



**HAL**  
open science

# Étude des interactions élasto-acoustiques dans des métamatériaux formés d'inclusions résonnantes réparties aléatoirement

Guillaume Lepert

► **To cite this version:**

Guillaume Lepert. Étude des interactions élasto-acoustiques dans des métamatériaux formés d'inclusions résonnantes réparties aléatoirement. Mécanique [physics]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2013. Français. NNT: 2013BOR14936 . tel-00946591

**HAL Id: tel-00946591**

**<https://theses.hal.science/tel-00946591>**

Submitted on 13 Feb 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée à

## L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par **Guillaume LEPERT**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Mécanique

---

### Étude des interactions élasto-acoustiques dans des métamatériaux formés d'inclusions résonnantes réparties aléatoirement

---

Soutenue le 11 décembre 2013

Après avis de :

<b>M.</b>	V. Gibiat, Professeur, Laboratoire PHASE, Université Toulouse III	<b>Rapporteur</b>
<b>M<sup>me</sup></b>	A.-C. Hladky, Directeur de recherche CNRS, ISEN/IEMN, Lille	<b>Rapporteur</b>

Devant la commission d'examen formée de :

<b>M.</b>	C. Aristégui, Professeur, I2M, Université Bordeaux 1	<b>Directeur de thèse</b>
<b>M.</b>	C. Audoly, Directeur de recherche, DCNS Research/CEMIS, Toulon	
<b>M.</b>	T. Brunet, Maître de conférences, Institut Polytechnique de Bordeaux	<b>Invité</b>
<b>M.</b>	V. Gibiat, Professeur, Laboratoire PHASE, Université Toulouse III	
<b>M.</b>	S. Gransart, Ingénieur DGA, Bagneux	
<b>M<sup>me</sup></b>	A.-C. Hladky, Directeur de recherche CNRS, ISEN/IEMN, Lille	
<b>M.</b>	O. Mondain-Monval, Professeur, CRPP, Université Bordeaux 1	
<b>M.</b>	O. Poncelet, Chargé de recherche CNRS, I2M, Bordeaux	<b>Co-directeur de thèse</b>



# Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du département d'Acoustique Physique (APY) de l'Institut de Mécanique et d'Ingénierie (I2M) de Bordeaux. Je tiens donc à remercier Éric Arquis, directeur du laboratoire, de m'avoir accueilli au sein de son établissement. Je remercie également Marc Deschamp et Olivier Poncelet, ancien et actuel directeur du département APY.

Je remercie Vincent Gibiat (Professeur des Universités - Toulouse) et Anne-Christine Hladky (Directeur de recherche CNRS - Lille) d'avoir accepté de rapporter ce manuscrit. Merci également à Olivier Mondain-Monval (Professeur des Universités - Bordeaux) d'avoir présidé le jury de thèse.

Je remercie tout particulièrement Christophe Aristégui, directeur de thèse, et Olivier Poncelet, co-directeur de thèse. Leur soutien et leur rigueur dans le travail m'ont beaucoup aidé pendant ces trois années de thèse et m'ont permis de soutenir de manière convenable. Merci également à Thomas Brunet pour son aide précieuse sur les développements expérimentaux.

Je tiens également à remercier tous les employés de DCNS que j'ai pu croiser pendant mes trois années de thèse, Patrick Parneix et Mathieu Priser (Nantes), Christian Audoly (Toulon), Marie-Hélène Billot (Paris), ainsi que tous ceux qui m'ont aidé dans mon travail de thèse.

Je remercie également l'ensemble des enseignants-chercheurs, maîtres de conférences, ingénieurs de recherche et tous les personnels du département APY avec qui j'ai pu échanger pendant ces trois années.

Mes remerciements s'adressent bien entendu à tous les thésards et post-docs anciens ou actuels du laboratoire. Merci donc à Jérôme, Alban, Philippe, Édith, Macha, Anton et Karim dans le bureau, mais aussi à tous les occupants du rez-de-chaussée du bâtiment A4.

Enfin, je remercie tous mes amis qui m'ont soutenu pendant ma thèse et qui ont joué un rôle primordial dans sa concrétisation, Louis, Fayry, Chacha. Merci également à Magali, pour avoir toujours été sur la même longueur d'onde que moi.



À mon grand-père...



# Table des matières

<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE .....</b>	<b>1</b>
<b>1 COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE MATÉRIAUX À STRUCTURE ALÉATOIRE ..</b>	<b>7</b>
1.1 Généralités sur l'acoustique.....	8
1.2 Diffusion acoustique par une sphère viscoélastique dans une matrice viscoélastique .....	11
1.2.1 Position du problème .....	11
1.2.2 Diffuseur homogène sphérique.....	12
1.2.2.1 Onde incidente longitudinale.....	13
1.2.2.2 Onde incidente transversale .....	14
1.2.3 Sphère de type noyau-coque .....	16
1.3 Homogénéisation d'un milieu à structure aléatoire.....	17
1.3.1 Modèles de diffusion simple en limite quasi-statique.....	19
1.3.2 Modèles de diffusion simple en dynamique .....	21
1.3.3 Modèles de diffusion multiple .....	22
1.4 Réponse acoustique d'une plaque homogénéisée .....	24
1.4.1 Description des phénomènes aux interfaces .....	24
1.4.2 Propagation dans la plaque.....	26
1.5 Recherche des paramètres optimaux du milieu à structure aléatoire.....	27
1.5.1 Paramètres influents.....	27
1.5.2 Propriétés recherchées.....	28
1.5.3 Configurations avec des sphères simples .....	29
1.5.3.1 Sphère molle.....	30
1.5.3.2 Sphère massique .....	34
1.5.4 Recherche de la configuration optimale.....	38
1.5.4.1 Influence du rayon des inclusions .....	38
1.5.4.2 Influence de la fraction volumique.....	39
1.5.4.3 Influence de la célérité des ondes longitudinales dans les phases en présence .....	40
1.5.4.4 Influence de la célérité des ondes transversales dans la matrice .....	42
1.5.4.5 Influence de la masse volumique des inclusions .....	44
1.5.4.6 Influence de l'amortissement de la matrice.....	46
1.5.4.7 Synthèse .....	47

1.5.5	Configurations avec des sphères de type « noyau-coque ».....	47
1.5.6	Recherche de la configuration optimale.....	52
1.5.6.1	Influence des propriétés du cœur.....	52
1.5.6.2	Influence des propriétés de la coque.....	54
1.5.6.3	Synthèse.....	57
<b>1.6</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>57</b>

## **2 DIMENSIONNEMENT DE PLAQUES HÉTÉROGÈNES ET CARACTÉRISATION DE LEURS PROPRIÉTÉS ACOUSTIQUES..... 61**

<b>2.1</b>	<b>État de l'art des matériaux pour la discrétion acoustique .....</b>	<b>62</b>
2.1.1	Applications des matériaux furtifs.....	62
2.1.2	Technologies actuelles et leurs limitations.....	63
2.1.2.1	Matériaux homogènes.....	63
2.1.2.2	Matériaux micro-inclusionnaires.....	63
2.1.2.3	Matériaux localement résonnants.....	64
<b>2.2</b>	<b>Design de matériaux localement résonnants .....</b>	<b>65</b>
2.2.1	Dimensionnement des matériaux.....	66
2.2.1.1	Développements intermédiaires .....	66
2.2.1.2	Matériaux sélectionnés .....	67
2.2.2	Caractérisation des constituants .....	68
2.2.2.1	Masse volumique .....	68
2.2.2.2	Propriétés en cisaillement de la matrice mesurées à l'aide d'un viscoanalyseur.....	70
2.2.2.3	Propriétés des ondes longitudinales dans la matrice.....	72
2.2.2.4	Propriétés des ondes transversales dans la matrice .....	72
2.2.3	Caractérisation optique des matériaux composites.....	74
2.2.3.1	Qualité des échantillons.....	74
2.2.3.2	Morphologie.....	74
2.2.3.3	Granulométrie .....	76
<b>2.3</b>	<b>Réponse acoustique des matériaux aléatoires localement résonnants .....</b>	<b>78</b>
2.3.1	Dispositif expérimental de caractérisation ultrasonore .....	78
2.3.2	Spectro-interférométrie ultrasonore.....	80
2.3.3	Application aux échantillons sélectionnés .....	81
2.3.4	Comportement sous incidence oblique .....	87

2.4	Inversion des propriétés effectives de matériaux aléatoires.....	91
2.4.1	Configuration expérimentale .....	92
2.4.2	Identification des paramètres effectifs à partir des réflexion / transmission totales .....	94
2.4.3	Identification des paramètres effectifs à partir des réflexion / transmission partielles.....	95
2.4.4	Exemple synthétique d'application de la méthode - étude de sensibilité.....	96
2.4.5	Inversion des propriétés effectives de l'échantillon contenant 2 % de billes de plomb ....	102
2.5	Conclusion.....	104
<b>CONCLUSION GÉNÉRALE .....</b>		<b>105</b>
<b>ANNEXES .....</b>		<b>109</b>
<b>A CALCUL DES COEFFICIENTS MODAUX.....</b>		<b>111</b>
A.1	Champ de déplacements et tenseur de contraintes en fonction des potentiels des champs.	111
A.2	Diffusion d'une sphère simple élastique dans une matrice élastique.....	111
A.2.1	Onde incidente longitudinale.....	111
A.2.1	Onde incidente transversale.....	112
A.3	Diffusion d'une sphère « noyau-coque » dans une matrice élastique .....	114
<b>B EXTRACTION DU MODULE ET DE LA PHASE DU SPECTRE D'UN SIGNAL EXPÉRIMENTAL.....</b>		<b>117</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>		<b>121</b>



# Introduction générale

Le travail présenté dans cette thèse a été financé par la DGA (Direction Générale de l'Armement) et DCNS, groupe industriel spécialisé dans la conception et dans la réalisation de navires de guerre, principalement pour la marine nationale française. DCNS se positionne également de plus en plus sur le domaine des énergies renouvelables. Pour assurer l'efficacité opérationnelle des sous-marins, la réduction de leurs émissions acoustiques est d'un intérêt majeur. Ces émissions proviennent soit de la structure elle-même (sources acoustiques liées à la machinerie interne ou aux moteurs), soit de la réflexion sur la coque d'ondes sonar externes. Les conceptions actuelles des sous-marins limitent efficacement les émissions acoustiques propres au navire. Une stratégie pour s'affranchir de la détection par sonar consiste à recouvrir certaines parties de la structure, de tuiles dites anéchoïques, absorbant les ondes sonar et constituées principalement d'un matériau viscoélastique contenant des cavités d'air.

Par ailleurs, a émergé récemment un engouement scientifique important pour les métamatériaux acoustiques, présentant notamment une forte absorption des ondes dans des gammes de fréquences spécifiques que l'on peut contrôler en amont de la fabrication. Les niveaux d'absorption recherchés permettraient de réduire l'épaisseur des revêtements. La question qui se pose est de savoir si ces matériaux constituent une alternative aux matériaux anéchoïques déjà utilisés.

Les métamatériaux sont des matériaux aux propriétés acoustiques extraordinaires, qu'un matériau homogène ne peut atteindre. Ce sont des matériaux « de pensée » que l'on cherche à synthétiser, en structurant la matière à une certaine échelle pour obtenir le comportement extraordinaire escompté à l'échelle supérieure. Veselago [1] est le premier à avoir imaginé un métamatériau dans le domaine de l'électromagnétisme, et à y avoir étudié la propagation des ondes lumineuses. Il a supposé l'existence d'un matériau dont deux de ces propriétés optiques (permittivité et perméabilité) sont négatives, alors qu'elles ne le sont pas simultanément pour tous les matériaux homogènes. Cette particularité impacte la propagation des ondes électromagnétiques, et en particulier la réfraction de la lumière à l'interface avec un autre milieu (réfraction négative). L'électromagnétisme et l'acoustique répondant à des équations différentielles similaires, le concept de métamatériau a été transposé par analogie dans le

domaine de l'acoustique par plusieurs auteurs, dont Sánchez-Dehesa & Torrent [2] et Li & Chan [3]. Ces auteurs ont imaginé des métamatériaux pour lesquels la réfraction des ondes acoustiques à une interface avec un matériau homogène classique est négative, ou qui possèdent un amortissement largement supérieur aux matériaux classiques. Il existe deux principales stratégies pour synthétiser un tel métamatériau acoustique, qui consistent à incorporer dans une matrice homogène des inclusions diffusantes réparties de manière périodique ou aléatoire.

Une structuration périodique de la matière (par insertion dans une matrice d'inclusions réparties périodiquement) permet, à l'aide d'effets de réseau, d'obtenir des matériaux où certaines fréquences ne se propagent pas (bandes d'arrêt, indice acoustique imaginaire pur), des matériaux complètement transparents (bandes passantes, indice acoustique réel) ou encore des matériaux à indice acoustique apparent négatif (réfraction négative aux interfaces). Ces matériaux sont appelés cristaux phononiques.

Pour mettre en évidence l'effet des diffuseurs (ou inclusions résonnantes), on s'affranchit des effets de réseau en répartissant aléatoirement les inclusions. Ce sont des processus de diffusion multiple des ondes auscultatrices en présence de la population aléatoire qui entrent alors en jeu. Dans ce cas, les propriétés de diffusion intrinsèques des inclusions impactent fortement les propriétés macroscopiques du milieu aléatoire. Si les contrastes de propriétés acoustiques entre la matrice et les inclusions sont suffisants et que les premières résonances apparaissent à basses fréquences, ce type de milieu rentre dans la classe des matériaux dits localement résonnants. La diffusion est le produit de l'interaction entre une onde acoustique et les inclusions, et est maximale pour certaines fréquences dites de résonance, ce qui entraîne généralement des maxima dans le spectre d'amortissement du matériau aléatoire. La fréquence d'apparition des phénomènes est contrôlée par la taille des inclusions et par la nature des constituants. Ces matériaux localement résonnants présentent donc un fort intérêt pour DCNS. La question d'une rupture technologique est posée.

La littérature concernant la modélisation de la propagation des ondes dans les matériaux localement résonnants est très large [4] [5] [6] [7] [8] [9] [10] [11], mais peu d'études expérimentales [12] [13] [14] ont été menées. Il apparaît donc important de mettre en évidence expérimentalement le comportement résonnant de telles structures et de confirmer ainsi les effets des résonances sur les propriétés acoustiques du matériau aléatoire.

L'objectif fixé pour cette thèse consiste à observer expérimentalement le comportement acoustique résonnant de matériaux à structure aléatoire.

Dans un premier chapitre, nous présentons différentes modélisations du comportement acoustique des matériaux à structure aléatoire, et nous choisissons de travailler dans le cadre de la théorie de Waterman & Truell, nous donnant accès à l'ensemble des propriétés

effectives des matériaux hétérogènes. Par la suite, nous étudions l'influence des propriétés des constituants du matériau aléatoire sur son comportement acoustique via une étude paramétrique, ceci dans le but de dimensionner des structures présentant des phénomènes de type métamatériaux, caractérisés par les résonances des inclusions. Nous y mettons en évidence deux configurations exhibant chacune respectivement à basses fréquences une résonance monopolaire des inclusions affectant directement la compressibilité macroscopique du milieu, et une résonance dipolaire de type inertiel impactant quant à elle les propriétés de masse effective. Enfin, une troisième configuration couplant les deux résonances dans une gamme de fréquences réduite.

Par la suite, de façon plus pratique et pragmatique, le second chapitre se consacre au design, à la fabrication d'échantillons de matériaux aléatoires et à l'observation de leur réponse acoustique. Dans un premier temps, un état de l'art des matériaux pour la furtivité acoustique est réalisé, et leurs limites actuelles y sont présentées. Ensuite, nous dimensionnons des échantillons de matériaux aléatoires, en prenant en compte les résultats de l'étude paramétrique, et en tenant compte de contraintes liées à la fois au dispositif expérimental et à la faisabilité de fabrication de tels matériaux. Plusieurs échantillons contenant des inclusions sphériques de deux types (polystyrène expansé et plomb présentant respectivement une résonance monopolaire et une résonance dipolaire basses fréquences) sont ainsi fabriqués pour des concentrations différentes. Leurs propriétés structurales (nature de la répartition des inclusions, fraction volumique) ainsi que les propriétés acoustiques de leurs constituants sont caractérisées. Leur réponse acoustique est ensuite observée à l'aide d'un dispositif classique de caractérisation ultrasonore par réflexion / transmission dans un fluide couplant afin de mettre en évidence le caractère résonnant de la structure. Nous verrons que ces résonances sont identifiées aux fréquences prédites par la théorie de Waterman & Truell. Ces expérimentations sont effectuées sous incidence normale. Nous voyons ensuite l'impact théorique d'un angle d'incidence non nul sur la réponse acoustique des échantillons. Nous étudions dans une dernière partie le problème inverse, consistant à extraire, à partir des mesures en réflexion et en transmission des échantillons immergés, ses propriétés effectives, sans *a priori* sur leur évolution fréquentielle. Une procédure expérimentale originale permettant la mesure des coefficients de réflexion et de transmission des échantillons est présentée. Une étude de sensibilité de la méthode d'inversion aux bruits éventuels de mesure (bruit électronique et bruit acoustique dû à la diffusion incohérente des ondes), et à la bonne connaissance de certains paramètres expérimentaux (célérité des ondes dans l'eau, épaisseur des échantillons) est effectuée, exhibant ainsi la robustesse de l'identification du nombre d'onde effectif, et les difficultés de la méthode à prédire de manière stable la masse volumique dynamique.



# Chapitre 1

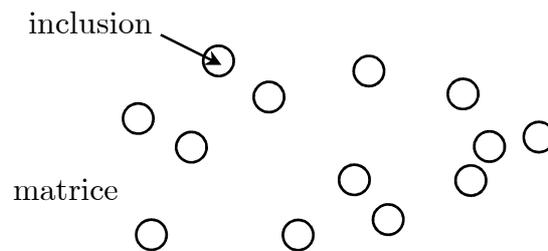
## 1 COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE MATÉRIAUX À STRUCTURE ALÉATOIRE ..7

1.1	Généralités sur l'acoustique.....	8
1.2	Diffusion acoustique par une sphère viscoélastique dans une matrice viscoélastique .....	11
1.2.1	Position du problème .....	11
1.2.2	Diffuseur homogène sphérique.....	12
1.2.2.1	Onde incidente longitudinale.....	13
1.2.2.2	Onde incidente transversale .....	14
1.2.3	Sphère de type noyau-coque .....	16
1.3	Homogénéisation d'un milieu à structure aléatoire.....	17
1.3.1	Modèles de diffusion simple en limite quasi-statique.....	19
1.3.2	Modèles de diffusion simple en dynamique .....	21
1.3.3	Modèles de diffusion multiple .....	22
1.4	Réponse acoustique d'une plaque homogénéisée .....	24
1.4.1	Description des phénomènes aux interfaces .....	24
1.4.2	Propagation dans la plaque.....	26
1.5	Recherche des paramètres optimaux du milieu à structure aléatoire.....	27
1.5.1	Paramètres influents.....	27
1.5.2	Propriétés recherchées.....	28
1.5.3	Configurations avec des sphères simples .....	29
1.5.3.1	Sphère molle.....	30
1.5.3.2	Sphère massique .....	34
1.5.4	Recherche de la configuration optimale.....	38
1.5.4.1	Influence du rayon des inclusions .....	38
1.5.4.2	Influence de la fraction volumique.....	39
1.5.4.3	Influence de la célérité des ondes longitudinales dans les phases en présence .....	40
1.5.4.4	Influence de la célérité des ondes transversales dans la matrice .....	42
1.5.4.5	Influence de la masse volumique des inclusions .....	44
1.5.4.6	Influence de l'amortissement de la matrice.....	46
1.5.4.7	Synthèse .....	47

1.5.5	Configurations avec des sphères de type « noyau-coque ».....	47
1.5.6	Recherche de la configuration optimale.....	52
1.5.6.1	Influence des propriétés du cœur.....	52
1.5.6.2	Influence des propriétés de la coque .....	54
1.5.6.3	Synthèse.....	57
1.6	Conclusion.....	57

# 1 Comportement dynamique de matériaux à structure aléatoire

Ce premier chapitre est consacré à l'étude théorique du comportement dynamique de matériaux, dits « aléatoires », car composés d'une matrice dans laquelle sont réparties uniformément et aléatoirement des inclusions identiques (aussi appelés diffuseurs) (figure 1-1).



**figure 1-1 : milieu contenant une matrice et une répartition uniforme et aléatoire d'inclusions.**

La littérature concernant la description de la propagation des ondes mécaniques dans un milieu à structure aléatoire (ou matériau aléatoire) est très fournie. Ce fort intérêt pour ce type de structure s'explique par les nombreuses applications dans les domaines de la sismique [7] (croûte terrestre multifissurée), de l'imagerie médicale [5] (bulles de caoutchouc induites lors de traitement) ou de l'agro-alimentaire [13] [14] (émulsions). Une revue non exhaustive de différents modèles existants est ainsi proposée dans ce chapitre, considérant soit les propriétés des ondes cohérentes se propageant dans le matériau aléatoire, soit celles du milieu homogène équivalent supportant la propagation. Le champ cohérent est la partie du champ acoustique total qui résiste au désordre. Il s'obtient par une moyenne sur les configurations d'inclusions.

Les matériaux composant le milieu aléatoire (la matrice et les inclusions) sont homogènes et isotropes. Leur comportement mécanique est classiquement caractérisé par leur masse volumique  $\rho$ , et par leurs coefficients de Lamé  $(\lambda, \mu)$ . La concentration des inclusions

sphériques de rayon  $a$  est définie par le nombre d'inclusions  $n_0$  par unité de volume. La fraction volumique  $\phi$  associée satisfait alors la relation :

$$\phi = \frac{4}{3} \pi a^3 n_0. \quad (1-1)$$

Dans la suite, nous étudions la propagation d'ondes cohérentes dans de telles structures, sachant qu'elle est régie par les propriétés mécaniques des deux constituants du milieu aléatoire ( $\rho$ ,  $\lambda$  et  $\mu$ ), ainsi que par la structure du matériau ( $\phi, a$ ).

Le chapitre se décompose en plusieurs parties. Premièrement, nous présentons quelques généralités sur l'acoustique. Puis nous étudions la réponse acoustique d'un seul diffuseur noyé dans la matrice. Nous verrons que la plupart des modélisations existant dans la littérature considèrent le comportement acoustique d'une seule inclusion pour prédire le comportement macroscopique du milieu aléatoire. Une revue des modèles d'homogénéisation existants est détaillée dans la troisième partie. Une attention toute particulière est portée aux hypothèses sous-jacentes de chaque modèle, afin d'en déterminer de manière précise leur champ d'utilisation. Dans la quatrième partie, nous déterminons la réponse acoustique d'une plaque immergée d'épaisseur  $d$ , constituée par le milieu aléatoire. L'objectif de cette quatrième partie est d'établir l'expression du coefficient de transmission  $T$  de la plaque, accessible expérimentalement, et susceptible d'être confrontée aux prédictions théoriques. Dans une cinquième et dernière partie, nous évaluons l'influence des paramètres du matériau aléatoire (propriétés des constituants, caractéristiques de la structure) sur sa réponse acoustique. Grâce à une étude paramétrique, nous mettons en évidence trois configurations comportant des inclusions sphériques pleines ou de type « noyau-coque » présentant une forte atténuation à certaines fréquences.

## 1.1 Généralités sur l'acoustique

Nous nous plaçons sous les hypothèses classiques de l'acoustique linéaire [15]. Les variations des grandeurs physiques sont supposées suffisamment petites pour que la réponse des milieux soit supposée linéaire (comportement élastique ou viscoélastique linéaire). Sous cette hypothèse, nous écrivons l'équation de conservation des quantités de mouvement au sein d'un milieu solide homogène :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (1-2)$$

où  $u_i$  ( $i = 1, 2$  ou  $3$ ) est une des composantes du champ de déplacement dans un repère cartésien ( $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ ) et  $\sigma_{ij}$  est une des composantes du tenseur des contraintes. Nous écrivons également la loi de comportement du milieu :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (1-3)$$

où  $C_{ijkl}$  est une composante à valeurs complexes du tenseur des rigidités du milieu viscoélastique linéaire. Dans le cas d'un milieu isotrope, ce tenseur comprend deux valeurs indépendantes et s'exprime sous la forme réduite suivante :

$$[C_{IJ}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\mu & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & 2\mu & 0 \\ & & & & & 2\mu \end{bmatrix}, \quad (1-4)$$

avec  $C_{IJ} \equiv C_{ijkl}$ , où les indices  $I$  et  $J$  correspondent aux indices  $i, j, k$  et  $l$  selon les correspondances reportées dans le tableau 1-1.

$i,j$	11	22	33	23,32	13,31	12,21
$I$	1	2	3	4	5	6

**tableau 1-1 : correspondance d'indices entre la notation complète et la notation abrégée des composantes des tenseurs de rang 4 et 2.**

En substituant l'expression du tenseur des contraintes (1-3) dans l'équation de conservation des quantités de mouvement (1-2), nous obtenons l'équation d'onde dans un milieu homogène :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l}. \quad (1-5)$$

Les ondes planes constituent une solution particulière de l'équation d'onde (1-5). Le champ de déplacement acoustique  $\mathbf{u}$  d'une onde plane monochromatique s'écrit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \mathbf{d}, \quad (1-6)$$

où  $\mathbf{x}$  est le vecteur position,  $\omega$  la pulsation de l'onde,  $\mathbf{k} = k \mathbf{n}$  son vecteur d'onde,  $A$  son amplitude et  $\mathbf{d}$  son vecteur unitaire de polarisation (direction d'oscillation de la matière). La convention temporelle choisie est  $e^{-i\omega t}$  de sorte que la partie réelle du nombre d'onde  $\text{Re}(k)$  soit positive pour une onde progressive, et négative pour une onde rétrograde. Dans la suite, le facteur  $e^{-i\omega t}$  est systématiquement simplifié dans les équations. En remplaçant l'expression du champ de déplacement de l'onde plane (1-6) dans l'équation d'onde (1-5), nous obtenons les relations de dispersion qui caractérisent les ondes pouvant se propager dans le milieu. Dans le cas d'un milieu solide isotrope, deux types d'ondes sont susceptibles de s'y propager, les ondes longitudinales et les ondes transversales. Les ondes longitudinales ont une polarisation parallèle à leur direction de propagation ( $\mathbf{n} // \mathbf{d}$ ) et correspondent à un

mouvement de compression. Les ondes transversales ont une polarisation perpendiculaire à leur direction de propagation ( $\mathbf{n} \perp \mathbf{d}$ ) et correspondent à un mouvement de cisaillement du milieu. Les nombres d'ondes associés à ces deux ondes s'expriment en fonction des coefficients de Lamé du milieu de la manière suivante :

$$\begin{aligned} k^\ell &= \omega \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}, \\ k^t &= \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}, \end{aligned} \quad (1-7)$$

où  $k^\ell$  est le nombre d'onde longitudinal et  $k^t$  est le nombre d'onde transversal. Observons que les paramètres matériaux  $\lambda$  et  $\mu$  considérés dans les équations de dispersion (1-7) sont à valeurs complexes et dépendent de la fréquence  $\omega$  afin de prendre en compte les phénomènes de viscosité. Leur partie imaginaire modélise l'amortissement du milieu, et la dépendance fréquentielle provient du fait que la réponse mécanique du milieu dépend de la vitesse d'excitation. D'après le système (1-7), les nombres d'ondes longitudinal et transversal sont à valeurs complexes, induisant :

$$\begin{aligned} e^{ik^\ell x} &= e^{ik^\ell x} e^{-k^{\ell''} x}, \\ e^{ik^t x} &= e^{ik^t x} e^{-k^{t''} x}, \end{aligned} \quad (1-8)$$

avec  $x = \|\mathbf{x}\|$ . La partie réelle du nombre d'onde est reliée à la propagation de l'onde dans le milieu (*via* le terme  $e^{ik^p x}$ ,  $p = \ell$  ou  $t$ ), tandis que sa partie imaginaire est uniquement liée à l'absorption du milieu et impacte l'amplitude de l'onde ( $e^{-k^{p''} x}$ ). La célérité de phase  $c_\varphi^p$  et l'atténuation  $\alpha^p$  des ondes sont définies à partir respectivement de la partie réelle et de la partie imaginaire du nombre d'onde :

$$k^p = \frac{\omega}{c_\varphi^p} + \alpha^p i, \quad (p = \ell \text{ ou } t). \quad (1-9)$$

Nous définissons également la célérité à valeurs complexes  $c^{p*}$ , comme le rapport entre la pulsation  $\omega$  et le nombre d'onde à valeurs complexes :

$$c^{p*} = \frac{\omega}{k^p}, \quad (p = \ell \text{ ou } t). \quad (1-10)$$

Constatons que la célérité de phase  $c_\varphi^p$  de l'onde plane n'est pas égale à la partie réelle de la célérité à valeurs complexes :

$$\operatorname{Re}(c^{p*}) = c^{p*'} = \frac{c_\varphi^p}{1 + \left(\frac{\alpha^p c_\varphi^p}{\omega}\right)^2}, \quad \operatorname{Im}(c^{p*}) = c^{p*''} = -\frac{c_\varphi^p \left(\frac{\alpha^p c_\varphi^p}{\omega}\right)}{1 + \left(\frac{\alpha^p c_\varphi^p}{\omega}\right)^2}. \quad (1-11)$$

## 1.2 Diffusion acoustique par une sphère viscoélastique dans une matrice viscoélastique

Nous étudions dans cette partie la réponse acoustique d'une inclusion sphérique seule plongée dans une matrice. Après avoir posé le problème, nous modélisons la diffusion par la sphère d'une onde plane homogène longitudinale puis transversale. Nous considérons par la suite le cas particulier d'une inclusion sphérique composée d'un cœur sphérique et d'une coque d'épaisseur constante (diffuseur de type « noyau-coque » ou « core-shell » en anglais).

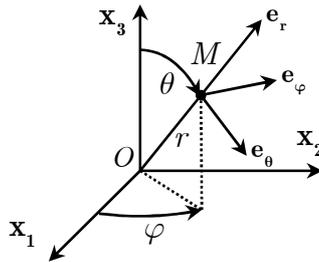


figure 1-2 : système de coordonnées sphériques.

### 1.2.1 Position du problème

Nous nous plaçons dans un repère sphérique classique  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$  comme défini sur la figure 1-2. Une onde plane incidente (longitudinale ou transversale) se propage dans la direction  $+\mathbf{x}_3$ . Un diffuseur à symétrie sphérique placé en  $O$ , perturbe le champ acoustique de l'onde incidente, qui se diffuse alors dans toutes les directions de l'espace. Sachant que le champ de déplacement acoustique total  $\mathbf{u}$  est solution de l'équation d'onde (1-5), il s'écrit à l'aide de la décomposition de Helmholtz [16] :

$$\mathbf{u}(r, \theta, \varphi) = \nabla\Phi(r, \theta, \varphi) + \nabla \times \Psi(r, \theta, \varphi), \quad (1-12)$$

avec  $\Psi = \nabla \times (r\psi(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_r) + \nabla \times (\nabla \times (r\chi(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_r))$ .  $\Phi$  est le potentiel scalaire associé à l'onde longitudinale et les potentiels scalaires  $\psi$  et  $\chi$  sont associés à l'onde transversale. En substituant l'équation (1-12) dans l'équation d'onde (1-5), nous montrons que les potentiels scalaires  $\Phi$ ,  $\psi$  et  $\chi$  sont solutions de l'équation de Helmholtz [17] :

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + (k^\ell)^2)\Phi(r, \theta, \varphi) &= 0, \\ (\nabla^2 + (k^t)^2)\psi(r, \theta, \varphi) &= 0, \\ (\nabla^2 + (k^t)^2)\chi(r, \theta, \varphi) &= 0, \end{aligned} \quad (1-13)$$

où  $k^\ell$  et  $k^t$  sont définis par le système (1-7).

Les solutions de l'équation de Helmholtz se décomposent en séries d'harmoniques sphériques ayant la forme suivante [15] :

$$\sum_{n=0}^{\infty} K_n q_n(kr) P_n^m(\cos \theta), \quad (1-14)$$

où  $K_n$  est un coefficient constant,  $P_n^m$  sont les  $m$ -ièmes fonctions associées de Legendre de degré  $n$ , et  $q_n$  est une combinaison linéaire des fonctions de Bessel sphériques de première espèce  $j_n$  et deuxième espèce  $y_n$ , et des fonctions de Hankel sphériques de premier type  $h_n^{(1)}$  et de deuxième type  $h_n^{(2)}$ . Nous notons  $P_n$  les polynômes de Legendre :

$$P_n = P_n^0. \quad (1-15)$$

Les fonctions de Bessel et de Hankel sphériques sont définies à partir des fonctions de Bessel et de Hankel classiques de la manière suivante :

$$w_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} W_{n+1/2}(z), \quad (1-16)$$

avec  $w_n \equiv j_n, y_n, h_n^{(1)}, h_n^{(2)}$  et  $W_n \equiv J_n, Y_n, H_n^{(1)}, H_n^{(2)}$ .

Intéressons-nous maintenant à l'amplitude du champ lointain diffusé par l'inclusion. Soit une onde incidente de type  $\ell$  ou  $t$  sur un diffuseur. Soit  $u_{\text{diff}}$  le champ de déplacement de l'onde diffusée par la sphère. En champ lointain, cette onde est sphérique et pondérée par la fonction de diffusion  $f$  de la sphère :

$$\begin{aligned} u_{\text{diff}}^r(r, \theta, \varphi) &= f(\theta, \varphi, k_0^p, k_0^\ell) \frac{e^{ik_0^\ell r}}{r}, \\ u_{\text{diff}}^\theta(r, \theta, \varphi) &= f_\theta(\theta, \varphi, k_0^p, k_0^t) \frac{e^{ik_0^t r}}{r}, \\ u_{\text{diff}}^\varphi(r, \theta, \varphi) &= f_\varphi(\theta, \varphi, k_0^p, k_0^t) \frac{e^{ik_0^t r}}{r}, \end{aligned} \quad (1-17)$$

où  $p = \ell$  ou  $t$  selon le type de l'onde incidente. La fonction de diffusion  $f(\theta, \varphi, k_0^p, k_0^q)$  dépend de l'onde incidente de nombre d'onde  $k_0^p$  et de l'onde diffusée de nombre d'onde  $k_0^q$ .

### 1.2.2 Diffuseur homogène sphérique

Soit un diffuseur homogène sphérique de rayon  $a$ . Les paramètres liés à la matrice et au diffuseur sont indicés respectivement par 0 et 1.

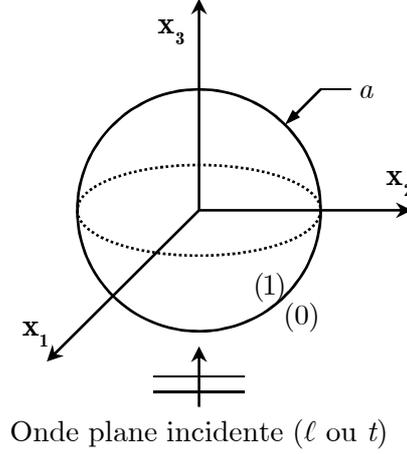


figure 1-3 : diffuseur sphérique de rayon  $a$  sondé par une onde longitudinale ( $\ell$ ) ou transversale ( $t$ ).

### 1.2.2.1 Onde incidente longitudinale

Nous considérons dans ce paragraphe une onde incidente longitudinale dont le champ de déplacement s'écrit :

$$\mathbf{u}_{\text{inc}}(x_1, x_2, x_3) = e^{ik_0^\ell x_3} \mathbf{x}_3, \quad (1-18)$$

ou encore :

$$\mathbf{u}_{\text{inc}}(r, \theta, \varphi) = \nabla \Phi_{\text{inc}}(r, \theta, \varphi), \quad (1-19)$$

où le potentiel du champ incident (1-18) se décompose en séries d'harmoniques de la manière suivante [17] :

$$\Phi_{\text{inc}}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \frac{j_n(k_0^\ell r)}{ik_0^\ell} P_n(\cos \theta). \quad (1-20)$$

Du fait de la symétrie axiale du problème, la décomposition en séries harmoniques des potentiels  $(\Phi_0, \psi_0, \chi_0)$  et  $(\Phi_1, \psi_1, \chi_1)$ , respectivement de la matrice et de l'inclusion, est la suivante [17]:

$$\begin{aligned} \Phi_0(r, \theta) &= \Phi_{\text{inc}} + \Phi_{\text{diff}} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \frac{j_n(k_0^\ell r) + A_n^\ell h_n^{(1)}(k_0^\ell r)}{ik_0^\ell} P_n(\cos \theta), \\ \psi_0(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \frac{B_n^\ell h_n^{(1)}(k_0^t r)}{ik_0^t} P_n(\cos \theta), \\ \chi_0(r, \theta) &= 0, \\ \Phi_1(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \frac{C_n^\ell j_n(k_1^\ell r)}{ik_1^\ell} P_n(\cos \theta), \\ \psi_1(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \frac{D_n^\ell j_n(k_1^t r)}{ik_1^t} P_n(\cos \theta), \\ \chi_1(r, \theta) &= 0, \end{aligned} \quad (1-21)$$

où  $A_n^\ell$ ,  $B_n^\ell$ ,  $C_n^\ell$  et  $D_n^\ell$  sont les coefficients modaux associés à chaque potentiel. Ces coefficients sont obtenus en exprimant les conditions limites des déplacements et vecteurs contraintes à l'interface sphère / matrice. Leur calcul est détaillé en annexe A.2.1.

Le champ de déplacement diffusé en champ lointain s'écrit :

$$u_{\text{diff}}^\ell(r, \theta) = f_{\ell\ell}(\theta) \frac{e^{ik_0^\ell r}}{r}. \quad (1-22)$$

Sachant que les fonctions de Hankel sphérique prennent la forme asymptotique suivante :

$$h_n(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} (-i)^{n+1} e^{iz}, \quad (1-23)$$

en substituant cette forme dans l'expression du potentiel du champ diffusé  $\Phi_{\text{diff}}$  (1-21), et en sachant que  $u_{\text{diff}}^\ell = \nabla \Phi_{\text{diff}} \cdot \mathbf{e}_r$ , nous identifions à partir de la relation (1-22), l'expression suivante de la fonction de diffusion :

$$f_{\ell\ell}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{A_n^\ell}{ik_0^\ell} P_n(\cos \theta). \quad (1-24)$$

Nous remarquons que pour les valeurs particulières où  $\theta=0$  et  $\theta=\pi$ , correspondant respectivement aux cas de diffusion vers l'avant et de rétrodiffusion, les polynômes de Legendre prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} P_n(\cos \theta) &\xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 1, \\ P_n(\cos \theta) &\xrightarrow{\theta \rightarrow \pi} (-1)^n. \end{aligned} \quad (1-25)$$

Ainsi, la fonction de diffusion s'écrit pour ces deux angles particuliers :

$$\begin{aligned} f_{\ell\ell}(0) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{A_n^\ell}{ik_0^\ell}, \\ f_{\ell\ell}(\pi) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-1)^n \frac{A_n^\ell}{ik_0^\ell}. \end{aligned} \quad (1-26)$$

### 1.2.2.2 Onde incidente transversale

Nous considérons maintenant une onde incidente transversale, polarisée selon l'axe  $\mathbf{x}_1$ , et de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_0^t = k_0^t \mathbf{x}_3$ . Son champ de déplacement s'écrit alors :

$$\mathbf{u}_{\text{inc}}(x_1, x_2, x_3) = e^{ik_0^t x_3} \mathbf{x}_1, \quad (1-27)$$

ou encore, d'après la relation (1-12) :

$$\mathbf{u}_{\text{inc}}(r, \theta, \varphi) = \nabla \times \Psi_{\text{inc}}(r, \theta, \varphi). \quad (1-28)$$

Les potentiels scalaires du champ incident se décomposent en séries d'harmoniques de la manière suivante [17] :

$$\begin{aligned}\psi_{\text{inc}}(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{i j_n(k_0^t r)}{k_0^t} P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi, \\ \chi_{\text{inc}}(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{i^2 j_n(k_0^t r)}{(k_0^t)^2} P_n^1(\cos \theta) \sin \varphi.\end{aligned}\tag{1-29}$$

Contrairement au cas d'une onde incidente longitudinale, le problème ne possède ici pas de symétrie particulière. La décomposition en séries d'harmoniques des potentiels  $(\Phi_0, \psi_0, \chi_0)$  et  $(\Phi_1, \psi_1, \chi_1)$  respectivement de la matrice et de l'inclusion est donc la suivante [17] :

$$\begin{aligned}\phi_0(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{A_n^t h_n(k_0^\ell r)}{i k_0^\ell} P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi, \\ \psi_0(r, \theta, \varphi) &= \psi_{\text{inc}} + \psi_{\text{diff}} = \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{i(j_n(k_0^t r) + B_n^t h_n(k_0^t r))}{k_0^t} P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi, \\ \chi_0(r, \theta, \varphi) &= \chi_{\text{inc}} + \chi_{\text{diff}} = \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{i^2(j_n(k_0^t r) + C_n^t h_n(k_0^t r))}{(k_0^t)^2} P_n^1(\cos \theta) \sin \varphi, \\ \phi_1(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{D_n^t j_n(k_1^\ell r)}{i k_1^\ell} P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi, \\ \psi_1(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{i E_n^t j_n(k_1^t r)}{k_1^t} P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi, \\ \chi_1(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{i^2 F_n^t j_n(k_1^t r)}{(k_1^t)^2} P_n^1(\cos \theta) \sin \varphi,\end{aligned}\tag{1-30}$$

où  $A_n^t$ ,  $B_n^t$ ,  $C_n^t$ ,  $D_n^t$ ,  $E_n^t$ , et  $F_n^t$  sont les coefficients modaux associés à chaque potentiel. Comme dans le cas d'une onde incidente longitudinale, ces coefficients sont obtenus en exprimant les conditions limites des déplacements et vecteurs contraintes à l'interface sphère / matrice. Leur calcul est détaillé en annexe A.2.2.

Le champ de déplacement diffusé en champ lointain s'écrit :

$$\mathbf{u}_{\text{diff}}^t(r, \theta, \varphi) = f_{u\theta}(\theta, \varphi) \frac{e^{i k_0^t r}}{r} \mathbf{e}_\theta + f_{u\varphi}(\theta, \varphi) \frac{e^{i k_0^t r}}{r} \mathbf{e}_\varphi.\tag{1-31}$$

En suivant la démarche présentée au paragraphe précédent, nous obtenons, à partir des équations (1-28) à (1-31) :

$$f_{tt}(\theta, \varphi) = \sqrt{f_{u\theta}(\theta, \varphi)^2 + f_{u\varphi}(\theta, \varphi)^2},\tag{1-32}$$

où :

$$\begin{aligned}
f_{tt\theta}(\theta, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{i}{k_0^t} \left( B_n^t \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} + C_n^t \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right) \cos \varphi, \\
f_{tt\varphi}(\theta, \varphi) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{i}{k_0^t} \left( B_n^t \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} + C_n^t \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \sin \varphi.
\end{aligned} \tag{1-33}$$

Nous remarquons que pour les valeurs particulières où  $\theta=0$  et  $\theta=\pi$ , correspondant respectivement aux cas de diffusion vers l'avant et de rétrodiffusion, les fonctions de Legendre prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} &\xrightarrow{\theta \rightarrow 0} -\frac{n(n+1)}{2}, \\
\frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} &\xrightarrow{\theta \rightarrow 0} -\frac{n(n+1)}{2}, \\
\frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} &\xrightarrow{\theta \rightarrow \pi} (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}, \\
\frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} &\xrightarrow{\theta \rightarrow \pi} (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned} \tag{1-34}$$

Ainsi, la fonction de diffusion s'écrit pour ces deux angles particuliers :

$$\begin{aligned}
f_{tt}(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{2} \frac{B_n^t + C_n^t}{ik_0^t}, \\
f_{tt}(\pi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{2} (-1)^n \frac{B_n^t - C_n^t}{ik_0^t}.
\end{aligned} \tag{1-35}$$

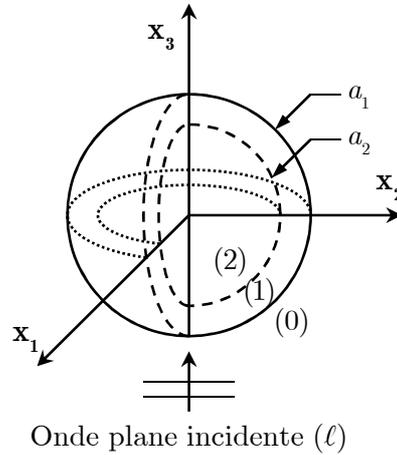


figure 1-4 : diffuseur sphérique de type « noyau-coque »

(noyau de rayon  $a_2$  et coque d'épaisseur  $a_1 - a_2$ ) sollicité par une onde longitudinale ( $\ell$ ).

### 1.2.3 Sphère de type noyau-coque

Nous considérons dans ce paragraphe un diffuseur de symétrie sphérique de type « noyau-coque » (figure 1-4). Les paramètres liés à la matrice, à la coque et au diffuseur sont indiqués respectivement par 0, 1 et 2. Le diffuseur est sollicité par une onde incidente longitudinale.

En suivant une démarche similaire à celle établie pour le cas d'une sphère homogène (1.2.2.1), les potentiels des champs présents dans la matrice ( $\Phi_0$  et  $\psi_0$ ), dans la coque ( $\Phi_1$  et  $\psi_1$ ) et dans l'inclusion ( $\Phi_2$  et  $\psi_2$ ) s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\Phi_0(r, \theta) &= \Phi_{\text{inc}} + \Phi_{\text{diff}} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \frac{j_n(k_0^\ell r) + A_n^\ell h_n(k_0^\ell r)}{k_0^\ell r} P_n(\cos \theta), \\
\psi_0(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \frac{B_n^\ell h_n(k_0^t r)}{k_0^t r} P_n(\cos \theta), \\
\Phi_1(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \frac{C_n^\ell j_n(k_1^\ell r) + D_n^\ell y_n(k_1^\ell r)}{k_1^\ell r} P_n(\cos \theta), \\
\psi_1(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \frac{E_n^\ell j_n(k_1^t r) + F_n^\ell y_n(k_1^t r)}{k_1^t r} P_n(\cos \theta), \\
\Phi_2(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \frac{G_n^\ell j_n(k_2^\ell r)}{k_2^\ell r} P_n(\cos \theta), \\
\psi_2(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \frac{M_n^\ell j_n(k_2^t r)}{k_2^t r} P_n(\cos \theta),
\end{aligned} \tag{1-36}$$

où  $A_n^\ell$ ,  $B_n^\ell$ ,  $C_n^\ell$ ,  $D_n^\ell$ ,  $E_n^\ell$ ,  $F_n^\ell$ ,  $G_n^\ell$  et  $M_n^\ell$  sont les coefficients modaux associés à chaque potentiel. Comme dans le cas de la sphère homogène, ces coefficients sont obtenus en exprimant les conditions limites des déplacements et vecteurs contraintes à l'interface sphère / matrice. Le calcul est détaillé en annexe A.3.

La fonction de diffusion s'exprime de la même manière que pour le cas d'une sphère homogène (équations (1-24) et (1-26)), les coefficients  $A_n^\ell$  étant solution du système (A-8).

### 1.3 Homogénéisation d'un milieu à structure aléatoire

Le comportement acoustique d'une seule inclusion étant caractérisé, intéressons-nous maintenant au comportement macroscopique du milieu aléatoire.

Contrairement aux répartitions périodiques d'inclusions, la position des inclusions dans les répartitions aléatoires d'inclusions n'est *a priori* pas connue. De ce fait, la propagation des ondes dans de telles structures ne peut être calculée de manière exacte. La littérature montre que la plupart des auteurs modélisent la propagation dans un milieu homogène équivalent au milieu aléatoire. Ce milieu homogène équivalent (ou milieu effectif), correspond à une moyenne sur l'ensemble des configurations possibles de répartitions aléatoires des inclusions. Cette moyenne met en exergue la propagation d'une onde plane moyenne (ou onde cohérente), permettant ainsi de définir le milieu homogène équivalent (milieu homogène équivalent dans lequel se propage cette onde cohérente).

Le milieu homogène équivalent dispose, comme tout milieu homogène, de plusieurs paramètres acoustiques : la masse volumique  $\rho_{\text{eff}}$ , la célérité effective des ondes  $c_{\text{eff}}^p$  ( $p = \ell$  ou  $t$  selon la nature de l'onde respectivement longitudinale ou transversale), le nombre d'onde  $k_{\text{eff}}^p$ , la rigidité associée à l'onde  $M_{\text{eff}}^p = \rho_{\text{eff}}(\omega / k_{\text{eff}}^p)^2$ , et l'impédance acoustique  $Z_{\text{eff}} = \rho_{\text{eff}}(\omega / k_{\text{eff}}^\ell)$ . La rigidité  $M_{\text{eff}}^p$  s'exprime également en fonction des coefficients de Lamé du milieu effectif :

$$\begin{aligned} M_{\text{eff}}^\ell &= \lambda_{\text{eff}} + 2\mu_{\text{eff}}, \\ M_{\text{eff}}^t &= \mu_{\text{eff}}. \end{aligned} \tag{1-37}$$

$M_{\text{eff}}^\ell$  et  $M_{\text{eff}}^t$  sont les rigidités associées respectivement à l'onde longitudinale et à l'onde transversale.

L'ensemble de ces paramètres, dans le cadre d'un milieu homogène équivalent à un milieu aléatoire, est à valeurs complexes et dépend de la fréquence, afin de modéliser l'ensemble des phénomènes acoustiques siégeant au sein du milieu. Nous avons vu dans la partie 1.1 que, dans le cadre de milieux homogènes viscoélastiques linéaires « classiques » (sans aucune inclusion), les phénomènes de viscosité impactent directement la propagation des ondes, en les atténuant (paramètres acoustiques à valeurs complexes) et en les dispersant (paramètres acoustiques dépendant de la fréquence). Dans un milieu homogène équivalent à un milieu aléatoire, en plus des phénomènes de viscosité décrits précédemment, les phénomènes de multidiffusion impactent également la propagation des ondes, en les atténuant et en modifiant la masse volumique effective du milieu (phénomènes inertiels lors de la propagation de l'onde). Ainsi, la masse volumique effective d'un milieu aléatoire est à valeurs complexes et dépend de la fréquence.

Il existe un certain nombre de revues des modèles existants dans la littérature [18] [19]. Nous voyons, dans ce paragraphe, divers modèles analytiques prédisant les propriétés effectives d'un milieu aléatoire. Ces modèles font des hypothèses qui sont classées selon deux critères :

- diffusion simple ou diffusion multiple.

Les modèles de diffusion simple supposent que les interactions entre les diffuseurs sont négligeables. L'onde cohérente est alors le produit d'une seule diffusion (diffusion simple) de l'onde incidente avec les diffuseurs. Cela signifie qu'une onde incidente ne sera diffusée qu'une fois et n'interagira avec aucun autre diffuseur. Cette hypothèse est généralement vérifiée pour de faibles concentrations de diffuseurs. Les modèles de diffusion multiple, quant à eux, modélisent les interactions entre les diffuseurs. Ces modélisations peuvent être plus ou moins

complexes. Par exemple, certains modèles de diffusion multiple négligent les aller et retour des ondes sur un même diffuseur [10].

- quasi-statique ou dynamique.

Les modèles quasi-statiques considèrent que la longueur d'onde est très grande devant la taille des inclusions. Cette hypothèse considère la limite basses-fréquences du comportement acoustique des milieux aléatoires, et donne des expressions indépendantes de la fréquence. Les modèles dynamiques, quant à eux, considèrent des longueurs d'ondes plus petites ou de l'ordre de grandeur de la taille des inclusions. Ils conduisent à des prédictions dépendant de la fréquence.

### 1.3.1 Modèles de diffusion simple en limite quasi-statique

Les modèles présentés dans ce paragraphe établissent la limite quasi-statique du comportement acoustique de milieux aléatoires en présence de diffusion simple.

Afin d'étudier la propagation des ondes sismiques, Kuster & Toksöz [7] considèrent un milieu solide élastique linéaire et isotrope contenant une répartition aléatoire de sphères identiques et isotropes. Les inclusions étant très petites devant la longueur des ondes sismiques, les auteurs établissent la limite quasi-statique du module d'élasticité isostatique  $K_{\text{eff}}$ , du module de cisaillement  $\mu_{\text{eff}}$  et de la masse volumique  $\rho_{\text{eff}}$  du milieu effectif. Le module d'élasticité isostatique  $K_{\text{eff}}$  s'écrit en fonction des coefficients de Lamé de la manière suivante :

$$K_{\text{eff}} = \lambda_{\text{eff}} + \frac{2}{3}\mu_{\text{eff}}. \quad (1-38)$$

Le modèle de Kuster & Toksöz consiste à comparer les champs diffusés par deux régions sphériques contenant respectivement le milieu aléatoire et le milieu homogène équivalent. Soient  $u^*$  et  $u^n$  les composantes algébriques des champs de déplacement radiaux diffusés respectivement par la région sphérique homogène équivalente de rayon  $a^*$  et par l'inclusion  $n$  de rayon  $a^{(n)}$ . La région sphérique de milieu aléatoire contient  $N$  inclusions. Le champ total est la somme des champs diffusés par toutes les inclusions. Ils obtiennent ainsi :

$$u^*(r, \theta) = \sum_{n=0}^N u^{(n)}(r, \theta). \quad (1-39)$$

Considérons maintenant la région sphérique homogène équivalente de rayon  $a^*$ . Une onde incidente longitudinale interagit avec la sphère, et on considère que le champ ainsi diffusé est le champ  $u^*$ . Ce champ de déplacement radial diffusé, en approximation basses fréquences et en champ lointain, s'écrit :

$$u^*(r, \theta) = \left[ \frac{K_0 - K_{\text{eff}}}{3K_{\text{eff}} + 4\mu_0} - \frac{\rho_0 - \rho_{\text{eff}}}{\rho_0} \cos(\theta) - \frac{5}{3} \frac{\mu_0(\mu_{\text{eff}} - \mu_0)}{6\mu_{\text{eff}}(K_0 + 2\mu_0) + \mu_0(9K_0 + 8\mu_0)} \right] (3 \cos(2\theta) + 1) (k_0^\ell a^*)^3 \frac{e^{ik_0^\ell r}}{k_0^\ell r}, \quad (1-40)$$

où  $K_0$  et  $K_{\text{eff}}$  sont les modules d'élasticité isostatiques respectivement de la matrice et du milieu effectif, et  $k_0^\ell$  le nombre d'onde de l'onde incidente longitudinale dans la matrice.

De la même manière, le champ diffusé en champ lointain par une inclusion s'exprime de la manière suivante :

$$u^{(n)}(r, \theta) = \left[ \frac{K_0 - K_1}{3K_1 + 4\mu_0} - \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0} \cos(\theta) - \frac{5}{3} \frac{\mu_0(\mu_1 - \mu_0)}{6\mu_1(K_0 + 2\mu_0) + \mu_0(9K_0 + 8\mu_0)} \right] (3 \cos(2\theta) + 1) (k_0^\ell a^{(n)})^3 \frac{e^{ik_0^\ell r}}{k_0^\ell r}. \quad (1-41)$$

L'équation (1-41) fait l'hypothèse que l'onde incidente n'est diffusée qu'une seule fois par les inclusions. C'est l'hypothèse de diffusion simple. En substituant les expressions (1-40) et (1-41) dans l'équation (1-39), ils obtinrent, sachant que l'équation est vérifiée quelle que soit la valeur de l'angle  $\theta$ , un système de trois équations satisfait par le module d'élasticité isostatique effectif  $K_{\text{eff}}$ , la masse volumique effective  $\rho_{\text{eff}}$ , et le module de cisaillement effectif  $\mu_{\text{eff}}$  :

$$\begin{aligned} \frac{K_{\text{eff}} - K_0}{3K_{\text{eff}} + 4\mu_0} &= \phi \frac{K_1 - K_0}{3K_1 + 4\mu_0}, \\ \rho_{\text{eff}} - \rho_0 &= \phi (\rho_1 - \rho_0), \\ \frac{\mu_{\text{eff}} - \mu_0}{6\mu_{\text{eff}}(K_0 + 2\mu_0) + \mu_0(9K_0 + 8\mu_0)} &= \phi \frac{\mu_1 - \mu_0}{6\mu_1(K_0 + 2\mu_0) + \mu_0(9K_0 + 8\mu_0)}, \end{aligned} \quad (1-42)$$

où la fraction volumique  $\phi$  d'inclusions vérifie la relation :

$$\phi = \frac{1}{(a^*)^3} \sum_{n=0}^N (a^{(n)})^3. \quad (1-43)$$

Il est à noter que la masse volumique effective (1-42) est égale à la masse volumique statique du milieu, obtenue par la loi des mélanges :

$$\rho_{\text{stat}} = (1 - \phi)\rho_0 + \phi\rho_1. \quad (1-44)$$

Berryman [21] utilisa la même approche que Kuster & Toksöz [7], mais choisit comme milieu extérieur infini non pas la matrice mais le milieu effectif lui-même. Les propriétés effectives furent obtenues pour un champ diffusé, par le milieu aléatoire à symétrie sphérique, nul. Cette démarche est une démarche auto-cohérente, car le milieu environnant est directement le milieu homogène équivalent. Il obtint ainsi :

$$\begin{aligned} \rho_{\text{eff}} &= (1 - \phi)\rho_0 + \phi\rho_1, \\ \frac{1}{K_{\text{eff}} + \frac{4}{3}\mu_{\text{eff}}} &= \frac{1 - \phi}{K_0 + \frac{4}{3}\mu_{\text{eff}}} + \frac{\phi}{K_1 + \frac{4}{3}\mu_{\text{eff}}}. \end{aligned} \quad (1-45)$$

En conclusion, les modèles quasi-statiques en diffusion simple posent les bases du calcul des propriétés effectives de milieux aléatoires en proposant des développements simples. D'autres auteurs développèrent ces formules en dynamique, afin de considérer des longueurs d'ondes plus petites et de prendre en compte une variation fréquentielle des paramètres effectifs.

### 1.3.2 Modèles de diffusion simple en dynamique

En 1981, Gaunard & Überall [22] établirent des formules pour les propriétés effectives de milieux aléatoires composés d'une matrice solide et d'inclusions fluides ou solides. Les auteurs utilisèrent la méthode de Kuster & Toksöz, en considérant une onde plane incidente longitudinale et en développant le premier coefficient de diffusion  $A_0^\ell$  à un ordre fréquentiel plus élevé (1-46), les coefficients  $A_1^\ell$  et  $A_2^\ell$  gardant leur expression basses-fréquences :

$$\begin{aligned} A_0^\ell &= i(k_0^\ell a)^3 \frac{3(K_1 - K_0)}{(3K_0 + 4\mu_0)((k_0^\ell R)^2 + i(k_0^\ell R)^3) - 9K_1 - 12\mu_0}, \\ A_1^\ell &= i(k_0^\ell a)^3 \frac{\rho_1 - \rho_0}{9\rho_0}, \\ A_2^\ell &= i(k_0^\ell a)^3 \frac{4\mu_0(\mu_0 - \mu_1)}{18\mu_1(K_0 + 2\mu_0) + 3\mu_0(9K_0 + 8\mu_0)}, \end{aligned} \quad (1-46)$$

avec  $A_n^\ell = O\left((k_0^\ell a)^3\right) \forall n \geq 3$ . Ils en tirèrent une formule du module d'élasticité isostatique équivalent  $K_{\text{eff}}$  dépendant de la fréquence, ainsi que les valeurs statiques de la masse volumique effective et du coefficient de cisaillement effectif :

$$\begin{aligned} K_{\text{eff}} &= \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{1 - \Upsilon} - \frac{4}{3}\mu_0, \\ \rho_{\text{eff}} - \rho_0 &= \phi(\rho_1 - \rho_0), \\ \frac{\mu_{\text{eff}} - \mu_0}{6\mu_{\text{eff}}(K_0 + 2\mu_0) + \mu_0(9K_0 + 8\mu_0)} &= \phi \frac{\mu_1 - \mu_0}{6\mu_1(K_0 + 2\mu_0) + \mu_0(9K_0 + 8\mu_0)}, \\ \text{avec } \Upsilon &= \phi \frac{1 - 3\xi + \frac{4\mu_0}{3(\lambda_1 + 2\mu_1)}}{1 + \frac{4\mu_0}{3(\lambda_1 + 2\mu_1)} - (k_0^\ell a)^2 \xi(1 + ik_0^\ell a)} \quad \text{et } \xi = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{3\mu_1}. \end{aligned} \quad (1-47)$$

Ces expressions sont en accord avec les formules de Kuster & Toksöz (1-42).

En 2004, Li & Chan [3] présentèrent un développement fréquentiel des formules de Kuster & Toksöz (1-42), en gardant comme Gaunaurd & Überall, les expressions générales des coefficients de diffusion. Ils obtinrent ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{K_{\text{eff}} - K_0}{3K_{\text{eff}} + 4\mu_0} &= -\frac{3\phi}{i(k_0^\ell a)^3} A_0^\ell, \\ \frac{\rho_{\text{eff}} - \rho_0}{\rho_0} &= \frac{9\phi}{i(k_0^\ell a)^3} A_1^\ell, \\ \frac{\mu_0(\mu_{\text{eff}} - \mu_0)}{6\mu_{\text{eff}}(K_0 + 2\mu_0) + \mu_0(9K_0 + 8\mu_0)} &= \frac{3\phi}{4i(k_0^\ell a)^3} A_2^\ell. \end{aligned} \quad (1-48)$$

En conclusion, les développements fréquentiels présentés dans cette section restent limités par le fait qu'ils ne considèrent qu'un degré de diffusion (cf. équation 1-39). Nous voyons dans la partie suivante des modèles de diffusion multiple.

### 1.3.3 Modèles de diffusion multiple

La littérature regroupant les modèles de diffusion multiple est très fournie. Les différents travaux ont permis de mieux comprendre le comportement des milieux aléatoires en diffusion multiple, en décrivant de plus en plus finement les phénomènes. Foldy [5] étudia des diffuseurs ponctuels isotropes (champ acoustique diffusé indépendant de l'angle d'observation), et développa une formule du nombre d'onde effectif dynamique en diffusion multiple. Lax [6] considéra le cas de diffuseurs non isotropes et établit une formule équivalente à celle de Foldy. Waterman & Truell [10] établirent une formule avec un ordre supplémentaire sur le nombre d'inclusions par unité de volume  $n_0$  :

$$(k_{\text{eff}}^\ell)^2 = (k_0^\ell)^2 + 4\pi n_0 f_{\ell\ell}(0) + \frac{4\pi^2}{(k_0^\ell)^2} n_0^2 (f_{\ell\ell}(0)^2 - f_{\ell\ell}(\pi)^2). \quad (1-49)$$

Cette formule est valable pour des inclusions sphériques (cas 3D) ou cylindriques (cas 2D) dans une matrice fluide. Lloyd & Berry [9] s'intéressèrent au cas de diffuseurs sphériques non ponctuels, introduisirent la notion de rayon d'exclusion qui permet à deux inclusions de ne pas s'interpénétrer, et corrigèrent le terme en  $n_0^2$  de Waterman & Truell :

$$(k_{\text{eff}}^\ell)^2 = (k_0^\ell)^2 + \delta_1 n_0 + \delta_2 n_0^2, \quad (1-50)$$

avec :  $\delta_1 = 4\pi f_{\ell\ell}(0)$ ,

$$\text{et : } \delta_2 = -\frac{4\pi^2}{(k_0^\ell)^2} \left\{ f_{\ell\ell}(0)^2 - f_{\ell\ell}(\pi)^2 + \int_0^\pi \frac{1}{\sin(\theta/2)} \frac{d[f_{\ell\ell}(\theta)^2]}{d\theta} d\theta \right\},$$

où  $\delta_2$  s'exprime en fonction des coefficients modaux  $A_n^\ell$  (équation (C-4) de la référence [23]) :

$$\delta_2 = -\frac{8\pi^2}{(k_0^\ell)^4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} q \sqrt{4\pi(2n+1)(2\nu+1)(2q+1)} A_n^\ell A_\nu^\ell \mathcal{G}(n, 0; \nu, 0; q), \quad (1-51)$$

où  $\mathcal{G}(n, 0; \nu, 0; q)$  est un coefficient de Gaunt [11]. Établie, comme celle de Waterman & Truell, pour une matrice fluide uniquement, la formule de Lloyd & Berry fut étendue au cas d'une matrice solide par Luppé *et al.* [11], qui prirent en compte les conversions de modes qui s'opèrent lors de la diffusion (absentes dans le cas d'une matrice fluide puisque seules les ondes longitudinales s'y propagent) :

$$(k_{\text{eff}}^p)^2 = (k_0^p)^2 + \delta_1 n_0 + \delta_2 n_0^2 + \delta_2^{(c)} n_0^2, \quad (1-52)$$

où apparaît le terme correctif  $\delta_2^{(c)}$  :

$$\delta_2^{(c)} = -\frac{8\pi^2}{k_0^p} \int_0^\pi \frac{k_0^p k_0^q f_{qp}(\theta) f_{pq}(\theta) \sin \theta}{((k_0^p)^2 + (k_0^q)^2 - 2k_0^p k_0^q \cos \theta)^{3/2}} d\theta, \quad (p, q = \ell \text{ ou } t). \quad (1-53)$$

Le nombre d'onde de Luppé *et al.* (1-52) fut publiée au cours de la thèse, et n'a pas été utilisée. Nous choisissons de considérer la formule de Waterman & Truell (1-49), même si elle ne fût établie que pour une matrice fluide. En effet, dans le cas 2D (inclusions cylindriques), Conoir *et al.* [24] démontrèrent que le nombre d'onde de Waterman & Truell reste valable pour une matrice solide, à condition que les diffuseurs soient des cylindres de révolution. Nous étendons cette conclusion au cas 3D, en supposant que la formule de Waterman & Truell reste valable à condition que les diffuseurs soient à symétrie sphérique. Nous prolongeons également cette formule aux ondes transversales, à l'instar de Conoir *et al.* (équation (33) de la référence [24]) :

$$(k_{\text{eff}}^t)^2 = (k_0^t)^2 + 4\pi n_0 f_{tt}(0) + \frac{4\pi^2}{(k_0^t)^2} n_0^2 (f_{tt}(0)^2 - f_{tt}(\pi)^2). \quad (1-54)$$

Concernant l'impédance dynamique, Caleap *et al.* [25] développèrent, pour une matrice fluide, une expression de la masse volumique dynamique :

$$\rho_{\text{eff}} = \rho_0 \left( 1 + \gamma_1 n_0 + \gamma_2 n_0^2 \right), \quad (1-55)$$

$$\text{avec } \gamma_1 = \frac{2\pi}{(k_0^\ell)^2} [f_{\ell\ell}(0) - f_{\ell\ell}(\pi)],$$

$$\gamma_2 = \frac{4\pi^2}{(k_0^\ell)^4} \left[ f_{\ell\ell}(0)^2 - f_{\ell\ell}(\pi)^2 - \int_0^\pi \frac{1}{2 \sin(\theta/2)} \frac{d}{d\theta} [f_{\ell\ell}(\theta)(f_{\ell\ell}(\theta) - f_{\ell\ell}(\pi - \theta))] d\theta \right].$$

Ils soulignèrent que cette expression est consistante avec la théorie de Lloyd & Berry. Comme pour le nombre d'onde de Luppé *et al.*, la masse volumique dynamique (1-55) fut publiée au cours de la thèse et n'a pas été utilisée ici. Nous considérons la formule obtenue par Aristégui

& Angel [8] de la masse volumique dynamique dans le cadre de la théorie de Waterman & Truell :

$$\rho_{\text{eff}} = \rho_0 \left( 1 + \frac{2\pi n_0}{(k_0^t)^2} (f_{\ell\ell}(0) - f_{\ell\ell}(\pi)) \right). \quad (1-56)$$

Nous disposons ainsi d'expressions établies dans un même cadre, pour l'ensemble des propriétés effectives d'un milieu aléatoire  $k_{\text{eff}}^t$  (1-49),  $k_{\text{eff}}^l$  (1-54) et  $\rho_{\text{eff}}$  (1-56). Nous calculons dans la partie suivante la réponse acoustique d'une plaque de matériau aléatoire immergée dans l'eau.

## 1.4 Réponse acoustique d'une plaque homogénéisée

Soit une lame à faces parallèles (plaque) d'épaisseur  $d$  d'un milieu aléatoire immergé dans de l'eau (milieu fluide environnant). Considérant ce milieu sous sa forme homogène, nous établissons les expressions des coefficients de réflexion et de transmission de cette lame sous incidence normale. Nous décrivons tout d'abord la réfraction d'une onde plane par une interface entre le milieu fluide environnant et le milieu solide constituant la plaque, puis nous étudions la propagation des ondes dans la plaque.

### 1.4.1 Description des phénomènes aux interfaces

Dans cette partie, pour des soucis de clarté, le milieu fluide environnant est indicé par 0, et la plaque est indicée par 1.

Soit l'interface entre le milieu fluide environnant et le milieu solide de la plaque (figure 1-5). La réfraction d'une onde plane acoustique par l'interface est régie par les lois de Snell-Descartes. Une onde réfléchie rétrograde se propage dans le milieu (0), et une onde transmise progressive se propage dans le milieu (1).

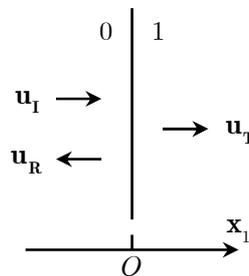


figure 1-5 : système d'ondes générées par l'interaction entre une onde plane incidente et une interface plane entre deux milieux.

Les champs de déplacement des trois ondes du problème s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_I &= e^{ik_0^\ell x_1} \mathbf{x}_1, \\ \mathbf{u}_R &= R_{01} e^{-ik_0^\ell x_1} \mathbf{x}_1, \\ \mathbf{u}_T &= T_{01} e^{ik_1^\ell x_1} \mathbf{x}_1.\end{aligned}\tag{1-57}$$

$R_{01}$  et  $T_{01}$  sont appelés, respectivement, les coefficients de réflexion et de transmission à l'interface entre les milieux 0 et 1. Une expression de ces deux coefficients en fonction des données du problème est obtenue en écrivant les conditions de continuité à l'interface entre les deux milieux.

La première condition traduit la continuité du champ de déplacement normal à l'interface :  $\mathbf{u}_I + \mathbf{u}_R = \mathbf{u}_T$  pour  $x_1 = \|\mathbf{x}_1\| = 0$ . En y substituant les expressions des champs (1-57), nous obtenons une première équation :

$$1 + R_{01} = T_{01}.\tag{1-58}$$

La deuxième condition traduit la continuité de la contrainte normale appliquée à l'interface. Son calcul est effectué de manière indépendante de part et d'autre de l'interface. Dans le milieu fluide, la contrainte normale appliquée sur l'interface est égale à l'opposé de la pression du fluide  $p_0$ . L'équation d'Euler, appliquée à un volume élémentaire de fluide incompressible, reliant pression acoustique  $p_0$  et déplacement associé  $u_0$  :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = -\nabla p_0,\tag{1-59}$$

conduit à :

$$\begin{aligned}p_I &= -i \frac{\rho_0 \omega^2}{k_0^\ell} u_I = -i \omega Z_0 u_I, \\ p_R &= i \frac{\rho_0 \omega^2}{k_0^\ell} u_R = i \omega Z_0 u_R,\end{aligned}\tag{1-60}$$

où  $Z_0 = \rho_0 \omega / k_0^\ell$  est l'impédance acoustique du fluide (0). Dans le milieu solide, la contrainte normale appliquée sur l'interface est égale à  $[\sigma] \cdot \mathbf{n} = \sigma_{11}$ , où  $[\sigma]$  est le tenseur des contraintes et  $\mathbf{n}$  la normale à l'interface. Supposant que le comportement du milieu effectif est régi par la loi de Hooke, la contrainte normale  $\sigma_{11}$  et la composante  $\varepsilon_{11}$  du tenseur des déformations satisfont :

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2\mu_1 \varepsilon_{11} + \lambda_1 \text{tr}(\varepsilon), \\ \sigma_{11} &= (2\mu_1 + \lambda_1) \varepsilon_{11},\end{aligned}\tag{1-61}$$

car  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$ . Le déplacement  $\varepsilon_{11}$  s'exprime en fonction du champ de déplacement acoustique de l'onde plane transmise  $u_T$  :  $\varepsilon_{11} = \partial u_T / \partial x$ . Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= (2\mu_1 + \lambda_1)\varepsilon_{11}, \\
&= (2\mu_1 + \lambda_1)\frac{\partial u_T}{\partial x_1}, \\
&= (2\mu_1 + \lambda_1)ik_1^\ell u_T, \\
&= i\omega Z_1 u_T,
\end{aligned} \tag{1-62}$$

où  $Z_1 = k_1^\ell(2\mu_1 + \lambda_1) / \omega$  est l'impédance acoustique du milieu solide (1). Nous pouvons finalement écrire l'équation décrivant la conservation de la contrainte normale à l'interface ( $-(p_I + p_R) = \sigma_{11}$ ) en y remplaçant les expressions des pressions (1-60) et de la contrainte normale (1-62) :

$$Z_0(1 - R_{01}) = Z_1 T_{01}. \tag{1-63}$$

Le système composé des équations (1-58) et (1-63), une fois résolu, nous donne les expressions pour  $R_{01}$  et  $T_{01}$  suivantes :

$$\begin{aligned}
R_{01} &= \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0 + Z_1}, \\
T_{01} &= \frac{2Z_0}{Z_0 + Z_1},
\end{aligned} \tag{1-64}$$

avec, pour chaque milieu,  $Z_i = \rho_i \omega / k_i^\ell$ ,  $i = 0$  ou  $1$ .

#### 1.4.2 Propagation dans la plaque

Soit une plaque d'épaisseur  $d$  placée dans un champ acoustique de déplacement  $\mathbf{u}_I = u_I \mathbf{x}$ . L'onde incidente va interagir avec la plaque, et les champs résultants en amont et en aval sont la somme, respectivement, des multiréflexions et des multitransmissions à travers la plaque (figure 1-6).

Les champs acoustiques de l'onde réfléchie et de l'onde transmise s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
u_I &= e^{ik_0^\ell x_1}, \\
u_R &= R e^{-ik_0^\ell x_1} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{R_n}, \\
u_T &= T e^{ik_0^\ell x_1} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{T_n},
\end{aligned} \tag{1-65}$$

où les coefficients de réflexion et de transmission partiels, qui tiennent compte à la fois des interactions aux interfaces et de la propagation dans le milieu, sont tels que :

$$\begin{aligned}
u_{R_n} &= R_n e^{-ik_0^\ell x_1}, \\
u_{T_n} &= T_n e^{ik_0^\ell x_1},
\end{aligned} \tag{1-66}$$

avec :

$$\begin{cases} R_1 = R_{01}, \\ R_2 = T_{01} R_{10} T_{10} e^{2ik_1^\ell d}, \\ R_3 = T_{01} R_{10} R_{10} R_{10} T_{10} e^{4ik_1^\ell d}, \dots \\ R_n = (1 - Q^2)(-Q)^{2n-3} e^{(2n-2)ik_1^\ell d}, \end{cases} \begin{cases} T_1 = T_{01} T_{10} e^{ik_1^\ell d}, \\ T_2 = T_{01} R_{10} R_{10} T_{10} e^{3ik_1^\ell d}, \\ T_3 = T_{01} R_{10} R_{10} R_{10} T_{10} e^{5ik_1^\ell d}, \dots \\ T_n = (1 - Q^2) Q^{2n-2} e^{(2n-1)ik_1^\ell d}, \end{cases} \quad (1-67)$$

où  $Q = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0 + Z_1}$ . Nous obtenons finalement à partir des systèmes (1-65) à (1-67) :

$$\begin{aligned} R &= \sum_{n=1}^{\infty} R_n = \frac{Q}{1 - Q^2 e^{2ik_1^\ell d}} (1 - e^{2ik_1^\ell d}), \\ T &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \frac{1 - Q^2}{1 - Q^2 e^{2ik_1^\ell d}} e^{ik_1^\ell d}. \end{aligned} \quad (1-68)$$

En conclusion, nous avons établi dans ce paragraphe les formules analytiques reliant les coefficients de réflexion et de transmission d'une plaque homogène immergée dans l'eau en fonction de ses propriétés acoustiques, nombre d'onde  $k_1^\ell$  et impédance  $Z_1$ . Nous sommes en mesure, à partir des trois paragraphes précédents, de calculer les propriétés effectives d'un milieu aléatoire, ainsi que les coefficients de réflexion et de transmission d'une plaque de ce milieu immergée dans l'eau.

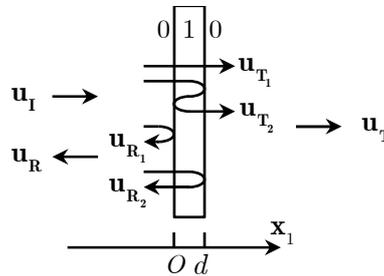


figure 1-6 : multiréflexion et multitransmission à l'intérieur de la plaque.

## 1.5 Recherche des paramètres optimaux du milieu à structure aléatoire

Dans cette dernière partie, nous étudions l'influence des paramètres du milieu aléatoire (propriétés acoustiques et géométriques des constituants) sur sa réponse acoustique, en considérant différentes structures.

### 1.5.1 Paramètres influents

Les propriétés acoustiques effectives du milieu aléatoire dépendent des propriétés des constituants  $(\lambda_0, \mu_0, \rho_0, \lambda_1, \mu_1, \rho_1)$  et des caractéristiques géométriques de la structure  $(a, \phi, d)$ . Soit la fréquence réduite :

$$\tilde{\omega} = \omega a = 2\pi f a. \quad (1-69)$$

Les coefficients modaux  $A_n^\ell$  dépendent directement de cette fréquence réduite, ainsi que de tous les autres paramètres du milieu aléatoire :

$$A_n^\ell = f^{ct}(\tilde{\omega}, \lambda_0(f), \mu_0(f), \rho_0, \lambda_1(f), \mu_1(f), \rho_1, \phi, d). \quad (1-70)$$

Dans le cas général d'un milieu comportant des constituants dissipatifs, leurs coefficients de Lamé dépendent de la fréquence. Cependant, afin de ne pas associer les variations fréquentielles des propriétés des constituants à celles des propriétés effectives, l'étude paramétrique menée dans cette partie considère la nature des deux phases en présence non dispersive. Ainsi, les paramètres constitutifs  $\lambda_i$  et  $\mu_i$  ( $i = 0, 1$ ) étant constants, les coefficients modaux  $A_n^\ell$  dépendent explicitement de la fréquence réduite  $\tilde{\omega}$  (1-70).

La fonction de diffusion  $f_{\ell\ell}(\theta)$  (1-24) dépendant de la fréquence réduite  $\tilde{\omega}$  :

$$f_{\ell\ell} = \frac{f^{ct}(\tilde{\omega}, \lambda_0, \mu_0, \rho_0, \lambda_1, \rho_1, \phi, d)}{\omega}, \quad (1-71)$$

l'ensemble des propriétés effectives (1-49), (1-9) et (1-56) s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} k_{\text{eff}}^\ell &= \frac{f^{ct}(\tilde{\omega}, \lambda_0, \mu_0, \rho_0, \lambda_1, \rho_1, \phi, d)}{a}, \\ c_{\varphi, \text{eff}}^\ell &= f^{ct}(\tilde{\omega}, \lambda_0, \mu_0, \rho_0, \lambda_1, \rho_1, \phi, d), \\ \rho_{\text{eff}} &= f^{ct}(\tilde{\omega}, \lambda_0, \mu_0, \rho_0, \lambda_1, \rho_1, \phi, d). \end{aligned} \quad (1-72)$$

Cette observation permet de faciliter l'analyse de l'effet du rayon  $a$  des inclusions sur le comportement du matériau aléatoire. Dans les paragraphes 1.5.4 à 1.5.9, nous étudions l'influence des paramètres apparaissant dans le système (1-72). Nous considérons l'effet des coefficients de Lamé *via* les célérités longitudinales et transversales, données représentatives du comportement acoustique des matériaux.

### 1.5.2 Propriétés recherchées

Avant d'étudier la réponse macroscopique, focalisons-nous sur le comportement d'une seule inclusion. Le coefficient modal  $A_n^\ell$  (A-3) étant une fonction de la fréquence qui s'écrit comme un rapport de déterminants de matrices, il possède des pôles (fréquences pour lesquelles son dénominateur s'annule) pour des fréquences *a priori* à valeurs complexes, qui correspondent à des maxima de l'amplitude du champ acoustique (résonances de l'inclusion). Sur l'axe des fréquences réelles, ces pôles se traduisent dans la plupart des cas par un maximum du module du coefficient de diffusion, et par un maximum d'amplitude de la réponse acoustique de l'inclusion. Néanmoins, dans certains cas, la réponse acoustique de l'inclusion présente un maximum d'amplitude sans que le module du coefficient modal  $A_n^\ell$  ne présente un maximum. La représentation dans le plan des fréquences à valeurs complexes

permet alors de s'assurer de la présence d'une résonance. Ces résonances ont un impact direct sur l'atténuation effective du milieu aléatoire. En effet, lorsque l'inclusion entre en résonance, l'intensité de l'énergie acoustique diffusée dans toutes les directions est maximale, ce qui diminue le champ cohérent et augmente l'atténuation effective du milieu. Nous cherchons des résonances basses fréquences des inclusions, pour lesquelles la longueur d'onde dans le matériau est grande devant la taille des inclusions.

L'étude paramétrique menée porte dans un second temps sur la réponse acoustique de la plaque de milieu aléatoire plongée dans l'eau. Nous avons vu en introduction de ce manuscrit l'importance d'absorber au maximum l'énergie acoustique afin de diminuer au maximum le rayonnement acoustique de la plaque. Un bon indicateur de la performance d'une plaque est son absorption totale, définie en retranchant les énergies réfléchies et transmises par la plaque à l'énergie acoustique incidente :

$$A = 1 - |R|^2 - |T|^2. \quad (1-73)$$

### 1.5.3 Configurations avec des sphères simples

L'expression du champ acoustique diffusé par l'inclusion sphérique (1-21) s'écrit comme une série modale, où chaque mode correspond à une harmonique sphérique. La première harmonique sphérique ( $n = 0$ ) correspond à un mouvement indépendant de l'angle  $\theta$  ( $P_0(\cos \theta) = 1$ ). L'inclusion sphérique est alors dite pulsante, tous les points de sa surface vibrant en phase, sans mouvement de son centre de masse. Ce mode est aussi appelé mode *monopolaire*. La deuxième harmonique sphérique ( $n = 1$ ) correspond à un mouvement dépendant de l'angle  $\theta$  ( $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ ). L'inclusion sphérique est alors dite oscillante, son centre de masse oscillant autour de sa position d'équilibre. Ce mode est aussi appelé mode *dipolaire*. Les harmoniques sphériques d'ordre supérieurs correspondent à des vibrations plus complexes de la sphère. Finalement, le mouvement total de la sphère est une combinaison linéaire de toutes les harmoniques sphériques, pondérées par les coefficients modaux  $A_n^\ell$ . Les résonances des inclusions ont un impact direct sur l'atténuation et donc sur les performances acoustiques d'un matériau aléatoire. Nous décidons donc d'étudier deux matériaux aléatoires qui présentent respectivement une résonance du mode monopolaire et une résonance du mode dipolaire à basses fréquences. Nous appellerons par la suite ces deux résonances respectivement *résonance monopolaire* et *résonance dipolaire*.

Les expressions basses fréquences des coefficients de diffusion sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
A_0^\ell &= i(k_0^\ell a)^3 \frac{K_0 - K_1}{3K_1 + 4\mu_0} + O((k_0^\ell a)^3), \\
A_1^\ell &= i(k_0^\ell a)^3 \frac{\rho_1 - \rho_0}{9\rho_0} + O((k_0^\ell a)^3).
\end{aligned}
\tag{1-74}$$

avec  $A_n^\ell = O((k_0^\ell a)^3) \forall n \geq 3$ . Nous remarquons que le coefficient monopolaire  $A_0^\ell$  dépend principalement de la différence entre les modules d'élasticité isostatique des deux phases en présence, et que le coefficient dipolaire  $A_1^\ell$  dépend principalement de la différence entre leur masse volumique. Ces dépendances des expressions basses fréquences donnent une orientation dans la sélection des configurations. Nous choisissons une première configuration où les coefficients d'élasticité isostatique de la matrice et des inclusions ont un fort contraste, et une deuxième configuration où les masses volumiques de la matrice et des inclusions ont un fort contraste, susceptibles d'exhiber respectivement une résonance monopolaire et une résonance dipolaire à basses fréquences. Nous dotons ces deux configurations de la même matrice élastomère, pour des raisons de faisabilité détaillées dans le deuxième chapitre du manuscrit. Les propriétés de l'élastomère sont présentées dans le tableau 1-2.

	$c^{\ell*'} \text{ (mm/}\mu\text{s)}$	$\eta^\ell$	$c^{t*'} \text{ (mm/}\mu\text{s)}$	$\eta^t$	$\rho \text{ (g/cm}^3\text{)}$
matrice élastomère	1,5	0	0,1	0	1,1

tableau 1-2 : propriétés acoustiques de la matrice élastomère.

$\eta^\ell$  et  $\eta^t$  sont les tangentes de perte respectivement sur la célérité longitudinale à valeurs complexes et sur la célérité transversale à valeurs complexes. Ces deux quantités sont définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
c^{\ell*} &= c^{\ell*' } (1 - \eta^\ell i), \\
c^{t*} &= c^{t*' } (1 - \eta^t i).
\end{aligned}
\tag{1-75}$$

Nous considérons enfin la matrice élastomère non absorbante, afin de ne pas associer l'amortissement dû à la matrice à celui dû à la multidiffusion.

### 1.5.3.1 Sphère molle

Nous étudions dans ce paragraphe une configuration où le contraste de célérités entre la matrice et les inclusions est fort. La matrice étant fixée, nous choisissons une inclusion en polystyrène expansé, matériau très léger et possédant une célérité longitudinale faible (matériau « mou »), et dont les caractéristiques acoustiques sont données dans le tableau 1-3 [26].

Nous considérons des inclusions de 0,5 mm de rayon, une épaisseur de matériau de 15 mm, et une fraction volumique d'inclusions de 2 %. Cette configuration est appelée configuration de référence n°1.

	$c^{\ell*'} \text{ (mm/}\mu\text{s)}$	$\eta^\ell$	$c^{t*'} \text{ (mm/}\mu\text{s)}$	$\eta^t$	$\rho \text{ (g/cm}^3\text{)}$
inclusion (EPS)	0,498	0	0,412	0	0,05

tableau 1-3 : propriétés acoustiques du polystyrène expansé (EPS).

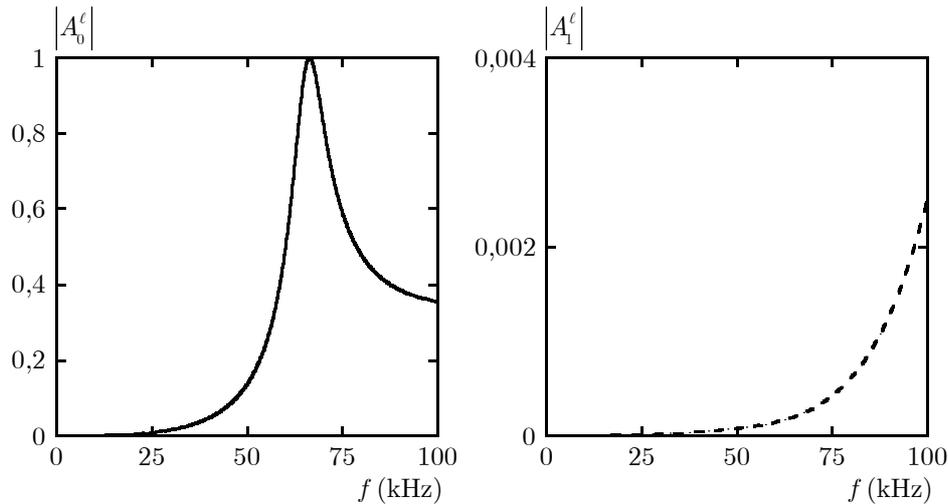
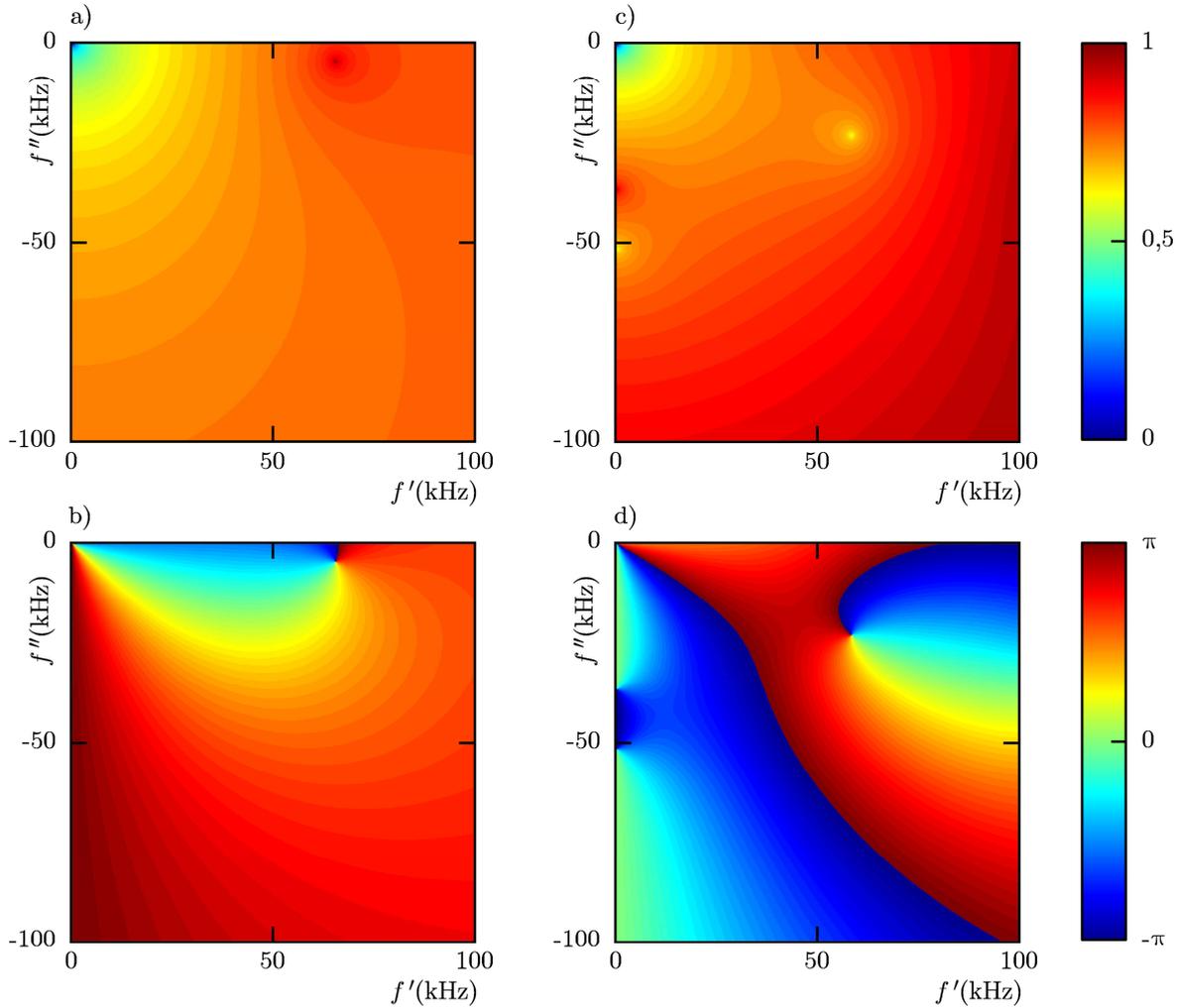


figure 1-7 : module des deux premiers coefficients de diffusion pour la configuration de référence n°1

( $|A_0^\ell|$  en trait plein et  $|A_1^\ell|$  en trait pointillé).

La figure 1-7 présente les modules des deux premiers coefficients de diffusion (monopolaire et dipolaire) de la configuration de référence n°1 (A-3). Les coefficients de diffusion d'ordres supérieurs ont des fréquences de résonance bien au-dessus de 100 kHz et sont donc d'amplitude négligeable par rapport aux deux premiers coefficients dans la gamme de fréquence étudiée. Nous remarquons un maximum d'amplitude du coefficient  $A_0$  à 65 kHz. Ce maximum est caractéristique d'une résonance monopolaire, ce qui est confirmé par la figure 1-8, qui nous montre le module et la phase des deux coefficients de diffusion  $A_0$  et  $A_1$ , en fonction de la fréquence à valeurs complexes.  $A_0$  présente un pôle de résonance pour une fréquence de  $(65 - 6i)$  kHz (pic d'amplitude et enroulement de la phase dans le sens trigonométrique). Le coefficient  $A_1$  présente quant à lui un zéro pour une fréquence de  $(60 - 25i)$  kHz (amplitude nulle et enroulement de la phase dans le sens horaire). Ce résultat était attendu, dès lors que nous avons choisi une configuration avec un contraste de célérités entre la matrice et les inclusions. L'inclusion de polystyrène expansé peut être vue comme une multitude de ressorts placés selon ses diamètres. La figure 1-9 nous montre le champ de déplacement radial autour de l'inclusion à la fréquence de résonance (65 kHz). Tous les

points de la sphère vibrent en phase et à la même amplitude. Ce champ de déplacement correspond à un mouvement de pulsation de l'inclusion.



**figure 1-8 : module et phase des deux premiers coefficients de diffusion pour la configuration de référence n°1 en fonction de la fréquence à valeurs complexes :**

**a) module et b) phase du coefficient  $A_0^\ell$  ; c) module et d) phase du coefficient  $A_1^\ell$  .**

La longueur d'onde dans la matrice à la fréquence de résonance monopolaire est :

$$\Lambda = \frac{c_0^\ell}{f} \approx 21,4 \text{ mm.} \quad (1-76)$$

La longueur d'onde est très grande devant la taille des inclusions ( $a = 0,5 \text{ mm}$ ), nous avons donc une résonance des inclusions à très basses fréquences ( $\Lambda/a \ll 1$ ). Les propriétés effectives de la configuration de référence n°1, calculées à l'aide des équations (1-54), (1-56) et (1-68), sont présentées sur la figure 1-10.

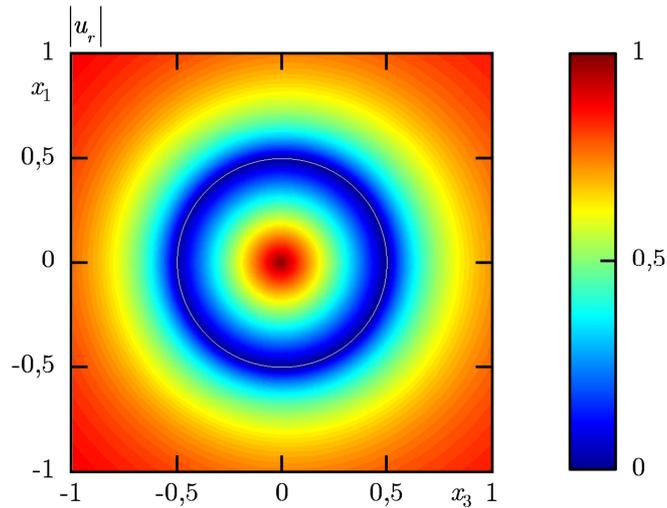


figure 1-9 : champ de déplacement radial normalisé autour de la sphère d'EPS à la fréquence de résonance (70 kHz), pour une onde incidente longitudinale se propageant dans le sens des  $x_3$  positifs.

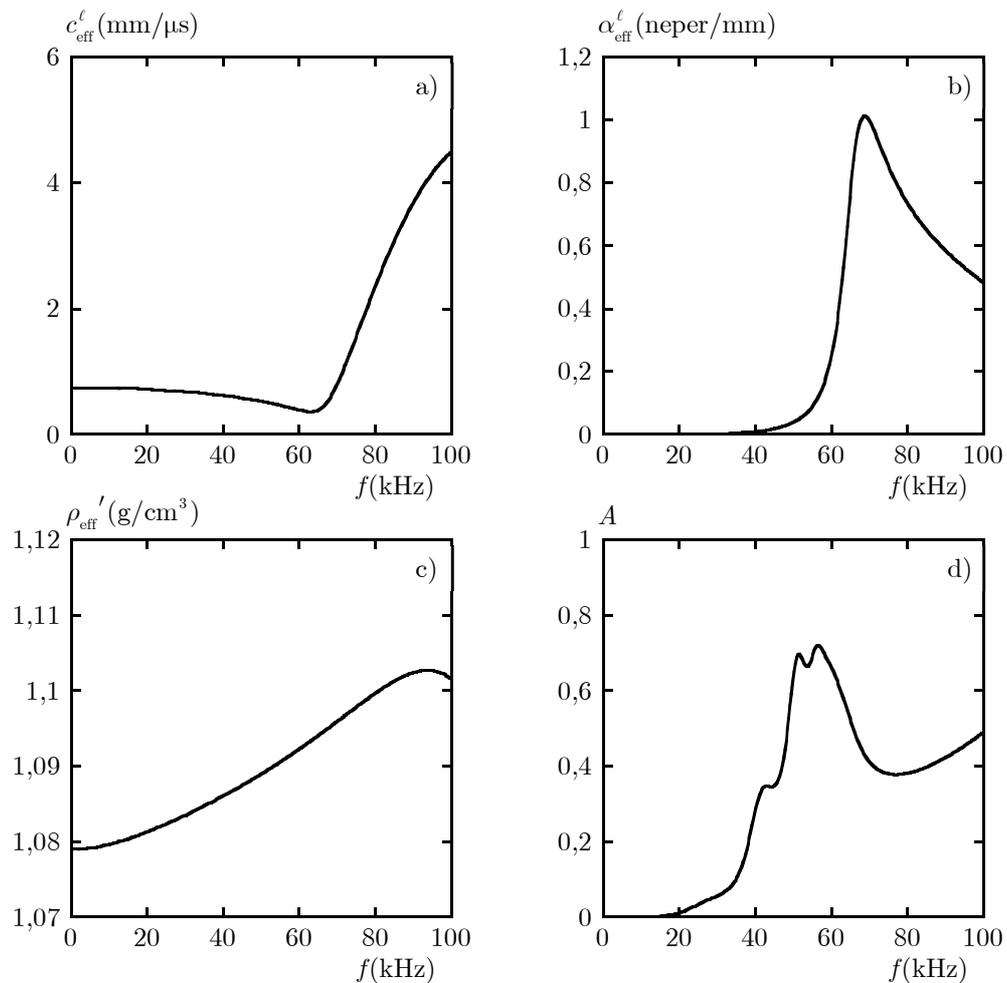


figure 1-10 : propriétés effectives de la configuration de référence n°1 :

a) célérité de phase effective ; b) atténuation effective ;

c) partie réelle de la masse volumique effective ; d) coefficient d'absorption de la plaque.

Nous choisissons de représenter trois propriétés effectives liées au milieu aléatoire (célérité de phase effective, atténuation effective et partie réelle de la masse volumique effective). La partie imaginaire de la masse volumique n'est pas communiquée car elle n'apporte pas plus d'informations que sa partie réelle (un maximum de variation de la partie réelle de la masse volumique correspondant à un pic de sa partie imaginaire). Nous traçons également l'atténuation totale de la plaque (1-73).

La résonance monopolaire de l'inclusion affecte l'ensemble des propriétés effectives. En effet, la courbe de la célérité de phase effective montre une forte variation à la fréquence de résonance. Cette forte variation est accompagnée d'un pic d'atténuation pour la même fréquence. La présence de ce pic d'atténuation provient de la multidiffusion au sein du milieu aléatoire, accentuée lorsque l'inclusion résonne. La partie réelle de la masse volumique présente également une forte variation à la fréquence de résonance.

### 1.5.3.2 Sphère massique

Nous étudions dans ce paragraphe une configuration où le contraste de masse volumique entre la matrice et les inclusions est fort. Nous choisissons une inclusion de plomb, matériau plus dense que la matrice élastomère, et dont les caractéristiques acoustiques sont données dans le tableau 1-4.

	$c^{\ell*'} \text{ (mm}/\mu\text{s)}$	$\eta^\ell$	$c^{t*'} \text{ (mm}/\mu\text{s)}$	$\eta^t$	$\rho \text{ (g}/\text{cm}^3)$
inclusion (plomb)	2,21	0	0,86	0	11,3

tableau 1-4 : propriétés acoustiques du plomb.

Nous considérons des inclusions de 0,5 mm de rayon, une épaisseur de matériau de 15 mm, et une fraction volumique d'inclusions de 2 %. Cette configuration est appelée configuration de référence n°2.

La figure 1-11 présente le module des deux premiers coefficients de diffusion (monopolaire et dipolaire) de la configuration de référence n°2. Nous remarquons une inflexion du module du coefficient dipolaire  $A_1^\ell$  à 20 kHz. La figure 1-12 représentant les deux premiers coefficients de diffusion dans le plan des fréquences à valeurs complexes nous montre que cette inflexion correspond à une résonance dipolaire (présence d'un pôle dipolaire dans le plan des fréquences à valeurs complexes). La présence de cette résonance est directement liée au choix de la configuration. L'inclusion massique favorise son mouvement de masse au sein de la matrice. Cette configuration peut être vue comme un système « masse-ressort », où les sphères de plomb jouent le rôle de la masse et où la matrice joue le rôle de ressort.

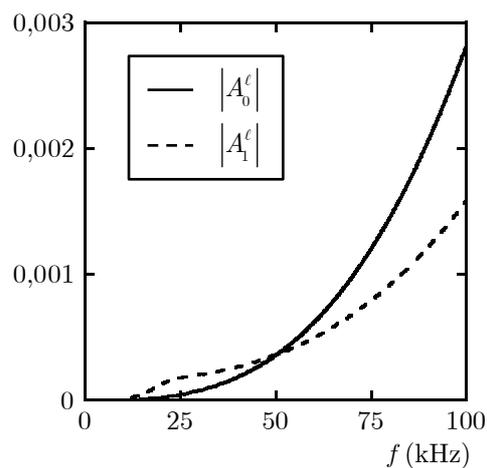


figure 1-11 : module des deux premiers coefficients de diffusion pour la configuration de référence n°2 ( $|A_0^l|$  en trait plein et  $|A_1^l|$  en trait pointillé).

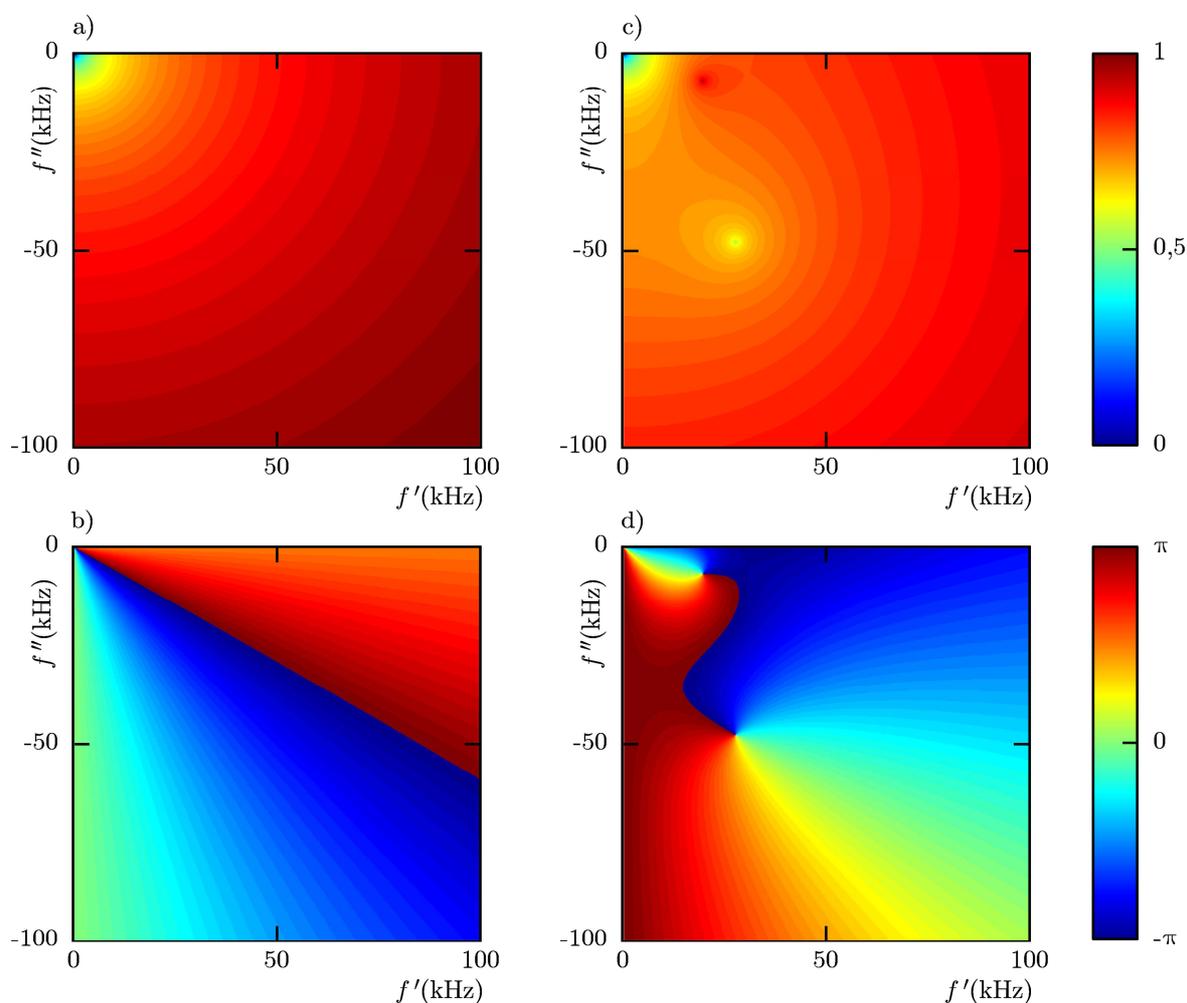


figure 1-12 : module et phase des deux premiers coefficients de diffusion pour la configuration de référence n°2 en fonction de la fréquence à valeurs complexes,

a) module et b) phase du coefficient  $A_0^l$  ; c) module et d) phase du coefficient  $A_1^l$ .

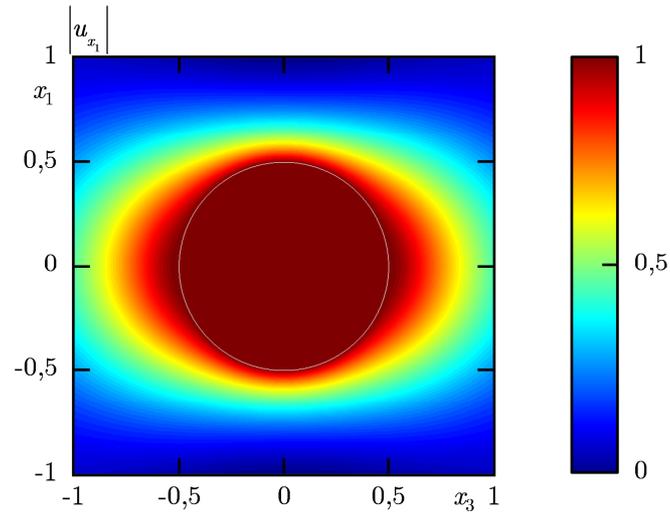


figure 1-13 : champ de déplacement selon  $x_1$  normalisé autour de la sphère de plomb à la fréquence de résonance (20 kHz), pour une onde incidente longitudinale se propageant dans le sens des  $x_3$  positifs.

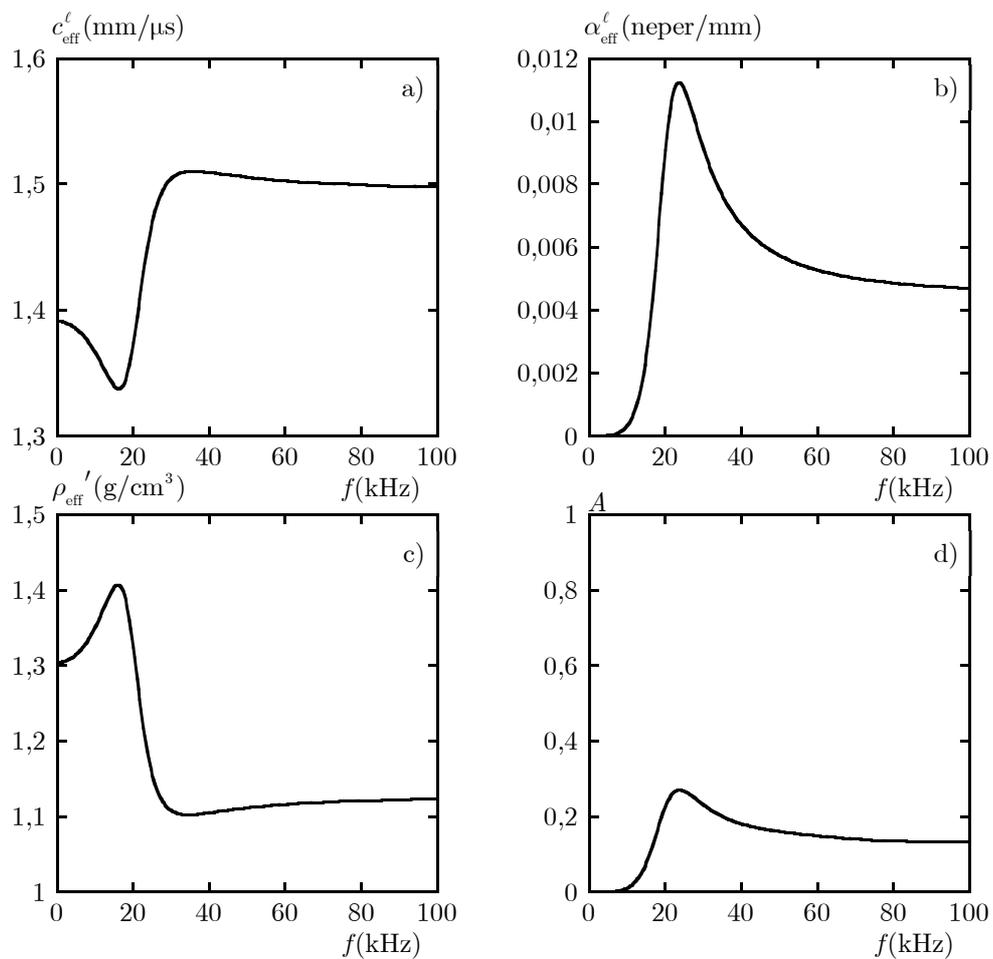


figure 1-14 : propriétés effectives de la configuration de référence n°2,  
 a) célérité de phase effective ; b) atténuation effective ;  
 c) partie réelle de la masse volumique effective ; d) coefficient d'absorption de la plaque.

La figure 1-13 présente une carte des contraintes autour de la sphère de plomb à la fréquence de résonance (20 kHz). Nous observons deux zones de compression dans la matrice en amont et en aval de l'inclusion ( $x_3 = \pm a$ ), et une zone de cisaillement dans la matrice à l'équateur ( $x_3 = 0$ ). La matrice joue le rôle de ressort en compression en amont et en aval de l'inclusion, et de ressort en cisaillement à son équateur ( $\theta = \pm \pi/2$ ).

Les propriétés effectives de la configuration de référence n°2, calculées à l'aide des équations (1-54), (1-56) et (1-68), sont présentées sur la figure 1-14. L'ensemble de ces propriétés est impacté par la résonance dipolaire des inclusions. En effet, la célérité de phase et la partie réelle de la masse volumique présentent une forte variation de leur valeur autour de la fréquence de résonance (20 kHz). De plus, le matériau présente un pic d'atténuation à cette fréquence, dû à la multidiffusion des ondes acoustiques au sein du matériau hétérogène.

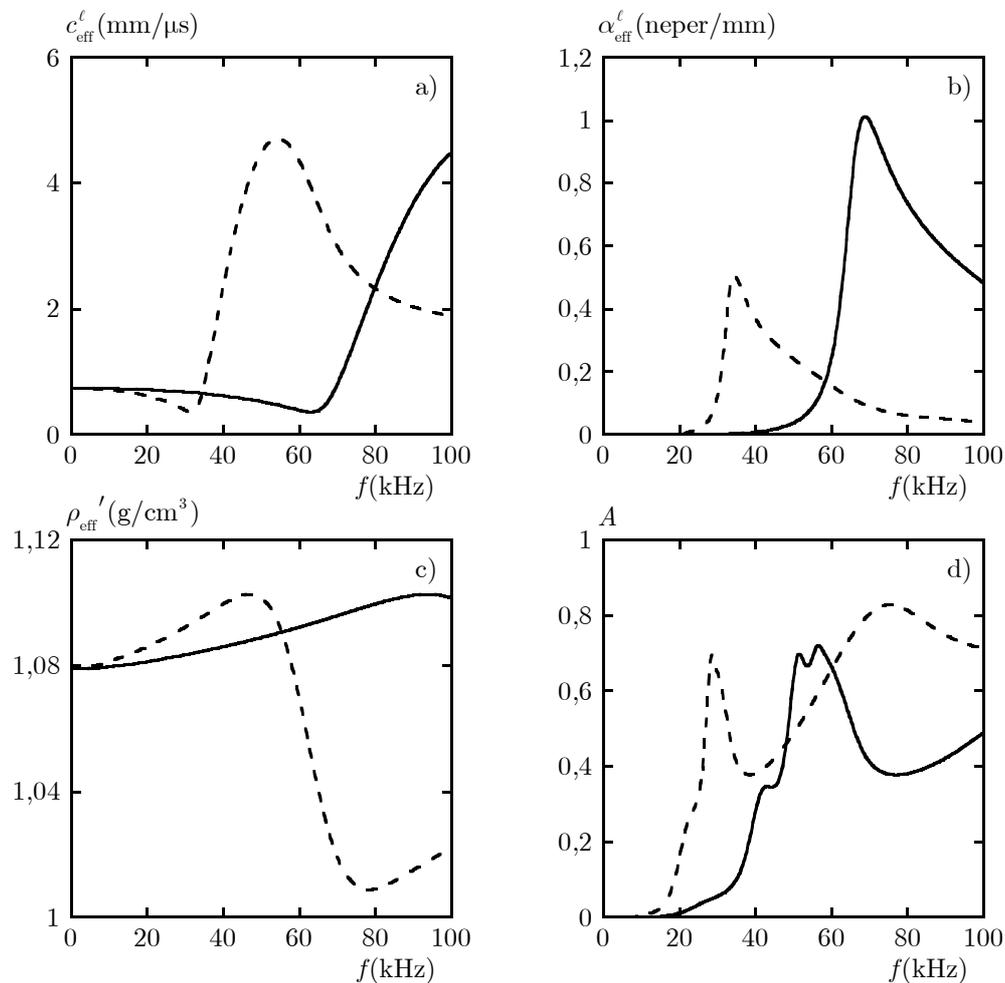


figure 1-15 : propriétés effectives de la configuration de référence n°1 en fonction du rayon des inclusions  $a$ , 0,5 mm en trait plein et 1 mm en trait pointillé.

### 1.5.4 Recherche de la configuration optimale

#### 1.5.4.1 Influence du rayon des inclusions

Dans ce paragraphe, nous étudions l'influence du rayon des inclusions  $a$ , qui apparaît dans les expressions analytiques des propriétés effectives (1-54) (1-56) et (1-68) *via* la fréquence réduite  $\tilde{\omega}$  (1-72). Notons que la célérité de phase et la masse volumique sont constantes à fréquence réduite constante. Ainsi, plus le rayon des inclusions est petit, plus les comportements attendus vont se manifester à hautes fréquences. Par ailleurs, l'atténuation  $\alpha$  dépend aussi de la fréquence réduite, mais c'est le produit atténuation fois rayon ( $\alpha a$ ) qui est constant à fréquence réduite constante. Ainsi, plus le rayon des inclusions est petit, plus le pic d'atténuation est important et se déplace à hautes fréquences (figure 1-15). Notons que l'absorption de la plaque  $A$  ne dépend pas simplement du rayon des inclusions. L'épaisseur de la plaque, et donc le rapport longueur d'onde sur épaisseur, interviennent également dans l'expression (1-73).

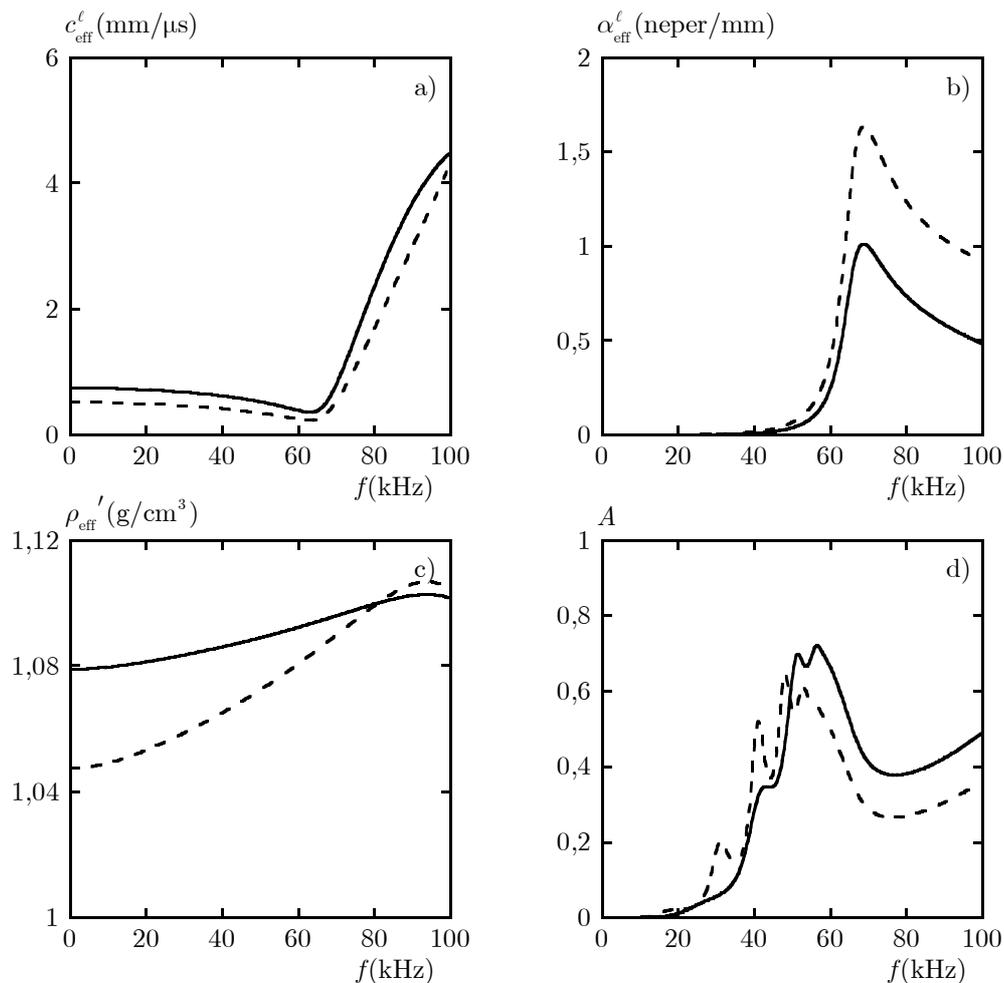


figure 1-16 : propriétés effectives de la configuration de référence n°1 en fonction de la fraction volumique d'inclusions  $\phi$ , 2 % en trait plein et 5 % en trait pointillé.

### 1.5.4.2 Influence de la fraction volumique

Dans ce paragraphe, nous étudions l'influence de la fraction volumique d'inclusions, en comparant les configurations de référence n°1 et n°2 à des configurations où la fraction volumique d'inclusions est plus importante (figures 1-16 et 1-17). Nous notons une augmentation générale des phénomènes lorsque la fraction volumique augmente. En effet, plus le nombre de diffuseurs est important, plus les effets de diffusion sont importants, ce qui augmente l'amplitude de variation de la célérité de phase et de la masse volumique effective, ainsi que le niveau d'atténuation dans le matériau. Il est nécessaire de prêter attention au point suivant : le modèle utilisé pour le calcul des propriétés effectives n'est valide que pour une faible fraction volumique d'inclusions. Nous pourrions, en théorie, augmenter l'efficacité du matériau en augmentant la fraction volumique d'inclusions, mais le résultat du calcul des propriétés effectives souffrirait plus encore de fortes imprécisions.

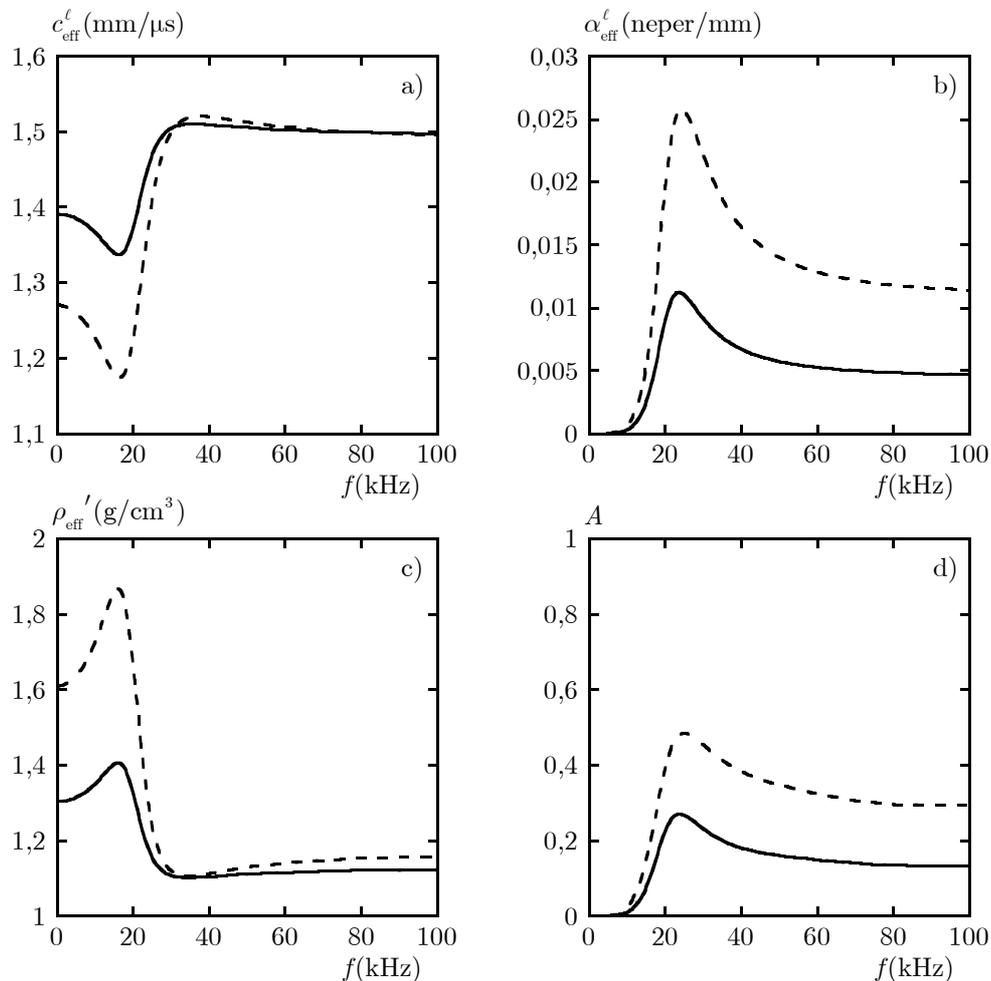


figure 1-17 : propriétés effectives de la configuration de référence n°2 en fonction de la fraction volumique d'inclusions  $\phi$ , 2 % en trait plein et 5 % en trait pointillé.

### 1.5.4.3 Influence de la célérité des ondes longitudinales dans les phases en présence

Nous étudions l'influence de la célérité des ondes longitudinale dans la matrice  $c_0^\ell$  et dans les inclusions  $c_1^\ell$  en comparant les configurations de référence n°1 et n°2 avec des configurations où ces célérités sont différentes. Les figures 1-18 et 1-19 nous présentent l'impact d'une célérité des ondes longitudinales dans la matrice plus faible, tandis que les figures 1-20 et 1-21 montrent l'effet d'une célérité des ondes dans les inclusions différente.

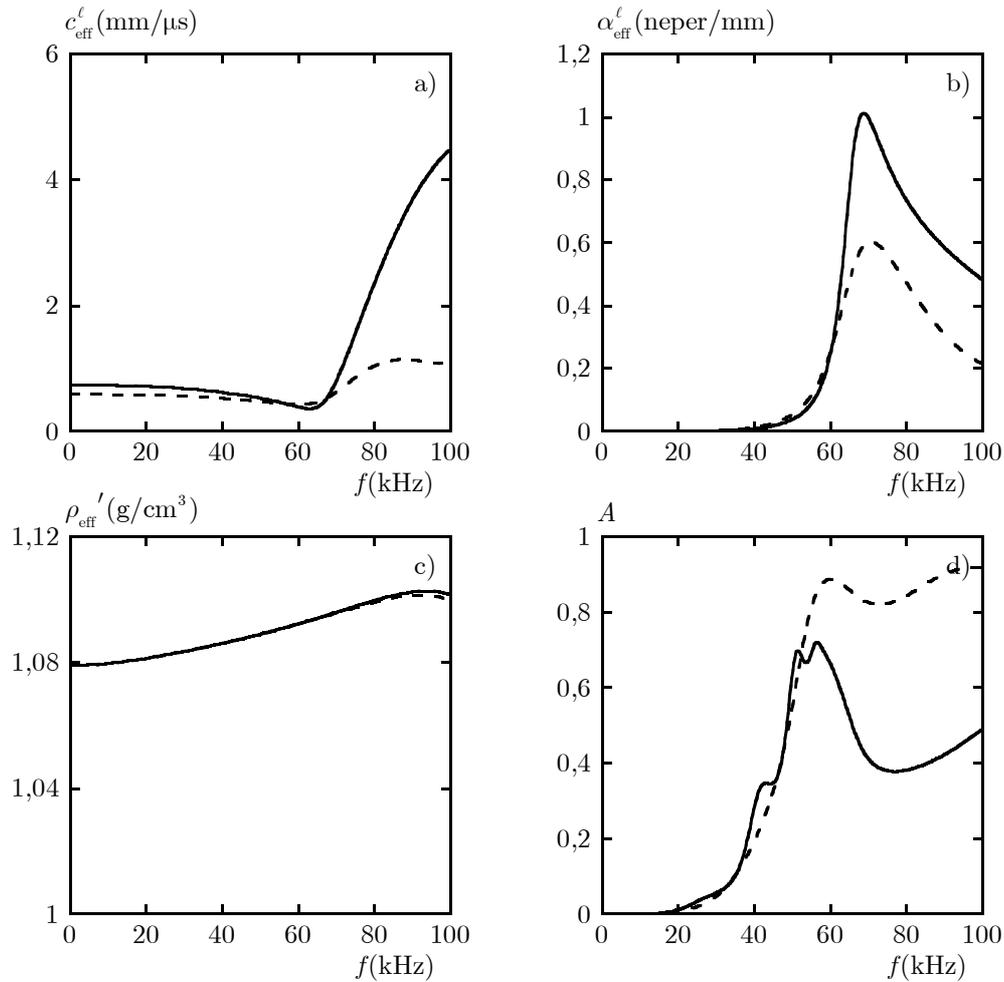
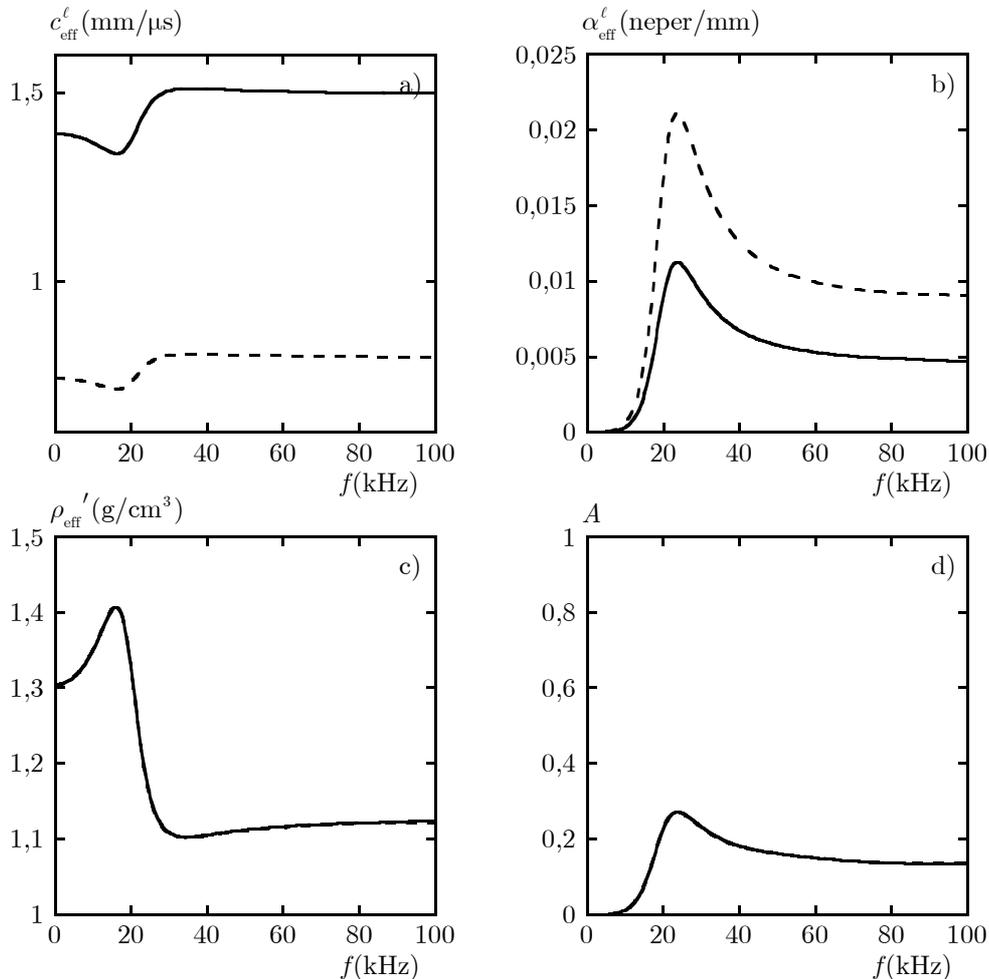


figure 1-18 : propriétés effectives de la configuration de référence n°1 en fonction de la célérité longitudinale dans la matrice,  $c_0^\ell = 1,5$  mm/ $\mu$ s en trait plein et  $c_0^\ell = 0,8$  mm/ $\mu$ s en trait pointillé.

Sur la figure 1-18, nous remarquons que les variations de la célérité effective sont d'autant plus faibles que la célérité des ondes longitudinales dans la matrice est faible et se rapproche de celle dans les inclusions de polystyrène expansé (0,498 mm/ $\mu$ s). Le deuxième effet remarquable se situe au niveau de l'atténuation effective, qui est plus faible lorsque la célérité longitudinale de la matrice est plus petite. Ces deux phénomènes sont dus au fait que la résonance monopolaire de cette configuration est d'autant plus élevée que le contraste de célérités longitudinales entre la matrice et les inclusions est important. De plus, la valeur

statique de la célérité effective est plus petite lorsque la célérité des ondes longitudinales dans la matrice est plus faible. Enfin, il n'y a aucun effet sur la partie réelle de la masse volumique effective. Ces mêmes observations sont faites sur la configuration de référence n°2 (figure 1-19), excepté pour l'atténuation effective pour laquelle l'effet de la célérité des ondes longitudinales dans la matrice est inversé.



**figure 1-19 : propriétés effectives de la configuration de référence n°2 en fonction de la célérité longitudinale dans la matrice,  $c_0^{\ell} = 1,5\text{mm}/\mu\text{s}$  en trait plein et  $c_0^{\ell} = 0,8\text{mm}/\mu\text{s}$  en trait pointillé.**

La figure 1-20 nous présente l'impact de la célérité longitudinale dans les inclusions sur les propriétés effectives, où nous observons que son impact est faible. La résonance monopolaire est toujours observable à une fréquence légèrement plus élevée ( $\approx 80$  kHz). Nous notons également une légère augmentation de l'absorption totale de la plaque de matériau hétérogène. En revanche, l'impact d'une célérité des ondes longitudinales dans les inclusions différente est plus important pour la configuration de référence n°2. En effet, nous observons sur la figure 1-21 nous présentant l'impact d'une célérité des ondes longitudinales plus faible dans les inclusions de plomb sur les propriétés effectives, que le niveau moyen de la célérité

effective est plus bas. Nous remarquons également une augmentation de l'atténuation effective vers 80 kHz, correspondant à une résonance monopolaire de fréquence plus élevée.

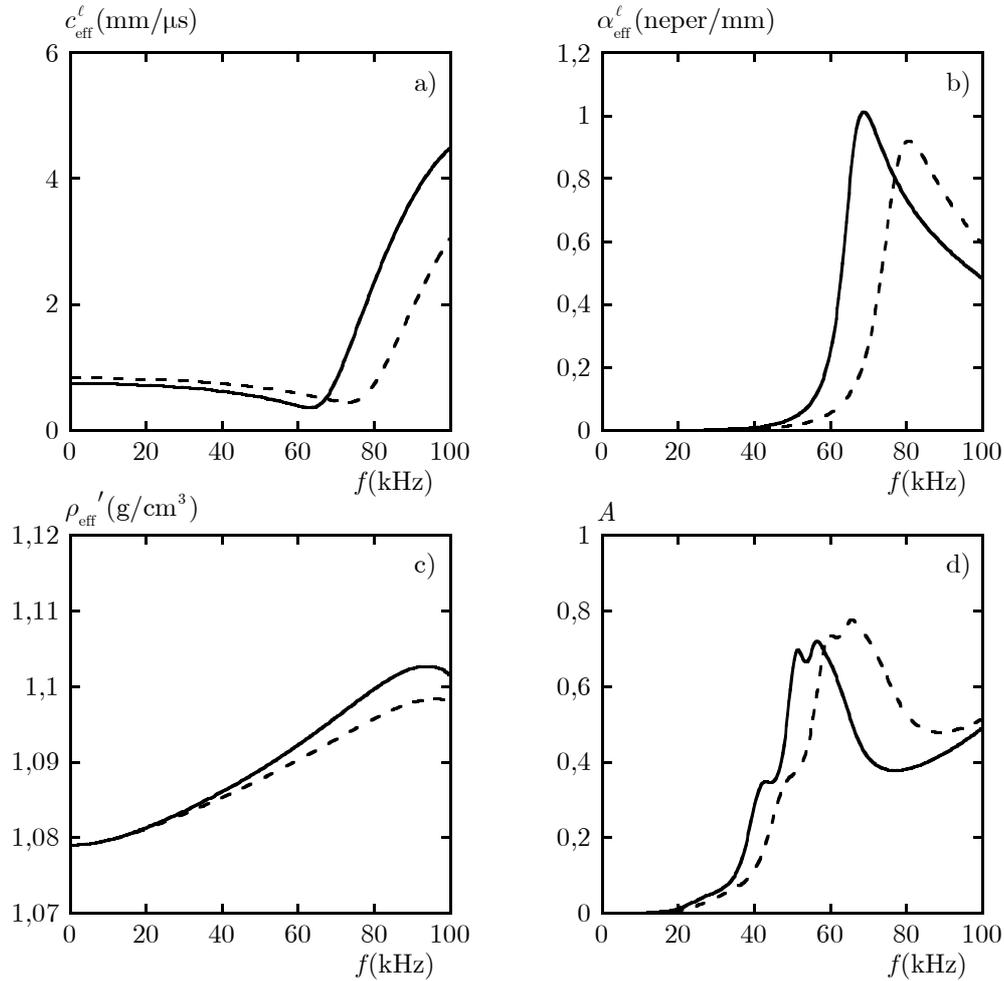


figure 1-20 : propriétés effectives de la configuration de référence n°1

en fonction de la célérité longitudinale dans les inclusions,

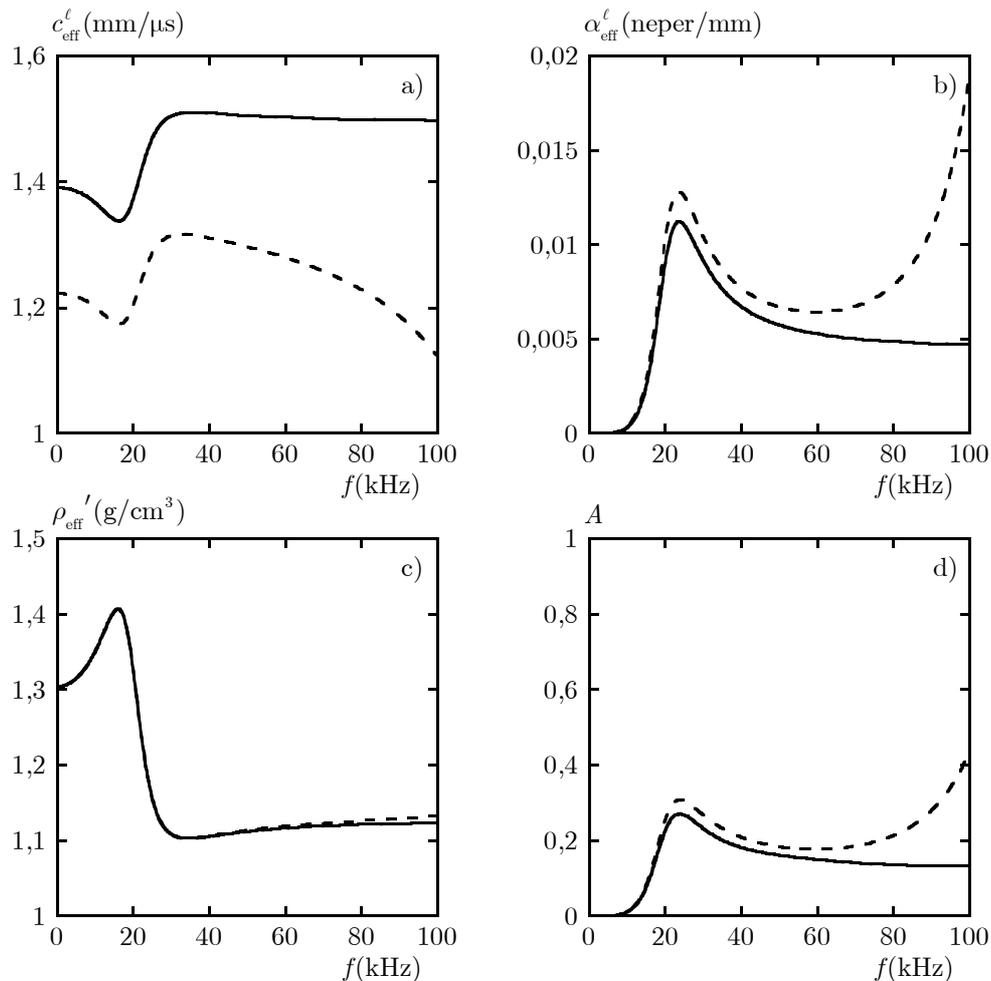
$c_1^l = 0,498 \text{ mm}/\mu\text{s}$  en trait plein et  $c_1^l = 0,8 \text{ mm}/\mu\text{s}$  en trait pointillé.

#### 1.5.4.4 Influence de la célérité des ondes transversales dans la matrice

Dans ce paragraphe, nous étudions l'influence de la célérité transversale  $c_0^t$  dans la matrice, en comparant les configurations de référence n°1 et n°2 à une configuration où cette célérité est plus petite. Les deux configurations de référence comportant des inclusions molles ou denses, l'effet de la célérité des ondes transversales dans la matrice sera différent.

La figure 1-22 nous présente l'impact d'une baisse de la célérité transversale dans la matrice, sur les propriétés effectives du matériau aléatoire. Nous remarquons que la résonance dipolaire apparaît à plus basses fréquences ( $\approx 10 \text{ kHz}$ ). La matrice jouant le rôle de ressort dans l'oscillation des inclusions, leur fréquence de résonance est donc directement liée à la célérité transversale dans la matrice. Ainsi, pour une valeur plus petite de la célérité

transversale dans la matrice, la fréquence de résonance des inclusions est plus petite. Nous notons également que l'amplitude des variations de la célérité de phase et de la masse volumique effectives n'est pas modifiée, alors que le niveau d'atténuation est diminué lorsque la célérité transversale dans la matrice est plus petite. Finalement, l'influence de la célérité transversale dans la matrice sur la configuration de référence n°2 est similaire à celle du rayon des inclusions (§1.5.4.1).



**figure 1-21 : propriétés effectives de la configuration de référence n°2 en fonction de la célérité longitudinale dans les inclusions,  $c_1^l = 2,21 \text{ mm}/\mu\text{s}$  en trait plein et  $c_1^l = 1 \text{ mm}/\mu\text{s}$  en trait pointillé.**

La figure 1-23 nous présente pour la configuration de référence n°1, l'impact de la baisse de la célérité transversale dans la matrice sur les propriétés effectives du matériau aléatoire. Comme dans le cas précédent, la fréquence de résonance des inclusions diminue avec la célérité transversale dans la matrice. Cependant, à l'inverse du cas précédent, diminuer la célérité transversale des ondes dans la matrice accentue la résonance monopolaire des inclusions et donc augmente l'amplitude des effets sur les propriétés effectives. En effet, la rigidité en cisaillement de la matrice s'oppose au mouvement de pulsation des inclusions.

Ainsi, pour une célérité transversale dans la matrice plus petite (rigidité en cisaillement plus petite), le mouvement monopolaire de l'inclusion est facilité.

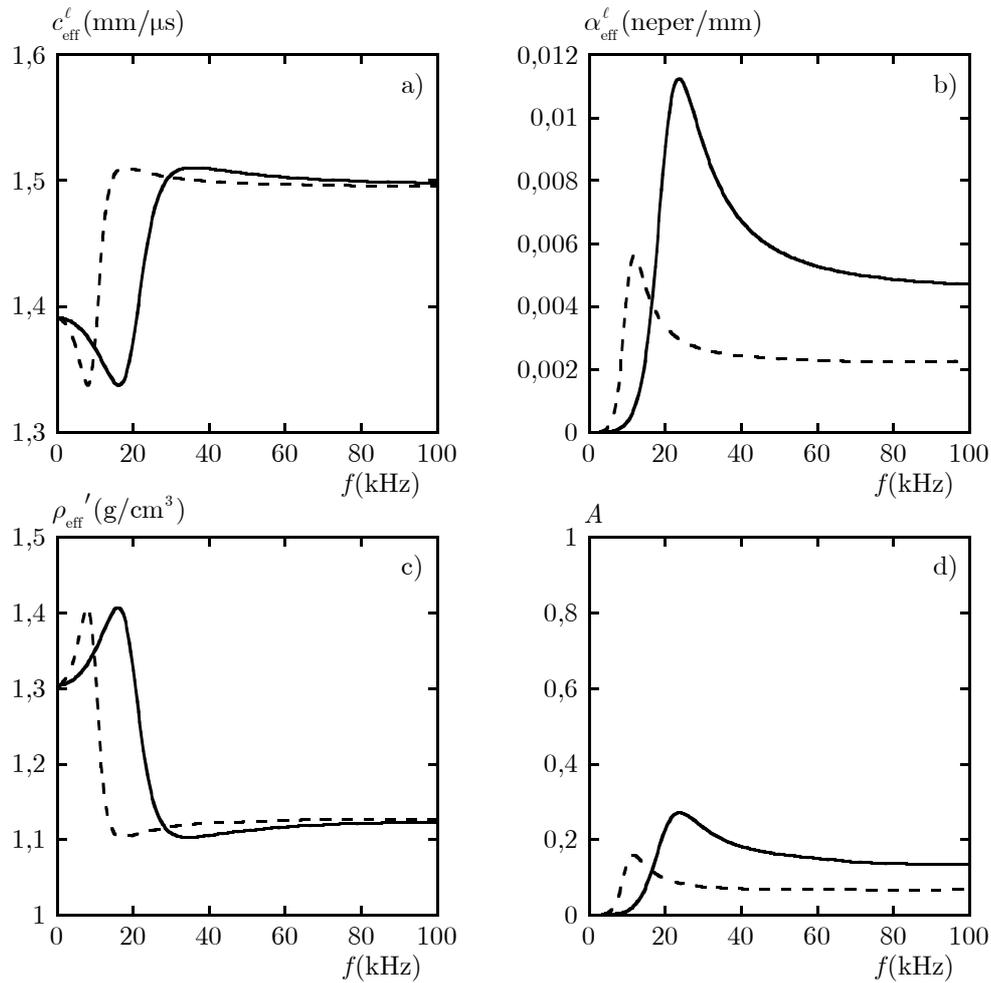


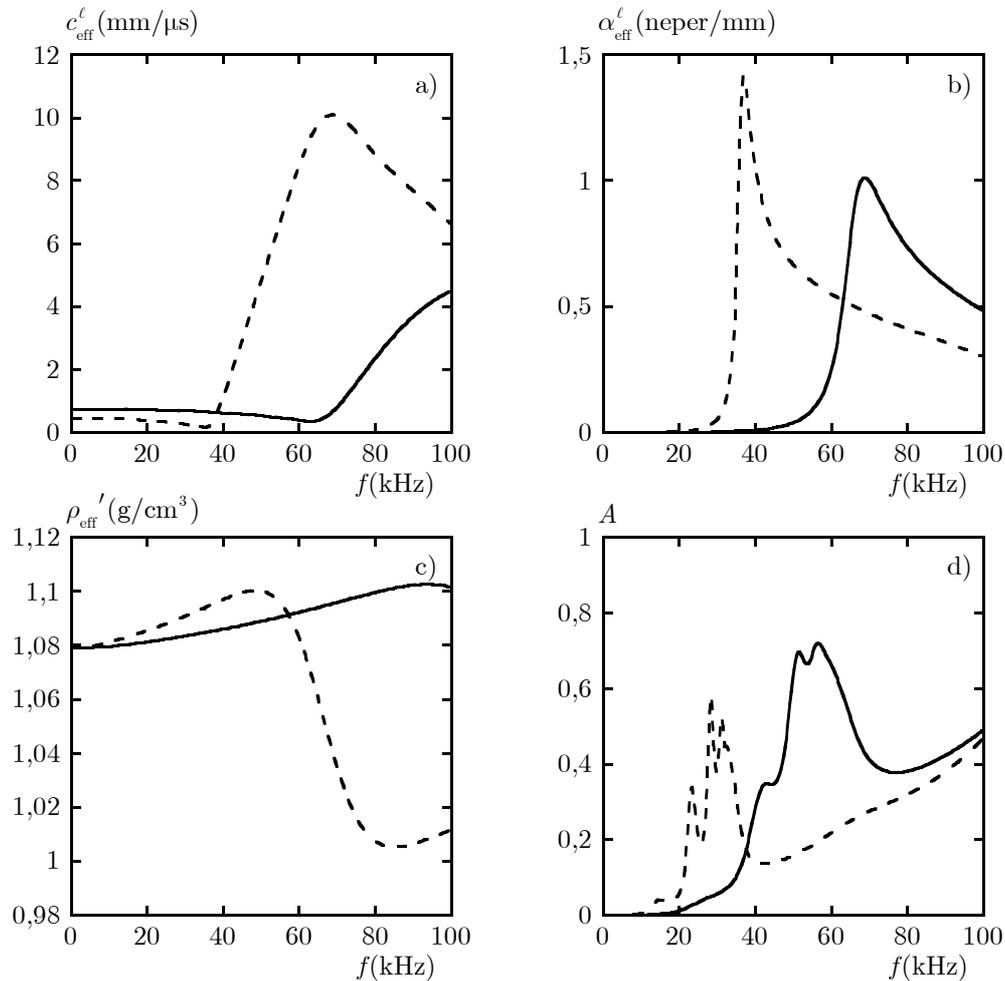
figure 1-22 : propriétés effectives de la configuration de référence n°2 en fonction de la célérité transversale dans la matrice,  $c_0^t = 0,1 \text{ mm}/\mu\text{s}$  en trait plein et  $c_0^t = 0,05 \text{ mm}/\mu\text{s}$  en trait pointillé.

#### 1.5.4.5 Influence de la masse volumique des inclusions

Dans ce paragraphe, nous étudions l'influence de la masse volumique des inclusions, en comparant les configurations de référence n°1 et n°2, à des configurations où la masse volumique des inclusions est respectivement plus élevée et plus faible. Comme dans le paragraphe précédent, nous considérons les deux configurations de référence constituées d'inclusions molles ou denses car l'effet de la masse volumique de l'inclusion est différent.

La figure 1-24 nous présente pour la configuration de référence n°2, l'impact d'une masse volumique plus basse sur les propriétés effectives. Nous remarquons que la résonance des inclusions est plus faible lorsque la masse volumique des inclusions est plus petite. En effet, la résonance dipolaire basses-fréquences étant directement liée au contraste de masse volumique entre la matrice et les inclusions, baisser ce contraste diminue les effets de multidiffusion. Il

est ainsi nécessaire que l'inclusion soit très dense par rapport à la matrice pour que la résonance dipolaire des inclusions soit accentuée.



**figure 1-23 : propriétés effectives de la configuration de référence n°1 en fonction de la célérité transversale dans la matrice,  $c_0^t = 0,1$  mm/ $\mu$ s en trait plein et  $c_0^t = 0,05$  mm/ $\mu$ s en trait pointillé.**

La figure 1-25 nous présente pour la configuration de référence n°1, l'effet d'une masse volumique des inclusions plus élevée, sur les propriétés effectives de la structure aléatoire. Nous remarquons que la fréquence de résonance monopolaire des inclusions (65 kHz) augmente avec la masse volumique des inclusions. De plus, contrairement à la configuration de référence n°2, l'amplitude des phénomènes diminue légèrement lorsque la masse volumique des inclusions augmente. L'effet de la masse volumique des inclusions est différent pour les deux configurations de référence. En effet, diviser par deux la masse volumique des inclusions denses diminue de 64 % l'atténuation effective, alors que multiplier par vingt-deux la masse volumique des inclusions molles la diminue de 20 %.

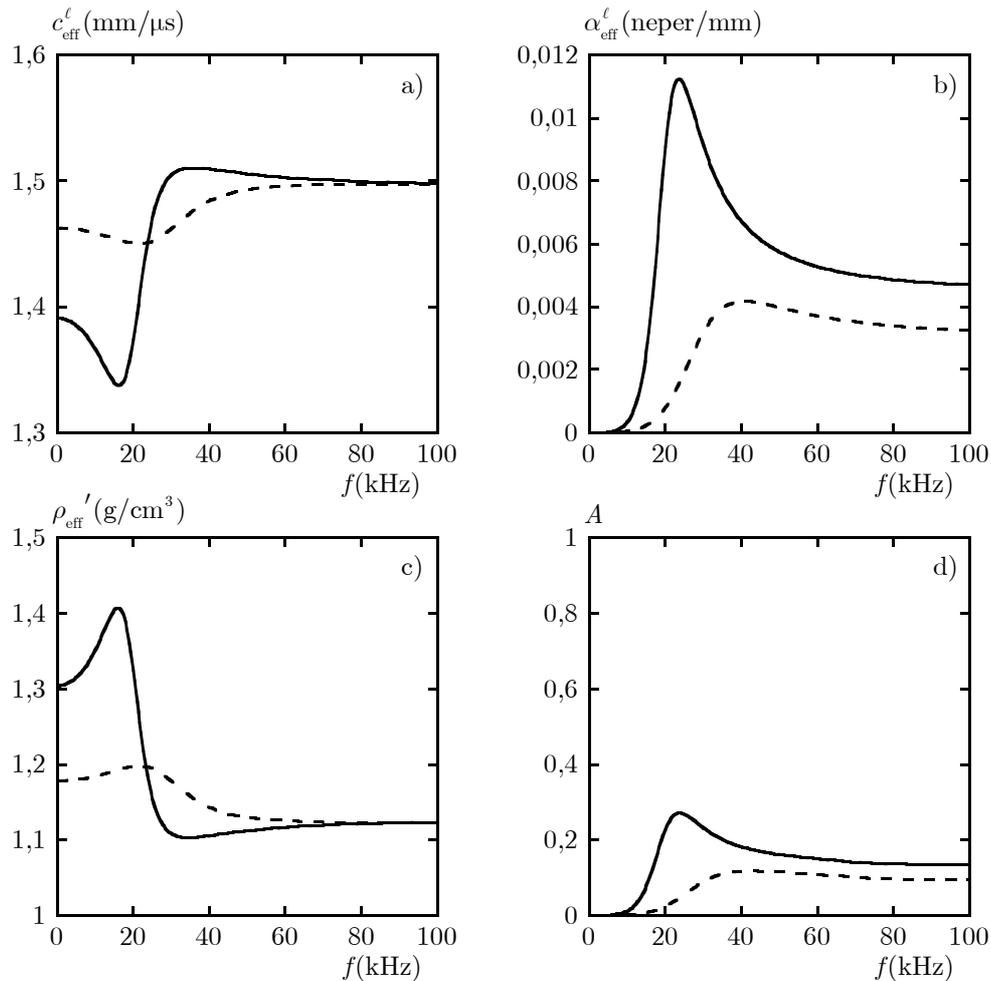


figure 1-24 : propriétés effectives de la configuration de référence n°2 en fonction de la masse volumique des inclusions,  $\rho_1 = 11,3$  g/cm<sup>3</sup> en trait plein et  $\rho_1 = 5$  g/cm<sup>3</sup> en trait pointillé.

#### 1.5.4.6 Influence de l'amortissement de la matrice

Dans ce paragraphe, nous étudions l'influence des coefficients d'amortissement de la matrice,  $\eta_0^{\ell}$  et  $\eta_0^t$ . Jusqu'ici, la matrice était purement élastique (sans amortissement dû à la viscosité du matériau). Nous comparons ainsi les configurations de référence n°1 et n°2 à une configuration où la matrice possède 1 % et 10 % d'amortissement sur respectivement les célérités longitudinale et transversale.

Les figures 1-26 et 1-27 nous présentent pour les configurations de référence n°1 et n°2 l'impact d'un amortissement important dans la matrice sur les propriétés effectives de la structure aléatoire. Nous observons principalement une augmentation de l'atténuation effective à hautes fréquences, induite par l'amortissement de la matrice. Nous remarquons également que l'amplitude du pic d'atténuation dû à la résonance des inclusions (monopolaire à 65 kHz et dipolaire à 20 kHz figures 1-26 et 1-27) est naturellement moins importante en

présence d'une matrice absorbante. L'amortissement affecte également les autres propriétés effectives, qui voient leur variation d'amplitude diminuer.

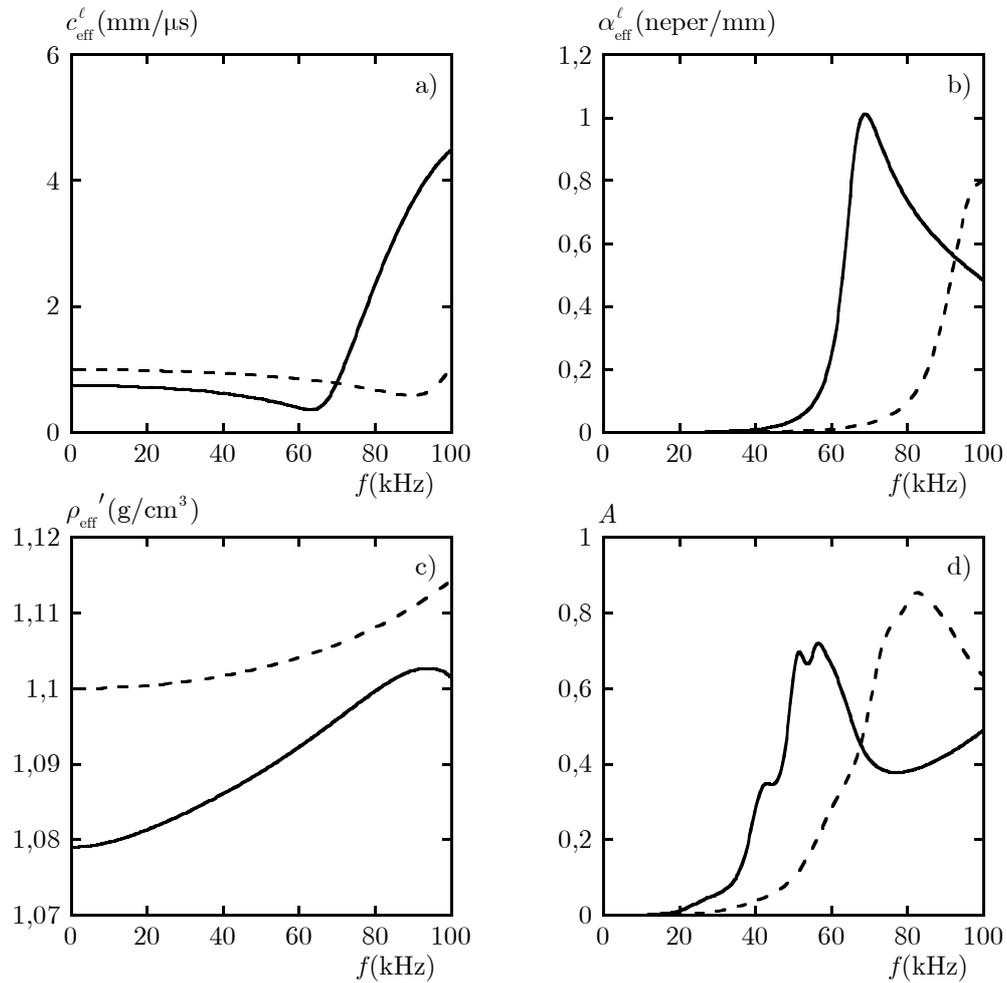


figure 1-25 : propriétés effectives de la configuration de référence n°1 en fonction de la masse volumique des inclusions,  $\rho_1 = 0,05 \text{ g/cm}^3$  en trait plein et  $\rho_1 = 1,1 \text{ g/cm}^3$  en trait pointillé.

#### 1.5.4.7 Synthèse

L'étude paramétrique menée permet d'établir deux configurations optimales présentant une résonance monopolaire ou dipolaire à basses-fréquences (tableau 1-5).

résonance basses-fréquences	$\rho_1 / \rho_0$	$c_0^l / c_1^l$	$c_0^t / c_1^t$
monopolaire	sans influence	élevé	faible
dipolaire	élevé	sans influence	faible

tableau 1-5 : tableau synthétique de la configuration optimale pour les sphères pleines.

#### 1.5.5 Configurations avec des sphères de type « noyau-coque »

Dans ce paragraphe, les inclusions ont une structure différente des deux milieux étudiés précédemment. Nous considérons des inclusions de type « noyau-coque » contenant un noyau

dense et une coque molle, dont la structure biphasique permet de contrôler la fréquence où se manifeste la résonance dipolaire [27]. La matrice est la même matrice que précédemment (tableau 1-2). La coque et le cœur sont constitués respectivement d'une mousse élastomère et de plomb. Les propriétés acoustiques de ces deux matériaux sont données dans le tableau 1-6. Du fait de l'adjonction d'air dans le matériau élastomère, la coque a une célérité longitudinale très faible (0,1 mm/μs) par rapport à un matériau élastomère pur (1,5 mm/μs). On observe enfin que la mousse choisie arbitrairement pour la coque n'est pas réaliste ( $c_1^\ell = c_1^t$ ).

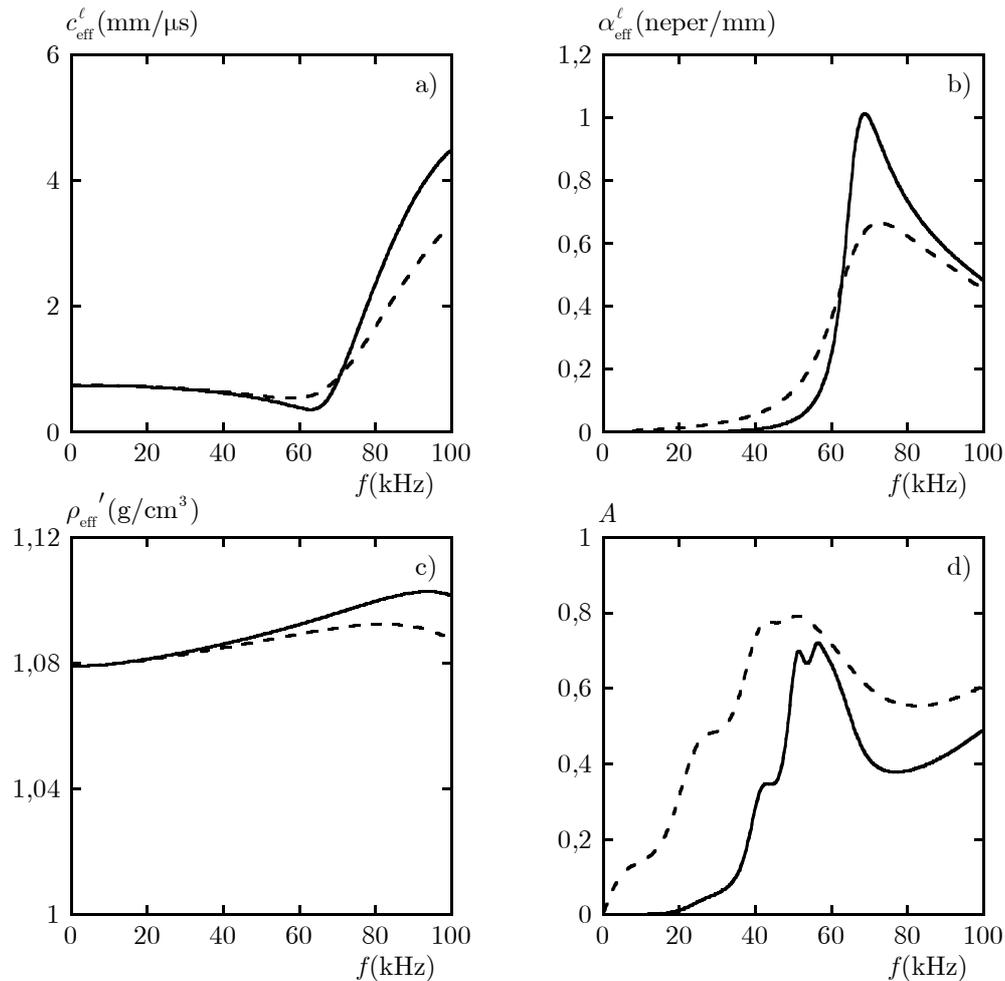


figure 1-26 : propriétés effectives de la configuration de référence n°1 en fonction de l'atténuation dans la matrice, pas d'atténuation en trait plein et ( $\eta_0^\ell = 1\%$ ,  $\eta_0^t = 10\%$ ) en trait pointillé.

	$c^{\ell*l}$ (mm/μs)	$\eta^\ell$	$c^{t*l}$ (mm/μs)	$\eta^t$	$\rho$ (g/cm³)
coque (mousse)	0,1	0	0,1	0	1,1
noyau (plomb)	2,21	0	0,86	0	11,3

tableau 1-6 : propriétés acoustiques de la coque et du noyau de l'inclusion de type « noyau-coque ».

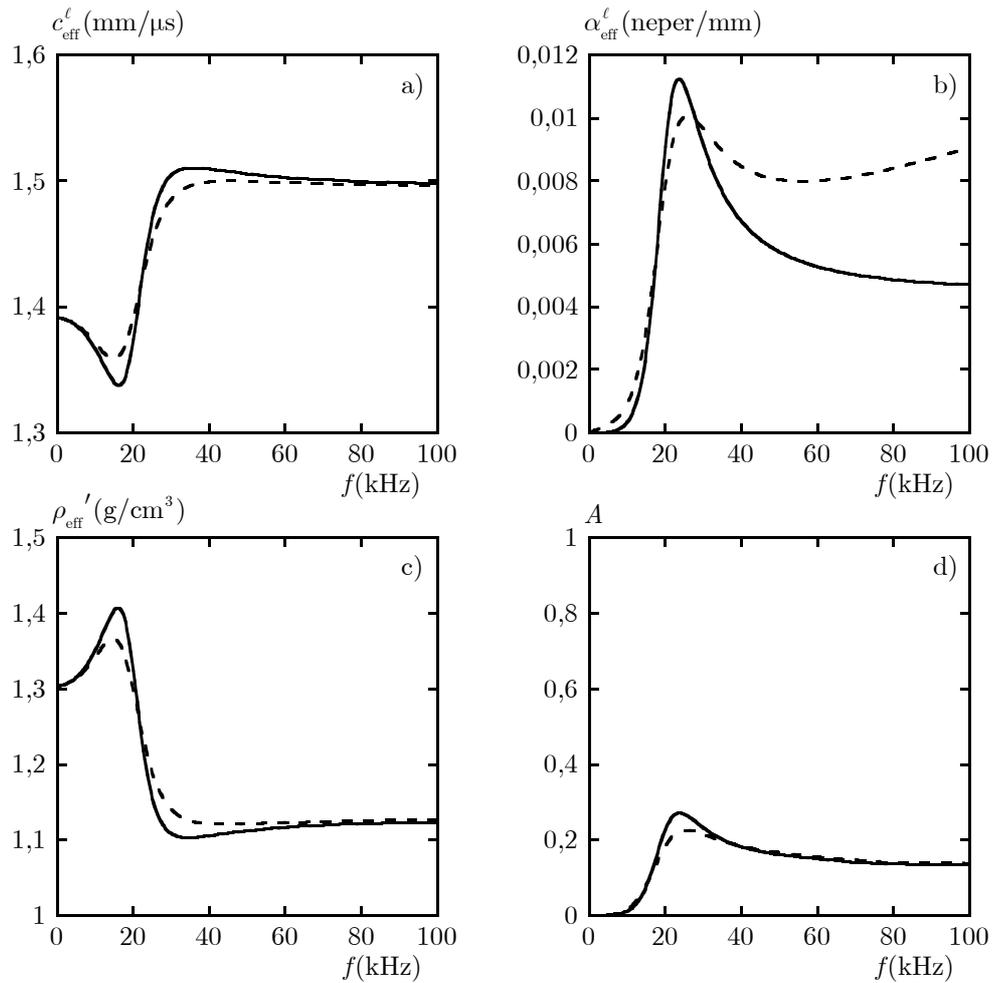


figure 1-27 : propriétés effectives de la configuration de référence n°2 en fonction de l'atténuation dans la matrice, pas d'atténuation en trait plein et ( $\eta_0^{\ell} = 1\%$ ,  $\eta_0^t = 10\%$ ) en trait pointillé.

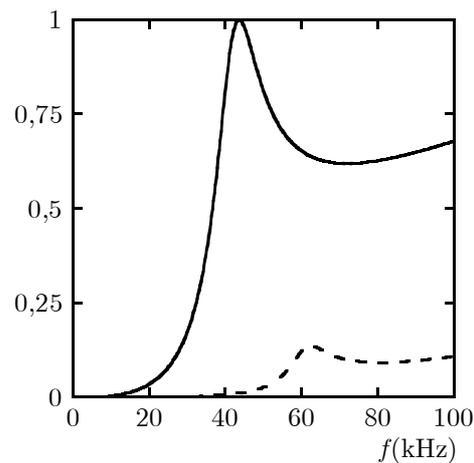


figure 1-28 : module des deux premiers coefficients de diffusion pour la configuration de référence n°3 ( $|A_0|$  en trait plein et  $|A_1|$  en trait pointillé).

Nous choisissons des inclusions avec un rayon externe de 1,5 mm, une épaisseur de coque de 0,1 mm, une épaisseur de matériau de 15 mm et une fraction volumique d'inclusions de 10 %. Cette configuration est appelée configuration de référence n°3.

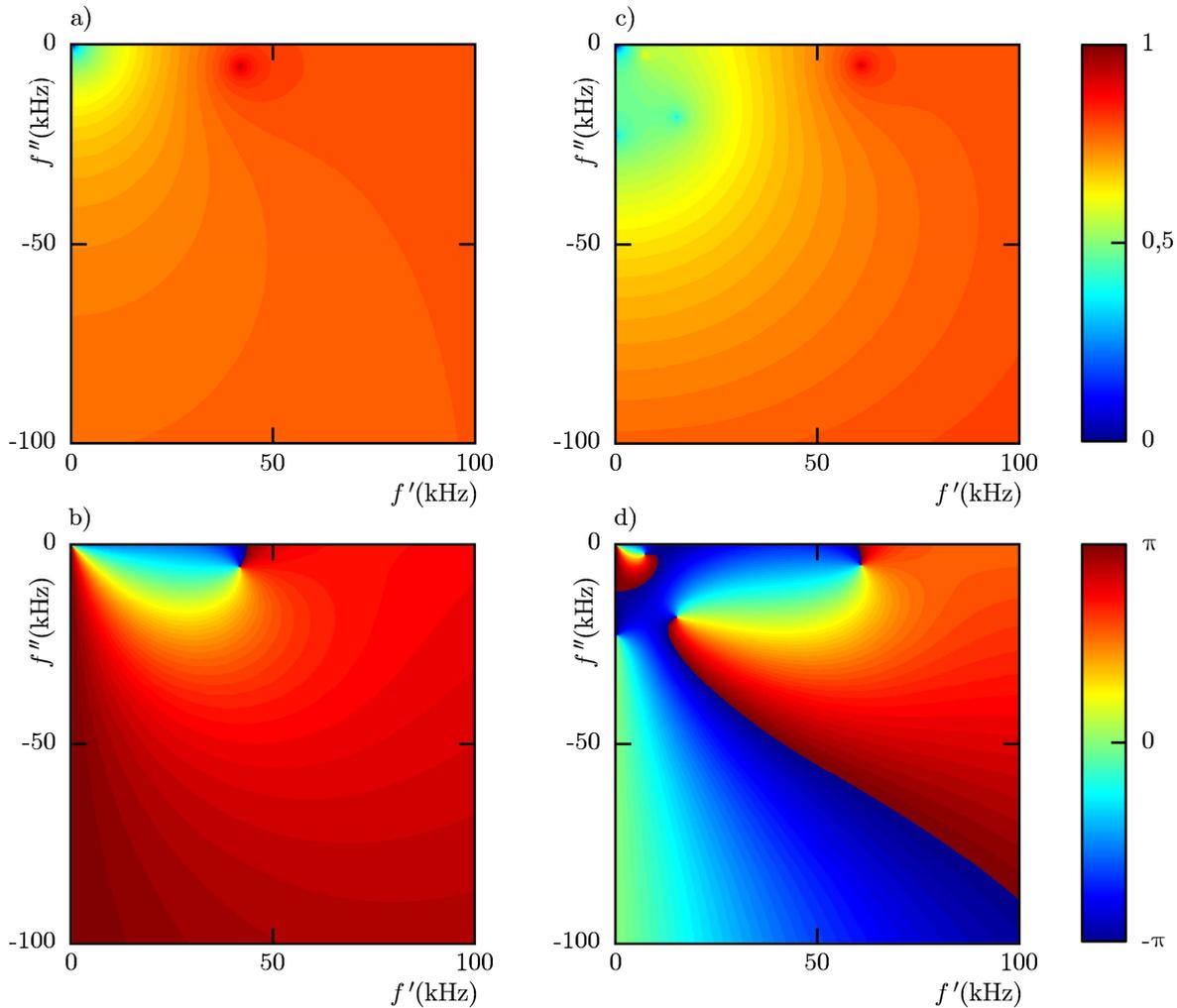


figure 1-29 : module et phase des deux premiers coefficients de diffusion pour la configuration de référence n°3 en fonction de la fréquence à valeurs complexes, a) module et b) phase du coefficient  $A_0$  ; c) module et d) phase du coefficient  $A_1$ .

La figure 1-28 présente les modules des deux premiers coefficients modaux de la configuration de référence n°3, calculés à l'aide de l'équation (A-9). Nous remarquons qu'une résonance monopolaire apparaît à 40 kHz, et qu'une résonance dipolaire se manifeste à 60 kHz. La figure 1-29 présentant les modules et les phases des deux premiers coefficients de diffusion en fonction de la fréquence à valeurs complexes montre qu'une résonance dipolaire apparaît également à 10 kHz. Cette résonance dipolaire correspond à la résonance étudiée dans la littérature [27], et est induite par la forte densité du cœur, comme nous allons le voir dans la suite. La deuxième résonance dipolaire (60 kHz) et la résonance monopolaire (40 kHz)

apparaissant pour des fréquences proches sont quant à elles dues à la structure particulière des inclusions, en particulier à la *coque molle*.

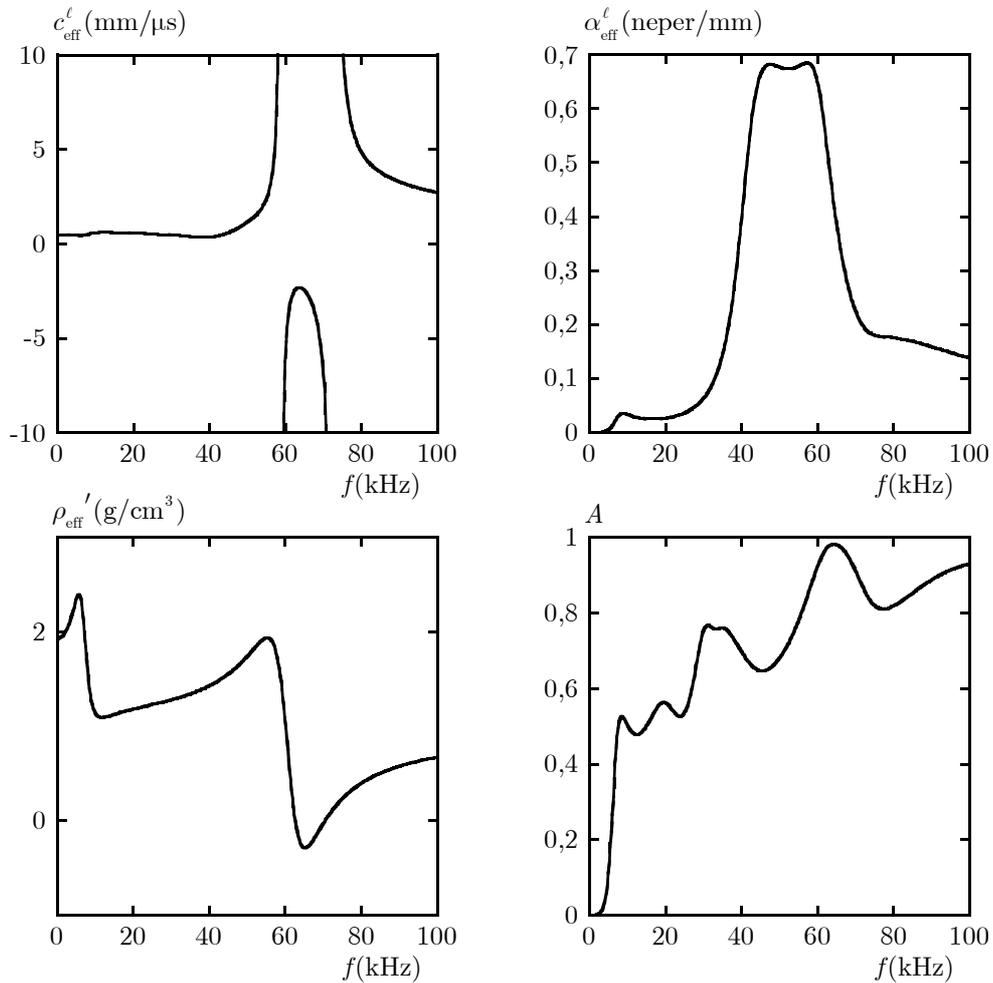


figure 1-30 : propriétés effectives de la configuration de référence n°3,

a) célérité de phase effective ; b) atténuation effective ;

c) partie réelle de la masse volumique effective ; d) coefficient d'absorption de la plaque.

Les propriétés effectives de la configuration avec inclusions de type « noyau-coque », calculées à l'aide des équations (1-54), (1-56) et (1-68), sont présentées sur la figure 1-30. Nous remarquons tout d'abord que l'effet de la première résonance dipolaire est présent à 10 kHz, sur le nombre d'onde effectif, sur la partie réelle de masse volumique effective et sur l'absorption totale de la plaque. Par ailleurs, l'effet des deux résonances supplémentaires est observable plus haut en fréquence sur l'ensemble des paramètres effectifs, la résonance monopolaire (40 kHz) affectant principalement le nombre d'onde et la deuxième résonance dipolaire (60 kHz) affectant principalement la masse volumique effective. Il est à noter qu'entre 60 et 70 kHz, la célérité de phase prend des valeurs négatives, caractérisant ainsi un milieu d'indice acoustique négatif [19] [20]. Observons maintenant l'influence des paramètres

des constituants de ces inclusions, tout en justifiant l'intérêt du *cœur dense* et de la *coque molle*.

## 1.5.6 Recherche de la configuration optimale

### 1.5.6.1 Influence des propriétés du cœur

Nous étudions dans un premier temps l'influence des propriétés du cœur sur la réponse acoustique du matériau aléatoire. Observons tout d'abord l'effet d'une masse volumique plus faible, en comparant la configuration de référence n°3 à une configuration où elle est deux fois plus petite.

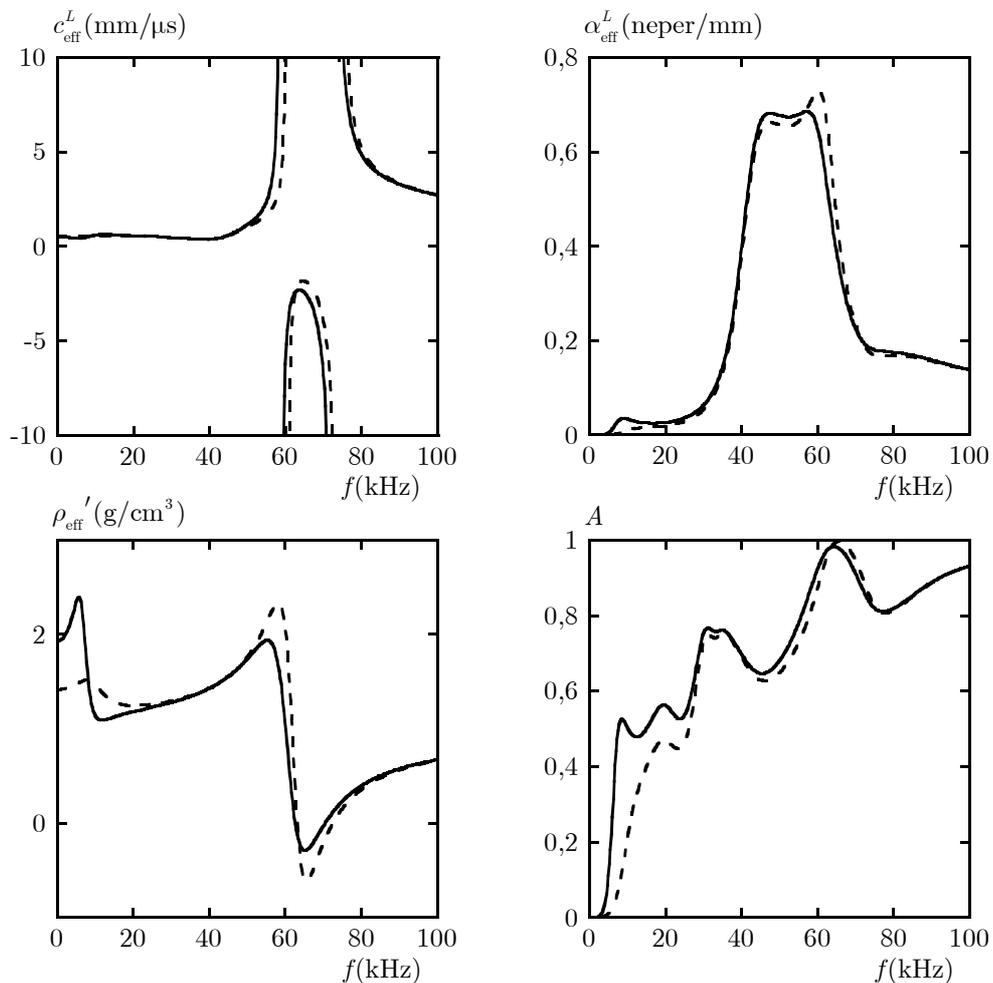
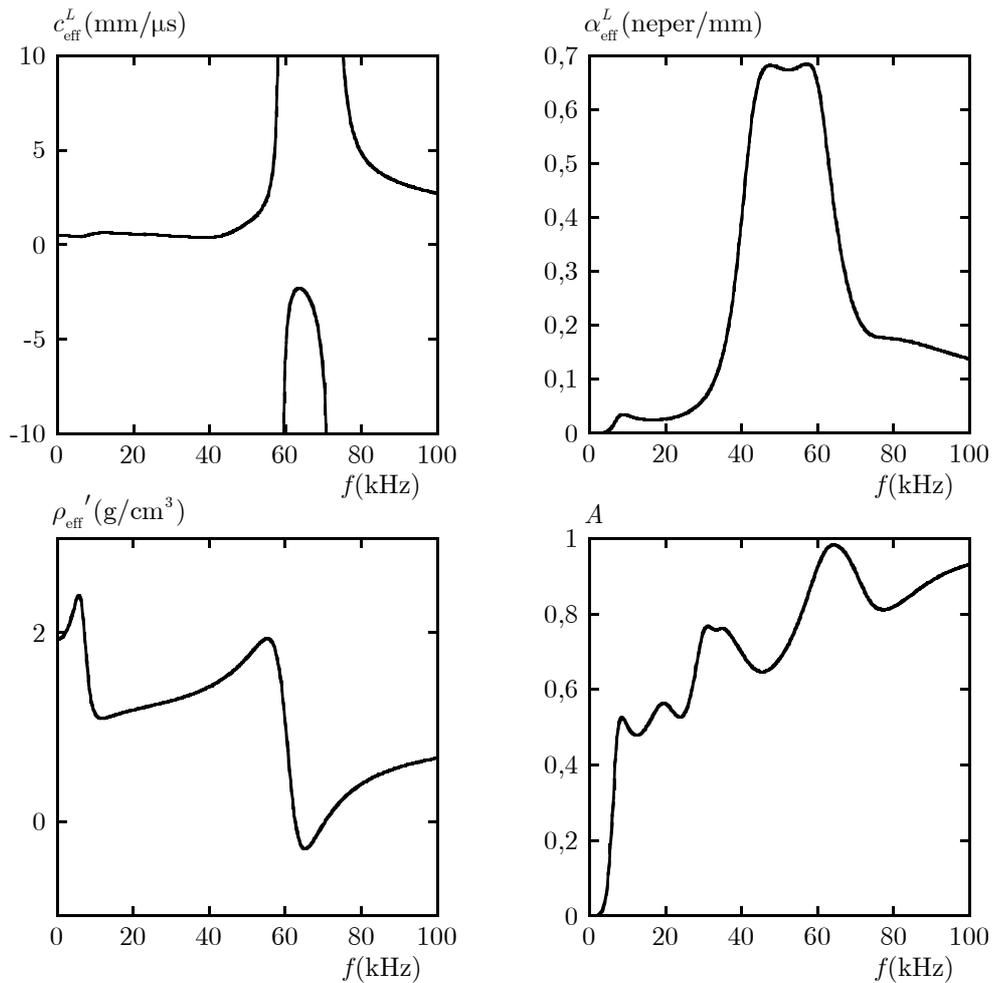


figure 1-31 : propriétés effectives de la configuration de référence n°3 en fonction de la masse volumique du cœur,  $\rho_2 = 11,3 \text{ g/cm}^3$  en trait plein et  $\rho_2 = 5 \text{ g/cm}^3$  en trait pointillé.

La figure 1-31 nous présente, pour la configuration de référence n°3, l'effet d'une masse volumique du cœur  $\rho_2$  plus faible sur les propriétés effectives de la structure aléatoire. Nous notons une diminution de l'amplitude de la première résonance dipolaire (10 kHz), visible sur la partie réelle de la masse volumique dynamique et sur l'atténuation effective. Ce résultat,

déjà décrit par certains auteurs [27] justifie l'emploi d'un cœur très dense, afin de favoriser son oscillation à l'intérieur de la coque.

Intéressons-nous maintenant à l'influence de la rigidité du cœur sur les propriétés effectives du matériau aléatoire, en comparant la configuration de référence n°3 à une configuration où le cœur est plus rigide (célérités des ondes longitudinale et transversale plus élevées).



**figure 1-32 : propriétés effectives de la configuration de référence n°3 en fonction de la rigidité du cœur,  $c_2^\ell = 2,21$  mm/ $\mu$ s et  $c_2^t = 0,86$  mm/ $\mu$ s en trait plein et  $c_2^\ell = 5,95$  mm/ $\mu$ s et  $c_2^t = 3,27$  mm/ $\mu$ s en trait pointillé.**

La figure 1-32 montre l'effet d'une rigidité du cœur plus élevée sur la configuration de référence n°3. Les courbes correspondant aux deux configurations n'étant pas distinguables les unes des autres, l'effet de la rigidité du cœur sur les propriétés effectives du milieu aléatoire est négligeable, contrairement à celui de la masse volumique du cœur, ce qui illustre l'intérêt des inclusions de type « noyau-coque » à cœur dense.

### 1.5.6.2 Influence des propriétés de la coque

Étudions maintenant l'influence des propriétés de la coque. Observons tout d'abord l'effet d'une célérité des ondes longitudinales plus élevée, en comparant la configuration de référence n°3 à une configuration où elle est plus importante, figure 1-33.

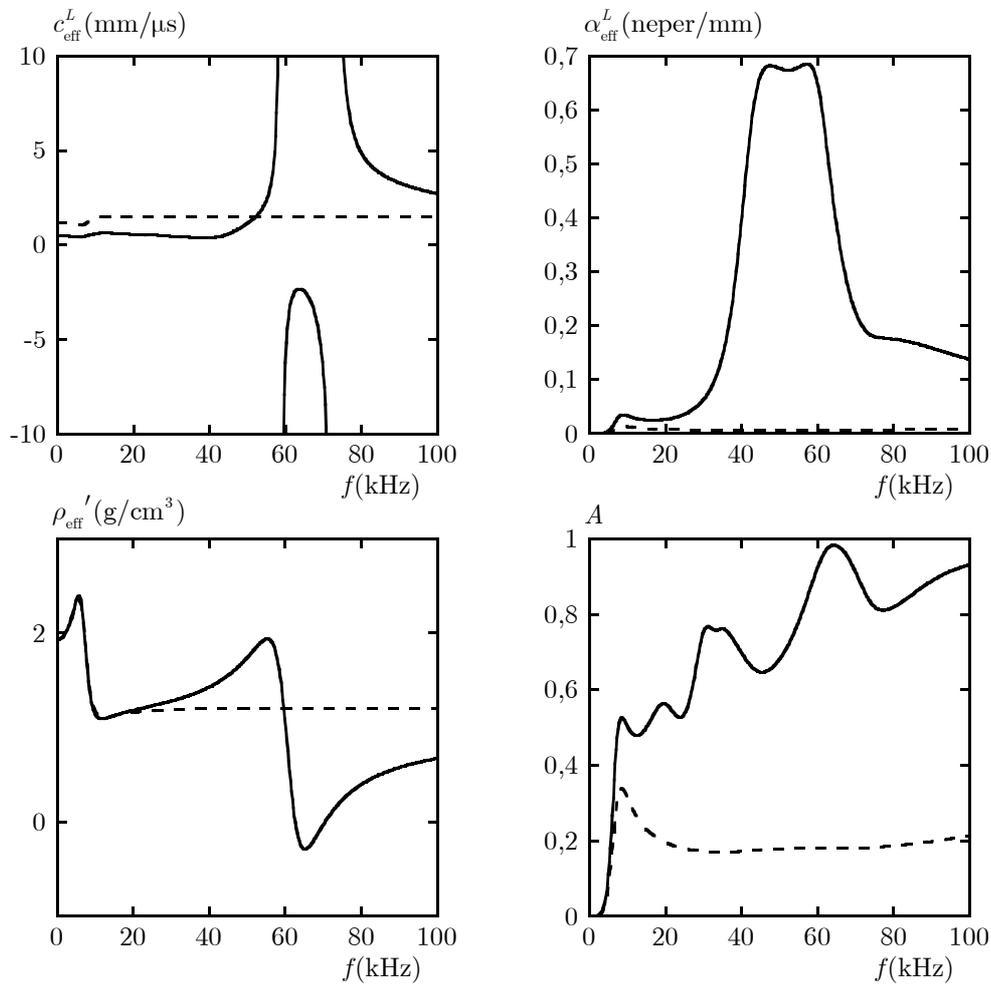


figure 1-33 : propriétés effectives de la configuration de référence n°3 en fonction de la célérité des ondes longitudinales dans la coque,  $c_1^\ell = 0,1$  mm/ $\mu$ s en trait plein et  $c_1^\ell = 1,5$  mm/ $\mu$ s en trait pointillé.

Nous notons une faible influence sur la première résonance dipolaire (10 kHz), voire nulle sur la partie réelle de la masse volumique effective (résultat observé par Bos *et al.* [27]). Néanmoins, la deuxième résonance dipolaire (60 kHz) et la résonance monopolaire (40 kHz) disparaissent complètement lorsque la célérité longitudinale dans la coque est plus élevée. En effet, une coque molle facilite les mouvements de « respiration » comme de « translation » de la coque par rapport à la matrice. Ce résultat justifie l'emploi d'une coque *molle* avec une faible célérité des ondes longitudinales.

Observons maintenant l'influence de la célérité  $c_1^t$  des ondes transversales dans la coque, en comparant la configuration de référence n°3 avec deux configurations où le rapport entre la célérité des ondes transversales dans la coque et dans la matrice est respectivement plus petit et plus grand, figure 1-34.

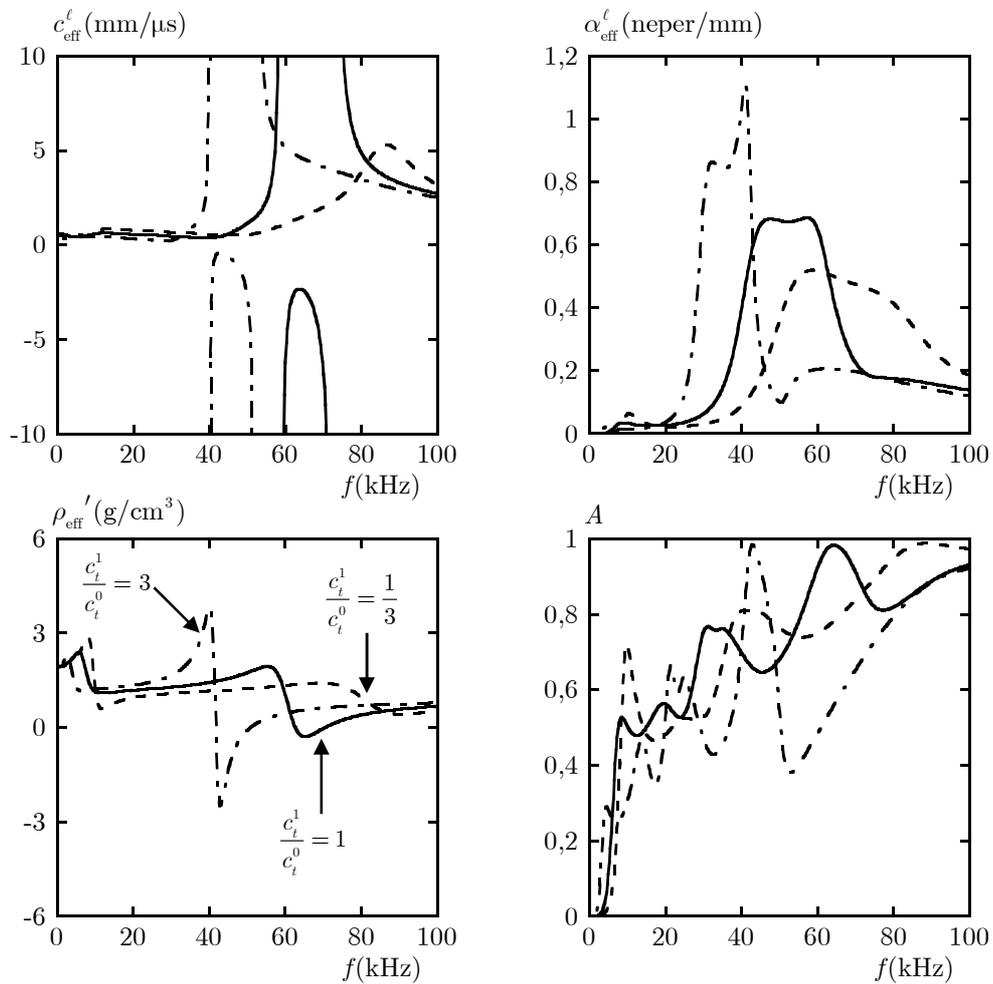


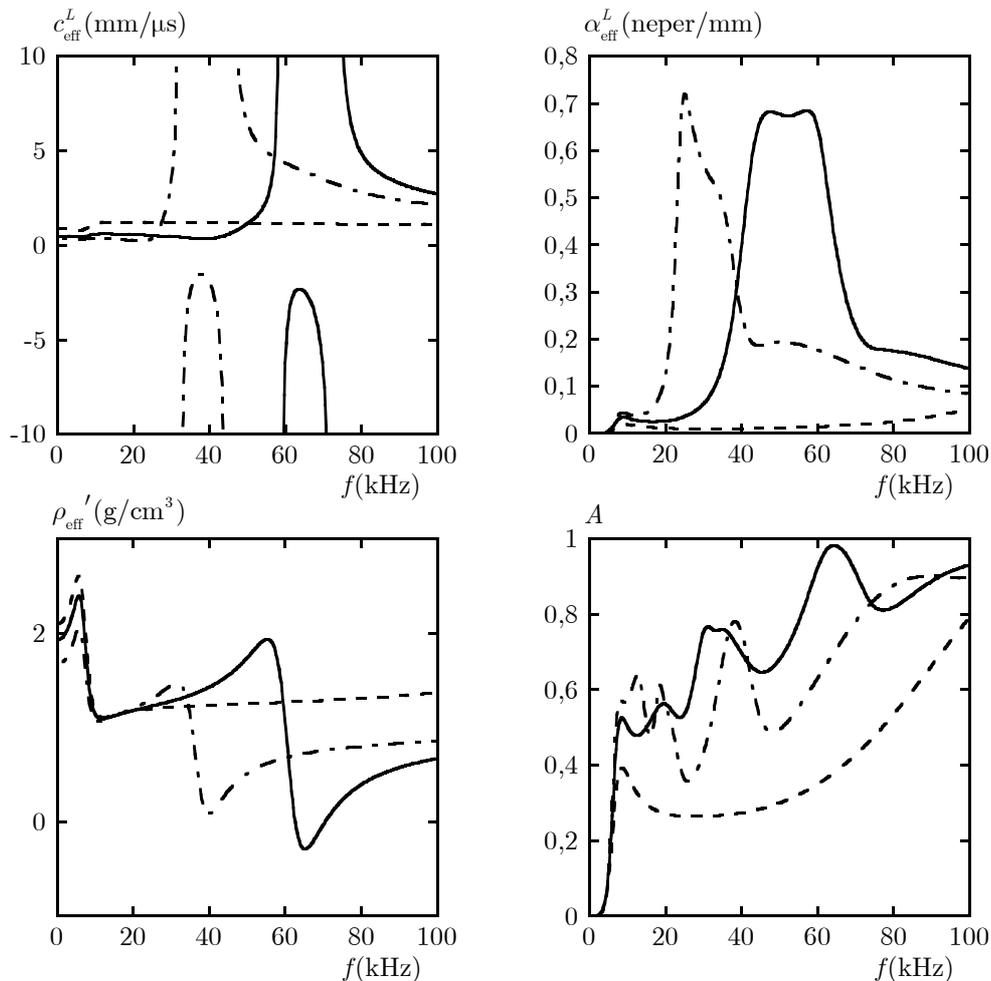
figure 1-34 : propriétés effectives de la configuration de référence n°3 en fonction de la célérité des ondes transversales dans la coque et dans la matrice,

$$\begin{aligned}
 &c_1^t = 0,1 \text{ mm}/\mu\text{s} \text{ et } c_0^t = 0,1 \text{ mm}/\mu\text{s} \text{ en trait plein,} \\
 &c_1^t = 0,05 \text{ mm}/\mu\text{s} \text{ et } c_0^t = 0,15 \text{ mm}/\mu\text{s} \text{ en trait pointillé et} \\
 &c_1^t = 0,15 \text{ mm}/\mu\text{s} \text{ et } c_0^t = 0,05 \text{ mm}/\mu\text{s} \text{ en trait mixte.}
 \end{aligned}$$

Nous notons dans un premier temps que la fréquence des phénomènes diminue avec l'augmentation de ce rapport. Par ailleurs, l'amplitude de la première résonance dipolaire (10 kHz) diminue lorsque le rapport augmente, tandis que celle de la deuxième résonance dipolaire (60 kHz) augmente dans le même temps. La configuration de référence, dont le rapport entre la célérité des ondes transversales dans la coque et dans la matrice est de un,

présente donc un bon compromis entre les amplitudes de la première et de la deuxième résonance dipolaire.

Nous nous intéressons maintenant à l'influence de l'épaisseur de la coque, en comparons la configuration de référence n°3 à deux configurations où l'épaisseur de coque est respectivement plus petite et plus grande, figure 1-35.



**figure 1-35 : propriétés effectives de la configuration de référence n°3 en fonction de l'épaisseur de la coque,  $a_1 - a_2 = 0,01$  mm en trait pointillé,  $a_1 - a_2 = 0,1$  mm en trait plein et  $a_1 - a_2 = 0,3$  mm en trait mixte.**

Notons tout d'abord que pour une coque fine (0,01 mm), la résonance monopolaire (40 kHz) et la deuxième résonance dipolaire (60 kHz) n'apparaissent plus. Néanmoins, l'amplitude de variation de la partie réelle de la masse volumique pour la première résonance dipolaire (10 kHz) est plus importante (résultat observé par Bos *et al.* [27]). Lorsque l'épaisseur de coque est plus importante (0,3 mm), la deuxième résonance dipolaire et la résonance monopolaire apparaissent à des fréquences plus basses (respectivement 35 et 25 kHz). De plus, l'amplitude de variation de la masse volumique à la fréquence de la deuxième résonance

dipolaire est plus faible, et la bande fréquentielle pour laquelle la célérité de phase est négative est plus petite. De ce fait, il existe une épaisseur optimale pour laquelle les phénomènes liés à la deuxième résonance dipolaire et à la résonance monopolaire sont maximums.

### 1.5.6.3 Synthèse

L'étude paramétrique menée sur les inclusions de type « noyau-coque » a mis en évidence que l'influence de certains paramètres matériaux est contraire pour les différentes résonances, ce qui nous a mené à faire le compromis détaillé dans le tableau 1-7.

$\rho_2$	$c_0^\ell / c_1^\ell$	$c_2^\ell$	$c_0^t / c_1^t$	$c_2^t$	$a_1 - a_2$
élevée	élevé	sans influence	$\approx 1$	sans influence	$\approx 0,07$ mm

tableau 1-7 : tableau synthétique de la configuration de référence n°3.

L'épaisseur de coque optimale de 0,07 mm a été déterminée afin de maximiser la largeur à mi-hauteur de l'atténuation effective de la configuration de référence n°3.

## 1.6 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre trois milieux aléatoires, contenant la même matrice polymère et des inclusions différentes. Le premier milieu contient des sphères de polystyrène expansé, matériau léger et « mou ». Ce milieu présente une résonance monopolaire à basses fréquences, du fait du fort contraste de célérité entre la matrice et les inclusions. Cette résonance est d'autant plus importante que la célérité transversale des ondes dans la matrice est faible. La deuxième configuration étudiée contient des sphères de plomb, matériau très dense. Elle présente une résonance dipolaire à basses fréquences, d'autant plus importante que le contraste des masses volumiques est élevé, et que la célérité transversale des ondes dans la matrice est faible. Enfin, le troisième milieu contient des sphères de type noyau-coque, avec un cœur de plomb et une coque de mousse polymère très « molle ». Il tire parti de sa structure pour présenter une résonance monopolaire et une résonance dipolaire pour des fréquences proches. L'étude paramétrique qui a permis d'analyser le comportement dynamique de ces trois configurations de milieux aléatoires, est basée sur la modélisation de Waterman & Truell du comportement acoustique de telles structures. Le chapitre suivant se propose d'étudier la mise en œuvre de ces trois matériaux, du dimensionnement à la mesure en cuve acoustique, en passant par la réalisation des échantillons. L'observation expérimentale de leur comportement acoustique sera confrontée aux prédictions théoriques, ceci permettant de mettre en évidence les phénomènes de résonance des inclusions.



# Chapitre 2

<b>2</b>	<b>DIMENSIONNEMENT DE PLAQUES HÉTÉROGÈNES ET CARACTÉRISATION DE LEURS PROPRIÉTÉS ACOUSTIQUES.....</b>	<b>61</b>
<b>2.1</b>	<b>État de l'art des matériaux pour la discrétion acoustique .....</b>	<b>62</b>
2.1.1	Applications des matériaux furtifs.....	62
2.1.2	Technologies actuelles et leurs limitations.....	63
2.1.2.1	Matériaux homogènes.....	63
2.1.2.2	Matériaux micro-inclusionnaires.....	63
2.1.2.3	Matériaux localement résonnants.....	64
<b>2.2</b>	<b>Design de matériaux localement résonnants .....</b>	<b>65</b>
2.2.1	Dimensionnement des matériaux.....	66
2.2.1.1	Développements intermédiaires .....	66
2.2.1.2	Matériaux sélectionnés .....	67
2.2.2	Caractérisation des constituants .....	68
2.2.2.1	Masse volumique .....	68
2.2.2.2	Propriétés en cisaillement de la matrice mesurées à l'aide d'un viscoanalyseur.....	70
2.2.2.3	Propriétés des ondes longitudinales dans la matrice.....	72
2.2.2.4	Propriétés des ondes transversales dans la matrice .....	72
2.2.3	Caractérisation optique des matériaux composites.....	74
2.2.3.1	Qualité des échantillons.....	74
2.2.3.2	Morphologie.....	74
2.2.3.3	Granulométrie .....	76
<b>2.3</b>	<b>Réponse acoustique des matériaux aléatoires localement résonnants .....</b>	<b>78</b>
2.3.1	Dispositif expérimental de caractérisation ultrasonore .....	78
2.3.2	Spectro-interférométrie ultrasonore.....	80
2.3.3	Application aux échantillons sélectionnés .....	81
2.3.4	Comportement sous incidence oblique .....	87
<b>2.4</b>	<b>Inversion des propriétés effectives de matériaux aléatoires.....</b>	<b>91</b>
2.4.1	Configuration expérimentale .....	92
2.4.2	Identification des paramètres effectifs à partir des réflexion / transmission totales .....	94
2.4.3	Identification des paramètres effectifs à partir des réflexion / transmission partielles.....	95

2.4.4	Exemple synthétique d'application de la méthode - étude de sensibilité.....	96
2.4.5	Inversion des propriétés effectives de l'échantillon contenant 2 % de billes de plomb ....	102
<b>2.5</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>104</b>

# 2 Dimensionnement de plaques hétérogènes et caractérisation de leurs propriétés acoustiques

Ce deuxième chapitre est consacré au dimensionnement, à l'analyse de la réponse acoustique et à la caractérisation des propriétés effectives de matériaux aléatoires. Son plan s'articule autour de quatre parties. Premièrement, nous faisons un état de l'art des matériaux pour la discrétion acoustique dans le domaine naval. Une deuxième partie est consacrée au dimensionnement de plaques de matériaux aléatoires. Nous verrons que certaines configurations, bien qu'intéressantes théoriquement, ne sont pas réalisables techniquement. D'autres, en revanche, peuvent être mises en œuvre sous certaines conditions qui sont présentées dans cette deuxième partie. Deux configurations sont retenues : leurs caractéristiques sont détaillées et explicitées, et leurs constituants sont caractérisés par diverses méthodes. Une troisième partie concerne l'analyse de la réponse acoustique des échantillons à structure aléatoire se présentant sous forme de plaque. Le coefficient de transmission des échantillons est mesuré sous incidence normale à l'aide d'un premier dispositif expérimental, puis les résultats sont comparés à des prédictions issues de modèle. L'incidence oblique est quant à elle étudiée d'un point de vue théorique, et nous verrons qu'elle influence peu la réponse acoustique des matériaux aléatoires retenus. Enfin, la quatrième et dernière partie présente une méthode d'inversion des propriétés effectives des matériaux aléatoires (masse volumique  $\rho_{\text{eff}}$  et nombre d'onde  $k_{\text{eff}}^{\ell}$ ), à partir de deux données expérimentales acquises à l'aide d'un montage expérimental original.

## 2.1 État de l'art des matériaux pour la discrétion acoustique

### 2.1.1 Applications des matériaux furtifs

La problématique de la discrétion dans le domaine naval est très importante, et fait partie intégrante de l'efficacité opérationnelle d'un sous-marin (figure 2-1), qui doit être le plus silencieux possible, afin de ne pas être repéré par des moyens de détection passifs. Les parties

les plus bruyantes de la coque sont revêtues d'un matériau de masquage limitant les émissions acoustiques dues aux vibrations du bâtiment et aux bruits inhérents à son fonctionnement (moteur, hélices, etc...) [12] [28]. Son efficacité est mesurée à l'aide du coefficient de masquage :

$$C_M = \frac{T}{1-R}, \quad (2-1)$$

qui doit être le plus petit possible (figure 2-2) et qui s'exprime en fonction des coefficients de transmission  $T$  et de réflexion  $R$  d'une plaque à faces parallèles immergée dans l'eau et constituée du matériau de masquage. Les récentes avancées dans la conception des sous-marins les rendent quasiment indétectables par des moyens de détection passifs [29]. Il est important de les prémunir des moyens de détections actifs tels que les sonars, en recouvrant certaines parties du bâtiment particulièrement exposées de tuiles anéchoïques prévues pour absorber les ondes sonars. Leur efficacité se mesure à l'aide du coefficient d'anéchoïsme :

$$C_A = R + \frac{T^2}{1-R}, \quad (2-2)$$

qui doit être le plus petit possible (figure 2-2).

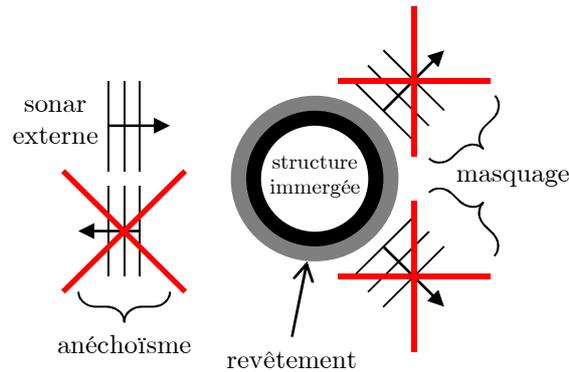


figure 2-1 : revêtements de masquage et anéchoïques sur un sous-marin, supprimant les émissions acoustiques.

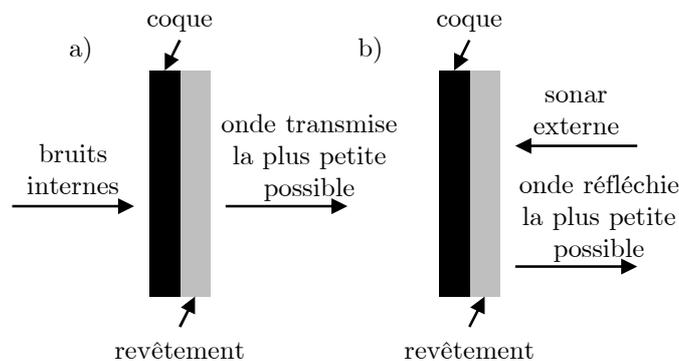


figure 2-2 : définition des coefficients a) de masquage  $C_M$  et b) d'anéchoïsme  $C_A$ .

## 2.1.2 Technologies actuelles et leurs limitations

### 2.1.2.1 Matériaux homogènes

Les matériaux élastomères homogènes (sans inclusions) possèdent un fort amortissement des ondes transversales mais aussi un faible amortissement des ondes longitudinales. De ce fait, ils ne présentent aucun effet anéchoïque et une forte épaisseur de matériau serait nécessaire pour absorber une onde sonar (épaisseur au moins égale à la longueur de l'onde sonar  $> 75$  mm). Afin d'augmenter l'efficacité anéchoïque des milieux homogènes, nous décrivons dans les deux sections suivantes plusieurs concepts de matériaux hétérogènes obtenus par intégration de cavités d'air micrométriques ou millimétriques dans une matrice élastomère.

### 2.1.2.2 Matériaux micro-inclusionnaires

L'ajout de microcavités d'air dans une matrice élastomère a deux principaux effets. La taille des inclusions étant très petite devant la longueur des ondes acoustiques, la réponse du matériau se situe dans le régime quasi-statique, et c'est ainsi la diffusion *non résonnante* de l'onde par les inclusions qui contribue à l'absorption du matériau effectif [7]. Deuxièmement, la célérité effective longitudinale des ondes dans le milieu micro-inclusionnaire est plus petite que celle de la matrice, ce qui diminue la fréquence de résonance destructive des ondes dans la plaque. L'absorption des ondes est ainsi plus importante à plus basses fréquences.

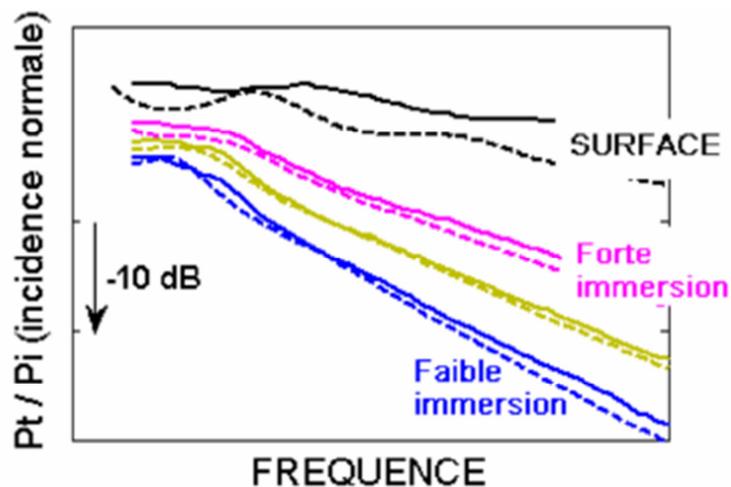


figure 2-3 : coefficient de transmission d'un panneau contenant 10% de micro-inclusions, selon la fréquence, et pour 4 immersions données (pressions différentes).

Mesures en cuve DGA (traits pleins). Modèles (---). Extrait de la référence [30] (Figure 4).

Une stratégie pour incorporer des cavités d'air consiste à mélanger la matrice avec un agent moussant, qui, lors de la polymérisation de l'élastomère, crée des bulles de gaz qui se

répartissent dans le matériau et forment des cavités d'air fermées. Ces mousses élastomères présentent un fort amortissement de l'onde longitudinale. Il est cependant très difficile d'y maîtriser le taux d'air, c'est pourquoi ces mousses ne sont pas utilisées pour des applications en anéchoïsme nécessitant des caractéristiques acoustiques contrôlées.

Une deuxième stratégie d'intégration de cavités d'air dans un élastomère consiste, lors de l'élaboration chimique du matériau, à y incorporer des microbilles viscoélastiques remplies d'air. Cette méthode permet de contrôler le taux d'air introduit dans la matrice, et par là-même les fréquences d'action du matériau.

Cependant, ces matériaux présentent l'inconvénient d'être fortement dépendants de la profondeur d'immersion [30] [31]. En effet, une pression statique appliquée sur le matériau diminue l'épaisseur du revêtement et déforme les cavités d'air, réduisant ainsi ses performances à grandes profondeurs (figure 2-3). De plus, la présence des inclusions induit une forte augmentation du nombre d'onde effectif, ce qui correspond à une augmentation de l'atténuation effective et à une diminution de l'impédance acoustique effective, ceci ayant pour effet d'accentuer la réflexion des ondes acoustiques à l'interface eau/revêtement. Une méthode pour s'affranchir de cette rupture d'impédance consiste à empiler plusieurs couches de matériaux contenant des concentrations de plus en plus élevées dans l'épaisseur du revêtement. L'onde pénètre ainsi facilement dans la première couche d'impédance proche de celle de l'eau, puis est progressivement absorbée par les couches suivantes.

### 2.1.2.3 Matériaux localement résonnants

Les milieux localement résonnants contenant des répartitions aléatoires ou périodiques d'inclusions permettent d'absorber les ondes sur des épaisseurs plus faibles que les milieux micro-inclusionnaires, du fait de la résonance basses fréquences des inclusions (cf. chapitre 1). Pour cette dernière catégorie, des phénomènes liés à la structure périodique du matériau et dépendants de la distance entre les diffuseurs induisent des bandes fréquentielles dites d'arrêt ou interdites, dans lesquelles il n'y a pas de propagation d'ondes ou des bandes de fréquences dans lesquelles le matériau est acoustiquement transparent ( $T=1$ ). Dans le cas des matériaux élastomères contenant des cavités d'air réparties périodiquement, ces phénomènes de réseau apparaissent à des fréquences supérieures aux fréquences sonars, le phénomène prépondérant à basses fréquences restant la résonance des inclusions. Le matériau dit « Alberich » est la première réalisation d'un tel matériau permettant de diminuer l'écho sonar (figure 2-4). Ce matériau d'épaisseur 4mm est composé de lignes de trous de 5 mm de diamètre, alternées avec des lignes de trous de 10 mm de diamètre [32], résonnants aux fréquences sonars. Les propriétés des matériaux de type « Alberich » furent étudiées

notamment pour prendre en compte la pression appliquée sur le matériau qui augmente avec la profondeur d'immersion [33] et dont les effets sont similaires à ceux s'exerçant sur les matériaux micro-inclusionnaires. Des matériaux aléatoires comprenant des cavités d'air centimétriques, obtenues par moulage de plaques contenant des demi-sphères, puis collées les unes aux autres, ont également été testées [34], afin de mettre en évidence expérimentalement l'effet des résonances des cavités sur le nombre d'onde effectif (en particulier l'absorption acoustique du matériau).



**figure 2-4 : premier matériau anéchoïque contenant des cavités d'air  
efficient pour des fréquences entre 10 et 20 kHz.**

Les matériaux localement résonnants à structure aléatoire présentent ainsi un fort intérêt pour des applications en anéchoïsme. Nous étudions dans la suite le comportement des configurations identifiées au chapitre 1 (tableaux 1-5 et 1-7), qui sont susceptibles d'exhiber des résonances basses fréquences.

## 2.2 Design de matériaux localement résonnants

L'objectif de cette partie est de dimensionner des matériaux aléatoires localement résonnants à basses fréquences (longueur d'onde dans la matrice grande devant la taille des inclusions). L'étude paramétrique du premier chapitre nous a permis d'identifier trois configurations présentant des résonances monopolaire et/ou dipolaire, correspondant à des billes molles, denses et de type « noyau-coque » dans une matrice élastomère souple, tableaux 1-5 et 1-7. Du fait de l'appareillage expérimental utilisé, les fréquences de travail ( $> 50$  kHz) sont supérieures aux fréquences sonars (2 - 20 kHz). L'objectif est donc de mettre en évidence expérimentalement l'effet des résonances sur la réponse acoustique de structures aléatoires contenant des inclusions millimétriques. Le comportement acoustique de ces matériaux est transposable à plus basses fréquences, en augmentant la taille des inclusions  $a$  (inclusions centimétriques) ou encore en diminuant le module de cisaillement  $\mu_0$  de la matrice (cf. §1.5). De plus, les dimensions des échantillons (300 mm x 300 mm x 15 mm) sont

également limitées par la géométrie du dispositif expérimental, qui sera présenté dans la troisième partie de ce chapitre. Enfin, le coût de réalisation de ces plaques est plus faible que pour des plaques contenant des inclusions centimétriques résonnant aux fréquences sonars, et aux dimensions latérales de l'ordre du mètre carré.

## 2.2.1 Dimensionnement des matériaux

### 2.2.1.1 Développements intermédiaires

Dans un premier temps, nous avons contacté CGP Europe, entreprise spécialisée dans les mousses syntactiques contenant une matrice époxy, des microbilles de verre creuses et des ballons d'air à coque rigide de quelques millimètres de diamètre pour des applications off-shore. Nous avons commandé des plaques de matériau contenant uniquement les ballons millimétriques, sans les microbilles de verre présentes habituellement. Cette spécificité technique a causé des difficultés pour la mise en œuvre des échantillons, notamment sur l'équilibre thermique de la matrice, perturbé par l'absence des microbilles de verre. Faute de solution, cette voie fût finalement abandonnée.

Une deuxième solution a été de solliciter le site DCNS de Cherbourg pour la fabrication de matériaux aléatoires constitués d'une matrice élastomère contenant des billes de polystyrène expansé. Des échantillons ont été mis en œuvre en mélangeant des billes de polystyrène expansé avec l'élastomère sous forme liquide, avant sa polymérisation. Le mélange a ensuite été coulé dans un moule, dans lequel la matrice a polymérisé, fixant ainsi la position des inclusions. La matrice étant opaque, nous n'avons pas pu vérifier les caractères homogènes et aléatoires de la distribution des billes, sans détruire l'échantillon. Ces échantillons n'ont finalement pas été caractérisés, car nous disposions d'autres échantillons mieux calibrés, dont nous détaillons la mise en œuvre dans la section suivante.

Parallèlement, nous avons cherché des inclusions de type « noyau-coque » contenant un cœur dense et une coque molle, et présentant des résonances basses fréquences. La réalisation d'inclusions contenant une coque en élastomère homogène classique et un cœur de plomb a été reportée dans la littérature [35]. Cependant, leur mise en œuvre est rendue difficile en présence d'une coque molle, par la nécessité d'enrober le cœur sphérique avec une mousse polymère très souple, tout en contrôlant l'épaisseur de coque. Nous n'avons trouvé aucun fournisseur proposant de billes hétérogènes de ce type, leur approvisionnement reste donc un problème ouvert.

### 2.2.1.2 Matériaux sélectionnés

Les matériaux sous forme de billes sont largement utilisés dans l'industrie, pour de multiples applications (roulements à billes, abrasifs...). Les billes de polystyrène sont utilisées comme rembourrage pour des coussins ou des canapés. Leur taille varie de 1 à 3 mm de diamètre. Les billes de plomb étaient quant à elles utilisées dans les domaines de la chasse (plomb de chasse) et de la pêche (plomb de pêche). Les plus petites billes disponibles ont un diamètre de l'ordre du millimètre. Afin que les résonances soient observables aux fréquences de travail ( $> 50$  kHz), les diamètres des billes sélectionnées sont les plus petits disponibles, des billes plus grandes décalant les résonances à des fréquences trop basses.

La mise en œuvre d'un matériau à structure aléatoire subit certaines contraintes sur le positionnement des inclusions, car il est nécessaire que leur distribution aléatoire soit uniforme spatialement pour qu'il n'y ait pas d'hétérogénéités macroscopiques (milieux effectifs homogènes), telles que des lacunes ou des agglomérats trop gros. Les élastomères étant mis en œuvre sous forme liquide, il est possible d'incorporer les inclusions lors de la phase de mélange. Une fois le mélange coulé dans un moule, la position des inclusions est figée dans la matrice élastomère lors de sa polymérisation. Dans le cas où la masse volumique des inclusions est plus grande que celle de la matrice ( $\rho_1 \gg \rho_0$ ), la poussée d'Archimède étant plus faible que le poids des inclusions, elles tombent donc naturellement dans le fond du moule, et dans le cas inverse ( $\rho_1 \ll \rho_0$ ), les inclusions montent à la surface. De plus, si la viscosité de la matrice est suffisamment importante, la vitesse de déplacement des inclusions sera suffisamment petite pour qu'elles n'aient pas le temps de se déplacer avant la fin de la polymérisation de la matrice. Cependant, une forte viscosité de la matrice augmente l'apparition de bulles d'air lors de la phase de mélange avec les inclusions. Un compromis doit être trouvé entre viscosité de la matrice et répartition homogène des inclusions. Pour s'affranchir de cela, il est possible de mettre en œuvre le matériau par couches successives. Une première couche de résine est coulée, puis une fois que sa polymérisation est en cours (viscosité suffisante et en augmentation), quelques billes y sont réparties uniformément afin d'y rester en suspension. Ensuite, cette opération est répétée plusieurs fois avant la fin de la polymérisation de la couche précédente afin d'assurer une bonne cohésion entre les couches. Cette technique permet d'assurer une répartition homogène des inclusions dans l'épaisseur du matériau aléatoire.

Nous choisissons de réaliser des plaques contenant de faibles fractions volumiques d'inclusions (2, 5 et 10 %), en faisant l'hypothèse de rester dans le domaine de validité des modèles d'homogénéisation. Les échantillons contiennent approximativement respectivement 5 500, 16 000 et 32 000 billes de polystyrène expansé, et 51 500, 129 000 et 258 000 billes de

plomb (tableau 2-1). Les échantillons sont constitués d'une même matrice élastomère, dont une plaque (de mêmes dimensions que les autres échantillons) a été fabriquée en vue de caractériser la matrice pure (sans inclusions).

résonance exhibée entre 50 et 200 kHz	matrice	billes	diamètre des billes (mm)	taille des échantillons (mm)	fraction volumique (%)
monopolaire	élastomère	polystyrène expansé	$\sim 2$	300 x 300 x 15	2, 5 et 10
dipolaire	élastomère	plomb	$\sim 1$	300 x 300 x 15	2, 5 et 10

**tableau 2-1 : configurations retenues présentant des résonances de natures différentes, la matrice étant commune.**

### 2.2.2 Caractérisation des constituants

Nous caractérisons dans cette partie les propriétés acoustiques des constituants des échantillons aléatoires (masses volumiques  $\rho_0$  et  $\rho_1$ , célérités longitudinale  $c_0^l$  et transversale  $c_0^t$  dans la matrice). Les caractéristiques des billes de plomb sont connues et facilement identifiables dans la littérature. En revanche, les propriétés acoustiques des billes de polystyrène expansé sont inconnues et dépendent de la méthode de mise en œuvre du matériau. Nous utilisons les résultats de la caractérisation d'Athanasopoulos *et al.*, donnant les célérités longitudinale  $c_1^l$  et transversale  $c_1^t$  des ondes dans des échantillons de polystyrène expansé. Nous avons vu dans l'étude paramétrique du premier chapitre l'importance de la célérité transversale des ondes dans la matrice  $c_0^t$  sur le comportement effectif du matériau aléatoire. Sa bonne connaissance est donc cruciale afin de prédire au mieux le comportement acoustique des échantillons.

#### 2.2.2.1 Masse volumique

Lorsque la géométrie d'un échantillon est précisément connue, une mesure de sa masse  $M_{\text{mat/air}}$  permet l'évaluation de sa masse volumique moyenne :

$$\rho_{\text{mat}} = \frac{M_{\text{mat/air}}}{V}. \quad (2-3)$$

Par contre, pour une géométrie parfaitement inconnue, la masse volumique  $\rho_{\text{mat}}$  d'un échantillon de matériau se mesure classiquement par la méthode de la double pesée, permettant la mesure de la masse volumique de n'importe quel échantillon de volume inconnu. Cette méthode consiste à mesurer la masse d'un échantillon, puis à mesurer sa masse apparente dans l'eau (figure 2-5).

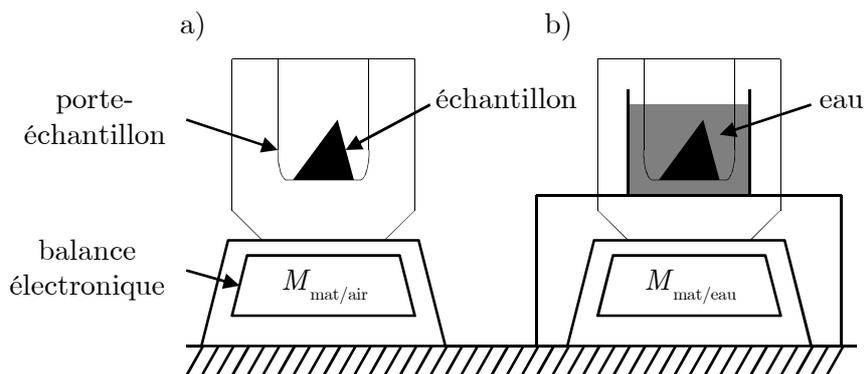


figure 2-5 : schéma de principe de la double pesée ;

a) échantillon pesé dans l'air ; b) échantillon pesé dans l'eau.

Nous mesurons tout d'abord la masse  $M_{\text{mat/air}}$  de l'échantillon à l'aide d'une balance électronique précise au microgramme près. Dans un deuxième temps, nous mesurons la masse  $M_{\text{mat/eau}}$  de l'échantillon plongé dans de l'eau. Ces deux masses s'expriment en fonction de la masse volumique  $\rho_{\text{mat}}$  de l'échantillon et de son volume  $V$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} M_{\text{mat/air}} &= \rho_{\text{mat}} V, \\ M_{\text{mat/eau}} &= \rho_{\text{mat}} V - \rho_{\text{eau}} V. \end{aligned} \quad (2-4)$$

Nous en déduisons ainsi la masse volumique du matériau par la relation suivante :

$$\rho_{\text{mat}} = \rho_{\text{eau}} \frac{M_{\text{mat/air}}}{M_{\text{mat/air}} - M_{\text{mat/eau}}}. \quad (2-5)$$

matériau	matrice polyuréthane	billes de plomb
pesée dans l'air, $M_{\text{mat/air}}$ (mg)	1 505	237
pesée dans l'eau, $M_{\text{mat/eau}}$ (mg)	31	216
masse volumique ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )	1,02	11,3

tableau 2-2 : mesure par double pesée de la masse volumique des constituants des échantillons.

matériau	pesée de 6 billes (mg)	pesée de 12 billes (mg)	pesée de 24 billes (mg)	masse volumique ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )
polystyrène expansé	1,2	2,5	5	0,050

tableau 2-3 : mesure par pesée directe de la masse volumique du polystyrène expansé.

Cette technique est utilisée pour caractériser la masse volumique de tous les constituants des plaques aléatoires (tableau 2-2), à l'exception des billes de polystyrène trop petites et trop légères pour être manipulées par le porte échantillon. La masse volumique du polystyrène

expansé a donc été mesurée par pesée directe. Nous avons sélectionné quelques billes de diamètre constant (2 mm), puis nous les avons pesées à l'aide d'une balance électronique de précision (tableau 2-3).

### 2.2.2.2 Propriétés en cisaillement de la matrice mesurées à l'aide d'un viscoanalyseur

Le viscoanalyseur (ou DMA pour Dynamic Mechanical Analysis) permet d'analyser le comportement dynamique en cisaillement de matériaux viscoélastiques.

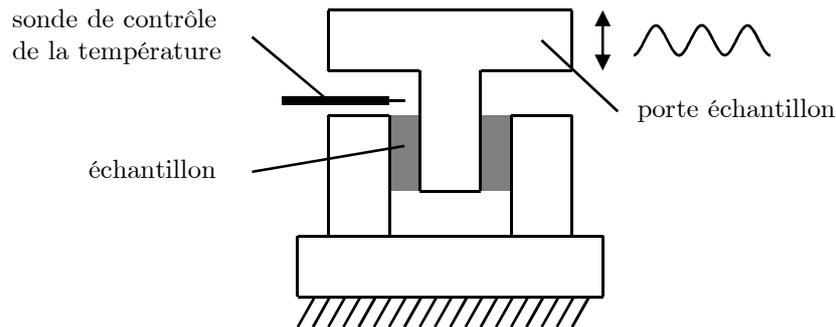
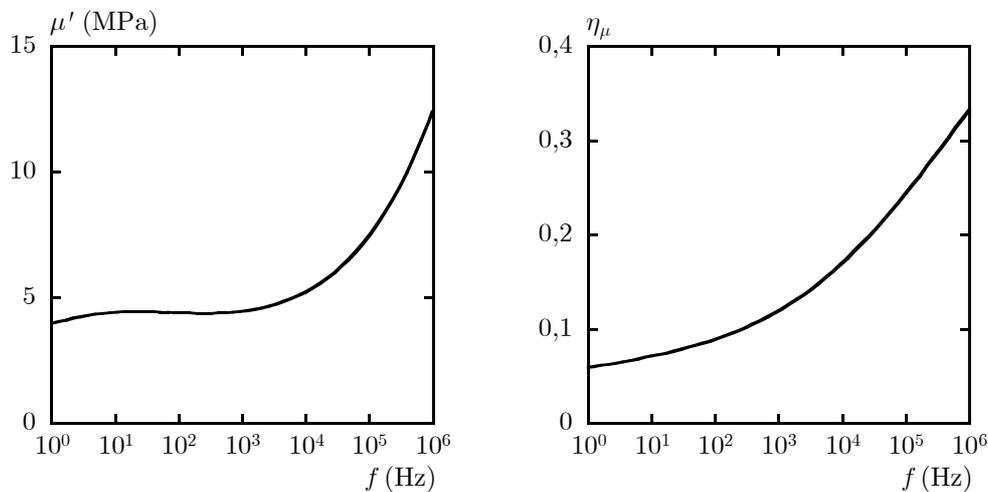


figure 2-6 : schéma de principe du viscoanalyseur.

Un échantillon de petites dimensions (quelques millimètres) est soumis à cisaillement sinusoïdal (figure 2-6). Le déplacement est imposé et le viscoanalyseur mesure la contrainte exercée par l'échantillon, déterminant ainsi le module de cisaillement du matériau  $\mu^*$ , fonction à valeurs complexes de la fréquence et de la température. Le viscoanalyseur fonctionne pour des fréquences allant jusqu'à quelques centaines de Hertz et pour des températures de  $-100\text{ }^\circ\text{C}$  à  $+100\text{ }^\circ\text{C}$ . Pour connaître le module de cisaillement du matériau à plus hautes fréquences, il est nécessaire de faire une hypothèse supplémentaire sur la rhéologie du matériau et d'introduire le principe d'équivalence temps-température, reliant la dépendance fréquentielle du module de cisaillement à sa dépendance en fonction de la température, valable pour les polymères amorphes. Ce principe d'équivalence dit que l'effet de la fréquence de sollicitation est inverse à celui de la température. Ainsi, le comportement du matériau à une température  $T_0$  et pour une fréquence  $f_0$  est équivalent au comportement à une température  $T_1 > T_0$  et pour une fréquence  $f_1 < f_0$  ou pour une température  $T_1 < T_0$  et pour une fréquence  $f_1 > f_0$ . Physiquement, l'effet des basses températures sur un élastomère est équivalent à l'effet des hautes fréquences (rigidification), et l'effet des hautes températures est équivalent à l'effet des basses fréquences (plus caoutchouteux). La relation traduisant ce principe d'équivalence temps-température est appelée loi de Williams-Landel-Ferry (loi WLF) [36] et permet d'interpoler le comportement du matériau viscoélastique à hautes fréquences et à température ambiante, à partir de son comportement à basses fréquences et à basses températures. Cette interpolation suppose que

le matériau suit une rhéologie simple, vérifiant ainsi le principe d'équivalence temps-température.

Outre la caractérisation du module de cisaillement à valeurs complexes de matériaux viscoélastiques en fonction de la fréquence, le viscoanalyseur permet également de déterminer leur température de transition vitreuse, donnée du matériau qui caractérise la température de passage du comportement caoutchouteux au comportement vitreux. En-deçà de cette température de transition vitreuse, le matériau viscoélastique est rigide (phase vitreuse) et souvent cassant. Au-delà, le matériau se comporte comme un caoutchouc, matériau souple et supportant de grandes déformations. La température de transition vitreuse est déterminée, pour une fréquence donnée, par la température où l'amortissement du matériau est maximal.



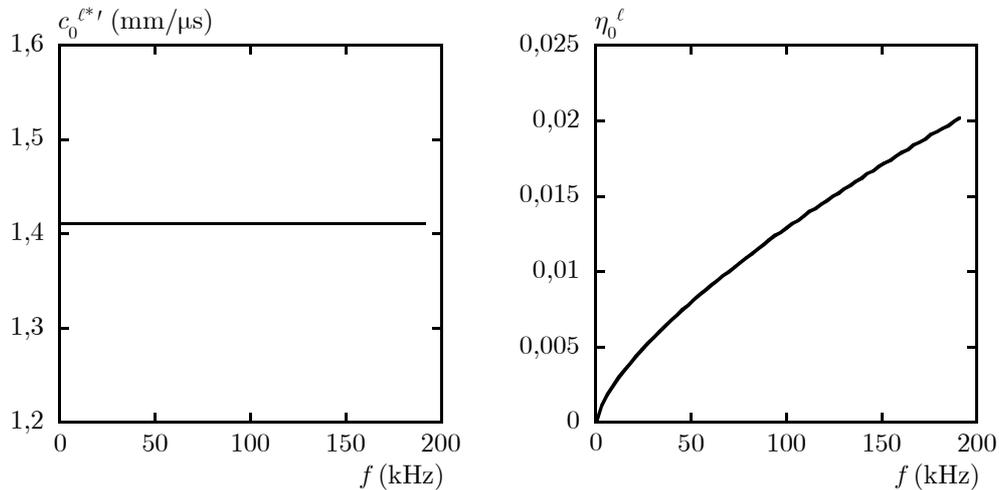
**figure 2-7 : partie réelle et tangente de pertes du module de cisaillement  $\mu = \mu'(1 - \eta_\mu i)$  de la matrice élastomère en fonction de la fréquence en échelle logarithmique.**

La figure 2-7 présente la partie réelle du module de cisaillement et la tangente de pertes de la matrice élastomère en fonction de la fréquence sur une échelle logarithmique. Le comportement en cisaillement de la matrice a été balayé en température de  $-60$  à  $+70$  °C, et en fréquence de 5 à 400 Hz. Son comportement hautes-fréquences a ensuite été interpolé pour une température de 20 °C, et en prenant une température de référence de 12 °C. Rappelons que  $\mu = \mu'(1 - \eta_\mu i)$ . La célérité de phase transversale et l'atténuation, déduites du module de cisaillement (équation 1-7), varient respectivement de 60 mm/ $\mu$ s à 130 mm/ $\mu$ s et de 0 à 25 neper/mm, valeurs relativement faibles pour un polymère.

### 2.2.2.3 Propriétés des ondes longitudinales dans la matrice

La partie réelle de la célérité à valeurs complexes  $c_0^{\ell s'}$  et la tangente de pertes  $\eta_0^\ell$  (équation 1-10) sont obtenues (figure 2-8) à partir de signaux transmis par la plaque et par

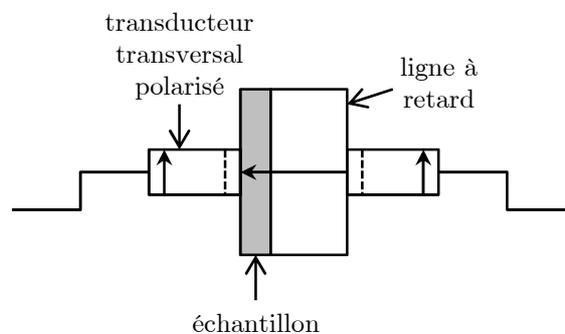
une lame d'eau de même épaisseur. La méthode d'identification, décrite dans la quatrième partie de ce chapitre, est très largement utilisée pour caractériser les propriétés acoustiques de milieux homogènes. Nous remarquons que la matrice est très peu dispersive pour les ondes longitudinales et que l'atténuation y est relativement faible, ces paramètres variant respectivement de 1,411 0 mm/ $\mu$ s à 1,411 6 mm/ $\mu$ s et de 0 neper/mm à 0,017 8 neper/mm.



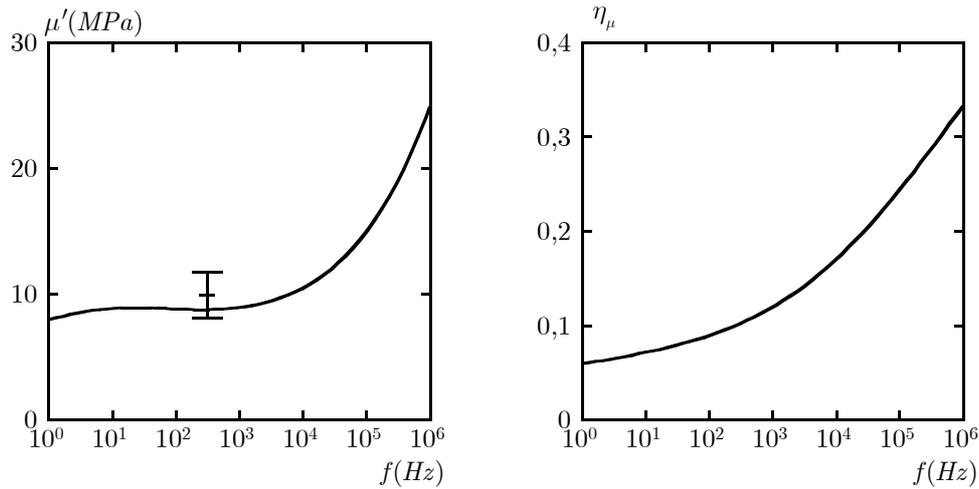
**figure 2-8 : partie réelle et tangente de pertes de la célérité longitudinale à valeurs complexes des ondes dans la matrice élastomère,  $c_0^{\ell*'} = c_0^{\ell*'}$  (1 -  $\eta_0^\ell i$ ).**

#### 2.2.2.4 Propriétés des ondes transversales dans la matrice

Nous avons mesuré la célérité des ondes transversales dans la matrice par une mesure au contact. La mesure consiste à placer deux transducteurs émettant des ondes transversales au contact d'un échantillon de matériau d'épaisseur 10 mm, couplé avec une ligne à retard de 50 mm d'épais. L'onde émise par le premier transducteur est reçue par le deuxième transducteur, placé en vis-à-vis de l'émetteur, de sorte à ce que leurs polarisations soient parallèles.

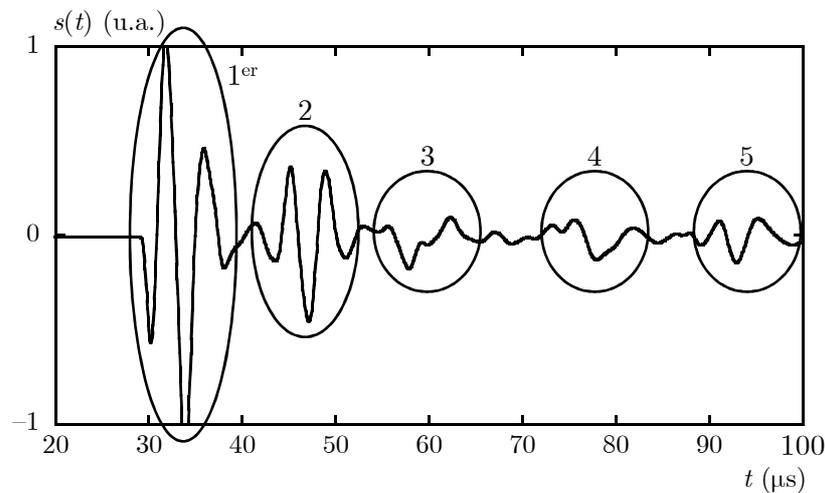


**figure 2-9 : schéma de principe de la mesure au contact.**



**figure 2-10 : partie réelle et tangente de pertes du module de cisaillement de la matrice élastomère en fonction de la fréquence en échelle logarithmique, pour les données de DMA multipliée par deux, ainsi que pour la mesure au contact (point à 500 kHz).**

La figure 2-11 présente le signal acoustique mesuré, contenant plusieurs réflexions aux interfaces du système de mesure. Le premier écho correspond à un aller direct de l'onde longitudinale dans le système. Les deux échos suivants correspondent à deux allers et retours dans l'épaisseur de la couche de polymère. Le quatrième écho correspond quant à lui à un aller et retour dans la ligne à retard et un aller simple dans la couche polymère. Enfin, le cinquième écho, d'amplitude équivalente au précédent ne peut pas correspondre à un aller et retour supplémentaire de l'onde longitudinale dans la couche polymère. Il s'agit donc de l'onde transversale. Son temps de parcours nous renseigne sur la célérité des ondes dans le polymère. Nous trouvons ainsi une célérité de  $0,230 \text{ mm}/\mu\text{s}$ , bien au-dessus de la valeur extrapolée par DMA pour une même fréquence (500 kHz).



**figure 2-11 : les différents échos sont observables sur le signal temporel mesuré.**

### 2.2.3 Caractérisation optique des matériaux composites

Cette partie a pour objectif l'analyse de la structure des échantillons, en s'assurant de la qualité de la distribution des inclusions et en caractérisant leur distribution en taille.

#### 2.2.3.1 Qualité des échantillons

Des observations visuelles sur les échantillons permettent de vérifier qu'ils sont correctement calibrés par rapport à la spécification technique. Les faces latérales sont bien planes et parallèles. De plus, la matrice étant transparente, la répartition des inclusions est observable à l'œil nu et semble homogène.

#### 2.2.3.2 Morphologie

Nous nous assurons ici de l'homogénéité et du caractère aléatoire de la répartition des inclusions dans les échantillons. Nous tirons parti du fait que la matrice soit transparente pour prendre des clichés à l'aide d'un appareil photo et d'un système de rétroéclairage (figure 2-12) permettant d'augmenter le contraste entre la matrice et les inclusions. Seule la plaque contenant 2 % en volume d'inclusions de plomb a été utilisée, car le trop grand nombre d'inclusions dans les plaques contenant 5 et 10 % en volume d'inclusions empêche de les distinguer entre elles sur le cliché. De plus, le contraste entre la matrice et les billes de polystyrène expansé est trop faible pour appliquer les méthodes d'analyse d'images sur la plaque contenant 2 % en volume de ces inclusions. Nous utilisons ensuite des outils d'analyse d'images, *via* une toolbox Matlab® [37], utilisés classiquement pour caractériser la structure d'un matériau à partir de clichés de coupe ou de surface, ou encore d'images obtenus à l'aide d'un microscope électronique à balayage (MEB) (figure 2-13).

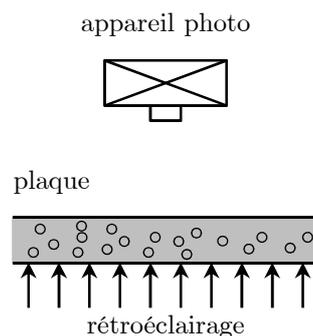


figure 2-12 : dispositif de photographie des échantillons avec rétroéclairage.

Afin de caractériser la morphologie des échantillons, nous utilisons la toolbox Matlab® d'analyse d'images, dont nous détaillons le fonctionnement dans la suite. Une photographie couleur est composée de trois couleurs primaires (vert, bleu et rouge) codées sur un octet chacune, définissant ainsi  $256^3$ , soit 16 777 216 couleurs. Pour convertir une image couleur en

image en nuances de gris, nous transformons chaque pixel de couleur codé sur trois octets ( $\mathfrak{R}$  ;  $\mathfrak{V}$  ;  $\mathfrak{B}$ ) en un pixel en nuance de gris codé sur un octet ( $\mathfrak{L}$ ), en utilisant la formule suivante :

$$\mathfrak{L} = E \left( \begin{pmatrix} 0,299 \\ 0,587 \\ 0,114 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{R} \\ \mathfrak{V} \\ \mathfrak{B} \end{pmatrix} + 0,5 \right), \quad (2-6)$$

où  $E(x)$  désigne la fonction partie entière et  $E(x + 0,5)$  l'arrondi de  $x$  à l'entier le plus proche,  $\mathfrak{L}$  est la luminance et les coefficients  $(0,299 ; 0,587 ; 0,114)$ , dont la somme vaut 1, sont empiriques (coefficients utilisés par Matlab<sup>®</sup> et plus largement utilisés pour transformer une image couleur en image « noir et blanc »).

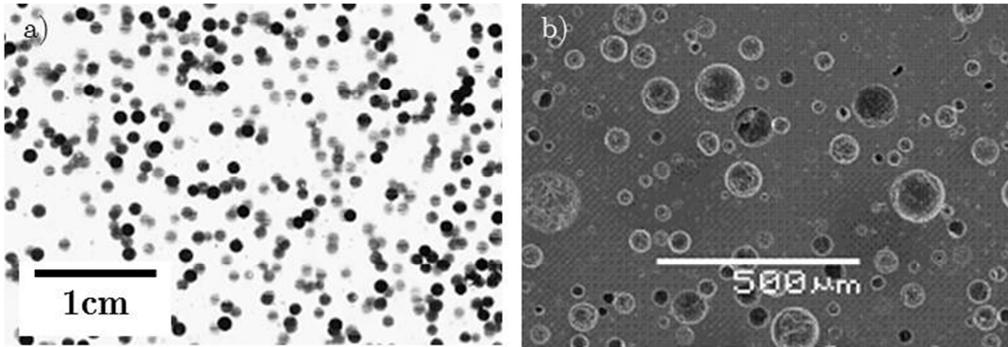


figure 2-13 : a) cliché de surface d'un matériau contenant 2 % en volume d'inclusions de plomb ;  
b) image MEB d'une coupe d'un matériau contenant des microbilles [DCNS].

Afin de déterminer si la répartition des billes dans les échantillons est aléatoire, nous utilisons le variogramme, qui est un outil permettant de déterminer la nature d'une répartition d'objets sur une image. Il s'exprime comme la probabilité, pour un vecteur  $\mathbf{h}$  donné, qu'un point  $\mathbf{x}$  soit dans un objet, et que le point  $\mathbf{x} + \mathbf{h}$  soit aussi dans un objet. Si nous appelons  $I$  l'ensemble des points de l'image, et  $J$  l'ensemble des points de l'image inclus dans les objets (inclusions), nous avons alors :

$$C(\mathbf{h}) = \mathbb{P}_{\mathbf{x} \in I}(\mathbf{x} \in J, \mathbf{x} + \mathbf{h} \in J). \quad (2-7)$$

Cette probabilité se calcule facilement à partir d'une image binaire et se représente en fonction de la norme  $\|\mathbf{h}\|$  du vecteur  $\mathbf{h}$ . Pour chaque distance  $\|\mathbf{h}\|$ , nous calculons la probabilité  $C(\|\mathbf{h}\|)$  en moyennant sur toutes les orientations possibles du vecteur  $\mathbf{h}$  :

$$C(\|\mathbf{h}\|) = \int_{\theta=0}^{2\pi} C(\|\mathbf{h}\| \mathbf{u}_\theta) d\theta. \quad (2-8)$$

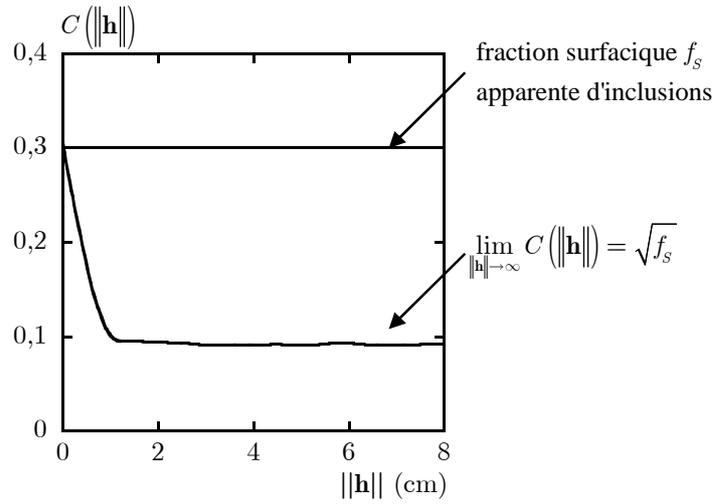


figure 2-14 : variogramme de la distribution d'inclusions dans la plaque contenant 2 % de billes de plomb.

La figure 2-14 présente le variogramme du matériau contenant 2 % en volume de billes de plomb. Nous remarquons que le variogramme converge rapidement vers une valeur limite égale à la racine carrée de la fraction surfacique apparente  $f_s$  d'inclusions, correspondant à la proportion de pixels noirs sur l'image.

### 2.2.3.3 Granulométrie

Nous étudions dans cette partie la répartition en taille des inclusions. Pour cela, nous utilisons des clichés des billes de plomb et de polystyrène expansé (figure 2-15) sur un support uni. Nous utilisons une fonction de recherche de cercles dans une image (@imfindcircles dans Matlab®), basée sur la transformation de Hough [38], et donnant une liste de leurs rayons. Nous traçons à partir de cette liste de rayons l'histogramme de densité de probabilité en fonction du rayon des billes (figure 2-16).

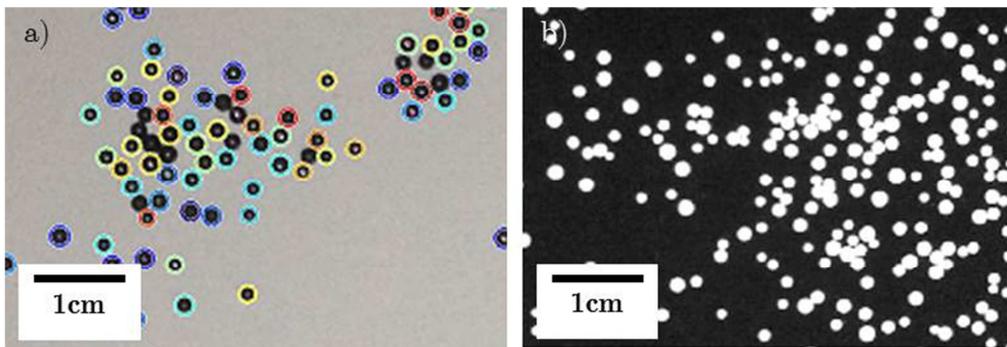


figure 2-15 : a) cliché de quelques billes de plomb sur un support blanc ; b) cliché de quelques billes de polystyrène expansé sur un support noir.

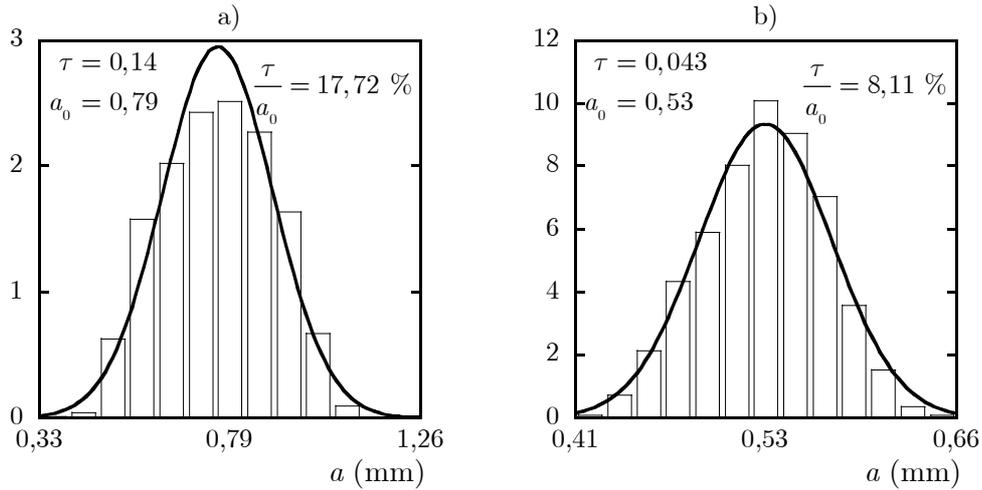


figure 2-16 : histogramme de distribution des rayons a) des billes de polystyrène expansé et b) des billes de plomb (densité de probabilité).

Nous calculons le rayon moyen  $a_0$  et l'écart type  $\tau$  de la distribution, puis nous traçons la loi normale  $\mathcal{N}(a_0, \tau^2)$  de densité  $P(a)$  :

$$P(a) = \frac{e^{-\frac{(a-a_0)^2}{2\tau^2}}}{\tau\sqrt{2\pi}}. \quad (2-9)$$

La densité de probabilité  $P(a)$  est telle que la probabilité  $\mathbb{P}$  qu'une bille de plomb ait un rayon  $a$  compris entre deux valeurs  $b$  et  $c$ , est égale à l'aire sous la courbe de  $P(a)$  entre  $b$  et  $c$ , soit :

$$\mathbb{P}(b \leq a \leq c) = \int_b^c P(a) da. \quad (2-10)$$

Ainsi, environ 68 % des inclusions ont un rayon dans l'intervalle  $[a_0 - \tau, a_0 + \tau]$ , et environ 95 % des inclusions ont un rayon dans l'intervalle  $[a_0 - 2\tau, a_0 + 2\tau]$ .

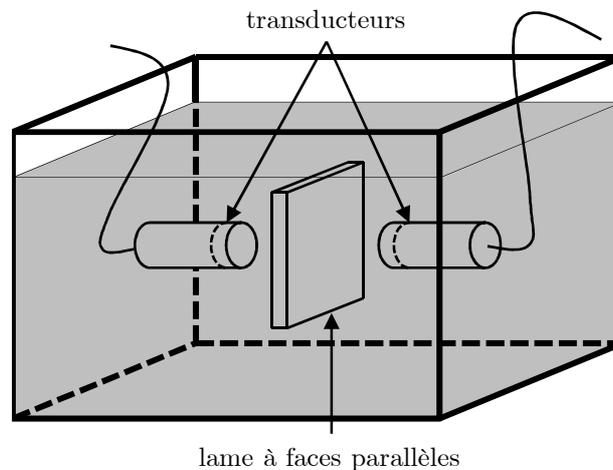
La distribution des billes de plomb est telle que le rayon moyen  $a_0$  est de 0,53 mm et l'écart type  $\tau$  est de 0,043 mm. La distribution des billes de polystyrène expansé est telle que le rayon moyen  $a_0$  est de 0,79 mm, et l'écart type  $\tau$  est de 0,14 mm.

## 2.3 Réponse acoustique des matériaux aléatoires localement résonnants

### 2.3.1 Dispositif expérimental de caractérisation ultrasonore

Le dispositif expérimental présenté dans cette partie permet la mesure en immersion du coefficient de transmission d'une lame à faces parallèles dans la gamme de fréquences 50 kHz - 300 kHz. Le dispositif expérimental, présenté figure 2-17, comprend une cuve de

70 cm de longueur, 40 cm de largeur et 30 cm de hauteur, et deux transducteurs alignés, placés face à face et de part et d'autre de l'échantillon. Nous utilisons des transducteurs Imasonic de fréquence centrale 150 kHz, modèles uniques faits sur mesure, et qui ont une section efficace rectangulaire de 150 mm x 40 mm. Afin qu'il génère une onde acoustique, une excitation électrique leur est envoyée par un générateur, capable de délivrer des signaux électriques de formes différentes, comme une impulsion brève ou un signal au contenu spectral plus étroit. Les transducteurs possèdent une bande fréquentielle dite passante (75 kHz - 240 kHz) dans laquelle leur réponse acoustique à une impulsion électrique brève est incluse, centrée à 150 kHz, et en dehors de laquelle son amplitude est faible.



**figure 2-17 : dispositif expérimental comprenant une cuve remplie d'eau, et deux transducteurs ultrasonores placés de part et d'autre de l'échantillon à caractériser.**

Pour les échantillons considérés ici, il est nécessaire de mener des expérimentations dans la limite basse de la réponse des transducteurs. Pour cela, nous utilisons également comme excitation électrique des signaux dont les spectres sont centrés dans une fenêtre plus étroite, appelés « *chirp* » [39] (figure 2-18). Le « *chirp* » est un signal au contenu spectral contrôlé autour d'une fréquence porteuse, et modulé en temps par une enveloppe gaussienne. Le signal électrique généré par le transducteur recevant une onde acoustique est ensuite numérisé et traité par un oscilloscope et un ordinateur. L'appareillage expérimental permet de faire des acquisitions selon deux modes de fonctionnement, soit en émission-réception utilisant deux transducteurs (*pitch-catch* en anglais), où un transducteur émet un signal acoustique qui est ensuite reçu par le deuxième transducteur, soit en émission-réception utilisant un seul transducteur (*pulse-echo* en anglais) où un signal acoustique et son écho sont respectivement émis et reçus par un seul transducteur. Les signaux électriques acquis par l'oscilloscope sont moyennés sur une centaine de réalisations identiques afin de réduire les bruits de mesure électronique et mécanique.

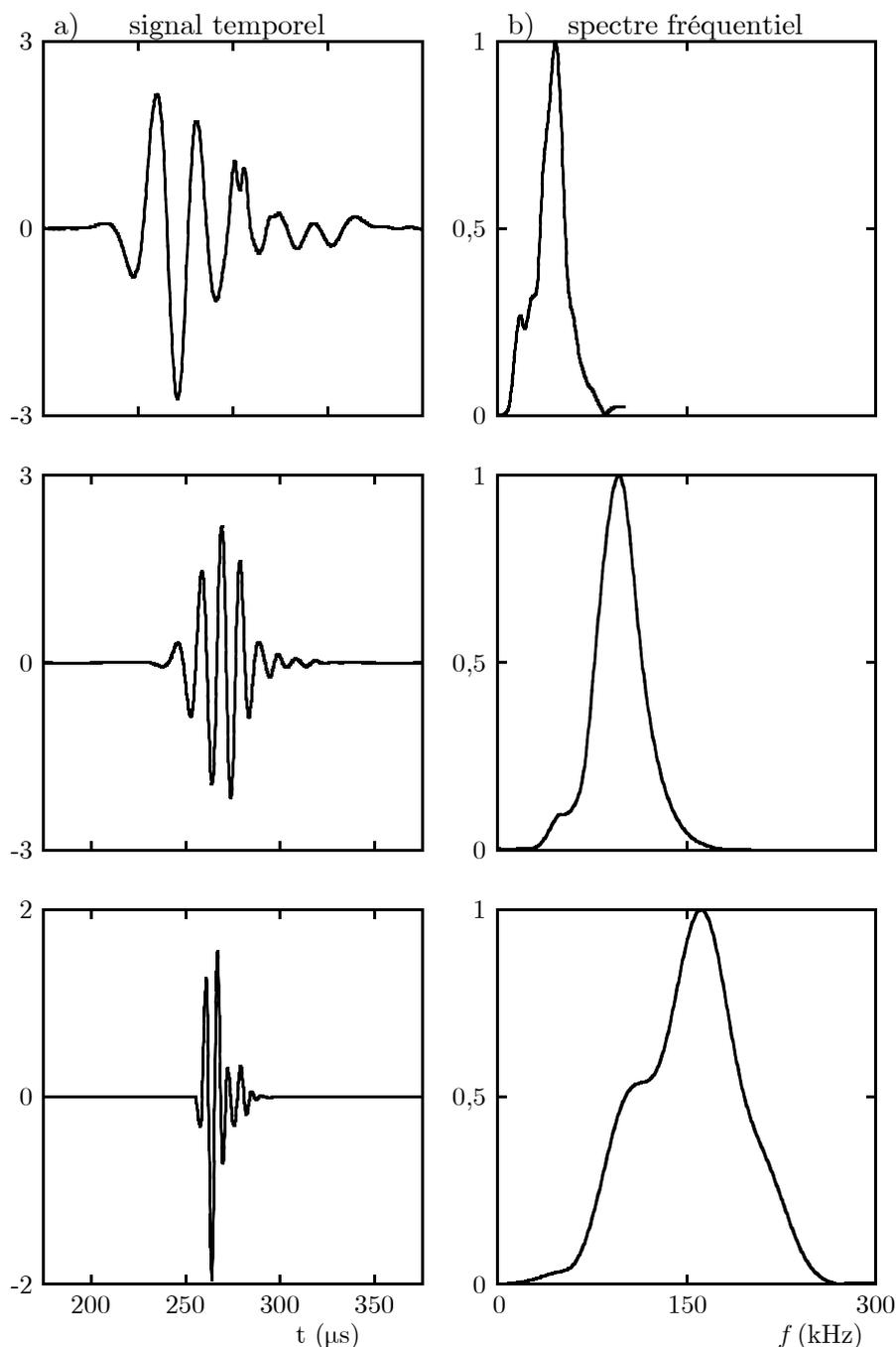


figure 2-18 : a) signaux temporels et b) modules du spectre des signaux de référence mesurés pour les « chirps » centrés respectivement à 40 kHz et à 100 kHz, ainsi que pour l'impulsion brève, mesurés à l'aide des mêmes capteurs (*pitch-catch*).

### 2.3.2 Spectro-interférométrie ultrasonore

Le système expérimental permet de mesurer le coefficient de transmission total  $T$  d'une plaque de matériau quelconque par une mesure en émission-réception (*pulse-écho*) avec deux transducteurs. Soient  $s_{\text{émis}}(t)$  et  $S_{\text{émis}}(\omega)$  respectivement le signal électrique et son spectre envoyé au premier transducteur émetteur,  $A$  sa fonction de transfert spectrale,  $B$  la fonction

de transfert spectrale du deuxième transducteur récepteur, et  $s_T$ ,  $s_{\text{Ref}}$  respectivement les signaux électriques qui en sortent avec et sans plaque, et dont les spectres, respectivement  $S_T$  et  $S_{\text{Ref}}$ , se calculent en multipliant les fonctions de transfert des divers éléments du système (figure 2-19) :

$$\begin{aligned} S_{\text{Ref}} &= S_{\text{émis}} A e^{ik_0 L} B, \\ S_T &= S_{\text{émis}} A T e^{ik_0(L-d)} B, \end{aligned} \quad (2-11)$$

où  $e^{ik_0 L}$  et  $e^{ik_0(L-d)}$  correspondent à la propagation de l'onde dans l'eau, et  $T$  est le coefficient de la plaque. Les signaux en sortie du deuxième transducteur  $s_T$  et  $s_{\text{Ref}}$  sont numérisés et traités informatiquement.

signal électrique d'entrée	contenu fréquentiel	voltage générateur	gain de sortie	autre caractéristique
chirp 1	30 kHz - 110 kHz	2 V	+ 20 dB	longueur de 100 $\mu\text{s}$
chirp 2	50 kHz - 150 kHz	2 V	+ 9 dB	longueur de 80 $\mu\text{s}$
impulsion brève	$\infty$	100 V	-20 dB	porte à 0,25 MHz

tableau 2-4 : caractéristiques des différentes configurations expérimentales.

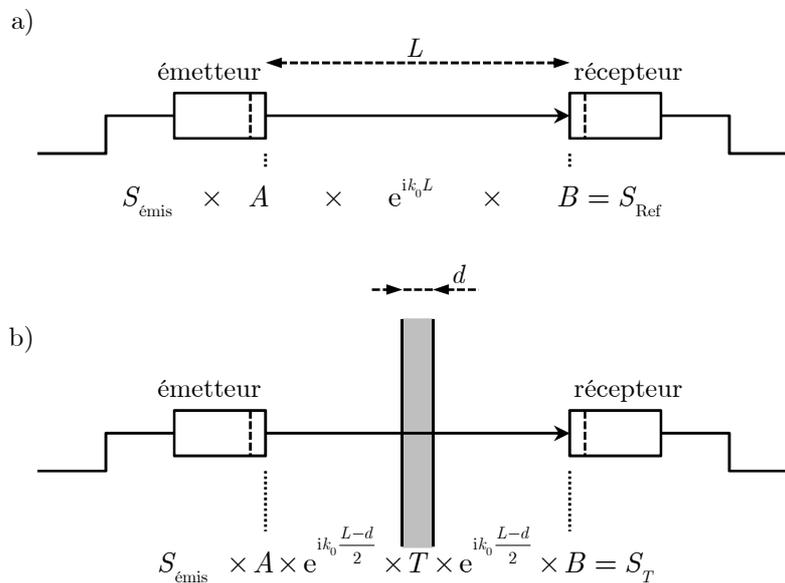


figure 2-19 : schéma de principe de la mesure du coefficient de transmission ;

a) signal de référence ; b) signal transmis par la plaque.

Le coefficient de transmission se calcule finalement en divisant les spectres :

$$\frac{S_T}{S_{\text{Ref}}} = T e^{-ik_0 d}, \quad (2-12)$$

où le décalage de phase  $k_0 d$  provient de la différence de propagation entre la plaque et la lame d'eau équivalente.

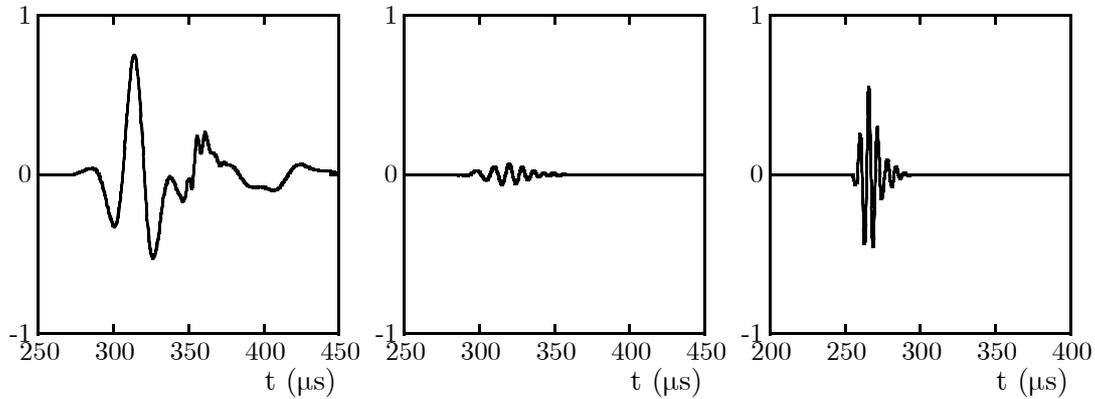


figure 2-20 : signaux temporels à travers la plaque contenant 2 % en volume de billes de polystyrène expansé, selon l'excitation, de la plus basse fréquence à la plus haute fréquence (40, 100 et 150 kHz).

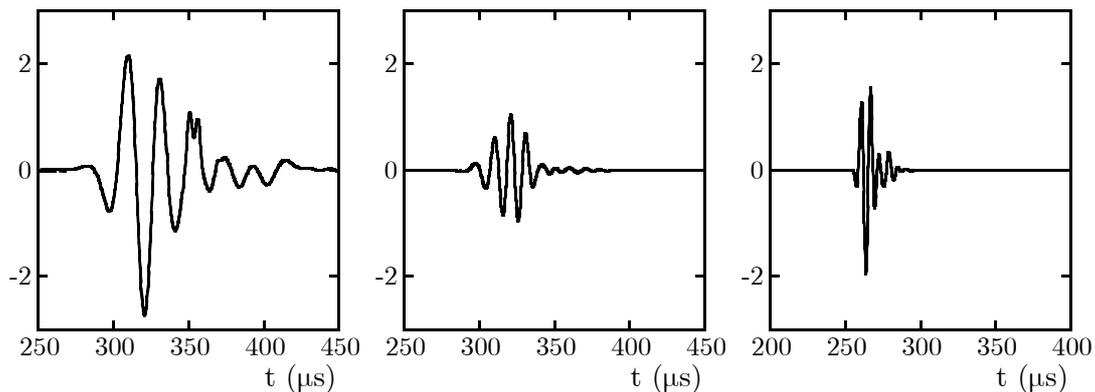


figure 2-21: signaux temporels à travers la plaque contenant 2 % en volume de billes de plomb, selon l'excitation, de la plus basse fréquence à la plus haute fréquence (40, 100 et 150 kHz).

### 2.3.3 Application aux échantillons sélectionnés

Nous présentons dans cette section les mesures acoustiques réalisées sur les échantillons, à l'aide du protocole expérimental suivant. Les transducteurs sont tout d'abord placés face à face, à une quarantaine de centimètres l'un de l'autre, dans la cuve d'eau, et alignés le plus précisément possible. Un générateur est connecté au transducteur émetteur et le transducteur receveur est branché à un amplificateur lui-même relié à un oscilloscope. Nous avons utilisé un générateur d'impulsions électriques brèves, et un générateur de fonctions « chirps » dont nous contrôlons toutes les caractéristiques (fréquence, durée, amplitude). Finalement, la

puissance du générateur et l'amplification en sortie du système sont réglées afin d'avoir le maximum d'énergie sans saturer l'électronique (cf. tableau 2-4). La mesure de référence est effectuée, en moyennant les signaux sur une centaine de réalisations afin d'augmenter le rapport signal à bruit. La plaque à étudier est ensuite placée parallèlement et à une vingtaine de centimètres des deux capteurs, puis le signal transmis à travers la plaque est mesuré, dans les mêmes conditions que pour le signal de référence.

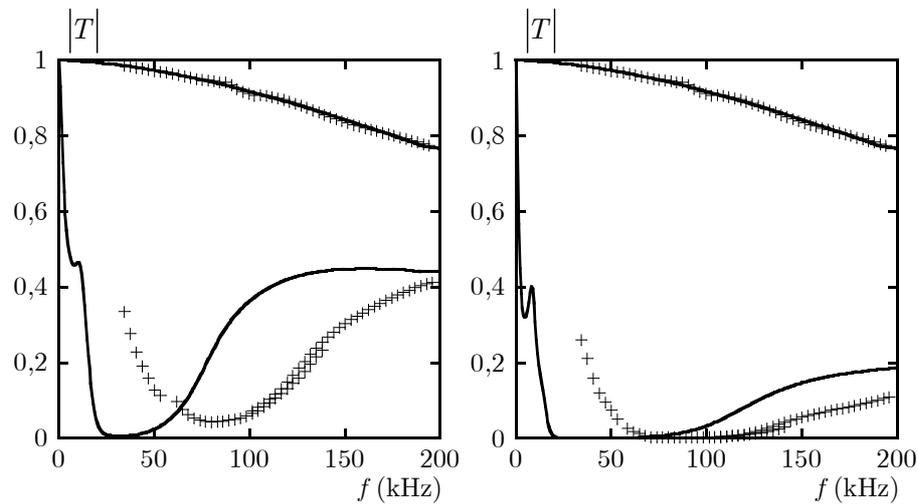


figure 2-22 : module du coefficient de transmission des échantillons contenant a) 2 % et b) 5 % de billes d'EPS en fonction de la fréquence, points expérimentaux et prédictions théoriques en trait plein.

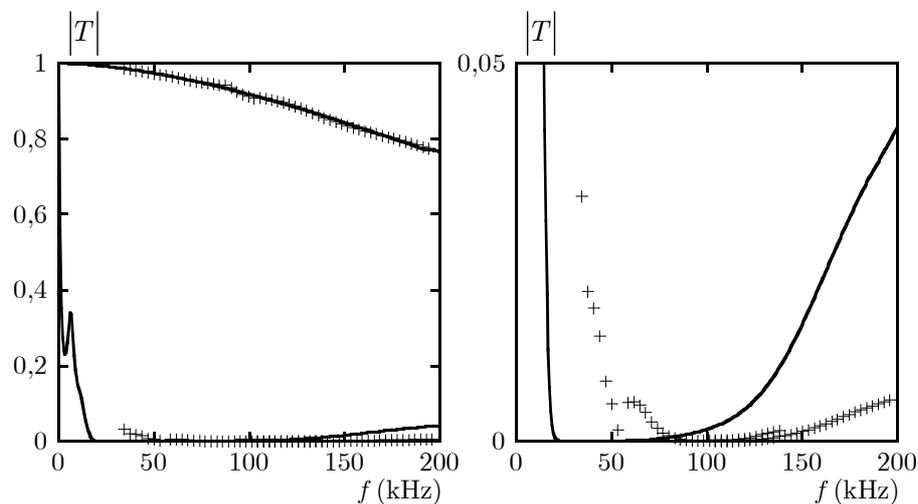


figure 2-23 : a) module du coefficient de transmission des échantillons contenant 10 % de billes d'EPS en fonction de la fréquence, points expérimentaux et prédictions théoriques en trait plein ; b) zoom.

Le spectre des signaux est obtenu en appliquant une transformée de fourrier rapide (@fft dans Matlab®), permettant, à partir du tableau d'un signal temporel, d'obtenir le tableau de

son spectre (cf. Annexe B), où le pas fréquentiel  $\delta f$  est égal à l'inverse de l'encombrement temporel du signal  $T_t$  :

$$\delta f = \frac{1}{T_t}. \quad (2-13)$$

Ainsi, en augmentant le nombre de points dans le tableau du signal temporel (ajout de zéros à la fin du tableau temporel), nous augmentons artificiellement la résolution en fréquence. Nous déduisons finalement des modules des spectres des deux signaux le module du coefficient de transmission (2-12).

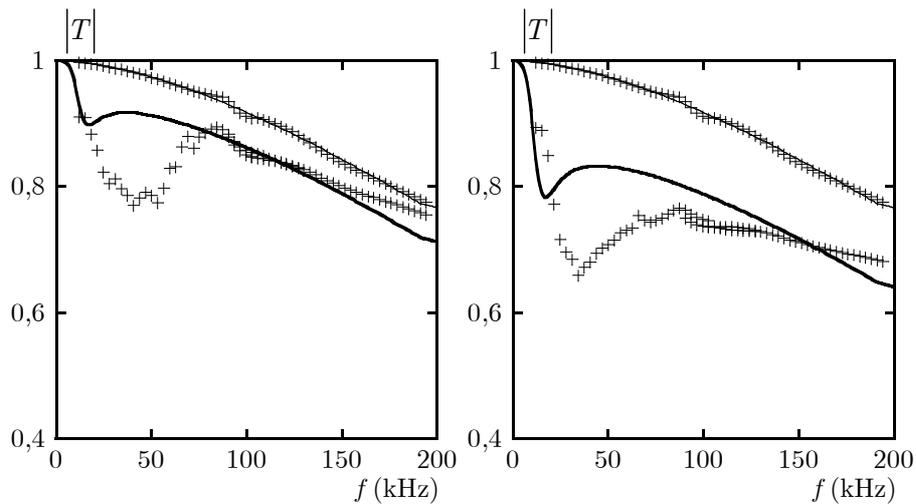


figure 2-24 : module du coefficient de transmission des échantillons contenant a) 2 % et b) 5 % de billes de plomb en fonction de la fréquence, points expérimentaux et prédictions théoriques en trait plein.

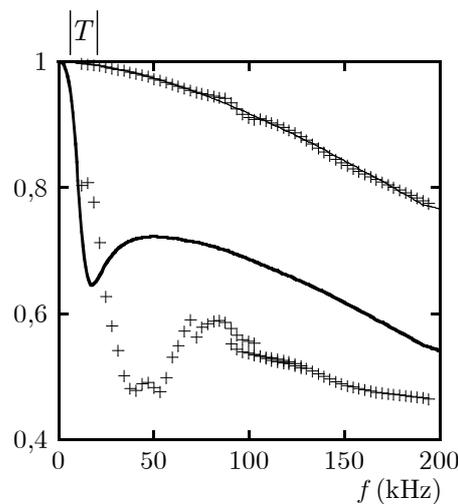


figure 2-25 : module du coefficient de transmission des échantillons contenant 10 % de billes de plomb en fonction de la fréquence, points expérimentaux et prédictions théoriques en trait plein.

Les figures 2-20 et 2-21 présentent les signaux temporels mesurés à travers les échantillons contenant respectivement 2 % en volume d'inclusions de polystyrène expansé, et 2 % en volume d'inclusions de plomb. Nous remarquons que l'effet des billes de polystyrène expansé sur la réponse en transmission du matériau aléatoire est très marqué, même à faible fraction volumique (2 %), alors que celui des billes de plomb l'est beaucoup moins. Pour les échantillons avec des fractions volumiques plus élevées (5 % et 10 %), les signaux temporels ont logiquement des amplitudes plus faibles.

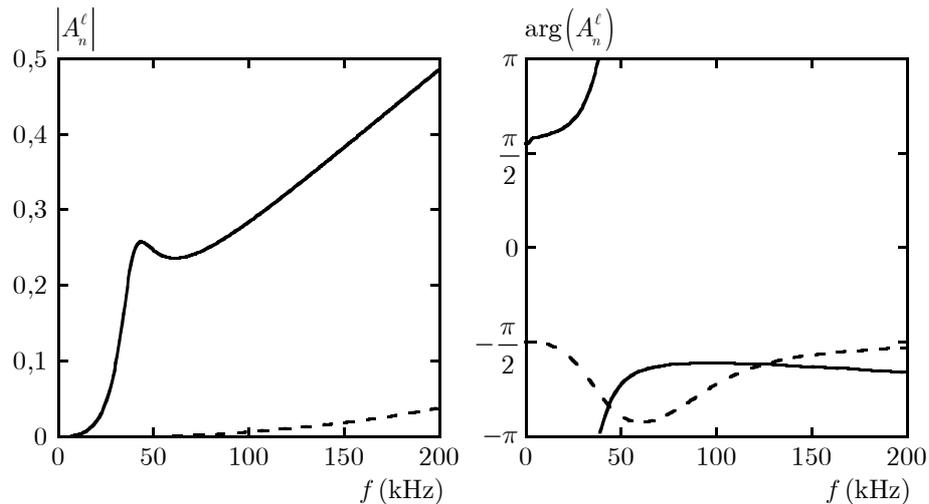


figure 2-26 : module et phase des deux premiers coefficients modaux théoriques pour les plaques contenant des billes de polystyrène expansé,  $A_0^\ell$  en trait plein et  $A_1^\ell$  en trait pointillé.

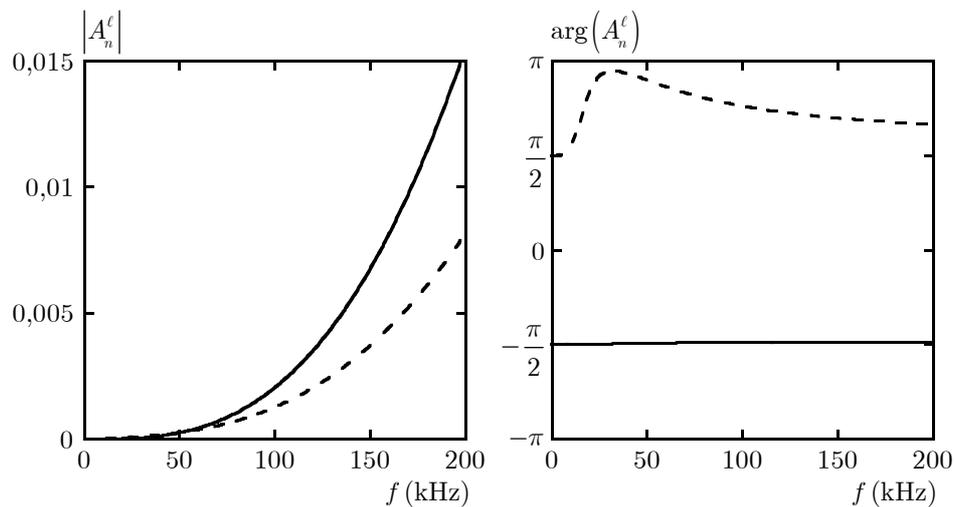


figure 2-27 : module et phase des deux premiers coefficients modaux théoriques pour les plaques contenant des billes de plomb,  $A_0^\ell$  en trait plein et  $A_1^\ell$  en trait pointillé.

Les résultats de la mesure du module du coefficient de transmission sont présentés sur les figures 2-22 à 2-25 pour tous les échantillons aléatoires. Nous y affichons également la prédiction théorique de ce coefficient, calculée à l'aide de la relation 1-68 et des formules

d'homogénéisation établies dans le cadre de la théorie de Waterman & Truell (équations 1-49 et 1-56). Les données matériau nécessaires pour ce calcul proviennent de la caractérisation des constituants des échantillons (§ 2.2.2 et 2.2.3). Les figures 2-26 et 2-27 présentent quant-à-elles les modules des coefficients de diffusion pour les échantillons contenant respectivement des billes de polystyrène expansé et de plomb, permettant de visualiser les résonances théoriques. En considérant la taille des transducteurs, leur fréquence centrale et leur distance à la plaque, le front d'onde arrivant sur l'échantillon est plan et le nombre d'inclusions vues par l'onde acoustique est supérieur à 430 pour les billes de polystyrène expansé et à 3 500 pour les billes de plomb. L'onde acoustique traversant les échantillons est donc plane et résulte bien d'une moyenne sur le désordre (onde cohérente).

Nous remarquons, sur l'ensemble des résultats, une perte en transmission, pour une fréquence d'environ 100 kHz dans le cas des échantillons contenant des billes de polystyrène expansé, et pour une fréquence de 50 kHz dans le cas des échantillons contenant des billes de plomb, semblant correspondre respectivement aux résonances basses fréquences monopolaire et dipolaire des inclusions, même si la fréquence n'est pas correctement prédite (30 kHz en prédiction contre 100 kHz expérimentalement pour les billes de polystyrène expansé, et 20 kHz en prédiction contre 50 kHz expérimentalement pour les billes de plomb). La caractérisation de la célérité transversale dans la matrice par DMA est peu précise à hautes fréquences du fait de l'utilisation des lois WLF pour extrapoler le comportement des échantillons. Les figures 2-28 à 2-31 présentent la comparaison entre les mesures faites sur les échantillons et les prédictions, en utilisant la valeur de la célérité des ondes transversales dans la matrice, mesurée à l'aide de transducteurs au contact centrés à 500 kHz.

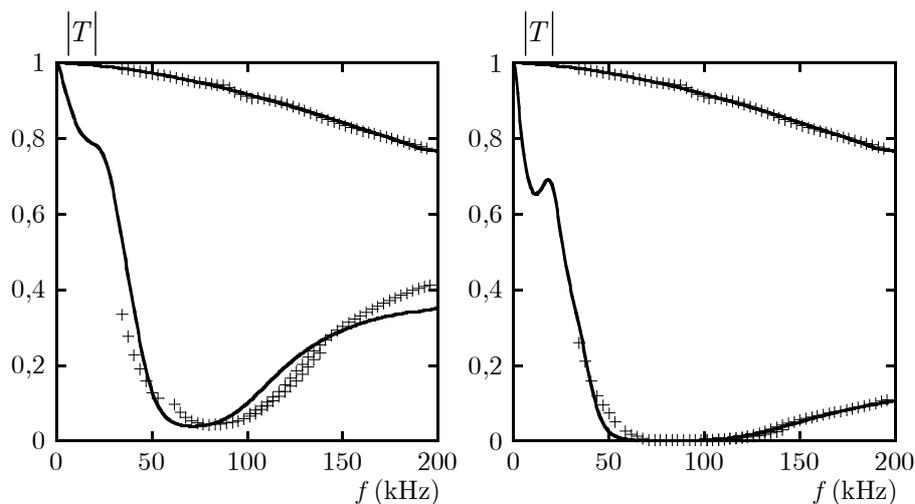


figure 2-28 : influence de la célérité transversale dans la matrice  $c_0^t$  sur les prédictions théoriques du module du coefficient de transmission, pour les échantillons contenant a) 2 % et b) 5 % de billes de polystyrène expansé, points expérimentaux et nouvelle valeur théorique de  $c_0^t$  en trait plein.

Nous remarquons que les coefficients de transmission prédits correspondent mieux aux mesures acoustiques et que la fréquence de résonance des inclusions  $y$  est mieux prédite.

Bien que la fréquence de résonance des inclusions ne soit pas quantitativement prédite, les observations expérimentales de la transmission d'échantillons aléatoires ont mis en évidence la présence de résonances basses-fréquences.

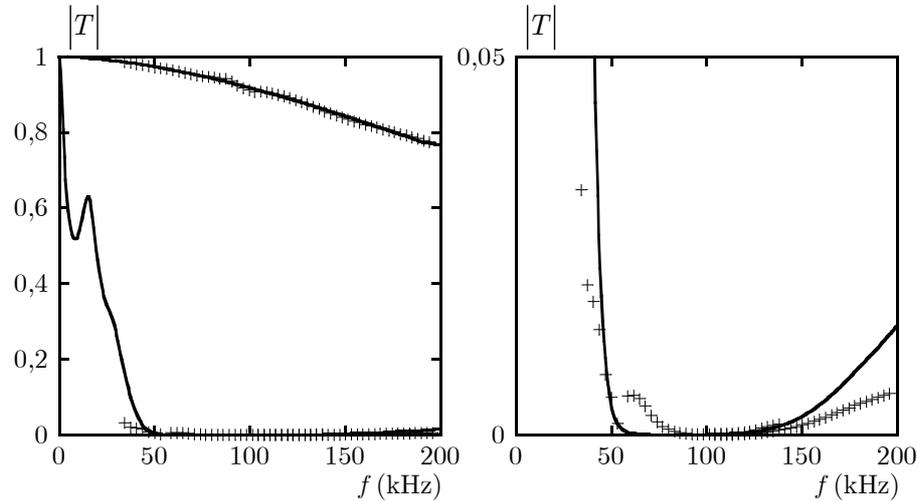


figure 2-29 : influence de la célérité transversale dans la matrice  $c_0^t$  sur les prédictions théoriques du module du coefficient de transmission, pour les échantillons contenant 10 % de billes de polystyrène expansé, points expérimentaux et nouvelle valeur théorique de  $c_0^t$  en trait plein.

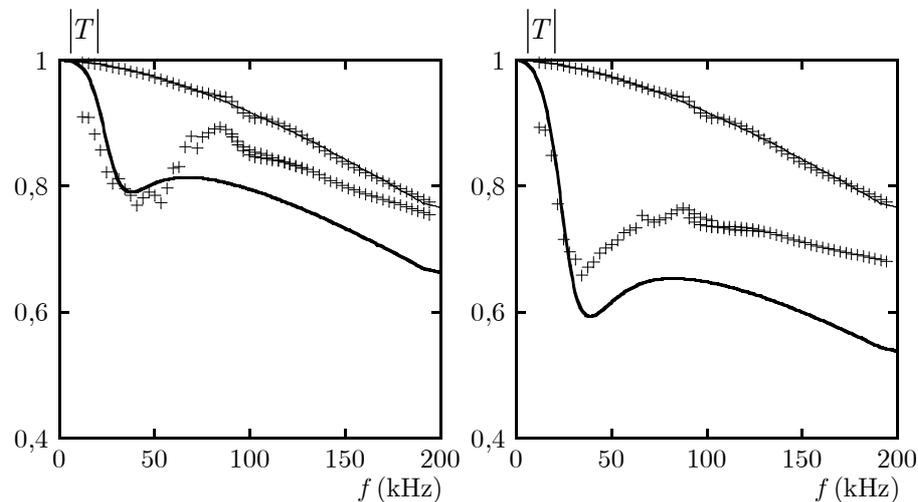


figure 2-30 : influence de la célérité transversale dans la matrice  $c_0^t$  sur les prédictions théoriques du module du coefficient de transmission, pour les échantillons contenant a) 2 % et b) 5 % de billes de plomb, points expérimentaux et nouvelle valeur théorique de  $c_0^t$  en trait plein.

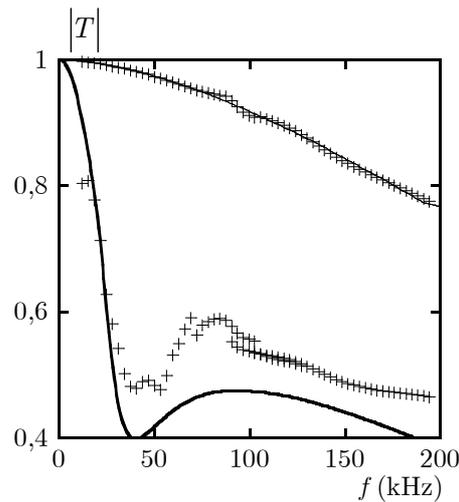


figure 2-31 : influence de la célérité transversale dans la matrice  $c'_0$  sur les prédictions théoriques du module du coefficient de transmission, pour les échantillons contenant 10 % de billes de plomb, points expérimentaux et nouvelle valeur théorique de  $c'_0$  en trait plein.

#### 2.3.4 Comportement sous incidence oblique

Dans la partie précédente, les mesures en cuve acoustique ont été réalisées uniquement en incidence normale. Or, les matériaux anéchoïques utilisés dans le domaine naval doivent répondre à des spécifications non seulement sous incidence normale, mais également pour de faibles angles d'incidence ( $< 20^\circ$ ). Dans l'idéal, l'efficacité anéchoïque du matériau ne doit pas être diminuée par une incidence non nulle. N'ayant pas mené de campagne de mesure sous incidence oblique, nous nous proposons alors d'étudier théoriquement l'influence de cet angle d'incidence sur les coefficients de transmission et de réflexion d'une lame immergée, constituée des matériaux utilisés précédemment.

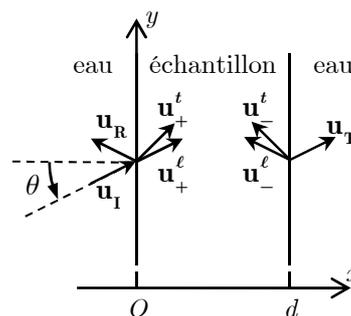


figure 2-32 : interaction sous incidence oblique ( $\theta \neq 0$ )  
d'une onde incidente de pression avec une plaque immergée d'épaisseur  $d$ .

Lorsqu'une onde de pression interagit avec une plaque solide, et sous un angle d'incidence  $\theta$ , en plus des deux ondes longitudinales, deux ondes transversales sont générées dans le

matériau (une onde progressive et une onde rétrograde) (figure 2-32). Les champs de déplacement dans le matériau, ainsi qu'en amont et en aval de la plaque s'écrivent ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_I + \mathbf{u}_R &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} e^{\frac{i\omega}{c_{\text{eau}}}(x \cos \theta + y \sin \theta)} + R \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} e^{\frac{i\omega}{c_{\text{eau}}}(-x \cos \theta + y \sin \theta)} & \forall x < 0, \\ \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{u}_+^\ell + \mathbf{u}_-^\ell + \mathbf{u}_+^t + \mathbf{u}_-^t & \forall x \in [0, d], \\ \mathbf{u}_T &= T \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} e^{\frac{i\omega}{c_{\text{eau}}}(x \cos \theta + y \sin \theta)} & \forall x > d, \end{aligned} \quad (2-14)$$

avec :

$$k_{\text{eff}}^{\ell, t} = k_x^{\ell, t} \mathbf{e}_x + k_y^{\ell, t} \mathbf{e}_y,$$

calculés à l'aide des équations (1.49) et (1.54), la célérité des ondes dans l'eau  $c_{\text{eau}}$ ,

$$\mathbf{u}_\pm^\ell = A_\pm^\ell \begin{pmatrix} \pm k_x^\ell \\ k_y^\ell \end{pmatrix} e^{i(\pm k_x^\ell x + k_y^\ell y)} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_\pm^t = A_\pm^t \begin{pmatrix} k_y^t \\ \mp k_x^t \end{pmatrix} e^{i(\pm k_x^t x + k_y^t y)}. \quad (2-15)$$

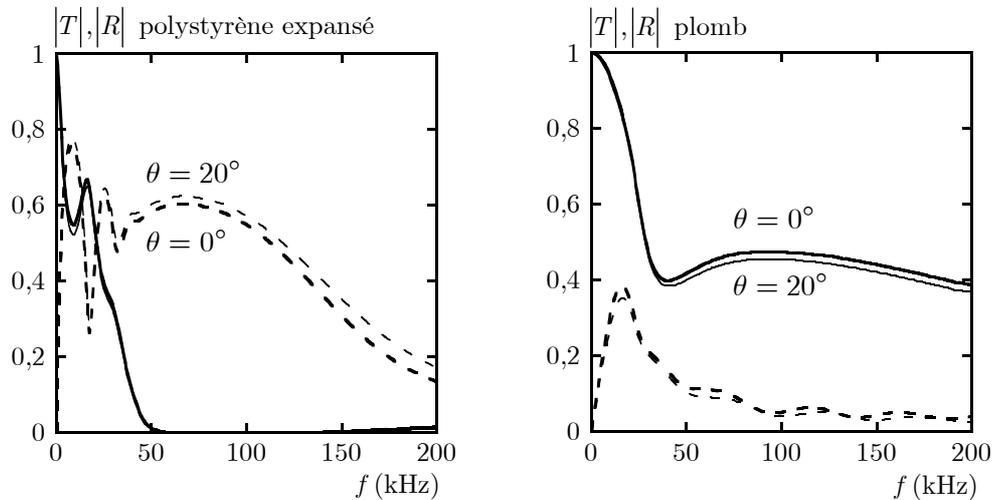
À l'instar des coefficients de réflexion et de transmission partiels sous incidence nulle (§ 1.4.1), les coefficients de réflexion et de transmission totaux sous incidence oblique sont solution d'un système linéaire rendant compte des conditions limites aux interfaces entre le matériau et le fluide couplant ( $AX = B$ ) où :

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho_{\text{eau}} c_{\text{eau}} \omega \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} R \\ T \\ A_+^t \\ A_-^t \\ A_+^t \\ A_-^t \end{pmatrix}, \quad (2-16)$$

$$\text{et} \quad A = \begin{pmatrix} -\cos(\theta) & 0 & k_x^\ell & -k_x^\ell & k_y^t & k_y^t \\ 0 & -\cos(\theta)L & k_x^\ell e^{ik_x^\ell d} & -k_x^\ell e^{-ik_x^\ell d} & k_y^t e^{ik_x^\ell d} & k_y^t e^{-ik_x^\ell d} \\ 0 & 0 & -2k_x^\ell k_y^\ell & 2k_x^\ell k_y^\ell & M & M \\ 0 & 0 & -2k_x^\ell k_y^\ell e^{ik_x^\ell d} & 2k_x^\ell k_y^\ell e^{-ik_x^\ell d} & M e^{ik_x^\ell d} & M e^{-ik_x^\ell d} \\ -\rho_{\text{eau}} c_{\text{eau}} \omega & 0 & N & N & 2\mu_{\text{eff}} k_x^t k_y^t & -2\mu_{\text{eff}} k_x^t k_y^t \\ 0 & -\rho_{\text{eau}} c_{\text{eau}} \omega L & N e^{ik_x^\ell d} & N e^{-ik_x^\ell d} & 2\mu_{\text{eff}} k_x^t k_y^t e^{ik_x^\ell d} & -2\mu_{\text{eff}} k_x^t k_y^t e^{-ik_x^\ell d} \end{pmatrix}, \quad (2-17)$$

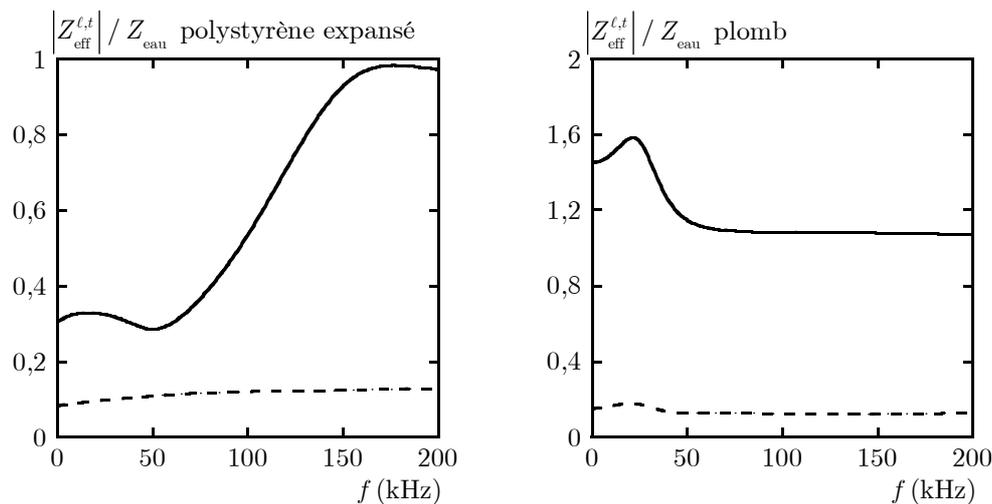
$$\text{avec :} \quad L = e^{\frac{i\omega}{c_{\text{eau}}} \cos \theta d}, \quad N = (\lambda_{\text{eff}} + 2\mu_{\text{eff}})(k_x^\ell)^2 + \lambda_{\text{eff}}(k_y^\ell)^2 \quad \text{et} \quad M = (k_x^t)^2 - (k_y^t)^2.$$

Dans l'équation (2-17),  $\lambda_{\text{eff}}$  et  $\mu_{\text{eff}}$  sont les coefficients de Lamé pour le milieu homogène équivalent et  $\rho_{\text{eau}}$  est la masse volumique de l'eau.



**figure 2-33 : module des coefficients de transmission (trait plein) et de réflexion (trait pointillé) des échantillons contenant 10% en volume de polystyrène expansé et de plomb, pour trois angles d'incidence (0, 10 et  $20^\circ$  du trait le plus épais au plus fin).**

Ce système linéaire se résout par la méthode classique de Cramer. La figure 2-33 présente les modules des coefficients de réflexion et de transmission des deux échantillons contenant 10 % en volume d'inclusion de polystyrène expansé et de plomb, pour trois angles d'incidence (0, 10 et  $20^\circ$ ).



**figure 2-34 : rapport d'impédances longitudinale (trait plein) et transversale (trait pointillé) entre les échantillons (contenant 10% en volume de polystyrène expansé et de plomb) et l'eau.**

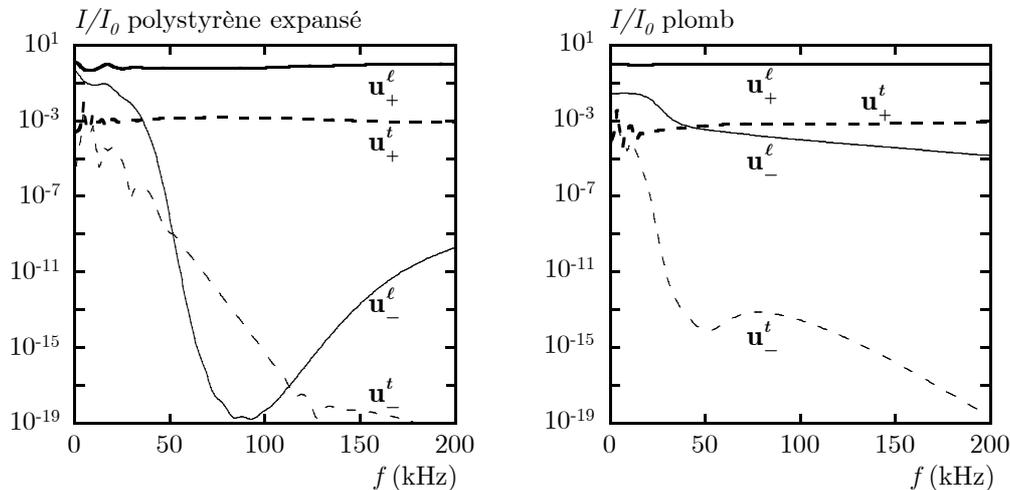
Nous remarquons que la réponse acoustique des deux échantillons ne dépend quasiment pas de l'angle d'incidence en deçà de  $10^\circ$ , et qu'elle est peu différente à  $20^\circ$ . Afin de

comprendre cette si faible dépendance à l'angle d'incidence, nous nous proposons de comparer les impédances effectives à celle du fluide couplant (eau) (figure 2-34). Un fort contraste entre les impédances longitudinale  $Z_{\text{eff}}^{\ell}$  et transversale  $Z_{\text{eff}}^t$  des échantillons, et une impédance longitudinale proche de celle de l'eau ( $Z_{\text{eau}} = \rho_{\text{eau}} c_{\text{eau}}$ ) peuvent expliquer la faible contribution des ondes transversales dans la réponse acoustique des plaques. Nous remarquons cependant que le rapport relatif entre les impédances longitudinale et transversale n'est pas suffisamment important ( $< 10$ ) pour justifier la faible influence de l'angle d'incidence. Il est tout de même à noter que l'impédance acoustique longitudinale des échantillons est proche de celle de l'eau, ce qui laisse à penser que la conversion entre le mode longitudinal de l'onde incidente et le mode transversal dans les échantillons est faible.

Nous nous proposons alors de déterminer le poids énergétique de chacune des quatre ondes présentes dans les plaques. Le flux énergétique se calcule à l'aide du tenseur des contraintes et de la vitesse particulière [15] :

$$I = \left\| -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \sigma \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t} \right) \right\|, \quad (2-18)$$

$$\text{où } \sigma_{xx} = 2\mu_{\text{eff}} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \lambda_{\text{eff}} \left( \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} \right), \sigma_{xy} = \mu_{\text{eff}} \left( \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} \right), \sigma_{yy} = 2\mu_{\text{eff}} \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \lambda_{\text{eff}} \left( \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} \right).$$



**figure 2-35 : flux énergétique des quatre ondes présentes dans les échantillons (contenant 10% en volume de polystyrène expansé et de plomb) ; onde longitudinale en trait plein ; onde transversale en trait pointillé ; onde progressive en trait gras ; onde rétrograde en trait fin.**

Nous avons calculé, pour un angle d'incidence de  $20^\circ$ , le flux d'énergie propre à chacune des quatre ondes (ondes isolées les unes des autres) présentes dans l'échantillon divisé par celui de l'onde incidente ( $I_0$ ) (figure 2-35). Nous remarquons que le flux énergétique

transporté par l'onde longitudinale principale (progressive) est plus de 200 fois supérieur à celui des deux ondes transversales pour les deux échantillons. De plus, on note que l'onde longitudinale rétrograde est d'un poids énergétique faible par rapport à l'onde progressive, ceci pouvant s'expliquer par l'absorption du milieu qui limite l'écho de fond. Ces constats confirment la faible dépendance de la réponse acoustique des échantillons à l'angle d'incidence, ce qui présente un intérêt pour des applications en anéchoïsme.

## 2.4 Inversion des propriétés effectives de matériaux aléatoires

Nous nous proposons dans cette partie de caractériser les propriétés effectives  $(k_{\text{eff}}^{\ell}, \rho_{\text{eff}})$  liées aux ondes longitudinales de matériaux aléatoires à matrice solide. Dans le cadre des matériaux homogènes pour lesquels la masse volumique est une caractéristique constante et directement et uniquement reliée à la quantité de matière, les méthodes d'inversion se basent sur des modèles traduisant l'évolution des propriétés acoustiques en fonction de la fréquence, et possèdent un nombre réduit de paramètres (souvent le seul nombre d'onde à valeurs complexes car la masse volumique est obtenue par des pesées statiques). La technique d'identification consiste à déterminer ces paramètres en confrontant des prédictions théoriques et des données expérimentales (en réduisant l'écart quadratique entre celles-ci par exemple) sur un nombre limité de fréquences. Ces méthodes se basent généralement sur une seule mesure acoustique de la transmission ou de la réflexion d'une plaque immergée en incidence normale [40]. En revanche, pour les matériaux à structure aléatoire, il n'y a pas de modèles suffisamment fiables (sauf pour des concentrations faibles d'inclusions) prédisant leur comportement fréquentiel, et il peut s'avérer nécessaire d'inverser les propriétés effectives fréquence par fréquence, sans aucun *a priori* sur leur évolution fréquentielle. De plus, contrairement aux milieux homogènes, la masse volumique dynamique effective d'un milieu hétérogène est à valeurs complexes et dépend de la fréquence, et est une inconnue du problème (différente de la masse volumique statique). Enfin, on peut supposer qu'elle ne dépend pas de l'angle d'incidence en raison des symétries internes des échantillons (bien que certaines études tendent à prouver le contraire [41]). De plus, le milieu extérieur au matériau étant de l'eau, l'onde arrivant en incidence normale est une onde de pression, et il n'y a pas de génération d'ondes transversales dans le matériau, ce qui simplifie le problème et permet d'extraire uniquement les propriétés acoustiques longitudinales  $(k_{\text{eff}}^{\ell}, Z_{\text{eff}})$ .

Certaines méthodes d'inversions utilisent deux échantillons du « même » matériau à caractériser d'épaisseurs différentes afin de déterminer son nombre d'onde en s'affranchissant de la connaissance de la rupture d'impédance entre le matériau et le fluide environnant. Cependant, cette méthode nécessite que les matériaux constituant les deux échantillons aient des propriétés identiques (fraction volumique d'inclusions, taille des inclusions, nature des

constituants, répartition statistique des inclusions), ce qui est peu probable pour des milieux aléatoires. Comme vu au paragraphe 2.2, les échantillons fabriqués n'ont pas exactement les spécifications choisies au départ lors du dimensionnement. Il est donc peu probable d'obtenir deux échantillons qui aient des propriétés statistiques identiques. C'est pourquoi cette approche n'a pas été envisagée.

Nous considérons dès lors une méthode proposée par Fokin *et al.* [42] et utilisant deux mesures expérimentales relevées sur le même échantillon de matériau. Nous détaillons alors un montage expérimental adapté permettant d'accéder au carré du coefficient de réflexion et au coefficient de transmission des échantillons immergés dans un fluide couplant (eau).

#### 2.4.1 Configuration expérimentale

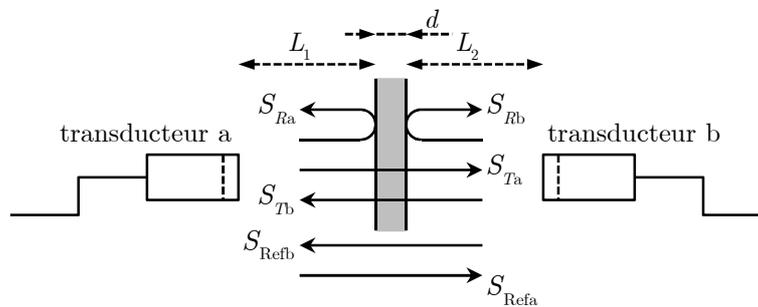
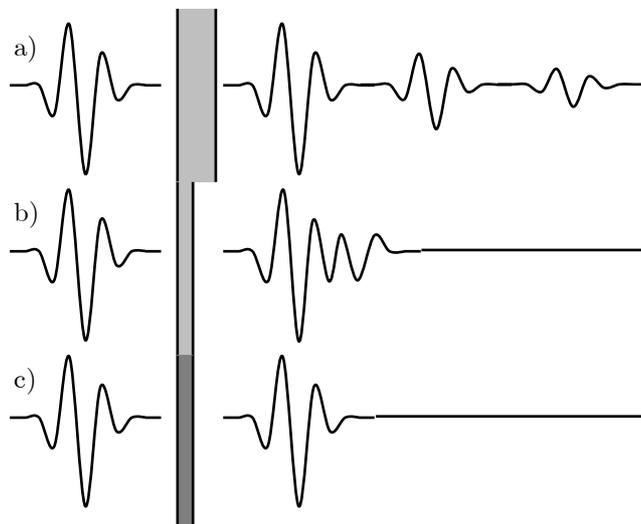


figure 2-36 : montage expérimental permettant la mesure de six signaux acoustiques.

L'objectif est ici de mesurer les coefficients de réflexion  $R$  et de transmission  $T$  de la plaque afin de la caractériser. Les configurations expérimentales en réflexion et en transmission, comme celle décrite dans le paragraphe 2.3, nécessitent de considérer plusieurs paramètres, à savoir les fonctions de transfert des transducteurs, la distance entre les capteurs et l'échantillon ou encore les propriétés du fluide environnant (l'eau). Afin de s'affranchir de certains de ces paramètres, des mesures différentielles sont effectuées à l'aide d'un signal de référence et d'un signal ayant interagi avec l'échantillon. La division spectrale de ces deux signaux permet d'éliminer la réponse des transducteurs ainsi que les distances entre capteurs et plaque mais pas les propriétés de l'eau dont une connaissance précise est nécessaire comme nous le verrons par la suite. Cependant la mesure du coefficient de réflexion demande la connaissance d'un signal de référence difficile à obtenir. Nous proposons ainsi un mode de fonctionnement de la configuration expérimentale permettant la mesure de six signaux correspondant à deux fois la même expérience mais dans deux sens de propagation opposés. Ces signaux expérimentaux (figure 2-36) sont les signaux transmis à travers la plaque, du transducteur (a) au transducteur (b)  $S_{Ta}$ , puis du transducteur (b) au transducteur (a)  $S_{Tb}$ , les signaux réfléchis par l'échantillon sur le transducteur (a)  $S_{Ra}$  puis sur le transducteur (b)  $S_{Rb}$ , et enfin les deux signaux de référence  $S_{Refa}$  et  $S_{Refb}$ . Nous

supposons ici que la réponse acoustique des plaques est identique dans les deux sens. Cette hypothèse est naturelle et justifiée pour une plaque à faces parfaitement parallèles et homogène, mais elle ne l'est pas dans l'absolu pour une plaque constituée d'un milieu hétérogène. Cependant, nous considérons ici des milieux aléatoires, et du point de vue du milieu homogène équivalent, cette hypothèse est théoriquement justifiée.



**figure 2-37 : différentes configurations possibles selon le matériau ;**

- a) les différents échos sont séparables (épaisseur suffisante et absorption pas trop forte) ;
- b) tous les échos sont contenus dans le signal principal (épaisseur trop faible) ;
- c) le matériau a absorbé tous les échos, seul le signal direct apparaît.

Selon la nature du matériau constituant la plaque, les signaux réfléchis et transmis sont sensiblement différents (figure 2-37). Si le matériau est très absorbant, aucun signal n'est transmis par la plaque et la méthode décrite ici n'est alors pas applicable. Dans le cas contraire, l'épaisseur du matériau va déterminer s'il est possible de séparer les différents échos liés aux allers et retours dans l'épaisseur de la plaque. En effet, plus l'épaisseur de l'échantillon est importante, plus les échos vont être éloignés temporellement les uns des autres, et il sera alors plus aisé de les séparer et de sélectionner les échos voulus et donc d'utiliser des techniques plus précises ou plus stables. Il est à noter que, compte tenu de l'absorption du matériau, les échos successifs ont une amplitude de plus en plus faible, jusqu'à l'absorption totale du signal, leur nombre étant directement lié à l'absorption et à l'épaisseur de la plaque. Si l'épaisseur de la plaque est trop faible pour pouvoir séparer les différents échos, ils seront contenus dans le signal principal, leur nombre étant *a priori* inconnu. En effet, ce nombre peut être important si l'absorption du matériau est faible, mais on peut également observer, dans le cas contraire, uniquement le signal direct.

Les spectres des six signaux mesurables par le dispositif expérimental,  $S_{Ta}(\omega)$ ,  $S_{Tb}(\omega)$ ,  $S_{Ra}(\omega)$ ,  $S_{Rb}(\omega)$ ,  $S_{Refa}(\omega)$  et  $S_{Refb}(\omega)$  s'expriment à l'aide des fonctions de transfert en réflexion et en transmission de la plaque, respectivement  $R(\omega)$  et  $T(\omega)$ , ainsi que des fonctions de transfert en émission et en réception des transducteurs (respectivement  $A_{ea}(\omega)$ ,  $B_{ea}(\omega)$  et  $A_{ae}(\omega)$ ,  $B_{ae}(\omega)$ ) :

$$\begin{aligned}
S_{Ta}(\omega) &= A_{ea}(\omega)e^{ik_{\text{cau}}L_1}T(\omega)e^{ik_{\text{cau}}L_2}B_{ae}(\omega), \\
S_{Tb}(\omega) &= B_{ea}(\omega)e^{ik_{\text{cau}}L_2}T(\omega)e^{ik_{\text{cau}}L_1}A_{ae}(\omega), \\
S_{Ra}(\omega) &= A_{ea}(\omega)e^{ik_{\text{cau}}L_1}R(\omega)e^{ik_{\text{cau}}L_1}A_{ae}(\omega), \\
S_{Rb}(\omega) &= B_{ea}(\omega)e^{ik_{\text{cau}}L_2}R(\omega)e^{ik_{\text{cau}}L_2}B_{ae}(\omega), \\
S_{Refa}(\omega) &= A_{ea}(\omega)e^{ik_{\text{cau}}(L_1+d+L_2)}B_{ae}(\omega), \\
S_{Refb}(\omega) &= B_{ea}(\omega)e^{ik_{\text{cau}}(L_2+d+L_1)}A_{ae}(\omega),
\end{aligned} \tag{2-19}$$

où  $e^{ik_{\text{cau}}L_1}$ ,  $e^{ik_{\text{cau}}L_2}$  et  $e^{ik_{\text{cau}}(L_1+d+L_2)}$  sont les fonctions de transfert de propagation dans le fluide extérieur. Nous extrayons ensuite les coefficients de réflexion  $R$  et de transmission  $T$  en combinant ces six spectres :

$$\begin{aligned}
\frac{S_{Ta}}{S_{Refa}} &= Te^{-ik_0d} \left( = \frac{S_{Tb}}{S_{Refb}} \right), \\
\frac{S_{Ra}}{S_{Refa}} \frac{S_{Rb}}{S_{Refb}} &= R^2 e^{-2ik_0d}.
\end{aligned} \tag{2-20}$$

N. B. Nous accédons dans cette démarche uniquement à la valeur de  $R^2$ , ce qui induit une indétermination sur le signe de  $R(= \pm\sqrt{R^2})$ .

#### 2.4.2 Identification des paramètres effectifs à partir des réflexion / transmission totales

Les coefficients de transmission  $T$  et de réflexion  $R$  totaux s'expriment en fonction des propriétés effectives de l'échantillon de la manière suivante [42] :

$$\begin{aligned}
R &= \frac{\left( \frac{1}{Z} - Z \right) \tan(k_{\text{eff}}^\ell d) i}{2 - \left( \frac{1}{Z} + Z \right) \tan(k_{\text{eff}}^\ell d) i}, \\
T &= \frac{2}{\cos(k_{\text{eff}}^\ell d) \left[ 2 - \left( \frac{1}{Z} + Z \right) \tan(k_{\text{eff}}^\ell d) i \right]},
\end{aligned} \tag{2-21}$$

$$\text{avec } Z = \frac{Z_{\text{eff}}^\ell}{Z_{\text{cau}}} = \frac{\rho_{\text{eff}} k_{\text{cau}}}{\rho_{\text{cau}} k_{\text{eff}}^\ell}.$$

À partir des mesures expérimentales du coefficient de transmission  $T$  et du carré du coefficient de réflexion  $R^2$ , nous utilisons la méthode d'identification des paramètres effectifs

développée par Fokin *et al.*, consistant à manipuler leurs expressions analytiques (2-19), afin d'obtenir des formes explicites de  $k_{\text{eff}}^{\ell}$  et  $Z$  :

$$\begin{aligned} \cos(k_{\text{eff}}^{\ell} d) &= \frac{1 - R^2 + T^2}{2T} = A, \\ \text{donc } k_{\text{eff}}^{\ell} &= \pm \frac{\cos^{-1}(A) + 2\pi n}{d}, (n \in \mathbb{Z}), \end{aligned} \quad (2-22)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \left( \frac{1}{Z} + Z \right) &= \left( 2 - \frac{2}{T \cos(k_{\text{eff}}^{\ell} d)} \right) \frac{1}{i \tan(k_{\text{eff}}^{\ell} d)} = B, \\ Z^2 - BZ + 1 &= 0, \end{aligned} \quad (2-23)$$

$$\text{donc } Z_{\pm} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4}}{2},$$

où le nombre d'onde  $k_{\text{eff}}^{\ell}$  est alors défini à un signe près, ainsi que modulo  $2\pi$ . Le signe du nombre d'onde est déterminé arbitrairement (l'autre valeur étant aussi acceptable).

Le système (2-23) nous donne quant à lui deux valeurs pour l'impédance acoustique. L'une ou l'autre de ces deux valeurs ne peut être discriminée par le coefficient de transmission  $T$ , puisque le terme  $(1/Z + Z)$  est le même pour les deux valeurs de l'impédance. Il serait tout de même possible théoriquement de discriminer l'une de ces deux valeurs à l'aide du coefficient de réflexion  $R$  (2-21) car le terme  $(1/Z - Z)$  possède deux valeurs distinctes et opposées pour chacune des valeurs de  $Z$  définies par l'équation (2-23) ( $R(Z_+) = -R(Z_-)$ ). Malheureusement, le montage expérimental présenté ici ne permet d'accéder qu'au carré du coefficient de réflexion, ce qui empêche la discrimination des deux valeurs d'impédance.

### 2.4.3 Identification des paramètres effectifs à partir des réflexion / transmission partielles

Il est également possible, lorsque les signaux sont séparables, d'identifier les paramètres à l'aide des coefficients de réflexion directe  $R_1$  (à la première interface) et de transmission directe  $T_1$  (à travers les deux interfaces successives), sans tenir compte des multiréflexions dans la plaque. Ces coefficients s'expriment, à l'instar de  $R$  et  $T$ , en fonction des propriétés effectives de l'échantillon :

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1 - Z}{1 + Z}, \\ T_1 &= \frac{4Z}{(1 + Z)^2} e^{ik_{\text{eff}}^{\ell} d}. \end{aligned} \quad (2-24)$$

On identifie de la même manière les paramètres de la plaque :

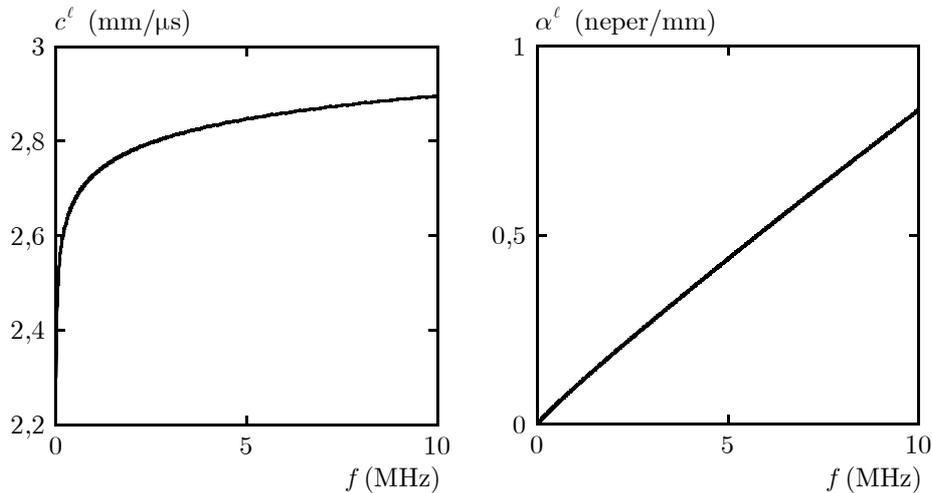
$$e^{ik_{\text{eff}}^{\ell}} = \frac{T_1}{1 - R_1^2} = C, \quad (2-25)$$

$$\text{donc } k_{\text{eff}}^{\ell} = \frac{-i \ln(C) + 2\pi n}{d}, (n \in \mathbb{Z})$$

$$\frac{Z}{(1 + Z)^2} = \frac{T_1}{4} e^{-ik_{\text{eff}}^{\ell} d} = D, \quad (2-26)$$

$$\text{donc } Z_{\pm} = \frac{1 - 2D \pm \sqrt{1 - 4D}}{2D}.$$

Nous remarquons que, comme pour le cas précédent, le nombre d'onde  $k_{\text{eff}}^{\ell}$  est défini à  $2\pi$  près, et l'inversion nous donne deux valeurs pour l'impédance acoustique  $Z_{\pm}$ . Ces deux valeurs de l'impédance correspondent à deux valeurs du coefficient de réflexion de module identiques mais de signes opposés ( $R_1(Z_+) = -R_1(Z_-)$ ), ce qui empêche la discrimination de l'une d'entre-elles, puisque le montage expérimental ne permet d'accéder qu'au carré du coefficient de réflexion direct.



**figure 2-38 : célérité de phase et atténuation en fonction de la fréquence du matériau modèle respectant les relations de causalité.**

#### 2.4.4 Exemple synthétique d'application de la méthode - étude de sensibilité

Comme dans tout système expérimental, les bruits de mesure électroniques et mécaniques viennent perturber les acquisitions acoustiques. De plus, la partie incohérente de la réponse acoustique des échantillons aléatoires perturbent également la mesure des signaux cohérents recherchés. Enfin, le mode de fonctionnement du dispositif expérimental permet de s'affranchir d'un certain nombre de données expérimentales, excepté des propriétés de l'eau, et en particulier de la célérité des ondes  $y$  siègeant. Afin de quantifier la sensibilité de l'identification aux bruits de mesure et aux données considérées connues, nous simulons le dispositif expérimental à l'aide de données synthétiques. Le matériau choisi ici est un

matériau viscoélastique homogène ( $c_1(\omega) \in \mathbb{C}, \rho \in \mathbb{R}^+$ ), respectant les relations de causalité entre célérité de phase et atténuation [43] [44]. Ce système mécanique causal repose sur des fonctions de relaxation considérant des densités de probabilités des temps de relaxation appropriées. Ces choix judicieux conduisent entre autre à des relations explicites entre les caractéristiques mécaniques d'un milieu homogène viscoélastique linéaire et les propriétés acoustiques observables (nombre d'onde).

La figure 2-38 présente les courbes définissant acoustiquement le matériau, sa masse volumique étant fixée à  $1,56 \text{ g/cm}^3$ . La célérité des ondes dans l'eau  $c_0$  est fixée à  $1,5 \text{ mm}/\mu\text{s}$ . Les signaux en transmission et en réflexion sont simulés à l'aide des coefficients totaux  $R$  et  $T$ .

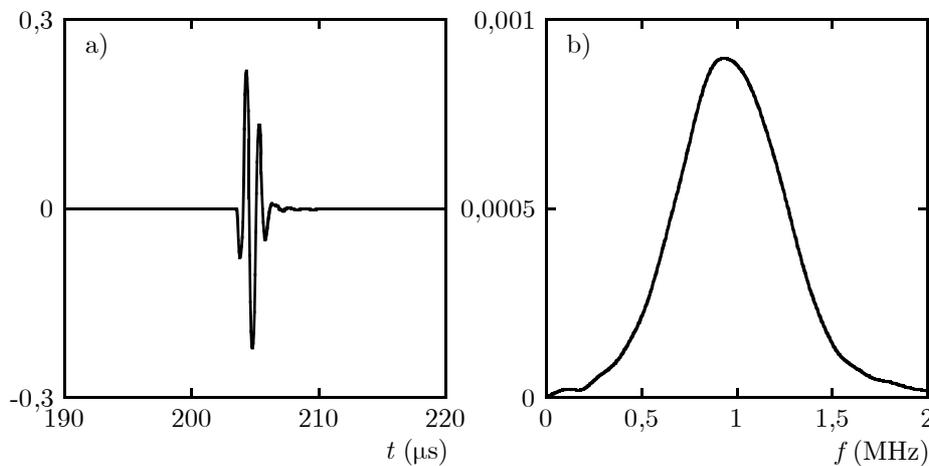


figure 2-39 : a) signal de référence ; b) module du spectre du signal de référence.

Le signal de référence (figure 2-39) utilisé ici est centré à 1 MHz. Quelle que soit l'épaisseur du matériau, les différents échos ayant lieu à l'intérieur de la plaque ne sont pas séparables, c'est pourquoi nous appliquons sur les signaux synthétiques la méthode d'identification utilisant la réflexion et la transmission totale, donnant évidemment les paramètres utilisés pour la simulation des signaux.

Dans un premier temps, l'enjeu est d'observer le comportement de l'identification sur des signaux bruités, obtenus en ajoutant un bruit ( $\text{Bruit}(\omega)$ ) aux signaux synthétiques. Le bruit est défini afin que le rapport signal à bruit (SNR, exprimé en dB) soit d'un certain niveau :

$$\text{SNR} = 10 \log \left( \frac{E_{\text{signal}}}{|\text{Bruit}(\omega)|^2} \right), \quad (2-27)$$

avec  $\text{Bruit}(\omega)$  tel que  $\begin{cases} \arg(\text{Bruit}(\omega)) \text{ aléatoire} \\ |\text{Bruit}(\omega)| = \sqrt{E_{\text{signal}}} 10^{-\frac{\text{SNR}}{20}}, \end{cases}$

où  $E_{\text{signal}}$  est l'énergie du signal, définie spectralement de la manière suivante :

$$E_{\text{signal}} = \int_{f=-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df. \quad (2-28)$$

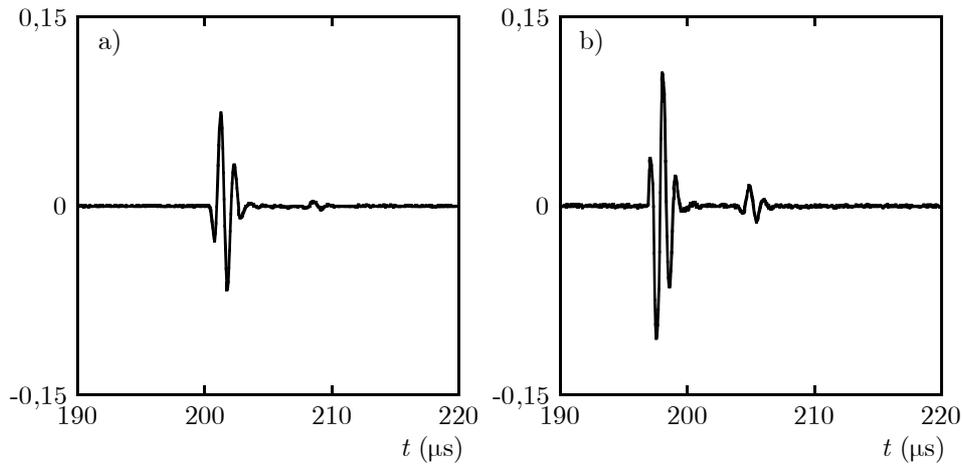


figure 2-40 : signaux temporels simulés en transmission a) et en réflexion b) par une plaque de 10 mm d'épais avec un bruit de 24 dB.

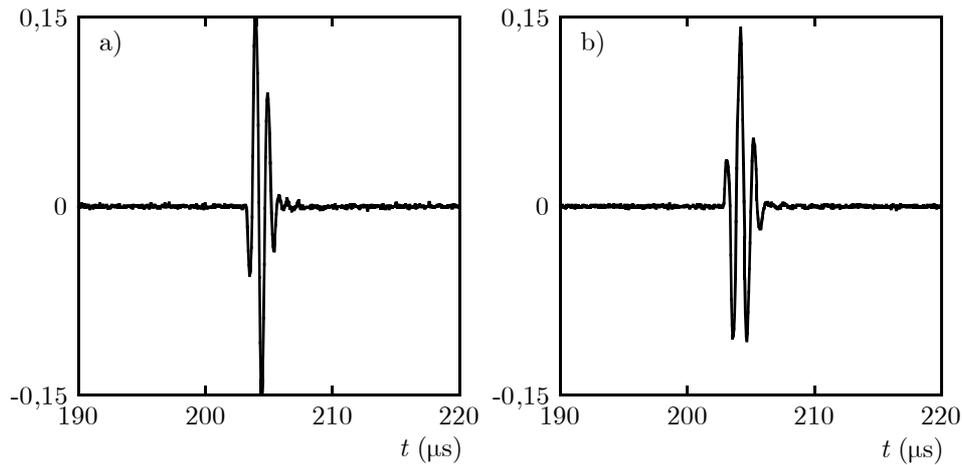


figure 2-41 : signaux temporels simulés en transmission a) et en réflexion b) par une plaque de 1 mm d'épais avec un bruit de 24 dB.

Ainsi, plus le rapport signal à bruit SNR est petit, plus le signal est bruité. On choisira ici un rapport de 24 dB, ce qui correspond à des signaux faiblement bruités (niveau de bruit que

l'on a expérimentalement après moyenne sur plusieurs réalisations). Les signaux ont été simulés avec deux épaisseurs de plaque (10 mm et 1 mm). Les signaux simulés et bruités sont représentés sur les figures 2-40 et 2-41 et les résultats de l'identification sur la figure 2-42.

On constate que pour un même niveau de bruit, l'identification du nombre d'onde est beaucoup moins précise pour une faible épaisseur de matériau, la sensibilité sur la masse volumique ne variant pas. Ce résultat est directement lié à la taille de la longueur d'onde par rapport à l'épaisseur de l'échantillon. En effet, si elle est très grande par rapport à l'épaisseur de l'échantillon, la propagation dans le matériau sera proportionnellement courte, et le signal transmis par la plaque ne sera que très peu déphasé et atténué. De ce fait, l'identification du nombre d'onde dans cette configuration sera très sensible au bruit. À la fréquence centrale du signal de référence (1 MHz), la longueur d'onde dans le matériau est de 2,7 mm, longueur plus grande que l'épaisseur de la plaque, qui est, dans le cas le plus défavorable, de 1 mm. *A contrario*, la masse volumique du milieu aléatoire intervenant uniquement dans la réfraction des ondes aux interfaces (à travers la rupture d'impédance), la sensibilité au bruit de son identification est identique quelle que soit l'épaisseur de l'échantillon. Il apparaît donc qu'une épaisseur plus grande ou de l'ordre de la longueur d'onde dans le matériau est souhaitable pour avoir une identification précise des paramètres.

Cependant, l'identification de la masse volumique est sensible à la connaissance de la célérité des ondes dans l'eau  $c_{\text{eau}}$  et de l'épaisseur de l'échantillon, seuls paramètres expérimentaux nécessaires pour l'inversion (2-20). En effet, pour certaines fréquences correspondant à des interférences entre les échos dans l'épaisseur de la plaque, les formules d'identification sont instables, et une méconnaissance des paramètres de l'expérimentation induit une forte erreur dans l'estimation de l'impédance effective.

La figure 2-43 présente l'identification des propriétés effectives d'un échantillon de matériau synthétique de 10 mm d'épaisseur, soumis à une onde centrée à 1 MHz, et pour deux célérités des ondes dans l'eau différente, 1,5 mm/ $\mu\text{s}$  correspondant à celle utilisée pour la simulation des signaux, et 1,48 mm/ $\mu\text{s}$  correspondant à une valeur volontairement erronée. Nous remarquons qu'une erreur d'environ 1 % sur la célérité des ondes dans l'eau induit une erreur de 40 % sur la partie réelle de la masse volumique dynamique effective.

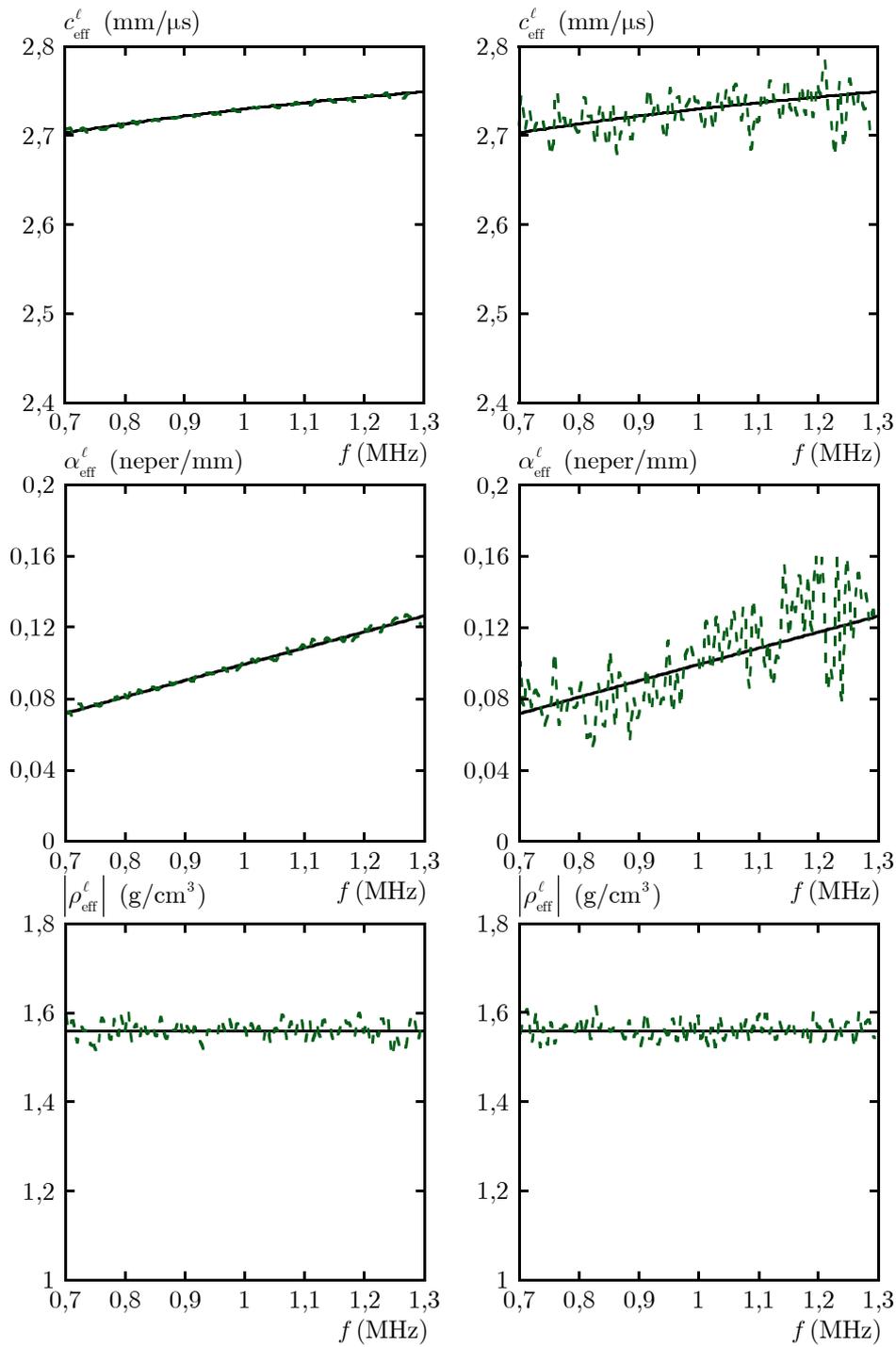


figure 2-42 : célérité de phase, atténuation et masse volumique (identifiées en trait pointillé, données de départ en trait plein), identifiées à partir des signaux simulés à travers une plaque de 10 mm d'épais à gauche et de 1 mm d'épais à droite, avec un bruit de 24 dB.

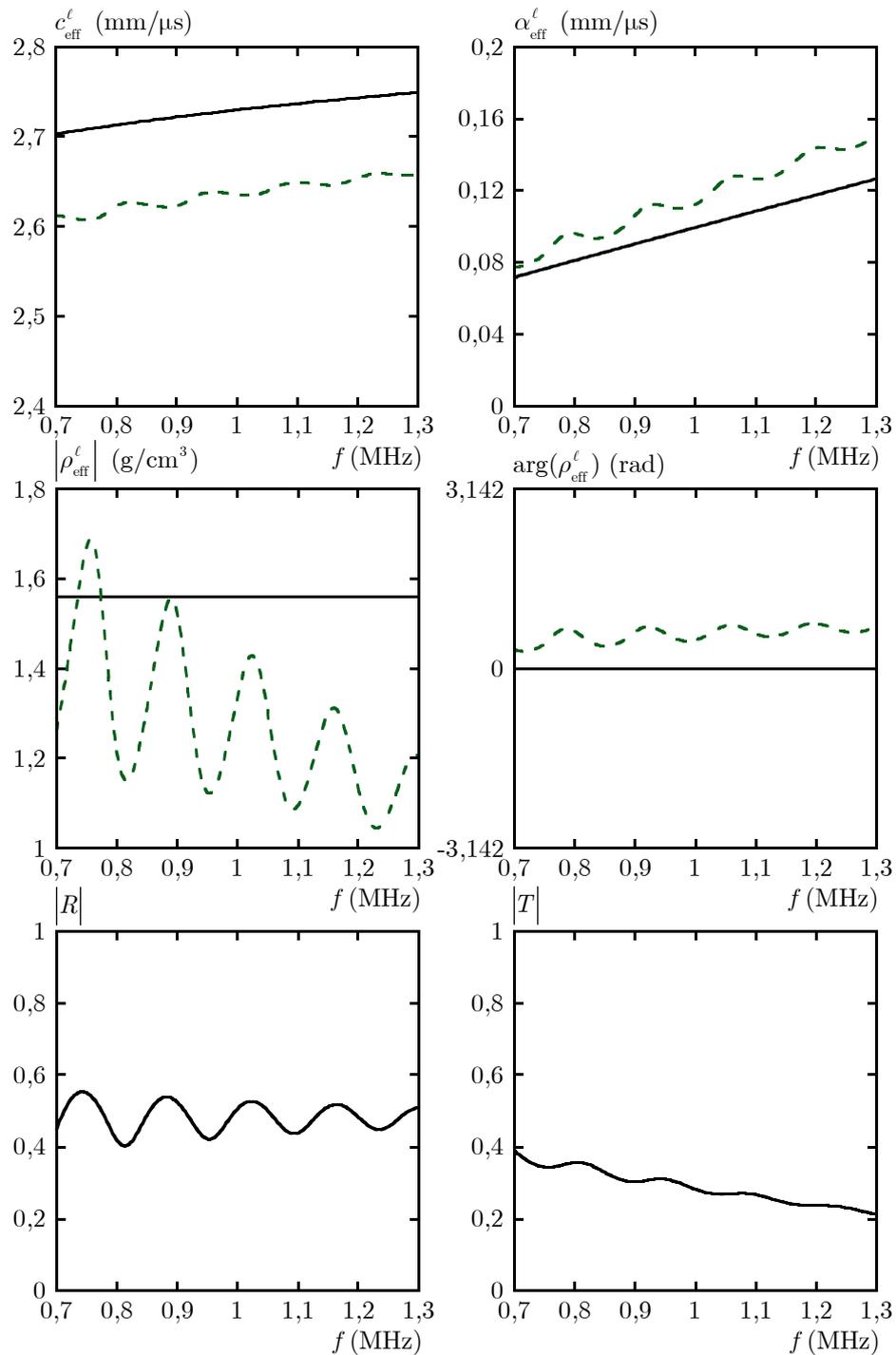


figure 2-43 : propriétés effectives identifiées d'un échantillon de 10 mm d'épaisseur soumis à un signal acoustique centré à 1 MHz, pour une célérité des ondes dans l'eau estimée à 1,48 mm/ $\mu$ s (trait pointillé) alors qu'elle est de 1,5 mm/s (trait plein). Les signaux considérés correspondent aux signaux originaux non perturbés *a posteriori*.

### 2.4.5 Inversion des propriétés effectives de l'échantillon contenant 2 % de billes de plomb

Nous avons appliqué les formules d'inversion à des mesures expérimentales relevées sur l'échantillon contenant 2 % de billes de plomb (§ 2.2). La configuration expérimentale est telle que décrite dans le paragraphe 2.4.1, et l'appareillage utilisé est le même que pour la mesure du coefficient de transmission des échantillons de matériaux aléatoires (§ 2.3.1). Le signal électrique envoyé aux transducteurs est une impulsion brève, et les signaux transmis à travers et réfléchis par la plaque sont présentés figure 2-44. Les signaux réfléchis par la plaque ont une amplitude quarante fois moins importante que les signaux transmis à travers l'échantillon. Ceci est dû au fait que la matrice est très peu réfléchissante et que les ondes pénétrant dans l'échantillon sont absorbées par les phénomènes de multidiffusion. Les spectres de ces six signaux sont ensuite combinés pour identifier les propriétés effectives de l'échantillon (équations (2-22) et (2-23)).

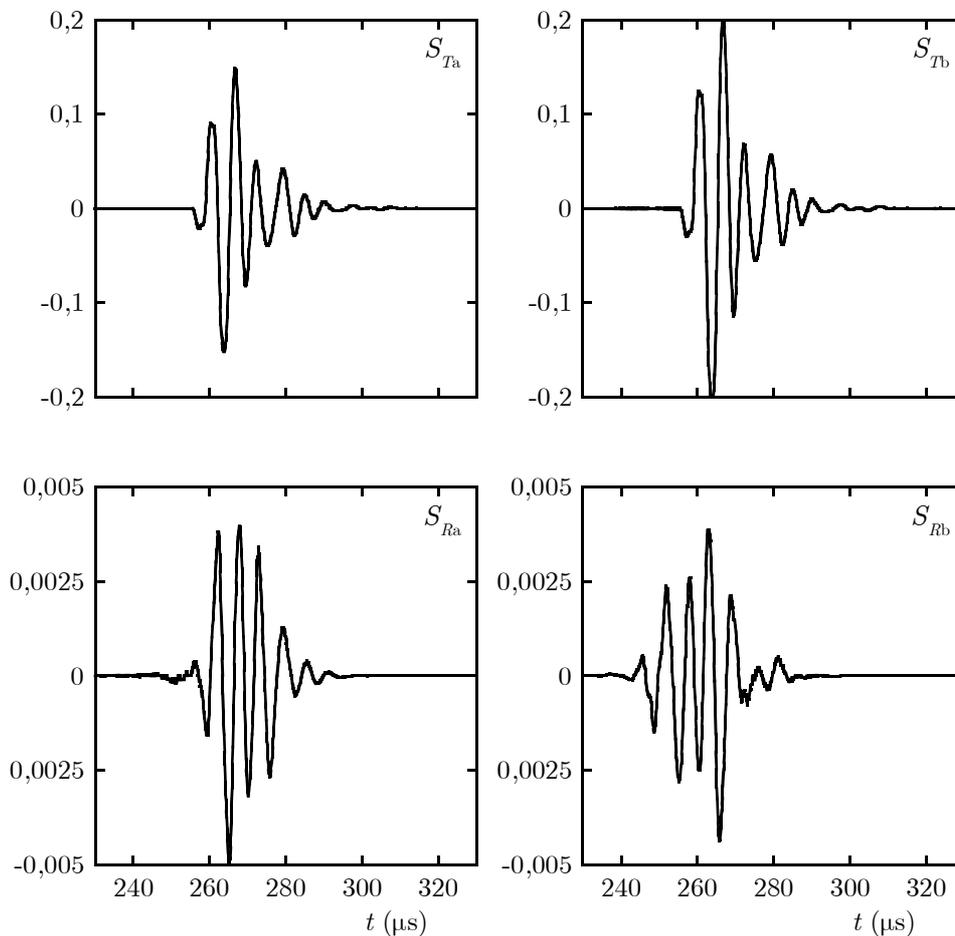


figure 2-44 : signaux temporels réfléchis  $S_{Ra}$  et  $S_{Rb}$ , et transmis  $S_{Ta}$  et  $S_{Tb}$  par la plaque contenant 2 % d'inclusions de plomb.

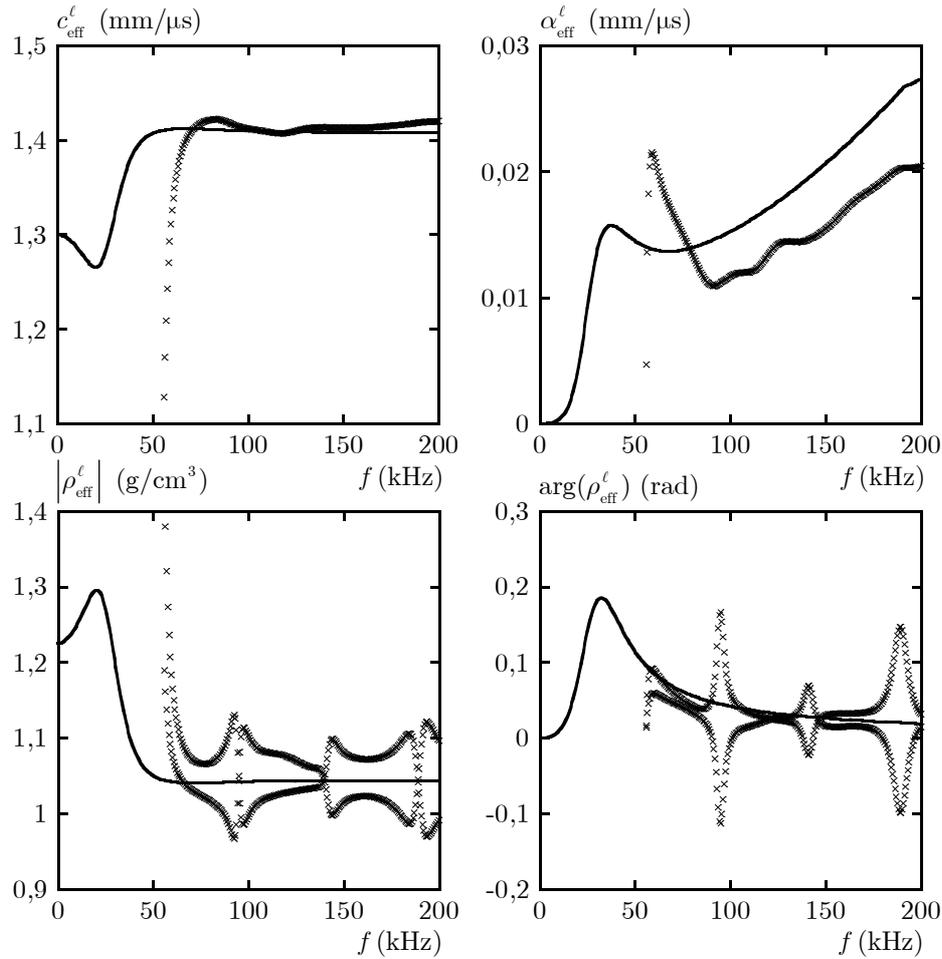


figure 2-45 : résultats expérimentaux de l'inversion des propriétés de la plaque contenant 2 % d'inclusions de plomb.

Les différents échos à l'intérieur de l'échantillon n'étant pas séparables, nous appliquons la méthode d'identification des propriétés effectives utilisant la réflexion et la transmission totale. Concernant le nombre d'onde effectif, son signe est choisi, pour chaque fréquence du spectre, afin que sa partie imaginaire soit positive, puis le décalage de  $2\pi n$  est choisi pour que sa partie réelle tende vers zéro à basses fréquences. En effet, la partie réelle du nombre d'onde effectif s'exprime en fonction de la célérité de phase effective :

$$\operatorname{Re}(k_{\text{eff}}^{\ell}(\omega)) = \frac{\omega}{c_{\text{eff}}^{\ell}(\omega)}, \quad (2-29)$$

où la célérité de phase  $c_{\text{eff}}^{\ell}$  est une quantité bornée à fréquence nulle, donc la partie réelle du nombre d'onde effectif tend vers zéro à basses fréquences. Ce dernier recalage de phase nécessite que les spectres des signaux expérimentaux contiennent des fréquences suffisamment basses, ou bien d'avoir une estimation de la célérité de phase pour une ou plusieurs fréquences. L'impédance acoustique possède quant à elle deux valeurs.

La figure 2-45 présente l'identification des propriétés effectives à partir des mesures acoustiques faites sur l'échantillon contenant 2 % d'inclusions de plomb, comparée aux prédictions théoriques, calculées à l'aide des équations 1-49 et 1-56. Notons que la valeur du plateau de la célérité effective (au-delà de 50 kHz) identifiée est identique à la prédiction théorique. De plus, la caractérisation de l'atténuation effective est inférieure à la théorie. Enfin, nous notons un bon accord en moyenne entre la masse volumique identifiée et sa prédiction théorique. Cependant, nous notons des fréquences pour lesquelles l'identification de la masse volumique effective est instable. Ces fréquences correspondent aux résonances de plaque, décrites dans le paragraphe 2.4.4. Nous observons également, sur l'ensemble des propriétés effectives identifiées, de fortes variations à basses fréquences (~50 kHz) semblant provenir de la résonance dipolaire des inclusions de plomb. Toutefois, ces variations se situent en bord de spectre et doivent être confirmées par des mesures à plus basses fréquences.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une procédure d'inversion des paramètres effectifs d'un matériau aléatoire, à partir de mesures en cuve acoustique selon une configuration expérimentale originale [45]. Cette procédure possède une forte sensibilité à la connaissance de la célérité des ondes dans l'eau. Nous avons par ailleurs analysé la réponse acoustique en transmission d'échantillons de matériau aléatoire, et mis en évidence la résonance monopolaire de billes de polystyrène expansé, et la résonance dipolaire de billes de plomb dans une matrice polyuréthane. Les échantillons ont été dimensionnés afin de présenter les résonances basses fréquences mises en évidence théoriquement dans l'étude paramétrique du premier chapitre, et caractérisés grâce à différents outils, tels que l'analyse d'images ou l'analyse au viscoanalyseur.

# Conclusion générale

Dans ce manuscrit, nous nous sommes tout d'abord intéressés à la modélisation de la propagation des ondes cohérentes dans des matériaux contenant une répartition aléatoire d'inclusions sphériques. La réponse acoustique d'une seule sphère sondée par une onde plane monochromatique longitudinale ou transversale a été dans un premier temps établie, puis introduite dans des modèles de diffusion multiple établis dans le cadre de la théorie de Waterman & Truell, et donnant accès à l'ensemble des paramètres effectifs (nombre d'onde et masse volumique associés aux ondes longitudinale  $k_{\text{eff}}^{\ell}$  et  $\rho_{\text{eff}}^{\ell}$  ; et transversale  $k_{\text{eff}}^t$  et  $\rho_{\text{eff}}^t$ ) du milieu homogène équivalent au matériau aléatoire. L'influence des propriétés du matériau (propriétés des constituants et propriétés structurelles) sur la réponse acoustique du milieu aléatoire a par la suite été analysée. Cette étude paramétrique nous a permis de mettre en évidence trois configurations de matériaux localement résonnants dont les inclusions présentent des résonances monopolaires ou dipolaires.

Des échantillons de deux de ces matériaux aléatoires ont été fabriqués, et leurs propriétés ont été caractérisées (paramètres acoustiques des constituants, taille des inclusions, nature de leur répartition), afin de modéliser les paramètres effectifs de leur milieu homogène équivalent. Le coefficient de transmission des échantillons sous incidence normale a été mesuré à l'aide d'un dispositif expérimental de spectro-interférométrie ultrasonore. Nous y avons identifié l'impact des résonances basses fréquences des inclusions en comparant les prédictions théoriques et les mesures acoustiques. Cependant, la mesure acoustique de la célérité des ondes transversales dans la matrice  $c_0^t$ , à l'aide de transducteurs au contact de fréquence centrale 500 kHz, n'est pas compatible avec celle issue d'une caractérisation mécanique par analyse mécanique dynamique (DMA). Cette différence pose le problème de la qualité des prédictions, car la valeur de la célérité  $c_0^t$  affecte fortement les propriétés acoustiques du milieu homogène équivalent. Néanmoins, cet écart s'explique en partie par le fait que les mesures DMA et les lois de Williams-Landel-Ferry (WLF) sont peu précises pour des extrapolations au-delà de la centaine de kHz. Une meilleure confiance en la mesure acoustique directe a par ailleurs été établie à partir d'une bonne concordance entre les réponses acoustiques de la plaque hétérogène issues du modèle de diffusion multiple et celles mesurées.

Une étude théorique a également montré que la faible influence d'un angle d'incidence non nul sur la réponse acoustique des échantillons est due à la quasi-absence de conversion de modes entre les ondes longitudinale et transversale, à l'interface entre les matériaux et le fluide couplant (eau). Cette faible sensibilité de la réponse acoustique des matériaux aléatoires à l'angle d'auscultation présente un intérêt pour des applications en anéchoïsme, car les performances recherchées ne devraient pas dépendre de l'angle d'incidence.

Une méthode d'inversion des propriétés effectives des milieux localement résonnants a été mise en œuvre, et une configuration expérimentale spécifique permettant la mesure des coefficients de réflexion et de transmission d'une lame immergée en incidence normale a été développée. Le protocole expérimental se base sur la mesure de la transmission et de la réflexion des échantillons dans les deux sens de propagation des ondes, et conduit à la mesure des deux coefficients en s'affranchissant notamment de la distance entre la plaque et les transducteurs. La méthode d'inversion présente des instabilités vis-à-vis de paramètres liés au dispositif expérimental (célérité des ondes dans l'eau), ce qui impacte principalement l'identification de la masse volumique dynamique, et peu celle du nombre d'onde effectif. Cette instabilité apparaît principalement pour des fréquences correspondant aux interférences entre les échos dans l'épaisseur de la plaque (résonances d'épaisseur de plaque).

Parmi les perspectives à ces travaux, il reste à développer une procédure expérimentale permettant de stabiliser la procédure d'inversion. Une stratégie possible consiste à fabriquer des échantillons d'épaisseurs différentes et constitués du même matériau aléatoire. En effet, plus le nombre d'échantillons est élevé, plus le processus d'inversion par optimisation sur l'ensemble des plaques sera stable. De plus, leur réponse cohérente n'est pas impactée par une répartition uniforme aléatoire des diffuseurs différente. Néanmoins, les matériaux doivent contenir la même concentration d'inclusions identiques. Le protocole expérimental doit donc veiller à ce que seule la réponse cohérente soit prise en compte pour le processus d'inversion.

Dans le premier chapitre, trois configurations de matériaux localement résonnants ont été mises en évidence, mais seulement deux d'entre-elles (contenant des sphères de plomb et de polystyrène expansé) ont été fabriquées, par manque de fournisseurs de sphères de type « noyau-coque » contenant une coque molle et un cœur dense. Il reste à concevoir de telles inclusions, afin d'observer l'impact simultané des résonances monopolaire et dipolaire présentes pour des basses-fréquences proches.

Les comportements des matériaux présentés dans cette étude possèdent des fréquences d'intérêt élevées ( $\sim 100$  kHz) par rapport aux fréquences sonars (2 – 20 kHz). Il est ainsi intéressant de fabriquer des échantillons de matériaux aléatoires pour lesquels les fréquences d'intérêt sont plus basses et se rapprochent ainsi des applications en anéchoïsme. D'après l'étude paramétrique du premier chapitre (§ 1.5), une augmentation de la taille des inclusions

diminue leurs fréquences de résonance. Des échantillons peuvent ainsi être dimensionnés (contenant des inclusions de rayon centimétrique) afin de confirmer à des fréquences plus basses les observations expérimentales de cette thèse.

Un autre enjeu des matériaux anéchoïques concerne la bande de fréquences dans laquelle les ondes acoustiques sont fortement absorbées. En effet, les résonances des inclusions étant localisées en fréquence, leur impact sur l'atténuation des ondes est lui aussi restreint en fréquence. Une stratégie possible pour élargir le spectre fréquentiel consiste à disperser dans le matériau des inclusions de tailles différentes. Chaque inclusion résonne à des fréquences différentes et l'ensemble des inclusions impacte ainsi l'absorption des ondes sur une zone fréquentielle plus importante. Cependant, une dispersion en taille des objets diminue globalement l'atténuation des ondes dans le milieu aléatoire. Cette stratégie nécessite donc un compromis entre largeur fréquentielle d'intérêt et niveau attendu d'absorption des ondes.



# **Annexes**



# A Calcul des coefficients modaux

## A-1 Champ de déplacement et tenseur de contraintes en fonction des potentiels des champs

En coordonnées sphériques, le déplacement  $\mathbf{u}$  et les composantes du vecteur contrainte s'exerçant sur la facette de normale  $\mathbf{e}_r$  du tenseur des contraintes  $[\sigma]$  s'expriment, pour un milieu isotrope, en fonction des potentiels des champs de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \Phi + \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right) + (k^t)^2, \\
 u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \Phi + \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right) + \frac{(k^t)^2}{\sin \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi}, \\
 u_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \Phi + \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right) - (k^t)^2 \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \\
 \sigma_{rr} &= -\lambda (k^t)^2 \Phi + 2\mu \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \Phi + \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right) + (k^t)^2 \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right), \\
 \sigma_{r\theta} &= \mu \left( 2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \Phi + \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right) \right) + (k^t)^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right) \right), \\
 \sigma_{r\varphi} &= \mu \left( \frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \Phi + \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right) \right) + (k^t)^2 \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\chi}{r} \right) \right) \right).
 \end{aligned} \tag{A-1}$$

## A-2 Diffusion d'une sphère simple élastique dans une matrice élastique

### A.2.1 Onde incidente longitudinale

Les conditions aux limites à la surface de l'inclusion assurent la continuité du champ de déplacements et du champ de contraintes :

$$\begin{aligned}
 u_{r,0}(a) &= u_{r,1}(a), \\
 u_{\theta,0}(a) &= u_{\theta,1}(a), \\
 u_{\varphi,0}(a) &= u_{\varphi,1}(a), \\
 \sigma_{rr,0}(a) &= \sigma_{rr,1}(a), \\
 \sigma_{r\theta,0}(a) &= \sigma_{r\theta,1}(a), \\
 \sigma_{r\varphi,0}(a) &= \sigma_{r\varphi,1}(a).
 \end{aligned} \tag{A-2}$$

Les contraintes  $\sigma_{r\theta}$  et  $\sigma_{r\varphi}$  étant nulles, en substituant les expressions des potentiels des champs (1-21), le système (A-2) se réduit à un système de 4 équations et 4 inconnues ( $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  et  $D_n$ ) équivalent au système suivant :

$$PQ = S, \quad (\text{A-3})$$

avec  $Q = [A_n, B_n, C_n, D_n]$ , et [17] :

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_{11} = h'_n(k_0^\ell a), & P_{31} = - \left( ((k_0^t a)^2 - 2n(n+1)) \frac{h_n(k_0^\ell a)}{k_0^\ell a} + 4h'_n(k_0^\ell a) \right), \\ P_{12} = n(n+1) \frac{h_n(k_0^t a)}{k_0^t a}, & P_{32} = -2n(n+1) \left( \frac{h_n(k_0^t a)}{k_0^t a} - h'_n(k_0^t a) \right), \\ P_{13} = -j'_n(k_1^\ell a), & P_{33} = \frac{\mu_1}{\mu_0} \left( ((k_1^t a)^2 - 2n(n+1)) \frac{j_n(k_1^\ell a)}{k_1^\ell a} + 4j'_n(k_1^\ell a) \right), \\ P_{14} = -n(n+1) \frac{j_n(k_1^t a)}{k_1^t a}, & P_{34} = \frac{\mu_1}{\mu_0} 2n(n+1) \left( \frac{j_n(k_1^t a)}{k_1^t a} - j'_n(k_1^t a) \right), \\ P_{21} = \frac{h_n(k_0^\ell a)}{k_0^\ell a}, & P_{41} = 2 \left( \frac{h_n(k_0^\ell a)}{k_0^\ell a} - h'_n(k_0^\ell a) \right), \\ P_{22} = \frac{h_n(k_0^t a)}{k_0^t a} + h'_n(k_0^t a), & P_{42} = \left( ((k_0^t a)^2 - 2(n^2 + n - 1)) \frac{h_n(k_0^t a)}{k_0^t a} + 2h'_n(k_0^t a) \right), \\ P_{23} = -\frac{j_n(k_1^\ell a)}{k_1^\ell a}, & P_{43} = -2 \frac{\mu_1}{\mu_0} \left( \frac{j_n(k_1^\ell a)}{k_1^\ell a} - j'_n(k_1^\ell a) \right), \\ P_{24} = -\frac{j_n(k_1^t a)}{k_1^t a} - j'_n(k_1^t a), & P_{44} = -\frac{\mu_1}{\mu_0} \left( ((k_1^t a)^2 - 2(n^2 + n - 1)) \frac{j_n(k_1^t a)}{k_1^t a} + 2j'_n(k_1^t a) \right), \\ & \left\{ \begin{array}{ll} S_1 = -j'_n(k_0^\ell a), & S_3 = ((k_0^t a)^2 - 2(n+1)) \frac{j_n(k_0^\ell a)}{k_0^\ell a} + 4j'_n(k_0^\ell a), \\ S_2 = -\frac{j_n(k_0^\ell a)}{k_0^\ell a}, & S_4 = 2 \left( j'_n(k_0^\ell a) - \frac{j_n(k_0^\ell a)}{k_0^\ell a} \right). \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{A-4})$$

La résolution de ce système par la méthode de Cramer permet de déterminer les coefficients  $A_n, B_n, C_n$  et  $D_n$ .

### A.2.2 Onde incidente transversale

Les conditions aux limites à la surface de l'inclusion assurent la continuité du champ de déplacements et du champ de contraintes (A-2). En substituant les expressions des potentiels des champs (1-30), le système (A-2) est découpé en deux systèmes linéaires indépendants :

$$\begin{aligned} PQ &= U, \\ XY &= V, \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

avec  $Q = [A_n, B_n, D_n, E_n]$ ,  $Y = [C_n, F_n]$  et [17] :

$$\begin{cases}
P_{11} = h'_n(k_0^\ell a), & P_{31} = ((k_0^t a)^2 - 2n(n+1)) \frac{h_n(k_0^\ell a)}{k_0^\ell a} + 4h'_n(k_0^\ell a), \\
P_{12} = -n(n+1) \frac{h_n(k_0^t a)}{k_0^t a}, & P_{32} = -2n(n+1) \left( \frac{h_n(k_0^t a)}{k_0^t a} - h'_n(k_0^t a) \right), \\
P_{13} = -j'_n(k_1^\ell a), & P_{33} = -\frac{\mu_1}{\mu_0} \left( ((k_1^t a)^2 - 2n(n+1)) \frac{j_n(k_1^\ell a)}{k_1^\ell a} + 4j'_n(k_1^\ell a) \right), \\
P_{14} = n(n+1) \frac{j_n(k_1^t a)}{k_1^t a}, & P_{34} = \frac{\mu_1}{\mu_0} 2n(n+1) \left( \frac{j_n(k_1^t a)}{k_1^t a} - j'_n(k_1^t a) \right), \\
P_{21} = \frac{h_n(k_0^\ell a)}{k_0^\ell a}, & P_{41} = 2 \left( \frac{h_n(k_0^\ell a)}{k_0^\ell a} - h'_n(k_0^\ell a) \right), \\
P_{22} = -\frac{h_n(k_0^t a)}{k_0^t a} - h'_n(k_0^t a), & P_{42} = -\left( ((k_0^t a)^2 - 2(n^2 + n - 1)) \frac{h_n(k_0^t a)}{k_0^t a} + 2h'_n(k_0^t a) \right), \\
P_{23} = -\frac{j_n(k_1^t a)}{k_1^t a}, & P_{43} = -2 \frac{\mu_1}{\mu_0} \left( \frac{j_n(k_1^t a)}{k_1^t a} - j'_n(k_1^t a) \right), \\
P_{24} = \frac{j_n(k_1^t a)}{k_1^t a} + j'_n(k_1^t a), & P_{44} = \frac{\mu_1}{\mu_0} \left( ((k_1^t a)^2 - 2(n^2 + n - 1)) \frac{j_n(k_1^t a)}{k_1^t a} + 2j'_n(k_1^t a) \right), \\
\left\{ \begin{array}{l} U_1 = n(n+1) \frac{j_n(k_0^t a)}{k_0^t a}, \quad U_3 = 2n(n+1) \left( \frac{j_n(k_0^t a)}{k_0^t a} - j'_n(k_0^t a) \right), \\ U_2 = \frac{j_n(k_0^t a)}{k_0^t a} + j'_n(k_0^t a), \quad U_4 = ((k_0^t a)^2 - 2(n^2 + n - 1)) \frac{j_n(k_0^t a)}{k_0^t a} + 2j'_n(k_0^t a), \end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l} X_{11} = h_n(k_0^t a), \quad X_{21} = \frac{h_n(k_0^t a)}{k_0^t a} - h'_n(k_0^t a), \\ X_{12} = -j_n(k_1^t a), \quad X_{22} = \frac{\mu_1}{\mu_0} \left( j'_n(k_1^t a) - \frac{j_n(k_1^t a)}{k_1^t a} \right), \\ V_1 = -j_n(k_0^t a), \quad V_2 = j'_n(k_0^t a) - \frac{j_n(k_0^t a)}{k_0^t a}. \end{array} \right.
\end{cases} \quad (\text{A-6})$$

La résolution de ce système par la méthode de Cramer permet de déterminer les coefficients  $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n$  et  $F_n$ . Les coefficients modaux s'expriment en limite basses fréquences de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
b_1^t &= -\frac{2i}{9} (k_0^t a)^3 \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0}, \\
b_2^t &= 2i(k_0^t a)^3 \frac{(\lambda_0 + 2\mu_0)(\mu_0 - \mu_1)}{(\lambda_0 + 2\mu_0)(9\mu_0 + 6\mu_1) + 4\mu_0(\mu_1 - \mu_0)},
\end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

avec  $b_n^t = O((k_0^t a)^3) \forall n \geq 3$  et  $c_n^t = O((k_0^t a)^3) \forall n \geq 1$ . La limite basses-fréquences des coefficients modaux est injectée dans les expressions des paramètres effectifs (1-35 et 1-54) :

$$\left( \frac{k_{\text{eff}}^t}{k_0^t} \right)^2 = \left( \frac{\phi \rho_1 + (1-\phi)\rho_0}{\rho_0} \right) \left( 1 + \frac{15(\lambda_0 + 2\mu_0)(\mu_0 - \mu_1)}{(\lambda_0 + 2\mu_0)(9\mu_0 + 6\mu_1) + 4\mu_0(\mu_1 - \mu_0)} \phi \right). \quad (\text{A-8})$$

### A-3 Diffusion d'une sphère « noyau-coque » dans une matrice élastique

Les conditions aux limites à la surface de l'inclusion assurent la continuité du champ de déplacements et du champ de contraintes à l'interface entre le noyau et la coque (en substituant  $a$  par  $a_2$  dans (A-2)), ainsi qu'à l'interface entre la coque et la matrice (en substituant  $a$  par  $a_1$  dans (A-2)). Les contraintes  $\sigma_{r\theta}$  et  $\sigma_{r\varphi}$  étant nulles, en substituant les expressions des potentiels des champs (1-36), le système se réduit à un système de 8 équations et 8 inconnues ( $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, G_n$  et  $M_n$ ) équivalent au système suivant :

$$PQ = S, \quad (\text{A-9})$$

avec  $Q = [A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, G_n, M_n]$  et :

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_{11} = h'_n(k_0^\ell a_1), & P_{31} = - \left( ((k_0^t a_1)^2 - 2n(n+1)) \frac{h_n(k_0^\ell a_1)}{k_0^\ell a_1} + 4h'_n(k_0^\ell a_1) \right), \\ P_{12} = n(n+1) \frac{h_n(k_0^t a_1)}{k_0^t a_1}, & P_{32} = -2n(n+1) \left( \frac{h_n(k_0^t a_1)}{k_0^t a_1} - h'_n(k_0^t a_1) \right), \\ P_{13} = -j'_n(k_1^\ell a_1), & P_{33} = \frac{\mu_1}{\mu_0} \left( ((k_1^t a_1)^2 - 2n(n+1)) \frac{j_n(k_1^\ell a_1)}{k_1^\ell a_1} + 4j'_n(k_1^\ell a_1) \right), \\ P_{14} = -y'_n(k_1^\ell a_1), & P_{34} = \frac{\mu_1}{\mu_0} \left( ((k_1^t a_1)^2 - 2n(n+1)) \frac{y_n(k_1^\ell a_1)}{k_1^\ell a_1} + 4y'_n(k_1^\ell a_1) \right), \\ P_{15} = -n(n+1) \frac{j_n(k_1^t a_1)}{k_1^t a_1}, & P_{35} = \frac{\mu_1}{\mu_0} 2n(n+1) \left( \frac{j_n(k_1^t a_1)}{k_1^t a_1} - j'_n(k_1^t a_1) \right), \\ P_{16} = -n(n+1) \frac{y_n(k_1^t a_1)}{k_1^t a_1}, & P_{36} = \frac{\mu_1}{\mu_0} 2n(n+1) \left( \frac{y_n(k_1^t a_1)}{k_1^t a_1} - y'_n(k_1^t a_1) \right), \\ P_{17} = 0, & P_{37} = 0, \\ P_{18} = 0, & P_{38} = 0, \\ P_{21} = \frac{h_n(k_0^t a_1)}{k_0^t a_1}, & P_{41} = 2 \left( \frac{h_n(k_0^t a_1)}{k_0^t a_1} - h'_n(k_0^t a_1) \right), \\ P_{22} = \frac{h_n(k_0^\ell a_1)}{k_0^\ell a_1} + h'_n(k_0^\ell a_1), & P_{42} = \left( ((k_0^t a_1)^2 - 2(n^2 + n - 1)) \frac{h_n(k_0^\ell a_1)}{k_0^\ell a_1} + 2h'_n(k_0^\ell a_1) \right), \\ P_{23} = - \frac{j_n(k_1^\ell a_1)}{k_1^\ell a_1}, & P_{43} = -2 \frac{\mu_1}{\mu_0} \left( \frac{j_n(k_1^\ell a_1)}{k_1^\ell a_1} - j'_n(k_1^\ell a_1) \right), \\ P_{24} = - \frac{y_n(k_1^\ell a_1)}{k_1^\ell a_1}, & P_{44} = -2 \frac{\mu_1}{\mu_0} \left( \frac{y_n(k_1^\ell a_1)}{k_1^\ell a_1} - y'_n(k_1^\ell a_1) \right), \\ P_{25} = - \frac{j_n(k_1^t a_1)}{k_1^t a_1} - j'_n(k_1^t a_1), & P_{45} = - \frac{\mu_1}{\mu_0} \left( ((k_1^t a_1)^2 - 2(n^2 + n - 1)) \frac{j_n(k_1^t a_1)}{k_1^t a_1} + 2j'_n(k_1^t a_1) \right), \\ P_{26} = - \frac{y_n(k_1^t a_1)}{k_1^t a_1} - j'_n(k_1^t a_1), & P_{46} = - \frac{\mu_1}{\mu_0} \left( ((k_1^t a_1)^2 - 2(n^2 + n - 1)) \frac{y_n(k_1^t a_1)}{k_1^t a_1} + 2y'_n(k_1^t a_1) \right), \\ P_{27} = 0, & P_{47} = 0, \\ P_{28} = 0, & P_{48} = 0, \end{array} \right. \quad (\text{A-10})$$

$$\left\{ \begin{array}{ll}
P_{51} = 0, & P_{71} = 0, \\
P_{52} = 0, & P_{72} = 0, \\
P_{53} = j'_n(k_1^\ell a_2), & P_{73} = - \left( ((k_1^\ell a_2)^2 - 2n(n+1)) \frac{j_n(k_1^\ell a_2)}{k_1^\ell a_2} + 4j'_n(k_1^\ell a_2) \right), \\
P_{54} = y'_n(k_1^\ell a_2), & P_{74} = - \left( ((k_1^\ell a_2)^2 - 2n(n+1)) \frac{y_n(k_1^\ell a_2)}{k_1^\ell a_2} + 4y'_n(k_1^\ell a_2) \right), \\
P_{55} = n(n+1) \frac{j_n(k_1^t a_2)}{k_1^t a_2}, & P_{75} = -2n(n+1) \left( \frac{j_n(k_1^t a_2)}{k_1^t a_2} - j'_n(k_1^t a_2) \right), \\
P_{56} = n(n+1) \frac{y_n(k_1^t a_2)}{k_1^t a_2}, & P_{76} = -2n(n+1) \left( \frac{y_n(k_1^t a_2)}{k_1^t a_2} - y'_n(k_1^t a_2) \right), \\
P_{57} = -j'_n(k_2^\ell a_2), & P_{77} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \left( ((k_2^\ell a_2)^2 - 2n(n+1)) \frac{j_n(k_2^\ell a_2)}{k_2^\ell a_2} + 4j'_n(k_2^\ell a_2) \right), \\
P_{58} = -n(n+1) \frac{j_n(k_2^t a_2)}{k_2^t a_2}, & P_{78} = \frac{\mu_2}{\mu_1} 2n(n+1) \left( \frac{j_n(k_2^t a_2)}{k_2^t a_2} - j'_n(k_2^t a_2) \right), \\
P_{61} = 0, & P_{81} = 0, \\
P_{62} = 0, & P_{82} = 0, \\
P_{63} = \frac{j_n(k_1^\ell a_2)}{k_1^\ell a_2}, & P_{83} = 2 \left( \frac{j_n(k_1^\ell a_2)}{k_1^\ell a_2} - j'_n(k_1^\ell a_2) \right), \\
P_{64} = \frac{y_n(k_1^\ell a_2)}{k_1^\ell a_2}, & P_{84} = 2 \left( \frac{y_n(k_1^\ell a_2)}{k_1^\ell a_2} - y'_n(k_1^\ell a_2) \right), \\
P_{65} = \frac{j_n(k_1^t a_2)}{k_1^t a_2} + j'_n(k_1^t a_2), & P_{85} = \left( ((k_1^t a_2)^2 - 2(n^2 + n - 1)) \frac{j_n(k_1^t a_2)}{k_1^t a_2} + 2j'_n(k_1^t a_2) \right), \\
P_{66} = \frac{y_n(k_1^t a_2)}{k_1^t a_2} + y'_n(k_1^t a_2), & P_{86} = \left( ((k_1^t a_2)^2 - 2(n^2 + n - 1)) \frac{y_n(k_1^t a_2)}{k_1^t a_2} + 2y'_n(k_1^t a_2) \right), \\
P_{67} = -\frac{j_n(k_2^\ell a_2)}{k_2^\ell a_2}, & P_{87} = -2 \frac{\mu_2}{\mu_1} \left( \frac{j_n(k_2^\ell a_2)}{k_2^\ell a_2} - j'_n(k_2^\ell a_2) \right), \\
P_{68} = -\frac{j_n(k_2^t a_2)}{k_2^t a_2} - j'_n(k_2^t a_2), & P_{88} = -\frac{\mu_2}{\mu_1} \left( ((k_2^t a_2)^2 - 2(n^2 + n - 1)) \frac{j_n(k_2^t a_2)}{k_2^t a_2} + 2j'_n(k_2^t a_2) \right), \\
\left. \begin{array}{ll}
S_1 = -j'_n(k_0^\ell a_1), & S_5 = 0, \\
S_2 = -\frac{j_n(k_0^\ell a_1)}{k_0^\ell a_1}, & S_6 = 0, \\
S_3 = ((k_0^\ell a_1)^2 - 2(n+1)) \frac{j_n(k_0^\ell a_1)}{k_0^\ell a_1} + 4j'_n(k_0^\ell a_1), & S_7 = 0, \\
S_4 = 2 \left( j'_n(k_0^\ell a_1) - \frac{j_n(k_0^\ell a_1)}{k_0^\ell a_1} \right), & S_8 = 0.
\end{array} \right\} \quad (A-11)
\end{array} \right.$$

La résolution de ce système par la méthode de Cramer permet de déterminer les coefficients

$A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, G_n$  et  $M_n$ .



## B Extraction du module et de la phase du spectre d'un signal expérimental

Nous nous proposons dans cette annexe d'analyser en détail le calcul du spectre  $S(f)$  d'un signal expérimental  $s(t)$ , et en particulier sa phase.

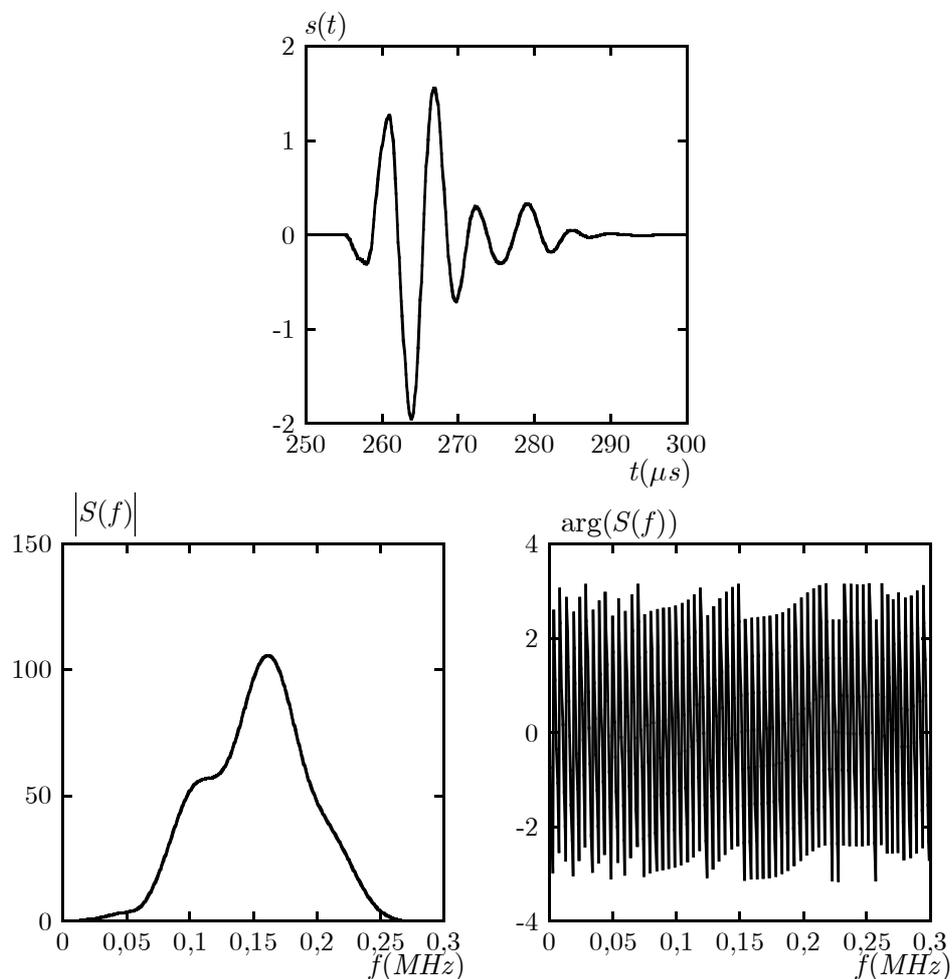


figure B-1 : extrait du signal temporel  $s(t)$ , et module et phase de son spectre  $S(f)$ , avec  $N = 2^{14}$ .

La fonction Matlab<sup>®</sup> permettant ce calcul est la transformée de Fourier rapide (@fft), définie à partir du signal discrétisé  $s(n)$  ( $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ), de la manière suivante :

$$\forall p \in \llbracket 1; N \rrbracket, S(p) = \text{fft}(s(n)) = \sum_{n=1}^N s(n) e^{-\frac{2\pi i(n-1)(p-1)}{N}}, \quad (\text{B-1})$$

où  $n$  et  $p$  sont les indices des tableaux respectivement du signal et de son spectre, et  $N$  leur taille. La figure B-1 présente un signal acoustique ainsi que le module et la phase de son spectre.

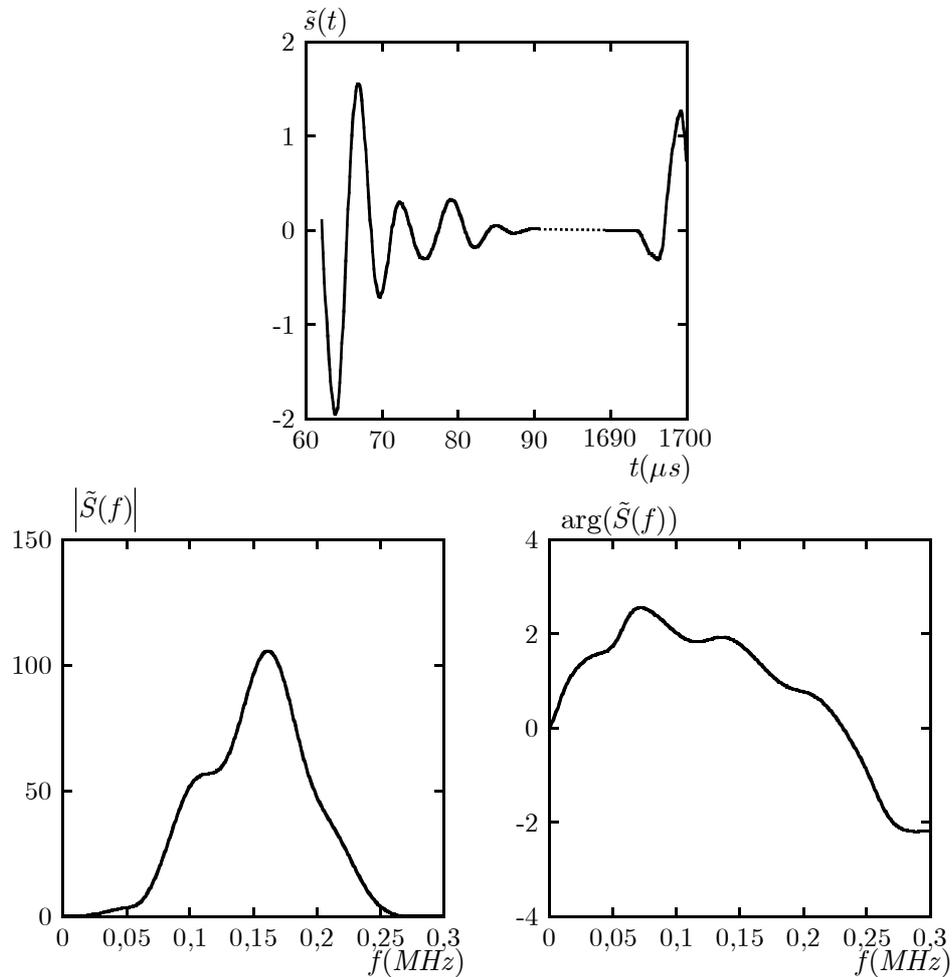


figure B-2 : extrait du signal temporel  $\tilde{s}(t)$ , et module et phase de son spectre  $\tilde{S}(f)$ .

Nous remarquons que la phase du spectre, comprise entre  $-\pi$  et  $\pi$ , varie très rapidement en fonction de la fréquence, il est difficile de la dérouler. Pour s'affranchir de ce problème, nous décalons le signal temporel afin que le maximum de son enveloppe soit à l'origine des temps, ceci permettant de minimiser les variations de phase de son spectre. Considérons le signal  $\tilde{s}(n)$ , décalé du temps  $\tau$  :

$$\tilde{s}(t) = s(t - \tau). \quad (\text{B-2})$$

Ainsi, par transformée de Fourier, nous avons :

$$\begin{aligned}\tilde{S}(f) &= \text{fft}(s(t - \tau)) \\ &= S(f)e^{-2\pi f\tau}.\end{aligned}\tag{B-3}$$

Le décalage temporel  $\tau$  du signal  $\tilde{s}(t)$  par rapport au signal  $s(t)$  induit un décalage de phase de  $-2\pi f\tau$  du spectre  $\tilde{S}(f)$  par rapport au spectre  $S(f)$ . La figure B-2 présente le signal  $\tilde{s}(t)$ , dont le maximum de l'enveloppe calculé à l'aide de la transformée de Hilbert du signal est à l'origine des temps, ainsi que le module et la phase de son spectre. Nous remarquons que la phase du spectre  $\tilde{S}(f)$  varie beaucoup moins rapidement que celle de  $S(f)$ , ce qui permet de la dérouler facilement. Le spectre  $S(f)$  se déduit finalement en décalant de  $2\pi f\tau$  la phase de  $\tilde{S}(f)$  (figure B-3).

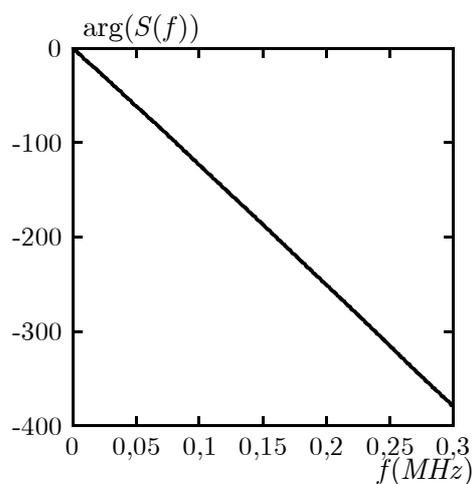


figure B-3 : phase du spectre du signal  $s(t)$  correctement déroulée.



# Bibliographie

- [1] V. G. Veselago, « The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$  », *Sov. Phys. Uspekhi*, vol. 10 (4), pp. 509-514, 1968.
- [2] D. Torrent et J. Sánchez-Dehesa, « Acoustic metamaterials for new two-dimensional sonic devices », *New J. Phys.*, vol. 9, p. 323, 2007.
- [3] J. Li et C. T. Chan, « Double-negative acoustic metamaterial », *Phys. Rev. E*, vol. 70, p. 055602, 2004.
- [4] W. S. Ament, « Sound Propagation in Gross Mixtures », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 25 (14), pp. 638-641, 1953.
- [5] L. L. Foldy, « The multiple scattering of waves I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers », *Phys. Rev.*, vol. 67 (3-4), pp. 107-119, 1945.
- [6] M. Lax, « Multiple Scattering of Waves », *Rev. Mod. Phys.*, vol. 23 (4), pp. 287-310, 1951.
- [7] G. T. Kuster et M. N. Toksöz, « Velocity and attenuation of seismic waves in two-phase media: part I. Theoretical formulations », *Geophysics*, vol. 39 (5), pp. 587-606, 1974.
- [8] C. Aristégui et Y. C. Angel, « Effective mass density and stiffness derived from P-wave multiple scattering », *Wave Motion*, vol. 44 (3), pp. 153-164, 2007.
- [9] P. Lloyd et M. V. Berry, « Wave propagation through an assembly of spheres IV. Relations between different multiple scattering theories », *Proc. Phys. Soc.*, vol. 91, pp. 678-688, 1967.
- [10] P. C. Waterman et R. Truell, « Multiple Scattering of Waves », *J. Math. Phys.*, vol. 2 (4), pp. 512-537, 1961.

- [11] F. Luppé, J.-M. Conoir et A. N. Norris, « Effective wave numbers for thermo-viscoelastic media containing random configurations of spherical scatterers », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 131 (2), pp. 1113-1120, 2011.
- [12] C. Audoly, « Acoustic analysis of panels made with viscoelastic materials containing resonant cavities », *Acta Acust.*, vol. 2 (5), pp. 393-402, 1994.
- [13] T. Brunet, S. Raffy, B. Mascaró, J. Leng, R. Wunenburger, O. Mondain-Monval, O. Poncelet et C. Aristégui, « Sharp acoustic multipolar-resonances in highly monodisperse emulsions », *Appl. Phys. Lett.*, vol. 101 (1), p. 011913, 2012.
- [14] B. Mascaró, T. Brunet, O. Poncelet, C. Aristégui, S. Raffy, O. Mondain-Monval et J. Leng, « Impact of polydispersity on multipolar resonant scattering in emulsions », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 133 (4), pp. 1996-2003, 2013.
- [15] C. Potel et M. Bruneau, « Équations différentielles et intégrales, solutions en milieux fluides et solides, applications », Ellipses, 2006.
- [16] K. F. Graff, « Wave motion in elastic solids », Dover Books on Engineering, 1991.
- [17] M. Chekroun, « Caractérisation mécanique des premiers centimètres du béton avec des ondes de surface », Thèse de l'École Centrale de Nantes, N° ED 498-20, 2008.
- [18] M. F. Poujol-Pfefer, « Étude de la propagation acoustique dans un milieu inhomogène, application à la caractérisation des fonds marins », Thèse de l'université d'Aix-Marseille II, n° 2079461, 1994.
- [19] J. Dubois, « Homogénéisation dynamique de milieux aléatoires en vue du dimensionnement de métamatériaux acoustiques », Thèse de l'université Bordeaux 1, n° d'ordre 4512, 2012.
- [20] J. Dubois, C. Aristégui et O. Poncelet, « Spaces of electromagnetic and mechanical constitutive parameters for dissipative media with either positive or negative index », *J. Appl. Phys.*, vol. 115 (2), p. 024902, 2014.
- [21] J. G. Berryman, « Long-wavelength propagation in composite elastic media I. Spherical inclusions », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 68 (6), pp. 1809-1819, 1980.
- [22] G. C. Gaunaurd et H. Überall, « Resonance theory of the effective properties of perforated solids », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 71 (2), pp. 282-295, 1982.

- [23] C. Linton et P. Martin, « Multiple scattering by multiple spheres: a new proof of the Lloyd-Berry formula for the effective wavenumber », *J. Appl. Math.*, vol. 66 (5), pp. 1649-1668, 2006.
- [24] J.-M. Conoir, A. N. Norris et F. Luppé, « Generalization of the Waterman & Truell formula for an elastic medium containing random configurations of cylindrical scatterers », *Congrès Français d'Acoustique*, hal-00533160, 2010.
- [25] M. Caleap, B. W. Drinkwater et P. D. Wilcox, « Effective dynamic constitutive parameters of acoustic metamaterials with random microstructure », *New J. Phys.*, vol. 14, p. 033014, 2012.
- [26] G. A. Athanasopoulos, P. C. Pelekis et V. C. Xenaki, « Dynamic properties of EPS Geofoam: an experimental investigation », *Geosynth. Int.*, vol. 6 (3), pp. 171-194, 1999.
- [27] L. Bos, L. Lukyanova et R. Wunenburger, « Constraints on the design of core-shell resonators of locally resonant acoustic metamaterials », *Phys. Rev. B*, vol. 86, p. 184107, 2012.
- [28] G. Gaunaurd, « Sonar cross section of a coated hollow cylinder in water », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 61 (2), pp. 360-368, 1977.
- [29] R. Teppner, « Acoustic coating for submarines », *Naval Forces*, vol. 32 (3), pp. 89-91, 2011.
- [30] S. Beretti, « Réponse acoustique d'élastomères micro-inclusionnaires soumis à la pression d'immersion », *Congrès Français d'Acoustique*, hal-00546839, 2010.
- [31] G. Gaunaurd, E. Callen et J. Barlow, « Pressure effects on the dynamic effective properties of resonating perforated elastomers », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 76 (1), pp. 173-177, 1984.
- [32] D. Miller, « U-Boats History, development and equipment 1914-1945 », Conway Maritime Press, 2000.
- [33] G. Gaunaurd, « One-dimensional model for acoustic absorption in a viscoelastic medium containing short cylindrical cavities », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 62 (2), pp. 298-307, 1977.
- [34] C. Audoly, « Determination of efficiency of anechoic or decoupling hull coatings using water tank acoustic measurements », *Acoustics 2012*, hal-00810798.

- [35] D. R. Lide, « Handbook of Chemistry and Physics », CRC Press Inc., 2009, 90e éd.
- [36] B. Read et G. Dean, « The determination of dynamic properties of polymers and composites », Adam Hilger Limited, 1978.
- [37] S. Degallaix et B. Ilschner, « Caractérisation expérimentale des matériaux I », Presses polytechniques et universitaires romandes, 2007.
- [38] T. J. Atherton et D. J. Kerbyson, « Size invariant circle detection », *Im. Vis. Comp.*, vol. 17 (11), pp. 795-803, 1999.
- [39] E. Chassande-Mottin et P. Flandrin, « On the stationary phase approximation of chirp spectra », *Proc. IEEE Int. Symp.*, pp. 117-120, 1998.
- [40] A. E. Mouhtadi, « Caractérisation ultrasonore de plaques viscoélastiques homogènes et composites », Université du Havre, tel-00699973, 2011.
- [41] D. Torrent et J. Sánchez-Dehesa, « Anisotropic mass density by two-dimensional », *N. Journ. Phys.*, vol. 10, p. 023004, 2008.
- [42] V. Fokin, M. Ambati, C. Sun et X. Zhang, « Method for retrieving effective properties of locally resonant acoustic metamaterials », *Phys. Rev. B*, vol. 76, p. 144302, 2007.
- [43] H. J. Wintle, « Kramers-Kronig analysis of polymer acoustic data », *J. Appl. Phys.*, vol. 85 (1), pp. 44-48, 1999.
- [44] H. J. Wintle, « Power law absorption in polymers and other systems », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 107 (3), pp. 1770-1773, 2000.
- [45] G. Lepert, C. Aristégui, O. Poncelet, T. Brunet, C. Audoly et P. Parneix « Determination of the effective mechanical properties of inclusionary materials using bulk elastic waves », *10th Anglo-French Physical Acoustics Conference*, Fréjus, 2013.

## **Étude des interactions élasto-acoustiques dans des métamatériaux formés d'inclusions résonnantes réparties aléatoirement**

La discrétion acoustique est un enjeu majeur dans le domaine de la défense navale. Dans ce contexte, DCNS Research souhaite évaluer la capacité des métamatériaux acoustiques aléatoires localement résonnants à constituer une rupture technologique, comparativement aux matériaux anéchoïques actuels. Nous nous proposons de dimensionner, suite à une étude paramétrique conséquente, des structures contenant une répartition aléatoire d'inclusions sphériques. Des échantillons de matériaux localement résonnants ont été fabriqués. Leur réponse acoustique a été mesurée et confrontée aux prédictions issues de modèle. L'impact des résonances des inclusions et de l'angle d'incidence a été mis en évidence. Enfin, une méthode d'identification de leurs propriétés effectives a été développée à partir de mesures en réflexion et en transmission. Elle repose sur une configuration expérimentale originale. Des difficultés liées à l'extraction de la masse volumique dynamique sont mises en exergue.

**Mots clés :** Discrétion acoustique, Matériaux localement résonnants, Diffusion multiple.

## **Study of the acoustical-elastic interactions in metamaterials containing randomly distributed resonant inclusions**

Stealth is a major issue in naval defence. In this context, DCNS Research wants to know if locally-resonant acoustic metamaterials represent a technological breakthrough in comparison to current anechoic materials. We propose here a design of structures with randomly distributed spheres, based on a consequent parametric study. Samples of locally resonant materials were manufactured. Then, their acoustic response has been measured and compared to predictions based on multiple scattering theories. The presence of resonances and the impact of a non-null incidence angle have been highlighted. Finally, we developed a characterization method of the effective properties, from measurements of coefficients of reflection and transmission. Its design is based on an originally experimental setup. Difficulties coming from the retrieval of the dynamic mass density have been showed.

**Keywords:** Stealth, Locally resonant materials, Multiple scattering.