



HAL
open science

Développement et évaluation de la méthode de Galerkin discontinue pour la simulation des grandes échelles des écoulements turbulents

Jean-Baptiste Chapelier

► **To cite this version:**

Jean-Baptiste Chapelier. Développement et évaluation de la méthode de Galerkin discontinue pour la simulation des grandes échelles des écoulements turbulents. Mathématiques générales [math.GM]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2013. Français. NNT: 2013BOR14969 . tel-00948991

HAL Id: tel-00948991

<https://theses.hal.science/tel-00948991>

Submitted on 18 Feb 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

Présentée par

M. Jean-Baptiste Chapelier

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE BORDEAUX I

Spécialité

Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique

(Ecole doctorale de Mathématiques et Informatique)

Développement et évaluation de la méthode de Galerkin discontinue pour la simulation des grandes échelles des écoulements turbulents

Directeur de thèse : Rémi Abgrall

Thèse soutenue le 5 décembre 2013 devant le jury composé de :

M.-V. SALVETTI	Professeur de l'Université de Pise	Rapporteur
F. COQUEL	Directeur de recherche CNRS	Rapporteur
K. SCHNEIDER	Professeur de l'Université d'Aix-Marseille	Président du jury
E. LAMBALLAIS	Professeur de l'Université de Poitiers	Examineur
M. DE LA LLAVE PLATA	Ingénieur de recherche à l'ONERA	Examineur
F. RENAC	Ingénieur de recherche à l'ONERA	Examineur

Cette thèse a été financée par l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA), d'octobre 2010 à septembre 2013. La thèse a été réalisée dans les locaux du département de simulation numérique des écoulements et d'aéroacoustique (DSNA), dans l'unité de développement des méthodes numériques pour la mécanique des fluides (NUMF).



Remerciements

A l'heure de la finalisation de ce manuscrit, mes pensées vont à Pierre Comte, qui a été co-directeur de thèse au cours de la première année. Sa rigueur scientifique et ses connaissances encyclopédiques de l'aérodynamique et des méthodes numériques m'ont inspiré tout au long de ces trois années. Je tiens à remercier particulièrement Eric Lamballais, qui, dans un contexte difficile, à su me conseiller et me guider pour mener à bien ces travaux de thèse et me faire profiter de ses qualités humaines et scientifiques exceptionnelles. J'exprime également ma plus vive gratitude à Monsieur Rémi Abgrall pour avoir accepté de diriger cette thèse.

Je remercie vivement Madame Maria-Vittoria Salvetti et Monsieur Frédéric Coquel d'avoir porté un intérêt à mes travaux en acceptant d'être les rapporteurs de cette thèse. Merci également à Monsieur Kai Schneider d'avoir accepté de faire partie du jury de thèse.

Mes remerciements vont également au personnel de l'Onera, et particulièrement à mon encadrante Marta De La Llave Plata, pour avoir proposé ce passionnant sujet de thèse et pour m'avoir conseillé et accompagné au cours de ces trois ans. Je remercie Florent Renac pour son aide concernant le code Aghora et la méthode de Galerkin discontinue et Emeric Martin pour son aide concernant le parallélisme et les aspects informatiques.

Ce travail a été réalisé à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA), au sein du département de simulation numérique et d'aéroacoustique (DSNA). Je remercie tout particulièrement Monsieur Jean-Marie Le Gouez, chef du département, ainsi que Monsieur Vincent Couaillier, chef de l'unité de développement de méthodes numériques pour m'avoir accueilli au sein du département. Merci également aux stagiaires et co-doctorants côtoyés durant ces trois années qui ont contribué à entretenir une ambiance conviviale. Mes remerciements enfin à Mme. Ghislaine Denis pour m'avoir aidé dans l'organisation de la soutenance de thèse.

Enfin, je remercie ma famille pour les encouragements et le soutien tout au long de ces trois années.

Résumé

Cette thèse vise à développer et évaluer la méthode de Galerkin discontinue (DG) pour la simulation des grandes échelles (LES) des écoulements turbulents. L'approche DG présente un nombre d'avantages intéressants pour la LES : ordre élevé, stencil compact, prise en compte des maillages non structurés et expression de la solution numérique dans une base de polynômes permettant l'utilisation de modèles de turbulence multi-échelle. Parmi ce type de modèles, nous nous sommes intéressés ici à la méthode Variational Multiscale (VMS) qui consiste à séparer les échelles résolues dans la base de polynômes pour restreindre l'influence du modèle à une gamme réduite d'échelles. Les modèles considérés ont été paramétrés en prenant en compte les fonctions de transfert spécifiques aux discrétisations DG. La précision de la méthode pour la représentation de phénomènes turbulents variés a été évaluée à travers la réalisation de DNS de configurations académiques. Enfin, l'approche VMS/DG a été éprouvée sur des configurations simples à haut nombre de Reynolds. Il apparaît que cette méthodologie permet la représentation précise des phénomènes turbulents pour un coût réduit en terme de degrés de liberté.

Mots-clés : METHODE GALERKIN DISCONTINUE ; ECOULEMENTS TURBULENTS ; SIMULATION DES GRANDES ECHELLES ; SIMULATION NUMERIQUE DIRECTE

Abstract

This work focuses on the development of the Discontinuous Galerkin (DG) method for the large-eddy simulation (LES) of turbulent flows. The DG method shows some interesting properties for LES : high-order of accuracy, compact stencil, unstructured meshes and a modal polynomial basis which can be used to implement multiscale turbulence models. We consider in this work the Variational Multiscale approach (VMS), which consists in splitting the resolved scales into two components using the modal basis in order to restrict the action of the model to a given range of small scales. The models have been tuned using the transfer functions of the DG *hp*-discretizations. The accuracy of the DG method for the representation of turbulent phenomena has been assessed through DNS of free and wall-bounded canonical flows. Finally, the VMS/DG approach has been assessed for simple configurations at high Reynolds numbers. We have shown that this particular approach allows for an accurate representation of turbulent flows for coarse discretizations.

Key words : DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD ; TURBULENT FLOWS ; LARGE EDDY SIMULATION ; DIRECT NUMERICAL SIMULATION

Table des matières

Introduction	11
1 Méthodes et modèles pour la simulation de la turbulence	15
1.1 Modélisation de la turbulence	15
1.1.1 Equations de Navier-Stokes	15
1.1.2 Simulation numérique directe	17
1.1.3 Simulation des grandes échelles	18
1.1.4 Aspects numériques	27
1.2 Méthodes numériques pour LES et DNS	29
1.2.1 Introduction	29
1.2.2 La méthode de Galerkin discontinue	30
1.3 Objectifs et motivations de cette étude	32
2 Méthode de Galerkin discontinue	35
2.1 Discrétisation des équations de Navier-Stokes	35
2.1.1 Formulation faible des équations	35
2.1.2 Traitement des flux convectifs	37
2.1.3 Traitement des flux visqueux	38
2.1.4 Traitement des dérivées temporelles et choix de la base fonctionnelle .	41
2.2 Propriétés numériques de la méthode DG	42
2.2.1 Distribution spectrale des erreurs numériques	42
2.2.2 Stabilité numérique	45
2.2.3 Convergence spatiale	46

3	Formulation DG-LES pour les écoulements compressibles	49
3.1	Formalisme VMS pour la méthode DG	49
3.1.1	Séparation d'échelles dans la base fonctionnelle	49
3.1.2	Implémentation des modèles de sous-maille VMS	52
3.1.3	Discussion sur l'approche VMS	53
3.2	Modèles de turbulence pour l'approche DG-LES	55
3.2.1	Caractéristiques spectrales des discrétisations DG	55
3.2.2	Calibration du modèle de Smagorinsky	57
3.2.3	Modèle de Smagorinsky multi-échelle	61
3.2.4	Calibration du modèle à fonction de structure	63
3.2.5	Modèle à fonction de structure multi-échelle	65
3.2.6	Modèle dynamique variationnel	66
3.3	Éléments pour la modélisation dans l'espace de polynômes	68
3.3.1	Interactions entre échelles dans la base de polynômes	68
3.3.2	Etude de la projection d'un signal atmosphérique dans la base de Legendre	70
4	Evaluation de la méthode DG pour la simulation numérique directe	73
4.1	Rebond tourbillonnaire	74
4.1.1	Description du problème	74
4.1.2	Etude de convergence en maillage	76
4.1.3	Etude de convergence en ordre de précision	77
4.1.4	Maillages non-uniformes	80
4.2	Vortex de Taylor-Green	83
4.2.1	Description du problème	83
4.2.2	Etude à bas nombre de Reynolds	85
4.2.3	Etude à nombre de Reynolds modéré	88
4.3	Canal plan turbulent	90
4.3.1	Description du problème	90
4.3.2	Régime quasi-incompressible	91
4.3.3	Régime compressible	92
4.4	Conclusions	95

5	Evaluation de la méthode DG pour la simulation des grandes échelles	101
5.1	Comportement des discrétisations DG sans modèle de sous-maille : cas du vortex de Taylor-Green non-visqueux	102
5.1.1	Description du problème	103
5.1.2	Stabilité des discrétisations DG	104
5.1.3	Evaluation de la dissipation numérique	106
5.2	Comportement des modèles de sous-maille DG-LES : cas de la turbulence isotrope dans la limite $Re \rightarrow \infty$	109
5.2.1	Description du problème	109
5.2.2	Comportement de DNS spectrales Fourier	112
5.2.3	Comportement des modèles DG-LES mono-échelle	114
5.2.4	Comportement des modèles DG-VMS	117
5.3	Evaluation de la méthode DG-LES pour le vortex de Taylor-Green à $Re = 3000$	124
5.3.1	Configuration et DNS spectrale Fourier de référence	124
5.3.2	Comportement des modèles DG-LES mono-échelle	125
5.3.3	Comportement des modèles DG-VMS	127
5.4	Conclusions	132
	Conclusion générale et perspectives	135
	Bibliographie	141

Introduction

Le phénomène de turbulence en mécanique des fluides représente à l'heure actuelle un des obstacles majeurs à la compréhension et à l'étude d'écoulements associés à des thématiques variées (géophysique, aéronautique, aérospatial, nucléaire civil). Ce phénomène se caractérise par la présence de structures tourbillonnaires d'échelles spatiales et temporelles variées se développant de manière désordonnée dans les trois directions de l'espace. L'étude numérique de tels écoulements fait face à deux problèmes principaux. D'une part, la représentation complète de la dynamique tourbillonnaire à haut nombre de Reynolds par l'outil numérique requiert la considération d'un nombre de degrés de liberté inadapté aux architectures de calcul actuelles, à la fois en terme de stockage des données et de temps de restitution. Pour réduire les coûts, on doit faire appel à des approches de modélisation de la turbulence au prix d'une dégradation de la représentation de la physique. La deuxième problématique est associée à l'étape de discrétisation des équations caractérisant la dynamique des fluides par une méthode numérique qui va introduire des erreurs impactant notamment le développement des plus petites structures de l'écoulement. Dans ce contexte, on doit donc utiliser les méthodes les plus précises, qui s'accompagnent de manière générale de difficultés de mise en oeuvre. Nous nous proposons de présenter ces deux points, et de détailler ensuite les objectifs de la thèse.

Dans le cadre de la modélisation des écoulements turbulents, il existe trois approches principales, de précision et de complexité différentes. L'approche de simulation numérique directe (DNS) est à la fois conceptuellement simple mais de mise en oeuvre complexe. Cette approche consiste à résoudre l'intégralité des structures tourbillonnaires présentes dans les écoulements étudiés, par la discrétisation des équations de Navier-Stokes instationnaires dans un domaine tridimensionnel. Cette représentation permet une description précise de la turbulence, mais est à l'heure actuelle inapplicable aux écoulements à haut nombre de Reynolds, du fait du coût associé à la représentation exhaustive des échelles spatio-temporelles. L'approche opposée, dite RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes), consiste à modéliser l'ensemble des structures tourbillonnaires, les seules informations disponibles étant les moyennes temporelles des champs d'intérêt (vitesse, pression, ...). La résolution d'équations d'évolution de variables associées à la turbulence s'avère nécessaire, ainsi que la calibration de constantes à partir de résultats expérimentaux. Cette approche stationnaire et fortement dépendante

à la modélisation choisie est limitée en précision, mais largement utilisée pour la simulation des écoulements à haut nombre de Reynolds, du fait des coûts de calcul modérés associés. Une approche intermédiaire, dite simulation des grandes échelles (LES), consiste à simuler les structures les plus énergétiques présentes dans l'écoulement, et à modéliser l'influence des échelles non-résolues. Cette approche est conceptuellement plus proche de la DNS que des méthodes RANS, car elle consiste à représenter la dynamique instationnaire et tridimensionnelle des écoulements turbulents. Les coûts de calcul sont également réduits par rapport à l'approche DNS, ce qui permet d'envisager la réalisation de simulations à nombre de Reynolds modérément élevés, en exploitant l'aspect parallèle des architectures de calcul actuelles.

La majorité des codes de calculs actuels employés pour la simulation d'écoulements autour d'obstacles présentant une géométrie complexe est basée sur la méthode de discrétisation des volumes finis qui présente certains inconvénients. La plupart des approches de type volumes finis est associée à un ordre 2 en précision spatiale, ce qui introduit des erreurs de discrétisation conséquentes, notamment pour la représentation des phénomènes à petites échelles. L'extension à l'ordre élevé de ces méthodes (ordre > 2) pose divers problèmes (précision des conditions limites), et notamment celui de l'efficacité vis-à-vis du calcul parallèle (stencil non-compact). Ces approches sont donc peu souvent utilisées pour la mise en œuvre de simulations de type LES ou DNS, qui requièrent une précision élevée et l'exploitation d'un grand nombre de coeurs de calcul. La méthode de Galerkin discontinue (DG), qui présente des aspects relatifs à la fois aux volumes finis et aux éléments finis, possède plusieurs avantages par rapport aux méthodes volumes finis classiques. L'ordre de précision spatiale de la méthode est arbitrairement élevé quelque soit le type d'éléments de la discrétisation, tout en maintenant un stencil compact. La prise en compte d'éléments courbes induit une conservation de l'ordre de précision au niveau des conditions limites. Cette méthode permet donc la réalisation de calculs précis sur des maillages non-structurés et l'exploitation du parallélisme massif des architectures de calcul actuelles. L'emploi d'une base modale pour l'expression des variables de calcul permet de surcroît la mise en oeuvre simple de modèles multi-échelles pour la LES, plus précis que les approches classiques comme le modèle de Smagorinsky, utilisé dans un grand nombre d'applications.

L'objectif de la thèse est de développer et d'évaluer un modèle de turbulence multi-échelles adapté à la méthode de discrétisation de Galerkin discontinue, dans l'optique de fournir une représentation précise des écoulements turbulents compressibles à haut Reynolds sur des géométries complexes et pour des temps de restitution modérés. La méthode DG possède des caractéristiques très intéressantes pour la simulation des grandes échelles, mais le développement ou l'évaluation de méthodologies LES spécifiques à l'approche DG sont encore rares dans la littérature. Certains auteurs ont proposé des calculs DG sous-résolus sans modèle de sous-maille [49, 119] et d'autres ont proposé une transposition directe des modèles LES existants pour la méthode DG [120, 101, 102]. La réalisation de calculs DNS constitue une étape préalable importante à la réalisation de calculs LES, pour démontrer la capacité

de la méthode DG à représenter des phénomènes turbulents variés. Là encore, ce type de résultats est encore rare dans la littérature [127, 128], et aucune étude sur l'influence des paramètres des discrétisations DG (degré de polynôme p , taille de maille h , flux numérique) sur la représentation de ces phénomènes n'a été réalisée.

Nous présentons dans le Chapitre 1 le contexte général de la thèse ainsi qu'une étude bibliographique sur les modèles de turbulence multi-échelles et la méthode DG. Il apparaît que très peu d'études mixant approche DG et modélisation LES ont été réalisées, justifiant les travaux présents.

Le Chapitre 2 présente tous les détails de la méthode DG considérée ici, parmi lesquels les fonctions de bases, les flux numériques et l'intégration temporelle utilisés. Les propriétés de dissipation et de dispersion de la méthode sont ensuite étudiées sur une équation linéaire scalaire d'advection, et les ordres de convergence sont vérifiés pour un problème mettant en jeu une variété de phénomènes physiques.

Dans le Chapitre 3, nous détaillons le formalisme de simulation des grandes échelles retenu ainsi que le développement des modèles mono et multi-échelles pour les discrétisations DG. Nous proposons notamment une calibration des modèles pour ces discrétisations DG qui font intervenir la taille de maille h , mais également le degré du polynôme p .

Une condition préalable à l'application de la méthode DG à la LES est la validité de la méthode pour la DNS, car les équations de la LES tendent asymptotiquement vers celles de la DNS. Dans le Chapitre 4, nous évaluons donc la méthode DG pour des DNS d'écoulements canoniques. La démonstration est articulée autour des cas test du rebond tourbillonnaire, du vortex de Taylor-Green et du canal plan turbulent. Ces cas d'étude présentent une géométrie simple qui permet l'emploi de méthodes numériques spectrales pour la génération de la solution de référence. Ces méthodes spectrales réduisent de manière très efficace les erreurs numériques, mais sont limitées pour le calcul d'écoulements sur des domaines spatiaux simples. Pour ces trois cas d'application, nous démontrons que les discrétisations DG d'ordre élevé fournissent une précision équivalente aux méthodes spectrales pour un niveau de résolution équivalent, concernant les statistiques de premier et second ordre et les spectres d'énergie cinétique turbulente. L'influence du degré de polynôme sur la représentation des phénomènes turbulents est également étudiée.

Dans le Chapitre 5, nous évaluons la méthodologie DG-LES développée dans les précédents chapitres. Les propriétés de dissipation numérique de la méthode DG dans le cas de calculs du vortex de Taylor-Green non-visqueux sont évaluées. Cette étape permet de sélectionner les ordres de précision nécessaires pour limiter l'influence des erreurs de discrétisation sur le modèle de turbulence, tout en garantissant la stabilité des simulations. Enfin, la méthode est évaluée pour trois configurations distinctes et complémentaires, afin de vérifier la capacité de l'approche DG-LES à représenter les lois fondamentales de la turbulence et à capturer les phénomènes transitoires.

Chapitre 1

Méthodes et modèles pour la simulation de la turbulence

Cette section vise à justifier l'emploi du modèle Variational Multiscale Simulation (VMS) en conjonction de l'approche de Galerkin discontinue pour la simulation des écoulements turbulents. Une première partie introduit de manière générale les approches de modélisation de la turbulence, avec un accent prononcé sur la méthode de simulation des grandes échelles. La seconde partie introduit les méthodes numériques d'ordre élevé et en particulier la méthode de Galerkin discontinue ainsi que les avantages que propose cette méthode par rapport aux autres approches dans notre cadre d'application.

1.1 Modélisation de la turbulence

1.1.1 Equations de Navier-Stokes

Les mouvements de fluides compressibles, turbulents ou non, dans un domaine spatial tridimensionnel sont décrits par le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{F}_c(\mathbf{w}) - \mathbf{F}_v(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})] = 0 \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, t > 0, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}) \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

où $\mathbf{w} = (\rho, \rho \mathbf{U}, \rho E)^T$ est le vecteur de variables conservatives, $\mathbf{U} = (u, v, w)^T$ le vecteur vitesse, ρ la masse volumique et E l'énergie totale par unité de masse.

Les flux convectif et visqueux $\mathbf{F}_c, \mathbf{F}_v \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$ s'écrivent :

$$\mathbf{F}_c = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{U}^T \\ \rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U} + p \mathbf{I} \\ (\rho E + p) \mathbf{U}^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{U} - \lambda \nabla^T T \end{pmatrix}.$$

Nous considérons un fluide Newtonien, pour lequel le tenseur des contraintes visqueuses dépend linéairement des gradients de vitesse :

$$\boldsymbol{\tau} = \mu(T) \mathbf{S} = \mu(T) \left(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{U}) \mathbf{I} \right).$$

La viscosité est reliée à la température par la loi de Sutherland :

$$\mu(T) = \mu_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} \left(\frac{1 + C/T_0}{1 + C/T} \right),$$

où $\mu_0 = 1,711 \times 10^{-5} \text{ kg/m/s}$ et $C = 110,4 \text{ K}$ si on considère un écoulement d'air.

La fermeture du système d'équations est réalisée en considérant la loi des gaz parfaits

$$p = (\gamma - 1) \left(\rho E - \frac{1}{2} \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \right)$$

où $\gamma = C_p/C_V$ représente le rapport entre les capacités thermiques du fluide à pression et volume constants. L'adimensionnement des équations de Navier-Stokes (1.1) en utilisant les échelles caractéristiques L, U_0, ρ_0 et T_0 correspondant respectivement à une longueur, une vitesse, une masse volumique et une température fait apparaître les nombres sans dimension suivants :

- Le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\rho_0 U_0 L}{\mu_0}$$

qui caractérise l'importance des effets convectifs par rapport aux effets visqueux.

- Le nombre de Mach

$$M = \frac{U_0}{c_0}$$

qui caractérise le rapport entre la vitesse du fluide et la vitesse du son $c_0 = c(T_0)$, qui dépend de la température.

- Le nombre de Prandtl

$$Pr = \frac{\mu_0}{\rho_0 \kappa(T_0)}$$

où κ est la diffusivité thermique du fluide. Ce nombre caractérise l'importance des effets visqueux par rapport aux effets de diffusion thermique. Pour les écoulements d'air, ce nombre est généralement supposé constant et sa valeur est proche de 0,7.

1.1.2 Simulation numérique directe

La représentation de la dynamique tridimensionnelle et instationnaire des écoulements turbulents par le biais de la simulation numérique se heurte à un problème significatif : la présence de structures tourbillonnaires d'échelles spatiales et temporelles très diverses. Le rapport de dimensions entre les plus grandes et les plus petites échelles (respectivement de taille L et η) présentes dans les écoulements est gouverné par le nombre de Reynolds, qui caractérise l'importance des effets convectifs par rapport aux termes diffusifs. En particulier, on peut démontrer, pour un écoulement de turbulence homogène isotrope se développant librement, que ce rapport est proportionnel à une puissance du nombre de Reynolds lié aux grandes échelles

$$\frac{L}{\eta} \propto Re_L^{3/4}$$

Pour une représentation tridimensionnelle, on doit donc définir un nombre de degrés de liberté dans l'espace proportionnel à $Re_L^{9/4}$ pour calculer l'intégralité des échelles de l'écoulement par la simulation à un instant donné. Pour les écoulements de proche paroi, la dépendance du nombre de degrés de liberté au nombre de Reynolds lié à l'épaisseur de la couche limite est d'autant plus critique et est évaluée à $Re^{2.6}$ [24]. La représentation de l'ensemble des échelles par la résolution des équations (1.1) est le principe de base de la simulation numérique directe, qui est de fait limitée à la simulation d'écoulements à bas nombre de Reynolds. En effet, les nombres de Reynolds pour certains cas d'applications (aéronautique, géophysique) peuvent atteindre un ordre de grandeur de 10^8 , et la DNS de ce type d'écoulements nécessiterait la considération de centaines de milliards de degrés de liberté.

Concernant la simulation des grandes échelles, la dépendance du nombre de degrés de libertés par rapport au nombre de Reynolds est évaluée à $Re^{1.8}$ pour les écoulements en proche paroi. Pour la turbulence se développant dans les écoulements libres (jets, couches de mélange, sillages), cette dépendance est évaluée à Re [24]. En terme de coût de calcul, la simulation des grandes échelles est donc nettement plus attractive que la simulation numérique directe pour la majorité des écoulements turbulents. Les détails de cette technique sont présentés dans les paragraphes suivants.

1.1.3 Simulation des grandes échelles

Introduction

L'approche de simulation des grandes échelles permet de conserver la représentation tridimensionnelle et instationnaire de la turbulence tout en réduisant la dépendance du nombre de degrés de liberté au nombre de Reynolds par rapport à la simulation numérique directe. Le principe de modélisation est basé sur certains principes fondamentaux de la turbulence valables pour des écoulements à haut nombre de Reynolds. La représentation spectrale d'un écoulement turbulent typique permet de mettre en valeur plusieurs bandes de fréquences associées à un comportement particulier (voir Figure 1.1). Les plus grandes échelles sont très dépendantes de l'écoulement considéré et concentrent la majeure partie de l'énergie cinétique turbulente. Vient ensuite une bande spectrale dite zone inertielle, apparaissant quand le nombre de Reynolds est suffisamment élevé. Les structures présentes dans cette région proviennent de l'étirement tourbillonnaire dans les plus grandes échelles, et le transfert d'énergie induit de ces échelles vers les plus petites porte la dénomination de *cascade énergétique*. Kolmogorov a démontré que la décroissance spectrale de l'énergie dans la zone inertielle est universelle et présente dans tous les écoulements à Reynolds important [73]. La dernière rangée spectrale correspond aux échelles dissipatives qui sont sensibles aux mécanismes visqueux du fluide. L'approche de simulation des grandes échelles consiste donc à représenter le plus fidèlement possible les échelles énergétiques propres à l'écoulement, et à modéliser l'influence des échelles de la zone dissipative et d'une partie de la zone inertielle sur les échelles résolues, chose facilitée par le fait que le comportement des structures dans la zone inertielle possède un caractère universel.

La séparation entre échelles résolues et non-résolues (appelées également échelles sous-maille) est réalisée par une opération de filtrage sur les équations de Navier-Stokes. Soit $\mathcal{N}(\mathbf{U}, p)$ l'opérateur des équations de Navier-Stokes incompressibles, avec \mathbf{U} le vecteur vitesse, p la pression et $\bar{\cdot}$ un filtre quelconque lié à l'espace de Fourier, nous avons

$$\overline{\mathcal{N}(\mathbf{U}, p)} \simeq \mathcal{N}(\bar{\mathbf{U}}, \bar{p}) + \nabla \cdot \tau^{sgs}$$

où le tenseur τ^{sgs} caractérise la dynamique des structures non-résolues. Cette égalité n'est pas toujours exacte car l'opérateur de filtrage n'est généralement pas commutatif vis-à-vis des dérivées spatiales quand des grilles de calcul inhomogènes sont considérées, introduisant une erreur dépendante de l'étirement de la grille [52]. L'influence des échelles sous-maille sur le champ résolu s'exprime par trois mécanismes principaux. Le premier assure une dissipation au niveau de l'échelle de coupure correspondant au transfert d'énergie vers les échelles sous-maille. Le deuxième correspond au phénomène de *backscatter*, qui se traduit par un appariement des tourbillons non-résolus et génère un transfert d'énergie des hautes fréquences vers les plus basses. Le dernier mécanisme correspond aux interactions spectrales distantes

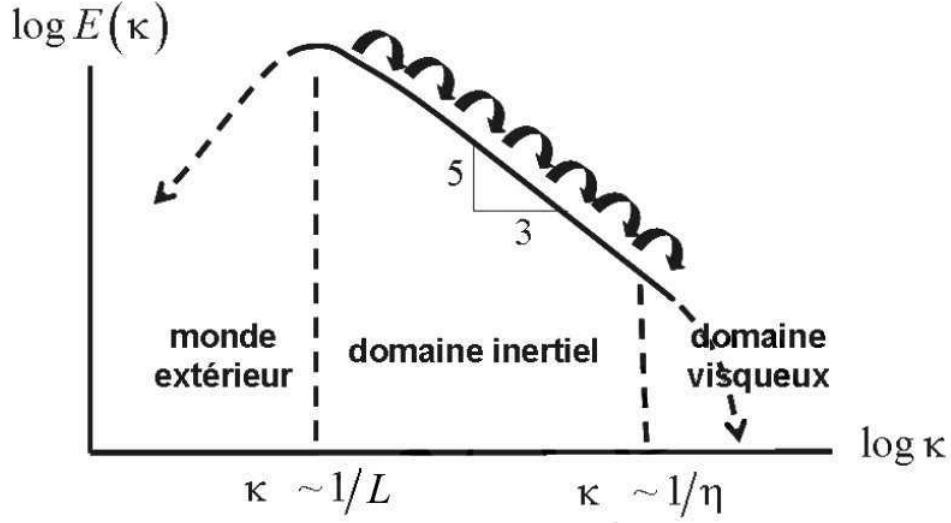


FIGURE 1.1 – Spectre d'énergie cinétique $E(k)$ schématique pour les écoulements turbulents (tiré du cours de L. Jacquin [66]).

grandes échelles - échelles sous-maille qui caractérise une influence des échelles sous-maille sur les plus grandes structures résolues. L'analyse spectrale conduite par Kraichnan a permis de caractériser ces trois mécanismes par le biais de viscosités spectrales [75]. Nous reprenons l'expression des viscosités spectrales décrites dans Sagaut [107] :

$$\nu_s^+(k, k_c) = -\frac{T_{sgs}^+(k, k_c)}{2k^2 E(k)}$$

$$\nu_s^-(k, k_c) = -\frac{T_{sgs}^-(k, k_c)}{2k^2 E(k)}$$

où k_c caractérise le nombre d'onde de coupure séparant les échelles résolues et échelles sous-maille. $T_{sgs}^+(k, k_c)$ caractérise les transferts d'énergie du mode k vers les modes sous-maille ($k > k_c$) et $T_{sgs}^-(k, k_c)$ caractérise les transferts des modes sous-maille vers le mode résolu k .

La Figure 1.2 montre l'allure de ces viscosités spectrales pour les filtres Gaussien et à coupure spectrale.

Equations de Navier-Stokes filtrées pour la simulation des grandes échelles

Nous détaillons ici les équations utilisées pour la simulation des grandes échelles d'écoulements compressibles. Nous avons retenu le formalisme développé par Lesieur *et al.* [86, 85], qui a la particularité de fournir un système d'équations très proche des équations de Navier-Stokes décrites dans cette section. Nous considérons la décomposition suivante pour un champ

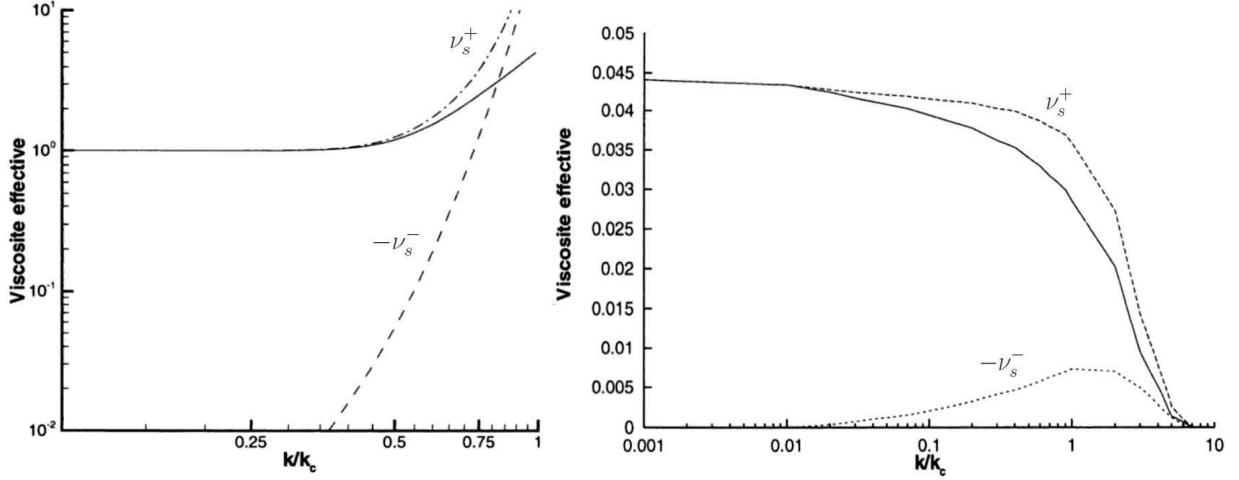


FIGURE 1.2 – Viscosités spectrales $\nu_s^+(k, k_c)$ et $-\nu_s^-(k, k_c)$ pour les filtres à coupure spectrale (gauche) et gaussien (droite) ; Ligne solide : somme des deux contributions. Images tirées de Sagaut [107].

d'intérêt u :

$$u = \bar{u} + u'$$

où \bar{u} correspond au champ filtré à l'aide d'une fonction filtre G_Δ associée à une longueur Δ et un nombre d'onde de coupure $k_c = \pi/\Delta$ dans l'espace de Fourier.

L'application du filtre sur les équations de Navier-Stokes nous donne

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{w}}}{\partial t} + \nabla \cdot [\bar{\mathbf{F}}_c - \bar{\mathbf{F}}_v] = 0$$

où nous avons admis que le filtre est commutatif vis-à-vis des dérivées spatiales et temporelles. Nous avons

$$\bar{\mathbf{F}}_c = \begin{pmatrix} \overline{\rho \mathbf{U}^T} \\ \overline{\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}} + \bar{p} \mathbf{I} \\ \overline{\rho E \mathbf{U}^T} + \bar{p} \mathbf{U}^T \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\boldsymbol{\tau}} \\ \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{U} - \lambda \nabla^T T \end{pmatrix}$$

et également la loi d'état filtrée

$$\bar{p} = (\gamma - 1) \left(\overline{\rho E} - \frac{1}{2} \overline{\rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}} \right).$$

De manière analogue aux approches RANS consistant à moyenner les équations de Navier-Stokes, il est pratique d'utiliser un filtre pondéré par la masse volumique, dit filtre de Favre. Pour une fonction u , nous définissons $\tilde{u} = \overline{\rho u} / \bar{\rho}$. Pour envisager la résolution numérique du

système, nous devons faire apparaître les variables conservatives filtrées $\bar{\mathbf{w}} = (\bar{\rho}, \bar{\rho}\tilde{\mathbf{U}}, \bar{\rho}\tilde{E})^T$:

$$\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{\mathbf{U}}^T \\ \bar{\rho}\tilde{\mathbf{U}} \otimes \tilde{\mathbf{U}} + \bar{p}\mathbf{I} + (\overline{\rho\mathbf{U}} \otimes \tilde{\mathbf{U}} - \bar{\rho}\tilde{\mathbf{U}} \otimes \tilde{\mathbf{U}}) \\ \bar{\rho}\tilde{E}\tilde{\mathbf{U}} + \bar{p}\tilde{\mathbf{U}}^T + (\overline{\rho E\mathbf{U}^T} - \bar{\rho}\tilde{E}\tilde{\mathbf{U}} + \overline{p\mathbf{U}^T} - \bar{p}\tilde{\mathbf{U}}^T) \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\tau} \\ \bar{\tau}\cdot\tilde{\mathbf{U}} - \lambda\overline{\nabla^T T} \end{pmatrix}$$

où nous avons fait apparaître les termes caractérisant la dynamique des échelles non résolues qui se regroupent dans l'expression du tenseur de sous-maille

$$\mathcal{T} = -\overline{\rho\mathbf{U}} \otimes \tilde{\mathbf{U}} + \bar{\rho}\tilde{\mathbf{U}} \otimes \tilde{\mathbf{U}}.$$

L'approche classique consiste à décomposer ce tenseur en parties sphérique et déviatorique.

$$\mathcal{T} = \underbrace{\mathcal{T} - \frac{1}{3}\text{tr}(\mathcal{T})\mathbf{I}}_{\mathcal{T}^D} + \underbrace{\frac{1}{3}\text{tr}(\mathcal{T})\mathbf{I}}_{\mathcal{T}^S}.$$

La partie déviatorique sera modélisée par un terme de dissipation, tandis que la partie sphérique est incorporée à la pression, formant le terme dit de *macropression*

$$\bar{P}\mathbf{I} = \bar{p}\mathbf{I} - \mathcal{T}^S.$$

Suivant les développements de Lesieur *et al.* [86], nous exprimons le terme d'énergie totale comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}\tilde{E} &= \bar{\rho}C_v\tilde{T} + \frac{1}{2}\bar{\rho}\tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} - \frac{1}{2}\text{tr}(\mathcal{T}) \\ &= \bar{\rho}C_v \left(\tilde{T} - \frac{1}{2\bar{\rho}C_v}\text{tr}(\mathcal{T}) \right) + \frac{1}{2}\bar{\rho}\tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \end{aligned}$$

où la *macrotérature* $\tilde{\Theta} = \tilde{T} - \frac{1}{2\bar{\rho}C_v}\text{tr}(\mathcal{T})$ est introduite.

La loi d'état filtrée devient

$$\bar{P} + \frac{1}{3}\text{tr}(\mathcal{T}) = \bar{p}r \left(\tilde{\Theta} + \frac{1}{2\bar{\rho}C_v}\text{tr}(\mathcal{T}) \right).$$

En regroupant les termes sous-maille, nous obtenons finalement

$$\bar{P} = \bar{p}r\tilde{\Theta} + \frac{3\gamma - 5}{6}\text{tr}(\mathcal{T}).$$

Lesieur *et al.* [86] proposent de négliger le deuxième terme, menant à la loi d'état $\bar{P} = \bar{\rho}r\tilde{\Theta}$. Les études réalisées par Vreman *et al.* [124] ont montré que les termes sous-maille provenant de la décomposition des flux diffusifs étaient négligeables. Les flux pour la résolution du système final s'écrivent donc

$$\bar{\mathbf{F}}_c = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{\mathbf{U}}^T \\ \bar{\rho}\tilde{\mathbf{U}} \otimes \tilde{\mathbf{U}} + \bar{P}\mathbf{I} - \mathcal{T}^D \\ \bar{\rho}\tilde{E}\tilde{\mathbf{U}} + \bar{p}\tilde{\mathbf{U}}^T - \mathbf{Q}^T \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mu}\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{U}}) \\ \bar{\mu}\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{U}})\tilde{\mathbf{U}} - \bar{\lambda}\nabla^T\tilde{\Theta} \end{pmatrix}$$

avec $\mathbf{Q} = -\overline{(\rho E + p)\mathbf{U}} + (\bar{\rho}\tilde{E} + \bar{P})\tilde{\mathbf{U}}$ le flux de chaleur sous-maille. Nous considérons les approches de modélisations de type viscosité et diffusivité turbulentes pour \mathbf{Q} et \mathcal{T}^D , soit

$$\mathcal{T}^D \approx \mu_t \mathbf{S}$$

$$\mathbf{Q} \approx -C_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \nabla \tilde{\Theta}$$

avec Pr_t le nombre de Prandtl turbulent supposé constant. L'expression des flux devient

$$\bar{\mathbf{F}}_c = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{\mathbf{U}}^T \\ \bar{\rho}\tilde{\mathbf{U}} \otimes \tilde{\mathbf{U}} + \bar{P}\mathbf{I} \\ \bar{\rho}\tilde{E}\tilde{\mathbf{U}} + \bar{p}\tilde{\mathbf{U}}^T \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ (\bar{\mu} + \mu_t)\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{U}}) \\ \bar{\mu}\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{U}})\tilde{\mathbf{U}} - C_p \left(\frac{\bar{\mu}}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \nabla^T \tilde{\Theta} \end{pmatrix}.$$

L'intérêt de ce formalisme réside dans sa simplicité et sa proximité avec les équations de Navier-Stokes compressibles générales. La différence réside dans l'ajout d'un flux \mathbf{F}_v^m associé à la modélisation de la turbulence

$$\mathbf{F}_v^m = \mu_t \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla \tilde{\mathbf{U}} + \nabla \tilde{\mathbf{U}}^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}) \mathbf{I} \\ -\frac{C_p}{Pr_t} \nabla^T \tilde{\Theta} \end{pmatrix}.$$

Modélisation dans l'espace physique

Le premier modèle proposé dans le cadre de la simulation des grandes échelles, introduit par Smagorinsky [114], vise à représenter le transfert d'énergie du champ résolu vers les échelles sous-maille par un terme purement dissipatif. L'expression de la viscosité turbulente est $\nu_t = (C_S \Delta)^2 |\mathbf{S}|$ où Δ est l'échelle de filtre, \mathbf{S} le tenseur de déformation et C_S la constante de Smagorinsky paramétrée pour des écoulements de turbulence homogène isotrope satisfaisant les hypothèses de Kolmogorov. Les faiblesses de ce modèle sont multiples. Tout d'abord, seuls

les mécanismes dissipatifs des échelles sous-maille sont modélisés. Ensuite, la construction du modèle suppose la présence d'une rangée inertielle sur l'ensemble du spectre d'énergie, et une modification de la constante de Smagorinsky est nécessaire pour les cas d'écoulements en présence de parois, par exemple. Enfin, le modèle fournit une dissipation excessive dans les régions de l'écoulement où le Reynolds local est faible.

Une amélioration du modèle de Smagorinsky a été proposée par Germano *et al.* [50], sous la dénomination de procédure dynamique. Cette approche consiste à ajouter une seconde étape de filtrage en utilisant une échelle de coupure plus importante. Il est ainsi possible de trouver une expression de C_S dépendant du champ résolu. Ce modèle mène à une réduction de C_S dans les régions transitionnelles des écoulements et fournit de manière générale de meilleurs résultats que l'approche classique. La constante peut également prendre des valeurs négatives, ce qui peut s'apparenter à une représentation du phénomène de backscatter. Cependant, le fonctionnement du modèle est mal connu, et il est nécessaire de recourir à des artifices numériques (moyenne de la constante dans une direction, introduction de bornes supérieures et inférieures, ...) pour obtenir des calculs stables.

Modélisation dans l'espace spectral

Les approches basées sur une viscosité spectrale consistent à modéliser fidèlement les interactions entre nombres d'ondes, et particulièrement le pic de dissipation d'énergie apparaissant au niveau de l'échelle de coupure. Chollet et Lesieur [25] ont proposé un modèle prenant en compte à la fois les interactions triadiques distantes entre échelles sous-maille et bas nombres d'ondes, et également le pic de dissipation (*cusp*) de la coupure. Ce modèle s'intègre naturellement dans les méthodes de résolution spectrales basées sur les modes de Fourier, mais plus difficilement quand des méthodes numériques plus traditionnelles sont considérées. Les méthodes de type Spectral Vanishing Viscosity [68] se proposent uniquement de modéliser le pic de dissipation en appliquant un noyau de convolution impactant les plus hauts nombres d'onde représentés par la grille de calcul. L'amplitude de la viscosité est dans ce cas calibrée par un paramètre dépendant de la taille de la maille plutôt que par des considérations physiques. De manière générale, les modélisations à viscosité spectrale permettent d'exprimer des interactions entre structures que les modèles calibrés dans l'espace physique ne peuvent représenter. Ces approches présentent par contre des difficultés d'implémentation quand des méthodes numériques autres que les méthodes spectrales sont utilisées. Dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi de nous intéresser à l'approche VMS, qui reprend le concept de viscosité spectrale tout en proposant une implémentation simple dans les solveurs basés sur la méthode des éléments finis.

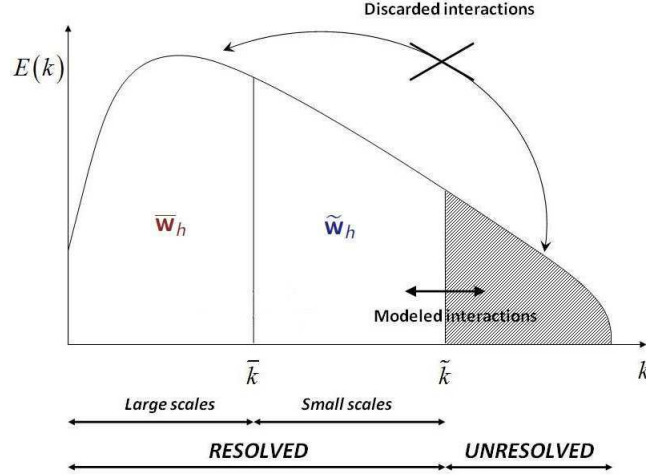


FIGURE 1.3 – Concept de l’approche VMS dans l’espace spectral de Fourier.

Approche Variational Multiscale Simulation

L’approche VMS introduite par Hughes [61] est basée sur une formulation variationnelle des équations de Navier-Stokes. Elle consiste à séparer le champ résolu en gammes de *grandes* et de *petites* échelles. Le modèle de turbulence est calibré en utilisant les informations provenant des petites échelles et est appliqué uniquement pour la résolution de cette gamme d’échelles. Le principe de la méthode est illustré sur la Figure 1.3.

Pour simplifier l’explication de la méthode, nous considérons ici que la formulation variationnelle est basée sur la projection de la solution dans la base de Fourier. On peut ainsi considérer un filtre passe-bas classique associé à la longueur de coupure $\bar{\Delta}$ et un filtre passe haut associé à l’échelle $\tilde{\Delta}$ avec $\tilde{\Delta} < \bar{\Delta}$. Les échelles de taille supérieure à $\bar{\Delta}$ constituent les grandes échelles résolues, tandis que les échelles dont la taille est comprise entre $\tilde{\Delta}$ et $\bar{\Delta}$ constituent les petites échelles résolues. Les échelles de taille inférieure à $\tilde{\Delta}$ correspondent aux échelles sous-maille, non résolues. Le champ complet s’écrit donc :

$$\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{U}} + \hat{\mathbf{U}}$$

et le tenseur sous-maille est calculé uniquement à partir des petites échelles $\tilde{\mathbf{U}}$. En sus, le modèle n’agit que dans la résolution des petites échelles, l’expression finale du modèle devient donc :

$$\tau^{sgs} = \nu_t \mathbf{S}(\tilde{\mathbf{U}})$$

Un des avantages de la VMS est sa simplicité d’implémentation dans les solveurs de type éléments finis utilisant une approche modale. Dans ce cas, les deux gammes d’échelles sont définies à l’aide des éléments de la base fonctionnelle, et le modèle est appliqué sur les petites échelles en projetant le terme sous-maille uniquement sur les éléments de la base

correspondants. Cette approche introduit une inconnue supplémentaire pour déterminer la partition définissant la dimension des grandes et petites échelles dans la base fonctionnelle.

Les premières études concernant la VMS ont été réalisées par Hughes *et al.* à l'aide de méthodes spectrales. Des simulations de la turbulence isotrope en décroissance à Reynolds fini et infini [62] et du canal plan turbulent à $Re_\tau = 395$ [63] ont montré un meilleur comportement de la VMS par rapport aux modèles traditionnels (Smagorinsky et procédure dynamique). Pour les mêmes cas d'étude, l'influence de la partition a été étudiée par Holmen *et al.* [58] et Ramakrishnan *et al.* [103]. Enfin, les transferts d'énergie induits par l'approche VMS ont été étudiés par Sagaut *et al.* [109], à l'aide de simulations de THI à Reynolds infini et par Hughes *et al.* [64], pour le même cas d'étude à Reynolds fini. Cet ensemble d'études réalisées à l'aide de méthodes spectrales ont montré les bonnes performances de la VMS pour le calcul de configurations académiques. Certains auteurs ont ensuite implémenté la méthode dans des solveurs de type éléments finis pour calculer des configurations présentant des géométries complexes. Parmi les études éléments finis, Wasberg *et al.* ont employé une méthode nodale de Galerkin pour le canal plan turbulent à $Re_\tau = 950$ [126], Muntz *et al.* ont utilisé une méthode Galerkin discontinue en temps pour le même cas à $Re_\tau = 180$ [97] et Ramakrihsnan *et al.* une méthode de Galerkin discontinue modale pour le canal plan bas Reynolds [102, 101, 34]. Enfin, Koobus *et al.* ont implémenté la VMS dans un code mixte éléments finis/volumes finis pour calculer l'écoulement autour d'un cylindre à $Re = 22000$ et d'un profil d'aile à $Re = 40000$ sur maillages non-structurés [74, 44]. Une approche similaire a été utilisée par Ouvrard *et al.* [99] et Wornom *et al.* [129] pour la simulation d'un écoulement autour d'un cylindre à des nombre de Reynolds variés.

Autres types de modélisations multi-échelles

- Méthodes introduisant un filtre passe-haut

Certains modèles LES basés sur le filtrage considèrent la définition de plusieurs gammes d'échelles. Stolz *et al.* [115] ont introduit la méthode HPF (*High Pass Filter*) qui est conceptuellement similaire à la VMS. Cette approche consiste à appliquer un filtre passe haut sur la viscosité turbulente, de manière à ce que cette dernière influe uniquement sur une gamme de petites échelles résolues. Ces petites échelles sont délimitées dans les bas nombres d'ondes par le filtre passe haut et dans les hauts nombres d'ondes par le filtre LES traditionnel. Ici, l'équivalent des grandes échelles de la VMS est donc représenté par les modes inférieurs au mode de coupure "passe-haut".

Zhou *et al.* [132] ont proposé de considérer deux étapes de filtrage passe bas pour les simulations LES. Le premier filtre est associé à une fonction de transfert explicite dans l'espace de Fourier, tandis que le second est déterminé implicitement par la discrétisation, comme également défini par Carati *et al.* [21]. Le principe est de définir une

échelle de coupure plus importante pour le premier filtre, ce qui génère une bande fréquentielle de petites échelles entre les deux nombres de coupure. L'information de ces petites échelles est ensuite exploitée pour construire le modèle sous-maille.

Ducros *et al.* [42] ont proposé une version du modèle à fonction de structure introduisant un filtre passe haut. Ce filtre est utilisé pour construire la fonction de structure au second ordre relative à l'énergie contenue dans une gamme d'échelles donnée. Cette fonction de structure débarrassée des contributions anisotropes des bas nombres d'ondes mène à une meilleure adéquation avec les hypothèses de modélisation. La construction du modèle à partir des petites échelles résolues constitue une similarité avec l'approche VMS, où le modèle est construit à l'aide du tenseur de déformation relatif aux petites échelles.

- Méthodes multi-grille

Le principe des méthodes multi-grille globales est de superposer plusieurs maillages de résolutions différentes, pour permettre une séparation des échelles de la turbulence en résolvant les grandes échelles sur les maillages grossiers et les plus petites sur les maillages fins. Chaque grille introduit un filtre équivalent dans l'espace de Fourier, ce qui induit un grand nombre de possibilités en terme de modélisation des interactions entre les différentes échelles et en terme d'adaptation en temps. Les interactions entre les différents niveaux de grille sont définies à l'aide d'opérateurs de prolongation (transferts d'énergie des grandes vers les petites échelles) et de restriction (transferts d'énergie des petites vers les grandes échelles). Cette technique a été développée par Voke [122, 123], qui a introduit la méthode *multimesh*, qui consiste à initialiser la solution sur le maillage le plus fin, puis de l'interpoler sur des grilles plus grossières. Les équations de Navier-Stokes sont résolues sur le maillage le plus grossier, puis le champ résultant est utilisé dans le calcul des équations pour les grilles plus fines, la procédure étant répétée jusqu'à atteindre le niveau le plus fin. Une réduction significative du coût de calcul est obtenue en intégrant les systèmes sur les différentes grilles en utilisant des pas de temps adaptés.

La méthode multi-niveau introduite par Terracol *et al.* [117, 118] vise également à séparer les échelles en définissant plusieurs grilles. Les équations de Navier-Stokes sont intégrées sur chaque niveau, à commencer par le plus fin, avec un pas de temps d'autant plus grand que la grille est lâche. Pour que le champ complet soit défini au même pas de temps physique, les variables sur les grilles fines sont ensuite mises à jour à l'aide des informations provenant des grilles plus grossières. Le deuxième aspect de la méthode consiste à paramétrer le modèle de turbulence en utilisant des informations provenant des grilles plus fines.

La mise en oeuvre de ce type de méthodes est peu aisée dans le sens où il faut construire et gérer plusieurs grilles au cours des calculs. Une approche alternative pour les algorithmes multi-grille consiste à définir les maillages fins uniquement aux endroits où

les petites structures se développent. Elles sont appelées méthodes multi-grille zonales et sont présentées en détail en même temps que les autres méthodes dans le livre de Sagaut *et al.* [108].

Approches basées sur la régularisation

Un certain nombre d’auteurs proposent un point de vue pragmatique vis-à-vis de la modélisation de la turbulence et préconisent l’emploi de méthodes de régularisation qui ne sont pas basées sur des critères physiques pour réaliser des calculs de type LES. Garnier *et al.* [47] ont par exemple démontré que l’emploi de schémas à capture de chocs d’ordre élevé introduisait une dissipation numérique supérieure à celle associée au modèle de Smagorinsky, d’où la possibilité de ne pas employer de modèle explicite. Fureby *et al.* [45, 46] ont proposé l’approche MILES (Monotonic Integrated LES) qui consiste à employer des limiteurs de flux pour remplacer l’action d’un modèle de turbulence. D’autres auteurs substituent aux termes sous-maille les termes de stabilisation naturellement développés dans le cadre de la méthode des éléments finis pour les problèmes d’advection.

1.1.4 Aspects numériques

Précision spatiale

La mise en oeuvre des approches DNS ou LES nécessite une étape d’intégration spatiale et temporelle par une méthode numérique qui va introduire des erreurs de natures dissipative et dispersive dans le procédé de discrétisation des équations aux dérivées partielles. Il est possible de déterminer la répartition des erreurs numériques en fonction du nombre d’onde à partir du développement en modes de Fourier de la solution numérique pour des équations linéaires (advection et diffusion).

Concernant la simulation numérique directe, la différence entre l’usage d’une méthode numérique précise ou peu précise pour les nombres d’onde élevés se traduira par une différence au niveau du nombre de degrés de liberté nécessaire pour représenter toutes les échelles sans erreurs significatives. Comme souligné par Moin *et al.* [93], soit η la plus petite échelle d’un écoulement donné, il faudra employer une taille de maille de 0.26η pour des différences finies centrées au second ordre, 0.55η pour des différences finies au 4ème ordre, 0.95η pour des différences finies compactes au 6ème ordre, et enfin 1.5η pour une méthode spectrale. En prenant en compte le caractère tridimensionnel des échelles spatiales, une DNS réalisée à l’aide de différences finies au second ordre nécessitera environ 200 fois plus de degrés de liberté que le même calcul réalisé avec une méthode spectrale, pour une précision équivalente.

La situation est plus critique pour la LES, dans le sens où il ne suffit pas de raffiner le maillage pour éliminer les erreurs de discrétisation, cela se traduisant par la capture d’un plus grande

nombre d'échelles spatiales, elles même impactées par les erreurs numériques. Ghosal [51] et Chow *et al.* [26] ont démontré que les erreurs de discrétisation interfèrent fortement avec les termes sous-maille pour des méthodes de différences finies centrées allant jusqu'à l'ordre 8. L'augmentation de l'ordre permet cependant de concentrer les erreurs numériques sur les nombres d'ondes élevés. Il est aussi possible de limiter les erreurs numériques dans un calcul LES en définissant une longueur de coupure plus importante que celle induite par la discrétisation, au prix d'un coût de calcul plus important. Ces observations soulignent la nécessité d'employer des méthodes numériques très précises pour la simulation des grandes échelles.

Parallélisme

Le calcul parallèle a connu un essor considérable au cours des dernières décennies, les coeurs de calculs uniques ayant atteint la limite maximale en termes de FLOPS (opérations à virgule flottante par seconde). L'usage du parallélisme est indispensable pour accélérer les calculs de type LES et DNS et obtenir des temps de restitution raisonnables. L'approche la plus commune consiste à décomposer le domaine de calcul en multiples sous-domaines, associés à un nombre de degrés de liberté réduit par rapport au niveau de résolution total du problème. Le point crucial dans ce type d'approches est l'efficacité de l'échange de données entre domaines. Une efficacité optimale induit une accélération du temps de calcul directement proportionnelle au nombre de sous-domaines. Dans la pratique, l'accélération est moindre et dépend directement de l'implémentation du parallélisme et des caractéristiques des méthodes numériques. Les méthodes numériques les plus efficaces vis-à-vis du parallélisme de type multi-domaine sont celles proposant un stencil compact, où le calcul des équations sur un élément de la discrétisation va uniquement nécessiter des informations provenant des éléments directement adjacents.

Géométries complexes

Il existe deux approches principales pour générer les maillages de points de discrétisation spatiale pour la simulation des écoulements. Le premier type de maillage, dit structuré, consiste à organiser les points de discrétisation suivant des directions privilégiées de l'espace. Par exemple, un point situé à l'indice (i, j, k) sera adjacent au point $(i + 1, j, k)$ par rapport à la première dimension d'espace. Cette représentation simple est avantageuse pour la mise en oeuvre de certaines méthodes numériques (différences finies). Elle est cependant limitée pour la représentation de géométries complexes, et on préférera dans ces situations l'emploi de maillages dits non-structurés. Les points de ces maillages ne sont pas organisés en espace suivant des directions précises, mais décrivent simplement des éléments de discrétisation qui peuvent être répartis de manière flexible dans l'espace. On peut ainsi représenter des

géométries très complexes dont la discrétisation spatiale est réalisée à partir de logiciels de maillage spécialisés.

1.2 Méthodes numériques pour LES et DNS

1.2.1 Introduction

Quatre approches sont couramment employées pour la discrétisation des équations de Navier-Stokes. Nous résumons ici brièvement ces méthodes, en soulignant l'intérêt qu'elles présentent pour la mise en oeuvre des simulations DNS et LES.

- Les différences finies consistent à calculer les dérivées spatiales à partir du développement en série de Taylor de la fonction d'intérêt sur un point de calcul donné. Cette approche permet d'obtenir un ordre de précision arbitraire au prix d'un stencil étendu. Les schémas aux différences finies compacts [82] permettent cependant de réduire les stencils tout en augmentant la précision par rapport aux schémas aux différences finies explicites. La méthode nécessite l'emploi de maillages structurés, et l'ordre de la méthode se retrouve souvent dégradé pour le calcul des conditions limites.
 - Points forts : précision, simplicité
 - Points faibles : géométries complexes inaccessibles, stencil non compact
- L'approche des volumes finis consiste à intégrer les équations aux dérivées partielles sur des volumes de contrôle, et à appliquer le théorème de Green sur les intégrales volumiques afin de réduire l'ordre des dérivées spatiales. Ceci mène à une approximation d'ordre 1 de précision en espace. Il est cependant possible de réaliser des reconstructions du flux aux interfaces inter-éléments à l'ordre deux (par exemple les approches MUSCL). Cette méthode est adaptée aux maillages non-structurés et à l'utilisation de flux numériques de Riemann adaptés à la capture de discontinuités (chocs), ce qui en fait une méthode de choix pour les problèmes compressibles.
 - Points forts : géométries complexes accessibles, simplicité, capture des chocs
 - Points faibles : précision limitée
- L'approche des éléments finis est basée sur la formulation variationnelle des équations considérées. La solution est projetée sur une base fonctionnelle, souvent constituée de polynômes (Lagrange, Legendre, Hermite). La méthode permet l'utilisation de maillages non-structurés, l'ordre de précision spatiale est arbitrairement élevé et dépend de la dimension et des propriétés de la base fonctionnelle. La méthode des éléments finis continus nécessite cependant d'être stabilisée pour les problèmes dominés par la convection, ce qui est le cas des écoulements à haut nombre de Reynolds.

- Points forts : géométries complexes accessibles, précision
 - Points faibles : instable, difficultés pour la capture des chocs
- Les méthodes spectrales sont basées sur la projection des équations sur une base fonctionnelle de grande dimension. La discrétisation repose uniquement sur le développement de la solution en utilisant les fonctions considérées, sans introduire de maillage. Ces méthodes sont très précises, mais limitées à des configurations à géométrie simplifiées. Elles sont utilisées principalement pour générer des bases de données de référence pour des écoulements canoniques (DNS de turbulence isotrope dans un cube périodique, de canal plan, de couche limite sur plaque plane, ...).
 - Points forts : précision, efficacité
 - Points faibles : géométries complexes inaccessibles, difficultés pour la capture des chocs

Chaque méthode présente des points faibles pénalisants pour la réalisation de simulations numériques directes ou des grandes échelles. De nouvelles méthodes ou techniques sont apparues pour combler ces failles. Par exemple, le traitement de géométries complexes en utilisant les différences finies est possible à l'aide de la méthode des frontières immergées [79]. Dans le cas des volumes finis, il est possible d'effectuer des reconstructions de flux numériques à l'ordre élevé, au prix de la compacité du stencil et d'une complexité accrue [112, 113]. Dans le cas des éléments finis, il existe différentes stratégies de stabilisation, par ajout de dissipation artificielle (approche SUPG), ou encore par la modification des fonctions de base (voir les revues [39, 55]). De manière générale, ces développements additionnels sont complexes et restent cantonnés aux codes de recherche.

De nouvelles méthodes ont également fait leur apparition, telles les méthodes RDS (Residual Distribution Scheme) [1, 2] ou DG (Galerkin discontinu). La méthode DG est une approche hybride éléments finis / volumes finis, et possède toutes les qualités nécessaires pour la LES et la DNS. Par ailleurs, elle est suffisamment mature pour l'intégration de systèmes complexes comme les équations de Navier-Stokes. Nous détaillons l'origine et les particularités de cette approche dans la section suivante.

1.2.2 La méthode de Galerkin discontinue

La méthode de Galerkin discontinue a initialement été introduite par Reed et Hill [104] pour la discrétisation des équations caractérisant le transport de neutrons. Les aspects mathématiques de la méthode ont ensuite été développés par Lesaint et Raviart [83]. Ce n'est qu'au début des années 1990 que Cockburn et Shu [30, 29, 28] ont adapté et étudié la méthode

pour des problèmes de mécanique des fluides non-visqueux. S'ensuivit la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles par Bassi *et al.* [7]. Au cours de la dernière décennie, de nombreux développements ont été réalisés (flux numériques, algorithmes d'adaptation hp, \dots), traduisant un intérêt croissant pour la méthode [7, 89, 11, 37, 38, 56, 15, 57, 14].

La méthode DG est basée sur la formulation variationnelle des équations considérées, de manière analogue à l'approche des éléments finis. La solution est exprimée dans la même base fonctionnelle que les fonctions test, ce qui correspond à l'approche de Galerkin. La différence majeure avec les éléments finis classiques provient de la non imposition de la continuité de la solution numérique au niveau des frontières inter-éléments. L'intégration par parties conduit donc à l'apparition d'intégrales sur ces frontières, qui sont évaluées de manière analogue à l'approche des volumes finis, à savoir en introduisant des flux numériques fonctions des valeurs de part et d'autre de l'interface. Nous nous proposons de lister les points d'intérêts et les faiblesses de la méthode.

- Points forts :
 - Ordre élevé : l'expression de la solution dans une base fonctionnelle permet de définir un ordre de précision spatiale arbitraire, directement dépendant de la dimension de la base. Concrètement, si une base de polynômes de degré p est choisie, la solution variera en tant que polynôme d'ordre p à la fois à l'intérieur et sur les bords de l'élément. Ceci induit cependant la définition de plusieurs degrés de liberté au sein d'un élément de discrétisation.
 - Géométries complexes : En tant que méthode de type éléments finis, l'approche DG est basée sur la définition d'éléments de discrétisation et peut donc prendre en charge les maillages non-structurés, composés d'éléments variés.
 - Stencil compact : le stencil est directement lié à l'évaluation des flux numériques aux interfaces. L'utilisation de flux de Riemann approchés (Lax-Friedrichs, Roe) permet de conserver un stencil compact tout en maintenant l'ordre de précision du schéma. Concernant les flux visqueux, l'approche BR2 de Bassi *et al.* [6], introduisant des opérateurs de relèvement corrigeant les gradients à l'interface, est associée à un stencil compact.
 - Conditions limites : les conditions limites sont traitées par le biais des intégrales de frontière, de la même manière que les éléments de la discrétisation. On garde donc les propriétés de précision et de compacité pour le calcul des conditions aux limites.
 - Modèles LES : l'utilisation de l'approche modale, visant à considérer les coefficients de polynômes en tant que degrés de liberté du problème, permet d'introduire de manière naturelle des modèles LES de type viscosité spectrale.

- Points faibles :
 - Coût : l’approche DG mène à l’évaluation d’intégrales au sein et au bord des éléments. Concernant l’approche des volumes finis, seule l’évaluation des intégrales sur les bords des éléments est réalisée, tandis que pour les approches d’éléments finis continus, seule l’évaluation des termes au sein des éléments est nécessaire.
 - Capture des chocs : bien que les flux numériques soient basés sur la résolution des problèmes de Riemann, la méthode DG présente des difficultés à capturer les discontinuités, notamment quand un ordre élevé en conjonction à une taille de maille importante est employé. Il existe certaines techniques de capture des chocs (adaptation en maillage autour des chocs, ajout d’une viscosité artificielle), mais ces dernières restent à l’heure actuelle exploratoires, et un important effort de recherche est encore à réaliser dans ce domaine.

Concernant le choix de la base de fonctions, il existe deux approches dites nodale et modale. L’approche modale consiste à choisir une base de polynômes orthogonaux, ce qui permet de simplifier considérablement la matrice de masse. Les inconnues sont dans ce cas les coefficients de polynômes, ce qui induit un coût de reconstruction de la solution dans l’espace physique dans les boucles de calcul et le post-traitement. L’approche nodale consiste à approcher la solution en utilisant des polynômes de Lagrange. La base des polynômes de Lagrange n’est pas hiérarchique, ce qui peut poser des problèmes pour le développement de méthodes d’adaptation consistant à faire varier le degré de polynôme dans les éléments au cours des calculs, ou pour l’utilisation de modèles LES basés sur la séparation des variables dans la base fonctionnelle tels l’approche VMS.

1.3 Objectifs et motivations de cette étude

La méthode DG possède donc plusieurs atouts pour la réalisation de calculs LES ou DNS sur géométries complexes. Cependant, les développements de méthodologies LES spécifiques à l’approche de Galerkin discontinue sont encore rares dans la littérature. Des études actuelles visent à employer les modèles classiques [120], ou à utiliser l’approche implicite [49]. Collis *et al.* [34] ont utilisé l’approche VMS conjointement au schéma numérique DG pour des simulations à bas Reynolds. Les calculs DNS utilisant l’approche DG sont également rares dans la littérature [127, 128], et n’ont pas démontré toutes les propriétés de la méthode pour ce type de calculs.

Ces travaux de thèse visent à développer une approche rigoureuse de simulation des grandes échelles adaptée à la méthode numérique de Galerkin discontinue. Le Chapitre 2 présente les détails de la méthode DG considérée. Le Chapitre 3 présente la stratégie d’adaptation des modèles LES classiques et VMS pour les discrétisations DG. La méthode DG est évaluée

pour la DNS d'écoulements canoniques dans le Chapitre 4. Enfin, le Chapitre 5 présente une évaluation de la méthodologie VMS-DG proposée pour des configurations de référence.

L'Onera développe à l'heure actuelle un prototype de code de calcul basé sur la méthode DG, dans un contexte de prospection pour l'amélioration de la prédiction des écoulements dans le domaine aéronautique (profils d'ailes, turbomachines, ...). Ces développements sont concrétisés autour du projet de recherche Aghora propre à l'Onera et des collaborations européennes ADIGMA, IDHIOM et ANADE, et à travers plusieurs publications et travaux de thèse [23, 36, 105, 106].

Chapitre 2

Méthode de Galerkin discontinue

Ce chapitre est constitué de deux parties. La première détaille l'étape de discrétisation des équations de Navier-Stokes en utilisant la méthode de Galerkin discontinue. Dans la deuxième partie, nous étudions les propriétés de convergence en précision spatiale de la méthode, et nous évaluons également ses propriétés dissipatives et dispersives pour une équation scalaire d'advection linéaire.

2.1 Discrétisation des équations de Navier-Stokes

Nous introduisons dans cette section les équations considérées, le formalisme éléments finis, les flux numériques propres à la méthode de Galerkin discontinue, et enfin la stratégie d'avancement en temps du système discret.

2.1.1 Formulation faible des équations

Formulation variationnelle du problème

Dans le contexte de la méthode des éléments finis, la formulation variationnelle d'un système d'équations aux dérivées partielles est obtenue en projetant le problème sur un espace fonctionnel $\mathcal{V} = H^1(\Omega)$. Plus précisément, on introduit des fonctions de base engendrant \mathcal{V} que l'on multiplie aux équations. Une intégration par parties permet ensuite de reporter les dérivées spatiales sur les fonctions de base et d'appliquer les conditions limites. Il s'agit alors de trouver $\mathbf{w} \in \mathcal{V}^5$ tel que pour tout $\phi \in \mathcal{V}$ on ait :

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \phi (\mathbf{F}_c(\mathbf{w}_b) - \mathbf{F}_v(\mathbf{w}_b, \nabla \mathbf{w}_b)) \cdot \mathbf{n} d\sigma - \int_{\Omega} (\mathbf{F}_c(\mathbf{w}) - \mathbf{F}_v(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})) \cdot \nabla \phi d\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) \phi d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{w}_0(\mathbf{x}) \phi d\mathbf{x},$$

où $\mathbf{w}_b = \mathbf{w}_b(\mathbf{w}, \mathbf{n})$ et $\nabla \mathbf{w}_b = \nabla \mathbf{w}_b(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}, \mathbf{n})$ sont des opérateurs permettant d'appliquer les conditions aux limites aux frontières du domaine et \mathbf{n} le vecteur défini par les composantes de la normale sortante du domaine. L'espace fonctionnel est défini de telle sorte que les variables et leurs dérivées spatiales soient de carré intégrable sur Ω :

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) | \partial_j f \in L^2(\Omega), j = 1, 2, 3\}$$

Discrétisation spatiale

Le domaine d'étude Ω est décomposé en N éléments de discrétisation non vides et disjoints, ce qui correspond à la partition $\Omega_h = \bigcup_{j=1}^N \Omega_j$. Cette partition fait apparaître des faces inter-éléments définies par

$$\sigma_i \in \Sigma_i = \{\sigma \in \Sigma_h | \sigma \notin \partial\Omega\}$$

et des faces situées aux frontières du domaine définies par

$$\sigma_b \in \Sigma_b = \{\sigma \in \Sigma_h | \sigma \in \partial\Omega\}$$

avec $\Sigma_h = \Sigma_i \cup \Sigma_b$ l'ensemble incluant toutes les faces de la discrétisation.

Dans chaque élément, la solution discrète est recherchée sous la forme d'un polynôme de degré p . Elle appartient à l'espace

$$\mathcal{V}_h^p = \{f \in L^2(\Omega_h) | f|_{\Omega_j} \circ T_j \in Q_p(\kappa), j = 1, \dots, N\},$$

où T_j est la transformation de l'élément de référence $\kappa = I^3$ vers l'élément de discrétisation Ω_j , avec $I = [-1, +1]$. $Q_p(\kappa)$ désigne l'ensemble des polynômes définis sur κ de degrés inférieurs ou égaux à p .

Nous considérons ici l'approche modale, pour laquelle les degrés de liberté du problème correspondent aux coefficients de polynômes décrivant les variables conservatives. Soit $(\phi_1, \dots, \phi_{N_p})$ une base de \mathcal{V}_h^p restreinte à l'élément Ω_j , le vecteur des variables conservatives discrètes s'écrit

$$\mathbf{w}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{N_p} \mathbf{W}_k^j(t) \phi_k(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_j, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.2)$$

où N_p est la dimension de l'espace fonctionnel restreint à un élément, et $\mathbf{W}_1^j, \dots, \mathbf{W}_{N_p}^j$ sont les vecteurs de degrés de liberté associés aux composantes de la base fonctionnelle dans l'élément Ω_j .

La formulation variationnelle discrète consiste à trouver $\mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_h^p$, tel que pour tout $\phi \in \mathcal{V}_h^p$ et $\Omega_j \in \Omega_h$ nous vérifions

$$\int_{\Omega_j} \phi \frac{\partial \mathbf{w}_h}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega_j} \phi (\mathbf{F}_c(\mathbf{w}_h) - \mathbf{F}_v(\mathbf{w}_h, \nabla \mathbf{w}_h)) \cdot \mathbf{n} d\sigma - \int_{\Omega_j} (\mathbf{F}_c(\mathbf{w}_h) - \mathbf{F}_v(\mathbf{w}_h, \nabla \mathbf{w}_h)) \cdot \nabla \phi d\Omega = 0, \quad (2.3)$$

$$\int_{\Omega_j} \mathbf{w}_h(\mathbf{x}, 0) \phi d\mathbf{x} = \int_{\Omega_j} \mathbf{w}_0(\mathbf{x}) \phi d\Omega.$$

Nous détaillons dans les sous-sections suivantes le traitement des termes convectifs et visqueux, et notamment les flux numériques qui sont utilisés pour le calcul des intégrales sur les interfaces.

2.1.2 Traitement des flux convectifs

Nous détaillons ici la discrétisation des termes convectifs de l'équation (2.3). La solution numérique étant discontinue entre les éléments, il existe deux valeurs des variables de chaque côté d'une interface $\sigma_i \in \Sigma_i$. Soit deux éléments adjacents Ω_j^+ et Ω_j^- partageant une face commune σ_i , la trace d'une fonction φ est définie par

$$\varphi^\pm(\mathbf{x}_{\sigma_i}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_{\sigma_i}} \varphi(\mathbf{x} \in \Omega_j^\pm), \quad \forall \mathbf{x}_{\sigma_i} \in \sigma_i.$$

On définit alors les opérateurs de moyenne et de saut aux interfaces par les notations suivantes :

$$\{\varphi\} = \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2}, \quad \llbracket \varphi \rrbracket = \varphi^+ - \varphi^-.$$

Les intégrales de frontières sont calculées à l'aide d'un flux numérique, qui est fonction de la solution de chaque côté de l'interface. En pratique, les flux numériques couramment utilisés pour la méthode des volumes finis sont aussi valables pour l'approche DG. Le terme $\int_{\sigma_i} \mathbf{F}_c(\mathbf{w}_h) \cdot \mathbf{n} d\sigma$ est approché par l'expression $\int_{\sigma_i} \mathbf{h}_c(\mathbf{w}_h^+, \mathbf{w}_h^-, \mathbf{n}) d\sigma$, où \mathbf{h}_c est un flux numérique vérifiant les propriétés suivantes :

- Consistance : $\mathbf{h}_c(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{n}) = \mathbf{F}_c(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}$,
- Conservativité : $\mathbf{h}_c(\mathbf{w}_h^+, \mathbf{w}_h^-, \mathbf{n}) = -\mathbf{h}_c(\mathbf{w}_h^-, \mathbf{w}_h^+, -\mathbf{n})$.

En introduisant l'expression des flux dans (2.3) puis en sommant sur l'ensemble des éléments de Ω_h , nous obtenons l'opérateur suivant pour la discrétisation des flux convectifs :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_c(\mathbf{w}_h, \phi) &= - \int_{\Omega_h} \mathbf{F}_c(\mathbf{w}_h) \cdot \nabla \phi d\Omega \\
&+ \sum_{\sigma_i \in \Sigma_i} \int_{\sigma_i} [[\phi]] \mathbf{h}_c(\mathbf{w}_h^+, \mathbf{w}_h^-, \mathbf{n}) d\sigma \\
&+ \sum_{\sigma_b \in \Sigma_b} \int_{\sigma_b} \phi^+ \mathbf{F}_c(\mathbf{w}_b) \cdot \mathbf{n} d\sigma.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Nous utiliserons ici le flux de Lax-Friedrichs modifié suivant

$$\mathbf{h}_c(\mathbf{w}_h^+, \mathbf{w}_h^-, \mathbf{n}) = \{\mathbf{F}_c(\mathbf{w}_h)\} \cdot \mathbf{n} + \frac{k_2}{2} \rho_s [[\mathbf{w}_h]],$$

où $\rho_s = \max\{|\mathbf{U}^\pm \cdot \mathbf{n}| + c^\pm\}$ est le rayon spectral de la matrice jacobienne des flux convectifs, correspondant à la vitesse d'onde la plus rapide à l'interface. k_2 est un paramètre de décentrement dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1. Pour $k_2 = 0$, nous avons un flux centré, tandis que $k_2 = 1$ correspond au flux de Lax-Friedrichs local. L'influence de k_2 sur les propriétés dissipatives et dispersives du schéma est analysée dans la section 2.2.1.

2.1.3 Traitement des flux visqueux

Nous détaillons ici la discrétisation des termes diffusifs de l'équation (2.3). On introduit ici également un flux numérique pour calculer les intégrales sur les faces. Une discrétisation directe de ces termes, en utilisant un flux centré par exemple, mène à une formulation inconsistante [31]. Il existe plusieurs approches corrigeant ce problème. La revue de Arnold *et al.* [3] présente ces techniques ainsi que leurs avantages et inconvénients. L'approche BR2 introduite par Bassi *et al.* [8] a le mérite de proposer une discrétisation compacte et un ordre de convergence spatial de $p + 1$ pour les problèmes de diffusion. Cette méthode consiste à modifier l'expression des gradients de \mathbf{w}_h dans les volumes et sur les faces, en prenant en compte les discontinuités à l'aide d'opérateurs de relèvement. Le point de départ de la méthode consiste à introduire une variable auxiliaire $\boldsymbol{\theta} = \nabla \mathbf{w}$ et à écrire la formulation variationnelle de l'équation sur les gradients de variables conservatives, soit

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_h} \phi \boldsymbol{\theta}_h d\Omega &= \sum_{\sigma_i \in \Sigma_i} \int_{\sigma_i} [[\phi]] \mathbf{h}_v d\sigma - \int_{\Omega_h} \mathbf{w}_h \otimes \nabla \phi d\Omega + \int_{\partial\Omega_h} \phi \mathbf{w}_b \otimes \mathbf{n} d\sigma \\
&= \sum_{\sigma_i \in \Sigma_i} \int_{\sigma_i} [[\phi]] \mathbf{h}_v d\sigma + \int_{\Omega_h} \phi \nabla \mathbf{w}_h d\Omega - \sum_{\sigma_i \in \Sigma_i} \int_{\sigma_i} (\{\phi\} [[\mathbf{w}_h]] + [[\phi]] \{\mathbf{w}_h\}) \otimes \mathbf{n} d\sigma \\
&\quad + \int_{\partial\Omega_h} \phi \mathbf{w}_b \otimes \mathbf{n} d\sigma
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Le choix d'un flux numérique centré $\mathbf{h}_v = \{\mathbf{w}_h\} \otimes \mathbf{n}$ mène à l'expression

$$\int_{\Omega_h} \phi \boldsymbol{\theta}_h d\Omega = \int_{\Omega_h} \phi \nabla \mathbf{w}_h d\Omega - \sum_{\sigma_i \in \Sigma_h} \int_{\sigma_i} \{\phi\} \llbracket \mathbf{w}_h \rrbracket \otimes \mathbf{n} d\sigma - \int_{\partial\Omega_h} \phi (\mathbf{w}_h - \mathbf{w}_b) \otimes \mathbf{n} d\sigma \quad (2.6)$$

La résolution de la variable $\boldsymbol{\theta}$ à l'aide de cette équation correspond au schéma BR1, qui présente certains inconvénients décrits par Bassi *et al.* [6], dont notamment la nécessité de considérer une variable supplémentaire. De plus, l'application de l'opérateur moyenne $\{\cdot\}$ sur cette variable lors de l'évaluation des flux numériques sur les interfaces demande des informations provenant des voisins des éléments voisins, réduisant la compacité du schéma. Bassi *et al.* [6, 5] ont proposé de corriger ce dernier défaut majeur en cherchant une formulation simplifiée des gradients. Tout d'abord, il est possible de s'affranchir de la résolution de $\boldsymbol{\theta}$ en introduisant l'opérateur de relèvement global $\mathbf{R}_h \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$ défini par

$$\int_{\Omega_h} \phi \mathbf{R}_h d\Omega = - \sum_{\sigma_i \in \Sigma_h} \int_{\sigma_i} \{\phi\} \llbracket \mathbf{w}_h \rrbracket \otimes \mathbf{n} d\sigma - \int_{\partial\Omega_h} \phi (\mathbf{w}_h - \mathbf{w}_b) \otimes \mathbf{n} d\sigma. \quad (2.7)$$

Nous pouvons donc écrire au sens faible

$$(\phi | \boldsymbol{\theta}_h)_{\Omega_h} = (\phi | \nabla \mathbf{w}_h + \mathbf{R}_h)_{\Omega_h},$$

où $(\cdot | \cdot)_{\Omega_h}$ désigne le produit interne dans Ω_h . Cet opérateur peut être vu comme une correction prenant en compte l'aspect discontinu des gradients aux interfaces. En particulier, si on considère une solution continue, \mathbf{R}_h devient identiquement nul. Le problème de la compacité subsiste lors de l'évaluation de la moyenne $\{\mathbf{R}_h\}$ aux interfaces. Il est résolu en introduisant l'opérateur de relèvement local $\mathbf{r}_h^i \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$ défini par

$$\int_{\Omega_j^+ \cup \Omega_j^-} \phi \mathbf{r}_h^i d\sigma = - \int_{\sigma_i = \partial\Omega_j^+ \cap \partial\Omega_j^-} \{\phi\} \llbracket \mathbf{w}_h \rrbracket \otimes \mathbf{n} d\sigma, \quad \forall \sigma_i \in \Sigma_i, \quad \forall \phi \in \mathcal{V}_h^p,$$

soit

$$\mathbf{r}_h^i(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{N_p} \mathbf{p}_j^{n\pm}(t) \phi_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_j^\pm, \quad (2.8)$$

avec

$$\mathbf{p}_j^{n\pm}(t) = - \frac{1}{2M_{nn}^j(\Omega_j^\pm)} \int_{\sigma_i = \partial\Omega_j^+ \cap \partial\Omega_j^-} \phi^{n\pm} \llbracket \mathbf{w}_h \rrbracket \otimes \mathbf{n} d\sigma.$$

Cet opérateur peut être vu comme une correction des gradients calculés à l'interface. Un traitement équivalent est appliqué aux frontières du domaine :

$$\int_{\Omega_j^+} \phi \mathbf{r}_h^b d\sigma = - \int_{\sigma_b = \partial\Omega_j^+ \cap \partial\Omega_h} \{\phi\} (\mathbf{w}_h^+ - \mathbf{w}_b) \otimes \mathbf{n} d\sigma, \quad \forall \phi \in \mathcal{V}_h^p.$$

Finalement, l'opérateur de relèvement global peut être calculé à partir de la somme sur les faces de l'opérateur de relèvement local avec la relation

$$\int_{\Omega_h} \phi \mathbf{R}_h d\Omega = \sum_{\sigma_i \in \Sigma_h} \int_{\sigma_i} \phi \mathbf{r}_h^i d\sigma, \quad (2.9)$$

avec

$$\mathbf{R}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{Np} \mathbf{P}_j^n(t) \phi_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_j, \quad (2.10)$$

soit

$$\mathbf{P}_j^n(t) = \sum_{\sigma^e \in \partial\Omega_h} \mathbf{p}_j^{n+}(t).$$

La discrétisation des termes visqueux de la formulation faible s'écrit donc finalement

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v(\mathbf{w}_h, \phi) = & - \int_{\Omega_h} \mathbf{F}_v(\mathbf{w}_h, \nabla \mathbf{w}_h + \mathbf{R}_h) \cdot \nabla \phi d\Omega \\ & + \sum_{\sigma_i \in \Sigma_i} \int_{\sigma_i^e} [\![\phi]\!] \{ \mathbf{F}_v(\mathbf{w}_h, \nabla \mathbf{w}_h + \mathbf{r}_h^i) \} \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ & + \sum_{\sigma_b \in \Sigma_b} \int_{\sigma_b} \phi \mathbf{F}_v(\mathbf{w}_h^b, \nabla \mathbf{w}_h^b + \mathbf{r}_h^b) \cdot \mathbf{n} d\sigma \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ce schéma est compact et mène à un ordre de convergence spatial de $p + 1$ de la solution numérique, ce que nous nous proposons de vérifier dans la section 2.2.3.

En conclusion, la discrétisation des équations de Navier-Stokes considérée ici conduit à résoudre le problème semi-discret suivant : trouver \mathbf{w}_h dans $(\mathcal{V}_h^p)^5$ tel que pour tout ϕ dans \mathcal{V}_h^p on ait

$$\int_{\Omega_h} \phi \frac{\partial \mathbf{w}_h^j}{\partial t} d\Omega + \mathcal{L}_c(\mathbf{w}_h, \phi) + \mathcal{L}_v(\mathbf{w}_h, \phi) = 0,$$

associé à la condition initiale

$$\int_{\Omega_h} \mathbf{w}_h(\mathbf{x}, 0) \phi d\mathbf{x} = \int_{\Omega_h} \mathbf{w}_0(\mathbf{x}) \phi d\Omega.$$

Les termes convectifs et diffusifs étant connus, il nous reste à décrire le traitement de la dérivée temporelle.

2.1.4 Traitement des dérivées temporelles et choix de la base fonctionnelle

Nous détaillons dans cette sous-section la discrétisation des intégrales des dérivées temporelles des variables conservatives. Pour un élément de discrétisation Ω_j , ce terme s'écrit

$$\int_{\Omega_j} \phi_k \frac{\partial \mathbf{w}_h^j}{\partial t} d\Omega = \sum_{l=1}^{N_p} \frac{d\mathbf{W}_l^j}{dt} \int_{\Omega_j} \phi_k \phi_l d\mathbf{x}$$

On voit apparaître ici la matrice de masse $M_{kl}^j = \int_{\Omega_j} \phi_k \phi_l d\mathbf{x}$ associée à l'élément Ω_j . Le système à résoudre dans chaque élément peut donc s'écrire de la manière suivante

$$\mathbf{M}^j \frac{d\mathbf{W}^j}{dt} + \mathbf{R}(\mathbf{W}^j) = 0 \quad (2.12)$$

où \mathbf{R} est le vecteur résidu formé à partir des contributions des termes convectif et visqueux \mathcal{L}_c et \mathcal{L}_v .

Dans le cadre de la discrétisation DG modale, il est possible d'obtenir une matrice de masse diagonale par élément, permettant de réduire la complexité de l'inversion du système linéaire pour le calcul des degrés de liberté. Le principe est de choisir une base de polynômes orthogonaux vérifiant l'égalité suivante dans l'élément de référence :

$$\int_{\kappa} \phi_k(\boldsymbol{\xi}) \phi_l(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = c_k \delta_{kl}, \quad \forall 1 \leq k, l \leq N_p, \quad (2.13)$$

où c_k est une constante dépendant de la base choisie et de la géométrie de l'élément et $\boldsymbol{\omega}$ un poids donné. En exprimant la matrice de masse dans l'élément de référence, nous trouvons :

$$M_{kl}^j = \int_{\kappa} \phi_k(\boldsymbol{\xi}) \phi_l(\boldsymbol{\xi}) \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right|^j d\boldsymbol{\xi} \quad \forall 1 \leq k, l \leq N_p, \quad (2.14)$$

où $\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right|^j$ est le Jacobien de la transformation géométrique de l'élément de référence vers l'élément physique Ω_j . L'idée introduite par Dubiner [41] consiste à utiliser les polynômes de Jacobi vérifiant

$$\int_{\kappa} J_k^{\alpha, \beta}(\boldsymbol{\xi}) J_l^{\alpha, \beta}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\omega}^{\alpha, \beta}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = c_k \delta_{kl} \quad (2.15)$$

et à choisir les paramètres α et β de manière à obtenir l'égalité $\boldsymbol{\omega}^{\alpha, \beta} = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right|^j$. Cette approche a été étendue en 3D pour divers éléments par Sherwin *et al.* [69, 110]. On voit ici que la base de polynômes choisie dépend de la forme de l'élément considéré. Pour des éléments paral-

lélépipédiques, la Jacobienne est constante, et nous retrouvons les polynômes de Legendre correspondant aux polynômes de Jacobi vérifiant $\alpha = \beta = 0$. La base des polynômes de Jacobi est également hiérarchique, ce qui signifie que la base contenant $n + 1$ éléments possède n éléments communs avec une base contenant n éléments. Cette propriété est très intéressante pour réaliser une adaptation sur le degré du polynôme p visant à optimiser la résolution des calculs.

2.2 Propriétés numériques de la méthode DG

Nous nous proposons dans cette section de montrer à partir de cas d'études simples les propriétés de convergence spatiale, d'erreur spectrale et de stabilité de la méthode DG.

2.2.1 Distribution spectrale des erreurs numériques

De manière analogue à la méthode des différences finies, il est possible de déterminer les erreurs de dispersion et de dissipation de la méthode DG pour différents ordres à partir d'une équation simple. La première analyse de ce type pour la méthode DG a été réalisée par Hu *et al.* [59], et nous suivons ici une méthodologie similaire pour déterminer ces erreurs pour différents degrés de polynômes. Nous considérons ici une équation scalaire d'advection linéaire vérifiant

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.16)$$

où c est une vitesse d'advection constante positive. Des conditions périodiques sont considérées aux bords du domaine. En considérant la solution sous la forme de modes de Fourier $u(x, t) = e^{i(Kx - \omega t)}$, nous obtenons la relation de dispersion exacte $\omega = cK$. Considérons maintenant la discrétisation DG de cette équation sur un intervalle $I^j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ de longueur $\Delta x = h$. Nous exprimons ici la solution numérique dans la base de Legendre, sous la forme $u_h(x, t) = \sum_{l=1}^{N_p} w_l(t) L_l(x)$. Nous obtenons :

$$M_{kl}^j \frac{\partial w_l^j}{\partial t} - \frac{2c}{h} \left[N_{kl} w_l^j - L_k(1) g(u_{j+1/2}^+, u_{j+1/2}^-, 1) + L_k(-1) g(u_{j-1/2}^+, u_{j-1/2}^-, -1) \right] = 0$$

Pour la base des polynômes de Legendre, nous avons $M_{kl}^j = \int_{-1}^1 L_k L_l d\xi = \frac{2}{2p+1} \delta_{kl}$. $N_{kl} = \int_{-1}^1 \frac{\partial L_k}{\partial \xi} L_l d\xi$ est la matrice de rigidité. Nous considérons le flux numérique suivant :

$$g(u^+, u^-, n) = \frac{u^+ + u^-}{2} n + k_2 \left(\frac{u^+ - u^-}{2} \right).$$

Le flux est centré pour $k_2 = 0$, et complètement décentré pour $k_2 = 1$. Sur les bords de l'élément I^j , la fonction u prend les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}^+ &= \sum_{l=1}^{N_p} w_l^j L_l(\xi = 1), \quad u_{j+1/2}^- = \sum w_l^{j+1} L_l(\xi = -1), \\ u_{j-1/2}^+ &= \sum_{l=1}^{N_p} w_l^j L_l(\xi = -1), \quad u_{j-1/2}^- = \sum w_l^{j-1} L_l(\xi = 1). \end{aligned}$$

Les solutions sont cherchées sous la forme :

$$w_l^j(t) = \widehat{w}_l \exp(i(Kjh) - \omega t). \quad (2.17)$$

Les polynômes de Legendre vérifiant $L_k(\xi = 1) = 1$ et $L_k(\xi = -1) = (-1)^k$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_l^j}{\partial t} &= \frac{2p+1}{h} c \delta_{kl} \left[N_{kl} + \left(\frac{1+k_2}{2}\right) \left((-1)^k \exp(-iKh) - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1-k_2}{2}\right) \left((-1)^l \exp(iKh) + 1 \right) \right] w_l^j \end{aligned} \quad (2.18)$$

Nous étudions dans un premier temps les caractéristiques de la discrétisation spatiale et nous injectons donc directement l'expression (2.17) dans l'équation (2.18). Le système final s'écrit

$$i\omega \widehat{w}_l = G_{kl} \widehat{w}_l \quad (2.19)$$

où \mathbf{G} est la matrice d'amplification associée à l'opérateur de discrétisation des dérivées spatiales d'ordre 1. Cette matrice possède $p+1$ valeurs propres complexes λ_l . Une de ces valeurs propres correspond au mode approximant la physique tandis que les autres valeurs sont associées à des modes parasites. Nous pouvons identifier le mode physique en sélectionnant la valeur propre λ représentant la relation de dispersion $\Im(\lambda) = k\Delta x$ pour les bas nombres d'onde. Une valeur de $\Re(\lambda)$ non nulle implique la présence d'un amortissement ou amplification de l'onde par le schéma numérique. La Figure 2.1 présente les parties réelle et imaginaire de λ pour différents ordres polynomiaux, en considérant les flux centré, décentré, et partiellement décentré.

Concernant le schéma décentré ($k_2 = 1$), on observe un comportement similaire aux différences finies décentrées pour la relation de dispersion approchée, à savoir une bonne représentation des basses fréquences, et un déphasage important pour les plus hautes fréquences. L'amplitude du déphasage augmente avec le degré du polynôme. L'étude de la partie réelle nous montre que le schéma induit une dissipation dans les hauts nombres d'onde, d'autant plus importante que l'ordre est élevé. Cette dissipation est cependant restreinte à une gamme de plus en plus réduite de nombres d'onde à mesure que l'ordre augmente. Pour le schéma hybride centré/décentré ($k_2 = 0.5$), on observe une meilleure représentation de la relation de

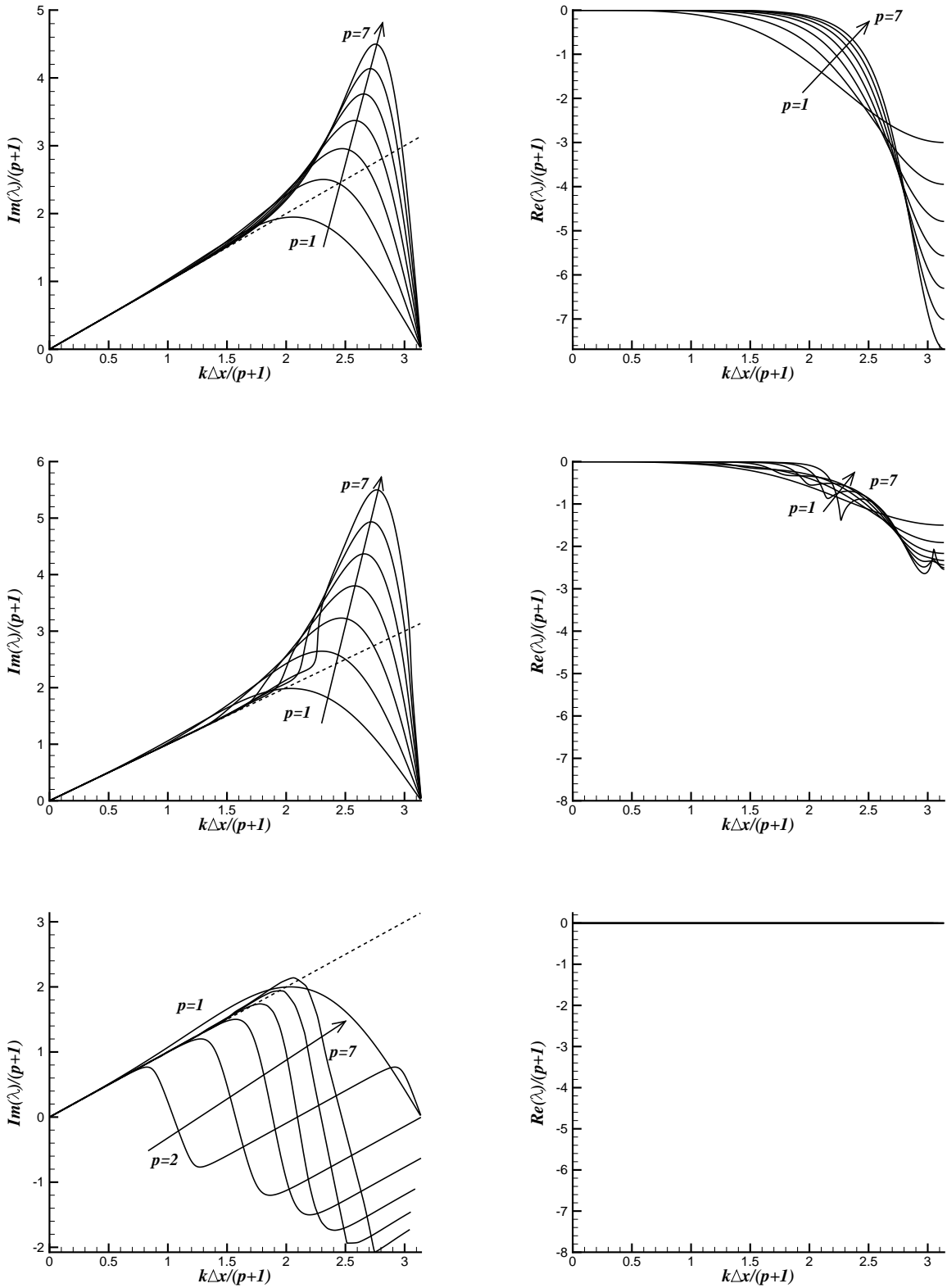


FIGURE 2.1 – Parties réelle et imaginaire des modes physiques pour différents ordres. 1ère ligne : $k_2 = 1$; 2è ligne $k_2 = 0.5$; 3è ligne : $k_2 = 0$

dispersion numérique pour les basses fréquences, mais un déphasage plus important pour les hautes fréquences. L'amplitude de la dissipation est également réduite par rapport au schéma décentré. Le schéma centré fournit les meilleures propriétés de dissipation, mais introduit des vitesses de phase négatives pour les nombres d'ondes élevés quand $p > 1$. Ce schéma semble donc peu adapté à la représentation de phénomènes multi-échelles.

De manière générale, on observe de meilleures propriétés de dispersion et dissipation pour des valeurs de $k_2 < 1$ que pour le schéma purement décentré.

2.2.2 Stabilité numérique

Nous nous proposons maintenant de déterminer le domaine de stabilité de la méthode pour l'équation scalaire d'advection linéaire, en prenant en compte un schéma d'avancement temporel. Reprenons l'équation (2.19) ; nous avons :

$$\frac{\partial \widehat{w}_l}{\partial t} = G_{kl} \widehat{w}_l. \quad (2.20)$$

Nous introduisons le nombre de CFL $\sigma = \Delta t / \Delta x$, et considérons des schémas de Runge-Kutta à N_{rk} pas. La matrice d'amplification du schéma s'écrit alors sous la forme générale :

$$H_{kl} = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{N_{rk}} c_i \sigma G_{kl}^i \quad (2.21)$$

où c_i sont des coefficients dépendant du schéma considéré. Nous réalisons l'étude de stabilité pour les schémas de Shu-Osher au 3^è ordre comportant 3 pas et de Ruuth et Spiteri au 3^è ordre comportant 4 pas [54]. La condition de stabilité est définie comme suit

$$|\rho(\mathbf{H})| \leq 1$$

où $\rho(\mathbf{H})$ est le rayon spectral de \mathbf{H} . La Figure 2.2 présente les valeurs de σ pour lesquelles nous avons exactement $\rho(\mathbf{H}) = 1$ en considérant différents degrés de polynôme et valeurs de k_2 . Nous présentons également les valeurs de $\sigma \times N_p$, qui est une définition du CFL prenant en compte le nombre de degrés de liberté par élément.

Le nombre de CFL chute rapidement avec le degré de polynôme pour tous les cas considérés, ce qui n'est pas le cas de la valeur de CFL prenant en compte les degrés de liberté dans les éléments. Cette valeur semble se stabiliser autour d'une constante avoisinant 0.5 quand un ordre élevé est choisi. Le schéma Runge-Kutta à quatre pas propose des CFL plus élevés que le schéma à trois pas mais est également plus coûteux. Enfin, on note que le choix d'une faible valeur de k_2 permet de choisir des pas de temps légèrement plus importants.

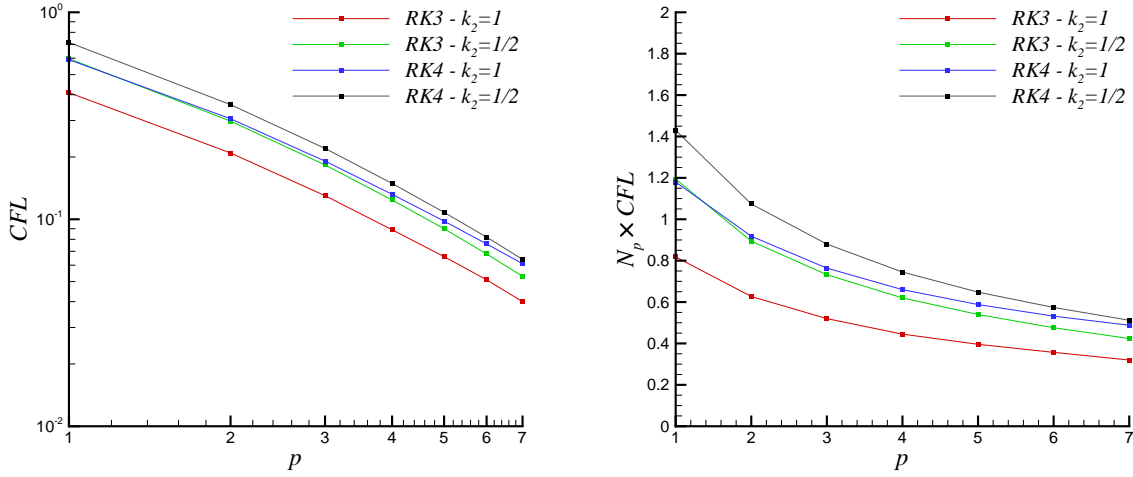


FIGURE 2.2 – Conditions CFL pour différents schémas RKDG sur l'équation d'advection scalaire.

2.2.3 Convergence spatiale

Dans cette sous-section, les propriétés de convergence spatiale en ordre de la méthode DG modale sont évaluées à partir de l'étude du canal plan de Poiseuille 2D avec un terme source modélisant le gradient de pression moteur de l'écoulement.

Nous définissons un domaine rectangulaire $\Omega = [0, L] \times [-h, +h]$ avec des parois isothermes en $y = \pm h$ et des conditions de périodicité en $x = 0$ et $x = L$. Une force volumique f dont le rôle est de modéliser le gradient de pression longitudinal est ajoutée dans l'équation de quantité de mouvement dans la direction x . Un terme source uf est ajouté dans l'équation d'évolution de l'énergie totale. L'intégration de l'équation de quantité de mouvement longitudinale entre les deux parois permet de relier le gradient de pression au frottement à travers la relation

$$f = -\frac{dp}{dx} = \frac{\tau_w}{h} = \frac{\mu_w}{h} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w.$$

Pour un écoulement laminaire, nous avons $\tau_w = 2u_c^2/Re$, où u_c est la vitesse au centre du canal, μ_w est la viscosité moléculaire à la paroi et $Re = u_c h / \mu_w$ est le nombre de Reynolds.

Pour ce cas particulier avec terme de forçage, une solution analytique est connue [18] :

$$u_{ex}(y) = u_c \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right)$$

$$T_{ex}(y) = T_w \left(1 + \frac{u_c^2 Pr M_\infty^2 (\gamma - 1)}{3} \left(1 - \frac{y^4}{h^4} \right) \right)$$

où T_w est la température de paroi, Pr le nombre de Prandtl considéré ici constant, et $M_\infty = u_c / \sqrt{\gamma r T_w}$ le nombre de Mach. Nous avons ici choisi les valeurs $Re = 1$ et $M_\infty = 0.2$, de sorte que tous les mécanismes physiques (cisaillement, convection, diffusion de chaleur) jouent un rôle non négligeable.

Pour l'évaluation des taux de convergence, nous réalisons des calculs sur quatre maillages, pour 5 ordres d'approximation différents. Les maillages cartésiens uniformes sont composés de N éléments dans chaque direction. Les ordres de convergence sont évalués en calculant les erreurs en norme L_1 , L_2 et L_∞ , approchées comme suit pour une variable calculée φ_h et la solution exacte φ_{ex} :

$$\begin{aligned} \|\varphi_h - \varphi_{ex}\|_{L_1} &\approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\varphi_h(y_i) - \varphi_{ex}(y_i)| \\ \|\varphi_h - \varphi_{ex}\|_{L_2} &\approx \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varphi_h(y_i) - \varphi_{ex}(y_i))^2} \\ \|\varphi_h - \varphi_{ex}\|_{L_\infty} &\approx \max(|\varphi_h(y_i) - \varphi_{ex}(y_i)|) \end{aligned}$$

où n est le nombre de points de coordonnées y_i équi-espacés pour lesquels l'erreur est évaluée. Comme nous pouvons le voir sur la Figure 2.3, l'évolution de l'erreur sur la température et la vitesse décroît à la puissance $p + 1$ en fonction du nombre d'éléments N , pour toutes les normes considérées. Cette vérification nous permet également de valider l'implémentation de la condition isotherme et du terme source. Ces développements seront employés pour les simulations de canal plan turbulent 3D en régime compressible.

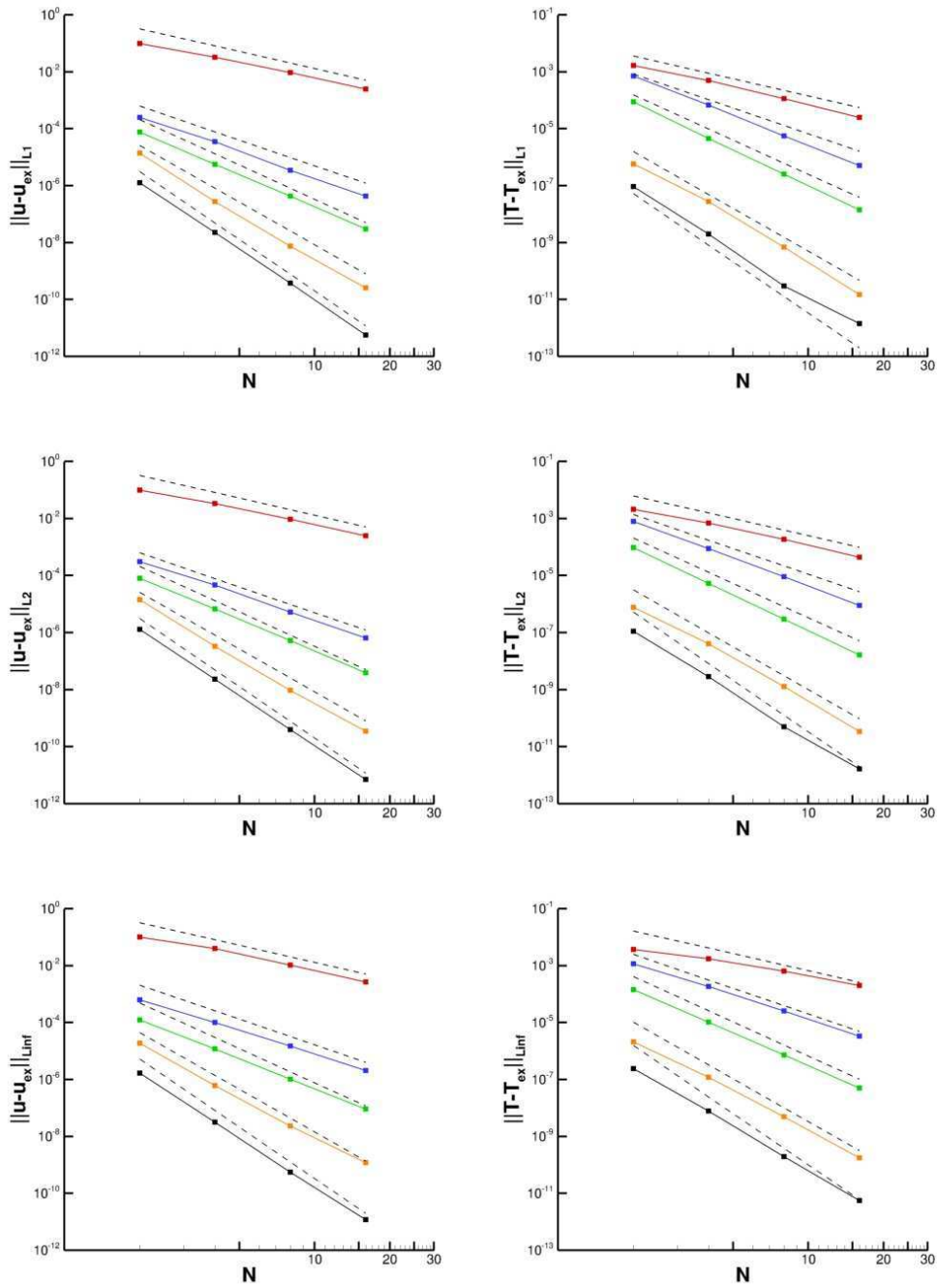


FIGURE 2.3 – Erreurs en normes L_1, L_2 et L_∞ pour la composante longitudinale de vitesse et la température pour le canal plan 2D laminaire. Ligne rouge : $p = 1$, ligne bleue : $p = 2$, ligne verte : $p = 3$, ligne orange : $p = 4$, ligne noire : $p = 5$, pointillés : ordre de convergence théorique $O(p + 1)$

Chapitre 3

Formulation DG-LES pour les écoulements compressibles

Ce chapitre présente l'approche choisie pour le développement de modèles adaptés à la méthode de Galerkin discontinue. La première partie présente la méthodologie de séparation d'échelles associée à l'approche DG pour l'implémentation de modèles multi-échelles de type VMS. La seconde partie traite de la calibration de différents modèles de turbulence connus pour les discrétisations DG hp , à partir des fonctions de transfert associées évaluées a priori. La dernière partie présente quelques idées pour les approches visant à modéliser les interactions qui interviennent directement dans la base de polynômes.

3.1 Formalisme VMS pour la méthode DG

La mise en oeuvre de la méthode VMS nécessite la construction des champs relatifs aux grandes et petites échelles de l'écoulement. Cette section détaille comment est réalisée cette séparation des échelles dans la base fonctionnelle relative à chaque élément de la discrétisation DG. La discrétisation des modèles de turbulence dans le cadre de l'approche VMS est ensuite détaillée, et nous discutons finalement des avantages et inconvénients de cette méthode.

3.1.1 Séparation d'échelles dans la base fonctionnelle

L'espace fonctionnel discret \mathcal{V}_h^p est décomposé en trois sous espaces $\mathcal{V}_h^p = \overline{\mathcal{V}}_h^p \oplus \widetilde{\mathcal{V}}_h^p \oplus \widehat{\mathcal{V}}_h^p$, chacun associé à une gamme d'échelles spécifiques. Les caractéristiques de la décomposition sont résumées sur le tableau 3.1.

Grandes échelles	Petites échelles	Echelles sous-maille
$\overline{\mathcal{V}}_h^p$	$\widetilde{\mathcal{V}}_h^p$	$\widehat{\mathcal{V}}_h^p$
$\bar{\phi} \in \overline{\mathcal{V}}_h^p$	$\tilde{\phi} \in \widetilde{\mathcal{V}}_h^p$	$\hat{\phi} \in \widehat{\mathcal{V}}_h^p$
$\dim(\overline{\mathcal{V}}_h^p) = \overline{N}$	$\dim(\widetilde{\mathcal{V}}_h^p) = \widetilde{N}$	$\dim(\widehat{\mathcal{V}}_h^p) = \widehat{N}$

TABLE 3.1 – Caractéristiques des espaces associés aux différentes échelles pour la VMS.

Si la base est orthogonale, il n'y a pas d'intersections entre les trois sous-espaces, ce qui se traduit par :

$$\overline{\mathcal{V}}_h^p \cap \widetilde{\mathcal{V}}_h^p = \emptyset, \quad \overline{\mathcal{V}}_h^p \cap \widehat{\mathcal{V}}_h^p = \emptyset, \quad \widetilde{\mathcal{V}}_h^p \cap \widehat{\mathcal{V}}_h^p = \emptyset \quad (3.1)$$

Nous introduisons la dimension finie $N = \overline{N} + \widetilde{N} + \widehat{N}$ pour l'espace discret \mathcal{V}_h^p , qui caractérise la dimension nécessaire pour représenter toutes les échelles de l'écoulement.

Pour illustrer la séparation d'échelles, nous considérons une fonction $w \in \mathcal{V}_h^p$ dont les coefficients W_j dans la base fonctionnelle sont connus :

$$w(x) = \sum_{j=1}^N W_j \phi_j(x) \quad (3.2)$$

Cette fonction est décomposée en trois contributions $w = \bar{w} + \tilde{w} + \hat{w}$ définies comme suit

$$w(x) = \sum_{j=1}^{\overline{N}} \overline{W}_j \bar{\phi}_j(x) + \sum_{j=1}^{\widetilde{N}} \widetilde{W}_j \tilde{\phi}_j(x) + \sum_{j=1}^{\widehat{N}} \widehat{W}_j \hat{\phi}_j(x) \quad (3.3)$$

avec pour chaque gamme d'échelles les définitions suivantes :

- Projection sur l'espace des grandes échelles :

$$\bar{w} = \sum_{j=1}^{\overline{N}} \overline{W}_j \bar{\phi}_j \quad , \quad \overline{W} = (W_1, \dots, W_{\overline{N}}) \quad , \quad \bar{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_{\overline{N}}) \quad (3.4)$$

- Projection sur l'espace des petites échelles :

$$\tilde{w} = \sum_{j=1}^{\widetilde{N}} \widetilde{W}_j \tilde{\phi}_j \quad , \quad \widetilde{W} = (W_{\overline{N}+1}, \dots, W_{\overline{N}+\widetilde{N}}) \quad , \quad \tilde{\phi} = (\phi_{\overline{N}+1}, \dots, \phi_{\overline{N}+\widetilde{N}}) \quad (3.5)$$

- Projection sur l'espace des échelles sous-maille :

$$\hat{w} = \sum_{j=1}^{\hat{N}} \widehat{W}_j \hat{\phi}_j \quad , \quad \widehat{W} = (W_{\overline{N}+\tilde{N}+1}, \dots, W_N) \quad , \quad \hat{\phi} = (\phi_{\overline{N}+\tilde{N}+1}, \dots, \phi_N) \quad (3.6)$$

Nous voyons ici que les trois gammes d'échelles sont déterminées à partir de la projection de la fonction sur l'espace fonctionnel complet. On peut donc construire les trois contributions simplement à partir de la base complète et des degrés de liberté associés. En trois dimensions, la base est construite à partir de produits tensoriels des fonctions de base dans chaque direction, soit $\phi^{3D} = \phi(x) \otimes \phi(y) \otimes \phi(z)$. Pour simplifier la définition des produits tensoriels concernant la séparation d'échelles, les vecteurs de fonctions de bases pour les trois gammes d'échelles sont exprimés dans le même espace \mathcal{V}_h^p , soit :

$$\begin{aligned} \overline{\phi}_x &= (\phi_1(x), \dots, \phi_{\overline{N}}(x), & 0, \dots, 0, & 0, \dots, 0) \\ \tilde{\phi}_x &= (0, \dots, 0, & \phi_{\overline{N}+1}(x), \dots, \phi_{\overline{N}+\tilde{N}}(x) & 0, \dots, 0) \\ \hat{\phi}_x &= (0, \dots, 0, & 0, \dots, 0, & \phi_{\overline{N}+\tilde{N}+1}(x), \dots, \phi_N(x)) \end{aligned}$$

Suivant les approches de Munts [97] ou Wasberg [126], nous choisissons la définition suivante des bases 3D associées aux espaces liés aux trois gammes d'échelles :

$$\begin{aligned} \overline{\phi}_{3D} &= \overline{\phi}_x \otimes \overline{\phi}_y \otimes \overline{\phi}_z \\ \tilde{\phi}_{3D} &= \overline{\phi}_x \otimes \overline{\phi}_y \otimes \tilde{\phi}_z + \overline{\phi}_x \otimes \tilde{\phi}_y \otimes \overline{\phi}_z + \overline{\phi}_x \otimes \tilde{\phi}_y \otimes \tilde{\phi}_z + \tilde{\phi}_x \otimes \overline{\phi}_y \otimes \overline{\phi}_z + \tilde{\phi}_x \otimes \overline{\phi}_y \otimes \tilde{\phi}_z + \\ &\quad \tilde{\phi}_x \otimes \tilde{\phi}_y \otimes \overline{\phi}_z + \tilde{\phi}_x \otimes \tilde{\phi}_y \otimes \tilde{\phi}_z \\ \hat{\phi}_{3D} &= \hat{\phi}_x \otimes \overline{\phi}_y \otimes \overline{\phi}_z + \hat{\phi}_x \otimes \hat{\phi}_y \otimes \overline{\phi}_z + \hat{\phi}_x \otimes \overline{\phi}_y \otimes \hat{\phi}_z + \overline{\phi}_x \otimes \hat{\phi}_y \otimes \overline{\phi}_z + \overline{\phi}_x \otimes \hat{\phi}_y \otimes \hat{\phi}_z + \\ &\quad \overline{\phi}_x \otimes \tilde{\phi}_y \otimes \hat{\phi}_z + \hat{\phi}_x \otimes \tilde{\phi}_y \otimes \overline{\phi}_z + \hat{\phi}_x \otimes \tilde{\phi}_y \otimes \hat{\phi}_z + \hat{\phi}_x \otimes \tilde{\phi}_y \otimes \tilde{\phi}_z + \tilde{\phi}_x \otimes \hat{\phi}_y \otimes \overline{\phi}_z + \\ &\quad \tilde{\phi}_x \otimes \hat{\phi}_y \otimes \tilde{\phi}_z + \tilde{\phi}_x \otimes \tilde{\phi}_y \otimes \hat{\phi}_z + \tilde{\phi}_x \otimes \tilde{\phi}_y \otimes \tilde{\phi}_z + \tilde{\phi}_x \otimes \tilde{\phi}_y \otimes \hat{\phi}_z + \overline{\phi}_x \otimes \tilde{\phi}_y \otimes \hat{\phi}_z + \\ &\quad \overline{\phi}_x \otimes \tilde{\phi}_y \otimes \tilde{\phi}_z + \hat{\phi}_x \otimes \tilde{\phi}_y \otimes \tilde{\phi}_z + \hat{\phi}_x \otimes \tilde{\phi}_y \otimes \hat{\phi}_z + \hat{\phi}_x \otimes \tilde{\phi}_y \otimes \tilde{\phi}_z \end{aligned}$$

La contribution liée aux grandes échelles est construite avec des produits de fonctions de base liées à l'espace des grandes échelles uniquement. Les produits croisés des fonctions de bases des espaces des petites et grandes échelles forment la contribution des petites échelles, et la contribution des échelles sous-maille est construite avec les produits faisant intervenir une ou plusieurs fonctions de base associées à l'espace des échelles sous-maille.

Une approche plus visuelle consiste à tracer le volume des différents sous-espaces par rapport à la dimension de l'espace complet. En considérant uniquement des échelles résolues, c'est-à-dire en posant $\hat{N} = 0$, la dimension de l'espace des grandes échelles est $\overline{N} = \overline{N}_x \overline{N}_y \overline{N}_z$ et celui des petites échelles est $\tilde{N} = N_x N_y N_z - \overline{N}_x \overline{N}_y \overline{N}_z$, comme montré sur la Figure 3.1.

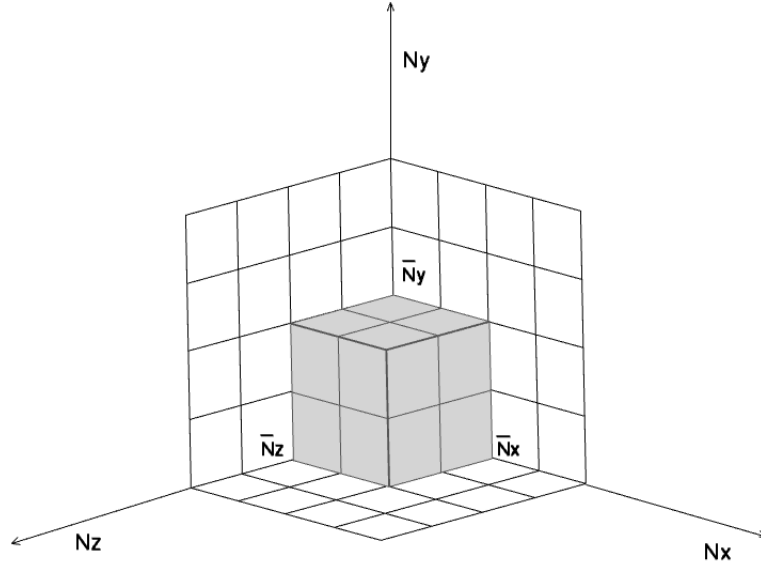


FIGURE 3.1 – Représentation dans l’espace modal de la dimension \bar{N} de l’espace associé aux grandes échelles.

Nous pouvons donc définir les fractions du volume spectral occupé par $\bar{\mathcal{V}}_h^{p,3D}$ et $\tilde{\mathcal{V}}_h^{p,3D}$:

$$f_{\bar{\mathcal{V}}} = (\bar{N}_x \bar{N}_y \bar{N}_z) / (N_x N_y N_z) \quad (3.7)$$

$$f_{\tilde{\mathcal{V}}} = 1 - f_{\bar{\mathcal{V}}} \quad (3.8)$$

La base possédant le même nombre d’éléments dans toutes les directions, nous avons $\bar{N}_x = \bar{N}_y = \bar{N}_z = \bar{N}_{1D}$ et $N_x = N_y = N_z = N_{1D}$. Pour simplifier les notations, nous introduisons pour la suite de l’exposé le paramètre $\bar{p} + 1 = \bar{N}_{1D}$ qui définit la séparation des échelles dans la base fonctionnelle dans une direction. Nous introduisons également la fraction $\alpha = (\bar{p} + 1) / (p + 1)$ caractérisant la part des grandes échelles dans chaque direction, dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1.

3.1.2 Implémentation des modèles de sous-maille VMS

L’approche VMS pour un modèle donné consiste à construire un tenseur sous-maille à l’aide des champs représentant les petites échelles, puis à projeter ce tenseur sur l’espace des petites échelles uniquement. Concrètement, le modèle aura la forme générale suivante :

$$\tilde{\mathcal{L}}_m^j(\tilde{\phi}, \tilde{\mathbf{w}}_h) = \int_{\partial\Omega_j} \tilde{\phi} \mathbf{F}_v^m(\tilde{\mathbf{w}}_h, \nabla \tilde{\mathbf{w}}_h) \cdot \mathbf{n} d\sigma - \int_{\Omega_j} \nabla \tilde{\phi} \mathbf{F}_v^m(\tilde{\mathbf{w}}_h, \nabla \tilde{\mathbf{w}}_h) dx,$$

avec \mathbf{F}_v^m détaillé dans la section 1.1.3. Ce terme est discrétisé en utilisant le schéma BR2 :

$$\tilde{\mathcal{L}}_m^j(\tilde{\phi}, \tilde{\mathbf{w}}_h) = - \int_{\Omega_j} \mathbf{F}_v^m(\tilde{\mathbf{w}}_h, \nabla \tilde{\mathbf{w}}_h + \tilde{\mathbf{R}}_h) \cdot \nabla \tilde{\phi} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_j} [[\tilde{\phi}]] \{ \mathbf{F}_v^m(\tilde{\mathbf{w}}_h, \nabla \tilde{\mathbf{w}}_h + \tilde{\mathbf{r}}_h^i) \} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

avec les opérateurs de relèvement associés aux petites échelles, définis comme suit

$$\tilde{\mathbf{r}}_h^i(\mathbf{x}, t) = \sum_{\phi_n \in \tilde{\mathcal{V}}_h^p} \mathbf{p}_j^{n\pm}(t) \phi_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_j^\pm$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{\phi_n \in \tilde{\mathcal{V}}_h^p} \mathbf{P}_j^n(t) \phi_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_j$$

3.1.3 Discussion sur l'approche VMS

L'approche VMS se distingue des approches classiques de modélisation par deux aspects : la construction du tenseur sous-maille et la restriction de l'action de ce dernier à une gamme d'échelles données [61, 33]. Nous nous proposons de discuter de ces deux points et des hypothèse de modélisation associées.

- Interactions entre les gammes d'échelles :

Le formalisme VMS implique d'ignorer les interactions entre grandes échelles et échelles non-résolues et cette hypothèse est reconnue comme étant responsable des meilleurs résultats obtenus avec la VMS par rapport aux modèles de Smagorinsky classique et dynamique [62, 63]. Or, il est admis que ces interactions (appelées également interactions triadiques distantes) sont non-nulles pour les écoulements turbulents à haut nombre de Reynolds. Comme mentionné par Sagaut *et al.* [109], le bon comportement de la VMS est probablement dû à l'aspect bas Reynolds des études précédemment citées, pour lesquelles les interaction distantes sont faibles. Ces auteurs ont donc réalisé une étude sur le comportement de la VMS pour le cas de la turbulence isotrope dans la limite $Re \rightarrow \infty$ à l'aide d'une méthode spectrale basée sur les modes de Fourier. Ils ont ainsi pu observer la présence d'une accumulation d'énergie cinétique au niveau du nombre de coupure passe-haut quand un filtre à coupure spectrale (orthogonal dans l'espace de Fourier) est considéré. L'usage de filtres non-orthogonaux dans l'espace de Fourier semble cependant résoudre le problème, comme l'ont montré Sagaut *et al.* avec une étude impliquant un filtre gaussien. La différence entre filtres orthogonal et non-orthogonal dans l'espace de Fourier est illustrée sur la Figure 3.2. Concernant les discrétisations DG, la coupure nette dans l'espace de polynômes induit une coupure progressive dans l'espace de Fourier, ce qui correspond au cas non-orthogonal. Nous sommes donc dans un cadre favorable pour l'utilisation de modèles VMS, bien que le fait de négliger les interactions distantes reste indépendant de considérations physiques. Il serait ainsi intéressant de caractériser des viscosités spectrales dans l'espace

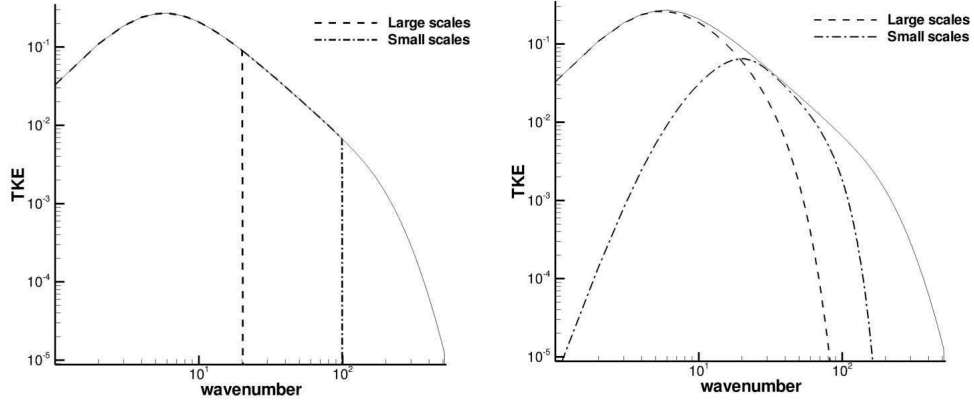


FIGURE 3.2 – Opérateurs de séparation d’échelles orthogonal (gauche) et non-orthogonal (droite) dans l’espace de Fourier.

de polynômes pour avoir une idée précise des transferts entre échelles pour ce type de base fonctionnelle. Une approche alternative proposée par Wanderer *et al.* [125] est de définir un modèle à deux viscosités, une viscosité VMS appliquée sur les hauts nombres d’onde et une viscosité de faible amplitude appliquée sur l’ensemble du spectre. A partir d’une méthode spectrale avec un filtre à coupure nette, ils ont trouvé un meilleur comportement pour un écoulement de turbulence isotrope à Reynolds modéré par rapport à l’approche VMS seule et notamment un profil de viscosité spectrale très proche de celui d’une DNS.

L’influence de cette hypothèse formulée sur les interactions distantes est également dépendante de la dimension relative des grandes et petites échelles résolues. Des études sur cette partition menées par Hughes *et al.* [63], Holmen *et al.* [58] et Ramakrishnan *et al.* [103] ont montré un bon comportement de la méthode pour des valeurs de fraction volumique de l’espace des grandes échelles f_V allant jusqu’à 1/2. Holmen et al. ont également évalué l’erreur associée à des discrétisations impliquant plusieurs partitions et modèles, et sont arrivés à la conclusion que la valeur optimale de partition est dépendante du modèle. Par exemple, des bons résultats sont obtenus pour plusieurs valeurs de la fraction de grandes échelles α avec le modèle dynamique, tandis que l’erreur est minimale pour une valeur de α unique clairement définie concernant le modèle de Smagorinsky.

- Construction du modèle sous-maille :

La deuxième hypothèse liée à la VMS consiste à considérer les petites échelles isotropes pour modéliser les interactions entre les composantes sous-maille et petites échelles à l’aide d’une viscosité turbulente. Il existe différentes variétés des modèles VMS, car cette viscosité peut être construite à partir des champs des grandes échelles, des petites échelles ou encore de l’ensemble des échelles résolues. Le tenseur des déformations est

quant à lui toujours évalué à partir des champs des petites échelles. La dénomination commune associée à ces différentes approches est la suivante :

1. Approche *small-small* : $\tau_m = \widetilde{\mu}_t \widetilde{S}_{ij}$
2. Approche *large-small* : $\tau_m = \overline{\mu}_t \widetilde{S}_{ij}$
3. Approche *full-small* : $\tau_m = \mu_t^{res} \widetilde{S}_{ij}$

Plusieurs études ont montré que ces différentes formulations menaient à des résultats équivalents [92, 109]. L'évaluation du tenseur de déformation à partir des petites échelles est intéressante, car elle permet de se rapprocher de l'hypothèse d'isotropie usuellement considérée pour la construction des modèles de turbulence.

3.2 Modèles de turbulence pour l'approche DG-LES

Cette section présente la calibration de deux modèles de simulation des grandes échelles connus pour les discrétisations DG. L'approche retenue consiste à considérer qu'une discrétisation DG *hp* donnée est associée à une fonction de transfert $G^{DG}(k)$ particulière dans l'espace spectral de Fourier. Nous nous proposons dans un premier temps de caractériser le filtre naturel introduit par ces discrétisations, puis nous paramétrons les modèles de Smagorinsky et de fonction de structure pour ces discrétisations.

3.2.1 Caractéristiques spectrales des discrétisations DG

Pour caractériser les fonctions de transfert des discrétisations DG, nous développons un formalisme permettant la projection d'un champ physique donné sur la base de polynômes. Une fois cette projection effectuée, nous reconstruisons les champs physiques avec divers niveaux de troncature, et nous calculons les spectres d'énergie associés.

Nous considérons un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ où d est le nombre de dimensions spatiales. Nous introduisons une fonction $w \in L^2(\Omega)$ projetée dans l'espace fonctionnel $\mathcal{V} = H^1(\Omega)$.

$$w(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} W_j \phi_j(\mathbf{x}).$$

Nous réalisons une troncature dans la base, conservant uniquement N_p modes pour exprimer la solution. L'étape de projection consiste à calculer les coefficients de polynômes W_j de l'expansion tronquée connaissant w et l'expression des fonctions de base $\phi \in \mathcal{V}$. Nous introduisons la formulation variationnelle :

$$\int_{\Omega} \phi_i(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = W_j \int_{\Omega} \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Les intégrales sont ensuite exprimées dans l'élément de référence $\kappa = [-1, +1]^d$ associé aux coordonnées $\boldsymbol{\xi}$:

$$W_j = \frac{\int_{\kappa} \phi_i(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) |\partial \mathbf{x} / \partial \boldsymbol{\xi}| d\boldsymbol{\xi}}{\int_{\kappa} \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) |\partial \mathbf{x} / \partial \boldsymbol{\xi}| d\boldsymbol{\xi}}$$

Nous choisissons ici $\Omega = [-\pi, +\pi]^d$ et considérons des éléments parallélépipédiques uniquement, pour lesquels le Jacobien de transformation est constant. La base pour $d > 1$ est construite à partir du produit tensoriel des fonctions de base pour $d = 1$. Nous choisissons la base des polynômes de Legendre qui vérifient la propriété d'orthogonalité :

$$\int_{\kappa} L_i(\xi) L_j(\xi) d\xi = \frac{2i+1}{2} \delta_{ij}$$

Nous pouvons utiliser la base des polynômes de Legendre normalisés $\phi_i(x) = \sqrt{2/(2i+1)} L_i(x)$, ce qui permet de simplifier l'expression finale des coefficients de polynômes correspondant à la projection de w :

$$W_j = \int_{\kappa} \phi_j(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) d\boldsymbol{\xi}$$

Nous introduisons une formule de quadrature à N_q points \mathbf{x}_n^q avec ω_n les poids associés, permettant le calcul des W_j :

$$W_j = \sum_{n=1}^{N_q} \phi_j(\mathbf{x}_n^q) w(\mathbf{x}_n^q) \omega_n$$

La projection est réalisée à partir d'un champ DNS tronqué de turbulence homogène isotrope. La solution provient de la base de données AGARD [130], et a été générée à l'aide d'un code pseudo-spectral de Fourier. La troncature du champ a été réalisée à l'aide d'un filtre passe-bas, en conservant 128^3 modes de Fourier. Le nombre de Reynolds basé sur la microéchelle de Taylor est $R_\lambda = 104.5$ et l'instant choisi correspond au pic d'entrophie. La fonction w correspond à la somme de N^3 modes de Fourier :

$$w(\mathbf{x}) = \sum_{k_x} \sum_{k_y} \sum_{k_z} \hat{w}_{k_x, k_y, k_z} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \in [-\pi, \pi]^3, \quad \mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) \in [-N/2 + 1, N/2 - 1]^3.$$

Pour déterminer le nombre de points de quadrature nécessaires pour limiter l'erreur de projection de w dans l'espace fonctionnel, nous utilisons l'analyse empirique de Gottlieb et Orszag [53], qui ont projeté des séries de Fourier sur des modes de Legendre et Chebychev montrant que l'erreur de projection chute quand au moins π polynômes par longueur d'onde sont définis. Nous utilisons la formule de Gauss-Legendre avec N_q^{1d} points dans chaque direction, ce qui permet d'évaluer précisément des fonctions polynômiales de degré $2N_q^{1d} - 1$. Nous devons donc choisir $N_q^{1d} \geq (\pi N + N_p^{1d} + 1) / 2$, où $N_p^{1d} = p + 1$ est la dimension de la base de Legendre 1D. En procédant de la sorte, on peut estimer que l'erreur de projection sera

minimale.

Nous nous intéressons dans un premier temps à une projection considérant le domaine spatial complet comme un unique élément. Cette projection est réalisée en considérant $p + 1 = 101$ modes de Legendre dans chaque direction. La projection est ensuite tronquée à des niveaux fins et grossiers en conservant respectivement 72, 48 et 32 modes. La Figure 3.3 montre les spectres d'énergie $E^{DG}(k)$ et les fonctions de transfert $G^{DG}(k)$ associés à ces projections. Pour calculer les spectres d'énergie, le champ physique correspondant aux projections est reconstruit, puis les spectres 3D sont calculés dans la base de Fourier. La fonction de transfert est ensuite déduite de la manière suivante, où E_{ref} correspond au spectre d'énergie de la DNS spectrale de référence :

$$G^{DG}(k) = \sqrt{\frac{E^{DG}(k)}{E_{ref}(k)}}.$$

On peut observer que le contenu énergétique de l'écoulement est très bien représenté dans la limite d'un nombre d'onde de coupure qui apparaît clairement défini à N_p/π , vérifiant l'analyse de Gottlieb *et al.* [53]. On voit également que la décroissance de l'énergie pour les hauts nombres d'onde est rapide. La Figure 3.3 présente également les spectres de projections réalisées sur plusieurs éléments. Dans ce cas, N représente le nombre d'éléments considérés dans chaque direction, avec dans chaque élément une projection sur $N_p = p + 1$ modes de Legendre dans chaque direction. Le nombre total de modes considérés dans chaque direction devient $(p + 1) \times N$. On note que la forme des fonctions de transfert pour des projections sur un seul élément est quasiment identique à celle de ces projections incluant plusieurs éléments, en considérant un nombre équivalent de modes de Legendre.

De la même manière, nous caractérisons la fonction de transfert associée à la gamme de petites échelles pour une projection donnée. A partir de la projection sur un élément avec $p = 100$, la solution est reconstruite en conservant les modes les plus élevés définis par la fraction de grandes échelles α . Les spectres d'énergie et fonctions de transfert pour plusieurs α sont présentés sur la Figure 3.4. Cette représentation confirme que la coupure des modes représentant les grandes échelles dans la base de Legendre agit comme un filtre passe-haut dans l'espace de Fourier. Nous observons également que des valeurs trop importantes de α ne permettent d'associer les petites échelles résolues qu'à une fraction de l'énergie associée aux structures turbulentes fines (la fonction de transfert reste strictement inférieure à 1 sur tout le spectre).

3.2.2 Calibration du modèle de Smagorinsky

Nous détaillons ici le modèle de Smagorinsky, avec la prise en compte de la discrétisation Legendre-Galerkin par le biais de la fonction de transfert $G^{DG}(k)$. Le développement du modèle et les notations sont basés sur la présentation de Pope [100]. Les hypothèses de base

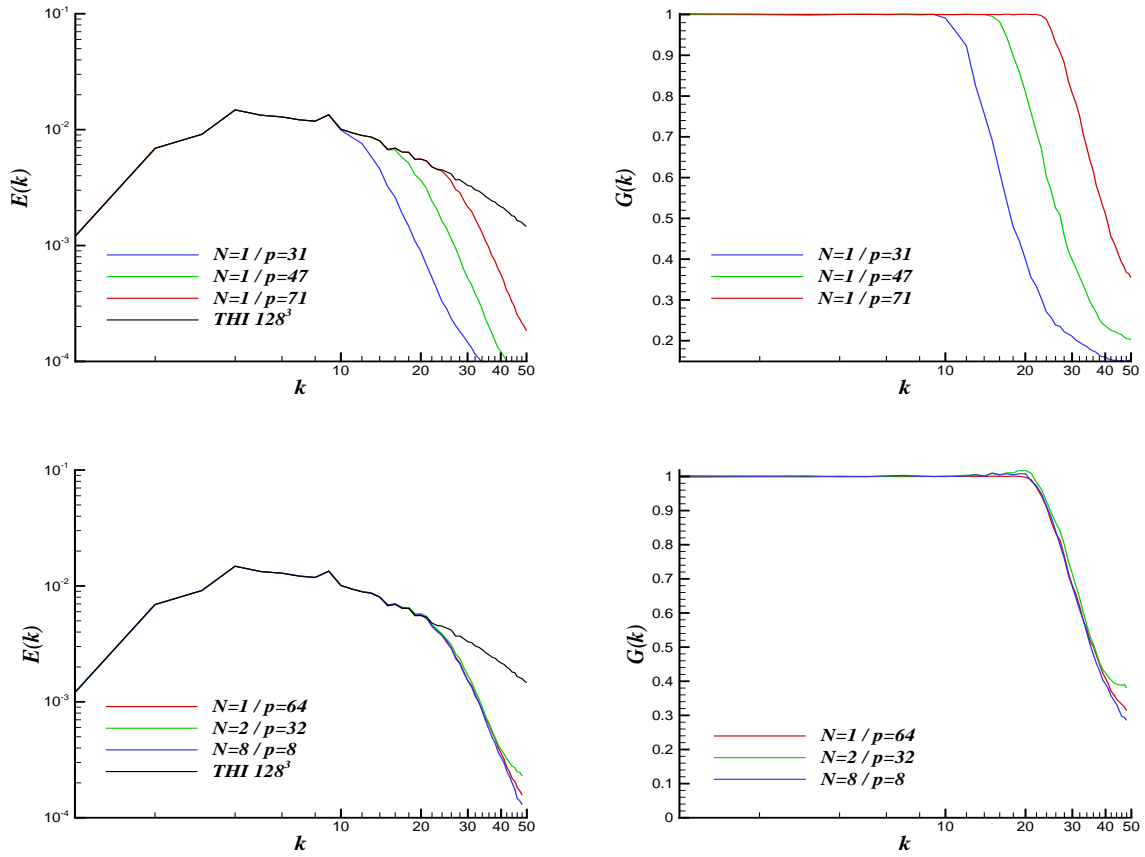


FIGURE 3.3 – Spectres et fonctions de transfert pour différentes projections utilisant des polynômes de Legendre. N est le nombre d'éléments considérés dans chaque direction et $p + 1$ le nombre de modes de Legendre.

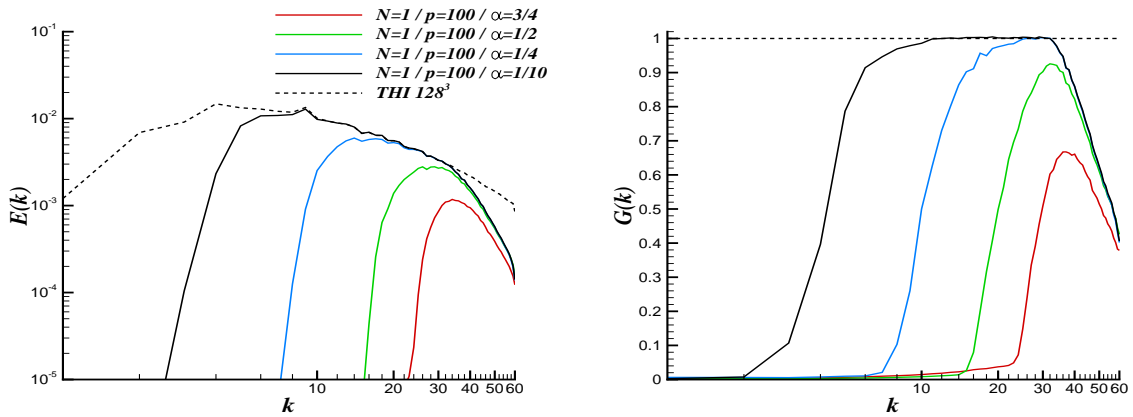


FIGURE 3.4 – Spectres et fonctions de transfert associés à la gamme de petites échelles pour différentes valeurs de α .

du modèle consistent à considérer que le nombre de Reynolds tend vers l'infini et que la dissipation ε_t assurant les transferts d'énergie des modes résolus vers les modes non-résolus est la seule source de dissipation d'énergie.

La première étape consiste à construire une viscosité turbulente à partir d'arguments dimensionnels :

$$\nu_t = (C_S \Delta)^2 |\bar{\mathbf{S}}| \quad (3.9)$$

où C_S est la constante de Smagorinsky, et Δ une longueur de filtre. On suppose que la coupure spectrale entre échelles résolues et non-résolues est réalisée dans la rangée inertielle, où les structures turbulentes présentent un caractère isotrope. Dans ce cadre, la dissipation d'énergie moyenne assurée par la viscosité turbulente s'écrit

$$\varepsilon_t = \langle \nu_t |\bar{\mathbf{S}}|^2 \rangle = (C_S \Delta)^2 \langle |\bar{\mathbf{S}}|^3 \rangle \quad (3.10)$$

où $\langle \cdot \rangle$ désigne la moyenne spatiale d'une quantité donnée.

Pour un écoulement de turbulence homogène isotrope, l'égalité suivante est vérifiée

$$\langle |\bar{\mathbf{S}}|^2 \rangle = 2 \int_0^\infty k^2 G^2(k) E(k) dk. \quad (3.11)$$

Dans la rangée inertielle, $E(k)$ prend la forme du spectre de Kolmogorov :

$$E(k) = C_K \varepsilon_t^{2/3} k^{-5/3} \quad (3.12)$$

où C_K est la constante de Kolmogorov. En supposant que $E(k)$ vérifie l'expression de ce spectre entre $k = 0$ et $k = \infty$, l'expression de $\langle |\bar{\mathbf{S}}|^2 \rangle$ devient :

$$\langle |\bar{\mathbf{S}}|^2 \rangle = 2C_K \varepsilon_t^{2/3} \int_0^\infty k^{1/3} G^2(k) dk. \quad (3.13)$$

En injectant l'expression de ε_t (3.10) dans l'équation (3.13), nous obtenons une évaluation de la constante de Smagorinsky :

$$C_S = \frac{(2C_K \int_0^\infty k^{1/3} G^2(k))^{-3/4}}{\Delta} \sqrt{\frac{\langle |\bar{\mathbf{S}}|^2 \rangle^{3/2}}{\langle |\bar{\mathbf{S}}|^3 \rangle}}. \quad (3.14)$$

Pour simplifier cette expression, on suppose que $\langle |\bar{\mathbf{S}}|^3 \rangle \approx \langle |\bar{\mathbf{S}}|^2 \rangle^{3/2}$ [88]. En considérant un filtre passe-bas à coupure spectrale, on retrouve $C_S \approx 0.17$, valeur utilisée dans de nombreuses applications.

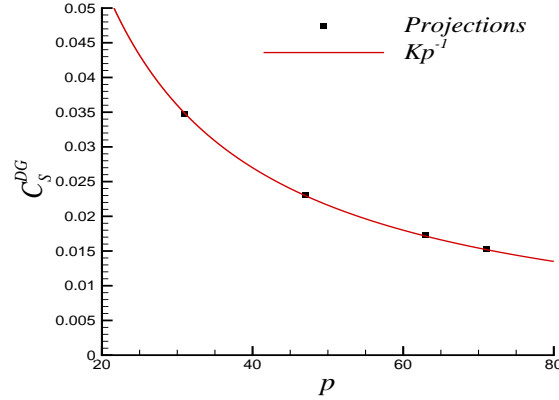


FIGURE 3.5 – Valeurs de C_S^{DG} pour différentes projections.

Les discrétisations DG introduisent deux paramètres spatiaux h (taille de maille) et p (degré du polynôme). La définition de Δ n'est donc pas immédiate, tout comme l'estimation de C_S . Nous proposons donc de définir une nouvelle constante $C_S^{DG} = C_S \Delta$, qui dépend uniquement de la fonction de transfert $G^{DG}(h, p, k)$ de la discrétisation choisie. En reprenant l'expression (3.14), la modélisation de simulation des grandes échelles pour les discrétisations Legendre-Galerkin se réduit donc à un unique paramètre

$$C_S^{DG} = \left(2C_K \int_0^\infty k^{1/3} G^{DG}(h, p, k)^2 dk \right)^{-3/4}. \quad (3.15)$$

Nous avons évalué les valeurs de C_S^{DG} pour diverses projections, représentées sur la Figure 3.5. Il apparaît que l'évolution de ce paramètre en fonction de p obéit à une loi en puissance de la forme

$$C_S^{DG} = Kp^{-1} \quad (3.16)$$

où K est une constante valant 1,08. Nous introduisons la discrétisation spatiale en remplaçant p par $N \times p$, avec $N = 2\pi/h$, ce qui nous fournit l'expression

$$C_S^{DG} = \frac{Kh}{2\pi p} \quad (3.17)$$

L'introduction de cette loi dans l'expression de la viscosité turbulente nous permet de définir une fermeture pour le système d'équations du formalisme DG-LES :

$$\nu_t = \left(\frac{Kh}{2\pi p} \right)^2 |\bar{\mathbf{S}}|. \quad (3.18)$$

Nous observons ici que $K/2\pi = 0.172$ est une valeur très proche de la constante classique de

Smagorinsky. Une estimation raisonnable de la taille des plus petites échelles résolues dans le cadre des discrétisations DG serait donc donnée par $\Delta = h/p$.

Meyers *et al.* [92] ont proposé une simple modification du modèle de Smagorinsky pour prendre en compte les effets bas Reynolds. Ils considèrent une dissipation moyenne plus générale $\varepsilon = \varepsilon_t + \varepsilon_\nu$ dans la construction du modèle, où ε_ν est la dissipation associée à la viscosité moléculaire. Ils considèrent également un spectre d'énergie de forme générique :

$$E(k) \propto f_L(kL) f_\eta \left(kL Re_L^{-3/4} \right) \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

où f_L et f_η sont des fonctions caractérisant le comportement du spectre respectivement dans les grandes échelles et les échelles dissipatives. Le développement du modèle en prenant en compte la dissipation visqueuse et cette forme de spectre amène, après de nombreux développements, à une nouvelle évaluation de la viscosité turbulente :

$$\nu_t^* = \sqrt{\nu_t^2 + \nu^2} - \nu \quad (3.19)$$

On peut voir que la viscosité turbulente est fortement réduite dans les régions où les deux viscosités ont le même ordre de grandeur. On retrouve également le comportement asymptotique $\nu_t^* \xrightarrow{Re \rightarrow \infty} \nu_t$ correspondant à la construction classique du modèle.

3.2.3 Modèle de Smagorinsky multi-échelle

Comme décrit précédemment, l'approche VMS consiste à construire une viscosité turbulente dépendant des champs "petites échelles" de l'écoulement :

$$\nu_t = (C_S \Delta)^2 |\tilde{\mathbf{S}}|. \quad (3.20)$$

Le taux de dissipation correspondant s'écrit :

$$\varepsilon_t = \langle \nu_t |\tilde{\mathbf{S}}|^2 \rangle = (C_S \Delta)^2 \langle |\tilde{\mathbf{S}}|^3 \rangle.$$

De la même manière que l'équation 3.13, nous vérifions l'expression suivante concernant le tenseur de déformation associé aux petites échelles

$$\langle |\tilde{\mathbf{S}}|^2 \rangle = 2 \int_0^\infty k^2 E(k) \tilde{G}^2(k) dk \quad (3.21)$$

où $\tilde{G}(k)$ est la fonction de transfert associée au champ des petites échelles résolues, qui s'apparente à un filtre passe-haut. Comme précédemment, on suppose que $E(k)$ est un spectre

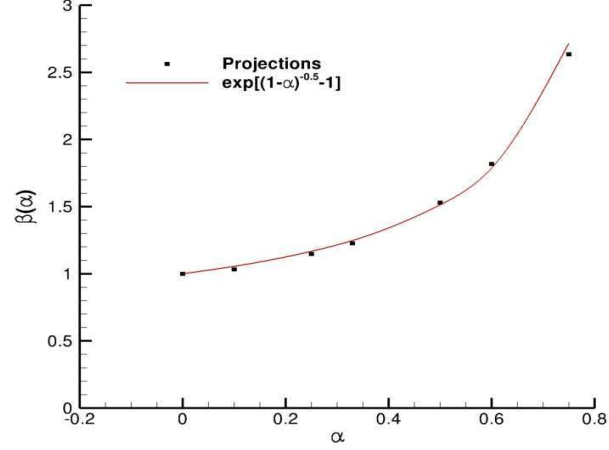


FIGURE 3.6 – Valeurs de β pour le modèle VM-SG.

de Kolmogorov. Cette hypothèse est mieux vérifiée dans le cadre de la VMS par rapport à l'approche classique, où la forme du spectre de Kolmogorov est supposée vérifiée également pour les basses fréquences. L'expression finale de la constante de Smagorinsky-VMS devient

$$\tilde{C}_S = \frac{\left(2C_K \int_0^\infty k^{1/3} \tilde{G}^2(k)\right)^{-3/4}}{\Delta} \sqrt{\frac{\langle |\tilde{\mathbf{S}}|^2 \rangle^{3/2}}{\langle |\tilde{\mathbf{S}}|^3 \rangle}}. \quad (3.22)$$

Nous supposons que $\langle |\tilde{\mathbf{S}}|^3 \rangle \approx \langle |\tilde{\mathbf{S}}|^2 \rangle^{3/2}$ et nous posons $\tilde{C}_S^{DG} = \tilde{C}_S \Delta$ ce qui mène à l'expression

$$\tilde{C}_S^{DG} = \left(2C_K \int_0^\infty k^{1/3} \tilde{G}^{DG}(h, p, \alpha, k)^2 dk\right)^{-3/4}. \quad (3.23)$$

La fonction de transfert dépend ici également du paramètre α , qui caractérise la proportion de grandes échelles. Nous proposons de prendre en compte ce paramètre en introduisant une fonction de correction $\beta(\alpha) = \tilde{C}_S^{DG}/C_S^{DG}$ représentant le rapport entre les constantes de Smagorinsky-VMS et Smagorinsky. L'expression de la viscosité turbulente devient alors

$$\tilde{\nu}_t = \left(\beta(\alpha) \frac{K h}{2\pi p}\right)^2 |\tilde{\mathbf{S}}| \quad (3.24)$$

La fonction $\beta(\alpha)$ est évaluée empiriquement pour différentes valeurs de α à partir des projections décrites dans la sous-section 3.2.1. Les résultats sont présentés sur la Figure 3.6.

Sur l'intervalle $\alpha \in [0, 0.8]$, l'évolution de β en fonction de α peut être approchée par une exponentielle de la forme $\beta(\alpha) \approx \exp(1/\sqrt{1-\alpha} - 1)$ qui vérifie le comportement asymptotique $\beta(0) = 1$ (modèle de Smagorinsky classique) et augmente quand la dimension de l'espace

des petites échelles se réduit.

Meyers *et al.* [92] ont également proposé de modifier l'expression de la viscosité turbulente du modèle Smagorinsky-VMS pour prendre en compte les effets bas-Reynolds. Pour la formulation VMS *small-small* du modèle, ces auteurs suggèrent :

$$\nu_t^* = \beta^{4/3} \left(\sqrt{\beta^{-8/3} \tilde{\nu}_t^2 + \nu^2} - \nu \right). \quad (3.25)$$

3.2.4 Calibration du modèle à fonction de structure

Bien que satisfaisant pour la simulation d'écoulements turbulents isotropes, le modèle de Smagorinsky fournit des prédictions incorrectes pour les écoulements transitionnels, anisotropes ou en présence de parois. Dans ce dernier cas, la constante de Smagorinsky est usuellement arbitrairement réduite, ou des corrections basées sur des fonctions de distance à la paroi doivent être employées. Le modèle à fonction de structure introduit par Métails *et al.* [91] est construit sur des hypothèses différentes et permet d'adapter la dissipation du modèle en fonction de l'énergie évaluée pour une échelle turbulente donnée. Nous proposons ici d'adapter ce modèle aux discrétisations DG.

L'idée principale du modèle est de chercher la viscosité turbulente ν_t^{av} en tant que moyenne spectrale sur la rangée des nombre d'ondes résolus. Leslie *et al.* [87] ont montré qu'une telle viscosité ν_t^{av} vérifie l'égalité

$$\int_0^\infty 2\nu_t^{av} k^2 G^2(k) E(k) dk = \varepsilon_t. \quad (3.26)$$

En introduisant le spectre de Kolomogorov (3.12) et en utilisant l'expression (3.17) nous obtenons

$$\nu_t^{av} = \frac{\varepsilon_t^{1/3}}{2C_K \int_0^\infty k^{1/3} G^2(k) dk} \approx \varepsilon_t^{1/3} \left(\frac{Kh}{2\pi p} \right)^{4/3}. \quad (3.27)$$

La dissipation est exprimée au nombre d'onde de coupure à partir de l'expression du spectre de Kolmogorov 3.12, soit $\varepsilon_t^{1/3} = \sqrt{C_K E(k_c) / k_c^{-5/3}}$. Il faut donc également choisir une longueur de coupure Δ associée à k_c par la relation $\Delta = \pi/k_c$. Pour simplifier la formulation du modèle, nous choisissons $\Delta = h/p$, qui caractérise la taille des plus petites échelles résolues du problème. Nous obtenons l'expression suivante :

$$\nu_t^{av} \approx \left(\frac{K}{2} \right)^{4/3} C_K^{-1/2} \left[\frac{E(k_c)}{k_c} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.28)$$

L'objectif est maintenant d'estimer le spectre d'énergie au nombre d'onde de coupure à partir de quantités définies dans l'espace physique. Ce lien est réalisé à l'aide de la fonction

de structure au second ordre $F_2(\mathbf{r})$, qui est une évaluation de l'énergie associée à une gamme d'échelles de dimension $\|\mathbf{r}\|$:

$$F_2(\mathbf{r}) = \langle \|\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{r})\|^2 \rangle. \quad (3.29)$$

Batchelor a proposé une relation entre F_2 et le spectre d'énergie pour une turbulence homogène et isotrope :

$$F_2(\Delta) = 4 \int_0^\infty E(k) \left[1 - \frac{\sin(k\Delta)}{k\Delta} \right] dk \quad (3.30)$$

En injectant l'expression du spectre de Kolmogorov (3.12) dans l'expression précédente et en intégrant nous obtenons :

$$F_2(\Delta) = 4.82 C_K (\varepsilon_t \Delta)^{2/3}. \quad (3.31)$$

L'évaluation de F_2 à la longueur de coupure $\Delta = \pi/k_c$ donne :

$$F_2(\Delta) = 4.82 \pi^{2/3} C_K \varepsilon_t^{2/3} k_c^{-2/3}. \quad (3.32)$$

En introduisant le spectre de Kolmogorov (3.12) évalué à k_c dans le membre de droite, nous obtenons :

$$\left[\frac{E(k_c)}{k_c} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\Delta F_2^{1/2}(\Delta)}{\sqrt{4.82 \pi^{8/3}}} \quad (3.33)$$

L'introduction de cette expression dans l'expression de la viscosité turbulente (3.28) nous permet de relier cette dernière à la fonction de structure à l'ordre 2 :

$$\nu_t = 0.0355 \Delta [F_2(\Delta)]^{1/2} \quad (3.34)$$

F_2 n'étant pas directement disponible pour un calcul LES, il nous faut trouver une relation entre cette fonction et la fonction de structure filtrée \overline{F}_2 . Nous avons :

$$\overline{F}_2(\Delta) = 4 C_K \varepsilon_t^{2/3} \int_0^\infty G^2(k) k^{-5/3} \left[1 - \frac{\sin(\Delta k)}{\Delta k} \right] dk \quad (3.35)$$

en utilisant l'expression du spectre de Kolmogorov. Nous obtenons donc :

$$\frac{F_2}{\overline{F}_2} = \frac{\int_0^\infty k^{-5/3} \left[1 - \frac{\sin(\Delta k)}{\Delta k} \right] dk}{\int_0^\infty G^2(k) k^{-5/3} \left[1 - \frac{\sin(\Delta k)}{\Delta k} \right] dk} \quad (3.36)$$

Ce rapport a été évalué pour plusieurs fonctions de transfert DG, en choisissant $\Delta = h/p$ et en calculant F_2 à partir du spectre associé au signal complet. Le rapport se trouve être

identique pour toutes les projections considérées :

$$F_2(\Delta) \approx 1.45 \overline{F}_2(\Delta) \quad (3.37)$$

Nous obtenons ainsi l'expression finale de la viscosité turbulente pour le modèle à fonction de structure :

$$\nu_t^{SF} = 0.043 \Delta [\overline{F}_2(\Delta)]^{1/2} \quad (3.38)$$

où $\overline{F}_2(\Delta) = \langle \|\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x} - \Delta)\|^2 \rangle$. La valeur 0.043 est assez proche de la valeur 0.063 trouvée par Métais *et al.* pour un filtre à coupure spectrale. Cette viscosité est évaluée dans chaque élément de la discrétisation en calculant \overline{F}_2 sur six points situés dans l'élément.

3.2.5 Modèle à fonction de structure multi-échelle

Ducros *et al.* [42] ont proposé une amélioration du modèle à fonction de structure consistant à appliquer un filtre passe-haut sur le champ de vitesse pour la construction de F_2 . Cette approche est justifiée par le comportement des structures à bas nombres d'onde qui ne présentent pas un caractère isotrope. L'application d'un tel filtre est directe dans le cadre de l'approche DG-VMS, car nous pouvons construire la fonction de structure à partir du champ de vitesse des petites échelles résolues.

Nous introduisons tout d'abord le spectre d'énergie associé aux petites échelles résolues :

$$\tilde{E}(k) = \tilde{G}^2(k) E(k). \quad (3.39)$$

En introduisant ce spectre dans l'expression (3.30), nous obtenons l'expression de la fonction de structure pour les petites échelles :

$$\tilde{F}_2(\Delta) = 4 \int_0^\infty \tilde{G}^2(k) E(k) \left[1 - \frac{\sin(\Delta k)}{\Delta k} \right] dk \quad (3.40)$$

et nous avons :

$$\frac{F_2}{\tilde{F}_2} = \frac{F_2 \overline{F}_2}{\overline{F}_2 \tilde{F}_2} = 1.45 \frac{\int_0^\infty \overline{G}^2(k) k^{-5/3} \left[1 - \frac{\sin(\Delta k)}{\Delta k} \right] dk}{\int_0^\infty \tilde{G}^2(k) k^{-5/3} \left[1 - \frac{\sin(\Delta k)}{\Delta k} \right] dk} \quad (3.41)$$

Ces intégrales sont calculées pour plusieurs projections a priori, et il apparaît que l'expression finale de la viscosité turbulente dépend du rapport α :

$$\nu_t^{FSF} = 0.043 \beta(\alpha) \Delta [\tilde{F}_2(\Delta)]^{1/2} \quad (3.42)$$

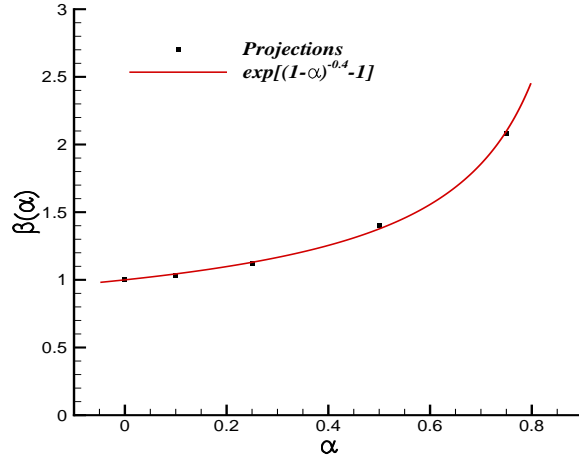


FIGURE 3.7 – Valeurs de β pour le modèle à fonction de structure filtrée.

avec $\beta(\alpha) = \exp[(1 - \alpha)^{-0.4} - 1]$, expression calibrée à partir de résultats de plusieurs projections montrés sur la Figure 3.7.

Ces valeurs sont plus élevées de deux ordres de grandeur que celle proposée par Ducros *et al.* [42], car leur technique de filtrage amplifie également les hauts nombres d’onde. La présente approche filtre uniquement les plus bas nombres d’onde en préservant le spectre d’énergie pour le contenu haute fréquence. Dans le cadre du formalisme VMS, nous pouvons également appliquer le modèle pour la résolution des petites échelles uniquement. Ce modèle diffère donc de l’original sur plusieurs points.

3.2.6 Modèle dynamique variationnel

Le modèle de Smagorinsky dynamique introduit par Germano *et al.* [50] consiste à considérer des variations spatiales et temporelles de la constante C_S , remplacée dans ce cadre par une fonction $C_D(\mathbf{x}, t)$. Cette fonction est évaluée en introduisant deux étapes de filtrage. Les deux systèmes d’équations résultants sont utilisés pour trouver une expression pour C_D . Une approche exploitant la formulation variationnelle des équations de Navier-Stokes a été développée par Oberai *et al.* [98] et est également décrite par Gravemeier [55] pour les discrétisations de type éléments finis. Nous détaillons ici cette approche, qui consiste à estimer la fonction C_D à partir des équations exprimées pour deux projections différentes dans la base de polynômes.

Suivant la démarche de Oberai *et al.*, nous introduisons les formulations fortes des équations de Navier-Stokes incompressibles filtrées associées à deux espaces fonctionnels $\mathcal{V}_h^{\bar{p}}$ et \mathcal{V}_h^p vérifiant $\mathcal{V}_h^{\bar{p}} \subset \mathcal{V}_h^p$. \bar{p} et p sont les degrés de polynômes correspondant respectivement aux projections grossière et fine. En considérant le modèle de Smagorinsky pour les deux projections

et en supposant que C_D est une constante spatiale dans chaque élément de la discrétisation, les équations de quantité de mouvement s'écrivent :

$$\int_{\Omega_j} \bar{\phi} \partial_t \bar{\mathbf{U}} d\mathbf{x} + \int_{\Omega_j} \bar{\phi} \nabla \cdot (\bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{U}} + \bar{p} \mathbf{I} - 2\nu \bar{\mathbf{S}}) d\mathbf{x} - 2C_D \left(\frac{h}{\bar{p}}\right)^2 \int_{\Omega_j} \bar{\phi} \nabla \cdot (|\bar{\mathbf{S}}| \bar{\mathbf{S}}) d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \bar{\phi} \in \mathcal{V}_h^{\bar{p}}, \forall \Omega_j \in \Omega_h \quad (3.43)$$

$$\int_{\Omega_j} \phi \partial_t \mathbf{U} d\mathbf{x} + \int_{\Omega_j} \phi \nabla \cdot (\mathbf{U} \otimes \mathbf{U} + p \mathbf{I} - 2\nu \mathbf{S}) d\mathbf{x} - 2C_D \left(\frac{h}{p}\right)^2 \int_{\Omega_j} \phi \nabla \cdot (|\mathbf{S}| \mathbf{S}) d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{V}_h^p, \forall \Omega_j \in \Omega_h \quad (3.44)$$

avec $\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{U}}(\bar{w}_h)$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}(w_h)$, $\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}}(\bar{w}_h, \nabla \bar{w}_h)$, $\mathbf{S} = \mathbf{S}(w_h, \nabla w_h)$, $\bar{w}_h \in \mathcal{V}_h^{\bar{p}}$, $w_h \in \mathcal{V}_h^p$. En projetant (3.44) sur l'espace $\mathcal{V}_h^{\bar{p}}$ et en lui retranchant ensuite (3.43), nous obtenons, pour tout $\bar{\phi}$ dans $\mathcal{V}_h^{\bar{p}}$ et pour tout Ω_j dans Ω_h :

$$2C_D \left[\left(\frac{h}{p}\right)^2 \int_{\Omega_j} \bar{\phi} \nabla \cdot (|\mathbf{S}| \mathbf{S}) d\mathbf{x} - \left(\frac{h}{\bar{p}}\right)^2 \int_{\Omega_j} \bar{\phi} \nabla \cdot (|\bar{\mathbf{S}}| \bar{\mathbf{S}}) d\mathbf{x} \right] = \int_{\Omega_j} \bar{\phi} \partial_t (\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_j} \bar{\phi} \nabla \cdot (\mathbf{U} \otimes \mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{U}}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_j} \bar{\phi} \nabla \cdot ((p - \bar{p}) \mathbf{I} - 2\nu (\mathbf{S} - \bar{\mathbf{S}})) d\mathbf{x}. \quad (3.45)$$

Le terme de dérivée en temps s'annule du fait de la propriété d'orthogonalité de la base de polynômes. On néglige également les termes visqueux et de pression. L'expression de C_D devient, pour tout $\bar{\phi}$ dans $\mathcal{V}_h^{\bar{p}}$ et pour tout Ω_j dans Ω_h :

$$2C_D \left[\left(\frac{h}{p}\right)^2 \int_{\Omega_j} \bar{\phi} \nabla \cdot \left(|\mathbf{S}| \mathbf{S} - \left(\frac{\bar{p}}{p}\right)^{-2} |\bar{\mathbf{S}}| \bar{\mathbf{S}} \right) d\mathbf{x} \right] = \int_{\Omega_j} \bar{\phi} \nabla \cdot (\mathbf{U} \otimes \mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{U}}) d\mathbf{x}. \quad (3.46)$$

La méthode d'Oberai *et al.* suppose la continuité de la solution numérique dans le domaine, ce qui permet d'intégrer par parties les intégrales à l'aide du théorème de Green, sans voir apparaître de termes supplémentaires. Concernant l'approche DG, il faudrait normalement prendre en compte les contributions des intégrales de surface issues de la formulation faible, mais nous choisissons ici pour des raisons de coût de calcul et de facilité d'implémentation d'évaluer C_D uniquement à partir des contributions des intégrales de volume. Nous obtenons finalement, pour tout $\bar{\phi}$ dans $\mathcal{V}_h^{\bar{p}}$ et pour tout Ω_j dans Ω_h :

$$2C_D \left[\left(\frac{h}{p}\right)^2 \int_{\Omega_j} \nabla \bar{\phi} \cdot \left(|\mathbf{S}| \mathbf{S} - \left(\frac{\bar{p}}{p}\right)^{-2} |\bar{\mathbf{S}}| \bar{\mathbf{S}} \right) d\mathbf{x} \right] = \int_{\Omega_j} \nabla \bar{\phi} \cdot (\mathbf{U} \otimes \mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{U}}) d\mathbf{x}. \quad (3.47)$$

Nous retrouvons le problème classique de la fermeture pour la constante de Smagorinsky dynamique, étant donné que cette relation est vectorielle et ne permet pas de déterminer une valeur unique de C_D . La méthode la plus simple pour remédier à ce problème est la technique dite de dissipation [98] qui consiste à contracter les expressions des intégrales en introduisant le tenseur des déformations dans (3.47) :

$$C_D = \frac{\int_{\Omega_j} \bar{\mathbf{S}} (\mathbf{U} \otimes \mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{U}}) d\mathbf{x}}{2 \left[\left(\frac{h}{p} \right)^2 \int_{\Omega_j} \bar{\mathbf{S}} \left(|\mathbf{S}| \mathbf{S} - \left(\frac{\bar{\mathcal{E}}}{p} \right)^{-2} |\bar{\mathbf{S}}| \bar{\mathbf{S}} \right) d\mathbf{x} \right]} \quad (3.48)$$

C_D est évaluée dans chaque élément de la discrétisation. Pour éviter un comportement erratique du modèle, nous appliquons la méthode dite du clipping qui consiste à fixer une borne supérieure à C_D et une borne inférieure à μ_t . Concernant C_D , nous choisissons $\sqrt{C_D} \leq 0.2$ qui est une valeur légèrement supérieure à la constante de Smagorinsky déterminée précédemment. Concernant la viscosité turbulente, nous choisissons une borne $\mu_t > -\mu$ qui assure la positivité de la viscosité totale.

3.3 Eléments pour la modélisation dans l'espace de polynômes

Les modèles présentés dans les sections précédentes sont calibrés pour la représentation d'échelles sous-mailles caractérisées dans l'espace spectral de Fourier. Or, dans le cadre des discrétisations DG, les variables d'intérêt sont exprimées dans une base fonctionnelle constituée de polynômes. Il est donc possible de caractériser les interactions entre échelles dans ces bases plutôt que dans celle de Fourier, ce qui permet le développement de modèles adaptés à de telles discrétisations. Ces interactions sont explicitement décrites dans la section 3.3.1, et la section 3.3.2. présente l'étude d'un signal de turbulence atmosphérique dans la base des polynômes de Legendre. Les idées développées dans les sections suivantes n'ont pas été mises en oeuvre pour la réalisation de simulations, mais pourraient servir de base au développement d'une approche de modélisation propre aux discrétisations basées sur l'expression de la solution numérique dans une base polynomiale.

3.3.1 Interactions entre échelles dans la base de polynômes

Cette section présente le développement des équations de Navier-Stokes incompressibles dans une base fonctionnelle quelconque, en prenant en compte la séparation des champs physiques en gammes résolue et non-résolue. L'écriture explicite des termes sous-maille permet d'envisager l'évaluation a priori de ces derniers à partir par exemple de champs DNS de turbulence isotrope ou de canal plan.

La formulation forte des équations de quantité de mouvement est considérée, ainsi que les projections sur les espaces de grandes échelles, petites échelles et échelles non-résolues :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \bar{\phi} \partial_t \mathbf{u} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \bar{\phi} \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{p}) d\mathbf{x} - \nu \int_{\Omega} \bar{\phi} \nabla^2 \mathbf{u} d\mathbf{x} &= 0, \\ \int_{\Omega} \tilde{\phi} \partial_t \mathbf{u} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \tilde{\phi} \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{p}) d\mathbf{x} - \nu \int_{\Omega} \tilde{\phi} \nabla^2 \mathbf{u} d\mathbf{x} &= 0, \\ \int_{\Omega} \hat{\phi} \partial_t \mathbf{u} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \hat{\phi} \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{p}) d\mathbf{x} - \nu \int_{\Omega} \hat{\phi} \nabla^2 \mathbf{u} d\mathbf{x} &= 0. \end{aligned}$$

L'écriture des variables sous la forme $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}}$ et $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}$ dans les équations ci-dessus fait apparaître l'ensemble des termes caractérisant les interactions entre les trois gammes d'échelles définies ici.

Interactions entre deux gammes d'échelles

Nous considérons en premier lieu une décomposition classique en deux gammes d'échelles. L'une concerne les échelles résolues, et l'autre les échelles sous-maille. Dans le formalisme VMS décrit dans la section 3.1.2., cela correspond à définir $\tilde{N} = 0$. L'équation de quantité de mouvement du champ résolu devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \bar{\phi} [\partial_t \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{p}}) - \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}}] d\mathbf{x} + \\ \int_{\Omega} \bar{\phi} [\nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}} \otimes \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{p}}) - \nu \nabla^2 \hat{\mathbf{u}}] d\mathbf{x} = 0 \end{aligned}$$

La première ligne correspond aux termes résolus, et la deuxième comprend les termes sous-maille projetés sur les échelles résolues. Ces termes caractérisent l'influence des échelles non-résolues sur les échelles résolues. Les termes non-linéaires sont divisés en deux catégories, dites tensions croisées et tensions de Reynolds. Elles sont définies par les opérateurs \mathcal{C} et \mathcal{R} :

$$\mathcal{C}(\bar{\phi}, \bar{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \bar{\phi} \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) d\mathbf{x},$$

$$\mathcal{R}(\bar{\phi}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \bar{\phi} \nabla \cdot (\hat{\mathbf{u}} \otimes \hat{\mathbf{u}}) d\mathbf{x}.$$

En ajoutant les termes linéaires de pression et de diffusion, nous obtenons l'ensemble des termes à modéliser, regroupés dans l'opérateur \mathcal{M} défini par :

$$\mathcal{M}(\bar{\phi}) = \mathcal{C}(\bar{\phi}, \bar{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) + \mathcal{R}(\bar{\phi}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) + \int_{\Omega} \bar{\phi} (\nabla \cdot \hat{\mathbf{p}} - \nu \nabla^2 \hat{\mathbf{u}}) d\mathbf{x}.$$

Interactions entre trois gammes d'échelles

Nous considérons maintenant le formalisme VMS, avec deux gammes d'échelles résolues et une d'échelles non-résolues. La projection des équations sur les grandes échelles s'écrit :

$$\int_{\Omega} \bar{\phi} [\partial_t \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{p}}) - \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}}] d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \bar{\phi} [\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}) - \nu \nabla^2 (\hat{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}})] d\mathbf{x} + \mathcal{C}(\bar{\phi}, \bar{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) + \mathcal{C}(\bar{\phi}, \bar{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) + \mathcal{C}(\bar{\phi}, \tilde{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) + \mathcal{R}(\bar{\phi}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) + \mathcal{R}(\bar{\phi}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) = 0$$

Nous voyons apparaître les interactions entre échelles résolues, représentées par les termes $\mathcal{C}(\bar{\phi}, \bar{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}})$ et $\mathcal{R}(\bar{\phi}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}})$. Ces termes ne nécessitent pas de modélisation, car ils sont automatiquement pris en compte dans la résolution des équations par la méthode numérique. Dans le cadre de l'approche VMS, les termes caractéristiques des interactions grandes échelles/échelles non-résolues, à savoir $\mathcal{R}(\bar{\phi}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}})$ et $\int_{\Omega} \bar{\phi} [\nabla \cdot \hat{\mathbf{p}} - \nu \nabla^2 \hat{\mathbf{u}}] d\mathbf{x}$ sont négligés. Les études à priori sur des champs DNS pourraient nous renseigner sur la validité de cette hypothèse en fonction de la partition grandes/petites échelles résolues choisie.

Nous écrivons maintenant l'équation associée à la dynamique des petites échelles résolues :

$$\int_{\Omega} \tilde{\phi} [\partial_t \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{p}}) - \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}] d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \tilde{\phi} [\nabla \cdot (\bar{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}) - \nu \nabla^2 (\hat{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}})] d\mathbf{x} + \mathcal{C}(\tilde{\phi}, \bar{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) + \mathcal{C}(\tilde{\phi}, \bar{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) + \mathcal{C}(\tilde{\phi}, \tilde{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) + \mathcal{R}(\tilde{\phi}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) + \mathcal{R}(\tilde{\phi}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}) = 0$$

Les termes sous-maille apparaissant dans cette équation sont modélisés, et nous les regroupons donc sous l'opérateur suivant :

$$\mathcal{M}(\tilde{\phi}) = \mathcal{C}(\tilde{\phi}, \bar{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) + \mathcal{C}(\tilde{\phi}, \tilde{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) + \mathcal{R}(\tilde{\phi}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) + \int_{\Omega} \tilde{\phi} (\nabla \cdot \hat{\mathbf{p}} - \nu \nabla^2 \hat{\mathbf{u}}) d\mathbf{x}$$

3.3.2 Etude de la projection d'un signal atmosphérique dans la base de Legendre

Nous étudions dans cette section la représentation de caractéristiques fondamentales de la turbulence par diverses projections d'un signal atmosphérique 1D dans la base des polynômes de Legendre. Le signal de turbulence atmosphérique provient des expériences de Katul *et al.* [70]. Sa dimension est de 10^{16} points et le nombre de Reynolds associé aux plus grandes échelles de $Re_L \approx 3 \times 10^6$. Le spectre d'énergie du signal est représenté Figure 3.8.

Nous vérifions tout d'abord la capacité des projections à représenter les lois auto-similaires de la turbulence à haut nombre de Reynolds. La loi des quatre cinquièmes (*fourth fifth law*) établie par Kolmogorov fournit une relation exacte entre la fonction de structure au troisième ordre S^3 et la distance r entre les mesures des incréments de vitesse, dans la limite

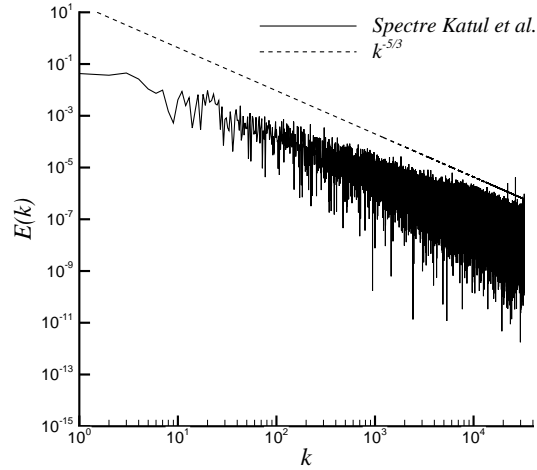


FIGURE 3.8 – Spectre de turbulence atmosphérique.

$Re \rightarrow \infty$. La version étendue de cette loi proposée par Benzi *et al.* [13, 12] relie les fonctions de structure à l'ordre n , S^n , à S^3 , cette loi étant valide pour tout nombre de Reynolds. Ces deux lois sont représentées pour plusieurs projections du signal sur la Figure 3.9. On part d'une projection permettant la représentation complète du signal, puis cette dernière est tronquée en conservant une fraction des modes de Legendre (correspondant aux appellations $k_{max}/2$, $k_{max}/4$, $k_{max}/8$). Les projections les plus grossières montrent une déviation des lois d'auto-similarité pour les petits r , car les phénomènes à petite échelle sont mal représentés par ces dernières. Mis à part ces déviations, les projections vérifient les lois d'auto-similarité, ce qui indique que les caractéristiques fondamentales de la turbulence ne sont pas dégradées. La forme particulière des spectres des signaux de turbulence haut Reynolds dans l'espace de Fourier, dits spectres de Kolmogorov, est supposée rester la même pour toute base de fonction, étant donné que ces spectres sont construits à partir de considérations dimensionnelles. La Figure 3.10 présente le spectre d'énergie qui est calculé à partir des modes de Legendre pour une projection de grande dimension. Nous observons la présence d'une pente en $k^{-5/3}$ qui est donc vérifiée également pour la base de Legendre. Ce résultat fournit des perspectives intéressantes pour la modélisation de la turbulence dans l'espace de polynômes.

Enfin, nous évaluons la représentation de l'intermittence, qui est un phénomène associé aux forts gradients de vitesse dus à l'étirement tourbillonnaire. L'intermittence est caractérisée par des PDF de gradients de vitesse qui présentent des valeurs importantes pour des fluctuations éloignées de la moyenne. La Figure 3.10 présente les PDF associées à différentes projections. Nous voyons que la projection la plus grossière présente un comportement proche d'une gaussienne centrée à variance unitaire, alors que les projections plus fines caractérisent bien le phénomène d'intermittence.

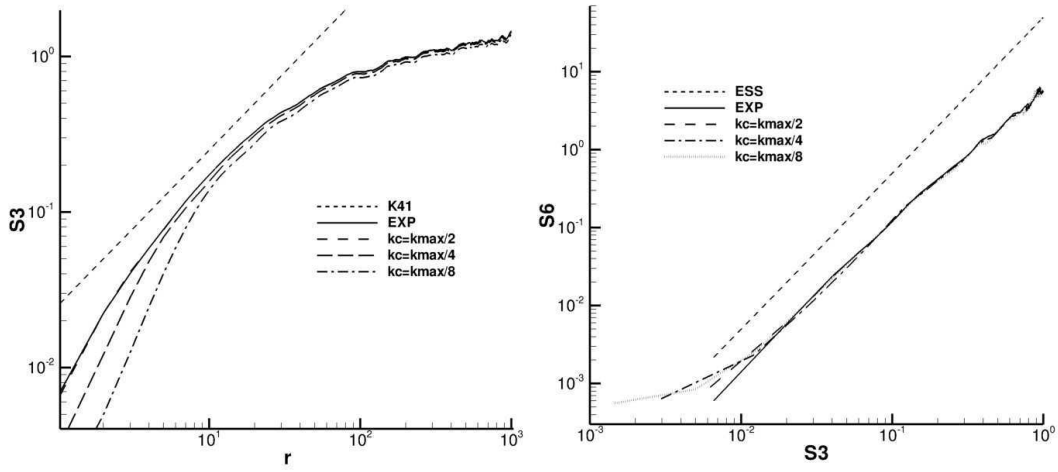


FIGURE 3.9 – Fonctions de structure S_u^3 en fonction de r (gauche), et S_u^6 en fonction de S_u^3 à r équivalent (droite). k_{max} correspond au nombre de modes pour la projection dans l'espace de Legendre qui permet de représenter le signal turbulent complet.

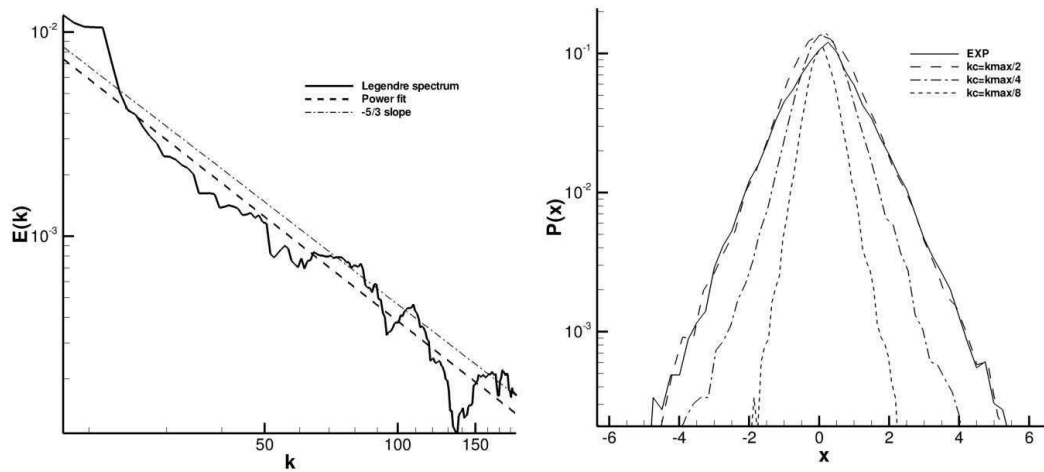


FIGURE 3.10 – Spectre de Legendre (gauche), PDF de $\partial u/\partial x$ (droite), pour plusieurs projections du signal de turbulence atmosphérique.

Chapitre 4

Evaluation de la méthode DG pour la simulation numérique directe

Ce chapitre traite de l'évaluation de la méthode de Galerkin discontinue pour la simulation numérique directe des écoulements turbulents. L'étude s'articule autour de trois configurations présentant des phénomènes physiques variés. La première décrit la collision d'un dipôle tourbillonnaire avec une paroi adhérente dans un domaine bidimensionnel. Clercx *et al.* [27] soulignent l'intérêt de ce cas test pour la validation de codes de calculs, la turbulence 2D présentant une double cascade d'énergie dont la bonne représentation nécessite l'emploi de méthodes robustes. La méthode DG est ensuite évaluée pour des DNS d'une configuration tridimensionnelle de turbulence en décroissance libre dans une boîte périodique, à l'aide de l'initialisation correspondant au vortex de Taylor-Green. Enfin, des DNS du canal plan en turbulence développée sont réalisées, pour les régimes quasi-incompressible et supersonique. Cette configuration fournit une représentation réaliste des phénomènes turbulents en présence de parois.

Cette étude est également motivée par le fait que peu de simulations DNS basées sur la méthode DG sont présentées dans la littérature actuelle. Collis [34] a réalisé une DNS de canal plan turbulent à bas Reynolds, en régime quasi-incompressible. Pour cette configuration, l'auteur a obtenu de bons résultats avec un nombre limité de degrés de liberté en choisissant judicieusement les paramètres h et p des discrétisations. Plus récemment, Wei *et al.* [127, 128] ont employé la méthode DG pour étudier certaines caractéristiques des écoulements en canal plan compressible. Ces simulations impliquent un nombre de degrés de liberté bien plus important que la DNS spectrale de référence réalisée par Coleman *et al.* [32]. Enfin, Gassner *et al.* [49] ont étudié la précision de calculs sous-résolus dans le cas du vortex de Taylor-Green. Ces calculs ont été réalisés à partir de degrés de polynômes importants sur des maillages très grossiers, et différentes méthodes de stabilisation ont été évaluées.

Contrairement aux études précitées, nous nous concentrons sur l'évaluation de la précision

spatiale de la méthode DG quand des résolutions marginales sont considérées. Pour les cas du dipôle tourbillonnaire et du vortex de Taylor-Green, nous montrons notamment l'importance d'employer une discrétisation à l'ordre élevé pour obtenir des résultats précis avec un nombre réduit de degrés de liberté. Pour l'ensemble des cas considérés, nous insistons sur la capacité des discrétisations DG présentant un ordre supérieur ou égal à 4 de fournir des résultats quantitativement équivalents aux méthodes spectrales pour un nombre de degrés de liberté comparable.

4.1 Rebond tourbillonnaire

Ce cas d'étude consiste à représenter la collision entre un dipôle tourbillonnaire et une paroi adhérente à l'aide d'une méthode numérique. La physique complexe associée au phénomène de collision met en échec un certain nombre de méthodes numériques, et ce cas constitue donc un test critique pour l'évaluation des codes de calcul [27, 71, 79]. La capacité de la méthode DG à représenter ce phénomène complexe est évaluée pour différents ordres et maillages. Le nombre de Reynolds considéré est de 1000 pour permettre la comparaison avec les résultats de Keetels *et al.* [71], qui ont utilisé une méthode pseudo-spectrale hybride Fourier/Chebyshev pour générer une solution de référence. Les configurations à plus hauts Reynolds sont associées à davantage de collisions et à la présence d'un plus grand nombre de structures tourbillonnaires au comportement chaotique, comme démontré par Kramer *et al.* [76]. Le cas à $Re = 1000$ reste pertinent car les mécanismes principaux propres à la collision demeurent (appariement tourbillonnaire et production de vortacité en proche paroi).

4.1.1 Description du problème

Initialisation

Nous présentons ici l'initialisation utilisée par Clercx et Bruneau [27] et Keetels *et al.* [71]. Le domaine discret est un carré $\Omega = [-h, +h]^2$ avec parois adhérentes en $x = \pm h$, et conditions de périodicité dans la direction y . Le profil initial de vortacité pour chaque monopole s'exprime par

$$\omega_i = \pm\omega_e \left(1 - (r_i/r_0)^2\right) \exp \left[-(r_i/r_0)^2\right], \quad i = 1, 2$$

où ω_e représente l'extremum de vortacité, $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$ le rayon à partir du centre du i -ème monopole, et r_0 le rayon à partir du centre du monopole correspondant à l'endroit où la vortacité change de signe. L'intégration analytique du profil de vortacité mène à la définition du profil de vitesse suivant

$$u(\mathbf{x}, 0) = -\frac{1}{2} |\omega_e| (y - y_1) \exp \left[-(r_1/r_0)^2\right] + \frac{1}{2} |\omega_e| (y - y_2) \exp \left[-(r_2/r_0)^2\right],$$

$$v(\mathbf{x}, 0) = +\frac{1}{2} |\omega_e| (x - x_1) \exp[-(r_1/r_0)^2] - \frac{1}{2} |\omega_e| (x - x_2) \exp[-(r_2/r_0)^2] ,$$

où (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont les coordonnées du centre des monopoles. Le profil de pression initial est défini par la superposition des deux champs de pression compatibles avec les distributions de vitesse associées aux deux monopôles :

$$p(\mathbf{x}, 0) = p_\infty - \left(\frac{\omega_e r_0}{4}\right)^2 (\exp[-2(r_1/r_0)^2] + \exp[-2(r_2/r_0)^2]) .$$

La masse volumique initiale est constante, soit $\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0$. Les calculs seront évalués en observant les évolutions temporelles de l'énergie cinétique, de l'enstrophie et de la palinstrophie, quantité faisant intervenir des dérivées secondes de la vitesse :

$$E_k(t) = \frac{1}{h^2} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}}{2} d\Omega , \quad \xi(t) = \frac{1}{h^2} \int_{\Omega} \frac{\omega^2}{2} d\Omega , \quad \mathcal{P}(t) = \frac{1}{h^2} \int_{\Omega} \frac{\nabla \omega \cdot \nabla \omega}{2} d\Omega .$$

où h représente la moitié de la dimension du domaine dans une direction et $\omega = \partial_x v - \partial_y u$ la vorticité. Le nombre de Reynolds est défini par $Re = Uh/\nu$, où $U = \sqrt{E_0/2}$, E_0 est la valeur initiale d'énergie cinétique. Les paramètres initiaux sont choisis de manière à vérifier $\xi_0 = 800U^2/h^2$. Les monopôles sont situés aux coordonnées $(x_1, y_1) = (0, -0.1h)$ et $(x_2, y_2) = (0, 0.1h)$. Le nombre de Mach initial, utilisé pour définir l'échelle de pression p_∞ , est fixé à 10^{-2} , ce qui nous permet de comparer nos résultats à des solutions de référence incompressibles.

Physique du problème

Deux tourbillons contra-rotatifs sont initialisés au centre du domaine d'étude, et sont entraînés dans la direction normale à la paroi adhérente. Quand le dipôle se trouve à proximité de la paroi, à environ $t = 0.35$, une fine couche limite est générée, dont l'épaisseur est estimée à $\delta = 1/(4\sqrt{Re})$. Au moment de l'impact, le dipôle communique de la vorticité à cette couche limite, ce qui mène à la création de nouveaux tourbillons dont la vorticité est de signe opposé à celle des monopôles. Deux nouveaux dipôles se forment ensuite à partir des monopôles et des structures éjectées de la paroi. Ces derniers suivent une trajectoire curviligne et vont impacter la paroi une seconde fois à environ $t = 0.6$, l'intensité de cette seconde collision étant faible par rapport à la première. La difficulté principale pour les codes de calculs réside dans la capture précise de la première collision, qui induit de forts gradients de vitesse dus à la communication de vorticité du dipôle à une couche limite peu épaisse.

4.1.2 Etude de convergence en maillage

Cette section se focalise sur l'étude de la précision de la méthode DG pour le cas du rebond tourbillonnaire, en considérant dans un premier temps une série de maillages cartésiens uniformes. Les calculs sont réalisés en utilisant des précisions spatiales de second et troisième ordre. La taille de maille h est ici exprimée en fonction de l'épaisseur de couche limite δ . Les calculs sont détaillés dans le Tableau 4.1, les données de Keetels *et al.* [71] constituant la référence pour ce cas test.

Calcul	#d.d.l.	#Eléments	h	Flux numérique
DG 96p1	192^2	96^2	$\frac{8}{3}\delta$	LLF $k_2 = 0.1$
DG 192p1	384^2	192^2	$\frac{4}{3}\delta$	LLF $k_2 = 0.1$
DG 384p1	768^2	384^2	$\frac{2}{3}\delta$	LLF $k_2 = 0.1$
DG 576p1	1152^2	576^2	$\frac{4}{9}\delta$	LLF $k_2 = 0.1$
DG 64p2	192^2	64^2	4δ	LLF $k_2 = 0.1$
DG 128p2	384^2	128^2	2δ	LLF $k_2 = 0.1$
DG 256p2	768^2	256^2	δ	LLF $k_2 = 0.1$
DG 384p2	1152^2	384^2	$\frac{2}{3}\delta$	LLF $k_2 = 0.1$
Keetels et al.	2048×1024	-	-	-

TABLE 4.1 – Détail des calculs DG réalisés pour la convergence en maillage, cas du rebond tourbillonnaire à $Re = 1000$.

L'évolution des quantités moyennes est représentée sur la Figure 4.1. Ces résultats montrent que les discrétisations DG d'ordre 2, sur les deux maillages les plus grossiers, ne permettent pas une représentation précise du phénomène de collision. Les trois quantités représentées ici sont clairement sous-estimées, ce qui traduit un comportement dissipatif qui s'exprime avant même la collision du dipôle avec la paroi adhérente. Nous retrouvons des résultats cohérents à l'ordre 2 à partir du maillage associé à 384^2 d.d.l. La représentation des iso-contours de vorticité sur la Figure 4.2, tracés à l'instant $t = 0.5$, confirment le niveau de corrélation très faible entre les calculs sur les grilles lâches et la solution de référence. Cependant, les discrétisations sur maillages plus fins amènent une représentation acceptable des structures tourbillonnaires.

Concernant les calculs au troisième ordre, nous voyons à partir de l'évolution des quantités moyennes montrées sur la Figure 4.1 que toutes les discrétisations représentent de façon acceptable la physique de l'écoulement. Nous observons une légère déviation au niveau de l'évolution d'énergie cinétique après la première collision pour la discrétisation la plus grossière. Nous observons également une sous-estimation du second pic d'entrophie, ce qui est révélateur d'une représentation incomplète de la seconde collision. La physique de l'écoulement est très bien représentée par les discrétisations plus fines. Nous observons notamment que la discrétisation 384p2 fournit des résultats identiques au calcul spectral, concernant l'évolution des trois quantités considérées. La Figure 4.2 montre que toutes les discrétisations

DG au troisième ordre fournissent une représentation des tourbillons comparable à la solution spectrale.

La bonne représentation de la collision semble dépendre fortement de la taille du premier élément à la paroi. Pour illustrer cet aspect, nous avons tracé sur la Figure 4.3 les contours de vorticité à $t = 0.35$, pour les quatre discrétisations DG à l'ordre 3. Concernant les calculs marginalement résolus, nous observons la présence d'extrema de vorticité de nature purement numérique concentrés sur le bord supérieur du premier élément. Ces artefacts disparaissent quand la taille de maille est réduite, ou encore quand les tourbillons impactants et la couche limite sont capturés dans deux éléments différents. Un critère pour obtenir une solution cohérente serait donc de choisir une taille de maille $h < \delta$, dans le cas de discrétisations au 3  me ordre.

La sous-section suivante présente une analyse du comportement de discrétisations aux ordres plus élevés, pour déterminer si le raffinement en p peut se substituer au raffinement en h quand nous considérons un maillage grossier.

4.1.3 Etude de convergence en ordre de précision

Nous étudions dans cette section l'influence du degré de polynôme p sur la représentation de la collision à partir d'une grille de calcul choisie arbitrairement grossière. Le maillage est composé de 64^2 éléments uniformes, avec une taille de maille associée $h = 4\delta$. Nous avons pu observer que cette grille de calcul mène à des résultats peu satisfaisants quand les ordres 2 ou 3 sont considérés. Nous cherchons ici à savoir si l'augmentation du degré de polynôme peut améliorer les résultats dans ce cas. Le détail des calculs est présenté sur le Tableau 4.2.

Calcul	Ordre($p + 1$)	#d.d.l.	#El��ments	Flux numérique
DG $p2$	3	192^2	64^2	LLF $k_2 = 0.1$
DG $p3$	4	256^2	64^2	LLF $k_2 = 0.1$
DG $p5$	6	384^2	64^2	LLF $k_2 = 0.1$
DG $p6$	7	448^2	64^2	LLF $k_2 = 0.1$

TABLE 4.2 – Détail des calculs DG pour l'étude sur le degré de polynômes, cas du rebond tourbillonnaire à $Re = 1000$.

La Figure 4.4 montre l'évolution temporelle des quantités moyennes pour 4 calculs DG avec différents degrés de polynôme. Nous voyons qu'une augmentation de l'ordre sur un maillage fixé s'accompagne d'une meilleure représentation des trois quantités considérées. Cependant, la convergence vers la solution de référence semble être plus lente que le raffinement en h en considérant un degré de polynôme fixé, comme montré dans la section 4.1.2.

Comme nous pouvons le voir sur la Figure 4.5, les zones de vorticité non-physiques dues à la taille importante des éléments de paroi sont réduites quand l'ordre d'approximation est

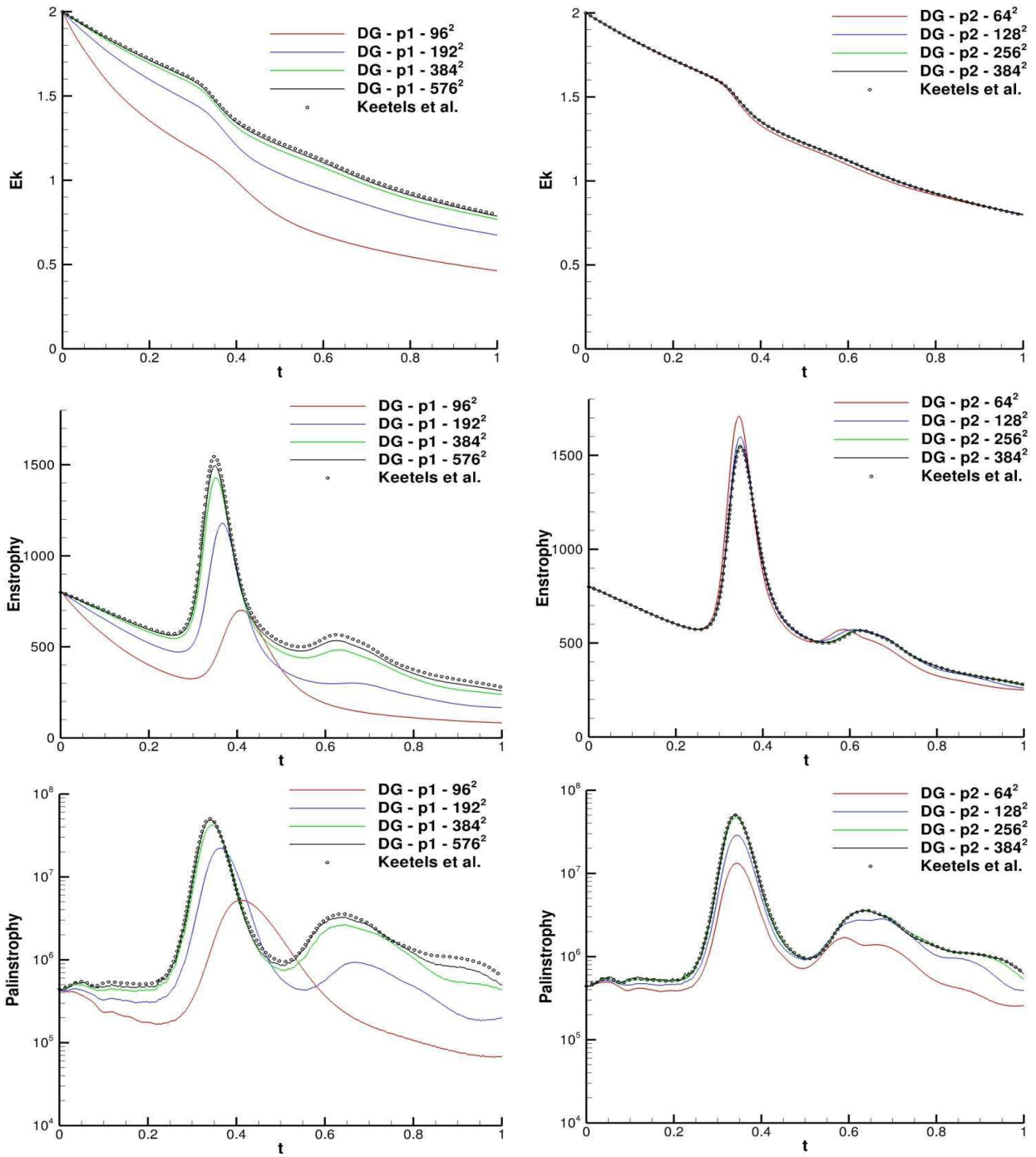


FIGURE 4.1 – Evolutions temporelles de l'énergie cinétique, de l'enstrophie et de la palinstrophie pour la convergence en maillage de l'étude du rebond tourbillonnaire à $Re = 1000$.

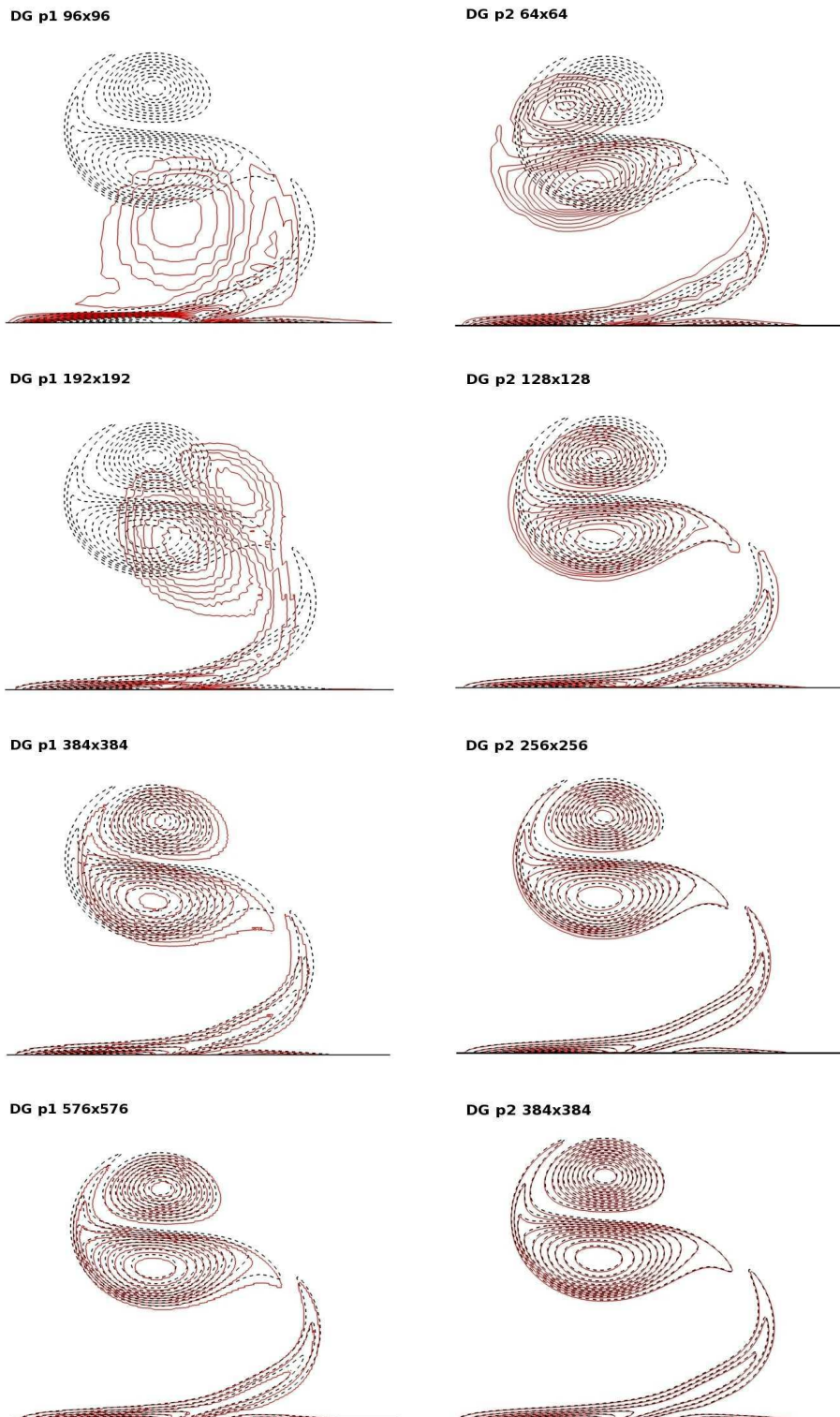


FIGURE 4.2 – Contours de vorticité à $t = 0.5$. Lignes rouges solides : calculs DG ; ligne noire pointillée : solution de référence de Keetels *et al.* ; ligne noire solide : paroi à $x = +h$.

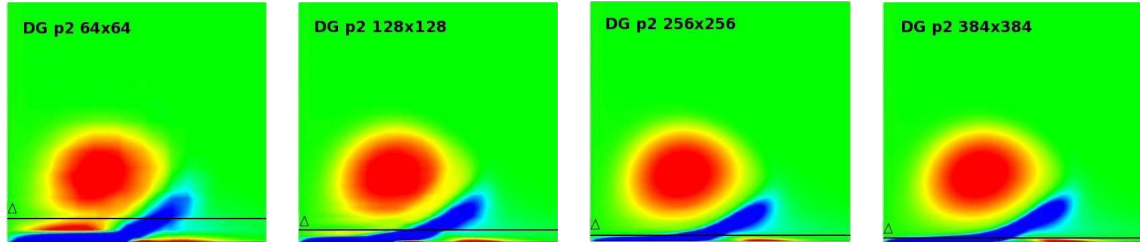


FIGURE 4.3 – Contours de vorticité $t = 0.35$ pour les discrétisations DG au troisième ordre avec différentes tailles de maille. La ligne horizontale noire représente la frontière supérieure du premier élément à la paroi.

augmenté. Néanmoins, la comparaison des iso-surfaces de vorticité entre les Figures 4.5 et 4.3 suggère que le raffinement en h proche de la paroi est plus efficace que le raffinement en p pour la capture de la collision. Par exemple, les calculs $64p5$ et $128p2$ fournissent des résultats qualitativement très proches avec un nombre de degrés de liberté équivalent et un net avantage pour la discrétisation $128p2$ concernant le temps de calcul (voir à ce sujet l’analyse réalisée en section 4.2.2). Malgré tout, les discrétisations DG d’ordre élevé sur maillage grossier sont robustes tout en proposant une représentation acceptable de phénomènes physiques différents dans un seul élément. Les résultats présents tendent à suggérer l’importance du raffinement en h proche des parois, quel que soit l’ordre considéré. Nous cherchons donc dans la sous-section suivante à obtenir une résolution optimale du phénomène en agissant sur le raffinement en taille de maille h et sur le degré de polynôme p .

4.1.4 Maillages non-uniformes

Cette section vise à comparer des calculs DG avec et sans raffinement de la taille de maille en proche paroi. Nous considérons deux cas détaillés dans le Tableau 4.3. La discrétisation avec maillage étiré associe une taille de maille particulièrement lâche à un ordre d’approximation élevé, menant à la définition d’un nombre total de degrés de liberté faible devant celui du calcul spectral de référence.

Comme nous pouvons le voir sur les Figures 4.6 et 4.7, la discrétisation DG sur maillage raffiné à la paroi est plus précise que celle définie à l’aide d’un maillage uniforme, malgré une réduction d’un facteur quatre du nombre de degrés de liberté. Ces figures montrent également que les résultats du cas DG $p5$ sur la grille raffinée sont comparables à ceux du calcul de référence spectral, avec là encore une importante différence de nombre des degrés de liberté entre les deux calculs. Ceci confirme qu’un ajustement des paramètres hp permet de réduire considérablement le nombre de degrés de liberté tout en conservant une précision quasi-spectrale.

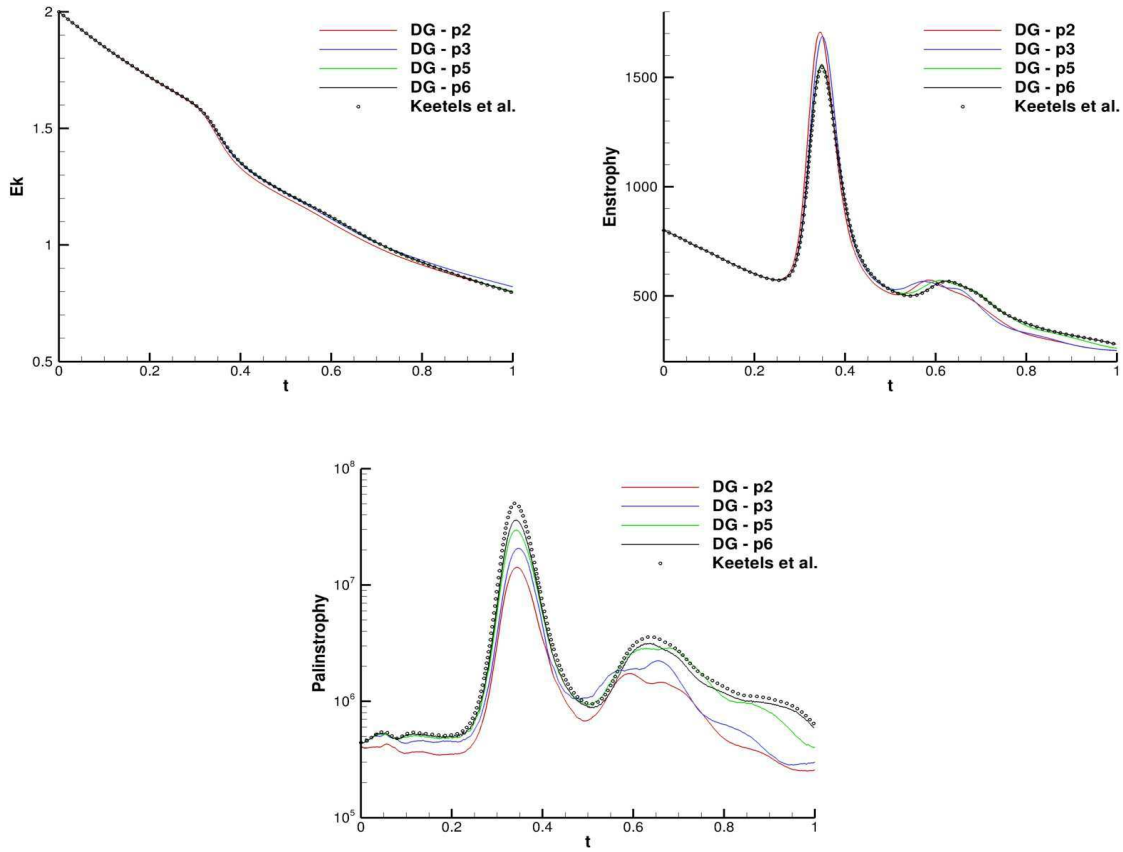


FIGURE 4.4 – Evolutions temporelles de l'énergie cinétique, de l'enstrophie et de la palinstrophie pour la convergence en ordre de l'étude du rebond tourbillonnaire à $Re = 1000$.

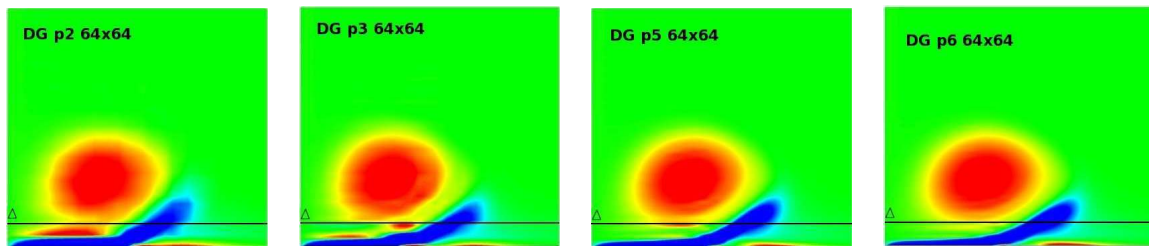


FIGURE 4.5 – Contours de vorticité à $t = 0.35$ pour différents ordres en considérant une taille de maille fixe. La ligne horizontale noire représente la frontière supérieure du premier élément à la paroi.

Calcul	Ordre ($p + 1$)	#Eléments	#d.d.l.	Δx_1	Maillage
DG $p5$	6	64^2	384^2	4δ	Uniforme
DG $p5$	6	32^2	192^2	2.5δ	Etiré en x
Keetels <i>et al.</i>	-	-	2048×1024	-	-

TABLE 4.3 – Détail des calculs DG sur maillages uniforme et raffiné à la paroi pour le cas du rebond tourbillonnaire.

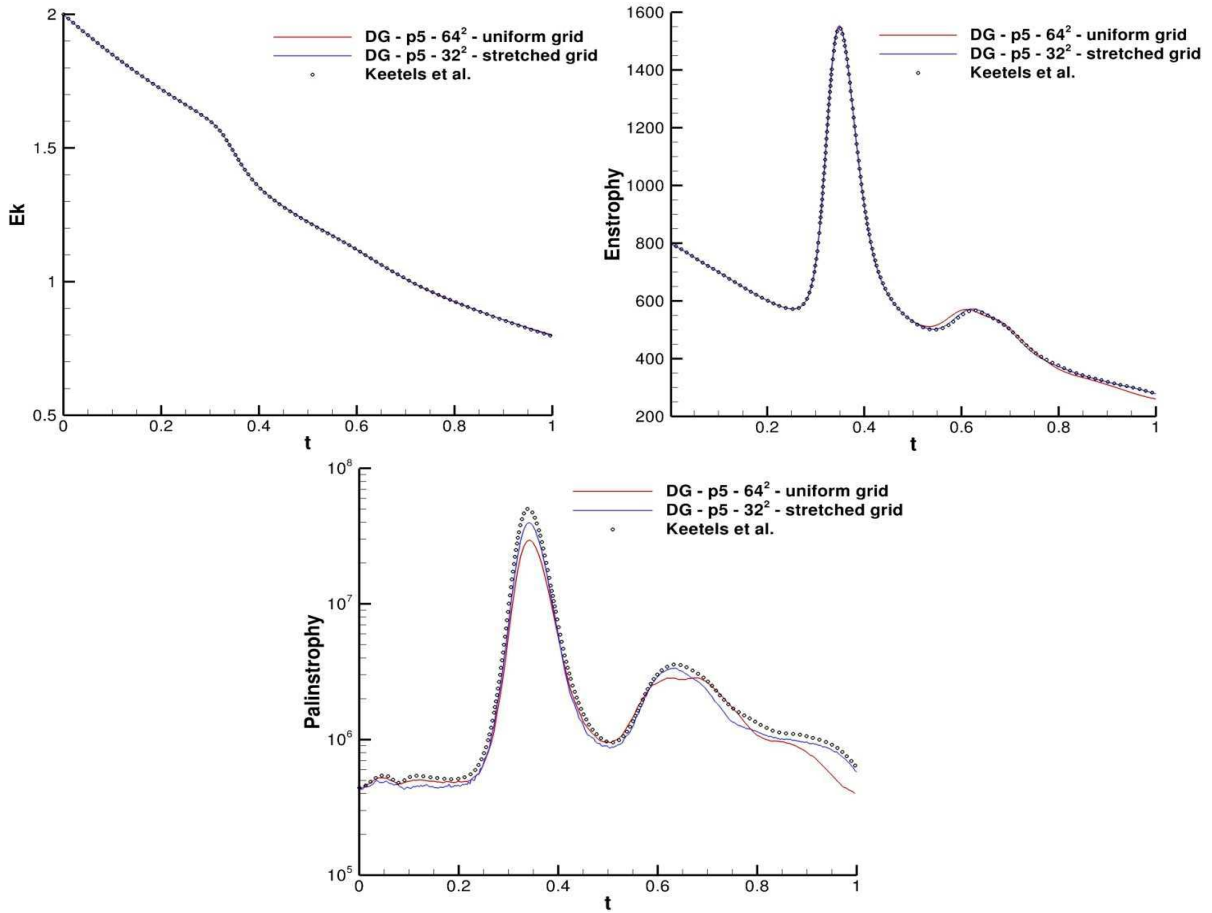


FIGURE 4.6 – Evolutions temporelles des quantités moyennes pour la comparaison des maillages raffiné et uniforme, cas du rebond tourbillonnaire à $Re = 1000$.

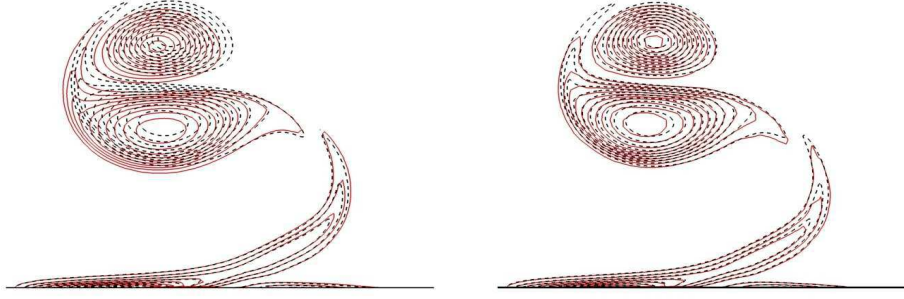


FIGURE 4.7 – Iso-contours de vorticité à $t = 0.5$ pour la comparaison des maillage uniforme (gauche) et raffiné (droite), cas du rebond tourbillonnaire à $Re = 1000$.

4.2 Vortex de Taylor-Green

4.2.1 Description du problème

Le vortex de Taylor-Green (TGV) est un problème modèle pour l'étude de la turbulence en décroissance libre dans un domaine cubique périodique. Ce cas présente des caractéristiques présentes dans la majorité des écoulements turbulents, à savoir l'anisotropie des tensions de Reynolds, la transition d'un état laminaire vers un état turbulent due à l'étirement tourbillonnaire, et la cascade énergétique des grandes vers les petites structures. Le cas TGV est souvent utilisé pour la validation de modèles ou méthodes numériques [111, 80, 121], car il présente une géométrie simple tout en proposant une physique complexe. Dans notre cas, cet écoulement est intéressant également car le profil de variables conservatives initial est connu de manière analytique, ce qui facilite grandement l'étape de projection de la condition initiale dans l'espace fonctionnel.

Initialisation

Les grandes échelles sont initialisées dans le domaine cubique $\Omega = [-\pi L, \pi L]^3$, à l'aide du profil de vitesse analytique suivant :

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, 0) &= V_0 \sin(x/L) \cos(y/L) \cos(z/L) \\ v(\mathbf{x}, 0) &= -V_0 \cos(x/L) \sin(y/L) \cos(z/L) \\ w(\mathbf{x}, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Dans l'espace de Fourier, ce profil correspond à une injection d'énergie sur le mode sphérique $k_i = \frac{2}{L}$ pour une boîte de dimension $2\pi L$ dans chaque direction.

Ce profil est adapté à l'initialisation des variables pour la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles. Pour les écoulements compressibles, on utilise le profil de pression analytique vérifiant :

$$p(\mathbf{x}, 0) = p_0 + \frac{\rho_0 V_0^2}{16} (\cos(2x/L) + \cos(2y/L)) (\cos(2z/L) + 2).$$

Ce champ de pression vérifie l'équation de Poisson reliant la pression aux dérivées spatiales de vitesse pour un écoulement incompressible. Nous considérons un champ de masse volumique initial constant, soit $\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0$. Le nombre de Reynolds est défini par $Re = \rho_0 V_0 L / \mu_0$ et p_0 est défini à l'aide du nombre de Mach $M_0 = V_0 / c_0$ où c_0 est la vitesse du son initiale. Le nombre de Mach est fixé à $M_0 = 0.1$, permettant de comparer les résultats aux calculs de référence incompressibles. Nous avons une valeur initiale d'énergie cinétique $E_0 = 0.125 V_0^2$ et les fluctuations de vitesse ont une valeur $u_{rms} = v_{rms} = 0.3536 V_0$ et $w_{rms} = 0$. La valeur correspondante du nombre de Mach associé aux fluctuations de vitesse est $M_{rms} = u_{rms} / c_0 = 3.536 \times 10^{-2}$.

La vitesse du son étant grande devant la vitesse du fluide, le pas de temps pour l'avancement explicite doit permettre la capture des ondes acoustiques. On peut donc prévoir que la dynamique tourbillonnaire qui nous intéresse ici sera temporellement sur-résolue, dans le sens où les structures turbulentes sont associées à un temps caractéristique significativement plus long que l'acoustique. Nous nous concentrons donc uniquement sur l'analyse de la précision spatiale pour la représentation de la turbulence. Les maillages considérés ici sont cartésiens.

Nous évaluons au cours du temps l'énergie cinétique turbulente et l'enstrophie moyennes, définies par

$$E_k = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}}{2} d\Omega, \quad \xi = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}}{2} d\Omega.$$

où $\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{U}$ est le vecteur de vortacité.

Considérations physiques

Le problème du TGV a en premier lieu été proposé par Taylor *et al.* [116] et étudié en détail par Brachet *et al.* [16, 17], qui ont réalisé des DNS de cet écoulement à divers nombres de Reynolds. Cet écoulement présente une période transitoire suivie d'une turbulence développée dont l'énergie décroît au cours du temps. Concernant l'initialisation choisie ici, le champ de vitesse reste anisotrope au début du calcul, et peut éventuellement tendre vers l'isotropie si le nombre de Reynolds considéré est suffisamment important. Au début de la simulation (jusqu'à environ $t = 3$), un étirement des tourbillons initiaux est observé, menant à la destabilisation de l'écoulement et à la transition vers la turbulence. On note l'apparition de petites structures aux alentours de $t = 4$, dont le développement induit une augmentation rapide de l'enstrophie moyenne de l'écoulement.

4.2.2 Etude à bas nombre de Reynolds

En premier lieu, nous considérons des calculs DG du TGV à $Re = 500$ visant à étudier l'intérêt de la montée en ordre de précision pour la représentation de la turbulence en décroissance libre. Nous fixons le nombre de degrés de liberté pour toutes les simulations, et étudions plusieurs discrétisations en faisant varier le degré de polynôme p et la taille de maille h de telle manière à garder constant $h \times (p + 1)$. Les degrés considérés sont $p = 1, 2, 3, 5, 7$. Nous avons également réalisé un calcul de référence à l'aide du code pseudo-spectral (PS) Fergus [19] basé sur une résolution en modes de Fourier. Le détail des calculs est présenté dans le Tableau 4.4.

Calcul	Méthode	Ordre ($p + 1$)	#d.d.l. / #Eléments	Flux numérique
DG 48p1	DG	2	$96^3 / 48^3$	LLF $k_2 = 0.1$
DG 32p2	DG	3	$96^3 / 32^3$	LLF $k_2 = 0.1$
DG 24p3	DG	4	$96^3 / 24^3$	LLF $k_2 = 0.1$
DG 16p5	DG	6	$96^3 / 16^3$	LLF $k_2 = 0.1$
DG 12p7	DG	8	$96^3 / 12^3$	LLF $k_2 = 0.1$
PS 128	PS	-	128^3	-

TABLE 4.4 – Détail des calculs réalisés pour le cas TGV à $Re = 500$.

La Figure 4.8 représente l'évolution temporelle de l'énergie cinétique et de l'entrophie. Nous voyons ici que les calculs DG représentent précisément l'évolution d'énergie cinétique, mis à part le calcul au second ordre qui présente un caractère dissipatif marqué. L'évolution d'entrophie est bien représentée par tous les calculs jusqu'à $t = 2$. Les calculs aux ordres 2 et 3 montrent ensuite une évolution erronée de cette quantité, ce qui est caractéristique d'une mauvaise représentation des petites échelles qui contribuent beaucoup au montant total de vorticité présent dans l'écoulement. Les discrétisations d'ordre plus élevé présentent un bon accord avec la solution de référence, ce qui suggère une bonne représentation de la dynamique des plus petits tourbillons.

Pour évaluer la représentation de l'aspect multi-échelles de l'écoulement par les discrétisations DG, les spectres d'énergie 3D sont calculés. Pour ce faire, les solutions DG sont projetées dans l'espace physique sur une grille uniforme composée de 96^3 points. Les spectres présentés sur la Figure 4.9 sont tracés à l'instant correspondant au maximum d'entrophie, quand les échelles turbulentes sont développées jusqu'aux plus hautes fréquences représentées par la grille de calcul. La comparaison des spectres DG avec le spectre de référence montre que l'augmentation du degré de polynôme s'accompagne d'une meilleure représentation du contenu énergétique à haut nombre d'onde. Ceci confirme le confinement de la dissipation numérique à des grands nombres d'onde quand l'ordre est élevé.

Les coûts de calcul associés aux discrétisations DG sont présentés dans le Tableau 4.5. Le temps de calcul du cas 48p1 est choisi comme temps de référence. On peut voir que l'aug-

mentation de l'ordre s'accompagne d'un accroissement considérable du coût de calcul. En particulier, les coûts associés aux discrétisations d'ordre 6 et 8 sont plus importants d'un à deux ordres de grandeur par rapport au calcul à l'ordre 2. La discrétisation $24p3$ semble présenter un bon compromis entre coût et précision. Pour démontrer l'intérêt de la montée en ordre pour ce type de configuration, nous avons réalisé un autre calcul à l'ordre 2 avec 64^3 éléments ($64p1$), qui est associé à un nombre de degrés de liberté plus important. Le coût de calcul de cette nouvelle discrétisation est équivalent au cas $24p3$. Les résultats présentés sur la Figure 4.10 montrent que la discrétisation au quatrième ordre reste plus précise que celle au second ordre pour un coût de calcul équivalent. Ce résultat confirme l'utilité de l'ordre élevé pour obtenir une représentation précise des phénomènes turbulents à coût réduit.

La section suivante propose une étude du TGV à un nombre de Reynolds important présentant un développement des échelles turbulentes sur une gamme étendue de nombre d'ondes.

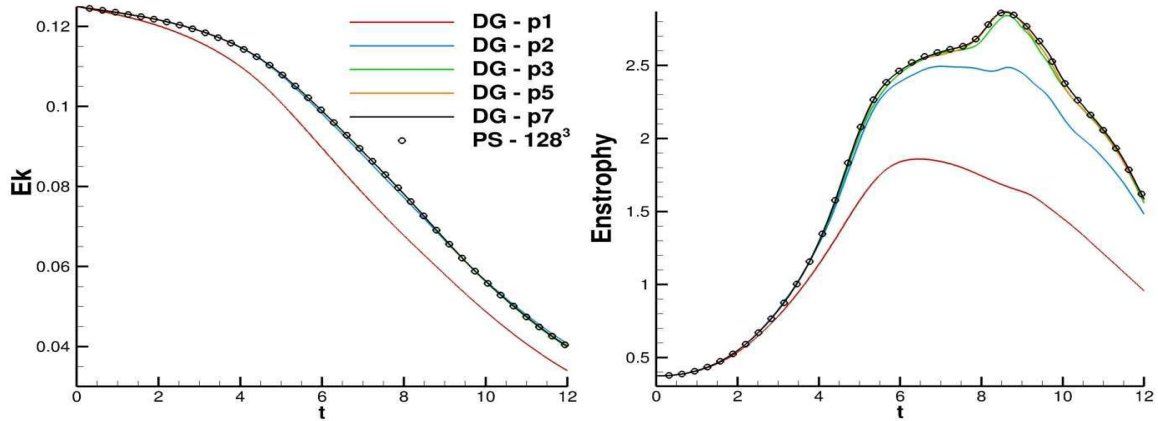


FIGURE 4.8 – Evolutions temporelles de l'énergie cinétique et de l'enstrophie, cas TGV à $Re = 500$.

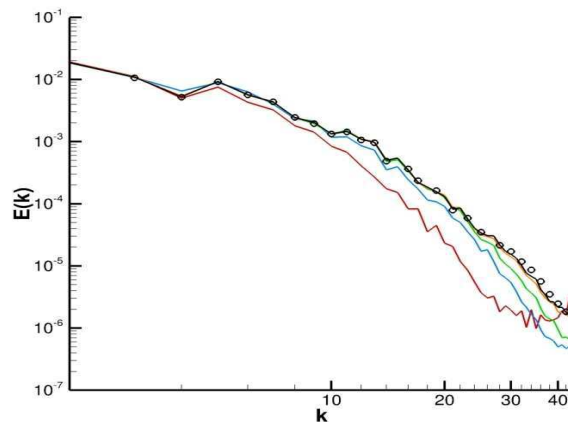


FIGURE 4.9 – Spectres d'énergie à $t = 9$, cas TGV à $Re = 500$. Légende : voir Figure 4.8.

Calcul	Ordre ($p + 1$)	Δt	Temps CPU
DG 48p1	2	2×10^{-3}	t_{ref}
DG 32p2	3	2×10^{-3}	$2t_{ref}$
DG 24p3	4	2×10^{-3}	$4t_{ref}$
DG 16p5	6	1.5×10^{-3}	$14.5t_{ref}$
DG 12p7	8	1×10^{-3}	$52t_{ref}$

TABLE 4.5 – Temps CPU pour les calculs DG du cas TGV à $Re = 500$.

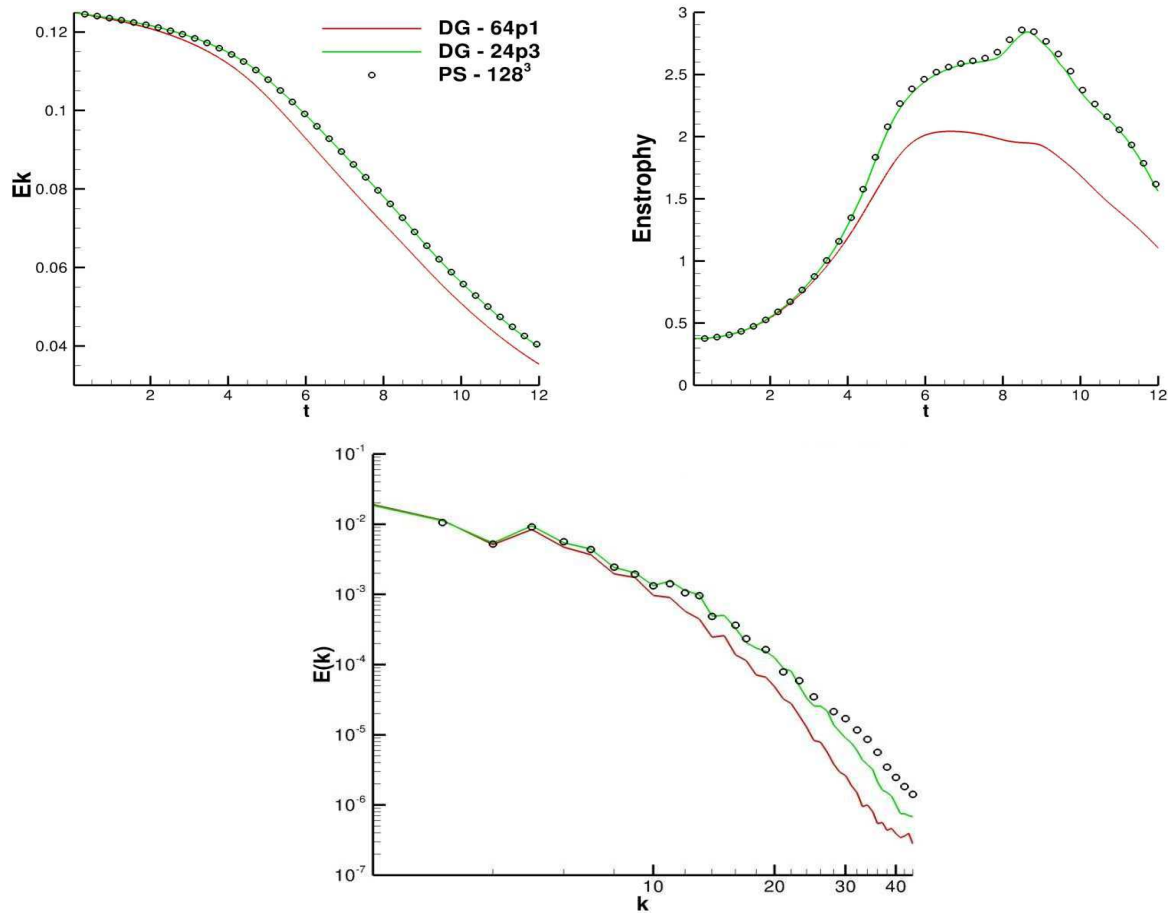


FIGURE 4.10 – Evolutions temporelles des quantités moyennes et spectres d'énergie à $t = 9$ pour la comparaison entre calculs DG au second et quatrième ordre à temps CPU égal. Cas TGV à $Re = 500$.

4.2.3 Etude à nombre de Reynolds modéré

Nous considérons maintenant l'écoulement du TGV à un nombre de Reynolds de 1600. Cette configuration présente une rangée inertielle conséquente et nécessite de fait un grand nombre de degrés de liberté par rapport au cas $Re = 500$ pour la représentation exhaustive du spectre des échelles turbulentes. Concernant la méthode pseudo-spectrale de Fourier, 256^3 d.d.l. sont nécessaires pour représenter toute la dynamique de l'écoulement [16]. Quatre calculs DG ont été réalisés, et sont détaillés dans le Tableau 4.6. Nous fixons ici l'ordre d'approximation à 4 et considérons plusieurs tailles de maille h .

Calcul	Méthode	Ordre ($p + 1$)	#d.d.l. / #Eléments	Flux numérique
DG 48p3	DG	4	$192^3 / 48^3$	LLF $k_2 = 0.1$
DG 64p3	DG	4	$256^3 / 64^3$	LLF $k_2 = 0.1$
DG 96p3	DG	4	$384^3 / 96^3$	LLF $k_2 = 0.1$
DG 32p5	DG	6	$192^3 / 32^3$	LLF $k_2 = 0.1$
PS 256	PS	-	256^3	-

TABLE 4.6 – Détail des calculs réalisés pour l'étude du TGV à $Re = 1600$.

La Figure 4.11 présente l'évolution de l'énergie cinétique ainsi que de l'enstrophie pour les calculs DG réalisés. Pour l'ensemble des discrétisations DG considérées, les résultats sont en bon accord avec la solution spectrale de référence, en particulier concernant la période pendant laquelle les échelles de l'écoulement se développent. On note une sous-estimation du pic d'enstrophie pour la discrétisation la plus grossière DG 48p3.

La Figure 4.11 présente également les spectres d'énergie 3D à un instant proche du pic d'enstrophie. Les discrétisations DG représentent fidèlement le contenu énergétique associé aux bas nombres d'ondes, jusqu'à $k \approx 50$, ce qui explique le bon accord trouvé pour l'évolution de l'énergie cinétique moyenne. Le raffinement en maillage agit sur la représentation des phénomènes associés aux plus hauts nombres d'onde. En particulier, la discrétisation la plus grossière DG 48p3 amortit une part importante du contenu énergétique des petites échelles, ce qui explique la mauvaise représentation du pic d'enstrophie. La diminution de la taille des éléments pour les discrétisations plus fines permet de représenter fidèlement les petites échelles.

Notons que le calcul de référence spectral est sur-intégré par rapport au calcul des termes convectifs, ce qui amène la définition de 3/2 fois plus de points dans chaque direction de l'espace. Le nombre de points d'intégration est donc équivalent pour les discrétisations PS 256 et DG 96p3, pour une précision spatiale équivalente. Le calcul DG 32p5 est associé à un spectre d'énergie comparable à celui de la discrétisation 64p3, ce qui confirme la capacité de l'ordre élevé à représenter plus fidèlement les petites échelles de l'écoulement par rapport à des ordres plus faibles.

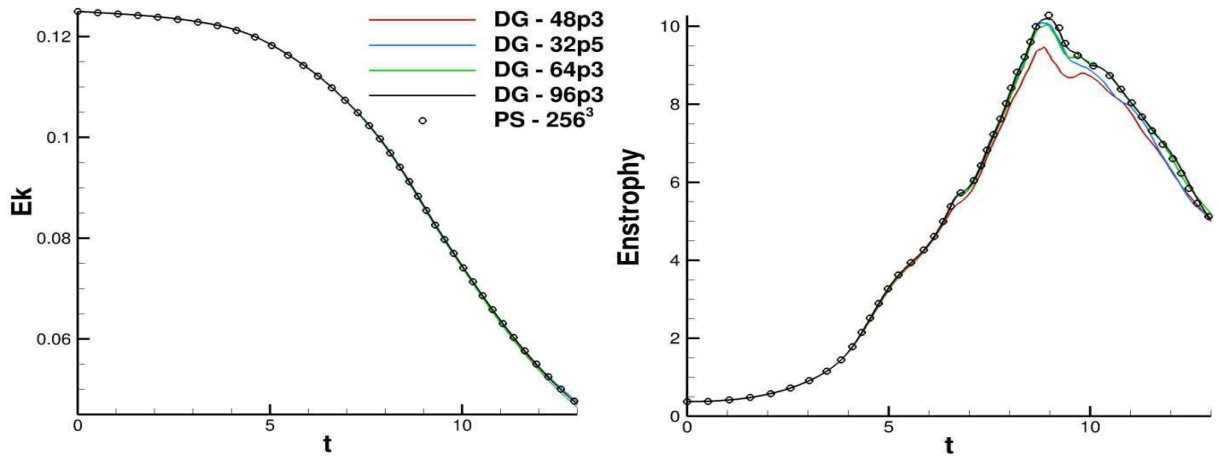


FIGURE 4.11 – Evolutions temporelles de l'énergie cinétique et de l'enstrophie pour le cas TGV à $Re = 1600$.

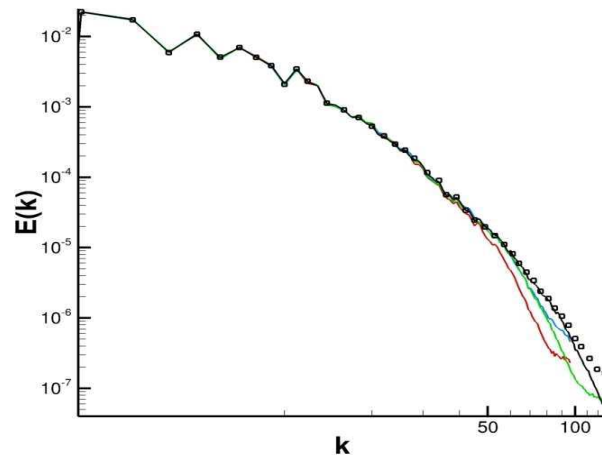


FIGURE 4.12 – Spectres d'énergie à $t = 8.1$ pour le cas TGV à $Re = 1600$. Voir légende de la Figure 4.11.

4.3 Canal plan turbulent

4.3.1 Description du problème

Le canal plan turbulent est une configuration d'intérêt pour l'étude de la turbulence se développant en proche paroi. La mise en oeuvre de ce cas d'étude est simple, du fait de la géométrie et des conditions limites qui amènent à l'auto-entretien de la turbulence dans le canal. Depuis les premières études de référence de Moser *et al.* [95] pour le régime incompressible et Coleman *et al.* [32, 60] pour le régime compressible, la configuration du canal plan turbulent a souvent été utilisée pour la validation de codes discrétisant les équations de Navier-Stokes [81, 94, 79]. Concernant les études impliquant la méthode DG, Wei *et al.* [127] ont réalisé des simulations sur-résolues de l'écoulement du canal à différents nombres de Mach avec un ordre de précision de 10. Collis *et al.* [34] ont réalisé des DNS du canal avec la méthode DG, mais à faible nombre de Reynolds $Re_\tau = 100$. Nous nous concentrons ici sur des calculs compétitifs en terme de nombre de degrés de liberté, et examinons les profils moyen et fluctuant des quantités d'intérêt.

Initialisation

Cette configuration représente un écoulement turbulent évoluant entre deux parois adhérentes. La turbulence est statistiquement homogène dans les directions longitudinale et transverse, et présente un caractère inhomogène dans la direction normale à la paroi. Le domaine d'étude est défini par $\Omega = [0, 4\pi h] \times [-h, +h] \times [0, \frac{4}{3}\pi h]$. L'écoulement est considéré périodique dans les directions x et z , et des conditions limites de parois isothermes sont appliquées sur les plans (x, z) en $y = \pm h$. Les profils de vitesse et de température initiaux sont ceux présentés dans la section 2.2.3. Une force volumique est appliquée sur l'équation de quantité de mouvement dans la direction x , et caractérise le gradient de pression qui est le moteur de l'écoulement pour cette configuration. Nous définissons l'opérateur de moyenne $\langle \cdot \rangle$, qui représente la moyenne à la fois temporelle et spatiale sur les plans horizontaux (x, z) .

Les composantes de vitesse initiale dans la direction normale à la paroi et transverse sont perturbées à l'aide d'une fonction aléatoire de forte amplitude, de manière à provoquer la transition vers la turbulence dans le canal. La masse volumique initiale est constante. Le nombre de Reynolds $Re_m = \rho_w U_m h / \mu_w$ est basé sur la vitesse débitante et la demi-hauteur du canal. Le nombre de Mach $M_\infty = U_m / \sqrt{\gamma r T_w}$ est défini à partir de la température à la paroi, qui est imposée à une valeur constante au cours du calcul. Après un régime transitoire, l'écoulement devient indépendant des conditions initiales, et atteint un état statistiquement stationnaire. On peut ensuite collecter les statistiques sur une période de temps d'environ $100 h / U_m$.

4.3.2 Régime quasi-incompressible

Nous considérons tout d’abord des simulations du canal plan à bas nombre de Mach, pour déterminer la capacité de la méthode DG à représenter les caractéristiques de la turbulence de proche paroi sans effets de compressibilité. Les simulations de référence pour le canal en régime incompressible sont celles réalisées par Kim *et al.* [72] et Moser *et al.* [95]. Leur approche numérique est basée sur une méthode spectrale exprimant la solution en tant qu’une combinaison de modes de Fourier dans les directions périodiques et de polynômes de Tchebycheff dans la direction normale à la paroi. La distribution des points de collocation pour les polynômes de Chebyshev permet notamment de définir des points de calcul très proches de la paroi. Une étape de dealiasing est réalisée à l’aide de la règle des 3/2. Concernant la méthode DG modale, nous considérons une formule de quadrature de Gauss-Legendre avec $(p + 1)^3$ points par éléments pour l’intégration de termes non-linéaires, ce qui se révèle suffisant pour stabiliser les calculs à bas nombre de Mach. Le nombre de degrés de liberté est équivalent pour les deux calculs. Le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de friction a une valeur de $Re_\tau = 180$. Le détail des résolutions est présenté dans le Tableau 4.7. La grande taille des éléments de paroi dans le cas du calcul DG est expliquée par le fait que nous considérons six points de quadrature par élément dans la direction y pour intégrer des polynômes de degré 5.

	#d.d.l.	#Points de collocation / quadrature	Δy_1^\dagger	Flux numérique
DG $p = 5$	$126 \times 132 \times 126$	$126 \times 132 \times 126 (\approx 2.1 \times 10^6)$	5.5	LLF $k_2 = 0.1$
Moser	$128 \times 129 \times 128$	$192 \times 193 \times 192 (\approx 7.1 \times 10^6)$	0.1	LLF $k_2 = 0.1$

TABLE 4.7 – Détail des calculs pour le canal plan turbulent incompressible.

Les paramètres de l’écoulement sont présentés dans le Tableau 4.8. Nous trouvons des valeurs équivalentes du Reynolds et de la vitesse de friction entre le calcul DG et la solution de référence de Moser *et al.*

	M_∞	Re_m	Re_τ	u_τ
DG $p = 5$	0.1	2800	178.63	0.0637
Moser <i>et al.</i>	-	2793	178.12	0.0638

TABLE 4.8 – Paramètres physiques pour les calculs du canal plan turbulent incompressible.

Les Figures 4.13, 4.14 et 4.15 présentent les profils des vitesses moyenne et fluctuante, ainsi que les différentes composantes des fluctuations de vorticité. Nous trouvons un excellent accord concernant les profils de vitesse avec la solution de référence, ce qui traduit une bonne représentation des structures les plus énergétiques qui dominent la dynamique de l’écoulement. Nous observons également un bon accord pour les fluctuations de vorticité entre le calcul DG et la référence spectrale. Cela traduit la bonne représentation des structures fines

de l'écoulement. Ces résultats suggèrent que les polynômes de degré important définis dans un élément de taille grossière permettent de représenter fidèlement l'aspect multi-échelles de la turbulence se développant en proche paroi. En particulier, la capture du pic de vorticité longitudinale caractérise une bonne représentation des streaks de proche paroi, ces structures déterminant une grande part de la dynamique de l'écoulement. La Figure 4.16 présente une visualisation d'un champ instantané de la quantité Q dont les valeurs positives caractérisent les longs tubes de vorticité. Nous retrouvons l'organisation des structures tourbillonnaires propre à ce type d'écoulements (voir [40] pour une revue de l'identification des structures cohérentes). Nous voyons notamment que les structures de type hairpin sont représentées, sans présence notable d'artefacts numériques malgré la résolution relativement marginale considérée ici. Nous nous intéressons dans la prochaine section à la capacité de la méthode DG   représenter les effets de compressibilité apparaissant pour la configuration du canal plan turbulent supersonique.

Les spectres d'énergie unidimensionnels sont présentés sur les Figure 4.17 et 4.18 pour plusieurs valeurs de y^+ . Le domaine étant périodique suivants x et z , nous pouvons calculer les spectres dans ces deux directions. Les spectres de la Figure 4.17 sont calculés dans la direction x et moyennés en temps et dans la direction z . Les spectres de la Figure 4.18 sont calculés dans la direction z et moyennés en temps et dans la direction x . L'évaluation des spectres dans les deux directions montre un excellent accord avec la DNS de référence pour une gamme étendue de nombre d'ondes. L'énergie associée à toutes les composantes de vitesse est amortie pour les plus hauts nombres d'onde à partir de $k = 35$, ce qui semble correspondre à la fonction de transfert naturelle de la discrétisation DG (en effet, nous avons ici $pN/\pi \simeq 35$ dans les directions x et z).

4.3.3 Régime compressible

Nous étudions maintenant le comportement de la méthode DG pour des simulations du canal plan turbulent avec un Mach fixé à 1,5. Cette configuration correspond à celle considérée par Coleman *et al.* [32], qui a utilisé une méthode spectrale mixte Fourier/Legendre pour générer une DNS de référence. Le Tableau 4.9 présente le détail des calculs. Nous considérons une discrétisation DG à l'ordre 4 avec un nombre de degrés de liberté proche du nombre de points de collocation du calcul spectral.

	#d.d.l.	#Points de collocation / quadrature	Δy_1^+	Flux numérique
DG $p = 3$	$104 \times 92 \times 64$	$130 \times 115 \times 80 (\approx 1.2 \times 10^6)$	5.7	LLF $k_2 = 1$
Coleman <i>et al.</i>	$110 \times 90 \times 60$	$144 \times 119 \times 80 (\approx 1.37 \times 10^6)$	0.1	-

TABLE 4.9 – Détail des discrétisations pour le cas du canal plan turbulent en régime compressible.

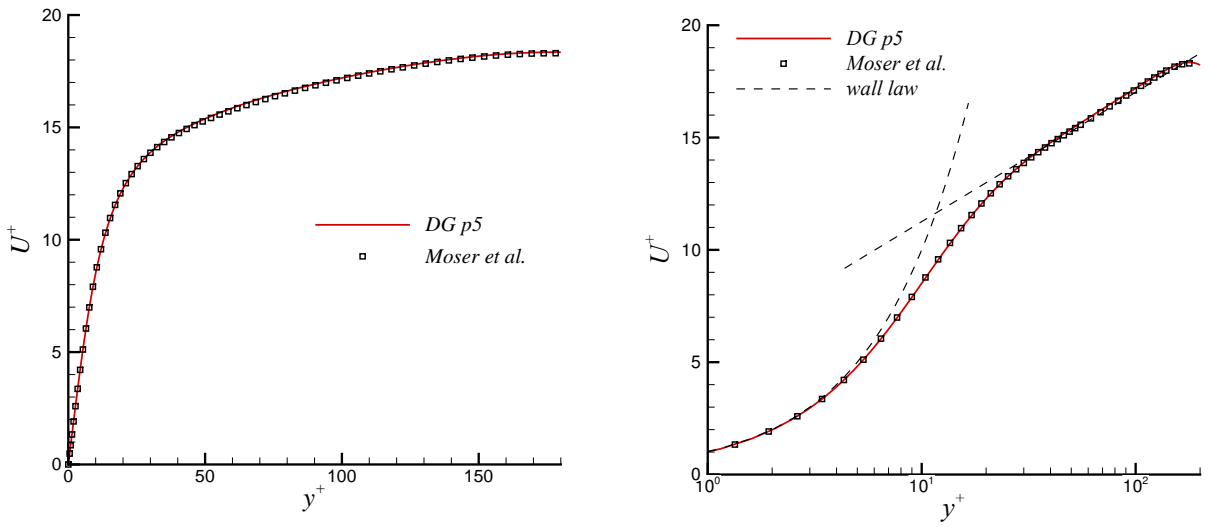


FIGURE 4.13 – Profils de vitesse moyenne pour le canal plan turbulent incompressible.

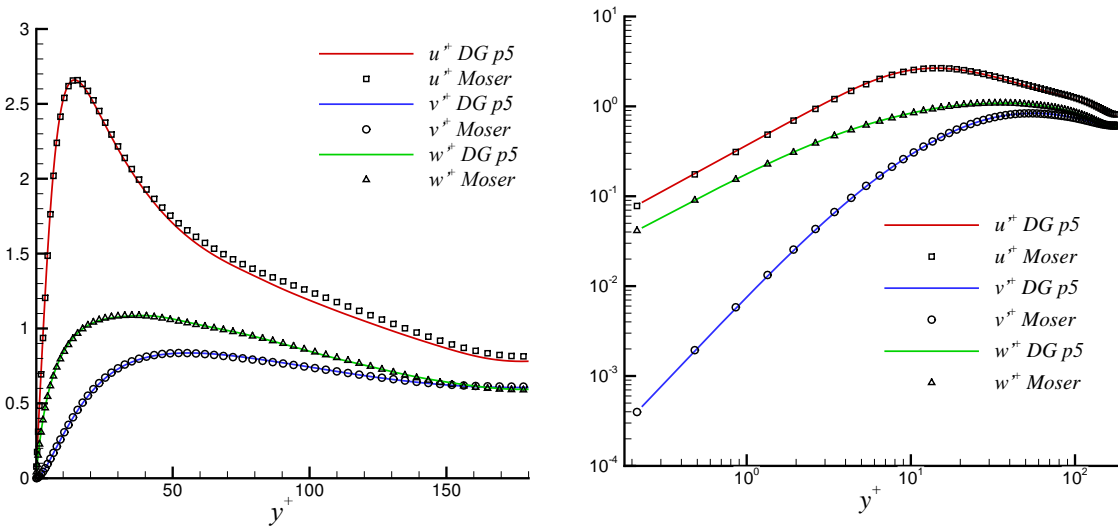


FIGURE 4.14 – Profil de vitesse fluctuante pour le canal plan turbulent incompressible.

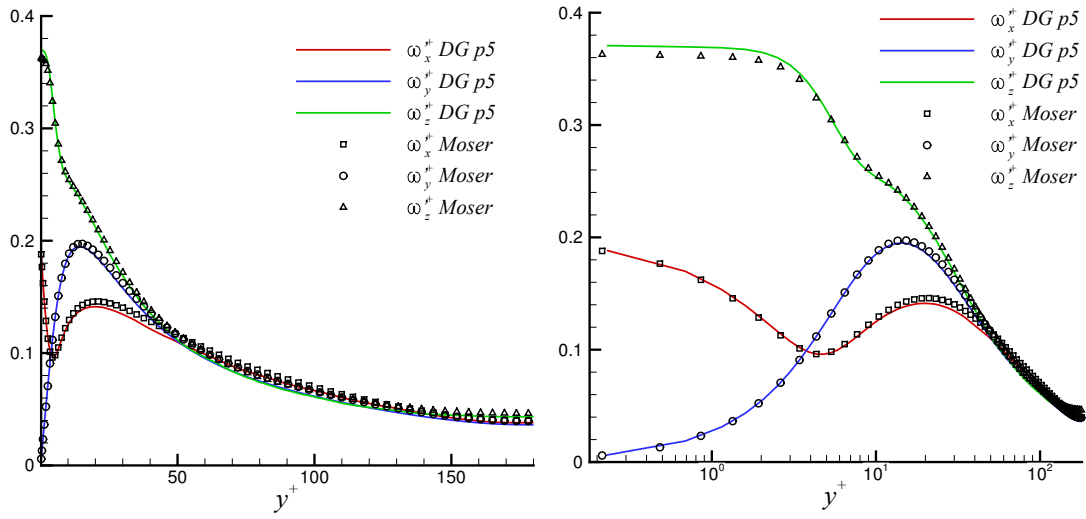


FIGURE 4.15 – Profils des fluctuations de vorticité pour le canal plan turbulent incompressible.

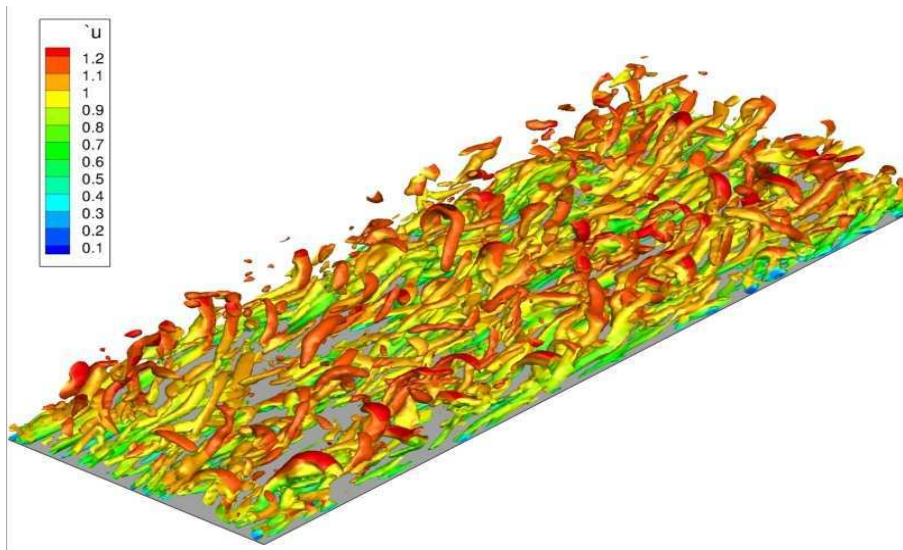


FIGURE 4.16 – Iso-surfaces de la quantité Q pour le canal plan incompressible, colorées par la composante longitudinale de vitesse.

De la même manière que pour le cas incompressible, nous trouvons un bon accord au niveau du Reynolds de friction entre le calcul DG et le calcul de référence, comme le montre le Tableau 4.10. Les profils moyen et fluctuants de vitesse, température et masse volumique montrés sur la Figure 4.19 sont particulièrement bien représentés par la discrétisation DG. Nous avons également un bon accord pour les valeurs moyennes de température et masse volumique au centre du canal, ainsi que pour la masse volumique à la paroi (voir Tableau 4.10). Les iso-surfaces positives de Q sont affichées sur la Figure 4.20, et nous pouvons voir que les structures sont plus allongées et régulières que pour le cas incompressible. Ceci correspond bien à la physique décrite par Coleman *et al.* [32], qui ont observé que la compressibilité avait tendance à renforcer la cohérence de l'écoulement. Ce comportement a également été observé dans les simulations DG de Wei *et al.* [127]. Le bon accord général entre le calcul DG et la simulation de référence suggère que la méthode DG considérée assure une bonne représentation des effets de compressibilité qui sont présents dans des configurations turbulentes haut-Mach incluant la présence de parois isothermes. La compressibilité ne semble pas impacter la précision de la méthode pour la représentation des structures turbulentes.

	M_∞	Re_τ	u_τ	T_c	ρ_c	ρ_c/ρ_w
DG $p = 3$	1.5	221.4	0.0547	1.375	0.980	0.726
Coleman <i>et al.</i>	1.5	221.6	0.0545	1.378	0.980	0.723

TABLE 4.10 – Paramètres physiques pour les calculs du canal plan turbulent en régime compressible.

4.4 Conclusions

La précision de la méthode DG pour les DNS d'écoulements turbulents a été étudiée pour trois configurations couvrant une variété de phénomènes physiques.

En premier lieu, nous avons étudié la collision d'un dipôle tourbillonnaire avec une paroi adhérente. Des analyses de convergence sur la taille de maille h et le degré de polynôme p ont montré l'intérêt de monter en ordre pour capturer précisément la physique du problème. En particulier, les discrétisations au second ordre nécessitent l'utilisation d'un grand nombre de degrés de liberté par rapport aux ordres plus élevés pour obtenir une représentation correcte de la collision. Sur des grilles cartésiennes uniformes grossières, l'augmentation en ordre s'accompagne d'une faible réduction de l'erreur par rapport à la solution de référence, qui est principalement due à la présence de différents phénomènes physiques de proche paroi qui sont alors capturés dans une seule maille. Cela souligne la nécessité d'un choix judicieux de la grille de calcul, même quand des discrétisations à l'ordre élevé sont considérées. En raffinant la grille de calcul à la paroi, nous avons pu obtenir une solution significativement meilleure par rapport à une grille uniforme, en considérant un degré de polynôme $p = 5$. La définition

de 192^2 d.d.l. s'est alors avérée suffisante pour représenter de manière exacte la collision. La réduction associée du nombre de d.d.l. par rapport à la solution spectrale de référence [71] est de l'ordre d'un facteur 60.

Les simulations du vortex de Taylor-Green ont montré la capacité des discrétisations DG à l'ordre élevé à représenter précisément les spectres d'énergie, ainsi que l'évolution temporelle des statistiques de second ordre, pour un coût en terme de degrés de liberté comparable aux méthodes spectrales. L'étude des spectres d'énergie a confirmé que la dissipation numérique est localisée aux hauts nombres d'ondes quand l'ordre d'approximation est élevé.

La méthode DG fournit également d'excellents résultats pour la représentation de la turbulence de proche paroi, comme l'ont montré les DNS du canal plan turbulent en régimes compressible et quasi-incompressible. Nous avons effectivement trouvé un très bon accord entre les profils moyens et fluctuants - concernant la masse volumique, la température, les composantes de vitesse et de vorticité - pour les calculs DG d'ordre élevé et les solutions spectrales de référence.

Nous pouvons maintenant dresser les conclusions générales de ce chapitre. Premièrement, les discrétisations DG à l'ordre élevé fournissent un niveau de détail équivalent aux méthodes spectrales pour la représentation de phénomènes turbulents variés, pour un niveau de résolution équivalent. Nous avons également constaté des différences considérables en terme de qualité des résultats entre les discrétisations d'ordre 2 et celles d'ordre supérieur. Enfin, les discrétisations DG sous-résolues fournissent de bons résultats sans produire d'artefacts numériques comme les oscillations parasites qui peuvent apparaître à l'usage d'autres types de méthodes numériques d'ordre élevé ou basées sur des schémas non dissipatifs, comme par exemple les méthodes purement spectrales ou les différences finies centrées.

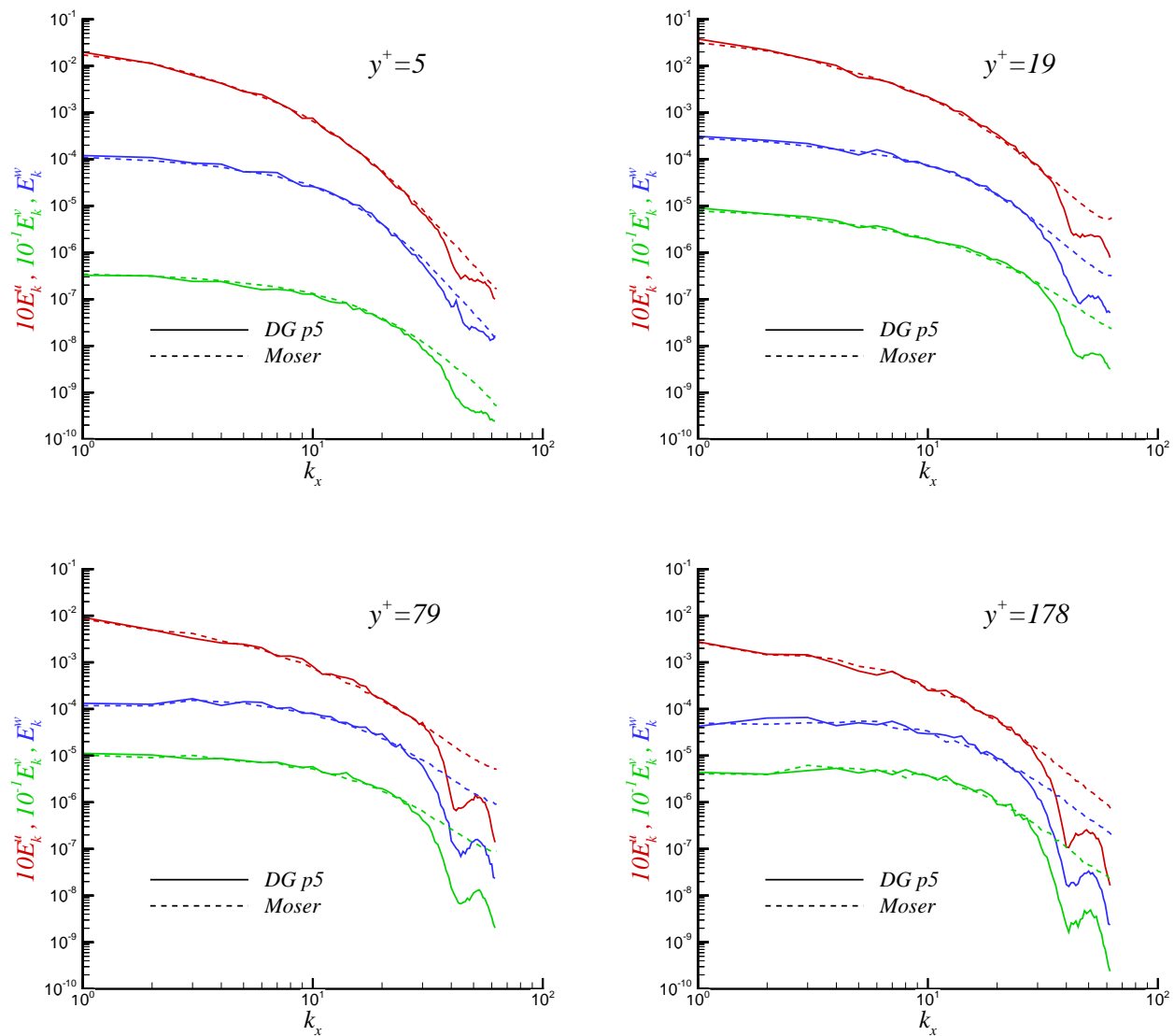


FIGURE 4.17 – Spectres d'énergie moyens 1D calculés dans la direction x pour le canal plan turbulent incompressible.

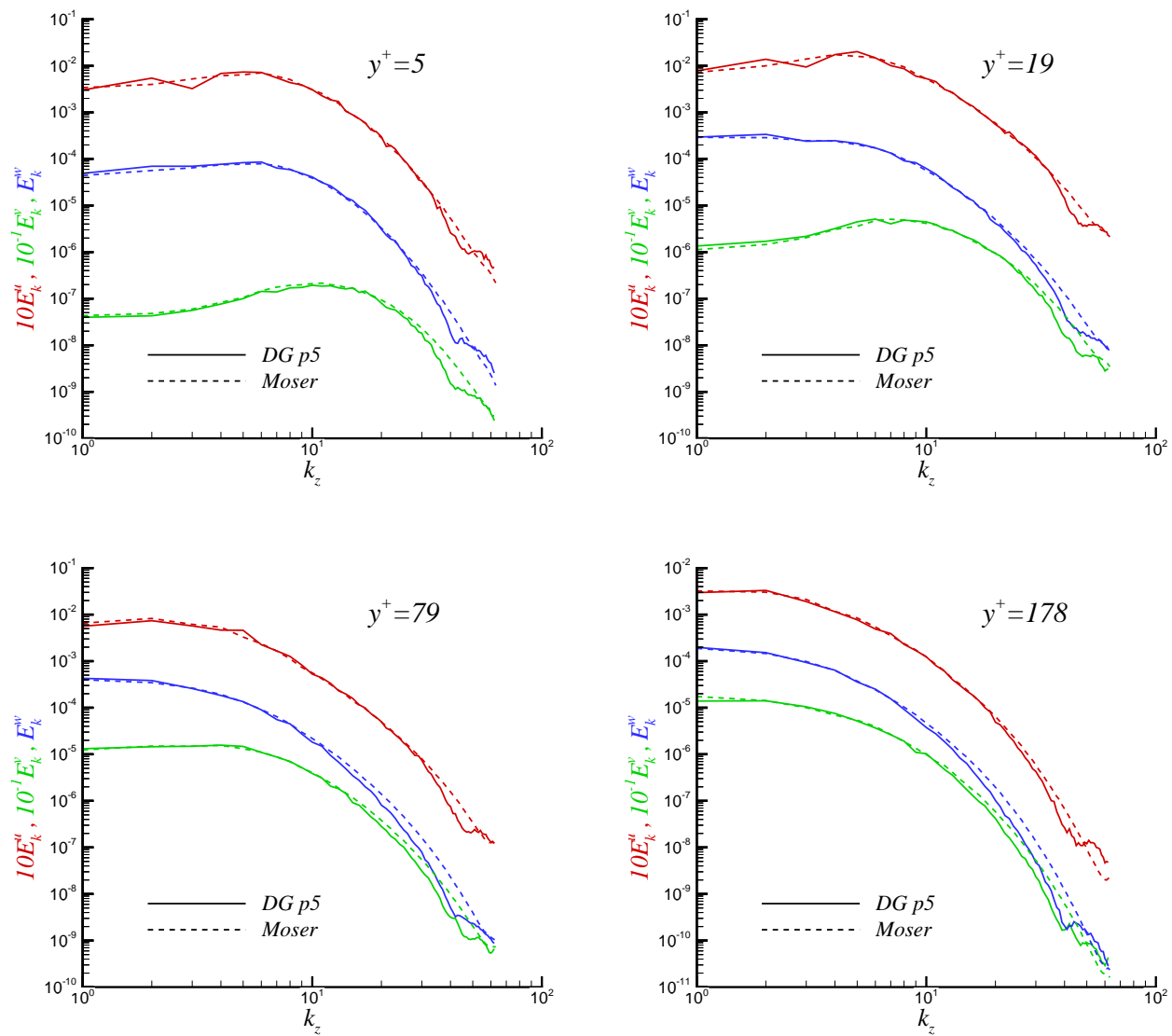


FIGURE 4.18 – Spectres d'énergie moyens 1D calculés dans la direction z pour le canal plan turbulent incompressible.

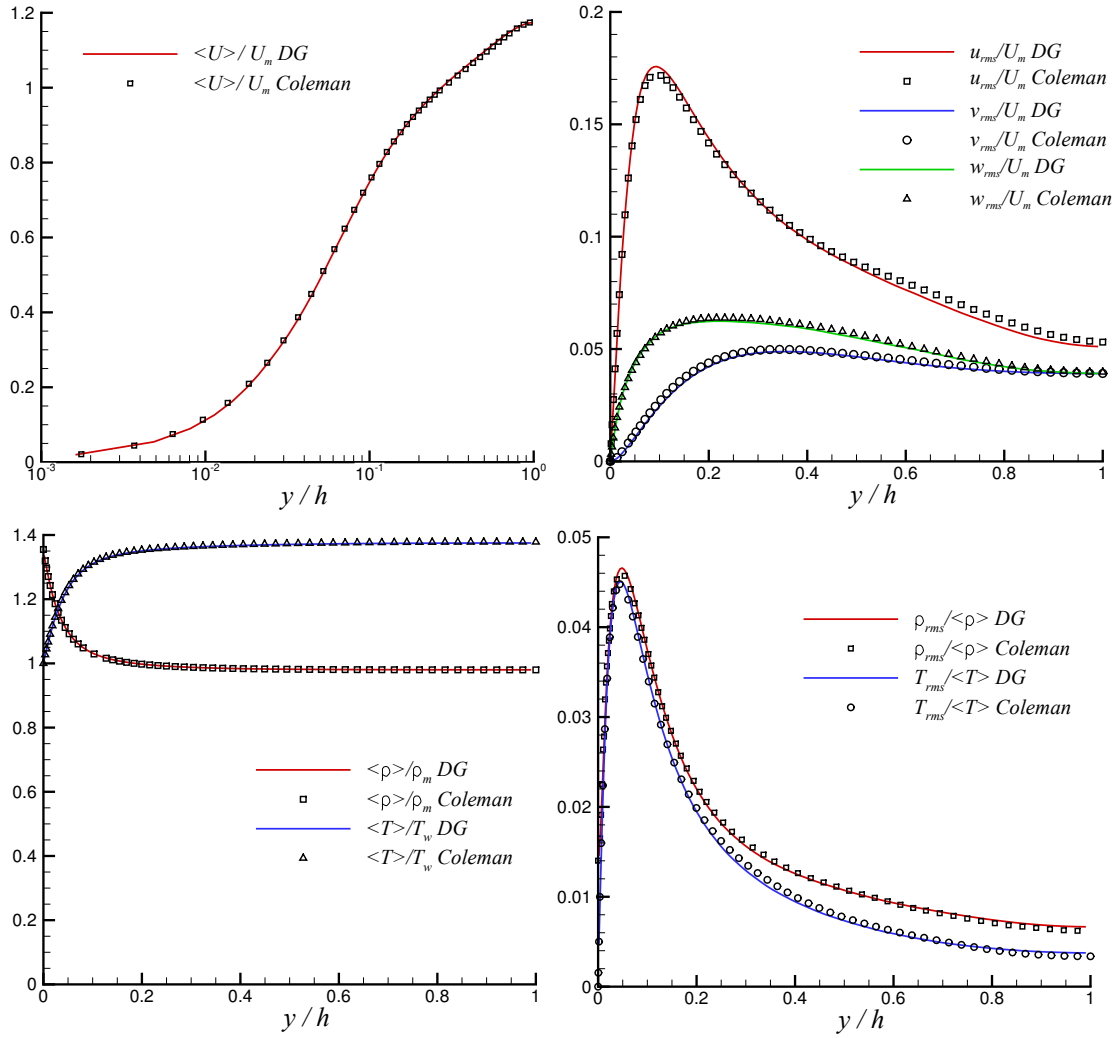


FIGURE 4.19 – Profils des quantités moyennes et fluctuantes pour le canal turbulent en régime compressible.

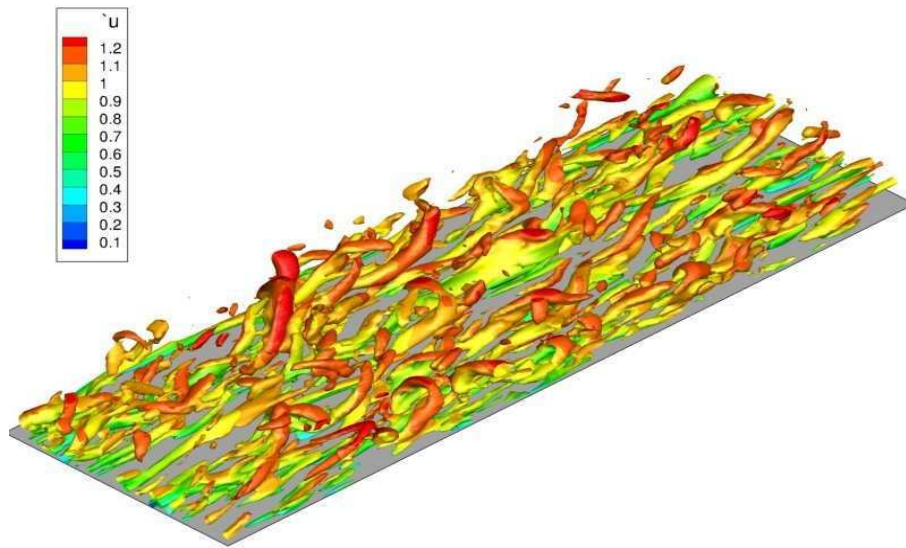


FIGURE 4.20 – Iso-surfaces de Q pour le canal plan turbulent compressible, colorées par la composante de vitesse longitudinale.

Chapitre 5

Evaluation de la méthode DG pour la simulation des grandes échelles

Ce chapitre concerne l'évaluation des modèles décrits en section 3.2 par la réalisation de simulations de configurations canoniques pour la turbulence à divers nombres de Reynolds. Les schémas DG étant décentrés, ils introduisent une dissipation numérique qu'il paraît important de quantifier, car cette dernière va perturber le bon fonctionnement du modèle de turbulence employé. C'est le but de la section 5.1., dans laquelle nous réalisons des calculs du vortex de Taylor-Green à très haut nombre de Reynolds et à différents ordres, sans modèle. Nous évaluons par la même occasion la validité de l'approche implicite (pour laquelle la modélisation sous-maille repose uniquement sur la dissipation introduite par le schéma numérique) pour les écoulements turbulents à haut Reynolds. Les modèles de turbulence sont ensuite évalués dans la section 5.2. à partir d'une configuration de turbulence isotrope à très haut nombre de Reynolds. Bien qu'aucune solution de référence ne soit disponible pour de tels écoulements, nous vérifions que les modèles sont capables de représenter les caractéristiques fondamentales de la turbulence à haut Reynolds, telles la représentation d'une bande inertielle dans le spectre d'énergie ou la décroissance temporelle de l'énergie cinétique suivant une loi en puissance donnée. Les performances des modèles sont ensuite évaluées dans la section 5.3. pour le vortex de Taylor-Green à bas nombre de Reynolds, pour lequel une DNS de référence est réalisée à l'aide du code spectral Fergus. Cette approche nous permet de comparer en détail les spectres d'énergie et l'évolution temporelle de l'énergie cinétique et de l'enstrophie pour les calculs réalisés. La conclusion globale de l'étude est fournie en section 5.5.

A l'heure actuelle, les principaux résultats de la littérature concernant les LES réalisées avec la méthode DG peuvent être classés en deux catégories. Plusieurs auteurs se basent sur les propriétés de dissipation dans les hauts nombres d'onde des schémas DG sans appliquer de modèle de sous-maille [119, 49, 22], avec l'obtention de résultats intéressants pour des écoulements académiques et industriels à bas nombre de Reynolds. Ramakrishnan [102] a également évalué le comportement de discrétisations DG sous-résolues sans modèle de turbulence pour

le calcul du canal plan turbulent jusqu'à $Re_\tau = 395$. D'autres auteurs se basent sur des modélisations classiques avec une taille de filtre évaluée de manière empirique. En particulier, Van Der Bos *et al.* [120] ont réalisé une étude paramétrique impliquant la constante de Smagorinsky, le coefficient de décentrement du flux numérique convectif et l'ordre polynomial p et tracé les cartes d'erreur pour déterminer quel jeu de paramètres mène à une précision optimale. Ils trouvent que le niveau le plus faible d'erreur est obtenu quand la dissipation numérique est réduite au minimum tout en considérant des valeurs de constante de Smagorinsky non-nulles. Muntz [96, 97] a réalisé une étude détaillée de l'approche VMS en utilisant une méthode d'éléments spectraux discontinue en temps à partir du canal plan turbulent bas Reynolds, en faisant notamment varier les paramètres p , h et \bar{p} . Enfin, Ramakrishnan [102] a également réalisé des calculs VMS/DG de canal plan turbulent à un nombre de Reynolds sous-critique $Re_\tau = 100$.

Les travaux présentés ici sont originaux à plusieurs égards. Tout d'abord, nous démontrons que l'approche ILES (sans modèle de sous-maille) en considérant des ordres élevés mène à une accumulation non physique d'énergie cinétique dans les hauts nombres d'onde si on considère un nombre de Reynolds élevé, ce qui à notre connaissance n'a pas été traité dans la littérature actuelle. Ensuite, nous évaluons les modèles adaptés aux discrétisations DG en utilisant un ordre de précision assurant que la dissipation numérique est négligeable devant la dissipation introduite par le modèle. Enfin, il n'existe pas à l'heure actuelle de comparaison LES/DNS filtrée réalisée avec la méthode DG et nous proposons ce type de comparaison pour le cas du vortex de Taylor-Green.

5.1 Comportement des discrétisations DG sans modèle de sous-maille : cas du vortex de Taylor-Green non-visqueux

Nous savons d'après les études menées en section 2.2.1 que la méthode DG introduit de la dissipation numérique pour une gamme de nombres d'ondes, quel que soit l'ordre de discrétisation considéré. Il est donc légitime de se poser la question de l'utilité d'un modèle de sous-maille et de savoir si le montant de dissipation numérique introduit est plus important que celui nécessaire à la modélisation des échelles non-résolues. Garnier *et al.* [47] ont par exemple démontré que la dissipation numérique introduite par des schémas à capture de choc dépassait largement celle introduite par un modèle de Smagorinsky. Nous nous proposons donc dans un premier temps d'examiner les propriétés de dissipation de la méthode DG en étudiant un cas de turbulence en décroissance libre dans la limite $Re \rightarrow \infty$, c'est-à-dire un cas où la seule source de dissipation est de nature numérique.

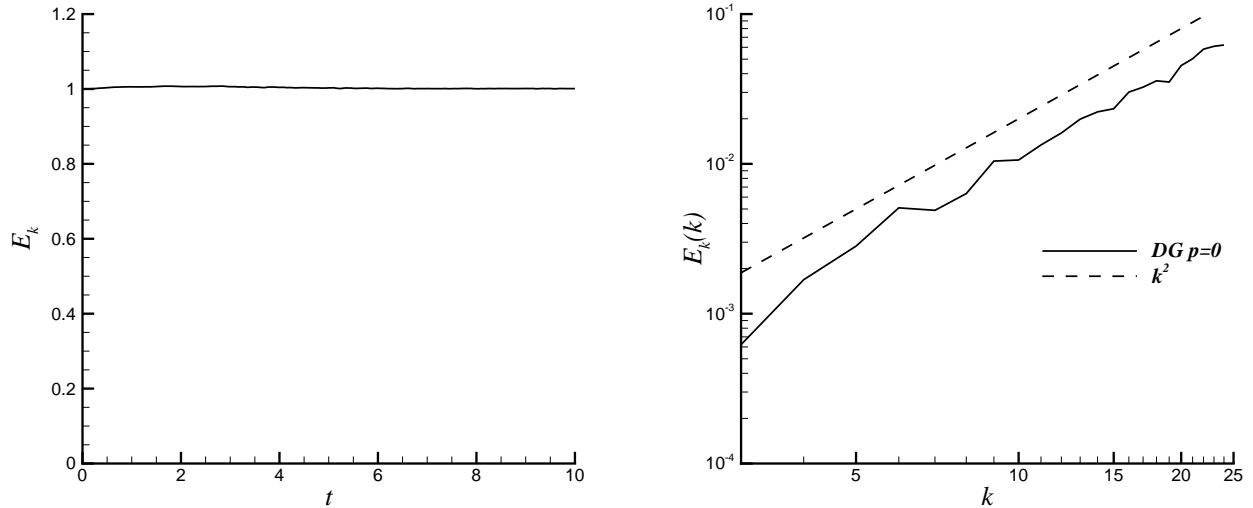


FIGURE 5.1 – Evolution de l’énergie cinétique et spectre d’énergie tracé à $t = 10$ pour le cas TGV non-visqueux. Discrétisation $p = 0$ avec 48^3 éléments utilisant un flux skew-symmetric pour les termes de convection.

5.1.1 Description du problème

Pour réaliser l’étude de la dissipation introduite par le schéma numérique, nous choisissons le cas du vortex de Taylor-Green non-visqueux. Ce cas est utilisé par plusieurs équipes pour évaluer les propriétés des méthodes numériques [111, 80]. Si on considère un schéma numérique non-dissipatif qui intègre exactement les termes non-linéaires, la solution finale correspond une solution d’équipartition pour le champ de vitesse, ce qui se traduit par un spectre d’énergie de la forme $E(k) \propto k^2$. Dans ce cas, l’énergie cinétique moyenne dans le domaine est conservée au cours du temps. A titre d’illustration, nous avons réalisé un calcul DG avec $p = 0$ - correspondant à un schéma volume fini - en employant le flux centré skew-symmetric proposé par Ducros *et al.* [43]. Par exemple, pour la discrétisation d’un terme non linéaire $\partial_x(uv)$, ce flux s’écrit, en reprenant les notations du Chapitre 2 :

$$g_{skew}(u^+, u^-, v^+, v^-, n) = \frac{(u^+ + u^-)(v^+ + v^-)}{4}n$$

Ce flux est conservatif vis-à-vis de l’énergie cinétique, comme nous pouvons le voir sur la Figure 5.1. Sur cette même figure, nous voyons que le spectre d’énergie cinétique tracé à un instant avancé de la simulation présente bien la tendance en k^2 décrite ci-dessus.

Ce comportement correspond à l’accumulation des structures sur la plus petite taille de maille de calcul, due à l’absence de mécanismes diffusifs physiques ou numériques. Ce cas test est critique car la moindre erreur dans l’évaluation des termes non-linéaires peut se traduire

par une croissance non-contrôlée de l'énergie cinétique. Concernant la méthode DG, Le flux *skew-symmetric* décrit précédemment n'est pas adapté aux discrétisations vérifiant $p > 0$. Pour de telles discrétisations, il existe donc un équilibre entre la dissipation introduite par le flux numérique et les erreurs commises lors de l'évaluation des intégrales des termes convectifs par des formules de quadrature. Nous avons donc réalisé des expériences numériques pour déterminer les paramètres garantissant la stabilité numérique pour ce cas d'étude, détaillées dans la prochaine sous-section.

5.1.2 Stabilité des discrétisations DG

Pour la configuration considérée ici, les expériences numériques montrent que de légères erreurs commises sur l'intégration des termes convectifs peuvent mener à la divergence des calculs, qui se traduit par une croissance importante de l'énergie cinétique sur quelques pas de temps. Ces instabilités sont liées à la représentation des petites échelles de l'écoulement. En effet, le calcul devient instable non au début de la simulation, mais au moment où l'enstrophie atteint son maximum, c'est-à-dire quand les plus petites échelles représentées par la grille de calcul se développent. Ces petites échelles sont à la fois impactées par les erreurs d'intégration et par la dissipation numérique intrinsèque. Tant que l'énergie parasite induite par les erreurs d'intégration associée aux plus haut modes est évacuée par la dissipation numérique, on peut donc espérer obtenir des calculs stables. D'un point de vue pratique, l'intégration exacte des termes convectifs requiert un nombre élevé et inconnu de points de quadrature. Il s'agit donc de trouver le bon compromis entre précision, stabilité et coût de calcul.

La Figure 5.2 présente des expériences numériques montrant l'influence des paramètres sus-mentionnés sur la stabilité de discrétisations DG impliquant différents degrés polynomiaux. N correspond au nombre d'éléments dans une direction tandis que p représente le degré polynômial. Nq est le nombre de points de quadrature utilisé dans chaque direction de l'espace pour l'intégration des termes non-linéaires. Ces expériences montrent que le flux numérique décentré avec $k_2 = 1$ mène à des calculs beaucoup plus stables que ceux réalisés avec un flux décentré vérifiant $k_2 < 1$. Concernant l'intégration des termes convectifs, l'utilisation de $Nq = p + 2$ ou $Nq = p + 3$ se révèle suffisante pour obtenir des calculs stables avec le faible nombre de Mach considéré ici ($M_0 = 0.1$). L'augmentation du Mach pour cette configuration précise semble mener à des calculs plus instables. Il est cependant important de noter que l'initialisation considérée ici est pensée pour les codes incompressibles et que la considération d'un nombre de Mach initial important peut induire une adaptation brutale de l'écoulement à ces conditions initiales non adaptées à un code compressible.

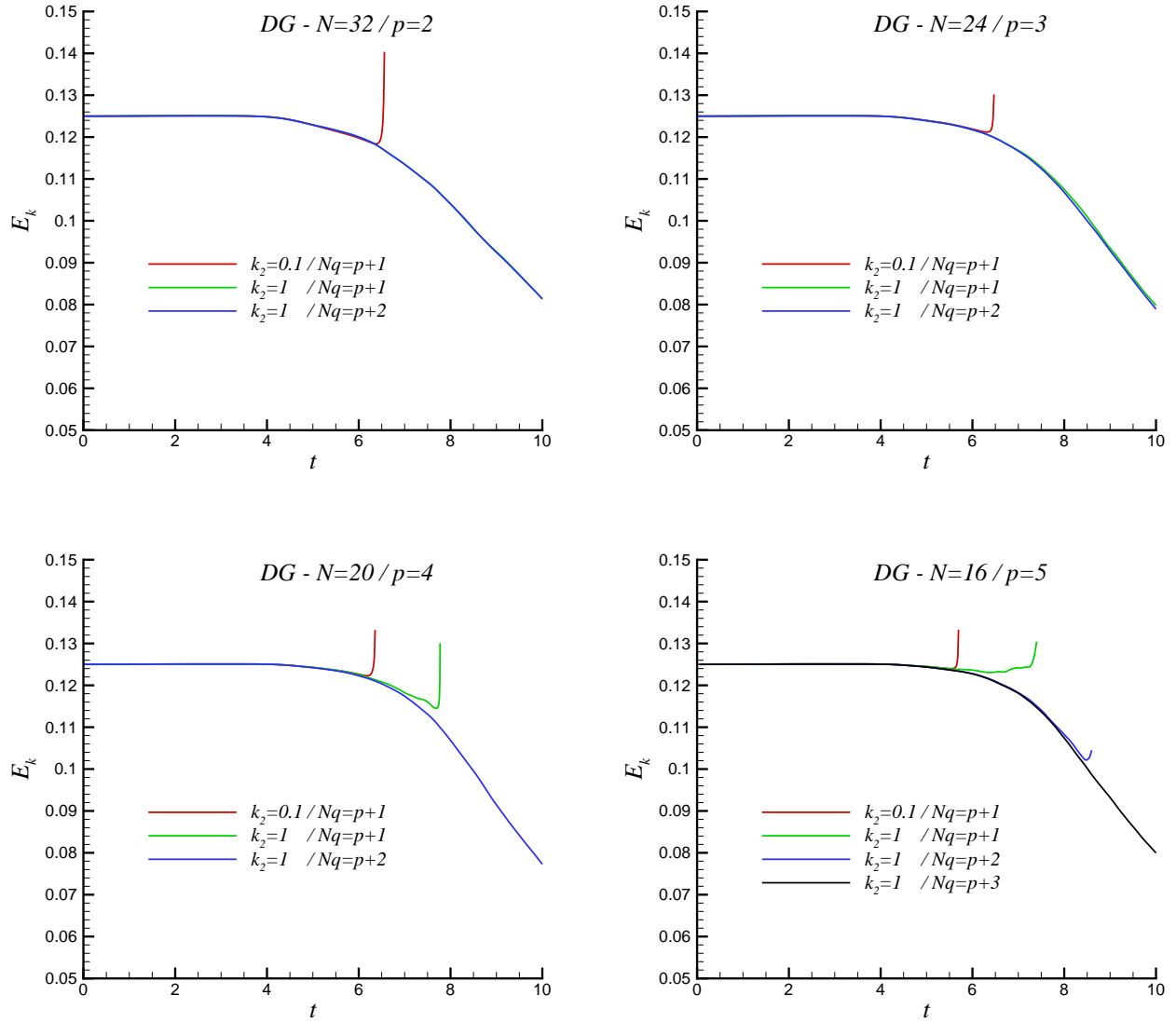


FIGURE 5.2 – Evolution de l'énergie cinétique pour le cas TGV non-visqueux démontrant un comportement instable des discrétisations DG.

5.1.3 Evaluation de la dissipation numérique

Les propriétés de dissipation de la méthode DG sont évaluées à partir de calculs du vortex de Taylor-Green, dont les discrétisations sont détaillées dans le Tableau 5.1.

	DG 24p1	DG 16p2	DG 12p3	DG 8p5
Ordre	2	3	4	6
#Eléments	24^3	16^3	12^3	8^3
#d.d.l.	48^3	48^3	48^3	48^3

TABLE 5.1 – Détail des discrétisations DG pour le cas du TGV non-visqueux.

Les évolutions temporelles de la dissipation et de l’énstrophie moyennes sont présentées sur la Figure 5.3. La dissipation ε_{num} est évaluée à partir de la dérivée temporelle de l’énergie cinétique moyenne, et correspond à la dissipation numérique dans la mesure où la viscosité moléculaire est nulle dans ce cas particulier. Il est intéressant de noter que cette quantité est nulle durant la période transitoire qui correspond au développement des petites échelles dans l’écoulement, pour les ordres plus grands que 2. Au moment où des échelles de taille suffisamment petite apparaissent, le schéma numérique vient impacter le développement de ces dernières et la dissipation générale augmente fortement, du fait de la cascade énergétique qui alimente ces petites échelles.

Le niveau d’énstrophie est fortement dépendant du contenu énergétique des plus petites échelles de l’écoulement, cette quantité étant construite à partir des gradients de vitesse. La Figure 5.3 montre que l’augmentation de l’ordre s’accompagne de niveaux d’énstrophie plus importants, ce qui indique que les petites échelles sont plus énergétiques et la dissipation numérique moins influente.

Les spectres d’énergie 3D pour les différentes discrétisations sont tracés à l’instant final $t = 20$ sur la Figure 5.4. Les spectres sont présentés sous deux formes différentes : la forme classique $E(k)$ et la forme $k^{-2}E(k)$, qui permet de repérer l’établissement d’une solution d’équipartition prenant la forme d’un plateau constant sur une gamme de nombres d’onde.

Seules les discrétisations aux ordres 2 et 3 semblent montrer la présence d’une rangée inertielle, qui reste cependant mal définie. Les discrétisations d’ordre 4 et 6 montrent clairement une accumulation d’énergie au niveau des petites échelles. En particulier, la discrétisation à l’ordre 6 présente une région étendue de nombres d’ondes vérifiant $E(k) \propto k^2$, ce qui est caractéristique d’un faible niveau de dissipation.

Dans l’objectif de comparer l’action du schéma numérique à des modèles de turbulence connus, nous pouvons supposer que la dissipation numérique agit comme le modèle de sous-maille de Smagorinsky, et ainsi rechercher la constante C_S^{num} équivalente associée à la discrétisation considérée. Nous supposons que la dissipation numérique dispose d’une structure

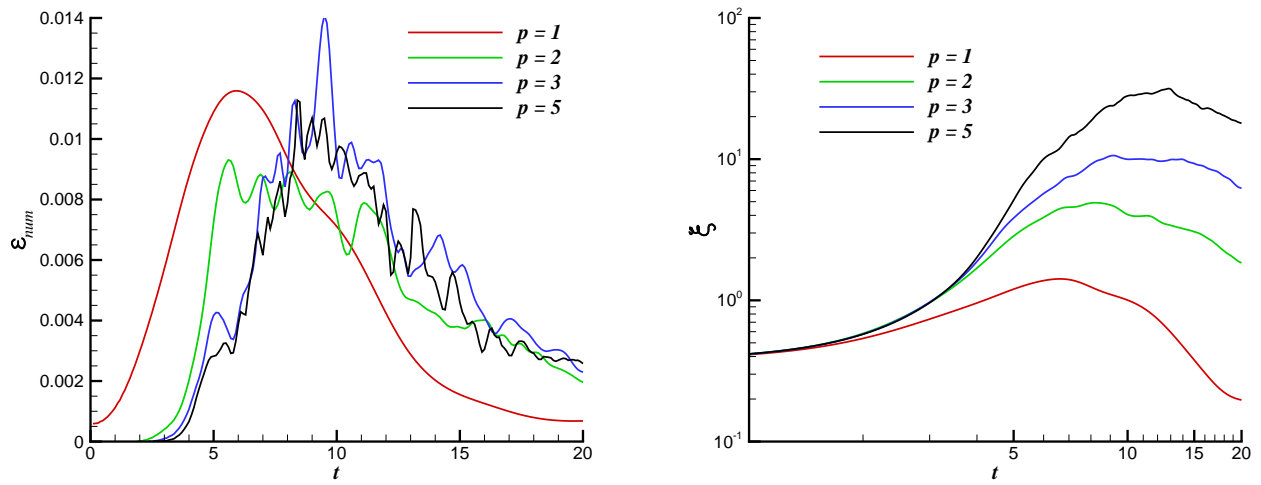


FIGURE 5.3 – Evolutions temporelles de la dissipation et de l'ensrophie moyennes pour le cas TGV non-visqueux.

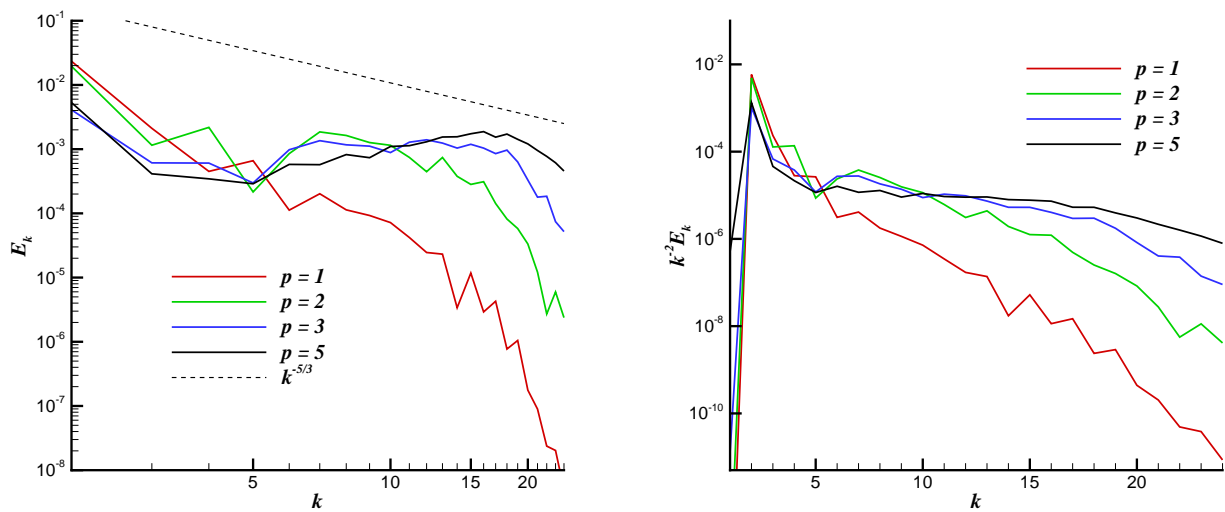


FIGURE 5.4 – Spectres d'énergie dans le cas du TGV non-visqueux sans modèle de turbulence.

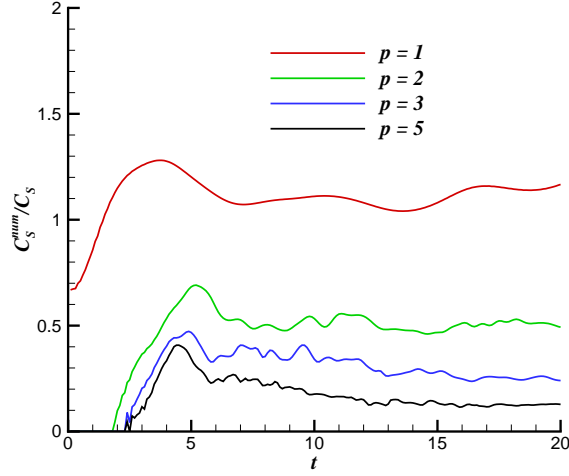


FIGURE 5.5 – Evolution temporelle de la constante de Smagorinsky numérique pour le cas du TGV non-visqueux sans modèle de sous maille.

équivalente à celle introduite par le modèle de Smagorinsky :

$$\varepsilon_{num} = \left(C_S^{num} \frac{h}{p} \right)^2 \langle |\mathbf{S}|^3 \rangle,$$

ce qui nous amène à l'expression de la constante de Smagorinsky équivalente

$$C_S^{num} = \frac{pN}{2\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_{num}}{\langle |\mathbf{S}|^3 \rangle}}$$

Ce raisonnement est basé sur l'hypothèse que la distribution spectrale de la dissipation numérique est celle de la quantité $|\mathbf{S}|$, ce qui constitue une approximation car cette répartition dépend de l'ordre considéré.

L'évolution temporelle du rapport C_S^{num}/C_S (nous avons trouvé la valeur $C_S = 0.172$ en section 3.2.2) est tracée sur la Figure 5.5 pour toutes les discrétisations considérées. Après une évolution transitoire correspondant à la période de temps où la dissipation numérique est peu influente, les valeurs de C_S^{num} s'établissent à un plateau pour toutes les discrétisations considérées.

Le Tableau 5.2 regroupe les valeurs du rapport des constantes à l'instant final $t = 20$, ainsi que le carré de cette valeur qui est représentatif de la dissipation générale introduite par la méthode numérique.

Nous voyons que la discrétisation au second ordre introduit une dissipation numérique qui

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 5$
C_S^{num}/C_S	1.165	0.494	0.241	0.129
$(C_S^{num}/C_S)^2$	1.357	0.244	0.058	0.017

TABLE 5.2 – Constantes de Smagorinsky numériques à $t = 20$ pour le cas TGV non-visqueux sans modèle de sous-maille.

est supérieure à celle induite par le modèle de Smagorinsky. Les discrétisations aux ordres supérieurs proposent des valeurs inférieures. En particulier, les discrétisations à l'ordre 4 et 6 introduisent une dissipation respectivement 17 et 60 fois moindre que celle introduite par le modèle de Smagorinsky. Ces résultats tendent à montrer l'importance de l'emploi de modèles de sous-maille quand des discrétisations à l'ordre élevé sont considérées. Les discrétisations à l'ordre 2 semblent assurer une dissipation suffisante permettant de s'affranchir de l'usage d'un modèle de sous-maille, mais sont particulièrement peu précises, comme nous l'avons montré dans le Chapitre 4.

5.2 Comportement des modèles de sous-maille DG-LES : cas de la turbulence isotrope dans la limite $Re \rightarrow \infty$

Au cours de simulations LES d'écoulements turbulents impliquant un nombre de Reynolds important et une grille de calcul grossière, il apparaît que l'influence de l'opérateur lié à la viscosité moléculaire devient négligeable par rapport à celui lié aux termes de modélisation sous-maille. Un test intéressant pour quantifier l'action du modèle de sous-maille dans ces circonstances est d'étudier le cas de la turbulence homogène et isotrope dans la limite d'un Reynolds tendant vers l'infini. Dans ce cas, la bonne représentation de lois fondamentales de la turbulence montre la capacité d'un modèle à simuler correctement la dissipation induite par les échelles sous-maille pour les écoulements à haut nombre de Reynolds.

5.2.1 Description du problème

Considérations physiques

Les écoulements de turbulence isotrope en décroissance libre constituent les configurations les plus fondamentales pour l'étude des propriétés de la turbulence. L'étude consiste à observer la décomposition d'une gamme de grandes structures tourbillonnaires, de manière analogue à la configuration du vortex de Taylor-Green. Contrairement à ce dernier cas, l'étude expérimentale de la turbulence isotrope en décroissance est possible par l'emploi de grilles disposées dans une soufflerie, et un certain nombre de résultats de référence sont disponibles à haut

nombre de Reynolds. Différentes études expérimentales et numériques ont montré que la décroissance de l'énergie cinétique moyenne dans un écoulement de turbulence isotrope suit une loi en puissance de la forme

$$E_k(t) \propto t^{-n}$$

avec n l'exposant de décroissance qui peut être calculé de la manière suivante si on connaît les valeurs de dissipation et d'énergie cinétique :

$$n = \frac{\varepsilon}{E_k} t.$$

Les expériences de référence de Comte-Bellot *et al.* [35] et Kang *et al.* [67], respectivement réalisées avec un faible et un important nombre de Reynolds, présentent la même valeur $n = 1.25$. Une évaluation précise de l'exposant par les calculs LES traduit la capacité des modèles à assurer le bon niveau de dissipation pour cette configuration.

Le facteur de dissymétrie des gradients de vitesse (*skewness factor*) est également une quantité d'intérêt qui caractérise la production d'enstrophie par le mécanisme d'étirement tourbillonnaire. Son expression est

$$Sk = \frac{\langle (\partial_x u)^3 \rangle}{\langle (\partial_x u)^2 \rangle^{3/2}}$$

La valeur expérimentale trouvée par Batchelor *et al.* [10] pour des écoulements de grille à haut Reynolds est de -0.4. Les valeurs de Sk rassemblées par Ishihara *et al.* [65] à partir d'expériences et de calculs DNS s'échelonnent entre les valeurs -0.3 et -0.7.

Dans les écoulements de turbulence en décroissance libre, l'enstrophie augmente fortement au début du calcul du fait du mécanisme d'étirement tourbillonnaire et atteint un maximum à l'instant t_c quand toutes les échelles sont développées dans l'écoulement. Il existe des théorèmes dérivés à partir de l'étude des équations d'Euler permettant d'estimer t_c à partir de l'enstrophie initiale. Un résumé de ces approches a été réalisé par Lesieur [84]. Parmi ces théorèmes, celui consistant à supposer un facteur de dissymétrie constant nous donne une borne inférieure pour t_c , tandis que le théorème proposé par Obhukov nous fournit une borne supérieure, soit

$$t_c \in \left[5.9 \xi_0^{-1/2}, 8 \xi_0^{-1/2} \right]$$

où ξ_0 est l'enstrophie moyenne dans le domaine à l'instant initial. Une valeur de t_c conforme à ces théorèmes suggère que le transitoire correspondant au développement des échelles dans l'écoulement est bien représenté.

Le nombre de Reynolds employé pour caractériser les écoulements de turbulence isotrope est généralement celui basé sur l'échelle de Taylor λ définie à partir des gradients de vitesse moyens de l'écoulement. Pour un écoulement de turbulence isotrope, cette échelle est reliée à l'énergie cinétique et l'enstrophie moyennes par la relation $\lambda = \sqrt{5E_k/\xi}$. Nous évaluons

dans le cas présent le nombre de Reynolds associé en définissant une viscosité équivalente ν_e à partir de la relation $\nu_e = \varepsilon/2\xi$ valide là encore pour un écoulement de turbulence isotrope. L'expression finale de ce nombre de Reynolds devient

$$R_\lambda = 2\sqrt{\frac{10}{3}}\xi\frac{E_k}{\varepsilon}$$

Nous pouvons ainsi évaluer un nombre de Reynolds qui correspond à la physique représentée par le modèle de turbulence.

On peut s'attendre à ce qu'un écoulement de turbulence isotrope à haut nombre de Reynolds présente une bande inertielle étendue, dans laquelle le spectre d'énergie est de la forme :

$$E(k) = C_K\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$$

C_K est une constante qui a été évaluée dans nombre d'études expérimentales et numériques. La revue des valeurs de C_K par Yeung *et al.* [131] suggère une valeur d'environ 2 pour les LES réalisées avec un code spectral. La constante est évaluée de manière approchée en identifiant un plateau constant $C_K = \varepsilon^{-2/3}k^{5/3}E(k)$ dans le spectre d'énergie.

Initialisation d'un champ de turbulence homogène isotrope

Le champ initial de turbulence homogène isotrope a été initialisé à l'aide du code Fergus [19]. Ce code permet l'initialisation d'un écoulement incompressible vérifiant un spectre de forme quelconque, à l'aide d'une procédure décrite en détail dans le rapport [20]. Nous avons choisi le spectre de Batchelor-Townsend [9], qui est largement employé dans les études numériques [130]. L'expression du spectre est

$$E_0(k) = c_0\frac{k^4}{k_0^5}\exp[-2(k/k_0)^2]$$

où k_0 est le nombre d'onde sphérique associé au pic d'énergie, et c_0 une constante déterminant le niveau d'énergie cinétique. Les valeurs initiales d'énergie cinétique, d'ensrophie et de variance de vitesse sont fonction de ces deux paramètres :

$$E_0 = \frac{3}{32}\sqrt{\frac{\pi}{2}}c_0$$

$$\xi_0 = \frac{15}{32}\sqrt{\frac{\pi^5}{2}}c_0k_0^2$$

Nous choisissons c_0 de manière à vérifier $E_0 = 1,5$ et $u_0^{rms} = 1$. Le choix de k_0 influe particulièrement sur le niveau d'ensrophie au début du calcul. Une valeur élevée de k_0

permet l'établissement rapide des petites échelles dans l'écoulement, mais diminue également la taille des plus grandes structures présentes dans la boîte de calcul. Nous choisissons ici la valeur $k_0 = 4$, qui est associée à un temps de retournement des grandes structures de $\pi/4$.

5.2.2 Comportement de DNS spectrales Fourier

Pour commencer cette étude, nous proposons tout d'abord de réaliser des DNS spectrales à différents Reynolds pour voir la tendance d'évolution des paramètres d'intérêt décrits dans la section précédente. Trois DNS sont réalisées à partir de la même discrétisation. Les calculs sont présentés dans le Tableau 5.3. Le nombre de Reynolds Re est défini ici à partir de la taille du domaine de calcul, de la vitesse fluctuante initiale et de la viscosité moléculaire. Du fait de l'important coût de calcul associé à la réalisation d'une DNS à Reynolds modérément élevé, le temps total des calculs t_f correspond à deux temps de retournement des grandes structures, ce qui est suffisant pour capturer le pic d'ensrophie.

La Figure 5.6 présente les évolutions temporelles de l'ensrophie et du Reynolds basé sur la micro-échelle de Taylor. L'augmentation du nombre de Reynolds influe fortement sur le niveau d'ensrophie, notamment aux alentours de t_c , ce qui caractérise l'influence croissante de dynamique à petite échelle.

Les différents paramètres d'intérêt sont regroupés dans le Tableau 5.4. L'augmentation du nombre de Reynolds se traduit par des valeurs de t_c importantes, mais toujours inférieures à la borne supérieure définie dans la section précédente. Les valeurs de Sk augmentent également pour se rapprocher de valeur de référence proposée par Batchelor *et al.*

Les spectres d'énergie compensés sont tracés sur la Figure 5.7. L'augmentation du nombre de Reynolds se traduit ici par une rangée inertielle s'étendant sur un plage de plus en plus grande de nombres d'onde. Pour les trois cas, la valeur de C_k est d'environ 2.4. Ces spectres nous montrent aussi que la rangée inertielle se déplace vers les hauts nombres d'ondes quand le Reynolds augmente, les grandes échelles se développant alors sur une gamme étendue de bas nombres d'onde.

Ces calculs nous permettent de montrer qu'une dynamique haut Reynolds pour les écoulements de THI en décroissance libre se traduit par des valeurs de t_c et Sk élevées, ainsi que d'importants niveaux d'ensrophie.

Calcul	#modes de Fourier	Re
DNS 1	512^3	500
DNS 2	512^3	1000
DNS 3	512^3	2500

TABLE 5.3 – Détail ces calculs DNS réalisés pour la configuration de THI.

	DNS 1	DNS 2	DNS 3
$t_c/\xi_0^{-1/2}$	6.90	7.89	7.89
$Sk(t_f)$	-0.52	-0.50	-0.44
$R_\lambda(t_f)$	55.5	77.9	115.1

TABLE 5.4 – Paramètres physiques pour les DNS spectrales. THI à très haut Reynolds.

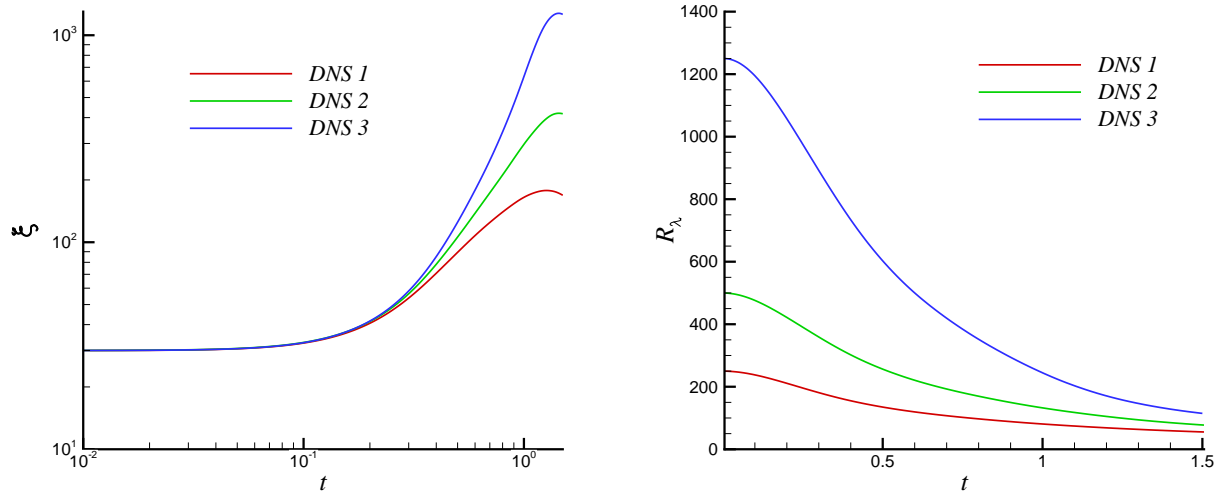


FIGURE 5.6 – Evolutions temporelles de l'entropie et du nombre de Reynolds R_λ .

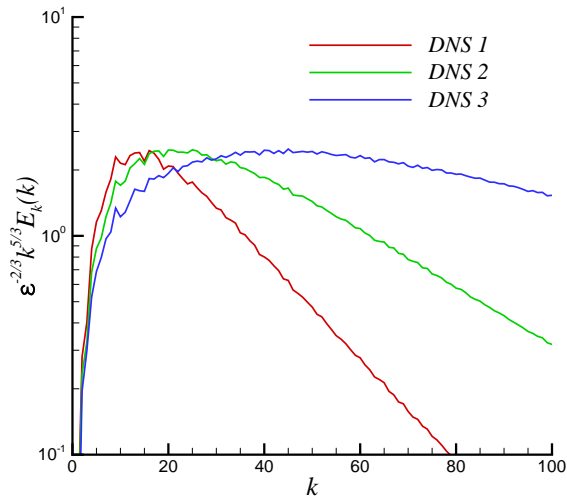


FIGURE 5.7 – Spectres d'énergie à l'instant final t_f pour les calculs DNS spectraux de THI.

5.2.3 Comportement des modèles DG-LES mono-échelle

Nous évaluons ici les modèles s'appliquant sur l'ensemble des échelles résolues, à savoir les modèles de Smagorinsky, à fonction de structure et dynamique, décrits dans la section 3.2. Nous considérons une unique discrétisation DG détaillée dans le Tableau 5.5.

Méthode	#Éléments	Degré polynomial	#d.d.l. / #points de quadrature	Flux numérique
DG	20^3	$p = 5$	$120^3/140^3$	LLF $k_2 = 1$

TABLE 5.5 – Détail de la discrétisation DG pour les calculs LES de THI à très haut Reynolds.

Analyse statistique

La Figure 5.8 montre l'évolution de l'énstrophie moyenne et de l'exposant de décroissance en puissance de l'énergie cinétique. L'évolution de l'exposant n nous montre que l'énergie commence à suivre une loi de décroissance stable aux alentours de $t = 8$. Le Tableau 5.6 présente une moyenne de ces valeurs évaluée entre $t = 9$ et $t = 10$ pour les trois modèles. La loi de décroissance obtenue montre un comportement légèrement plus dissipatif pour les trois modèles comparativement aux résultats expérimentaux de référence qui présentent une décroissance en $t^{-1.25}$. Le Tableau 5.6 regroupe les valeurs de t_c pour les différents modèles. Les trois modèles proposent des valeurs appartenant à l'intervalle préconisé par Lesieur. Les niveaux d'énstrophie des modèles dynamique et à fonction de structure sont plus élevés que ceux du modèle de Smagorinsky, ce qui traduit une meilleure représentation de la dynamique à petite échelle.

	Smagorinsky	Fonction de structure	Dynamique
$t_c/\xi_0^{-1/2}$	6.50	7.03	6.50
$\langle n \rangle$	1.415	1.360	1.363
$\langle Sk \rangle$	-0.366	-0.321	-0.348
$R_\lambda(t = 10)$	65.4	77.2	75.7

TABLE 5.6 – Paramètres physiques pour l'évaluation des modèles LES mono-échelle. Cas de la turbulence isotrope à très haut Reynolds.

L'évolution de Sk est présentée pour les trois modèles sur la Figure 5.9. Les valeurs de Sk moyennées entre $t = 5$ et $t = 10$ sont présentées dans le Tableau 5.6, et sont relativement proches de la référence de -0.4. L'évolution du nombre de Reynolds basé sur la micro-échelle de Taylor est également présentée sur la Figure 5.9. Les valeurs de R_λ à $t = 10$ sont répertoriées dans le Tableau 5.9. Les valeurs de Sk , t_c et R_λ montrent que le modèle à fonction de structure présente une physique à un nombre de Reynolds plus important que les deux autres modèles. Pour évaluer l'influence de la dissipation numérique sur le modèle de Smagorinsky, nous avons calculé la constante équivalente de la même manière que dans la section 5.1.3, puis retranché

la valeur de référence $C_S = 0.172$ à cette quantité. Le rapport C_S^{num}/C_S est tracé sur la Figure 5.10, avec également l'évolution temporelle de la constante de Smagorinsky dynamique. Le rapport des constantes nous montre, de manière analogue à l'étude de la section 5.1.3, que l'action de la dissipation numérique est négligeable devant la dissipation introduite par le modèle de Smagorinsky. La constante dynamique s'établit à une valeur proche de 0.172, ce qui constitue un élément de validation pour la calibration du modèle de Smagorinsky dans le cadre des discrétisations DG.

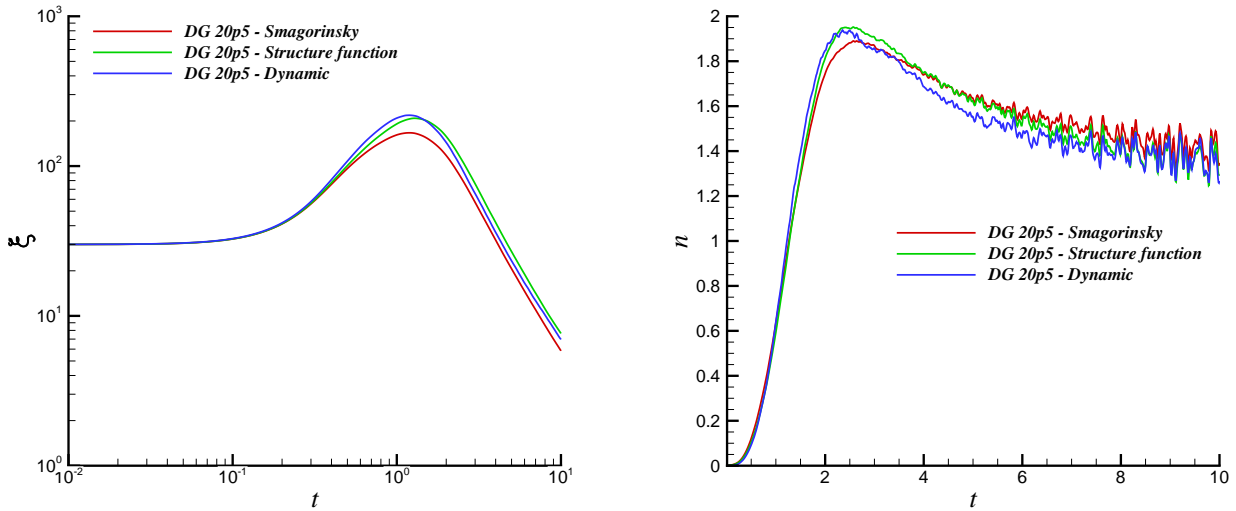


FIGURE 5.8 – Evolutions temporelles de l'ensrophie et de l'exposant de décroissance en puissance de l'énergie cinétique. THI à très haut Reynolds.

Analyse spectrale

La Figure 5.11 montre les spectres d'énergie qui sont tracés à l'instant final $t = 10$. Nous observons que les trois modèles présentent une rangée inertielle dans une gamme restreinte de nombres d'onde. Le modèle à fonction de structure présente la rangée inertielle la plus étendue, viennent ensuite le modèle dynamique et le modèle de Smagorinsky, qui est le plus dissipatif vis-à-vis des petites échelles. La constante de Kolmogorov avoisine la valeur 2 pour les trois modèles, ce qui est cohérent avec les résultats des LES spectrales de la littérature. La Figure 5.11 montre également que la forme des spectres compensés des modèles est assez proche de celle de la DNS à bas Reynolds. Ces modèles combinés à la grille considérée présentent donc une dynamique relative à un nombre de Reynolds faible.

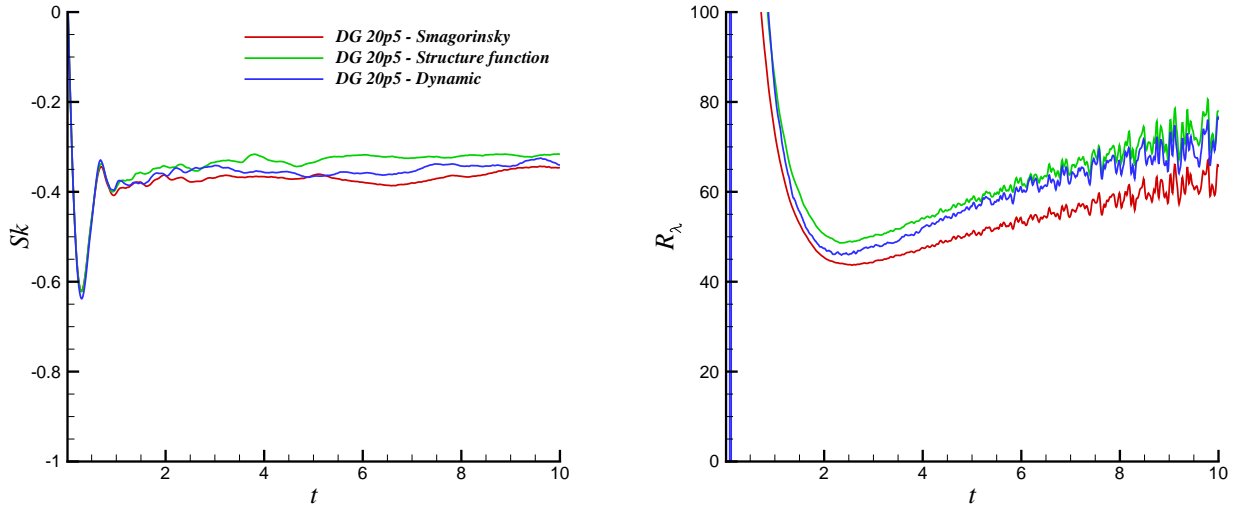


FIGURE 5.9 – Evolutions temporelles du facteur de dissymétrie et du Reynolds basé sur la micro-échelle de Taylor. THI à très haut Reynolds.

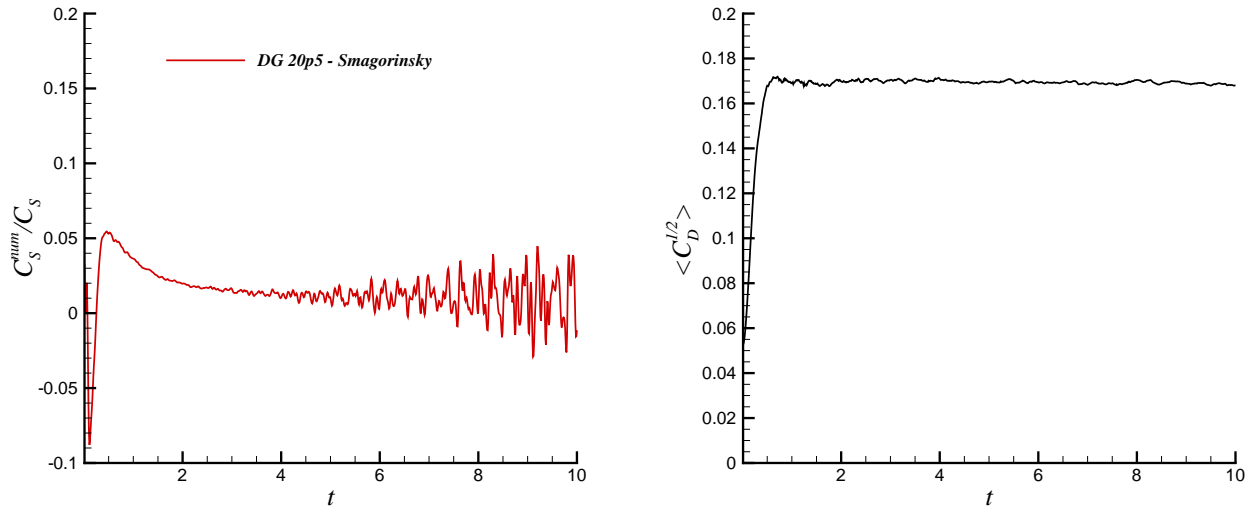


FIGURE 5.10 – Evolution temporelle de la constante de Smagorinsky équivalente et de la constante dynamique. THI à très haut Reynolds.

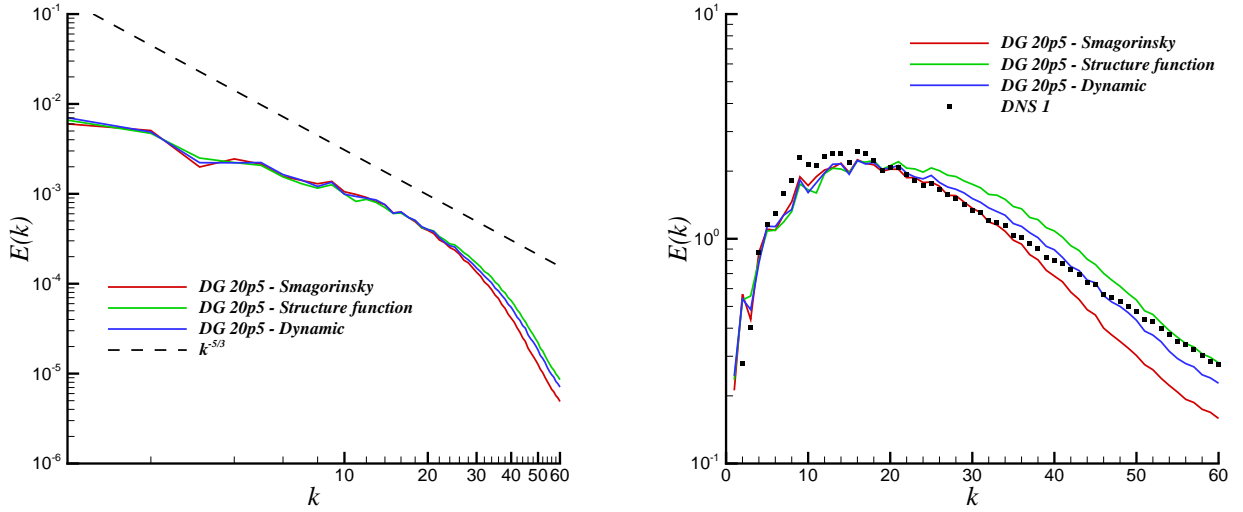


FIGURE 5.11 – Spectres d’énergie à l’instant final pour les différents modèles LES mono-échelle. Cas de la THI à très haut Reynolds.

5.2.4 Comportement des modèles DG-VMS

Nous analysons dans cette section le comportement des versions VMS des modèles de Smagorinsky et à fonction de structure pour le cas de la turbulence isotrope à haut Reynolds. Pour une discrétisation DG $p = 5$, il est possible de choisir parmi 6 valeurs de α différentes, caractérisant la part de grandes et de petites échelles. Pour $\alpha = 0$, nous retrouvons le modèle classique mono-échelle (toutes les échelles sont des *petites* échelles résolues), tandis que pour $\alpha = 1$, nous obtenons un calcul sans modèle de sous-maille (avec uniquement des *grandes* échelles résolues). Nous sommes donc ici intéressés par les partitions $\alpha = 2/6$, $\alpha = 3/6$, $\alpha = 4/6$ et $\alpha = 5/6$. La partition associée à $\alpha = 1/6$ ne présente que peu d’intérêt, car les grandes échelles sont alors représentées par un unique mode de Legendre sur les 6^3 de la base complète pour $p = 5$, ce qui amène des résultats équivalents au modèle classique mono-échelle. Les calculs réalisés sont détaillés dans le Tableau 5.7.

Analyse statistique

Le Tableau 5.8 présente les paramètres physiques d’intérêt pour les calculs réalisés avec les modèles VMS. Concernant le modèle de Smagorinsky, nous voyons que l’augmentation de α s’accompagne d’une augmentation de t_c , ce qui est lié au temps de développement des structures sur une gamme plus étendue de nombres d’onde. Ce temps est cependant inférieur à la limite maximale de $8\xi_0^{-1/2}$ pour tous les calculs. L’exposant de décroissance de l’énergie cinétique diminue quand la partition augmente, ce qui traduit un comportement de moins

Calcul	Modèle	Partition	Part de grandes échelles
VM-SG 0	Smagorinsky	$\alpha = 0$	$f_{\overline{v}} = 0$
VM-SG 2	Smagorinsky	$\alpha = 1/3$	$f_{\overline{v}} = 3, 7\%$
VM-SG 3	Smagorinsky	$\alpha = 1/2$	$f_{\overline{v}} = 12, 5\%$
VM-SG 4	Smagorinsky	$\alpha = 2/3$	$f_{\overline{v}} = 29, 6\%$
VM-SG 5	Smagorinsky	$\alpha = 5/6$	$f_{\overline{v}} = 57, 8\%$
VM-SF 0	Fonction structure	$\alpha = 0$	$f_{\overline{v}} = 0$
VM-SF 2	Fonction structure	$\alpha = 1/3$	$f_{\overline{v}} = 3, 7\%$
VM-SF 3	Fonction structure	$\alpha = 1/2$	$f_{\overline{v}} = 12, 5\%$
VM-SF 4	Fonction structure	$\alpha = 2/3$	$f_{\overline{v}} = 29, 6\%$

TABLE 5.7 – Détail des calculs pour l'évaluation des modèles VMS, configuration de la turbulence isotrope à haut Reynolds.

	VM-SG 2	VM-SG 3	VM-SG 4	VM-SG 5	VM-SF 2	VM-SF 3	VM-SF 4
$t_c/\xi_0^{-1/2}$	6.70	6.86	7.42	7.86	7.11	7.28	7.57
$\langle n \rangle$	1.470	1.376	1.303	1.170	1.352	1.289	1.245
$\langle Sk \rangle$	-0.391	-0.362	-0.318	-0.234	-0.310	-0.276	-0.215
$R_\lambda(t = 10)$	66.4	77.5	92.1	124	86.7	102	120.7

TABLE 5.8 – Paramètres physiques pour l'évaluation des modèles VMS. Cas de la turbulence isotrope à très haut Reynolds.

en moins dissipatif. Les exposants sont proches des valeurs de référence pour les modèles VM-SG 4, VM-SF 3 et VMS-SF 4. L'exposant du calcul VM-SG 5 traduit un comportement sous-dissipatif à l'opposée du calcul VM-SG 2 qui traduit une dissipation marquée de l'énergie par le modèle. Les valeurs de Sk dépassent la limite supérieure de -0,3 pour les calculs VM-SG 5, VM-SF 3 et VM-SF 4. Enfin, le nombre de Reynolds basé sur la micro-échelle de Taylor augmente significativement avec le nombre de partition. Ces observations montrent clairement que l'augmentation du nombre de partition s'accompagne de la représentation d'une physique correspondant à des nombres de Reynolds de plus en plus importants. Cependant, une restriction importante du domaine des petites échelles conduit à une déviation de certains paramètres par rapport aux résultats expérimentaux (notamment les quantités $\langle n \rangle$ et Sk pour les modèles VM-SG 5 et VM-SF 4).

La Figure 5.12 présente l'évolution temporelle de l'enstrophie et du facteur de dissymétrie. Le niveau d'enstrophie augmente avec le nombre de partition, ce qui indique que les modèles VMS avec une gamme importante de grandes échelles représentent d'avantage de structures fines.

La Figure 5.13 présente l'évolution temporelle de la viscosité turbulente pour les différents modèles. Il est intéressant de voir que suivant la fraction α choisie, les niveaux de viscosité varient plus ou moins fortement au début de la simulation. Le fait que le spectre initial d'énergie

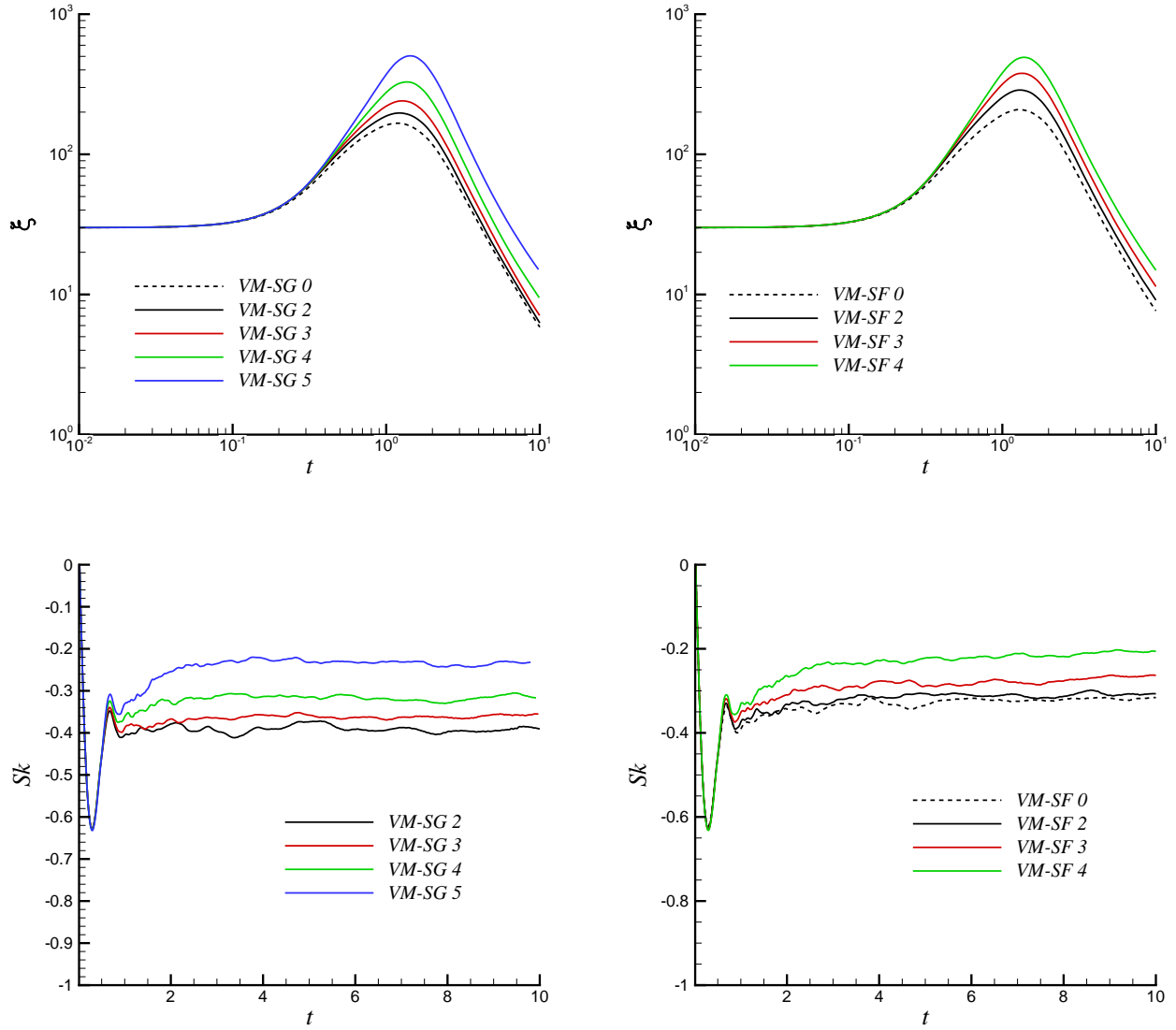


FIGURE 5.12 – Evolution temporelle de l’enstrophie et du facteur de dissymétrie. Calculs VMS pour la turbulence en décroissance libre à haut Reynolds.

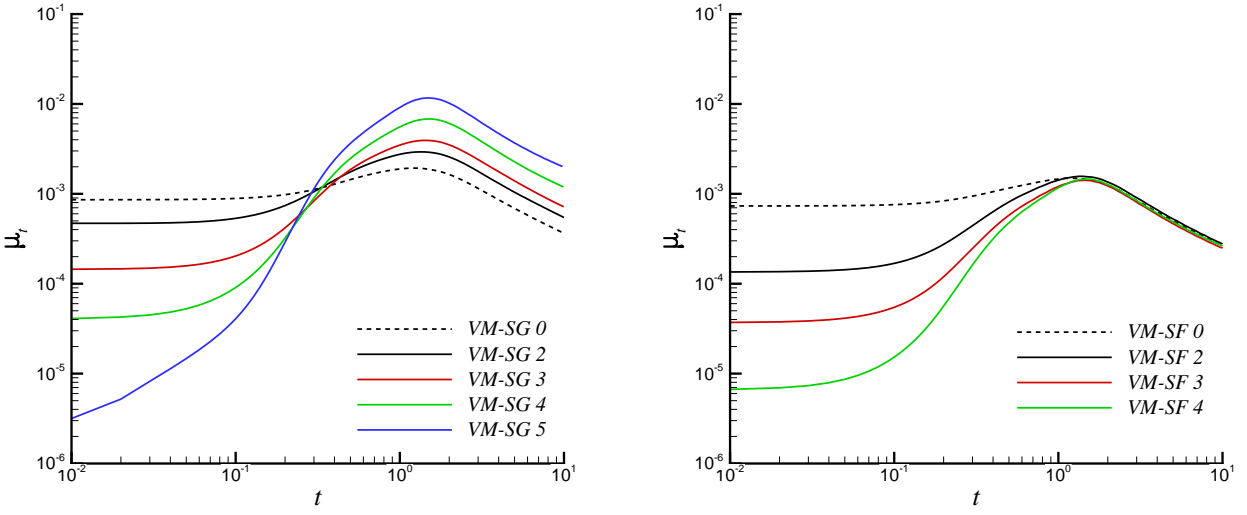


FIGURE 5.13 – Evolution temporelle de la viscosité turbulente. Calculs VMS pour la turbulence en décroissance libre à haut Reynolds.

soit nul dans les hautes fréquences implique que les modèles VMS avec une gamme réduite de petites échelles vont fournir des valeurs faibles de viscosité turbulente. L’augmentation de cette quantité intervient quand les structures commencent à se développer dans la gamme spectrale définissant les petites échelles. Ces résultats indiquent le bon fonctionnement des modèles VMS. On note également une différence entre les modèles de Smagorinsky et à fonction de structure, concernant le comportement de la viscosité après le pic d’entrophie. Tandis que les viscosités turbulentes des différentes partitions tendent vers le même niveau pour le modèle à fonction de structure, le modèle de Smagorinsky présente des niveaux d’autant plus élevés que α est grand. Ceci provient de la calibration du modèle, qui implique que la constante de Smagorinsky augmente avec la réduction de la bande spectrale correspondant aux petites échelles.

Analyse spectrale

Les spectres à l’instant final sont présentés sur la Figure 5.14 pour tous les modèles considérés. De manière générale, les modèles VMS présentent une rangée inertielle plus étendue que les modèles mono-échelle. La constante de Kolmogorov associée est également plus élevée, et s’établit à une valeur d’environ 2.5 pour les modèles VM-SG 2,3,4 et VM-SF 2,3, qui correspond également à celle trouvée pour les DNS spectrales présentées en section 5.2.2. Les modèles VMS-SG 5 et VMS-SF 4 présentent des valeurs encore plus importantes de C_K , ce qui traduit probablement un comportement sous-dissipatif menant à l’accumulation d’énergie sur les petites échelles. Les spectres compensés des calculs VM-SG 2,3,4 et VMS-SF

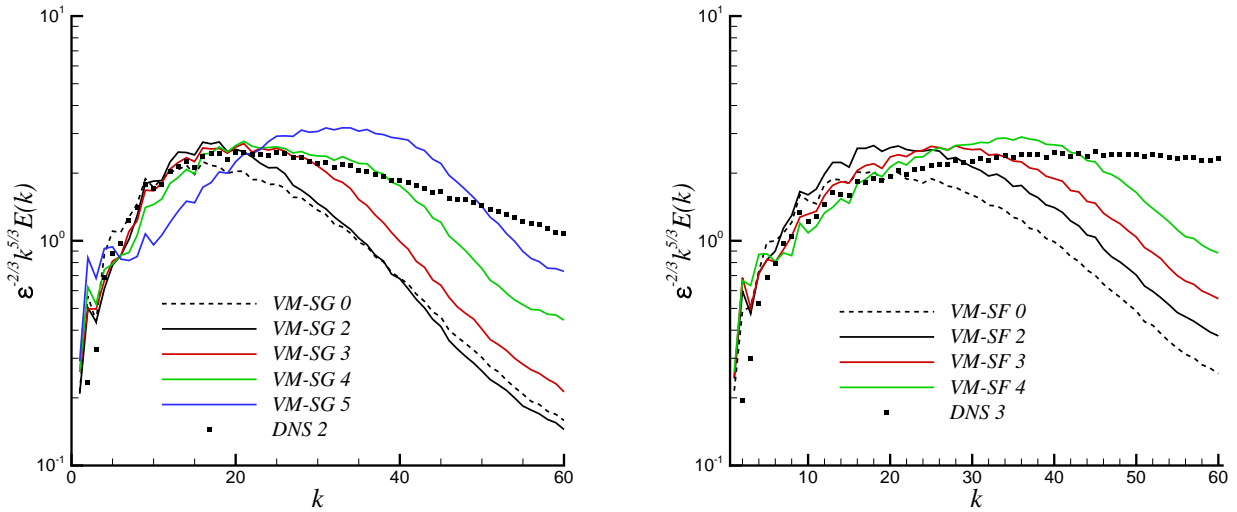


FIGURE 5.14 – Spectres d’énergie à l’instant final pour les différents modèles LES multi-échelle. Cas de la THI à très haut Reynolds.

2 sont similaires à celui de la DNS à Reynolds modéré DNS 2, tandis que les spectres des calculs VM-SF 3,4 présentent une forme proche du spectre de la DNS à haut Reynolds DNS 3. Cette observation confirme la capacité des modèles VMS à représenter une dynamique correspondant à un nombre de Reynolds plus important que les modèles mono-échelle.

Analyse physique

Nous avons tracé les isosurfaces de la quantité Q dans un plan du domaine à l’instant $t = 4$ pour tous les calculs, dans l’optique de mettre en évidence la dimension des structures tourbillonnaires représentées par les différents modèles. Les résultats sont présentés sur les Figures 5.15 et 5.16. Les modèles VM-SG 0,2,3,4 et VM-SF 0,2,3 se trouvent restituer une dynamique tourbillonnaire riche. On note une diminution globale de la taille des structures quand le nombre de partition augmente. La visualisation des isosurfaces de Q pour les modèles VM-SG 5 et VM-SF 4 montre la prépondérance d’un bruit numérique par rapport aux structures tourbillonnaires, probablement associé à l’accumulation d’énergie cinétique dans les hautes fréquences.

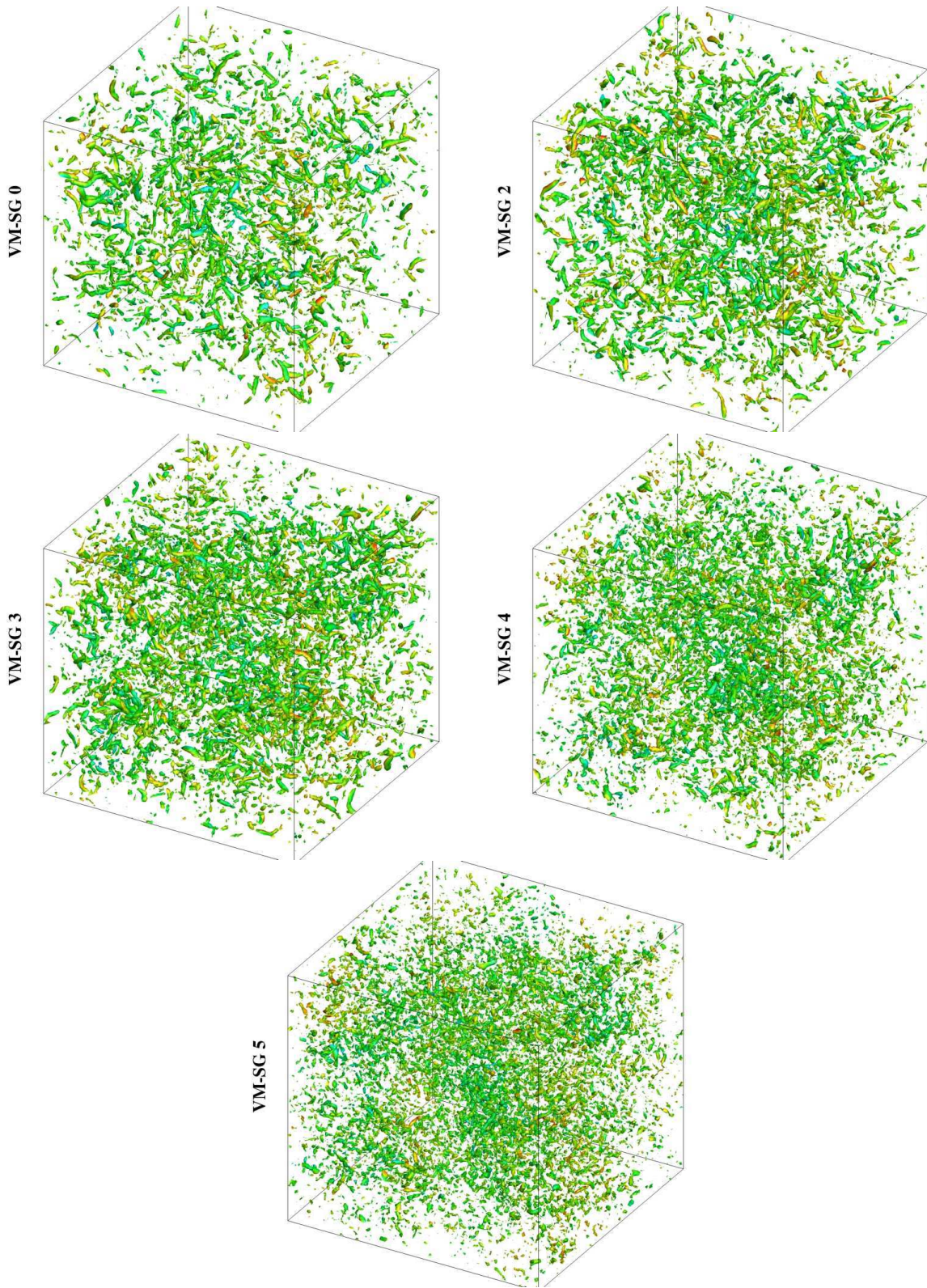


FIGURE 5.15 – Isosurfaces de $Q = 0.6 \langle \omega_0^2 \rangle$ pour les modèles VM-SG. Cas de la THI à très haut Reynolds.

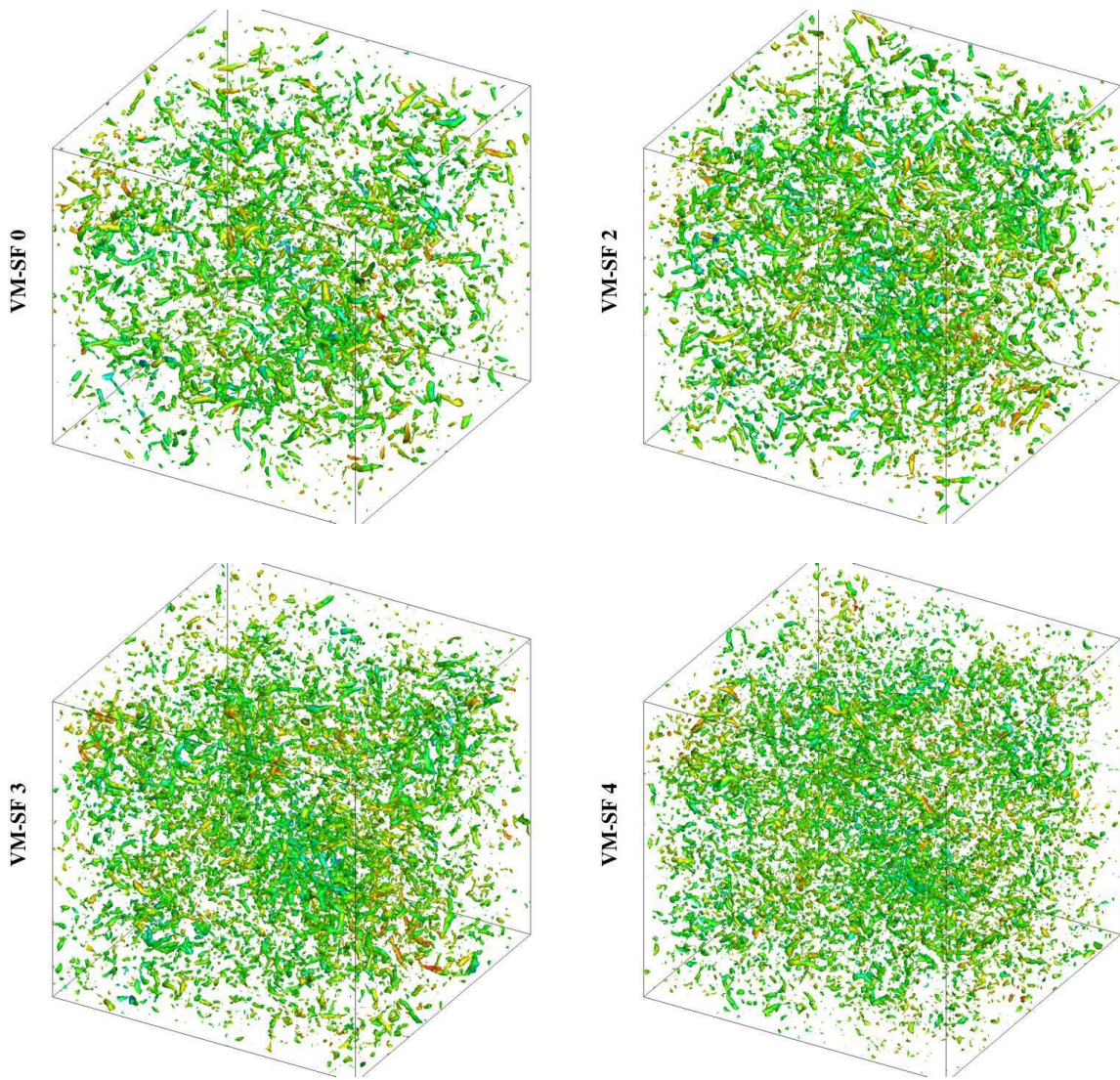


FIGURE 5.16 – Isosurfaces de $Q = 0.6 \langle \omega_0^2 \rangle$ pour les modèles VM-SF. Cas de la THI à très haut Reynolds.

5.3 Evaluation de la méthode DG-LES pour le vortex de Taylor-Green à $Re = 3000$

Nous évaluons dans cette section les différents modèles DG-LES pour la représentation de l'écoulement transitionnel TGV à Reynolds fini. Une DNS de référence est réalisée avec le code spectral de Fourier Fergus [19], ce qui nous permet de quantifier les performances des modèles. Nous sommes particulièrement intéressés par le comportement des modèles pour la capture du développement progressif des échelles turbulentes dans l'écoulement.

5.3.1 Configuration et DNS spectrale Fourier de référence

Nous considérons ici le cas du vortex de Taylor-Green à $Re = 3000$. Une DNS de référence est générée à l'aide du code spectral de Fourier, puis les champs sont filtrés à l'aide de la fonction de transfert correspondant à la discrétisation DG pour pouvoir comparer les champs LES et DNS. Le Tableau 5.9 présente le détail des discrétisations spectrale et DG. Les évolutions temporelles du nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor et le rapport de l'échelle de Kolmogorov par rapport à la dimension de la grille sont présentées sur la Figure 5.17 pour le calcul spectral, avec également les spectres d'énergie tracés à différents instants du calcul. Le pic d'ensrophie est atteint à $t = 9$ et la valeur de $R_\lambda = 105$ associée correspond à un écoulement à Reynolds modérément élevé. Le spectre d'énergie correspondant à cet instant présente une gamme étendue de nombres d'onde associés à une rangée inertielle. Le rapport entre la taille de l'élément le plus petit dans l'espace physique (correspondant à $dx = \pi/k_{max}$ où k_{max} est le plus haut nombre d'onde représenté) et l'échelle de Kolmogorov a une valeur maximale de 2.4. Cette valeur est légèrement supérieure à la limite de 2.1 préconisée par Pope [100] pour la simulation des écoulements turbulents en décroissance libre. Nous ne voyons toutefois pas l'apparition d'effets d'aliasing sur les spectres d'énergie, ce qui nous indique que la résolution est adaptée au Reynolds considéré.

Méthode	#d.d.l.	#pts. d'intégration	#Eléments / Ordre	Flux numérique
DG	72^3	84^3	$12^3 / p = 5$	LLF $k_2 = 1$
Pseudo-spectral (PS)	384^3	576^3	-	-

TABLE 5.9 – Détail des discrétisations pseudo-spectrale et DG utilisées pour les calculs DNS et LES du TGV à $Re = 3000$.

La fonction de transfert correspondant à la discrétisation DG présentée dans le Tableau 5.9 a été calculée à l'aide d'une projection décrite dans la section 3.2. Cette fonction de transfert est utilisée pour filtrer les champs de la DNS de référence et calculer les évolutions temporelles d'énergie cinétique et d'ensrophie correspondantes. La Figure 5.18 montre la fonction de transfert ainsi que son application au spectre d'énergie de la DNS à $t = 9$. La

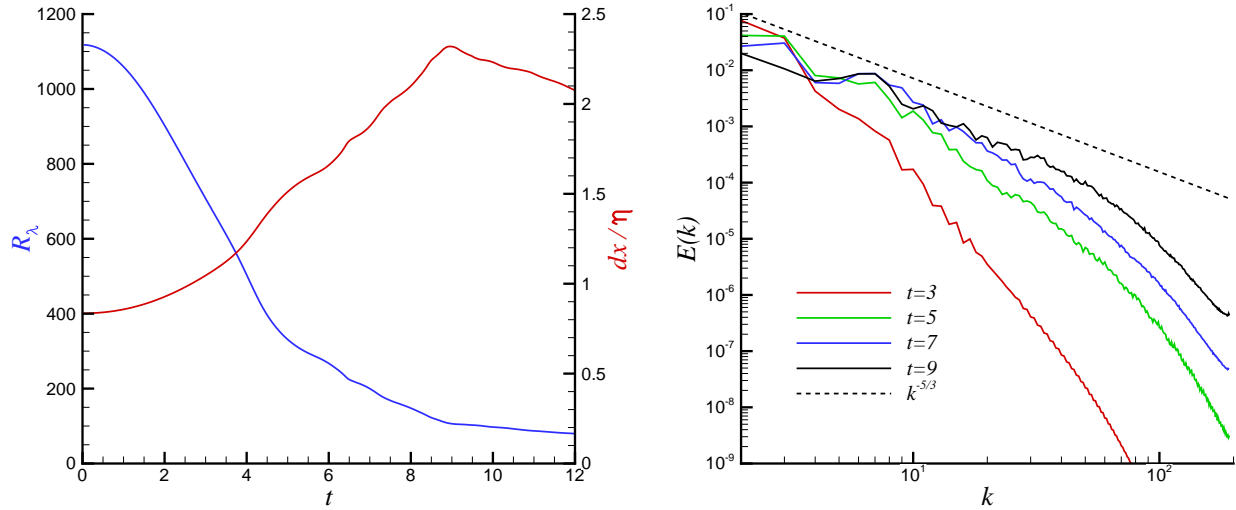


FIGURE 5.17 – Evolution temporelle des quantités moyennes et spectres d'énergie à différents instants pour la DNS spectrale du TGV à $Re = 3000$.

Figure 5.19 montre les évolutions des quantités moyennes filtrées et non-filtrées. Nous voyons que le filtrage impacte peu l'évolution de l'énergie cinétique mais a un effet important sur le niveau d'enstrophie qui est fortement réduit pour les instants avancés de la simulation.

La résolution de la discrétisation DG est particulièrement grossière par rapport à celle de la DNS spectrale. Le rapport du nombre de d.d.l. entre les deux discrétisations est d'environ 150, et celui du nombre de points d'intégration est d'environ 350. Nous présentons dans la section suivante l'analyse détaillée des calculs réalisés.

5.3.2 Comportement des modèles DG-LES mono-échelle

Nous évaluons ici les modèles de Smagorinsky, à fonction de structure et dynamique ainsi que l'approche ILES (LES sans modèle de sous-maille) pour la configuration considérée. Toutes les comparaisons sont réalisées à partir des champs et spectres DNS filtrés.

La Figure 5.20 montre l'évolution de l'énergie cinétique et de l'enstrophie pour les différents modèles considérés. Ces derniers mènent à une dissipation prématurée de l'énergie cinétique, et agissent durant la période transitoire de l'écoulement. L'évolution de l'énergie cinétique est bien capturée par le calcul sans modèle de sous-maille. Les trois modèles sous-estiment également l'enstrophie à partir de $t = 4$ et semblent donc bloquer le développement des petites structures dans l'écoulement. A l'inverse, le calcul sans modèle de sous-maille est associé à des niveaux trop importants d'enstrophie, ce qui indique une accumulation d'énergie au niveau des hauts nombres d'onde. Nous remarquons que le modèle dynamique se comporte

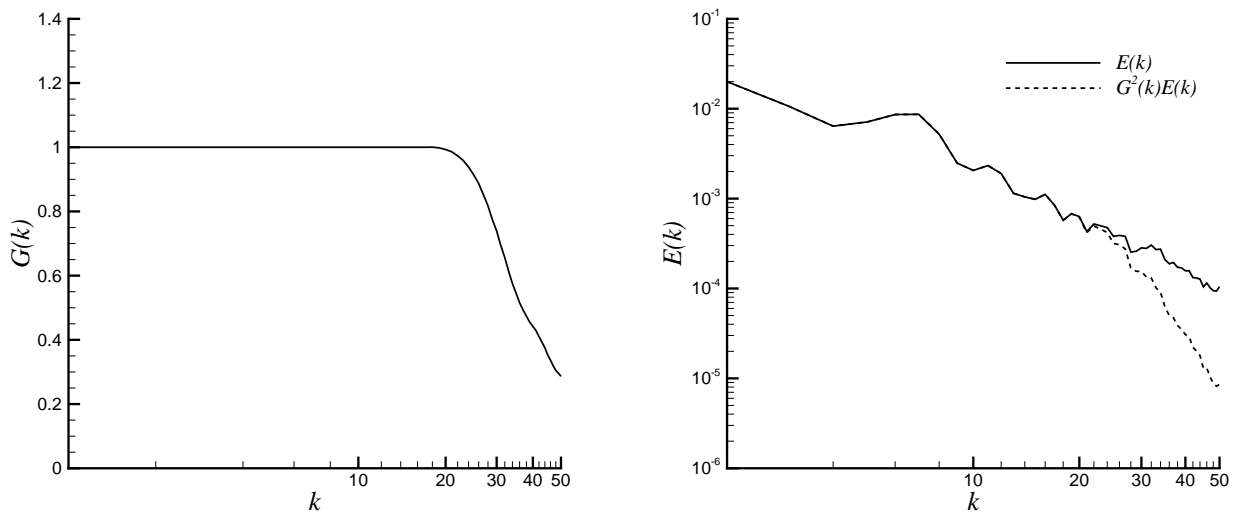


FIGURE 5.18 – Fonction de transfert de la discrétisation DG et spectre d'énergie filtré à $t = 9$ pour la configuration TGV à $Re = 3000$.

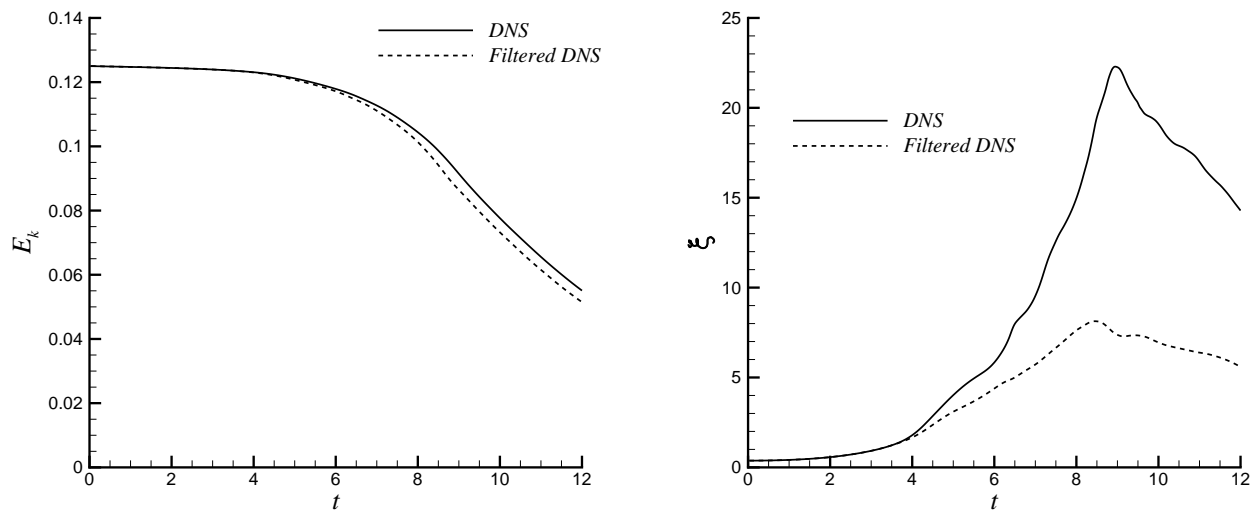


FIGURE 5.19 – Evolution de l'énergie cinétique et de l'enstrophie pour les DNS filtrée et non-filtrée pour la configuration TGV à $Re = 3000$.

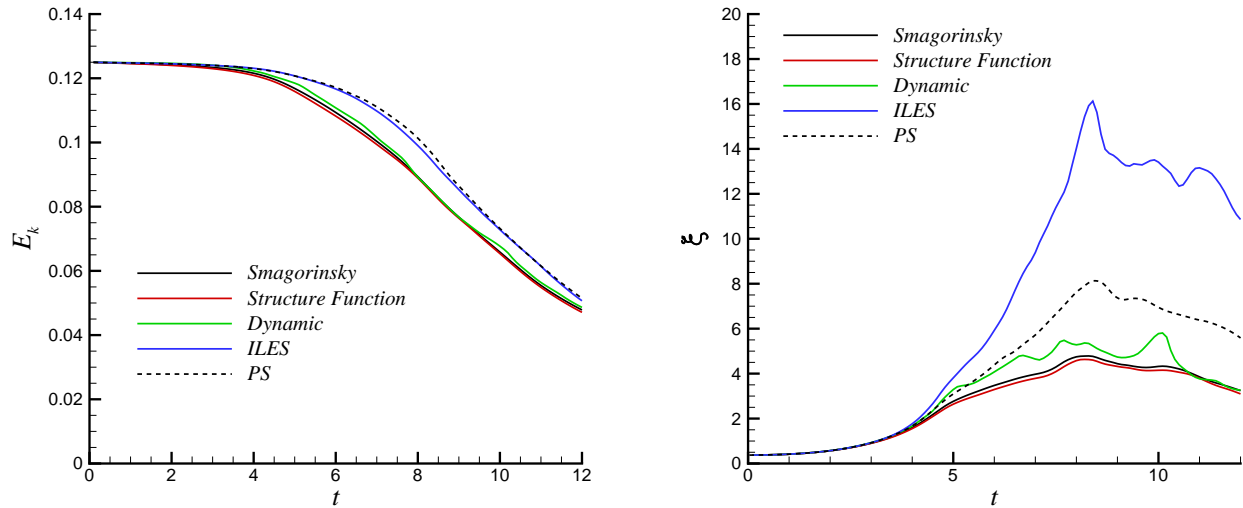


FIGURE 5.20 – Evolution de l’énergie cinétique et de l’enstrophie pour les modèles mono-échelle, configuration TGV à $Re = 3000$. PS : DNS filtrée ; ILES : calcul DG sans modèle de sous-maille.

de manière erratique, ce qui peut s’expliquer par la discrétisation grossière qui amène de fortes variations de la constante de Smagorinsky dynamique.

Les spectres d’énergie sont tracés à différents instants sur la Figure 5.21. Les modèles mono-échelles dissipent l’énergie contenue dans les hauts nombres d’onde dès l’instant $t = 5$. Cette dissipation bloque par la suite l’établissement de la rangée inertielle, comme nous pouvons le voir sur les spectres aux instants $t = 7, 9$ et 11 . En effet le contenu spectral haute fréquence reste le même pour les modèles tandis que celui de la DNS de référence augmente. Le calcul sans-modèle de sous-maille suit un comportement inverse et présente des niveaux d’énergie trop importants concernant les hauts nombres d’onde, l’écart par rapport à la référence augmentant avec le temps.

5.3.3 Comportement des modèles DG-VMS

Les modèles VMS considérés sont les mêmes que ceux évalués en section 5.2.3 pour la turbulence isotrope à haut Reynolds. Les évolutions temporelles de l’énergie cinétique et de l’enstrophie sont présentées sur la Figure 5.22 pour tous les modèles VMS. Tous les modèles VMS présentent une évolution d’énergie plus proche de la référence que les versions mono-échelle. En particulier, nous observons que la dissipation des modèles est activée aux alentours de $t = 4$, moment correspondant au développement des petites structures turbulentes dans l’écoulement. Le niveau d’enstrophie augmente logiquement avec la fraction de grandes échelles α , étant donné que la dissipation du modèle agit sur une gamme de

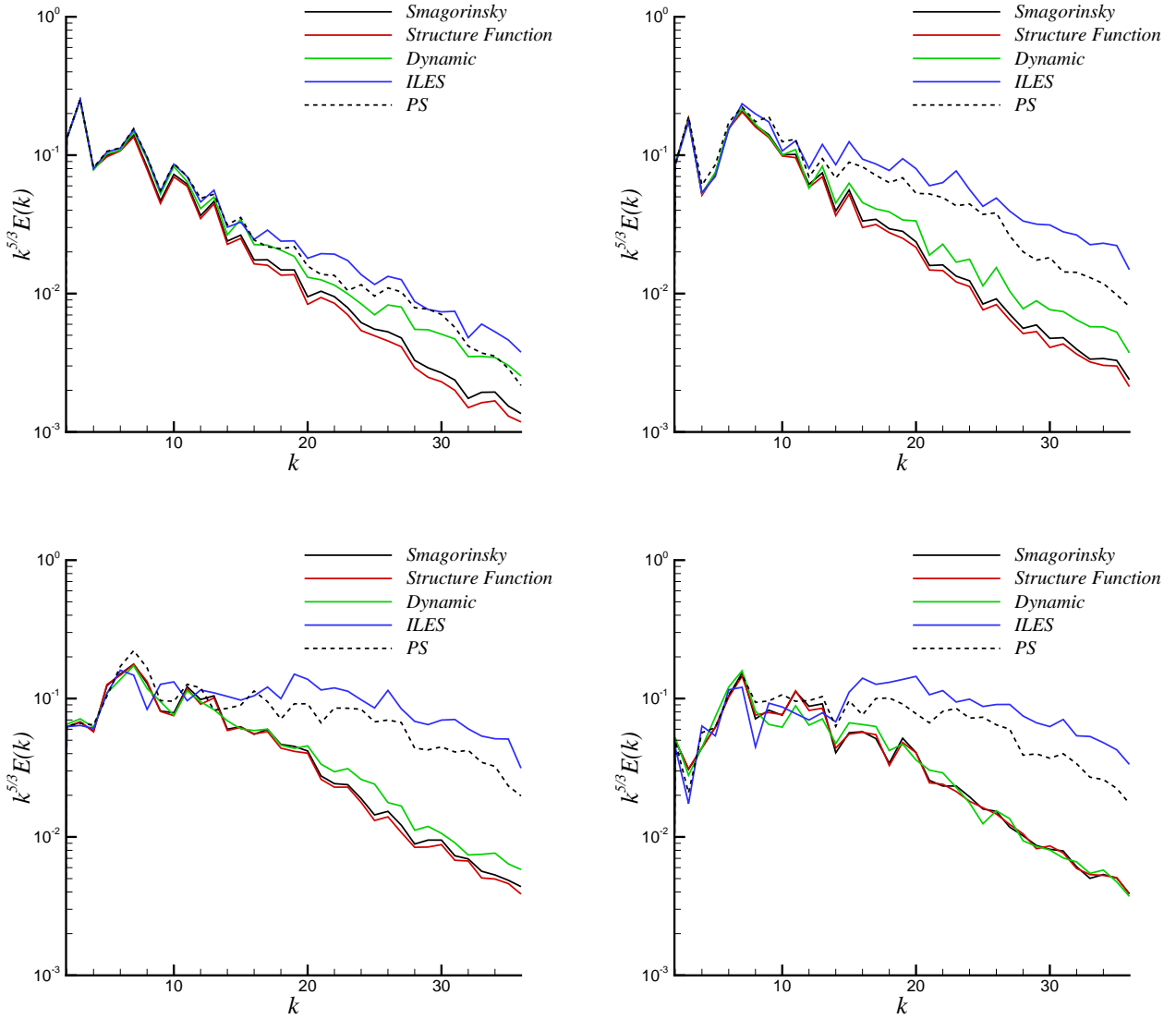


FIGURE 5.21 – Spectres d'énergie à différents instants pour les modèles mono-échelle, configuration TGV à $Re = 3000$. Haut-gauche : $t = 5$; haut-droite : $t = 7$; bas-gauche : $t = 9$; bas-droite : $t = 11$.

plus en plus restreinte de nombres d'onde. Le modèle VM-SF 3 semble fournir la meilleure représentation à la fois de l'évolution d'énergie cinétique et d'entrophie.

La Figure 5.23 présente les spectres d'énergie à trois instants différents pour les modèles VMS. A l'inverse des modèles mono-échelle, les modèles VMS fournissent une représentation précise des spectres à $t = 5$. A $t = 7$, les modèles VM-SG 3 et VM-SF 3 fournissent toujours une bonne représentation des basses fréquences, tandis que les modèles VM-SG 4,5 et VM-SF 4 sur-estiment l'énergie de ces modes. D'après les spectres d'énergie tracés à $t = 9$, on peut voir que les solutions associées aux modèles perdent progressivement leur bon accord avec la solution de référence, ce qui provient probablement d'une action importante des échelles qui ne peuvent être représentées par la discrétisation DG grossière choisie ici.

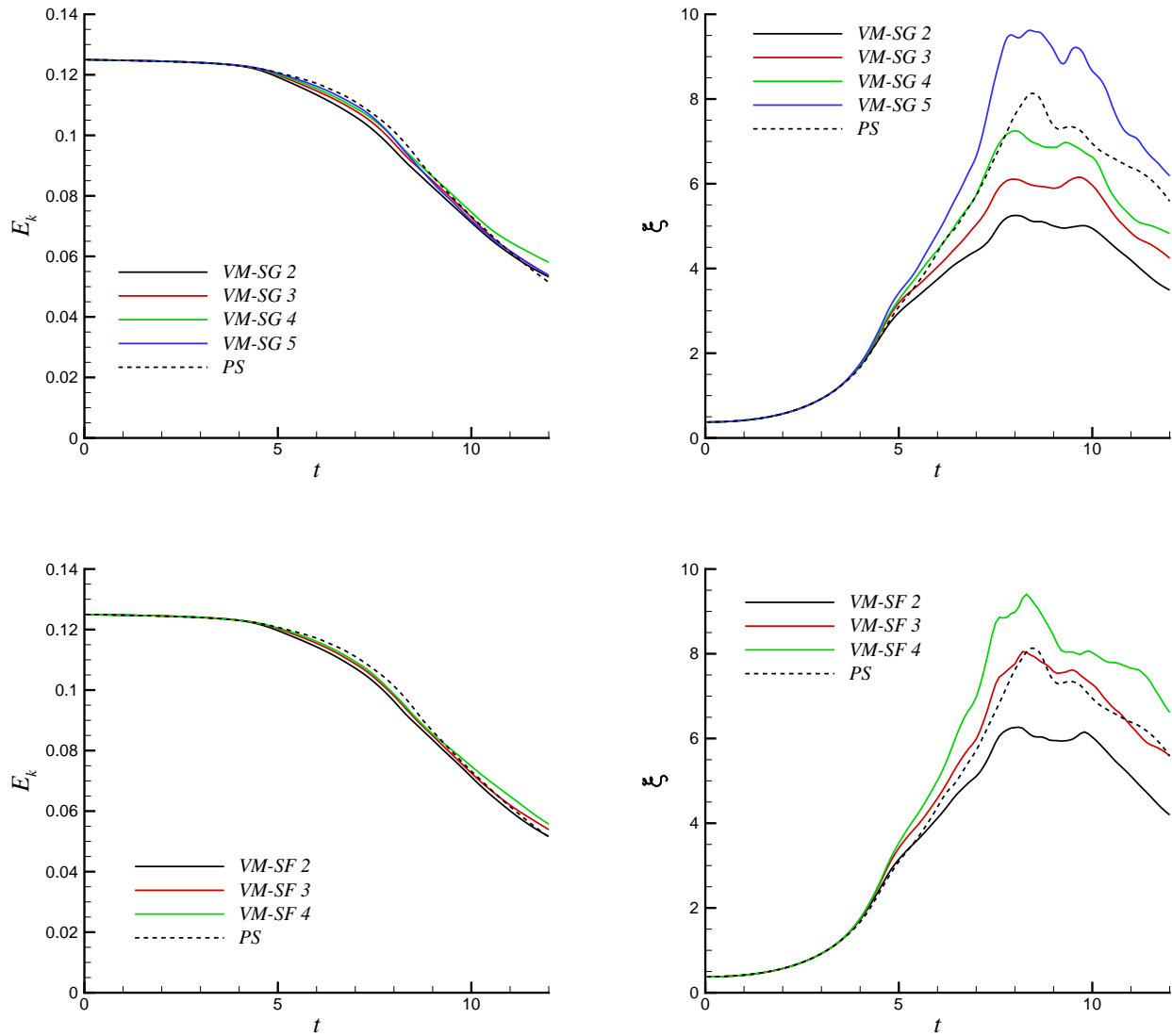


FIGURE 5.22 – Evolution de l'énergie cinétique et de l'enstrophie pour les modèles VMS, configuration TGV à $Re = 3000$.

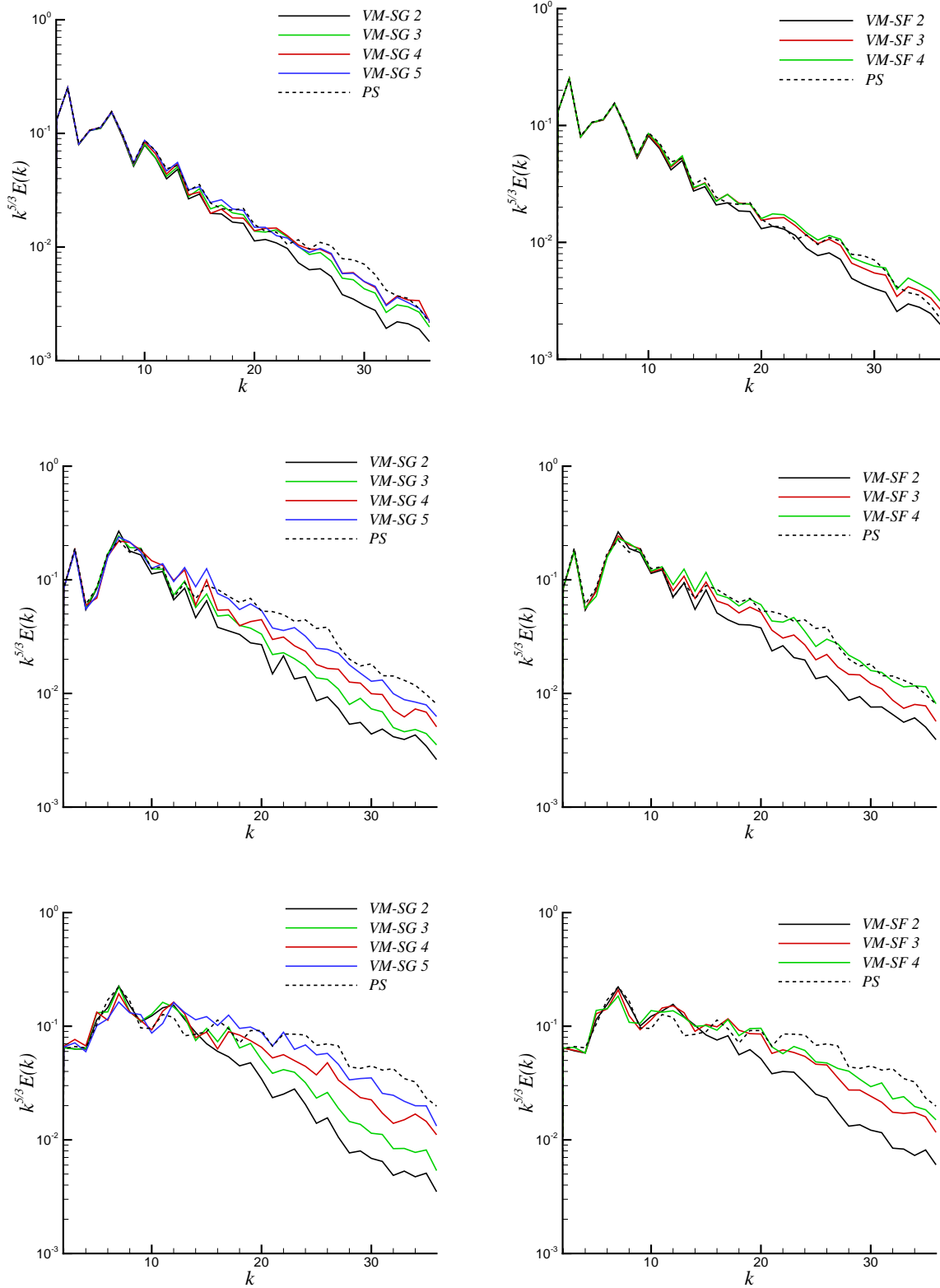


FIGURE 5.23 – Spectres d’énergie à différents instants pour les modèles VMS, configuration TGV à $Re = 3000$. 1ère ligne : $t = 5$; 2è ligne : $t = 7$; 3è ligne : $t = 9$.

5.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons estimé les propriétés dissipatives des schémas DG à différents ordres et évalué les modèles de turbulence mono et multi-échelle développés dans le Chapitre 3 à partir de deux configurations de référence.

Les tests conduits à partir du cas du vortex de Taylor-Green non visqueux sans modèle de sous-maille ont montré plusieurs propriétés intéressantes des schémas DG. Nous avons notamment démontré que les discrétisations aux ordres 2 et 3 présentent une dissipation numérique suffisante pour soustraire l'action d'un modèle de sous-maille de type Smagorinsky. Les discrétisations aux ordres plus élevés (4 et 6) mènent à une accumulation de l'énergie sur les plus petites échelles représentées par la grille de calcul. En particulier, la discrétisation à l'ordre 6 présente un spectre montrant l'établissement d'une solution d'équipartition, ce qui traduit un faible niveau de dissipation numérique. La constante de Smagorinsky correspondant à la dissipation du schéma a été évaluée (d'après une idée de Garnier *et al.* [47]) pour les différentes discrétisations considérées. Nous avons montré que les calculs à l'ordre 4 et 6 développent une dissipation numérique respectivement 17 et 60 fois inférieure à celle introduite par le modèle classique de Smagorinsky. Il est donc possible d'envisager deux utilisations de la méthode DG pour réaliser des calculs LES. La première consisterait à employer un ordre de précision de 2 ou 3 sans considérer de modèle de sous-maille. La deuxième possibilité est d'employer un ordre élevé en conjonction de modèles de sous-maille. Nous avons montré dans le Chapitre 4 que les discrétisations à l'ordre élevé (>4) se révèlent bien plus précises vis-à-vis de la représentation des phénomènes turbulents que les discrétisations présentant un ordre moindre, ce qui constitue un argument pour privilégier la deuxième option.

Le comportement des modèles de sous-maille développés dans le Chapitre 3 a été évalué dans le cadre d'un écoulement de turbulence homogène isotrope sans viscosité moléculaire. Nous avons vérifié que les modèles mono-échelle et la majorité des modèles VMS satisfont bien les propriétés fondamentales de la turbulence à haut nombre de Reynolds (décroissance de l'énergie cinétique, facteur de dissymétrie, présence d'une zone inertielle) et assurent bien la dissipation liée aux transferts d'énergie vers les échelles sous-maille. Seuls les modèles VMS présentant une gamme réduite de petites échelles (VM-SG 5 et VM-SF 4) montrent un comportement sous-dissipatif, caractérisé par une décroissance lente de l'énergie cinétique, une valeur erronée du facteur de dissymétrie et une accumulation de l'énergie sur les plus hauts nombres d'ondes détectée par une valeur trop importante de la constante de Kolmogorov sur le spectre compensé. Le calcul du nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor et l'examen des spectres d'énergie montrent que les modèles VMS sont de manière générale moins dissipatifs et permettent la représentation d'une gamme plus étendue d'échelles que les modèles mono-échelle. Des comparaisons avec des DNS spectrales de référence ont montré que le comportement des modèles mono-échelle était proche de celui d'une DNS à bas Reynolds tandis que les modèles VMS se comportent de manière similaire aux DNS présentant

un Reynolds modérément élevé (en particulier les modèles VM-SG 4 et VM-SF 3). A partir d'une même discrétisation, il est donc plus avantageux de considérer la version multi-échelle d'un modèle qui permet la représentation de phénomènes physiques associés à un nombre de Reynolds plus important.

Une comparaison rigoureuse entre résultats de référence DNS et calculs DG-LES a été réalisée à partir du cas du vortex de Taylor-Green à $Re = 3000$. Les champs et spectres de la DNS de référence spectrale ont été filtrés à l'aide de la fonction de transfert associée à la discrétisation DG considérée pour la réalisation des calculs LES. Il apparaît que les approches traditionnelles de modélisation sont mises en difficulté sur ce cas d'étude. En effet, l'approche consistant à ne pas considérer de modèle de sous-maille mène ici à une importante sur-estimation des niveaux d'enstrophie et à un contenu énergétique trop prononcé dans les hauts nombres d'onde, malgré une bonne prédiction de l'évolution de l'énergie cinétique moyenne. A l'inverse, les modèles mono-échelle dissipent l'énergie des tourbillons dès les premiers instants de l'écoulement, ce qui impacte le développement des petites échelles et provoque une sous-estimation des niveaux d'énergie et d'enstrophie. Les modèles VMS fournissent une représentation précise de l'évolution d'énergie cinétique et proposent des niveaux d'enstrophie en adéquation avec ceux de la DNS filtrée. Les modèles les plus performants à cet égard sont les modèles VM-SG 4 et VM-SF 3. Les spectres d'énergie tracés à différents instants montrent un bon accord avec la référence et traduisent du bon déroulement de la cascade d'énergie qui est mal représenté par les modèles mono-échelle. Ce cas d'étude montre l'intérêt de la VMS par rapport à l'approche de modélisation classique, qui permet une bonne représentation des phénomènes transitoires qui interviennent dans un grand nombre d'écoulements turbulents. Nous soulignons ici également le rapport important du nombre de points d'intégration de la discrétisation DG sur celui de la discrétisation DNS, qui est d'environ 320.

La combinaison des approches DG et VMS est donc intéressante à plusieurs égards. Il est en effet très simple de développer les modèles de type VMS dans un solveur DG, pour des performances bien meilleures que les versions mono-échelle des modèles. La méthode DG à l'ordre élevé présente une dissipation numérique très faible, limitant les interférences avec le modèle de sous-maille. Enfin, la précision élevée de l'approche DG-VMS à la fois dans l'étape de discrétisation et de modélisation permet de réduire de manière importante le nombre de degrés de liberté nécessaire pour représenter fidèlement la physique des problèmes.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale

Cette thèse s'inscrit dans un contexte de développement des méthodes numériques adaptées à la résolution des équations de la mécanique des fluides compressibles par les approches de simulation numérique directe et des grandes échelles. A l'heure actuelle, peu de méthodes numériques permettent de simuler les écoulements turbulents à haut Reynolds autour de géométries complexes avec une bonne précision et un coût en temps de calcul raisonnable. Parmi ces dernières, la méthode de Galerkin discontinue présente de nombreux avantages pour la réalisation de telles simulations :

- La précision de la méthode est arbitrairement élevée car la solution numérique est exprimée sous la forme d'un polynôme de degré donné dans chaque élément de la discrétisation spatiale.
- La méthode prend en charge les maillages non-structurés et non-conformes, ce qui permet la représentation de géométries complexes au sein du domaine de calcul.
- Les calculs sont mis en oeuvre de manière efficace sur plusieurs centaines voire milliers de coeurs de calcul du fait de la compacité du stencil lié à la méthode numérique.
- Les conditions aux limites sont décrites très précisément et simplement à travers la définition d'intégrales de bord, et la prise en compte d'éléments courbes épousant exactement la géométrie considérée est possible.
- La connaissance des degrés de liberté dans l'espace modal permet l'emploi de méthodes multi-échelles basées sur la séparation des composantes de la base fonctionnelle pour la modélisation LES.

L'objectif de la thèse a consisté à développer une méthodologie LES multi-échelle adaptée à la méthode de Galerkin discontinue. Le présent travail a été motivé par le fait que très peu de travaux de la littérature concernent le développement et la validation de ce type de modélisation pour la méthode. Dans le Chapitre 1, une présentation générale de la problématique

ainsi qu'une étude bibliographique justifiant l'emploi de l'approche DG-VMS ont été réalisées. Dans le Chapitre 2, l'approche DG modale retenue a été détaillée avec un accent placé sur les choix des flux numériques et de la base fonctionnelle permettant de vérifier les propriétés énoncées ci-dessus.

Dans le Chapitre 3, nous avons développé le formalisme LES utilisé dans le cadre des discrétisations DG. Les équations de la LES sont classiquement établies à partir d'un filtre défini dans l'espace de Fourier. Or, les discrétisations DG sont basées sur l'expression de la solution dans une base de polynômes qui possède des caractéristiques très différentes de la base de Fourier. La première solution consiste alors à projeter les équations filtrées dans la base de polynômes, et la deuxième à utiliser un filtrage directement dans l'espace des fonctions polynomiales. L'essentiel de la littérature sur la LES étant basée sur le formalisme Fourier, nous avons choisi de retenir la première option, en caractérisant le filtre associé aux discrétisations DG à partir de projections a priori dépendant des paramètres h et p . Nous avons ainsi pu calibrer les modèles connus de Smagorinsky et à fonction de structure pour les discrétisations DG. Nous avons étendu cette idée aux modèles VMS en caractérisant la fonction de transfert passe haut liée à la gamme de petites échelles résolues, afin de déterminer une correction de la viscosité turbulente liée aux modèles mono-échelle. Il est apparu que la viscosité turbulente augmente d'autant plus que la gamme de petites échelles est réduite, ce qui permet de maintenir le niveau de dissipation nécessaire.

Dans le Chapitre 4, nous avons évalué la capacité de la méthode DG à représenter des phénomènes turbulents variés en réalisant des DNS de plusieurs écoulements de référence, en préambule à la réalisation de calculs LES. Nous avons considéré trois configurations distinctes présentant une variété de phénomènes tels que : la turbulence se développant en décroissance libre, la turbulence se développant en proche paroi, l'étirement et l'appariement tourbillonnaires et enfin la turbulence soumise à des effets de compressibilité. Pour l'ensemble des configurations, la méthode DG a fourni des résultats quantitativement similaires à ceux obtenus avec les méthodes spectrales de référence à résolution équivalente, quand un ordre élevé (>3) est pris en compte. De plus, à l'inverse de la majorité des autres méthodes proposant un ordre élevé de précision, les calculs DG n'ont pas présenté d'oscillations parasites et un comportement stable des simulations sous-résolues a été observé. Ces résultats ont démontré le potentiel de la méthode DG pour la réalisation de calculs DNS et la bonne représentation des phénomènes turbulents est encourageante vis-à-vis de la réalisation de calculs LES.

Nous avons présenté dans le Chapitre 5 les études LES réalisées avec la méthode DG. En premier lieu, nous avons évalué la dissipation numérique introduite par les discrétisations DG à partir de l'étude du vortex de Taylor-Green sans viscosité moléculaire. Nous avons ainsi pu démontrer que les discrétisations à l'ordre 2 ou 3 introduisent un niveau de dissipation comparable à celui introduit par le modèle de sous-maille de Smagorinsky. Les discrétisations à l'ordre élevé (>3) mènent à une accumulation d'énergie sur les petites échelles et introduisent un niveau de dissipation largement inférieur à celui du modèle, ce qui confirme la

nécessité d’employer un modèle de sous-maille quand de telles discrétisations sont considérées. Les performances des modèles basés sur une discrétisation DG à l’ordre 6 ont ensuite été évaluées à partir du cas de la turbulence homogène isotrope avec un nombre de Reynolds tel que la viscosité moléculaire soit négligeable devant la viscosité turbulente. Les modèles mono-échelle se trouvent assurer correctement la dissipation d’énergie à l’échelle de coupure et vérifient bien les propriétés fondamentales de la turbulence en décroissance libre. Les modèles multi-échelle permettent la représentation d’une gamme étendue de structures turbulentes et l’évaluation du nombre de Reynolds basé sur la micro-échelle de Taylor a montré que ces modèles sont associés à une physique à plus haut nombre de Reynolds que les modèles mono-échelle. Cependant, quand la dimension de l’espace des petites échelles est excessivement réduite concernant les modèles VMS, on observe une déviation par rapport aux lois fondamentales de la turbulence et un comportement globalement sous-dissipatif. Nous avons choisi comme deuxième cas d’étude le vortex de Taylor-Green à nombre de Reynolds modérément élevé, permettant la comparaison systématique des calculs DG-LES avec une DNS de référence réalisée pour l’occasion et filtrée à l’aide de la fonction de transfert correspondant à la discrétisation DG. Les modèles VMS fournissent dans ce cas des prédictions beaucoup plus précises que les modèles mono-échelle, au niveau des quantités moyennes et des spectres d’énergie. Cela est principalement dû à la viscosité turbulente qui est quasi-nulle durant la période où les échelles se développent dans l’écoulement.

Au cours de cette thèse, nous avons développé des modèles LES mono et multi-échelle pour les discrétisations DG et les avons évalué à partir de configurations de référence. Il s’avère que la méthode DG fournit un cadre naturel pour l’intégration de modèles de turbulence basés sur une viscosité agissant dans une gamme définie de nombres d’onde. Les modèles VMS développés dans le cadre de cette thèse se trouvent être plus précis que leur version mono-échelle pour les deux configurations de référence traitées ici, et permettent de représenter fidèlement la physique des écoulements turbulents avec la définition d’un nombre réduit de degrés de liberté. Nous évoquons dans la section suivante les perspectives concernant les travaux futurs sur ce sujet.

Perspectives

Ces travaux de thèse ont permis de soulever des questions intéressantes que ce soit sur des aspects liés à la précision, la stabilité et l’efficacité de la méthode numérique DG pour la simulation de la turbulence ou sur des aspects liés à la modélisation DG-LES. Nous proposons d’énoncer certaines pistes possibles d’approfondissement concernant les sujets suivants :

- Modélisation LES :

Nous avons évalué dans cette thèse des modèles LES basés sur l’introduction d’une viscosité turbulente. Il pourrait être intéressant d’évaluer les modèles de type similarité d’échelles

[4, 90], qui consistent à comparer la solution filtrée avec deux longueurs de coupure différentes. Concernant la méthode DG, cette comparaison pourrait être réalisée en définissant une troncature à deux niveaux dans la base fonctionnelle. Ces modèles fournissent une bonne approximation du tenseur sous-maille, mais sont généralement sous-dissipatifs. La combinaison des propriétés de dissipation numérique dans les hauts nombres d’ondes des discrétisations DG avec les bonnes propriétés des modèles de similarité d’échelle pourrait se révéler intéressante.

- Stabilité et précision de la méthode DG pour les calculs LES :

Dans cette étude, nous avons obtenu des calculs LES stables en jouant à la fois sur la dissipation introduite par le décentrement du schéma numérique et le nombre de points de quadrature utilisé pour intégrer les termes convectifs. Or, le premier facteur va induire une dégradation de la représentation des petites échelles et le deuxième un surcoût en temps de calcul et en occupation mémoire non négligeable. Il est connu que l’usage de formulations *skew-symmetric* pour les termes convectifs mène à une réduction de l’erreur commise lors de l’évaluation numérique de ces derniers [77]. L’utilisation de ces formulations en conjonction du schéma DG est délicate car la méthode est adaptée à l’intégration des termes non-linéaires exprimés sous forme conservative. Gassner [48] a cependant proposé un flux numérique *skew-symmetric* pour un schéma DG nodal spécifique aux équations de Burgers et garantissant la stabilité des discrétisations. Le développement de ce type de flux pour les équations de Navier-Stokes pourrait permettre une réduction des coûts tout en éliminant la dissipation numérique, ce qui peut se révéler intéressant pour l’utilisation de modèles de sous-maille.

- Amélioration de l’efficacité de la méthode DG :

Tout au long de cette étude, nous avons considéré une base fonctionnelle tridimensionnelle constituée du produit tensoriel complet des fonctions de bases dans les trois directions. La dimension de la base fonctionnelle dans ce cas augmente considérablement à mesure qu’on augmente l’ordre de précision, et peut amener à la présence de plusieurs centaines de degrés de liberté par élément. Cet aspect peut se révéler limitant notamment vis-à-vis des performances du parallélisme de type MPI qui dépendent fortement du rapport du nombre d’éléments internes sur le nombre d’éléments fictifs. Il est préférable dans ce cas de privilégier un nombre important d’éléments et donc un nombre réduit de degrés de liberté par éléments, ce qui correspond à un ordre de précision réduit si nous considérons la base complète. Il est cependant possible de construire des bases comprenant un nombre réduit de fonctions (bases dites *serendipity basis*). Dans ce cas, les produits de fonctions de base dont la somme des degrés polynomiaux dans les trois directions dépasse le degré de polynôme p défini sont négligés. L’ordre de convergence de la méthode est conservé mais la précision diminue, du fait du nombre de degrés de liberté réduit par rapport à la base complète (voir les tests réalisés

par Muntz [96]). Il pourrait être intéressant de comparer les deux approches au niveau de la précision et des coûts induits sur les configurations considérées dans ces travaux de thèse.

Une autre piste pour améliorer l'efficacité de la méthode serait d'optimiser le calcul des différents termes des équations. A l'heure actuelle, nous définissons un nombre de points de quadrature adapté à l'intégration des termes convectifs, mais cette formule de quadrature est également employée pour calculer les autres termes linéaires (termes visqueux, pression, ...). On pourrait donc adapter l'ordre de la formule de quadrature suivant les termes à calculer pour obtenir un gain en temps CPU.

- Evaluation de la précision de la méthode pour les géométries complexes :

Au cours de cette thèse, seuls des maillages composés d'hexaèdres réguliers ont été employés, et il est important d'évaluer le comportement de la méthode quand des maillages composés de tétraèdres ou d'hexaèdres non réguliers sont utilisés. Dans ce cas, la Jacobienne de transformation des éléments devient dépendante des coordonnées de l'espace, et il faut donc prendre en compte cette dépendance dans l'évaluation des intégrales composant le vecteur de résidu. Il pourrait être intéressant de réaliser la comparaison maillage structuré/non-structuré sur un cas simple (par exemple le cas du vortex de Taylor-Green). Il serait également intéressant d'évaluer le comportement de la méthode quand des maillages avec raccords non-conformes sont considérés. Ce type de maillage se révèle particulièrement intéressant pour capturer les structures de proche paroi dont les dimensions transversale et longitudinale varient suivant la direction normale à la paroi. Kravchenko *et al.* [78] ont notamment démontré l'intérêt de l'usage de ce type de grille pour la réduction des coûts de calcul.

Bibliographie

- [1] R. Abgrall. Residual distribution schemes : current status and future trends. *Comput. Fluids*, 35(7) :641–669, 2006.
- [2] R. Abgrall, A. Larat, and M. Ricchiuto. Construction of very high order residual distribution schemes for steady inviscid flow problems on hybrid unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 230(11) :4103–4136, 2011.
- [3] D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L.D. Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(5) :1749–1779, 2002.
- [4] J. Bardina, J. Ferziger, and W. Reynolds. Improved subgrid-scale models for Large-Eddy Simulation. *AIAA Paper 80-1357*, 1980.
- [5] F. Bassi, A. Crivellini, D.A. Di Pietro, and S. Rebay. An artificial compressibility flux for the discontinuous Galerkin solution of the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 218(2) :794–815, 2006.
- [6] F. Bassi, A. Crivellini, S. Rebay, and M. Savini. Discontinuous Galerkin solution of the Reynolds-averaged Navier-Stokes and $k-\omega$ turbulence model equations. *Comput. Fluids*, 34(4-5) :507–540, 2005.
- [7] F. Bassi and S. Rebay. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 131(2) :267–279, 1997.
- [8] F. Bassi, S. Rebay, G. Mariotti, S. Pedinotti, and M. Savini. A high-order accurate discontinuous finite element method for inviscid and viscous turbomachinery flows. In *Proceedings of 2nd European Conference on Turbomachinery, Fluid Dynamics and Thermodynamics*, pages 99–108. Technologisch Instituut, Antwerpen, Belgium, 1997.
- [9] G.K. Batchelor and A.A. Townsend. Decay of turbulence in the final period. *Proc. Roy. Soc. Lond. Math. Phys. Sci.*, 194(1039) :527–543, 1948.
- [10] G.K. Batchelor and A.A. Townsend. The nature of turbulent motion at large wave-numbers. *Proc. Roy. Soc. Lond. Math. Phys. Sci.*, 199(1057) :238–255, 1949.

- [11] C.E. Baumann and J.T. Oden. A discontinuous hp finite element method for the Euler and Navier–Stokes equations. *Int. J. Numer. Met. Fluids*, 31(1) :79–95, 1999.
- [12] R. Benzi, S. Ciliberto, C. Baudet, G.R. Chavarria, and R. Tripiccone. Extended self-similarity in the dissipation range of fully developed turbulence. *EPL (Europhysics Letters)*, 24 :275, 1993.
- [13] R. Benzi, S. Ciliberto, R. Tripiccone, C. Baudet, F. Massaioli, and S. Succi. Extended self-similarity in turbulent flows. *Phys. Rev. E*, 48(1) :29–32, 1993.
- [14] P. Birken, G. Gassner, M. Haas, and C.D. Munz. Preconditioning for modal discontinuous Galerkin methods for unsteady 3D Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 2013.
- [15] M. Borrel and J. Ryan. The elastoplast discontinuous Galerkin (EDG) method for the Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 231(1) :1–22, 2012.
- [16] M.E. Brachet, D.I. Meiron, S.A. Orszag, BG Nickel, R.H. Morf, and U. Frisch. Small-scale structure of the Taylor-Green vortex. *J. Fluid. Mech.*, 130(41) :1452, 1983.
- [17] M.E. Brachet, M. Meneguzzi, A. Vincent, H. Politano, and P.L. Sulem. Numerical evidence of smooth self-similar dynamics and possibility of subsequent collapse for three-dimensional ideal flows. *Phys. Fluids*, 4 :2845, 1992.
- [18] C. Brun, M. Petrovan Boiarciuc, M. Haberkorn, and P. Comte. Large eddy simulation of compressible channel flow. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 22(3) :189–212, 2008.
- [19] R.S. Cant. Fergus, a user guide, technical report. *Cambridge University Engineering Department*.
- [20] R.S. Cant. Initial conditions for direct numerical simulation of turbulence. *Cambridge University Engineering Department*.
- [21] D. Carati, G.S. Winckelmans, and H. Jeanmart. On the modelling of the subgrid-scale and filtered-scale stress tensors in Large-Eddy Simulation. *J. Fluid Mech.*, 441 :119–138, 2001.
- [22] C. Carton de Wiart, K. Hillewaert, P. Geuzaine, R. Luccioni, L. Bricteux, G. Coussement, and G. Winckelmans. Assessment of LES modeling within a high order discontinuous Galerkin solver. In *Proceedings of the ETMM9 : 9th International ERCOFTAC Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements*, 2012.
- [23] J.B. Chapelier, M. De La Llave Plata, and F. Renac. Inviscid and viscous simulations of the Taylor-Green vortex flow using a modal discontinuous Galerkin approach. *AIAA Paper 2012-3073*, 2012.

- [24] H. Choi and P. Moin. Grid-point requirements for Large-Eddy Simulation : Chapman’s estimates revisited. *Phys. Fluids*, 24 :011702, 2012.
- [25] J.P. Chollet and M. Lesieur. Parameterization of small scales of three-dimensional isotropic turbulence utilizing spectral closures. *J. Atmos. Sci.*, 38 :2747–2757, 1981.
- [26] F.K. Chow and P. Moin. A further study of numerical errors in Large-Eddy simulations. *J. Comput. Phys.*, 184(2) :366–380, 2003.
- [27] H.J.H. Clercx and C.H. Bruneau. The normal and oblique collision of a dipole with a no-slip boundary. *Comp. Fluids*, 35(3) :245–279, 2006.
- [28] B. Cockburn, S. Hou, and C.W. Shu. The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV : the multidimensional case. *Math. Comp*, 54(190) :545–581, 1990.
- [29] B. Cockburn, S.Y. Lin, and C.W. Shu. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III : one-dimensional systems. *J. Comput. Phys.*, 84(1) :90–113, 1989.
- [30] B. Cockburn and C.W. Shu. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II : General framework. *Math. Comp.*, 52(186) :411–435, 1989.
- [31] B. Cockburn and C.W. Shu. Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems. *J. Sci. Comput.*, 16(3) :173–261, 2001.
- [32] G.N. Coleman, J. Kim, and R.D. Moser. A numerical study of turbulent supersonic isothermal-wall channel flow. *J. Fluid Mech.*, 305 :159–184, 1995.
- [33] S.S. Collis. Monitoring unresolved scales in multiscale turbulence modeling. *Phys. Fluids*, 13 :1800–1806, 2001.
- [34] S.S. Collis. Discontinuous Galerkin methods for turbulence simulation. In *CTR, Proceedings of the Summer Program*, pages 155–167, 2002.
- [35] G. Comte-Bellot and S. Corrsin. The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence. *J. Fluid Mech*, 25(4) :657–682, 1966.
- [36] F. Coquel, C. Marmignon, and F. Renac. Fast time implicit-explicit discontinuous Galerkin method for convection dominated flow problems. *Commun. Math. Sci.*, 10(4), 2012.
- [37] L.T. Diosady and D.L. Darmofal. Preconditioning methods for discontinuous Galerkin solutions of the Navier–Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 228(11) :3917–3935, 2009.

- [38] V. Dolejší. On the discontinuous Galerkin method for the numerical solution of the Navier–Stokes equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 45(10) :1083–1106, 2004.
- [39] J. Donea and A. Huerta. *Finite element methods for flow problems*. Wiley. com, 2003.
- [40] Y. Dubief and F. Delcayre. On coherent-vortex identification in turbulence. *J. Turbulence*, 1 :11, 2000.
- [41] M. Dubiner. Spectral methods on triangles and other domains. *J. Sci. Comput.*, 6(4) :345–390, 1991.
- [42] F. Ducros, P. Comte, and M. Lesieur. Large-Eddy simulation of transition to turbulence in a boundary layer developing spatially over a flat plate. *J. Fluid Mech.*, 326 :1–36, 1996.
- [43] F. Ducros, F. Laporte, T. Souleres, V. Guinot, P. Moinat, and B. Caruelle. High-order fluxes for conservative skew-symmetric-like schemes in structured meshes : application to compressible flows. *J. Comput. Phys.*, 161(1) :114–139, 2000.
- [44] C. Farhat, A. Rajasekharan, and B. Koobus. A dynamic variational multiscale method for Large-Eddy simulations on unstructured meshes. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 195(13-16) :1667–1691, 2006.
- [45] C. Fureby and F.F. Grinstein. Monotonically integrated large eddy simulation of free shear flows. *AIAA journal*, 37(5) :544–556, 1999.
- [46] C. Fureby and F.F. Grinstein. Large eddy simulation of high-Reynolds-number free and wall-bounded flows. *J. Comput. Phys.*, 181(1) :68–97, 2002.
- [47] E. Garnier, M. Mossi, P. Sagaut, P. Comte, and M. Deville. On the use of shock-capturing schemes for large-eddy simulation. *J. Comput. Phys.*, 153(2) :273–311, 1999.
- [48] G.J. Gassner. A skew-symmetric discontinuous galerkin spectral element discretization and its relation to sbp-sat finite difference methods. *SIAM J. Sci. Comput.*, 35(3) :A1233–A1253, 2013.
- [49] G.J. Gassner and A.D. Beck. On the accuracy of high-order discretizations for under-resolved turbulence simulations. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, pages 1–17, 2012.
- [50] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, and W.H. Cabot. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids*, 3 :1760, 1991.
- [51] S. Ghosal. An analysis of numerical errors in Large-Eddy simulations of turbulence. *J. Comput. Phys.*, 125(1) :187–206, 1996.

- [52] S. Ghosal and P. Moin. The basic equations for the Large-Eddy simulation of turbulent flows in complex geometry. *J. Comput. Phys.*, 118(1) :24–37, 1995.
- [53] D. Gottlieb and S.A. Orszag. *Numerical analysis of spectral methods : theory and applications*. SIAM, 1977.
- [54] S. Gottlieb, C.W. Shu, and E. Tadmor. Strong stability-preserving high-order time discretization methods. *SIAM review*, 43(1) :89–112, 2001.
- [55] V. Gravemeier. The variational multiscale method for laminar and turbulent flow. *Arch. Comput. Meth. Eng.*, 13(2) :249–324, 2006.
- [56] R. Hartmann and P. Houston. Symmetric interior penalty DG methods for the compressible Navier-Stokes equations I : Method formulation. *Int. J. Numer. Anal. Model.*, 3 :1–20, 2006.
- [57] F. Hindenlang, Gregor J Gassner, Christoph Altmann, Andrea Beck, Marc Staudenmaier, and Claus-Dieter Munz. Explicit discontinuous Galerkin methods for unsteady problems. *Comp. Fluids*, 2012.
- [58] J. Holmen, T.J.R. Hughes, A.A. Oberai, and G.N. Wells. Sensitivity of the scale partition for variational multiscale Large-Eddy Simulation of channel flow. *Phys. Fluids*, 16 :824, 2004.
- [59] F.Q. Hu, M.Y. Hussaini, and P. Rasetarinera. An analysis of the discontinuous Galerkin method for wave propagation problems. *J. Comput. Phys.*, 151(2) :921–946, 1999.
- [60] P.G. Huang, G.N. Coleman, and P. Bradshaw. Compressible turbulent channel flows : DNS results and modelling. *J. Fluid Mech.*, 305(1) :185–218, 1995.
- [61] T.J.R. Hughes, L. Mazzei, and K.E. Jansen. Large-Eddy Simulation and the variational multiscale method. *Comput. Vis. Sci.*, 3(1) :47–59, 2000.
- [62] T.J.R. Hughes, L. Mazzei, A.A. Oberai, and A.A. Wray. The multiscale formulation of Large-Eddy Simulation : Decay of homogeneous isotropic turbulence. *Phys. Fluids*, 13 :505, 2001.
- [63] T.J.R. Hughes, A.A. Oberai, and L. Mazzei. Large-Eddy Simulation of turbulent channel flows by the variational multiscale method. *Phys. Fluids*, 13 :1784, 2001.
- [64] T.J.R. Hughes, G.N. Wells, and A.A. Wray. Energy transfers and spectral eddy viscosity in Large-Eddy simulations of homogeneous isotropic turbulence : comparison of dynamic Smagorinsky and multiscale models over a range of discretizations. *Phys. Fluids*, 16 :4044, 2004.

- [65] T. Ishihara, Y. Kaneda, M. Yokokawa, K. Itakura, and A. Uno. Small-scale statistics in high-resolution direct numerical simulation of turbulence : Reynolds number dependence of one-point velocity gradient statistics. *J. Fluid Mech.*, 592(1) :335–366, 2007.
- [66] Laurent Jacquin and Patrick Tabeling. *Turbulence et tourbillons*. Ecole Polytechnique, 2007.
- [67] H.S. Kang, S. Chester, and C. Meneveau. Decaying turbulence in an active-grid-generated flow and comparisons with large-eddy simulation. *J. Fluid Mech.*, 480 :129–160, 2003.
- [68] G.S. Karamanos and G.Em. Karniadakis. A spectral vanishing viscosity method for Large-Eddy simulations. *J. Comput. Phys.*, 163(1) :22–50, 2000.
- [69] G.E. Karniadakis and S.J. Sherwin. *Spectral/hp element methods for computational fluid dynamics*. Oxford University Press, 2005.
- [70] G. Katul, C.I. Hsieh, and J. Sigmon. Energy-inertial scale interactions for velocity and temperature in the unstable atmospheric surface layer. *Boundary-Layer Meteorology*, 82(1) :49–80, 1997.
- [71] G.H. Keetels, U. D’Ortona, W. Kramer, H.J.H. Clercx, K. Schneider, and G.J.F. Van Heijst. Fourier spectral and wavelet solvers for the incompressible Navier-Stokes equations with volume-penalization : Convergence of a dipole-wall collision. *J. Comput. Phys.*, 227(2) :919–945, 2007.
- [72] J. Kim, P. Moin, and R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 177(1) :133–166, 1987.
- [73] A.N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 30, pages 299–303, 1941.
- [74] B. Koobus and C. Farhat. A variational multiscale method for the Large-Eddy Simulation of compressible turbulent flows on unstructured meshes—application to vortex shedding. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 193(15-16) :1367–1383, 2004.
- [75] R.H. Kraichnan. Eddy viscosity in two and three dimensions. *J. Atmos. Sci.*, 33(8) :1521–1536, 1976.
- [76] W. Kramer, H.J.H. Clercx, and G.J.F. van Heijst. Vorticity dynamics of a dipole colliding with a no-slip wall. *Phys. Fluids*, 19(12) :126603–126603, 2007.

- [77] A.G. Kravchenko and P. Moin. On the effect of numerical errors in Large-Eddy simulations of turbulent flows. *J. Comput. Phys.*, 131(2) :310–322, 1997.
- [78] A.G. Kravchenko, P. Moin, and R. Moser. Zonal embedded grids for numerical simulations of wall-bounded turbulent flows. *J. Comput. Phys.*, 127(2) :412–423, 1996.
- [79] S. Laizet and E. Lamballais. High-order compact schemes for incompressible flows : A simple and efficient method with quasi-spectral accuracy. *J. Comput. Phys.*, 228(16) :5989–6015, 2009.
- [80] J. Larsson, S.K. Lele, and P. Moin. Effect of numerical dissipation on the predicted spectra for compressible turbulence. *Annu. Res. Briefs, CTR, Stanford University*, 2007.
- [81] R. Lechner, J. Sesterhenn, and R. Friedrich. Turbulent supersonic channel flow. *J. Turbulence*, 2(1) :1–25, 2001.
- [82] S.K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comput. Phys.*, 103(1) :16–42, 1992.
- [83] P. Lesaint and P.A. Raviart. *On a finite element method for solving the neutron transport equation*. Univ. Paris VI, Labo. Analyse Numérique, 1974.
- [84] M. Lesieur. *Turbulence in fluids*, volume 84. Springer Verlag, 2008.
- [85] M. Lesieur and P. Comte. Favre filtering and macro-temperature in Large-Eddy simulations of compressible turbulence. *CR. Acad. Sci. Serie II*, 329(5) :363–368, 2001.
- [86] M. Lesieur, O. Métais, and P. Comte. *Large-Eddy simulations of turbulence*. Cambridge Univ Pr, 2005.
- [87] D.C. Leslie and G.L. Quarini. The application of turbulence theory to the formulation of subgrid modelling procedures. *J. Fluid Mech.*, 91(01) :65–91, 1979.
- [88] D.K. Lilly. The representation of small scale turbulence in numerical simulation experiments. *Proc. of the IBM Scientific Computing Symp. on Environmental Sciences*, 1967.
- [89] I. Lomtev and G.E. Karniadakis. A discontinuous Galerkin method for the Navier–Stokes equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 29(5) :587–603, 1999.
- [90] C. Meneveau and J. Katz. Scale-invariance and turbulence models for Large-Eddy Simulation. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 32(1) :1–32, 2000.
- [91] O. Metais and M. Lesieur. Spectral Large-Eddy Simulation of isotropic and stably stratified turbulence. *J. Fluid Mech.*, 239(1) :157–194, 1992.

- [92] J. Meyers and P. Sagaut. On the model coefficients for the standard and the variational multi-scale Smagorinsky model. *J. Fluid Mech.*, 569(-1) :287–319, 2006.
- [93] P. Moin and K. Mahesh. Direct numerical simulation : a tool in turbulence research. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 30(1) :539–578, 1998.
- [94] Y. Morinishi, S. Tamano, and K. Nakabayashi. A DNS algorithm using B-spline collocation method for compressible turbulent channel flow. *Comp. Fluids*, 32(5) :751–776, 2003.
- [95] R.D. Moser, J. Kim, and N.N. Mansour. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re = 590$. *Phys. Fluids*, 11 :943, 1999.
- [96] E.A. Munts. *Space-time multiscale methods for Large-Eddy Simulation*. PhD thesis, Ph. D. Thesis, Faculty of Aerospace Engineering, Delft University of Technology, 2006.
- [97] E.A. Munts, S.J. Hulshoff, and R. de Borst. A modal-based multiscale method for Large-Eddy Simulation. *J. Comput. Phys.*, 224(1) :389–402, 2007.
- [98] A.A. Oberai and J. Wanderer. Variational formulation of the Germano identity for the Navier–Stokes equations. *J. Turbulence*, (6), 2005.
- [99] H. Ouvrard, B. Koobus, A. Dervieux, and M.V. Salvetti. Classical and variational multiscale LES of the flow around a circular cylinder on unstructured grids. *Comput. Fluids*, 39(7) :1083–1094, 2010.
- [100] S.B. Pope. *Turbulent flows*. Cambridge Univ Pr, 2000.
- [101] S. Ramakrishnan and S.S. Collis. Turbulence control simulation using the variational multiscale method. *AIAA J.*, 42(4) :745–753, 2004.
- [102] S. Ramakrishnan and S.S. Collis. The local variational multi-scale method for turbulence simulation. *Sandia Report*, 2005.
- [103] S. Ramakrishnan and S.S. Collis. Partition selection in multiscale turbulence modeling. *Phys. Fluids*, 18 :075105, 2006.
- [104] W.H. Reed and T.R. Hill. Triangular mesh methods for the neutron transport equation. *Los Alamos Report LA-UR-73-479*, 1973.
- [105] F. Renac, C. Marmignon, and Frédéric Coquel. Time implicit high-order discontinuous Galerkin method with reduced evaluation cost. *SIAM J. Sci. Comput.*, 34(1) :A370–A394, 2012.

- [106] Florent Renac, Sophie Gérald, Claude Marmignon, and Frédéric Coquel. Fast time implicit-explicit discontinuous Galerkin method for the compressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 2013.
- [107] P. Sagaut. *Large-Eddy simulation for incompressible flows : an introduction*. Springer Verlag, 2006.
- [108] P. Sagaut, S. Deck, and M. Terracol. *Multiscale and multiresolution approaches in turbulence*. Imperial College Pr, 2006.
- [109] P. Sagaut and V. Levasseur. Sensitivity of spectral variational multiscale methods for Large-Eddy Simulation of isotropic turbulence. *Phys. Fluids*, 17, 2005.
- [110] S.J. Sherwin and G.E. Karniadakis. A new triangular and tetrahedral basis for high-order (hp) finite element methods. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 38(22) :3775–3802, 1995.
- [111] C.W. Shu, W.S. Don, D. Gottlieb, O. Schilling, and L. Jameson. Numerical convergence study of nearly incompressible, inviscid Taylor–Green vortex flow. *J. Sci. Comput.*, 24(1) :1–27, 2005.
- [112] C.W. Shu and S. Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *J. Comput. Phys.*, 77(2) :439–471, 1988.
- [113] C.W. Shu and S. Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, ii. *J. Comput. Phys.*, 83(1) :32–78, 1989.
- [114] J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly weather review*, 91(3) :99–164, 1963.
- [115] S. Stolz, P. Schlatter, and L. Kleiser. High-pass filtered eddy-viscosity models for Large-Eddy simulations of transitional and turbulent flow. *Phys. Fluids*, 17 :065103, 2005.
- [116] G.I. Taylor and A.E. Green. Mechanism of the production of small eddies from large ones. *Proc. R. Soc. A*, 158(895) :499, 1937.
- [117] M. Terracol, P. Sagaut, and C. Basdevant. A multilevel algorithm for large-eddy simulation of turbulent compressible flows. *J. Comput. Phys.*, 167(2) :439–474, 2001.
- [118] M Terracol, P. Sagaut, and C. Basdevant. A time self-adaptive multilevel algorithm for large-eddy simulation. *J. Comput. Phys.*, 184(2) :339–365, 2003.
- [119] A. Uranga, P.O. Persson, M. Drela, and J. Peraire. Implicit large eddy simulation of transition to turbulence at low Reynolds numbers using a discontinuous Galerkin method. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 87(1-5) :232–261, 2011.

- [120] F. van der Bos and B.J. Geurts. Computational error-analysis of a discontinuous Galerkin discretization applied to Large-Eddy Simulation of homogeneous turbulence. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 199(13-16) :903–915, 2010.
- [121] W.M. Van Rees, A. Leonard, D.I. Pullin, and P. Koumoutsakos. A comparison of vortex and pseudo-spectral methods for the simulation of periodic vortical flows at high Reynolds numbers. *J. Comput. Phys.*, 230(8) :2794–2805, 2011.
- [122] P.R. Voke. Multiple mesh simulation of low Reynolds number turbulent channel flow. In *Numerical methods in laminar and turbulent flow*, volume 1, pages 1567–1577, 1989.
- [123] P.R. Voke. Multiple mesh simulation of turbulent flow. *Report QMW EP-1082, University of London*, 1990.
- [124] B. Vreman, B. Geurts, and H. Kuerten. A priori tests of Large-Eddy Simulation of the compressible plane mixing layer. *J. Eng. Math.*, 29(4) :299–327, 1995.
- [125] J. Wanderer and A.A. Oberai. A two-parameter variational multiscale method for Large-Eddy Simulation. *Phys. Fluids*, 20 :085107, 2008.
- [126] C.E. Wasberg, T. Gjesdal, B.A.P. Reif, and Ø. Andreassen. Variational multiscale turbulence modelling in a high order spectral element method. *J. Comput. Phys.*, 228(19) :7333–7356, 2009.
- [127] L. Wei and A. Pollard. Direct numerical simulation of compressible turbulent channel flows using the discontinuous Galerkin method. *Comput. Fluids*, 47(1) :85–100, 2011.
- [128] L. Wei and A. Pollard. Interactions among pressure, density, vorticity and their gradients in compressible turbulent channel flows. *J. Fluid Mech.*, 673 :1–18, 2011.
- [129] S. Wornom, H. Ouvrard, M.V. Salvetti, B. Koobus, and A. Dervieux. Variational multiscale Large-Eddy simulations of the flow past a circular cylinder : Reynolds number effects. *Comput. Fluids*, 47(1) :44–50, 2011.
- [130] A.A. Wray. A numerical simulation of decaying isotropic turbulence. *A Data Base for the Validation of LES Computations in Transition and Turbulence (ed. J. Jiménez), AGARD R-345, data set HOM02*, 1997.
- [131] P.K. Yeung and Y. Zhou. Universality of the Kolmogorov constant in numerical simulations of turbulence. *Phys. Rev. E*, 56(2) :1746, 1997.
- [132] Y. Zhou, J.G. Brasseur, and A. Juneja. A resolvable subfilter-scale model specific to Large-Eddy simulation of under-resolved turbulence. *Phys. Fluids*, 13 :2602, 2001.

Développement et évaluation de la méthode de Galerkin discontinue pour la simulation des grandes échelles des écoulements turbulents

Cette thèse vise à développer et évaluer la méthode de Galerkin discontinue (DG) pour la simulation des grandes échelles (LES) des écoulements turbulents. L'approche DG présente un nombre d'avantages intéressants pour la LES : ordre élevé, stencil compact, prise en compte des maillages non structurés et expression de la solution numérique dans une base de polynômes permettant l'utilisation de modèles de turbulence multi-échelle. Parmi ce type de modèles, nous nous sommes intéressés ici à la méthode Variational Multiscale (VMS) qui consiste à séparer les échelles résolues dans la base de polynômes pour restreindre l'influence du modèle à une gamme réduite d'échelles. Les modèles considérés ont été paramétrés en prenant en compte les fonctions de transfert spécifiques aux discrétisations DG. La précision de la méthode pour la représentation de phénomènes turbulents variés a été évaluée à travers la réalisation de DNS de configurations académiques. Enfin, l'approche VMS/DG a été éprouvée sur des configurations simples à haut nombre de Reynolds. Il apparaît que cette méthodologie permet la représentation précise des phénomènes turbulents pour un coût réduit en terme de degrés de liberté.

Mots-clés : METHODE GALERKIN DISCONTINUE ; ECOULEMENTS TURBULENTS ; SIMULATION DES GRANDES ECHELLES ; SIMULATION NUMERIQUE DIRECTE

Development of the Discontinuous Galerkin method for the large-eddy simulation of turbulent flows

This work focuses on the development of the Discontinuous Galerkin (DG) method for the large-eddy simulation (LES) of turbulent flows. The DG method shows some interesting properties for LES : high-order of accuracy, compact stencil, unstructured meshes and a modal polynomial basis which can be used to implement multiscale turbulence models. We consider in this work the Variational Multiscale approach (VMS), which consists in splitting the resolved scales into two components using the modal basis in order to restrict the action of the model to a given range of small scales. The models have been tuned using the transfer functions of the DG *hp*-discretizations. The accuracy of the DG method for the representation of turbulent phenomena has been assessed through DNS of free and wall-bounded canonical flows. Finally, the VMS/DG approach has been assessed for simple configurations at high Reynolds numbers. We have shown that this particular approach allows for an accurate representation of turbulent flows for coarse discretizations.

Key words : DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD ; TURBULENT FLOWS ; LARGE EDDY SIMULATION ; DIRECT NUMERICAL SIMULATION