



Modélisation du rayonnement ultrasonore par un traducteur EMAT dans une pièce ferromagnétique

Clémence Rouge

► To cite this version:

Clémence Rouge. Modélisation du rayonnement ultrasonore par un traducteur EMAT dans une pièce ferromagnétique. Autre. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2013. Français. NNT : 2013BOR14995 . tel-00942873

HAL Id: tel-00942873

<https://theses.hal.science/tel-00942873>

Submitted on 6 Feb 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 4995



THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

Par Clémence ROUGE

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : mécanique

MODÉLISATION DU RAYONNEMENT ULTRASONORE PAR UN TRANSDUCTEUR EMAT DANS UNE PIÈCE FERROMAGNÉTIQUE

Soutenue le : 17 / 12 / 2013

Devant la commission d'examen formée de :

M. ARISTÉGUI, Christophe
M. LAGUERRE, Laurent
M. LEPOUTRE, François
M. LHÉMERY, Alain
M. GRONDEL, Sébastien
M. WALASZEK, Henri

Professeur des Universités, I2M Bordeaux
Directeur de recherche, IFSTTAR Nantes
Professeur des Universités, ONERA Châtillon
Ingénieur-chercheur, CEA Saclay
Professeur des Universités, IEMN Lille
Ingénieur de recherche, CETIM Senlis

Directeur de thèse
Rapporteur
Rapporteur
Encadrant de thèse
Président du jury
Examineur

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier l'ensemble du département du CEA LIST au sein duquel j'ai effectué mon stage de fin d'étude, poursuivi par ma thèse. J'ai particulièrement apprécié la confiance que m'ont donnée mes chefs de laboratoire successifs, Steve Mahaud puis Sylvain Chatillon. J'ai reçu, et aussi apprécié, cette même confiance de la part du CETIM, plus particulièrement de la part de Fan Zhang et d'Henri Walaszek. J'exprime aussi ma gratitude au président du jury, Sébastien Grondel, ainsi qu'aux deux rapporteurs, Laurent Laguerre et François Lepoutre, qui ont été prévénus tardivement et qui ont généreusement accepté de faire parti du jury.

J'ai par ailleurs reçu le soutien très appréciable de Christophe Aristégui, mon directeur de thèse. Je le remercie pour s'être investi dans mon travail malgré la distance et l'éloignement de mon sujet par rapport à ses propres thématiques de travail. Je retiens ses nombreux conseils et le remercie de m'avoir donné de nombreuses ficelles sur le métier de chercheur, notamment dans le monde académique. Que de chemin parcouru depuis les cours (et les examens ...) de mécanique de MATMECA !

J'adresse maintenant un grand merci à Alain Lhémy, mon encadrant au CEA durant ses trois ans et demi. J'ai beaucoup apprécié ses connaissances dans les nombreux domaines de l'accoustiques que nous avons abordés, et notamment sa capacité à m'orienter dans la littérature. Je le remercie aussi très sincèrement de m'avoir donné la possibilité de participer à de nombreuses conférences internationales, de m'avoir confronté à la rédaction de proceeding et de m'avoir poussé à rédiger un « vrai » article. Je n'oublierai pas non plus que s'est lui qui m'a ouvert de nouveaux horizons sous Word grâce à MathType ainsi que de m'avoir fait découvrir les merveilleuses facultés de dessin 3D de Power Point.

Enfin, je remercie tous les permanents, doctorants, stagiaires, intérimaires, amis, membres de ma famille et mon chéri pour m'avoir soutenu au cours de ces trois longues années. La liste est longue et n'est peut-être pas exhaustive (je m'en excuse d'avance) mais voici un petit aperçu de ce que je retiens de toutes ces belles amitiés. Je remercie Marie-Anne ma première co-bureau, Adrien le geek informaticien, Vincent, Clément, Pascal, Victor, Bo et sa patience inégalable avec Michel, Mathieu et son magnifique dessous de plat composite, Thomas le bienheureux, Antoine le malheureux, Marouane mon préféré de tous, Roberto, Jason (merci pour POE ça déchire), Bibi Casper Pierrette et

tout le reste, l'échelle Barbouteau, Audrey la vraie fausse fille que ça fait plaisir de pas être la seule, Warida, Souad, Mickaël, Florent, Bastien, Hamza, Léo et les kiwis, Mathilde et les bananes, Josua le petit dernier, l'ASM et l'Aviva Stadium, Teemo et ses champignons définitivement hyper-toxiques, le poisson roux et le poisson noir, Ciel Mon Doctorat, Raph et sa patience à LOL, les Blonds et les cinés pas chers, Phiphi et Nadou, les petits animaux, les deux Nains, Nico et Anne-Laure, Ruddy et Nazareth, Ben pour son exotisme, Flo et BattleStar Galactica, Franz et Titi, les soirées Georges même s'il est difficile de s'y faire accepter, les 3@ c'étaient mieux avant, les filles du Stade de Vanves, Hugues y compris, Queen Muse et les autres, JRR Tolkien et Pierre Bordage, les cookies macadamia et les beignets du restau 2, Mouth et Pouth, Nicolas Rouge pour ne pas avoir soutenu avant moi-même avec 4 ans d'avance, Nicolas Ernest Specklin pour être encore plus nul que moi aux jeux de sociétés, et encore une fois mon chéri, parce que c'est quand même lui qui a le plus souffert dans tout ça.

Oui car dans une thèse il n'y a pas que de la joie, il y a aussi des moments d'intense souffrance. Voici venu le moment des BLÂMES ! Je blâme la kwak qui fait mal à la tête, la Guinness de 11h30 du matin, les cartes routières britanniques, le RCT, Melun et Magny-Cours pour être si perdus, CIVA et JAVA, les Misérables, la ventilation du labo de soudure et l'isolation de la passerelle, les out of memory, la N118, le brouillard et encore plein d'autres choses j'en suis sûre mais je ne me souviens plus. Une fois n'ai pas coutume, je blâme aussi Mathieu parce que franchement me faire faire un nombre incalculable de week-ends sans travailler et partir en vacances trois semaines derrières en me laissant toute seule ce n'est pas très sympa, surtout pour aller dans un pays où j'avais aussi très envie d'aller. Vilain Zouzou.

Pour terminer, et bien non en fait rien de plus à part que je suis bien contente d'avoir fini tout ça vivante et que je souhaite la plus grande réussite à tout le monde.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	3
TABLE DES MATIÈRES	7
NOMENCLATURE	13
INTRODUCTION	17
 CHAPITRE 1 : REVUE D'OUTILS THÉORIQUES ET NUMÉRIQUES POUR DÉCRIRE LE COMPORTEMENT MAGNÉTIQUE DES MATÉRIAUX FERROMAGNÉTIQUES EN VUE DE MODÉLISER LA GÉNÉRATION D'ONDES ÉLASTIQUES PAR EMATS	 23
1 PRÉSENTATION DES PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES DES MATÉRIAUX FERROMAGNÉTIQUES	25
1.1 Description microscopique des matériaux ferromagnétiques selon les domaines de Weiss : les différents processus d'aimantation.....	26
1.2 Description macroscopique non linéaire du magnétisme des matériaux ferromagnétiques à l'aide du cycle d'hystérésis magnétique	28
1.2.1 Courbe de première aimantation et courbe anhystérétique	29
1.2.2 Présentation du cycle d'hystérésis magnétique.....	30
1.2.3 Qualité d'aimantation des matériaux ferromagnétiques.....	32
1.2.4 Propriétés mécaniques des matériaux ferromagnétiques affectées par l'application d'un champ magnétique.....	32
1.3 Description du phénomène de magnétostriction : interactions magnéto-mécaniques des matériaux ferromagnétiques	33
1.3.1 Les différentes formes de magnétostriction	33
1.3.2 La magnétostriction de Joule.....	34
1.3.3 Magnétostriction macroscopique	35
2 MODÉLISATION DE LA GÉNÉRATION D'ONDES ÉLASTIQUES PAR EMAT EN MILIEU FERROMAGNÉTIQUE	37
2.1 Description des EMATs	38
2.2 Description des mécanismes de génération d'ondes élastiques.....	39
2.2.1 Force de Lorentz	40
2.2.2 Force d'aimantation	40

2.2.3	Force de magnétostriction	40
2.2.4	Phénomène de doublement de fréquence	41
2.3	Présentation des modèles numériques existant dans la littérature.....	41
2.3.1	Couplage fort électromagnétisme / acoustique.....	42
2.3.2	Couplage faible électromagnétisme / acoustique.....	43
2.4	Présentation des modèles de calcul CIVA.....	44
2.4.1	Modélisation des champs magnétiques induits en milieu ferromagnétique.....	44
2.4.2	Modélisation des ondes élastiques ultrasonores	45
2.5	Présentation de la démarche de calcul adoptée et adaptée au logiciel CIVA	46
 CHAPITRE 2 : CALCUL FORMEL DU CONTENU FRÉQUENTIEL DES FORCES ÉLECTROMAGNÉTIQUES.....		49
1	CALCUL FORMEL DU CONTENU FRÉQUENTIEL DES FORCES DE LORENTZ ET D'AIMANTATION.....	51
1.1	Écritures formelles des forces d'aimantation et de magnétostriction	51
1.2	Exemples de contenu fréquentiel des deux forces.....	52
2	CALCUL FORMEL DU CONTENU FRÉQUENTIEL DE LA FORCE DE MAGNÉTOSTRICION.....	53
2.1	Calcul du tenseur des déformations de magnétostriction	53
2.2	Calcul du tenseur des déformations piézomagnétiques	57
2.3	Calcul du tenseur des contraintes de magnétostriction.....	60
2.4	Expression de la force de magnétostriction par la prise en compte des conditions aux limites	61
2.5	Algorithme de calcul de la force de magnétostriction.....	62
2.6	Exemples de contenu fréquentiel de la force de magnétostriction	65
 CHAPITRE 3 : TRANSFORMATION DE FORCES VOLUMIQUES EN CONTRAINTES SURFACIQUES ÉQUIVALENTES		71
1	TRANSFORMATION FORCES-CONTRAINTES PAR SIMPLE INTÉGRALE DE LA FORCE	73
1.1	Exemple d'un cas d'application où l'intégration simple est valide.....	73
1.2	Exemple d'un cas d'application où l'intégration simple n'est pas valide	73
2	TRANSFORMATION FORCES-CONTRAINTES INCLUANT DES MOMENTS D'ORDRES SUPÉRIEURS DE CES FORCES..	75
2.1	Définition des équations du problème	75
2.1.1	Formulations du déplacement particulière dans un demi-espace infini.....	75
2.1.2	Série de Taylor et moments des forces	76

2.1.3	Équation d'équilibre local.....	76
2.2	Résolution du problème par l'expression des dérivées normales du tenseur de Green	78
2.2.1	Relations dans un demi-espace infini entre les dérivées des différentes composantes des fonctions de Green.....	78
2.2.2	Dérivées normales des fonctions de Green.....	81
2.2.2.1	Dérivées du premier ordre.....	81
2.2.2.2	Dérivées du second ordre	82
2.2.3	Deux formulations des contraintes surfaciques équivalentes	83
2.2.3.1	Première formulation	83
2.2.3.2	Deuxième formulation.....	84
2.3	Écriture transitoire de la transformation.....	85
3	VALIDATION DE L'ORDRE DE GRANDEUR DES CONTRAINTES SURFACIQUES ÉQUIVALENTES	88
3.1	Validation de l'ordre de grandeur d'une contrainte équivalente de la force de magnétostriction.....	88
3.2	Validation de l'évolution des contraintes équivalentes en fonction du champ d'induction magnétique statique.....	90
 CHAPITRE 4 : RAYONNEMENT ET RÉCEPTION DES ONDES ÉLASTIQUES ÉMISES PAR EMATS DANS UN MILIEU FERROMAGNÉTIQUE		97
1	UTILISATION DES MODÈLES DE RAYONNEMENT DES ONDES ÉLASTIQUES.....	99
1.1	Modèle de rayonnement des ondes de volume	99
1.2	Modèle de rayonnement des ondes guidées	104
2	ADAPTATION DES MODÈLES EXISTANT À LA PROPAGATION DES ONDES GUIDÉES EN DEUX DIMENSIONS.....	105
2.1	Calcul analytique 2D du champ d'excitation magnétique dynamique	106
2.2	Ondes guidées symétriques et antisymétriques : ondes de Lamb générées dans une plaque	109
2.2.1	Fonctions de Green pour les ondes guidées de Lamb	109
2.2.2	Amplitude modale des ondes de Lamb	111
2.3	Pour les ondes guidées transverses horizontales : ondes SH générées dans une plaque.	115
2.3.1	Fonctions de Green pour les ondes guidées SH générées dans une plaque.....	115
2.3.2	Amplitude modale des ondes SH générées dans une plaque	116

3	RÉCEPTION DES ONDES ÉLASTIQUES PAR EMATS EN MILIEU FERROMAGNÉTIQUE : APPLICATION DE LA RELATION DE RÉCIPROCITÉ.....	117
	CHAPITRE 5 : VALIDATION EXPÉRIMENTALE DES HYPOTHÈSES MAGNÉTIQUES ET ÉTUDE PARAMÉTRIQUE	123
1	VALIDATION DES HYPOTHÈSES MAGNÉTIQUES AVANCÉES POUR MODÉLISER LES CHAMPS ET FORCES ÉLECTROMAGNÉTIQUES	124
1.1	Champ induit.....	126
1.2	Perméabilités magnétiques statique et incrémentale, de première aimantation et d'anhystérésis	128
1.3	Structure cristallographique des matériaux ferromagnétiques	130
1.4	Isotropie magnétostrictive.....	135
2	ÉTUDE PARAMÉTRIQUE	142
2.1	Configuration étudiée	142
2.2	Génération d'ondes de volume pour un champ d'induction magnétique statique fort et un champ d'excitation magnétique dynamique faible	143
2.3	Génération de volume pour un champ d'induction magnétique statique et un champ d'excitation magnétique dynamique moyens	147
2.4	Génération d'ondes de volume par magnétostriction	148
	CONCLUSION	155
	BIBLIOGRAPHIE.....	159
	ANNEXE : MODÈLE DE RAYONNEMENT TRANSITOIRE APPROCHÉ D'UNE SOURCE AU CONTACT	165
	COMMUNICATIONS	171

NOMENCLATURE

Définition et unité des grandeurs magnétiques

Abréviation	Signification	Unité usuelle	Unité S. I.
A	Potentiel vecteur magnétique	T.m	kg.m.A ⁻¹ .s ⁻²
B	Champ d'induction magnétique	T	kg.A ⁻¹ .s ⁻²
B_s	Champ d'induction magnétique statique		
B_D	Champ d'induction magnétique dynamique		
B_r	Champ d'induction rémanent	T	kg.A ⁻¹ .s ⁻²
B_{sat}	Champ d'induction à saturation	T	kg.A ⁻¹ .s ⁻²
χ	Tenseur de susceptibilité magnétique	-	-
d	Tenseur des déformations piézomagnétiques	m.A ⁻¹	m.A ⁻¹
δ	Épaisseur de peau du matériau contrôlé	m	m
E	Champ électrique	V.m ⁻¹	kg.m.A ⁻¹ .s ⁻³
e	Tenseur des contraintes piézomagnétiques	N.A ⁻¹ .m ⁻¹	kg.A ⁻¹ .s ⁻²
ẽ	Tenseur des contraintes piézomagnétiques inverses	A.m.N ⁻¹	A.s ² .kg ⁻¹
ε^{MS}	Tenseur des déformations de magnétostriction	-	-
ε_{sat}	Magnétostriction à saturation	-	-
ε_T	Déformations de magnétostriction dans la direction du champ total H _T	-	-
ε(H)	Courbe de magnétostriction macroscopique	-	-
F_L	Force de Lorentz	N.m ⁻³	kg.m ⁻² .s ⁻²
F_M	Force d'aimantation		
F_{MS}	Force de magnétostriction		
H	Champ d'excitation magnétique	A.m ⁻¹	A.m ⁻¹
H_s	Champ d'excitation magnétique statique		
H_D	Champ d'excitation magnétique dynamique		
H_C	Champ d'excitation coercitif	A.m ⁻¹	A.m ⁻¹
H_{sat}	Champ d'excitation à saturation	A.m ⁻¹	A.m ⁻¹
H_T	Champ d'excitation total (statique plus dynamique)	A.m ⁻¹	A.m ⁻¹
I	Intensité du courant d'injection du circuit électrique	A	A
J	Densité de courant	A.m ⁻²	A.m ⁻²
M	Champ d'aimantation	A.m ⁻¹	A.m ⁻¹
M_s	Champ d'aimantation statique		
M_D	Champ d'aimantation dynamique		
M_{sat}	Champ d'aimantation à saturation	A.m ⁻¹	A.m ⁻¹
M_i^k	Moment d'ordre <i>k</i> selon l'axe <i>i</i>	N.m ^{k-2}	kg.m ^{k-1} .s ⁻²
σ	Conductivité électrique	S.m ⁻¹	A ² .s ³ .kg ⁻¹ .m ⁻³
σ^{MS}	Tenseur des contraintes de magnétostriction	N.m ⁻²	kg.m ⁻¹ .s ⁻²
μ	Tenseur de perméabilité magnétique	-	-
μ	Perméabilité magnétique scalaire		
μ₀	Perméabilité magnétique du vide		

Définition et unité des grandeurs élastodynamiques

Abréviation	Signification	Unité usuelle	Unité S. I.
A_m	Amplitude modale du m ^e mode	-	-
β_m	Nombre d'ondes du m ^e mode	m ⁻¹	m ⁻¹
C	Tenseur des rigidités	N.m ⁻²	kg.m ⁻¹ .s ⁻²
E	Module d'Young	N.m ⁻²	kg.m ⁻¹ .s ⁻²
E_0	Module d'Young en l'absence d'aimantation	N.m ⁻²	kg.m ⁻¹ .s ⁻²
ε^u	Tenseur des déformations élastiques	-	-
F	Force source de l'équation d'ondes	N.m ⁻³	kg.m ⁻² .s ⁻²
G	Tenseur de Green	m.N ⁻¹	s ² .kg ⁻¹
G	Module de cisaillement	N.m ⁻²	kg.m ⁻¹ .s ⁻²
λ_L, μ_L	Constantes de Lamé	N.m ⁻²	kg.m ⁻¹ .s ⁻²
ρ	Masse volumique	kg.m ⁻³	kg.m ⁻³
u	Vecteur déplacement particulaire	m	m
σ	Tenseur de contraintes	N.m ⁻²	kg.m ⁻¹ .s ⁻²
σ^u	Tenseur des contraintes élastiques	N.m ⁻²	kg.m ⁻¹ .s ⁻²
$\tilde{\sigma}^I$	Tenseur des contraintes équivalentes	N.m ⁻²	kg.m ⁻¹ .s ⁻²
$\tilde{\sigma}^{II}$	Tenseur des contraintes équivalentes	N.m ⁻²	kg.m ⁻¹ .s ⁻²

Autres définitions et unités

Abréviation	Signification	Unité usuelle	Unité S. I.
f	Fréquence	Hz	s ⁻¹
j	Imaginaire pur, $j = \sqrt{-1}$	-	-
L	Longueur de l'EMAT	m	m
t	Temps	s	s
ω_0, ω	Fréquence angulaire	rad.s ⁻¹	2 π .s ⁻¹
$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$	Repère cartésien global	-	-
(x, y, z)	Point du repère global	m	m
(x_0, y_0, z_0)	Point source dans le repère global	m	m
$(\mathbf{x}_S, \mathbf{y}_S, \mathbf{z}_S)$	Repère cartésien local	-	-
(x_S, y_S, z_S)	Point du repère local	m	m

Correspondances entre les différents systèmes d'unités magnétiques

Le système Centimètre-Gramme-Seconde (CGS) a longtemps été employé pour les unités magnétiques.

Système CGS	Système usuel	Conversion
G (Gauss)	T	1 G = 10 ⁻⁴ T
Oe (Oerster)	A.m ⁻¹	1 Oe = $\frac{10^3}{4\pi}$ A.m ⁻¹

INTRODUCTION

Les méthodes de contrôle non destructif (CND) visent à détecter, localiser, identifier et dimensionner des défauts en surface ou dans le volume de pièces ou assemblages sans en altérer les propriétés mécaniques. Le CND par ultrasons considère un ou deux transducteurs émettant et / ou recevant des ondes ultrasonores. Ce type de contrôle est illustré Figure I.1 pour une configuration comprenant deux transducteurs. Les ondes générées par le transducteur émetteur interagissent avec le milieu, ses frontières ou encore de potentiels défauts, avant d'atteindre le transducteur récepteur. L'interprétation des signaux enregistrés renseigne alors sur l'état du matériau comme par exemple la présence ou non de défaut. Une autre application du CND consiste en la caractérisation des matériaux et exploite le temps de propagation des ondes ultrasonores dans le milieu.

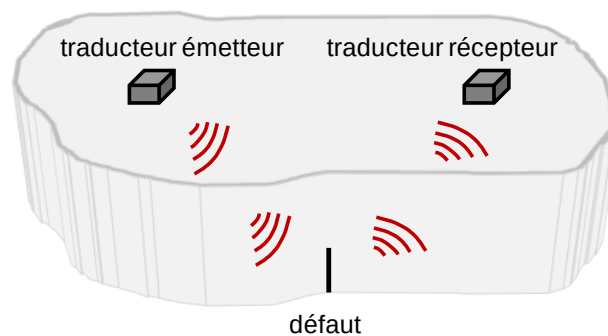


Figure I.1. Représentation d'un contrôle non destructif par ultrasons utilisant deux transducteurs.

Les transducteurs utilisés pour le CND par ultrasons sont principalement des transducteurs piézoélectriques. Cependant, les transducteurs EMATs (Electro-Magnetic Acoustic Transducers) sont parfois utilisés. Ils présentent plusieurs avantages par rapport aux transducteurs piézoélectriques, notamment pour les applications de contrôle en production, pour par exemple l'industrie sidérurgique ou encore pour des contrôles en environnements hostiles comme dans l'industrie nucléaire. En effet, les EMATs fonctionnent sans contact avec la pièce à contrôler, l'absence de couplant autorisant également leur utilisation au sein de champs de hautes pressions et de hautes températures. Ils sont de plus aptes à générer et recevoir de multiples types d'ondes ultrasonores : ondes de volume et de surface, et ondes guidées dont notamment les ondes transverses horizontales et les ondes de torsion. Le principe de fonctionnement des EMATs est illustré Figure I.2. Ces transducteurs sont composés de deux éléments principaux, un circuit électrique ou bobine, et un aimant permanent, comme représenté Figure I.2a. Le courant circulant dans le circuit électrique

génère des courants de Foucault dans le matériau, si celui-ci est conducteur. Si de plus, le milieu est magnétique alors un champ magnétique dynamique est aussi généré, tout comme un champ magnétique statique dû à l'aimant permanent. Ces deux champs, ainsi que les courants de Foucault, sont représentés Figure I.2b. L'interaction de ces différents champs entre eux et avec la structure magnétique et cristallographique du matériau est à l'origine de forces électromagnétiques : la force de Lorentz dans un milieu conducteur, à laquelle s'ajoutent les forces d'aimantation et de magnétostriction si le matériau est de plus ferromagnétique. Ces forces d'orientations quelconques sont donc générées dans le même espace que les courants de Foucault et que les champs magnétiques, comme représenté Figure I.2c. Enfin, les forces électromagnétiques sont à l'origine des ondes ultrasonores, celles-ci pouvant être de natures différentes, comme représenté Figure I.2d.

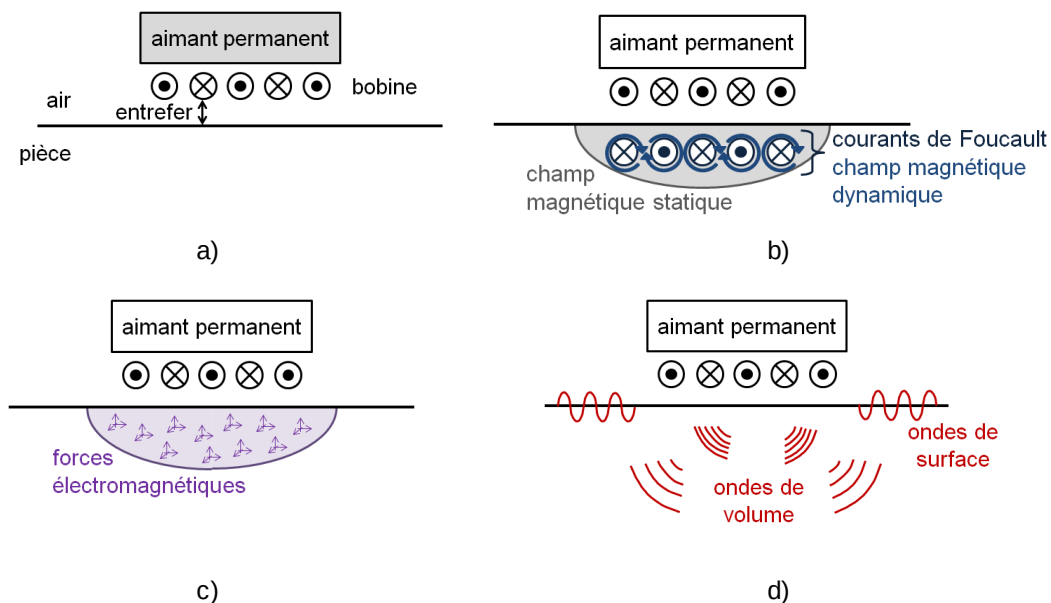


Figure I.2. Représentation du principe de fonctionnement d'un EMAT : a) schéma des éléments constitutifs d'un EMAT, b) création des courants de Foucault et des champs magnétiques, c) création des forces électromagnétiques et d) génération des ondes ultrasonores.

Ainsi, une pièce conductrice peut être contrôlée grâce à la génération d'ondes ultrasonores par EMATs. De plus, lorsque le matériau est ferromagnétique des effets magnétiques et magnétostrictifs interviennent lors de la génération et de la réception des ondes élastiques ultrasonores. Ces phénomènes magnétiques et magnétostrictifs, complexes à décrire et à modéliser, dépendent de nombreux facteurs. Le principal inconvénient des EMATs tient au fait que les amplitudes des champs ultrasonores générés par EMATs sont faibles ce qui implique de faibles rapports signal sur bruit, notamment par rapport aux transducteurs piézoélectriques.

La problématique générale des travaux présentés dans ce manuscrit est de développer la modélisation du CND par EMATs appliqué à des matériaux ferromagnétiques, pour établir des outils

de simulation qui permettront d'optimiser la conception de ces traducteurs et donc d'améliorer leurs performances acoustiques.

Les références bibliographiques sont délibérément insérées tout au long de l'étude, le chapitre 1 faisant office d'état de l'art. En résumé, la littérature existante étudie largement les propriétés magnétiques et magnétostrictives des matériaux ferromagnétiques. Le domaine de validité des descriptions analytiques de ces différents phénomènes en fonction du matériau considéré a par exemple été étudié. Cependant, le phénomène de magnétostriction n'était pas décrit de façon macroscopique en trois dimensions. En effet, l'expression de la force de magnétostriction était d'une part limitée par la description en deux dimensions des déformations magnétostrictives, et d'autre part limitée par l'approximation d'un champ statique fort par rapport au champ dynamique. Par ailleurs, la présence d'harmoniques de la fréquence d'excitation dans l'amplitude des ondes générées par EMATs dans un milieu ferromagnétique avait été mise en évidence expérimentalement. Cette création d'harmoniques a été associée aux forces électromagnétiques. Cependant, elle n'était décrite ni analytiquement ni numériquement que ce soit pour la force d'aimantation ou pour la force de magnétostriction. Le lien entre les parties électromagnétique et acoustique de la modélisation était effectué *via* la transformation des forces électromagnétiques volumiques en contraintes surfaciques équivalentes. Cette transformation présentait l'avantage d'être valable pour les fréquences et pour les matériaux utilisés en CND par EMATs. De plus, elle pouvait directement alimenter les modèles existants de propagation des ultrasons, qui considèrent des termes sources surfaciques. De manière plus générale, la modélisation complète des champs ultrasonores rayonnés par les EMATs dans des milieux ferromagnétiques était réalisée numériquement par éléments finis. Toutefois, le tenseur des déformations magnétostrictives à échelle macroscopique nécessaire au calcul de la force de magnétostriction n'était pas décrit de façon analytique. De plus, ce calcul était limité à des cas à deux dimensions sous réserve d'être en présence d'un champ statique fort par rapport au champ dynamique. Il ne donnait pas non plus les amplitudes des harmoniques en fréquence de la force de magnétostriction. Enfin, les études ne décrivaient pas de démarche cohérente de modélisation analytique en trois dimensions du CND par EMATs en tenant compte simultanément des trois forces électromagnétiques.

Compte tenu du contexte scientifique qui vient d'être décrit, l'étude présentée ici a pour but de modéliser de façon quasi-analytique la génération et la réception d'ondes ultrasonores par EMATs en milieu ferromagnétique en tenant compte des effets magnétiques et magnétostrictifs dans la génération, la propagation et la réception des ondes élastiques ultrasonores. La description proposée doit aussi pouvoir être intégrée dans le logiciel de simulation CIVA dédié au CND et développé au

sein du CEA-LIST. De plus, des données expérimentales fournies par le CETIM (Centre Technique des Industries Mécaniques), partenaire de la thèse, permettront de discuter de la validité des modèles.

Après une revue de la littérature sur les éléments pertinents pour l'étude (chapitre 1) la démarche consiste dans un premier temps à modéliser les spectres fréquentiels des forces de Lorentz, d'aimantation et de magnétostriction (chapitre 2). L'objectif est double : développer une méthode capable de s'affranchir de l'hypothèse d'un champ statique fort par rapport au champ dynamique ; et calculer le spectre fréquentiel de la force de magnétostriction pour toute orientation des champs magnétiques statique et dynamique. Pour cela, les calculs analytiques existants en deux dimensions sont repris, étendus au cas à trois dimensions, puis développés sans l'hypothèse simplificatrice de champ statique fort.

Une fois les forces électromagnétiques calculées, elles sont transformées en contraintes surfaciques équivalentes, au cours du chapitre 3. Cette transformation établit le lien entre les parties électromagnétique et acoustique de l'étude. Elle permet aussi de faire appel aux modèles de propagation existants dans CIVA et basés sur des termes sources surfaciques.

La nature des contraintes surfaciques équivalentes pousse à considérer deux cas (chapitre 4). Ils s'appuient sur le couplage de ces contraintes aux modèles de propagation. Le premier cas traite de la propagation des ondes de volume et de surface. Pour cela, un modèle existant est utilisé. Le second cas traite les ondes guidées de plaque. Ce deuxième modèle est développé de façon analytique pour les ondes transverses horizontales et quasi-analytique pour les ondes de Lamb. Il considère la formulation des amplitudes modales des ondes guidées. De plus, pour modéliser la réception des ondes élastiques ultrasonores par EMATs, la relation de réciprocité est utilisée. Les conditions de symétrie nécessaires à l'application de cette relation sont vérifiées, notamment pour le tenseur des déformations de magnétostriction.

Enfin, le chapitre 5 se concentre sur différentes expériences menées d'une part par le LMT-Cachan, sous la direction du CETIM, et d'autre part par le CETIM lui-même. Grâce aux essais de caractérisation des matériaux ferromagnétiques effectués par le LMT-Cachan, les différentes hypothèses magnétiques sont discutées et validées. L'ensemble des données est alors utilisé comme données d'entrée pour alimenter les modèles mis en place et effectuer des simulations au cours d'une étude paramétrique.

1 REVUE D'OUTILS THÉORIQUES ET NUMÉRIQUES POUR DÉCRIRE LE COMPORTEMENT MAGNÉTIQUE DES MATÉRIAUX FERROMAGNÉTIQUES EN VUE DE MODÉLISER LA GÉNÉRATION D'ONDES ÉLASTIQUES PAR EMATs

Ce premier chapitre traite du magnétisme des matériaux ferromagnétiques et du comportement d'un EMAT (Electro-Magnetic Acoustic Transducer) vis-à-vis de ce type de matériaux. Après avoir décrit les outils de simulation à disposition au laboratoire, la démarche développée pour modéliser la génération d'ondes élastiques par EMATs dans un matériau ferromagnétique est présentée.

La description du comportement magnétique des matériaux ferromagnétiques reste complexe malgré l'importante quantité d'études rapportées dans la littérature. De nombreux phénomènes physiques interagissent entre eux, potentiellement de manière très différente d'un matériau à un autre. Ce type de comportement est expliqué à travers la théorie d'aimantation de Weiss et le cycle d'hystérésis magnétique. Par ailleurs, le phénomène de magnétostriction intervenant dans la génération d'ondes élastiques est décrit.

Ensuite, le fonctionnement des transducteurs EMATs est exposé. L'effet de ces capteurs sur les matériaux ferromagnétiques réside en l'établissement d'une aimantation statique et d'une aimantation dynamique du matériau contrôlé. Ces deux contraintes créent trois forces à l'origine de la génération d'ondes élastiques. De nombreuses modélisations font appel à des méthodes par éléments finis, d'autres à des procédés d'homogénéisation. Cependant, en tenant compte des spécificités du logiciel de simulation du laboratoire, une autre démarche de modélisation a été mise en place. La présentation de celle-ci conclut le chapitre.

Sommaire

1	PRÉSENTATION DES PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES DES MATÉRIAUX FERROMAGNÉTIQUES	25
1.1	Description microscopique des matériaux ferromagnétiques selon les domaines de Weiss : les différents processus d'aimantation.....	26
1.2	Description macroscopique non linéaire du magnétisme des matériaux ferromagnétiques à l'aide du cycle d'hystérésis magnétique	28
1.2.1	Courbe de première aimantation et courbe anhystérétique	29
1.2.2	Présentation du cycle d'hystérésis magnétique.....	30
1.2.3	Qualité d'aimantation des matériaux ferromagnétiques.....	32
1.2.4	Propriétés mécaniques des matériaux ferromagnétiques affectées par l'application d'un champ magnétique.....	32
1.3	Description du phénomène de magnétostriction : interactions magnéto-mécaniques des matériaux ferromagnétiques	33
1.3.1	Les différentes formes de magnétostriction	33
1.3.2	La magnétostriction de Joule.....	34
1.3.3	Magnétostriction macroscopique	35
2	MODÉLISATION DE LA GÉNÉRATION D'ONDES ÉLASTIQUES PAR EMAT EN MILIEU FERROMAGNÉTIQUE.....	37
2.1	Description des EMATs	38
2.2	Description des mécanismes de génération d'ondes élastiques.....	39
2.2.1	Force de Lorentz	40
2.2.2	Force d'aimantation	40
2.2.3	Force de magnétostriction	40
2.2.4	Phénomène de doublement de fréquence	41
2.3	Présentation des modèles numériques existant dans la littérature.....	41
2.3.1	Couplage fort électromagnétisme / acoustique.....	42
2.3.2	Couplage faible électromagnétisme / acoustique.....	43
2.4	Présentation des modèles de calcul CIVA.....	44
2.4.1	Modélisation des champs magnétiques induits en milieu ferromagnétique.....	44
2.4.2	Modélisation des ondes élastiques ultrasonores.....	45
2.5	Présentation de la démarche de calcul adoptée et adaptée au logiciel CIVA	46

1 PRÉSENTATION DES PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES DES MATÉRIAUX FERROMAGNÉTIQUES

De multiples phénomènes entrent en jeu lorsqu'un matériau ferromagnétique est aimanté. Son comportement magnétique est alors conditionné par de nombreux paramètres internes et externes au matériau.

Le phénomène de magnétisme est représenté par un champ de force qui agit sur des objets dits magnétisables, qui réagissent par un mouvement de translation ou de rotation selon l'intensité et l'orientation du champ appliqué. Ce champ, appelé champ magnétique, est produit soit par des particules chargées en mouvement soit par des aimants. Dans cette étude, il n'est fait état que de matériaux aimantés par un champ extérieur provenant d'un aimant permanent (champ statique) ou d'un circuit électrique (champ dynamique). La notion de mouvement (rotation ou translation) est omise car le transducteur et la pièce à contrôler sont fixes dans l'espace et le temps. La synthèse à venir du comportement magnétique et des caractéristiques des matériaux ferromagnétiques a été principalement réalisée à partir des éléments donnés par Bozorth [1], Chikazumi [2] et Trémolet de Lacheisserie [3].

Les principales caractéristiques d'un matériau ferromagnétique sont les suivantes :

- le tenseur de perméabilité magnétique μ du matériau, reliant le champ d'excitation magnétique $\mathbf{H}$ et le champ d'induction magnétique $\mathbf{B}$, dépend de façon non linéaire de l'amplitude du champ d'excitation magnétique $\mathbf{H}$ et de l'histoire magnétique du matériau : c'est le phénomène d'hystérésis ;
- l'aimantation $\mathbf{M}$ du matériau atteint une valeur limite, quand l'intensité du champ magnétique $\mathbf{H}$ tend vers l'infini : c'est le phénomène de saturation ;
- même sans application de champ magnétique, il existe de petites régions magnétisées dont les moments magnétiques sont comparables à la valeur des moments magnétiques à saturation ; cet effet s'appelle l'aimantation spontanée ;
- enfin toutes ces caractéristiques disparaissent lorsque la température devient supérieure à la température de Curie, température de transition entre l'état ferromagnétique et l'état paramagnétique [1].

Puisque l'étude se déroule à température ambiante constante et que la température de Curie des matériaux ferromagnétiques est de plusieurs centaines de degrés Celsius, seuls les trois premiers points sont développés.

Les principaux éléments ferromagnétiques sont le fer, le nickel et le cobalt. Ce sont les trois seuls éléments purs et ferromagnétiques d'usage industriel. Certaines terres rares à basses températures sont aussi ferromagnétiques [1]. Les alliages de fer, nickel et cobalt peuvent ne pas être ferromagnétiques. Curieusement, des alliages de métaux non ferromagnétiques peuvent être ferromagnétiques comme certains alliages cuivre-manganèse-aluminium.

1.1 Description microscopique des matériaux ferromagnétiques selon les domaines de Weiss : les différents processus d'aimantation

Les matériaux ferromagnétiques sont divisés en domaines magnétiques, appelés domaines de Weiss, à l'intérieur desquels l'orientation des moments magnétiques de toutes les particules est identique [1]. La continuité dans l'orientation magnétique des moments magnétiques est assurée à travers les parois des domaines, appelées parois de Bloch, au sein desquelles l'orientation des moments varie progressivement d'un domaine à l'autre, comme illustré ci-dessous Figure 1.1. Les dimensions des domaines de Weiss sont de l'ordre du micromètre à quelques centaines de micromètres tandis que les parois de Bloch ont des dimensions de l'ordre du nanomètre à quelques centaines de nanomètres.

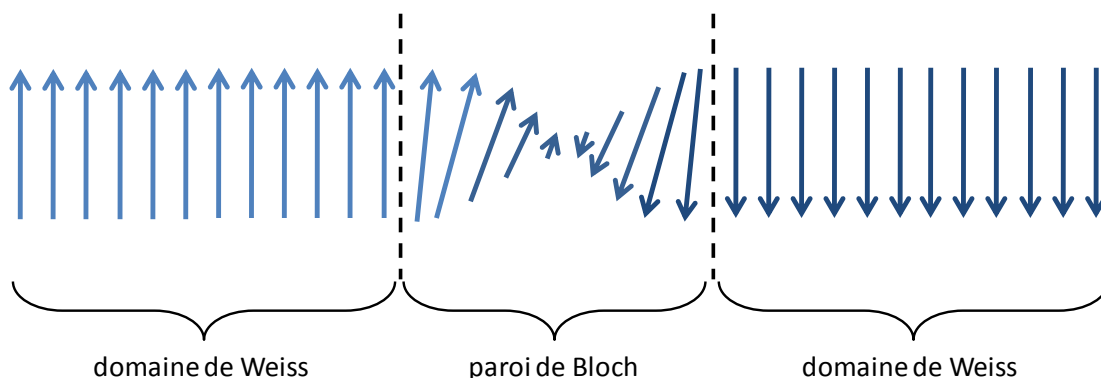


Figure 1.1. Illustration de la continuité de l'orientation des moments magnétiques entre deux domaines de Weiss à travers une paroi de Bloch.

Au repos, c'est-à-dire lorsqu'il n'est soumis à aucun champ magnétique, un matériau ferromagnétique présente une structure microscopique organisée en domaines où les moments magnétiques sont orientés aléatoirement de domaine en domaine et séparés par les parois de Bloch, comme représenté Figure 1.2a. Le matériau est alors dit être spontanément magnétisé même si d'un point de vue macroscopique, un matériau ferromagnétique au repos est non magnétisé du fait du caractère aléatoire de la distribution des orientations magnétiques des différents domaines.

L'aimantation d'un matériau ferromagnétique se fait selon deux processus :

- le mouvement des parois, ou changement de volume des domaines, responsable des phénomènes d'hystérésis, et
- la rotation ou changement de direction, des moments magnétiques d'un domaine.

Ces deux processus interviennent l'un après l'autre au fur et à mesure qu'augmente l'intensité $\|\mathbf{H}\|$ du champ appliqué. Si celle-ci devient assez forte pour amener le matériau à saturation, alors l'aimantation passe de l'état initial désaimanté Figure 1.2a à une succession d'états intermédiaires où les parois de Bloch se déplacent pour agrandir les domaines où l'aimantation spontanée est orientée selon la direction du champ appliqué (Figure 1.2b). Enfin, l'aimantation du matériau atteint un niveau de saturation quand tous les moments magnétiques ont effectué une rotation pour s'aligner selon la direction du champ appliqué (Figure 1.2c). Ainsi, l'application d'un champ magnétique réorganise l'orientation des moments magnétiques de chaque domaine, sans modifier leur valeur.

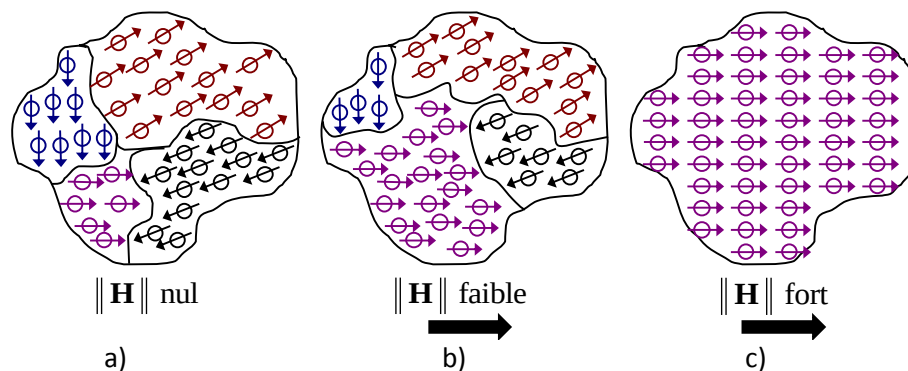


Figure 1.2. Processus d'aimantation d'un matériau ferromagnétique : a) instant initial, b) en cours d'aimantation et c) à saturation.

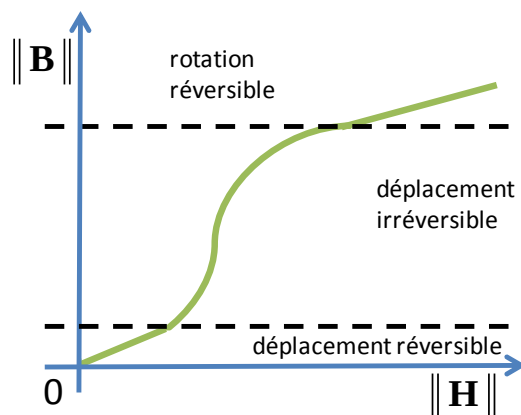


Figure 1.3. Courbe de première aimantation définissant les processus successifs d'aimantation d'un matériau ferromagnétique.

Enfin, le mouvement des parois et la rotation des moments peuvent être des phénomènes réversibles ou irréversibles. En reprenant la courbe de première aimantation (Figure 1.3), ils surviennent dans l'ordre suivant :

- déplacements réversibles des parois de Bloch,
- déplacements irréversibles de ces parois,
- rotation réversible des moments magnétiques,
- rotation irréversible des moments magnétiques, possible seulement lorsque le champ magnétique appliqué $\mathbf{B}$ ou $\mathbf{H}$ possède une orientation alternative.

1.2 Description macroscopique non linéaire du magnétisme des matériaux ferromagnétiques à l'aide du cycle d'hystérésis magnétique

Trois grandeurs vectorielles permettent de quantifier le champ magnétique : $\mathbf{B}$ représente le champ d'induction magnétique ou induction magnétique ou densité de flux magnétique en [T], $\mathbf{H}$ le champ d'excitation magnétique ou champ magnétique en [A.m⁻¹] et $\mathbf{M}$ le vecteur aimantation en [A.m⁻¹]. Ces grandeurs sont reliées par :

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \boldsymbol{\mu} \mathbf{H}, \quad (1.2)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide égale à $4\pi \cdot 10^{-7}$ [H.m⁻¹], $\boldsymbol{\mu}$ est le tenseur de perméabilité magnétique du matériau aussi appelé perméabilité magnétique relative, sans unité, et χ est le tenseur de susceptibilité magnétique du matériau, sans unité également. De plus, les trois champs magnétiques étant relié par la relation $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$, les deux tenseurs de perméabilité et de susceptibilité sont reliés par la relation $\boldsymbol{\mu} = 1 + \chi$.

L'arrangement des moments magnétiques des matériaux à l'état désaimanté et la susceptibilité χ permettent de classer les matériaux vis-à-vis de leur comportement magnétique. Notons que la susceptibilité χ varie de 10^{-5} pour les matériaux très faiblement magnétisables à 10^6 pour les matériaux très fortement magnétisables. Elle peut même prendre, pour certains matériaux dits diamagnétiques, des valeurs très faiblement négatives [2]. De plus, le comportement d'un matériau magnétisable n'étant pas toujours constant, la susceptibilité peut varier en fonction du champ magnétique appliqué. Cet effet est une des caractéristiques importantes d'un matériau ferromagnétique : soumis à un champ magnétique variable, il exhibe un comportement magnétique présentant un cycle d'hystérésis qui traduit une relation non linéaire entre champ magnétique appliqué $\mathbf{H}$ et champ magnétique induit $\mathbf{B}$.

1.2.1 Courbe de première aimantation et courbe anhystérétique

Lorsqu'un corps est aimanté pour la première fois ou aimanté à partir d'un état désaimanté, son aimantation croît selon sa courbe de première aimantation jusqu'à saturation M_{sat} . Cette courbe est représentée en vert sur la Figure 1.4a. La courbe de première aimantation relative au champ d'induction magnétique $\mathbf{B}$ est également représentée en vert sur la Figure 1.4b. Celle-ci se décompose en trois parties : une zone linéaire où la relation (1.2) est vérifiée avec une perméabilité μ scalaire, une zone coudée appelée « courbe de saturation », puis une dernière zone quasi-linéaire appelée « zone de saturation » où l'aimantation n'évolue plus.

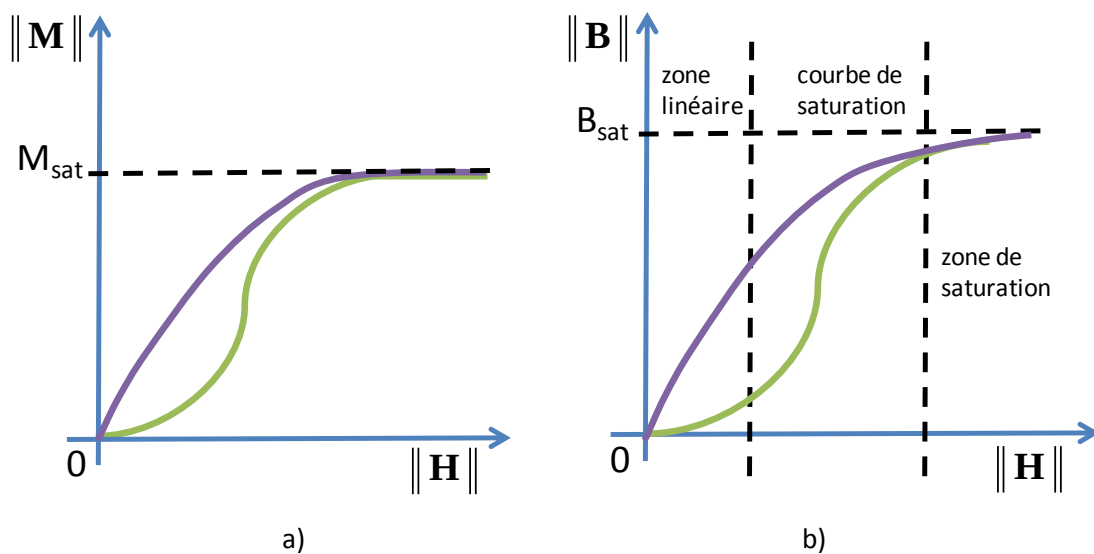


Figure 1.4. Courbe de première aimantation en vert et courbe d'anhystérésis en violet a) pour le champ d'aimantation $\|\mathbf{M}\|$ et b) pour le champ d'induction magnétique $\|\mathbf{B}\|$.

Pour les principaux éléments ferromagnétiques à température ambiante (300 °K), l'aimantation à saturation, en kA.m^{-1} , est de 1720 pour le fer, 485 pour le nickel et 1370 pour le cobalt [3]. L'induction à saturation à 300 °K est donc de 2,16 T pour le fer, 0,610 T pour le nickel et 1,72 T pour le cobalt.

Par ailleurs, la courbe d'anhystérésis, en violet sur la Figure 1.4, ne suit pas la même évolution que la courbe de première aimantation. Elle décrit l'évolution de l'aimantation du matériau en fonction du champ imposé depuis un état désaimanté et représente une succession d'états d'équilibre énergétique [4]. Elle est construite point par point. À chaque point, l'abscisse correspond à l'intensité du champ statique imposé auquel est superposé un champ alternatif évanescent de valeur moyenne nulle et dont l'amplitude initiale est beaucoup plus élevée que la valeur à saturation. Contrairement à la courbe de première aimantation, la courbe d'anhystérésis ne présente pas de point d'inflexion et est reproductible.

1.2.2 Présentation du cycle d'hystérésis magnétique

En un point quelconque de la courbe de première aimantation (Figure 1.3), un matériau ferromagnétique exhibe un comportement hystérétique lorsque l'amplitude du champ d'excitation magnétique $\|H\|$ décroît puis augmente de nouveau. Lorsque le point de départ du cycle correspond à l'état de saturation, noté B_{sat} , le cycle d'hystérésis décrit son chemin majeur comme représenté en rouge sur la Figure 1.5. La courbe d'aimantation apparaît en vert et la courbe d'anhystérésis en violet. Deux grandeurs caractéristiques du comportement magnétique du matériau apparaissent alors : le champ rémanent B_r , valeur du champ qui subsiste lorsque l'excitation magnétique $\|H\|$ revient à zéro, et l'excitation coercitive H_c qui annihile l'induction magnétique $\|B\|$ dans la pièce.

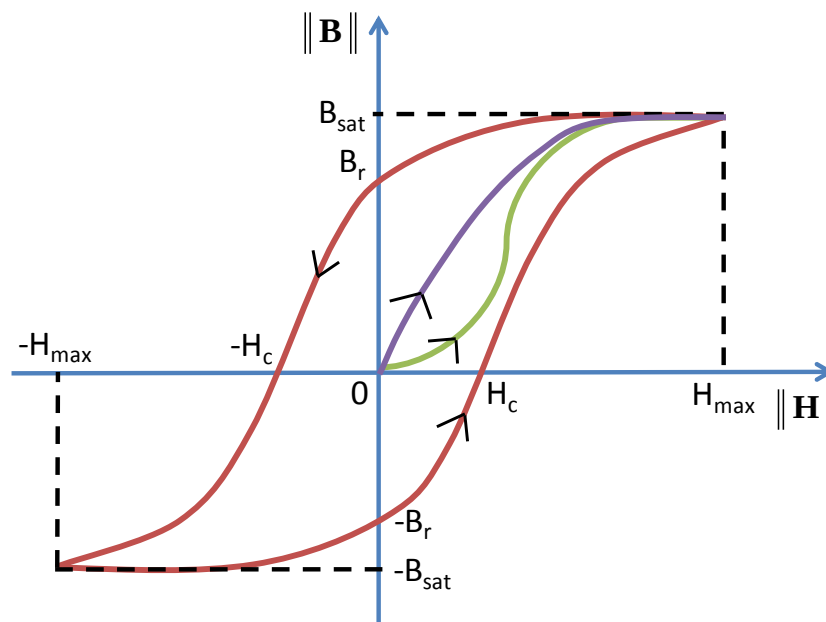


Figure 1.5. Courbe de première aimantation en vert, courbe d'anhystérésis en violet et cycle d'hystérésis majeur en rouge.

Si au cours de la première aimantation, l'intensité du champ appliqué $\|H\|$ n'augmente plus à partir d'un point situé dans la zone de linéarité mais diminue, alors l'intensité du champ magnétique $\|B\|$ décrit quasiment le même trajet dans les deux sens. C'est la partie réversible de la courbe d'hystérésis, correspondant à la zone des déplacements réversibles des parois de Bloch. Par ailleurs, en effectuant un agrandissement des différentes courbes, il est observé que ces courbes ne sont pas régulières mais en forme de marches d'escalier. C'est l'effet de Barkhausen décrit par Bozorth [1], qui rend compte des changements irréversibles de l'aimantation. D'autre part, la moyenne des deux courbes du cycle d'hystérésis maximal permet d'approximer la courbe d'anhystérésis. Cette courbe étant beaucoup plus difficile et longue à obtenir expérimentalement que le cycle d'hystérésis majeur

ou encore que la courbe de première aimantation, il est intéressant de pouvoir l'approximer grâce au cycle d'hystérésis majeur.

De façon générale, les matériaux ferromagnétiques sont classés en deux grands groupes selon la forme de leur cycle d'hystérésis majeur. Cette classification tient à une très nette différence d'ordre de grandeur de l'excitation coercitive H_c qui induit deux types de cycles d'hystérésis d'ordres de grandeur différents.

Les matériaux magnétiques doux, comme le fer ou les alliages fer-nickel et fer-cobalt, sont caractérisés par un cycle d'hystérésis étroit, comme montré sur la Figure 1.6a. Ces matériaux possèdent une grande perméabilité et une très faible excitation coercitive H_c de quelques dizaines d'A.m⁻¹. Le champ rémanent B_r est d'environ 1 T. Pour ces matériaux, la courbe d'anhystérésis est expérimentalement reproductible, ne dépend pas de l'histoire magnétique du matériau et est souvent prise comme courbe de référence [3]. Par ailleurs, elle est toujours située au-dessus de la courbe de première aimantation.

Les matériaux magnétiques durs, représentés sur la Figure 1.6b, ont un cycle d'hystérésis très large, avec une excitation coercitive H_c de plusieurs dizaines à plusieurs centaines de kA.m⁻¹. Le champ rémanent est toujours de l'ordre du Tesla. Ces matériaux, comme la magnétite ou les alliages AlNiCo, sont notamment utilisés comme aimants permanents.

Cette représentation en deux groupes souligne deux comportements extrêmes. Elle reste cependant théorique car en pratique les valeurs d'excitation coercitive H_c et les échelles de champ magnétique $\|H\|$ varient dans une très large gamme. Par exemple, les alliages fer-cobalt seront tantôt classés en tant que matériaux magnétiques doux, tantôt en tant que matériaux magnétiques durs suivant la concentration de cobalt [5].

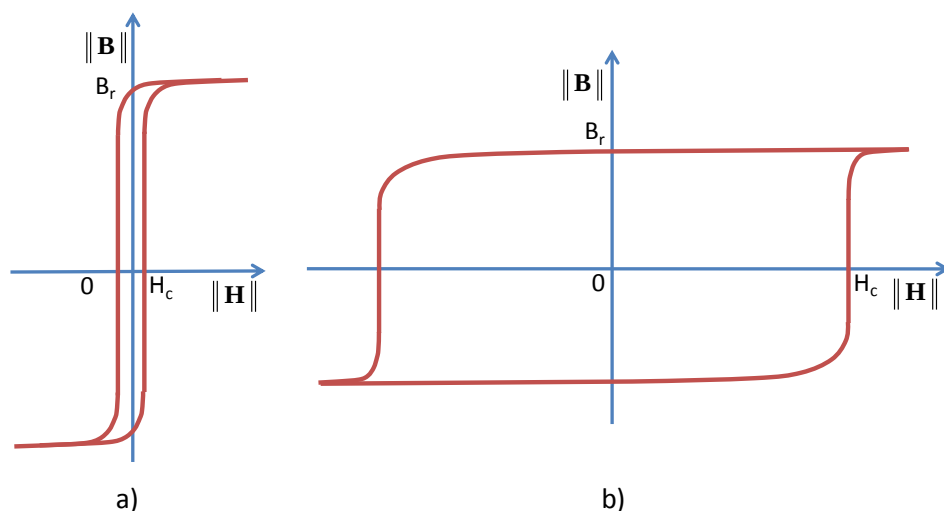


Figure 1.6. Cycles d'hystérésis représentatifs des cycles de matériaux magnétiques a) doux et b) durs.

1.2.3 Qualité d'aimantation des matériaux ferromagnétiques

Les facteurs affectant la qualité d'aimantation des matériaux ferromagnétiques sont multiples, de nature physique différente, et peuvent interagir entre eux. C'est la raison majeure pour laquelle la description du comportement magnétique des matériaux ferromagnétiques est très complexe. Les facteurs affectant le plus les propriétés magnétiques des matériaux ferromagnétiques sont : la composition chimique du matériau, son taux d'impuretés (et par suite leur nature), les contraintes et déformations appliquées et résiduelles, la température du matériau, sa structure et son orientation cristallographiques ainsi que son processus de fabrication ou encore le traitement thermique appliqué. Cependant, les propriétés magnétiques d'un matériau ne sont pas toutes sensibles de la même manière à chacun de ces facteurs. Par exemple, la température de Curie et l'aimantation à saturation ne dépendent pas des changements de structure cristallographique du matériau contrairement à la perméabilité ou à l'évolution du cycle d'hystérésis [1].

1.2.4 Propriétés mécaniques des matériaux ferromagnétiques affectées par l'application d'un champ magnétique

À l'instar des propriétés magnétiques, d'autres propriétés sont naturellement sensibles à l'application d'un champ magnétique, comme l'expose Bozorth [1] :

- la longueur et le volume du matériau peuvent varier de 0,01 % ;
- la résistivité électrique de 5 % ;
- la température de 1°C ;
- les constantes d'élasticité, de moins de 1 % à plus de 20 %.

Les variations de volume et de longueur du milieu (appelées magnétostriction, comportement détaillé dans la section suivante) affectent les constantes d'élasticité et par suite les propriétés des ondes élastiques. Ces variations d'élasticité induites en partie par la magnétostriction peuvent être également dues au processus de fabrication du matériau comme le montre Chicharro *et al.* dans le cas du nickel [6]. Cependant, il apparaît dans la littérature, notamment dans Chen *et al.* [7], Lee [8] et Morales *et al.* [9], qu'à température ambiante, la différence entre les modules d'Young à l'état démagnétisé et à l'état d'aimantation saturé n'est que de quelques pourcents pour le nickel et de moins de 1 % pour le fer et le cobalt, les principaux éléments ferromagnétiques étudiés. De plus, Gavriluk *et al.* [10] donnent les moyens de calculer, à partir de la constante de magnétostriction à saturation, du degré d'anisotropie et du champ appliqué, les variations du module d'Young et par suite les variations des vitesses de propagation des ondes magnéto-élastiques.

Un exemple d'évolution de la variation du module d'Young E en fonction de l'aimantation, donné par Street [11], est reporté sur la Figure 1.7 pour deux échantillons de cobalt, dont l'un a été recuit en le portant à une température de 1 000 °C pendant deux heures avant de le refroidir à température ambiante pendant huit heures. Les variations relatives du module d'Young $\Delta E/E_0$, où E_0 est le module d'Young en l'absence d'aimantation, sont dans les deux cas négligeables : 0,7 % dans le cas recuit et 0,25% dans le cas non recuit. Ces valeurs sont atteintes pour une aimantation de 1 000 Gauss soit 0,1 T, niveau considéré comme moyennement élevé pour le CND par EMATs. Dans les cas où le champ statique est plus élevé, les variations du module d'Young ne sont pas prises en compte.

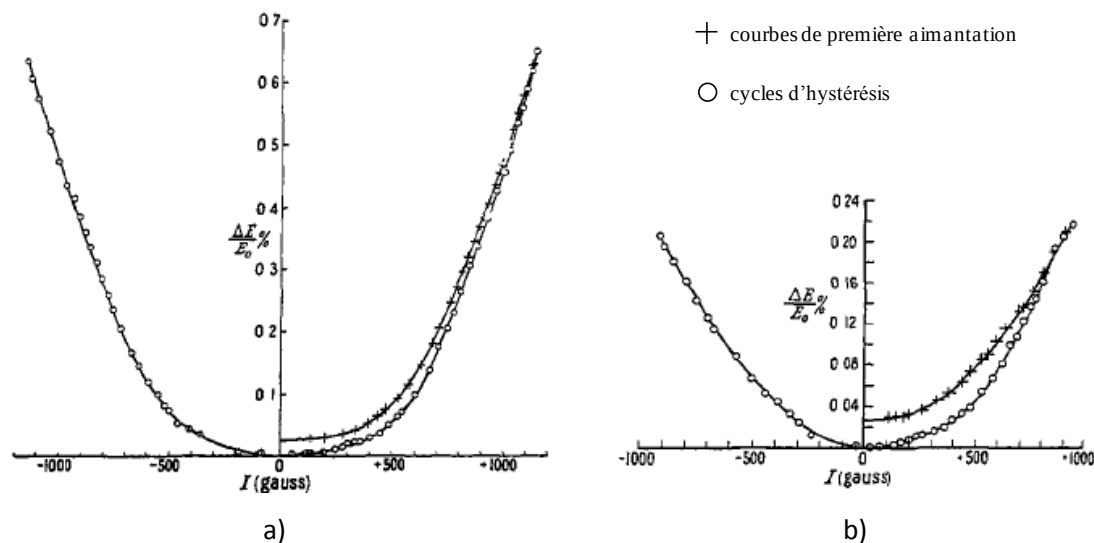


Figure 1.7. Variation du module d'Young E des échantillons de cobalt en fonction de l'intensité de l'aimantation $I = \|\mathbf{M}\|$ pour les courbes de première aimantation et cycles d'hystérésis comme représenté par Street [11] : a. recuit et b. non recuit. E_0 désigne le module d'Young en l'absence d'aimantation.

1.3 Description du phénomène de magnétostriction : interactions magnéto-mécaniques des matériaux ferromagnétiques

La magnétostriction est un phénomène important dans la génération d'ondes élastiques par EMATs dans les matériaux ferromagnétiques. Selon la configuration de l'EMAT, la magnétostriction peut même être le seul phénomène à l'origine des ondes élastiques.

1.3.1 Les différentes formes de magnétostriction

La magnétostriction est le nom donné aux divers changements des propriétés élastiques d'un matériau ferromagnétique observés lors du processus d'aimantation. Les effets réciproques,

changement d'aimantation induit par le changement des propriétés élastiques, sont également nommés magnétostriction ou parfois magnétostriction inverse.

Le principal effet de magnétostriction est l'effet Joule longitudinal qui correspond à la variation de longueur d'une pièce ferromagnétique dans la direction d'application d'un champ magnétique [1, 7, 8]. Les autres effets sont [1, 7, 8] :

- l'effet de Villari, changement du champ d'induction **B** dû à une contrainte longitudinale ;
- l'effet de Villari transverse, changement du champ d'induction **B** dû à une contrainte transverse ;
- l'effet de Joule transverse, changement de dimension dans la direction transverse à la direction d'application du champ magnétique ;
- le changement du module d'Young E et du module de cisaillement G en fonction de l'aimantation ;
- l'effet de Guillemin (et effet de Guillemin inverse), effet de flexion due au champ magnétique (et effet réciproque, aimantation due à la flexion du matériau) ;
- l'effet de Wiedemann (et effet de Wiedemann inverse), effet de torsion dû à un champ circulaire et longitudinal (et effet réciproque, aimantation longitudinale due à la torsion d'une barre circulaire et aimantée) ;
- le changement de volume sous aimantation (et effet inverse, changement de l'aimantation lorsque le volume change).

1.3.2 La magnétostriction de Joule

Dans la suite de la section, seuls les effets Joule (longitudinal et transverse) sont traités car ils sont prédominants [1], et le terme magnétostriction ne réfère dorénavant qu'à ces effets. La magnétostriction sera donc le phénomène par lequel, sous l'effet d'un champ magnétique, un matériau ferromagnétique change de dimensions. Ce changement de dimension est supposé ne pas s'accompagner de changement de volume [2]. En effet selon Bozorth [1] et Lee [8], il apparaît que la magnétostriction de volume est négligeable pour des intensités de champs magnétiques appliqués inférieures **H** à 1 000 Oersteds soit environ $8 \cdot 10^4 \text{ A.m}^{-1}$ ou encore 0,1 T. Les intensités de champs magnétiques utilisées en CND par EMATs ne sont donc pas assez importantes pour induire un changement de volume significatif des matériaux par effet de magnétostriction puisqu'elles ne dépassent pas 0,1 T. De la même façon que pour les variations du module d'Young, même si les champs statiques peuvent être plus forts que 0,1 T, la magnétostriction de volume est négligée par la suite.

1.3.3 Magnétostriction macroscopique

Tout comme l'aimantation des matériaux ferromagnétiques, la magnétostriction est la manifestation macroscopique de phénomènes microscopiques. Comme expliqué au cours du paragraphe 1.1, les moments magnétiques des différents domaines magnétiques d'un matériau ferromagnétique s'orientent suivant la direction du champ magnétique imposé. Ce mouvement est accompagné d'une déformation élastique du matériau appelé magnétostriction de Joule. Cet effet est représenté sur la Figure 1.8 où les contours violets désignent les domaines magnétiques et où les flèches vertes désignent l'orientation des moments magnétiques au sein des domaines. La différence de longueur entre l'état désaimanté et l'état d'aimantation imposée non nulle est notée ε .

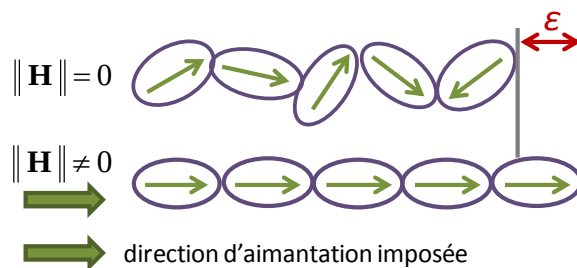


Figure 1.8. Représentation schématique de l'effet de magnétostriction avec une déformation élastique notée ε entre l'état désaimanté et un état d'aimantation imposée non nulle.

La magnétostriction d'un matériau dépend par définition du champ magnétique appliqué à ce matériau, et par suite de tous les autres facteurs affectant l'aimantation de ce matériau comme son histoire magnétique ou sa température. La magnétostriction varie ainsi selon des cycles d'hystérésis en fonction de l'intensité du champ magnétique appliqué, $\mathbf{B}$ ou $\mathbf{H}$ [1]. La déformation ε due à l'effet de magnétostriction est généralement très faible, de l'ordre de 10^{-6} à 10^{-5} , et varie avec l'intensité du champ appliqué, $\mathbf{B}$ ou $\mathbf{H}$. Comme pour l'aimantation, la déformation de magnétostriction du matériau atteint une valeur limite ε_{sat} , appelée magnétostriction à saturation dont la valeur est de l'ordre de 10^{-6} à 10^{-5} [5, 10].

À l'échelle microscopique, il existe des directions d'aimantation privilégiées, les axes cristallographiques. Ces directions dépendent du matériau considéré et en particulier de sa structure cristallographique. Cette propriété rejoint la notion d'anisotropie magnétique et traduit le fait que les propriétés et constantes magnétiques d'un matériau ferromagnétique, quel que soit son arrangement cristallin, dépendent de la direction de la mesure et de la direction d'application du champ magnétique $\mathbf{H}$. Par exemple, le fer, de symétrie cubique, s'aimante plus facilement le long de l'axe [100] que le long de l'axe [111] alors que c'est l'inverse pour le nickel, également de symétrie

cubique. Ces deux propriétés entrent en jeu avant la saturation du matériau, état où l'axe d'aimantation privilégié et l'anisotropie magnétique disparaissent. Il existe des descriptions de la magnétostriction pour différentes géométries cristallines, en fonction des axes d'aimantation privilégiés [1, 8, 13, 14]. Ces études portent généralement sur des monocristaux. De plus, des travaux détaillés de modélisation microscopique de la magnétostriction ont notamment été effectués par Daniel [15]. À partir de calculs d'homogénéisation à différentes échelles spatiales, les valeurs des déformations de magnétostriction macroscopique sont déterminées. Cependant, son approche considérant un volume équivalent représentatif couplant les mécanismes d'aimantation et de magnétostriction n'est pas compatible avec notre démarche macroscopique semi-analytique qui, comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre, nous conduit à découpler ces deux mécanismes. À l'échelle macroscopique, la déformation d'un matériau selon la direction d'application du champ imposé, peut être positive ou négative. Cet effet est notamment illustré par Bozorth [1] qui donne quatre exemples de courbes macroscopiques de magnétostriction, reportées sur la Figure 1.9. Les saturations du nickel et du permalloy 45 sont très rapides, Figure 1.9a, celle du fer est plus lente tandis que celle du cobalt n'apparaît pas sur la Figure 1.9b. La Figure 1.10 est un exemple de cycle d'hystérésis pour la magnétostriction du fer.

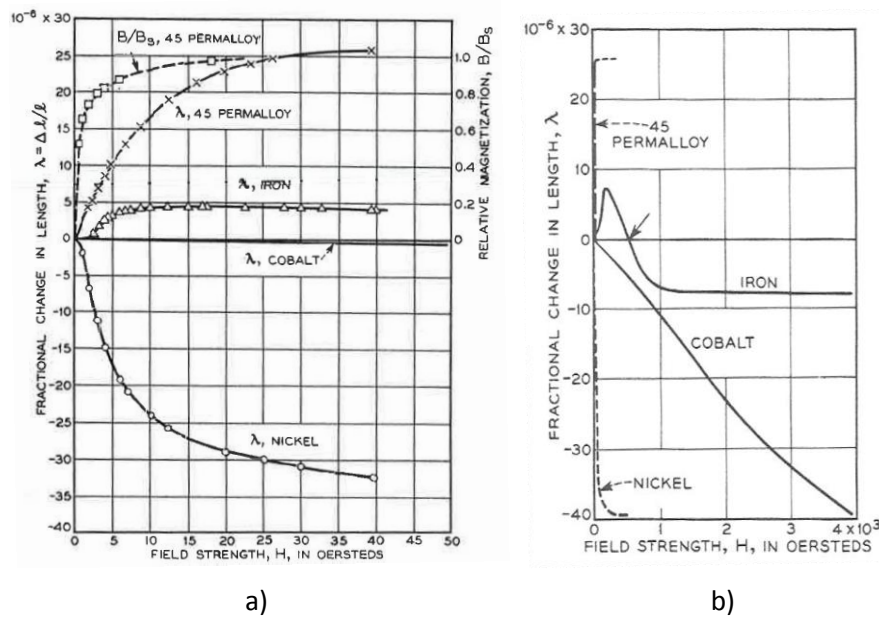


Figure 1.9. Courbes de magnétostriction du permalloy 45, du fer, du cobalt et du nickel comme représentées par Bozorth [1]. Échelle en a) dizaines et b) en milliers d'Oersteds.

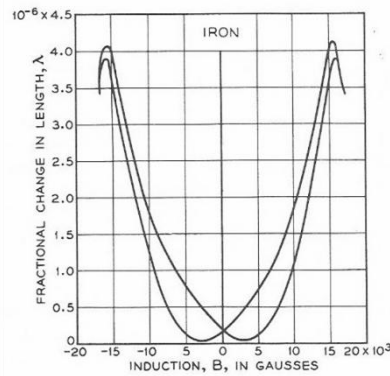


Figure 1.10. Cycle d'hystérésis de la magnétostriction du fer, comme représenté par Bozorth [1].

Par ailleurs, comme la magnétostriction conserve le volume, la déformation dans la direction transverse à la direction du champ imposée est égale la moitié de la déformation dans la direction de ce champ [1, 16], en considérant les trois dimensions de l'espace. Cette hypothèse permet notamment de calculer le tenseur des déformations de magnétostriction, comme il sera montré au chapitre suivant.

De plus, à l'échelle macroscopique, l'anisotropie magnétique est considérée comme nulle. En effet il est observé, pour un matériau initialement désaimanté et non ordonné, que le comportement magnétique est isotrope par rapport à la direction du champ appliqué. Le comportement magnétique est alors le même quelle que soit la direction du champ magnétique imposé [16]. Les courbes de magnétostriction précédentes sont ainsi considérées comme étant identiques quelle que soit la direction du champ magnétique imposé, tant que le matériau étudié est initialement désaimanté et désordonné.

2 MODÉLISATION DE LA GÉNÉRATION D'ONDES ÉLASTIQUES PAR EMAT EN MILIEU FERROMAGNÉTIQUE

Les EMATs sont souvent utilisés pour générer des ondes guidées dont notamment les ondes transverses horizontales (SH, Shear Horizontal) dans les plaques et les ondes de torsion dans les tubes. Ils présentent l'avantage de pouvoir générer plus facilement ces types d'ondes que les transducteurs piézoélectriques pourtant plus répandus. Ils possèdent par ailleurs l'intérêt de travailler sans contact, ne nécessitant donc ni couplant ni préparation de la surface de la pièce à contrôler même si celle-ci est rugueuse. Ils peuvent également être utilisés dans des environnements de fortes pressions et hautes températures, et, les acquisitions et observations alors réalisées possèdent un fort taux de reproductibilité. Enfin, un seul transducteur EMAT peut générer plusieurs

types d'ondes et la très grande variété de conceptions possibles de ces capteurs permet de générer toutes les polarités d'ondes.

Cependant, les EMATs possèdent un faible rapport signal sur bruit et leur efficacité dépend fortement des caractéristiques électromagnétiques des matériaux contrôlés. Étant données la diversité des matériaux étudiés et la multiplicité de leurs propriétés électromagnétiques, la simulation de la génération d'ondes par EMATs constitue un outil d'aide à la conception de ces capteurs en permettant de comprendre l'influence des nombreux paramètres matériaux, du capteur et de contrôle sur les amplitudes et directivités des ondes générées.

Les EMATs sont aussi utilisés en association avec des patchs magnétostrictifs, constitués de bandes fines, d'épaisseur inférieure à 500 μm , de matériaux ferromagnétiques présentant une forte magnétostriction. Dans ce cas, l'EMAT est appliqué sur le patch qui transmet mécaniquement ses vibrations élastiques à la pièce à contrôler à travers une épaisseur de colle, souvent de l'époxy. Les phénomènes physiques entrant en jeu lors de la génération d'ondes ultrasonores par patchs magnétostrictifs sont identiques à ceux associés à la génération d'ondes élastiques par EMAT dans un matériau ferromagnétique. Ainsi, guidés par cette application, nous ne considérons dans l'étude que le cas des EMATs appliqués à des matériaux ferromagnétiques.

2.1 Description des EMATs

Un EMAT est composé de deux éléments principaux : un aimant permanent ou électroaimant et un circuit électrique, appliqué sur un matériau conducteur. Le courant électrique alternatif haute fréquence circulant dans ce dernier crée des courants électriques induits dans le matériau, appelés courants de Foucault, courants qui eux-mêmes induisent un champ magnétique. Les variations temporelles de ce champ magnétique et des courants de Foucault sont supposées être les mêmes que celles du courant d'excitation du circuit électrique. Cette hypothèse traduit l'absence de phénomènes de relaxation électromagnétique aux fréquences considérées [17,18].

L'aimant permanent produit un champ d'excitation magnétique statique noté $\mathbf{H}_s$. Celui-ci fixe l'état d'aimantation du matériau, comme représenté en violet Figure 1.11 par le champ d'induction magnétique statique $\mathbf{B}_s$. Les oscillations temporelles du champ magnétique créé par le circuit électrique, appelé champ d'excitation magnétique dynamique et noté $\mathbf{H}_d$, induisent des oscillations de l'état magnétique du matériau autour de son point de fonctionnement. Ces oscillations sont représentées en rouge sur la même figure par le champ d'induction dynamique noté $\mathbf{B}_d$.

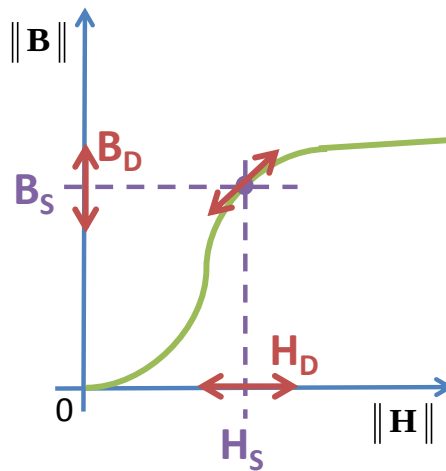


Figure 1.11. Courbe de première aimantation avec application d'un champ statique d'amplitude H_s , en violet, et application d'un champ magnétique dynamique d'amplitude variable notée H_D , en rouge.

Les circuits électriques sont de formes multiples. Les plus utilisées se présentent sous forme rectangulaire, spirale ou serpentín comme illustré sur la Figure 1.12. Les aimants permanents sont quant à eux principalement de forme parallépipédique ou cylindrique.

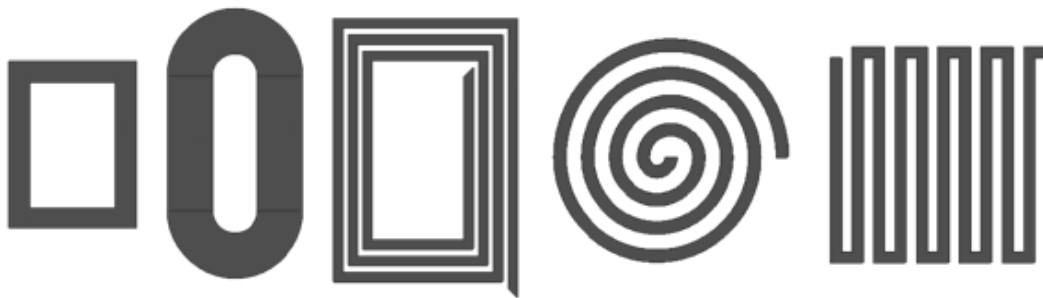


Figure 1.12. Exemples de type de circuits électriques d'un EMAT, disponible dans le logiciel de simulation CIVA.

2.2 Description des mécanismes de génération d'ondes élastiques

Trois forces électromagnétiques sont à prendre en compte dans la génération d'ondes élastiques ultrasonores par EMAT dans un milieu ferromagnétique : la force de Lorentz, la force d'aimantation et la force de magnétostriction. Il ressort de la littérature qu'une ambiguïté existe sur le point de savoir lequel de ces mécanismes est prépondérant et subsiste notamment la question de la prise en compte ou non de la force de magnétostriction. Nous verrons cependant que des résultats récents [19] et nos propres résultats, obtenus indépendamment, permettent de lever cette ambiguïté.

2.2.1 Force de Lorentz

La force de Lorentz est due à l'interaction entre les courants de Foucault et l'aimantation du matériau. Si la densité des courants de Foucault est notée $\mathbf{J}$ [A.m⁻²] et le champ d'induction magnétique est noté $\mathbf{B}$, alors la force de Lorentz $\mathbf{F}_L$ [N.m⁻³] s'écrit :

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \wedge \mathbf{B}. \quad (1.3)$$

2.2.2 Force d'aimantation

La force d'aimantation $\mathbf{F}_M$ [N.m⁻³] est créée par la réorientation des moments magnétiques atomiques lorsque l'aimantation du matériau est forcée par un champ magnétique extérieur. La force d'aimantation dépend alors du champ magnétique d'excitation $\mathbf{H}$ et du champ d'aimantation $\mathbf{M}$. Son expression est donnée par :

$$\mathbf{F}_M = \mu_0 \nabla \mathbf{H} \mathbf{M}. \quad (1.4)$$

2.2.3 Force de magnétostriction

La force de magnétostriction résulte de la réorganisation de la microstructure du matériau lorsque le matériau est aimanté. L'expression de cette force est plus complexe que celles des forces de Lorentz et d'aimantation. Elle a notamment été établie par Hirao et Ogi [16].

La méthodologie employée par ces auteurs pour établir l'expression de la force de magnétostriction repose sur l'écriture du tenseur des déformations de magnétostriction $\boldsymbol{\epsilon}^{MS}$, sans unité. Celui-ci traduit les déformations du matériau suite à la réorientation des domaines magnétiques comme représenté Figure 1.8. Il permet alors d'évaluer le tenseur des déformations piézomagnétiques $\mathbf{d}$ [m.A⁻¹] par :

$$\mathbf{d} = \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{MS}}{\partial \mathbf{H}}, \quad (1.5)$$

et par suite le tenseur des contraintes piézomagnétiques $\mathbf{e}$ [N.A⁻¹.m⁻¹] :

$$\mathbf{e} = \mathbf{C} \mathbf{d}, \quad (1.6)$$

où $\mathbf{C}$ [N.m⁻²] représente le tenseur des rigidités élastiques du matériau contrôlé. Les contraintes de magnétostriction $\boldsymbol{\sigma}^{MS}$:

$$\boldsymbol{\sigma}^{MS} = -\mathbf{e} \mathbf{H}, \quad (1.7)$$

conduisent alors à la force de magnétostriction $\mathbf{F}_{MS}$ [N.m⁻³] :

$$\mathbf{F}_{MS} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{MS}. \quad (1.8)$$

2.2.4 Phénomène de doublement de fréquence

Un phénomène de doublement de fréquence est observé pour des champs magnétiques statiques $\mathbf{B}_s$ ou $\mathbf{H}_s$ faibles et des champs magnétiques dynamiques $\mathbf{B}_d$ ou $\mathbf{H}_d$ forts, comme montré par Laguerre [20]. Il se manifeste par l'apparition dans les signaux reçus, d'harmoniques des fréquences d'excitation. Ce phénomène est intrinsèque aux forces créées par l'EMAT dans le matériau contrôlé. L'effet induit par la force de Lorentz a notamment été modélisé par Ribichini [21] et Jian *et al.* [22]. Dans le cas où le doublement de fréquence n'est pas négligeable, le contenu spectral des ondes émises ne se limite ainsi plus à celui de l'excitation. Il est donc nécessaire de modéliser ce phénomène sans restreindre les intensités de champs magnétiques statiques et dynamiques, ceci afin de ne pas se limiter au cas usuel de champs statiques dominants (par rapport aux champs dynamiques). L'outil développé permet alors de simuler un EMAT avec le moins de restriction possible.

2.3 Présentation des modèles numériques existant dans la littérature

La génération d'ondes élastiques par EMATs dans les milieux ferromagnétiques est due aux trois forces électromagnétiques décrites précédemment. L'une d'entre elles, la force de magnétostriction, résulte d'un couplage illustré par les équations (1.6) et (1.7) entre électromagnétisme et élasticité du matériau et par suite l'acoustique, à travers respectivement le champ d'excitation magnétique $\mathbf{H}$ et le tenseur des rigidités $\mathbf{C}$. Ce couplage entre électromagnétisme et acoustique est décrit par Berlincourt *et al.* [23] à l'aide des deux équations linéarisées suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{e} \mathbf{H} + \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^u, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \boldsymbol{\mu} \mathbf{H} + \tilde{\mathbf{e}} \boldsymbol{\varepsilon}^{MS}, \quad (1.10)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}^u$ est le tenseur des déformations élastiques, $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes totales (magnétostrictives et élastiques) [N.m^{-2}] et $\tilde{\mathbf{e}}$ le tenseur des contraintes piézomagnétiques inverses [A.m.N^{-1}]. Plus que l'expression (1.8) de la force de magnétostriction, ce sont ces deux équations qui sont utilisées.

Les schémas numériques mis en place pour résoudre le problème couplé constitué des équations (1.9) et (1.10) [21, 24] ou pour déterminer les champs magnétiques induits dans le matériau [16, 25] font souvent appel aux éléments finis. Parmi ces schémas numériques, deux groupes se distinguent : les schémas à couplage fort et ceux à couplage faible. Les schémas à couplage faible, souvent semi-analytiques, peuvent être totalement analytiques dans des cas de géométrie simplifiée à deux dimensions [16, 26, 27].

2.3.1 Couplage fort électromagnétisme / acoustique

Les modèles basés sur un couplage fort entre électromagnétisme et acoustique s'attachent à résoudre simultanément les équations (1.9) et (1.10), en plus des équations de Maxwell et de l'équation d'équilibre local. Ce type de couplage est schématisé sur la Figure 1.13.

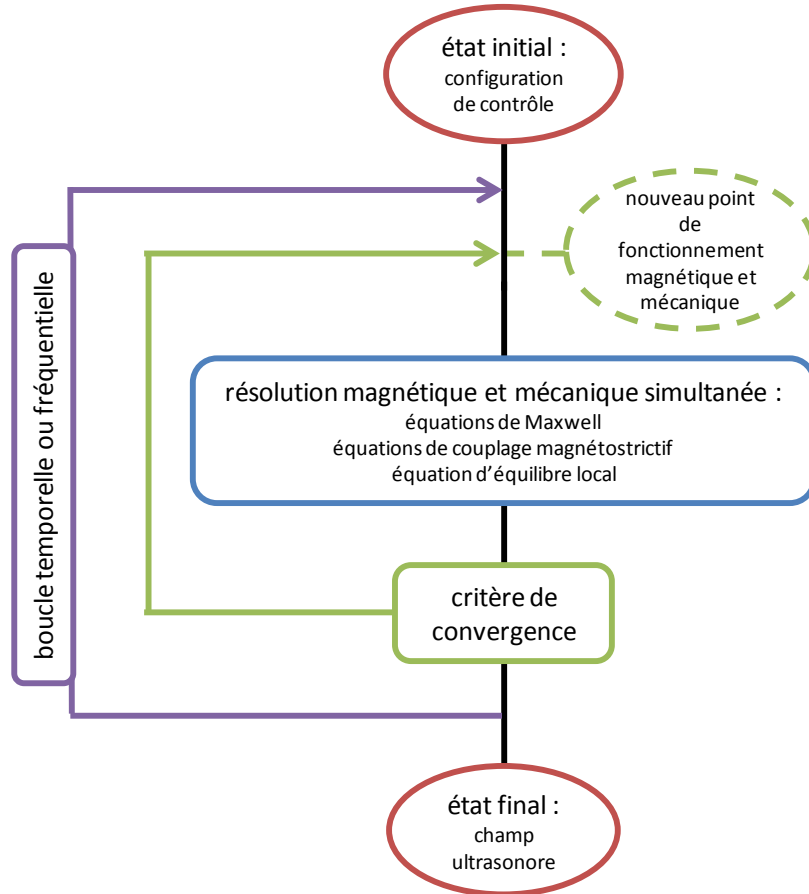


Figure 1.13. Synoptique du schéma numérique à couplage fort pour la résolution électromagnétique et acoustique du problème de la génération des ondes élastiques par EMATs en milieux ferromagnétiques.

Les fréquences utilisées en CND par EMATs, inférieures à 10 MHz, sont très inférieures aux fréquences (100 MHz [16, 17, 21]) où les longueurs d'onde électromagnétiques sont de l'ordre de grandeurs des dimensions géométriques du problème. Ainsi les équations de Maxwell à résoudre se réduisent à celles de la magnétostatique, soit l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.11)$$

où $\mathbf{E}$ représente le champ électrique [V.m^{-3}], et l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (1.12)$$

Les schémas numériques forts font par ailleurs souvent appel au potentiel vecteur magnétique $\mathbf{A}$ [T.m] défini par :

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad (1.13)$$

pour résoudre les équations de Maxwell. Enfin, l'équation d'équilibre local s'écrit :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^u + \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1.14)$$

où $\boldsymbol{\sigma}^u$ représente le tenseur des contraintes imposées au matériau [N.m^{-2}], $\mathbf{F}$ les forces appliquées sur ce dernier [N.m^{-3}], $\mathbf{u}$ le déplacement particulaire [m] et ρ sa masse volumique [kg.m^{-3}].

2.3.2 Couplage faible électromagnétisme / acoustique

Les modèles considérant un couplage faible découplent les aspects électromagnétique et acoustique, comme représenté sur la Figure 1.14. La partie électromagnétique se concentre sur la résolution des équations de Maxwell (1.12) et (1.13), avant d'évaluer les trois forces électromagnétiques à partir des équations (1.3), (1.4) et (1.8). La partie acoustique s'attache ensuite à résoudre l'équation d'équilibre local (1.14) où les trois forces précédentes constituent le terme source, tout en exploitant les conditions aux limites propres au problème. Ce type de schéma est notamment utilisé par Hirao et Ogi [16], Jafari-Shapoorabadi *et al.* [25], Thompson [26] et Eskandarzade *et al.* [28]. Ces derniers décomposent la configuration étudiée en de multiples points qui suivent la géométrie du circuit électrique de l'EMAT selon la méthode *distributed point source method* pour résoudre le problème électromagnétique puis ils utilisent un schéma aux différences finis pour résoudre le problème acoustique.

Il existe par ailleurs d'autres types de schéma numérique. Par exemple, Dapino [24] met en œuvre un schéma éléments finis avec un couplage fort entre électromagnétisme et acoustique avec une relation directe entre l'aimantation $\mathbf{M}$ du matériau et la déformation de magnétostriction $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{MS}}$. Cependant, il ne résout son schéma fort que sous certaines approximations qui lui permettent de découpler le problème en un schéma numérique faible.

Enfin, la description multi-échelle du problème reposant sur des étapes d'homogénéisation de volumes élémentaires représentatifs, et notamment développé par Buiron *et al.* [29] et par Daniel [15], constitue une alternative. Toutefois, ce dernier type de schéma nécessite une connaissance précise de la microstructure du matériau, donnée en général non disponible dans le contexte pratique des contrôles industriels.

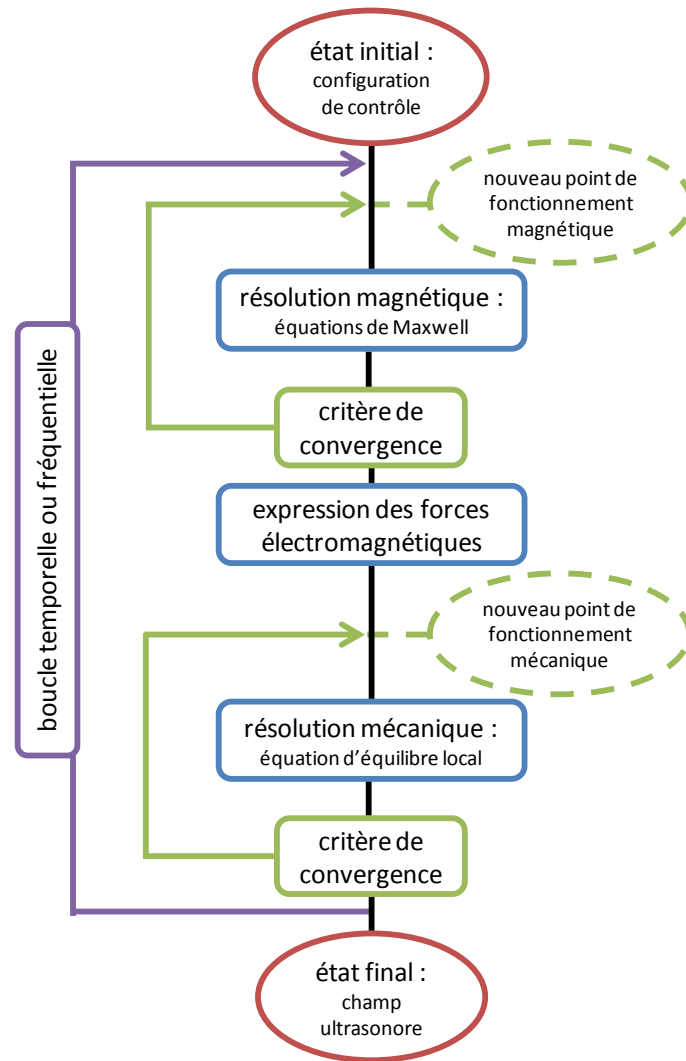


Figure 1.14. Synoptique du schéma numérique à couplage faible pour la résolution électromagnétique et acoustique du problème de la génération des ondes élastiques par EMATs en milieux ferromagnétiques.

2.4 Présentation des modèles de calcul CIVA

CIVA est une plateforme de simulation dédiée au contrôle non destructif et comprend trois modules spécifiques selon le type de contrôle : un module ultrasonore, un module de courants de Foucault et un module de radiographie et de tomographie. Ce logiciel est développé par le CEA/LIST. Pour le calcul de champs ultrasonores émis par EMATs, les deux premiers modules sont utilisés.

2.4.1 Modélisation des champs magnétiques induits en milieu ferromagnétique

Le premier module utilisé est le module de simulation par courants de Foucault, appelé CIVA CF. La densité des courants de Foucault J est calculée selon la méthode de décomposition modale [30].

Cette approche semi-analytique permet également de calculer les champs électriques et magnétiques $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ induits dans le matériau par un EMAT [31]. De nombreuses formes de circuit électrique sont prises en compte, pour un temps de calcul très faible (environ une seconde par fréquence). Le champ d'induction statique $\mathbf{B}_s$ dû à l'aimant permanent de l'EMAT est évalué grâce à des formules analytiques [32]. La forme de l'aimant est soit parallélépipédique soit cylindrique, ce qui correspond à nombre de cas pratiques du CND par EMATs.

Le module CIVA CF permet ainsi de modéliser les courants de Foucault et les champs magnétiques induits par un EMAT dans un milieu ferromagnétique. Cependant, l'évaluation volumique du champ d'induction magnétique statique est réalisée par extrusion dans la troisième dimension sans prendre en compte les effets de bord selon cette direction. De plus, le caractère non linéaire du matériau ferromagnétique n'est pas considéré, à l'heure actuelle, ce qui conduit à réduire le tenseur de perméabilité magnétique μ à un scalaire indépendant de l'intensité du champ d'excitation magnétique $\mathbf{H}$.

Le module CF permet par ailleurs de simuler l'interaction des courants de Foucault avec des défauts et par suite de simuler les résultats d'un contrôle.

2.4.2 Modélisation des ondes élastiques ultrasonores

Le deuxième module CIVA utilisé pour décrire la génération d'ondes élastiques par EMATs est le module ultrasonore appelé CIVA US. Celui-ci permet de calculer les ondes de volume et les ondes guidées générées dans un milieu isotrope homogène par des contraintes surfaciques d'orientation quelconque. Le module US permet par ailleurs de simuler l'interaction des ondes avec des défauts et par suite de simuler un contrôle.

Le cas des matériaux homogènes isotropes correspond aux matériaux ferromagnétiques étudiés et contrôlés par EMATs dans l'industrie. Les ondes de volume générées par une source au contact de la pièce sont alors décrites par des modèles temporels semi-analytiques élaborés notamment par Lhémy [33]. Les amplitudes modales des ondes guidées sont calculées par un code SAFE (Semi Analytical Finite Element) basé sur les travaux de Jezzine [34] et Baronian [35].

Ces modèles prennent comme données d'entrée l'état de contrainte à la surface du matériau contrôlé (contraintes surfaciques). Comme nous considérons des forces électromagnétiques (1.3), (1.4) et (1.8), qui sont des sources volumiques, nous allons nous attacher à rendre compatible leur formulation avec celle des modèles existants.

2.5 Présentation de la démarche de calcul adoptée et adaptée au logiciel

CIVA

La démarche suivie pour modéliser la génération d'ondes élastiques par EMATs dans des milieux ferromagnétiques doit tenir compte des spécificités de ces matériaux d'une part et des caractéristiques des modèles de simulation déjà développés au sein du laboratoire d'autre part, compte-tenu de notre volonté de les réutiliser.

La méthodologie adoptée est schématisée sur la Figure 1.15. Elle consiste en un schéma numérique à couplage faible, justifié par Ribichini [21] dans le cas d'un fort champ statique. Après avoir défini la configuration de contrôle, la géométrie et les caractéristiques électromagnétiques et ultrasonores du matériau ainsi que la géométrie et les caractéristiques du capteur EMAT, le calcul des paramètres électromagnétiques débute. Celui-ci n'est pas itératif car la perméabilité magnétique est un scalaire et l'évaluation des champs électromagnétiques est explicite. Le champ magnétique statique $\mathbf{B}_s$ créé par l'aimant permanent de l'EMAT est déterminé. Dans une boucle fréquentielle, la densité des courants de Foucault $\mathbf{J}$ induits par le circuit électrique de l'EMAT, le champ magnétique dynamique induit $\mathbf{B}_d$ ainsi que la force de Lorentz $\mathbf{F}_L$ sont aussi calculés. Une transformée de Fourier inverse (IFFT) est alors effectuée sur les composantes fréquentielles de ces deux dernières grandeurs pour les évaluer dans le domaine temporel. Le champ magnétique dynamique en fonction du temps et le champ statique ainsi obtenus sont utilisés pour calculer les forces d'aimantation $\mathbf{F}_M$ et de magnétostriction $\mathbf{F}_{Ms}$. Comme le calcul du champ ultrasonore en ondes de volume prend comme données d'entrée des contraintes surfaciques temporelles, les trois forces électromagnétiques volumiques sont transformées en contraintes surfaciques temporelles. Pour le calcul des amplitudes modales des ondes guidées, la forme fréquentielle de la force de Lorentz est utilisée alors que les deux autres forces temporelles subissent une transformée de Fourier (FFT). La transformation des forces volumiques en contraintes surfaciques est alors effectuée dans le domaine fréquentiel. Finalement, le code SAFE permet d'obtenir le calcul des amplitudes modales des ondes guidées générées par un EMAT dans un milieu ferromagnétique.

Cette démarche de modélisation fait apparaître des blocs de calcul indépendants reliés les uns aux autres par des données d'entrée imposées et par des données de sortie au format prédéfini. Nos objectifs de modélisation sont de conserver l'indépendance de ces blocs, tout en privilégiant les développements analytiques.

Le calcul des forces électromagnétiques devra intégrer le fait que des fréquences harmoniques de la fréquence d'excitation du circuit peuvent intervenir afin de modéliser en trois dimensions des EMATs

de différentes géométries et pour toute intensité de courant électrique imposée et toute amplitude de champ statique créé. Enfin, le calcul de la force de magnétostriction ne devra pas se limiter à un type de matériau ferromagnétique particulier. Pour rappel, les variations de module d'Young et de volume ne sont pas prises en compte dans la modélisation.

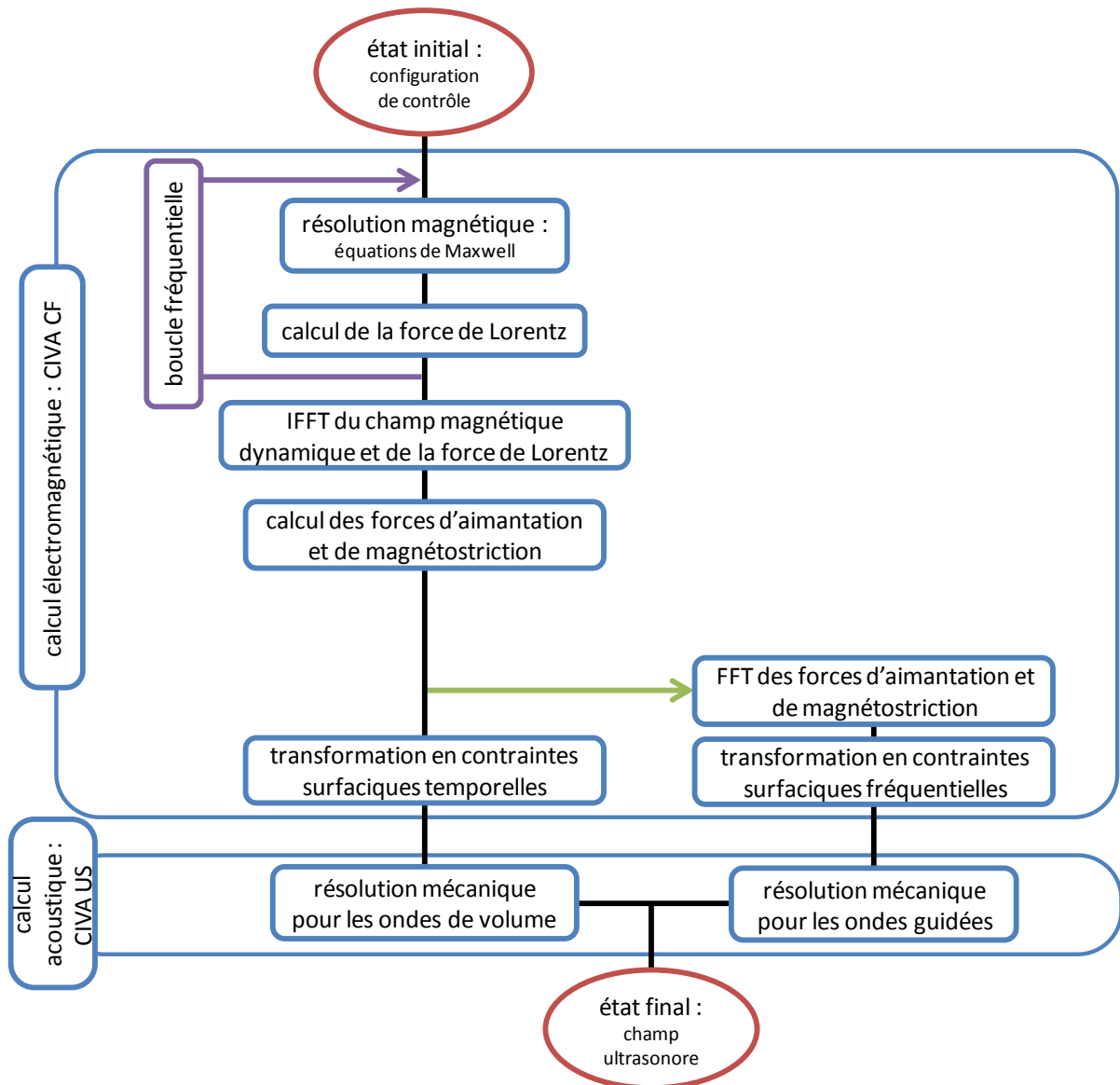


Figure 1.15 : Synoptique de la démarche de modélisation choisie pour déterminer le champ ultrasonore émis par un EMAT dans un milieu ferromagnétique, en tenant compte des caractéristiques de la plateforme de simulation CIVA.

2 CALCUL FORMEL DU CONTENU FRÉQUENTIEL DES FORCES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Ce deuxième chapitre a pour but d'établir de façon formelle les expressions des trois forces électromagnétiques entrant en jeu lors de la génération d'ondes ultrasonores par un EMAT dans un matériau ferromagnétique. Ces trois forces sont la force de Lorentz, la force d'aimantation et la force de magnétostriction. Leur formulation tient par ailleurs compte des effets de création d'harmoniques, qui apparaissent pour des intensités de champs magnétiques statiques faibles et des intensités de champs magnétiques dynamiques fortes [20, 21]. Les développements sont ainsi tous menés sans négliger l'amplitude du champ dynamique par rapport à celle du champ statique. Comme évoqué à la fin du chapitre précédent, le calcul des forces électromagnétiques fait suite au calcul par le module CIVA CF des champs électromagnétiques induits par l'EMAT dans le matériau.

Mener les calculs sans effectuer l'approximation usuelle considérant que l'intensité du champ statique est forte par rapport à celle du champ dynamique permet de prendre en compte les effets fréquentiels non linéaires. Par ailleurs, ce développement est réalisé pour des forces en trois dimensions alors qu'il est principalement présenté en deux dimensions dans la littérature, notamment pour la force de magnétostriction [16, 21, 26].

Le contenu fréquentiel des forces de Lorentz et d'aimantation sont dans un premier temps écrits de façon formelle. Ces calculs, déjà développés dans la littérature, sont illustrés à l'aide de différents spectres pour des amplitudes de champs statiques et dynamiques variées. L'originalité principale de ce chapitre porte sur la détermination du contenu fréquentiel de la force de magnétostriction. Celle-ci est décrite étape par étape, de l'évaluation des tenseurs des déformations de magnétostriction et piézomagnétiques, à celle du tenseur des contraintes de magnétostriction, en passant par la prise en compte des conditions aux limites spécifiques au phénomène de magnétostriction. L'implémentation du calcul de cette force est ensuite présentée puis, comme pour les deux forces restantes, des exemples de spectres sont donnés.

Sommaire

1	CALCUL FORMEL DU CONTENU FRÉQUENTIEL DES FORCES DE LORENTZ ET D'AIMANTATION.....	51
1.1	Écritures formelles des forces d'aimantation et de magnétostriction	51
1.2	Exemples de contenu fréquentiel des deux forces.....	52
2	CALCUL FORMEL DU CONTENU FRÉQUENTIEL DE LA FORCE DE MAGNÉTOSTRICION.....	53
2.1	Calcul du tenseur des déformations de magnétostriction	53
2.2	Calcul du tenseur des déformations piézomagnétiques	57
2.3	Calcul du tenseur des contraintes de magnétostriction.....	60
2.4	Expression de la force de magnétostriction par la prise en compte des conditions aux limites	61
2.5	Algorithme de calcul de la force de magnétostriction.....	62
2.6	Exemples de contenu fréquentiel de la force de magnétostriction	65

1 CALCUL FORMEL DU CONTENU FRÉQUENTIEL DES FORCES DE LORENTZ ET D'AIMANTATION

1.1 Écritures formelles des forces d'aimantation et de magnétostriction

Pour établir analytiquement les expressions des forces de Lorentz et d'aimantation, les trois champs magnétiques $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ et $\mathbf{M}$ sont décomposés en une partie statique et une partie dynamique. Les composantes statiques sont indiquées par l'indice « S » et les composantes dynamiques par l'indice « D ». Pour la force de Lorentz (1.3) la décomposition conduit à :

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \wedge \mathbf{B}_S + \mathbf{J} \wedge \mathbf{B}_D. \quad (2.1)$$

La densité de courant $\mathbf{J}$ représentant les courants de Foucault est une quantité purement dynamique. Cette densité de courant et la partie dynamique du champ magnétique induit $\mathbf{B}_D$ suivent les mêmes variations dynamiques que le courant électrique imposé au circuit de l'EMAT. En effet, les lois de magnétostatique s'appliquent dans le cadre du CND par EMATs [16, 17, 21]. Si ω_0 est la pulsation du courant électrique considérée [Hz], alors la force de Lorentz s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_L &= \mathbf{J} e^{j\omega_0 t} \wedge \mathbf{B}_S + \mathbf{J} e^{j\omega_0 t} \wedge \mathbf{B}_D e^{j\omega_0 t}, \\ &= \mathbf{J} \wedge \mathbf{B}_S e^{j\omega_0 t} + \mathbf{J} \wedge \mathbf{B}_D e^{j2\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

où t représente le temps [s]. De même pour la force d'aimantation (1.4), la décomposition en composantes statique et dynamique des différents champs magnétiques donne :

$$\mathbf{F}_M = \mu_0 \nabla \mathbf{H}_S \cdot \mathbf{M}_S + \mu_0 \nabla \mathbf{H}_S \cdot \mathbf{M}_D + \mu_0 \nabla \mathbf{H}_D \cdot \mathbf{M}_S + \mu_0 \nabla \mathbf{H}_D \cdot \mathbf{M}_D. \quad (2.3)$$

Pour une excitation mono-fréquentielle de pulsation ω_0 , la force d'aimantation s'écrit alors :

$$\mathbf{F}_M = \mu_0 \nabla \mathbf{H}_S \cdot \mathbf{M}_S + \mu_0 (\nabla \mathbf{H}_S \cdot \mathbf{M}_D + \nabla \mathbf{H}_D \cdot \mathbf{M}_S) e^{j\omega_0 t} + \mu_0 \nabla \mathbf{H}_D \cdot \mathbf{M}_D e^{j2\omega_0 t}. \quad (2.4)$$

Les expressions (2.2) et (2.4) constituent une écriture analytique en trois dimensions des forces de Lorentz et d'aimantation. Le dernier terme de chacune de ces équations fait apparaître une dépendance en $2\omega_0$, double de la pulsation d'injection ω_0 . C'est le seul terme harmonique de la pulsation d'injection dans ces deux expressions. L'apparition de ce seul terme est parfois dénommée effet de doublement de fréquence. De plus, les expressions des forces montrent que ce phénomène est négligeable pour des amplitudes de champs dynamiques faibles par rapport aux amplitudes des champs statiques. Sous cette approximation, les expressions des forces données dans la littérature sont bien retrouvées [16, 21, 35]. Le terme purement statique de la force d'aimantation, premier terme du membre de droite dans l'équation (2.4), n'est pas pris en compte par la suite car la génération des ondes acoustiques est un effet purement dynamique.

1.2 Exemples de contenu fréquentiel des deux forces

Pour illustrer l'importance relative de l'amplitude de l'harmonique par rapport à celle du fondamental (fréquence d'excitation), différents spectres sont calculés. Ils sont représentés sur les Figure 2.1 et Figure 2.2 pour respectivement la force de Lorentz et la force d'aimantation. Ces spectres ont été déterminés pour trois amplitudes de champ d'excitation statique $\|\mathbf{H}_s\|$ (normal à la surface) et pour trois amplitudes de champ d'excitation dynamique $\|\mathbf{H}_d\|$. Dans les deux cas, les trois amplitudes sont faible, moyenne puis forte comparativement aux amplitudes de champ générées en CND par EMATs. Pour chaque spectre, les amplitudes sont normalisées par rapport à la valeur la plus élevée. Pour les deux forces, plus le champ dynamique imposé est élevé, plus l'amplitude de l'harmonique est élevée par rapport à celle du fondamental. De même, plus le champ statique imposé est faible, plus l'amplitude de l'harmonique est élevée par rapport à celle du fondamental, conformément aux expressions (2.2) et (2.4) et à la littérature [16, 21, 26], où l'effet de doublement de fréquence est négligé pour $\|\mathbf{H}_s\| \gg \|\mathbf{H}_d\|$.

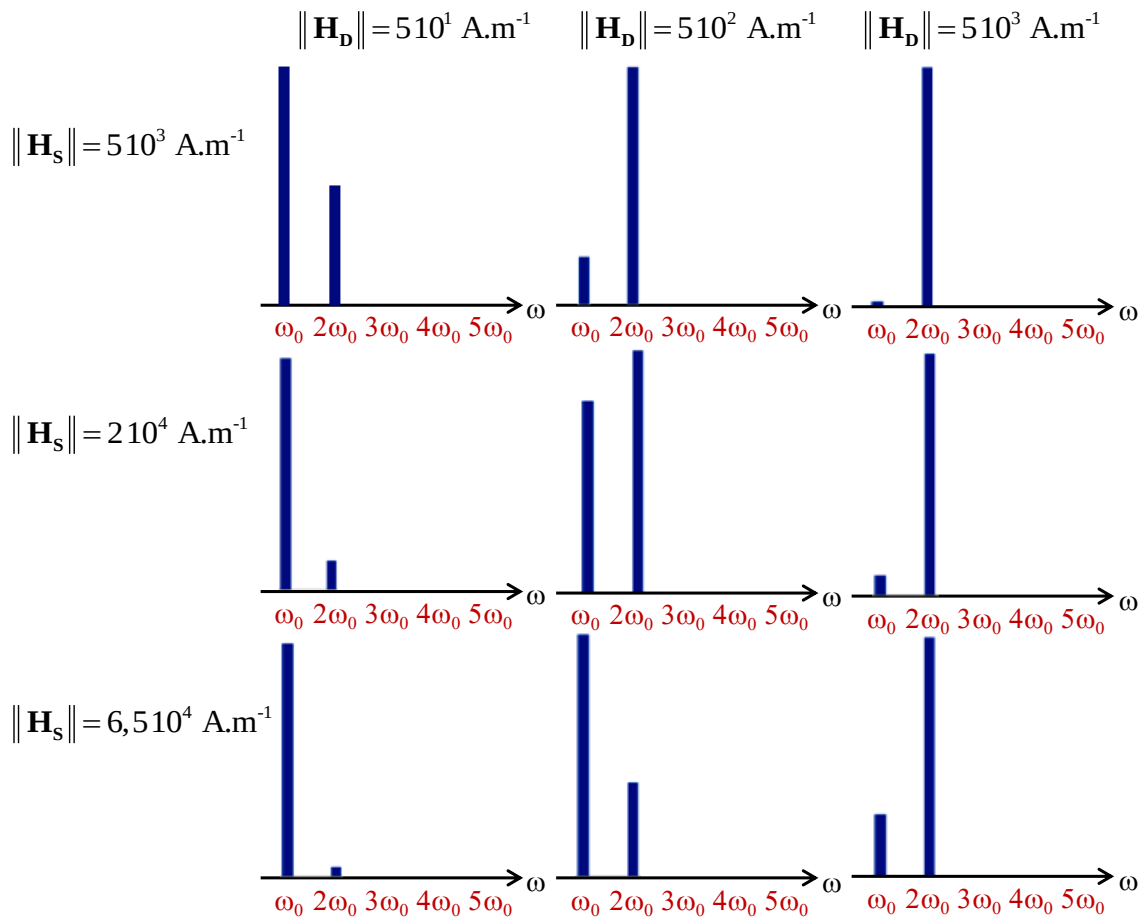


Figure 2.1. Spectres de la force de Lorentz F_L pour différentes amplitudes de champs magnétiques d'excitation statique et dynamique dans le fer. Amplitudes normalisées.

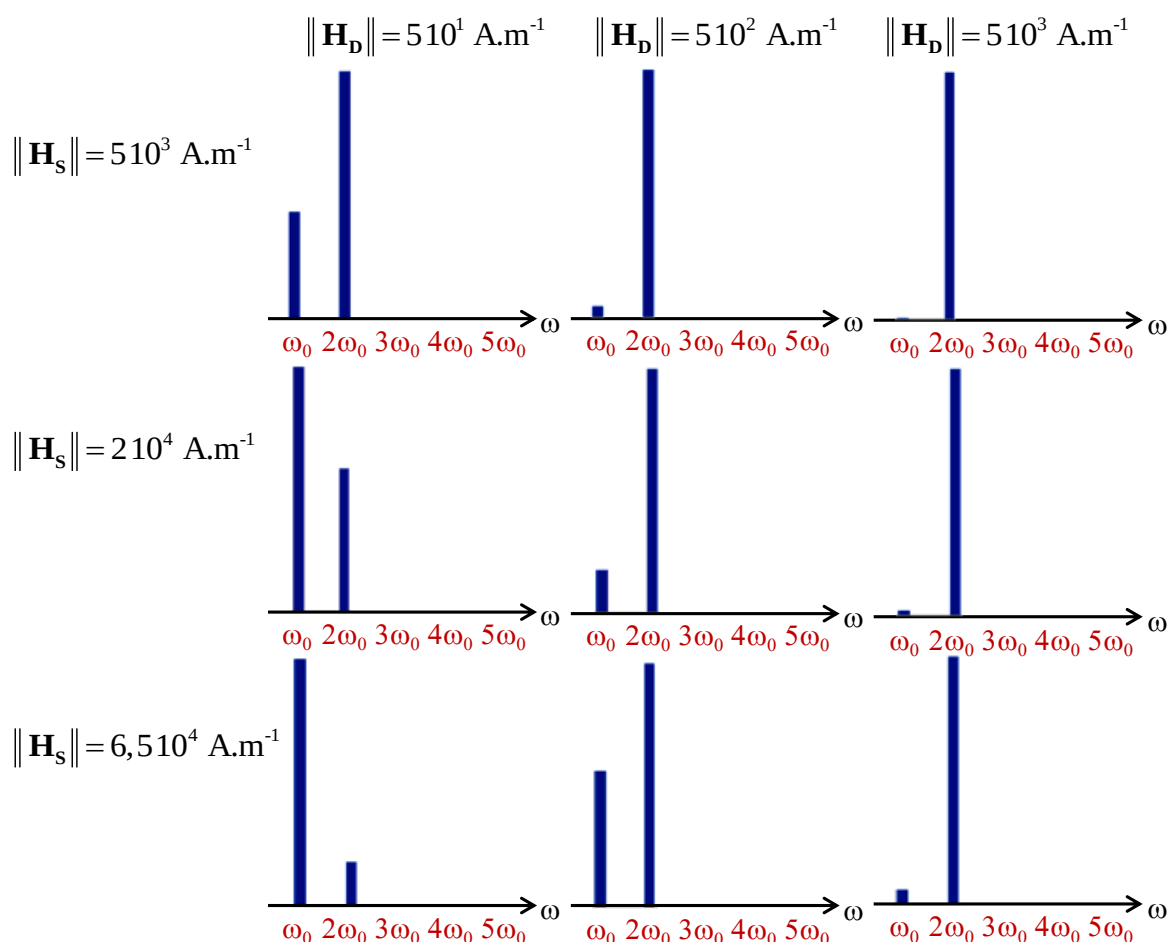


Figure 2.2. Spectres de la force d'aimantation F_M pour différentes amplitudes de champs magnétiques d'excitation statique et dynamique dans le fer. Amplitudes normalisées.

2 CALCUL FORMEL DU CONTENU FRÉQUENTIEL DE LA FORCE DE MAGNÉTOSTRICION

2.1 Calcul du tenseur des déformations de magnétostriction

Le calcul du tenseur des déformations de magnétostriction ϵ_{MS} nécessite une attention particulière. Comme exprimé par les équations (1.5) à (1.8), le calcul de la force de magnétostriction F_{MS} découle de l'évaluation de ce tenseur. Ainsi, la variété des hypothèses considérées dans l'évaluation de ce tenseur affecte directement celles relatives à la force de magnétostriction : problème à deux ou trois dimensions, faible ou forte amplitude du champ magnétique statique par rapport à l'amplitude du champ dynamique et prise en compte ou non des harmoniques. L'approche proposée dans cette

étude est une méthode temporelle en trois dimensions sans hypothèse de prédominance du champ statique. Elle s'inspire des travaux de Hirao et Ogi dont les travaux portaient sur des cas à deux dimensions et pour de fortes amplitudes du champ magnétique statique par rapport au champ magnétique dynamique [16].

L'ensemble de la méthode repose sur la connaissance de la courbe de magnétostriction macroscopique du matériau étudié. Cette courbe, notée $\varepsilon(H)$, représente la déformation macroscopique que subit le matériau sous aimantation. Cette déformation est mesurée dans le sens de l'aimantation. La Figure 2.3a donne un exemple de courbe de magnétostriction macroscopique pour un acier carbone [16].

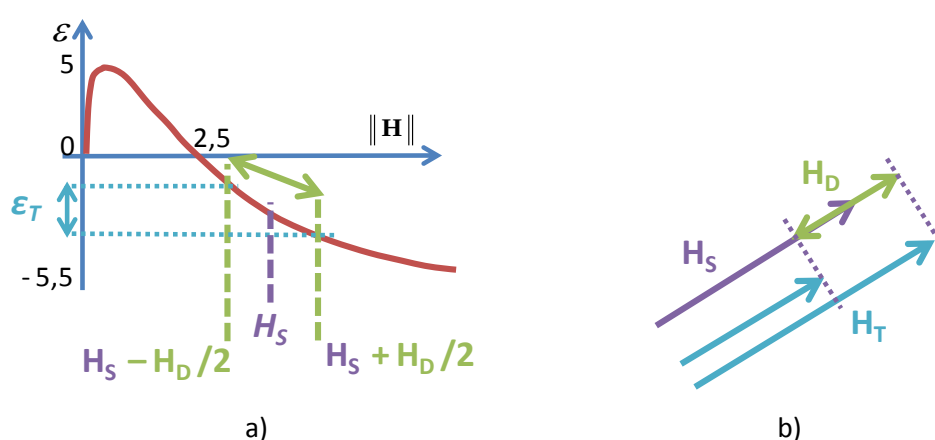


Figure 2.3. a) Exemple de courbe de magnétostriction macroscopique $\varepsilon(H)$ (10^{-6}) en fonction du champ d'excitation appliqué (10^4 A.m^{-1}) (acier carbone [16]) et b) représentation du champ total H_T par addition des champs statique H_S et dynamique H_D , dans le cas où ces deux derniers sont colinéaires.

L'application d'un champ d'excitation statique H_S par l'aimant permanent de l'EMAT fixe la magnétostriction du matériau en un point de fonctionnement. Si un champ d'excitation dynamique H_D est ajouté au champ statique dans la direction de celui-ci, comme représenté sur la Figure 2.3b, la déformation de magnétostriction du matériau oscille autour du point de fonctionnement établi précédemment. Comme le calcul s'effectue en fonction du temps, l'oscillation considérée est temporelle. Le champ appliqué total H_T correspond alors à la somme dans le temps du champ statique et du champ dynamique. La déformation temporelle due à ce champ total est notée ε_T .

Pour pouvoir exprimer le tenseur des déformations magnétostrictives ε^{MS} au point d'application d'un champ magnétique, deux hypothèses sont faites.

La première suppose que la courbe de magnétostriction macroscopique du matériau $\varepsilon(H)$ est la même en tout point de ce matériau quelle que soit la direction du champ d'excitation magnétique $\mathbf{H}_T$. Cette hypothèse n'est pas restrictive dans le contexte du CND par EMATs car les matériaux contrôlés ne possèdent pas d'orientations magnétiques privilégiées à l'échelle macroscopique. En effet, l'anisotropie magnétique à l'échelle microscopique se traduit au niveau macroscopique par une isotropie magnétique [1, 16, 21]. Les matériaux traités, par exemple thermiquement, pour avoir une aimantation privilégiée ne rentrent donc pas dans le cadre de l'étude.

La deuxième hypothèse nécessaire au calcul du tenseur des déformations de magnétostriction est celle de la conservation du volume du matériau sous aimantation. Cet effet de variation de volume, exposé au chapitre précédent, est négligé dans le cadre de l'étude. Ainsi, lorsqu'une déformation est imposée par aimantation dans une direction donnée, une déformation de moitié et de signe opposé [1, 16] est observée dans les deux directions perpendiculaires.

Sous ces deux hypothèses, quel que soit le point du matériau où est appliqué le champ $\mathbf{H}_T$ et où en résulte une déformation de magnétostriction macroscopique ε_T^x , le tenseur des déformations de magnétostriction s'écrit :

$$\varepsilon^{\text{MS},x} = \begin{pmatrix} \varepsilon_T^x \\ -\frac{1}{2}\varepsilon_T^x \\ -\frac{1}{2}\varepsilon_T^x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

où l'exposant « x » fait référence à la direction d'application des champs magnétiques statique et dynamique. Cette écriture est valable lorsque les champs d'excitation statique et dynamique sont colinéaires. Lorsque ceux-ci sont perpendiculaires, comme dans le cas représenté sur la Figure 2.4, le champ total $\mathbf{H}_T$ dévie d'un angle θ de la direction imposée par le champ statique.

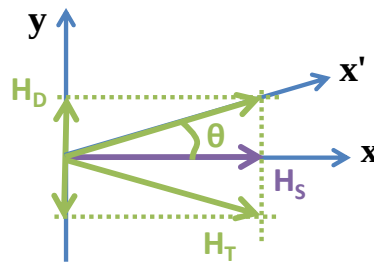


Figure 2.4. Représentation du champ total par addition des champs statique et dynamique dans le cas où ces deux derniers sont perpendiculaires.

Dans cette configuration, le même tenseur des déformations de magnétostriction que celui utilisé précédemment (équation (2.5)) est appliqué dans la direction du champ total $\mathbf{x}'$. Pour écrire ce tenseur dans le système de coordonnées défini par les directions des champs statique et dynamique, il suffit de lui appliquer une rotation d'un angle $(-\theta)$. Cette rotation se traduit par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},xy} = \begin{pmatrix} \varepsilon_T^{xy} \cos^2(\theta) - \frac{1}{2} \varepsilon_T^{xy} \sin^2(\theta) & -\frac{1}{2} \varepsilon_T^{xy} \cos^2(\theta) + \varepsilon_T^{xy} \sin^2(\theta) & -\frac{1}{2} \varepsilon_T^{xy} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \varepsilon_T^{xy} \sin(2\theta) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

où ε_T^{xy} représente la déformation de magnétostriction due à l'application du champ total $\mathbf{H}_T$ mesurée dans la direction de champ. L'exposant « xy » fait référence au plan $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Finalement, dans un repère cartésien $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, si le champ statique est appliqué dans la direction $\mathbf{x}$, le tenseur des déformations de magnétostriction global $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS}}$ peut être vu comme le regroupement du tenseur dans cette direction $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},x}$ et des deux tenseurs dans les plans $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},xy}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},xz}$. Cette superposition conduit alors à :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_T^x & \varepsilon_T^{xy} \cos^2(\theta_{xy}) - \frac{1}{2} \varepsilon_T^{xy} \sin^2(\theta_{xy}) & \varepsilon_T^{xz} \cos^2(\theta_{xz}) - \frac{1}{2} \varepsilon_T^{xz} \sin^2(\theta_{xz}) & -\frac{1}{2} \varepsilon_T^x & -\frac{1}{2} \varepsilon_T^{xy} \cos^2(\theta_{xy}) + \varepsilon_T^{xy} \sin^2(\theta_{xy}) & -\frac{1}{2} \varepsilon_T^{xz} \\ -\frac{1}{2} \varepsilon_T^x & -\frac{1}{2} \varepsilon_T^{xy} \cos^2(\theta_{xy}) + \varepsilon_T^{xy} \sin^2(\theta_{xy}) & -\frac{1}{2} \varepsilon_T^{xz} \cos^2(\theta_{xz}) + \varepsilon_T^{xz} \sin^2(\theta_{xz}) & -\frac{1}{2} \varepsilon_T^x & -\frac{1}{2} \varepsilon_T^{xy} \cos^2(\theta_{xy}) + \varepsilon_T^{xy} \sin^2(\theta_{xy}) & -\frac{1}{2} \varepsilon_T^{xz} \cos^2(\theta_{xz}) + \varepsilon_T^{xz} \sin^2(\theta_{xz}) \\ -\frac{1}{2} \varepsilon_T^x & -\frac{1}{2} \varepsilon_T^{xy} \cos^2(\theta_{xy}) + \varepsilon_T^{xy} \sin^2(\theta_{xy}) & -\frac{1}{2} \varepsilon_T^{xz} \cos^2(\theta_{xz}) + \varepsilon_T^{xz} \sin^2(\theta_{xz}) & -\frac{1}{2} \varepsilon_T^x & -\frac{1}{2} \varepsilon_T^{xy} \cos^2(\theta_{xy}) + \varepsilon_T^{xy} \sin^2(\theta_{xy}) & -\frac{1}{2} \varepsilon_T^{xz} \cos^2(\theta_{xz}) + \varepsilon_T^{xz} \sin^2(\theta_{xz}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \varepsilon_T^{xz} \sin(2\theta_{xz}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \varepsilon_T^{xy} \sin(2\theta_{xy}) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

où ε_T^x représente la déformation de magnétostriction dans la direction $\mathbf{x}$, ε_T^{xy} et ε_T^{xz} les déformations de magnétostriction dues au champ total dans les plans $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, et où θ_{xy} et θ_{xz} sont respectivement les angles entre la direction $\mathbf{x}$ du champ statique et celle du champ total dans chacun des plans $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$.

2.2 Calcul du tenseur des déformations piézo-magnétiques

Comme rappelé précédemment, le calcul de la force de magnétostriction se base sur la connaissance du tenseur des déformations de magnétostriction ϵ_{MS} . Une deuxième étape délicate dans le calcul de la force de magnétostriction est liée à l'équation (1.5) définissant le tenseur des déformations piézo-magnétiques $\mathbf{d}$. Cette phase nécessite le calcul de la dérivée du tenseur ϵ_{MS} par rapport au champ d'excitation magnétique $\mathbf{H}_D$, comme le montre l'expression suivante :

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \epsilon_T^x}{\partial H_{D,x}} & \frac{\partial \epsilon_T^{xy}}{\partial H_{D,y}} (c_{xy}^2 - \frac{1}{2} s_{xy}^2) + \epsilon_T^{xy} \frac{\partial (c_{xy}^2 - \frac{1}{2} s_{xy}^2)}{\partial H_{D,y}} & \frac{\partial \epsilon_T^{xz}}{\partial H_{D,z}} (c_{xz}^2 - \frac{1}{2} s_{xz}^2) + \epsilon_T^{xz} \frac{\partial (c_{xz}^2 - \frac{1}{2} s_{xz}^2)}{\partial H_{D,z}} \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon_T^x}{\partial H_{D,x}} & \frac{\partial \epsilon_T^{xy}}{\partial H_{D,y}} (s_{xy}^2 - \frac{1}{2} c_{xy}^2) + \epsilon_T^{xy} \frac{\partial (s_{xy}^2 - \frac{1}{2} c_{xy}^2)}{\partial H_{D,y}} & -\frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon_T^{xz}}{\partial H_{D,z}} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon_T^x}{\partial H_{D,x}} & -\frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon_T^{xy}}{\partial H_{D,y}} & \frac{\partial \epsilon_T^{xz}}{\partial H_{D,z}} (s_{xz}^2 - \frac{1}{2} c_{xz}^2) + \epsilon_T^{xz} \frac{\partial (s_{xz}^2 - \frac{1}{2} c_{xz}^2)}{\partial H_{D,z}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \frac{\partial \epsilon_T^{xz}}{\partial H_{D,z}} \sin(2\theta_{xz}) + \frac{3}{2} \epsilon_T^{xz} \frac{\partial \sin(2\theta_{xz})}{\partial H_{D,z}} \\ 0 & \frac{3}{2} \frac{\partial \epsilon_T^{xy}}{\partial H_{D,y}} \sin(2\theta_{xy}) + \frac{3}{2} \epsilon_T^{xy} \frac{\partial \sin(2\theta_{xy})}{\partial H_{D,y}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

où :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_D &= (H_{D,x}, H_{D,y}, H_{D,z}), \\ c_{xy} &= \cos(\theta_{xy}), \\ s_{xy} &= \sin(\theta_{xy}), \\ c_{xz} &= \cos(\theta_{xz}), \\ s_{xz} &= \sin(\theta_{xz}), \\ \theta_{xy} &= \arctan\left(\frac{H_{D,y}}{\|\mathbf{H}_S\|}\right), \\ \theta_{xz} &= \arctan\left(\frac{H_{D,z}}{\|\mathbf{H}_S\|}\right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Pour dériver les différentes déformations de magnétostriction ϵ_T^x , ϵ_T^{xy} et ϵ_T^{xz} par rapport au champ d'excitation dynamique, les relations suivantes entre les différents champs magnétiques sont considérées :

$$\begin{aligned}
H_T^x &= \|\mathbf{H}_s\| + H_{D,x}, \\
H_T^{xy} &= \sqrt{\|\mathbf{H}_s\|^2 + H_{D,y}^2}, \\
H_T^{xz} &= \sqrt{\|\mathbf{H}_s\|^2 + H_{D,z}^2},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

ainsi que les égalités :

$$\begin{aligned}
\sin(\arctan(x)) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \\
\cos(\arctan(x)) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},
\end{aligned} \tag{2.11}$$

pour un $x \in \Re$ quelconque. Les dérivées des déformations de magnétostriction ε_T^x , ε_T^{xy} et ε_T^{xz} par rapport aux champs $H_{D,x}$, $H_{D,y}$ et $H_{D,z}$ sont données, d'après l'équation (2.8), par

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_T^x}{\partial H_{D,x}} &= \frac{\partial \varepsilon_T^x}{\partial H_T^x} \frac{\partial H_T^x}{\partial H_{D,x}} \\
&= \frac{\partial \varepsilon_T^x}{\partial H_T^x} \\
&= \varphi_x,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_T^{xy}}{\partial H_{D,y}} &= \frac{\partial \varepsilon_T^{xy}}{\partial H_T^{xy}} \frac{\partial H_T^{xy}}{\partial H_{D,y}} \\
&= \varphi_{xy} \frac{\partial \sqrt{\|\mathbf{H}_s\|^2 + H_{D,y}^2}}{\partial H_{D,y}} \\
&= \varphi_{xy} \frac{H_{D,y}}{H_T^{xy}} \\
&= \varphi_{xy} \sin(\theta_{xy}),
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_T^{xz}}{\partial H_{D,z}} &= \frac{\partial \varepsilon_T^{xz}}{\partial H_T^{xz}} \frac{\partial H_T^{xz}}{\partial H_{D,z}} \\
&= \varphi_{xz} \frac{\partial \sqrt{\|\mathbf{H}_s\|^2 + H_{D,z}^2}}{\partial H_{D,z}} \\
&= \varphi_{xz} \frac{H_{D,z}}{H_T^{xz}} \\
&= \varphi_{xz} \sin(\theta_{xz}),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

où :

$$\varphi_x = \frac{\partial \varepsilon_T^x}{\partial H_T^x}, \varphi_{xy} = \frac{\partial \varepsilon_T^{xy}}{\partial H_T^{xy}}, \varphi_{xz} = \frac{\partial \varepsilon_T^{xz}}{\partial H_T^{xz}}. \tag{2.15}$$

Ces dernières quantités, φ_x , φ_{xy} et φ_{xz} sont déterminées à partir de la courbe de magnétostriction macroscopique $\varepsilon(H)$. Les dérivées des fonctions sinus et cosinus sont effectuées à l'aide des équations (2.9) (2.10) et (2.11). Un exemple de calcul de ces dérivées donne :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(c_{xy}^2 - \frac{1}{2}s_{xy}^2)}{\partial H_{D,y}} &= \frac{\partial}{\partial H_{D,y}} \left(\frac{1}{1 + H_{D,y}^2 / \|\mathbf{H}_s\|^2} - \frac{1}{2} \frac{H_{D,y}^2 / \|\mathbf{H}_s\|^2}{1 + H_{D,y}^2 / \|\mathbf{H}_s\|^2} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial H_{D,y}} \left(\frac{\|\mathbf{H}_s\|^2 - 1/2 H_{D,y}^2}{\|\mathbf{H}_s\|^2 + H_{D,y}^2} \right) \\
 &= \frac{-H_{D,y}(\|\mathbf{H}_s\|^2 + H_{D,y}^2) - 2H_{D,y} \|\mathbf{H}_s\|^2 + \|\mathbf{H}_s\|^3}{(\|\mathbf{H}_s\|^2 + H_{D,y}^2)^2} \\
 &= \frac{-3H_{D,y} \|\mathbf{H}_s\|^2}{(\|\mathbf{H}_s\|^2 + H_{D,y}^2)^2} \\
 &= \frac{-3c_{xy}^3 s_{xy}}{\|\mathbf{H}_s\|^2}.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Finalement, en menant à bien le calcul de toutes les dérivées intervenant, le tenseur des déformations piézo-magnétiques (2.8) s'écrit :

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_{xy} s_{xy} (c_{xy}^2 - \frac{1}{2}s_{xy}^2) - \frac{3\varepsilon_T^{xy}}{\|\mathbf{H}_s\|} c_{xy}^3 s_{xy} & \varphi_{xz} s_{xz} (c_{xz}^2 - \frac{1}{2}s_{xz}^2) - \frac{3\varepsilon_T^{xz}}{\|\mathbf{H}_s\|} c_{xz}^3 s_{xz} \\ -\frac{1}{2}\varphi_x & -\varphi_{xy} s_{xy} (s_{xy}^2 - \frac{1}{2}c_{xy}^2) + \frac{3\varepsilon_T^{xy}}{\|\mathbf{H}_s\|} c_{xy}^3 s_{xy} & -\frac{1}{2}\varphi_{xz} s_{xz} \\ -\frac{1}{2}\varphi_x & -\frac{1}{2}\varphi_{xy} s_{xy} & -\varphi_{xz} s_{xz} (s_{xz}^2 - \frac{1}{2}c_{xz}^2) + \frac{3\varepsilon_T^{xz}}{\|\mathbf{H}_s\|} c_{xz}^3 s_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}\varphi_{xz} s_{xz} \sin(2\theta_{xz}) + \frac{3\varepsilon_T^{xz}}{\|\mathbf{H}_s\|} c_{xz}^2 \cos(2\theta_{xz}) \\ 0 & \frac{3}{2}\varphi_{xy} s_{xy} \sin(2\theta_{xy}) + \frac{3\varepsilon_T^{xy}}{\|\mathbf{H}_s\|} c_{xy}^2 \cos(2\theta_{xy}) & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Le calcul de ce tenseur est basé sur le regroupement des différents tenseurs des déformations de magnétostriction $\varepsilon^{\text{MS},x}$, $\varepsilon^{\text{MS},xy}$ et $\varepsilon^{\text{MS},xz}$ en un unique tenseur ε^{MS} . Cependant il n'est pas évident que ce regroupement puisse avoir lieu. Le paragraphe suivant s'attache à prouver que regrouper ces trois tenseurs ou bien les traiter séparément donne les mêmes résultats en termes de contraintes de magnétostriction.

2.3 Calcul du tenseur des contraintes de magnétostriction

Comme il a été exposé précédemment, l'équation (1.9) définit le tenseur des déformations de magnétostriction. Les dérivées selon le champ $\mathbf{H}$ sont effectuées colonne par colonne. Ce tenseur s'écrit alors :

$$\mathbf{d} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},x}}{\partial H_{D,x}}; \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},xy}}{\partial H_{D,y}}; \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},xz}}{\partial H_{D,z}} \right). \quad (2.18)$$

Puis, les contraintes de magnétostriction $\boldsymbol{\sigma}^{\text{MS}}$ peuvent être écrites en utilisant les équations (1.10) et (1.11). En notations indicielles, ces contraintes s'écrivent :

$$\sigma_{\alpha}^{\text{MS}} = -C_{\alpha\beta} d_{\beta\gamma} H_{\gamma}, \quad (2.19)$$

où les sommations d'indices répétés sont sous entendues et où $\alpha, \beta \in 1;6$ et $\gamma \in 1;3$. En appliquant l'équation (1.5) à chacun des tenseurs des déformations de magnétostriction, les expressions suivantes des tenseurs des déformations piézo-magnétiques sont établies :

$$\mathbf{d} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},x}}{\partial H_{D,x}}; \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},xy}}{\partial H_{D,y}}; \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},xz}}{\partial H_{D,z}} \right), \quad (2.20a)$$

$$\mathbf{d}^{\text{xy}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},xy}}{\partial H_{D,x}}; \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},xy}}{\partial H_{D,y}}; \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},xy}}{\partial H_{D,z}} \right), \quad (2.20b)$$

$$\mathbf{d}^{\text{xz}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},xz}}{\partial H_{D,x}}; \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},xz}}{\partial H_{D,y}}; \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},xz}}{\partial H_{D,z}} \right), \quad (2.20c)$$

Or, les quantités définissant les tenseurs $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},x}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},xy}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},xz}$ ne dépendent pas des trois composantes du champ $\mathbf{H}_D$. De plus, $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},x}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},xy}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},xz}$ ne dépendent respectivement que des variations des composantes $H_{D,x}$, $H_{D,y}$ et $H_{D,z}$. Ainsi, les tenseurs des déformations piézo-magnétiques (2.20) se simplifient et deviennent :

$$\mathbf{d}^x = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},x}}{\partial H_{D,x}}; \mathbf{0}; \mathbf{0} \right), \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{d}^{\text{xy}} = \left(\mathbf{0}; \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},xy}}{\partial H_{D,y}}; \mathbf{0} \right), \quad (2.21b)$$

$$\mathbf{d}^{\text{xz}} = \left(\mathbf{0}; \mathbf{0}; \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS},xz}}{\partial H_{D,z}} \right). \quad (2.21c)$$

Les contraintes de magnétostriction (1.11) sont alors données par :

$$\sigma_{\alpha}^{MS,x} = -C_{\alpha\beta} d_{\beta 1}^x H_1, \quad (2.22a)$$

$$\sigma_{\alpha}^{MS,xy} = -C_{\alpha\beta} d_{\beta 2}^{xy} H_2, \quad (2.22b)$$

$$\sigma_{\alpha}^{MS,xz} = -C_{\alpha\beta} d_{\beta 3}^{xz} H_3. \quad (2.22c)$$

et le tenseur des contraintes de magnétostriction global, noté $\sigma^{MS,g}$, s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^{MS,g} &= \sigma_{\alpha}^{MS,x} + \sigma_{\alpha}^{MS,xy} + \sigma_{\alpha}^{MS,xz} \\ &= -C_{\alpha\beta} d_{\beta 1}^x H_1 - C_{\alpha\beta} d_{\beta 2}^{xy} H_2 - C_{\alpha\beta} d_{\beta 3}^{xz} H_3, \end{aligned} \quad (2.23)$$

ou encore :

$$\sigma_{\alpha}^{MS,g} = -C_{\alpha\beta} d_{\beta 1} H_1 - C_{\alpha\beta} d_{\beta 2} H_2 - C_{\alpha\beta} d_{\beta 3} H_3 = \sigma_{\alpha}^{MS}, \quad (2.24)$$

après avoir rappelé que, par définition :

$$d_{\beta 1}^x = d_{\beta 1}, \quad (2.25a)$$

$$d_{\beta 2}^{xy} = d_{\beta 2}, \quad (2.25b)$$

$$d_{\beta 3}^{xz} = d_{\beta 3}. \quad (2.25c)$$

L'expression (2.24) de ce tenseur correspond bien à celle donnée par l'équation (2.19). La première version des différents tenseurs, version regroupée, nécessaire au calcul de la force de magnétostriction est retenue, car plus simple à manipuler (équations (2.7) et (2.17)).

2.4 Expression de la force de magnétostriction par la prise en compte des conditions aux limites

Pour déterminer les contraintes de magnétostriction σ^{MS} , équation (1.7), la méthode proposée par Hirao et Ogi [16] est étendue dans cette section au cas à trois dimensions, sans considérer l'hypothèse usuelle $\|\mathbf{H}_s\| \gg \|\mathbf{H}_d\|$. Par sa définition, la force de magnétostriction couple les effets électromagnétiques et les effets élastodynamiques. Les surfaces libres du matériau affectent donc les contraintes élastiques et par suite les contraintes de magnétostriction, ce que n'ont pas pris en compte Hirao et Ogi [16]. À la surface du matériau, il faut alors rajouter la condition

$$\sigma^{MS} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (2.26)$$

à l'expression (1.7) de la contrainte de magnétostriction pour établir son expression. L'introduction des conditions aux limites a notamment été discutée par Ribichini *et al.* [19], article dont Ogi est co-

auteur et dans lequel ce dernier convient qu'il est nécessaire de tenir compte de cette condition pour décrire correctement la force de magnétostriction. Celle-ci s'écrit donc finalement

$$\mathbf{F}_{\text{MS}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{MS}} - \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}^{\text{MS}} \cdot \mathbf{z} \Big|_{z=0} \right), \quad (2.27)$$

où la direction $\mathbf{z}$ est choisie arbitrairement comme étant la normale sortante à la surface du matériau.

2.5 Algorithme de calcul de la force de magnétostriction

Toutes les quantités définies pour calculer le tenseur des déformations de magnétostriction étant temporelles, l'expression de la force de magnétostriction l'est aussi. L'expression du tenseur des déformations de magnétostriction $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{MS}}$, équation (2.7), est analytique et a été établie en trois dimensions sans hypothèse sur les amplitudes relatives des champs magnétiques statique et dynamique. De plus, son évaluation ne nécessite que la connaissance de la courbe de magnétostriction macroscopique du matériau étudié $\varepsilon(H)$. Cette section présente l'implémentation du calcul de la force de magnétostriction dans le module CIVA CF.

Pour pouvoir réutiliser les développements précédents, un changement de repère local est effectué en chaque point de calcul. Celui-ci consiste à faire de la direction locale du champ statique, la nouvelle première direction du repère cartésien local. Les directions locales sont alors désignées par l'indice « s ». Le changement de repère est effectué grâce à deux rotations successives d'angles ϕ et ψ , qui permettent de passer du repère global $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ au repère local $(\mathbf{x}_s, \mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s)$. Le changement de repère est représenté sur la Figure 2.5.

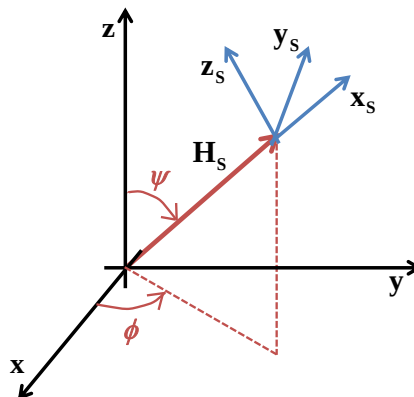


Figure 2.5. Représentation du changement de repère nécessaire au calcul de la force de magnétostriction.

À partir de la matrice de changement de repères, notée $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sin \psi \cos \phi & -\sin \psi \sin \phi & -\cos \psi \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \cos \psi \cos \phi & -\cos \psi \sin \phi & \sin \psi \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

les composantes dans le repère local du champ d'excitation magnétique dynamique $\mathbf{H}_D$, représentées sur la Figure 2.6, sont déterminées. Elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} H_{D,x_s} &= \sin \psi (\cos \phi H_{D,x} - \sin \phi H_{D,y}) - \cos \psi H_{D,z}, \\ H_{D,y_s} &= -\sin \phi H_{D,x} + \cos \phi H_{D,y}, \\ H_{D,z_s} &= \cos \psi (\cos \phi H_{D,x} - \sin \phi H_{D,y}) + \sin \psi H_{D,z}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Le champ d'excitation magnétique total, défini par la somme des champs d'excitation magnétique statique et dynamique, noté $\mathbf{H}_{T_s} = (H_{T_s}^{x_s}, H_{T_s}^{y_s}, H_{T_s}^{z_s})$, est représenté sur la Figure 2.6.

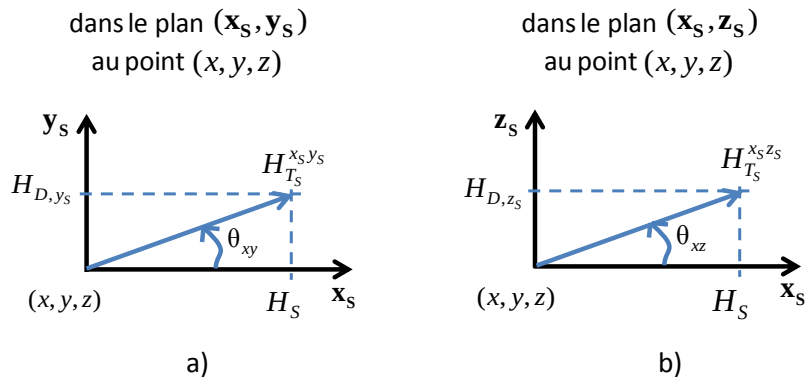


Figure 2.6. Représentation du champ d'excitation magnétique dynamique après changement de repère ; a) dans le plan (x_s, y_s) au point (x, y, z) et b) dans le plan (x_s, z_s) au point (x, y, z) .

La force de magnétostriction est alors évaluée grâce aux développements précédents. Par ailleurs, la matrice de changement de repères inverses :

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \psi & -\sin \phi \\ \sin \phi \sin \psi & \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \\ -\cos \psi & \sin \psi & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

est nécessaire à l'inversion du tenseur des contraintes piézomagnétiques $\mathbf{e}$, à partir de la matrice de passage suivante :

$$\mathbf{R}'_e = \begin{pmatrix} c_\phi^2 s_\psi^2 & s_\phi^2 & c_\phi^2 c_\psi^2 & 2c_\phi s_\phi c_\psi & -2c_\phi^2 c_\psi s_\psi & -2c_\phi s_\phi s_\psi \\ s_\phi^2 s_\psi^2 & c_\phi^2 & s_\phi^2 c_\psi^2 & -2c_\phi s_\phi c_\psi & -2s_\phi^2 c_\psi s_\psi & 2c_\phi s_\phi s_\psi \\ c_\psi^2 & 0 & s_\psi^2 & 0 & 2c_\psi s_\psi & 0 \\ s_\phi c_\psi s_\psi & 0 & -s_\phi c_\psi s_\psi & c_\phi s_\psi & (s_\psi^2 - c_\psi^2) s_\phi & c_\phi c_\psi \\ c_\phi c_\psi s_\psi & 0 & -c_\phi c_\psi s_\psi & -s_\phi s_\psi & (s_\psi^2 - c_\psi^2) c_\phi & -s_\phi c_\psi \\ c_\phi s_\phi s_\psi^2 & -c_\phi s_\phi & c_\phi s_\phi c_\psi^2 & (s_\phi^2 - c_\phi^2) c_\psi & -2c_\phi s_\phi c_\psi s_\psi & (c_\phi^2 - s_\phi^2) s_\psi \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

avec :

$$\begin{aligned}
c_\phi &= \cos \phi , \\
s_\phi &= \sin \phi , \\
c_\psi &= \cos \psi , \\
s_\psi &= \sin \psi .
\end{aligned}
\tag{2.32}$$

L'algorithme de calcul de la force de magnétostriction reprend toutes les étapes de la démarche, du champ d'excitation magnétique dynamique $\mathbf{H}_D$ au spectre de la force de magnétostriction. Le détail de cet algorithme est représenté sur la Figure 2.7.

Les données d'entrée nécessaires au calcul sont les champs d'excitation magnétiques dynamique $\mathbf{H}_D(x, y, z, t)$ et statique $\mathbf{H}_S(x, y, z)$ ainsi que la courbe de magnétostriction macroscopique $\varepsilon(H)$ du matériau étudié. Ces deux champs magnétiques sont évalués à l'aide du module électromagnétique CF du logiciel CIVA. La courbe de magnétostriction macroscopique est une donnée extérieure provenant, par exemple, de l'expérience [16]. Le champ magnétique dynamique subit ensuite le changement de repère, équation (2.28), comme expliqué précédemment et devient dépendant des variables spatiales x_S , y_S et z_S . Le tenseur des déformations de magnétostriction $\varepsilon^{MS}(x_S, y_S, z_S, t)$, le tenseur des déformations piézo-magnétiques $\mathbf{d}(x_S, y_S, z_S, t)$ et le tenseur des contraintes piézo-magnétiques $\mathbf{e}(x_S, y_S, z_S, t)$ sont alors déterminés à l'aide, respectivement, des équations (2.7) (2.17) puis (1.6). Puis, le calcul de la force de magnétostriction se divise en deux phases. La première consiste à évaluer cette force par l'équation (1.8) dans le repère local $\mathbf{F}_{MS}(x_S, y_S, z_S, t)$ puis à effectuer le changement de repère inverse, équation (2.30), pour obtenir la force dans le repère global $\mathbf{F}_{MS}(x, y, z, t)$. La deuxième étape consiste à effectuer le changement de repère inverse du tenseur des contraintes piézo-magnétiques par l'équation (2.31) puis à exprimer les conditions aux limites de la contrainte de magnétostriction par l'équation (2.26). La réunion de ces deux parties est réalisée par l'addition des deux résultats conformément à l'équation (2.27), ce qui conduit à l'expression temporelle de la force de magnétostriction. Sa transformée de Fourier par rapport au temps donne alors le spectre de la force en chaque point de discrétisation de l'espace de calcul. L'excitation étant périodique la force résultante l'est également, et le calcul de la série de Fourier permet de calculer le spectre des harmoniques.

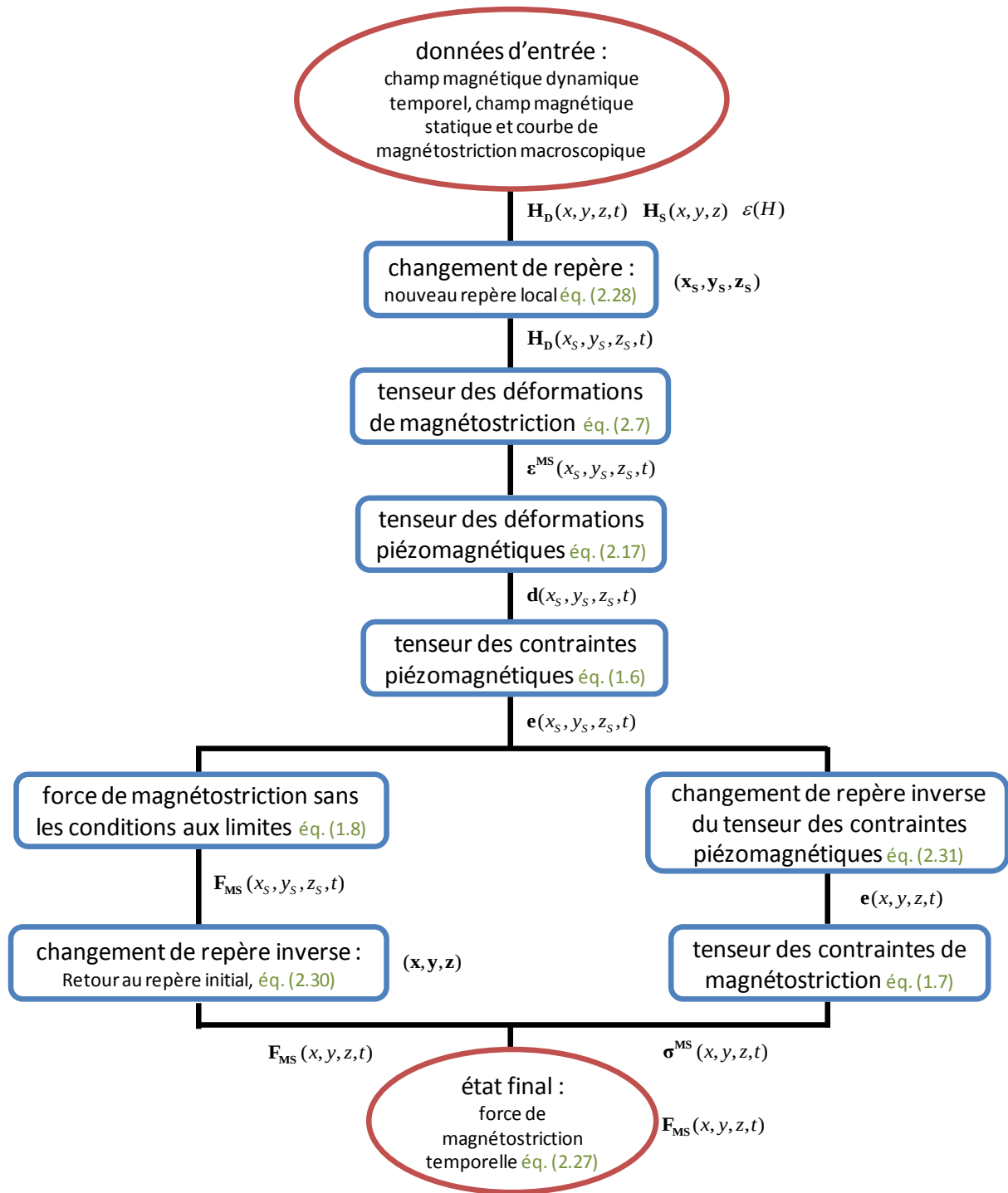


Figure 2.7. Algorithme de calcul de la force de magnétostriction, abréviation « éq. » pour « équation ».

2.6 Exemples de contenu fréquentiel de la force de magnétostriction

Comme pour les forces de Lorentz et d'aimantation, des exemples de spectres sont donnés. Les intensités des champs magnétiques d'excitation statique et dynamique sont celles utilisées précédemment Figure 2.1 et Figure 2.2 La même courbe de magnétostriction est choisie, représentée sur la Figure 2.3a, correspondant à un acier à faible taux de carbone.

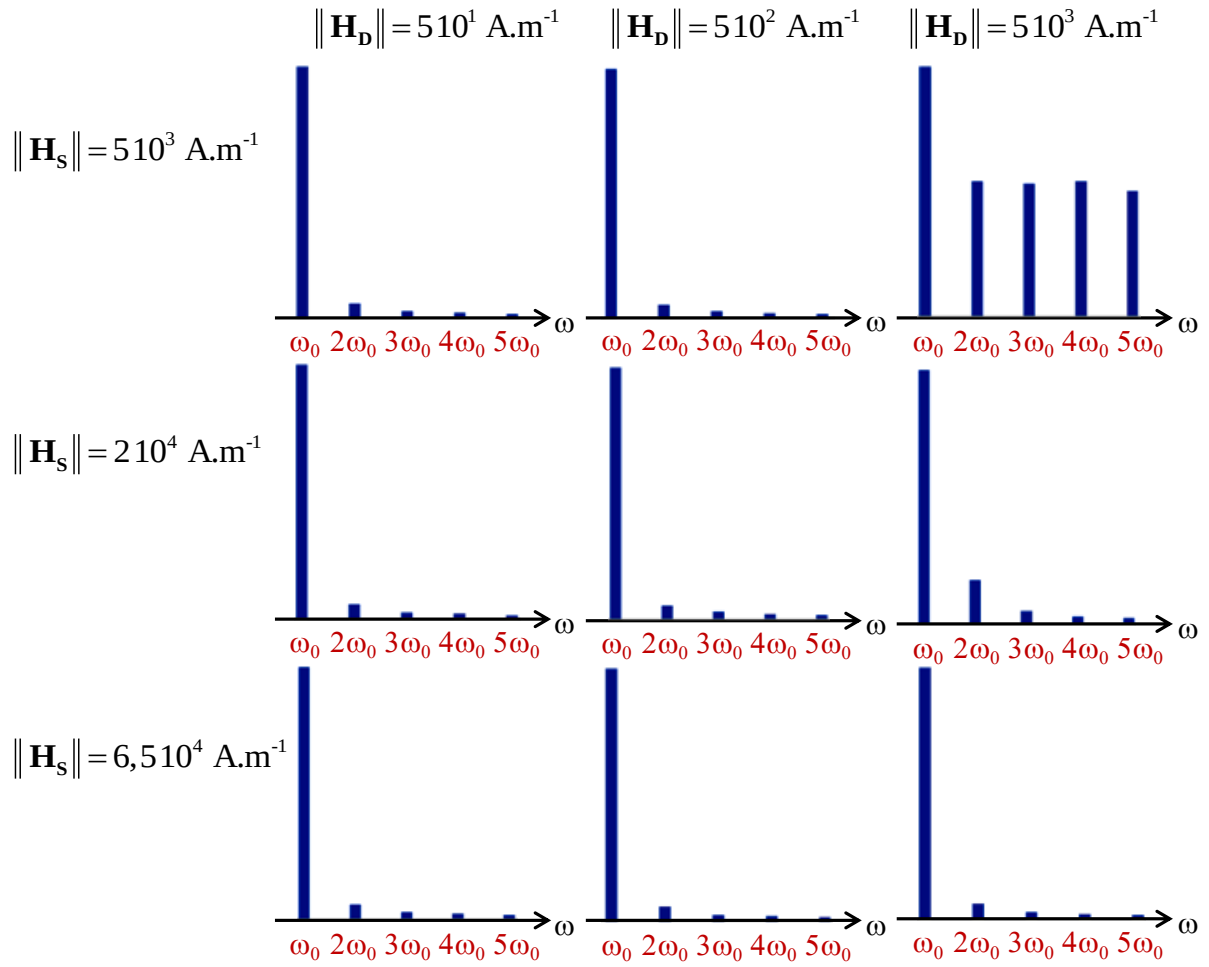


Figure 2.8. Spectres de la force de magnétostriction F_{MS} pour différentes amplitudes de champs magnétiques d'excitation statique et dynamique dans le fer. Amplitudes normalisées.

Pour les niveaux de champs choisis, l'effet de génération d'harmoniques est faible voire négligeable dans toutes les configurations sauf pour un faible champ statique associé à un fort champ dynamique. Une fois de plus, ces résultats correspondent aux observations de la littérature [20]. Ils valident aussi l'hypothèse selon laquelle, lorsque l'intensité de champ magnétique dynamique est faible par rapport à l'intensité du champ magnétique statique, alors l'effet de création d'harmoniques pour la force de magnétostriction est négligeable [16, 21].

Les spectres de la force de magnétostriction sont aussi tracés pour le Nickel, comme représenté sur la Figure 2.9. La courbe de magnétostriction utilisée provient des expériences menées au LMT Cachan et commandées par le CETIM. Elle est représentée sur la Figure 2.10 et peut être donnée approximativement sous une forme analytique déterminée numériquement par l'expression suivante :

$$\varepsilon_{Ni}^{MS} = -\left(15\left(\sqrt{\|\mathbf{H}\|*10^{-3}} - 3\right)\right)*10^{-6}, \quad (2.33)$$

En comparant les spectres de la force de magnétostriction pour le nickel et pour le fer, les mêmes conclusions sont tirées : l'effet de création d'harmoniques pour la force de magnétostriction n'est pas négligeable pour un champ statique d'intensité comparable à celui du champ dynamique.

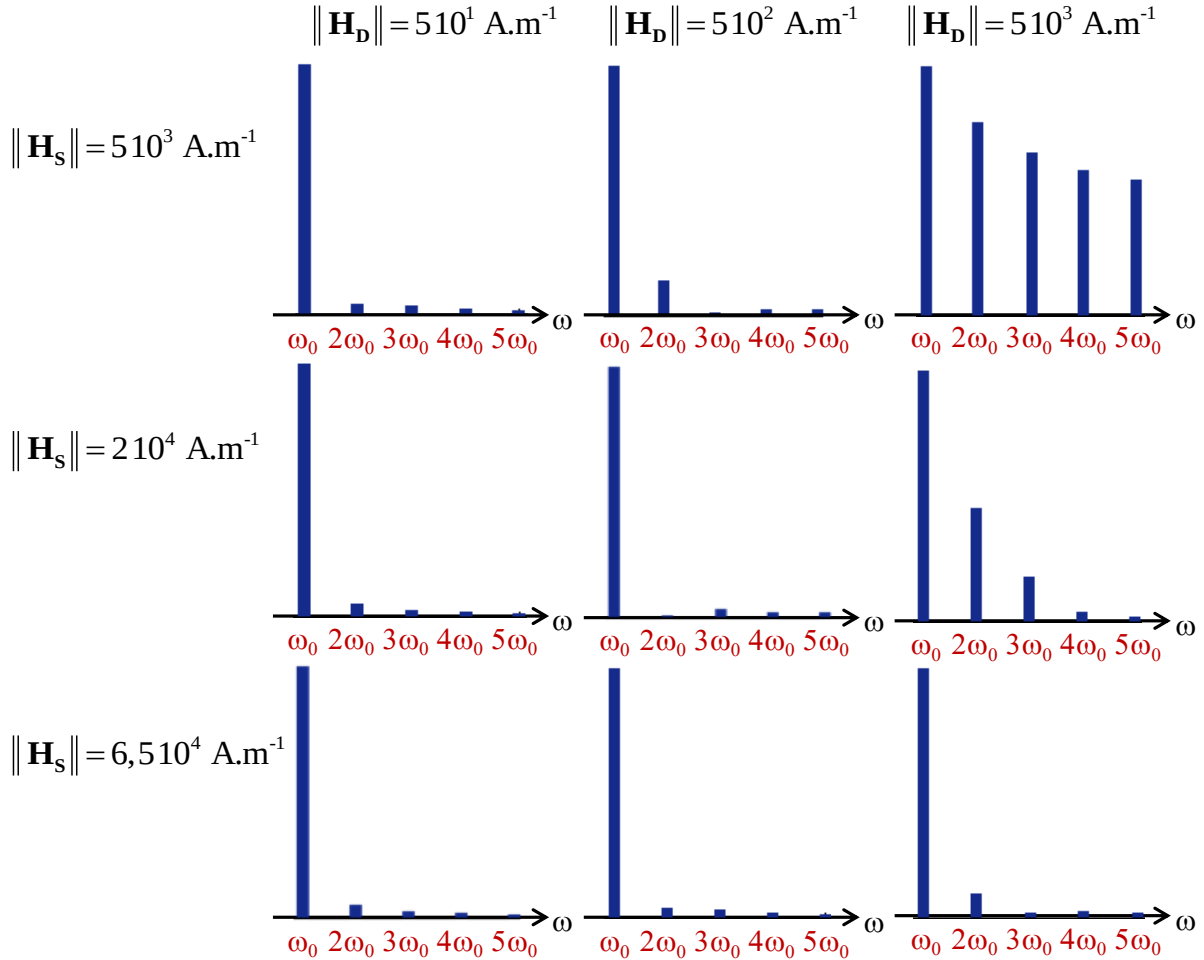


Figure 2.9. Spectres de la force de magnétostriction F_{MS} pour différentes amplitudes de champs magnétiques d'excitation statique et dynamique dans le nickel. Amplitudes normalisées.

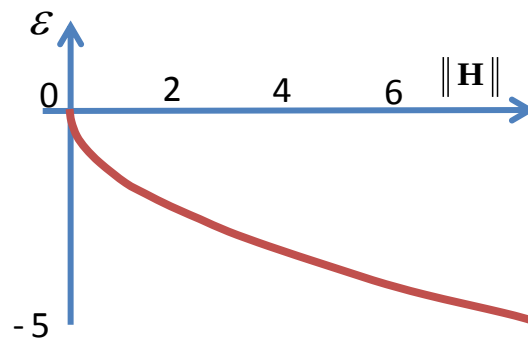


Figure 2.10. Courbe de magnétostriction macroscopique $\varepsilon(H)$ (10^5) en fonction du champ d'excitation magnétique [10^4 A.m⁻¹] du nickel provenant de l'expérience menée par le LMT Cachan pour le CETIM.

En conclusion de ce chapitre, les trois forces électromagnétiques ont été décrites de façon formelle. L'effet de doublement de fréquence pour les forces de Lorentz et d'aimantation a été exprimé en décomposant les différents champs magnétiques en deux parties : une partie statique et une partie dynamique dont les variations fréquentielles suivent celles du courant d'excitation. Le développement de l'expression temporelle de la force de magnétostriction est plus complexe, nécessitant plus d'étapes de calcul. L'approche proposée par Hirao et Ogi [16] a été approfondie et étendue au cas à trois dimensions, notamment pour le calcul du tenseur des déformations de magnétostriction. Les trois forces ont donc été déterminées en trois dimensions avec prise en compte de la création d'harmoniques et en s'abstenant de l'hypothèse de fort champ statique par rapport au champ dynamique.

En reprenant la démarche schématisée à la fin du chapitre précédent sur la Figure 1.15, les calculs de champs magnétiques et de forces électromagnétiques sont menés selon deux blocs indépendants. En effet, les champs magnétiques sont des données d'entrée à l'évaluation des forces. Le calcul des forces ne présume donc rien sur celui des champs magnétiques. Ainsi, si un calcul non linéaire de ces champs, pour par exemple prendre en compte une perméabilité magnétique tensorielle ou non linéaire, doit être effectué alors le calcul des forces présenté dans ce chapitre peut toujours être réutilisé.

Le calcul des forces ayant été présenté dans ce chapitre, la transformation des forces électromagnétiques en contraintes surfaciques est par la suite étudiée, étape préliminaire à la résolution de l'équation d'onde, comme discuté dans le premier chapitre.

3

TRANSFORMATION DE FORCES VOLUMIQUES EN CONTRAINTES SURFACIQUES ÉQUIVALENTES

Ce troisième chapitre a pour but de formuler une transformation mathématique qui permette d'exprimer les sources de force volumique en termes de sources de contrainte surfacique. Cette transformation assure le lien entre les calculs électromagnétiques évalués par le module CIVA de simulation de CND par courants de Foucault (CIVA CF) et les calculs acoustiques évalués par le module CIVA de simulation de CND par ultrasons (CIVA US). En effet, d'une part les EMATs génèrent trois forces électromagnétiques volumiques lorsqu'ils sont appliqués à des matériaux ferromagnétiques, comme décrit dans le chapitre précédent (calculs réalisés dans la partie CIVA CF). Et d'autre part, il existe dans la littérature de nombreux modèles basés sur des termes sources surfaciques pour prédire le rayonnement des ondes élastiques, comme ceux intégrés dans la partie CIVA US ([33] pour les ondes de volume et [34, 35] pour les ondes guidées). Ces modèles, initialement développés pour décrire la génération des ondes élastiques par des transducteurs piézoélectriques, présentent l'avantage de ne pas nécessiter l'évaluation d'intégrale volumique du tenseur de Green du problème élastodynamique, opération très coûteuse en temps et en mémoire de calcul.

Les amplitudes des forces électromagnétiques (volumiques) traitées sont significatives dans une région restreinte de l'épaisseur du matériau, située sous la surface excitée par l'EMAT. Elles diminuent exponentiellement suivant l'épaisseur. Dans la littérature, la force de Lorentz est transformée en contraintes par une simple intégration suivant l'épaisseur du matériau [26, 36, 37]. Mais cette intégration simple peut donner des incohérences en induisant des contraintes de magnétostriction nulles. Cette difficulté a été soulevée par Thompson [38], qui a mis en place une méthode analytique prenant en compte des intégrales plus complexes de la force de magnétostriction pour transformer cette dernière en des contraintes surfaciques équivalentes.

La transformation présentée dans ce chapitre reprend les différentes étapes de calcul données par Thompson [38] en les explicitant tout en corrigeant un certain nombre de fautes de typographie. Par ailleurs, deux formulations de contraintes équivalentes ont été trouvées alors que Thompson n'en donne qu'une seule. Le terme « équivalent » signifie « qui a le même impact sur la génération des ondes élastiques ». Ainsi, les contraintes surfaciques équivalentes ont le même effet que les forces

volumiques sur la génération d'ondes élastiques. De plus, elles sont établies dans le système de coordonnées cartésiennes où les grandeurs considérées sont exprimées avec une dépendance fréquentielle puis une dépendance temporelle. Enfin, ces contraintes équivalentes sont comparées à des résultats donnés par Ribichini et al. [19] et par Thompson [26].

Sommaire

1	TRANSFORMATION FORCES-CONTRAINTES PAR SIMPLE INTÉGRALE DE LA FORCE	73
1.1	Exemple d'un cas d'application où l'intégration simple est valide.....	73
1.2	Exemple d'un cas d'application où l'intégration simple n'est pas valide	73
2	TRANSFORMATION FORCES-CONTRAINTES INCLUANT DES MOMENTS D'ORDRES SUPÉRIEURS DE CES FORCES..	75
2.1	Définition des équations du problème	75
2.1.1	Formulations du déplacement particulière dans un demi-espace infini.....	75
2.1.2	Série de Taylor et moments des forces	76
2.1.3	Équation d'équilibre local.....	76
2.2	Résolution du problème par l'expression des dérivées normales du tenseur de Green	78
2.2.1	Relations dans un demi-espace infini entre les dérivées des différentes composantes des fonctions de Green.....	78
2.2.2	Dérivées normales des fonctions de Green.....	81
2.2.2.1	Dérivées du premier ordre.....	81
2.2.2.2	Dérivées du second ordre	82
2.2.3	Deux formulations des contraintes surfaciques équivalentes	83
2.2.3.1	Première formulation	83
2.2.3.2	Deuxième formulation	84
2.3	Écriture transitoire de la transformation.....	85
3	VALIDATION DE L'ORDRE DE GRANDEUR DES CONTRAINTES SURFACIQUES ÉQUIVALENTES	88
3.1	Validation de l'ordre de grandeur d'une contrainte équivalente de la force de magnétostriction.....	88
3.2	Validation de l'évolution des contraintes équivalentes en fonction du champ d'induction magnétique statique	90

1 TRANSFORMATION FORCES-CONTRAINTES PAR SIMPLE INTÉGRALE DE LA FORCE

La méthode la plus simple et intuitive pour passer d'une force volumique à des contraintes surfaciques est d'intégrer cette force selon la direction normale à la surface choisie. Cette méthode est suffisante pour prendre en compte correctement la force de Lorentz [36]. Cependant elle ne permet pas de rendre compte correctement des effets de magnétostriction [38]. En effet, la présence de conditions aux limites peut annuler l'intégrale selon l'épaisseur du matériau de la force de magnétostriction.

1.1 Exemple d'un cas d'application où l'intégration simple est valide

Pour transformer une force volumique en contraintes surfaciques, la solution naturelle basique est d'évaluer l'intégrale suivant la normale à la surface où vont s'appliquer les contraintes recherchées. Cette solution a notamment été choisie dans la littérature pour transformer la force de Lorentz en contraintes surfaciques [26, 36]. L'amplitude de cette force décroît exponentiellement selon la profondeur du matériau. Cette décroissance dépend du paramètre épaisseur de peau, notée δ , et est donnée par l'expression

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu \sigma \omega}} \quad (3.12)$$

où μ_0 est la perméabilité du vide [H.m^{-1}], μ est la perméabilité relative du matériau [-] (scalaire dans notre étude), σ est la conductivité électrique du matériau [S.m^{-1}] et ω est la pulsation du courant électrique [rad.s^{-1}]. Intégrer la force de Lorentz selon l'épaisseur est aussi la solution retenue jusqu'à présent pour implémenter la force de Lorentz dans le logiciel CIVA et la transformer en contraintes surfaciques. L'ensemble du calcul a été validé expérimentalement [39].

1.2 Exemple d'un cas d'application où l'intégration simple n'est pas valide

Le cas de l'intégration simple appliquée à la force de magnétostriction a été évoqué à plusieurs reprises par Thompson [26, 36, 38]. Tout comme la force de Lorentz, la force de magnétostriction décroît exponentiellement selon le facteur épaisseur de peau δ . Il paraît alors naturel de lui appliquer le même traitement. Cependant, dans une configuration donnée, le calcul de l'intégrale suivant l'épaisseur de la force de magnétostriction justifie la prise en compte de moments d'ordres

supérieurs dans sa transformation en contraintes surfaciques équivalentes. Le système de coordonnées utilisé dans cette configuration est représenté sur la Figure 3.1. Les points sources, points d'application de la force de magnétostriction, sont repérés avec l'indice « 0 ». Ainsi, les points sources sont notés $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, les points sources à la surface du matériau $\mathbf{R}_0(x_0, y_0, 0)$ et les points d'observation $\mathbf{r}(x, y, z)$. Les axes du système sont aussi bien représentés par les vecteurs $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ que par, respectivement, les indices 1, 2 et 3.

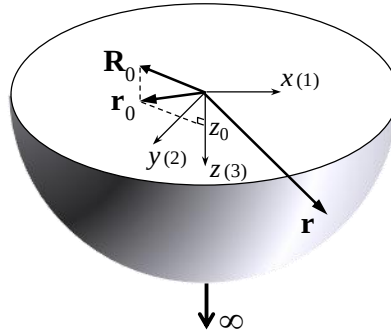


Figure 3.1. Système de coordonnées utilisé dans ce chapitre pour un semi-espace infini.

Le cas d'un EMAT serpentin dans le plan $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est examiné [38]. Les fils électriques sont étendus selon la direction $\mathbf{y}$. La configuration peut alors être considérée comme un problème à deux dimensions dans le plan $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$. Si le champ statique de l'EMAT est tangent à la surface du matériau, par exemple suivant la direction $\mathbf{x}$, la composante normale de la force de magnétostriction $F_{MS, z}$ au point source (x_0, z_0) s'écrit [38]

$$F_{MS, z}(x_0, z_0) = -e_{zzx} \left[\left(\frac{1+j}{\delta} \right) - \delta_D(z_0) \right] H_{D, x}(x_0) e^{-(1+j)z_0/\delta} e^{j\omega t} \quad (3.1)$$

où e_{zzx} est la composante du tenseur des contraintes piézo-magnétiques pertinente pour la configuration considérée, δ est l'épaisseur de peau, δ_D est la « fonction » de Dirac induite par les conditions aux limites de la force à la surface de la pièce et $H_{D, x}(x_0)$ est le champ magnétique dynamique produit par le circuit électrique de l'EMAT dans la direction $\mathbf{x}$. L'intégrale selon l'épaisseur, de 0 à $+\infty$, de cette expression de la force de magnétostriction est nulle. Ainsi, pour transformer cette force en contraintes surfaciques, des transformations intégrales plus élaborées doivent être considérées.

2 TRANSFORMATION FORCES-CONTRAINTES INCLUANT DES MOMENTS D'ORDRES SUPÉRIEURS DE CES FORCES

Cette transformation s'appuie sur les développements effectués par Thompson [38]. Les étapes de calcul mises en place par ce dernier sont reprises mais plus détaillées car certaines étapes mathématiques importantes manquent dans son article. Ceci peut expliquer certaines erreurs typographiques de l'article qui conduisent à des résultats erronés. Deux formulations de contraintes surfaciques équivalentes sont établies alors que Thompson n'en traite qu'une seule sachant que ces deux formulations sont complémentaires quant aux applications que l'on peut en faire. Pour ce paragraphe, la transformation est réalisée dans le repère cartésien défini par la Figure 3.1 et les forces volumiques à transformer possèdent une excitation mono-fréquentielle de pulsation ω .

2.1 Définition des équations du problème

2.1.1 Formulations du déplacement particulaire dans un demi-espace infini

Les points sources $\mathbf{r}_0$ sont considérés comme proches de la surface libre en accord avec les propriétés des différentes forces électromagnétiques intervenant dans la génération d'ondes élastiques par EMATs en milieu ferromagnétique. Le déplacement particulaire $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ est décrit par une intégrale de convolution volumique du tenseur de Green $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ avec la force volumique $\mathbf{f}(\mathbf{r}_0)$. Le tenseur de Green correspond à la solution élémentaire pour les ondes élastiques se propageant dans un espace semi-infini. Il n'est pas explicité car sa forme analytique n'est pas nécessaire au développement de la transformation. L'intégrale de convolution est donnée par :

$$u_i(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f_j(\mathbf{r}_0) dx_0 dy_0 dz_0, \quad (3.2)$$

où la convention de sommation sur les indices répétés est appliquée, comme dans la suite de cette transformation. Le but est de trouver une distribution de contraintes surfaciques équivalentes $\tilde{\sigma}(\mathbf{R}_0)$ qui permet de redéfinir le déplacement particulaire grâce à une intégrale à la surface libre du semi-espace, sous la forme :

$$u_i(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) \tilde{\sigma}_j(\mathbf{R}_0) dx_0 dy_0. \quad (3.3)$$

2.1.2 Série de Taylor et moments des forces

L'étape cruciale qui permet de débiter la transformation des forces en contraintes est donnée par une série de Taylor du tenseur de Green. Cette série est exprimée à la surface du matériau en fonction de la variable z_0 représentant l'épaisseur du matériau. La série est tronquée au second ordre et conduit à l'approximation suivante du déplacement :

$$u_i(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) M_j^{(0)}(\mathbf{R}_0) + \frac{\partial G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial z_0} M_j^{(1)}(\mathbf{R}_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial z_0^2} M_j^{(2)}(\mathbf{R}_0) \right] dx_0 dy_0, \quad (3.4)$$

où $M_j^{(n)}$ représente le moment d'ordre n de la force f_j :

$$M_j^{(n)}(\mathbf{R}_0) = \int_0^{+\infty} z_0^n f_j(\mathbf{r}_0 \equiv (\mathbf{R}_0, z_0)) dz_0. \quad (3.5)$$

La série de Taylor est justifiée tant que les variations spatiales du tenseur de Green selon l'épaisseur sont faibles par rapport à celles des forces volumiques. La transformation de ces forces en contraintes surfaciques repose sur cette seule hypothèse et est très généralement vérifiée en CND à l'aide d'EMATs. En effet, les variations spatiales du tenseur de Green sont de l'ordre des longueurs d'ondes ultrasonores, typiquement de quelques millimètres, tandis que les variations spatiales des forces selon sont de l'ordre de l'épaisseur de peau, typiquement de quelques centièmes de millimètres [16, 38].

Grâce à la série de Taylor, les intégrales selon l'épaisseur ne portent plus sur les fonctions de Green, mais sur les dérivées selon l'épaisseur de ces mêmes fonctions. Ces dérivées n'étant pas connues, les étapes suivantes de la transformation vont donc s'attacher à les déporter sur les différents moments des forces. Pour cela, un deuxième tenseur est introduit.

2.1.3 Équation d'équilibre local

Pour projeter les dérivées des fonctions de Green de l'équation (3.5) sur les moments des forces, l'équation d'équilibre local (1.14) est considérée. Elle permet de construire un tenseur autour duquel les étapes de la transformation vont s'articuler.

La divergence de la contrainte élastique est exprimée en fonction du déplacement grâce à la relation de Lamé pour les matériaux isotropes. Si λ_L et μ_L sont les constantes de Lamé [N.m⁻²] et si ρ est la masse volumique [kg.m⁻³] du matériau, alors l'équation d'équilibre local s'écrit :

$$K_{ij} [u_j(\mathbf{r}_0)] = f_i(\mathbf{r}_0), \quad (3.6)$$

où le tenseur $\mathbf{K}[\bullet]$ est l'opérateur suivant :

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} -\rho\omega^2 - (\lambda_L + 2\mu_L) \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \mu_L \left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} \right) & -(\lambda_L + \mu_L) \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial y_0} & -(\lambda_L + \mu_L) \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial z_0} \\ -(\lambda_L + \mu_L) \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial y_0} & -\rho\omega^2 - (\lambda_L + 2\mu_L) \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} - \mu_L \left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} \right) & -(\lambda_L + \mu_L) \frac{\partial^2}{\partial y_0 \partial z_0} \\ -(\lambda_L + \mu_L) \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial z_0} & -(\lambda_L + \mu_L) \frac{\partial^2}{\partial y_0 \partial z_0} & -\rho\omega^2 - (\lambda_L + 2\mu_L) \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} - \mu_L \left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \right) \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

La dépendance temporelle, et par suite la dépendance fréquentielle, est la même pour le champ de déplacement que pour les forces considérées. Le tenseur $\mathbf{K}[\bullet]$ est le nouvel élément permettant d'entrer dans le détail des étapes de calcul de la transformation. Il permet notamment de relier les différentes composantes du champ de déplacement. En effet, en multipliant l'équation (3.7) par la fonction $G_{ki}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, en sommant sur l'indice i , en intégrant sur le demi-espace et en substituant le résultat dans l'équation (3.3), la relation suivante est établie :

$$u_k(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} G_{ki}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) K_{ij} [u_j(\mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0. \quad (3.8)$$

Pour un matériau anisotrope, la loi de Lamé devient caduque et l'ensemble des coefficients de rigidité doit être considéré. L'expression du tenseur $\mathbf{K}[\bullet]$ est naturellement différente. Toutes les étapes de calcul détaillées par la suite restent néanmoins applicables pour ce cas. Elles ne sont cependant pas explicitées, car d'un point de vue élastique les matériaux ferromagnétiques sont considérés ici comme isotropes.

2.2 Résolution du problème par l'expression des dérivées normales du tenseur de Green

2.2.1 Relations dans un demi-espace infini entre les dérivées des différentes composantes des fonctions de Green

Le premier terme du membre de droite de l'équation (3.9) est maintenant considéré. Ce terme est le premier des neuf termes, pour $i = j = 1$. Les différentes étapes de calcul à effectuer sur les autres termes de l'équation (3.9) sont illustrées à travers ce cas. Grâce à la définition du tenseur opérateur $\mathbf{K}[\bullet]$, équation (3.8), le premier terme s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) K_{11}[u_1(\mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0 \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \left[\rho \omega^2 + (\lambda_L + 2\mu_L) \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \mu_L \left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} \right) \right] [u_1(\mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Une intégration par parties de tous les termes du membre de droite est maintenant effectuée. Ceci transfère partiellement les dérivées appliquées au déplacement u_1 sur la fonction de Green G_{k1} . Le premier terme à droite n'a pas besoin de subir d'intégration par partie car il ne comprend que des scalaires. C'est notamment sur ce terme que va porter la discussion et le calcul des contraintes équivalentes dans le domaine temporel. Le détail de cette intégration par parties est donné par :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) K_{11}[u_1(\mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0 = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \rho \omega^2 u_1(\mathbf{r}_0) G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dx_0 dy_0 dz_0 \\ & - (\lambda_L + 2\mu_L) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left[G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \frac{\partial u_1(\mathbf{r}_0)}{\partial x_0} \right]_{-\infty}^{+\infty} dy_0 dz_0 + (\lambda_L + 2\mu_L) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\partial G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial x_0} \frac{\partial u_1(\mathbf{r}_0)}{\partial x_0} dx_0 dy_0 dz_0 \\ & - \mu_L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left[G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \frac{\partial u_1(\mathbf{r}_0)}{\partial y_0} \right]_{-\infty}^{+\infty} dx_0 dz_0 + \mu_L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\partial G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial y_0} \frac{\partial u_1(\mathbf{r}_0)}{\partial y_0} dx_0 dy_0 dz_0 \\ & - \mu_L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \frac{\partial u_1(\mathbf{r}_0)}{\partial z_0} \right]_0^{+\infty} dx_0 dy_0 + \mu_L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\partial G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial z_0} \frac{\partial u_1(\mathbf{r}_0)}{\partial z_0} dx_0 dy_0 dz_0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

À ce stade, en choisissant la condition de jauge usuelle supposant un tenseur de Green nul à l'infini [40], l'équation (3.11) se réduit alors à :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) K_{11}[u_1(\mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0 &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \rho \omega^2 u_1(\mathbf{r}_0) G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dx_0 dy_0 dz_0 \\
&+ (\lambda_L + 2\mu_L) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\partial G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial x_0} \frac{\partial u_1(\mathbf{r}_0)}{\partial x_0} dx_0 dy_0 dz_0 \\
&+ \mu_L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\partial G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial y_0} \frac{\partial u_1(\mathbf{r}_0)}{\partial y_0} dx_0 dy_0 dz_0 \\
&+ \mu_L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) \frac{\partial u_1(\mathbf{R}_0)}{\partial z_0} dx_0 dy_0 + \mu_L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\partial G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial z_0} \frac{\partial u_1(\mathbf{r}_0)}{\partial z_0} dx_0 dy_0 dz_0 .
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Une seconde intégration par parties est effectuée et transfère toutes les dérivées appliquées au déplacement u_1 à la fonction de Green G_{k1} . La relation (3.12) devient :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) K_{11}[u_1(\mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0 &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \rho \omega^2 u_1(\mathbf{r}_0) G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dx_0 dy_0 dz_0 \\
&+ (\lambda_L + 2\mu_L) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial x_0} u_1(\mathbf{r}_0) \right]_{-\infty}^{+\infty} dy_0 dz_0 - (\lambda_L + 2\mu_L) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial x_0^2} u_1(\mathbf{r}_0) dx_0 dy_0 dz_0 \\
&+ \mu_L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial y_0} u_1(\mathbf{r}_0) \right]_{-\infty}^{+\infty} dx_0 dz_0 - \mu_L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial y_0^2} u_1(\mathbf{r}_0) dx_0 dy_0 dz_0 \\
&+ \mu_L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) \frac{\partial u_1(\mathbf{R}_0)}{\partial z_0} dx_0 dy_0 \\
&+ \mu_L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial z_0} u_1(\mathbf{r}_0) \right]_0^{+\infty} dx_0 dy_0 - \mu_L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial z_0^2} u_1(\mathbf{r}_0) dx_0 dy_0 dz_0 .
\end{aligned} \tag{3.12}$$

En considérant que le champ de déplacement s'annule à l'infini, l'équation (3.13) se réduit à :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) K_{11}[u_1(\mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0 &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \rho \omega^2 u_1(\mathbf{r}_0) G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dx_0 dy_0 dz_0 \\
&- (\lambda_L + 2\mu_L) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial x_0^2} u_1(\mathbf{r}_0) dx_0 dy_0 dz_0 - \mu_L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial y_0^2} u_1(\mathbf{r}_0) dx_0 dy_0 dz_0 \\
&+ \mu_L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) \frac{\partial u_1(\mathbf{R}_0)}{\partial z_0} dx_0 dy_0 \\
&- \mu_L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\mathbf{R}_0) \frac{\partial G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial z_0} dx_0 dy_0 - \mu_L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial z_0^2} u_1(\mathbf{r}_0) dx_0 dy_0 dz_0 .
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Finalement, en utilisant la définition (3.8) du tenseur $\mathbf{K}[\cdot]$, l'équation (3.14) conduit à :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) K_{11}[u_1(\mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_1(\mathbf{r}_0) K_{11}[G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0 \\
&+ \mu_L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) \frac{\partial u_1(\mathbf{R}_0)}{\partial z_0} dx_0 dy_0 - \mu_L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\mathbf{R}_0) \frac{\partial G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial z_0} dx_0 dy_0 .
\end{aligned} \tag{3.14a}$$

En appliquant les mêmes opérations aux autres termes de l'équation (3.9), double intégration par parties et conditions à l'infini, les huit relations suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) K_{22}[u_2(\mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_2(\mathbf{r}_0) K_{22}[G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0 \\ &+ \mu_L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) \frac{\partial u_2(\mathbf{R}_0)}{\partial z_0} dx_0 dy_0 - \mu_L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_2(\mathbf{R}_0) \frac{\partial G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial z_0} dx_0 dy_0, \end{aligned} \quad (3.15b)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) K_{33}[u_3(\mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_3(\mathbf{r}_0) K_{33}[G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0 \\ &+ (\lambda_L + 2\mu_L) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) \frac{\partial u_3(\mathbf{R}_0)}{\partial z_0} dx_0 dy_0 \\ &- (\lambda_L + 2\mu_L) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_3(\mathbf{R}_0) \frac{\partial G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial z_0} dx_0 dy_0, \end{aligned} \quad (3.16c)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) K_{13}[u_3(\mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_3(\mathbf{r}_0) K_{13}[G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0 \\ &+ (\lambda_L + \mu_L) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) \frac{\partial u_3(\mathbf{R}_0)}{\partial x_0} dx_0 dy_0, \end{aligned} \quad (3.17d)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) K_{23}[u_3(\mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_3(\mathbf{r}_0) K_{23}[G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0 \\ &+ (\lambda_L + \mu_L) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) \frac{\partial u_3(\mathbf{R}_0)}{\partial y_0} dx_0 dy_0, \end{aligned} \quad (3.18e)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) K_{31}[u_1(\mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_1(\mathbf{r}_0) K_{31}[G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0 \\ &+ (\lambda_L + \mu_L) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) \frac{\partial u_1(\mathbf{R}_0)}{\partial x_0} dx_0 dy_0, \end{aligned} \quad (3.15f)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) K_{32}[u_2(\mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_2(\mathbf{r}_0) K_{32}[G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0 \\ &+ (\lambda_L + \mu_L) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) \frac{\partial u_2(\mathbf{R}_0)}{\partial y_0} dx_0 dy_0, \end{aligned} \quad (3.15g)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) K_{12}[u_2(\mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_2(\mathbf{r}_0) K_{12}[G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0, \quad (3.15h)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) K_{21}[u_1(\mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_1(\mathbf{r}_0) K_{21}[G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] dx_0 dy_0 dz_0. \quad (3.15i)$$

En recombinaut toutes ces équations, équations (3.15a) à (3.15i), et en utilisant les conditions de surface libre du champ de déplacement, l'équation (3.9) peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned}
u_k(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} u_j(\mathbf{r}_0) K_{ij} [G_{ki}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] dz_0 \right. \\
- u_1(\mathbf{R}_0) \left(\mu_L \frac{\partial G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial z_0} + \mu_L \frac{\partial G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial x_0} \right) - u_2(\mathbf{R}_0) \left(\mu_L \frac{\partial G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial z_0} + \mu_L \frac{\partial G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial y_0} \right) \\
\left. - u_3(\mathbf{R}_0) \left[(\lambda_L + 2\mu_L) \frac{\partial G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial z_0} + \lambda_L \frac{\partial G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial x_0} + \lambda_L \frac{\partial G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial y_0} \right] \right\} dx_0 dy_0. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Or, par définition, le tenseur de Green représente la solution élémentaire de l'équation d'onde dans un espace semi-infini et vérifie alors la relation :

$$K_{ij} [G_{ki}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta_{kj}, \quad (3.17)$$

le terme δ_{kj} désignant le symbole de Kronecker. Grâce à cette définition, le premier terme du membre de droite de l'équation (3.16) est directement identifié comme étant égal au membre de gauche. Ainsi, la somme des trois termes restant du membre de droite doit être nulle. Pour trouver une solution unique et non triviale, chacun de ces trois termes doit être nul. Trois nouvelles relations sont alors établies, reliant les différentes dérivées premières de différentes fonctions de Green. Celles-ci sont données par :

$$\frac{\partial G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial z_0} + \frac{\partial G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial x_0} = 0, \quad (3.18a)$$

$$\frac{\partial G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial z_0} + \frac{\partial G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial y_0} = 0, \quad (3.18b)$$

$$(\lambda_L + 2\mu_L) \frac{\partial G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial z_0} + \lambda_L \frac{\partial G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial x_0} + \lambda_L \frac{\partial G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial y_0} = 0. \quad (3.18c)$$

2.2.2 Dérivées normales des fonctions de Green

2.2.2.1 Dérivées du premier ordre

Cette dernière série d'équations, (3.18a) à (3.18c), permet d'écrire les dérivées selon l'épaisseur du tenseur de Green en fonction des dérivées tangentiellles :

$$\frac{\partial G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial z_0} = -\frac{\partial G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial x_0}, \quad (3.19a)$$

$$\frac{\partial G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial z_0} = -\frac{\partial G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial y_0}, \quad (3.19b)$$

$$\frac{\partial G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial z_0} = -\frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} \left(\frac{\partial G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial y_0} \right). \quad (3.19c)$$

2.2.2.2 Dérivées du second ordre

En considérant l'équation (3.17), pour $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$ et quel que soit l'indice k , les relations suivantes sont établies :

$$K_{11}[G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] + K_{21}[G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] + K_{31}[G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] = 0, \quad (3.20a)$$

$$K_{12}[G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] + K_{22}[G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] + K_{32}[G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] = 0, \quad (3.20b)$$

$$K_{13}[G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] + K_{23}[G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] + K_{33}[G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] = 0, \quad (3.20c)$$

données sous forme développée par :

$$\left[-\rho\omega^2 - (\lambda_L + 2\mu_L) \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \mu_L \left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} \right) \right] [G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] - (\lambda_L + \mu_L) \left(\frac{\partial^2 G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial x_0 \partial y_0} + \frac{\partial^2 G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial x_0 \partial z_0} \right) = 0, \quad (3.21a)$$

$$\left[-\rho\omega^2 - (\lambda_L + 2\mu_L) \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} - \mu_L \left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} \right) \right] [G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] - (\lambda_L + \mu_L) \left(\frac{\partial^2 G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial x_0 \partial y_0} + \frac{\partial^2 G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial y_0 \partial z_0} \right) = 0, \quad (3.21b)$$

$$\left[-\rho\omega^2 - (\lambda_L + 2\mu_L) \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} - \mu_L \left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \right) \right] [G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] - (\lambda_L + \mu_L) \left(\frac{\partial^2 G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial x_0 \partial z_0} + \frac{\partial^2 G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial y_0 \partial z_0} \right) = 0. \quad (3.21c)$$

Dans ces dernières relations, des dérivées croisées font apparaître des dérivées normales. Elles sont éliminées à l'aide des dérivées croisées des équations (3.19a) à (3.19c), qui donnent :

$$\frac{\partial^2 G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial x_0 \partial z_0} = -\frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} \left(\frac{\partial^2 G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial x_0 \partial y_0} \right), \quad (3.22a)$$

$$\frac{\partial^2 G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial y_0 \partial z_0} = -\frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} \left(\frac{\partial^2 G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial x_0 \partial y_0} + \frac{\partial^2 G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial y_0^2} \right), \quad (3.22b)$$

$$\frac{\partial^2 G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial x_0 \partial z_0} = -\frac{\partial^2 G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial x_0^2}, \quad (3.22c)$$

$$\frac{\partial^2 G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial y_0 \partial z_0} = -\frac{\partial^2 G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)}{\partial y_0^2}. \quad (3.22d)$$

En substituant les égalités (3.22) dans les expressions (3.21), les expressions des dérivées secondes selon l'épaisseur du matériau sont finalement établies :

$$\frac{\partial^2 G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial z_0^2} = -\left(-\frac{\rho\omega^2}{\mu_L} + A \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \right) [G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] - B \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial y_0} [G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)], \quad (3.23a)$$

$$\frac{\partial^2 G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial z_0^2} = -\left(-\frac{\rho\omega^2}{\mu_L} + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + A \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \right) [G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] - B \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial y_0} [G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)], \quad (3.23b)$$

$$\frac{\partial^2 G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial z_0^2} = \left[\frac{\rho\omega^2}{\lambda_L + 2\mu_L} + \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \right) \right] [G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)], \quad (3.23c)$$

où :

$$A = 2 + \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L}, \quad (3.24a)$$

$$B = 1 + \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L}. \quad (3.24b)$$

2.2.3 Deux formulations des contraintes surfaciques équivalentes

À ce stade, les expressions des dérivées premières et secondes des fonctions de Green selon la normale, équations (3.19a-c) et (3.23a-c), peuvent être introduites dans l'équation (3.5). En procédant ainsi, deux formulations de contraintes surfaciques équivalentes sont obtenues.

2.2.3.1 Première formulation

La substitution des dérivées des fonctions de Green, équations (3.19a-c) et (3.23a-c), dans l'équation (3.5) conduit directement à :

$$u_i(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\sigma}_j^I [G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0)] dx_0 dy_0, \quad (3.25)$$

où les contraintes surfaciques équivalentes $\tilde{\sigma}_j^I[\cdot]$ se présentent sous la forme d'opérateurs appliqués aux différentes composantes du tenseur de Green. Ces opérateurs contraintes sont exprimées par :

$$\tilde{\sigma}_x^I(\mathbf{R}_0)[\cdot] = \left(M_x^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2\mu_L} M_x^{(2)} \right) (\cdot) - \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} M_z^{(1)} \frac{\partial[\cdot]}{\partial x_0} - \frac{A}{2} M_x^{(2)} \frac{\partial^2[\cdot]}{\partial x_0^2} - \frac{1}{2} M_x^{(2)} \frac{\partial^2[\cdot]}{\partial y_0^2} - \frac{B}{2} M_y^{(2)} \frac{\partial^2[\cdot]}{\partial x_0 \partial y_0}, \quad (3.26a)$$

$$\tilde{\sigma}_y^I(\mathbf{R}_0)[\cdot] = \left(M_y^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2\mu_L} M_y^{(2)} \right) (\cdot) - \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} M_z^{(1)} \frac{\partial[\cdot]}{\partial y_0} - \frac{1}{2} M_y^{(2)} \frac{\partial^2[\cdot]}{\partial x_0^2} - \frac{A}{2} M_y^{(2)} \frac{\partial^2[\cdot]}{\partial y_0^2} - \frac{B}{2} M_x^{(2)} \frac{\partial^2[\cdot]}{\partial x_0 \partial y_0}, \quad (3.26b)$$

$$\tilde{\sigma}_z^I(\mathbf{R}_0)[\cdot] = \left(M_z^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2(\lambda_L + 2\mu_L)} M_z^{(2)} \right) (\cdot) - M_x^{(1)} \frac{\partial[\cdot]}{\partial x_0} - M_y^{(1)} \frac{\partial[\cdot]}{\partial y_0} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} M_z^{(2)} \frac{\partial^2[\cdot]}{\partial x_0^2} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} M_z^{(2)} \frac{\partial^2[\cdot]}{\partial y_0^2}. \quad (3.26c)$$

Cette formulation ne correspond pas strictement à la forme recherchée (3.4). Cependant, elle devient utile si, plutôt que la propagation d'ondes dans un espace semi-infini, la propagation d'ondes dans une plaque est considérée. Il suffit alors de vérifier l'hypothèse selon laquelle les variations des fonctions de Green dans l'épaisseur sont faibles par rapport à celles des sources forces. Grâce à cette formulation, seules les dérivées tangentielles sont prises en compte dans la formulation des contraintes équivalentes. Or, pour les ondes guidées se propageant dans une plaque, les dérivées tangentielles sont proportionnelles aux nombres d'onde. En deux dimensions, par exemple pour les ondes transverses horizontales (notées ondes SH pour « Shear Horizontal »), les nombres d'onde sont connus analytiquement. Ainsi, les expressions analytiques des amplitudes modales de ces ondes peuvent être établies à partir de celles des forces électromagnétiques [41]. Pour les ondes de Lamb, les nombres d'onde sont obtenus numériquement de différentes manières : par éléments finis, par éléments finis semi-analytiques ou encore par résolution numérique de l'équation de dispersion. Une fois ces nombres d'onde connus, une formulation quasi-analytique de l'amplitude modale des modes de Lamb est obtenue [42].

2.2.3.2 Deuxième formulation

Cette seconde formulation correspond à celle originellement donnée par Thompson [38]. Elle provient d'une double intégration par parties de la première formulation (3.25). Les erreurs typographiques glissées dans le papier de Thompson ont été corrigées. Le champ de déplacement s'écrit alors :

$$u_i(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) \tilde{\sigma}_j^{\text{II}}(\mathbf{R}_0) dx_0 dy_0, \quad (3.27)$$

où les contraintes surfaciques équivalentes $\tilde{\sigma}_j^{\text{II}}$ sont directement reliées aux moments des forces (3.6) :

$$\tilde{\sigma}_x^{\text{II}}(\mathbf{R}_0) = M_x^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2\mu_L} M_x^{(2)} + \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} \frac{\partial M_z^{(1)}}{\partial x_0} - \frac{A}{2} \frac{\partial^2 M_x^{(2)}}{\partial x_0^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M_x^{(2)}}{\partial y_0^2} - \frac{B}{2} \frac{\partial^2 M_y^{(2)}}{\partial x_0 \partial y_0}, \quad (3.28a)$$

$$\tilde{\sigma}_y^{\text{II}}(\mathbf{R}_0) = M_y^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2\mu_L} M_y^{(2)} + \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} \frac{\partial M_z^{(1)}}{\partial y_0} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M_y^{(2)}}{\partial x_0^2} - \frac{A}{2} \frac{\partial^2 M_y^{(2)}}{\partial y_0^2} - \frac{B}{2} \frac{\partial^2 M_x^{(2)}}{\partial x_0 \partial y_0}, \quad (3.28b)$$

$$\tilde{\sigma}_z^{\text{II}}(\mathbf{R}_0) = M_z^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2(\lambda_L + 2\mu_L)} M_z^{(2)} + \frac{\partial M_x^{(1)}}{\partial x_0} + \frac{\partial M_y^{(1)}}{\partial y_0} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} \frac{\partial^2 M_z^{(2)}}{\partial x_0^2} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} \frac{\partial^2 M_z^{(2)}}{\partial y_0^2}. \quad (3.28c)$$

Les dérivées spatiales ne s'appliquent plus au tenseur de Green. Les contraintes surfaciques équivalentes des forces volumiques sont donc explicitement connues et peuvent être directement réutilisées dans les modèles de propagation ultrasonores basés sur des termes sources surfaciques.

2.3 Écriture transitoire de la transformation

Pour exprimer la transformation dans le domaine temporel, toutes les variations fréquentielles des différentes grandeurs doivent être considérées simultanément. Ainsi, en plus de la formulation intégrale sur le volume, une intégrale temporelle doit être ajoutée à toutes les équations de la transformation. L'équation d'équilibre local a toujours la forme :

$$\mathbf{K}_{ij} [u_j(\mathbf{r}_0)] = f_i(\mathbf{r}_0), \quad (3.19)$$

mais le tenseur $\mathbf{K}[\bullet]$ devient l'opérateur suivant :

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{pmatrix} \rho \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} - (\lambda_L + 2\mu_L) \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \mu_L \left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} \right) & -(\lambda_L + \mu_L) \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial y_0} & -(\lambda_L + \mu_L) \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial z_0} \\ -(\lambda_L + \mu_L) \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial y_0} & \rho \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} - (\lambda_L + 2\mu_L) \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} - \mu_L \left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} \right) & -(\lambda_L + \mu_L) \frac{\partial^2}{\partial y_0 \partial z_0} \\ -(\lambda_L + \mu_L) \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial z_0} & -(\lambda_L + \mu_L) \frac{\partial^2}{\partial y_0 \partial z_0} & \rho \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} - (\lambda_L + 2\mu_L) \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} - \mu_L \left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \right) \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Toutes les étapes de calculs présentées dans la section (2.2) ne concernent que des intégrales spatiales et restent donc inchangées. Le seul terme à considérer différemment est le terme de dérivée temporelle du champ de déplacement. En effet, pour appliquer ces dérivées aux fonctions de Green, de l'équation (3.9) aux équations (3.15a-c), le transfert de la dérivée temporelle seconde du

champ de déplacement est approfondi ci-dessous. L'équation de départ, équation (3.9), s'écrit maintenant :

$$u_k(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{ki}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) K_{ij} [u_j(\mathbf{r}_0, t_0)] dx_0 dy_0 dz_0 dt_0 . \quad (3.30)$$

Le premier terme ($i = j = 1$) est tel que :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{k1}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) K_{11} [u_1(\mathbf{r}_0, t_0)] dx_0 dy_0 dz_0 dt_0 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{k1}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \left[\rho \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} - (\lambda_L + 2\mu_L) \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \mu_L \left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} \right) \right] [u_1(\mathbf{r}_0, t_0)] dx_0 dy_0 dz_0 dt_0 . \end{aligned} \quad (3.31)$$

La double intégration par parties spatiale et les conditions de jauge restent inchangées. Les conditions aux limites dans le temps sont des conditions de nullité des champs à l'infini, tant sur les fonctions de Green que sur le champ de déplacement. Ainsi, en se concentrant sur le terme temporel, sa double intégration par parties conduit à :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{k1}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial^2 u_1(\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t^2} dx_0 dy_0 dz_0 dt_0 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left[G_{k1}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial u_1(\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0} \right]_{-\infty}^{+\infty} dx_0 dy_0 dz_0 \\ & \quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\partial G_{k1}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0} \frac{\partial u_1(\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0} dx_0 dy_0 dz_0 dt_0 \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial G_{k1}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0} u_1(\mathbf{r}_0, t_0) \right]_{-\infty}^{+\infty} dx_0 dy_0 dz_0 \\ & \quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 G_{k1}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0^2} u_1(\mathbf{r}_0, t_0) dx_0 dy_0 dz_0 dt_0 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 G_{k1}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0^2} u_1(\mathbf{r}_0, t_0) dx_0 dy_0 dz_0 dt_0 . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Le même calcul est effectué sur les deux autres termes comprenant une double dérivée temporelle. Les contraintes surfaciques s'écrivent alors, pour la première formulation (3.26) :

$$\tilde{\sigma}_x^I(\mathbf{R}_0, t_0)[\bullet] = M_x^{(0)}(\bullet) + \frac{\rho}{2\mu_L} M_x^{(2)} \frac{\partial^2[\bullet]}{\partial t_0^2} - \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} M_z^{(1)} \frac{\partial[\bullet]}{\partial x_0} - \frac{A}{2} M_x^{(2)} \frac{\partial^2[\bullet]}{\partial x_0^2} - \frac{1}{2} M_x^{(2)} \frac{\partial^2[\bullet]}{\partial y_0^2} - \frac{B}{2} M_y^{(2)} \frac{\partial^2[\bullet]}{\partial x_0 \partial y_0}, \quad (3.33a)$$

$$\tilde{\sigma}_y^I(\mathbf{R}_0, t_0)[\bullet] = M_y^{(0)}(\bullet) + \frac{\rho}{2\mu_L} M_y^{(2)} \frac{\partial^2[\bullet]}{\partial t_0^2} - \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} M_z^{(1)} \frac{\partial[\bullet]}{\partial y_0} - \frac{1}{2} M_y^{(2)} \frac{\partial^2[\bullet]}{\partial x_0^2} - \frac{A}{2} M_y^{(2)} \frac{\partial^2[\bullet]}{\partial y_0^2} - \frac{B}{2} M_x^{(2)} \frac{\partial^2[\bullet]}{\partial x_0 \partial y_0}, \quad (3.33b)$$

$$\tilde{\sigma}_z^I(\mathbf{R}_0, t_0)[\bullet] = M_z^{(0)}(\bullet) + \frac{\rho}{2(\lambda_L + 2\mu_L)} M_z^{(2)} \frac{\partial^2[\bullet]}{\partial t_0^2} - M_x^{(1)} \frac{\partial[\bullet]}{\partial x_0} - M_y^{(1)} \frac{\partial[\bullet]}{\partial y_0} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} M_z^{(2)} \frac{\partial^2[\bullet]}{\partial x_0^2} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} M_z^{(2)} \frac{\partial^2[\bullet]}{\partial y_0^2}, \quad (3.33c)$$

et, pour la deuxième formulation (3.28) :

$$\tilde{\sigma}_x^{II}(\mathbf{R}_0, t_0) = M_x^{(0)} + \frac{\rho}{2\mu_L} \frac{\partial^2 M_x^{(2)}}{\partial t_0^2} + \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} \frac{\partial M_z^{(1)}}{\partial x_0} - \frac{A}{2} \frac{\partial^2 M_x^{(2)}}{\partial x_0^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M_x^{(2)}}{\partial y_0^2} - \frac{B}{2} \frac{\partial^2 M_y^{(2)}}{\partial x_0 \partial y_0}, \quad (3.34a)$$

$$\tilde{\sigma}_y^{II}(\mathbf{R}_0, t_0) = M_y^{(0)} + \frac{\rho}{2\mu_L} \frac{\partial^2 M_y^{(2)}}{\partial t_0^2} + \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} \frac{\partial M_z^{(1)}}{\partial y_0} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M_y^{(2)}}{\partial x_0^2} - \frac{A}{2} \frac{\partial^2 M_y^{(2)}}{\partial y_0^2} - \frac{B}{2} \frac{\partial^2 M_x^{(2)}}{\partial x_0 \partial y_0}, \quad (3.34b)$$

$$\tilde{\sigma}_z^{II}(\mathbf{R}_0, t_0) = M_z^{(0)} + \frac{\rho}{2(\lambda_L + 2\mu_L)} \frac{\partial^2 M_z^{(2)}}{\partial t_0^2} + \frac{\partial M_x^{(1)}}{\partial x_0} + \frac{\partial M_y^{(1)}}{\partial y_0} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} \frac{\partial^2 M_z^{(2)}}{\partial x_0^2} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} \frac{\partial^2 M_z^{(2)}}{\partial y_0^2}. \quad (3.34c)$$

En pratique, les différents calculs d'intégrales ne peuvent pas être réalisés jusqu'à une valeur infinie. La discrétisation numérique tient compte de l'étendue spatiale des différentes forces ainsi que de leurs variations spatiales. La discrétisation selon l'épaisseur du matériau se concentre dans les trois premières épaisseurs de peau, de façon linéaire avec 10 points dans une profondeur correspondant à la première épaisseur de peau, puis 11 autres points dans les deux autres épaisseurs de peau. La discrétisation selon les directions tangentes à la surface est effectuée lors du calcul des champs magnétiques statiques et dynamiques. L'étendue spatiale de cette discrétisation est limitée à la zone où les champs magnétiques sont négligeables devant leur valeur maximale. En pratique, chaque élément du capteur possède une zone de calcul dont les dimensions sont définies par un multiple fixe de la longueur et de la largeur de cet élément. Ce critère est purement géométrique et dépend donc de la taille des différents éléments du capteur. Les dimensions de la zone de discrétisation totale dans le plan de la surface sont définies par l'intersection des différentes zones de calcul des différents éléments du capteur. De plus, le nombre de points de calcul dépend des circuits électriques décrits. En effet, un nombre fixe de point est alloué à la description de la dimension la plus fine de ces circuits. Ceci définit le pas de calcul qui est le même dans les deux dimensions du plan et appliqué à toute la zone de calcul. La discrétisation totale est donc linéaire et prend en compte les plus petites variations des champs magnétiques dynamiques et les étendues spatiales de tous les champs magnétiques, statiques et dynamiques, créés par le capteur. Enfin, la discrétisation temporelle du signal d'injection est fixée par l'utilisateur. Le code de calcul vérifie ensuite le

théorème d'échantillonnage de Shannon et au besoin modifie l'échantillonnage pour appliquer ce théorème.

3 VALIDATION DE L'ORDRE DE GRANDEUR DES CONTRAINTES SURFACIQUES ÉQUIVALENTES

Des discussions récurrentes dans la littérature font état de désaccords sur l'amplitude relative des forces de Lorentz et de magnétostriction. En effet, quelle que soit la configuration considérée, selon les auteurs, la force de Lorentz ou de magnétostriction est supposée dominer les mécanismes de transduction. Par exemple, dans le cas d'un champ statique orienté selon la normale à la surface du matériau, Wilbrand [27] et Thompson [36] privilégient la force de Lorentz, contrairement à Hirao et Ogi [16]. Cependant, la force de Lorentz étant très bien étudiée, et sa modélisation maîtrisée [26, 38], la question porte surtout sur l'amplitude de la force de magnétostriction. Le traitement de la force de Lorentz par une intégrale simple a été implémenté dans CIVA et validé par comparaison avec l'expérience [39]. Le calcul de la force de magnétostriction tout comme sa transformation en contraintes surfaciques ne le sont, à ce stade, pas encore.

3.1 Validation de l'ordre de grandeur d'une contrainte équivalente de la force de magnétostriction

L'ordre de grandeur de la force de magnétostriction peut être validé grâce à une publication récente de Ribichini, Nagy et Ogi [19]. En effet, dans ce papier, les auteurs corrigent la formulation de la force de magnétostriction donnée par Hirao et Ogi [16] par ajout de conditions aux limites avant de la comparer aux résultats de Ribichini obtenus par calculs éléments finis [19].

Le calcul de la force de magnétostriction ainsi que sa transformation en contraintes surfaciques présentés dans ce troisième chapitre sont confrontés aux calculs menés par Ribichini *et al.* [19]. La comparaison porte sur l'évaluation des contraintes surfaciques équivalentes dans la configuration de calcul suivante, définie en deux dimensions dans le plan (x, z) . Le champ statique est orienté selon l'axe z et le champ dynamique selon l'axe x . Le champ statique est considéré comme uniforme, ainsi que le champ dynamique car ce dernier provient d'une nappe de courant infinie selon l'axe x . Dans cette configuration, les composantes selon y et z de la force de magnétostriction sont nulles

d'après les approximations de Ogi et ne sont pas données par Ribichini. La comparaison des résultats ne porte donc que sur la composante de la force selon $\mathbf{x}$.

À une fréquence donnée, l'expression erronée de la force de magnétostriction selon l'axe $\mathbf{x}$ obtenue par Ogi [16] est telle que :

$$f_{MS,x}^O = 3jk \varepsilon_T \mu_L \frac{H_{D,x}}{H_{S,z}} e^{-jkz}, \quad (3.35a)$$

où $k = (1-j)/\delta$, alors que Ribichini [19] montre que :

$$f_{MS,x}^R = \frac{3\varepsilon_T \rho \omega^2}{jk} \frac{H_{D,x}}{H_{S,z}} e^{-jkz}. \quad (3.35b)$$

Enfin, cette même force obtenue par le calcul d'Ogi en ajoutant les contraintes de surfaces libres, comme réalisé dans cette étude, s'écrit :

$$f_{MS,x} = 3jk \varepsilon_T \mu_L \frac{H_{D,x}}{H_{S,z}} - 3\varepsilon_T \mu_L \frac{H_{D,x}}{H_{S,z}} e^{-jkz} \delta_D(z). \quad (3.35c)$$

Les expressions de ces différentes forces ne sont cependant pas directement comparables. En effet, ce sont les contraintes surfaciques équivalentes, données d'entrée du calcul ultrasonore, qui importent dans le calcul des ondes générées. Ces contraintes sont déterminées à l'aide de la deuxième formulation (3.28) car seules les forces volumiques sont connues, alors que les nombres d'onde nécessaires à la première formulation (3.26) ne le sont pas. Du fait des diverses simplifications liées à la géométrie, seule la contrainte selon l'axe $\mathbf{x}$ n'est pas nulle :

$$\tilde{\sigma}_x^{\Pi} = M_x^{(0)} - \frac{\rho \omega^2}{2\mu_L} M_x^{(2)}. \quad (3.36)$$

En posant $k_T^2 = \rho \omega^2 / \mu_L$, elle conduit pour Ogi à :

$$\tilde{\sigma}_x^{\Pi, O} = 3\varepsilon_T \mu_L \frac{H_{D,x}}{H_{S,z}} \left(1 + \frac{k_T^2}{k^2} \right) \quad (3.37a)$$

ou encore à :

$$\tilde{\sigma}_x^{\Pi, R} = \frac{-3\varepsilon_T \rho \omega^2}{k^2} \frac{H_{D,x}}{H_{S,z}} \left(1 + \frac{k_T^2}{k^2} \right) \quad (3.37b)$$

pour Ribichini, et pour l'étude présente :

$$\tilde{\sigma}_x^{\Pi} = \frac{3\varepsilon_T \rho \omega^2}{k^2} \frac{H_{D,x}}{H_{S,z}}. \quad (3.37c)$$

Les rapports entre les différentes contraintes et celle déduite de Ribichini *et al.* [19]

$$\left| \frac{\tilde{\sigma}_x^{\text{II},O}}{\tilde{\sigma}_x^{\text{II},R}} \right| = \left| \frac{k^2}{k_T^2} \right| \quad (3.38a)$$

et

$$\left| \frac{\tilde{\sigma}_x^{\text{II}}}{\tilde{\sigma}_x^{\text{II},R}} \right| = \left| 1 + \frac{k_T^2}{k^2} \right|. \quad (3.38b)$$

dépendent des paramètres k et k_T . Pour les ordres de grandeur typiquement utilisés en CND par EMATs ($f = 10^5$ Hz) de matériaux ferromagnétiques ($\mu = 10^1$, $\sigma = 10^7$ S.m⁻¹, $\mu_L = 10^{10}$ N.m⁻² et $\rho = 10^3$ kg.m⁻³), les paramètres $|k^2|$ et $|k_T^2|$ sont respectivement de l'ordre de $6\pi^2 10^6$ m et de $4\pi^2 10^3$ m, soit des rapports (3.38a) et (3.38b) respectivement d'environ 10^3 et 1 au millième près. Ainsi, comme Ribichini a validé ses calculs par rapport aux éléments finis (6 % de différence) et qu'Ogi admet avoir commis une erreur en omettant les conditions de surface libre dans l'expression de la force de magnétostriction (3.35a), il peut être conclu que les contraintes équivalentes données à partir de nos expressions sont numériquement validées.

Par ailleurs, il est ambigu de décrire la magnétostriction comme une force. La nature physique de la magnétostriction est une déformation. Elle est donc décrite comme un tenseur de déformation. Cependant, pour inclure les effets de magnétostriction dans le modèle il faut considérer la magnétostriction comme une force pour pouvoir la transformer en contraintes surfaciques équivalentes. Ribichini *et al.* [19] considèrent la magnétostriction comme une force inertielle. Ceci permet de tenir compte du fait que la magnétostriction n'est pas une vraie force volumique car elle dépend de l'endroit où ce phénomène prend place. C'est ainsi que si la force de magnétostriction est décrite comme une force volumique par une divergence des contraintes aux limites non physiques doivent lui être imposée. C'est ce qui est réalisé en rajoutant l'équation (2.26) au modèle proposé. De plus, dans le cas précis décrit au paragraphe précédent, le rapport entre la contrainte équivalente du modèle présent et l'intégrale de la force inertielle est identiquement égal à 1. Ceci valide une fois de plus le modèle de force volumique avec conditions aux limites et transformation en contraintes surfaciques équivalentes pour traiter les effets de magnétostriction.

3.2 Validation de l'évolution des contraintes équivalentes en fonction du champ d'induction magnétique statique

Une seconde validation qualitative porte sur le comportement des contraintes équivalentes des différentes forces électromagnétiques en fonction du champ statique imposé. Une comparaison avec

les comportements donnés par Thompson [26] est menée. Un champ statique et un champ dynamique sont considérés dans la direction x . Sur la Figure 3.2 sont représentées les variations des forces de Lorentz et de magnétostriction induites dans du fer pour un champ magnétique statique croissant.

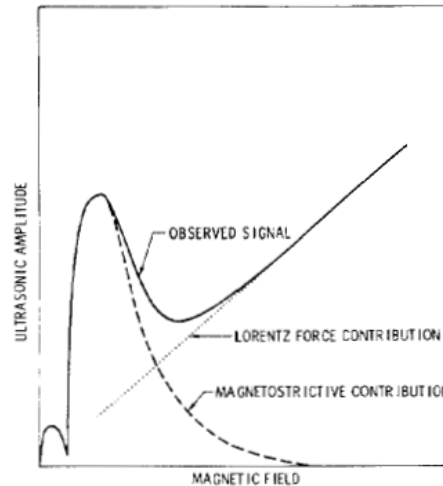


Figure 3.2. Représentation schématique donnée par Thompson [26] de l'amplitude des forces de Lorentz (en pointillés), de magnétostriction (en traits pointillés) et du signal observé (trait plein) en fonction d'un champ statique tangentiel à la surface du matériau (fer).

Pour établir une comparaison avec ces résultats, la même configuration est simulée. Celle-ci consiste en une nappe de courant infinie dans le plan de la surface surmontée par un aimant permanent. Les deux champs magnétiques, statique et dynamique, sont orientés dans la direction x , c'est-à-dire la direction tangente à la surface du matériau. Les amplitudes ultrasonores ne sont pas directement comparées car ce sont les contraintes équivalentes qui sont relevées. De plus, pour simplifier les calculs, ceux-ci sont menés pour une seule fréquence (0,5 MHz) avec une intensité de courant très faible. Les effets de doublement de fréquence sont donc négligés car l'approximation $\|\mathbf{H}_s\| \gg \|\mathbf{H}_d\|$ est toujours vérifiée quelle que soit l'intensité du champ magnétique statique. Par ailleurs, la perméabilité magnétique μ du matériau varie avec l'intensité du champ magnétique total, dans ce cas égal au champ magnétique statique, et est représentée par un scalaire. La courbe de perméabilité magnétique en fonction de l'intensité du champ d'induction statique est représentée sur la Figure 3.3 [43]. Elle correspond à un acier doux à faible taux de carbone nommé ST37. La courbe de magnétostriction macroscopique utilisée, représentée sur la Figure 2.3a, correspond elle aussi à un acier à faible taux de carbone. Par ailleurs, comme le calcul est fréquentiel et qu'une plaque de faible épaisseur (3 mm) est considérée, les expressions des contraintes équivalentes sont données par les équations (3.26a-c), et les ondes propagatives sont guidées par la structure. Seule la contrainte équivalente selon l'axe z est considérée. En effet, pour cette configuration en deux

dimensions, les contraintes équivalentes de la force de Lorentz selon les axes x et y sont nulles. Les nombres d'onde des ondes guidées sont calculés par le code SAFE développé au sein du laboratoire [34, 35]. Les variations spatiales du tenseur de Green (3.26) sont alors exprimées grâce à ces nombres d'onde. Seul le mode A0 est observé sachant que les mêmes variations ont été obtenues pour le mode S0. Les variations de la contrainte équivalente (3.26) en fonction du champ statique appliqué pour les forces de Lorentz et de magnétostriction sont représentées sur la Figure 3.4.

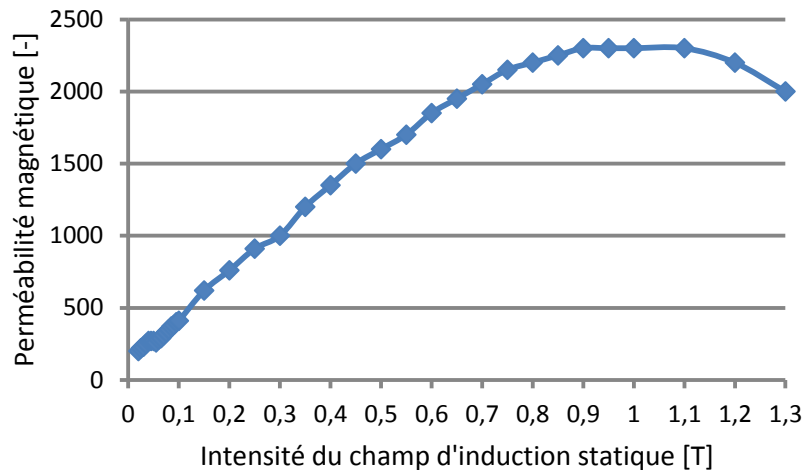


Figure 3.3. Courbe de la perméabilité magnétique [-] en fonction de l'intensité du champ d'induction statique [T].

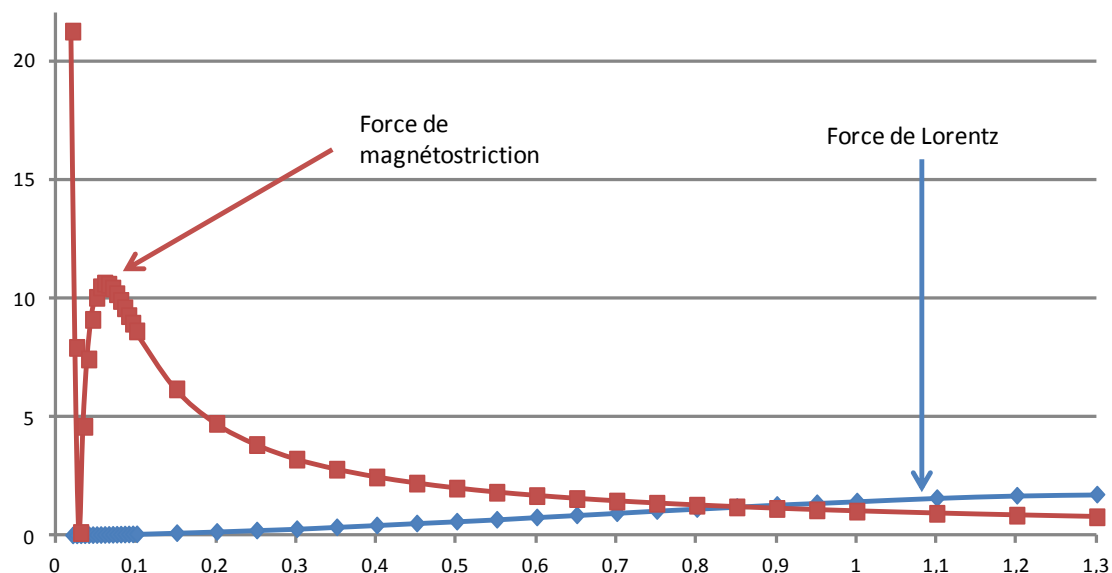


Figure 3.4. Variation de la contrainte équivalente [N.m⁻²] du mode A0 pour les forces de magnétostriction (en rouge) et de Lorentz (en bleue) en fonction du champ magnétique statique appliqué [T].

Alors que les variations de la contrainte équivalente pour la force de magnétostriction, Figure 3.4 en rouge, suivent celles de la déformation macroscopique de magnétostriction, Figure 2.3a, les variations de la contrainte équivalente de la force de Lorentz, Figure 3.4 en bleu, suivent celles de la perméabilité magnétique, Figure 3.3. De plus, par comparaison avec les tendances définies par Thompson [26], les résultats numériques obtenus sont très cohérents. La force de magnétostriction domine à champ statique faible (inférieur à 0,5 T) tandis que la force de Lorentz domine pour des champs statiques forts (supérieurs à 1 T). La force d'aimantation n'est pas représentée sur cette figure. Cependant elle a été calculée et, à l'instar des résultats résumés par Ribichini [21], dans la configuration considérée, cette force est de même amplitude que la force de Lorentz mais de phase opposée. Des exemples de résultats sont donnés par le Tableau 3.1. Les amplitudes des contraintes équivalentes des deux forces sont du même ordre de grandeur, quasiment égales, mais leurs parties réelles et imaginaires sont de signes opposés, traduisant une phase opposée.

Tableau 3.1. Valeurs des contraintes équivalentes [N.m⁻²] des forces de Lorentz et d'aimantation pour différentes intensités du champ magnétique statique [T].

intensité du champ statique	force de Lorentz			force d'aimantation		
	amplitude	partie réelle	partie imaginaire	amplitude	partie réelle	partie imaginaire
0,05	0,0217	- 0,0004	- 0,0217	0,0216	0,0004	0,0216
0,06	0,0266	- 0,0008	- 0,0266	0,0265	0,0008	0,0265
0,07	0,0327	- 0,0022	- 0,0326	0,0326	0,0022	0,0325
0,08	0,0399	- 0,0043	- 0,0397	0,0398	0,0043	0,0396
0,09	0,0470	- 0,0063	- 0,0465	0,0468	0,0063	0,0464
0,1	0,0544	- 0,0086	- 0,0537	0,0536	0,0085	0,0543

La très faible différence entre les amplitudes des deux forces s'explique en regardant leurs expressions analytiques. En effet, comme Hirao et Ogi [16] l'écrivent, les différentes approximations spécifiquement liées à la configuration considérée conduisent à :

$$F_{L,z} = -B_{S,x} \frac{\delta H_{D,x}}{\delta z}, \quad (3.39a)$$

et

$$F_{M,z} = \mu_0 M_{S,x} \frac{\delta H_{D,x}}{\delta z}. \quad (3.39b)$$

Or d'après la définition :

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (3.40)$$

l'expression (3.39a) se réduit à :

$$F_{L,z} = -\mu_0 H_{S,x} \frac{\delta H_{D,x}}{\delta z} - \mu_0 M_{S,x} \frac{\delta H_{D,x}}{\delta z}. \quad (3.41)$$

Comme $H_{S,x}$ et $M_{S,x}$ sont respectivement de l'ordre de 10^2 A.m^{-1} et de 10^4 A.m^{-1} , la force d'aimantation selon l'axe x équivaut la force de Lorentz selon ce même axe à environ 10^{-2} N.m^{-3} près. C'est justement cette différence qui se retrouve dans les valeurs données par le Tableau 3.1.

Finalement, l'ordre de grandeur de la contrainte équivalente de la force de magnétostriction a été validé par deux fois. Celles des forces de Lorentz et d'aimantation ont aussi été validées par rapport aux tendances définies par la littérature. Du fait du très faible coût, en temps et en mémoire, du calcul des contraintes équivalentes, la transformation sera appliquée aux trois forces électromagnétiques, même s'il est reconnu que pour la force de Lorentz une intégrale simple est suffisante.

En conclusion de ce chapitre, la transformation de forces volumiques en contraintes surfaciques a été réalisée dans le système de coordonnées cartésien et les domaines fréquentiels ou temporels. Une seule hypothèse a été introduite : la profondeur de pénétration des forces doit être faible devant les longueurs d'ondes élastiques générées. La transformation des forces s'applique ainsi potentiellement à d'autres cas que les forces électromagnétiques comme par exemple les forces générées par impulsion laser [44, 45]. De plus, deux expressions de contraintes équivalentes ont été obtenues. La première, donnée sous forme d'opérateur s'appliquant au tenseur de Green, est adaptée au cas des ondes guidées. La deuxième formulation est plus explicite car les expressions des contraintes surfaciques obtenues sont directement réutilisables en tant que termes sources des modèles de propagation des ondes élastiques. Par ailleurs, l'expression analytique ou numérique du tenseur de Green n'est pas nécessaire pour effectuer la transformation des forces volumiques en contraintes surfaciques équivalentes. Enfin, le calcul des contraintes équivalentes a été confronté aux résultats de la littérature et ainsi validé.

Ces contraintes équivalentes sont utilisées par les modèles de propagation ultrasonores des ondes élastiques implémentés dans le module CIVA US. Elles permettent également de décrire de façon quasi-analytique la génération et la propagation des ondes guidées générées par EMATs, pour des configurations bidimensionnelles.

4

RAYONNEMENT ET RÉCEPTION DES ONDES

ÉLASTIQUES ÉMISES PAR EMATs DANS UN MILIEU

FERROMAGNÉTIQUE

Ce quatrième chapitre porte sur l'utilisation et l'adaptation des modèles de propagation des ondes élastiques existant dans le logiciel CIVA, plus précisément dans le module CIVA US. Ces modèles prédisent la propagation des ondes de volume (en temporel) et des ondes guidées (en fréquentiel) à partir de termes sources surfaciques. La transformation des forces électromagnétiques volumiques en contraintes surfaciques présentée dans le chapitre précédent permet de les prendre en compte dans le logiciel CIVA, sans avoir à modifier lesdits modèles. Par ailleurs, pour le cas des ondes guidées se propageant dans un guide infini, un modèle de calcul rapide quasi-analytique en deux dimensions est développé.

Dans un premier temps, les modèles implémentés dans le logiciel CIVA pour la propagation des ondes de volume et des ondes guidées sont exploités. Un exemple de propagation d'ondes élastiques générées par EMAT en milieu ferromagnétique est donné. Dans un second temps, le développement d'un modèle de propagation en deux dimensions des ondes guidées est détaillé tant pour les ondes de Lamb que pour les ondes SH. Tandis que les modèles CIVA se basent sur des termes sources temporels, ce dernier modèle considère des termes sources fréquentiels. Ainsi, les différentes formulations des contraintes équivalentes établies au chapitre précédent sont utilisées. Enfin, les différentes hypothèses nécessaires pour appliquer la relation de réciprocité sont discutées et évaluées. Cette relation est en effet prise en compte par le module de simulation CIVA US pour notamment prédire la réception des ondes réfléchies par des défauts.

Sommaire

1	UTILISATION DES MODÈLES DE RAYONNEMENT DES ONDES ÉLASTIQUES	99
1.1	Modèle de rayonnement des ondes de volume	99
1.2	Modèle de rayonnement des ondes guidées	104
2	ADAPTATION DES MODÈLES EXISTANT À LA PROPAGATION DES ONDES GUIDÉES EN DEUX DIMENSIONS.....	105
2.1	Calcul analytique 2D du champ d'excitation magnétique dynamique	106
2.2	Ondes guidées symétriques et antisymétriques : ondes de Lamb générées dans une plaque	109
2.2.1	Fonctions de Green pour les ondes guidées de Lamb	109
2.2.2	Amplitude modale des ondes de Lamb	111
2.3	Pour les ondes guidées transverses horizontales : ondes SH générées dans une plaque.	115
2.3.1	Fonctions de Green pour les ondes guidées SH générées dans une plaque.....	115
2.3.2	Amplitude modale des ondes SH générées dans une plaque	116
3	RÉCEPTION DES ONDES ÉLASTIQUES PAR EMATs EN MILIEU FERROMAGNÉTIQUE : APPLICATION DE LA RELATION DE RÉCIPROCITÉ.....	117

1 UTILISATION DES MODÈLES DE RAYONNEMENT DES ONDES ÉLASTIQUES

Que ce soit pour prédire la propagation des ondes de volume ou celle des ondes guidées, les modèles implémentés dans le module ultrasonore du logiciel CIVA utilisent des données d'entrée sous forme de contraintes surfaciques, exprimées dans le domaine temporel. Grâce à la transformation des forces électromagnétiques présentée au chapitre précédent, les termes sources calculés par le module CIVA CF satisfont ce formalisme.

1.1 Modèle de rayonnement des ondes de volume

Le calcul du champ ultrasonore en ondes de volume rayonné par une distribution surfacique de contraintes fait appel à la méthode des pinceaux [46, 47] pour la propagation et à la relation de réciprocité élastodynamique pour de décrire de façon approchée le tenseur de Green de rayonnement d'une source à la surface d'un demi-espace [48, 49, 50]. La méthode des pinceaux détermine le trajet des ondes entre les points d'observation et les points émetteurs au moyen de matrices de passage aux interfaces, ainsi que les variations des rayons de courbure du front d'onde local au pinceau considéré [46, 47] ; l'amplitude de la contribution au champ associée à un pinceau élémentaire est inversement proportionnelle à la racine carrée du produit des deux rayons de courbure locaux. La relation de réciprocité élastique entre deux états (deux configuration de contrôle) d'une même pièce, permet de préciser le comportement en rayonnement des sources de contraintes à la surface d'un demi-espace. Si ces deux états sont notés respectivement par les indices 1 et 2, alors cette relation indique que si une force $\mathbf{F}_1$ en M crée un déplacement $\mathbf{u}_1$ en P (état 1 Figure 4.1) et si une autre force $\mathbf{F}_2$ en P crée un déplacement $\mathbf{u}_2$ en M , alors le travail de la force $\mathbf{F}_1$ sur le déplacement $\mathbf{u}_2$ est égal au travail de la force $\mathbf{F}_2$ sur le déplacement $\mathbf{u}_1$. Cette situation est représentée Figure 4.1 et est traduite par la relation :

$$\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{u}_1. \quad (4.1)$$

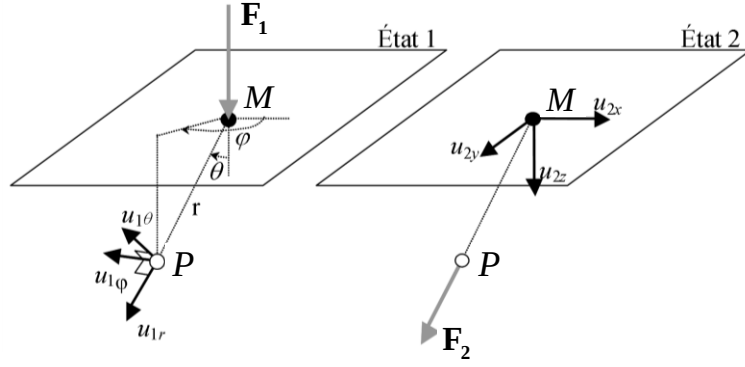


Figure 4.1. Représentation des deux états d'excitation du matériau permettant d'écrire la relation de réciprocité.

L'amplitude d'excitation est recherchée en tout point de la surface émettrice. En pratique, comme dans notre cas la source est déterminée dans un module de calcul différent du calcul de rayonnement ultrasonore, une interpolation bilinéaire est réalisée pour accéder à l'amplitude des contraintes surfaciques en tout point de la surface émettrice, représentée par le plan contenant le point M sur la Figure 4.1. Le calcul du champ de déplacement $\mathbf{u}_1$ se réduit donc, par la relation de réciprocité, à celui du champ de déplacement $\mathbf{u}_2$. Il est réalisé à l'aide d'une méthode analytique qui considère l'expression du tenseur de Green $\mathbf{G}$ du problème, puis l'expression suivante :

$$\alpha(\mathbf{r})u_{2n}(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_0 \iint_S G_{in}(\mathbf{r}_0, t-t_0 | \mathbf{r}, 0) T_i(\mathbf{r}_0, t_0) dS(\mathbf{r}_0), \quad (4.2)$$

où $u_{2n}(\mathbf{r},t)$ est la composante n du champ de déplacement $\mathbf{u}_2$ calculée en un point $\mathbf{r}$ situé à l'intérieur de la zone de calcul pour un temps t . L'ensemble des points source définis par les vecteurs $\mathbf{r}_0$ appartiennent à la surface S . Le vecteur $T(\mathbf{r}_0, t_0)$ désigne les forces appliquées au point $\mathbf{r}_0$ au temps t_0 . Les formules exprimant le tenseur de Green $\mathbf{G}$ sont données en annexe. Elles rendent compte de la directivité des ondes longitudinales et transversales générées par des contraintes normales ou tangentielles à la surface du demi-espace. Compte tenu de certaines approximations intrinsèques à ce calcul exposées en annexe et relatives au calcul du champ $\mathbf{u}_2$, les points d'observation sont placés à quelques longueurs d'onde de la surface émettrice. Par ailleurs, la méthode présentée détermine le champ ultrasonore généré par un ensemble de sources discrètes et non par des sources de type piston, ce qui permet de rendre compte précisément de la géométrie des contraintes équivalentes créées par un EMAT.

Notons que la méthode des pinceaux autorise, au-delà d'un milieu initial où est placé l'EMAT supposé isotrope, le calcul des ondes se propageant ensuite dans des milieux anisotropes et hétérogènes.

Dans le module CIVA de simulation des contrôles par ultrasons, les interactions entre les champs et les défauts de la pièce sont modélisées, suivant les cas, à l'aide de l'approximation de Kirchhoff, de l'approximation de Born ou encore de la théorie géométrique de la diffraction ou des modèles exacts pour certaines géométries canoniques [51].

Le raccordement du module électromagnétique calculant les termes sources au module traitant de la propagation des ondes ultrasonores est effectué *via* le calcul des contraintes équivalentes données par les équations (3.34a-c). Ces équations sont valables pour le calcul des ondes de volume dans le domaine temporel. Un exemple de calcul de génération d'ondes de volume générées par un EMAT est maintenant donné. Il s'agit d'un EMAT constitué d'un circuit électrique en forme de spirale rectangulaire et d'un aimant permanent générant une aimantation normale à la surface. L'intensité de cet aimant est de 1 T, intensité mesurée au centre de la face inférieure de l'aimant. L'EMAT est représenté Figure 4.2. Les fils de la bobine possèdent une épaisseur et une largeur de 1 mm. Dans la direction x , la longueur intérieure de la bobine est de 25 mm et sa longueur extérieure est de 40 mm ; dans la direction y , sa longueur interne est de 5 mm et sa longueur externe de 18 mm. Pour sa part, l'aimant fait 52 mm de long, 30 mm de large et 20 mm de haut. L'entrefer bobine plaque est de 0.2 mm et l'aimant est superposé à la bobine. Le signal d'excitation est un signal gaussien centré à 1 MHz et d'intensité 1 A. Par ailleurs, la pièce inspectée est une plaque d'acier de 50 mm d'épaisseur et de perméabilité magnétique 50. Les différentes caractéristiques du fer sont utilisées pour définir les propriétés élastiques et électromagnétiques de cette plaque.

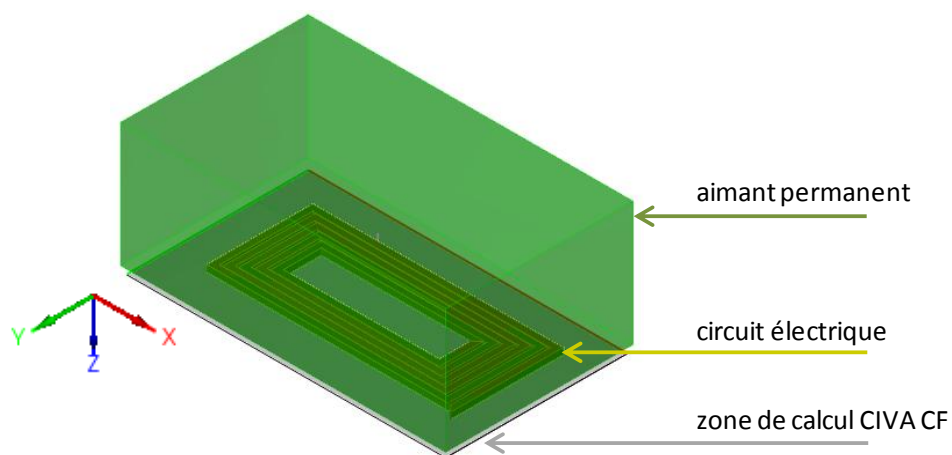


Figure 4.2. EMAT utilisé pour générer des ondes de volume dans de l'acier.

Les contraintes équivalentes calculées à la surface du matériau sont reportées sur la Figure 4.3. Elles représentent simultanément les trois forces électromagnétiques, Lorentz, aimantation et magnétostriction, induites par l'EMAT et transformées en contraintes surfaciques. Ces contraintes

équivalentes reproduisent très bien la géométrie de la bobine et sont utilisées comme données d'entrée du module de rayonnement des ondes de volume. Les parties réelles de chaque composante des contraintes équivalentes, représentées Figure 4.4, indiquent des effets d'opposition de phase très nets entre les différents groupements de fils, les valeurs imaginaires de chaque composante étant très faibles, de l'ordre de l'erreur numérique (10^{-18} dans la même norme que les parties réelles). Dans la configuration proposée, cet effet d'opposition de phase est à l'origine d'ondes transverses. Cependant, la multiplicité des conceptions d'EMATs possibles permet de contrôler ces effets dans l'espace, et donc de contrôler le type et la polarité des ondes générées.

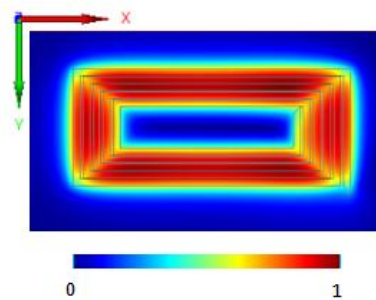


Figure 4.3. Représentation du module normalisé des contraintes équivalentes, vues de dessus, induites par l'EMAT présenté Figure 4.2.

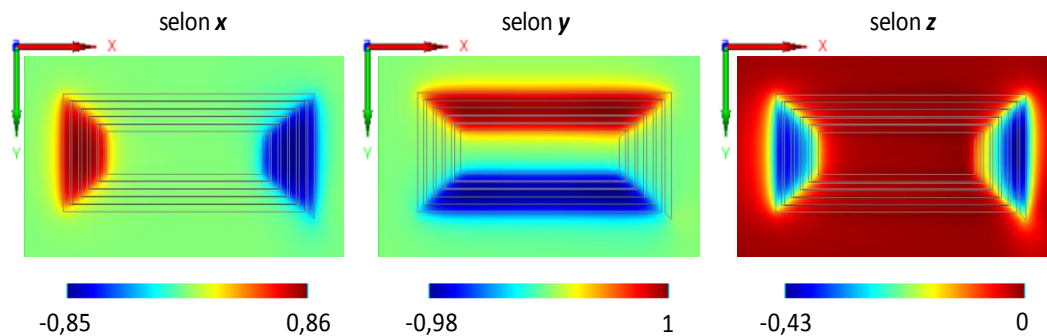


Figure 4.4. Représentation des parties réelles de chaque composante des contraintes équivalentes, normalisées et vues de dessus.

La zone de calcul des ondes de volume est plus étendue que celle des contraintes équivalentes. Cette seconde zone est représentée Figure 4.5. Elle correspond à un plan de coupe dans l'épaisseur du matériau situé au milieu d'un des deux groupements de fils dans la direction x . Dans cette direction, la zone de calcul fait 125 mm. Dans l'épaisseur, elle est de 45 mm.

L'amplitude des ondes générées par l'EMAT est déterminée par le module CIVA US. Elle est représentée de façon normalisée en trois différents temps de propagation, Figure 4.6. Les ondes longitudinales et les ondes transversales ne sont pas dissociables au début de la propagation, après 2 μ s, comme représenté Figure 4.6a. Elles le sont par la suite, à 6 μ s et 12 μ s, comme représenté

respectivement Figures 4.6b et 4.6c. L'amplitude des ondes transversales est dans ce cas plus importante que l'amplitude des ondes longitudinales.

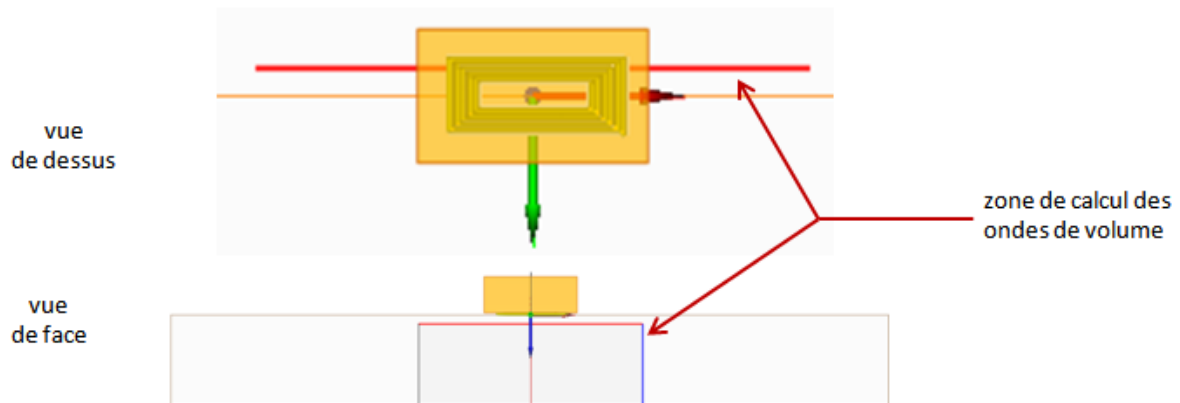


Figure 4.5. Représentation de la zone de calcul des ondes de volume, vue de dessus et vue de face.

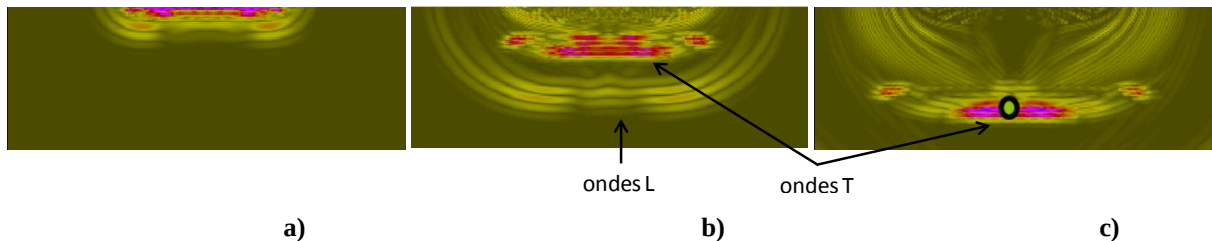


Figure 4.6. Représentation de l'amplitude du champ de déplacement généré par l'EMAT présenté Figure 4.2 pour trois différents temps de propagation des ondes : a) 2 μs, b) 6 μs et c) 12 μs. Le point de mesure du A-scan Figure 4.7 est placé au rond vert sur la troisième figure.

Le signal d'émission utilisé par le calcul de rayonnement du champ ultrasonore effectué par CIVA US est représenté Figure 4.7. Sur cette même figure, le signal temporel et son spectre au point de mesure figuré par un rond vert Figure 4.6c sont aussi représentés. Le A-scan au point de mesure indique que deux ondes sont propagées en ce point : une onde longitudinale et une onde transversale, l'amplitude de la seconde étant plus élevée que celle de la première. Le spectre fréquentiel montre qu'il y a création d'harmoniques de la fréquence d'excitation ω_0 . Même si ce phénomène reste faible dans le cas présent, il peut être significatif dans des cas de fortes intensités de courant ou de faibles intensités de champ magnétique statique.

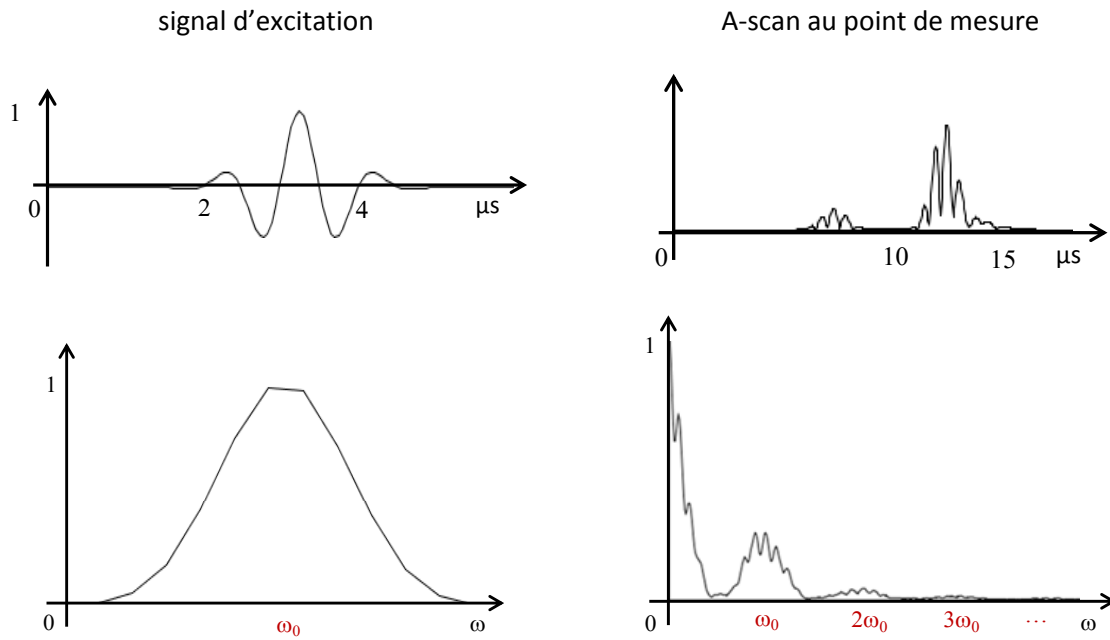


Figure 4.7. Représentations temporelle et fréquentielle du signal d'émission, et A-scan temporel (en valeur absolue) et fréquentiel relevé au point marqué par le rond vert sur la Figure 4.6c.

1.2 Modèle de rayonnement des ondes guidées

Le modèle de propagation des ondes guidées est basé sur une formulation par éléments finis semi analytiques, appelée méthode SAFE (Semi Analytical Finite Element). Cette formulation résout, sous forme modale, l'équation de propagation d'onde dans les sections droites du guide, en faisant appel aux éléments finis combinés à un terme de propagation analytique dans la direction du guide [34, 35]. Cette méthode fréquentielle présente l'avantage d'être très rapide en temps de calcul et peu coûteuse en mémoire par rapport à une solution basée uniquement sur les éléments finis. Ainsi, la connaissance du contenu fréquentiel des forces électromagnétiques est d'autant plus importante que les nombres d'ondes des ondes guidées dépendent très fortement de la fréquence. L'interaction des ondes guidées avec des défauts ou des surfaces non droites est calculée par un couplage de la méthode SAFE avec un calcul éléments finis. Les différentes zones de calcul par éléments finis et celles relatives au calcul analytique de la propagation sont connectées grâce à une méthode basée sur des frontières transparentes spécifiquement développées pour effectuer un calcul modal [35]. Ces frontières transparentes pour les ondes ultrasonores sont illustrées Figure 4.8.

Le raccordement entre les résultats des calculs des contraintes équivalentes générées par EMATs et la description de la propagation des ondes guidées par la méthode SAFE est détaillé dans la section suivante pour des cas d'application à deux dimensions.

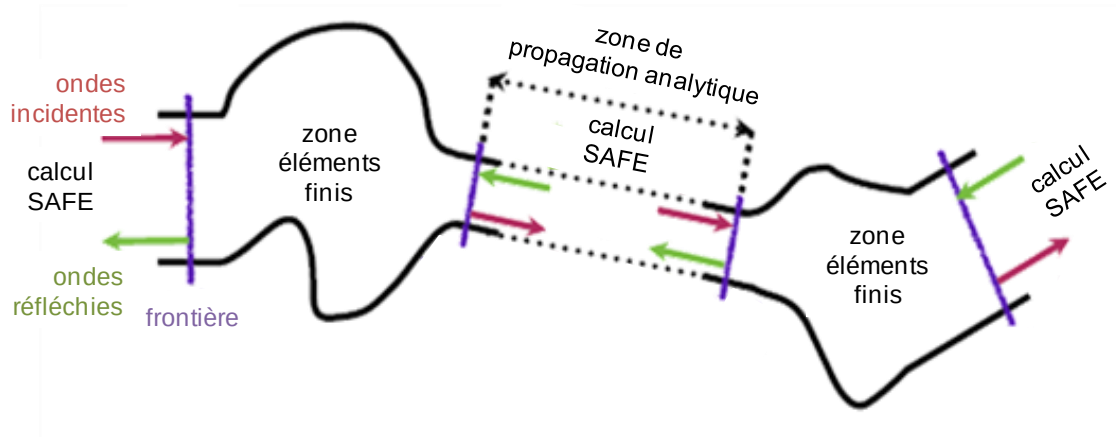


Figure 4.8. Représentation du couplage entre les zones de calcul analytique de la propagation des ondes guidées et les zones de calcul par éléments finis au moyen de différentes frontières.

2 ADAPTATION DES MODÈLES EXISTANT À LA PROPAGATION DES ONDES GUIDÉES EN DEUX DIMENSIONS

Dans cette section, le système de coordonnées est cartésien et correspond à celui utilisé pour la transformation des forces volumiques en contraintes surfaciques au cours du chapitre précédent. Ce système est représenté Figure 3.1. L'étude bidimensionnelle est menée dans le plan (x, z) , la direction y est considérée comme infinie et les dérivées selon cette direction sont nulles. De plus, l'étude s'effectue dans le domaine fréquentiel. Les calculs seront donc menés pour une pulsation spécifique, notée ω_0 .

Le champ magnétique statique dans le matériau est de direction quelconque mais uniforme. Le champ magnétique dynamique dans le matériau est exprimé analytiquement à partir d'une description en série de Fourier spatiale du champ dynamique créé par la bobine dans le milieu environnant. Les forces, et par suite leurs contraintes équivalentes, sont alors déterminées de façon analytique. De plus, les amplitudes modales des ondes guidées sont décrites à partir des contraintes équivalentes données par l'équation (3.25). Ce calcul, qui passe par l'évaluation des amplitudes modales du tenseur de Green, est présenté dans cette section. Il permet de faire le lien avec le calcul SAFE implémenté dans CIVA US pour décrire la propagation d'ondes guidées.

2.1 Calcul analytique 2D du champ d'excitation magnétique dynamique

En premier lieu, le calcul analytique du champ d'excitation dynamique $\mathbf{H}_D$ est présenté. Celui-ci s'inspire de la démarche proposée par Hirao et Ogi [16]. Le courant imposé à la bobine de l'EMAT et à l'origine de ce champ $\mathbf{H}_D$, varie harmoniquement dans le temps selon le facteur $e^{j\omega_0 t}$. Comme le doublement de fréquence concerne uniquement les forces électromagnétiques, ce facteur est omis dans les équations de cette section. De plus, le champ d'excitation dynamique vérifie les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère, équations (1.11) et (1.12), alors que les différents champs magnétiques satisfont les équations (1.1) et (1.2). Enfin, la loi d'Ohm relie la densité de courant $\mathbf{J}$ au champ électrique $\mathbf{E}$ par :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (4.3)$$

où σ est la conductivité électrique du milieu [S.m^{-1}]. Comme l'étude est bidimensionnelle dans le repère donné, la dimension considérée comme infinie des fils de la bobine est la direction y . Ainsi, le courant ne circule que selon cette direction. En introduisant la loi d'Ohm dans les équations (1.11) et (1.12), les composantes du champ d'excitation dynamique $\mathbf{H}_D$ vérifient :

$$\frac{\partial H_{D,x}}{\partial x} = \frac{\partial H_{D,z}}{\partial z}, \quad (4.4a)$$

$$H_{D,y} = 0, \quad (4.4b)$$

et :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) H_{D,x} - j\omega_0 \sigma \mu_0 \mu H_{D,x} = 0. \quad (4.4c)$$

L'égalité (4.4a) relie les deux composantes inconnues du champ $\mathbf{H}_D$. La résolution de l'équation (4.4c) permet de déterminer la composante tangentielle $H_{D,x}$. Cette équation est résolue dans le milieu ambiant, puis dans le matériau inspecté. Les exposants A et M désignent respectivement les grandeurs définies dans l'air et dans le matériau. Comme la conductivité électrique de l'air est nulle, l'équation (4.4c) devient :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) H_{D,x}^A = 0. \quad (4.5)$$

D'autre part, cette composante $H_{D,x}$ est reliée au courant circulant dans la bobine par la formulation intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\oint H_{D,x}^A = \frac{I S(x)}{a}, \quad (4.6)$$

où le contour d'intégration englobe la totalité du courant circulant dans l'EMAT, et où I désigne l'intensité du courant [A], $S(x)$ la répartition spatiale de ce courant dans la direction x et a la largeur des fils de la bobine dans cette même direction [m]. La répartition spatiale du courant $S(x)$ possède la même géométrie que la bobine de l'EMAT. Cette répartition peut être décrite par une succession de 0, de 1 et de -1 suivant l'axe x comme décrit dans [36, 52]. Les valeurs « 0 » correspondent aux positions où il n'y a pas de courant, les « 1 » représentent le courant dans le sens y et les « -1 » dans le sens inverse c'est-à-dire selon $-y$. De plus, cette répartition a une certaine étendue spatiale : la longueur d'une période de cette répartition est notée D en [m], et la largeur de la bobine est notée L en [m]. La méthode repose sur l'expression de cette répartition sous forme de la série de Fourier suivante :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[S_n^c \cos(s_n x) + S_n^s \sin(s_n x) \right], \quad (4.7)$$

où s_n représente les harmoniques de $S(x)$. Ainsi, la dérivée seconde du champ $H_{D,x}$ selon la variable x , est donnée par $-s_n^2$. L'équation (4.5) devient alors :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - s_n^2 \right) H_{D,x}^A = 0. \quad (4.8)$$

L'équation (4.6) donne la condition aux limites suivante :

$$H_{D,x}^A(x, g) = \frac{I S(x)}{2a}, \quad (4.9)$$

où g représente l'entrefer entre la pièce étudiée et l'EMAT [m]. Une solution de l'équation (4.8) qui ne diverge pas à l'infini (condition d'énergie finie) est donnée par :

$$H_{D,x}^A(x, z) = \frac{I}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x) e^{[s_n(g-z)]} \text{ pour } z \in [0, g]. \quad (4.10)$$

Puisque, d'après les équations intégrales des équations de Maxwell, il y a continuité du champ d'excitation tangent à l'interface entre deux milieux, la condition à la limite de l'équation (4.4c) pour le matériau est donnée par :

$$H_{D,x}^A(x, 0) = H_{D,x}^M(x, 0). \quad (4.11)$$

La solution de l'équation (4.4c) est alors :

$$H_{D,x}^M(x, z) = \frac{I}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x) e^{-s_n g} e^{q_n z}, \quad (4.12)$$

où :

$$q_n = \sqrt{s_n^2 + \frac{2j}{\delta^2}}, \quad (4.13)$$

avec δ l'épaisseur de peau [m]. Grâce à l'égalité (4.4a), la composante $H_{D,z}$ s'écrit :

$$H_{D,z}^M(x, z) = \frac{I}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{q_n} S_n(x) e^{-s_n g} e^{q_n z} . \quad (4.14)$$

La dépendance spatiale du champ d'excitation magnétique dynamique $\mathbf{H}_D$ selon la variable épaisseur z , est donc uniquement fonction de la géométrie de la bobine. La dépendance en x est également fonction des caractéristiques de la bobine, *via* le paramètre s_n , mais aussi de l'épaisseur de peau δ .

Trois types de géométrie de bobine ont été étudiés et implémentés dans une maquette Matlab calculant les amplitudes modales des ondes guidées générées par EMATs dans une configuration 2D. Ces trois types de bobine sont le type uniforme (le courant circule dans le même sens dans tous les fils de la bobine), le type serpentín ou meander-coil (le courant circule dans le sens opposé d'un fil à l'autre) et le type spirale (deux groupes de fils dans lesquels circule un courant de sens opposé). Ces trois sortes de bobine sont représentées Figure 4.9 en vue 2D associée à un exemple de leur répartition spatiale du courant.

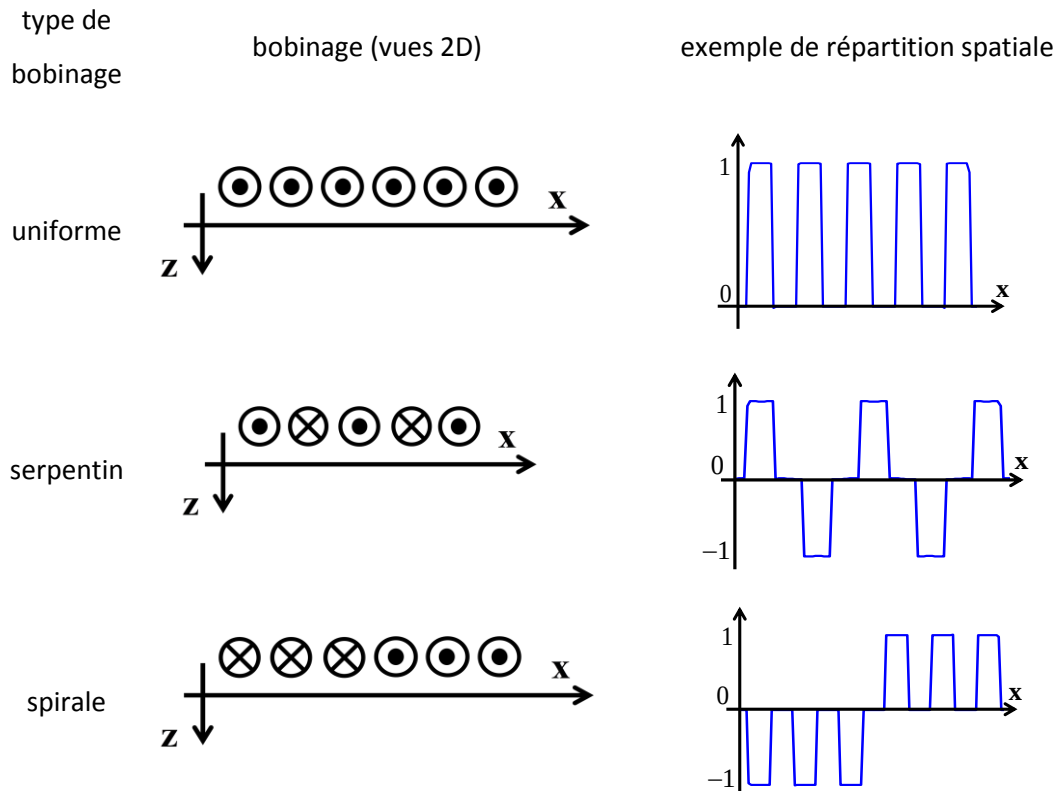


Figure 4.9. Représentation des trois types de bobine disponibles pour le calcul du champ d'excitation dynamique en deux dimensions. Vues 2D et représentations de la répartition spatiale du courant.

Le champ d'excitation dynamique $\mathbf{H}_D$ est connu analytiquement à partir des équations (4.12) et (4.14). Les forces électromagnétiques sont alors calculées en fonction de ce champ, tout comme les contraintes surfaciques équivalentes. L'étape suivante consiste à relier ces contraintes à l'amplitude modale des ondes guidées.

2.2 Ondes guidées symétriques et antisymétriques : ondes de Lamb générées dans une plaque

2.2.1 Fonctions de Green pour les ondes guidées de Lamb

L'expression du tenseur de Green utilisée dans l'évaluation des contraintes surfaciques équivalentes, équation (3.25), n'est pas explicite. Ce tenseur de Green est solution de l'équation de l'élastodynamique pour une source élémentaire située à la surface d'un demi-espace. Pour résoudre le problème de propagation dans une plaque, il est plus adapté d'utiliser une fonction de Green qui tienne compte de l'épaisseur finie de la plaque et qui sera la base de la décomposition modale de l'amplitude des ondes guidées. Le calcul de la fonction de Green est divisé en deux parties : la première porte sur l'amplitude modale associée à l'action d'une force unitaire selon l'axe $\mathbf{x}$, notée f_x , et la seconde sur l'amplitude modale associée à l'action d'une force unitaire selon $\mathbf{z}$, notée f_z . Ces deux étapes sont menées simultanément et démarrent par l'intégration sur l'épaisseur de la plaque de la relation complexe de réciprocité donnée par Auld [53].

Soit une ligne source agissant selon $\mathbf{y}$ au point (x_0, z_0) du plan de l'étude. La relation de réciprocité [53] devient, pour le tenseur de Green :

$$4 \frac{\partial}{\partial x} \sum_n A_n(x, x_0) e^{j\beta_m^* x} P_{mn} - \left[\tilde{\mathbf{v}}_m^* \boldsymbol{\sigma} e^{j\beta_m^* x} + \mathbf{v} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_m^* e^{j\beta_m^* x} \right] \cdot \mathbf{z} \Big|_{z=0}^{z=h} = 0, \quad (4.15)$$

où les amplitudes A_n des modes sont obtenues comme solution pour une ligne source, c'est-à-dire :

$$\mathbf{v}(x, x_0, z) = \sum_n A_n(x, x_0) \tilde{\mathbf{v}}_n(z), \quad (4.16a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(x, x_0, z) = \sum_n A_n(x, x_0) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n(z), \quad (4.16b)$$

et où le mode m représente un mode propagatif quelconque et β_m le nombre d'onde associé à ce mode :

$$\mathbf{v}_m(x, z) = \tilde{\mathbf{v}}_m(z) e^{-j\beta_m x}, \quad (4.17a)$$

$$\sigma_m(x, z) = \tilde{\sigma}_m(z) e^{-j\beta_m x}. \quad (4.17b)$$

Enfin le facteur P_{mm} (vecteur de Poynting) s'écrit [36, 53] :

$$P_{mm} = \frac{1}{4} \int_0^h (\tilde{v}_n^* \tilde{\sigma}_m + \tilde{v}_m \tilde{\sigma}_n^*) \cdot \mathbf{x} dz. \quad (4.18)$$

Le symbole * définit la valeur complexe conjuguée de la quantité désignée. La plaque étant d'épaisseur finie h , les conditions aux limites du problème s'expriment sous la forme :

$$\tilde{\sigma}_m(x, z=0) \cdot \mathbf{z} = \tilde{\sigma}_m(x, z=h) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad (4.19)$$

pour le mode propagatif m , et sous la forme :

$$\sigma(x, x_0, z=h) = \mathbf{0}, \quad (4.20a)$$

$$\sigma(x, x_0, z=0) = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta_D(x-x_0) \text{ pour une force } f_x, \quad (4.20b)$$

$$\sigma(x, x_0, z=0) = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta_D(x-x_0) \text{ pour une force } f_z, \quad (4.20c)$$

pour le tenseur de Green du problème. δ_D représente la fonction de Dirac. En développant l'expression (4.15) en tenant compte des conditions aux limites (4.19) et (4.20a-c), l'amplitude modale A_n vérifie les équations suivantes, pour une force f_x :

$$4 \sum_n A_n^{f_x}(x, x_0) j\beta_m^* e^{j\beta_m^* x} P_{mn} + 4 \sum_n \frac{\partial A_n^{f_x}(x, x_0)}{\partial x} e^{j\beta_m^* x} P_{mn} = \tilde{v}_{x_m}(z=0) e^{j\beta_m^* x} \delta_D(x-x_0), \quad (4.21a)$$

et, pour une force f_z :

$$4 \sum_n A_n^{f_z}(x, x_0) j\beta_m^* e^{j\beta_m^* x} P_{mn} + 4 \sum_n \frac{\partial A_n^{f_z}(x, x_0)}{\partial x} e^{j\beta_m^* x} P_{mn} = \tilde{v}_{z_m}(z=0) e^{j\beta_m^* x} \delta_D(x-x_0), \quad (4.21b)$$

où $\tilde{v}_{x_m}(z=0)$ et $\tilde{v}_{z_m}(z=0)$ sont les amplitudes de la vitesse particulaire respectivement dans les directions $\mathbf{x}$ et $\mathbf{z}$ du mode m , évaluées à la surface de la plaque, côté EMAT, et où x est la distance séparant la ligne-source du point d'observation. Seuls les modes propagatifs sont étudiés, l'amplitude des modes évanescents et inhomogènes décroissant très fortement lorsque l'on se positionne loin de la source. Ainsi, les valeurs complexes conjuguées sont égales aux valeurs réelles. De plus, la relation d'orthogonalité implique l'égalité entre m et n [53]. Ainsi, à partir des équations (4.21a) et (4.21b), les amplitudes modales recherchées vérifient respectivement les équations différentielles d'ordre un suivantes :

$$4P_{mm} \left(\frac{\partial}{\partial x} + j\beta_m \right) A_m^{f_x}(x, x_0) = \tilde{v}_{x_m}(z=0) \delta_D(x - x_0), \quad (4.22a)$$

$$4P_{mm} \left(\frac{\partial}{\partial x} + j\beta_m \right) A_m^{f_z}(x, x_0) = \tilde{v}_{z_m}(z=0) \delta_D(x - x_0). \quad (4.22b)$$

Les solutions :

$$A_m^{f_x}(x, x_0) = \frac{e^{-j\beta_m x}}{4P_{mm}} \tilde{v}_{x_m}(z=0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\beta_m \eta} \delta(\eta - x_0) d\eta = \frac{e^{-j\beta_m x}}{4P_{mm}} \tilde{v}_{x_m}(z=0) e^{j\beta_m x_0}, \quad (4.23a)$$

$$A_m^{f_z}(x, x_0) = \frac{e^{-j\beta_m x}}{4P_{mm}} \tilde{v}_{z_m}(z=0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\beta_m \eta} \delta(\eta - x_0) d\eta = \frac{e^{-j\beta_m x}}{4P_{mm}} \tilde{v}_{z_m}(z=0) e^{j\beta_m x_0}, \quad (4.23b)$$

correspondent respectivement aux amplitudes modales du $m^{\text{ième}}$ mode de Lamb pour un guide d'ondes excité par une ligne source selon y de contraintes unitaires normales (selon z) ou tangentielles (selon x). Le nombre d'onde β_m n'est pas connu mais peut être évalué grâce au code SAFE (Semi Analytical Finite Element) développé par Jezzine [34] et Baronian [35].

2.2.2 Amplitude modale des ondes de Lamb

Grâce à la décomposition modale précédente, équations (4.23a-b), le déplacement $\mathbf{u}_G$ généré par une ligne source de contrainte normale ou tangentielle sur une plaque s'écrit, selon le cas de la force f_x ou de la force f_z :

$$\mathbf{u}_G^{f_x}(x, x_0, z) = \sum_m A_m^{f_x}(x, x_0) \tilde{\mathbf{u}}_m(z) = \sum_m \frac{e^{-j\beta_m x}}{4P_{mm}} \tilde{v}_{x_m}(z=0) e^{j\beta_m x_0} \tilde{\mathbf{u}}_m(z), \quad (4.24a)$$

$$\mathbf{u}_G^{f_z}(x, x_0, z) = \sum_m A_m^{f_z}(x, x_0) \tilde{\mathbf{u}}_m(z) = \sum_m \frac{e^{-j\beta_m x}}{4P_{mm}} \tilde{v}_{z_m}(z=0) e^{j\beta_m x_0} \tilde{\mathbf{u}}_m(z). \quad (4.24b)$$

Ces solutions sont maintenant utilisées pour prédire le champ ultrasonore créé par les forces générées par EMATs. Les opérateurs (3.26a) et (3.26c) utiles à l'expression des contraintes surfaciques équivalentes, se réduisent à :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_x^{1, f_x}(\mathbf{R}_0) &= \left[M_x^{(0)} - \frac{\rho \omega^2}{2\mu_L} M_x^{(2)} - \frac{A}{2} M_x^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \right], \\ \tilde{\sigma}_z^{1, f_x}(\mathbf{R}_0) &= \left[-M_x^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_0} \right], \end{aligned} \quad (4.25a)$$

dans le cas d'une force selon x , et à :

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_x^{I, f_z}(\mathbf{R}_0) &= \left[-\frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} M_z^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_0} \right], \\ \tilde{\sigma}_z^{I, f_z}(\mathbf{R}_0) &= \left[M_z^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2(\lambda_L + 2\mu_L)} M_z^{(2)} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} M_z^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \right],\end{aligned}\quad (4.25b)$$

dans le cas d'une force selon $\mathbf{z}$.

L'équation (3.3) a été obtenue par convolution de la fonction de Green en supposant que cette dernière, solution pour un demi-espace, satisfaisait les conditions de surface libre. Or, la fonction de Green, équations (4.24a-b), développée en une série d'amplitudes modales vérifie cette condition de surface libre sur les deux surfaces de la plaque, en $z = 0$ et en $z = h$. Sur la surface où l'EMAT n'est pas appliqué, les forces volumiques sont considérées comme négligeables tant que la condition $h \gg \delta$ est respectée. Ceci est acceptable pour la gamme de fréquences et de matériaux utilisés en CND. Ainsi, la fonction de Green pour un espace semi-infini est remplacée dans la relation (3.3) par la solution pour une plaque élastique. Le champ de déplacement (3.3) correspond alors à celui des ondes guidées de Lamb car le nouveau noyau de Green a été construit pour rendre compte de l'aspect guidé de la propagation. De plus, en rappelant que le problème est bidimensionnel et que les forces créées par l'EMAT agissent seulement sur la longueur de ce dernier, entre $-L/2$ et $L/2$, les développements de l'équation (3.25) grâce aux équations (4.25a-b) donnent, dans le cas d'une force selon $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned}u_x^{\sigma_x}(x, z) &= \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_x^{I, f_x}(\mathbf{R}_0) G_{xx}(x, x_0, z) dx_0 + \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_x^{I, f_z}(\mathbf{R}_0) G_{xx}(x, x_0, z) dx_0 \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_x^{I, f_x}(\mathbf{R}_0) \mathbf{u}_G^f(x, x_0, z) \cdot \mathbf{x} dx_0 + \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_x^{I, f_z}(\mathbf{R}_0) \mathbf{u}_G^f(x, x_0, z) \cdot \mathbf{x} dx_0 \\ &= \sum_m \tilde{\mathbf{u}}_m(z) \cdot \mathbf{x} \frac{e^{-j\beta_m x}}{4P_{mm}} \tilde{v}_{x_m}(z=0) \int_{-L/2}^{L/2} \left[M_x^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2\mu_L} M_x^{(2)} - \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} M_z^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{A}{2} M_x^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \right] e^{j\beta_m x_0} dx_0 \\ &= \sum_m \tilde{\mathbf{u}}_m(z) \cdot \mathbf{x} \frac{e^{-j\beta_m x}}{4P_{mm}} \tilde{v}_{x_m}(z=0) \int_{-L/2}^{L/2} \left[M_x^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2\mu_L} M_x^{(2)} - \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} j\beta_m M_z^{(1)} + \frac{A}{2} M_x^{(2)} \beta_m^2 \right] e^{j\beta_m x_0} dx_0,\end{aligned}\quad (4.26a)$$

$$\begin{aligned}u_z^{\sigma_x}(x, z) &= \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_x^{I, f_x}(\mathbf{R}_0) G_{xz}(x, x_0, z) dx_0 + \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_x^{I, f_z}(\mathbf{R}_0) G_{xz}(x, x_0, z) dx_0 \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_x^{I, f_x}(\mathbf{R}_0) \mathbf{u}_G^f(x, x_0, z) \cdot \mathbf{z} dx_0 + \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_x^{I, f_z}(\mathbf{R}_0) \mathbf{u}_G^f(x, x_0, z) \cdot \mathbf{z} dx_0 \\ &= \sum_m \tilde{\mathbf{u}}_m(z) \cdot \mathbf{z} \frac{e^{-j\beta_m x}}{4P_{mm}} \tilde{v}_{x_m}(z=0) \int_{-L/2}^{L/2} \left[M_x^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2\mu_L} M_x^{(2)} - \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} M_z^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{A}{2} M_x^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \right] e^{j\beta_m x_0} dx_0 \\ &= \sum_m \tilde{\mathbf{u}}_m(z) \cdot \mathbf{z} \frac{e^{-j\beta_m x}}{4P_{mm}} \tilde{v}_{x_m}(z=0) \int_{-L/2}^{L/2} \left[M_x^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2\mu_L} M_x^{(2)} - \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} j\beta_m M_z^{(1)} + \frac{A}{2} M_x^{(2)} \beta_m^2 \right] e^{j\beta_m x_0} dx_0,\end{aligned}\quad (4.26b)$$

et dans le cas d'une force selon $\mathbf{z}$:

$$\begin{aligned}
u_x^{\sigma_z}(x, z) &= \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_z^{1, f_x}(\mathbf{R}_0) G_{zx}(x, x_0, z) dx_0 + \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_z^{1, f_z}(\mathbf{R}_0) G_{zx}(x, x_0, z) dx_0 \\
&= \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_z^{1, f_x}(\mathbf{R}_0) \mathbf{u}_G^f(x, x_0, z) \cdot \mathbf{x} dx_0 + \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_z^{1, f_z}(\mathbf{R}_0) \mathbf{u}_G^f(x, x_0, z) \cdot \mathbf{x} dx_0 \\
&= \sum_m \tilde{\mathbf{u}}_m(z) \cdot \mathbf{x} \frac{e^{-j\beta_m x}}{4P_{mm}} \tilde{v}_{x_m}(z=0) \int_{-L/2}^{L/2} \left[M_z^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2(\lambda_L + 2\mu_L)} M_z^{(2)} - M_x^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} M_z^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \right] e^{j\beta_m x_0} dx_0 \\
&= \sum_m \tilde{\mathbf{u}}_m(z) \cdot \mathbf{x} \frac{e^{-j\beta_m x}}{4P_{mm}} \tilde{v}_{x_m}(z=0) \int_{-L/2}^{L/2} \left[M_z^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2(\lambda_L + 2\mu_L)} M_z^{(2)} - j\beta_m M_x^{(1)} - \frac{1}{2} \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} M_z^{(2)} \beta_m^2 \right] e^{j\beta_m x_0} dx_0 ,
\end{aligned} \tag{4.27a}$$

$$\begin{aligned}
u_z^{\sigma_z}(x, z) &= \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_z^{1, f_x}(\mathbf{R}_0) G_{zz}(x, x_0, z) dx_0 + \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_z^{1, f_z}(\mathbf{R}_0) G_{zz}(x, x_0, z) dx_0 \\
&= \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_z^{1, f_x}(\mathbf{R}_0) \mathbf{u}_G^f(x, x_0, z) \cdot \mathbf{z} dx_0 + \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_z^{1, f_z}(\mathbf{R}_0) \mathbf{u}_G^f(x, x_0, z) \cdot \mathbf{z} dx_0 \\
&= \sum_m \tilde{\mathbf{u}}_m(z) \cdot \mathbf{z} \frac{e^{-j\beta_m x}}{4P_{mm}} \tilde{v}_{x_m}(z=0) \int_{-L/2}^{L/2} \left[M_z^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2(\lambda_L + 2\mu_L)} M_z^{(2)} - M_x^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} M_z^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \right] e^{j\beta_m x_0} dx_0 \\
&= \sum_m \tilde{\mathbf{u}}_m(z) \cdot \mathbf{z} \frac{e^{-j\beta_m x}}{4P_{mm}} \tilde{v}_{x_m}(z=0) \int_{-L/2}^{L/2} \left[M_z^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2(\lambda_L + 2\mu_L)} M_z^{(2)} - j\beta_m M_x^{(1)} - \frac{1}{2} \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} M_z^{(2)} \beta_m^2 \right] e^{j\beta_m x_0} dx_0 ,
\end{aligned} \tag{4.27b}$$

D'après les équations (4.24a-b), (4.26a-b) et (4.27a-b), les expressions des amplitudes modales des ondes de Lamb induites par des forces normale f_x et tangentielle f_z générées par un EMAT sont finalement dans le cas d'une force selon $\mathbf{x}$:

$$A_m^{f_x}(z) = \frac{e^{-j\beta_m z}}{4P_{mm}} \tilde{v}_{x_m}(x=0) \int_{-L/2}^{L/2} \left[M_x^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2\mu_L} M_x^{(2)} - \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} j\beta_m M_z^{(1)} + \frac{A}{2} M_x^{(2)} \beta_m^2 \right] e^{j\beta_m z_0} dz_0 , \tag{4.28a}$$

et dans le cas d'une force selon $\mathbf{z}$:

$$A_m^{f_z}(z) = \frac{e^{-j\beta_m z}}{4P_{mm}} \tilde{v}_{z_m}(x=0) \int_{-L/2}^{L/2} \left[M_z^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2(\lambda_L + 2\mu_L)} M_z^{(2)} - j\beta_m M_x^{(1)} - \frac{1}{2} \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} M_z^{(2)} \beta_m^2 \right] e^{j\beta_m z_0} dz_0 . \tag{4.28b}$$

Ces relations analytiques font à la fois apparaître les caractéristiques de l'EMAT (à travers les moments des forces $M_j^{(n)}$) et celles du matériau (à travers, également, les moments des forces et aussi à travers le nombre d'onde β_m). Par ailleurs, les expressions des amplitudes modales ne sont pas totalement analytiques car le nombre d'onde β_m est déterminé numériquement par la méthode SAFE.

Un exemple d'ondes de Lamb générées par EMATs est maintenant donné. Il s'inspire de la configuration précédemment illustrée par le calcul des ondes de volume, Figure 4.2. Il est aisé de

transformer la configuration précédente en configuration 2D. Après rotation de l'EMAT de 90° dans le plan (x, y) par rapport à l'axe z , les fils de la bobine sont considérés comme infiniment étendus dans la dimension y par rapport à leur dimension dans la direction x . Un exemple de plan de symétrie est représenté Figure 4.10. La plaque est toujours en fer mais ne fait plus que 3 mm d'épaisseur pour assurer le guidage aux fréquences considérées des ondes générées par l'EMAT. Par ailleurs, la fréquence est variable de 0.1 kHz à 3 MHz avec 301 fréquences équiréparties. Les amplitudes modales générées à chaque fréquence pour les modes symétriques et antisymétriques sont représentées respectivement Figure 4.11a. et Figure 4.11b.

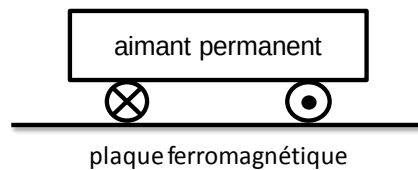


Figure 4.10. Représentation schématique de l'EMAT utilisé pour générer des ondes guidées de Lamb dans une plaque ferromagnétique.

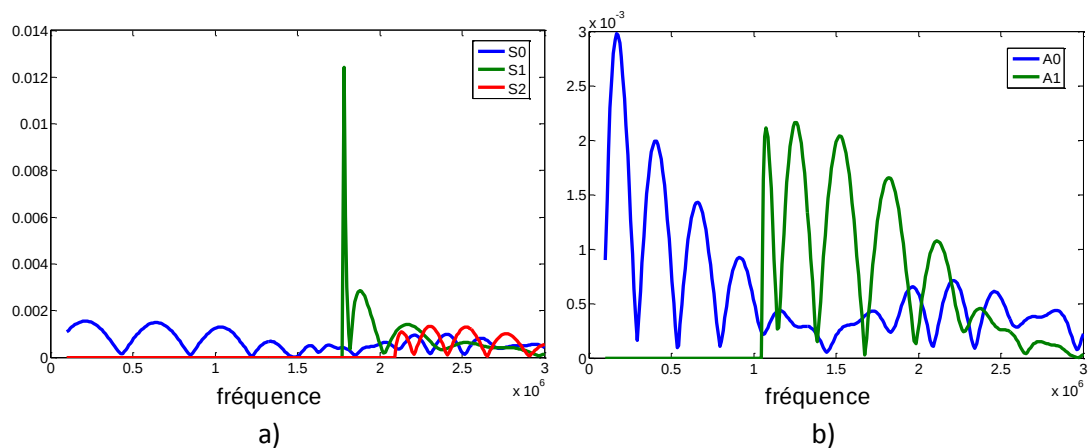


Figure 4.11. Représentation des amplitudes modales des trois premiers modes symétriques a), et des deux premiers modes antisymétriques b), pour la configuration 2D représentée Figure 4.10.

Les modes apparaissent au-delà de leur fréquence de coupure. Par ailleurs, les longueurs d'onde des différents modes varient aussi avec la fréquence. Ainsi, lorsque ces longueurs d'onde coïncident avec un multiple du motif de la bobine de l'EMAT, les amplitudes modales sont maximales.

2.3 Pour les ondes guidées transverses horizontales : ondes SH générées dans une plaque

Pour cette section, l'étude est restreinte à la génération des ondes SH, qui se propagent dans le plan $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ et sont polarisées dans la direction $\mathbf{y}$. Comme le problème est bidimensionnel, le déplacement particulaire selon $\mathbf{y}$ est généré par des forces appliquées dans cette seule direction.

2.3.1 Fonctions de Green pour les ondes guidées SH générées dans une plaque

La propagation des ondes guidées transverses horizontales est due à une source de contrainte surfacique transverse hors plan. Comme précédemment, l'amplitude modale de la fonction de Green du problème est recherchée. En considérant l'équation (4.1) avec une condition de contrainte tangentielle unitaire :

$$\boldsymbol{\sigma}(x, x_0, z = h) = \mathbf{0}, \quad (4.29a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(x, x_0, z = 0) = - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta_D(x - x_0), \quad (4.29b)$$

et en suivant la même démarche que pour le cas Lamb, l'équation différentielle à résoudre est :

$$4 \sum_n A_n^{f_y}(x, x_0) j \beta_m^* e^{j \beta_m^* x} P_{mn} + 4 \sum_n \frac{\partial A_n^{f_y}(x, x_0)}{\partial x} e^{j \beta_m^* x} P_{mn} = \tilde{v}_{y_m}^*(z = 0) e^{j \beta_m^* x} \delta_D(x - x_0), \quad (4.30)$$

à mettre en parallèle avec les équations différentielles (4.22a-b) du cas Lamb. La solution de l'équation (4.30) est donnée par :

$$A_m^{f_y}(x, x_0) = \frac{e^{-j \beta_m x}}{4 P_{mm}} \tilde{v}_{y_m}(z = 0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j \beta_m \eta} \delta(\eta - x_0) d\eta = \frac{e^{-j \beta_m x}}{4 P_{mm}} \tilde{v}_{y_m}(z = 0) e^{j \beta_m x_0}. \quad (4.31)$$

Contrairement au cas des ondes de Lamb, le nombre d'onde β_m pour les ondes SH est connu analytiquement :

$$\beta_m = \left(\frac{\rho \omega^2}{\mu_L} - \left(\frac{m}{h} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (4.32)$$

où, pour rappel, ρ est la masse volumique du milieu [kg.m^{-3}], μ_L la constante de cisaillement de Lamé [N.m^{-2}], ω la pulsation de l'onde [rad.s^{-1}] et m est l'indice du mode considéré.

2.3.2 Amplitude modale des ondes SH générées dans une plaque

En utilisant la décomposition modale précédente, équation (4.31), le déplacement généré par une ligne source de contrainte unitaire s'écrit :

$$\mathbf{u}_G^{\mathbf{f}_y}(x, x_0, z) = \sum_m A_m^{\mathbf{f}_y}(x, x_0) \tilde{\mathbf{u}}_m(z) = \sum_m \frac{e^{-j\beta_m x}}{4P_{mm}} \tilde{v}_{y_m}(z=0) e^{j\beta_m x_0} \tilde{\mathbf{u}}_m(z). \quad (4.33)$$

Par ailleurs, l'équation (3.26b) donne la contrainte équivalente à la force volumique $\mathbf{f}_y$ sous la forme de l'opérateur suivant :

$$\sigma_y^{\mathbf{I}, \mathbf{f}_y}(\mathbf{R}_0) = \left[M_y^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2\mu_L} M_y^{(2)} - \frac{1}{2} M_y^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \right]. \quad (4.34)$$

De même que pour le cas des ondes de Lamb, la fonction de Green construite ici répond non seulement à la condition à la limite de surface libre en $z = 0$ mais aussi à la condition de surface libre en $z = h$, car elle rend compte de la nature guidée de la propagation dans une plaque. Tout comme pour les ondes de Lamb, cette dernière condition est vérifiée dans la majorité des cas d'étude CND par EMATs du fait des fréquences et matériaux considérés. En reprenant l'équation (3.25) et en y introduisant les deux résultats précédents, équations (4.33) et (4.34), le déplacement selon y du champ de déplacement des ondes SH s'écrit :

$$\begin{aligned} u_y^{\mathbf{f}_y}(x, z) &= \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_y^{\text{eq}}(x_0) G_{yy}(x, x_0, z) dx_0 = \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_y^{\text{eq}}(x_0) \mathbf{u}_G^{\mathbf{f}_y}(x, x_0, z) \cdot \mathbf{y} dx_0 \\ &= \sum_m \tilde{\mathbf{u}}_m(x) \cdot \mathbf{y} \frac{e^{-j\beta_m x}}{4P_{mm}} \tilde{v}_{y(m)}(z=0) \int_{-L/2}^{L/2} \left[M_y^{(0)} - \frac{\rho\omega^2}{2\mu_L} M_y^{(2)} - \frac{1}{2} M_y^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \right] e^{j\beta_m x_0} dx_0 \\ &= \sum_m \tilde{\mathbf{u}}_m(x) \cdot \mathbf{y} \frac{e^{-j\beta_m x}}{4P_{mm}} \tilde{v}_{y(m)}(z=0) \int_{-L/2}^{L/2} \left[M_y^{(0)} - \frac{1}{2} M_y^{(2)} \left(\frac{\omega^2 \rho}{\mu_L} - \beta_m^2 \right) \right] e^{j\beta_m x_0} dx_0 \\ &= \sum_m \tilde{\mathbf{u}}_m(x) \cdot \mathbf{y} \frac{e^{-j\beta_m x}}{4P_{mm}} \tilde{v}_{y(m)}(z=0) \int_{-L/2}^{L/2} \left[M_y^{(0)} - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{h} \right)^2 M_y^{(2)} \right] e^{j\beta_m x_0} dx_0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

L'expression de l'amplitude modale des ondes SH, créées par une contrainte tangentielle hors plan, est donc :

$$A_m^{\mathbf{f}_y}(x) = \frac{e^{-j\beta_m x}}{4P_{mm}} \tilde{v}_{y(m)}(z=0) \int_{-L/2}^{L/2} \left[M_y^{(0)} - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{h} \right)^2 M_y^{(2)} \right] e^{j\beta_m x_0} dx_0. \quad (4.36)$$

Tout comme les formules (4.28a-b) du cas Lamb, l'amplitude modale (4.36) relie les caractéristiques de génération des ondes (EMAT) et les caractéristiques matériaux, aux caractéristiques de

propagation de ces ondes. Le moment de la force d'ordre un, $M_j^{(1)}$, n'intervient toujours pas dans l'expression de l'amplitude modale.

Un exemple d'amplitudes modales est aussi donné pour les ondes SH. L'EMAT représenté Figure 4.10 est réutilisé. Le champ statique dans le matériau est maintenant orienté selon l'axe y . Les amplitudes des ondes SH ainsi générées sont représentées Figure 4.12. De même que pour les ondes de Lamb, l'apparition des modes d'ordre supérieur est liée à leur fréquence de coupure et l'amplitude modale atteint des maxima lorsque la longueur d'onde coïncide avec celle du motif de la bobine du capteur.

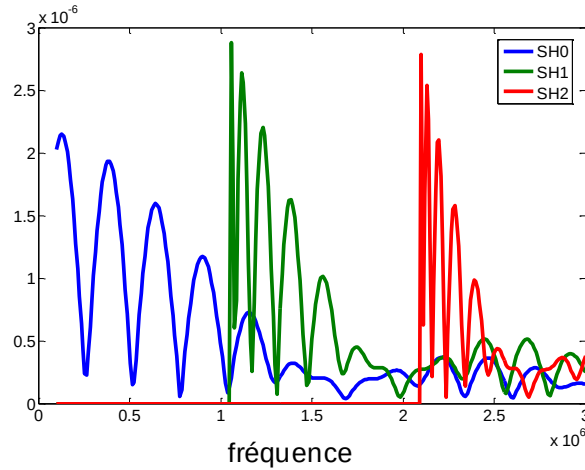


Figure 4.12. Représentation des amplitudes modales des ondes SH générées par l'EMAT représenté Figure 4.10 avec un champ statique tangent dans le matériau.

3 RÉCEPTION DES ONDES ÉLASTIQUES PAR EMATs EN MILIEU FERROMAGNÉTIQUE : APPLICATION DE LA RELATION DE RÉCIPROCITÉ

La relation de réciprocité établit le lien entre deux excitations d'un même milieu continu. Si ces deux états sont notés $^{(1)}$ et $^{(2)}$, alors la relation de réciprocité donne en un point situé hors des sources [54] :

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}^{(2)} - \mathbf{v}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}^{(1)}) \pm \nabla \cdot (\mathbf{E}^{(1)} \mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{H}^{(1)}) = 0, \quad (4.37)$$

où $\mathbf{v}$ représente le champ des vitesses [m.s^{-1}], $\boldsymbol{\sigma}$ le champ des contraintes [N.m^{-2}], $\mathbf{E}$ le champ électrique [V.m^{-1}] et $\mathbf{H}$ le champ magnétique d'excitation [A.m^{-1}]. Le signe « + » est à considérer lorsque les sources sont de nature purement électrostatique ou purement piézoélectrique ou encore un couplage des deux. Le signe « - » permet de tenir compte de sources de nature purement

électromagnétique ou purement magnétostrictive ou un encore couplage des deux. Dans le cas de l'étude, c'est donc la formulation avec le signe moins qui est à considérer.

Cette relation de réciprocité se base sur une dépendance harmonique des différentes grandeurs physiques caractérisant le matériau. Si les ondes élastiques émises à une pulsation harmonique de la pulsation d'excitation n'ont pas une amplitude négligeable par rapport à celles des ondes générées aux pulsations d'excitation, alors la relation de réciprocité ne peut pas être appliquée directement. En effet, les contenus fréquentiels des deux états considérés, état ⁽¹⁾ et état ⁽²⁾, ne sont plus identiques. Ainsi, pour pouvoir appliquer la relation (4.37) dans ce cas, deux calculs d'émission doivent être réalisés. Le premier relatif à l'état ⁽¹⁾ permet de déterminer l'ensemble du spectre fréquentiel à prendre en compte. Ensuite, sur ce nouvel ensemble de fréquences, l'émission du deuxième transducteur est calculée sans tenir compte de l'effet de création d'harmoniques. Les deux états ⁽¹⁾ et ⁽²⁾ possèdent alors le même contenu fréquentiel et la relation de réciprocité peut être appliquée. Les effets de création d'harmoniques pour la réception sont négligeables car les amplitudes des déplacements reçus sont très faibles et n'engendrent pas de phénomènes de doublement de fréquence dans les champs magnétiques qu'ils génèrent.

Par ailleurs, de nombreuses hypothèses sont validées par le fait que la génération des forces électromagnétiques est découplée de la propagation des ondes. Premièrement, du point de vue des ondes, le milieu est considéré comme non magnétostrictif car l'effet de rétroaction entre les champs magnétiques et les champs de déplacement et de contraintes n'est pas pris en compte dans la modélisation proposée. Deuxièmement, il n'y a pas de forces volumiques agissant au sein du matériau car l'effet de l'EMAT est ramené à la surface du matériau par la transformation des forces volumiques en contraintes surfaciques. Troisièmement, la relation de réciprocité (4.37) a été établie par Primakoff et Foldy [54] en supposant le système adiabatique et réversible. En effet, ils considèrent la forme, linéaire, des équations (1.9) et (1.10) reliant les grandeurs elastodynamiques (tenseurs des contraintes et des déformations) aux grandeurs magnétiques (champs d'excitation et d'induction magnétiques). La première des deux hypothèses est toujours vérifiée car le contrôle est supposé se dérouler à température constante. La deuxième hypothèse est également satisfaite car les effets de pertes ne sont pas pris en compte dans la modélisation. Enfin, toujours supposé par Primakoff et Foldy [54] pour établir l'équation (4.37), les tenseurs constitutifs du matériau doivent être symétriques. Dans le cas de la modélisation des matériaux ferromagnétiques telle qu'effectuée dans cette étude, le tenseur des rigidités est toujours symétrique. La conductivité et la perméabilité du matériau étant des scalaires, il reste à démontrer que les tenseurs $\mathbf{e}$ et $\tilde{\mathbf{e}}$ définis par les équations (1.9) et (1.10) vérifient l'égalité :

$$\tilde{e}_{iJ} = e_{Ji} . \quad (4.38)$$

Cette égalité supposée par Hirao et Ogi est vérifiée expérimentalement [16]. De plus, d'après les équations (1.9) et (1.10), les composantes des tenseurs **e** et **ẽ** sont définis par :

$$\tilde{e}_{iJ} = \frac{-\mu_0 \mu_{ij}}{\left. \frac{\partial \varepsilon_J^{MS}}{\partial H_j} \right|_{\sigma}} \quad (4.39)$$

et

$$e_{Ji} = \frac{-\mu_0 \mu_{ij}}{\left. \frac{\partial B_i}{\partial \sigma_J} \right|_{\mathbf{H}}} . \quad (4.40)$$

Finalement, la relation suivante issue de la thermodynamique pour un système réversible et adiabatique [1] :

$$\left. \frac{\partial \varepsilon_J^{MS}}{\partial H_j} \right|_{\sigma} = \left. \frac{\partial B_i}{\partial \sigma_J} \right|_{\mathbf{H}} , \quad (4.41)$$

couplée aux expressions (4.39) et (4.40) montre que l'égalité (4.38) est vérifiée.

Ainsi, toutes les hypothèses supposées par Primakoff et Foldy [54] pour établir l'équation (4.37) sur laquelle est basé le calcul des signaux reçus par un capteur récepteur dans le module CIVA US sont satisfaites. Les deux seules contraintes pour appliquer le même calcul que dans le cas d'un capteur piézoélectrique, déjà implémenté dans ce module, est qu'il faut premièrement porter une attention particulière au contenu fréquentiel des forces électromagnétiques créées par le capteur émetteur et deuxièmement modifier le signe utilisé dans l'équation (4.37).

Au cours de ce chapitre, le calcul du rayonnement des ondes de volume et des ondes guidées est réalisé grâce au module de simulation CIVA US. Un modèle de calcul rapide des amplitudes modales des ondes guidées générées dans un guide d'ondes à deux dimensions est mis en place. Pour ce modèle, les expressions des champs magnétiques générés par l'EMAT dans le matériau sont analytiques, ce qui conduit à un calcul des amplitudes modales quasi-analytique pour les ondes de Lamb et analytique pour les ondes SH. Les amplitudes modales sont ainsi directement fonctions de la géométrie de la bobine de l'EMAT et des propriétés du matériau. Finalement, des études paramétriques très rapides en temps de calcul peuvent être envisagées pour optimiser la conception de l'EMAT générant des ondes guidées. Enfin, le calcul de la réception des ondes ultrasonores par EMATs est effectué par un calcul en émission combiné à l'application de la relation de réciprocité. Les hypothèses propres à cette relation de réciprocité en milieu ferromagnétique sont discutées par rapport à l'ensemble de la modélisation proposée.

5

VALIDATION EXPÉRIMENTALE DES HYPOTHÈSES MAGNÉTIQUES ET ÉTUDE PARAMÉTRIQUE

Pour étudier la validité des hypothèses des modèles mis en place précédemment, des essais expérimentaux ont été pris en charge par le CETIM et réalisés par le LMT-Cachan. Ces derniers permettent de collecter des données sur les cycles d'hystérésis et d'anhystérétiques magnétiques et magnétostrictifs de plusieurs matériaux industriels.

Dans un premier temps, les expériences réalisées par le LMT-Cachan sont présentées. Le procédé expérimental est exposé. Les différentes données récoltées, cycle d'hystérésis, courbe de première aimantation et courbe d'anhystérésis, sont mises en valeur les unes par rapport aux autres à travers la nature des mesures (hystérétique ou anhystérétique) et la comparaison entre les différents matériaux. La valeur de la perméabilité magnétique à choisir comme donnée d'entrée est discutée. L'hypothèse d'isotropie magnétostrictive est vérifiée pour ces multiples matériaux ferromagnétiques industriels. Dans un second temps les résultats de la caractérisation des matériaux obtenus par le LMT-Cachan constituent les données d'entrée de simulations. Celles-ci consistent à comparer les champs ultrasonores générés par un même EMAT dans deux matériaux, avec des intensités de courant et de champ statique variables.

Sommaire

1	VALIDATION DES HYPOTHÈSES MAGNÉTIQUES AVANCÉES POUR MODÉLISER LES CHAMPS ET FORCES ÉLECTROMAGNÉTIQUES	124
1.1	Champ induit.....	126
1.2	Perméabilités magnétiques statique et incrémentale, de première aimantation et d'anhystrésis	128
1.3	Structure cristallographique des matériaux ferromagnétiques	130
1.4	Isotropie magnétostrictive.....	135
2	ÉTUDE PARAMÉTRIQUE	142
2.1	Configuration étudiée	142
2.2	Génération d'ondes de volume pour un champ d'induction magnétique statique fort et un champ d'excitation magnétique dynamique faible	143
2.3	Génération de volume pour un champ d'induction magnétique statique et un champ d'excitation magnétique dynamique moyens	147
2.4	Génération d'ondes de volume par magnétostriction	148

1 VALIDATION DES HYPOTHÈSES MAGNÉTIQUES AVANCÉES POUR MODÉLISER LES CHAMPS ET FORCES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Les essais de caractérisation des matériaux menés au LMT-Cachant dans le cadre de la collaboration avec le CETIM, permettent de décrire le comportement magnétique et de quantifier l'anisotropie magnétostrictive des aciers industriels suivants :

- alliage fer-cobalt AFK502R, nommé par la suite FeCo et contenant 49 % de fer (en masse), 49 % de cobalt et 2 % de vanadium,
- alliage fer-silicium, nommé FeSi et contenant 3 % de silicium,
- acier ferritique 42CD4T, nommé ferrite et contenant environ 0,4 % de carbone (1 % de chrome, 0,2 % de molybdène, 0,75 % de magnésium et 0,4 % de silicium maximum),
- acier inoxydable Z20C13, nommé inox et contenant 12 % de chrome (et environ 0,2 % de carbone),
- fer pur, nommé Fe,
- nickel pur, nommé Ni.

Ces essais de caractérisation sont effectués sur des éprouvettes en forme d'anneau de diamètre externe 70 mm et de diamètre interne 50 mm. L'épaisseur de l'éprouvette dépend du matériau. Elle est de 0,5 mm pour les échantillons FeCo, FeSi et Ni et de 2 mm pour les échantillons Fe, ferrite et inox. Une des éprouvettes utilisées est représentée Figure 5.1.

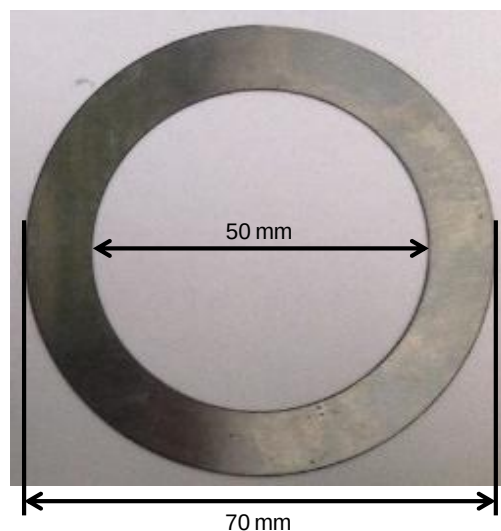


Figure 5.1. Photographie d'une éprouvette utilisée par le LMT-Cachan au cours de ces essais de caractérisation des matériaux.

1.1 Champ induit

Les mesures de champs d'induction magnétique sont effectuées pour les six matériaux définis précédemment. Pour chaque échantillon, des bobinages primaire et secondaire sont réalisés. Ces bobinages sont représentés sur la photographie Figure 5.2. Les deux circuits (primaire et secondaire) sont parfaitement isolés et ne possèdent pas le même nombre de spires. La fréquence du signal envoyé au circuit primaire est de 2 Hz. Les mesures anhystérétiques ne dépendent pas de la fréquence car par définition elles sont relevées pour un état d'équilibre parfait du matériau. Au contraire, les mesures d'hystérésis dépendent de la fréquence [56, 57]. Comme celles-ci sont effectuées en quasi-statique, l'effet de la fréquence ne peut être quantifié dans ces expériences. Ce manque d'information constitue donc un premier point à prendre en compte dans l'interprétation et l'utilisation des données expérimentales hystérétiques. Par ailleurs, chaque bobinage réalisé correspond à celui d'un transformateur électrique. Ainsi, du point de vue du matériau, le circuit primaire applique un champ d'excitation magnétique $\mathbf{H}$ et le circuit secondaire relève le champ d'induction magnétique $\mathbf{B}$. De plus, le contenu fréquentiel du courant relevé par le circuit secondaire est le même que celui délivré au circuit primaire sachant que les amplitudes en tension et en courant sont modifiées par le matériau entre ces deux circuits.



Figure 5.2. Bobinages primaire et secondaire des échantillons de matériaux ferromagnétiques en vue de leur caractérisation magnétique.

Un cycle d'hystérésis ainsi que la courbe d'anhystérésis ont été relevés pour chacun des six matériaux étudiés. Les cycles sont représentés en bleu et les courbes d'anhystérésis en rouge, Figure 5.3. Pour toutes ces courbes, le champ d'excitation magnétique varie de $-8\,000$ à $8\,000\text{ A.m}^{-1}$. La mesure du champ d'induction magnétique est exprimée en T. Par comparaison des cycles d'hystérésis et des courbes d'anhystérésis, la courbe d'anhystérésis pour chaque matériau représente le comportement magnétique moyen du matériau. Cependant, elle ne représente pas le comportement du matériau en condition de contrôle industriel. En effet, pour accéder au comportement anhystérétique du

matériau, un traitement point par point devrait être effectué avec une intensité de champ d'excitation statique différente suivant le point considéré. Or, en contrôle industriel, une seule intensité de champ statique est utilisée car les aimants des EMATs sont des aimants permanents et non des électro-aimants. Le processus d'aimantation lors d'un contrôle suit donc une autre courbe qui est la courbe de première aimantation. Celle-ci est représentée en bleu sur la Figure 5.3. Elle démarre le cycle d'hystérésis en reliant le point d'aimantation nulle, état désaimanté, au premier point de rebroussement du cycle d'hystérésis. En pratique, le champ d'induction magnétique varie selon cette courbe car, d'une part, le traitement particulier pour obtenir un point de fonctionnement de la courbe d'anhystrésis ne peut être appliqué et, d'autre part, le matériau est généralement à l'état désaimanté lorsqu'il est inspecté. Or, la modélisation de la courbe de première aimantation n'est pas effectuée dans le module de simulation CIVA CF. Une seule donnée d'entrée est utilisée par ce module pour décrire le comportement magnétique des matériaux ferromagnétiques : la perméabilité magnétique. Aux vues des variations avec le champ d'excitation des courbes d'hystérésis et d'anhystrésis des différents matériaux, une seule valeur de perméabilité ne rend pas compte du comportement total de ces matériaux. Cependant, l'étude des différentes perméabilités extraites des courbes Figure 5.3 aide au choix d'une valeur cohérente avec les amplitudes de champs d'excitation statique et dynamique utilisées lors du contrôle à simuler.

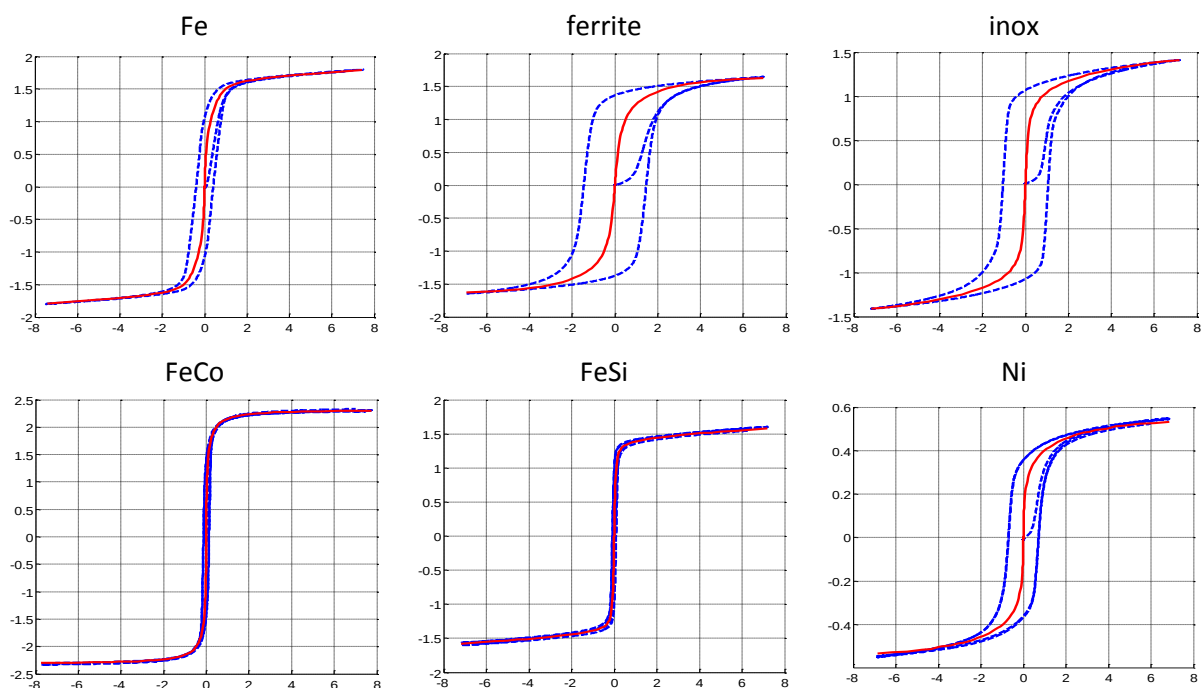


Figure 5.3. Représentation d'un cycle d'hystérésis, en bleu pointillé, et de la courbe d'anhystrésis, en rouge continue, des différents matériaux étudiés ; l'axe des ordonnées représentant le champ d'excitation magnétique [10^3 A.m^{-1}] et l'axe des abscisses représentant le champ d'induction magnétique [T].

1.2 Perméabilités magnétiques statique et incrémentale, de première aimantation et d'anhystrérésis

Des courbes d'hystérésis et d'anhystrérésis mesurées, deux types de perméabilité magnétique sont évalués. La première est la perméabilité magnétique statique :

$$\mu_s = \frac{B}{\mu_0 H}, \quad (5.1)$$

et la deuxième est la perméabilité magnétique incrémentale :

$$\mu_i = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial H}. \quad (5.2)$$

La perméabilité statique μ_s correspond donc, en tout point, à la perméabilité relative définie par l'équation (1.2) qui établit la relation entre l'intensité du champ d'excitation H mesurée et l'intensité du champ d'induction B , elle aussi mesurée. La perméabilité incrémentale μ_i correspond à la pente de la courbe $B(H)$ considérée. Ces deux perméabilités ont leur utilisation propre, notamment pour définir la perméabilité relative à utiliser dans la direction du champ d'excitation statique H_s lorsque celui-ci est beaucoup plus intense que le champ d'excitation dynamique H_d [19]. En effet, dans ce cas, la perméabilité statique est considérée lorsque les deux champs d'excitation sont appliqués dans des directions perpendiculaires car alors, en première approximation, l'intensité du champ d'excitation statique ne varie pas selon sa direction d'application. Lorsque ces deux champs sont colinéaires, la perméabilité incrémentale est considérée car l'amplitude du champ d'excitation varie et alors, en première approximation, le point de fonctionnement du matériau se déplace suivant la pente de la courbe $B(H)$ par rapport au point de fonctionnement fixé par le champ d'excitation statique seul.

Les perméabilités magnétiques (5.1) et (5.2) sont représentées Figure 5.4 pour chacun des six matériaux étudiés. Elles sont à la fois évaluées par rapport à la courbe de première aimantation, couleur bleue, et par rapport à la courbe d'anhystrérésis, couleur rouge. Les perméabilités statique et incrémentale sont représentées respectivement par les courbes continues et par les marqueurs +. D'après la Figure 5.4, quelle que soit la courbe utilisée pour les évaluer, les deux types de perméabilités possèdent des valeurs similaires lorsque le comportement du matériau se rapproche de la saturation. Pour de faibles valeurs du champ d'excitation, moins de 10 A.m^{-1} , les deux perméabilités évaluées à partir de la courbe d'anhystrérésis sont équivalentes, en rouge. Puis une nette séparation s'effectue lorsque le champ d'excitation augmente. Les perméabilités magnétiques

statique et incrémentale évaluées à partir des courbes de première aimantation révèlent un comportement beaucoup plus chaotique.

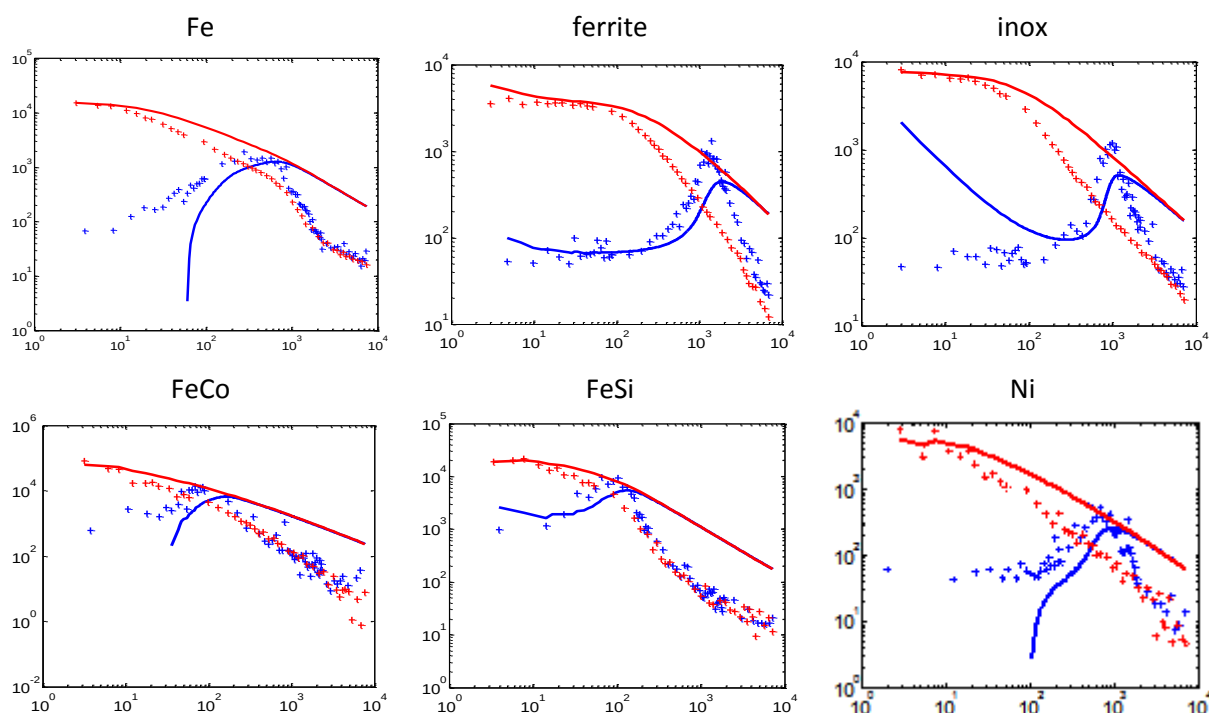


Figure 5.4. Représentation en échelles logarithmiques des perméabilités magnétiques (5.1) et (5.2) [-] en fonction du champ d'excitation magnétique imposé H [$A.m^{-1}$] ; les courbes en trait continu donnent la perméabilité statique μ_s et les marqueurs + donnent la perméabilité incrémentale μ_i ; les couleurs bleue et rouge indiquent respectivement les perméabilités magnétiques évaluées grâce aux courbes de première aimantation et aux courbes d'anhystérésis.

Finalement, les différents comportements observés soulignent l'importance de pouvoir prendre en compte dans la modélisation une perméabilité magnétique tensorielle variant en fonction du champ d'excitation et de la position du point de calcul. Cependant, la modélisation réalisée dans le module CIVA CF pour calculer les champs induits par un EMAT dans un matériau ferromagnétique ne prend pas en compte une perméabilité magnétique tensorielle. Elle ne tient pas non plus compte des différentes valeurs que peut prendre cette perméabilité. Pour effectuer le moins d'erreur et d'approximation possible, la perméabilité statique issue de la courbe de première aimantation est utilisée pour relier le champ d'excitation statique au champ d'induction statique. Cette perméabilité présente l'intérêt de représenter le comportement du matériau au cours d'un contrôle. Cependant, ses grandes variations ne rendent pas compte des changements d'état d'aimantation du matériau lorsqu'un champ d'excitation dynamique de forte amplitude est superposé au champ d'excitation statique.

1.3 Structure cristallographique des matériaux ferromagnétiques

La structure cristalline de trois échantillons, FeCo, FeSi et Ni, est maintenant définie. Si le comportement magnétique des matériaux ferromagnétiques est isotrope, il n'en est pas nécessairement de même pour leur comportement élastique. En effet, la structuration en domaines de Weiss, à la base du comportement magnétique, et la structure cristallographique, à la base du comportement élastique, des matériaux ferromagnétiques sont deux identités distinctes. L'étude suivante consiste à quantifier l'isotropie ou anisotropie des échantillons présentés et utilisés précédemment. Pour cela des mesures EBSD (Electron BackScatter Diffraction) à l'aide d'un microscope à balayage électronique conduisent à la mesure de l'orientation cristallographique en des points de mesure situés à la surface du matériau [58]. Un soin particulier est donc apporté à la préparation de cette surface. La résolution spatiale de telles mesures est de quelques dizaines à quelques centaines de nanomètres. Si la mesure d'orientation cristallographique est effectuée dans une large zone, comparée à la taille des grains, et si une couleur est affectée à chaque orientation alors la mesure par EBSD permet non seulement de distinguer les différents grains cristallographiques mais elle permet aussi de réaliser des images d'orientations cristallographiques. De plus, à partir de l'identification des orientations cristallographiques de chaque grain, des figures de pôles directes et inverses peuvent être réalisées pour quantifier ces orientations.

Des résultats des mesures par EBSD sont représentés Figure 5.5 pour les trois échantillons FeCo, FeSi et Ni. Deux échelles de représentation sont utilisées pour l'échantillon FeCo : 300 μm et 90 μm . L'échelle pour les deux autres échantillons est de 100 μm . Les différentes couleurs ne renseignent pas sur l'orientation cristallographique des différents grains. Elles servent seulement à différencier ces grains. Ceux-ci sont de tailles très variées au sein d'un même échantillon comme le montrent très bien les deux cartographies de l'échantillon FeCo, Figures 5.5a. et 5.5b. Des grains de 300 μm de longueur coexistent avec des grains de taille beaucoup plus petite, d'environ 5 μm . La même disparité est mise en évidence Figure 5.5d pour l'échantillon de Ni, même si les grains les plus volumineux sont moins nombreux avec une taille plus faible d'environ 100 μm . Cette disparité de taille est moins évidente pour l'échantillon FeSi où presque tous les grains ont une taille représentative variant entre 50 μm et 100 μm environ, Figure 5.5c. Ces cartographies sont ensuite utilisées pour qualifier la structure cristallographique des différents échantillons.

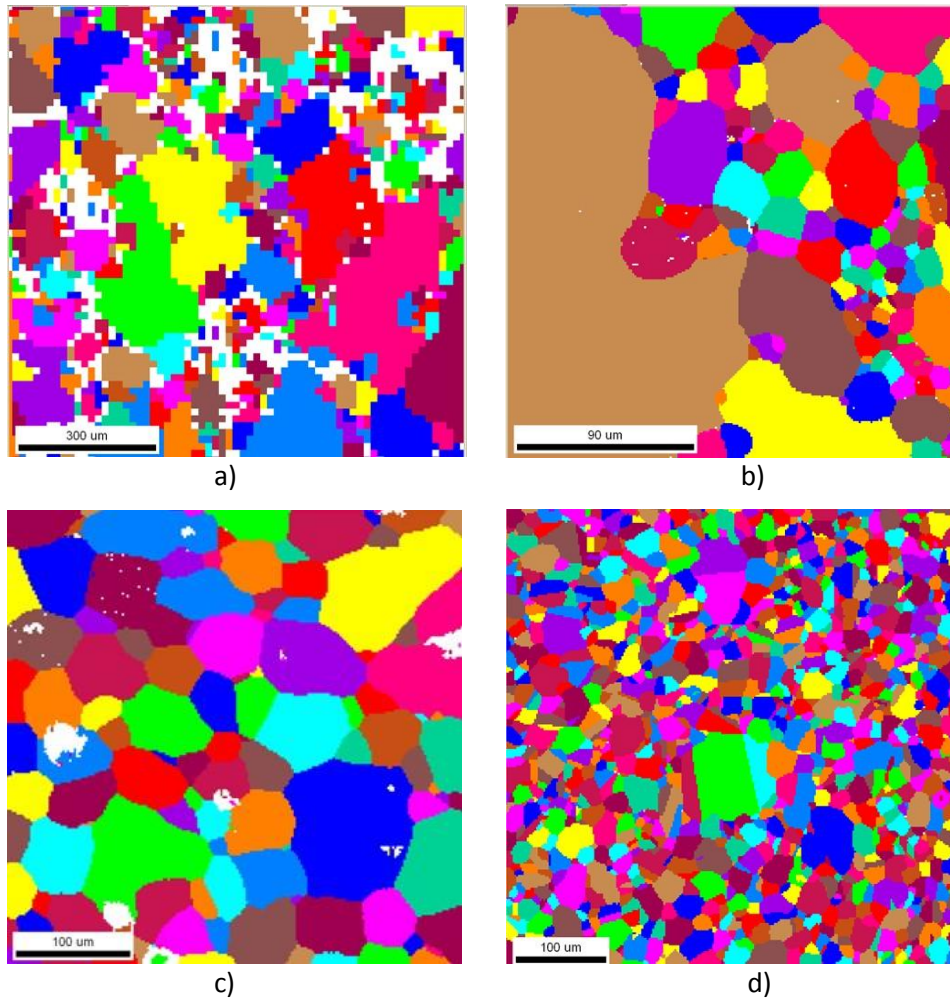


Figure 5.5. Représentation des grains cristallographiques des échantillons étudiés :

a) et b) FeCo avec respectivement une échelle de 300 μm et de 90 μm ,

c) et d) respectivement FeSi et Ni avec une échelle de 100 μm .

Deux repères distincts sont utilisés pour décrire les orientations cristallographiques. Le premier est lié à l'échantillon étudié et le second varie selon le cristal étudié. Ces deux repères sont représentés Figure 5.6. Le repère lié à l'échantillon est noté (DL, DT, DN) et est lié au coin haut gauche de l'image des grains fournie par EBSD, Figure 5.5. Les initiales nommant les différentes directions de ce repère font respectivement référence aux Directions de Laminage, Transverse et Normale. La Direction Transverse se situe dans le plan de l'échantillon et la Direction Normale désigne la normale à ce plan. Le second repère, Figure 5.6b, est défini en notations cristallographiques par ([100], [010], [001]). Tous les échantillons examinés présentent une structure cristallographique cubique. Les mêmes notations sont alors utilisées quel que soit le matériau étudié.

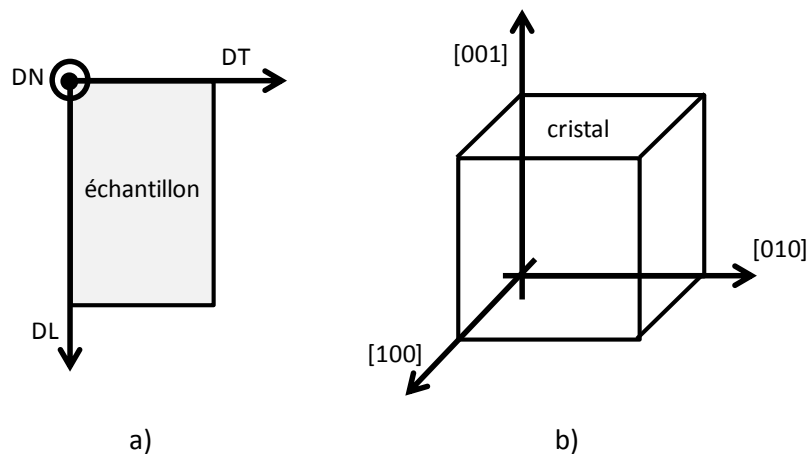


Figure 5.6. Représentation des deux repères utilisés pour étudier l'orientation cristallographique des grains mis en évidence par les mesures EBSD :

a) repère lié à l'échantillon étudié et b) repère lié au cristal en cours d'auscultation.

Grâce à l'orientation relative des cristaux par rapport au repère de l'échantillon, différentes figures de pôles sont réalisées. Il s'agit de figures de pôles directes relatives à la famille de directions cristallographiques $\langle 100 \rangle$ et de figures de pôles inverses relatives à la direction $[001]$. Une figure de pôle directe résulte d'une projection stéréographique sur le plan de l'échantillon [58]. Dans le cas présenté, cette projection concerne les normales aux plans de la famille $\{100\}$. La même projection est réalisée pour un cristal représentatif de l'orientation de chaque grain. Ainsi, la figure de pôle directe regroupe sur un même plan, le plan de l'échantillon et toutes les orientations cristallographiques de tous les grains. Une figure de pôle indirecte représente la position d'une direction donnée de l'échantillon, dans le repère du cristal. La direction choisie est la direction $[DN]$ de l'échantillon. Elle est représentée sur la figure de pôle indirecte par un point à l'endroit où elle coupe le plan de l'échantillon formés des trois points $(0,0,1)$, $(1,0,1)$ et $(1,1,1)$. Les figures de pôles directes sont représentées Figure 5.7 et les figures de pôles indirectes sont représentées Figure 5.8.

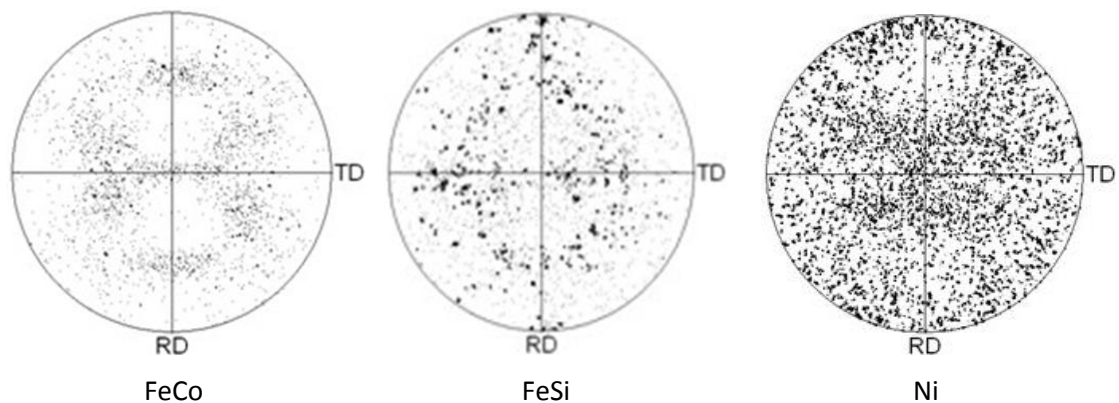


Figure 5.7. Représentation des figures de pôles directes $\langle 100 \rangle$ des trois échantillons par rapport aux images EBSD Figure 5.5.

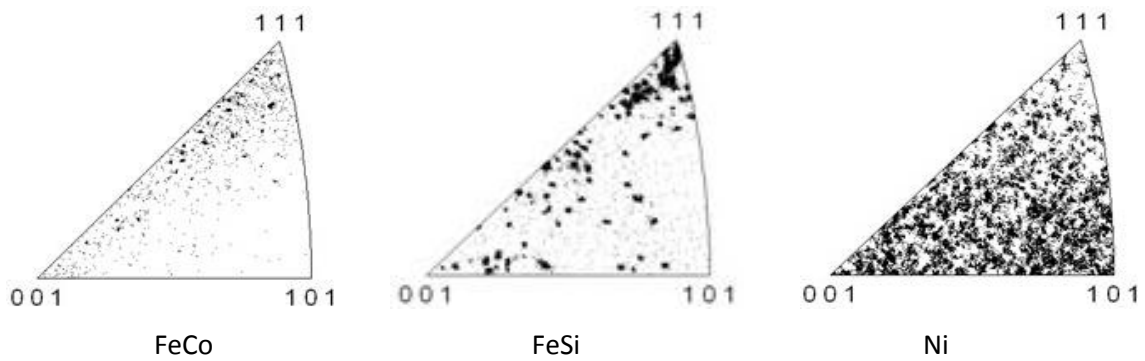


Figure 5.8. Représentation des figures de pôles indirectes [001] des trois échantillons déduites des images EBSD Figure 5.5.

Grâce à ces différentes figures de pôle, les orientations privilégiées des grains cristallographiques de chaque échantillon sont déterminées. En effet, les figures de pôles directes, Figure 5.7, indiquent un comportement isotrope des trois matériaux dans le plan des échantillons car les répartitions des projections stéréographiques sont uniformes. Cependant, les répartitions de la direction [DN] dans les différents grains ne sont pas uniformes pour les échantillons FeCo et FeSi comme représenté par les Figures 5.8a et 5.8b. Cette répartition est cependant uniforme pour le troisième échantillon, Ni, Figure 5.8c. Ainsi, les échantillons FeCo et FeSi possèdent un comportement isotrope dans le plan de laminage mais présentent une forte anisotropie suivant l'axe [111]. L'échantillon Ni est quant à lui isotrope.

Ces conclusions sont plus marquées lorsque la figure de pôle inverse est affectée d'un code couleur où les différentes couleurs ainsi définies sont reportées aux grains correspondant sur les cartographies cristallographiques, Figure 5.5. La définition du code couleur utilisé est représentée Figure 5.9. Les secondes cartographies cristallographiques ainsi obtenues sont représentées Figure 5.10. La dominante des couleurs violettes et bleutées dans les représentations des échantillons FeCo et FeSi, Figures 5.10a-c, confirme l'hypothèse anisotrope dans la direction [111] des orientations cristallographiques de ces deux matériaux. Au contraire, la cartographie de l'échantillon Ni, Figure 5.10d, apparaît bigarrée et indique un comportement élastique isotrope.

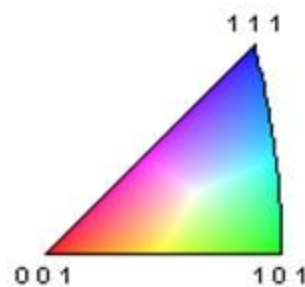


Figure 5.9. Représentation du code couleur utilisé pour cartographier les différentes orientations des grains cristallographiques relevées par EBSD.

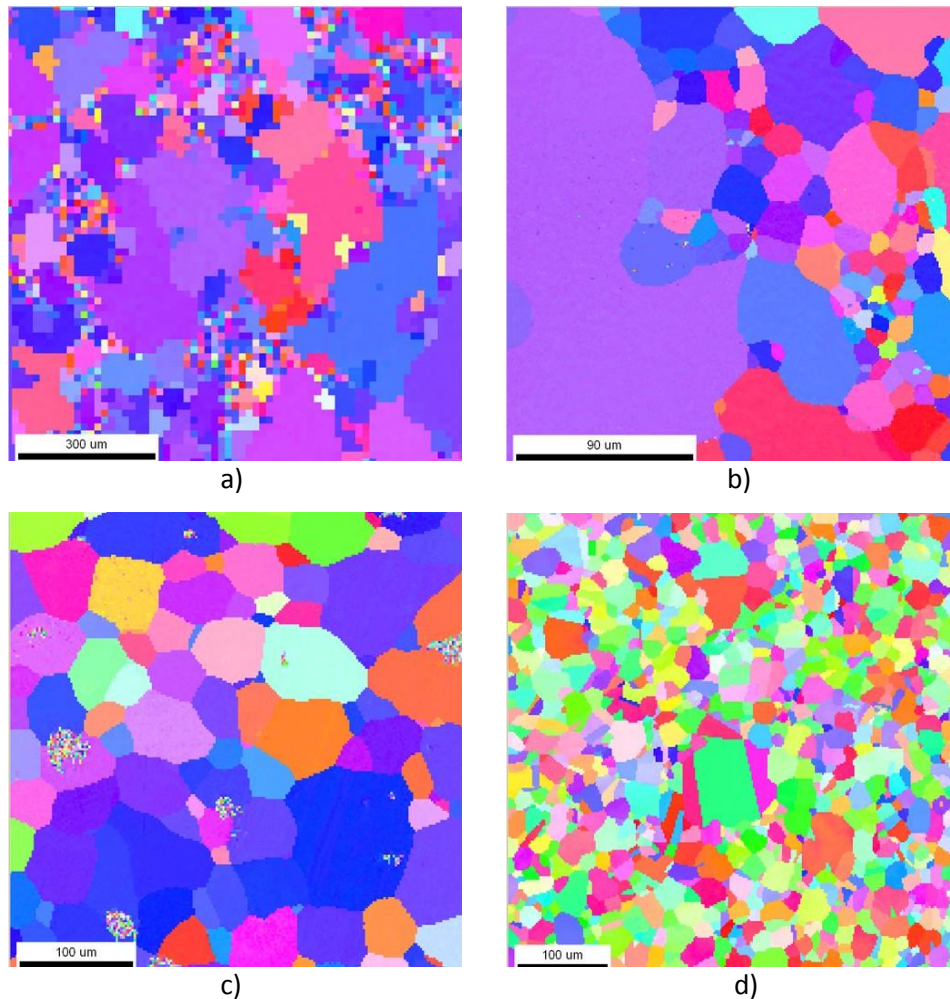


Figure 5.10. Représentation des grains cristallographiques cartographiés grâce au code couleur défini

**Figure 5.9 : a) et b) FeCo avec respectivement une échelle de 300 μm et de 90 μm ,
c) et d) respectivement FeSi et Ni avec une échelle de 100 μm .**

Ces conclusions sont utiles pour le calcul de la force de magnétostriction ainsi que pour le calcul du rayonnement des ondes élastiques, car ces quantités dépendent de la structure cristallographique des matériaux et notamment de la matrice des rigidités $\mathbf{C}$. Les trois échantillons Fe, ferrite et inox ont été usinés comme les échantillons FeCo et FeSi. Ces trois échantillons sont supposés présenter la même structure cristallographique à savoir une isotropie dans le plan de l'échantillon et une anisotropie suivant la direction [111]. La comparaison entre les courbes de magnétostriction relevées selon deux directions perpendiculaires du plan de laminage des échantillons confirmera ou non l'isotropie élastique de ces échantillons dans le plan de laminage. Les différentes mesures et études nécessaires à cette vérification sont menées dans la section suivante.

1.4 Isotropie magnétostrictive

Si la déformation de magnétostriction perpendiculaire au champ d'excitation magnétique, champ appliqué dans le plan de laminage, est égale à l'opposée de la moitié de la déformation de magnétostriction relevée dans la direction du champ d'excitation, alors l'hypothèse d'isotropie de magnétostriction sera vérifiée [1, 16].

Pour évaluer les déformations de magnétostriction, quatre jauges de déformation sont utilisées. Deux jauges servent à la mesure de la déformation de magnétostriction selon la direction du champ d'excitation magnétique imposé au matériau. Les deux autres jauges conduisent à la déformation de magnétostriction selon la direction perpendiculaire à ce champ et dans le plan de l'échantillon. Ces deux mesures sont appelées respectivement déformation de magnétostriction parallèle notée $\varepsilon_{//}^{MS}$ et déformation de magnétostriction perpendiculaire notée $\varepsilon_{\perp}^{MS}$. Les mesures de ces déformations ont été effectuées au cours des cycles d'hystérésis et d'anhystérésis de tous les échantillons. Elles sont représentées Figure 5.11 pour la déformation $\varepsilon_{//}^{MS}$ et Figure 5.12 pour $\varepsilon_{\perp}^{MS}$. L'échelle du champ d'excitation magnétique varie, comme pour les mesures précédentes, de $-8\,000$ à $8\,000\text{ A.m}^{-1}$. Pour les deux figures, les courbes de déformation anhystérétique sont représentées en traits continus rouges tandis que les déformations hystérétiques sont en pointillés bleus. Tout comme pour les cycles d'hystérésis, Figure 5.3, les courbes d'anhystérésis décrivent un comportement moyen même si les différences entre les deux états du matériau sont plus prononcées pour les courbes de déformation de magnétostriction. Il est intéressant de remarquer que les courbes d'anhystérésis, aussi bien pour $\varepsilon_{//}^{MS}$ que pour $\varepsilon_{\perp}^{MS}$, sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

L'hypothèse d'isotropie magnétostrictive effectuée pour mener le calcul de la force de magnétostriction, et qui conduit à l'équation (2.5), est maintenant validée grâce à ces données expérimentales. En effet, selon cette hypothèse l'égalité :

$$\varepsilon_{\perp}^{MS} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{//}^{MS}, \quad (5.3)$$

est vérifiée quelle que soit la direction d'application du champ d'excitation magnétique et quel que soit le point étudié. Comme les matériaux étudiés sont élastiquement isotropes dans le plan des échantillons (DL,DT) Figure 5.6a, l'égalité (5.3) est à valider en un seul point pour pouvoir l'appliquer quelle que soit l'orientation du champ d'excitation magnétique et en tout point du matériau.

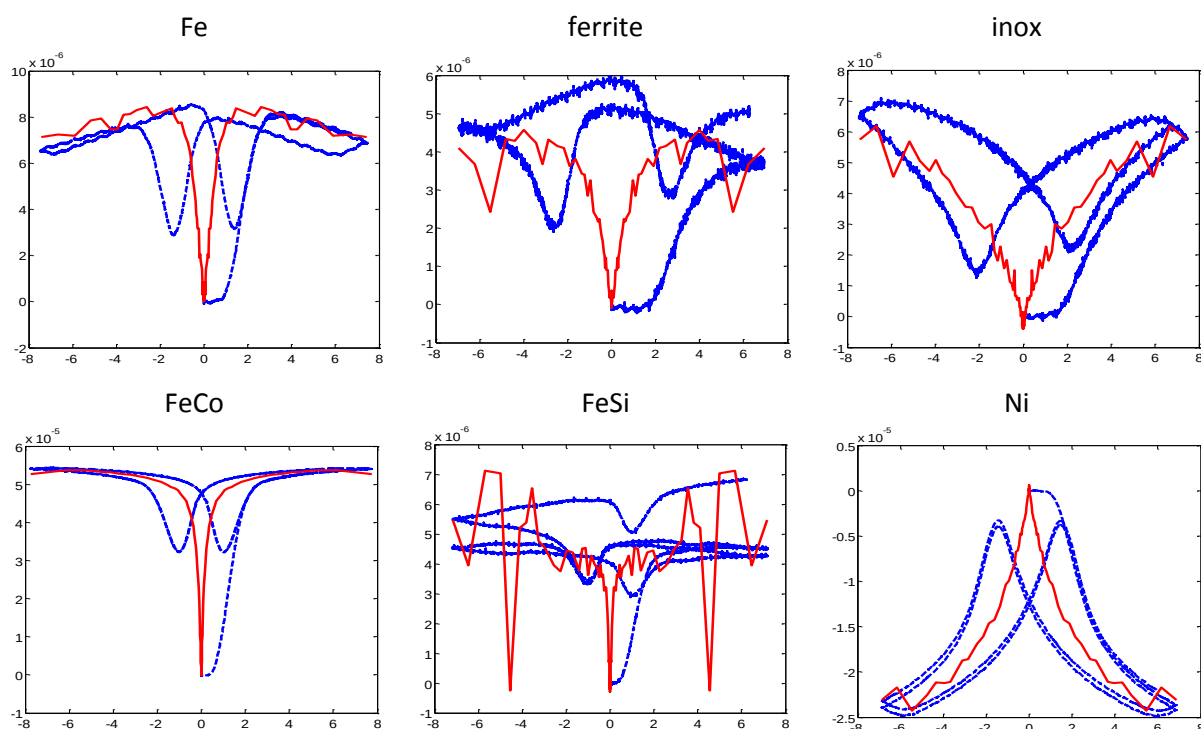


Figure 5.11. Représentation des déformations de magnétostriction parallèles $\varepsilon_{//}^{MS}$ [-] en fonction du champ d'excitation magnétique [10^3 A.m^{-1}] pour, en traits continus rouges, la déformation évaluée au cours du cycle d'anhystrésis et, en pointillés bleus, la déformation évaluée au cours du cycle d'hystérésis.

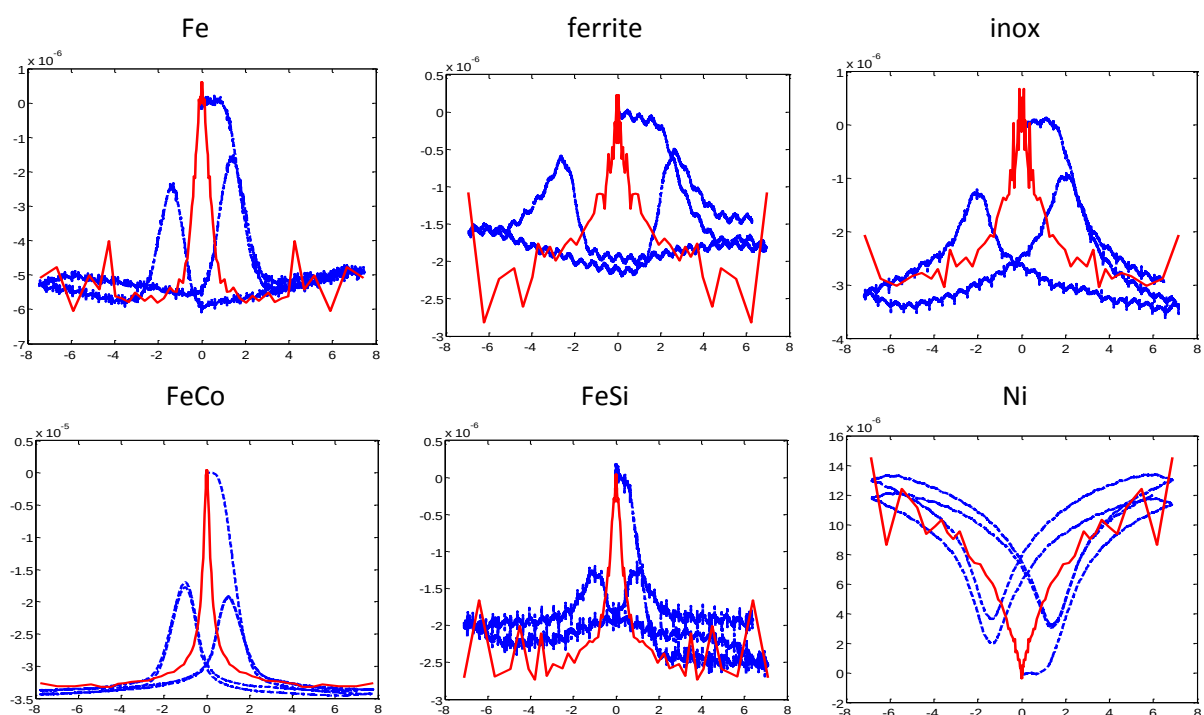


Figure 5.12. Représentation des déformations de magnétostriction perpendiculaires $\varepsilon_{\perp}^{MS}$ [-] en fonction du champ d'excitation magnétique [10^3 A.m^{-1}] pour, en traits continus rouges, la déformation évaluée au cours du cycle d'anhystrésis et, en pointillés bleus, la déformation évaluée au cours du cycle d'hystérésis.

Les déformations $\varepsilon_{\perp}^{MS}$ et $-\varepsilon_{//}^{MS}/2$ sont représentées en pointillés bleus et en traits continus rouges sur les Figures 5.13 et 5.14, pour respectivement la courbe anhystérétique et le cycle d'hystérésis. Pour les quatre échantillons ferrite, inox, FeSi et Ni, l'égalité (5.3) est vérifiée à la fois pour la courbe d'anhystérésis (Figure 5.13) et la courbe de première aimantation (Figure 5.14). L'égalité pour les cycles d'hystérésis est moins évidente, même si les écarts entre les deux courbes ne sont pas significatifs (Figure 5.14). Concernant les deux derniers échantillons, Fe et FeCo, les écarts sont plus prononcés que ce soit pour les courbes d'anhystérésis que pour les cycles d'hystérésis, courbes de première aimantation comprises.

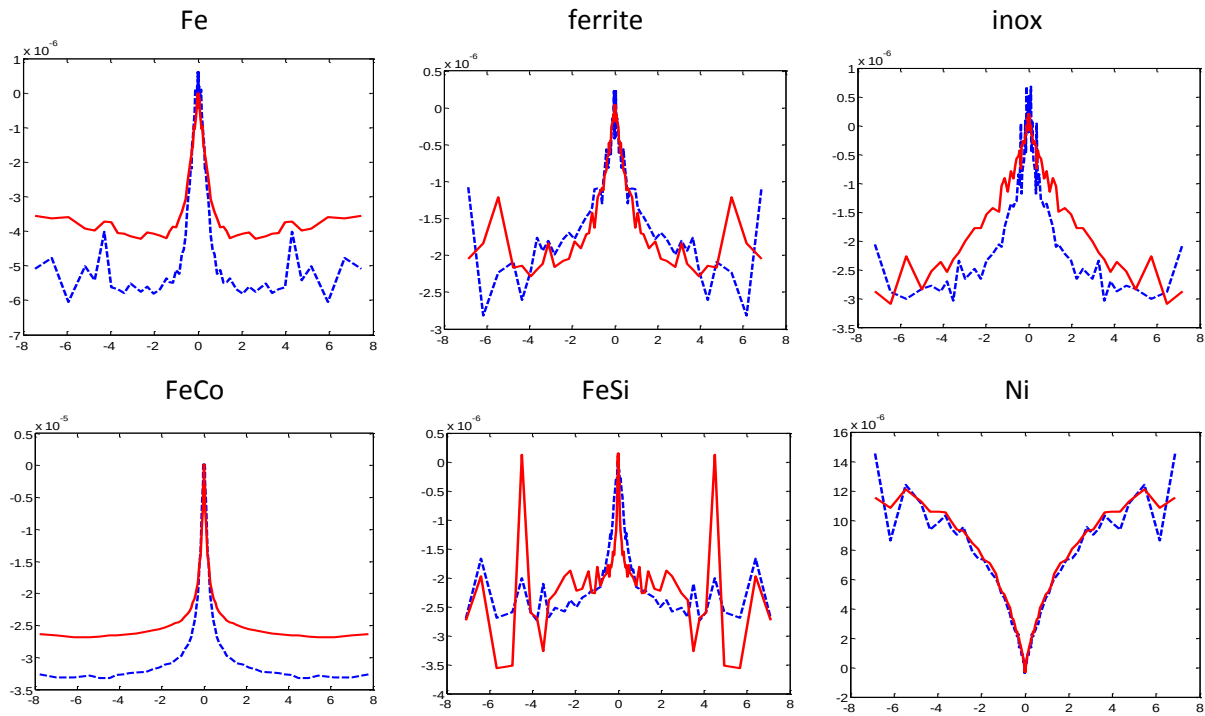


Figure 5.13. Représentation des déformations de magnétostriction évaluée au cours du cycle d'anhystérésis [-] en fonction du champ d'excitation magnétique imposé [10^3 A.m^{-1}] pour, en traits continus rouges, la déformation $-\varepsilon_{//}^{MS}/2$ et, en pointillés bleus, la déformation $\varepsilon_{\perp}^{MS}$.

L'hypothèse d'isotropie magnétostrictive est donc vérifiée pour les différents échantillons pour les déformations de magnétostriction anhystérétiques, avec quelques réserves pour les échantillons Fe et FeCo. Par ailleurs, le modèle de calcul de la force de magnétostriction prend en compte des champs d'excitation magnétique négatifs, par rapport à la direction étudiée. Grâce à la symétrie des courbes de déformation de magnétostriction anhystérétique, ces champs sont correctement intégrés dans le modèle. Ceci signifie que les courbes de magnétostriction choisies pour alimenter le modèle de la force de magnétostriction sont les courbes d'anhystérésis $\varepsilon_{//}^{MS}$ (en rouge Figure 5.11).

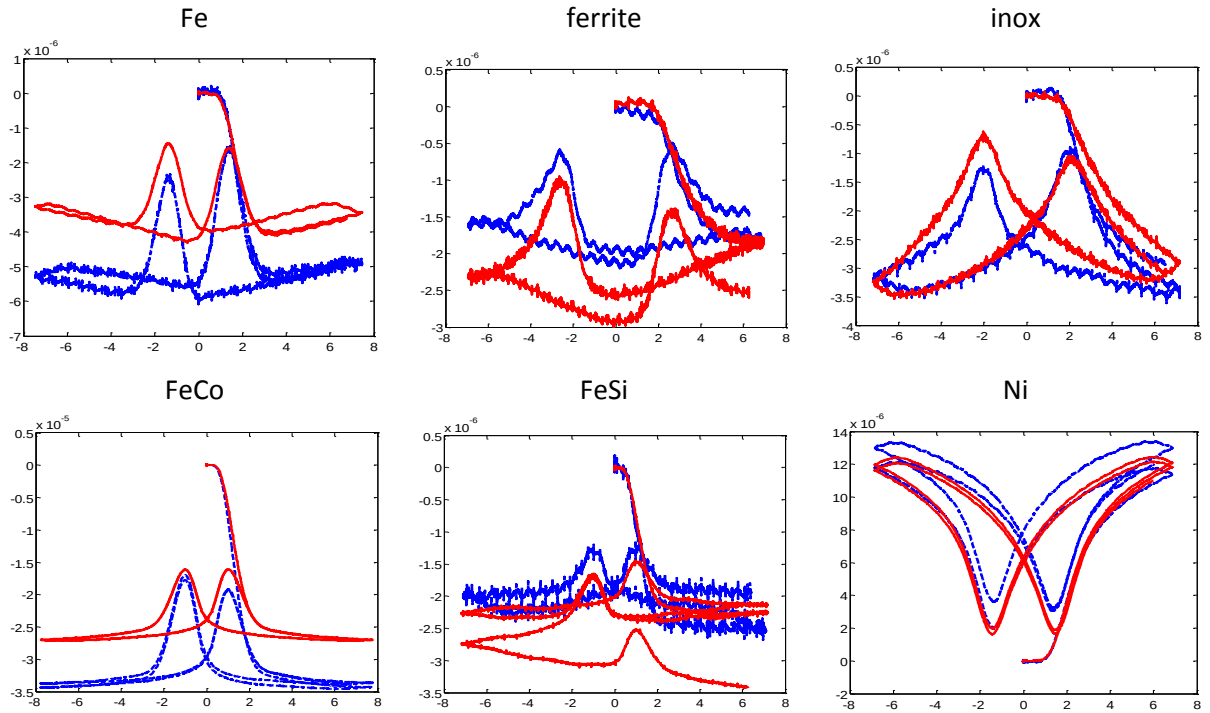


Figure 5.14. Représentation des déformations de magnétostriction évaluée au cours du cycle d'hystérésis [-] en fonction du champ d'excitation magnétique imposé [10^3 A.m^{-1}] pour, en traits continus rouges, la déformation $-\varepsilon_{||}^{MS}/2$ et, en pointillés bleus, la déformation $\varepsilon_{\perp}^{MS}$.

Ces courbes sont maintenant interpolées par des fonctions analytiques pour considérer toute intensité de champ d'excitation magnétique et pour les utiliser sur un domaine de définition plus large. Ces fonctions analytiques sont répertoriées dans le Tableau 5.1.

Tableau 5.1. Fonctions analytiques, en 10^{-6} , interpolant les points de mesure des courbes $\varepsilon_{||}^{MS}$ anhystériques des six échantillons étudiés.

échantillon	fonction analytique en 10^{-6}	équation
Fe	$(31H^{0.19})(1.48^{-(1.5H+1)}) - 3.5$ avec H en $[10^{-4} \text{ A.m}^{-1}]$	(5.4)
ferrite	$(15H^{0.2})(1.48^{-(1.5H+1)}) - 1.5$ avec H en $[10^{-4} \text{ A.m}^{-1}]$	(5.5)
inox	$(11.5H^{0.5})(1.25^{-(H+1)}) - 0.7$ avec H en $[10^{-4} \text{ A.m}^{-1}]$	(5.6)
FeCo	$(210H^{0.33})(2^{-(H+1)}) - 4$ avec H en $[10^{-4} \text{ A.m}^{-1}]$	(5.7)
FeSi	$(18H^{0.2})(1.48^{-(1.5H+1)}) - 1.5$ avec H en $[10^{-4} \text{ A.m}^{-1}]$	(5.8)
Ni	$-(15H^{0.3} - 3)$ avec H en $[10^{-3} \text{ A.m}^{-1}]$	(5.9)

Ces interpolations s'inspirent des travaux de Hirao et Ogi [16] pour un acier à faible taux de carbone. Les différentes fonctions et données expérimentales sont regroupées Figure 5.15 pour les échantillons de Fe, en bleu, de ferrite, en rouge, d'inox en vert, et FeSi en noir. Les échantillons FeCo, en bleu, et Ni, en rouge, sont représentés sur une figure différente, Figure 5.16, à cause des différences de niveau de déformations, 10^{-6} pour les premiers échantillons et 10^{-5} pour les seconds.

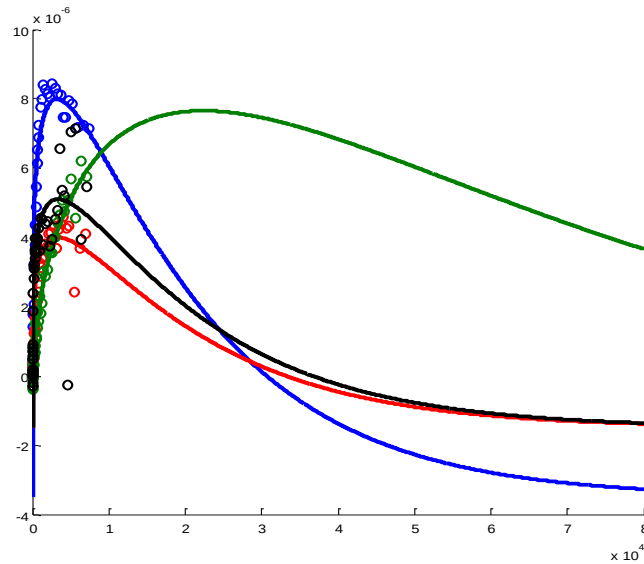


Figure 5.15. Représentation simultanée des déformations de magnétostriction $\varepsilon_{||}^{MS}$ anhystrétiques mesurées, en ronds, et des fonctions analytiques d'interpolation, en traits continus en fonction du champ d'excitation magnétique imposé $[A.m^{-1}]$; Fe en bleu, ferrite en rouge, inox en vert et FeSi en noir.

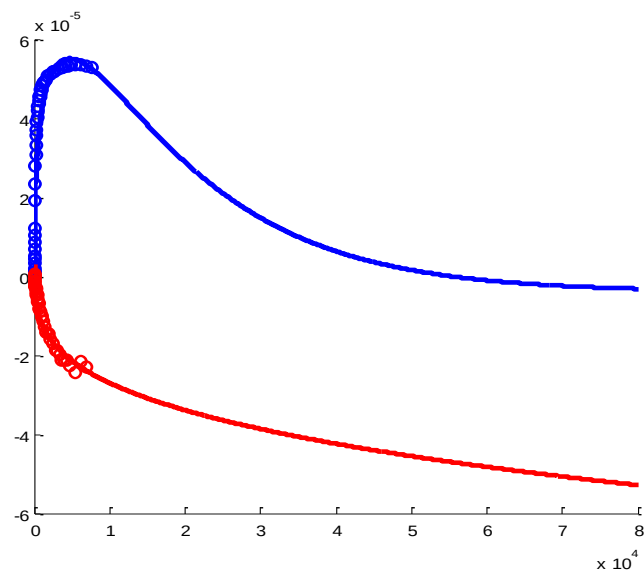


Figure 5.16. Représentation simultanée des déformations de magnétostriction $\varepsilon_{||}^{MS}$ anhystrétiques mesurées, en ronds, et des fonctions analytiques d'interpolation, en traits continus en fonction du champ d'excitation magnétique imposé $[A.m^{-1}]$; FeCo en bleu et Ni en rouge.

Enfin, seules deux mesures de déformation de magnétostriction, l'une dans la direction du champ d'excitation magnétique imposé et l'autre dans la direction perpendiculaire, sont nécessaires à la caractérisation du comportement magnétostrictif du matériau. En effet, sous l'hypothèse de magnétostriction isovolumique, appropriée aux intensités de champs magnétiques utilisés en CND, la trace du tenseur des déformations de magnétostriction est nulle. Seuls deux coefficients, notés a et b , décrivent alors l'anisotropie magnétostrictive du matériau. L'équation (2.5) devient :

$$\varepsilon^{MS,x} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{//}^{MS} \\ a \varepsilon_{//}^{MS} \\ b \varepsilon_{//}^{MS} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

avec la condition :

$$1+a+b=0. \quad (5.11)$$

Ainsi, si l'un des deux coefficients est connu, par exemple grâce aux comparaisons effectuées précédemment, alors le deuxième coefficient l'est aussi et l'anisotropie magnétostrictive du matériau est quantifiée. Par exemple, pour les échantillons Fe et FeCo, les coefficients a issus des mesures sont respectivement -0,7 et -0,62. Les coefficients b sont alors respectivement -0,3 et -0,38. La comparaison entre $\varepsilon_{\perp}^{MS}$ mesurée et $a \varepsilon_{//}^{MS}$ est représentée Figure 5.17a pour Fe et Figure 5.17b pour FeCo. Les trois courbes de magnétostriction ainsi définies sont représentées Figure 5.18a pour Fe et Figure 5.18b pour FeCo.

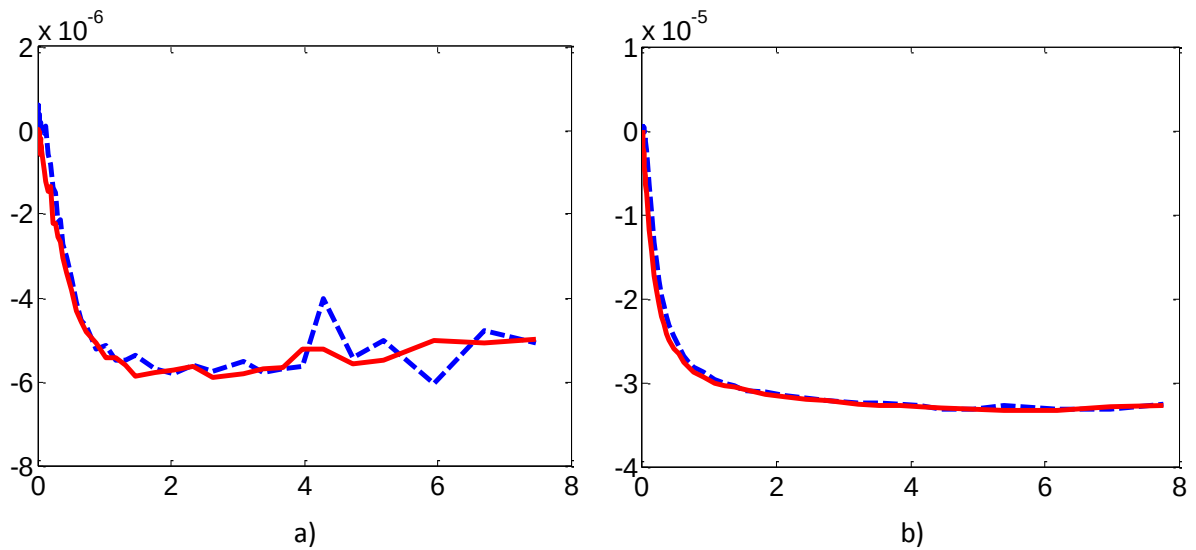


Figure 5.17. Représentation des déformations de magnétostriction évaluée au cours du cycle d'anhystrérésis [-] en fonction du champ d'excitation magnétique imposé [10³ A.m⁻¹] pour, en traits continus rouges, la déformation $a \varepsilon_{//}^{MS}$ et, en pointillés bleus, la déformation $\varepsilon_{\perp}^{MS}$ pour a) Fe et b) FeCo.

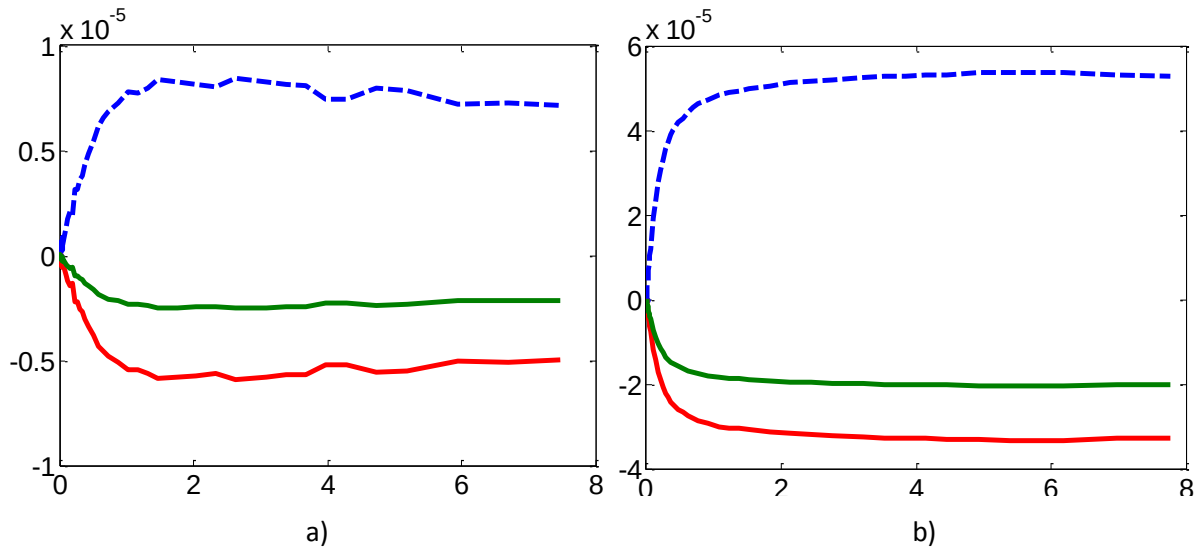


Figure 5.18. Représentation des déformations de magnétostriction évaluée au cours du cycle d'anhystrésis [-] en fonction du champ d'excitation magnétique imposé [10^3 A.m^{-1}] pour, en traits continus rouges, la déformation $a \varepsilon_{//}^{MS}$, en traits continus verts, la déformation $b \varepsilon_{//}^{MS}$ et, en pointillés bleus, la déformation $\varepsilon_{\perp}^{MS}$ pour a) Fe et b) FeCo.

Finalement, l'anisotropie magnétostrictive des matériaux Fe et FeCo est caractérisée dans le plan des échantillons quelle que soit la direction du champ d'excitation magnétique, imposée dans ce plan. Cependant, l'anisotropie ne peut être caractérisée dans les autres plans. En effet, au vue de la structure cristallographique de ces deux matériaux, l'anisotropie dans la direction normale au plan de l'échantillon est supposée différente de celle qui vient d'être identifiée. La prise en compte de l'anisotropie magnétostrictive ne se résume donc pas à l'introduction de coefficients dans l'équation (2.5) comme cela a été effectué pour obtenir l'équation (5.10). Il faut pouvoir quantifier l'anisotropie magnétostrictive du matériau quelle que soit la direction d'application du champ d'excitation magnétique pour la mesure de la déformation de magnétostriction parallèle $\varepsilon_{//}^{MS}$.

En résumé, grâce aux essais de caractérisation de matériaux industriels réalisés par le LMT-Cachan, les données magnétiques nécessaires aux simulations sont connues. Ces données d'entrée sont la perméabilité magnétique pour le calcul du champ magnétique induit $\mathbf{B}$, et la courbe de magnétostriction pour le calcul de la force de magnétostriction. Elles sont utilisées dans la partie suivante qui étudie les différences de champs ultrasonores générés par un même EMAT mais dans deux matériaux différents. Enfin, l'hypothèse d'isotropie magnétostrictive est retenue pour tous les matériaux étudiés.

2 ÉTUDE PARAMÉTRIQUE

Les essais de caractérisation CETIM permettent d'utiliser pour la simulation différentes données d'entrée relatives à six matériaux industriels. L'étude proposée utilise deux matériaux aux comportements magnétostrictifs différents : le fer et le nickel, Figure 5.11. La même sonde EMAT est utilisée pour générer des ondes de volume dans chacun des matériaux.

2.1 Configuration étudiée

La pièce étudiée est un bloc de fer ou de nickel de 70 mm de large par 70 mm de long et de 95 mm de haut. La sonde EMAT est constituée d'une bobine circulaire de 35 mm de diamètre intérieur, de 40 mm de diamètre extérieur et de 1 mm d'épaisseur. Cette configuration est représentée Figure 5.19. La bobine est surmontée d'un aimant permanent cylindrique de 40 mm de diamètre et de 20 mm de haut. L'aimantation de l'aimant est orientée vers la pièce, direction z sur la Figure 5.19. L'entrefer plaque bobine est de 0,1 mm. La zone de calcul des champs et des forces électromagnétiques est un carré de 55,5 mm de côté, avec 100 points de calcul dans chaque dimension. Son épaisseur est de 3 épaisseurs de peau divisée par 21 points de calcul.

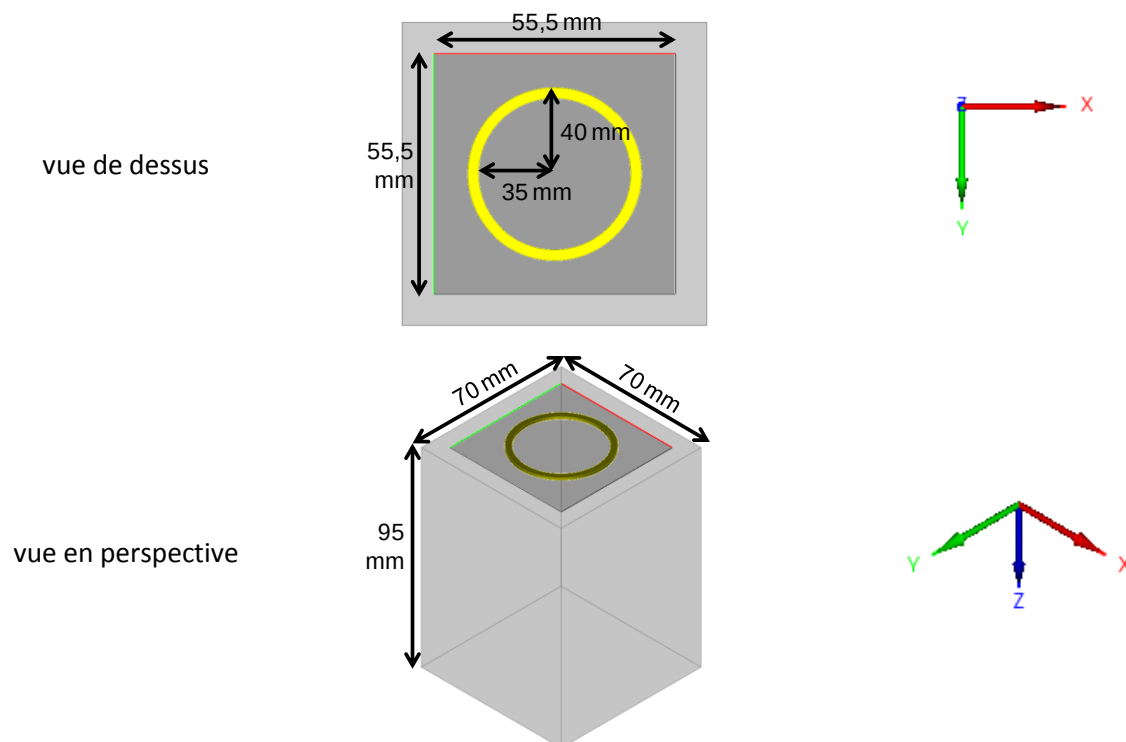


Figure 5.19. Représentation de dessus et en perspective de la configuration étudiée et de la zone de calcul des champs et des forces électromagnétiques.

Le courant d'excitation qui parcourt la bobine est un courant de type gaussien avec une fréquence centrale de 1 MHz. Sa bande passante est définie par une largeur de 70 % à -6 dB. Le signal temporel correspondant à cette excitation est discrétisé par 256 points. Il est représenté Figure 5.20. Ce signal a la même allure quelle que soit l'intensité du courant imposée.

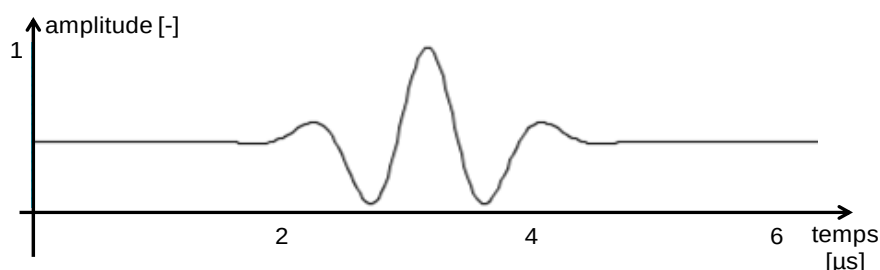


Figure 5.20. Représentation temporelle [μs] du signal d'excitation injecté dans la bobine en amplitude normalisée [-].

Enfin, le champ magnétique statique créé par l'aimant permanent est d'intensité variable, entre 0,1 et 1,5 T. Pour chacune de ces intensités et pour chacun des deux matériaux, une valeur de perméabilité magnétique est définie grâce aux courbes Figure 5.4. Les valeurs des conductivités électriques, des masses volumiques et des composantes du tenseur des rigidités sont données pour les deux matériaux Tableau 5.2. Les courbes de magnétostriction utilisées sont celles définies analytiquement à partir de l'expérience, équations (5.4) et (5.9).

Tableau 5.2. Paramètres magnétiques et élastodynamiques des deux matériaux, fer et nickel, utilisés pour la simulation.

	conductivité électrique [10^6 S.m^{-1}]	masse volumique [kg.m^{-3}]	tenseur des rigidités [10^{10} N.m^{-2}]		
			C_{11}	C_{12}	C_{66}
fer	9,93	7 700	24,93	9,695	7,617
nickel	14,3	8 270	29,84	13,53	8,155

2.2 Génération d'ondes de volume pour un champ d'induction magnétique statique fort et un champ d'excitation magnétique dynamique faible

Les premières simulations sont effectuées pour des champs statiques forts, plus de 1 T, et pour des intensités de courant faibles, moins de 1 A. Pour illustrer les résultats obtenus aux différentes étapes de calcul pour ce type de configuration, un champ statique de 1,5 T et une intensité de courant de 0,1 A sont considérés. Tout d'abord, pour chacun des matériaux, le fer et le nickel, les contraintes

équivalentes sont calculées par le module CIVA CF. Les parties réelles de chaque composante de ces contraintes équivalentes sont données Figure 5.21 pour le fer et Figure 5.22 pour le nickel. Pour les deux matériaux, la composante normale, selon la direction z , est la plus forte mais ne domine pas les deux autres composantes. Par ailleurs, les allures des contraintes équivalentes sont les mêmes d'un matériau à l'autre, avec une très légère différence en amplitude pour les composantes tangentes au plan de la bobine.

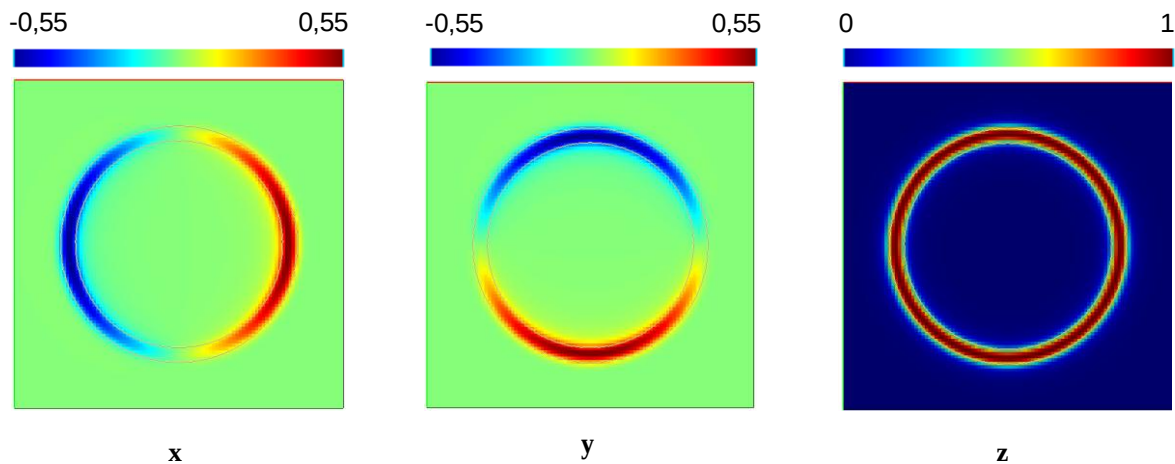


Figure 5.21. Représentation des parties réelles de chaque composante des contraintes équivalentes générées dans le fer pour un champ statique de 1,5 T et une intensité de courant de 0,1 A.

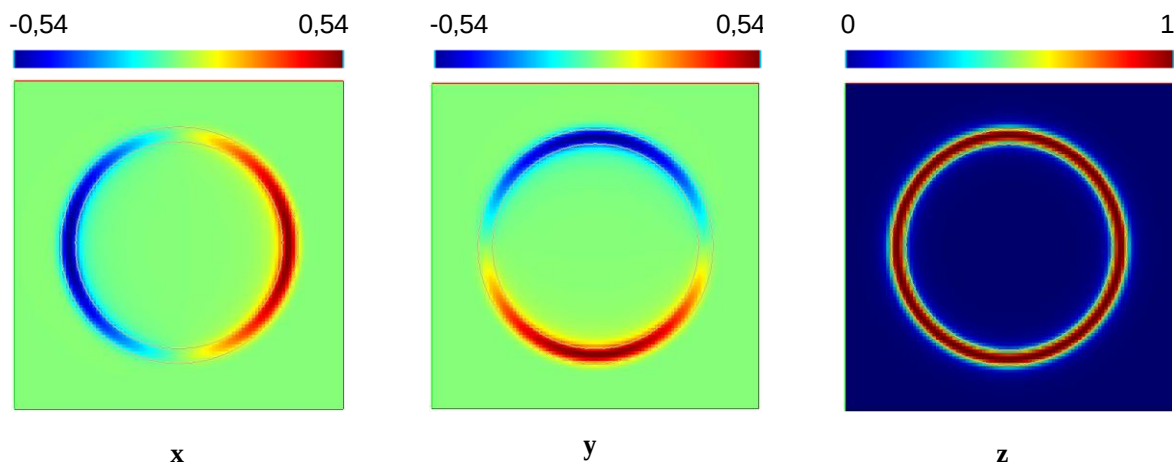


Figure 5.22. Représentation des parties réelles de chaque composante des contraintes équivalentes générées dans le nickel pour un champ statique de 1,5 T et une intensité de courant de 0,1 A.

Par ailleurs, en étudiant le spectre en un point du matériau situé sous la bobine, seules les premières harmoniques des fréquences d'excitation apparaissent. En effet, les fréquences d'excitation centrées en 1 MHz sont maintenant réparties autour de deux fréquences, 1 et 2 MHz, comme le montre le spectre Figure 5.23. Le même spectre est obtenu pour les deux matériaux. La partie du spectre

centrée en 1 MHz peut être associée à la force de magnétostriction tandis que la partie centrée en 2 MHz peut être associée à l'harmonique de la force de Lorentz. Grâce à cet exemple, l'importance de calculer les spectres des forces électromagnétiques est illustrée, car la dépendance des ondes ultrasonores générées ne sera pas la même que celle du signal d'excitation.

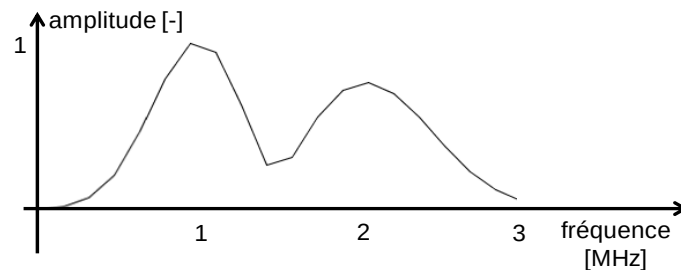
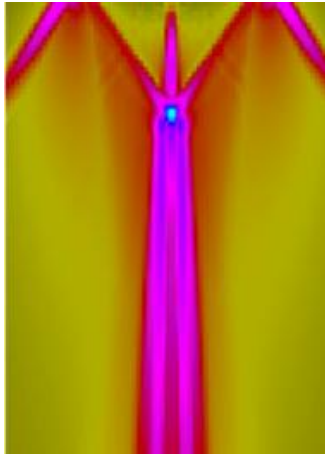


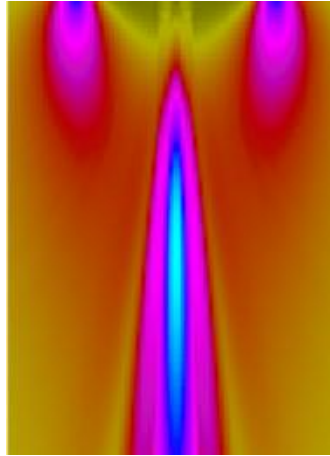
Figure 5.23. Représentation du spectre fréquentiel du module de la contrainte équivalente pour un point situé sous la bobine de l'EMAT, pour indépendemment le fer ou le nickel.

Les champs ultrasonores sont calculés grâce au module CIVA US. La zone de calcul est un plan de coupe 2D situé sous la bobine et plongeant dans l'épaisseur du matériau. Les champs ultrasonores générés sont représentés Figure 5.24 et Figure 5.25 pour respectivement le fer et le nickel. Le maximum en amplitude est représenté pour chaque point de la zone de calcul et est normalisé par rapport au maximum obtenu sur l'ensemble de la zone lorsque toutes les ondes sont considérées, champ total, et lorsque seules les ondes longitudinales puis seules les ondes transversales sont évaluées. Comme les contraintes équivalentes sont très similaires et comme les tenseurs des rigidités sont aussi très similaires, les champs ultrasonores générés dans les deux matériaux sont très semblables. Les directivités des ondes longitudinales et transverses sont très marquées et, de manière globale, les ondes transverses sont de plus forte amplitude, de 3,3 dB dans le cas du fer et de 2,1 dB dans le cas du nickel. Pour illustrer la différence entre les spectres du signal d'excitation, Figure 5.20, et le spectre du signal en un point, le spectre du point de plus forte amplitude des ondes transversales dans le nickel est représenté Figure 5.26.

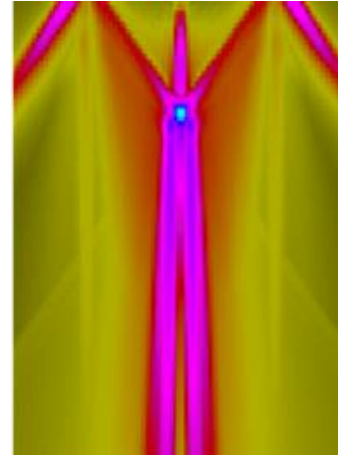
Ainsi, pour un champ statique fort, 1,5 T, et une intensité de courant faible, 0,1 A, la configuration étudiée permet de générer préférentiellement des ondes transversales. Elle met aussi en évidence la nécessité de prendre en compte les spectres complets des trois forces électromagnétiques.



champ total

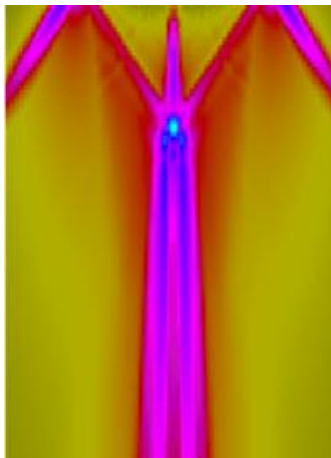


ondes longitudinales

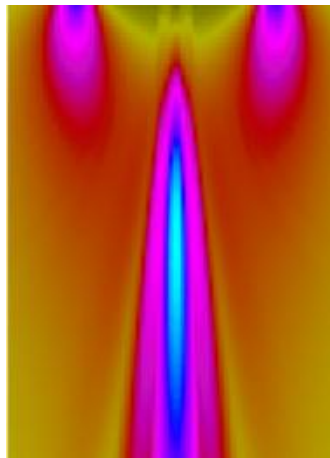


ondes transversales

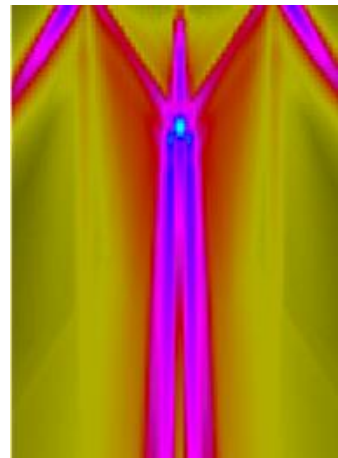
Figure 5.24. Représentation des champs ultrasonores générés dans le fer pour un champ statique de 1,5 T et une intensité de courant de 0,1 A.



champ total



ondes longitudinales



ondes transversales

Figure 5.25. Représentation des champs ultrasonores générés dans le nickel pour un champ statique de 1,5 T et une intensité de courant de 0,1 A.

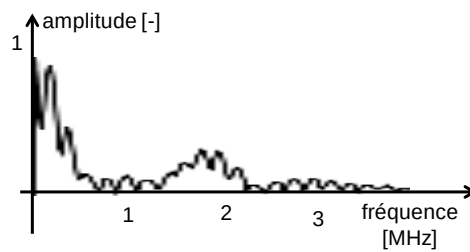


Figure 5.26. Représentation du spectre fréquentiel au point de plus forte amplitude des ondes transverses générées dans le nickel.

2.3 Génération de volume pour un champ d'induction magnétique statique et un champ d'excitation magnétique moyens

Les secondes simulations sont effectuées pour des champs statiques moyens, entre 0,1 T et 1 T, et pour des intensités de courant aussi moyennes, entre 1 A et 20 A. Pour illustrer ce type de configuration, un champ statique de 0,5 T et une intensité de courant de 10 A sont choisis.

Le calcul des contraintes équivalentes montre que la composante selon la direction normale, z , domine très fortement les deux autres, quel que soit le matériau. En effet, dans les deux cas, les contraintes équivalentes sont de l'ordre de l'unité (normalisée) pour la composante suivant la normale et de l'ordre de $5 \cdot 10^{-3}$, sur la même échelle, pour les composantes tangentielles. Par ailleurs, en étudiant le spectre du module des contraintes équivalentes d'un point du matériau situé sous la bobine, les premiers harmoniques des fréquences d'excitation apparaissent de manière très dominante par rapport aux fréquences d'excitation. En effet, celles-ci sont centrées en 1 MHz alors que le spectre est centré en 2 MHz, comme représenté sur la Figure 5.27. Cette constatation est aussi valable pour les deux matériaux.

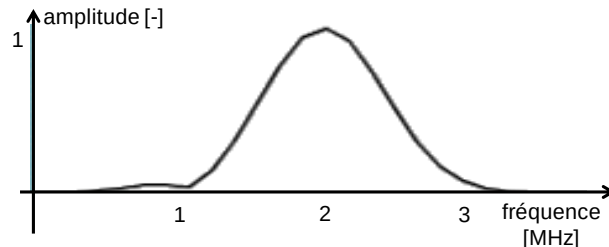


Figure 5.27. Représentation du spectre fréquentiel du module de la contrainte équivalente pour un point situé sous la bobine de l'EMAT, pour indépendamment le fer ou le nickel.

Les champs ultrasonores générés sont représentés Figure 5.28 et Figure 5.29 pour respectivement le fer et le nickel. De même que précédemment, les directivités des ondes longitudinales et transversales sont très marquées mais les ondes longitudinales sont de plus forte amplitude que les ondes transversales, de 11,3 dB dans le cas du fer et de 10,5 dB dans le cas du nickel.

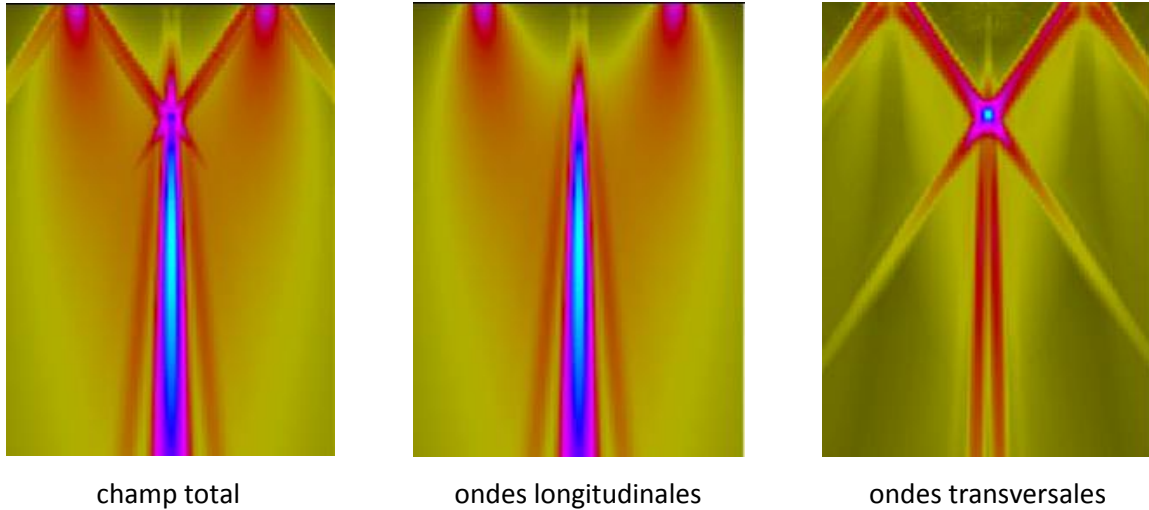


Figure 5.28. Représentation des champs ultrasonores générés dans le fer pour un champ statique de 0,5 T et une intensité de courant de 10 A.

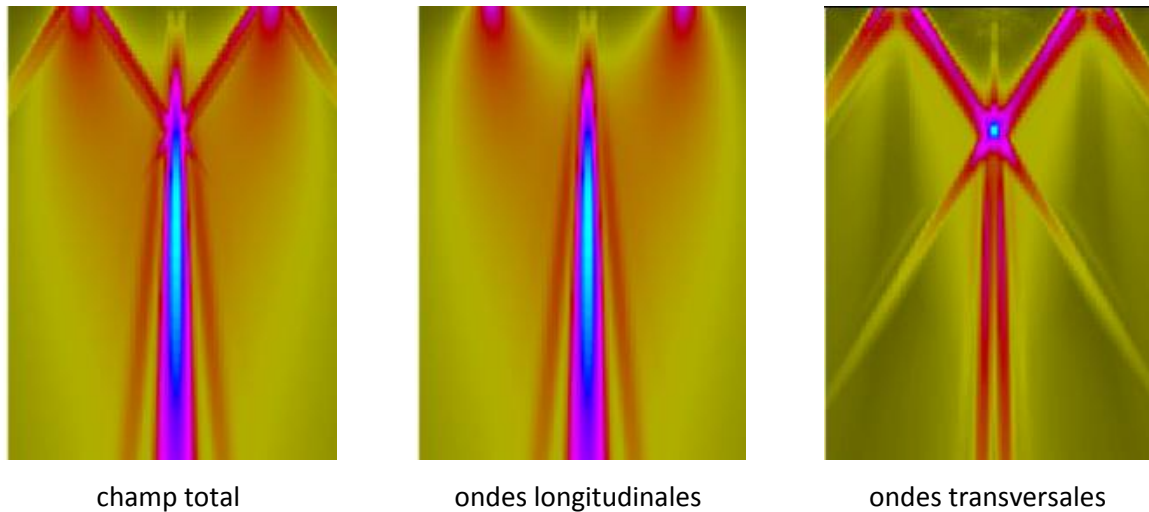


Figure 5.29. Représentation des champs ultrasonores générés dans le nickel pour un champ statique de 0,5 T et une intensité de courant de 10 A.

2.4 Génération d'ondes de volume par magnétostriction

Des simulations pour mettre en évidence la différence de comportement magnétostrictif entre le fer et le nickel ont aussi été réalisées. Celles-ci sont effectuées pour la même pièce que précédemment mais pour un circuit carré de 15 mm de côté intérieur et de 2 mm de largeur. L'aimantation de l'aimant permanent est toujours orientée selon l'épaisseur du matériau, représentée par la direction z . Cet aimant est un cube de 20 mm de côté. La zone de calcul est plus restreinte avec 32 mm de côté et toujours 100 points de calcul. Le même signal d'excitation que précédemment est utilisé. Cette nouvelle configuration est représentée Figure 5.30. Ces dernières simulations sont effectuées pour des champs statiques très faibles, 0,006 T, et pour des intensités de courant aussi très faibles,

0,01 A. Pour ces paramètres la force de magnétostriction domine les deux autres forces. Contrairement aux cas précédents, les contraintes équivalentes n'ont plus ni les mêmes allures ni les mêmes amplitudes d'un matériau à l'autre, comme représenté Figure 5.31 et 5.32 pour respectivement le fer puis le nickel. Prendre une configuration cartésienne, et non plus axisymétrique, permet de mettre en évidence la différence de comportement suivant que les courants sont orientés dans la direction x ou y .

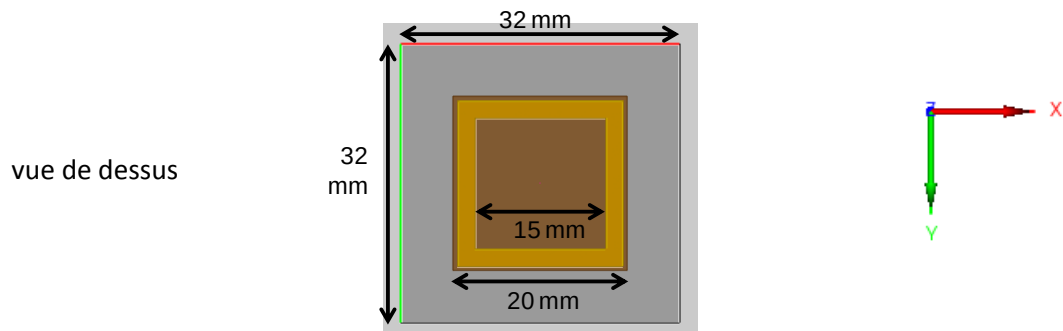


Figure 5.30. Représentation de dessus de la nouvelle configuration étudiée.

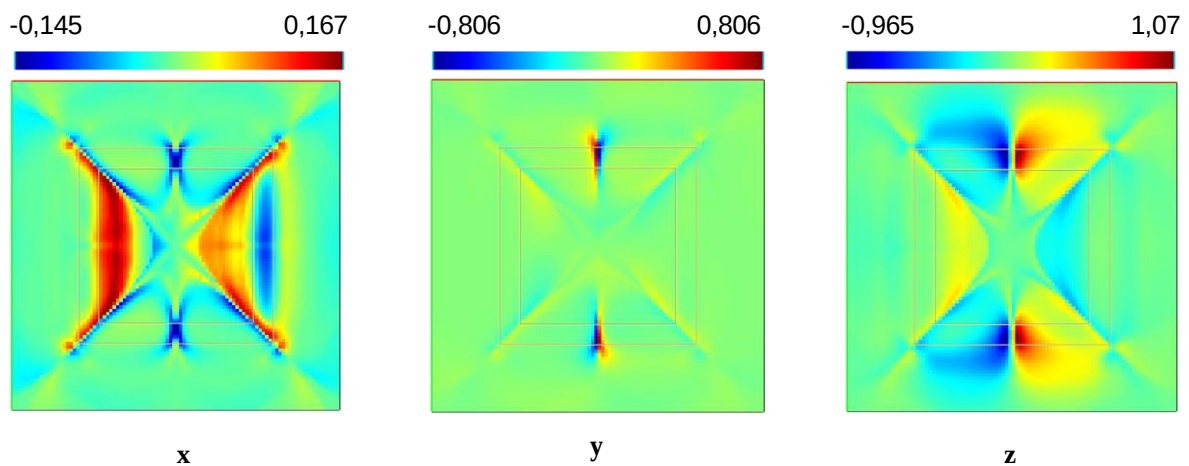


Figure 5.31. Représentation des parties réelles de chaque composante des contraintes équivalentes générées dans le fer pour un champ statique de 0,006 T et une intensité de courant de 0,01 A.

Le spectre des contraintes équivalentes dépend fortement du matériau étudié comme représenté Figure 5.33 pour le fer et Figure 5.34 pour le nickel. Le spectre du fer met en évidence le premier harmonique, à 2 MHz, tandis que le spectre du nickel est plus réparti autour des trois fréquences 1, 2 et 3 MHz.

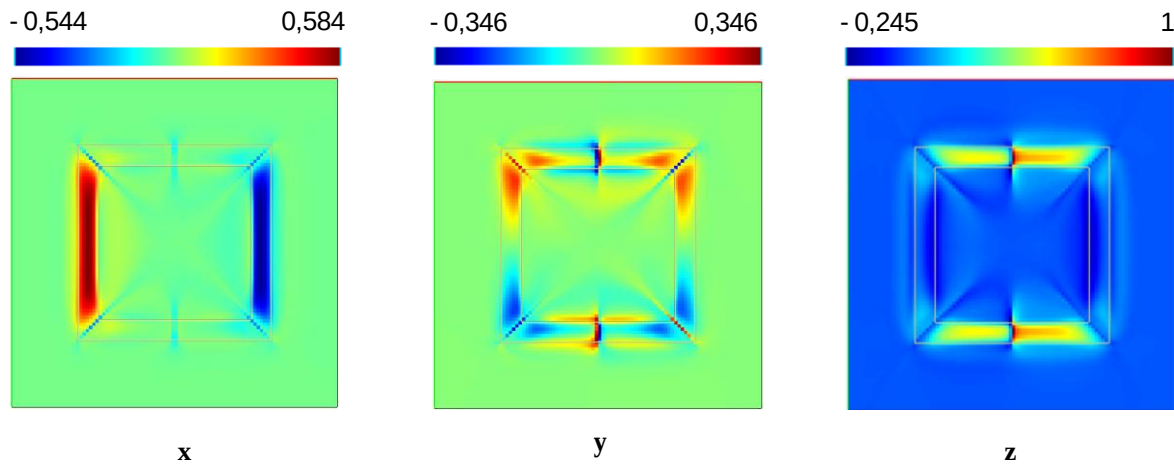


Figure 5.32. Représentation des parties réelles de chaque composante des contraintes équivalentes générées dans le nickel pour un champ statique de 0,006 T et une intensité de courant de 0,01 A.

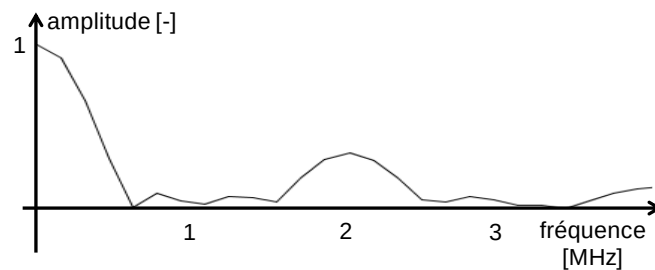


Figure 5.33. Représentation du spectre fréquentiel du module de la contrainte équivalente pour un point situé sous la bobine de l'EMAT pour le fer.

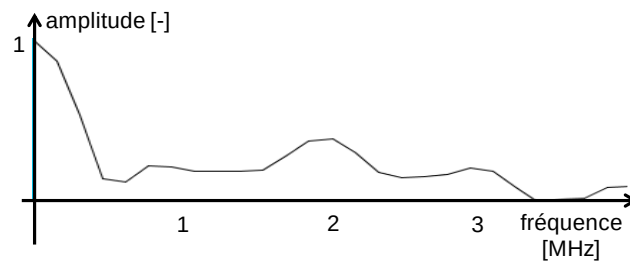
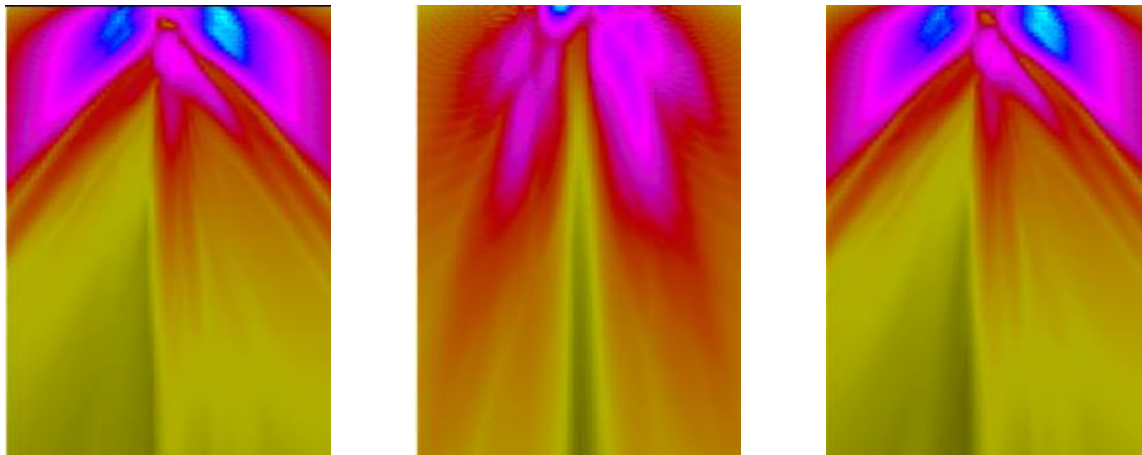


Figure 5.34. Représentation du spectre fréquentiel du module de la contrainte équivalente pour un point situé sous la bobine de l'EMAT pour le nickel.

La zone de calcul des champs ultrasonores est comme précédemment un plan dans l'épaisseur du matériau, suivant les directions x et z , situé au centre de la direction y . Les champs ultrasonores générés sont représentés Figure 5.35 et Figure 5.36 pour respectivement le fer et le nickel. Les directivités des ondes longitudinales et transverses sont toujours très marquées mais les profils ne sont plus les mêmes d'un matériau à l'autre. Par ailleurs, pour le fer et pour le nickel, les ondes

longitudinales ont respectivement des amplitudes plus faibles de 3,9 et de 5 dB par rapport aux amplitudes des ondes transversales.

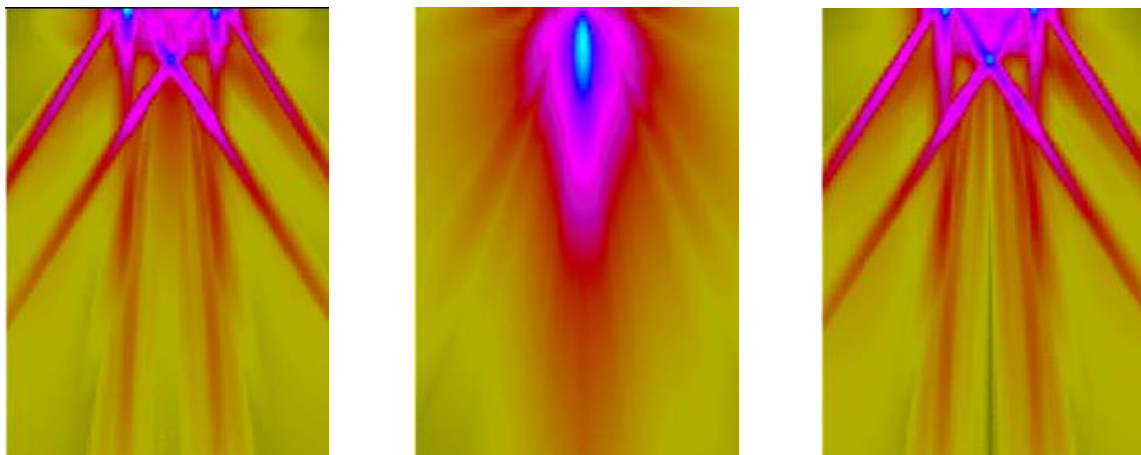


champ total

ondes longitudinales

ondes transversales

Figure 5.35. Représentation des champs ultrasonores générés dans le fer pour un champ statique de 0,006 T et une intensité de courant de 0,01 A.



champ total

ondes longitudinales

ondes transversales

Figure 5.36. Représentation des champs ultrasonores générés dans le nickel pour un champ statique de 0,006 T et une intensité de courant de 0,01 A.

Finalement, l'ensemble de cette étude paramétrique illustre le fait que les développements effectués pour calculer les spectres fréquentiels des forces électromagnétiques sont nécessaires pour calculer correctement le champ ultrasonore généré.

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'analyse des essais de caractérisation de matériaux ferromagnétiques réalisés par le LMT-Cachan. Ces essais sont réalisés à très basse fréquence, 2 Hz, et ne permettent donc pas de quantifier l'effet de la fréquence sur le comportement magnétique des matériaux étudiés. Cependant, des courbes de première aimantation et d'anhystrérésis sont déduites les perméabilités magnétiques statique et incrémentale. Le choix est fait de conserver la courbe de perméabilité statique définie à partir de la courbe de première aimantation pour établir la valeur de la perméabilité magnétique à prendre en compte dans le calcul CIVA CF des champs magnétiques induits et des forces électromagnétiques. L'étude des différentes courbes de perméabilité magnétiques montre la nécessité de calculer de manière non linéaire les champs induits et de définir un tenseur de perméabilité magnétique plutôt qu'un scalaire. Les essais de caractérisation permettent aussi de vérifier l'hypothèse d'isotropie magnétostrictive, notamment pour les courbes des déformations de magnétostriction anhystrériques. Ces données expérimentales sont approximées par des fonctions analytiques et définissent les courbes de magnétostriction implémentées dans CIVA CF pour le calcul de la force de magnétostriction.

La deuxième partie du chapitre utilise les données expérimentales pour mener une étude paramétrique portant sur un même EMAT appliqué à deux matériaux au comportement magnétostrictif différent : le fer et le nickel. L'intensité du courant d'excitation et l'amplitude du champ statique de l'aimant permanent constituent les deux paramètres variables de l'étude. Pour la configuration donnée, plus l'intensité du courant augmente et plus l'amplitude du champ statique diminue, plus la force de Lorentz harmonique devient dominante par rapport aux autres forces. Ceci se vérifie en étudiant le spectre des contraintes équivalentes. Cette rapide étude paramétrique démontre la nécessité de prendre en compte les trois types de forces électromagnétiques générées par un EMAT dans un milieu ferromagnétique et aussi de prendre en compte le phénomène de création d'harmoniques due à ces forces.

CONCLUSION

Les EMATs sont des transducteurs sans contact combinant de multiples phénomènes physiques liés à l'électromagnétisme et à l'élastodynamique. Ils peuvent être utilisés pour générer différents types d'ondes comme les ondes de volume, les ondes de surface et les ondes guidées, la polarisation de ces ondes pouvant être multiple pour un même transducteur. Contrairement aux transducteurs piézoélectriques, les EMATs sont capables de générer des ondes transverses horizontales et des ondes de torsion et fonctionnent dans des conditions de fortes pressions et de hautes températures. Cependant, les ondes ultrasonores générées par EMATs sont de très faible amplitude.

La simulation est souvent utilisée pour optimiser la conception des transducteurs et ainsi améliorer leurs performances acoustiques. Ici, elle prend en compte les phénomènes complexes entrant en jeu au cours de la génération d'ondes ultrasonores par EMATs. Ceux-ci sont représentés par la force de Lorentz pour les matériaux conducteurs, à laquelle s'ajoutent les forces d'aimantation et de magnétostriction lorsque le matériau est de plus ferromagnétique.

Le développement des modèles répondant à ces besoins et des codes de calcul associés ont été l'objet de cette étude, ces derniers devant s'intégrer à la plateforme de simulation CIVA développée au CEA-LIST et par conséquent être numériquement performants en vue de leur usage industriel futur. La modélisation est conçue en blocs indépendants reliés entre eux par les jeux de données d'entrée et de sortie. Elle s'appuie également sur des outils déjà présents dans CIVA à savoir le calcul des champs magnétiques générés par un EMAT et le calcul des champs ultrasonores générés par des contraintes surfaciques. L'ensemble de la modélisation permet de simuler un contrôle par EMATs en milieu ferromagnétique.

Le premier outil développé est le calcul des forces électromagnétiques. Celui-ci détermine les spectres fréquentiels de ces forces, tout en prenant en compte une intensité de courant quelconque et des directions et intensités des champs magnétiques statique et dynamique quelconques. De plus, le calcul de la force de magnétostriction n'est basé que sur la seule hypothèse d'isotropie magnétostrictive du matériau étudié.

Le second outil mis en place est la transformation des forces électromagnétiques, volumiques, en contraintes surfaciques équivalentes. Cette transformation analytique permet de prendre en compte

correctement les effets de magnétostriction. En effet, ceux-ci sont modélisés à travers la force de magnétostriction, qui est décrite comme une force volumique avec des conditions aux limites, et c'est la combinaison de cette description avec la transformation qui donne à ces effets magnétostrictifs leur caractère inertiel. Par ailleurs, la transformation est effectuée dans le domaine temporel pour le calcul des ondes de volume et dans le domaine fréquentiel pour le calcul des ondes guidées.

Le troisième outil développé porte sur le calcul des amplitudes modales des ondes guidées dans des cas d'étude réduits à deux dimensions. Grâce à une description en série de Fourier des champs magnétiques dynamiques générés par un EMAT, l'évaluation des amplitudes modales est analytique pour les ondes SH et quasi-analytique pour les ondes de Lamb.

Par ailleurs, la relation de réciprocité pour des phénomènes de transduction couplant des effets magnétiques et magnétostrictifs est vérifiée. Celle-ci peut être utilisée pour le calcul de la réception d'ondes ultrasonores par un EMAT. Les hypothèses magnétiques avancées lors de la détermination des forces électromagnétiques sont également discutées, grâce à des résultats expérimentaux d'essais de caractérisation de matériaux ferromagnétiques. Enfin, une étude met en œuvre les différents outils développés et implémentés dans CIVA ainsi que les données expérimentales collectées. La simulation du champ ultrasonore en ondes de volume généré par un EMAT est réalisée dans deux milieux différents.

Si les résultats montrés dans cette étude ont fait individuellement l'objet de validation, soit par rapport à des résultats analytiques, soit par rapport à des résultats expérimentaux, des validations expérimentales concernant la simulation de l'ensemble d'un contrôle restent à réaliser. Ces expériences sont en cours et menées dans le cadre d'une collaboration avec le CETIM.

Comme la modélisation est conçue en blocs indépendants, améliorer un des blocs ne signifie pas revoir toute la démarche de modélisation. Ainsi, les travaux initiés au CEA-LIST et portant sur le calcul non linéaire du champ d'induction magnétique feront partie du bloc de calculs des champs magnétiques générés par un EMAT dans un matériau ferromagnétique, ce bloc nécessitant toujours comme données d'entrée la configuration de contrôle et retournant des résultats servant de données d'entrée nécessaires au calcul des forces électromagnétiques. Cette amélioration prendra en compte la totalité de la courbe de première aimantation pour que la modélisation corresponde de façon plus réaliste au comportement magnétique des matériaux ferromagnétiques.

Par ailleurs, le calcul du rayonnement des ondes ultrasonores dans un milieu élastique anisotrope est déjà implémenté dans le module CIVA US. Pour adapter la modélisation des EMATs à ces milieux, le développement de la transformation des forces électromagnétiques en contraintes surfaciques équivalentes doit être effectué pour un tenseur des rigidités anisotrope.

De multiples autres développements sont également envisageables à partir de la base de modélisation effectuée. Ceux-ci porteraient par exemple sur l'écriture de la transformation en coordonnées cylindriques pour prendre en compte ce type de géométrie, sur la prise en compte des contraintes résiduelles dans les calculs magnétiques et élastodynamiques pour mieux définir l'état du matériau et sa réponse à l'application d'un EMAT ou encore sur l'extension de la modélisation au cas des patches magnétostrictifs principalement utilisés pour le contrôle par ondes guidées de tuyauteries.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. M. BOZORTH, *Ferromagnetism*, Hoboken: Wiley-Interscience, (1964).
- [2] S. CHIKAZUMI, *Physics of Magnetism*, D. Van Nostrand Company Inc., United States of America, (1964).
- [3] E. TRÉMOLET DE LACHEISSERIE, *Magnétisme Vol. 1 - Fondements*, EDP Science, Grenoble, (1999).
- [4] J. L. PORTESEIL, *Ferromagnétisme (1)*, Techniques de l'Ingénieur, E1730, (1989).
- [5] G. COUDERCHON, *Alliages fer-nickel et fer-cobalt, Propriétés magnétiques*, Techniques de l'Ingénieur, D 200, (1979).
- [6] J. CHICHARRO, A. BAYON, F. SALAZAR, *Dependence of Delta-E effect on internal stresses in nickel: Experimental results by laser interferometry*, J. Magn. Magn. Mater., **297**, 44-53, (2006).
- [7] Y. CHEN, B. KRIEGERMEIER-SUTTON, J. SNYDER, K. DENIS, R. MCCALLUM, D. JILES, *Magnetomechanical effects and torsional strain in iron, cobalt and nickel*, J. Magn. Magn. Mater., **236**, 131-138, (2001).
- [8] E. W. LEE, *Magnetostriction and magnetomechanical effects*, Rep. Prog. Phys., **18**, 184-229, (1955).
- [9] A. MORALES, A. NIETO, J. CHICHARRO, P. PINTADO, *Field-dependent elastic modulus and damping in pure iron, nickel and cobalt*, J. Magn. Magn. Mater., **322**, 1952-1961, (2010).
- [10] A. GAVRILYUK, N. KOVALEVA, A. GAVRILYUK, *Influence of thermomagnetic treatment on the propagation velocity of magnetoelastic oscillations and the Delta-E effect in disordered ferromagnetics*, Tech. Phys. Lett., **24**, 657-659, (1998).
- [11] R. STREET, *The variation with magnetization of Young's modulus for cobalt*, Proc. Phys. Soc., **60**, 236-243, (1948).
- [12] A. CLARK, K. HATHAWAY, *Handbook of Giant Magnetostrictive Materials*, G. Engdahl, Academic Press, United States of America, (2000).
- [13] A. E. CLARK, *Ferromagnetic Materials (Vol. 1)*, E. P. Wohlfarth, London, (1980).
- [14] W. MASON, *Derivation of Magnetostriction and Anisotropic Energies for Hexagonal, Tetragonal, and Orthorhombic Crystals*, Phys. Rev., **96**, 302-130, (1954).
- [15] L. DANIEL, *Approche multi-échelle du comportement électro-magnéto-mécanique*, Habilitation à diriger des recherches, <http://www.lgep.supelec.fr/index.php?page=laurent-daniel>, (2011).
- [16] M. HIRAO, H. OGI, *EMATS for Science and Industry: Noncontacting Ultrasonic Measurements*, Boston: Kluwer Academic Publishers, (2003).

- [17] *Nondestructive testing handbook, Electromagnetic testing: Eddy current, flux leakage and microwave nondestructive testing*, R. C. McMaster, P. McIntire, M. L. Mester, American Society for Nondestructive Testing, (1986).
- [18] I. V. IL'IN, A. V. KHARITONOV, *Theory of the EMA method of detecting Rayleigh waves for ferromagnetic and ferromagnetic materials*, Sov. J. NDT., **16**, 549-554, (1980).
- [19] R. RIBICHINI, P. B. NAGY, H. OGI, *The impact of magnetostriction on the transduction of normal bias field EMATs*, NDT&E Int., **51**, 8-15, (2012).
- [20] L. LAGUERRE, J.-C. AIME, M. BRISSAUD, *Magnetostrictive pulse-echo device for non-destructive evaluation of cylindrical steel materials using longitudinal guided waves*, Ultrasonics, **39**, 503-514, (2002).
- [21] R. RIBICHINI, *Modelling of electromagnetic acoustic transducers*, thèse de doctorat, Imperial College London, (2011).
- [22] X. JIAN, S. DIXON, K. T. V. GRATTAN, R. S. EDWARDS, *A model for pulsed Rayleigh wave and optimal EMAT design*, Sens. Actuators A, **128**, 296-304, (2006).
- [23] D. A. BERLINCOURT, D. R. CURRAN, H. JAFFE, *Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers*, Physical Acoustics, **1A**, 169-270, (1964).
- [24] M. J. DAPINO, *Nonlinear and hysteretic magnetomechanical model for magnetostrictive transducers*, thèse de doctorat, Iowa State University, (1999).
- [25] R. JAFARI-SHAPOORABADI, A. KONRAD, A. N. SINCLAIR, *The governing electrodynamic equations of electromagnetic acoustic transducers*, J. Appl. Phys., **97**, 10E02, (2005).
- [26] R. B. THOMPSON, *A model for the electromagnetic generation of ultrasonic guided waves in ferromagnetic metal polycrystals*, IEEE Trans. Sonics & Ultras., **SU-25**, 7-15, (1978).
- [27] A. WILBRAND, *Quantitative modeling and experimental analysis of the physical properties of electromagnetic-ultrasonic transducers*, Rev. Prog. QNDE, **7A**, 671-680, (1988).
- [28] M. ESKANDARZARDE, T. KUNDU, N. LIEBEAUX, D. PLACKO, F. MOBADERSANI, *Numerical simulation of electromagnetic acoustic transducers using distributed point source method* Ultrasonics, **50**, 583-591, (2010).
- [29] N. BUIRON, L. HIRSINGER, R. BILLARDON, *A multiscale model for magneto-elastic couplings*, J. Phys. IV France, **9**, 187-196, (1999).
- [30] T. P. THEODOULIDIS, *Analytical model for tilts coils in Eddy-current nondestructive inspection*, IEEE Trans. Magn., **41**, 2447-2454, (2005).
- [31] C. REBOUD, G. PICHENOT, T. THEODOULIDIS, *ECT simulation of coil tilt effect on 3D flaws responses in planar geometries*, Rev. Prog. QNDE, **28A**, 295-302, (2009).
- [32] X.-F. GOU, Y. YANG, X.-J. ZHENG, *Analytic expression of magnetic field distribution of rectangular permanent magnet*, Appl. Math. Mech., **25**, 297-306, (2004).
- [33] A. LHÉMERY, *A model for the transient ultrasonic field radiated by an arbitrary loading in a solid*, J. Acoust. Soc. Am., **96**, 3776-3786, (1994).

- [34] K. JEZZINE, *Approche modale pour la simulation globale de contrôles non-destructifs par ondes élastiques guidées*, thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, ISSN 0429-3460, (2006).
- [35] V. BARONIAN, *Couplage des méthodes modale et éléments finis pour la diffraction des ondes élastiques guidées*, thèse de doctorat, École Polytechnique, (2009).
- [36] R. B. THOMPSON, *Physical principles of measurements with EMAT transducers*, Physical Acoustics, **19**, 157-200, (1990).
- [37] K. KAWASHIMA, *Quantitative calculation and measurement of longitudinal and transverse ultrasonic wave pulses in solid*, I.E.E.E. Trans. Son. Ultrason., **SU-31**, 83-94, (1984).
- [38] R. B. THOMPSON, *The relationship between radiating body forces and equivalent surface stresses: analysis and application to EMAT design*, J. Nondestr. Eval., **1**, 79-85, (1980).
- [39] D. PRÉMEL, C. REBOUD, S. CHATILLON, F. REVERDY, S. MAHAUT, *Simulation of the inspection of planar non-magnetic materials with electro magnetic acoustic transducers*, AIP Conf. Proceedings, **1430**, 963-970, (2012).
- [40] Y. H. PAO, V. VARATHARAJULU, *Huygens' principle, radiation conditions, and integral formulas for the scattering of elastic waves*, J. Acoust. Soc. Am., **59**, 1361-1371, (1976).
- [41] C. ROUGE, A. LHÉMERY, D. SÉGUR, *Modal solutions for SH guided waves radiated by an EMAT in a ferromagnetic plate*, J. Phys.: Conf. Series, **353**, 012014, (2012).
- [42] C. ROUGE, A. LHÉMERY, C. ARISTÉGUI, *EMAT generation of bulk forces in a ferromagnetic plate and their equivalent surface stresses*, accepted for publication in J. Phys.: Conf. Series, (2013).
- [43] D. PREMEL, E.A. FNAEICH, S. DJAFA, L. PICHON, A. TRILLON, B. BISIAUX, *Simulation of magnetic flux leakage: application to tube inspection*, AIP Conf. Proc., **1430**, 1918-1925, (2012).
- [44] C. B. SCRUBY, L. E. DRAIN, *Lasers ultrasonics: techniques and applications*, Adam Higler, New York, (1990).
- [45] L. R. F. ROSE, *Point source representation for laser-generated ultrasound*, J. Acoust. Soc. Am., **73**, 723-732, (1984).
- [46] N. GENGEMBRE, *Modélisation du champ ultrasonore rayonné dans un solide anisotrope et hétérogène par un traducteur immergé*, thèse de doctorat, Université Paris 7, (1999).
- [47] N. GENGEMBRE, A. LHÉMERY, *Pencil method in elastodynamics - Application to ultrasonic field computation*, Ultrasonics, **38**, 495-499, (2000).
- [48] V. AMORY, *Comportement complexe de source et simulation du champ ultrasonore des traducteurs multiéléments linéaires et matriciels au contact*, thèse de doctorat, Université de technologie de Compiègne, (2007).
- [49] A. LHÉMERY, *Modèles théoriques et études pratiques en imagerie ultrasonore large bande : applications au contrôle non destructif des matériaux*, habilitation à diriger des recherches, Université Paris VII Denis Diderot, (2000).
- [50] V. AMORY AND A. LHÉMERY, *Complex source and radiation behaviors of small elements of linear and matrix flexible phased-array transducers*, Rev. Prog. QNDE, **27**, 786-793, (2008).
- [51] www-civa.cea.fr

- [52] H. OGI, *Field dependence of coupling efficiency between electromagnetic field and ultrasonic bulk waves*, J. Appl. Phys., **82**, 3940-3949, (1997).
- [53] B. A. AULD, *Acoustics fields and waves in solids vol. 2*, Malabar, Florida: Krieger publishing company, (1973).
- [54] B. A. AULD, *General electromechanical reciprocity relations applied to the calculation of elastic wave scattering coefficients*, Wave Motion, **1**, 3-10, (1979).
- [55] H. PRIMAKOFF, L. L. FOLDY, *A general theory of passive linear electroacoustic transducers and the electroacoustic reciprocity theorem. II*, J. Acoust. Soc. Am., **19**, 50-58, (1947).
- [56] L. LANDAU, E. LIFSHITS, *On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies*, Ukr. J. Phys., **53**, 14-22, (2008) (reprinted from Phys. Zeitsch. der Sow., **8**, 153-169, (1935)).
- [57] B. AHMADI, H. CHAZAL, T. WAECKERLÉ, J. ROUDET, *Effet of anisotropy and direction of magnetization on complex permeability of ferromagnetic rectangular thin slabs*, IEEE Trans. Magn., **46**, 4001-4008, (2010).
- [58] T. BAUDIN, *Analyse EBSD – Principe et cartographies d'orientations*, Techniques de l'Ingénieur, M4138, (2010).

ANNEXE : MODÈLE DE RAYONNEMENT TRANSITOIRE

APPROCHÉ D'UNE SOURCE AU CONTACT

Cette annexe a pour but de présenter la méthode de calcul du tenseur de Green apparaissant dans l'équation (4.2) :

$$u_{2n}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_0 \iint_S G_{in}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) T_i(\mathbf{r}_0, t_0) dS(\mathbf{r}_0). \quad (4.2)$$

Le tenseur de Green $\mathbf{G}$ recherché correspond à la réponse impulsionnelle d'une source ponctuelle située à la surface du milieu étudié. Le champ rayonné en tout point d'un solide par une source ponctuelle unidirectionnelle placée à sa surface est déterminé en considérant le problème réciproque d'une source ultrasonore au point de calcul. Dans le cas réciproque, les ondes émises se propagent dans le solide et se réfléchissent sur la surface du solide avec ou sans conversion de modes. Si les sources sont situées suffisamment loin de l'interface, typiquement quelques longueurs d'onde, on peut utiliser une approximation consistant à traiter la réflexion d'une onde sphérique comme s'il s'agissait localement d'une onde plane. Le calcul du champ de déplacement généré par la source au contact est donc valable pour des points d'observation situés à quelques longueurs d'onde de cette source. Les différents types de réflexion à l'interface sont représentés sur la Figure A.1.

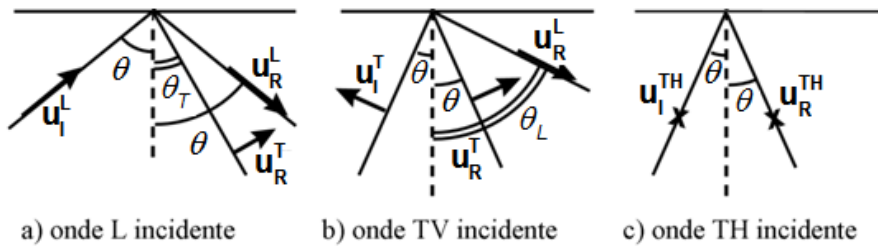


Figure A.1. Représentation de la réflexion à une interface d'une onde plane incidente de déplacement $\mathbf{u}_i$ en une onde réfléchie de déplacement $\mathbf{u}_r$.

L'onde incidente de champ de déplacement $\mathbf{u}_i$ est constituée successivement d'une onde de compression, notée L, d'une onde de cisaillement, notée T et d'une onde transverse horizontale, notée TH. L'onde réfléchie de champ de déplacement $\mathbf{u}_r$ se compose en onde L et T dans les deux premiers cas et uniquement en onde TH dans le dernier cas. L'angle de réflexion de l'onde incidente L en une onde réfléchie T, noté θ_T , et l'angle de réflexion de l'onde incidente T en une onde réfléchie L, noté θ_L , sont respectivement donnés par :

$$\sin(\theta_T) = \sin(\theta) \frac{c_T}{c_L}, \quad (\text{A.1})$$

et

$$\sin(\theta_L) = \sin(\theta) \frac{c_L}{c_T}. \quad (\text{A.2})$$

où c_T et c_L désignent respectivement les célérités [m.s^{-1}] des ondes transversales et longitudinales dans le milieu étudié. Si les coordonnées des points d'observation sont définies dans un repère sphérique comme représenté Figure 4.1, et si le point source (excitation impulsionnelle $t_0 = 0$) est placé à l'origine, alors les différentes composantes du tenseur de Green $\mathbf{G}$ sont [49] :

$$\forall \theta \quad G_{xr}(r, \theta, t) = \frac{A_L^x(\theta, \phi)}{4\pi r \rho c_L^2} \delta(t - \tau_L), \quad (\text{A.3a})$$

$$\forall \theta < \theta_c \quad G_{x\theta}(r, \theta, t) = \frac{A_T^x(\theta, \phi)}{4\pi r \rho c_T^2} \delta(t - \tau_T), \quad (\text{A.3b})$$

$$\forall \theta > \theta_c \quad G_{x\theta}(r, \theta, t) = \frac{\delta(t - \tau_T)}{4\pi r \rho c_T^2} \Re(A_T^x(\theta, \phi)) - \frac{1}{4r \rho c_T^2 \pi^2 (t - \tau_T)} \Im(A_T^x(\theta, \phi)), \quad (\text{A.3c})$$

$$\forall \theta \quad G_{x\phi}(r, \theta, t) = \frac{A_{TH}^x(\theta, \phi)}{4\pi r \rho c_T^2} \delta(t - \tau_T), \quad (\text{A.3d})$$

$$\forall \theta \quad G_{yr}(r, \theta, t) = \frac{A_L^y(\theta, \phi)}{4\pi r \rho c_L^2} \delta(t - \tau_L), \quad (\text{A.3e})$$

$$\forall \theta < \theta_c \quad G_{y\theta}(r, \theta, t) = \frac{A_T^y(\theta, \phi)}{4\pi r \rho c_T^2} \delta(t - \tau_T), \quad (\text{A.3f})$$

$$\forall \theta > \theta_c \quad G_{y\theta}(r, \theta, t) = \frac{\delta(t - \tau_T)}{4\pi r \rho c_T^2} \Re(A_T^y(\theta, \phi)) - \frac{1}{4r \rho c_T^2 \pi^2 (t - \tau_T)} \Im(A_T^y(\theta, \phi)), \quad (\text{A.3g})$$

$$\forall \theta \quad G_{y\phi}(r, \theta, t) = \frac{A_{TH}^y(\theta, \phi)}{4\pi r \rho c_T^2} \delta(t - \tau_T), \quad (\text{A.3h})$$

$$\forall \theta \quad G_{zr}(r, \theta, t) = \frac{A_L^z(\theta)}{4\pi r \rho c_L^2} \delta(t - \tau_L), \quad (\text{A.3i})$$

$$\forall \theta < \theta_c \quad G_{z\theta}(r, \theta, t) = \frac{A_T^z(\theta)}{4\pi r \rho c_T^2} \delta(t - \tau_T), \quad (\text{A.3j})$$

$$\forall \theta > \theta_c \quad G_{z\theta}(r, \theta, t) = \frac{\delta(t - \tau_T)}{4\pi r \rho c_T^2} \Re(A_T^z(\theta)) - \frac{1}{4r \rho c_T^2 \pi^2 (t - \tau_T)} \Im(A_T^z(\theta)), \quad (\text{A.3k})$$

$$\forall \theta \quad G_{z\phi}(r, \theta, t) = 0, \quad (\text{A.3l})$$

où :

$$A_L^x(\theta, \phi) = (\sin \theta + R_{LL} \sin \theta + R_{LT} \cos \theta) \cos \phi, \quad (\text{A.4a})$$

$$A_T^x(\theta, \phi) = (-\cos \theta + R_{TT} \cos \theta + R_{TL} \sin \theta_L) \cos \phi, \quad (\text{A.4b})$$

$$A_{TH}^x(\theta, \phi) = (1 + R_{THH}) \sin \phi, \quad (\text{A.4c})$$

$$A_L^y(\theta, \phi) = (\sin \theta + R_{LL} \sin \theta + R_{LT} \cos \theta_T) \sin \phi, \quad (\text{A.4d})$$

$$A_T^y(\theta, \phi) = (-\cos \theta + R_{TT} \cos \theta + R_{TL} \sin \theta_L) \sin \phi, \quad (\text{A.4e})$$

$$A_{TH}^y(\theta, \phi) = -(1 + R_{THH}) \cos \phi, \quad (\text{A.4f})$$

$$A_L^z(\theta_0) = \cos \theta - R_{LL} \cos \theta + R_{LT} \sin \theta_T, \quad (\text{A.4g})$$

$$A_T^z(\theta) = \sin \theta + R_{TT} \sin \theta - R_{TL} \cos \theta_L. \quad (\text{A.4h})$$

Dans les équations (A.3), $\tau_L = r/c_L$ et $\tau_T = r/c_T$ désignent le temps [s] respectivement mis par l'onde L et l'onde T pour parcourir la distance entre le point source et le point de calcul, l'angle critique θ_c est tel que :

$$\sin(\theta_c) = \frac{c_T}{c_L}, \quad (\text{A.5})$$

et la masse volumique du milieu étudié est notée ρ [kg.m⁻³]. L'angle critique θ_c intervient dans les conversions de modes lors de la réfraction d'ondes élastiques à une interface. La méthode nécessite alors un traitement particulier pour des angles d'observation supérieurs à cet angle critique. Passé celui-ci, certaines composantes font intervenir des coefficients de réflexion R_{TT} et R_{TL} à valeurs complexes, traduisant le fait que l'onde T est convertie en une onde L se propageant le long de la surface (et évanescence suivant $\mathbf{z}$). Lorsque θ atteint la valeur de l'angle critique, l'onde L réfléchit se propage parallèlement à la surface, i.e. avec un angle $\theta_L = \pi/2$. Si l'angle θ croît encore, $\cos(\theta_L)$ devient imaginaire pur et $\sin(\theta_L)$ bien que réel pur, atteint des valeurs supérieures à un. On conserve la solution positive qui conduit à une onde évanescence suivant la direction $\mathbf{z}$. Ainsi, alors que les expressions pour l'onde L, équations (A.3a) (A.3e) et (A.3i), restent inchangées lorsque $\theta > \theta_c$ celles pour l'onde T, équations (A.3b-c) (A.3f-g) et (A.3j-k), nécessitent un traitement spécifique.

Le modèle présenté généralise et unifie les résultats obtenus par Miller et Pursey [A1] et Cherry [A2] dans le domaine temporel. Les directivités des ondes longitudinales et transversales établies à l'aide des équations (A.3) dans le cas d'une force normale et dans le cas d'une force tangentielle appliquée à un demi-espace sont respectivement formellement identiques aux directivités données par Miller et Pursey [A1] et Cherry [A2] comme représenté sur les Figures A.2 et A.3 [48].

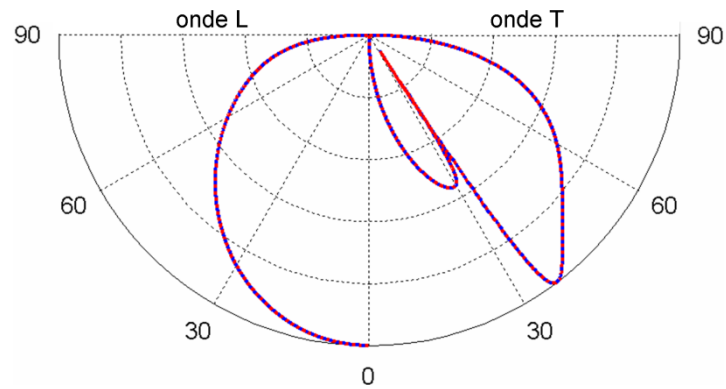


Figure A.2. Diagramme de directivité en module du déplacement des ondes L (à gauche, amplifié de 8.4 dB) et des ondes T (à droite) pour une source ponctuelle de force normale : en bleu d'après Miller et Pursey [A1] et en pointillés rouge d'après les équations A.3.

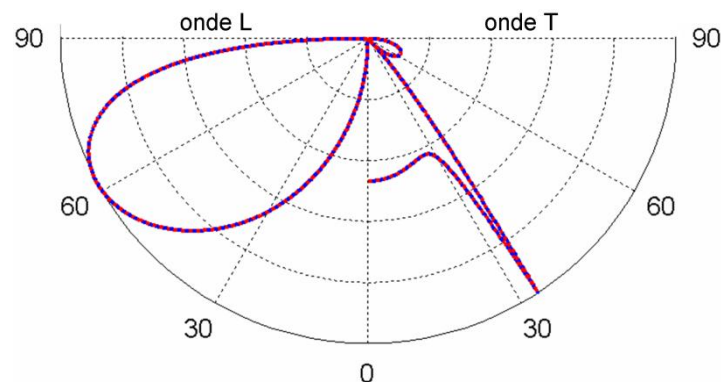


Figure A.3. Diagramme de directivité en module du déplacement des ondes L (à gauche, amplifié de 18.7 dB) et des ondes T (à droite) pour une source ponctuelle de force normale : en bleu d'après Cherry [A2] et en pointillés rouge d'après les équations A.3.

Finalement, une solution approchée complète au problème de Lamb, et par suite, au problème d'une source de géométrie quelconque au contact est à disposition.

- [A1] G. F. MILLER, H. PURSEY, *The field and radiation impedance of mechanical radiators on the free surface of a semi-infinite isotropic solid*, Philos. Trans. R. Soc., **A223**, 521-541, (1954).
- [A2] J. T. CHERRY, *The azimuthal and polar radiation patterns obtained from a horizontal stress applied at the surface of an elastic half space*, Bull. Seismol. Soc. Am. , **52**, 27-36, (1962).

COMMUNICATIONS

Conférences internationales avec actes et comité de lecture

AFPAC 2011

C. Rouge, A. Lhémercy and D. Ségur, "Modal solutions for SH guided waves radiated by an EMAT in a ferromagnetic plate," *J. Phys.: Conf. Series.* **353**, 012014 (2012).

AFPAC 2012

C. Rouge, A. Lhémercy and C. Aristégui, "EMAT generation of bulk forces in a ferromagnetic plate and their equivalent surface stresses," acceptée pour publication dans *J. Phys.: Conf. Series.* (2014).

AFPAC 2013

C. Rouge, A. Lhémercy and C. Aristégui, "Frequency spectra of magnetostrictive and Lorentz forces generated in ferromagnetic materials by a CW excited EMAT," acceptée pour publication dans *J. Phys.: Conf. Series.* (2014).

Conférences internationales avec actes

13th International Symposium on Nondestructive Characterization of Materials

C. Rouge, A. Lhémercy, Christophe Aristégui and Henri Walaszec, "A model for the ultrasonic field radiated by an Electro-Magnetic Acoustic Transducer in a ferromagnetic solid," in Proceedings of the 13th International Symposium on Nondestructive Characterization of Materials, (Université du Maine, Le Mans, 2013), (2013).

QNDE 2013

C. Rouge, A. Lhémercy, Christophe Aristégui and Henri Walaszec, "Calculation of Ultrasonic Fields Radiated in a Ferromagnetic Medium by an EMAT of Arbitrary Bias Field Driven by a Current of Arbitrary Intensity," acceptée pour publication dans *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, (2013).

Publication avec revue de lecture

C. Rouge, A. Lhémercy and D. Ségur, "Transformation of body forces localized near the surface of a half-space into equivalent surface stresses," *J. Acoust. Soc. Am.*, **134** (4), 2639-2646 (2013).

Modélisation du rayonnement ultrasonore par un transducteur EMAT dans une pièce ferromagnétique

Le but de la thèse est de modéliser la génération d'ondes élastiques ultrasonores émises par EMATs dans une pièce ferromagnétique, modélisation appliquée au domaine du contrôle non destructif (CND). Les transducteurs EMATs combinent deux physiques différentes : électromagnétisme et élastodynamique. L'enjeu est d'intégrer dans la plateforme de simulation CIVA, dédiée notamment aux CND par courant de Foucault et par ultrasons, les éléments de modélisation inhérents à la problématique multi-physique posée. Ces éléments sont multiples et concernent premièrement la modélisation des forces électromagnétiques créées par un EMAT : la force de Lorentz, existant dans tous milieux conducteurs, et les forces d'aimantation et de magnétostriction, spécifiques aux milieux ferromagnétiques. Deuxièmement, la modélisation proposée prend aussi en compte le phénomène de création d'harmoniques, phénomène dû aux différentes forces et traduisant le fait que les fréquences de l'onde ultrasonore émise peuvent être des harmoniques des fréquences du signal d'excitation de l'EMAT. Le modèle de forces et de création d'harmoniques permet de modéliser des situations de contrôle non prises en compte par les modèles de la littérature, notamment lorsque les champs statiques créés par l'EMAT sont faibles ou lorsque le courant d'excitation possède une forte intensité. Enfin, les forces électromagnétiques sont transformées en contraintes surfaciques équivalentes pour correspondre au formalisme des données d'entrée des modèles de rayonnement des ondes élastiques implémentés dans CIVA. L'outil informatique développé permet donc de traiter toute configuration et condition d'utilisation des EMATs, constituant un outil d'optimisation de leur conception. Les caractéristiques électromagnétiques de différents matériaux, données par l'expérience, sont utilisées pour mener diverses études paramétriques.

Mots clés : EMAT (ElectroMagnetic Acoustic Transducer), ferromagnétisme, CND (Contrôle Non Destructif)

Modelling of the ultrasonic field radiated by an EMAT transducer into a ferromagnetic media

The present study aims at modelling the ultrasonic wave generation by EMATs into a ferromagnetic part in the context of non-destructive testing (NDT). Wave radiation by EMATs combines two different kinds of physical phenomena: electromagnetism and elastodynamics. The issue is to implement into the NDT simulation platform CIVA, dedicated in particular to eddy current and ultrasonic NDT, the models developed in the present work. These developments are of various nature and firstly concern the modelling of the electromagnetic forces created by an EMAT: the Lorentz force, existing in any conductive media, and the magnetization and the magnetostriction forces, which add up when the medium is further ferromagnetic. Secondly, the proposed models take into account the generation of harmonics due to the three forces. Ultrasonic frequencies of the generated ultrasonic waves can be harmonics of the frequencies of the excitation electrical signal. The model of force and harmonic generation allows us to deal with configurations not treated in the literature, namely, when the static field created by the EMAT is low or when the excitation current intensity is high. Finally, the three electromagnetic forces are transformed into equivalent surface stresses readily usable as entries of an existing model of ultrasonic wave radiation already implemented in CIVA. Thus, the combination of all these models and their translation as a numerical tool running within the CIVA platform can be used for optimizing the design of EMAT. Experimentally measured electromagnetic characteristics of different materials are used to perform various parametric studies.

Keywords: EMAT (ElectroMagnetic Acoustic Transducer), ferromagnetism, NDT (Non Destructive Testing)