



HAL
open science

Construction de modèles réduits numériques pour les écoulements compressibles linéarisés

Gilles Serre

► **To cite this version:**

Gilles Serre. Construction de modèles réduits numériques pour les écoulements compressibles linéarisés. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2012. Français. NNT : 2012ECDL0001 . tel-00946632

HAL Id: tel-00946632

<https://theses.hal.science/tel-00946632v1>

Submitted on 13 Feb 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée devant
L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir
le titre de DOCTEUR
SPÉCIALITÉ ACOUSTIQUE

par

Gilles SERRE

Construction de modèles réduits numériques pour les écoulements compressibles linéarisés

Soutenue le 27 janvier 2012 devant le jury composé de

Christophe BAILLY	Professeur, ECL	Directeur
Jean-Camille CHASSAING	Maître de Conférences, UPMC	Examineur
Xavier GLOERFELT	Maître de Conférences, ENSAM Paris	Co-directeur
Aziz HAMDOUNI	Professeur, LEPTIAB	Examineur
Angelo IOLLO	Professeur, IMB	Rapporteur
Philippe LAFON	Ingénieur - Chercheur, EDF R&D	Examineur
Denis SIPP	Maître de Recherches, ONERA	Rapporteur

Remerciements

Ce travail de thèse industrielle a débuté le 15 Octobre 2008 et s'est achevé le 15 octobre 2011. J'ai été embauché par EDF R&D pour trois années dans le cadre d'un contrat CIFRE en partenariat avec le Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA) de l'Ecole Centrale de Lyon (ECL), le laboratoire DynFluid de l'Ecole Nationale des Arts et Métiers de Paris (ENSAM Paris) et le Laboratoire de Mécanique des Structures Industrielles Durables (LaMSID). Je suis resté pendant toute la thèse sur le site d'EDF R&D de Clamart. La première année, mon bureau était situé dans le bâtiment du LaMSID. J'ai ensuite déménagé non loin de là dans le bâtiment Ibis des ingénieurs du groupe T63 (Acoustique, vibrations sous écoulement et dynamique des machines) du département AMA (Analyses Mécaniques et Acoustique) d'EDF R&D. L'objectif de ce changement de bureau était de vivre dans deux environnements distincts, celui des chercheurs et celui des ingénieurs. J'ai donc eu la chance de pouvoir rencontrer de nombreux doctorants, post-doctorants ou chercheurs mais aussi des ingénieurs d'étude et des ingénieurs de recherche.

Au moment de rédiger ces remerciements, je commence par dresser au fond de moi la liste des personnes rencontrées tout au long de ma thèse et même avant de la débiter. Je me rends compte que la liste est plutôt longue. Je pense notamment aux professeurs, chercheurs et ingénieurs ayant contribué à ma formation scientifique dans le cadre de mes études supérieures, de mon stage d'ingénieur dans l'équipe NACHOS de l'INRIA et de mon stage de fin d'étude chez DCNS dans la BU propulsion sous la responsabilité de Jean-François Sigrist. Je décide alors de me focaliser sur les principaux acteurs durant ma thèse. Je salue donc dans un premier temps toutes les personnes non citées explicitement dans la suite avec qui j'ai pu partager de bons moments avant ou pendant ma thèse que ce soit sur le plan technique, professionnel ou amical.

J'ai eu de nombreux responsables, bien entendu des responsables hiérarchiques liés à ma position d'ingénieur doctorant dans le département AMA d'EDF mais aussi naturellement des responsables de thèse. Mon encadrant industriel a été Philippe Lafon, ingénieur chercheur en aéroacoustique/aéroélasticité et responsable du code SAFARI d'EDF R&D. Ensuite, mes responsables académiques ont été Xavier Gloerfelt, mon co-directeur de thèse du laboratoire DYNFLUID qui est maître de conférence à l'ENSAM Paris et Christophe Bailly mon directeur de thèse du LMFA qui est professeur à l'ECL. Tous deux sont de grands spécialistes de l'aéroacoustique numérique. Cette thèse était par ailleurs intégrée dans le projet industriel SITAR d'EDF R&D (comportement SIngulier et Transitoires Accidentels Rapides des fluides) géré par Fabien Crouzet.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude à Philippe pour son encadrement de très grande qualité, pour son écoute et sa disponibilité, ses relectures, son soutien et ses nombreux conseils durant ces trois années. Je le remercie pour m'avoir laissé une certaine autonomie pour mener à bien ce sujet de recherche en plein essor dans le monde du calcul scientifique. La réduction numérique est peut-être destinée à devenir l'ingrédient incontournable de toute simulation numérique, qui sait ! J'exprime ma reconnaissance à Xavier pour m'avoir initié

à la méthode POD, m'avoir sensibilisé aux problématiques de stabilité des modèles réduits non linéaires en m'accordant beaucoup de son temps mais aussi et surtout pour sa rigueur et toutes ses corrections minutieuses. Je tiens aussi à remercier Christophe pour avoir accepté de diriger cette thèse, pour toutes ses relectures et sa clairvoyance.

Je remercie ensuite Hélène Henry responsable du groupe T63, François Waeckel chef du département AMA et Patrick Massin directeur du LaMSID pour leur accueil au sein de leur structure respective. J'ai beaucoup apprécié mon travail au sein de leur organisation et j'aurais souhaité poursuivre encore un bout de chemin si une opportunité professionnelle adaptée à mon profil s'était ouverte.

Mes remerciements se dirigent naturellement vers tous les membres du jury. Merci à Denis Sipp et Angello Iollo pour avoir accepté de relire et juger ce manuscrit. Merci aussi à Jean-Camille Chassaing pour avoir examiné mes travaux et à Aziz Hamdouni pour avoir accepté de présider ma soutenance. Leurs pertinentes questions ont contribué à la clarification de certains points du manuscrit.

Je pense à toute l'équipe du code SAFARI : Frédéric Daude qui a été le premier à m'accueillir quand je suis arrivé le 15 octobre 2008, Julien Berland avec qui j'ai partagé mon bureau au LaMSID une bonne partie de la première année, Romain Lacombe mon collègue de bureau des deux dernières années et Fabien Crouzet. Leur aide a été très précieuse pour comprendre toutes les complexités et subtilités du code de calcul SAFARI et beaucoup d'autres choses. Les réunions SAFARI me manquent ! Je garderai au fond de moi pour très longtemps tous les moments passés ensemble et j'espère les revoir bientôt en toute amitié.

J'adresse également mes remerciements à tous les agents du groupe T63 et plus généralement du département AMA, tous les thésards et tous les stagiaires qui ont contribué à mon épanouissement au quotidien tout au long des trois années, en particulier pendant les pauses déjeuner, les séminaires LaMSID organisés par Patrick, les pots de départ et les repas de département et de groupe ou encore les "after-work" et sorties avec Frédéric, Marion, Mehdi, Ophélie, Romain et les stagiaires du moment. J'ai vraiment découvert une grande famille au sein d'EDF même si beaucoup de ses membres n'étaient que de passage. Je souhaite à tout le monde une bonne continuation.

Je remercie tous mes supporters qui se sont déplacés à l'occasion de ma soutenance. Merci beaucoup à Frédéric, Julien, Romain et Yujie Liu du groupe T63 pour leur soutien. Merci à mon père d'avoir fait un long chemin pour venir me voir à la consécration de mes études supérieures. Merci aussi à Patrick, Elizabeth Longatte, Christophe Robinet, Gregory Dergham d'être venus écouter avec intérêt le résumé de mes travaux.

Je tiens enfin à remercier ma compagne Véronique qui m'a soutenu en permanence et qui m'a donné l'énergie nécessaire pour finir de rédiger ce manuscrit de thèse. Son soutien était si important dans cette période de notre vie qui incluait en plus la naissance de notre fille et la recherche d'un travail en France. Ces derniers événements cumulés se sont traduits par de nombreuses nuits écourtées ! Je tiens à remercier encore une fois Romain pour sa cruciale contribution de conducteur expérimenté de camion ainsi que mon frère aîné Olivier pour avoir permis le sauvetage de notre déménagement plutôt mal embarqué !

Je pense qu'une thèse est une formidable aventure pour tout esprit curieux de comprendre le monde qui nous entoure. Il faut aussi certainement un peu d'imagination. Je remercie feu mon grand-père maternel pour m'avoir inculqué la curiosité scientifique dès mon plus jeune âge.

Résumé

Dans les centrales nucléaires et thermiques, certaines installations sont sujettes à des couplages acousto-mécaniques pouvant nuire fortement à leur bon fonctionnement. La compréhension et la prédiction de ces couplages multi-physiques nécessitent le développement de modèles numériques de très grande précision. Ces modèles sont si coûteux à résoudre qu'il n'est pas envisageable de les utiliser dans des boucles de contrôle ou encore d'optimisation paramétrique. Dans ce manuscrit de thèse, le but est d'exploiter un nombre limité de calculs coûteux pour construire un modèle numérique qui soit de très faible dimension. Ces modèles numériques réduits doivent être capables, en temps réel, de reproduire ces calculs haute-fidélité mais aussi d'extrapoler ces résultats à d'autres points de fonctionnement plus ou moins proches. L'évolution de petites perturbations compressibles au sein d'un écoulement complexe moyenné est modélisée à partir des équations d'Euler linéarisées dont la nature hyperbolique complique l'application des méthodes de réduction classiques. Les principales problématiques théoriques et numériques qui émergent lors de la construction du système réduit par méthode de projection sont alors exposées. En particulier, les problèmes fondamentaux de la préservation de la stabilité et du contrôle de l'énergie des systèmes réduits sont largement développés et une nouvelle méthode de stabilisation est proposée. Leur sensibilité paramétrique est aussi discutée. Les modèles réduits stables sont ensuite intégrés dans un code de calcul industriel pour prendre en compte des géométries complexes. De plus, la présence de solides dont les parois peuvent être fixes ou mobiles est abordée. En particulier, les petits déplacements de paroi sont modélisés avec une loi de transpiration. Cette condition aux limites est intégrée dans le formalisme du contrôle de façon à lever la difficulté induite par sa non homogénéité. Finalement, les modèles réduits sont exploités pour prédire en temps réel la réponse des systèmes à une loi de contrôle arbitraire. Par exemple, la fréquence et l'amplitude du chargement peuvent varier. Le code de calcul réduit ainsi développé a pour principale vocation de rendre possible des expertises aéroélastiques à faible coût.

Mots clés : Modèles réduits - Décomposition orthogonale propre - Écoulements compressibles - Transpiration - Stabilité - Symétriseur

Abstract

In nuclear and thermal power stations, some installations produce acoustics/mechanics coupling which may cause important damage and bad operating performances. Prediction and understanding of these physical phenomena need the development of high-fidelity numerical models which are prohibitive to solve. Therefore, these models cannot be used for control or even parametric optimization applications. In this work, the goal is to use some high-fidelity solutions for building reduced-order models which are able to calculate again these solutions but in real-time, and also to predict solutions for other close configurations. Modeling of compressible disturbances in a complex mean flow is given by hyperbolic linearized Euler equations which create some difficulties to perform classical reduction methods. Theoretical and numerical problems are then introduced when a projection method is applied. In particular, the conservation of stability and the control of energy of reduced-order models are studied and a new stabilization procedure is proposed. Parametric sensitivity is also discussed. Afterwards, stable reduced-order models are developed in an industrial code to consider complex geometries. Furthermore, modeling of solids with fixed or vibrating walls are taken into account. Particularly, small vibrations are modeled thanks to a transpiration law. This boundary condition is implemented in the framework of linear control theory to apply reduction methods. Finally, reduced-order models are tested to predict solutions in real time. For instance, frequency and amplitude of the loading can change. The developed reduced order model should be used for aeroelastic industrial problems with more realistic costs.

Keywords : Reduced-order models - Proper orthogonal decomposition (POD) - Compressible flows - Transpiration - Stability - Symmetriser

Table des matières

1	Introduction générale	1
1.1	Contexte et motivations	1
1.2	Enjeux scientifiques et industriels	3
1.3	Organisation du mémoire et objectifs	5
2	Méthodes de réduction pour les systèmes dynamiques linéaires : état de l'art	6
2.1	Systèmes étudiés	6
2.1.1	Système standard	6
2.1.2	Formulation fréquentielle et fonction de transfert	7
2.1.3	Autres systèmes	8
2.2	Changement de base et propriétés	9
2.2.1	Changement de base	9
2.2.2	Propriétés élémentaires du système	9
2.3	Méthodes de construction d'un système réduit linéaire	11
2.3.1	Problématique	11
2.3.2	Construction du système réduit	12
2.4	Méthodes de construction des espaces réduits	16
2.4.1	Méthodes de réduction modale	17
2.4.2	Méthodes de réduction équilibrée	22
2.4.3	Méthodes de réduction par identification	28
2.4.4	Méthodes de réduction empiriques	32
2.5	Synthèse	36
2.5.1	Choix d'une classification des méthodes	36
2.5.2	Choix d'une méthode de réduction	39
3	Équations d'Euler linéarisées (EELs)	42
3.1	Modèle physique	42
3.1.1	Principes de conservation	42
3.1.2	Formulation locale conservative	43
3.1.3	Choix de la formulation	44
3.2	Linéarisation des équations d'Euler	45
3.2.1	Technique de linéarisation	45
3.2.2	Application aux variables $\delta \mathbf{q} = (\delta \rho, \bar{\rho} \delta u, \bar{\rho} \delta v, \delta p)^T$	46
3.2.3	Nature de l'écoulement de base $\bar{\mathbf{q}}$	49
3.3	Propriétés des EELs	49
3.3.1	Hyperbolicité	49
3.3.2	Symétrisabilité	50
3.3.3	Stabilité des EELs	51
3.4	Adimensionnement	55
3.5	EELs adjointes	57
3.6	EELs comme propageur acoustique	58
4	Construction et propriétés matricielles du modèle numérique	61
4.1	Introduction aux méthodes numériques	61
4.2	Construction du modèle complet	63
4.2.1	Discrétisation spatiale des EELs dans Ω	63
4.2.2	Traitement des points frontières : zone Ω^{bc}	64
4.2.3	Conditions de non-réflexion de Tam et Dong	65

4.2.4	Construction du système matriciel	68
4.2.5	Intégration temporelle	70
4.3	Stabilité temporelle et évolution énergétique du système	71
4.3.1	Croissance énergétique et non-normalité	72
4.3.2	Méthode énergétique de Lyapunov	73
4.4	Exemples de réponses du système	75
4.4.1	Réponses temporelles directes	76
4.4.2	Réponses adjointes	76
4.4.3	Réponses fréquentielles	80
4.4.4	Espaces de Krylov et vecteurs d'Arnoldi	85
4.5	Contrôle de la croissance énergétique	86
5	Construction de modèles réduits par approche matricielle : application aux EELs	90
5.1	Introduction	90
5.2	Reduced-order models (ROMs)	91
5.2.1	Reduction technique	92
5.2.2	Construction of optimal \mathbf{V}_r and \mathbf{W}_r subspaces : POD method	93
5.2.3	Gramians	94
5.2.4	Stability properties of the reduced model	95
5.2.5	Infinite dual Gramian based inner product : $\mathcal{Q} = \mathcal{G}_d^\infty$	97
5.2.6	Symmetry based inner product : $\mathcal{Q} = \mathcal{H}$	98
5.2.7	A stabilizing projection	98
5.3	High-fidelity test model	101
5.3.1	LEEs	101
5.3.2	Boundary conditions	102
5.3.3	Semi-discretization and matrix formulation	102
5.3.4	Adjoint LEEs	103
5.4	Numerical results	104
5.4.1	Test with neutral stability : a critical case	104
5.4.2	Acoustic perturbation in an open system	106
5.4.3	Acoustic perturbation in an open channel	107
5.4.4	Free mixing layer	110
5.5	Conclusion	113
5.6	Amélioration du modèle réduit en temps-réel	114
5.6.1	Stabilisation du modèle réduit en temps-réel	114
5.6.2	Réduction du modèle réduit en temps-réel	115
5.7	Sensibilité paramétrique	117
5.7.1	Problématique	117
5.7.2	Exploitation des modes nominaux	118
5.7.3	Extension du gramien de contrôlabilité	120
6	Développement d'un code de calcul réduit pour les écoulements compressibles linéarisés en géométries complexes	123
6.1	EELs en coordonnées curvilignes	123
6.1.1	Coordonnées curvilignes	123
6.1.2	EELs en coordonnées curvilignes	125
6.1.3	Condition aux limites de paroi fixe	126
6.2	Conditions aux limites de paroi vibrante	127
6.2.1	Modèle d'Euler en milieu mobile	127
6.2.2	EELs en présence de paroi mobile	128
6.2.3	Méthode de linéarisation à deux champs	129
6.2.4	Méthode de linéarisation à un champ : transpiration	130
6.2.5	Choix de la méthode de linéarisation	133
6.2.6	Intégration de la transpiration dans le formalisme du contrôle	134
6.2.7	Transpiration dans le cas d'un mouvement de paroi rigide	134
6.2.8	Transpiration dans le cas d'un mouvement de paroi déformable	136
6.3	Modèle discret "haute-fidélité"	136
6.4	Construction du système réduit	138
6.4.1	Construction de \mathbf{A}_r à partir des EELs	139
6.4.2	Développements informatiques et détails pratiques	140

6.5	Validation du code de calcul réduit	144
6.5.1	Diffraction d'une impulsion acoustique par un disque	145
6.5.2	Diffraction d'une impulsion acoustique par un profil aérodynamique	147
6.5.3	Déformation d'un segment de paroi dans un écoulement uniforme	150
6.5.4	Rotation d'un profil NACA0012 en écoulement subsonique	152
7	Conclusion générale et perspectives	156
A	Construction de modèles réduits numériques non linéaires	159
A.1	Construction d'un modèle réduit non-linéaire	159
A.1.1	Méthode matricielle	160
A.1.2	Méthode de projection polynomiale	161
A.2	Approximation des non-linéarités	161
A.2.1	Méthodes de linéarisation	162
A.2.2	Approximations particulières	163
A.3	Réduction numérique des modèles non-linéaires	165
A.3.1	Réduction des systèmes linéaires non autonomes	165
A.3.2	Méthode TPWL (<i>Trajectory Piecewise-Linear</i>)	165
A.3.3	Méthodes équilibrées	166
A.3.4	Méthode de réduction itérative	167
A.3.5	Méthode POD	168

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Contexte et motivations

Il existe dans certaines installations des centrales électriques (turbines, tuyauteries, vannes, etc) des mécanismes physiques complexes causés par la compressibilité des fluides gazeux ou liquides transportés. Certains de ces phénomènes physiques peuvent s'expliquer par l'apparition de couplages acousto-mécaniques variés et plus ou moins forts. Il peut par exemple s'agir d'interactions entre

- des fluctuations acoustiques et des fluctuations aérodynamiques (respectivement hydrodynamiques) et on parle alors de problèmes aéroacoustiques (respectivement hydroacoustiques) ;
- des fluctuations acoustiques et des vibrations des structures et on parle alors de problèmes vibroacoustiques ;
- des fluctuations acoustiques et des fluctuations thermiques et on parle alors de problèmes thermoacoustiques.

Ces phénomènes physiques peuvent être à l'origine d'un mauvais comportement vibratoire des structures et causer une fatigue prématurée des différentes installations et circuits des centrales. Par exemple, le bruit hydraulique généré par une pompe centrifuge devient une source hydroacoustique qui peut exciter de manière importante les lignes de tuyauterie qui se mettent alors à vibrer anormalement. Des endommagements importants peuvent aussi être rencontrés lorsque ces couplages multi-physiques deviennent instables. C'est le cas des instabilités de type aéroélastiques ou encore thermoacoustiques. Par exemple, les ailettes basse pression des turbines peuvent être sujettes à des instabilités de type flottement (*flutter*) pouvant aller jusqu'à la génération d'un cycle limite, conséquence des non-linéarités. Concernant les problèmes thermoacoustiques, des vibrations de forte amplitude ont déjà été observées pour certains régimes de fonctionnement dans les centrales thermiques. Les lois de fonctionnement adoptées dans les brûleurs de chaudière sont en effet susceptibles d'augmenter le risque d'avoir des couplages entre la combustion et l'acoustique du foyer. Enfin, la présence d'obstacles ou de singularités dans les écoulements (coudes, soupapes, vannes) engendrent inévitablement des zones de turbulence qui sont sources de bruit aérodynamique et de vibrations. Les niveaux acoustiques et vibratoires résultants peuvent largement dépasser les seuils de tolérance fixés voire ceux de dimensionnement ce qui crée des problèmes d'une part pour la protection des travailleurs et d'autre part pour la tenue des installations. Dans certaines situations critiques, il peut même

être nécessaire de stopper le fonctionnement de l'installation. C'est la raison pour laquelle, il est crucial de développer des outils permettant de mieux comprendre tous ces phénomènes, de les prédire et de les contrôler afin d'améliorer les performances des installations tout en évitant des gênes et/ou des dangers.

La compréhension et la prédiction de tels phénomènes physiques ne peuvent s'effectuer qu'à partir d'essais sur site, d'essais sur maquettes ou à partir de simulations numériques. Les essais sont cependant très ou trop coûteux, difficiles à mettre en place si on souhaite tester une grande quantité de configurations (variation du régime d'écoulement ou modification structurale par exemple). De ce fait, la simulation numérique est l'outil idéal pour réaliser virtuellement toutes ces expérimentations. Le problème qui se pose alors est que la complexité des phénomènes physiques mis en jeu requiert des modèles mathématiques qui nécessitent des ressources informatiques très importantes. En effet, si on souhaite reproduire avec le plus de fidélité possible le comportement local des écoulements compressibles, cela demande de résoudre les équations aux dérivées partielles de Navier-Stokes non-linéaires. Les capacités informatiques actuelles ne permettent pas de résoudre directement de telles équations car la gamme des échelles spatio-temporelles à prendre en compte dans l'absolu est bien trop large. Les phénomènes physiques qui nous intéressent ici font notamment intervenir des fluctuations acoustiques qui en général sont de faibles amplitudes. Afin de simplifier le modèle de Navier-Stokes non-linéaire, les équations d'Euler linéarisées ou plus généralement de Navier-Stokes linéarisées sont bien adaptées pour modéliser fidèlement l'évolution de ces perturbations compressibles. Dans le modèle linéarisé d'Euler, les effets thermiques et visqueux sont négligés pour l'évolution des perturbations. Cela n'est pas trop réducteur pour traiter une bonne partie des phénomènes cités plus haut. Ces deux modèles présentent le grand avantage d'être linéaires ce qui simplifie notablement les solutions. Le modèle numérique, permettant d'effectuer les différentes simulations informatiques, est obtenu en discrétisant ces équations qui sont pour le moment formulées dans un espace de dimension infinie. La discrétisation spatiale des équations aux dérivées partielles s'obtient par l'intermédiaire des méthodes classiques de différences finies, d'éléments finis, de volumes finis ou encore de Galerkin discontinu sur toutes les directions non analytiques. En effet, en présence de géométries simples, il est parfois possible de faire des hypothèses simplificatrices sur certaines directions privilégiées qui n'ont alors presque plus besoin d'un traitement numérique. Dans le cas général où les géométries sont complexes, ces méthodes de discrétisation permettent de construire un système d'équations différentielles ordinaires (le modèle ne dépend plus que du temps) de dimension finie.

La dimension du modèle discret construit est de l'ordre de grandeur du produit du nombre de grandeurs physiques par le nombre de points de maillage. Si on souhaite par exemple simuler l'évolution de perturbations à l'aide de six grandeurs physiques (la masse volumique, le vecteur vitesse et la pression typiquement) dans un cube discrétisé par mille points suivant chaque direction spatiale, le modèle discret sera constitué de $6 * (10^3)^3$ soit six milliards d'inconnues. Il est clair que le coût de calcul engendré par la simulation d'un modèle numérique d'une telle dimension risque d'être important si on souhaite réaliser des prédictions paramétriques, optimiser la géométrie de la configuration de calcul pour améliorer certaines performances, ou encore contrôler tout simplement les phénomènes physiques mis en jeu. Ce simple exemple, portant sur la dimension du modèle discret, montre que de telles expertises numériques restent difficilement accessibles. Dans ces conditions, on aimerait construire un modèle numérique réduit dont la dimension serait nettement inférieure à la dimension du modèle discret sans trop simplifier la complexité de la dynamique modélisée. Par exemple, s'il est possible de se ramener à un système de quelques dizaines ou centaines d'inconnues tout au plus, on peut même espérer rendre accessible ces expertises numériques en temps réel. Sur la figure 1.1, on a représenté où se situent les modèles numériques d'ordre réduit dans les différentes étapes qui vont de l'identification du phénomène physique étudié vers sa modélisation

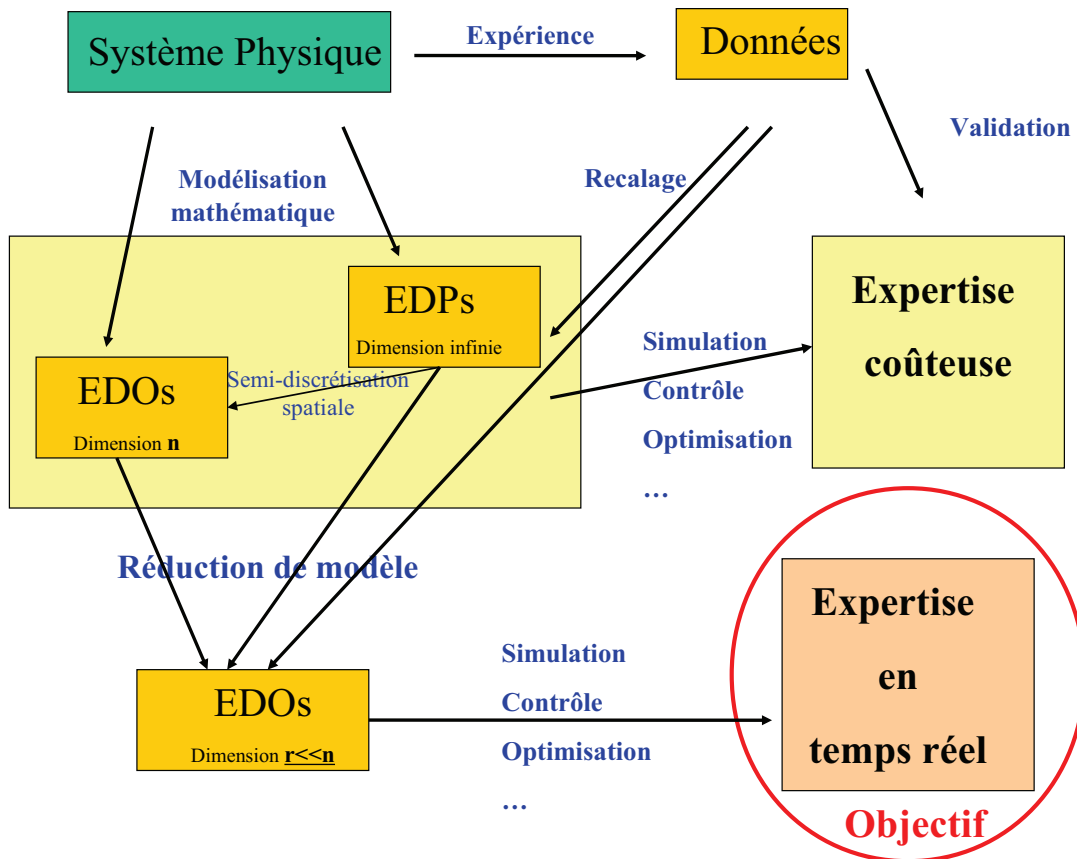


FIGURE 1.1 – Du phénomène physique à sa modélisation numérique réduite.

numérique réduite et ses applications.

1.2 Enjeux scientifiques et industriels

La réalisation d'une expertise numérique sur un système physique dans un délai d'attente raisonnable par rapport au cahier des charges de l'étude, est d'une importance capitale dans le monde industriel. La construction de modèles numériques, dits réduits, est un défi scientifique et industriel essentiel qui n'est pas nouveau en conception mécanique et aussi dans d'autres domaines très différents comme la micro-électronique. Le développement de tels modèles réduits est en soi très ambitieux. Il s'agit d'un sujet de recherche qui restera certainement un sujet scientifique de prédilection ces prochaines décennies dans de nombreux domaines techniques. L'idée de chercher à diminuer la dimension de l'espace discret, obtenu à l'aide des méthodes de discrétisation classiques citées plus haut, repose sur la constatation qu'il existe souvent des espaces de plus faible dimension permettant de bien représenter la réponse du système à l'aide de quelques fonctions de base définies sur l'ensemble du domaine de calcul et concentrant donc l'essentiel de l'information dynamique du système. Il est important de noter que c'est cette nature globale des fonctions de base qui permet de réduire la dimension de façon considérable. En effet, dans les modèles discrets non réduits, les fonctions de base sont en fait définies au voisinage de un ou quelques points géométriques. Ce qui a pour conséquence de générer des modèles numériques dont la dimension est finalement de l'ordre de grandeur du nombre de points géométriques. Les fonctions de bases locales et globales se distinguent par leur nature. Alors que les fonctions de base locales sont souvent de nature algébrique (bases polynômiales

par exemple), les fonctions de base globales sont plutôt de nature physique. Autrement dit, les bases globales s'appuient sur des solutions physiques du modèle non réduit.

Comme on l'a mentionné, la construction de modèles réduits n'est pas un sujet nouveau en mécanique. Par exemple, en dynamique des structures linéaires, le principe des méthodes de réduction de modèle repose sur le constat qu'en général seuls les modes de vibrations basses fréquences sont utiles à la connaissance des déplacements. D'un point de vue mathématique, les structures peuvent souvent être modélisées avec des modèles mathématiques dont les opérateurs discrets associés sont symétriques et définis positifs. Ces propriétés mathématiques fondamentales permettent d'exploiter les premiers modes propres numériques de ces opérateurs pour construire des modèles réduits dont la dimension sera exactement égale au nombre de modes basses fréquences utiles. Dans le contexte industriel, on utilise les méthodes de sous-structuration. Il s'agit de prédire le comportement vibratoire global d'une structure complexe à partir de la connaissance des modes propres des sous-structures qui la composent. C'est une application intéressante car les structures complexes sont souvent constituées de pièces mécaniques fabriquées par différents équipementiers. Il est alors souhaitable pour l'entreprise qui assemble toutes les pièces d'exploiter les modes propres associés à chaque pièce mécanique pour en déduire le comportement global. L'autre application importante concerne la modification structurale. Lorsque les structures sont soumises à des niveaux de vibration indésirables, on cherche à modifier les propriétés vibratoires en ajoutant ou en enlevant de la matière en des points stratégiques de la structure. Être capable de prédire numériquement le comportement vibratoire global de la structure suite à une modification arbitraire représente donc une application très puissante.

En dynamique des fluides linéaires, le problème est très différent. Il n'existe pas encore d'applications révélées dans le monde industriel, qu'il s'agisse des modèles incompressibles ou compressibles. Cela s'explique essentiellement par le fait que les opérateurs discrets ne sont plus symétriques ni définis positifs et que les modèles discrets sont de dimension bien plus importante qu'en dynamique des structures. À cela s'ajoute aussi le problème des conditions aux limites, et ce d'autant plus s'il s'agit de modèles fluides compressibles. Ces trois contraintes limitent fortement l'application des méthodes modales couramment exploitées en dynamique des structures. Parmi les multiples méthodes de réduction développées par le passé dans les différents domaines de la science, il semble que ce soit l'exploitation des modes POD (*Proper Orthogonal Decomposition*) associée à une projection de Galerkin qui s'est imposée en mécanique de fluides. Les modes POD sont construits à partir de la décomposition orthogonale propre d'un ensemble de réponses particulières du modèle discret non réduit. Malheureusement, les deux principaux problèmes rencontrés avec cette approche sont

- l'obtention d'un modèle réduit stable permettant d'effectuer des simulations en temps réel sur de longues périodes ;
- l'obtention d'un modèle réduit permettant d'effectuer des simulations en temps réel sur des configurations paramétriques différentes de celles qui ont servi à sa construction (inconsistance paramétrique du modèle réduit).

Ces dernières années, il y a eu plusieurs tentatives d'application dans le contexte de l'aéroélasticité avec les équations d'Euler linéarisées mais les problèmes de stabilité des modèles réduits persistent toujours ce qui limite considérablement l'intégration de ces méthodes dans un code industriel. Par ailleurs, l'extrapolation paramétrique du modèle réduit construit reste très problématique.

1.3 Organisation du mémoire et objectifs

Ce mémoire est composé d'une introduction, de cinq grands chapitres et d'une conclusion. Le chapitre qui suit cette introduction est consacré à un état de l'art des méthodes de réduction numérique pour les modèles linéaires discrets. Les propriétés essentielles des différentes approches y sont précisées en respectant le formalisme matriciel de la théorie du contrôle. L'objectif est de pouvoir discuter des méthodes exploitables pour réduire les modèles fluides linéarisés. Le troisième chapitre est dédié aux équations d'Euler linéarisées. Il s'agit du modèle retenu dans cette thèse pour représenter l'évolution de petites perturbations compressibles au sein des écoulements. La construction des équations d'Euler linéarisées y est présentée en motivant le choix des inconnues physiques. Les principales propriétés du modèle mathématique sont introduites. En particulier, nous développons une analyse énergétique des équations en mettant en évidence les termes qui peuvent être à l'origine d'une croissance énergétique transitoire. Cette analyse nous a permis ensuite de proposer une légère modification mathématique des équations d'Euler linéarisées afin de contrôler simplement cette croissance pour une grande classe d'écoulements de base. Dans le quatrième chapitre, on introduit succinctement les méthodes de discrétisation exploitées dans la thèse. Nous proposons dans ce chapitre de construire le modèle numérique haute-fidélité sous forme matricielle de manière à appliquer facilement les principes de réduction de modèle dans le chapitre qui suit. Les principaux types de solutions numériques sont présentés et discutés en insistant sur les aspects numériques susceptibles d'être limitant pour l'application rigoureuse des méthodes de réduction. Ces trois premiers grands chapitres introduisent toutes les briques nécessaires d'une part à la construction de modèles réduits numériques pour les équations d'Euler linéarisées et d'autre part à la compréhension des difficultés numériques qui émergent lorsqu'une matrice réduite est formée. Le but du cinquième chapitre est d'introduire les différentes problématiques numériques associées à la construction d'un système dynamique réduit. Nous proposons de comparer les seules méthodes existantes capables d'assurer la stabilité tout en étant applicables dans notre contexte. Une nouvelle méthode est introduite dans le but d'améliorer les problèmes de stabilité qui émergent lorsque des modèles réduits instationnaires sont construits. Ces différentes études numériques, basées sur une généralisation de la méthode *Proper Orthogonal Decomposition*, ont donné lieu à la rédaction d'un article soumis dans une revue à comité de lecture qui fait l'objet de la première partie du chapitre. La seconde partie est consacrée au développement d'une méthode capable d'améliorer en temps réel la stabilité et l'optimalité des systèmes réduits construits. Le problème de la sensibilité des modèles réduits à partir des méthodes de type POD est ensuite brièvement introduit. Enfin, le chapitre qui précède la conclusion est dédié au développement des systèmes réduits en présence de géométries complexes. En effet, dans un contexte industriel, il est important de pouvoir prendre en compte des géométries arbitraires de manière à réaliser des expertises sur des structures complexes. Il s'agit aussi de pouvoir prendre en compte des domaines de calcul constitués de solides dont les parois peuvent être fixes ou mobiles. Pour conclure, nous présentons quelques exemples où l'on fait varier en temps réel la loi temporelle imposée au chargement considéré à l'aide du modèle réduit.

Chapitre 2

Méthodes de réduction pour les systèmes dynamiques linéaires : état de l'art

Introduction

Dans ce premier chapitre conséquent, les principales techniques pour construire un système dynamique réduit linéaire sont introduites. La théorie de la réduction des systèmes linéaires est particulièrement bien établie dans le cadre de la théorie du contrôle [11]. C'est pourquoi les différentes méthodes sont présentées en respectant les notations et le langage du contrôle. De plus, le cas linéaire est particulier puisqu'on bénéficie des deux représentations temporelle et fréquentielle. C'est la raison pour laquelle, il existe souvent deux versions des méthodes de réduction linéaire : une version temporelle et une version fréquentielle. Les différentes méthodes de réduction sont présentées de manière très générale dans un premier temps. Elles sont ensuite analysées et comparées en s'appuyant principalement sur des exemples issus de la dynamique des structures et des fluides. Enfin, nous pourrions sélectionner les méthodes de réduction exploitables dans notre contexte.

2.1 Systèmes étudiés

2.1.1 Système standard

En théorie du contrôle, le système linéaire standard étudié s'écrit sous la forme

$$(\Sigma) \begin{cases} \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

Dans ce formalisme mathématique, le vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ représente les états du système. Il est appelé vecteur d'état (*state vector* en anglais) en théorie du contrôle. En mécanique, le vecteur d'état contient toutes les grandeurs physiques inconnues (pression, déplacement, vitesse, température, masse volumique...). La matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ représente en général la semi-discrétisation spatiale des équations aux dérivées partielles (acronyme EDPs) qui modélisent le phénomène physique étudié. Le vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^q$ est dénommé vecteur d'entrées (*input vector* ou *forcing inputs* en anglais). Le terme $\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ avec $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_q] \in \mathbb{R}^{n \times q}$ est le terme source ou second membre du modèle. Il correspond par exemple aux forces extérieures ou à des forces de contrôle (contraintes imposées, champs de pression, gravité, forces aérodynamiques...). Le

vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ est dénommé vecteur des sorties (*output vector*). Le terme $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ avec $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ représente les grandeurs physiques d'intérêt qui sont observées. En mécanique, il peut s'agir de l'observation de la solution au niveau de quelques capteurs, de caractéristiques particulières de l'écoulement ou de la structure. Ce système est dit autonome car les matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} sont supposées indépendantes du temps. Il est du premier ordre et continu en temps. Enfin \mathbf{x}_0 est la condition initiale. En anglais, on parle de *standard state space system* ou encore de système LTI (*Linear Time Invariant system*). Ce type de système modélise le comportement des systèmes linéaires contrôlés par des entrées/sorties. Pour préciser la nature du système, on parle respectivement de système SISO, SIMO, MISO ou MIMO (S : *Single*, M : *Multi*, I : *Input*, O : *Output*) suivant le nombre d'entrées-sorties du système. Par exemple :

- si $p = q = 1$ le système est appelé SISO ;
- si $q = 1$ et $p > 1$ le système est appelé SIMO ;
- si $p = 1$ et $q > 1$ le système est appelé MISO ;
- si $p > 1$ et $q > 1$ le système est appelé MIMO.

La solution temporelle de ce système est établie en appliquant la méthode de variation des constantes. Elle s'écrit

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{C} \left[\exp(t\mathbf{A})\mathbf{x}_0 + \int_0^t \exp((t-\tau)\mathbf{A})\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \right]. \quad (2.2)$$

Pour rappel, la notation $\exp(t\mathbf{A})$ exprime l'exponentielle de la matrice $t\mathbf{A}$. Elle est définie par la série absolument convergente

$$\exp(t\mathbf{A}) = \mathbf{I}_n + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \mathbf{A}^i. \quad (2.3)$$

L'exponentielle de matrice satisfait notamment les propriétés suivantes :

$$\exp(t_1\mathbf{A}) \exp(t_2\mathbf{A}) = \exp((t_1 + t_2)\mathbf{A}) \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{dt}(\exp(t\mathbf{A})) = \mathbf{A} \exp(t\mathbf{A}) = \exp(t\mathbf{A})\mathbf{A} \quad (2.5)$$

$$\text{si } \mathbf{AB} = \mathbf{BA}, \quad \exp(t\mathbf{A}) \exp(t\mathbf{B}) = \exp(t(\mathbf{A} + \mathbf{B})) \quad (2.6)$$

$$\exp(\mathbf{PAP}^{-1}) = \mathbf{P} \exp(\mathbf{A})\mathbf{P}^{-1} \quad (2.7)$$

où t_1 et t_2 sont des réels et \mathbf{P} est une matrice inversible. La solution d'un problème aux valeurs initiales non contrôlé ($\mathbf{B}\mathbf{u}(t) = 0$) s'exprime alors simplement sous la forme

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \exp(t\mathbf{A})\mathbf{x}_0. \quad (2.8)$$

2.1.2 Formulation fréquentielle et fonction de transfert

En vertu des propriétés de la transformation de Laplace, la solution du problème contrôlé (2.1) s'exprime aussi de la manière suivante :

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(s) + \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 = \mathbf{H}(s)\hat{\mathbf{u}}(s) + \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 \quad (2.9)$$

où $\mathbf{H}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ est la fonction dite de transfert et s est la variable complexe de Laplace. Elle représente la réponse du système contrôlé lorsque la condition initiale est nulle. La notation chapeau $\hat{\cdot}$ indique qu'il s'agit de la transformée de Laplace de la variable ($\hat{\mathbf{y}}(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st)\mathbf{y}(t)dt$). La solution d'un problème aux valeurs initiales sans second

membre s'exprime simplement

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = (s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0. \quad (2.10)$$

La fonction de transfert s'évalue dans le domaine fréquentiel avec $s = j\omega$ et $\omega \in \mathbb{R}$ ou dans l'espace de Laplace avec $s = \alpha + j\omega$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Chaque coefficient de la matrice de transfert peut être exprimé par une fonction rationnelle qui à son tour peut être factorisable suivant ses pôles et ses zéros. Rappelons que $p \in \mathbb{C}$ est un pôle de \mathbf{H} si $\lim_{s \rightarrow p} \|\mathbf{H}(s)\| = \infty$ et que $z \in \mathbb{C}$ est un zéro de \mathbf{H} si $\lim_{s \rightarrow z} \|\mathbf{H}(s)\| = 0$. Les pôles et les zéros de \mathbf{H} sont soit réels soit complexes conjugués deux à deux. Des diagrammes de Bode sont souvent employés pour représenter graphiquement le comportement fréquentiel du système. La représentation fréquentielle d'un système dynamique linéaire est très pratique puisque les calculs portant sur la dérivée temporelle sont remplacés par de simples calculs algébriques sur la variable de Laplace.

2.1.3 Autres systèmes

La semi-discrétisation spatiale des EDPs spatiaux-temporelles linéaires peut aboutir à d'autres formes de système matriciel. Il ne s'agit pas d'en faire l'inventaire ici. Les deux exemples qui suivent sont souvent rencontrés et peuvent se ramener formellement au système standard donc à toute la théorie en découlant.

Système LTI généralisé

Un grand nombre de modèles physiques discrétisés spatialement peuvent se ramener à des systèmes sous la forme plus générale :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (2.11)$$

La matrice $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est en général appelée matrice de masse. Lorsque la matrice \mathbf{E} est régulière, il suffit de l'inverser pour se ramener au système standard (2.1). Parfois \mathbf{E} est singulière et on parle alors de système descripteur (*descriptor system*) ou encore de *generalized state space system*. Les systèmes descripteurs représentent certainement la forme la plus générale pour décrire des modèles physiques linéaires. Le traitement mathématique et numérique de ces systèmes est cependant plus compliqué.

Système du second ordre

Bien souvent, les EDPs linéaires modélisant les structures (plaques, coques, poutres...) sont du second ordre en temps. La semi-discrétisation spatiale de ses modèles par une méthode d'éléments finis aboutit à des systèmes qui s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} \mathbf{q}(0) &= \mathbf{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}}(0) &= \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q} &= \mathbf{P}\mathbf{f}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{L}\mathbf{q}(t) \end{cases} \quad (2.12)$$

avec \mathbf{M} la matrice de masse, \mathbf{D} la matrice d'amortissement et \mathbf{K} la matrice de raideur. Lorsque le terme source $\mathbf{P}\mathbf{f}(t)$ est nul, le système est dit libre. Sinon, il est dit forcé. Le système LTI généralisé est retrouvé en posant $\mathbf{x}(t) = (\dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t))$. Dans ce cas les matrices sont données par $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & -\mathbf{W} \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{K} \\ \mathbf{W} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{L} \end{pmatrix}$. La matrice \mathbf{W} est

arbitraire mais non singulière. Elle peut être choisie de manière à conserver la symétrie du problème par exemple. Dans le domaine de Laplace, le système du second ordre s'écrit

$$\begin{cases} [s^2\mathbf{M} + s\mathbf{D} + \mathbf{K}]\hat{\mathbf{q}}(s) = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(s) + \mathbf{q}_0 + s\mathbf{q}_1 \\ \hat{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{L}\hat{\mathbf{q}}(s) \end{cases} \quad (2.13)$$

La fonction de transfert s'exprime alors $\mathbf{H} = \mathbf{L}[s^2\mathbf{M} + s\mathbf{D} + \mathbf{K}]^{-1}\mathbf{B}$.

Dans la suite de la thèse, nous chercherons toujours à se ramener au système standard (2.1) dans la mesure du possible, de manière à bénéficier des justifications théoriques du formalisme du contrôle.

2.2 Changement de base et propriétés

2.2.1 Changement de base

Prenons le système LTI (2.1) et posons le changement de base $\mathbf{x} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}}$ avec \mathbf{T} une matrice régulière indépendante du temps. Multiplions ensuite le système par l'inverse de la transformation \mathbf{T}^{-1} , le système s'exprime dans cette nouvelle base

$$(\tilde{\Sigma}) \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (2.14)$$

avec $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$ et $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$. Posons maintenant

$$\mathbf{T} = [\Phi_1, \dots, \Phi_n] \quad \text{et} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \Psi_1^T \\ \vdots \\ \Psi_n^T \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

où les Φ_i sont les vecteurs colonne de la matrice \mathbf{T} et les Ψ_i sont les vecteurs lignes de \mathbf{T}^{-1} . Le produit $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}$ donne

$$\begin{pmatrix} \Psi_1^T \Phi_1 & \dots & \Psi_1^T \Phi_i & \dots & \Psi_1^T \Phi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_i^T \Phi_1 & \dots & \Psi_i^T \Phi_i & \dots & \Psi_i^T \Phi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_n^T \Phi_1 & \dots & \Psi_n^T \Phi_i & \dots & \Psi_n^T \Phi_n \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

hors par définition on a $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{I}_n$. Par conséquent, les deux ensembles de vecteurs (Φ_1, \dots, Φ_n) et (Ψ_1, \dots, Ψ_n) sont biorthonormaux puisque par identification $\Psi_i^T \Phi_j = \delta_{ij}$ avec δ_{ij} le symbole de Kronecker. La biorthogonalité de deux ensembles est une propriété mathématique importante à retenir. Un tel changement de base s'apparente à un changement de coordonnées exact du système étudié dans lequel l'information dynamique sera répartie ou concentrée différemment. Par ailleurs, ce changement de variable n'affecte pas les entrées et les sorties.

2.2.2 Propriétés élémentaires du système

Les propriétés dynamiques et numériques du système LTI sont intimement liées aux propriétés de la matrice \mathbf{A} . On suppose pour simplifier que la matrice est à coefficients réels.

Symétrie et positivité

La matrice \mathbf{A} est dite symétrique si elle est égale à sa transposée c'est-à-dire si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Les matrices symétriques sont importantes en théorie et en pratique. Le théorème fondamental de l'algèbre linéaire fournit deux propriétés remarquables dans la représentation modale du système :

- la transformation \mathbf{T} vérifie $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$ ce qui implique que $\Psi_i = \Phi_i$ pour tout i et que la famille (Φ_1, \dots, Φ_n) est orthonormale ;
- les valeurs propres λ_i sont toutes réelles.

La matrice symétrique \mathbf{A} est dite définie positive (respectivement définie négative) si pour tout \mathbf{x} non nul, le produit scalaire $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ est strictement positif (respectivement strictement négative). Cette définition s'étend à toute matrice réelle en considérant leur partie symétrique. On dit alors que \mathbf{A} est définie positive si pour tout \mathbf{x} non nul, le produit scalaire $\mathbf{x}^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{x}$ est strictement positif. Les valeurs propres d'une matrice symétrique et définie positive (respectivement définie négative) sont réelles strictement positives (respectivement strictement négatives). Les matrices symétriques et définies positives (acronyme SDP) admettent une factorisation remarquable dite de Cholesky : il existe une unique matrice triangulaire inférieure \mathbf{L} à éléments diagonaux strictement positifs telle que $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$. Si \mathbf{A} n'est que semi-définie positive, alors certains éléments diagonaux de \mathbf{L} sont nuls. Les propriétés mathématiques remarquables que confèrent les systèmes symétriques et définis positifs sont particulièrement recherchées lorsqu'un modèle physique est établi.

Stabilité du système

La stabilité est définie par rapport à la réponse libre du système (système non-contrôlé). On dit que le système est stable si la solution $\mathbf{x}(t)$ pour $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ et pour toute condition initiale reste bornée quand $t \rightarrow \infty$. La stabilité du système peut être analysée directement à partir de sa représentation modale. Pour que la matrice \mathbf{A} soit stable, il suffit que toutes les parties réelles de ces valeurs propres soient strictement négatives. Cela reste encore valable si la partie réelle s'annule à condition que toute valeur propre à partie réelle nulle soit simple. Par exemple, si la matrice \mathbf{A} est définie négative alors le système est stable. Les matrices stables sont aussi dénommées matrices de Hurwitz. Lorsqu'il existe des valeurs propres à partie réelle strictement positive, la matrice est dite instable.

Passivité du système

Le système est dit passif s'il ne peut pas générer d'énergie. En d'autres termes, l'énergie du système ne peut pas augmenter. En théorie, la passivité se vérifie à l'aide de l'une des propriétés équivalentes suivantes portant sur la fonction de transfert :

$$\mathbf{H} \text{ est analytique sur } \mathbb{C}^+ := \{s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 0\} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{H}(\bar{s}) = \overline{\mathbf{H}(s)}, \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (2.18)$$

où $\bar{\cdot}$ dénote la conjugaison du complexe.

$$\mathbf{H}(s) + \mathbf{H}(s)^T \geq 0, \quad \forall s \in \mathbb{C}^+ \quad (2.19)$$

Ces propriétés caractérisent la positivité de la partie réelle de la fonction de transfert \mathbf{H} pour toute partie réelle positive de la variable de Laplace s . La passivité est une caractéristique plus forte que la stabilité. L'énergie d'un système stable peut en effet très bien croître sur des temps courts.

Préconditionnement du système

Il est parfois possible d'améliorer les propriétés numériques du système en lui appliquant une matrice régulière \mathbf{P} telle que

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (2.20)$$

La matrice \mathbf{P} est appelé préconditionneur du système. La construction d'un préconditionneur vise à améliorer le conditionnement numérique d'une matrice. Sans rentrer dans les détails, disons simplement que l'objectif final d'un préconditionnement est d'obtenir une matrice $\mathbf{P}\mathbf{A}$ qui :

- soit moins sensible aux divers perturbations numériques ;
- accélère la convergence des algorithmes numériques.

Ces améliorations sont en grande partie dues à la modification du spectre du produit $\mathbf{P}\mathbf{A}$ par rapport au spectre de \mathbf{A} . L'application d'un tel préconditionneur implique de devoir travailler sur le système LTI généralisé. Malheureusement, la construction d'une telle matrice \mathbf{P} n'est pas aisée en général.

2.3 Méthodes de construction d'un système réduit linéaire

2.3.1 Problématique

Reprenons le système LTI (2.1). L'objectif est de construire un système LTI réduit de la forme :

$$(\Sigma_r) \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_r &= \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B}_r \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_r(t) &= \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r(t) \end{cases} \quad (2.21)$$

tel que $\mathbf{r} \ll \mathbf{n}$ avec $\mathbf{x}_r \in \mathbb{R}^r$ la variable d'état réduite et $\mathbf{A}_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ la matrice réduite. La dimension des entrées \mathbf{u} et des sorties \mathbf{y} reste inchangée. Le système réduit est toujours un système LTI mais de dimension nettement inférieure à celle du système non réduit. La problématique peut aussi être formulée en travaillant dans l'espace fréquentiel avec la fonction de transfert. L'introduction des méthodes de réduction de modèle est en effet aussi motivée par le constat qu'il n'est pas concevable de calculer la fonction de transfert \mathbf{H} pour des problèmes de grande dimension car cela reviendrait à résoudre une infinité de systèmes linéaires de très grande taille (pour chaque pulsation). La formation de la fonction de transfert est en fait limitée à des modèles qui peuvent s'exprimer de façon analytique. Étant donnée la matrice de fonction de transfert $\mathbf{H}(s)$, il s'agit de construire une matrice de fonction de transfert $\mathbf{H}_r(s)$, qui soit proche de $\mathbf{H}(s)$. Le principal avantage de travailler directement avec la fonction de transfert repose sur le fait qu'on peut définir plus naturellement une distance $\|\cdot\|$ entre la fonction de transfert du modèle non réduit et celle du modèle réduit. En effet, les matrices $\mathbf{H}_r(s)$ et $\mathbf{H}(s)$ sont de même dimension. La définition d'une telle norme pour la fonction de transfert est une manière d'estimer l'erreur commise lorsqu'un système réduit est construit. On peut ainsi évaluer et garantir la qualité du modèle réduit relativement à la norme définie. Bien entendu, la qualité d'approximation du système réduit dépend aussi du choix de la norme considérée. De plus, la qualité d'un modèle réduit peut être appréhendée à l'aide de différents critères :

- critère classique : $\|\mathbf{H}(s) - \mathbf{H}_r(s)\|$;
- critère relatif : $\|\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{H}(s) - \mathbf{H}_r(s))\|$;
- critère de pondération fréquentielle : $\|\mathbf{W}_1(\mathbf{H}(s) - \mathbf{H}_r(s))\mathbf{W}_2\|$ avec \mathbf{W}_1 et \mathbf{W}_2 des matrices de pondération.

Tout l'enjeu de la réduction de modèle linéaire est donc d'être capable de construire une fonction de transfert \mathbf{H}_r qui minimise idéalement à la fois la dimension du système réduit (2.21) et l'erreur commise avec la fonction de transfert $\mathbf{H}(s)$ à l'aide d'un critère et d'une norme appropriés.

Regardons maintenant plus en détails comment construire le système réduit (2.21).

2.3.2 Construction du système réduit

Le principe général des méthodes de réduction de modèle repose sur l'existence d'une transformation $\mathbf{T} = [\Phi_1, \dots, \Phi_n]$ qui répartit ou concentre l'information dynamique du système (2.1) différemment. Idéalement, il s'agit de trouver une matrice \mathbf{T} capable de concentrer l'information dans le sous-espace $\mathbf{V}_r \in \mathbb{R}^{n \times r}$ constitué des r premières fonctions de base globales $[\Phi_1, \dots, \Phi_r]$ de cette transformation. Ces r fonctions de base, maximisant l'information du système, sont aussi souvent appelées modes en mécanique. La construction d'une telle transformation représente la première étape du processus de réduction. Nous verrons ultérieurement les principales techniques existantes pour la construire. À partir du moment où la transformation \mathbf{T} est connue, une deuxième étape est nécessaire pour réduire la dimension du système. C'est cette deuxième étape qui indique comment procéder pour construire le modèle réduit. Le principe de base de construction repose sur la décomposition de \mathbf{x} en deux parties : $\mathbf{x} = \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r + \mathbf{V}_{nr} \mathbf{x}_{nr}$. On distingue alors deux principales techniques suivant l'approximation retenue :

- la méthode de troncature : $\mathbf{x}_{nr} = \mathbf{0}$ et $\dot{\mathbf{x}}_{nr} = \mathbf{0}$;
- la méthode de résidualisation : $\mathbf{x}_{nr} \neq \mathbf{0}$ et $\dot{\mathbf{x}}_{nr} = \mathbf{0}$.

Ces deux approximations sont introduites dans la suite.

2.3.2.1 Construction par méthode de troncature

Supposons l'existence d'une transformation \mathbf{T} maximisant l'information dynamique du système sur ses premières colonnes. Le changement de base associé est $\mathbf{x} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}}$. Il s'agit en premier lieu de décomposer le vecteur $\tilde{\mathbf{x}}$ et la matrice \mathbf{T} en deux parties : une partie retenue et une partie non retenue. Posons donc $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{nr})^T$ et $\mathbf{T} = [\mathbf{V}_r, \mathbf{V}_{nr}]$ avec $\mathbf{x}_r \in \mathbb{R}^r$ le vecteur d'état réduit retenu, $\mathbf{x}_{nr} \in \mathbb{R}^{n-r}$ le vecteur d'état non retenu, $\mathbf{V}_{nr} \in \mathbb{R}^{n \times n-r}$ les colonnes ou fonctions de base non retenues et $\mathbf{V}_r \in \mathbb{R}^{n \times r}$ la matrice rectangulaire contenant les fonctions de base globales retenues sur chaque colonne. La transformation $\mathbf{x} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}}$ est décomposée comme suit :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{V}_r, \mathbf{V}_{nr}] \begin{pmatrix} \mathbf{x}_r(t) \\ \mathbf{x}_{nr}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{V}_{nr} \mathbf{x}_{nr}(t) = \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r(t) + \epsilon(t) \quad (2.22)$$

où ϵ représente l'erreur d'approximation ou encore le résidu à minimiser. Le principe de troncature repose sur l'élimination du résidu $\epsilon(t)$ dans cette décomposition. Cette hypothèse revient à supposer que $\mathbf{V}_r \mathbf{x}_r(t)$ est une approximation de $\mathbf{x}(t)$ c'est-à-dire que $\mathbf{x}(t) \simeq \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r(t)$. L'influence de ϵ est donc négligée. Désormais le sous-espace \mathbf{V}_r de \mathbf{T} sera appelé espace d'approximation. À partir de là, la construction du système réduit par méthode de troncature est fondée sur deux étapes :

- la substitution de l'approximation des inconnues $\mathbf{x} \simeq \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r$ dans le système non réduit (2.1) ou de manière équivalente à la projection des inconnues sur l'espace d'approximation ;
- la projection du système d'équations pour lever sa surdétermination.

Après la première étape de substitution, le système s'exprime :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(0) &= \mathbf{V}_r \mathbf{x}_{r0} \\ \mathbf{V}_r \dot{\mathbf{x}}_r(t) &= \mathbf{A} \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r(t) \end{cases} \quad (2.23)$$

Le système d'équations portant sur $\mathbf{V}_r \dot{\mathbf{x}}_r(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ est surdéterminé. Autrement dit, ce système contient plus d'équations que d'inconnues. Afin de lever cette surdétermination, il est nécessaire d'introduire un espace de projection $\mathbf{W}_r = [\Psi_1, \dots, \Psi_r] \in \mathbb{R}^{n \times r}$ de manière à obtenir un système carré inversible possédant autant d'inconnues que d'équations. Le système surdéterminé et projeté sur le sous-espace \mathbf{W}_r s'exprime :

$$\begin{cases} \mathbf{W}_r^T \mathbf{x}(0) &= \mathbf{W}_r^T \mathbf{V}_r \mathbf{x}_{r0} \\ \mathbf{W}_r^T \mathbf{V}_r \dot{\mathbf{x}}_r(t) &= \mathbf{W}_r^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{W}_r^T \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r(t) \end{cases} \quad (2.24)$$

ou de manière équivalente en supposant que le produit $\mathbf{W}_r^T \mathbf{V}_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ est bien inversible :

$$(\Sigma_r) \begin{cases} \mathbf{x}_{r0} &= (\mathbf{W}_r^T \mathbf{V}_r)^{-1} \mathbf{W}_r^T \mathbf{x}(0) \\ \dot{\mathbf{x}}_r(t) &= (\mathbf{W}_r^T \mathbf{V}_r)^{-1} \mathbf{W}_r^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r(t) + (\mathbf{W}_r^T \mathbf{V}_r)^{-1} \mathbf{W}_r^T \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r(t) \end{cases} \quad (2.25)$$

Par identification avec le système réduit (2.21), on pose $\mathbf{A}_r = (\mathbf{W}_r^T \mathbf{V}_r)^{-1} \mathbf{W}_r^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r$, $\mathbf{B}_r = (\mathbf{W}_r^T \mathbf{V}_r)^{-1} \mathbf{W}_r^T \mathbf{B}$ et $\mathbf{C}_r = \mathbf{C} \mathbf{V}_r$. La matrice $(\mathbf{W}_r^T \mathbf{V}_r)^{-1} \mathbf{W}_r^T$ est parfois appelée pseudo-inverse de Moore-Penrose. La double projection effectuée dans la méthode de troncature (sur l'espace d'approximation \mathbf{V}_r puis sur l'espace de projection \mathbf{W}_r) a différentes dénominations suivant le choix des deux sous-espaces \mathbf{V}_r et \mathbf{W}_r :

- Si $\mathbf{W}_r = \mathbf{V}_r$, l'espace d'approximation est identique à l'espace de projection. La projection est dite de Galerkin. On parle aussi de transformation congruente. De plus si $\mathbf{V}_r^T \mathbf{V}_r = \mathbf{I}_r$, les modes Φ_i sont orthonormaux et il s'agit d'une projection de Galerkin orthonormale. Dans ce cas les matrices réduites s'écrivent simplement

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{V}_r^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r, \quad \mathbf{B}_r = \mathbf{V}_r^T \mathbf{B}. \quad (2.26)$$

- Si $\mathbf{W}_r \neq \mathbf{V}_r$, la projection est dite de Petrov-Galerkin ou oblique. De plus si $\mathbf{W}_r^T \mathbf{V}_r = \mathbf{I}_r$, les modes Φ_i et Ψ_j sont biorthonormaux entre eux et il s'agit d'une projection de Petrov-Galerkin biorthonormale. Les matrices réduites s'écrivent simplement

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{W}_r^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r, \quad \mathbf{B}_r = \mathbf{W}_r^T \mathbf{B}. \quad (2.27)$$

Afin de distinguer les modes des deux sous espaces \mathbf{V}_r et \mathbf{W}_r , les modes de \mathbf{V}_r sont dits directs ou modes de projection à droite, et les modes de \mathbf{W}_r sont dits adjoints ou modes de projection à gauche. L'espace \mathbf{V}_r est parfois appelé sous-espace primal et l'espace \mathbf{W}_r sous-espace dual. La biorthogonalité ou l'orthogonalité des deux espaces \mathbf{W}_r et \mathbf{V}_r permet de lever le problème lié à l'inversion du produit matriciel $\mathbf{W}_r^T \mathbf{V}_r$ et donc de s'assurer d'un meilleur conditionnement de la matrice réduite. La méthode de troncature est illustrée dans le schéma 2 ci-dessous à l'aide des produits matriciels, en supposant la biorthonormalité des deux espaces de projection, afin de mieux visualiser le passage d'un système de dimension n à un système de dimension r .

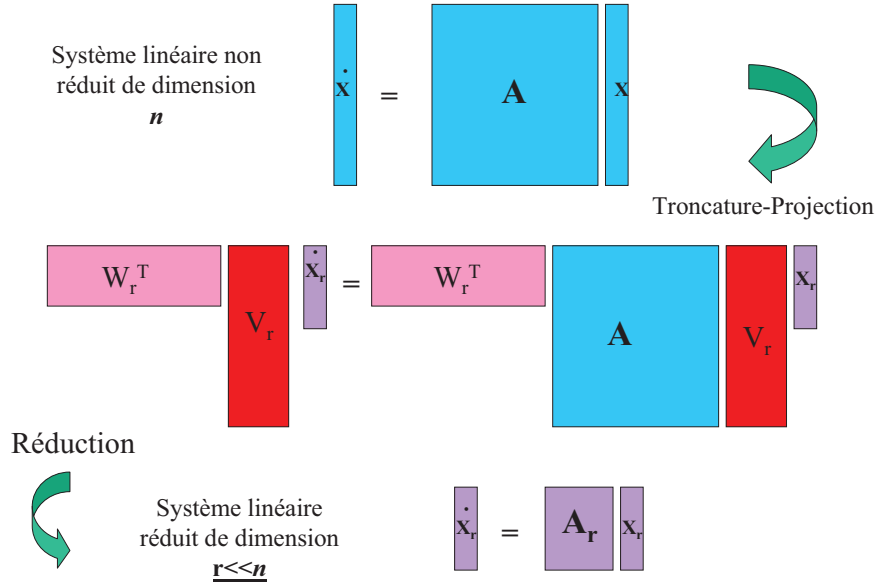


Schéma 2 : Illustration matricielle de la méthode de troncature

La concentration matricielle de l'information dynamique du système dans la base \mathbf{T} peut être analysée de la manière suivante. Dans la base \mathbf{T} , en posant respectivement

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_r \\ \mathbf{V}_{nr} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_r^T \\ \mathbf{W}_{nr}^T \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

la matrice transformée $\tilde{\mathbf{A}}$ s'exprime

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_r^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r & \mathbf{W}_r^T \mathbf{A} \mathbf{V}_{nr} \\ \mathbf{W}_{nr}^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r & \mathbf{W}_{nr}^T \mathbf{A} \mathbf{V}_{nr} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Cela suggère, dans le cas général, que si une projection de Petrov-Galerkin orthonormale est employée, le terme $\mathbf{W}_r^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r$ s'identifie à la matrice réduite \mathbf{A}_r . De ce fait, dans la base \mathbf{T} , l'information dynamique du système est concentrée dans le quart nord-ouest de la matrice transformée. Dans cette approche, la récupération de la matrice réduite s'exécute en introduisant la matrice de projection

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

avec \mathbf{I}_r la matrice identité d'ordre r , et en formant le produit

$$\mathbf{\Pi} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{\Pi} (\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}(t)) \quad (2.31)$$

avec $\tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_r \\ \tilde{\mathbf{B}}_{nr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_r^T \mathbf{B} \\ \mathbf{W}_{nr}^T \mathbf{B} \end{pmatrix}$. Le calcul explicite du produit donne

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r + \mathbf{W}_r^T \mathbf{A} \mathbf{V}_{nr} \mathbf{x}_{nr} + \tilde{\mathbf{B}}_r \mathbf{u} \quad (2.32)$$

Il reste à négliger le terme $\mathbf{W}_r^T \mathbf{A} \mathbf{V}_{nr} \mathbf{x}_{nr}$ pour rendre univoque le système. Ce dernier terme s'interprète comme le résidu du système dynamique portant sur la variable réduite \mathbf{x}_r . Le prin-

cial inconvénient de la méthode de troncature est la non conservation de l'état stationnaire ($\mathbf{H}(0) \neq \mathbf{H}_r(0)$).

2.3.2.2 Construction par méthode de résidualisation

Nous avons vu dans la méthode de construction par troncature précédente qu'il s'agit d'éliminer le terme $\mathbf{x}_{nr}(t)$ après avoir effectué le changement de base. Dans la procédure de résidualisation, ce n'est plus la composante $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ qui est tronquée mais sa dérivée $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t)$. Après cette troncature, le système transformé devient :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{rr} & \tilde{\mathbf{A}}_{rnr} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{nrnr} & \tilde{\mathbf{A}}_{nrnr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_r \\ \mathbf{x}_{nr} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_r \\ \tilde{\mathbf{B}}_{nr} \end{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{C}}_r \quad \tilde{\mathbf{C}}_{nr}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_r \\ \mathbf{x}_{nr} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.33)$$

L'équation simplifiée $\mathbf{0} = \tilde{\mathbf{A}}_{nrnr}\mathbf{x}_r + \tilde{\mathbf{A}}_{nrnr}\mathbf{x}_{nr} + \tilde{\mathbf{B}}_{nr}\mathbf{u}(t)$ permet d'éliminer la composante \mathbf{x}_{nr} dans l'équation non simplifiée et résoudre désormais :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}_r\mathbf{x}_r + \mathbf{B}_r\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_r\mathbf{x}_r + \mathbf{D}_r\mathbf{u} \end{cases} \quad (2.34)$$

avec $\mathbf{A}_r = \tilde{\mathbf{A}}_{rr} - \tilde{\mathbf{A}}_{rnr}\tilde{\mathbf{A}}_{nrnr}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}_{nrnr}$ (parfois appelé complément de Schur de $\tilde{\mathbf{A}}$), $\mathbf{B}_r = \tilde{\mathbf{B}}_r - \tilde{\mathbf{A}}_{rnr}\tilde{\mathbf{A}}_{nrnr}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_{nr}$, $\mathbf{C}_r = \tilde{\mathbf{C}}_r - \tilde{\mathbf{C}}_{nr}\tilde{\mathbf{A}}_{nrnr}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}_{nrnr}$ et $\mathbf{D}_r = -\tilde{\mathbf{C}}_{nr}\tilde{\mathbf{A}}_{nrnr}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_{nr}$. La principale propriété de la méthode de résidualisation est la conservation de l'état stationnaire. En effet, la fonction de transfert réduite vérifie $\mathbf{H}_r(0) = \mathbf{H}(0) = \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Malheureusement, la méthode n'est pas exploitable pour les problèmes de très grande dimension car elle nécessite le calcul et le stockage de l'inverse d'un des 4 blocs de la matrice étudiée. Dans la communauté du contrôle, cette méthode est dénommée *singular perturbation method* ou encore *residualization method*. En dynamique des structures, la méthode de résidualisation s'apparente aux méthodes de condensation matricielle. La plus célèbre d'entre elles est la méthode de Guyan [124] (*Guyan reduction*). Dans le cas stationnaire, les méthodes de condensation matricielle sont des techniques de réduction exactes dans le sens où aucune approximation n'est faite. C'est un cas particulier de la méthode de résidualisation. Le principe de la méthode de Guyan dans le cas statique est le suivant. Partant du système matriciel $\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}$, il s'agit tout d'abord d'identifier une transformation \mathbf{T} dont l'objectif est de réordonner l'ensemble des coordonnées en deux sous-ensembles de coordonnées \mathbf{x}_m et \mathbf{x}_e appelés respectivement ensemble de noeuds maîtres et ensemble de noeuds esclaves. Après application de cette transformation, le système est réécrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{me} \\ \mathbf{K}_{em} & \mathbf{K}_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{f}_e \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

La solution des équations en \mathbf{x}_m et \mathbf{x}_e est obtenue en appliquant le complément de Schur. La manipulation des blocs matriciels fournit dans un premier temps

$$\mathbf{K}_{mm}\mathbf{x}_m = \mathbf{f}_m - \mathbf{K}_{me}\mathbf{x}_e \quad (2.36)$$

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{f}_e - \mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{K}_{em}\mathbf{x}_m. \quad (2.37)$$

Il reste ensuite à effectuer la substitution de l'expression de \mathbf{x}_e dans \mathbf{x}_m , ce qui donne le système réduit

$$\mathbf{K}_r\mathbf{x}_m = \mathbf{f}_r, \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_r = (\mathbf{K}_{mm} - \mathbf{K}_{me}\mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{K}_{em}), \quad \mathbf{f}_r = \mathbf{f}_m - \mathbf{K}_{me}\mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{f}_e. \quad (2.38)$$

Le principal intérêt des méthodes de condensation réside dans la construction d'une matrice réduite qui gouverne seulement les degrés de liberté d'intérêt. La dimension de la matrice

réduite est directement reliée au nombre de coordonnées conservé.

La méthode de Guyan est aussi employée pour les problèmes instationnaires. Désormais, le système du second-ordre conservatif est considéré. Les matrices de masse \mathbf{M} , de raideur \mathbf{K} ainsi que le vecteur force \mathbf{f} sont une nouvelle fois partitionnés en une partie maître et une partie esclave. Le choix d'une telle partition représente la principale difficulté de la méthode. En général, les noeuds ou coordonnées sont sélectionnés comme maîtres s'ils sont associés à une forte inertie. Une autre hypothèse classique retenue est qu'aucune force n'est appliquée aux coordonnées esclaves. Le système peut ainsi s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{me} \\ \mathbf{M}_{em} & \mathbf{M}_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_m \\ \ddot{\mathbf{q}}_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{me} \\ \mathbf{K}_{em} & \mathbf{K}_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_m \\ \mathbf{q}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_m \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

On néglige ensuite les matrices d'inertie \mathbf{M}_{em} et \mathbf{M}_{ee} (cette étape motive la terminologie *static reduction*). Le second ensemble d'équations devient alors

$$\mathbf{K}_{em}\mathbf{q}_m + \mathbf{K}_{ee}\mathbf{q}_e = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{q}_e = -\mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{K}_{em}\mathbf{q}_m \quad (2.40)$$

Cette dernière expression peut être utilisée pour éliminer la partie esclave de telle manière que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_m \\ \mathbf{q}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{K}_{em} \end{pmatrix} \mathbf{q}_m = \mathbf{T}_r \mathbf{q}_m. \quad (2.41)$$

La matrice de projection \mathbf{T}_r est enfin utilisée pour construire le système réduit sous la forme

$$\mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{K}_r \mathbf{q}_m = \mathbf{f}_m \quad (2.42)$$

avec $\mathbf{M}_r = \mathbf{T}_r^T \mathbf{M} \mathbf{T}_r$ et $\mathbf{K}_r = \mathbf{T}_r^T \mathbf{K} \mathbf{T}_r$ les matrices de masse et de raideur réduites. La méthode de Guyan instationnaire combine donc la méthode de résidualisation avec le concept de la réduction de Guyan statique. De plus, l'introduction de la transformation \mathbf{T}_r permet d'interpréter l'approche comme une méthode de troncature. Bien que la méthode soit exacte pour les problèmes stationnaires, le fait de négliger deux sous-matrices d'inertie dans le cas instationnaire n'implique une réponse exacte qu'à fréquence nulle. Par conséquent, il n'est plus possible de négliger les deux matrices d'inertie dès que la fréquence de l'excitation augmente. Il s'agit du problème général rencontré avec les méthodes de résidualisation. De plus, une telle projection n'a pas de raison de conserver les fréquences propres du système original. Néanmoins, la méthode est bien appropriée pour les modèles de sous-structuration. Les méthodes de sous-structuration [209] cherchent à analyser le comportement dynamique d'une structure complexe à partir de la connaissance des comportements particuliers des sous-structures dont elle est constituée. Le principal challenge (et la principale difficulté!) de ces méthodes réside dans le traitement de la jonction des sous-structures c'est-à-dire le couplage de leurs interfaces communes. Les méthodes de sous-structuration diffèrent par le choix de la transformation \mathbf{T} utilisée et des techniques d'assemblage des sous-structures (méthode à interface bloquée, méthode à interface libre, méthode mixte).

2.4 Méthodes de construction des espaces réduits

Nous présentons dans cette section les principales méthodes de réduction linéaire dont l'objectif est la construction de la transformation $\mathbf{T} = [\mathbf{V}_r, \mathbf{V}_{nr}]$ permettant de répartir ou concentrer l'information dynamique du système dans un espace de dimension réduite $r \ll n$. La construction d'une telle transformation représente la première grosse difficulté de la théorie de la réduction de modèle. L'analyse de la littérature fait apparaître quatre grandes familles de méthodes visant à construire ce type de transformation :

- les méthodes modales basées sur la représentation modale du système ;

- les méthodes équilibrées basées sur la représentation équilibrée du système ;
- les méthodes d'identification basées sur le développement asymptotique de la fonction de transfert ;
- les méthodes empiriques basées sur la connaissance de solutions du système.

2.4.1 Méthodes de réduction modale

2.4.1.1 Représentation modale

La matrice \mathbf{A} est supposée diagonalisable avec n valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ distinctes pour simplifier. Par hypothèse, il existe donc une transformation \mathbf{T} telle que la matrice $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{\Lambda}$ soit diagonale avec

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Dans la représentation modale, les modes Ψ_i et Φ_i sont couramment appelés modes propres en mécanique. La représentation modale du système est donnée par l'expression :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{\Lambda}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y} &= \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (2.44)$$

Le principal avantage de cette représentation réside dans le fait que les équations sur les composantes du vecteur $\tilde{\mathbf{x}}$ sont découplées, simplifiant de manière drastique l'obtention de la solution du problème. De plus, rappelons que la représentation modale fournit directement les propriétés de stabilité du système. Plus précisément, posons $\lambda_i = \Re(\lambda_i) + j\Im(\lambda_i)$. La partie réelle $\Re(\lambda_i)$ correspond au taux de croissance associé au mode Φ_i tandis que la partie imaginaire $\omega_i = \Im(\lambda_i)$ décrit le comportement temporel des amplitudes du mode associé. Un mode Φ_i est dit :

- stable si $\Re(\lambda_i) < 0$, le mode est atténué ;
- instable si $\Re(\lambda_i) > 0$, le mode est amplifié ;
- neutre ou marginal si $\Re(\lambda_i) = 0$, le mode ne croît ni ne décroît ;
- oscillant si $\omega_i \neq 0$;
- stationnaire si $\omega_i = 0$.

On pose maintenant $\tilde{\mathbf{C}} = [\tilde{\mathbf{c}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{c}}_n]$ et $\tilde{\mathbf{B}} = [\tilde{\mathbf{b}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_n]^T$ avec $\tilde{\mathbf{c}}_i$ les colonnes de $\tilde{\mathbf{C}}$ et $\tilde{\mathbf{b}}_i$ les lignes de $\tilde{\mathbf{B}}$. Dans la représentation modale du système, la fonction de transfert s'exprime

$$\mathbf{H}(s) = \tilde{\mathbf{H}}(s) = \tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{\Lambda})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{r}_i}{s - \lambda_i} \quad (2.45)$$

avec $\mathbf{r}_i = (\mathbf{C}\Phi_i)(\Psi_i^T\mathbf{B}) = \tilde{\mathbf{c}}_i\tilde{\mathbf{b}}_i$ les résidus et λ_i les pôles de la fonction de transfert. L'égalité $\mathbf{H}(s) = \tilde{\mathbf{H}}(s)$ rappelle que la fonction de transfert est invariante par changement de base. Si $|\Re(\lambda_i)| = 0$, le système dynamique s'emballé lorsque une pulsation $s = j\omega$ se rapproche d'une pulsation propre $|j\Im(\lambda_i)|$ du système. Il s'agit du phénomène de résonance physique qui est à l'origine de nombreux problèmes sur tous les systèmes mécaniques. À partir de

la connaissance de la représentation modale, le système réduit peut être construit soit par troncature, soit par résidualisation. On parle alors respectivement de méthode de troncature modale ou de méthode de résidualisation modale. La résidualisation modale n'est pas utilisable pour les problèmes de grande dimension. Dans la représentation modale, le système s'écrit

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_r \\ \dot{\mathbf{x}}_{nr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_r \\ \mathbf{x}_{nr} \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Notons que toutes les matrices ne sont pas diagonalisables. En toute rigueur, toutes les matrices sont jordanisables. Autrement dit, elles admettent une décomposition sous forme de Jordan. Pour ne pas compliquer le formalisme théorique, nous nous limitons ici aux matrices diagonalisables. Les méthodes de calcul des modes propres et des valeurs propres sont itératives car il n'existe pas de méthodes exactes simples pour les problèmes de dimension strictement supérieure à 4 en vertu du théorème d'Abel. Une bonne revue des méthodes itératives est proposée par exemple par Saad [231].

2.4.1.2 Méthode de troncature modale

Dans l'espace fréquentiel, la méthode de troncature modale repose sur la conservation de certains pôles $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ et résidus $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_r)$ associés de la matrice de transfert \mathbf{H} (voir par exemple [76, 77, 267]). La fonction de transfert est approchée par la somme tronquée :

$$\mathbf{H}_r(s) = \sum_{i=1}^r \frac{\mathbf{r}_i}{s - \lambda_i} \quad (2.47)$$

Si les parties réelles des valeurs propres ne sont pas nulles, la qualité de l'approximation effectuée est estimée à l'aide de l'expression

$$\|\mathbf{H}(s) - \mathbf{H}_r(s)\|_\infty = \left\| \sum_{i=r+1}^n \frac{\tilde{\mathbf{c}}_i \tilde{\mathbf{b}}_i}{s - \lambda_i} \right\|_\infty \leq \sum_{i=r+1}^n \frac{\|\tilde{\mathbf{c}}_i \tilde{\mathbf{b}}_i\|_\infty}{|\Re(\lambda_i)|} \quad (2.48)$$

Le terme $\|\tilde{\mathbf{c}}_i \tilde{\mathbf{b}}_i\|$ représente la norme d'une matrice dans le cas général des systèmes *MIMO*. Le choix de la norme est arbitraire par équivalence des normes en dimension finie. Cette inégalité est importante car elle donne une indication sur le choix des modes à conserver dans la troncature. En effet, elle suggère que la réponse du système dépend fortement de l'interaction entre les pôles et les résidus. D'un point de vue numérique, il serait nécessaire de tester tous les modes pour connaître leurs importances relatives. Cela peut représenter un inconvénient notable lorsqu'on cherche à réduire des systèmes contrôlés de très grande dimension. Dans la méthode de troncature modale, l'espace \mathbf{V}_r est donc constitué des r modes propres associés aux r plus grandes valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$. Ces r modes sont les r premières colonnes de la transformation modale \mathbf{T} . L'espace \mathbf{W}_r est quant à lui formé des r premières lignes de la transformation modale inverse \mathbf{T}^{-1} . Par rapport à la construction du sous-espace \mathbf{W}_r , on distingue deux cas. Si la matrice est réelle symétrique le théorème fondamental de l'algèbre linéaire montre que $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$. Il est alors naturel de choisir une projection de Galerkin orthonormale puisque $\mathbf{W}_r = \mathbf{V}_r$ et $\mathbf{V}_r^T \mathbf{V}_r = \mathbf{I}_r$. Ce choix s'étend théoriquement à la classe plus générale des matrices dites normales c'est-à-dire vérifiant $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$. C'est par exemple le cas des matrices antisymétriques ($\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$) ou orthogonales ($\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$). Notons au passage que les valeurs propres des matrices antisymétriques sont imaginaires pures. En revanche, si la matrice n'est pas normale, l'existence d'une base orthogonale n'est plus assurée en général. Par conséquent, \mathbf{V}_r n'a pas de raison d'être orthonormale impliquant $\mathbf{T}^{-1} \neq \mathbf{T}^T$ *a priori*. Se pose alors la question du choix pour \mathbf{W}_r . L'approche naturelle consiste à calculer directement l'inverse de la transformation modale \mathbf{T} et d'identifier ses r premières lignes. La seconde approche est basée sur l'exploitation d'une propriété remarquable entre la matrice \mathbf{A} et sa

transposée conjuguée $\bar{\mathbf{A}}^T$ ($\bar{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}^T$ si \mathbf{A} est réelle). Par définition, les valeurs propres λ_i de la matrice \mathbf{A} associées aux vecteurs propres Φ_i , satisfont :

$$\mathbf{A}\Phi_i = \lambda_i\Phi_i. \quad (2.49)$$

Les modes propres Φ_i sont aussi dits modes propres directs. De même, les valeurs propres ξ_j de la matrice \mathbf{A}^T associées aux vecteurs propres Ψ_j , satisfont :

$$\bar{\mathbf{A}}^T\Psi_j = \xi_j\Psi_j. \quad (2.50)$$

Les modes propres Ψ_i sont aussi appelés modes propres adjoints. On montre par ailleurs que $\xi_i = \bar{\lambda}_i$ où $\bar{\lambda}_i$ dénote le complexe conjugué de λ_i . Combinons maintenant les deux équations (2.49) et (2.50) comme suit :

$$\bar{\Psi}_j^T\mathbf{A}\Phi_i - \bar{\Phi}_i^T\mathbf{A}^T\Psi_j = \lambda_i\bar{\Psi}_j^T\Phi_i - \xi_j\bar{\Phi}_i^T\Psi_j \quad (2.51)$$

En utilisant la propriété de symétrie du produit scalaire sesquilinéaire standard, il reste finalement :

$$(\lambda_i - \xi_j)\bar{\Psi}_j^T\Phi_i = 0. \quad (2.52)$$

Deux cas se présentent :

- si $i \neq j$, $\lambda_i - \xi_j \neq 0$ donc $\bar{\Psi}_j^T\Phi_i = 0$;
- si $i = j$, $\bar{\Psi}_j^T\Phi_i \neq 0$.

Ces deux relations définissent la biorthogonalité des deux ensembles $[\Phi_1, \dots, \Phi_n]$ et $[\Psi_1, \dots, \Psi_n]$. Autrement dit, un vecteur propre de la matrice \mathbf{A}^T est orthogonal à tous les vecteurs propres de la matrice \mathbf{A} , sauf à celui qui a une valeur propre conjuguée. Ces deux familles peuvent être de plus normalisées de telle sorte qu'elles soient biorthonormales entre elles. Par conséquent, une projection de Petrov-Galerkin biorthonormale peut être employée, l'espace \mathbf{W}_r étant donné par r modes propres de \mathbf{A}^T et l'espace \mathbf{V}_r étant donné par r modes propres de \mathbf{A} de même indice. Une dernière approche est d'utiliser le pseudo-inverse de Moore-Penrose. Connaissant l'espace \mathbf{V}_r non orthonormal, l'espace $\mathbf{W}_r = \mathbf{V}_r(\mathbf{V}_r^T\mathbf{V}_r)^{-1}$ est introduit, formant des sous-espaces biorthonormaux. Cependant \mathbf{W}_r ne s'identifie pas au sous-espace dual contenant les modes propres adjoints. De ce fait, l'utilisation du pseudo-inverse n'aboutit pas à une diagonalisation du système non symétrique et ne conservera pas les propriétés de stabilité du système non réduit.

2.4.1.3 En dynamique des structures

Rappelons tout d'abord que les problèmes structures sont formulés très souvent sous la forme (2.12) :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \quad (2.53)$$

La plupart du temps, les méthodes modales sont basées sur le calcul des modes propres du système conservatif homogène

$$\mathbf{K}\Phi = \omega^2\mathbf{M}\Phi \quad (2.54)$$

avec ω^2 les valeurs propres. Il s'agit d'un problème aux valeurs propres généralisé. Une idée classiquement retenue pour ce type de problème est de construire une base modale \mathbf{M} -orthonormale ce qui évite d'inverser la matrice de masse \mathbf{M} . La méthode générale pour résoudre un problème aux valeurs propres généralisé consiste à effectuer au préalable une

factorisation QZ des deux matrices \mathbf{M} et \mathbf{K} . La factorisation QZ est une généralisation de la factorisation de Schur plus connue. Pour rappel, la factorisation de Schur de la matrice \mathbf{A} est donnée par $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^T$ avec \mathbf{U} unitaire et \mathbf{T} triangulaire. La factorisation QZ est une factorisation de type Schur pour deux matrices. Par exemple, la décomposition QZ de \mathbf{M} et \mathbf{K} est donnée par $\mathbf{M} = \mathbf{Q}\mathbf{T}_M\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K} = \mathbf{Q}\mathbf{T}_K\mathbf{Z}$ avec \mathbf{Q} et \mathbf{Z} unitaires, \mathbf{T}_M et \mathbf{T}_K triangulaires. Une telle décomposition découple les équations et facilite la résolution du problème aux valeurs propres généralisé. Les matrices \mathbf{M} et \mathbf{K} étant idéalement définies positives et symétriques, les valeurs propres sont bien positives et elles traduisent les fréquences propres du système dynamique conservatif. Les valeurs propres s'interprètent directement comme les racines carrées des pulsations propres de la structure. L'emploi des méthodes modales en dynamique des structures est motivé par le constat que bien souvent seuls les modes de vibration basses fréquences sont nécessaires à la connaissance des déplacements. Physiquement, la troncature modale correspond à la restriction des modèles de structure sur une gamme donnée de fréquences. Par conséquent, la représentation des vibrations d'une structure par troncature modale est affectée par la non prise en compte de l'ensemble des composantes fréquentielles. Pour limiter les effets de la troncature modale, il peut être nécessaire d'identifier des modes jusqu'à une fréquence plus importante que la plus grande fréquence associée à l'excitation de la structure. Si f est la fréquence maximale associée aux fréquences caractéristiques de la dynamique analysée, une troncature modale poussée à $1.5f$ devrait donner de meilleurs résultats. C'est le critère de Rubin. Rappelons aussi que la méthode de troncature ne conserve pas l'état stationnaire. Des corrections statiques et/ou quasi-statiques sont très souvent rajoutées pour cette raison. Les méthodes modales sont régulièrement couplées avec les techniques de condensation matricielle (méthode de Guyan) et de sous-structuration. Les méthodes de condensation permettent de représenter seulement les degrés de liberté d'intérêt. Les méthodes de sous-structuration, quant à elles, permettent de prédire le comportement vibratoire globale d'une structure complexe à partir du comportement vibratoire de ses différentes sous-structures. La méthode de Craig-Bampton est certainement la technique la plus populaire pour réaliser les jonctions des modes propres des différentes sous-structures [74, 75, 165]. Ces approches sont bien plus performantes que la méthode de Guyan. D'autres méthodes performantes assimilées ont aussi été proposées. Citons la méthode *Improved Reduced System* (acronyme IRS) proposée par O'Callahan [109, 197] ou encore la méthode *System Equivalent Reduction Expansion Process* (acronyme SEREP) [196]. Pour terminer, la compréhension du comportement dynamique des structures réelles nécessite de prendre en compte le terme d'amortissement ce qui introduit la résolution d'un problème aux valeurs propres du second ordre

$$(-\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{D} + \mathbf{K})\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{0}. \quad (2.55)$$

Une très bonne revue des méthodes modales pour les systèmes quadratiques a été proposée par Tisseur et Meerbergen [265]. De plus, les problèmes aux valeurs propres du second ordre sont motivés avec de nombreux exemples issus de la mécanique des structures, de la vibroacoustique et des fluides. En dynamique des structures, les problèmes quadratiques sont d'un grand intérêt pour les systèmes amortis. Une structure est en effet caractérisée dans le cas général par ses propriétés de masse, d'amortissement et de raideur. Par exemple, le traitement des structures en mouvement de rotation nécessite de prendre en compte la force de Coriolis représentée par le terme $\mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}$ avec \mathbf{G} une matrice antisymétrique. Ces systèmes gyroscopiques peuvent de plus poser des problèmes de stabilité. Afin d'analyser l'influence de l'amortissement, il est par ailleurs particulièrement intéressant de comparer les modes propres du système dissipatif avec ceux du système conservatif. Ces problèmes restent une voie de recherche importante en dynamique des structures.

2.4.1.4 En dynamique des fluides

En mécanique des fluides, on s'intéresse au spectre de l'opérateur de Navier-Stokes linéarisé incompressible afin d'analyser le comportement d'un écoulement stationnaire ou moyen pré-calculé. Le but de ce type d'analyse est de comprendre les mécanismes d'instabilité causant la transition des écoulements laminaires vers les écoulements turbulents. L'analyse de la stabilité temporelle des écoulements joue donc un rôle important pour comprendre les mécanismes fondamentaux à l'origine des tourbillons, etc. Pour ce faire, on considère une fluctuation harmonique en temps $\delta\mathbf{u}$ de l'écoulement autour d'une solution stationnaire $\bar{\mathbf{u}}$. Le vecteur vitesse et la pression sont décomposées de la manière suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \epsilon\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \epsilon\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})e^{-j\omega t} \quad (2.56)$$

Cette décomposition est introduite dans les équations de Navier-Stokes non linéaires. Le modèle linéarisé est obtenu facilement en éliminant tous les termes contenant des puissances de ϵ strictement supérieures à 1 et en supposant que le champ moyen ou stationnaire vérifie les équations non linéaires. La dynamique des perturbations de pression et vitesse ($\delta p, \delta\mathbf{u}$) est régie par le modèle continue :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} \underbrace{\begin{pmatrix} \delta\dot{\mathbf{u}} \\ \delta\dot{p} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}\nabla + \nabla\bar{\mathbf{u}} + \Delta/Re & \nabla \\ \nabla\cdot & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \delta\mathbf{u} \\ \delta p \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \quad (2.57)$$

avec Re le nombre adimensionnel de Reynolds, Id l'opérateur identité, ∇ l'opérateur gradient et Δ l'opérateur laplacien. En accolades sont indiqués les opérateurs discrets associés. C'est un très bon exemple de système descripteur. La matrice \mathbf{E} n'est en effet pas inversible à cause du terme de divergence nulle. Barbagallo et *al.* [24] ont récemment proposé une procédure pour résoudre cet aspect du problème. Il est important de noter que l'opérateur linéarisé n'est pas symétrique (opérateur associé non auto-adjoint) et est susceptible d'être instable suivant la nature de l'écoulement moyen. Le calcul des modes propres d'un tel système est bien plus complexe que les systèmes rencontrés en dynamique des structures. Il est nécessaire de calculer les modes adjoints en particulier. De plus, la dimension du problème est souvent bien plus importante. Les approches matricielles deviennent rapidement très contraignantes. En particulier, une factorisation de type QZ est rarement envisageable. Pour répondre au défaut de la formulation matricielle et notamment du stockage de la matrice, des méthodes (*matrix-free method*) émergent [4, 20]. Ces techniques basées sur l'intégration d'un terme de pseudo-temps sont très prometteuses. La stabilité des écoulements est un vaste domaine. De plus, une terminologie spécifique est utilisée en fonction des hypothèses effectuées sur l'écoulement de base :

- si deux directions de l'écoulement sont homogènes (écoulements parallèles) ou périodiques, on parle de stabilité locale et les modes propres sont dits locaux ;
- si une seule direction de l'écoulement est homogène, on parle de stabilité biglobale et les modes propres sont dits biglobaux ;
- si aucune direction de l'écoulement n'est supposée homogène, on parle de stabilité globale ou triglobale et les modes sont dits globaux ou triglobaux suivant les équipes travaillant sur ces notions.

Il s'agit ici de stabilité temporelle, il s'ajoute aussi la notion de stabilité spatiale. Le livre de Schmid et Henningson [241] introduit ces différents concepts. Il existe de nombreux résultats théoriques pour la stabilité locale où émergent notamment les concepts importants d'instabilité convective et d'instabilité absolue [65, 143]. Les deux autres types de stabilité ne sont apparues que très récemment avec l'amélioration de la capacité de calcul informatique

[163]. Une revue des problèmes de stabilité biglobale et triglobale a été proposée par Theofilis [259, 260]. L'analyse de la stabilité globale a récemment été étendue aux équations de Navier-Stokes linéarisées en régime compressible par Robinet [220], Brès et Colonius [51] et Mack et Schmid [181]. Le spectre des équations de Navier-Stokes compressible linéarisées est cependant particulièrement compliqué à analyser en raison des différentes échelles physiques présentes ou des multiples interactions modales possibles (acoustique, entropique et tourbillonnaire). C'est un sujet de recherche très ouvert. Dans toutes ces problématiques de stabilité, les modes propres ne sont pas forcément utilisés pour construire un modèle réduit. Très souvent, le calcul se limite à l'identification des modes les moins stables qui sont généralement en nombre restreint dans les cas traités [5, 19]. Dans le contexte des écoulements compressibles, le calcul des modes propres est certainement mieux posé pour les systèmes fermés (écoulements internes) en raison des conditions aux limites de type paroi. Par exemple, Caraeni [57] exploite les modes propres de l'opérateur discret associé aux équations d'Euler linéarisées pour prédire les fréquences de résonance dans une chambre de combustion.

L'apparition des modèles réduits fluides fondés sur les modes propres a été motivée par la volonté de contrôler les écoulements et les systèmes aéroélastiques. La réduction modale pour traiter les systèmes aéroélastiques instationnaires a émergé au début des années 90 avec notamment les travaux de Mahajan et *al.* [182]. Hall [128] propose de construire un modèle réduit aérodynamique à partir des modes propres d'un modèle fluide parfait incompressible et irrotationnel (*vortex lattice model*). L'approche a aussi été étendue au modèle fluide potentiel linéarisé par Florea et Hall [99] puis au modèle de couche limite (visqueuse) [100] et enfin aux équations d'Euler linéarisées par Romanowski [221, 222]. Par ailleurs, les modèles réduits se sont révélés bien plus performants en ajoutant des corrections statiques et quasi-statiques [261] (non conservation de l'état stationnaire dans la méthode de troncature modale). Une revue de ces différents travaux a été proposée par Dowell et *al.* [81]. Notons que Sarkar et *al.* [235] ont récemment reconsidéré le modèle *vortex lattice model* en appliquant la méthode SEREP. Dans toutes ces études, la dimension du problème n'est malgré tout pas très importante (< 10000).

Dans le contexte du contrôle des écoulements, Allan [7] est l'un des précurseurs de la réduction modale appliquée au contrôle des équations de Navier-Stokes incompressible linéarisées. Il calcule les modes propres directs dans le cas d'un système fermé (cavité entraînée) et semi-fermé (couche cisillée entre deux plaques). Par contre, les matrices réduites construites ne sont certainement pas diagonales car les modes propres adjoints ne semblent pas avoir été calculés. Par la suite, Gadoin et *al.* [111] ont proposé d'introduire directement les modes propres directs et adjoints dans le modèle non linéaire afin de construire un modèle réduit non linéaire. La méthode a été appliquée aux cas du phénomène de convection dans une cavité fermée en s'appuyant sur les équations de Navier-Stokes incompressible non isotherme (approximation de Boussinesq). Cette même procédure a été reprise récemment par Akervik et *al.* [4, 6] puis Ehrenshtein et Gallaire [82] mais dans le but de contrôler des écoulements. Barbagallo et *al.* [24] ont cependant rappelé la difficulté à choisir les bons modes propres dans le contexte du contrôle en exploitant l'inégalité (2.48). De plus, ils montrent l'importance physique des modes stables lorsqu'un modèle réduit est construit. En effet, construire un modèle réduit seulement à partir des modes instables (modes les plus énergétiques) n'est pas suffisant. Une revue de ces différentes problématiques a été récemment proposée par Sipp et *al.* [251].

2.4.2 Méthodes de réduction équilibrée

Les méthodes de réduction équilibrée sont spécifiques aux systèmes contrôlés. Il est nécessaire d'introduire au préalable les notions d'observabilité et de commandabilité.

2.4.2.1 Notions de contrôlabilité et d'observabilité

Le système LTI (2.1) est dit observable si et seulement si la matrice $[\mathbf{C}; \mathbf{C}\mathbf{A}; \dots; \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}]$ est de rang n . Il est dit contrôlable (ou commandable) si et seulement si la matrice $[\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ est de rang n . Donnons une interprétation succincte de ces deux notions clefs. Dans le cas de la commandabilité, étant donné un état initial $\mathbf{x}(t_0)$ et un état final $\mathbf{x}(t_f)$ arbitraire du système, il existe toujours un signal d'entrée \mathbf{u} (une commande) qui appliquée au système sur l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$ permet de rejoindre l'état final partant de l'état initial. La contrôlabilité dépend des excitateurs. En ce qui concerne l'observabilité, l'observation des entrées \mathbf{u} et des sorties \mathbf{y} du système sur $[t_0, t_f]$ permet de retrouver l'état initial du système $\mathbf{x}(t_0)$. L'observabilité dépend des capteurs ou plus généralement des lois linéaires observées. Les deux conditions sur le rang des matrices définies plus haut sont aussi appelées critères de Kalman. Pour caractériser et quantifier ces deux notions, on définit les matrices grammiennes de contrôlabilité $\mathcal{G}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et d'observabilité $\mathcal{G}_o \in \mathbb{R}^{n \times n}$ par :

$$\mathcal{G}_c = \int_{t_0}^{t_f} \exp(\mathbf{A}t) \mathbf{B} \mathbf{B}^T \exp(\mathbf{A}^T t) dt \quad (2.58)$$

$$\mathcal{G}_o = \int_{t_0}^{t_f} \exp(\mathbf{A}^T t) \mathbf{C}^T \mathbf{C} \exp(\mathbf{A}t) dt \quad (2.59)$$

Si t_f est fini, on dit que le gramien est fini sinon on dit qu'il est infini. Ces matrices sont symétriques semi-définies positives par définition. Elles constituent les briques élémentaires de la représentation équilibrée du système. On montre que les grammiens sont solutions des équations différentielles de Lyapunov suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{G}}_c &= \mathbf{A} \mathcal{G}_c + \mathcal{G}_c \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T \\ \mathcal{G}_c(t_0) &= \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.60)$$

$$\begin{cases} -\dot{\mathcal{G}}_o &= \mathbf{A}^T \mathcal{G}_o + \mathcal{G}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} \\ \mathcal{G}_o(t_f) &= \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.61)$$

En particulier, les grammiens finis sont définis lorsque $t_f \rightarrow \infty$ si la matrice \mathbf{A} est de Hurwitz. Elles sont alors solutions des équations matricielles algébriques :

$$\mathbf{A} \mathcal{G}_c + \mathcal{G}_c \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T = \mathbf{0} \quad (2.62)$$

et

$$\mathbf{A}^T \mathcal{G}_o + \mathcal{G}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{0}. \quad (2.63)$$

Notons pour terminer que les grammiens de contrôlabilité et d'observabilité sont équivalents dans le cas particulier où la matrice \mathbf{A} est symétrique et $\mathbf{B} \mathbf{B}^T = \mathbf{C} \mathbf{C}^T$. Si toutes les inconnues sont contrôlées et observées ($\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{I}_n$), il est intéressant de remarquer que les grammiens se réduisent à

$$\mathcal{G}_c = \int_{t_0}^{t_f} \exp(\mathbf{A}t) \exp(\mathbf{A}^T t) dt, \quad \mathcal{G}_o = \int_{t_0}^{t_f} \exp(\mathbf{A}^T t) \exp(\mathbf{A}t) dt. \quad (2.64)$$

L'équivalence des deux grammiens est alors assurée si la matrice \mathbf{A} est normale ($\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$) puisque dans ce cas les deux exponentielles de matrice $\exp(\mathbf{A}^T t)$ et $\exp(\mathbf{A}t)$ commutent. Enfin il est important de souligner que le gramien d'observabilité reste important même lorsque tous les états sont observés *i.e.* $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ ou $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n$ et d'autant plus lorsque la matrice \mathbf{A} n'est pas symétrique.

2.4.2.2 Représentation d'état équilibrée

Un système est dit équilibré s'il existe une transformation \mathbf{T} telle que :

$$\mathbf{T}\mathcal{G}_c\mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-T}\mathcal{G}_o\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

où $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \cdots \sigma_n \geq 0$ sont appelées valeurs singulières de Hankel, $\widetilde{\mathcal{G}}_c = \mathbf{T}\mathcal{G}_c\mathbf{T}^T$ et $\widetilde{\mathcal{G}}_o = \mathbf{T}^{-T}\mathcal{G}_o\mathbf{T}^{-1}$ sont les gramiens transformés. Il s'agit donc de chercher une base dans laquelle les gramiens seront égaux, autrement-dit une transformation qui diagonalise simultanément les deux gramiens ($\widetilde{\mathcal{G}}_c\widetilde{\mathcal{G}}_o = \mathbf{T}\mathcal{G}_c\mathcal{G}_o\mathbf{T}^{-1}$). L'écriture du système dans une telle base est appelée représentation équilibrée. De nouveau, posons $\mathbf{x} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}}$ la forme équilibrée s'exprime alors :

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \quad (2.66)$$

$$\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (2.67)$$

avec $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$, $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$. Les modes de la transformation équilibrée \mathbf{T} sont appelés modes équilibrés. À partir de la transformation équilibrée, le modèle réduit peut être obtenu une nouvelle fois soit par troncature (méthode de troncature équilibrée) soit par résidualisation (méthode de résidualisation équilibrée). La résidualisation équilibrée [97, 172] n'est pas exploitable pour les problèmes de grande dimension.

2.4.2.3 Méthode de troncature équilibrée

La méthode de troncature équilibrée a été introduite par Moore [188]. Le principe de la méthode est d'obtenir la fonction de transfert réduite $\mathbf{H}_r(s)$ en éliminant dans l'espace d'état associé à la représentation d'état $\mathbf{H}(s)$ les sous-espaces qui seraient peu observables et/ou peu commandables. Il s'agit en d'autres termes d'éliminer, de tronquer les modes simultanément peu observables et peu contrôlables. En effet, dans la base équilibrée, les fortes directions d'observabilité et de contrôlabilité coïncident. De cette manière, seuls les états les plus contrôlables et les plus observables sont retenus. Quantitativement, cette idée provient du fait qu'on observe souvent une décroissance rapide des valeurs singulières de Hankel. On peut alors s'attendre à obtenir un modèle réduit de très faible dimension, s'il est effectivement possible de tronquer les modes équilibrés associés aux plus petites valeurs singulières de Hankel ou de manière équivalente à ne retenir que les modes associés aux plus grandes valeurs singulières. Dans la méthode de troncature équilibrée, l'espace \mathbf{V}_r est donc constitué des r modes équilibrés associés aux r plus grandes valeurs singulières de Hankel ($\sigma_1, \dots, \sigma_r$). Ces r modes sont les r premières colonnes de la transformation équilibrée \mathbf{T} . L'espace \mathbf{W}_r est quant à lui formé des r premières lignes de la transformation équilibrée inverse \mathbf{T}^{-1} . Dans le cas très particulier où les gramiens de contrôlabilité et d'observabilité sont égaux, la transformation \mathbf{T} est orthogonale ce qui implique que $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$. Les méthodes équilibrées sont importantes car elles fournissent une erreur L^∞ bornée entre la fonction de transfert du modèle non réduit et celle du système réduit. Elles conservent en outre la stabilité du système original. La qualité de l'approximation équilibrée peut être évaluée à l'aide des expressions suivantes :

$$\|\mathbf{H} - \mathbf{H}_r\|_\infty := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|\mathbf{H} - \mathbf{H}_r\|_2 \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i \quad (2.68)$$

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_r(t)\|_2 \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i \|\mathbf{u}(t)\|_2 \quad (2.69)$$

2.4.2.4 Calcul des modes équilibrés

Par définition, la transformation équilibrée est construite en calculant les n éléments propres

$$\mathcal{G}_c \mathcal{G}_o \Phi_i = \lambda_i \Phi_i \quad (2.70)$$

avec $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$. Ce problème aux valeurs propres n'est jamais résolu directement car il n'apparaît pas comme un problème symétrique (sauf si les grammiens sont égaux). Les méthodes équilibrées se distinguent principalement par la manière de calculer les deux grammiens et les modes équilibrés associés. Tout d'abord, les grammiens infinis sont, rappelons-le, solutions des équations de Lyapunov algébriques. Il s'agit donc de résoudre de telles équations. Il existe une littérature très abondante concernant l'estimation de la solution des équations de Lyapunov. Les équations de Lyapunov admettent une unique solution en supposant que la matrice \mathbf{A} est de Hurwitz. Puisque les grammiens sont symétriques, ils sont solutions d'un système de $n(n+1)/2$ équations linéaires à $n(n+1)/2$ inconnues. Les différentes techniques de résolution dépendent de la dimension et du caractère creux de la matrice \mathbf{A} impliquée :

- si $n = \mathcal{O}(10^2)$, la méthode de résolution la plus naïve des équations algébriques de Lyapunov repose sur le produit de Kronecker qui permet de traduire les équations de Lyapunov en un système linéaire. Cette méthode naïve a une complexité en n^6 .
- si $n \leq 10^4$, on utilise souvent l'algorithme de Bartels-Stewart qui débute par une décomposition de Schur de la matrice \mathbf{A} .
- si $n \leq 10^5$, on utilise des méthodes itératives basées sur les espaces de Krylov [147, 148, 149, 203] ou encore basées sur l'*Alternate Direction Implicit* [113, 166, 173, 202] (acronyme ADI)
- si $n \geq 10^4$, les grammiens sont estimés à partir d'intégration temporelle.

L'algorithme classique de construction de la transformation équilibrée nécessite d'introduire la décomposition aux valeurs singulières (SVD : *Singular Value Decomposition*) d'une matrice carrée ou rectangulaire. La SVD d'une matrice $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ est définie par la factorisation

$$\mathbf{B} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^* \quad (2.71)$$

avec $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ telle que $\mathbf{U} \mathbf{U}^* = \mathbf{I}_m$, $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telle que $\mathbf{V} \mathbf{V}^* = \mathbf{I}_n$ et

$$\Sigma = \left[\begin{array}{cc|c} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \mu_k \\ \hline 0 & & \\ \mathbf{0}_{m-k \times k} & & \mathbf{0}_{m-k \times (n-k)} \end{array} \right] \quad (2.72)$$

Les μ_i , appelées valeurs singulières, sont des scalaires réels strictement positifs ordonnés de façon décroissante : $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_k \geq 0$. Cette factorisation matricielle existe toujours. Notons au passage que la SVD d'une matrice symétrique définie positive est identique à sa représentation modale. Nous pouvons maintenant présenter les principales étapes menant à la formation des modes équilibrés :

- calculer les grammiens de contrôlabilité \mathcal{G}_c et d'observabilité \mathcal{G}_o en résolvant les deux équations matricielles de Lyapunov ;

- calculer les décompositions de Cholesky des gramiens $\mathcal{G}_c = \mathbf{L}_c \mathbf{L}_c^T$ et $\mathcal{G}_o = \mathbf{L}_o \mathbf{L}_o^T$;
- calculer la SVD de $\mathbf{L}_o^T \mathbf{L}_c$, obtention de la factorisation $\mathbf{L}_o^T \mathbf{L}_c = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T$ avec $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$ et $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}$;
- former la transformation équilibrée $\mathbf{T} = \mathbf{L}_c \mathbf{V} \Sigma^{-1/2}$ et son inverse $\mathbf{T}^{-1} = \Sigma^{-1/2} \mathbf{U}^T \mathbf{L}_o^T$;
- tronquer la transformation équilibrée, \mathbf{V}_r est formée des premières colonnes de \mathbf{T} et \mathbf{W}_r est formée des premières lignes de \mathbf{T}^{-1}

Cette méthode est parfois dénommée *Square Root Balanced Truncation*. Les méthodes équilibrées ont aussi été étendues pour les systèmes descripteurs [253], du second ordre en temps [59, 63, 204]. Notons au passage que Stykel [253] a proposé de réduire le modèle de Stokes semi-discrétisé. Pour des dimensions très importantes, ce sont les gramiens finis qui sont exploités. Ils sont estimés à partir de simulations dynamiques. C'est la raison pour laquelle, ils sont parfois appelés gramiens empiriques (idée qui remonte aux travaux de Lall et *al.* dans le contexte du contrôle non linéaire [155, 157]). Le gramien fini de contrôlabilité est approché par une méthode de quadrature numérique

$$\mathcal{G}_c = \int_{t_0}^{t_f} \exp(\mathbf{A}t) \mathbf{B} \mathbf{B}^T \exp(\mathbf{A}^T t) dt \quad (2.73)$$

$$\approx \sum_{i=1}^{nt} \alpha_i \exp(\mathbf{A}t_i) \mathbf{B} \mathbf{B}^T \exp(\mathbf{A}^T t_i) \quad (2.74)$$

avec α_i les poids de quadrature. Les réponses directes $\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t) \mathbf{B}$ sur $[t_0, t_f]$ sont solutions des q problèmes aux valeurs initiales

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{B} \mathbf{e}_i \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq q \quad (2.75)$$

avec $\mathbf{B} \mathbf{e}_i = \mathbf{b}_i$ les vecteurs colonnes de la matrice \mathbf{B} . La matrice

$$\mathbf{X} = [\sqrt{\alpha_1} \exp(\mathbf{A}t_1) \mathbf{B}, \dots, \sqrt{\alpha_{nt}} \exp(\mathbf{A}t_{nt}) \mathbf{B}] \quad (2.76)$$

est ensuite formée. On montre finalement que $\mathcal{G}_c(t_f) \simeq \mathbf{X} \mathbf{X}^T$. De même pour le gramien fini d'observabilité, les réponses $\mathbf{z}(t) = \exp(\mathbf{A}^T t) \mathbf{C}^T$ sur $[t_0, t_f]$ sont solutions des p problèmes aux valeurs initiales

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_i = \mathbf{A}^T \mathbf{z}_i \\ \mathbf{z}_i(0) = \mathbf{C}^T \mathbf{e}_i \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq p \quad (2.77)$$

La matrice des réponses du problème dual

$$\mathbf{Z} = [\sqrt{\alpha_1} \exp(\mathbf{A}^T t_1) \mathbf{C}^T, \dots, \sqrt{\alpha_{nt}} \exp(\mathbf{A}^T t_{nt}) \mathbf{C}^T] \quad (2.78)$$

est ensuite formée et on montre que $\mathcal{G}_o(t_f) \simeq \mathbf{Z} \mathbf{Z}^T$. À partir du moment où les deux ensembles de solutions \mathbf{X} et \mathbf{Z} sont connus, le calcul des modes équilibrés est similaire à la méthode *Square Root Balanced Truncation* présentée ci-dessus. L'algorithme débute par contre directement par la SVD de la matrice $\mathbf{Z}^T \mathbf{X} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T$ car les gramiens approchés $\mathbf{X} \mathbf{X}^T$ et $\mathbf{Z} \mathbf{Z}^T$ ne sont d'une part pas nécessaires pour l'obtention des modes et d'autre part impossible à stocker [160] (ce sont des matrices denses de grande dimension!). Les deux espaces de projection équilibrée sont donnés respectivement par $\mathbf{V}_r = \mathbf{X} \mathbf{V}_1 \Sigma_1^{-1/2}$ (modes directs) et $\mathbf{W}_r = \mathbf{Z} \mathbf{U}_1 \Sigma_1^{-1/2}$ (modes adjoints) avec \mathbf{V}_1 et \mathbf{U}_1 constituées des r premières colonnes respectives de \mathbf{V} et \mathbf{U} . La

biorthogonalité des deux espaces \mathbf{V}_r et \mathbf{W}_r découle de la SVD de $\mathbf{Z}^T \mathbf{X}$ puisque

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \Rightarrow \underbrace{(\mathbf{\Sigma}_1^{-1/2} \mathbf{U}_1^T \mathbf{Z}^T)}_{\mathbf{W}_r^T} \underbrace{(\mathbf{X} \mathbf{V}_1 \mathbf{\Sigma}_1^{-1/2})}_{\mathbf{V}_r} = \mathbf{I}_r \quad (2.79)$$

Cette méthode d'estimation empirique des grammiens devient trop coûteuse si le nombre d'entrées et de sorties est important (systèmes MIMO). Rowley [223] propose une méthode de projection (*output projection method*) pour les systèmes présentant un nombre important de sorties (par exemple $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n$). Il utilise les modes les plus contrôlables pour calculer les modes les plus observables. La méthode de Rowley a été formalisée en dimension infinie par Singler [250]. Dans le contexte du contrôle des écoulements, la méthode équilibrée empirique est appliquée pour réduire la contribution stable des écoulements [3, 21, 24, 146]. En effet, l'hypothèse fondamentale de la méthode équilibrée est la stabilité asymptotique du modèle haute-fidélité.

2.4.2.5 Cas des systèmes instables

L'hypothèse fondamentale d'application des méthodes équilibrées est la stabilité asymptotique de la matrice non réduite \mathbf{A} (matrice de Hurwitz). En effet, les grammiens infinis ne sont pas définis pour des systèmes instables. Cette hypothèse est *a priori* légitime pour les modèles physiques linéaires. Les systèmes potentiellement instables se rencontrent lorsqu'on traite des systèmes linéarisés autour d'un point d'équilibre dans le but d'analyser par exemple sa stabilité. Mais alors peut-on utiliser les méthodes équilibrées dans ce cadre? Le principe général est de séparer les états stables des états instables. Dans la représentation modale, le système s'écrit

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_u \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

où \mathbf{x}_u caractérise les états instables et \mathbf{x}_s les états stables. La méthode de réduction équilibrée est alors appliquée seulement sur la partie stable du système [63, 119, 192, 286] :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_s \\ \mathbf{x}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_r^T \mathbf{A}_s \mathbf{V}_r & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_s \\ \mathbf{x}_u \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

où \mathbf{a}_s sont les états réduits stables, \mathbf{V}_r et \mathbf{W}_r sont les sous-espaces constitués des modes équilibrés directs et adjoints respectivement.

2.4.2.6 Approches fréquentielles

Les approches temporelles sont de bonnes approximations du système pour les problèmes large bande en terme de contenu fréquentiel. Mais elle ne permettent pas en soi de minimiser l'erreur sur une bande de fréquences particulière. Dans de nombreuses applications, il serait pourtant souhaitable de réduire l'erreur si on se limite à une petite gamme de fréquences d'intérêt. Suivant les applications recherchées, il peut être important d'avoir un bon modèle à certaines fréquences spécifiques, pas nécessairement à fréquence nulle ($s = 0$) ou encore à fréquence infinie ($s = \infty$). Les méthodes équilibrées ont été étendues à la représentation fréquentielle dans ce but. Le principe de la méthode *Frequency-weighted balanced Reduction* (acronyme FWBT) est de minimiser l'erreur entre la fonction de transfert originale et la fonction de transfert réduite en rajoutant un poids aux entrées-sorties. Cela revient à minimiser l'erreur à l'aide d'un critère relatif de la forme

$$\|\mathbf{H}_g(s)(\mathbf{H}(s) - \mathbf{H}_r(s))\mathbf{H}_d(s)\|. \quad (2.82)$$

La principale difficulté d'un tel critère est de réussir à construire les poids \mathbf{H}_g et \mathbf{H}_d [84, 85, 268, 276, 285]. En pratique, la FWBT est utilisée sans poids en exploitant la représentation fréquentielle des gramiens sur une bande fréquentielle souhaitée $[\omega_1, \omega_2]$. L'avantage de cette méthode est donc d'être plus flexible sur la conservation de certaines fréquences. L'idée d'utiliser un critère relatif est intéressante, en particulier pour tenter de combiner la méthode modale avec la méthode équilibrée par l'intermédiaire d'une pondération par les fréquences propres [285]. En exploitant le théorème de Parseval, les gramiens temporels infinis s'écrivent respectivement dans l'espace fréquentiel :

$$\mathcal{G}_{cf} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega \mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{B}^T (-j\omega \mathbf{I}_n - \mathbf{A}^T)^{-1} d\omega \quad (2.83)$$

$$\mathcal{G}_{of} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-j\omega \mathbf{I}_n - \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{C} (j\omega \mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} d\omega \quad (2.84)$$

De manière analogue à l'introduction des gramiens finis dans le domaine temporel, sont définis les gramiens finis dans le domaine fréquentiel comme la restriction des deux gramiens ci-dessus à une bande de fréquence $[\omega_1, \omega_2]$ d'étude. Les méthodes équilibrées fréquentielles procèdent de la même façon que dans le domaine temporel. Pour les problèmes de grande dimension, une procédure analogue au domaine temporel peut être appliquée. Cette fois-ci, pour chaque fréquence d'intérêt, des systèmes linéaires du type $(j\omega \mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{x}_\omega = \mathbf{b}_i$ et $(j\omega \mathbf{I}_n - \mathbf{A}^T)\mathbf{z}_\omega = \mathbf{c}_i$ sont résolus. Les gramiens finis sont alors approchés dans le domaine fréquentiel par :

$$\mathcal{G}_{cf} = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} (j\omega \mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{B}^T (-j\omega \mathbf{I}_n - \mathbf{A}^T)^{-1} d\omega \approx \sum_{i=1}^m \frac{1}{2\pi} \omega_i \mathbf{x}_{\omega_i} \mathbf{x}_{\omega_i}^T \quad (2.85)$$

$$\mathcal{G}_{of} = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} (-j\omega \mathbf{I}_n - \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{C} (j\omega \mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} d\omega \approx \sum_{i=1}^m \frac{1}{2\pi} \omega_i \mathbf{z}_{\omega_i} \mathbf{z}_{\omega_i}^T \quad (2.86)$$

Cette approche a été proposée par Willcox [281] pour réduire le modèle d'Euler linéarisé discret dans le contexte de l'aéroélasticité. Bui-Thanh et Willcox [54] l'ont par la suite étendu aux systèmes présentant beaucoup d'entrées et de sorties (systèmes MIMO) en s'inspirant de la méthode de projection proposée par Rowley. Récemment, Dergham [80] propose d'appliquer la méthode aux équations de Navier-Stokes incompressible. L'approche fréquentielle est motivée par le fait qu'elle reste utilisable même pour les systèmes non asymptotiquement stables, sans avoir besoin de soustraire au préalable les modes neutres et/ou instables. Ces travaux sont très prometteurs. Le principal coût associé à cette approche est la résolution de nombreux systèmes linéaires, dépendant du nombre de fréquences pour chaque entrée et pour chaque sortie. Le nombre de systèmes linéaires à résoudre peut donc devenir assez important.

2.4.3 Méthodes de réduction par identification

2.4.3.1 Principe

La méthode repose sur l'identification des premiers coefficients des développements en série de Laurent de la fonction de transfert \mathbf{H} . Ces développements en série de Laurent diffèrent par le choix du ou des points s autour desquels la fonction de transfert est développée. Par exemple, un développement de Taylor de \mathbf{H} dans un voisinage de s_0 donne :

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{H}^{(k)}(s_0) \frac{(s - s_0)^k}{k!} \quad (2.87)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{\eta}_k(s_0) \frac{(s - s_0)^k}{k!}. \quad (2.88)$$

Les $\boldsymbol{\eta}_k$ sont appelés moments de \mathbf{H} autour du point $s_0 \in \mathbb{C}$. À partir de la connaissance du développement en série de la fonction de transfert, l'approximation par identification est fondée sur deux étapes :

- la troncature de la série de Laurent, ainsi calculée, à un indice r ;
- l'identification des coefficients $\boldsymbol{\eta}_k$ de la série jusqu'à l'indice r .

Après ces deux étapes de troncature et d'identification, la fonction de transfert réduite \mathbf{H}_r est simplement donnée par la somme finie

$$\mathbf{H}_r(s_0) = \sum_{k=0}^r \boldsymbol{\eta}_k(s_0) \frac{(s - s_0)^k}{k!}. \quad (2.89)$$

Par exemple :

- Autour de $s = 0$, la méthode d'identification est aussi connue sous le nom d'approximation de Padé et

$$\boldsymbol{\eta}_k(0) = \mathbf{C} \mathbf{A}^{-k-1} \mathbf{B}, \quad k \geq 0. \quad (2.90)$$

- Autour de $s = s_0$, on parle d'approximation *shifted Padé* et

$$\boldsymbol{\eta}_k(s_0) = \mathbf{C}(s_0 \mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-k-1} \mathbf{B}, \quad k \geq 0. \quad (2.91)$$

- Autour de $s = \infty$, le problème résultant est nommé *partial realization* et

$$\mathbf{H}(\infty) = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{\eta}_k(\infty) s^{-k-1} \quad (2.92)$$

avec

$$\boldsymbol{\eta}_k = \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mathbf{B}. \quad (2.93)$$

De plus, les moments sont souvent appelés paramètres de Markov de la fonction de transfert.

- Autour de l points s_k , la méthode est connue sous le nom d'interpolation rationnelle et

$$\mathbf{H}(s_1, \dots, s_l) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_l=0}^{\infty} \boldsymbol{\eta}_{k_j}(s_k) \frac{(s - s_k)^{k_j}}{k_j!}, \quad 1 \leq j \leq l \quad (2.94)$$

avec

$$\boldsymbol{\eta}_{k_j}(s_k) = \mathbf{C}(s_k \mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-k_j-1} \mathbf{B}, \quad k_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq l. \quad (2.95)$$

L'erreur d'approximation commise est directement connue au point de développement de la série par définition. Elle s'identifie exactement à l'erreur de troncature de la série au point de développement soit $\sum_{k=r+1}^{\infty} \boldsymbol{\eta}_k s^k$. La puissance de la méthode repose sur la conservation des r moments du système original. Notons au passage que les moments sont des matrices de la dimension de la fonction de transfert. En particulier, si le système est un SISO, les moments sont des scalaires et la fonction de transfert est approchée par un polynôme de la fonction de transfert (si $s \neq \infty$). Notons enfin que les moments font intervenir l'inverse de la matrice \mathbf{A} si s est fini. En pratique, on distingue les méthodes de moments explicites et implicites. Une méthode d'identification est dite explicite si elle est basée sur le calcul direct (ou "explicite")

des moments η_k . Il s'agit donc essentiellement de travailler la fonction de transfert. La méthode explicite la plus célèbre est la méthode *Asymptotic Waveform Evaluation* (acronyme AWE) [64, 208]. Elle identifie à la fois les moments et les paramètres de Markov. Elle n'est plus très utilisée à cause de son mauvais conditionnement numérique [22]. Les méthodes d'identification les plus répandues sont implicites. Elle repose sur la construction des espaces d'approximation \mathbf{V}_r et de projection \mathbf{W}_r . Dans ce dernier cas, la réduction peut être effectuée au niveau du système LTI. Les méthodes de moment implicites reposent sur l'exploitation des espaces de Krylov. Étant donné une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et un vecteur non nul \mathbf{x} , on appelle sous-espace de Krylov de dimension $r < n$, un espace généré par l'action de \mathbf{A} sur \mathbf{x} de la forme suivante :

$$\mathcal{K}_r(\mathbf{A}, \mathbf{x}) = \{\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}^2\mathbf{x}, \dots, \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{x}\} \quad (2.96)$$

Les vecteurs $\mathbf{A}^i\mathbf{x}$ sont appelés vecteurs de Krylov. La définition de l'espace de Krylov dans les méthodes de moments doit être adaptée en fonction du développement de Taylor choisi de la fonction de transfert. Par rapport aux coefficients de Taylor, il est en effet naturel d'identifier et d'introduire les espaces de Krylov suivants :

- dans le cas d'une approximation de Padé

$$\mathcal{K}_r^0(\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{B}) = \{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{A}^{-2}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{-r}\mathbf{B}\} \quad (2.97)$$

- dans le cas d'une approximation *shifted Padé*

$$\mathcal{K}_r^{s_0}((s_0\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}, \mathbf{B}) = \{(s_0\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}, (s_0\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-2}\mathbf{B}, \dots, (s_0\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-r}\mathbf{B}\} \quad (2.98)$$

- dans le cas d'une *partial realization*

$$\mathcal{K}_r^\infty(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \{\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B}\} \quad (2.99)$$

À partir de la définition de ces différents espaces de Krylov (dont la définition dépend du choix de la ou des fréquences autour desquelles le développement de Taylor est effectué), il s'agit de construire le sous-espace primal \mathbf{V}_r . L'espace primal \mathbf{V}_r ne s'identifie pas directement aux espaces de Krylov. En effet, les vecteurs de Krylov ne sont pas orthogonaux entre eux et possèdent même la propriété fâcheuse de devenir de plus en plus colinéaires entre eux lorsque la dimension r augmente. Un modèle projeté directement sur la base des vecteurs de Krylov aurait donc un très mauvais conditionnement numérique. Afin de contourner ce problème, le principe des méthodes de moments implicites repose alors sur la construction d'un sous-espace orthogonal à l'espace de Krylov construit. Cela conduit au célèbre algorithme d'Arnoldi qui utilise une procédure d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Les étapes de l'algorithme d'Arnoldi sont à adapter en fonction du choix de l'approximation ou de manière équivalente de l'espace de Krylov associée. Notons qu'en pratique une orthonormalisation de Gram-Schmidt modifiée est toujours employée car il est bien connu que l'algorithme de Gram-Schmidt classique est instable numériquement [36] (les vecteurs construits ne sont pas assez orthogonaux entre eux). La procédure d'Arnoldi peut être améliorée en considérant l'espace de Krylov adjoint (*output Krylov space*) $\mathcal{K}_l(\mathbf{A}^{-T}, \mathbf{A}^{-T}\mathbf{C})$ si la matrice n'est pas symétrique et/ou si on veut prendre en compte les sorties.

La littérature sur l'enrichissement des méthodes d'identification est très vaste [22, 42, 49, 50, 105, 106, 107, 112, 121, 123, 162, 245, 275, 284]. Il s'agit essentiellement d'améliorer la préservation de la stabilité, de la passivité, de la précision, de les adapter à des problèmes de dimension plus ou moins importante ou encore de les étendre aux systèmes MIMO. Citons notamment (liste non exhaustive) :

- Méthode *one-sided Lanczos* [158] pour les problèmes symétriques, méthode *two-sided Lanczos* pour les problèmes non symétriques : plus précise que la méthode d'Arnoldi ;
- Méthode Padé via Lanczos (acronyme PVL) : améliore la méthode AWE en conservant la stabilité numérique [95], étendue aux MIMO [104] (méthode MPVL)
- Méthode *Passive Reduced-order Interconnect Macromodeling Algorithm* (acronyme PRIMA) : préserve la passivité [198], apparentée aux méthodes *two-sided Arnoldi*, *dual rational Arnoldi* ou encore l'algorithme *Efficient Nodal Order Reduction* (acronyme ENOR) [247] ;
- Méthode SVD-Laguerre [153] ;
- *Multipoint rational interpolation* [121] ;
- *Iterative Rational Krylov Algorithm* (acronyme IRKA) [228]
- *Adaptive-Order Rational Arnoldi* (acronyme AORA) : extension de l'approximation rationnelle [103] ;

Les méthodes d'identification sont intimement liées aux méthodes de calcul des valeurs propres et des modes propres de la matrice \mathbf{A} . Les méthodes itératives de calculs des éléments propres sont en effet pratiquement toutes basées sur l'exploitation des espaces de Krylov [11] :

- *two-sided Lanczos algorithm* ;
- *Arnoldi algorithm* ;
- *rational Arnoldi algorithm* ;
- *implicitly restarted Arnoldi algorithm*.

Lorsque l'accent est mis sur la conservation des basses fréquences, la méthode d'Arnoldi est appliquée avec l'approximation de Padé (développement de Taylor autour de la fréquence nulle). Les différentes étapes de l'algorithme sont les suivantes (on se limite au cas d'un système SISO) :

- se donner un vecteur \mathbf{b}_1 ;
- résoudre le système linéaire $\mathbf{A}\phi_1 = \mathbf{b}_1$;
- obtention du premier vecteur d'Arnoldi $\Phi_1 = \frac{\phi_1}{\|\phi_1\|}$ par normalisation de la solution ϕ_1 ;
- résolution du système linéaire $\mathbf{A}\phi_2 = \Phi_1$;
- obtention du second vecteur Φ_2 par orthonormalisation de Gram-Schmidt ($\phi_2 \perp \Phi_1$) ;
- poursuite de l'algorithme par résolution de $\mathbf{A}\phi_k = \Phi_{k-1}$;
- obtention à chaque étape des Φ_k par poursuite de l'orthonormalisation

$$(\phi_k \perp (\Phi_1, \dots, \Phi_{k-1})); \quad (2.100)$$

- obtention de l'espace réduit orthonormal $\mathbf{V}_r = [\Phi_1, \dots, \Phi_r]$;
- le système réduit est construit à l'aide d'une projection de Galerkin dans cette approche ($\mathbf{W}_r = \mathbf{V}_r$).

Les modes Φ_i sont parfois appelés modes d'Arnoldi. Cette procédure peut être remplacée par une SVD de l'espace de Krylov. La procédure nécessite de résoudre r systèmes linéaires. Si l'algorithme est généralisé au cas de systèmes MISO ($\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m]$), la procédure nécessitera à chaque étape m résolutions de système linéaire, soit un total de $r \times m$ résolutions de système linéaire ce qui peut rapidement devenir coûteux.

Côté structure, la méthode d'Arnoldi s'apparente à la méthode de Ritz [283] et est équivalente à la méthode de Lanczos (matrices symétriques). Durant la procédure, une \mathbf{M} -orthonormalisation est effectuée ainsi l'espace \mathbf{V}_r vérifie $\mathbf{V}_r^T \mathbf{M} \mathbf{V}_r = \mathbf{I}_r$. Elle fournit une meilleure approximation des effets statiques et dynamiques d'un système par rapport aux méthodes de Gyan. Elle conserve l'état stationnaire qui correspond au premier système linéaire résolu. Elle vise à améliorer les méthodes modales qui sont parfois trop coûteuses, et prennent mal en compte l'excitation. Le challenge de la méthode réside parfois dans le choix du chargement représentative initial \mathbf{b}_1 . Côté fluides, Willcox [282] a appliqué la méthode d'Arnoldi aux équations d'Euler linéarisées dans le contexte de l'aéroélasticité. Le principal défaut de la méthode d'Arnoldi (pour l'approximation de Padé) réside dans le fait que la fonction de transfert est localement très bien estimée seulement autour de la fréquence nulle. Bien qu'on puisse s'attendre à ce que le modèle réduit reste fiable pour les basses fréquences, ce n'est pas toujours le cas. Le schéma 4, tiré de la thèse de Markovinic [184], illustre bien le comportement des méthodes d'identification des moments.

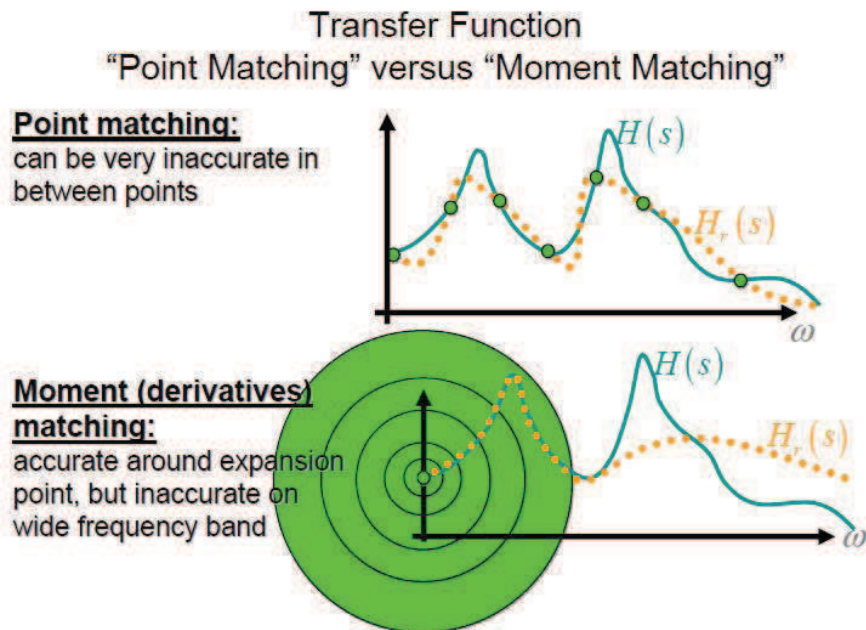


Schéma 4 : Comparaison *moment matching* et *point matching*

D'une façon générale, dans les méthodes des moments, la fonction de transfert sera localement bien estimée autour des fréquences de développement. Afin d'améliorer l'approximation de Padé par Arnoldi, Lassaux et Willcox [159] ont ensuite proposé d'étendre la méthode d'Arnoldi en considérant plusieurs fréquences de développement (*multi-point Arnoldi method*) de façon à s'assurer que le modèle réduit restera fiable pour des fréquences situées en dehors du voisinage de la fréquence nulle (cf. schéma 4). Dans toutes ces méthodes, la stabilité du modèle réduit n'est malheureusement pas garantie.

2.4.4 Méthodes de réduction empiriques

Les méthodes de réduction empiriques consistent à exploiter des solutions connues (des échantillons de simulation numérique) du système LTI (2.1) pour construire les espaces réduit \mathbf{V}_r et \mathbf{W}_r . On distingue essentiellement :

- les méthodes empiriques temporelles dans lesquelles il s'agit d'exploiter des solutions connues $\mathbf{x}(t_i)$ ou $\mathbf{y}(t_i)$ à différents instants t_i sur un intervalle $[t_0, t_f]$;

- les méthodes empiriques fréquentielles dans lesquelles il s'agit d'exploiter des solutions connues $\hat{\mathbf{x}}(s_i)$ ou $\hat{\mathbf{y}}(s_i)$ à différentes fréquences s_i sur un intervalle $[-s_c, s_c]$ avec s_c une fréquence de coupure à fixer en fonction de l'étude.

Dans la littérature, les principales méthodes empiriques sont :

1. la méthode de base réduite (*Reduced basis method* - acronyme RBM) qui consiste à prendre comme espace réduit \mathbf{V}_r directement un ensemble de r solutions

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_r)] \quad (2.101)$$

orthonormalisé au préalable ;

2. la méthode de décomposition orthogonale propre (*Proper Orthogonal Decomposition* - acronyme POD) temporelle ou fréquentielle qui consiste à construire l'espace réduit \mathbf{V}_r en maximisant l'information dynamique d'un ensemble de m solutions $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_m)]$ dans le domaine temporel ou m solutions $\hat{\mathbf{X}} = [\hat{\mathbf{x}}(s_1), \dots, \hat{\mathbf{x}}(s_m)]$ dans le domaine fréquentiel ;
3. la méthode *Eigensystem Realization Algorithm* (acronyme ERA) qui consiste à construire directement la matrice réduite \mathbf{A}_r à partir de solutions particulières du système LTI.

Nous présentons succinctement dans la suite les méthodes POD temporelle et fréquentielle ainsi que la méthode ERA.

2.4.4.1 POD temporelle

La méthode POD consiste à rechercher le sous-espace \mathbf{V}_r pour représenter de façon optimale un ensemble de m solutions précalculées $\mathbf{x}(t_i)$ du système dynamique de dimension n . L'optimalité se traduit par la minimisation de l'erreur entre les différentes solutions $\mathbf{x}(t_i)$ et les solutions approchées associées $\mathbf{V}_r \mathbf{x}_r(t_i)$. Le sous-espace \mathbf{V}_r est donc solution du problème de minimisation suivant :

$$\min_{\Phi_1, \dots, \Phi_r} \sum_{k=1}^m \|\mathbf{x}(t_k) - \sum_{i=1}^r (\mathbf{x}(t_k)^T \Phi_i) \Phi_i\|^2 \quad \text{avec} \quad \Phi_i^T \Phi_j = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq r \quad (2.102)$$

avec

$$\sum_{i=1}^r (\mathbf{x}(t_k)^T \Phi_i) \Phi_i = \sum_{i=1}^r \mathbf{x}_r^i(t_k) \Phi_i = \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r(t_k) \quad (2.103)$$

et $\mathbf{x}_r(t_k) = [\mathbf{x}_r^1(t_k), \dots, \mathbf{x}_r^r(t_k)]^T$. En notant $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_m)]$ la matrice des clichés précalculés, on montre [274] que le problème de minimisation (2.102) est solution du problème aux valeurs propres

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^T \Phi_i = \lambda_i \Phi_i, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (2.104)$$

Les modes Φ_i sont appelés modes POD. La matrice d'autocorrélation $\mathbf{X}\mathbf{X}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique semi-définie positive. Elle est diagonalisable et possède n valeurs propres réelles positives telles que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \geq \lambda_n \geq 0$. De plus, les n vecteurs propres associés sont orthonormaux et $\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$. L'espace \mathbf{V}_r est alors formé des r modes POD associés aux r plus grandes valeurs propres λ_i . Étant donné que nous travaillons en dimension finie, il est équivalent de calculer directement les modes POD à partir de la SVD de la matrice des clichés. Dans cette dernière approche, $\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ donne $\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^2\mathbf{U}^T$ avec $\mathbf{\Sigma}^2 = \mathbf{D}$. L'espace

\mathbf{V}_r s'identifie donc, dans le cas d'une SVD de \mathbf{X} , aux r premières colonnes de la matrice \mathbf{U} . Enfin, l'erreur commise par l'approximation POD est estimée à l'aide de la relation

$$\sum_{k=1}^m \|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r(t_k)\|^2 = \sum_{k=1}^m \|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{V}_r \mathbf{V}_r^T \mathbf{x}(t_k)\|^2 = \sum_{i=r+1}^n \lambda_i. \quad (2.105)$$

Le terme $\mathbf{V}_r \mathbf{V}_r^T$ correspond à la matrice de projection optimale. L'énergie impliquée dans la projection POD est donnée par l'expression

$$\sum_{k=1}^m \|\mathbf{x}_r(t_k)\|^2 = \sum_{k=1}^m \|\mathbf{V}_r \mathbf{V}_r^T \mathbf{x}(t_k)\|^2 = \sum_{i=1}^r \lambda_i \quad (2.106)$$

La capacité à réduire la dimension du problème dynamique initial sera par conséquent fortement liée au taux de décroissance des valeurs propres de la matrice $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$. Plus la décroissance des valeurs propres sera rapide, plus l'on pourra s'attendre à obtenir une dimension r petite (pour une précision donnée). Pour les problèmes de grande dimension, la méthode décrite ci-dessus (méthode POD dite directe) n'est pas applicable puisque la matrice $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ est dense. Bien souvent le nombre de clichés est très inférieur ce qui se traduit par $n \gg m$. La matrice \mathbf{X} admet une SVD donc par définition

$$\mathbf{X}\phi_i = \sigma_i \Phi_i, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (2.107)$$

Il suffit donc de résoudre le problème aux valeurs propres

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X}\phi_i = \lambda_i \phi_i, \quad 1 \leq i \leq m \quad (2.108)$$

avec $\mathbf{X}^T \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ pour identifier les modes POD à l'aide de la relation (2.107) :

$$\Phi_i = \mathbf{X}\phi_i / \sqrt{\lambda_i}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (2.109)$$

L'espace \mathbf{V}_r est formé des r modes POD associés aux plus grandes valeurs propres λ_i . Cette méthode, dénommée *snapshot-POD* pour la distinguer de l'approche directe, est très populaire en dynamique des fluides. Elle a été introduite par Sirovich [252]. L'interprétation des modes POD reste délicate en dynamique des fluides. En revanche, en dynamique des structures, on peut montrer sous certaines conditions que les modes POD sont très similaires voire équivalents aux modes propres de la structure [94, 211]. On peut s'attendre alors à ce que les modes POD soient indépendants de l'excitation contrairement à ce qui est observé pour les modes POD en dynamique des fluides linéarisés.

2.4.4.2 POD fréquentielle

Le principe est identique à la POD temporelle. Cette fois-ci, la matrice des clichés est constituée de $2m$ solutions $\hat{\mathbf{x}}(s) = (s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ incluant m solutions à pulsation positive $s = j\omega$ et m solutions à pulsation négative $s = -j\omega$. L'obtention des réponses $\hat{\mathbf{x}}(-j\omega)$ ne nécessite pas la résolution de systèmes linéaires puisqu'elles sont solutions complexes conjuguées des réponses $\hat{\mathbf{x}}(j\omega)$. En effet, l'exploitation des propriétés du conjugué de la solution à pulsation positive donne

$$\overline{\hat{\mathbf{x}}(j\omega)} = \overline{(j\omega\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}} = \overline{(j\omega\mathbf{I}_n - \mathbf{A})}^{-1}\overline{\mathbf{B}} = \overline{(j\omega\mathbf{I}_n - \mathbf{A})}^{-1}\mathbf{B} = (-j\omega\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}(-j\omega) \quad (2.110)$$

en supposant \mathbf{B} réelle. À partir de la connaissance de ces différentes réponses fréquentielles, la matrice des clichés complexes

$$\hat{\mathbf{X}}_c = [\hat{\mathbf{x}}(j\omega_1), \dots, \hat{\mathbf{x}}(j\omega_m), \hat{\mathbf{x}}(-j\omega_1), \dots, \hat{\mathbf{x}}(-j\omega_m)] \quad (2.111)$$

est formée. En pratique, Lieu [168] a montré que les modes POD peuvent être calculés à partir de la matrice des clichés réelle

$$\hat{\mathbf{X}}_r = [\Re(\hat{\mathbf{x}}(j\omega_1)), \dots, \Re(\hat{\mathbf{x}}(j\omega_m)), \Im(\hat{\mathbf{x}}(j\omega_1)), \dots, \Im(\hat{\mathbf{x}}(j\omega_m))] \quad (2.112)$$

où \Re et \Im dénotent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du vecteur associé. Cette approche ne nécessite pas la considération des solutions à pulsations négatives et présente de plus l'avantage de travailler avec des nombres réels plutôt que des nombres complexes. Les modes POD sont calculés à partir de la matrice $\hat{\mathbf{X}}_r$ en suivant la même procédure que dans le domaine temporel. Notons enfin que les modes POD obtenus étant réels, il peuvent être projetés sur le système dynamique LTI, fournissant ainsi directement une matrice réduite réelle.

La POD fréquentielle a été introduite par Kim [152]. Elle est depuis devenue relativement populaire dans le domaine de l'aéroélasticité, en particulier pour la construction de modèles réduits basés sur les équations de fluide potentiel linéarisé [86, 87] et d'Euler linéarisées [132, 134, 168, 261]. Sarkar et al. [235] comparent la POD avec la méthode SEREP dans le cas d'un modèle incompressible irrotationnel. Ils appliquent une transformation en z au système temporel discret pour récupérer les solutions aux différentes fréquences. Feeny [93] a récemment proposé la méthode *Complex orthogonal decomposition* (acronyme COD) qui est présentée comme une généralisation de la POD temporel au domaine fréquentiel. Aucun rapprochement avec la POD fréquentielle classique n'est cependant discuté. Il apparaît que la méthode POD fréquentielle est équivalente à la méthode *multipoint Arnoldi* dans le cas où un seul vecteur d'Arnoldi pour chaque fréquence est calculé [159]. Dans la POD fréquentielle, le choix des fréquences est certainement un point important pour éviter au mieux le phénomène de Runge (cf schéma 4 *point marching method*). Dans la méthode d'Arnoldi multi fréquences, le fait de rajouter des vecteurs d'Arnoldi pour chaque fréquence tend intuitivement à contourner le phénomène de Runge. La recherche d'un compromis entre le nombre de fréquences et le nombre de vecteurs d'Arnoldi pour chacune des fréquences n'est pas très évident.

2.4.4.3 Eigensystem Realization Algorithm (ERA)

Cette méthode a été introduite par Juang et Pappa [150]. Elle est basée sur la décomposition en valeurs singulières de la matrice de Hankel

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}(1) & \mathbf{m}(2) & \dots & \mathbf{m}(N) \\ \mathbf{m}(2) & \mathbf{m}(3) & \dots & \mathbf{m}(N+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{m}(N) & \mathbf{m}(N+1) & \dots & \mathbf{m}(2N-1) \end{pmatrix} = \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \quad (2.113)$$

où $\mathbf{m}(i) = \mathbf{C} \mathbf{A}_{\Delta t}^{i-1} \mathbf{B}$ sont les paramètres de Markov du système LTI discret

$$\begin{cases} \mathbf{x}[n+1] &= \mathbf{A}_{\Delta t} \mathbf{x}[n] + \mathbf{B} \mathbf{u}[n] \\ \mathbf{y}[n] &= \mathbf{C} \mathbf{x}[n] \end{cases}, \quad (2.114)$$

$\mathbf{H}_1 = [\mathbf{C}; \mathbf{C} \mathbf{A}_{\Delta t}; \mathbf{C} \mathbf{A}_{\Delta t}^2; \dots; \mathbf{C} \mathbf{A}_{\Delta t}^{N-1}]$ représente l'observabilité du système discret et $\mathbf{H}_2 = [\mathbf{B}, \mathbf{A}_{\Delta t} \mathbf{B}, \mathbf{A}_{\Delta t}^2 \mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}_{\Delta t}^{N-1} \mathbf{B}]$ représente la contrôlabilité du système discret. La dimension de la matrice de Hankel est d'autant plus importante que le nombre d'entrées et de sorties l'est.

Les paramètres de Markov peuvent ainsi être identifiés à l'aide de solutions à différents instants c'est-à-dire $\mathbf{m}(i) = \mathbf{C} \exp((i-1)\Delta t \mathbf{A}) \mathbf{B}$ avec Δt le pas de temps associé à la discrétisation temporelle et \mathbf{A} la matrice du système LTI continu. La construction du système réduit de dimension r est ensuite directement déduite de la décomposition SVD de la matrice de Hankel

$$\mathbf{H} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T = [\mathbf{U}_r \mathbf{U}_{nr}] \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_r & 0 \\ 0 & \mathbf{\Sigma}_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_r^T \\ \mathbf{V}_{nr}^T \end{pmatrix} \quad (2.115)$$

où l'exposant r indique la partie retenue et l'exposant nr indique la partie tronquée. On montre [28, 150] alors que la matrice réduite s'exprime

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{\Sigma}_r^{-1/2} \mathbf{U}_r^T \hat{\mathbf{H}} \mathbf{V}_r \mathbf{\Sigma}_r^{-1/2} \quad (2.116)$$

avec

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}(2) & \mathbf{m}(3) & \cdots & \mathbf{m}(N+1) \\ \mathbf{m}(3) & \mathbf{m}(4) & \cdots & \mathbf{m}(N+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{m}(N+1) & \mathbf{m}(N+2) & \cdots & \mathbf{m}(2N) \end{pmatrix}. \quad (2.117)$$

La puissance de la méthode ERA réside dans le fait qu'il est possible de construire un modèle réduit à partir de données expérimentales sans la connaissance de la matrice \mathbf{A} donc du modèle mathématique du phénomène. Elle est très utilisée pour l'identification des systèmes vibrants par exemple. Elle a été exploitée par Clark et Frampton [67] pour approcher les forces aérodynamiques généralisées dans le cas d'une plaque plane chargée. Lucia et *al.* [176, 177] l'ont appliqué pour des problèmes d'aéroélasticité. Récemment, Ma et *al.* [179] ont montré l'équivalence théorique de la méthode équilibrée empirique et de la méthode ERA. Contrairement à la POD équilibrée, la méthode ERA ne requiert pas la connaissance du système adjoint ce qui évite des simulations supplémentaires. Par contre, cette dernière ne fournit pas explicitement les modes directs et adjoints ce qui représente un inconvénient notable. En effet, la matrice réduite est directement identifiée.

2.5 Synthèse

2.5.1 Choix d'une classification des méthodes

Classifier les choses n'est pas toujours évident. On peut citer l'exemple de la classification de la connaissance humaine dans les bibliothèques avec la nomenclature de Dewey (classification décimale de Dewey) ou encore la classification décimale universelle. La principale difficulté repose sur la constatation qu'il n'existe pas de méthode universelle pour organiser des notions car on peut toujours coupler plusieurs catégories par extrapolation d'idées. Par exemple la bio-informatique regroupe les connaissances à la fois de la biologie et de l'informatique, domaines bien distincts initialement. Dans notre cas, nous sommes confrontés au même souci bien que notre étude soit très spécifique. Comment classifier les méthodes de réduction ? En distinguant les formulations temporelles et fréquentielles, en distinguant les propriétés qualitatives fondamentales des équations, en distinguant le domaine d'application (dynamique des structures, dynamique des fluides, électronique,...), etc ? Quel que soit le choix d'organisation, il semble que nous soyons toujours confrontés à des recoupements à cause de l'existence de méthodes hybrides ou tout simplement de motivations différentes. En tout état de cause, la typologie des méthodes de réduction est relativement riche de part ces différentes considérations. Dans la littérature, quelques classifications des méthodes de réduction ont été proposées [29, 88, 184]. La plus célèbre est certainement celle d'Antoulas [11, 12] qui propose de distinguer trois classes de méthodes

- les méthodes basées sur la SVD ;
- les méthodes basées sur les espaces de Krylov ;
- les méthodes qui combinent les deux approches SVD/Krylov.

Cette classification s'explique par le fait que toutes les méthodes de réduction sont directement ou indirectement reliées à des SVD et/ou des espaces de Krylov. Pour percevoir ce classement, il faut cependant regarder assez loin dans la description des différentes méthodes. Dans le cadre de la thèse, il nous est tout d'abord paru judicieux de classer les méthodes suivant le caractère linéaire, non-linéaire ou paramétré (paramètres variables, non fixés) des équations étudiées. Car il est clair que la faisabilité de réduction dépend en premier lieu de la complexité mathématique des systèmes d'équations envisagés. Le schéma 3 illustre la complexification des modèles qui est liée au degré des non linéarités et au nombre de paramètres variables.

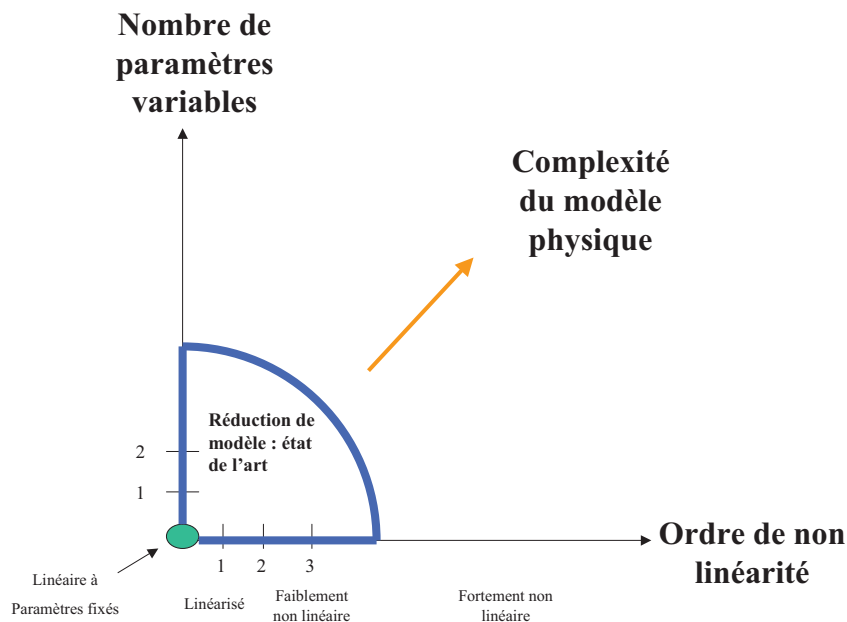


Schéma 3 : diagramme de complexité des modèles

Dans ce chapitre, nous nous sommes limités à décrire les méthodes de réduction linéaires dans le contexte de la théorie du contrôle et des systèmes LTI. Il nous semble que la réduction linéaire y est parfaitement établie théoriquement. Nous n'avons pas discuté en revanche la réduction des EDPs, des systèmes non linéaires ou encore des systèmes paramétrés. L'adaptation des méthodes de réduction présentées dans ce chapitre pour traiter des EDPs linéaires ou des systèmes paramétrés linéaires sera discutée plus tard. Notons simplement que dans ce chapitre, tous les paramètres physiques étaient supposés fixés (en dehors des paramètres temps et fréquence). Si les techniques de réduction pour les problèmes linéaires sont bien établies, leurs extensions aux modèles non-linéaires et aux modèles paramétrés sont encore peu développées. Ils sont de nature bien plus complexes. Les méthodes de réduction pour les systèmes non linéaires sont introduites dans l'annexe A. Contrairement aux méthodes linéaires, on distingue deux étapes pour réduire les systèmes non-linéaires. Une première étape vise souvent à traiter la fonctionnelle non-linéaire pour la simplifier par des linéarisations ou d'autres développements particuliers. C'est seulement après cette étape d'approximation des

non linéarités qu'intervient la phase de réduction numérique. La première étape peut cependant être trop réductrice et seule une méthode cherchant à réduire directement le système non linéaire garantirait une bonne solution. Par ailleurs, la majorité des approches existantes sont mal comprises, bien moins maîtrisées que dans le cas linéaire. Il faut rappeler que dans le cadre non linéaire, il n'existe déjà pratiquement aucun résultat théorique en dehors de la réduction ! Par conséquent, réduire un modèle non linéaire relève plutôt d'une heuristique. D'un autre côté, le cadre linéaire est bien documenté sur le plan théorique grâce aux outils d'algèbre linéaire notamment. Il permet de fournir des pistes pour améliorer et comprendre les problèmes qui risquent d'émerger dans le domaine non linéaire. Il reste aussi d'un grand intérêt sur le plan physique. Nous avons ensuite distingué 4 grandes familles de réduction consacrées aux méthodes de réduction linéaire :

- les approximations modales ;
- les approximations équilibrées ;
- les approximations par identification ;
- les approximations empiriques.

Il s'agit maintenant de choisir les méthodes de construction de la matrice réduite \mathbf{A}_r et des deux sous-espaces \mathbf{V}_r et \mathbf{W}_r .

2.5.1.1 Méthode de construction retenue

La méthode de résidualisation a été introduite dans le but d'améliorer, de corriger le défaut des méthodes de troncature qui ne préservent pas l'état stationnaire du système initial. Cette méthode est exacte à fréquence nulle et conserve par conséquent l'état stationnaire. On s'attend à ce qu'elle soit meilleure pour les basses fréquences par rapport à la méthode de troncature. Historiquement, cela a motivé son emploi en électronique et en dynamique des structures. Malheureusement, la méthode nécessite d'une part la connaissance complète de la transformation \mathbf{T} donc le calcul de n modes (propres ou équilibrés par exemple) et d'autre part de calculer et stocker l'inverse d'une sous-matrice. Cette approche n'est donc pas exploitable pour les problèmes de dimension importante, ce qui est le cas dans notre contexte.

D'un autre côté, le principal inconvénient de la méthode de troncature est la non conservation de l'état stationnaire. Par contre, elle est particulièrement bien appropriée pour les problèmes de grande dimension car elle nécessite seulement la connaissance d'une partie de la transformation \mathbf{T} (contrairement à la résidualisation), celle qui concentre l'information du système. Afin d'améliorer la troncature, il est classique d'utiliser des méthodes de correction ou compensation statique (correction à fréquence nulle) voire quasi-statique (correction à fréquence non nulle). Il s'agit d'intégrer dans le sous-espace \mathbf{V}_r de la transformation \mathbf{T} la réponse statique (ou plusieurs réponses quasi-statiques). Le nouveau sous-espace construit est ensuite soit orthonormalisé soit directement projeté. Ces techniques sont appliquées notamment en dynamique des structures pour améliorer la troncature modale ou plus récemment en dynamique des fluides pour des applications aéroélastiques [261]. Dans ces cas, les réponses statiques et quasi-statiques sont intégrées avec la famille des modes propres du système identifiés.

En conséquence, nous retenons pour notre étude la méthode de troncature afin de construire un système de dimension réduite. La projection par troncature nécessite en effet seulement la connaissance de r fonctions de base globales ou modes d'intérêt de la transformation. Pour les problèmes de grande dimension, ce sont les approches itératives qui sont privilégiées. Il s'agira de construire itérativement les r modes utiles des deux espaces \mathbf{V}_r et \mathbf{W}_r . Le principal défi

réside donc ensuite dans la construction de ces deux espaces. Dans l'idéal, l'erreur commise par ces deux projections doit être minimisée :

- minimisation de l'approximation des inconnues ;
- minimisation de l'erreur commise par la projection du système.

Une projection de Galerkin ($\mathbf{V}_r = \mathbf{W}_r$) présente l'avantage de ne pas nécessiter la construction de l'espace de projection gauche \mathbf{W}_r puisque dans ce cas $\mathbf{W}_r = \mathbf{V}_r$. Cependant, cette projection est limitée à trois cas essentiellement :

- symétrie de la matrice \mathbf{A} pour la représentation modale ;
- égalité des deux grammiens de contrôlabilité et d'observabilité pour la représentation équilibrée ;
- incapacité à construire un espace \mathbf{W}_r différent.

Dans notre contexte, la matrice n'étant pas symétrique, nous devons donc privilégier des projections de type Petrov-Galerkin dans la mesure du possible. La méthode de troncature étant choisie, toutes les méthodes de réduction se distinguent par la construction des deux sous-espaces \mathbf{V}_r et \mathbf{W}_r .

2.5.2 Choix d'une méthode de réduction

Nous avons présenté plusieurs méthodes permettant de réduire la dimension d'un système dynamique linéaire. Bien souvent, un petit nombre de paramètres caractéristiques du système dynamique étudié est nécessaire pour le décrire. La performance d'un système réduit réside essentiellement dans la conservation de certains de ces paramètres. Le but recherché des différentes méthodes de réduction présentées est de conserver certaines de ces quantités :

- les méthodes modales retiennent les pôles importants ;
- les méthodes équilibrées retiennent les valeurs singulières de Hankel ;
- les méthodes d'identification retiennent les moments ;
- les méthodes empiriques retiennent l'information de solutions particulières.

Le potentiel de réduction d'un modèle linéaire devrait dépendre fortement de la capacité de ces différents invariants à concentrer l'information dynamique et/ou énergétique. L'estimation théorique du taux de concentration dynamique et/ou énergétique associé à ces différents paramètres reste un sujet de recherche important, en particulier pour la prédiction du taux de décroissance des valeurs singulières de Hankel. Les modes associés à ces différentes méthodes concentrent une quantité d'informations qui peut être mesurée en fonction de la quantité de solutions qu'elles peuvent représenter. Dans les méthodes modales, par exemple, les modes propres sont indépendants des conditions initiales et des seconds membres. Les modes propres renferment donc une grande quantité d'informations. L'exploitation des modes propres pour construire un système réduit d'une configuration particulière (une condition initiale et un terme source fixés) n'est donc certainement pas optimale. D'un autre côté dans les méthodes équilibrées, si on observe moins d'inconnues et on rajoute un terme de contrôle, on peut s'attendre à obtenir un modèle réduit bien plus optimal que lorsqu'on observe toutes les inconnues sans spécifier aucune loi de contrôle comme c'est le cas pour les méthodes modales. Il y en effet moins de solutions à couvrir car les méthodes de réduction équilibrée visent à supprimer toute dynamique qui contribue peu à la relation entrée/sortie du système. Malgré tout, les modes équilibrés sont indépendants de la loi de contrôle $\mathbf{u}(t)$. D'un point de vue mathématique, ils dépendent de l'enveloppe spatiale des entrées (la matrice \mathbf{B}) et des sorties (la matrice \mathbf{C}).

A l'extrême, la méthode empirique POD construit des modes à partir d'une configuration de calcul particulière (une condition initiale et un terme source fixés). Un modèle réduit construit à l'aide des modes POD sera optimal mais l'information dynamique risque fort d'être limitée à la configuration de calcul des modes.

Afin de sélectionner la ou les méthodes de réduction, il est nécessaire de se poser quelques questions. Par exemple, quelles sont les caractéristiques du modèle physique numérique qu'on cherche à réduire ? Les caractéristiques du modèle physique numérique sont directement reliées aux propriétés de la matrice \mathbf{A} . Elles portent essentiellement sur :

- sa dimension et sa densité ;
- ses propriétés mathématiques.

La dimension de la matrice \mathbf{A} est égale au carré du nombre d'inconnues du problème physique modélisé. La densité est la proportion du nombre de coefficients non nuls de la matrice devant sa dimension. La matrice est dite creuse si le nombre de coefficients nuls est proche de sa dimension. Dans le cas contraire, elle est dite dense. Les propriétés mathématiques les plus cruciales de \mathbf{A} sont sa symétrie (plus généralement sa normalité), et sa stabilité. Au niveau de la construction d'un modèle réduit, la dimension et la densité de la matrice interviennent dans le coût de calcul nécessaire à la construction de la base réduite ou plus généralement des deux sous-espaces de projection. Par ailleurs, les propriétés mathématiques de la matrice constituent une condition nécessaire pour l'application de certaines méthodes. L'absence d'une propriété mathématique peut aussi être à l'origine d'une augmentation importante des coûts de calcul. Nous aurons l'occasion d'illustrer ces propos plus tard. Dans le cadre de la réduction des systèmes LTI, il est clair que les propriétés de la matrice \mathbf{A} (symétrique, instable, non symétrique, creuse, dense, de grande dimension) jouent un rôle prépondérant d'un point de vue théorique, numérique et pratique. En dynamique des structures, les modèles standards sont souvent creux, symétriques définis positifs et de dimension raisonnable. En dynamique des fluides, en revanche, les modèles sont creux, non symétriques, potentiellement instables et de très grande dimension ($> 10^4$ inconnues).

La qualité ou encore la fiabilité d'un système réduit se mesure en résumé à l'aide de trois principaux critères :

1. conservation de la stabilité et de la passivité ;
2. erreur globale engendrée bornée et contrôlable ;
3. coût informatique raisonnable.

Les deux premiers critères mesurent la qualité numérique du modèle réduit. Le troisième critère mesure les ressources informatiques à déployer pour pouvoir construire les deux espaces \mathbf{V}_r et \mathbf{W}_r ainsi que la matrice réduite \mathbf{A}_r . La question essentielle qui se pose maintenant est de savoir quelles approches sont exploitables en dynamique des fluides sachant que les deux principales caractéristiques des modèles fluides linéarisés sont :

- la non symétrie de la matrice \mathbf{A} ;
- la grande dimension de la matrice \mathbf{A} ($n > 10000$).

De plus, la matrice \mathbf{A} est potentiellement instable ce qui peut compliquer considérablement les aspects théoriques, physiques et numériques. L'ensemble des méthodes de réduction dépendent finalement du type de réponses précalculées du modèle discret non réduit. On peut distinguer trois types de réponses du système non réduit :

- les réponses fréquentielles ;

- les réponses temporelles ;
- les réponses modales.

C'est le précalcul de ces réponses qui représente le coût de fabrication des deux espaces \mathbf{V}_r et \mathbf{W}_r . Le choix d'une méthode de réduction nécessite d'analyser les coûts associés au calcul de ces trois formes de solutions du système non réduit, de manière à trouver le meilleur compromis suivant l'application recherchée. En d'autres termes, est-il plus coûteux de :

- résoudre plusieurs systèmes linéaires ?
- calculer plusieurs modes propres ?
- simuler plusieurs systèmes dynamiques ?

De plus, ces différentes réponses sont-elles tout simplement calculables dans notre contexte ? Il est pour le moment difficile de répondre à cette question. Nous tenterons de donner des éléments de réponse tout au long du mémoire et plus particulièrement lorsque nous présenterons les propriétés mathématiques et numériques du modèle physique étudié.

Une fois sélectionnée une méthode de réduction, l'autre grande problématique concerne la convergence de la solution reconstruite vers la solution du modèle non réduit. Dans le cas linéaire, cette convergence est assurée d'une part si le modèle réduit préserve la stabilité du modèle non réduit et d'autre part si l'approximation est consistante. Malheureusement, lorsque le modèle numérique non réduit n'est pas symétrique (ou de manière équivalente la matrice \mathbf{A}), il existe très peu de méthodes numériques qui garantissent à moindre coût la stabilité du modèle réduit. C'est l'une des questions essentielles de cette thèse. D'un point de vue mathématique, la problématique de la stabilité s'exprime

$$\boxed{\mathbf{A} \text{ stable} \Rightarrow \mathbf{A}_r = \mathbf{W}_r^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r \text{ stable ?}} \quad (2.118)$$

Pourquoi est-ce une question délicate ? Il y a essentiellement deux réponses :

- pour les systèmes non symétriques, une projection de Galerkin ($\mathbf{W}_r = \mathbf{V}_r$) n'assure pas la stabilité. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer l'exemple suivant. Les valeurs propres de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2.1 & -2 \end{pmatrix} \quad (2.119)$$

sont environ égales à -0.1127 et -0.8873 donc la matrice est stable. Si on projette la matrice sur le vecteur $\mathbf{V}_r = (1, 0)^T$, la matrice réduite est égale à un scalaire $a_r = \mathbf{V}_r \mathbf{A} \mathbf{V}_r = 1$. Par conséquent, le modèle réduit est instable.

- il est difficile de construire des projections de Petrov-Galerkin car il n'est pas possible de résoudre directement les équations de Lyapunov algébriques pour les systèmes de grande dimension.

Chapitre 3

Équations d'Euler linéarisées (EELs)

3.1 Modèle physique

Cette section décrit succinctement les équations de la dynamique des écoulements gazeux. Ces dernières sont clairement formulées dans le cadre de la théorie des milieux continus tant que le libre parcours moyen des molécules est suffisamment petit devant la plus petite échelle spatiale analysée. Nous nous plaçons dans ce contexte. Par ailleurs, nous nous limiterons aux écoulements de fluides parfaits bidimensionnels. Par conséquent, nous négligeons les phénomènes provoqués par la viscosité, la chaleur ou encore par des effets tridimensionnels.

3.1.1 Principes de conservation

La construction des équations du mouvement d'un fluide parfait - communément dénommé modèle d'Euler - s'appuie sur les principes généraux de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. Sur un domaine Ω fixe de l'espace, de frontière Γ et de normale extérieure \mathbf{n} , ces principes postulent que la variation entre deux instants t_0 et t_f de masse, de quantité de mouvement et d'énergie dans le domaine est égale au flux rentrant correspondant :

1. Principe de variation de la masse

$$\left[\int_{\Omega} \rho d\mathbf{x} \right]_{t_0}^{t_f} = - \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} \rho \mathbf{u}^T \mathbf{n} d\Gamma \quad (3.1)$$

2. Principe de variation de la quantité de mouvement

$$\left[\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} d\mathbf{x} \right]_{t_0}^{t_f} = \int_{t_0}^{t_f} \left(- \int_{\Gamma} \rho (\mathbf{u}^T \mathbf{n}) \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma} p \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{f} d\mathbf{x} \right) \quad (3.2)$$

3. Principe de variation de l'énergie

$$\left[\int_{\Omega} \rho E d\mathbf{x} \right]_{t_0}^{t_f} = \int_{t_0}^{t_f} \left(- \int_{\Gamma} \rho E (\mathbf{u}^T \mathbf{n}) d\Gamma - \int_{\Gamma} p \mathbf{u}^T \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\mathbf{x} \right) \quad (3.3)$$

Dans ces équations, ρ désigne la masse volumique, $\mathbf{u} = (u, v)^T$ est le vecteur vitesse, \mathbf{f} est une force volumique arbitraire, p désigne la pression et enfin E est l'énergie totale spécifique (par

unité de masse) définie par

$$E = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (3.4)$$

avec e l'énergie interne et $(u^2 + v^2)/2$ l'énergie cinétique spécifique. Ce modèle est un cas particulier des équations plus générales de Navier-Stokes qui prennent aussi en compte les effets visqueux (contraintes de cisaillement) et thermiques.

3.1.2 Formulation locale conservative

Il est plus adéquate de travailler avec les équations locales. Le système d'équations intégrales ci-dessus est valable sur un domaine Ω arbitraire. En utilisant la formule de Green

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{a} dx = \int_{\Gamma} \mathbf{a}^T \mathbf{n} d\Gamma, \quad (3.5)$$

où $\nabla \cdot \mathbf{a}$ représente la divergence d'un vecteur arbitraire \mathbf{a} , et en faisant tendre le domaine $\Omega \times]t_0, t_f[$ vers $\mathbf{0}$, ces équations de bilan s'écrivent localement sous la forme conservative

$$\partial_t \mathbf{M}(\mathbf{q}) + \partial_x \mathbf{E}(\mathbf{q}) + \partial_y \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

avec

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u H \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho v H \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

$$H = E + p/\rho \quad (3.8)$$

l'enthalpie qui a été introduite pour simplifier les notations et \mathbf{q} le vecteur des variables physiques d'intérêt. Dans le cas d'un gaz parfait, l'énergie interne e n'est fonction que de la température. Elle est donnée par la relation

$$e = \frac{1}{\tilde{\gamma}} \frac{p}{\rho} = C_v T \quad (3.9)$$

avec $\tilde{\gamma} = \gamma - 1$ où γ est le ratio des chaleurs spécifiques ($\gamma = 1,4$ pour un gaz diatomique). Cette relation permet de fermer le système d'équations, c'est-à-dire d'obtenir un système avec autant d'équations que d'inconnues. Les équations d'Euler s'expriment alors

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \frac{1}{\tilde{\gamma}} p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \end{bmatrix} + \partial_x \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} p u + \frac{1}{2} \rho u (u^2 + v^2) \end{bmatrix} + \partial_y \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} p v + \frac{1}{2} \rho v (u^2 + v^2) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.10)$$

C'est un système d'équations non linéaires à 4 inconnues. La thermodynamique nous enseigne que l'entropie des fluides parfaits se conserve sur les trajectoires en dehors de l'éventuelle présence de chocs. En supposant le fluide divariant (la pression ne dépend que de la masse volumique et de l'entropie), on en déduit que la variation de la pression est proportionnelle à la variation de la masse volumique :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt} \quad (3.11)$$

en ayant posé $c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$. La grandeur c a la dimension d'une vitesse et caractérise la vitesse locale du son dans le fluide. Cette relation de thermodynamique permet de retrouver directement l'équation régissant la dynamique du champ de pression à partir de l'équation de conservation de la masse

$$\frac{dp}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt} \Rightarrow \partial_t p + u \partial_x p + v \partial_y p = c^2 (\partial_t \rho + u \partial_x \rho + v \partial_y \rho). \quad (3.12)$$

3.1.3 Choix de la formulation

Le choix des variables physiques dans \mathbf{q} n'est pas anodin puisqu'il peut modifier de manière non négligeable certaines propriétés du modèle. Ce choix dépend des propriétés recherchées pour le modèle mathématique, des grandeurs physiques d'intérêt ou encore du caractère creux du système (minimisation du nombre de termes non nuls du modèle). Par exemple, l'expérimentateur préférera choisir des variables physiques mesurables lors des expériences. D'un autre côté, le mathématicien recherchera le meilleur jeu de variables satisfaisant les meilleures propriétés mathématiques ou, en étroite collaboration avec le physicien, développera des méthodes permettant de conserver à la fois des propriétés mathématiques et les variables expérimentales. L'informaticien choisirait quant à lui le jeu de variables permettant de minimiser au plus les coûts de calcul (en terme de mémoire et temps). Le choix des variables s'avère aussi important lorsqu'on cherche à construire des modèles réduits. Donnons tout de suite un exemple pour le modèle d'Euler. Si le modèle d'Euler est écrit en formulation non conservative avec les variables primitives $\mathbf{q} = (\rho, u, v, p)^T$, on montre que le modèle est donné par

$$\partial_t \mathbf{q} + \mathbf{E} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{F} \partial_y \mathbf{q} = 0 \quad (3.13)$$

avec

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 1/\rho \\ 0 & 0 & \gamma p & v \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Notons au passage que cette formulation, appelée aussi convective, est pratique pour la recherche de certaines propriétés mathématiques comme la conservation de l'énergie ou pour raisonner au sens des caractéristiques. En revanche, cette formulation présente un inconvénient majeur pour la construction de modèles réduits. Le terme $1/\rho$ introduirait des fractions rationnelles or on cherche à construire en général des systèmes dynamiques non linéaires à coefficients constants. Le passage au jeu de variables $\mathbf{q} = (\zeta = 1/\rho, u, v, p)^T$ permet de contourner cette difficulté. En effet, il faut dans un premier temps retravailler l'équation de conservation de la masse comme suit :

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0 \iff \partial_t(1/\rho) + u \partial_x(1/\rho) + v \partial_y(1/\rho) - \frac{1}{\rho}(\partial_x u + \partial_y v) = 0 \quad (3.15)$$

Le système devient alors

$$\partial_t \mathbf{q} + \mathbf{E} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{F} \partial_y \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.16)$$

avec

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} u & -\zeta & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} v & 0 & -\zeta & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \zeta \\ 0 & 0 & \gamma p & v \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Cette nouvelle formulation est particulièrement intéressante pour les raisons suivantes :

- le modèle est formulé à l'aide de variables physiques qui restent d'intérêt pour le physicien ;
- le modèle est relativement creux dans la mesure où les matrices \mathbf{E} et \mathbf{F} ne sont pas pleines [266] ;
- le modèle ne laisse plus apparaître de fractions rationnelles ;
- le modèle est quadratique (les non linéarités sont d'ordre 2 au plus) ;
- le modèle étant quasi-linéaire (les matrices \mathbf{E} et \mathbf{F} sont linéaires par rapport à \mathbf{q}) cela simplifie sa linéarisation.

En particulier, la nature quadratique du modèle permet de construire un modèle réduit qui sera caractérisé par un système d'équations ordinaires polynômiales d'ordre 2 à coefficients constants (*cf.* annexe A). Insistons sur le fait que le choix de cette formulation pour construire un modèle compressible non linéaire réduit est d'une importance capitale. En effet, d'un point de vue pratique, il est nécessaire d'éviter au maximum les termes cubiques sous peine de rendre le modèle réduit trop coûteux (voire impossible) à construire et à résoudre. En effet, un terme cubique introduirait des triples sommes. Par conséquent, si les variables nécessitaient r modes pour être fidèlement représentées, un terme cubique nécessiterait r^3 calculs pour être évalué. Cette difficulté émerge naturellement pour les fluides compressibles. Ce point a déjà été discuté notamment par Vigo [273], Gloerfelt [118], Bourguet [47] et Placzek [210].

3.2 Linéarisation des équations d'Euler

Afin de modéliser l'évolution de petites perturbations instationnaires compressibles au sein d'un écoulement donné, les équations d'Euler sont linéarisées. De nombreux éléments motivent le choix des équations d'Euler linéarisées (acronyme EELs) comme modèle de référence dans ce mémoire. Ce modèle est tout d'abord linéaire. Par conséquent, on bénéficie de toute la théorie de la réduction des systèmes linéaires. Par ailleurs, les EELs peuvent être exploitées dans des domaines aussi variés que l'aéroacoustique [41], la propagation acoustique environnementale [38], l'aéroélasticité [126] et la vibro/aéro/acoustique [269], la thermoacoustique [279]. Notons que dans la littérature, le lien entre l'aéroélasticité et la vibro/aéro/acoustique est rarement discuté bien qu'elles peuvent utiliser les mêmes outils de modélisation. Un début de discussion peut être trouvé dans les travaux de Frampton [101, 102, 242]. L'analyse proposée met en évidence l'importance du couplage fluide-structure pour le rayonnement acoustique jusqu'à la perte de stabilité aéroélastique du système.

3.2.1 Technique de linéarisation

Une perturbation $\delta\mathbf{q}$ de petite amplitude ϵ est introduite dans un écoulement de base $\bar{\mathbf{q}}$. L'écoulement de base est en général un écoulement établi supposé stationnaire correspondant à un état d'équilibre des équations d'Euler non linéaires. Afin d'induire les équations qui régissent le comportement des perturbations seules, une nouvelle solution \mathbf{q} du modèle d'Euler non linéaire est recherchée comme une superposition de l'écoulement de base et de la petite perturbation, ce qui donne mathématiquement

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) + \epsilon\delta\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \quad (3.18)$$

avec $\mathbf{x} = (x, y)$ les coordonnées cartésiennes spatiales bidimensionnelles. Expliciter le petit paramètre ϵ présente au moins trois avantages :

- il permet de repérer les termes de même ordre ;
- il permet d'imposer une amplitude aux fluctuations et de vérifier par exemple jusqu'à quelle ordre de grandeur le modèle linéarisé resterait valable ou en d'autres termes à partir de quel moment les effets non linéaires ne serait plus négligeables ;
- il permet de se rapprocher de la théorie des développements asymptotiques pour induire de nouveaux modèles comme par exemple des modèles à faible nombre Mach [213].

Les EELs sont alors déduites en ne conservant que les termes de premier ordre en ϵ . En effet, les termes d'ordre 0 sont normalement solutions du modèle non linéaire donc nuls et les termes d'ordre strictement supérieur à 1 sont supposés négligeables devant les termes d'ordre 1. En pratique, une méthode de linéarisation différentielle est appliquée. C'est une approche systématique très puissante basée sur un développement limité au premier ordre des opérateurs \mathbf{M} , \mathbf{E} et \mathbf{F} respectivement :

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}(\bar{\mathbf{q}}) + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \delta \mathbf{q} + \mathcal{O}(\delta \mathbf{q}) \quad (3.19)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{q}) = \mathbf{E}(\bar{\mathbf{q}}) + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \delta \mathbf{q} + \mathcal{O}(\delta \mathbf{q}) \quad (3.20)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{q}}) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \delta \mathbf{q} + \mathcal{O}(\delta \mathbf{q}) \quad (3.21)$$

Par hypothèse,

$$\partial_x \mathbf{E}(\bar{\mathbf{q}}) + \partial_y \mathbf{F}(\bar{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

puisque $\bar{\mathbf{q}}$ est solution stationnaire des équations d'Euler. Les EELs s'expriment finalement à l'aide du système d'équations autonomes

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \partial_t \delta \mathbf{q} + \partial_x \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \delta \mathbf{q} \right) + \partial_y \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \delta \mathbf{q} \right) = \mathbf{0}. \quad (3.23)$$

3.2.2 Application aux variables $\delta \mathbf{q} = (\delta \rho, \bar{\rho} \delta u, \bar{\rho} \delta v, \delta p)^T$

Illustrons tout de suite comment obtenir les EELs pour le jeu de variables primitives en appliquant la méthode différentielle. Notons de façon générale une fonction $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T$.

Par définition, la jacobienne $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \bar{\mathbf{q}}}(\bar{\mathbf{q}})$ s'exprime

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} := \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \bar{\mathbf{q}}}(\bar{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \rho} & \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \rho} & \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial p} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \rho} & \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial p} \\ \frac{\partial f_4}{\partial \rho} & \frac{\partial f_4}{\partial u} & \frac{\partial f_4}{\partial v} & \frac{\partial f_4}{\partial p} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

évaluée en $(\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{p})$. Cette définition est appliquée pour calculer les 3 matrices jacobiennes $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \bar{\mathbf{q}}}$, $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathbf{q}}}$ et $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \bar{\mathbf{q}}}$ à partir des 3 matrices respectives du système non linéaire (3.10). Les équations linéarisées sont cependant plutôt exprimées dans le jeu de variable modifié $\delta \mathbf{q} = (\delta \rho, \bar{\rho} \delta u, \bar{\rho} \delta v, \delta p)^T$ afin d'éliminer au plus la dépendance en $\bar{\rho}$ dans les matrices. Cela donne

respectivement :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{u} & 1 & 0 & 0 \\ \bar{v} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) & \bar{u} & \bar{v} & \frac{1}{\tilde{\gamma}} \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} = \begin{pmatrix} \bar{u} & & 1 & 0 & 0 \\ \bar{u}^2 & & 2\bar{u} & 0 & 1 \\ \bar{u}\bar{v} & & \bar{v} & \bar{u} & 0 \\ \frac{1}{2}\bar{u}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) & \frac{\bar{c}^2}{\tilde{\gamma}} + \frac{1}{2}(3\bar{u}^2 + \bar{v}^2) & \bar{u}\bar{v} & \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}}\bar{u} & \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} = \begin{pmatrix} \bar{v} & 0 & 1 & 0 \\ \bar{u}\bar{v} & \bar{v} & \bar{u} & 0 \\ \bar{v}^2 & 0 & 2\bar{v} & 1 \\ \frac{1}{2}\bar{v}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) & \bar{u}\bar{v} & \frac{\bar{c}^2}{\tilde{\gamma}} + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + 3\bar{v}^2) & \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}}\bar{v} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

avec $\bar{c} = \sqrt{\frac{\gamma \bar{p}}{\rho}}$. Cette méthode fournit directement une formulation linéarisée conservative avec une matrice de masse. De plus, les flux ne dépendent plus que de \bar{u} , \bar{v} et \bar{c} . Si on souhaite éliminer la matrice de masse en préservant cette formulation conservative, il suffit de poser le changement de variable canonique $\tilde{\delta \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \delta \mathbf{q}$. Le système s'exprime alors

$$\partial_t \tilde{\delta \mathbf{q}} + \partial_x \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \right)^{-1} \tilde{\delta \mathbf{q}} \right) + \partial_y \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \right)^{-1} \tilde{\delta \mathbf{q}} \right) = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

avec

$$\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{u} & 1 & 0 & 0 \\ -\bar{v} & 0 & 1 & 0 \\ \tilde{\gamma} \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{2} & -\tilde{\gamma} \bar{u} & -\tilde{\gamma} \bar{v} & \tilde{\gamma} \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma - 3}{2} \bar{u}^2 + \frac{\gamma - 1}{2} \bar{v}^2 & (3 - \gamma) \bar{u} & -\tilde{\gamma} \bar{v} & \tilde{\gamma} \\ -\bar{u}\bar{v} & \bar{v} & \bar{u} & 0 \\ \frac{u((\gamma^2 - 3\gamma + 2)(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) - 2c^2)}{2\tilde{\gamma}} & \frac{(-2\gamma^2 + 5\gamma - 3)\bar{u}^2 + \tilde{\gamma}\bar{v}^2 + 2c^2}{2\tilde{\gamma}} & -\tilde{\gamma}\bar{v}\bar{u} & \tilde{\gamma}\bar{u} \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\bar{u}\bar{v} & \bar{v} & \bar{u} & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}\bar{v}^2 + \frac{\gamma-1}{2}\bar{u}^2 & -\tilde{\gamma}\bar{u} & (3-\gamma)\bar{v} & \tilde{\gamma} \\ \frac{v((\gamma^2-3\gamma+2)(\bar{u}^2+\bar{v}^2)-2c^2)}{2\tilde{\gamma}} & -\tilde{\gamma}\bar{v}\bar{u} & \frac{(-2\gamma^2+5\gamma-3)\bar{v}^2+\tilde{\gamma}\bar{u}^2+2c^2}{2\tilde{\gamma}} & \gamma\bar{v} \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Ces deux formulations conservatives avec ou sans matrices de masse sont intéressantes pour traiter des problèmes où l'écoulement de base ne serait pas suffisamment régulier (présence de chocs par exemple) et pour appliquer des méthodes numériques adaptées en particulier à proximité d'une paroi. En aéroélasticité par exemple, ce sont ces formulations qui sont privilégiées. Les EELs sont cependant plutôt formulées dans le jeu de variables conservatives $\delta \mathbf{q} = (\delta \rho, \delta(\rho u), \delta(\rho v), \delta(\rho E))^T$ pour les perturbations et $\bar{\mathbf{q}} = (\bar{\rho}, \bar{\rho u}, \bar{\rho v}, \bar{\rho E})^T$ pour l'écoulement de base. Ce choix présente l'avantage de fournir directement une formulation sans matrice de masse sans avoir à effectuer un changement de variable. Cependant, il n'est pas idéal pour traiter le couplage avec la dynamique d'une structure qui nécessite de connaître le champ de pression à la paroi. De même en acoustique, il est plus intéressant de travailler directement avec le champ de pression. Dans le cadre de la thèse, ces formulations n'ont donc pas été exploitées. De plus les flux sont compliqués à manipuler et il est donc plus difficile d'analyser leurs propriétés mathématiques. Nous avons par conséquent choisi une écriture sans matrice de masse dans le jeu de variables $\delta \mathbf{q} = (\delta \rho, \bar{\rho} \delta u, \bar{\rho} \delta v, \delta p)$. Elle s'exprime comme suit en formulation non conservative :

$$\partial_t \delta \mathbf{q} + \mathbf{E} \partial_x \delta \mathbf{q} + \mathbf{F} \partial_x \delta \mathbf{q} + \mathbf{R} \delta \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.32)$$

avec

$$\mathbf{E} := \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \right) = \begin{pmatrix} \bar{u} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 \\ 0 & \bar{c}^2 & 0 & \bar{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} := \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \right) = \begin{pmatrix} \bar{v} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \bar{v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v} & 1 \\ 0 & 0 & \bar{c}^2 & \bar{v} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

et

$$\mathbf{R} := \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \right)^{-1} \left(\partial_x \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \right) + \partial_y \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \right) \right) = \begin{pmatrix} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{u} & \partial_x \bar{u} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} & \partial_y \bar{u} & 0 \\ \bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{v} & \partial_x \bar{v} & \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} + \partial_y \bar{v} & 0 \\ 0 & \tilde{\gamma} \bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{u} + \partial_x c^2 & \tilde{\gamma} \bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{v} + \partial_y c^2 & \gamma \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Les notations \mathbf{E} et \mathbf{F} ont été abusivement reprises pour les flux linéarisés par commodité. Cette écriture des EELs a pour effet une grande simplification des termes convectifs et introduit un nouveau terme $\mathbf{R} \delta \mathbf{q}$. Il est intéressant de constater que la complexité des termes convectifs de la formulation avec matrice de masse a été d'une certaine manière transférée dans le terme $\mathbf{R} \delta \mathbf{q}$. Cette matrice contient les gradients des deux composantes de vitesse et de célérité locale de l'écoulement de base. Dans le cas particulier où l'écoulement de base est uniforme (constant), \mathbf{R} est nulle. Dans le cas contraire, nous verrons par la suite qu'elle peut être à l'origine d'une dynamique des fluctuations plus complexe, parfois instable, en fonction de la complexité

de l'écoulement de référence. C'est la raison pour laquelle la matrice \mathbf{R} est parfois appelée matrice de "réaction" [214]. Les deux éléments qui motivent le choix de cette formulation sont donc la simplification des termes convectifs (en particulier le creux des matrices \mathbf{E} et \mathbf{F}) et l'avènement de cette matrice de réaction. Pour des raisons numériques et informatiques, nous serons plutôt amenés à développer la formulation quasi-conservative, obtenue simplement à partir de la formulation non-conservative comme suit :

$$\partial_t \delta \mathbf{q} + \partial_x (\mathbf{E} \delta \mathbf{q}) + \partial_y (\mathbf{F} \delta \mathbf{q}) + (\mathbf{R} - \partial_x \mathbf{E} - \partial_y \mathbf{F}) \delta \mathbf{q} = 0. \quad (3.35)$$

Dans cette formulation, la matrice de réaction se réduit à

$$\tilde{\mathbf{R}} := \mathbf{R} - \partial_x \mathbf{E} - \partial_y \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{u} & \partial_x \bar{u} & \partial_y \bar{u} & 0 \\ \bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{v} & \partial_x \bar{v} & \partial_y \bar{v} & 0 \\ 0 & \tilde{\gamma} \bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{u} & \tilde{\gamma} \bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{v} & \tilde{\gamma} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

La matrice de réaction ne dépend plus que des gradients du champ de vitesse stationnaire. Notons que les formulations en variables primitives sans matrices de masse sont exploitées dans le contexte des méthodes hybrides en aéroacoustique.

3.2.3 Nature de l'écoulement de base $\bar{\mathbf{q}}$

L'écoulement de base $\bar{\mathbf{q}}$ est *a priori* une solution stationnaire des équations d'Euler vérifiant

$$\partial_x \begin{bmatrix} \bar{\rho} \bar{u} \\ \bar{\rho} \bar{u}^2 + \bar{p} \\ \bar{\rho} \bar{u} \bar{v} \\ \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} \bar{p} \bar{u} + \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{u} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) \end{bmatrix} + \partial_y \begin{bmatrix} \bar{\rho} \bar{v} \\ \bar{\rho} \bar{u} \bar{v} \\ \bar{\rho} \bar{v}^2 + \bar{p} \\ \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} \bar{p} \bar{v} + \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{v} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.37)$$

Notons qu'il n'est pas possible de connaître mathématiquement par exemple $(\bar{\rho}, \bar{\rho} \bar{u}, \bar{\rho} \bar{v}, \bar{p})^T$ à partir de la simple connaissance de $(\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{p})^T$ puisque $\bar{\rho} \bar{u} \neq \bar{\rho} \bar{u}$ en général. Il s'agit d'une remarque importante si on souhaite avoir une coïncidence parfaite des variables stationnaires et fluctuantes dans les EELs. Pour terminer, l'écoulement établi n'est pas nécessairement exactement une solution du modèle d'Euler. Il peut très bien être issu des équations plus générales de Navier-Stokes, ce qui revient à supposer que les effets visqueux et thermiques sont négligeables pour l'évolution des fluctuations compressibles. Par ailleurs, un écoulement établi n'est pas nécessairement stationnaire. Il peut dépendre du temps, être périodique par exemple. Cependant, les écoulements de base seront toujours supposés stationnaires dans le cadre de la thèse car la linéarisation du modèle non linéaire au voisinage d'un écoulement instationnaire aboutirait à un système d'équations linéaires non autonome. De ce fait, nous ne pourrions pas appliquer facilement la théorie de la réduction linéaire. Ce n'est pas forcément une grande limitation dans la mesure où dans ce type de procédure les écoulements de base retenus peuvent être des écoulements instationnaires moyennés sur un intervalle de temps caractéristique (par exemple sur plusieurs périodes pour un écoulement de nature quasi-périodique ou permanent en moyenne).

3.3 Propriétés des EELs

3.3.1 Hyperbolicité

Les systèmes de loi de conservation exprimés sous forme non conservative

$$\partial_t \mathbf{q} + \mathbf{E} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{F} \partial_y \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.38)$$

sont dits strictement hyperboliques si la matrice $\mathbf{E}\nu_x + \mathbf{F}\nu_y$ est diagonalisable dans \mathbb{R} et si ses valeurs propres sont distinctes quel que soit le vecteur unitaire $\boldsymbol{\nu} = (\nu_x, \nu_y)^T$. Si ses valeurs propres ne sont pas toutes distinctes, le système est simplement dit hyperbolique. On montre par exemple que le système non linéaire d'Euler bidimensionnel est hyperbolique avec pour valeurs propres

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= u \cos(\theta) + v \sin(\theta) - c \\ \lambda_2 &= u \cos(\theta) + v \sin(\theta) \\ \lambda_3 &= u \cos(\theta) + v \sin(\theta) \\ \lambda_4 &= u \cos(\theta) + v \sin(\theta) + c\end{aligned}\tag{3.39}$$

pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ avec $\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4$. Le système d'Euler n'est pas strictement hyperbolique puisque qu'il existe une valeur propre double. D'un point de vue physique, les modèles de nature hyperbolique se caractérisent par des phénomènes de propagation à vitesse finie. Cette nature physique s'appréhende facilement dans le cas monodimensionnel puisque les solutions du système se ramènent à la résolution d'équations de transport. Les EELs héritent de cette propriété qualitative bien qu'il ne semble pas être possible de les exprimer dans la formulation (3.38) si l'écoulement de base n'est pas uniforme (présence de la matrice de réaction).

3.3.2 Symétrisabilité

Le concept de symétrisabilité, introduit par Friedrichs [108], est particulièrement important pour les problèmes hyperboliques car il permet de fournir des résultats énergétiques sur le système physique et mathématiques (unicité de la solution avec des hypothèses de régularité suffisante). Les équations d'Euler constituent un bon exemple de système hyperbolique symétrisable [144, 254, 266]. On se donne un système hyperbolique écrit sous la forme générale

$$\partial_t \mathbf{q} + \mathbf{E} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{F} \partial_y \mathbf{q} + \mathbf{R} \mathbf{q} = \mathbf{0}.\tag{3.40}$$

On dit que le système (3.40) est symétrisable si il existe une matrice \mathbf{H} symétrique définie positive telle que les matrices \mathbf{HE} et \mathbf{HF} sont symétriques (mais pas forcément définies positives). La matrice \mathbf{H} est dénommée symétriseur. Le symétriseur \mathbf{H} peut être obtenu par une méthode d'identification. Il suffit de calculer explicitement les produits \mathbf{HE} et \mathbf{HF} en posant \mathbf{H} SDP avec des coefficients à déterminer de façon à ce que les matrices \mathbf{HE} et \mathbf{HF} soient simultanément symétriques. Si \mathbf{H} est un symétriseur de \mathbf{E} , notons la propriété immédiate $\mathbf{HEH}^{-1} = \mathbf{E}^T \mathbf{H} \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{E}^T$. Les EELs écrites sous la forme non conservative sont symétrisables. Le symétriseur \mathbf{H} et son inverse sont donnés par

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \alpha^2 \bar{c}^2 & 0 & 0 & -\alpha^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha^2 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}^{-1} = \begin{pmatrix} d/\alpha^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \bar{c}^2 \end{pmatrix}\tag{3.41}$$

avec $d = \frac{1 + \alpha^2}{\bar{c}^2}$ et α un paramètre réel arbitraire non nul. Les matrices \mathbf{HE} et \mathbf{HF} s'expriment respectivement

$$\mathbf{HE} = \begin{pmatrix} \alpha^2 \bar{c}^2 \bar{u} & 0 & 0 & -\alpha^2 \bar{u} \\ 0 & \bar{u} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 \\ -\alpha^2 \bar{u} & 1 & 0 & d\bar{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{HF} = \begin{pmatrix} \alpha^2 \bar{c}^2 \bar{v} & 0 & 0 & -\alpha^2 \bar{v} \\ 0 & \bar{v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v} & 1 \\ -\alpha^2 \bar{v} & 0 & 1 & d\bar{v} \end{pmatrix}.\tag{3.42}$$

Puisque la matrice \mathbf{H} est symétrique et définie positive, elle admet une décomposition de

Cholesky $\mathbf{H} = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$ avec

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha \bar{c} & 0 & 0 & -\alpha/\bar{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\bar{c} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\alpha \bar{c} & 0 & 0 & 1/\bar{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c} \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Ses différentes matrices liées au symétriseur vont être utilisées dans le cadre d'une analyse énergétique des EELs dans la section suivante.

3.3.3 Stabilité des EELs

La stabilité des EELs est étudiée à l'aide d'une méthode énergétique basée sur l'exploitation des propriétés engendrées par le symétriseur \mathbf{H} . En plus d'avoir la propriété de symétriser les flux, le symétriseur induit une énergie

$$\begin{aligned} \|\delta \mathbf{q}\|_{\mathbf{H}}^2 &:= \delta \mathbf{q}^T \mathbf{H} \delta \mathbf{q} \\ &= \alpha^2 \bar{c}^2 \delta \rho^2 + \bar{\rho}^2 (\delta u^2 + \delta v^2) - 2\alpha^2 \delta p \delta \rho + d \delta p^2 \end{aligned} \quad (3.44)$$

qui est bien dimensionnée physiquement contrairement à l'énergie L^2 puisque

$$\begin{aligned} \|\delta \mathbf{q}\|_2^2 &:= \delta \mathbf{q}^T \delta \mathbf{q} \\ &= \delta \rho^2 + \bar{\rho}^2 (\delta u^2 + \delta v^2) + \delta p^2. \end{aligned} \quad (3.45)$$

En exploitant la symétrie des matrices \mathbf{H} , \mathbf{HE} et \mathbf{HF} , il est possible de trouver un majorant de l'énergie $\|\delta \mathbf{q}\|_{\mathbf{H}, \Omega}^2 := \int_{\Omega} \delta \mathbf{q}^T \mathbf{H} \delta \mathbf{q} d\mathbf{x}$ comme suit :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta \mathbf{q}\|_{\mathbf{H}, \Omega}^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \delta \mathbf{q}^T \mathbf{H} \delta \mathbf{q} d\mathbf{x} \quad (3.46)$$

$$= \int_{\Omega} \delta \mathbf{q}^T \mathbf{H} \frac{\partial \delta \mathbf{q}}{\partial t} d\mathbf{x} \quad (3.47)$$

$$= - \int_{\Omega} \delta \mathbf{q}^T \mathbf{H} (\mathbf{E} \partial_x \delta \mathbf{q} + \mathbf{F} \partial_y \delta \mathbf{q} + \mathbf{R} \delta \mathbf{q}) d\mathbf{x} \quad (3.48)$$

$$= - \underbrace{\int_{\Omega} \delta \mathbf{q}^T \mathbf{H} (\mathbf{E} \partial_x \delta \mathbf{q} + \mathbf{F} \partial_y \delta \mathbf{q}) d\mathbf{x}}_{(1)} - \underbrace{\int_{\Omega} \delta \mathbf{q}^T \mathbf{H} \mathbf{R} \delta \mathbf{q} d\mathbf{x}}_{(2)} \quad (3.49)$$

Les termes (1) et (2) s'écrivent ensuite respectivement

$$(1) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \partial_x (\delta \mathbf{q}^T \mathbf{H} \mathbf{E} \delta \mathbf{q}) + \partial_y (\delta \mathbf{q}^T \mathbf{H} \mathbf{F} \delta \mathbf{q}) - \delta \mathbf{q}^T (\partial_x (\mathbf{H} \mathbf{E}) + \partial_y (\mathbf{H} \mathbf{F})) \delta \mathbf{q} d\mathbf{x} \quad (3.50)$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} \delta \mathbf{q}^T (n_x \mathbf{H} \mathbf{E} + n_y \mathbf{H} \mathbf{F}) \delta \mathbf{q} ds}_{(3)} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta \mathbf{q}^T (\partial_x (\mathbf{H} \mathbf{E}) + \partial_y (\mathbf{H} \mathbf{F})) \delta \mathbf{q} d\mathbf{x}}_{(4)} \quad (3.51)$$

et

$$(2) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{H} \mathbf{R} + (\mathbf{H} \mathbf{R})^T) \delta \mathbf{q} + \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{H} \mathbf{R} - (\mathbf{H} \mathbf{R})^T) \delta \mathbf{q} d\mathbf{x} \quad (3.52)$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{H} \mathbf{R} + (\mathbf{H} \mathbf{R})^T) \delta \mathbf{q} d\mathbf{x}}_{(5)} \quad (3.53)$$

La dernière égalité vient du fait que toute matrice peut s'écrire comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. De plus, une matrice antisymétrique ne produit

pas d'énergie. Les termes (4) et (5) peuvent maintenant être regroupés ce qui donne

$$\begin{aligned} (4) + (5) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta \mathbf{q}^T (\partial_x(\mathbf{HE}) + \partial_y(\mathbf{HF}) - (\mathbf{HR} + (\mathbf{HR})^T)) \delta \mathbf{q} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q}^T (\mathbf{Q}^{-T} (\partial_x(\mathbf{HE}) + \partial_y(\mathbf{HF}) - (\mathbf{HR} + (\mathbf{HR})^T)) \mathbf{Q}^{-1}) \mathbf{Q} \delta \mathbf{q} dx. \end{aligned} \quad (3.54)$$

On en déduit finalement une majoration de l'énergie

$$\frac{d}{dt} \|\delta \mathbf{q}\|_{\mathbf{H}, \Omega}^2 \leq - \int_{\partial \Omega} \delta \mathbf{q}^T (n_x \mathbf{HE} + n_y \mathbf{HF}) \delta \mathbf{q} ds + \sigma \|\delta \mathbf{q}\|_{\mathbf{H}, \Omega}^2 \quad (3.55)$$

où σ représente le rayon spectral de la matrice

$$\mathcal{E} = \mathbf{Q}^{-T} (\partial_x(\mathbf{HE}) + \partial_y(\mathbf{HF}) - (\mathbf{HR} + (\mathbf{HR})^T)) \mathbf{Q}^{-1} \quad (3.56)$$

ou formulée autrement

$$\mathcal{E} = \mathbf{Q}^{-T} (\partial_x(\mathbf{HE}) + \partial_y(\mathbf{HF})) \mathbf{Q}^{-1} - (\mathbf{QRQ}^{-1} + (\mathbf{QRQ}^{-1})^T). \quad (3.57)$$

Intégrons maintenant l'inégalité (3.55) sur l'intervalle $[t_0, t_f]$ en ignorant l'intégrale de frontière, on obtient

$$\|\delta \mathbf{q}(t_f)\|_{\mathbf{H}, \Omega}^2 \leq \|\delta \mathbf{q}(t_0)\|_{\mathbf{H}, \Omega}^2 + \sigma \int_{t_0}^{t_f} \|\delta \mathbf{q}\|_{\mathbf{H}, \Omega}^2 dt. \quad (3.58)$$

Finalement, d'après le lemme de Gronwall

$$\|\delta \mathbf{q}(t_f)\|_{\mathbf{H}, \Omega}^2 \leq \exp(\sigma t) \|\delta \mathbf{q}(t_0)\|_{\mathbf{H}, \Omega}^2. \quad (3.59)$$

Par conséquent, la stabilité des EELs dépend du signe de σ . Si σ est négatif, l'énergie diminue et si σ est positif l'énergie augmente. Nous allons maintenant justifier l'intérêt de la formulation en variables primitives sans matrice de masse avec l'introduction de la matrice dite de réaction. Pour ce faire, nous proposons d'analyser l'influence énergétique des flux et de la matrice de réaction. Afin de simplifier le raisonnement, nous supposons que Ω est un support compact des équations ce qui permet d'ignorer la contribution du terme de frontière (3). Dans le cas des systèmes ouverts, cette hypothèse de compacité n'est pas limitante. En effet, puisque les EELs sont hyperboliques, l'évolution des perturbations est régie par un phénomène de propagation à vitesse finie. De ce fait, on peut toujours imaginer un domaine physique suffisamment grand de façon à retarder l'arrivée des perturbations au niveau des frontières du domaine. Commençons par calculer la contribution énergétique des flux :

$$\mathbf{Q}^{-T} (\partial_x(\mathbf{HE}) + \partial_y(\mathbf{HF})) \mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} & 0 & 0 & 2\alpha \frac{\bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{c}}{\bar{c}} \\ 0 & \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} & 0 \\ 2\alpha \frac{\bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{c}}{\bar{c}} & 0 & 0 & \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} - 2 \frac{\bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{c}}{\bar{c}} \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

Les valeurs propres de cette matrice sont respectivement

$$\lambda_{1,2} = \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}, \quad \lambda_{3,4} = \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} \pm 2\beta \frac{\bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{c}}{\bar{c}} \quad (3.61)$$

avec β un paramètre qui dépend de α . Par conséquent, il y a au moins trois cas particuliers d'intérêt où les flux ne contribueront pas à la croissance énergétique des perturbations :

- les écoulements uniformes : $\bar{\mathbf{u}}$ et \bar{c} sont constants sur tout le domaine (indépendants de la position) ;
- les écoulements parallèles de type $\bar{\mathbf{q}} = (\bar{\rho}(y), \bar{u}(y), 0, \bar{p}(y))$;
- les écoulements incompressibles ($\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0$) et isothermes (célérité \bar{c} constante).

Dans ces cas, la croissance énergétique serait causée uniquement par les termes de la matrice de réaction. \mathbf{R} peut être décomposée en trois contributions de la manière suivante

$$\mathbf{R} = \underbrace{\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{I}}}_{\text{Compressibilité}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_x \bar{u} & \partial_y \bar{u} & 0 \\ & \partial_x \bar{v} & \partial_y \bar{v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Cinématique}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{u} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\gamma} \bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{u} + \partial_x \bar{c}^2 & \tilde{\gamma} \bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{v} + \partial_y \bar{c}^2 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Thermodynamique}} \quad (3.62)$$

avec $\tilde{\mathbf{I}} = \text{diag}(1, 1, 1, \gamma)$. En effet, en exploitant la solution stationnaire des équations d'Euler, les termes $\bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{u}$ et $\bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{v}$ ne dépendent que de la variation de la masse volumique et de la célérité puisque

$$\bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{v} = -\frac{\partial_y \bar{p}}{\bar{\rho}} = \frac{1}{\gamma} (\partial_y \bar{c}^2 + \bar{c}^2 \frac{\partial_y \bar{\rho}}{\bar{\rho}}) \quad (3.63)$$

et

$$\bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{u} = -\frac{\partial_x \bar{p}}{\bar{\rho}} = \frac{1}{\gamma} (\partial_x \bar{c}^2 + \bar{c}^2 \frac{\partial_x \bar{\rho}}{\bar{\rho}}). \quad (3.64)$$

Il en découle que la croissance énergétique des perturbations dans un fluide incompressible et isotherme est seulement due à la contribution cinématique de la matrice de réaction. Par exemple, la croissance énergétique des perturbations dans un écoulement parallèle $\bar{\mathbf{q}} = (\bar{\rho}, \bar{u}(y), 0, \bar{p})$ est seulement provoquée par le terme de cisaillement $\partial_y \bar{u}$. Cette analyse montre que l'énergie associée aux EELs est conservée seulement pour les écoulements de base uniforme. L'analyse reste donc limitée mais elle a permis de mettre en évidence la contribution prépondérante de la matrice de réaction à la croissance énergétique transitoire. Lorsque les écoulements de base ne sont pas uniformes, il existe toujours une croissance énergétique aux temps courts. Cette croissance énergétique peut être infime par exemple dans le cas des écoulements de base affines. Malheureusement, il n'existe pas de théorie générale pour décider de manière analytique si un écoulement non uniforme arbitraire sera stable (la croissance énergétique n'est observée qu'à des temps courts) ou instable (les perturbations sont amplifiées indéfiniment) en dehors du cas particulier des écoulements cisailés. Le comportement asymptotique de tels écoulements peut parfois être analysé [46]. Ces derniers représentent par ailleurs une classe importante d'écoulement à la fois sur le plan théorique et pratique. Dans la nature, ils peuvent se développer de différentes façons :

- à proximité d'une surface solide (couche limite laminaire) ;
- à la confluence de deux écoulements parallèles de vitesse différente (couche de mélange en aval d'une plaque de séparation) ;
- en sortie d'une tuyère (jet libre) ou encore d'un éjecteur (jet confiné) ;
- derrière un obstacle (sillage en aval).

La théorie de la stabilité des écoulements monodimensionnels est dénommée théorie locale. Elle est aujourd'hui bien maîtrisée [241]. En particulier, on sait que la condition nécessaire du

développement d'une instabilité est la présence d'un point d'inflexion dans le profil de l'écoulement de base. Il s'agit du fameux théorème du point d'inflexion de Rayleigh. Par exemple, l'écoulement de Poiseuille plan et la couche limite sur une plaque plane sont linéairement stables si les effets visqueux sur les perturbations sont négligés. Notons cependant que ces écoulements sont instables expérimentalement ce qui suggère l'importance de la viscosité dans la déstabilisation de certains écoulements. Enfin, insistons sur le fait que le théorème du point d'inflexion est une condition nécessaire mais non suffisante d'instabilité. Par exemple, l'écoulement de base de Kolmogorov ($\bar{u}(y) = \cos(y)$) peut être stable en fonction de son intervalle de définition tout en présentant un point d'inflexion [46]. Dans le cas où l'écoulement de base serait instable, émergent ensuite les concepts importants d'instabilités absolues et convectives [143]. Les principaux comportements des perturbations dans un écoulement monodimensionnel sont représentés sur la figure 3.1.

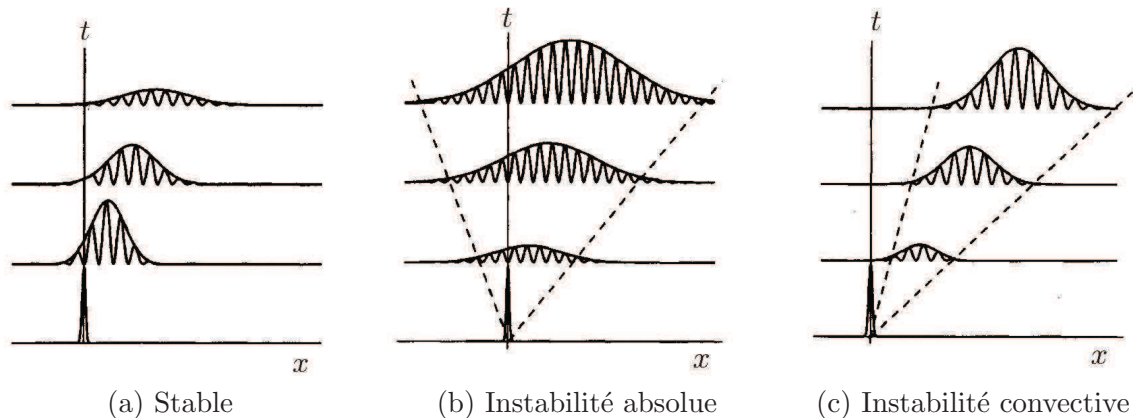


FIGURE 3.1 – Nature des solutions pour des écoulements de base cisailés

La stabilité des EELs est donc intimement liée à la stabilité de l'écoulement de base. Une telle étude reste encore un sujet important de recherche car elle peut apporter des informations particulièrement intéressantes sur le plan physique. Si les perturbations (rugosité de paroi, défauts de conception provoquant à certains endroits des aspérités...) autour d'un écoulement ne sont plus atténuées mais amplifiées, cela se traduit physiquement par une modification topologique de l'écoulement menant soit à une nouvelle solution stationnaire, soit à une solution instationnaire. Ce changement de topologie de l'écoulement est donc un mécanisme physique non-linéaire. Dans la communauté de la stabilité hydrodynamique, on cherche à étudier par exemple comment un écoulement peut passer d'un régime laminaire à un régime turbulent (passage aussi dénommé transition). Cependant, ces problématiques de stabilité d'écoulement n'émergent pas toujours. Dans le contexte de l'aéroélasticité, par exemple, le modèle d'Euler est souvent utilisé pour calculer l'écoulement de référence autour d'une structure. Or cet écoulement de référence est souvent stationnaire. Il est clair que l'hypothèse de glissement simplifie de manière drastique la physique des écoulements au voisinage des parois puisque le fluide est simplement supposé glisser le long des parois au lieu d'y adhérer. L'existence même d'une solution stationnaire suggère que l'écoulement a de bonne chance d'être stable. Cela explique probablement le fait que le problème de la stabilité des écoulements soit peu rencontré donc discuté dans la communauté de l'aéroélasticité du moins tant que le modèle d'Euler est utilisé pour calculer l'écoulement de référence. En régime subsonique, les écoulements eulériens ont une nature quasi-potentielle en dehors des singularités géométriques (bord de fuite d'un profil par exemple). En supposant que les instabilités d'écoulement émergent essentiellement par l'intermédiaire du mode tourbillonnaire à faible nombre de Mach, nous pouvons montrer que les EELs devraient être stables pour la majorité des écoulements potentiels en l'absence de source tourbillonnaire. En effet, si l'écoulement stationnaire est supposé isentropique, les

relations thermodynamiques permettent d'écrire tout d'abord

$$\nabla p = c^2 \nabla \rho \Rightarrow \frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\nabla c^2}{\tilde{\gamma}}. \quad (3.65)$$

En prenant maintenant le rotationnel des deux équations qui régissent l'évolution du champ de vitesse dans le système (3.13), on obtient

$$\partial_t \omega + u \partial_x \omega + v \partial_y \omega + \omega (\partial_x u + \partial_y v) = 0 \quad (3.66)$$

avec $\omega = \partial_y u - \partial_x v$ la vorticité. En linéarisant cette équation et en supposant que l'écoulement de base est irrotationnel, on trouve finalement que

$$\partial_t \delta \omega + \bar{u} \partial_x \delta \omega + \bar{v} \partial_y \delta \omega + (\partial_x \bar{u} + \partial_y \bar{v}) \delta \omega = 0 \quad (3.67)$$

montrant qu'il ne peut y avoir création de vorticité sans terme source ou condition initiale possédant une vorticité non nulle. Autrement dit, le champ de vitesse fluctuant reste irrotationnel. De plus le mode tourbillonnaire est simplement convecté si l'écoulement de base est incompressible irrotationnel bidimensionnel. Par exemple, un mouvement de translation rigide d'un corps plongé dans un écoulement potentiel a peu de chance de développer une instabilité aérodynamique. C'est aussi le cas pour des mouvements de rotation rigide de corps plongés dans un écoulement potentiel incompressible. Si le fluide adhère à la paroi, la physique devient particulièrement compliquée menant rapidement vers la turbulence et le chaos si le nombre de Reynolds dépasse un certain seuil critique (théorie des couches limites). D'une façon générale, la compréhension de la dynamique des fluides compressibles et visqueux (leurs phénoménologies) est très complexe. Chu et Kov sznay [66] ont proposé d'analyser leurs comportements en décomposant les équations générales de Navier-Stokes suivant trois modes : le mode de vorticité, le mode acoustique et le mode entropique. Ces trois modes sont les briques fondamentales des écoulements compressibles. Les interactions de ces trois modes fondamentaux peuvent engendrer jusqu'à 18 mécanismes physiques différents [34]. En particulier, chaque mode peut être engendré par 6 mécanismes différents correspondant aux 6 interactions possibles des 3 modes. Par exemple, la convection de la chaleur dans un écoulement s'explique par la formation du mode entropique à partir de l'interaction des deux modes de vorticité et d'entropie. La production du son par un écoulement résulte de l'interaction de deux modes tourbillonnaires. La production d'un écoulement par du son résulte de l'interaction de deux modes acoustiques, etc. En résumé, disons que les principaux écoulements non uniformes pouvant prétendre être stables sont les écoulements parfaits incompressibles et irrotationnels, plus généralement les écoulements parfaits homentropiques, les écoulements réels laminaires et les écoulements permanents. Bien entendu, la présence de chocs en régime transsonique pour les fluides parfaits ou encore la présence d'un décollement dans une couche limite pour les fluides réels compliquent profondément les choses. En effet, les solutions peuvent alors respectivement présenter des discontinuités (chocs) ou des points d'inflexions (décollements).

3.4 Adimensionnement

L'adimensionnement d'un modèle physique est un puissant outil. Il s'agit de substituer un changement de variable appropriée de manière à supprimer partiellement ou totalement les unités physiques du système d'équations étudié. Le but est de simplifier au maximum la représentation paramétrique du problème physique analysé mais aussi d'identifier ses propriétés caractéristiques. Dans le cadre de la réduction de modèle, l'adimensionnement est aussi d'une importance capitale puisque cette technique peut permettre de réduire le nombre de paramètres utiles à la description du modèle donc de construire des modèles réduits qui seront fiables sur une plus large gamme de paramètres. Dans le cas des EELs, on définit par exemple

le vecteur adimensionné $\delta\mathbf{q}^* = (\delta\rho^*, \bar{\rho}\delta u^*, \bar{\rho}\delta v^*, \delta p^*)$ avec

$$\delta\rho^* = \frac{\delta\rho}{d_\rho}, \quad \delta u^* = \frac{\delta u}{d_u}, \quad \delta v^* = \frac{\delta v}{d_v}, \quad \delta p^* = \frac{\delta p}{d_p}, \quad t^* = \frac{t}{d_t}, \quad x^* = \frac{x}{d_x}, \quad y^* = \frac{y}{d_y} \quad (3.68)$$

L'étoile en exposant signifie que la variable n'a pas de dimension. L'adimensionnement est un changement de variable linéaire qui idéalement respecte la cohérence des dimensions physiques. Définissons la matrice diagonale $\mathbf{D} = \text{diag}(d_\rho, d_u, d_v, d_p)$. Si \mathbf{D} est choisie à coefficients constants, le modèle adimensionné est obtenu à l'aide de l'expression

$$\partial_t \delta\mathbf{q}^* + \partial_x(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{D}\delta\mathbf{q}^*) + \partial_y(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}\delta\mathbf{q}^*) + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{D}\delta\mathbf{q}^* = \mathbf{0} \quad (3.69)$$

avec

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \bar{u} & d_u/d_\rho & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u} & 0 & d_p/d_u \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 \\ 0 & c^2 d_u/d_p & 0 & \bar{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \bar{v} & 0 & d_v/d_\rho & 0 \\ 0 & \bar{v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v} & d_p/d_v \\ 0 & 0 & c^2 d_v/d_p & \bar{v} \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

De plus, les dérivées peuvent aussi être transformées :

$$\partial_t = \frac{1}{d_t} \partial_{t^*}, \quad \partial_x = \frac{1}{d_x} \partial_{x^*}, \quad \partial_y = \frac{1}{d_y} \partial_{y^*}, \quad (3.71)$$

ce qui donne finalement

$$\partial_{t^*} \delta\mathbf{q}^* + \partial_{x^*} \left(\frac{d_t}{d_x} \mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{D}\delta\mathbf{q}^* \right) + \partial_{y^*} \left(\frac{d_t}{d_y} \mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}\delta\mathbf{q}^* \right) + d_t \mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{D}\delta\mathbf{q}^* = \mathbf{0}. \quad (3.72)$$

Dans le cas d'un écoulement uniforme par exemple, on pose de manière courante

$$d_\rho = \bar{\rho}, \quad d_u = \bar{\rho}\bar{c}, \quad d_v = \bar{\rho}\bar{c}, \quad d_p = \bar{\rho}\bar{c}^2, \quad d_x = L, \quad d_y = L, \quad d_t = \frac{L}{c} \quad (3.73)$$

Les EELs adimensionnées ne dépendent plus que des deux nombres de Mach $M_x = \bar{u}/c$ et $M_y = \bar{v}/c$.

$$\partial_{t^*} \delta\mathbf{q}^* + \mathbf{E}^* \partial_{x^*} \delta\mathbf{q}^* + \partial_{y^*} \mathbf{F}^* \delta\mathbf{q}^* = \mathbf{0} \quad (3.74)$$

avec

$$\mathbf{E}^* = \begin{pmatrix} M_x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & M_x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & M_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & M_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^* = \begin{pmatrix} M_y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & M_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & M_y \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

Notons que lorsque l'écoulement de base est uniforme, les fluctuations de vitesse et de pression sont découplées des fluctuations de masse volumique. L'équation qui régit l'évolution des fluctuations de masse volumique n'est donc plus utile. Cela reste vrai si l'écoulement de base est non uniforme homentropique puisque dans ce cas $\delta p = \bar{c}^2 \delta \rho$. De plus, l'évolution de la vorticité est r g e par une simple équation de transport. Il ne peut y avoir génération de perturbations rotationnelles qu'en présence de sources rotationnelles. Enfin, l'adimensionnement introduit a eu un effet de symétrisation du système d'équations portant sur $(\bar{\rho}\delta u, \bar{\rho}\delta v, \delta p)$. C'est encore le cas si la célérité locale est constante ( coulements isothermes). Il est donc intéressant de voir qu'un adimensionnement peut améliorer la formulation mathématique. Nous verrons que ce point explique certaines améliorations observées au niveau des modèles réduits

lorsque les grandeurs physiques sont adimensionnées.

3.5 EELs adjointes

La notion de problème adjoint (on parle aussi de problème dual) intervient essentiellement lorsqu'on s'intéresse à des modèles linéaires ou linéarisés qui ne sont pas symétriques. C'est particulièrement le cas pour les EELs et plus généralement pour les équations de Navier-Stokes linéarisées. Un modèle adjoint est formé par des équations adjointes qui sont obtenues en définissant un produit scalaire et en intégrant par parties les équations du modèle physique d'intérêt. Par opposition au problème adjoint, le modèle physique d'intérêt peut aussi être dénommé problème direct, ou encore problème primal dans la littérature anglophone. Dans le contexte de la dynamique des écoulements, la construction d'un modèle adjoint intervient naturellement dans de nombreuses applications telles que l'analyse de la sensibilité, l'analyse de la réceptivité [138], le contrôle optimal, la recherche de la perturbation optimale pour un problème aux valeurs initiales ou pour un problème forcé mais encore pour optimiser une forme aérodynamique [117], optimiser un écoulement moyen, minimiser des erreurs... Par exemple, Wei et Freund [277] exploitent les équations de Navier-Stokes compressible adjointes afin d'analyser la sensibilité du bruit dans le but de le contrôler et le réduire. Une bonne revue des méthodes adjointes en dynamique des fluides est par exemple présentée dans la thèse de Moret-Gabarro [189]. Dans le cadre de cette thèse, nous verrons que le problème adjoint peut aussi être important à considérer lorsqu'un modèle réduit est construit. Présentons succinctement le principe de construction d'un modèle adjoint dans le cas d'une simple équation de transport scalaire

$$\mathcal{L}(q) \equiv \partial_t q + c \partial_x q, \quad t_0 \leq t \leq t_f, \quad a \leq x \leq b. \quad (3.76)$$

En intégrant par partie l'équation de transport pondérée par une fonction arbitraire q^\dagger on a

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \int_a^b q^\dagger \mathcal{L}(q) dt dx &= \int_{t_0}^{t_f} \int_a^b q^\dagger (\partial_t q(x, t) + c \partial_x q(x, t)) dt dx \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \int_a^b q \underbrace{(-\partial_t q^\dagger(x, t) - c \partial_x q^\dagger(x, t))}_{\mathcal{L}^\dagger(q^\dagger)} dt dx + \underbrace{\left[\int_a^b q^\dagger q dx \right]_{t_0}^{t_f} + \left[\int_{t_0}^{t_f} q^\dagger q dt \right]_a^b}_{\text{à annuler}}. \end{aligned}$$

L'opérateur adjoint est finalement identifié en posant $\mathcal{L}^\dagger(q^\dagger) \equiv -\partial_t q^\dagger - c \partial_x q^\dagger$ avec des conditions initiales et aux limites obtenues en essayant d'éliminer les deux termes entre crochets connaissant les conditions initiales et aux limites pour q . Notons qu'il s'agit ici de l'opérateur L^2 -adjoint puisque le produit scalaire canonique a été utilisé. Une présentation plus détaillée des méthodes adjointes peut être trouvée dans le livre de Marchuk [183]. Il s'agit maintenant de construire les EELs adjointes. Les EELs L^2 -adjointes sont par exemple construites dans l'article de Giles et Pierce [116]. Le problème adjoint peut être construit pour un produit scalaire arbitraire $\delta \mathbf{q}^{\dagger T} \mathbf{Q} \delta \mathbf{q}$ avec \mathbf{Q} une matrice symétrique définie positive. Notons

$$\mathcal{L}(\delta \mathbf{q}) \equiv \partial_t \delta \mathbf{q} + \partial_x (\mathbf{E} \delta \mathbf{q}) + \partial_y (\mathbf{F} \delta \mathbf{q}) + \tilde{\mathbf{R}} \delta \mathbf{q} \quad (3.77)$$

l'opérateur associé aux EELs. En intégrant par partie cet opérateur pondéré par $(\mathbf{Q}\delta\mathbf{q}^\dagger)^T$ sur le domaine d'étude Ω on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} (\mathbf{Q}\delta\mathbf{q}^\dagger)^T \mathcal{L}(\delta\mathbf{q}) dxdt &= \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} (\mathbf{Q}\delta\mathbf{q}^\dagger)^T (\partial_t \delta\mathbf{q} + \mathbf{E}\partial_x \delta\mathbf{q} + \mathbf{F}\partial_y \delta\mathbf{q} + \mathbf{R}\delta\mathbf{q}) dxdt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \delta\mathbf{q}^T \underbrace{(-\mathbf{Q}\partial_t \delta\mathbf{q}^\dagger - \partial_x(\mathbf{E}^T \mathbf{Q}\delta\mathbf{q}^\dagger) - \partial_y(\mathbf{F}^T \mathbf{Q}\delta\mathbf{q}^\dagger) + \mathbf{R}^T \mathbf{Q}\delta\mathbf{q}^\dagger)}_{\mathcal{L}^\dagger(\delta\mathbf{q}^\dagger)} dxdt \\ &+ \left[\int_{\Omega} (\mathbf{Q}\delta\mathbf{q}^\dagger)^T \delta\mathbf{q} dx \right]_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{Q}\delta\mathbf{q}^\dagger)^T (n_x \mathbf{E} + n_y \mathbf{F}) \delta\mathbf{q} dsdt. \end{aligned}$$

Les EELs \mathbf{Q} -adjointes s'expriment donc localement en formulation quasi-conservative

$$-\mathbf{Q}\partial_t \delta\mathbf{q}^\dagger - \partial_x(\mathbf{E}^T \mathbf{Q}\delta\mathbf{q}^\dagger) - \partial_y(\mathbf{F}^T \mathbf{Q}\delta\mathbf{q}^\dagger) + \mathbf{R}^T \mathbf{Q}\delta\mathbf{q}^\dagger = \mathbf{0} \quad (3.78)$$

avec des conditions aux limites et initiales adéquates qui seront discutées plus tard en fonction du problème traité. Nous nous limiterons aux produits scalaires canonique L^2 et pondéré par le symétriseur \mathbf{H} . Dans ces cas particuliers, les EELs L^2 -adjointes et \mathbf{H} -adjointes sont respectivement données par

$$-\partial_t \delta\mathbf{q}^\dagger - \partial_x(\mathbf{E}^T \delta\mathbf{q}^\dagger) - \partial_y(\mathbf{F}^T \delta\mathbf{q}^\dagger) + \mathbf{R}^T \delta\mathbf{q}^\dagger = \mathbf{0} \quad (3.79)$$

et

$$-\mathbf{H}\partial_t \delta\mathbf{q}^\dagger - \partial_x(\mathbf{H}\mathbf{E}\delta\mathbf{q}^\dagger) - \partial_y(\mathbf{H}\mathbf{F}\delta\mathbf{q}^\dagger) + \mathbf{R}^T \mathbf{H}\delta\mathbf{q}^\dagger = \mathbf{0} \quad (3.80)$$

($\mathbf{E}^T \mathbf{H} = \mathbf{H}\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}^T \mathbf{H} = \mathbf{H}\mathbf{F}$). En posant $\tilde{\mathbf{q}}^\dagger = \mathbf{H}\delta\mathbf{q}^\dagger$, les équations \mathbf{H} -adjointes peuvent être résolues à partir des équations L^2 -adjointes. Rappelons que le symétriseur ne dépend que de la célérité locale \bar{c} . Dans le cas d'un écoulement de base isotherme, la matrice \mathbf{H} est donc constante et les EELs \mathbf{H} -adjointes peuvent encore s'exprimer

$$\partial_t \delta\mathbf{q}^\dagger + \partial_x(\mathbf{E}\delta\mathbf{q}^\dagger) + \partial_y(\mathbf{F}\delta\mathbf{q}^\dagger) - (\mathbf{H}\mathbf{R}\mathbf{H}^{-1})^T \delta\mathbf{q}^\dagger = \mathbf{0}. \quad (3.81)$$

Il est intéressant de noter que ces dernières sont équivalentes aux EELs directes si l'écoulement de base est uniforme. Cette propriété n'est pas vérifiée si on utilise le produit scalaire canonique. Si l'écoulement de base n'est pas uniforme, les EELs \mathbf{H} -adjointes font intervenir les mêmes flux que le problème direct et une nouvelle matrice de réaction $-(\mathbf{H}\mathbf{R}\mathbf{H}^{-1})^T$. Cela représente clairement un avantage en pratique puisque seule la matrice de réaction est à modifier.

3.6 EELs comme propagateur acoustique

Dans le contexte de la propagation acoustique en écoulements, les EELs sont reconnues comme étant la modélisation d'un propagateur acoustique linéarisé des plus complets. En effet, toutes les interactions linéaires entre l'écoulement, aussi complexe soit-il, et l'acoustique sont prises en compte [41] (en dehors des effets visqueux et thermiques). Cependant, l'éventuelle existence d'instabilités temporelles ou plus généralement de croissance énergétique transitoire trop prononcée n'est pas souhaitable. Sur le plan numérique, elles peuvent en effet complètement contaminer le domaine de calcul et masquer ainsi la propagation des ondes acoustiques. Le contrôle de ces instabilités d'écoulements (par exemple l'instabilité de Kelvin-Helmholtz) est donc un point important. L'objectif recherché est de maîtriser ces instabilités tout en conservant au mieux les caractéristiques de propagation des ondes acoustiques au sein de l'écoulement, en particulier la préservation des effets de convection et de réfraction. Dans la littérature, il a été proposé plusieurs solutions pour répondre à cette problématique. Elles

sont soit basées sur la modification des EELs, soit basées sur un filtrage numérique des EELs discrétisées. Les aspects numériques seront abordés dans le chapitre suivant. Dans l'idée de simplifier ou modifier les EELs, Bogey et al. [41] ont par exemple proposé de négliger la matrice de réaction ce qui donne simplement

$$\partial_t \delta \mathbf{q} + \partial_x (\mathbf{E} \delta \mathbf{q}) + \partial_y (\mathbf{F} \delta \mathbf{q}) = \mathbf{0}. \quad (3.82)$$

Effectivement, nous avons montré que les flux des EELs ne contribuent pas à la croissance énergétique si l'écoulement de base est isotherme incompressible. Cette simplification des EELs est cependant trop forte pour traiter des phénomènes de propagation à basses fréquences. Cette approximation est davantage justifiée pour des fréquences relativement élevées [2, 41, 258]. Ewert et Schröder [89] ont proposé les APE (*Acoustic Perturbation Equations*) en montrant qu'elles ne produisent pas d'instabilité. En fait, le propagateur acoustique découlant des APE est identique à l'opérateur approché induit par Pierce [207]. Pierce montra par ailleurs que ce propagateur peut être réduit aux équations de l'acoustique géométrique, limitant ainsi son application à des fréquences suffisamment élevées [2]. D'autres extensions ont été proposées toujours dans le but de contrôler l'amplification du mode de vorticité [213] et/ou d'induire un bon propagateur acoustique (   faible nombre de Mach essentiellement) [190, 244]. Dans le cadre de la thèse, nous proposons une méthode purement mathématique pour contrôler la croissance énergétique des EELs. La méthode proposée est fondée sur l'analyse énergétique effectuée précédemment. Nous avons en effet démontré que c'est la matrice de réaction qui est à l'origine de la croissance énergétique des perturbations au moins dans le cas des écoulements incompressibles isothermes ou cisailés. Notre stratégie est basée sur un traitement simple de la matrice de réaction permettant de contrôler la croissance énergétique des perturbations. La première étape consiste à décomposer la matrice de réaction sous la forme

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{R} + \mathbf{R}^\dagger}{2} + \frac{\mathbf{R} - \mathbf{R}^\dagger}{2}. \quad (3.83)$$

La partie anti-symétrique $\frac{\mathbf{R} - \mathbf{R}^\dagger}{2}$ ne contribue pas à la croissance énergétique. Par conséquent, c'est la partie symétrique $\frac{\mathbf{R} + \mathbf{R}^\dagger}{2}$ qui contribue à la croissance énergétique des perturbations. Afin de contrôler l'amplification, on introduit un paramètre arbitraire réel σ tel que $0 \leq \sigma \leq 1$ pondérant la partie symétrique. Les EELs modifiées s'expriment donc maintenant

$$\partial_t \delta \mathbf{q} + \partial_x (\mathbf{E} \delta \mathbf{q}) + \partial_y (\mathbf{F} \delta \mathbf{q}) + \left(\sigma \frac{\mathbf{R} + \mathbf{R}^T}{2} + \frac{\mathbf{R} - \mathbf{R}^T}{2} \right) \delta \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.84)$$

ou de manière équivalente pour simplifier

$$\partial_t \delta \mathbf{q} + \partial_x (\mathbf{E} \delta \mathbf{q}) + \partial_y (\mathbf{F} \delta \mathbf{q}) + \frac{\sigma + 1}{2} \left(\mathbf{R} + \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} \mathbf{R}^T \right) \delta \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (3.85)$$

Une telle procédure de contrôle pourra aussi être envisagée pour stabiliser les modèles réduits. Si $\sigma = 1$, on retrouve les EELs et si $\sigma = 0$ l'énergie des EELs est conservée au moins pour les écoulements incompressibles et isothermes. Cependant, les EELs ainsi modifiées risquent de mal reproduire les bons effets de propagation. Pour des valeurs intermédiaires de σ , l'amplification énergétique sera contrôlée et devrait malgré tout mieux préserver les effets de convection et de réfraction des ondes causés par les gradients de l'écoulement. Par ailleurs, si on sait que la croissance énergétique est seulement produite par le mode tourbillonnaire, on peut appliquer cette décomposition seulement à la contribution cinématique de \mathbf{R} de manière à moins modifier les EELs. Notons pour terminer que dans le cas plus général d'écoulements de base compressible ou incompressible anisotherme, nous ne pouvons plus a priori assurer que la croissance énergétique est produite seulement par l'intermédiaire de la matrice de réaction.

Bernacki [33] a par exemple rencontré des cas où l'élimination de la matrice de réaction n'était pas suffisante pour stabiliser les EELs.

Chapitre 4

Construction et propriétés matricielles du modèle numérique

L'objectif de ce chapitre est d'introduire brièvement les différents outils numériques à notre disposition pour résoudre les EELs dans un formalisme matriciel. Il s'agit aussi de présenter, à partir d'exemples simples, certaines difficultés inhérentes à la résolution numérique des EELs pour produire des solutions haute-fidélité qui devraient être exploitées comme briques fondamentales de construction des deux espaces réduits \mathbf{V}_r et \mathbf{W}_r .

4.1 Introduction aux méthodes numériques

Il existe une multitude de méthodes numériques pour approcher la solution d'un système d'équations aux dérivées partielles. La majorité des méthodes existantes peuvent se ramener à la méthode très générale des résidus pondérés [98] introduite succinctement dans la suite. La méthode des résidus pondérés (*method of weighted residuals*) unifie les méthodes numériques couramment employées dans les codes industriels et académiques. Elle constitue un paradigme qui peut permettre de développer de nouvelles méthodes numériques. Elle repose sur plusieurs étapes :

- la définition d'un résidu $\mathcal{R}(\delta\mathbf{q}(\mathbf{x}, t))$ pour le système d'équations modélisant l'évolution des inconnues $\delta\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$;
- l'approximation des inconnues $\delta\mathbf{q}$ du système dans un espace de dimension finie ;
- la pondération du modèle par une fonction poids $\mathbf{w}(\mathbf{x})$;
- l'intégration du résidu pondéré sur le domaine d'étude Ω ;
- la discrétisation du problème intégral

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}(\mathbf{x})^T \mathcal{R}(\delta\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \quad ; \quad (4.1)$$

- la résolution du modèle discret ainsi construit.

En général, le résidu est défini par le système d'équations étudiées lui-même s'il est homogène (pas de terme source), ou autrement comme la différence entre le système d'équations

homogène et le terme source. Dans notre cas, le résidu pondéré peut être défini par l'intégrale

$$\int_{\Omega \cup \Omega^{bc}} \mathbf{w}(\mathbf{x})^T \left[\mathcal{J}(\Omega)(\partial_t \delta \mathbf{q} + \mathcal{L}(\delta \mathbf{q})) + \mathcal{J}(\Omega^{bc})(\partial_t \delta \mathbf{q} + \mathcal{L}^{bc}(\delta \mathbf{q})) \right] d\mathbf{x} \quad (4.2)$$

avec Ω le domaine de calcul des points intérieurs (domaine physique), Ω^{bc} le domaine de calcul des points frontières (domaine parfois artificiel), $\mathcal{L} := \mathbf{E}\partial_x + \mathbf{F}\partial_y + \mathbf{R}$ l'opérateur linéaire des équations d'Euler linéarisées, \mathcal{L}^{bc} l'opérateur des équations du modèle de frontière (non précisé pour le moment), et $\mathcal{J}(\Omega)$ la fonction caractéristique de domaine (1 dans le domaine Ω et 0 en dehors). Par ailleurs, la solution du problème est souvent recherchée comme une combinaison linéaire de N fonctions de base $\delta \mathbf{q}_i$ connues

$$\delta \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{i=1}^N c_i(t) \delta \mathbf{q}_i(\mathbf{x}, t) \quad (4.3)$$

satisfaisant les conditions de frontière du problème. Le problème ainsi formulé est un système constitué de N inconnues $c_i(t)$. Les fonctions de base $\delta \mathbf{q}_i(\mathbf{x}, t)$ ne dépendent en général que de \mathbf{x} . Par conséquent, au moins N fonctions de pondération \mathbf{w} doivent être définies pour aboutir à un modèle discret

$$\sum_{i=1}^N c_i(t) \int_{\Omega} \mathbf{w}_j(\mathbf{x})^T \mathcal{R}(\delta \mathbf{q}_i(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad 1 \leq j \leq N \quad (4.4)$$

possédant autant d'inconnues que d'équations. La méthode des résidus pondérés repose dès lors sur la minimisation du résidu défini. Par ailleurs, la convergence devrait être assurée lorsque N augmente. Les différentes méthodes numériques dépendent maintenant essentiellement du choix des fonctions de pondération \mathbf{w} et de la méthode d'intégration employée. En particulier :

- si $\mathbf{w}_j = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$ avec δ la distribution de Dirac, le modèle discret devient

$$\mathcal{R}(\delta \mathbf{q}(\mathbf{x}_j, t)) = \mathbf{0}, \quad 1 \leq j \leq N \quad (4.5)$$

ce qui correspond exactement au modèle continu aux points \mathbf{x}_j . On parle de méthode de collocation et les \mathbf{x}_j sont les points de collocation. La méthode des différences finies en est un cas particulier dégénéré dans la mesure où il est nécessaire d'évaluer d'une certaine façon les dérivées spatiales des inconnues aux points de collocation.

- Posons $\Omega \cup \Omega^{bc} = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k$ et $\mathbf{w}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{1}$ si $\mathbf{x} \in \Omega_j$ et $\mathbf{0}$ en dehors de Ω_j . On parle de méthode des sous-domaines. Les sous-domaines peuvent se chevaucher (pas forcément disjoints). Des intégrations par partie peuvent être effectuées. La méthode des volumes finis en est un cas particulier. Plus généralement, si $\mathbf{w}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_j(\mathbf{x})$ si $\mathbf{x} \in \Omega_j$ et 0 en dehors de Ω_j , on retrouve la méthode de Galerkin discontinue.
- si $\mathbf{w}_j(\mathbf{x}) = \partial_{c_j} \mathcal{R}$,

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}_j(\mathbf{x})^T \mathcal{R}(\delta \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \partial_{c_j} \int_{\Omega} \mathcal{R}^2 d\mathbf{x}, \quad (4.6)$$

il s'agit de la méthode des moindres carrés.

- si $\mathbf{w}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_j(\mathbf{x})$, c'est la méthode de Galerkin (Petrov-Galerkin si $\mathbf{w}_j(\mathbf{x}) \neq \mathbf{q}_j(\mathbf{x})$). La méthode des éléments finis, les méthodes spectrales et les méthodes de réduction de modèle en sont des cas particuliers.
- si $\mathbf{w}_j(\mathbf{x})$ est la fonction de Green, on peut retrouver les méthodes d'éléments de frontière après avoir effectué des intégrations par partie.

Il est intéressant de noter que les méthodes de réduction constituent en fait un cas particulier de la méthode des résidus pondérés. La principale différence avec la méthode d'éléments finis repose sur le fait que dans la méthode d'éléments finis, les fonctions de base $\mathbf{w}_j(\mathbf{x})$ sont des fonctions de base mathématiques à support compact localement (elles ne dépendent pas de la solution). D'un autre côté, dans les méthodes de réduction de modèle, les fonctions de base sont globales (elles ne sont pas à support compact local) et dépendent en général de la solution (modes propres, modes équilibrés, modes POD, modes d'Arnoldi, etc). La conséquence pour les méthodes de type éléments finis où les fonctions de base sont définies localement à support compact est qu'il est nécessaire de définir autant de fonctions de bases que d'inconnues. Cela explique que dans les modèles numériques dits haute-fidélité ou complets, la dimension du problème discret soit de l'ordre de grandeur du nombre d'inconnues ; autrement-dit d'autant plus importante que la discrétisation du domaine $\Omega \cup \Omega^{bc}$ l'est. Ce problème se retrouve aussi pour les méthodes classiques de différences finies, volumes finis...

4.2 Construction du modèle complet

Le traitement numérique des perturbations compressibles nécessite des schémas numériques extrêmement précis pour être capable de représenter avec fiabilité la propagation des ondes sans les dissiper (conserver leur amplitude) ni les disperser (conserver leur phase) sur de plus ou moins longues distances. L'utilisation de schémas d'ordre élevé permet de réduire le nombre de points par longueur d'onde nécessaire à la bonne représentation des ondes, d'augmenter l'ordre de dissipation et de dispersion. Il est en effet communément reconnu que des schémas qui limitent la dispersion et la dissipation sont fortement souhaitables pour représenter précisément la propagation des ondes acoustiques. En effet, consistance et stabilité (donc convergence par le théorème de Lax) ne sont pas des critères suffisants pour garantir une bonne qualité des simulations de propagation d'ondes, simulations qui sont de nature stationnaires essentiellement. Par exemple, nous savons que les équations d'Euler linéarisées supportent les trois ondes de vorticité, d'entropie et acoustique. Dans le cas d'un écoulement de base uniforme, ces trois ondes ne doivent ni se disperser ni se dissiper.

4.2.1 Discrétisation spatiale des EELs dans Ω

Nous supposons pour simplifier que le domaine de calcul $\Omega \cup \Omega^{bc}$ est un rectangle approché à l'aide d'une grille cartésienne constituée de N_x points dans la direction x et de N_y points dans la direction y . Le modèle complet sera donc constitué de $4 \times N_x \times N_y$ inconnues puisqu'il y a quatre grandeurs physiques (perturbations de masse volumique, de vitesse et de pression). La grille est supposée de plus uniforme, c'est-à-dire formée de $N_x \times N_y$ rectangles d'aire identique $\Delta x \times \Delta y$. En chaque point $\mathbf{x}_{ij} := (x_i, y_j)$ de la grille avec $x_i := i\Delta x$ et $y_j := j\Delta y$, les EELs vérifient exactement

$$\partial_t \delta \mathbf{q}_{ij}(t) + \mathbf{E}_{ij} \partial_{x_i} \delta \mathbf{q}_{ij}(t) + \mathbf{F}_{ij} \partial_{y_j} \delta \mathbf{q}_{ij}(t) + \mathbf{R}_{ij} \delta \mathbf{q}_{ij}(t) = \mathbf{0}, \quad \forall 1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y \quad (4.7)$$

avec la notation $\mathbf{f}_{ij}(t) := \mathbf{f}(x_i, y_j, t)$. Afin d'obtenir un système d'équations ordinaires dépendant uniquement des inconnues, il est nécessaire d'approcher les deux dérivées spatiales $\partial_{x_i} \delta \mathbf{q}_{ij}$ et $\partial_{y_j} \delta \mathbf{q}_{ij}$ en fonction des inconnues $\delta \mathbf{q}_{ij}$. Afin de respecter au mieux les propriétés numériques recherchées et énoncées dans la section précédente, nous appliquons des schémas aux différences finies centrées d'ordre élevé explicites pour approcher numériquement ces deux dérivées spatiales. Les deux dérivées sont respectivement approchées par

$$\partial_{x_i} \delta \mathbf{q}_{ij}(t) \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{l=-k_g}^{k_d} d_l \delta \mathbf{q}(x_i + l\Delta x, y_j, t) \quad (4.8)$$

et

$$\partial_{y_j} \delta \mathbf{q}_{ij}(t) \approx \frac{1}{\Delta y} \sum_{l=-k_g}^{k_d} d_l \delta \mathbf{q}(x_i, y_j + l\Delta y, t) \quad (4.9)$$

où les d_l sont les coefficients du schéma. $k_g + k_d + 1$ définit le stencil du schéma. Pour un schéma centré, $k_g = k_d$ et les coefficients d_l vérifient la propriété $d_l = -d_{-l}$ ce qui permet de démontrer que le schéma n'est pas dissipatif. Avec de tels schémas, nous ne pouvons pas *a priori* assurer des propriétés optimales en terme de dispersion. C'est la raison pour laquelle, Tam et Webb [256] ont proposé des schémas aux différences finies centrées qui sont optimisés sur une gamme de longueur d'onde d'intérêt. Ces schémas optimaux permettent de diminuer le nombre de points nécessaires par longueur d'onde et donc de soulager la dimension du modèle complet. Il faut garder à l'esprit que la barrière infranchissable pour représenter un signal correctement est fournie par le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon. Enfin, il est aussi possible d'appliquer des filtres pour améliorer les propriétés de stabilité de tels schémas. Le caractère non dissipatif des schémas centrés leur confèrent en effet une stabilité marginale. Ces différents perfectionnements numériques n'ont pas été exploités dans ce chapitre. Les coefficients des schémas aux différences finies classiques sont obtenus en résolvant le système de Vandermonde. Dans ce chapitre et le suivant, le système matriciel sera construit à partir d'un schéma centré sur 7 points. Les coefficients du schéma centré sur 7 points sont obtenus en inversant le système linéaire de Vandermonde

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_i - 3\Delta x & x_i - 2\Delta x & x_i - \Delta x & x_i & x_i + \Delta x & x_i + 2\Delta x & x_i + 3\Delta x \\ (x_i - 3\Delta x)^2 & (x_i - 2\Delta x)^2 & (x_i - \Delta x)^2 & x_i^2 & (x_i + \Delta x)^2 & (x_i + 2\Delta x)^2 & (x_i + 3\Delta x)^2 \\ (x_i - 3\Delta x)^3 & (x_i - 2\Delta x)^3 & (x_i - \Delta x)^3 & x_i^3 & (x_i + \Delta x)^3 & (x_i + 2\Delta x)^3 & (x_i + 3\Delta x)^3 \\ (x_i - 3\Delta x)^4 & (x_i - 2\Delta x)^4 & (x_i - \Delta x)^4 & x_i^4 & (x_i + \Delta x)^4 & (x_i + 2\Delta x)^4 & (x_i + 3\Delta x)^4 \\ (x_i - 3\Delta x)^5 & (x_i - 2\Delta x)^5 & (x_i - \Delta x)^5 & x_i^5 & (x_i + \Delta x)^5 & (x_i + 2\Delta x)^5 & (x_i + 3\Delta x)^5 \\ (x_i - 3\Delta x)^6 & (x_i - 2\Delta x)^6 & (x_i - \Delta x)^6 & x_i^6 & (x_i + \Delta x)^6 & (x_i + 2\Delta x)^6 & (x_i + 3\Delta x)^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{-3} \\ d_{-2} \\ d_{-1} \\ d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_i \\ 3x_i^2 \\ 4x_i^3 \\ 5x_i^4 \\ 6x_i^5 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

La solution de ce système fournit les coefficients du schéma sélectionné :

$$d_0 = 0, \quad d_1 = 3/4 = -d_{-1}, \quad d_2 = -3/20 = -d_{-2}, \quad d_3 = 1/60 = -d_{-3} \quad (4.11)$$

Nous avons utilisé un logiciel de calcul formel pour obtenir la solution rapidement. Notons que le système de Vandermonde est construit en supposant que le développement de Taylor de la fonction approchée est exacte pour les polynômes de degré 0 à 5. L'approche est bien entendu généralisable à des degrés quelconques. Elle s'interprète aussi comme une méthode d'interpolation de Lagrange et est soumise au phénomène de Runge. Il est de plus bien connu que le système de Vandermonde a un conditionnement qui se dégrade très rapidement lorsque sa dimension augmente. En particulier, la précision machine est rapidement dépassée. Par conséquent, l'augmentation du stencil n'est pas forcément une garantie d'amélioration de la précision. Le principal problème avec les schémas centrés réside dans le traitement du bord du domaine puisqu'il vient à manquer des points de discrétisation lorsqu'on se rapproche de la frontière. La zone à proximité des frontières du domaine de calcul doit donc recevoir un traitement particulier. Cette zone de frontière correspond dans notre système de notation à Ω^{bc} . Le traitement de cette zone fait l'objet de la section suivante.

4.2.2 Traitement des points frontières : zone Ω^{bc}

L'approximation des dérivées spatiales au voisinage des points frontières est certainement l'aspect numérique le plus délicat et le plus compliqué. Le traitement de ces points frontières dépend par ailleurs de la nature des conditions aux limites. Les principales conditions aux limites d'intérêt pour les EELs sont les suivantes :

- les conditions de périodicité;
- les conditions de paroi fixe;
- les conditions de non réflexion (pour évacuer les perturbations dans le cas des systèmes ouverts);
- les conditions d'impédance;
- les conditions de paroi vibrantes.

Dans ce chapitre et le suivant, nous n'exploiterons que les conditions périodiques et les conditions de non réflexion. Les conditions de paroi fixe et vibrante seront discutées plus tard. Enfin, les conditions d'impédance ne seront pas exploitées dans ce mémoire (voir par exemple l'article de Tam et Auriault [257] pour une introduction à la problématique et l'article d'Ozyoruk et Long [199] pour les EELs). Le cas des conditions aux limites périodiques est le plus simple puisqu'il est possible de conserver les schémas centrés d'ordre élevé dans la zone Ω^{bc} . En effet, par exemple pour une périodicité dans la direction x , la solution vérifie par définition $\delta\mathbf{q}(x_1, y_j) = \delta\mathbf{q}(x_{N_x}, y_j)$ pour tout y_j mais aussi $\delta\mathbf{q}(x_2, y_j) = \delta\mathbf{q}(x_{N_x+1}, y_j)$, $\delta\mathbf{q}(x_3, y_j) = \delta\mathbf{q}(x_{N_x+2}, y_j)$ et $\delta\mathbf{q}(x_4, y_j) = \delta\mathbf{q}(x_{N_x+3}, y_j)$ pour les points à droite. De même pour les points à gauche, la solution vérifie $\delta\mathbf{q}(x_{-1}, y_j) = \delta\mathbf{q}(x_{N_x-1}, y_j)$, $\delta\mathbf{q}(x_{-2}, y_j) = \delta\mathbf{q}(x_{N_x-2}, y_j)$ et $\delta\mathbf{q}(x_{-3}, y_j) = \delta\mathbf{q}(x_{N_x-3}, y_j)$. Cette méthode de discrétisation est illustrée sur la figure 4.1. Le cas des conditions aux limites de non-réflexion est plus compliqué car il est nécessaire

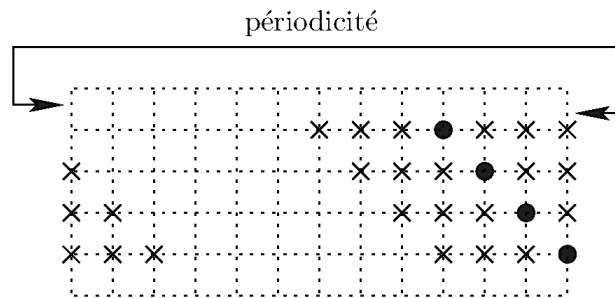


FIGURE 4.1 – Discrétisation des points frontières dans le cas d'une condition périodique

de modifier les EELs dans la zone Ω^{bc} . La modélisation de telles conditions aux limites est introduit dans la section qui suit.

4.2.3 Conditions de non-réflexion de Tam et Dong

Les frontières d'un système ouvert doivent être capable d'évacuer les différentes perturbations (acoustique, entropique ou tourbillonnaire) sans générer de réflexions parasites qui viendraient soit contaminer le domaine de calcul soit se superposer aux perturbations physiques. On distingue les conditions de sortie de fluide en aval de l'écoulement (frontière débitante) des conditions de rayonnement (frontière rayonnante) définies partout ailleurs. Ces différentes conditions sont représentées sur la figure 4.2 pour un écoulement parallèle.

Condition de frontière rayonnante

Nous supposons ici que seules des perturbations de nature acoustique atteignent les frontières. De plus, les sources sonores sont supposées suffisamment éloignées des frontières du domaine de calcul. Le comportement des perturbations acoustiques peut alors être décrit au voisinage de

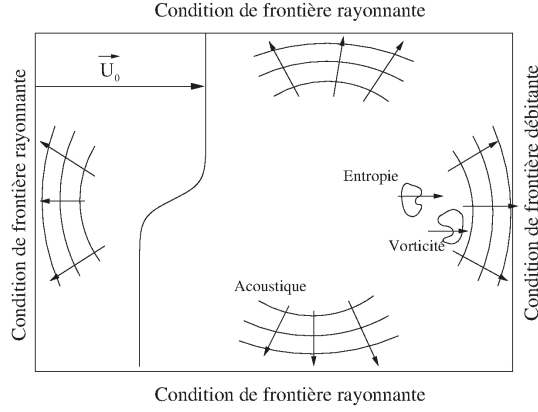


FIGURE 4.2 – Conditions aux limites pour un écoulement parallèle ouvert

ces frontières par un développement asymptotique des équations de la mécanique des fluides. Tam et Dong [255] ont proposé une formulation asymptotique des équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement moyen quelconque. Pour une source placée à l'origine, leur condition de sortie acoustique s'exprime en coordonnées polaires

$$\partial_t \delta \mathbf{q} + V_g(r, \theta) \left(\partial_r \delta \mathbf{q} + \frac{1}{2r} \delta \mathbf{q} \right) = \mathbf{0} \quad (4.12)$$

avec

$$V_g(r, \theta) = \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{e}_r + \sqrt{\bar{c}^2 - (\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{e}_\theta)^2} \quad (4.13)$$

la vitesse de groupe (cf. figure 4.3) qui n'est définie que pour des écoulements vérifiant $\bar{c} > \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_r = (\cos(\theta), \sin(\theta))^T$ et $\mathbf{e}_\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta))^T$ les deux vecteurs orthonormaux de la base polaire. Notons que dans le cas d'un écoulement de base au repos ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$), la condition de Tam et Dong se ramène à

$$\partial_t \delta \mathbf{q} + \bar{c} \left(\partial_r \delta \mathbf{q} + \frac{1}{2r} \delta \mathbf{q} \right) = \mathbf{0}. \quad (4.14)$$

Pour de grande distance r , le terme inversement proportionnel au rayon r est négligeable et on retrouve la condition de rayonnement de Sommerfeld classique pour le champ de pression. De plus, le modèle de rayonnement est un simple système d'équations de transport. Le traitement des conditions de non réflexion pour les écoulements supersoniques ne sera pas abordé ici. Il s'agit maintenant de reformuler la condition de rayonnement en coordonnées cartésiennes. En utilisant la relation de passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes $\partial_r = \frac{x}{r} \partial_x + \frac{y}{r} \partial_y$, les relations $\cos(\theta) = x/r$ et $\sin(\theta) = y/r$, le système se formule

$$\partial_t \delta \mathbf{q} + V_g(r, \theta) \left(\frac{x}{r} \partial_x \delta \mathbf{q} + \frac{y}{r} \partial_y \delta \mathbf{q} + \frac{1}{2r} \delta \mathbf{q} \right) = \mathbf{0} \quad (4.15)$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distance à l'origine, $V(r, \theta) = \frac{x}{r} \bar{u} + \frac{y}{r} \bar{v} + \sqrt{\bar{c}^2 - (x\bar{v}/r - y\bar{u}/r)^2}$. Si la source est placée en (x_0, y_0) , alors il faut remplacer x par $x - x_0$, y par $y - y_0$ dans les différentes expressions.

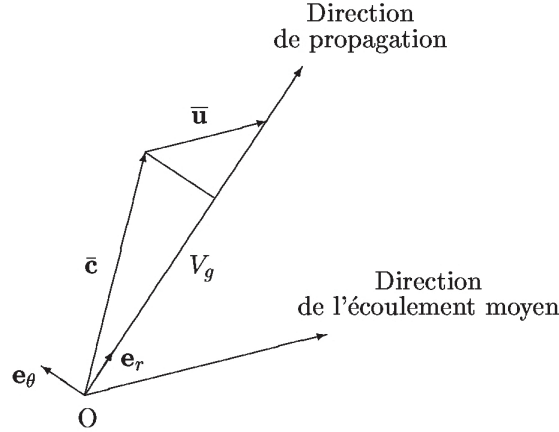


FIGURE 4.3 – Vitesse de groupe

Condition de frontière débitante

Les perturbations qui atteignent la frontière du domaine ne sont pas nécessairement seulement de nature acoustique. En effet, les équations d'Euler linéarisées supportent aussi les perturbations tourbillonnaires et entropiques. Au niveau des frontières, ce cas de figure peut se rencontrer par exemple en aval d'un écoulement. Dans ce cas, Tam et Dong proposent le modèle asymptotique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \delta \rho + \bar{u} \partial_x \delta \rho + \bar{v} \partial_y \delta \rho = \frac{1}{\bar{c}^2} [\partial_t \delta p + \bar{u} \partial_x \delta p + \bar{v} \partial_y \delta p] \\ \partial_t \delta u + \bar{u} \partial_x \delta u + \bar{v} \partial_y \delta u = -\frac{1}{\rho} \partial_x \delta p \\ \partial_t \delta v + \bar{u} \partial_x \delta v + \bar{v} \partial_y \delta v = -\frac{1}{\rho} \partial_y \delta p \\ \partial_t \delta p + \frac{V_g}{r} \left[x \partial_x \delta p + y \partial_y \delta p + \frac{1}{2} \delta p \right] = 0 \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Il est nécessaire de reformuler ce modèle de frontière afin de pouvoir l'intégrer dans la formulation discrète matricielle par la suite. Le modèle s'exprime aussi sous forme matricielle

$$\mathbf{M}^{fd} \partial_t \delta \mathbf{q} + \mathbf{E}_M^{fd} \partial_x \delta \mathbf{q} + \mathbf{F}_M^{fd} \partial_y \delta \mathbf{q} + \mathbf{R}_M^{fd} \delta \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.17)$$

avec

$$\mathbf{M}^{fd} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/\bar{c}^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_M^{fd} = \begin{pmatrix} \bar{u} & 0 & 0 & -\bar{u}/\bar{c}^2 \\ 0 & \bar{u} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_g x/r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_M^{fd} = \begin{pmatrix} \bar{v} & 0 & 0 & -\bar{v}/\bar{c}^2 \\ 0 & \bar{v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & V_g y/r \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

$$\text{et } \mathbf{R}_M^{fd} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_g/2r \end{pmatrix}.$$

Le modèle de frontière débitante intégré dans le système matriciel prendra finalement la forme

$$\partial_t \delta \mathbf{q} + \mathbf{E}^{bc} \partial_x \delta \mathbf{q} + \mathbf{F}^{bc} \partial_y \delta \mathbf{q} + \mathbf{R}^{bc} \delta \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.19)$$

avec

$$\mathbf{E}^{bc} = \begin{pmatrix} \bar{u} & 0 & 0 & (-\bar{u} + V_g x/r)/\bar{c}^2 \\ 0 & \bar{u} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_g x/r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^{bc} = \begin{pmatrix} \bar{v} & 0 & 0 & (-\bar{v} + V_g y/r)/\bar{c}^2 \\ 0 & \bar{v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & V_g y/r \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$$\text{et } \mathbf{R}^{bc} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & V_g/2r\bar{c}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_g/2r \end{pmatrix}.$$

Il s'agit en effet de respecter le jeu de variables choisi et la formulation sans matrice de masse.

Discrétisation des conditions de non-réflexion

Les modèles de Tam et Dong de frontière rayonnante et de frontière débitante sont introduits sur trois points dans la zone Ω^{bc} avec des schémas aux différences finies décentrés sur 7 points ($k_g \neq k_d$). Les coefficients sont obtenus encore une fois en résolvant le système de Vandermonde à l'aide d'un logiciel de calcul formel. La figure 4.4 illustre le traitement particulier des deux zones Ω et Ω^{bc} (zone en bleu).

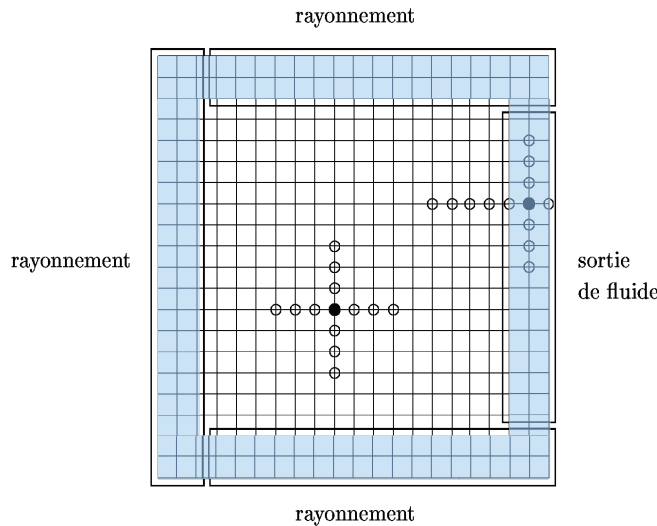


FIGURE 4.4 – Discrétisation spatiale des points intérieurs et frontières

4.2.4 Construction du système matriciel

Nous avons introduit tous les ingrédients nécessaires à la construction du système matriciel. Nous sommes donc maintenant en mesure de construire le système dynamique régissant l'évolution des inconnues $\delta \mathbf{q}_{ij}$. Dans le cas des EELs couplées aux conditions de non-réflexion par exemple, le modèle continu est représenté par l'adjonction des EELs dans Ω et du modèle de frontière dans Ω^{bc} :

$$\begin{cases} \partial_t \delta \mathbf{q} + \mathbf{E} \partial_x \delta \mathbf{q} + \mathbf{F} \partial_y \delta \mathbf{q} + \mathbf{R} \delta \mathbf{q} = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \partial_t \delta \mathbf{q} + \mathbf{E}^{bc} \partial_x \delta \mathbf{q} + \mathbf{F}^{bc} \partial_y \delta \mathbf{q} + \mathbf{R}^{bc} \delta \mathbf{q} = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Omega^{bc}. \end{cases} \quad (4.21)$$

La discrétisation des deux modèles sur la grille cartésienne uniforme à l'aide des schémas aux différences finies centrés et décentrés permet de construire un système d'équations ordinaires

constitué de $n = 4 \times N_x \times N_y$ inconnues. La construction du système matriciel associé nécessite la vectorisation des grandeurs bidimensionnelles. Le vecteur inconnu de dimension n est noté \mathbf{x} (notation sans ambiguïté avec la variable spatiale puisque les inconnues ne dépendent plus que du temps). Une numérotation des inconnues doit être choisie. Elles sont ordonnées de la manière suivante : si i représente la position de la i -ème ligne de la grille et j la position de j -ème colonne, une inconnue située à la position (i, j) est repérée par la position $k = n(j-1)+i$ dans le vecteur \mathbf{x} (à un facteur 4 près en raison du nombre de grandeurs physiques définies pour chaque point géométrique). Le choix de cette numérotation et d'un schéma aux différences finies centré sur 9 points produit une matrice creuse nonadiagonale par blocs dont chaque bloc est lui-même creux et nonadiagonal. Le système ainsi établi peut finalement s'écrire sous la forme recherchée

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (4.22)$$

avec $\mathbf{x}(t) := (\delta\mathbf{q}_{ij}(t))_{ij} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice indépendante du temps. Des exemples de profils de matrice sont illustrés sur les figures 4.5 et 4.6 en fonction de la dimension des EELs (1D ou 2D), de la discrétisation et des conditions aux limites.

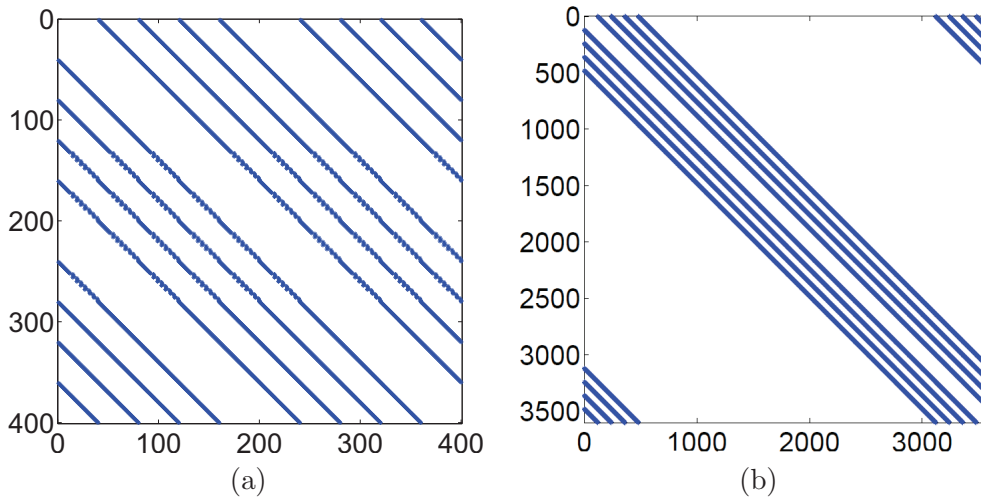


FIGURE 4.5 – Profil de la matrice \mathbf{A} dans le cas périodique 1D avec un champ de base uniforme. (a) profil pour $N_x \times N_y = 10 \times 10$, (b) profil pour $N_x \times N_y = 30 \times 30$

On rappelle que le profil des matrices est défini par une zone matricielle particulière où sont localisés les coefficients non nuls de la matrice. Le nombre de coefficients non nuls de la matrice \mathbf{A} dépend essentiellement du nombre de dimensions (1, 2 ou 3) et du stencil des schémas aux différences finies appliqués. Par ailleurs, la matrice est d'autant plus creuse que sa dimension augmente comme le suggère le tableau 4.1. Afin d'éviter de stocker informatiquement tous les coefficients de \mathbf{A} , ce qui est clairement impossible en pratique, seuls les coefficients non nuls sont conservés. Une méthode de stockage de type Morse est appliquée. Elle est basée sur la construction d'une structure de données constituée de trois champs : les coefficients a_{ij} non nuls de \mathbf{A} et les deux indices i et j permettant de les localiser dans la matrice. La structure de données nécessite donc de stocker en tout $3n_0$ coefficients. Enfin, le profil ou encore la largeur de bande sont des éléments importants à considérer pour estimer par la suite des coûts de factorisation matricielle ou encore d'inversion de système. Il est clair que la construction d'une matrice requiert un effort algorithmique relativement important ce qui explique en partie qu'une telle approche soit moins populaire dans les codes industriels. Nous discuterons à nouveau ce point plus tard. Il nous reste maintenant à présenter comment résoudre numériquement le système matriciel (4.22) ainsi établi.

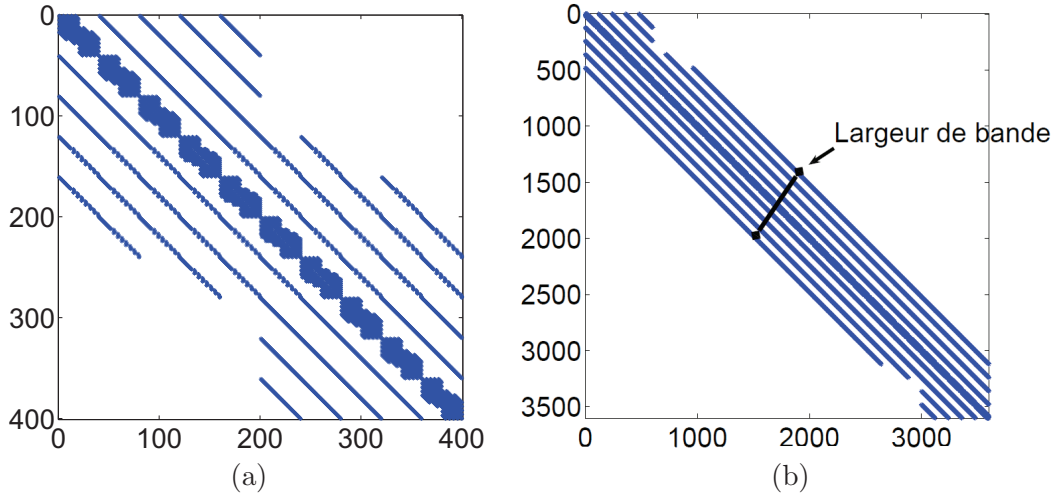


FIGURE 4.6 – Profil de la matrice \mathbf{A} dans le cas d'un système $2D$ ouvert avec un écoulement de base parallèle. (a) profil pour $N_x \times N_y = 10 \times 10$, (b) profil pour $N_x \times N_y = 30 \times 30$

TABLE 4.1 – Evolution du creux de la matrice \mathbf{A} dans le cas d'un écoulement parallèle avec conditions de non réflexion.

Discrétisation $N_x \times N_y$	Dimension de \mathbf{A} $n^2 = (4 \times N_x \times N_y)^2$	Nombre de coefficients non nuls n_0	Ratio creux de \mathbf{A} $100n_0/n^2$
10×10	160000	4772	2,98%
30×30	12960000	62412	0,48%
50×50	10^8	185652	0,19%
100×100	$1,6 \times 10^9$	780752	0,05%
600×300	$5,18 \times 10^{11}$	14581764	0.0028%

4.2.5 Intégration temporelle

Le système matriciel (4.22) construit ne dépend plus que de la variable temporelle. Il s'agit d'un système de n équations différentielles ordinaires linéaires. La solution de ce système est approchée numériquement à partir d'une intégration temporelle (discrétisation temporelle). Nous utilisons une méthode de Runge-Kutta explicite d'ordre 4 standard. C'est une méthode très largement employée en mécanique des fluides. La nature explicite de la méthode signifie que la solution $\mathbf{x}(t_{N+1})$ à un instant t_{N+1} est entièrement déterminée à partir de la connaissance de la solution à l'instant qui précède. L'algorithme de Runge-Kutta à 4 étapes permet de déduire la solution $\mathbf{x}(t_{N+1})$ à l'instant t_{N+1} à partir de la solution $\mathbf{x}(t_N)$ à l'instant t_N comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}(t_N) \\ \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \frac{\Delta t}{4} \mathbf{A} \mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(0)} + \frac{\Delta t}{3} \mathbf{A} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(0)} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A} \mathbf{x}^{(2)} \\ \mathbf{x}^{(4)} = \mathbf{x}^{(0)} + \Delta t \mathbf{A} \mathbf{x}^{(3)} \\ \mathbf{x}^{(5)} = \mathbf{x}(t_{N+1}) \end{array} \right. \quad (4.23)$$

avec $\Delta t = t_{N+1} - t_N$. La méthode de Runge-Kutta s'interprète simplement en formulation matricielle. En combinant les 4 étapes de l'algorithme, la relation

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t_{N+1}) &= \left(\mathbf{I}_n + \Delta t \mathbf{A} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{A}^2 + \frac{\Delta t^3}{6} \mathbf{A}^3 + \frac{\Delta t^4}{24} \mathbf{A}^4 \right) \mathbf{x}(t_N) \\ &\simeq \exp(\Delta t \mathbf{A}) \mathbf{x}(t_N) \end{cases} \quad (4.24)$$

est obtenue. Ainsi, la méthode de Runge-Kutta revient à effectuer une approximation de l'exponentielle de la matrice $\Delta t \mathbf{A}$ à chaque itération. On peut aussi lui associer à chaque itération un espace de Krylov de dimension 5 défini simplement par

$$\mathcal{K}(\mathbf{A}, \mathbf{x}(t_N)) = (\mathbf{x}(t_N), \mathbf{A}\mathbf{x}(t_N), \mathbf{A}^2\mathbf{x}(t_N), \mathbf{A}^3\mathbf{x}(t_N), \mathbf{A}^4\mathbf{x}(t_N)). \quad (4.25)$$

La définition de cet espace de Krylov peut permettre de faire un rapprochement entre les méthodes d'intégration temporelle et les méthodes de réduction. Cette méthode est bien appréciée car elle a de bonne propriété de stabilité. Elle soulage en particulier la condition de Courant-Friedrichs-Levy (acronyme CFL). Rappelons que la condition CFL est une contrainte forte de stabilité qui impose un pas de temps à ne pas dépasser pour un pas d'espace minimal donné. Cependant, la seule considération de la stabilité n'est pas toujours suffisante pour représenter correctement tous les phénomènes de propagation d'ondes. C'est la raison pour laquelle, Hu et al. [141] ont proposé d'améliorer les algorithmes de Runge-Kutta en optimisant leurs propriétés de dispersion et de dissipation. Une nette amélioration est obtenue sur certaines simulations académiques basées sur les équations d'Euler linéarisées. Cette approche a été étendue récemment par Bogey, Bailly et Berland [32, 40] à des ordres plus élevés.

4.3 Stabilité temporelle et évolution énergétique du système

Dans le chapitre précédent, la stabilité a été discutée à partir de la formulation continue des EELs. L'hypothèse de compacité des perturbations dans le domaine physique était considérée de manière à simplifier l'analyse. Cette approche fournissait directement une indication sur la stabilité du modèle physique. En particulier, nous avons souligné l'influence de la matrice de réaction dans la croissance énergétique des perturbations. Comme nous l'avons suggéré, il existe cependant très peu de résultats théoriques dès que l'écoulement de base n'est plus uniforme ou parallèle. L'analyse de la stabilité d'un écoulement doit alors s'effectuer par la voie numérique. C'est la solution à envisager dès que des arguments théoriques manquent. L'approche numérique permet en effet de contourner l'absence de solutions analytiques à partir du moment où les géométries et les écoulements se complexifient. Conclure sur la stabilité d'un écoulement à partir du modèle discret n'est cependant pas si simple car ce dernier inclut des stabilités de différentes natures qui sont liées essentiellement à :

- La stabilité du modèle physique continu qui dans l'idéal doit être capable de modéliser avec fiabilité la stabilité de l'écoulement de base. Dans notre cas, il s'agit des EELs.
- L'approximation du modèle continu dans un espace de dimension finie par les méthodes de discrétisation. Dans notre cas, il s'agit de l'approximation du domaine de calcul par un nombre fini de points et des dérivées spatiales par différences finies.
- L'intégration d'un modèle de frontière et sa discrétisation. Dans notre cas, il s'agit par exemple du modèle de frontière de Tam et Dong ou plus tard des conditions de paroi et leurs discrétisations associées.
- La numérisation du modèle complet. D'un point de vue informatique, le développement décimal des nombres est limité à la précision de la machine. Il existe donc des erreurs d'arrondi dans l'approximation des nombres réels.

Il faut garder à l'esprit que la matrice \mathbf{A} est imprégnée de ces trois influences numériques. Bien entendu, l'analyse de sa stabilité devrait, idéalement, être liée uniquement à la stabilité physique de l'écoulement de base. Cela suppose donc que la discrétisation du modèle physique, les conditions aux limites et les erreurs d'arrondi ne viennent pas trop perturber les modélisations physiques souhaitées et que la formulation mathématique du modèle physique soit bien posée. Lorsqu'on s'intéresse à prédire avec fiabilité la stabilité physique d'un écoulement, il est donc nécessaire que ces trois *items* soient bien posés. Si le modèle discret remplit toutes ces conditions, il pourra prétendre être haute-fidélité. Ces différentes considérations pourraient faire l'objet d'analyses approfondies car la construction même d'un modèle numérique haute-fidélité reste un sujet de recherche important et ce d'autant plus pour traiter des écoulements compressibles. Nous rappelons qu'une matrice réduite \mathbf{A}_r est construite en projetant la matrice \mathbf{A} sur les deux espaces \mathbf{V}_r et \mathbf{W}_r . Par conséquent, il est important de retenir que la qualité du modèle réduit sera en grande partie limitée par la qualité de la matrice \mathbf{A} elle-même. Nous verrons plus tard qu'il est cependant possible de construire un modèle réduit qui au final pourra être mieux posé numériquement que le modèle non réduit. Les propriétés matricielles discutées dans les paragraphes qui suivent sont importantes à retenir pour comprendre par la suite les notions de stabilité et de comportement énergétique associées aux modèles réduits linéaires.

4.3.1 Croissance énergétique et non-normalité

Le comportement énergétique des perturbations peut s'expliquer à l'aide des propriétés de la matrice \mathbf{A} . À un instant t , l'énergie discrète \mathcal{Q} (avec \mathcal{Q} SDP) du système pour une condition initiale \mathbf{x}_0 donnée, est définie par l'expression

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{Q}} = \mathbf{x}(t)^T \mathcal{Q} \mathbf{x}(t). \quad (4.26)$$

D'un point de vue matriciel, la solution du système s'exprime $\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}_0$ à la date t . L'énergie ci-dessus peut donc aussi s'exprimer formellement

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t)^T \mathcal{Q} \mathbf{x}(t) &= (\exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}_0)^T \mathcal{Q} \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{x}_0^T (\exp(\mathbf{A}^T t) \mathcal{Q} \exp(\mathbf{A}t)) \mathbf{x}_0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Dans le cas particulier où $\mathcal{Q} = \mathbf{I}_n$, on obtient l'expression de l'énergie standard \mathcal{L}^2

$$\mathbf{x}(t)^T \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0^T (\exp(\mathbf{A}^T t) \exp(\mathbf{A}t)) \mathbf{x}_0. \quad (4.28)$$

On distingue alors deux cas :

- Si \mathbf{A} est normale, $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$ et par propriété d'une exponentielle de matrice on peut écrire $\exp(\mathbf{A}^T t) \exp(\mathbf{A}t) = \exp((\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)t)$. Par conséquent, l'évolution de l'énergie est régie par la partie symétrique $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ de \mathbf{A} . $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ étant symétrique, ses valeurs propres sont toutes réelles. Notons $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$ ses valeurs propres, l'énergie est majorée par l'expression

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t)^T \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_0^T (\exp((\mathbf{A}^T + \mathbf{A})t)) \mathbf{x}_0 \\ &= \sum_{i=1}^n e^{\mu_i t} \tilde{x}_0^i \tilde{x}_0^i \\ &\leq e^{\mu_n t} \mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

où \tilde{x}_0^i sont les composantes du vecteur \mathbf{x}_0 dans la base des modes propres de $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$. On en conclut aisément que si la partie symétrique de \mathbf{A} est de Hurwitz ($\mu_n < 0$) l'énergie est dissipée. Par ailleurs, si \mathbf{A} est anti-symétrique $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$, l'énergie se conserve puisque $\mathbf{x}(t)^T \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_0$. En revanche, si $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ a au moins une valeur propre positive alors l'énergie croît et le système est instable puisque le terme $e^{\mu_n t} \tilde{x}_0^n \tilde{x}_0^n$ diverge.

- Si \mathbf{A} n'est pas normale, \mathbf{A} ne commute pas avec sa transposée et on ne peut plus utiliser la propriété de l'exponentielle de matrice. On peut cependant effectuer un développement limité au premier ordre des deux exponentielles au voisinage de $t = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t)^T \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_0^T (\exp(\mathbf{A}^T t) \exp(\mathbf{A} t)) \mathbf{x}_0 \\
&\approx \mathbf{x}_0^T (\mathbf{I}_n + \mathbf{A}^T t) (\mathbf{I}_n + \mathbf{A} t) \mathbf{x}_0 \\
&\approx \mathbf{x}_0^T (\mathbf{I}_n + (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) t + \mathcal{O}(t^2)) \mathbf{x}_0 \\
&\approx \mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_0 + t \mathbf{x}_0^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{x}_0 \\
&\approx \mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_0 + t \sum_{i=1}^n \mu_i \tilde{x}_0^i \tilde{x}_0^i.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Cette approximation montre une fois de plus l'influence de la partie symétrique $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ de \mathbf{A} sur la croissance énergétique. Dans le cas d'une matrice non-normale, si $\mu_n > 0$, l'énergie peut s'amplifier aux temps courts. En revanche, le système n'est pas nécessairement instable et c'est la grande différence avec une matrice normale où l'existence de $\mu_n > 0$ est une condition suffisante de comportement instable du système. On ne peut donc pas conclure sur la stabilité d'une matrice non normale en analysant la stabilité de sa partie symétrique puisque cette dernière n'indique alors que le potentiel de croissance transitoire. Il est par ailleurs bien connu que la non-normalité d'un opérateur linéaire induit une forte sensibilité sur le spectre des perturbations [65, 92].

La croissance transitoire vient d'être discutée à partir de l'exponentielle de matrice. On peut aussi retrouver ces propriétés en étudiant les variations de l'énergie par l'intermédiaire de la dérivée temporelle comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (\mathbf{x}(t)^T \mathbf{x}(t)) &= (\dot{\mathbf{x}}(t))^T \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)^T \dot{\mathbf{x}}(t) \\
&= (\mathbf{A} \mathbf{x}(t))^T \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)^T \mathbf{A} \mathbf{x}(t) \\
&= \mathbf{x}(t)^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{x}(t).
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Encore une fois, la partie symétrique joue un rôle moteur dans le sens de variation de l'énergie. Si $\mu_n < 0$, la dérivée temporelle de l'énergie est négative donc l'énergie est strictement décroissante vers 0. Pour conclure sur la stabilité d'une matrice réelle, qu'elle soit normale ou non, il suffit donc de vérifier la stabilité de sa partie symétrique. Cette propriété est aussi connue sous le nom de théorème de Bendixon-Hirsch et peut être étendue à certains opérateurs continus [90]. Par contre, si \mathbf{A} n'est pas normale, on ne peut pas conclure sur la stabilité de \mathbf{A} si il existe $\mu_n > 0$. Le profil d'énergie standard ne sera pas monotone dans ce cas.

Pour pouvoir conclure sur la stabilité d'une matrice non-normale de partie symétrique non définie négative, il est nécessaire de généraliser cette analyse avec une \mathcal{Q} -énergie et on retrouve la théorie de Lyapunov. C'est l'objet du paragraphe suivant.

4.3.2 Méthode énergétique de Lyapunov

La méthode de Lyapunov consiste à construire une fonction scalaire de type énergétique qui admet une dérivée temporelle négative. Autrement dit, on recherche une énergie strictement décroissante dans le temps. On rappelle que le système est dit asymptotiquement stable si les parties réelles de toutes les valeurs propres de la matrice \mathbf{A} sont strictement négatives c'est-à-dire $\mathcal{R}(\lambda_i(A)) < 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Le théorème de Lyapunov énonce que le système linéaire est asymptotiquement stable si et seulement si pour tout \mathbf{P} SDP il existe une matrice \mathcal{Q} SDP telle que

$$\mathbf{A}^T \mathcal{Q} + \mathcal{Q} \mathbf{A} + \mathbf{P} = \mathbf{0}. \tag{4.32}$$

Pour démontrer que la condition est suffisante, on considère l'énergie candidate $\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{Q}} = \mathbf{x}^T \mathcal{Q} \mathbf{x}$ alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{Q}} &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathcal{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathcal{Q} \dot{\mathbf{x}} \\ &= (\mathbf{A} \mathbf{x})^T \mathcal{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathcal{Q} \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathcal{Q} + \mathcal{Q} \mathbf{A}) \mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.33)$$

On retrouve la fameuse équation algébrique de Lyapunov. Soit \mathbf{P} SDP, si \mathcal{Q} est solution de l'équation de Lyapunov alors

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathcal{Q}} = -\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} < 0. \quad (4.34)$$

Ce qui implique que l'énergie généralisée est strictement décroissante et minorée par 0 et par conséquent que le système est asymptotiquement stable. Pour démontrer maintenant que la condition est nécessaire, on suppose que \mathbf{A} est stable et on montre que l'équation de Lyapunov admet comme solution le gramien défini par $\mathcal{Q} = \int_0^{\infty} \exp(\mathbf{A}^T t) \mathbf{P} \exp(\mathbf{A} t) dt$. En effet,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathcal{Q} + \mathcal{Q} \mathbf{A} &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (\exp(\mathbf{A}^T t) \mathbf{P} \exp(\mathbf{A} t)) dt \\ &= [\exp(\mathbf{A}^T t) \mathbf{P} \exp(\mathbf{A} t)]_0^{\infty} \end{aligned} \quad (4.35)$$

La dernière égalité tend vers la matrice $-\mathbf{P}$ quand t tend vers l'infini si \mathbf{A} est asymptotiquement stable. Le théorème de Lyapunov est très puissant. Il indique que si la matrice est de Hurwitz, on peut toujours construire une énergie strictement décroissante. Ce n'est pas si trivial comme résultat dans la mesure où on a vu dans le paragraphe précédent que l'énergie standard n'est pas monotone quand la partie symétrique de la matrice n'est pas de Hurwitz. En somme, le théorème de Lyapunov indique l'existence d'une matrice $\mathcal{Q} \mathbf{A}$ dont la partie symétrique est de Hurwitz. Malheureusement, il est difficile en pratique de construire une fonction de Lyapunov à moins de s'assurer que la matrice \mathbf{A} soit d'une part asymptotiquement stable et d'autre part que l'on soit capable de résoudre l'équation de Lyapunov. Cela n'est pas possible en pratique à cause des caractéristiques de notre matrice \mathbf{A} construite, et ce malgré les performances informatiques actuelles. Notons de plus que le modèle de frontière de Tam et Dong dépend de l'origine de la source. De ce fait, le modèle discret risque d'être au mieux conditionnellement asymptotiquement stable, en d'autres termes asymptotiquement stable seulement pour certaines conditions initiales. Par ailleurs, les simulations numériques sont effectuées sur des intervalles de temps finis et il est important de noter que la méthode de Lyapunov ne permet pas de conclure sur la stabilité si elle est exploitée sur un intervalle de temps fini. En effet, l'intégration de l'équation (4.34) sur un intervalle de temps fini $[t_0, t_f]$ donne

$$\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} dt = \mathbf{x}(t_0)^T \mathcal{Q} \mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}(t_f)^T \mathcal{Q} \mathbf{x}(t_f). \quad (4.36)$$

Or le membre de gauche n'est pas nécessairement défini positif. Pour terminer, notons qu'il est possible d'étendre l'équation de Lyapunov pour les systèmes conservatifs ou neutralement stables. On dit qu'une matrice \mathbf{A} est anti-symétrisable si il existe une matrice \mathcal{Q} SDP telle que $\mathcal{Q} \mathbf{A} = -(\mathcal{Q} \mathbf{A})^T$. Dans ce cas, l'équation de Lyapunov s'écrit simplement $\mathcal{Q} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathcal{Q} = \mathbf{0}$. On vérifie aisément que la \mathcal{Q} -énergie est conservée :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t)^T \mathcal{Q} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_0^T (\exp(\mathbf{A}^T t) \mathcal{Q} \exp(\mathbf{A} t)) \mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{x}_0^T (\exp(\mathbf{A}^T t) \exp(\mathcal{Q} \mathbf{A} \mathcal{Q}^{-1} t)) \mathcal{Q} \mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{x}_0^T (\exp(\mathbf{A}^T t) \exp(-\mathbf{A}^T \mathcal{Q} \mathcal{Q}^{-1} t)) \mathcal{Q} \mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{x}_0^T \mathcal{Q} \mathbf{x}_0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Nous aurons l'occasion de voir que les matrices anti-symétrisables sont intimement liées aux modèles hyperboliques symétrisables à l'aide d'un exemple sur les EELs.

4.4 Exemples de réponses du système

Nous introduisons brièvement dans cette section les principaux types de réponses du système nécessaires à la construction des deux sous-espaces \mathbf{V}_r et \mathbf{W}_r dans les différentes méthodes de réduction. Nous en profiterons pour introduire certaines difficultés émergentes dans la résolution numérique des EELs qui risquent de compromettre l'application de certaines méthodes de réduction. Tous les exemples numériques seront traités avec un terme source de type monopolaire de la forme

$$\mathbf{s}(x, y) = (0, 0, 0, s_{\delta p}(x, y))^T \quad (4.38)$$

avec

$$s_{\delta p}(x, y) = \exp(-\log(2)((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)/b^2)u(t), \quad (4.39)$$

(x_0, y_0) l'origine de la source et b la demi-largeur de la gaussienne. Dans ce terme source, les variables temporelles et spatiales sont bien séparées ce qui permet de définir de manière discrète un terme de contrôle $\mathbf{B}u(t)$ où $\mathbf{B} = (\exp(-\log(2)((x_i - x_0)^2 + (y_j - y_0)^2)/b^2))_{ij}$ est le vecteur construit en utilisant la même numérotation que celle employée pour construire la matrice \mathbf{A} . Nous avons ainsi construit un système de type SIMO

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (4.40)$$

où \mathbf{B} représente la distribution spatiale du chargement et $u(t)$ représente la loi temporelle associée au chargement (par exemple la pulsation du monopôle). Nous exploitons le gramien de contrôlabilité car il permet de s'affranchir de fixer une loi $u(t)$ pour construire les deux sous-espaces \mathbf{V}_r et \mathbf{W}_r . L'intérêt de construire des modèles réduits dans le formalisme du contrôle repose justement en partie sur la volonté d'effectuer des simulations en temps réel avec des lois $u(t)$ arbitraires. Dans la méthode équilibrée empirique temporelle, par exemple, l'approximation du gramien de contrôlabilité nécessite de résoudre des problèmes aux valeurs initiales de la forme

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{B} \end{cases} \quad (4.41)$$

pour l'obtention des différentes réponses $\mathbf{x}(t_i)$ aux instants t_i sur l'intervalle temporelle $[t_0, t_f]$. Dans le domaine fréquentiel, la méthode équilibrée empirique, la famille des méthodes d'identification des moments à fréquences finies et plus généralement la POD fréquentielle nécessitent de connaître des réponses pour différentes pulsations ω de la forme

$$(j\omega\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{B}. \quad (4.42)$$

Lorsque la matrice \mathbf{A} n'est pas symétrique, ce qui est notre cas, des réponses temporelles adjointes ou fréquentielles adjointes peuvent aussi être exploitées. Nous considérerons toujours un écoulement de base avec $\bar{\rho}$ uniforme, \bar{p} uniforme et un profil de vitesse de la forme $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}(y), 0)^T$. Les paramètres numériques sont $\bar{\rho} = 1.2 \text{ kg.m}^{-3}$, $\bar{p} = 10^5 \text{ Pa}$, $b = 5$. Trois profils de vitesse seront envisagés pour illustrer les différents aspects numériques :

- un écoulement uniforme avec $\bar{u}(y) = 0.5\bar{c}$;
- un écoulement affine avec $\bar{u}(y) = 0.5\bar{c}y/100$;
- une couche de mélange avec $\bar{u}(y) = \bar{c}(0.5 + 0.25 \tanh((y - y_0)/5))$.

Dans le cas des deux écoulements uniforme et affine, le domaine de calcul sera un carré de 100 mètres de côté discrétisé par 150 points dans les deux directions ce qui donne un système de 90000 inconnues. Le cas de la couche de mélange sera traité à l'aide d'un rectangle de 200 mètres de longueur par 100 mètres de large discrétisé par 300 points dans la direction y et 600 points dans la direction x ce qui produit un système constitué de 720000 inconnues. Dans tous les cas, la source est placée en $(x_0, y_0) = (50, 50)$. Cette position est aussi choisie comme origine de la source pour le modèle de frontière de Tam et Dong introduit sur les 4 côtés du domaine de calcul. Les pas de temps sont limités par la condition CFL. Les simulations sont effectuées en prenant $\Delta t = 0.001$ s pour les cas uniforme et affine et $\Delta t = 0.0006$ s pour la couche de mélange. Ces différentes configurations de calcul seront à nouveau considérées dans le chapitre suivant consacré à la construction des systèmes réduits.

4.4.1 Réponses temporelles directes

Dans cette section, on illustre quelques réponses temporelles issues du problème aux valeurs initiales avec quelques profils d'énergie associés aux paramètres numériques introduits. Sur les figures 4.7, 4.8 et 4.9, on observe notamment l'influence de l'écoulement sur la déformation du front d'onde. On observe un mécanisme différent dans le cas de la couche de mélange. Le mode tourbillonnaire apparaît et il est convecté vers l'aval tout en s'amplifiant. C'est une instabilité convective. La couche de mélange présente un point d'inflexion contrairement aux deux autres exemples d'écoulement. Sur les figures 4.10, 4.11 et 4.12, on a tracé l'évolution de l'énergie standard \mathcal{L}^2 et celle basée sur le symétriseur. Nous pouvons faire plusieurs observations. Dans le cas de l'écoulement de base uniforme, on constate que l'énergie \mathcal{L}^2 n'est pas monotone contrairement à celle basée sur le symétriseur qui suggère que l'énergie est bien conservée tant que les perturbations sont loin des frontières. Cela prouve d'une part qu'il n'aurait pas été possible de démontrer la conservation de l'énergie à partir de l'énergie standard dans l'analyse théorique du chapitre précédent, et que d'autre part l'énergie \mathcal{H} peut définir une fonction de Lyapunov pour les écoulements uniformes. Dans le cas de l'écoulement affine, on observe en revanche une très légère croissance de l'énergie basée sur le symétriseur. Cela suggère encore une fois qu'il n'aurait pas été possible de démontrer la conservation de l'énergie à partir de l'énergie basée sur le symétriseur. Il est cependant bien connu qu'un tel écoulement est stable car il ne présente pas de point d'inflexion. La faible croissance énergétique observée aux temps courts exprime donc la non-normalité des EELs pour le produit scalaire basé sur le symétriseur et le fait que le symétriseur ne définit plus une fonction de Lyapunov. L'écoulement affine, étant pratiquement l'écoulement non uniforme le plus simple que nous puissions considérer, cela suggère que pour la majorité des écoulements de base non uniformes l'énergie \mathcal{H} ne sera pas une fonction de Lyapunov. C'est une remarque importante à retenir pour la construction de modèles réduits stables sur des intervalles de temps finis. Enfin, la couche de mélange induit une croissance énergétique \mathcal{H} beaucoup plus prononcée aux temps courts. On peut remarquer que les profils d'énergie \mathcal{L}^2 sont pratiquement identiques dans les trois cas. Cela est dû aux ordres de grandeur des perturbations et au fait que la même condition initiale a été considérée pour les trois cas. La même énergie est donc introduite initialement dans l'écoulement et les ordres de grandeurs des perturbations montrent que $\delta \mathbf{q}^T(\mathbf{x}, t) \delta \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \approx \delta p(\mathbf{x}, t)^2$.

4.4.2 Réponses adjointes

Il y a deux approches distinctes pour induire le problème adjoint discret :

- à partir de la discrétisation des EELs adjointes développées dans le chapitre précédent ;
- à partir du modèle discret construit dans ce chapitre.

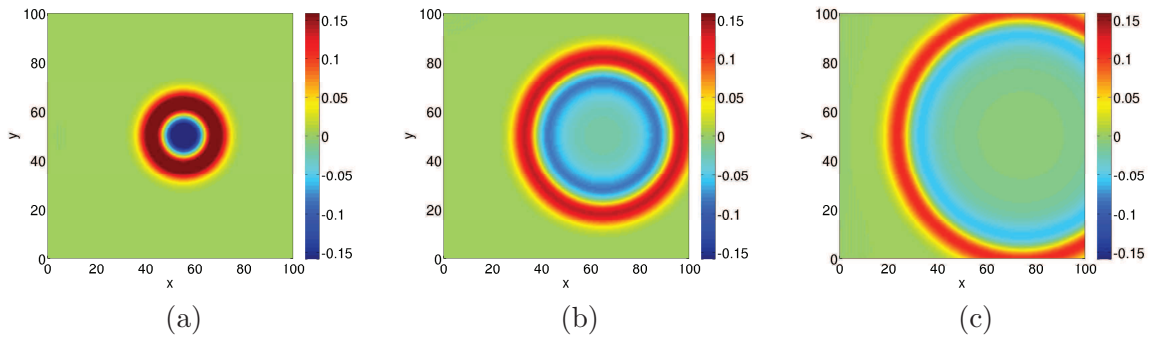


FIGURE 4.7 – Evolution temporelle d’une impulsion gaussienne dans un écoulement uniforme. Champ de pression δp . (a) après $30\Delta t$ (b) après $80\Delta t$ (c) après $130\Delta t$.

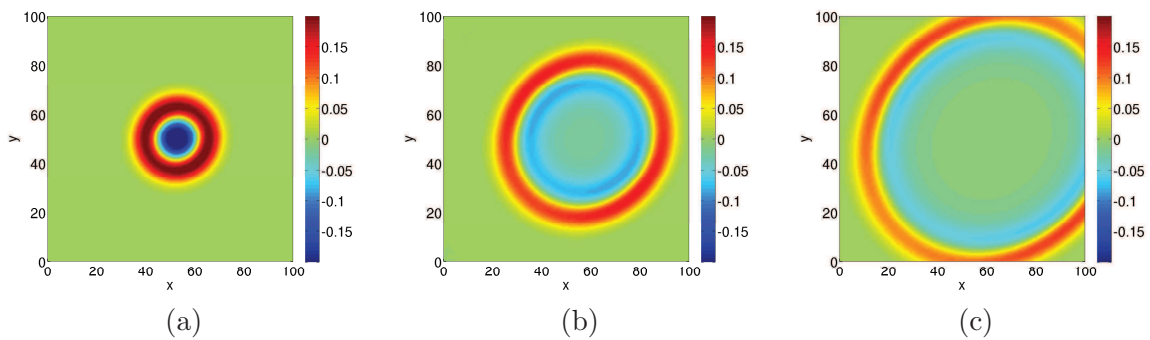


FIGURE 4.8 – Evolution temporelle d’une impulsion gaussienne dans un écoulement affine. (a) après $30\Delta t$ (b) après $80\Delta t$ (c) après $130\Delta t$.

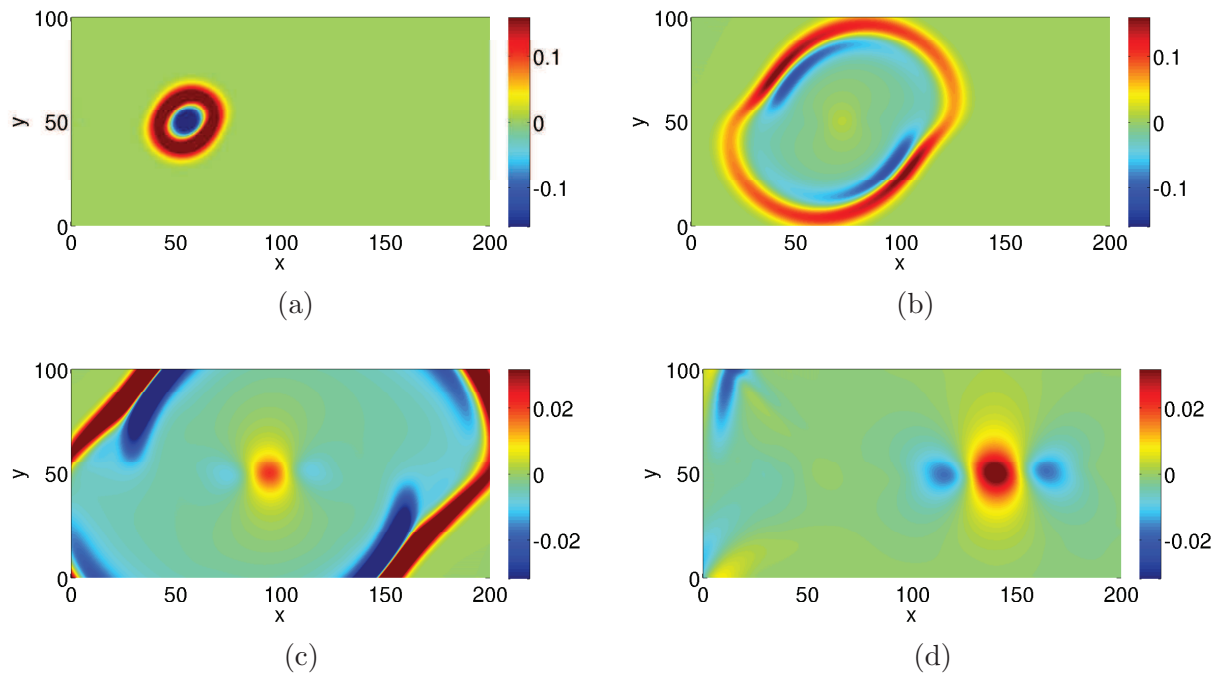


FIGURE 4.9 – Evolution temporelle d’une impulsion gaussienne dans un écoulement cisailé présentant un point d’inflexion. Champ de pression δp . (a) après $50\Delta t$ (b) après $200\Delta t$ (c) après $400\Delta t$ (d) après $800\Delta t$.

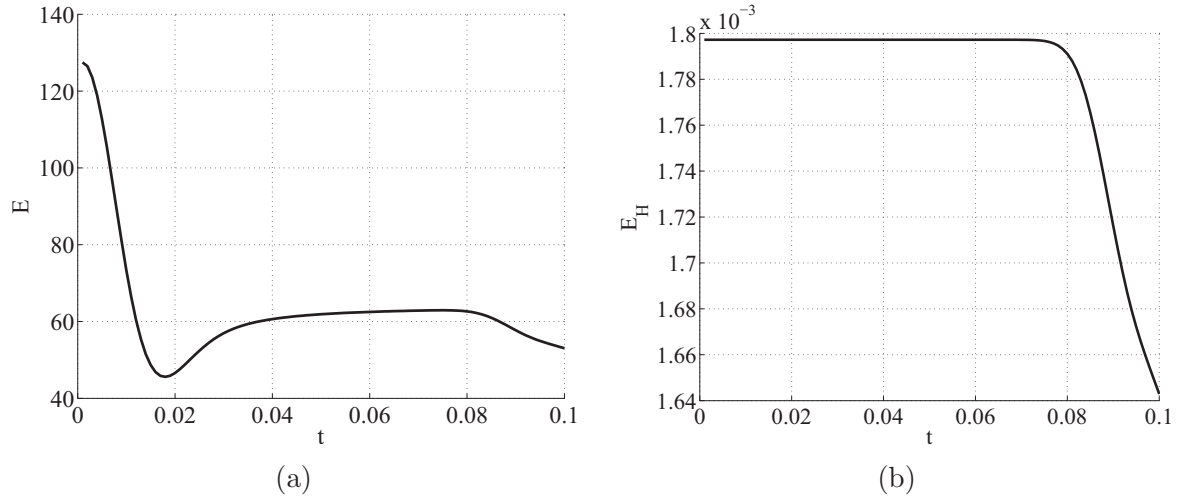


FIGURE 4.10 – Profil d'énergie à court terme dans le cas d'un écoulement de base uniforme. (a) énergie \mathcal{L}^2 (b) énergie \mathcal{H}

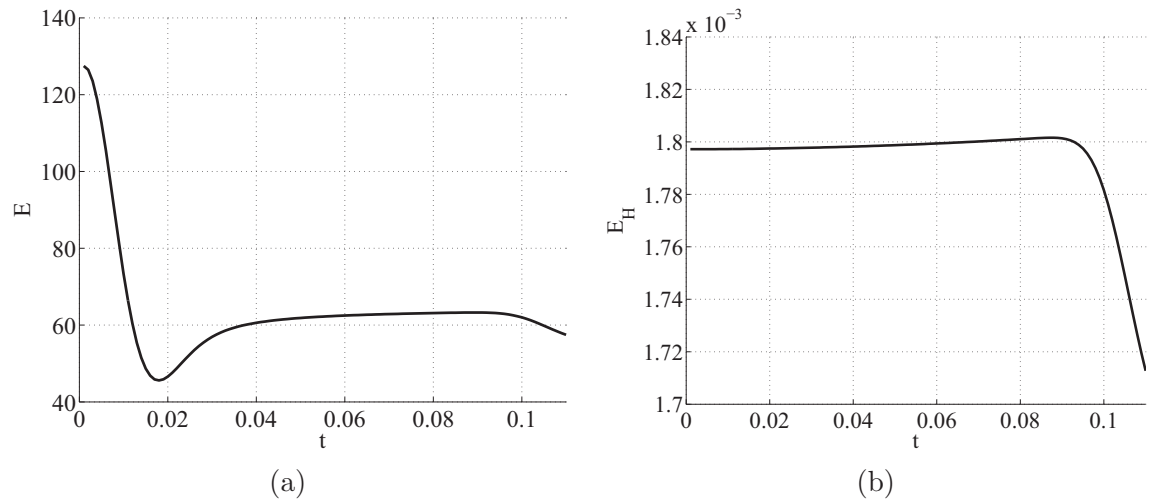


FIGURE 4.11 – Évolution de l'énergie à court terme dans le cas d'un écoulement de base affine. (a) énergie \mathcal{L}^2 (b) énergie \mathcal{H}

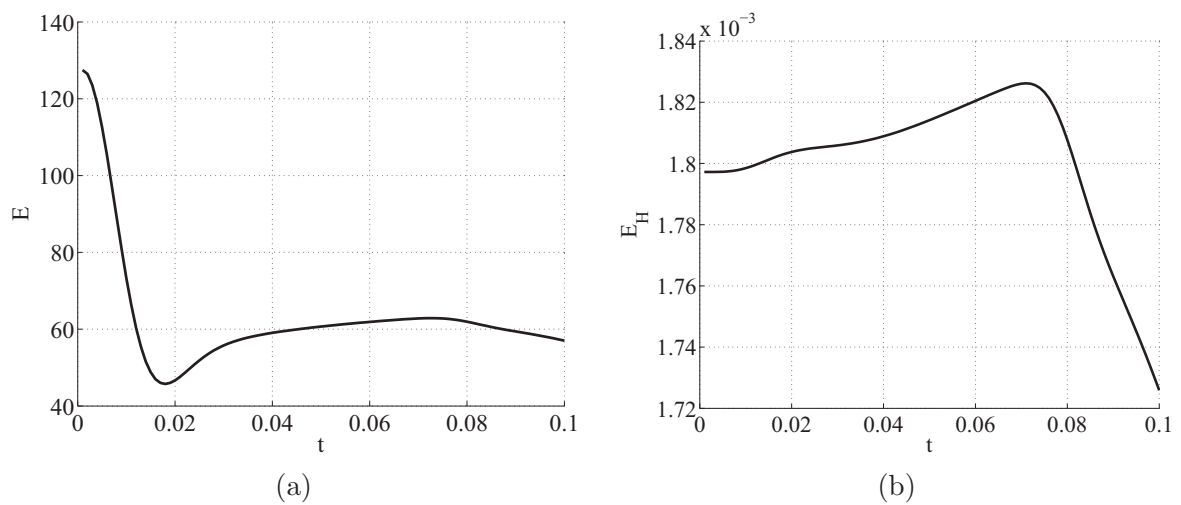


FIGURE 4.12 – Évolution de l'énergie à court terme dans le cas d'un écoulement de base cisailé convectivement instable. (a) énergie \mathcal{L}^2 (b) énergie \mathcal{H}

Le modèle discret adjoint peut en effet s'obtenir directement à partir du modèle discret direct en intégrant par partie le système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ projeté sur un vecteur arbitraire $\mathcal{Q}\mathbf{y}^\dagger$ comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{y}^{\dagger T} \mathcal{Q} \dot{\mathbf{x}} dt &= \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{y}^{\dagger T} \mathcal{Q} \mathbf{A} \mathbf{x} dt \\ \iff - \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}^T \mathcal{Q} \dot{\mathbf{y}}^\dagger dt + [\mathbf{y}^{\dagger T} \mathcal{Q} \mathbf{x}]_{t_0}^{t_f} &= \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathcal{Q} \mathbf{y}^\dagger dt \end{aligned} \quad (4.43)$$

La relation étant vraie pour des vecteurs arbitraires, on en déduit le problème adjoint discret

$$-\mathcal{Q} \dot{\mathbf{y}}^\dagger(t) = \mathbf{A}^T \mathcal{Q} \mathbf{y}^\dagger(t) \quad (4.44)$$

en imposant *a priori*

$$\begin{aligned} [\mathbf{y}^{\dagger T} \mathcal{Q} \mathbf{x}]_{t_0}^{t_f} &= \mathbf{y}^\dagger(t_f)^T \mathcal{Q} \mathbf{x}(t_f) - \mathbf{y}^\dagger(t_0)^T \mathcal{Q} \mathbf{x}(t_0) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Ici le problème discret adjoint a été construit pour un produit scalaire arbitraire pondéré par une matrice \mathcal{Q} symétrique définie positive. Par exemple, on peut prendre

- le produit scalaire $\mathcal{Q} = \mathbf{I}_n$ et le problème adjoint se réduit à

$$-\dot{\mathbf{y}}^\dagger(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{y}^\dagger(t). \quad (4.46)$$

- le produit scalaire basé sur le symétriseur discret $\mathcal{Q} = \mathcal{H}$ avec \mathcal{H} une matrice diagonale par blocs construite à partir de la numérotation choisie pour vectoriser les inconnues. Les blocs de la matrice sont simplement égaux à $\mathbf{H}(x_i, y_j)$ et le problème adjoint est

$$-\mathcal{H} \dot{\mathbf{y}}^\dagger(t) = \mathbf{A}^T \mathcal{H} \mathbf{y}^\dagger(t). \quad (4.47)$$

En posant $\tilde{\mathbf{y}} = \mathcal{H} \mathbf{y}^\dagger$, on se ramène au problème adjoint standard.

Il est important de noter que la transposée \mathbf{A}^T de la matrice \mathbf{A} n'est pas toujours bien posée. C'est notamment le cas en présence des conditions aux limites de non-réflexion 2D. En effet, si la transposée de la matrice \mathbf{A}^T est utilisée directement pour simuler le problème adjoint, l'opérateur adjoint des conditions de Tam et Dong est implicitement induit. Or, l'opérateur adjoint associé au modèle de Tam et Dong n'est plus du tout une expression asymptotique des EELs. Les équations adjointes étant similaires aux équations directes d'un point de vue physique, il est aussi nécessaire d'avoir un modèle de frontière qui évacue les ondes du domaine de calcul. Afin de remédier à ce problème, la solution est de construire le modèle adjoint discret à partir des équations adjointes continues et d'intégrer des conditions aux limites adaptées. Les caractéristiques des EELs adjointes sont identiques au signe près du moins dans le cas d'un écoulement de base uniforme. En particulier, l'information associée aux EELs adjointes se propage dans la direction opposée à l'information associée aux EELs directes. Il est intéressant de noter par ailleurs que l'information associée aux EELs anti-adjointes se propage dans la même direction que les EELs directes. Les conditions aux limites de non-réflexion pour les EELs adjointes sont simplement obtenues en mettant à jour la vitesse de groupe du modèle de Tam et Dong qui dépend du signe du champ de vitesse moyen, donc de la direction de propagation. Les mêmes schémas de discrétisation sont appliqués aux EELs adjointes. On construit finalement une matrice $\mathbf{A}^+ \neq \mathbf{A}^T$. La figure 4.13 illustre bien ce problème lié aux conditions aux limites anéchoïques. On y simule la propagation d'une impulsion acoustique avec le problème anti-adjoint et on illustre le fait que $-\mathbf{A}^T$ est incapable d'évacuer le front d'onde. D'un autre côté, le problème anti-adjoint $-\mathbf{A}^+$ construit à partir des EELs adjointes et des conditions de Tam et Dong évacue correctement la perturbation acoustique. Notons qu'il n'est probablement pas possible de contourner ce problème avec d'autres conditions aux

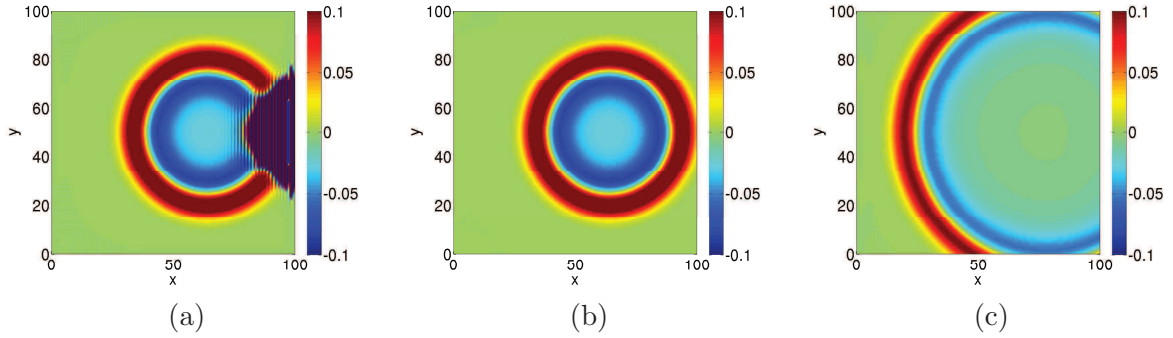


FIGURE 4.13 – Construction du problème adjoint discret. (a) simulation avec $-\mathbf{A}^T$ suggérant que les conditions aux limites sont mal posées (b) et (c) simulation avec $-\mathbf{A}^+$ suggérant cette fois-ci que le modèle de frontière est bien adapté.

limites de non-réflexion comme par exemple avec la méthode des caractéristiques. En effet, un raisonnement énergétique montre qu'il existe une contradiction à vouloir obtenir \mathbf{A}^T ou $-\mathbf{A}^T$ bien posées. Prenons un écoulement de base uniforme, nous savons qu'il ne peut y avoir de croissance énergétique. De plus, les conditions aux limites doivent évacuer toutes les perturbations du domaine de calcul. Par conséquent, l'énergie doit être dissipée. D'un autre côté, avec la matrice anti-adjointe $-\mathbf{A}^T$, il ne peut y avoir non plus de croissance énergétique avec un écoulement de base uniforme car les équations sont de nature quasi-identique (et même identique si on construit les EELs \mathbf{H} -adjointes). De plus, les perturbations acoustiques doivent aussi quitter le domaine de calcul donc l'énergie doit aussi être dissipée. Ceci est contradictoire car la partie réelle des valeurs propres de $-\mathbf{A}^T$ devrait être de signe opposé à la partie réelle des valeurs propres de \mathbf{A} . Autrement dit, l'énergie devrait croître. La nature quasi anti-symétrique des EELs loin des frontières explique l'avènement de cette contradiction énergétique et ne permet pas de définir directement la transposée discrète de \mathbf{A} . Notons qu'en présence de conditions aux limites périodiques la transposée \mathbf{A}^T est bien définie. C'est certainement aussi le cas en présence de conditions de parois adiabatiques. Cela peut s'appréhender à l'aide d'un raisonnement énergétique analogue. Pour terminer, sur la figure 4.14, des réponses temporelles sont illustrées pour le cas de la couche de mélange avec le problème anti-adjoint.

4.4.3 Réponses fréquentielles

Nous avons vu qu'une bonne partie des méthodes de réduction exploitent des réponses fréquentielles. C'est par exemple le cas de la POD fréquentielle, des méthodes équilibrées fréquentielles ou encore des méthodes d'identification des moments à fréquences finies. L'obtention de réponses fréquentielles nécessite de résoudre de nombreux systèmes linéaires de la forme

$$(j\omega\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{B}. \quad (4.48)$$

Une réponse fréquentielle peut s'interpréter physiquement de la manière suivante. Si on s'intéresse à de petites perturbations harmoniques de pulsation ω , la réponse du système dynamique

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \quad (4.49)$$

peut directement être recherchée sous la forme $\mathbf{x}(t) = e^{j\omega t}\hat{\mathbf{x}}$. La substitution de cette solution dans le système dynamique induit le système linéaire à résoudre. La résolution de ce système linéaire complexe est équivalent à la résolution du système linéaire réel

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\omega\mathbf{I}_n \\ \omega\mathbf{I}_n & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_r \\ \hat{\mathbf{x}}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

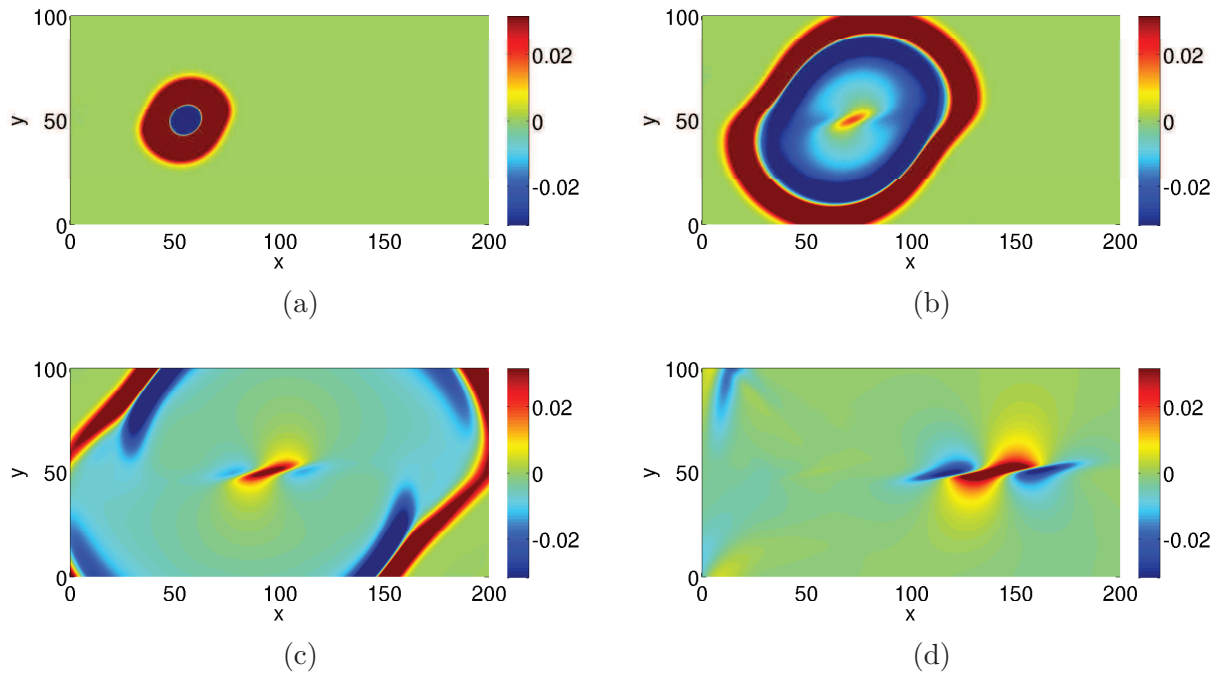


FIGURE 4.14 – Exemples de réponses temporelles anti-adjointes, cas de la couche de mélange. Champ de pression après (a) $50\Delta t$ (b) $200\Delta t$ (c) $400\Delta t$ (d) $800\Delta t$.

en posant $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_r + j\hat{\mathbf{x}}_i$. Le système réel est donc constitué de $2n$ inconnues. On peut aussi découpler les parties réelle et imaginaire puisque

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \frac{1}{\omega}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_r - \mathbf{B}) \quad (4.51)$$

ce qui implique le nouveau système linéaire

$$(\omega^2\mathbf{I}_n + \mathbf{A}^2)\hat{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}\mathbf{B}. \quad (4.52)$$

Cependant cette dernière formulation fait intervenir le carré de la matrice \mathbf{A} de profil bien plus large (la largeur de bande est doublée). De ce fait, il serait encore plus délicat de stocker la matrice ou encore d'effectuer des factorisations matricielles. L'obtention de la solution de ces systèmes linéaires est donc le point crucial dans toutes les méthodes de réduction fréquentielles. En général, on distingue deux grandes familles de méthodes de résolution : les méthodes directes et les méthodes itératives. Les méthodes itératives se décomposent à leur tour en différentes approches :

- les méthodes basées sur une décomposition matricielle (par exemple la méthode de Gauss-Seidel ou encore l'algorithme N-pass) ;
- les méthodes basées sur les espaces de Krylov (par exemple la méthode Generalized Minimal Residual Method, acronyme GMRES) ;
- les méthodes de pseudo-temps.

Une très bonne introduction aux différentes méthodes itératives est proposée par Saad [230]. Dans notre cas, les systèmes linéaires sont de très grande dimension, creux, complexes et non symétriques. Par ailleurs, bien que la matrice soit creuse, son profil est large car nous utilisons des schémas aux différences finies d'ordre élevé. Nous allons voir que la résolution d'un système linéaire avec une telle matrice est particulièrement délicate et coûteuse. Par

conséquent, l'exploitation de réponses fréquentielles pour construire des systèmes réduits avec un coût raisonnable risque d'être plutôt compromis dans notre contexte. Parmi les différentes méthodes de résolution de systèmes linéaires, ce sont les méthodes de type pseudo-temps qui sont particulièrement exploitées dans le contexte de la mécanique des fluides pour plusieurs raisons. Nous leur consacrons le paragraphe suivant.

4.4.3.1 Méthodes de pseudo-temps

Le principe des méthodes de pseudo-temps est de transformer le système linéaire en un système dynamique dont la solution stationnaire est la solution du système linéaire. Il s'agit d'intégrer le système dynamique

$$\partial_\tau \hat{\mathbf{x}} + (j\omega \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{B}. \quad (4.53)$$

En théorie, la convergence de la méthode de pseudo-temps n'est possible que si la matrice $j\omega \mathbf{I}_n - \mathbf{A}$ est asymptotiquement stable ou de manière équivalente si la matrice \mathbf{A} l'est puisque c'est la partie réelle des valeurs propres qui indique ce critère de stabilité. Cela s'appréhende facilement à l'aide de l'exemple suivant. Supposons que l'on souhaite appliquer la méthode de pseudo-temps pour trouver la solution de l'équation linéaire scalaire $\lambda x = b$. L'équation $\lambda x = b$ est transformée tout d'abord en une équation différentielle ordinaire $\dot{y}(t) + \lambda y(t) = b$. La solution $x = b/\lambda$ serait donc la solution stationnaire de cette équation différentielle à condition qu'elle existe. La solution analytique de cette simple équation ordinaire est obtenue à l'aide de la méthode de variation de la constante. La solution fournie s'écrit $y(t) = e^{-\lambda t} y_0 + b/\lambda - e^{-\lambda t} b/\lambda$. Il est aisé de remarquer que le second membre b agira comme une condition initiale quelque soit la méthode d'intégration temporelle choisie même si on choisit $y_0 = 0$. De ce fait, la convergence vers la solution b/λ n'est assurée que si le terme $e^{-\lambda t}$ tend vers 0 pour $t > 0$. Cette propriété n'est vérifiée que si λ est strictement positif. Par ailleurs, la vitesse de convergence sera d'autant plus lente que λ sera proche de 0. Ce raisonnement reste valable pour les systèmes linéaires. λ correspondra alors aux valeurs propres du système étudié. La convergence de la méthode de pseudo-temps est donc assurée si et seulement si le système est asymptotiquement stable. D'un point de vue physique, l'existence de modes propres neutres ou instables ne permettrait pas d'assurer la convergence de la méthode de pseudo-temps. Par exemple, la présence de modes neutres est possible en présence de conditions aux limites de paroi ou périodiques. En particulier, dans un système fermé ou semi-fermé, des perturbations peuvent se réfléchir indéfiniment sur les parois (les modes associés sont neutres). Autre exemple ne permettant pas la convergence de la méthode, la présence de modes globaux instables dans un écoulement. L'attrait pour les méthodes de pseudo-temps est en fait d'ordre pratique. Comme elle consiste à employer une méthode d'intégration temporelle, elle évite de modifier profondément la structure des codes de calcul qui en général n'exploitent pas une formulation matricielle. Or, la résolution de systèmes linéaires, sans construction de matrices, ne peut s'effectuer que par l'intermédiaire de méthodes itératives. Les méthodes directes nécessitent en effet de construire les matrices ce qui représente un obstacle notable en terme de développement informatique. Il existe encore d'autres arguments en faveur des méthodes pseudo-temporelles. Il est par exemple possible d'ajouter des procédures d'accélération comme la technique du pas de temps local (*local time stepping method*) ou encore des techniques multi-grilles (*multiple grid acceleration* [193]). Enfin, elle introduit une pseudo-physique qui permet à l'utilisateur d'apprécier qualitativement la convergence vers la solution stationnaire à partir des différentes pseudo-itérations temporelles. En effet, dans la plupart des méthodes itératives purement mathématiques, les itérations effectuées pour converger vers la solution peuvent n'avoir aucune signification apparente et il est donc difficile de maîtriser la convergence qualitativement. Dans le contexte des fluides compressibles linéarisés, l'idée d'introduire un pseudo-temps pour résoudre les EELs en domaine fréquentiel remonte certainement aux travaux de Ni et Sisto [194]. Ces méthodes sont depuis souvent

utilisées dans la communauté de l'aéroélasticité. Hall [131] a proposé une revue.

4.4.3.2 Application de la méthode de pseudo-temps aux EELs

La méthode de pseudo-temps est appliquée pour différentes pulsations ω dans les cas de l'écoulement de base affine et de la couche de mélange. Avec ces deux exemples, nous pouvons illustrer les performances de la méthode mais aussi les difficultés numériques pouvant être rencontrées dans certaines configurations bien précises. Le système dynamique (4.53) est intégré avec l'algorithme de Runge-Kutta introduit plus haut. La figure 4.15 montre quelques solutions obtenues dans le cas de l'écoulement de base affine. Il a suffi de 350 pseudo itérations temporelles pour converger vers la solution stationnaire. Le pseudo-pas de temps est par ailleurs toujours limité par la CFL, ici $\Delta\tau = 0.001$. Dans le tableau 4.2, différentes méthodes d'inversion de système sont comparées et la performance de la méthode de pseudo-temps peut être appréciée. L'erreur est définie par rapport à la solution obtenue par méthode directe à l'aide de l'expression

$$e_r = \frac{\|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_d\|_\infty}{\|\hat{\mathbf{x}}_d\|_\infty} \quad (4.54)$$

avec $\hat{\mathbf{x}}_d$ la solution de référence (méthode directe). La méthode directe consiste en une élimination de Gauss avec pivot partiel. Les conditions de calcul sont identiques pour toutes les méthodes. En particulier, aucune parallélisation ni conditionnement numérique n'est effectuée. Les dénominations complexe et réelle signifient respectivement que la méthode est appliquée soit sur le système linéaire complexe (4.48), soit le système linéaire réel (4.50). La méthode directe sur le système réel n'a pu être menée en raison du profil trop large de la matrice associée. La méthode GMRES requiert autant de *restart* que de pseudo-itération à cause de la nature hyperbolique du système (350 *restart* et 5 *outer* itérations). Par ailleurs, choisir par exemple 350 *restart* avec une seule *outer* iteration ne permet pas d'obtenir la précision obtenue avec la méthode de pseudo-temps. La méthode GMRES est donc moins bien adaptée dans notre contexte. Enfin, le coût de calcul induit par la méthode directe se révèle d'autant plus rédhibitoire si on augmente légèrement la dimension de la matrice. Son coût de calcul devient rapidement supérieur à la méthode GMRES. Finalement, les méthodes de pseudo-temps semblent bien plus adaptées pour résoudre des systèmes linéaires issus de modèles hyperboliques.

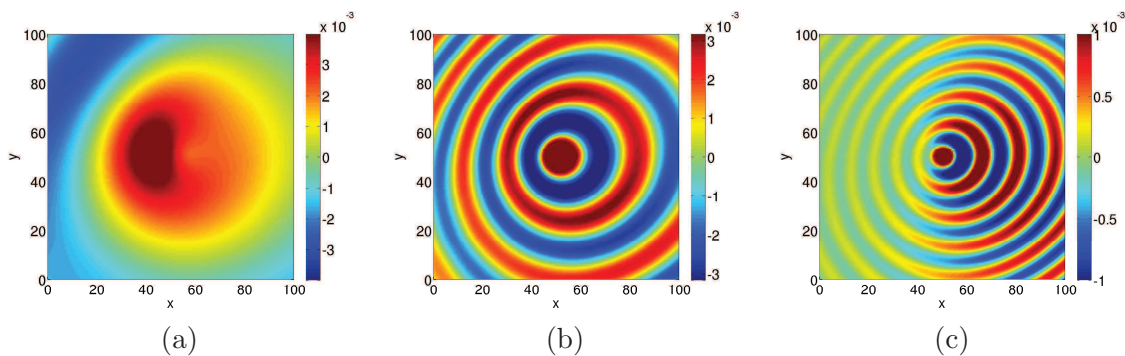


FIGURE 4.15 – Réponses à différentes fréquences dans le cas d'un écoulement de base affine. Visualisation de la partie réelle du champ de pression. (a) $\omega = 20$ (b) $\omega = 100$ (c) $\omega = 200$.

Appliquons maintenant la méthode de pseudo-temps dans le cas de la couche de mélange. Nous allons voir que l'application de la méthode de pseudo-temps est plus délicate avec cette configuration d'écoulement. Le pseudo pas de temps maximal est $\Delta\tau = 0.0006$ (il peut être porté à $\Delta\tau = 0.0008$ avec l'algorithme de Runge-Kutta optimisé sur 6 étapes). La figure 4.16 illustre la convergence de la méthode pour trois fréquences différentes. On observe qu'à

Méthode	Directe complexe	Pseudo-temps complexe	Pseudo-temps réelle	GMRES réelle
e_r	ref.	0.0123	0.048	0.048
Temps CPU	730s	120s	142s	1230s

TABLE 4.2 – Comparaison de différentes méthodes de résolution des systèmes linéaires suggérant la performance de la méthode de pseudo-temps.

moyenne et haute fréquence (images (a) et (b)), la méthode se comporte bien puisque la convergence est assurée. En revanche, à basse fréquence (images (c) et (d)), la méthode ne converge pas vers une solution stationnaire. À basse fréquence, il y a deux nouveaux phénomènes numériques liés qui émergent mettant en défaut la méthode itérative. Le premier phénomène numérique concerne le développement de l'instabilité convective impliquant une amplification du mode tourbillonnaire. En fait, la convergence de la méthode de pseudo-temps ne devrait pas être mise en défaut en présence d'une instabilité convective si les conditions aux limites étaient bien posées. En effet, le mode tourbillonnaire est convecté vers l'aval et devrait finir par quitter le domaine de calcul. Une instabilité convective ne doit pas produire d'instabilités globales dans la zone Ω du domaine de calcul. Dans l'idéal, la présence d'une instabilité convective ne devrait qu'augmenter le temps de convergence de la méthode. À faible nombre de Mach, le temps de convergence augmente car la convection du mode tourbillonnaire est lente. D'un autre côté, à nombre de Mach plus élevé, on a une contrainte plus forte sur le pas de temps bien que le mode tourbillonnaire soit convecté vers l'aval rapidement. La divergence de la méthode de pseudo-temps est liée dans notre cas à une mauvaise modélisation du domaine Ω^{bc} . En pratique, il est bien connu que les conditions aux limites de Tam et Dong sont incapables d'évacuer proprement (avec un taux de réflexion raisonnable) des perturbations qui ne sont pas purement acoustiques [39]. À basses fréquences, on observe des réflexions aux frontières trop importantes. Elles finissent par interagir avec le profil de la couche de mélange qui présente un point d'inflexion, produisant et amplifiant ainsi continuellement le mode tourbillonnaire [52]. Il s'agit d'un phénomène de réceptivité purement numérique. La construction d'un modèle de frontière capable d'évacuer toutes perturbations reste un problème très ouvert [72]. Il existe plusieurs approches visant à améliorer la zone frontière Ω^{bc} . Citons notamment

- les conditions aux limites absorbantes *Perfectly Matched Layer* (acronyme PML) [142];
- une zone *buffer* particulière proposée par Agarwal et al. [2] dans le cadre des EELs en domaine fréquentiel;
- une zone éponge avec élargissement des mailles (*grid stretching*) et viscosité artificielle proposée par Bogey et Bailly [39].

L'application de ces différentes techniques demande cependant un grand savoir-faire car il n'est pas évident de calibrer correctement les différents paramètres associés. Nous n'avons pas cherché à améliorer le modèle de Tam et Dong dans notre étude. Si l'écoulement de base n'est pas uniforme dans la zone Ω^{bc} , une analyse dimensionnelle peut permettre de savoir grossièrement si en ordre de grandeur les gradients de l'écoulement risquent de perturber le modèle de frontière [35]. Il faut garder à l'esprit que cette difficulté à modéliser parfaitement les conditions de non-réflexion au niveau du modèle complet pourra avoir des répercussions lorsque nous chercherons à construire des modèles réduits dans le chapitre suivant.

Pour terminer, notons qu'en présence d'une instabilité absolue, la méthode de pseudo-temps ne pourrait plus converger car la croissance énergétique est alors localisée spatialement. Le domaine de calcul est condamné à être contaminé complètement bien qu'une instabilité absolue ne soit qu'une condition nécessaire d'instabilité globale *a priori*. Agarwal [1] a montré que la majorité des approches itératives ne peuvent plus être utilisées à partir du moment où les écoulements présentent des instabilités. Les méthodes directes sont en fait les seules approches capables de filtrer toutes les instabilités temporelles. C'est la raison pour laquelle, les méthodes

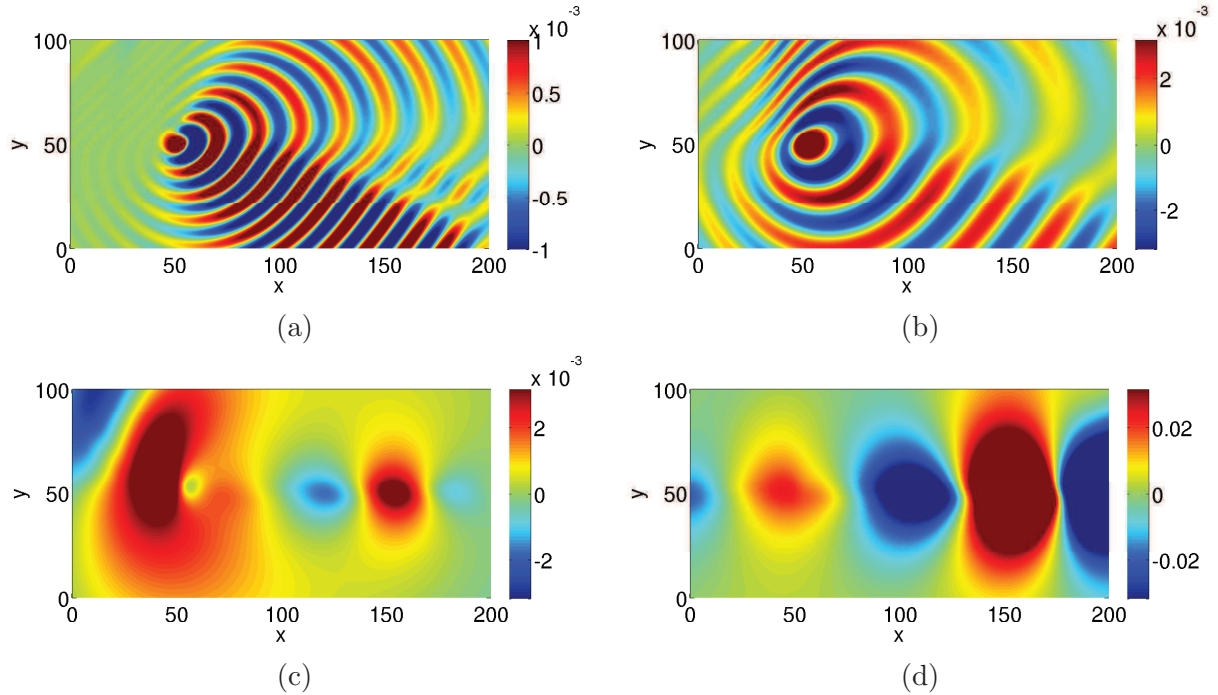


FIGURE 4.16 – Réponses à différentes fréquences dans le cas d’une couche de mélange. Visualisation de la partie réelle du champ de pression. (a) $\omega = 200$ après 1500 pseudo-pas de temps, (b) $\omega = 100$ après 1500 pseudo-pas de temps, (c) $\omega = 10$ après 1000 pseudo-pas de temps, (d) $\omega = 10$ après 4000 pseudo-pas de temps.

directes sont de plus en plus exploitées [200, 214]. Malheureusement, les méthodes directes restent très contraignantes car elles nécessitent, on le rappelle, une formulation matricielle. Par ailleurs, les méthodes basées sur les espaces de Krylov convergent aussi très difficilement dès que les systèmes sont fortement non normaux. En particulier, des phénomènes de stagnation sont observés avec la méthode GMRES. C’est la raison pour laquelle, le développement de techniques itératives permettant de contourner les instabilités temporelles d’écoulement reste un sujet de recherche. Ces aspects numériques sont par exemple discutés dans la thèse de Campobasso [56] ou encore dans l’article de Chassaing et *al.* [62].

4.4.4 Espaces de Krylov et vecteurs d’Arnoldi

Les méthodes d’identification des moments introduisent des espaces de Krylov qui doivent être orthogonalisés (méthode d’Arnoldi). On rappelle que la définition des espaces de Krylov est relative au choix du point de développement asymptotique de la fonction de transfert. À fréquences finies, il est nécessaire de résoudre des systèmes linéaires. C’est seulement au voisinage de la fréquence infinie que la méthode ne nécessite pas d’inversion de système. Les figures 4.17, 4.18 et 4.19 illustrent quelques vecteurs d’Arnoldi en fonction du choix de la fréquence de développement. Sont représentés quelques vecteurs d’Arnoldi obtenus par orthonormalisation de Gram-Schmidt des espaces de Krylov définis respectivement pour :

- le développement de la fonction de transfert autour de $\omega = 0$

$$\mathcal{K}_6(\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{b}) := (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{A}^{-2}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{-6}\mathbf{b}) \quad (4.55)$$

- le développement de la fonction de transfert autour de $\omega = 50$

$$\mathcal{K}_6((j50\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}, \mathbf{b}) = ((j50\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}, \dots, (j50\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-6}\mathbf{b}) \quad (4.56)$$

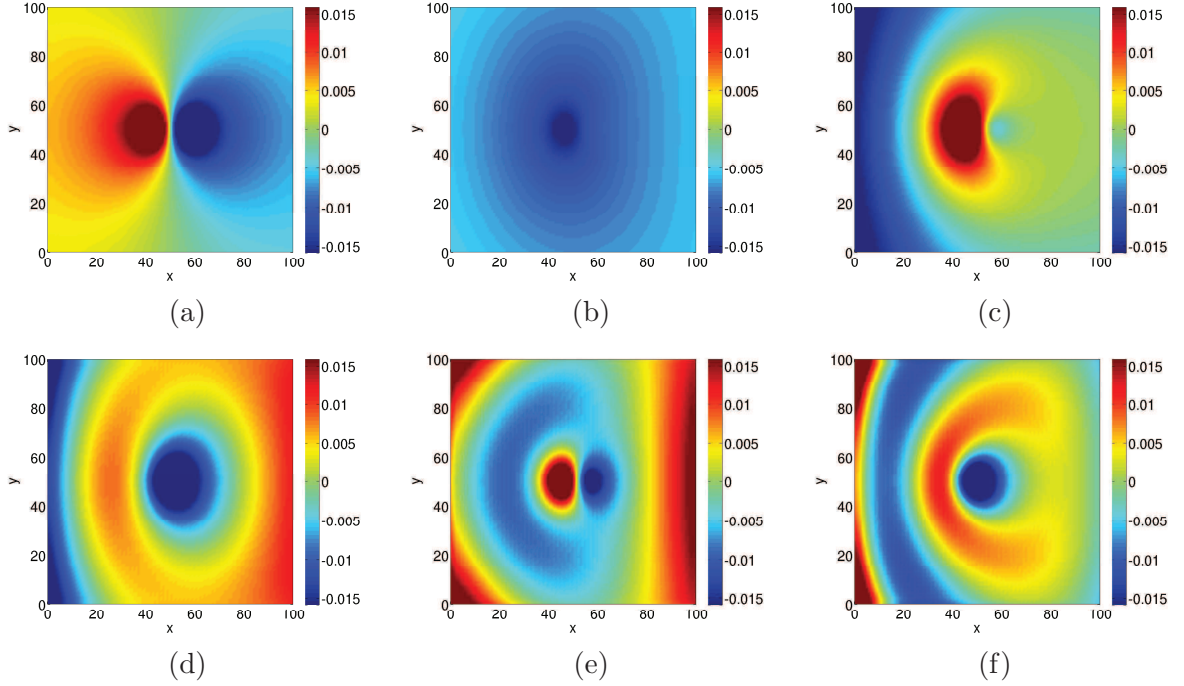


FIGURE 4.17 – 6 premiers vecteurs d'Arnoldi dans le cas $\omega = 0$. Visualisation du champ de pression

- le développement de la fonction de transfert autour de $\omega = \infty$

$$\mathcal{K}_{30}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) := (\mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{30}\mathbf{b}) \quad (4.57)$$

On peut remarquer qu'à fréquence infinie, il semble que les vecteurs d'Arnoldi s'établissent sur la fréquence de coupure du maillage et il est difficile d'augmenter la dimension de l'espace d'Arnoldi sans détériorer les vecteurs (voir image (f) de la figure 4.19 correspondant au 30ème vecteur d'Arnoldi).

4.5 Contrôle de la croissance énergétique

Afin d'éviter la contamination du domaine de calcul par une instabilité, nous avons proposé dans le chapitre précédent une méthode de contrôle énergétique qui repose sur la décomposition de la matrice de réaction en une partie symétrique et une partie anti-symétrique. Nous avons alors montré que seule la partie symétrique de \mathbf{R} est à l'origine de la croissance énergétique des EELs au moins pour des écoulements de base incompressibles isothermes ou parallèles. Afin d'illustrer la technique proposée, nous considérons une source acoustique placée dans une couche de mélange anisotherme. Les grandeurs sont ici sans dimension. Les paramètres numériques et l'écoulement de base sont respectivement $\bar{v} = 0$, $\bar{p} = 1/\gamma$,

$$\bar{u}(x, y) = 0.5(u_1 + u_2 + (u_1 - u_2) \tanh(2y/0.4)), \quad u_1 = 0.8, \quad u_2 = 0.2, \quad (4.58)$$

$$\bar{\rho}(x, y) = 1/\bar{T}(x, y), \quad \bar{T}(x, y) = T_1 \frac{\bar{u} - u_2}{u_1 - u_2} + T_2 \frac{u_1 - \bar{u}}{u_1 - u_2} + \frac{\tilde{\gamma}}{2}(u_1 - \bar{u})(\bar{u} - u_2) \quad (4.59)$$

avec $T_1 = 1$ et $T_2 = 0.8$. Pour la source acoustique, une pulsation proche de la pulsation théorique d'excitation optimale de l'instabilité est considérée. Le domaine de calcul est un rectangle $[-5, 5] \times [-5, 15]$ discrétisé uniformément en prenant $\Delta x = \Delta y = 0.04$. La source

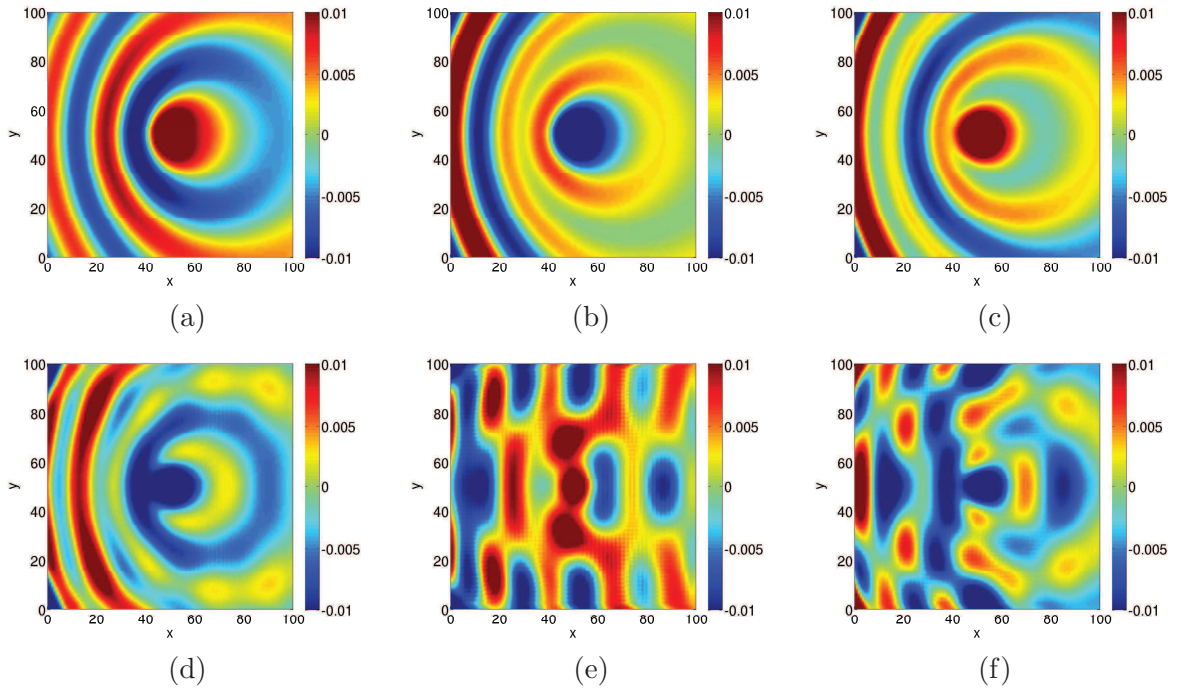


FIGURE 4.18 – 6 premiers vecteurs d’Arnoldi dans le cas $\omega = 50$. Visualisation du champ de pression

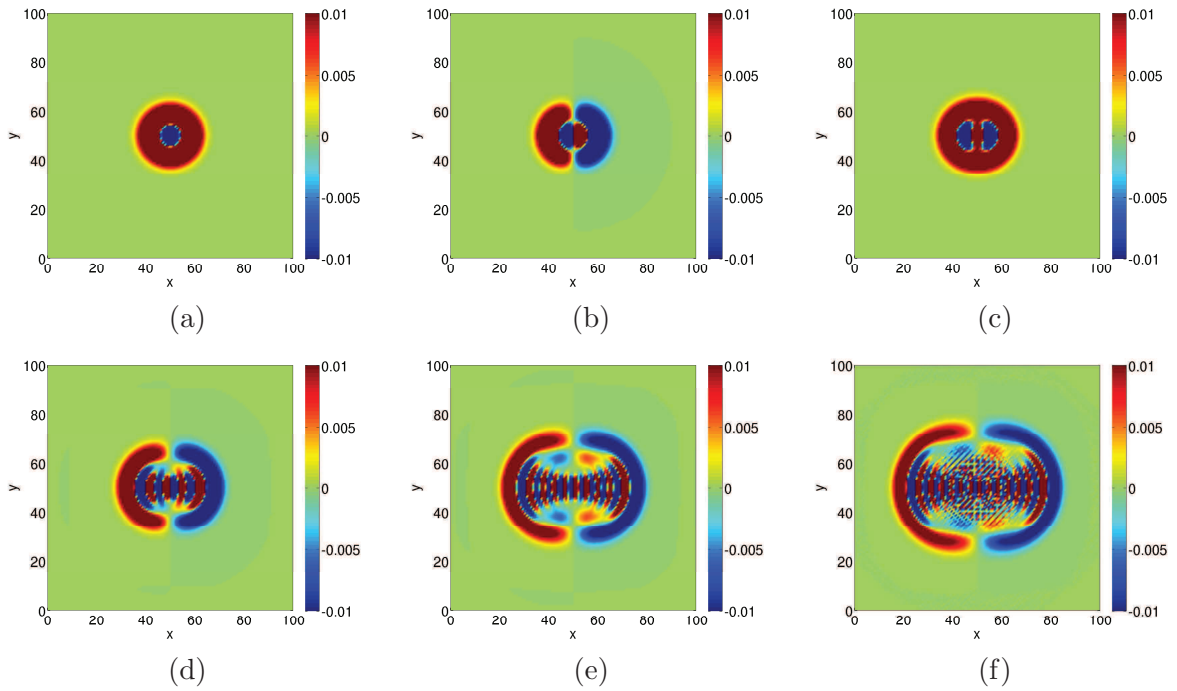


FIGURE 4.19 – Premiers vecteurs d’Arnoldi dans le cas $\omega = \infty$. Visualisation du champ de pression. (a) 3ème (b) 4ème (c) 5ème (d) 10ème (e) 20ème (f) 30ème

est alors placée en $(0, 0)$ et est choisie égale à

$$b(x, y)u(t) = \exp(-\log(2)(x^2 + y^2)/0.5) \sin(\omega t), \quad \omega = 1.5. \quad (4.60)$$

La simulation est exécutée pendant $1000\Delta t$ avec $\Delta t = 0.0222$. On rappelle que le pas de temps Δt est limité par la condition CFL. Sur la figure 4.20, on illustre le comportement des solutions obtenues pour différentes valeurs du paramètre de contrôle σ (compris entre 0 et 1). On remarque que le mode tourbillonnaire ne se développe pas si la matrice de réaction est négligée (image (d)), qu'il est très amplifié pour les EELs (image (a)) et enfin que son amplification est contrôlée grâce au paramètre σ (images (b) et (c)). L'image (c) correspond au cas $\sigma = 0$ ou de manière équivalente à l'annulation de la partie symétrique de \mathbf{R} . En théorie, on sait qu'avec $\sigma = 0$ l'énergie est conservée pour ce type d'écoulement de base. On observe bien aucune amplification dans ce cas. Il est cependant important de s'assurer que la modification ou l'annulation de la matrice de réaction permet de reproduire correctement la propagation acoustique. Nous avons placé plusieurs capteurs dans la zone purement acoustique. La figure 4.21 montre le signal temporel de pression au capteur placé en $(-0.8, 3.5)$ pour les 4 cas considérés de la figure 4.20. On observe que les deux cas $\sigma = 0$ et $\sigma = 0.5$ se superposent bien en phase à la courbe des EELs. Cela suggère qu'ils reproduisent correctement les effets de l'écoulement sur la propagation. Il y a par contre un léger écart en amplitude qui est d'autant plus faible que σ se rapproche de 1. Lorsque la matrice de réaction est négligée, on observe par contre un léger déphasage suggérant que les effets de l'écoulement sont moins bien pris en compte sur la propagation (image (b)). Un léger déphasage à une courte distance par rapport à la source peut en effet avoir des conséquences indésirables sur des longues distances. La technique proposée fournit donc une alternative pour obtenir un propagateur acoustique capable de mieux préserver les caractéristiques de propagation des ondes tout en limitant la contamination du domaine de calcul par la présence éventuelle d'instabilités. Pour conclure, il semblerait que la partie anti-symétrique de la matrice de réaction joue un rôle prépondérant dans la conservation de la phase pour la propagation acoustique. De plus, on peut prendre σ relativement proche de 1 pour limiter notablement l'amplification. Or, plus σ est proche de 1 plus le modèle est proche des EELs donc plus on se rapproche du meilleur propagateur acoustique possible. Nous n'avons pas davantage exploré ces deux observations dans le cadre de ce mémoire. Pour terminer, cette technique de contrôle énergétique peut aussi être exploitée pour forcer la convergence de la méthode de pseudo-temps en présence d'instabilités, afin d'approcher les réponses fréquentielles solutions des systèmes linéaires.

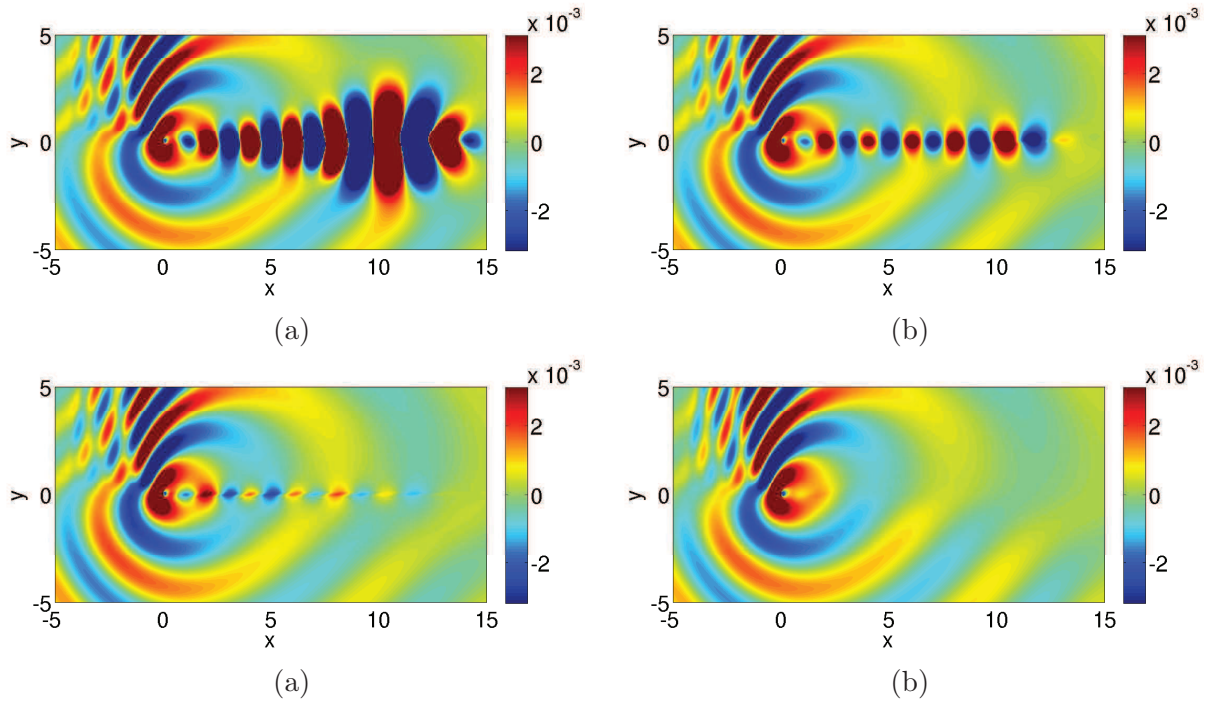


FIGURE 4.20 – Développement de l'instabilité en fonction du paramètre σ . (a) EELs : mode tourbillonnaire non contrôlé (b) $\sigma = 0.5$ mode tourbillonnaire contrôlé (c) $\sigma = 0$ énergie conservée (d) $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ énergie conservée et suppression du mode tourbillonnaire

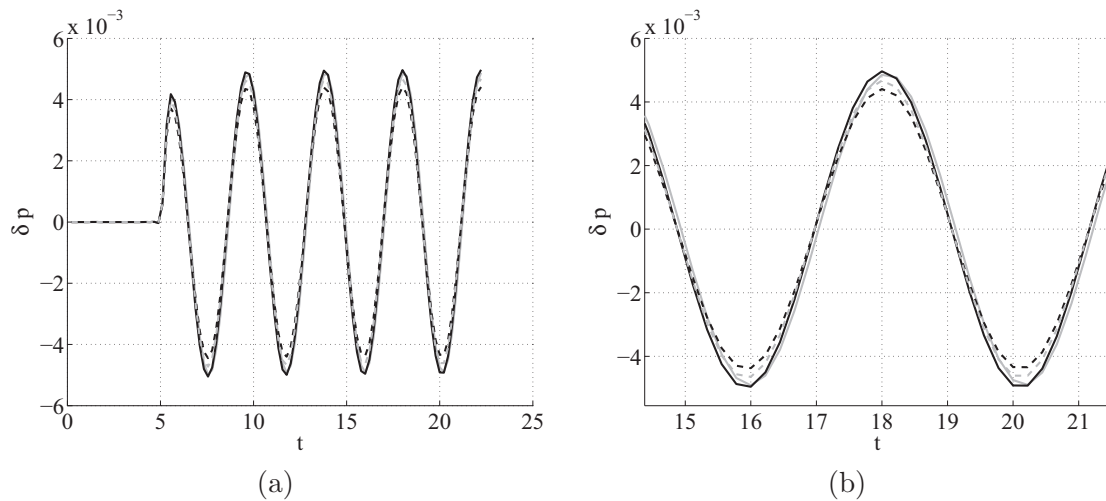


FIGURE 4.21 – Comparaison du signal de pression au capteur $(-0.8, 3.5)$ en fonction des modifications apportées aux EELs. En noir trait plein : EELs, en gris trait plein : $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, en tirets noir : $\sigma = 0$, en tirets gris : $\sigma = 0.5$

Chapitre 5

Construction de modèles réduits par approche matricielle : application aux EELs

Abstract

Development of optimal reduced-order models for linearized Euler equations is investigated. Recent methods based on proper orthogonal decomposition (POD), applicable for high-order systems, are presented and compared. Particular attention is paid to the link between the choice of the projection and the efficiency of the reduced model. A stabilizing projection is introduced to induce a stable reduced-order model at finite time even if the energy of the physical model is growing. The proposed method is particularly well adapted for time-dependent hyperbolic systems and intrinsically skew-symmetric models. This paper also provides a common methodology to reliably reduce very large nonsymmetric physical problems.

Keywords : reduced-order models (ROMs), nonsymmetric systems, compressible flows, Proper Orthogonal Decomposition (POD), balanced-POD, symmetrizer, stabilizing projection.

5.1 Introduction

Development of efficient reduced-order models is becoming an active research topic in computational physics and more particularly in fluid dynamics. Responses of dynamical systems presenting extremely large degrees-of-freedom (DoFs) can nowadays be computed due to the recent advances in computer technology. However, the computation time required to solve such systems becomes prohibitive especially when numerous parametric analyses are required. Moreover, such computations are almost impossible to use in control or optimization procedures. These observations lead to the conclusion that reduced-order models, *i.e.* which have much fewer DoFs, are desired.

In past decades, numerous reduced-order techniques have been developed in various domains of physics. Linear reduction methods are now well-established in control theory [11] for instance. It is commonly admitted that the reduced-order solution must be written as a linear combination of global basis functions. The key challenge is then to construct the most efficient global functions in the most inexpensive way. Approaches basically differ in the way these global basis functions are built. The methodology depends on the type of precomputed responses of the full-order model (FOM) : global eigenmodes, frequency responses or temporal

responses. For a linearized fluid model, these responses, sometimes referred to as high-fidelity solutions, require solving either a very large nonsymmetric eigenvalue problem, or numerous nonsymmetric high-order linear systems, or large linear dynamical systems, respectively. As a consequence, the building of global basis functions can induce a large computational cost. First, the calculation of global eigenmodes (direct and adjoint) is an extremely expensive procedure. Furthermore, eigenvalue problems are often ill-posed for compressible open flows. In particular, it is known that the application of modal reduction is impractical due to density of eigenvalues [139] and has difficulty to capture the dynamics due to multiple poles [11]. However, it is still an active research topic in the hydrodynamic stability community to only determine the unstable eigenmodes. Secondly, finding a solution of a large linear fluid system is sometimes very expensive since the linearized fluid models are not symmetric and sometimes even unstable. For instance, iterative methods can be used but the convergence remains delicate [214]. It is therefore promising to employ dynamical approaches for computing the global basis functions.

A critical step in the process of unsteady reduction is to maintain the physical and numerical stability properties of the original model in the reduced-order model. The numerical stability is especially required for long-time simulations. Preservation of the physical stability is also important for reliable stability prediction. Unfortunately, there exists few methods able to preserve the stability when the high-fidelity model is unsteady and non-normal. In the context of linearized Euler equations (LEEs), most attempts to reach a reduced-order model are based on frequency-domain approaches such as Arnoldi's method [282], POD [134, 168] or balanced-POD [281] methods. The frequency-domain has been driven by aeroelastic applications and also to achieve a higher level of robustness than in the time-domain. Nevertheless, development of reliable unsteady reduced-order models for LEEs remains a real challenge. Actually, with standard L^2 inner product, a reduced model might be stable for a given number of global basis functions but unstable for other choices of size [55]. In a recent paper, Barone *et al.* [26] have introduced a symmetry-based inner product and have demonstrated that it is possible to obtain a robust unsteady reduced-order model for LEEs. In a same way, Rowley [223] has obtained a stable unsteady reduced-order model in the context of linearized incompressible flows with the balanced-POD method. POD based approaches seem currently to be the best solution to reduce the LEEs and particularly for open flows. This article proposes a new approach to overcome these instability problems. The specific numerical reduction of time-dependent hyperbolic systems is also discussed.

This paper is organized as follows. First, principles of model reduction techniques are introduced in the control system framework. The construction of optimal global basis functions with the snapshot-POD method is described by considering an arbitrary inner product. A particular attention is then paid to the link between the choice of the projection and the stability property of the reduced-order model. The role of the adjoint dynamical system is also examined and a generalized stabilizing projection is proposed. Secondly, the linearized Euler model is reminded and afterwards the full-order model is described. Furthermore, the adjoint LEEs are derived. Finally, academic simulations are performed to appreciate and compare optimality and stability of the reduced-order models according to the different presented projections.

5.2 Reduced-order models (ROMs)

The mathematical concepts of model reduction are introduced in the framework of linear control theory. Consider a state-space representation of a linear system with q inputs, p outputs and n state variables. The system is written in a matrix formulation as

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \end{cases}, \quad (5.1)$$

where $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is a very large sparse square matrix from the spatial discretization of the physical model, $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_q) \in \mathbb{R}^{n \times q}$ is a rectangular matrix from the spatial discretization of source terms (supposed space-time separable), $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^q$ is the input vector from temporal excitations, $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_p)^T \in \mathbb{R}^{p \times n}$ is a rectangular matrix from the spatial discretization of observed linear laws (specific DoFs or physical quantities for example), $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ is the output vector and \mathbf{x}_0 is the initial state condition. The dot denotes the time derivation. The goal is to derive a reduced system with r state variables

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_r(t) &= \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B}_r \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_r(t) &= \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r(t) \\ \mathbf{x}_r(t_0) &= \mathbf{x}_{0r} \end{cases}, \quad (5.2)$$

such as $r \ll n$ with $\mathbf{x}_r(t) \in \mathbb{R}^r$ the reduced state vector, $\mathbf{A}_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ the reduced matrix, $\mathbf{B}_r \in \mathbb{R}^{r \times q}$ and $\mathbf{C}_r \in \mathbb{R}^{p \times r}$. In this reduction process, note that the number of inputs and outputs remains invariant. The next section describes the different steps to construct the reduced system (5.2).

5.2.1 Reduction technique

The projection method is the most popular and efficient approach to develop a reduced-order model. The projection algorithm proceeds as follows :

- compute the approximation space of the state vector $\mathbf{V}_r = (\Phi_1, \dots, \Phi_r)$, $\mathbf{V}_r \in \mathbb{R}^{n \times r}$ such as $\mathbf{x} \simeq \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r$ where the Φ_i denote the direct global basis functions or direct modes ;
- replace the approximation $\mathbf{V}_r \mathbf{x}_r$ in the full-order model (5.1) so the new system is overdetermined ;
- compute the projection space $\mathbf{W}_r = (\Psi_1, \dots, \Psi_r)$ where the Ψ_i denote the dual global basis functions or adjoint modes ;
- project \mathbf{W}_r on the overdetermined system ;
- obtain the reduced system (5.2) of dimension r with $\mathbf{A}_r = (\mathbf{W}_r^T \mathbf{V}_r)^{-1} \mathbf{W}_r^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r$, $\mathbf{B}_r = (\mathbf{W}_r^T \mathbf{V}_r)^{-1} \mathbf{W}_r^T \mathbf{B} \mathbf{C}_r = \mathbf{C} \mathbf{V}_r$ where the superscript T denotes the transpose of a matrix ;
- solve the reduced dynamical system by a classical time integration method with the reduced initial condition $\mathbf{x}_{0r} = (\mathbf{W}_r^T \mathbf{V}_r)^{-1} \mathbf{W}_r^T \mathbf{x}_0$;
- obtain the original state vector $\mathbf{x}(t) \simeq \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r(t)$.

In these steps, the main challenge is the determination of both efficient \mathbf{V}_r and \mathbf{W}_r subspaces in the most inexpensive way. Furthermore, \mathbf{V}_r and \mathbf{W}_r subspaces are generally chosen to be bi-orthonormal *i.e.* $\mathbf{W}_r^T \mathbf{V}_r = \mathbf{I}_r$ with \mathbf{I}_r the r -dimensional identity matrix. This is a condition to achieve a well-conditioned reduced model and also to avoid the calculation of the inverse matrix $(\mathbf{W}_r^T \mathbf{V}_r)^{-1}$. From a practical point of view, the reduced matrix \mathbf{A}_{r+1} can be built from the reduced matrix \mathbf{A}_r as follows

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{r+1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{W}_r^T \\ \Psi_{r+1}^T \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_r & \Phi_{r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_r^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r & \mathbf{W}_r^T \mathbf{A} \Phi_{r+1} \\ \Psi_{r+1}^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r & \Psi_{r+1}^T \mathbf{A} \Phi_{r+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{W}_r^T \mathbf{A} \Phi_{r+1} \\ \Psi_{r+1}^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r & \Psi_{r+1}^T \mathbf{A} \Phi_{r+1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

This recurrence avoids to have to rebuild the reduced matrix when the number of modes is increased. Furthermore, reduced matrices are dense, \mathbf{A}_r has r^2 nonzero coefficients. In

the following, the main concepts to construct reliable optimal \mathbf{V}_r and \mathbf{W}_r subspaces are introduced.

5.2.2 Construction of optimal \mathbf{V}_r and \mathbf{W}_r subspaces : POD method

5.2.2.1 Minimization problem

First, a weighted inner product

$$\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Q}} = \mathbf{z}_1^T \mathcal{Q} \mathbf{z}_2 \quad (5.4)$$

is defined on \mathbb{R}^n , with $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a symmetric and positive definite weighting matrix. Its induced norm is $\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{Q}} = (\mathbf{z}^T \mathcal{Q} \mathbf{z})^{1/2}$. The objective is then to find a set of r optimal global basis functions Φ_i solution of the continuous minimization problem

$$\min_{\Phi_1, \dots, \Phi_r} \int_{t_0}^{t_f} \left\| \mathbf{f}(t) - \sum_{i=1}^r \langle \mathbf{f}(t), \Phi_i \rangle_{\mathcal{Q}} \Phi_i \right\|_{\mathcal{Q}}^2 dt \quad (5.5)$$

subject to $\langle \Phi_i, \Phi_j \rangle_{\mathcal{Q}} = \Phi_i^T \mathcal{Q} \Phi_j = \delta_{ij}$ for $1 \leq i, j \leq r$, where δ_{ij} stands for the Kronecker symbol. In the simplest case, $\mathbf{f}(t)$ is a vector of dimension n representing a particular solution of the dynamical system (5.1) at time t within the temporal interval $[t_0, t_f]$. A solution to this minimization problem is characterized by the first optimal necessary conditions

$$\mathcal{G} \mathcal{Q} \Phi_i = \lambda_i \Phi_i, \quad 1 \leq i \leq r \quad (5.6)$$

with

$$\mathcal{G} = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{f}(t) \mathbf{f}(t)^T dt. \quad (5.7)$$

This problem corresponds to an n -dimensional eigenvalue problem. \mathcal{G} is also called the time-limited Gramian. Gramians are $n \times n$ positive semi-definite symmetric matrices. Now, consider a numerical approximation of the introduced Gramian

$$\mathcal{G} \approx \sum_{j=1}^m \omega_j \mathbf{f}_j \mathbf{f}_j^T \quad (5.8)$$

where $\mathbf{f}_i := \mathbf{f}(t_i) \in \mathbb{R}^n$ for $1 \leq i \leq m$ are m particular computed solutions of the high-fidelity model at the respective times t_1, \dots, t_m within the interval $[t_0, t_f]$ and ω_i are quadrature coefficients. These solutions are also called snapshots. The numerical solution of the minimization problem is then given by

$$\mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathcal{Q} \Phi_i = \lambda_i \Phi_i, \quad 1 \leq i \leq r \quad (5.9)$$

with $\mathbf{X} = [\sqrt{\omega_1} \mathbf{f}_1, \dots, \sqrt{\omega_m} \mathbf{f}_m]$ the rectangular matrix of computed snapshots. The solutions Φ_i of the n -dimensional eigenvalue problem (5.9) are called \mathcal{Q} -POD modes.

5.2.2.2 Snapshot-POD

The eigenvalue problem (5.9) is generally far too difficult to solve in fluid dynamics since n is very large. It is more convenient to solve a m -dimensional eigenvalue problem than a n -dimensional ones because the number m of useful snapshots is often much smaller than the number n of DoFs. This idea named *snapshot-POD* was introduced by Sirovich [252]. First, note that since \mathcal{Q} is symmetric and positive definite, \mathcal{Q} possesses a Cholesky factorization $\mathcal{Q} = \mathcal{L} \mathcal{L}^T$. Hence, multiplying (5.9) by \mathcal{L}^T , setting $\tilde{\Phi}_i = \mathcal{L}^T \Phi_i$ and $\tilde{\mathbf{X}} = \mathcal{L}^T \mathbf{X}$, gives the

modified eigenvalue problem

$$\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}}^T\tilde{\Phi}_i = \lambda_i\tilde{\Phi}_i, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (5.10)$$

The *snapshot-POD* is a thus powerful method to solve the original very large eigenvalue problem. Besides, the m -dimensional eigenvalue problem $\tilde{\mathbf{X}}^T\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\psi}_i = \lambda_i\tilde{\psi}_i$ is solved with $\tilde{\mathbf{X}}^T\tilde{\mathbf{X}} = (\mathbf{X}^T\mathcal{L})(\mathcal{L}^T\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T\mathcal{Q}\mathbf{X}$. In addition, the rectangular matrix $\tilde{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ has a Singular Value Decomposition (SVD) such as :

$$\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\psi}_i = \sqrt{\lambda_i}\tilde{\Phi}_i, \quad \tilde{\mathbf{X}}^T\tilde{\Phi}_i = \sqrt{\lambda_i}\tilde{\psi}_i, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (5.11)$$

Hence, the modes $\tilde{\Phi}_i$ are calculated thanks to the relation

$$\tilde{\Phi}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\psi}_i, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (5.12)$$

Finally, the subspaces \mathbf{V}_r and \mathbf{W}_r are given by

$$\mathbf{V}_r = [\Phi_1, \dots, \Phi_r], \quad \mathbf{W}_r = \mathcal{Q}\mathbf{V}_r \quad (5.13)$$

with

$$\Phi_i = \mathcal{L}^{-T}\tilde{\Phi}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\mathcal{L}^{-T}\mathcal{L}^T\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\psi}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\mathbf{X}\tilde{\psi}_i, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (5.14)$$

Thus, both \mathbf{V}_r and \mathbf{W}_r subspaces depend on the choice of the weighted inner product to approximate the snapshots. This tractable POD procedure is commonly called \mathcal{Q} -POD method. In the classical definition, note that the POD modes are calculated with the \mathcal{L}^2 -inner product which just corresponds to $\mathcal{Q} = \mathbf{I}_n$ with \mathbf{I}_n the n -dimensional identity matrix.

5.2.3 Gramians

5.2.3.1 Definition and motivation

POD modes depend on the computed solutions of the full model. These solutions appear first in the Gramian matrix (5.7). For exemple, the energy Gramian \mathcal{G}_e , the controllability Gramian \mathcal{G}_c , and the observability Gramian \mathcal{G}_o are respectively defined by

$$\mathcal{G}_e = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^T dt, \quad \mathcal{G}_c = \int_{t_0}^{t_f} e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} dt, \quad \mathcal{G}_o = \int_{t_0}^{t_f} e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T\mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} dt \quad (5.15)$$

and the function \mathbf{f} is then respectively given by

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{x}(t) = \left[e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \right], \quad (5.16)$$

$\mathbf{f}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$ or $\mathbf{f}(t) = e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T$. In control theory, the controllability and observability Gramians are known to determine essential properties of linear systems with multiple inputs and multiple outputs [11]. Thus, the controllability Gramian is used to build POD modes which are the most independent of inputs $\mathbf{u}(t)$. Furthermore, with the observability concept, it can be chosen to observe some of the DoFs or some specific linear physical quantities of interest. For example, in [54], only the pressure at wall boundary conditions is observed. In a general manner, we can also define primal Gramian and dual Gramian respectively as follows

$$\mathcal{G}_p = \int_{t_0}^{t_f} e^{\mathbf{A}t}\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}^T e^{\mathbf{A}^T t} dt, \quad \mathcal{G}_d = \int_{t_0}^{t_f} e^{\mathbf{A}^T t}\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{C}}^T e^{\mathbf{A}t} dt \quad (5.17)$$

with arbitrary matrices $\tilde{\mathbf{B}}$ and $\tilde{\mathbf{C}}$. When the matrix \mathbf{A} is asymptotically stable, infinite primal Gramian \mathcal{G}_p^∞ and infinite dual Gramian \mathcal{G}_d^∞ can also be defined ($t_f = +\infty$).

5.2.3.2 Computation of primal and dual Gramians

The primal and dual time-limited Gramians are solutions of the algebraic Lyapunov equations [11]

$$\mathbf{A}\mathcal{G}_p + \mathcal{G}_p\mathbf{A}^T = -\mathbf{P}_p, \quad \mathbf{A}^T\mathcal{G}_d + \mathcal{G}_d\mathbf{A} = -\mathbf{P}_d \quad (5.18)$$

with

$$\mathbf{P}_p = e^{\mathbf{A}t_0}\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}^T e^{\mathbf{A}^T t_0} - e^{\mathbf{A}t_f}\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}^T e^{\mathbf{A}^T t_f}, \quad \mathbf{P}_d = e^{\mathbf{A}^T t_0}\tilde{\mathbf{C}}^T\tilde{\mathbf{C}}e^{\mathbf{A}t_0} - e^{\mathbf{A}^T t_f}\tilde{\mathbf{C}}^T\tilde{\mathbf{C}}e^{\mathbf{A}t_f}. \quad (5.19)$$

But it seems unrealistic to solve these equations directly since the system is too large and not sparse. An efficient alternative is to numerically approximate time-limited Gramians by a quadrature knowing a set of m snapshots (5.8). For example, the snapshots $\mathbf{f}(t_i) = e^{\mathbf{A}t_i}\tilde{\mathbf{B}}$ are obtained by solving the dynamical system

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t) \\ \mathbf{f}(t_0) = \tilde{\mathbf{B}} \end{cases} \quad (5.20)$$

with a time-integration method. Similarly, the approximation of dual Gramian involves adjoint snapshots since $\mathbf{f}(t_i) = e^{\mathbf{A}^T t_i}\tilde{\mathbf{C}}^T$. In this paper, snapshots $e^{\mathbf{A}t}\tilde{\mathbf{B}}$ and $e^{\mathbf{A}^T t}\tilde{\mathbf{C}}$ are respectively called primal snapshots and dual snapshots. Bui-Thanh and Willcox [54] demonstrate the importance of accurate integration of the Gramians, that is the choice of the coefficients ω_i and instants t_i . The use of this approximation rather than solving Lyapunov equations explains why they are called empirical Gramians in the literature [155]. Note that the snapshot-POD method described in section 5.2.2.2 is a powerful technique to compute the r largest eigenmodes Φ_i of the Gramians associated with the r largest eigenvalues. For example, the modes of \mathcal{G}_e , \mathcal{G}_c and \mathcal{G}_o are respectively called energetic modes, controllable modes and observable modes. In fact, the energetic modes correspond to the classical \mathcal{L}^2 -POD modes. A physical explanation of controllable and observable modes can be found in Bagheri et al. [21], for example.

5.2.4 Stability properties of the reduced model

In this section, the link between the choice of the matrix \mathcal{Q} and the preservation of the stability of the reduced model is discussed.

5.2.4.1 Classical Galerkin projection

In this case, we have $\mathcal{Q} = \mathbf{I}_n$ and $\mathbf{W}_r = \mathbf{V}_r$ such as $\mathbf{V}_r^T\mathbf{V}_r = \mathbf{I}_r$. It is an orthogonal projection. This inner product ensures the stability of the reduced matrix \mathbf{A}_r if the full-order matrix \mathbf{A} is negative definite or normal ($\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$) and stable, or yet if the POD modes are built from the infinite primal Gramian \mathcal{G}_p^∞ . In particular, one can show that this projection preserves the symmetry and the definiteness of the full-order matrix. First, suppose that the full-order matrix is symmetric or skew-symmetric then the reduced matrix is also symmetric, respectively skew-symmetric

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{V}_r^T\mathbf{A}\mathbf{V}_r = \pm\mathbf{V}_r^T\mathbf{A}^T\mathbf{V}_r = \pm\mathbf{A}_r^T. \quad (5.21)$$

Secondly, suppose that the full-order matrix is positive (respectively negative) definite then the reduced matrix is positive (respectively negative) definite. Indeed, consider an arbitrary

nonzero real vector \mathbf{x} and \mathbf{A} positive definite, then

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}_r \mathbf{x} = (\mathbf{x}^T \mathbf{V}_r^T) \mathbf{A} (\mathbf{V}_r \mathbf{x}) > 0 \quad (5.22)$$

since $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ for all nonzero \mathbf{x} by definition of positive definite matrix. Note that this definition includes also nonsymmetric matrices by considering the symmetric part $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ of \mathbf{A} since

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2} + \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2} \right) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2} \right) \mathbf{x}. \quad (5.23)$$

It can be shown that the reduced matrix $\mathbf{A}_r = \mathbf{V}_r^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r$ can never be unstable for any stable normal matrix because the numerical range is then equal to the convex hull of the spectrum of \mathbf{A} [11]. For instance, the problem of the preservation of the stability does not exist in the cases of stable symmetric, skew-symmetric or yet stable orthogonal matrices. We can also show that if the POD modes are calculated from \mathcal{G}_p^∞ then the reduced matrix is stable since \mathcal{G}_p^∞ is the solution of the Lyapunov equation (5.18) with $\mathbf{P}_p = -\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}^T$ (with $t_0 = 0$). Unfortunately, snapshots are sometimes computed from other Gramians which in addition can be finite. Moreover, linearized fluid models are often non-normal and definite. Theoretically, it is well-known that if \mathbf{A} is non-normal, its eigenvectors are nonorthogonal and transient growth of perturbations can occur due to the linear interference of these eigenvectors [65, 92]. In addition, the numerical range of the matrix \mathbf{A} may extend into the right half plane \mathbb{C}_+ . Consequently, the Galerkin projection may turn out to be unstable even if the original full-order system is stable. The construction of an adequate $\mathcal{Q} \neq \mathbf{I}_n$ becomes therefore a real challenge. Moreover it is well known that the \mathcal{L}^2 -POD modes are not necessarily the best modes for describing the dynamics of a particular physical dataset [223]. This is the case for non-normal physical problems for which the standard POD method does generally not capture well the transient growth [146]. To overcome this difficulty, a particular attention must be paid to the adjoint physical problem as explained afterwards.

5.2.4.2 General Petrov-Galerkin projection

In this case, $\mathcal{Q} \neq \mathbf{I}_n$ and $\mathbf{W}_r \neq \mathbf{V}_r$ with the condition $\mathbf{W}_r^T \mathbf{V}_r = \mathbf{I}_r$. When a classical Galerkin projection is employed, the subspace \mathbf{V}_r is generally not an approximation space for the dual problem if the full system is not symmetric. A better solution then is to build the right subspace \mathbf{V}_r as an approximation of the primal problem and to build the left subspace \mathbf{W}_r as an approximation of the dual problem. With this oblique projection, it is not possible to determine the definiteness or the symmetry of the reduced matrix. The preservation of the stability of the reduced matrix is therefore not ensured with the classical arguments. Note that, in the static case, the stability preservation is solved with the left projection $\mathbf{W}_r = \mathbf{A} \mathbf{V}_r$ [53] that is the Galerkin projection on the normal equation. The unsteady models are more complex since the choice $\mathcal{Q} = \mathbf{A}^T$ does not provide a well-posed weighted inner product (\mathbf{A} is not positive definite symmetric). For other choices of \mathcal{Q} , it is however possible to study the stability of the reduced model by considering the Lyapunov stability theory [11, 225]. Setting a natural Lyapunov candidate function $\mathcal{E}(\mathbf{x}_r) = \mathbf{x}_r^T \mathbf{x}_r$ for the reduced system and $\mathbf{A}_r = \mathbf{W}_r^T \mathbf{A} \mathbf{V}_r = \mathbf{V}_r^T \mathcal{Q} \mathbf{A} \mathbf{V}_r$, the stability of the reduced system can be investigated as

follows

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{E}(\mathbf{x}_r(t)) &= \dot{\mathbf{x}}_r^T \mathbf{x}_r + \mathbf{x}_r^T \dot{\mathbf{x}}_r \\
&= (\mathbf{A}_r \mathbf{x}_r)^T \mathbf{x}_r + \mathbf{x}_r^T (\mathbf{A}_r \mathbf{x}_r) \\
&= \mathbf{x}_r^T (\mathbf{A}_r + \mathbf{A}_r^T) \mathbf{x}_r \\
&= \mathbf{x}_r^T (\mathbf{V}_r^T \mathcal{Q} \mathbf{A} \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_r^T \mathbf{A}^T \mathcal{Q} \mathbf{V}_r) \mathbf{x}_r \\
&= \mathbf{x}_r^T \mathbf{V}_r^T (\mathcal{Q} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathcal{Q}) \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r \\
&= (\mathbf{V}_r \mathbf{x}_r)^T (\mathcal{Q} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathcal{Q}) (\mathbf{V}_r \mathbf{x}_r).
\end{aligned} \tag{5.24}$$

The theorem of Lyapunov [11] ensures that the eigenvalues λ_i of the matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfy $\Re(\lambda_i) < 0$ if and only if, for any given symmetric positive definite matrix \mathbf{P} , there exists a unique positive definite symmetric matrix \mathcal{Q} satisfying the Lyapunov equation :

$$\mathcal{Q} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathcal{Q} = -\mathbf{P}. \tag{5.25}$$

Then the last identity in (5.24) ensures that $\frac{d}{dt}\mathcal{E}(\mathbf{x}_r(t)) < 0$ and the asymptotical stability of the reduced model since $-\mathbf{P}$ is negative definite. More precisely, the reduced \mathcal{L}^2 -energy will be monotonically decreasing. In other words, the stability of the reduced model is conditioned by a good choice of the matrix \mathcal{Q} in adequation with the algebraic Lyapunov equation. In the following, two recent methods for computing reliable \mathcal{Q} are presented. A stabilizing numerical procedure is then introduced to overcome the limitations of both projections.

5.2.5 Infinite dual Gramian based inner product : $\mathcal{Q} = \mathcal{G}_d^\infty$

Infinite dual Gramians \mathcal{G}_d^∞ are solutions of the Lyapunov equations (5.18) with $\mathbf{P}_d = -\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{C}}^T$ ($t_0 = 0$). Consequently, \mathcal{G}_d^∞ can be used in the weighted inner product to ensure the stability of the reduced system according to (5.24). Now, we deal with the particular case of observability Gramian \mathcal{G}_o^∞ . This approach is also called balanced-POD method, well-known in the control community. This method is an efficient computation of the historic balanced truncation method for high-order systems. Balanced truncation was first introduced by Moore [188] and then by Gavronski and Juang for time-limited Gramians [114]. It is a reduction method for linear and stable control systems. It is known to preserve the asymptotical stability of the reduced system. The main goal of this approach is to eliminate simultaneously the least controllable states and the least observable ones. Balanced modes are identified by the eigenvectors of the product of the infinite Gramians $\mathcal{G}_c^\infty \mathcal{G}_o^\infty$. As a consequence, the balanced modes are also the \mathcal{Q} -POD modes with $\mathcal{Q} = \mathcal{G}_o^\infty$. In other words, the balanced-POD method is equivalent to apply snapshot-POD method with the observability Gramian \mathcal{G}_o^∞ as inner product [223]. Recently, balanced-POD method has been described and adapted for many outputs by Rowley [223] in the time-domain and for general multiple inputs and multiple outputs systems by Willcox and Bui-Thanh in the frequency and time domain [54, 281]. An other very interesting property is that this method does not depend on the choice of the inner product for defining both controllability and observability Gramians. For instance, the adjoint system can be induced with an arbitrary inner product [146]. In the present work, we apply the balanced-POD for an initial value problem. Such a problem may be seen as a single input multiple output system

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{x}} \end{cases}, \tag{5.26}$$

with $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n$, $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0$, \mathbf{x}_0 the initial condition and $\tilde{\mathbf{x}}$ the translation $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. It follows that the entire state variable or in other words all the DoFs are observed then the output projection method developed by Rowley [146, 223] is applied. Since the output is the full

state and if the adjoint system is defined with respect to the standard \mathcal{L}^2 inner product, the initial conditions of the adjoint simulations are just the \mathcal{L}^2 -POD modes. As a consequence, the approximation of the observability Gramian needs several adjoint simulations which can represent an important computation cost.

5.2.6 Symmetry based inner product : $\mathcal{Q} = \mathcal{H}$

An important class of models are the symmetrizable hyperbolic systems. An hyperbolic system

$$\partial_t \delta \mathbf{q} + \mathbf{E} \partial_x \delta \mathbf{q} + \mathbf{F} \partial_y \delta \mathbf{q} + \mathbf{R} \delta \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (5.27)$$

is said symmetrizable if there exists a symmetric positive definite matrix $\mathbf{H} = \mathbf{H}^T > 0$ such as \mathbf{HE} and \mathbf{HF} are symmetric, yielding the symmetrized system

$$\mathbf{H} \partial_t \delta \mathbf{q} + \mathbf{HE} \partial_x \delta \mathbf{q} + \mathbf{HF} \partial_y \delta \mathbf{q} + \mathbf{HR} \delta \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (5.28)$$

In a recent paper [26], Barone et *al.* demonstrate that if the \mathbf{H} -inner product is used to compute the POD modes then the ROM is better posed. A key property of this inner product is that a mathematical expression for the ROM energy can be derived. The matrix $\mathcal{Q} = \mathcal{H}$ is a discrete formulation of the continuous matrix \mathbf{H} constructed in a same manner as the full-order matrix (5.1). \mathcal{H} defines an energy based inner product and a Lyapunov function if the energy of the model is preserved or monotonically decreasing. Finally, if $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n$, the symmetrizer based inner product combined with the controllability Gramian \mathcal{G}_c could provide better numerical results than balanced-POD method (which corresponds to observability Gramian based inner product combined with \mathcal{G}_c).

5.2.7 A stabilizing projection

Unfortunately, the stability of the reduced matrix is not always guaranteed with time-limited Gramians as suggested in the previous sections. For instance, this is the case with the dual Gramian based inner product since the matrix \mathbf{P}_d from (5.19) is not guaranteed to be positive definite at finite time [122]. This is also the case when the full matrix \mathbf{A} is neutrally stable or even weakly unstable. This motivates the introduction of a stabilizing method. This issue has been recently addressed [10, 43, 212] by deriving a convex optimization problem to enforce the stability of the primal reduced-model. In the present study, a new effective way is proposed to guarantee the stability of the reduced model without computing an artificial left projection \mathbf{W}_r .

5.2.7.1 Principles of the stabilizing method

We look for a projection able to enforce the stability of the reduced model for all time. This is not obvious since energy can grow at finite time, due to the non-normality of the full model. The main idea here is to impose the preservation of an introduced energy into the reduced model. If an energy is preserved then the reduced-order system should be stable. This point is essential for conservative dynamical systems, for instance. For that purpose, we first define the dynamical system

$$\begin{cases} \mathbf{E} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{E} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}(t_0) &= \mathbf{z}_0 \end{cases} \quad (5.29)$$

with

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}. \quad (5.30)$$

In this definition, \mathbf{x} is a solution of the primal problem and $\hat{\mathbf{y}}$ is a solution of the anti-dual problem. Note that the large matrix $\mathbf{E}\tilde{\mathbf{A}}$ is skew-symmetric. The second step is to construct an approximation subspace $\tilde{\mathbf{V}}_r = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_r^p \\ \mathbf{V}_r^d \end{pmatrix}$ such that

$$\tilde{\mathbf{V}}_r^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{V}}_r = \mathbf{V}_r^{pT} \mathbf{V}_r^d + \mathbf{V}_r^{dT} \mathbf{V}_r^p = \mathbf{I}_r. \quad (5.31)$$

The reduced model is then built as follows

$$\underbrace{\tilde{\mathbf{V}}_r^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{V}}_r}_{\mathbf{I}_r} \dot{\mathbf{z}}_r = \underbrace{\tilde{\mathbf{V}}_r^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{V}}_r}_{\tilde{\mathbf{A}}_r} \mathbf{z}_r \quad (5.32)$$

which gives

$$\dot{\mathbf{z}}_r = \tilde{\mathbf{A}}_r \mathbf{z}_r \quad (5.33)$$

with

$$\tilde{\mathbf{A}}_r = \mathbf{V}_r^{dT} \mathbf{A} \mathbf{V}_r^p - \mathbf{V}_r^{pT} \mathbf{A}^T \mathbf{V}_r^d. \quad (5.34)$$

The reduced model (5.33) is now defined for both primal and anti-dual problems. \mathbf{V}_r^p is an approximation subspace for the direct problem and \mathbf{V}_r^d is an approximation subspace for the anti-dual problem. The stability property of this reduced model is now studied. With the equations (5.21) or (5.34), the reduced matrix $\tilde{\mathbf{A}}_r$ is also skew-symmetric. Consequently, the reduced initial energy is preserved since

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_r^T \dot{\mathbf{z}}_r &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{z}_r^T \mathbf{z}_r) \\ &= \mathbf{z}_r^T (\tilde{\mathbf{V}}_r^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{V}}_r) \mathbf{z}_r \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

which implies

$$\mathbf{z}_r^T \mathbf{z}_r = \mathbf{z}_{r_0}^T \mathbf{z}_{r_0}, \quad \mathbf{z}_{r_0} = \tilde{\mathbf{V}}_r^T \mathbf{E} \mathbf{z}_0 \quad (5.36)$$

for all time. This procedure is called \mathcal{L}^2 -stabilizing method. A \mathcal{Q} -stabilizing method is also introduced by considering the dynamical system

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{\mathcal{Q}} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{E}_{\mathcal{Q}} \tilde{\mathbf{A}}_{\mathcal{Q}} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}(t_0) &= \mathbf{z}_0 \end{cases} \quad (5.37)$$

with

$$\mathbf{E}_{\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{Q} \\ \mathcal{Q} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_{\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathcal{Q}^{-1} \mathbf{A}^T \mathcal{Q} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad \mathcal{Q} = \mathcal{Q}^T > 0. \quad (5.38)$$

The reduced matrix is then given by

$$\tilde{\mathbf{A}}_r = \mathbf{V}_r^{dT} \mathcal{Q} \mathbf{A} \mathbf{V}_r^p - \mathbf{V}_r^{pT} \mathbf{A}^T \mathcal{Q} \mathbf{V}_r^d. \quad (5.39)$$

Similarly, the reduced energy is preserved since the full matrix $\mathbf{E}_{\mathcal{Q}} \tilde{\mathbf{A}}_{\mathcal{Q}}$ is skew-symmetric.

5.2.7.2 Practical computation of the L^2 -stabilizing method

The stabilizing method requires the construction of the subspace $\tilde{\mathbf{V}}_r$. To do that, the snapshot method is adapted to be able to consider very large systems. Let $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times m}$ a snapshot matrix from the dynamical system (5.29). First, simulate the direct dynamical problem

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (5.40)$$

and store m snapshots $\mathbf{x}(t_i)$ from the temporal interval $[t_0, t_f]$ in the matrix $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m]$. Secondly, simulate the skew-adjoint dynamical system

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) = -\mathbf{A}^T \hat{\mathbf{y}}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t_0) = \hat{\mathbf{y}}_0 \end{cases} \quad (5.41)$$

and store again exactly m snapshots $\hat{\mathbf{y}}(t_i)$ at the same time t_i in the matrix $\mathbf{Y} = [\hat{\mathbf{y}}_1, \dots, \hat{\mathbf{y}}_m]$. After that, form the symmetric square matrix

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{E} \mathbf{Z} = \mathbf{Y}^T \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \quad (5.42)$$

and compute r eigenmodes $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_i$ in a matrix \mathbf{U}_r^+ corresponding to the r largest positive eigenvalues λ_i stored in a diagonal matrix \mathbf{D}_r^+ . Form then both \mathbf{V}_r^p and \mathbf{V}_r^d subspaces

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_r^p &= \mathbf{X} \mathbf{U}_r^+ \mathbf{D}_r^{+1/2} \\ \mathbf{V}_r^d &= \mathbf{Y} \mathbf{U}_r^+ \mathbf{D}_r^{+1/2}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

The biorthonormality property is therefore guaranteed since

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{V}}_r^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{V}}_r &= \mathbf{V}_r^{pT} \mathbf{V}_r^d + \mathbf{V}_r^{dT} \mathbf{V}_r^p \\ &= \mathbf{D}_r^{+1/2} \mathbf{U}_r^{+T} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \mathbf{U}_r^+ \mathbf{D}_r^{+1/2} + \mathbf{D}_r^{+1/2} \mathbf{U}_r^{+T} \mathbf{Y}^T \mathbf{X} \mathbf{U}_r^+ \mathbf{D}_r^{+1/2} \\ &= \mathbf{D}_r^{+1/2} \mathbf{U}_r^{+T} (\mathbf{X}^T \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T \mathbf{X}) \mathbf{U}_r^+ \mathbf{D}_r^{+1/2} \\ &= \mathbf{I}_r. \end{aligned} \quad (5.44)$$

This snapshot procedure now requires two high-fidelity simulations. It is essential that the anti-dual snapshots and direct snapshots are saved at the same times t_1, \dots, t_m and are built in the same order in matrices \mathbf{X} and \mathbf{Y} . In addition, we choose $\hat{\mathbf{y}}_0 = \mathbf{x}_0$ to have $\mathbf{z}^T \mathbf{E} \mathbf{z} = 2\mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_0 > 0$. Indeed, the method supposes that the modulus of negative eigenvalues of the matrix $\mathbf{X}^T \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T \mathbf{X}$ are non-physical or negligible compared to its largest positive eigenvalues since the matrix \mathbf{E} is not definite positive. A necessary condition for that is to verify $\mathbf{z}^T \mathbf{E} \mathbf{z} = 2\mathbf{x}_0^T \hat{\mathbf{y}}_0 > 0$. That explains the important role of the initial condition $\hat{\mathbf{y}}_0$ for the skew-adjoint dynamical problem. A canonical choice to guarantee this positivity is $\hat{\mathbf{y}}_0 = \mathbf{x}_0$.

5.2.7.3 Remarks

The computation of the \mathcal{Q} -stabilizing procedure is similar. In the particular case of skew-symmetrizable matrices, there exists a matrix \mathcal{Q} such as $\mathcal{Q}\mathbf{A}$ is skew-symmetric. For such matrices, the Lyapunov equation (5.25) reduces to $\mathcal{Q}\mathbf{A} + (\mathcal{Q}\mathbf{A})^T = \mathbf{0}$ which implies the preservation of the reduced \mathcal{L}^2 -energy. The \mathcal{Q} -stabilizing method is therefore equivalent to the \mathcal{Q} -POD method if the same initial condition is considered for the skew-adjoint problem. Secondly, if \mathbf{A} is asymptotically stable then $-\mathbf{A}^T$ is unstable. This is why the stabilizing projection should be more adapted for hyperbolic systems which are intrinsically skew-symmetric and also for weakly unstable systems. For symmetrizable hyperbolic systems, a good choice

for defining the \mathcal{Q} -stabilizing method should be

$$\mathbf{E}_{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{H} \\ \mathcal{H} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathcal{H}^{-1}\mathbf{A}^T\mathcal{H} \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

in order to yield a conservative and energy consistent reduced-order model simultaneously. Finally, the stabilizing procedure appears as an extension of the snapshot-POD method since it is able to induce a stable reduced system even if the primal full system is unstable. Remind that the POD procedure is limited to build a monotonically stable reduced matrix $\mathbf{A}_r = \mathbf{V}_r^T \mathcal{Q} \mathbf{A} \mathbf{V}_r$ from a globally stable full matrix \mathbf{A} (but not necessarily monotonically stable) since there does not exist a symmetric definite positive matrix \mathcal{Q} such that $\mathcal{Q}\mathbf{A}$ is stable if \mathbf{A} is unstable. That is demonstrated from the Lyapunov theory.

5.3 High-fidelity test model

Dynamics of small perturbations in inviscid compressible flows can be described by the Linearized Euler Equations (LEEs). For instance, LEEs associated with appropriate source terms are often used as an extension to Lighthill's analogy in computational aeroacoustics [23] and as an efficient simplified aerodynamic model for aeroelastic predictions [126]. The LEEs are succinctly presented in this section.

5.3.1 LEEs

The two-dimensional nonlinear Euler equations for a perfect gas are linearized around a steady mean flow $(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{p})$ with ρ the density, $\mathbf{u} = (u, v)$ the velocity, p the pressure, and the overbar denoting the mean value. The behavior of small perturbations $(\delta\rho, \delta\mathbf{u}, \delta p)$ is governed by the LEEs, written in a quasi-conservative form, as :

$$\partial_t \delta \mathbf{q} + \partial_x (\mathbf{E} \delta \mathbf{q}) + \partial_y (\mathbf{F} \delta \mathbf{q}) + \mathbf{R} \delta \mathbf{q} = \mathbf{s}, \quad (5.46)$$

with :

$$\delta \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \delta \rho \\ \bar{\rho} \delta u \\ \bar{\rho} \delta v \\ \delta p \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \bar{u} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 \\ 0 & \bar{c}^2 & 0 & \bar{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \bar{v} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \bar{v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v} & 1 \\ 0 & 0 & \bar{c}^2 & \bar{v} \end{pmatrix}, \quad (5.47)$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{u} & \partial_x \bar{u} & \partial_y \bar{u} & 0 \\ \bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{v} & \partial_x \bar{v} & \partial_y \bar{v} & 0 \\ 0 & \tilde{\gamma} \bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{u} & \tilde{\gamma} \bar{\mathbf{u}}^T \nabla \bar{v} & \tilde{\gamma} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} \end{pmatrix},$$

$\tilde{\gamma} = \gamma - 1$ ($\gamma = 1.4$ for air), $\bar{c} = \sqrt{\gamma \bar{p} / \bar{\rho}}$ is the local speed of sound, \mathbf{s} the source term and \mathbf{R} the so-called reaction matrix [214]. \mathbf{R} depends only on the mean velocity and is identically null for uniform mean flows. LEEs do not only support acoustic modes, but also vorticity and entropy modes. In this paper, the mean flow will be first supposed uniform to introduce model reduction concepts. The treatment of nonuniform or even unstable base flows remains much more complex theoretically and numerically [2, 23] due to possible growing energy at finite time. It can be shown that this potential growing is only induced by the reaction matrix at least for isothermal and incompressible base flows. An example of classical shear flow will be presented at the end. The LEEs (5.46) are a symmetrizable hyperbolic system of partial

differential equations. The symmetrizing matrix \mathbf{H} is given by

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \alpha^2 \bar{c}^2 & 0 & 0 & -\alpha^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha^2 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad (5.48)$$

with $d = (\alpha^2 + 1)/\bar{c}^2$ and α is an arbitrary real nonzero parameter. Since uniform mean flows support only neutral and decaying modes, the \mathbf{H} -inner product must preserve the stability in the reduced model. Furthermore, this inner product is physically consistent contrarily to the \mathcal{L}^2 -inner product [26] since

$$\delta \mathbf{q}^T \mathbf{H} \delta \mathbf{q} = \alpha^2 \bar{c}^2 \delta \rho^2 + \bar{\rho}^2 (\delta u^2 + \delta v^2) + d \delta p^2 - 2\alpha^2 \delta \rho \delta p \quad (5.49)$$

whereas

$$\delta \mathbf{q}^T \delta \mathbf{q} = \delta \rho^2 + \bar{\rho}^2 (\delta u^2 + \delta v^2) + \delta p^2. \quad (5.50)$$

Expression (5.49) has a better physical interpretation since the induced norm is homogeneous to a physical energy.

5.3.2 Boundary conditions

The boundary conditions are very important in the computation of compressible flows since any reflected disturbance can contaminate the numerical solution. For outgoing acoustic waves, the nonreflecting boundary conditions of Tam and Dong [255] are used. In polar coordinates (r, θ) centered at the source position, we have

$$\partial_t \delta \mathbf{q} + V_g \left[\frac{\partial}{\partial r} \delta \mathbf{q} + \frac{1}{2r} \delta \mathbf{q} \right] = 0, \quad (5.51)$$

as $r \rightarrow \infty$. The group velocity of acoustic waves V_g is given by

$$V_g = \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_r + \sqrt{\bar{c}^2 - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_\theta)^2} \quad (5.52)$$

where \mathbf{e}_r and \mathbf{e}_θ are the unit vectors in the r and θ directions. For an outflow boundary condition, the pressure disturbance is still considered as an acoustic fluctuation, which is not the case for the velocity and density disturbances. For these last two variables, LEEs are employed. The slip boundary condition on a wall with normal vector \mathbf{n} , namely $\delta \mathbf{u}^T \mathbf{n} = 0$, implies that there is no restriction on the velocity perturbation parallel to the wall. This slipping condition is directly substituted in the vectors $\mathbf{E} \delta \mathbf{q}$ and $\mathbf{F} \delta \mathbf{q}$ at the wall.

5.3.3 Semi-discretization and matrix formulation

LEEes (5.46) are solved on a Cartesian grid with high-order finite differences. The space derivatives are discretized with explicit centered eighth-order finite differences (non dissipative scheme). Spatial derivatives of radiation conditions (5.51) are solved for the three points surrounding the computational interior domain using fourth-order backward finite differences. The same backward scheme is adopted for points located near wall boundaries. A matrix formulation is adopted. The semi-discretized LEEes are thus assembled to form a global matrix and can be written in a compact form as :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \quad (5.53)$$

with \mathbf{x} the unknown vector. The matrix \mathbf{A} represents the discrete action of the spatial linear operator of the LEEs on the spatial discretization of the variable $\delta\mathbf{q}$. This linear system of ordinary differential equations has $n = 4 \times n_x \times n_y$ degrees of freedom where 4 is the number of physical variables, n_x and n_y the number of grid points in x and y directions respectively. Consequently, the full-order matrix \mathbf{A} is block nonadiagonal and each of these blocks is also block nonadiagonal. The source term is assumed to write as a linear combination of terms where time and space variables are separable. The matrix \mathbf{B} represents thus the spatial discretization of the space part of the source term \mathbf{s} . The matrix symmetrizer \mathcal{H} is just block diagonal. Time integration of the full-order model (5.53) is performed by a fourth-order Runge-Kutta scheme.

5.3.4 Adjoint LEEs

Approximation of the observability Gramian and of the stabilizing projection involves respectively the adjoint matrix \mathbf{A}^T and the anti-adjoint matrix $-\mathbf{A}^T$. However, it is important to notice that when a matrix formulation is adopted, the transpose of the matrix \mathbf{A}^T is not always well-posed because of the boundary conditions. For example, this is the case for the radiation boundary conditions used in this study. This is explained by the fact that when the transpose of the matrix \mathbf{A}^T is considered, the adjoint of the radiation boundary model is implicitly induced. But the adjoint of the equation (5.51) is not physical since it is not an asymptotic expression of the adjoint LEEs in the far field. It is then necessary to reconstruct completely the matrix from the adjoint (respectively anti-adjoint) operator with appropriate boundary conditions. The steady L^2 -adjoint operator is identified for interior points after integration by parts of the LEEs over the computational domain Ω as

$$\int_{\Omega} \hat{\mathbf{q}}^T [\mathbf{E}\partial_x \mathbf{q} + \mathbf{F}\partial_y \mathbf{q} + \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{q}] d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \mathbf{q}^T [\partial_x (\mathbf{E}^T \hat{\mathbf{q}}) + \partial_y (\mathbf{F}^T \hat{\mathbf{q}}) - \tilde{\mathbf{R}}^T \hat{\mathbf{q}}] d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{q}^T (\mathbf{A}_n \hat{\mathbf{q}}) ds \quad (5.54)$$

with $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \partial_x \mathbf{E} + \partial_y \mathbf{F}$. Far from the boundary conditions, the L^2 -adjoint operator locally becomes

$$-\partial_x (\mathbf{E}^T \hat{\mathbf{q}}) - \partial_y (\mathbf{F}^T \hat{\mathbf{q}}) + \tilde{\mathbf{R}}^T \hat{\mathbf{q}}. \quad (5.55)$$

The L^2 -adjoint problem is similar to the direct problem. The sign of each characteristic is reversed so that information travels in the opposite direction. As a consequence, the Tam and Dong radiation condition remains identical. The formulation is only adapted by changing the sign of the steady mean flow in the group velocity. In the same way, the no-penetration condition is replaced in the new flux vectors. Because L^2 -adjoint LEEs are of the same nature that primal LEEs, the same spatial discretization schemes for interior and boundary points and temporal integration are applied. The spatial discretization of the adjoint operator combined with adapted non-reflecting boundary condition yields a matrix $\mathbf{A}^+ \neq \mathbf{A}^T$. In a same way, the skew-adjoint operator is just obtained by changing the sign of the adjoint operator so information travels in the same direction that direct problem. Consequently, no changes of Tam and Dong boundary condition are required but again we have $-\mathbf{A}^+ \neq -\mathbf{A}^T$. In the best case, the matrix \mathbf{A}^+ will be conditionally asymptotically stable since the Tam and Dong boundary conditions depend on the source position. Note that LEEs are purely skew-symmetric with the symmetrizer when base flows are uniform. This property can be shown from the \mathbf{H} -skew-adjoint LEEs which are identical to the direct LEEs for uniform flows contrary to the L^2 -skew-adjoint LEEs. Implicitly, the symmetry based inner product includes then dual information at least for uniform mean flows. Finally, since $-\mathbf{A}^T$ is not well-posed, the \mathcal{Q} -stabilizing method

is applied with the matrix

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathcal{Q}^{-1}\mathbf{A} + \mathcal{Q} \end{pmatrix}. \quad (5.56)$$

5.4 Numerical results

The reduced-order models are integrated in time using the same fourth order Runge-Kutta scheme with the same time step that is used in the high-fidelity simulation. Then for each numerical examples, the accuracy of the reduced model is measured from the \mathcal{L}^2 relative error defined as the difference between a snapshot from the full-order model and from the reduced-order model

$$e_r = \max_i \frac{\|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r(t_i)\|_{\mathcal{L}^2}}{\|\mathbf{x}(t_i)\|_{\mathcal{L}^2}}. \quad (5.57)$$

Note that the \mathcal{H} -stabilizing method is not displayed when base flows are uniform because the projection is then equivalent to the \mathcal{H} -POD method.

5.4.1 Test with neutral stability : a critical case

This first case introduces the main numerical aspects for the construction of a reduced dynamical system. In this example, LEEs (5.46) are simplified to a one-dimensional propagation problem by setting periodic boundary conditions in the y -direction. An initial value problem is considered with an acoustic Gaussian pulse located at the center of the computational domain. When the simulation is performed, the propagative and retrograde waves interfere at varying positions which depend on the Mach number. For particular Mach number, this phenomenon is time-periodic. So the interference positions are repeated. Here, the period can be found by looking for the natural numbers n , m and k such as $n(c + c/k) = m(c - c/k)$. For example, for a given k , $m = k + 1$ and $n = k - 1$ can be chosen.

5.4.1.1 Numerical parameters

The computational domain is square with a length size of 100 m. It is discretized by 120×120 points, yielding 57600 DoFs for the full-order model. The time step is deduced from the CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) condition. The mean flow is $(\rho_0, 0, M\bar{c}, p_0)$ with $\rho_0 = 1.2 \text{ kg.m}^{-3}$, $p_0 = 1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}$ and M the Mach number. The initial condition is given by $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t_0) = (p(\mathbf{x}, t_0)/\bar{c}^2, 0, 0, p(\mathbf{x}, t_0))^T$ with

$$p(\mathbf{x}, t_0) = \exp(-\beta[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]), \quad (5.58)$$

$\beta = \log(2)/b^2$, $b = 5$ the half width of the Gaussian and $(x_0, y_0) = (50, 50)$ its center. Periodic boundary condition in y -direction is written for all time t as $\mathbf{q}(x, 0, t) = \mathbf{q}(x, 100, t)$.

5.4.1.2 Accuracy in snapshot interval

In table 5.1, the accuracy of the reduced dynamical system is displayed according to the number of modes and to the projection that is used. Here the Mach number is $M = 0.5$ and consequently $k = 2$. In each case, the modes are calculated from all the snapshots in only one period which corresponds approximately 700 snapshots for $\Delta t = 0.001\text{s}$. The \mathcal{G}_o -POD modes are calculated from the \mathcal{L}^2 -POD modes with the output projection method proposed by Rowley and described in section 5.2.5 since the state is observed everywhere in space. $\mathcal{G}_o - 1$ and $\mathcal{G}_o - 5$ denote respectively that the observability Gramian is calculated with one and five \mathcal{L}^2 -POD modes. \mathcal{H} -POD modes are computed with the parameter $\alpha = 0.1$.

The number of modes needed for a given accuracy depends on the half width b and as a consequence of the scale of patterns too. Both inner products \mathcal{H} and \mathcal{G}_o require fewer modes than the \mathcal{L}^2 -inner product for a given order of accuracy. Table 5.1 shows that the accuracy of \mathcal{H} and \mathcal{G}_o are very similar because they both contain dual information. This property is strengthened with the \mathcal{L}^2 -stabilizing projection that yields the same accuracy. Note also that the \mathcal{L}^2 -stabilizing projection provides exactly the same accuracy as the symmetry based inner product. Furthermore, an analogous study shows that the \mathcal{H} , \mathcal{G}_o and the \mathcal{L}^2 -stabilizing projection require to store less snapshots for obtaining the accuracy of the \mathcal{L}^2 -inner product.

TABLE 5.1 – Relative error e_r as a function of the number modes and the choice of the projection

Inner product	20	25	30	35	40	45
\mathcal{L}^2	1.79	1.78	1.73	6.54×10^{-1}	3.61×10^{-1}	4.83×10^{-2}
$\mathcal{G}_o - 1$	5.54×10^{-1}	9.96×10^{-2}	6.95×10^{-2}	1.35×10^{-2}	6.6×10^{-3}	9.24×10^{-4}
$\mathcal{G}_o - 5$	4.34×10^{-1}	1.0×10^{-1}	5.68×10^{-2}	1.3×10^{-2}	5.9×10^{-3}	9.21×10^{-4}
\mathcal{H}	2.3×10^{-1}	1.03×10^{-1}	5.47×10^{-2}	1.33×10^{-2}	6.7×10^{-3}	9.24×10^{-4}
\mathcal{L}^2 -stabilizing	2.14×10^{-1}	1.03×10^{-1}	5.47×10^{-2}	1.33×10^{-2}	6.7×10^{-3}	9.24×10^{-4}

5.4.1.3 Stability analysis and long-time behavior

Numerical analysis of long-time dynamics behavior of the reduced-order model can be accomplished by computing the largest real part of eigenvalues of the reduced matrix. It is indeed well-known that if this latter is lower than zero then the associated linear autonomous dynamical system is stable. In this particular numerical test, all the modes are neutral because the system is conservative. This is the reason why, the real part of all eigenvalues should be null until the machine precision. In table 5.2, the largest real part of the eigenvalues of the reduced matrices induced by the different inner products are compared. It is observed that both reduced matrix constructed thanks to the \mathcal{L}^2 and \mathcal{G}_o inner products do not conserve the neutral stability contrary to the \mathcal{H} inner product. This is explained by the fact that the full model is not asymptotically stable then the infinite controllability Gramian is not defined. Note that Ma et al. [180] suggest in a recent paper to subtract the neutral modes of the full model in a first time and then to apply the balanced-POD method. This technique can not be applied to our case since all the modes are neutral. The reduced models from the symmetry projection and the stabilizing projection are perfectly neutrally stable because the reduced matrix is purely skew-symmetric. In figure 5.1, the classical Galerkin instability occurring when a \mathcal{L}^2 projection is employed, is illustrated after some periods in pictures (a) and (b). On the contrary, the dynamical system from the \mathcal{H} -POD modes is impressively clean after numerous periods in picture (c). In figure 5.2, the long-time behavior of the \mathcal{L}^2 -energy of the reduced model is plotted for the different projections showing that the reduced energy is not preserved with the \mathcal{L}^2 and \mathcal{G}_o projections in agreement with the stability analysis. On the other hand, the energy is perfectly conserved with the \mathcal{H} and \mathcal{L}^2 -stabilizing projections.

TABLE 5.2 – $\max_i \operatorname{Re}(\lambda_i)$ as a function of the number modes and the choice of the projections

Projections	20	25	30	35	40	45
L^2	8.36×10^{-1}	5.22×10^{-1}	3.7×10^{-1}	7.83×10^{-1}	4.85×10^{-1}	2.77×10^{-1}
$\mathcal{G}_o - 1$	3.4×10^{-1}	6.11×10^{-2}	9.93×10^{-1}	1.33×10^{-1}	6.78×10^{-2}	2.99×10^{-2}
$\mathcal{G}_o - 5$	5.54×10^{-2}	6.32×10^{-2}	1.9×10^{-1}	2.7×10^{-2}	8.5×10^{-3}	2.11×10^{-2}
\mathcal{H}	4.83×10^{-15}	1.42×10^{-14}	7.55×10^{-15}	1.24×10^{-14}	1.78×10^{-14}	1.51×10^{-14}
\mathcal{L}^2 -stabilizing	3.37×10^{-14}	3.11×10^{-14}	4.26×10^{-14}	5.02×10^{-14}	5.59×10^{-14}	6.39×10^{-14}

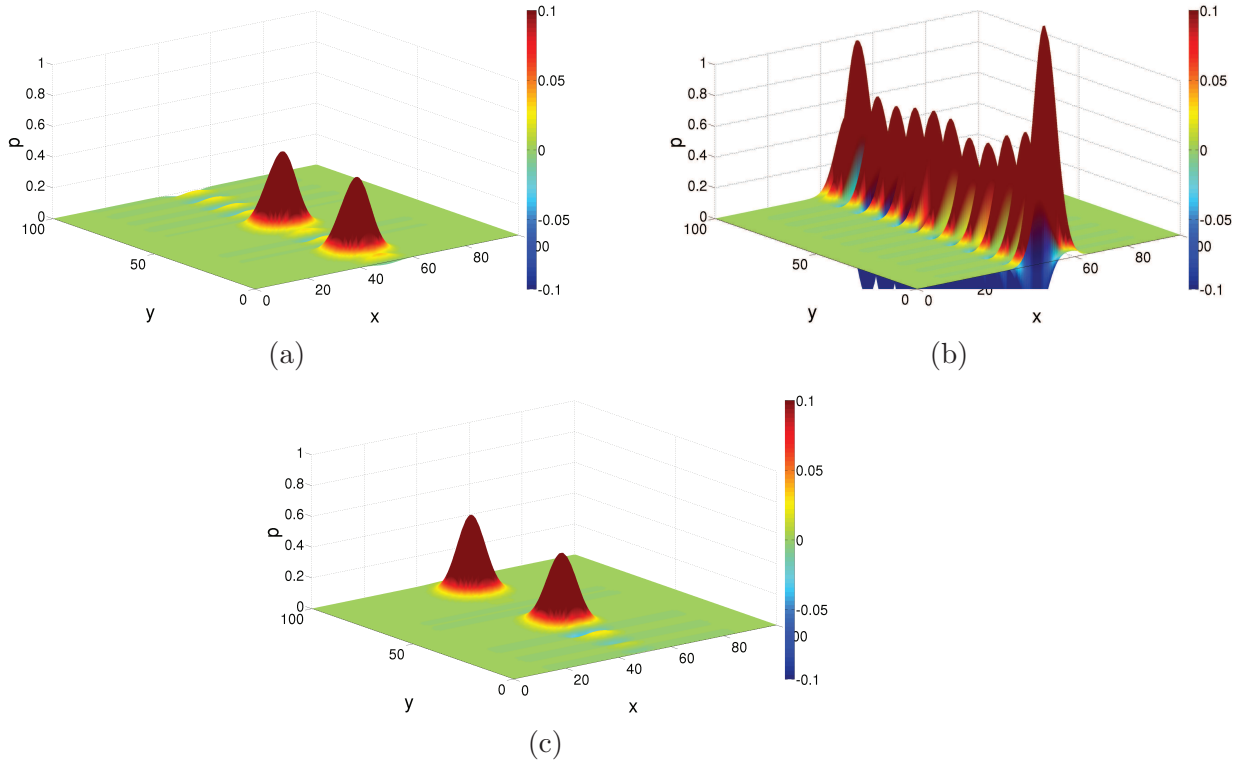


FIGURE 5.1 – Long-time behavior of reduced dynamical systems. (a) Pressure after $9000\Delta t$ with 40 \mathcal{L}^2 -POD modes, (b) Pressure after $22000\Delta t$ with 40 \mathcal{L}^2 -POD modes : development of the Galerkin instability. (c) Pressure after $350000\Delta t$ with 40 \mathcal{H} -POD modes.

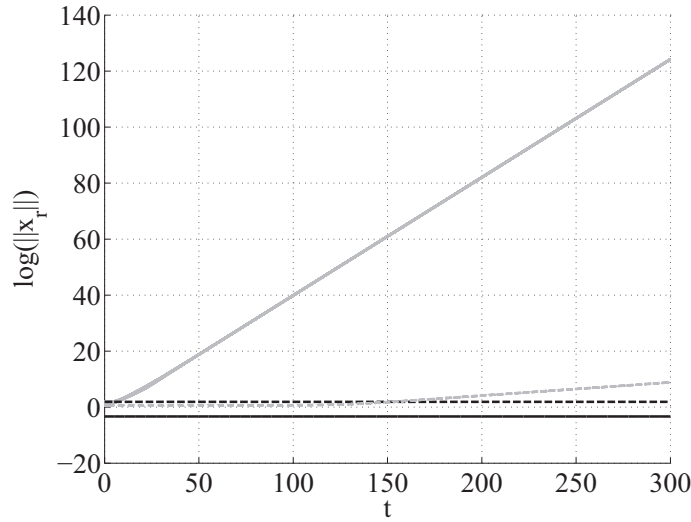


FIGURE 5.2 – Long-time behavior of the \mathcal{L}^2 -energy of the reduced dynamical systems with 50 DoFs with the different projection methods : in grey solid line : \mathcal{L}^2 , in black solid line : \mathcal{H} , in black dashed line : \mathcal{L}^2 -stabilizing, in grey dashed line : \mathcal{G}_o

5.4.2 Acoustic perturbation in an open system

In this test-case, we check if the reduced model is still numerically well-posed in the presence of radiation boundary conditions. Since the waves leave the physical domain, the full-order model should be asymptotically stable. The reduced model should then preserve this stability behavior. The observability-Gramian-based inner product is not compared here because the

nonreflective boundary conditions turned out to be insufficient in simulations of the \mathcal{L}^2 -adjoint LEEs with \mathcal{L}^2 -POD modes as initial conditions. Improvement of the anechoic boundary conditions for the \mathcal{L}^2 -adjoint LEEs must be carried out in future studies. The numerical parameters and the initial condition are identical to the previous test case. Non-reflecting boundary conditions are used in both spatial directions. The base flow is uniform in the x -direction with $M = 0.5$. Hence the outflow boundary condition is placed on the right computational domain. The perturbations are recorded every two time steps. In figure 5.3, the symmetry based inner product and the \mathcal{L}^2 -stabilizing projection reproduce perfectly the dissipation of the energy in agreement to the high-fidelity simulation with forty DoFs (picture (b)). On the other hand, the \mathcal{L}^2 projection needs more modes to reproduce faithfully the decreasing rate of the energy in the computational domain at long time. This difference is more significant with only thirty modes (picture (a)). That is also attested by the accuracy analysis given in table 5.3. The stability analysis in figure 5.4(a) reveals that the \mathcal{L}^2 projection can be unstable for certain choices of the reduced dimension contrarily to both \mathcal{H} and stabilizing projections. In figure 5.5, it can be seen that both \mathcal{L}^2 -stabilizing method and \mathcal{H} -POD method conserve the reduced energy as long as disturbances are far from radiation boundary conditions. In addition, energy profiles of these both methods are globally monotonic contrarily to the energy profile obtained by the standard POD method. Note that since the perturbations must leave the computational domain for the primal and the dual problem, the reduced energy can not be preserved. That also explains why the matrix $-\mathbf{A}^T$ can not be well-posed with two-dimensional non-reflecting boundary conditions. The stability analysis in figure 5.4(b) combined with the analysis of reduced energy profile in figure 5.6 shows that spurious reflections due to imperfect non-reflecting boundary conditions have consequences for the stability of the reduced matrix. Actually, the smallest non physical reflections can induce sufficient numerical growing energy to destabilize the reduced model. That also explains the difficulty for using balanced-POD method since the rigorous asymptotic behavior is then uncertain. However, the \mathcal{L}^2 -stabilizing method has been able to preserve the stability even with these spurious reflections. The development of perfectly non-reflecting boundary conditions for compressible flow remains an open topic in aeroacoustics [72].

TABLE 5.3 – Relative error e_r in function of number modes and the projections

Inner product	25	30	35	40	45	50
\mathcal{L}^2	4.08	1.29	4.4×10^{-1}	1.11×10^{-1}	2.8×10^{-2}	5.0×10^{-3}
\mathcal{H}	6.12×10^{-1}	1.8×10^{-1}	7.06×10^{-2}	2.15×10^{-2}	7.9×10^{-3}	3.6×10^{-3}
\mathcal{L}^2 -stabilizing	6.12×10^{-1}	1.8×10^{-1}	7.06×10^{-2}	2.15×10^{-2}	7.9×10^{-3}	3.6×10^{-3}

5.4.3 Acoustic perturbation in an open channel

The computational domain is a $200 \text{ m} \times 100 \text{ m}$ rectangle, discretized by 201×101 points, so that the high-fidelity model has 81204 DoFs. Radiation boundary conditions are applied in x -direction and wall boundary conditions are applied in y -direction. The same initial value problem is considered but now $(x_0, y_0) = (0, 0)$ and $\Delta t = 0.7127 \times 10^{-3} \text{ s}$. The full model is advanced in time and snapshots are stored every tenth time step. The symmetry based inner product \mathcal{H} is employed since it has given the best results in the presence of uniform base flows. Indeed, whereas the \mathcal{L}^2 -stabilizing projection would provide similar results, it requires two high-fidelity simulations (direct and anti-adjoint). The \mathcal{H} -POD modes are constructed with 100 snapshots from the time interval simulation. In figure 5.7, pressure snapshots after 540 temporal iterations are compared for different dimensions of the reduced-order model. In this case, the ROM needs about forty modes to reproduce faithfully the high-fidelity solution.

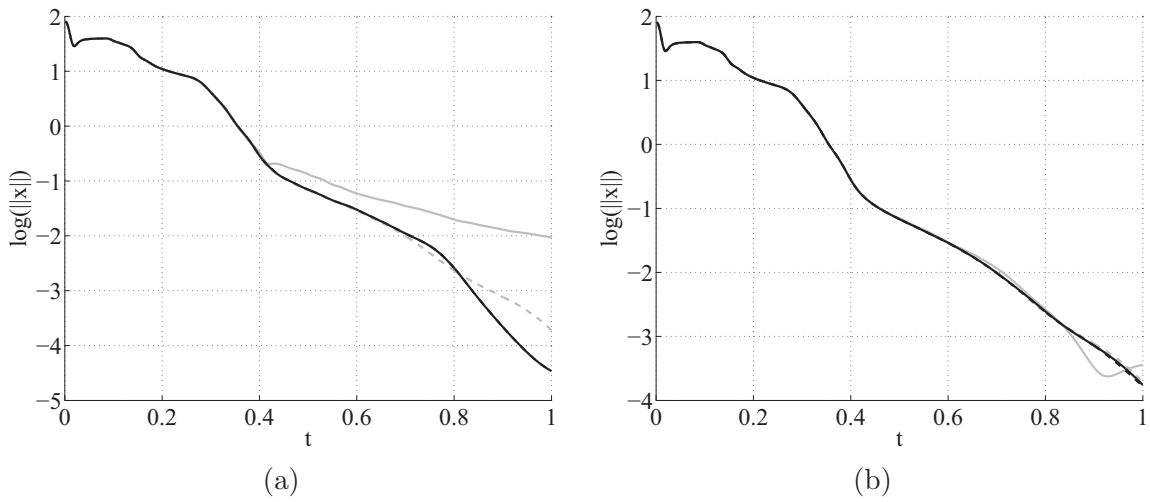


FIGURE 5.3 – Analysis of the \mathcal{L}^2 -energy decrease according to the number of modes and projections. In grey dashed line : full-order model, in grey solid line : \mathcal{L}^2 , in black solid line : \mathcal{H} , in black dashed line : \mathcal{L}^2 -stabilizing. (a) With 30 DoFs (b) With 40 DoFs

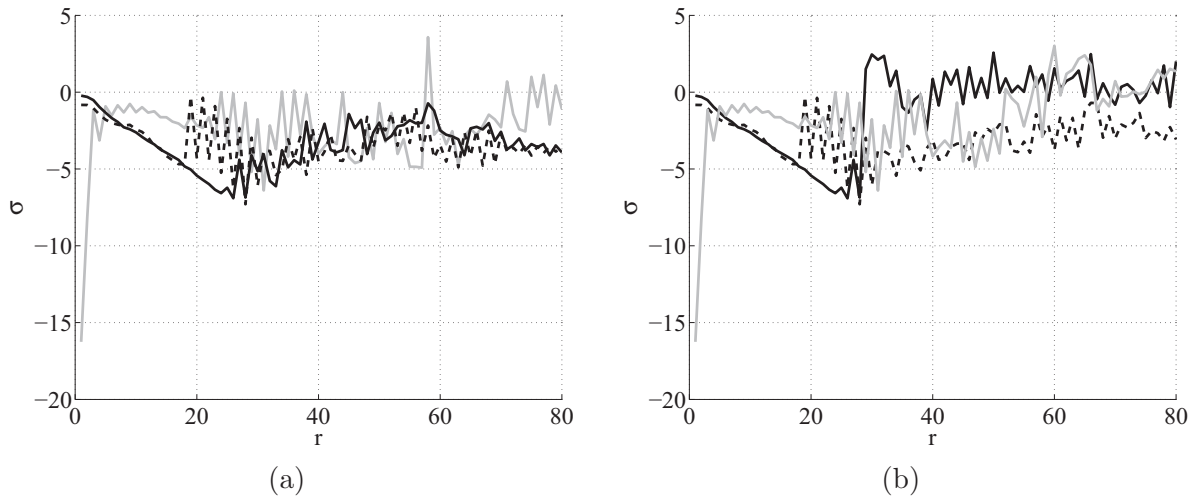


FIGURE 5.4 – Analysis of the stability of the reduced-order models according to the r number of modes, the projection and the temporal interval construction. $\sigma = \max_{1 \leq i \leq r} \text{Re}(\lambda_i)$ with λ_i the eigenvalues of the reduced matrix. In grey solid line : \mathcal{L}^2 , in black solid line : \mathcal{H} , in black dashed line : \mathcal{L}^2 -stabilizing. (a) snapshots saved in $[t_0, t_f] = [0, 0.75]$, (b) snapshots saved in $[t_0, t_f] = [0, 1]$.

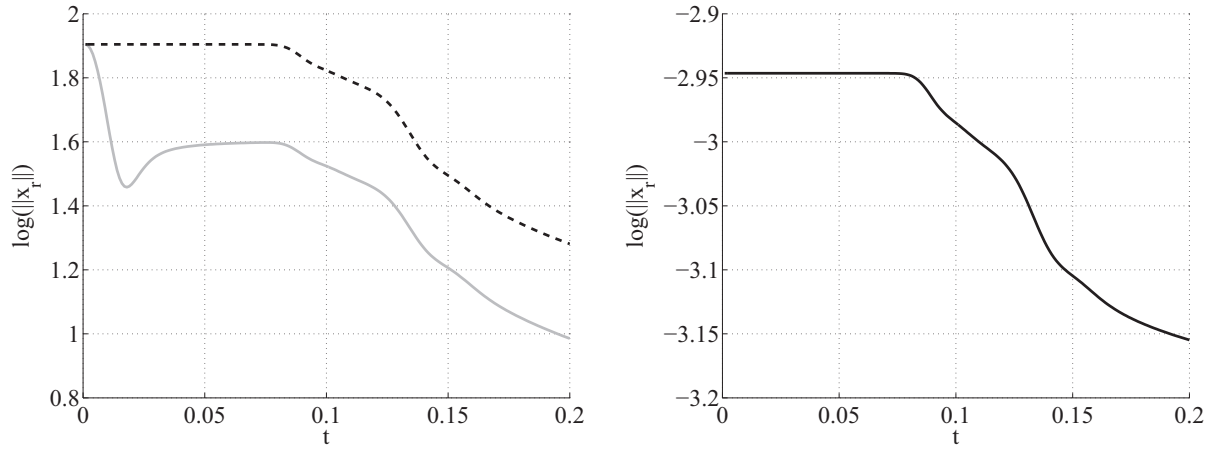


FIGURE 5.5 – Evolution of the reduced \mathcal{L}^2 -energy according to the projections. In grey solid line : \mathcal{L}^2 , in black solid line : \mathcal{H} , in black dashed line : \mathcal{L}^2 -stabilizing.

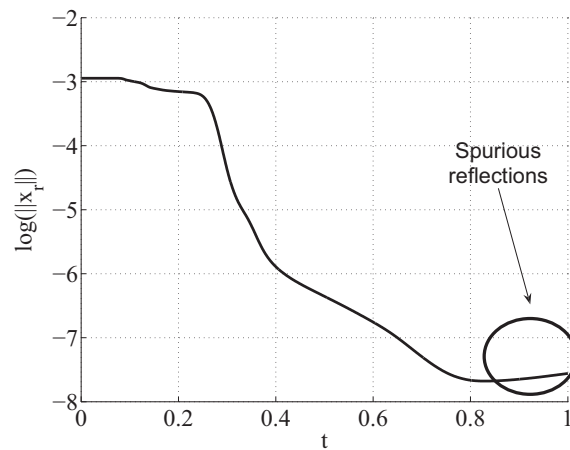


FIGURE 5.6 – Evolution of the reduced \mathcal{L}^2 -energy according to the \mathcal{H} -projection showing growing energy at long time due to spurious reflections.

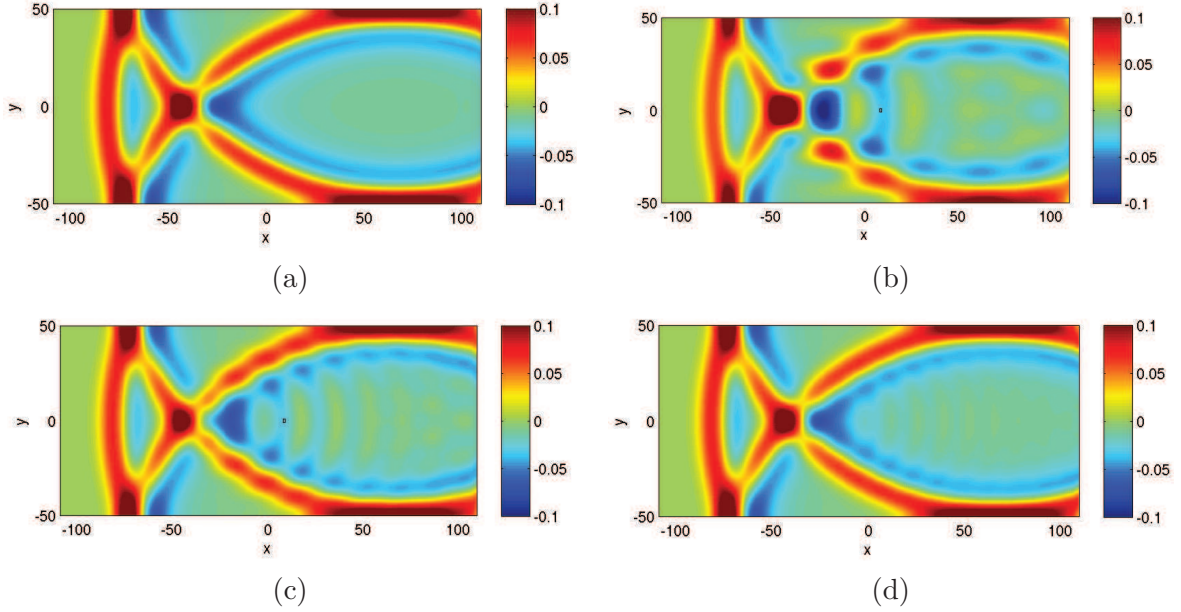


FIGURE 5.7 – Acoustic perturbation in an open channel : pressure field at $540\Delta t$. (a) Full-order model (b) ROM with 20 DoFs (c) ROM with 30 DoFs (d) ROM with 40 DoFs

5.4.4 Free mixing layer

In this last example, the propagation of the acoustic pulse (5.58) in a convectively unstable shear flow

$$\bar{\mathbf{u}} = \left(0.5\bar{c} + 0.25\bar{c} \tanh\left(\frac{y-50}{5}\right), 0 \right)^T \quad (5.59)$$

is simulated. The computational domain is a $200 \text{ m} \times 100 \text{ m}$ rectangle, discretized by 600×300 points, so that the high-fidelity model has 720000 DoFs. The time step is $\Delta t = 0.0006 \text{ s}$. The full model is simulated during 1000 time steps and solutions are stored every fifth time step yielding 200 snapshots. First, stabilizing projections and \mathcal{H} -POD method provide similar accuracy and behave significantly better than standard POD method, as shown in figure 5.8. Again, the \mathcal{L}^2 -POD method does not capture well the transient behavior of the energy at long time with few modes. Secondly, impressive numerical results for the stabilizing projections are reported in figures 5.9 and 5.10. In figure 5.10, it can be seen that both \mathcal{L}^2 -stabilizing and \mathcal{H} -stabilizing methods yield stable reduced-order models in spite of the fact that energy is growing at long time. This property is also attested by the time history of the energy reported in figures 5.9 (c) and (d), given that time evolution of the \mathcal{L}^2 reduced energy is globally monotonically decreasing. Again, the reduced energy is preserved as long as perturbations are far from radiation boundaries but also when only the vortical mode is convected at the end of the simulation. Furthermore, \mathcal{H} -POD method preserves the transient physical behavior of the energy. Thus the reduced matrix cannot be stable at finite time due to energy growing. Finally, some direct and adjoint modes are respectively displayed in figures 5.11 and 5.12. First, \mathcal{L}^2 and \mathcal{H} methods generate different mode structures. Secondly, \mathcal{Q} -stabilizing methods and \mathcal{Q} -POD methods provide modes of similar structure. In particular, \mathcal{H} methods capture well the structure of pressure perturbation due to the vortical mode in energetically significant modes unlike \mathcal{L}^2 methods. Actually, it can be seen that the vorticity mode is present in \mathcal{L}^2 methods but in the higher order modes. That confirms that the use of a weighted inner product based on the matrix \mathcal{H} induces a better representation of the physical energy.

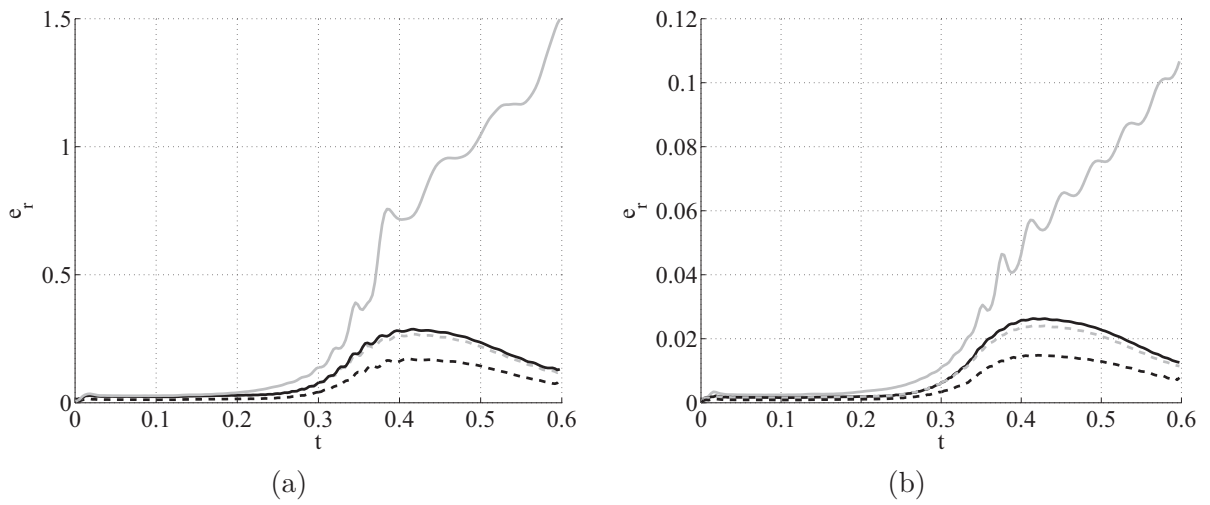


FIGURE 5.8 – Time-evolution of accuracy according to the different methods. (a) with 50 modes (b) with 70 modes. In grey solid line : \mathcal{L}^2 , in black solid line : \mathcal{H} , in black dashed line : \mathcal{L}^2 -stabilizing and in grey dash line : \mathcal{H} -stabilizing

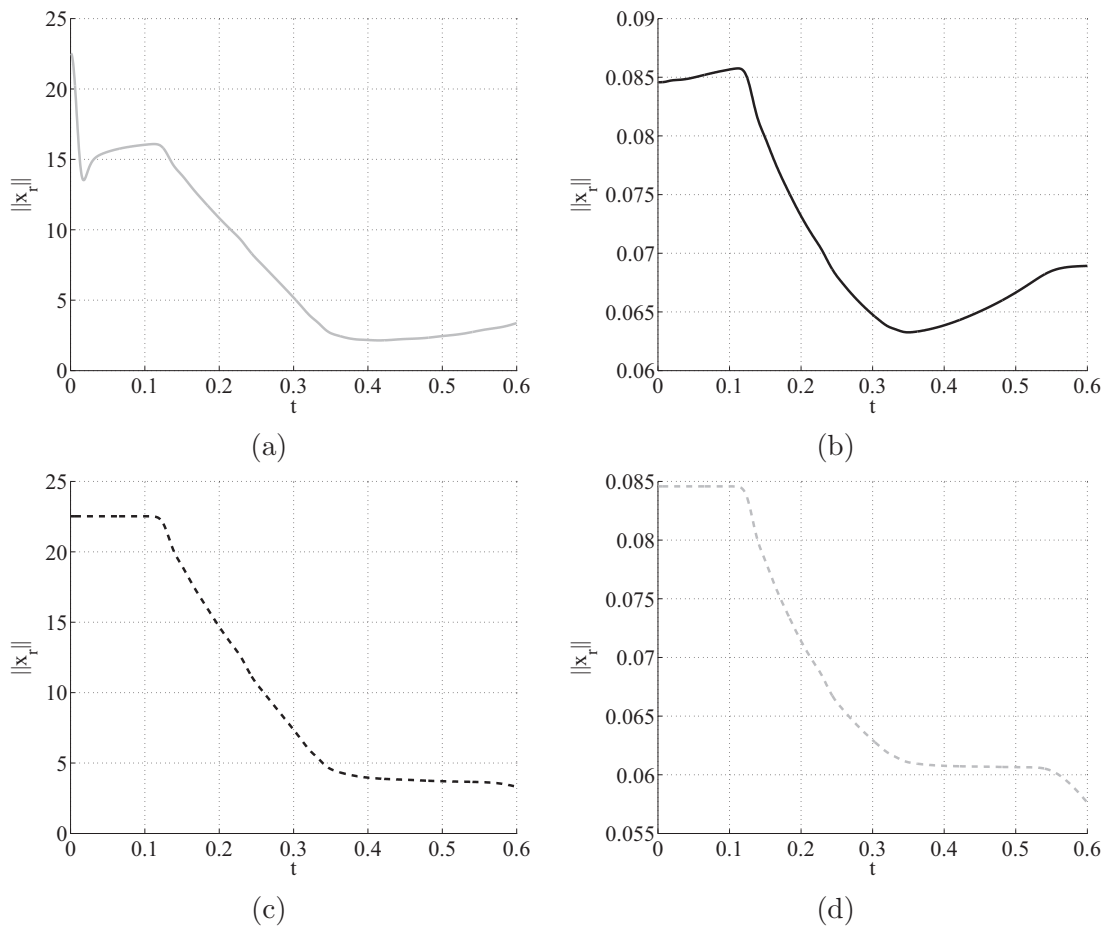


FIGURE 5.9 – \mathcal{L}^2 -Energy of the reduced model in function of the projection. (a) \mathcal{L}^2 -POD method (b) \mathcal{H} -POD method (c) \mathcal{L}^2 -stabilizing method (d) \mathcal{H} -stabilizing method

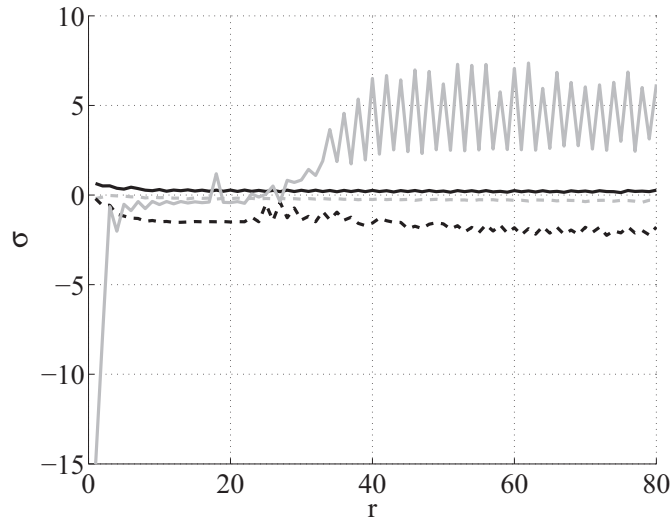


FIGURE 5.10 – Analysis of the stability of the reduced-order models according to the r number of modes and the projections. In grey solid line : \mathcal{L}^2 , in black solid line : \mathcal{H} , in black dashed line : \mathcal{L}^2 -stabilizing, in grey dash line : \mathcal{H} -stabilizing.

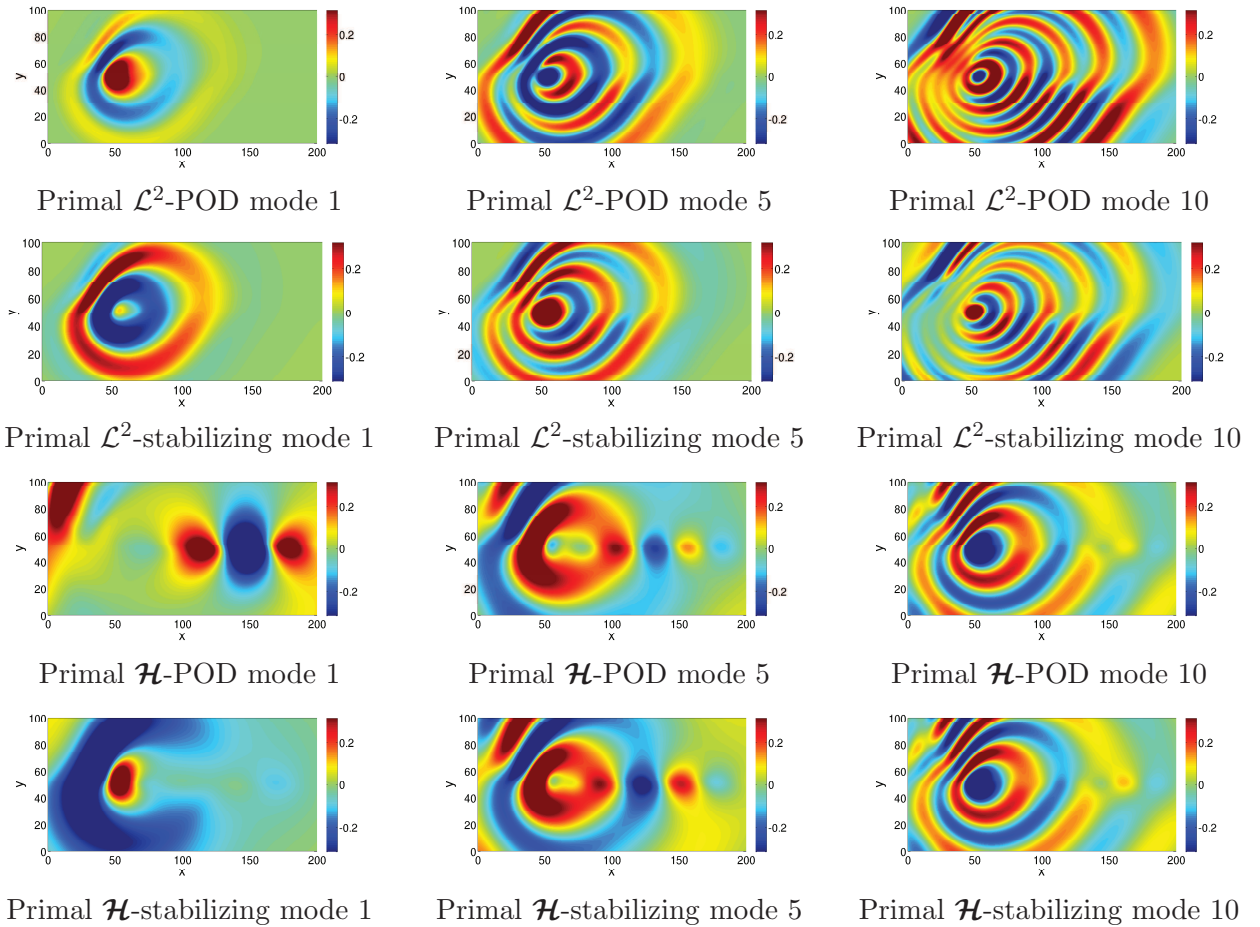


FIGURE 5.11 – Example of direct modes showing pressure field for the different methods.

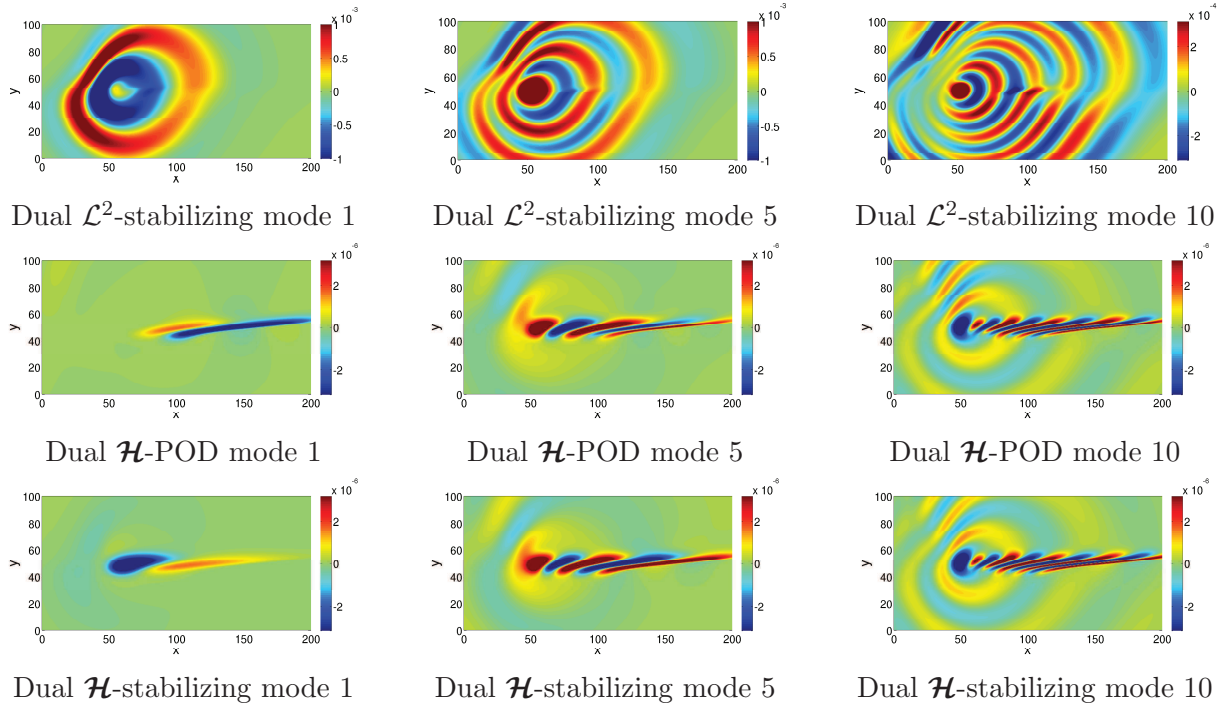


FIGURE 5.12 – Example of adjoint modes showing equivalent pressure field for the different methods.

5.5 Conclusion

Optimal reduced-order models have been constructed for LEEs and applied for simple two-dimensional problems. The choice of the right and left projections has been shown to be fundamental for the optimality and the stability properties of the reduced model, particularly by including dual dynamics. When all the DoFs are observed in the presence of uniform base flows, the symmetry based inner product is shown to be the most reliable for accuracy, optimality, stability and cost considerations. This product is accurate since the adjoint system is implicitly included, stable because it is an energy-based inner product and inexpensive since it needs only one direct high-fidelity simulation. A new stabilizing projection is proposed which turns out to yield similar properties and appears to be a promising extension in the presence of non-uniform flows. The method is based on the definition of a skew-symmetric dynamical system constructed from the primal and anti-dual problems. It requires two high-fidelity simulations and emphasized the crucial role of skew-adjoint systems to build stable reduced-order models from full non-symmetric problems. In this sense, it could be used even for not symmetrizable hyperbolic systems. However, the output projection method needs several high-fidelity simulations and does not ensure the stability, in particular the conservation of the energy. The method is also not easy to carry out by including non-reflecting boundary conditions. More generally, accurate non-reflecting boundary conditions can be crucial to avoid destabilization of reduced-order models. With nonuniform mean flows, it is shown that \mathcal{Q} -stabilizing methods are able to induce a stable reduced-order model even in the presence of an hydrodynamic instability wave. The numerical procedure is then powerful since this property is not satisfied with \mathcal{Q} -POD methods at finite time. In addition, it seems that the stabilizing method does not affect the optimality of the reduced models. Finally, the classical \mathcal{L}^2 Galerkin projection appears to be not adapted, leading to unstable and too sensitive reduced-order models, especially to capture transients.

5.6 Amélioration du modèle réduit en temps-réel

Dans la section précédente, nous avons essentiellement étudié l'influence du choix de la projection sur l'optimalité et la stabilité du modèle réduit. Nous proposons dans cette section une méthode numérique visant à améliorer en temps-réel la première version de modèle réduit construit.

5.6.1 Stabilisation du modèle réduit en temps-réel

Le choix de la matrice \mathcal{Q} définissant le produit scalaire pondéré a une influence notable, on l'a vu, sur la préservation de la stabilité du modèle réduit. Nous rappelons que la stabilité de la matrice réduite est conditionnée par les deux égalités suivantes :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}_r^T \mathbf{x}_r) = \mathbf{x}_r^T (\mathbf{A}_r^T + \mathbf{A}_r) \mathbf{x}_r \quad (5.60)$$

$$= (\mathbf{V}_r \mathbf{x}_r)^T (\mathbf{A}^T \mathcal{Q} + \mathcal{Q} \mathbf{A}) \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r. \quad (5.61)$$

Si \mathbf{A} est asymptotiquement stable, le théorème de Lyapunov montre qu'il existe une matrice \mathbf{Q} SDP impliquant la décroissance monotone de l'énergie \mathcal{L}^2 donc la stabilité du modèle réduit. Dans notre contexte, il est cependant difficile de vérifier si la matrice \mathbf{A} est asymptotiquement stable en raison de sa dimension et de la difficulté à construire des conditions aux limites parfaitement non réfléchissantes d'un point de vue numérique. De plus, nous avons vu que la transposée discrète \mathbf{A}^T n'est pas toujours bien définie si les conditions aux limites sont artificielles. Autrement dit, on ne peut pas garantir la haute-fidélité du modèle discret complet par rapport à ces propriétés numériques particulières. Il est clair que si la stabilité de la matrice \mathbf{A} et la possibilité de résoudre l'équation de Lyapunov étaient garanties, le problème de la préservation de la stabilité de la matrice réduite ne se poserait pas. C'est la raison pour laquelle, nous avons développé une méthode de stabilisation adaptée à notre modèle. Nous proposons aussi une procédure d'amélioration qui peut être exploitée pour les systèmes réduits qui sont stables pour certaines dimensions réduites. Cette hypothèse n'est pas forcément réductrice dans la mesure où les systèmes réduits sont souvent stables pour un nombre r_1 de modes et instables pour un nombre r_2 de modes. La méthode consiste à appliquer de nouveau la *snapshot*-POD sur les solutions réduites pour un produit scalaire défini à partir d'une matrice \mathcal{Q}_r solution de l'équation de Lyapunov associée à la matrice réduite \mathbf{A}_r . Les étapes de la procédure d'amélioration temps-réel sont les suivantes :

1. choisir une dimension r telle que la matrice \mathbf{A}_r est stable, l'équation de Lyapunov associée à la matrice réduite admet alors une solution ;
2. résoudre l'équation de Lyapunov

$$\mathbf{A}_r^T \mathcal{Q}_r + \mathcal{Q}_r \mathbf{A}_r = -\mathbf{P}_r; \quad (5.62)$$

3. former la matrice des clichés réduits

$$\mathbf{X}_r = [\mathbf{W}_r^T \mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{W}_r^T \mathbf{x}(t_m)] = [\mathbf{x}_r(t_1), \dots, \mathbf{x}_r(t_m)]; \quad (5.63)$$

4. résoudre le problème aux valeurs propres de petite dimension

$$\mathbf{X}_r^T \mathcal{Q}_r \mathbf{X}_r \tilde{\phi}_i = \lambda_i \tilde{\phi}_i, \quad 1 \leq i \leq r; \quad (5.64)$$

5. les modes directs et adjoints améliorés s'expriment respectivement pour le système réduit

$$\phi_i^a = \mathbf{X}_r \tilde{\phi}_i / \lambda_i, \quad \psi_i^a = \mathcal{Q}_r \phi_i^a \quad 1 \leq i \leq r; \quad (5.65)$$

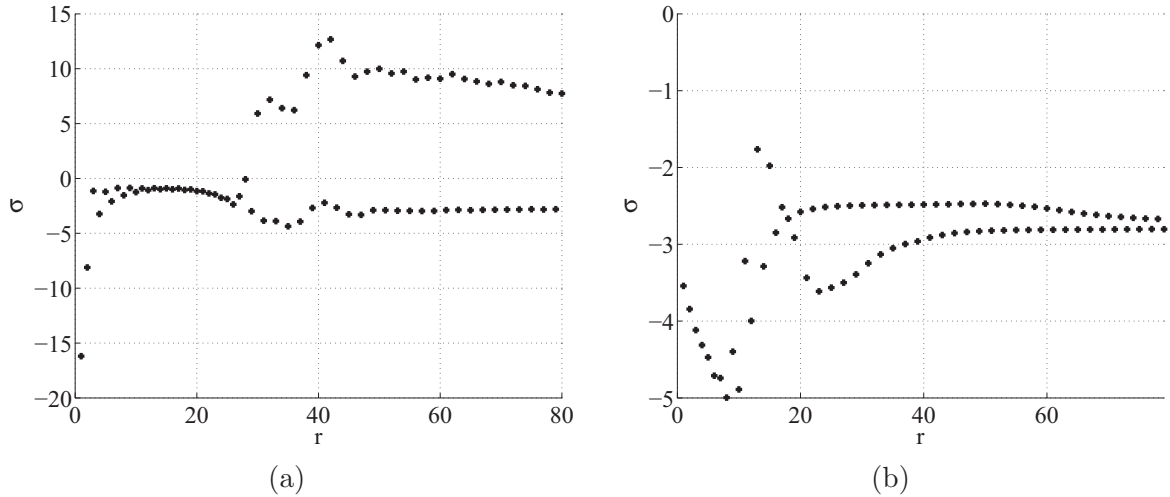


FIGURE 5.13 – Analyse de la stabilité du modèle réduit, $\sigma = \max_{1 \leq i \leq r} \Re(\lambda_i)$. (a) évolution de la stabilité pour le produit scalaire \mathcal{L}^2 (b) évolution de la stabilité en utilisant la méthode d'amélioration.

6. les modes directs et adjoints améliorés s'expriment respectivement pour le système non réduit

$$\Phi_i^a = \mathbf{V}_r \phi_i^a, \quad \Psi_i^a = \mathbf{W}_r \psi_i^a, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (5.66)$$

Les modes directs et adjoints améliorés peuvent aussi s'obtenir par méthode POD directe si la dimension réduite r est inférieure à la dimension m des clichés. Notons que la faible dimension r du modèle réduit peut permettre d'appliquer toute méthode de réduction non exploitable pour une dimension importante ce qui ouvre une quantité importante de méthodes de réduction du premier jeu de modèle réduit construit. L'équation de Lyapunov peut être résolue à l'aide de l'algorithme classique de Bartels-Stewart [27] très rapidement car la dimension de \mathbf{A}_r n'est pas importante. On choisit de prendre $\mathbf{P}_r = \mathbf{I}_r$, ce qui correspond à l'observation de toutes les inconnues du modèle réduit ($\mathbf{C}_r = \mathbf{I}_r$). Cette procédure numérique assure la stabilité du modèle réduit pour tout r_1 tel que $r_1 \leq r$. Afin d'illustrer la performance de la méthode, on considère une perturbation acoustique dans un écoulement affine (paramètres numériques identiques au cas affine du chapitre précédent). Sur la figure 5.13, image (a), l'évolution de la stabilité est tracée lorsque la matrice réduite est construite avec le produit scalaire \mathcal{L}^2 . On remarque que pour $r > 24$, le modèle réduit devient instable pour un nombre de modes r pair. Ce comportement numérique permet d'appliquer directement la méthode d'amélioration proposée puisqu'en choisissant un nombre impair de modes, la matrice \mathbf{A}_r est stable. On choisit de résoudre l'équation de Lyapunov en prenant $r = 79$. En pratique, il est en effet préférable de prendre une dimension suffisamment élevée de manière à garantir une précision maximale. C'est d'autant plus le cas si on utilise le produit scalaire canonique. L'image (b) de la figure 5.13 montre bien le comportement théorique attendu à savoir que la matrice réduite est stable pour tout $r \leq 79$. Dans le cas où la matrice réduite est instable pour tout $r_1 > r$, cette procédure ne peut plus être appliquée. La projection stabilisante peut cependant être exploitée pour forcer la stabilité du système réduit.

5.6.2 Réduction du modèle réduit en temps-réel

Un modèle réduit est considéré plus optimal qu'un autre modèle réduit si il requiert moins de modes pour obtenir une précision donnée (donc une plus petite dimension). Par exemple, nous avons vu pour les EELs qu'un modèle réduit construit en rajoutant de l'information adjointe (balanced-POD, symétriseur et projection stabilisante) nécessite moins de modes

pour obtenir une certaine précision. Notons que la qualité du modèle réduit construit peut aussi être influencée par :

- l'adimensionnement du modèle physique ;
- le nombre et le choix des clichés ;
- les modes d'ordre élevé ;
- le manque d'orthogonalité (respectivement de biorthogonalité) de l'espace \mathbf{V}_r (respectivement des deux espaces \mathbf{V}_r et \mathbf{W}_r) ;
- la nature des conditions aux limites.

En général, il est préférable d'adimensionner le modèle physique pour le rendre moins sensible à certains paramètres. Dans le cas des EELs, nous avons vu dans le chapitre 2 que l'adimensionnement pouvait aussi avoir un effet de symétrisation sur certaines variables. Dans l'idéal, l'augmentation du nombre de modes devrait permettre d'augmenter à volonté la précision du modèle réduit. En pratique, on observe que l'augmentation du nombre de modes n'est pas toujours bénéfique et peut même détériorer la qualité du système réduit. Ce problème peut être d'ordre purement numérique et/ou physique. D'un point de vue numérique, il faut déjà veiller à vérifier que les modes restent orthogonaux (respectivement biorthogonaux) entre eux. En général, les modes d'ordre élevé sont de moins en moins orthogonaux entre eux. Il peut être nécessaire d'augmenter la précision du solveur modal pour s'assurer que les modes propres de la matrice de corrélation sont bien calculés jusqu'à l'ordre souhaité. D'un point de vue physique, les modes d'ordre élevé sont souvent associés à des phénomènes de petite longueur d'onde qu'il n'est pas possible de capter si la longueur d'onde se rapproche ou est plus petite que la taille des mailles du maillage. Quand la précision liée à la discrétisation du domaine de calcul est dépassée, les modes d'ordre élevé représentent souvent les défauts numériques des solutions haute-fidélité (reflections non physiques, oscillations maille à maille par exemple). On comprend dès lors pourquoi il n'est pas évident d'évacuer l'énergie proprement avec un système réduit si le produit scalaire ne définit pas correctement une énergie physique. En effet, ce sont les modes d'ordre élevé qui contribuent le plus à la dissipation de l'énergie. La méthode d'amélioration *online* de la stabilité proposée dans le paragraphe précédent peut aussi être exploitée pour améliorer l'optimalité du modèle réduit. On poursuit l'analyse numérique effectuée en illustrant sur la figure 5.14 l'évolution de l'erreur obtenue avec les modes améliorés. Les courbes tracées suggèrent qu'avec la méthode d'amélioration, on est capable de construire un système réduit qui produit une qualité de système réduit analogue au système réduit construit avec le symétriseur. C'est un résultat très important car cela montre qu'on peut construire un modèle réduit optimal à partir d'une première version de modèle réduit établie à partir du produit scalaire canonique \mathcal{L}^2 . Cette méthode apporte donc une solution alternative lorsqu'il n'est pas possible de construire un produit scalaire performant. Par ailleurs, le fait ici d'obtenir avec la méthode d'amélioration une précision analogue ou légèrement meilleure à celle obtenue avec le symétriseur suggère que la projection basée sur le symétriseur est quasiment optimale. Ce point a pu être vérifié en appliquant la méthode d'amélioration sur le modèle réduit construit avec le symétriseur. Cette méthode d'amélioration peut aussi être appliquée pour optimiser la dimension du modèle réduit si on souhaite par exemple fixer une loi de contrôle $u(t)$ particulière ou se placer à un paramètre d'intérêt. En effet, si le modèle réduit est construit à partir du gramien de contrôlabilité, il est optimal pour l'ensemble des lois $u(t)$ mais pas pour une loi $u(t)$ particulière.

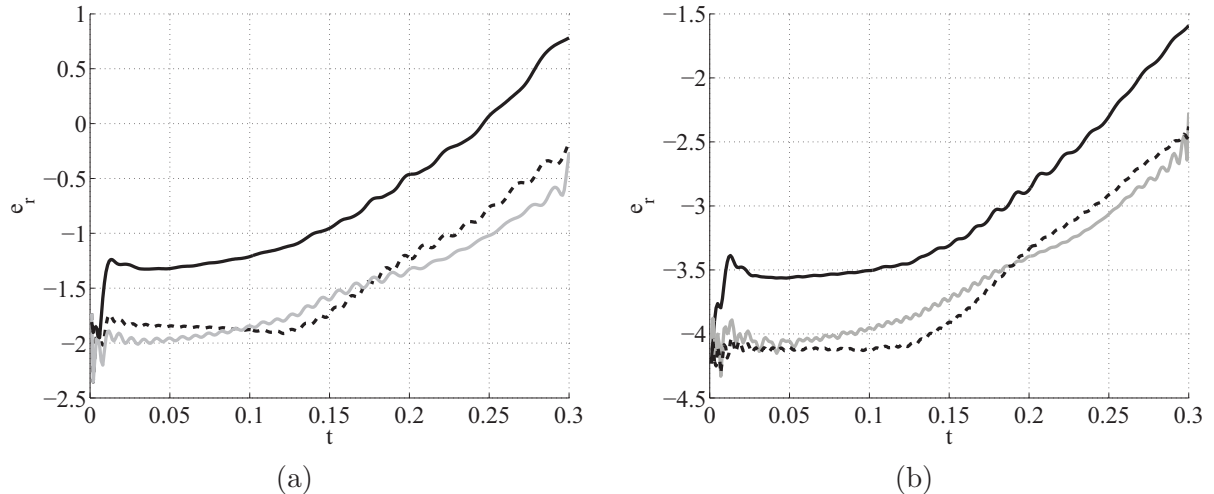


FIGURE 5.14 – Performance de la méthode d’amélioration, évolution de l’erreur sur l’intervalle de construction des modes. En noir trait plein système réduit construit avec les modes POD \mathcal{L}^2 , en tirets noirs système réduit construit avec les modes POD \mathcal{H} et en gris trait plein système réduit construit à partir des modes POD \mathcal{L}^2 améliorés. (a) avec 30 modes (b) avec 50 modes.

5.7 Sensibilité paramétrique

5.7.1 Problématique

Jusqu’à présent, nous avons décrit comment construire un modèle réduit numérique linéaire instationnaire. Le but était d’une part d’être capable de reproduire fidèlement un phénomène d’évolution sur un intervalle de temps $[t_0, t_f]$, et d’autre part d’assurer au mieux la stabilité du système réduit de manière à pouvoir effectuer des simulations sur de longues durées. Il serait maintenant intéressant de pouvoir effectuer des prédictions en temps réel lorsqu’un ou plusieurs paramètres numériques du modèle physique sont légèrement modifiés. Un modèle est dit paramétré si les paramètres numériques ne sont plus figés mais variables. Le nombre de solutions augmente alors considérablement puisque désormais il faut reproduire fidèlement des phénomènes qui sont définis à la fois sur l’intervalle de temps $[t_0, t_f]$ mais aussi sur l’intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ associé au paramètre d’intérêt (ou plus généralement à plusieurs intervalles associés à plusieurs paramètres du modèle $[\lambda_1^1, \lambda_2^1] \times \dots \times [\lambda_1^l, \lambda_2^l]$). Par exemple, en dynamique des fluides, le nombre de Mach, le nombre de Reynolds ou tout autre nombre adimensionnel sont des paramètres phénoménologiques importants. Dans le contexte des EELs, c’est le nombre de Mach qui est privilégié. Dans le cas d’un écoulement de base uniforme, l’analyse dimensionnelle suggère d’ailleurs qu’il s’agit du seul nombre influant. Dans tous les cas, il est souhaitable dans un premier temps d’effectuer une analyse dimensionnelle du modèle physique de manière à réduire le nombre de paramètres d’études et/ou d’identifier les paramètres importants. Il est clair que tous les paramètres n’ont pas la même fonction physique et il n’est probablement pas possible de mettre sur un pied d’égalité tous les paramètres lorsqu’on cherche à construire un modèle réduit paramétré. De plus, le comportement des modèles paramétrés peut s’avérer complètement différent au voisinage de certaines valeurs critiques appelées bifurcations. Dans ces conditions, peut-on construire des espaces réduits \mathbf{V}_r et \mathbf{W}_r qui soient par exemple fiables sur l’intervalle de nombre de Mach $[M_1, M_2]$? Peut-on tout simplement conserver les modes calculés à partir de la configuration de calcul à Mach M_1 pour la configuration de calcul à Mach M_2 ? Avant tout, il nous faut introduire comment construire un système réduit paramétré à moindre coût. Pour simplifier, on suppose que la matrice \mathbf{A} dépend d’un unique paramètre λ . De plus cette dépendance est supposée affine, c’est-à-dire que la matrice peut s’écrire sous la

forme

$$\mathbf{A}(\lambda) = \lambda \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2. \quad (5.67)$$

Dans ces conditions, la matrice réduite s'exprimera

$$\mathbf{A}_r(\lambda) = \lambda \mathbf{W}_r^T \mathbf{A}_1 \mathbf{V}_r + \mathbf{W}_r^T \mathbf{A}_2 \mathbf{V}_r. \quad (5.68)$$

L'hypothèse de dépendance affine permet de calculer une bonne fois pour toute les deux matrices réduites $\mathbf{A}_r^1 = \mathbf{W}_r^T \mathbf{A}_1 \mathbf{V}_r$ et $\mathbf{A}_r^2 = \mathbf{W}_r^T \mathbf{A}_2 \mathbf{V}_r$ et de construire en temps réel la matrice réduite paramétrée

$$\mathbf{A}_r = \lambda \mathbf{A}_r^1 + \mathbf{A}_r^2. \quad (5.69)$$

Cette technique de construction temps-réel de la matrice réduite se généralise aisément au cas d'une dépendance affine par rapport à plusieurs paramètres. Dans le cas des EELs, la représentation affine est évidente si l'écoulement est uniforme. Nous nous plaçons donc dans ce cadre. Nous présentons succinctement dans la suite quelques méthodes visant à adapter, enrichir et/ou modifier les deux espaces de projection \mathbf{V}_r et \mathbf{W}_r . En général, il est nécessaire d'exploiter une quantité plus importante de données qui sont obtenues pour différentes valeurs des paramètres définies dans l'intervalle paramétrique d'expertise. Dans le contexte des méthodes apparentées à la POD, on distingue essentiellement deux approches :

- la modification des modes POD obtenus pour différentes configurations de calcul ;
- l'enrichissement de l'ensemble des solutions haute-fidélité pour construire les modes.

Dans le premier cas, on exploite directement les modes POD de différentes configurations. Dans le deuxième cas, on cherche à enrichir la base de données pour construire de meilleurs modes.

5.7.2 Exploitation des modes nominaux

Nous dénommons modes nominaux la famille de modes calculés à partir de simulations haute-fidélité pour différentes valeurs nominales du paramètre d'étude. L'objectif de ces approches est d'exploiter directement ces modes nominaux pour essayer de construire de nouveaux modes à moindre coût qui soient valables pour des valeurs différentes de celles des paramètres nominaux.

5.7.2.1 Méthode d'interpolation directe des modes nominaux

Supposons qu'on ait calculé les modes POD pour le paramètre λ_1 et pour le paramètre λ_2 . Une première idée consiste à interpoler directement les modes obtenus. Par exemple, par une méthode de point milieu, on peut tenter de déduire les modes pour le paramètre $(\lambda_1 + \lambda_2)/2$. Les modes interpolés ne sont pas orthogonaux entre eux et il est donc nécessaire d'ajouter une procédure d'orthonormalisation. Cette méthode a été testée par Lieu [168] et s'avère inefficace en général.

5.7.2.2 Développement limité des modes nominaux

Dans cette approche, on suppose que les modes POD sont une fonction de l'espace et du paramètre d'étude [135]. La connaissance des modes POD $\Phi(\mathbf{x}, \lambda_0)$ pour une configuration nominale λ_0 doit permettre de construire les modes POD $\Phi(\mathbf{x}, \lambda)$ valables pour une configuration proche $\lambda = \lambda_0 \pm \delta\lambda$. En supposant une petite variation $\delta\lambda$, les modes $\Phi(\mathbf{x}, \lambda)$ sont

approchés par un développement limité autour des modes nominaux comme suit :

$$\Phi_i(\mathbf{x}, \lambda) = \Phi_i(\mathbf{x}, \lambda_0) + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda}(x, \lambda_0) \delta \lambda + \mathcal{O}(\delta \lambda^2), \quad 1 \leq i \leq r \quad (5.70)$$

La dérivée des modes peut être estimée à l'aide de schémas aux différences finies centrées. L'ordre des schémas détermine alors le nombre de simulations haute-fidélité à effectuer au préalable. Les modes ainsi construits n'étant pas orthogonaux, il est nécessaire de rajouter encore une fois une procédure d'orthonormalisation. Cette approche ne semble pas adaptée aux problèmes hyperboliques.

5.7.2.3 Méthode d'interpolation angulaire (*Angle interpolation method*)

Cette méthode repose sur la construction d'un sous-espace $\mathbf{V}_r^\lambda = (\Phi_1^\lambda, \dots, \Phi_r^\lambda)$ orthogonal pour un paramètre λ arbitraire dans $[\lambda_1, \lambda_2]$ à partir des angles principaux (*principal angle*) et des vecteurs principaux (*principal vectors*) associés à deux sous-espaces nominaux $\mathbf{V}_r^{\lambda_1} = (\Phi_1^{\lambda_1}, \dots, \Phi_r^{\lambda_1})$ et $\mathbf{V}_r^{\lambda_2} = (\Phi_1^{\lambda_2}, \dots, \Phi_r^{\lambda_2})$ orthogonaux [37]. En pratique, le sous-espace \mathbf{V}_r^λ est calculé avec la méthode de Bjorck [37]. Les angles principaux et les vecteurs principaux y sont obtenus à partir de la SVD du produit des deux sous-espaces $\mathbf{V}_r^{\lambda_1}$ et $\mathbf{V}_r^{\lambda_2}$, soit mathématiquement

$$(\mathbf{V}_r^{\lambda_1})^T \mathbf{V}_r^{\lambda_2} = \mathbf{Y} \mathbf{\Sigma} \mathbf{Z} \quad (5.71)$$

avec $\text{diag}(\mathbf{\Sigma}) = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$. Les angles principaux sont donnés par

$$\theta_i(\lambda_1, \lambda_2) = \cos^{-1}(\sigma_i), \quad 1 \leq i \leq r \quad (5.72)$$

et les vecteurs principaux par l'expression

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{Y} \mathbf{V}_r^{\lambda_1}, \quad \mathbf{v}_r = \mathbf{Z} \mathbf{V}_r^{\lambda_2} \quad (5.73)$$

avec $\mathbf{u}_r = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$ et $\mathbf{v}_r = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$. Le sous-espace interpolé \mathbf{V}_r^λ est alors construit à partir des angles principaux interpolés comme suit

$$\theta_i(\lambda_1, \lambda) = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \theta_i(\lambda_1, \lambda_2), \quad 1 \leq i \leq r. \quad (5.74)$$

Les modes interpolés sont finalement obtenus à l'aide d'une considération géométrique et s'expriment

$$\Phi_i^\lambda = \mathbf{u}_i \cos(\theta_i(\lambda_1, \lambda)) + \frac{\mathbf{v}_i - (\mathbf{u}_i^T \mathbf{v}_i) \mathbf{u}_i}{\|\mathbf{v}_i - (\mathbf{u}_i^T \mathbf{v}_i) \mathbf{u}_i\|_2} \sin(\theta_i(\lambda_1, \lambda)), \quad 1 \leq i \leq r. \quad (5.75)$$

La méthode suppose qu'entre deux sous-espaces, la "rotation" soit linéaire. Une des propriétés importantes de la méthode repose sur la conservation de l'orthogonalité dans le sous-espace construit. La méthode a été récemment introduite en aéroélasticité par Lieu [168, 169, 170] avec les EELs comme modèle fluide. En pratique, un premier espace réduit est construit par méthode POD pour un nombre de Mach M_1 donné. Ensuite, un second espace réduit est construit de la même manière mais pour un nombre de Mach $M_2 > M_1$. La méthode d'interpolation angulaire permet alors de construire un espace réduit pour tout nombre de Mach intermédiaire situé entre M_1 et M_2 . De très bons résultats semblent être obtenus tant que de faibles écarts entre M_1 et M_2 sont considérés contrairement à la méthode d'interpolation directe. Malheureusement, il y a peu de résultats présentés sur des cast-tests académiques. La méthode est par ailleurs limitée à l'exploitation de deux sous-espaces. Une interprétation géométrique simple de ce type d'interpolation est montrée sur la figure 5.15 en la comparant avec une interpolation classique. Amsallem [8, 9] a montré que la méthode d'interpolation

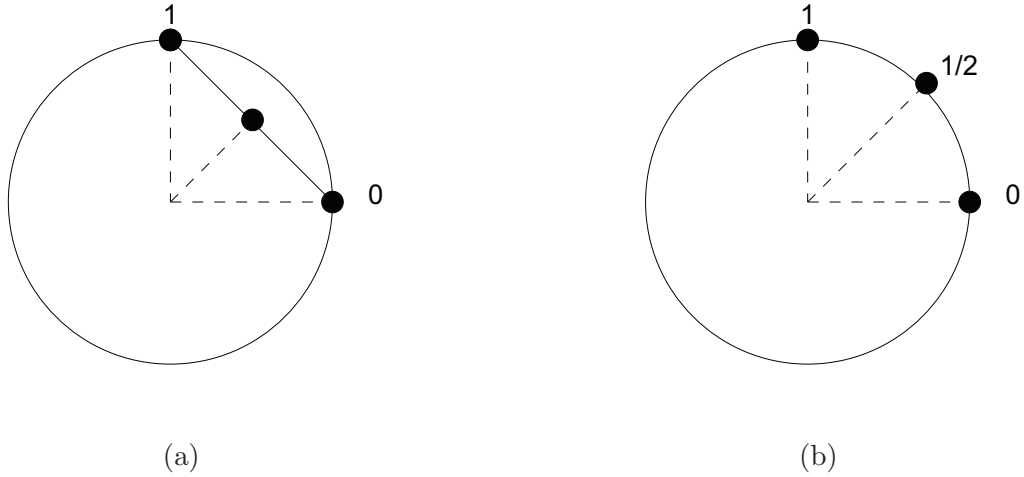


FIGURE 5.15 – (a) Interpolation classique (b) Interpolation angulaire

angulaire est en fait un cas particulier de la méthode d'interpolation basée sur la variété de Grassmann (*Grassmann manifold interpolation method*). Il s'agit de concepts issus de la géométrie différentielle qui permettent d'étendre le concept de l'interpolation angulaire entre deux sous-espaces à l'exploitation géométrique d'un nombre arbitraire de sous-espaces $\mathbf{V}_r^{\lambda_i}$. De meilleures prédictions sont obtenues à partir du moment où le nombre de sous-espaces est supérieur à 3 ce qui est plutôt rassurant car on exploite davantage d'informations. On peut montrer que la méthode d'interpolation des variétés est équivalente à la méthode d'interpolation angulaire si on exploite seulement deux sous-espaces. Ces méthodes semblent assez difficiles à mettre en oeuvre pour un produit scalaire non canonique. Par exemple, si on souhaite utiliser le produit scalaire basé sur le symétriseur pour construire les modes POD, on obtient des sous-espaces biorthonormaux. Amsallem [8] suggère d'appliquer d'une part une interpolation de variétés aux espaces de projection droits et d'autre part une interpolation de variétés aux espaces de projection gauches. Les espaces interpolés obtenus ne seront pas biorthonormaux par contre. La méthode est par conséquent moins naturelle si on souhaite utiliser de meilleurs produits scalaires pour construire les sous-espaces réduits. Récemment, la méthode a été étendue par Degroote [79] à l'interpolation des matrices réduites. Cette idée est intéressante pour des applications où il n'est pas nécessaire de reconstruire la solution comme par exemple pour des prédictions de stabilité suite à la variation du paramètre d'étude voire de l'écoulement de base. En particulier, la recherche des bifurcations est une application prometteuse. Il s'agit par exemple de prédire si une instabilité est provoquée par une bifurcation de Hopf. Dans ce cas, on peut prédire l'apparition d'une solution périodique en temps (cycle limite).

5.7.3 Extension du gramien de contrôlabilité

Dans le contexte des systèmes hyperboliques, nous proposons d'étendre la définition du gramien de contrôlabilité dans le domaine paramétrique pour un produit scalaire arbitraire par l'expression

$$\mathcal{G}_c = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{t_0}^{t_f} e^{\mathbf{A}(\lambda)t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(\lambda)t} dt d\lambda \mathcal{Q}. \quad (5.76)$$

Il s'agit de pouvoir conserver la notion de contrôlabilité dans le domaine paramétrique. Par ailleurs, l'introduction de \mathcal{Q} permet de ne pas se limiter au produit scalaire basé sur le gramien d'observabilité dans le contexte du contrôle. En effet, nous avons montré numériquement que si toutes les inconnues sont observées, le produit scalaire basé sur le symétriseur fournit un

meilleur compromis en terme d'optimalité, de stabilité et de coûts de calcul. L'approximation numérique du gramien de contrôlabilité ainsi défini est effectuée à l'aide de la méthode des clichés classique. Pour ce faire, le gramien de contrôlabilité paramétrique introduit peut aussi s'exprimer

$$\mathcal{G}_c = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{\mathbf{A}(\lambda)t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(\lambda)t} d\lambda \mathcal{Q} \quad (5.77)$$

avec $\lambda = (t, \lambda)$. Sous cette forme, on peut appliquer la méthode des clichés avec la matrice des clichés

$$\mathbf{X} = [e^{\mathbf{A}(\lambda_1)t_1} \mathbf{B}, \dots, e^{\mathbf{A}(\lambda_1)t_m} \mathbf{B}, \dots, e^{\mathbf{A}(\lambda_k)t_1} \mathbf{B}, \dots, e^{\mathbf{A}(\lambda_k)t_m} \mathbf{B}, \dots, e^{\mathbf{A}(\lambda_l)t_1} \mathbf{B}, \dots, e^{\mathbf{A}(\lambda_l)t_m} \mathbf{B}] \quad (5.78)$$

où $(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ représente les points de quadrature pour l'approximation de l'intégrale paramétrique $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}$. Cette approche augmente la dimension de la matrice des clichés proportionnellement au nombre de solutions paramétriques utiles à la construction du modèle réduit. Le coût de stockage peut donc devenir beaucoup plus important. Cette approche est équivalente à la méthode *global POD*. Elle est simplement adaptée au concept de contrôlabilité. Les méthodes basées sur la modification des modes, qui ont été présentées dans la section précédente, ont été introduites en grande partie pour améliorer la *global POD*. Le principal problème qui se pose avec la *global POD* est le coût de stockage et la perte d'optimalité de la dimension du modèle réduit [8]. Concernant le coût de stockage, il est en fait identique aux méthodes d'interpolation des modes puisque le calcul des modes nominaux pour différents paramètres nécessite aussi la connaissance des clichés à différentes valeurs des paramètres. Par ailleurs, l'argument reposant sur le manque d'optimalité du modèle réduit peut être résolu en appliquant la méthode d'amélioration temps-réel présentée plus haut. Le coût supplémentaire se limite donc à la construction de la matrice de corrélation et l'estimation de ses modes propres. On pourrait autrement, si les ressources informatiques sont insuffisantes, construire des modèles réduits par morceaux afin de diminuer la dimension de la matrice de corrélation. Pour terminer, la *global-POD* nous semble, actuellement, être la méthode de réduction paramétrique la plus fiable. Sur les graphiques de la figure 5.16, on compare la méthode naïve (qui consiste à conserver les modes calculés pour une seule valeur du paramètre), la méthode d'interpolation angulaire et la méthode *global-POD* (qui consistent à exploiter des solutions pour au moins deux valeurs du paramètre). Ici, la simulation correspond à l'évolution d'une perturbation acoustique dans un écoulement uniforme. L'intervalle du nombre de Mach considéré est $[0.4, 0.48]$. Les modes seront ici toujours calculés à partir du produit scalaire canonique. Dans le cas de la méthode naïve, les modes nominaux sont calculés à $M = 0.48$ et on regarde s'ils sont encore exploitables à $M = 0.44$. Sur l'image (a) de la figure 5.16, on compare la solution obtenue avec le modèle réduit avec la solution de référence à $M = 0.44$. On constate un déphasage important entre les deux solutions. La méthode naïve n'est donc pas applicable pour une variation du nombre de Mach. La nature hyperbolique des EELs induit des modes POD qui sont topologiquement trop dépendants de l'unique configuration de calcul nominale à $M = 0.48$. On teste alors respectivement la méthode d'interpolation angulaire et la méthode *global POD* (image (b) et (c) respectivement). Dans le cas de la méthode d'interpolation angulaire, les modes POD sont calculés pour $M = 0.4$ puis pour $M = 0.48$. Enfin, pour appliquer la *global POD*, les clichés obtenus à $M = 0.48$ sont concaténés aux clichés obtenus à $M = 0.4$ dans la matrice des clichés. On observe alors que la méthode d'interpolation angulaire est capable de corriger le déphasage seulement dans la première partie de la simulation. L'erreur commise dans la seconde partie de la simulation est certainement liée à une incapacité des modes angulaires à dissiper l'énergie du système, dès que le nombre de Mach ne correspond plus aux valeurs nominales. C'est finalement la *global POD* qui produit le meilleur résultat puisque les deux courbes se superposent. Notons que nous avons considéré les mêmes clichés et le même nombre

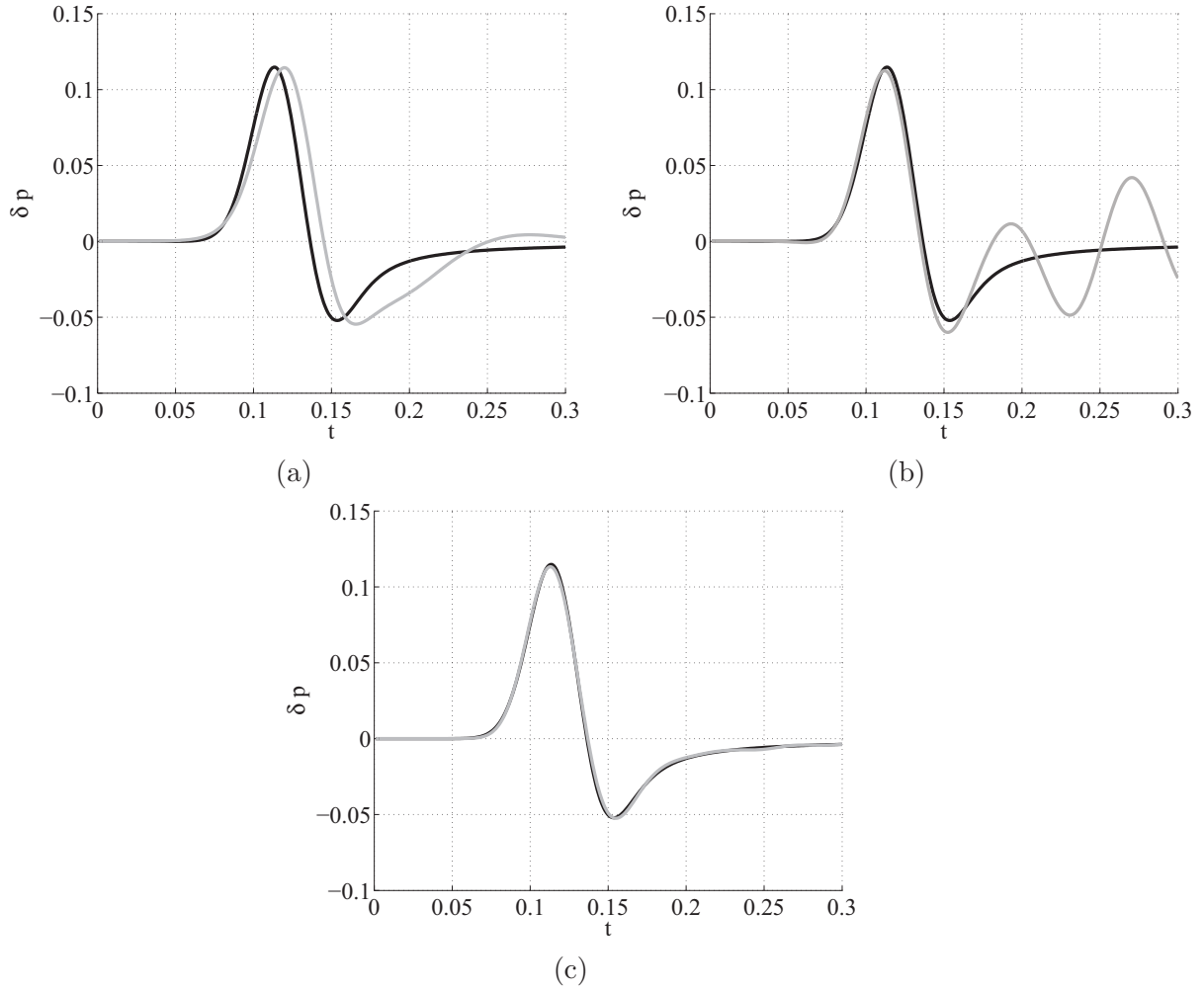


FIGURE 5.16 – Prédiction *online* de la solution à $M = 0.44$. En noir solution de référence et en gris solution reconstruite à partir du modèle réduit. (a) avec la méthode naive (b) avec la méthode d'interpolation angulaire (c) avec la méthode de contrôlabilité paramétrique

de modes ($r = 50$) pour construire les modes interpolés à $M = 0.44$, de manière à pouvoir comparer les méthodes dans les mêmes conditions.

Chapitre 6

Développement d'un code de calcul réduit pour les écoulements compressibles linéarisés en géométries complexes

6.1 EELs en coordonnées curvilignes

6.1.1 Coordonnées curvilignes

L'utilisation de schémas aux différences finies nécessite normalement de travailler avec des grilles cartésiennes pour pouvoir approcher les dérivées de manière naturelle. Par exemple, il faut donner un sens aux positions $i - 1$ et $i + 1$ dans la direction des abscisses ou encore $j - 1$ et $j + 1$ dans la direction des ordonnées. La prise en compte de géométries complexes avec de tels schémas numériques n'est donc *a priori* pas naturelle. La solution envisagée pour outrepasser cette difficulté fondamentale est d'étendre l'application de ces schémas à des grilles curvilignes. Pour ce faire, les EELs sont réécrites en coordonnées généralisées (ξ, η) à partir du changement de variables

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta). \quad (6.1)$$

La figure 6.1 illustre le changement de variables que nous appliquerons dans la suite. Il s'agit de la transformation d'une grille curviligne correspondant au domaine physique en une grille cartésienne correspondant au domaine transformé dans lequel les schémas aux différences finies pourront être appliqués naturellement. En appliquant les propriétés de dérivation d'une fonction composée, les dérivées du domaine physique s'expriment par

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

dans le domaine transformé où \mathbf{J} représente la matrice jacobienne de la transformation. Les termes de la matrice jacobienne traduisent les variations des coordonnées transformées en fonction de celles des coordonnées physiques. Or, par construction, on ne peut calculer directement que les variations des coordonnées physiques par rapport aux coordonnées transformées. Ce problème de métriques est résolu en se rappelant la relation de réciprocity qui existe entre les coordonnées physiques et transformées. En effet, réciproquement, les dérivées du domaine

transformé s'expriment

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

L'identification des deux jacobiniennes $\mathbf{J} = \tilde{\mathbf{J}}^{-1}$ permet d'exprimer les termes de la matrice \mathbf{J} en fonction des termes calculables de la matrice $\tilde{\mathbf{J}}$. L'inverse de la matrice $\tilde{\mathbf{J}}$ est égale à

$$\tilde{\mathbf{J}}^{-1} = \frac{1}{|\tilde{\mathbf{J}}|} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

avec $|\mathbf{J}|$ le jacobien de la transformation donnée par

$$|\mathbf{J}| = \partial_{\xi} x \partial_{\eta} y - \partial_{\eta} x \partial_{\xi} y \quad (6.5)$$

avec les notations allégées

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} := \xi_x, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} := \xi_y, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} := \eta_x, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} := \eta_y. \quad (6.6)$$

Par identification, les relations remarquables

$$\begin{aligned} \partial_x \xi &= \frac{1}{|\mathbf{J}|} \partial_{\eta} y, & \partial_y \xi &= -\frac{1}{|\mathbf{J}|} \partial_{\eta} x \\ \partial_x \eta &= -\frac{1}{|\mathbf{J}|} \partial_{\xi} y, & \partial_y \eta &= \frac{1}{|\mathbf{J}|} \partial_{\xi} x \end{aligned} \quad (6.7)$$

sont déduites. Ces formules sont d'un grand intérêt pratique. Les métriques étant exprimées en fonction des coordonnées transformées, leur calcul s'effectue facilement en utilisant des schémas aux différences finies sur le domaine transformé qui est cartésien. Notons qu'en raisonnant sur les dérivées croisées, les métriques doivent vérifier les invariants

$$\partial_{\xi} \left(\frac{\xi_x}{|\mathbf{J}|} \right) + \partial_{\eta} \left(\frac{\eta_x}{|\mathbf{J}|} \right) = 0, \quad \partial_{\xi} \left(\frac{\xi_y}{|\mathbf{J}|} \right) + \partial_{\eta} \left(\frac{\eta_y}{|\mathbf{J}|} \right) = 0. \quad (6.8)$$

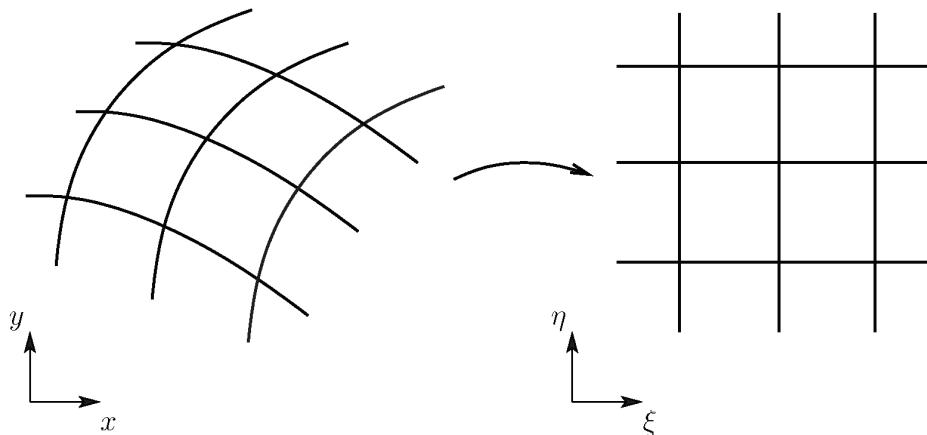


FIGURE 6.1 – Transformation d'une grille curviligne en une grille cartésienne.

Nous sommes maintenant en mesure de formuler les EELs dans le domaine transformé.

6.1.2 EELs en coordonnées curvilignes

En appliquant les relations de transformation introduites ci-dessus, les EELs s'établissent dans le domaine transformé comme suit

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \delta \mathbf{q} / |\mathbf{J}|}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} [(\xi_x \mathbf{E} + \xi_y \mathbf{F}) \delta \mathbf{q} / |\mathbf{J}|] + \frac{\partial}{\partial \eta} [(\eta_x \mathbf{E} + \eta_y \mathbf{F}) \delta \mathbf{q} / |\mathbf{J}|] \\ & - \underbrace{[\partial_\xi(\xi_x / |\mathbf{J}|) + \partial_\eta(\eta_x / |\mathbf{J}|)] \mathbf{E} \delta \mathbf{q}}_{=0} - \underbrace{[\partial_\xi(\xi_y / |\mathbf{J}|) + \partial_\eta(\eta_y / |\mathbf{J}|)] \mathbf{F} \delta \mathbf{q}}_{=0} + \tilde{\mathbf{R}} \delta \mathbf{q} / |\mathbf{J}| = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Finalement, les EELs s'expriment dans le domaine transformé

$$\frac{\partial \delta \mathbf{q}}{\partial t} + |\mathbf{J}| \left[\frac{\partial}{\partial \xi} [(\xi_x \mathbf{E} + \xi_y \mathbf{F}) \delta \mathbf{q} / |\mathbf{J}|] + \frac{\partial}{\partial \eta} [(\eta_x \mathbf{E} + \eta_y \mathbf{F}) \delta \mathbf{q} / |\mathbf{J}|] \right] + \tilde{\mathbf{R}} \delta \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (6.10)$$

que l'on peut réécrire sous la forme quasi-conservative

$$\frac{\partial \delta \mathbf{q}}{\partial t} + |\mathbf{J}| \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{E}^\xi \delta \mathbf{q}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\mathbf{F}^\eta \delta \mathbf{q}) \right] + \tilde{\mathbf{R}} \delta \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (6.11)$$

avec

$$|\mathbf{J}| \mathbf{E}^\xi \delta \mathbf{q} = \bar{\mathbf{u}}^T \nabla \xi \delta \mathbf{q} + \begin{pmatrix} \bar{\rho} \delta \mathbf{u}^T \nabla \xi \\ \xi_x \delta p \\ \xi_y \delta p \\ \bar{c}^2 \bar{\rho} \delta \mathbf{u}^T \nabla \xi \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{J}| \mathbf{F}^\eta \delta \mathbf{q} = \bar{\mathbf{u}}^T \nabla \eta \delta \mathbf{q} + \begin{pmatrix} \bar{\rho} \delta \mathbf{u}^T \nabla \eta \\ \eta_x \delta p \\ \eta_y \delta p \\ \bar{c}^2 \bar{\rho} \delta \mathbf{u}^T \nabla \eta \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

La matrice de réaction dépend des gradients du champ de vitesse de base. Elle nécessite un traitement particulier. Elle est réécrite dans un premier temps sous la forme

$$\tilde{\mathbf{R}} \delta \mathbf{q} = \mathbf{R}^u \partial_x \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{R}^v \partial_y \bar{\mathbf{q}} \quad (6.13)$$

avec $\bar{\mathbf{q}} = (\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{p})^T$ et

$$\mathbf{R}^u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta \rho \bar{u} + \bar{\rho} \delta u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \rho \bar{v} + \bar{\rho} \delta v & 0 \\ 0 & \tilde{\gamma}(\bar{u} \bar{\rho} \delta u + \delta p) & \tilde{\gamma} \bar{u} \bar{\rho} \delta v & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta \rho \bar{v} + \bar{\rho} \delta v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \rho \bar{u} + \bar{\rho} \delta u & 0 \\ 0 & \tilde{\gamma} \bar{v} \bar{\rho} \delta u & \tilde{\gamma}(\bar{v} \bar{\rho} \delta v + \delta p) & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Sous cette forme, il est aisé de passer en coordonnées curvilignes. La matrice de réaction est finalement exprimée sous la forme

$$\tilde{\mathbf{R}} \delta \mathbf{q} = \mathbf{R}^\xi \partial_\xi \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{R}^\eta \partial_\eta \bar{\mathbf{q}} \quad (6.15)$$

avec

$$\mathbf{R}^\xi = \xi_x \mathbf{R}^u + \xi_y \mathbf{R}^v, \quad \mathbf{R}^\eta = \eta_x \mathbf{R}^u + \eta_y \mathbf{R}^v, \quad (6.16)$$

ce qui implique finalement que

$$\mathbf{R}^\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta \rho \nabla \xi^T \bar{\mathbf{u}} + \bar{\rho} \nabla \xi^T \delta \mathbf{u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \rho \nabla \xi^T \bar{\mathbf{u}} + \bar{\rho} \nabla \xi^T \delta \mathbf{u} & 0 \\ 0 & \tilde{\gamma}(\bar{\rho} \delta u \nabla \xi^T \bar{\mathbf{u}} + \xi_x \delta p) & \tilde{\gamma}(\bar{\rho} \delta v \nabla \xi^T \bar{\mathbf{u}} + \xi_y \delta p) & 0 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

et

$$\mathbf{R}^\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta\rho\nabla\eta^T\bar{\mathbf{u}} + \bar{\rho}\nabla\eta^T\delta\mathbf{u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta\rho\nabla\eta^T\bar{\mathbf{u}} + \bar{\rho}\nabla\eta^T\delta\mathbf{u} & 0 \\ 0 & \tilde{\gamma}(\bar{\rho}\delta u\nabla\eta^T\bar{\mathbf{u}} + \eta_x\delta p) & \tilde{\gamma}(\bar{\rho}\delta v\nabla\eta^T\bar{\mathbf{u}} + \eta_y\delta p) & 0 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

avec $\nabla\xi = (\xi_x, \xi_y)^T$ et $\nabla\eta = (\eta_x, \eta_y)^T$. Il est important d'écrire sous cette forme ces différents termes pour pouvoir traiter naturellement les EELs en présence d'une condition aux limites de type paroi. C'est l'objet du paragraphe suivant.

6.1.3 Condition aux limites de paroi fixe

La condition aux limites de glissement pour le modèle d'Euler non linéaire est définie par

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)^T \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall t. \quad (6.19)$$

Par hypothèse, le champ de vitesse stationnaire $\bar{\mathbf{u}}$ doit vérifier cette condition $\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{n} = 0$ puisqu'il est solution du modèle. Cette hypothèse impose aux perturbations de vérifier aussi cette condition. En effet, la linéarisation de la condition de glissement donne respectivement

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{u}^T \mathbf{n} \\ &= (\bar{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u})^T \mathbf{n} \\ &= \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{n} + \delta\mathbf{u}^T \mathbf{n} \\ &= \delta\mathbf{u}^T \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

En coordonnées curvilignes, on montre que la normale s'identifie simplement à $\bar{\mathbf{n}} = \nabla\xi$ ou $\bar{\mathbf{n}} = \nabla\eta$ suivant la position de la paroi sur la grille de calcul. La figure 6.2 illustre la normale à une grille curviligne. Dans la section qui précède, nous avons justement formulé les EELs en coordonnées curvilignes en faisant apparaître clairement ces deux gradients. Par conséquent, nous pouvons distinguer deux cas pour le traitement des EELs sur une paroi :

- si $\bar{\mathbf{n}} = \nabla\xi$ alors $\nabla\xi^T \bar{\mathbf{u}} = 0$, $\nabla\xi^T \delta\mathbf{u} = 0$ et les EELs se réduisent à

$$\mathbf{F}_{wall}^\eta = \mathbf{F}^\eta, \quad \mathbf{R}_{wall}^\eta = \mathbf{R}^\eta, \quad |\mathbf{J}|\mathbf{E}_{wall}^\xi \delta\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_x \delta p \\ \xi_y \delta p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{wall}^\xi = \tilde{\gamma} \delta p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_x & \xi_y & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

- si $\bar{\mathbf{n}} = \nabla\eta$ alors $\nabla\eta^T \bar{\mathbf{u}} = 0$, $\nabla\eta^T \delta\mathbf{u} = 0$ et les EELs se réduisent à

$$\mathbf{E}_{wall}^\xi = \mathbf{E}^\xi, \quad \mathbf{R}_{wall}^\xi = \mathbf{R}^\xi, \quad |\mathbf{J}|\mathbf{F}_{wall}^\eta \delta\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_x \delta p \\ \eta_y \delta p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{wall}^\eta = \tilde{\gamma} \delta p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_x & \eta_y & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

La modélisation de paroi mobile est plus compliquée. Nous lui consacrons la section suivante.

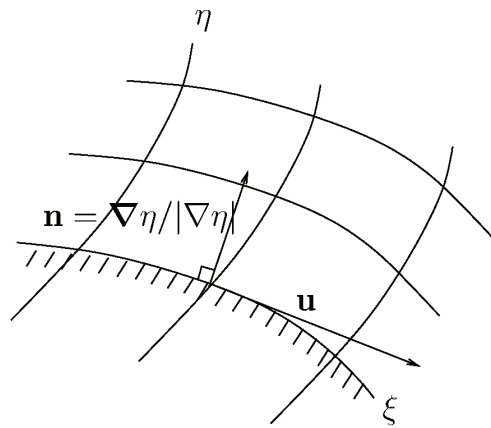


FIGURE 6.2 – Normale en coordonnées curvilignes

6.2 Conditions aux limites de paroi vibrante

La prise en compte d'une paroi mobile est importante dans les applications physiques. La mobilité d'une paroi est liée à la présence d'une structure qui peut être en mouvement de corps rigide (translation et/ou rotation) et/ou de déformation. Jusqu'à présent, nous nous sommes toujours placés dans l'hypothèse d'un domaine de calcul fixe. Cette hypothèse était pleinement justifiée dans la mesure où les parois restaient immobiles. Les équations d'Euler non linéaires étaient alors écrites en formulation eulérienne sur un domaine Ω fixe. Si maintenant, on souhaite décrire le comportement d'un fluide en présence d'une paroi mobile notée $\Gamma(t)$, le domaine fluide devient par conséquent une variable du temps notée $\Omega(t)$. Les équations d'Euler non linéaires locales restent inchangées. En effet, le volume de contrôle est arbitraire dans les équations intégrales des lois de conservation. En revanche, les variables spatiales ne sont plus indépendantes du temps ce qui va compliquer notablement les choses.

6.2.1 Modèle d'Euler en milieu mobile

Pour ne pas alourdir la formulation mathématique, des notations vectorielles sont utilisées dans la suite. Sur $\Omega(t)$, les équations d'Euler non linéaires s'expriment en formulation eulérienne

$$\partial_t \mathbf{M}(\mathbf{q}_e) + \nabla_{|\mathbf{x}_e} \cdot \mathbf{F}_e(\mathbf{q}_e) = \mathbf{0} \quad (6.23)$$

avec

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_e) = \begin{pmatrix} \rho_e \\ \rho_e \mathbf{u}_e \\ \rho_e E_e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_e(\mathbf{q}_e) = \begin{pmatrix} \rho_e \mathbf{u}_e \\ \rho_e \mathbf{u}_e \otimes \mathbf{u}_e - p_e \mathbf{I}_2 \\ \rho_e \mathbf{u}_e E_e - p_e \mathbf{u}_e \end{pmatrix}. \quad (6.24)$$

La notation $\nabla_{|\mathbf{x}_e}$ signifie que les dérivées sont évaluées en $\mathbf{x}_e(t)$. L'évolution du domaine fluide $\Omega(t)$ est directement liée au mouvement de la paroi $\Gamma(t)$. Dans ce formalisme, il semble difficile de prévoir l'évolution du domaine $\Omega(t)$. Afin de surmonter ce type de problème, il est naturel d'introduire une configuration de référence, notée $\bar{\Omega}$, permettant de suivre l'évolution du domaine $\Omega(t)$ en adéquation avec l'évolution de l'interface $\Gamma(t)$. Cette idée a pour objectif de combiner les avantages des deux descriptions cinématiques eulérienne et lagrangienne. Le domaine $\Omega(t)$, qui représente le domaine fluide à la date t , est alors dénommé configuration actuelle. La configuration de référence $\bar{\Omega}$ introduite est une configuration arbitraire stationnaire. En général, elle est choisie comme étant la configuration physique du système au repos ou à l'équilibre. En particulier, la position de référence de la paroi $\bar{\Gamma}$ est définie comme la position au repos ou à l'équilibre de la paroi. Il s'agit maintenant d'exprimer les équations

d'Euler à partir du domaine de référence. La position d'un point géométrique $\mathbf{x}_e(t)$ en configuration eulérienne est désormais repérée à partir de $\bar{\Omega}$ et s'exprime donc comme une fonction du temps et d'une coordonnée de référence $\bar{\mathbf{x}}$ dans $\bar{\Omega}$ par $\mathbf{x}_e(t) = \mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t)$. Après transport en configuration de référence $\bar{\Omega}$, les équations d'Euler s'écrivent avec le formalisme dit ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*) suivant [161] :

$$\partial_t(J\mathbf{M}(\mathbf{q})) + \nabla_{|\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (6.25)$$

avec $J = \det(\mathbf{D})$ le jacobien de la transformation, $\mathbf{D} = \nabla_{|\bar{\mathbf{x}}\mathbf{x}$ le gradient des déplacements,

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho\mathbf{u} \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} J\rho(\mathbf{u} - \dot{\mathbf{x}})\mathbf{D}^{-T} \\ J[\rho\mathbf{u} \otimes (\mathbf{u} - \dot{\mathbf{x}}) - p\mathbf{I}_2]\mathbf{D}^{-T} \\ J[\rho E(\mathbf{u} - \dot{\mathbf{x}}) - p\mathbf{u}]\mathbf{D}^{-T} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{q}_e(\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t), t). \quad (6.26)$$

La formulation ALE combine les deux représentations eulérienne et lagrangienne du mouvement ce qui motive cette dénomination. Les équations d'Euler dépendent désormais de 6 variables (\mathbf{q} et \mathbf{x}) au lieu de 4 (seulement \mathbf{q}) quand le domaine est immobile.

6.2.2 EELs en présence de paroi mobile

La construction d'un modèle compressible linéarisé en présence de paroi mobile est envisageable si on se place dans l'hypothèse de petits déplacements de paroi. La source des petites perturbations compressibles est alors simplement produite par les petits mouvements de paroi. Il peut s'agir par exemple des vibrations d'une structure ou encore de petits mouvements de corps rigide (rotation et/ou translation). Il existe alors essentiellement deux approches pour construire un modèle linéarisé capable de prendre en compte ces petits déplacements de paroi :

- linéariser les équations d'Euler en domaine mobile (formulation ALE (6.26)) en introduisant un couple de perturbations $(\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{q})$ autour d'un champ solution stationnaire $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{q}})$ dans tout le domaine de calcul telles que

$$\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t), \quad \mathbf{q}(\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t), t) = \bar{\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{x}}) + \delta\mathbf{q}(\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t), t); \quad (6.27)$$

- linéariser les équations d'Euler en domaine fixe (ce qui revient à conserver les EELs) mais introduire une loi de paroi provenant de la linéarisation de la condition d'interface paroi mobile/fluide.

Avec les notations introduites, $\bar{\mathbf{x}}$ s'interprète comme la position des noeuds de calcul quand le système est au repos ou à l'équilibre. En pratique, il s'agira simplement des noeuds associés aux grilles de calcul de l'écoulement autour de l'obstacle immobile. Par ailleurs, les perturbations $\delta\mathbf{x}$ s'identifient au déplacement de la paroi pour les noeuds de calcul situés sur la paroi et à une perturbation géométrique due au déplacement de la paroi pour les noeuds de calcul n'appartenant pas à la paroi (points intérieurs). La première approche aboutit à un système d'équations couplées sur le couple de perturbations $(\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{q})$ dans tout le domaine de calcul. Pour éviter de mettre à jour le domaine de calcul au cours du post-traitement, on peut supposer par commodité que

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t), t) = \bar{\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{x}}) + \delta\mathbf{q}(\bar{\mathbf{x}}, t). \quad (6.28)$$

Dans le cadre de la thèse, nous appelons méthode à deux champs cette approche de linéarisation. D'un autre côté, dans la seconde approche, les perturbations $\delta\mathbf{x}$ n'apparaîtront que dans la loi de paroi. Par conséquent, les perturbations géométriques des points intérieurs sont négligées. On parle alors de méthode de transpiration ou méthode de linéarisation à un champ dans ce mémoire. En résumé, nous verrons qu'il n'apparaîtra que le déplacement de la paroi

dans la méthode de transpiration. En revanche, dans la méthode à deux champs, il sera nécessaire de modéliser les perturbations des noeuds de calcul à l'intérieur du domaine de calcul. Nous allons développer un peu plus ces deux méthodes distinctes afin d'effectuer un choix de modélisation pour prendre en compte des parois mobiles.

6.2.3 Méthode de linéarisation à deux champs

La méthode de linéarisation à deux champs repose sur la linéarisation du champ de variable physique \mathbf{q} et du champ de déplacement des noeuds de calcul \mathbf{x} . Il est possible d'effectuer la linéarisation soit à partir du modèle continu, soit à partir du modèle discret. Dans la première approche, il s'agit de linéariser la formulation ALE continue puis de discrétiser le modèle linéaire résultant. Dans la seconde, il s'agit de discrétiser d'abord la formulation ALE continue puis de linéariser le modèle discret résultant. Il existe peu de comparaisons des deux approches dans la littérature. Clark [69] a montré que le point crucial des deux manières de linéariser repose sur la conservativité des schémas de discrétisation associés. Nous présentons seulement la linéarisation à partir du modèle discret pour simplifier. Après semi-discrétisation spatiale, la formulation ALE peut formellement s'écrire sous la forme compacte

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) + \mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}. \quad (6.29)$$

Les notations continues sont ici abusivement reprises pour les variables discrètes. On suppose désormais connu un état d'équilibre $(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}})$ stationnaire de ce système et on cherche à prédire la réponse de cet état connu en présence de petites perturbations $(\delta\mathbf{q}, \delta\mathbf{x})$. Les perturbations introduites dans le système équilibré sont telles que $\|\delta\mathbf{x}\| \ll \bar{\mathbf{x}}$ et $\|\delta\mathbf{q}\| \ll \bar{\mathbf{q}}$. On commence par dériver au premier ordre les matrices \mathbf{M} et \mathbf{R} , ce qui donne respectivement

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \mathbf{M}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}) + \frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}})\delta\mathbf{q} + \frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}})\delta\mathbf{x} \quad (6.30)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{R}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, 0) + \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, 0)\delta\mathbf{q} + \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, 0)\delta\mathbf{x} + \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\dot{\mathbf{x}}}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, 0)\delta\dot{\mathbf{x}} \quad (6.31)$$

La solution stationnaire vérifiant $\mathbf{R}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, 0) = 0$, le modèle ALE semi-discret linéarisé s'écrit finalement :

$$\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}})\delta\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, 0)\delta\mathbf{q} = - \left[\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, 0)\delta\mathbf{x} + \left(\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}) + \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\dot{\mathbf{x}}}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, 0) \right) \delta\dot{\mathbf{x}} \right] \quad (6.32)$$

ou matriciellement sous la forme

$$\tilde{\mathbf{M}}\delta\dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{R}}\delta\mathbf{q} = \mathbf{B}_1\delta\mathbf{x} + \mathbf{B}_2\delta\dot{\mathbf{x}}. \quad (6.33)$$

La fermeture de ce système est obtenue en ajoutant un système d'équations pour $\delta\mathbf{x}$. Ce système doit régir le mouvement de la grille de calcul à partir de la simple connaissance des déplacements $\boldsymbol{\eta}$ de la paroi (ou la structure à l'interface). La condition à la limite à l'interface fluide/paroi pour le modèle de grille est donc simplement donnée par $\delta\mathbf{x} = \boldsymbol{\eta}$. En général, un comportement de structure est attribué fictivement à la grille de calcul. Ainsi, le modèle de grille est souvent formulé à l'aide du système linéaire

$$\mathbf{K}\delta\mathbf{x} = \mathbf{B}_3\boldsymbol{\eta} \quad (6.34)$$

où $\mathbf{K}\delta\mathbf{x}$ représente la semi-discrétisation de l'opérateur spatial du modèle de grille et où $\delta\mathbf{x}$ représente les points de grille n'appartenant pas à l'interface. En général, le modèle de grille est une équation de Laplace ou un modèle élastodynamique simplifié. Le terme $\mathbf{B}_3\boldsymbol{\eta}$ provient de la condition d'interface paroi/fluide. Il n'est pas si évident de construire le terme source associé

à la déformation fictive de grille lorsqu'on raisonne directement sur la semi-discrétisation du problème. En général, des routines de différenciation automatique sont utilisées [91, 278] de manière à ne pas trop modifier la structure du code non linéaire. Autrement, il est nécessaire de revenir à la formulation ALE continue pour le construire plus naturellement. Brièvement, la linéarisation du modèle continu peut s'effectuer facilement en se rappelant que pour de petits déplacements, le jacobien J et la matrice de déformation \mathbf{D}^{-T} s'approchent au premier ordre par [78]

$$J = 1 + \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \cdot \delta \mathbf{x}, \quad \mathbf{D}^{-T} = \mathbf{I}_2 - (\nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \delta \mathbf{x})^T. \quad (6.35)$$

Il s'agit alors d'introduire les différentes approximations au premier ordre de chaque grandeur physique et géométrique présente dans le modèle non linéaire puis d'induire le modèle linéarisé après avoir négligé tous les termes d'ordre strictement supérieur à 1, en évacuant la solution stationnaire et en passant au second membre tous les termes qui dépendent uniquement de $\delta \mathbf{x}$, $\delta \dot{\mathbf{x}}$ et du champ moyen $\bar{\mathbf{q}}$. L'approche reste très similaire à la méthode de linéarisation semi-discrète présentée précédemment, cependant le modèle linéarisé est désormais écrit en chaque point géométrique sous forme d'équations aux dérivées partielles, indépendamment de la discrétisation spatiale. Ces équations peuvent alors être implémentées de manière totalement indépendante du code de calcul non linéaire sans faire appel à une méthode de différenciation automatique [70].

Remarque 1 En utilisant la relation (6.34), on peut construire formellement un modèle fluide linéarisé avec le second membre

$$\tilde{\mathbf{M}}\delta \mathbf{q} + \hat{\mathbf{R}}\delta \mathbf{q} = \mathbf{B}_1 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_3 \eta + \mathbf{B}_2 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_3 \dot{\eta}. \quad (6.36)$$

En pratique, un tel second membre n'est pas construit car il nécessite l'inversion de la matrice de raideur fictive.

6.2.4 Méthode de linéarisation à un champ : transpiration

La méthode de linéarisation précédente est relativement naturelle dans la mesure où elle consiste à linéariser directement la formulation ALE. Il s'agit en fait d'une approche de deuxième niveau en terme de modélisation. Le modèle linéaire obtenu présente en effet un caractère heuristique car il est nécessaire de modéliser fictivement la déformation des points de grille du domaine intérieur. Par ailleurs, la construction du terme source associé complexifie les développements informatiques. Une autre solution plus simpliste mais plus pratique consiste à conserver les équations d'Euler linéarisées écrites pour un domaine fixe et à construire une loi de paroi obtenue en général par simple linéarisation de la loi de paroi non linéaire écrite en configuration actuelle. La notion de transpiration a été introduite par Lighthill [171] qui considérait l'interface fluide-structure comme une surface perméable, à travers laquelle le fluide coule avec une vitesse, dite de transpiration, déterminée à partir du déplacement effectif de l'interface fluide-structure [96].

6.2.4.1 Approche classique

Il s'agit de linéariser la condition d'interface fluide-paroi non linéaire

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t), t)^T \mathbf{n}(\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t), t) = \mathbf{u}_s(\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t), t)^T \mathbf{n}(\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t), t) \quad (6.37)$$

où \mathbf{u}_s est la vitesse de la paroi. Les différentes variables en jeu sont définies en configuration actuelle. Cette condition de continuité correspond à la nullité du flux de masse à travers la paroi et peut être démontrée en remontant aux équations de bilan. Notre but est ici d'extrapoler cette condition de paroi afin d'estimer cette dernière en configuration de référence pour les perturbations de vitesse. Dans un premier temps, les approximations linéaires suivantes sont

établies :

$$\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \bar{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\eta}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (6.38)$$

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t), t) = \dot{\boldsymbol{\eta}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \quad (6.39)$$

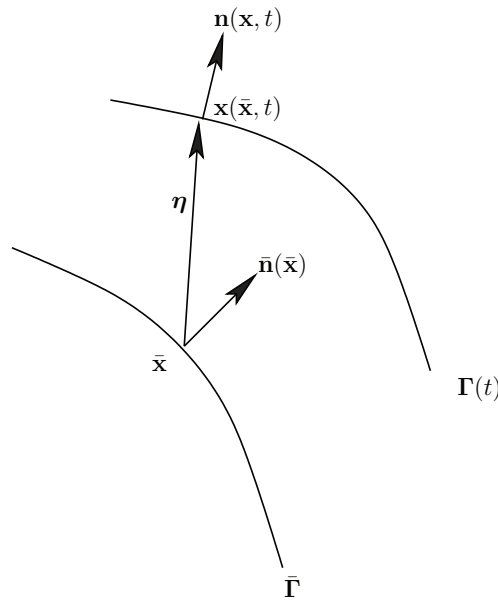
$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t), t) = \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla \bar{\mathbf{u}} \boldsymbol{\eta} + \delta \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, t) \quad (6.40)$$

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t), t) = \bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}}) + \delta \mathbf{n}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (6.41)$$

Ces approximations sont ensuite substituées dans la condition (6.37) et les termes du second ordre sont négligés après développement des produits. Il reste finalement :

$$\delta \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, t)^T \bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}}) = \dot{\boldsymbol{\eta}}(\bar{\mathbf{x}}, t)^T \bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}}) - (\nabla \bar{\mathbf{u}} \boldsymbol{\eta})^T \bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}}) - \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}})^T \delta \mathbf{n}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (6.42)$$

La condition cinématique portant sur $\delta \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ à la paroi est complètement définie sur la surface de référence $\bar{\Gamma}$ du domaine de référence $\bar{\Omega}$. Il reste à expliciter la perturbation de la normale $\delta \mathbf{n}$. Dans le cas d'un mouvement de corps rigide bidimensionnel, on conçoit bien que la normale en configuration actuelle est obtenue par simple rotation de la normale en configuration de référence. Dans le cas général, les formules proposées pour la perturbation de la normale, utilisent souvent des notations de géométrie différentielle difficilement réexploitables dans le système de coordonnées que nous utilisons en pratique [115, 130, 191, 269].



6.2.4.2 Justification mathématique

Dans cette approche, aucune déformation n'est supposée à l'intérieur du domaine du calcul et particulièrement pour les points de grille en proche paroi. Intuitivement, cela s'appréhende si on imagine des perturbations d'amplitudes inférieures à la plus courte distance séparant un noeud de calcul situé sur la paroi d'un noeud de calcul situé au voisinage de celle-ci. D'un point de vue mathématique, la transpiration s'apparente aussi à la méthode de linéarisation de Hadamard [25]. La transpiration peut aussi être perçue comme une généralisation des conditions de paroi pour les modèles potentiels linéarisés [68]. Fernández [96] a proposé une justification mathématique de la transpiration dans le cas où le domaine Ω est suffisamment régulier (différentiable). De plus, la loi de paroi obtenue ne fait intervenir que des dérivées cartésiennes ce qui permet de contourner la difficulté d'ordre géométrique concernant le calcul de la perturbation de la normale. Les fluctuations sont désormais définies dans le domaine $\bar{\Omega}$

par

$$\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t) \quad (6.43)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t), t) = \bar{\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{x}}) + \delta\mathbf{q}(\bar{\mathbf{x}}, t) + \bar{\nabla}\bar{\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{x}})\delta\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t) \quad (6.44)$$

Fernàndez montre, à partir de la définition de cette décomposition, qu'il n'est pas nécessaire de perturber les noeuds de calcul n'appartenant pas à la paroi. En d'autres termes, il établit une relation qui ramène à l'interface fixe les effets du mouvement du volume de contrôle fluide. A la paroi, la vitesse fluctuante à la normale s'exprime, en deux dimensions, par :

$$\delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{n}} = \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \bar{\mathbf{n}} - (\nabla \bar{\mathbf{u}} \boldsymbol{\eta})^T \bar{\mathbf{n}} - \bar{\mathbf{u}}^T [(\nabla \cdot \boldsymbol{\eta} \mathbf{I}_2 - (\nabla \boldsymbol{\eta})^T) \bar{\mathbf{n}}] \quad (6.45)$$

$$= \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \bar{\mathbf{n}} - (\nabla \bar{\mathbf{u}} \boldsymbol{\eta})^T \bar{\mathbf{n}} - ([\nabla \cdot \boldsymbol{\eta} \mathbf{I}_2 - \nabla \boldsymbol{\eta}] \bar{\mathbf{u}})^T \bar{\mathbf{n}} \quad (6.46)$$

$$= \underbrace{\dot{\boldsymbol{\eta}}}_{(1)} - \underbrace{\nabla \bar{\mathbf{u}} \boldsymbol{\eta}}_{(2)} - \underbrace{([\nabla \cdot \boldsymbol{\eta} \mathbf{I}_2 - \nabla \boldsymbol{\eta}] \bar{\mathbf{u}})^T}_{(3)} \bar{\mathbf{n}} \quad (6.47)$$

avec $\boldsymbol{\eta}(\bar{\mathbf{x}}, t) = (\eta_x(\bar{\mathbf{x}}, t), \eta_y(\bar{\mathbf{x}}, t))^T$ le vecteur déplacement de la paroi, $\bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}}) = (n_x(\bar{\mathbf{x}}), n_y(\bar{\mathbf{x}}))^T$ la normale à la paroi en configuration de référence, \mathbf{I}_2 la matrice identité d'ordre 2 et

$$\nabla \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \partial_{\bar{x}} \eta_x & \partial_{\bar{y}} \eta_x \\ \partial_{\bar{x}} \eta_y & \partial_{\bar{y}} \eta_y \end{pmatrix}, \quad \nabla \bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \partial_{\bar{x}} \bar{u} & \partial_{\bar{y}} \bar{u} \\ \partial_{\bar{x}} \bar{v} & \partial_{\bar{y}} \bar{v} \end{pmatrix}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} \partial_{\bar{x}} \eta_x + \partial_{\bar{y}} \eta_y & 0 \\ 0 & \partial_{\bar{y}} \eta_y + \partial_{\bar{x}} \eta_x \end{pmatrix}, \quad (6.48)$$

Sous forme développée, la loi de paroi s'exprime encore

$$\delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{n}} = \mathfrak{F}(\boldsymbol{\eta}, \bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{n}} \quad (6.49)$$

avec

$$\mathfrak{F}(\boldsymbol{\eta}, \bar{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} \dot{\eta}_x - (\partial_{\bar{x}} \bar{u} \eta_x + \partial_{\bar{y}} \bar{u} \eta_y) - (\partial_{\bar{y}} \eta_y \bar{u} - \partial_{\bar{y}} \eta_x \bar{v}) \\ \dot{\eta}_y - (\partial_{\bar{x}} \bar{v} \eta_x + \partial_{\bar{y}} \bar{v} \eta_y) - (-\partial_{\bar{x}} \eta_y \bar{u} + \partial_{\bar{x}} \eta_x \bar{v}) \end{pmatrix}. \quad (6.50)$$

Le terme (1) modélise seulement l'entraînement du fluide à la vitesse de la paroi. Il est prépondérant à haute-fréquences. Le terme (2) représente les effets liés à la présence d'un écoulement non uniforme. Il provient du transport de l'écoulement stationnaire sur les coordonnées actuelles. Il est nul dans le cas des écoulements uniformes ou au repos et d'autant moins négligeable que les gradients de l'écoulement sont prononcés au voisinage de la paroi. Enfin, le terme (3) de la formule de transpiration correspond typiquement à la déformation de la normale entre la configuration de référence et la configuration actuelle. En 2D, il correspond par exemple à la rotation de la normale en configuration de référence et on montre que ce terme de rotation dépend uniquement des dérivées tangentielles des composantes du vecteur déplacement à la paroi [217]. Notons pour terminer que le vecteur normal \mathbf{n} en configuration déformée est relié au vecteur normal $\bar{\mathbf{n}}$ en configuration de référence par l'expression

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{D}^{-T} \bar{\mathbf{n}}}{\|\mathbf{D}^{-T} \bar{\mathbf{n}}\|} \quad (6.51)$$

d'après la théorie des milieux continus. En exploitant cette relation, on retrouve la formule de transpiration.

Remarque 2 Dans le cas d'un fluide visqueux, la condition cinématique de transpiration se simplifie puisqu'il n'est plus nécessaire de prendre en compte la perturbation de la normale [61, 96, 217].

Remarque 3 Les lois de parois mobiles en présence d'écoulements sont intimement liées aux lois d'impédances en présence d'écoulement [191].

6.2.5 Choix de la méthode de linéarisation

Quelle méthode choisir ? La méthode de transpiration est clairement la plus pratique puisqu'elle nécessite uniquement une loi de paroi à intégrer dans le code de calcul des EELs. En fait, il y a une raison importante qui explique l'intérêt de la méthode à deux champs. La loi de transpiration est exacte au premier ordre mais est limitée à des écoulements et des géométries suffisamment réguliers. En effet, la loi de transpiration dépend des gradients du champ stationnaire $\bar{\mathbf{q}}$, or ces gradients peuvent être très difficiles à évaluer au voisinage des singularités géométriques ou de certains comportements aérodynamiques particuliers. C'est notamment le cas au voisinage du bord de fuite des profils aérodynamiques ou encore en présence de chocs, de décollements au sein de l'écoulement. En pratique, le gradient lié au transport du champ moyen sur les coordonnées actuelles était très souvent négligé dans les codes de calcul industriels mais une telle simplification causait une sous-estimation parfois importante des effets aérodynamiques au voisinage de la paroi. C'est un point particulièrement délicat car par exemple, dans le contexte de l'aéroélasticité, la prédiction des instabilités aéroélastiques est directement liée à ces gradients. En effet, la stabilité dynamique de la structure est prédite à partir de la connaissance de la pression à son interface. Or la pression à l'interface s'exprime normalement par

$$p(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(\bar{\mathbf{x}}) + \delta p(\bar{\mathbf{x}}, t) + \nabla \bar{p}^T \boldsymbol{\eta}(\bar{\mathbf{x}}, t). \quad (6.52)$$

La méthode de linéarisation à deux champs a été introduite pour éviter l'extrapolation du champ moyen aux coordonnées actuelles et obtenir de meilleures prédictions. L'idée remonte probablement aux travaux de Hall [127, 129]. Cette approche a été ensuite reprise et développée notamment dans le code aéroélastique de la NASA par Verdon [269]. L'idée essentielle était de remplacer la contribution liée au gradient du champ moyen $\bar{\mathbf{q}}$ par une raideur fictive au domaine de calcul [185]. À la fin des années 90, la méthode est souvent présentée à partir de la semi-discrétisation des équations ALE de façon analogue à celle décrite plus haut [56, 164, 280]. Notons que Fernandez observe dans sa thèse les limites du modèle de transpiration au voisinage des singularités géométriques et l'influence importante du gradient du champ moyen dans le cas d'une rotation rigide. Cela confirme donc bien les conclusions obtenues dans les travaux de Hall au début des années 90. Nous avons choisi d'exploiter la formule de transpiration. Nous pensons en effet que la difficulté liée à l'estimation des gradients de l'écoulement en présence de singularités pourra être contournée à l'aide de filtres numériques en paroi. Ces procédures sont en effet particulièrement exploitées en aéroacoustique pour tenter de régulariser le comportement numérique au voisinage des parois, des singularités et des écoulements complexes (choc, décollement, turbulence). Par ailleurs, à moyennes fréquences pour des applications orientées vibroacoustique par exemple, ces considérations sont certainement moins cruciales. En effet, les problèmes de nature aéroélastique font plutôt intervenir le domaine basse fréquence, or ce domaine est bien plus sensible aux gradients de l'écoulement. La validation de ce point de modélisation numérique, faisant l'objet du développement du code de calcul haute-fidélité, ne sera pas davantage discutée dans le cadre de ce mémoire qui est consacré au développement du code de calcul réduit. Dans la section suivante, nous précisons en revanche comment construire le terme source de transpiration dans le cas d'un mouvement de corps rigide puis de déformation afin de se ramener au formalisme de la théorie du contrôle. Le formalisme de la théorie du contrôle est en effet crucial, on le rappelle, pour appliquer les concepts de réduction que nous avons introduits jusqu'à présent. En particulier, l'exploitation du gramien de contrôlabilité pourra par exemple nous permettre de faire varier à volonté la fréquence du mouvement de la paroi ou encore de lui imposer une loi d'évolution temporelle arbitraire, le tout en temps réel.

6.2.6 Intégration de la transpiration dans le formalisme du contrôle

Notre objectif est de formuler le modèle haute-fidélité dans le formalisme du contrôle de manière à pouvoir construire aisément un système réduit par la suite. Notre principale contrainte est d'être capable de construire un système linéaire autonome en temps. Du point de vue des EELs, les flux et la matrice de réaction ne doivent pas être construits avec des termes qui d'une part dépendraient du temps et qui d'autre part seraient indépendants des inconnues. Reprenons les EELs en coordonnées curvilignes. Les flux et la matrice de réaction doivent être scindés en une contribution dépendante des inconnues et une contribution indépendante des inconnues liée à la loi de paroi imposée. Les EELs vont donc s'exprimer à la paroi comme suit :

- si $\bar{\mathbf{n}} = \nabla\xi$ alors $\nabla\xi^T \bar{\mathbf{u}} = 0$, $\nabla\xi^T \delta\mathbf{u} = \nabla\xi^T \mathfrak{F}(\boldsymbol{\eta}, \bar{\mathbf{u}})$ et les EELs se réduisent à

$$\mathbf{F}_{wall}^\eta = \mathbf{F}^\eta, \quad \mathbf{R}_{wall}^\eta = \mathbf{R}^\eta, \quad |\mathbf{J}|\mathbf{E}_{wall}^\xi \delta\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_x \delta p \\ \xi_y \delta p \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{b}_{wall}^{\mathbf{E}^\xi}, \quad \mathbf{R}_{wall}^\xi = \tilde{\gamma} \delta p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_x & \xi_y & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{b}_{wall}^{\mathbf{R}^\xi} \quad (6.53)$$

avec

$$\mathbf{b}_{wall}^{\mathbf{E}^\xi} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \mathfrak{F}(\boldsymbol{\eta}, \bar{\mathbf{u}})^T \nabla\xi \\ 0 \\ 0 \\ \bar{c}^2 \bar{\rho} \mathfrak{F}(\boldsymbol{\eta}, \bar{\mathbf{u}})^T \nabla\xi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{wall}^{\mathbf{R}^\xi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\rho} \nabla\xi^T \mathfrak{F}(\boldsymbol{\eta}, \bar{\mathbf{u}}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho} \nabla\xi^T \mathfrak{F}(\boldsymbol{\eta}, \bar{\mathbf{u}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.54)$$

- si $\bar{\mathbf{n}} = \nabla\eta$ alors $\nabla\eta^T \bar{\mathbf{u}} = 0$, $\nabla\eta^T \delta\mathbf{u} = \nabla\eta^T \mathfrak{F}(\boldsymbol{\eta}, \bar{\mathbf{u}})$ et les EELs se réduisent à

$$\mathbf{E}_{wall}^\xi = \mathbf{E}^\xi, \quad \mathbf{R}_{wall}^\xi = \mathbf{R}^\xi, \quad |\mathbf{J}|\mathbf{F}_{wall}^\eta \delta\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_x \delta p \\ \eta_y \delta p \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{b}_{wall}^{\mathbf{F}^\eta}, \quad \mathbf{R}_{wall}^\eta = \tilde{\gamma} \delta p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_x & \eta_y & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{b}_{wall}^{\mathbf{R}^\eta} \quad (6.55)$$

avec

$$\mathbf{b}_{wall}^{\mathbf{F}^\eta} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \mathfrak{F}(\boldsymbol{\eta}, \bar{\mathbf{u}})^T \nabla\eta \\ 0 \\ 0 \\ \bar{c}^2 \bar{\rho} \mathfrak{F}(\boldsymbol{\eta}, \bar{\mathbf{u}})^T \nabla\eta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{wall}^{\mathbf{R}^\eta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\rho} \nabla\eta^T \mathfrak{F}(\boldsymbol{\eta}, \bar{\mathbf{u}}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho} \nabla\eta^T \mathfrak{F}(\boldsymbol{\eta}, \bar{\mathbf{u}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.56)$$

Les 4 termes $\mathbf{b}_{wall}^{\mathbf{E}^\xi}$, $\mathbf{b}_{wall}^{\mathbf{F}^\eta}$, $\mathbf{b}_{wall}^{\mathbf{R}^\xi}$ et $\mathbf{b}_{wall}^{\mathbf{R}^\eta}$ sont indépendants des inconnues du fluide. Ils contribueront à la construction du terme source de transpiration discret. Il nous reste à expliciter la fonctionnelle \mathfrak{F} dans le cas particulier d'un mouvement de corps rigide voire de déformation plus générale.

6.2.7 Transpiration dans le cas d'un mouvement de paroi rigide

Dans le cas d'un petit mouvement de corps rigide 2D [195], il y a trois degrés de liberté : deux translations caractérisées par le vecteur $\mathbf{s}(t) = (l(t), h(t))^T$ et une rotation d'angle $\alpha(t)$ et de

centre $\bar{\mathbf{x}}_c = (\bar{x}_c, \bar{y}_c)$. La figure 6.3 illustre la configuration classique du profil à deux degrés de liberté. Plusieurs cas se présentent suivant qu'on se limite à une pure translation, une pure rotation ou encore plus généralement à la composition d'une translation et d'une rotation :

- S'il s'agit d'une petite translation autour de la position $\bar{\mathbf{x}}$ à l'équilibre, la normale actuelle $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ à la paroi $\Gamma(t)$ est toujours identique à la normale $\bar{\mathbf{n}}$ à la paroi $\bar{\Gamma}$ en configuration de référence. Cela implique que le terme de transpiration (3) est nul. Le vecteur déplacement s'exprime simplement

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t) - \bar{\mathbf{x}} \quad (6.57)$$

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{s}(t) \quad (6.58)$$

La fonction \mathfrak{F} se réduit donc à

$$\mathfrak{F} = i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -\partial_{\bar{x}}\bar{u} \\ -\partial_{\bar{x}}\bar{v} \end{pmatrix} + \dot{h} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -\partial_{\bar{y}}\bar{u} \\ -\partial_{\bar{y}}\bar{v} \end{pmatrix} \quad (6.59)$$

$$= \mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}_l + \mathfrak{F}_h + \mathfrak{F}_h \quad (6.60)$$

$$(6.61)$$

- si il s'agit d'une petite rotation autour de $\bar{\mathbf{x}}_c$, la position actuelle s'exprime

$$\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \bar{\mathbf{x}}_c + \mathbf{Q}_\alpha(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_c) \quad (6.62)$$

$$= \bar{\mathbf{x}} + (\bar{\mathbf{x}}_c - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{Q}_\alpha(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_c) \quad (6.63)$$

$$= \bar{\mathbf{x}} + (\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{I}_2)(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_c) \quad (6.64)$$

avec

$$\mathbf{Q}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (6.65)$$

la matrice de rotation. Comme on se limite à de petits mouvements de rotation, la matrice de rotation s'approche au premier ordre par

$$\mathbf{Q}_\alpha \approx \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.66)$$

A la paroi, le vecteur déplacement et le vecteur vitesse seront donc respectivement

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t) - \bar{\mathbf{x}} \quad (6.67)$$

$$= \alpha(t)(-(\bar{y} - \bar{y}_c), \bar{x} - \bar{x}_c)^T \quad (6.68)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \dot{\alpha}(t)(-(\bar{y} - \bar{y}_c), \bar{x} - \bar{x}_c)^T \quad (6.69)$$

Finalement, la fonction \mathfrak{F} se réduit à

$$\mathfrak{F} = \dot{\alpha} \begin{pmatrix} -(\bar{y} - \bar{y}_c) \\ \bar{x} - \bar{x}_c \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -\bar{v} + (\bar{y} - \bar{y}_c)\partial_{\bar{x}}\bar{u} - (\bar{x} - \bar{x}_c)\partial_{\bar{y}}\bar{u} \\ \bar{u} + (\bar{y} - \bar{y}_c)\partial_{\bar{x}}\bar{v} - (\bar{x} - \bar{x}_c)\partial_{\bar{y}}\bar{v} \end{pmatrix} \quad (6.70)$$

$$= \mathfrak{F}_{\dot{\alpha}} + \mathfrak{F}_\alpha \quad (6.71)$$

- Si il s'agit d'un mouvement complet de corps rigide, la fonction \mathfrak{F} s'exprime après regroupement des deux contributions de translation et de rotation

$$\delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{n}} = (\mathfrak{F}_{\dot{\alpha}} + \mathfrak{F}_\alpha + \mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}_l + \mathfrak{F}_h + \mathfrak{F}_h) \cdot \bar{\mathbf{n}} \quad (6.72)$$

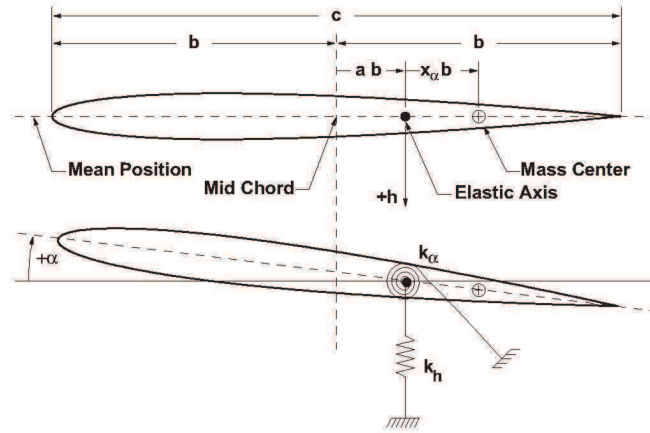


FIGURE 6.3 – Profil d'aile classique à deux degrés de liberté.

6.2.8 Transpiration dans le cas d'un mouvement de paroi déformable

Lorsque la structure est déformable, ses déplacements sont en général bien décrits dans sa représentation modale. Les déplacements de la structure sont approchés à l'interface à l'aide de la combinaison linéaire

$$\boldsymbol{\eta}(x, y, t) = \sum_{i=1}^{r_s} \eta_i(t) \boldsymbol{\varphi}_i(x, y). \quad (6.73)$$

où les $\boldsymbol{\varphi}_i = (\varphi_i^{\eta_x}, \varphi_i^{\eta_y})^T$ représentent les déformées modales de la structure à l'interface avec le fluide, et les $\eta_i(t)$ les amplitudes vibratoires associées. Les $\boldsymbol{\varphi}_i$ peuvent correspondre à des modes de structure rigide (section précédente) ou des modes de déformation (par exemple mode de flexion ou mode de torsion). La représentation modale de la structure à l'interface avec le fluide est substituée dans la loi de transpiration ce qui donne

$$\mathfrak{F}(\boldsymbol{\eta}, \bar{\mathbf{u}}) = \sum_{i=1}^{r_s} \left(\dot{\eta}_i(t) \begin{pmatrix} \varphi_i^{\eta_x} \\ \varphi_i^{\eta_y} \end{pmatrix} - \eta_i(t) \begin{pmatrix} (\partial_{\bar{x}} \bar{u} \varphi_i^{\eta_x} + \partial_{\bar{y}} \bar{u} \varphi_i^{\eta_y}) + (\partial_{\bar{y}} \varphi_i^{\eta_y} \bar{u} - \partial_{\bar{y}} \varphi_i^{\eta_x} \bar{v}) \\ (\partial_{\bar{x}} \bar{v} \varphi_i^{\eta_x} + \partial_{\bar{y}} \bar{v} \varphi_i^{\eta_y}) + (-\partial_{\bar{x}} \varphi_i^{\eta_y} \bar{u} + \partial_{\bar{x}} \varphi_i^{\eta_x} \bar{v}) \end{pmatrix} \right). \quad (6.74)$$

Cette généralisation au cas d'une structure déformable ne sera pas abordée dans le cadre de cette thèse. Elle représente en effet davantage une problématique liée au modèle haute-fidélité qu'à la méthodologie proposée pour construire un modèle réduit en présence de paroi mobile.

6.3 Modèle discret "haute-fidélité"

Les dérivées partielles ∂_{ξ} et ∂_{η} sont approchées sur les points intérieurs du domaine de calcul avec un schéma aux différences finies centrées sur 11 points développé par Bogey et Bailly [40]. Ce schéma non dissipatif est optimisé pour réduire l'erreur de dispersion. Une étude théorique montre que le schéma proposé nécessite seulement 4 points par longueur d'onde pour reproduire correctement une perturbation. À l'approche des frontières de non-réflexion, des schémas aux différences finies décentrés sur 7 points sont appliqués. Au voisinage des parois, des schémas aux différences finies centrés dégradés sont utilisés. En particulier, les termes de la matrice de réaction sont simplifiés seulement sur les points de paroi suivant l'orientation de la normale (directions $\nabla \xi$ ou $\nabla \eta$). Par contre, les termes de flux numériques sont simplifiés à l'approche de la paroi en fonction du stencil du schéma aux différences finies

et de l'orientation de la normale à la paroi. Un filtre spatial passe-bas est appliqué dans tout le domaine de calcul afin d'éliminer les oscillations mailles à mailles susceptibles de déstabiliser le modèle numérique. La prise en compte de géométries complexes nécessite aussi un traitement numérique particulier. Nous avons tout d'abord introduit les coordonnées généralisées dans la section précédente dans le but de transformer des grilles de calcul curvilignes en grilles de calcul cartésiennes. Pour pouvoir effectuer des simulations à la fois très peu dispersives et très peu dissipatives, le maillage global construit devrait dans l'idéal être le plus homogène possible. En présence de géométries complexes, il n'est clairement pas possible de construire une unique grille de calcul optimale pour de telles propriétés numériques. Une approche multi-domaine est donc retenue. Elle est basée sur l'agencement de multiples grilles cartésiennes et/ou curvilignes pouvant se recouvrir partiellement et permettant d'épouser au mieux une ou plusieurs frontières de solides présentes dans le domaine de calcul. On parle de maillage chimère (*chimera* ou *overset grid method* en anglais). En général, le recouvrement de multiples grilles curvilignes doit permettre de mailler le domaine de calcul à proximité des parois tandis que le recouvrement de grilles cartésiennes permet de mailler plus naturellement le champ lointain. Le problème qui se pose avec une telle stratégie, c'est que les points des différentes zones de recouvrements ne sont pas coïncidents en général. Il est donc nécessaire d'échanger des informations entre les grilles qui se chevauchent. Cet échange est réalisé par l'intermédiaire d'une méthode d'interpolation de Lagrange d'ordre 8 de façon à éviter au mieux la génération de perturbations numériques non physiques. La figure 6.4 donne un exemple d'interpolation entre une grille annulaire et une grille cartésienne. Les développements informatiques sont effectués dans un environnement parallèle. En particulier, chaque grille est elle-même découpée en blocs de manière à améliorer la granulométrie de la parallélisation obtenue grâce à la bibliothèque MPI utilisée. Toutes ces procédures de nature numériques et informatiques sont détaillées dans la thèse de Emmert [83]. Ils ont donné naissance au code de calcul industriel *Code_Safari* chez EDF R&D.

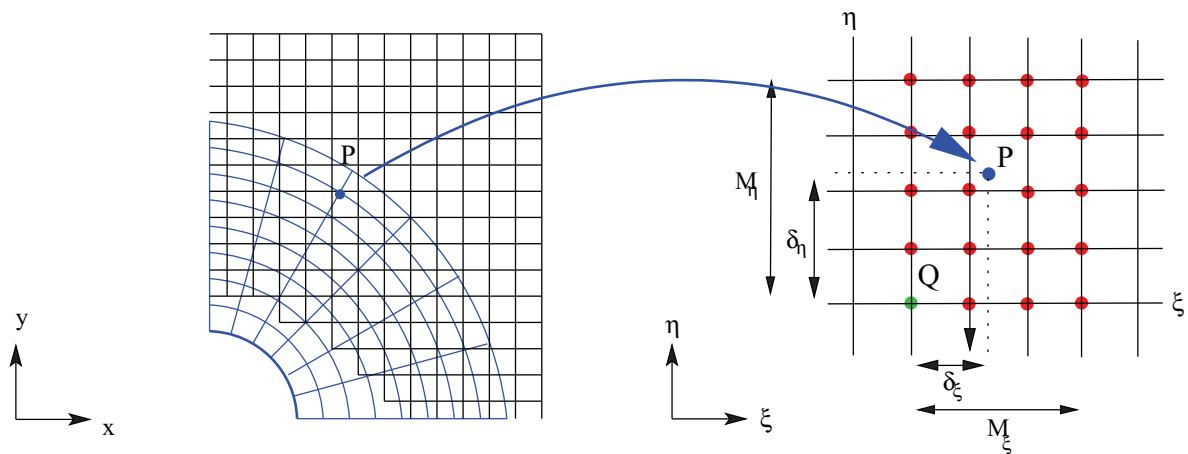


FIGURE 6.4 – Exemple de superposition de grilles et interpolation.

L'application de toutes ces procédures numériques aux EELs induit un modèle discret qui peut s'exprimer sous la forme compacte non matricielle

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \quad (6.75)$$

avec \mathcal{A} un opérateur discret linéaire. Dans le cas d'un mouvement de corps rigide, en appliquant la loi de transpiration, il s'exprime

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{u}(t) \quad (6.76)$$

$$= \mathcal{A}\mathbf{x} + l(t)\mathbf{b}_1 + \dot{l}(t)\mathbf{b}_2 + h(t)\mathbf{b}_3 + \dot{h}(t)\mathbf{b}_4 + \alpha(t)\mathbf{b}_5 + \dot{\alpha}(t)\mathbf{b}_6 \quad (6.77)$$

avec $\mathbf{u}(t)$ le vecteur $(l(t), \dot{l}(t), h(t), \dot{h}(t), \alpha(t), \dot{\alpha}(t))^T$ correspondant aux 6 lois de mouvements de corps rigides imposés à la paroi, et \mathcal{B} l'opérateur constitué par le vecteur $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6]$ correspondant aux semi-discrétisations spatiales des termes sources de transpiration pondérés par les lois de mouvement imposées. La prise en compte du mouvement de corps rigide de plusieurs solides (S_i) présents dans la configuration de calcul ne pose pas de difficultés supplémentaires sinon une complexification du terme source. Si il y a m solides dans le fluide, le modèle complet s'exprime simplement

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{A}\mathbf{x} + \sum_{i=1}^m \mathcal{B}_i \mathbf{u}_i(t) \quad (6.78)$$

$$= \mathcal{A}\mathbf{x} + \tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathbf{u}}(t) \quad (6.79)$$

où $\mathcal{B}_i \mathbf{u}_i(t)$ correspond au terme source de transpiration rigide associé au i -ème solide. Il y a donc $m \times 6$ termes sources à construire si on souhaite conserver le formalisme du contrôle. Ce formalisme s'applique aussi dans le cas plus général d'un mouvement de structure déformable :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{u}(t) \quad (6.80)$$

$$= \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}_1 \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathcal{B}_2 \boldsymbol{\eta}(t) \quad (6.81)$$

avec $\boldsymbol{\eta}(t) = (\eta_1, \dots, \eta_{r_s})^T$ le vecteur des amplitudes modales, \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 les semi-discrétisations spatiales associées à ces amplitudes (constituées en particulier par les modes propres et leurs dérivées spatiales). Il est important de retenir que nous avons fait en sorte de construire un modèle discret qui soit autonome en temps. En d'autres termes, les coefficients affectés aux inconnues \mathbf{x} ne dépendent pas du temps. L'obtention d'un système autonome est très important pour pouvoir dans la suite construire un modèle réduit en exploitant le formalisme matriciel introduit dans le chapitre précédent. Notons par ailleurs que l'exploitation de ce formalisme permettrait de construire très naturellement un problème discret issu d'un couplage fort entre un modèle linéaire de structure et les EELs (couplage aéroélastique par exemple). En effet, dans certaines situations physiques, il n'est plus possible de négliger les phénomènes de rétroactions intervenant entre le fluide et la structure. Dans ce cas, le mouvement de la paroi qui est directement relié au mouvement de la structure, devient une fonction de l'évolution du fluide. À chaque instant, il y a échange d'énergie entre le fluide et la structure et entre la structure et le fluide. Afin de prendre en compte ces échanges d'énergie, un modèle de structure doit alors être introduit. Les interactions entre une structure et son fluide environnant sont cependant difficiles à représenter numériquement. En effet, les échelles spatio-temporelles impliquées dans les milieux fluide et structure peuvent être très différentes ce qui implique en général des interfaces rarement conformes. Il est alors particulièrement difficile de construire des méthodes numériques de couplage haute-fidélité. C'est un sujet actif de recherche. Ces problèmes ne seront pas traités dans ce mémoire.

6.4 Construction du système réduit

Jusqu'à présent, nous avons exploité le formalisme matriciel pour construire un système réduit. En particulier, la matrice réduite était construite par deux simples produits matriciels :

$$\mathbf{A}_r = \underbrace{\mathbf{W}_r^T}_{(2)} \underbrace{(\mathbf{A}\mathbf{V}_r)}_{(1)} \quad (6.82)$$

Le problème qui se pose maintenant, c'est que le modèle numérique haute-fidélité n'est pas développé sous forme matricielle. Il serait en effet bien trop compliqué de construire une matrice prenant en compte les géométries complexes, ce qui reviendrait à prendre en compte

des interpolations de multiples grilles partiellement recouvrantes lors de la formation de la matrice. Comment peut-on alors construire la matrice réduite si la matrice \mathbf{A} n'est pas explicitement construite ? Il suffit de repartir sur la formulation continue du modèle physique (dans notre cas les EELs). Pour ne pas surcharger la rédaction, nous nous limitons dans la suite à introduire l'approche continue à partir de l'approche discrète. Il est autrement possible de tout reformuler mathématiquement à partir de la formulation continue et il serait alors plus rigoureux de déduire la formulation discrète à partir de la formulation continue.

6.4.1 Construction de \mathbf{A}_r à partir des EELs

Dans le cas discret et en formulation matricielle, les inconnues \mathbf{x} sont approchées par

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &\approx \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r(t) \\ &= \sum_{k=1}^r a_k(t) \Phi_k.\end{aligned}\tag{6.83}$$

Par définition, on rappelle qu'en différences finies $\mathbf{x}_{ij}(t) = \delta \mathbf{q}_{ij}(t) = \delta \mathbf{q}(x_i, y_j, t)$. Autrement dit, en chaque noeud de calcul, les inconnues s'expriment

$$\delta \mathbf{q}(x_i, y_j, t) = \sum_{k=1}^r a_k(t) \phi_k(x_i, y_j).\tag{6.84}$$

Cette dernière écriture suggère que les inconnues sont approchées par une somme de termes dont les dépendances spatiale et temporelle sont séparées. Par extrapolation, au niveau des EELs, cela revient à rechercher une approximation des inconnues $\delta \mathbf{q}(x, y, t)$ sous la forme

$$\delta \mathbf{q}(x, y, t) = \sum_{k=1}^r a_k(t) \phi_k(x, y).\tag{6.85}$$

Notons que l'approche discrète suggère une approximation par décomposition vectorielle des variables physiques. Cette décomposition est à opposer à l'idée d'une décomposition scalaire des variables physiques. Dans une telle décomposition, chaque variable admettrait ses propres coefficients temporels. Par exemple, le vecteur vitesse serait approché par

$$\delta u(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^r a_i(t) \phi_{i^u}(\mathbf{x}), \quad \delta v(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^r b_i(t) \phi_{i^v}(\mathbf{x}).\tag{6.86}$$

Dans le contexte de la méthode POD, on parle respectivement de méthode *vector-valued POD* et de méthode *scalar-valued POD*. La méthode *scalar-valued POD* n'est cependant pas exploitée en formulation continue car elle augmente la dimension du modèle réduit et produit de mauvais résultats numériques [224]. Dans l'approche vectorielle, chaque grandeur physique se décompose suivant les mêmes coefficients temporels.

La construction du système dynamique réduit en formulation continue s'effectue comme suit :

- Substituer l'approximation vectorielle $\delta \mathbf{q}(x, y, t) \approx \sum_{k=1}^r a_k(t) \phi_k(x, y)$ dans le modèle primitif

$$\partial_t \delta \mathbf{q} + \mathcal{L}(\delta \mathbf{q}) = \mathbf{0}\tag{6.87}$$

écrit sous forme d'EDPs (les EELs dans notre cas). Puisque \mathcal{L} est un opérateur linéaire,

le modèle continu s'exprime

$$\sum_{k=1}^r (\dot{a}_k(t) \phi_k(x, y) + a_k(t) \mathcal{L}(\phi_k)) = \mathbf{0} \quad (6.88)$$

après substitution de l'approximation.

- Projeter le système (6.88) pour chaque fonction de base globale adjointe ψ_j et intégrer sur le domaine de calcul, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^r \left(\dot{a}_k(t) \int_{\Omega} \psi_j(x, y)^T \phi_k(x, y) dx dy + a_k(t) \int_{\Omega} \psi_j(x, y)^T \mathcal{L}(\phi_k(x, y)) dx dy \right) = 0, \quad 1 \leq j \leq r. \quad (6.89)$$

- Par construction, les fonctions de base directes et adjointes sont orthonormales. En formulation continue, cela s'exprime par la relation

$$\int_{\Omega} \psi_j(x, y)^T \phi_k(x, y) dx dy = \delta_{jk} \quad (6.90)$$

avec $\delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$ et $\delta_{jk} = 1$ si $j = k$.

- En exploitant l'hypothèse d'orthonormalité, le système réduit s'exprime finalement à l'aide des r égalités

$$\dot{a}_j(t) + \sum_{k=1}^r a_k(t) \int_{\Omega} \psi_j(x, y)^T \mathcal{L}(\phi_k(x, y)) dx dy = 0, \quad 1 \leq j \leq r. \quad (6.91)$$

Les r^2 coefficients de la matrice réduite \mathbf{A}_r sont calculés à partir des r^2 expressions

$$\int_{\Omega} \psi_j(x, y)^T \mathcal{L}(\phi_k(x, y)) dx dy. \quad (6.92)$$

Le modèle réduit ainsi construit se ramène à la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires. Autrement dit, toute la complexité géométrique du domaine de calcul disparaît. Il reste à déterminer les r coefficients temporels par une méthode d'intégration temporelle, connaissant une condition initiale et/ou un terme source.

6.4.2 Développements informatiques et détails pratiques

En pratique, la construction du modèle numérique réduit nécessite de mettre en place les différentes étapes suivante :

1. la sauvegarde des clichés ;
2. la construction de la matrice de corrélation ;
3. le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice de corrélation ;
4. la formation des modes POD ;
5. la formation de la matrice réduite ;
6. la formation de la condition initiale réduite et/ou du terme source réduit ;
7. l'intégration temporelle du système dynamique réduit ;
8. la reconstruction de la solution.

6.4.2.1 La sauvegarde des clichés haute-fidélité

La première étape consiste à effectuer une ou plusieurs simulations haute-fidélité de manière à sauvegarder les clichés qui vont nous permettre de construire les modes POD. La question de base est de savoir combien de clichés il est nécessaire de sauvegarder. La mémoire requise pour le stockage des clichés dépend essentiellement du nombre d'inconnues du problème et de la durée de la simulation. Les EELs impliquent des phénomènes fortement instationnaires. Il est donc souvent nécessaire de stocker une très grande quantité de clichés pour éviter tout problème de causalité dans le modèle réduit par la suite. Il est possible de mettre en place un critère de sauvegarde des clichés heuristique basé sur le produit scalaire normalisé des solutions aux différents instants. En pratique, nous avons observé que la causalité du système dynamique réduit est respectée si l'angle formé par deux clichés successifs n'est pas trop proche de 0. Lorsque que peu d'itérations temporelles séparent deux clichés, l'angle qu'ils forment est proche de 1. En revanche, si les deux clichés sont assez éloignés, il y a de bonne chance pour que leur produit scalaire normalisé soit proche de 0. Cela dépend malgré tout de la physique sous-jacente. On constate qu'il doit y avoir suffisamment de corrélations entre deux clichés successifs. Le critère dépend par ailleurs du choix du produit scalaire. En particulier, le produit scalaire canonique nécessite un écart entre deux clichés successifs plus petit que celui nécessaire pour le produit scalaire basé sur le symétriseur. En d'autres termes, le produit scalaire basé sur le symétriseur requiert moins de clichés à stocker. D'un point de vue informatique, le critère de conservation des clichés, pour le produit scalaire basé sur le symétriseur, nécessite d'évaluer l'expression

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{q}(x, y, t_n)^T \mathbf{H}(x, y) \delta \mathbf{q}(x, y, t_{n+p}) dx dy / \|\delta \mathbf{q}(x, y, t_n)\|_{\mathbf{H}} \|\delta \mathbf{q}(x, y, t_{n+p})\|_{\mathbf{H}}. \quad (6.93)$$

Le cliché $\delta \mathbf{q}(x, y, t_{n+p})$ est alors sauvegardé si le produit scalaire normalisé est inférieur au critère empirique retenu.

6.4.2.2 Construction de la matrice de corrélation et des modes POD

Si m clichés sont stockés, la méthode *snapshot-POD* débute par la construction de la matrice de corrélation $\mathbf{X}_{corr} \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Cette matrice est symétrique. Il suffit donc de calculer $1 + 2 + \dots + m = m(m+1)/2$ termes pour la former. Pour le produit scalaire basé sur le symétriseur, les coefficients de la matrice de corrélation sont donnés par

$$(\mathbf{X}_{corr})_{ij} = \int_{\Omega} \delta \mathbf{q}(x, y, t_i)^T \mathbf{H}(x, y) \delta \mathbf{q}(x, y, t_j) dx dy. \quad (6.94)$$

Les éléments propres de la matrice de corrélation sont calculés à l'aide des routines informatiques de la librairie scientifique Lapack. Si la reproduction de la simulation haute-fidélité demande un nombre important de clichés (quelques milliers par exemple), la matrice de corrélation peut être de dimension importante (elle est dense). Cependant, on peut se limiter au calcul des r premiers modes propres $\tilde{\psi}_i$ associés aux plus grandes valeurs propres λ_i

$$\mathbf{X}_{corr} \tilde{\psi}_i = \lambda_i \tilde{\psi}_i, \quad 1 \leq i \leq r \quad (6.95)$$

si on a une idée de la dimension r utile pour le système réduit. Dans la *snapshot-POD*, il est important de noter que la dimension du système réduit sera limitée par le nombre de clichés. Par exemple, si une centaine de modes sont nécessaires pour reproduire fidèlement une simulation haute-fidélité, il faut avoir sauvegarder au moins 100 clichés. On pourrait penser que le nombre optimal de clichés à sauvegarder est égal au nombre minimal de modes nécessaire à la reproduction de la simulation haute-fidélité. Cependant, en pratique, on a toujours besoin d'un nombre plus important de clichés par rapport au nombre de modes

utiles. Les r modes POD sont finalement obtenus à l'aide de la relation

$$\phi_i(x, y) = \frac{\sum_{k=1}^m \tilde{\psi}_i^k \delta \mathbf{q}(x, y, t_k)}{\sqrt{\lambda_i}}, \quad 1 \leq i \leq r \quad (6.96)$$

avec $\tilde{\psi}_i^k$ la k -ème composante du vecteur propre $\tilde{\psi}_i$. D'un point de vue informatique, le calcul des éléments propres est limité à la précision machine et il est donc important de ne conserver que les vecteurs propres qui sont associés à une valeur propre réelle positive λ_i supérieure à la précision machine (10^{-14} classiquement).

Pour des phénomènes fortement instationnaires simulés sur de longues durées, cela produirait un nombre de clichés et une matrice de corrélations trop importants. Par ailleurs, les modes POD risquent d'être de moins en moins optimaux. Une alternative serait de construire des modèles réduits par morceaux. Il s'agirait alors de construire une partition de l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$, de construire les modes POD sur chaque sous-intervalle et de déduire des matrices réduites sur chaque sous-intervalle. C'est le même principe que la décomposition *Principal Interval* [45, 145] (acronyme PID) qui a été proposée pour éviter de perdre l'information dynamique locale. En effet, plus l'information dynamique augmente, plus les modes POD risquent d'être statistiquement indépendants de la configuration de calcul. La PID s'illustre par exemple sur une simple équation de transport. On montre que plus l'intervalle d'intégration temporelle est grand, plus les modes POD convergent vers les modes de Fourier et moins les modes POD sont optimaux pour une condition initiale ou un second membre donné. Une analyse PID est dès lors plus précise.

Pour terminer, la présence d'une paroi mobile peut poser un problème dans la définition des modes POD. En effet, la base POD est spatiale et indépendante du temps alors que le domaine de calcul est *a priori* mobile. L'exploitation des modes POD impose normalement l'utilisation d'un maillage fixe. Cette problématique émerge essentiellement dans le traitement des problèmes d'interaction entre un fluide et une structure en grand déplacement. Dans notre cas, l'hypothèse de petits déplacements permet de s'affranchir de cette difficulté liée à la définition des modes POD sur un domaine mobile. On peut citer notamment les travaux de Anttonen [13, 14, 15] et plus récemment de Liberge [167] sur cette problématique.

6.4.2.3 Construction de la matrice réduite

On rappelle tout d'abord les deux constructions possibles de la matrice réduite :

- en formulation matricielle, les coefficients a_{ij} de la matrice réduite \mathbf{A}_r sont donnés par le produit scalaire entre le mode adjoint Ψ_j et le vecteur formé par le produit entre la matrice \mathbf{A} et le mode direct Φ_i , c'est-à-dire

$$a_{ij} = \Psi_j^T(\mathbf{A}\Phi_i). \quad (6.97)$$

- en formulation continue, les coefficients de la matrice réduite sont donnés par la relation (6.92)

$$\int_{\Omega} \psi_j(x, y)^T \mathcal{L}(\phi_i(x, y)) dx dy. \quad (6.98)$$

La matrice réduite est construite à partir du modèle haute-fidélité développé sous une forme non matricielle (*matrix-free approach*). Nous n'avons donc pas accès à la matrice \mathbf{A} . En formulation continue, on doit calculer le terme $\mathcal{L}(\phi_i(x, y))$ qui est égal à

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{E}\phi_i) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{F}\phi_i) + \tilde{\mathbf{R}}\phi_i \quad (6.99)$$

en chaque coordonnée (x, y) . Dans l'idéal, on aimerait pouvoir construire le modèle réduit indépendamment du code de calcul haute-fidélité. Cela implique d'être capable d'approcher numériquement les dérivées $\partial_x(\mathbf{E}\phi_i)$ et $\partial_y(\mathbf{F}\phi_i)$ sur des géométries complexes ce qui est très contraignant en terme de développements informatiques. En pratique, on utilise une approche intrusive qui consiste à exploiter les routines du code de calcul haute-fidélité qui permet de dériver les flux dans le système de coordonnées curvilignes. Le modèle étant linéaire, le calcul du produit matrice-vecteur $\mathbf{A}\Phi_i$ est équivalent à $\mathcal{A}(\Phi_i)$ correspondant à l'application de l'opérateur \mathcal{A} sur le vecteur Φ_i . Avec cette approche intrusive, chaque coefficient a_{ij} de la matrice réduite est obtenu à partir :

- d'une application de l'opérateur discret \mathcal{A} sur le mode Φ_i ;
- d'un produit scalaire $\Psi_j^T(\mathcal{A}(\Phi_i))$.

Au final, la construction d'une matrice réduite de dimension r requiert r applications de l'opérateur discret sur chaque mode direct et r^2 produits scalaires.

6.4.2.4 Gestion des géométries complexes

Les différentes étapes de construction présentées suggèrent que la construction d'un système réduit se réduit principalement au calcul de nombreux produits scalaires. Les produits scalaires interviennent dans le calcul des termes de la matrice de corrélation et des différentes projections gauches (matrice réduite, condition initiale réduite). En présence de géométries complexes, un problème se pose au niveau du calcul de ces produits scalaires car on utilise la méthode chimère qui impose des recouvrements partielles de grilles. De ce fait il existe des zones d'intersections redondantes. Le produit scalaire risque donc d'être surestimé. Par exemple, si le domaine de calcul est constitué de deux grilles G_1 et G_2 non coïncidentes, le calcul de l'intégrale donne

$$\int_{G_1 \cup G_2} = \int_{G_1} + \int_{G_2} - \int_{G_1 \cap G_2}. \quad (6.100)$$

Afin d'éviter cette surestimation, on récupère dans un premier temps le nuage de points associé à l'ensemble des grilles du maillage chimère. Dans un second temps, on effectue une triangulation de Delaunay du nuage de points. De base, la méthode de triangulation de Delaunay est limitée à des ensembles convexes. De plus, il doit y avoir unicité des points (pas de doublons). Une méthode de triangulation sous contraintes a aussi été développée de façon à pouvoir prendre en compte des domaines de calcul contenant un ou plusieurs profils aérodynamiques. L'intégrale du produit scalaire est finalement approchée à l'aide de la formule composite du trapèze

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y) dx dy &= \sum_{i=1}^{N_t} \int_{T_i} f(x, y) dx dy \\ &\simeq \sum_{i=1}^{N_t} \frac{1}{3} \text{mes}(T_i) (f(A_i) + f(B_i) + f(C_i)) \end{aligned} \quad (6.101)$$

avec N_t le nombre de triangles dans le domaine Ω , T_i les triangles, $A_i = (x_{A_i}, y_{A_i})$, $B_i = (x_{B_i}, y_{B_i})$ et $C_i = (x_{C_i}, y_{C_i})$ les sommets de chaque triangle T_i et $\text{mes}(T_i)$ l'aire du triangle T_i de valeur exacte

$$\text{mes}(T_i) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{A_i B_i} \wedge \overrightarrow{A_i C_i}\| = \frac{1}{2} |(x_{B_i} - x_{A_i})(y_{C_i} - y_{A_i}) - (x_{C_i} - x_{A_i})(y_{B_i} - y_{A_i})|. \quad (6.102)$$

6.4.2.5 Coût de calcul

La construction du modèle réduit engendre un coût de calcul global assez important. Les trois étapes les plus gourmandes en temps CPU sont respectivement

- les simulations haute-fidélité pour engendrer les clichés représentatifs ;
- le calcul des $m(m+1)/2$ coefficients de la matrice de corrélation ($m(m+1)/2$ produits scalaires) ;
- le calcul des r^2 coefficients de la matrice réduite (r^2 produits scalaires).

Il y a donc au total $r^2 + m^2/2 + m/2$ produits scalaires à estimer numériquement. En pratique, le coût de calcul engendré par tous ces produits scalaires peut être diminué considérablement si les boucles informatiques sont distribuées sur plusieurs processus (technique de parallélisation). Il a autrement été proposé des méthodes de réduction dite accélérée comme la méthode *missing point estimation* [16] ou encore la méthode d'hyper-réduction [229] qui consistent à réduire le nombre de points d'intégration pour estimer les produits scalaires. Les produits scalaires sont ainsi approchés numériquement bien plus rapidement. Par exemple, Astrid et al. [17] utilisent seulement 25% du maillage sans compromettre le modèle réduit. De même, Ryckelynck réussi à obtenir une réduction CPU d'un facteur 10 avec une telle approche.

6.5 Validation du code de calcul réduit

Le code de calcul réduit a été validé dans de nombreuses situations. Nous présentons ici quatre configurations de calcul composées de deux configurations où la paroi reste fixe et deux configurations où la paroi est mobile :

- la diffraction d'une impulsion acoustique par un disque dans un écoulement au repos ;
- la diffraction d'une impulsion acoustique par un profil NACA0012 incliné dans un écoulement de fluide parfait à Mach 0.3 ;
- la déformation d'un segment de paroi chargée par un écoulement uniforme ;
- la rotation d'un profil NACA0012 incliné dans un écoulement de fluide parfait à Mach 0.3.

Les paramètres numériques pour toutes les simulations haute-fidélité sont les suivantes :

- des schémas centrés sur 11 points pour l'approximation des dérivées ;
- des interpolations de Lagrange sur 8 points pour l'échange d'informations entre les grilles partiellement superposées.
- les métriques sont estimées aux frontières à l'aide de 10 points fantômes ;
- des schémas centrés dégradés au voisinage des parois qu'elles soient fixes ou mobiles ;
- des schémas décentrés sur 7 points au voisinage des conditions aux limites de non-réflexion ;
- des filtres dégradés centrés au voisinage des parois ;
- un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 sur 6 étapes pour l'intégration temporelle.

L'emploi de la méthode intrusive pour construire le système réduit implique que tous ces ingrédients numériques sont aussi déployés pour construire la matrice réduite. Seuls les filtres numériques n'ont pas été considérés pour construire la matrice réduite. Par ailleurs, le système dynamique réduit est intégré avec le même solveur temporel et en utilisant le même pas de temps que celui utilisé pour le modèle haute-fidélité. En effet, cela permet de comparer aisément les solutions haute-fidélité avec les solutions obtenues à partir du modèle réduit. Par ailleurs, seul le produit scalaire basé sur le symétriseur est considéré. La matrice réduite sera toujours construite à partir des modes de plus forte contrôlabilité pour le produit scalaire basé sur le symétriseur, c'est-à-dire à partir des modes propres de la matrice

$$\int_{t_0}^{t_f} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} dt \mathcal{H}. \quad (6.103)$$

Ces modes propres sont estimés numériquement à partir de la méthode classique des clichés.

6.5.1 Diffraction d'une impulsion acoustique par un disque

Le domaine de calcul est un carré de 20 mètres de côté composé d'un disque de rayon 1,3 mètre dont le centre est placé au centre du carré. Le maillage chimère est constitué d'une grille annulaire pour prendre en compte la frontière circulaire du disque et d'une grille cartésienne pour le domaine de calcul global. Le rayon intérieur de la grille annulaire coïncide avec le rayon du disque et son rayon extérieur est égal à 3,2 mètres. La grille cartésienne est uniforme avec 150 points dans les deux directions x et y . Le nombre de points de la grille annulaire est défini de manière à éviter au maximum des écarts de mailles importants au niveau de la zone d'interpolation avec la grille cartésienne. Le pas d'intégration temporelle est pris égal à $\Delta t = 0.00002585$ s. L'écoulement de base est au repos avec $\bar{\rho} = 1,2$ kg.m⁻³ et $\bar{p} = 10^5$ Pa. À $t = t_0$, une perturbation acoustique en pression

$$\delta p(x, y, t_0) = P \exp(-\log(2)((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)/b^2) \quad (6.104)$$

avec $(x_0, y_0) = (-5, 0)$, $b = 0,5$ et $P = 0,001$ est introduite dans le domaine de calcul. Cette perturbation définit la condition initiale de la simulation. On effectue 2000 itérations temporelles ce qui est suffisant pour évacuer totalement l'énergie ici. La figure 6.5 illustre les champs de pression obtenus à trois dates différentes. Les clichés sont sauvegardés tous les 20 pas de temps. La matrice de corrélation est donc de dimension 100². Les figures 6.6 et 6.7 illustrent les champs de pression reconstruits aux mêmes dates à partir des systèmes réduits de dimension 20² et 40² respectivement. On constate qu'avec 40 modes, il n'y a aucune différences visuelles entre les clichés haute-fidélité et les clichés reconstruit à partir du système réduit. Ceci est confirmé quantitativement avec la figure 6.8. Avec 40 modes POD, la système réduit reproduit parfaitement l'évolution de la perturbation dans le domaine de calcul.

L'application du formalisme du contrôle permet d'exploiter le système réduit construit pour des lois $u(t)$ arbitraires dans la limite du contenu fréquentiel du modèle réduit. On peut par exemple simuler en temps réel la diffraction d'une source monopolaire de même centre et de même enveloppe spatiale pour différentes fréquences. Le nombre de modes POD pour construire le système réduit est fixé à 50. Le champ de pression est illustré pour les lois $u(t) = \sin(200t)$ et $u(t) = \sin(2000t)$ sur les images (b) des figures 6.9 et 6.10 respectivement. Afin de vérifier le comportement à long terme du système réduit pour ces deux lois imposées, on lance deux simulations haute-fidélité pour ces lois sur quelques itérations temporelles. Les images (a) des figures 6.9 et 6.10 montrent que le système réduit prédit parfaitement les solutions sur de nombreuses périodes. Les modèles réduits construits à partir du produit scalaire basé sur le symétriseur ne posent en effet aucun problème de stabilité pour des écoulements de base au repos. Il est intéressant de noter que l'exploitation du formalisme du contrôle peut permettre d'étudier par exemple en temps réel l'évolution de la directivité acoustique en fonction de la fréquence. L'extension de l'approximation du gramien de contrôlabilité pour plusieurs

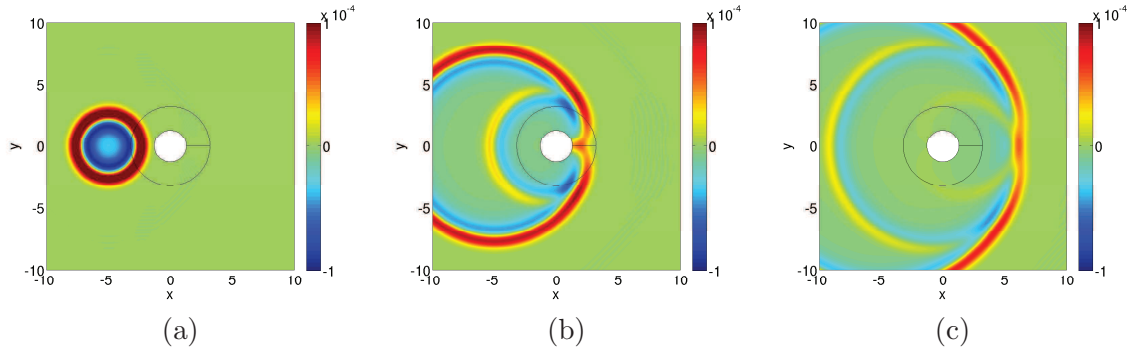


FIGURE 6.5 – Champ de pression haute-fidélité. (a) après $200\Delta t$ (b) après $600\Delta t$ (c) après $900\Delta t$

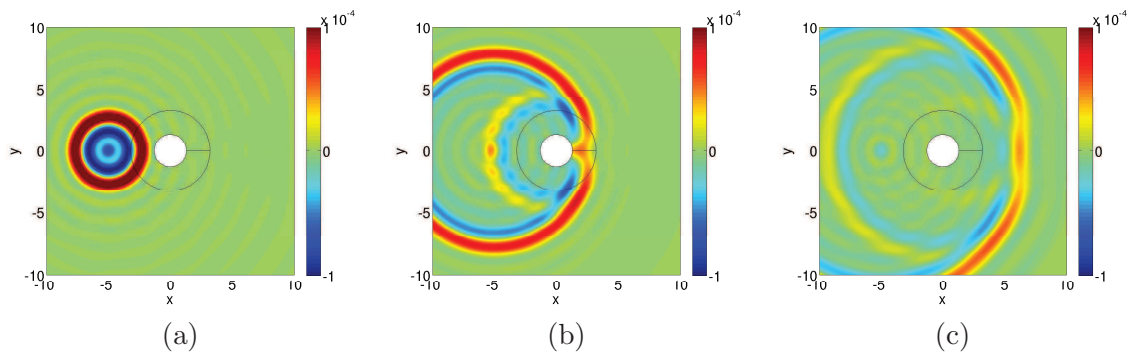


FIGURE 6.6 – Champ de pression reconstruit avec 20 modes **H-POD**. (a) après $200\Delta t$ (b) après $600\Delta t$ (c) après $900\Delta t$

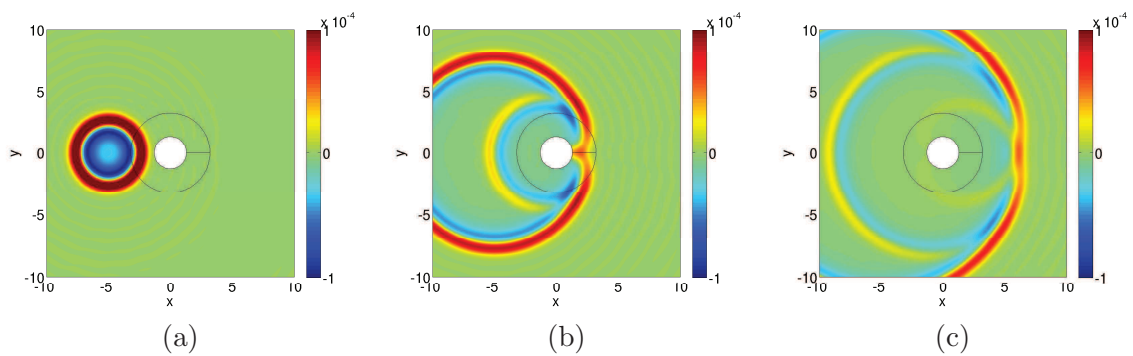


FIGURE 6.7 – Champ de pression reconstruit avec 40 modes **H-POD**. (a) après $200\Delta t$ (b) après $600\Delta t$ (c) après $900\Delta t$

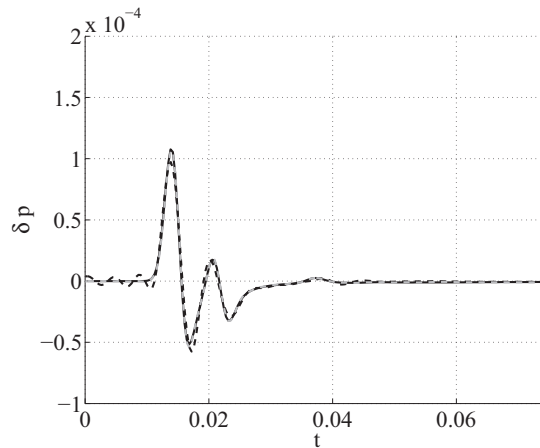


FIGURE 6.8 – Comparaison de la solution de référence avec les solutions reconstruites au capteur situé en $(-2, 4)$. En noir trait plein : solution haute-fidélité, en tirets noirs : avec 20 modes POD, en tirets gris : avec 40 modes POD

enveloppes spatiales, correspondant à plusieurs sources placées dans le domaine de calcul, peut aussi permettre de prédire à moindre coût les interférences acoustiques (constructives, destructives, phénomènes de ballotement etc).

6.5.2 Diffraction d'une impulsion acoustique par un profil aérodynamique

Nous effectuons maintenant la même étude numérique mais avec un profil aérodynamique incliné et en présence d'un écoulement de fluide parfait faiblement compressible. Le profil aérodynamique est un profil NACA0012 standard de centre de rotation $(0.273, 0)$ et incliné de $2,89^\circ$ dans la direction horaire. Le domaine de calcul est discrétisé à l'aide d'une grille elliptique constituée de 251 points dans chaque direction ξ et η , ce qui induit un modèle discret de 252004 inconnues. Le champ stationnaire $\bar{\mathbf{q}}$ est calculé à partir des équations d'Euler non linéaires en introduisant un écoulement uniforme de vitesse $u_\infty = M_\infty c_\infty$ à l'amont du profil avec $M_\infty = 0.3$, $c_\infty = \sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty}$, $p_\infty = 10^5$ Pa et $\rho_\infty = 1,2$ kg.m $^{-3}$. Le champ de pression de la solution stationnaire est illustré sur l'image (a) de la figure 6.11. Nous avons effectué 50000 itérations temporelles en prenant $\Delta t = 0.1368 \times 10^{-5}$ s (qui est toujours imposé par la condition CFL) pour converger vers une solution stationnaire. Une perturbation acoustique est ensuite placée en $(-1.5, 0)$. Cette perturbation définit une fois de plus la condition initiale de la simulation. La simulation est alors exécutée pendant 5000 itérations ce qui permet d'évacuer pratiquement toute l'énergie du domaine. Les clichés sont stockés tous les $25\Delta t$. La matrice de corrélation est donc de dimension 200^2 . La qualité de la reconstruction en fonction du nombre de modes est ensuite illustrée sur la figure 6.12. On constate que 80 modes permettent de reproduire la diffraction introduite par le profil en très bon accord avec la figure 6.11 (b). Ce nombre de modes, relativement important, s'explique d'une part par la longueur d'onde de l'onde réfléchiée et d'autre part par la nécessité d'évacuer l'énergie. Une comparaison quantitative est aussi proposée sur la figure 6.13.

Une nouvelle fois, on peut effectuer une prédiction temps-réel pour des lois $u(t)$ particulières. Le nombre de modes POD pour construire le système réduit est fixé à 80. Le champ de pression est illustré pour les lois $u(t) = \sin(2000t)$ et $u(t) = \sin(6000t)$ sur les images (b) des figures 6.14 et 6.15 respectivement. Les images (a) des figures 6.14 et 6.15 montrent que le système réduit prédit convenablement les solutions sur de nombreuses périodes. Les modèles réduits ne présentent pas de problèmes de stabilité. On observe un artefact en amplitude à partir du moment où la période de construction des modes est dépassée. L'amplitude est alors légèrement sous-estimée. Ce phénomène numérique s'explique par le fait que nous n'avons pas

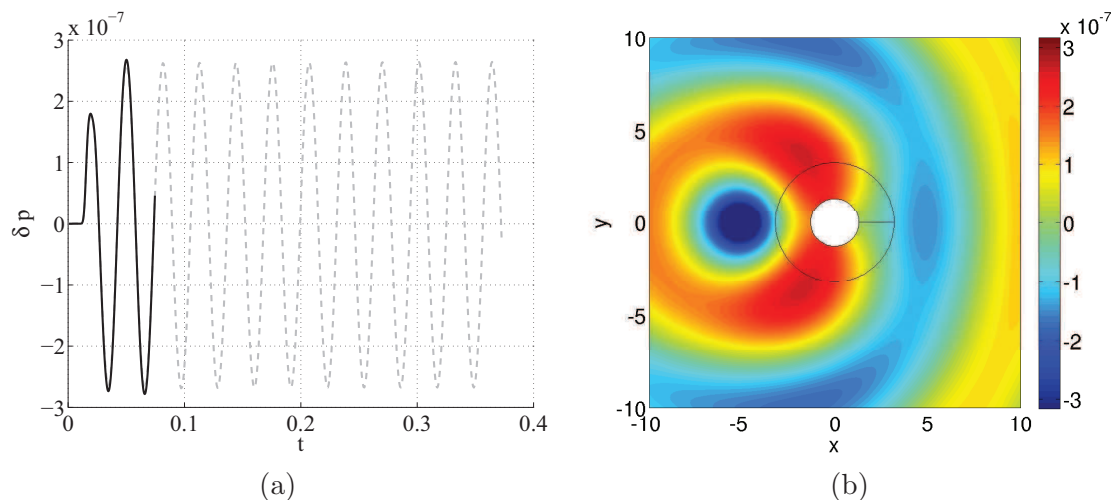


FIGURE 6.9 – Prédiction de la solution pour $u(t) = \sin(\omega t)$ avec $\omega = 200 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. (a) Évolution du champ de pression au capteur $(-2, 4)$ avec en noir la solution haute-fidélité et en tirets gris la solution reconstruite à partir du système réduit (b) Visualisation du champ de pression prédit.

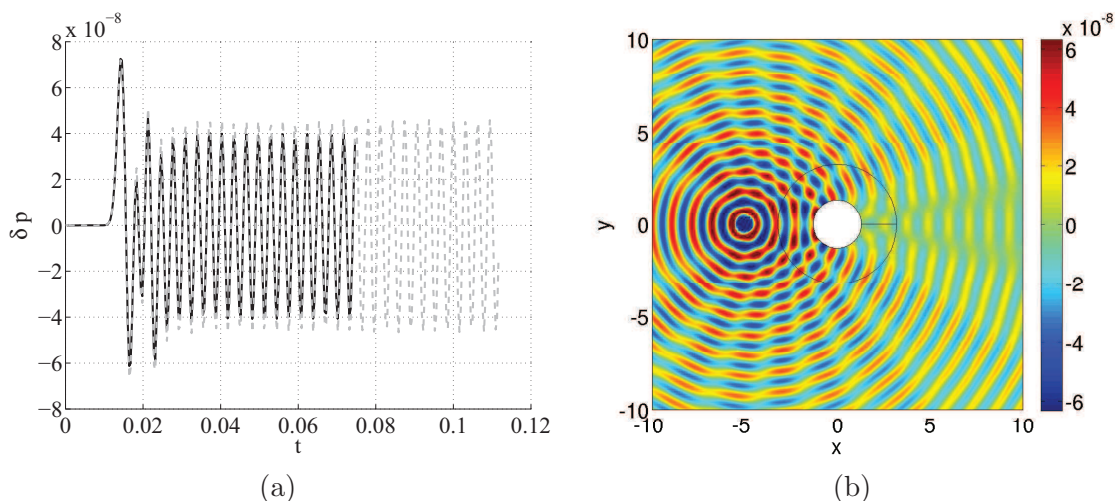


FIGURE 6.10 – Prédiction de la solution pour $u(t) = \sin(\omega t)$ avec $\omega = 2000 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. (a) Évolution du champ de pression au capteur $(-2, 4)$ avec en noir la solution haute-fidélité et en tirets gris la solution reconstruite à partir du système réduit (b) Visualisation du champ de pression prédit.

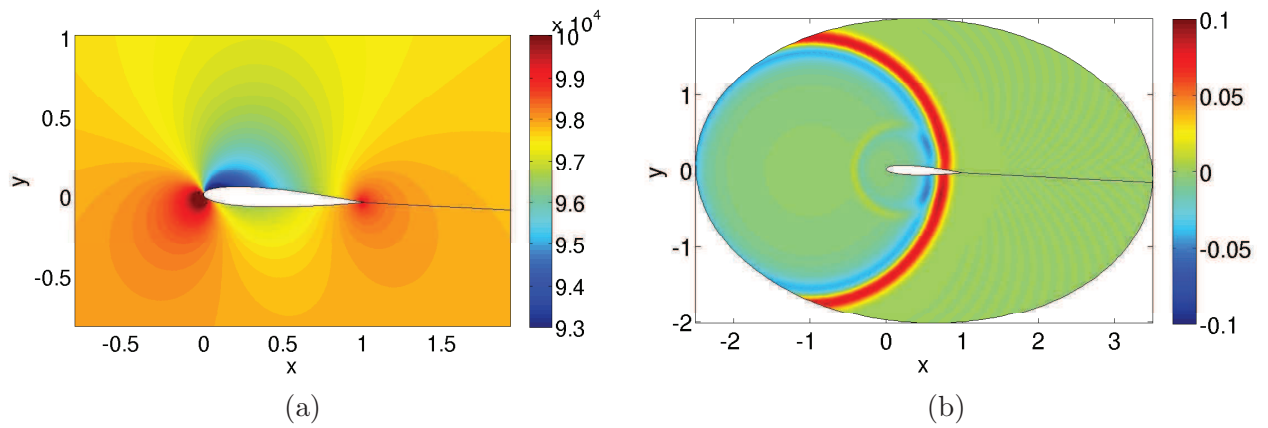


FIGURE 6.11 – (a) Champ de pression de l'écoulement stationnaire (b) Perturbation de pression après $2500\Delta t$

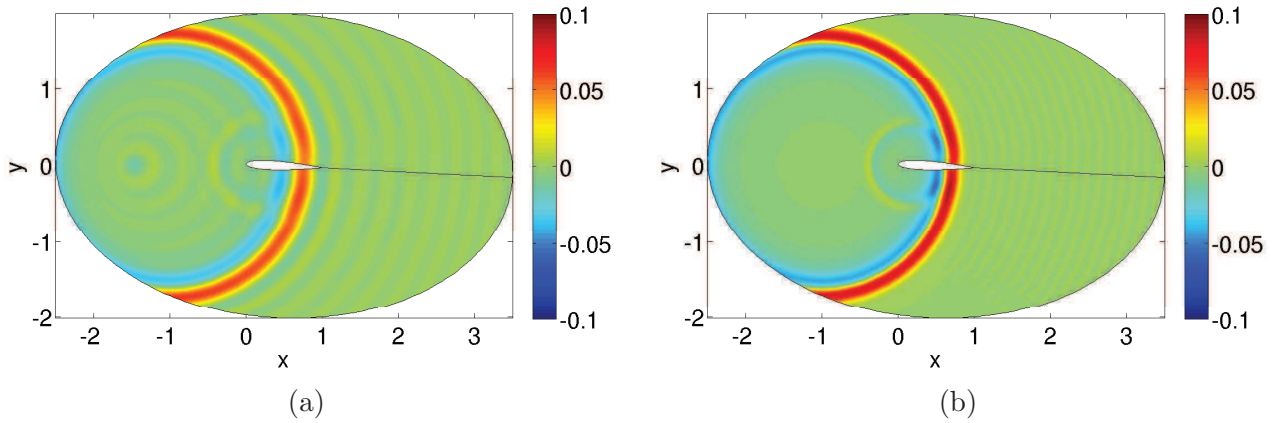


FIGURE 6.12 – (a) Reconstruction du champ de pression après $2500\Delta t$ avec 40 modes (b) Reconstruction du champ de pression après $2500\Delta t$ avec 80 modes

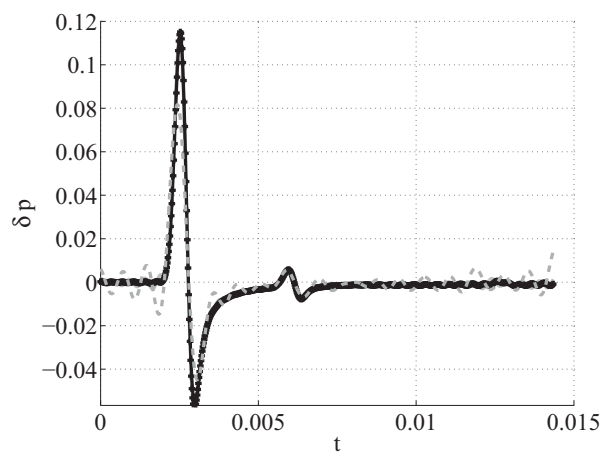


FIGURE 6.13 – Comparaison de la solution de référence avec les solutions reconstruites au capteur situé en $(0.5, 0.5)$. En noir trait plein : solution haute-fidélité, en tirets gris : avec 40 \mathcal{H} -modes POD, en croix noirs : avec 80 \mathcal{H} -modes POD

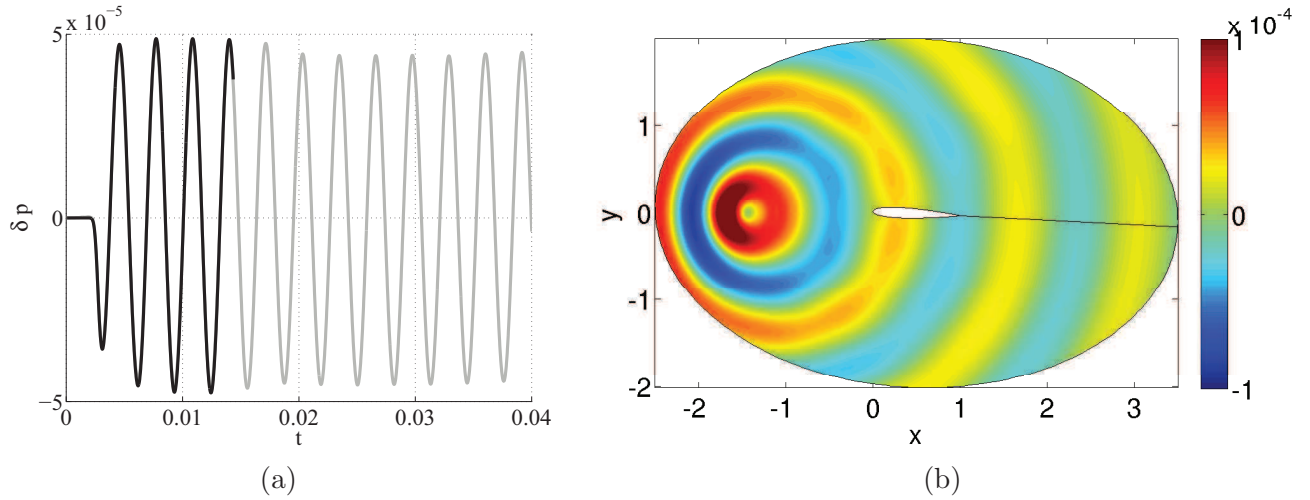


FIGURE 6.14 – Prédiction de la solution pour $u(t) = \sin(\omega t)$ avec $\omega = 2000 \text{ rad.s}^{-1}$. (a) Évolution du champ de pression au capteur $(0.5, 0.5)$ avec en noir la solution haute-fidélité et en gris la solution reconstruite à partir du système réduit (b) Visualisation du champ de pression prédit.

considéré un intervalle temporel de construction des modes suffisamment important.

6.5.3 Déformation d'un segment de paroi dans un écoulement uniforme

Il s'agit maintenant de valider le code de calcul réduit en présence de paroi mobile. La première configuration de calcul consiste en un écoulement uniforme $\bar{u} = 0.5c_0$ sur une plaque plane. La plaque subit une petite déformation parabolique verticale définie de façon analytique par l'expression

$$\eta_y = (1 - x^2/16)u(t), \quad -4 \leq x \leq 4. \quad (6.105)$$

La situation est illustrée sur l'image (a) de la figure 6.16. Dans ces conditions, la loi de transpiration est simplement égale à

$$\mathfrak{F}(\boldsymbol{\eta}, \bar{\mathbf{u}}) = (0, \dot{u}(t)\eta_y + u(t)\bar{u}\partial_x\eta_y)^T. \quad (6.106)$$

Le domaine de calcul est discrétisé avec 300 points dans chaque direction spatiale. L'approximation numérique des modes de plus forte contrôlabilité (pour le produit scalaire basé sur le symétriseur) nécessite de résoudre deux problèmes aux valeurs initiales. Les deux conditions initiales sont définies à partir des enveloppes spatiales discrètes associées aux deux lois de contrôle $u(t)$ et $\dot{u}(t)$. Ces deux enveloppes spatiales proviennent du terme source de transpiration discret exprimé par la relation (6.77). En pratique, de tels problèmes aux valeurs initiales sont mal posés d'un point de vue numérique car les enveloppes spatiales du terme source de transpiration discret ont un support spatial ponctuel. De ce fait, les fronts d'onde sont trop brutaux pour espérer pouvoir construire des systèmes réduits. Afin de contourner ce problème, les problèmes aux valeurs initiales sont remplacés par des problèmes forcés. Pour ce faire, on définit un terme source de type $\mathbf{b}u(t)$ en prenant comme loi $u(t)$ une gaussienne définie par

$$u(t) = e^{(t-t_0)^2/b^2}. \quad (6.107)$$

Il faut alors bien ajuster les deux paramètres t_0 et b en fonction de la gamme de fréquences désirées [280]. Nous prenons ici comme paramètres $t_0 = 300\Delta t$ et $b = 10^{-2}$. L'impulsion gaussienne ainsi définie est illustrée sur l'image (b) de la figure 6.1. Le problème forcé est alors

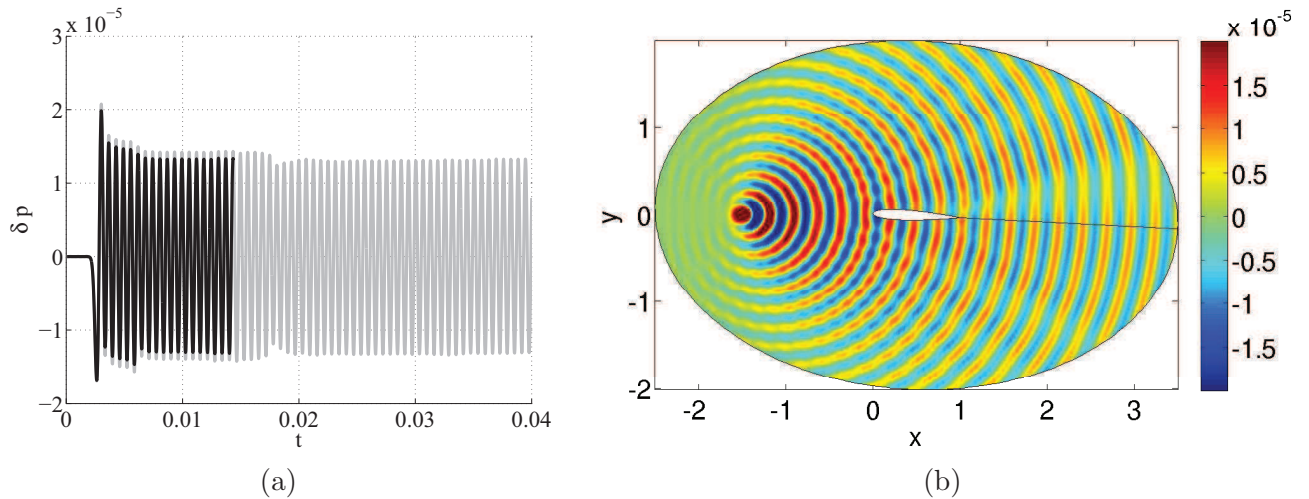


FIGURE 6.15 – Prédiction de la solution pour $u(t) = \sin(\omega t)$ avec $\omega = 10000 \text{ rad.s}^{-1}$. (a) Évolution du champ de pression au capteur $(0.5, 0.5)$ avec en noir la solution haute-fidélité et en gris la solution reconstruite à partir du système réduit (b) Visualisation du champ de pression prédit.

simulé pendant $1500\Delta t$ avec $\Delta t = 8.94 \times 10^{-5} \text{ s}$. Les clichés sont sauvegardés tous les $10\Delta t$ à partir de $t_1 = 50\Delta t$ ce qui donne au total 145 clichés. Nous essayons ensuite de reproduire cette simulation haute-fidélité à partir du modèle réduit. Nous avons rencontré un problème numérique qui n’existait pas lorsque la paroi était fixe. Le modèle réduit, construit avec des schémas aux différences finies centrées dégradées au voisinage de la paroi s’est révélé complètement instable. Ce problème est suggéré sur l’image (a) de la figure 6.17. Le modèle réduit est d’autant plus instable en augmentant le nombre de modes. De plus, un écart important en amplitude est observé. Ces problèmes numériques sont directement liés à la non-homogénéité des conditions aux limites de transpiration. Il est bien connu, en théorie, que les modes POD vérifient les conditions aux limites homogènes. C’est en effet le cas lorsque les parois sont fixes. En revanche, il est bien plus compliqué de prendre en compte des conditions aux limites non homogènes. Ce point a par exemple été récemment discuté par Placzek [210]. Cependant, l’écriture du modèle haute-fidélité dans le formalisme du contrôle devrait éviter ce problème naturellement puisque le caractère non-homogène des conditions aux limites est reporté dans le terme source de transpiration. En réalité, l’erreur que nous avons commise au moment de la construction du modèle réduit est d’ordre informatique. En effet, la matrice réduite a été construite comme si les composantes de vitesse de transpiration étaient inconnues à la paroi. Or, ces composantes sont imposées et ne doivent donc pas être introduites d’une part au moment de la construction de la matrice de corrélation (sous peine d’augmenter l’énergie du système) et d’autre part au niveau des deux projections gauche et droite pour former la matrice réduite. Le fait de conserver les composantes de vitesse imposées à la paroi induit le problème de non homogénéité des conditions aux limites. D’un autre côté, lorsqu’elles ne sont pas conservées, tout se passe comme si la paroi était fixe. Il a aussi été nécessaire d’appliquer des schémas aux différences finies décentrées sur 11 points au voisinage de la paroi de manière à augmenter le support spatial de la loi de transpiration. Ces deux modifications ont permis d’obtenir un système réduit stable comme le montre l’image (b) de la figure 6.17. Un léger écart en amplitude est observé. Il est difficile de l’expliquer. Il ne s’explique pas par un manque de modes car on converge vers une solution quand on augmente le nombre de mode (les courbes se superposent). Nous pensons qu’il est lié aux filtres numériques appliqués dans le domaine de calcul et au voisinage de la paroi. En effet, la matrice réduite est construite sans aucun filtre alors que le modèle haute-fidélité n’est fonctionnel qu’avec des filtres sous peine de diverger rapidement à la paroi. Pour terminer, on exploite le modèle réduit avec

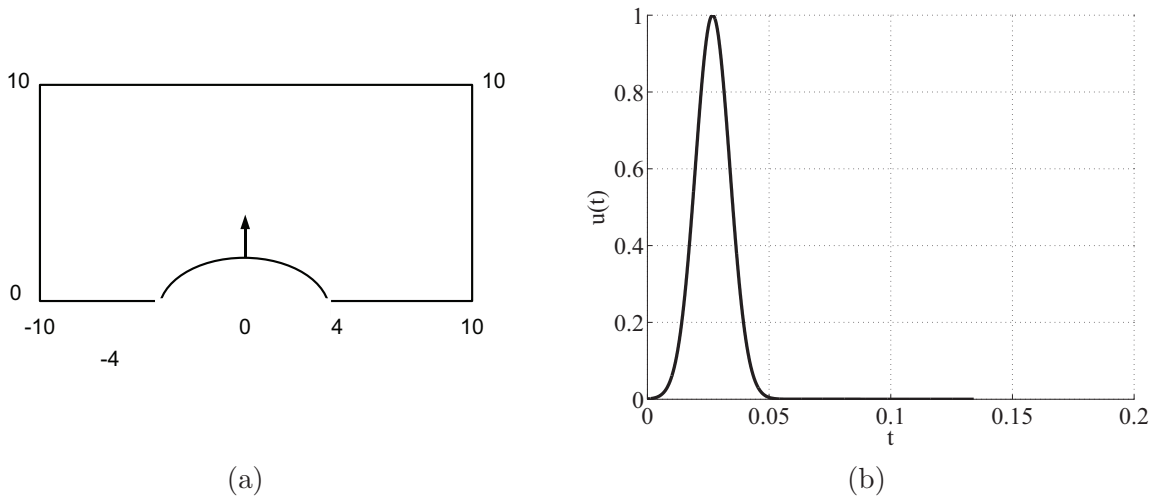


FIGURE 6.16 – (a) Configuration de calcul (b) Définition de l'impulsion gaussienne temporelle

une loi de contrôle de la forme $u(t) = \sin(\omega t)$. Le modèle réduit ne pose pas de problème de stabilité comme le suggère les courbes sur l'image (a) de la figure 6.18. On retrouve l'écart en amplitude comme prévu.

6.5.4 Rotation d'un profil NACA0012 en écoulement subsonique

Dans ce cas-test, la configuration de calcul est identique à celle de la section 6.5.2 décrite plus haut. La perturbation est engendrée par un petit mouvement de rotation rigide du profil aérodynamique. Afin de calculer les modes de plus forte contrôlabilité pour le produit scalaire basé sur le symétriseur, il est nécessaire de résoudre deux problèmes aux valeurs initiales. La première condition initiale est donnée par l'enveloppe spatiale \mathbf{b}_5 associée à la loi $\alpha(t)$. La seconde condition initiale est donnée par l'enveloppe spatiale \mathbf{b}_6 associée à la dérivée temporelle $\dot{\alpha}(t)$. Ces deux enveloppes spatiales proviennent du terme source de transpiration discret exprimé par la relation (6.77). La résolution de ces deux problèmes aux valeurs initiales ne peut être effectuée pour la même raison que dans le cas de la plaque déformable. Ils sont donc à nouveau remplacés par la résolution d'un problème forcé en définissant une impulsion gaussienne temporelle. L'impulsion gaussienne est définie en prenant ici comme paramètres $b = 10^{-3}$ et $t_0 = 1000\Delta t$ avec $\Delta t = 2.052 \times 10^{-6}$ s. Il est illustré sur l'image (a) de la figure 6.19. Pour simplifier, on construit le modèle réduit seulement avec l'enveloppe spatiale associée à $\dot{\alpha}$. Le problème forcé est résolu pendant $7000\Delta t$. Les clichés sont sauvegardés tous les $25\Delta t$ à partir de $t_1 = 250\Delta t$, ce qui induit une matrice de corrélation de 280 clichés. La matrice réduite est construite en utilisant le schéma aux différences finies sur 11 points au voisinage de la paroi pour s'affranchir du problème de stabilité existant avec les schémas centrés dégradés. Sur l'image (b) de la figure 6.19, la construction de la matrice réduite avec seulement 15 modes n'est pas suffisant pour reproduire correctement la solution haute-fidélité. Avec 30 modes en revanche, la superposition est pratiquement parfaite. On observe toujours un minime écart en amplitude qui peut encore s'expliquer par le fait qu'on n'introduit pas de filtres à l'intérieur du domaine de calcul et au voisinage des parois au moment de la construction du système réduit. Ces résultats quantitatifs sont aussi illustrés sur les figures 6.20, 6.21 et 6.22 dans lesquelles on visualise l'évolution du champ de pression à trois instants différents. En particulier, avec 15 modes on observe bien un manque d'énergie pour reproduire correctement les solutions de référence. Pour conclure, quelques prédictions pour des lois de contrôle $\alpha(t) = \sin(\omega t)$ sont illustrées sur les dernières images de la figure 6.23.

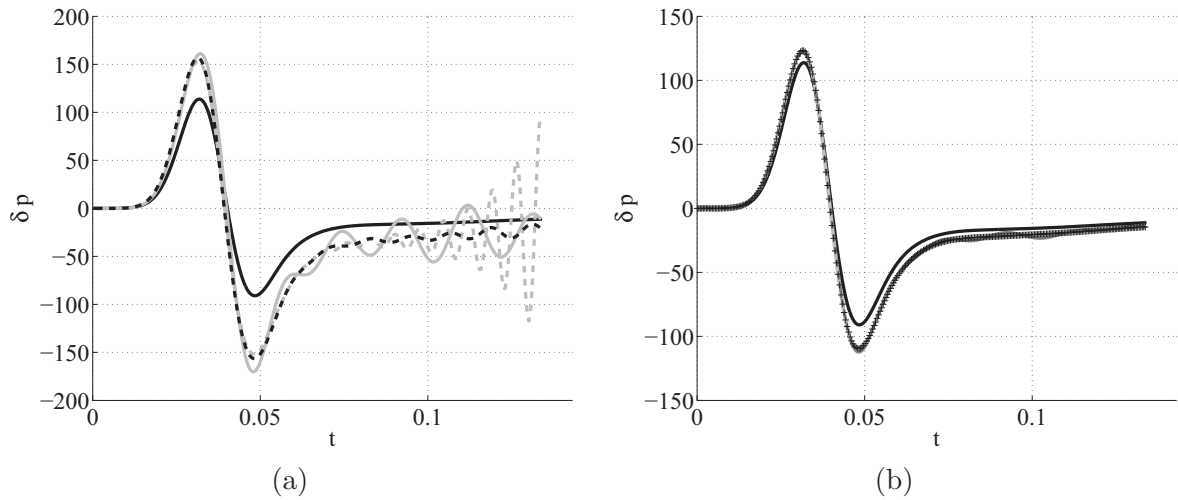


FIGURE 6.17 – Influence des schémas aux différences finies au voisinage de la paroi, comparaison des champs de pression obtenus au capteur (4,3). (a) Construction de la matrice réduite avec des schémas centrés à la paroi. En noir : solution haute-fidélité, en gris : solution reconstruite avec 10 \mathcal{H} -modes POD, en tirets noirs : solution reconstruite avec 15 \mathcal{H} -modes POD, en tirets gris : solution reconstruite avec 20 \mathcal{H} -modes POD (b) Construction de la matrice réduite avec des schémas décentrés sur 11 points à la paroi. En noir : solution haute-fidélité, en gris : solution reconstruite avec 10 \mathcal{H} -modes POD, en tirets noirs : solution reconstruite avec 20 \mathcal{H} -modes POD, en + noirs : solution reconstruite avec 60 \mathcal{H} -modes POD

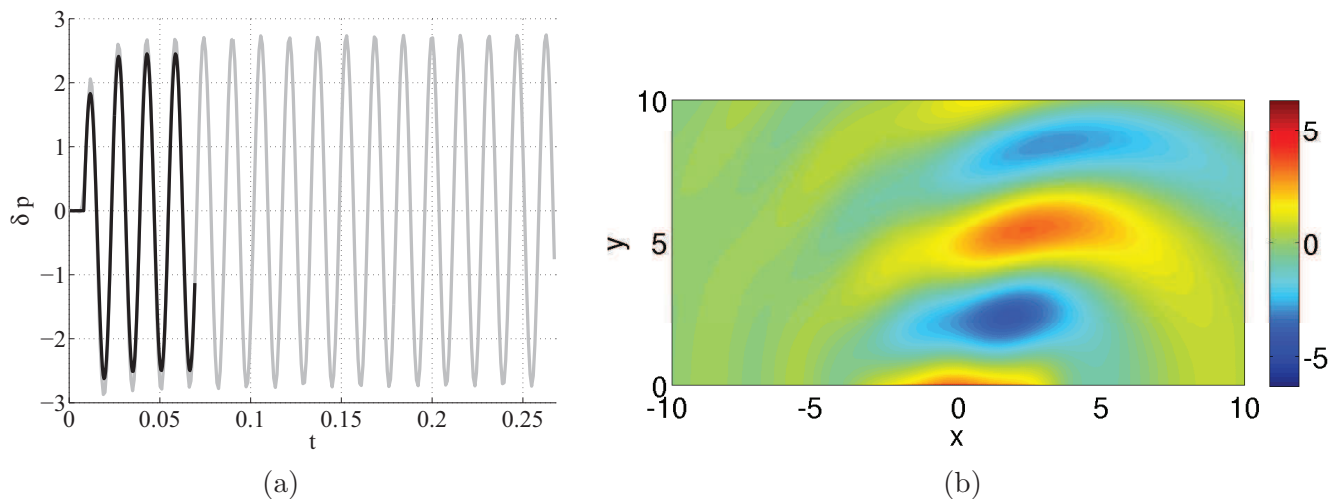


FIGURE 6.18 – Prédiction de la solution pour la loi de contrôle $u(t) = \sin(\omega t)$ avec $\omega = 400 \text{ rad.s}^{-1}$. (a) Évolution du champ de pression au capteur (4,3) avec en noir la solution haute-fidélité et en gris la solution reconstruite à partir du système réduit (b) Visualisation du champ de pression prédit après quelques périodes.

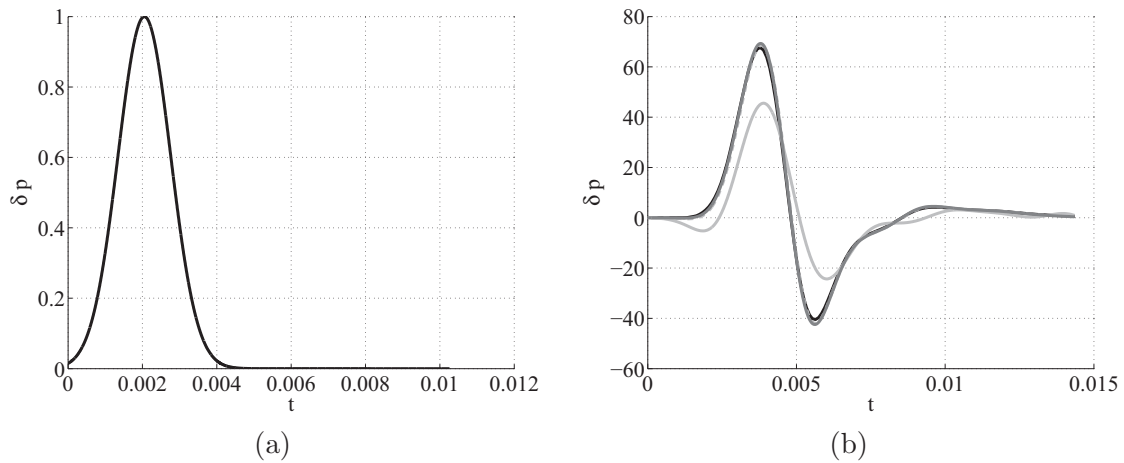


FIGURE 6.19 – (a) Définition de l'impulsion gaussienne temporelle (b) Comparaison de la solution haute-fidélité avec les solutions reconstruites au capteur situé en $(0.5, 0.5)$. En noir : solution de référence, en gris clair : avec 15 \mathcal{H} -modes POD, en gris foncé : avec 30 \mathcal{H} -modes POD.

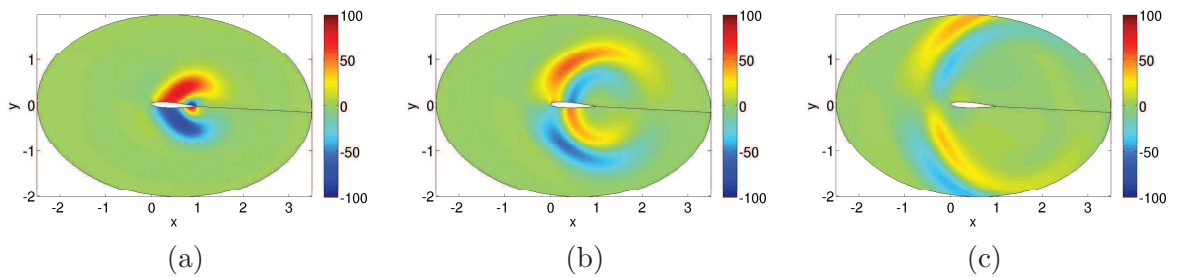


FIGURE 6.20 – Visualisation du champ de pression haute-fidélité à différents instants. (a) après $2000\Delta t$ (b) après $3000\Delta t$ (c) après $4500\Delta t$

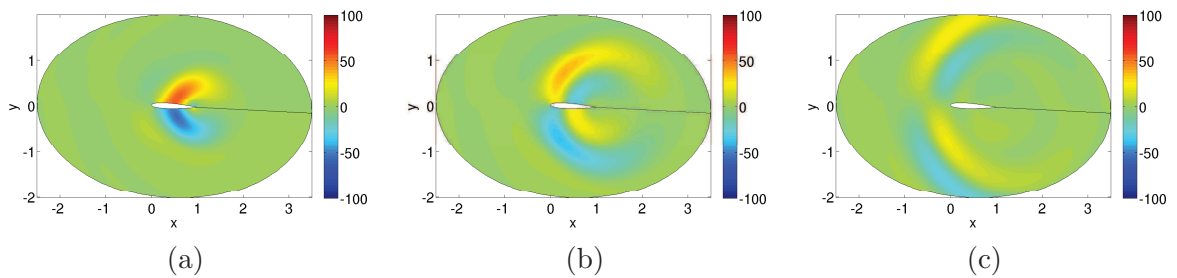


FIGURE 6.21 – Visualisation du champ de pression reconstruit avec 15 \mathcal{H} -modes POD. (a) après $2000\Delta t$ (b) après $3000\Delta t$ (c) après $4500\Delta t$

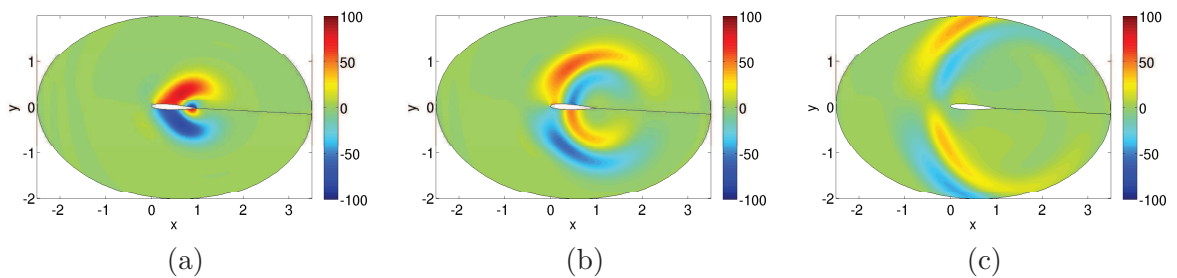


FIGURE 6.22 – Visualisation du champ de pression reconstruit avec 30 \mathcal{H} -modes POD. (a) après $2000\Delta t$ (b) après $3000\Delta t$ (c) après $4500\Delta t$

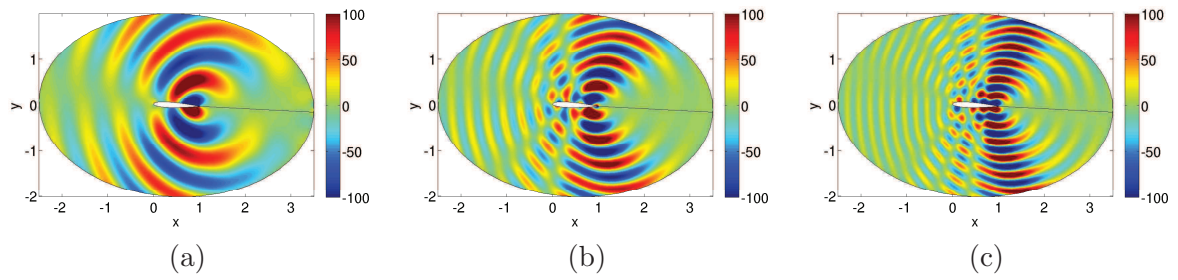


FIGURE 6.23 – Visualisation du champ de pression prédit pour la loi de contrôle $u(t) = \sin(\omega t)$.
(a) avec $\omega = 2000 \text{ rad.s}^{-1}$ (b) avec $\omega = 4000 \text{ rad.s}^{-1}$ (c) avec $\omega = 6000 \text{ rad.s}^{-1}$

Chapitre 7

Conclusion générale et perspectives

Dans ce manuscrit de thèse, les principales problématiques théoriques et pratiques associées à la construction de modèles réduits numériques ont été exposées. Il s'agit de représenter à moindre coût l'évolution de petites perturbations compressibles au sein d'un écoulement. On a choisi de modéliser ces petites perturbations à l'aide des équations d'Euler linéarisées qui supposent que les effets thermiques et visqueux n'influencent pas, en première approximation, sur leur évolution. Ce choix a été principalement motivé par la nature linéaire du modèle, permettant de travailler dans un cadre théorique plus riche. D'une manière générale, les modèles fluides linéarisés présentent la grande particularité mathématique d'être non symétriques et d'être de dimension très importante, ce qui limite considérablement le nombre de méthodes de réduction exploitables. Les équations d'Euler linéarisées ont été formulées en variables primitives de façon à mettre en évidence les termes qui peuvent être à l'origine d'une croissance transitoire de l'énergie. Grâce à cette écriture particulière, une petite modification des équations d'Euler linéarisées a été proposée pour contrôler cette croissance énergétique dans certaines situations physiques et numériques critiques (en présence d'une instabilité convective par exemple).

Les travaux menés pendant ces trois années de thèse ont permis de mieux comprendre les différentes problématiques numériques qui émergent lorsqu'un système numérique réduit est construit à partir d'un système d'équations hyperboliques. En particulier, le problème de la stabilité des modèles réduits émerge à cause de la non symétrie du modèle physique discret. Une grande partie du mémoire a par conséquent été dédiée à l'analyse de l'influence de différentes projections sur la stabilité et l'optimalité des modèles réduits construits à partir des équations d'Euler linéarisées. On a rappelé que la stabilité du système réduit est assurée à condition que le profil d'énergie standard du modèle réduit soit monotone et décroissant. De plus cette décroissance monotone est directement reliée à l'équation algébrique de Lyapunov. Lorsque toutes les inconnues sont observées, les études numériques effectuées ont permis de constater que l'application de la méthode POD basée sur le gramien d'observabilité (ou de manière équivalente la méthode *balanced-POD*) est moins bien adaptée que celle basée sur le symétriseur. Par ailleurs, en présence de croissance énergétique, la méthode POD construite à partir d'un produit scalaire arbitraire se révèle incapable de maintenir la stabilité du modèle réduit sur des intervalles de temps finis. La nature antisymétrique des équations d'Euler linéarisées nous a amené à développer une nouvelle méthode de projection stabilisante basée sur la construction d'un système dynamique anti-symétrique qui fait intervenir le modèle anti-adjoint. Cette méthode est plus générale que la méthode POD dans la mesure où elle est capable de construire un modèle réduit stable sur des intervalles de temps finis même si l'énergie discrète est susceptible de croître. La méthode proposée est équivalente à la méthode POD

seulement dans le cas où la matrice est antisymétrique voire antisymétrisable. L'influence des conditions aux limites et du nombre de Mach a aussi été discutée, en particulier dans le cas d'écoulements de base uniformes. Il a notamment été montré que la moindre réflexion numérique non physique peut déstabiliser le modèle réduit. C'est par exemple le cas en présence de conditions aux limites de non réflexion. Une méthode, basée sur la résolution des équations de Lyapunov pour la matrice réduite, a par ailleurs été introduite afin d'améliorer l'optimalité et la stabilité du modèle réduit à moindre coût.

Pour terminer, les techniques de réduction de modèle ont été mises en oeuvre dans un code de calcul industriel. L'objectif est essentiellement d'être capable de prendre en compte des géométries complexes. Pour ce faire, une méthode de construction intrusive du modèle réduit a été développée de manière à respecter au mieux une bonne partie des ingrédients numériques du modèle haute-fidélité. La prise en compte de parois mobiles a aussi été présentée. Il a été choisi de modéliser la mobilité des parois à partir des lois de transpiration qui permettent d'éviter de manipuler un domaine de calcul variant au cours du temps. La construction de modèles réduits en présence de conditions de transpiration a initialement posé des difficultés car c'est par définition une condition aux limites non homogène. Son intégration dans le formalisme du contrôle a permis d'améliorer considérablement les résultats numériques. Finalement, le modèle réduit a été exploité pour prédire à moindre coût la réponse du système lorsque par exemple la fréquence et/ou l'amplitude de la loi de contrôle varie.

On propose dans ce qui suit quelques perspectives à ce présent travail. L'application de prédilection envisagée concerne le traitement à moindre coût des problèmes aéroélastiques. Dans ce mémoire, tous les éléments nécessaires à une telle application ont été introduits. Il ne reste plus qu'à introduire un modèle de structure pour finaliser le couplage aéroélastique. Une étude de sensibilité aux paramètres de la structure pourrait alors être réalisée directement à partir du modèle réduit couplé. On s'intéresse par exemple à détecter les phénomènes de *mistuning*. Il s'agit d'analyser rapidement l'influence des imperfections de conception sur le comportement vibratoire de la structure d'intérêt. Ce type de problème peut survenir dans les installations de type turbine dans lesquelles la moindre imperfection de matériaux ou de symétrie cyclique peut générer des comportements vibratoires indésirables. Une telle analyse de sensibilité demande de balayer un grand nombre de valeurs des différents paramètres de la structure. Cela ne peut s'envisager qu'avec des modèles réduits.

D'un point de vue pratique, il est important de se rappeler que le développement de modèles réduits repose sur la construction préalable d'un modèle numérique dit haute-fidélité. La première étape est donc de s'assurer que le modèle numérique de référence soit bien posé. En l'état actuel des recherches, il reste malheureusement difficile de construire un modèle numérique irréprochable dans le contexte des équations d'Euler linéarisées ou plus généralement des modèles de fluides compressibles. En particulier, la définition de parfaites conditions aux limites de non réflexion, la discrétisation spatiale au voisinage des conditions aux limites de paroi et absorbantes ou encore la prise en compte de géométries complexes posent encore de nombreux problèmes numériques (réflexions non physiques, oscillations maille à maille, mauvaises interpolations, etc). Ces imperfections numériques du modèle haute-fidélité ne permettent pas d'appliquer rigoureusement certains éléments théoriques qui assurent par exemple la stabilité du modèle réduit. Il est notamment crucial d'être capable de construire un modèle numérique de référence stable si l'écoulement de base est physiquement stable. Or, cette propriété n'est pas toujours respectée ou difficilement vérifiable au regard de la complexité des procédures numériques intégrées dans les codes de calcul pour pouvoir simuler des écoulements sur des configurations complexes. Par ailleurs, les modèles linéaires sont extrêmement sensibles à tout défaut numérique puisque ces derniers peuvent à leur tour devenir des sources de perturbations pour le modèle physique. Un axe de recherche important concerne donc l'amélioration

des modèles numériques de référence pour simuler l'évolution des perturbations. C'est important car les modèles réduits numériques héritent d'une grande partie de leurs ingrédients numériques comme on l'a déjà mentionné.

Dans ce mémoire, on s'est limité aux équations d'Euler linéarisées. Ces équations supposent les effets thermiques et visqueux négligeables sur l'évolution des perturbations. Ces effets deviennent cependant importants si on souhaite prendre en compte des phénomènes plus complexes pouvant se produire par exemple au niveau de la couche limite. C'est notamment le cas des phénomènes de décrochage qui correspondent à une perte brutale de la portance due au décollage de la couche limite. Il serait par conséquent intéressant d'étendre tout le travail effectué dans ce mémoire au système d'équations de Navier-Stokes compressible linéarisé (visqueux et anisotherme). En particulier, on comparerait le produit scalaire basé sur le symétriseur avec la nouvelle méthode de stabilisation, les deux approches pouvant être combinées avec la méthode d'amélioration par ailleurs. Avec un tel modèle, on devrait observer des écarts de performance plus importants entre les deux projections. En effet, la viscosité peut jouer un rôle moteur dans la croissance énergétique des perturbations. La contribution éventuelle des valeurs propres négatives impliquées dans la projection stabilisante devra aussi être analysée davantage. On pourrait aussi tester le produit scalaire basé sur le symétriseur sur les équations de Navier-Stokes non linéaires. Dans le domaine non linéaire, les problèmes de stabilité sont encore plus critiques que dans le cas linéaire. La compréhension de la stabilité des modèles réduits linéaires reste cependant le point de départ pour espérer améliorer et éviter les problèmes numériques qui surviendront dans le domaine non linéaire. L'extension de la méthode de stabilisation dans le domaine non linéaire semble par contre plus délicate à mettre en oeuvre car il est difficile d'y définir une notion de modèle adjoint sans passer par une procédure de linéarisation.

Pour terminer, on rappelle que les applications recherchées sont très nombreuses puisqu'il s'agit d'effectuer à moindre coût toute expertise numérique (analyse paramétrique, contrôle, optimisation, etc). Si on souhaite tendre vers de telles utilisations dans des codes industriels dédiés à la simulation des écoulements compressibles, il faut être capable de construire des modèles réduits numériques qui soient par exemple valables sur une gamme entière de paramètres d'étude. Cette problématique a été brièvement introduite dans le mémoire. A l'heure actuelle, on sait construire des modèles réduits fiables lorsque la dépendance paramétrique est affine. Il est en revanche très difficile d'en construire si le modèle discret ne peut pas se décomposer de façon linéaire par rapport à ses paramètres. C'est par exemple le cas des modèles linéarisés en présence d'écoulements de base non uniformes.

Annexe A

Construction de modèles réduits numériques non linéaires

Introduction

Dans le cas des modèles mathématiques non-linéaires, il n'existe pas de techniques générales et la littérature est très vaste sur ce sujet. Par ailleurs, la majorité des approches existantes sont mal comprises, bien moins maîtrisées en théorie que dans le cas linéaire. Il est notamment difficile d'identifier des espaces invariants en temps. Il s'agit dans un premier temps d'identifier la nature et l'importance des non linéarités du système envisagé. Les mathématiciens essayent généralement de simplifier, de traiter préalablement la fonctionnelle non linéaire pour se ramener à un problème linéaire voire bilinéaire. On est amené à introduire la notion de modèle fortement ou faiblement non linéaire. Il est alors parfois possible d'exploiter à nouveau les méthodes de réduction linéaires présentées dans le premier chapitre. La majorité des méthodes de réduction non linéaires existantes sont d'ailleurs principalement des extensions des méthodes de réduction linéaires. Il nous semble important de séparer la phase de traitement de la fonctionnelle non linéaire (son approximation) de la phase de réduction numérique à proprement parler. Dans un premier temps, nous verrons comment construire un modèle réduit non linéaire dès lors qu'on connaît un espace réduit. Nous présenterons ensuite les principales manières d'approcher des non linéarités, en particulier les différentes formes de linéarisation. Enfin, les principales méthodes de réduction non linéaires seront introduites très brièvement.

A.1 Construction d'un modèle réduit non-linéaire

Comme dans le cas linéaire, un modèle réduit peut être construit soit par méthode de troncature, soit par méthode de résidualisation et à partir du modèle semi-discrétisé spatialement (système d'EDOs) ou à partir du modèle primitif d'EDPs. Le principe de construction par résidualisation ou par troncature est identique au cas linéaire. Nous nous limiterons ici à présenter l'extension de la méthode de troncature au cas non linéaire. Cette approche reste en effet la plus exploitable pour traiter des problèmes de grande dimension. Supposons, pour fixer les idées, que le système non-linéaire s'écrive sous la forme semi-discrète

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \end{cases} . \quad (\text{A-1})$$

Les notations employées sont identiques au cas linéaire et ne sont pas à nouveau décrites. L'application de la matrice \mathbf{A} sur le vecteur inconnu \mathbf{x} est remplacée par l'application d'une fonction non linéaire \mathbf{f} sur le vecteur \mathbf{x} . L'objectif est alors de construire un système non linéaire réduit de la forme

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_r(t) &= \mathbf{f}_r(\mathbf{x}_r(t)) + \mathbf{B}_r \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r(t) \\ \mathbf{x}_r(t_0) &= \mathbf{x}_{0r} \end{cases} . \quad (\text{A-2})$$

Les principales étapes formelles de construction du système réduit non-linéaire seront les suivantes :

- construire l'espace d'approximation à droite $\mathbf{V}_r = (\phi_1, \dots, \phi_r)$, $\mathbf{V}_r \in \mathbb{R}^{n \times r}$ tel que $\mathbf{x} \simeq \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r$ où les ϕ_i dénotent les fonctions de base globales directes ;
- substituer l'approximation $\mathbf{V}_r \mathbf{x}_r$ dans le modèle complet (A-1) ;
- le système obtenu est alors sur-déterminé ;
- construire l'espace de projection à gauche $\mathbf{W}_r = (\psi_1, \dots, \psi_r)$ où les ψ_i dénotent les fonctions de base globales adjointes ;
- projeter \mathbf{W}_r sur le système sur-déterminé ;
- obtenir le système réduit (A-2) de dimension r avec $\mathbf{f}_r(\mathbf{x}_r) = (\mathbf{W}_r^T \mathbf{V}_r)^{-1} \mathbf{W}_r^T \mathbf{f}(\mathbf{V}_r \mathbf{x}_r)$, $\mathbf{B}_r = (\mathbf{W}_r^T \mathbf{V}_r)^{-1} \mathbf{W}_r^T \mathbf{B}$, $\mathbf{C}_r = \mathbf{C} \mathbf{V}_r$ où l'exposant T dénote toujours la transposée de la matrice ;
- résoudre le système réduit d'équations ordinaires par une méthode d'intégration temporelle avec pour condition initiale réduite $\mathbf{x}_{0r} = (\mathbf{W}_r^T \mathbf{V}_r)^{-1} \mathbf{W}_r^T \mathbf{x}_0$;
- obtenir la solution originale du modèle complet en projetant la solution réduite $\mathbf{x}(t) \simeq \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r(t)$.

Ces différentes étapes de construction sont similaires au cas linéaire. Le principal challenge reste encore la construction des deux sous-espaces \mathbf{V}_r et \mathbf{W}_r . Il existe par contre une nouvelle difficulté dans la construction du système réduit qui repose sur l'évaluation du terme $\mathbf{f}(\mathbf{V}_r \mathbf{x}_r)$ une bonne fois pour toute. En effet, formellement, l'intégration temporelle du système réduit demanderait à chaque pas de temps de reconstruire la fonctionnelle réduite \mathbf{f}_r . Une telle démarche serait bien trop coûteuse puisqu'il serait nécessaire de projeter le modèle complet à chaque pas de temps. Le système dynamique réduit doit pouvoir être construit une bonne fois pour toute avant son intégration temporelle. Cette problématique a été discutée par exemple par Lucia [174]. Dans le cas linéaire, ce problème n'était pas rencontré, la matrice réduite \mathbf{A}_r pouvant être formée une bonne fois pour toute au préalable de toute simulation réduite. Le premier objectif dans la construction d'un modèle réduit est donc d'être capable d'exprimer le terme non linéaire réduit $\mathbf{f}(\mathbf{V}_r \mathbf{x}_r)$ une bonne fois pour toute et avec un coût de construction raisonnable. Les techniques de construction discrètes requièrent un effort algorithmique qui peut être très important. Cette difficulté est illustrée formellement dans le cas d'une fonctionnelle quadratique à l'aide de deux approches : une approche matricielle et une approche polynômiale.

A.1.1 Méthode matricielle

La fonctionnelle non linéaire est exprimée sous la forme

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(t) \quad (\text{A-3})$$

où maintenant les matrices \mathbf{Q}_i sont indépendantes de $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$. Sous cette forme, il y a autant de matrices à construire qu'il y a d'inconnues. En appliquant une projection biorthonormale, pour simplifier, la fonctionnelle réduite est calculée une unique fois à l'aide de l'expression

$$\mathbf{f}_r(\mathbf{x}_r) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{V}_r^i \mathbf{x}_r(t)) \mathbf{W}_r^T \mathbf{Q}_i \mathbf{V}_r \mathbf{x}_r \quad (\text{A-4})$$

où \mathbf{V}_r^i est la i -ème ligne de \mathbf{V}_r . Le principal coût de construction est le calcul des matrices $\mathbf{W}_r^T \mathbf{Q}_i \mathbf{V}_r$. Bien qu'il y ait autant de matrices $\mathbf{W}_r^T \mathbf{Q}_i \mathbf{V}_r$ que d'inconnues, les matrices \mathbf{Q}_i sont extrêmement creuses. Elles ne contiennent que quelques termes non nuls donc les produits peuvent être effectués très rapidement en utilisant un stockage creux de type Morse. Le principal inconvénient de cette approche est l'effort algorithmique que nécessiterait la construction et le stockage convenable de toutes les matrices \mathbf{Q}_i .

A.1.2 Méthode de projection polynômiale

Le principe de cette méthode est de construire le modèle réduit termes à termes plutôt que sous forme matricielle. Un modèle quadratique discret peut s'écrire en toute généralité pour chaque inconnue

$$\dot{x}_k = \sum_{i,j} \mathcal{N}_{ij}^k x_i^k x_j^k \quad (\text{A-5})$$

Après quelques calculs, chaque k -ème inconnue réduite x_{r_i} est donnée par :

$$\dot{x}_{r_k} = \sum_{l,p} \left(\sum_{m,i,j} \mathcal{N}_{ij}^k W_{km} V_{il} V_{jp} \right) x_{r_l} x_{r_p} \quad (\text{A-6})$$

Cette méthode nécessite le calcul de la triple somme ($\sum_{m,i,j} \mathcal{N}_{ij}^k W_{km} V_{il} V_{jp}$) et le stockage de $l \times p \times n$ coefficients réduits. Une centaine de fonctions de base globales nécessiterait donc 10^6 coefficients réduits à stocker en mémoire. L'approche polynômiale peut être étendue formellement sans difficulté pour des non linéarités d'ordre plus élevé. Pour s'affranchir de cette difficulté, il est cependant plus courant de construire le modèle réduit en revenant au modèle primitif d'équations aux dérivées partielles dans la mesure du possible. En dynamique des fluides, c'est l'approche classiquement retenue.

A.2 Approximation des non-linéarités

De manière générale, la simplification des termes non-linéaires est opérée à l'aide d'un développement de Taylor autour d'un point de référence \mathbf{x}_0 (point d'équilibre, point stationnaire...). La qualité de l'approximation dépendra du caractère plus ou moins marqué de la non-linéarité et de l'ordre du développement. Cette simplification nécessite le calcul de la valeur de référence dans un premier temps. Classiquement, un développement de Taylor à l'ordre 2 de \mathbf{f} est de la forme :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mathbb{H}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \dots \quad (\text{A-7})$$

où $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ dénote la jacobienne de \mathbf{f} au point de référence et $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ la hessienne de \mathbf{f} autour de \mathbf{x}_0 (tenseur si \mathbf{f} est un vecteur). À l'ordre 1, on parle de linéarisation et à l'ordre 2 de bilinéarisation par exemple. Un système est dit faiblement non-linéaire (*weakly non-linear system*) s'il est possible de simplifier la fonctionnelle non-linéaire par développement asymptotique

(par exemple développement de Taylor) de faible ordre (inférieur à 2 ou 3 en général). On ne conserve typiquement que les termes quadratiques ou cubiques. C'est la raison pour laquelle on peut trouver dans la littérature une distinction entre la réduction des systèmes faiblement non-linéaires et celle des systèmes fortement non-linéaires.

A.2.1 Méthodes de linéarisation

On distingue principalement 4 types de linéarisation :

- la linéarisation classique (autour d'un unique point) ;
- la linéarisation par morceaux (autour de plusieurs points) ;
- la linéarisation en cascade (résolution d'une succession de problèmes linéaires interdépendants) ;
- la linéarisation par interpolation.

A.2.1.1 Linéarisation classique

Le principe de cette méthode est de décomposer les inconnues en une partie principale (état stationnaire par exemple) et une partie fluctuante (petites perturbations). On néglige ensuite tous les termes d'ordre strictement supérieur à 1. Une fois le système linéarisé, on applique les méthodes de réduction des systèmes linéaires. En dynamique des fluides par exemple, cette méthode de linéarisation est restreinte à des études pour des écoulements fluctuants autour d'un régime stationnaire (fluctuations de faible amplitude). Le procédé de linéarisation ne peut pas reproduire les chocs qui peuvent se former dans les écoulements compressibles. En effet, en théorie mathématique, seul le caractère non linéaire est capable d'engendrer des solutions discontinues partant de conditions initiales continues ; alors que le caractère linéaire conserve la régularité d'une condition initiale (au mieux il conserve le nombre de chocs initiaux mais n'en crée pas de nouveaux).

A.2.1.2 Linéarisation en cascade

Cette linéarisation est obtenue par perturbation des inconnues (voir par exemple [30]). Le principe général est d'identifier un paramètre λ tel que le problème soit soluble quand on connaît la solution pour une valeur particulière λ_0 . La solution globale peut être étudiée par une analyse globale autour de λ_0 . Une solution perturbative est construite à l'aide d'une analyse locale au voisinage de λ_0 comme une série en λ :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + (\lambda - \lambda_0)\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) + \dots + (\lambda - \lambda_0)^n\mathbf{f}_n(\mathbf{x}) + \dots \quad (\text{A-8})$$

Ces séries sont appelées séries de perturbation. L'avantage de cette écriture réside dans le fait que $\mathbf{f}_n(\mathbf{x})$ peut être calculé connaissant $\mathbf{f}_0(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_{n-1}(\mathbf{x})$ dès lors que le problème est soluble pour λ_0 . Si λ est proche de λ_0 , $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ devrait être bien approchée avec seulement quelques termes de la série. Les développements asymptotiques sont un cas particulier des séries de perturbation. Le problème principal de ces développements est qu'ils divergent dans la plupart des cas. Il est alors nécessaire de développer et d'utiliser des techniques sophistiquées afin de "sommer" des séries divergentes, d'une part, et d'accélérer la convergence des séries lentement convergentes d'autre part (en effet l'accélération de la convergence implique une réduction du nombre de termes de l'approximation de la solution \mathbf{f}). On peut améliorer la convergence en utilisant les approximants de Padé. On distingue les problèmes de perturbation régulière ou singulière. Les perturbations régulières s'écrivent comme un développement en séries des puissances de λ contrairement aux perturbations singulières. Les méthodes de perturbations permettent de se ramener à la résolution de plusieurs systèmes linéaires en cascade. Le terme

”cascade” signifie que la résolution d’un système linéaire de rang i dépend des solutions des systèmes linéaires de rang strictement inférieur à i .

$$\dot{\mathbf{x}}^{(n)}(t) = \sum_{k+l=n} \mathcal{N}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{x}^{(l)} \quad (\text{A-9})$$

Le paramètre λ peut par exemple être le temps t ou encore un paramètre du modèle. Par exemple, dans les travaux de Razafindralandy [215], le paramètre de contrôle est le temps. Une étude sur le rayon de convergence de la série temporelle a été menée et une méthode de resommation de Borel-Laplace est utilisée pour accélérer la convergence. Dans le cas des systèmes contrôlés, on considère des entrées de la forme $\alpha \mathbf{u}(t)$ avec α un scalaire arbitraire. Le paramètre α est alors exploitée pour le développement de la série de perturbation. Le vecteur d’état perturbé s’écrit donc :

$$\mathbf{x}(t) = \alpha \mathbf{x}_1(t) + \alpha^2 \mathbf{x}_2(t) + \alpha^3 \mathbf{x}_3(t) + \dots \quad (\text{A-10})$$

Ensuite, on se ramène classiquement au traitement de multiples systèmes linéaires. Cette approche a été introduite par Phillips [205, 206]. Elle reste limitée aux faibles non-linéarités. Notons qu’il existe aussi les méthodes de linéarisation et de bilinéarisation de Carleman (voir par exemple [227]). Les méthodes de linéarisation en cascade se limitent en général à de petites variations autour des paramètres de perturbation.

A.2.1.3 Linéarisation par morceaux

L’inconvénient des méthodes de linéarisation classique est qu’elles ne délivrent de bons résultats qu’au voisinage du point de linéarisation. Le principe est de chercher les plus grands intervalles temporels sur lesquels on peut linéariser les équations. On obtient ainsi un ensemble de systèmes linéaires valables sur chaque sous-intervalle. On découpe l’intervalle $[t_0, t_f] = \bigcup_{i=1}^n [t_i, t_{i+1}]$ tel que sur chaque sous-intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ on puisse approcher \mathbf{f} par $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}$. Autrement dit, \mathbf{f} est linéarisée à plusieurs dates sur une trajectoire. La linéarisation peut être réalisée autour de $(t_i, \mathbf{x}(t_i))$ ou autour de $\mathbf{x}(t_i)$ si le système est autonome. Ce type de linéarisation est employée en particulier dans la méthode de réduction prometteuse *Trajectory piecewise-linear* [120, 218, 219] (acronyme TPWL).

A.2.1.4 Linéarisation par décomposition modale

Dans cette forme de linéarisation, on cherche à écrire l’opérateur non linéaire de la façon suivante :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^p \mathbf{b}_i a_i(t) \quad (\text{A-11})$$

Par exemple, si on s’intéresse au système dynamique $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$, une décomposition orthogonale propre de $\dot{\mathbf{x}}(t)$ fournit directement l’approximation souhaitée.

A.2.2 Approximations particulières

A.2.2.1 Séries de Volterra

Les théories de Volterra et de Wiener (voir par exemple [227, 240]) cherchent à décrire la relation entrée-sortie d’une fonctionnelle non linéaire. On commence par décomposer la solution :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{x}_i(t) \quad (\text{A-12})$$

où $\mathbf{x}_0(t)$ est la caractéristique statique du système. Chacun des termes est recherché sous la forme de convolutions intégrales multidimensionnelles :

$$\mathbf{x}_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \mathbf{u}(t - \tau_1) \dots \mathbf{u}(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (\text{A-13})$$

Si $n = 1$, il s'agit d'une convolution standard (système linéaire). Si $n = 2$, il s'agit d'une double convolution (non-linéarité d'ordre 2)... Le terme $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ est le noyau dynamique de Volterra d'ordre n . Il correspond à des réponses impulsionnelles généralisées. On dit que le système est causal si $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = 0$ pour $\tau_j < 0$ pour tout j . Les noyaux ne sont plus des invariants du système et dépendent du niveau d'excitation. On peut travailler sur la représentation fréquentielle des noyaux de Volterra (transformée de Fourier ou Laplace). On définit alors des fonctions de transfert non-linéaires. Les séries de Wiener (1958) sont une extension des séries de Volterra. Il s'agit d'un développement des noyaux de Volterra sur des fonctions de base orthonormales comme par exemple les fonctions de Laguerre ou Kautz. En pratique, la principale difficulté est la détermination des noyaux de Volterra (lorsque $n > 2$ essentiellement). Un certain nombre de méthodes d'identification des noyaux de Volterra ont été publiées [239, 240] en particulier l'algorithme de Korenberg [48, 154, 186], (*Fast orthogonal Algorithm*). Les séries de Volterra restent un outil de décomposition harmonique relativement efficace mais limité à de faibles non linéarités (problème de convergence de la série pour de fortes non linéarités). Elles ne modélisent pas les bifurcations et les hystérésis. L'approximation de Volterra a été couplée récemment avec la POD en vue d'applications en aéroélasticité notamment [177, 249].

A.2.2.2 Équilibrage harmonique (*Harmonic Balance Method*)

Cette méthode est une extension des méthodes fréquentielles linéaires. Elle s'applique pour les phénomènes périodiques. Pour fixer les idées, on considère le modèle suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial L(u)}{\partial x} = 0 \quad (\text{A-14})$$

Les principales étapes de l'algorithme sont les suivantes :

1. écrire la solution sous forme de série de Fourier avec un nombre d'harmoniques en temps prédéterminées

$$u(x, t) \approx \sum_{n=-N}^N c_n(x) e^{in\omega t} \quad ; \quad (\text{A-15})$$

2. substituer l'approximation dans le modèle primitif

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \sum_{n=-N}^N in\omega c_n(x) e^{in\omega t} \quad ; \quad (\text{A-16})$$

3. le problème instationnaire est transformé en un problème stationnaire

$$\frac{d\hat{L}(\hat{u})}{dx} + \hat{S}(\hat{u}) = 0 \quad (\text{A-17})$$

avec $\hat{u} = (c_n)_n$, \hat{S} : vecteur terme source provenant de $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$;

4. manipuler algébriquement les équations pour regrouper les termes de même fréquence ;

5. on néglige éventuellement certaines composantes de fréquences supérieures ;
6. on suppose l'indépendance de chaque terme (*process of balancing*) ;
7. on résout un système algébrique pour déterminer les $2N + 1$ coefficients de Fourier ;
8. si c'est trop compliqué on prend une formulation pseudo-temps (problème fortement non linéaire)

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{L}(\hat{u})}{\partial x} + \hat{S}(\hat{u}) = 0. \quad (\text{A-18})$$

Dans le domaine de l'ingénierie, et plus particulièrement pour l'étude des vibrations non-linéaires (voir par exemple [71]), il est souvent requis de calculer des solutions périodiques d'un système dynamique non-linéaire. Lorsqu'on s'intéresse à des problèmes périodiques, on utilise soit des méthodes d'intégration temporelle sur une période soit une décomposition en série de Fourier temporelle. Cette dernière approche s'avère *a priori* moins coûteuse et on peut raisonner physiquement en terme de fréquences. La méthode pourrait être appliquée pour traiter des écoulements instationnaires non-linéaires périodiques [187] (régime d'écoulements auto-entretenus). La méthode a aussi été introduite pour traiter des problèmes aéroélastiques dans l'optique de simuler des cycles limites [58, 133, 262, 263, 264]. La méthode d'équilibrage équilibrée serait limitée à de faibles non linéarités et à un petit nombre d'harmoniques. De plus, il faut avoir une idée de la fréquence fondamentale du phénomène étudié. C'est souvent le cas pour les problèmes faisant intervenir des machines tournantes.

A.3 Réduction numérique des modèles non-linéaires

La première approche consiste à construire un modèle réduit en s'appuyant sur les simplifications de la fonctionnelle non linéaire introduits dans la section précédente. Si aucune simplification préalable des non linéarités n'est effectuée au préalable, on cherche à réduire directement le modèle non linéaire. Il s'agit alors sans nulle doute du cas le plus difficile. La littérature sur les tentatives de réduction numérique des modèles non linéaires est très vaste. Afin de ne pas trop surcharger ce mémoire qui ne traite qu'un modèle linéaire, nous ne présentons que les principales méthodes dans la suite.

A.3.1 Réduction des systèmes linéaires non autonomes

Il s'agit d'étendre les méthodes de réduction linéaires au cas plus général des systèmes linéaires non-autonomes (en anglais *Linear Time Variant* - acronyme LTV). Les systèmes non linéaires peuvent se ramener à ces systèmes en utilisant par exemple la technique de linéarisation par morceaux. On trouvera des tentatives d'extension des méthodes équilibrées [60, 232, 233, 248, 272] et des méthodes d'identification des moments [201, 226, 232].

A.3.2 Méthode TPWL (*Trajectory Piecewise-Linear*)

Il s'agit d'approcher les matrices jacobiniennes des fonctionnelles non linéaires qui dépendent du temps par une combinaison pondérée de matrices constantes par morceaux. De ce fait une séquence de systèmes linéaires locaux sont utilisés pour engendrer un sous-espace réduit global. Le modèle TPWL final est construit comme une somme pondérée de systèmes linéaires locaux réduits [44, 120, 218, 219, 271]. Pour de fortes non-linéarités, la méthode nécessite un nombre important de points de linéarisation. Il s'agit du principal inconvénient, ce qui implique un nombre important de systèmes linéaires donc un stockage qui peut devenir rapidement insurmontable. La fonction poids qui induit la combinaison pondérée détermine l'influence du i -ème système linéaire local sur le système global (poids de l'état courant à la date t_i). La

détermination des poids et des points de linéarisation reste peu évidente bien que la méthode puisse s'appliquer même pour des non linéarités fortes.

A.3.3 Méthodes équilibrées

On distingue la méthode équilibrée exacte et la méthode équilibrée empirique. Il n'existe pas encore de méthode équilibrée générale pour les systèmes non-linéaires. Il existe une théorie exacte pour une classe particulière de système non linéaire qui fut introduite par Scherpen [236, 237, 238]. Scherpen considère les systèmes contrôlés non linéaires et affines suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) \end{cases} \quad (\text{A-19})$$

où \mathbf{f} , \mathbf{g} et \mathbf{h} sont des fonctions de classe C^∞ avec $\mathbf{f}(0) = 0$ et $\mathbf{h}(0) = 0$. La **fonction énergie de contrôlabilité** est définie par

$$L_c = \min \left\{ \mathbf{u} \in L^2(-\infty, 0), \quad \mathbf{x}(-\infty) = 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \|\mathbf{u}(t)\|^2 dt \right\} \quad (\text{A-20})$$

et la **fonction énergie d'observabilité** par

$$L_o = \frac{1}{2} \int_0^\infty \|\mathbf{y}(t)\|^2 dt \quad (\text{A-21})$$

où $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ et $\mathbf{u} \equiv 0$ pour $(t \geq 0)$. Ces deux fonctions d'énergie ne sont pas nécessairement finies. En particulier, si le système est instable alors L_o ne le sera pas. Dans le cas linéaire, notons que ces fonctions énergie sont reliées aux gramiens par les relations suivantes :

$$L_c(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \mathcal{G}_c^{-1} \mathbf{x}_0 \quad (\text{A-22})$$

$$L_o(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \mathcal{G}_o \mathbf{x}_0 \quad (\text{A-23})$$

Si dans le cas linéaire il est possible de calculer les gramiens à partir des équations de Lyapunov, il est en revanche difficile de calculer les fonctions d'énergie dans le cas non-linéaire. Si on suppose que l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, on peut essayer de résoudre les EDPs de Hamilton-Jacobi suivantes

$$\frac{\partial L_o(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T(\mathbf{x}) \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0, \quad L_o(0) = 0 \quad (\text{A-24})$$

$$\frac{\partial L_c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \frac{\partial L_c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial L_c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad L_c(0) = 0 \quad (\text{A-25})$$

Dans le cas linéaire les équations de Hamilton-Jacobi se ramènent aux équations de Lyapunov. Sous certaines conditions, Scherpen a montré qu'il existe une réalisation équilibrée des fonctions d'énergie au voisinage de l'origine. Une méthode de réduction équilibrée identique au cas linéaire pourrait alors être appliquée. Malheureusement, il n'y a pas d'approche générale pour déterminer la transformation des fonctions d'énergie et il n'y a pas de procédure pour des systèmes non-linéaires quelconques. D'autres études continuent à être menées [110]. Une méthode équilibrée empirique a été introduite par Lall et *al.* [155, 156, 157]. Les gramiens empiriques pour les systèmes non-linéaires sont introduits. Ils commencent par définir des ensembles utiles à la construction des gramiens empiriques :

1. un ensemble de r matrices orthogonales (r le nombre de matrices pour la direction

perturbée)

$$\mathcal{T}^n = \{\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_r \ ; \ \mathbf{T}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ \mathbf{T}_i^T \mathbf{T}_i = \mathbf{I}_n, \ i = 1 \dots r\} \ ; \quad (\text{A-26})$$

2. un ensemble de s constantes positives (s est le nombre d'excitations différentes dans chaque direction)

$$\mathcal{M} = \{c_1, \dots, c_s \ ; \ c_i \in \mathbb{R}, \ c_i > 0, \ i = 1 \dots s\} \ ; \quad (\text{A-27})$$

3. un ensemble de p vecteurs unitaires standards

$$\mathcal{E}^n = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p \ ; \ \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n\}. \quad (\text{A-28})$$

où n représente le nombre d'entrées ou le nombre d'états. À partir de ces ensembles, les gramiens empiriques sont définis. Le gramien de contrôlabilité empirique est défini par

$$\mathcal{G}_c = \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^s \sum_{i=1}^p \frac{1}{rsc_m^2} \int_0^\infty \Phi^{ilm}(t) dt \quad (\text{A-29})$$

avec

$$\Phi^{ilm}(t) := (\mathbf{x}^{ilm}(t) - \bar{\mathbf{x}}^{ilm})(\mathbf{x}^{ilm}(t) - \bar{\mathbf{x}}^{ilm})^T, \quad \Phi^{ilm}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (\text{A-30})$$

où $\mathbf{x}^{ilm}(t)$ est l'état du système correspondant à une entrée de type impulsion

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} + c_m \mathbf{T}_l \mathbf{e}_i \delta(t) \quad (\text{A-31})$$

et $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{u}}$ sont les états et entrées moyens ou stationnaires. De même, le gramien d'observabilité empirique est défini par

$$\mathcal{G}_o = \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^s \frac{1}{rsc_m^2} \int_0^\infty \mathbf{T}_l \Psi^{lm}(t) \mathbf{T}_l^T dt, \quad \Psi^{lm}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (\text{A-32})$$

avec

$$\Psi_{ij}^{lm}(t) := (\mathbf{y}^{ilm}(t) - \bar{\mathbf{y}}^{ilm})^T (\mathbf{y}^{jlm}(t) - \bar{\mathbf{y}}^{jlm}) \quad (\text{A-33})$$

où $\mathbf{y}^{ilm}(t)$ est la sortie du système pour les conditions initiales $\mathbf{x}_0 = c_m \mathbf{T}_l \mathbf{e}_i$ (avec entrée nulle $\mathbf{u} = 0$). On notera que cette définition ne nécessite pas la définition de l'adjoint en non linéaire. Lall et *al.* ont montré que ces définitions sont cohérentes dans la mesure où l'on retrouve la définition classique des gramiens linéaires. Le calcul de ces gramiens semble limité aux systèmes non linéaires affines, systèmes pour lesquelles il est possible de calculer une réponse impulsionnelle. Ils sont dits empiriques car leurs calculs nécessitent des simulations numériques. Le principal inconvénient repose sur la réalisation d'un grand nombre d'expériences (plusieurs entrées, plusieurs conditions initiales et plusieurs sorties) pour construire la base. Le choix des ensembles \mathcal{T}^n et \mathcal{M} n'est pas trivial. Lall et *al.* prennent par exemple $\mathcal{T}^n = \{\mathbf{I}_n, -\mathbf{I}_n\}$ et \mathcal{M} dépend de considérations empiriques et heuristiques. La méthode fait toujours l'objet de recherches fondamentales [73, 125].

A.3.4 Méthode de réduction itérative

Il s'agit de construire le sous-espace réduit de manière itérative. Ryckelynck [229] a proposé la méthode *a priori hyperreduction* (acronyme AHR). C'est une méthode d'adaptation du modèle de taille réduite de façon à maîtriser les résidus des équations de mouvement au cours de

la résolution du problème non-linéaire d'évolution. Le terme "a priori" signifie qu'aucun calcul préliminaire n'est nécessaire pour commencer la résolution simplifiée (pas d'échantillonnage préalable). Le principe de la méthode est le suivant (cf. aussi figure A.1) :

1. initialiser le sous-espace avec un seul mode (typiquement on prend la condition initiale) et orthonormaliser (par exemple $\phi_1 = \mathbf{x}^0 / \|\mathbf{x}^0\|$) ;
2. construire le système réduit avec la première approximation $\mathbf{U}(t) \simeq a_1(t)\phi_1(\mathbf{x})$ et calculer le premier coefficient temporel $a_1(t)$;
3. définir un critère d'erreur E_r ;
4. estimer l'erreur commise par calcul d'un résidu bien défini ;
5. enrichir la base (mise à jour) si le critère d'erreur n'est plus vérifié (maîtriser les résidus) *i.e.* rechercher un second mode ϕ_2 ;
6. poursuivre l'algorithme en avançant dans le temps ;
7. améliorer le sous-espace réduit si il contient trop de fonctions de bases en sélectionnant les fonctions de forme les plus significatives ;
8. continuer le processus.

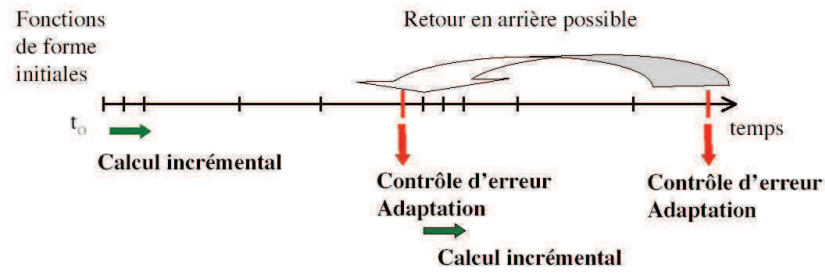
Les deux opérations d'enrichissement (extension) et d'amélioration du sous-espace concernent la phase d'adaptation ou d'actualisation du système réduit. La phase d'amélioration est réalisée avec la méthode POD. Grâce à cette approche, on obtient un nombre optimal de fonctions de forme. Le nombre de fonctions de forme est représentatif du nombre d'événements indépendants (décorrélés) contenu dans l'évolution de l'état du système. Or ce nombre d'événements ne peut être supérieur au nombre de pas de temps utilisés pour décrire l'évolution des variables d'états (cf. méthode *snapshot-POD*). Pour enrichir l'espace réduit \mathbf{V}_r , c'est-à-dire construire l'espace réduit \mathbf{V}_{r+1} , l'espace $\mathcal{L}^{(n+1)}$ engendré par le sous-espace réduit \mathbf{V}_r de l'étape (n) et l'espace de Krylov courant $\mathcal{K}^{(n)}$ (engendré par la matrice tangente $\mathbf{J}^{(n)}$, jacobienne du système dynamique à l'itération temporelle courante, et le résidu $\mathcal{R}^{(n)}$) :

$$\mathcal{L}^{(n+1)} = \{\mathbf{V}_r^{(n)}, \mathcal{K}^{(n)}\} \quad (\text{A-34})$$

avec $\mathcal{K}^{(n)} = \{\mathcal{R}^{(n)}, \mathbf{J}^{(n)}\mathcal{R}^{(n)}, \mathbf{J}^{(n)2}\mathcal{R}^{(n)}, \dots, \mathbf{J}^{(n)m-1}\mathcal{R}^{(n)}\}$. L'espace $\mathcal{L}^{(n+1)}$ est ensuite orthogonalisé (étape comparable à la méthode d'Arnoldi). Le sous-espace réduit enrichi \mathbf{V}_{r+1} est ainsi construit. La méthode peut être interprétée comme une méthode POD incrémentale. En général, les modes POD sont valables seulement sur la période temporelle servant à leur construction. Cette approche permettrait donc de poursuivre des calculs instationnaires. La méthode a déjà été testée en thermomécanique [229] et en mécanique des fluides [270]. La construction itérative de la base implique qu'il y aura de plus en plus de fonctions de base utiles. Si on souhaite construire un modèle de faible dimension, il est donc nécessaire de chercher à réduire ce nombre au fur et à mesure de la construction (phase d'amélioration). Par ailleurs, l'étude d'un phénomène fortement instationnaire nécessiterait de nombreuses mises à jour de l'espace réduit. Or, le calcul d'un résidu nécessite un coût de calcul pratiquement identique à une itération temporelle du modèle numérique non réduit. C'est la raison pour laquelle, la méthode est certainement limitée aux phénomènes faiblement instationnaires. En particulier, elle n'est pas adaptée pour traiter des phénomènes hyperboliques.

A.3.5 Méthode POD

La POD est probablement l'approche la plus populaire pour tenter de construire des modèles réduits numériques issus de systèmes dynamiques non linéaires. Typiquement, une simulation

FIGURE A.1 – Principe d’une méthode itérative *a priori*

temporelle du système dynamique est effectuée et des solutions instantanées appelées "clichés" (*snapshots*) sont retenues à certaines dates. A partir de ces données, une matrice de corrélation à deux points est construite. L'opérateur associé est compact et auto-adjoint si bien qu'il existe une base de vecteurs propres orthogonale. La procédure associée est linéaire. Ces vecteurs orthogonaux représenteront de manière optimale la solution. La littérature sur la POD est très riche et présente dans tous les domaines (statistique, imagerie, mécanique...). Fondamentalement, la méthode POD peut être interprétée à la fois comme une méthode d'optimisation, une méthode statistique, une méthode équilibrée, une méthode d'interpolation ou encore une méthode énergétique. La méthode est d'ailleurs connue sous différentes appellations suivant le domaine d'application ou l'époque :

- POD (*Proper Orthogonal Decomposition*)
- PCA (*Principal Component Analysis*)
- KLD (*Karhunen-Loève Decomposition*)

Ces trois approches aboutissent à la même formulation *i.e.* la recherche de vecteurs propres d'un opérateur de corrélation spatiale ou temporelle. Cette recherche est effectuée par la résolution d'un problème aux valeurs propres (matrice carrée) ou par SVD pour les matrices rectangulaires. On parle aussi de *Empirical Orthogonal Function analysis*. En tant que méthode statistique, on peut citer plusieurs extensions de la PCA (donc de la POD) :

1. ***Generalized Hebbian algorithm*** (GHA) : d'un point de vue informatique, il peut être avantageux de résoudre un problème aux valeurs propres par méthodes itératives sans avoir besoin de calculer et de stocker la matrice de clichés directement. C'est particulièrement utile lorsque la taille de la matrice est importante (mémoire nécessaire importante). Parmi les méthodes itératives existantes de la PCA, la méthode GHA [234] est particulièrement intéressante car elle fournit non seulement une implémentation efficace en terme de mémoire mais elle est aussi capable de s'adapter à des distributions qui varient dans le temps.
2. ***Kernel principal component analysis*** (KPCA) : quand les données sont fortement non linéaires, la PCA linéaire n'est pas capable de capturer le comportement associé. KPCA [243] est une extension non linéaire de la PCA ;
3. des extensions multidimensionnelles de la PCA [246] : *Generalized Low-Rank-Approximation* GLRAM, 2DPCA, HOOI. Il s'agit d'éviter la vectorisation des variables multidimensionnelles (en espace).

Pour s'affranchir de l'hypothèse d'ergodicité, la méthode *Biorthogonal decomposition* (acronyme BOD) a été proposée. Elle fut introduite par Aubry [18] dans le cadre de l'étude des signaux spatio-temporels et a été reprise récemment par Hemon [136, 137].

En mécanique des fluides, la méthode POD a dans un premier temps été exploitée pour analyser directement la phénoménologie d'un écoulement turbulent. Il s'agit d'analyser les structures et les interactions élémentaires qui pilotent la turbulence développée (par exemple les interactions entre les grandes et les petites échelles). La connaissance actuelle de la turbulence postule l'existence de structures dites cohérentes au sein des écoulements complexes. Historiquement, c'est Lumley qui a proposé en 1967 d'étudier ces structures cohérentes directement à partir des modes POD. L'idée d'employer des modes POD pour construire des modèles réduits fluides est apparu plus tardivement. Elle a été introduite par Holmes et *al* [31, 140]. La méthode s'est depuis fortement popularisée et la littérature sur le sujet est particulièrement abondante. La principale motivation repose sur le fait que la méthode POD capture l'essentiel de l'énergie avec très peu de modes en général. À partir de cette propriété énergétique, l'emploi des modes POD comme approximation des degrés de liberté, associé à une projection de Galerkin du système dynamique, a été appliqué pour une grande variété de problèmes académiques (étude de la dynamique des structures cohérentes dans une couche limite, dans une couche de mélange, autour d'un cylindre...). Le champ de vitesse est parfois décomposé en deux contributions : un champ moyen et un champ fluctuant. Il est en effet souvent observé que le premier mode POD s'apparente à l'écoulement moyen, les modes suivants contenant les fluctuations. Par ailleurs, l'écoulement moyen représente souvent l'essentiel de l'énergie de l'écoulement. Le modèle réduit peut ainsi être construit à partir du champ de vitesse instantané ou fluctuant. La construction de systèmes dynamiques réduits fluides pose des difficultés pouvant être de nature différente suivant la nature incompressible ou compressible de l'écoulement. Dans le cas des écoulements incompressibles, se pose essentiellement la manière de traiter la pression. D'un autre côté, la réduction des modèles compressibles a été bien moins étudiée. La construction du modèle réduit fait apparaître des termes polynômiaux cubiques ou des fractions rationnelles. Pour s'affranchir de cette contrainte, plusieurs solutions ont été proposées comme l'utilisation d'un modèle isentropique [225], ou encore l'ajout d'une équation portant sur le volume spécifique [273]. Enfin, la prise en compte d'éventuelles régions choquées a été étudiée par Lucia [178]. Les régions avec et sans chocs sont séparées puis la POD est appliquée seulement sur les régions non choquées, les régions choquées recevant un traitement spécial. Lucia [175, 177] a aussi récemment proposé une méthode hybride POD-Volterra pour traiter des problèmes aéroélastiques. La projection de Galerkin ne garantit pas l'obtention d'un système réduit stable. C'est en fait déjà le cas pour les modèles fluides linéarisés comme on a pu le montrer dans la thèse. Rempfer [216] a par exemple prouvé que la projection de Galerkin est instable pour les modes POD sur un exemple non linéaire simple. Par ailleurs, dans le cas où le modèle réduit serait stabilisé, la convergence vers un état erroné peut être observé. La technique de stabilisation la plus répandue est basée sur l'introduction d'une viscosité tourbillonnaire pour modéliser les petites échelles de la turbulence. La principale difficulté de cette technique réside dans la calibration de la viscosité. Une comparaison des différentes techniques de stabilisation a été proposée par Gloerfelt [118]. Kalashnikova et Barone [151] ont récemment proposé de stabiliser les modèles réduits, basés sur les équations de Navier-Stokes, en conservant l'inégalité d'entropie dans le modèle réduit. Ces travaux sont très prometteurs.

Bibliographie

- [1] A. Agarwal. *The prediction of tonal and broadband slat noise*. PhD thesis, The Pennsylvania State University, 2004.
- [2] A. Agarwal and P. Morris. Calculation of sound propagation in nonuniform flows : suppression of instability waves. *AIAA Journal*, 42(1) :80–88, 2004.
- [3] S. Ahuja and C. Rowley. Feedback control of unstable steady states of flow past a flat plate using reduced-order estimators. *Journal of Fluid Mechanics*, 645 :447–478, 2010.
- [4] E. Akervik. *Global stability and feedback control of boundary layer flows*. PhD thesis, Royal Institute of Technology, 2008.
- [5] E. Akervik, U. Ehrenstein, F. Gallaire, and D. S. Henningson. Global two-dimensional stability measures of the flat plate boundary-layer flow. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 27 :501–513, 2008.
- [6] E. Akervik, J. Hoeffner, U. Ehrenstein, and D. S. Henningson. Optimal growth, model reduction and control in a separated boundary-layer flow using global eigenmodes. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 579 :305–314, 2007.
- [7] B. G. Allan. A reduced order model of the linearized incompressible Navier-Stokes equations for the sensor/actuator placement problem. Technical Report 2000-19, NASA, 2000.
- [8] D. Amsallem. *Interpolation on manifolds of CFD-based fluid and finite-element-based structural reduced-order models for online aeroelastic predictions*. PhD thesis, Stanford University, 2010.
- [9] D. Amsallem and C. Farhat. Interpolation method for adapting reduced-order models and application to aeroelasticity. *AIAA Journal*, 46(7) :1803–1813, 2008.
- [10] D. Amsallem and C. Farhat. Stabilization of projection-based reduced-order models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (DOI : 10.1002/nme.4274), 2012.
- [11] A. Antoulas. *Approximation of large-scale dynamical systems*. Advances in Design and Control, 2005.
- [12] A. Antoulas. An overview of approximation methods for large-scale dynamical systems. *Annual Reviews in Control*, 29 :181–190, 2005.
- [13] J. S. R. Anttonen, P. Beran, and P. I. King. POD-based reduced-order models with deforming grids. *Mathematical and Computer Modelling*, 38 :41–62, 2003.
- [14] J. S. R. Anttonen and P. I. King. The accuracy of POD-based reduced-order models with deforming grids. *AIAA Paper 2001-2541*, 2001.

- [15] J. S. R. Anttonen, P. I. King, and P. Beran. Applications of multi-POD to a pitching and plunging airfoil. *Mathematical and Computer Modelling*, 42 :245–259, 2005.
- [16] P. Astrid. *Reduction of process simulation models : a proper orthogonal decomposition approach*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2004.
- [17] P. Astrid, S. Weiland, K. Willcox, and A. Backx. Missing point estimation in models described by proper orthogonal decomposition. In *43rd IEEE Conference on Decision and Control, Nassau, Bahamas*, 2004.
- [18] N. Aubry, R. Guyonnet, and R. Lima. Spatiotemporal analysis of complex signals : theory and applications. *Journal of Statistical Physics*, 64 :683–739, 1991.
- [19] S. Bagheri. *Stability analysis and control design of spatially developing flows*. PhD thesis, Royal Institute of Technology, 2008.
- [20] S. Bagheri, E. Akervik, L. Brandt, and D. S. Henningson. Matrix-free methods for the stability and control of boundary layers. *AIAA Journal*, 47(5) :1057–1068, 2009.
- [21] S. Bagheri, L. Brandt, and D. S. Henningson. Input-output analysis, model reduction and control of the flat-plate boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 620 :263–298, 2009.
- [22] Z. Bai. Krylov subspace techniques for reduced-order modeling of large-scale dynamical systems. *Applied Numerical Mathematics*, 43(1,2) :9–44, 2002.
- [23] C. Bailly, C. Bogey, and S. Candel. Modelling of sound generation by turbulent reacting flows. *International Journal of Aeroacoustics*, 9(4-5) :461–489, 2010.
- [24] A. Barbagallo, D. Sipp, and P. Schmid. Closed-loop control of an open cavity flow using reduced-order models. *Journal of Fluid Mechanics*, 641(1) :1–50, 2009.
- [25] C. Bardos and O. Pironneau. Petites perturbations et équations d’Euler pour l’aéroélasticité. *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 28(4) :463–497, 1994.
- [26] M. F. Barone, I. Kalashnikova, D. J. Segalman, and H. K. Thornquist. Stable Galerkin reduced order models for linearized compressible flow. *Journal of Computational Physics*, 228 :1932–1946, 2009.
- [27] R. Bartels and G. Stewart. Solution of the equation $AX + XB = C$. *Communications of the ACM*, 15 :820–826, 1972.
- [28] F. Bazán. Eigensystem realization algorithm (ERA) : reformulation and system pole perturbation analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 274 :433–444, 2004.
- [29] T. Bechtold, A. Verhoeven, and E. Ter Maten. *Model Order Reduction : an advanced, efficient and automated computational tool for microsystems*, volume 75. Advances in Mathematics for Applied Sciences, 2007.
- [30] C. Bender and S. Orszag. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers : asymptotic methods and perturbation theory*. McGraw-Hill, 1978.
- [31] G. Berkooz, P. Holmes, and J. Lumley. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 25 :539–575, 1993.
- [32] J. Berland, C. Bailly, and C. Bogey. Low-dissipation and low-dispersion fourth-order runge-kutta algorithm. *Computers and Fluids*, 35 :1459–1463, 2006.

- [33] Bernacki. *Méthodes de type Galerkin discontinu pour la propagation des ondes en aéroacoustique*. PhD thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2005.
- [34] R. Berthet. *Interaction Son-Écoulement*. PhD thesis, Ecole normale supérieure de Lyon, 2001.
- [35] R. Berthet and D. Astruc. Numerical boundary conditions for sound scattering simulation. *Journal of Computational Physics*, 190 :64–99, 2003.
- [36] A. Bjorck. Solving linear least squares problems by Gram-Schmidt orthogonalization. *BIT Numerical Mathematics*, 7, 1967.
- [37] A. Bjorck and G. H. Golub. Numerical methods for computing angle between linear subspaces. *Mathematics of Computation*, 27(127) :579–594, 1973.
- [38] R. Blumrich and D. Heimann. A linearized Eulerian sound propagation model for studies of complex meteorological effects. *Journal of the Acoustical Society of America*, 112(2) :446–455, 2002.
- [39] C. Bogey and C. Bailly. Three-dimensional non-reflective boundary conditions for acoustic simulations : far field formulation and validation test cases. *Acta Acustica*, 88 :463–471, 2002.
- [40] C. Bogey and C. Bailly. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations. *Journal of Computational Physics*, 194 :194–204, 2004.
- [41] C. Bogey, C. Bailly, and D. Juvé. Computation of flow noise using source terms in linearized Euler’s equations. *AIAA Journal*, 40(2) :235–243, 2002.
- [42] D. Boley. Krylov subspace methods on state-space control models. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 13 :733–758, 1994.
- [43] B. Bond and L. Daniel. Guaranteed stable projection-based model reduction for indefinite and unstable linear systems. In *Proceedings of the 2008 IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design*, pages 728–735, 2008.
- [44] B. N. Bond. Parameterized model order reduction for nonlinear dynamical systems. Master’s thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2006.
- [45] J. Borggaard, A. Hay, and D. Pelletier. Interval-based reduced-order models for unsteady fluid flow. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 4(3-4) :353–367, 2007.
- [46] F. Bouchet and H. Morita. Large time behavior and asymptotic stability of the 2d Euler and linearized Euler equations. *Physica D*, 239 :948–966, 2010.
- [47] R. Bourguet. *Analyse physique et modélisation d’écoulements turbulents instationnaires compressibles autour de surfaces portantes par approches statistiques haute-fidélité et de dimension réduite dans le contexte de l’interaction fluide-structure*. PhD thesis, Université de Toulouse, 2008.
- [48] S. Boyd and L. Tang, Y.S. and Chua. Measuring Volterra kernels. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 30(8) :571–577, 1983.
- [49] C. Brezinski. *Padé-type approximation and general orthogonal polynomials*. Birkhauser, Basel, 1980.
- [50] C. Brezinski. *Projection methods for systems of equations*. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1997. Volume 7 of Studies in Computational Mathematics.

- [51] G. Brès and T. Colonius. Three-dimensional instabilities in compressible flow over open cavities. *Journal of Fluid Mechanics*, 599 :309–339, 1998.
- [52] J. C. Buell and P. Huerre. Inflow/outflow boundary conditions and global dynamics of spatial mixing layers. *Center for Turbulence Research*, (N89 - 24540) :19–27, 1988.
- [53] T. Bui-Thanh. *Model-constrained optimization methods for reduction of parameterized large-scale systems*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2007.
- [54] T. Bui-Thanh and K. Willcox. Model reduction for large-scale CFD applications using the balanced proper orthogonal decomposition. *AIAA Paper 2005-4617*, 2005.
- [55] T. Bui-Thanh, K. Willcox, O. Ghattas, and B. van Bloemen Waanders. Goal-oriented, model-constrained optimization for reduction of large-scale systems. *Journal of Computational Physics*.
- [56] M. Campobasso. *Effects of flow instabilities on the linear harmonic analysis of unsteady flow in turbomachinery*. PhD thesis, St Hugh’s College, 2004.
- [57] M. Caraeni. *Developing computational tools for modern aeroacoustic research*. PhD thesis, Lund University, 2003.
- [58] H. A. Carlson, J. Q. Feng, R. E. Thomas, J. P. Kielb, K. C. Hall, and E. H. Dowell. Computational models for nonlinear aeroelasticity. *AIAA Paper 2005-1085*, 2005.
- [59] Y. Chahlaoui, D. Lemonnier, A. Vandendorpe, and P. Van Dooren. Second-order balanced truncation. *Linear Algebra And its Applications*, 415 :373–384, 2006.
- [60] Y. Chahlaoui and P. Van Dooren. Estimating gramians of large-scale time-varying systems. In *IFAC02, 15th Triennial World Congress, Barcelona, Spain*, 2002.
- [61] D. Chapelle, M.-A. Fernández-Varela, and P. Le Tallec. Un modèle simplifié d’interaction fluide-structure. Technical Report 3703, INRIA, 1999.
- [62] J. Chassaing, G. Gerolymos, and J. Jérémiasz. GMRES solution of compressible linearized Navier-Stokes equations without pseudo-time-marching. *AIAA Paper 2006-688*, 2006.
- [63] B. Chen. A simple algorithm for stable/unstable decomposition of a linear discrete time system. *International Journal of Control*, 61 :255–260, 1995.
- [64] E. Chiprout and M. S. Nakhla. *Asymptotic waveform evaluation and moment matching for interconnect analysis*. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [65] J.-M. Chomaz. Global instabilities in spatially developing flows : non-normality and nonlinearity. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 37 :357–392, 2005.
- [66] B.-T. Chu and L. S. G. Kovásznyay. Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas. *Journal of Fluid Mechanics*, 3 :494–514, 1958.
- [67] R. Clark and K. Frampton. Aeroelastic structural acoustic coupling : implications on the control of turbulent boundary-layer noise transmission. *Journal of the Acoustical Society of America*, 102(3) :1639–1647, 1997.
- [68] R. Clark and K. Frampton. Aeroelastic structural acoustic control. *Journal of the Acoustical Society of America*, 105(2) :743–754, 1998.
- [69] W. Clark and K. Hall. Prediction of unsteady flows in turbomachinery using the linearized Euler equations on deforming grids. Technical Report 195285, NASA, 1994.

- [70] W. S. Clark. *Investigation of unsteady viscous flows in turbomachinery using a linearized Navier-Stokes analysis*. PhD thesis, Duke University, 1998.
- [71] B. Cochelin and C. Vergez. A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 324 :243–262, 2009.
- [72] T. Colonius. Modeling artificial boundary conditions for compressible flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36 :315–345, 2004.
- [73] M. Condon and R. Ivanov. Empirical balanced truncation of nonlinear systems. *Journal of Nonlinear Science*, 14 :404–414, 2004.
- [74] R. R. Craig Jr and M. C. C. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6(7) :1313–1319, 1968.
- [75] R. R. Craig Jr and N. Zhenhau. Component mode synthesis for model order reduction of nonclassically damped systems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 12(4) :577–584, 1989.
- [76] D. M. D. Bonvin. A unified derivation and critical review of modal approaches to model reduction. *International Journal of Control*, 35 :829–848, 1982.
- [77] E. Davison. A method for simplifying linear dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11 :93–101, 1966.
- [78] E. de Langre. *Fluides et solides*. Les éditions de l'École polytechnique, 2001.
- [79] J. Degroote, J. Vierendeels, and K. Willcox. Interpolation among reduced-order matrices to obtain parameterized models for design, optimization and probabilistic analysis. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 63 :207–230, 2010.
- [80] G. Dergham, D. Sipp, J.-C. Robinet, and A. Barbagallo. Model reduction for fluids using frequential snapshots. 23 :064101, 2011.
- [81] E. Dowell, K. Hall, and M. Romanowski. Eigenmode analysis in unsteady aerodynamics : reduced order models. *Applied Mechanics Reviews*, 50(6) :371–385, 1997.
- [82] U. Ehrenstein and F. Gallaire. Optimal perturbations and low-frequency oscillations in a separated boundary-layer flow. *AIAA Paper 2008-4232*, 2008.
- [83] T. Emmert. *Development of a multidoman high-order algorithm for computational aeroacoustics : Application to subsonic and transonic confined flows*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2007.
- [84] D. Enns. *Model reduction for control system design*. PhD thesis, Stanford University, Department of Aeronautics, 1984.
- [85] D. Enns. Model reduction with balanced realizations : an error bound and a frequency weighted generalization. In *23rd IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas*, 1984. 127-132.
- [86] B. Epureanu. A parametric analysis of reduced order models of viscous flows in turbomachinery. *Journal of Fluids and Structures*, 17 :971–982, 2003.
- [87] B. Epureanu, E. Dowell, and K. Hall. Reduced-order models of unsteady transonic viscous flows in turbomachinery. *Journal of Fluids and Structures*, 14 :1215–1234, 2000.

- [88] T. Ersal. *Realization-preserving simplification and reduction of dynamic system models at the graph level*. PhD thesis, University of Michigan, 2007.
- [89] R. Ewert and S. W. Acoustic perturbation based on flow decomposition via source filtering. *Journal of Computational Physics*, 188 :365–398, 2003.
- [90] P. Falsaperla, G. A., and M. G. Does symmetry of the operator of a dynamical system help stability? *Acta Applicandae Mathematicae*, 122(1) :239–253, 2012.
- [91] T. Fanion. *Etude de la simulation numérique des phénomènes d'aéroélasticité dynamique. Application au problème du flottement des avions*. PhD thesis, Université de Paris IX, 2001.
- [92] B. Farrel and P. J. Ioannou. Generalized stability theory. part i : Autonomous operators. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 53(14) :2025–2040, 1996.
- [93] B. Feeny. A complex orthogonal decomposition for wave motion analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 310 :77–90, 2008.
- [94] B. Feeny and R. Kappagantu. On the physical interpretation of proper orthogonal modes in vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 211 :607–611, 1998.
- [95] P. Feldmann and R. Freund. Efficient linear circuit analysis by Padé approximation via the Lanczos process. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 14 :639–649, 1995.
- [96] M. Fernández Varela. *Modèles simplifiés d'interaction fluide-structure*. PhD thesis, Université Paris IX Dauphine, 2001.
- [97] K. Fernando and H. Nicholson. Singular perturbational model reduction of balanced systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27 :466–468, 1982.
- [98] B. Finlayson and L. Scriven. The method of weighted residuals - a review. *Applied Mechanics Reviews*, 19(9) :735–748, 1966.
- [99] R. Florea and K. Hall. Eigenmode analysis of unsteady flows about airfoils. *Journal of Computational Physics*, 147 :568–593, 1998.
- [100] R. Florea, K. Hall, and P. Cizmas. Reduced-order modeling of unsteady viscous flow in a compressor cascade. *AIAA Journal*, 36(6) :1039–1048, 1998.
- [101] K. Frampton. Radiation efficiency of convected fluid-loaded plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 113(5) :2663–2673, 2003.
- [102] K. Frampton. The effect of flow-induced coupling on sound radiation from convected fluid loaded fluid loaded plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 117(3) :1129–1137, 2004.
- [103] M. Frangos and I. M. Jaimoukha. Adaptive rational interpolation : Arnoldi and Lanczos-like equations. *European Journal of Control*, 4 :342–354, 2008.
- [104] R. Freund. Reduced-order modeling techniques based on Krylov subspaces and their use in circuit simulation. *Applied and Computational Control, Signals, and Circuits*, 1 :435–498, 1999.
- [105] R. Freund. Krylov-subspace methods for reduced-order modeling in circuit simulation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 123 :395–421, 2000.

- [106] R. Freund. Model reduction methods based on Krylov subspaces. *Acta Numerica*, 12 :267–319, 2003.
- [107] R. Freund. On Padé-type model order reduction of J-Hermitian linear dynamical systems. *Linear Algebra And its Applications*, 429 :2451–2464, 2008.
- [108] K. Friedrichs. Symmetric positive linear differential equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 11 :333–418, 1958.
- [109] M. Friswell, S. Garvey, and J. Penny. The convergence of the iterated IRS method. *Journal of Sound and Vibration*, pages 123–132, 1998.
- [110] K. Fujimoto and D. Tsubakino. Computation of nonlinear balanced realization and model reduction based on Taylor series expansion. *Systems and Control Letters*, 57 :283–289, 2008.
- [111] E. Gadoin, P. Le Quéré, and O. Daube. A general methodology for investigating flow instabilities in complex geometries : application to natural convection in enclosures. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 37 :175–208, 2001.
- [112] K. Gallivan, E. Grimme, and P. Van Dooren. Asymptotic waveform evaluation via a Lanczos method. *Applied Mathematics Letters*, 7 :75–80, 1994.
- [113] K. Gallivan, X. Rao, and P. Van Dooren. Singular Riccati equations stabilizing large-scale systems. *Linear Algebra And its Applications*, 415 :359–372, 2006.
- [114] W. Gawronski and J.-N. Juang. Model reduction in limited time and frequency intervals. *International Journal of Systems Science*, 21 :349–379, 1990.
- [115] R.-J. Gibert. *Vibrations des structures, interactions avec les fluides, sources d'excitation aléatoires*. Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, 1988.
- [116] M. Giles and N. Pierce. Adjoint equations in cfd : duality, boundary conditions and solution behaviour. *AIAA Paper 97-1850*, 1997.
- [117] M. Giles and N. Pierce. An introduction to the adjoint approach to design. *Flow, Turbulence and Combustion*, 65 :393–415, 2000.
- [118] X. Gloerfelt. Compressible proper orthogonal decomposition/Galerkin reduced-order model of self-sustained oscillations in a cavity. *Physics of Fluids*, 115105 :1–22, 2008.
- [119] K. Glover. All optimal Hankel norm approximations of linear multivariable systems and their l^∞ -error bounds. *International Journal of Control*, 39 :1115–1193, 1984.
- [120] D. Gratton. Reduced-order, trajectory piecewise-linear models for nonlinear computational fluid dynamics. Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2004.
- [121] E. Grimme. *Krylov projection methods for model reduction*. PhD thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, ECE Dept., 1997.
- [122] S. Gugercin and A. Antoulas. A survey of model reduction by balanced truncation and some new results. *International Journal of Control*.
- [123] S. Gugercin and A. C. Antoulas. Model reduction of large-scale systems by least squares. *Linear Algebra And its Applications*, 415 :290–321, 2006.
- [124] J. Guyan. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*, 3(2) :380, 1965.

- [125] J. Hahn and T. F. Edgar. An improved method for nonlinear model reduction using balancing of empirical gramians. *Computers and Chemical Engineering*, 26 :1379–1397, 2002.
- [126] K. Hall. *A linearized Euler analysis of unsteady flows in turbomachinery*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1987.
- [127] K. Hall. Deforming grid variational principle for unsteady small disturbance flows in cascades. *AIAA Journal*, 31(5) :891–900, 1993.
- [128] K. Hall. Eigenanalysis of unsteady flows about airfoils, cascades, and wings. *AIAA Journal*, 32(12) :319–352, 1994.
- [129] K. Hall and W. Clark. Linearized Euler predictions of unsteady aerodynamic loads in cascades. *AIAA Journal*, 31(3) :540–550, 1993.
- [130] K. Hall and E. Crawley. Calculation of unsteady flows in turbomachinery using the linearized Euler equations. *AIAA Journal*, 27(6) :777–787, 1989.
- [131] K. Hall and J. Thomas. Frequency domain techniques for complex and nonlinear flows in turbomachinery. *AIAA Paper 2003-3998*, 2003.
- [132] K. Hall, J. Thomas, and E. Dowell. Reduced-order modelling of unsteady small-disturbance flows using a frequency-domain proper orthogonal decomposition technique. *AIAA Paper 99-0655*, 1999.
- [133] K. C. Hall, J. P. Thomas, and W. S. Clark. Computation of unsteady nonlinear flows in cascades using a harmonic balance technique. *AIAA Journal*, 40(5) :879–886, 2002.
- [134] K. C. Hall, J. P. Thomas, and E. H. Dowell. Proper orthogonal decomposition technique for transonic unsteady aerodynamic flows. *AIAA Journal*, 38(10) :1853–1862, 2000.
- [135] A. Hay, J. Borggaard, I. Akhtar, and D. Pelletier. Reduced-order models for parameter dependent geometries based on shape sensitivity analysis. *Journal of Computational Physics*, 229(127) :1327–1352, 2010.
- [136] P. Hémon and F. c. Santi. Applications of biorthogonal decompositions in fluid-structure interactions. *Journal of Fluids and Structures*, 17 :1123–1143, 2003.
- [137] P. Hémon and F. c. Santi. Simulation of a spatially correlated turbulent velocity field using biorthogonal decomposition. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 95 :21–29, 2007.
- [138] D. C. Hill. Adjoint systems and their role in the receptivity problem for boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 292 :183–204, 1995.
- [139] C. W. Hindman. *Control of aeroelastic structures based on a computational reduced order modeling method*. PhD thesis, University of Colorado, 2003.
- [140] P. Holmes, J. Lumley, and G. Berkooz. *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry*. Cambridge University Press, 1996.
- [141] F. Hu, M. Hussaini, and J. Manthey. Low-dissipation and low-dispersion Runge- Kutta schemes for computational acoustics. *Journal of Computational Physics*, 124 :177–191, 1996.
- [142] F. Q. Hu. A Perfectly Matched Layer absorbing boundary condition for linearized Euler equations with a non-uniform mean flow. *Journal of Computational Physics*, 208 :469–492, 2005.

- [143] P. Huerre and P. A. Monkewitz. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 22 :473–537, 1990.
- [144] T. Hughes, L. Franca, and M. Mallet. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : I. symmetric forms of the compressible Euler and Navier-Stokes equations and the second law of thermodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 54 :223–234, 1986.
- [145] W. L. Ijzerman. *Signal representation and modeling of spatial structures in fluids*. PhD thesis, Universiteit Twente, 2000.
- [146] M. Ilak and C. Rowley. Modeling of transitional channel flow using balanced proper orthogonal decomposition. *Physics of Fluids*, (034103), 2008.
- [147] I. Jaimoukha and E. Kasenally. Implicitly restarted Krylov subspace methods for stable partial realizations. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 18 :633–652, 1997.
- [148] I. Jaimoukha and E. Kasenally. Oblique projection methods for large scale model reduction. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 16 :602–627, 1997.
- [149] K. Jbilou and A. Riquet. Projection methods for large Lyapunov matrix equations. *Linear Algebra And its Applications*, 415 :344–358, 2006.
- [150] J. N. Juang and R. S. Pappa. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 8(5) :620–627, 1985.
- [151] I. Kalashnikova and M. F. Barone. Stable and efficient Galerkin reduced order models for non-linear fluid flow. *AIAAP*, 2011.
- [152] T. Kim. Frequency-domain Karhunen-Loève method and its applications to linear dynamic systems. *AIAA Journal*, 36(11) :2117–2123, 1998.
- [153] L. Knockaett and D. De Zutter. Passive reduced order multiport modeling : the Padé-Arnoldi-SVD connection. *International Journal of Electronics and Communications*, 53 :254–260, 1999.
- [154] M. Korenberg. A robust orthogonal algorithm for system identification and time-series analysis. *Biological Cybernetics*, 60 :267–276, 1989.
- [155] S. Lall, J. Marsden, and S. Glavaski. Empirical model reduction of controlled nonlinear systems. Technical Report CIT-CDS-98-008, California Institute of Technology, 1998.
- [156] S. Lall, J. Marsden, and S. Glavaski. Empirical model reduction of controlled nonlinear systems. In *14th IFAC World Congress, Beijing, China*, 1999.
- [157] S. Lall, J. E. Marsden, and S. Glavaski. A subspace approach to balanced truncation for model reduction of nonlinear control systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12 :519–535, 2002.
- [158] C. Lanczos. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 45 :255–282, 1950.
- [159] G. Lassaux. High-fidelity reduced-order aerodynamic models : application to active control of engine inlets. Master’s thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2002.

- [160] A. Laub, M. Heath, C. Paige, and R. Ward. Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(2) :115–122, 1987.
- [161] P. Le Tallec and J. Mouro. Structures en grands déplacements couplées à des fluides en mouvement. Technical Report 2961, INRIA, 1996.
- [162] H.-J. Lee, C.-C. Chu, and W.-S. Feng. An adaptive-order rational Arnoldi method for model-order reductions of linear time-invariant systems. *Linear Algebra And its Applications*, 415 :235–261, 2006.
- [163] R. Lehouc and A. Salinger. Large scale eigenvalue calculations for stability analysis of steady flows on massively parallel computers. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 36 :309–327, 2001.
- [164] M. Lesoinne, M. Sarkis, U. Hetmaniuk, and C. Farhat. A linearized method for the frequency analysis of three-dimensional fluid/structure interaction problems in all flow regimes. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :3121–3146, 2001.
- [165] A. Leung. Damped dynamic substructures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26 :2355–2365, 1988.
- [166] J.-R. Li. *Model reduction of large linear systems via low rank system gramians*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2000.
- [167] E. Liberge. *Réduction de modèles par POD-Galerkin pour les problèmes d'interaction fluide-structure*. PhD thesis, Université de La Rochelle, 2008.
- [168] T. Lieu. *Adaptation of reduced order models for applications in aeroelasticity*. PhD thesis, University of Colorado, 2004.
- [169] T. Lieu and C. Farhat. Adaptation of aeroelastic reduced-order models and application to an F-16 configuration. *AIAA Journal*, 45(6) :1244–1257, 2007.
- [170] T. Lieu, C. Farhat, and M. Lesoinne. Reduced-order fluid/structure modeling of a complete aircraft configuration. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :5730–5742, 2006.
- [171] M. Lighthill. On displacement thickness. *Journal of Fluid Mechanics*, 4 :383–392, 1958.
- [172] Y. Liu and B. Anderson. Singular perturbation approximation of balanced systems. *International Journal of Control*, 50 :1379–1405, 1989.
- [173] A. Lu and E. Wachspress. Solution of Lyapunov equations by alternating direction implicit. *Computers and Mathematics with Applications*, 21(9) :43–58, 1991.
- [174] D. J. Lucia and P. S. Beran. Projection methods for reduced order models of compressible flows. *Journal of Computational Physics*, 188 :252–280, 2003.
- [175] D. J. Lucia and P. S. Beran. Reduced-order model development using proper orthogonal decomposition and Volterra theory. *AIAA Journal*, 42(6) :1181–1190, 2004.
- [176] D. J. Lucia, P. S. Beran, and W. A. Silva. Reduced-order modeling : new approaches for computational physics. *Progress in Aerospace Sciences*, 40 :51–117, 2004.
- [177] D. J. Lucia, P. S. Beran, and W. A. Silva. Aeroelastic system development using proper orthogonal decomposition and Volterra theory. *Journal of Aircraft*, 42(2) :509–518, 2005.

- [178] D. J. Lucia, P. I. King, and P. S. Beran. Reduced order modeling of a two-dimensional flow with moving shocks. *Computers and Fluids*, 32 :917–938, 2003.
- [179] Z. Ma, S. Ahuja, and C. Rowley. Reduced order models for control of fluids using the eigensystem realization algorithm. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 2009. (accepted).
- [180] Z. Ma, C. Rowley, and G. Tadmor. Snapshot-based balanced truncation for linear time-periodic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(2) :469–473, 2010.
- [181] C. Mack and P. Schmid. A preconditioned Krylov technique for global hydrodynamic stability analysis of large-scale compressible flows. *Journal of Computational Physics*, 229 :541–560, 2010.
- [182] A. J. Mahajan, E. H. Dowell, and D. B. Bliss. Eigenvalue calculation procedure for Euler Navier-Stokes solvers with application to flows over airfoils. *Journal of Computational Physics*, 97 :398–413, 1991.
- [183] G. I. Marchuk. *Adjoint equations and analysis of complex systems*. Mathematics and its applications, vol. 295, 1994.
- [184] R. Markovinovic. *System-theoretical model reduction for reservoir simulation and optimization*. PhD thesis, Technische Universiteit Delft, 2009.
- [185] J. Marshall and M. Giles. Some applications of a time-linearized Euler method to flutter and forced response in turbomachinery. In *Unsteady aerodynamics and aeroelasticity of turbomachines*, 1997.
- [186] P. Marzocca, J. Nichols, A. Milanese, M. Seaver, and S. Trickey. Second-order spectra for quadratic nonlinear systems by Volterra functional series : analytical description and numerical simulation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22 :1882–1895, 2008.
- [187] M. S. McMullen. *The application of non-linear frequency domain methods to the Euler and Navier-Stokes equations*. PhD thesis, Stanford University, 2003.
- [188] B. Moore. Principal component analysis in linear systems : controllability, observability, and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(1) :17–32, 1981.
- [189] L. Moret-Gabarro. *Aeroacoustic investigation and adjoint analysis of subsonic cavity flows*. PhD thesis, Université de Toulouse, 2009.
- [190] C.-D. Munz, M. Dumbser, and S. Roller. Linearized acoustic perturbation equations for low Mach number flow with variable density and temperature. *Journal of Computational Physics*, 224 :352–364, 2007.
- [191] M. Myers. On the acoustic boundary condition in the presence of flow. *Journal of Sound and Vibration*, 71(3) :429–434, 1980.
- [192] S. Nagar and S. Singh. An algorithmic approach for system decomposition and balanced realized model reduction. *Journal of The Franklin Institute*, 341 :615–630, 2004.
- [193] R.-H. Ni. A multiple grid scheme for solving the Euler equations. *AIAA Paper 1981-1025R*, 1981.
- [194] R.-H. Ni and F. Sisto. Numerical computation of nonstationary aerodynamics of flat plate cascades in compressible flow. *Journal of Engineering for power*, 98 :165–170, 1976.

- [195] T. Nomura and T. Hughes. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for interaction of fluid and a rigid body. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 95 :115–138, 1992.
- [196] J. O’Callahan, P. Avitabile, and R. Riemer. System equivalent reduction expansion process. In *7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas*, 1989. 29-37.
- [197] J. C. O’Callahan. A procedure for an improved reduced system (IRS) model. In *7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas*, 1989. 17-21.
- [198] A. Odabasioglu and M. Celik. Prima : passive reduced-order interconnect macromodeling algorithm. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 17 :645–654, 1999.
- [199] Y. Ozyoruk and L. N. Long. A time-domain implementation of surface acoustic impedance condition with and without flow. *AIAA Paper 96-1663*, 1996.
- [200] Y. Ozyoruk and B. J. Tester. Assesment of a frequency-domain linearized Euler solver for turbofan aft radiation predictions and comparison with measurements. *Procedia Engineering*, 6 :153–162, 2010.
- [201] L. Peng and L. Pileggi. NORM : compact model order reduction of weakly nonlinear systems. In *IEEE/ACM Design Automation Conference*, 2003. 427-477.
- [202] T. Penzl. A cyclic low-rank Smith method for large sparse Lyapunov equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21 :1401–1418, 2000.
- [203] T. Penzl. Algorithms for model reduction of large dynamical systems. *Linear Algebra And its Applications*, 415 :322–343, 2006.
- [204] L. Pernebo and L. Silverman. Model reduction via balanced state space representations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(2) :382–387, 1982.
- [205] J. Phillips. Projection frameworks for model reduction of weakly nonlinear systems. In *Proceedings of the 37th Design Automation Conference*, 2000. 184-189.
- [206] J. Phillips. Projection-based approaches for model reduction of weakly nonlinear, time-varying systems. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 22(2) :171–187, 2003.
- [207] A. D. Pierce. Wave equation for sound in fluids with unsteady inhomogeneous flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 87(6) :2292–2299, 1990.
- [208] L. T. Pillage and R. A. Rohrer. Asymptotic waveform evaluation for timing analysis. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 9(4) :352–366, 1990.
- [209] E. Pillet. *Méthodologies d’aide à la décision en conception robuste*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2008.
- [210] A. Placzek. *Construction de modèles d’ordre réduit non-linéaires basés sur la décomposition orthogonale propre pour l’aéroélasticité*. PhD thesis, Conservatoire National des Arts et Métiers, 2009.
- [211] A. Placzek, D.-M. Tran, and R. Ohayon. Hybrid proper orthogonal decomposition formulation for linear structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 318 :943–964, 2008.

- [212] S. Prajna. POD model reduction with stability guarantee. In *Proceedings of IEEE CDC*, 2003.
- [213] C. Prax, F. Golanski, and L. Nadal. Control of the vorticity mode in the linearized Euler equations for hybrid aeroacoustic prediction. *Journal of Computational Physics*, 227 :6044–6057, 2008.
- [214] P. P. Rao and P. J. Morris. Use of finite element methods in frequency domain aeroacoustics. *AIAA Journal*, 44(7) :1643–1652, 2006.
- [215] D. M. Razafindralandy. *Contribution à l'étude mathématique et numérique de la simulation des grandes échelles*. PhD thesis, Université de la Rochelle, 2005.
- [216] D. Rempfer. On low-dimensional galerkin models for fluid flow. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 14 :75–88, 2000.
- [217] J. Renou. *Une méthode eulérienne pour le calcul de forces fluide-élastiques*. PhD thesis, Université de Paris VI, 1998.
- [218] M. Rewiński and J. White. A trajectory piecewise-linear approach to model order reduction and fast simulation of nonlinear circuits and micromachined devices. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 22(2) :155–170, 2003.
- [219] M. Rewiński and J. White. Model order reduction for nonlinear dynamical systems based on trajectory piecewise-linear approximations. *Linear Algebra And its Applications*, 415 :426–454, 2006.
- [220] J.-C. Robinet. Bifurcations in shock wave/laminar boundary layer interaction : global instability approach. *Journal of Fluid Mechanics*, 579 :85–112, 2007.
- [221] M. Romanowski and E. H. Dowell. Reduced order Euler equations for unsteady aerodynamic flows : numerical techniques. *AIAA Paper 96-0528*, 1996.
- [222] M. C. Romanowski. *Using fluid eigenmodes to develop Euler based reduced order unsteady aerodynamic and aeroelastic models*. PhD thesis, Duke University, 1995.
- [223] C. Rowley. Model reduction for fluids, using balanced proper orthogonal decomposition. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(3) :997–1013, 2005.
- [224] C. W. Rowley. *Modeling, simulation, and control of cavity flow oscillations*. PhD thesis, California Institute of Technology, 2002.
- [225] C. W. Rowley, T. Colonius, and R. M. Murray. Model reduction for compressible flows using POD and Galerkin projection. *Physica D*, 189 :115–129, 2004.
- [226] J. Roychowdhury. Reduced-order modeling of time-varying systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Analog and Digital Signal Processing*, 46(10) :1273–1288, 1999.
- [227] W. J. Rugh. *Nonlinear system theory : the Volterra/Wiener approach*. The Johns Hopkins University Press, 1981.
- [228] A. Ruhe. Rational Krylov sequence methods for eigenvalue computation. *Linear Algebra And its Applications*, 58 :391–405, 1984.
- [229] D. Ryckelynck. A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of Computational Physics*, 202 :346–366, 2005.

- [230] Y. Saad. *Iterative method for sparse linear systems*. Society for Industrial & Applied Mathematics, 2003.
- [231] Y. Saad. *Numerical methods for large eigenvalue problems*. Society for Industrial & Applied Mathematics, 2011.
- [232] H. Sandberg. *Linear time-varying systems : modeling and reduction*. PhD thesis, Lund Institute of Technology, Dpt. of Automatic Control, 2002.
- [233] H. Sandberg and H. Rantzer. Balanced model reduction of linear time-varying systems. In *IFAC02, 15th Triennial World Congress, Barcelona, Spain, 2002*.
- [234] T. D. Sanger. Optimal unsupervised learning in a single-layer linear feedforward neural network. *Neural Networks*, 2 :459–473, 1989.
- [235] S. Sarkar and K. Venkatraman. Model order reduction of unsteady flow past oscillating airfoil cascades. *Journal of Fluids and Structures*, pages 239–247, 2004.
- [236] J. Scherpen. Balancing for nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 21 :143–153, 1993.
- [237] J. Scherpen. Balancing of nonlinear systems. In *Proceedings of the European Control Conference*, 1993. 1838-1843.
- [238] J. Scherpen. *Balancing of nonlinear systems*. PhD thesis, University of Twente, Systems and Control Group, 1994.
- [239] M. Schetzen. Measurement of kernels of a nonlinear system of finite order. *International Journal of Control*, 1(3) :251–263, 1965.
- [240] M. Schetzen. *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*. Wiley Inter-Science Publication, New-York, 1980.
- [241] P. J. Schmid and D. S. Henningson. *Stability and transition in shear flows*, volume 142 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 2001.
- [242] P. Schmidt. *Effects of convection on sound radiation*. PhD thesis, Vanderbilt University, 2006.
- [243] B. Schölkopf, A. Smola, and K. Müller. Nonlinear component analysis as a kernel eigenvalue problem. *Neural Computation*, 10(5) :1299–1399, 1998.
- [244] J. H. Seo and Y. J. Moon. Linearized perturbed compressible equations for low Mach number aeroacoustics. *Journal of Computational Physics*, 218 :702–719, 2006.
- [245] Y. Shamash. Linear system reduction using Padé approximation to allow retention of dominant modes. *International Journal of Control*, 21 :257–272, 1975.
- [246] B. Sheehan and Y. Saad. Higher order orthogonal iteration of tensors (HOOI) and its relation to PCA and GLRAM. Technical Report umsi-2006-132, Minnesota Supercomputer Institute, University of Minnesota, Minneapolis, 2006.
- [247] B. N. Sheehan. ENOR : model order reduction of RLC circuits using nodal equations for efficient factorization. In *Proceedings of the 36th ACM/IEEE conference on Design automation*, 1999.
- [248] S. Shokoohi, L. Silverman, and P. Van Dooren. Linear time-variable systems : balancing and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28 :810–822, 1983.

- [249] W. Silva. *Discrete-time linear and nonlinear aerodynamic impulse responses for efficient CFD analyses*. PhD thesis, College of William and Mary, Williamsburg, 1997.
- [250] J. R. Singler and B. A. Batten. A proper orthogonal decomposition approach to approximate balanced truncation of infinite dimensional linear systems. *International Journal of Computer Mathematics*, 86(2) :355–371, 2009.
- [251] D. Sipp, O. Marquet, P. Meliga, and A. Barbagallo. Dynamics and control of global instabilities in open-flows : a linearized approach. *Applied Mechanics Reviews*, 63 :030801, 2010.
- [252] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures, parts i-iii. *Quarterly of Applied Mathematics*, XLV(3) :561–590, 1987.
- [253] T. Stykel. Balanced truncation model reduction for semidiscretized Stokes equation. *Linear Algebra And its Applications*, 415 :262–289, 2006.
- [254] E. Tadmor. Skew-selfadjoint form for systems of conservation laws. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 103 :428–442, 1984.
- [255] C. Tam and Z. Dong. Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow. *Journal of Computational Acoustics*, 4(2) :175–201, 1996.
- [256] C. Tam and J. Webb. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. *Journal of Computational Physics*, 107 :262–281, 1993.
- [257] C. K. W. Tam and L. Auriault. Time-domain impedance boundary conditions for computational aeroacoustics. *AIAA Journal*, 34(5) :917–923, 1996.
- [258] B. J. Tester, G. Gabard, and Y. Özyörük. Influence of mean flow gradients on fan exhaust noise predictions. *AIAA Paper 2008-2825*, 2008.
- [259] V. Theofilis. Advances in global linear instability analysis of nonparallel and three-dimensional flows. *Progress in Aerospace Sciences*, 39 :249–315, 2003.
- [260] V. Theofilis. Global linear instability. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 43 :319–352, 2011.
- [261] J. Thomas, E. H. Dowell, and K. C. P. Hall. A static/dynamic correction approach for reduced-order modeling of unsteady aerodynamics. *AIAA Paper 2001-0855*, 2001.
- [262] J. P. Thomas, E. H. Dowell, and K. C. Hall. Modeling viscous transonic limit cycle oscillation behavior using a harmonic balance approach. *AIAA Paper 2002-1414*, 2002.
- [263] J. P. Thomas, E. H. Dowell, and K. C. Hall. Nonlinear inviscid aerodynamic effects on transonic divergence, flutter, and limite cycle oscillations. *AIAA Journal*, 40(4) :638–646, 2002.
- [264] J. P. Thomas, E. H. Dowell, and K. C. Hall. Using automatic differentiation to create a nonlinear reduced order model of a computational fluid dynamic solver. *AIAA Paper 2006-7115*, 2006.
- [265] F. Tisseur and K. Meerbergen. The quadratic eigenvalue problem. *SIAM Review*, 43 :235–286, 2001.
- [266] E. Turkel. Symmetrization of the fluid dynamic matrices with applications. *Mathematics of computation*, 27(124) :729–736, 1973.

- [267] A. Varga. Enhanced modal approach for model reduction. *Mathematical Modelling of Systems*, 1 :91–105, 1995.
- [268] A. Varga and B. D. Anderson. Accuracy-enhancing methods for balancing-related frequency-weighted model and controller reduction. *Automatica*, 39 :919–927, 2003.
- [269] J. Verdon, M. Montgomery, and K. Kousen. Development of a linearized unsteady Euler analysis for turbomachinery blade rows. Technical Report 4677, NASA, 1995.
- [270] N. Verdon. *Un système dynamique d'ordre réduit basé sur une approche APR-POD pour l'étude de l'interaction écoulement turbulent-particules*. PhD thesis, Université de la Rochelle, 2007.
- [271] A. Verhoeven. *Redundancy reduction of IC models by multirate time-integration and model order reduction*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2008.
- [272] E. Verriest and T. Kailath. On generalized balanced realizations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28 :833–844, 1983.
- [273] G. Vigo. La décomposition orthogonale propre appliquée aux équations de Navier-Stokes compressible instationnaire. Technical report, INRIA, 1998.
- [274] S. Volkwein. Model reduction using proper orthogonal decomposition. Technical report, Institute of Mathematics and Scientific Computing, University of Graz.
- [275] Y. V. Vorobyev. *Methods of moments in applied mathematics*. Gordon and Breach, Science Publishers, New York, 1965. Translated from the Russian by Bernard Seckler.
- [276] G. Wang, V. Sreeram, and W. Liu. A new frequency-weighted balanced truncation method and an error bound. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(9) :1734–1737, 1999.
- [277] M. Wei and J. Freund. A noise-controller free shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 546 :123–152, 2006.
- [278] M. Widhalm, R. Dwight, R. Thormann, and A. Hübner. Efficient computation of dynamic stability data with a linearized frequency domain solver. *European Conference on Computational Fluid Dynamics*, 2010.
- [279] K. Wieczorek. *Numerical study of Mach number effects on combustion instability*. PhD thesis, Université Montpellier II, 2010.
- [280] K. Willcox. *Reduced-order aerodynamic models for aeroelastic control of turbomachines*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2000.
- [281] K. Willcox and J. Pereire. Balanced model reduction via the proper orthogonal decomposition. *AIAA Journal*, 40(11) :2323–2330, 2002.
- [282] K. Willcox, J. Pereire, and J. White. An Arnoldi approach for generation of reduced-order models for turbomachinery. *Computers and Fluids*, 31 :369–389, 2002.
- [283] E. Wilson and M.-Y. Yuan. Dynamic analysis by direct superposition of Ritz vectors. *Earthquake Engineering and Structural Dynamic*, 10(6) :813–821, 1982.
- [284] T. Wittig, R. Schuhmann, and T. Weiland. Model order reduction for large systems in computational electromagnetics. *Linear Algebra And its Applications*, 415 :499–530, 2006.

-
- [285] P. M. R. Wortelboer. *Frequency-weighted balanced reduction of closed-loop mechanical servo-system : theory and tools*. PhD thesis, Technische Universiteit Delft, 1994.
- [286] K. Zhou, G. Salomon, and E. Wu. Balanced realization and model reduction for unstable systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 9(3) :183–198, 1999.



Liste des personnes Habilitées à Diriger des Recherches en poste à l'Ecole Centrale de Lyon

Nom-Prénom	Corps grade	Laboratoire ou à défaut département ECL	Etablissement
BEROUAL Abderrahmane	professeur	AMPERE	ECL
BURET François	professeur	AMPERE	ECL
JAFFREZIC-RENAULT Nicole	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
KRÄHENBÜHL Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
NICOLAS Alain	professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
SCORLETTI Gérard	professeur	AMPERE	ECL
SIMONET Pascal	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
VOLLAIRE Christian	professeur	AMPERE	ECL

Nbre Ampère 9

HELLOUIN Yves	maître de conférences	DER EEA	ECL
---------------	-----------------------	---------	-----

Nbre DER EEA 1

GUIRALDENQ Pierre	professeur émérite	DER STMS	ECL
VINCENT Léo	professeur	DER STMS	ECL

Nbre DER STMS 2

LOHEAC Jean-Pierre	maître de conférences	ICJ	ECL
MAITRE Jean-François	professeur émérite	ICJ	ECL
MARION Martine	professeur	ICJ	ECL
MIRONESCU Elisabeth	professeur	ICJ	ECL
MOUSSAOUI Mohand	professeur	ICJ	ECL
MUSY François	maître de conférences	ICJ	ECL
ZINE Abdel-Malek	maître de conférences	ICJ	ECL

Nbre ICJ 7

DAVID Bertrand	professeur	ICTT	ECL
----------------	------------	------	-----

Nbre ICTT 1

CALLARD Anne-Ségolène	professeur	INL	ECL
CLOAREC Jean-Pierre	maître de conférences	INL	ECL
GAFFIOT Frédéric	professeur	INL	ECL
GAGNAIRE Alain	maître de conférences	INL	ECL
GARRIGUES Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GENDRY Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GRENET Geneviève	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
HOLLINGER Guy	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
KRAWCZYK Stanislas	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
LETARTRE Xavier	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
O'CONNOR Ian	professeur	INL	ECL
PHANER-GOUTORBE Magali	professeur	INL	ECL

ROBACH Yves	professeur	INL	ECL
SAINT-GIRONS Guillaume	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
SEASSAL Christian	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
SOUTEYRAND Eliane	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
TARDY Jacques	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
VIKTOROVITCH Pierre	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL

Nbre INL 18

CHEN Liming	professeur	LIRIS	ECL
-------------	------------	-------	-----

Nbre LIRIS 1

BAILLY Christophe	professeur	LMFA	ECL
BERTOGLIO Jean-Pierre	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BLANC-BENON Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BOGEY Christophe	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CAMBON Claude	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CARRIERE Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CHAMPOUSSIN J-Claude	professeur émérite	LMFA	ECL
COMTE-BELLOT genevièvre	professeur émérite	LMFA	ECL
FERRAND Pascal	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GALLAND Marie-Annick	professeur	LMFA	ECL
GODEFERD Fabien	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GOROKHOVSKI Mikhail	professeur	LMFA	ECL
HENRY Daniel	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
JEANDEL Denis	professeur	LMFA	ECL
JUVE Daniel	professeur	LMFA	ECL
LE RIBAUTL Catherine	chargée de recherche	LMFA	CNRS/ECL
LEBOEUF Francis	professeur	LMFA	ECL
PERKINS Richard	professeur	LMFA	ECL
ROGER Michel	professeur	LMFA	ECL
SCOTT Julian	professeur	LMFA	ECL
SHAO Liang	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
SIMOENS Serge	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
TREBINJAC Isabelle	maître de conférences	LMFA	ECL

Nbre LMFA 23

BENAYOUN Stéphane	professeur	LTDS	ECL
CAMBOU Bernard	professeur	LTDS	ECL
COQUILLET Bernard	maître de conférences	LTDS	ECL
DANESCU Alexandre	maître de conférences	LTDS	ECL
FOUVRY Siegfried	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
GEORGES Jean-Marie	professeur émérite	LTDS	ECL
GUERRET Chrystelle	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
HERTZ Dominique	past	LTDS	ECL
ICHCHOU Mohamed	professeur	LTDS	ECL
JEZEQUEL Louis	professeur	LTDS	ECL
JUVE Denyse	ingénieur de recherche	LTDS	ECL
KAPSA Philippe	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LE BOT Alain	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LOUBET Jean-Luc	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MARTIN Jean-Michel	professeur	LTDS	ECL
MATHIA Thomas	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MAZUYER Denis	professeur	LTDS	ECL
PERRET-LIAUDET Joël	maître de conférences	LTDS	ECL
SALVIA Michelle	maître de conférences	LTDS	ECL

SIDOROFF François	professeur	LTDS	ECL
SINOUE Jean-Jacques	professeur	LTDS	ECL
STREMSDOERFER Guy	professeur	LTDS	ECL
THOUVEREZ Fabrice	professeur	LTDS	ECL
TREHEUX Daniel	professeur	LTDS	ECL
VINCENS Eric	maître de conférences	LTDS	ECL

Nbre LTDS 25

Total HdR ECL

91

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur C. BAILLY

et les rapports de

Monsieur A. IOLLO
Professeur - IMB - Université de Bordeaux 1 - 351, cours de la Libération - 33405 TALENCE cedex

Et de

Monsieur D. SIPP
Ingénieur Chercheur HDR - ONERA DAFE - 8, rue des Vertugadins - 92190 MEUDON

Monsieur SERRE Gilles

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE

Fait à Ecully, le 19 janvier 2012

P/Le directeur de l'E.C.L.
La directrice des Etudes

