi que les deux ci-dessus, et que l'on reste dans l'hypothèse d'une loi Normale à un nombre de cycles donné et d'une loi LogNormale à une contrainte donnée, observe-t-on un biais sur les estimations.

Dans les figures 4.9 et 4.10, on montre les simulations d'un StairCase selon des lois de tirages Lognormale (sous-figures (b)) et de Weibull (sous-figures (c)) en comparaison avec les résultats précédents générés selon la loi Normale (sous-figures (a)).

Ici on ne montre que l'exemple d'un StairCase : il est important de noter que les conclusions sont communes quel que soit le protocole utilisé (Locati et StairCase-Locati). On remarque qu'en posant l'hypothèse de loi Normale de la limite d'endurance et loi LogNormale des nombres de cycles, on ne dégrade pas les estimations même si l'hypothèse



(a) Tirage Normal, estimation Normale (b) Tirage LogNormal, estimation Nor- male (c) Tirage Weibull, estimation Normale

FIGURE 4.9: Effet de la loi de tirage sur les estimations de moyenne (StairCase)

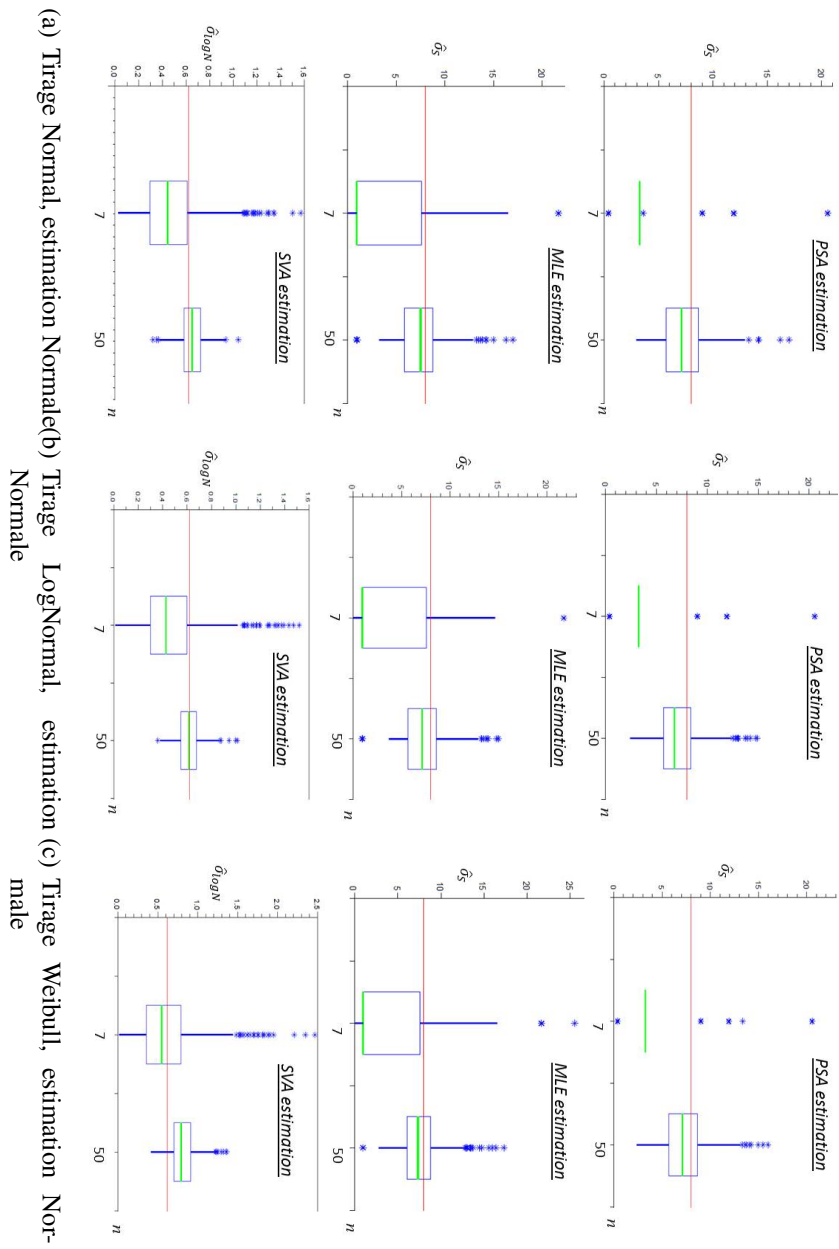


FIGURE 4.10: Effet de la loi de tirage sur les estimations d'écart-type (StairCase)

est fautive (i.e. loi réelle de la limite d'endurance LogNormale ou Weibull). Par conséquent, assumer l'hypothèse de loi Normale a priori est acceptable et sans conséquences notables sur la qualité d'estimation. On considérera donc dans la suite que les hypothèses de loi sont acceptables.

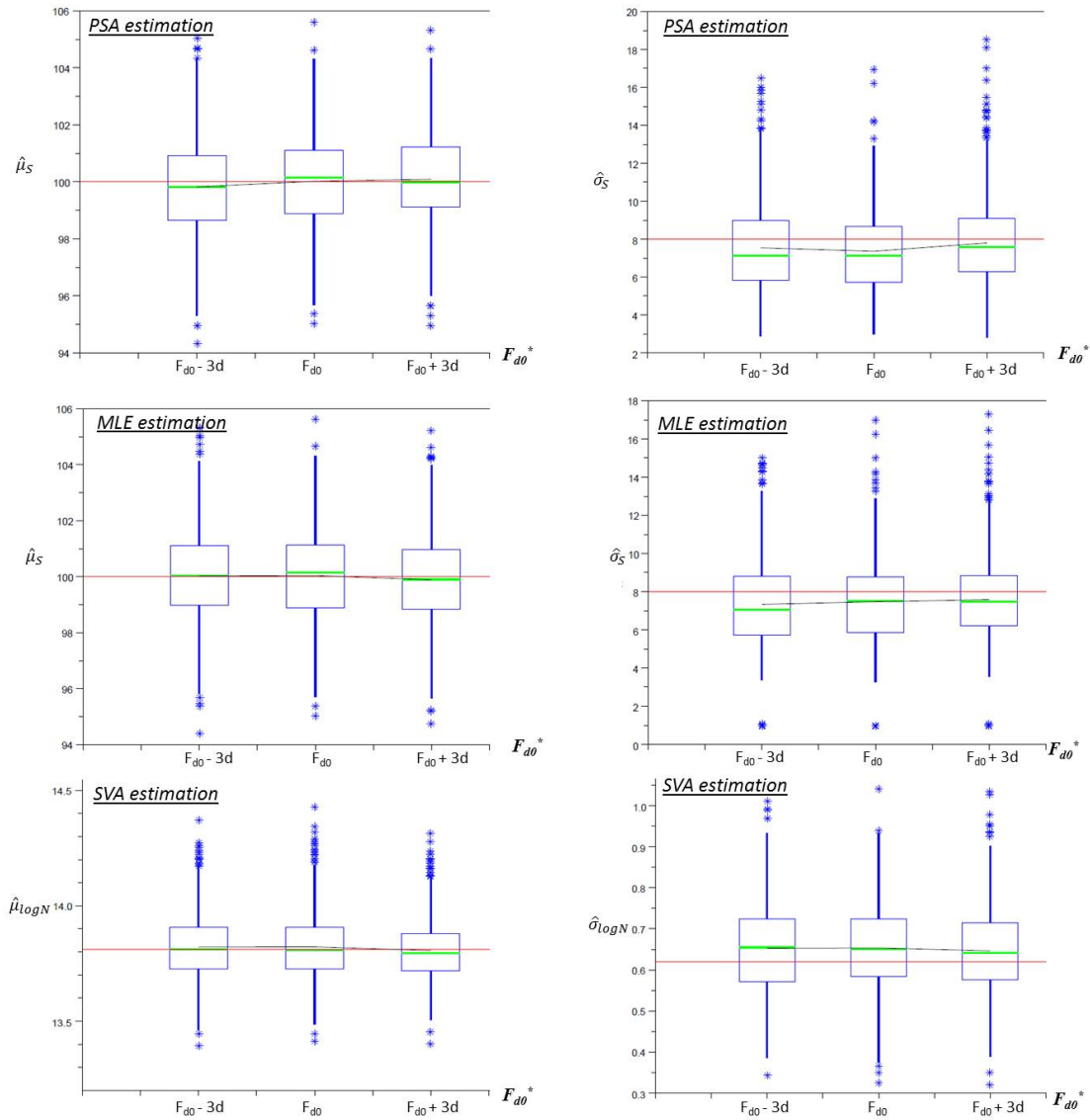
4.3.2.2 Effet des paramètres du StairCase

On montre ici la dépendance des estimations aux deux paramètres du protocole StairCase, qui sont le premier niveau d'effort F_{d0} et l'incrément d'effort d .

Pour des tailles d'échantillon importantes ($n > 20$) on n'observe pas de réel impact du premier niveau d'effort F_{d0} (cf. figure 4.11), ni de l'incrément d (cf. figure 4.12), qu'il s'agisse de l'estimation de la moyenne (sous-figure (a)) ou de l'écart-type (sous-figure (b)), et quelle que soit la méthode utilisée. On observe tout de même qu'avec la méthode PSA, l'estimation de l'écart-type est meilleure quand l'incrément d'effort est environ égal à deux fois l'écart-type (figure 4.12(b), haut), mais à l'inverse ce paramétrage dégrade l'estimation par MLE (figure 4.12(b), bas).

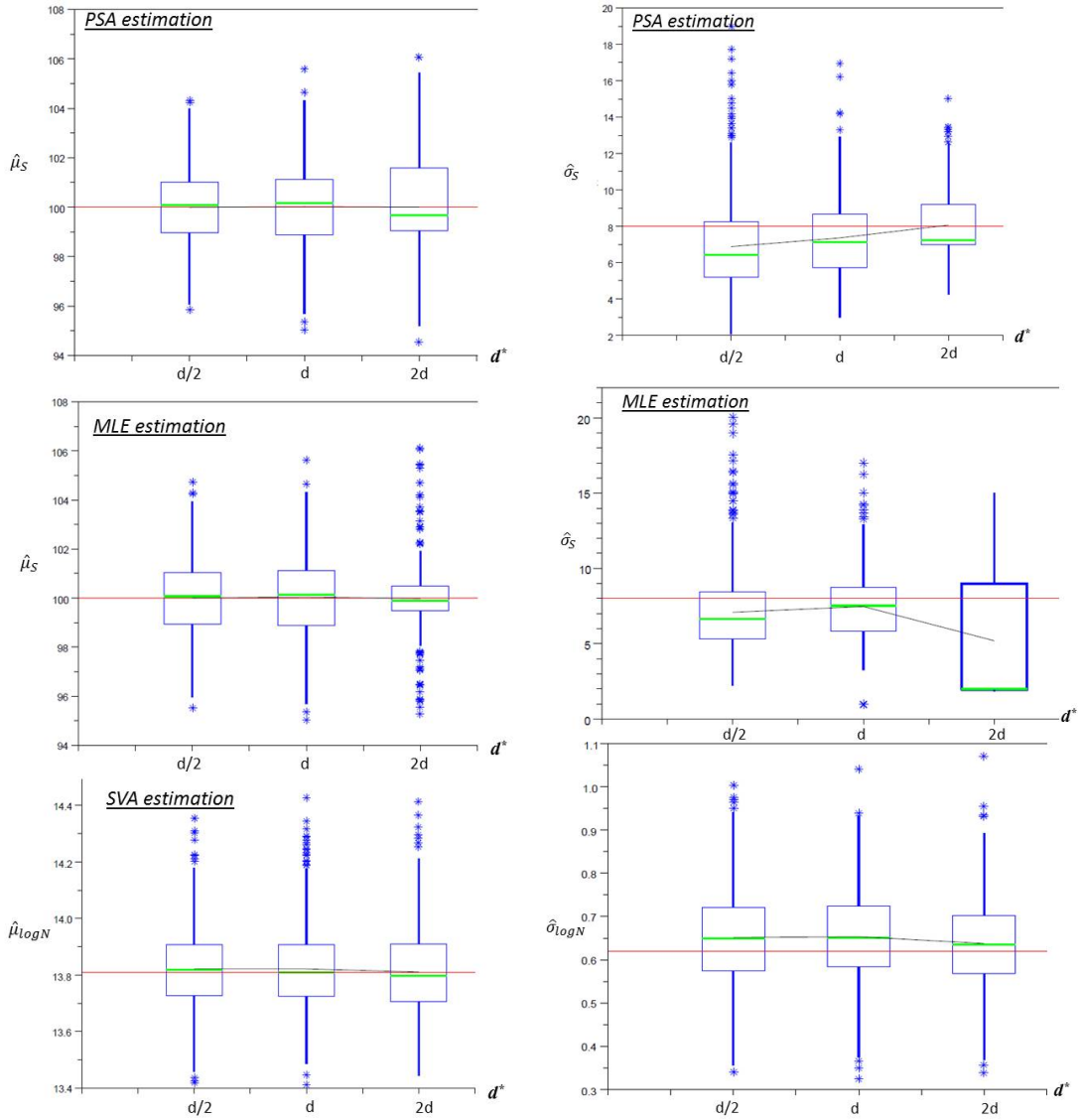
Pour de petites tailles d'échantillon, le premier niveau a une influence uniquement sur l'estimation de la moyenne. On aura tendance à sous-estimer la moyenne lorsque F_{d0}^* est inférieur à F_{d0} et inversement, on la sur-estimera lorsque F_{d0}^* est supérieur à F_{d0} , notamment pour la méthode d'estimation PSA (figure 4.13(a)). L'influence est faible, mais toujours existante pour le MLE (figure 4.13(b)) et le SVA (figure 4.13(c)).

L'incrément d'effort ne dégrade pas l'estimation de la moyenne quelle que soit la méthode d'estimation utilisée, en revanche il influence l'estimation de l'écart-type (cf. figure 4.14). Pour la méthode PSA, on remarque que, comme pour de grandes tailles d'échantillon, on a une meilleure estimation de l'écart-type avec un incrément environ égal à deux fois l'écart-type théorique, mais ici, l'estimation reste biaisée par la condition non vérifiée de D&M (cf. §.3.2.1.1), ce qui entraîne l'effet inverse avec la méthode MLE. Enfin, on n'observe aucune influence pour la méthode SVA.



(a) Estimation de la moyenne en fonction de F_{d0}^* (b) Estimation de l'écart-type en fonction de F_{d0}^*

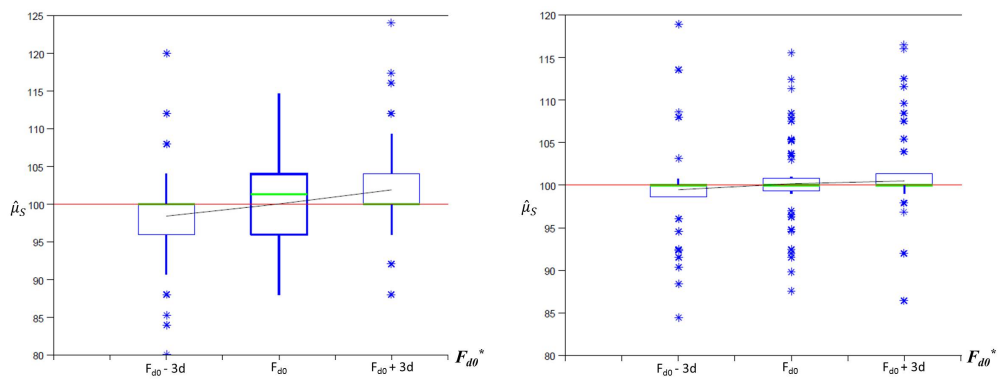
FIGURE 4.11: Effet du premier niveau d'effort sur les estimations à partir d'un StairCase (n=50)



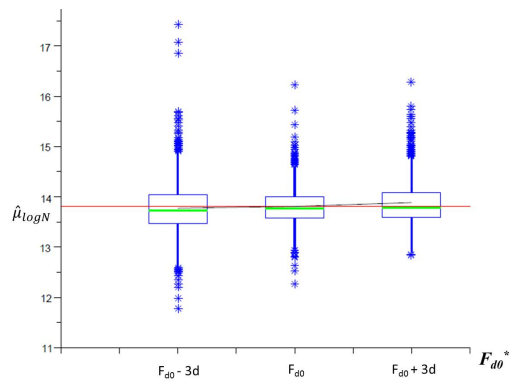
(a) Estimation de la moyenne en fonction de d^*

(b) Estimation de l'écart-type en fonction de d^*

FIGURE 4.12: Effet de l'incrément d'effort sur les estimations à partir d'un StairCase (n=50)

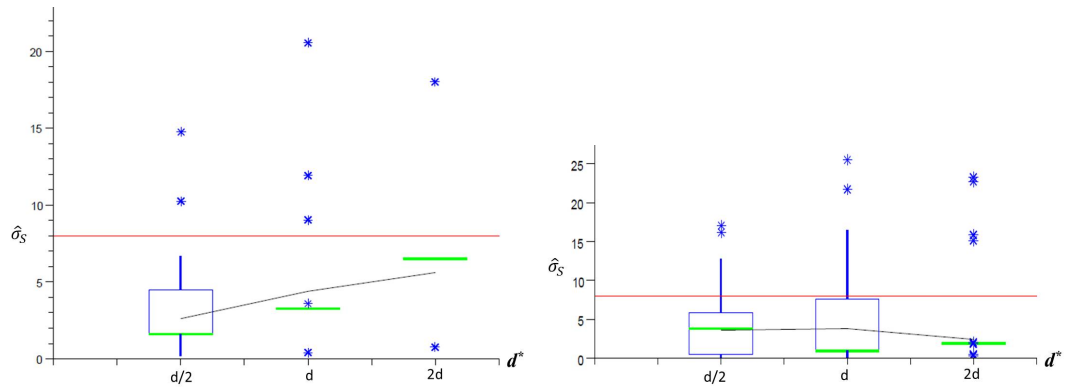


(a) Estimation de la moyenne en fonction de F_{d0}^* (PSA) (b) Estimation de la moyenne en fonction de F_{d0}^* (MLE)

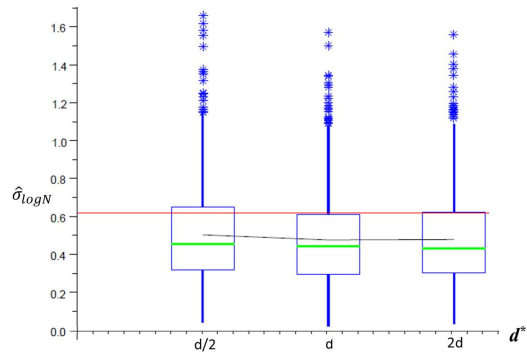


(c) Estimation de la moyenne en fonction de F_{d0}^* (SVA)

FIGURE 4.13: Effet du premier niveau sur les estimations d'un StairCase (n=7)



(a) Estimation de l'écart-type en fonction de d^* (PSA) (b) Estimation de l'écart-type en fonction de d^* (MLE)



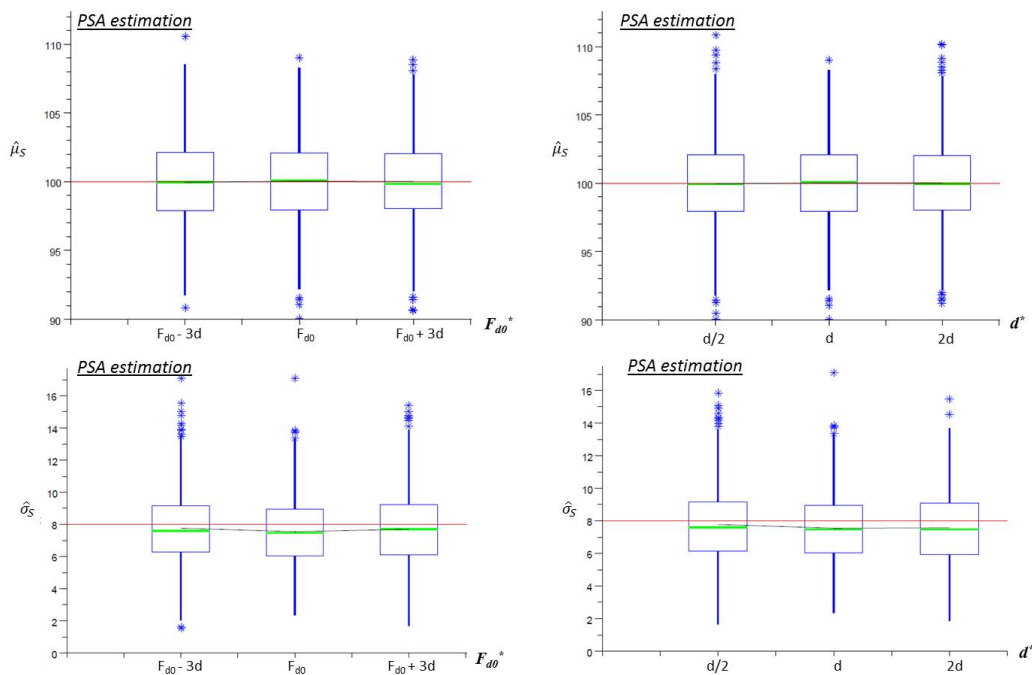
(c) Estimation de l'écart-type en fonction de d^* (SVA)

FIGURE 4.14: Effet de l'incrément sur les estimations d'un StairCase (n=7)

4.3.2.3 Effet des paramètres du Locati (et StairCase-Locati)

On montre que, pour de grandes tailles d'échantillon, la qualité des estimations ne dépend pas des deux paramètres du protocole Locati (identique au StairCase-Locati), soit le premier niveau d'effort F_{d0} et l'incrément d'effort d . Pour les faibles tailles d'échantillon elle n'en dépend pas non plus significativement comme le montre la suite.

En ce qui concerne la méthode d'estimation PSA, on conclue que ni le niveau de départ (figure 4.15(a)), ni la taille de l'incrément (figure 4.15(b)) n'ont d'impact sur les estimations de moyenne (figure haut) et d'écart-type (figure bas). On donne en figure 4.15 l'exemple sur des tailles d'échantillon faibles, de 7 pièces.



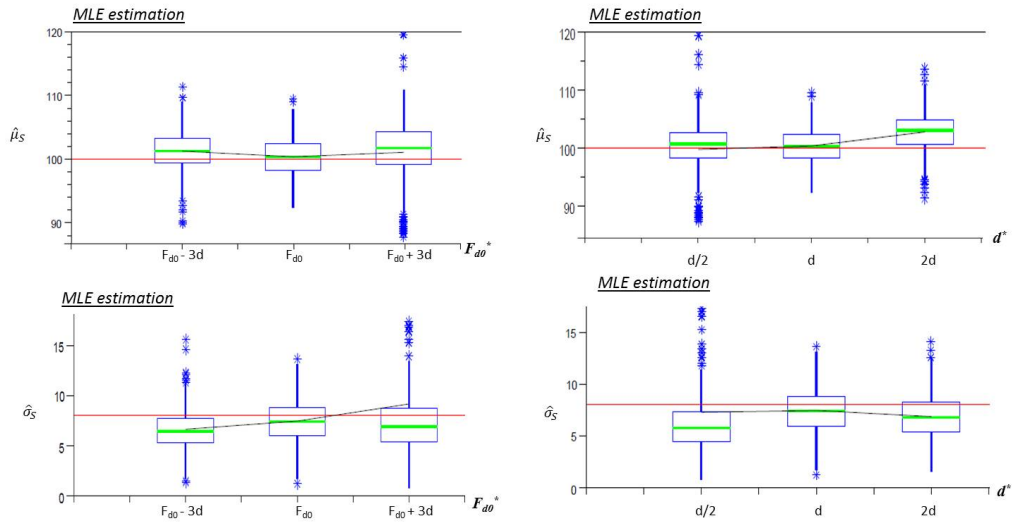
(a) Estimation de moyenne et écart-type en fonction de F_{d0}^* (PSA) (b) Estimation de moyenne et écart-type en fonction de d^* (PSA)

FIGURE 4.15: Effet des paramètres du Locati sur l'estimation PSA ($n=7$)

Les méthodes d'estimation MLE et SVA sont légèrement plus dépendantes aux deux paramètres que la méthode PSA, mais les erreurs d'estimation restent faibles. On montre en figure 4.16 l'exemple de résultats d'estimation par MLE et en figure 4.18 par SVA, pour la taille d'échantillon égale à 7.

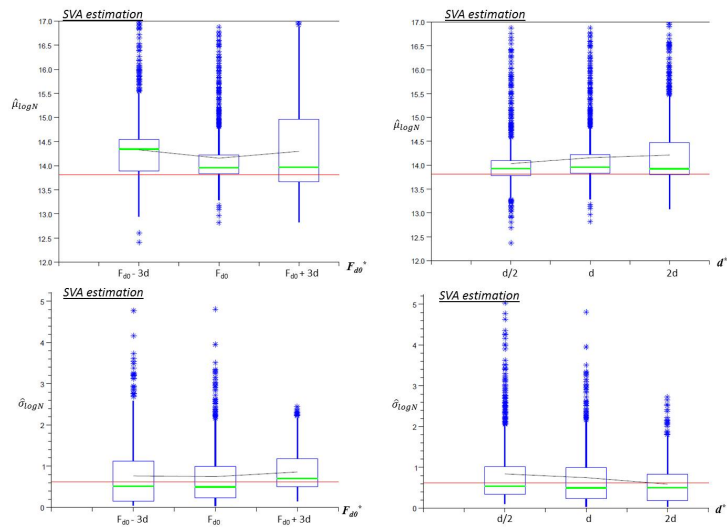
On peut noter en figure 4.16(a) et 4.17(a) que le niveau de départ F_{d0}^* dégradé, donne une légère surestimation de la moyenne (figures haut). L'écart-type lui est sous-estimé lorsque $F_{d0}^* < F_{d0}$ et surestimé lorsque $F_{d0}^* > F_{d0}$ (figures bas). On n'observe pas de réel impact de l'incrément d'effort d^* sur les estimations par MLE, excepté lorsqu'il est deux fois supérieur à d : on observe une surestimation de la moyenne (figure 4.16(b) haut). Par SVA en revanche, l'estimation de moyenne est meilleure lorsque l'incrément est petit

(figure 4.17(b) haut) ce qui n'est pas le cas, et même l'inverse pour l'estimation de l'écart-type (figure bas).



(a) Estimation de moyenne et écart-type en fonction de F_{d0}^* (MLE) (b) Estimation de moyenne et écart-type en fonction de d^* (MLE)

FIGURE 4.16: Effet des paramètres du Locati sur l'estimation MLE (n=7)



(a) Estimation de moyenne et écart-type en fonction de F_{d0}^* (SVA) (b) Estimation de moyenne et écart-type en fonction de d^* (SVA)

FIGURE 4.17: Effet des paramètres du Locati sur l'estimation SVA (n=7)

4.3.2.4 Effet de la pente de Basquin

L'hypothèse de valeur sur la pente de Basquin est une hypothèse forte actuellement chez PSA dans le calcul de la tenue des pièces métalliques de LAS. En effet, cette va-

leur, par expérience, est fixée à 8. Cependant les pentes réelles associées aux différents matériaux et assemblages peuvent s'en écarter (entre 3 et 15). On se propose ici d'observer l'erreur d'estimation qui est faite si l'hypothèse de valeur égale à 8 est erronée. On montre les résultats pour le Locati (résultats tout à fait similaires pour le StairCase-Locati), puisque la méthode StairCase ne fait aucunement appel à cette hypothèse, la valeur de la pente b n'a aucun impact sur les estimations.

Comme cité précédemment l'hypothèse de $b = 8$ de la méthode PSA biaise les estimations à partir d'un Locati. On note sur la figure 4.18(a), que l'erreur d'estimation de la moyenne reste négligeable sauf dans le cas de l'estimation "PSA", lorsque la pente réelle du système testé s'éloigne trop de l'hypothèse (ici $b^* = 15$ alors que $b_{hypothese} = 8$). En revanche l'estimation de l'écart-type est nettement plus influencée par l'erreur effectuée sur l'hypothèse de Basquin. En effet, on remarque avec la méthode d'estimation PSA (cf. figure 4.18(b) haut), que pour des pentes faibles, correspondant notamment aux valeurs usuelles pour les assemblages soudés, cas le plus fréquent en LAS, l'erreur d'estimation sur l'écart-type est très conséquente.

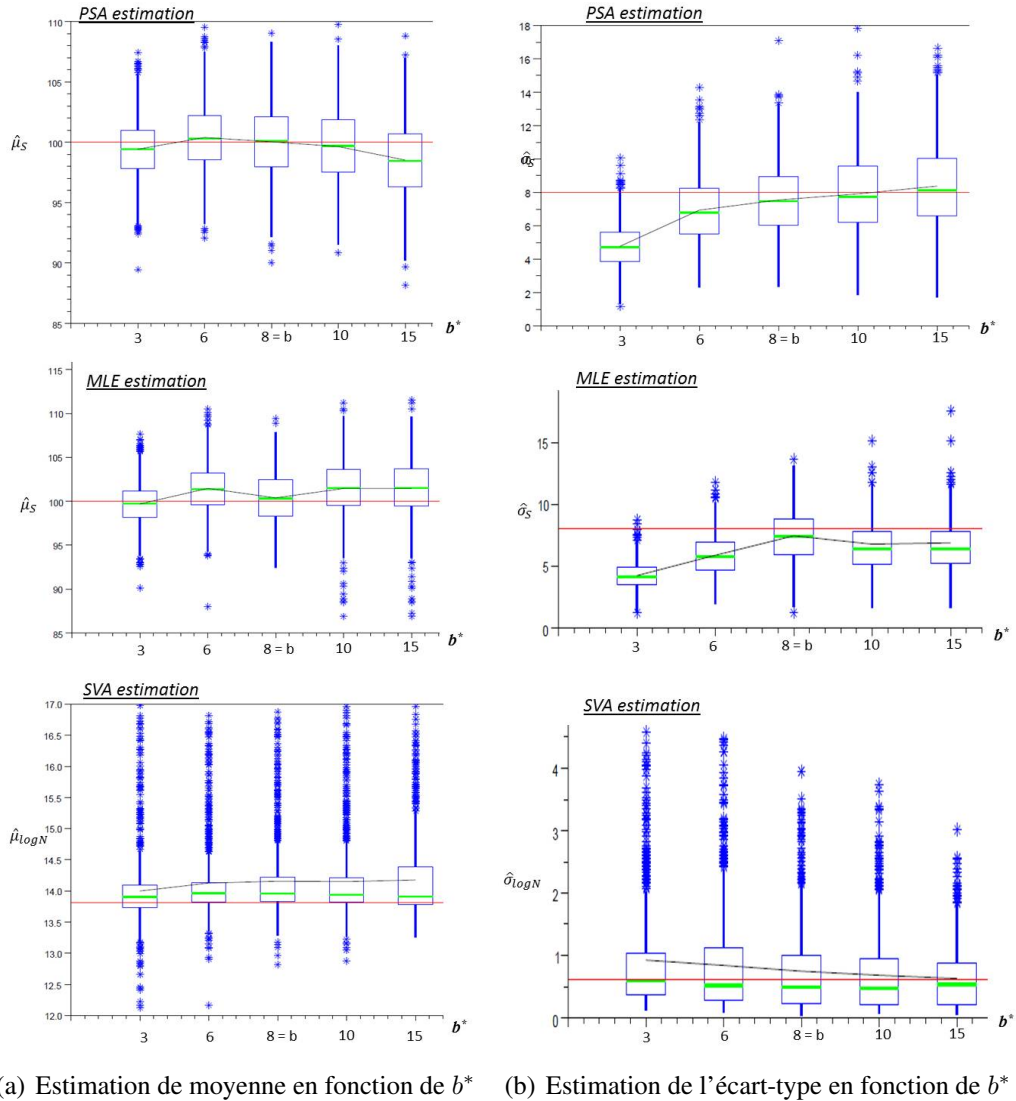


FIGURE 4.18: Effet de bassin sur les estimations d'un Locati ($n=7$)

4.4 Conclusions sur les méthodologies de qualification

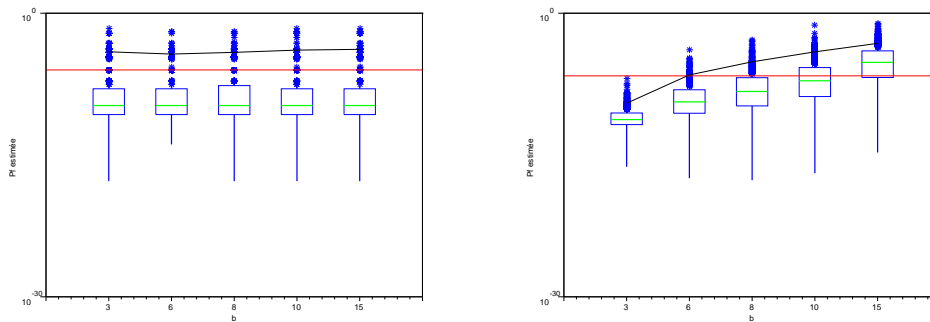
4.4.1 Résultats observés

4.4.1.1 Performance

Afin de comparer les performances quelle que soit la méthode d'estimation appliquée, SVA donnant les résultats en nombres de cycles, et MLE et PSA les donnant en contrainte, on étudie les résultats en terme de probabilité de défaillance estimée à partir de la distribution des Contraintes, que l'on considérera ici comme une donnée ferme. Comme déjà exprimé en partie 4.2, le changement d'axe Contrainte-Durée de vie pour le calcul de probabilité de défaillance ne permet pas d'obtenir la même valeur théorique de probabilité de défaillance. De manière pragmatique, on montre ici les résultats des estimations de probabilité de défaillance normalisées par rapport à la valeur théorique 10^{-6} pour les esti-

mations en contrainte, et 2.10^{-7} pour les estimations en nombre de cycles. A noter qu'une échelle logarithmique des probabilités de défaillance a été utilisée pour plus de clarté.

En ce qui concerne l'estimation à partir d'un StairCase, on a déjà noté que l'estimation par MLE n'était pas meilleure que l'estimation PSA puisqu'elle ne permet pas d'obtenir une meilleure estimation de l'écart-type et n'améliore pas l'estimation moyenne. On compare en figure 4.19 l'estimation de probabilité de défaillance de la méthode PSA (figure 4.19(a)) et l'estimation SVA (figure 4.19(b)). On remarque que l'estimation est plus robuste avec la méthode PSA, notamment à cause du nombre supérieur de paramètres à estimer (3 au lieu de 2) par les modèles SVA.

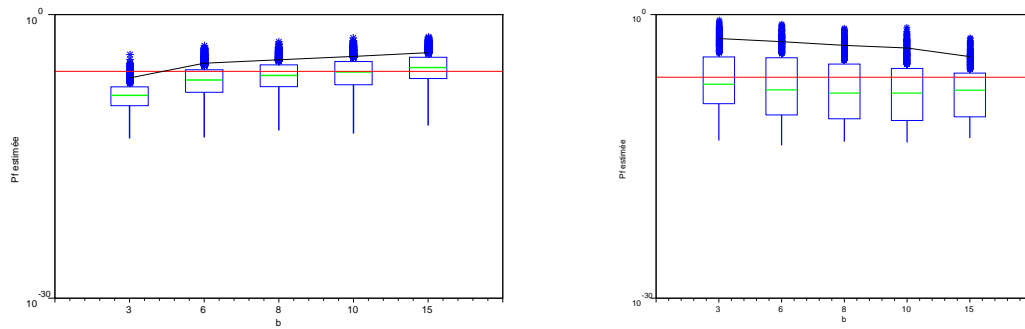


(a) Estimation de la probabilité de défaillance par PSA (SC 7 pièces)

(b) Estimation de la probabilité de défaillance par SVA (SC 7 pièces)

FIGURE 4.19: Comparaison des estimations de probabilité de défaillance pour un Stair-Case

En revanche, en ce qui concerne l'estimation à partir de résultats d'un Locati, on observe que c'est la méthode SVA (figure 4.20(b)) qui est plus robuste que la méthode PSA (figure 4.20(a)), puisqu'elle permet d'estimer le paramètre de Basquin et par conséquent, l'estimation n'en dépend plus. On observe cependant une plus grande dispersion des estimations de probabilité de défaillance par la méthode SVA, liée au nombre supérieur de paramètre à estimer dans l'optimisation.

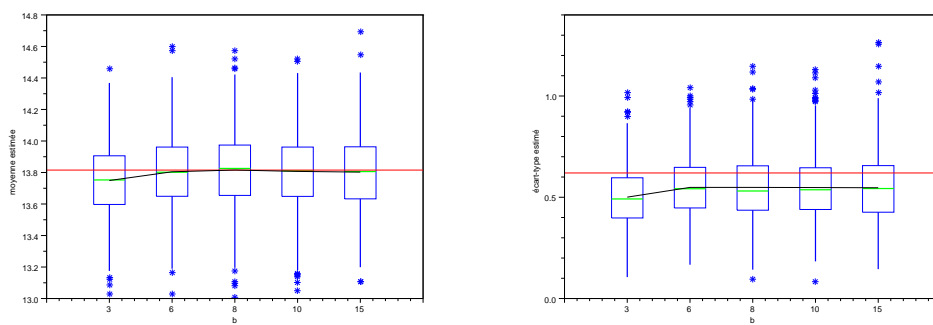


(a) Estimation de la probabilité de défaillance par PSA (b) Estimation de la probabilité de défaillance par SVA (Locati 7 pièces)

FIGURE 4.20: Comparaison des estimations de probabilité de défaillance pour un Locati

4.4.1.2 Robustesse

On observe en général que les méthodes SVA et MLE donnent des résultats beaucoup plus variables que la méthode PSA, notamment lorsque l'on fait varier la variable "b" alors qu'aucune hypothèse n'est effectuée sur cette valeur et que l'on parvient à travers ces méthodes à l'estimer. On peut suggérer que cette variabilité provient du fait que l'on estime dans ces méthodes trois paramètres (A, b, σ) au lieu de deux pour la méthode PSA, puisque b est fixé. Pour comparer la variabilité des résultats on propose de montrer l'application des modèles SVA à un essai Locati à 7 pièces, en fixant l'hypothèse de basquin égale à 8 comme le suppose la méthode d'estimation PSA. Les résultats sont montrés en figure 4.21 :



(a) Estimation de la moyenne par SVA avec b fixé à 8 (7 pièces) (b) Estimation de l'écart-type par SVA avec b fixé à 8 (7 pièces)

FIGURE 4.21: Qualité d'estimation des modèles SVA à deux paramètres à partir d'un protocole Locati

Les estimations de moyenne et d'écart-type ne sont pas dépendantes de l'hypothèse que l'on établie sur Basquin. On en déduit que c'est l'estimation du paramètre A de Bas-

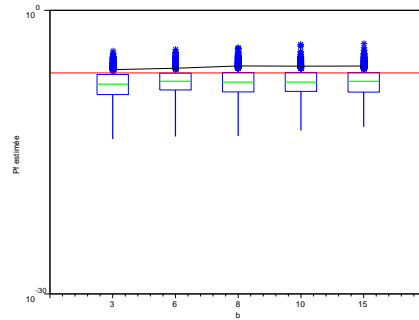


FIGURE 4.22: Estimation de la probabilité de défaillance par SVA avec b fixé (Locati 7 pièces)

quin ($NS^b = A$) qui permet néanmoins d'aboutir à une bonne estimation des paramètres de la distribution des nombres de cycles à défaillance. En terme de probabilité de défaillance, si l'on se positionne dans le même cadre que la méthode PSA (b fixé) on obtient les estimations de la figure 4.22, qui sont clairement meilleures et plus robustes que l'estimation PSA.

4.4.1.3 Coût en nombre de cycles

Le coût d'un essai de fatigue dépend d'abord du nombre de cycles effectués : On assume ici que les coûts variables, paramétrés par les nombres de cycles, dominent les coûts fixes, surtout pour des nombres de cycles importants. En effet, à iso-nombre de pièces pour tous les protocoles, quelle que soit la méthode d'estimation utilisée, c'est le protocole en lui-même qui fixe le coût de l'essai et, plus précisément, le nombre de cycles effectués pour une campagne. Le tableau 4.3 montre le nombre moyen de cycles nécessaire à une campagne d'essai de 7 pièces en fonction du protocole utilisé.

<u>Protocoles</u> 7 pièces	StairCase	StairCase-Locati	Locati
Temps Moyen (nombres de cycles)	6,7 .10⁶	7,0 .10⁶	8,1 .10⁶

TABLE 4.3: Nombre de cycles moyen nécessaire à chaque protocole

Il est clair que même si le protocole Locati offre de meilleures perspectives pour l'application des méthodes d'estimation, il reste néanmoins le plus coûteux en termes de nombre de cycles et donc en terme de méthodologie globale de qualification. Inversement, le protocole le plus performant en nombre de cycles correspond à celui le moins efficace du point de vue de l'estimation.

4.4.1.4 Amélioration des méthodologies de qualification en fatigue

Le tableau suivant (table 4.4) résume l'appréciation des méthodologies globales de qualification appliquées à des échantillons de 7 pièces, (i.e. les conclusions sur la robustesse de chaque méthode d'estimation appliquée à chaque protocole) permettant ainsi de conclure sur la performance de chacune. Les estimations non dépendantes des hypothèses sont signalées par «OK», si elles le sont par «NOK», et les «OK*» signalent une dépendance très faible mais considérée négligeable.

	StairCase			SC-Locati			Locati		
	PSA	MLE	SVA	PSA	MLE	SVA	PSA	MLE	SVA
Lois de distribution	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK
Paramètres de protocole	NOK	NOK	NOK	OK	OK*	OK*	OK	OK*	OK*
Pente de Basquin	OK	OK	OK	NOK	OK*	OK*	NOK	OK*	OK*
Temps d'essai moyen (nombre de cycles)	6,7.10 ⁶			7,0.10 ⁶			8,1.10 ⁶		

TABLE 4.4: Récapitulatif des analyses sur les méthodologies globales de qualification

A partir des conclusions exprimées dans ce chapitre, deux approches d'amélioration de la méthodologie globale de qualification des pièces de LAS en fatigue ont vu le jour :

1. On se propose tout d'abord de ne pas altérer les méthodes d'estimation à partir des protocoles PSA, mais d'agir uniquement sur leur paramétrage optimal pour obtenir un gain de temps à iso-confiance, sans bouleverser les habitudes (approche Kaizen). Ceci est abordé dans le paragraphe suivant (§. 4.4.2).
2. Par la suite, et cela fera l'objet du chapitre suivant (chap. 5), on optimisera un plan d'essai pour appliquer une approche en nombre de cycles, ce qui impliquera un changement d'envergure, à la fois en terme de protocole et en terme de méthode d'estimation (SVA).

4.4.2 Amélioration «Kaizen» : Le Locati+

Dans cette section, il s'agit d'observer si la modification d'un protocole, permettant de gagner du temps de cycles, permet d'obtenir plus rapidement les estimations sans en dégrader de manière significative leur qualité.

Dans le protocole StairCase (et StairCase-Locati), les trois paramètres qu'il est possible de manipuler sont :

- le nombre de cycles à censure,
- la valeur du premier niveau,

– la valeur de l'incrément.

Il est impossible de modifier le nombre de cycles à censure puisque l'on cherche à définir la limite d'endurance à 10^6 cycles. De plus, les valeurs du premier niveau et de l'incrément n'auront pas d'impact sur la durée de l'essai. Par conséquent, aucune marge de manoeuvre ne s'offre pour les protocoles StairCase et StairCase-Locati.

Inversement, des leviers s'offrent au Locati, protocole qui par ailleurs a été montré plus efficace du point de vue de l'estimation. Ainsi, on observe l'influence qu'a l'augmentation du premier niveau de contrainte sur les estimations de la limite d'endurance, à savoir le gain d'un ou plusieurs paliers [Beaumont et al., 2012d].

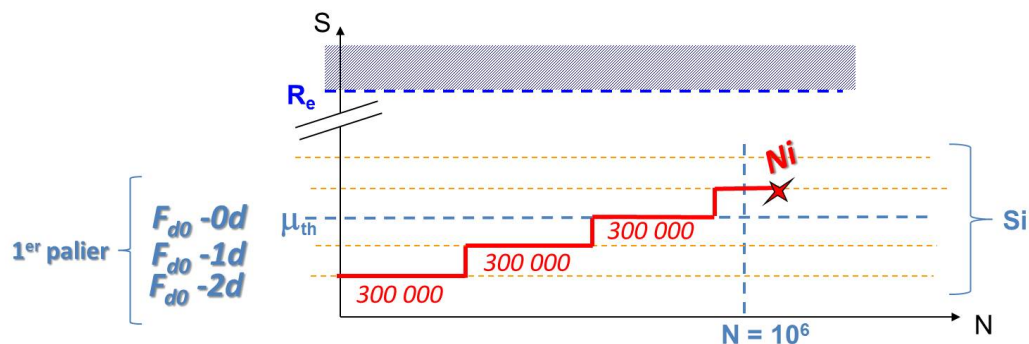


FIGURE 4.23: Configurations du protocole Locati

On simule donc le protocole Locati selon les 3 configurations suivantes (cf. 4.23) :

- $F_{d0} - 2d$: Le premier palier de la première pièce est initialisé à 2 écart-types sous la moyenne théorique de la limite d'endurance, et les premiers paliers des pièces suivantes à 2 écart-types sous la moyenne des observations précédentes $F_1 = F_m - 2d$, (Cela correspond au Locati actuel).
- $F_{d0} - 1d$: Le premier palier de la première pièce est fixé à 1 écart-type sous la moyenne théorique, et les premiers paliers des pièces suivantes à 1 écart-types sous la moyenne des observations précédentes $F_1 = F_m - 1d$.
- $F_{d0} - 0d = \mu_{th}$: Le premier palier de la première pièce est fixé égal à la moyenne théorique, et les premiers paliers des pièces suivantes également ($F_i = F_m$).

On a déjà pu observer à travers le plan d'expérience que le premier niveau n'a pas d'impact sur l'estimation de la limite d'endurance (cf. 4.3.2.3, figure 4.15(a)) sous la condition que l'hypothèse de la pente de Basquin soit avérée.

Le graphique 4.24, montre l'estimation de la moyenne de la limite d'endurance par la méthode PSA (avec l'hypothèse de $b = 8$), en fonction de la pente réelle variable de 3 à 15.

On montre que plus le niveau de départ est proche de la moyenne de la limite d'endurance théorique, i.e. plus le protocole est asymétrique par rapport à F_{d0} , plus l'erreur effectuée sur l'hypothèse de Basquin a un impact conséquent, à la fois sur l'estimation

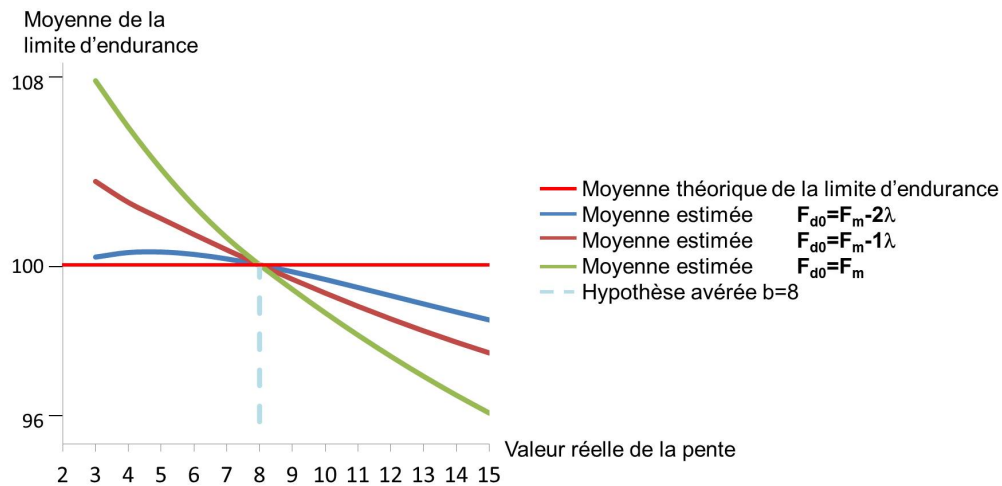


FIGURE 4.24: Effet de la pente Basquin et du niveau de départ de l'effort d'un protocole Locati à 7 pièces, sur l'estimation de la moyenne de la limite d'endurance par la méthode PSA

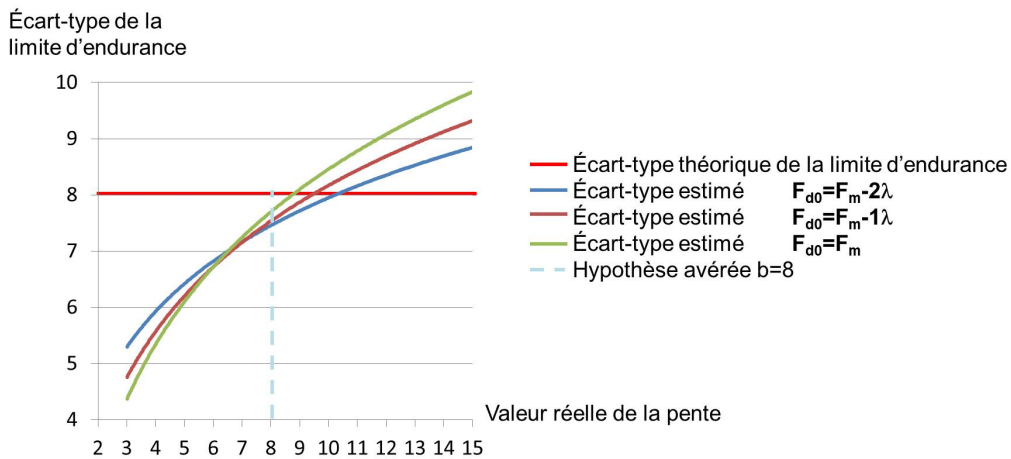


FIGURE 4.25: Effet de la pente Basquin et du niveau de départ de l'effort d'un protocole Locati à 7 pièces, sur l'estimation de l'écart-type de la limite d'endurance par la méthode PSA

de la moyenne (figure 4.24) et celle de l'écart-type (figure 4.25). L'erreur acceptable chez PSA dans la validation des systèmes étant estimée au plus à 5%, on considère donc qu'il est possible de gagner au plus un palier sur le protocole actuel en augmentant le premier niveau d'un incrément par rapport à la méthode actuelle, ce qui définit le protocole «Locati+»

En appliquant le Locati+, on considère pouvoir atteindre un gain d'un peu moins de 2 millions de cycles par rapport à un Locati standard, et d'environ 500 000 cycles par rapport à un StairCase, sur une campagne d'essai à 7 pièces (cf. figure 4.26). On observe également sur cette figure que les simulations sont cohérentes avec le retour d'expérience chez PSA sur l'année 2012 (droite violette), majoritairement concerné par l'application du StairCase-Locati.

La problématique du Locati+ reste l'hypothèse sur la pente de Basquin qui augmente

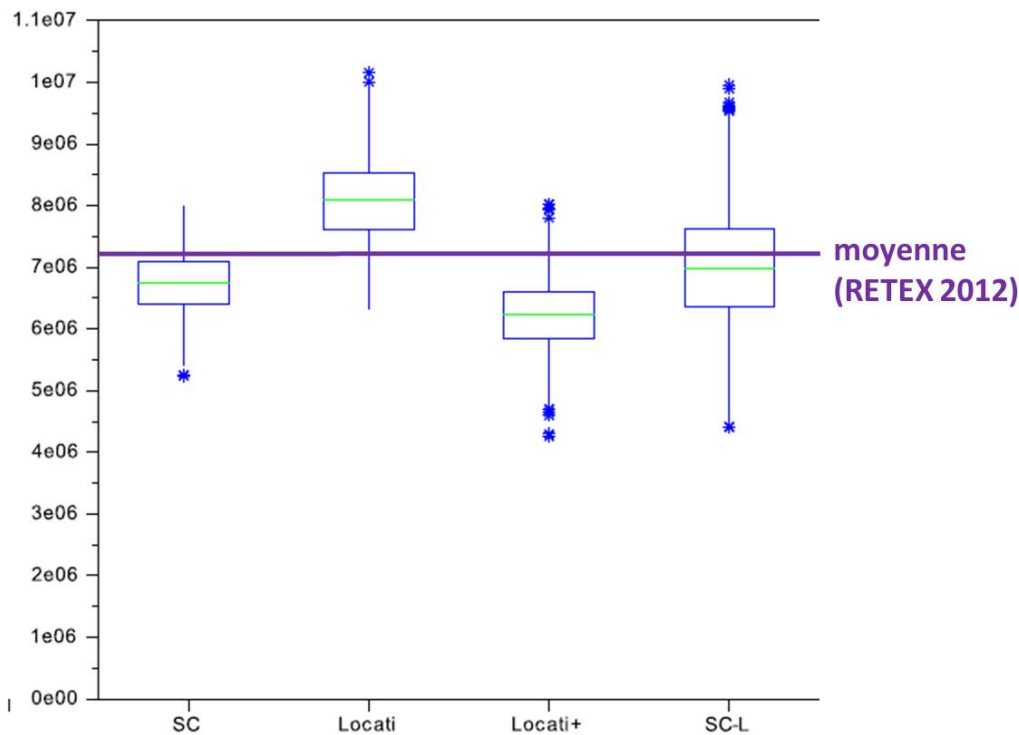


FIGURE 4.26: Comparaison des nombres de cycles totaux pour des campagnes d'essai à 7 pièces selon les différents protocoles

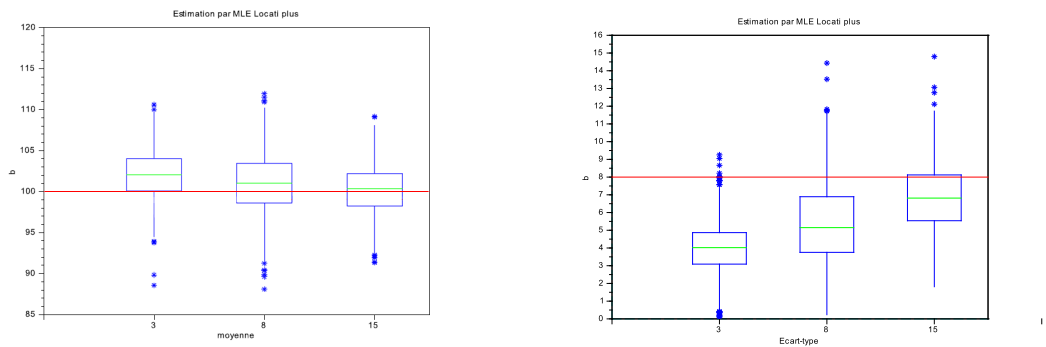
l'erreur potentielle sur l'estimation de la limite d'endurance : pour palier à ce problème, on propose l'estimation par MLE à partir des résultats du Locati+.

Application du MLE

L'estimation par la méthode PSA à partir d'un Locati+ montre des faiblesses quand aux estimations lorsque l'hypothèse sur la valeur de la pente de Basquin est erronée. Par l'estimation MLE, on cherche à palier à ces erreurs d'estimation principalement sur la moyenne. Les résultats d'estimation des paramètres de la limite d'endurance par MLE sont présentés en figure 4.27 et peuvent être comparés aux résultats par l'estimation classique PSA de la figure 4.28.

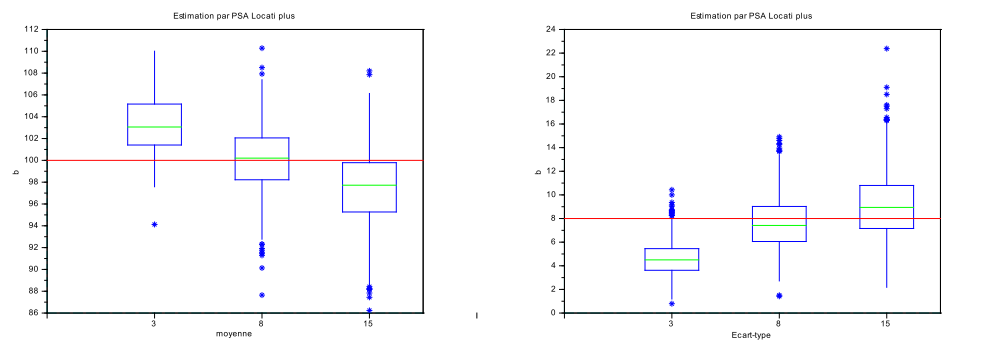
Le MLE appliqué au Locati+ surestime légèrement la moyenne de la limite d'endurance et n'améliore pas l'estimation de son écart-type, cependant il permet d'avoir une estimation de la moyenne de la limite d'endurance avec une faible erreur, sans émettre d'hypothèse sur la pente de Basquin.

La problématique du MLE reste l'estimation non conservative de la moyenne, cependant quelle que soit la valeur réelle de la pente de Basquin le résultat de l'estimation est identique. En revanche, avec l'estimation par la méthode classique PSA, l'estimation dépend de la valeur réelle de la pente de Basquin, on a une surestimation de la moyenne



(a) Estimation de la moyenne par MLE à partir d'un Lo- (b) Estimation de l'écart-type par MLE à partir
cati+ d'un Locati+(7 pièces)

FIGURE 4.27: Estimation des paramètres de la limite d'endurance par MLE à partir d'un Locati+



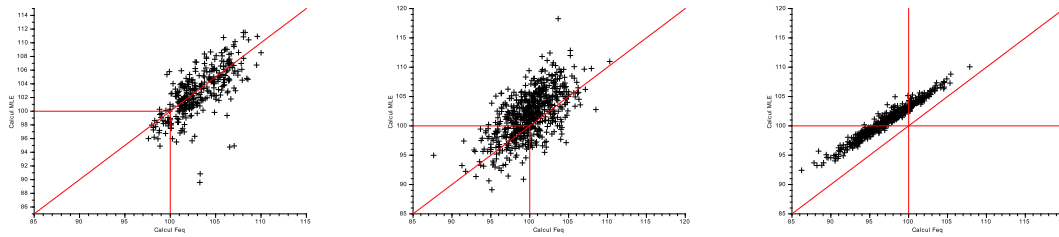
(a) Estimation PSA de la moyenne à partir d'un (b) Estimation PSA de l'écart-type à partir d'un
Locati+ Locati+(7 pièces)

FIGURE 4.28: Estimation PSA des paramètres de la limite d'endurance à partir d'un Lo-
cati+

lorsqu'on surestime la pente de Basquin, et à l'inverse on la sous-estime lorsqu'on sous-estime la valeur de la pente. Par la méthode PSA on a donc aucune idée de l'erreur d'estimation potentiellement effectuée. On observe bien en figure 4.29 que :

- lorsque l'estimation PSA est inférieure à l'estimation MLE, il est plus conservatif de conserver l'estimation PSA,
- dans le cas où l'estimation PSA est supérieure à l'estimation MLE, il est plus prudent dans la majorité des cas de conserver l'estimation MLE, en supposant l'estimation comme proche de la bonne valeur, mais non conservative,
- dans le cas où les deux estimations sont égales, il faut les considérer comme non conservatives, mais avec une erreur relative ne dépassant que très rarement 5%.

On propose donc dans un premier temps d'utiliser la double estimation de la



(a) Estimation PSA et MLE $b=3$ (b) Estimation PSA et MLE $b=8$ (c) Estimation PSA et MLE $b=15$

FIGURE 4.29: Estimation PSA et MLE de la moyenne à partir d'un Locati+

moyenne : par MLE et par la méthode classique PSA. L'abaque présenté en figure 4.30 permet de conclure sur l'estimation de la moyenne, en fonction du positionnement de l'estimation de la moyenne par la méthode PSA par rapport à l'estimation MLE.

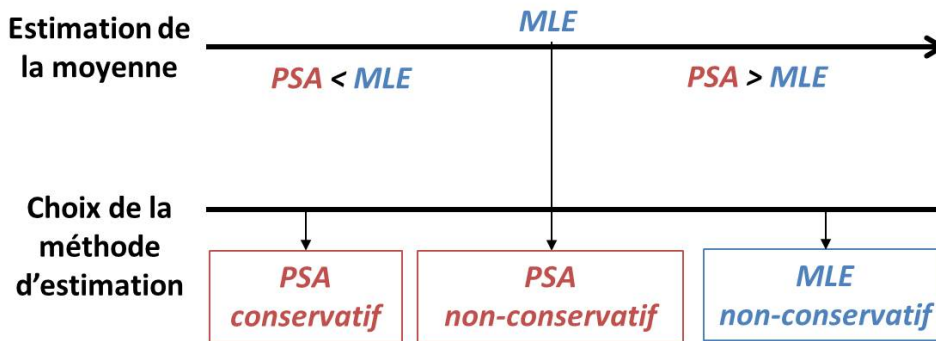


FIGURE 4.30: Choix de la méthode d'estimation en fonction du résultat

L'amélioration du Locati en Locati+ et l'application de la méthode MLE aux résultats d'essai constitue la première contribution à l'amélioration de la méthodologie globale d'essai. Le Locati+ avec une estimation classique est en place dans le périmètre Liaison Au Sol depuis septembre 2012 et commence son extension aux autres services du groupe PSA. On estime le gain du Locati+ par rapport au StairCase-Locati, en terme de nombres de cycles, d'environ 11%. L'application du MLE verra également le jour à court terme après intégration de l'algorithme dans les outils de suivi d'essai.

La seconde amélioration proposée demande un changement total de référentiel puisqu'on situera désormais l'étude en nombre de cycles et non plus en contrainte. Ainsi, le chapitre suivant propose un plan optimisé qui permettra d'appliquer une étude des résultats d'essai par la méthode SVA.

Optimisation d'un plan d'essai

Dans le chapitre précédent, on a montré que la méthode SVA permet d'obtenir des estimations efficaces et robustes de la tenue en fatigue. Elle permet également de relâcher une hypothèse forte actuellement imposée chez PSA : i.e. l'hypothèse de la valeur de la pente de Basquin. Cependant, l'application de cette méthode permet uniquement d'obtenir un gain en terme de qualité d'estimation, mais pas en terme de temps d'essai. Dans cette partie, on présente la méthode d'optimisation d'un plan d'essai pour l'estimation par les modèles SVA.

5.1 Objectif

Les essais accélérés utilisent diverses techniques pour diminuer la durée de test des produits et/ou accélérer les processus de dégradation. Ils sont utilisés pour obtenir plus vite les informations concernant la vie du produit. Dans le cadre de la fatigue, on souhaite obtenir les caractéristiques de fiabilité dans un délai beaucoup plus court que ne le permettraient des essais en conditions nominales d'utilisation du système. Pour cela, les niveaux de contraintes subies par le produit sont augmentés afin d'obtenir des données plus rapidement, puis les utiliser pour estimer la fiabilité dans les conditions normales de fonctionnement. Les résultats se doivent d'être traités par un modèle statistique approprié, basé sur la physique de défaillance des composants, afin d'aboutir à des prévisions de durées de vie du produit. Elsayed ([Elsayed, 2006]) a montré que les essais en contraintes échelonnées, tout comme le protocole Locati, sont plus efficaces qu'en contraintes constantes.

Par soucis de gain de temps, on se propose ici d'optimiser un plan en contraintes échelonnées, dont l'incrément sera par défaut négatif, afin de maximiser l'endommagement dès le début de l'essai (cf. figure 5.1). Les systèmes sont donc testés consécutivement à

des niveaux de plus en plus faibles comme le montre la figure 5.1. Il existe des contraintes physiques à appliquer pour des essais de fatigue, afin de conserver le bon mode d'endommagement. Il s'agit d'abord de maintenir le système testé dans le domaine élastique, i.e. les niveaux de contrainte ne doivent pas dépasser la limite élastique S_y ($S_2 < S_1 < S_y$). Par convention, la limite d'élasticité d'un acier (tôle) sous la forme de produit plat est vérifiée au moins égale à deux fois sa limite d'endurance [Stephens et al., 2001]. Ce facteur est cependant réduit lorsque l'on considère les facteurs de traitement de surface, de concentration de contraintes, d'usinage, etc.

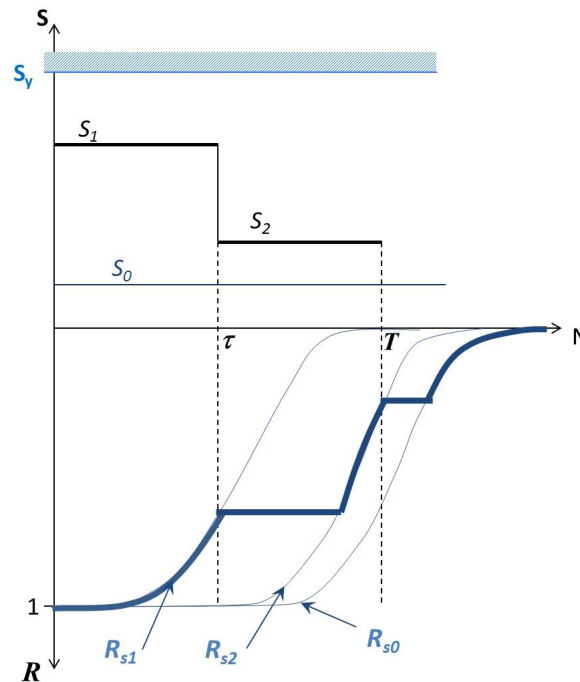


FIGURE 5.1: Fiabilité en fonction du plan d'essai en contraintes échelonnées décroissantes

Dans cette partie, on optimise un plan d'essai pour l'application des modèles SVA, sous la contrainte que ce plan ait une durée globale bien inférieure aux plans d'essais utilisés actuellement. Les tailles d'échantillons étant déjà très faibles ($n=7$), pour pouvoir appliquer l'inférence statistique, on maintient la taille d'échantillon à la même valeur. Seuls les niveaux de contraintes et les temps par palier feront l'objet de l'optimisation. Plusieurs hypothèses sont posées :

1. On fixe un temps total d'environ 4 millions de cycles, soit un gain de 2 à 3 millions de cycles (30 à 40%) par rapport aux protocoles actuels (résultats montrés au paragraphe 5.3.2). Par conséquent, on censure l'essai pour chaque pièce à $T=600000$ cycles, ce qui implique un traitement de données censurées de Type I (l'essai se termine à une certaine période même sans défaillance apparente).
2. La distribution des nombres de cycles à défaillance est supposée LogNormale de moyenne et écart-type estimés dans le tableau 4.2, avec $\sigma_N = \text{constante}$.

3. Les conditions nominales d'utilisation sont représentées par le niveau de contrainte S_0 qu'on fixe égale à la moyenne de la limite d'endurance $\mu_S = 100$.
4. Le premier palier auquel seront testés les spécimens, S_1 est figé et égal à $130\%S_0$. Cette valeur est fixée pour s'assurer de ne pas modifier le phénomène d'endommagement propre à la fatigue à grand nombre de cycles, i.e. S inférieur à la limite élastique, avec une marge de sécurité, qui par ailleurs peut être vérifiée au préalable par le calcul. La durée du palier, en revanche, est un paramètre à déterminer, τ .
5. Le deuxième palier S_2 est compris entre le premier palier et la valeur nominale S_0 , et est appliqué jusqu'à la censure T .
6. La relation log-linéaire de Basquin est supposée ici.

L'objectif de l'optimisation est de déterminer :

- a. la durée τ du premier palier S_1
- b. la valeur relative du deuxième palier par rapport à S_0 et S_1 , ($S_0 < S_2 < S_1$),

qui permettent de minimiser la variance asymptotique de l'estimation de la fiabilité en conditions nominales, soit,

$$\min (AV[R_{S_0}(n)] | \tau, S_2) \quad (5.1)$$

5.2 Méthodologie d'optimisation

Sous un stress constant nominale, S_0 , la loi de fiabilité des temps à défaillance est :

$$R_{S_0}(\eta) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(\eta) - \gamma^T z_0}{\sigma_N}\right) \quad (5.2)$$

Où selon le modèle SVA, (§.3.2.3.1), $\gamma^T z_i = \gamma_0 - \gamma_1 \ln(S_0) = \ln(A) - b \ln(S_i)$. On peut écrire la variance asymptotique de la fiabilité sous S_0 telle que :

$$\begin{aligned} AV[R_{S_0}(\eta)] &= AV\left[1 - \Phi\left(\frac{\ln(\eta) - \gamma^T z_i}{\sigma_N}\right)\right] \\ &= H^T \cdot F^{-1} \cdot H \end{aligned} \quad (5.3)$$

Où,

$$H = \left[\frac{\partial R_{S_0}(\eta)}{\partial A}, \frac{\partial R_{S_0}(\eta)}{\partial b}, \frac{\partial R_{S_0}(\eta)}{\partial \sigma_N}, \right] \quad (5.4)$$

Et F la matrice de Fisher :

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(A, b, \sigma_N)}{\partial A^2} & -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(A, b, \sigma_N)}{\partial A \partial b} & -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(A, b, \sigma_N)}{\partial A \partial \sigma_N} \\ -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(A, b, \sigma_N)}{\partial A \partial b} & -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(A, b, \sigma_N)}{\partial b^2} & -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(A, b, \sigma_N)}{\partial b \partial \sigma_N} \\ -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(A, b, \sigma_N)}{\partial A \partial \sigma_N} & -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(A, b, \sigma_N)}{\partial b \partial \sigma_N} & -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(A, b, \sigma_N)}{\partial \sigma_N^2} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Pour les n_1 rupture du palier S_1 , les n_2 ruptures du palier S_2 et les n_c censures, la logVraisemblance s'écrit :

$$\ln \mathcal{L}(A, b, \sigma_N) = \ln \left[\prod_{i=1}^{n_1} \varphi_{\ln} \left(\frac{\ln(N_{1i}) - \gamma^T z_1}{\sigma_N} \right) \times \prod_{i=1}^{n_2} \varphi_{\ln} \left(\frac{\ln(N_{2i}) - \ln(\tau) + \ln(\tau^*) - \gamma^T z_2}{\sigma_N} \right) \times \left[1 - \Phi \left(\frac{\ln(T) - \ln(\tau) + \ln(\tau^*) - \gamma^T z_2}{\sigma_N} \right) \right]^{n_c} \right] \quad (5.6)$$

Avec, φ_{\ln} et Φ respectivement les fonctions de densité et de répartition de la loi LogNormale, et $\ln(\tau^*) = R_{S_2}^{-1}(R_{S_1}(\ln(\tau)))$.

5.3 Résultats et plan optimisé

Analytiquement, il est difficile de déterminer la variance asymptotique de la fonction de fiabilité sous contrainte nominale. On se propose donc d'utiliser un plan d'expérience selon différentes valeur de τ et de S_2 , et de déterminer numériquement le minimum de la variance.

Tout d'abord, on borne les paramètres à estimer par un intervalle, afin que le plan d'expérience soit maîtrisable. Pour cela on pose les conditions suivantes :

- On considère 7 pièces suivant le plan d'essai à 2 niveaux ($S_1 > S_2$), avec S_1 durant τ cycles puis S_2 jusqu'à T ,
- On cherche au moins deux défaillances par niveau, selon un risque $\alpha = 5\%$,
- Le niveau nominale S_0 est initialisé à 100, et $S_1 = 130$,
- Les nombres de cycles à rupture suivent une loi LogNormale, soit, la probabilité de défaillance $p = \text{LogN}(\tau | \mu(S); \sigma)$,
- On considère le modèle SVA, avec $\mu(S) = \ln(A) - b \ln(S)$,
- Les paramètres sont $A = 10^{22}$, $b = 8$, $\sigma = 0,62$.

On cherche à déterminer les valeurs de τ et S_2 qui permettent de vérifier les conditions précédentes. On s'appuie sur la loi Binomiale pour déterminer l'intervalle $[\tau_{min}; \tau_{max}]$ vérifiant les 2 défaillances minimum souhaitées par niveau d'essai, soit $k \in [2; 5]$. On

peut donc écrire :

$$\begin{cases} \sum_{i=2}^7 C_7^i p_{min}^i (1 - p_{min})^{7-i} = \alpha/2 = P_{min}^{(2)} \\ \sum_{i=5}^7 C_7^i p_{min}^i (1 - p_{min})^{7-i} = \alpha/2 = P_{min}^{(5)} \end{cases} \quad (5.7)$$

On peut alors déterminer la borne minimum de τ :

$$\ln(\tau_{min}) = \Phi^{-1}(p_{min} | \mu(S_1), \sigma) \quad (5.8)$$

De même pour la borne supérieure :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^2 C_7^i p_{max}^i (1 - p_{max})^{7-i} = \alpha/2 = P_{max}^{(2)} \\ \sum_{i=0}^5 C_7^i p_{max}^i (1 - p_{max})^{7-i} = \alpha/2 = P_{max}^{(5)} \end{cases} \quad (5.9)$$

On peut alors déterminer la borne maximum de τ :

$$\ln(\tau_{max}) = \Phi^{-1}(p_{max} | \mu(S_1), \sigma) \quad (5.10)$$

Ainsi l'intervalle $[S_{2_{min}}(\tau); S_{2_{max}}(\tau)]$ pour déterminer S_2 est issu de :

$$\begin{cases} \sum_{i=2}^5 C_7^i p_{min}^i (1 - p_{min})^{5-i} = \alpha/2 = P_{min}^{(5)} \\ \sum_{i=2}^2 C_7^i p_{min}^i (1 - p_{min})^{5-i} = \alpha/2 = P_{min}^{(2)} \end{cases} \quad (5.11)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^2 C_7^i p_{max}^i (1 - p_{max})^{5-i} = \alpha/2 = P_{max}^{(5)} \\ \sum_{i=0}^2 C_7^i p_{max}^i (1 - p_{max})^{5-i} = \alpha/2 = P_{max}^{(2)} \end{cases} \quad (5.12)$$

Et S_2 est déterminé tel que :

$$p_{min/max} = \Phi(T - \tau | \mu(S_2); \sigma) - \Phi(\tau | \mu(S_2); \sigma) \quad (5.13)$$

On discrétise les valeurs de τ et de S_2 dans les intervalles déterminés précédemment :

- $\tau = [38000; 400000]$,
- $S_2 = [103; 125]$,

Des échantillons en contraintes échelonnées à échelon négatif sont générés par combinaisons de ces deux valeurs. La procédure de recherche de la fiabilité à S_0 est engagée, et l'on observe la variance minimale sur les estimations : les résultats sont présentés sur le graphique 5.2

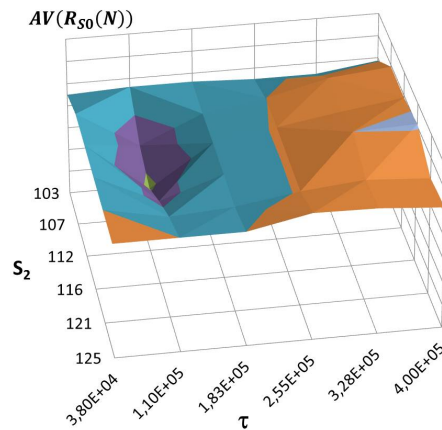


FIGURE 5.2: Variance asymptotique de la fiabilité en fonction de τ et S_2

Par optimisation, sur un millier de répétitions pour chaque combinaison de paramètre du plan, on obtient les valeurs du plan optimisé suivantes :

- $\tau = 110000$ cycles,
- $S_2 = 112\%S_0$.

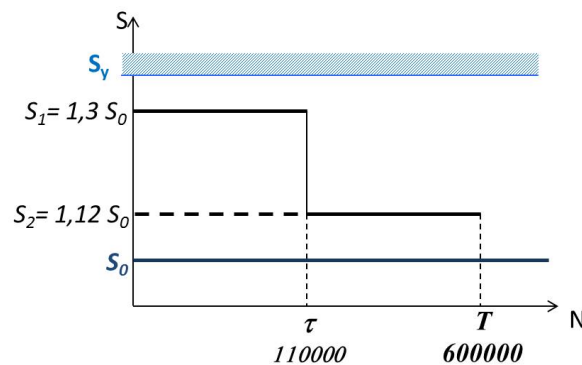
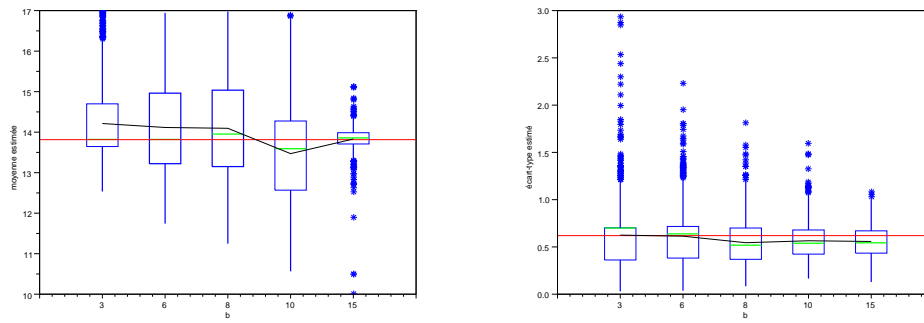


FIGURE 5.3: Valeurs du plan d'essai optimisé

5.3.1 Qualité de l'estimation

On montre dans cette partie les estimations de moyenne et écart-type de la distribution lognormale des nombres de cycles à défaillance par la méthode SVA, à partir de données issues du plan d'essai optimisé. On observe, grâce aux résultats présentés en figure 5.4, que l'on obtient de bonnes estimations des paramètres sans impact de la pente de Basquin, mais l'on observe également une grande variabilité des estimations.

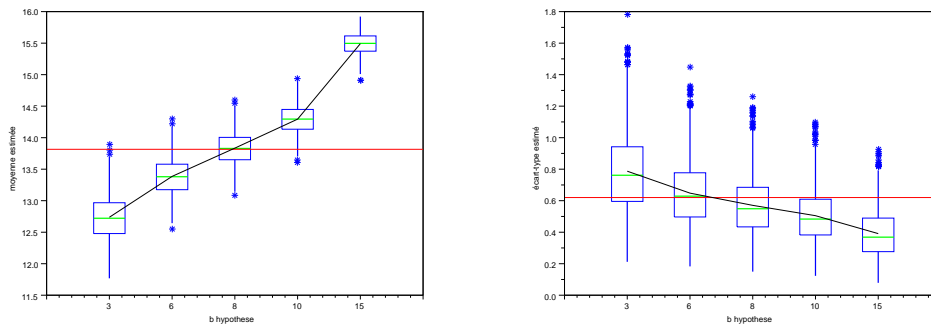
On se propose de fixer le paramètre b de Basquin à différentes valeurs $b = (3, 6, 10, 15)$ et de n'estimer que les deux paramètres A et σ des modèles SVA pour observer la qualité d'estimation de la moyenne et de l'écart-type. Les essais ont donc été



(a) Estimation de la moyenne par SVA sur plan optimisé (b) Estimation de l'écart-type par SVA sur plan optimisé

FIGURE 5.4: Qualité d'estimation des modèles SVA sur le plan optimisé (7 pièces)

simulés avec une pente égale à 8, et l'estimation est effectuée par Maximum de Vraisemblance avec une pente (paramètre b) fixée successivement aux valeurs 3, 6, 8, 10 et 15, pour simuler l'erreur d'hypothèse. Les résultats sont présentés en figure 5.5 :



(a) Estimation de la moyenne par SVA sur plan optimisé (b) Estimation de l'écart-type par SVA sur plan optimisé

FIGURE 5.5: Qualité d'estimation des modèles SVA sur le plan optimisé (7 pièces), hypothèse de b fixé

Compte tenu du biais induit, on observe que l'hypothèse sur Basquin est véritablement déterminante pour l'estimation des paramètres : on ne peut donc pas se permettre d'admettre a priori la pente de Basquin comme fixée.

5.3.2 Gain attendu

Dans les mêmes conditions que les protocoles actuellement utilisées chez PSA on peut estimer le gain en terme de nombres de cycles attendu avec le nouveau plan optimisé. Le tableau 5.1 montre le nombre moyen de cycles nécessaire au protocole optimisé en

comparaison avec les résultats des plans d'essai classiques. Les résultats sont donnés pour les différents protocoles en considérant une pente de Basquin de 8.

Protocoles 7 pièces	StairCase	StairCase-Locati	Locati	Locati +	Plan Optimisé
Temps Moyen (nombres de cycles)	6,7 .10 ⁶	7,0 .10 ⁶	8,1 .10 ⁶	6,24 .10 ⁶	2,0 .10 ⁶
Delta (%) par rapport au SC-L	- 4,5%	--	+ 15%	- 10%	- 71%

TABLE 5.1: Gain en nombre de cycles du plan d'essai optimisé

Il est donc attendu un gain très important en terme temps de cycles avec le plan optimisé, ainsi qu'en terme de qualité d'estimation puisque la qualité d'estimation par SVA est indépendante de la valeur de la pente de Basquin

5.4 Validation expérimentale

L'objectif de cette partie est de vérifier expérimentalement sur une pièce connue, à la fois le protocole d'essai optimisé et l'estimation par la méthode SVA.

5.4.1 Choix du système

Afin de comparer les résultats expérimentaux du plan d'essai optimisé, il nous faut choisir une pièce :

- dont la géométrie est simple,
- dont les modes de défaillance sont connus,
- pour laquelle l'essai est facile à mettre en place : de préférence demandant un seul vérin et dont l'effort est appliqué dans une direction fixe,
- et pour laquelle on dispose de données d'essais antérieurs, obtenues avec d'anciens protocoles et d'anciennes méthodes d'estimation.

On note qu'il s'agit bien ici de valider la procédure, et non de valider la conception de la pièce qui est déjà en production série depuis des années.

Le choix s'est porté sur un triangle avant droit (cf. figure 5.6) dont on connaît bien les zones faibles susceptibles de manifester une fissuration en fatigue.

On a à disposition les contrats d'essais effectués dans les phases de validation, ainsi que les résultats d'essais effectués aux différentes phases de conception. On connaît donc les estimations de moyenne m^* et coefficient de variation q^* du tableau 5.2 pour un client référence F_n unitaire :

Pour rappel, nous avons conclu que le plan était optimal lorsque le premier palier est 1,3 fois plus élevé que la limite d'endurance et avait une durée de 110 000 cycles. Ici,

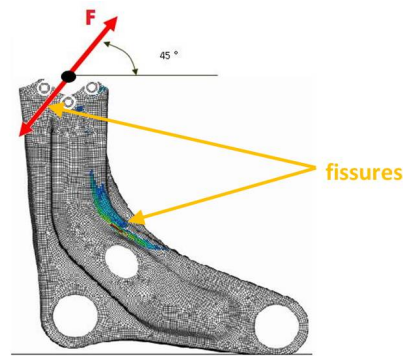
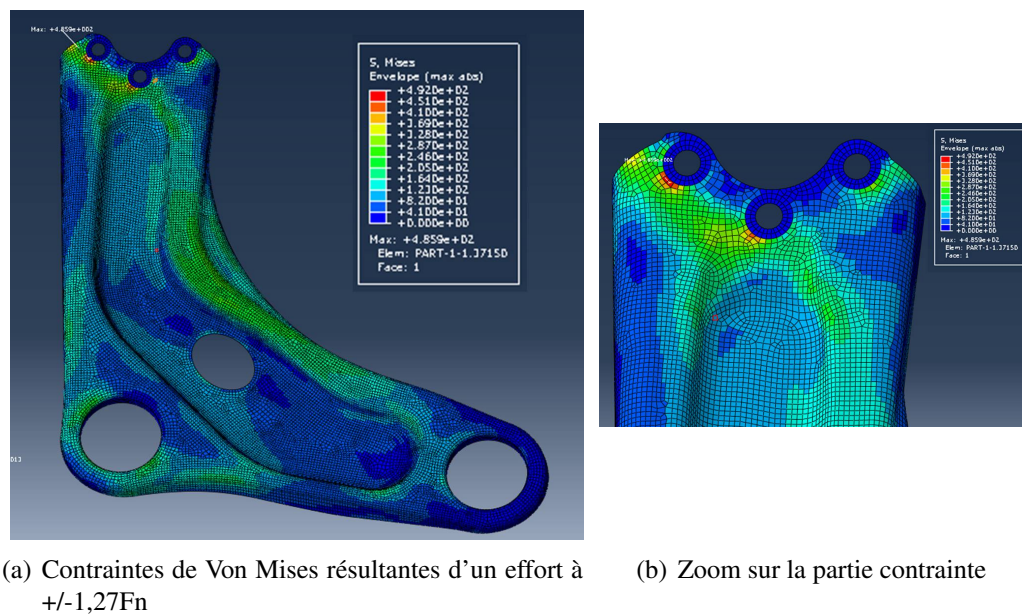


FIGURE 5.6: Triangle pour validation expérimentale

TABLE 5.2: Retour d'expérience sur le triangle

Phase	Protocole	taille d'échantillon	Estimateurs	
			m^*	q^*
1	Locati	4	1,40	0,05
2	Locati	6	1,30	0,17
3	StairCase-Locati	3	1,42	0,10
4	StairCase-Locati	7	1,49	0,06

d'après les résultats d'essai de la dernière phase de conception, la limite d'endurance est estimée à $1,49F_n$. Cependant en phase de conception d'une pièce de LAS, on ne connaît pas sa limite d'endurance, on supposera donc que la pièce tient l'objectif de $1,27F_n$, et donc le premier niveau du plan serait de $1,65F_n$. On cherche à vérifier que ce niveau sévère d'effort n'endommage pas le triangle dans le domaine plastique : les résultats du calcul numérique sont présentés en figure 5.7 dans le cas le plus sévère ($-1,65F_n$).

(a) Contraintes de Von Mises résultantes d'un effort à $\pm 1,27F_n$

(b) Zoom sur la partie contrainte

FIGURE 5.7: Contraintes de Von Mises par calcul éléments-finis sur le triangle

Les caractéristiques matériau nous informe d'une limite élastique minimum garantie de 492 MPa : le résultat numérique montre une contrainte maximale (équivalent au sens Von Mises) de 486 MPa. On assure ainsi de ne pas provoquer de plasticité et on évite de changer de mode de défaillance même en appliquant un effort maximal à 1,65 Fn. La figure 5.8 résume le plan d'essai appliqué au triangle.

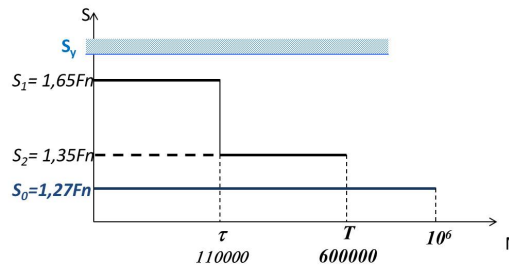


FIGURE 5.8: Plan d'essai de validation appliqué au triangle

5.4.2 Résultats des expérimentations

Au jour de l'écriture de ce mémoire, 7 pièces ont été testées selon le plan optimisé présenté ci-dessus. Les résultats des nombres de cycles effectués par chacune sont présentés en tableau 5.3, les pièces défaillantes ont un diagnostic égal à 1, les censurés égal à 0.

TABLE 5.3: Résultats de l'essai optimisé sur triangle

N° pièce	diagnostic	Nb cycles
1	1	903 000
2	1	1 090 000
3	1	1 243 000
4	1	855 000
5	0	1 900 000
6	1	1 141 000
7	1	1 783 000

Comme on pouvait le prévoir, les ruptures n'ont lieu qu'au niveau de sollicitation nominal (1,27 Fn) puisque la pièce n'est pas assez endommagée par les deux premiers niveaux de sollicitation. On rappelle ici qu'au préalable, par les essais StairCase-Locati, la tenue de la pièce avait été estimée à 1,49Fn et que le plan avait été optimisé pour une tenue nominale de 1,27Fn.

On souhaite appliquer aux résultats de l'essai l'estimation SVA. Il est clair que les défaillances intervenant toutes au même niveau de sollicitation, la fonction de transfert du modèle (équation de Basquin) ne peut être déterminée par Maximum de Vraisemblance. On propose donc d'ajouter aux résultats précédents une pièce testée en contrainte constante au niveau maximal d'essai (tableau 5.4).

TABLE 5.4: Résultats de l'essai en contrainte constante sur triangle

N° pièce	diagnostic	Sollicitation	Nb cycles
8	1	1,65Fn	933 000

Par la méthode SVA on détermine la fonction de fiabilité LogNormale (cf. figure 5.9) ainsi que les paramètres de la distribution des nombres de cycles à défaillance (cf. tableau 5.5) au niveau de contrainte usuel : 1,27Fn.

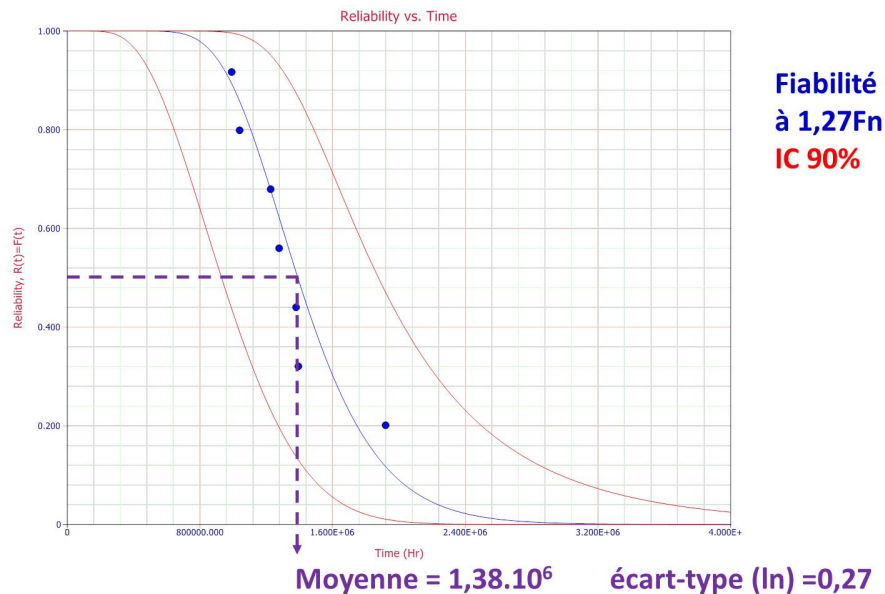


FIGURE 5.9: Estimation de la fonction de Fiabilité à 1,27Fn

TABLE 5.5: Résultats de l'estimation LogNormale de durée de vie du triangle

Moyenne	Ecart-type	ln(A)	b
14,145	0,271	14,497	1,473

On peut vérifier l'estimation effectuée avec les résultats de l'estimation StairCase-Locati. On sait que la tenue estimée était de 1,49Fn à 1 million de cycles. On va donc à partir des estimations du tableau 5.5, estimer la tenue à 1,49Fn par $N = e^{(\ln(A)-b.\ln(1,49))}$. On estime alors la moyenne des nombres de cycles à rupture à 1,090 millions de cycles au niveau 1,49Fn, ce qui est proche de l'estimation préalable PSA.

En revanche on observe qu'il n'existe pas de gain en terme de temps d'essai : pour cette campagne de 7 pièces, on a comptabilisé 8,91 millions de cycles contre 7,75 pour le StairCase-Locati. On peut réduire ce compte en diminuant le niveau de censure. Mais on peut également définir un nouveau plan d'essai optimisé, basé sur la connaissance préalable de la tenue potentielle de la pièce (résultats d'essais en phase de conception antérieure, essais sur pièces similaires, résultats du calcul numérique...).

De la même manière que développé dans les parties 5.1 à 5.3, on optimise un nouveau plan d'essai, mais avec les contraintes suivantes :

- la loi de distribution des nombres de cycles à défaillance est LogNormale,

- le niveau maximum ne peut pas dépasser $1,65Fn$ sans risque de dépassement de la limite d'élasticité et d'endommagement de la pièce,
- le niveau considéré comme nominal est de $1,49Fn$,
- le temps de l'essai doit être, comme précédemment cité, nettement inférieur aux essais actuels : on fixera donc un temps d'essai d'environ 600 000 cycles par pièce, et d'au maximum 1 million de cycles.

Après optimisation, le nouveau plan, appelé par la suite Locati^{-1} , spécifique aux résultats de notre expérimentation sur le triangle, sera donc construit comme le présente la figure 5.10.

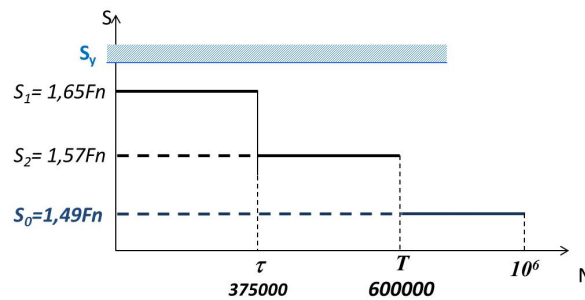


FIGURE 5.10: Locati^{-1} appliqué au triangle

Les essais expérimentaux sont en cours, au jour de la rédaction de ce mémoire. La validation du plan Locati^{-1} est donc soumise à caution.

L'étape de validation expérimentale, est un exemple qui montre bien l'importance de la connaissance acquise avant l'essai. Dans le chapitre suivant, on propose d'intégrer cette connaissance pour l'estimation de la fiabilité grâce à l'application des méthodes Bayésiennes.

Estimation de la fiabilité par les méthodes Bayésiennes

Comme introduit dans la partie Théorie de l'Estimation, (§.2.1.4.3), l'approche Bayésienne permet :

- d'utiliser le maximum de connaissance disponible, à partir de résultats d'essai sur des données similaires, ou sur des données issues de l'expertise, comme par exemple la reconduction d'un système similaire, ou encore les résultats des essais effectués à une phase antérieure de conception,
- d'intégrer la connaissance à des résultats d'essais dont la taille d'échantillon est souvent très faible,
- d'obtenir des intervalles de confiance plus précis sur les estimations.

Même s'il existe de nombreuses sources de données de fiabilité (recueils, avis d'experts, campagnes d'essais), dans le domaine de la fatigue des assemblages métalliques il reste très difficile de modéliser la connaissance a priori sur les divers paramètres, notamment du fait des différentes géométries, des divers procédés de fabrication, différents matériaux, etc. L'inférence Bayésienne repose pourtant sur cette modélisation de la connaissance.

Par inférence Bayésienne on entend toute démarche qui permet de calculer ou réviser une hypothèse, et permet de traduire numériquement la connaissance (confiance accordée à une hypothèse).

Le théorème de Bayès (équation 2.28) permet de combiner l'information subjective, i.e. incertitude sur l'occurrence d'un évènement, information a priori $g(\theta)$, avec l'information objective, i.e. valorisation des données issues d'essais (X) sur le système par la fonction de vraisemblance $\mathcal{L}(X|\theta)$, dans une information a posteriori $g(\theta|X)$.

Dans ce chapitre on présentera l'application de l'approche Bayésienne pour l'estimation à partir d'un essai StairCase (§.6.1.1) et d'un Locati (§.6.1.2), avec une application directe ; puis l'estimation Bayésienne des paramètres inconnus des modèles SVA (partie 6.2), avec l'application tout d'abord au Locati (§.6.2.1) puis au plan d'essai optimisé présenté au paragraphe 5.3 (§.6.2.2). Les applications au StairCase-Locati ne sont pas présentées ici puisque similaires aux résultats Locati.

6.1 Estimation Bayésienne de la limite d'endurance

On applique ici la méthode d'estimation Bayésienne des paramètres de loi caractéristique de la limite d'endurance à partir de résultats d'un essai StairCase (cf. §.6.1.1), puis d'un Locati (cf. §.6.1.2) que l'on compare aux estimations classiques (méthodes PSA). L'application au cas du StairCase-Locati n'est pas montrée ici puisque comparable en tous points au cas du Locati.

6.1.1 Estimation Bayésienne à partir de données StairCase

6.1.1.1 Théorème de Bayes

Soit le résultat d'un essai StairCase :

$S = S_1, \dots, S_i, \dots, S_n$, les niveaux de sollicitation,

$\Delta = \delta_1, \dots, \delta_i, \dots, \delta_n$, les ruptures ($\delta_i = 1$) ou non-ruptures ($\delta_i = 0$),

La vraisemblance, pour une loi donnée $F(X, \theta)$, avec $X = (S, \Delta)$ s'écrit :

$$\mathcal{L}(S|\theta) = \prod_{i=1}^n (F(S_i, \theta))^{\delta_i} \times (1 - F(S_i, \theta))^{1-\delta_i} \quad (6.1)$$

Dans le cas où l'on dispose de la connaissance a priori sur θ , il est possible de faire une estimation Bayésienne. Considérons un a priori indépendant pour chaque paramètre : $g(\theta) = g_{\theta_1}(\theta_1) \cdot g_{\theta_2}(\theta_2) \dots$. Le théorème de Bayes permet d'écrire la distribution a posteriori comme le produit entre l'information a priori ($g(\theta)$) et l'information obtenue à partir de l'essai à travers la vraisemblance ($\mathcal{L}(X|\theta)$), le tout divisé par un facteur de normalisation pour obtenir une fonction de densité de probabilité :

$$g(\theta|X) = \frac{\mathcal{L}(X|\theta) \cdot g(\theta)}{\int_{D_\theta} \mathcal{L}(X|\theta) \cdot g(\theta) \cdot d\theta} \quad (6.2)$$

6.1.1.2 Estimation des paramètres et intervalles de confiance

On se positionne dans le cas où la limite d'endurance est définie par une loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Nous sommes donc dans le cas d'une connaissance a priori sur les estimations

de la moyenne et de l'écart-type : $\theta = (m, s)$. On sait alors qu'en considérant m et s indépendants :

$$g(\theta) = g(m, s) = g_m(m) \cdot g_s(s) \quad (6.3)$$

En inférence Bayésienne, le choix le plus important est celui de la distribution a priori. Il s'agit d'une démarche complexe qui doit intégrer toute la connaissance disponible sur les paramètres étudiés et toutes les incertitudes sur ces mêmes paramètres. A partir de la connaissance disponible on définit la distribution susceptible de caractériser l'a priori. Si l'on observe peu de connaissance, une distribution simple non informative sera utilisée. Si la connaissance initiale est importante (e.g. RETEX important) on utilisera une loi plus complexe, mais il est rare de pouvoir déterminer l'exacte formulation de la connaissance a priori. Les lois conjuguées (cf. [Clarotti, 1998], [Procaccia, 1998]), permettent de faciliter le calcul de l'a posteriori en définissant l'a priori et les données dans la même famille de lois. Le tableau 6.1 donne les principales lois conjuguées [Suhner, 1994], [Procaccia et al., 1992].

TABLE 6.1: Exemples de lois conjuguées Bayésiennes

$f(x \theta)$	$g(\theta)$	$g(\theta x)$
Normale $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$	Normale $\mathcal{N}(\mu, \tau^2)$	$\mathcal{N}(x/\sigma^2 + \mu/\tau^2, [1/\sigma^2 + 1/\tau^2]^{-1})$
Gamma $\mathcal{G}(v, \theta)$	Gamma $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$	Gamma $\mathcal{G}(v + \alpha, \beta + x)$
Poisson $\mathcal{P}(\theta)$	Gamma $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$	Gamma $\mathcal{G}(\alpha + x, \beta + 1)$
Normale $\mathcal{N}(\mu, 1/\theta)$	Gamma $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$	Gamma $\mathcal{G}(\alpha + 0, 5, \beta + (\mu - x)^2 / 2)$
Bêta $\mathcal{B}(\alpha, \theta)$	Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	Gamma $\mathcal{G}(\lambda - \log(1 - x))$

Dans notre cas, on modélise la distribution de la moyenne par une loi normale définie sur $] - \infty; + \infty[$, et la distribution de l'écart-type par une loi Gamma représentée sur $]0; + \infty[$. L'a priori est donc défini par :

$$g(m, s) = \mathcal{N}(m|\mu_m, \sigma_m) \cdot \mathcal{G}(s|\alpha_s, \beta_s) \quad (6.4)$$

Le théorème de Bayès s'écrit :

$$g(m, s|S, \Delta) = \frac{\mathcal{L}(S, \Delta|m, s) \cdot \mathcal{N}(m|\mu_m, \sigma_m) \cdot \mathcal{G}(s|\alpha_s, \beta_s)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(S, \Delta|m, s) \cdot \mathcal{N}(m|\mu_m, \sigma_m) \cdot \mathcal{G}(s|\alpha_s, \beta_s) \cdot dm \cdot ds} \quad (6.5)$$

avec $\mathcal{L}(S, \Delta|m, s) = \prod_1^i \left[\prod_1^j \left(\Phi \left(\frac{S_{ij}-m}{s} \right) \right)^{\delta_i} \times \left(1 - \Phi \left(\frac{S_{ij}-m}{s} \right) \right)^{1-\delta_i} \right]$.

La représentation graphique du théorème de Bayès est présentée en figure 6.1, représentant l'a posteriori dépendant des fonctions marginales indépendantes de chaque paramètre.

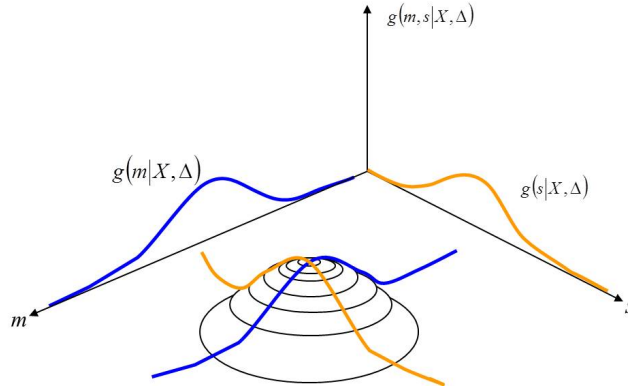


FIGURE 6.1: Représentation du théorème de Bayès pour l'estimation de la limite d'endurance

L'estimation de la moyenne et de l'écart-type nécessite de déterminer les fonctions marginales associées $g(m|S, \Delta)$ et $g(s|S, \Delta)$:

Estimation de la moyenne

$$g(m|S, \Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(m, s|S, \Delta).ds \quad (6.6)$$

On obtient :

$$\begin{cases} \hat{m} = E(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} m.g(m|S, \Delta).dm \\ Var(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} (m - E(m))^2 g(m|S, \Delta).dm \end{cases} \quad (6.7)$$

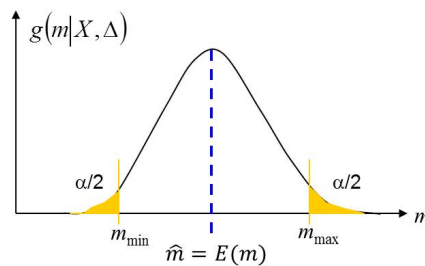


FIGURE 6.2: Intervalles de confiance sur l'estimation de la moyenne

Si $m \in]-\infty; +\infty[$, l'intervalle de confiance sur l'estimation de la moyenne (cf. fi-

gure 6.2 pour un risque α donné est obtenu par :

$$\hat{m} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{Var(m)} \leq m_{1-\alpha} \leq \hat{m} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{Var(m)} \quad (6.8)$$

Estimation de l'écart-type

De la même manière pour l'écart-type on a la fonction marginale :

$$g(s|S, \Delta) = \int_0^{+\infty} g(m, s|S, \Delta).ds \quad (6.9)$$

On a donc l'estimateur de l'écart-type et son intervalle de confiance :

$$\begin{cases} \hat{s} = E(s) = \int_0^{+\infty} s.g(s|S, \Delta).ds \\ Var(s) = \int_0^{+\infty} (s - E(s))^2 g(s|S, \Delta).ds \end{cases} \quad (6.10)$$

Si $s \in]0; +\infty[$, l'intervalle de confiance sur l'estimation de l'écart-type pour un risque α donné est obtenu par :

$$\hat{s} - e^{u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{Var(m)}}{\hat{s}}} \leq s_{1-\alpha} \leq \hat{s} + e^{u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{Var(m)}}{\hat{s}}} \quad (6.11)$$

6.1.1.3 Exemple numérique à partir des résultats d'un StairCase

A partir d'avis d'experts on considère l'a priori du tableau suivant ; correspondant à l'exclusion des valeurs extrêmes de la moyenne et de l'écart-type, autour de leurs moyennes théoriques respectives :

TABLE 6.2: Connaissance à priori

Paramètre	théorie	Limite inférieure	Limite supérieure
m	100	85	115
$s = 1/\theta$	8	4	12

La plupart des sources d'informations comme celle-ci, la donne sous forme d'intervalles. Aussi, nous proposons d'utiliser la méthode des moments. Le principe consiste à déterminer la moyenne et la variance d'une loi uniforme informative bornée par les limites d'intervalles. Ainsi, lorsque l'on dispose d'une information a priori, sur le paramètre ω ,

par son intervalle $[\omega_{min}; \omega_{max}]$, il est possible d'estimer la moyenne et la variance par :

$$E(\omega) = \frac{\omega_{min} + \omega_{max}}{2} \text{ et } Var(\omega) = \frac{(\omega_{max} - \omega_{min})^2}{12} \quad (6.12)$$

$$(6.13)$$

On a donc pour nos deux paramètres m et θ :

$$E(\theta) = \frac{\theta_{min} + \theta_{max}}{2} \text{ et } Var(\theta) = \frac{(\theta_{max} - \theta_{min})^2}{12} \quad (6.14)$$

$$E(m) = \frac{m_{min} + m_{max}}{2} \text{ et } Var(m) = \frac{(m_{max} - m_{min})^2}{12} \quad (6.15)$$

Ensuite nous pouvons estimer les paramètres des lois a priori des distributions de m et θ (respectivement $m \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $s \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta)$) permettant de respecter la moyenne et la variance obtenues ci-dessus.

Les moyenne et variance de la loi normale de la moyenne données par :

$$E^*(m) = \mu \text{ et } Var^*(m) = \sigma^2 \quad (6.16)$$

et les moyennes et variance de loi Gamma de l'écart-type données par :

$$E^*(\theta) = \frac{\alpha}{\beta} \text{ et } Var^*(\theta) = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad (6.17)$$

permettent d'évaluer les paramètres de distribution ($E^*(\omega) = E(\omega)$ et $Var^*(\omega) = Var(\omega)$). L'évaluation des paramètres de distribution de la moyenne est directe, les paramètres α et β de la distribution de l'écart-type sont déduits :

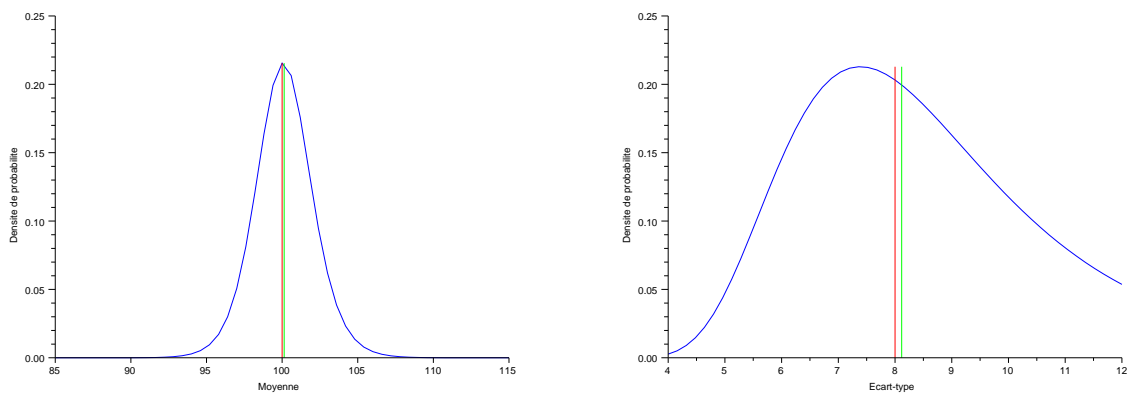
$$\alpha = \frac{3(\theta_{max} + \theta_{min})^2}{(\theta_{max} - \theta_{min})^2} \text{ et } \beta = \frac{6(\theta_{max} + \theta_{min})}{(\theta_{max} - \theta_{min})^2} \quad (6.18)$$

On applique l'estimation bayésienne aux données du StairCase. Les résolutions sont numériques : un exemple de résultat obtenu à partir d'un essai StairCase à 7 pièces est représenté en figure 6.3 et les résultats numériques sont donnés dans le tableau 6.3.

TABLE 6.3: Exemple de résultats numériques obtenus par estimation Bayésienne à partir d'un StairCase à 7 pièces

Paramètre estimé	Valeur théorique	Estimateur pontuel	Ecart-type de l'estimateur
Moyenne m	100	100,13	2,01
Ecart-type s	8	8,11	1,75

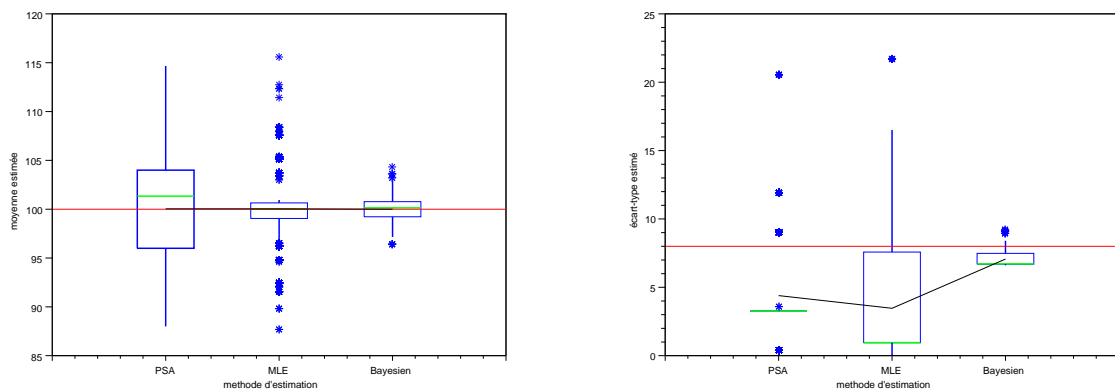
On détermine les 1000 estimateurs bayésiens de moyenne et d'écart-type pour les



(a) Estimation Bayésienne de la moyenne à partir d'un SC (b) Estimation Bayésienne de l'écart-type à partir d'un SC

FIGURE 6.3: Estimation Bayésienne des moyenne et écart-type d'un SC (7pièces)

échantillons de taille $n=7$ générés, que l'on compare à l'estimation classique, et à l'estimation MLE déjà présentée au chapitre 4. La comparaison est représentée en figure 6.4.



(a) Estimation de la moyenne à partir d'un SC

(b) Estimation de l'écart-type à partir d'un SC

FIGURE 6.4: Comparaison des estimations PSA, MLE et Bayésienne des moyenne et écart-type de 1000 SC (7pièces)

Conformément à l'avis d'expert formulé au départ, on aboutit à l'élimination des valeurs extrêmes pour la moyenne, et on recentre l'estimation de l'écart-type. Il paraît évident ici que c'est l'avis d'expert, cohérent avec les valeurs théoriques de simulation, qui permet une très bonne estimation des deux paramètres. On va donc dans la suite observer l'impact de l'a priori dans diverses conditions, plus ou moins cohérentes avec les valeurs des paramètres de simulation théoriques.

Poids de l'a priori

Dans les résultats précédents on s'est positionné dans le cas d'un a priori cohérent (c'est-

à-dire centré sur la valeur théorique) et peu informatif (variance importante), mais on cherche également à observer l'influence d'un a priori :

1. très informatif et cohérent,
2. très informatif et incohérent (e.g. décentré par rapport à la valeur théorique).

Les valeurs a priori et les résultats de l'estimation sont montrés ci-dessous avec pour chaque cas d'a priori, l'exemple de résultats obtenus sur un jeu de données StairCase à 7 pièces, puis l'estimation Bayésienne sur les 1000 jeux de données simulés.

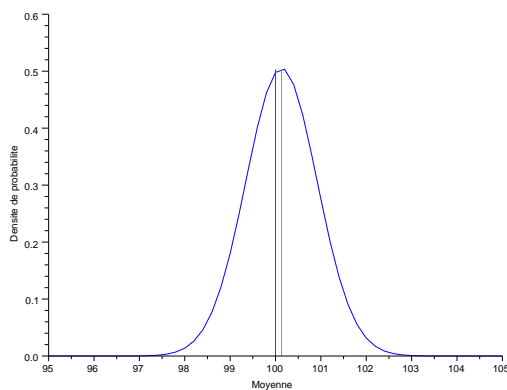
A priori très informatif et cohérent

On considère l'a priori du tableau suivant, dont les intervalles sont idéalement centrés sur la valeur théorique, et très faible autour de celle-ci (variance faible) :

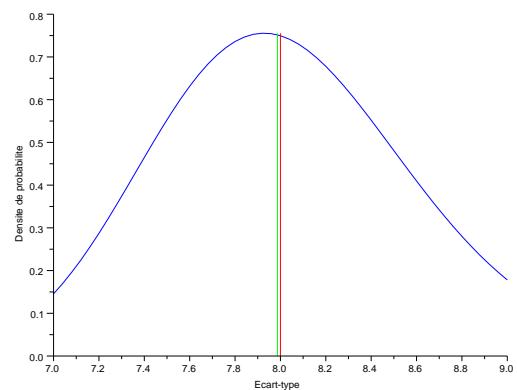
TABLE 6.4: Connaissance à priori très informatif et cohérent

Paramètre	théorie	Limite inférieure	Limite supérieure
m	100	95	105
$s = 1/\theta$	8	7	9

Pour un jeu de donnée on a les résultats d'estimation de moyenne et d'écart-type de la figure 6.5.



(a) Estimation de la moyenne à partir d'un SC



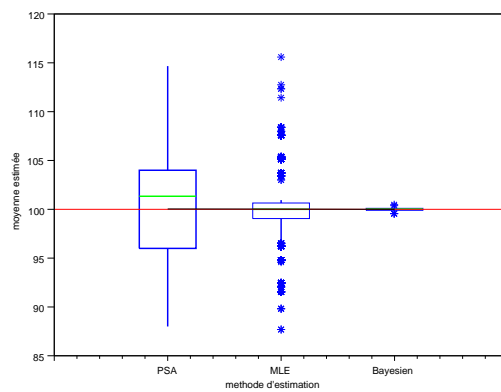
(b) Estimation de l'écart-type à partir d'un SC

FIGURE 6.5: Estimation bayésienne à partir d'un StairCase, en considérant un a priori *cohérent et informatif*

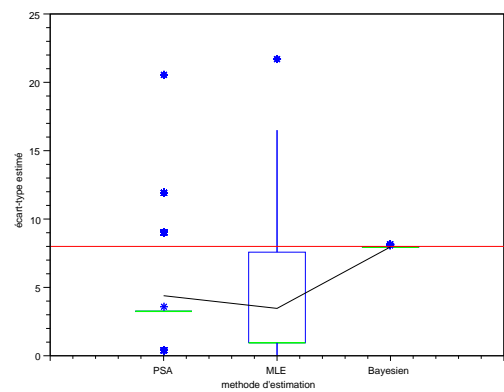
Pour les 1000 jeux de données simulés précédemment, on obtient les résultats de la figure 6.6.

Dans le cas d'un a priori cohérent et très informatif, on constate que :

- les estimateurs ponctuels bayésiens sont très proches des valeurs théoriques,



(a) Estimation de la moyenne à partir d'un SC



(b) Estimation de l'écart-type à partir d'un SC

FIGURE 6.6: Comparaison de l'estimation PSA, MLE et Bayésienne avec a priori *cohérent* et *informatif* (StairCase)

- les écart-types des estimateurs sont faibles, (cela s'explique par le fait que l'information apportée par les résultats d'essai est faible par rapport à celle contenue dans l'a priori).

A priori très informatif et incohérent

On considère un a priori très informatif : c'est à dire que l'étendue des intervalles représentant la connaissance est très réduite (e.g. 10% pour la moyenne ; et incohérent : représenté par des intervalles décentrés par rapport à la valeur théorique. La connaissance a priori est décrite dans le tableau suivant :

TABLE 6.5: Connaissance a priori très informatif et incohérent

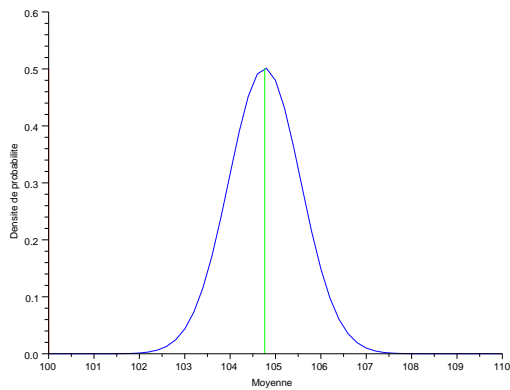
Paramètre	théorie	Limite inférieure	Limite supérieure
m	100	100	110
$s = 1/\theta$	8	8	10

Pour un jeu de données on a les résultats d'estimation de moyenne et d'écart-type de la figure 6.7.

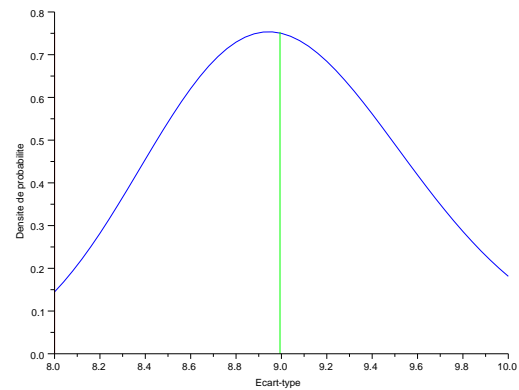
Pour les 1000 jeux de données simulés précédemment, on obtient les résultats de la figure 6.8.

L'information forte a priori s'impose face aux résultats d'essai, notamment du fait de la petite taille d'échantillon. Ainsi, du fait de l'erreur sur l'intervalle de l'a priori par rapport à la valeur théorique de chaque paramètre, on observe que les résultats sont décalés par rapport à ces valeurs théoriques.

- les estimateurs ponctuels sont sur-évalués,

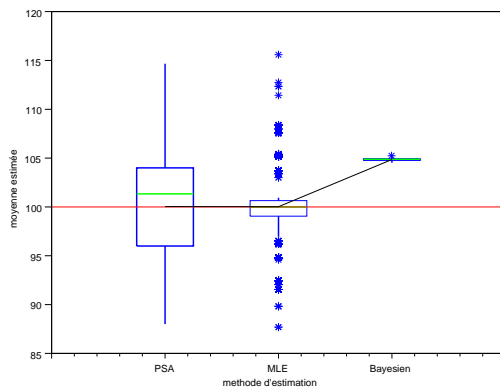


(a) Estimation de la moyenne à partir d'un SC

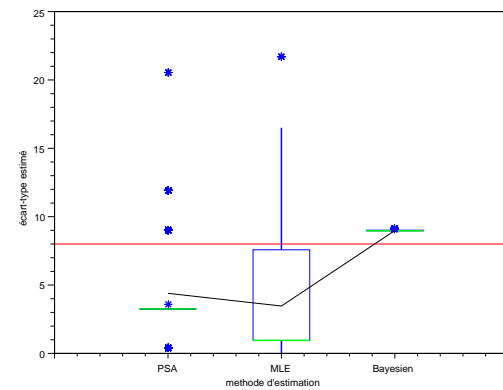


(b) Estimation de l'écart-type à partir d'un SC

FIGURE 6.7: Estimation bayésienne à partir d'un StairCase, en considérant un a priori *incohérent et informatif*



(a) Estimation de la moyenne à partir d'un SC



(b) Estimation de l'écart-type à partir d'un SC

FIGURE 6.8: Comparaison de l'estimation PSA, MLE et Bayésienne avec a priori *incohérent et informatif* (StairCase)

- l'a priori étant très informatif les écart-types sont faibles et donc les intervalles de confiance serrés, mais décentrés.

On en conclue que la connaissance objective donnée par la vraisemblance est dégradée par le choix du mauvais a priori. La décision a posteriori peut donc être erronée. Dans ce cas, une approche présentée dans [Usureau, 2001] et décrite en section 2.1.4.3, permet de pondérer l'information a priori en fonction de la compatibilité entre l'a priori et la vraisemblance. Dans le paragraphe suivant nous appliquons cette approche aux cas présentés précédemment.

Estimation Bayésienne avec pondération de l'a priori. Application au StairCase

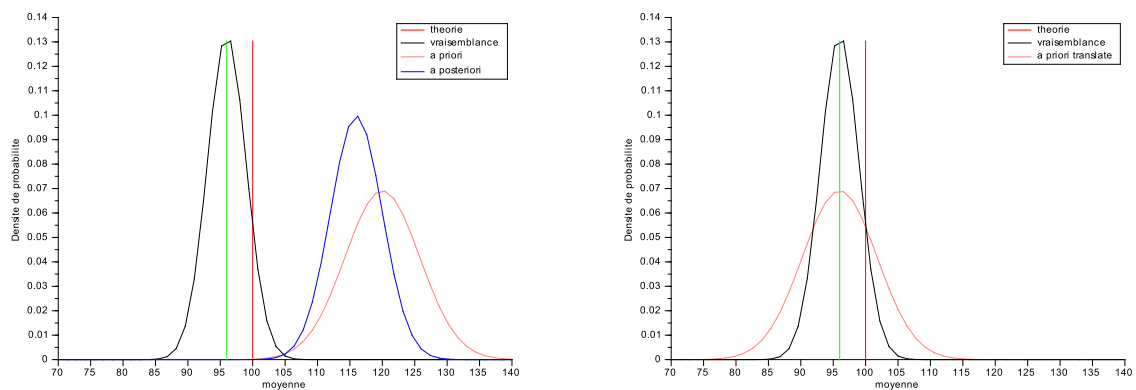
Comme présenté en partie 4.3, l'estimation par MLE à partir de données issues d'un protocole StairCase à 7 pièces ne permet pas d'obtenir une estimation de l'écart-type de la limite d'endurance, on va donc ici montrer l'intérêt de la pondération de l'a priori uniquement sur l'estimation de la moyenne.

On considère pour cela un a priori informatif et incohérent pour la moyenne (cf. tableau 6.6).

TABLE 6.6: Connaissance à priori informatif et incohérent

Paramètre	théorie	Limite inférieure	Limite supérieure
m	100	110	130
s	8	7	9

En appliquant la procédure développée dans les paragraphes précédents, on détermine les estimations de moyenne (cf. figure 6.9(a), estimation en bleu) et d'écart-type par l'inférence Bayésienne. En comparant la vraisemblance des données avec l'a priori (cf. figure 6.9(a)) on observe bien l'incohérence de l'a priori avec la vraisemblance. On applique donc l'estimation de la compatibilité (étape de translation de l'a priori, figure 6.9(b)) afin de pondérer l'a priori.



(a) Position de l'a priori par rapport à la vraisemblance (b) Translation de l'a priori pour la détermination de K

FIGURE 6.9: Étapes de translation de l'a priori pour l'estimation du facteur de compatibilité K

Les estimations pour la moyenne sont données dans le tableau 6.7 et présentées en figure 6.10 à partir de l'a priori pondéré.

On observe pour cet exemple un facteur K très faible, ce qui est clairement représentatif de l'a priori fixé au départ très incohérent avec la théorie. On observe donc que l'a

TABLE 6.7: Estimation Bayésienne après pondération de l'a priori

Paramètre	théorie	K	Estimateur ponctuel	écart-type
m	100	0,18	104,3	5,7

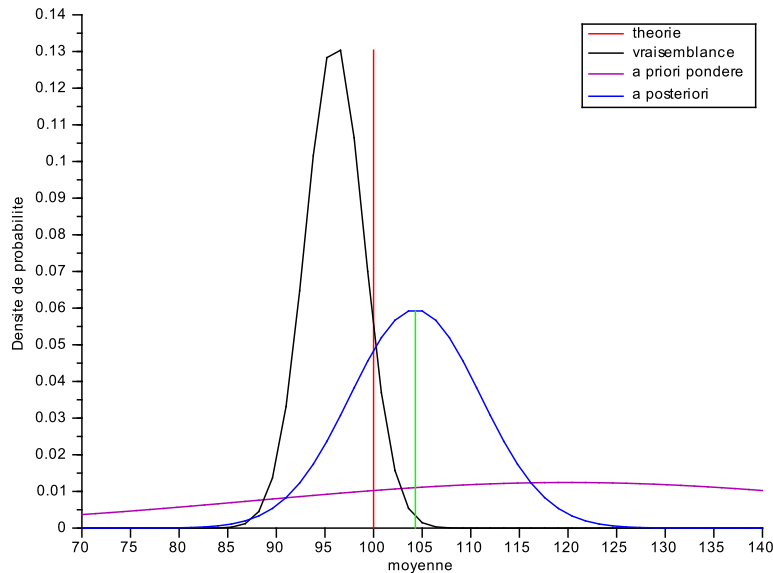


FIGURE 6.10: Estimation Bayésienne de la moyenne après pondération de l'a priori

priori est clairement moins pris en compte dans l'estimation Bayésienne de la moyenne grâce à la pondération de l'a priori et permet ainsi d'avoir une estimation de la moyenne moins biaisée en ne prenant presque pas en compte l'a priori.

La méthode de pondération de l'a priori sera par la suite appliquée et détaillée dans les cas qui nous intéressent tout particulièrement lors de l'estimation à partir de données Locati (cf. §.6.1.2) et dans le cadre d'application des modèles SVA (cf. section 6.2).

6.1.2 Estimation Bayésienne à partir de données Locati

6.1.2.1 Théorème de Bayès

Soit les résultats d'essai d'un protocole Locati, à la suite duquel nous obtenons les différents niveaux de contraintes avec un nombre de cycles associé, subit par chacune des pièces, comme le montre la figure 6.11.

On observe :

- i niveaux de contrainte S_i consécutifs pour chaque pièce j
- N_i cycles à chaque niveau
- N_{ij} cycles au niveau S_{ij} auquel on observe la défaillance

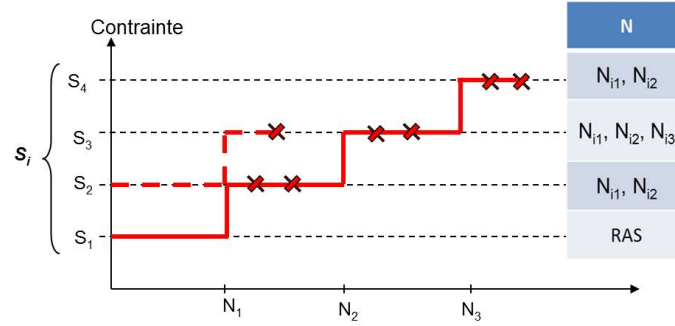


FIGURE 6.11: Résultats d'un protocole Locati

La vraisemblance s'écrit :

$$L(\mu(N), \sigma(N)) = \prod_1^i \left[\prod_1^j \left(\varphi \left(\frac{S_{ij} - \mu(N_{ij})}{\sigma(N_{ij})} \right) \right) \right] \quad (6.19)$$

où :

$$- \mu(N_{ij}) = \left(\frac{A}{N_{eq}} \right)^{\frac{1}{b}},$$

Avec

$$N_{eq} = N_{ij} + \left[\sum_{k=1}^{i-1} \left(N_k \cdot \left(\frac{S_k}{S_{ij}} \right)^b \right) \right] \quad (6.20)$$

- $\sigma(N_{ij}) = q\mu(N_{ij})$ selon l'hypothèse considérée (constance du coefficient de variation)

Les paramètres à optimiser sont A , b et q . On écrit le théorème de Bayes tel que :

$$g(A, b, q|S, N) = \frac{\mathcal{L}(N, S|A, b, q) \cdot g_A(A) \cdot g_b(b) \cdot g_q(q)}{\int_{D_A} \int_{D_b} \int_{D_q} \mathcal{L}(N, S|A, b, q) \cdot g_A(A) \cdot g_b(b) \cdot g_q(q) \cdot dA \cdot db \cdot dq} \quad (6.21)$$

6.1.2.2 Estimation des paramètres et intervalles de confiance

Comme pour le cas du StairCase on se situe dans le cas d'une limite d'endurance définie par une loi normale. Cependant dans le cas du Locati, les paramètres sur lesquels on possède un a priori ne sont pas les paramètres de moyenne et écart-type de la limite d'endurance, mais les paramètres de Basquin (A et b) et le coefficient de variation de la limite d'endurance (q), $\theta = (A, b, q)$.

Comme pour les estimations de moyenne et écart-type du StairCase on a ici pour chaque paramètre θ_i la fonction marginale :

$$g(\theta_i|S, N) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta|S, N) \cdot d\theta_i \quad (6.22)$$

Et l'on obtient :

$$\begin{cases} \hat{\theta}_i = E(\theta_i) = \int_{D_{\theta_i}} \theta_i \cdot g(\theta_i | S, N) \cdot d\theta_i \\ \text{Var}(\theta_i) = \int_{D_{\theta_i}} (\theta_i - E(\theta_i))^2 g(\theta_i | S, N) \cdot d\theta_i \end{cases} \quad (6.23)$$

Si $\theta_i \in] - \infty; +\infty[$, l'intervalle de confiance sur l'estimation du paramètre pour un risque α donné est obtenu par :

$$\hat{\theta}_i - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\text{Var}(\theta_i)} \leq \theta_{i-\alpha} \leq \hat{\theta}_i + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\text{Var}(\theta_i)} \quad (6.24)$$

6.1.2.3 Exemple numérique à partir de données Locati

A priori informatif et cohérent

On considère tout d'abord un a priori cohérent et informatif, tel que décrit dans le tableau 6.8 :

TABLE 6.8: Connaissance a priori informatif et cohérent

Paramètre	théorie	Limite inférieure	Limite supérieure
A	10^{22}	10^{20}	10^{24}
b	8	6	10
q	0,08	0,06	0,10

Comme pour l'exemple du StairCase (cf. paragraphe 6.1.1.3) on définit les moyennes et variances de chaque paramètre par la méthode des moments. Pour chaque paramètre $\theta_i = (A, b, q)$:

$$E(\theta_i) = \frac{\theta_{i_{min}} + \theta_{i_{max}}}{2} \quad \text{et} \quad \text{Var}(\theta_i) = \frac{(\theta_{i_{max}} - \theta_{i_{min}})^2}{12} \quad (6.25)$$

Chacun des paramètres étant supposé normalement distribué, on a donc :

$$E(\theta_i) = \mu_{\theta_i} \quad \text{et} \quad \text{Var}(\theta_i) = \sigma_{\theta_i}^2 \quad (6.26)$$

On applique l'inférence Bayésienne, les résolutions sont numériques. Un exemple de résultat à partir d'un jeu de données Locati est montré en figure 6.12 et les résultats numériques sont présentés dans le tableau 6.9.

Pour comparer les résultats de l'approche Bayésienne avec l'approche MLE, on montre dans le tableau 6.10 l'estimation de moyenne, $m = (A/10^6)^{1/b}$, et d'écart-type, $\sigma = q * m$, de la limite d'endurance à partir de l'approche Bayésienne que l'on compare

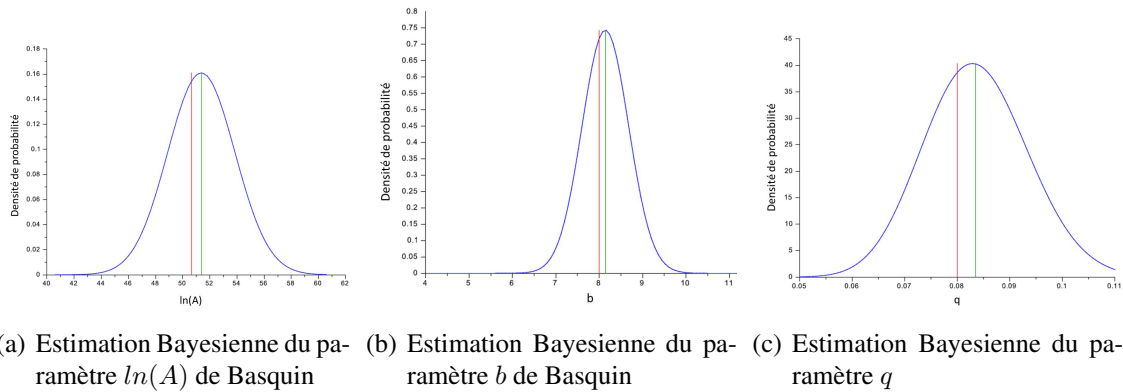


FIGURE 6.12: Estimation Bayésienne des paramètres de la limite d'endurance, Locati 7 pièces

TABLE 6.9: Estimation Bayésienne à partir d'un Locati 7 pièces

Paramètre	théorie	Estimateur ponctuel	écart-type
$\ln(A)$	50,65	51,38	2,47
b	8	8,14	0,53
q	0,08	0,0834	0,0097

aux estimations par MLE. On observe bien l'impact de l'a priori cohérent sur l'estimation de la limite d'endurance puisque l'erreur d'estimation se réduit. En ce qui concerne l'écart-type, l'estimation n'est pas meilleure mais l'erreur n'augmente pas.

TABLE 6.10: Estimation Bayésienne et par MLE à partir d'un Locati 7 pièces

Paramètre	théorie	Estimation MLE	Estimation Bayésienne
m	100	103,21	100,79
σ	8	7,57	8,41

A priori incohérent

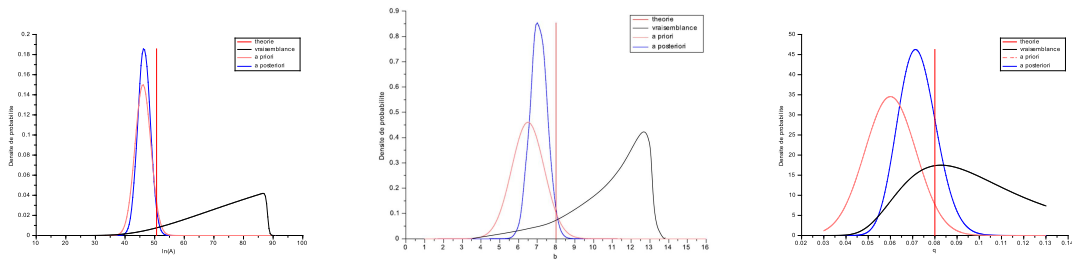
Afin de statuer sur la possibilité d'application de cette méthode, on cherche à observer la qualité de l'estimation à partir d'un a priori incohérent : pour cela on se propose d'initialiser l'a priori comme décrit dans le tableau 6.11.

On applique la démarche Bayésienne à partir de l'a priori décrit précédemment à des données d'un essai Locati à 7 pièces. Les estimations des paramètres A , b et q sont représentées en figure 6.13. Pour chaque paramètre est représenté la vraisemblance, l'a priori et l'a posteriori estimé, ainsi que sa valeur théorique.

On observe bien ici l'erreur d'estimation par rapport à la théorie : en appliquant la technique de pondération de l'a priori, qui permet de le rendre moins informatif, on estime

TABLE 6.11: Connaissance a priori incohérent

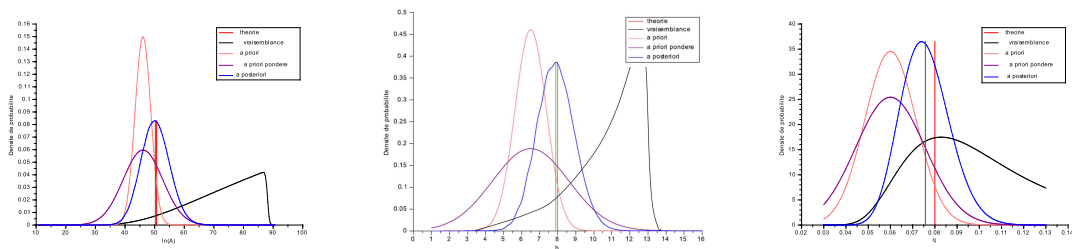
Paramètre	théorie	Limite inférieure	Limite supérieure
$\ln(A)$	50, 65	41.44	50.65
b	8	5	8
q	0,08	0,04	0,08



(a) Estimation Bayésienne du paramètre $\ln(A)$ de Basquin (b) Estimation Bayésienne du paramètre b de Basquin (c) Estimation Bayésienne du paramètre q

FIGURE 6.13: Estimation Bayésienne sans pondération, Locati 7 pièces

à nouveau les paramètres du modèle (cf. figure 6.14) et l'on obtient les paramètres de moyenne et écart-type de la limite d'endurance à partir des estimations ponctuelles des paramètres du modèle. Les résultats sont présentés dans le tableau 6.12, à travers lequel on observe bien l'apport de la méthode Bayésienne en terme de qualité d'estimation.



(a) Estimation Bayésienne pondérée du paramètre $\ln(A)$ de Basquin (b) Estimation Bayésienne pondérée du paramètre b de Basquin (c) Estimation Bayésienne pondérée du paramètre q

FIGURE 6.14: Estimation Bayésienne pondérée, Locati 7 pièces

TABLE 6.12: Estimation Bayésienne, après pondération, à partir d'un Locati 7 pièces

Paramètre	théorie	Estimation Bayésienne
$m = (A/10^6)^{1/b}$	100	99,84
$\sigma = q * m$	8	7,56

6.2 Estimation Bayésienne dans le cadre des SVA

On applique ici la méthode de l'inférence Bayésienne dans le cadre de l'application des modèles SVA. Cette démarche est intéressante dans notre cas, puisqu'elle permet de prendre en compte tous les résultats et toute l'information disponible, notamment les avis d'expert et l'usage sur la pente de Basquin. On applique la méthodologie aux résultats d'un essai Locati (cf. 6.2.1) puis aux résultats de l'essai optimisé développé au paragraphe 5.3 (cf. 6.2.2).

6.2.1 Estimation Bayésienne à partir de données Locati (SVA)

La situation d'application de l'inférence Bayésienne dans le cadre des modèles SVA appliqués au Locati est en tout point identique à son application dans le cadre de l'estimation de la limite d'endurance développée au chapitre 6.1.2. Dans le cas d'une distribution lognormale des nombres de cycles à défaillance, la vraisemblance s'écrit (cf. Annexe A.1) :

$$L(\gamma, \sigma_N) = \prod_1^j \left[\prod_1^i \left(\frac{1}{N_{ij} \sigma_N \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(N_{ij}) - \ln(N_{i-1}) + \ln(N_{i-1})^* - \gamma^T z^{(ij)}}{\sigma_N} \right)^2} \right) \right] \quad (6.27)$$

avec, $\ln(N_{i-1})^* = R_{S_i}^{-1} (R_{S_{i-1}} (\ln(N_{i-1}) - \ln(N_{i-2}) + \ln(N_{i-2})^*))$
 et, $\gamma^T z^{(ij)} = \ln(A) - b \ln(S_{ij})$

Les paramètres à optimiser sont γ et σ_N , avec γ dépendant de A et b . On a écrit le théorème de Bayès tel que :

$$g(A, b, \sigma_N | N) = \frac{\mathcal{L}(N|A, b, \sigma_N) \cdot g_A(A) \cdot g_b(b) \cdot g_{\sigma_N}(\sigma_N)}{\int_{D_A} \int_{D_b} \int_{D_{\sigma_N}} \mathcal{L}(N|A, b, \sigma_N) \cdot g_A(A) \cdot g_b(b) \cdot g_{\sigma_N}(\sigma_N) \cdot dA \cdot db \cdot d\sigma_N} \quad (6.28)$$

6.2.1.1 Estimation des paramètres et intervalles de confiance

La problématique de loi a priori prend tout son sens dans cette partie. En effet, on ne connaît pas la conjuguée Bayésienne d'une vraisemblance définie par le modèle SVA, on doit donc choisir une loi qui satisfasse les propriétés de conjugaison afin d'estimer au mieux la fonction de fiabilité des systèmes à un niveau nominal.

On considère pour chacun des paramètres un a priori normal, on définit donc l'a priori par :

$$g(\theta) = g(A, b, \sigma_N) = \mathcal{N}(A | \mu_A, \sigma_A) \cdot \mathcal{N}(b | \mu_b, \sigma_b) \cdot \mathcal{N}(\sigma_N | \mu_{\sigma_N}, \sigma_{\sigma_N}) \quad (6.29)$$

L'estimation des trois paramètres du modèle (i.e. A, b, σ_N) nécessite de déterminer les

fonctions marginales associées $g_A(A)$, $g_b(b)$ et $g_{\sigma_N}(\sigma_N)$. Pour cela, la même démarche présentée en paragraphe 6.1.1.2 est utilisée (cf. estimation de la limite d'endurance à partir d'un StairCase), permettant d'obtenir l'estimateur ponctuel de chaque paramètre et l'intervalle de confiance.

6.2.1.2 Application à des données d'essai

On considère l'a priori du tableau suivant plutôt informatif et cohérent :

TABLE 6.13: Connaissance a priori pour le Locati

Paramètre	théorie	Limite inférieure	Limite supérieure
σ_N	0,62	0,42	0,82
b	8	6	10
A	10^{22}	10^{20}	10^{24}

Pour chaque paramètre θ_i , avec $\theta = (A, b, \sigma_N)$, on évalue les paramètres de sa distribution par la méthode des moments, avec la distribution de chacun telle que $\theta_i \sim \mathcal{N}(\mu_{\theta_i}, \sigma_{\theta_i})$. On écrit les moyennes et variances pour chaque paramètres :

$$E(\theta_i) = \frac{\theta_{i_{min}} + \theta_{i_{max}}}{2} \text{ et } Var(\theta_i) = \frac{(\theta_{i_{max}} - \theta_{i_{min}})^2}{12} \quad (6.30)$$

Les moyenne et variance de la loi normale de la moyenne données par :

$$E^*(\theta_i) = \mu_{\theta_i} \text{ et } Var^*(\theta_i) = \sigma_{\theta_i}^2 \quad (6.31)$$

permettent d'évaluer les paramètres de la distribution normale directement ($E^*(\theta_i) = E(\theta_i)$ et $Var^*(\theta_i) = Var(\theta_i)$).

On applique l'estimation Bayésienne aux données Locati. Les résolutions sont numériques : un exemple de résultat obtenu à partir d'un essai Locati à 7 pièces, dans le cas d'un a priori informatif et cohérent tel que décrit dans le tableau 6.13 est représenté en figure 6.15, et les résultats numériques sont donnés dans le tableau 6.14.

TABLE 6.14: Exemple de résultats numériques obtenus par estimation Bayésienne à partir d'un Locati (SVA) à 7 pièces

Paramètre estimé	Valeur théorique	Estimateur ponctuel	Ecart-type de l'estimateur
σ_N	0,62	0,66	0,078
b	8	7,98	0.45
$\ln(A)$	50,65	50,45	2,06

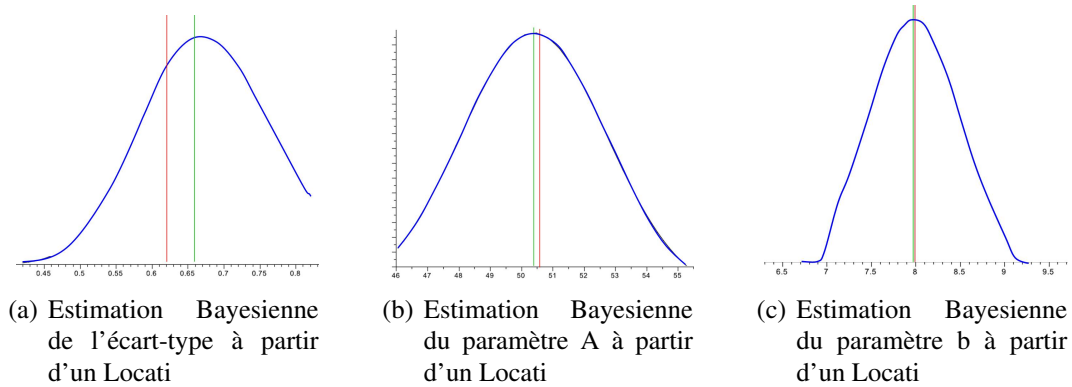


FIGURE 6.15: Estimation Bayésienne des paramètres des SVA à partir d'un Locati (7pièces)

A priori incohérent

Nous proposons d'étudier l'application de l'inférence Bayésienne à partir d'un a priori incohérent, tel que présenté dans le tableau 6.15.

TABLE 6.15: A priori incohérent pour le Locati

Paramètre	théorie	Limite inférieure	Limite supérieure
σ_N	0,62	0,32	0,62
b	8	5	8
$\ln(A)$	50, 65	41, 44	50, 65

Les résultats de l'inférence Bayésienne sans pondération de l'a priori sont présentés graphiquement en figure 6.16 et les estimateurs sont donnés dans le tableau 6.16

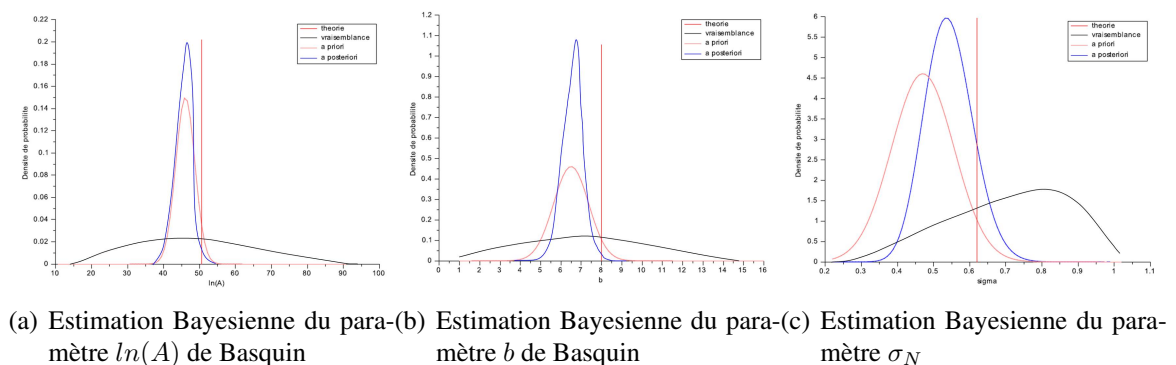
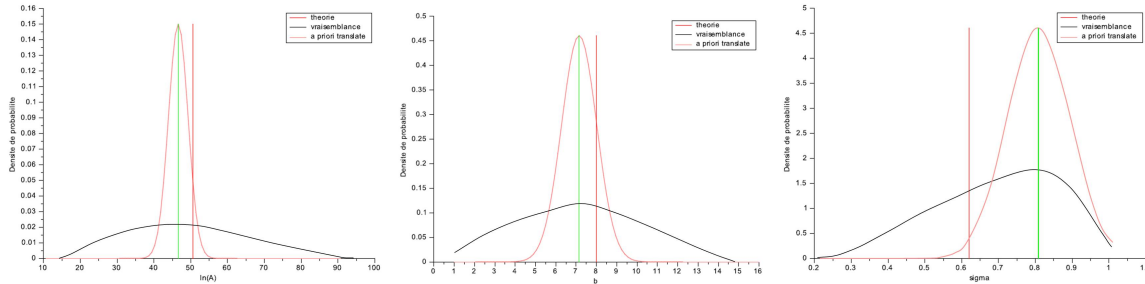


FIGURE 6.16: Estimation Bayésienne sans pondération, Locati SVA 7 pièces

Par la méthode de pondération de l'a priori (comme détaillée en paragraphe 2.1.4.3) on translate l'a priori par rapport à la fonction de vraisemblance de chaque paramètre comme illustré en figure 6.17 afin de définir le coefficient de pondération pour chacun des paramètres.

TABLE 6.16: Estimation Bayésienne sans pondération d'un a priori incohérent à partir d'un Locati (SVA) à 7 pièces

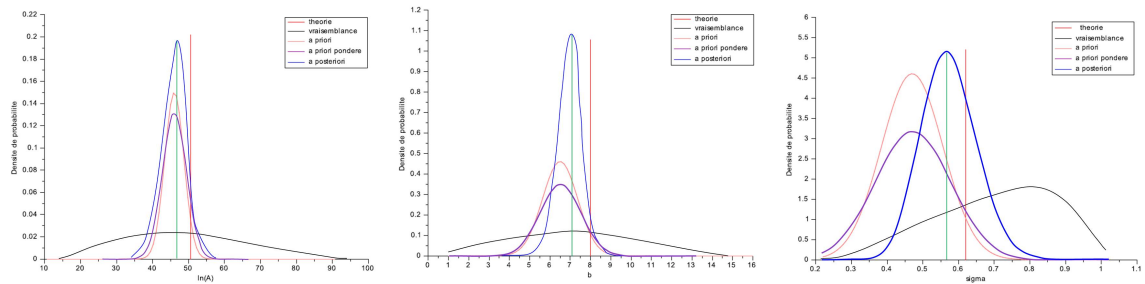
Paramètre estimé	Valeur théorique	Estimateur pontuel	Ecart-type de l'estimateur
σ_N	0,62	0,54	0,07
b	8	6,78	0,48
$\ln(A)$	50,65	45,81	2,23



(a) Translation de l'a priori de $\ln(A)$ de Basquin (b) Translation de l'a priori de b de Basquin (c) Translation de l'a priori de σ_N de Basquin

FIGURE 6.17: Translation de l'a priori pour la détermination du facteur de pondération, Locati SVA 7 pièces

Après détermination du facteur de pondération, on applique l'inférence Bayésienne à partir de la connaissance a priori pondérée. Les résultats sont représentés en figure 6.18 et les estimateurs donnés dans le tableau 6.17.



(a) Estimation Bayésienne pondérée du paramètre $\ln(A)$ de Basquin (b) Estimation Bayésienne pondérée du paramètre b de Basquin (c) Estimation Bayésienne pondérée du paramètre σ_N de Basquin

FIGURE 6.18: Estimation Bayésienne avec pondération de l'a priori, Locati SVA 7 pièces

L'erreur d'estimation sur la moyenne et l'écart-type de la distribution des nombres de cycles à défaillance par rapport à la théorie simulée est présentée dans le tableau 6.18, on observe bien l'apport de l'inférence Bayésienne même dans le cas où la connaissance a priori n'est pas cohérente avec la réalité simulée.

TABLE 6.17: Estimation Bayesienne avec pondération d'un a priori incohérent à partir d'un Locati (SVA) à 7 pièces

Paramètre estimé	Valeur théorique	Estimateur ponctuel	Ecart-type de l'estimateur
σ_N	0,62	0,57	0,078
b	8	7,08	0,52
$\ln(A)$	50,65	47,21	2,43

TABLE 6.18: Estimation Bayesienne avec pondération d'un a priori incohérent à partir d'un Locati (SVA) à 7 pièces

Paramètre estimé	Valeur théorique	% erreur par SVA	% erreur par Bayes
moyenne	13,81	5,75%	5,71%
écart-type	0,62	30,6%	8,06%

6.2.2 Estimation Bayesienne à partir du plan d'essai optimisé (SVA)

Le plan d'essai optimisé est un plan d'essai en contrainte échelonnée à échelon négatif, avec deux niveaux d'essai S_1 et S_2 ($S_1 > S_2$). S_1 est appliqué durant τ cycles puis S_2 jusqu'à T . On observe :

- n_1 rupture à N_{1j} cycles au niveau S_1
- n_2 rupture à N_{2j} cycles au niveau S_2
- n_c censure à T au niveau S_2

L'application des modèles SVA permet d'écrire la vraisemblance :

$$\mathcal{L}(N|\gamma, \sigma_N) = \left[\begin{array}{l} \prod_{i=1}^{n_1} \varphi_{\ln} \left(\frac{\ln(N_{1i}) - \gamma^T z_1}{\sigma_N} \right) \\ \times \prod_{i=1}^{n_2} \varphi_{\ln} \left(\frac{\ln(N_{2i}) - \ln(\tau) + \ln(\tau^*) - \gamma^T z_2}{\sigma_N} \right) \\ \times \left[1 - \Phi \left(\frac{\ln(T) - \ln(\tau) + \ln(\tau^*) - \gamma^T z_2}{\sigma_N} \right) \right]^{n_c} \end{array} \right] \quad (6.32)$$

Avec :

- φ_{\ln} et Φ respectivement les fonctions de densité et de répartition de la loi lognormale,
- $\ln(\tau^*) = R_{S_2}^{-1}(R_{S_1}(\ln(\tau)))$,
- $\gamma^T z_i = \gamma_0 - \gamma_1 z_i = \ln(A) - b \ln(S_i)$

Les paramètres à optimiser sont γ et σ_N , avec γ dépendant de A et b . On a écrit le théorème de Bayès tel que :

$$g(A, b, \sigma_N|N) = \frac{\mathcal{L}(N|A, b, \sigma_N) \cdot g_A(A) \cdot g_b(b) \cdot g_{\sigma_N}(\sigma_N)}{\int_{D_A} \int_{D_b} \int_{D_{\sigma_N}} \mathcal{L}(N|A, b, \sigma_N) \cdot g_A(A) \cdot g_b(b) \cdot g_{\sigma_N}(\sigma_N) \cdot dA \cdot db \cdot d\sigma_N} \quad (6.33)$$

6.2.2.1 Estimation des paramètres et intervalles de confiance

Tout comme l'application des SVA au Locati, la problématique de loi a priori est également présente pour les données issues du plan d'essai optimisé.

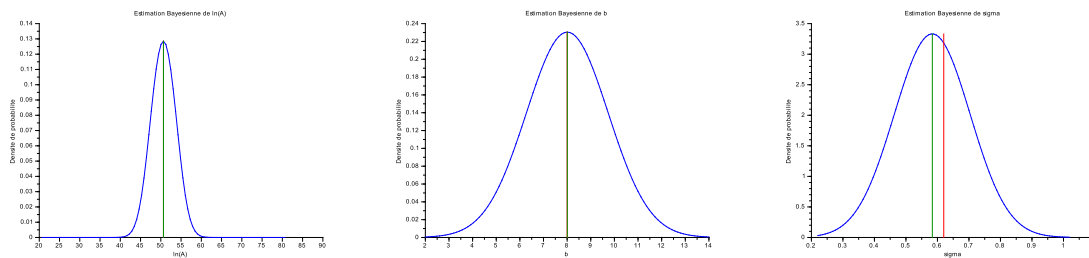
On considère pour chacun des paramètres un a priori normal, on définit donc l'a priori par :

$$g(\theta) = g(A, b, \sigma_N) = \mathcal{N}(A|\mu_A, \sigma_A) \cdot \mathcal{N}(b|\mu_b, \sigma_b) \cdot \mathcal{N}(\sigma_N|\mu_{\sigma_N}, \sigma_{\sigma_N}) \quad (6.34)$$

L'estimation des trois paramètres du modèle (i.e. A , b , σ_N) nécessite de déterminer les fonctions marginales associées $g_A(A)$, $g_b(b)$ et $g_{\sigma_N}(\sigma_N)$. La même démarche que pour le Locati est appliquée (cf. section précédente) permettant d'obtenir l'estimateur ponctuel de chaque paramètre et l'intervalle de confiance.

6.2.3 Application à des données d'essai

On considère tout d'abord un a priori cohérent, identique à l'a priori utilisé dans le cas du Locati (tableau 6.13). On applique la méthode Bayésienne à des données d'un essai de 7 pièces suivant le plan optimisé décrit dans la partie 5.3. Les résultats de l'estimation sont décrits en figure 6.19 et présentés en tableau 6.19.



(a) Estimation Bayésienne du paramètre $\ln(A)$ de Basquin (b) Estimation Bayésienne du paramètre b de Basquin (c) Estimation Bayésienne du paramètre σ_N

FIGURE 6.19: Estimation Bayésienne à partir d'un a priori cohérent, selon le plan d'essai optimisé

TABLE 6.19: Estimation Bayésienne à partir d'un a priori cohérent pour le plan optimisé à 7 pièces

Paramètre estimé	Valeur théorique	Estimateur ponctuel	Ecart-type de l'estimateur
σ_N	0,62	0,584	0,118
b	8	8,007	1,73
$\ln(A)$	50,65	50,65	3,01

On observe une excellente estimation des paramètres du modèle avec très peu de dispersion sur les estimateurs. Ceci est lié à une bonne estimation à l'origine par la méthode SVA, ainsi qu'à un a priori cohérent et plutôt informatif. On va maintenant tester l'apport de la théorie Bayésienne dans le cas d'un a priori incohérent.

A priori incohérent

On considère le même a priori incohérent qu'utilisé dans l'exemple du Locati traité par la méthode SVA (cf. tableau 6.15). Sans appliqué la théorie de la pondération d'a priori on observe un biais qui dégrade fortement les estimations par rapport à l'estimations SVA, comme le montre la figure 6.20 accompagnée des résultats numériques du tableau 6.20

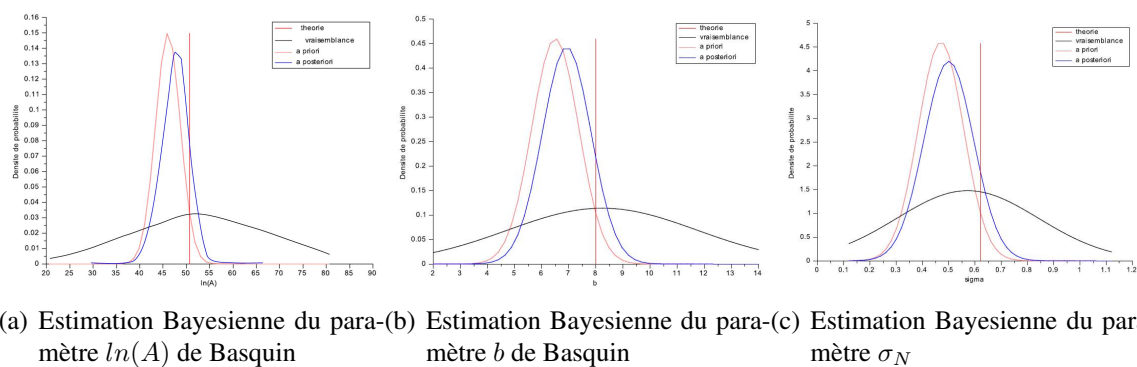


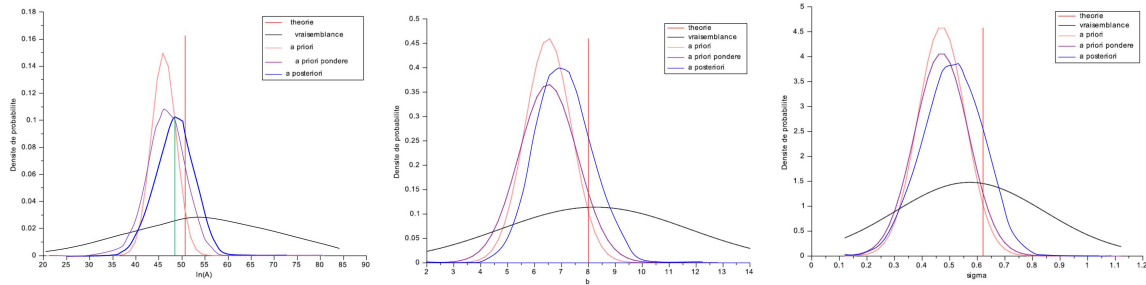
FIGURE 6.20: Estimation Bayésienne à partir d'un a priori incohérent, selon le plan d'essai optimisé

TABLE 6.20: Estimation Bayésienne à partir d'un a priori incohérent pour le plan optimisé à 7 pièces

Paramètre estimé	Valeur théorique	Estimateur ponctuel	Ecart-type de l'estimateur
σ_N	0,62	0,51	0,09
b	8	6,9	0,99
$\ln(A)$	50,65	47,6	2,69

En pondérant l'a priori, l'inférence Bayésienne est de nouveau appliquée, et les résultats du tableau 6.21 en sont issus, représentés en figure 6.21

A travers ce résultat, on estime moins bien les paramètres du modèle en appliquant l'inférence Bayésienne qu'en appliquant uniquement la méthode SVA. Cependant, il est important de noter qu'il s'agit d'une situation favorable pour l'estimation SVA : comme le montre le tableau 6.21 l'erreur d'estimation par SVA dans cet exemple est très faible, ce qui n'est pas toujours le cas, comme nous l'avons montré à travers le plan d'expérience numérique en partie 4. On s'attend donc, avec l'application de la méthode Bayésienne, à obtenir des résultats probablement moins informatifs mais plus cohérent globalement.



(a) Estimation Bayésienne du paramètre $\ln(A)$ de Basquin (b) Estimation Bayésienne du paramètre b de Basquin (c) Estimation Bayésienne du paramètre σ_N

FIGURE 6.21: Estimation Bayésienne à partir d'un a priori pondéré incohérent, selon le plan d'essai optimisé

TABLE 6.21: Estimation Bayésienne à partir d'un a priori pondéré incohérent pour le plan optimisé à 7 pièces

Paramètre estimé	Valeur théorique	Estimateur Bayésien	Estimateur SVA
σ_N	0,62	0,53	0,57
b	8	7,03	8,23
$\ln(A)$	50,65	48,2	51,813

6.3 Conclusion

6.3.1 Application chez PSA

La méthode Bayésienne est un outil intéressant dans notre cadre d'application. En effet, dans la démarche actuel PSA, l'hypothèse de la pente de Basquin fixée et constante, ainsi que l'hypothèse du coefficient de variation constant de la distribution des contraintes sont deux hypothèses fortes. A travers la démarche complète présentée dans cette partie, on a observé qu'il est très intéressant d'intégrer une hypothèse dans une démarche statistique qui permet d'estimer la valeur recherchée, notamment lorsque cette hypothèse s'avère juste, l'estimation n'en est que renforcée. Mais cette démarche est aussi intéressante dans le cas où l'a priori sur ces valeurs est incohérent puisqu'elle permet également de statuer sur la véracité ou non d'une hypothèse grâce au coefficient de compatibilité.

Cette méthode reflète l'intérêt de la capitalisation de données afin d'avoir une connaissance a priori la plus cohérente possible, facilitant ainsi les estimations lorsqu'on dispose de peu de pièces, d'un temps d'essai plus court, ou encore lorsqu'on veut intégrer des résultats similaires mais non identiques. On peut envisager l'application de l'inférence Bayésienne de deux manières dans le système de validation de PSA :

1. En dernière phase de conception. On disposera alors des résultats d'essais des trois

phases de validation précédentes, de données issues de l'expérience (e.g. valeur de la pente de Basquin), des résultats du calcul.

2. En suivi série. Cette option est très intéressante puisque dans ce cas d'application, l'essai sur une pièce après l'autre, sans utilisation du résultat de la, ou des pièces précédentes. Comme le montre le graphique 2.23, l'amélioration de l'estimation est rapide avec le nombre de pièces, il serait donc opportun d'intégrer, dès la première pièce en suivi série, les résultats issues des phases de validation (estimation des paramètres), et pour chaque pièce d'intégrer les résultats précédents.

6.3.2 Exemple d'application

A titre d'exemple, on propose de montrer l'intérêt de la méthode Bayésienne sur un exemple concret.

On considère le résultat des estimations classiques PSA et MLE à partir d'un Locati+ (cf. paragraphe 4.4.2) à 7 pièces, que l'on souhaite comparer à l'estimation par l'approche Bayésienne de ce même Locati+ mais en ne prenant en compte que 6 des 7 résultats de ce protocole d'essai. Cette démarche permet d'illustrer le gain potentiel de l'approche Bayésienne en terme de coût (i.e. coûts prototypes et temps d'essai).

A partir des 7 pièces, nous obtenons les estimations de moyenne et écart-type de la limite d'endurance du tableau 6.22, selon la méthode classique PSA et selon la méthode MLE.

TABLE 6.22: Estimations classiques à partir d'un Locati+ à 7 specimens

Paramètre estimé	Théorie	Estimation PSA	Estimation MLE
moyenne	100	96,66	102,74
écart-type	8	7,81	6,12

L'approche Bayésienne, telle qu'appliquée en section 6.1.2.3, à partir des 6 premières pièces de ce même Locati+, et en considérant un a priori incohérent (afin de se positionner dans le pire des cas) nous permet d'obtenir les estimations du tableau 6.23.

TABLE 6.23: Comparaison des estimations Bayésienne (6 pièces) et classiques (PSA et MLE à 7 pièces)

Paramètre estimé	Théorie	Estimation PSA (7 pièces)	Estimation MLE (7 pièces)	Estimation Bayésienne (6 pièces)
moyenne	100	96,66	102,74	97,7
écart-type	8	7,81	6,12	7,48

On remarque à travers cet exemple, que l'estimation Bayésienne sur 6 des 7 pièces du

Locati+ ne dégrade en rien la qualité de l'estimation et permettrait un gain de temps ainsi qu'un gain direct sur le coût de l'essai en permettant de tester moins de prototypes.

Une telle application devra faire l'objet d'études préalables sur différents cas pratiques concrets afin d'exploiter au mieux la connaissance a priori et de démontrer la fiabilité totale de la méthode et le gain observable.

Conclusion Générale et Perspectives

L'objectif des travaux de thèse était de réduire la durée des essais de fatigue des pièces de LAS afin d'en raccourcir les délais et en réduire les coûts. Pour cela plusieurs stratégies sont possibles :

- utiliser moins de pièces,
- augmenter la fréquence des bancs d'essai,
- poursuivre la saturation des bancs (déjà actifs 7 jours sur 7, 24h/24, même si les opérateurs ne couvrent pas la totalité de ces créneaux),
- changer la stratégie de qualification : ne plus valider la prestation fatigue, mais l'intégrer à une prestation moins longue (e.g. absence de plastification sous sollicitations plus sévères),
- changer la méthodologie globale.

La diminution du nombre de pièces, actuellement très réduit (e.g. de 3 à 7), n'est pas vraiment souhaitable puisqu'on souhaite garantir un minimum de représentativité statistique. Quant à l'augmentation de la fréquence des essais, elle constitue un problème à part entière concernant à la fois la capacité des moyens (puissance des actionneurs, performances de contrôleurs et des chaînes de mesure) et à la fois les modes d'endommagement des systèmes étudiés (e.g. l'utilisation d'articulations élastiques en caoutchouc n'est pas compatible avec des sollicitations rapides répétées, même en présence de systèmes de refroidissement, car cela cause un endommagement rapide et irréversible qui ne correspond pas au phénomène de fatigue). Ici, nous proposons un remaniement de la méthode globale de qualification. Pour cela, un état de l'art de la méthodologie utilisée chez PSA a été dressé, consistant à s'imprégner du périmètre de la fatigue des pièces de LAS et de comprendre le critère de qualification de ces systèmes, d'étudier les protocoles d'essais actuellement en place (StairCase, Locati et StairCase-Locati), ainsi que les méthodes

d'estimation associées (les estimateurs de Dixon & Mood pour le StairCase et le calcul d'effort équivalent pour le Locati et StairCase-Locati). Dans un même temps un état de l'art des méthodologies issues de la littérature a été effectué. Compte tenu du fait qu'une méthodologie de qualification se base sur un protocole d'essai associé à une méthode d'estimation, deux axes de recherche apparaissent :

1. des protocoles d'essais différents et optimisables, notamment en fonction de la méthode d'estimation appliquée. On peut citer :
 - Les essais en contraintes constantes (à des niveaux déterminés au préalable),
 - Les essais en contraintes échelonnées (échelons positifs ou négatifs),
 - Les essais en escalier (valeur d'une contrainte constante, dépendant du résultat de l'essai précédent)
2. des méthodes d'estimation de la fiabilité en fatigue différentes. Trois types de méthodes sont apparues :
 - les études en contrainte, qui permettent de déterminer la distribution de la limite d'endurance à un nombre de cycles représentatif du domaine de fatigue, à partir de données d'essais associées à un critère de fissuration visible (i.e. détection visible : 5mm) ;
 - les études en durée de vie, qui permettent de déterminer la distribution des nombres de cycles à défaillance à un niveau de contrainte usuel représentant les conditions nominales d'utilisation des systèmes, à partir du même type de données que pour les études en contrainte ;
 - les études de la dégradation, qui permettent d'estimer la fiabilité (à un nombre de cycles ou à une contrainte donnés) à partir de données de mesures dégradation (propagation de fissures).

Cette dernière méthode n'a pas été retenue pour la suite de l'étude car il existe pour les pièces complexes de LAS une difficulté de mesure précise de la fissure, se situant souvent en pied de cordon de soudure, ou encore à l'intérieur de tubes ou autres emplacements où la mesure rapide et précise est impossible.

Nous avons donc choisi de distinguer les deux premiers axes d'étude, en contrainte ou en nombre de cycles. Pour le premier il s'agit de l'estimation de la limite d'endurance à un nombre de cycles fixé (égal à 10^6) : pour cela nous avons sélectionné les méthodes dites «PSA» (estimateurs de D&M ou le calcul d'effort équivalent), et «MLE» permettant par MV d'estimer les paramètres d'un modèle de distribution de la limite d'endurance. En ce qui concerne l'approche en durée de vie, nous avons sélectionné l'approche «SVA» qui permet par MV de déterminer les paramètres de la distribution des nombres de cycles à défaillance.

Les méthodologies de qualification en fatigue se basent donc sur :

1. un protocole d'essai,
2. une méthode d'estimation.

Il s'agissait tout d'abord d'étudier les protocoles et méthodes actuellement utilisés chez PSA, afin d'en détecter leurs avantages mais aussi et principalement leurs faiblesses. Pour cela nous avons proposé un plan d'expérience numérique, permettant de comparer, en fonction d'hypothèses physiques et statistiques (taille d'échantillon, paramètres du protocole, valeur hypothétique de la pente de Basquin...), la qualité d'estimation et la robustesse de chaque protocole associé à sa méthode d'estimation.

Les conclusions des simulations numériques ont permis d'observer que :

- a. le StairCase est a priori plus rapide que les autres protocoles, mais il est moins performant lorsqu'on dispose de peu de pièces (i.e. 7 pièces),
- b. le calcul d'effort équivalent à partir de données issues d'un protocole Locati permet d'obtenir la meilleure estimation des paramètres de la limite d'endurance mais au dépend de la durée de l'essai.

Nous avons donc proposé une amélioration rapide du protocole Locati, sans changement de méthode d'estimation : le Locati+. Il permet un gain de temps, d'en moyenne 250 000 cycles par pièce, positionnant ainsi le Locati légèrement devant le StairCase en terme de durée d'essai (environ 500 000 cycles de moins pour une campagne de 7 pièces en Locati+ qu'en StairCase, et 800 000 de moins qu'en StairCase-Locati).

Cependant, cette amélioration du Locati dégrade la robustesse de l'estimation PSA. En effet, on a pu constater par les simulations numériques, que si l'hypothèse concernant la pente de Basquin est erronée on aura alors une erreur d'estimation plus importante en Locati+ qu'en Locati. On a donc proposé de libérer cette hypothèse en appliquant la méthode d'estimation MLE. La double estimation PSA et MLE permet de conclure de manière fiable sur la tenue du système testé.

Comme cité précédemment, l'approche en durée de vie a été étudiée pour palier à la problématique d'estimation de l'écart-type de la limite d'endurance, et également libérer l'hypothèse de Basquin, hypothèse forte chez PSA. Cette approche est basée sur la méthode SVA et permet par MV d'estimer la distribution des nombres de cycles à défaillance. Elle a également fait l'objet du plan d'expérience afin de conclure sur son efficacité par rapport à l'approche en contrainte. Pour cela, le critère de comparaison autour du calcul de probabilité de défaillance à partir de la méthode Contrainte-Résistance a été développé et a permis de conclure sur une qualité d'estimation robuste de la distribution des durées de vie et de la probabilité de défaillance associée.

On a alors proposé d'optimiser un plan d'essai à partir de cette méthode d'estimation, qui permettrait alors d'obtenir un gain, à la fois en terme de qualité d'estimation, et en terme de temps d'essai. Par simulation numérique, en théorie le gain potentiel sur le temps

d'essai se situe en moyenne autour de 500 000 cycles par pièce par rapport à un Locati+. Ce plan optimisé a fait l'objet d'une validation expérimentale sur un triangle connu. Les résultats se sont avérés moins intéressants en terme de temps qu'espéré en théorie, du fait notamment du paramétrage hypothétique du modèle, et de l'optimisation du plan basée sur une durée de vie bien inférieure à la durée de vie réelle de la pièce testée. Même si ce plan nous permet d'obtenir une estimation cohérente de la distribution des nombres de cycles à défaillance, on n'observe pas de gain en terme de temps d'essai.

En termes d'application concrète chez PSA, le Locati+ est désormais en place dans le périmètre de Liaison Au Sol, et le retour d'expérience depuis six mois ne montrent pas de déconvenues tout en assurant une réduction de la durée moyenne des essais, en accord avec les simulations numériques. Le Locati+ est actuellement en cours de généralisation à d'autres entités au sein de PSA. L'application du MLE en revanche n'a été appliquée que sur une campagne de test pilote. Néanmoins, des algorithmes ici développés, sont en cours d'intégration dans l'environnement de travail des équipes PSA sous forme d'une feuille de calcul qui pourra être manipulée facilement par les techniciens d'essai et le personnel chargé de validation des systèmes.

L'application du plan d'essai optimisé et de la méthode SVA nécessite encore des études de robustesse et de généralisation à d'autres pièces que le triangle choisi pour une validation exhaustive. De plus, l'application d'une telle méthodologie globale nécessiterait des études complémentaires sur :

- La description de la distribution des clients : dans l'établissement du profil de mission, l'hypothèse de Basquin est intégrée comme connue et constante ; libérer cette hypothèse dans la définition à la fois de la Contrainte et de la Résistance donnera une estimation homogène.
- Le critère de décision : actuellement il s'agit du positionnement de la moyenne de la limite d'endurance par rapport à une valeur cible fixée, dans le cas d'une approche en durée de vie comme proposée ici, le critère devra évoluer et être basé sur les caractéristiques complètes de la distribution des nombres de cycles (moyenne et écart-type), c'est à dire la valeur de probabilité de défaillance estimée. Dans ce cas, La problématique du calcul de probabilité selon l'axe d'étude (Pf_S ou Pf_N) devra être développée afin de palier au biais constaté entre ces deux estimations. On pourra également envisager d'autres techniques que la méthode Contrainte-Résistance pour obtenir l'estimation de la probabilité de défaillance. (cf. Annexes B).
- La capitalisation des données : intégrer l'approche en durée de vie, tout comme l'approche MLE à partir d'un Locati+ permettrait de capitaliser les données maté-

riau, notamment les valeurs estimées de pente de Basquin, et ainsi être utilisées en retour d'expérience pour l'estimation de la tenue de pièces ou de systèmes similaires.

- L'intégration des approches Bayésiennes : cette approche, en complément de la méthodologie globale de qualification, permettrait de prendre en compte la connaissance et les hypothèses du retour d'expérience, notamment si une bonne capitalisation a été effectuée au préalable, ainsi que d'intégrer au mieux les résultats du calcul numérique antérieur aux essais. On pourra appliquer cette approche aussi bien en suivi série qu'en dernière phase de conception, lorsqu'on a une idée globale de la tenue du système étudié.
- L'optimisation du plan d'essai : un outil général pourrait être développé pour générer un plan d'essai optimisé en fonction de chaque système en conception, alors qu'ici, nous en avons identifié un unique (cf. 5.3). La problématique pourra être traitée par l'approche par les plans robustes décrite dans [Fatemi, 2012].
- La convergence des estimations : d'autres méthodes d'optimisation pourraient être testées pour éviter l'erreur d'estimation actuellement observée du fait de la faible taille d'échantillon, d'autres logiciels tels qu'ALTA, d'autres algorithmes que le simplex de Nelder and Mead [Nelder and Mead, 1965] utilisé par Scilab.

Annexes



Application des SVA au Locati

A.1 Cas de la loi LogNormale

A partir des résultats d'un essai Locati, où l'on aura observé i niveaux de contrainte S_i consécutifs pour chaque pièce j avec N_i cycles à chaque niveau et N_{ij} cycles au niveau S_{ij} auquel on observe la défaillance.

A partir du modèle 3.31 on obtient :

$$\begin{cases} R_{S_1}(\ln(N_{1j})) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(N_{1j}) - \gamma^T z^{(1)}}{\sigma}\right) \\ R_{S_2}(\ln(N_{2j})) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(N_{2j}) - \ln(N_1) + \ln(N_1)^* - \gamma^T z^{(2)}}{\sigma}\right) \\ \dots \\ R_{S_i}(\ln(N_{ij})) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(N_{ij}) - \ln(N_{i-1}) + \ln(N_{i-1})^* - \gamma^T z^{(i)}}{\sigma}\right) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Où $\ln(N_{i-1})^* = R_{S_i}^{-1}(R_{S_{i-1}}(\ln(N_{i-1}) - \ln(N_{i-2}) + \ln(N_{i-2})^*))$

On peut donc définir la vraisemblance par :

$$L(\gamma, \sigma) = \prod_1^j \left[\prod_1^i \left(\frac{1}{N_{ij} \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(N_{ij}) - \ln(N_{i-1}) + \ln(N_{i-1})^* - \gamma^T z^{(ij)}}{\sigma} \right)^2} \right) \right] \quad (\text{A.2})$$

Par MV on définit les paramètres $\hat{\gamma}$ et $\hat{\sigma}$ de

$$R_{S_0}(N) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(N) - \hat{\gamma}^T z^{(0)}}{\hat{\sigma}}\right) \quad (\text{A.3})$$

A.2 Cas de la loi de Weibull

A partir des résultats d'un essai Locati, où l'on aura observé i niveaux de contrainte S_i consécutifs pour chaque pièce j avec N_i cycles à chaque niveau et N_{ij} cycles au niveau S_{ij} auquel on observe la défaillance.

A partir du modèle 3.31 on obtient :

$$\begin{cases} R_{S_1}(N_{1j}) = e^{-\left(\frac{N_{1j}}{\gamma T z^{(1)}}\right)^\beta} \\ R_{S_2}(N_{2j}) = e^{-\left(\frac{N_{2j} - N_1 + N_1^*}{\gamma T z^{(2)}}\right)^\beta} \\ \dots \\ R_{S_i}(N_{ij}) = e^{-\left(\frac{N_{ij} - N_{i-1} + N_{i-1}^*}{\gamma T z^{(i)}}\right)^\beta} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Où $N_{i-1}^* = R_{S_i}^{-1}(R_{S_{i-1}}(N_{i-1} - N_{i-2} + N_{i-2}^*))$

On peut donc définir la vraisemblance par :

$$L(\gamma, \beta) = \prod_1^j \left[\prod_1^i \left(\frac{\beta}{\gamma T z^{(i)}} \left(\frac{N_{ij} - N_{i-1} + N_{i-1}^*}{\gamma T z^{(i)}} \right)^{(\beta-1)} e^{-\left(\frac{N_{ij} - N_{i-1} + N_{i-1}^*}{\gamma T z^{(i)}}\right)^\beta} \right) \right] \quad (\text{A.5})$$

Par MV on définit les paramètres $\hat{\gamma}$ et $\hat{\beta}$ de

$$R_{S_0}(N) = e^{-\left(\frac{N}{\gamma T z^{(0)}}\right)^\beta} \quad (\text{A.6})$$



D'autres méthodes d'estimation de la probabilité de défaillance

Cette annexe reprend les travaux de bibliographie de Mr. SOHOIN Koffissè Rodrigue, stagiaire LASQUO/PSA PEUGEOT CITROEN. Une partie de son stage a consisté à rechercher et étudier différentes méthodes d'estimation d'une probabilité de défaillance.

Ici, est inclus un extrait de son rapport de stage développant ces méthodes.

5.1. A discrete stress-strength interference model based on universal generating function [16]

Dans cette méthode, la variable aléatoire contrainte ($S1$) et résistance ($S2$) sont supposées discrètes. La fiabilité est déterminée de la manière suivante :

$$f(S1,S2) = S2 - S1,$$

$$R = \Pr(S2 - S1 > 0) \text{ ou } R = \Pr(f(S1,S2) > 0)$$

Soient f_j et P_j respectivement les valeurs possibles de f et P_j les probabilités correspondantes. On définit $\alpha(f_j) = \begin{cases} 1, & f_j > 0, \\ 0, & f_j \leq 0. \end{cases}$

Alors par la méthode de la fonction génératrice universelle on montre que $R = \Pr(f(S1,S2) > 0) = \sum_{j=1}^K P_j \alpha(f_j)$

C'est une méthode valable aussi lorsque l'on connaît les lois de distributions des variables aléatoires $S1$ et $S2$.

5.2. Statistical inference for $P(X<Y)$ [16]

Désignons par X et Y deux variables aléatoires indépendantes continues représentant dans notre cas la contrainte et la résistance. L'estimateur de $P(X<Y)$ est donné par la statistique de Wilcoxon-Mann-Withney.

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n1 * n2} \sum_{j=1}^{n1} \sum_{k=1}^{n2} I(X_j < Y_k)$$

Où I est la fonction indicatrice (prend 1 si $X_j < Y_k$, et 0 sinon)

$$\sup_x \left| P \left(\frac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\sigma}} \leq x \right) - G_n(x) \right| = o(n^{-1/2})$$

$$G_n(x) = \Phi(x) + \frac{x^2}{2\sqrt{n}} \left(\frac{\gamma_1}{r_1^2} + \frac{\gamma_2}{r_2^2} \right) \phi(x) - \frac{1}{6\sqrt{n}} \left(\frac{\gamma_1}{r_1^2} + \frac{\gamma_2}{r_2^2} + 6 \frac{\gamma_{12}}{r_1 r_2} \right) (x^2 - 1) \phi(x)$$

G_n est le développement d'Edgeworth pour la statistique de Wilcoxon-Mann-Withney studentisée $\frac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\sigma}}$ avec $\hat{\sigma}$ un estimateur consistant de l'écart type de $\hat{\theta}$. Pour $z_{\alpha/2}$

satisfaisant $\Phi(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$, on a :

$$P\left(\frac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\sigma}} \leq z_{\alpha/2} + d_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha/2 + o(n^{-1/2})$$

$$P\left(\frac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\sigma}} \leq -z_{\alpha/2} + d_{\alpha/2}\right) = \alpha/2 + o(n^{-1/2})$$

$$d_{\alpha/2} = -\frac{1}{2\sqrt{n}} \left(\frac{\gamma_1}{r_1^2} + \frac{\gamma_2}{r_2^2} \right) z_{\alpha/2}^2 + \frac{1}{6\sqrt{n}} \left(\frac{\gamma_1}{r_1^2} + \frac{\gamma_2}{r_2^2} + 6\frac{\gamma_{12}}{r_1 r_2} \right) (z_{\alpha/2}^2 - 1)$$

Et l'intervalle de confiance associé défini par :

$$(\hat{\theta} - (z_{\alpha/2} + d_{\alpha/2})\hat{\sigma}, \hat{\theta} + (z_{\alpha/2} - d_{\alpha/2})\hat{\sigma})$$

5.3. Robust inference for the stress-strength reliability [17]

C'est une méthode basée sur la théorie de l'influence limitée des **M-estimateurs**.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes avec pour fonction de répartition respectives $F_X = F_X(x; \theta_X)$ et $F_Y = F_Y(y; \theta_Y)$. Soit $\theta = (\theta_X, \theta_Y)$

$$R = R(\theta) = P(X < Y) = \int F_X(t; \theta_X) dF_Y(t; \theta_Y)$$

Les différentes étapes de la procédure d'inférence robuste sur la fiabilité R sont :

- (1) Calcul de la fiabilité $R = R(\theta)$ comme une fonction de θ ;
- (2) Détermination d'un M-estimateur robuste $\check{\theta}$ de θ ;
- (3) Estimation de R par $\check{R} = R(\check{\theta})$;
- (4) Calcul de σ_R^2 ;
- (5) Construction de la statistique studentisée.

Les M-estimateurs ont pour objet de réduire l'influence des outliers (valeurs atypiques). C'est une généralisation de l'estimation du maximum de vraisemblance proposée par Huber P. (1964).

5.4. Stress-strength reliability for designs based on large historic values of stress [19]

- Méthode contrainte/résistance pour des systèmes dont la conception est faite sur la base d'un historique de données.
- On cherche la probabilité pour que la résistance R excède la plus importante valeur de contrainte S enregistrée sur une durée de vie antérieure.

$$P(T < t) = \sum_{h=0}^{\infty} P(N(t) = h) * \overline{P}(h)$$

$$\text{avec } \overline{P}(h) = P(\max(S_1, S_2, \dots, S_h) < R), h = 1, 2, 3 \dots$$

- Méthode très utile lorsque l'expérience acquise peut permettre de supposer une relation fonctionnelle entre les distributions de la contrainte et celle de la résistance.

$$F(x)_R = G(F(x)_S)$$

6. Simulation de méthodes alternatives

Par souci de simplicité et de contrainte temporelle, parmi ces méthodes nous avons principalement retenu les deux premières que nous avons simulées.

6.1. Simulation de la méthode : A discrete stress-strength interference

Nous utilisons cette méthode de manière semi-paramétrique en générant à partir des deux distributions (contrainte et résistance) deux jeux de valeurs pour constituer des vecteurs aléatoires S_1 et S_2 de 1000 éléments à chaque simulation de calcul. 1000 répétitions de la simulation nous donnent les résultats suivants :

Moyennement nous obtenons une probabilité de défaillance $Pf_{moyenne} = 9.9965 * 10^{-7}$ sur les 1000 répétitions.

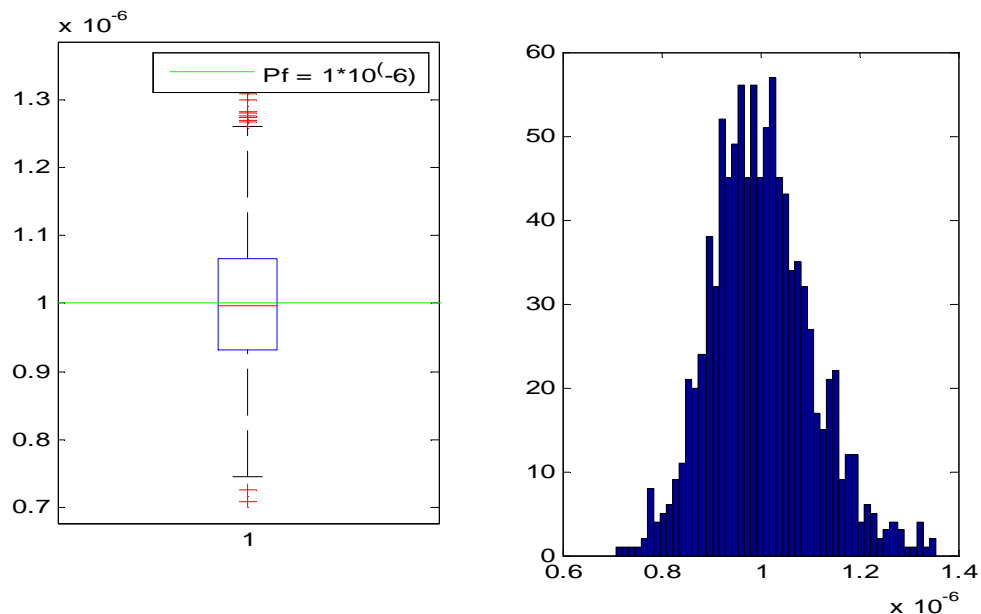


Figure 36: Simulation de la méthode : A discrete stress-strength interference

6.2. Simulation de la méthode : Statistical inference for $P(X < Y)$

Nous procédons et considérons les mêmes hypothèses comme précédemment pour simuler cette deuxième méthode. *Moyennement nous avons une probabilité de défaillance $Pf_{moyenne} = 1.0110 \cdot 10^{-6}$.*

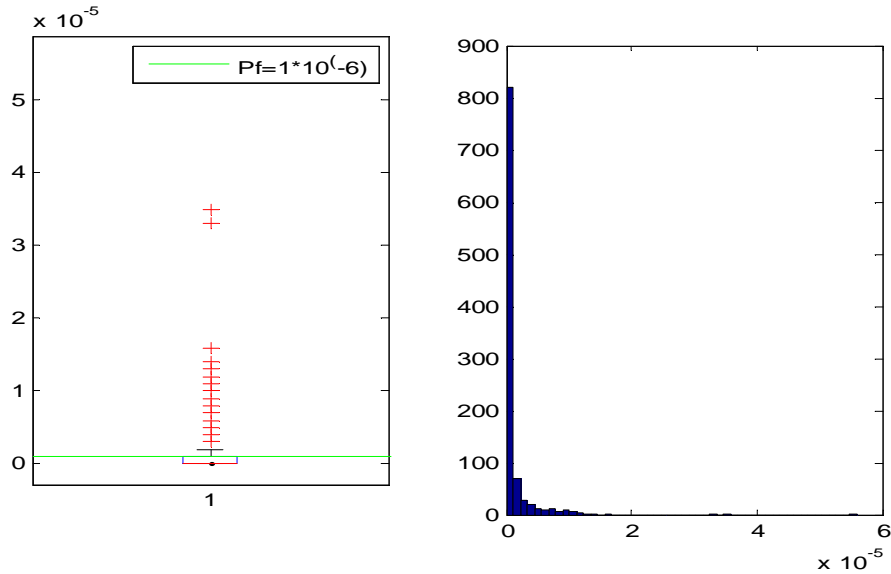


Figure 37: Simulation Statistical inference for $P(X < Y)$

Ces simulations ne nous permettent pas de tirer grande conclusion quant à ce qui concerne l'efficacité d'une méthode par rapport à l'autre, mais avec le boxplot nous pouvons remarquer une forte présence d'outliers ou de valeurs atypique dans les résultats de simulation pour la deuxième méthode.

Nous notons que lorsque nous augmentons pour cette dernière méthode le nombre d'éléments des vecteurs aléatoires $S1, S2$ à plus de 10000 nous obtenons une nette amélioration de l'estimation.

Bibliographie

- [AFCIQ, 1981] AFCIQ, Groupe fiabilité, A. f. p. l. c. i. d. l. q. (1981). *Guide d'évaluation de la fiabilité mécanique*. Afnor-Ute. 34, 37
- [AFNOR, 1984] AFNOR (1984). *Applications de la statistique - Introduction à la fiabilité*. X NF, 06-501. 34
- [Ayyub and McCuen, 2011] Ayyub, B. and McCuen, R. (2011). *Probability, Statistics, and Reliability for Engineers and Scientists*. CRC Press, "3^{ème}" edition. 12, 37
- [Bagdonavicius et al., 2000] Bagdonavicius, V., Gerville-Réache, L., Nikoulina, V., and Nikulin, M. (2000). Expériences accélérées : analyse statistique du modèle standard de vie accélérée. *Revue de Statistique Appliquée*, 48(3) :5–38. 55
- [Basquin, 1910] Basquin, O. (1910). The exponential law of endurance tests. *ASTM*, (10) :625–630. 30
- [Bastenaire and Regner, 1983] Bastenaire, F. and Regner, L. (1983). Etude des propriétés statistiques des estimations des paramètres d'une courbe de réponse obtenues par la méthode de l'escalier. *RSA*, 31(1) :5–23. 73
- [Bathias and Baïlon, 1997] Bathias, C. and Baïlon, J.-P. (1997). *La fatigue des matériaux et des structures*. Hermes. 29
- [Beaumont et al., 2011a] Beaumont, P., Guérin, F., Lantieri, P., Facchinetti, M., and Martin Borret, G. (2011a). Accelerated fatigue tests for automotive chassis parts design : an overview. In *Fatigue Design 2011*, Senlis, France. 73
- [Beaumont et al., 2011b] Beaumont, P., Guérin, F., Lantieri, P., Facchinetti, M., and Martin Borret, G. (2011b). Méthodes d'essai de fatigue : état de l'art et perspectives chez psa. In *QUALITA 2011*, Angers, France. 67
- [Beaumont et al., 2012a] Beaumont, P., Guérin, F., Lantieri, P., Facchinetti, M., and Martin Borret, G. (2012a). Accelerated fatigue test for automotive chassis parts design : An overview. In *RAMS 2012*, Reno, Nevada, USA. 73
- [Beaumont et al., 2012b] Beaumont, P., Guérin, F., Lantieri, P., Facchinetti, M., and Martin Borret, G. (2012b). Analysis of different estimation methods from an accelerated test plan. application on the fatigue performance of chassis parts. In *ALT 2012*, Rennes, France. 73

- [Beaumont et al., 2012c] Beaumont, P., Guérin, F., Lantieri, P., Facchinetti, M., and Martin Borret, G. (2012c). Essais accélérés en fatigue : Application a l'estimation de la fiabilité de pièces métalliques de liaison au sol. In *Lambda Mu 18*, Tours, France. 73
- [Beaumont et al., 2012d] Beaumont, P., Guérin, F., Lantieri, P., Facchinetti, M., and Martin Borret, G. (2012d). Méthodes d'essais en fatigue. comparaison d'efficacité par simulation numérique. In *Journée SIA Fiabilité et robustesse par la simulation numérique*, Cachan, France. 94
- [Bernardo and Smith, 1994] Bernardo, J. and Smith, A. (1994). *Bayesian Theory*. Wiley. 7, 18
- [Bignonnet and Thomas, 2004] Bignonnet, A. and Thomas, J. (2004). Approche fiabiliste en conception automobile. In *SF2M-Journées de Printemps : Méthodes fiabilistes en fatigue pour conception et essais*, Paris. 4, 37, 41
- [Birolini, 1997] Birolini, A. (1997). *Quality and reliability of technical systems : theory, practice, management*. Springer. 12
- [Bompas-Smith, 1973a] Bompas-Smith, J. (1973a). *Mechanical Survival : the use of reliability data*. Mc Graw Hill book. 27
- [Bompas-Smith, 1973b] Bompas-Smith, J. (1973b). *Mechanical Survival : the use of reliability data*. Mc Graw Hill book. 30
- [Brand et al., 1992] Brand, A., Flavenot, J.-F., Gregoire, R., and Tournier, C. (1992). *Données technologiques sur la fatigue*. CETIM. 29
- [Brevet et al., 1978] Brevet, P., François, D., Gourmelon, J., and Raharinaivo, A. (1978). Fatigue des ouvrages d'art métalliques soudés - rapport introductif à un programme de recherche. Technical report, Laboratoire central des ponts et chaussées. 47
- [Brissaud et al., 2007] Brissaud, F., Lanternier, B., Charpentier, D., and Lyonnet, P. (2007). Modélisation des taux de défaillance en mécanique. *Performances et Nouvelles Technologies en Maintenance*. 2
- [Caruso and Dasgupta, 1998] Caruso, H. and Dasgupta, A. (1998). *A fundamental overview of accelerated testing analytical models*. IEEE Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, USA. 57
- [Clarotti, 1998] Clarotti, C. (1998). Les techniques fréquentielle et bayésienne au service le l'ingénieur de sûreté de fonctionnement. Technical Report Projet ISDF 08/96, Institut de Sûreté De Fonctionnement. 2, 7, 113
- [Congdon, 2001] Congdon, P. (2001). *Bayesian statistical modelling*. Wiley. 7, 18
- [Dang Van, 1973] Dang Van, K. (1973). *Sur la résistance à la fatigue des métaux*. Sciences et techniques de l'Armement. 42
- [Dixon and Mood, 1948] Dixon, W. and Mood, A. (1948). A method for obtaining and analyzing sensitivity data. *Journal of the American Statistical Association*, 43 :109–126. xii, 2, 46, 49, 51

- [Dodson and Schwab, 2006] Dodson, B. and Schwab, H. (2006). *Accelerated Testing, a Practitioners Guide to Accelerated and Reliability Testing*. SAE International. 55
- [Elsayed, 2006] Elsayed, E. (2006). Optimum multiple-stress-type accelerated life testing plans based on proportional odds model with simple step-stress loading. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 40(7) :745–762. 2, 99
- [Fatemi, 2012] Fatemi, S. (2012). *Planification des essais accélérés : optimisation, robustesse et analyse*. PhD thesis, Université d'Angers. 20, 141
- [Gerber and Fuchs, 1968] Gerber, T. L. and Fuchs, H. . (1968). Analysis of nonpropagating fatigue cracks in notched parts with compressive mean stresses. *Journal of Materials, JMLSA*. 38
- [Huther, 2004] Huther, M. (2004). Approche probabiliste et formulation semi-probabiliste en calcul de fatigue. In *SF2M'2004 - 23èmes Journées de Printemps ; Commission de Fatigue de la Société Française de Métallurgie et de Matériaux - Méthodes fiabilistes en fatigue pour conception et essais*. 34
- [Jabbado, 2006] Jabbado, M. (2006). *Fatigue polycyclique des structures métalliques : durée de vie sous chargements variables*. PhD thesis, Ecole Polytechnique. 27
- [Jakubczak et al., 2006] Jakubczak, H., Sobczykiewicz, W., and Glinka, G. (2006). Fatigue reliability of structural components. *International Journal of Materials and Product Technology*, 25(1,2,3). 30
- [Kececioglu et al., 1998] Kececioglu, D., Jiang, M., and Sun, F.-B. (1998). *A unified approach to random fatigue reliability quantification under random loading*. IEEE Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, USA. 27
- [Lalanne, 1999] Lalanne, C. (1999). *Vibrations et chocs mécaniques, Tome 4, Dommage par fatigue*. Hermes Science Publications, Paris. 27, 29, 30, 32
- [Lannoy and Procaccia, 2005] Lannoy, A. and Procaccia, H. (2005). *Evaluation et maîtrise du vieillissement industriel*. TEC & DOC. 24
- [Laplace, 1809] Laplace, P.-S. (1809). *Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres, et sur leur application aux probabilités*. PhD thesis, Classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France. 12
- [Le Cam, 1990] Le Cam, L. (1990). Maximum likelihood - an introduction. *ISI Review*, 58 :153–171. 16
- [Lemaire, 2008] Lemaire, M. (2008). Approche probabiliste du dimensionnement - modélisation de l'incertitude et méthodes d'approximation. *Techniques de l'Ingénieur*, BM5004 :2–13. 35
- [Ligeron, 1979] Ligeron, J. (1979). *La fiabilité en mécanique*. Desforges. 34
- [Lin et al., 2001] Lin, S., Lee, Y., and Lu, M. (2001). Evaluation of the staircase and the accelerated test methods for fatigue limit distributions. *International Journal of Fatigue*, 23 :75–83. 46, 49, 73

- [Little, 1972] Little, R. (1972). Estimating the median fatigue limit for very small up-and-down quantal response tests and for s-n data with runouts. *Probabilistic Aspects of Fatigue*, Heller, R.A., pages 29–42. [47](#), [73](#)
- [Little and Ekvall, 1979] Little, R. and Ekvall, J. (1979). *Statistical analysis of fatigue data*. Technical report, American Society for Testing and Materials. [27](#)
- [Locati, 1955] Locati, L. (1955). *Metallurgia Italia*, volume 9, page 301. [47](#)
- [Martin Borret, 2006] Martin Borret, G. (2006). Fatigue mécanique, validation des trains et composants de train. *PSA PEUGEOT CITROEN*. [38](#)
- [Martin Borret, 2008] Martin Borret, G. (2008). Méthodes d’essais des composants d’es-sieu : Stair case et locati. *PSA PEUGEOT CITROEN*. [46](#)
- [Mayer, 1926] Mayer, M. (1926). *Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkraften anstatt nach zulässigen Spannungen*. Berlin, Springer-Verlag, Germany. [35](#)
- [McLean, 2000] McLean, H. (2000). *HALT, HASS HASA Explained : Accelerated Reliability Techniques*. ASQ Quality press. [11](#)
- [Miner, 1945] Miner, M. (1945). Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics*, (12) :A159–A164. [32](#)
- [Nelder and Mead, 1965] Nelder, J. and Mead, R. (1965). A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, 7(4) :308–313. [141](#)
- [Nelson, 1990] Nelson, W. (1990). *Accelerated testing : Statistical models, test plans and data analyses*. Wiley Interscience Publication, New York. [2](#), [56](#), [57](#)
- [Nikulin et al., 2007a] Nikulin, M., Gerville-Réache, L., and Couallier, V. (2007a). *Statistique des essais accélérés*. Hermes Science Publications, Paris. [12](#), [17](#), [55](#)
- [Nikulin et al., 2007b] Nikulin, M., Gerville-Réache, L., and Couallier, V. (2007b). *Statistique des essais accélérés*. Hermes Science Publications, Paris. [16](#)
- [Pages and Gondran, 1980] Pages, A. and Gondran, M. (1980). *Fiabilité des systèmes*. Eyrolles. [12](#), [18](#), [36](#)
- [Pham, 2003] Pham, H. (2003). *Handbook of Reliability Engineering*. Springer, New Jersey. [2](#)
- [Pollak et al., 2006] Pollak, R., Palazotto, A., and Nicholas, T. (2006). A simulation-based investigation of the staircase method for fatigue strength testing. *Mechanics of Materials*, 38 :1170–1181. [73](#)
- [Procaccia, 1998] Procaccia, H. (1998). Fondements et applications des approches fréquentielle bayésienne dans le domaine de la sûreté de fontionnement. *Edition interne ISDF*. [7](#), [113](#)
- [Procaccia et al., 1992] Procaccia, H., Piepszownik, L., and Clarotti, C. (1992). *Fiabilité des équipements et théorie de la décision statistique fréquentielle et bayésienne*. Ed Eyrolles. [2](#), [113](#)

- [Rabbe et al., 2000a] Rabbe, P., Lieurade, H.-P., and Galtier, A. (2000a). Essais de fatigue. partie I. *Techniques de l'ingénieur. Matériaux métalliques*, MB1(M4170) :M4170.1–M4170.22. 30, 32
- [Rabbe et al., 2000b] Rabbe, P., Lieurade, H.-P., and Galtier, A. (2000b). Essais de fatigue. partie II. *Techniques de l'ingénieur. Matériaux métalliques*, MB1(M4171) :M4171.1–M4171.21. 32
- [Raoult, 2009] Raoult, I. (2009). Le dimensionnement fiabiliste à la fatigue chez psa. *PSA PEUGEOT CITROEN*. 44
- [RIAC, 2011] RIAC (2011). *Reliability Information Analysis Center*. Nonelectronic Parts Reliability Data. 2
- [Robert, 1992] Robert, C. (1992). *L'analyse statistique bayésienne*. ECONOMICA. 2, 7, 18
- [Robert, 2001] Robert, C. (2001). *The Bayesian choice*. Springer. 7, 18
- [Scilab,] Scilab. Logiciel open source de calcul numérique. <http://www.scilab.org>. 62
- [Shigley, 1972] Shigley, J. (1972). *Mechanical Engineering Design*. Mc GRAW Hill. 27, 30
- [Stephens et al., 2001] Stephens, R., Fatemi, A., Stephens, R., and Fuchs, H. (2001). *Metal Fatigue in Engineering*. Wiley-interscience, 2nd edition. 27, 100
- [Suhner, 1994] Suhner, M. (1994). *Utilisation de l'analyse bayésienne pour optimiser la démarche de Fiabilité*. PhD thesis, Université de Nancy. 113
- [Tebbi, 2005] Tebbi, O. (2005). *Estimation des lois de fiabilité en mécanique par les essais accélérés*. PhD thesis, Université d'Angers. 55, 56
- [Usureau, 2001] Usureau, E. (2001). *Application des méthodes bayésiennes pour l'optimisation des coûts de développement des produits nouveaux*. PhD thesis, Institut des Sciences et Techniques de l'Ingénieur d'Angers. 20, 120
- [Voiculescu et al., 2009] Voiculescu, S., Guerin, F., and Barreau, M. (2009). Bayesian parameter estimation with prior weighting in alt model. In *RAMS 2009*, Fort Worth, Texas, USA. 7, 55, 56
- [Zhao and Yang, 2008] Zhao, Y. and Yang, B. (2008). Probabilistic measurements of the fatigue limit data from a small sampling up-and-down test method. *International Journal of Fatigue*, 30 :2094–2103. 46, 49

Thèse de Doctorat

Pauline BEAUMONT

Optimisation des plans d'essais accélérés

Application à la tenue en fatigue de pièces métalliques de liaison au sol

Résumé

Dans l'industrie, et en particulier dans le domaine automobile, il est crucial de valider la fiabilité des systèmes de manière efficace, rapide et à moindre coût. Les pièces de Liaison Au Sol chez PSA sont soumises au phénomène de fatigue et leur conception est validée à partir de calculs mais aussi et principalement d'essais physiques. Les méthodologies globales de qualification en fatigue sont basées sur un protocole d'essai spécifique et une méthode d'estimation associée. Les travaux présentés ici présentent tout d'abord un état de l'art de méthodologies globales de qualification en fatigue, issues de la littérature et des applications PSA. Ces différents axes d'étude sont comparés par simulation numérique afin d'en définir la robustesse, l'efficacité et le coût. A l'issue de cette étude, une méthodologie globale efficace a été développée, et en partie mise en place.

L'ensemble des travaux permet tout d'abord d'avoir un point de vue critique sur les méthodologies d'estimation de la fiabilité par les essais. Ils ont mené à la mise en place d'une amélioration des stratégies actuelles et ouvre la voie à des changements d'envergure chez PSA.

Mots clés

Fiabilité, Essais accélérés, Fatigue, Liaison Au Sol, Simulation Numérique, Optimisation, Approche Bayésien.

Abstract

In an industrial context, and in particular in the automotive industry, the systems' reliability has to be efficiently demonstrated, in a quick and cheap way. In PSA, chassis parts design is validated both by numerical calculations and by high-cycle endurance tests. Fatigue qualification methodologies are based on a specific test protocol and on an associated estimation method. In this work, at first a review of the fatigue test methodologies currently used in the automotive industry and state-of-the-art from academic research are addressed. Thus, numerical simulations are used in order to assess the reliability of these procedures and to compare their performance, robustness and cost. Finally, an efficient global methodology is developed and part of it is implemented.

The whole work performed permits first to have a critical point of view on reliability assessment by testing methods. Then, it leads to a qualification strategy improvement and points the way towards major enhancements in PSA's fatigue qualification strategy.

Key Words

Reliability, Accelerated tests, Fatigue, Chassis parts, Numerical Simulation, Optimization, Bayesian approach.