



**HAL**  
open science

# Etude numérique d'écoulements de paroi compressibles : méthodes d'intégration temporelle semi-implicites et application au canal plan turbulent

François Kremer

► **To cite this version:**

François Kremer. Etude numérique d'écoulements de paroi compressibles : méthodes d'intégration temporelle semi-implicites et application au canal plan turbulent. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2012. Français. NNT : 2012ECDL0062 . tel-00952013

**HAL Id: tel-00952013**

**<https://theses.hal.science/tel-00952013>**

Submitted on 26 Feb 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

Présentée devant  
L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir  
le grade de DOCTEUR  
SPÉCIALITÉ ACOUSTIQUE

par

François KREMER

Étude numérique d'écoulements de paroi  
compressibles: méthodes d'intégration temporelle  
semi-implicites et application au canal plan turbulent

soutenue le 12 décembre 2012 devant la commission d'examen

Christophe BAILLY  
Christophe BOGEY  
Xavier GLOERFELT  
Philippe LAFON  
Eric LAMBALLAIS Rapporteur  
Luc MONGEAU Rapporteur  
Philip MORRIS



Ce travail de thèse, débuté en octobre 2009, s'est déroulé au Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA) à l'École Centrale de Lyon. Il a été cofinancé par le Centre National de la Recherche Scientifique et la Délégation Générale de l'Armement.

Je remercie chaleureusement mes directeurs de thèse, Christophe Bailly et Christophe Bogey, avec qui j'ai eu beaucoup de plaisir à explorer cette *terra incognita* des schémas implicites et de la turbulence de paroi. Christophe Bogey, qui a suivi de près ma lente progression du simple pulse au canal à haut Reynolds, et qui a patiemment déchiffré ma prose parfois subliminale pour la rendre publiable, tout ça sans croissants, mérite mes plus sincères remerciements. Christophe Bailly, qui m'a fait découvrir la turbulence en dernière année à Centrale, n'a ensuite jamais cessé d'améliorer mes connaissances dans ce domaine, ce dont je lui suis très reconnaissant.

Je tiens à exprimer mes remerciements à Eric Lamballais et à Luc Mongeau, qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de mon travail, et à Philippe Lafon, Xavier Gloerfelt et Philip Morris, qui ont accepté d'être membres de mon jury de thèse.

Je voudrais également exprimer toute ma gratitude à Olivier Marsden pour son aide précieuse dans les arcanes de la compilation et des serveurs de calcul, et qui m'a permis d'économiser des mois (voire des années !) de calculs à l'aide de quelques lignes de codes.

Ces trois années de thèse ont été enrichies par la rencontre des personnes travaillant au centre acoustique, notamment dans l'ambiance joyeuse des barbecus et des raclettes de Noël que j'ai eu le plaisir d'organiser en tant que désigné volontaire. Mais la thèse au quotidien, c'est avant tout les camarades du bureau Chagall : un grand merci à Edouard pour avoir porté à son plus haut niveau de finesse l'art de l'insulte et de la cuistrerie, à Adrien pour les avoir ramenés à leur niveau le plus vil, à Arthur pour avoir mis un peu d'humanité dans ce bureau de brutes, et à Dominique pour l'avoir rendu agréable à vivre. Je remercie également les nombreux thésards acousticiens : Nicolas, Damien et Gaël, mes illustres prédécesseurs numériques, Didier, si long depuis la prépa à Thiers, Korcan, viva Las Vegas ! Arnulfo, danseur-né de salsa, sans oublier Cyprien, les deux Benoit, Petr, Gwendoline, et enfin Marion, qui mieux que moi a su conquérir le cœur des turbomachinistes.

Ceux-là aussi, comment ne pas les remercier, la joyeuse bande de thésards toujours prêts à en découdre au baby et au Beers ? Un grand merci à Pierre, Guillaume, Antoine, Véro, Bouba, Aurélien et à toute la fine équipe du sous-sol. Quant à ceux qui, après m'avoir supporté pendant les 3 ans d'école, ont remis ça pour 3 ans de thèse, je leur adresse une salve spéciale. Merci à Florence, tour à tour co-thésarde, co-bureau, co-loc, et finalement belle-sœur, avec qui je compte bien radoter sur ces vertes années centraliennes à toutes nos futures réunions de famille. Merci

---

à Nicolas Courtiade, instigateur et archiviste impitoyable de mes pires dossiers depuis 2005, qui m'a enseigné les choses essentielles, comme savoir fumer avec classe à une Oktoberfest. Je suis son meilleur élève. Et merci à Nicolas Buffaz, vétéran de la rue Chinard, qui m'a entraîné dans les tempêtes glaciales de la Vanoise, sous les surplombs dantesques d'Ailefroide, sur les volcans tout plats de Hawaïi, et surtout à un week-end décisif à Fayolle. L'aventure scientifique de ma thèse s'est doublée avec lui d'une belle aventure humaine.

Je remercie bien sur mes autres colocs, plus formidables les unes que les autres, Edmée, Maggy, Marie-Lys et Charlotte. A mes parents et à mes frères et sœur, je veux leur dire toute ma gratitude pour leur soutien et leurs encouragements, sans oublier mes grands-mères si fières de leur petit-fils spécialiste des courants d'air. Enfin, je remercie Fanny du fond du cœur pour m'avoir donné chaque jour réconfort et confiance en moi.

# Résumé

Cette thèse est consacrée à la simulation des écoulements de paroi turbulents. L'approche numérique utilisée consiste à calculer directement les champs aérodynamiques et acoustiques de l'écoulement par simulation des grandes échelles (LES), à l'aide de schémas numériques peu dissipatifs et peu dispersifs. Cette approche repose généralement sur une intégration temporelle explicite qui se révèle fortement pénalisante dans le cas des écoulements de paroi, où le raffinement du maillage entraîne une forte diminution du pas de temps.

Pour répondre à cette problématique, deux méthodes d'intégration temporelle semi-implicites d'ordre 4 à 6 étapes sont développées. Ces méthodes consistent à intégrer de manière implicite les termes contenant des dérivées spatiales normales à la paroi, et de manière explicite les autres termes, ce qui permet de relâcher la contrainte sur le pas de temps. Une analyse dans l'espace de Fourier et des cas test de propagation acoustique montrent que les méthodes développées ont une précision au moins égale à celle du schéma de Runge-Kutta standard d'ordre 4. Une technique de partitionnement semi-implicite/explicite du maillage est ensuite mise en œuvre afin de réduire le coût numérique. À l'aide de cette technique, les schémas semi-implicites permettent de réduire le temps CPU des simulations par rapport à des calculs s'appuyant uniquement sur un schéma explicite.

Des LES de canal plan turbulent sont ensuite mises en œuvre pour un nombre de Mach de 0.5 et des nombres de Reynolds de friction de 350, 600 et 960, et pour un nombre de Mach de 0.1 et un nombre de Reynolds de 350. Les caractéristiques aérodynamiques de l'écoulement sont comparées avec succès à des simulations numériques directes de la littérature. Les résultats des simulations permettent ensuite d'analyser les effets du nombre de Reynolds sur les profils de vitesse moyenne et fluctuante, sur les spectres de pression pariétale, et sur les structures de la zone interne de la couche limite. Les dimensions de ces structures, estimées à l'aide des spectres de vitesse longitudinale, se révèlent peu dépendantes du nombre de Reynolds. Enfin, pour le calcul à nombre de Mach de 0.1, des composantes acoustiques sont détectées dans le spectre de pression pariétale. Ces composantes représentent l'empreinte du rayonnement acoustique de la couche limite, calculé directement par la simulation.



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Aspects aérodynamiques et acoustiques de la turbulence de paroi</b>	<b>11</b>
1.1 Caractéristiques aérodynamiques des écoulements pariétaux . . . . .	11
1.1.1 Les écoulements turbulents canoniques : la couche limite et le canal plan .	12
1.1.2 Les différentes échelles de la turbulence . . . . .	12
1.1.3 Approche statistique . . . . .	13
1.1.4 Structures cohérentes . . . . .	16
1.2 Champ de pression pariétale sous une couche limite . . . . .	18
1.2.1 Contexte . . . . .	18
1.2.2 Définitions . . . . .	19
1.2.3 Le spectre fréquentiel . . . . .	19
1.2.4 Les modèles d’interspectre et de spectre en fréquence - nombre d’onde . .	21
1.2.5 Rayonnement acoustique indirect d’une plaque plane excitée par une couche limite . . . . .	22
1.2.6 Rayonnement acoustique direct d’une couche limite . . . . .	24
1.3 Simulations numériques d’écoulements turbulents pariétaux . . . . .	25
1.3.1 Les différentes approches . . . . .	25
1.3.2 Quelques simulations de référence . . . . .	28
1.3.3 Quelques aspects de mise en œuvre d’une LES compressible de canal plan	29
1.4 Conclusion . . . . .	33
<b>2 Développement d’algorithmes de Runge-Kutta semi-implicites</b>	<b>35</b>
2.1 Méthodes d’intégration temporelle . . . . .	35
2.2 Présentation des méthodes de Runge-Kutta . . . . .	37



2.2.1	Formulation . . . . .	37
2.2.2	Ordre et précision dans l'espace de Fourier . . . . .	37
2.2.3	Etude de la stabilité par analyse spectrale . . . . .	38
2.2.4	Choix d'une méthode implicite ou d'une méthode explicite . . . . .	43
2.2.5	Les schémas de Runge-Kutta additifs . . . . .	44
2.3	Développement de schémas de RK semi-implicites . . . . .	46
2.3.1	Formulation . . . . .	46
2.3.2	Contraintes de précision et de stabilité . . . . .	47
2.3.3	Choix des coefficients . . . . .	52
2.3.4	Erreurs de dissipation et de dispersion des schémas développés . . . . .	55
2.4	Conclusion . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Validation et mise en œuvre des schémas semi-implicites</b>	<b>59</b>
3.1	Problème non visqueux : impulsion acoustique . . . . .	59
3.1.1	Définition . . . . .	59
3.1.2	Stabilité . . . . .	60
3.1.3	Précision . . . . .	61
3.1.4	Résumé des résultats du cas test . . . . .	64
3.2	Problème visqueux : paroi oscillante . . . . .	65
3.2.1	Etude 1-D des flux visqueux . . . . .	66
3.2.2	Simulation numérique d'une paroi oscillante . . . . .	67
3.3	Rapidité des algorithmes semi-implicites sur des maillages partitionnés . . . . .	69
3.3.1	Calculs avec un schéma unique sur tout le domaine de calcul . . . . .	70
3.3.2	Partitionnement du maillage . . . . .	71
3.3.3	Erreur due à l'interface . . . . .	73
3.3.4	Temps CPU des calculs mixtes . . . . .	74
3.4	Conclusion . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Simulation des grandes échelles d'un canal plan</b>	<b>81</b>
4.1	Paramètres et méthodes . . . . .	81
4.1.1	Géométrie et nombres sans dimension . . . . .	81
4.1.2	Maillage . . . . .	83
4.1.3	Conditions initiales . . . . .	83
4.1.4	Méthodes numériques . . . . .	85

4.2	Convergence en maillage . . . . .	86
4.2.1	Rappel sur la résolution spatiale . . . . .	86
4.2.2	Définition des maillages . . . . .	86
4.2.3	Résultats . . . . .	88
4.3	Intégration temporelle . . . . .	90
4.3.1	Validation du schéma semi-implicite . . . . .	90
4.3.2	Etude de la parallélisation . . . . .	91
4.4	Simulations aux grandes échelles d'un canal plan . . . . .	93
4.4.1	Définition des cas . . . . .	94
4.4.2	Comparaison à des calculs DNS . . . . .	95
4.4.3	Corrélations en deux points . . . . .	97
4.5	Conclusion . . . . .	103
<b>5</b>	<b>Etude des propriétés statistiques de vitesse et de pression de l'écoulement de canal plan</b>	<b>105</b>
5.1	Profils des vitesses moyenne et fluctuante . . . . .	105
5.2	Structures cohérentes dans la zone tampon . . . . .	108
5.2.1	Visualisation . . . . .	108
5.2.2	Caractérisation par les corrélations transverses . . . . .	110
5.2.3	Caractérisation par les spectres de vitesse longitudinale . . . . .	111
5.3	Pression pariétale . . . . .	118
5.3.1	Spectre fréquentiel . . . . .	118
5.3.2	Pression quadratique moyenne . . . . .	120
5.3.3	Spectre en fréquence - nombre d'onde . . . . .	122
5.4	Conclusion . . . . .	123
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>125</b>
	<b>A Coefficients des algorithmes semi-implicites</b>	<b>129</b>
	<b>B Besoin en espace mémoire des algorithmes semi-implicites</b>	<b>133</b>
	<b>C Mise en oeuvre du schéma semi-implicite</b>	<b>137</b>
C.1	Problème type . . . . .	137
C.2	Algorithmes d'intégration temporelle . . . . .	138
C.2.1	Algorithme semi-implicite . . . . .	139

C.2.2	Algorithme explicite . . . . .	140
C.3	Déroulement d'une étape des algorithmes . . . . .	140
C.3.1	Phases I et II . . . . .	141
C.3.2	Phase III . . . . .	141
C.3.3	Phase IV . . . . .	143
C.4	Traitement du système linéaire dans l'algorithme SIRK . . . . .	144
C.4.1	Forme de la matrice jacobienne . . . . .	144
C.4.2	Forme générale du système linéaire . . . . .	144
C.4.3	Expression des blocs $A_m$ . . . . .	146
<b>Bibliographie</b>		<b>151</b>

# Introduction

Depuis le début du 20ème siècle, les couches limites font l'objet de nombreuses recherches en mécanique des fluides. On les rencontre lorsqu'un fluide visqueux interagit avec une surface rigide, en mouvement l'un par rapport à l'autre, configuration que l'on retrouve souvent dans les industries automobile, aéronautique et de l'énergie, pour ne citer que celles-ci. La turbulence de paroi joue par exemple un rôle prépondérant dans la traînée de frottement des véhicules, qui détermine en partie leur consommation de carburant. Les fluctuations de pression induites par la turbulence sur la paroi rigide peuvent aussi conduire à la vibration de la paroi, entraînant une fatigue des matériaux, par exemple pour un avion en vol, ou pour des écoulements en conduite. La turbulence de paroi est enfin responsable de nuisances acoustiques pour les passagers de véhicules, soit à cause du bruit produit par les vibrations de la paroi, soit à cause du bruit directement émis par la turbulence et transmis à travers la paroi.

La résolution de ces problèmes divers requiert une compréhension des mécanismes complexes qui régissent la dynamique de la turbulence de paroi. Les connaissances actuelles sur ces mécanismes ont été acquises majoritairement grâce à l'étude d'écoulements dits canoniques, tels que la couche limite plane sans gradient de pression et le canal plan. Des lois de similitude sur les vitesses moyenne et fluctuante ont notamment été établies pour ces écoulements, à la fois de manière analytique [94], et expérimentale [30]. Ainsi, depuis sa formalisation en 1956 par Coles [30], la loi de paroi, qui décrit le profil de vitesse moyenne, a longtemps été considérée comme universelle. La récente avancée des moyens expérimentaux et numériques a pourtant conduit à revoir les lois de similitude [68]. La constante de Von Kármán, par exemple, qui caractérise la vitesse dans la zone logarithmique, semble dépendre du type d'écoulement et du nombre de Reynolds [71]. Cette constante est particulièrement cruciale pour l'industrie, car elle apparaît dans certains modèles de paroi, et peut fortement influencer, par exemple, la prédiction de la traînée de frottement des véhicules [83]. Parallèlement à l'étude de grandeurs statistiques telles que les vitesses moyenne et fluctuante, une partie importante de la recherche porte sur les structures cohérentes. Des structures tels que les *streaks* et les tourbillons quasi-longitudinaux ont ainsi été identifiés dans la zone

interne de la couche limite [60], et leur rôle prépondérant dans la dynamique de l'écoulement est maintenant bien connu [75]. De nombreuses questions subsistent toutefois sur les dimensions de ces structures [92], et sur leur possible organisation à grande échelle [57]. Enfin, une part importante de la littérature sur les écoulements de paroi est dédiée à la pression pariétale, notamment parce que celle-ci représente l'empreinte des structures turbulentes dans l'écoulement [18]. Un grand nombre d'études expérimentales ont permis d'obtenir une bonne connaissance du spectre fréquentiel [38, 43] et de l'interspectre [38, 99] de pression pariétale, et ont conduit à l'élaboration de plusieurs modèles [25, 26, 32, 42] souvent utilisés dans l'industrie pour prédire le rayonnement acoustique des parois soumises aux fluctuations de pression [44].

Au cours des deux dernières décennies, la mécanique des fluides numérique est devenue un outil essentiel pour l'étude des écoulements turbulents canoniques de paroi. Elle a par exemple permis d'étudier les profils de vitesses moyenne et fluctuante [84, 100], les structures cohérentes de la turbulence [35, 51, 57], et la pression pariétale [28, 53, 55] dans de telles configurations. Les nombres de Reynolds des simulations réalisées récemment atteignent des valeurs relativement élevées [51, 79]. Un des principaux obstacles à l'étude numérique des écoulements turbulents réside cependant dans la très grande disparité des échelles à prendre en compte. En effet, le coût numérique d'une simulation directe (DNS pour *Direct Numerical Simulation*), dans laquelle toutes les échelles sont résolues, devient rapidement prohibitif lorsqu'on considère des nombres de Reynolds élevés. Ainsi, alors que vingt ans se sont écoulés entre les DNS de canal plan de Kim *et al.* [59] et de Hoyas *et al.* [51], les nombres de Reynolds de ces deux simulations ne sont différents que d'un ordre de grandeur. La simulation des grandes échelles (LES pour *Large Eddy Simulation*), qui consiste à ne résoudre que les grandes échelles de la turbulence et à modéliser l'effet des plus petites [77], est alors une alternative moins coûteuse.

Les écoulements de paroi sont aussi un cas intéressant pour l'aéroacoustique numérique. Hu *et al.* [54, 55] ont notamment étudié l'émission acoustique directe de la turbulence de paroi à l'aide de simulations incompressibles. Le champ acoustique est alors déduit du champ aérodynamique en ayant recours à une analogie acoustique [39]. Une autre méthode consiste à calculer simultanément les champs aérodynamique et acoustique à l'aide de simulations compressibles. On parle alors de simulation directe du bruit (DNC pour *Direct Noise Computation*). Cette méthode a été utilisée dans notre groupe pour la prédiction du bruit de jets [16, 17]. Concernant l'application de la DNC aux écoulements de paroi, on peut citer le travail de Gloerfelt [40] pour calculer le bruit rayonné par une couche limite turbulente.

Les méthodes numériques utilisées pour la DNC doivent être faiblement dissipatives et fai-

blement dispersives pour assurer une bonne résolution du champ acoustique. De nombreuses méthodes explicites ont été développées pour l'intégration temporelle [8, 13, 23, 52, 86]. Dans des simulations d'écoulement pariétaux, il peut être intéressant d'utiliser des méthodes semi-implicites, afin de relâcher la contrainte sur le pas de temps. Ces méthodes consistent à effectuer de manière implicite l'intégration temporelle des termes impliquant des dérivées dans la direction normale à la paroi, où le maillage est le plus fin, tandis que les autres termes sont intégrés explicitement. Ce type de méthode est couramment utilisé dans les simulations incompressibles [82, 85, 100], mais les schémas employés sont d'une précision limitée. Des schémas semi-implicites d'ordre élevé ont en revanche été développés pour la mécanique des fluides réactive [24, 58, 102]. Le schéma de Zhong [102], en particulier, a été appliqué à un cas aéroacoustique [88].

## Objectifs de la thèse

Le premier objectif de cette thèse est de développer des algorithmes d'intégration temporelle à forte stabilité pour la simulation des écoulements de paroi. On s'oriente vers des algorithmes semi-implicites, qui semblent bien adaptés à ce type d'écoulement. Ce travail s'inspire des méthodes semi-implicites de haute précision développées pour la mécanique des fluides réactive.

Le deuxième objectif est de valider l'approche LES développée dans notre groupe sur un cas d'écoulement de paroi. Cette approche, dans laquelle les effets des échelles non résolues sont pris en compte par un filtrage de relaxation, a déjà été validée pour des écoulements turbulents en champ libre [14]. La turbulence de paroi présente toutefois des propriétés assez différentes. Il s'agit donc de vérifier que la simulation des grandes échelles permet de reproduire correctement les mécanismes de la turbulence pariétale. Elle doit notamment mettre en évidence les effets du nombre de Reynolds sur les propriétés de l'écoulement. Par ailleurs, la discrétisation spatiale minimale à imposer pour obtenir des résultats précis doit également être déterminée.

Enfin, un dernier objectif est d'étudier certains aspects de la turbulence de paroi, tels que les profils de vitesses moyenne et fluctuante, les structures cohérentes, et la pression pariétale, à partir de résultats de LES de canal plan turbulent. La simulation compressible permettant de résoudre directement le champ acoustique, on cherchera à identifier l'empreinte de ce champ dans le spectre de pression pariétale.

## Organisation du manuscrit

Le manuscrit s'articule en cinq parties. Dans le premier chapitre, une synthèse de la littérature sur la turbulence de paroi est présentée. Les principales caractéristiques aérodynamiques des écoulements de paroi telles que les vitesses moyenne et fluctuante, les structures cohérentes et la pression pariétale sont tout d'abord décrites. La problématique des rayonnements acoustiques direct et indirect de la couche limite est ensuite abordée, en soulignant notamment l'importance des bas nombres d'onde dans le spectre de pression pariétale. Enfin, les principaux aspects de la simulation numérique des écoulements de paroi sont montrés. Une brève revue de la littérature est notamment proposée.

Les deux chapitres suivants traitent du développement de schémas d'intégration temporelle semi-implicites. Dans le chapitre 2, une analyse de la stabilité et de la précision des schémas de Runge-Kutta est tout d'abord réalisée. La structure d'un schéma semi-implicite, constitué d'un sous-schéma explicite et d'un sous-schéma implicite, est décrite. La stabilité et la précision des algorithmes semi-implicites sont ensuite examinées, en mettant l'accent sur les problèmes de couplage entre les sous-schémas. Deux algorithmes semi-implicites sont alors développés, et leurs propriétés sont étudiées dans l'espace de Fourier.

Dans le chapitre 3, des cas test acoustiques et visqueux bidimensionnels sont mis en œuvre pour illustrer les propriétés des schémas développés. Leur stabilité et leur précision sont tout d'abord évaluées à partir d'un cas test de propagation d'impulsion acoustique, dans lequel les équations d'Euler sont intégrées temporellement avec les schémas semi-implicites. Un cas visqueux de paroi oscillante est ensuite considéré. Dans ce cas, l'intégration temporelle des termes visqueux étant réalisée explicitement, on vérifie que les grands pas de temps permis par le schéma semi-implicite n'affectent pas la stabilité globale de l'algorithme. Enfin, une méthode permettant de réduire le temps CPU des simulations est proposée. Cette méthode consiste à partitionner le maillage en une zone résolue à l'aide du schéma semi-implicite, et une zone résolue explicitement.

Le chapitre 4 est dédié à la mise en œuvre de simulations de canal plan turbulent. Après une présentation des paramètres de calcul, une étude de convergence en maillage est réalisée, puis un calcul de canal plan est effectué avec l'un des schémas semi-implicites développés afin de s'assurer que ce dernier permet d'obtenir des résultats précis. L'algorithme semi-implicite a été implémenté dans un code développé auparavant dans notre groupe. Enfin, des simulations de canal plan turbulent sont effectuées pour un nombre de Mach de 0.5 et des nombres de Reynolds de frottement de 350, 600 et 960, et pour un nombre de Mach de 0.1 et un nombre de Reynolds de 350. Les résultats obtenus sont comparés à des DNS de la littérature. Des corrélations de la

vitesse sont ensuite déterminées afin de vérifier que la périodicité du domaine de calcul n'influence pas l'écoulement.

Dans le chapitre final, une analyse de la turbulence de canal plan est réalisée à partir des résultats issus des différentes simulations. Cette analyse commence avec les profils des vitesses moyenne et fluctuante. On cherche en particulier à localiser et à caractériser les propriétés de la zone logarithmique. L'attention est ensuite portée sur la description des structures cohérentes de la zone tampon. Celles-ci sont visualisées à partir de représentations instantanées de la vitesse. Des spectres de vitesse fluctuante sont ensuite évalués, afin notamment de caractériser les structures turbulentes contribuant le plus à l'énergie cinétique dans la zone tampon. Enfin, les propriétés du champ de pression pariétale sont étudiées à l'aide de spectres fréquentiels. Les spectres en fréquence et en nombre d'onde obtenus pour un nombre de Reynolds de 350 sont par ailleurs examinés afin de détecter d'éventuelles composantes acoustiques.





# 1 Aspects aérodynamiques et acoustiques de la turbulence de paroi

---

Ce chapitre présente les principales caractéristiques des écoulements turbulents en présence d'une paroi, en se focalisant sur deux axes principaux : l'aérodynamique et la pression pariétale. D'un point de vue aérodynamique, la structure d'un écoulement de paroi est caractérisée à partir de lois de similitude suivies par les vitesses moyennes et fluctuantes. Certaines structures cohérentes se développant dans l'écoulement sont également décrites. Le champ de pression pariétale est ensuite examiné à travers ses propriétés spectrales, et certaines applications aéroacoustiques sont présentées. Enfin, une dernière partie est dédiée à la simulation numérique des écoulements pariétaux. Une brève revue de la littérature est proposée, et certains points clés pour la mise en œuvre d'une simulation de canal plan sont abordés.

## 1.1 Caractéristiques aérodynamiques des écoulements pariétaux

La turbulence de paroi représente un domaine majeur de la recherche en mécanique des fluides, car elle intervient dans des applications très diverses. En effet, qu'il s'agisse d'écoulements dans une canalisation, autour d'une aile d'avion ou à la surface d'une voiture, des fluctuations turbulentes sont produites par l'interaction entre le fluide et une paroi solide. Les caractéristiques de la turbulence pariétale dépendent de nombreux facteurs liés à la paroi, sa géométrie, sa rugosité, ou sa température induisant un éventuel flux de chaleur avec le fluide. Elles dépendent également des conditions d'écoulement telles que le gradient de pression moyen ou un éventuel décollement. La recherche portant sur ces écoulements complexes se réfère à certains résultats fondamentaux acquis grâce à l'étude d'écoulements plus simples, dits "canoniques", tels que la couche limite, l'écoulement dans un canal plan ou dans une conduite, pour une paroi adiabatique et sans rugosité. Cependant, même dans ces cas simples, la physique de la turbulence fait encore l'objet de

débats importants. C'est pourquoi les écoulements canoniques sont un sujet de recherche à part entière.

### 1.1.1 Les écoulements turbulents canoniques : la couche limite et le canal plan

La couche limite turbulente et le canal plan turbulent sont des écoulements fondamentalement différents. D'une part, le canal plan est homogène dans les deux directions parallèles aux parois, tandis que la couche limite ne présente qu'une seule direction homogène : la direction transverse. En effet, dans la direction de l'écoulement, les grandeurs moyennes telles que le nombre de Reynolds évoluent lentement, de sorte que l'hypothèse d'homogénéité n'est valable que sur une distance limitée. On parle alors de quasi-homogénéité. D'autre part, dans le cas du canal plan, les grandeurs statistiques locales telles que la vitesse moyenne ou les tensions de Reynolds sont symétriques ou antisymétriques par rapport au plan médian. Une telle propriété n'existe pas dans une couche limite. Malgré ces différences, la couche limite et le canal plan présentent de nombreuses similitudes, qu'il s'agisse des grandeurs statistiques telles que les vitesses moyennes et fluctuantes, ou des structures cohérentes que l'on observe dans l'écoulement. L'analyse qui suit s'applique donc aux deux types d'écoulement, et le terme "couche limite" désignera aussi bien la couche limite canonique que l'une des deux couches limites qui se développent à chaque paroi du canal plan.

### 1.1.2 Les différentes échelles de la turbulence

On définit les vitesses  $u, v$  et  $w$  respectivement dans les directions longitudinale  $x$ , normale à la paroi  $y$ , et transverse  $z$ . Les analyses statistiques s'appuient sur une décomposition de la vitesse  $u = U + u'$ , en une partie moyenne  $U$  et une partie fluctuante  $u'$ .

On distingue traditionnellement dans la couche limite une partie interne, influencée par les effets visqueux, et une partie externe où les effets inertiels dominent. La limite entre ces deux parties est généralement fixée à  $y = 0.2\delta$ , où  $\delta$  désigne l'épaisseur de couche limite ou la demi-hauteur du canal, selon le cas considéré. Chacune de ces zones est caractérisée par une échelle de vitesse et une échelle de longueur, qui gouvernent toutes les autres grandeurs de l'écoulement. Les échelles internes, appelées également échelles visqueuses, sont calculées à partir de la tension visqueuse moyenne à la paroi,  $\tau_w$ , qui permet de définir une vitesse de frottement  $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$  et une longueur visqueuse  $l_\nu = \nu/u_\tau$ , où  $\rho$  est la densité du fluide et  $\nu$  sa viscosité cinématique. Les grandeurs normalisées par les échelles internes sont repérées par l'exposant "+" :  $y^+ = y/l_\nu$ ,

$u^+ = u/u_\tau$ , par exemple. L'échelle de longueur externe est généralement l'épaisseur de couche limite  $\delta$ , ou une échelle associée, telle que l'épaisseur de quantité de mouvement  $\delta_\theta$  :

$$\delta_\theta = \int_0^\delta \frac{U(y)}{U_e} \left(1 - \frac{U(y)}{U_e}\right) dy \quad (1.1)$$

où  $U_e$  est la vitesse à l'extérieur de la couche limite ou au milieu du canal. Cette dernière est parfois utilisée comme échelle de vitesse externe. Marusic *et al.* [68] notent toutefois que même dans la zone externe, c'est la vitesse de frottement  $u_\tau$  qui gouverne la dynamique de l'écoulement, comme le montrent les équations ci-dessous. On peut noter que le rapport entre l'échelle de longueur externe et l'échelle de longueur interne fournit le nombre de Reynolds de frottement  $Re_\tau = \delta u_\tau / \nu = \delta^+$ .

### 1.1.3 Approche statistique

L'hypothèse d'homogénéité de la turbulence, ou de quasi-homogénéité, dans les directions  $x$  et  $z$  parallèles à la paroi permet de décrire la structure de la couche limite en se fondant uniquement sur l'évolution des grandeurs statistiques en fonction de  $y$ . D'après Coles [30], l'évolution de la vitesse longitudinale moyenne à travers la couche limite peut s'exprimer de manière universelle à l'aide d'une expression appelée "loi de paroi/loi de sillage" :

$$U^+ = f(y^+) + \Pi g(y/\delta) \quad (1.2)$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions universelles et  $\Pi$  est le paramètre de sillage, qui dépend de la géométrie considérée. La fonction  $g$ , correspondant aux effets des échelles externes, est nulle dans la zone interne. De plus, à une très faible distance de la paroi telle que  $y^+ \leq 5$ , les tensions visqueuses dominent complètement les effets d'inertie, de sorte que l'écoulement peut être considéré comme laminaire. On parle alors de sous-couche visqueuse, où  $f(y^+) \approx y^+$ . En dehors de cette zone, pour  $y^+ > 50$  et  $y/\delta < 0.2$ , la loi de paroi prend la forme d'une loi logarithmique qui peut s'exprimer en fonction des échelles internes ou externes :

$$\begin{aligned} U^+ &= \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B \\ \frac{U_e - U}{u_\tau} &= -\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{\delta}\right) + A \end{aligned} \quad (1.3)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes dépendant de la géométrie, et  $\kappa$  est la constante de Von Karman. Cette zone, appelée zone logarithmique, ne peut être observée que dans des écoulements où la

séparation entre les échelles internes et externes est suffisamment grande. On admet généralement l'existence d'une zone logarithmique lorsque  $Re_\theta > 600$  pour une couche limite [84], ou  $Re_\tau > 200$  pour un canal [70]. La zone délimitée par  $5 < y^+ < 50$ , correspondant à la transition entre la sous-couche visqueuse et la zone logarithmique, est appelée zone tampon.

Dans la zone externe, enfin, la loi de paroi est complétée par la loi de sillage, qui représente la contribution des échelles externes :

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B + \Pi g(y/\delta) \quad (1.4)$$

Le profil de vitesse apparaît donc comme la contribution de deux lois de similitude, l'une associée aux échelles internes et l'autre aux échelles externes. Cette similarité est visible sur la figure 1.1 présentant des mesures de vitesse longitudinale moyenne à plusieurs nombres de Reynolds en fonction de la distance à la paroi. Les grandeurs étant normalisées par les échelles visqueuses, les profils présentent tous la même forme composée de la zone linéaire ( $0 < y^+ < 5$ ), de la zone tampon ( $5 < y^+ < 50$ ), et de la zone logarithmique ( $y^+ > 50$ ). On peut remarquer que l'étendue de cette dernière varie d'un profil à l'autre, car elle est délimitée par la zone de sillage, dont la position en  $y^+$  dépend du nombre de Reynolds.

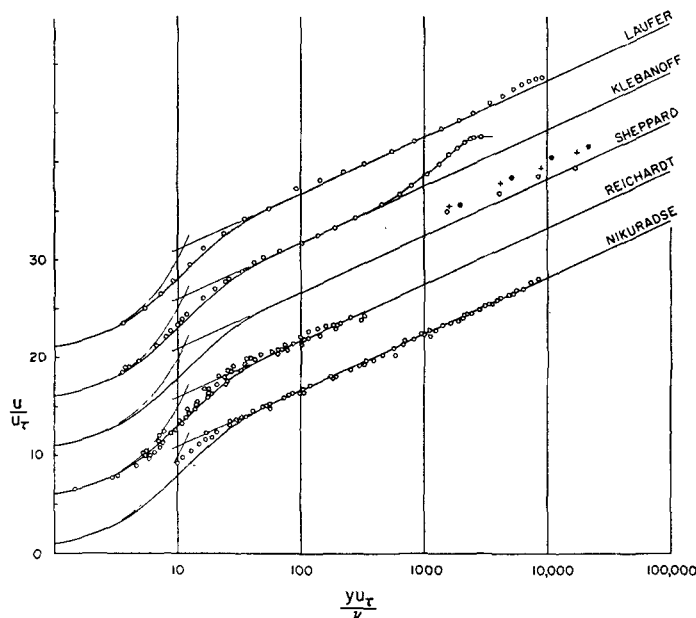


FIGURE 1.1 – Profils de vitesse moyenne  $U^+ = U/u_\tau$  en fonction de la distance à la paroi  $y^+ = yu_\tau/\nu$ , mesurés dans des couches limites turbulentes à différents nombres de Reynolds (d'après Coles [30]).

Théoriquement, la pente du profil logarithmique, donnée par la valeur de  $\kappa$ , est universelle. En pratique, il semble que la constante de Von Karman dépende du type d'écoulement, et vaille environ 0.41 pour une conduite, et environ 0.38 pour une couche limite ou un canal plan [68].

En complément du profil de vitesse moyenne, les fluctuations de vitesse sont souvent examinées car elles renseignent sur l'intensité de la turbulence. La variable statistique correspondant à ces fluctuations est la variance de la vitesse, appelée intensité turbulente longitudinale  $\overline{u'^2}$ . Tout comme la vitesse moyenne, les profils d'intensité turbulente à différents nombres de Reynolds présentent toujours la même structure, comme observé sur la figure 1.2. La plus forte intensité des fluctuations se situe dans la zone tampon, avec un maximum vers  $y^+ \approx 15$ . Dans la zone logarithmique, le profil de  $\overline{u'^2}$  fait apparaître une bosse dont l'étendue et l'amplitude augmentent avec le nombre de Reynolds.

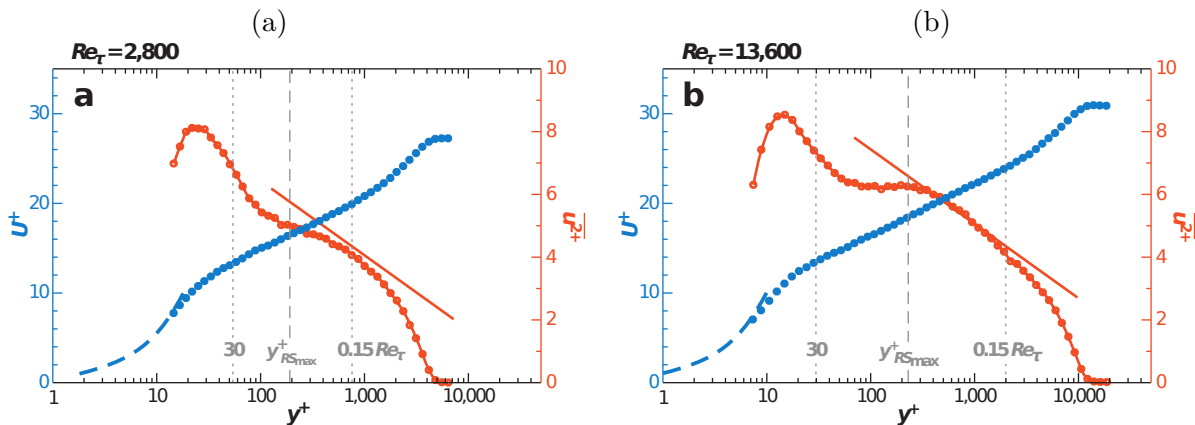


FIGURE 1.2 – Profils de vitesse moyenne  $U^+$  (points bleus) et d'intensité turbulente  $\overline{u'^2}^+$  (points rouges) dans la direction longitudinale pour des couches limites à (a)  $Re_\tau = 2800$  et (b)  $Re_\tau = 13600$  (d'après Smits *et al.* [83]).

Contrairement à la vitesse moyenne, l'intensité turbulente ne suit pas de loi de similitude simple, de sorte qu'il n'est pas possible de superposer leur profil à différents nombres de Reynolds. Ainsi, pour des mesures d'écoulement en laboratoire, représentées par des symboles ouverts sur la figure 1.3, les profils de vitesse fluctuante rendus sans dimension à partir des variables internes ne se superposent ni dans la zone tampon, ni dans la zone logarithmique. Dans la zone de sillage, en revanche, une superposition peut être obtenue avec une normalisation mixte, en traçant  $\overline{u'^2}^+$  en fonction de  $y/\delta$ .

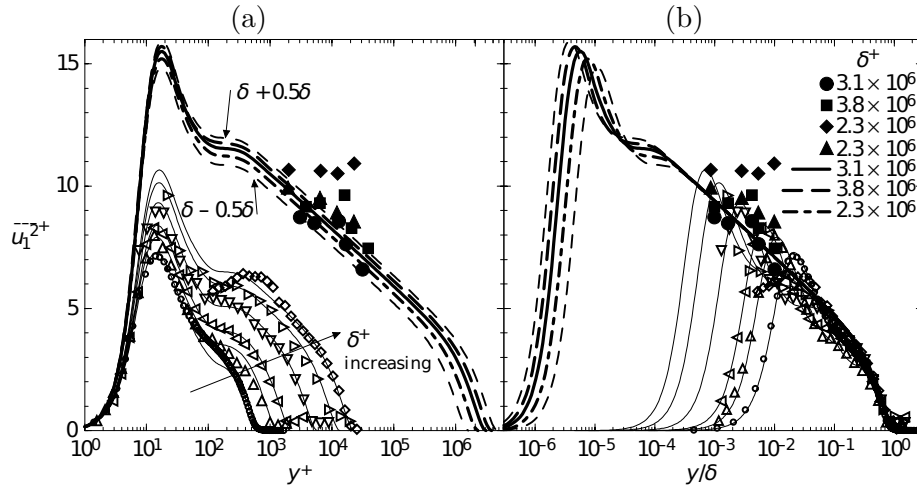


FIGURE 1.3 – Intensité turbulente  $\overline{u_1'^2}^+$  en fonction de (a)  $y^+$ , et (b)  $y/\delta$  pour des couches limites turbulentes mesurées en laboratoire (symboles ouverts) pour  $Re_\tau = 689 - 23000$ , et en écoulements atmosphériques (symboles fermés) (d’après Kunkel & Marusic [62]).

#### 1.1.4 Structures cohérentes

La dynamique de la couche limite, décrite ci-dessus, requiert l’existence de structures cohérentes à l’intérieur de l’écoulement, qui participent à la production et au maintien de la turbulence. Cette nécessité peut être illustrée à partir les équations de Navier-Stokes sur la vitesse moyenne, qui s’écrivent, après simplification, sous la forme [5] :

$$u_\tau^2 \left( \frac{y}{\delta} - 1 \right) - \overline{u'v'} + \nu \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (1.5)$$

pour une couche limite ou un canal plan. On remarque qu’en dehors de la sous-couche visqueuse où  $u' \approx 0$  et  $v' \approx 0$ , l’évolution de  $U$  est gouvernée par le terme  $\overline{u'v'}$ , appelé tension de Reynolds. Robinson [75] note que pour que ce terme soit non nul, les fluctuations de vitesse ne peuvent pas être purement aléatoires, mais doivent contenir des intercorrélations privilégiées entre les différentes composantes, suggérant la présence de structures cohérentes. L’étude de ces structures étant assez ancienne, de nombreuses revues existent comme celles de Robinson [75], Marusic *et al.* [68] et Adrian [1]. Bien que la séparation soit moins marquée que dans l’approche statistique, les structures cohérentes peuvent être regroupées entre celles relevant des échelles internes, que l’on trouve dans la zone interne de la couche limite, et celles relevant des échelles externes, qui se situent dans la zone externe.

Parmi les nombreuses structures observées dans la zone interne de la couche limite, les *streaks* semblent jouer un rôle primordial dans la production des tensions de Reynolds. Les *streaks*

sont des régions où la vitesse longitudinale est faible par rapport à l'écoulement moyen, et dont la forme est très allongée dans la direction longitudinale et relativement étroite dans la direction transverse. La formation des *streaks* est attribuée à des tourbillons quasi-longitudinaux (*quasi-streamwise vortex*) qui induisent une remontée de fluide à faible quantité de mouvement depuis la région proche de la paroi, formant ainsi une structure dont la vitesse apparaît comme “retardée” par rapport à l'écoulement environnant. Le développement récent des simulations numériques permet de visualiser directement les *streaks* et les tourbillons quasi-longitudinaux dans des plans parallèles à la paroi, comme on peut le voir sur la figure 1.4. Depuis leur première

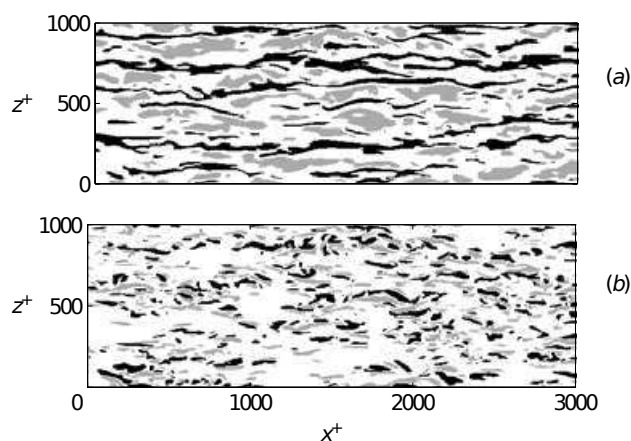


FIGURE 1.4 – Visualisations instantanées de la vitesse dans un plan parallèle à la paroi à  $y^+ = 16$ . Les zones noires représentent un déficit de vitesse, et les zones grises un excès de vitesse par rapport à la valeur moyenne. (a) Composante longitudinale, (b) composante normale. (d’après Jiménez *et al.* [57])

observation expérimentale par Kline *et al.* [60], de nombreux résultats suggèrent que l’espacement transversal entre les *streaks*, de l’ordre de  $100l_\nu$ , est universel, du moins dans la gamme de nombres de Reynolds où ils ont pu être mis en évidence. Leur longueur est généralement de l’ordre de  $1000l_\nu$ , tandis que les tourbillons quasi-longitudinaux sont beaucoup plus courts. On peut enfin remarquer que les *streaks* contribuent à la production de turbulence à travers des événements relativement violents, appelés *bursting*, où les *streaks* sont éjectés loin de la paroi.

Plus loin de la paroi, des structures à grande échelle ou LSM (*Large-Scale Motion*) sont trouvées. Tout comme les *streaks*, les LSM contiennent du fluide à plus faible vitesse longitudinale par rapport à l’écoulement environnant, et ont une forme allongée dans la direction longitudinale. Leur taille est toutefois bien plus grande, et leur localisation s’étend sur toute la hauteur de la zone logarithmique. Tomkins & Adrian montrent que les LSM contribuent fortement à l’énergie cinétique turbulente, y compris dans la zone proche de la paroi, où leur contribution est plus importante que celle des *streaks* [92, 93]. Adrian [1] explique leur formation par un mécanisme



basé sur des tourbillons en tête d'épingle, regroupés en paquets et alignés dans la direction  $x$ , induisant un mouvement rétrograde de grande échelle qui constitue le LSM, comme il est schématisé sur la figure 1.5.

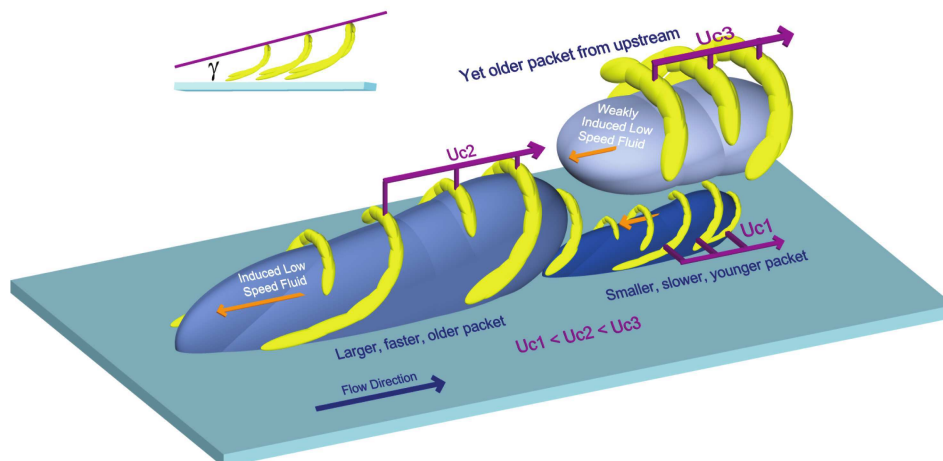


FIGURE 1.5 – Scénario conceptuel de formation des paquets de tourbillons en tête d'épingle induisant les structures à grande échelle. (d'après Adrian [1])

## 1.2 Champ de pression pariétale sous une couche limite

### 1.2.1 Contexte

Les fluctuations de pression pariétale sous une couche limite présentent un intérêt autant pour la recherche fondamentale que pour la recherche appliquée à des problèmes d'ingénierie. D'un point de vue fondamental, Bull [20] note que la pression pariétale représente l'empreinte des structures turbulentes présentes dans l'écoulement, et permet donc de l'étudier indirectement. En effet, les premières mesures de pression pariétale ont été motivées par le fait que les tourbillons présents dans la couche limite induisent un champ de pression qui peut se calculer, sous l'hypothèse d'incompressibilité, en résolvant une simple équation de Poisson [61] :

$$\nabla^2 p = -\rho \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (1.6)$$

En admettant l'hypothèse de Taylor, appelée également "turbulence gelée", selon laquelle la turbulence, et donc le champ de pression qu'elle induit, évoluent très peu dans le temps et sont simplement convectés par l'écoulement, les signaux temporels de pression en un point ont été vus comme un moyen simple de recueillir des informations spatiales sur la turbulence.

D'un point de vue applicatif, les fluctuations de pression engendrent une excitation structurale de l'habitacle de véhicules tels que les voitures ou les avions, provoquant leur vibration. Outre la fatigue des matériaux, ces vibrations créent un rayonnement acoustique à l'intérieur et à l'extérieur de l'habitacle. Il est intéressant de remarquer que ce phénomène a déjà été étudié par Kraichnan [61] à l'aide d'estimations théoriques du champ de pression pariétale, avant même que ce dernier ne soit décrit en détail par des mesures expérimentales. Enfin, la pression pariétale est également liée à l'émission acoustique directe de la couche limite, qui fait l'objet de nombreuses recherches s'appuyant sur l'analogie de Lighthill-Curle [34, 39, 73].

### 1.2.2 Définitions

Comme pour la vitesse, la pression pariétale peut se décomposer en une partie moyenne  $P$  et une partie fluctuante  $p'$ , permettant de définir la corrélation spatio-temporelle :

$$R_{pp}(\xi_x, \xi_z, \tau) = \overline{p'(x, z, t)p'(x + \xi_x, z + \xi_z, t + \tau)}. \quad (1.7)$$

On peut remarquer que cette définition n'est valable que sous l'hypothèse d'une turbulence homogène dans les directions longitudinale et transverse, et stationnaire en temps, de sorte que  $R_{pp}$  est indépendante de  $x$ ,  $z$  et  $t$ . Le spectre fréquence – nombre d'onde est obtenu par une triple transformée de Fourier :

$$\phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{pp}(\xi_x, \xi_z, \tau) e^{-i(k_x \xi_x + k_z \xi_z + \omega \tau)} d\xi_x d\xi_z d\tau \quad (1.8)$$

où  $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$ ,  $k_x$  et  $k_z$  sont les nombres d'onde respectivement dans la direction  $x$  et  $z$ , et  $\omega$  est la fréquence angulaire, ou pulsation. Le spectre fréquentiel est calculé à partir de  $R_{pp}$  ou de  $\phi_{pp}$  :

$$\phi_{pp}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{pp}(0, 0, \tau) e^{-i\omega \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) dk_x dk_z. \quad (1.9)$$

### 1.2.3 Le spectre fréquentiel

Le champ de pression étant induit par le champ de vitesse, et celui-ci ne suivant pas de loi de similitude unique, il est assez évident qu'une loi de similitude unique ne peut également pas être établie pour le spectre de pression pariétale. Les mesures de pression effectuées à différents nombres de Reynolds, entre autres par Farabee & Casarella [38] puis par Goody & Simpson [43], mettent ainsi en évidence plusieurs régions du spectre  $\phi_{pp}(\omega)$  qui suivent différentes lois de similitude. Dans la région des hautes fréquences, les spectres coïncident lorsqu'il sont normalisés

par les échelles visqueuses  $u_\tau$ ,  $l_\nu$  et  $\tau_w$ , indiquant que les fluctuations de pression sont dues aux petites échelles de la turbulence présentes dans la partie interne de la couche limite. Dans les moyennes et basses fréquences, les fluctuations de pression sont influencées par les grandes échelles de la couche limite, ce qui implique une normalisation par les échelles externes. Il n'existe cependant pas de consensus général sur le choix de ces échelles externes, qu'il s'agisse de la pression ( $\tau_w$  ou la pression dynamique  $Q_e = \rho U_e/2$ ) ou du temps ( $\delta/U_e$  ou  $\delta/u_\tau$ ). Enfin, pour des écoulements dont le nombre de Reynolds est suffisamment élevé, une zone de recouvrement a été observée entre les régions de moyennes et hautes fréquences, dans laquelle l'amplitude du spectre est indépendante de la normalisation choisie. Cette zone s'étend sur une plage de fréquences qui dépend du nombre de Reynolds :  $100 \leq \omega\delta/u_\tau \leq 0.3Re_\tau$  [38]. La figure 1.6 regroupe un certain nombre de mesures expérimentales à différents nombres de Reynolds. La normalisation par les variables internes permet ici de superposer les spectres aux hautes fréquences et dans la zone de recouvrement.

Il est intéressant de noter qu'un certain nombre de ces résultats ont été obtenus de manière analytique. Par exemple, le fait que la partie hautes fréquences du spectre soit liée aux variables internes de la couche limite peut s'expliquer en examinant la solution de l'équation de Poisson (1.6). Farabee & Casarella [38] remarquent en effet que cette dernière contient un facteur prémultiplicateur en  $\exp(-(2\omega/U_p)y)$ , où  $U_p$  est une vitesse de phase. La contribution des sources turbulentes décroît donc exponentiellement lorsque  $\omega y$  augmente, ce qui implique que seules les structures proches de la paroi peuvent contribuer aux hautes fréquences du spectre. Un autre exemple de résultat analytique concerne la présence d'une zone de recouvrement, qui a été postulée par Bradshaw [18]. Ce dernier montre que les structures turbulentes de la zone logarithmique ont une contribution à la pression pariétale proportionnelle à  $\tau_w/k_x$ . La pente du spectre fréquentiel découlant de cette contribution dépend de l'évolution de la vitesse de convection à travers la zone logarithmique. Bradshaw propose une variation en  $\omega^{-5/6}$ , mais les mesures expérimentales semble plutôt indiquer une pente en  $\omega^{-0.8}$  ou  $\omega^{-0.7}$  [42].

L'intégrale du spectre de pression pariétale sur l'ensemble des fréquences fournit la pression quadratique moyenne  $p_{rms}^2$ . A l'aide des lois de similitude s'appliquant aux différentes régions du spectre, Farabee & Casarella [38] calculent une valeur théorique de  $p_{rms}^2$  :

$$\frac{p_{rms}^2}{\tau_w^2} = \begin{cases} 6.5 & \text{pour } Re_\tau \leq 333 \\ 6.5 + 1.86 \ln(Re_\tau/333) & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.10)$$

La tension visqueuse pariétale moyenne régit donc l'intensité des fluctuations de pression. La

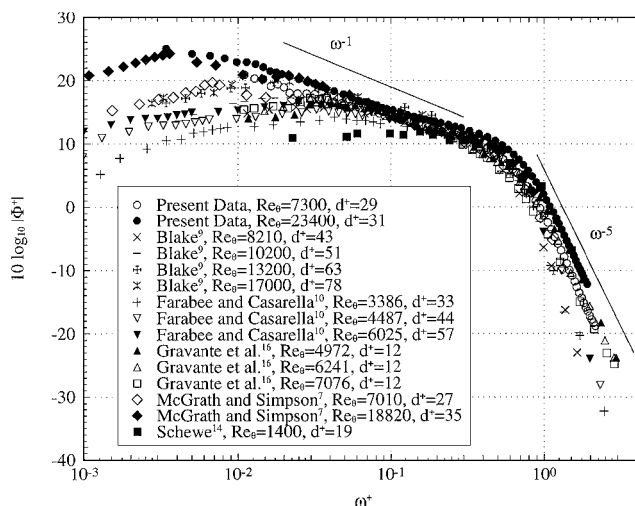


FIGURE 1.6 – Densité spectrale de puissance de la pression pariétale sous une couche limite, normalisée par les échelles internes  $u_\tau$ ,  $l_\nu$  et  $\tau_w$  (d’après Goody & Simpson [43]).

dépendance au nombre de Reynolds est due à la zone de recouvrement, dont la contribution augmente avec  $Re_{e\tau}$ . Bien que les mesures expérimentales de  $p_{rms}^2$  présentent de fortes disparités, l’équation (1.10) en fournit un modèle assez satisfaisant [20].

On peut enfin remarquer que Goody [42] propose un modèle empirique du spectre, fondé sur une importante base de données expérimentales, dont l’expression est

$$\frac{\phi(\omega)U_e}{\tau_w^2\delta} = \frac{3.0(\omega\delta/U_e)^2}{[(\omega\delta/U_e)^{0.75} + 0.5]^{3.7} + [1.1R_T^{-0.57}(\omega\delta/U_e)]^7} \quad (1.11)$$

où  $R_T = (\delta/U_e)/(\nu/u_\tau^2)$  est un nombre de Reynolds calculé à partir des échelles de temps de la zone interne et de la zone externe de la couche limite.

#### 1.2.4 Les modèles d’interspectre et de spectre en fréquence - nombre d’onde

L’interspectre, défini comme

$$\Gamma(\xi_x, \xi_z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\xi_x, \xi_z, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k_x, k_z, \omega) e^{i(k_x\xi_x + k_z\xi_z)} dk_x dk_z, \quad (1.12)$$

a été utilisé depuis les premières mesures de pression pariétale telles que celles de Willmarth & Wooldridge [99] pour mettre en évidence le comportement autosimilaire de la cohérence spatiale de la pression pariétale. Ces auteurs remarquent en effet que la grandeur  $\Gamma(\xi_x, \xi_z, \omega)/\phi(\omega)$  ne dépend que de  $\omega\xi_1/U_c$  et  $\omega\xi_3/U_c$ , où  $U_c$  est une vitesse de convection proche de  $U_e$  qui varie

peu avec  $\xi_x$  et  $\omega$ . De nombreuses études portant sur cette vitesse de convection montrent que les structures associées aux petites séparations  $\xi_x$  et aux hautes fréquences  $\omega$  se déplacent plus lentement que les structures associées aux grandes séparations et aux basses fréquences [28, 32, 38]. Corcos [32, 33] propose un modèle pour l'interspectre sous la forme suivante :

$$\Gamma(\xi_x, \xi_z, \omega) = \phi(\omega) \exp(-\alpha_x |\omega \xi_x| / U_c) \exp(-\alpha_z |\omega \xi_z| / U_c) \exp(i\omega \xi_x / U_c) \quad (1.13)$$

où  $U_c = \tan^{-1}[Im(\Gamma)/Re(\Gamma)]$ . Les grandeurs  $\alpha_x$  et  $\alpha_z$ , déterminées empiriquement, traduisent la perte de cohérence spatiale des structures dans les directions  $x$  et  $z$ . Le spectre en fréquence et en nombre d'onde associé est :

$$\phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\phi_{pp}(\omega)}{\pi^2} \frac{\alpha_x k_c}{k_c^2 + \alpha_x^2 (k_x - k_c)^2} \frac{\alpha_z k_c}{k_c^2 + \alpha_z^2 k_z^2} \quad (1.14)$$

où  $k_c = \omega/U_c$  est le nombre d'onde convectif. Ce modèle rend compte du fait que l'essentiel de l'énergie des fluctuations de pression se situe autour du pic convectif, situé à  $\mathbf{k} = (k_c, 0)$ . Pour certaines applications, il est toutefois intéressant d'obtenir le spectre à des nombres d'onde plus bas. Les modèles de Chase [25, 26], par exemple, s'attachent à modéliser la partie sous-convective et la partie supersonique du spectre, trouvées respectivement pour  $\omega/c < |\mathbf{k}| \leq \omega/U_c$  et  $|\mathbf{k}| \leq \omega/c$ , où  $c$  est la vitesse du son. La zone supersonique contient des composantes spectrales dont la vitesse est supersonique, et joue un rôle primordial dans l'émission acoustique. Lorsque des modèles de pression pariétale sous une couche limite subsonique ont été développés en prenant en compte les effets de compressibilité dans la zone supersonique, il est apparu que, dans le cas d'une plaque plane infinie, le spectre présente une singularité au nombre d'onde sonique  $k_0 = \omega/c$ , où le niveau est alors infini [7]. Cette singularité se traduit, dans les écoulements réels, par un pic autour de  $k_0$  [20], ce que l'on peut voir sur la représentation schématique de  $\phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$  à une fréquence  $\omega$  donnée, dans la figure 1.7.

### 1.2.5 Rayonnement acoustique indirect d'une plaque plane excitée par une couche limite

Le spectre de pression pariétale est très utilisé dans des problèmes de vibro-aéroacoustique, où la vibration des parois d'un véhicule excitées par les fluctuations de pression pariétale engendre un rayonnement acoustique à l'intérieur de la cabine. Ce phénomène de transmission s'étudie dans l'espace  $\mathbf{k} - \omega$  en examinant les coïncidences entre le mode d'excitation issu du spectre  $\phi_{pp}(\mathbf{k}, \omega)$  et les modes de vibration  $S_{mn}(\mathbf{k}, \omega)$  de la paroi. Dans le cas d'une paroi plane,

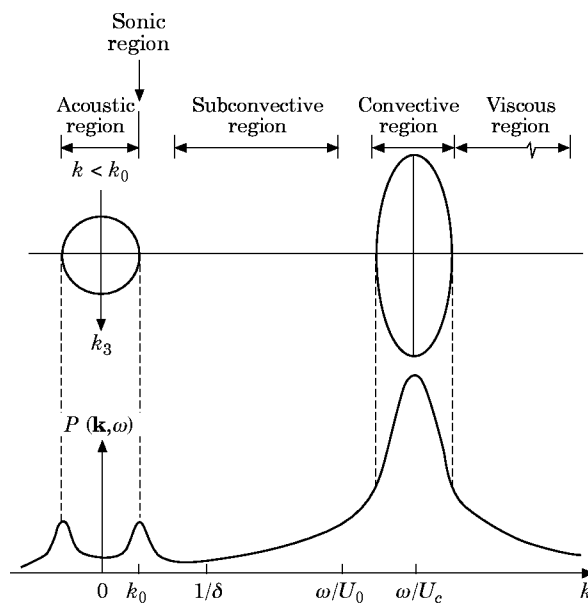


FIGURE 1.7 – Représentation schématique du spectre de pression pariétale à une fréquence  $\omega$  donnée, en fonction du nombre d’onde longitudinal  $k_x$  (d’après Howe [50]).

ces derniers sont relativement faciles à calculer, et la connaissance de  $\phi_{pp}$  fournit la réponse vibratoire de la paroi simplement à l’aide du produit  $\phi_{pp}|S_{mn}|^2$ . Pour des véhicules se déplaçant dans l’air à des nombres de Mach proches de 1, comme les avions, l’excitation est essentiellement due au pic convectif [19]. En revanche, à des nombres de Mach plus faibles comme rencontrés par exemple dans l’automobile, l’excitation peut être causée par les composantes de la région convective, de la région sub-convective et de la région supersonique [3]. En particulier, les composantes supersoniques, malgré leur niveau de plusieurs décades inférieur à celui du pic convectif, peuvent fortement contribuer au bruit de cabine dans les hautes fréquences, car elles sont très efficacement transmises au travers des parois des véhicules [19]. Une des principales difficultés pour étudier expérimentalement la contribution des parties supersoniques et sub-convectives du spectre provient du fait qu’elles sont généralement masquées par le bruit de mesure [19]. Des résultats intéressants ont cependant été obtenus par Arguillat *et al.* [3], qui ont observé des composantes supersoniques bien distinctes du pic convectif dans le spectre de pression pariétale d’un écoulement en canal plan à un nombre de Mach  $M \approx 0.1$  et un nombre de Reynolds de  $5.5 \times 10^4$  basé sur l’épaisseur de déplacement et la vitesse au milieu du canal.

Une autre approche consiste à utiliser des modèles de pression pariétale qui prennent en compte les parties sub-convective et supersonique. Ils présentent néanmoins une forte disparité aux bas nombres d’onde, comme le montre la figure 1.8 tirée de l’étude comparative effectuée par Graham [44].

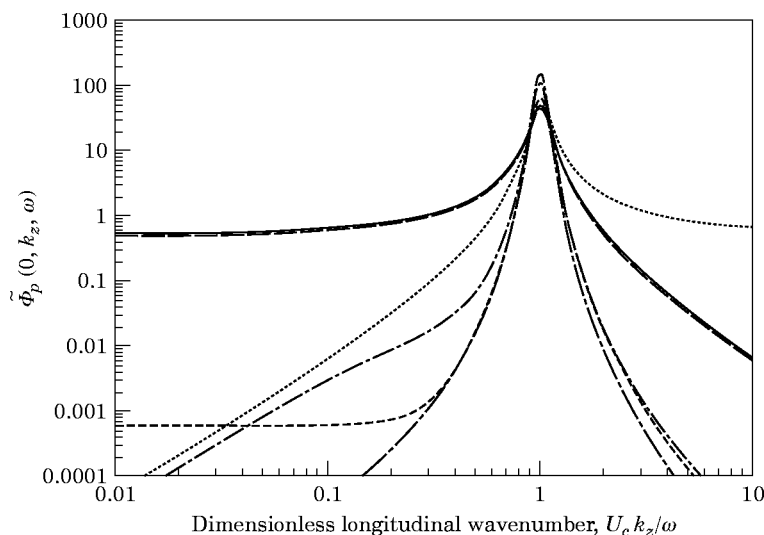


FIGURE 1.8 – Spectres de pression pariétale issus des modèles de : — Corcos, - - - Efimstov, - . - Smol'yakov & Tkachenko, ..... Ffowcs Williams, - - - - Chase I & II (d'après Graham [44]).

Une dernière approche possible est d'utiliser la simulation directe du bruit (Direct Noise Computation, ou DNC), dont le principe est de résoudre simultanément le champ aérodynamique et le champ acoustique à l'aide d'une simulation compressible. Cette approche permet d'obtenir l'ensemble du spectre de pression pariétale, y compris pour les bas nombres d'onde, sans recourir à un modèle. Il existe cependant très peu d'applications au cas de la couche limite ou du canal plan. Suh *et al.* [88] ont par exemple développé un code de LES compressible pour l'appliquer à différents cas, dont un canal plan turbulent, mais aucune étude acoustique n'est réalisée sur ce cas. La simulation de Gloerfelt & Berland [41] permet en revanche une véritable analyse du champ acoustique sous une couche limite turbulente. Cependant, aucune composante n'est clairement détectée dans la zone supersonique car, au nombre de Mach étudié ( $M = 0.5$ ), cette dernière est masquée par le pic convectif [40].

### 1.2.6 Rayonnement acoustique direct d'une couche limite

Les fluctuations de pression pariétale présentent également un intérêt pour l'étude du rayonnement direct de bruit de couche limite. Ce sujet a été très largement étudié via l'analogie de Lighthill, qui consiste à réarranger les équations de Navier-Stokes pour faire apparaître une équation des ondes sur la densité, dans laquelle les sources de bruit sont regroupées en un terme de forçage [66]. Pour un écoulement en champ libre, ces sources sont des quadripôles associés aux tensions de Reynolds. La théorie est complétée par Curle [34] pour des écoulements en présence

de parois rigides. Curle montre que celles-ci sont équivalentes à une distribution surfacique de dipôles associés aux tensions de surface, ces tensions étant la pression pariétale et les tensions visqueuses. Un résultat important est apporté par Powell [73], qui montre que, dans le cas d'une couche limite turbulente sur une paroi plane infinie, la distribution surfacique des dipôles de pression est uniquement due à la réflexion sur la paroi des sources volumiques quadripolaires. Les fluctuations de pression pariétale ne constituent donc pas une véritable source de bruit, mais plutôt l'empreinte du bruit émis par les sources volumiques associées à la turbulence. Cette propriété conduit Blake à établir une relation entre le champ acoustique lointain et la partie supersonique du spectre de pression pariétale [11]. La DNC doit permettre de vérifier cette relation, comme souligné par Gloerfelt [40].

Le principe de réflexion de Powell a donné lieu à une controverse importante, à savoir si les tensions visqueuses doivent être considérées ou non comme des sources de bruit. Dans sa démonstration, Powell considère comme négligeable leur contribution au bruit de couche limite. Or certains auteurs soutiennent qu'elles deviennent dominantes pour des écoulements à faible vitesse [63, 95]. D'autres affirment, au contraire, qu'elles ne produisent pas de bruit [49], ou bien que ce bruit est négligeable devant celui des sources quadripolaires [47]. Plus récemment, Hu *et al.* [54], en appliquant l'analogie acoustique à des résultats issus de simulations incompressibles de canal plan turbulent, trouvent que les tensions visqueuses ont une contribution dominante pour  $M < 0.1$ . Dans ce contexte, la DNC, qui permet d'obtenir le champ acoustique sans recourir à l'analogie de Lighthill, représente un outil déterminant pour étudier cette controverse.

## 1.3 Simulations numériques d'écoulements turbulents pariétaux

Comme le montrent les exemples des paragraphes précédents, la simulation numérique est devenue un outil incontournable pour la recherche fondamentale et appliquée sur les écoulements turbulents de paroi. La simulation numérique des écoulements étant un sujet très vaste, elle est ici abordée succinctement, en mettant l'accent sur les spécificités liées à la turbulence pariétale.

### 1.3.1 Les différentes approches

La mécanique des fluides numérique consiste à simuler des écoulements en résolvant les équations de Navier-Stokes discrétisées en temps et en espace. La discrétisation spatiale est réalisée à l'aide d'un maillage, dont la résolution spatiale détermine les plus petites structures capturées par la simulation. Dans le cas d'écoulements turbulents, la très large gamme d'échelles spatiales représente une contrainte forte pour le maillage, et conduit à faire un compromis entre la précision



du calcul et son coût numérique. On peut distinguer deux approches principales : la simulation numérique directe (DNS) et la simulation des grandes échelles (LES).

### 1.3.1.1 La simulation numérique directe

Dans la DNS, la taille de maille est choisie de sorte qu'elle soit inférieure à la taille des plus petites échelles spatiales de la turbulence, de manière à résoudre directement toutes les échelles de l'écoulement. Pour estimer l'ordre de grandeur du nombre de points de maillage nécessaires, on utilise deux échelles de longueur, l'échelle intégrale  $L_f$  et l'échelle de Kolmogorov  $l_\eta$ , représentant respectivement les plus grandes et les plus petites échelles de la turbulence. Le rapport entre ces deux échelles, dans le cas d'une turbulence homogène isotrope, est donné par [5] :

$$\frac{L_f}{l_\eta} \approx Re_{L_f}^{3/4} \quad \text{avec} \quad Re_{L_f} = \frac{u' L_f}{\nu} \quad (1.15)$$

où  $u'$  est la fluctuation quadratique moyenne de vitesse.

Le maillage doit donc à la fois contenir les plus grandes échelles et assurer la discrétisation des plus petites, dans les trois directions de l'espace, ce qui conduit à l'estimation suivante du nombre de points :

$$N_{DNS} \propto \left( \frac{L_f}{l_\eta} \right)^3 \approx Re_{L_f}^{9/4} \quad (1.16)$$

Cette relation rend inaccessibles à la DNS les écoulements à nombre de Reynolds élevé, dont font partie la plupart des écoulements industriels. Les simulations directes restent donc majoritairement utilisées en recherche fondamentale.

### 1.3.1.2 La simulation des grandes échelles

La LES s'affranchit en partie des contraintes liées à la résolution des petites échelles en ne calculant que les plus grosses structures de la turbulence, et en modélisant les effets des structures non résolues. De manière formelle, cette approche revient à appliquer aux équations de Navier-Stokes un filtrage spatial, dont la fréquence de coupure est fixée par la taille de maille  $\Delta$ . On peut considérer, en première approximation, que  $\Delta$  est de l'ordre de l'échelle de Taylor  $\lambda_g$ , ce qui permet d'estimer, comme précédemment, le nombre de points de maillage nécessaires pour la LES [5] :

$$N_{LES} \propto \left( \frac{L_f}{\lambda_g} \right)^3 \approx Re_{L_f}^{3/2} \quad (1.17)$$

La LES permet donc de simuler des écoulements à des nombres de Reynolds plus élevés par

rapport à la DNS. En contrepartie, les effets des petites échelles doivent être modélisés. Généralement, cette modélisation repose sur le principe de séparation des échelles de la turbulence, selon lequel les grandes échelles sont porteuses de l'énergie cinétique, tandis que les petites échelles ont un rôle essentiellement dissipatif. La plupart des modèles utilisés en LES font donc intervenir une viscosité turbulente [5, 77], qui vient s'ajouter à la viscosité moléculaire dans les équations de Navier-Stokes. Cette méthode est toutefois imparfaite car elle modifie la viscosité effective du fluide, et agit donc sur l'ensemble des échelles résolues, en contradiction avec le principe de séparation évoqué ci-dessus. D'autres approches ont donc été proposées, utilisant notamment un filtrage de relaxation pour ne dissiper que les plus petites échelles résolues sans affecter de manière significative les grandes échelles, pour ne citer que la méthode employée dans notre équipe [14].

#### 1.3.1.3 Spécificités liées aux écoulements pariétaux

Depuis le début des années 80 et jusqu'à aujourd'hui, les simulations numériques constituent un outil fondamental pour l'étude de la turbulence pariétale. En particulier, les premières visualisations de structures tridimensionnelles telles que les tourbillons en tête d'épingle ont été réalisées à l'aide de simulations aux grandes échelles de canal plan turbulent [69]. La DNS a cependant été plus largement utilisée en raison de certaines propriétés spécifiques aux écoulements turbulents pariétaux. En effet, la dynamique de ce type d'écoulement est fortement influencée par la dynamique des petites échelles se développant près de la paroi, qui présentent une forte anisotropie et interagissent avec les échelles plus grandes selon des mécanismes complexes, comme évoqué dans le paragraphe 1.1.4. Les simulations numériques doivent donc assurer une résolution fine de ces petites échelles pour reproduire correctement les caractéristiques de l'écoulement. C'est pour cette raison que l'essentiel des travaux numériques concernant la turbulence pariétale mettent en œuvre des simulations directes.

Il est assez évident que le principe de séparation des échelles énergétiques et dissipatives énoncé précédemment est ici mis en défaut, du moins dans la zone interne de la couche limite, ce qui remet en question l'utilisation de la LES pour des écoulements pariétaux. De nombreuses simulations aux grandes échelles utilisent donc un modèle de paroi, et ne résolvent que la zone externe de la couche limite [72], ce qui permet d'atteindre des nombres de Reynolds relativement élevés [29]. Des simulations résolvant la zone interne la couche limite existent, mais elles couvrent une gamme de nombres de Reynolds proches de ceux traités par la DNS [41, 78, 88, 96]. Elles permettent toutefois une réduction non négligeable du coût numérique. Schlatter *et al.* [78]

obtiennent ainsi, avec la LES, une réduction du nombre de points d'un facteur 10 par rapport à une DNS.

### 1.3.2 Quelques simulations de référence

#### 1.3.2.1 Simulations incompressibles

Ce paragraphe présente quelques travaux de référence de la littérature portant sur l'étude des propriétés aérodynamiques de la turbulence pariétale à l'aide de simulations numériques incompressibles. Jusqu'à récemment, le cas du canal plan a été majoritairement utilisé car c'est une configuration plus simple à implémenter que la couche limite [79]. Le nombre de Reynolds des écoulements simulés reste toutefois relativement bas, comme le montre le tableau 1.1. Pour

Auteurs	Année	$Re_\tau$
Kim <i>et al.</i> [59]	1987	180
Moser <i>et al.</i> [70]	1999	590
Hu <i>et al.</i> [53]	2002	180
Del Alamo <i>et al.</i> [35]	2003	550
Del Alamo <i>et al.</i> [36]	2004	934
Hu <i>et al.</i> [55]	2006	1440
Hoyas <i>et al.</i> [51]	2006	2003

TABLE 1.1 – Principales simulations numériques directes de canal plan turbulent

se donner une idée de l'évolution des maillages, on peut noter que la DNS de Kim *et al.* [59] à  $Re_\tau = 180$  comporte environ 4 millions de points, tandis que celle de Hu *et al.* [55] à  $Re_\tau = 1440$  en comporte 500 millions.

En ce qui concerne la DNS de couche limite, l'évolution vers des nombres de Reynolds élevés est encore plus lente, car la non homogénéité de l'écoulement dans la direction longitudinale apporte des difficultés numériques supplémentaires liées à l'introduction de turbulence à l'entrée de l'écoulement, et au développement spatial de la couche limite qui nécessite des domaines très longs. Pour ces raisons, les simulations de couche limite de Spalart [84] à des nombres de Reynolds  $Re_\theta = U_e \delta_\theta / \nu \leq 1400$  ont servi de référence jusqu'à très récemment [79]. La littérature récente révèle toutefois une augmentation importante des nombres de Reynolds des couches limites simulées par DNS [80, 82, 100], le plus élevé étant atteint par Schlatter & Örlü [79], avec  $Re_\theta = 4300$ . Le nombre de points utilisés augmente également de façon spectaculaire, dépassant par exemple 8 milliards dans la LES de couche limite de Schlatter *et al.* [81] à  $Re_\theta = 8300$ .

### 1.3.2.2 Simulations compressibles

Les simulations compressibles sont utilisées dans deux domaines de recherche bien distincts. D'une part, elles sont utilisées pour étudier l'aérodynamique des écoulements supersoniques. Wei & Pollard [98] ont par exemple réalisé des DNS de canal plan à  $Re_\tau \approx 200$ , pour des nombres de Mach de 0.2, 0.7 et 1.5. Ils mettent en évidence des effets de compressibilité sur les grandeurs statistiques de l'écoulement pour  $M \geq 0.7$ .

Les simulations compressibles sont utilisées d'autre part en aéroacoustique pour réaliser des simulations directes du bruit, comme mentionné dans la section 1.2. Si cet outil est largement utilisé pour le bruit de jet ou de cavité [31], son application au bruit d'écoulement turbulent pariétal est encore peu fréquente. Berland & Gloerfelt [10] et Gloerfelt & Berland [41] ont cependant utilisé des LES compressibles pour calculer le rayonnement acoustique d'une couche limite à  $M = 0.5$  et  $Re_\theta = 300 - 2000$ , sur un maillage comportant 54 millions de points. Etant donné le niveau très faible du bruit rayonné par la couche limite, le calcul mis en œuvre ne doit pas produire de rayonnements parasites masquant le champ acoustique. Une attention particulière doit notamment être portée aux ondes acoustiques et aux structures turbulentes sortant du domaine de calcul, ainsi qu'au forçage de la transition turbulente à l'entrée du domaine. On peut noter que ces contraintes sont dues à la non périodicité du cas de la couche limite. Le canal plan est donc plus facile à mettre en œuvre, car il s'affranchit des conditions d'entrée et de sortie, et des rayonnements parasites qui en résultent.

### 1.3.3 Quelques aspects de mise en œuvre d'une LES compressible de canal plan

Comme on a pu le voir ci-dessus, la LES compressible présente de nombreux avantages par rapport à d'autres méthodes. Elle permet de reproduire assez fidèlement la structure complexe de la turbulence de paroi à un coût numérique moindre par rapport à la DNS. En ce qui concerne l'aéroacoustique, la LES compressible est également particulièrement intéressante pour l'étude du bruit de couche limite, car elle calcule à la fois les sources aérodynamiques turbulentes et le rayonnement acoustique qu'elles produisent sans recourir à aucun modèle. Toutefois, pour obtenir des champs aérodynamique et acoustique pertinents, certaines précautions doivent être prises.

### 1.3.3.1 Taille du domaine

L'utilisation de conditions limites périodiques dans les directions homogènes est justifiée si la taille du domaine est suffisamment grande pour contenir les structures les plus longues et les plus larges. On le vérifie en s'assurant que les corrélations spatiales de vitesse dans les deux directions homogènes sont très proches de zéro lorsque la séparation est maximale, c'est-à-dire pour  $L_x/2$  et  $L_z/2$ ,  $L_x$  et  $L_z$  étant les tailles du domaine dans les directions  $x$  et  $z$ . La littérature sur les DNS de canal plan montre de grandes disparités dans les tailles de domaines, dont une revue est proposée par Chin *et al.* [27]. Hu *et al.* [54, 55] utilisent par exemple des domaines de taille  $L_x \times L_z = 12h \times 6h$  pour leurs simulations directes à  $Re_\tau = 360 - 1440$ .

### 1.3.3.2 Résolution spatiale

La résolution du maillage dans la zone proche de la paroi est particulièrement importante. On l'évalue en exprimant les tailles de maille  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  en variables internes. Dans les directions homogènes  $x$  et  $z$ , les mailles doivent être suffisamment petites pour capturer les structures cohérentes se développant dans la couche limite. Pour la DNS, Hu *et al.* [55] imposent ainsi  $\Delta x^+ \approx 17$  et  $\Delta z^+ \approx 8$ , tandis que Hoyas & Jiménez [51] utilisent des mailles environ deux fois plus petites. En LES, on trouve  $\Delta x^+ \approx 35$  et  $\Delta z^+ \approx 15$  dans les travaux de Viazzo *et al.* [96] et de Gloerfelt & Berland [41], et  $\Delta x^+ = 25$  et  $\Delta z^+ \approx 11$  dans les travaux de Schlatter *et al.* [78]. Une étude de convergence en maillage peut ici être utile pour déterminer la résolution spatiale minimale assurant une précision satisfaisante. Dans la direction  $y$ , le maillage doit être beaucoup plus raffiné pour permettre une bonne discrétisation du gradient de vitesse proche de la paroi. Pour réduire le coût de cela, la taille de maille  $\Delta y$  n'est pas constante mais augmente lorsqu'on s'éloigne de la paroi. On définit donc la taille de maille à la paroi  $\Delta y_w$  et celle au centre du canal  $\Delta y_c$ . Dans la plupart des simulations directes et aux grandes échelles, on impose finalement  $\Delta y_w^+ < 1$  et  $\Delta y_c^+ \approx \Delta z^+$ .

Deux remarques peuvent être faites à propos de la résolution spatiale. Premièrement, en ce qui concerne la DNS, l'ajustement des tailles de maille par rapport à la longueur visqueuse  $l_\nu$  ou par rapport à l'échelle de Kolmogorov est équivalente, du moins proche de la paroi où on a  $l_\nu \approx \eta$  [56]. Deuxièmement, le fait d'imposer une limite aux valeurs de  $(\Delta x^+, \Delta y^+, \Delta z^+)$  a une implication directe sur le lien entre le nombre de points de maillage et le nombre de Reynolds, que l'on se propose d'estimer ici. Le nombre de points dans les directions homogènes  $x$  et  $z$  est donné directement par  $L_x/\Delta x$  et  $L_z/\Delta z$ . Dans la direction  $y$ , la taille de maille n'est pas constante, mais elle vérifie  $\Delta y < \Delta y_c$ . Le nombre de points dans la direction  $y$  est donc supérieur

à  $L_y/\Delta y_c$ . On obtient alors une estimation du nombre total de points :

$$N \approx \frac{L_x}{\Delta x} \frac{L_y}{\Delta y_c} \frac{L_z}{\Delta z} = \frac{L_x}{h} \frac{L_y}{h} \frac{L_z}{h} \frac{h^3}{\Delta x \Delta y_c \Delta z} = 2 \frac{L_x}{h} \frac{L_z}{h} \frac{Re_\tau^3}{\Delta x^+ \Delta y_c^+ \Delta z^+} \quad (1.18)$$

où  $h$  est la demi-hauteur du canal. Les tailles du domaine  $L_x$  et  $L_z$  sont des multiples de  $h$ , tandis que la hauteur  $L_y$  est égale à  $2h$ . Le nombre total de points est donc proportionnel au nombre de Reynolds au cube. Le fait d'utiliser une LES plutôt qu'une DNS permet de réduire le nombre de points en augmentant la valeur du produit  $\Delta x^+ \Delta y_c^+ \Delta z^+$  dans l'expression (1.18), mais cela ne modifie pas la dépendance en  $Re_\tau^3$ .

### 1.3.3.3 Schémas de discrétisation spatiale

Pour assurer une bonne résolution du champ acoustique, les méthodes numériques utilisées doivent permettre aux ondes acoustiques de se propager sur de longues distances sans dissipation et sans dispersion significative. Un certain nombre de méthodes ont ainsi été développées selon une approche proposée par Lele [64] et Tam & Webb [90], qui consiste à optimiser leurs propriétés dans l'espace de Fourier. On s'intéresse ici aux schémas aux différences finies explicites, qui permettent de calculer les dérivées spatiales, et aux schémas de filtrage sélectif explicites. Ces derniers sont utilisés pour dissiper les ondes hautes fréquences mal résolues par le schéma aux différences finies, qui parasitent le calcul et peuvent engendrer des instabilités [91].

Pour une grandeur  $f$  quelconque, des différences finies et un filtrage explicite s'appliquent respectivement, au point de maillage  $x_i$ , telles que :

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-n}^m a_j f(x_i + j\Delta x) \\ f^d(x_i) = f(x_i) - \sigma \sum_{j=-p}^q d_j f(x_i + j\Delta x) \end{cases} \quad (1.19)$$

où  $(a_j)_{-n \leq j \leq m}$  sont les coefficients du schéma aux différences finies,  $(d_j)_{-p \leq j \leq q}$  ceux du filtrage, et  $\sigma \in [0, 1]$  est une constante définissant la force du filtrage. En appliquant une transformée de Fourier spatiale à ces expressions, on obtient :

$$\begin{cases} k^* \Delta x = -i \sum_{j=-n}^m a_j \exp(ijk\Delta x) \\ G(k\Delta x) = 1 - \sigma \sum_{j=-n}^m d_j \exp(ijk\Delta x) \end{cases} \quad (1.20)$$

où  $k$  est le nombre d'onde exact,  $k^*$  est le nombre d'onde effectif du schéma aux différences finies, et  $G$  est la fonction de transfert du filtre. Les coefficients des différents schémas peuvent alors être choisis de manière à optimiser les propriétés dans l'espace des nombres d'ondes.

Pour le schéma aux différences finies, on peut ainsi chercher à minimiser la dissipation et la dispersion données respectivement par le facteur d'amplification  $\exp(-Im(k^*\Delta x))$  et l'erreur de phase  $|k\Delta x - Re(k^*\Delta x)|$ . Il est intéressant d'effectuer cette minimisation sur une plage de nombres d'onde la plus grande possible. Cette approche a été proposée en premier lieu par Tam & Webb [90] pour le développement de schémas dits DRP (*Dispersion-Relation-Preserving*). Bogey & Bailly [13] ont également développé des schémas sur 11 points d'ordre 4 qui offrent une haute précision jusqu'à environ  $k^c/2$ , où  $k^c = \pi/\Delta x$  est le nombre d'onde de coupure imposé par le maillage. Ces schémas sont centrés, c'est-à-dire qu'ils vérifient  $n = m$  et  $a_j = -a_{-j}$ , de sorte que leur facteur d'amplification est égal à un, ce qui assure une dissipation nulle. Ils ne peuvent cependant pas être utilisés sur certains points du maillage, au voisinage de la paroi notamment. Des schémas décentrés ont donc été développés pour ces points par Berland *et al.* [9] en utilisant la même technique d'optimisation.

Le filtre doit permettre l'élimination des composantes hautes fréquences au voisinage de la fréquence de coupure, afin d'éliminer les ondes parasites. En revanche, il doit être hautement sélectif, dans le sens où il ne doit pas affecter de manière significative les ondes bien résolues par le schéma aux différences finies. Un filtre sélectif sur onze points d'ordre 6 est proposé par Bogey *et al.* [15] pour les points intérieurs. Tout comme les schémas aux différences finies, ce filtre est centré, et vérifie  $d_j = d_{-j}$  pour assurer que la dispersion soit nulle. Des filtres décentrés ont également été développés par Berland *et al.* [9] pour les points proches des frontières du maillage.

### 1.3.3.4 Résolution temporelle

La résolution temporelle d'une simulation est soumise à deux contraintes. La première, qui relève de la physique, implique que le pas de temps  $\Delta t$  soit du même ordre de grandeur que l'échelle de temps visqueuse pour capturer convenablement les phénomènes de la zone interne de la couche limite. Cela peut s'écrire formellement de la manière suivante :

$$\Delta t^+ = \frac{\Delta t u_\tau^2}{\nu} = O(1) \quad (1.21)$$

La seconde, qui est une contrainte purement numérique, permet d'assurer la stabilité du schéma d'intégration utilisé pour l'avancement en temps des équations de Navier-Stokes. On

verra dans les deux chapitres suivants que cette contrainte peut s'écrire, pour une simulation compressible d'écoulement pariétal, de la manière suivante :

$$\text{CFL} = \frac{c\Delta t}{\Delta y_w} \leq \text{CFL}_{max} \quad (1.22)$$

où CFL est le nombre de Courant-Friedrichs-Lewy. La valeur de  $\text{CFL}_{max}$  est un paramètre du schéma d'intégration temporelle employé. Pour les schémas utilisés dans le cadre de l'aéroacoustique et plus généralement de la DNS ou de la LES, on a généralement  $\text{CFL}_{max} = O(1)$ .

En réinjectant (1.22) dans (1.21), on obtient :

$$\Delta t^+ = \text{CFL} \frac{\Delta y_w u_\tau^2}{\nu c} \leq \text{CFL}_{max} \Delta y_w^+ M_\tau \quad (1.23)$$

où le nombre de Mach  $M_\tau = u_\tau/c$  dépend des paramètres du cas considéré. Pour des écoulements subsoniques, on a cependant  $M_\tau \ll 1$ , Par conséquent, en rappelant que  $\Delta y_w^+ \approx 1$ , il vient  $\Delta t^+ \ll 1$ . Le pas de temps est donc beaucoup plus dépendant de la contrainte numérique que de la contrainte physique. Il est par conséquent important, pour limiter le temps CPU des simulations, de trouver un schéma numérique qui possède un nombre de CFL maximum élevé.

## 1.4 Conclusion

Ce chapitre a permis de passer en revue certains enjeux de la recherche sur la turbulence pariétale, et de montrer comment la simulation compressible des grandes échelles représente un outil intéressant pour répondre à ces enjeux. La LES permet en effet d'étudier la complexité des écoulements canoniques que sont la couche limite et le canal plan, tout en restant moins coûteuse que la DNS. Elle permet également de réaliser des simulations acoustiques directes pour répondre à certaines problématiques liées au bruit de couche limite. L'examen des principaux aspects de mise en œuvre d'une simulation compressible de canal plan a mis en évidence l'importance des propriétés de stabilité du schéma d'intégration temporelle. Ce dernier point est traité dans les deux chapitres suivants.





## 2 Développement d’algorithmes de Runge-Kutta semi-implicites

---

Ce chapitre présente le développement de deux algorithmes de Runge Kutta semi-implicites d’ordre 3 à 6 étapes. Chacun de ces algorithmes combine le schéma explicite d’ordre 4 à 6 étapes de Berland *et al.* [8] avec un schéma implicite à 6 étapes. Dans une première partie sont brièvement exposées les principales familles de méthodes d’intégration temporelle, et les méthodes développées dans ce chapitre sont replacées parmi ces familles. Dans une deuxième partie, les principales caractéristiques des algorithmes de Runge-Kutta sont présentées en détail. En particulier, l’analyse de la stabilité des schémas, fondée sur une approche spectrale, fournit les bases nécessaires à la mise au point de schémas semi-implicites. Le développement de ces derniers est traité dans la troisième partie, qui comprend également l’étude de leurs propriétés de dissipation et de dispersion dans l’espace de Fourier.

### 2.1 Méthodes d’intégration temporelle

La simulation aéroacoustique directe repose sur la résolution des équations d’Euler ou de Navier-Stokes sous une forme compressible. L’approche usuelle est de considérer un problème discrétisé en temps et en espace, dans lequel les dérivées partielles temporelles et spatiales sont approximées par des opérateurs discrets. La stabilité, la précision et le coût de la résolution dépendent fortement du choix de ces opérateurs, qui constitue donc un enjeu crucial. Ce choix peut s’appuyer sur une analyse théorique qui est menée séparément pour l’opérateur spatial et temporel. Des méthodes de discrétisation spatiale ont été proposées, entre autres, par Tam & Webb [90], Lele [64] et Bogey & Bailly [13]. La méthode de discrétisation spatiale étant choisie, les équations d’Euler ou de Navier-Stokes peuvent alors se mettre sous la forme d’une équation

semi-discrétisée :

$$\frac{du}{dt} = F(u, t) \quad (2.1)$$

où  $u$  est un vecteur contenant les variables conservatives sur l’ensemble du maillage, et  $F$  représente les flux Eulériens et visqueux discrétisés en espace. Associé à un état initial  $u(t = 0)$ , le problème devient une équation différentielle ordinaire (EDO) avec conditions initiales. La littérature sur la résolution de ce type de problème est abondante du fait de son ancienneté, les premiers articles de Runge [76] et de Bashfort & Adams [6] datant de la fin du 19ème siècle. Ces auteurs proposent des méthodes d’avancement en temps qui dérivent de la méthode d’Euler : à partir de valeurs connues de la variable  $u$  et de ses dérivées à des instants  $t \leq t_n$ , on peut évaluer  $u$  à un instant futur  $t_{n+1}$ . D’après Butcher [22], deux principales familles de méthodes d’avancement en temps se sont dégagées dans le courant du 20ème siècle : les méthodes multi-pas linéaires (Linear Multistep ou LM) et les méthodes de Runge-Kutta (RK). Bien que les deux soient utilisées en aéroacoustique numérique [31], on peut remarquer que plusieurs méthodes de Runge-Kutta explicites ont été développées par Hu *et al.* [52], Stanescu & Habashi [86], Calvo *et al.* [23] et Berland *et al.* [8]. Les propriétés de ces méthodes ont été optimisées dans l’espace de Fourier, minimisant leur dissipation et leur dispersion pour de faibles taux de discrétisation temporelle, typiquement 4 pas de temps par période. Ces méthodes peuvent être appliquées à de nombreuses configurations d’écoulement. Toutefois, dans des simulations d’écoulements pariétaux, le maillage est généralement très raffiné près de la paroi, ce qui conduit à l’apparition de très petites échelles spatiales dont la stabilité doit être assurée par une sévère réduction du pas de temps. Une solution à ce problème est d’utiliser un schéma implicite, qui assure la stabilité des petites échelles pour des pas de temps importants. Cependant, la nécessité d’inverser des systèmes de très grande taille comprenant les trois dimensions de l’espace implique un temps de calcul excessivement long.

Il existe une solution intermédiaire qui consiste à combiner un schéma implicite avec un schéma explicite, ce dernier n’étant utilisé que pour l’intégration temporelle dans la direction où le maillage est le plus fin. Dans un calcul de couche limite, par exemple, il est intéressant de ne traiter implicitement que les dérivées des flux dans la direction normale à la paroi. La contrainte sur le pas de temps est ainsi relaxée, et le coût de calcul lié à l’inversion du système reste acceptable, car ce dernier n’implique qu’une dimension de l’espace. Cette stratégie a déjà été utilisée par plusieurs auteurs dans des Simulations Numériques Directes (DNS) d’écoulements pariétaux incompressibles [82, 100]. Pour une couche limite turbulente, par exemple, Wu & Moin [100] ont utilisé un schéma de Crank-Nicholson d’ordre 2 pour le calcul des termes de convection et de

diffusion contenant des dérivées dans la direction normale à la paroi, tandis que l'intégration temporelle des autres termes est réalisée par une méthode de Runge-Kutta explicite d'ordre 3. Des schémas semi-implicites d'ordre supérieur ont également été proposés par Simens *et al.* [82] et Spalart *et al.* [85] pour des problèmes incompressibles. Ces méthodes n'étant a priori pas applicables à des écoulements compressibles, des schémas semi-implicites doivent être développés spécifiquement pour l'aéroacoustique. Un grand nombre d'articles traitent des méthodes dites partitionnées [4, 24, 58, 102], proposant des combinaisons de schémas de Runge-Kutta appropriés pour l'intégration des équations de Convection-Diffusion-Réaction (CDR). Une de ces méthodes, développée par Zhong [102], a par exemple été utilisée par Suh *et al.* [88] pour la simulation compressible aux grandes échelles d'écoulements pariétaux. Ces méthodes sont conçues pour traiter de manière implicite des termes de diffusion ou de réaction, mais pas pour traiter des termes de convection dans une direction particulière. Elles fournissent néanmoins une base théorique intéressante pour le développement de méthodes partitionnées pour l'aéroacoustique.

## 2.2 Présentation des méthodes de Runge-Kutta

### 2.2.1 Formulation

Une méthode de Runge-Kutta à  $s$  étapes peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} k_i &= F(u_n + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j, t + c_i \Delta t) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq s \\ u_{n+1} &= u_n + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i k_i \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}$ . Cette formulation, très générale, regroupe une grande diversité de méthodes, décrites par Hairer *et al.* [45, 46]. On retiendra tout d'abord celles pour lesquelles  $a_{ij} = 0, \forall j > i$ , permettant un calcul successif des termes  $k_i$ . On peut remarquer que chaque étape de la méthode de RK consiste à estimer  $F(u)$ , c'est-à-dire  $du/dt$ , aux instants  $t + c_i \Delta t$ . Ces estimations sont ensuite utilisées pour calculer l'intégrale de  $du/dt$  entre  $t$  et  $t + \Delta t$  par une méthode des rectangles. Les étapes constituent donc un moyen de contrôle de l'intégration temporelle.

### 2.2.2 Ordre et précision dans l'espace de Fourier

Le principal paramètre de contrôle est  $p$ , l'ordre de l'erreur de discrétisation, défini par  $u_{n+1} - u(t_n + \Delta t) = O(\Delta t^p)$ . On obtient un ordre donné en soumettant les coefficients  $a_{ij}$  et  $b_i$  à un certain nombre de contraintes, d'autant plus nombreuses que l'ordre voulu est élevé. Butcher a formalisé ces contraintes en s'appuyant sur la théorie des arbres [21, 22]. Il montre que pour

assurer l'ordre  $p$ , un schéma doit satisfaire des conditions  $\tau_k^{(q)} = 0, \forall q \leq p$ . Voici par exemple ces conditions jusqu'à l'ordre 4 :

$$\begin{aligned}
 \tau_1^{(1)} &= \sum_{i=1}^s b_i - 1 & \tau_1^{(2)} &= \sum_{i=1}^s b_i c_i - \frac{1}{2} \\
 \tau_1^{(3)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s b_i c_i^2 - \frac{1}{3!} & \tau_2^{(3)} &= \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j - \frac{1}{3!} \\
 \tau_1^{(4)} &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^s b_i c_i^3 - \frac{1}{4!} & \tau_2^{(4)} &= \sum_{i,j=1}^s b_i c_i a_{ij} c_j - \frac{3}{4!} \\
 \tau_3^{(4)} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j^2 - \frac{1}{4!} & \tau_4^{(4)} &= \sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} a_{jk} c_k - \frac{1}{4!}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Pour des problèmes d'aéroacoustique et plus généralement de propagation, il peut aussi être intéressant de contrôler la fonction de transfert d'une méthode de RK dans l'espace de Fourier. Ainsi, les schémas de Hu *et al.* [52] et de Berland *et al.* [8], optimisés dans l'espace de Fourier, ont une dissipation et une dispersion faibles sur un large spectre de fréquences.

### 2.2.3 Etude de la stabilité par analyse spectrale

Le dernier paramètre de contrôle à considérer est la stabilité du schéma. Celle-ci dépend des propriétés de l'équation semi-discrétisée (2.1) que l'on souhaite intégrer. Il est donc pertinent d'étudier en premier lieu les propriétés de cette équation, ce qui est fait ici. Quelques exemples sont de plus fournis pour des problèmes physiques simples.

#### 2.2.3.1 Solutions d'une équation semi-discrétisée

Si  $u$  est une solution de (2.1), l'évolution temporelle de  $u$  dépend des propriétés de l'opérateur  $F$ . Pour conserver toute généralité, aucune hypothèse ne doit être faite sur cet opérateur. On se propose toutefois d'étudier le cas simplifié où  $F$  est linéaire et indépendant du temps. L'équation (2.1) peut alors s'écrire :

$$\frac{du}{dt} = C.u \tag{2.4}$$

où  $C$  est une matrice de dimension  $N^2$ ,  $N$  étant la dimension du vecteur  $u$ .

En appliquant les théorèmes de l'algèbre linéaire, on peut montrer que toute solution de (2.4) s'exprime sous la forme suivante :

$$u = \sum_{i=1}^N u_{0i} e^{\lambda_i t} w_i \tag{2.5}$$

où  $\lambda_i$  et  $w_i$  sont respectivement les valeurs propres (complexes) et les vecteurs propres de la

matrice  $C$ , et  $u_{0i}$  les coordonnées du vecteur initial  $u_0 = u(t = 0)$  dans la base des vecteurs propres :

$$u_0 = \sum_{i=1}^N u_{0i} w_i \quad (2.6)$$

Il est théoriquement possible, à l'aide de la formulation (2.5), d'exprimer explicitement la solution en fonction des valeurs propres et des vecteurs propres de  $C$ . Cependant, le calcul de ces vecteurs propres est extrêmement compliqué car  $N$  est généralement très grand, de l'ordre de grandeur du nombre de points du maillage issu de la discrétisation spatiale. En revanche, l'ensemble des valeurs propres, c'est-à-dire le spectre, est plus facile à calculer, et donne une information fondamentale sur l'évolution globale de la solution  $u$ . En effet, l'équation (2.5) fait apparaître des termes en  $e^{\lambda_i t}$ . Si une valeur propre  $\lambda_i$  est de partie réelle positive, la solution  $u$  sera non bornée, et donc instable. Ce comportement divergent peut soit provenir du phénomène physique lui-même, soit être lié au schéma de discrétisation choisi pour le calcul des dérivées spatiales. Dans les deux cas, l'existence d'une valeur propre à partie réelle positive implique que la solution *exacte* de l'équation (2.4) est instable, ce qui rend inutile la recherche d'un schéma d'intégration temporelle stable.

Le lien entre la stabilité de la solution et le spectre de  $C$  a été établi pour un opérateur  $F$  linéaire. Ce résultat est toutefois généralisable au cas non linéaire\*, pour les équations de Navier-Stokes par exemple.

### 2.2.3.2 Quelques exemples d'équations semi-discrétisées

Pour garantir la stabilité de la solution, il faut donc imposer que les valeurs propres de  $F$  soient toutes à partie réelle négative, ou, de manière équivalente, qu'elles soient situées dans le demi-plan gauche de l'espace complexe. On se propose d'étudier cette contrainte pour quelques problèmes mono-dimensionnels simples. Considérons par exemple un problème convectif

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

et un problème diffusif

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.8)$$

discrétisés sur 100 points, avec des conditions limites périodiques sur les bords du domaine.

Les dérivées spatiales sont approximées avec des schémas aux différences finies. Pour le pro-

---

\*. L'équation (2.1) doit alors être remaniée pour faire apparaître la Jacobienne de  $F$ , qui remplace la matrice  $C$  dans l'étude de stabilité.

blème convectif, on considère un schéma décentré d'ordre 1 sur 2 points, et un schéma centré d'ordre 2 sur 3 points, conduisant respectivement aux équations semi-discrétisées suivantes :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{u_{i-1} - u_i}{\Delta x} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{u_{i-1} - u_{i+1}}{2\Delta x} \quad (2.10)$$

où  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq 100}$ , et  $\Delta x$  est le pas de discrétisation spatiale, que l'on fixe égal à 1. Pour le problème convectif, on considère un schéma centré d'ordre 2 sur 3 points :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} \quad (2.11)$$

Les équations (2.9), (2.10) et (2.11) représentent ainsi des problèmes semi-discrétisés de la forme  $\partial u / \partial t = F(u)$ , pour différents opérateurs  $F$ . Les valeurs propres de cet opérateur sont représentées sur la figure 2.1 en bleu pour l'équation (2.9) en rouge pour l'équation (2.10) et en vert pour l'équation (2.11). On rappelle que les solutions des problèmes semi-discrétisés sont de la forme  $\sum e^{\lambda_i t}$ , où  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq 100}$  est l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur  $F$ . Les valeurs propres issues du problème de diffusion, en vert, sont des réels négatifs, ce qui signifie que la solution du problème de diffusion est purement dissipative, comme attendu. En revanche, les valeurs propres du problème de convection discrétisé avec un schéma centré, représentées en rouge, sont situées sur l'axe imaginaire, ce qui conduit à une solution purement propagative. Enfin, les valeurs propres du problème de convection discrétisé avec un schéma décentré, en bleu, sont des nombres complexes à partie réelle négative, ce qui induit une solution à la fois propagative et dissipative. Dans les trois cas, les spectres des opérateurs sont situés dans le demi-plan gauche, ce qui signifie que les solutions des équations semi-discrétisées (2.9), (2.10) et (2.11) sont stables.

### 2.2.3.3 Stabilité du schéma d'intégration temporelle

L'étude qui précède a montré que les solutions de l'équation (2.1) peuvent se décomposer sur une base de vecteurs propres  $w_i$  de l'opérateur  $F$ , associés à des valeurs propres  $\lambda_i$ . L'équation semi-discrétisée elle-même peut être décomposée sur cette base, ce qui donne :

$$\frac{dw}{dt} = \lambda w \quad (2.12)$$

où  $w$  est un vecteur propre quelconque de la base, et  $\lambda$  la valeur propre associée. C'est sous cette forme de l'équation, appelée forme canonique, que la stabilité du schéma d'intégration temporelle

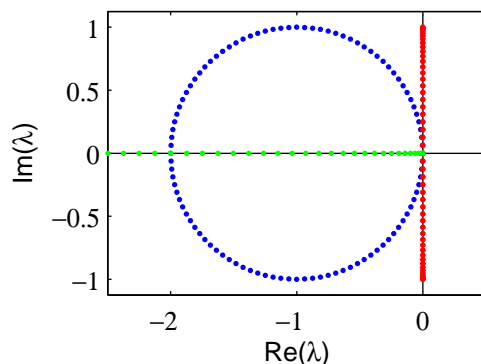


FIGURE 2.1 – Spectres obtenus pour différents opérateurs  $F$ . Les problèmes considérés sont à une dimension et discrétisés sur 100 points avec des conditions limites périodiques. Bleu : équation de convection, schéma décentré amont. Rouge : équation de convection, schéma centré. Vert : équation de diffusion, schéma centré

est étudiée. Dans ce qui suit, on suppose que  $\lambda$  est à partie réelle négative. En appliquant à l'équation (2.12) un schéma d'intégration temporelle, par exemple le schéma d'Euler explicite, on obtient :

$$\frac{w_{n+1} - w_n}{\Delta t} = \lambda w_n \quad (2.13)$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps et  $w_n = w(t = n\Delta t)$ . En réarrangeant cette équation, on obtient :

$$w_{n+1} = (1 + \lambda\Delta t)w_n \quad (2.14)$$

Le terme  $(1 + \lambda\Delta t)$  régit l'évolution du mode  $w$  à chaque itération du schéma d'Euler. De manière générale, on peut définir une fonction d'amplification  $G(\lambda\Delta t)$  pour tout schéma d'intégration temporelle. Cette fonction permet d'exprimer la valeur de tout mode  $w$  à l'instant  $n\Delta t$  en fonction de sa valeur initiale  $w_0$  :

$$w_n = [G(\lambda\Delta t)]^n w_0 \quad (2.15)$$

On peut en déduire la condition de stabilité du schéma d'intégration temporelle :

$$|G(\lambda\Delta t)| \leq 1, \quad \forall \lambda \in Sp(F) \quad (2.16)$$

où  $Sp(F)$  est le spectre de  $F$ . La stabilité dépend alors de trois paramètres distincts : le spectre de  $F$ , la zone de l'espace complexe pour laquelle  $|G| \leq 1$ , et le pas de temps  $\Delta t$ . Le premier est lié au problème physique et à la discrétisation spatiale, tandis que le second n'est fonction que du schéma d'intégration temporelle lui-même. Dans ce qui suit, la zone de l'espace complexe



vérifiant  $|G| \leq 1$  est appelée zone de stabilité du schéma d'intégration temporelle.

Un schéma doit être choisi de telle sorte que sa zone de stabilité contienne les valeurs prises par  $\lambda\Delta t$  pour toutes les valeurs propres  $\lambda$  du spectre de  $F$ . On considère par exemple les problèmes mono-dimensionnels traités ci-dessus, définis par les équations semi-discrétisées (2.9), (2.10) et (2.11). La figure 2.2 fournit les valeurs prises par  $\lambda\Delta t$ , avec  $\Delta t = 1$ , pour les valeurs propres associées à ces trois problèmes, en bleu pour l'équation (2.9) en rouge pour l'équation (2.10) et en vert pour l'équation (2.11). La figure montre également la zone de stabilité du schéma de RK standard d'ordre 4 à 4 étapes, représentée en gris. Sur cette figure, les valeurs de  $\lambda\Delta t$  situées dans la zone de stabilité du schéma RK4 vérifient  $|G(\lambda\Delta t)| \leq 1$ . On peut remarquer qu'une partie des valeurs de  $\lambda\Delta t$  issues du problème de diffusion, en vert, sont hors de la zone de stabilité. L'intégration temporelle de l'équation (2.11) avec le schéma de RK est donc instable pour  $\Delta t = 1$ . En revanche, pour les problèmes de convection, en bleu et en rouge sur la figure, les valeurs de  $\lambda\Delta t$  sont bien contenues dans la zone de stabilité. Le schéma de RK est donc stable pour les problèmes de convection considérés ici.

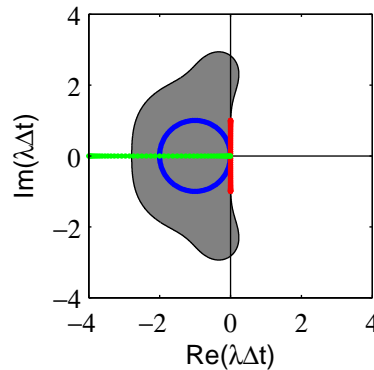


FIGURE 2.2 – Zone de stabilité du schéma de RK standard d'ordre 4 en fonction de  $\lambda\Delta t$ ; zone grise :  $|G| < 1$  (stable), zone blanche :  $|G| > 1$  (instable); les valeurs de  $\lambda\Delta t$  associées aux équations (2.9), (2.10) et (2.11) sont représentées en couleurs (voir la légende de la figure 2.1), avec un pas de temps  $\Delta t = 1$ .

### 2.2.3.4 Limite de stabilité pour des problèmes de propagation

La zone de stabilité du schéma de RK d'ordre 4 à 4 étapes représentée sur la figure 2.2 contient une partie de l'axe imaginaire. Or, pour la plupart des problèmes de convection discrétisés par un schéma aux différences finies centrées, les valeurs propres sont justement localisées sur l'axe imaginaire. Ceci explique la popularité des schémas de RK en aéroacoustique [48, ch.9.3.4, p.462]. Pour un schéma de RK donné, on peut définir  $B$  tel que  $[-iB, iB]$  soit la portion d'axe imaginaire

contenue dans la zone de stabilité du schéma. Pour des valeurs propres imaginaires pures  $\lambda = i\omega$ , la condition (2.16) devient :

$$\omega\Delta t \leq B \quad (2.17)$$

A ce niveau, il est intéressant de regarder plus en détail la forme de ces valeurs propres. Pour un problème de convection discrétisé en espace par un schéma aux différences finies centrées avec des conditions limites périodiques, on peut montrer que  $\omega = ck^*$ , où  $c$  est la vitesse de convection, et  $k^*$  est le nombre d'onde effectif, qui s'exprime de la façon suivante :

$$k^* \Delta x = 2 \sum_{j=1}^N \alpha_j \sin(jk\Delta x) \quad (2.18)$$

où  $\Delta x$  est le pas de discrétisation spatiale,  $k \in [0 \pi/\Delta x]$  est le nombre d'onde du mode considéré, et  $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq N}$  sont les coefficients du schéma. Ces derniers sont choisis de telle sorte que  $k^*$  soit une bonne approximation de  $k$  sur la gamme de nombres d'onde la plus grande possible. L'erreur d'approximation est importante pour  $k$  proche de  $\pi/\Delta x$  mais le nombre d'onde effectif reste borné entre 0 et  $\pi/\Delta x$  pour des schémas centrés. La condition (2.17) devient donc :

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{B}{\pi} \quad (2.19)$$

et fait apparaître le nombre de CFL, égal à  $c\Delta t/\Delta x$ . C'est un paramètre primordial dans les simulations de mécanique des fluides. Généralement, la condition (2.19) est respectée en adaptant le pas de temps tel que  $\Delta t \leq B\Delta x/(\pi c)$ , ce qui est particulièrement contraignant dans les simulations d'écoulement de paroi où le maillage est très fin dans la zone proche de la paroi. Cela implique une forte diminution du pas de temps, ce qui accroît considérablement le temps de calcul. Une méthode alternative est de repousser la limite  $B$  en modifiant les coefficients du schéma de RK, et éventuellement en augmentant son nombre d'étapes. Il faut toutefois retenir qu'une étape supplémentaire implique d'avantage de calculs à réaliser, donc un coût supplémentaire. A ce titre, la grandeur  $B/s$ , où  $s$  est le nombre d'étapes, est plus pertinente que  $B$  en terme de coût de calcul.

#### 2.2.4 Choix d'une méthode implicite ou d'une méthode explicite

Un aspect important à prendre en compte dans la construction d'un nouveau schéma RK est son caractère implicite ou explicite. Dans le cadre de la formulation (2.2), un schéma est explicite si  $a_{ii} = 0$ ,  $\forall i$ , et implicite dans le cas contraire. La différence fondamentale entre ces deux types

de schéma réside dans le calcul des termes  $k_i$  :

$$k_i = F\left(u_n + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j + a_{ii} k_i, t + c_i \Delta t\right) \quad (2.20)$$

Les termes  $k_j$  étant connus pour  $j < i$ , le calcul de  $k_i$  est immédiat si  $a_{ii} = 0$ . Dans le cas contraire, la résolution de systèmes de grande dimension est nécessaire. En effet, pour un problème à  $q$  grandeurs physiques, portant sur un maillage à  $N$  points, chaque étape où  $a_{ii} \neq 0$  nécessite la résolution d'un système de dimension  $Nq$ , avec  $N$  généralement très grand. Le point faible des méthodes implicites réside dans l'inversion de ces systèmes, car elle est souvent difficile à mettre en œuvre et coûteuse en mémoire et en temps de calcul.

Les méthodes explicites sont donc moins contraignantes, et en optimisant les coefficients de manière à augmenter le plus possible la valeur de  $B/s$ , on peut obtenir une méthode efficace. Cette approche est toutefois limitée par un résultat important obtenu par Vichnevetsky [97], qui stipule que pour une méthode d'intégration temporelle explicite, la relation

$$B \leq s - 1 \quad (2.21)$$

est toujours vérifiée. Ce résultat implique que quelsoit le nombre d'étapes et le jeu de coefficients choisis, si la méthode est explicite, la valeur de  $B/s$  reste toujours inférieure à 1. Cette limite nous pousse donc à nous intéresser aux schémas implicites. Ces schémas ont l'avantage de pouvoir posséder une zone de stabilité plus grande, voire infinie. Celle du schéma d'Euler implicite, défini par

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = F(u_{n+1}, t + \Delta t) \quad (2.22)$$

est par exemple représentée sur la figure 2.3. On note que l'ensemble de l'axe imaginaire est contenu dans la zone de stabilité. La limite  $B$  est, dans ce cas, à l'infini.

### 2.2.5 Les schémas de Runge-Kutta additifs

Bien que les schémas implicites admettent de grandes zones de stabilité, leur efficacité est fortement pénalisée par l'inversion de systèmes de grande taille. Il existe toutefois un moyen de relâcher cette contrainte. Supposons que le terme de droite de l'équation (2.1) puisse être séparé en plusieurs termes :

$$\frac{du}{dt} = \sum_{k=1}^N F^{[k]}(u) \quad (2.23)$$

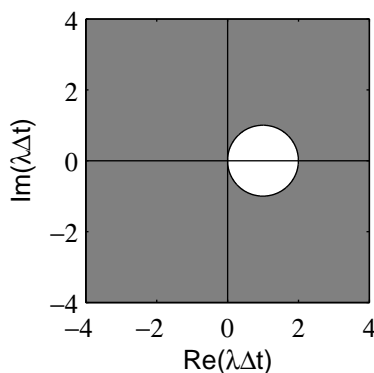


FIGURE 2.3 – Zone de stabilité du schéma d'Euler implicite, en fonction de  $\lambda\Delta t$ ; zone grise :  $|G| < 1$  (stable), zone blanche :  $|G| > 1$  (instable).

et que les spectres  $Sp(F^{[k]})$  associés aux différents termes soient de tailles très différentes. La taille d'un spectre, qui désigne ici son étendue dans le plan complexe, est caractérisée par son rayon spectral  $r^{[k]} = \max [|\lambda|, \lambda \in Sp(F^{[k]})]$ . On suppose que les rayons spectraux associés à chacun des termes sont très différents, par exemple  $r^{[1]} \gg r^{[2]} \gg r^{[3]}$  etc. Le choix de la méthode d'intégration doit assurer la stabilité de chaque terme  $F^{[k]}$ . En pratique, ce choix est imposé par  $r^{[1]}$ , car si la zone de stabilité contient  $Sp(F^{[1]})$ , elle a de fortes chances de contenir tous les autres spectres, de rayon beaucoup plus petit. Toutefois, choisir une méthode d'intégration en fonction des propriétés d'un seul terme,  $F^{[1]}$ , n'est pas optimal. On peut adopter une autre approche en considérant séparément chaque terme  $F^{[k]}$ , auquel on attribue un schéma d'intégration temporelle approprié. En combinant convenablement ces schémas, on obtient un schéma global plus performant. C'est sur ce principe que reposent les schémas de RK additifs. On peut trouver une description plus détaillée de ces schémas dans les travaux de Kennedy & Carpenter [58]. Ces auteurs fournissent des outils pertinents avec lesquels ont été développés les schémas présentés dans ce manuscrit.

De nombreux schémas de RK additifs ont été développés pour la mécanique des fluides réactive, notamment par Zhong [37, 101, 102]. Les travaux de cet auteur portent sur la simulation d'écoulements hypersoniques transitoires présentant un non-équilibre thermo-chimique, dans lesquels les termes de tensions visqueuses, de flux de chaleur, ou les termes sources de réaction chimique sont traités de manière implicite par le schéma, tandis que les termes convectifs sont traités de manière explicite. Les valeurs propres issues des termes réactifs étant généralement réelles, les schémas proposés par Zhong ne présentent pas de propriété particulièrement intéressante pour traiter des valeurs propres imaginaires rencontrées dans les problèmes de convection. Il semble cependant que le seul cas de problème aéroacoustique résolu avec une méthode additive

utilise le schéma ASIRK-3C de Zhong [102] pour la simulation compressible aux grandes échelles d'une couche limite turbulente [88]. Par conséquent, les propriétés des algorithmes développés dans cette thèse seront comparées aux propriétés du schéma de Zhong.

## 2.3 Développement de schémas de RK semi-implicites

### 2.3.1 Formulation

Comme évoqué précédemment, un schéma numérique peut être développé spécifiquement pour un certain type d'équation. On considère ici les équations d'Euler 2D :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} \quad (2.24)$$

où  $E_x$  et  $E_y$  sont respectivement les flux Eulériens dans les directions  $x$  et  $y$ . Cette équation est discrétisée en espace, et les dérivées spatiales sont approximées par des différences finies, ce qui conduit à l'équation semi-discrétisée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + g(u) \quad (2.25)$$

avec

$$[f(u)]_{m,n} = -\frac{1}{\Delta x} \sum_{l=-N}^M \alpha_l [E_x]_{m+l,n} \quad \text{et} \quad [g(u)]_{m,n} = -\frac{1}{\Delta y} \sum_{l=-N}^M \alpha_l [E_y]_{m,n+l} \quad (2.26)$$

où  $(m, n)$  sont les indices des noeuds du maillage,  $(\alpha_l)_{l=-N, M}$  sont les coefficients du schéma aux différences finies, et  $\Delta x$  et  $\Delta y$  sont les pas de maillage uniformes respectivement dans les directions  $x$  et  $y$ . On s'intéresse au cas d'un maillage très fin dans la direction  $y$ , comme rencontré dans les écoulements pariétaux, en supposant que  $\Delta y \ll \Delta x$ , de sorte que les problèmes de stabilité se posent prioritairement pour le terme  $g(u)$ .

Suivant la stratégie de Kennedy & Carpenter [58], l'intégration temporelle de l'équation (2.25) peut être effectuée à l'aide d'une méthode additive à  $s$  étapes, qui s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_i &= u_n + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{[E]} f(u_j) + \Delta t \sum_{j=1}^i a_{ij}^{[I]} g(u_j) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq s, \\ u_{n+1} &= u_n + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i^{[E]} f(u_i) + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i^{[I]} g(u_i) \end{cases} \quad (2.27)$$

où  $u_n = u(t)$ ,  $u_{n+1} = u(t + \Delta t)$ ,  $\Delta t$  est le pas de temps,  $u_i$  représente le vecteur des variables à l'étape  $i$ ,  $(a_{ij}^{[I]}, b_i^{[I]})$  sont les coefficients de la partie implicite du schéma, réalisant l'intégration temporelle de  $g(u)$ , et  $(a_{ij}^{[E]}, b_i^{[E]})$  sont les coefficients de la partie explicite du schéma, pour l'intégration temporelle de  $f(u)$ . Ce type de méthode additive combinant un sous-schéma implicite avec un sous-schéma explicite est généralement qualifié de semi-implicite, ou SIRK (Semi-Implicit Runge-Kutta). On adoptera par la suite cette terminologie. Le tableau 2.1 représente la structure des coefficients d'un schéma semi-implicite. Dans ce tableau, les termes  $c_i^{[E]}$  et  $c_i^{[I]}$  sont donnés par  $c_i^{[E]} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{[E]}$  et  $c_i^{[I]} = \sum_{j=1}^i a_{ij}^{[I]}$ .

$c_2^{[E]}$	$a_{21}^{[E]}$					$c_1^{[I]}$	$a_{11}^{[I]}$				
$c_3^{[E]}$	$a_{31}^{[E]}$	$a_{32}^{[E]}$				$c_2^{[I]}$	$a_{21}^{[I]}$	$a_{22}^{[I]}$			
...	...	...				...	...	...			
$c_s^{[E]}$	$a_{s1}^{[E]}$	$a_{s2}^{[E]}$	...	$a_{s,s-1}^{[E]}$							
	$b_1^{[E]}$	$b_2^{[E]}$	...	$b_{s-1}^{[E]}$	$b_s^{[E]}$		$b_1^{[I]}$	$b_2^{[I]}$	...	$b_{s-1}^{[I]}$	$b_s^{[I]}$

TABLE 2.1 – Structure d'un schéma semi-implicite. A gauche : coefficients du sous-schéma explicite, à droite : coefficients du sous-schéma implicite.

La conception d'un schéma SIRK à  $s$  étapes consiste à déterminer les  $s(s+2)$  coefficients des parties implicite et explicite. Dans ces travaux, pour la partie explicite des algorithmes, les coefficients  $(a_{ij}, b_i)$  du schéma de Runge-Kutta explicite d'ordre 4 à 6 étapes de Berland *et al.* [8] sont choisis, afin de bénéficier de ses propriétés de faible dispersion et de faible dissipation. Le nombre d'étapes des méthodes développées est alors fixé à  $s = 6$ . Le but de l'étude qui suit est de déterminer les  $s(s+3)/2 = 27$  coefficients  $(a_{ij}^{[I]}, b_i^{[I]})$  du sous-schéma implicite.

### 2.3.2 Contraintes de précision et de stabilité

Les principaux outils utilisés pour le développement des schémas SIRK sont présentés dans ce paragraphe. Les contraintes d'ordre sont tout d'abord définies, puis un critère de stabilité est établi à l'aide d'une fonction appelée fonction de stabilité linéaire.

### 2.3.2.1 Ordre du sous-schéma implicite et ordre global du schéma

Pour que le sous-schéma implicite soit d'ordre 4, les contraintes (2.3) sont appliquées au coefficients  $(a_{ij}^{[I]}, b_i^{[I]})$ . Cela n'est toutefois pas suffisant pour obtenir l'ordre 4 sur l'erreur de discrétisation temporelle du schéma global, car cette dernière fait apparaître des termes d'ordre inférieur dus au couplage entre les deux sous-schémas. Ces termes sont exactement les sommes apparaissant dans les conditions d'ordre classiques (2.3), mais avec des coefficients des deux sous-schémas. Par exemple, pour obtenir un schéma SIRK d'ordre 2, les termes de couplage d'ordre 1 doivent être annulés en imposant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} (C2)a \quad \sum_{i=1}^s b_i^{[E]} c_i^{[I]} &= \frac{1}{2} \\ (C2)b \quad \sum_{i=1}^s b_i^{[I]} c_i^{[E]} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2.28}$$

L'annulation de tous les termes de couplage est difficile, car leur nombre croît rapidement avec l'ordre voulu [58]. Alors que l'ordre 2 peut être obtenu facilement en annulant seulement 2 termes, l'ordre 3 et 4 nécessitent respectivement l'annulation de 10 et 44 termes additionnels. Obtenir un schéma semi-implicite d'ordre 4 requiert donc l'annulation de 56 termes de couplage, ce qui est ici impossible avec seulement 27 degrés de liberté.

On peut toutefois réduire le nombre de contraintes en imposant les relations

$$b_i^{[I]} = b_i^{[E]} = b_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq s, \tag{2.29}$$

qui permettent de s'affranchir de certaines contraintes de couplage. En effet, un grand nombre d'entre elles deviennent alors redondantes avec des conditions d'ordre classiques (2.3), ou avec d'autres conditions de couplage. Une liste exhaustive des ces contraintes redondantes est fournie dans le tableau 2.2 jusqu'à l'ordre 3. Sur chaque ligne, la ou les expressions figurant dans la colonne de gauche deviennent équivalentes à celle de la colonne de droite lorsque les relations (2.29) sont respectées. Les termes  ${}^{[E]}_{\tau_k^{(p)}}$  et  ${}^{[I]}_{\tau_k^{(p)}}$  renvoient aux conditions d'ordre classiques des sous-schémas explicite et implicite, respectivement. On peut remarquer que la contrainte d'ordre 1 n'est pas liée au couplage. Il s'agit en effet de la contrainte d'ordre classique  ${}^{[I]}_{\tau_1^{(1)}} = 0$  du sous-schéma implicite, qui devient équivalente à  ${}^{[E]}_{\tau_1^{(1)}} = 0$ .

On note également que toutes les contraintes de couplage pour l'ordre 2 disparaissent, et que seules trois d'entre elles subsistent pour l'ordre 3 :

ordre	$b_i^{[E]} \neq b_i^{[I]}$	$b_i^{[E]} = b_i^{[I]} = b_i$
1	$\sum_{i=1}^s b_i^{[I]} = 1$	$[E]_{\tau_1^{(1)}} = 0$
2	$\sum_{i=1}^s b_i^{[E]} c_i^{[I]} = \frac{1}{2}$	$[I]_{\tau_1^{(2)}} = 0$
2	$\sum_{i=1}^s b_i^{[I]} c_i^{[E]} = \frac{1}{2}$	$[E]_{\tau_1^{(2)}} = 0$
3	$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^s b_i^{[I]} c_i^{[E]^2} = \frac{1}{3!}$	$[E]_{\tau_1^{(3)}} = 0$
3	$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^s b_i^{[I]} c_i^{[E]} c_i^{[I]} = \frac{1}{3!}$	$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^s b_i c_i^{[E]} c_i^{[I]} = \frac{1}{3!}$
3	$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^s b_i^{[E]} c_i^{[E]} c_i^{[I]} = \frac{1}{3!}$	
3	$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^s b_i^{[E]} c_i^{[I]^2} = \frac{1}{3!}$	$[I]_{\tau_1^{(3)}} = 0$
3	$\sum_{i,j=1}^s b_i^{[I]} a_{ij}^{[E]} c_j^{[E]} = \frac{1}{3!}$	$[E]_{\tau_2^{(3)}} = 0$
3	$\sum_{i,j=1}^s b_i^{[I]} a_{ij}^{[E]} c_j^{[I]} = \frac{1}{3!}$	$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij}^{[E]} c_j^{[I]} = \frac{1}{3!}$
3	$\sum_{i,j=1}^s b_i^{[E]} a_{ij}^{[E]} c_j^{[I]} = \frac{1}{3!}$	
3	$\sum_{i,j=1}^s b_i^{[E]} a_{ij}^{[I]} c_j^{[E]} = \frac{1}{3!}$	$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij}^{[I]} c_j^{[E]} = \frac{1}{3!}$
3	$\sum_{i,j=1}^s b_i^{[I]} a_{ij}^{[I]} c_j^{[E]} = \frac{1}{3!}$	
3	$\sum_{i,j=1}^s b_i^{[E]} a_{ij}^{[I]} c_j^{[I]} = \frac{1}{3!}$	$[I]_{\tau_2^{(3)}} = 0$

TABLE 2.2 – Contraintes de couplage sur les coefficients des sous-schémas implicite et explicite, pour le cas  $b_i^{[E]} \neq b_i^{[I]}$  et pour le cas  $b_i^{[E]} = b_i^{[I]}$ ; sur chaque ligne, la ou les contraintes dans la colonne de gauche deviennent équivalentes à la contrainte dans la colonne de droite.



$$\begin{aligned}
 (C3)a \quad & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s b_i c_i^{[E]} c_i^{[I]} = \frac{1}{3!} \\
 (C3)b \quad & \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij}^{[E]} c_j^{[I]} = \frac{1}{3!} \\
 (C3)c \quad & \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij}^{[I]} c_j^{[E]} = \frac{1}{3!}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

On suppose à présent que les coefficients du sous-schéma implicite satisfont les relations (2.3), (2.29) et (2.30), de sorte que le schéma semi-implicite est d'ordre 3. Les relations (2.29) ont également permis de réduire à 18 le nombre de contraintes de couplage pour l'ordre 4. Il est possible de simplifier encore le problème. En effet, en imposant

$$c_i^{[I]} = c_i^{[E]} = c_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq s, \tag{2.31}$$

toutes les conditions (C3) dans (2.30) disparaissent, et seules 3 conditions de couplage pour l'ordre 4 subsistent :

$$\begin{aligned}
 (C4)a \quad & \sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij}^{[I]} a_{jk}^{[E]} c_k = \frac{1}{4!} \\
 (C4)b \quad & \sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij}^{[E]} a_{jk}^{[I]} c_k = \frac{1}{4!}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

On peut remarquer que si les conditions (2.31) sont vérifiées, la première étape du sous-schéma implicite peut être résolue de manière explicite. En effet, pour  $i = 1$  l'équation (2.31) donne  $a_{11}^{[I]} = c_1^{[I]} = c_1^{[E]} = a_{11}^{[E]} = 0$ .

### 2.3.2.2 Fonction de stabilité linéaire

On a vu dans le paragraphe 2.2.3 que l'étude de stabilité repose sur les valeurs propres des différents termes de l'équation différentielle. Ainsi, Calvo *et al.* [24] ont étudié la stabilité des méthodes additives sur un cas simple d'équation différentielle linéaire se réduisant à

$$\frac{dU}{dt} = \lambda^{[E]}U + \lambda^{[I]}U, \tag{2.33}$$

où  $\lambda^{[E]}$  est la valeur propre du terme intégré de manière explicite, et  $\lambda^{[I]}$  celle du terme intégré de manière implicite. Cependant, pour des problèmes plus complexes, Kennedy & Carpenter [58] notent qu'il est généralement impossible de réduire les équations différentielles considérées à une équation du type (2.33). Dans le cas présent, on se propose d'étudier la stabilité des schémas développés sur une équation de propagation linéaire, en suivant une démarche similaire à celle

de Hu *et al.* [52]. On introduit par conséquent l'équation des ondes 2-D :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.34)$$

où  $c$  est la vitesse du son. Les dérivées spatiales sont évaluées à l'aide d'un schéma aux différences finies centrées. Une transformée de Fourier 2-D est ensuite appliquée à (2.34). Les nombres d'onde effectifs  $k_x^*$  et  $k_y^*$  sont définis comme

$$k_\xi^* \Delta \xi = 2 \sum_{l=1}^N \alpha_l \sin(l k_\xi \Delta \xi) \quad \text{avec } \xi = x, y \quad (2.35)$$

et où  $(\alpha_l)_{l=-N, N}$  sont les coefficients du schéma aux différences finies centrées,  $\Delta x$  et  $\Delta y$  sont les pas de maillage, et  $k_x$  et  $k_y$  sont les nombres d'onde exacts dans les directions  $x$  et  $y$ . L'équation semi-discrétisée associée à (2.34) peut alors s'écrire

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = (i c k_x^* + i c k_y^*) \tilde{u} \quad (2.36)$$

où  $\tilde{u}(k_x, k_y, t)$  est la transformée de Fourier spatiale de  $u$ , et  $i = \sqrt{-1}$ . Lorsque cette équation est avancée en temps avec un schéma SIRK utilisant la partie explicite pour traiter le terme  $i c k_x^* \tilde{u}$ , et la partie implicite pour le terme  $i c k_y^* \tilde{u}$ , on peut montrer que le facteur d'amplification par itération temporelle de l'algorithme est donné par la fonction de stabilité linéaire [24] :

$$R(i\omega_x \Delta t, i\omega_y \Delta t) = \frac{\tilde{u}_{n+1}}{\tilde{u}_n} = \frac{\text{Det}[\mathbf{I} - i\omega_x \Delta t \mathbf{A}^{[E]} - i\omega_y \Delta t \mathbf{A}^{[I]} + i(\omega_x + \omega_y) \Delta t \mathbf{1} \otimes \mathbf{b}^T]}{\text{Det}[\mathbf{I} - i\omega_x \Delta t \mathbf{A}^{[E]} - i\omega_y \Delta t \mathbf{A}^{[I]}}] \quad (2.37)$$

où  $\tilde{u}_n = \tilde{u}(t)$ ,  $\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}(t + \Delta t)$ ,  $\mathbf{A}^{[E]} = a_{ij}^{[E]}$ ,  $\mathbf{A}^{[I]} = a_{ij}^{[I]}$ ,  $\mathbf{b} = b_i$ ,  $\mathbf{1} = \{1, 1, \dots, 1\}$ ,  $\mathbf{I}$  est la matrice identité, et  $\omega_x = c k_x^*$  et  $\omega_y = c k_y^*$  sont les pulsations associées aux nombres d'onde  $k_x^*$  et  $k_y^*$ . L'algorithme semi-implicite est stable pour toutes valeurs des pulsations sans dimension  $\omega_x \Delta t$  et  $\omega_y \Delta t$  assurant  $|R| \leq 1$ . On peut remarquer que la fonction d'amplification du sous-schéma explicite est donné par  $R(i\omega_x \Delta t, 0)$ , et celle du sous-schéma implicite par  $R(0, i\omega_y \Delta t)$ . Il est essentiel d'assurer la stabilité inconditionnelle du sous-schéma implicite, soit

$$|R(0, i\omega_y \Delta t)| \leq 1 \quad \forall \omega_y \Delta t \in \mathbb{R}. \quad (2.38)$$

Cette propriété est difficile à obtenir à partir d'un jeu de coefficients  $(a_{ij}^{[I]}, b_i^{[I]})$  arbitraire. Pour surmonter ce problème, on impose aux coefficients  $a_{ii}^{[I]}$  la valeur  $\gamma$ , soit

$$a_{ii}^{[I]} = \gamma \quad \text{pour } 1 \leq i \leq s, \quad (2.39)$$

où  $\gamma$  est un paramètre libre. Le sous-schéma implicite a alors la structure d'un schéma SDIRK, pour Singly Diagonally Implicit Runge-Kutta [2], qui présente des propriétés intéressantes concernant la stabilité. Dans les travaux de Kennedy & Carpenter, la propriété (2.38) est recherchée pour un schéma SDIRK à l'aide d'un polynôme issu de la fonction de stabilité linéaire [46, ch.IV.6, p.103]. Ils obtiennent un encadrement des valeurs de  $\gamma$  environ égal à  $0.248 \leq \gamma \leq 0.676$ , pour lequel (2.38) est vérifiée.

### 2.3.3 Choix des coefficients

Les contraintes assurant la précision et la stabilité étant définies, on détermine à présent les 27 coefficients du sous-schéma implicite selon la méthode suivante. Une valeur de  $\gamma$  assurant la propriété (2.38) est tout d'abord choisie. Certaines des conditions d'ordre sont ensuite sélectionnées selon la précision souhaitée pour le schéma semi-implicite. Ces conditions forment un système d'équations non-linéaires dont les coefficients  $(a_{ij}^{[I]}, b_i^{[I]})$  sont les inconnues. Ce système est résolu numériquement en appliquant un algorithme de résolution itératif dit de Levenberg-Marquardt [65, 67]. Enfin, la fonction de stabilité linéaire (2.37) est évaluée pour obtenir un algorithme SIRK stable sur la plus grande gamme possible de pulsations sans dimension  $(\omega_x \Delta t, \omega_y \Delta t)$ . En pratique, il est assez difficile d'obtenir un algorithme présentant à la fois une grande stabilité et une grande précision. Par conséquent, il a été décidé de développer deux familles de sous-schémas implicites, en se focalisant soit sur la stabilité, soit sur la précision. Les sous-schémas implicites de la première famille sont notés  $S\gamma$  (S pour Stability), où  $\gamma$  est remplacé par sa valeur numérique. Ceux de la seconde famille sont notés  $A\gamma$  (A pour Accuracy). Ainsi, un sous-schéma implicite  $S\gamma$  associé au sous-schéma explicite RK46-Ber constitue un schéma semi-implicite, que l'on note (RK46-Ber,  $S\gamma$ ).

#### 2.3.3.1 Développement des sous-schémas implicites $S\gamma$

On impose pour cette famille de schémas SIRK à grande stabilité les relations  $b_i^{[E]} = b_i^{[I]}$  et  $a_{ii} = \gamma$ . L'ordre 4 du sous-schéma implicite est assuré à l'aide des contraintes (2.3), tandis que l'ordre du schéma global est choisi égal à 3 en imposant les contraintes (2.30). On a donc au total 10 contraintes pour 16 paramètres ( $\gamma$  et  $a_{ij}^{[I]}, 1 \leq j < i \leq 6$ ). Les 6 degrés de liberté

restants sont utilisés pour optimiser la stabilité du schéma. On s'assure notamment de la stabilité inconditionnelle du sous-schéma implicite en restreignant les valeurs de  $\gamma$  à l'intervalle  $0.2 \leq \gamma \leq 0.7$ . Cet intervalle est en effet proche de celui proposé par Kennedy & Carpenter [58]. Il apparaît que pour  $\gamma$  variant de 0.41 à 0.49, des algorithmes aux propriétés de stabilité intéressantes sont obtenus. Les fonctions de stabilité linéaire des schémas (RK46-Ber, S0.41) et (RK46-Ber, S0.43) sont par exemple données respectivement sur les figures 2.4(a) et (b), en fonction des pulsations sans dimension  $\omega_x \Delta t$  et  $\omega_y \Delta t$ . Sur ces figures, les zones vérifiant le critère de stabilité  $|R(i\omega_x \Delta t, i\omega_y \Delta t)| \leq 1$  apparaissent en blanc, tandis que les zones où le schéma est instable sont en couleur. On distingue les zones de faible instabilité, en bleu, qui vérifient  $1 < |R| \leq 1.001$ , et les zones de forte instabilité, en rouge, pour lesquelles  $1.001 < |R|$ . Sur l'axe horizontal et sur l'axe vertical, la fonction de stabilité linéaire vaut respectivement  $R(i\omega_x \Delta t, 0)$  et  $R(0, i\omega_y \Delta t)$ , donnant respectivement les fonctions d'amplification du sous-schéma explicite RK46-Ber et du sous-schéma implicite  $S\gamma$ .

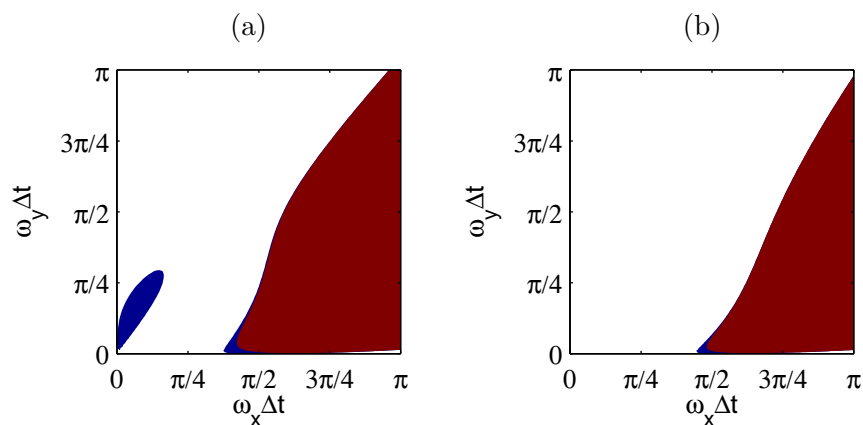


FIGURE 2.4 – Fonctions de stabilité linéaire en fonction des pulsations sans dimension  $\omega_x \Delta t$  et  $\omega_y \Delta t$ , pour les schémas (a) (RK46-Ber, S0.41), et (b) (RK46-Ber, S0.43); zones blanches :  $|R| \leq 1$  (stable), zones bleues :  $1 < |R| < 1.001$  (faiblement instable), zones rouges :  $1.001 < |R|$  (fortement instable).

La fonction de stabilité linéaire du schéma (RK46-Ber, S0.41), représentée sur la figure 2.4(a), fait apparaître une zone de faible instabilité pour des petites pulsations sans dimension, soit environ  $\omega_x \Delta t \leq \pi/6$  et  $\omega_y \Delta t \leq \pi/4$ , et une zone de forte instabilité pour  $\omega_x \Delta t \geq \pi/2.5$ . La zone d'instabilité aux petites pulsations signifie que ce schéma est théoriquement instable. Pourtant, lors des cas test réalisés dans le chapitre 3, ce schéma s'est révélé stable. Cette différence provient certainement du caractère approché de l'analyse de stabilité linéaire, comme évoqué par Kennedy & Carpenter [58]. Le schéma (RK46-Ber, S0.43), dont la fonction de stabilité linéaire est montrée sur la figure 2.4(b), est en revanche stable aux petites pulsations, et montre une zone de forte

instabilité pour des pulsations dans la direction  $x$  supérieures à  $\omega_x \Delta t = \pi/2$ . Le schéma (RK46-Ber, S0.43) semble donc plus stable que le schéma (RK46-Ber, S0.41). On note par ailleurs que l'axe vertical ne croise aucune zone instable (bleue ou rouge) sur la figure 2.4(b), ce qui traduit la stabilité inconditionnelle du sous-schéma implicite S0.43. Concernant le sous-schéma implicite S0.41, sur la figure 2.4(a), la zone de faible instabilité semble très proche de l'axe vertical, mais il est difficile de déterminer si elle le croise. Afin de vérifier que le sous-schéma implicite S43 est bien inconditionnellement stable, on représente le module de sa fonction d'amplification  $|R(0, i\omega_y \Delta t)|$  sur la figure 2.5, en fonction de  $\omega_y \Delta t$  variant entre 0 et  $\pi/4$ . L'axe des ordonnées varie sur une gamme très restreinte de valeurs comprises entre  $1 - 10^{-4}$  et  $1 + 2 \times 10^{-5}$ . On observe que le module de la fonction d'amplification reste inférieur à 1.

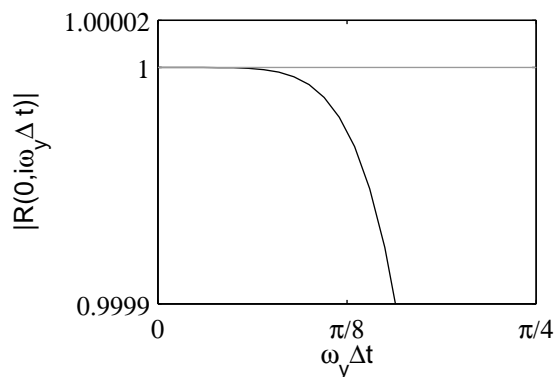


FIGURE 2.5 – Fonction d'amplification  $|R(0, i\omega_y \Delta t)|$  du sous-schéma implicite S0.41 ( — ) en fonction de la pulsation sans dimension  $\omega_y \Delta t$ ; — limite de stabilité  $|R| = 1$ .

### 2.3.3.2 Développement des sous-schémas implicites $A\gamma$

Une famille de schémas à grande précision est développée avec les conditions suivantes :  $b_i^{[E]} = b_i^{[I]}$ ,  $c_i^{[E]} = c_i^{[I]}$ ,  $a_{ii} = \gamma$ , les conditions (2.3) pour l'ordre 4 du sous-schéma implicite, et les conditions (2.32) pour l'ordre 4 du schéma global. On a ici 16 coefficients soumis à 14 contraintes, ce qui ne laisse que deux degrés de liberté.

La convergence de l'algorithme de recherche des coefficients n'a été possible qu'en supprimant la condition (C4)b dans (2.32) pour libérer un degré de liberté supplémentaire. Les schémas (RK46-Ber,  $A\gamma$ ) sont donc formellement d'ordre 3. Toutefois, les conditions (C4)a et  $c_i^{[E]} = c_i^{[I]}$  permettent l'annulation de nombreux termes de couplage dans l'erreur de discrétisation temporelle des schémas (RK46-ber,  $A\gamma$ ), améliorant ainsi leur précision par rapport aux schémas (RK46-Ber,  $S\gamma$ ). En effet, pour ces derniers, l'erreur de discrétisation temporelle contient 18 termes d'ordre 3, tandis que l'erreur des schémas (RK46-Ber,  $A\gamma$ ) n'en contient que 2, les rendant

significativement plus précis, comme on le vérifiera dans les cas test présentés au chapitre suivant.

En contrepartie de leur bonne précision, la plupart des schémas (RK46-Ber,  $A\gamma$ ) sont instables. Un schéma aux propriétés intéressantes est tout de même obtenu pour  $\gamma = 0.245$ . La fonction de stabilité linéaire de ce schéma, noté (RK46-Ber, A0.245), est donnée sur la figure 2.6 en fonction des pulsations sans dimension  $\omega_x\Delta t$  et  $\omega_y\Delta t$ . Comme précédemment, dans les zones blanches, bleues et rouges, la fonction de stabilité linéaire vérifie respectivement  $|R| \leq 1$ ,  $1 < |R| \leq 1.001$ , et  $1.001 < |R|$ , correspondant respectivement aux zones stables, faiblement instables et fortement instables du schéma. Une zone fortement instable est notée pour des valeurs de  $\omega_x\Delta t$  et  $\omega_y\Delta t$  proches de  $\pi$ . Pour toutes les autres valeurs de  $(\omega_x\Delta t, \omega_y\Delta t)$ , le schéma est stable.

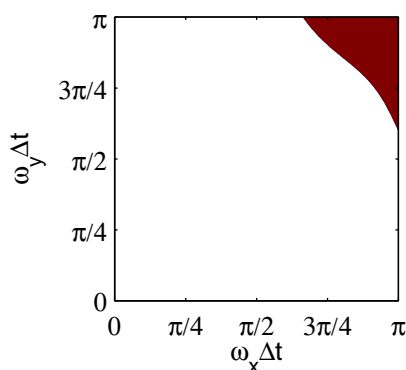


FIGURE 2.6 – Fonction de stabilité linéaire du schéma (RK46-Ber, A0.245) en fonction des pulsations sans dimension  $\omega_x\Delta t$  et  $\omega_y\Delta t$ ; zones blanches :  $|R| \leq 1$  (stable), zones bleues :  $1 < |R| < 1.001$  (faiblement instable), zones rouges :  $1.001 < |R|$  (fortement instable).

### 2.3.3.3 Choix de deux schémas semi-implicites

Parmi les schémas développés, les algorithmes semi-implicites (RK46-Ber, S0.41) et (RK46-Ber, A0.245) sont retenus. Les autres schémas de la famille (RK46-Ber,  $S\gamma$ ) n'ont pas été choisis car malgré leur stabilité légèrement meilleure, ils sont moins précis que (RK46-Ber, S0.41). Une dénomination plus générale est attribuée aux schémas retenus : SIRK63 (Semi-Implicit Runge-Kutta, 6 étapes, ordre 3). Pour les distinguer, les suffixes -S et -A, respectivement pour (RK46-Ber, S0.41) et (RK46-Ber, A0.245) sont ajoutés. Leur coefficients sont donnés dans l'annexe A.

### 2.3.4 Erreurs de dissipation et de dispersion des schémas développés

Les propriétés des schémas SIRK63-S et SIRK63-A sont maintenant présentées plus en détail. On s'intéresse tout d'abord aux sous-schémas implicites. On écrit leur fonction d'amplification

sous la forme  $R(0, i\omega_y \Delta t) = |R(0, i\omega_y \Delta t)|e^{i\omega_y^* \Delta t}$ , où  $\omega_y^*$  est la pulsation effective. Ainsi, à chaque itération temporelle du sous-schéma implicite, le taux d'atténuation est  $1 - |R(0, i\omega_y \Delta t)|$ , et l'erreur de phase est  $\omega_y^* \Delta t - \omega_y \Delta t$ . La figure 2.7(a) présente les taux d'atténuation des sous-schémas implicites des algorithmes SIRK63-A et SIRK63-S, ainsi que de l'algorithme ASIRK-3C de Zhong [102] en fonction de la pulsation sans dimension  $\omega_y \Delta t$ . Le taux d'atténuation du schéma de Runge-Kutta explicite standard d'ordre 4 (RK4) est également fourni comme référence. Les axes sont en échelle logarithmique. Le taux d'atténuation est le plus faible pour l'algorithme SIRK63-A. La dissipation de l'algorithme SIRK63-S est de deux ordres de grandeur supérieure à celle de SIRK63-A sur l'ensemble du spectre, mais elle est comparable à celle du RK4. Enfin le taux d'atténuation du schéma de Zhong est supérieur à celui du schéma SIRK63-S sur l'ensemble du spectre, la différence étant de plus d'un ordre de grandeur pour  $\omega_y \leq \pi/4$ . L'erreur de dispersion  $|\omega_y^* \Delta t - \omega_y \Delta t|/\pi$  est montrée sur la figure 2.7(b) pour les parties implicites des algorithmes SIRK, et pour le schéma de RK4. Aux pulsations sans dimension inférieures à  $\omega \Delta t = \pi/3$ , l'erreur de phase de l'algorithme SIRK63-A est d'un ordre de grandeur plus faible que celle de l'algorithme SIRK63-S. Les deux algorithmes ont ensuite une dispersion comparable pour  $\omega \Delta t > \pi/3$ . L'erreur de phase du schéma de RK4 est légèrement supérieure à celle de l'algorithme SIRK63-S. Enfin le schéma de Zhong a une erreur de phase de près d'un ordre de grandeur supérieure à celle du SIRK63-S. Le sous-schéma implicite de l'algorithme SIRK63-A est donc le moins dispersif. Celui de l'algorithme SIRK63-S a une erreur de dispersion un peu plus élevée, mais qui reste inférieure à celle du schéma de RK4.

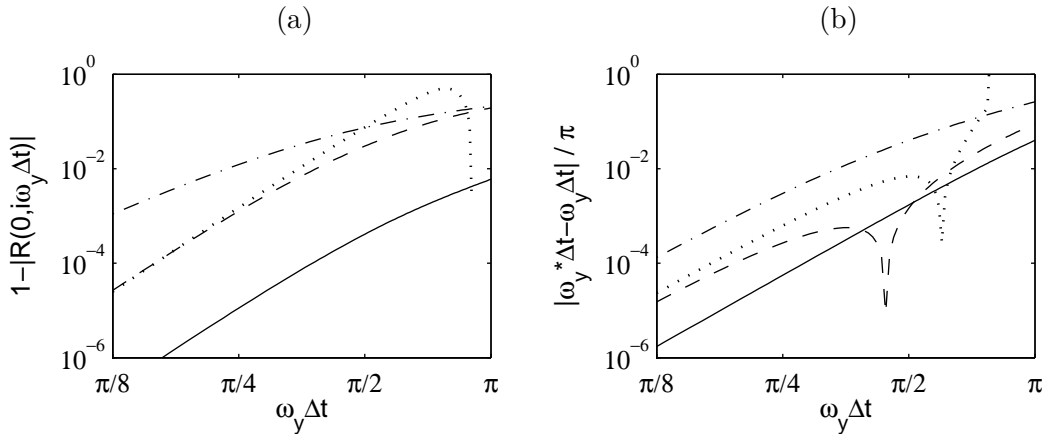


FIGURE 2.7 – (a) Taux d'atténuation, et (b) erreur de dispersion par itération temporelle des sous-schémas implicites, en fonction de la pulsation sans dimension  $\omega_y \Delta t$ , pour les algorithmes  $-\cdot-\cdot-$  ASIRK-3C de Zhong [102],  $\cdots$  RK4 explicite standard, schemas développés :  $—$  SIRK63-A,  $- - -$  SIRK63-S.

On examine à présent les propriétés des sous-schémas explicites, dont la fonction d'amplification est  $R(i\omega_x\Delta t, 0) = |R(i\omega_x\Delta t, 0)|e^{i\omega_x^*\Delta t}$ , où  $\omega_x^*$  est la pulsation effective. Le taux d'atténuation et l'erreur de phase sont donnés respectivement par les quantités  $1 - |R(i\omega_x\Delta t, 0)|$  et  $\omega_x^*\Delta t - \omega_x\Delta t$ . Les taux d'atténuation des différents algorithmes sont représentés sur la figure 2.8(a) en fonction de la pulsation sans dimension  $\omega_x\Delta t$ , pour des axes en échelle logarithmique. Les deux schémas développés sont représentés par la même courbe car ils ont la même partie explicite fournie par le schéma RK46-Ber. Le taux d'atténuation est ici d'au moins deux ordres de grandeur inférieur à celui de RK4, et de trois ordres de grandeur inférieur à celui du schéma ASIRK-3C de Zhong. Les courbes de dispersion de la figure 2.8(b) font apparaître globalement les mêmes tendances. Le schéma RK46-Ber est le moins dispersif, son erreur de phase étant inférieure respectivement d'un et deux ordres de grandeur par rapport à celle du RK4 et du ASIRK-3C.

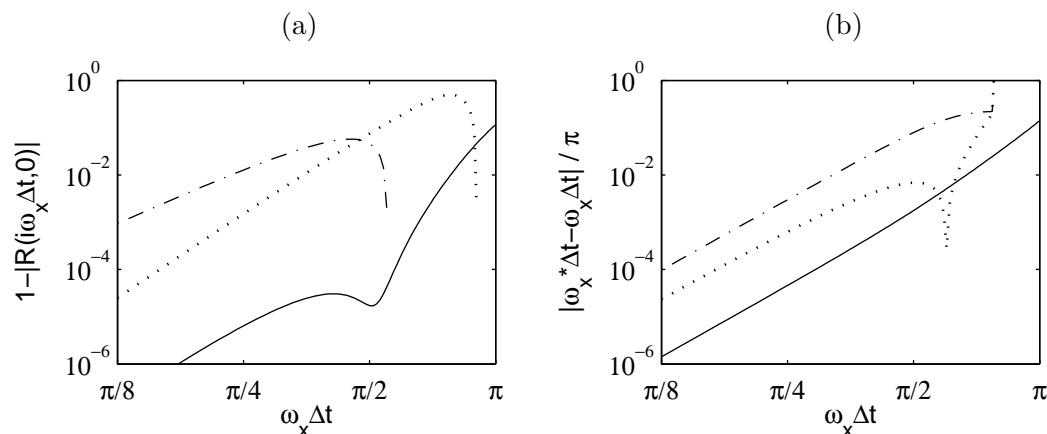


FIGURE 2.8 – (a) Taux d'atténuation, et (b) erreur de dispersion par itération temporelle des sous-schémas explicites, en fonction de la pulsation sans dimension  $\omega_x\Delta t$ , pour les algorithmes – – – ASIRK-3C de Zhong [102], ····· RK4 explicite standard, schemas développés : ——— SIRK63-A et SIRK63-S (RK46-Ber de Berland *et al.* [8]).

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, deux algorithmes de Runge-Kutta semi-implicites d'ordre 3 à 6 étapes, SIRK63-S et SIRK63-A, ont été construits pour la simulation de problèmes impliquant une paroi. Ces algorithmes permettent de s'affranchir des contraintes sur le pas de temps liées au raffinement du maillage proche de la paroi, en traitant de manière implicite les flux Eulériens dans la direction normale à la paroi. La précision des schémas SIRK63 développés se révèle plus grande que celle du schéma semi-implicite ASIRK-3C de Zhong [102], et au moins équivalente à celle de RK4.



Le développement des schémas semi-implicites dans ce travail ne comporte pas d'optimisation dans l'espace de Fourier telle que dans les travaux de Hu *et al.* [52] ou de Berland *et al.* [8]. En effet, les difficultés rencontrées pour obtenir à la fois un ordre d'erreur élevé et de bonnes propriétés de stabilité n'ont pas permis d'inclure d'autres outils d'optimisation. Cependant, des outils de conception de schémas semi-implicites issus de la mécanique des fluides réactive ont été appliqués au domaine de l'aéroacoustique, impliquant une nouvelle approche de la stabilité et de la précision.

Les simulations présentées dans le chapitre suivant vont permettre de mettre en évidence les caractéristiques des schémas SIRK63 sur des cas acoustiques et visqueux.

# 3 Validation et mise en œuvre des schémas semi-implicites

---

Les algorithmes semi-implicites développés précédemment sont mis en œuvre dans ce chapitre sur des cas test à deux dimensions. Dans une première partie, les propriétés des schémas semi-implicites sont étudiées pour un cas de propagation d'une impulsion acoustique sans effets visqueux. La seconde partie est dédiée à l'étude du comportement des schémas en présence d'effets visqueux, en considérant le cas d'une paroi oscillante. Enfin, une troisième partie se concentre sur la rapidité des algorithmes, et présente des solutions pour diminuer les temps de calculs liés aux schémas semi-implicites.

## 3.1 Problème non visqueux : impulsion acoustique

### 3.1.1 Définition

Le cas d'une impulsion acoustique se propageant dans un milieu au repos est considéré. Pour ce cas test, les équations d'Euler 2-D (2.24) sont résolues sur des maillages cartésiens anisotropes présentant différents rapports d'aspect  $AR = \Delta x / \Delta y$ , où  $\Delta x$  et  $\Delta y$  sont les pas de discrétisation spatiale dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement. Dans tout ce qui suit,  $\Delta x$  est fixé,  $\Delta y$  est différent pour chaque maillage et  $\Delta y \leq \Delta x$ . Plus la valeur de  $AR$  est grande, plus un maillage sera donc fin dans la direction  $y$ . Chaque maillage comporte  $140 \times AR$  points. Les conditions initiales sont définies par :

$$\begin{cases} p &= p_0 + \Delta p \times \exp[-\ln(2)(x^2 + y^2)/b^2] \\ \rho &= \rho_0 + (p - p_0)/c^2 \\ u_x &= u_y = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $b = 3\Delta x$ ,  $p_0 = 10^5 Pa$ ,  $\Delta p = 10 Pa$ ,  $c = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ ,  $\rho_0 = p_0 / (T_0(\gamma - 1)c_v)$ ,  $T_0 = 293 K$  et  $c_v = 717.5 J.K^{-1}.kg^{-1}$ . Un schéma aux différences finies centrées d'ordre 20 sur 21 points est utilisé pour rendre les erreurs de discrétisation spatiale négligeables devant les erreurs d'intégration temporelle.

La limite de stabilité des algorithmes d'intégration temporelle est évaluée sur une série de simulations pour lesquelles des conditions de périodicité sont appliquées aux bords du domaine, ce qui permet d'utiliser le schéma centré sur l'ensemble du maillage, et d'éviter ainsi d'éventuelles instabilités causées par l'utilisation de schémas décentrés. Une seconde série de simulations est ensuite réalisée pour étudier la précision des algorithmes, en utilisant cette fois des conditions de non réflexion [12] combinées avec des schémas aux différences finies décentrés à faible dissipation et faible dispersion [9] sur les bords du domaine.

Les simulations sont réalisées pour des rapports d'aspect de 1, 2, 4, 8, 16 et 32, avec les schémas d'intégration temporelle développés dans le chapitre précédent, à savoir les algorithmes semi-implicites d'ordre 3 à 6 étapes à forte stabilité SIRK63-S, et à forte précision SIRK63-A. On utilise également le schéma semi-implicite d'ordre 3 à 3 étapes ASIRK-3C de Zhong [102], et le schéma explicite de Runge-Kutta standard d'ordre 4 à 4 étapes RK4. Lorsqu'un schéma semi-implicite est utilisé, les termes des équations d'Euler contenant des dérivées dans la direction  $y$  sont intégrés en temps par la partie implicite de l'algorithme et les termes restants sont intégrés par la partie explicite. Le nombre de CFL est donné par  $CFL = c\Delta t / \Delta x$ . On fera parfois référence au nombre de CFL dans la direction  $y$ , égal à  $CFL_y = c\Delta t / \Delta y$ .

#### 3.1.2 Stabilité

L'objectif de cette partie est de trouver numériquement le nombre de CFL maximum assurant la stabilité. Ces valeurs de  $CFL_{max}$  sont fournies sur la figure 3.1 pour les différents schémas, en fonction du rapport d'aspect AR entre 1 et 32. Les axes sont représentés en échelle logarithmique. On constate que les nombres de CFL maximum sont plus élevés pour les schémas SIRK63, ce qui indique qu'ils sont les plus stables. Le schéma SIRK63-S montre la plus grande valeur de  $CFL_{max} = 1.2$  pour tous les rapports d'aspect. En ce qui concerne le schéma SIRK63-A, on observe que le nombre de CFL maximum diminue avec  $\Delta y$ , avant d'atteindre un plateau à  $CFL_{max} = 0.25$ , une valeur légèrement supérieure à celle du schéma de Zhong, pour lequel  $CFL_{max} = 0.2$  quel que soit le rapport d'aspect. Enfin, le schéma RK4 étant explicite, son nombre de CFL maximum diminue lorsque  $\Delta y$  diminue, comme attendu.

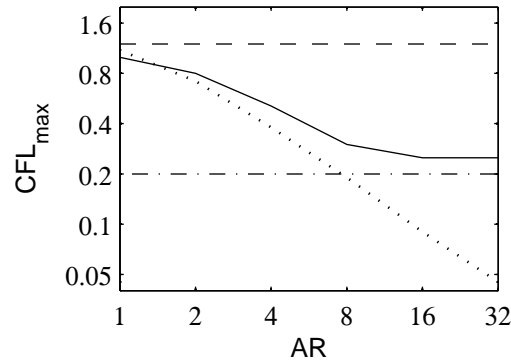


FIGURE 3.1 – Nombre de CFL =  $c\Delta t/\Delta x$  maximum en fonction du rapport d’aspect  $AR = \Delta x/\Delta y$ , pour les algorithmes  $- \cdot - \cdot$  ASIRK-3C de Zhong [102],  $\cdots$  RK4 explicite standard,  $—$  SIRK63-A,  $- - -$  SIRK63-S.

### 3.1.3 Précision

Pour évaluer la précision des schémas SIRK, on réalise des calculs aux mêmes rapports d’aspect que précédemment. Les simulations sont menées jusqu’à  $t = 32\Delta x/c$ , pour des nombres de CFL =  $c\Delta t/\Delta x$  entre 0.1 et 1. Les résultats sont comparés à des calculs de référence. Les maillages étant différents pour chaque rapport d’aspect, un calcul de référence est réalisé sur chaque maillage, avec un nombre de CFL très faible. Il est par exemple égal à  $10^{-2}$  pour  $AR = 1$ , et à  $10^{-4}$  pour  $AR = 32$ . La solution donnée par le calcul de référence pour  $AR = 1$  est représentée sur la figure 3.2. On note que l’onde acoustique n’a pas atteint les conditions limites.

#### 3.1.3.1 Taux d’erreur

La précision des schémas est estimée par le taux d’erreur  $E$ , défini de la manière suivante :

$$E = \frac{\sqrt{\iint_S (p - p_{ref})^2 dS}}{\sqrt{\iint_S (p_{ref} - p_0)^2 dS}} \quad (3.2)$$

où  $p_{ref}$  est la solution de référence. La figure 3.3 présente l’erreur des différents schémas pour des rapports d’aspect de 1, 2, 4, 8, 16 et 32, avec des axes en échelle logarithmique. Les résultats étant très similaires, seuls ceux du cas  $AR = 1$  présenté sur la figure 3.3(a) sont commentés ici. Le taux est le plus faible pour le schéma SIRK63-A. Celui-ci est en effet d’un ordre de grandeur inférieur à ceux du SIRK63-S et du RK4. Le schéma ASIRK-3C a un taux d’erreur de plus d’un ordre de grandeur supérieur à celui du SIRK63-S. L’algorithme SIRK63-A est donc le plus précis, tandis que l’algorithme SIRK63-S est d’une précision équivalente au RK4. Le schéma ASIRK-3C a la plus faible précision. Ces résultats sont en bon accord avec l’étude théorique menée au

paragraphe 2.3.4. Enfin, une ligne de pente d'ordre 3 est représentée en gris sur la figure 3.3(a) comme référence pour évaluer l'ordre des taux d'erreur. Les schémas semi-implicites montrent un taux d'erreur d'ordre 3 pour les nombres de CFL inférieurs à 0.4.

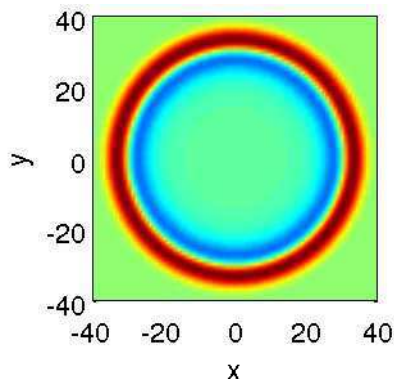


FIGURE 3.2 – Champ des fluctuations de pression  $p - p_0$  issu de la solution de référence à  $t = 32\Delta x/c$ , pour  $AR = 1$ ; l'échelle de couleur varie entre -1Pa et +1Pa.

### 3.1.3.2 Influence du couplage

Pour mettre en évidence l'effet du couplage entre les sous-schémas explicites et implicites, on montre sur la figure 3.4 des champs instantanés de l'erreur  $(p - p_{ref}) / \sqrt{\frac{1}{S} \iint_S (p - p_{ref})^2 dS}$  pour des calculs effectués à  $CFL = 0.1$  et  $AR = 1$ . L'erreur est isotrope pour le schéma RK4 sur la figure 3.4(a) puisque le même schéma est utilisé dans les directions  $x$  et  $y$ . A l'inverse, les algorithmes semi-implicites montrent une erreur anisotrope. L'erreur de l'algorithme ASIRK-3C, montrée sur la figure 3.4(b), est dominante dans les directions parallèles aux lignes de maillage. Les erreurs des schémas SIRK63-A et SIRK63-S, données respectivement sur les figures 3.4(c) et (d) sont plus importantes dans les directions diagonales.

Ces répartitions d'erreur observées pour  $CFL = 0.1$  et  $AR = 1$  peuvent changer pour d'autres valeurs du nombre de CFL. L'erreur obtenue sur un calcul à  $CFL = 1$  et  $AR = 1$  avec le schéma SIRK63-S est par exemple montrée sur la figure 3.5(a). Les erreurs dans la direction verticale et dans les directions diagonales présentent des niveaux similaires. L'erreur est en revanche plus faible dans la direction horizontale. Cette répartition de l'erreur est sensiblement différente de celle observée précédemment à  $CFL = 0.1$  et  $AR = 1$  pour le schéma SIRK63-S sur la figure 3.4(c).

Enfin, les résultats d'un calcul effectué à  $CFL = 1$  et  $AR = 32$  avec le schéma SIRK63-S sont montrés sur la figure 3.5(b). La répartition d'erreur obtenue pour cette simulation est très similaire à celle obtenue à  $CFL = 1$  et  $AR = 1$  sur la figure 3.5(a). Il semble donc que le rapport

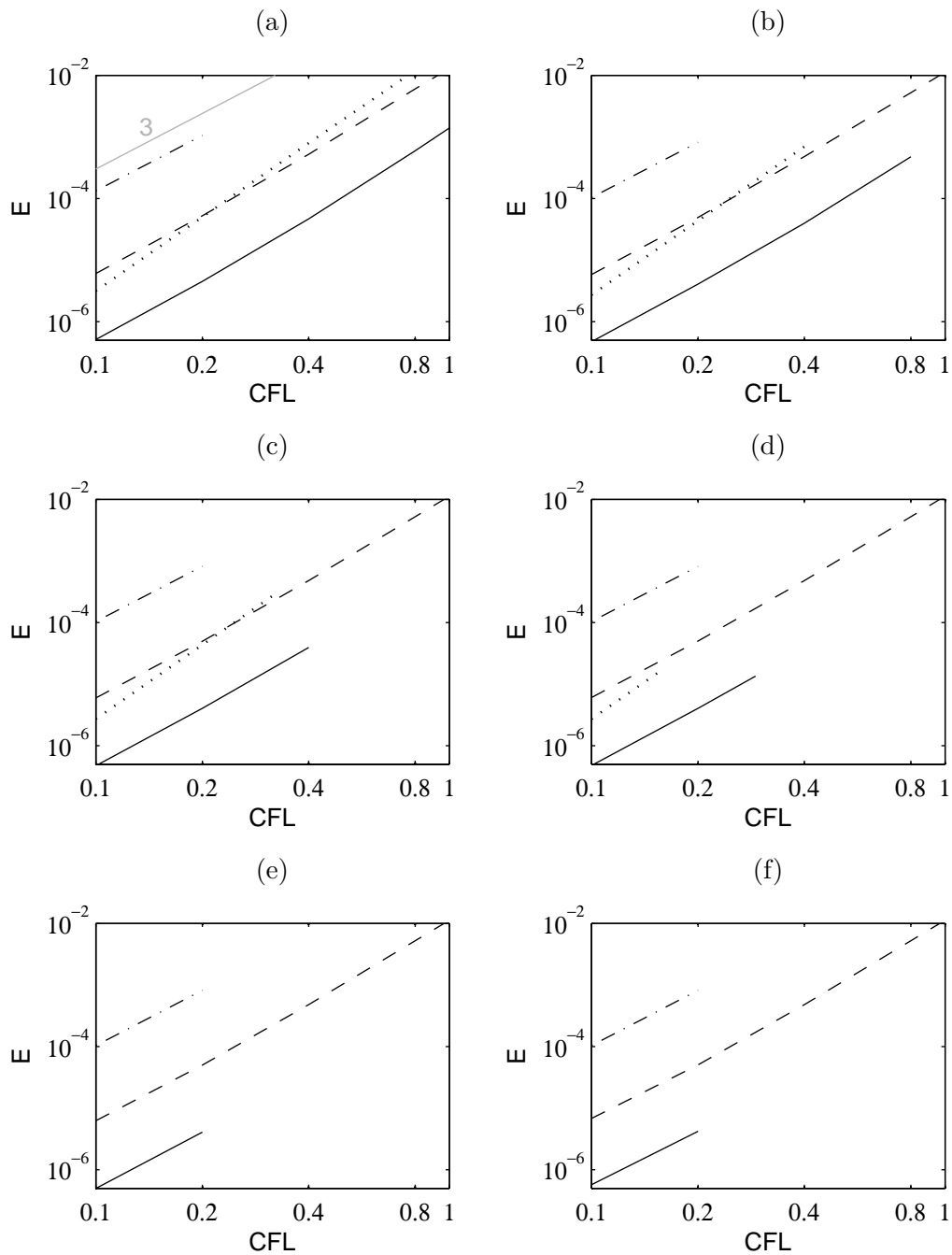


FIGURE 3.3 – Taux d'erreur  $E$  en fonction du nombre de CFL  $= c\Delta t/\Delta x$ , pour des rapports d'aspect (a) AR = 1, (b) AR = 2, (c) AR = 4, (d) AR = 8, (e) AR = 16, (f) AR = 32, et pour les algorithmes  $- \cdot - \cdot -$  ASIRK-3C de Zhong [102],  $\cdots$  RK4 explicite standard,  $—$  SIRK63-A,  $- - -$  SIRK63-S;  $—$  ligne de pente d'ordre 3.

d'aspect n'a pas d'effet sur l'anisotropie.

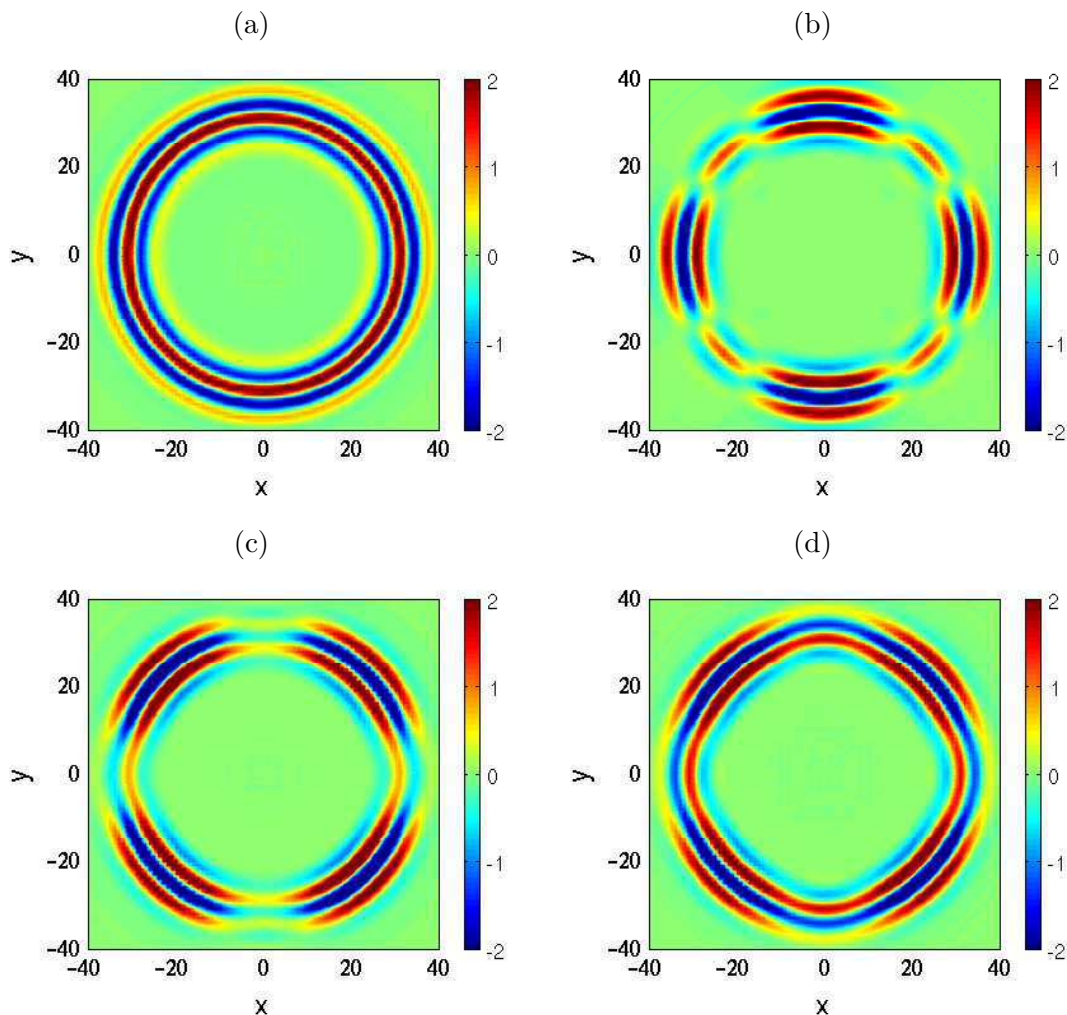


FIGURE 3.4 – Erreur  $(p - p_{ref}) / \sqrt{\frac{1}{S} \iint_S (p - p_{ref})^2 dS}$  à  $t = 32\Delta x/c$  des simulations effectuées à CFL = 0.1 et AR = 1 avec les algorithmes (a) RK4 standard, (b) ASIRK-3C de Zhong [102], (c) SIRK63-A, (d) SIRK63-S; l'échelle de couleur varie entre -2 et 2.

### 3.1.4 Résumé des résultats du cas test

Le nombre de CFL maximum et le taux d'erreur pour un nombre de CFL égal à 0.2 sont donnés dans le tableau 3.1 pour les différents schémas, et pour des rapports d'aspect de 1 et 32. Le schéma SIRK63-S a un nombre de CFL maximum élevé de 1.2 et un taux d'erreur de  $5 \times 10^{-5}$ , ces valeurs étant identiques pour des rapports d'aspect de 1 et de 32. En ce qui concerne le schéma SIRK63-A, le nombre de CFL maximum dépend du rapport d'aspect. On a en effet  $CFL_{max} = 1$  et 0.25 respectivement pour AR = 1 et 32. Son taux d'erreur est très faible, puisqu'il est de  $4 \times 10^{-6}$  aux deux rapports d'aspect. Le nombre de CFL maximum du schéma de Zhong

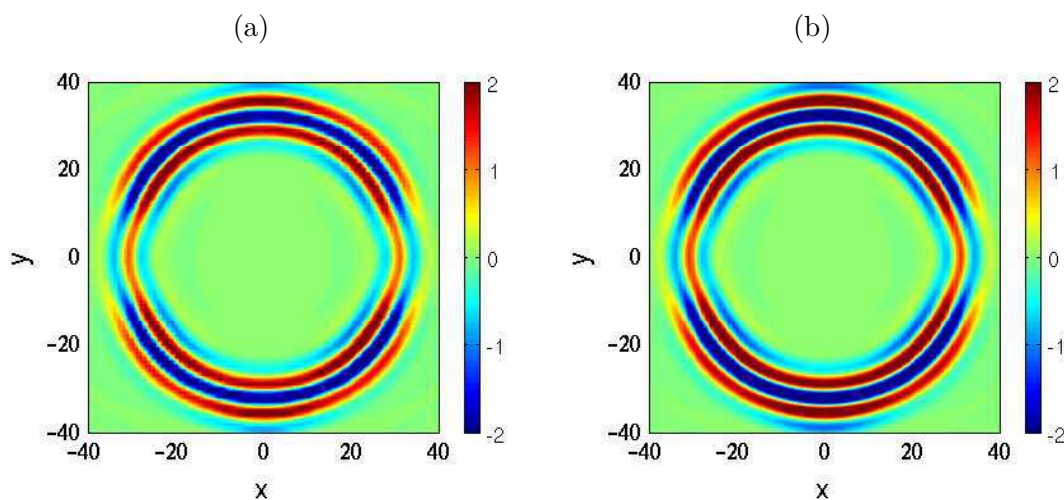


FIGURE 3.5 – Erreur  $(p - p_{ref}) / \sqrt{\frac{1}{S} \iint_S (p - p_{ref})^2 dS}$  à  $t = 32\Delta x/c$  des simulations effectuées avec le schéma SIRK63-S pour (a)  $AR = 1$ , (b)  $AR = 32$ ; l'échelle de couleur varie entre -2 et 2.

est de 0.2 et son taux d'erreur est de  $8 \times 10^{-4}$  pour les deux rapports d'aspect.

	$CFL_{max}$		$E$ (CFL = 0.2)	
	AR = 1	AR = 32	AR = 1	AR = 32
<b>SIRK63-S</b>	<b>1.2</b>	<b>1.2</b>	$4.9 \times 10^{-5}$	$5.0 \times 10^{-5}$
<b>SIRK63-A</b>	1.0	0.25	<b><math>4.1 \times 10^{-6}</math></b>	<b><math>4.2 \times 10^{-6}</math></b>
ASIRK-3C	0.2	0.2	$8.2 \times 10^{-4}$	$8.2 \times 10^{-4}$
RK4	1.1	0.045	$4.4 \times 10^{-5}$	–

TABLE 3.1 – Comparaison des nombres de CFL maximum, et du taux d'erreur des schémas étudiés, en fonction du rapport d'aspect.

## 3.2 Problème visqueux : paroi oscillante

On s'intéresse à présent au comportement des schémas SIRK en présence d'effets visqueux, sur un cas simple issu de la littérature, la paroi oscillante. L'intégration temporelle des flux visqueux est ici réalisée en appliquant le schéma d'Euler explicite après chaque itération du schéma SIRK, ce dernier n'intervenant donc pas dans le traitement des flux visqueux. Il faut toutefois vérifier que les pas de temps élevés induits par l'utilisation d'un algorithme semi-implicite n'affectent pas la stabilité et la précision de l'intégration des termes visqueux.



### 3.2.1 Etude 1-D des flux visqueux

Une étude 1-D permet de trouver la fonction d'amplification de l'intégration temporelle des flux visqueux. On considère l'équation de diffusion à une dimension :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.3)$$

que l'on discrétise spatialement avec un schéma aux différences finies centrées, et temporellement avec le schéma d'Euler explicite. L'équation ainsi discrétisée s'écrit :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{\nu}{\Delta x} \sum_{p=-M}^M \alpha_p \left[ \frac{1}{\Delta x} \sum_{q=-M}^M \alpha_q u_{i+p+q}^n \right] \quad (3.4)$$

où  $\Delta x$  et  $\Delta t$  sont respectivement les pas de discretisation spatiale et temporelle,  $(\alpha_p)_{-M \leq p \leq M}$  sont les coefficients du schéma aux différences finies, et  $u_i^n = u(i\Delta x, n\Delta t)$ . On suppose que le schéma spatial est non dissipatif, d'où  $\alpha_p = -\alpha_{-p}$ . En appliquant une transformée de Fourier spatiale à l'équation (3.4), on obtient alors :

$$\frac{\hat{u}^{n+1}(k) - \hat{u}^n(k)}{\Delta t} = \frac{\nu \hat{u}^n(k)}{\Delta x^2} \left( 2 \sum_{p=1}^M \alpha_p \sin(pk\Delta x) \right) \left( 2 \sum_{q=1}^M \alpha_q \sin(qk\Delta x) \right) \quad (3.5)$$

En exprimant le nombre d'onde effectif  $k^*$  du schéma aux différences finies de la manière suivante :

$$k^* \Delta x = 2 \sum_{p=1}^M \alpha_p \sin(pk\Delta x) \quad (3.6)$$

on obtient enfin la fonction d'amplification de l'équation discrétisée (3.4) :

$$G = \frac{\hat{u}^{n+1}(k)}{\hat{u}^n(k)} = 1 - \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} (k^* \Delta x)^2 \quad (3.7)$$

Cette fonction fait apparaître le nombre de Fourier  $\lambda = \nu \Delta t / \Delta x^2$ , qui régit la stabilité de l'intégration temporelle des flux visqueux. L'intégration est donc stable si :

$$\lambda \leq \frac{2}{(k^* \Delta x)_{max}^2} \quad (3.8)$$

où  $(k^* \Delta x)_{max}$  est le nombre d'onde effectif sans dimension maximum résultant du schéma de discrétisation spatiale. Pour un schéma aux différences finies standard d'ordre 6, le terme de droite dans (3.8) vaut 0.8.

### 3.2.2 Simulation numérique d'une paroi oscillante

#### 3.2.2.1 Définition et paramètres numériques

On considère le cas bidimensionnel d'une paroi oscillant dans son plan, qui constitue le second problème de Stokes, défini par :

$$\begin{cases} u(x, 0, t) = u_0 \cos(\omega t) \\ v(x, 0, t) = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

où  $u$  et  $v$  sont les composantes de vitesse respectivement dans les directions horizontale  $x$  et verticale  $y$ , et  $\omega = 2\pi/T$ , avec  $T$  la période d'oscillation. La solution analytique est donnée par l'expression suivante [87] :

$$\begin{cases} u_{Stokes}(x, y, t) = u_0 \cdot \exp(-\eta) \cdot \cos(\omega t - \eta) \\ \eta = y \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \end{cases} \quad (3.10)$$

La paroi oscillante entraîne le fluide, dont le mouvement est limité à une couche limite d'épaisseur proportionnelle à la longueur visqueuse caractéristique  $l_v = \sqrt{2\nu/\omega}$ .

Pour ce problème, les équations de Navier-Stokes sont résolues sur des maillages cartésiens anisotropes, dont les tailles de mailles  $\Delta x$  et  $\Delta y$  dans les directions  $x$  et  $y$  sont uniformes. Plusieurs maillages sont construits avec  $\Delta y = 4 \cdot 10^{-6}$  m fixé. On fait varier  $\Delta x$  entre les différents maillages, de sorte que le rapport d'aspect  $AR = \Delta x/\Delta y$  varie entre 1, 3, 9 et 34. La variation de  $\Delta x$  n'influence pas les résultats car dans ce cas test, la solution est uniforme dans la direction  $x$ . Les paramètres des différents maillages sont donnés dans le tableau 3.2. L'intégration temporelle des flux visqueux est réalisée avec le schéma d'Euler explicite. Les flux Eulériens sont intégrés à l'aide du schéma SIRK63-S, qui traite de manière implicite les flux dans la direction  $y$ , et de manière explicite les flux dans la direction  $x$ . La stabilité de l'algorithme semi-implicite est assurée en imposant  $CFL_x = c\Delta t/\Delta x = 1$  où  $\Delta t$  est le pas de temps. Ce dernier varie donc d'un maillage à l'autre, proportionnellement à  $\Delta x$ . Le tableau 3.2 fournit les valeurs du nombre de CFL et du nombre de Fourier dans la direction  $y$ , donnés respectivement par  $CFL_y = c\Delta t/\Delta y$  et par  $\lambda_y = \nu\Delta t/\Delta y^2$ . La valeur du nombre de  $CFL_y$  varie entre 1 et 32, et celle du nombre de Fourier  $\lambda_y$  entre  $1.1 \times 10^{-2}$  et 0.38.

Un filtrage explicite est appliqué toutes les  $n_f$  itérations pour supprimer les ondes parasites pouvant déstabiliser le calcul [15]. La fréquence d'application du filtrage varie entre les maillages.

AR	$\Delta y$ (m)	$\Delta x$ (m)	$CFL_y$	$\lambda_y$	$n_f$
1	$4 \times 10^{-6}$	$4 \times 10^{-6}$	1	$1.1 \times 10^{-2}$	9
3	$4 \times 10^{-6}$	$1.2 \times 10^{-5}$	3	$3.3 \times 10^{-2}$	3
9	$4 \times 10^{-6}$	$3.6 \times 10^{-5}$	9	0.1	1
34	$4 \times 10^{-6}$	$1.36 \times 10^{-4}$	34	0.38	1

TABLE 3.2 – Paramètres des simulations ;  $\Delta x$  et  $\Delta y$  : tailles de maille respectivement dans les directions  $x$  et  $y$  ;  $CFL_y$  et  $\lambda_y$  : nombre de CFL et nombre de Fourier dans la direction  $y$  ;  $n_f$  : fréquence d’application du filtrage, en nombre d’itérations.

Elle est indiquée dans le tableau 3.2 pour chaque simulation. On impose notamment  $n_f = 9, 3$  et 1 dans les simulations à rapport d’aspect respectivement de 1, 3, et 9, afin que le filtrage soit appliqué le même nombre de fois dans les trois calculs, et que l’erreur de filtrage soit constante. Ces calculs seront en effet utilisés pour détecter l’influence du pas de temps sur l’erreur numérique.

Les dérivées spatiales sont calculées par le schéma aux différences finies centrées d’ordre 4 sur 11 points de Bogey & Bailly [13] pour les termes convectifs, et par un schéma centré d’ordre 6 sur 7 points pour les termes diffusifs. Pour les points proches de la paroi, des schémas décentrés sont utilisés pour le calcul des dérivées spatiales et pour le filtrage [9]. Des conditions de périodicité sont appliquées aux bords du maillage dans la direction  $x$ , et les conditions de non réflexion de Tam & Dong [89] sont implémentées au bord supérieur. Une condition d’adhérence est imposée à la paroi, telle que  $u(x, 0, t) = u_{Stokes}(x, 0, t)$  et  $v(x, 0, t) = 0$ . La vitesse maximale de la paroi est fixée à  $u_0 = 1\text{m/s}$ . La période d’oscillation vaut  $T = 36000\Delta y/c$ . Les simulations sont menées sur 3 périodes.

### 3.2.2.2 Résultats

On s’intéresse tout d’abord aux résultats du calcul à  $AR = 34$ , dans lequel on a  $CFL_y = 34$  et  $\lambda_y = 0.38$ . Les profils de vitesse horizontale  $u/u_0$  sont montrés sur la figure 3.6 aux instants  $5T/8, 6T/8, 7T/8$  et  $T$ , en fonction de la distance à la paroi  $y$  normalisée par la longueur caractéristique visqueuse  $l_v$ . Les profils obtenus numériquement, représentés par les symboles, montrent un bon accord avec les profils théoriques tracés en trait plein. Ainsi, malgré le pas de temps élevé utilisé dans ce calcul, l’intégration des flux visqueux réalisée de manière explicite est stable.

L’erreur moyenne par rapport au profil théorique est calculée selon la formule suivante :

$$E_{moyenne} = \max_t \left[ \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} \frac{|u(x, y, t) - u_{Stokes}(x, y, t)|}{u_0} dy \right] \quad \text{pour } x \text{ quelconque.} \quad (3.11)$$

Cette erreur est donnée dans le tableau 3.3 pour toutes les simulations. L’erreur moyenne

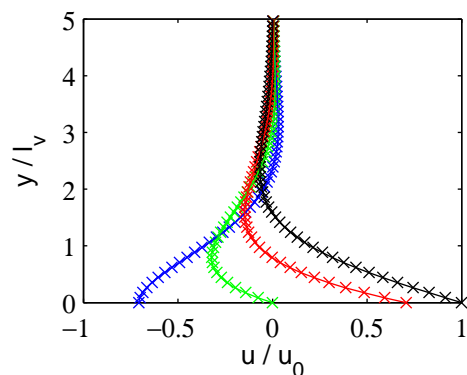


FIGURE 3.6 – Profils de vitesse  $u/u_0$  en fonction de la coordonnée verticale  $y/l_v$ , calculés aux instants  $5T/8$  (bleu),  $6T/8$  (vert),  $7T/8$  (rouge),  $T$  (noir), pour la simulation à  $AR = 34$  ( $\times$ ), et pour la solution analytique (—).

vaut  $9.8 \times 10^{-4}$  pour les simulations à  $AR = 1, 3$  et  $9$ . Ce niveau constant indique que les erreurs liées à l'intégration temporelle sont ici dominées par d'autres effets, en particulier par les effets du filtrage. Le calcul à  $AR = 34$  présente en effet une erreur plus faible, égale à  $6.8 \times 10^{-4}$ , car le filtrage est alors appliqué un plus petit nombre de fois par rapport aux calculs à rapport d'aspect de  $1, 3$  et  $9$ . L'erreur d'intégration temporelle est donc suffisamment faible pour être inférieure aux effets du filtrage.

AR	$E_{moyenne}$
1	$9.8 \times 10^{-4}$
3	$9.8 \times 10^{-4}$
9	$9.8 \times 10^{-4}$
34	$6.8 \times 10^{-4}$

TABLE 3.3 – Erreurs moyennes  $E_{moyenne}$  obtenues dans les simulations du cas de paroi oscillante.

### 3.3 Rapidité des algorithmes semi-implicites sur des maillages partitionnés

L'étude présentée dans la section 3.1 a porté, entre autres, sur le nombre de CFL maximum des schémas d'intégration temporelle. Ce nombre est élevé pour les schémas SIRK63, ce qui permet d'utiliser des pas de temps importants et rendre ainsi plus rapides les simulations numériques. En pratique, d'autres méthodes existent pour augmenter la vitesse d'exécution des simulations. Une méthode souvent utilisée est le partitionnement du domaine, qui consiste à

utiliser simultanément plusieurs schémas d'intégration temporelle dans un même calcul. Chaque schéma est alors employé dans la zone spécifique du maillage dans laquelle il est le plus adapté. Typiquement, on cherchera à restreindre le nombre de points des zones résolues avec des schémas semi-implicites, pour limiter la taille des systèmes à inverser.

Cette section présente la mise en œuvre de ce partitionnement. Au préalable, les vitesses de chacun des schémas d'intégration temporelle RK4, ASIRK-3C, SIRK63-A et SIRK63-S sont estimées. La méthode de partitionnement est ensuite présentée, ainsi que des cas test évaluant l'erreur numérique liée à l'utilisation simultanée de différents schémas d'intégration temporelle. Enfin, les temps CPU de simulations sur maillages partitionnés sont estimés.

#### 3.3.1 Calculs avec un schéma unique sur tout le domaine de calcul

Dans un premier temps, des simulations sont effectuées en utilisant un seul algorithme d'intégration temporelle sur tout le domaine, afin d'estimer la rapidité des différents schémas. Le cas de propagation d'une impulsion acoustique est repris, pour des rapports d'aspect  $AR = \Delta x / \Delta y$  variant de 1 à 32, avec  $\Delta x$  constant. Le nombre de points des maillages est fixé à  $n_x \times n_y = 101 \times 101$ . Les dérivées spatiales sont calculées avec le schéma aux différences finies centrées d'ordre 4 sur 11 points de Bogey & Bailly [13]. Les conditions de non réflexion de Tam & Dong [89] sont appliquées au bord du domaine. On effectue les simulations jusqu'à  $t = 24\Delta x / c$ , avec des nombres de  $CFL = c\Delta t / \Delta x$  proches des  $CFL_{max}$  des différents schémas, donnés dans le tableau 3.4. Les calculs sont réalisés sur un processeur Intel Xeon W3520 de fréquence 2.67 GHz.

Les temps CPU par itération sont fournis dans le tableau 3.5. Les algorithmes semi-implicites ont un temps CPU par itération de deux ordres de grandeur supérieur à celui de RK4. Leur défaut majeur apparaît donc clairement. L'inversion des systèmes d'équations est très coûteuse en temps de calcul. Les temps CPU totaux sont donnés dans le tableau 3.6 et représentés sur la figure 3.7 en fonction du rapport d'aspect, pour des axes en échelles logarithmiques.

Le temps CPU total du calcul effectué avec le schéma RK4 explicite augmente comme prévu avec le rapport d'aspect. En effet, pour assurer la stabilité du schéma, le nombre de  $CFL_y = c\Delta t / \Delta y$  doit être inférieur à 1. Le pas de temps doit donc être réduit lorsque le rapport d'aspect croît. Le nombre d'itération du calcul devient alors plus important, ce qui augmente le temps CPU total. Pour l'algorithme SIRK63-A, le temps CPU total croît légèrement avant d'atteindre un plateau vers  $AR = 16$ , reproduisant le comportement observé sur la figure 3.1 pour le nombre de CFL maximum. Enfin, les temps CPU totaux des calculs effectués avec les schémas ASIRK-3C et SIRK63-S sont quasiment constants. Ces algorithmes admettent des pas de temps indépendants

du rapport d'aspect. Ainsi, même lorsque ce dernier augmente, le nombre d'itérations à effectuer reste faible, ce qui permet de compenser le coût important de l'inversion des systèmes. Toutefois, la compensation n'est pas suffisante puisque sur le cas présenté, le temps CPU total pour les schémas semi-implicites reste plus grand que celui pour le RK4, même à  $AR = 32$ .

AR	1	2	4	8	16	32
SIRK63-A	1.0	0.8	0.5	0.3	0.25	0.25
SIRK63-S	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2
ASIRK-3C	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
RK4	1.0	0.6	0.32	0.16	0.08	0.04

TABLE 3.4 – Nombres de CFL utilisés pour les simulations effectuées avec un schéma unique sur l'ensemble du domaine, en fonction du rapport d'aspect  $AR = \Delta x / \Delta y$ .

AR	1	2	4	8	16	32
SIRK63-A	721	680	667	684	688	680
SIRK63-S	805	815	835	790	795	760
ASIRK-3C	413	422	417	410	398	394
RK4	6	6	5	5	5	4

TABLE 3.5 – Temps CPU par itération en millisecondes pour les simulations effectuées avec un schéma unique sur l'ensemble du domaine, en fonction du rapport d'aspect  $AR = \Delta x / \Delta y$ .

AR	1	2	4	8	16	32
SIRK63-A	17.3	20.4	32.0	54.7	66.0	65.3
SIRK63-S	16.1	16.3	16.7	15.8	15.9	15.2
ASIRK-3C	49.5	50.6	50.0	49.2	47.7	47.3
RK4	0.15	0.23	0.40	0.74	1.40	2.50

TABLE 3.6 – Temps CPU total, en secondes, des calculs effectués de  $t = 0$  à  $24\Delta x/c$  avec un schéma unique sur l'ensemble du domaine, en fonction du rapport d'aspect  $AR = \Delta x / \Delta y$ .

### 3.3.2 Partitionnement du maillage

Pour diminuer le temps CPU des simulations utilisant des schémas SIRK, il est nécessaire de réduire fortement la taille des systèmes à inverser. Pour cela, on a recours à un partitionnement du maillage, schématisé sur la figure 3.8. La zone inférieure est résolue avec un des schémas semi-implicite, et la zone supérieure avec le schéma explicite de Berland *et al.* [8]. Ce type de calcul

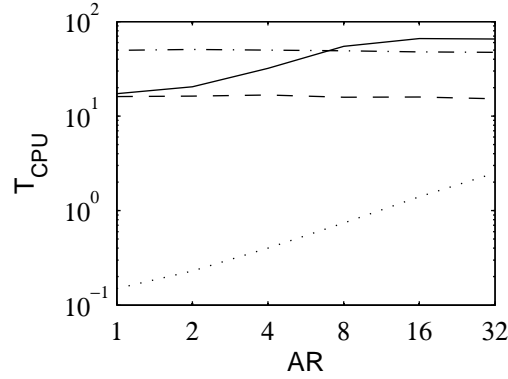


FIGURE 3.7 – Temps CPU total, en secondes, en fonction du rapport d’aspect  $AR = \Delta x/\Delta y$ , des calculs effectués de  $t = 0$  à  $24\Delta x/c$  avec les algorithmes : - - - ASIRK-3C de Zhong, ..... RK4 explicite standard, — SIRK63-A, - - - SIRK63-S.

est appelé “mixte”, par opposition aux calculs réalisés avec un seul schéma sur tout le domaine. Ceux-ci sont appelés calculs entièrement explicites lorsque le schéma RK46-Ber est utilisé, et calculs entièrement semi-implicites lorsqu’un schéma SIRK est utilisé.

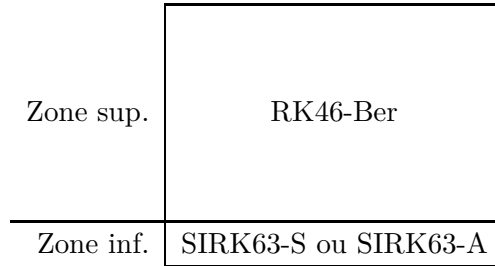


FIGURE 3.8 – Schéma de partitionnement du maillage.

On se propose d’étudier le comportement des algorithmes SIRK63 sur un domaine partitionné. Le maillage contient  $101 \times 101$  points, avec  $n_y^{inf} = 20$  points et  $n_y^{sup} = 81$  points dans la direction  $y$  respectivement dans les zones inférieure et supérieure. L’étude est effectuée pour un cas de source monopolaire :

$$p' = \Delta p \exp[-\ln 2(x^2 + y^2)/b^2] \sin(ckt) \quad (3.12)$$

où  $\Delta p = 1000 Pa$ ,  $b = 3\Delta x$ ,  $k = \pi/(4\Delta x)$ ,  $c$  est la vitesse du son, et  $\Delta x = \Delta y = 1$ . Des simulations sont réalisées pour des nombres de CFL variant de 0.1 à 1. Les dérivées spatiales sont calculées avec le schéma aux différences finies centrées d’ordre 4 sur 11 points de Bogey & Bailly [13]. Le filtre sélectif d’ordre 6 sur 11 points de Bogey *et al.* [15] est appliqué pour assurer la stabilité. Les conditions de non réflexion de Tam & Dong [89] sont appliquées au bord du domaine. Le résultat d’un calcul mixte réalisé avec le schéma SIRK63-A jusqu’à  $t = 120\Delta t$ , pour

un nombre de CFL égal à 1, est représenté sur la figure 3.9. La frontière entre les deux zones est matérialisée par des pointillés. On n’observe pas d’altération significative du champ acoustique à cette interface.

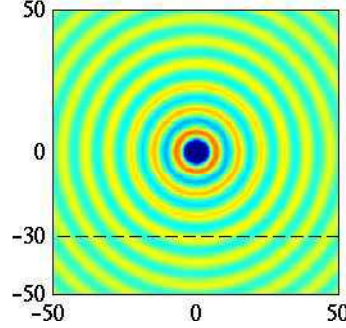


FIGURE 3.9 – Représentation des fluctuations de pression  $p - p_0$  à  $t = 120\Delta t$  issues d’une simulation de source monopolaire réalisée sur un maillage partitionné, avec  $\text{CFL} = 1$ ; l’échelle de couleur varie entre  $-1\text{Pa}$  et  $+1\text{Pa}$ ; - - - interface entre les zones inférieure et supérieure.

### 3.3.3 Erreur due à l’interface

La discontinuité causée par le changement de schéma d’intégration temporelle à l’interface entre les deux zones peut créer des réflexions parasites lorsque des ondes acoustiques traversent cette interface. Un cas test est donc mis en place pour estimer l’importance de ces réflexions. On considère un domaine contenant  $n_x \times n_y = 100 \times 100$  points partitionné en une zone inférieure et une zone supérieure contenant un même nombre de points  $n_y^{inf} = n_y^{sup} = 50$  dans la direction  $y$ . Une source monopolaire est placée au milieu de la zone inférieure. Trois simulations sont réalisées. La première simulation, illustrée sur la figure 3.10(a), est mixte. Le schéma SIRK63-S est utilisé pour la zone inférieure, et le schéma RK46-Ber pour la zone supérieure, pour un nombre de CFL égal à 1. Dans la seconde simulation, représentée sur la figure 3.10(b), un schéma unique, SIRK63-S, est utilisé sur l’ensemble du maillage avec un nombre de CFL de 1. Enfin, la troisième simulation est une simulation de référence réalisée avec le schéma RK46-Ber sur l’ensemble du domaine, avec un nombre de CFL = 0.1.

Un taux d’erreur entre la simulation mixte et la simulation utilisant uniquement le schéma semi-implicite est calculé sur tout les points de la zone inférieure :

$$E_{\text{réflexion}} = \frac{\sqrt{\iint_{S_{\text{inférieure}}} (p_{\text{mixte}} - p_{\text{unique}})^2 dS}}{\sqrt{\iint_{S_{\text{inférieure}}} (p_{\text{unique}} - p_0)^2 dS}} \quad (3.13)$$



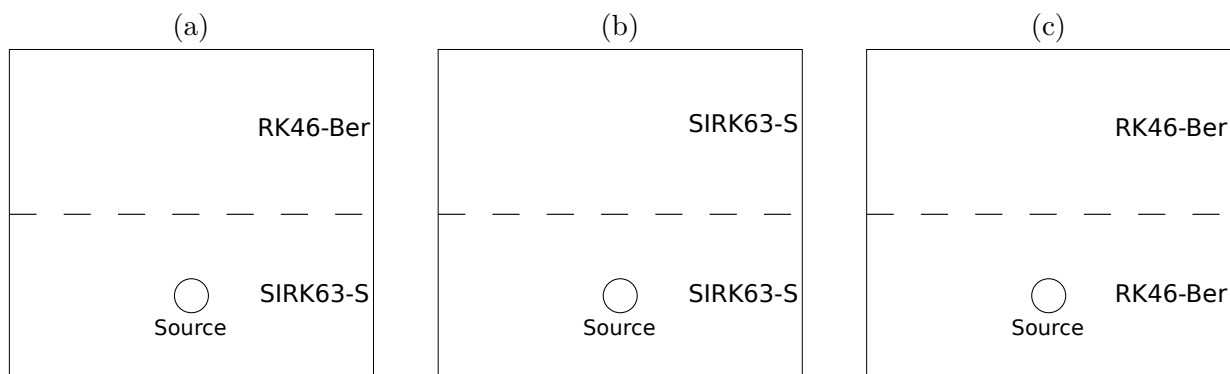


FIGURE 3.10 – Simulations d’un cas de source monopolaire sur un maillage partitionné pour l’étude de l’erreur due à l’interface; (a) calcul mixte : les algorithmes SIRK63-S et RK46-Ber sont utilisés respectivement dans les zones inférieure et supérieure avec  $CFL = 1$ ; (b) calcul à schéma unique : le schéma SIRK63-S est utilisé sur l’ensemble du domaine, avec  $CFL = 1$ ; (c) calcul de référence : le schéma RK46-Ber est utilisé sur l’ensemble du domaine, avec  $CFL=0.1$ ; - - - interface entre les zones inférieure et supérieure du maillage.

où  $p_{mixte}$  et  $p_{unique}$  sont les champs de pression obtenus respectivement avec le calcul mixte et le calcul à schéma unique,  $p_0$  étant la pression ambiante. On calcule par ailleurs un taux d’erreur entre la simulation à schéma unique et la simulation de référence :

$$E_{unique} = \frac{\sqrt{\iint_{S_{inférieure}} (p_{unique} - p_{ref})^2 dS}}{\sqrt{\iint_{S_{inférieure}} (p_{ref} - p_0)^2 dS}} \quad (3.14)$$

où  $p_{ref}$  est le champ de pression issu du calcul de référence. Le taux d’erreur  $E_{réflexion}$ , correspondant aux effets causés par les réflexions à l’interface, est comparé aux erreurs engendrées par le schéma d’intégration temporelle, quantifiées par  $E_{unique}$ . On trouve  $E_{réflexion} = 0.1\%$  et  $E_{unique} = 2.2\%$ . L’effet des réflexions parasites est donc très faible.

### 3.3.4 Temps CPU des calculs mixtes

On cherche à présent à évaluer le coût en temps CPU des calculs mixtes pour le comparer à celui des calculs entièrement explicites. Pour cela, on considère des maillages proches de la configuration d’un calcul de couche limite, uniformes dans la direction  $x$  et raffinés dans la direction  $y$ . La géométrie des maillages proposés est représentée sur la figure 3.11. Le nombre de points est de  $n_x = 101$  dans la direction  $x$ , avec  $\Delta x = 1$ . Dans la direction  $y$ , la taille de la première maille en  $y = 0$  vaut  $\Delta y_0$ , définissant un rapport d’aspect  $AR_0 = \Delta x / \Delta y_0$ . Les

mailles sont ensuite étirées avec un coefficient d'étirement  $r$ , jusqu'à atteindre  $\Delta y = \Delta x$  pour  $y = 20\Delta x$ . Le maillage ainsi obtenu constitue la partie inférieure du maillage final. Cette partie est appelée zone inférieure. Au dessus de cette zone, des mailles sont ajoutées dans la direction  $y$  en maintenant  $\Delta y = \Delta x$ , ce qui forme la zone supérieure du maillage. Plusieurs maillages sont construits pour des rapports d'aspect  $AR_0 = 2, 4, 8, 16, 32$  et  $64$ . Les paramètres des différents maillages sont indiqués dans le tableau 3.7. Pour chacun des maillages, le nombre de points dans la direction  $y$  de la zone inférieure  $n_y^{inf}$  et le coefficient d'étirement  $r$  sont choisis de manière à ce que la zone inférieure soit située entre  $y = 0$  et  $20\Delta x$ . Le coefficient d'étirement varie entre  $r = 1.025$  pour  $AR_0 = 2$  et  $1.0514$  pour  $AR_0 = 64$ . Le nombre de points dans la direction  $y$  dans la zone inférieure varie entre  $n_y^{inf} = 29$  et  $84$ . Dans la zone supérieure, le nombre de points dans la direction  $y$  est fixé à  $n_y^{sup} = 80$ .

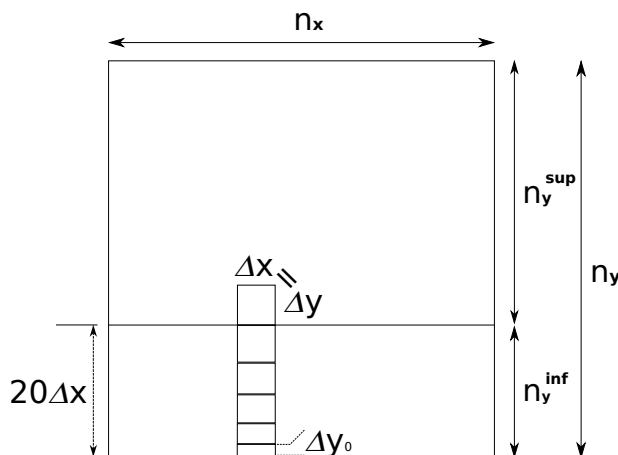


FIGURE 3.11 – Géométrie des maillages partitionnés utilisés pour la mesure des temps CPU.

$AR_0$	2	4	8	16	32	64
$r$	1.025	1.0382	1.0453	1.0481	1.05	1.0514
$n_y^{inf}$	29	38	48	60	72	84
$n_y^{sup}$	80	80	80	80	80	80
$n_x$	101	101	101	101	101	101

TABLE 3.7 – Paramètres géométriques des maillages partitionnés utilisés pour la mesure des temps CPU;  $AR_0 = \Delta x / \Delta y_0$  : rapport d'aspect de la première maille,  $r$  : coefficient d'étirement,  $n_y^{inf}$  et  $n_y^{sup}$  : nombres de points dans la direction  $y$  respectivement dans la zone inférieure et supérieure.

Des calculs mixtes et des calculs entièrement explicites sont mis en œuvre sur ces maillages. Pour les calculs mixtes, les schémas SIRK63-S et SIRK63-A sont employés dans la zone inférieure

du maillage, et le schéma explicite de Berland *et al.* [8] est employé dans la zone supérieure. Les calculs entièrement explicites sont réalisés avec les schémas RK46-Ber et RK4. Chacun des calculs est effectué jusqu'à un instant  $t = 120\Delta x/c$  avec un nombre de CFL =  $c\Delta t/\Delta x$  proche du maximum permis par le schéma d'intégration temporelle. Le nombre de CFL est donné pour chaque simulation dans le tableau 3.8. Il est égal à 1.2 pour les calculs mixtes réalisés avec SIRK63-S. Pour les calculs employant l'algorithme SIRK63-A, le nombre de CFL doit être réduit lorsque le rapport d'aspect augmente, à cause de la diminution du nombre de CFL<sub>max</sub>, comme observé dans le paragraphe 3.1.2. Par ailleurs, dans la simulation avec AR<sub>0</sub> = 64, des instabilités numériques ont conduit à réduire encore le nombre de CFL, qui vaut alors 0.12. Dans les calculs entièrement explicites, le pas de temps est fixé par le nombre de CFL à la paroi CFL<sub>y</sub> =  $c\Delta t/\Delta y_0$ , qui doit rester proche de 1. Par conséquent, lorsque le rapport d'aspect AR<sub>0</sub> =  $\Delta x/\Delta y_0$  augmente, le nombre de CFL =  $c\Delta t/\Delta x$  diminue. Il varie entre 0.77 et 0.027 pour les simulations utilisant le schéma de Berland *et al.* [8] et entre 0.6 et 0.02 pour celles utilisant le RK4. Toutes les simulations sont effectuées sur un CPU Intel Xeon W3520 de fréquence 2.67 GHz.

AR <sub>0</sub>	2	4	8	16	32	64
SIRK63-S/RK46-Ber	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2
SIRK63-A/RK46-Ber	0.8	0.51	0.3	0.25	0.25	0.12
RK46-Ber	0.77	0.42	0.21	0.1	0.05	0.027
RK4	0.6	0.32	0.16	0.08	0.04	0.02

TABLE 3.8 – Nombres de CFL =  $c\Delta t/\Delta x$  utilisés dans les calculs partitionnés.

AR <sub>0</sub>	2	4	8	16	32	64
SIRK63-S/RK46-Ber	13	18	24	30	39	46
SIRK63-A/RK46-Ber	17	36	78	118	153	345
RK46-Ber	1.5	3.0	6.4	14	30	66
RK4	1.3	2.5	5.3	12	25	56

TABLE 3.9 – Temps CPU total, en secondes, des calculs partitionnés.

Les temps CPU totaux des simulations sont donnés dans le tableau 3.9. Ces temps obtenus sur des maillages différents ne peuvent pas être comparés directement entre eux. On définit donc le temps CPU par point, égal au temps CPU total divisé par le nombre de points de chaque maillage. La figure 3.12 montre le temps CPU par point des différentes simulations en fonction du rapport d'aspect. Les temps des calculs explicites sont très similaires et augmentent régulièrement avec le

rapport d'aspect. Celui du calcul réalisé avec le schéma de Berland *et al.* [8] passe de  $10^{-4}$ s pour  $AR_0 = 2$  à 0.004 s pour  $AR_0 = 64$ . Concernant le calcul mixte SIRK63-S/RK46-Ber, le temps par itération est de 0.001 s pour un rapport d'aspect de 2, et croît ensuite faiblement jusqu'à 0.003 s pour  $AR_0 = 64$ . On note que les temps par itération du calcul mixte SIRK63-S/RK46-Ber et du calcul explicite RK46-Ber deviennent comparables pour les rapports d'aspect supérieurs à 32. Le calcul mixte est même légèrement plus rapide pour  $AR_0 = 64$ . Enfin, le temps CPU par point du calcul mixte SIRK63-A/RK46-Ber est de 0.0015 s pour un rapport d'aspect de 2. Il augmente ensuite significativement avec le rapport d'aspect, valant 0.01 s pour  $AR_0 = 32$ . Cette valeur est d'un ordre de grandeur supérieure à celles obtenues avec les autres algorithmes d'intégration temporelle. Il apparaît donc qu'en terme de rapidité, le schéma SIRK63-A ne peut pas atteindre les performances des schémas explicites, et encore moins les dépasser, à moins de modifier en profondeur la stratégie de résolution du système implicite, ce qui n'est pas abordé ici. La suite de l'étude porte donc sur le schéma SIRK63-S uniquement.

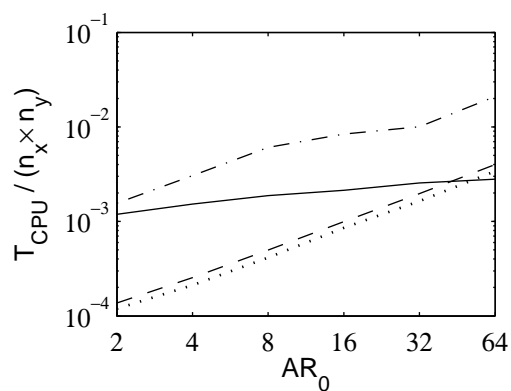


FIGURE 3.12 – Temps CPU par point, en secondes, en fonction du rapport d'aspect  $AR_0 = \Delta x / \Delta y_0$ , obtenus pour des simulations entièrement explicites avec les schémas  $- - -$  RK46-Ber de Berland *et al.*, et  $\cdots\cdots$  RK4 explicite standard, et pour des simulations mixtes avec les schémas  $- \cdot - \cdot$  RK46-Ber / SIRK63-A, et  $—$  RK46-Ber / SIRK63-S.

Le schéma SIRK63-S permet donc un gain en rapidité par rapport aux schémas explicites, si le rapport d'aspect est suffisamment élevé. On se propose de montrer que ce gain peut encore être amélioré en jouant sur la structure du maillage partitionné, notamment lorsque le nombre de points de la zone résolue de manière explicite devient important. On réalise donc de nouvelles simulations, pour des rapports d'aspect  $AR_0 = 8, 16, 32$  et  $64$ , en modifiant les maillages utilisés précédemment. La zone inférieure est inchangée, mais le nombre de points de la zone supérieure est augmenté tel que  $n_y^{sup} = k n_y^{inf}$ , avec  $k = 1, 2, 4, 6, 8$  et  $10$ . Sur ces maillages sont réalisés des calculs mixtes SIRK63-S/RK46-Ber et des calculs entièrement explicites avec le schéma de

Berland *et al.* [8]. Les nombres de CFL indiqués dans le tableau 3.8 sont utilisés.

Les temps CPU par point sont représentés en fonction du rapport d'aspect sur la figure 3.13, pour des nombres de points dans la zone supérieure  $n_y^{sup} = n_y^{inf}, 2n_y^{inf}, 4n_y^{inf}$  et  $8n_y^{inf}$ . Lorsque les deux zones contiennent le même nombre de points, on observe sur la figure 3.13(a) que le calcul mixte devient le plus rapide lorsque le rapport d'aspect est supérieur à  $AR_0 = \Delta x / \Delta y_0 = 45$ . Cette valeur devient beaucoup plus faible lorsque le nombre de points de la zone explicite augmente significativement. En effet, pour  $n_y^{sup} = 2n_y^{inf}, 4n_y^{inf}$  et  $8n_y^{inf}$ , sur les figures 3.13(b), (c) et (d), le calcul mixte est le plus rapide respectivement pour  $AR_0 \geq 32, 16$  et  $8$ .

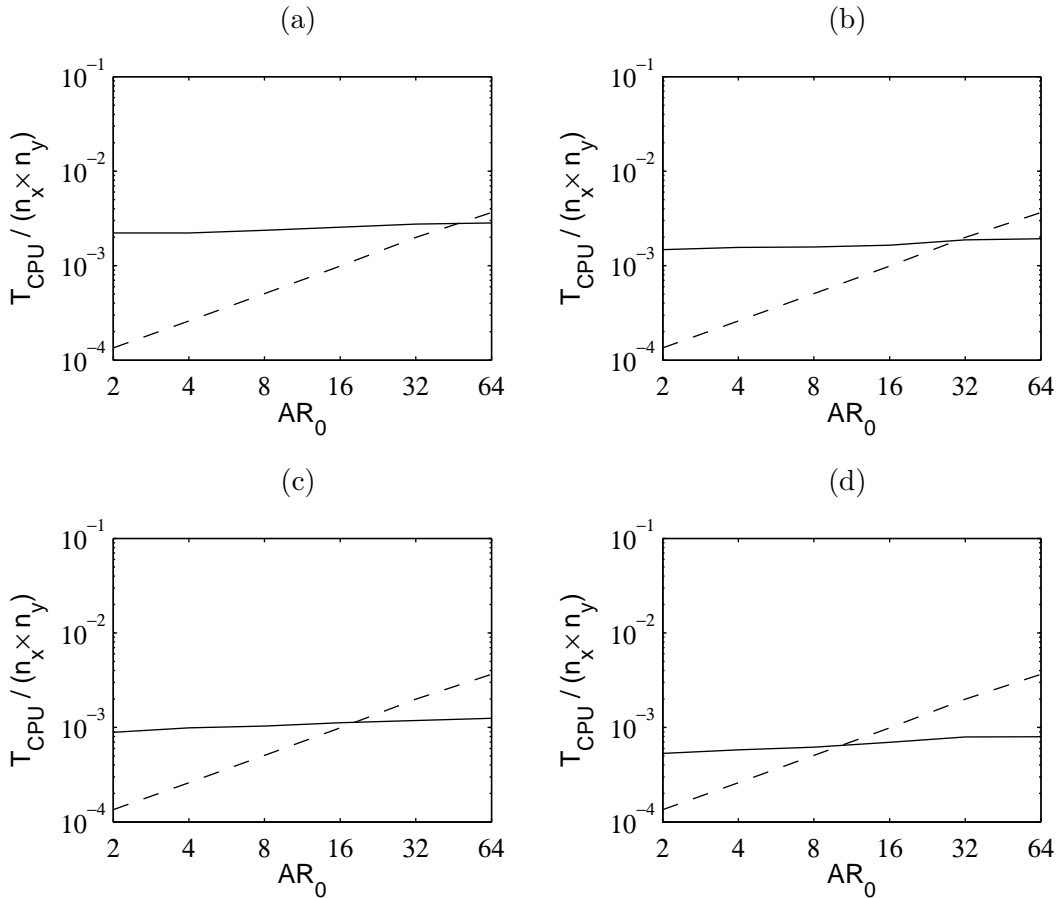


FIGURE 3.13 – Temps CPU par point en secondes, en fonction du rapport d'aspect  $AR_0$ , obtenus avec le calcul explicite utilisant le schéma RK46-Ber ( - - - ), et avec le calcul mixte utilisant les schémas RK46-Ber et SIRK63-S ( ——— ), pour un nombre de points dans la zone supérieure (a)  $n_y^{sup} = n_y^{inf}$ , (b)  $n_y^{sup} = 2n_y^{inf}$ , (c)  $n_y^{sup} = 4n_y^{inf}$ , (d)  $n_y^{sup} = 8n_y^{inf}$ .

Ceci est dû à la diminution du temps CPU par points des calculs mixtes lorsque la valeur de  $n_y^{sup}$  augmente. Ce phénomène est illustré sur la figure 3.14, qui représente les temps CPU par points en fonction de  $n_y^{sup}/n_y^{inf}$ , pour un rapport d'aspect de 16. Une diminution est en effet

observée pour les calculs mixtes lorsque  $n_y^{sup}$  augmente, tandis que les temps CPU par point des calculs explicites restent égaux à 0.001. Ces calculs étant réalisés avec un schéma unique, leur temps CPU *total*  $T_{CPU}$  augmente proportionnellement au nombre de points du maillage, donné par  $n_x \times (n_y^{inf} + n_y^{sup})$ . Par conséquent, la valeur du temps par points, égale à

$$\frac{T_{CPU}}{n_x \times (n_y^{inf} + n_y^{sup})} \quad (3.15)$$

est indépendante de  $n_y^{sup}$ . En revanche, dans les calculs mixtes, le temps CPU total est essentiellement dû à la résolution de la zone inférieure du maillage, à cause de l'application du schéma semi-implicite, très coûteuse en temps CPU. La valeur de  $T_{CPU}$  est très peu sensible au nombre de points dans la zone supérieure. Le temps CPU par point diminue alors lorsque  $n_y^{sup}$  augmente.

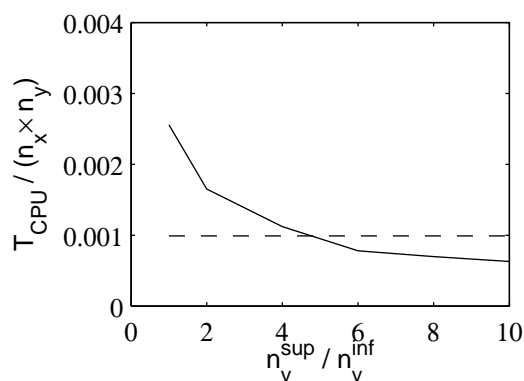


FIGURE 3.14 – Temps CPU par point, en secondes, en fonction du rapport  $n_y^{sup}/n_y^{inf}$ , et pour un rapport d'aspect  $AR_0 = 16$ , obtenus avec le calcul explicite utilisant le schéma RK46-Ber ( - - - ), et avec le calcul mixte utilisant les schémas RK46-Ber et SIRK63-S ( — ).

### 3.4 Conclusion

Les cas test mis en œuvre dans ce chapitre ont permis d'estimer la stabilité et la précision des algorithmes développés dans le chapitre précédent. Il a été observé que les schémas SIRK63 permettent de résoudre les équations d'Euler sur des maillages fortement raffinés dans une direction sans diminuer significativement le pas de temps. L'erreur numérique a été évaluée sur un cas de propagation d'une impulsion acoustique, et révèle que la précision de l'algorithme SIRK63-S est équivalente à celle du schéma de RK4 standard. Le schéma SIRK63-A est encore plus précis, car il présente des taux d'erreur d'un ordre de grandeur inférieurs à ceux du schéma de RK4.

Un problème mettant en jeu des effets visqueux en présence d'une paroi a ensuite été consi-

déré. Des simulations dans lesquelles les termes visqueux sont intégrés explicitement, et les termes convectifs sont intégrés avec le schéma SIRK63-S, ont été réalisées. Ces simulations ont notamment montré que l'intégration explicite des termes visqueux reste stable malgré l'emploi de pas de temps importants induit par l'algorithme semi-implicite.

Des estimations de temps CPU ont enfin été réalisées sur des simulations de cas acoustiques. Les résultats montrent que le coût important lié à l'inversion des systèmes linéaires pénalise fortement les algorithmes SIRK63 par rapport aux algorithmes explicites. Une technique basée sur un partitionnement du maillage permet toutefois de tirer parti de la forte stabilité du schéma SIRK63-S. Cette technique consiste à appliquer le schéma semi-implicite à un nombre limité de points de maillage, le reste du domaine étant traité par un algorithme explicite. Des simulations ont ainsi été effectuées sur des domaines contenant une zone où le maillage est fortement raffiné dans une direction. Lorsque le schéma SIRK63-S est employé dans cette zone, et que le reste du domaine est résolu avec le schéma de Berland *et al.* [8], le calcul peut se révéler plus rapide qu'une simulation utilisant uniquement un algorithme explicite. Le temps CPU est par exemple réduit d'un facteur 5 lorsque le nombre de points dans la zone résolue avec le schéma SIRK63-S représente 10% du nombre de points total du maillage, et pour un rapport d'aspect de 64.

A noter également qu'une estimation du besoin en espace mémoire des algorithmes semi-implicites sur des maillages partitionnés est effectuée dans l'annexe B.

## 4 Simulation des grandes échelles d'un canal plan

---

La mise en œuvre de simulations compressibles d'un canal plan turbulent est présentée dans ce chapitre. Après une description des principaux paramètres de calcul, une étude de convergence en maillage est réalisée en considérant un cas de canal plan à un nombre de Reynolds  $Re_\tau = 300$ . Ce cas est également utilisé pour comparer les performances du schéma SIRK63-S développé dans les deux chapitres précédents à celles du schéma explicite de Berland *et al.* [8]. L'effet de la parallélisation sur la vitesse de l'algorithme semi-implicite et sur celle de l'algorithme explicite est examiné. Enfin, des simulations de canal plan sont réalisées à plusieurs nombres de Reynolds et nombres de Mach. Après comparaison des résultats à des données issues de la littérature, une analyse de quelques grandeurs statistiques est présentée, afin notamment de déterminer l'influence des dimensions du domaine de calcul sur l'écoulement.

### 4.1 Paramètres et méthodes

#### 4.1.1 Géométrie et nombres sans dimension

La géométrie du canal plan, représentée sur la figure 4.1, est définie par la distance entre les deux parois parallèles, égale à  $2h$ . Les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  correspondent respectivement à la direction de l'écoulement, à la direction normale à la paroi et à la direction transverse, et seront parfois associées aux termes "longueur", "hauteur" et "largeur".

Pour toutes les simulations de canal plan présentées dans ce manuscrit, les dimensions du domaine de calcul sont  $L_x \times L_y \times L_z = 12h \times 2h \times 6h$ . Elles sont égales à celles utilisées dans les simulations numériques directes de Hu *et al.* [55]. L'origine du système de coordonnées est prise à l'entrée du canal, au niveau de la paroi inférieure et à mi-largeur, de sorte que  $x \in [0, 12h]$ ,



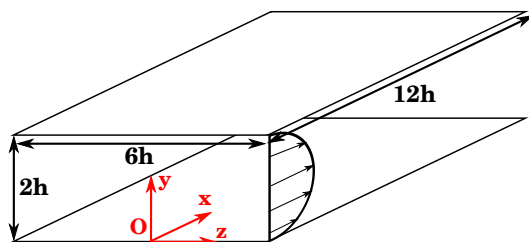


FIGURE 4.1 – Géométrie du canal plan.

$y \in [0, 2h]$  et  $z \in [-3h, 3h]$ . Les parois sont donc situées en  $y = 0$  et  $y = 2h$ .

Un écoulement turbulent compressible de canal plan est caractérisé par deux nombres sans dimension : le nombre de Reynolds de frottement et le nombre Mach. Le nombre de Mach  $M = U_0/c$  est défini à partir de la vitesse au centre du canal  $U_0$  et de la vitesse du son  $c$ . Le nombre de Reynolds de frottement  $Re_\tau = u_\tau h/\nu$  est construit avec la vitesse de frottement  $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ , où  $\tau_w$  est la tension visqueuse pariétale moyenne,  $\rho$  est la densité du fluide, et  $\nu$  sa viscosité cinématique. Il n'est pas évident d'obtenir à la fois un nombre de Mach et un nombre de Reynolds voulus, car les vitesses  $U_0$  et  $u_\tau$  ne sont pas indépendantes. En pratique, on fixe les valeurs de deux paramètres qui déterminent la dynamique de l'écoulement : la hauteur du canal et le gradient de pression moyen dans la direction de l'écoulement. Ce gradient est imposé numériquement à l'aide d'une force volumique  $\rho f$  que l'on ajoute aux équations de Navier-Stokes sous la forme d'un terme source :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{Fe}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Ge}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{He}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{Fv}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Gv}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{Hv}}{\partial z} = \mathbf{S} \quad (4.1)$$

où

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \end{pmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho f \\ 0 \\ 0 \\ \rho f u \end{pmatrix}$$

et où  $\mathbf{Fe}$ ,  $\mathbf{Ge}$ ,  $\mathbf{He}$  sont les flux Eulériens et  $\mathbf{Fv}$ ,  $\mathbf{Gv}$ ,  $\mathbf{Hv}$  sont les flux visqueux. On peut alors montrer que la tension visqueuse pariétale moyenne est fixée par le gradient de pression, et vaut  $\tau_w = \rho f h$  [5]. Le nombre de Reynolds vaut alors :

$$Re_\tau = \frac{h}{\nu} u_\tau = \frac{h}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \frac{\sqrt{f h^3}}{\nu} \quad (4.2)$$

et le nombre de Mach est donné par :

$$M = \frac{U_0}{c} = \frac{U_0^+ u_\tau}{c} = \frac{U_0^+}{c} \sqrt{f h} \quad (4.3)$$

La valeur de  $U_0^+ = U_0/u_\tau$  dépend du nombre de Reynolds. On l'estime *a priori* à partir de la littérature. Elle vaut environ 20 pour des nombres de Reynolds compris entre 360 et 1000, d'après les DNS de Hu *et al.* [55]. Ainsi, à l'aide des équations (4.2) et (4.3), on détermine la valeur des paramètres  $f$  et  $h$  permettant d'obtenir les nombres sans dimensions  $Re_\tau$  et  $M$  voulus.

### 4.1.2 Maillage

Le domaine est discrétisé par un maillage dont les tailles de maille dans les directions  $x$  et  $z$  sont constantes, et sont notées respectivement  $\Delta x$  et  $\Delta z$ . Dans la direction  $y$ , la taille de maille à la paroi est fixée à  $\Delta y_w$ , puis augmente d'un facteur  $r$  à mesure que l'on s'éloigne de la paroi jusqu'à ce qu'elle atteigne une valeur  $\Delta y_c$ . Elle est ensuite constante jusqu'au centre du canal. Le maillage est symétrique par rapport au plan  $y = h$ . Les valeurs que l'on doit imposer aux tailles de maille dépendent de la vitesse de frottement, ce qui fait l'objet d'une étude approfondie dans le paragraphe 4.2. Les nombres de points dans les directions  $x$  et  $z$  sont respectivement égaux à  $n_x = L_x/\Delta x$  et  $n_z = L_z/\Delta z$ . Le nombre de points  $n_y$  dans la direction  $y$  est fonction du cas considéré.

### 4.1.3 Conditions initiales

Au temps initial  $t = 0$ , on impose dans tout le domaine un champ de vitesse dont les composantes dans les directions  $y$  et  $z$  sont nulles. Pour la composante longitudinale, un profil de couche limite laminaire de Blasius est imposé près des parois. Pour la paroi inférieure, le profil de Blasius s'écrit :

$$\frac{u(y/\delta_{ini})}{U_0} = 2 \frac{y}{\delta_{ini}} - 2 \left( \frac{y}{\delta_{ini}} \right)^3 + \left( \frac{y}{\delta_{ini}} \right)^4 \quad (4.4)$$

où  $\delta_{ini} = 0.4h$  est l'épaisseur de la couche limite. En dehors des couches limites, la vitesse initiale est égale à  $U_0$ . Ce profil de vitesse est représenté sur la figure 4.2 en fonction de la distance à la paroi. La pression statique et la température sont uniformes dans tout le domaine, avec  $p_0 = 10^5 Pa$  et  $T_0 = 293 K$ .

La transition vers un écoulement turbulent est provoquée en ajoutant des fluctuations de vitesse au profil de Blasius, selon une méthode développée par Bogey *et al.* [16] pour les écoulements en conduite. Ces fluctuations sont construites de telle sorte que leur divergence est nulle,

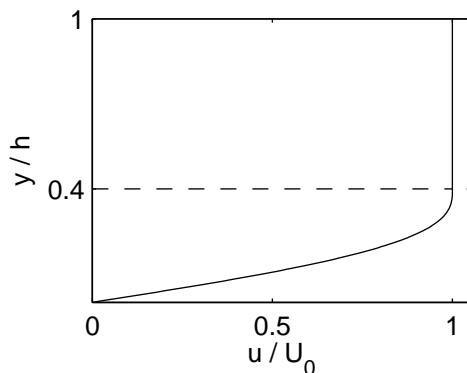


FIGURE 4.2 – Profil imposé à la composante longitudinale du champ de vitesse initial ; la vitesse  $u/U_0$  est représentée en fonction de la distance à la paroi  $y/h$ , avec  $U_0$  la vitesse au centre du canal et  $h$  la demi-hauteur du canal ; la vitesse suit un profil de Blasius entre  $y = 0$  et  $0.4h$ .

ce qui permet de minimiser leur rayonnement acoustique parasite. Les composantes de vitesse sont modifiées à chaque itération temporelle de la manière suivante :

$$\begin{cases} u = u + \alpha U_0 \epsilon(z, t) u^{vortex} \\ v = v + \alpha U_0 \epsilon(z, t) v^{vortex} \\ w = w \end{cases} \quad (4.5)$$

où  $\epsilon(z, t) \in [-1, 1]$  est une fonction aléatoire,  $\alpha = 0.1$ , et  $u^{vortex}$  et  $v^{vortex}$  sont les composantes d'un anneau tourbillonnaire unitaire, définies par :

$$\begin{cases} u^{vortex} = \frac{y - y_t}{b} \exp\left(-\frac{\ln(2)r^2}{b^2}\right) \\ v^{vortex} = \frac{x - x_t}{b} \exp\left(-\frac{\ln(2)r^2}{b^2}\right) \end{cases} \quad (4.6)$$

où  $r = \sqrt{(x - x_t)^2 + (y - y_t)^2}$ ,  $b = \Delta x$ , et  $x_t$  et  $y_t$  sont les coordonnées du centre de l'anneau tourbillonnaire. Dans ce travail, des anneaux tourbillonnaires décorrélés entre eux sont implémentés en chaque point de maillage dans la direction  $z$ , comme représenté sur la figure 4.3. Le centre de ces anneaux est situé à une distance  $\delta_{ini}/2$  de la paroi, de sorte que  $y_t = \delta_{ini}/2$  pour la paroi inférieure et  $y_t = 2h - \delta_{ini}/2$  pour la paroi supérieure. Les anneaux sont implémentés en plusieurs positions longitudinales espacées de  $10\Delta x$ , ce qui donne  $x_t = k \times 10\Delta x$  avec  $k = [1, N_x/10]$ . Les perturbations sont appliquées pendant les 1000 premières itérations temporelles.

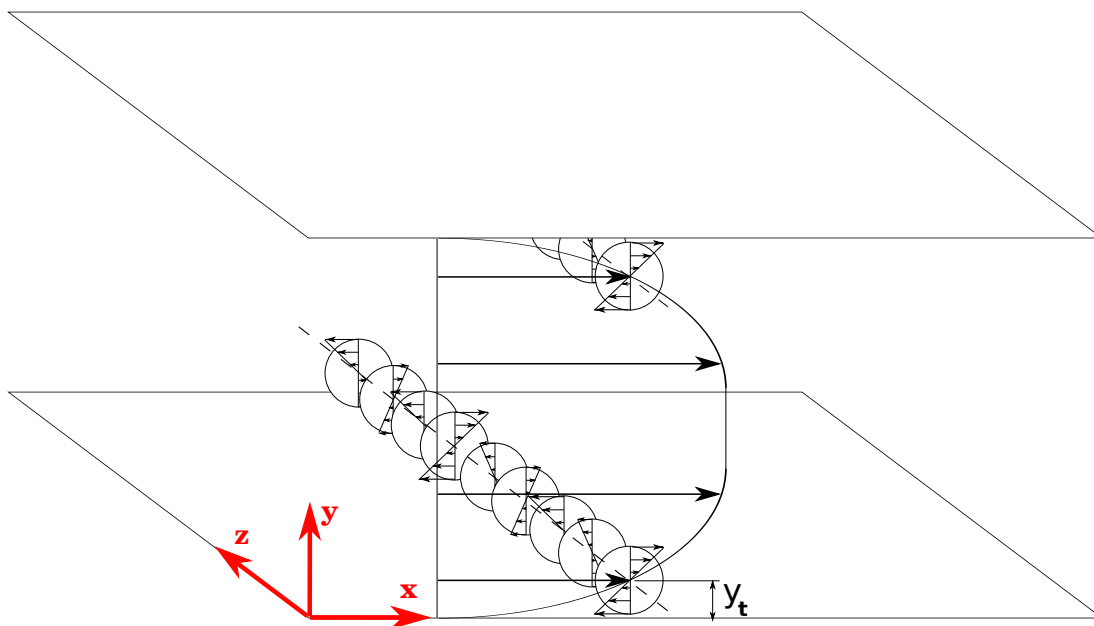


FIGURE 4.3 – Perturbations imposées au profil de vitesse pour forcer la transition de l’écoulement. Les vitesses de rotation des anneaux tourbillonnaires sont distribuées aléatoirement dans la direction  $z$ .

#### 4.1.4 Méthodes numériques

Suivant les recommandations énoncées au paragraphe 1.3.3.3, les équations de Navier-Stokes sont résolues à l’aide de méthodes numériques optimisées pour assurer une faible dissipation et une faible dispersion des ondes acoustiques.

Les dérivées spatiales des flux Eulériens sont calculées à l’aide du schéma explicite aux différences finies centrées sur 11 points d’ordre 4 de Bogey *et al.* [13]. Pour les flux visqueux, un schéma standard sur 7 points d’ordre 6 est utilisé. Des conditions de périodicité sont appliquées aux frontières du domaine définies par  $x = 0$  et  $12h$ , et  $z = \pm 3h$ , permettant l’utilisation des schémas centrés pour les points proches de ces frontières. En revanche, pour les points proches des parois, les schémas décentrés de Berland *et al.* [9] sont implémentés. Une condition de non glissement  $(u, v, w) = (0, 0, 0)$  est imposée aux parois.

Un filtrage de relaxation est appliqué explicitement aux variables à chaque itération pour supprimer les oscillations maille-à-maille qui parasitent le calcul, et pour prendre en compte l’effet dissipatif des échelles de sous-maille. Le filtre optimisé sur 11 points d’ordre 6 de Bogey *et al.* [15] est implémenté sur l’ensemble du maillage, excepté près des parois où les filtres décentrés de Berland *et al.* [9] sont utilisés. On rappelle que pour une quantité  $f$  quelconque, le filtrage

dans une direction  $x$  donnée est défini par :

$$f^d(x_i) = f(x_i) - \sigma \sum_{j=-p}^q d_j f(x_i + j\Delta x) \quad (4.7)$$

où  $f^d$  est la quantité filtrée,  $(d_j)_{-p \leq j \leq q}$  sont les coefficients du filtre, et  $\sigma$  est la force du filtrage, comprise entre 0 et 1. Dans ces travaux, on fixe  $\sigma = 1$ .

L'intégration temporelle des flux Euleriens est réalisée, selon le cas, par l'algorithme de Runge-Kutta explicite d'ordre 4 à 6 sous-étapes de Berland *et al.* [8], ou par l'algorithme de Runge-Kutta semi-implicite SIRK63-S développé dans le chapitre 2. Les détails concernant l'implémentation du schéma semi-implicite sont donnés dans la section 4.3. Les flux visqueux sont intégrés par un schéma d'Euler explicite. Tous les calculs sont réalisés sur un ordinateur à mémoire partagée SGI ALTIX UV 1000.

## 4.2 Convergence en maillage

### 4.2.1 Rappel sur la résolution spatiale

Dans l'étude bibliographique du chapitre 1, l'importance de reproduire correctement les petites échelles de la turbulence de paroi a été soulignée, car celles-ci jouent un rôle important concernant la dynamique de l'ensemble de l'écoulement. Le calcul de ces échelles est particulièrement sensible aux tailles de maille à la paroi, car ces dernières déterminent les plus petites structures capturées par le maillage. La précision d'un maillage doit donc s'évaluer en exprimant les tailles de maille en échelles internes :  $\Delta x^+ = \Delta x u_\tau / \nu$ ,  $\Delta y^+ = \Delta y u_\tau / \nu$  et  $\Delta z^+ = \Delta z u_\tau / \nu$ . Dans la littérature, une certaine disparité existe entre les tailles de maille utilisées pour les LES, celles-ci variant entre 25 et 35 pour  $\Delta x^+$ , et entre 10 et 15 pour  $\Delta z^+$ , comme mentionné dans le paragraphe 1.3.3.

Dans ce travail, on mène donc une étude de la convergence en maillage sur un cas de canal plan à  $M = 0.5$  et  $Re_\tau = 300$  simulé à l'aide des méthodes numériques décrites ci-dessus, l'intégration temporelle des flux Euleriens étant en particulier réalisée avec l'algorithme explicite RK46-Ber.

### 4.2.2 Définition des maillages

La convergence en maillage est étudiée séparément pour les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Pour chaque direction, on construit plusieurs maillages en faisant décroître la taille de maille dans la direction considérée. Ces maillages sont notés Xgrid, Ygrid et Zgrid respectivement pour les directions  $x$ ,  $y$

et  $z$ . Les paramètres des différents maillages sont fournis dans le tableau 4.1. Dans les maillages Xgrid, la taille de maille varie entre  $\Delta x^+ = 45$  et 15 dans la direction  $x$ , tandis qu'elle est fixée à  $\Delta z^+ = 7.5$  dans la direction  $z$ . Dans la direction  $y$ , la taille de maille est fixée à  $\Delta y_w^+ = 0.95$  à la paroi, et à  $\Delta y_c^+ = 15$  au centre du canal. Dans les maillages Zgrid,  $\Delta z^+$  varie entre 15 et 5, et  $\Delta x^+ = 15$ ,  $\Delta y_w^+ = 0.95$  et  $\Delta y_c^+ = 15$  sont fixées. Enfin, dans les maillages Ygrid, la taille de maille à la paroi  $\Delta y_w^+$  est diminuée de 3.5 à 0.47, tandis que le taux d'expansion des mailles dans la direction  $y$  est légèrement augmenté. Au milieu du canal, on maintient  $\Delta y_c^+ = 15$  constante. Dans les autres directions, on fixe  $\Delta x^+ = 15$  et  $\Delta z^+ = 7.5$ .

Maillages	$\Delta x^+$	$\Delta z^+$	$\Delta y_c^+$	$\Delta y_w^+$	$r$ (%)
Ygrid1	15	7.5	15	<b>3.7</b>	3.5
Ygrid2	15	7.5	15	<b>1.9</b>	4.0
Ygrid3	15	7.5	15	<b>0.95</b>	4.4
Ygrid4	15	7.5	15	<b>0.47</b>	4.5
Zgrid1	15	<b>15</b>	15	0.95	4.4
Zgrid2	15	<b>12.5</b>	15	0.95	4.4
Zgrid3	15	<b>10</b>	15	0.95	4.4
Zgrid4	15	<b>7.5</b>	15	0.95	4.4
Zgrid5	15	<b>5</b>	15	0.95	4.4
Xgrid1	<b>45</b>	7.5	15	0.95	4.4
Xgrid2	<b>35</b>	7.5	15	0.95	4.4
Xgrid3	<b>30</b>	7.5	15	0.95	4.4
Xgrid4	<b>25</b>	7.5	15	0.95	4.4
Xgrid5	<b>15</b>	7.5	15	0.95	4.4
Viazzo <i>et al.</i> [96]	31.4	15.7	51.84	0.88	
Gloerfelt & Berland [41]	37	14.7		0.98	2
Schlatter <i>et al.</i> [78]	25.3	10.8	14.2	<1	

TABLE 4.1 – Paramètres des maillages utilisés pour l'étude de convergence en maillage, et pour des LES de la littérature [41, 78, 96] ; les tailles de maille sont normalisées par l'échelle de longueur visqueuse ;  $\Delta x^+$  et  $\Delta z^+$  : tailles de maille respectivement dans les directions  $x$  et  $z$  ;  $\Delta y_w^+$  et  $\Delta y_c^+$  : tailles de maille dans la direction  $y$ , respectivement à la paroi et au centre du canal ;  $r$  : taux d'expansion des mailles dans la direction  $y$ .

Les dimensions du domaine étant constantes, le nombre de points varie entre les différents maillages, avec  $87 \leq n_x \leq 257$ ,  $85 \leq n_y \leq 161$  et  $129 \leq n_z \leq 385$ . Les tailles de maille issues des LES de canal de Viazzo *et al.* [96], et de couche limite de Gloerfelt & Berland [41] et de Schlatter *et al.* [78] sont également données pour comparaison. En ce qui concerne l'intégration temporelle, le pas de temps est fixé tel que  $CFL_y = c\Delta t/c\Delta y_w \approx 0.8$ . Il vaut  $0.001h/U_0$  pour Xgrid et Zgrid.

### 4.2.3 Résultats

La convergence en maillage est discutée à l'aide des profils de vitesse longitudinale moyenne  $U^+$  et fluctuante  $u_{rms}^+ = \sqrt{u'^2}/u_\tau$  représentés en fonction de la distance à la paroi  $y^+$ . La figure 4.4 montre les résultats obtenus avec les maillages Ygrid, dans lesquels  $\Delta y_w^+$  varie entre 3.7 et 0.47. Les profils issus des calculs Ygrid1, Ygrid2 et Ygrid3 sont différents, tandis que ceux issus des calculs Ygrid3 et Ygrid4 sont très similaires. La convergence en maillage est donc quasiment atteinte pour le maillage Ygrid3, c'est-à-dire pour  $\Delta y_w^+ = 0.95$ . On note que les simulations effectuées sur les maillages plus grossiers ont tendance à sous-estimer  $U^+$  et  $u_{rms}^+$ . Le pic de vitesse fluctuante, sur la figure 4.4(a), est notamment très sensible à  $\Delta y_w^+$ , soulignant l'importance de la position du premier point de maillage dans la direction  $y$ .

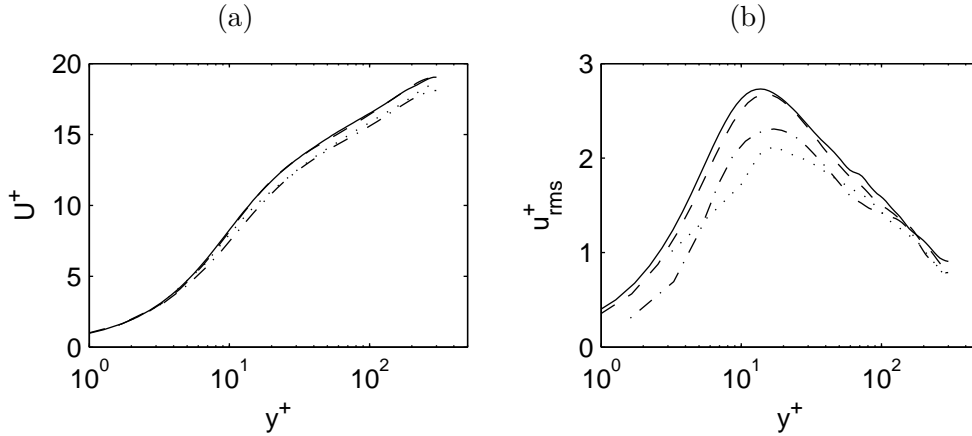


FIGURE 4.4 – Convergence en maillage dans la direction  $y$  : (a) vitesse moyenne, (b) vitesse fluctuante, pour  $\cdots\cdots$  Ygrid1 ( $\Delta y_w^+ = 3.7$ ),  $-\cdot-\cdot-$  Ygrid2 ( $\Delta y_w^+ = 1.9$ ),  $- - -$  Ygrid3 ( $\Delta y_w^+ = 0.95$ ),  $—$  Ygrid4 ( $\Delta y_w^+ = 0.47$ ).

La figure 4.5 présente les profils de vitesse issus de la LES avec les maillages Zgrid, dans lesquels  $\Delta z^+$  varie entre 15 et 5. Les profils de vitesse fluctuante, représentés sur la figure 4.5(b), sont très proches pour les calculs Zgrid3, Zgrid4 et Zgrid5, c'est-à-dire pour  $\Delta z^+ \leq 10$ . Pour les profils de vitesse moyenne donnés sur la figure 4.5(a), de légères disparités subsistent dans la zone externe de la couche limite, mais l'accord est satisfaisant pour  $y^+ < 100$ . La convergence est donc pratiquement atteinte pour le maillage Zgrid3, avec  $\Delta z^+ = 10$ . Par ailleurs, dans les simulations Zgrid1 et Zgrid2 où la convergence en maillage n'est pas encore atteinte, la vitesse moyenne et la vitesse fluctuante sont surestimées, à l'inverse de ce qui est observé avec les maillages Ygrid, sur la figure 4.4.

Les résultats obtenus avec les simulations Xgrid, dans lesquelles  $\Delta x^+$  varie entre 45 et 15, sont représentés sur la figure 4.6. Les profils de vitesse moyenne et de vitesse fluctuante issus

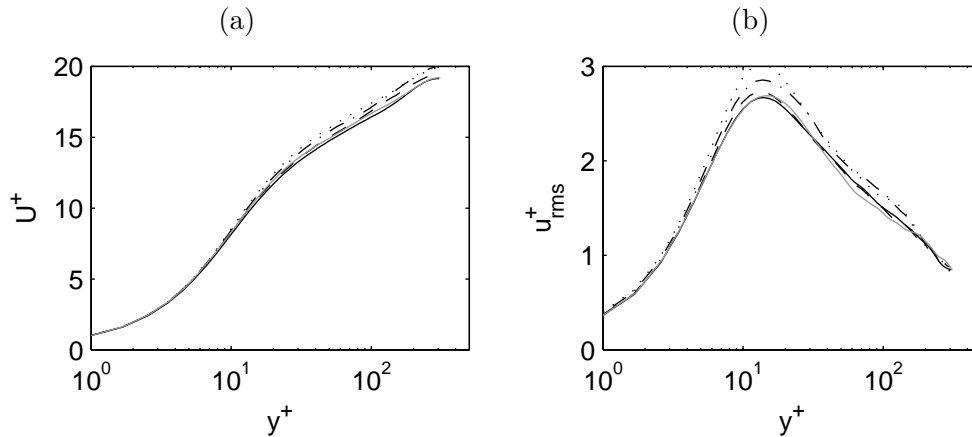


FIGURE 4.5 – Convergence en maillage dans la direction  $z$  : (a) vitesse moyenne, (b) vitesse fluctuante, pour  $\cdots\cdots$  Zgrid1 ( $\Delta z^+ = 15$ ),  $-\cdot-\cdot-$  Zgrid2 ( $\Delta z^+ = 12.5$ ),  $- - -$  Zgrid3 ( $\Delta z^+ = 10$ ),  $—$  Zgrid4 ( $\Delta z^+ = 7.5$ ),  $—$  Zgrid5 ( $\Delta z^+ = 5$ ).

des calculs Xgrid3, Xgrid4 et Xgrid5 sont proches. La convergence semble donc atteinte pour le maillage Xgrid3, avec  $\Delta x^+ = 30$ . Par ailleurs, la taille de maille dans les maillages Xgrid couvre une gamme de valeurs plus importante que dans les maillages Zgrid et Ygrid. Malgré cela, les disparités entre les profils de vitesse sont moins significatives. La précision du calcul semble donc moins sensible à  $\Delta x^+$  qu'à  $\Delta y_w^+$  et  $\Delta z^+$ .

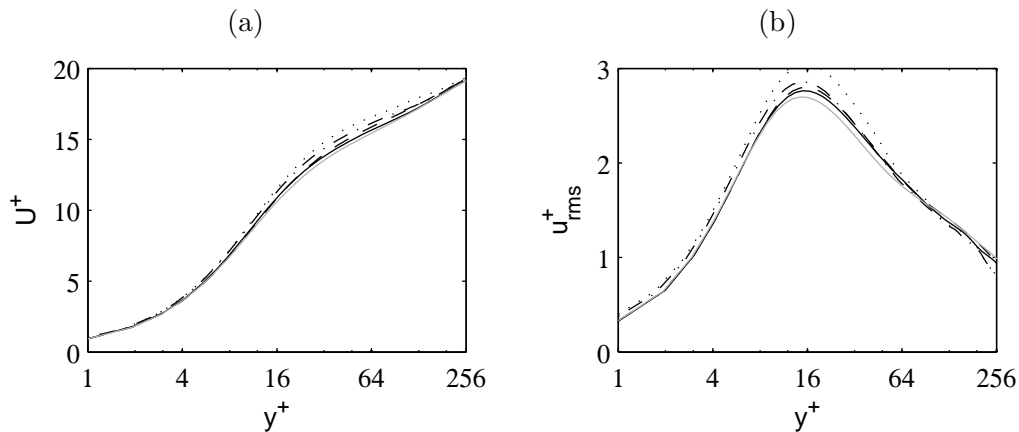


FIGURE 4.6 – Convergence en maillage dans la direction  $x$  : (a) vitesse moyenne, (b) vitesse fluctuante, pour  $\cdots\cdots$  Xgrid1 ( $\Delta x^+ = 45$ ),  $-\cdot-\cdot-$  Xgrid2 ( $\Delta x^+ = 35$ ),  $- - -$  Xgrid3 ( $\Delta x^+ = 30$ ),  $—$  Xgrid4 ( $\Delta x^+ = 25$ ),  $—$  Xgrid5 ( $\Delta x^+ = 15$ ).

A partir des résultats de l'étude de convergence en maillage, on fixe la résolution minimale du maillage suivante :  $\Delta x^+ = 30$ ,  $\Delta y_w^+ = 0.95$  et  $\Delta z^+ = 10$ .



## 4.3 Intégration temporelle

L'algorithme d'intégration temporelle SIRK63-S, développé dans le chapitre 2, est maintenant appliqué à des simulations de canal plan. Un premier calcul de validation est tout d'abord réalisé, et ses résultats sont comparés à ceux issus d'un calcul de référence, effectué avec le schéma explicite de Berland *et al.* [8]. On s'intéresse ensuite à la parallélisation du calcul, et aux vitesses de calcul obtenues avec les algorithmes SIRK63-S et RK46-Ber.

### 4.3.1 Validation du schéma semi-implicite

Un canal plan à  $Re_\tau = 300$  et  $M = 0.5$  est simulé avec le schéma SIRK63-S. La discrétisation spatiale est effectuée à l'aide du maillage Ygrid3 défini dans le tableau 4.1. Le schéma SIRK63-S est implémenté comme précédemment pour les cas test 2-D décrits dans le chapitre 3. Les termes convectifs impliquant des dérivées dans la direction  $y$  sont intégrés temporellement par la partie implicite du schéma, tandis que la partie explicite traite les termes convectifs contenant des dérivées dans les directions  $x$  et  $z$ . L'algorithme semi-implicite n'est appliqué que dans les régions où  $\Delta y < \Delta z$ , c'est-à-dire près de la paroi inférieure, pour  $y \leq 0.45h$ , et près de la paroi supérieure, pour  $2h - y \leq 0.45h$ . En dehors de ces régions, l'intégration temporelle des termes convectifs est effectuée par le schéma explicite. Cette méthode, appelée partitionnement du domaine, permet de réduire significativement le temps CPU, comme montré dans le chapitre 3. Le choix du pas de temps doit garantir la stabilité de la partie explicite du schéma SIRK63-S, qui assure l'intégration temporelle dans les directions  $x$  et  $z$ . On spécifie  $\Delta t U_0/h = 0.012$ , de sorte que  $CFL_z = c\Delta t/\Delta z = 1$  et  $CFL_x = c\Delta t/\Delta x = 1/2$ . Le nombre de CFL maximum est atteint à la paroi, dans la direction  $y$  traitée par la partie implicite du schéma, et vaut  $CFL_y = c\Delta t/\Delta y_w = 8.7$ .

Les résultats de cette simulation sont comparés à ceux issus d'une simulation de référence, réalisée avec le schéma explicite RK46-Ber. Dans cette simulation, le pas de temps vaut  $\Delta t U_0/h = 0.0011$ , ce qui donne un nombre de CFL à la paroi égal à  $CFL_y = c\Delta t/\Delta y_w = 0.8$ . Les profils de vitesse moyenne et de vitesse fluctuante obtenus sur les deux calculs sont quasiment superposés sur la figure 4.7. Cela signifie en particulier que, dans la simulation utilisant l'algorithme SIRK63-S, les plus petites échelles de temps de la turbulence sont bien résolues malgré le pas de temps important. On peut d'ailleurs le vérifier en exprimant  $\Delta t$  en échelles visqueuses, qui vaut alors  $\Delta t^+ = \Delta t u_\tau^2/\nu \approx 0.15$  dans ce cas. Le pas de temps est donc environ 6 fois plus petit que l'échelle de temps visqueuse.

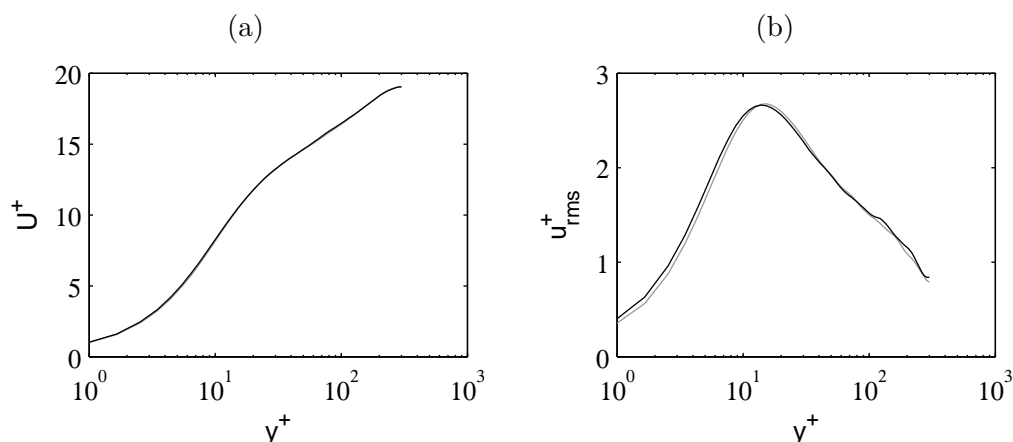


FIGURE 4.7 – Validation de l’intégration temporelle semi-implicite sur un cas de canal plan à  $Re_\tau = 300$  et  $M = 0.5$  : (a) vitesse moyenne, et (b) vitesse fluctuante obtenues avec les algorithmes — SIRK63, et - - RK46-Ber.

### 4.3.2 Etude de la parallélisation

L’utilisation d’un schéma semi-implicite ne présente un intérêt que si cela permet de réduire le temps CPU par rapport à un calcul explicite. Dans le chapitre 3, l’importance du rapport d’aspect à la paroi et du partitionnement du maillage sur la vitesse de l’algorithme SIRK63-S a été mise en évidence. Un calcul de canal plan laisse peu de liberté quant au choix de la valeur de ces paramètres, en particulier pour le rapport d’aspect, car la résolution du maillage à la paroi impose  $\Delta z/\Delta y_w \approx 10$ . En revanche, la parallélisation du calcul est un moyen efficace pour augmenter la vitesse d’exécution de la simulation. La parallélisation consiste à diviser en plusieurs tâches les instructions contenues dans le code de calcul. Ces tâches sont alors effectuées simultanément par plusieurs processeurs. Dans l’idéal, le temps CPU du calcul est réduit d’un facteur égal au nombre de processeurs. En pratique, cette réduction dépend de la façon dont sont programmés les algorithmes impliqués dans la parallélisation.

#### 4.3.2.1 Démarche suivie

L’influence de la parallélisation sur le temps CPU de simulations effectuées avec le schéma SIRK63-S et avec le schéma RK46-Ber est étudiée. Pour cela, on considère un écoulement de canal plan à  $Re_\tau = 600$ , discrétisé sur un maillage contenant 19 millions de points, avec  $n_x = 285$ ,  $n_y = 185$  et  $n_z = 355$ . Les tailles de maille dans les directions  $x$  et  $z$  sont respectivement  $\Delta x^+ = 25$  et  $\Delta z^+ = 10$ . Dans la direction  $y$ , la taille de maille est égale à  $\Delta y_w^+ = 0.97$  à la paroi, et à  $\Delta y_c^+ = 10$  au centre du canal.

Les calculs sont parallélisés dans la direction  $z$  avec la bibliothèque OpenMP. Le nombre de processeurs est noté  $n_{cpu}$ . Chaque processeur ne traite qu'une partie du domaine de calcul, appelée sous-domaine, contenant  $n_x \times n_y \times n_z^{SD}$  points, où  $n_z^{SD}$  est le nombre de points du sous-domaine dans la direction  $z$ , égal à  $n_z/n_{cpu}$  arrondi à l'entier supérieur.

Deux séries de simulations sont réalisées : des calculs explicites utilisant le schéma RK46-Ber, et des calculs semi-implicites utilisant le schéma SIRK63-S avec un partitionnement du maillage, comme décrit dans le paragraphe 4.3.1. On fait varier le nombre de processeurs entre 1, 6, 10, 12 et 16 pour les calculs explicites, et entre 1, 6, 12, 16 et 24 pour les calculs semi-implicites. Pour chaque cas, on choisit un pas de temps proche de la valeur maximale assurant la stabilité. On impose donc  $c\Delta t/\Delta y_w = 1$  pour les calculs explicites, et  $c\Delta t/\Delta z = 1$  pour les calculs semi-implicites, ce qui donne respectivement  $\Delta t U_0/h = 8.1 \times 10^{-4}$  et  $8.5 \times 10^{-3}$ . Les simulations sont effectuées sur cent itérations. Un temps CPU moyen par itération  $T_{cpu}^{ité}(n_{cpu})$ , dépendant du nombre de processeurs, est calculé pour chaque simulation. La grandeur permettant de quantifier la réduction du temps CPU est le facteur d'accélération, défini par  $T_{cpu}^{ité}(1)/T_{cpu}^{ité}(n_{cpu})$ .

### 4.3.2.2 Comparaison entre les algorithmes

La figure 4.8(a) représente le facteur d'accélération en fonction du nombre de processeurs pour chacune des simulations. La ligne pointillée représente le cas idéal, où le facteur d'accélération est égal au nombre de processeurs. Les calculs semi-implicites présentent un facteur d'accélération assez proche du cas idéal jusqu'à  $n_{cpu} = 12$ . Ensuite, celui-ci augmente plus doucement jusqu'à un maximum égal à 10.5, atteint pour  $n_{cpu} = 16$ , puis il diminue légèrement. Le facteur d'accélération des calculs explicites est plus faible que celui des calculs semi-implicites. Plus précisément, il augmente linéairement tant que le nombre de processeurs est inférieur à 10, puis est constant et égal à 6 jusqu'à  $n_{cpu} = 12$ , et enfin diminue. On voit donc que la parallélisation est plus favorable à l'algorithme semi-implicite.

On détermine à présent, à l'aide des temps CPU par itération, le temps CPU nécessaire pour effectuer une simulation sur une durée physique de  $10^{-7}$  s, qui est donné par  $T_{cpu}(n_{cpu}) = T_{cpu}^{ité}(n_{cpu}) \times 10^{-7}/\Delta t$ . Ce temps CPU est représenté sur la figure 4.8(b) pour chaque algorithme, en fonction du nombre de processeurs, pour un axe vertical en échelle logarithmique. Il apparaît que l'algorithme semi-implicite devient plus rapide que l'algorithme explicite lorsque le nombre de processeurs dépasse 5. Le temps CPU atteint une valeur minimale de 133 s avec l'algorithme explicite, et de 93 s avec l'algorithme semi-implicite. Le schéma SIRK63-S peut donc permettre un gain de temps maximal d'environ 40% par rapport au schéma de Berland *et al.* [8] pour le

cas étudié ici.

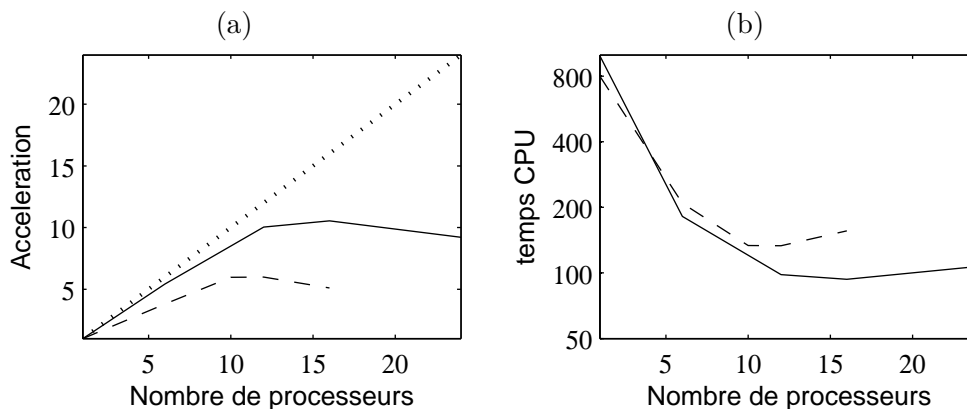


FIGURE 4.8 – (a) Facteur d’accélération, et (b) temps CPU, en secondes, pour une simulation d’une durée physique de  $10^{-7}$  s, en fonction du nombre de processeurs, avec les algorithmes  $- - -$  RK46-Ber, et  $—$  SIRK63-S

On note sur la figure 4.8(a) que le facteur d’accélération de l’algorithme explicite ne dépasse jamais 6, ce qui semble assez mauvais. Celui de l’algorithme semi-implicite est également assez faible, puisqu’il vaut au maximum 10.5. Ces faibles performances sont en fait liées au petit nombre de points du maillage utilisé dans les simulations. En effet, la direction  $z$  dans laquelle la parallélisation est effectuée contient  $n_z = 355$  points. Quand le calcul est parallélisé sur plus de 10 processeurs, chaque sous-domaine contient un nombre de points dans la direction  $z$  inférieur à 36, ce qui est très faible. Le temps CPU du calcul est alors dominé par le temps de communication entre processeurs.

Le faible facteur d’accélération des algorithmes vient donc du cas étudié ici. Ce cas a toutefois été choisi parce qu’il est représentatif des simulations qui ont été effectuées dans le cadre de cette thèse.

## 4.4 Simulations aux grandes échelles d’un canal plan

Cette section présente la mise en œuvre de simulations réalisées pour étudier les effets du nombre de Reynolds et du nombre de Mach sur un écoulement de canal plan turbulent. L’influence du nombre de Reynolds est étudiée à travers trois cas notés Re350, Re600 et Re960, dont le nombre de Reynolds  $Re_\tau$  est respectivement égal à 350, 600 et 960, le nombre de Mach étant fixé à  $M = 0.5$ . On considère également un cas à bas nombre de Mach, noté M01, dont les paramètres sont  $M = 0.1$  et  $Re_\tau = 350$ .

#### 4.4.1 Définition des cas

Les paramètres de chaque simulation sont reportés dans le tableau 4.2. Les maillages utilisés présentent une résolution spatiale égale, sinon supérieure, à celle préconisée par l'étude de convergence en maillage effectuée dans la section 4.2. Pour les cas M01 et Re350, on fixe  $\Delta x^+ = 17$  et  $\Delta z^+ = 8.5$ . Dans la direction  $y$ , la taille de maille vaut  $\Delta y_w^+ = 0.97$  à la paroi, et  $\Delta y_c^+ = 16$  au centre du canal. Le maillage des cas Re600 et Re960 est un peu plus grossier dans les directions  $x$  et  $z$ , où on fixe  $\Delta x^+ = 25$  et  $\Delta z^+ = 10$ . Dans la direction  $y$ , la taille de maille à la paroi vaut  $\Delta y_w^+ = 0.97$  pour Re600 et  $\Delta y_w^+ = 0.93$  pour Re960. Au milieu du canal, elle vaut  $\Delta y_c^+ = 10$  pour les deux cas. On peut remarquer dans les cas M01 et Re350, la taille de maille au centre du canal  $\Delta y_c^+$  est environ égale à  $\Delta x^+$ , tandis que dans les cas Re600 et Re960, elle est égale à  $\Delta z^+$ . Les deux configurations pouvant se trouver dans la littérature, on choisit celle où le maillage est le plus fin, à savoir  $\Delta y_c^+ = \Delta z^+$ , dans les simulations à nombres de Reynolds élevés afin de bien résoudre la zone externe de l'écoulement. Le temps physique des simulations  $T_{tot}$  est également fourni dans le tableau 4.2. Il varie entre les différentes simulations, et vaut au minimum  $T_{tot}U_0/h = 165$  dans la simulation Re960, et au maximum  $T_{tot}U_0/h = 490$  dans la simulation Re350.

Cas	$Re_\tau$	M	$n_x \times n_y \times n_z$	$n(\times 10^6)$	$\Delta x^+$	$\Delta z^+$	$\Delta y_w^+$	$\Delta y_c^+$	$T_{tot}U_0/h$
M01	350	0.1	$247 \times 133 \times 247$	8.1	17	8.5	0.97	16	170
Re350	350	0.5	$247 \times 133 \times 247$	8.1	17	8.5	0.97	16	490
Re600	600	0.5	$285 \times 185 \times 355$	19	25	10	0.97	10	203
Re960	960	0.5	$457 \times 261 \times 571$	68	25	10	0.93	10	165

TABLE 4.2 – Paramètres des cas de canal plan turbulent simulés par LES compressible.  $Re_\tau$  : nombre de Reynolds,  $M$  : nombre de Mach,  $n = n_x \times n_y \times n_z$  : nombre de points de maillage,  $\Delta x^+$ ,  $\Delta z^+$ ,  $\Delta y_w^+$  et  $\Delta y_c^+$  : tailles de maille,  $T_{tot}U_0/h$  : temps physique de la simulation, normalisé par la vitesse au milieu du canal  $U_0$  et la demi-hauteur  $h$ .

Le schéma SIRK63-S, dont l'application au cas du canal plan a été validée dans la section 4.3, est utilisé pour l'intégration temporelle des flux Eulériens dans les simulations M01, Re600 et Re960, avec un nombre de CFL dans la direction  $z$  fixé à  $CFL_z = 1$ . Le nombre de CFL à la paroi vaut alors  $CFL_y = c\Delta t/\Delta y_w = 8.7$  pour M01,  $CFL_y = 10.5$  pour Re600, et  $CFL_y = 11$  pour Re960. Le cas Re350 est simulé avec le schéma d'intégration temporelle explicite RK46-Ber, avec un nombre de CFL à la paroi fixé à  $CFL_y = c\Delta t/\Delta y_w = 0.87$ .

Pour l'ensemble des cas, l'écoulement est initialisé selon la méthode décrite dans le paragraphe 4.1.3. Après une période de transition pendant laquelle la turbulence s'établit, l'écoule-

ment devient statistiquement stationnaire. Les données sont alors enregistrées sur une durée  $T_{sig}$  pour calculer des grandeurs statistiques telles que les vitesses moyennes et fluctuantes, les corrélations en deux points et les spectres. La valeur de  $T_{sig}$  est fournie pour les différentes simulations dans le tableau 4.3, et varie entre  $T_{sig}U_0/h = 58$  pour Re960 et  $T_{sig}U_0/h = 282$  pour Re350. Le nombre de Reynolds et le nombre de Mach moyens ont été calculés sur ces échantillons, et montrent un bon accord avec les grandeurs désirées, comme on peut le voir dans le tableau 4.3. On peut cependant noter que le nombre de Mach du calcul Re350 est légèrement inférieur à 0.5.

Cas	$T_{sig}U_0/h$	$Re_\tau$ calculé	M calculé
M01	73	354	0.10
Re350	282	345	0.45
Re600	118	602	0.50
Re960	58	963	0.51

TABLE 4.3 – Paramètres des échantillons enregistrés pour le traitement statistique :  $T_{sig}U_0/h$  : temps physique de l'échantillon, normalisé par la vitesse au milieu du canal  $U_0$  et la demi-hauteur  $h$ .

La grandeur définie par  $(T_{tot} - T_{sig})U_0/h$  correspond au temps nécessaire pour que l'écoulement passe de l'état initial à un état statistiquement stationnaire. On peut remarquer que ce temps de transition est environ égal à 100 pour tous les cas, excepté pour Re350 où des problèmes numériques ont impliqué un temps de convergence plus long.

#### 4.4.2 Comparaison à des calculs DNS

La qualité des simulations est évaluée en comparant les profils de vitesse longitudinale moyenne  $U$ , et des trois composantes de vitesse fluctuante  $u_{rms} = \sqrt{u'^2}$ ,  $v_{rms} = \sqrt{v'^2}$  et  $w_{rms} = \sqrt{w'^2}$ , à des données issues de la littérature. Ces données proviennent de simulations directes incompressibles de canal plan turbulent réalisées à  $Re_\tau = 395$  et 590 par Moser *et al.* [70], et à  $Re_\tau = 950$  par del Alamo & Jiménez [35]. La figure 4.9 présente ainsi une comparaison des résultats de la DNS à  $Re_\tau = 395$  de Moser *et al.* [70] avec ceux issus du calcul M01, dont le nombre de Reynolds est égal à  $Re_\tau = 350$ . Malgré la légère différence sur le nombre de Reynolds, on observe un très bon accord entre la LES et la DNS.

La figure 4.10 montre les profils de vitesse obtenus avec le calcul Re350 et ceux issus de la DNS à  $Re_\tau = 395$  de Moser *et al.* [70]. L'accord entre les profils est assez bon, bien qu'on note sur la figure 4.10(b) une légère différence sur les trois composantes de fluctuation de vitesse.

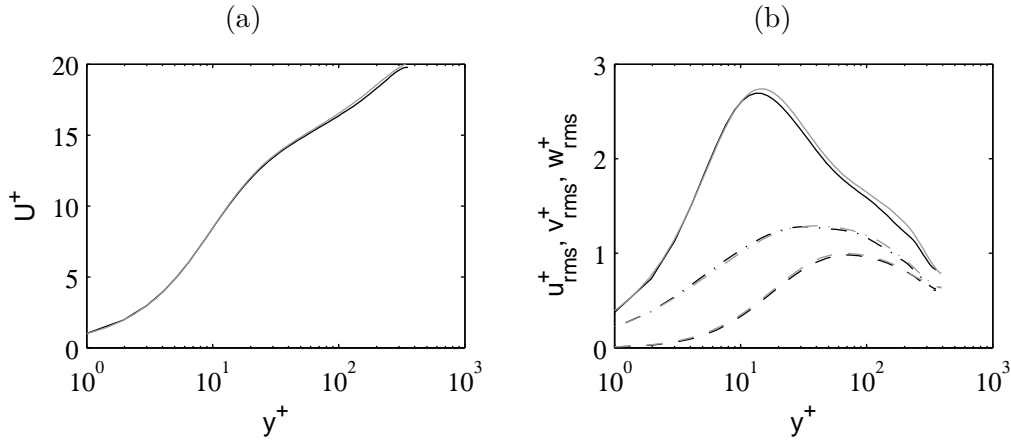


FIGURE 4.9 – Profils de vitesse obtenus pour le cas M01 (—) et pour la DNS à  $Re_\tau = 395$  de Moser *et al.* [70] (---); (a) vitesse longitudinale moyenne  $U^+$ , (b) vitesses fluctuantes : —  $u_{rms}^+$ , - - -  $v_{rms}^+$ , - · - ·  $w_{rms}^+$ .

Toutefois, pour la composante  $u_{rms}^+$ , les niveaux de la LES et de la DNS sont très similaires dans la zone tampon, en particulier au niveau du pic.

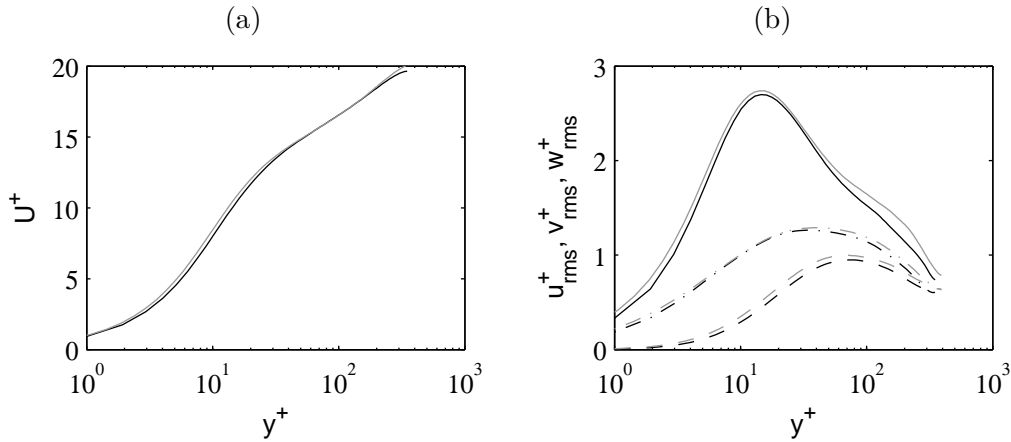


FIGURE 4.10 – Profils de vitesse obtenus pour le cas Re350 (—) et pour la DNS à  $Re_\tau = 395$  de Moser *et al.* [70] (---); (a) vitesse longitudinale moyenne  $U^+$ , (b) vitesses fluctuantes : —  $u_{rms}^+$ , - - -  $v_{rms}^+$ , - · - ·  $w_{rms}^+$ .

Les profils de vitesse issus du calcul Re600 et de la DNS à  $Re_\tau = 590$  de Moser *et al.* [70] sont donnés sur la figure 4.11. L'accord est excellent, que ce soit pour la vitesse moyenne ou les composantes de vitesse fluctuante. Dans la figure 4.11(b), on peut notamment remarquer l'émergence d'une bosse dans le profil de  $u_{rms}^+$  dans la zone externe, pour  $y^+ \geq 100$ . Cette bosse, qui n'apparaît pas sur la figure 4.10(b) pour le cas Re350, est due à un effet du nombre de Reynolds qui sera étudié plus en détail dans le chapitre 5.

La figure 4.12, enfin, compare les résultats du cas Re960 avec la DNS à  $Re_\tau = 950$  de Moser *et al.* [70]. Là encore, les profils se superposent très bien. Seule une légère différence est visible dans

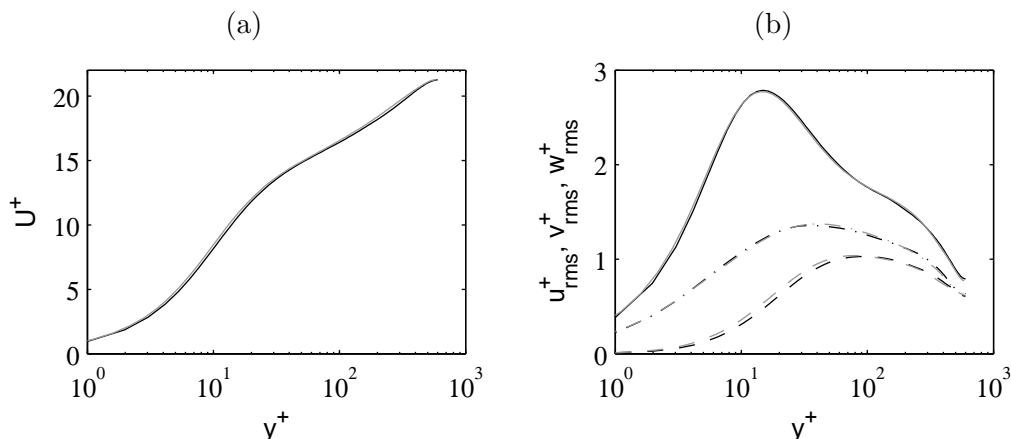


FIGURE 4.11 – Profils de vitesse obtenus pour le cas Re600 ( — ) et pour la DNS à  $Re_\tau = 590$  de Moser *et al.* [70] ( — ); (a) vitesse longitudinale moyenne  $U^+$ , (b) vitesses fluctuantes : —  $u_{rms}^+$ , - - -  $v_{rms}^+$ , - · - ·  $w_{rms}^+$ .

la figure 4.12(b) au niveau de la bosse externe de la composante  $u_{rms}^+$ , pour  $y^+ \geq 50$ . Cette bosse est d'ailleurs un peu plus marquée que dans le cas Re600, comme attendu en raison du nombre de Reynolds plus élevé.

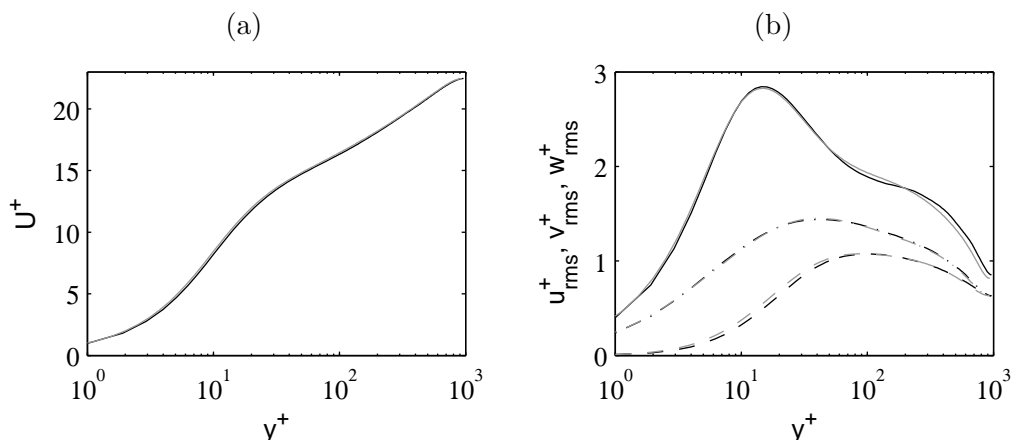


FIGURE 4.12 – Profils de vitesse obtenus pour le cas Re960 ( — ) et pour la DNS à  $Re_\tau = 950$  de del Alamo & Jiménez [35] ( — ); (a) vitesse longitudinale moyenne  $U^+$ , (b) vitesses fluctuantes : —  $u_{rms}^+$ , - - -  $v_{rms}^+$ , - · - ·  $w_{rms}^+$ .

### 4.4.3 Corrélations en deux points

Les résultats des simulations ont été confrontés avec succès à des solutions de la littérature, ce qui incite à étudier plus en détail les propriétés de l'écoulement. Cependant, avant toute analyse physique, il faut vérifier que les dimensions du domaine sont assez grandes pour contenir toutes les échelles de la turbulence, comme évoqué au paragraphe 4.1.1. En effet, si le domaine de calcul



est trop petit, la périodicité peut influencer l'organisation spatiale des grandes structures, ce qui risque de fausser l'analyse des résultats.

En pratique, on vérifie que les fluctuations de vitesse sont décorréelées sur des distances inférieures à  $L_x/2$  dans la direction  $x$  et  $L_z/2$  dans la direction  $z$ . Ces distances correspondent aux plus grandes échelles spatiales que peut contenir le domaine. On définit donc les coefficients de corrélation de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{uu}^{y=d}(x, z) &= \frac{\overline{u'(x_0, d, z_0)u'(x_0 + x, d, z_0 + z)}}{\overline{u'^2(d)}} \\ \mathcal{R}_{vv}^{y=d}(x, z) &= \frac{\overline{v'(x_0, d, z_0)v'(x_0 + x, d, z_0 + z)}}{\overline{v'^2(d)}} \\ \mathcal{R}_{ww}^{y=d}(x, z) &= \frac{\overline{w'(x_0, d, z_0)w'(x_0 + x, d, z_0 + z)}}{\overline{w'^2(d)}}\end{aligned}\tag{4.8}$$

où  $(x_0, z_0)$  est un point quelconque du plan  $x - z$ , situé à une distance  $d$  de la paroi. La valeur de ces coefficients ne dépend pas de  $(x_0, z_0)$  puisque la turbulence est homogène dans les directions  $x$  et  $z$ . Pour chaque simulation, les coefficients  $\mathcal{R}_{uu}^y$ ,  $\mathcal{R}_{vv}^y$  et  $\mathcal{R}_{ww}^y$  sont calculés dans un plan situé dans la zone tampon ( $y^+ \approx 18$ ), et dans le plan au milieu du canal ( $y = h$ ). Le domaine de calcul est assez grand si  $\mathcal{R}_{uu}^y(L_x/2, 0)$ ,  $\mathcal{R}_{vv}^y(L_x/2, 0)$ ,  $\mathcal{R}_{ww}^y(L_x/2, 0)$  et  $\mathcal{R}_{uu}^y(0, L_z/2)$ ,  $\mathcal{R}_{vv}^y(0, L_z/2)$ ,  $\mathcal{R}_{ww}^y(0, L_z/2)$  sont faibles.

Les coefficients de corrélation calculés pour le cas M01 à  $Re_\tau = 350$  sont montrés sur les figures 4.13(a-b) pour la zone tampon, et sur les figures 4.13(c-d) pour le milieu du canal. Ils sont représentés pour  $x$  variant de 0 à  $L_x/2$  dans les figures 4.13(a,c), et pour  $z$  variant de 0 à  $L_z/2$  dans les figures 4.13(b,d). Dans la zone tampon, les coefficients de corrélation des composantes  $u$ ,  $v$  et  $w$  valent respectivement -1%, -0.7% et -0.2% pour  $x = L_x/2$  et respectivement 0.7%, 0.4% et -0.2% pour  $z = L_z/2$ . Au milieu du canal, ils valent -0.5%, -0.1% et 0.05% pour  $x = L_x/2$ , et -2%, -2% et -0.1% pour  $z = L_z/2$ . Les corrélations de vitesse sont donc très faibles à la séparation maximale, ce qui signifie que le domaine est suffisamment grand pour cette simulation. Dans la zone tampon, on note par ailleurs sur les figures 4.13(a-b) que  $\mathcal{R}_{uu}^{y^+=18}$  diminue plus lentement dans la direction  $x$  que dans la direction  $z$ . Ces observations suggèrent la présence de structures cohérentes dans la zone tampon, de forme allongée dans la direction  $x$  et étroite dans la direction  $z$ . Les figures 4.13(c-d) montrent qu'au milieu du canal, le coefficient  $\mathcal{R}_{uu}^{y=h}$  présente les mêmes propriétés que dans la zone tampon, à savoir une décroissance lente dans la direction  $x$ , et plus

rapide dans la direction  $z$ . Le même type de structures se rencontre donc au milieu du canal. On estime la largeur de ces structures à l'aide de l'abscisse du creux formé par  $\mathcal{R}_{uu}^{y^+=18}(0, z)$  sur la figure 4.13(b) pour la zone tampon, et de l'abscisse du creux formé par  $\mathcal{R}_{uu}^{y=h}(0, z)$  sur la figure 4.13(d) pour le milieu du canal. La largeur est égale à deux fois cette abscisse, et vaut  $0.4h$  dans la zone tampon, et  $1.4h$  au milieu du canal. Les structures cohérentes sont donc plus larges au milieu du canal, comme attendu. En effet, comme mentionné dans le paragraphe 1.1.4, les structures de la zone interne de la couche limite sont liées aux petites échelles de la turbulence, et celles situées dans la zone externe sont liées aux grandes échelles.

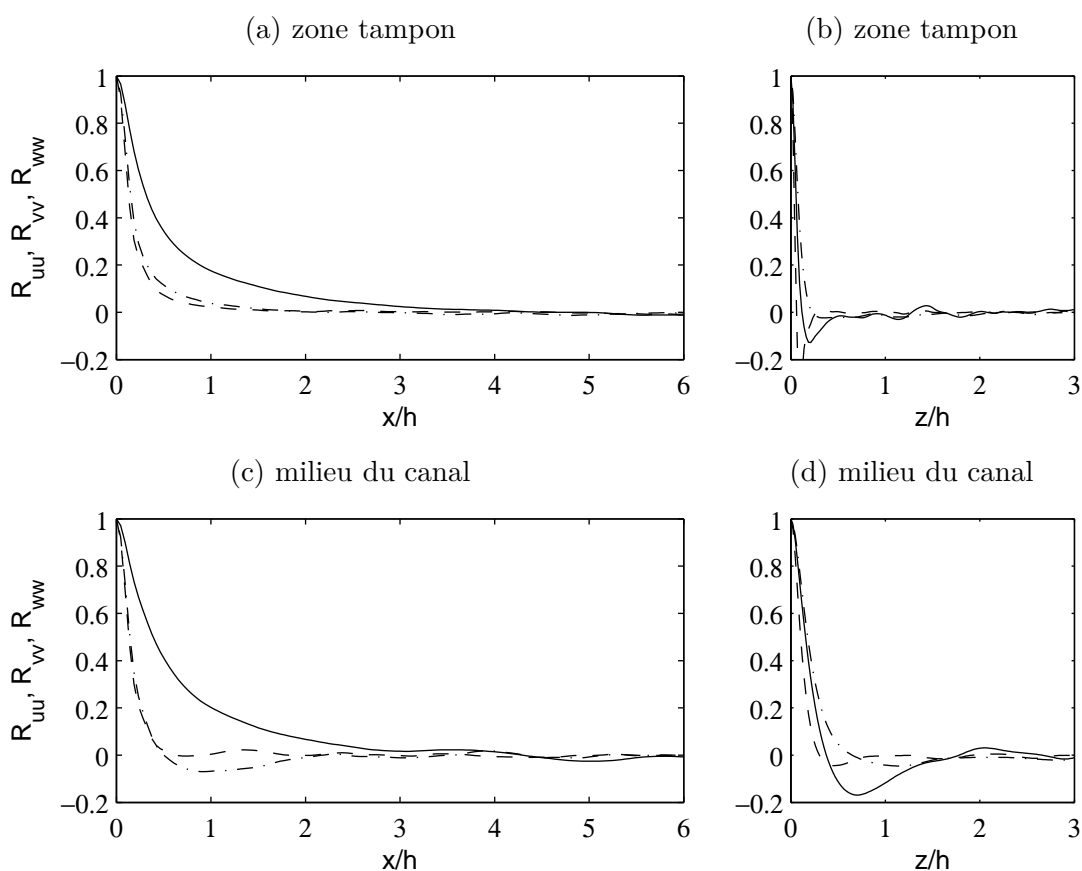


FIGURE 4.13 – Corrélations spatiales de vitesse pour le calcul M01, dans la direction  $x$  (a, c) et  $z$  (b, d), pour des distances à la paroi (a-b)  $y^+ = 17.7$ , et (c-d)  $y = h$ , et pour les composantes —  $\mathcal{R}_{uu}^y$ , - - -  $\mathcal{R}_{vv}^y$ , et - · - ·  $\mathcal{R}_{wv}^y$ .

La figure 4.14 présente les coefficients de corrélation pour le cas Re360. Les résultats sont similaires à ceux du cas M01 décrit précédemment, car le nombre de Reynolds est le même pour les deux écoulements. En particulier, sur la figure 4.14(a), les coefficients dans la zone tampon sont très faibles à la longueur maximale, puisqu'ils valent  $-0.07\%$ ,  $-0.09\%$  et  $0.9\%$  respectivement pour les composantes  $u$ ,  $v$  et  $w$ . De même, les vitesses sont bien décorélées dans la largeur, puisqu'on

observe sur la figure 4.14(b) que  $\mathcal{R}^{y^+=18}(L_x/2, 0) = -0.3\%$ ,  $-1.3\%$  et  $0.3\%$  respectivement pour  $u$ ,  $v$  et  $w$ . Au milieu du canal, la figure 4.14(c) montre que les coefficients sont faibles pour  $x = L_x/2$ . Ils valent en effet  $-0.5\%$ ,  $-1\%$  et  $1\%$  pour  $u$ ,  $v$  et  $w$ . Dans la direction  $z$ , on note sur la figure 4.14(d) que les composantes  $v$  et  $w$  sont corrélées à  $0.4\%$  et  $-1\%$ , tandis que la composante  $u$  fait apparaître une corrélation plus élevée de  $6\%$ . Les fluctuations de vitesse  $u'$  sont donc corrélées sur toute la largeur du canal, ce qui suggère la présence, dans la zone externe de l'écoulement, de structures dont la largeur est proche de  $L_z/2 = 3h$ . Il convient d'aborder avec prudence toute analyse de ces structures, car elles peuvent être influencées par l'effet de la périodicité du domaine.

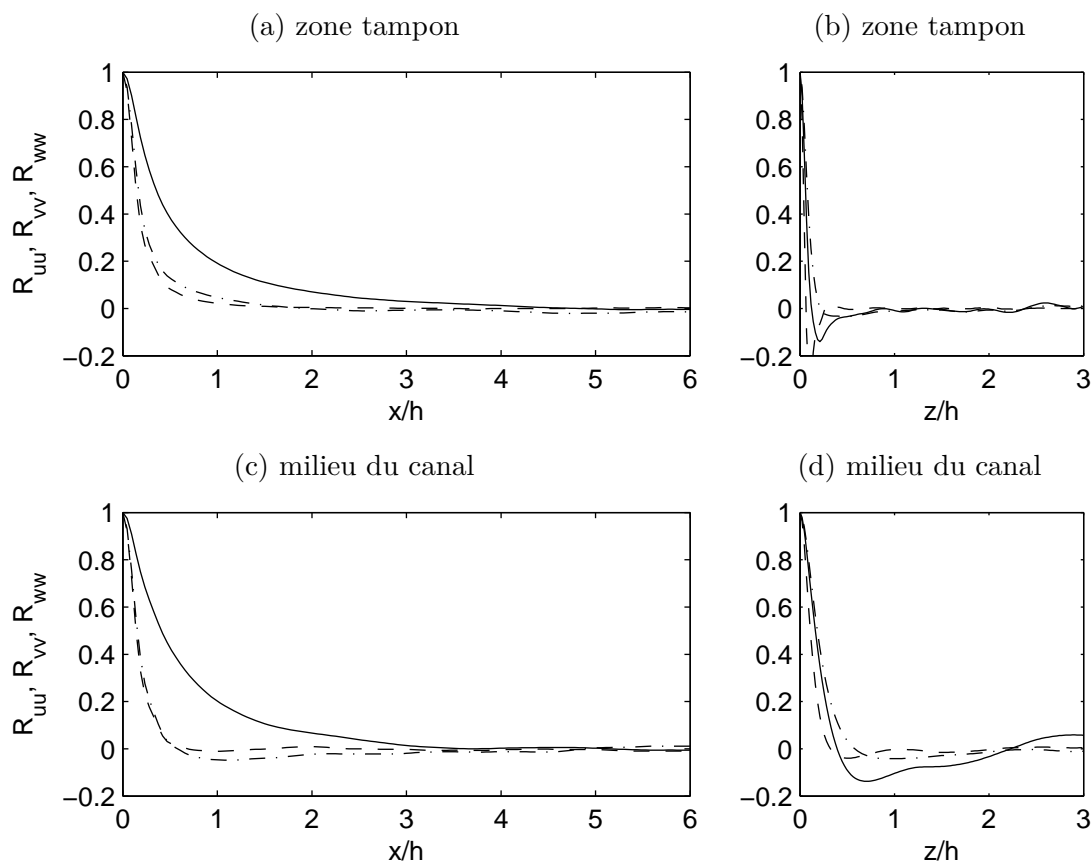


FIGURE 4.14 – Corrélations spatiales de vitesse pour le calcul Re360, dans la direction  $x$  (a,c) et  $z$  (b,d), pour des distances à la paroi (a,b)  $y^+ = 17.7$ , et (c,d)  $y = h$ , et pour les composantes —  $\mathcal{R}_{uu}^y$ , - - -  $\mathcal{R}_{vv}^y$ , et - · - ·  $\mathcal{R}_{ww}^y$ .

Les coefficients de corrélation du cas Re600 sont donnés sur la figure 4.15. Dans la zone tampon, sur les figures 4.11(a-b), le niveau des corrélations chute rapidement, et est proche de zéro pour  $L_x/2$  et  $L_z/2$ . Plus précisément, il vaut  $0.5\%$ ,  $0.2\%$  et  $-0.7\%$  à  $x = L_x/2$ , et  $0.2\%$ ,  $0.3\%$  et  $-0.2\%$  à  $z = L_z/2$ , respectivement pour les composantes  $u$ ,  $v$  et  $w$ . De même au milieu du

canal on peut voir sur les figures 4.11(c-d) que les coefficients  $\mathcal{R}_{vv}^{y=h}$  et  $\mathcal{R}_{ww}^{y=h}$  valent respectivement -0.2% et -1% pour  $x = L_x/2$ , et 0.05% et -1% pour  $z = L_z/2$ . En ce qui concerne le coefficient  $\mathcal{R}_{uu}^{y=h}$ , on observe sur la figure 4.11(c) qu'il diminue assez lentement dans la direction  $x$ , et fait apparaître un plateau jusqu'à  $x = 3h$ . Son niveau baisse ensuite, et vaut 0.08% à la séparation maximale. En revanche, dans la direction  $z$ , le coefficient décroît rapidement, jusqu'à un minimum de -20% atteint pour  $z = 0.75h$ , puis remonte jusqu'à un maximum de 7% pour  $z = 1.8h$ , et enfin redevient négatif et reste à un niveau de -4.5% à mi-largeur. Ce phénomène d'oscillation peut être dû à des structures très larges présentes au milieu de l'écoulement. Le plateau observé sur  $\mathcal{R}_{uu}^{y=h}(x, 0)$  dans la figure 4.15(c) suggère que ces structures sont également très longues.

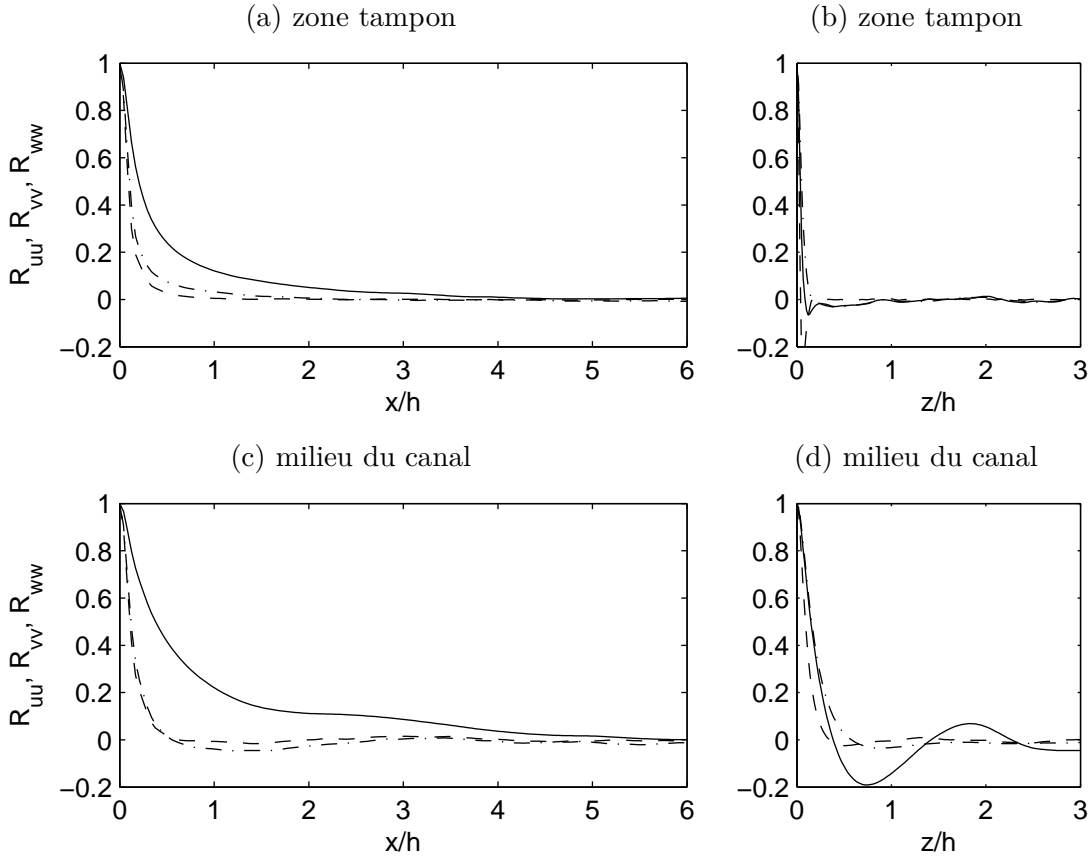


FIGURE 4.15 – Corrélations spatiales de vitesse pour le calcul Re600, dans la direction  $x$  (a,c) et  $z$  (b,d), pour des distances à la paroi (a,b)  $y^+ = 18.2$ , et (c,d)  $y = h$ , et pour les composantes —  $\mathcal{R}_{uu}^y$ , - - -  $\mathcal{R}_{vv}^y$ , et - · - ·  $\mathcal{R}_{ww}^y$ .

La figure 4.12 donne enfin les coefficients de corrélation du cas Re960. Dans la zone tampon, les corrélations de vitesses fluctuantes  $u'$ ,  $v'$  et  $w'$  valent respectivement -0.3%, -0.1% et -1% à  $x = L_x/2$ , et -0.7%, 0.1% et -0.2% à  $z = L_z/2$ . Au milieu du canal, les corrélations des

composantes  $v'$  et  $w'$  valent respectivement 0.1% et -0.5% à  $x = L_x/2$ , et -0.2% et 0.5% à  $z = L_z/2$ . Le coefficient  $\mathcal{R}_{uu}^{y=h}(x,0)$  présente sur la figure 4.12(c) un plateau jusqu'à  $x = 3h$ . Dans la direction  $z$ , la figure 4.12(d) montre que le coefficient oscille entre des maxima et des minima, séparés par des distances d'environ  $0.8h$ , comme observé sur la figure 4.11(d) pour le cas Re600. A mi-largeur, le niveau du coefficient vaut -6.5%.

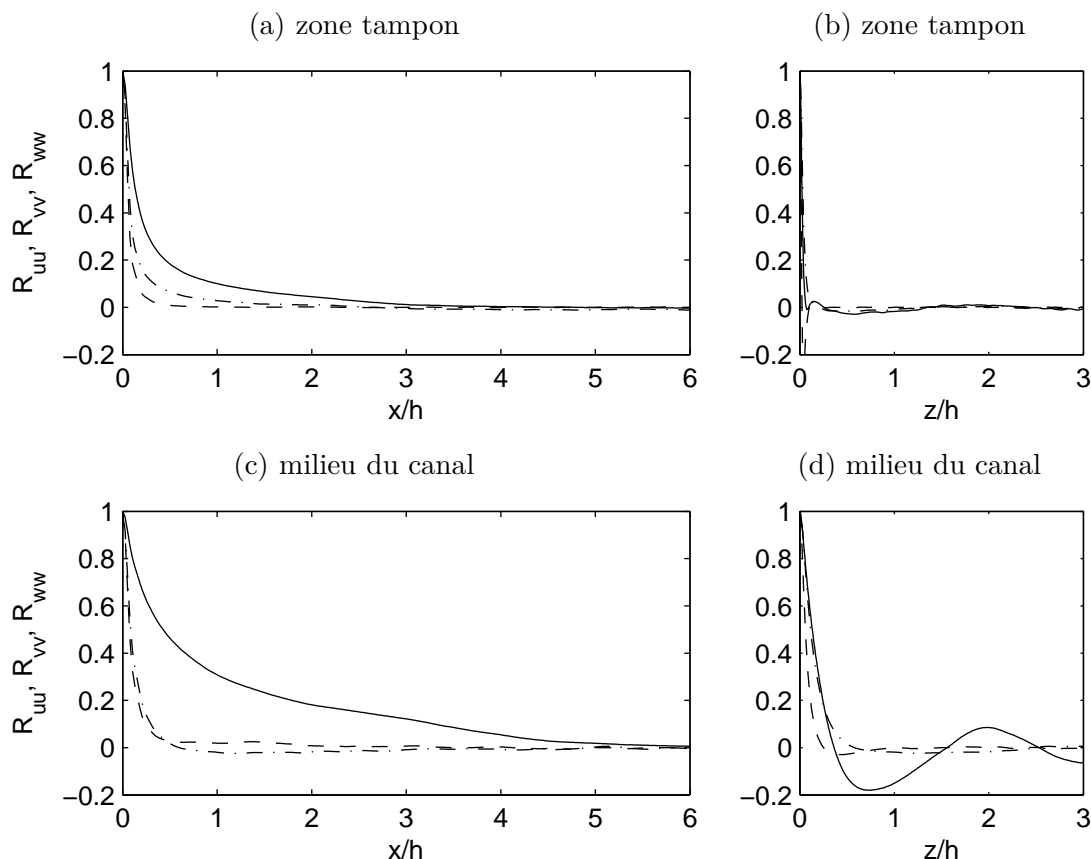


FIGURE 4.16 – Corrélations spatiales de vitesse pour le calcul Re960, dans la direction  $x$  (a,c) et  $z$  (b,d), pour des distances à la paroi (a,b)  $y^+ = 18.2$ , et (c,d)  $y = h$ , et pour les composantes —  $\mathcal{R}_{uu}^y$ , - - -  $\mathcal{R}_{vv}^y$ , et - · - ·  $\mathcal{R}_{ww}^y$ .

Les coefficients de corrélation ont été examinés dans chaque cas pour déterminer si les dimensions du canal permettent de capturer toutes les échelles de la turbulence. Comme attendu, très près de la paroi, les fluctuations de vitesse sont corrélées sur de très petites distances, bien inférieures aux dimensions du canal. En revanche, au milieu du canal, les fluctuations de vitesse sont corrélées sur des distances de l'ordre de  $h$ , suggérant la présence de structures turbulentes dont la taille est proche des dimensions du canal. La longueur  $L_x = 12h$  semble suffisante pour que ces structures ne soient pas influencées par la périodicité. En revanche, pour la largeur  $L_z = 6h$ ,

les valeurs de  $\mathcal{R}_{uu}^{y=h}(0, L_z/2)$ , égales à 6%, -4.5% et -6.5% respectivement pour les cas Re360, Re600 et Re960, sont faibles, mais non négligeables.

La question de savoir si cela a un effet sur les propriétés de l'ensemble de l'écoulement est complexe, car elle relève des interactions entre les différentes échelles de la turbulence. Une revue succincte de la littérature indique toutefois que cet effet peut être considéré comme négligeable, du moins dans la zone interne de la couche limite. Jiménez *et al.* [57] montrent en effet que dans cette zone, les échelles internes s'organisent de manière autonome, c'est-à-dire indépendamment des échelles externes, ces dernières ayant pour seul effet de limiter la longueur maximale des *streaks*. D'après ces auteurs, cela explique qu'un grand nombre de simulations réalisées avec des domaines très petits fournissent de bons résultats sur les grandeurs statistiques moyennes et fluctuantes. Ainsi, del Alamo *et al.* [36] mènent une étude assez poussée des spectres de fluctuations de vitesse dans la zone logarithmique en se basant sur la DNS d'un canal plan à  $Re_\tau = 1900$  dont les dimensions  $L_x \times L_z = \pi \times \pi/2$  sont environ quatre fois plus petites que dans les travaux présentés ici. On peut donc estimer que, pour les cas Re600 et Re960, les données collectées dans la zone interne de la couche limite restent fiables, dans la mesure où elles sont peu influencées par les structures de la zone externe. Il faut en revanche considérer le cas Re360 avec plus de prudence, car la séparation entre échelles externes et internes est moins évidente à bas nombre de Reynolds.

Enfin, une hypothèse sur la nature des grandes structures observées au milieu du canal peut être faite en remarquant que les coefficients  $\mathcal{R}_{vv}^{y=h}$  et  $\mathcal{R}_{ww}^{y=h}$  chutent beaucoup plus vite que  $\mathcal{R}_{uu}^{y=h}$ , dans les directions  $x$  et  $z$ . Ces grandes structures n'impliquent donc que la composante longitudinale de vitesse, ce qui amène à supposer qu'il s'agit des LSM (*Large Scale Motion*) observés entre autres par Tomkins & Adrian [92]. En effet, les LSM sont des structures de grande taille, allongées dans la direction de l'écoulement, et constituées de fluide à faible vitesse longitudinale.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, quelques aspects importants de la mise en œuvre de simulations compressible des grandes échelles sur des écoulements de paroi ont été présentés. Une étude de convergence en maillage a permis de déterminer la résolution minimale devant être imposée à la paroi pour capturer convenablement les petites structures de la turbulence. On s'est ensuite intéressé à l'intégration temporelle. Le schéma SIRK63-S a été implémenté sur une simulation de canal plan, et les résultats ont été validés à l'aide d'une simulation de référence. Le calcul a ensuite

été parallélisé, et la vitesse de l'algorithme SIRK63-S a été comparée avec celle de l'algorithme explicite de Berland *et al.* [8]. Il apparaît que la parallélisation permet d'augmenter fortement la vitesse de l'algorithme semi-implicite. Ce dernier permet alors un gain de temps CPU significatif par rapport à l'algorithme explicite. Enfin, quatre simulations de canal plan ont été réalisées, en faisant varier le nombre de Mach et le nombre de Reynolds. Les résultats de ces simulations sont en très bon accord avec des DNS de la littérature. Les corrélations de vitesse en deux points ont ensuite été examinées afin de vérifier que la taille du domaine permet de contenir les grandes structures de l'écoulement. Une corrélation un peu élevée a été observée sur la composante  $u'$  de vitesse fluctuante. Néanmoins, la littérature semble indiquer que cette anomalie ne remet pas en cause les résultats des simulations. Ces résultats vont donc faire l'objet d'une étude plus approfondie dans le chapitre 5.

# 5 Etude des propriétés statistiques de vitesse et de pression de l'écoulement de canal plan

---

Dans ce chapitre, les calculs réalisés dans le chapitre 4 sont utilisés pour étudier les statistiques de vitesse et de pression de l'écoulement turbulent dans un canal plan, et en particulier les effets du nombre de Reynolds et du nombre de Mach. On s'intéresse tout d'abord aux propriétés aérodynamiques de l'écoulement, en vérifiant notamment des lois de similitude connues de la littérature, portant sur les vitesses moyenne et fluctuante. L'étude porte ensuite sur une région spécifique de l'écoulement, la zone tampon, et sur les structures cohérentes que celle-ci contient. L'influence du nombre de Reynolds sur les propriétés de ces structures est notamment examiné. Enfin, les propriétés du champ de pression pariétale sont étudiées, en particulier les effets du nombre de Reynolds et du nombre de Mach sur le spectre fréquentiel de pression. Le spectre en fréquence et en nombre d'onde est également calculé afin de détecter d'éventuelles composantes acoustiques.

## 5.1 Profils des vitesses moyenne et fluctuante

D'après l'étude bibliographique réalisée dans le paragraphe 1.1.3, le profil de vitesse moyenne longitudinale doit suivre une loi de similitude  $U^+ = f(y^+)$  indépendante du nombre de Reynolds dans la zone interne de l'écoulement. La figure 5.1 montre les profils de vitesse moyenne en fonction de la distance à la paroi, normalisés par les échelles visqueuses, pour les cas Re350, Re600 et Re960 à nombre de Mach  $M = 0.5$  et à nombres de Reynolds respectivement égaux à  $Re_\tau = 350, 600$  et  $960$ , et pour le cas M01 à  $Re_\tau = 350$  et  $M = 0.1$ . L'axe horizontal est en échelle logarithmique. La loi de similitude est ici bien vérifiée, puisque les profils sont très proches.



Dans la sous-couche visqueuse située à  $y^+ \leq 5$ , les profils suivent un profil linéaire  $U^+ = y^+$ , représenté en pointillés. Dans la zone tampon, pour  $y^+ \geq 5$ , ils sont différents du profil linéaire, et se rapprochent progressivement d'un profil logarithmique. Ce dernier, défini par

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B, \quad (5.1)$$

est représenté sur la figure par une droite en pointillés, avec les paramètres  $\kappa = 0.41$  et  $B = 5$ , correspondant aux valeurs "classiques" de la littérature [71]. Les profils des LES semblent rejoindre cette droite pour  $y^+ \approx 30$ . Il est toutefois difficile, sur cette figure, de déterminer exactement où commence la zone logarithmique. On considère en effet généralement que cette zone se situe entre  $y^+ = 100$  et  $y/h = 0.2$  [51]. La valeur de  $y = 0.2h$ , exprimée en échelles internes, vaut  $y^+ = 70, 120$  et  $192$  respectivement pour  $Re_\tau = 360, 600$  et  $960$ . La zone logarithmique n'est donc pas sensée exister pour Re360, tandis que pour les cas Re600 et Re960, son étendue devrait être inférieure à 100 échelles de longueur visqueuse  $l_\nu = \nu/u_\tau$ , ce qui la rend particulièrement difficile à visualiser sur une échelle logarithmique comme c'est le cas sur la figure 5.1.

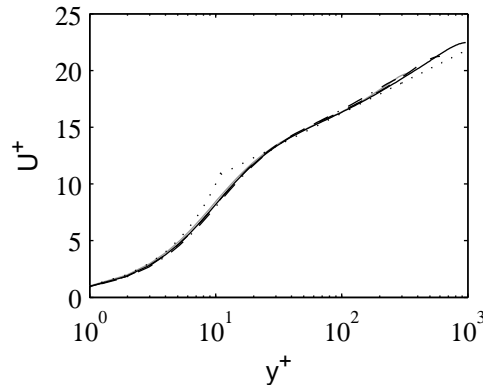


FIGURE 5.1 – Vitesse moyenne longitudinale  $U^+$  en fonction de  $y^+$ , pour les cas — M01, - · - · Re350, - - - Re600, — Re960 ; les pointillés représentent les lois de similitude  $U^+ = y^+$  pour  $y^+ \leq 10$ , et  $U^+ = \ln(y^+)/\kappa + B$  avec  $\kappa = 0.41$  et  $B = 5$  pour  $y^+ \geq 10$ .

La zone logarithmique peut être visualisée de manière plus aisée en calculant la fonction diagnostic  $\gamma = y^+ \partial U^+ / \partial y^+$ . En effet, si la vitesse  $U^+$  suit le profil logarithmique défini par l'équation (5.1), la valeur de  $\gamma$  est constante et égale à  $1/\kappa$ . La figure 5.2 montre la fonction diagnostic pour les cas Re350, Re600 et Re960, pour  $y^+$  variant de 1 à 300 en échelle linéaire. La valeur  $1/\kappa$ , avec  $\kappa = 0.41$ , est représentée par une ligne horizontale en pointillés. La fonction diagnostic présente la même évolution dans les trois cas. Elle diminue d'abord rapidement, passe par un minimum situé vers  $y^+ = 70$ , puis augmente faiblement, jusqu'à  $y^+ = 200$ . L'évolution de  $\gamma$  n'est ensuite plus pertinente, car la zone  $y^+ \geq 200$  se situe dans la zone externe de la

couche limite pour les trois cas. Dans la partie  $70 \leq y^+ \leq 200$ , on note que la valeur de  $\gamma$  dans le cas Re360 est légèrement supérieure à celles des cas Re600 et Re960. Cette différence est liée au bas nombre de Reynolds du cas Re360, et a déjà été observée dans des DNS de couche limite [84] et de canal plan [70]. Les fonctions diagnostics des cas Re600 et Re960 sont en revanche très proches, ce qui suggère l'existence d'une loi de similitude pour  $U^+$ . Toutefois, cette loi ne correspond pas exactement à un profil logarithmique, car la fonction  $\gamma$  n'est pas constante entre  $y^+ = 70$  et 200, mais croît de  $1/0.45$  à  $1/0.38$ . Cette croissance a été observée dans des DNS de canal [51, 70] jusqu'à des nombres de Reynolds  $Re_\tau = 2003$ . Elle a notamment conduit Hoyas & Jiménez [51] à remettre en cause la fonction diagnostic comme méthode de détermination de la zone logarithmique pour le cas du canal plan.

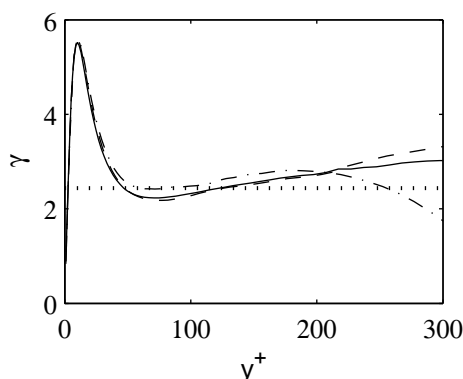


FIGURE 5.2 – Fonction diagnostic  $\gamma = y^+ \partial U^+ / \partial y^+$  en fonction de  $y^+$ , pour les cas  $\cdots$  Re350,  $---$  Re600,  $---$  Re960,  $\cdots$   $\gamma = 1/0.41$ .

Les niveaux de fluctuation de vitesse longitudinale  $u_{rms}^+ = u_{rms}/u_\tau$  sont représentés en fonction de  $y^+$  sur la figure 5.3(a) pour les cas M01, Re350, Re600 et Re950, pour un axe horizontal en échelle logarithmique. Les profils obtenus sur les différents cas sont assez proches dans la zone tampon, pour  $5 \leq y^+ \leq 50$ . Le pic de vitesse fluctuante est situé en  $y^+ = 14.5$ , et augmente légèrement lorsque le nombre de Reynolds augmente, comme dans les DNS de canal de Hu *et al.* [55] pour  $Re_\tau = 90 - 1440$  par exemple. Un autre effet du nombre de Reynolds est visible pour  $y^+ \geq 50$ , où le niveau de  $u_{rms}^+$  présente une bosse. Cette bosse est plus prononcée et s'étend vers des valeurs de  $y^+$  de plus en plus grandes lorsque  $Re_\tau$  augmente, ce qui laisse supposer qu'elle est plutôt liée aux échelles externes. On remarque, enfin, que le profil issu de la simulation M01, réalisée à  $Re_\tau = 350$  et  $M = 0.1$ , est très similaire à celui de la simulation Re350, réalisée à  $Re_\tau = 350$  et  $M = 0.5$ . Les fluctuations de vitesse sont donc peu influencées par le nombre de Mach, du moins quand ce dernier varie entre 0.1 et 0.5.

On montre à présent, sur la figure 5.3(b), les niveaux de vitesse longitudinale fluctuante

normalisés par la vitesse de frottement  $u_\tau$ , en fonction de la distance à la paroi  $y/h$ . Les profils sont très similaires au niveau de la bosse externe observée précédemment dans la figure 5.3(a) pour  $y^+ \geq 100$ . Cette bosse est ici trouvée entre  $y = 0.2h$  et  $y = h$ . Le profil de vitesse fluctuante semble donc suivre une loi de similitude dans la zone externe de l'écoulement. On note d'ailleurs que dans cette zone, la dynamique des fluctuations de vitesse est gouvernée par  $u_\tau$ , et non pas par la vitesse au centre du canal  $U_0$ .

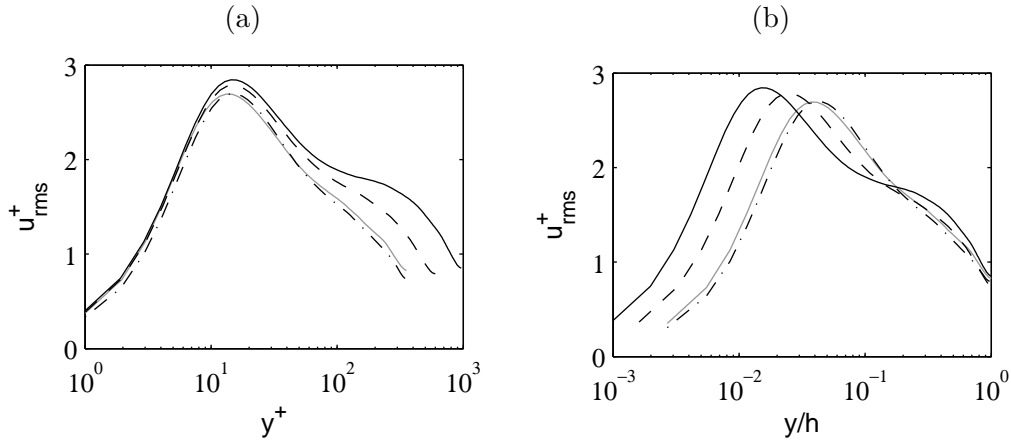


FIGURE 5.3 – Niveaux de fluctuation de vitesse longitudinale  $u_{rms}^+$  pour les cas — M01,  $\cdots$  Re350,  $- - -$  Re600 et  $\text{—}$  Re960, en fonction de (a)  $y^+$ , (b)  $y/h$ .

## 5.2 Structures cohérentes dans la zone tampon

On s'intéresse à présent à la zone tampon, qui est une zone particulière de l'écoulement. Cette zone contient des structures cohérentes que l'on étudie à l'aide des résultats obtenus dans les simulations Re350, Re600 et Re960. Pour ces trois cas, les fluctuations de vitesse ont été enregistrées dans un plan parallèle à la paroi, situé à une distance à la paroi  $y^+ = 18$  proche du maximum des fluctuations de vitesse longitudinale.

### 5.2.1 Visualisation

Deux types de structures, les *streaks* et les tourbillons quasi-longitudinaux, sont rencontrés dans la zone tampon. Robinson [74, 75], entre autres, fournit une description détaillée de ces structures. Les *streaks* basse et haute vitesse sont des régions de forme étroite et allongée dans la direction de l'écoulement, contenant du fluide respectivement à faible et à forte vitesse longitudinale. D'après Robinson [75], les *streaks* basse vitesse sont constitués de fluide provenant de

la sous-couche visqueuse, et “soulevé” jusqu’à la zone tampon par l’action de tourbillons quasi-longitudinaux. Ces derniers sont des tourbillons dont l’axe est quasiment horizontal, et orienté dans la direction de l’écoulement. Ces structures peuvent être visualisées avec des vues instantanées de la vitesse, comme effectué par exemple par Jiménez *et al.* [57] dans une DNS de canal plan à  $Re_\tau \approx 1000$ .

Pour visualiser les *streaks*, des vues instantanées de la vitesse longitudinale dans le plan situé à  $y^+ = 18$  sont montrées sur la figure 5.4(a) pour le cas Re600, et sur la figure 5.4(b) pour le cas Re960. Les zones noires et grises représentent respectivement un déficit et un excès de vitesse par rapport à la vitesse moyenne. L’écoulement va de la gauche vers la droite. Les figures font apparaître des zones de déficit de vitesse de forme étroite et très allongée dans la direction de l’écoulement, qui correspondent à des *streaks* basse vitesse [57]. Leur longueur est de l’ordre de  $1000l_\nu$ , et leur espacement dans la direction  $z$ , bien que très variable, est de l’ordre de  $100l_\nu$ . Ces *streaks* basse vitesse sont séparés par des zones grises de forme allongée, qui correspondent à des *streaks* haute vitesse où la vitesse est supérieure à la vitesse moyenne. Les visualisations obtenues dans le cas Re600 sur la figure 5.4(a) et le cas Re960 sur la figure 5.4(b) sont assez similaires. Les dimensions des *streaks* semblent donc peu dépendantes du nombre de Reynolds. On s’intéresse maintenant aux tourbillons quasi-longitudinaux, que l’on visualise dans le plan  $y^+ = 18$  à l’aide de la vitesse normale à la paroi, représentée sur les figures 5.4(c) et (d), respectivement pour les cas Re600 et Re960. Les zones noires et grises, à nouveau, représentent respectivement un déficit et un excès de vitesse par rapport à la vitesse moyenne, qui vaut ici 0 pour la vitesse normale à la paroi. Pour repérer les tourbillons quasi-longitudinaux, Jiménez *et al.* [57] notent qu’un tourbillon dont l’axe est contenu dans le plan  $x - z$  induit, dans ce même plan, une vitesse dans la direction  $y$ . Cette vitesse est négative d’un côté de l’axe, et positive de l’autre côté, ce qui se traduit, sur la figure, par une paire de zones, l’une noire et l’autre grise, très proches l’une de l’autre. La longueur de cette paire correspond à la longueur du tourbillon. Sur les figures 5.4(c) et (d), on observe des tourbillons de longueurs assez variables, mais dont la majorité est inférieure à  $500l_\nu$ . Par ailleurs, les cas Re600 et Re960 ne présentent pas de différence significative sur la forme et la longueur de ces tourbillons. Les dimensions des tourbillons quasi-longitudinaux semblent donc indépendantes du nombre de Reynolds. L’indépendance des streaks et des tourbillons quasi-longitudinaux vis-à-vis du nombre de Reynolds est un résultat connu de la littérature [75], et est cohérente avec l’idée selon laquelle les structures de la zone interne s’organisent indépendamment des grandes structures de l’écoulement.

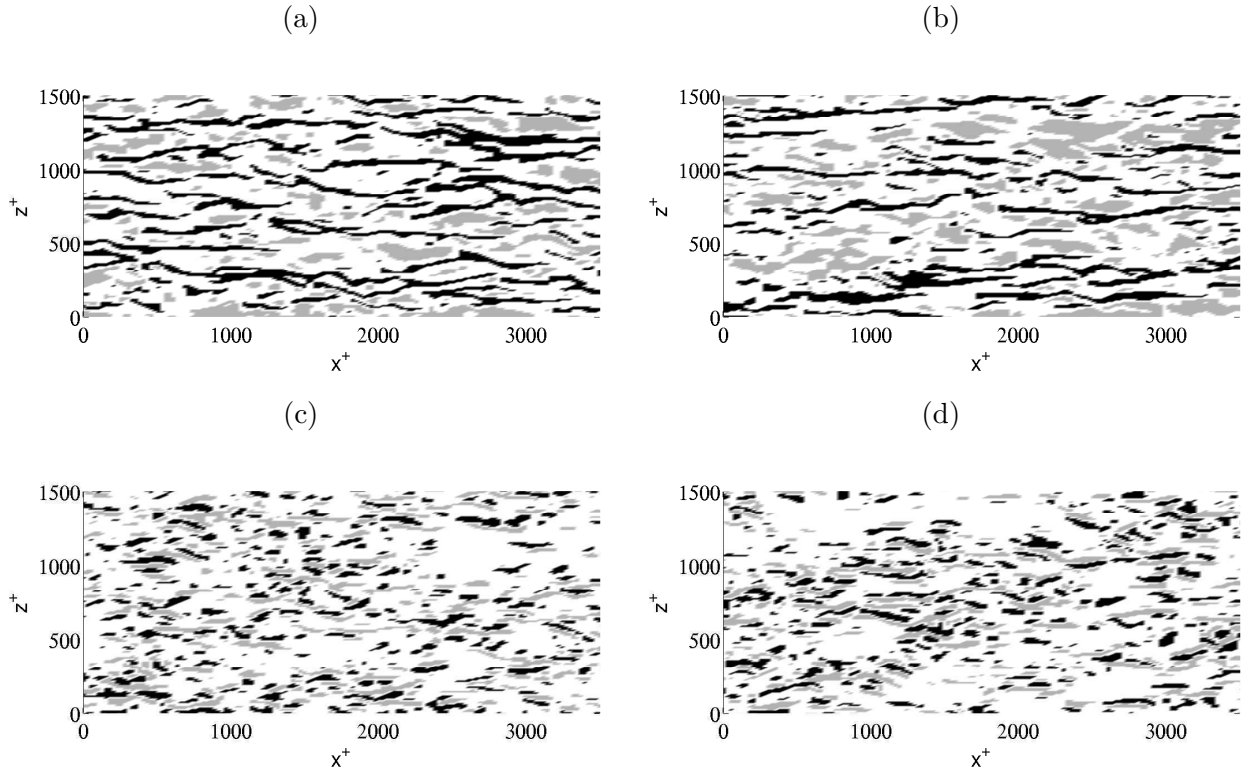


FIGURE 5.4 – Visualisation instantanée de la vitesse dans un plan situé à une distance à la paroi  $y^+ = 18$ , pour les cas (a,c)  $Re_{600}$  et (b,d)  $Re_{960}$ ; (a-b) vitesse longitudinale  $u$ ; zones noires :  $u < U - u_{rms}$ , zones blanches :  $U - u_{rms} < u < U + u_{rms}$ , zones grises :  $U + u_{rms} < u$ ; (c-d) vitesse normale à la paroi  $v$ ; zones noires :  $v < -v_{rms}$ , zones blanches :  $-v_{rms} < v < v_{rms}$ , zones grises :  $v_{rms} < v$ ; toutes les figures correspondent au même instant et à la même partie du domaine.

## 5.2.2 Caractérisation par les corrélations transverses

Les dimensions des structures rencontrées dans la zone tampon sont à présent estimées à l'aide du coefficient de corrélation  $\mathcal{R}_{uu}$  pour les *streaks*, et  $\mathcal{R}_{vv}$  pour les tourbillons quasi-longitudinaux, calculés en  $y^+ = 18$ . On montre sur la figure 5.5(a) le profil du coefficient de corrélation  $\mathcal{R}_{uu}$  en fonction de  $z^+$ , pour les cas  $Re_{350}$ ,  $Re_{600}$  et  $Re_{960}$ . Pour chacun des cas, le coefficient décroît rapidement, et atteint un minimum de valeur négative, qui traduit l'alternance des *streaks* basse et haute vitesse dans la direction  $z$ . On observe que l'abscisse de ce minimum vaut  $z^+ = 72$  pour les trois cas. L'espacement moyen entre les streaks, noté  $\lambda_z$ , est égal à deux fois l'abscisse du minimum, ce qui donne  $\lambda_z^+ = 144$ . Cet espacement est indépendant du nombre de Reynolds, en accord avec ce qui est observé sur les vitesses instantanées dans les figures 5.4(a-b). D'autre part, la valeur  $\lambda_z^+ = 144$  est proche de la séparation observée expérimentalement par Tomkins & Adrian [93] pour une couche limite à  $Re_\tau = 426$ . Ceux-ci trouvent en effet  $\lambda_z^+ \approx 135$  à

une distance de la paroi  $y^+ = 21$ . On peut noter qu'ils obtiennent cette valeur en comptant les *streaks* sur des visualisations de l'écoulement. Par ailleurs, le nombre de Reynolds semble affecter la valeur du minimum négatif dans la figure 5.5(a). En effet, ce minimum vaut  $-0.14$  pour Re350,  $-0.065$  pour Re600 et  $-0.01$  pour Re960. L'origine de cette variation n'est pas évidente.

La figure 5.5(b) présente le coefficient de corrélation  $\mathcal{R}_{vv}$  en fonction de  $z^+$ , pour les cas Re350, Re600 et Re960. A nouveau, les niveaux de corrélation décroissent rapidement et atteignent un minimum de valeur négative situé en  $z^+ = 35$ . Cette abscisse correspond au diamètre moyen des tourbillons quasi-longitudinaux. Par comparaison, Robinson [74] obtient un diamètre moyen de 34 unités de paroi dans une DNS de couche limite à  $Re_\theta = 670$ . La valeur du minimum est égal à  $-0.3$  pour les trois cas considérés, ce qui montre que le nombre de Reynolds n'a pas d'influence sur la vitesse normale à la paroi dans la zone tampon.

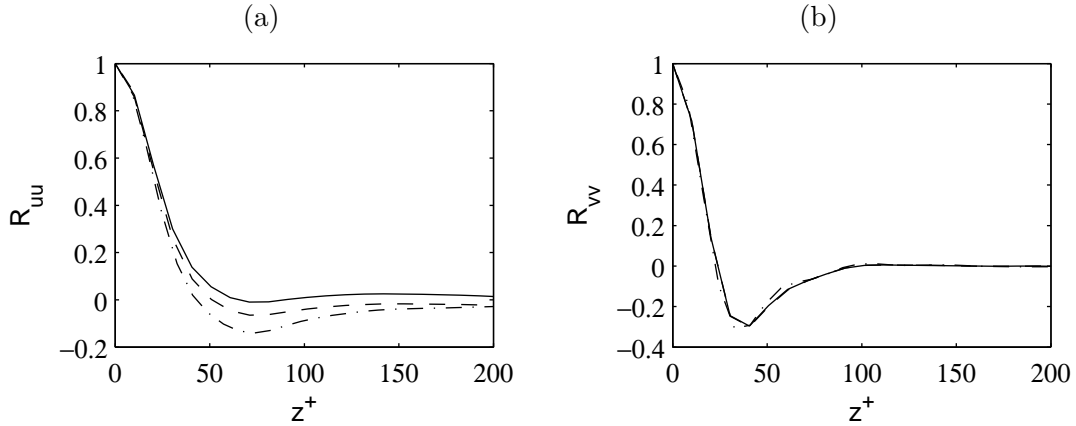


FIGURE 5.5 – Coefficients de corrélation transverse en fonction de  $z^+$ , calculés dans le plan  $y^+ = 18$  pour les cas  $\cdots$  Re350,  $---$  Re600 et  $—$  Re960, pour les vitesses longitudinales (a)  $\mathcal{R}_{uu}$ , et transversales (b)  $\mathcal{R}_{vv}$ .

### 5.2.3 Caractérisation par les spectres de vitesse longitudinale

On s'intéresse à présent à la contribution des *streaks* à l'énergie des fluctuations de vitesse longitudinale dans la zone tampon. Pour cela, la densité spectrale de puissance associée à la vitesse longitudinale,  $\phi_{uu}(k_x, k_z)$ , est calculée pour les cas Re350, Re600 et Re960, dans le plan situé à  $y^+ = 18$ . Le spectre est déterminé à l'aide du coefficient de corrélation  $\mathcal{R}_{uu}$  selon la formule suivante :

$$\phi_{uu}(k_x, k_z) = \frac{u_{rms}^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_{uu}(x, z) e^{-i(k_x x + k_z z)} dx dz \quad (5.2)$$

où  $k_x$  et  $k_z$  sont les nombres d'onde respectivement dans les directions longitudinale et transverse. A partir de ce spectre 2-D, on calcule les spectres mono-dimensionnels :

$$\begin{cases} \phi_{uu}(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{uu}(k_x, k_z) dk_z \\ \phi_{uu}(k_z) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{uu}(k_x, k_z) dk_x \end{cases} \quad (5.3)$$

Les résolutions en nombre d'onde dans les directions  $x$  et  $z$  sont données respectivement par  $\Delta k_x = 2\pi/(12h)$  et  $\Delta k_z = 2\pi/(6h)$ , et les nombres d'onde maximum valent  $k_x^{max} = \pi/\Delta x$  dans la direction  $x$ , et  $k_z^{max} = \pi/\Delta z$  dans la direction  $z$ . Les valeurs de ces paramètres sont fournies pour les trois cas considérés dans le tableau 5.1, en échelles internes. On note que, pour tous les cas,  $\Delta k_x^+$  et  $\Delta k_z^+$  sont proches de  $10^{-3}$ , tandis que  $k_x^{max+}$  et  $k_z^{max+}$  sont de l'ordre de  $10^{-1}$ . Le filtrage explicite, qui dissipe les échelles discrétisées par moins de 4 points par longueur d'onde, impose un nombre d'onde de coupure  $k_x^{cut-off} = \pi/(2\Delta x)$  dans la direction  $x$ , et  $k_z^{cut-off} = \pi/(2\Delta z)$  dans la direction  $z$ . Ceux-ci sont également donnés dans le tableau 5.1.

Cas	$\Delta k_x^+$	$\Delta k_z^+$	$k_x^{max+}$	$k_z^{max+}$	$k_x^{cut-off+}$	$k_z^{cut-off+}$
Re350	0.0015	0.0030	0.19	0.38	0.096	0.19
Re600	0.00087	0.0017	0.12	0.31	0.062	0.15
Re960	0.00055	0.0011	0.12	0.31	0.062	0.15

TABLE 5.1 – Paramètres des spectres de vitesse longitudinale;  $\Delta k_x^+$  et  $\Delta k_z^+$  : résolutions en nombre d'onde,  $k_x^{max+}$  et  $k_z^{max+}$  : nombres d'onde maximum,  $k_x^{cut-off+}$  et  $k_z^{cut-off+}$  : nombres d'onde de coupure du filtrage de relaxation, dans les directions  $x$  et  $z$ .

### 5.2.3.1 Etude des spectres mono-dimensionnels

Les spectres de vitesse  $\phi_{uu}(k_x)$  obtenus en  $y^+ = 18$  pour les cas Re350, Re600 et Re960 sont présentés sur la figure 5.6(a). Ils sont normalisés par les échelles internes, et les axes sont en échelle logarithmique. Les spectres sont assez proches sur l'ensemble des nombres d'onde, malgré une légère différence entre le cas Re350 et les deux autres cas. Par ailleurs, les spectres sont large bande, et font apparaître une pente d'ordre  $-3/5$ , représentée par une droite grise, sur environ une décade pour  $0.0005 \leq k_x^+ \leq 0.005$ . Pour  $k_x^+ \geq 0.005$ , la pente devient ensuite de plus en plus forte. L'effet du filtrage est remarqué au-delà du nombre d'onde  $k_x^+ = 0.05$ , où le niveau des spectres issus de Re600 et Re960 chute rapidement. La coupure du filtre est en effet située autour de  $k_x^{cut-off+} = 0.062$  pour ces simulations, cf table 5.1. En revanche, l'effet du filtrage n'est pas observé pour le cas Re350, car le nombre d'onde de coupure  $k_x^{cut-off+} = 0.096$  est situé à

l'extrémité de la plage de nombres d'onde représentée.

Les spectres  $\phi_{uu}(k_z)$  sont représentés pour les trois cas sur la figure 5.6(b). Comme précédemment, ils sont normalisés par les échelles internes, et les axes sont en échelle logarithmique. Aux bas nombres d'ondes, pour  $k_z^+ < 0.02$ , de fortes différences apparaissent entre les différents cas. Cette partie des spectres sera décrite dans ce qui suit. Pour  $k_z^+ \geq 0.02$ , au contraire, un très bon accord est observé entre les spectres. Ils sont plats entre  $k_z^+ = 0.02$  et  $0.035$ , puis ils montrent une décroissance progressive. La pente reste constante entre  $k_z^+ = 0.06$  et  $0.15$ , puis devient plus forte au-delà de  $k_z^+ = 0.15$ . Cette dernière partie du spectre est liée aux effets du filtre, dont le nombre d'onde de coupure dans la direction  $z$  est de  $k_z^{\text{cut-off}^+} = 0.15$  pour les cas Re600 et Re960, et de  $k_z^{\text{cut-off}^+} = 0.19$  pour le cas Re350.

La normalisation par les échelles internes de la turbulence permet donc de superposer les spectres de vitesse obtenus à différents nombres de Reynolds, sur l'ensemble des nombres d'onde  $k_x^+$ , et sur les nombres d'onde  $k_z^+$  supérieurs à  $0.02$ . Cela illustre, une fois de plus, l'indépendance des structures dites de *streaks* par rapport aux échelles externes. Par ailleurs, en faisant toujours abstraction de la région  $k_z^+ \leq 0.02$  sur la figure 5.6(b), on trouve les composantes les plus énergétiques du spectre  $\phi_{uu}(k_z)$  vers les nombres d'onde  $k_z^+ = 0.02 - 0.035$ . Les *streaks* les plus énergétiques ont donc une séparation transversale comprise entre  $\lambda_z^+ = 2\pi/0.035 = 180$  et  $\lambda_z^+ = 2\pi/0.02 = 300$ . On note que ces valeurs sont supérieures à la séparation estimée dans le paragraphe 5.2.2 à l'aide du coefficient de corrélation  $\mathcal{R}_{uu}$ , qui donne  $\lambda_z^+ = 144$ . Tomkins & Adrian [93] ont observé un décalage similaire sur une couche limite à  $Re_\tau = 426$ . En effet, en comptant visuellement les streaks, ils obtiennent une séparation  $\lambda_z^+ \approx 135$ , tandis qu'ils trouvent les composantes les plus énergétiques du spectres dans la gamme  $\lambda_z^+ = 200 - 400$ .

Le comportement des spectres  $\phi_{uu}(k_z)$  aux bas nombres d'onde pour  $k_z^+ < 0.02$ , représentés sur la figure 5.6(b), est à présent étudié. Pour le cas Re960, bien que le niveau du spectre varie assez fortement avec  $k_z^+$ , on observe des composantes dominantes pour  $k_z^+ = 0.003 - 0.005$ . Le spectre du cas Re600 présente également des composantes dominantes, situées vers  $k_z^+ = 0.005 - 0.01$ , mais leur niveau est deux fois plus faible que dans le cas Re960. Enfin, dans le cas Re350, le niveau du spectre est deux fois plus faible que celui rencontré dans le cas Re600, et ne présente pas de pic marqué. Ainsi, pour les bas nombres d'onde, le niveau des spectres augmente avec le nombre de Reynolds. De plus, les composantes observées autour de  $k_z^+ = 0.005 - 0.01$  pour le cas Re600, et de  $k_z^+ = 0.003 - 0.005$  pour le cas Re960 correspondent respectivement à des longueurs d'onde  $\lambda_z^+ \approx 600 - 1300$  et  $\lambda_z^+ \approx 1300 - 2100$ . Si on exprime ces longueurs d'onde en fonction de la demi-hauteur du canal  $h$ , on obtient  $\lambda_z/h \approx 1 - 2$  dans les deux cas.



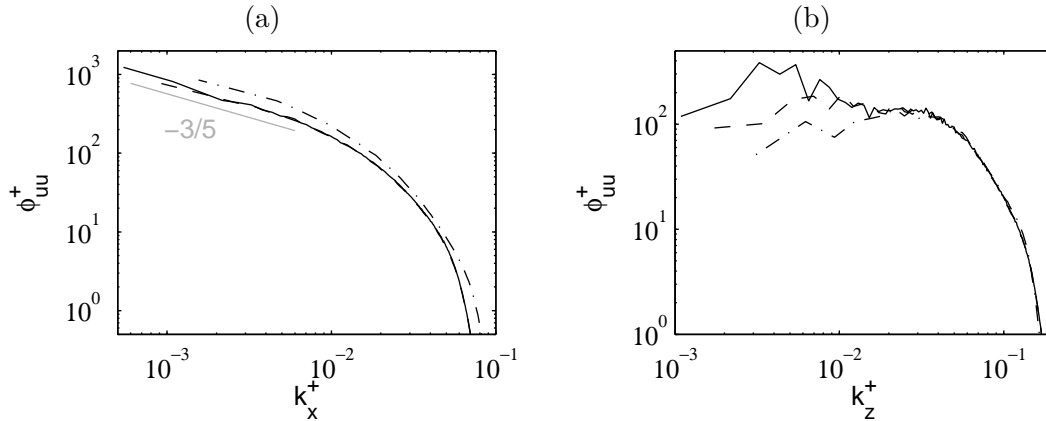


FIGURE 5.6 – Densités spectrales de puissance 1-D de la vitesse longitudinale en fonction de (a)  $k_x^+$  et (b)  $k_z^+$ , calculées dans le plan  $y^+ = 18$  pour les cas  $\cdots$  Re350,  $---$  Re600 et  $—$  Re960.

Ces résultats suggèrent que la partie bas nombres d'onde du spectre est plutôt liée aux échelles externes, ce qu'on vérifie en représentant sur la figure 5.7 les spectres normalisés par  $h$  et par la vitesse au milieu du canal  $U_0$ , pour les cas Re600 et Re960. Comme attendu, les composantes dominantes des deux cas sont situées aux mêmes nombres d'onde compris entre  $k_z h = 3$  et 6, correspondant aux longueurs d'onde  $\lambda_z/h = 1 - 2$ . Les niveaux de ces composantes sont de plus très proches entre les deux cas, ce qui confirme le rôle prépondérant des échelles externes dans cette partie du spectre. Pour les nombres d'ondes supérieurs à  $k_z h > 6$ , en revanche, les spectres ne sont plus superposés.

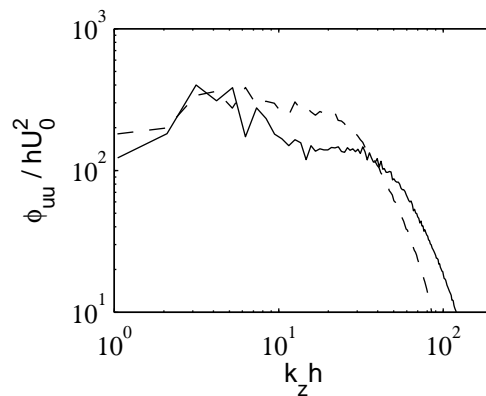


FIGURE 5.7 – Densités spectrales de puissance 1-D de la vitesse longitudinale en fonction de  $k_z$  normalisées par les échelles externes  $U_0$  et  $h$ , calculées dans le plan  $y^+ = 18$  pour les cas  $---$  Re600 et  $—$  Re960.

L'amplification du spectre aux bas nombres d'onde semble donc produite par des grandes

structures présentes dans l'écoulement. De telles structures ont déjà été remarquées au milieu du canal, dans le chapitre 4 à travers les coefficients de corrélation  $\mathcal{R}_{uu}^{y=h}(0, z)$ . Il est possible qu'elles influencent l'écoulement sur toute la hauteur du canal, y compris dans la zone tampon.

### 5.2.3.2 Etude des spectres bi-dimensionnels

On s'intéresse à présent aux spectres bi-dimensionnels  $\phi_{uu}(k_x, k_z)$  des cas Re350, Re600 et Re960, dont on extrait des profils à des valeurs particulières du nombre d'onde longitudinal  $k_x^+ = 0.025, 0.0125, 0.0031, 0.0017$  et  $0$ . Chaque valeur de  $k_x^+$  est associée à un mode longitudinal de longueur d'onde  $\lambda_x^+ = 2\pi/k_x^+$ , qui vaut respectivement 250, 500, 2000, 3700 et  $\infty$ . Le mode  $\lambda_x^+ = \infty$  correspond à des structures s'étendant sur toute la longueur du canal. Le but de cette étude est de déterminer quels modes sont influencés par le nombre de Reynolds, et quels modes, au contraire, ne le sont pas et ne dépendent que des échelles internes. Pour cela, on examine la répartition de l'énergie de chaque mode en fonction du nombre d'onde transverse  $k_z$ , en normalisant par les échelles internes.

La figure 5.8(a) montre l'énergie du mode  $\lambda_x^+ = 250$  pour les cas Re350, Re600 et Re960. Bien qu'ils soient assez bruités, les spectres sont assez proches sur l'ensemble des nombres d'onde. Ils sont relativement plats pour  $k_z^+ \leq 0.02$ , et présentent ensuite une bosse située entre  $k_z^+ = 0.02$  et  $0.1$ . La figure 5.8(b) représente les spectres pour le mode  $\lambda_x^+ = 500$ . Comme précédemment, ils coïncident assez bien entre les différents cas, et se composent d'une zone plate pour  $k_z^+ \leq 0.01$ , suivie d'une bosse entre  $k_z^+ = 0.01 - 0.08$ . Sur la figure 5.8(c), les spectres sont représentés pour  $\lambda_x^+ = 2000$ . Ils sont assez similaires, même si on observe un niveau un peu plus élevé pour le cas Re960 aux nombres d'onde  $k_z^+$  inférieurs à  $0.01$ . Ils présentent par ailleurs une bosse assez large puisqu'elle s'étend de  $k_z^+ = 0.003$  à  $0.06$ . La figure 5.8(d) fournit les spectres pour  $\lambda_x^+ = 3700$ . Une légère différence entre les cas est observée pour les nombres d'onde inférieurs à  $k_z^+ = 0.01$ , où le niveau augmente avec le nombre de Reynolds, et des pics apparaissent autour de  $k_z^+ = 0.005 - 0.008$  pour Re960, et de  $k_z^+ = 0.01$  pour Re600. Pour  $k_z^+ \geq 0.01$ , les spectres sont en revanche très proches. Leurs niveaux restent relativement constants entre  $k_z^+ = 0.01$  et  $0.03$ , et diminuent ensuite. Enfin, les spectres correspondant au mode  $\lambda_x^+ = \infty$  sont montrés sur la figure 5.8(e). On observe ici des différences importantes selon le nombre de Reynolds pour  $k_z^+ < 0.02$ . En effet, le spectre du cas Re960 est dominé par des composantes situées à  $k_z^+ = 0.003 - 0.005$ , tandis que le cas Re600 présente un maximum à  $k_z^+ = 0.007$ , d'amplitude 3 fois plus faible que celle du maximum observé sur le cas Re960. Ces nombres d'onde correspondent à des longueurs d'onde situées dans la gamme  $h - 2h$ , comme précédemment observé sur le spectre

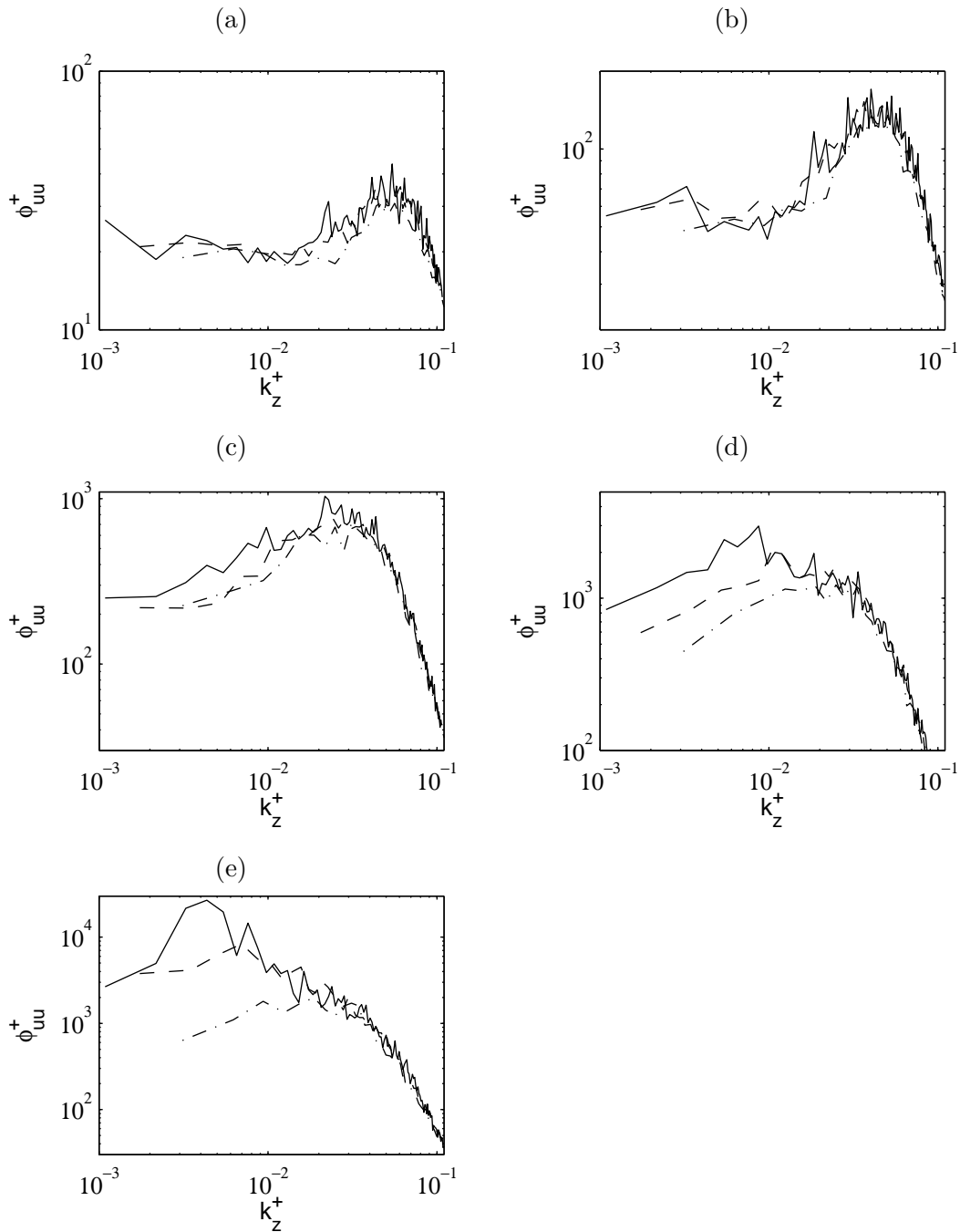


FIGURE 5.8 – Densité spectrale de puissance 2-D de la vitesse longitudinale; le spectre  $\phi_{uu}^+(k_x^+, k_z^+)$  est représenté en fonction de  $k_z^+$ , pour des valeurs de  $k_x^+$  correspondant aux modes de longueurs d'onde (a)  $\lambda_x^+ = 250$ , (b)  $\lambda_x^+ = 500$ , (c)  $\lambda_x^+ = 2000$ , (d)  $\lambda_x^+ = 3700$  et (e)  $\lambda_x^+ = \infty$ ; le spectre est calculé dans le plan  $y^+ = 18$  pour les cas  $-\cdot-\cdot-$  Re350,  $- - -$  Re600 et  $—$  Re960.

monodimensionnel  $\phi_{uu}(k_z)$ . Le spectre du cas Re360, enfin, ne présente pas de maximum dans la gamme  $k_z^+ = 0.003 - 0.02$ , et son niveau est jusqu'à 5 fois plus faible par rapport à celui du cas Re600. Pour des nombres d'onde supérieurs à 0.02, en revanche, les spectres obtenus dans les trois cas sont en bon accord.

L'influence du nombre de Reynolds n'est donc observée que pour les longueurs d'onde longitudinales  $\lambda_x^+ = 3700$  et  $\infty$ , et pour des longueurs d'onde transverses  $\lambda_z$  de l'ordre de  $h$ . Ainsi, dans la zone tampon, l'énergie des structures les plus longues et les plus larges du spectre de vitesse longitudinale sont amplifiées par les échelles externes, tandis que l'énergie des structures plus petites ne dépend que des échelles internes. Cet effet a été observé dans les DNS de canal de Hoyas & Jiménez [51] à  $Re_\tau = 547, 934$  et 2003. Ils remarquent en effet que les spectres de vitesse longitudinale se superposent bien lorsqu'ils sont rendus sans dimension par les échelles internes, sauf pour les structures les plus larges et les plus longues, qui sont amplifiées lorsque le nombre de Reynolds augmente. Par ailleurs, les auteurs observent que cette amplification concerne des structures dont la longueur atteint  $10h$ . Or, dans les simulations présentées ici où la longueur du domaine est de  $12h$ , des structures d'une telle longueur apparaissent comme infiniment longues à cause de la périodicité du domaine. Cela explique pourquoi l'effet des échelles externes est observé sur la composante  $\lambda_x^+ = \infty$ .

L'étude est à présent recentrée sur les modes  $\lambda_x^+ = 250, 500, 2000$  et  $3700$ , qui représentent l'énergie des *streaks* dans la zone tampon. Pour le mode  $\lambda_x^+ = 3700$ , on ne considère que les nombres d'ondes supérieurs à  $k_z^+ = 0.01$ , où les spectres sont superposés. On observe sur les figure 5.8(a-d) que plus  $\lambda_x$  est grand, plus la bosse du spectre se déplace vers les bas nombres d'onde  $k_z^+$ . Ces bosses sont centrées approximativement autour des nombres d'onde  $k_z^{pic^+} = 0.06, 0.047, 0.026$  et  $0.02$  respectivement pour  $\lambda_x^+ = 250, 500, 2000$  et  $3700$ . On obtient ainsi une estimation de la largeur moyenne  $\lambda_z^{pic^+} = 2\pi/k_z^{pic^+}$  des structures de longueur  $\lambda_x^+$ , représentée sur la figure 5.9. Les valeurs de  $\lambda_z^{pic^+}$ , représentées par des croix, sont en bon accord avec la fonction  $\alpha\sqrt{\lambda_x^+} + \beta$ , où les constantes  $\alpha = 5$  et  $\beta = 20$  ont été déterminées graphiquement. Il semble donc que la largeur des structures croît avec la racine de leur longueur. Ce résultat peut se comparer à la simulation directe d'un écoulement pariétal à  $Re_\tau = 1000$  de Jimenez *et al.* [57], dans laquelle le spectre de vitesse longitudinale est centré autour de  $\lambda_z^+ = 13\lambda_x^{+1/3}$  pour  $y^+ = 16$ . La loi de puissance est donc différente de celle obtenue ici, mais cela peut être dû au fait que ces auteurs calculent des spectres prémultipliés  $k_x k_z \phi_{uu}(k_x, k_z)$ .

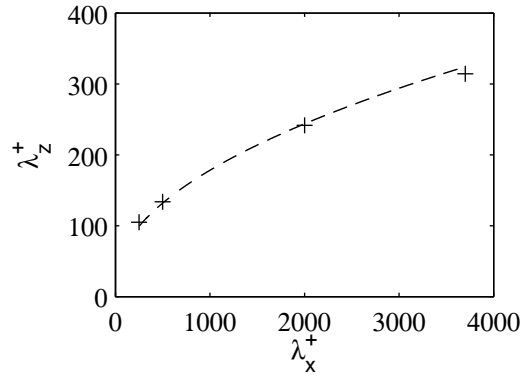


FIGURE 5.9 – Longueur d’onde transversale  $\lambda_z^{pic+}$  de la bosse observée sur les profils des spectres bi-dimensionnels de vitesse longitudinale, en fonction du nombre d’onde longitudinal  $\lambda_x^+$  ; + données obtenues avec les cas Re360, Re600 et Re960, - - -  $\lambda_z^+ = 5\sqrt{\lambda_x^+} + 20$ .

### 5.3 Pression pariétale

Les fluctuations de pression pariétale sont maintenant étudiées à l’aide de la densité spectrale de puissance  $\phi_{pp}(k_x, k_z, \omega)$ , où  $\omega$  est la pulsation, calculée sur la paroi située en  $y = 0$ . Pour cela, la pression pariétale  $p(x, y = 0, z, t)$  est enregistrée sur une durée  $T_{data}$  échantillonnée avec un pas de temps  $\delta t = m\Delta t$ , où  $\Delta t$  est le pas d’intégration temporelle et  $m$  un nombre entier. Cet enregistrement est subdivisé en  $N_S$  segments temporels de durée  $T_S$  se recouvrant à 50%. Une transformée de Fourier  $\hat{p}(k_x, k_z, \omega)$  est alors calculée sur chaque segment, ainsi qu’une densité spectrale de puissance  $\phi_{pp} = \hat{p}\hat{p}^*/(L_x L_z T_S)$ . Le spectre final est obtenu en faisant la moyenne des spectres calculés sur les différents segments. Les paramètres de calcul des spectres sont donnés dans le tableau 5.2 pour les différents cas. La longueur totale de l’échantillon temporel varie entre  $T_{data}U_0/h = 58$  pour le cas Re960, et  $T_{data}U_0/h = 118$  pour le cas Re600. La longueur des segments temporels varie de  $T_S U_0/h = 13$  pour le cas Re960 à  $T_S U_0/h = 24$  pour le cas Re600. La plage des pulsations est également donnée dans le tableau, en échelles internes et externes. Elle est égale à  $\Delta\omega \leq \omega \leq \omega_{max}$ , où  $\Delta\omega = \pi/T_{segment}$  est la résolution spectrale et  $\omega_{max} = \pi/\delta t$  la pulsation maximale. La résolution spectrale normalisée par les échelles externes,  $\Delta\omega h/U_0$ , est comprise entre 0.3 et 0.6 pour tous les cas. La pulsation maximale normalisée par les échelles internes,  $\omega_{max}^+ = \omega\nu/u_\tau^2$ , varie de 2.7 pour le cas Re960 à 14.4 pour le cas M01.

#### 5.3.1 Spectre fréquentiel

Le spectre fréquentiel  $\phi_{pp}(\omega)$  de pression est obtenu par intégration du spectre 3-D  $\phi_{pp}(k_x, k_z, \omega)$  selon les nombres d’onde  $k_x$  et  $k_z$ . Dans ce qui suit, les spectres déterminés pour les cas M01,

Cas	$\delta t U_0/h$	$T_{data} U_0/h$	$N_S$	$T_S U_0/h$	$\Delta \omega^+$	$\Delta \omega h/U_0$	$\omega_{max}^+$	$\omega_{max} h/U_0$
M01	0.012	73	5	24	0.014	0.58	14.4	258
Re350	0.041	107	9	20	0.017	0.31	4.3	77
Re600	0.043	118	10	21	0.010	0.29	2.6	74
Re960	0.027	58	7	13	0.011	0.47	2.7	118

TABLE 5.2 – Paramètres utilisés pour le calcul des spectres de pression pariétale  $\phi_{pp}(k_x, k_z, \omega)$ ;  $\delta t U_0/h$  : pas de temps d'échantillonnage normalisé par la vitesse au centre du canal  $U_0$  et la demi-hauteur du canal  $h$ ,  $T_{data} U_0/h$  : durée totale de l'échantillon temporel,  $N_S$  : nombre de segments temporels,  $T_S U_0/h$  : durée d'un segment temporel,  $\Delta \omega$  : résolution spectrale,  $\omega_{max}$  : pulsation maximale; ces deux pulsations sont données en utilisant une normalisation interne ( $\omega^+ = \omega \nu / u_\tau^2$ ) et externe ( $\omega h / U_0$ ).

Re350, Re600 et R960 sont représentés avec différentes normalisations, afin de trouver des lois de similitude suivies par les différentes composantes du spectre. Les spectres obtenus avec une normalisation par les échelles internes, avec  $\tau_w$  pour l'échelle de pression, et  $\nu/u_\tau^2$  pour l'échelle de temps, sont montrés sur la figure 5.10(a). Les spectres sont large bande, et sont plats pour des pulsations inférieures à  $\omega \nu / u_\tau^2 = 0.1$ . L'énergie des composantes diminue ensuite progressivement, puis chute plus rapidement pour  $\omega \nu / u_\tau^2 > 0.7$ . Les spectres sont semblables dans la région des hautes fréquences, pour  $\omega \nu / u_\tau^2 \geq 0.5$ . Cette ressemblance est cohérente avec l'idée selon laquelle les fluctuations de pression hautes fréquences sont produites par les petites structures de la zone interne de la couche limite, comme observé par Farabee & Casarella [38] et par Goody & Simpson [43]. Par ailleurs, les spectres calculés pour les cas Re360 et M01 sont en bon accord sur l'ensemble des pulsations. Ces deux calculs sont effectués à un même nombre de Reynolds  $Re_\tau = 350$ , mais le nombre de Mach vaut 0.1 pour M01, et 0.5 pour Re350. L'accord entre les spectres montre donc que le nombre de Mach n'influence pas l'énergie des fluctuations de pression lorsqu'il est compris entre 0.1 et 0.5.

Les mêmes spectres sont représentés avec une normalisation mixte sur la figure 5.10(b). On utilise  $\tau_w$  pour la pression, et  $h/u_\tau$  pour le temps. Dans les travaux de Farabee & Casarella [38], cette normalisation permet de superposer les spectres de pression dans la région des moyennes fréquences, définie par  $10 \leq \omega \delta / u_\tau \leq 100$ , pour des écoulements de couche limite à  $Re_\tau = 1169 - 2010$ . Les spectres obtenus dans les cas M01, Re350 et Re600 sont ici en assez bon accord. Le cas Re960 présente en revanche des composantes plus faibles, avec une différence d'environ 2dB par rapport au cas Re600.

Les spectres prémultipliés par la pulsation  $\omega$  sont représentés sur la figure 5.11 en normalisation interne. Pour  $\omega^+ \leq 0.1$ , les niveaux des spectres prémultipliés présentent une pente

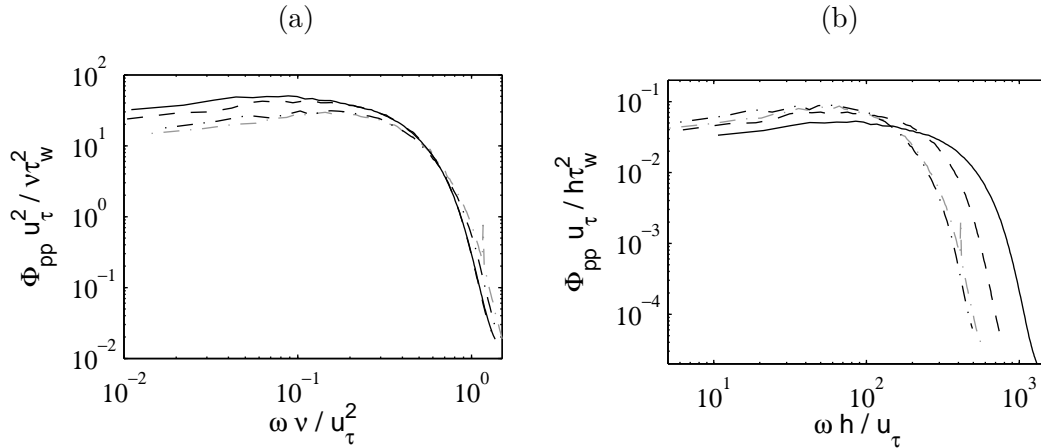


FIGURE 5.10 – Spectres fréquentiels des fluctuations de pression à la paroi en fonction de la pulsation, normalisés par (a) les échelles internes  $\tau_w$  et  $\nu/u_\tau^2$ , (b) les échelles mixtes  $\tau_w$  et  $h/u_\tau$ , et calculés pour les cas  $\cdots$  M01,  $\cdots$  Re350,  $-\cdot-\cdot$  Re600 et  $\text{—}$  Re960.

d'ordre  $6/5$ , illustrée par un trait bleu sur la figure, et atteignent un maximum pour  $\omega^+ = 0.3$ . Le niveau de ce maximum est identique pour les cas Re600 et Re960, tandis que celui du cas Re350 est légèrement inférieur. Les résultats concernant la pente, la pulsation du maximum et son niveau identique pour  $Re_\tau \geq 600$  sont en accord avec les DNS de canal plan de Hu *et al.* [55] à des nombres de Reynolds  $Re_\tau$  variant entre 90 et 1440. Le maximum atteint pour  $\omega^+ = 0.3$  marque le début de la zone des hautes pulsations. Un grand nombre de données expérimentales rassemblées par Goody & Simpson [43] indiquent que le spectre de pression pariétale varie en  $\omega^{-5}$  dans cette zone. Les spectres prémultipliés des cas M01 et Re350 présentent en effet une pente d'ordre -4, indiquée par une ligne rouge sur la figure, mais sur une gamme de pulsation très petite  $0.8 \leq \omega^+ \leq 1$ . La pente devient ensuite plus forte à cause de la dissipation liée au filtre de relaxation, le nombre d'onde de coupure du filtre dans la direction  $x$  valant  $k_x^{\text{cut-off}^+} = 0.096$  pour M01 et Re350 par exemple. En admettant l'hypothèse de Taylor d'une turbulence "gelée" convectée à une vitesse  $u_c = 0.7U_0$ , la pulsation de coupure est alors égale à  $\omega^{\text{cut-off}^+} = 1.3$  pour les deux cas considérés. La valeur de  $u_c$  utilisée ici a été déterminée avec les spectres en fréquence  $\omega$  - nombre d'onde  $k_x$ , qui seront présentés plus loin.

### 5.3.2 Pression quadratique moyenne

La pression quadratique moyenne  $p_{rms}^2$  est calculée par intégration du spectre fréquentiel sur l'ensemble des pulsations. Les valeurs de  $p_{rms}/\tau_w$  obtenues pour les différents cas sont fournies sur la figure 5.12 en fonction du nombre de Reynolds, représenté en échelle logarithmique. Les résultats des cas Re350, Re600 et Re960 sont indiqués par une croix, et ceux du cas M01 par

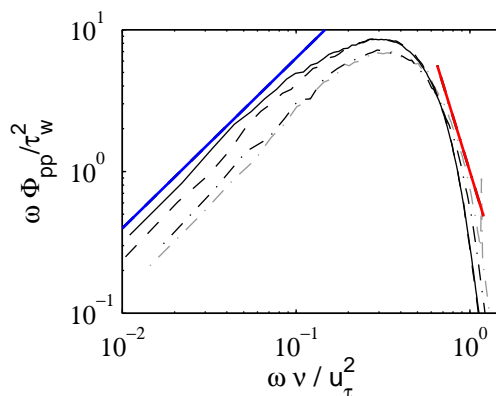


FIGURE 5.11 – Spectres prémultipliés des fluctuations de pression à la paroi en fonction de la pulsation, normalisés par les échelles internes, et calculés pour les cas  $\cdots$  M01,  $\dashv$  Re350,  $- - -$  Re600 et  $\text{—}$  Re960 ; lignes de pente d'ordre  $\text{—}$   $6/5$  et  $\text{—}$   $-4$ .

un rond. On note une légère augmentation de  $p_{rms}$  avec le nombre de Reynolds. La pression quadratique issue du calcul M01, d'un canal plan à  $M = 0.1$  et  $Re_\tau = 350$ , est égale à celle provenant du calcul Re350. Ce résultat était attendu puisque ces deux cas présentent des spectres fréquentiels de pression très proches. La figure contient également les solutions du modèle de Farabee & Casarella [38], données par la formule  $(p_{rms}/\tau_w)^2 = 6.5 + 1.86 \ln(Re_\tau)$ , et représentées par des tirets sur la figure. Les valeurs de  $p_{rms}/\tau_w$  fournies par les simulations sont légèrement inférieures aux niveaux prédits par le modèle. Elles montrent en revanche un bon accord avec les niveaux calculés à partir du modèle de Hu *et al.* [55], valant  $(p_{rms}/\tau_w)^2 = 2.60 \ln(Re_\tau) - 11.25$ , illustrés par un trait sur la figure. Ce modèle empirique a été construit pour s'accorder avec des résultats issus de DNS de canal effectuées par Moser *et al.* [70] à  $Re_\tau = 395 - 590$ , et par Hu *et al.* [55] à  $Re_\tau = 360 - 1440$ .

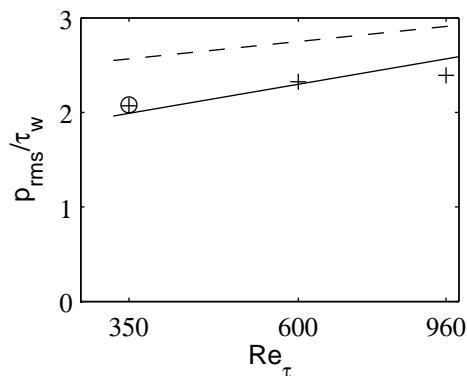


FIGURE 5.12 – Pression quadratique moyenne  $p_{rms}/\tau_w$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re_\tau$ , pour le cas M01 ( $\oplus$ ) et les cas Re350, Re600 et Re960 ( $+$ ) ; solutions du  $\text{---}$  modèle de Farabee & Casarella [38], et du  $\text{—}$  modèle de Hu *et al.* [55].



### 5.3.3 Spectre en fréquence - nombre d'onde

En intégrant le spectre tri-dimensionnel  $\phi_{pp}(k_x, k_z, \omega)$  le long du nombre d'onde  $k_z$ , on obtient le spectre bi-dimensionnel  $\phi_{pp}(k_x, \omega)$ . Ce dernier spectre est calculé pour les cas M01 et Re350, dont les nombres de Mach valent respectivement 0.1 et 0.5, le nombre de Reynolds étant égal à 350 dans les deux cas. L'étude du spectre 2-D porte sur deux aspects particuliers : le pic convectif et les composantes acoustiques. Le pic convectif correspond à l'empreinte des structures turbulentes convectées par l'écoulement, qui se traduit sur le spectre  $\phi_{pp}(k_x, \omega)$  par un pic autour du nombre d'onde convectif  $k_c = \omega/u_c$ , où  $u_c$  est la vitesse de convection. Les composantes acoustiques sont produites par le rayonnement acoustique de la turbulence. La vitesse de phase de ces composantes étant supersonique, elles se trouvent dans une zone du spectre appelée zone supersonique, située aux petits nombres d'onde définis par  $k_x^2 + k_z^2 \leq (\omega/c - k_x u_c/c)^2$ , où  $c$  est la vitesse du son. Le spectre 2-D considéré ici étant obtenu par intégration le long de  $k_z$ , les limites de la zone supersonique sont réduites à des lignes définies par  $k_x = \omega/(c \pm u_c)$ , appelées lignes soniques.

Les contours du spectre  $k_x - \omega$  issu du calcul Re350 à nombre de Mach de 0.5 sont montrés sur la figure 5.13(a) en fonction du nombre d'onde  $k_x$  et de la pulsation  $\omega$  normalisés par la demi-hauteur du canal  $h$  et la vitesse du son  $c$ . Les niveaux des contours varient en échelle logarithmique, et couvrent une gamme de 7 décades. Le pic convectif apparaît clairement autour du nombre d'onde convectif, représenté en tirets noirs. La vitesse de convection  $u_c$  est ici égale à  $0.7U_0$ . Par ailleurs, les lignes soniques sont indiquées en tirets rouges sur la figure. Le spectre  $k_x - \omega$  ne fait apparaître aucun pic dans la zone supersonique, ce qui suggère que les composantes acoustiques sont dominées par le pic convectif.

Les contours du spectre  $k_x - \omega$  sont enfin représentés sur la figure 5.13(b) pour le cas M01 à un nombre de Mach de 0.1, en fonction du nombre d'onde  $k_x$  et de la pulsation  $\omega$  normalisés par les échelles externes. Comme précédemment, les contours varient en échelle logarithmique et couvrent une gamme de 7 décades. Le nombre d'onde convectif et les lignes soniques sont aussi montrés. Comme attendu, on observe un pic convectif, avec une vitesse de convection  $u_c = 0.7U_0$ . On peut noter qu'ici le pic convectif affecte peu la zone supersonique car le nombre d'onde convectif est assez éloigné de la ligne sonique, contrairement à ce qui est observé sur la figure 5.13(a), pour un nombre de Mach de 0.5. Sur la figure 5.13(b), la zone supersonique fait ainsi apparaître des composantes de niveau élevé, qui correspondent à l'empreinte des ondes acoustiques produites par l'écoulement. Ces composantes sont réparties sur une très large gamme de pulsations et de nombres d'onde, ce qui suggère que les sources acoustiques produisant ces composantes couvrent une large gamme d'échelles spatiales et temporelles.

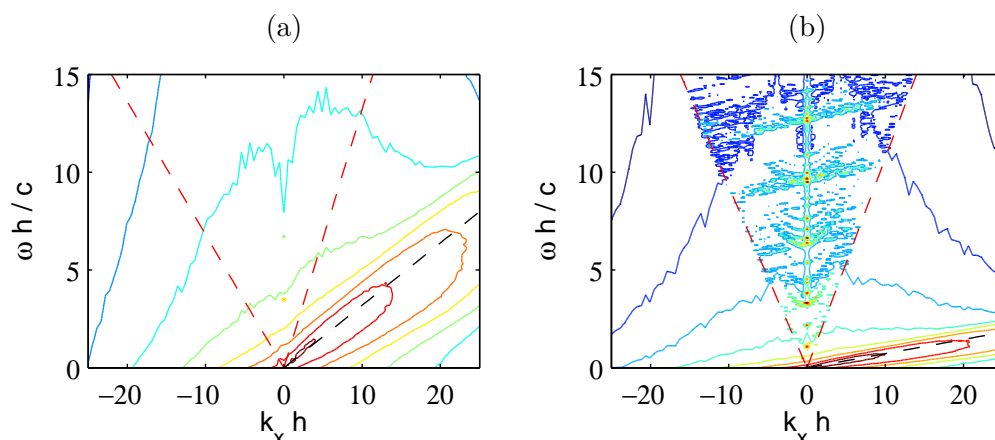


FIGURE 5.13 – Densités spectrales de puissance des fluctuations de pression pariétale en fonction de la pulsation  $\omega$  et du nombre d’onde  $k_x$ , normalisées par les échelles externes, pour les cas (a) Re350 et (b) M01 ; - - - nombre d’onde convectif  $k_x = \omega/u_c$ , avec  $u_c = 0.7U_0$ , - - - nombres d’onde soniques  $k_x = \omega/(u_c \pm c)$ .

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les résultats des trois simulations à  $M = 0.5$  et  $Re_\tau = 350, 600$  et  $960$ , et de la simulation à  $M = 0.1$  et  $Re_\tau = 350$  ont été analysés. Plusieurs aspects de la turbulence de paroi ont été abordés.

Tout d’abord, les profils de vitesse moyenne et de vitesse fluctuante ont été comparés. Il a notamment été montré que la vitesse suit bien une loi de similitude du type  $U^+ = f(y^+)$  dans la zone logarithmique, mais que cette loi n’est pas exactement celle d’un profil logarithmique. Ce résultat a été observé pour des écoulements de canal plan par Hoyas & Jiménez [51] et par Moser *et al.* [70], entre autres.

Dans une deuxième partie, on a mis en évidence la présence dans la zone tampon de l’écoulement de plusieurs types de structures, liées soit aux échelles internes, soit aux échelles externes de la turbulence. Des visualisations de l’écoulement font apparaître des structures connues dans la littérature, les *streaks* et les tourbillons quasi-longitudinaux, qui dépendent des échelles internes. Les corrélations de vitesse longitudinale permettent d’estimer un espacement moyen entre les *streaks* égal à  $\lambda_z^+ = 144$ , mais l’examen de la densité spectrale de puissance  $\phi_{uu}$  montre que les *streaks* contribuant le plus à l’énergie cinétique ont un espacement transversal plus élevé compris entre  $\lambda_z^+ = 180$  et  $300$ . Ces résultats sont en accord avec ceux de Tomkins & Adrian [93]. On observe de plus que l’espacement transversal entre les *streaks* varie comme la racine de leur longueur. Un résultat similaire a été obtenu par Jiménez *et al.* [57]. Enfin, des structures de largeur proportionnelle à  $h$  et de longueur égale à la longueur du canal exercent une influence sur les bas

nombres d'onde du spectre de vitesse longitudinale, comme observé par Hoyas & Jiménez [51].

Une dernière partie est consacrée aux fluctuations de pression pariétale. Les spectres fréquentiels issus des différents calculs sont très semblables lorsqu'ils sont normalisés en échelles internes, ce qui est en accord avec la littérature [38, 43]. L'évolution de la pression quadratique moyenne en fonction du nombre de Reynolds est également conforme aux résultats issus de la DNS [55, 70]. Les spectres en fréquence et en nombre d'onde ont enfin été examinés pour les calculs à même nombre de Reynolds, et à nombres de Mach  $M = 0.1$  et  $0.5$ . Dans les deux cas, un pic convectif est observé, avec une vitesse de convection égale à  $0.7U_0$ . Le cas à  $M = 0.1$  fait de plus apparaître des composantes acoustiques qui recouvrent une grande partie de la zone supersonique du spectre. Ce dernier point montre la capacité de la LES compressible à calculer directement le bruit émis par la turbulence de paroi dans le cas du canal plan.

# Conclusion et perspectives

## Conclusion générale

Ce travail a porté sur le développement d'algorithmes d'intégration temporelle pour les écoulements de paroi, et sur l'étude de ces écoulements à l'aide de la simulation compressible des grandes échelles. L'approche LES utilisée est basée sur un filtrage de relaxation qui modélise l'effet des échelles non résolues.

Le problème de l'intégration temporelle a tout d'abord été abordé. Les maillages très raffinés rencontrés dans les simulations des écoulements de paroi entraînent en effet une réduction importante du pas de temps lorsque l'intégration temporelle est explicite. La littérature indique que des schémas semi-implicites sont souvent employés pour relâcher cette contrainte, mais que leur précision est limitée à l'ordre 2. Deux schémas semi-implicites d'ordre 3 à 6 étapes ont donc été développés. Chacun de ces schémas combine le schéma explicite de Berland *et al.* [8] avec un algorithme implicite original. Les erreurs de dispersion et de dissipation de ces schémas ont alors été évalués par une analyse dans l'espace de Fourier. Cette analyse montre que l'un des schémas peut résoudre avec une grande précision des ondes discrétisées par au moins 5 points par période. L'autre schéma peut résoudre des ondes discrétisées par au moins 9 points par période, ce qui est équivalent aux propriétés du schéma de Runge-Kutta explicite standard d'ordre 4 (RK4).

La stabilité et la précision des schémas développés ont alors été estimées à l'aide de cas test bi-dimensionnels. En particulier, le cas de propagation d'une impulsion acoustique a été étudié. Nous avons observé que grâce aux algorithmes semi-implicites, le pas de temps peut être maintenu constant lorsque le maillage est fortement raffiné dans une direction. Ainsi, sur un maillage présentant un rapport d'aspect de 32, l'un des schémas développés admet un pas de temps 26 fois plus grand que celui admis par le schéma de RK4. Les erreurs induites par les schémas semi-implicites ont été ensuite estimées, et présentent des niveaux similaires ou inférieurs aux niveaux d'erreur obtenus avec le schéma de RK4. Les algorithmes semi-implicites se sont toutefois avérés fortement coûteux en temps CPU. Afin de remédier à ce problème, une méthode

de partitionnement a été mise en œuvre sur des maillages comprenant une zone fortement raffinée dans une direction, et une zone où les tailles de mailles sont similaires dans les deux directions. L'algorithme semi-implicite n'est alors utilisé que dans la zone raffinée, et le reste du domaine est résolu explicitement. Cette méthode a permis de rendre les calculs jusqu'à 5 fois plus rapides par rapport à des simulations réalisées avec le schéma explicite de Berland *et al.* [8].

Des simulations compressibles des grandes échelles ont ensuite été mises en œuvre sur un cas de canal plan turbulent. Au préalable, la résolution minimale devant être imposée au maillage près de la paroi a été déterminée à partir d'une étude de convergence en maillage. Les valeurs obtenues sont  $\Delta x^+ = 30$ ,  $\Delta y_w^+ = 0.95$  et  $\Delta z^+ = 10$  respectivement pour les directions longitudinale, normale à la paroi et transverse, ce qui est proche de la résolution utilisée par Schlatter *et al.* [78] pour la LES d'une couche limite. Des simulations de canal plan ont ensuite été réalisées pour un nombre de Mach de 0.5 et pour des nombres de Reynolds de 350, 600 et 960. Une simulation a également été effectuée pour un nombre de Mach de 0.1 et un nombre de Reynolds de 350. Les profils de vitesses moyenne et fluctuante ont été calculés pour chacune de ces simulations, et montrent un bon accord avec des solutions issues de DNS de la littérature. Les corrélations spatiales dans les directions longitudinale et transversale ont également été examinées pour les trois composantes de vitesse. Dans la zone tampon, les vitesses sont corrélées sur des distances très courtes. En revanche, au milieu du canal, des corrélations un peu élevées témoignent de la présence de structures dont les dimensions sont proches des dimensions du domaine.

Les résultats issus des différentes simulations ont été utilisés pour analyser certains aspects de la turbulence de paroi. Les profils de vitesse moyenne obtenus à différents nombres de Reynolds ont été comparés. Ils sont très similaires lorsqu'ils sont normalisés en échelles internes, et font apparaître les zones linéaire et logarithmique connues de la littérature. Toutefois, la fonction diagnostic a été calculée, et révèle que la vitesse moyenne ne suit pas exactement un profil logarithmique dans la zone située en  $y^+ > 70$ , où se situe normalement la zone logarithmique. Ce phénomène avait été observé auparavant dans des DNS de canal plan [51, 70]. Nous nous sommes ensuite intéressés aux structures cohérentes présentes dans la zone tampon. Des *streaks* et des tourbillons quasi-longitudinaux ont été identifiés par des visualisations de l'écoulement. L'espacement transversal entre les *streaks* a été estimé à l'aide de la corrélation transverse de vitesse longitudinale, et vaut 144 unités de paroi. Un examen du spectre de vitesse longitudinale fluctuante indique toutefois que les structures les plus énergétiques ont une largeur supérieure, comprise entre 180 et 300 unités de paroi. Un tel décalage avait été observé expérimentalement dans une couche limite par Tomkins & Adrian [93]. Par ailleurs, en examinant les nombres d'onde

associés aux composantes les plus énergétiques du spectre bi-dimensionnel de vitesse longitudinale fluctuante, on a pu mettre en évidence que la largeur des *streaks* croît comme la racine de leur longueur.

En dernier lieu, les fluctuations de pression pariétale ont été étudiées. Il est apparu que les spectres fréquentiels calculés pour différents nombres de Reynolds se superposent bien lorsqu'ils sont normalisés par les échelles externes, en accord avec un grand nombre de résultats expérimentaux [38, 43]. Les spectres de pression en fréquence et en nombre d'onde obtenus pour un nombre de Reynolds de 350 ont par ailleurs été examinés afin d'y détecter l'empreinte du rayonnement acoustique de la turbulence. Pour un nombre de Mach de 0.5, la zone supersonique est dominée par le pic convectif, ce qui ne permet pas d'observer des composantes acoustiques. En revanche, à un nombre de Mach de 0.1, le pic convectif est bien séparé de la zone supersonique. Celle-ci fait alors apparaître un nombre important de pics, répartis sur l'ensemble des fréquences et des nombres d'onde. Ces pics semblent donc correspondre à un rayonnement acoustique produit par des sources réparties sur une large gamme d'échelles spatiales et temporelles. Ce résultat est original car les fluctuations de pression pariétale d'origine acoustique sont difficiles à observer numériquement et expérimentalement, en raison de leur niveau très faible devant les fluctuations d'origine aérodynamique.

## Perspectives

Des perspectives peuvent être envisagées à la fois sur les aspects numériques et physiques abordés dans cette thèse.

Les schémas semi-implicites présentés dans ce manuscrit ont permis d'accélérer les simulations d'écoulement de paroi. Ces schémas sont toutefois fortement pénalisés par le temps d'inversion de systèmes linéaires. Ces systèmes devant être résolus à chaque étape de l'algorithme, il peut être intéressant de développer un algorithme dans lequel le sous-schéma implicite comporte un nombre réduit d'étapes. Il est en effet possible de concevoir un schéma de Runge Kutta implicite d'ordre élevé avec peu d'étapes. Pour ne citer qu'un exemple, Alexander [2] propose des schémas implicites d'ordre 4 à 3 étapes.

En ce qui concerne la turbulence de paroi, l'analyse des résultats obtenus sur les structures cohérentes mérite d'être approfondie. La relation observée entre la longueur et la largeur des *streaks* soulève par exemple de nombreuses questions. Il est probable que celle-ci soit liée aux mécanismes de formation et de croissance des *streaks*. Des travaux récents semblent montrer que ces mécanismes sont essentiellement régi par des tourbillons en tête d'épingle organisés en

paquets [1]. Ces paquets pourraient être étudiés à l'aide de la LES. Par ailleurs, les composantes acoustiques observées sur le spectre de pression pariétale pourraient faire l'objet d'une étude plus poussée. Il serait par exemple intéressant de calculer des corrélations croisées entre les signaux de pression pariétale et les signaux de vitesse fluctuante à l'intérieur de l'écoulement, afin de discuter des sources acoustiques.

Enfin, de manière plus générale, cette thèse a montré que l'approche LES basée sur un filtrage de relaxation permet de reproduire fidèlement de nombreux phénomènes bien connus de la turbulence pariétale. Cette approche pourra donc être utilisée pour étudier d'autres configurations d'écoulements de paroi, comme par exemple la couche limite turbulente.

# A Coefficients des algorithmes semi-implicites

---

Cette annexe donne les coefficients des algorithmes semi-implicites d'ordre 3 à 6 étapes SIRK63-S et SIRK63-A. Le tableau A.1 fournit les coefficients du sous-schéma implicite de l'algorithme SIRK63-S, et le tableau A.2 fournit les coefficients du sous-schéma implicite de l'algorithme SIRK63-A. Le tableau A.3 donne les coefficients du schéma explicite RK46-Ber de Berland *et al.* [8], qui correspond au sous-schéma explicite des algorithmes SIRK63-S et SIRK63-A.

Les coefficients sont donnés sous la forme d'un tableau tel que

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline & \mathbf{b} \end{array}$$

où  $\mathbf{A} = a_{ij}$ ,  $\mathbf{c} = c_i$  et  $\mathbf{b} = b_i$ .



0.41	0.41						
0.359152401739593	-0.050847598260407	0.41					
0.165965686808826	-0.732843054288974	0.488808741097800	0.41				
0.210189429333588	0.518289378427379	-1.277080692402156	0.558980743308365	0.41			
0.372226437845421	-0.802531364350514	0.646260865229491	0.497772202911395	-0.379275265944952	0.41		
0.901713271565036	-0.518537243124588	0.051438098423723	0.611601988166285	0.227118479918187	0.120091948181429	0.41	
	0.971001746640224	-1.272664996516041	1.282112737365169	-1.209258255434315	0.958808767944964	0.27	

TABLE A.1 – Coefficients de la partie implicite de l’algorithme SIRK63-S.

0	0						
0.032918605143758	-0.212081394856242	0.245					
0.249351723338818	-0.506934417330455	0.511286140669274	0.245				
0.466911705057050	-3.2	3.622080130757558	-0.200168425700507	0.245			
0.582030414046197	0.273655978647576	-0.810460387252415	1.516528920894552	-0.642694098243515	0.245		
0.847252983783385	0.272572117804249	0.001343810878341	-0.020976057113187	-0.117426001935445	0.466739114149427	0.245	
	0.971001746640224	-1.272664996516041	1.282112737365169	-1.209258255434315	0.958808767944964	0.27	

TABLE A.2 – Coefficients de la partie implicite de l’algorithme SIRK63-A.

0	0					
0.032918605145602	0.032918605145602	0				
0.249351723343112	-0.573905274855897	0.823256998199009	0			
0.466911705054856	-0.114172035573537	0.199552791728150	0.381530948900243	0		
0.582030414043922	-0.293732375804120	0.443156103274586	0.232514473389434	0.200092213184021	0	
0.847252983782695	1.973193167196099	-2.632303480923729	2.113827764673696	-2.326045509877871	1.718581042714500	0
	0.971001746640224	-1.272664996516041	1.282112737365169	-1.209258255434315	0.958808767944964	0.27

TABLE A.3 – Coefficients du schéma RK46-Ber de Berland *et al.* [8], correspondant à la partie explicite des algorithmes SIRK63-S et SIRK63-A.

## B Besoin en espace mémoire des algorithmes semi-implicites

---

Cette annexe présente une estimation du besoin en espace mémoire des algorithmes semi-implicites, et notamment des besoins supplémentaires qu'ils induisent par rapport à un algorithme explicite. On considère pour cela un maillage 2-D contenant  $n_x \times n_y$  points, où  $n_x$  et  $n_y$  sont les nombres de points respectivement dans les directions  $x$  et  $y$ . Ce maillage est partitionné en une zone dite inférieure contenant  $n_y^{inf}$  points dans la direction  $y$ , et une zone dite supérieure contenant  $n_y^{sup}$  points dans la direction  $y$ . On a donc  $n_y^{inf} + n_y^{sup} = n_y$ .

On considère un calcul mixte dans lequel la zone inférieure est résolue avec l'algorithme semi-implicite SIRK63-S, tandis que la zone supérieure est résolue avec l'algorithme explicite de Berland *et al.* [8]. Le besoin en mémoire nécessaire pour ce calcul est donné dans le tableau B.1. Pour effectuer une itération de l'instant  $n$  à l'instant  $n + 1$ , le schéma semi-implicite nécessite un stockage de chaque variable à l'instant  $n$ , ainsi qu'aux 6 étapes. Un stockage supplémentaire est utilisé pour des calculs intermédiaires. Un total de 8 stockages par variable est donc nécessaire. En outre, l'utilisation de schémas semi-implicites requiert l'inversion de systèmes d'équations à  $N = l \times n_y^{inf}$  inconnues, où  $l$  est le nombre de grandeurs physiques associées à chaque point du maillage, qui vaut ici 4 pour un problème bi-dimensionnel. L'inversion de ces systèmes, effectuée avec la bibliothèque LAPACK, nécessite le stockage d'une matrice par bande, qui utilise  $N \times b$  emplacements, où  $b = 1 + 2l \times (n_g + 1) + l \times (n_d + 1)$  avec  $n_g$  et  $n_d$  les nombres maximum de points respectivement à gauche et à droite du point central dans les schémas aux différences finies utilisés pour la discrétisation spatiale. La valeur de  $b$  est généralement de l'ordre de la centaine. Ainsi, pour la zone inférieure du maillage, le besoin en espace mémoire est de  $8 \times l \times n_x \times n_y^{inf} + b \times l \times n_y^{inf}$ . La zone supérieure est résolue avec le schéma explicite RK46-Ber, qui ne nécessite que 2 stockages par variable, ce qui conduit à un besoin de  $2 \times l \times n_x \times n_y^{sup}$  stockages pour cette zone.

## Annexe B. Besoin en espace mémoire des algorithmes semi-implicites

---

On compare le besoin en espace mémoire du calcul mixte avec le besoin d'un calcul entièrement explicite, réalisé avec le schéma RK46-Ber. Le nombre de stockages nécessaires est alors égal à  $2 \times l \times n_x \times n_y^{inf}$  pour la zone inférieure, et à  $2 \times l \times n_x \times n_y^{sup}$  pour la zone supérieure.

	calcul mixte	calcul entièrement explicite
zone inférieure	$8 \times l \times n_x \times n_y^{inf} + b \times l \times n_y^{inf}$	$2 \times l \times n_x \times n_y^{inf}$
zone supérieure	$2 \times l \times n_x \times n_y^{sup}$	$2 \times l \times n_x \times n_y^{sup}$
total	$C_{mixte} = 8ln_x n_y^{inf} + 2ln_x n_y^{sup} + bln_y^{inf}$	$C_{explicite} = 2ln_x(n_y^{inf} + n_y^{sup})$

TABLE B.1 – Besoin en espace mémoire d'un calcul mixte et d'un calcul entièrement explicite.

Le tableau B.1 fournit également le besoin total en espace mémoire du calcul mixte et du calcul explicite, notés respectivement  $C_{mixte}$  et  $C_{explicite}$ . On peut alors estimer le rapport entre le besoin des deux calculs, en supposant que  $n_x \gg b$  :

$$\frac{C_{mixte}}{C_{explicite}} = \frac{4 + \frac{n_y^{sup}}{n_y^{inf}} + \frac{b}{2n_x}}{1 + \frac{n_y^{sup}}{n_y^{inf}}} \approx \frac{4 + \frac{n_y^{sup}}{n_y^{inf}}}{1 + \frac{n_y^{sup}}{n_y^{inf}}} \quad (\text{B.1})$$

On s'intéresse à l'évolution de ce rapport lorsque le nombre de points dans la zone supérieure devient grand devant le nombre de points dans la zone inférieure. On montre sur la figure B.1 la valeur de  $C_{mixte}/C_{explicite}$  en fonction du ratio entre le nombre de points dans la zone supérieure et le nombre de points dans la zone inférieure, donné par  $n_y^{sup}/n_y^{inf}$ . La valeur de  $C_{mixte}/C_{explicite}$  est de 4 lorsque  $n_y^{sup}/n_y^{inf} = 0$ , ce qui signifie que lorsque la zone supérieure ne contient aucun point, le calcul mixte nécessite un espace mémoire 4 fois supérieur par rapport au calcul entièrement explicite. On remarque que plus le nombre de points dans la zone supérieure est important, plus le rapport  $C_{mixte}/C_{explicite}$  se rapproche de 1. Ainsi, lorsque le nombre de points dans la zone supérieure est supérieur à 2 fois le nombre de points dans la zone inférieure, c'est-à-dire pour  $n_y^{sup}/n_y^{inf} > 2$ , la valeur de  $C_{mixte}/C_{explicite}$  devient inférieure à 2. Le besoin en espace mémoire du calcul mixte devient donc équivalent au besoin du calcul entièrement explicite.

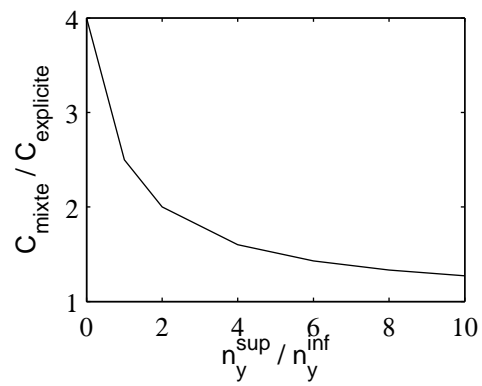


FIGURE B.1 – Rapport entre les besoins en espace mémoire d'un calcul mixte et d'un calcul entièrement explicite, en fonction du nombre de points dans la zone supérieure divisé par le nombre de points dans la zone inférieure, donné par  $n_y^{\text{sup}}/n_y^{\text{inf}}$ .



# C Mise en oeuvre du schéma semi-implicite

---

Dans cette annexe, on se propose de présenter l'implémentation des schémas semi-implicites telle qu'elle a été faite dans le cadre de cette thèse. Dans un premier temps, un problème type tel que ceux rencontrés dans cette thèse, à savoir la résolution des équations d'Euler sur un domaine partitionné comprenant une paroi, est proposé. Les algorithmes de Runge-Kutta, l'un explicite et l'autre semi-implicite, utilisés pour l'intégration temporelle de ce problème sont ensuite donnés. Le déroulement d'une étape de ces algorithmes est détaillé, notamment en ce qui concerne l'échange d'information entre les zones du maillage partitionné. Enfin, le traitement du système linéaire apparaissant dans l'algorithme semi-implicite est présenté.

## C.1 Problème type

On considère un domaine bi-dimensionnel discrétisé par un maillage cartésien, uniforme dans les deux directions, contenant  $M$  points dans la direction  $x$  et  $N^*$  points dans la direction  $y$ . Les points du maillage sont repérés par les indices  $(m, n) \in \llbracket 1, M \rrbracket \times \llbracket 1, N^* \rrbracket$ . Le maillage est partitionné en deux zones selon la direction  $y$ , comme représenté sur la figure C.1. La zone inférieure, définie par  $n \leq N$ , est résolue avec l'un des schémas semi-implicites proposés dans cette thèse, noté SIRK, tandis que la zone supérieure, définie par  $N + 1 \leq n \leq N^*$ , est résolue avec le schéma de Runge-Kutta explicite de Berland *et al.* [8], noté ERK. Une condition de paroi est implémentée dans la zone inférieure, en  $n = 1$ .

En chacun des points du maillage est défini le vecteur des variables conservatives  $\mathbf{u}_{m,n} = {}^t[\rho, \rho u, \rho v, \rho e]_{m,n}$  où  $\rho$  est la densité,  $u$  et  $v$  les composantes de vitesse horizontale et verticale, et  $e$  l'énergie totale. Les flux Eulériens dans les directions  $x$  et  $y$  sont respectivement donnés par  $E_x = {}^t[\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (\rho e + p)u]$  et  $E_y = {}^t[\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (\rho e + p)v]$ , où  $p$  est la pression, vérifiant la loi d'état  $p = (\gamma - 1)(\rho e - \rho(u^2 + v^2)/2)$ . Les dérivées spatiales sont approximées par



des schémas aux différences finies centrés pour les points intérieurs, et décentrés près de la paroi.

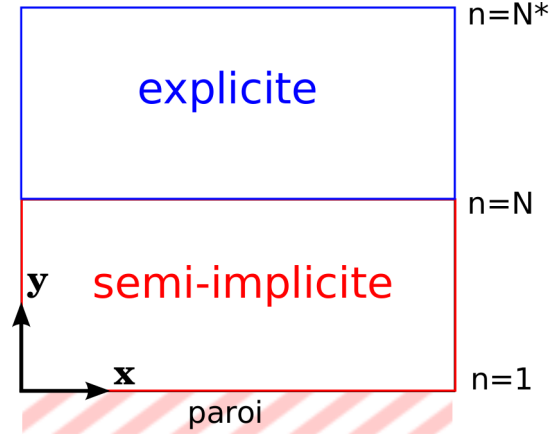


FIGURE C.1 – Exemple de domaine partitionné en une zone inférieure résolue avec un schéma semi-implicite (en rouge) comprenant une paroi, et une zone supérieure résolue avec un schéma explicite (en bleu).

## C.2 Algorithmes d'intégration temporelle

On définit un vecteur d'état de la zone inférieure  $\mathbf{u}$ , et un vecteur d'état de la zone supérieure  $\hat{\mathbf{u}}$  de la manière suivante :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{1,1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{1,N} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{m,1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{m,N} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{M,1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{M,N} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{1,N+1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{1,N^*} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{m,N+1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{m,N^*} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{M,N+1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{M,N^*} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

où l'on rappelle que  $\mathbf{u}_{m,n} = {}^t[\rho, \rho u, \rho v, \rho e]_{m,n}$  est un vecteur de dimension 4. Les vecteurs d'état  $\mathbf{u}$  et  $\hat{\mathbf{u}}$  sont donc respectivement de dimension  $4MN$  et  $4M(N^* - N)$ . Les équations résolues peuvent alors être écrites sous forme semi-discrétisée pour les deux zones du maillage :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} = h(\hat{\mathbf{u}}) \quad (\text{C.2a})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u}) \quad (\text{C.2b})$$

où  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont des fonctions non linéaires qui dépendent du problème physique, c'est-à-dire ici des équations d'Euler, et des méthodes numériques utilisées pour la discrétisation spatiale. Les fonctions  $f$  et  $g$  apparaissant dans l'équation (C.2b) représentent respectivement les dérivées spatiales discrétisées des flux Eulériens dans la direction  $x$  et dans la direction  $y$ . La fonction  $h$  apparaissant dans l'équation (C.2a) représente les dérivées discrétisées des flux Eulériens dans les deux directions.

### C.2.1 Algorithme semi-implicite

L'équation (C.2b) portant sur  $\mathbf{u}$  est intégrée temporellement à l'aide du schéma semi-implicite :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{k}_i \quad (\text{C.3a})$$

$$\mathbf{k}_i = \Delta t f(\mathbf{u}_i^E) + \Delta t g(\mathbf{u}_i^I + \gamma \mathbf{k}_i) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq s, \quad (\text{C.3b})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^E &= \mathbf{u}_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^E \mathbf{k}_j \\ \mathbf{u}_i^I &= \mathbf{u}_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^I \mathbf{k}_j \end{aligned}$$

où les vecteurs  $(\mathbf{k}_i)_{1 \leq i \leq s}$  représentent la variation de  $\mathbf{u}$  aux étapes  $i$ . A une étape  $i$  donnée, les vecteurs  $\mathbf{u}_i^E$  et  $\mathbf{u}_i^I$  sont calculés explicitement à l'aide des vecteurs  $(\mathbf{k}_j)_{j < i}$  déterminés aux étapes précédentes. En revanche, le calcul du vecteur  $\mathbf{k}_i$  nécessite de résoudre une équation non linéaire, car il apparaît comme argument dans la fonction  $g$  non linéaire. Pour résoudre cette équation, suivant la démarche proposée par Zhong [102], on réalise un développement au premier ordre du terme  $g(\mathbf{u}_i^I + \gamma \mathbf{k}_i)$ , soit :

$$\mathbf{k}_i = \Delta t f(\mathbf{u}_i^E) + \Delta t g(\mathbf{u}_i^I) + \gamma \Delta t \frac{\partial g(\mathbf{u}_i^I)}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{k}_i \quad (\text{C.4})$$

ce qui fait apparaître la matrice jacobienne de la fonction  $g$ , évaluée en  $\mathbf{u}_i^I$ . En réarrangeant les différents termes, on obtient l'équation linéaire suivante :

$$\left( I - \gamma \Delta t \frac{\partial g(\mathbf{u}_i^I)}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathbf{k}_i = \Delta t f(\mathbf{u}_i^E) + \Delta t g(\mathbf{u}_i^I) \quad (\text{C.5})$$

### C.2.2 Algorithme explicite

L'équation (C.2a) portant sur  $\hat{\mathbf{u}}$  est intégrée temporellement à l'aide du schéma explicite :

$$\hat{\mathbf{u}}_{n+1} = \hat{\mathbf{u}}_n + \sum_{i=1}^s b_i \hat{\mathbf{k}}_i \quad (\text{C.6a})$$

$$\hat{\mathbf{k}}_i = \Delta t h(\hat{\mathbf{u}}_i^E) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq s, \quad (\text{C.6b})$$

avec

$$\hat{\mathbf{u}}_i^E = \hat{\mathbf{u}}_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^E \hat{\mathbf{k}}_j$$

où les vecteurs  $(\hat{\mathbf{k}}_i)_{1 \leq i \leq s}$  représentent la variation de  $\hat{\mathbf{u}}$  aux étapes  $i$ . On remarque que les coefficients  $a_{ij}^E$  et  $b_i$  du schéma ERK sont les mêmes que ceux de la partie explicite de l'algorithme SIRK.

## C.3 Déroulement d'une étape des algorithmes

La section ci-dessus fournit le cadre mathématique des algorithmes d'intégration temporelle. On s'intéresse à présent à leur mise en oeuvre. Les calculs effectués dans les algorithmes suivent une certaine séquence au cours de laquelle des informations doivent parfois être échangées entre les zones du maillage. Cette séquence et ces échanges d'informations sont ici décrits en détail.

Les  $i$ -ème étapes des algorithmes ERK et SIRK sont réalisées simultanément, et se déroulent en 4 phases :

- I. calcul des vecteurs d'état  $\hat{\mathbf{u}}_i^E$ ,  $\mathbf{u}_i^E$  et  $\mathbf{u}_i^I$
- II. calcul des dérivées spatiales dans la direction  $x$
- III. calcul des dérivées spatiales dans la direction  $y$
- IV. calcul de  $\hat{\mathbf{k}}_i$  (directement) et de  $\mathbf{k}_i$  (en résolvant un système linéaire)

### C.3.1 Phases I et II

Les phases I et II sont schématisées sur la figure C.2. La phase II, représentée sur la figure C.2(b), consiste à appliquer l'opérateur de différences finies dans la direction  $x$  :

$$-\left[\frac{\partial E_x}{\partial x}\right]_{m,n} = -\frac{1}{\Delta x} \sum_{l=-P}^P \alpha_l [E_x]_{m+l,n} \quad (\text{C.7})$$

où le flux Eulérien  $E_x$  est calculé à partir de  $\mathbf{u}_i^E$  dans la zone inférieure, et à partir de  $\hat{\mathbf{u}}_i^E$  dans la zone supérieure. On obtient ainsi le terme  $f(\mathbf{u}_i^E)$  utilisé dans l'algorithme SIRK, et une partie du terme  $h(\hat{\mathbf{u}}_i^E)$  utilisé dans l'algorithme ERK. Ces calculs ne nécessitent pas d'échange d'informations entre les zones.

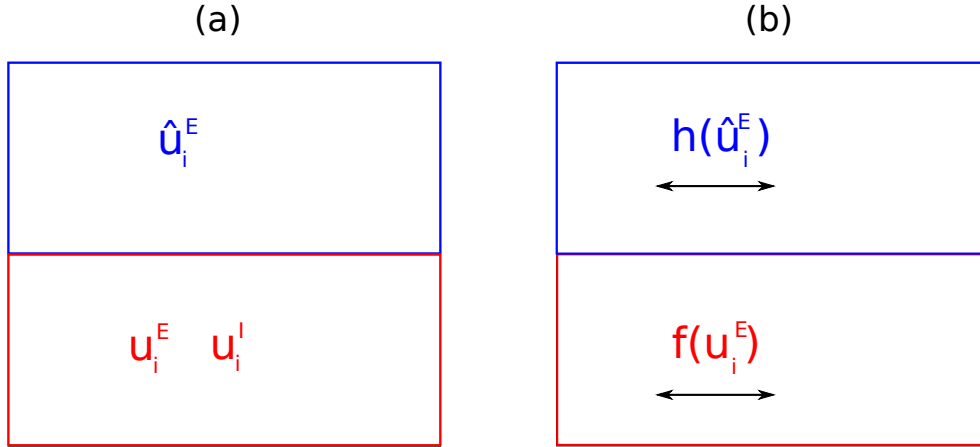


FIGURE C.2 – Phases (a) I et (b) II d'une étape des algorithmes d'intégration temporelle. Les flèches horizontales représentent l'opérateur de différences finies dans la direction  $x$ .

### C.3.2 Phase III

La phase III, qui consiste à appliquer les opérateurs de différences finies dans la direction  $y$ , est représentée sur les figures C.3(a) et C.3(b) respectivement pour les zones supérieure et inférieure. Pour les points éloignés de la frontière entre les zones, l'opérateur est appliqué dans la direction  $y$  sans échange d'information entre les zones, et fournit le terme  $g(\mathbf{u}_i^E)$  dans la zone inférieure, et une partie du terme  $h(\hat{\mathbf{u}}_i^E)$  dans la zone supérieure. Pour les points proches de la frontière, en revanche, des communications entre les zones sont nécessaires. Dans la zone supérieure, comme schématisé sur la figure C.3(a), l'opérateur de différences finies est appliqué de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 - \left[ \frac{\partial E_y}{\partial y} \right]_{m,n} &= - \frac{1}{\Delta y} \sum_{l=n-P}^{n+P} \alpha_{l-n} [E_y]_{m,l} \\
 &= \underbrace{- \frac{1}{\Delta y} \sum_{l=n-P}^N \alpha_{l-n} [E_y]_{m,l}}_{[h^{inf}(\mathbf{u}_i^E)]_{m,n}} - \underbrace{\frac{1}{\Delta y} \sum_{l=N+1}^{n+P} \alpha_{l-n} [E_y]_{m,l}}_{[h(\hat{\mathbf{u}}_i^E)]_{m,n}} \quad \text{pour } N+1 \leq n \leq N+P
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

On remarque que l'opérateur contient des flux Eulériens  $E_y$  à des points situés dans la zone inférieure, qui sont alors calculés à partir du vecteur  $\mathbf{u}_i^E$ . Cette partie de l'opérateur est donc notée  $h^{inf}(\mathbf{u}_i^E)$ . L'autre partie de l'opérateur, calculée à partir du vecteur  $\hat{\mathbf{u}}_i^E$ , est notée  $h(\hat{\mathbf{u}}_i^E)$ .

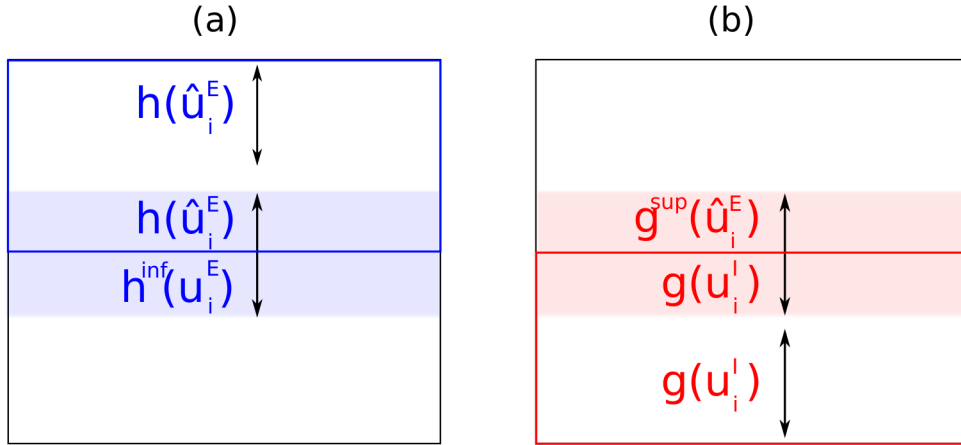


FIGURE C.3 – Phase III d'une étape des algorithmes d'intégration temporelle pour les zones (a) supérieure, et (b) inférieure du maillage. Les flèches verticales représentent l'opérateur de différences finies dans la direction  $y$ .

En ce qui concerne la zone inférieure, comme schématisé sur la figure C.3(b), l'opérateur de différences finies est appliqué aux points proches de la frontière de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 - \left[ \frac{\partial E_y}{\partial y} \right]_{m,n} &= - \frac{1}{\Delta y} \sum_{l=n-P}^{n+P} \alpha_{l-n} [E_y]_{m,l} \\
 &= \underbrace{- \frac{1}{\Delta y} \sum_{l=n-P}^N \alpha_{l-n} [E_y]_{m,l}}_{[g(\mathbf{u}_i^I)]_{m,n}} - \underbrace{\frac{1}{\Delta y} \sum_{l=N+1}^{n+P} \alpha_{l-n} [E_y]_{m,l}}_{[g^{sup}(\hat{\mathbf{u}}_i^E)]_{m,n}} \quad \text{pour } N-P+1 \leq n \leq N
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

L'opérateur contient des flux Eulériens  $E_y$  à des points situés dans la zone supérieure, qui sont

calculés à partir du vecteur  $\hat{\mathbf{u}}_i^E$ . Cette partie de l'opérateur est notée  $g^{sup}(\hat{\mathbf{u}}_i^E)$ . L'autre partie de l'opérateur, qui contient des flux Eulériens  $E_y$  à des points situés dans la zone inférieure, est notée  $g(\mathbf{u}_i^I)$ .

### C.3.3 Phase IV

La dernière phase, schématisée sur la figure C.4, consiste à calculer la matrice jacobienne de la fonction  $g$ , ce qui sera détaillé dans la section suivante, puis à calculer les vecteurs  $\mathbf{k}_i$  et  $\hat{\mathbf{k}}_i$  respectivement à l'aide des équations (C.5) et (C.6b). Afin de prendre en compte les échanges d'informations entre les deux zones du maillage, le terme  $g^{sup}(\hat{\mathbf{u}}_i^E)$  est ajouté dans l'équation (C.5) :

$$\left( I - \gamma \Delta t \frac{\partial g(\mathbf{u}_i^I)}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathbf{k}_i = \Delta t f(\mathbf{u}_i^E) + \Delta t g(\mathbf{u}_i^I) + \Delta t g^{sup}(\hat{\mathbf{u}}_i^E), \quad (\text{C.10})$$

et le terme  $h^{inf}(\mathbf{u}_i^E)$  est ajouté dans l'équation (C.6b) :

$$\hat{\mathbf{k}}_i = \Delta t h(\hat{\mathbf{u}}_i^E) + \Delta t h^{inf}(\mathbf{u}_i^E), \quad (\text{C.11})$$

ces termes supplémentaires étant nuls pour les points situés loin de la frontière.

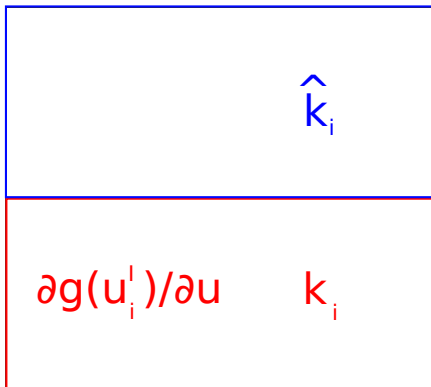


FIGURE C.4 – Phase IV d'une étape des algorithmes d'intégration temporelle.

## C.4 Traitement du système linéaire dans l'algorithme SIRK

Pour déterminer le vecteur  $\mathbf{k}_i$  dans la phase IV décrite ci-dessus, un système linéaire faisant intervenir la matrice jacobienne de la fonction  $g$  doit être résolu.

### C.4.1 Forme de la matrice jacobienne

La matrice jacobienne est composée de blocs élémentaires, de dimension  $4 \times 4$ , dont chacun est égal  $\partial [g(\mathbf{u})]_{m,n} / \partial \mathbf{u}_{m',n'}$ , comme représenté sur la figure C.5. Ce terme représente la dépendance, à travers la fonction  $g$ , du point de maillage  $(m, n)$  par rapport au point de maillage  $(m', n')$ .

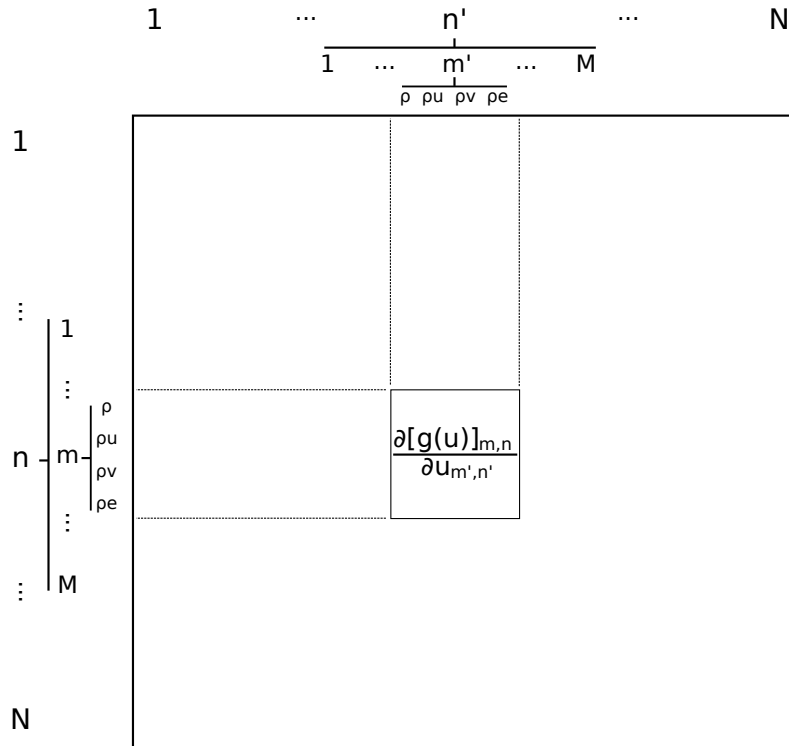


FIGURE C.5 – Représentation de la matrice jacobienne, et d'un bloc élémentaire situé sur les lignes  $4M(n-1) + 4(m-1) + 1$  à  $4M(n-1) + 4(m-1) + 4$ , et sur les colonnes  $4M(n'-1) + 4(m'-1) + 1$  à  $4M(n'-1) + 4(m'-1) + 4$ .

### C.4.2 Forme générale du système linéaire

On verra dans les paragraphes suivants que pour un point du maillage situé sur une colonne  $n$  donnée, la fonction  $g$  ne dépend que des points situés sur la même colonne. En d'autres termes, on a  $\partial \mathbf{u}_{m,n} / \partial \mathbf{u}_{m',n'} = 0$  pour  $m \neq m'$ , ce qui donne à la matrice jacobienne une forme diagonale par bloc :

$$\left[ \frac{\partial g(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right] = \begin{bmatrix} A_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_m & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_M \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

où chaque bloc est de dimension  $(4N)^2$ . Le système linéaire (C.5) peut alors se décomposer en plusieurs systèmes indépendants. En effet, ce dernier s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \boxed{I - \gamma \Delta t A_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{I - \gamma \Delta t A_m} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{I - \gamma \Delta t A_M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{1,1} \\ \vdots \\ \mathbf{k}_{1,N} \\ \hline \vdots \\ \mathbf{k}_{m,1} \\ \vdots \\ \mathbf{k}_{m,N} \\ \hline \vdots \\ \mathbf{k}_{M,1} \\ \vdots \\ \mathbf{k}_{M,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1,1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{1,N} \\ \hline \vdots \\ \mathbf{X}_{m,1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{m,N} \\ \hline \vdots \\ \mathbf{X}_{M,1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{M,N} \end{bmatrix} \quad (\text{C.13})$$

avec  $\mathbf{k}_{m,n} = [\mathbf{k}_i]_{m,n}$  et  $\mathbf{X}_{m,n} = \Delta t [f(\mathbf{u}_i^E)]_{m,n} + \Delta t [g(\mathbf{u}_i^I)]_{m,n} + \Delta t [g^{sup}(\hat{\mathbf{u}}_i^E)]$ . On rappelle que l'indice  $i$  indique l'étape de l'algorithme Runge-Kutta. Le système (C.13) à  $4NM$  équations se décompose donc en  $M$  systèmes à  $4N$  équations :

$$(I - \gamma \Delta t A_m) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{m,1} \\ \vdots \\ \mathbf{k}_{m,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{m,1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{m,N} \end{bmatrix} \quad \forall m \in \llbracket 1, M \rrbracket \quad (\text{C.14})$$

Cette décomposition est avantageuse pour la parallélisation, car les différents systèmes peuvent être répartis sur différents processeurs et résolus simultanément.



### C.4.3 Expression des blocs $A_m$

Les blocs  $A_m$  sont composés des blocs élémentaires  $\partial [g(\mathbf{u})]_{m,n} / \partial \mathbf{u}_{m,n'}$  définis précédemment. Pour déterminer ces blocs élémentaires, il faut exprimer la fonction  $g$  en chaque point  $(m, n)$  du maillage, puis la différentier selon  $\mathbf{u}_{m,n'}$ . Dans ce qui suit, cette démarche est présentée séparément pour les points intérieurs, les points proches de la paroi, et les points proches de la frontière entre les deux zones du maillage, car la fonction  $g$  diffère selon le cas.

#### C.4.3.1 Points intérieurs

Pour les points situés à l'intérieur du maillage, les fonctions  $f$  et  $g$  représentent les dérivées spatiales  $\partial E_x / \partial x$  et  $\partial E_y / \partial y$  des flux Eulériens respectivement dans les directions  $x$  et  $y$ . Ces dérivées sont approximées par un schéma aux différences finies centré, dont les coefficients sont notés  $(\alpha_l)_{-P \leq l \leq P}$ . La fonction  $g$  s'écrit donc en chaque point  $(m, n)$  :

$$[g(\mathbf{u})]_{m,n} = -\frac{1}{\Delta y} \sum_{l=-P}^P \alpha_l [E_y]_{m,n+l} \quad (\text{C.15})$$

En différentiant cette expression selon  $\mathbf{u}_{m,n+l}$ , on obtient :

$$\frac{\partial [g(\mathbf{u})]_{m,n}}{\partial \mathbf{u}_{m,n+l}} = \begin{cases} -\frac{\alpha_l}{\Delta y} \mathbf{J}_{m,n+l} & \text{si } -P \leq l \leq P \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

où  $\mathbf{J}_{m,k} = \partial [E_y]_{m,k} / \partial \mathbf{u}_{m,k}$  est la matrice jacobienne du flux Eulérien dans la direction  $y$  au point de maillage  $(m, k)$  :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ v^2(\gamma - 3)/2 + u^2(\gamma - 1)/2 & (1 - \gamma)u & (3 - \gamma)v & \gamma - 1 \\ -\gamma ev + (\gamma - 1)v(u^2 + v^2) & (1 - \gamma)uv & \gamma e + (3v^2 + u^2)(1 - \gamma)/2 & \gamma v \end{bmatrix} \quad (\text{C.17})$$

#### C.4.3.2 Points près d'une paroi

Une condition de paroi est implémentée en  $n = 1$  en imposant  $u_{m,1} = v_{m,1} = 0$ . Pour les points à proximité de la paroi, les dérivées spatiales sont discrétisées à l'aide de schémas décentrés

sur  $R$  points :

$$[g(\mathbf{u})]_{m,n} = -\frac{1}{\Delta y} \sum_{l=1}^R \alpha_l^n [E_y]_{m,l} \quad (\text{C.18})$$

où  $(\alpha_l^n)_{1 \leq l \leq R}$  est le schéma décentré pour le point de maillage d'ordonnée  $n$ . Dans la mesure où la vitesse est imposée à la paroi, les grandeurs conservatives  $u_{m,1}$  et  $v_{m,1}$  doivent être retirées du système résolu. On définit donc, pour les points d'ordonnée  $n = 1$ , un vecteur réduit des variables conservatives  $\tilde{\mathbf{u}}_{m,1} = [\rho, \rho e]_{m,1}$ . On note que cela entraîne une modification des dimensions du vecteur d'état et du bloc  $A_m$ , qui valent alors respectivement  $4N - 2$  et  $(4N - 2)^2$ . En adoptant la même démarche que pour les points intérieurs, on obtient :

$$\frac{\partial [g(\mathbf{u})]_{m,n}}{\partial \mathbf{u}_{m,l}} = \begin{cases} -\frac{\alpha_l^n}{\Delta y} \tilde{\mathbf{J}}_{m,l} & \text{si } l = 1 \\ -\frac{\alpha_l^n}{\Delta y} \mathbf{J}_{m,l} & \text{si } 2 \leq l \leq R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

avec

$$\tilde{\mathbf{J}}_{m,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \gamma - 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.20})$$

L'expression ci-dessus est valable pour  $n > 2$ . Pour  $n = 1$ , étant donné que  $u$  et  $v$  ne sont plus des inconnues du système, l'expression de la matrice jacobienne devient :

$$\frac{\partial [g(\mathbf{u})]_{m,1}}{\partial \mathbf{u}_{m,l}} = \begin{cases} -\frac{\alpha_l^1}{\Delta y} \bar{\mathbf{J}}_{m,l} & \text{si } 1 \leq l \leq R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.21})$$

avec

$$\bar{\mathbf{J}}_{m,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et } \bar{\mathbf{J}}_{m,n>1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma ev + (\gamma - 1)v(u^2 + v^2) & (1 - \gamma)uv & \gamma e + (3v^2 + u^2)(1 - \gamma)/2 & \gamma v \end{bmatrix}$$

### C.4.3.3 Points près de la frontière entre les zones du maillage

La partie de la matrice jacobienne correspondant aux points proches de la frontière entre les deux zones a une forme particulière. En effet, pour les points d'ordonnée  $N - P + 1 \leq n \leq N$  situés

près de la frontière, on a vu dans la section C.3.2 que la dérivée discrétisée des flux Eulériens dans la direction  $y$  s'écrit :

$$-\left[\frac{\partial E_y}{\partial y}\right]_{m,n} = [g(\mathbf{u})]_{m,n} + [g^{sup}(\hat{\mathbf{u}})]_{m,n} \quad (\text{C.22})$$

où

$$\begin{aligned} [g(\mathbf{u})]_{m,n} &= -\frac{1}{\Delta y} \sum_{l=n-P}^N \alpha_{l-n} [E_y]_{m,l} \\ [g^{sup}(\hat{\mathbf{u}})]_{m,n} &= -\frac{1}{\Delta y} \sum_{l=N+1}^{n+P} \alpha_{l-n} [E_y]_{m,l} \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Grâce à cette décomposition de l'opérateur de différences finies, la fonction  $g$  ne dépend que des points situés dans la zone inférieure. En différentiant la fonction  $g$  selon  $\mathbf{u}_{m,l}$ , on obtient :

$$\frac{\partial [g(\mathbf{u})]_{m,n}}{\partial \mathbf{u}_{m,l}} = \begin{cases} -\frac{\alpha_{l-n}}{\Delta y} \mathbf{J}_{m,l} & \text{si } n-P \leq l \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.24})$$

#### C.4.3.4 Forme générale d'un bloc $A_m$

La forme générale d'un bloc  $A_m$  est représentée sur la figure C.6, sur laquelle on distingue les blocs élémentaires, de taille  $4 \times 4$ , répartis sur l'ensemble de la matrice. Le bloc  $\partial [g(\mathbf{u})]_{m,11} / \partial \mathbf{u}_{m,16}$  est encadré sur la figure. Les différentes parties de la matrice correspondant aux points proches des parois, aux points intérieurs et aux points proches des frontières sont représentés respectivement en rouge, bleu et vert sur la figure. Pour chaque point intérieur, on note la présence de 11 blocs élémentaires répartis symétriquement par rapport à la diagonale. Cette répartition est due au schéma centré sur 11 points utilisé pour la discrétisation spatiale. Le bloc élémentaire au centre est nul car, d'après l'expression (C.16), il est égal à  $-\alpha_0 / \Delta y \mathbf{J}_{m,n}$  avec  $\alpha_0 = 0$ . La répartition des blocs est différente pour les points proches de la paroi ou de la frontière, comme attendu, car elle est conditionnée respectivement par les expressions (C.19) et (C.24).

Cette figure montre que les blocs  $A_m$  sont des matrices par bande. On peut donc utiliser une méthode directe adaptée à ce type de matrice pour résoudre les systèmes (C.14). Dans cette thèse, ces systèmes sont résolus à l'aide de la bibliothèque LAPACK.

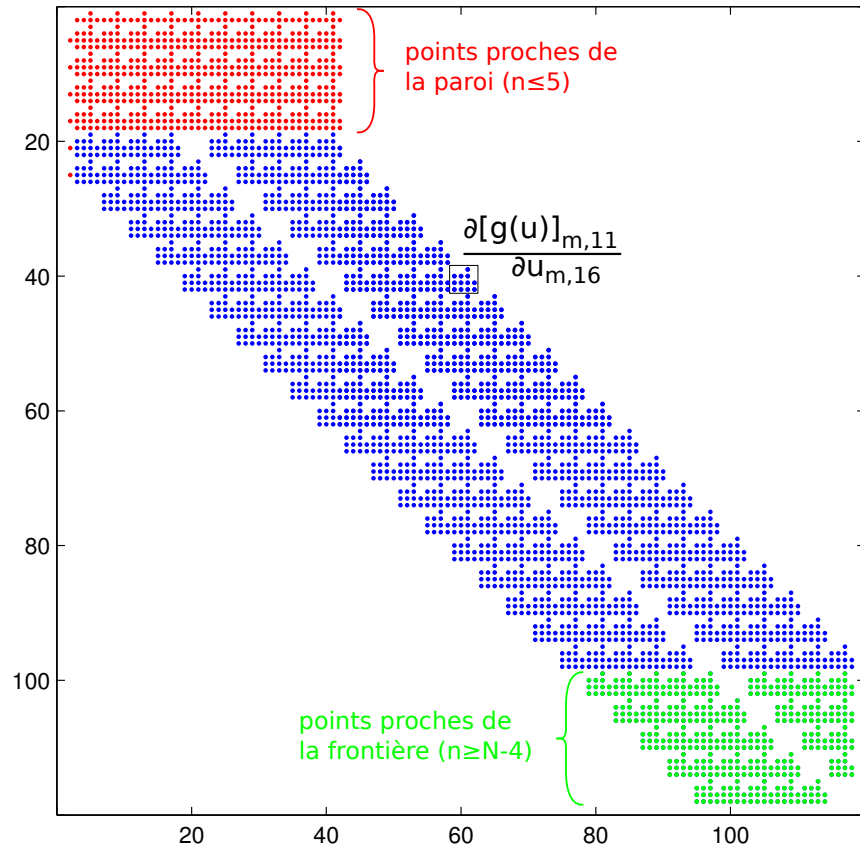


FIGURE C.6 – Exemple de bloc  $A_m$  issu de la matrice jacobienne, de dimension  $(4N - 2)^2$  avec  $N = 30$ , pour un domaine partitionné avec une paroi (cf. figure C.1). Les points sur la figure correspondent aux valeurs non nulles de la matrice. Les différentes parties de la matrice sont colorées selon qu'elles correspondent aux points proches de la paroi (rouge), aux points intérieurs (bleu), ou aux points proches de la frontière entre les zones (vert).



# Bibliographie

- [1] R.J. Adrian. Hairpin vortex organization in wall turbulence. *Physics of Fluids*, 19 :041301, 2007.
- [2] R. Alexander. Diagonally implicit Runge-Kutta methods for stiff ODEs. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 14 :1006–1021, 1977.
- [3] B. Arguillat, D. Ricot, C. Bailly, and G. Robert. Measured wavenumber - frequency spectrum associated with acoustic and aerodynamic wall pressure fluctuations. *Journal of Acoustical Society of America*, 128(4) :1647–1655, 2010.
- [4] U.M. Ascher, S.J. Ruuth, and R.J. Spiteri. Implicit-explicit Runge-Kutta methods for time-dependent partial differential equations. *Applied Numerical Mathematics*, 25 :–, 1997.
- [5] C. Bailly and G. Comte-Bellot. *Turbulence*. CNRS Editions, Paris, France, 2003.
- [6] F. Bashforth and J.C. Adams. An attempt to test the theories of capillary action by comparing the theoretical and measured forms of drops of fluid, with an explanation of the method of integration employed in constructing the tables which give the theoretical forms of such drops. *Cambridge University Press*, 1883.
- [7] R.F. Bergeron. Aerodynamic sound and the low-wavenumber wall-pressure spectrum of nearly incompressible boundary-layer turbulence. *Journal of Acoustical Society of America*, 54 :123–133, 1973.
- [8] J. Berland, C. Bogey, and C. Bailly. Low-dissipation and low-dispersion 4th-order Runge-Kutta algorithm. *Computers and Fluids*, 35 :1459–1463, 2006.
- [9] J. Berland, C. Bogey, O. Marsden, and C. Bailly. High-order, low dispersive and low dissipative explicit schemes for multiple-scale and boundary problems. *Journal of Computational Physics*, 224(2) :637–662, 2007.
- [10] J. Berland and X. Gloerfelt. Investigation of noise radiation from a turbulent boundary layer. In *14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 5-7 May 2008, Vancouver, British Columbia Canada*, 20098-2802.

- [11] W.K. Blake. *Mechanics of flow-induced sound and vibration. Volume II : complex flow-structure interactions*, chapter 9, pages 595–657. Academic Press, Orlando [etc.], 1986.
- [12] C. Bogey and C. Bailly. Three-dimensional non-reflective boundary conditions for acoustic simulations : far field formulation and validation test cases. *Acta Acustica united with Acustica*, 88(1) :463–471, 2002.
- [13] C. Bogey and C. Bailly. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations. *Journal of Computational Physics*, 194(1) :194–214, 2004.
- [14] C. Bogey and C. Bailly. Turbulence and energy budget in a self-preserving round jet : direct evaluation using large eddy simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, 627 :129–160, 2009.
- [15] C. Bogey, N. de Cacqueray, and C. Bailly. A shock-capturing methodology based on adaptive spatial filtering for high-order non-linear computations. *Journal of Computational Physics*, 228(5) :1447–1465, 2009.
- [16] C. Bogey, O. Marsden, and C. Bailly. Large-eddy simulation of the flow and acoustic fields of a Reynolds number  $10^5$  subsonic jet with tripped exit boundary layers. *Physics of Fluids*, 23 :035104, 2011.
- [17] C. Bogey, O. Marsden, and C. Bailly. Influence of initial turbulence level on the flow and sound fields of a subsonic jet at a diameter-based Reynolds number of  $10^5$ . *Journal of Fluid Mechanics*, 701 :352–385, 2012.
- [18] P. Bradshaw. 'Inactive' motion and pressure fluctuations in turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 30(2) :241–258, 1967.
- [19] P.G. Bremner and J.F. Wilby. Aero-vibro-acoustics : problem statement and methods for simulation-based design solution. In *8th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 17-19 June 2002, Breckenridge, Colorado*, pages 2002–2551.
- [20] M.K. Bull. Wall-pressure fluctuations beneath turbulent boundary layers : some reflections on forty years of research. *Journal of Sound and Vibration*, 190(3) :299–315, 1996.
- [21] J.C. Butcher. Coefficients for the study of Runge-Kutta integration processes. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 3 :185–201, 1963.
- [22] J.C. Butcher. Numerical methods for ordinary differential equations in the 20th century. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 125(1-2) :1–29, 2000.
- [23] M. Calvo, J.M. Franco, and L. Ràndez. A new minimum storage Runge-Kutta scheme for computational acoustics. *Journal of Computational Physics*, 201(1) :1–12, 2004.

- 
- [24] M.P. Calvo, J. de Frutos, and J. Novo. Linearly implicit Runge-Kutta methods for advection-reaction-diffusion equations. *Applied Numerical Mathematics*, 37(4) :535–549, 2001.
- [25] D.M. Chase. Modeling the wavevector-frequency spectrum of turbulent boundary layer wall pressure. *Journal of Sound and Vibration*, 70 :29–67, 1980.
- [26] D.M. Chase. The character of the turbulent wall pressure spectrum at subconvective wavenumbers and a suggested comprehensive model. *Journal of Sound and Vibration*, 112 :125–147, 1987.
- [27] C. Chin, A.S.H. Ooi, I. Marusic, and H.M. Blackburn. The influence of pipe length on turbulence statistics computed from direct numerical simulation data. *Physics of Fluids*, 22 :115107, 2010.
- [28] H. Choi and P. Moin. On the space-time characteristics of wall-pressure fluctuations. *Physics of Fluids A*, 2(8) :1450–1460, 1990.
- [29] D. Chung and B.J. McKeon. Large-eddy simulation of large-scale structures in long channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 661 :341–364, 2010.
- [30] D. Coles. The law of the wake in the turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 1(2) :191–226, 1956.
- [31] T. Colonius and S.K. Lele. Computational aeroacoustics : Progress on nonlinear problems of sound generation. *Progress in Aerospace Sciences*, 40(6) :345–416, 2004.
- [32] G.M. Corcos. Resolution of pressure in turbulence. *Journal of Acoustical Society of America*, 35(2) :192–199, 1963.
- [33] G.M. Corcos. The structure of the turbulent pressure field in boundary-layer flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 18 :353–378, 1964.
- [34] N. Curle. The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound. *Proceedings of the Royal Society of London*, A231 :505–514, 1955.
- [35] J.C. del Alamo and J. Jiménez. Spectra of the very large anisotropic scales in turbulent channels. *Physics of Fluids*, 15(6) :L41–L44, 2003.
- [36] J.C. del Alamo, J. Jiménez, P. Zandonade, and R.D. Moser. Scaling of the energy spectra of turbulent channels. *Journal of Fluid Mechanics*, 500 :135–144, 2004.
- [37] H. Dong and X. Zhong. High-order semi-implicit schemes for unsteady compressible flow simulations. *AIAA Journal*, 40(5) :869–878, 2002.



- [38] T.H. Farabee and M.J. Casarella. Spectral features of wall pressure fluctuations beneath turbulent boundary layers. *Physics of Fluids A*, 3(10) :2410–2420, 1991.
- [39] J.E. Ffowcs Williams and D.L. Hawkings. Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A*, 264 :321–342, 1969.
- [40] X. Gloerfelt. The link between wall pressure spectra and radiated sound from turbulent boundary layers. In *16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 7-9 June 2010, Stockholm, Sweden*, 2010-3904.
- [41] X. Gloerfelt and J. Berland. Direct computation of turbulent boundary layer noise. In *15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 11-13 May 2009, Miami, Florida*, 2009-3401.
- [42] M.C. Goody. Empirical spectral model of surface pressure fluctuations. *AIAA Journal*, 42(9) :1788–1794, 2004.
- [43] M.C. Goody and R.L. Simpson. Surface pressure fluctuations beneath two- and three-dimensional turbulent boundary layers. *AIAA Journal*, 38(10) :1822–1831, 2000.
- [44] W.R. Graham. A comparison of models for the wavenumber-frequency spectrum of turbulent boundary layer pressures. *Journal of Sound and Vibration*, 206(4) :541–565, 1997.
- [45] E. Hairer, S.P. Norsett, and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems, 2nd Edition*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [46] E. Hairer and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II, Stiff and Differential-Algebraic Problems, 2nd Edition*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [47] H.H. Hariri and T.R. Akylas. The wall-shear-stress contribution to boundary-layer noise. *Physics of Fluids*, 28(9) :2727–2729, 1985.
- [48] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows , 2nd Edition*. Butterworth-Heinemann , Elsevier, 2007.
- [49] M.S. Howe. The rôle of surface shear stress fluctuations in the generation of boundary layer noise. *Journal of Sound and Vibration*, 65(2) :159–164, 1979.
- [50] M.S. Howe. Surface pressure and sound produced by turbulent flow over smooth and rough walls. *Journal of Acoustical Society of America*, 95 :1041–1047, 1991.
- [51] S. Hoyas and J. Jiménez. Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to  $Re_\tau = 2003$ . *Physics of Fluids*, 18 :011702, 2006.

- 
- [52] F.Q. Hu, M.Y. Hussaini, and J.L. Manthey. Low-dissipation and low-dispersion Runge-Kutta schemes for computational acoustics. *Journal of Computational Physics*, 124(1) :177–191, 1996.
- [53] Z.W. Hu, C.L. Morfey, and N.D. Sandham. Aeroacoustics of wall-bounded turbulent flows. *AIAA Journal*, 40(3) :465–473, 2002.
- [54] Z.W. Hu, C.L. Morfey, and N.D. Sandham. Sound radiation in turbulent channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 475 :269–302, 2003.
- [55] Z.W. Hu, C.L. Morfey, and N.D. Sandham. Wall pressure and shear stress spectra from direct simulation of channel flow. *AIAA Journal*, 44(7) :1541–1549, 2006.
- [56] J. Jiménez, S. Hoyas, M.P. Simens, and Y. Mizuno. Turbulent boundary layers and channels at moderate Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 657 :335–360, 2010.
- [57] J. Jiménez, J.C. del Alamo, and O. Flores. The large-scale dynamics of near-wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 505 :179–199, 2004.
- [58] C.A. Kennedy and M.H. Carpenter. Additive Runge-Kutta schemes for convection-diffusion-reaction equations. *Applied Numerical Mathematics*, 44(1-2) :139–181, 2003.
- [59] J. Kim, P. Moin, and R.D Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 177 :133–166, 1987.
- [60] X.J. Kline, W.C. Reynolds, F.A. Schraub, and P.W. Runstadler. The structure of turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 30(4) :741–773, 1967.
- [61] R.H. Kraichnan. Noise transmission from boundary layer pressure fluctuations. *Journal of Acoustical Society of America*, 29(1) :65–80, 1957.
- [62] G.J. Kunkel and I. Marusic. Study of the near-wall-turbulent region of the high-Reynolds-number boundary layer using an atmospheric flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 548 :375–402, 2006.
- [63] M.T. Landahl. Wave mechanics of boundary layer turbulence and noise. *Journal of Acoustical Society of America*, 57(4) :824–831, 1974.
- [64] S.K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, 103(1) :16–42, 1992.
- [65] K. Levenberg. A method for the solution of certain problems in least squares. *Quart. Appl. Math.*, 2 :164–168, 1944.
- [66] M.J. Lighthill. On sound generated aerodynamically i. General theory. *Proceedings of the Royal Society of London*, A221 :564–587, 1952.

- [67] D. Marquardt. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM J. Appl. Math.*, 11 :431–441, 1963.
- [68] I. Marusic, B.J. McKeon, P.A. Monkewitz, H.M. Nagib, A.J. Smits, and K.R. Sreenivasan. Wall-bounded turbulent flows at high Reynolds numbers : Recent advances and key issues. *Physics of Fluids*, 22 :065103, 2010.
- [69] P. Moin and J. Kim. Numerical investigation of turbulent channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 118 :341, 1982.
- [70] R.D. Moser, J. Kim, and N.N. Mansour. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_\tau = 590$ . *Physics of Fluids*, 11(4) :943–945, 1999.
- [71] H.M. Nagib and K.A. Chauhan. Variations of von Kármán coefficient in canonical flows. *Physics of Fluids*, 20 :101518, 2008.
- [72] U. Piomelli and E. Balaras. Wall-layer models for large-eddy simulations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 34 :349–374, 2002.
- [73] A. Powell. Aerodynamic noise and the plane boundary. *Journal of Acoustical Society of America*, 32 :982–990, 1960.
- [74] S.K. Robinson. A review of vortex structures and associated coherent motions in turbulent boundary layers. *IUT AM Symp. Struct. Turbul. and Drag Reduct., 2nd*, 1989.
- [75] S.K. Robinson. Coherent motions in the turbulent boundary layer. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 23 :601–39, 1991.
- [76] C. Runge. Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. *Mathematische Annalen*, 46 :167–178, 1895.
- [77] P. Sagaut. *Large Eddy Simulation for incompressible flows*. Springer, Berlin, Germany, 2006.
- [78] P. Schlatter, Q. Li, G. Brethouwer, A.V. Johansson, and D.S. Henningson. Simulations of spatially evolving turbulent boundary layers up to  $Re_\tau = 4300$ . *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 31 :251–261, 2010.
- [79] P. Schlatter and R. Örlü. Assessment of direct numerical simulation data of turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 659 :116–126, 2010.
- [80] P. Schlatter, R. Örlü, Q. Li, G. Brethouwer, J.H.M. Fransson, A.V. Johansson, P.H. Alfredsson, and D.S. Henningson. Turbulent boundary layers up to  $Re_\theta = 2500$  studied through simulation and experiment. *Physics of Fluids*, 21 :051702, 2009.

- 
- [81] P. Schlatter, R. Örlü, Q. Li, G. Brethouwer, A.V. Johansson, P.H. Alfredsson, and D.S. Henningson. Progress in simulations of turbulent boundary layers. In *TSFP-7, Ottawa, July 31, 2011*.
- [82] M.P. Simens, J. Jiménez, S. Hoyas, and M. Mizuno. A high-resolution code for turbulent boundary layers. *Journal of Computational Physics*, 228(11) :4218–4231, 2009.
- [83] A.J. Smits, B. J. McKeon, and I. Marusic. High-Reynolds number wall turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 43 :353–75, 2011.
- [84] P.R. Spalart. Direct simulation of a turbulent boundary layer up to  $Re_\theta = 1410$ . *Journal of Fluid Mechanics*, 187 :61–98, 1988.
- [85] P.R. Spalart, R.D. Moser, and M. Rogers. Spectral methods for the Navier-Stokes equations with one infinite and two periodic directions. *Journal of Computational Physics*, 96(2) :297–324, 1991.
- [86] D. Stanescu. 2N-storage low dissipation and dispersion Runge-Kutta schemes for computational acoustics. *Journal of Computational Physics*, 143(2) :674–681, 1998.
- [87] G.G. Stokes. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, IX(8), 1851.
- [88] J. Suh, S.H. Frankel, L. Mongeau, and M.W. Plesniak. Compressible large eddy simulations of wall-bounded turbulent flows using a semi-implicit numerical scheme for low Mach number aeroacoustics. *Journal of Computational Physics*, 215(2) :526–551, 2006.
- [89] C.K.W. Tam and Z. Dong. Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow. *Journal of Computational Acoustics*, 4(2) :175–201, 1996.
- [90] C.K.W. Tam and J.C. Webb. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. *Journal of Computational Physics*, 107(2) :262–281, 1993.
- [91] C.K.W. Tam, J.C. Webb, and Z. Dong. A study of the short wave components in computational aeroacoustics. *Journal of Computational Acoustics*, 1(1) :1–30, 1993.
- [92] C.D. Tomkins and R.J. Adrian. Spanwise structure and scale growth in turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 490 :37–74, 2003.
- [93] C.D. Tomkins and R.J. Adrian. Energetic spanwise modes in the logarithmic layer of a turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 545 :141–162, 2005.
- [94] A.A. Townsend. *The structure of turbulent shear flow, 2nd edition*. Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

- [95] E.A. Vecchio and C.A. Wiley. Noise radiated from a turbulent boundary layer. *Journal of Acoustical Society of America*, 53(2) :596–601, 1973.
- [96] S. Viazzo, A. Dejoan, and R. Schiestel. Spectral features of the wall-pressure fluctuations in turbulent wall flows with and without perturbations using LES. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 22 :39–52, 2001.
- [97] R. Vichnevetsky. New stability theorems concerning one-step numerical methods for ordinary differential equations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 25(3) :199–205, 1983.
- [98] L. Wei and A. Pollard. Direct numerical simulation of compressible turbulent channel flows using the discontinuous Galerkin method. *Computers & Fluids*, 2011.
- [99] W.W. Willmarth and C.E. Wooldridge. Measurements of the fluctuating pressure at the wall beneath a thick turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 14 :187–210, 1962.
- [100] X. Wu and P. Moin. Direct numerical simulation of turbulence in a nominally zero-pressure-gradient flat-plate boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 630 :5–41, 2009.
- [101] J.J. Yoh and X. Zhong. New hybrid Runge-Kutta methods for unsteady reactive flow simulation. *AIAA Journal*, 42(8) :1593–1600, 2004.
- [102] X. Zhong. Additive semi-implicit Runge-Kutta methods for computing high-speed nonequilibrium reactive flows. *Journal of Computational Physics*, 128(1) :19–31, 1996.



## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Messieurs C. BOGEY et C. BAILLY

et les rapports de

Monsieur L. MONGEAU  
Professeur - Dpt of Mechanical Engineering - Macdonald Engineering Building - Rm 458  
817 rue Sherbrooke Ouest - Montréal H3A 0C3 - Québec - Canada

Et de

Monsieur E. LAMBALLAIS  
Professeur - Institut P' - Université de Poitiers - ENSMA - UPR 3346 - SP2MI - Téléport 2  
bd Marie et Pierre Curie - BP 30179 - 86962 FUTUROSCOPE CHASSENEUIL cedex

**Monsieur KREMER François**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE**

Fait à Ecully, le 4 décembre 2012

P/Le directeur de l'E.C.L.  
La directrice des Etudes



M-A. GALLAND