



**HAL**  
open science

# Contributions à l'étude des partitions spectrales minimales

Corentin Léna

► **To cite this version:**

Corentin Léna. Contributions à l'étude des partitions spectrales minimales. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris Sud - Paris XI, 2013. Français. NNT : 2013PA112354 . tel-00952556

**HAL Id: tel-00952556**

**<https://theses.hal.science/tel-00952556>**

Submitted on 27 Feb 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-SUD  
FACULTÉ DES SCIENCES  
D'ORSAY

## THÈSE

*présentée pour obtenir*

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI

Spécialité : Mathématiques

*par*

Corentin LÉNA

*Sujet :*

## Contributions à l'étude des partitions spectrales minimales

Soutenue le 13 décembre 2013 devant la Commission d'examen :

Mme.	Virginie	BONNAILLIE-NOËL	(Directrice de thèse)
M.	Dorin	BUCUR	(Rapporteur)
M.	Pedro	FREITAS	(Rapporteur)
M.	Bernard	HELFFER	(Directeur de thèse)
M.	Bertrand	MAURY	
M.	Édouard	OUDET	

## CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDES DES PARTITIONS SPECTRALES MINIMALES

**Résumé**

Ce travail porte sur le problème des partitions minimales, à l'interface entre théorie spectrale et optimisation de forme. Une introduction générale précise le problème et présente des résultats, principalement dûs à B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof et S. Terracini, qui sont utilisés dans le reste de la thèse.

Le premier chapitre est une étude spectrale asymptotique du laplacien de Dirichlet sur une famille de domaines en dimension deux qui tend vers un segment. L'objectif est d'obtenir une localisation des lignes nodales dans la limite des domaines minces. En appliquant les résultats de Helffer, Hoffmann-Ostenhof et Terracini, on montre ainsi que les domaines nodaux des premières fonctions propres forment des partitions minimales.

Le deuxième chapitre étudie les valeurs propres de certains opérateurs de Schrödinger sur un domaine plan avec condition au bord de Dirichlet. On considère des opérateurs qui ont un potentiel électrique nul et un potentiel magnétique d'un type particulier, dit d'Aharonov-Bohm, avec des singularités en un nombre fini de points appelés *pôles*. On démontre que les valeurs propres dépendent continuellement des pôles. Dans le cas de pôles distincts et éloignés du bord, on prouve que cette dépendance est analytique lorsque la valeur propre est simple. On exprime de plus une condition suffisante pour que la fonction qui aux pôles associe une valeur propre présente un point critique. On utilise alors la caractérisation magnétique des partitions minimales pour montrer que l'énergie minimale est une valeur critique d'une de ces fonctions.

Le troisième chapitre est un article écrit en collaboration avec Virginie Bonnaillie-Noël. Il porte sur une famille d'exemples, les secteurs angulaires de rayon unité et d'ouverture variable, dont on tente de déterminer les partitions minimales. On applique pour cela les théorèmes généraux rappelés dans l'introduction afin de déterminer les partitions nodales qui sont minimales. On s'intéresse plus particulièrement aux partitions minimales en trois domaines. En appliquant les idées du deuxième chapitre, on montre que pour certaines valeur de l'angle, il n'existe aucune partition minimale qui soit symétrique par rapport à la bissectrice du domaine. D'un point de vue quantitatif, on obtient des encadrements précis de l'énergie minimale.

Le quatrième chapitre consiste en l'étude des partitions minimales de tores plats dont on fait varier le rapport entre longueur et largeur. On utilise une méthode numérique très différente de celle du troisième chapitre, basée sur un article de B. Bourdin, D. Bucur et É. Oudet. Elle consiste en une relaxation suivie d'une optimisation par un algorithme de gradient projeté. On peut ainsi tester des résultats théoriques antérieurs. Les résultats présentés suggèrent de plus la construction explicite de familles de partitions (en liaison avec des pavages du tore) qui donnent une nouvelle majoration de l'énergie minimale.

Un dernier chapitre de perspectives présente plusieurs applications possibles des méthodes décrites dans la thèse.

**Mots-clés :** Théorie spectrale, partitions minimales, domaines nodaux, hamiltonien d'Aharonov-Bohm, simulations numériques, méthode des éléments finis, méthode des différences finies, optimisation.

## CONTRIBUTIONS TO THE STUDY OF SPECTRAL MINIMAL PARTITIONS

**Abstract :**

This work is concerned with the problem of minimal partitions, at the interface between spectral theory and shape optimization. A general introduction gives a precise statement of the problem and recall results, mainly due to B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof and S. Terracini, that are used in the rest of the thesis.

The first chapter is an asymptotic spectral study of the Dirichlet Laplacian on a family of two-dimensional domains converging to a line segment. The aim is to localize the nodal lines when the domains become very thin. With the help of the results of Helffer, Hoffmann-Ostenhof, and Terracini, we then show that the nodal domains of the first eigenfunctions give minimal partitions.

The second chapter studies the eigenvalues of some Schrödinger operators on a domain with Dirichlet boundary conditions. We consider operators that have no electric potential and a so-called *Aharonov-Bohm* magnetic potential, which has singularities at a finite number of points called *poles*. We prove that the eigenvalues are continuous functions of the poles. When the poles are distinct and far from the boundary, we prove that this function is analytic, assuming the eigenvalue is simple. We also give a sufficient condition for the function to have a critical point. Using the magnetic characterization of minimal partitions, we show that the minimal energy is a critical value for one of these functions.

The third chapter is an article written in collaboration with Virginie Bonnaillie-Noël. It studies minimal partitions for sectors of unit radius with a variable angular opening. We apply the general results presented in the introduction, together with numerical computations, to determine nodal partitions that are minimal. We focus on partitions into three domains. Using ideas from the second chapter, we show that, for some values of the angle, there is no minimal partition that is symmetric with respect to the bisector. From a quantitative point of view, we obtain precise bounds on the minimal energy.

The fourth chapter studies the minimal partitions of flat tori in function of the ratio between width and length. We use a numerical method that is quite different from chapter three, and is based on an article by B. Bourdin, D. Bucur, and É. Oudet. It consists in a relaxation of the problem, followed by optimization with the help of a projected gradient algorithm. The results shown here additionally suggest explicit families of partitions, which consist in tilings of tori by polygons, that give upper bounds on the minimal energy.

In the last chapter we consider several possible applications of the methods described in the thesis.

**Keywords :** Spectral theory, minimal partitions, nodal domains, Aharonov-Bohm Hamiltonian, numerical simulations, finite element method, finite difference method, optimization.



*À ma mère.*



# Remerciements

Je tiens avant toute chose à remercier mes directeurs de thèse, Bernard Helffer et Virginie Bonnaillie-Noël, sans qui rien n'aurait été possible. Bernard Helffer, il y a quatre ans, m'a présenté le problème des partitions minimales et a accepté d'encadrer mon stage de M2, puis ma thèse. Tout au long de ces quatre ans j'ai pu apprécier ses vastes connaissances, sa bienveillance et son sens de l'humour. J'ai reçu dès le début l'aide de Virginie Bonnaillie-Noël, et je la remercie pour son investissement et sa patience. Je lui suis infiniment reconnaissant d'avoir pris le temps de me transmettre une partie de son expérience, de corriger et d'améliorer mon travail, qu'il s'agisse de programmes ou de textes mathématiques.

Dorin Bucur et Pedro Freitas ont accepté d'être les rapporteurs de mon manuscrit. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, pour leurs suggestions et leurs commentaires. Je remercie aussi Édouard Oudet et Bertrand Maury d'avoir bien voulu faire partie de mon jury.

Pendant les trois ans qu'ont duré la préparation de cette thèse, j'ai eu la chance de participer aux réunions des ANR GAOS puis OPTIFORM, qui m'ont donné l'occasion de découvrir l'optimisation de forme en assistant à des cours et des exposés par les chercheurs du domaine. Je suis reconnaissant à tous les participants qui m'ont fait bénéficier de leur savoir, de leur expérience et de leur enthousiasme. Au-delà de ceux que j'ai déjà cités, je remercie ainsi Chiara Bianchini, Matthieu Bonnard, Fabien Caubet, Gisella Croce, Jérémy Dalphin, Marc Dambrine, Thibault Deheuvels, Antoine Henrot, Michel Pierre, Yannick Privat et Gregory Vial. Merci en particulier à Jimmy Lambolley pour nos discussions à propos de l'optimisation sous contrainte. Je remercie aussi Thomas Hoffmann-Ostenhof de m'avoir invité à parler dans le très agréable Erwin Schrödinger Institute, à Vienne.

De nombreuses personnes m'ont aidé à surmonter les obstacles rencontrés lors de mes recherches. Je remercie en particulier Benedetta Noris et Suzanna Terracini, qui ont discuté avec moi de leurs travaux en cours, et m'ont fait part de leurs idées et de leurs suggestions. Je remercie également Luc Hillairet, qui m'a généreusement communiqué certains résultats inédits et m'a fourni des explications très éclairantes. Le troisième chapitre n'aurait pu être conçu sans eux. Je remercie une nouvelle fois Édouard Oudet, dont l'aide m'a permis de réaliser les simulations numériques présentées dans ce manuscrit.

Merci aussi à Imène Hachicha et Raphaël Henry, pour leur amitié, leur présence constante et leur soutien moral pendant les moments les plus difficiles. Parmi les anciens des masters d'Orsay, merci à Aude Cornu, Caroline Garin et Maxime Sébille pour leurs invitations à sortir la tête de ma thèse. Je remercie Gaëtan Borot et Antoine Coutant, qui m'ont précédé dans cette voie, pour leur amical soutien.

Merci aux doctorants du bâtiment 430 pour les repas, les pauses café et les discussions, mathématiques (rarement) et autres (souvent), qui s'ensuivent. Un salut particulier à mes anciens voisins de bureau, en particulier à Richard Aoun, Miaofen Chen, Etienne Le Masson et Nicolas de Saxcé, partis vers d'autres cieux. Je remercie aussi Valérie Lavigne et Catherine Poupon de m'avoir aidé à naviguer les labyrinthes administratifs.

Merci à Frédéric et Lydie pour leurs nombreuses invitations. Merci à mon frère pour ses fréquents coups de téléphone et à ma sœur de m'apporter des nouvelles du vaste monde extérieur. Merci enfin à ma mère, pour, entre autres choses, m'avoir expliqué fonctions et vecteurs, m'avoir appris à résoudre des équations du premier et du second degré, et plus généralement pour ne pas avoir accepté que je me résigne à ne rien comprendre aux mathématiques.

J'adresse enfin toutes mes excuses et tous mes remerciements à ceux que j'aurais pu oublier.



# Table des matières

<b>0</b>	<b>Introduction</b>	<b>11</b>
0.1	Partitions minimales . . . . .	11
0.1.1	Définitions . . . . .	11
0.1.2	Existence . . . . .	12
0.1.3	Premières propriétés de régularité . . . . .	13
0.2	Frontière d'une partition . . . . .	15
0.2.1	Rappels sur les ensembles nodaux . . . . .	15
0.2.2	Régularité . . . . .	16
0.2.3	Propriétés de la frontière . . . . .	18
0.3	Lien avec les partitions nodales . . . . .	20
0.3.1	Résultats de Courant et Pleijel . . . . .	20
0.3.2	Partitions nodales minimales . . . . .	23
0.4	Opérateur d'Aharonov-Bohm . . . . .	23
0.4.1	Généralités . . . . .	23
0.4.2	Propriétés spectrales . . . . .	26
0.4.3	Interprétation géométrique . . . . .	28
0.4.4	Caractérisation magnétique des partitions minimales . . . . .	29
0.5	Exemples de partitions minimales . . . . .	30
0.5.1	Généralités . . . . .	30
0.5.2	Rectangles . . . . .	30
0.5.3	Disque . . . . .	31
0.5.4	Tores . . . . .	32
0.5.5	Sphère . . . . .	34
0.6	Étude numérique . . . . .	34
0.6.1	Approches spectrales . . . . .	34
0.6.2	Recherche de 3-partitions minimales symétriques . . . . .	36
0.6.3	Exemples d'applications . . . . .	37
0.6.4	Méthode du gradient . . . . .	39
0.7	Organisation de la thèse . . . . .	40
0.7.1	Étude asymptotique des ensembles nodaux pour des domaines minces . . . . .	40
0.7.2	Spectre des opérateurs d'Aharonov-Bohm . . . . .	41
0.7.3	Partitions minimales d'un secteur . . . . .	42
0.7.4	Partitions minimales pour une famille de tores . . . . .	44
	Bibliographie . . . . .	45
<b>1</b>	<b>Étude spectrale d'un domaine mince</b>	<b>49</b>
1.1	Introduction . . . . .	49
1.1.1	Motivation . . . . .	49
1.1.2	Formulation du problème . . . . .	49
1.1.3	Perspectives . . . . .	50
1.2	Construction formelle d'un quasi-mode . . . . .	50
1.2.1	Reformulation du problème . . . . .	50
1.2.2	Développement formel de l'opérateur . . . . .	52
1.2.3	Premiers termes du développement . . . . .	53

1.2.4	Développement à un ordre quelconque . . . . .	54
1.3	Développement des valeurs propres . . . . .	56
1.3.1	Localisation du spectre . . . . .	57
1.3.2	Minoration des valeurs propres . . . . .	59
1.3.3	Conclusion . . . . .	62
1.4	Développement des fonctions propres . . . . .	63
1.4.1	Convergence dans $L^2(\Omega)$ . . . . .	63
1.4.2	Convergence dans les espaces de Sobolev . . . . .	64
1.5	Localisation des ensembles nodaux . . . . .	71
	Bibliographie . . . . .	73
<b>2</b>	<b>Eigenvalues variations for Aharonov-Bohm operators</b>	<b>75</b>
2.1	Introduction . . . . .	75
2.2	Gauge transformations . . . . .	78
2.2.1	Definition and basic properties . . . . .	78
2.2.2	Comparison with the Dirichlet Laplacian . . . . .	79
2.3	Form domain of an Aharonov-Bohm operators . . . . .	79
2.3.1	A Hardy-type inequality . . . . .	79
2.3.2	A non-concentration inequality . . . . .	81
2.3.3	Characterization of the form domain . . . . .	81
2.4	Continuity with respect to the poles . . . . .	83
2.4.1	Main statement . . . . .	83
2.4.2	An extraction lemma . . . . .	83
2.4.3	End of the proof of the continuity . . . . .	85
2.4.4	Some applications . . . . .	86
2.5	Analyticity with respect to the poles . . . . .	86
2.6	Perspectives . . . . .	91
	Bibliographie . . . . .	93
<b>3</b>	<b>Spectral minimal partitions of a sector</b>	<b>97</b>
3.1	Introduction . . . . .	97
3.1.1	Notations and known results . . . . .	97
3.1.2	Main results . . . . .	99
3.2	Nodal partitions . . . . .	100
3.2.1	Explicit eigenmodes . . . . .	100
3.2.2	Minimal nodal partition . . . . .	101
3.2.3	Minimal 2-partition . . . . .	102
3.3	Minimal partition for small angles . . . . .	103
3.4	Minimal nodal 3-partition . . . . .	104
3.5	Minimal symmetric 3-partitions . . . . .	107
3.5.1	Partitions with one interior singular point . . . . .	107
3.5.2	Partitions with two interior singular points . . . . .	110
3.5.3	Angular sector of opening $\alpha = \pi/3$ . . . . .	111
3.6	Laplacian on the double covering . . . . .	112
3.6.1	Double covering of the domain . . . . .	112
3.6.2	Symmetric and antisymmetric eigenvalues . . . . .	113
3.6.3	Numerical simulations for non symmetric candidates . . . . .	115
3.7	Negative results for minimal $k$ -partitions, $k = 4, 5, 6$ . . . . .	117
3.7.1	4-partition . . . . .	117
3.7.2	5-partition . . . . .	118
3.7.3	6-partition . . . . .	118
	Bibliographie . . . . .	119

<b>4</b>	<b>Spectral minimal partitions for a family of tori</b>	<b>121</b>
4.1	Introduction . . . . .	121
4.2	Minimal partitions . . . . .	122
4.2.1	Definitions . . . . .	122
4.2.2	Properties of minimal partitions . . . . .	123
4.2.3	Euler formula for partitions . . . . .	124
4.3	The case of a thin torus . . . . .	125
4.3.1	Eigenmodes . . . . .	125
4.3.2	Minimal partitions . . . . .	126
4.4	Transitions . . . . .	127
4.4.1	Definition . . . . .	127
4.4.2	Heuristic analysis for $b_3$ . . . . .	127
4.4.3	Examples of 3-partitions . . . . .	130
4.4.4	Examples of minimal 4-partitions . . . . .	131
4.4.5	Generalization . . . . .	131
4.5	Comparison for different energies . . . . .	132
4.5.1	A minimality criterion for nodal partitions . . . . .	132
4.5.2	Application to the torus . . . . .	134
4.6	Numerical method . . . . .	135
4.6.1	Relaxed formulation . . . . .	135
4.6.2	Construction of a $k$ -partition and computation of its energy . . . . .	138
4.6.3	Implementation of the method . . . . .	142
4.7	Numerical study of transitions . . . . .	146
4.7.1	3-partitions of the torus $T(1, b)$ . . . . .	146
4.7.2	4-partitions of the torus $T(1, b)$ . . . . .	150
4.7.3	5-partitions of the torus $T(1, b)$ . . . . .	153
4.8	Examples of partitions . . . . .	156
4.8.1	Generalities . . . . .	156
4.8.2	Hexagonal tilings . . . . .	156
4.8.3	Hexagonal 3-partitions . . . . .	158
4.8.4	Hexagonal 4-partitions . . . . .	162
4.8.5	Hexagonal 5-partitions . . . . .	163
4.8.6	A square 5-partition . . . . .	166
4.9	Conclusion . . . . .	169
4.9.1	Transitions . . . . .	169
4.9.2	The case of $T(1, 1)$ . . . . .	169
	Bibliographie . . . . .	169
<b>5</b>	<b>Perspectives</b>	<b>171</b>
5.1	Étude asymptotique des domaines minces . . . . .	171
5.1.1	Tores . . . . .	171
5.1.2	Domaines cylindriques . . . . .	173
5.2	Opérateurs d’Aharonov-Bohm sur les variétés . . . . .	174
5.2.1	Tores plats . . . . .	174
5.2.2	Généralisation : variétés riemanniennes de dimension deux . . . . .	175
5.3	Applications possibles de l’algorithme d’optimisation . . . . .	175
5.3.1	Étude de la dépendance en $p$ des partitions . . . . .	175
5.3.2	Domaines plans . . . . .	176
5.3.3	Domaines cylindriques . . . . .	176
5.3.4	Extensions et limitations de l’algorithme . . . . .	176
5.4	Tests numériques sur des partitions candidates . . . . .	177
5.4.1	Partitions du tore . . . . .	177
5.4.2	Partitions de la sphère . . . . .	177
	Bibliographie . . . . .	177





# Chapitre 0

## Introduction

L'objet de cette thèse est d'étudier les propriétés des partitions spectrales minimales de domaines de dimension 2, ouverts de  $\mathbb{R}^2$  ou surfaces. Afin de mieux comprendre le problème, nous commençons par rappeler les définitions et les propriétés de ces objets. Nous résumons aussi les liens entre ces partitions minimales et différents problèmes spectraux, et donnons une liste d'exemples. Nous décrivons ensuite différentes méthodes numériques qui ont été appliquées à la recherche de ces partitions minimales. Le plan de la thèse, ainsi que les principaux résultats, sont enfin présentés dans la section 0.7.

### 0.1 Partitions minimales

#### 0.1.1 Définitions

Rappelons tout d'abord quelques notations et résultats de géométrie spectrale (voir par exemple [24]). Dans cette section,  $M$  désigne une variété à bord, connexe, compacte, de dimension  $n$  et munie d'une métrique riemannienne (nous nous intéresserons plus particulièrement au cas  $n = 2$ ). Nous n'excluons pas le cas  $\partial M = \emptyset$ . Nous notons toujours  $\Delta$  l'opérateur de Laplace-Beltrami sur  $M$ . L'extension de Friedrichs de l'opérateur différentiel  $-\Delta$  agissant sur l'ensemble des fonctions  $C^\infty$  à support compact dans  $M$  est notée  $-\Delta_M^D$ . Il s'agit d'un opérateur autoadjoint positif. Son domaine est  $H^2(M) \cap H_0^1(M)$ , c'est à dire l'ensemble des fonctions  $H^2$  qui vérifient une condition de Dirichlet sur le bord. Le spectre de  $-\Delta_M^D$  est dans ce cas constitué d'une suite de valeurs propres positives tendant vers l'infini, chacune de multiplicité finie.

Nous notons

$$0 \leq \lambda_1(M) < \lambda_2(M) \leq \lambda_3(M) \leq \dots \leq \lambda_k(M) \leq \dots,$$

ces valeurs propres, rangées par ordre croissant et comptées avec multiplicité.

Rappelons que la valeur propre  $\lambda_1(M)$  est simple et que les fonctions propres associées ne changent pas de signe sur  $M$ . Sauf mention explicite du contraire, les termes *valeur propre* et *fonction propre* doivent être compris dans la suite comme *valeur propre de  $-\Delta_M^D$*  et *fonction propre de  $-\Delta_M^D$* .

Dans la suite,  $k$  désigne un entier supérieur ou égal à 1. Les objets que nous considérons sont appelés *k-partitions* de  $M$ .

**Définition 0.1.1.** Une *k-partition*  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$  de  $M$  est un ensemble, de cardinal  $k$ , de parties de  $M$  deux à deux disjointes. Les  $D_i$  sont appelés domaines de la partition. Une *k-partition* est dite connexe (resp. ouverte) lorsque tous ses domaines sont connexes (resp. ouverts). Nous notons  $\mathfrak{P}_k(M)$  l'ensemble des *k-partitions* connexes et ouvertes de  $M$ .

Dans la suite, sauf mention explicite du contraire, les termes *k-partition* et *partition* désignent un élément de  $\mathfrak{P}_k(M)$ . Notons que cette définition ne correspond pas à la notion ensembliste usuelle de partition, puisque la réunion de tous les domaines n'est pas nécessairement égale à  $M$ . Le problème étudié dans cette thèse consiste à trouver des partitions qui minimisent certaines énergies, que nous allons maintenant définir. Dans la suite,  $p$  désigne un nombre réel supérieur ou égal à 1, ou bien  $\infty$ .

**Définition 0.1.2.** Soit  $\mathcal{D}$  une  $k$ -partition de  $M$ . Définissons la  $p$ -énergie  $\Lambda_{k,p}(\mathcal{D})$  par

$$\begin{aligned}\Lambda_{k,p}(\mathcal{D}) &= \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_1(D_i)^p \right)^{1/p} && \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \Lambda_{k,\infty}(\mathcal{D}) &= \max_{1 \leq i \leq k} \lambda_1(D_i) && \text{sinon.}\end{aligned}$$

Nous noterons plus simplement  $\Lambda_k = \Lambda_{k,\infty}$  et nous l'appellerons plus simplement l'énergie de la partition.

**Remarque 0.1.1.** Afin de pouvoir définir  $\lambda_1(D)$  lorsque  $D$  est un ouvert quelconque de  $M$ , sans faire d'hypothèse de régularité sur le bord de  $D$ , nous utilisons la définition variationnelle

$$\lambda_1(D) = \inf_{u \in H_0^1(D) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|_{L^2(D)}^2}{\|u\|_{L^2(D)}^2}$$

où  $H_0^1(D)$  est défini comme l'adhérence dans  $H^1(D)$  de l'ensemble  $C_c^\infty(D)$ .

**Remarque 0.1.2.** Pour toute partition  $\mathcal{D}$ ,  $\lim_{p \rightarrow \infty} \Lambda_{k,p}(\mathcal{D}) = \Lambda_{k,\infty}(\mathcal{D})$ , ce qui montre la cohérence de nos notations.

Cette énergie sera étudiée plus en détail dans le cadre du chapitre 4. Définissons maintenant les problèmes de minimisation que nous allons étudier.

**Définition 0.1.3.** Pour  $1 \leq p \leq \infty$ , nous définissons

$$\mathfrak{L}_{k,p}(M) = \inf_{\mathcal{D} \in \mathfrak{P}_k(M)} \Lambda_{k,p}(\mathcal{D}).$$

**Définition 0.1.4.** Une  $k$ -partition  $\mathcal{D}$  de  $M$  est dite  $p$ -minimale si

$$\Lambda_{k,p}(\mathcal{D}) = \mathfrak{L}_{k,p}(M).$$

Le cas  $p = \infty$  faisant l'objet d'une attention particulière dans cette thèse, nous utiliserons parfois  $\Lambda_k$  pour  $\Lambda_{k,\infty}$ ,  $\mathfrak{L}_k$  pour  $\mathfrak{L}_{k,\infty}$  et *minimale* pour  $\infty$ -minimale.

## 0.1.2 Existence

Nous considérons le cas où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Il n'est pas évident que les  $k$ -partitions  $p$ -minimales telles que définies dans la définition 0.1.4 existent. Ce résultat à été démontré par différents auteurs selon plusieurs méthodes.

Il y a d'abord un résultat très général dû à Bucur-Butazzo-Henrot [15], qui donne l'existence de partitions minimales dans le cadre des quasi-ouverts sans toutefois montrer que ces minimiseurs sont des ouverts. Nous renvoyons à [34] pour la définition des quasi-ouverts.

Dans l'article [16], L. A. Caffarelli et F. H. Lin considèrent une version affaiblie du problème de l'existence d'une  $k$ -partition 1-minimale, dans le cas où  $M$  est un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  à bord  $C^\infty$ . Ils recherchent

$$\mathfrak{M}_k(\Omega) = \inf \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_1(D_i), D_i \subset \Omega \text{ quasi-ouvert et } D_i \cap D_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j \right\},$$

et considèrent alors le problème auxiliaire

$$\mathfrak{N}_k(\Omega) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} |\nabla v_i|^2 dx, v = (v_1, \dots, v_k) \in H_0^1(\Omega, \Sigma) \text{ avec } \int_{\Omega} |v_i|^2 dx = 0 \right\}$$

où  $\Sigma$  est le sous-ensemble singulier de  $\mathbb{R}^k$  défini par  $\cup_{i=1}^k L_i$  avec

$$L_i = \{v = (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^k, v_j = 0 \text{ pour } j \neq i\}.$$

Ils montrent l'existence de  $v \in H_0^1(\Omega, \Sigma)$  réalisant le minimum. Ils concluent en montrant l'équivalence des deux problèmes de minimisation. Si  $v \in H_0^1(\Omega, \Sigma)$  réalise  $\mathfrak{N}_k(\Omega)$ , alors les  $D_i = \{v_i > 0\}$  sont des quasi-ouverts deux à deux disjoints qui réalisent  $\mathfrak{M}_k(\Omega)$ . Réciproquement, si  $(D_1, \dots, D_k)$  est une famille de  $k$  quasi-ouverts disjoints qui réalise le minimum  $\mathfrak{M}_k(\Omega)$ , et si, pour chaque  $D_i$ ,  $v_i$  est la fonction propre réelle positive associée à  $\lambda_1(D_i)$ , alors  $v = (v_1, \dots, v_k)$  réalise le minimum  $\mathfrak{N}_k(\Omega)$ . La preuve d'existence d'une  $k$ -partition 1-minimale est complétée par la démonstration du fait que  $v$  a un représentant Lipschitzien (donc continu). Si nous choisissons ce représentant, les ensembles  $D_i = \{v_i > 0\}$  sont ouverts.

Dans l'article [18], écrit indépendamment du précédent, M. Conti, S. Terracini et G. Verzini traitent le cas  $p \geq 1$  lorsque  $M$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  à frontière  $C^\infty$ , et obtiennent des résultats de régularité plus forte, très proches de la régularité démontrée pour les ensembles nodaux des fonctions propres. Ils considèrent le problème affaibli :

$$\mathfrak{Q}_k(\Omega) = \inf \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_1(D_i)^p, D_i \subset \Omega \text{ mesurable et } D_i \cap D_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j \right\}.$$

La caractérisation variationnelle des valeurs propres du laplacien de Dirichlet permet d'écrire

$$\mathfrak{Q}_k(\Omega) = \inf \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left( \frac{\|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2} \right)^p, u_i \in H_0^1(\Omega) \text{ et } u_i u_j = 0 \text{ si } i \neq j \right\}.$$

Il est facile de voir que la fonctionnelle à minimiser dépend de façon semi-continue inférieure du  $k$ -uplet  $(u_1, \dots, u_k)$  pour la topologie faible  $H^1$ . La compacité faible de  $H_0^1(\Omega)$  permet alors d'affirmer l'existence d'un  $k$ -uplet minimiseur  $(u_1^*, \dots, u_k^*)$ . Les domaines  $D_i^* = \{u_i^* > 0\}$  sont alors minimiseurs. Nous pouvons *a priori* seulement affirmer que les  $D_i$  sont quasi-ouverts. Le fait qu'il soient ouverts est déduit d'un résultat de régularité sur les solutions d'un système d'inégalités différentielles, démontrés dans [19].

La régularité (en un sens que nous précisons dans la suite) de toute partition minimale est un résultat de Helffer-Hoffmann-Ostenhof-Terracini [32] obtenu en 2008. Les auteurs de [19] ne démontreraient en effet que l'existence d'une partition minimale régulière. La définition de la régularité nécessite d'introduire la définition de la frontière d'une partition que nous donnerons dans la sous-section 0.2.2 mais commençons par quelques propriétés plus topologiques.

### 0.1.3 Premières propriétés de régularité

Nous donnons maintenant une liste de propriétés, qui semble découler de façon naturelle des définitions, mais dont la démonstration est en fait parfois plus délicate (voir [32]). Ces propriétés ne sont pas toutes démontrées dans le cas de la dimension 3.

Remarquons tout d'abord que, selon la définition 0.1.1, toute  $k$ -partition d'un ouvert  $\Omega$  d'une variété  $M$  est aussi une  $k$ -partition de  $M$ . Nous en déduisons immédiatement une propriété de monotonie.

**Proposition 0.1.1.** *Si  $\Omega$  est un ouvert d'une variété  $M$ , alors  $\mathfrak{L}_{k,p}(M) \leq \mathfrak{L}_{k,p}(\Omega)$ .*

Il est naturel, compte tenu de la monotonie des valeurs propres par rapport au domaine, d'imaginer que les partitions minimales de  $M$  vont remplir  $M$  autant que possible. Bien que la réunion des domaines d'une  $k$ -partition  $p$ -minimale de  $M$  ne soit pas égale à  $M$ , ces domaines recouvrent «presque toute» la variété  $M$ . Nous introduisons la définition suivante.

**Définition 0.1.5.** *Une  $k$ -partition  $\mathcal{D}$  de  $M$  est dite complète<sup>1</sup> lorsque*

$$M = \text{Int} \left( \bigcup_{i=1}^k D_i \right) \setminus \partial M,$$

où  $\text{Int } A$  désigne l'intérieur d'un ensemble  $A$ .

1. En anglais : 'Strong' dans la terminologie de [32]

Le résultat suivant semble naturel compte tenu de la décroissance des valeurs propres du laplacien de Dirichlet par rapport à l'inclusion des domaines. Il est en fait difficile et est toujours ouvert en dimension 3.

**Théorème 0.1.1.** *Toute  $k$ -partition  $p$ -minimale de  $M$  est complète.*

**Remarque 0.1.3.** *L'aspect compliqué de la définition 0.1.5 est nécessaire pour prendre en compte des bords  $\partial M$  irréguliers (par exemple avec un segment rentrant). Si nous supposons que  $\partial M$  est de classe  $C^1$  par morceaux, nous pouvons remplacer l'égalité dans cette définition par  $\overline{M} = \cup_{i=1}^k \overline{D}_i$ .*

Remarquons que l'on déduit facilement du théorème 0.1.1 la croissance stricte de la suite  $(\mathfrak{L}_k(M))_{k \geq 1}$ .

**Proposition 0.1.2.** *Pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ , tout entier  $k \geq 1$ ,*

$$\mathfrak{L}_{k,p}(M) < \mathfrak{L}_{k+1,p}(M).$$

*Démonstration.* Il existe  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k, D_{k+1}\}$  une  $(k+1)$ -partition  $p$ -minimale de  $M$ . Quitte à changer la numérotation des domaines, on peut supposer que  $\lambda_1(D_{k+1}) \geq \lambda_1(D_i)$  pour  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Alors  $\mathcal{D}' = \{D_1, \dots, D_k\}$  est une  $k$ -partition (non complète) de  $M$  telle que  $\Lambda_{k,p}(\mathcal{D}') \leq \Lambda_{k+1,p}(\mathcal{D}) = \mathfrak{L}_{k+1,p}(M)$ . La partition  $\mathcal{D}'$  n'étant pas complète, on déduit du théorème 0.1.1 qu'elle n'est pas  $p$ -minimale et donc que  $\Lambda_{k,p}(\mathcal{D}') > \mathfrak{L}_{k,p}(M)$ .  $\square$

Les énergies que nous considérons sont croissantes par rapport au paramètre  $p$ . En effet, la proposition suivante se déduit immédiatement de l'inégalité de Hölder (voir le chapitre 4).

**Proposition 0.1.3.** *Soit  $\mathcal{D}$  une  $k$ -partition de  $M$ . Soit  $p \leq q \leq \infty$ . Alors  $\Lambda_{k,p}(\mathcal{D}) \leq \Lambda_{k,q}(\mathcal{D})$ .*

**Corollaire 0.1.4.** *Soit  $p \leq q \leq \infty$ . Alors  $\mathfrak{L}_{k,p}(M) \leq \mathfrak{L}_{k,q}(M)$ .*

Le cas  $p = \infty$  présente des propriétés spéciales. La notion suivante joue un rôle essentiel dans la suite.

**Définition 0.1.6.** *Une  $k$ -partition  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$  est dite équispectrale si tous les  $\lambda_1(D_i)$  sont égaux.*

Dans ce cas cette valeur commune est l'énergie de  $\mathcal{D}$  que nous avons introduite :  $\Lambda_k(\mathcal{D}) = \Lambda_{k,\infty}(\mathcal{D})$ .

**Remarque 0.1.4.** *Si  $\mathcal{D}$  est une  $k$ -partition équispectrale,  $\Lambda_{k,q}(\mathcal{D}) = \Lambda(\mathcal{D})$  pour tout  $1 \leq q \leq \infty$ .*

Le résultat suivant est assez intuitif au vu de décroissance des valeurs propres du laplacien par rapport à l'inclusion des domaines, si nous supposons les partitions régulières. Sa démonstration dépend donc de la régularité des partitions.

**Proposition 0.1.5.** *Toute  $k$ -partition  $\infty$ -minimale est équispectrale.*

Une  $k$ -partition  $p$ -minimale n'est pas en général équispectrale si  $1 \leq p < \infty$ . Nous pouvons en revanche définir une valeur de transition.

**Proposition 0.1.6.** *Supposons qu'il existe une  $k$ -partition  $p$ -minimale  $\mathcal{D}^*$  de  $M$  qui soit équispectrale. Alors  $\mathcal{D}^*$  est  $q$ -minimale pour tout  $p \leq q \leq \infty$ .*

*Démonstration.*

Notons  $\mathcal{D}^* = \{D_1^*, \dots, D_k^*\}$ . Soit  $p \leq q \leq \infty$ . Soit  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$  une  $k$ -partition de  $M$ . Alors, d'après la proposition 0.1.3,  $\Lambda_{k,p}(\mathcal{D}) \leq \Lambda_{k,q}(\mathcal{D})$ . Par définition,  $\Lambda_{k,p}(\mathcal{D}^*) \leq \Lambda_{k,p}(\mathcal{D})$ . La partition  $\mathcal{D}^*$  étant équispectrale, nous avons, d'après la remarque 0.1.4,  $\Lambda_{k,p}(\mathcal{D}^*) = \Lambda_{k,q}(\mathcal{D}^*)$ .

Ainsi  $\Lambda_{k,q}(\mathcal{D}^*) \leq \Lambda_{k,q}(\mathcal{D})$ .  $\square$

La proposition 0.1.6 rend pertinente la définition suivante.

**Définition 0.1.7.** *Appelons exposant de transition, et notons  $p(k, M)$ , l'infimum des  $1 \leq p \leq \infty$  tels qu'il existe une  $k$ -partition  $p$ -minimale équispectrale.*

Notons qu'il est *a priori* possible que  $p(k, M) = \infty$ . L'article de [29] donne un exemple (le triangle équilatéral), en utilisant un critère de  $p$ -minimalité d'une partition nodale, dans le cas où  $1 \leq p < \infty$ . Ce point sera détaillé dans le quatrième chapitre.

## 0.2 Frontière d'une partition

Nous allons maintenant préciser la notion de régularité des partitions. Nous commençons par des rappels sur celle des ensembles nodaux.

### 0.2.1 Rappels sur les ensembles nodaux

Rappelons d'abord un certain nombre de résultats classiques sur les fonctions propres de  $-\Delta_M^D$ . Cet exposé reprend [17] pour le cas  $\partial M = \emptyset$  et [44] pour le cas général  $M$  à bord  $C^\infty$ . Dans la suite,  $u$  désigne une fonction propre de  $-\Delta_M^D$ . Remarquons d'abord que la théorie des opérateurs différentiels elliptiques implique la régularité des fonctions propres.

**Proposition 0.2.1.** *La fonction  $u$  est dans  $C^\infty(\overline{M})$ .*

**Définition 0.2.1.** *Définissons  $\mathcal{N}(u)$ , l'ensemble nodal de  $u$ , comme l'adhérence dans  $\overline{M}$  de  $u^{-1}(\{0\})$ .*

**Définition 0.2.2.** *Les domaines nodaux de  $u$  sont les composantes connexes de  $M \setminus \mathcal{N}(u)$ . La partition nodale associée à  $u$  est l'ensemble des domaines nodaux de  $u$ .*

Remarquons que la partition nodale associée à  $u$  est ouverte et connexe. Nous allons montrer qu'elle est en fait beaucoup plus régulière. Tout d'abord, le principe d'unicité forte vérifié par les opérateurs différentiels elliptiques du second ordre interdit aux fonctions propres d'avoir un zéro d'ordre infini.

**Proposition 0.2.2.** *Soit  $v \in C^\infty(\overline{M})$  telle que  $(\Delta_M^D + \lambda)v = 0$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Supposons qu'il existe  $x \in \overline{M}$  tel que  $\partial^\alpha v(x) = 0$ , pour tout multi-indice  $\alpha$ , dans un système de coordonnées. Alors  $v = 0$  sur  $M$ .*

Remarquons que la proposition précédente inclut le cas  $x \in \partial M$ , plus délicat que le cas  $x \in M$ . Au voisinage d'un zéro de  $u$  (qui est nécessairement d'ordre fini), l'équation aux valeurs propres donne des informations sur le développement de Taylor de  $u$ .

**Proposition 0.2.3.** *Soit  $x \in \mathcal{N}(u)$  tel que  $\nabla u(x) = 0$ . Plaçons nous dans les coordonnées exponentielles sur  $M$  au voisinage de  $x$ . Il existe un entier  $d \geq 2$  et un polynôme  $H_d$  homogène harmonique réel de degré  $d$  tel que*

$$u(x + \xi) = H_d(\xi) + O(|\xi|^{d+1}).$$

*Démonstration.*

Nous traitons le cas  $x \in M$ , laissant de côté le cas  $x \in \partial M$  pour simplifier. Notons  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  un système de coordonnées exponentielles au voisinage de  $x$  ( $x$  ayant pour coordonnées 0). L'opérateur de Laplace-Beltrami s'écrit  $\partial_{\xi_1}^2 + \partial_{\xi_2}^2$  dans ces coordonnées. Posons  $U(\xi) = u(y)$  pour tout  $y$  au voisinage de  $x$ . Notons  $\lambda$  la valeur propre correspondant à  $u$ . Nous avons donc

$$(\partial_{\xi_1}^2 + \partial_{\xi_2}^2 + \lambda)U = 0,$$

au voisinage de 0.

Soit  $d \geq 2$  l'ordre (fini) d'annulation de  $U$  en 0. Le développement de Taylor en 0 de  $U$  s'écrit

$$U(\xi) = H_d(\xi) + O(|\xi|^{d+1}),$$

avec  $H_d$  un polynôme homogène réel de degré  $d$ .

Nous en déduisons que

$$(\partial_{\xi_1}^2 + \partial_{\xi_2}^2 + \lambda)U(\xi) = (\partial_{\xi_1}^2 + \partial_{\xi_2}^2)H_d(\xi) + O(|\xi|^{d-1}),$$

d'où

$$(\partial_{\xi_1}^2 + \partial_{\xi_2}^2)H_d(\xi) = 0.$$

□

En utilisant ce développement de Taylor, il est prouvé dans [17, 44] qu'au voisinage d'un point critique de  $u$  dans  $\mathcal{N}(u)$ , nous pouvons choisir un système de coordonnées adapté à la description de  $\mathcal{N}(u)$ .

**Proposition 0.2.4.** *Soit  $x \in \mathcal{N}(u)$  tel que  $\nabla u(x) = 0$ . Reprenons les notations de la proposition 0.2.3. Si  $x \in M$  (resp.  $x \in \partial M$ ), il existe un  $C^1$ -difféomorphisme  $\Phi$  d'un voisinage de  $x$  dans  $\overline{M}$  dans un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^2$  (resp. dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ ) tel que*

- i.  $D\Phi(x)$  est une matrice de rotation (nous pouvons même imposer  $D\Phi(x) = Id$  si  $x \in M$ );
- ii. pour tout  $y$  au voisinage de  $x$ ,  $u(y) = H_d(\Phi(y))$ .

Supposons que  $x \in \mathcal{N}(u)$  et que  $\nabla u(x) = 0$ . Si  $x \in M$ , il existe donc un voisinage ouvert  $\mathcal{U}$  de  $x$  dans  $M$  et un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de 0 dans  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\mathcal{N}(u) \cap \mathcal{U} = \Phi^{-1}(\mathcal{Z} \cap \mathcal{V})$ , où

$$\mathcal{Z} = \{\zeta \in \mathbb{R}^2, H_d(\zeta) = 0\},$$

avec les notations de la proposition 0.2.3. Si  $x \in \partial M$ , la même propriété est valable avec  $\mathcal{U}$  un voisinage de  $x$  dans  $\overline{M}$  et  $\mathcal{V}$  un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ . Le polynôme  $H_d$  étant homogène et harmonique de degré  $d$ , il existe  $a \in \mathbb{C}^*$  tel que

$$H_d(\zeta) = \operatorname{Re}(a(\zeta_1 + i\zeta_2)^d).$$

Notons  $a = Ae^{i\phi}$ . Plaçons nous dans les coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  telles que

$$\zeta_1 + i\zeta_2 = \rho e^{i\theta}.$$

Alors

$$\mathcal{Z} = \left\{ (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)), \rho \geq 0 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{2d} - \phi + \frac{p\pi}{2d} \text{ avec } 0 \leq p \leq 2d - 1 \right\}.$$

Résumons dans un théorème les informations que nous avons obtenues sur l'ensemble nodal de  $u$ .

### Théorème 0.2.1.

- i. L'ensemble  $M \cap \mathcal{N}(u)$  est localement une courbe  $C^\infty$ , sauf en un ensemble fini  $S_i$  de points, appelés points singuliers intérieurs.
- ii. À chaque point  $x \in S_i$  est associé un entier pair  $\nu(x) \geq 4$  tel que dans un voisinage de  $x$ , l'ensemble  $\mathcal{N}(u)$  soit la réunion de  $\nu(x)$  demi-courbes de classe  $C^1$  ayant leur extrémité en  $x$ .
- iii. L'ensemble  $S_b = \partial M \cap \mathcal{N}(u)$  est fini. Les points de  $S_b$  sont appelés points singuliers au bord. Pour tout  $z \in S_b$ , il existe un entier  $\rho(z) \geq 1$  tel qu'au voisinage de  $z$ , l'ensemble  $\mathcal{N}$  soit la réunion de  $\rho(z)$  demi-courbes  $C^1$  contenues dans  $M$  qui rencontrent  $\partial M$  en  $z$ .
- iv. En chaque point de  $S_i$ , les demi-courbes forment des angles égaux.
- v. En chaque point de  $S_b$ , les demi-courbes et  $\partial M$  forment des angles égaux.

Les points de l'ensemble  $S = S_i \cup S_b$  sont appelés points singuliers.

## 0.2.2 Régularité

Les partitions minimales ont des propriétés de régularité qui les font ressembler aux partitions nodales. Comme dans le cas des partitions nodales, nous disposons des résultats les plus précis dans le cas de la dimension 2. Il faut noter qu'il est possible de modifier un domaine  $D$  d'une partition, par exemple en lui enlevant un nombre fini de points, sans changer la valeur propre  $\lambda_1(D)$ . Les résultats de régularité que nous allons énoncer ne seront donc valables que pour un certain représentant d'une classe d'équivalence. Définissons maintenant la relation d'équivalence adaptée à cette étude. Pour tout ouvert connexe  $D$  de  $M$ , nous notons  $u_D$  l'unique fonction propre  $C^\infty$  associée à  $\lambda_1(D)$  telle que  $\|u_D\|_{L^2(D)} = 1$  et  $u_D > 0$  sur  $D$ , prolongée par 0 sur  $M \setminus D$ .

**Définition 0.2.3.** Deux  $k$ -partitions  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$  et  $\mathcal{D}' = \{D'_1, \dots, D'_k\}$  de  $M$  sont dites équivalentes lorsqu'il existe une permutation  $\sigma$  de l'ensemble d'indices  $\{1, \dots, k\}$  telle que  $u_{D'_i} = u_{D_{\sigma(i)}}$  dans  $H_0^1(M)$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ .

Nous allons maintenant définir un objet, associé à une partition complète, qui généralise l'ensemble nodal.

**Définition 0.2.4.** *Nous définissons la frontière  $\mathcal{N}(\mathcal{D})$  d'une partition complète  $\mathcal{D}$  par*

$$\mathcal{N}(\mathcal{D}) = \overline{\bigcup_{i=1}^k \partial D_i \cap M}.$$

**Remarque 0.2.1.** *Si  $\mathcal{D}$  est la partition nodale d'une fonction propre  $u$ , alors  $\mathcal{N}(\mathcal{D}) = \mathcal{N}(u)$ .*

Définissons maintenant une notion d'ensemble régulier, basée sur les propriétés de l'ensemble nodal d'une fonction propre.

**Définition 0.2.5.** *Supposons que  $M$  est de dimension 2. Nous disons qu'un ensemble fermé  $\mathcal{N} \subset \overline{M}$  est régulier s'il vérifie les propriétés suivantes.*

- i. L'ensemble  $\Omega \cap \mathcal{N}$  est localement une courbe  $C^{1,1-} = \cap_{\alpha < 1} C^{1,\alpha}$ , sauf en un ensemble fini  $S_i$  de points, appelés points singuliers intérieurs.*
- ii. À chaque point  $x \in S_i$  est associé un entier  $\nu(x) \geq 3$  tel que dans un voisinage de  $x$ , l'ensemble  $\mathcal{N}$  soit la réunion de  $\nu(x)$  demi-courbes de classe  $C^{1,+} = \cup_{\alpha > 0} C^{1,\alpha}$  ayant leur extrémité en  $x$ .*
- iii. L'ensemble  $S_b = \partial M \cap \mathcal{N}$  est fini. Les points de  $S_b$  sont appelés points singuliers au bord. Pour tout  $z \in S_b$ , il existe un entier  $\rho(z) \geq 1$  tel qu'au voisinage de  $z$ , l'ensemble  $\mathcal{N}$  soit la réunion de  $\rho(z)$  demi-courbes  $C^{1,+}$  contenues dans  $M$  qui rencontrent  $\partial M$  en  $z$ .*
- iv. En chaque point de  $S_i$ , les demi-courbes forment des angles égaux.*
- v. En chaque point de  $S_b$ , les demi-courbes et  $\partial M$  forment des angles égaux.*

Les points de l'ensemble  $S = S_i \cup S_b$  sont appelés points singuliers.

**Définition 0.2.6.** *Une  $k$ -partition  $\mathcal{D}$  est dite régulière si elle est complète et si sa frontière  $\mathcal{N}(\mathcal{D})$  est un ensemble régulier.*

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de régularité démontré dans [16, 32].

**Théorème 0.2.2.** *Toute  $k$ -partition  $p$ -minimale de  $M$  est équivalente à une  $k$ -partition régulière.*

Les partitions minimales possèdent une propriété supplémentaire, qui découle de la monotonie de la première valeur propre par rapport à l'inclusion des domaines.

**Définition 0.2.7.** *Une  $k$ -partition complète  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$  de  $M$  est dite parcimonieuse<sup>2</sup> lorsqu'elle vérifie la propriété suivante. Si  $x \in \mathcal{N}(\mathcal{D}) \setminus S$ , et si  $\mathcal{N}(\mathcal{D}) = \overline{D_i} \cap \overline{D_j}$  au voisinage de  $x$ , alors  $i \neq j$ .*

Cette propriété signifie qu'une portion régulière de la frontière sépare des domaines distincts, ou encore que les domaines de la partition ne présentent pas de «fentes». La figure 1(b) illustre deux exemples de partitions régulières non parcimonieuses.

Si une  $k$ -partition régulière équispectrale  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$  de  $M$  n'est pas parcimonieuse, il existe une  $k$ -partition d'énergie inférieure. En effet, la suppression des fentes dans un domaine  $D_i$  diminue  $\lambda_1(D_i)$ . Si nous supprimons les fentes dans tous les domaines où elles existent, nous diminuons l'énergie de ces domaines, sans changer le nombre total de domaines de la partition. Quitte à agrandir certains domaines aux dépens des domaines pour laquelle l'énergie est plus petite, nous obtenons une partition d'énergie inférieure. Résumons cette discussion par une proposition.

**Proposition 0.2.5.** *Toute partition minimale de  $M$  est parcimonieuse.*

---

2. 'Nice' dans la terminologie de [28]

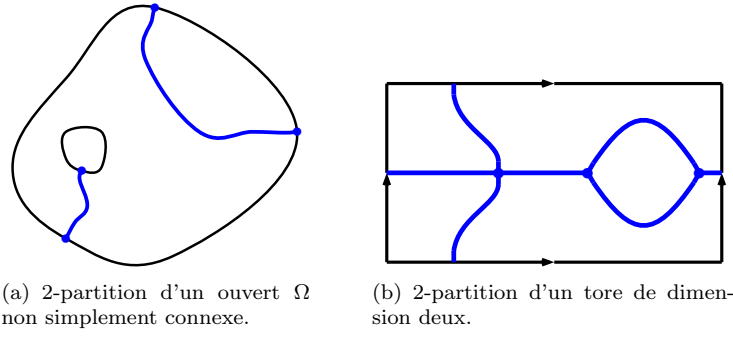


FIGURE 1 – Exemples de partitions régulières non parcimonieuses.

### 0.2.3 Propriétés de la frontière

#### Propriétés topologiques

La topologie de la variété  $M$  impose des contraintes sur la frontière d'une partition  $p$ -minimale. Nous allons en expliciter certaines dans le cas  $n = 2$ . De façon plus générale, les propriétés que nous allons énoncer à l'aide de formules d'Euler sont valables pour toute partition régulière, et même pour toute partition dont la frontière vérifie les propriétés *i.* à *iii.* de la définition 0.2.5 (la propriété des angles égaux n'est pas nécessaire, une transversalité suffit).

**Théorème 0.2.3.** *Soit  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$  une  $k$ -partition régulière. En reprenant les notations de la définition 0.2.5, nous avons la relation suivante :*

$$\chi(M) + \sum_{x \in S_i} \left( \frac{\nu(x)}{2} - 1 \right) + \sum_{z \in S_b} \frac{\rho(z)}{2} = \sum_{i=1}^k \chi(D_i), \quad (0.2.1)$$

où, pour tout ouvert  $D$  contenu dans  $M$ ,  $\chi(D)$  est la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $D$ .

Nous renvoyons à Hatcher [25] pour la définition de la caractéristique d'Euler-Poincaré. Notons simplement qu'il s'agit d'un invariant topologique : deux variétés homéomorphes ont la même caractéristique. Donnons aussi quelques exemples :

- pour une sphère  $\chi = 2$ ,
- pour un tore de dimension 2,  $\chi = 0$ ,
- plus généralement, pour une surface fermée de genre  $g$  (que nous pouvons nous représenter comme une sphère à laquelle nous avons ajouté  $g$  anses),  $\chi = 2 - 2g$ ,
- pour tout ouvert de  $\mathbb{R}^2$  simplement connexe,  $\chi = 1$ ,
- plus généralement, pour tout ouvert de  $\mathbb{R}^2$  homéomorphe à un disque percé de  $N$  trous,  $\chi = 1 - N$ .

*Démonstration.* Bien qu'il existe une preuve purement combinatoire de ce théorème, nous suivrons [30] en utilisant la formule de Gauss-Bonnet (voir par exemple [21]). Pour tout  $1 \leq i \leq k$ , la frontière de  $D_i$  est la réunion d'un nombre fini  $m_i$  de composantes connexes  $C_1^i, \dots, C_p^i, \dots, C_{m_i}^i$ , chacune se décomposant en un nombre fini d'arcs réguliers. Nous notons alors  $n_i$  le nombre de points anguleux contenus dans  $\partial D_i$ , là où deux arcs réguliers se rencontrent. Nous notons  $\theta_1^i, \dots, \theta_q^i, \dots, \theta_{n_i}^i$  les angles intérieurs correspondants. La formule de Gauss-Bonnet appliquée au domaine  $D_i$  donne

$$\sum_{p=1}^{m_i} \int_{C_p^i} \kappa(s) ds + \iint_{D_i} K d\sigma + \sum_{q=1}^{n_i} (\pi - \theta_q^i) = 2\pi \chi(D_i),$$

où  $\kappa$  désigne la courbure géodésique et  $K$  la courbure gaussienne. Si nous faisons maintenant la somme de toutes ces relations pour  $1 \leq i \leq k$ , nous trouvons

$$\sum_{i=1}^k \sum_{p=1}^{m_i} \int_{C_p^i} \kappa(s) ds + \iint_M K d\sigma + \sum_{i=1}^k \sum_{q=1}^{n_i} (\pi - \theta_q^i) = 2\pi \sum_{i=1}^k \chi(D_i). \quad (0.2.2)$$



Considérons maintenant le premier terme du membre de gauche de la relation (0.2.2). Toutes les composantes connexes de  $\mathcal{N}(\mathcal{D})$  qui ne sont pas contenues dans  $\partial M$  sont parcourues deux fois dans des sens opposés. Nous avons donc

$$\sum_{i=1}^k \sum_{p=1}^{m_i} \int_{C_p^i} \kappa(s) ds = \int_{\partial M} \kappa(s) ds.$$

Le troisième terme de l'égalité (0.2.2) peut être évalué en sommant sur chaque point singulier de  $\mathcal{N}(\mathcal{D})$ . Si  $x \in S_i$ , la somme de tous les angles intérieurs relatifs à  $x$  vaut  $2\pi$ , et ces angles sont au nombre de  $\nu(x)$ . Si  $z \in S_b$ , la somme de tous les angles intérieurs relatifs à  $z$  vaut  $\pi$ , et ces angles sont au nombre de  $\rho(z) + 1$ . Ainsi

$$\sum_{i=1}^k \sum_{q=1}^{n_i} (\pi - \theta_q^i) = \sum_{x \in S_i} (\nu(x)\pi - 2\pi) + \sum_{z \in S_b} ((\rho(z) + 1)\pi - \pi).$$

Nous obtenons donc

$$\int_{\partial M} \kappa(s) ds + \iint_M K d\sigma + \sum_{x \in S_i} (\nu(x)\pi - 2\pi) + \sum_{z \in S_b} \rho(z)\pi = 2\pi \sum_{i=1}^k \chi(D_i).$$

En appliquant la formule de Gauss-Bonnet à la variété  $M$  tout entière, nous trouvons

$$\int_{\partial M} \kappa(s) ds + \iint_M K d\sigma = 2\pi\chi(M),$$

d'où

$$2\pi\chi(M) + \sum_{x \in S_i} (\nu(x)\pi - 2\pi) + \sum_{z \in S_b} \rho(z)\pi = 2\pi \sum_{i=1}^k \chi(D_i).$$

Nous obtenons le résultat voulu en divisant cette égalité par  $2\pi$ .  $\square$

Dans le cas d'un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , une formulation équivalente, que nous pouvons trouver par exemple dans [36], peut être utile.

**Théorème 0.2.4.** *Supposons que  $\Omega$  est un ouvert, avec  $\partial\Omega$  de classe  $C^1$  par morceaux, contenu dans le plan ou dans une variété riemannienne de dimension 2 simplement connexe (par exemple la sphère  $\mathbb{S}^2$ ). Soit  $\mathcal{D}$  une  $k$ -partition régulière. Reprenant les notations de la définition 0.2.5, nous avons la relation*

$$k = \sum_{x \in S_i} \left( \frac{\nu(x)}{2} - 1 \right) + \sum_{z \in S_b} \frac{\rho(z)}{2} + 1 - b_0 + b_1, \quad (0.2.3)$$

où  $b_0$  est le nombre de composantes connexes de  $\partial M$  et  $b_1$  le nombre de composantes connexes de  $\mathcal{N}(\mathcal{D}) \cup \partial M$ .

*Démonstration.* La formule (0.2.3) s'obtient en appliquant la formule (0.2.1) à une partition auxiliaire construite à partir de  $\mathcal{D}$ . Nous avons besoin du fait topologique suivant (valable pour le plan et pour une variété topologique fermée de dimension 2) : les composantes connexes du complémentaire d'un graphe fermé connexe sont simplement connexes. Construisons maintenant un ensemble fermé  $\mathcal{N}'$  à partir de  $\mathcal{N}(\mathcal{D})$ . Pour ce faire, ajoutons un point  $z$  sur une partie régulière de chaque composante connexe de  $\mathcal{N}(\mathcal{D} \cup \partial M)$ . Relions ensuite ces points par  $b_1 - 1$  courbes simples qui ne coupent pas  $\mathcal{N}(\mathcal{D})$  en d'autres points, telles que l'ensemble  $\mathcal{N}'$  obtenu en ajoutant ces courbes à  $\mathcal{N}(\mathcal{D})$  soit connexe. Notons  $\mathcal{D}'_j$ , avec  $1 \leq j \leq k'$  les composantes connexes de  $M \setminus \mathcal{N}'$  et  $\mathcal{D}' = \{D'_1, \dots, D'_{k'}\}$  la partition complète de  $M$  correspondante (nous avons, par construction,  $\mathcal{N}(\mathcal{D}') = \mathcal{N}'$ ). Selon la remarque faite au début de la preuve, les ouverts  $D'_j$  sont simplement connexes. De plus, chacune des  $b_1 - 1$  courbes ajoutées traverse un domaine  $D_i$  qui n'est pas simplement connexe, et ne découpe donc pas ce domaine en plusieurs composantes connexes. Ainsi  $k' = k$ , et il existe une numérotation des domaines de  $\mathcal{D}'$  telle que pour chaque  $1 \leq i \leq k$ ,  $D'_i$  est l'unique domaine de

$\mathcal{D}'$  tel que  $D'_i \subset D_i$ . Notons que la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $M$  est  $2 - b_0$ , où  $b_0$  est le nombre de composantes connexes de  $\partial M$ . Appliquons la formule (0.2.1) à la partition  $\mathcal{D}'$  :

$$2 - b_0 + \sum_{x \in S'_i} \left( \frac{\nu(x)}{2} - 1 \right) + \sum_{z \in S'_b} \frac{\rho(z)}{2} = \sum_{i=1}^k \chi(D'_i). \quad (0.2.4)$$

Pour tout  $1 \leq i \leq k$ , le domaine  $D'_i$  est simplement connexe, donc  $\chi(D'_i) = 1$ . Le membre de droite de l'égalité est donc  $k$ . Chacun des  $b_1 - 1$  courbes que nous avons rajoutées a deux extrémités. Chaque extrémité est soit un point singulier intérieur  $x'$  pour lequel  $\nu(x') = 3$ , soit un point singulier au bord  $z'$  pour lequel  $\rho(z') = 1$ . Dans tous les cas, chaque courbe ajoutée augmente de 1 la valeur du membre de gauche pour  $\mathcal{D}$ . Nous obtenons

$$1 - b_0 + b_1 + \sum_{x \in S_i} \left( \frac{\nu(x)}{2} - 1 \right) + \sum_{z \in S_b} \frac{\rho(z)}{2} = k. \quad (0.2.5)$$

□

Nous allons donner quelques corollaires de ces formules générales dans des cas simples.

**Corollaire 0.2.6.** *Si  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$  est une  $k$ -partition régulière d'un tore plat  $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ ,*

$$\sum_{x \in S_i} \left( \frac{\nu(x)}{2} - 1 \right) = \sum_{i=1}^k \chi(D_i). \quad (0.2.6)$$

Remarquons que si  $\mathcal{D}$  est une partition régulière d'un ouvert  $\Omega$  contenu dans  $\mathbb{T}^2$ , la formule (0.2.3) n'est en général pas valable. Nous avons contre-exemple en considérant la  $k$ -partition  $\mathcal{D}_k(1, 1)$  de  $\mathbb{T}^2$  avec  $k \geq 1$ , qui jouera un rôle important au chapitre 4 (voir dans cette introduction la définition 0.5.2). Dans ce cas,  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = k$ ,  $S_i = S_b = \emptyset$ .

**Corollaire 0.2.7.** *Si  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$  est une  $k$ -partition régulière de la sphère  $\mathbb{S}^2$ .*

$$k = \sum_{x \in S_i} \left( \frac{\nu(x)}{2} - 1 \right) + b_1 + 1, \quad (0.2.7)$$

et

$$2 + \sum_{x \in S_i} \left( \frac{\nu(x)}{2} - 1 \right) = \sum_{i=1}^k \chi(D_i). \quad (0.2.8)$$

## 0.3 Lien avec les partitions nodales

### 0.3.1 Résultats de Courant et Pleijel

**Définition 0.3.1.** *Pour toute fonction propre  $u$ , définissons  $\nu(u)$  comme le nombre de domaines nodaux de la fonction  $u$ .*

Un résultat simple mais fondamental de R. Courant donne une borne supérieure sur  $\nu(u)$  pour toute fonction propre  $u$ .

**Théorème 0.3.1.** *Si  $u$  est une fonction propre associée à la valeur propre  $\lambda_k(M)$ ,*

$$\nu(u) \leq k.$$

Afin de clarifier la preuve, et de réutiliser le résultat ultérieurement, nous le formulons de façon plus générale dans le cadre des partitions équispectrales.

**Proposition 0.3.1.** *Soit  $\mathcal{D}$  une  $k$ -partition régulière et équispectrale de  $M$ . Alors*

$$\lambda_k(M) \leq \Lambda(\mathcal{D}).$$

*De plus,  $\Lambda(\mathcal{D}) = \lambda_k(M)$  si, et seulement si,  $\mathcal{D}$  est la partition nodale d'une fonction propre associée à  $\lambda_k(M)$ .*

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$ , notons  $u_{D_j} \in L^2(D_j)$  l'unique fonction propre normalisée et à valeurs positives associée à  $\lambda_1(D_j)$ . Pour tout  $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ , la fonction  $u = a_1 u_{D_1} + \dots + a_k u_{D_k}$  est dans  $H_0^1(M) \setminus \{0\}$ ,

$$\|u\|_{L^2(M)}^2 = a_1^2 \|u_{D_1}\|_{L^2(M)}^2 + \dots + a_k^2 \|u_{D_k}\|_{L^2(M)}^2 = a_1^2 + \dots + a_k^2,$$

et

$$\|\nabla u\|_{L^2(M)}^2 = a_1^2 \|\nabla u_{D_1}\|_{L^2(M)}^2 + \dots + a_k^2 \|\nabla u_{D_k}\|_{L^2(M)}^2 = (a_1^2 + \dots + a_k^2) \Lambda(\mathcal{D}).$$

Ainsi

$$\frac{\|\nabla u\|_{L^2(M)}^2}{\|u\|_{L^2(M)}^2} = \Lambda(\mathcal{D}).$$

Soient  $u_1, \dots, u_{k-1}$  des fonctions propres à valeurs réelles, respectivement associées aux valeurs propres

$$\lambda_1(M), \dots, \lambda_{k-1}(M).$$

Les relations d'orthogonalité  $\langle u, u_i \rangle = 0$  pour  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ , forment un système de  $k-1$  équations à  $k$  inconnues, à coefficient réels. Il existe donc  $(a_1^*, \dots, a_k^*) \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$  tels que, pour tout  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ , la fonction  $u^* = a_1^* u_{D_1} + \dots + a_k^* u_{D_k}$  est orthogonale à  $u_i$ . D'après la caractérisation variationnelle des valeurs propres,

$$\lambda_k(M) \leq \frac{\|\nabla u^*\|_{L^2(M)}^2}{\|u^*\|_{L^2(M)}^2} = \Lambda(\mathcal{D}).$$

De plus, l'égalité a lieu si, et seulement si,  $u^*$  est une fonction propre associée à la valeur propre  $\lambda_k(M)$ . Dans ce cas,  $\mathcal{D}$  est la partition nodale associée à  $u^*$ .  $\square$

Afin de prouver le théorème 0.3.1, il suffit de remarquer que si  $u$  est une fonction propre associée à la valeur propre  $\lambda$ , la partition nodale de  $u$  est une  $\nu(u)$ -partition régulière et équispectrale, d'énergie  $\lambda$ . La proposition 0.3.1 montre alors que le rang de  $\lambda$  est au moins  $\nu(u)$ . Il nous est utile de distinguer les fonctions propres pour lesquelles l'égalité a lieu dans le théorème 0.3.1.

**Définition 0.3.2.** Une fonction propre  $u$  associée à la valeur propre  $\lambda$  est dite Courant-stricte lorsque  $\lambda = \lambda_{\nu(u)}(M)$ .

Dans le cas où  $M$  est un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , borné et à bord  $C^1$  par morceaux, Å. Pleijel a démontré dans [42] que seul un nombre fini de valeurs propres ont des fonctions propres Courant-strictes. Afin de présenter ce résultat sous une forme quantitative, nous introduisons une nouvelle définition.

**Définition 0.3.3.** Notons  $L_k(M)$  la plus petite valeur propre dont l'espace propre contient une fonction non nulle ayant  $k$  domaines nodaux. S'il n'existe aucune fonction propre ayant  $k$  domaines nodaux, posons  $L_k(M) = \infty$ .

Remarquons qu'en utilisant cette notation, le théorème 0.3.1 est équivalent à l'inégalité

$$\lambda_k(M) \leq L_k(M).$$

**Proposition 0.3.2.** Si  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\frac{L_k(\Omega)|\Omega|}{k} \geq \pi j_{0,1}^2,$$

où  $j_{0,1}$  est le premier zéro positif de la fonction de Bessel de première espèce  $J_0$ .

*Démonstration.* Soit  $u$  une fonction propre associée à  $L_k(\Omega)$  telle que  $\nu(u) = k$ . Soit  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$  la partition nodale de  $u$ . Comme  $\sum_{i=1}^k |D_i| \leq |\Omega|$  (nous avons en fait égalité puisque la partition est complète), il existe  $1 \leq i_0 \leq k$  tel que  $|D_{i_0}| \leq |\Omega|/k$ . D'après l'inégalité de Faber-Krahn,  $\lambda_1(D_{i_0})$  est supérieure ou égale à la première valeur propre du laplacien de Dirichlet sur le disque de même aire. Ainsi

$$\frac{k\pi j_{0,1}^2}{|\Omega|} \leq \frac{\pi j_{0,1}^2}{|D_{i_0}|} \leq \lambda_1(D_{i_0}) = L_k(\Omega).$$

$\square$

Rappelons d'autre part un résultat sur le comportement asymptotique de la  $k$ -ième valeur propre, dû à H. Weyl.

**Théorème 0.3.2.** *Si  $\Omega$  est un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^2$ ,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k(\Omega)|\Omega|}{k} = 4\pi.$$

La proposition 0.3.2 implique

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{L_k(\Omega)|\Omega|}{k} \geq \pi j_{0,1}^2.$$

Comme  $\pi j_{0,1}^2 > 4\pi$ , la comparaison avec le théorème 0.3.2 montre que  $L_k(\Omega) > \lambda_k(\Omega)$  pour  $k$  assez grand.

**Remarque 0.3.1.** *Il a été observé (voir [4]) que nous avons en fait*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{L}_{k,1}(\Omega)|\Omega|}{k} \geq \pi j_{0,1}^2.$$

*Nous en tirons les résultats précédents grâce à l'inégalité (0.3.3) et au corollaire 0.1.4.*

**Remarque 0.3.2.** *Le résultat de Pleijel a été amélioré quantitativement par Bourgain [14] et Steinerberger [43]. L'estimation de Bourgain s'écrit, avec nos notations,*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{L_k(\Omega)|\Omega|}{k} \geq 4\pi \left( \frac{4}{j_{0,1}^2} - 3.10^{-9} \right)^{-1}.$$

**Remarque 0.3.3** (Conjecture hexagonale).

*Il est conjecturé (Van der Berg, Caffarelli-Lin [16]) qu'en fait*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{L}_{k,1}(\Omega)|\Omega|}{k} \geq \lambda_1(\text{Hex}_1), \quad (0.3.1)$$

où  $\text{Hex}_1$  est l'hexagone régulier d'aire 1.

*Des vérifications numériques de cette conjecture ont été obtenues par Bourdin-Bucur-Oudet [13] (voir aussi Bonnaillie-Helffer-Vial [8]).*

*Cette conjecture semble très difficile à démontrer. En revanche, en remarquant que lorsque  $k$  est grand, nous pouvons obtenir une bonne approximation d'une partition minimale en faisant une approximation intérieure de  $\Omega$  par une réunion d'hexagones réguliers, nous obtenons la borne supérieure*

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\mathfrak{L}_k(\Omega)}{k} \leq \frac{\lambda_1(\text{Hex}_1)}{|\Omega|}.$$

*La partie délicate est donc la borne inférieure.*

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{\mathfrak{L}_k(\Omega)}{k} \geq \frac{\lambda_1(\text{Hex}_1)}{|\Omega|}.$$

*(ou sa forme plus forte (0.3.1)), qui impliquerait*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\mathfrak{L}_k(\Omega)}{k} = \frac{\lambda_1(\text{Hex}_1)}{|\Omega|}, \quad (0.3.2)$$

ou

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\mathfrak{L}_{k,1}(\Omega)}{k} = \frac{\lambda_1(\text{Hex}_1)}{|\Omega|}.$$

*Ces limites constituent ce qui est appelé la conjecture hexagonale.*

### 0.3.2 Partitions nodales minimales

D'après la proposition 0.1.5, toute partition minimale est équispectrale. C'est aussi le cas pour toute partition nodale. Étant donnée une partition minimale, nous pouvons donc nous demander quand elle est nodale. Introduisons deux définitions liées à la topologie de la partition.

**Définition 0.3.4.** Soit  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$  une  $k$ -partition régulière de  $M$ . Soient  $1 \leq i < j \leq k$ . Les domaines  $D_i$  et  $D_j$  sont dits voisins lorsque

$$\text{Int}(\overline{D_i \cup D_j}) \setminus \partial M$$

est un ouvert connexe de  $M$ .

**Remarque 0.3.4.** La définition 0.3.4 formalise l'idée intuitive de deux domaines en contact par une partie du bord non réduite à un point. Ici encore, l'apparition de  $\partial M$  dans la définition est nécessaire pour prendre en compte un bord irrégulier. Si nous supposons  $\partial M$  de classe  $C^1$  par morceaux, la condition  $\text{Int}(\overline{D_i \cup D_j})$  connexe suffit.

**Définition 0.3.5.** Une  $k$ -partition régulière de  $M$  est dite bipartite lorsqu'il est possible, avec deux couleurs seulement, de colorier chaque domaine de sorte que deux domaines voisins aient des couleurs différentes.

Il est clair que la partition nodale d'une fonction propre  $u$  est bipartite : il suffit d'associer une couleur à chaque signe de  $u$ . Il est démontré dans [32] que la réciproque est vraie pour une partition minimale.

**Théorème 0.3.3.** Soit  $\mathcal{D}$  une partition minimale de  $M$ . Si  $\mathcal{D}$  est bipartite, elle est nodale.

Le résultat qui suit, démontré dans [32], énonce à quelle condition une partition minimale est nodale.

**Théorème 0.3.4.** Pour tout entier  $k \geq 1$ ,

$$\lambda_k(M) \leq \mathfrak{L}_k(M) \leq L_k(M). \quad (0.3.3)$$

Si  $L_k(M) = \mathfrak{L}_k(M)$  ou  $\mathfrak{L}_k(M) = \lambda_k(M)$ , alors  $\lambda_k(M) = \mathfrak{L}_k(M) = L_k(M)$ . Dans ce cas, toutes les  $k$ -partitions minimales de  $M$  sont nodales.

Faisons quelques commentaires sur ce résultat fondamental.

Une partition minimale étant équispectrale d'énergie  $\mathfrak{L}_k(M)$ , l'inégalité  $\lambda_k(M) \leq \mathfrak{L}_k(M)$  découle de la proposition 0.3.1.

L'inégalité  $\mathfrak{L}_k(M) \leq L_k(M)$  découle des définitions de  $\mathfrak{L}_k(M)$  et  $L_k(M)$ .

Ces deux inégalités ont une conséquence importante. Supposons qu'il existe une fonction propre Courant-strict associée à  $\lambda_k(M)$ . Alors, par définition de  $L_k(M)$ ,  $\lambda_k(M) \geq L_k(M)$ , et par conséquent  $\lambda_k(M) = \mathfrak{L}_k(M) = L_k(M)$ . Nous avons donc démontré la proposition suivante, qui va nous être très utile.

**Proposition 0.3.3.** Si  $u$  est une fonction propre Courant-strict associée à  $\lambda_k(M)$ , la partition nodale de  $u$  est minimale et  $\mathfrak{L}_k(M) = \lambda_k(M)$ .

Supposons maintenant que  $\mathfrak{L}_k(M) = \lambda_k(M)$ . La proposition 0.3.1 montre alors que toute  $k$ -partition minimale de  $M$  est nodale. Ceci implique  $L_k(M) \leq \lambda_k(M)$ , et donc les égalités  $\lambda_k(M) = \mathfrak{L}_k(M) = L_k(M)$ , comme nous venons de le voir. Le point le plus délicat de la preuve du théorème 0.3.4 consiste donc à montrer que si  $L_k(M) = \mathfrak{L}_k(M)$  alors  $\mathfrak{L}_k(M) = \lambda_k(M)$ . Ceci revient à dire qu'une  $k$ -partition minimale nodale est nécessairement associée à la  $k$ -ième valeur propre.

## 0.4 Opérateur d'Aharonov-Bohm

### 0.4.1 Généralités

#### Définitions

Afin de poursuivre l'étude des relations entre partitions nodales et partitions minimales, nous allons définir les opérateurs d'Aharonov-Bohm. Ils proviennent de l'article [2], où est étudiée l'action

sur une fonction d'onde d'un champ magnétique concentré en un point. Ils ont fait ensuite l'objet de nombreuses études mathématiques, par exemple [5, 38, 27, 3, 37, 41]. Leurs liens avec les partitions minimales ont été étudiés dans [7, 39, 6, 31]. Dans cette section, nous supposons que la variété  $M$  est un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^2$ , noté  $\Omega$ .

Soit  $X_0 = (x_0^1, x_0^2) \in \mathbb{R}^2$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Nous définissons un champ de vecteur de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega \setminus \{X_0\}$  par

$$\mathbf{A}_\alpha^{X_0}(x) = \frac{\alpha}{|x - X_0|^2}(-x^2 + x_0^2, x^1 - x_0^1).$$

Plus généralement, pour tout  $N$  entier supérieur ou égal à 1,  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N) \in \mathbb{R}^{2N}$  et  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ , posons

$$\mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}}(x) = \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_{\alpha_i}^{X_i}(x).$$

Le champ de vecteur  $\mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega_{\mathbf{X}} = \Omega \setminus \{X_1, \dots, X_N\}$ . De façon générale, nous définissons le laplacien magnétique associé à un champ de vecteurs  $\in C^\infty(\Omega_{\mathbf{X}}, \mathbb{R}^2)$  comme l'extension de Friedrichs de l'opérateur différentiel  $(-i\nabla - \mathbf{A})^2$  agissant sur  $C_c^\infty(\Omega_{\mathbf{X}})$  et nous le notons  $-\Delta_{\mathbf{A}}$ . Nous définissons alors l'opérateur d'Aharonov-Bohm associé à  $\mathbf{X}$  et  $\boldsymbol{\alpha}$  comme  $-\Delta_{\mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}}}$  et nous le notons  $-\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{X}}$ . Il s'agit d'un opérateur autoadjoint positif. Remarquons que la définition que nous avons choisie impose une condition de Dirichlet sur  $\partial\Omega$ . Ceci correspond au problème des partitions minimales que nous étudions; une condition de Neumann peut être plus pertinente pour modéliser d'autres problèmes, par exemple en supraconductivité.

### Invariance de jauge

**Définition 0.4.1.** Une transformation de jauge agit sur les couples champ de vecteurs-fonction par  $(\mathbf{A}, u) \mapsto (\mathbf{A}^*, u^*)$  avec

$$\begin{cases} u^* &= \psi u, \\ \mathbf{A}^* &= \mathbf{A} - i \frac{\nabla \psi}{\psi}; \end{cases}$$

où  $\psi$  est une fonction dans  $C^\infty(\Omega_{\mathbf{X}}, \mathbb{C})$  telle que  $|\psi| = 1$ , appelée fonction de jauge.

Deux champs de vecteurs sont dits équivalents lorsqu'ils se déduisent l'un de l'autre par une transformation de jauge.

Étant données les relations

$$\text{Curl } \mathbf{A}^* = \text{Curl } \mathbf{A}$$

et

$$|u^*|^2 = |u|^2,$$

ni le champ magnétique associé à  $\mathbf{A}$  ni la densité de probabilité associée à  $u$  ne sont modifiés par une transformation de jauge. En revanche, deux champs de vecteurs définis sur  $\Omega_{\mathbf{X}}$  auxquels est associé le même champ magnétique ne sont pas nécessairement équivalents. Ceci est dû au fait que  $\Omega_{\mathbf{X}}$  n'est pas nécessairement simplement connexe. C'est là l'origine de l'effet Aharonov-Bohm, décrit pour la première fois dans [2]. Donnons un critère pour l'équivalence de deux champs de vecteurs, tiré de [27].

**Lemme 0.4.1.** Soit  $\mathbf{A} \in C^\infty(\Omega_{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbb{R}^2)$ . Le champ de vecteurs  $\mathbf{A}$  est équivalent à 0 si, et seulement si,

$$\frac{1}{2\pi} \oint_\gamma \mathbf{A}(s) \cdot ds \quad (0.4.1)$$

est un entier pour tout lacet  $\gamma$  contenu dans  $\Omega_{\mathbf{X}}$ .

Il est facile de voir qu'une transformation de jauge laisse invariant le spectre d'un laplacien magnétique. Étant donnée une fonction de jauge  $\psi$ , l'application linéaire  $U : u \mapsto u^*$  de  $L^2(\Omega_{\mathbf{X}})$  dans lui-même est unitaire. De plus,  $U(C_c^\infty(\Omega_{\mathbf{X}})) = C_c^\infty(\Omega_{\mathbf{X}})$ , et il est facile de vérifier l'identité

$$-\Delta_{\mathbf{A}^*} \circ U = U \circ (-\Delta_{\mathbf{A}}).$$

Le résultat général qui suit (conséquence de la définition de l'extension de Friedrichs d'un opérateur symétrique) assure que le laplacien magnétique  $-\Delta_{\mathbf{A}^*}$  est unitairement équivalent à  $-\Delta_{\mathbf{A}}$ .

**Proposition 0.4.2.** *Soit  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur linéaire dense, symétrique et positif de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ ,  $S : \mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{H}$  un autre opérateur linéaire et  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur unitaire tels que*

- i)  $U(\mathcal{D}(T)) = \mathcal{D}(S)$ ,
- ii)  $U \circ T = S \circ U|_{\mathcal{D}(T)}$ .

*Alors  $S$  est dense, positif et symétrique. Notons  $\hat{T}$  (resp.  $\hat{S}$ ) l'extension de Friedrichs de  $T$  (resp.  $S$ ),  $q$  (resp.  $p$ ) la forme sesquilinéaire associée et  $\mathcal{Q}$  (resp.  $\mathcal{P}$ ) son domaine. Alors*

- i)  $U(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}$ ,
- ii)  $q = p \circ U$ ,
- iii)  $U(\mathcal{D}(\hat{T})) = \mathcal{D}(\hat{S})$ ,
- iv)  $U \circ \hat{T} = \hat{S} \circ U|_{\mathcal{D}(\hat{T})}$ .

### Domaine de forme

Nous explicitons maintenant le domaine de forme, noté  $\mathcal{Q}_\alpha^X$ , de l'opérateur  $-\Delta_\alpha^X$ . Ces résultats ont déjà été traités dans plusieurs articles antérieurs, voir le chapitre 2 pour les références. Nous les donnons sans démonstrations. L'outil principal de l'analyse est une inégalité similaire à l'inégalité classique de Hardy, valable pour les fonctions de  $\mathcal{Q}_\alpha^X$ .

**Lemme 0.4.3.** *Soient  $X \in \mathbb{R}^2$  et  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Pour tous  $0 \leq \rho_1 < \rho_2$  et toute fonction dans  $\mathcal{Q}_\alpha^X$ ,*

$$\int_{\mathcal{C}(X, \rho_1, \rho_2)} \frac{|u|^2}{|x - X|^2} dx \leq \text{dist}(\alpha, \mathbb{Z})^{-2} \int_{\mathcal{C}(X, \rho_1, \rho_2)} |(-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^X) u|^2 dx. \quad (0.4.2)$$

où

$$\mathcal{C}(X, \rho_1, \rho_2) = \{x \in \mathbb{R}^2; \rho_1 < |x - X| < \rho_2\}.$$

On déduit de ce résultat et des propriétés classiques de l'espace  $H^1(\Omega)$  la caractérisation suivante du domaine de forme  $\mathcal{Q}_\alpha^X$ .

**Théorème 0.4.1.** *Notons  $\mathcal{H}_\alpha^X$  l'espace fonctionnel*

$$\mathcal{H}_\alpha^X = \{u \in L^2(\Omega); (-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^X)u \in L^2(\Omega)\},$$

*muni du produit scalaire naturel. Alors,  $\mathcal{H}_\alpha^X$  est un espace de Hilbert, et l'injection  $\mathcal{H}_\alpha^X \subset L^2(\Omega)$  est compacte. De plus, il existe une application  $\gamma_0 : \mathcal{H}_\alpha^X \rightarrow L^2(\partial\Omega)$  continue, telle que pour toute fonction  $u \in C_c^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{X_1, \dots, X_N\})$ ,  $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$ . Une fonction  $u$  dans  $L^2(\Omega)$  est dans  $\mathcal{Q}_\alpha^X$  si, et seulement si,  $u \in \mathcal{H}_\alpha^X$  et  $\gamma_0 u = 0$ .*

**Remarque 0.4.1.** *Examinons de plus près la nature de l'espace  $\mathcal{H}_\alpha^X$ , en supposant pour simplifier que le potentiel a un seul pôle, c'est à dire que  $\mathbf{A}_\alpha^X = \mathbf{A}_\alpha^X$  avec  $X \in \mathbb{R}^2$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si  $X \notin \Omega$ , alors  $\mathcal{H}_\alpha^X = H^1(\Omega)$ . Si  $X \in \Omega$ , la situation est différente selon que  $\alpha \in \mathbb{Z}$  ou non. Si  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ , alors  $\mathcal{H}_\alpha^X \subset H^1(\Omega)$  et  $u \in H^1(\Omega)$  est dans  $\mathcal{H}_\alpha^X$  si, et seulement si,*

$$\frac{u}{|x - X|} \in L^2(\Omega).$$

*Considérons maintenant le cas où  $\alpha \in \mathbb{Z}$ . Définissons les coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  centrées en  $X$ , c'est à dire que pour tout  $x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ ,*

$$\begin{cases} x^1 - x_0^1 &= \rho(x) \cos(\theta(x)), \\ x^2 - x_0^2 &= \rho(x) \sin(\theta(x)). \end{cases}$$

*On définit la fonction  $\psi \in C^\infty(\Omega_X)$  par  $\psi(x) = e^{i\alpha\theta(x)}$  (cette fonction est bien définie car  $\alpha \in \mathbb{Z}$ ). Alors  $\psi$  est une fonction de jauge et la transformation de jauge associée envoie  $\mathbf{A}_\alpha^X$  sur 0. Ainsi, la transformation  $u \mapsto \psi u$  établit un isomorphisme entre  $\mathcal{H}_\alpha^X$  et  $H^1(\Omega)$ . Mais  $\psi \in H^1(\Omega)$  si, et seulement si,  $\alpha = 0$ . Ainsi, si  $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,  $\mathcal{H}_\alpha^X$  n'est pas contenu dans  $H^1(\Omega)$ .*

## 0.4.2 Propriétés spectrales

### Spectre des opérateurs d'Aharonov-Bohm

Nous venons de voir que les opérateurs  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}$  sont autoadjoints, positifs, à résolvante compacte. Leur spectre est donc constitué de valeurs propres réelles positives de multiplicité finie. Notons

$$\lambda_1(\mathbf{X}, \alpha) \leq \lambda_2(\mathbf{X}, \alpha) \leq \dots \leq \lambda_k(\mathbf{X}, \alpha) \leq \dots,$$

la suite de ces valeurs propres rangées par ordre croissant et comptées avec multiplicités.

### Fonctions propres $K_{\mathbf{X}}$ -réelles

Les fonctions propres de  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}$  associées à une valeur propre  $\lambda_k(\mathbf{X}, \alpha)$  sont en général des fonctions à valeurs complexes. Si  $u$  est une telle fonction propre, l'ensemble  $u^{-1}(\{0\})$  est en général constitué de points isolés de  $\Omega$ . Dans le cas où  $\alpha_i \in \mathbb{Z} + 1/2$  pour tout  $1 \leq i \leq N$ , nous allons définir une classe particulière de fonctions propres  $u$  pour lesquelles l'ensemble  $u^{-1}(\{0\})$  a une structure analogue à l'ensemble nodal d'une fonction propre réelle de  $-\Delta_{\Omega}^D$ . Nous allons noter  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}}$  afin d'alléger les notations. Soit  $\psi$  une fonction de jauge définie sur le domaine  $\Omega_{\mathbf{X}}$ . Définissons un opérateur antilinéaire  $K$  de  $L^2(\Omega)$  dans lui-même par

$$Ku = \psi \bar{u},$$

pour  $u \in L^2(\Omega)$ .

Pour toute fonction  $u \in C_c^{\infty}(\Omega)$ , un calcul direct donne

$$(-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}} \circ K - K \circ (-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}))u = 2(2i\psi \mathbf{A} - \nabla\psi) \cdot \nabla \bar{u} + (2i\psi \operatorname{div}(\mathbf{A}) - \Delta\psi) \bar{u}.$$

Or  $\operatorname{div}(\mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}}) = 0$  dans  $\Omega_{\mathbf{X}}$ . Comme nous avons fait l'hypothèse que  $2\alpha_i \in \mathbb{Z}$  pour tout  $1 \leq i \leq N$ , il existe une fonction de jauge  $\psi$  définie sur  $\Omega_{\mathbf{X}}$  telle que

$$-i\bar{\psi}\nabla\psi = 2\mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}}.$$

Dans la suite, fixons une telle fonction de jauge et notons  $K_{\mathbf{X}}$  l'opérateur  $K$  associé.

**Définition 0.4.2.** Une fonction  $u \in L^2(\Omega)$  est dite  $K_{\mathbf{X}}$ -réelle lorsque  $K_{\mathbf{X}}u = u$ .

Les calculs précédents montrent que les opérateurs  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}$  et  $K_{\mathbf{X}}$  commutent. Ainsi,  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}$  préserve les fonctions propres  $K_{\mathbf{X}}$ -réelles. On peut donc choisir pour  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}$  une base de fonctions propres  $K_{\mathbf{X}}$ -réelles.

Le choix de la fonction de jauge introduit une ambiguïté dans la définition des fonctions  $K_{\mathbf{X}}$ -réelles. Supposons néanmoins que  $\varphi$  est une autre fonction dans  $C^{\infty}(\Omega_{\mathbf{X}})$  telle que  $|\varphi| = 1$  et  $-i\bar{\varphi}\nabla\varphi = 2\mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}}$ . Alors

$$\nabla \left( \frac{\varphi}{\psi} \right) = \frac{\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi}{\psi^2} = \frac{\varphi}{\psi} \left( \frac{\nabla \varphi}{\varphi} - \frac{\nabla \psi}{\psi} \right) = 0.$$

L'ouvert  $\Omega_{\mathbf{X}}$  étant connexe, nous en déduisons qu'il existe  $\omega \in \mathbb{C}$  tel que  $\varphi = \omega\psi$  (et nous avons en fait  $|\omega| = 1$ ). Soit  $\rho$  tel que  $\rho^2 = \omega$ . Notons  $K'_{\mathbf{X}}u = \varphi \bar{u}$ . Si la fonction  $u$  vérifie  $K'_{\mathbf{X}}u = u$  si, et seulement si,  $K_{\mathbf{X}}(\rho^{-1}u) = \rho^{-1}u$ . La notion de fonction  $K_{\mathbf{X}}$ -réelle est donc bien définie à une constante multiplicative de module 1 près.

### Structure des lignes nodales

Supposons que  $\alpha_i \in \mathbb{Z} + 1/2$  pour tout  $1 \leq i \leq N$ . Dans ce paragraphe,  $u$  est une fonction propre  $K_{\mathbf{X}}$ -réelle de  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}$ .

Remarquons que  $\mathcal{N}(u)$  peut contenir des points  $X_i$  avec  $1 \leq i \leq N$  et des points de  $\partial\Omega$ . Rappelons d'abord que loin des pôles,  $\mathcal{N}(u)$  ressemble localement à l'ensemble nodal d'une fonction propre réelle du laplacien.



**Proposition 0.4.4.** *Si  $x \in \Omega_{\mathbf{X}} \cap \mathcal{N}(u)$ , il existe un entier  $d \geq 2$ , un polynôme homogène de degré  $d$  harmonique et réel  $H_d$  et un nombre complexe  $\omega$  avec  $|\omega| = 1$  tel que*

$$u(x + \xi) = \omega H_d(\xi) + O(|\xi|^{d+1}) .$$

*Démonstration.* Soit  $\psi$  la fonction de jauge associée à l'opérateur de conjugaison  $K_{\mathbf{X}}$ . La fonction propre  $u$  a été choisie telle que  $Ku = u$ , c'est à dire  $\psi \bar{u} = u$ , sur  $\Omega_{\mathbf{X}}$ . Pour  $r > 0$  assez petit, il existe une fonction  $C^\infty$  définie sur  $B(x, r)$  telle que  $\varphi^2 = \bar{\psi}$  sur  $B(x, r)$ . Fixons  $r$  et  $\varphi$ . Alors la fonction  $v = \varphi u$ , définie sur  $B(x, r)$  est réelle. De plus, comme

$$\nabla \varphi = -\mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}}$$

sur  $B(x, r)$ , nous avons

$$(\Delta + \lambda_k(\mathbf{X}, \alpha))v = 0 ,$$

au sens des distributions.

D'après la proposition 0.2.3, il existe un entier  $d \geq 2$  et un polynôme homogène de degré  $d$  harmonique et réel tel que

$$v(x + \xi) = H_d(\xi) + O(|\xi|^{d+1}) .$$

Nous obtenons le résultat voulu en posant  $\omega = \varphi(x)$ . □

Nous allons maintenant rappeler sans démonstration un théorème sur l'allure locale de  $\mathcal{N}(u)$  au voisinage d'un pôle  $X_i \in \Omega$ . Il est démontré dans l'article [3].

**Théorème 0.4.2.** *Soit  $(r, \theta)$  des coordonnées polaires locales au voisinage de  $x$ , telle que  $r(x) = 0$ . Il existe un entier  $d \geq 0$ ,  $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  et  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  tels que*

$$u(y) = Ar^{d+1/2} e^{i\theta} \cos((d+1/2)(\theta - \theta_0)) + O(r^{d+1}) .$$

Nous en déduisons un résultat qui donne la description des lignes nodales au voisinage d'un pôle  $X_i \in \Omega$ .

**Proposition 0.4.5.** *En reprenant les notations du théorème 0.4.2, il existe des coordonnées locales  $(\rho, \varphi)$  au voisinage de  $X_i$  telles que  $\rho(y) \sim r(y)$  et  $\varphi(y) \sim \theta(y)$  lorsque  $y$  tend vers  $X_i$  et*

$$u(y) = A\rho^{d+1/2} e^{i\varphi} \cos((d+1/2)(\varphi - \theta_0)) .$$

Ainsi l'ensemble nodal de  $u$  au voisinage de  $X_i$  consiste en  $2d + 1$  demi-courbes régulières qui se rencontrent en  $X_i$  en formant des angles égaux.

Les résultats précédents donnent une description locale de l'ensemble  $\mathcal{N}(u)$ . Nous allons maintenant en énoncer une propriété topologique globale.

**Proposition 0.4.6.** *Soit  $\gamma$  un lacet régulier contenu dans  $\Omega_{\mathbf{X}}$ . Supposons que  $\gamma$  est en position générale par rapport à  $\mathcal{N}(u)$ , c'est à dire qu'il ne coupe  $\mathcal{N}(u)$  que transversalement sur des portions de courbe régulière. Notons  $n(\gamma)$  le nombre (fini) d'intersections de  $\gamma$  avec  $\mathcal{N}(u)$ . Alors l'entier  $n(\gamma)$  est pair si*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}} ds \in \mathbb{Z} ,$$

et impair si

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}} ds \in \mathbb{Z} + 1/2 .$$

Remarquons que cette propriété globale est en cohérence avec le fait, visible dans la proposition 0.4.5, qu'un nombre impair de lignes nodales se rencontrent en un pôle.

### 0.4.3 Interprétation géométrique

#### Revêtement à deux feuilletés

Dans le cas où  $\alpha_i \in \mathbb{Z} + 1/2$  pour tout  $1 \leq i \leq N$ , il est possible d'adopter une vision plus géométrique de l'opérateur  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}$ . La famille  $\mathbf{X}$  étant donnée, nous lui associons un revêtement riemannien à deux feuilletés de l'ouvert  $\Omega_{\mathbf{X}}$  (considéré comme un variété riemannienne à bord). Les valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami (avec condition de Dirichlet) sur ce revêtement se répartissent alors naturellement en deux familles, dont l'une est constituée des valeurs propres de l'opérateur  $-\Delta_{\Omega}^D$  et l'autre des valeurs propres de l'opérateur  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}$ .

Indiquons d'abord comment construire le revêtement à deux feuilletés. Nous suivons la construction indiquée dans [27]. Notons  $\Omega_{\mathbf{X}}^{\infty}$  le revêtement universel de  $\Omega_{\mathbf{X}}$ , et  $\Pi_{\mathbf{X}}^{\infty} : \Omega_{\mathbf{X}}^{\infty} \rightarrow \Omega_{\mathbf{X}}$  la projection canonique. Définissons sur  $\Omega_{\mathbf{X}}^{\infty}$  la structure riemannienne obtenue par image réciproque de celle induite par la métrique euclidienne sur  $\Omega_{\mathbf{X}}$ . Deux points  $x_1$  et  $x_2$  de  $\Omega_{\mathbf{X}}^{\infty}$  sont dits équivalents, ce que nous notons  $x_1 \mathcal{R} x_2$ , lorsque

$$\Pi_{\mathbf{X}}^{\infty}(x_1) = \Pi_{\mathbf{X}}^{\infty}(x_2),$$

et pour tout lacet  $\gamma$  reliant  $x_1$  et  $x_2$  dans  $\Omega_{\mathbf{X}}^{\infty}$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Pi_{\mathbf{X}}^{\infty} \circ \gamma} \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}}(s) \cdot ds \in \mathbb{Z}.$$

Remarquons que, puisque  $\text{curl } \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}} = 0$  et  $\Omega_{\mathbf{X}}^{\infty}$  est simplement connexe, la quantité

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Pi_{\mathbf{X}}^{\infty} \circ \gamma} \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}}(s) \cdot ds$$

ne dépend pas du choix de  $\gamma$ .

Pour tout  $x \in \Omega_{\mathbf{X}}$ , la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  découpe  $(\Pi_{\mathbf{X}}^{\infty})^{-1}(x)$  en deux classes. Le quotient  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{X}}$  de  $\Omega_{\mathbf{X}}^{\infty}$  par  $\mathcal{R}$ , muni de la structure riemannienne canonique, est donc un revêtement riemannien à deux feuilletés de  $\Omega_{\mathbf{X}}$ . Notons  $\Pi : \tilde{\Omega}_{\mathbf{X}} \rightarrow \Omega_{\mathbf{X}}$  la projection canonique.

Définissons enfin une symétrie de la variété  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{X}}$ . Pour tout  $x \in \tilde{\Omega}_{\mathbf{X}}$ , posons  $\delta(x) = y$ , avec  $\Pi_{\mathbf{X}}^{\infty}(x) = y$  et  $x \neq y$ . De façon intuitive, l'application  $\delta$  fait passer d'un feuillet du revêtement à l'autre. Nous avons bien sûr  $\delta^2 = Id$ . Une fonction  $u$  de  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{X}}$  dans  $\mathbb{C}$  est dite symétrique (resp. antisymétrique) lorsque  $u \circ \delta = u$  (resp.  $u \circ \delta = -u$ ). Si nous notons  $\mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{A}$ ) l'ensemble des fonctions de  $L^2(\tilde{\Omega}_{\mathbf{X}})$  symétriques (resp. antisymétriques), nous avons la décomposition orthogonale

$$L^2(\tilde{\Omega}_{\mathbf{X}}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

La figure 2 qui suit donne une représentation du revêtement dans le cas d'un seul pôle.

#### Valeurs propres symétriques et antisymétriques

Notons  $-\tilde{\Delta}$  l'opérateur de Laplace-Beltrami avec conditions de Dirichlet sur  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{X}}$ . L'opérateur  $-\tilde{\Delta}$  préserve les fonctions symétriques et antisymétriques. Le spectre de  $-\tilde{\Delta}$  est donc la réunion des spectres des opérateurs  $-\tilde{\Delta}|_{\mathcal{S}}$  et  $-\tilde{\Delta}|_{\mathcal{A}}$ . Le spectre de  $-\tilde{\Delta}|_{\mathcal{S}}$  est égal au spectre de  $-\Delta_{\Omega}^D$ . En effet, à chaque fonction  $u$  définie sur  $\Omega_{\mathbf{X}}$  correspond une unique fonction  $\tilde{u}$  définie sur  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{X}}$  telle que  $\tilde{u} = u \circ \Pi$ , et vice-versa. En particulier, à chaque fonction propre symétrique de  $-\tilde{\Delta}$  correspond une fonction propre de  $-\Delta_{\Omega}^D$ , et vice-versa.

Le spectre de  $-\tilde{\Delta}|_{\mathcal{A}}$  est égal au spectre de l'opérateur  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}$ . Nous allons prouver ce résultat, en obtenant au passage une interprétation géométrique de l'opérateur antilinéaire  $K_{\mathbf{X}}$ . Notons  $\tilde{\mathbf{A}}$  le champ de vecteur  $\mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}} \circ \Pi$ , défini sur  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{X}}$ . La variété  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{X}}$  étant simplement connexe, il existe une fonction de jauge  $\tilde{\varphi}$  définie sur  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{X}}$  telle que  $-i\tilde{\varphi}^{-1}\nabla\tilde{\varphi}$ . Remarquons que par construction du revêtement  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{X}}$ , la fonction  $\tilde{\varphi}$  est antisymétrique.

Définissons l'opérateur linéaire  $R : L^2(\tilde{\Omega}_{\mathbf{X}}) \rightarrow \mathcal{A}$  par

$$Ru = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\varphi}^{-1}\tilde{u},$$

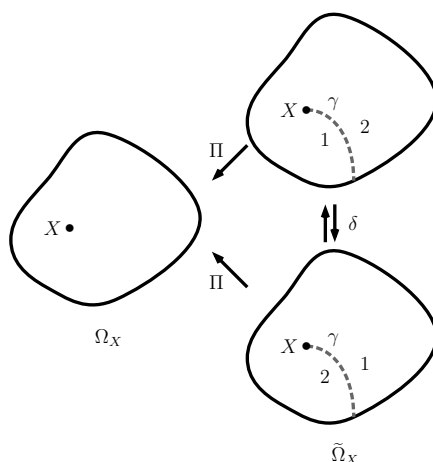


FIGURE 2 – Revêtement à deux feuillets.

où  $\tilde{u} = u \circ \Pi$ .

Nous pouvons vérifier directement que  $R$  est bijectif, unitaire, que  $R(C_c^\infty(\Omega_{\mathbf{X}})) = C_c^\infty(\tilde{\Omega}_{\mathbf{X}})$  et que pour tout  $u \in C_c^\infty(\Omega_{\mathbf{X}})$ ,  $-\tilde{\Delta} \circ Ru = R \circ (-\Delta)u$ .

La proposition 0.4.2 implique alors que les opérateurs  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}$  et  $-\tilde{\Delta}_{|\mathcal{A}}$  sont conjugués par l'opérateur unitaire  $R$ . Il est naturel, lors de l'étude de  $-\tilde{\Delta}_{|\mathcal{A}}$ , de se restreindre à des fonctions antisymétriques réelles. Ces fonctions sont caractérisées par la propriété  $\Gamma u = u$ , avec  $\Gamma$  l'opérateur de conjugaison complexe. L'image réciproque de l'ensemble des fonctions symétriques réelles par  $R$  est l'ensemble des fonctions invariantes par l'opérateur antilinéaire  $R^{-1} \circ \Gamma \circ R$ .

Déterminons ce dernier opérateur. La fonction  $\tilde{\varphi}^2$ , définie sur  $\tilde{\Omega}_{\mathbf{X}}$ , est symétrique. Il existe donc une unique fonction  $\psi$  définie sur  $\Omega_{\mathbf{X}}$ , telle que  $\tilde{\varphi}^2 = \psi \circ \Pi$ . Alors,  $\psi \in C^\infty(\Omega_{\mathbf{X}})$ ,  $|\psi| = 1$  et  $-i\psi^{-1}\nabla\psi = 2\mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}}$ . De plus, pour tout  $u \in L^2(\Omega_{\mathbf{X}})$ ,  $R \circ \Gamma u = 1/\sqrt{2}\tilde{\varphi}^{-1}\Gamma\tilde{u} = Rv$  avec  $v = \psi\bar{u}$ . Ainsi  $R^{-1} \circ \Gamma \circ Ru = \psi\Gamma u$ . Nous retrouvons l'opérateur  $K_{\mathbf{X}}$  construit à partir de la fonction de jauge  $\psi$ . Notons que l'ambiguïté que nous avons mise en évidence dans la définition de  $K_{\mathbf{X}}$  apparaît aussi dans la définition de  $R$ , qui repose sur le choix de la fonction de jauge  $\tilde{\varphi}$ .

**Remarque 0.4.2.** *Les travaux de Luc Hillairet et de ses collaborateurs (voir [35]) contiennent un point de vue équivalent avec le formalisme d'une variété à points coniques.*

#### 0.4.4 Caractérisation magnétique des partitions minimales

L'article [31] montre que toute partition minimale est une partition nodale associée à un certain opérateur d'Aharonov-Bohm. Le principal résultat de cet article peut être résumé dans le théorème suivant.

**Théorème 0.4.3.** *Supposons que l'ouvert  $\Omega$  est difféomorphe à un disque percé d'un nombre fini de trous. Supposons que  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$  est une  $k$ -partition minimale de  $\Omega$ . Il existe un nombre fini de points  $X_1, \dots, X_N$  de  $\mathbb{R}^2$  tels que  $\mathcal{D}$  est la partition nodale d'une fonction propre  $K_{\mathbf{X}}$ -réelle  $u$  de l'opérateur  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}$ , avec*

$$\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_N\}$$

et

$$\alpha = (1/2, \dots, 1/2).$$

De plus, la fonction propre  $u$  est associée à la valeur propre  $\lambda_k(\mathbf{X}, \alpha)$ .

Ce résultat signifie que toute partition minimale d'un ouvert du plan est nodale, à condition de rajouter suffisamment de pôles avec un flux normalisé égal à  $1/2$ . La proposition 0.4.5 montre que nous devons rajouter un pôle à l'emplacement de chaque point singulier intérieur  $x$  de  $\mathcal{D}$  pour

lequel  $\nu(x)$  est impair. La proposition 0.4.6 montre que nous devons ajouter un pôle dans chaque composante connexe  $\mathcal{U}$  (chaque trou de  $\Omega$ ) de  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$  telle que l'entier

$$\sum_{y \in S_b \cap \partial \mathcal{U}} \rho(y)$$

est impair (c'est à dire telle qu'un nombre impair de courbes du bord de la partition touchent  $\partial \mathcal{U}$ ). L'article [31] montre que ces conditions nécessaires sont en fait suffisantes.

## 0.5 Exemples de partitions minimales

### 0.5.1 Généralités

Nous présentons dans cette section les résultats obtenus dans la détermination de partitions minimales pour certains ouverts bornés et variétés riemanniennes de dimension 2. Avant de présenter une liste d'exemples, considérons de manière générale les méthodes qui ont été employées. La première méthode consiste à déterminer les ensembles nodaux de fonctions propres Courant-strictes. Ce sont des partitions minimales d'après la proposition 0.3.1. Ceci limite l'étude à des ouverts ou des variétés très symétriques, sur lesquelles l'équation aux valeurs propres se réduit à deux équations différentielles par séparation des variables. Il faut toutefois faire attention aux valeurs propres de multiplicité  $\geq 2$ . Les domaines rectangulaires sont l'exemple le plus simple de cette situation. Nous pouvons aussi traiter le cas d'un disque. Dans les cas où les  $k$ -partitions minimales ne sont pas nodales, il est parfois possible de les écrire comme projections d'une partition nodale sur un revêtement riemannien d'ordre fini  $\hat{M}$  de  $M$ . Il faut alors combiner des arguments topologiques afin de déterminer la forme des relèvements sur  $\hat{M}$  des  $k$ -partitions minimales sur  $M$ , et l'application de la proposition 0.3.1 sur  $\hat{M}$  ou des versions plus raffinées (fonctions propres Courant-strictes avec symétrie). Cette méthode a été appliquée avec succès par B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof et S. Terracini pour déterminer les 3-partitions minimales de la sphère  $\mathbb{S}^2$  et par B. Helffer et T. Hoffmann-Ostenhof pour déterminer les  $k$ -partitions minimales d'un tore plat suffisamment fin.

### 0.5.2 Rectangles

Supposons que  $M$  est l'ouvert de  $\mathbb{R}^2$  défini par  $\mathcal{R}(a, b) = ]0, a[ \times ]0, b[$ , avec  $0 < b \leq a$ . Posons, pour  $m, n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_{m,n}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

et

$$\lambda_{m,n}(a, b) = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right).$$

Alors  $u_{m,n}$  est une fonction propre associée à la valeur propre  $\lambda_{m,n}(a, b)$ .

De plus, la famille  $(u_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$  est une base hilbertienne de  $\mathcal{R}(a, b)$ . Le spectre de  $\mathcal{R}(a, b)$  est donc l'ensemble  $\{\lambda_{m,n}(a, b), (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\}$ .

Pour chaque  $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , la multiplicité de  $\lambda_{m,n}(a, b)$  est le nombre de couples  $(r, s) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  tel que

$$\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} = \frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2}.$$

Notons en particulier que si le rapport  $b/a$  est irrationnel, toutes les valeurs propres sont simples. Le théorème 0.3.1 permet de déterminer les partitions minimales pour tout rectangle suffisamment fin.

**Définition 0.5.1.** Pour  $0 < b \leq a$  et un entier  $k \geq 2$ , définissons la  $k$ -partition  $\mathcal{D}_k(a, b) = \{D_1, \dots, D_k\}$  par

$$D_i = \left] \frac{i-1}{k}a, \frac{i}{k}a \right[ \times ]0, b[ ,$$

pour  $1 \leq i \leq k$ .

Remarquons que  $\mathcal{D}_k(a, b)$  est la partition nodale associée à la fonction propre

$$u_{k,1}(x, y) = \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right).$$

**Proposition 0.5.1.** *La  $k$ -partition  $\mathcal{D}_k(a, b)$  de  $\mathcal{R}(a, b)$  est minimale si, et seulement si,*

$$\frac{b}{a} \leq \sqrt{\frac{3}{k^2 - 1}},$$

et alors

$$\mathfrak{L}_k(\mathcal{R}(a, b)) = \pi^2 \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

Si de plus

$$\frac{b}{a} < \sqrt{\frac{3}{k^2 - 1}},$$

$\mathcal{D}_k(a, b)$  est l'unique  $k$ -partition minimale de  $\mathcal{R}(a, b)$ .

*Démonstration.* Si  $b/a \leq \sqrt{3/(k^2 - 1)}$ , alors  $\lambda_{k,1}(a, b) \leq \lambda_{2,1}(a, b)$ .

Nous en déduisons que

$$\lambda_{k,1}(a, b) = \lambda_k(\mathcal{R}(a, b)).$$

La fonction propre  $u_{k,1}$  est donc Courant-strict, et la partition  $\mathcal{D}_k(a, b)$  est nodale par la proposition 0.3.1.

Si de plus  $b/a < \sqrt{3/(k^2 - 1)}$ , la valeur propre  $\lambda_{k,1}(a, b) = \lambda_k(\mathcal{R}(a, b))$  est simple. Selon le théorème 0.3.4, toute partition minimale est la partition nodale d'une fonction propre associée à  $\lambda_k(\mathcal{R}(a, b))$ . Toute partition minimale est donc égale à  $\mathcal{D}_k(a, b)$ .  $\square$

Le théorème 0.3.4 nous dit aussi que la partition nodale du carré  $\mathcal{C} = \mathcal{R}(1, 1)$  associée à la fonction propre

$$u_{2,2} = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$$

est minimale, et donc que

$$\mathfrak{L}_4(\mathcal{C}) = 8\pi^2.$$

En revanche, la partition  $\mathcal{D}_3(1, 1)$  n'est pas une 3-partition minimale de  $\mathcal{C}$ , ce qui implique

$$\mathfrak{L}_3(\mathcal{C}) < 10\pi^2.$$

Remarquons que cette dernière majoration est loin d'être optimale. D'après la proposition 0.1.2,

$$\mathfrak{L}_3(\mathcal{C}) < \mathfrak{L}_4(\mathcal{C}) = 8\pi^2.$$

Il est conjecturé dans [7] que les 3-partitions minimales de  $\mathcal{C}$  sont les partitions nodales associées à la troisième valeur propre de l'opérateur d'Aharonov-Bohm avec un pôle  $X = (1/2, 1/2)$ , situé au centre, de flux  $1/2$ . La valeur propre associée  $\lambda_3(X, 1/2)$  a été évaluée numériquement à l'aide de la méthode des éléments finis par Virginie Bonnaillie-Noël (voir également les premiers calculs dans [8]). Nous conjecturons donc

$$\mathfrak{L}_3(\mathcal{C}) = \lambda_3(X, 1/2) \simeq 33.534.$$

### 0.5.3 Disque

La situation dans le cas du disque est analogue à celle du carré. Notons  $\mathcal{B}$  le disque ouvert dans  $\mathbb{R}^2$  de centre 0 et de rayon 1. Les calculs de valeurs propres et de fonctions propres sont possibles par séparation des variables en coordonnées polaires, et utilisent des fonctions de Bessel (voir par exemple [1, 40, 20]). Nous utiliserons la notation standard suivante :

Pour tout  $\nu > 0$  et tout entier  $m \geq 1$ ,  $j_{\nu, m}$  désigne le  $m$ -ième zéro strictement positif de la fonction de Bessel de première espèce  $J_\nu$ .

Nous déduisons de ces calculs et du théorème 0.3.4 que la partition du disque en deux demi-disques

est minimale, avec  $\mathfrak{L}_2(\mathcal{B}) = j_{1,1}$ . Nous en déduisons aussi que la partition du disque en 4 secteurs angulaires égaux est minimale et que  $\mathfrak{L}_4(\mathcal{B}) = j_{2,1}$ .

Il est conjecturé dans [32] que la partition de  $\mathcal{B}$  en 3 secteurs angulaires égaux est minimale. Cette partition est aussi la partition nodale associée à la 3-ième valeur propre de l'opérateur d'Aharonov-Bohm ayant un pôle en 0 avec un flux  $1/2$ . Il est encore possible de calculer les valeurs propres et les fonctions propres de cet opérateur par séparation de variables en coordonnées polaires, à l'aide des fonctions de Bessel. Nous conjecturons ainsi  $\mathfrak{L}_3(\mathcal{D}) = j_{3/2,1}$ .

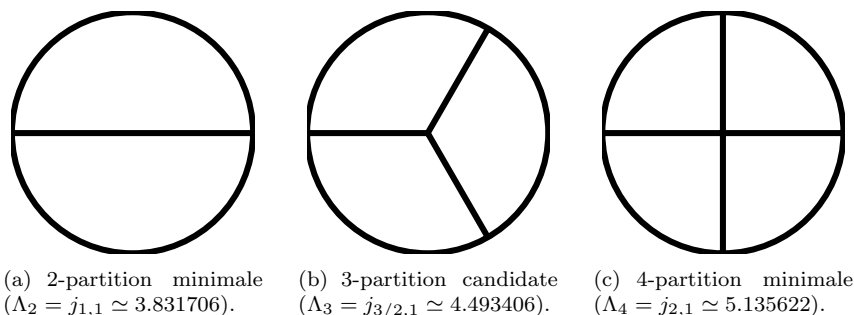


FIGURE 3 – Partitions du disque unité.

#### 0.5.4 Tores

Supposons que  $M$  est le tore  $(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/b\mathbb{Z})$ , avec  $0 < b \leq a$ . Dans la suite, nous notons ce tore  $T(a, b)$  pour abrégé. Il existe une projection canonique de  $\mathbb{Z}^2$  sur  $T(a, b)$ , que nous noterons  $\Pi$ . Pour tous  $p, q \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , il existe une projection canonique de  $T(pa, qb)$  sur  $T(a, b)$ , que nous noterons  $\Pi_{p,q}$ . Les valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami se calculent par séparation des variables. Elles sont de la forme

$$\lambda_{m,n}(a, b) = 4\pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right),$$

avec  $m, n \in \mathbb{N}^*$ .

Il existe une famille canonique de fonctions propres dont la réunion est une base hilbertienne.

Si  $m = n = 0$ ,  $(x, y) \mapsto 1$ .

Si  $m > 0$  et  $n = 0$ ,

- $(x, y) \mapsto \cos\left(\frac{2m\pi x}{a}\right)$ ,
- $(x, y) \mapsto \sin\left(\frac{2m\pi x}{a}\right)$ .

Si  $m = 0$  et  $n > 0$ ,

- $(x, y) \mapsto \cos\left(\frac{2n\pi y}{b}\right)$ ,
- $(x, y) \mapsto \sin\left(\frac{2n\pi y}{b}\right)$ .

Enfin, si  $m > 0$  et  $n > 0$ ,

- $(x, y) \mapsto \cos\left(\frac{2m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2n\pi y}{b}\right)$ ,
- $(x, y) \mapsto \cos\left(\frac{2m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2n\pi y}{b}\right)$ ,
- $(x, y) \mapsto \sin\left(\frac{2m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2n\pi y}{b}\right)$ ,
- $(x, y) \mapsto \sin\left(\frac{2m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2n\pi y}{b}\right)$ .

La multiplicité de la valeur propre  $\lambda_{m,n}(a, b)$  dépend de  $a, b, m$  et  $n$ . En particulier, si le rapport  $b/a$  est irrationnel,  $\lambda_{m,n}(a, b)$  est de multiplicité 1 si  $m = n = 0$ , de multiplicité 2 si  $m = 0$  et  $n > 0$  ou bien  $m > 0$  et  $n = 0$  et de multiplicité 4 si  $m > 0$  et  $n > 0$ .

Ici encore, la connaissance des valeurs propres et des fonctions propres permet de déterminer certaines partitions minimales à l'aide du théorème 0.3.4. Notons que le tore est invariant par le groupe des translations  $\tau_{\alpha,\beta}(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \beta)$ , qui commutent avec l'opérateur de Laplace-Beltrami. Toute  $k$ -partition donne donc naissance à une famille de  $k$ -partitions de même énergie lorsqu'on lui applique ce groupe.

**Définition 0.5.2.** Pour  $k \geq 2$ , définissons la  $k$ -partition  $\mathcal{D}_k(a, b) = \{D_1, \dots, D_k\}$  de  $T(a, b)$  par

$$D_i = \Pi \left( \left[ \frac{i-1}{k}a, \frac{i}{k}a \right[ \times ]0, b[ \right),$$

pour  $1 \leq i \leq k$ .

Nous avons

$$\Lambda_k(\mathcal{D}_k(a, b)) = \frac{k^2 \pi^2}{a^2}.$$

L'application directe du théorème 0.3.4 donne le résultat suivant.

**Théorème 0.5.1.** Si  $k$  est un entier pair, la partition  $\mathcal{D}_k(a, b)$  est minimale si, et seulement si,

$$\frac{b}{a} \leq \frac{2}{k}.$$

Nous avons alors

$$\mathfrak{L}_k(T(a, b)) = \frac{k^2 \pi^2}{a^2}.$$

Remarquons que si  $k$  est pair et que  $b/a < 2/k$ , toute  $k$ -partition minimale de  $T(a, b)$  est de la forme  $\tau_{\alpha, 0}(\mathcal{D}_k(a, b))$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . En effet, si  $b/a \leq 2/k$ , le théorème 0.3.1 nous dit que toute partition est la partition nodale d'une fonction propre associée à la valeur propre  $k^2 \pi^2 / a^2$ . Si de plus  $b/a < 2/k$ , cette valeur propre est de multiplicité 2, et son espace propre est engendré par les fonctions

- $(x, y) \mapsto \cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right)$ ,
- $(x, y) \mapsto \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)$ .

Lorsque l'entier  $k$  est impair, la partition  $\mathcal{D}_k(a, b)$  n'est pas bipartie et donc pas nodale, bien que son bord ne contienne aucun point critique. B. Helffer et T. Hoffman-Ostenhof ont montré dans [30] le résultat suivant.

**Théorème 0.5.2.** Si  $k$  est un entier impair et si

$$\frac{b}{a} < \frac{1}{k},$$

la partition  $\mathcal{D}_k(a, b)$  est minimale. Nous avons alors

$$\mathfrak{L}_k(T(a, b)) = \frac{k^2 \pi^2}{a^2}.$$

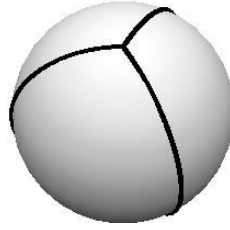
*Démonstration.* Nous ne donnons pas le détail de l'argument contenu dans [30], mais nous en présentons les grandes lignes afin d'illustrer les méthodes décrites de façon générale dans la sous-section 0.5.1. La première étape consiste à montrer que si  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$  est une  $k$ -partition dont l'un des domaines  $D_{i_0}$  est homéomorphe à un disque,  $\Lambda(\mathcal{D}) \geq \pi^2/b^2$ . Les auteurs appliquent pour cela une symétrisation de Steiner au domaine  $\Pi^{-1}(D_{i_0})$  contenu dans  $\mathbb{R}^2$  et en déduisent que  $\lambda_1(D_{i_0}) \geq \pi^2/b^2$ . Dans une deuxième étape, ils considèrent  $\mathcal{D}^*$ ,  $k$ -partition minimale de  $T(a, b)$ . Selon l'étape précédente, aucun des domaines de  $\mathcal{D}^*$  n'est homéomorphe à un disque si  $b/a < 1/k$ . Les auteurs montrent alors, en appliquant la formule d'Euler (0.2.6), que  $\mathcal{N}(\mathcal{D}^*)$  ne contient aucun point singulier. Une analyse topologique que nous ne détaillons pas montre que  $\mathcal{D}^*$  se relève en une  $2k$ -partition  $\hat{\mathcal{D}}^*$  de  $T(2a, 2b)$ , telle que  $\Lambda_{2k}(\hat{\mathcal{D}}^*) = \Lambda_k(\mathcal{D}^*)$ .

Le cas pair implique que

$$\Lambda_{2k}(\hat{\mathcal{D}}^*) \geq k^2 \pi^2 / 2.$$

Ainsi,  $\mathcal{D}_k(a, b)$  est minimale si  $b/a < 1/k$ . □

On discutera l'optimalité de ce résultat dans le chapitre 4.

FIGURE 4 – 3-partition minimale de  $\mathbb{S}^2$ .

### 0.5.5 Sphère

Les valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère unité  $\mathbb{S}^2$  de dimension 2 se calculent en utilisant les coordonnées sphériques. D'après le théorème 0.3.4, les 2-partitions minimales de la sphère sont les partitions en deux hémisphères. Nous avons donc

$$\mathfrak{L}_2(\mathbb{S}^2) = \lambda_2(\mathbb{S}^2) = 2.$$

En fait ces partitions sont également les partitions 1-minimales, ce qui implique

$$\mathfrak{L}_{2,1}(\mathbb{S}^2) = 2.$$

Ce dernier résultat est dû à Friedland-Hayman-Bishop (voir les références dans [26]).

B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof et S. Terracini ont déterminé dans [33] la 3-partition minimale de la sphère  $\mathbb{S}^2$ . C'est, à rotation près, la partition en  $Y$  constituée de trois domaines, chacun délimité par deux méridiens de  $\mathbb{S}^2$  d'écart angulaire  $2\pi/3$ . Elle est représentée sur la figure 4. Ainsi,

$$\mathfrak{L}_3(\mathbb{S}^2) = 15/4.$$

Bishop a aussi conjecturé que  $\mathfrak{L}_{3,1}(\mathbb{S}^2) = 15/4$  mais ce problème est à notre connaissance ouvert.

## 0.6 Étude numérique

Étant donné la difficulté théorique du problème de détermination des partitions minimales, il est naturel d'avoir recours à des méthodes numériques, à la fois dans un but de confirmation des hypothèses et dans un but d'exploration. Cette recherche numérique est l'objet d'une partie de cette thèse. La présente section rappelle des études antérieures dont nous allons nous inspirer.

### 0.6.1 Approches spectrales

Nous allons tout d'abord étudier les méthodes qui ramènent le problème de partition minimale à un problème spectral. Nous les appliquerons à la recherche des 3-partitions minimales d'un ouvert simplement connexe du plan. Nous avons besoin pour cela de connaître les différentes topologies possibles pour une 3-partition régulière.

#### Topologies des 3-partitions

Soit  $\Omega$  un ouvert du plan que nous supposons dans la suite simplement connexe. Nous nous intéressons au problème de déterminer les 3-partitions minimales de  $\Omega$ .

Considérons une 3-partition minimale  $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3\}$ , et cherchons à déterminer sa topologie. Pour ce faire, nous posons une hypothèse supplémentaire de généricité : pour tout point singulier intérieur  $x$ ,  $\nu(x) = 3$ , et pour tout point singulier au bord  $y$ ,  $\rho(y) = 1$ . Appliquons maintenant la formule (0.2.3) à ce problème. Dans le cas présent,  $b_0 = 1$ , donc  $1 - b_0 + b_1 = b_1$ . L'entier  $b_1$  ne peut prendre que les valeurs 1, 2 ou 3.

Dans le cas  $b_1 = 3$ , il n'existe ni point singulier intérieur ni point singulier au bord. L'ensemble  $\mathcal{N}(\mathcal{D})$  est donc constitué de courbes régulières simples, fermées et disjointes contenues dans  $\Omega$ .



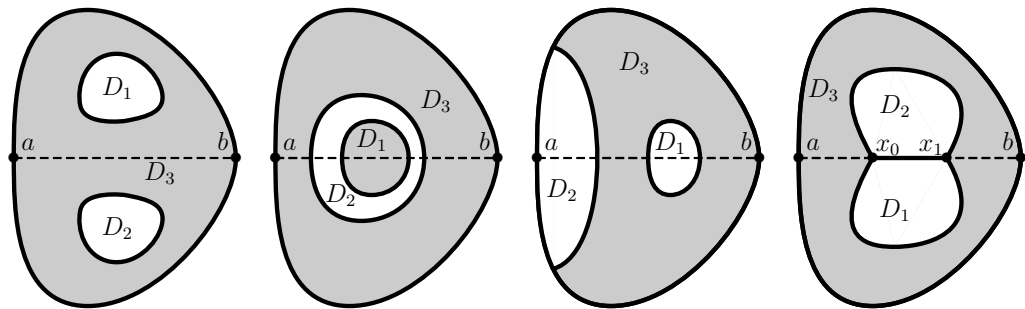
Comme la partition a trois domaines, seules deux configurations topologiques sont possibles (voir figures 5(a) et 5(b)<sup>3</sup>). Ces deux partitions sont bipartites.

Considérons maintenant le cas  $b_1 = 2$ . L'ensemble  $\mathcal{N}(\mathcal{D})$  contient alors deux points singuliers, et nous pouvons décomposer l'étude en trois cas.

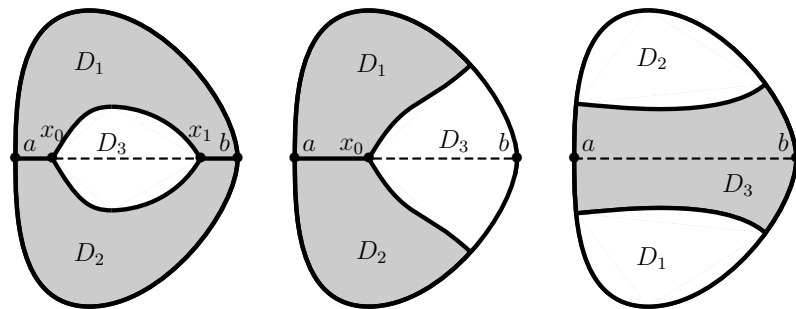
- i. Il y a deux points singuliers au bord et pas de point singulier intérieur. Le seul type topologique possible est alors représenté sur la figure 5(c). C'est une partition bipartite.
- ii. Les 3-partitions avec un point singulier au bord et un point singulier intérieur n'existent pas.
- iii. Il n'y a aucun point singulier au bord et deux points singuliers intérieurs. Le seul type topologique possible tel que la 3-partition soit parcimonieuse est représenté sur la figure 5(d).

Considérons enfin le cas  $b_1 = 1$ . L'ensemble  $\mathcal{N}(\mathcal{D})$  contient alors quatre points singuliers. Remarquons que puisque  $\partial\Omega \cup \mathcal{N}(\mathcal{D})$  est connexe, il existe au moins un point singulier au bord. Il en existe en fait au moins deux, car sinon la partition ne serait pas parcimonieuse. Nous pouvons donc décomposer l'étude en trois cas.

- i. Il y a deux points singuliers au bord et deux points singuliers intérieurs. L'unique type topologique possible est représenté sur la figure 5(e).
- ii. Il y a trois points singuliers au bord et un point singulier intérieur. L'unique type topologique possible est représenté sur la figure 5(f).
- iii. Il y a quatre points singuliers au bord et aucun point singulier intérieur. L'unique type topologique possible est représenté sur la figure 5(g). La partition correspondante est bipartite.



(a) Pas de point singulier. (b) Pas de point singulier. (c) Deux points singuliers au bord. (d) Deux points singuliers intérieurs.



(e) Deux points singuliers intérieurs et deux au bord. (f) Un point singulier intérieur et trois au bord. (g) Quatre points singuliers au bord.

FIGURE 5 – Types topologiques de 3-partitions.

Grâce au théorème 0.3.4, nous savons que les partitions minimales sont bipartites si, et seulement si, elle sont nodales. Nous retenons donc trois types topologiques possibles, représentés sur les figures 5(d), 5(e) et 5(f), pour une 3-partition minimale non-nodale. Ce sont à ces partitions non-nodales que nous allons maintenant nous intéresser.

3. Nous remercions l'auteur de la figure 5, G. Vial, de nous avoir aimablement autorisé à la reproduire ici.

### 0.6.2 Recherche de 3-partitions minimales symétriques

Supposons maintenant que l'ouvert  $\Omega$  dont nous recherchons une 3-partition minimale possède un axe de symétrie  $d$ . Il est alors naturel de commencer par restreindre l'étude aux partitions symétriques. Cette démarche a été appliquée au rectangle et au disque par V. Bonnaillie-Noël, B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof et Grégory Vial dans les articles [7, 8]. Supposons que  $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3\}$  est une 3-partition minimale qui, de plus, est symétrique. En partant des trois types topologiques que nous avons retenus, nous obtenons six configurations possibles, représentées sur la figure 6 dans le cas où  $\Omega$  est un secteur (cet exemple fait l'objet du troisième chapitre). Nous faisons l'hypothèse supplémentaire que la partition minimale est de la forme (f1) ou (f2), c'est à dire qu'elle n'a qu'un seul point singulier intérieur.

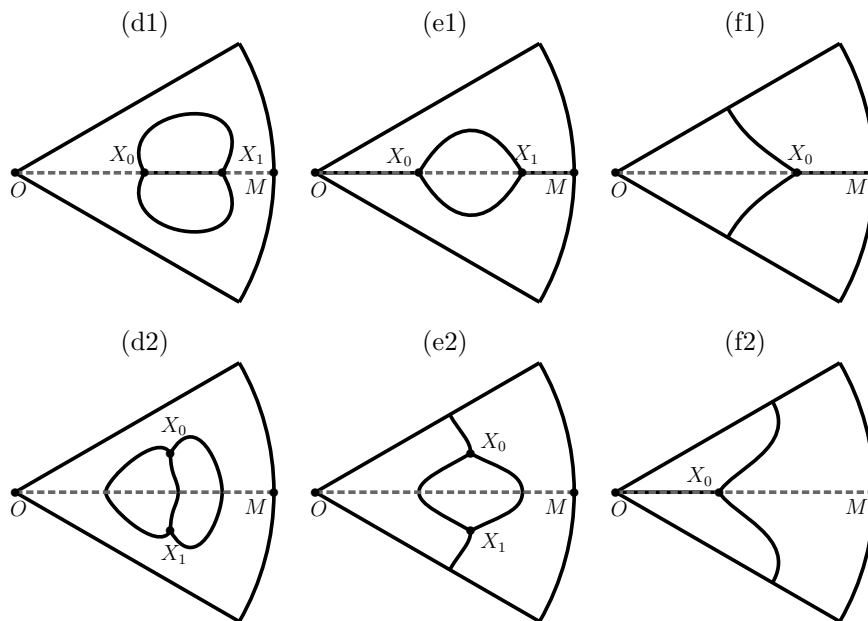


FIGURE 6 – Différents types de 3-partitions symétriques non-bipartite.

Choisissons des coordonnées telles que l'axe de symétrie  $d$  ait pour équation  $y = 0$ . Nous posons alors  $\Omega_h = \Omega \cap \{y > 0\}$ ,  $\Gamma_h = \partial\Omega \cap \{y > 0\}$  et  $\Omega \cap \{y = 0\} = [O, M]$ . Nous utilisons ici les notations

$$\begin{aligned} [O, M] &= \{(1-t)O + tM; t \in [O, M]\}, \\ ]O, M[ &= \{(1-t)O + tM; t \in ]O, M[\}. \end{aligned}$$

Pour tout  $X \in [O, M]$ , définissons sur  $\Omega_h$  deux problèmes aux valeurs propres avec conditions au bord mixtes :

$$\begin{array}{cc} \text{Neumann-Dirichlet} & \text{Dirichlet-Neumann} \\ \text{(ND)} \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega_h, \\ \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{sur } ]O, X[, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_h \cup ]X, M[, \end{cases} & \text{(DN)} \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega_h, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_h \cup ]O, X[, \\ \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{sur } ]X, M[. \end{cases} \end{array}$$

Notons  $(\lambda_k^{ND}(X))$  et  $(\lambda_k^{DN}(X))$  les suites de valeurs propres correspondantes, rangées par ordre croissant et comptées avec multiplicité.

Pour chercher une partition minimale de  $\Omega$ , les auteurs de [7, 8] calculent, en fonction du paramètre  $X$ , une fonction propre réelle associée à  $\lambda_2^{ND}(X)$  et  $\lambda_2^{DN}(X)$ . Ils symétrisent ensuite par rapport à l'axe  $d$  la partition nodale de cette fonction propre (qui est une partition de  $\Omega_h$ ) afin d'obtenir une partition de  $\Omega$ .

Pour bien comprendre ce dernier point, fixons notre attention sur le problème Neumann-Dirichlet (ND). Les auteurs de [7, 8] constatent numériquement qu'une fonction propre  $u_X^{ND}$  associée à  $\lambda_2^{ND}(X)$  a une ligne nodale qui relie  $\Gamma_h$ , la partie supérieure du bord de  $\Omega_h$ , au segment

$]O, M[$ . Notons  $Y^{ND}(X) \in ]O, M[$  le point où cette ligne nodale rencontre  $]O, M[$ . Nous devons alors distinguer trois situations.

- i. Si  $Y^{ND}(X) \in ]X, M[$ , nous obtenons une 2-partition de  $\Omega$  après symétrisation de la partition nodale de  $u_X^{ND}$ .
- ii. Si  $Y^{ND}(X) \in ]O, X[$ , nous obtenons bien une 3-partition de  $\Omega$  après symétrisation de la partition nodale de  $u_X$ , mais cette partition n'est pas parcimonieuse : la portion de frontière  $]Y^{ND}(X), X[$  ne sépare pas deux domaines différents. La partition obtenue ne peut donc être minimale.
- iii. Si  $Y^{ND}(X) = X$ , nous obtenons une 3-partition de  $\Omega$  après symétrisation. Cette partition est régulière si les trois demi-courbes qui se rencontrent en  $X$  forment des angles égaux. Elle est dans ce cas un candidat à être une partition minimale.

Pour trouver un bon candidat à être une partition minimale, les auteurs de [7, 8] font varier le point  $X$  dans l'ensemble  $]O, M[$ . Ils calculent pour chaque  $X$  la ligne nodale de la fonction  $u_X^{ND}$  par la méthode des éléments finis sur  $\Omega_h$ , et recherchent ainsi un point  $X_0$  tel que  $Y^{ND}(X_0) = X_0$ . Un tel point étant trouvé, la symétrisation par rapport à  $d$  de la partition nodale de  $u_{X_0}^{ND}$  est une 3-partition symétrique de  $\Omega$ , d'énergie  $\lambda_2^{ND}(X_0)$ , du type indiqué par (f2) sur la figure 6.

### 0.6.3 Exemples d'applications

Considérons le rectangle  $\mathcal{R}(1, b)$ , avec  $0 < b \leq 1$ . Nous avons vu que lorsque  $b \leq \sqrt{3/8}$ ,  $\mathfrak{L}_3(\mathcal{R}(1, b)) = \pi^2(9+1/b^2)$  et la partition  $\mathcal{D}_3(1, b)$  (voir la définition 0.5.1) est minimale. La partition  $\mathcal{D}_3(1, b)$  est même l'unique partition minimale lorsque  $b < \sqrt{3/8}$ . Si en revanche  $b > \sqrt{3/8}$ , les 3-partitions minimales de  $\mathcal{R}(1, b)$  ne sont pas nodales. L'article [7] présente un mécanisme possible d'apparition d'une 3-partition minimale non-nodale. Plaçons-nous dans le cas  $b = \sqrt{3/8}$ . À condition d'avoir trois domaines nodaux, toute partition nodale d'une fonction propre associée à  $\lambda_{3,1}(1, b)$  est une 3-partition minimale. La valeur propre  $\lambda_{3,1}(1, b)$  étant de multiplicité 2, cela engendre de nombreuses partitions minimales. Parmi celles-ci, il n'en existe que deux pour lesquelles deux lignes nodales se rencontrent en un point du bord : celles associées aux fonctions propres

$$(x, y) \mapsto \sin(3\pi x) \sin\left(\pi\sqrt{\frac{8}{3}}y\right) \pm \sin(\pi x) \sin\left(2\pi\sqrt{\frac{8}{3}}y\right).$$

Lorsque  $b = \sqrt{3/8} + \varepsilon$ , avec  $\varepsilon > 0$  et proche de 0, les auteurs de [7] recherchent une 3-partition minimale non-nodale proche d'une de ces deux partitions nodales et obtenue par déformation. Un candidat naturel est une partition  $\mathcal{D}$  dont la frontière  $\mathcal{N}(\mathcal{D})$  ne contient qu'un seul point singulier intérieur  $X$ , d'ordre 3, situé près du point d'ordre 2 dans l'ensemble nodal précédent. En supposant de plus que  $X$  est situé sur l'axe de symétrie  $\{y = 1/2\}$ , nous retrouvons le cas étudié à la sous-section 0.6.2. L'article présente alors une séquence de déformations plausible, constituée de candidats à être des 3-partitions minimales. Cette séquence est représentée sur la figure 7 (après rotation du rectangle d'un quart de tour). Remarquons en particulier que pour  $b = 1$ , le point  $X_0$  est au centre du carré. La partition obtenue a alors la même énergie que le candidat présenté à la fin de la sous-section 0.5.2.

V. Bonnaillie-Noël a effectué une étude numérique similaire sur l'exemple d'une ellipse de demi-grand axe 1 et de demi-petit axe  $b$ , en prenant  $b$  comme paramètre. Les résultats de cette étude sont présentés sur la figure 8. La troisième fonction propre du laplacien de Dirichlet sur une ellipse très aplatie sur son grand axe semble être Courant-strict. Plus précisément, sa partition nodale paraît consister en trois domaines, délimités par des lignes nodales presque perpendiculaires au grand axe, et distribuées symétriquement par rapport au petit axe. Ceci sera expliqué par l'étude asymptotique menée dans le premier chapitre. Si la 3-partition nodale associée à la troisième fonction propre est bien Courant-strict, alors c'est une 3-partition minimale d'après la proposition 0.3.3.

Lorsque le paramètre  $b$  augmente, la troisième fonction propre n'est plus Courant-strict. La méthode expliquée dans la sous-section 0.6.2 fournit alors une famille de candidats (symétriques) à être des 3-partitions minimales. Cette famille débute encore avec des partitions ayant un point triple proche du bord, puis ce point se déplace vers le centre au fur et à mesure que  $b$  augmente. Lorsque  $b = 1$  (l'ellipse est alors un cercle), le point triple est au centre, et la partition obtenue est celle dont nous avons conjecturé qu'elle était minimale dans la sous-section 0.6.2.

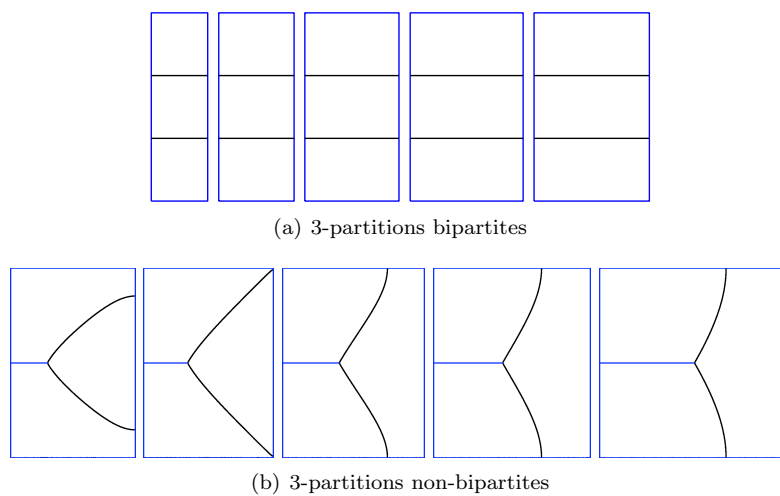


FIGURE 7 – Étude numérique de la 3-partition minimale d'un rectangle.

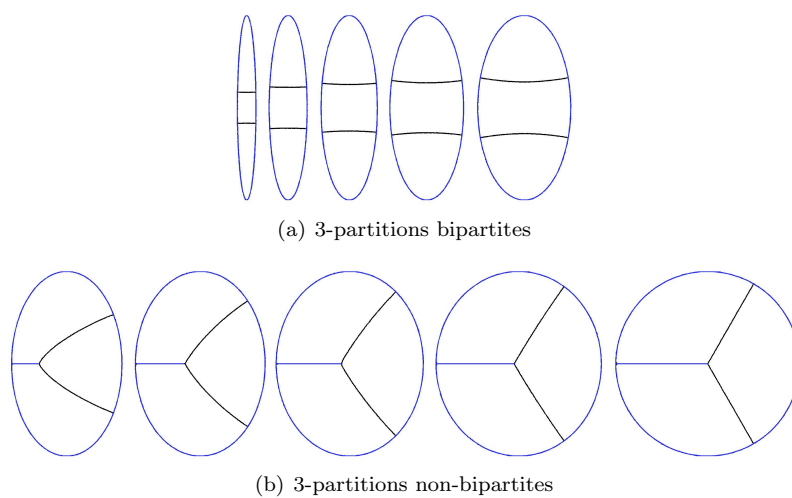


FIGURE 8 – Étude numérique de la 3-partition minimale d'une ellipse.

### 0.6.4 Méthode du gradient

#### Principe de la méthode

Dans la section précédente, nous avons présenté une méthode paramétrique pour la recherche de partitions minimales ayant une topologie imposée et éventuellement une symétrie. Nous allons maintenant exposer une méthode itérative, introduite par Bourdin-Bucur-Oudet dans [13] qui s'affranchit de ces hypothèses. Elle repose sur une stratégie de relaxation du problème par pénalisation, puis sur une méthode du gradient projeté. Elle a été appliquée au cas  $p = 1$  dans [13], mais peut s'étendre à  $1 \leq p < \infty$ , ce qui sera fait dans les calculs menés au quatrième chapitre.

Exposons d'abord la méthode de relaxation utilisée dans [13]. Soit  $\Omega$  un ouvert connexe, borné et régulier de  $\mathbb{R}^2$ . Nous remplaçons les  $k$ -partitions de  $\Omega$  par des  $k$ -uplets de fonctions mesurables sur  $\Omega$ , que nous interpréterons finalement comme des fonctions indicatrices.

**Définition 0.6.1.** *L'ensemble des  $k$ -uplets admissibles est*

$$\mathfrak{F}_k(M) = \{ \mathcal{F} = (f_1, \dots, f_k) : f_i : M \rightarrow [0, 1] \text{ mesurable, } \sum_{i=1}^k f_i(x) = 1 \text{ p.p.} \}.$$

À chacun de ces  $k$ -uplets, on associe une énergie qui dépend d'une constante  $\varepsilon > 0$ . Cette énergie est calculée à partir d'une version relaxée du problème aux valeurs propres.

**Définition 0.6.2.** *Soit  $f : \Omega \rightarrow [0, 1]$  une fonction mesurable. On définit*

$$\lambda_1(f, \varepsilon) = \inf_{u \in H_0^1(M) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon}(1-f)u^2) dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}.$$

Remarquons que  $\lambda_1(f, \varepsilon)$  est la première valeur propre de l'opérateur  $-\Delta + \varepsilon^{-1}(1-f)$ , définie au sens variationnel.

**Définition 0.6.3.** *Soit  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_k) \in \mathfrak{F}_k(M)$ . L'énergie de  $\mathcal{F}$  est définie par*

$$M_{k,\varepsilon}(\mathcal{F}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_1(f_i, \varepsilon).$$

**Définition 0.6.4.** *L'énergie optimale est*

$$\mathfrak{M}_{k,\varepsilon}(\Omega) = \inf_{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_k(\Omega)} M_{k,\varepsilon}(\mathcal{F}).$$

Le principe de la méthode d'optimisation utilisée dans [13] consiste à fixer  $0 < \varepsilon \ll 1$  et à calculer numériquement  $\mathfrak{M}_{k,\varepsilon}(\Omega)$  ainsi qu'un  $k$ -uplet optimal associé  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_k) \in \mathfrak{F}_k(\Omega)$ . Une approximation des domaines d'une  $k$ -partition 1-minimale est alors donnée par les supports des  $f_i$ , pour  $1 \leq i \leq k$ . Cette méthode repose sur le résultat de convergence suivant, prouvé dans [13].

**Proposition 0.6.1.** *Pour tout entier  $k \geq 2$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathfrak{M}_{k,\varepsilon}(\Omega) = \mathfrak{L}_{k,1}(\Omega)$ .*

#### Implémentation et résultats

Afin de traiter numériquement le problème d'optimisation de la définition 0.6.4, les auteurs de [13] en donnent une version discrétisée, sur laquelle ils procèdent à une optimisation. Ils remplacent le laplacien qui intervient dans la définition 0.6.2 par son approximation discrète, obtenue à l'aide de la méthode des différences finies. Ils utilisent ensuite une méthode de gradient projeté afin de minimiser la version discrète de l'énergie définie en 0.6.3. Ceci est exposé en plus grand détail dans le quatrième chapitre. Dans l'article, le cas où  $\Omega$  est le carré  $]0, 1[^2$  avec condition de Dirichlet est étudié. Les auteurs traitent aussi le cas du tore  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ , que nous pouvons voir comme le carré  $]0, 1[^2$  avec conditions aux bords périodiques.

Bourdin, Bucur et Oudet ont ainsi utilisé cette méthode pour confirmer la conjecture hexagonale, sous la forme (0.3.2), lorsque  $\Omega$  est un carré. Pour un grand nombre de cellules (jusqu'à 512), la partition optimale obtenue ressemble, à l'intérieur du carré, à un pavage par des hexagones réguliers. La condition de Dirichlet introduit bien sûr une distorsion de ce pavage près du bord.

## 0.7 Organisation de la thèse

### 0.7.1 Étude asymptotique des ensembles nodaux pour des domaines minces

Le premier chapitre de cette thèse s'intéresse à la question de trouver des ouverts pour lesquels les  $k$ -partitions minimales ( $k$  étant un entier donné) sont nodales. D'après la proposition 0.3.3, la partition nodale d'une fonction propre Courant-strict est minimale. Comme nous l'avons vu, ce résultat fournit des partitions minimales de domaines où valeurs propres et fonctions propres sont calculables (disque, rectangles, tores, ...). Le nombre de tels domaines est toutefois limité.

Le cas du rectangle, étudié dans la sous-section 0.5.2, met en évidence un phénomène intéressant. Si nous fixons un entier  $k \geq 2$ , les  $k$ -partitions minimales du rectangle  $\mathcal{R}(a, b)$  sont nodales dès que le rapport  $b/a$  est assez petit. De façon explicite, les  $k$ -partitions minimales sont nodales dès que

$$\frac{b}{a} \leq \sqrt{\frac{3}{k^2 - 1}}.$$

Une  $k$ -partition minimale est toujours donnée par les domaines nodaux de la fonction propre

$$u_{k,1}(x, y) = \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right).$$

C'est même l'unique  $k$ -partition minimale lorsque  $b/a < \sqrt{3/(k^2 - 1)}$ . Elle correspond à la division de  $\mathcal{R}(a, b)$  en  $k$  bandes, limitées par des lignes nodales verticales. Notons que les abscisses de ces lignes nodales sont données par les zéros de la fonction

$$\varphi(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right),$$

et que  $\varphi_\varepsilon$  est une fonction propre de l'opérateur

$$-\frac{d^2}{dx^2} \text{ sur } ]0, a[ ,$$

avec conditions de Dirichlet.

Nous pouvons alors nous demander si ce phénomène se produit aussi pour d'autres domaines, pour lesquels des expressions explicites des valeurs propres et vecteurs propres ne sont pas accessibles. Essayons de formuler le problème de façon plus précise. Supposons que  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ , possédant un axe de symétrie que nous identifierons à l'axe  $Ox$ . Considérons la famille d'ouvert  $\Omega_\varepsilon$ , définis, pour  $\varepsilon > 0$ , par

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ (x_1, x_2); \left( x_1, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \in \Omega \right\}.$$

Nous voulons étudier les fonctions propres et valeurs propres du laplacien de Dirichlet sur  $\Omega_\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, c'est à dire lorsque les domaines s'aplatissent sur leur axe de symétrie. Plus spécifiquement, nous désirons montrer que, pour un entier  $k \geq 1$  donné, la  $k$ -ème valeur propre devient simple, et la fonction propre correspondante a  $k$  domaines nodaux. Pour ce faire, nous cherchons à montrer qu'asymptotiquement, les domaines nodaux de la  $k$ -ème fonction propre sont séparés par des courbes presque verticales. De plus, nous voulons montrer que les points d'intersection de ces courbes avec l'axe  $Ox$  sont asymptotiquement déterminés par un problème spectral de dimension 1 : ils sont proches des zéros d'une fonction propre pour un problème de Sturm-Liouville sur  $Ox$ .

Nous allons montrer un résultat de cette nature dans le premier chapitre, en faisant certaines hypothèses sur l'ouvert  $\Omega$ . Donnons en maintenant une formulation précise.

Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels strictement positifs et  $h$  une fonction de classe  $C^\infty$  de  $] -a, b[$  dans  $\mathbb{R}$ . Supposons que  $h(t) > 0$  pour tout  $t \in ] -a, b[$ , et que 0 est pour  $h$  un point de maximum strict non dégénéré. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , définissons le domaine ouvert  $\Omega_\varepsilon$  de  $\mathbb{R}^2$  par

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; -a < x_1 < b \text{ et } -\varepsilon h(x_1) < x_2 < \varepsilon h(x_1) \right\}.$$

Nous posons, pour alléger les notations,  $\lambda_k(\varepsilon) = \lambda_k(\Omega_\varepsilon)$ .

**Théorème 0.7.1.** *Pour tout entier  $k \geq 1$ , il existe  $\varepsilon_k > 0$  tel que, si  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_k$ , les valeurs propres  $\lambda_\ell(\varepsilon)$  pour  $\ell = 1, \dots, k$  sont distinctes, et les fonctions propres associées sont toutes Courant-strictes.*

Notons que les hypothèses autorisent  $h(-a) = 0$ , ou  $h(b) = 0$ . Le cas d'une famille d'ellipses s'aplatissant sur leur grand axe est donc contenu dans le théorème 0.7.1 : il suffit de choisir  $a = b = 1$  et  $h(t) = \sqrt{1 - t^2}$ .

Afin de prouver le théorème 0.7.1, nous calculons des développements asymptotiques des valeurs propres et fonctions propres du laplacien de Dirichlet sur le domaine  $\Omega_\varepsilon$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Nous donnons une preuve de ces développements par souci de complétude, mais ils ont déjà été démontrés antérieurement. Les premiers termes ont été obtenus par L. Friedlander et M. Solomyak dans l'article [23], et des développements à tout ordre par D. Borisov et P. Freitas. Ces auteurs ont étudié le cas des domaines plan dans [11], celui des domaines de  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 1$ ) dans [12]. Notre démonstration est partiellement différente de celle de ces articles, et utilise l'approximation semi-classique appliquée aux opérateurs de Schrödinger. De plus, nous procédons à des estimations d'erreurs supplémentaires, dans des normes de Sobolev. Nous déduisons de ces dernières des estimations d'erreurs uniformes, après applications des injections de Sobolev. Nous pouvons alors utiliser ces estimations uniformes pour localiser les lignes nodales. Cette dernière étape s'inspire de l'article [22] de P. Freitas et D. Krejčířík. Ces auteurs étudient le cas d'un voisinage tubulaire d'une courbe, différent de celui que nous considérons.

## 0.7.2 Spectre des opérateurs d'Aharonov-Bohm

Le premier chapitre de cette thèse se concentre sur les  $k$ -partitions nodales de familles de domaines et recherche des conditions qui assurent qu'elles sont minimales pour  $k$  fixé. Supposons maintenant que  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , borné, à bord régulier, qui ne possède pas de  $k$ -partition minimale nodale ( $k \geq 3$ ). Supposons que  $\mathcal{D}$  est une partition minimale de  $\Omega$ . D'après le théorème de caractérisation magnétique des partitions minimales, que nous avons rappelé (théorème 0.4.3), il existe un potentiel magnétique  $\mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}}$  de type Aharonov-Bohm, avec

$$\alpha = (1/2, \dots, 1/2),$$

tel que  $\mathcal{D}$  est la partition nodale d'une fonction propre  $K_{\mathbf{X}}$ -réelle de l'opérateur d'Aharonov-Bohm  $-\Delta_\alpha^{\mathbf{X}}$ , associée à la valeur propre  $\lambda_k(\mathbf{X}, \alpha)$ .

Cette caractérisation nous a incité à étudier la dépendance du spectre des opérateurs d'Aharonov-Bohm en fonction des pôles, que nous présentons dans un second chapitre. Par exemple, pour comprendre la transition entre partitions minimales nodales et non-nodales, il semble utile d'étudier à quelles conditions les valeurs propres  $\lambda_k(\mathbf{X}, \alpha)$  tendent vers les valeurs propres  $\lambda_k(\Omega)$  du laplacien de Dirichlet sur  $\Omega$ .

Considérons d'abord le cas d'un seul pôle  $X \in \Omega$ , auquel est associé un flux réduit 1/2. Supposons que ce pôle tende vers le bord extérieur de  $\Omega$ . Si ce pôle appartient au bord extérieur de  $\Omega$ , une transformation de jauge montre que  $\lambda_k(X, 1/2) = \lambda_k(\Omega)$ . Si la valeur propre  $\lambda_k(X, 1/2)$  dépend continuellement de  $X$ , on doit s'attendre à ce que  $\lambda_k(X, 1/2)$  tende vers  $\lambda_k(\Omega)$ .

Considérons maintenant le cas de deux pôles  $X_1$  et  $X_2$  dans  $\Omega$ , auxquels sont associés des flux réduits 1/2. Si  $X_1 = X_2$ , on se ramène au cas d'un seul pôle avec un flux réduit 1. On a alors, par transformation de jauge,

$$\lambda_k((X_1, X_2), (1/2, 1/2)) = \lambda_k(\Omega).$$

Supposons encore une dépendance continue. Alors, si  $X_1$  et  $X_2$  tendent vers un même point  $X$ , on s'attend à ce que  $\lambda_k((X_1, X_2), (1/2, 1/2))$  tende vers  $\lambda_k(\Omega)$ .

Nous démontrons dans ce chapitre un théorème général, qui contient tous les cas précédents.

**Théorème 0.7.2.** *Pour tout entier  $k \geq 1$  et tout  $\alpha \in \mathbb{R}^N$ , la fonction  $\mathbf{X} \mapsto \lambda_k(\mathbf{X}, \alpha)$  est continue sur  $\mathbb{R}^{2N}$ .*

Remarquons que les difficultés dans la démonstration du théorème précédent proviennent précisément des phénomènes que nous voulons étudier : convergence d'un pôle vers le bord ou fusion de deux pôles. Si nous les évitons, la théorie classique de perturbation des opérateurs autoadjoints permet d'obtenir une bien plus grande régularité, du moins dans le cas d'une valeur propre simple.

**Théorème 0.7.3.** Notons  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  et  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Soient  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2N}$ , et un entier  $k \geq 1$ , tels que  $X_i \notin \partial\Omega$  pour tout  $1 \leq i \leq N$ ,  $X_i \neq X_j$  pour tous  $i \neq j$ , et  $\lambda_k(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha})$  est une valeur propre simple. La fonction

$$(t_1, t_2, \dots, t_{2N-1}, t_{2N}) \mapsto \lambda_k((X_1 + t_1\mathbf{e}_1 + t_2\mathbf{e}_2, \dots, X_N + t_{2N-1}\mathbf{e}_1 + t_{2N}\mathbf{e}_2), \boldsymbol{\alpha})$$

est alors analytique au voisinage de 0.

Notons enfin que la démonstration du précédent théorème peut être modifiée afin de donner le résultat suivant.

**Théorème 0.7.4.** Soient  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^N$  et  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2N}$ . Fixons  $1 \leq i \leq N$ , avec  $X_i \in \Omega$ . Définissons, pour tous  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , et tout entier  $k \geq 1$

$$\mathbf{X}(t) = (X_1, \dots, X_i + t\mathbf{v}, \dots, X_N)$$

et  $\lambda_k(t) = \lambda_k(\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\alpha})$ .

Supposons que la valeur propre  $\lambda_k(0)$  est simple, et admet une fonction propre  $K_{\mathbf{X}}$ -réelle ayant au moins trois lignes nodales qui se rencontrent en  $X_i$ . Alors  $\lambda'_k(0) = 0$ .

Ce dernier résultat nous indique que les partitions minimales correspondent à des points critiques de la fonction  $\mathbf{X} \mapsto \lambda_k(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha})$  (voir aussi [39, 10] pour une autre démonstration et des résultats complémentaires).

### 0.7.3 Partitions minimales d'un secteur

Le travail présenté dans le troisième chapitre a été réalisé en collaboration avec V. Bonnaillie-Noël [9]. Nous nous intéressons aux partitions minimales de secteurs

$$\Sigma_\alpha = \left\{ (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) : 0 < \rho < 1 \text{ and } -\frac{\alpha}{2} < \theta < \frac{\alpha}{2} \right\},$$

en fonction de l'ouverture angulaire  $\alpha \in (0, 2\pi]$ .

Nous noterons  $\lambda_k(\alpha)$  la  $k$ -ième valeur propre du secteur et  $u_k^\alpha$  une fonction propre associée.

Nous commençons par déterminer pour quels angles les  $k$ -partitions minimales sont nodales. Nous montrons que pour tout  $k$ , les  $k$ -partitions minimales sont nodales pour  $\alpha$  petit. Nous remarquons de plus que, dans ce cas, les  $k$ -partitions minimales sont radiales.

**Proposition 0.7.1.** Il existe une suite décroissante  $(\alpha_k^1)_{k \geq 1}$  de réels contenus dans  $(0, 2\pi)$  tels que, pour tout  $k \geq 1$  et tout  $0 < \alpha < \alpha_k^1$ , il existe une unique  $k$ -partition minimale de  $\Sigma_\alpha$ , qui est nodale. Cette partition est la partition nodale de  $u_k^\alpha$ , et on a alors

$$\mathfrak{L}_k(\Sigma_\alpha) = \lambda_k(\alpha), \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_k^1).$$

La preuve de cette proposition repose sur l'expression explicite des valeurs propres du laplacien de Dirichlet sur le secteur et d'une base de fonctions propres. Ces calculs font intervenir les fonctions de Bessel de première espèce. Nous obtenons alors le résultat désiré à l'aide de développements asymptotiques des zéros de ces fonctions. Notons que ce résultat ne rentre pas dans le cadre de l'étude asymptotique du premier chapitre.

Nous trouvons également, pour certaines valeurs de  $k$ , des  $k$ -partitions minimales nodales pour  $\alpha$  proche de  $2\pi$ .

**Proposition 0.7.2.** Il existe des réels  $0 < \alpha_2^2 \leq \alpha_3^2 \leq \alpha_4^2 \leq \alpha_5^2 < 2\pi$  tels que, pour tout  $\alpha \in [\alpha_k^2, 2\pi]$ , la partition nodale associée à la fonction propre  $u_k^\alpha$  est une  $k$ -partition minimale. On a par conséquent

$$\mathfrak{L}_k(\Sigma_\alpha) = \lambda_k(\alpha), \quad \forall \alpha \in [\alpha_k^2, 2\pi], \forall k \in \{2, \dots, 5\}.$$

On en déduit que pour  $2 \leq k \leq 5$  et  $\alpha \in (\alpha_k^2, 2\pi]$ , la  $k$ -partition minimale est un découpage en  $k$  secteurs de même ouverture angulaire.

De plus, pour  $k \geq 6$ , la  $k$ -partition obtenue en découplant  $\Sigma_\alpha$  en  $k$  secteurs égaux n'est minimale pour aucune valeur de  $\alpha$ .



Nous nous intéressons ensuite plus particulièrement aux 3-partitions minimales. Les résultats ci-dessus nous disent à quelles conditions sur  $\alpha$  les 3-partitions minimales de  $\Sigma_\alpha$  sont nodales.

**Proposition 0.7.3.** *Si  $\alpha \in (0, \alpha_3^1] \cup [\alpha_3^2, 2\pi]$ , alors  $\mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha) = \lambda_3(\alpha)$  et toutes les 3-partitions minimales sont nodales. Si  $\alpha \in (\alpha_3^1, \alpha_3^2)$ , alors  $\lambda_3(\alpha) < \mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha) < L_3(\Sigma_\alpha)$  et aucune 3-partition minimale n'est nodale. Numériquement,  $\alpha_3^1 \simeq 0.1579\pi \simeq 0.4961$  et  $\alpha_3^2 \simeq 0.7761\pi \simeq 2.4382$ .*

Nous recherchons alors des candidats pour les 3-partitions minimales dans le cas où elles ne sont pas nodales, c'est à dire lorsque  $\alpha \in (\alpha_3^1, \alpha_3^2)$ . Nous commençons par rechercher ces candidats parmi les 3-partitions qui sont symétriques par rapport à la droite  $\{y = 0\}$ . Suivant la méthode présentée dans la sous-section 0.6.1, nous nous ramenons à un problème spectral pour le laplacien sur un demi-secteur, avec conditions au bord mixtes. Les calculs numériques montrent que seule la condition mixte Neumann-Dirichlet, correspondant au cas (f2) de la figure 6, permet d'obtenir de bon candidats. Ces calculs dans le cas symétrique améliorent les bornes supérieures connues sur  $\mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha)$ .

Nous résumons ces résultats numériques sous la forme d'un graphe (voir figure 9) qui donne un encadrement de l'énergie minimale  $\mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha)$  en fonction de l'angle  $\alpha \in (\alpha_3^1, \alpha_3^2)$ . Les courbes

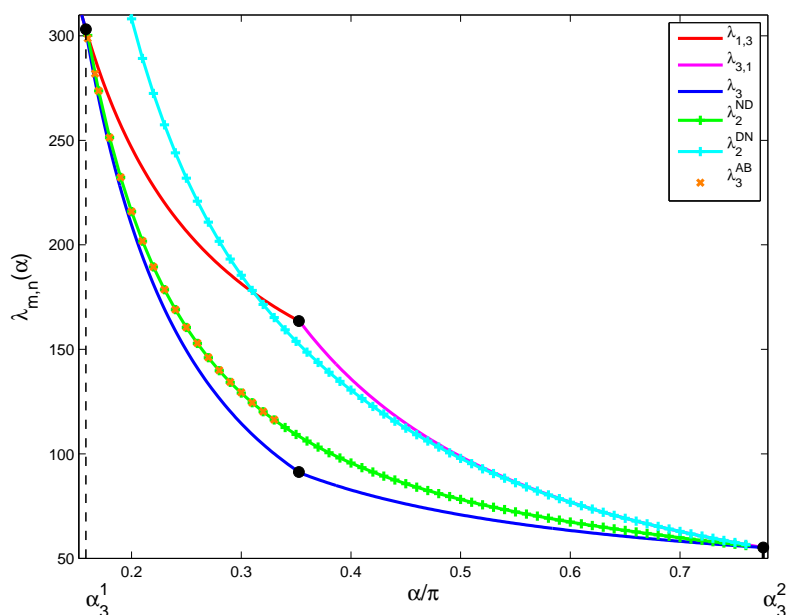


FIGURE 9 – Encadrement de  $\mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha)$  en fonction de  $\alpha$ .

annotées par  $\lambda_{1,3}$  et  $\lambda_{3,1}$  sur cette figure majorent  $L_3(\Sigma_\alpha)$ , et donc majorent  $\mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha)$ . La courbe de  $\lambda_2^{ND}$  correspond à l'énergie des meilleurs candidats symétriques, et fournit une bien meilleure majoration de  $\mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha)$ . Notons que  $\lambda_2^{DN}$ , qui est l'énergie de l'autre type possible de partition symétrique avec un point singulier, est toujours plus grande que  $\lambda_2^{ND}$ .

Dans le cas  $\alpha = \pi/3$ , nous nous inspirons des simulations numériques pour construire une 3-partition symétrique dont la frontière est constituée de segments de droites et dont les sous-domaines ont tous la même aire. Nous exhibons ainsi un candidat pour  $\mathfrak{L}_3(\Sigma_{\pi/3})$ .

Nous utilisons enfin l'approche du revêtement à deux feuillets, ou de façon équivalente l'approche des opérateurs d'Aharonov-Bohm avec flux  $1/2$ , afin de trouver des candidats non symétriques. Pour  $\alpha = \alpha_3^1 + \varepsilon$ , avec  $\varepsilon > 0$  et proche de 0, nous obtenons par cette méthode des candidats d'énergie inférieure à celle des partitions symétriques précédemment obtenues. Ceci réfute l'idée que tout domaine symétrique admet une 3-partition minimale symétrique. À notre connaissance c'est le premier contre-exemple connu. Les résultats de ces calculs numériques correspondent aux points annotés par  $\lambda_3^{AB}$  sur la figure 9.

### 0.7.4 Partitions minimales pour une famille de tores

Nous étudions dans le quatrième chapitre les  $k$ -partitions minimales des tores  $T(a, b)$ , avec  $0 < b \leq a$  (voir la section 0.5.4). Nous rappelons les résultats de B. Helffer et T. Hoffmann-Ostenhof, selon lesquels la partition  $\mathcal{D}_k(a, b)$ , qui découpe le tore  $T(a, b)$  en  $k$  bandes identiques dans le sens de la longueur, est minimale si le rapport  $b/a$  est assez petit,

Une de nos motivations est d'étudier ce que deviennent les partitions minimales lorsque le rapport  $b/a$  augmente. Nous nous intéressons en particulier aux valeurs de ce rapport pour lesquelles la partition  $\mathcal{D}_k(a, b)$  cesse d'être minimale. Plus précisément, nous définissons, pour tout entier  $k$ , les valeurs de transitions

$$b_k = \sup\{b > 0 ; \forall 0 < b' < b, \mathcal{D}_k(1, b') \text{ est une } k\text{-partition minimale de } T(1, b')\}$$

et

$$\bar{b}_k = \sup\{b > 0 ; \mathcal{D}_k(1, b) \text{ est une } k\text{-partition minimale de } T(1, b)\}.$$

Les résultats de la sous-section 0.5.4 impliquent que  $b_k = \bar{b}_k = 2/k$  pour tout entier  $k$  pair, et que  $b_k \geq 1/k$  pour tout entier  $k$  impair. En nous inspirant des méthodes de [30], nous aboutissons à la conjecture suivante.

**Conjecture 0.7.5.** *Pour tout  $k \geq 3$  impair,*

$$b_k = \frac{2}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

Nous présentons de plus, pour  $k = 3$ , des candidats à être des 3-partitions minimales de  $T(1, 1/\sqrt{2})$ . Ces candidats sont obtenus comme projection sur  $T(1, 1/\sqrt{2})$  de 6-partitions nodales sur le revêtement à deux feuillettes  $T(2, 1/\sqrt{2})$ .

Pour tester ces conjectures et pour chercher des partitions minimales lorsque le rapport  $b/a$  est grand, nous avons besoin d'une méthode d'optimisation efficace. Nous avons adapté la méthode utilisée par Bourdin, Bucur et Oudet dans [13], que nous avons déjà rappelée à la sous-section 0.6.4. Nous lui avons apporté quelques modifications. L'article [13] portait uniquement sur l'optimisation de l'énergie  $\Lambda_{k,1}$ . Nous avons étendu la méthode aux énergies  $\Lambda_{k,p}$ , avec  $1 \leq p < \infty$ . Nous avons de plus rajouté une étape de construction d'une  $k$ -partition à partir du résultat de l'optimisation, et de calcul de l'énergie de cette  $k$ -partition par la méthode des différences finies, sans relaxation.

Nous avons appliqué cette méthode d'optimisation à la recherche des  $k$ -partitions de  $T(1, b)$ , pour  $k = 3, 4, 5$ , et pour une large gamme de valeurs de  $b$ . Nous avons en particulier effectué des simulations plus nombreuses au voisinage des valeurs de transition (connues ou conjecturées). Les résultats semblent cohérents avec la conjecture 0.7.5. Les énergies calculées améliorent les majorations connues sur l'énergie minimale. De plus, les figures obtenues suggèrent des candidats pour certaines partitions minimales

Guidés par les calculs numériques, nous avons cherché à obtenir des majorations de l'énergie minimale en testant des exemples de  $k$ -partitions. Nous construisons des familles de  $k$ -partitions, pour  $k = 3, 4, 5$ , qui sont des pavages du tore par des polygones identiques. Ces pavages vérifient de plus la propriété des angles égaux à tous leurs sommets. Pour certains  $k$  et certaines valeurs du rapport  $b/a$ , nous obtenons ainsi des partitions visuellement très proches des meilleurs candidats obtenus à l'aide de l'algorithme d'approximation. Dans d'autres cas, ces pavages ne semblent pas optimaux. Quoiqu'il en soit, la première valeur propre du laplacien de Dirichlet sur le domaine polygonal donne une majoration de l'énergie minimale. Nous la calculons par la méthode des éléments finis, et comparons la majoration obtenue avec celle des étapes précédentes.

La construction de ces pavages nous conduit à une série de conjectures sur les énergies minimales pour les partitions du tore  $T(1, 1)$ . Les majorations des énergies minimales sont immédiates à partir de la définition. Pour énoncer ces conjectures, considérons des domaines hexagonaux tels que celui représenté sur la figure 10. Nous supposons que les côtés opposés de ce domaine sont parallèles et que tous ses angles intérieurs valent  $2\pi/3$ . Nous supposons également qu'il a quatre côtés égaux.

**Conjecture 0.7.6.** *Notons  $Hex_{1,1}^3$  un domaine du type de celui représenté sur la figure 10, avec*

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{6}} \text{ et } \ell = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}.$$

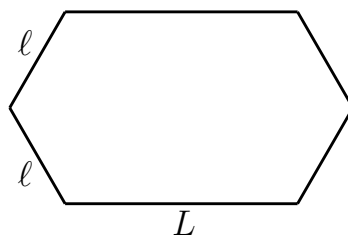


FIGURE 10 – Domaine de pavage hexagonal.

On a

$$\mathfrak{L}_3(T(1,1)) = \lambda_1^D(\text{Hex}_{1,1}^3).$$

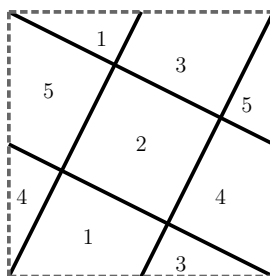
**Conjecture 0.7.7.** Notons  $\text{Hex}_{1,1}^4$  un domaine du type de celui représenté sur la figure 10, avec

$$L = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \text{ et } \ell = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

On a

$$\mathfrak{L}_4(T(1,1)) = \lambda_1^D(\text{Hex}_{1,1}^4).$$

Les calculs numériques semblent enfin indiquer que la 5-partition de  $T(1,1)$  par des carrés, représentée sur la figure 11, est minimale. Ceci peut se traduire en une conjecture.

FIGURE 11 – 5-partition de  $T(1,1)$ .

**Conjecture 0.7.8.**

$$\mathfrak{L}_5(T(1,1)) = 10\pi^2.$$

## Bibliographie

- [1] M. ABRAMOWITZ et I. A. STEGUN : *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55 de *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*. U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964.
- [2] Y. AHARONOV et D. BOHM : Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, 115:485–491, Aug 1959.
- [3] B. ALZIARY, J. FLECKINGER-PELLÉ et P. TAKÁČ : Eigenfunctions and Hardy inequalities for a magnetic Schrödinger operator in  $\mathbb{R}^2$ . *Math. Methods Appl. Sci.*, 26(13):1093–1136, 2003.
- [4] P. BÉRARD et B. HELFFER : Remarks on the boundary set of spectral equipartitions. Prépublication. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00678905>. version 2. À paraître dans *Philosophical Transactions A*.
- [5] J. BERGER et J. RUBINSTEIN : On the zero set of the wave function in superconductivity. *Comm. Math. Phys.*, 202(3):621–628, 1999.

- [6] V. BONNAILLIE-NOËL et B. HELFFER : Numerical analysis of nodal sets for eigenvalues of Aharonov-Bohm Hamiltonians on the square with application to minimal partitions. *Exp. Math.*, 20(3):304–322, 2011.
- [7] V. BONNAILLIE-NOËL, B. HELFFER et T. HOFFMANN-OSTENHOF : Aharonov-Bohm Hamiltonians, isospectrality and minimal partitions. *J. Phys. A*, 42(18):185203, 20, 2009.
- [8] V. BONNAILLIE-NOËL, B. HELFFER et G. VIAL : Numerical simulations for nodal domains and spectral minimal partitions. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 16(1):221–246, 2010.
- [9] V. BONNAILLIE-NOËL et C. LÉNA : Spectral minimal partitions of a sector. Prépublication. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00763467>. À paraître dans *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 26 p (2013).
- [10] V. BONNAILLIE-NOËL, B. NORIS, M. NYS et S. TERRACINI : On the eigenvalues of Aharonov-Bohm operators with varying poles. Prépublication 2013.
- [11] D. BORISOV et P. FREITAS : Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin planar domains. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(2):547–560, 2009.
- [12] D. BORISOV et P. FREITAS : Asymptotics of Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin domains in  $\mathbb{R}^d$ . *J. Funct. Anal.*, 258(3):893–912, 2010.
- [13] B. BOURDIN, D. BUCUR et É. OUDET : Optimal partitions for eigenvalues. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31(6):4100–4114, 2009/10.
- [14] J. BOURGAIN : On Pleijel’s nodal domain theorem. *ArXiv e-prints*, août 2013.
- [15] D. BUCUR, G. BUTTAZZO et A. HENROT : Existence results for some optimal partition problems. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 8(2):571–579, 1998.
- [16] L. A. CAFFERELLI et F. H. LIN : An optimal partition problem for eigenvalues. *J. Sci. Comput.*, 31(1-2):5–18, 2007.
- [17] S. Y. CHENG : Eigenfunctions and nodal sets. *Comment. Math. Helv.*, 51(1):43–55, 1976.
- [18] M. CONTI, S. TERRACINI et G. VERZINI : On a class of optimal partition problems related to the Fučík spectrum and to the monotonicity formulae. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 22(1):45–72, 2005.
- [19] M. CONTI, S. TERRACINI et G. VERZINI : A variational problem for the spatial segregation of reaction-diffusion systems. *Indiana Univ. Math. J.*, 54(3):779–815, 2005.
- [20] NIST Digital Library of Mathematical Functions. <http://dlmf.nist.gov/>, Release 1.0.5 of 2012-10-01. Online companion to [40].
- [21] M. P. do CARMO : *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976.
- [22] P. FREITAS et D. KREJČIŘÍK : Location of the nodal set for thin curved tubes. *Indiana Univ. Math. J.*, 57(1):343–375, 2008.
- [23] L. FRIEDLANDER et M. SOLOMYAK : On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip. *Israel J. Math.*, 170:337–354, 2009.
- [24] S. GALLOT, D. HULIN et J. LAFONTAINE : *Riemannian Geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 3ème édition, 2004.
- [25] A. HATCHER : *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [26] B. HELFFER : On spectral minimal partitions : a survey. *Milan J. Math.*, 78(2):575–590, 2010.
- [27] B. HELFFER, M. HOFFMANN-OSTENHOF, T. HOFFMANN-OSTENHOF et M. P. OWEN : Nodal sets for groundstates of Schrödinger operators with zero magnetic field in non-simply connected domains. *Comm. Math. Phys.*, 202(3):629–649, 1999.
- [28] B. HELFFER et T. HOFFMANN-OSTENHOF : On minimal partitions : new properties and applications to the disk. In *Spectrum and dynamics*, volume 52 de *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 119–135. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.
- [29] B. HELFFER et T. HOFFMANN-OSTENHOF : Remarks on two notions of spectral minimal partitions. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 20(1):249–263, 2010.

- [30] B. HELFFER et T. HOFFMANN-OSTENHOF : Minimal partitions for anisotropic tori. *J. Spectr. Theory*, À paraître.
- [31] B. HELFFER et T. HOFFMANN-OSTENHOF : On a magnetic characterization of spectral minimal partitions. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, À paraître.
- [32] B. HELFFER, T. HOFFMANN-OSTENHOF et S. TERRACINI : Nodal domains and spectral minimal partitions. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(1):101–138, 2009.
- [33] B. HELFFER, T. HOFFMANN-OSTENHOF et S. TERRACINI : On spectral minimal partitions : the case of the sphere. In *Around the research of Vladimir Maz'ya. III*, volume 13 de *Int. Math. Ser. (N. Y.)*, pages 153–178. Springer, New York, 2010.
- [34] A. HENROT et M. PIERRE : *Variation et Optimisation de Formes : Une Analyse Géométrique*. Mathématiques et Applications. Springer, 2005.
- [35] L. HILLAIRET et C. JUDGE : The eigenvalues of the Laplacian on domains with small slits. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362(12):6231–6259, 2010.
- [36] T. HOFFMANN-OSTENHOF, P. W. MICHOR et N. NADIRASHVILI : Bounds on the multiplicity of eigenvalues for fixed membranes. *Geom. Funct. Anal.*, 9(6):1169–1188, 1999.
- [37] T. IWAI et Y. YABU : Aharonov-Bohm quantum systems on a punctured 2-torus. *J. Phys. A*, 39(4):739–777, 2006.
- [38] A. LAPTEV et T. WEIDL : Hardy inequalities for magnetic Dirichlet forms. In *Mathematical results in quantum mechanics (Prague, 1998)*, volume 108 de *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 299–305. Birkhäuser, Basel, 1999.
- [39] B. NORIS et S. TERRACINI : Nodal sets of magnetic Schrödinger operators of Aharonov-Bohm type and energy minimizing partitions. *Indiana Univ. Math. J.*, 59(4):1361–1403, 2010.
- [40] F. W. J. OLVER, D. W. LOZIER, R. F. BOISVERT et C. W. CLARK, éditeurs. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press, New York, NY, 2010. Print companion to [20].
- [41] K. PANKRASHKIN et S. RICHARD : Spectral and scattering theory for the Aharonov-Bohm operators. *Rev. Math. Phys.*, 23(1):53–81, 2011.
- [42] Å. PLEIJEL : Remarks on Courant's nodal line theorem. *Comm. Pure Appl. Math.*, 9:543–550, 1956.
- [43] S. STEINERBERGER : A geometric uncertainty principle with an application to Pleijel's estimate. *ArXiv e-prints*, août 2013.
- [44] K. WATANABE : Sur les ensembles nodaux. In *Differential geometry of submanifolds (Kyoto, 1984)*, volume 1090 de *Lecture Notes in Math.*, pages 99–106. Springer, Berlin, 1984.



# Chapitre 1

## Étude spectrale d'un domaine mince

### 1.1 Introduction

#### 1.1.1 Motivation

Notons  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  borné et suffisamment régulier (disons lipschitzien) et  $-\Delta_\Omega^D$  l'extension de Friedrichs du laplacien de Dirichlet sur  $\Omega$ . Rappelons que l'opérateur  $-\Delta_\Omega^D$  est autoadjoint, positif et a une résolvante compacte. Notons  $(\lambda_k(\Omega))_{k \geq 1}$  la suite de ses valeurs propres, rangées par ordre croissant et comptées avec multiplicité. Soit  $u$  une fonction propre à valeurs réelles, associée à la valeur propre  $\lambda_k(\Omega)$ . Le résultat classique de Courant (voir par exemple [4]) donne une borne sur le nombre de domaines nodaux de  $u$ .

**Théorème 1.1.1** (Courant).

*Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Si  $u$  est une fonction propre de  $-\Delta_\Omega^D$  associée à la valeur propre  $\lambda_k(\Omega)$ , alors  $u$  a au plus  $k$  domaines nodaux.*

B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof et S. Terracini ont montré dans l'article [13] que, si la fonction  $u$  dans le théorème 1.1.1 a  $k$  domaines nodaux (on dit alors qu'elle est *Courant-stricte*), l'ensemble de ses domaines nodaux est une  $k$ -partition minimale de  $\Omega$ . Le résultat que nous voulons démontrer nous a été inspiré par l'étude d'exemples pour lesquels valeurs propres et fonctions propres sont connues (par exemple rectangles, tores ou secteurs angulaires). Nous cherchons à montrer que pour un domaine donné, un entier  $k$  étant fixé, il est possible, sous certaines hypothèses, d'aplatir suffisamment ce domaine pour que les  $k$  premières valeurs propres soient simples, et leurs fonctions propres associées Courant-strictes.

Hormis les exemples explicites contenus dans les articles [13, 11, 1], un premier résultat de cette nature a été obtenu par P. Freitas et D. Krejčířík, dans le cas d'un voisinage tubulaire d'une courbe contenue dans  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d \geq 1$  (voir [6]). Le but de ce travail est de démontrer un résultat analogue pour des familles d'ouverts de  $\mathbb{R}^2$  d'un type différent.

#### 1.1.2 Formulation du problème

Fixons le cadre de notre étude. Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels strictement positifs et  $h$  une fonction de classe  $C^\infty$  de  $] -a, b[$  dans  $\mathbb{R}$ . Supposons que  $h(t) > 0$  pour tout  $t \in ] -a, b[$  et que 0 est pour  $h$  un point de maximum strict non dégénéré. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , définissons le domaine ouvert  $\Omega_\varepsilon$  de  $\mathbb{R}^2$  par

$$\Omega_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; -a < x_1 < b \text{ et } -\varepsilon h(x_1) < x_2 < \varepsilon h(x_1)\}.$$

Nous posons, pour alléger les notations,  $\lambda_k(\varepsilon) = \lambda_k(\Omega_\varepsilon)$ . Nous allons démontrer la proposition suivante.

**Théorème 1.1.2.** *Pour tout entier  $k \geq 1$ , il existe  $\varepsilon_k > 0$  tel que, si  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_k$ , les valeurs propres  $\lambda_\ell(\varepsilon)$  pour  $\ell = 1, \dots, k$  sont distinctes, et les fonctions propres associées sont toutes Courant-strictes.*

Notons que les hypothèses autorisent  $h(-a) = 0$ , ou  $h(b) = 0$ , ou les deux à la fois. Le cas d'une famille d'ellipses s'aplatissant sur leur grand axe est donc contenu dans le théorème 1.1.2 : il suffit de choisir  $a = b = 1$  et  $h(t) = \sqrt{1-t^2}$ .

L'étude du comportement asymptotique des valeurs propres pour un domaine de largeur proportionnelle à  $\varepsilon$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, a été faite par L. Friedlander et M. Solomyak dans l'article [7], où les premiers termes du développement asymptotique sont donnés. Des développements à tout ordre ont été obtenus par D. Borisov et P. Freitas, pour des domaines plan dans [2] et pour des domaines contenus dans  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 1$ ) dans [3].

Nous reprenons la méthode de ces deux articles pour obtenir des développements formels en puissances de  $\varepsilon^{1/2}$ . Nous donnons en revanche une preuve différente du fait que ces développements formels donnent bien des développements asymptotiques. Notre preuve utilise l'approximation semi-classique des valeurs propres et fonctions propres d'un opérateur de Schrödinger (voir [5, 14, 9]).

Nous démontrons ensuite l'analogie d'inégalités elliptiques classiques, dans des espaces de Sobolev adaptés au problème. Après application des injections de Sobolev, nous en déduisons la convergence uniforme des fonctions propres approchées et de leurs dérivées. Nous pouvons alors reprendre les arguments de [6] pour localiser les ensembles nodaux.

### 1.1.3 Perspectives

La méthode présentée ici peut s'adapter à d'autres contextes. L'idée centrale reste de considérer une famille de problèmes spectraux, sur des domaines bidimensionnels de plus en plus minces, et de montrer que sa limite est caractérisée par un problème spectral de dimension 1.

Nous pourrions ainsi remplacer la condition de Dirichlet par une condition de Neumann, sur un seul des bords ou sur les deux à la fois. Nous obtiendrions un résultat analogue au théorème 1.1.2.

Nous pourrions aussi considérer des domaines s'aplatissant sur un cercle et non sur un segment, comme des cylindres ou des anneaux. Le problème limite serait alors un problème de Sturm-Liouville périodique. Les conditions au bord pourraient alors être de plusieurs types : Dirichlet ou Neumann sur les deux bords, ou Dirichlet sur un bord et Neumann sur l'autre. Il est aussi possible de considérer des familles de tores de plus en plus minces. Notons que dans tous ces cas, le problème limite impose un nombre pair de domaines nodaux pour les premières fonctions propres. Nous montrerions ainsi, si  $k$  est un entier pair, que pour un domaine assez mince, la  $k$ -partition minimale consiste en un découpage en  $k$  bandes verticales.

Il devrait également être possible de trouver les  $k$ -partitions minimales, pour  $k$  impair, sur un tore suffisamment mince, ou sur un cylindre suffisamment mince avec conditions de Neumann sur les bords. Il suffirait pour cela d'utiliser les arguments topologiques invoqués par B. Helffer et T. Hoffmann-Ostenhof dans [12, 10]. Nous pourrions ainsi montrer que les  $k$ -partitions minimales se relèvent en  $2k$ -partitions, sur un revêtement à deux feuilletés du domaine. Nous pourrions alors utiliser nos résultats asymptotiques sur les ensembles nodaux. Nous montrerions ainsi que pour un domaine assez mince, la  $k$ -partition minimale consiste en un découpage en  $k$  bandes verticales.

## 1.2 Construction formelle d'un quasi-mode

### 1.2.1 Reformulation du problème

La construction de valeurs propres et de fonctions propres approchées du laplacien est simplifiée dans des coordonnées adaptées. Remarquons tout d'abord que l'aire de l'ouvert  $\Omega_\varepsilon$  tend vers 0 lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, et donc, d'après l'inégalité de Faber-Krahn, les valeurs propres  $\lambda_k(\varepsilon)$  tendent vers  $+\infty$ . Comme nous le verrons dans la suite, il est plus judicieux de considérer l'opérateur  $-\varepsilon^2 \Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$ , ce qui revient à multiplier les valeurs propres par  $\varepsilon^2$  sans changer les fonctions propres. Notons

$$\mu_k(\varepsilon) = \varepsilon^2 \lambda_k(\varepsilon).$$



Nous allons chercher un développement en puissances de  $\varepsilon$  (non nécessairement entières) de  $\mu_k(\varepsilon)$ , et ce faisant nous construirons des fonctions propres approchées.

Nous devons nous attendre (et cela sera justifié dans l'étude de convergence faite dans les sections 1.3 et 1.4) à ce que seule la connaissance de la fonction  $h$  au voisinage du point de maximum 0 soit nécessaire pour cette construction formelle. Il est alors plus simple pour l'analyse qui va suivre d'étudier le laplacien sur un ouvert  $\tilde{\Omega}_\varepsilon$  modifié :

$$\tilde{\Omega}_\varepsilon = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; -\varepsilon\tilde{h}(x_1) < x_2 < \varepsilon\tilde{h}(x_1) \right\}.$$

Dans cette définition, nous appelons  $\tilde{h}$  une fonction de  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  qui vérifie les propriétés suivantes

$$\tilde{h}|_{[-a/2, b/2]} = h|_{[-a/2, b/2]}, \quad (1.2.1)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0 < c \leq \tilde{h}(t) \leq C = h(0), \quad (1.2.2)$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus ]-a, b[, \tilde{h}(t) = h_\infty < C. \quad (1.2.3)$$

On suppose aussi que 0 est un point de maximum strict pour  $\tilde{h}$ .

Notons que les conditions imposées sont quelque peu arbitraires, l'essentiel étant que 0 reste un point de maximum strict, que  $\tilde{h}$  coïncide avec  $h$  sur un voisinage de 0, et qu'elle ait en  $-\infty$  et  $+\infty$  une limite supérieure strictement inférieure à  $h(0)$  et une limite inférieure strictement positive. Notons également que l'opérateur  $-\Delta_{\tilde{\Omega}_\varepsilon}^D$  n'est pas à résolvante compacte et que son spectre essentiel n'est pas vide. Nous verrons néanmoins que le bas du spectre de  $-\Delta_{\tilde{\Omega}_\varepsilon}^D$  est constitué de valeurs propres sous le spectre essentiel qui approximent les  $\lambda_k(\varepsilon)$ .

Le changement de variables

$$\begin{cases} y_1 &= \varepsilon^{-1/2}x_1, \\ y_2 &= \frac{x_2}{\varepsilon\tilde{h}(x_1)}, \end{cases} \quad (1.2.4)$$

établit une bijection entre  $\tilde{\Omega}_\varepsilon$  et

$$\Pi = \mathbb{R} \times ]-1, 1[.$$

Calculons le laplacien dans les nouvelles coordonnées. Par la règle de dérivation des fonctions composées, nous avons

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} &= \varepsilon^{-1/2}\partial_{y_1} - \frac{\tilde{h}'(x_1)}{\varepsilon\tilde{h}(x_1)^2}x_2\partial_{y_2}, \\ \partial_{x_2} &= \frac{1}{\varepsilon\tilde{h}(x_1)}\partial_{y_2}, \end{aligned}$$

ou encore, comme  $x_2 = \varepsilon\tilde{h}(\varepsilon^{1/2}y_1)y_2$ ,

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} &= \varepsilon^{-1/2}\partial_{y_1} - \frac{\tilde{h}'(\varepsilon^{1/2}y_1)}{\tilde{h}(\varepsilon^{1/2}y_1)}y_2\partial_{y_2}, \\ \partial_{x_2} &= \frac{1}{\varepsilon\tilde{h}(\varepsilon^{1/2}y_1)}\partial_{y_2}. \end{aligned}$$

Posons, pour  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\theta(t) = \frac{\tilde{h}'(t)}{\tilde{h}(t)}$$

et

$$\kappa(t) = \frac{1}{\tilde{h}(t)^2}.$$

Après changement de variables, l'opérateur différentiel  $-\varepsilon^2 \Delta$  défini sur  $\tilde{\Omega}_\varepsilon$  avec conditions de Dirichlet est unitairement équivalent à l'opérateur

$$S(\varepsilon) = -\kappa(\varepsilon^{1/2}y_1)\partial_{y_2}^2 - \varepsilon \left( \partial_{y_1} - \varepsilon^{1/2}y_2\theta(\varepsilon^{1/2}y_1)\partial_{y_2} \right)^2, \quad (1.2.5)$$

défini sur  $\Pi$  avec conditions de Dirichlet.

Dans cette section nous donnons un développement formel des valeurs propres et fonctions propres de cet opérateur. Nous retrouvons les résultats antérieurs présentés dans [2]. La méthode utilisée s'inspire également de l'approximation semi-classique exposée dans [9].

### 1.2.2 Développement formel de l'opérateur

D'après les hypothèses faites sur la fonction  $h$ , les fonctions  $\theta$  et  $\kappa$  admettent comme développement de Taylor en 0

$$\theta(t) \sim \sum_{n \geq 1} \theta_n t^n$$

et

$$\kappa(t) \sim \kappa_0 + \sum_{n \geq 2} \kappa_n t^n$$

avec  $\kappa_2 > 0$ .

Posons de plus

$$\theta(t)^2 \sim \sum_{n \geq 2} \gamma_n t^n.$$

En développant le terme de droite de la relation (1.2.5), nous trouvons

$$\begin{aligned} S(\varepsilon) = & -\varepsilon \partial_{y_1}^2 + 2\varepsilon^{3/2}y_2\theta(\varepsilon^{1/2}y_1)\partial_{y_1}\partial_{y_2} - \\ & (\kappa(\varepsilon^{1/2}y_1) + \varepsilon^2y_2^2\theta(\varepsilon^{1/2}y_1)^2)\partial_{y_2}^2 + \\ & \varepsilon^2y_2(\theta'(\varepsilon^{1/2}y_1) - \theta(\varepsilon^{1/2}y_1)^2)\partial_{y_2}. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

En utilisant la formule (1.2.6) et les développements de Taylor précédents, nous obtenons alors un développement formel en puissances de  $\varepsilon^{1/2}$  de l'opérateur  $S(\varepsilon)$ .

Ce développement s'écrit

$$S_0 + \sum_{n \geq 2} \varepsilon^{n/2} S_n,$$

avec

$$\begin{aligned} S_0 &= -\kappa_0 \partial_{y_2}^2, \\ S_2 &= -\partial_{y_1}^2 - \kappa_2 y_1^2 \partial_{y_2}^2, \\ S_3 &= -\kappa_3 y_1^3 \partial_{y_2}^2, \end{aligned}$$

et, pour tout  $n \geq 4$ ,

$$S_n = 2y_1^{n-3}y_2\theta_{n-3}\partial_{y_1}\partial_{y_2} - (\kappa_n y_1^n + y_1^{n-4}y_2^2\gamma_{n-4})\partial_{y_2}^2 + ((n-3)\theta_{n-3} - \gamma_{n-4})y_1^{n-4}y_2\partial_{y_2}.$$

Posons  $S_1 = 0$  afin de simplifier les formules qui suivent. Il est naturel de chercher un développement en puissances de  $\varepsilon^{1/2}$  d'une valeur propre et d'une fonction propre, c'est à dire deux séries formelles

$$\sum_{n \geq 0} \varepsilon^{n/2} \mu_n$$

et

$$\sum_{n \geq 0} \varepsilon^{n/2} v_n(y_1, y_2)$$

telles que le produit de Cauchy formel

$$\left( \sum_{n \geq 0} \varepsilon^{n/2} (S_n - \mu_n) \right) \left( \sum_{n \geq 0} \varepsilon^{n/2} v_n \right)$$

soit nul.

Pour préciser nos résultats, nous introduisons :

**Définition 1.2.1.** Notons  $\mathcal{H}$  le sous-espace de  $L^2(\Pi)$  engendré par les fonctions de la forme

$$(y_1, y_2) \mapsto f(y_1)g(y_2),$$

avec  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $g \in C^\infty([-1, 1])$  et  $g(-1) = g(1) = 0$ .

Nous allons démontrer le résultat suivant.

**Proposition 1.2.1.** Il existe une suite de nombres réels, notée  $(\mu_n)_{n \geq 0}$ , et une suite de fonctions dans  $\mathcal{H}$ , notée  $(v_n)_{n \geq 0}$ , telles que pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\sum_{p+q=n} (S_p - \mu_p) v_q = 0, \quad (1.2.7)$$

et la fonction  $v_0$  n'est pas identiquement nulle.

### 1.2.3 Premiers termes du développement

Supposons l'existence d'un développement de la forme indiquée dans la proposition 1.2.1. Pour  $n = 0$ , l'équation (1.2.7) donne

$$(-\kappa_0 \partial_{y_2}^2 - \mu_0) v_0(y_1, y_2) = 0.$$

avec les conditions de Dirichlet  $v_0(y_1, -1) = v_0(y_1, 1) = 0$  pour tout  $y_1 \in \mathbb{R}$ .

Il est facile de voir que cette équation, ajoutée aux conditions  $v_0 \in \mathcal{H}$  et  $v_0 \neq 0$ , implique que  $\mu_0$  est une valeur propre de l'opérateur  $-\kappa_0 \frac{d^2}{dy_2^2}$  sur  $] -1, 1[$ , avec conditions de Dirichlet. La fonction  $v_0$  est alors de la forme

$$v_0(y_1, y_2) = \varphi_0(y_1) \psi_0(y_2),$$

où  $\psi_0$  est une fonction propre associée à la valeur propre  $\mu_0$ , et  $\varphi_0$  une fonction dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Choisissons  $\psi_0$  de norme 1. Remarquons qu'il existe un entier  $j \geq 1$  tel que

$$\mu_0 = \kappa_0 \frac{\pi^2 j^2}{4}.$$

Notons également que la fonction  $\varphi_0$  reste indéterminée. Nous supposons seulement qu'elle n'est pas nulle. Nous la fixerons dans la suite.

Pour  $n = 1$ , l'équation (1.2.7) donne

$$(-\kappa_0 \partial_{y_2}^2 - \mu_0) v_1(y_1, y_2) - \mu_1 \varphi_0(y_1) \psi_0(y_2) = 0.$$

Considérons la situation à  $y_1$  fixé. Alors la fonction  $y_2 \mapsto \mu_1 \varphi_0(y_1) \psi_0(y_2)$  est dans l'image de l'opérateur  $-\kappa_0 \partial_{y_2}^2 - \mu_0$ . D'après l'alternative de Fredholm, cet espace est l'orthogonal de  $\psi_0$  dans  $L^2(] -1, 1[)$ . La fonction  $\varphi_0$  n'étant pas identiquement nulle, nous trouvons  $\mu_1 = 0$ . Nous en déduisons que la fonction  $v_1$  est de la forme

$$v_1(y_1, y_2) = \varphi_1(y_1) \psi_0(y_2),$$

avec  $\varphi_1$  une fonction dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  à déterminer.

Pour  $n = 2$ , l'équation (1.2.7) donne

$$(-\kappa_0 \partial_{y_2}^2 - \mu_0) v_2(y_1, y_2) + (-\partial_{y_1}^2 - \kappa_2 y_1^2 \partial_{y_2}^2 - \mu_2) \varphi_0(y_1) \psi_0(y_2) = 0.$$

Nous trouvons donc

$$(-\kappa_0 \partial_{y_2}^2 - \mu_0) v_2(y_1, y_2) = - \left( -\partial_{y_1}^2 + \frac{\kappa_2 \mu_0}{\kappa_0} y_1^2 - \mu_2 \right) \varphi_0(y_1) \psi_0(y_2).$$

Pour tout  $y_1$  dans  $\mathbb{R}$ , le membre de droite de l'équation définit une fonction de  $y_2$  qui appartient à l'orthogonal de  $\psi_0$ , d'après l'alternative de Fredholm. Ainsi, pour tout  $y_1$ ,

$$\left\langle \left( -\partial_{y_1}^2 + \frac{\kappa_2 \mu_0}{\kappa_0} y_1^2 - \mu_2 \right) \varphi_0(y_1) \psi_0(y_2), \psi_0(y_2) \right\rangle_{L^2_{y_2}([-1,1])} = 0.$$

Autrement dit,

$$\left( -\frac{d^2}{dy_1^2} + \frac{\kappa_2 \mu_0}{\kappa_0} y_1^2 - \mu_2 \right) \varphi_0(y_1) = 0.$$

Le réel  $\mu_2$  est donc une valeur propre de l'opérateur  $-\frac{d^2}{dy_1^2} + (\kappa_2 \mu_0 / \kappa_0) y_1^2$ , qui est un oscillateur harmonique sur  $\mathbb{R}$ . Il existe donc un entier  $k \geq 1$  tel que

$$\mu_2 = (2k - 1) \sqrt{\kappa_2 \mu_0 / \kappa_0}.$$

La fonction  $\varphi_0$  est une fonction propre associée à  $\mu_2$  (définie à une constante multiplicative près). Alors pour  $(y_1, y_2) \in \Pi$ ,

$$(-\kappa_0 \partial_{y_2}^2 - \mu_0) v_2(y_1, y_2) = 0.$$

Nous en déduisons que  $v_2$  est de la forme  $v_2(y_1, y_2) = \varphi_2(y_1) \psi_0(y_2)$ , avec  $\varphi_2$  une fonction dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . À ce stade la fonction  $\varphi_2$  n'est pas encore déterminée.

Remarquons que dans ces premières étapes, nous avons eu à choisir deux paramètres entiers  $j$  et  $k$  plus grands que 1 et à fixer une constante multiplicative pour le terme  $v_0$ . Nous allons montrer que la construction peut être menée jusqu'à un ordre arbitraire, quelque soit ce choix initial.

### 1.2.4 Développement à un ordre quelconque

Afin de démontrer l'existence d'un développement à tout ordre par récurrence, nous allons préciser sous quelle forme nous recherchons les fonctions  $v_n$ . Notons  $\psi_0$  une fonction dans  $C^\infty([-1, 1])$  telle que  $\psi_0(-1) = \psi_0(1) = 0$  et  $(-\partial_{y_2}^2 - \mu_0) \psi_0(y_2) = 0$ , avec  $\mu_0 \in \mathbb{R}$ . Définissons  $\mathcal{H}_0$  comme l'ensemble des fonctions  $w \in \mathcal{H}$  telles que

$$\langle w(y_1, y_2), \psi_0(y_2) \rangle_{L^2_{y_2}([-1,1])} = 0,$$

pour tout  $y_1 \in \mathbb{R}$ .

C'est un sous-espace de  $\mathcal{H}$ , dont il est facile de montrer qu'il est engendré par les fonctions de la forme

$$(y_1, y_2) \mapsto f(y_1) g(y_2),$$

avec  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $g \in C^\infty([-1, 1])$ ,  $g(-1) = g(1) = 0$  et  $\langle g, \psi_0 \rangle_{L^2([-1,1])} = 0$ .

Nous voulons démontrer par récurrence la proposition 1.2.1 en imposant

$$v_n(y_1, y_2) = \varphi_n(y_1) \psi_0(y_2) + w_n(y_1, y_2), \quad (1.2.8)$$

avec  $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  et  $w_n \in \mathcal{H}_0$ .

Nous avons construit  $\mu_0$  et  $v_0$  convenables dans la sous-section précédente. Pour poursuivre la récurrence il suffit de démontrer la proposition suivante.

**Proposition 1.2.2.** *Soit un entier  $N \geq 2$ . Supposons donnés*

- (i) des réels  $\mu_n$  pour  $0 \leq n \leq N$ ,
- (ii) des fonctions  $\varphi_n$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  pour  $0 \leq n \leq N - 2$ ,

(iii) des fonctions  $w_n$  dans  $\mathcal{H}_0$  pour  $0 \leq n \leq N$ ,

tels que  $(-\partial_{y_2}^2 - \mu_0)\psi_0(y_2) = 0$ ,  $\mu_1 = 0$  et  $(-\partial_{y_1}^2 + (\kappa_2\mu_0/\kappa_0)y_1^2 - \mu_2)\varphi_0(y_1) = 0$ .

Alors il existe  $\mu_{N+1} \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_{N-1} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  et  $w_{N+1} \in \mathcal{H}_0$  telles que pour toutes  $\varphi_N$  et  $\varphi_{N+1}$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\sum_{p+q=N+1} (S_p - \mu_p) v_q = 0, \quad (1.2.9)$$

où les fonctions  $v_n$  sont définies par l'équation (1.2.8).

*Démonstration.* Nous allons tout d'abord raisonner par conditions nécessaires. Supposons qu'il existe  $\mu_{N+1}$ ,  $\varphi_{N-1}$  et  $w_{N+1}$  convenables. Alors pour toutes  $\varphi_N$  et  $\varphi_{N+1}$ ,

$$(-\kappa_0\partial_{y_2}^2 - \mu_0) v_{N+1}(y_1, y_2) = - \sum_{p+q=N+1, p \geq 1} (S_p - \mu_p) v_q(y_1, y_2).$$

D'après l'alternative de Fredholm, ceci implique que pour tout  $y_1 \in \mathbb{R}$ ,

$$\left\langle \sum_{p+q=N+1, p \geq 1} (S_p - \mu_p) v_q(y_1, y_2), \psi_0(y_2) \right\rangle_{L_{y_2}^2([-1,1])} = 0.$$

Nous avons supposé que  $S_1 = 0$  et  $\mu_1 = 0$ . Ainsi

$$\left\langle \sum_{p+q=N+1, p \geq 2} (S_p - \mu_p) v_q(y_1, y_2), \psi_0(y_2) \right\rangle_{L_{y_2}^2([-1,1])} = 0. \quad (1.2.10)$$

Or

$$\begin{aligned} (S_2 - \mu_2) v_{N-1} &= (S_2 - \mu_2) \varphi_{N-1}(y_1) \psi_0(y_2) + (S_2 - \mu_2) w_{N-1}(y_1, y_2) \\ &= \psi_0(y_2) (-\partial_{y_1}^2 + \kappa_2\mu_0 y_1^2) \varphi_{N-1}(y_1) + \tilde{w}_{N-1}(y_1, y_2), \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{w}_{N-1}(y_1, y_2) = (S_2 - \mu_2) w_{N-1}(y_1, y_2).$$

La fonction  $w_{N-1}(y_1, y_2)$  est supposée appartenir à  $\mathcal{H}_0$  et s'écrit donc

$$w_{N-1}(y_1, y_2) = \sum_{i \in I} f_i(y_1) g_i(y_2)$$

avec  $I$  fini,  $f_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  et  $g_i \in C^\infty([-1, 1])$ ,  $g_i(-1) = g_i(1) = 0$  et  $\langle g_i, \psi_0 \rangle = 0$ .

$$(S_2 - \mu_2) w_{N-1}(y_1, y_2) = - \sum_{i \in I} f_i''(y_1) g_i(y_2) - \kappa_2 \sum_{i \in I} y_1^2 f_i(y_1) g_i''(y_2) - \mu_2 w_{N-1}(y_1, y_2).$$

Par conséquent,

$$\langle (S_2 - \mu_2) w_{N-1}(y_1, y_2), \psi_0(y_2) \rangle_{L_{y_2}^2([-1,1])} = 0.$$

Ainsi l'équation (1.2.10) devient

$$\begin{aligned} &(-\partial_{y_1}^2 + \kappa_2\mu_0 y_1^2) \varphi_{N-1}(y_1) \\ &= - \left\langle \sum_{p+q=N+1, p \geq 3} (S_p - \mu_p) v_q(y_1, y_2), \psi_0(y_2) \right\rangle_{L_{y_2}^2([-1,1])}. \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

D'après l'alternative de Fredholm, ceci implique

$$\left\langle \left\langle \sum_{p+q=N+1, p \geq 3} (S_p - \mu_p) v_q(y_1, y_2), \psi_0(y_2) \right\rangle_{L_{y_2}^2([-1,1])}, \varphi_0(y_1) \right\rangle_{L_{y_1}^2(\mathbb{R})} = 0.$$

c'est à dire, d'après le théorème de Fubini et puisque  $v_0(y_1, y_2) = \varphi_0(y_1)\psi_0(y_2)$ ,

$$\mu_{N+1} = \sum_{p+q=N+1, 3 \leq p \leq N} \langle (S_p - \mu_p) v_q, v_0 \rangle_{L^2(\Pi)} + \langle S_{N-1} v_0, v_0 \rangle_{L^2(\Pi)}.$$

Nous avons trouvé la valeur de  $\mu_{N+1}$  en raisonnant par conditions nécessaires. Supposons maintenant que  $\mu_{N+1}$  ait été choisi comme indiqué ci-dessus. Nous allons alors montrer l'existence de fonctions  $\varphi_{N-1}$  et  $w_{N+1}$  convenables.

D'après l'alternative de Fredholm, il existe une fonction  $\varphi_{N-1}$  dans  $L^2(\mathbb{R})$  qui vérifie l'équation (1.2.11). Si l'on impose que cette fonction soit orthogonale à  $\varphi_0$ , alors il y a une unique solution. De plus, étant donné que le second membre de (1.2.11) est dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  (en tant que fonction de  $y_1$ ),  $\varphi_{N-1}$  est dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  par régularité de l'oscillateur harmonique (voir par exemple [8]).

Il reste à montrer l'existence de  $w_{N+1}$ . Posons

$$F(y_1, y_2) = \sum_{p+q=N+1, p \geq 2} (S_p - \mu_p) w_q(y_1, y_2).$$

La fonction  $F$  peut s'écrire

$$F(y_1, y_2) = \sum_{j \in J} f_j(y_1) G_j(y_2),$$

où  $J$  est un ensemble fini,  $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  et  $G_j \in C^\infty([-1, 1])$ . Par notre choix de  $\mu_{N+1}$  et  $\varphi_{N-1}$ , nous avons, pour tout  $y_1 \in \mathbb{R}$ ,

$$\langle F(y_1, y_2), \psi_0(y_2) \rangle_{L^2_{y_2}([-1, 1])} = 0.$$

Il est alors facile de voir que nous pouvons imposer  $\langle G_j, \psi_0 \rangle_{L([-1, 1])}$  pour tout  $j \in J$  dans la décomposition précédente. D'après l'alternative de Fredholm et la régularité de l'opérateur  $-\partial_{y_2}^2$  (avec conditions de Dirichlet) sur  $] -1, 1[$ , il existe, pour tout  $j \in J$  une unique fonction  $g_j$  dans  $C^\infty([-1, 1])$  telle que  $g_j(-1) = g_j(1) = 0$ ,  $\langle g_j, \psi_0 \rangle_{L^2([-1, 1])} = 0$  et  $(-\partial_{y_2}^2 - \mu_0)g_j = G_j$ . Alors la fonction de  $\mathcal{H}$  définie par

$$w_{N+1}(y_1, y_2) = \sum_{j \in J} f_j(y_1) g_j(y_2)$$

est dans  $\mathcal{H}_0$  et permet de vérifier (1.2.9). □

### 1.3 Développement des valeurs propres

Nous allons maintenant montrer que les séries formelles définies dans la section 1.2 donnent des développements à un ordre arbitrairement élevé des valeurs propres  $\mu_k(\varepsilon)$ . Si  $j$  et  $k$  sont des entiers naturels non nuls,  $(\mu_n^{j,k})_{n \geq 0}$  et  $(\nu_n^{j,k})_{n \geq 0}$  désigneront les séries formelles vérifiant (1.2.7) pour lesquelles

$$\mu_0^{j,k} = \kappa_0 \frac{j^2 \pi^2}{4},$$

et

$$\mu_2^{j,k} = (2k-1) \sqrt{\frac{\kappa_2 \mu_0^{j,k}}{\kappa_0}} = \frac{(2k-1)j\pi}{2} \sqrt{\kappa_2}.$$

Nous poserons, pour tous entiers  $k \geq 1$  et  $N \geq 0$ ,

$$\nu_{k,N}(\varepsilon) = \sum_{n=0}^N \varepsilon^{n/2} \mu_n^{1,k}.$$

**Proposition 1.3.1.** *Pour tous entiers  $k \geq 1$  et  $N \geq 0$ ,*

$$\mu_k(\varepsilon) = \nu_{k,N}(\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{(N+1)/2}\right). \quad (1.3.1)$$

Nous allons démontrer cette proposition en deux étapes.

### 1.3.1 Localisation du spectre

**Proposition 1.3.2.** *Soient  $k \geq 1$  et  $N \geq 2$  des entiers. Il existe des constantes  $\varepsilon_{k,N} > 0$  et  $C_{k,N} \geq 0$  telles que, pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_{k,N}]$ ,*

$$\left] \nu_{k,N}(\varepsilon) - C_{k,N} \varepsilon^{(N+1)/2}, \nu_{k,N}(\varepsilon) + C_{k,N} \varepsilon^{(N+1)/2} \right[ \cap \sigma(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D) \neq \emptyset.$$

*Démonstration.* Fixons  $k \geq 1$  et  $N \geq 2$ . Afin de simplifier les notations, nous poserons dans la suite de cette démonstration

$$\begin{aligned} \mu_n &= \mu_n^{1,k}, \\ \nu_n &= \nu_n^{1,k}, \end{aligned}$$

et

$$\nu(\varepsilon) = \nu_{k,N}(\varepsilon).$$

La preuve repose sur la construction d'un vecteur propre approché, à partir des développements formels, et sur le résultat suivant, qui est une conséquence du théorème spectral.

**Proposition 1.3.3.** *Soit  $T$  un opérateur autoadjoint (non nécessairement borné) sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Alors pour tous  $u \in \mathcal{D}(T)$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,*

$$\|u\| \text{dist}(\lambda, \sigma(T)) \leq \|(T - \lambda)u\|.$$

Procédons à la construction du vecteur propre approché. Fixons une fonction  $\chi$  telle que

- i.  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,
- ii.  $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq \chi(t) \leq 1$ ,
- iii.  $\text{supp}(\chi) \subset ]-a/2, b/2[$ ,
- iv.  $\forall t \in ]-a/4, b/4[$ ,  $\chi(t) = 1$ .

Soit  $N \geq 1$  et posons

$$s_\varepsilon(y_1, y_2) = \sum_{n=0}^N \varepsilon^{n/2} \nu_n(y_1, y_2),$$

et

$$v_\varepsilon(y_1, y_2) = \chi(\varepsilon^{1/2} y_1) s_\varepsilon(y_1, y_2). \quad (1.3.2)$$

**Lemme 1.3.4.** *Il existe des constantes  $\varepsilon_0 > 0$  et  $C \geq 0$  telles que pour tout  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,*

$$\|(S(\varepsilon) - \nu(\varepsilon))v_\varepsilon\|_{L^2(\Pi)} \leq C\varepsilon^{(N+1)/2}. \quad (1.3.3)$$

*Démonstration.*

$$(S(\varepsilon) - \nu(\varepsilon))v_\varepsilon(y_1, y_2) = A_\varepsilon(y_1, y_2) + B_\varepsilon(y_1, y_2)$$

avec

$$A_\varepsilon(y_1, y_2) = \chi(\varepsilon^{1/2} y_1) (S(\varepsilon) - \nu(\varepsilon)) s_\varepsilon(y_1, y_2)$$

et

$$B_\varepsilon(y_1, y_2) = \left[ S(\varepsilon), \chi(\varepsilon^{1/2} y_1) \right] s_\varepsilon(y_1, y_2).$$

Nous utilisons la définition usuelle du commutateur :  $[U, V] = U \circ V - V \circ U$ .

Alors

$$A_\varepsilon(y_1, y_2) = \chi(\varepsilon^{1/2} y_1) \left( \sum_{n=0}^N \varepsilon^{n/2} (S_n - \nu_n) + R_\varepsilon \right) s_\varepsilon(y_1, y_2),$$

avec

$$R_\varepsilon = S(\varepsilon) - \sum_{n=0}^N \varepsilon^{n/2} S_n.$$

Ainsi

$$A_\varepsilon(y_1, y_2) = \chi(\varepsilon^{1/2} y_1) \left( \sum_{n=0}^N \varepsilon^{n/2} (S_n - \mu_n) \right) \left( \sum_{n=0}^N \varepsilon^{n/2} \nu_n(y_1, y_2) \right) + \chi(\varepsilon^{1/2} y_1) R_\varepsilon s_\varepsilon(y_1, y_2),$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}
A_\varepsilon(y_1, y_2) &= \chi(\varepsilon^{1/2}y_1) \left( \sum_{n=0}^N \varepsilon^{n/2} \left( \sum_{p+q=n} (S_p - \mu_p) v_q(y_1, y_2) \right) \right) \\
&\quad + \chi(\varepsilon^{1/2}y_1) \left( \sum_{n=N+1}^{2N} \varepsilon^{n/2} \left( \sum_{p+q=n, p \leq N, q \leq N} (S_p - \mu_p) v_q(y_1, y_2) \right) \right) \\
&\quad + \chi(\varepsilon^{1/2}y_1) R_\varepsilon s_\varepsilon(y_1, y_2). \quad (1.3.4)
\end{aligned}$$

Par construction des séries formelles  $(\mu_n)$  et  $(v_n)$ , le premier terme du membre de droite de l'équation (1.3.4) est nul. Le deuxième terme est clairement  $O(\varepsilon^{(N+1)/2})$  en norme  $L^2$ . Il reste à estimer la norme  $L^2$  de  $\chi(\varepsilon^{1/2}y_1) R_\varepsilon s_\varepsilon(y_1, y_2)$ .

Rappelons que

$$\begin{aligned}
S(\varepsilon) &= -\varepsilon \partial_{y_1}^2 + 2\varepsilon^{3/2} y_2 \theta(\varepsilon^{1/2}y_1) \partial_{y_1} \partial_{y_2} \\
&\quad - \left( \kappa(\varepsilon^{1/2}y_1) + \varepsilon^2 y_2^2 \theta(\varepsilon^{1/2}y_1)^2 \right) \partial_{y_2}^2 + \varepsilon^2 y_2 \left( \theta'(\varepsilon^{1/2}y_1) - \theta(\varepsilon^{1/2}y_1)^2 \right) \partial_{y_2}.
\end{aligned}$$

Remarquons que le support de la fonction  $y_1 \mapsto \chi(\varepsilon^{1/2}y_1)$  est contenu dans l'ouvert  $]-\varepsilon^{-1/2}a/2, \varepsilon^{-1/2}b/2[ \times ]-1, 1[$ . Par construction de la suite  $(S_n)$  et d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, il existe des constantes positives  $C_{1,2}$ ,  $C_{2,2}$  et  $C_2$  telles que

$$\begin{aligned}
&\left| \chi(\varepsilon^{1/2}y_1) \left( S(\varepsilon) - \sum_{n=0}^N \varepsilon^{n/2} S_n \right) s_\varepsilon(y_1, y_2) \right| \\
&\leq C_{2,2} \varepsilon^{(N+1)/2} (|y_1|^{N+1} + |y_1|^{N-3} |y_2|^2) |\partial_{y_2}^2 s_\varepsilon(y_1, y_2)| \\
&\quad + C_{1,2} \varepsilon^{(N+1)/2} |y_1^{(N-2)/2} y_2 \partial_{y_1} \partial_{y_2} s_\varepsilon(y_1, y_2)| \\
&\quad + C_2 \varepsilon^{(N+1)/2} |y_1^{(N-3)/2} y_2 \partial_{y_2} s_\varepsilon(y_1, y_2)|.
\end{aligned}$$

Or, par construction de la suite  $(v_n)$ , les fonctions  $\partial_{y_1} \partial_{y_2} s_\varepsilon(y_1, y_2)$ ,  $\partial_{y_2}^2 s_\varepsilon(y_1, y_2)$  et  $\partial_{y_2} s_\varepsilon(y_1, y_2)$  sont sommes de termes de la forme

$$\varepsilon^{n/2} f(y_1) g(y_2)$$

avec  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  et  $g \in C^\infty([-1, 1])$ .

Ainsi

$$\|A_\varepsilon(y_1, y_2)\|_{L^2(\Pi)} = O\left(\varepsilon^{(N+1)/2}\right).$$

Remarquons enfin que la norme  $L^2$  de  $B_\varepsilon(y_1, y_2)$  est à décroissance rapide en  $\varepsilon$ . En effet, par construction de la suite  $(v_n)$ ,  $B_\varepsilon(y_1, y_2)$  est une somme de termes de la forme

$$\varepsilon^{n/2} \chi^{(\ell)}(\varepsilon^{1/2}y_1) f(y_1) g(y_2)$$

avec  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\ell \in \{1, 2\}$ ,  $f$  et  $g$  indépendantes de  $\varepsilon$  telles que  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  et  $g \in C^\infty([-1, 1])$ .

Or

$$\begin{aligned}
&\int_{\Pi} \left| \chi^{(\ell)}(\varepsilon^{1/2}y_1) f(y_1) g(y_2) \right|^2 dy \\
&\leq \left\| \chi^{(\ell)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left( \int_{-1}^1 |g(y_2)|^2 dy_2 \right) \left( \int_{\mathbb{R} \setminus ]-\varepsilon^{-1/2}a/2, \varepsilon^{-1/2}b/2[} |f(y_1)|^2 dy_1 \right).
\end{aligned}$$

Comme  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , il existe, pour tout  $\beta > 0$ , une constante  $C_\beta \geq 0$  telle que

$$\int_{\mathbb{R} \setminus ]-\varepsilon^{-1/2}a/2, \varepsilon^{-1/2}b/2[} |f(y_1)|^2 dy_1 \leq C_\beta \varepsilon^\beta.$$

La norme  $L^2$  de  $B_\varepsilon(y_1, y_2)$  est donc somme de termes à décroissance rapide.  $\square$



Afin de terminer la démonstration de la proposition 1.3.2, il suffit de transporter dans  $L^2(\Omega_\varepsilon)$  les estimations faites dans  $L^2(\Pi)$ . Pour cela, nous devons vérifier que le changement de variables (1.2.4) induit un isomorphisme entre les espaces  $L^2$  considérés, avec un contrôle de la norme par rapport à  $\varepsilon$ . Posons

$$\Pi_{\varepsilon,loc} = \left\{ (y_1, y_2) \in \Pi; -\varepsilon^{-1/2}a/2 < y_1 < \varepsilon^{1/2}b/2 \right\},$$

et

$$\Omega_{\varepsilon,loc} = \{(y_1, y_2) \in \Omega_\varepsilon; -a/2 < y_1 < b/2\}.$$

L'application

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \Pi_{\varepsilon,loc} &\rightarrow \Omega_{\varepsilon,loc} \\ (y_1, y_2) &\mapsto (\varepsilon^{1/2}y_1, \varepsilon h(\varepsilon^{1/2}y_1)y_2) \end{aligned}$$

définit un changement de variable lisse et borné de  $\Pi_{\varepsilon,loc}$  dans  $\Omega_{\varepsilon,loc}$ , c'est à dire que  $\Phi$  est bijective, avec  $\Phi \in C^\infty(\overline{\Pi_{\varepsilon,loc}})$  et  $\Phi^{-1} \in C^\infty(\overline{\Omega_{\varepsilon,loc}})$ . Nous en déduisons que l'application

$$\begin{aligned} \Phi^* : \quad L^2(\Pi_{\varepsilon,loc}) &\rightarrow L^2(\Omega_{\varepsilon,loc}) \\ v &\mapsto v \circ \Phi^{-1} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espace de Hilbert. Nous obtenons alors plus précisément, en appliquant les inégalités (1.2.2) et la formule de changement de variables,

$$c\varepsilon^{-3/4}\|v\|_{L^2(\Pi_{\varepsilon,loc})} \leq \|\Phi^*v\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon,loc})} \leq C\varepsilon^{-3/4}\|v\|_{L^2(\Pi_{\varepsilon,loc})} \quad (1.3.5)$$

pour tout  $v \in L^2(\Pi_{\varepsilon,loc})$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Nous notons encore  $v_\varepsilon$  le vecteur propre approché défini par l'équation (1.3.2). Considérons la restriction  $v_{\varepsilon,loc}$  de  $v_\varepsilon$  à  $\Pi_{\varepsilon,loc}$ . Posons  $u_{\varepsilon,loc} = \Phi^*v_{\varepsilon,loc}$  et désignons par  $u_\varepsilon$  le prolongement par 0 de  $u_{\varepsilon,loc}$  à  $\Omega_\varepsilon$ . Alors  $u_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega_\varepsilon})$ ,

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \geq c\varepsilon^{-3/4}\|v_\varepsilon\|_{L^2(\Pi)},$$

et

$$\|(-\varepsilon^2\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D - \nu(\varepsilon))u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{-3/4}\|(S(\varepsilon) - \nu(\varepsilon))v_\varepsilon\|_{L^2(\Pi)}.$$

Ainsi, d'après la proposition 1.3.3,

$$\text{dist}(\nu(\varepsilon), \sigma(-\varepsilon^2\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D)) \leq \frac{C}{c} \frac{\|(S(\varepsilon) - \nu(\varepsilon))v_\varepsilon\|_{L^2(\Pi)}}{\|v_\varepsilon\|_{L^2(\Pi)}}.$$

Comme

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_\varepsilon\|_{L^2(\Pi)} = \|v_0\|_{L^2(\Pi)} = 1,$$

on obtient

$$\text{dist}(\nu(\varepsilon), \sigma(-\varepsilon^2\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D)) = O\left(\varepsilon^{(N+1)/2}\right).$$

□

### 1.3.2 Minoration des valeurs propres

**Proposition 1.3.5.** *Soit un entier  $k \geq 1$ . Il existe des constantes  $\varepsilon_k > 0$  et  $C_k \geq 0$  telles que, pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon_k$ ,*

$$\nu_2^{1,k}(\varepsilon) - C_k\varepsilon^{3/2} \leq \nu_k(\varepsilon),$$

c'est à dire

$$\kappa_0 \frac{\pi^2}{4} + (2k-1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\kappa_2} \varepsilon - C_k \varepsilon^{3/2} \leq \nu_k(\varepsilon). \quad (1.3.6)$$

*Démonstration.* Nous allons démontrer l'inégalité (1.3.6) par monotonie du spectre des opérateurs autoadjoints. Par le changement de variables

$$\begin{cases} z_1 &= \varepsilon^{-1/2}x_1, \\ z_2 &= \frac{x_2}{\varepsilon h_0}, \end{cases}$$

on envoie les domaines  $\Omega_\varepsilon$  et  $\tilde{\Omega}_\varepsilon$  sur les domaines  $\mathcal{U}_\varepsilon$  et  $\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon$  respectivement, avec

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2; \varepsilon^{-1/2}a < z_1 < \varepsilon^{-1/2}b \text{ et } -\frac{h(\varepsilon^{1/2}z_1)}{h_0} < z_2 < \frac{h(\varepsilon^{1/2}z_1)}{h_0} \right\},$$

et

$$\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2; \frac{\tilde{h}(\varepsilon^{1/2}z_1)}{h_0} < z_2 < \frac{\tilde{h}(\varepsilon^{1/2}z_1)}{h_0} \right\}.$$

Remarquons que l'on a les inclusions  $\mathcal{U}_\varepsilon \subset \tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon \subset \Pi$ . Notons  $T(\varepsilon)$  l'opérateur défini par

$$T(\varepsilon) = -\varepsilon\partial_{z_1}^2 - \kappa_0\partial_{z_2}^2,$$

sur  $\mathcal{U}_\varepsilon$  avec conditions de Dirichlet.

Plus précisément, nous définissons  $T(\varepsilon)$  comme l'extension de Friedrichs de l'opérateur différentiel  $-\varepsilon\partial_{z_1}^2 - \kappa_0\partial_{z_2}^2$  agissant sur l'espace  $C_c^\infty(\mathcal{U}_\varepsilon)$ . Il est unitairement équivalent à  $-\varepsilon^2\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$ .

Pour tout  $\alpha > 0$  et  $0 < \varepsilon < 1$ , définissons l'opérateur  $T(\alpha, \varepsilon)$  par

$$T(\alpha, \varepsilon) = -\varepsilon\partial_{z_1}^2 - \varepsilon^\alpha\kappa_0\partial_{z_2}^2 + \frac{(1 - \varepsilon^\alpha)\pi}{4h(\varepsilon^{1/2}z_1)^2},$$

sur  $\Pi$  avec conditions de Dirichlet.

Plus précisément,  $T(\alpha, \varepsilon)$  est l'extension de Friedrichs de l'opérateur différentiel correspondant agissant sur l'espace  $C_c^\infty(\Pi)$ .

**Lemme 1.3.6.** *Pour tout  $\alpha > 0$  et  $0 < \varepsilon \leq 1$ ,*

$$T(\alpha, \varepsilon) \leq T(\varepsilon). \quad (1.3.7)$$

*L'inégalité précédente est entendue au sens des opérateurs autodjoints, c'est à dire que les domaines vérifient l'inclusion  $\mathcal{D}(T(\varepsilon)) \subset \mathcal{D}(T(\alpha, \varepsilon))$ , et que pour tout  $u \in \mathcal{D}(T(\varepsilon))$ ,*

$$\langle T(\alpha, \varepsilon)u, u \rangle_{L^2(\Pi)} \leq \langle T(\varepsilon)u, u \rangle_{L^2(\Pi)}.$$

*Démonstration.* Par construction des opérateurs  $T(\varepsilon)$  et  $T(\alpha, \varepsilon)$ , il suffit de montrer que  $C_c^\infty(\mathcal{U}_\varepsilon) \subset C_c^\infty(\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon)$  et que  $\langle T(\alpha, \varepsilon)u, u \rangle_{L^2(\Pi)} \leq \langle T(\varepsilon)u, u \rangle_{L^2(\Pi)}$  pour tout  $u \in C_c^\infty(\mathcal{U}_\varepsilon)$ .

L'inclusion est évidente. Soit maintenant  $u \in C_c^\infty(\mathcal{U}_\varepsilon)$ . Alors  $u \in C_c^\infty(\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon) \subset C_c^\infty(\Pi)$  et

$$\begin{aligned} \langle T(\varepsilon)u, u \rangle &= \int_{\mathcal{U}_\varepsilon} (-\varepsilon\partial_{z_1}^2 - \kappa_0\partial_{z_2}^2) u \bar{u} \, dz = \int_{\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon} (\varepsilon|\partial_{z_1}u|^2 + \kappa_0|\partial_{z_2}u|^2) \, dz \\ &= \int_{\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon} (\varepsilon|\partial_{z_1}u|^2 + (1 - \varepsilon^\alpha)\kappa_0|\partial_{z_2}u|^2 + \varepsilon^\alpha\kappa_0|\partial_{z_2}u|^2) \, dz. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\mathcal{U}}_\varepsilon} \kappa_0|\partial_{z_2}u|^2 \, dz &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\frac{\tilde{h}(\varepsilon^{1/2}z_1)}{h_0}}^{\frac{\tilde{h}(\varepsilon^{1/2}z_1)}{h_0}} \kappa_0|\partial_{z_2}u|^2 \, dz_2 \right) \, dz_1 \geq \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\frac{\tilde{h}(\varepsilon^{1/2}z_1)}{h_0}}^{\frac{\tilde{h}(\varepsilon^{1/2}z_1)}{h_0}} \frac{\pi^2\kappa_0h_0^2}{4\tilde{h}(\varepsilon^{1/2}z_1)^2} |u|^2 \, dz_2 \right) \, dz_1, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\langle T(\varepsilon)u, u \rangle \geq \int_{\Pi} \left( |\partial_{z_1} u|^2 + (1 - \varepsilon^\alpha) \frac{\pi^2}{4\tilde{h}(\varepsilon^{1/2}z_1)^2} |u|^2 + \varepsilon^\alpha \kappa_0 |\partial_{z_2} u|^2 \right) dz.$$

□

Calculons maintenant un développement asymptotique des premières valeurs propres de  $T(\alpha, \varepsilon)$ . Nous allons pour cela étudier l'opérateur

$$P(\alpha, \varepsilon) = -\varepsilon \partial_{z_1}^2 + (1 - \varepsilon^\alpha) \frac{\pi^2}{4\tilde{h}(\varepsilon^{1/2}z_1)^2} \text{ sur } ]-\infty, +\infty[.$$

Nous nous appuyons sur l'approximation harmonique d'un opérateur de Schrödinger, exposée de façon détaillée et générale dans [5, 14, 9] (dans le cas de la dimension finie quelconque et de puits multiples).

Nous pouvons déduire de ces références le cas particulier suivant. Soit  $H(\eta)$ , avec  $\eta > 0$ , l'opérateur défini sur  $\mathbb{R}$  par

$$H(\eta) = -\eta^2 \partial_t^2 + V(t).$$

La fonction  $V$  est supposée vérifier

- i.  $V \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,
- ii.  $V(0) = 0$ ,
- iii.  $\forall t \neq 0, V(t) > 0$ ,
- iv.  $V''(0) > 0$ ,
- v.  $\liminf_{|t| \rightarrow +\infty} V(t) > 0$ .

Notons  $H_0(\eta)$  l'approximation harmonique de  $H(\eta)$ , définie par

$$H_0(\eta) = -\eta^2 \partial_t^2 + \frac{V''(0)}{2} t^2,$$

et  $(\omega_k^0(\eta))_{k \geq 1}$  la suite des valeurs propres de  $H_0(\eta)$ .

**Théorème 1.3.1.** *Pour tout entier  $k \geq 1$ , il existe  $\eta_k > 0$  et  $C_k > 0$  tels que, pour tout  $0 < \eta < \eta_k$ , l'opérateur  $H(\eta)$  possède au moins  $k$  valeurs propres.*

*De plus, si nous notons  $\omega_\ell(\eta)$  la  $\ell$ -ème valeur propre pour  $1 \leq \ell \leq k$ ,*

$$|\omega_\ell(\eta) - \omega_\ell^0(\eta)| \leq C_k \eta^{3/2}.$$

Ce théorème donne un développement asymptotique des premières valeurs propres de  $P(\alpha, \varepsilon)$ . En effet, le changement de variable  $z_1 = \varepsilon^{-1/2}t$  montre que  $P(\alpha, \varepsilon)$  est unitairement équivalent à l'opérateur

$$(1 - \varepsilon^\alpha) \left( - \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^\alpha}} \right)^2 \partial_t^2 + \frac{\pi^2}{4\tilde{h}(t)^2} \right).$$

Appliquons maintenant le théorème 1.3.1, avec

$$V(t) = \frac{\pi^2}{4\tilde{h}(t)^2} - \kappa_0 \frac{\pi^2}{4}.$$

Nous obtenons le résultat suivant.

**Lemme 1.3.7.** *Pour tout entier  $k \geq 1$ , il existe  $\varepsilon_k > 0$  et  $C_k > 0$  tels que, pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon_k$ , l'opérateur  $P(\alpha, \varepsilon)$  possède au moins  $k$  valeurs propres.*

*De plus, si nous notons  $\omega_\ell(\alpha, \varepsilon)$  la  $\ell$ -ème valeur propre pour  $1 \leq \ell \leq k$ ,*

$$\left| \omega_\ell(\alpha, \varepsilon) - (1 - \varepsilon^\alpha) \kappa_0 \frac{\pi^2}{4} + (2\ell - 1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\kappa_2 \varepsilon} \sqrt{1 - \varepsilon^\alpha} \right| \leq C_k \varepsilon^{3/2}.$$

Afin d'en déduire le spectre de  $T(\alpha, \varepsilon)$ , nous allons utiliser une conséquence du théorème spectral, qui donne le spectre d'un produit tensoriel d'opérateurs (voir [15, Thm VIII.33]).

**Proposition 1.3.8.** *Soit  $T_1$  (resp.  $T_2$ ) un opérateur autoadjoint défini sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_1$  (resp.  $\mathcal{H}_2$ ). Posons*

$$T = T_1 \otimes Id_{\mathcal{H}_2} + Id_{\mathcal{H}_1} \otimes T_2.$$

Alors  $T$  est un opérateur autoadjoint sur  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  et

$$\sigma(T) = \overline{\sigma(T_1) + \sigma(T_2)}.$$

Notons que nous utilisons la définition de [15] pour le produit tensoriel :  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  est le complété du produit tensoriel algébrique.

Nous pouvons appliquer ce résultat avec  $\mathcal{H}_1 = L^2(\mathbb{R})$ ,  $T_1 = P(\alpha, \varepsilon)$ ,  $\mathcal{H}_2 = L^2(]-1, 1[)$  et  $T_2 = -\varepsilon^\alpha \kappa_0 \partial_{y_2}^2$ , puisque l'on a alors  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 = L^2(\Pi)$  et  $T = T(\alpha, \varepsilon)$ . Fixons  $k \geq 1$  et  $\varepsilon_k > 0$  comme dans le lemme 1.3.7. Alors l'opérateur  $T(\alpha, \varepsilon)$  admet les valeurs propres

$$\mu_{j,\ell}(\alpha, \varepsilon) = \omega_\ell(\alpha, \varepsilon) + \varepsilon^\alpha \kappa_0 \frac{j^2 \pi^2}{4},$$

pour  $j \geq 1$  et  $1 \leq \ell \leq k$ .

Si l'inégalité

$$\mu_{1,k}(\alpha, \varepsilon) < \omega_1(\alpha, \varepsilon) + \varepsilon^\alpha \kappa_0 \pi^2 = \mu_{2,1}(\alpha, \varepsilon),$$

est vérifiée, les valeurs propres  $\mu_{1,\ell}(\alpha, \varepsilon)$  pour  $\ell = 1, \dots, k$  sont les  $k$  premières, et elles sont simples. Or, d'après le lemme 1.3.7,

$$\mu_{1,k}(\alpha, \varepsilon) = \kappa_0 \frac{\pi^2}{4} + (2k-1)\sqrt{\kappa_2} \frac{\pi}{2} \varepsilon + O(\varepsilon^\beta),$$

et

$$\mu_{2,1}(\alpha, \varepsilon) = \kappa_0 \frac{\pi^2}{4} + 3\kappa_0 \frac{\pi^2}{4} \varepsilon^\alpha + \sqrt{\kappa_2} \frac{\pi}{2} \varepsilon + O(\varepsilon^\beta),$$

où  $\beta = \min(3/2, 1 + \alpha)$ .

À condition d'avoir  $\alpha < 1$  (on peut par exemple fixer  $\alpha = 1/2$ ), l'inégalité

$$\mu_{1,k}(\alpha, \varepsilon) < \mu_{2,1}(\alpha, \varepsilon)$$

est réalisée pour  $\varepsilon$  assez petit.

Résumons la discussion ci-dessus en une proposition.

**Proposition 1.3.9.** *Si  $0 < \alpha < 1$ , si  $k \geq 1$ , il existe  $\varepsilon_k > 0$  et  $C_k > 0$  tels que, pour tout  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_k$ , l'opérateur  $T(\alpha, \varepsilon)$  a au moins  $k$  valeurs propres.*

*De plus, si nous notons  $\mu_\ell(\alpha, \varepsilon)$  la  $\ell$ -ème valeur propre pour  $1 \leq \ell \leq k$ ,*

$$\left| \mu_\ell(\alpha, \varepsilon) - \left( \kappa_0 \frac{\pi^2}{4} - (2\ell-1)\sqrt{\kappa_2} \frac{\pi}{2} \varepsilon \right) \right| \leq C_k \varepsilon^{3/2}.$$

D'après la relation (1.3.7) nous avons l'inégalité  $\mu_{1,\ell}(\varepsilon) \leq \mu_\ell(\varepsilon)$  pour  $0 < \varepsilon < \varepsilon_k$  et  $1 \leq \ell \leq k$ .

Ceci démontre la proposition 1.3.5. □

### 1.3.3 Conclusion

Soient  $k \geq 1$  et  $N \geq 0$ . D'après la proposition 1.3.2, nous pouvons fixer  $\varepsilon_k > 0$  et  $C_k \geq 0$  tels que, pour tout  $1 \leq \ell \leq k$ , l'ensemble

$$\left] \nu_{\ell,N}(\varepsilon) - C_{k,N} \varepsilon^{(N+1)/2}, \nu_{\ell,N}(\varepsilon) + C_{k,N} \varepsilon^{(N+1)/2} \left[ \cap \sigma(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D) \right.$$

contient au moins un élément.

D'autre part, l'inégalité (1.3.6) montre que, pour  $\varepsilon$  assez petit, cet ensemble ne peut contenir qu'un élément, qui est la  $\ell$ -ème valeur propre de  $-\varepsilon^2 \Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$ . Nous avons donc montré la proposition 1.3.1, que l'on peut reformuler de façon plus explicite.

**Proposition 1.3.10.** *Pour tous entiers  $k \geq 1$  et  $N \geq 0$ , il existe  $\varepsilon_{k,N} > 0$  et  $C_{k,N} \geq 0$  tels que les valeurs propres  $\mu_\ell(\varepsilon)$  pour  $1 \leq \ell \leq k$  et  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{k,N}$  sont deux à deux distinctes et vérifient*

$$|\mu_\ell(\varepsilon) - \nu_{\ell,N}(\varepsilon)| \leq C_{k,N} \varepsilon^{(N+1)/2}. \quad (1.3.8)$$

## 1.4 Développement des fonctions propres

### 1.4.1 Convergence dans $L^2(\Omega)$

Nous reprenons les notations de la section 1.3. Pour tous entiers  $k \geq 1$  et  $N \geq 0$ , et tout réel  $\varepsilon > 0$ , posons  $u_{k,N,\varepsilon} = \Phi^* v_{k,N}(\varepsilon)$ . Notons  $P_k(\varepsilon)$  le projecteur orthogonal de  $L^2(\Omega_\varepsilon)$  sur l'espace propre pour  $-\varepsilon^2 \Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$  associé à la valeur propre  $\mu_k(\varepsilon)$ .

**Proposition 1.4.1.** *Pour tous  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$ ,*

$$\frac{\|u_{k,N,\varepsilon} - P_k(\varepsilon)u_{k,N,\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}}{\|u_{k,N,\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}} = O\left(\varepsilon^{(N-1)/2}\right). \quad (1.4.1)$$

*Démonstration.* Rappelons une conséquence du théorème spectral.

**Lemme 1.4.2.** *Si  $T$  est un opérateur autoadjoint sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , si  $\lambda \in \sigma(T)$  et  $u \in \mathcal{D}(T) \cap E(\lambda)^\perp$  (où  $E(\lambda)$  est l'espace propre associé à  $\lambda$ ), alors*

$$\|u\| \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T) \setminus \{\lambda\}) \leq \|(T - \lambda)u\|.$$

D'après l'étude faite dans la section 1.3, il existe  $\varepsilon_k > 0$  et  $c_k > 0$  telles que, pour tout réel  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_k$ ,

$$c_k \varepsilon \leq \operatorname{dist}(\mu_k(\varepsilon), \sigma(-\varepsilon^2 \Delta_{\Omega_\varepsilon}^D) \setminus \{\mu_k(\varepsilon)\}).$$

La preuve de la proposition 1.4.1 est alors une simple application de l'inégalité triangulaire et des estimations (1.3.3) et (1.3.8). Nous avons

$$\begin{aligned} c_k \varepsilon \| (Id - P_k(\varepsilon)) u_{k,N,\varepsilon} \|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq \operatorname{dist}(\mu_k(\varepsilon), \sigma(-\varepsilon^2 \Delta_{\Omega_\varepsilon}^D) \setminus \{\mu_k(\varepsilon)\}) \| (Id - P_k(\varepsilon)) u_{k,N,\varepsilon} \|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq \| (-\varepsilon^2 \Delta_{\Omega_\varepsilon}^D - \mu_k(\varepsilon)) (Id - P_k(\varepsilon)) u_{k,N,\varepsilon} \|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \| (-\varepsilon^2 \Delta_{\Omega_\varepsilon}^D - \mu_k(\varepsilon)) (Id - P_k(\varepsilon)) u_{k,N,\varepsilon} \|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &= \| (-\varepsilon^2 \Delta_{\Omega_\varepsilon}^D - \mu_k(\varepsilon)) u_{k,N,\varepsilon} \|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq \| (-\varepsilon^2 \Delta_{\Omega_\varepsilon}^D - \mu_{k,N}(\varepsilon)) u_{k,N,\varepsilon} \|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + |\mu_{k,N}(\varepsilon) - \mu_k(\varepsilon)| \| u_{k,N,\varepsilon} \|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

□

Reprenons les notations de la sous-section 1.3.1. Le but de ce travail étant d'étudier les ensembles nodaux des fonctions propres associées à  $\mu_k(\varepsilon)$ , nous considérerons la fonction  $P_k(\varepsilon)u_{k,N,\varepsilon}$ , ou son image réciproque par  $\Phi$ .

Afin de travailler avec des fonctions à support contenu dans  $\Omega_{\varepsilon,loc}$ , nous les multiplions par la fonction de troncature  $\chi$ , introduite dans la preuve de la proposition 1.3.2. De façon plus explicite, posons pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $N \in \mathbb{N}$  et  $\varepsilon > 0$ ,

$$w_{k,N,\varepsilon}(y_1, y_2) = \Phi_*(\chi(x_1)P_k(\varepsilon)u_{k,N,\varepsilon})(y_1, y_2) = (\chi P_k(\varepsilon)u_{k,N,\varepsilon}) \circ \Phi(y_1, y_2). \quad (1.4.2)$$

Nous avons le résultat suivant.

**Proposition 1.4.3.** *Pour tous entiers  $k \geq 1$  et  $N \geq 0$ ,*

$$\|v_{k,N,\varepsilon} - w_{k,N,\varepsilon}\|_{L^2(\Pi)} = O\left(\varepsilon^{(N-1)/2}\right).$$

*Démonstration.* Compte tenu des inégalités (1.3.5), il suffit de montrer que

$$\|u_{k,N,\varepsilon}(x_1, x_2) - \chi(x_1) (P_k(\varepsilon)u_{k,N,\varepsilon})(x_1, x_2)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = O\left(\varepsilon^{(2N-5)/5}\right),$$

et d'utiliser l'encadrement (1.3.5).

Nous avons

$$\begin{aligned} & \|u_{k,N,\varepsilon}(x_1, x_2) - \chi(x_1) (P_k(\varepsilon)u_{k,N,\varepsilon})(x_1, x_2)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\ & \leq \|(1 - \chi(x_1))u_{k,N,\varepsilon}(x_1, x_2)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\chi(x_1) ((Id - P_k(\varepsilon))u_{k,N,\varepsilon})(x_1, x_2)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} & \|\chi(x_1)u_{k,N,\varepsilon}(x_1, x_2) - (P_k(\varepsilon)u_{k,N,\varepsilon})(x_1, x_2)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\ & \leq \|u_{k,N,\varepsilon}(x_1, x_2) - (P_k(\varepsilon)u_{k,N,\varepsilon})(x_1, x_2)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \end{aligned}$$

et il est facile de montrer (en revenant sur  $\Pi$ ) que

$$\|(1 - \chi(x_1))u_{k,N,\varepsilon}(x_1, x_2)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^\infty).$$

□

## 1.4.2 Convergence dans les espaces de Sobolev

Rappelons que notre but est la localisation des ensembles nodaux d'une fonction propre associée à  $\mu_k(\varepsilon)$ . Nous devons pour cela contrôler l'écart entre un vecteur propre approché et sa projection, dans la norme  $C^1$ . Compte tenu des injections de Sobolev, il nous suffira de contrôler cet écart dans la norme  $H^3$ . Ceci va être réalisé en plusieurs étapes.

### Convergence dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$

Gardons les notations de la sous-section 1.4.1.

**Proposition 1.4.4.** *Pour tous entiers  $k \geq 1$  et  $N \geq 0$ ,*

$$\frac{\|\nabla(u_{k,N,\varepsilon} - P_k(\varepsilon)u_{k,N,\varepsilon})\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}}{\|u_{k,N,\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}} = O\left(\varepsilon^{(N-3)/2}\right). \quad (1.4.3)$$

*Démonstration.* Posons

$$\zeta_{k,N,\varepsilon} = u_{k,N,\varepsilon} - P_k(\varepsilon)u_{k,N,\varepsilon}$$

et

$$r_\varepsilon = -\varepsilon^2 \Delta \zeta_{k,N,\varepsilon}. \quad (1.4.4)$$

Alors

$$r_\varepsilon = (-\varepsilon^2 \Delta - \mu_{k,N}(\varepsilon)) u_{k,N,\varepsilon} + (\mu_{k,N}(\varepsilon) - \mu_k(\varepsilon)) u_{k,N,\varepsilon} + \mu_k(\varepsilon) \zeta_{k,N,\varepsilon}.$$

Par conséquent,

$$\|r_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = O\left(\varepsilon^{(2N-5)/4}\right).$$

Multiplions les deux membres de l'équation (1.4.4) par  $\zeta_{k,N,\varepsilon}$  et faisons une intégration par partie. Nous trouvons

$$\varepsilon^2 \|\nabla \zeta_{k,N,\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \int_{\Omega_\varepsilon} r_\varepsilon \zeta_{k,N,\varepsilon}.$$

Nous en déduisons l'estimation voulue par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Ce résultat peut se transporter sur  $\Pi$ , où il servira de point de départ à notre étude de convergence.

**Proposition 1.4.5.** *Pour tous entiers  $k \geq 1$  et  $N \geq 0$ ,*

$$\|v_{k,N,\varepsilon} - w_{k,N,\varepsilon}\|_{H^1(\Pi)} = O\left(\varepsilon^{(N-1)/2}\right).$$

*Démonstration.* D'après la définition de  $w_{k,N,\varepsilon}$  et les inégalités (1.3.5), il suffit de montrer

$$\|\nabla(u_{k,N,\varepsilon}(x_1, x_2) - \chi(x_1) (P_k(\varepsilon)u_{k,N,\varepsilon})(x_1, x_2))\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = O\left(\varepsilon^{(2N-5)/4}\right).$$

Or

$$u_{k,N,\varepsilon} - \chi(x_1)P_k(\varepsilon)u_{k,N,\varepsilon} = \chi(x_1)(u_{k,N,\varepsilon} - P_k(\varepsilon)u_{k,N,\varepsilon}) + (1 - \chi(x_1))u_{k,N,\varepsilon}, \quad (1.4.5)$$

d'où

$$\begin{aligned} \nabla(u_{k,N,\varepsilon} - \chi(x_1)P_k(\varepsilon)u_{k,N,\varepsilon}) = \\ \chi(x_1)\nabla(u_{k,N,\varepsilon} - P_k(\varepsilon)u_{k,N,\varepsilon}) + (u_{k,N,\varepsilon} - P_k(\varepsilon)u_{k,N,\varepsilon})\nabla\chi \\ + \nabla(1 - \chi)u_{k,N,\varepsilon} + (1 - \chi)\nabla u_{k,N,\varepsilon}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \|\chi(x_1)\nabla(u_{k,N,\varepsilon} - P_k(\varepsilon)u_{k,N,\varepsilon})\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|\nabla(u_{k,N,\varepsilon} - P_k(\varepsilon)u_{k,N,\varepsilon})\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \\ \|(u_{k,N,\varepsilon} - P_k(\varepsilon)u_{k,N,\varepsilon})\nabla\chi\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|\nabla\chi\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}\|u_{k,N,\varepsilon} - P_k(\varepsilon)u_{k,N,\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \end{aligned}$$

et il est facile de montrer (en revenant sur  $\Pi$ ) que

$$\|\nabla(1 - \chi)u_{k,N,\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^\infty),$$

et

$$\|(1 - \chi)\nabla u_{k,N,\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^\infty).$$

En utilisant les estimations (1.4.1) et (1.4.3), nous obtenons le résultat voulu.  $\square$

Afin de montrer la convergence des dérivées d'ordre supérieur, nous allons utiliser des estimations elliptiques.

### Estimations elliptiques

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'opérateur différentiel  $S(\varepsilon)$  sur  $\Pi$  s'écrit, sous forme divergence,

$$S(\varepsilon) = -\frac{1}{\tilde{h}(\varepsilon^{1/2}y_1)} \operatorname{div} \left( \begin{pmatrix} \varepsilon\tilde{h}(\varepsilon^{1/2}y_1) & -\varepsilon^{1/2}\tilde{h}'(\varepsilon^{1/2}y_1)\varepsilon y_2 \\ -\varepsilon^{1/2}\tilde{h}'(\varepsilon^{1/2}y_1)\varepsilon y_2 & \frac{1}{\tilde{h}(\varepsilon^{1/2}y_1)} + \frac{\tilde{h}'(\varepsilon^{1/2}y_1)^2}{\tilde{h}(\varepsilon^{1/2}y_1)}(\varepsilon y_2)^2 \end{pmatrix} \nabla \right). \quad (1.4.6)$$

Nous allons donner une version des inégalités elliptiques classiques qui fait apparaître leur dépendance par rapport à  $\varepsilon$ . Pour ce faire, donnons d'abord quelques définitions et lemmes techniques. Définissons un opérateur différentiel

$$P(y, \partial_y, \varepsilon) = -\operatorname{div}(A(y, \varepsilon)\nabla).$$

Dans cet opérateur,

$$A(y, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A_0(\varepsilon^{1/2}y_1, \varepsilon y_2) \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec  $z \mapsto A_0(z)$  une fonction de classe  $C^\infty$ , bornée ainsi que toutes ses dérivées. On suppose de plus que  $z \mapsto A_0(z)$  vérifie une condition de stricte ellipticité, c'est à dire qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\forall z \in \Pi, \forall \xi \in \mathbb{R}^2, c\|\xi\|^2 \leq \xi^T A_0(z)\xi.$$

Afin d'expliciter les dépendances par rapport à  $\varepsilon$ , introduisons une norme adaptée à cet opérateur.

**Définition 1.4.1.** Pour tous  $p \in \mathbb{N}$  et  $\varepsilon > 0$ , définissons la norme  $\|v\|_{H_\varepsilon^p(\Pi)}$  d'une fonction  $v \in H^p(\Pi)$  par les relations de récurrence

- i.  $\forall v \in L^2(\Pi)$ ,  $\|v\|_{H_\varepsilon^0(\Pi)} = \|v\|_{L^2(\Pi)}$ ,
- ii.  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $\forall v \in H^{p+1}(\Pi)$ ,  $\|v\|_{H_\varepsilon^{p+1}(\Pi)}^2 = \|\varepsilon^{1/2}\partial_{y_1}v\|_{H_\varepsilon^p(\Pi)}^2 + \|\partial_{y_2}v\|_{H_\varepsilon^p(\Pi)}^2 + \|v\|_{H_\varepsilon^p(\Pi)}^2$ .

Démontrons un lemme technique qui va nous permettre d'utiliser cette norme.

**Lemme 1.4.6.** Pour tout entier naturel  $p$ , toute fonction  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ , bornée ainsi que toutes ses dérivées, il existe une constante  $C(\rho, p)$  telle que

$$\forall \varepsilon \in ]0, 1[, \forall v \in H^p(\Pi), \|\rho(\varepsilon^{1/2}y_1)v(y_1, y_2)\|_{H_\varepsilon^p(\Pi)} \leq C(\rho, p)\|v(y_1, y_2)\|_{H_\varepsilon^p(\Pi)}.$$

*Démonstration.* Nous allons procéder par récurrence. Soit  $\rho$  une fonction convenable. Posons  $C_0 = \|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ . Alors pour toute  $v \in L^2(\Pi)$ ,

$$\|\rho(\varepsilon^{1/2}y_1)v(y_1, y_2)\|_{L^2(\Pi)} \leq C_0\|v(y_1, y_2)\|_{L^2(\Pi)}.$$

Supposons la propriété vraie au rang  $p$ . Soit  $\rho$  une fonction convenable et  $v \in H^{p+1}(\Pi)$ . Alors

$$\begin{aligned} \|\rho(\varepsilon^{1/2}y_1)v(y_1, y_2)\|_{H_\varepsilon^{p+1}(\Pi)}^2 &= \varepsilon\|\rho(\varepsilon^{1/2}y_1)\partial_{y_1}v(y_1, y_2) + \varepsilon^{1/2}\rho'(\varepsilon^{1/2}y_1)v(y_1, y_2)\|_{H_\varepsilon^p(\Pi)}^2 \\ &\quad + \|\rho(\varepsilon^{1/2}y_1)\partial_{y_2}v(y_1, y_2)\|_{H_\varepsilon^p(\Pi)}^2 + \|\rho(\varepsilon^{1/2}y_1)v(y_1, y_2)\|_{H_\varepsilon^p(\Pi)}^2. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \|\rho(\varepsilon^{1/2}y_1)\partial_{y_1}v(y_1, y_2) + \varepsilon^{1/2}\rho'(\varepsilon^{1/2}y_1)v(y_1, y_2)\|_{H_\varepsilon^p(\Pi)}^2 &\leq 2\|\rho(\varepsilon^{1/2}y_1)\partial_{y_1}v(y_1, y_2)\|_{H_\varepsilon^p(\Pi)}^2 \\ &\quad + 2\|\varepsilon^{1/2}\rho'(\varepsilon^{1/2}y_1)v(y_1, y_2)\|_{H_\varepsilon^p(\Pi)}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} \|\rho(\varepsilon^{1/2}y_1)\partial_{y_1}v(y_1, y_2) + \varepsilon^{1/2}\rho'(\varepsilon^{1/2}y_1)v(y_1, y_2)\|_{H_\varepsilon^p(\Pi)}^2 &\leq 2C(\rho, p)^2\|\partial_{y_1}v(y_1, y_2)\|_{H_\varepsilon^p(\Pi)}^2 \\ &\quad + 2\varepsilon C(\rho', p)^2\|v(y_1, y_2)\|_{H_\varepsilon^p(\Pi)}^2, \end{aligned}$$

$$\|\rho(\varepsilon^{1/2}y_1)\partial_{y_2}v(y_1, y_2)\|_{H_\varepsilon^p(\Pi)} \leq C(\rho, p)\|\partial_{y_2}v(y_1, y_2)\|_{H_\varepsilon^p(\Pi)},$$

et

$$\|\rho(\varepsilon^{1/2}y_1)v(y_1, y_2)\|_{H_\varepsilon^p(\Pi)} \leq C(\rho, p)\|v(y_1, y_2)\|_{H_\varepsilon^p(\Pi)}.$$

Nous en déduisons l'existence de  $C(\rho, p+1)$  telle que, pour tout  $v \in H^{p+1}(\Pi)$ ,

$$\|\rho(\varepsilon^{1/2}y_1)v(y_1, y_2)\|_{H_\varepsilon^{p+1}(\Pi)}^2 \leq C(\rho, p+1)\|v(y_1, y_2)\|_{H_\varepsilon^{p+1}(\Pi)}^2.$$

□

**Proposition 1.4.7.** Il existe des constantes  $C_0 \geq 0$  et  $0 < \varepsilon_0 \leq 1$  telles que, pour tout  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , toutes  $v \in H_0^1(\Pi)$  et  $f \in L^2(\Pi)$  telles que

$$P(y, \partial_y, \varepsilon)v = f$$

(au sens des distributions), nous avons

$$\|v\|_{H_\varepsilon^1} \leq C_0\|f\|_{L^2(\Pi)}.$$

*Démonstration.* Par densité de  $C_c^\infty(\Pi)$  dans  $H_0^1(\Pi)$ , l'équation au sens des distributions  $P(y, \partial_y, \varepsilon)v = f$  admet la formulation variationnelle suivante :

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Pi), \int_{\Pi} (\nabla v(y))^T A(y, \varepsilon) \nabla \varphi(y) dy = \int_{\Pi} f(y) \varphi(y) dy.$$



En particulier,

$$\int_{\Pi} (\nabla v(y))^T A(y, \varepsilon) \nabla v(y) dy = \int_{\Pi} f(y) v(y) dy.$$

Par construction de  $A(y, \varepsilon)$ , nous avons

$$c \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla v(y) \right\|^2 \leq (\nabla v(y))^T A(\varepsilon, y) \nabla v(y),$$

pour tout  $y$  dans  $\Pi$ .

Ainsi

$$c \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla v \right\|_{L^2(\Pi)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Pi)} \|v\|_{L^2(\Pi)},$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Par l'inégalité de Poincaré (appliquée dans la direction de l'axe des  $y_2$ ), il existe une constante  $K \geq 0$  telle que, pour tout  $\varphi \in H_0^1(\Pi)$ ,

$$\|v\|_{L^2(\Pi)} \leq K \|\partial_{y_2} v\|_{L^2(\Pi)}.$$

Nous en déduisons que

$$c \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla v \right\|_{L^2(\Pi)} \leq N \|f\|_{L^2(\Pi)},$$

et donc qu'il existe  $C \geq 0$  telle que

$$\|v\|_{H_\varepsilon^1} \leq C \|f\|_{L^2(\Pi)}.$$

□

Nous allons maintenant démontrer une inégalité elliptique ad-hoc, qui nous permettra de mesurer l'écart entre les vecteurs propres approchés et leur projection sur les espaces propres correspondant. Afin de simplifier la démonstration (en évitant de recourir à la méthode des quotients différentiels), nous allons faire des hypothèses de régularité très fortes, mais qui seront vérifiées dans le problème étudié.

**Proposition 1.4.8.** *Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Il existe des constantes  $C_p \geq 0$  et  $0 < \varepsilon_p \leq 1$  telles que, pour tout  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_p$ , toutes  $v \in H_0^1(\Pi)$  et  $f \in \bigcap_{\ell \geq 0} H^\ell(\Pi)$  telles que*

$$P(y, \partial_y, \varepsilon)v = f, \tag{1.4.7}$$

on a

$$\|v\|_{H_\varepsilon^{p+2}(\Pi)} \leq C_p \|f\|_{H_\varepsilon^p(\Pi)}.$$

*Démonstration.* Nous allons démontrer le résultat par récurrence sur  $p$ . Soit  $\varepsilon > 0$ ,  $f \in \bigcap_{\ell \geq 0} H^\ell(\Pi)$  et  $v$  une solution. Notons que par les théorèmes classiques de régularité elliptique,  $v \in \bigcap_{\ell \geq 0} H^\ell(\Pi) \subset C^\infty(\Pi)$ . Alors  $\partial_{y_1}^2 v \in H_0^1(\Pi)$ . D'après la formulation faible de (1.4.7),

$$\int_{\Pi} (\nabla v(y))^T A(y, \varepsilon) \nabla \partial_{y_1}^2 v(y) dy = \int_{\Pi} f(y) \partial_{y_1}^2 v(y) dy.$$

Une intégration par partie donne

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi} (\nabla v(y))^T A(y, \varepsilon) \nabla \partial_{y_1}^2 v(y) dy \\ &= \int_{\Pi} (\nabla \partial_{y_1} v(y))^T A(\varepsilon, y) \nabla \partial_{y_1} v(y) dy + \int_{\Pi} (\nabla v(y))^T \partial_{y_1} A(y, \varepsilon) \nabla \partial_{y_1} v(y) dy. \end{aligned}$$

Par construction de  $A(\varepsilon, y)$ ,

$$c \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla \partial_{y_1} v \right\|_{L^2(\Pi)}^2 \leq \int_{\Pi} (\nabla \partial_{y_1} v(y))^T A(\varepsilon, y) \nabla \partial_{y_1} v(y) dy.$$

De plus,

$$\partial_{y_1} A(\varepsilon, y) = \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varepsilon^{1/2} \partial_{z_1} A_0(\varepsilon^{1/2} y_1, y_2) \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où l'existence d'une constante  $C$  telle que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Pi} (\nabla v(y))^T \partial_{y_1} A(y, \varepsilon) \nabla \partial_{y_1} v(y) dy \right| \\ \leq C \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla v \right\|_{L^2(\Pi)} \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla (\varepsilon^{1/2} \partial_{y_1} v) \right\|_{L^2(\Pi)}. \end{aligned}$$

Nous déduisons de ces inégalités, et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que

$$\begin{aligned} c \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla \partial_{y_1} v \right\|_{L^2(\Pi)}^2 \\ \leq C \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla v \right\|_{L^2(\Pi)} \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla (\varepsilon^{1/2} \partial_{y_1} v) \right\|_{L^2(\Pi)} + \|f\|_{L^2(\Pi)} \|\partial_{y_1}^2 v\|_{L^2(\Pi)}. \end{aligned}$$

En multipliant les deux côtés de l'équation par  $\varepsilon$ , et en appliquant la proposition 1.4.7, nous obtenons l'inégalité

$$\begin{aligned} c \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla \varepsilon^{1/2} \partial_{y_1} v \right\|_{L^2(\Pi)}^2 \\ \leq C \varepsilon \|f\|_{L^2(\Pi)} \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla (\varepsilon^{1/2} \partial_{y_1} v) \right\|_{L^2(\Pi)} + \|f\|_{L^2(\Pi)} \|\varepsilon \partial_{y_1}^2 v\|_{L^2(\Pi)}. \end{aligned}$$

Comme  $\varepsilon \leq 1$  et

$$\|\varepsilon \partial_{y_1}^2 v\|_{L^2(\Pi)} \leq \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon^{1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla \varepsilon^{1/2} \partial_{y_1} v \right\|_{L^2(\Pi)},$$

nous en déduisons l'existence d'une constante  $C$  telle que

$$\begin{aligned} \|\varepsilon \partial_{y_1}^2 v\|_{L^2(\Pi)} &\leq C \|f\|_{L^2(\Pi)}; \\ \|\varepsilon^{1/2} \partial_{y_1} \partial_{y_2} v\|_{L^2(\Pi)} &\leq C \|f\|_{L^2(\Pi)}. \end{aligned}$$

Il reste à majorer  $\|\partial_{y_2}^2 v\|_{L^2(\Pi)}$ , et nous allons pour cela utiliser l'équation (1.4.7). Nous trouvons, en développant,

$$\begin{aligned} \varepsilon a_{1,1}(\varepsilon^{1/2} y_1, \varepsilon y_2) \partial_{y_2} v^2 + 2\varepsilon^{1/2} a_{1,2}(\varepsilon^{1/2} y_1, \varepsilon y_2) \partial_{y_1} \partial_{y_2} v + a_{2,2}(\varepsilon^{1/2} y_1, \varepsilon y_2) \partial_{y_2}^2 v \\ + \varepsilon^{3/2} \partial_{z_1} a_{1,1}(\varepsilon^{1/2} y_1, \varepsilon y_2) \partial_{y_1} v + \varepsilon \partial_{z_1} a_{1,2}(\varepsilon^{1/2} z_1, \varepsilon y_2) \partial_{y_2} v \\ + \varepsilon^{3/2} \partial_{z_2} a_{1,2}(\varepsilon^{1/2} y_1, \varepsilon y_2) \partial_{y_1} v + \varepsilon \partial_{z_2} a_{2,2}(\varepsilon^{1/2} y_1, \varepsilon y_2) \partial_{y_2} v = f, \end{aligned}$$

où

$$A_0(z) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(z) & a_{1,2}(z) \\ a_{1,2}(z) & a_{2,2}(z) \end{pmatrix}.$$

D'après les hypothèses faites sur  $A_0$ , les fonctions  $z \mapsto a_{i,j}(z)$  sont bornées, ainsi que leurs dérivées, et pour tout  $z \in \Pi$ ,  $c \leq a_{2,2}(z)$ . Nous en déduisons qu'il existe  $C$  telle que

$$\|\partial_{y_2}^2 v\|_{L^2(\Pi)} \leq C \|f\|_{L^2(\Pi)}.$$

Soit maintenant un entier  $p \geq 0$ , supposons que la propriété est vraie au rang  $p$ . Soit  $f \in \bigcap_{\ell \geq 0} H^\ell(\Pi)$  et  $v \in H_0^1(\Pi)$  une solution. Alors

$$P(y, \partial_y, \varepsilon) \partial_{y_1} v + [\partial_{y_1}, P(y, \partial_y, \varepsilon)] v = \partial_{y_1} f.$$

Or il est facile, en utilisant l'hypothèse de récurrence, de vérifier que

$$\|[\partial_{y_1}, P(y, \partial_y, \varepsilon)] v\|_{H_\varepsilon^{p+1}(\Pi)} \leq C \|f\|_{H_\varepsilon^p(\Pi)}.$$

Nous en déduisons, par l'hypothèse de récurrence, que

$$\|\partial_{y_1} v\|_{H_\varepsilon^{p+2}(\Pi)} \leq C \|f\|_{H_\varepsilon^{p+1}(\Pi)}.$$

Ceci implique que pour tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ , avec  $|\alpha| \leq k + 3$  et  $\alpha_1 \geq 1$ ,

$$\|\varepsilon^{\alpha_1/2} \partial_y^\alpha v\|_{L^2(\Pi)} \leq C \|f\|_{H_\varepsilon^{p+1}(\Pi)}.$$

Il ne reste qu'à majorer  $\|\partial_{y_2}^{p+3} v\|_{L^2(\Pi)}$  par un terme en  $\|f\|_{H_\varepsilon^{p+1}(\Pi)}$ . Ceci est réalisé en utilisant l'équation

$$\partial_{y_2}^{p+1} P(y, \partial_y, \varepsilon) v = \partial_{y_2}^{p+1} f.$$

□

### Application

Nous allons maintenant utiliser les résultats précédents afin de montrer un contrôle de l'écart entre les vecteurs propres et leurs approximations, dans la norme  $H_\varepsilon^3$ . Comme nous le verrons dans la section suivante, ce contrôle est suffisant pour localiser les lignes nodales.

Nous avons introduit au début de la sous-section 1.3.1 la fonction de troncature  $\chi$ . Nous aurons besoin, dans notre raisonnement, d'introduire deux nouvelles fonctions de troncature, égales à 1 au voisinage de 0, le support de chacune étant contenu dans l'ensemble où la précédente vaut 1. De façon précise, fixons des fonctions  $\chi_1$  et  $\chi_2$  telles que

- i.  $\chi_i \in C^\infty(\mathbb{R})$  et  $0 \leq \chi_i \leq 1$  pour  $i \in \{1, 2\}$ ,
- ii.  $\text{supp } \chi_1 \subset ]-a/4, b/4[$ ,
- iii.  $\forall t \in ]-a/8, b/8[$ ,  $\chi_1(t) = 1$ .
- iv.  $\text{supp } \chi_2 \subset ]-a/8, b/8[$ ,
- v.  $\forall t \in ]-a/16, b/16[$ ,  $\chi_2(t) = 1$ .

Posons enfin, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} \delta_{k,N,\varepsilon}^0 &= w_{k,N,\varepsilon} - v_{k,N,\varepsilon}, \\ \delta_{k,N,\varepsilon}^1 &= \chi_1(\varepsilon^{-1/2} y_1) (w_{k,N,\varepsilon} - v_{k,N,\varepsilon}), \\ \delta_{k,N,\varepsilon}^2 &= \chi_2(\varepsilon^{-1/2} y_1) (w_{k,N,\varepsilon} - v_{k,N,\varepsilon}). \end{aligned}$$

**Lemme 1.4.9.** *Pour tous entiers  $k \geq 1$  et  $N \geq 2$ , on a*

$$\|\delta_{k,\varepsilon}^2\|_{H_\varepsilon^2(\Pi)} = O(\varepsilon^{(N-1)/2}).$$

*Démonstration.* Remarquons que, d'après l'équation (1.4.6), l'opérateur  $S(\varepsilon)$  s'écrit

$$\frac{1}{\tilde{h}(\varepsilon^{-1/2} y_1)} P(y, \partial_y, \varepsilon),$$

avec  $\tilde{h}$  bornée sur  $\mathbb{R}$  et  $P(y, \partial_y, \varepsilon)$  vérifiant les hypothèses de la proposition 1.4.8. D'après la proposition 1.4.8 et le lemme 1.4.6, il nous suffit donc de montrer que

$$\|S(\varepsilon) \delta_{k,N,\varepsilon}^2\|_{H_\varepsilon^1(\Pi)} = O(\varepsilon^{3/2}).$$

Nous allons procéder récursivement. Tous d'abord, d'après les propositions 1.4.3 et 1.4.5,

$$\|\delta_{k,N,\varepsilon}^0\|_{L^2} = O(\varepsilon^{(N-1)/2}),$$

et

$$\|\delta_{k,N,\varepsilon}^0\|_{H_\varepsilon^1} = O(\varepsilon^{(N-1)/2}).$$

Calculons alors  $S(\varepsilon)\delta_{k,N,\varepsilon}^1$ .

On trouve

$$S(\varepsilon)\delta_{k,N,\varepsilon}^1 = [S(\varepsilon), \chi_1(\varepsilon^{1/2}y_1)]\delta_{k,N,\varepsilon}^0 + \chi_1(\varepsilon^{1/2}y_1)S(\varepsilon)\delta_{k,N,\varepsilon}^0.$$

Il est facile de vérifier, en utilisant la définition de la norme  $H_\varepsilon^1$ , qu'il existe une constante  $C$ , indépendante de  $\varepsilon$ , telle que

$$\left\| [S(\varepsilon), \chi_1(\varepsilon^{-1/2})]\delta_{k,N,\varepsilon}^0 \right\|_{L^2(\Pi)} \leq C \|\delta_{k,N,\varepsilon}^0\|_{H_\varepsilon^1(\Pi)}.$$

On en déduit que

$$\left\| [S(\varepsilon), \chi_1(\varepsilon^{1/2}y_1)]\delta_{k,N,\varepsilon}^0 \right\|_{L^2(\Pi)} = O(\varepsilon^{(N-1)/2}).$$

D'autre part, le support de  $\chi_1$  étant contenu dans l'ensemble  $\{t \in \mathbb{R}; \chi(t) = 1\}$ , on a, d'après la définition de  $w_{k,N,\varepsilon}$ ,

$$\chi_1(\varepsilon^{1/2}y_1)S(\varepsilon)\delta_{k,N,\varepsilon}^0 = \chi_1(\varepsilon^{1/2}y_1)(\mu_k(\varepsilon)w_{k,N,\varepsilon} - S(\varepsilon)v_{k,N,\varepsilon}).$$

On peut écrire la relation précédente sous la forme

$$\begin{aligned} \chi_1(\varepsilon^{1/2}y_1)S(\varepsilon)\delta_{k,N,\varepsilon}^0 &= \chi_1(\varepsilon^{1/2}y_1)\mu_k(\varepsilon)(w_{k,N,\varepsilon} - v_{k,N,\varepsilon}) \\ &\quad + \chi_1(\varepsilon^{1/2}y_1)(\mu_k(\varepsilon) - \nu_{k,N}(\varepsilon))v_{k,N,\varepsilon} - \chi_1(\varepsilon^{1/2}y_1)(S(\varepsilon) - \nu_{k,N}(\varepsilon))v_{k,N,\varepsilon}. \end{aligned}$$

On a

$$\|\chi_1(\varepsilon^{1/2}y_1)\mu_k(\varepsilon)(w_{k,N,\varepsilon} - v_{k,N,\varepsilon})\|_{L^2(\Pi)} = O(\varepsilon^{(N-1)/2}),$$

et il est facile de voir, en utilisant les expressions explicites de la section 1.3, que

$$\left\| \chi_1(\varepsilon^{1/2}y_1)((\mu_k(\varepsilon) - \nu_{k,N}(\varepsilon))v_{k,N,\varepsilon} - (S(\varepsilon) - \nu_{k,N}(\varepsilon))v_{k,N,\varepsilon}) \right\|_{L^2(\Pi)} = O(\varepsilon^{(N-1)/2}).$$

On en déduit que

$$\|S(\varepsilon)\delta_{k,N,\varepsilon}^1\|_{L^2} = O(\varepsilon^{(N-1)/2})$$

et donc, d'après la proposition 1.4.8 et le lemme 1.4.6, que

$$\|\delta_{k,N,\varepsilon}^1\|_{H_\varepsilon^1} = O(\varepsilon^{(N-1)/2}).$$

Calculons enfin  $S(\varepsilon)\delta_{k,N,\varepsilon}^2$ . On trouve

$$\begin{aligned} S(\varepsilon)\delta_{k,N,\varepsilon}^2 &= [S(\varepsilon), \chi_2(\varepsilon^{1/2}y_1)](w_{k,N,\varepsilon} - v_{k,N,\varepsilon}) + \chi_2(\varepsilon^{1/2}y_1)\mu_k(\varepsilon)(w_{k,N,\varepsilon} - v_{k,N,\varepsilon}) \\ &\quad + \chi_2(\varepsilon^{1/2}y_1)(\mu_k(\varepsilon) - \nu_{k,N}(\varepsilon))v_{k,N,\varepsilon} - \chi_2(\varepsilon^{1/2}y_1)(S(\varepsilon) - \nu_{k,N}(\varepsilon))v_{k,N,\varepsilon}. \end{aligned}$$

Le support de  $\chi_2$  étant contenu dans l'ensemble  $\{t \in \mathbb{R}; \chi_1(t) = 1\}$ , cette équation s'écrit

$$\begin{aligned} S(\varepsilon)\delta_{k,N,\varepsilon}^2 &= [S(\varepsilon), \chi_2(\varepsilon^{1/2}y_1)]\chi_1(\varepsilon^{1/2}y_1)(w_{k,N,\varepsilon} - v_{k,N,\varepsilon}) \\ &\quad + \chi_2(\varepsilon^{1/2}y_1)\mu_k(\varepsilon)\chi_1(\varepsilon^{1/2}y_1)(w_{k,N,\varepsilon} - v_{k,N,\varepsilon}) + \chi_2(\varepsilon^{1/2}y_1)(\mu_k(\varepsilon) - \nu_{k,N}(\varepsilon))v_{k,N,\varepsilon} \\ &\quad - \chi_2(\varepsilon^{1/2}y_1)(S(\varepsilon) - \nu_{k,N}(\varepsilon))v_{k,N,\varepsilon}, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} S(\varepsilon)\delta_{k,N,\varepsilon}^2 &= [S(\varepsilon), \chi_2(\varepsilon^{1/2}y_1)]\delta_{k,N,\varepsilon}^1 + \chi_2(\varepsilon^{1/2}y_1)\mu_k(\varepsilon)\delta_{k,N,\varepsilon}^1 \\ &\quad + \chi_2(\varepsilon^{1/2}y_1)(\mu_k(\varepsilon) - \nu_{k,N}(\varepsilon))v_{k,N,\varepsilon} - \chi_2(\varepsilon^{1/2}y_1)(S(\varepsilon) - \nu_{k,N}(\varepsilon))v_{k,N,\varepsilon}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\|\delta_{k,N,\varepsilon}^1\|_{H_\varepsilon^1} = O(\varepsilon^{(N-1)/2}),$$

on en conclut que

$$\|S(\varepsilon)\delta_{k,N,\varepsilon}^2\|_{H_\varepsilon^3} = O(\varepsilon^{(N-1)/2}).$$

□

## 1.5 Localisation des ensembles nodaux

Nous allons maintenant conclure notre étude en démontrant le théorème 1.1.2. Pour  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $\varepsilon > 0$ , posons

$$\begin{aligned} v_{k,\varepsilon} &= v_{k,4,\varepsilon}, \\ w_{k,\varepsilon} &= w_{k,4,\varepsilon}, \\ \delta_{k,\varepsilon} &= \chi_2(\varepsilon^{1/2} y_1)(w_{k,\varepsilon} - v_{k,\varepsilon}) = \delta_{k,4,\varepsilon}^2. \end{aligned}$$

**Lemme 1.5.1.** *Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Il existe  $0 < \varepsilon_k \leq 1$  et  $C_k \geq 0$  tels que, pour tout  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_k$ ,*

$$\begin{aligned} \|\delta_{k,\varepsilon}\|_{L^\infty(\Pi)} &\leq C_k \varepsilon^{1/2}; \\ \|\partial_{y_1} \delta_{k,\varepsilon}\|_{L^\infty(\Pi)} &\leq C_k; \\ \|\partial_{y_2} \delta_{k,\varepsilon}\|_{L^\infty(\Pi)} &\leq C_k \varepsilon^{1/2}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Afin d'alléger la rédaction, la lettre  $C$  désignera dans la suite des constantes indépendantes de  $\varepsilon$ , qui peuvent changer d'une ligne à l'autre. D'après le lemme 1.4.9,

$$\|\delta_{k,\varepsilon}\|_{H_\varepsilon^3(\Pi)} \leq C \varepsilon^{3/2},$$

et donc

$$\|\delta_{k,\varepsilon}\|_{H_\varepsilon^2(\Pi)} \leq C \varepsilon^{3/2}.$$

Or par définition de la norme  $H_\varepsilon^2(\Pi)$ , nous avons immédiatement

$$\varepsilon \|\delta_{k,\varepsilon}\|_{H^2(\Pi)} \leq \|\delta_{k,\varepsilon}\|_{H_\varepsilon^2(\Pi)},$$

et par conséquent

$$\|\delta_{k,\varepsilon}\|_{H^2(\Pi)} \leq C \varepsilon^{1/2}.$$

L'injection de Sobolev  $H^2(\Pi) \subset L^\infty(\Pi)$  nous donne alors

$$\|\delta_{k,\varepsilon}\|_{L^\infty(\Pi)} \leq C \varepsilon^{1/2}.$$

De plus,  $\|\delta_{k,\varepsilon}\|_{H_\varepsilon^3(\Pi)}$  majore  $\|\varepsilon \partial_{y_1}^2 \partial_{y_2} \delta_{k,\varepsilon}\|_{L^2(\Pi)}$ ,  $\|\varepsilon^{1/2} \partial_{y_1} \partial_{y_2}^2 \delta_{k,\varepsilon}\|_{L^2(\Pi)}$  et  $\|\partial_{y_2}^3 \delta_{k,\varepsilon}\|_{L^2(\Pi)}$ . Nous en déduisons que

$$\|\partial_{y_2} \delta_{k,\varepsilon}\|_{H_\varepsilon^2(\Pi)} \leq C \varepsilon^{3/2}.$$

La même injection de Sobolev que précédemment donne

$$\|\partial_{y_2} \delta_{k,\varepsilon}\|_{L^\infty(\Pi)} \leq C \varepsilon^{1/2}.$$

□

Rappelons quelques résultats élémentaires à propos de l'oscillateur harmonique. Notons  $(h_k)_{k \geq 1}$  une base de fonctions propres pour l'opérateur

$$-\partial_t^2 + \frac{\kappa_2 \pi^2}{4} t^2$$

sur  $\mathbb{R}$ , associée à la suite de valeurs propres

$$\left( (2k-1) \sqrt{\kappa_2} \frac{\pi}{2} \right)_{k \geq 1}.$$

Nous savons que, pour  $k \geq 1$ , la fonction  $h_k$  a  $k-1$  racines réelles, que l'on notera

$$a_1^k < \dots < a_{k-1}^k.$$

Ces racines sont simples, c'est à dire que  $h'_k(a_\ell^k) \neq 0$  pour  $\ell \in \{1, \dots, k-1\}$ .

**Lemme 1.5.2.** *Pour tout entier  $k \geq 1$ , il existe  $\varepsilon_k > 0$  et deux suites finies de réels  $(b_\ell^k)_{0 \leq \ell \leq k-1}$  et  $(c_\ell^k)_{0 \leq \ell \leq k-1}$  telles que*

$$b_0^k < c_0^k < a_1^k < b_1^k < c_1^k < a_2^k < \dots < a_{k-1}^k < b_{k-1}^k < c_{k-1}^k$$

*et, pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon_k$  et tout  $\ell \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ , la fonction  $w_{k,\varepsilon}$  ne s'annule pas sur l'ensemble*

$$A_\ell^k = [b_\ell^k, c_\ell^k] \times ]-1, 1[.$$

*De plus,  $w_{k,\varepsilon}$  a des signes alternés sur les  $A_\ell$ ,  $\ell \in \{0, \dots, k-1\}$ .*

*Démonstration.* Posons

$$v_k^0(y_1, y_2) = h_k(y_1) \cos\left(\frac{\pi y_2}{2}\right).$$

C'est le premier terme du développement présenté dans la section 1.2. Les termes suivants de ce développement sont des fonctions dans la classe  $\mathcal{H}$ , multipliées par des puissances de  $\varepsilon^{1/2}$ . Nous en déduisons que si

$$\zeta_{k,\varepsilon} = \chi(\varepsilon^{1/2} y_1) (v_{k,\varepsilon} - v_k^0),$$

alors

$$\|\zeta_{k,\varepsilon}\|_{L^\infty(\Pi)} \leq C\varepsilon^{1/2}$$

et

$$\|\partial_{y_2} \zeta_{k,\varepsilon}\|_{L^\infty(\Pi)} \leq C\varepsilon^{1/2}.$$

Nous pouvons donc remplacer  $v_{k,\varepsilon}$  par  $v_k^0$  dans l'énoncé du lemme 1.5.1. Posons dans la suite

$$\delta_{k,\varepsilon}^0 = \chi(\varepsilon^{1/2} y_1) (v_k^0 - w_{k,\varepsilon}).$$

Fixons maintenant deux suites finies de réels  $(b_\ell^k)_{1 \leq \ell \leq k}$  et  $(a_\ell^k)_{1 \leq \ell \leq k}$  qui vérifient les hypothèses de l'énoncé.

Pour  $\varepsilon$  assez petit,

$$-\varepsilon^{-1/2} a/32 < b_0^k \text{ et } c_{k-1}^k < \varepsilon^{-1/2} b/32.$$

Alors  $\chi(\varepsilon^{1/2} y_1) = 1$  pour tout  $y_1 \in [b_\ell^k, c_\ell^k]$  et donc

$$\delta_{k,\varepsilon}^0(y_1, y_2) = v_k^0(y_1, y_2) - w_{k,\varepsilon}(y_1, y_2)$$

pour tout  $(y_1, y_2) \in [b_0^k, c_k^0] \times ]-1, 1[$ .

D'autre part, il existe  $c_k > 0$  tel que, pour tout  $y_1 \in \bigcup_{\ell=0}^{k-1} [b_\ell^k, c_\ell^k]$ ,  $|h_k(y_1)| \geq c_k$ .

Montrons que pour tout  $(y_1, y_2) \in \bigcup_{\ell=0}^{k-1} [b_\ell^k, c_\ell^k] \times ]-1, 1[$ ,

$$|v_k^0(y_1, y_2)| \geq c_k \text{dist}(y_2, \{-1, 1\}).$$

Supposons d'abord que  $v_n^0(y_1, y_2) > 0$  (c'est à dire que  $h_n(y_1) > 0$ ) et que  $y_2 < 0$ .

Nous avons alors

$$\partial_{y_2} v_k^0(y_1, t) = -\frac{\pi}{2} h_k(y_1) \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \geq -\frac{\pi c_k}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

pour tout  $t \in ]-1, y_2[$ . Ainsi

$$v_k^0(y_1, y_2) = \int_{-1}^{y_2} \partial_{y_2} v_k^0(y_1, t) dt \geq -\frac{\pi c_k}{2} \int_{-1}^{y_2} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) dt.$$

Nous en déduisons que

$$v_k^0(y_1, y_2) \geq c_k \cos\left(\frac{\pi y_2}{2}\right) \geq c_k(y_2 + 1),$$

la dernière inégalité s'obtenant par concavité. Les autres cas se traitent de la même manière.

Nous pouvons montrer, par une majoration analogue à la minoration précédente, que, pour  $(y_1, y_2) \in \Pi$ ,

$$|v_k^0(y_1, y_2) - w_{k,\varepsilon}(y_1, y_2)| \leq \|\partial_{y_2} \delta_{k,\varepsilon}^0\|_{L^\infty(\Pi)} \text{dist}(y_2, \{-1, 1\}) \leq C_k \varepsilon^{1/2} \text{dist}(y_2, \{-1, 1\}).$$

Si  $\varepsilon$  est assez petit pour que

$$C_k \varepsilon^{1/2} < c_k,$$

$w_{k,\varepsilon}$  a le signe de  $v_k^0$  sur les ensembles  $A_\ell^k$ , pour  $0 \leq \ell \leq k-1$ . □

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Quitte à la diminuer, supposons que la constante  $\varepsilon_k$  vérifie à la fois la propriété du lemme précédent et celle de la proposition 1.3.10. Soit  $0 < \varepsilon < \varepsilon_k$ . La fonction  $w_{k,\varepsilon}$  a alors au moins  $k$  domaines nodaux dans  $\Pi$ . En changeant de coordonnées, cela implique que  $P_k(\varepsilon)u_{k,4,\varepsilon}$  a au moins  $k$  domaines nodaux dans  $\Omega_\varepsilon$ . Comme l'espace propre pour  $-\varepsilon^2\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$  pour la valeur propre  $\mu_k(\varepsilon)$  est de dimension 1, nous avons montré que toute fonction propre associée à  $\mu_k(\varepsilon)$  a au moins  $k$  domaines nodaux dans  $\Omega_\varepsilon$ . Elle en a au plus  $k$  par le théorème de Courant. Elle en a donc exactement  $k$ , c'est à dire qu'elle est Courant-stricte.

## Bibliographie

- [1] V. BONNAILLIE-NOËL et C. LÉNA : Spectral minimal partitions of a sector. Prépublication. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00763467>. À paraître dans *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 26 p (2013).
- [2] D. BORISOV et P. FREITAS : Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin planar domains. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(2):547–560, 2009.
- [3] D. BORISOV et P. FREITAS : Asymptotics of Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin domains in  $\mathbb{R}^d$ . *J. Funct. Anal.*, 258(3):893–912, 2010.
- [4] R. COURANT et D. HILBERT : *Methods of Mathematical Physics. Vol. I*. Interscience Publishers, Inc., New York, N.Y., 1953.
- [5] H. L. CYCON, R. G. FROESE, W. KIRSCH et B. SIMON : *Schrödinger Operators with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [6] P. FREITAS et D. KREJČIŘÍK : Location of the nodal set for thin curved tubes. *Indiana Univ. Math. J.*, 57(1):343–375, 2008.
- [7] L. FRIEDLANDER et M. SOLOMYAK : On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip. *Israel J. Math.*, 170:337–354, 2009.
- [8] B. HELFFER : *Théorie Spectrale pour des Opérateurs Globalement Elliptiques*, volume 112 de *Astérisque*. Société Mathématique de France, Paris, 1984.
- [9] B. HELFFER : *Semi-Classical Analysis for the Schrödinger Operator and Applications*, volume 1336 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [10] B. HELFFER et T. HOFFMANN-OSTENHOF : Spectral minimal partitions for a thin strip on a cylinder or a thin annulus like domain with neumann condition. In *Operator Methods in Mathematical Physics*, volume 227 de *Operator Theory : Advances and Applications*, pages 107–115. Springer, 2013.
- [11] B. HELFFER et T. HOFFMANN-OSTENHOF : Minimal partitions for anisotropic tori. *J. Spectr. Theory*, À paraître.
- [12] B. HELFFER et T. HOFFMANN-OSTENHOF : On a magnetic characterization of spectral minimal partitions. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, À paraître.
- [13] B. HELFFER, T. HOFFMANN-OSTENHOF et S. TERRACINI : Nodal domains and spectral minimal partitions. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(1):101–138, 2009.
- [14] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND : Multiple wells in the semiclassical limit. I. *Comm. Partial Differential Equations*, 9(4):337–408, 1984.
- [15] M. REED et B. SIMON : *Methods of Modern Mathematical Physics. I. Functional Analysis*. Academic Press, New York, 2ème édition, 1980.





## Chapitre 2

# Eigenvalues variations for Aharonov-Bohm operators

### 2.1 Introduction

Aharonov-Bohm operators have been introduced in [1] as models of Schrödinger operators with a localized magnetic field. A lot of work has been done to study them in a mathematically rigorous way. The following list is not intended to be exhaustive. The general study of Schrödinger operators with a magnetic potential was initiated in [22, 3]. References [4, 24, 16, 2] study the case of a non-simply connected domain where a zero magnetic field is created by a non-zero magnetic potential (in this context the so-called Aharonov-Bohm effect, first described in [1], appears). Exactly solvable examples of Aharonov-Bohm operators have also been considered in [21, 28], where spectra, eigenfunctions, and scattering matrices are given explicitly thanks to special functions. The papers [7, 27, 5, 17] deal with Aharonov-Bohm operators in the context of minimal partitions (see [18] for a definition of the latter object). In particular, reference [17] shows that for any minimal partition, one can construct a suitable magnetic potential such that the partition consists in the nodal domains of an eigenfunction of the corresponding Aharonov-Bohm operator. The search for minimal partitions is also a motivation of the paper [5], where eigenvalues and eigenfunctions of an Aharonov-Bohm operator on the square with a moving singularity are investigated numerically. One of the aims of the present work is to justify and generalize some observations made in this paper.

We define these operators as follows. Let  $\omega$  be an open and connected set in  $\mathbb{R}^2$ . As usual, we denote by  $C_c^\infty(\omega)$  the set of smooth functions compactly supported in  $\omega$ . Generally speaking, let us consider a *magnetic potential*, that is to say a vector field  $\mathbf{A} \in C^\infty(\omega, \mathbb{R}^2)$ . We define the sesquilinear form  $s_{\mathbf{A}}$  by

$$s_{\mathbf{A}}(u, v) = \int_{\omega} (-i\nabla - \mathbf{A})u \cdot \overline{(-i\nabla - \mathbf{A})v} dx$$

the quadratic form  $q_{\mathbf{A}}$  by

$$q_{\mathbf{A}}(u) = s_{\mathbf{A}}(u, u)$$

and the norm  $\|\cdot\|_{\mathbf{A}}$  by

$$\|u\|_{\mathbf{A}}^2 = \|u\|_{L^2(\omega)}^2 + q_{\mathbf{A}}(u)$$

for  $u$  and  $v$  in  $C_c^\infty(\omega)$ .

The form domain  $\mathcal{Q}_{\mathbf{A}}$  associated with  $\mathbf{A}$  is defined as the completion of  $C_c^\infty(\omega)$  under  $\|\cdot\|_{\mathbf{A}}$ . According to Friedrichs's Theorem, there exists a unique self-adjoint extension  $-\Delta_{\mathbf{A}}$  of the densely defined, symmetric, and positive differential operator  $(-i\nabla - \mathbf{A})^2$  acting on  $C_c^\infty(\omega)$  whose domain  $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}$  is contained in  $\mathcal{Q}_{\mathbf{A}}$  (see e.g. [29]). We call it the *magnetic Hamiltonian on  $\omega$*  associated with  $\mathbf{A}$  (note that we are imposing a Dirichlet boundary condition).

In the following, we denote by  $\Omega$  an open, bounded, and connected set in  $\mathbb{R}^2$  with a Lipschitz boundary  $\partial\Omega$ . For  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ , we note  $v^\perp = (-v_2, v_1)$ . For  $X \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , and  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{X\}$ ,

we define

$$\mathbf{A}_\alpha^X(x) = \frac{\alpha}{|x - X|^2} (x - X)^\perp. \quad (2.1.1)$$

In the rest of the paper,  $N$  is an integer,  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$  an  $N$ -tuple of points in  $\mathbb{R}^2$ , with  $X_i \neq X_j$  for  $i \neq j$  (at least for now), and  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ . Let us denote by  $\Omega_{\mathbf{X}}$  the open set  $\Omega \setminus \{X_1, \dots, X_N\}$ . We define the *Aharonov-Bohm potential* associated with  $\mathbf{X}$  and  $\alpha$  as the vector field

$$\mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_{\alpha_i}^{X_i}. \quad (2.1.2)$$

Let us point out that the  $X_i$ 's can be in  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ , and in particular in  $\partial\Omega$ . The *Aharonov-Bohm operator* associated with  $\mathbf{X}$  and  $\alpha$  is the magnetic Hamiltonian  $-\Delta_{\mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}}}$  on  $\Omega_{\mathbf{X}}$ . We denote it by  $-\Delta_\alpha^{\mathbf{X}}$ .

Let us briefly consider the physical interpretation of the Aharonov-Bohm potential. Generally speaking, for a smooth magnetic potential  $\mathbf{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  the magnetic field is seen as a vector orthogonal to the plane  $\mathbb{R}^2$ , with magnitude

$$\mathbf{B}(x) = \text{Curl } \mathbf{A}(x) = \partial_{x_1} A_2(x) - \partial_{x_2} A_1(x). \quad (2.1.3)$$

Applying this relation to the potential  $\mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}}$ , in the sense of distributions on  $\mathbb{R}^2$ , we find

$$\text{Curl } \mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \delta_{X_i} \quad (2.1.4)$$

with  $\delta_{X_i}$  the Dirac measure at the point  $X_i$ . Furthermore, it follows directly from the definition of  $\mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}}$  that for any closed loop  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \cup_{i=1}^N \{X_i\}$ ,

$$\oint_\gamma \mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}}(s) ds = 2\pi \sum_{i=1}^N \text{ind}_\gamma(X_i) \alpha_i, \quad (2.1.5)$$

where  $\text{ind}_\gamma(X_i)$  is the winding number of  $\gamma$  around  $X_i$ . If  $B_i$  is a small disk centered at  $X_i$  such that  $X_j \notin B_i$  for  $j \neq i$ ,

$$\alpha_i = \frac{1}{2\pi} \int_{B_i} \mathbf{B}$$

(this equation makes sense since  $\mathbf{B}$  is a measure). We call  $\alpha_i$  the *normalized flux at  $X_i$* .

We will show, with the help of a *gauge transformation* of the magnetic potential, that if  $\alpha' - \alpha \in \mathbb{Z}^N$  the operators  $-\Delta_\alpha^{\mathbf{X}}$  and  $-\Delta_{\alpha'}^{\mathbf{X}}$  are unitarily equivalent. In particular, if  $\alpha \in \mathbb{Z}^N$  the operator  $-\Delta_\alpha^{\mathbf{X}}$  is unitarily equivalent to the Dirichlet Laplacian on  $\Omega$ , which we denote by  $-\Delta_\Omega^D$ . We denote by  $(\lambda_k^D(\Omega))_{k \geq 1}$  the sequence of eigenvalues of  $-\Delta_\Omega^D$ , counted with multiplicity. Unitary equivalence with  $-\Delta_\Omega^D$  will be further studied in the paper.

For completeness, we will give a proof of the following property of the form domain  $\mathcal{Q}_\alpha^{\mathbf{X}}$ , which follows from Hardy-type inequalities proved in [24, 2, 26].

**Theorem 2.1.1.** *Let  $\mathcal{H}_\alpha^{\mathbf{X}}$  be defined as*

$$\mathcal{H}_\alpha^{\mathbf{X}} = \{u \in L^2(\Omega); (-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}})u \in L^2(\Omega)\}$$

*with the natural scalar product. Then  $\mathcal{H}_\alpha^{\mathbf{X}}$  is a Hilbert space compactly embedded in  $L^2(\Omega)$ . Furthermore, there exists a continuous mapping  $\gamma_0 : \mathcal{H}_\alpha^{\mathbf{X}} \rightarrow L^2(\partial\Omega)$  such that for any  $u \in C_c^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{X_1, \dots, X_N\})$ ,  $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$ . A function  $u$  in  $L^2(\Omega)$  belongs to  $\mathcal{Q}_\alpha^{\mathbf{X}}$  if, and only if,  $u \in \mathcal{H}_\alpha^{\mathbf{X}}$  and  $\gamma_0 u = 0$ .*

As a consequence of the compact embedding, the spectrum of  $-\Delta_\alpha^{\mathbf{X}}$  consists in a sequence of real eigenvalues converging to  $+\infty$ . Let  $(\lambda_k(\mathbf{X}, \alpha))_{k \geq 1}$  be this sequence, the eigenvalues being arranged in increasing order and counted with multiplicity. We are interested in the functions  $\mathbf{X} \mapsto \lambda_k(\mathbf{X}, \alpha)$ . Let us note that according to our definition of  $\mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}}$ ,  $\lambda_k(\mathbf{X}, \alpha)$  is defined only for  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2N}$  such that  $X_i \neq X_j$  for  $i \neq j$ . To state the following result, it is convenient to extend

the function  $\mathbf{X} \mapsto \lambda_k(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha})$  to  $\mathbb{R}^{2N}$ . We define  $\lambda_k(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha})$  as the  $k$ -th eigenvalue of the operator  $-\Delta_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{Y}}$ , where the  $M$ -tuple  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_M)$  contains once, and only once, each point appearing in  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$  and where  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_M)$  with

$$\beta_j = \sum_{i, X_i=Y_j} \alpha_i$$

for each  $1 \leq j \leq M$ . For instance, with this definition,  $\lambda_k((X_1, X_2, X_3), (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3))$  with  $X_1 = X_2 \neq X_3$  is  $\lambda_k((X_1, X_3), (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3))$ .

**Theorem 2.1.2.** *For any given  $k \geq 1$  and  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^N$ , the function  $\mathbf{X} \mapsto \lambda_k(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha})$  is continuous in  $\mathbb{R}^{2N}$ .*

Let us note that this result is stronger than it may appear at first glance. In particular, it implies continuity of the eigenvalues in the case of one point tending to the boundary of  $\Omega$ , or in the case of coalescing points.

Additional regularity is easily obtained when the poles are distinct and far from the boundary. We will prove the following result.

**Theorem 2.1.3.** *Let  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  and  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  be the vectors of the canonical basis of  $\mathbb{R}^2$ . Assume that  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2N}$  and  $k \geq 1$  are such that  $X_i \notin \partial\Omega$  for  $1 \leq i \leq N$ ,  $X_i \neq X_j$  for  $i \neq j$ , and  $\lambda_k(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha})$  is a simple eigenvalue. Then the function*

$$(t_1, t_2, \dots, t_{2N-1}, t_{2N}) \mapsto \lambda_k((X_1 + t_1\mathbf{e}_1 + t_2\mathbf{e}_2, \dots, X_N + t_{2N-1}\mathbf{e}_1 + t_{2N}\mathbf{e}_2), \boldsymbol{\alpha})$$

*is analytic in a neighborhood of 0 in  $\mathbb{R}^{2N}$ .*

In general, an eigenfunction  $u$  of the operator  $-\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{X}}$  is complex-valued and the set  $u^{-1}(\{0\})$  consists in isolated points of  $\Omega$ . However, in the case where  $\alpha_i \in \mathbb{Z} + 1/2$  for all  $1 \leq i \leq N$ , we can define a class of eigenfunctions for which the notion of nodal set is meaningful. To this end, as in [16], we define a suitable unitary antilinear operator  $K_{\mathbf{X}}$  (see Section 2.5) and call  $K_{\mathbf{X}}$ -real a function  $u$  such that  $K_{\mathbf{X}}u = u$ . If  $u$  is a  $K_{\mathbf{X}}$ -real eigenfunction, the set  $u^{-1}(\{0\})$  is locally a regular curve, except at the poles and maybe at a finite number of points where curves cross. By analogy with the terminology used for real eigenfunctions of the operator  $-\Delta_{\Omega}^D$ , we call  $u^{-1}(\{0\})$  the *nodal set* and its component curves the *nodal lines*. Following a suggestion of Susanna Terracini, we have studied the derivatives of an eigenvalue with respect to a pole when at least three nodal lines of an associated  $K_{\mathbf{X}}$ -real eigenfunction meet at this pole. It has already been shown in [27] that if the function  $Y \mapsto \lambda_k(Y, 1/2)$  has a critical point at  $X$  and if  $\lambda_k(X, 1/2)$  is simple, an associated  $K_{\mathbf{X}}$ -real eigenfunction  $u$  has at least three nodal lines meeting at  $X$ . By modifying the proof we have given of Theorem 2.1.3 and using results from [2] on the structure of the nodal set, we prove the converse.

**Theorem 2.1.4.** *Let  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^N$  and  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2N}$ . Let us fix  $1 \leq i \leq N$  with  $X_i \in \Omega$ . For  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , and  $k \geq 1$ , we define*

$$\mathbf{X}(t) = (X_1, \dots, X_i + t\mathbf{v}, \dots, X_N)$$

*and  $\lambda_k(t) = \lambda_k(\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\alpha})$ . Let us assume that  $\lambda_k(0)$  is simple and has a  $K_{\mathbf{X}}$ -real eigenfunction  $u$  with at least three nodal lines that meet at  $X_i$ . Then  $\lambda_k'(0) = 0$ .*

During the writing of this work, S. Terracini showed us a preliminary version of the paper [10]. It contains a similar continuity result, restricted to the case of one pole and assuming  $\Omega$  to be simply connected with a  $C^\infty$  boundary. It also contains a stronger version of Theorem 2.1.4. The main contribution of our paper is in the generality of Theorem 2.1.2, which allows us to treat coalescing poles, and in the use of the Kato-Rellich regular perturbation theory to give a simpler proof of Theorem 2.1.4.

The paper is organized as follows. We first recall the definition of a gauge transformation of the magnetic potential, and the fact that it preserves the spectrum of the associated magnetic Hamiltonian. We then give a sufficient condition for  $-\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{X}}$  to be unitarily equivalent to  $-\Delta_{\Omega}^D$ .

We recall a Hardy-type inequality from [2], some of its consequences, and a non-concentration inequality for functions in  $\mathcal{Q}_\alpha^X$ . We use these results to characterize the form domain of Aharonov-Bohm (Theorem 2.1.1). In a second part, we show the continuity of the eigenvalues with respect to the poles (Theorem 2.1.2). We then apply this theorem to some examples : we study the limits of the eigenvalues when the operator has a pole moving toward the boundary of the domain (Corollary 2.4.4) or two poles moving toward one another (Corollary 2.4.5). We then show the analyticity of the eigenvalues with respect to the poles under some restrictive conditions (Theorem 2.1.3), and consider their critical points (Theorem 2.1.4). In the last section, we discuss the connection of these results with spectral minimal partitions.

I would like to thank my advisors, Virginie Bonnaille-Noël and Bernard Helffer, for directing me toward this subject, and for many suggestions and corrections. Virginie Bonnaille-Noël also sent me the numerical computations and pictures used in Section 2.6. I benefited greatly from exchanges with Susanna Terracini and Luc Hillairet. In particular, Lemma 2.3.4 and the method used to prove Theorem 2.1.2 are taken from unpublished notes kindly communicated by Luc Hillairet.

## 2.2 Gauge transformations

### 2.2.1 Definition and basic properties

We briefly recall some classical properties of gauge transformations. They will be useful in proving our main results.

**Definition 2.2.1.** A gauge transformation acts on pairs vector field-function as  $(\mathbf{A}, u) \mapsto (\mathbf{A}^*, u^*)$  with

$$\begin{cases} \mathbf{A}^* &= \mathbf{A} - i \frac{\nabla \psi}{\psi}, \\ u^* &= \psi u, \end{cases}$$

where  $\psi \in C^\infty(\omega, \mathbb{C})$  satisfies  $|\psi| = 1$ . The function  $\psi$  is called a gauge function on  $\omega$ . Two vector potentials are said to be gauge equivalent when the second one can be obtained from the first one by a gauge transformation.

Since

$$\text{Curl } \mathbf{A}^* = \text{Curl } \mathbf{A}$$

and

$$|u^*|^2 = |u|^2,$$

neither the magnetic field nor the probability distribution are changed by a gauge transformation. On the other hand, due to the possible multiple connectedness of  $\omega$ , two magnetic potentials on  $\omega$  giving the same magnetic field are not necessarily gauge equivalent. Let us give an equivalence criterion (from [16]).

**Lemma 2.2.2.** Let  $\mathbf{A} \in C^\infty(\omega, \mathbb{R}^2)$ . It is gauge equivalent to 0 if, and only if,

$$\frac{1}{2\pi} \oint_\gamma \mathbf{A}_\alpha^X(s) ds \quad (2.2.1)$$

is an integer for any loop  $\gamma$  contained in  $\omega$ .

Let us check that the spectrum of a magnetic Hamiltonian is invariant under a gauge transformation. A gauge function  $\psi$  being given, the mapping  $U : u \mapsto u^*$  from  $L^2(\omega)$  into itself is unitary and  $U(C_c^\infty(\omega)) = C_c^\infty(\omega)$ . A direct calculation shows that the identity

$$-\Delta_{\mathbf{A}^*} \circ U = U \circ (-\Delta_{\mathbf{A}})$$

holds on  $C_c^\infty(\omega)$ . As a consequence of the general principle stated below (which follows directly from the definition of the Friedrichs extension), we conclude that the quadratic forms  $q_{\mathbf{A}}$  and  $q_{\mathbf{A}^*}$ , as well as the operators  $-\Delta_{\mathbf{A}}$  and  $-\Delta_{\mathbf{A}^*}$ , are equivalent through  $U$ .

**Proposition 2.2.3.** Let  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{H}$  be a densely defined, positive, and symmetric operator on the Hilbert space  $\mathcal{H}$ ,  $S : \mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{H}$  another operator and  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  a unitary mapping such that

- i)  $U(\mathcal{D}(T)) = \mathcal{D}(S)$ ,
- ii)  $U \circ T = S \circ U|_{\mathcal{D}(T)}$ .

Then  $S$  is densely defined, positive, and symmetric. Furthermore, let  $\hat{T}$  (resp.  $\hat{S}$ ) be the Friedrichs extension of  $T$  (resp.  $S$ ). The corresponding quadratic form is denoted by  $q$  (resp.  $p$ ) and its domain by  $\mathcal{Q}$  (resp.  $\mathcal{P}$ ). Then

- i)  $U(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}$ ,
- ii)  $q = p \circ U$ ,
- iii)  $U(\mathcal{D}(\hat{T})) = \mathcal{D}(\hat{S})$ ,
- iv)  $U \circ \hat{T} = \hat{S} \circ U|_{\mathcal{D}(\hat{T})}$ .

This result is a particular case of [25, Theorem 1.2].

### 2.2.2 Comparison with the Dirichlet Laplacian

Let us assume that the set  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$  can be written as the reunion of a finite number  $K + 1$  of closed and connected sets  $D_1, D_j, \dots, D_K$ , with  $D_j$  bounded for  $1 \leq j \leq K$  and  $D_0$  unbounded. Let us consider an Aharonov-Bohm potential  $\mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}}$ . For  $0 \leq j \leq K$ , let us define

$$\Phi(D_j) = \sum_{X_k \in D_j} \alpha_k$$

the total normalized flux through  $D_j$ .

**Proposition 2.2.4.** *If  $\Phi(D_j)$  is an integer for each bounded connected component  $D_j$  of  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$  and if, for each  $1 \leq i \leq N$  such that  $X_i \in \Omega$ ,  $\alpha_i$  is an integer, then  $-\Delta_\alpha^{\mathbf{X}}$  is unitarily equivalent to the Dirichlet Laplacian on  $\Omega$ .*

*Démonstration.* Let us first show that for any loop  $\gamma$  contained in  $\Omega_{\mathbf{X}}$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \oint_\gamma \mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}}(s) ds$$

is an integer. We apply Formula (2.1.5). The winding number of  $\gamma$  around any point contained in  $D_0$  is 0. For each  $1 \leq j \leq K$ , the winding number of  $\gamma$  around all the points in  $D_j$  is the same. We denote it by  $n_j$ . Let us finally note  $\mathcal{A} = \{1 \leq i \leq N; X_i \in \Omega\}$ . We get the formula

$$\frac{1}{2\pi} \oint_\gamma \mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}}(s) ds = \sum_{i \in \mathcal{A}} \text{ind}_\gamma(X_i) \alpha_i + \sum_{j=1}^K n_j \Phi(D_j).$$

The left-hand side is obviously an integer if the hypotheses of the proposition are satisfied. According to Lemma 2.2.2, this implies that  $\mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}}$  is gauge equivalent to 0. The Aharonov-Bohm Hamiltonians  $-\Delta_\alpha^{\mathbf{X}}$  and  $-\Delta_0^{\mathbf{X}}$  are therefore unitarily equivalent. The form domain  $\mathcal{Q}_0^{\mathbf{X}}$  of  $-\Delta_0^{\mathbf{X}}$  is the closure under the  $H^1$ -norm of  $C_c^\infty(\Omega_{\mathbf{X}})$ . Since points in  $\mathbb{R}^2$  have an  $H^1$ -capacity equal to zero (see e. g. [19, Chap. 3]),  $\mathcal{Q}_0^{\mathbf{X}} = H_0^1(\Omega)$  and  $-\Delta_0^{\mathbf{X}} = -\Delta_0^D$ .  $\square$

## 2.3 Form domain of an Aharonov-Bohm operators

### 2.3.1 A Hardy-type inequality

In this section, we prove Theorem 2.1.1. Let us recall a useful result from [24]. The statement and the proof that we give are taken from [2].

**Lemma 2.3.1.** *Let  $X \in \mathbb{R}^2$  and  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . For every  $0 \leq \rho_1 < \rho_2$  and  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{X\})$ ,*

$$\int_{\mathcal{C}(X, \rho_1, \rho_2)} \frac{|u|^2}{|x - X|^2} dx \leq \text{dist}(\alpha, \mathbb{Z})^{-2} \int_{\mathcal{C}(X, \rho_1, \rho_2)} |(-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}}) u|^2 dx, \quad (2.3.1)$$

with

$$\mathcal{C}(X, \rho_1, \rho_2) = \{x \in \mathbb{R}^2; \rho_1 < |x - X| < \rho_2\}.$$

*Démonstration.* For simplicity, let us assume that  $X = 0$ . We denote by  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$  the orthonormal basis associated to the polar coordinates  $(r, \theta)$ . Then

$$(-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^X)u = -i\partial_r u \mathbf{e}_r - \frac{1}{r}(i\partial_\theta + \alpha)u \mathbf{e}_\theta,$$

and thus

$$|(-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^X)u|^2 = |\partial_r u|^2 + \frac{1}{r^2}|(i\partial_\theta + \alpha)u|^2.$$

Discarding the positive term  $|\partial_r u|^2$ , integrating, and using a polar change of variables, we get

$$\int_{\mathcal{C}(0, \rho_1, \rho_2)} |(-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^X)u|^2 dx \geq \int_{\rho_1}^{\rho_2} r dr \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r^2} |(i\partial_\theta + \alpha)u|^2.$$

Let us define, for  $n \in \mathbb{Z}$  and  $\rho_1 < r < \rho_2$ , the Fourier coefficient

$$c_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

For  $\rho_1 < r < \rho_2$  and  $0 < \theta < 2\pi$ , we find, by summing the Fourier series,

$$u(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(r) e^{in\theta}$$

and

$$\partial_\theta u(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} in c_n(r) e^{in\theta}.$$

According to Parseval's Formula,

$$\int_{\mathcal{C}(0, \rho_1, \rho_2)} \frac{|u|^2}{r^2} dx = 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{1}{r^2} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(r)|^2 \right) r dr$$

and

$$\int_{\mathcal{C}(0, \rho_1, \rho_2)} |(-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^X)u|^2 dx \geq 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{1}{r^2} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n - \alpha|^2 |c_n(r)|^2 \right) r dr.$$

Inequality (2.3.1) is then obvious.  $\square$

**Corollary 2.3.2.** *If  $\alpha_i \notin \mathbb{Z}$  for each  $1 \leq i \leq N$ , then  $\mathcal{H}_\alpha^X$  is continuously embedded in  $H^1(\Omega)$ .*

*Démonstration.* Let  $u \in \mathcal{Q}_\alpha^X$ . Let us choose  $r > 0$  such that, for all  $i \neq j$ ,  $r < |X_i - X_j|$ . Let us fix  $1 \leq i \leq N$ . Since

$$\nabla u = i(-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^X)u + i\mathbf{A}_\alpha^X u,$$

we obtain

$$|\nabla u|^2 \leq 2|(-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^X)u|^2 + 2|\mathbf{A}_\alpha^X u|^2,$$

and then

$$\int_{B(X_i, r)} |\nabla u|^2 dx \leq 2 \int_{B(X_i, r)} |(-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^X)u|^2 dx + 2 \int_{B(X_i, r)} |\mathbf{A}_\alpha^X u|^2 dx.$$

Inequality (2.3.1) implies that

$$\int_{B(X_i, r)} \frac{|u|^2}{|x - X_i|^2} dx \leq \text{dist}(\alpha_i, \mathbb{Z})^{-2} \int_{B(X_i, r)} |(-i\nabla - \mathbf{A}_{\alpha_i}^{X_i})u|^2 dx.$$

Up to a gauge transformation on  $B(X_i, r)$ , we can assume that  $\mathbf{A}_\alpha^X = \mathbf{A}_{\alpha_i}^{X_i}$ , and we deduce

$$\int_{B(X_i, r)} |\mathbf{A}_\alpha^X u|^2 dx \leq \alpha_i^2 \text{dist}(\alpha_i, \mathbb{Z})^{-2} \int_{B(X_i, r)} |(-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^X)u|^2 dx.$$

This shows that on  $\Omega \cap \cup_{i=1}^N B(X_i, r)$ , the  $H^1$ -norm is controlled by the norm  $\|\cdot\|_\alpha^X$ . But this is also true on  $\Omega \setminus \cup_{i=1}^N B(X_i, r)$ , since  $|\mathbf{A}_\alpha^X|$  is bounded on this set. This concludes the proof.  $\square$

### 2.3.2 A non-concentration inequality

We now establish a non-concentration result. It is a slight variation on an inequality that was communicated to us by Luc Hillairet. A similar result is proved in [20, Lem. 3.2.]. Let us first give it for  $H^1$ -functions.

**Lemma 2.3.3.** *For any  $0 < \nu < 1$ , there exists a constant  $C_\nu \geq 0$  such that, for all  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $x_0 \in \Omega$ , and  $r > 0$ ,*

$$\|u\|_{L^2(B(x_0, r))} \leq C_\nu r^\nu \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \quad (2.3.2)$$

where

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^2; |x - x_0| < r\}.$$

*Démonstration.* The proof is a direct application of the embedding  $H^1(\mathbb{R}^2) \subset L^p(\mathbb{R}^2)$ , valid for any  $2 \leq p < \infty$ . Let  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ . According to the Hölder inequality,

$$\int_{B(x_0, r)} |u|^2 dx \leq |B(x_0, r)|^{1/q} \left( \int_{B(x_0, r)} |u|^{2q'} dx \right)^{1/q'} \leq |B(x_0, r)|^{1/q} \|u\|_{L^{2q'}(\mathbb{R}^2)}^2$$

for any  $q$  and  $q'$  greater than 1 such that  $1/q + 1/q' = 1$ . We chose  $q = 1/\nu$ , and obtain

$$\int_{B(x_0, r)} |u|^2 dx \leq C_1 r^{2\nu} \|u\|_{L^{\frac{2}{1-\nu}}(\mathbb{R}^2)}^2,$$

where  $C_1$  is a constant depending only on  $\nu$ . Since  $H^1(\mathbb{R}^2)$  is continuously embedded in  $L^{\frac{2}{1-\nu}}(\mathbb{R}^2)$ , we finally get

$$\int_{B(x_0, r)} |u|^2 dx \leq C_2 r^{2\nu} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2,$$

where  $C_2$  is a constant depending only on  $\nu$ . □

We now extend this result to functions in the form domain  $\mathcal{Q}_\alpha^{\mathbf{X}}$  in the case  $\nu = 1/2$ .

**Lemma 2.3.4.** *There exists a constant  $C \geq 0$  such that, for any  $x_0 \in \Omega$ ,  $r > 0$ , and  $u \in \mathcal{Q}_\alpha^{\mathbf{X}}$ ,*

$$\|u\|_{L^2(B(x_0, r))}^2 \leq C r \left( \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|(-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}})u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \right). \quad (2.3.3)$$

*Démonstration.* Let us first consider the case where  $u \in C_c^\infty(\Omega_{\mathbf{X}})$ . Then  $|u| \in H^1(\mathbb{R}^2)$  and inequality (2.3.2) yields

$$\|u\|_{L^2(B(x_0, r))}^2 \leq C r \left( \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|\nabla|u|\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \right)$$

for some constant  $C$  independent of  $u$  and  $r$ . According to the diamagnetic inequality,  $|\nabla|u|(x)| \leq |(-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}})u(x)|$  for almost every  $x \in \mathbb{R}^2$ . We obtain

$$\|u\|_{L^2(B(x_0, r))}^2 \leq C r \left( \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|(-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}})u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \right).$$

Since  $\mathcal{Q}_\alpha^{\mathbf{X}}$  is defined as the closure of  $C_c^\infty(\Omega_{\mathbf{X}})$  for the norm  $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}^\alpha$ , the inequality still holds for functions in  $\mathcal{Q}_\alpha^{\mathbf{X}}$ . □

### 2.3.3 Characterization of the form domain

We now give a proof of Theorem 2.1.1.

Lemma 2.2.2 shows that up to a unitary transformation in  $L^2(\Omega)$ , we can assume that  $\alpha_i \notin \mathbb{Z}$  for all  $1 \leq i \leq N$ . We have seen that in this case  $\mathcal{H}_\alpha^{\mathbf{X}}$  is continuously embedded in  $H^1(\Omega)$ . Since  $H^1(\Omega)$  is compactly embedded in  $L^2(\Omega)$  (see [15, Chap 4, Sec. 6] for the case of a Lipschitz boundary), we have proved the compact embedding  $\mathcal{Q}_\alpha^{\mathbf{X}} \subset L^2(\Omega)$ . Furthermore, we can chose as  $\gamma_0$  the usual boundary trace operator (c.f. [15, Chap. 4, Sec. 3]).

We now characterize the form domain  $\mathcal{Q}_\alpha^{\mathbf{X}}$ . Since any function in  $\mathcal{Q}_\alpha^{\mathbf{X}}$  is the limit in the norm  $\|\cdot\|_X^\alpha$  of a sequence of functions in  $C_c^\infty(\Omega_{\mathbf{X}})$ , it obviously satisfies  $u \in \mathcal{H}_\alpha^{\mathbf{X}}$  and  $\gamma_0 u = 0$ .

Let us now consider  $u \in \mathcal{H}_\alpha^{\mathbf{X}}$  such that  $\gamma_0 u = 0$ . To prove that  $u \in \mathcal{Q}_\alpha^{\mathbf{X}}$ , it suffices to show that we can find a function in  $C_c^\infty(\Omega_{\mathbf{X}})$  arbitrarily close to  $u$  in the norm  $\|\cdot\|_X^\alpha$ . Let us first note that being in  $\mathcal{H}_\alpha^{\mathbf{X}}$  and satisfying a Dirichlet boundary condition are local properties, preserved under the multiplication by a smooth function. By a standard partition of unity argument, we need only to prove the result in the neighborhood of one pole. Furthermore, up to a local gauge transformation, we can always assume that  $\mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}}$  is of the form

$$\mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}}(x) = \frac{\alpha}{|x - X|^2} (x - X)^\perp$$

with  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ .

We are left with two simple cases to study.

*Case 1 (interior point).*

Let us assume that  $X = 0$  and that  $\Omega = B(0, 1)$ . Inequality (2.3.1) shows that  $u/|x|$  is in  $L^2(B(0, 1))$ . Now let us fix a sequence  $(\chi_m)$  of smooth function on  $\mathbb{R}^2$  satisfying

- i)  $0 \leq \chi_m \leq 1$ ,
- ii)  $\chi_m = 1$  on  $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \frac{1}{m})$ ,
- iii)  $\chi_m = 0$  on  $B(0, \frac{1}{2m})$ ,
- iv)  $|\nabla \chi_m| \leq C m$ ,

with  $C$  a constant that does not depend on  $m$ .

Let us define  $u_m = \chi_m u$ . Then

$$\|u_m - u\|_{L^2(B(0,1))}^2 \leq 2 \int_{B(0, \frac{1}{m})} |u|^2 dx$$

and

$$\|(-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^0)(u_m - u)\|_{L^2(B(0,1))}^2 \leq 2 \int_{B(0, \frac{1}{m})} |(-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^0)u|^2 dx + 2 \int_{B(0, \frac{1}{m})} |\nabla \chi_m|^2 |u|^2 dx.$$

Considering that

$$\int_{B(0, \frac{1}{m})} |\nabla \chi_m|^2 |u|^2 dx \leq \int_{B(0, \frac{1}{m})} C^2 m^2 |u|^2 dx \leq C^2 \int_{B(0, \frac{1}{m})} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx,$$

we get

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|(-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^0)(u_m - u)\|_{L^2(B(0,1))}^2 = 0.$$

We can therefore pick  $u_m$  close enough to  $u$  in the norm  $\|\cdot\|_0^\alpha$ , and then, since  $u_m \in H_0^1(B(0, 1) \setminus B(0, \frac{1}{2m}))$ , pick  $\varphi \in C_c^\infty(B(0, r) \setminus B(0, \frac{1}{m}))$  close enough to  $u_m$  in the norm  $\|\cdot\|_\alpha^0$ .

*Case 2 (boundary point).*

We now assume that  $X = 0$  and that

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in B(0, 1); x_2 > f(x_1)\}$$

with  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  a Lipschitz function such that  $f(0) = 0$ .

Since  $\Omega$  is a simply connected open set that does not contain 0, we can assume, up to a gauge transformation, that  $\alpha = 0$ . It remains to see that any  $u \in H^1(\Omega)$  such that  $\gamma u = 0$  on  $\partial\Omega$  ( $\gamma$  being the usual boundary trace) is the  $H^1$ -limit of a sequence of functions in  $C_c^\infty(\Omega)$ . But in the case of Lipschitz boundaries, those are simply two equivalent characterizations of  $H_0^1(\Omega)$  (c.f. [19, Chap. 3]).

The characterization of Theorem 2.1.1 is of course standard, but it plays a central part in the proof of Theorem 2.1.2, and we have therefore included it for completeness. Let us briefly comment on the condition  $(-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}})u \in L^2(\Omega)$  for a function  $u \in \mathcal{Q}_\alpha^{\mathbf{X}}$ . Far from the poles, it reduces to the condition that  $u$  is locally in  $H^1$ . In a neighborhood of a pole  $X_i$ , its meaning depends on



the normalized flux  $\alpha_i$ . If  $\alpha_i \notin \mathbb{Z}$ , Inequality (2.3.1) shows that  $u$  is locally in  $H^1$  (as seen in the proof of Corollary 2.3.2), with the additional integrability condition  $u/|x - X_i| \in L^2(\Omega)$ . If  $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ , the condition means that there is a local gauge transformation  $\psi$  such that  $u^* = \psi u$  is locally in  $H^1$  (as seen in the proof of Proposition 2.2.4), but does not mean that  $u$  is locally in  $H^1$ . Indeed this is not the case as soon as  $\alpha_i \neq 0$ , because then the function  $(r, \theta) \mapsto e^{i\alpha_i\theta}$  (expressed in polar coordinates) is not  $H^1$  in a neighborhood of 0. The fact that we have a characterization that is valid for all normalized flux allows us to prove the continuity of the eigenvalues when several poles, each with a non-integer flux, coalesce into a single pole with integer flux.

## 2.4 Continuity with respect to the poles

### 2.4.1 Main statement

Let us first restate Theorem 2.1.2.

**Proposition 2.4.1.** *Let  $(\mathbf{X}^n)_{n \geq 1}$  be a sequence of points in  $\mathbb{R}^{2N}$  such that  $\mathbf{X}^n \rightarrow \mathbf{X}$  when  $n \rightarrow +\infty$ . Then, for each  $k \geq 1$ ,  $\lambda_k(\mathbf{X}^n, \boldsymbol{\alpha}) \rightarrow \lambda_k(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha})$  when  $n \rightarrow +\infty$ .*

The proof is based on two key lemmas which will be stated and proved in the next subsections.

### 2.4.2 An extraction lemma

The following lemma is the central part of the proof of Proposition 2.4.1. Its proof uses the weak compactness of the unit ball of  $H^1$ , the non-concentration result of Lemma 2.3.4, and the characterization of the form domain  $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{X}}$  given in Theorem 2.1.1.

**Lemma 2.4.2.** *Let  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  be a sequence of eigenvalues associated with  $-\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{X}^n}$  and  $(u_n)_{n \geq 1}$  a sequence of corresponding normalized eigenfunctions. Assume that  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  when  $n \rightarrow +\infty$ . Then there is a strictly increasing sequence of integers  $(n_p)_{p \geq 1}$  and a function  $u \in \mathcal{Q}_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{X}}$  such that*

- i)  $u$  is an eigenfunction of  $-\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{X}}$  associated with the eigenvalue  $\lambda$ ,
- ii)  $u_{n_p} \rightarrow u$  when  $p \rightarrow \infty$  in  $L^2(\Omega)$  (strongly),
- iii)  $u_{n_p}(x) \rightarrow u(x)$  when  $p \rightarrow \infty$  for almost every  $x$  in  $\Omega$ .

*Démonstration.* For  $m \geq 1$ , we define  $S_m = \bigcup_{i=1}^N \overline{B(X_i, \frac{1}{m})}$  and  $\Omega_m = \Omega \setminus S_m$ . Let us fix  $m \geq 1$ . Then, for any integer  $n$  large enough so that  $\Omega_m$  does not contain any point of  $\mathbf{X}^n$ ,

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega_m)} \leq 1$$

and

$$\|(-i\nabla - \mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{X}^n})u_n\|_{L^2(\Omega_m)}^2 \leq 2\|(-i\nabla - i\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{X}^n})u_n\|_{L^2(\Omega_m)}^2 + 2\|\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{X}^n} - \mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{X}}\|_{L^\infty(\Omega_m)}^2 \|u_n\|_{L^2(\Omega_m)}^2.$$

We have

$$\|(-i\nabla - \mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{X}^n})u_n\|_{L^2(\Omega_m)}^2 \leq \|(-i\nabla - \mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{X}^n})u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lambda_n \leq \sup_{q \geq 1} \lambda_q,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{X}^n} - \mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{X}}\|_{L^\infty(\Omega_m)} = 0,$$

and

$$\|\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{X}}\|_{L^\infty(\Omega_m)} < \infty.$$

As a consequence, the sequence  $(u_n)_{n \geq 1}$  is bounded in  $H^1(\Omega_m)$ . Due to the weak compactness of the unit ball of  $H^1(\Omega_m)$ , we can extract from  $(u_n)_{n \geq 1}$  a subsequence that converges weakly to  $u \in H^1(\Omega_m)$ . According to Rellich's Theorem,  $H^1(\Omega_m)$  is compactly embedded in  $L^2(\Omega_m)$ . We can therefore extract from the preceding subsequence a subsequence that converges strongly to  $u$  in  $L^2(\Omega_m)$ , and also (up to one further extraction) that converges to  $u$  almost everywhere in  $\Omega_m$ .

After applying a diagonal extraction procedure, we obtain a subsequence  $(u_{n_p})_{p \geq 1}$  of  $(u_n)_{n \geq 1}$  and a function  $u$  defined almost everywhere in  $\Omega$  such that for each  $m \geq 1$ ,  $u_{n_p} \rightarrow u$  when  $p \rightarrow +\infty$

weakly in  $H^1(\Omega_m)$ , strongly in  $L^2(\Omega_m)$ , and almost everywhere in  $\Omega_m$ . We have, for each  $m \geq 1$ , each  $p \geq 1$ ,

$$\int_{\Omega_m} |u_{n_p}|^2 dx \leq \int_{\Omega} |u_{n_p}|^2 dx = 1$$

and

$$\int_{\Omega_m} |(-i\nabla - \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}})u_{n_p}|^2 dx \leq 2 \sup_{q \geq 1} \lambda_q + 2 \sup_{\Omega_m} |\mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}^n} - \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}}|^2.$$

Passing to the limit  $p \rightarrow 0$ , we get

$$\int_{\Omega_m} |u|^2 dx \leq 1$$

and

$$\int_{\Omega_m} |(-i\nabla - \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}})u|^2 dx \leq 2 \sup_{q \geq 1} \lambda_q.$$

We deduce that  $u \in L^2(\Omega)$ , with  $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$ , and that  $(-i\nabla - \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}})u$ , as a distribution on  $\Omega_{\mathbf{X}}$ , belongs to  $L^2(\Omega)$ .

For  $m \geq 1$ , let us note  $\Gamma_m = \partial\Omega \cap \partial\Omega_m$ . For  $p \geq 1$ , we have  $\gamma_0 u_{n_p} = 0$  on  $\Gamma_m$ . Since  $(u_{n_p})_{p \geq 1}$  converges weakly to  $u$  in  $H^1(\Omega_m)$ ,  $(\gamma_0 u_{n_p})_{p \geq 1}$  converges weakly to  $\gamma_0 u$  in  $L^2(\Gamma_m)$  and therefore  $\gamma_0 u = 0$  on  $\Gamma_m$ . Since  $\cup_{m=1}^{\infty} L^2(\Gamma_m) = L^2(\partial\Omega)$ , we have shown  $\gamma_0 u = 0$ . According to Theorem 2.1.1,  $u \in \mathcal{Q}_{\alpha}^{\mathbf{X}}$ .

Let us check that  $u$  is a weak solution of the eigenvalue equation. Let  $\varphi$  be a  $C^{\infty}$ -function with support in  $\Omega_{\mathbf{X}}$ . There exists  $m \geq 1$  such that  $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega_m$ . For  $p$  large enough,

$$\int_{\Omega} u_{n_p} \overline{(-i\nabla - \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}^{n_p}})^2 \varphi} dx = \lambda_{n_p} \int_{\Omega} u_{n_p} \bar{\varphi} dx.$$

Since  $(-i\nabla - \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}^{n_p}})^2 \varphi$  converges uniformly on  $\Omega$  to  $(-i\nabla - \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}})^2 \varphi$ , we get,

$$\int_{\Omega} u \overline{(-i\nabla - \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}})^2 \varphi} dx = \lambda \int_{\Omega} u \bar{\varphi} dx$$

and therefore

$$\int_{\Omega} (-i\nabla - \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}})u \cdot \overline{(-i\nabla - \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}})\varphi} dx = \lambda \int_{\Omega} u \bar{\varphi} dx.$$

By definition of  $\mathcal{Q}_{\alpha}^{\mathbf{X}}$ , the preceding relation can be extended to any  $\varphi \in \mathcal{Q}_{\alpha}^{\mathbf{X}}$ .

It remains to check that  $u$  is not the trivial solution. To this end, we use the non-concentration property of Lemma 2.3.4 to show that  $(u_{n_p})_{p \geq 1}$  converges in  $L^2(\Omega)$  to  $u$ . Indeed, if  $\varepsilon > 0$ , there exists  $m$  large enough so that, for all  $p \geq 1$ ,

$$\int_{S_m} |u_{n_p}(x)|^2 dx \leq \frac{CN}{m} \left( \sup_{q \geq 1} \lambda_q + 1 \right) \leq \varepsilon,$$

where  $C$  is the constant appearing in Inequality (2.3.3),  $N$  is the number of balls composing  $S_m$ , and  $1/m$  the radius of these balls.

Let us pick such a  $m$ . Then

$$\|u - u_{n_p}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u - u_{n_p}\|_{L^2(\Omega_m)} + \|u - u_{n_p}\|_{L^2(S_m)}$$

so

$$\|u - u_{n_p}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u - u_{n_p}\|_{L^2(\Omega_m)} + \|u\|_{L^2(S_m)} + \|u_{n_p}\|_{L^2(S_m)}.$$

Hence we get

$$\|u - u_{n_p}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u - u_{n_p}\|_{L^2(\Omega_m)} + 2\varepsilon.$$

Since  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|u - u_{n_p}\|_{L^2(\Omega_m)} = 0$ , we have, for  $p$  large enough,

$$\|u - u_{n_p}\|_{L^2(\Omega)} \leq 3\varepsilon.$$

□

### 2.4.3 End of the proof of the continuity

We now prove Proposition 2.4.1, using the max-min characterization of the eigenvalues of  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}$ . We still need a simple lemma.

**Lemma 2.4.3.** *Let  $(\mathbf{X}^n)_{n \geq 1}$  be such that  $\mathbf{X}^n \rightarrow \mathbf{X}$  when  $n \rightarrow \infty$ . Then, for each  $k \geq 1$ ,*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_k(\mathbf{X}^n, \alpha) \leq \lambda_k(\mathbf{X}, \alpha).$$

*Démonstration.* According to the Min-Max Formula, for any  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{2N}$ ,

$$\lambda_k(\mathbf{Y}, \alpha) = \inf_{\varphi_1, \dots, \varphi_k \in C_c^\infty(\Omega_{\mathbf{Y}})} \max_{u \in \text{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)} \frac{\|(-i\nabla - \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{Y}})u\|^2}{\|u\|^2}.$$

Let us pick  $\varepsilon > 0$ . We fix a family  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in C_c^\infty(\Omega_{\mathbf{X}})$  such that

$$\max_{u \in \text{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)} \frac{\|(-i\nabla - \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}})u\|^2}{\|u\|^2} \leq \lambda_k(\mathbf{X}, \alpha) + \varepsilon.$$

For every  $n \geq 1$ , large enough that  $\text{supp}(\varphi_i) \subset \Omega_{\mathbf{X}^n}$  for each  $1 \leq i \leq k$ , let us set

$$\mu_n = \max_{u \in \text{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)} \frac{\|(-i\nabla - \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}^n})u\|^2}{\|u\|^2}.$$

Let us fix  $v_n \in \text{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$  such that  $\|v_n\| = 1$  and  $\|(-i\nabla - \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}^n})v_n\|^2 = \mu_n$ . Let  $\mu$  be a limit point of  $(\mu_n)_{n \geq 1}$ , with  $\mu = \lim_{p \rightarrow \infty} \mu_{n_p}$ . Since  $\text{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$  has finite dimension, we can, up to a subsequence, assume that there exists  $v \in \text{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$  such that  $v_{n_p} \rightarrow v$  in  $L^2(\Omega)$  when  $p \rightarrow \infty$ . Since the  $\varphi_i$ 's are supported away from  $\mathbf{X}$ , it is easily seen that in that case

$$(-i\nabla - \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}^{n_p}})v_{n_p} \rightarrow (-i\nabla - \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}})v$$

in  $L^2(\Omega)$  when  $p \rightarrow \infty$ .

Therefore

$$\mu = \lim_{p \rightarrow \infty} \mu_{n_p} = \frac{\|(-i\nabla - \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}})v\|^2}{\|v\|^2} \leq \lambda_k(\mathbf{X}, \alpha) + \varepsilon.$$

We have proved that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n \leq \lambda_k(\mathbf{X}, \alpha) + \varepsilon.$$

Since  $\lambda_k(\mathbf{X}^n, \alpha) \leq \mu_n$  for all  $n \geq 1$ , we obtain

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_k(\mathbf{X}^n, \alpha) \leq \lambda_k(\mathbf{X}, \alpha) + \varepsilon.$$

We get the desired result by letting  $\varepsilon$  tend to 0. □

We now complete the proof of Proposition 2.4.1 by induction. Let us first consider the case  $k = 1$ . According to Lemma 2.4.3,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_1(\mathbf{X}^n, \alpha) \leq \lambda_1(\mathbf{X}, \alpha).$$

The sequence  $(\lambda_1(\mathbf{X}^n, \alpha))_{n \geq 1}$  is therefore bounded. According to Lemma 2.4.2, its limit points are eigenvalues of  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}$ . This implies

$$\lambda_1(\mathbf{X}, \alpha) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_1(\mathbf{X}^n, \alpha).$$

We conclude that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1(\mathbf{X}^n, \alpha) = \lambda_1(\mathbf{X}, \alpha).$$

Let  $k \geq 2$ . We assume that for  $1 \leq j \leq k-1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_j(\mathbf{X}^n, \alpha) = \lambda_j(\mathbf{X}, \alpha)$ . For each  $n \geq 1$ ,  $1 \leq j \leq k$ , we fix  $u_n^j$  an eigenfunction of  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}^n}$  associated with  $\lambda_j(\mathbf{X}^n, \alpha)$  such that  $\|u_n^j\| = 1$ .

Lemma 2.4.2 tells us that, up to a subsequence, we can assume that for each  $1 \leq j \leq k-1$ ,  $u_n^j \rightarrow u^j$  when  $n \rightarrow \infty$ , where  $u^j$  is an eigenfunction of  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}$  associated with the eigenvalue  $\lambda_j(\mathbf{X}, \alpha)$ . Now let us assume that  $\lambda$  is a limit point for the sequence  $(\lambda_k(\mathbf{X}^n, \alpha))_{n \geq 1}$ , with  $\lambda = \lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_k(\mathbf{X}^{n_p}, \alpha)$ . Up to a subsequence,  $u_{n_p}^k \rightarrow u^k$  in  $L^2(\Omega)$  when  $p \rightarrow \infty$ , where  $u^k$  is an eigenfunction of  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}$  associated with  $\lambda$  (always according to Lemma 2.4.2). For each  $1 \leq j \leq k-1$ , each  $n \geq 1$ , we have

$$\langle u_{n_p}^j, u_{n_p}^k \rangle = 0.$$

Passing to the limit in  $L^2(\Omega)$  (up to extraction), we get

$$\langle u^j, u^k \rangle = 0,$$

and therefore

$$\lambda_k(\mathbf{X}, \alpha) \leq \lambda.$$

We have proved that

$$\lambda_k(\mathbf{X}, \alpha) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_k(\mathbf{X}^n, \alpha),$$

which, together with Lemma 2.4.3, gives

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k(\mathbf{X}^n, \alpha) = \lambda_k(\mathbf{X}, \alpha).$$

#### 2.4.4 Some applications

In the following, we fix  $k \geq 1$ . Our first result deals with one point moving toward the boundary of the domain. To state it, we assume that  $\Omega$  satisfies the hypothesis of Subsection 2.2.2 and we use the same notation. Let us consider an Aharonov-Bohm operator with only one pole  $X \in \mathbb{R}^2$ . We have already noticed that the winding number of any path  $\gamma$  contained in  $\Omega$  is zero around any point in  $D_0$  and, for each  $1 \leq i \leq N$ , is the same around all the points in  $D_i$ . According to Lemma 2.2.2, this implies that the function  $X \mapsto \lambda_k(X, 1/2)$  is constant on each of the  $D_i$ . For each  $1 \leq i \leq N$ , let us note  $\lambda_k^i(\Omega)$  the value  $\lambda_k(X, \alpha)$  for  $X \in D_i$ . Theorem 2.1.2 gives the following convergence result.

**Corollary 2.4.4.** *Let  $X$  be a point in  $\partial\Omega$  and  $(X^n)_{n \geq 1}$  be a sequence of points in  $\Omega$  converging to  $X$ . Then,*

1. *if  $X \in \partial D_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k(X^n, \alpha) = \lambda_k^D(\Omega)$ ,*
2. *if  $X \in \partial D_i$  with  $1 \leq i \leq N$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k(X^n, \alpha) = \lambda_k^i(\Omega)$ .*

Let us now consider an Aharonov-Bohm operator with two poles  $X$  and  $Y$ , whose respective normalized flux are  $\alpha$  and  $\beta$ . We restate Theorem 2.1.2 in that case.

**Corollary 2.4.5.** *If  $X \in \overline{\Omega}$ , and  $(X^n)_{n \geq 1}$ ,  $(Y^n)_{n \geq 1}$  are sequences of points in  $\Omega$  converging to  $X$ , then, for each  $k \geq 1$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k((X^n, Y^n), (\alpha, \beta)) = \lambda_k(X, \alpha + \beta).$$

If  $\alpha = \beta = 1/2$ ,  $\lambda_k(X, \alpha + \beta) = \lambda_k^D(\Omega)$  according to Proposition 2.2.4.

## 2.5 Analyticity with respect to the poles

We now turn to the proof of Theorem 2.1.3. Let us first give a brief outline. For  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_{2N-1}, t_{2N}) \in \mathbb{R}^{2N}$ , we note  $X_1(\mathbf{t}) = X_1 + t_1 \mathbf{e}_1 + t_2 \mathbf{e}_2, \dots, X_N(\mathbf{t}) = X_N + t_{2N-1} \mathbf{e}_1 + t_{2N} \mathbf{e}_2$ , and  $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = (X_1(\mathbf{t}), \dots, X_N(\mathbf{t}))$ . We construct a suitable unitary mapping  $U(\mathbf{t}) : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  such that  $q_{\alpha}^{\mathbf{X}} \circ U(\mathbf{t})^{-1}$  is an analytic family of type (a) with respect to the variable  $\mathbf{t}$  in the sense of Kato (cf [23, Chap 4., Sec.5]). The theorem is then a direct application of the Kato-Rellich regular perturbation theory.

Let us first construct  $U(\mathbf{t})$ . For  $r > 0$  and  $1 \leq i \leq N$ , we note  $B_i = B(X_i, r)$  and  $B'_i = B(X_i, r/2)$ . We choose  $r$  small enough so that  $B_i \cap \partial\Omega = \emptyset$  and  $B_i \cap B_j = \emptyset$  for  $i \neq j$ . Next we fix, for each  $1 \leq i \leq N$ , a smooth function  $\chi_i$  satisfying

- i.  $0 \leq \chi_i \leq 1$  ;
- ii.  $\chi_i = 1$  on  $B'_i$  ;
- iii.  $\chi_i = 0$  on  $\mathbb{R}^2 \setminus B_i$  .

We then note

$$\mathbf{V}_{\mathbf{t}}(x) = \sum_{i=1}^N \chi_i(x)(t_{2i-1}\mathbf{e}_1 + t_{2i}\mathbf{e}_2)$$

and

$$\Phi_{\mathbf{t}}(x) = x + \mathbf{V}_{\mathbf{t}}(x).$$

Using the inverse function theorem and the mean value inequality, it is easy to check that, for  $|\mathbf{t}|$  small enough,  $\Phi_{\mathbf{t}}$  is a smooth diffeomorphism that sends  $\Omega$  onto itself. Furthermore, we have  $\Phi_{\mathbf{t}}(X_i) = X_i(\mathbf{t})$  for  $1 \leq i \leq N$ . We now define  $U(\mathbf{t}) : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  by

$$U(\mathbf{t})v = J((\Phi_{\mathbf{t}})^{-1})^{1/2}v \circ (\Phi_{\mathbf{t}})^{-1},$$

with  $J((\Phi_{\mathbf{t}})^{-1}) = |\det(D((\Phi_{\mathbf{t}})^{-1}))|$ .

The map  $U(\mathbf{t})$  is unitary and satisfies  $U(\mathbf{t})(C_c^\infty(\Omega_{\mathbf{X}(\mathbf{t})})) = C_c^\infty(\Omega_{\mathbf{X}})$ .

For  $u \in C_c^\infty(\Omega_{\mathbf{X}})$ , we define  $r_{\mathbf{t}}(u) = q_{\alpha}^{\mathbf{X}(\mathbf{t})}((U(\mathbf{t}))^{-1}u)$ . We note  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}}$  and  $\mathbf{A}_{\mathbf{t}} = \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}(\mathbf{t})}$  for better readability. A straightforward computation gives the formula

$$r_{\mathbf{t}}(u) = \int_{\Omega} \left| -iJ(\Phi_{\mathbf{t}})^{1/2}(D(\Phi_{\mathbf{t}})^T)^{-1}\nabla(J(\Phi_{\mathbf{t}})^{-1/2}u) - \mathbf{A}_{\mathbf{t}} \circ \Phi_{\mathbf{t}}u \right|^2 dx.$$

We can then write

$$r_{\mathbf{t}}(u) = \int_{\Omega} |(-i\nabla - \mathbf{A})u + E(\Phi_{\mathbf{t}})(-i\nabla - \mathbf{A})u + F(\Phi_{\mathbf{t}})u|^2 dx, \quad (2.5.1)$$

with

$$E(\Phi_{\mathbf{t}}) = (D(\Phi_{\mathbf{t}})^T)^{-1} - Id$$

and

$$F(\Phi_{\mathbf{t}}) = (D(\Phi_{\mathbf{t}})^T)^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{A}_{\mathbf{t}} \circ \Phi_{\mathbf{t}} - iJ(\Phi_{\mathbf{t}})^{1/2}(D(\Phi_{\mathbf{t}})^T)^{-1}\nabla(J(\Phi_{\mathbf{t}})^{-1/2}).$$

Let us note that  $\lim_{\mathbf{t} \rightarrow 0} \sup_{\Omega} |E(\Phi_{\mathbf{t}})| = 0$ . Let us also note that  $|F(\Phi_{\mathbf{t}})|$  is uniformly bounded when  $\mathbf{t}$  tends to 0. The difficulties in the proof of this latter assertion only appear in the neighborhood of a pole  $X_i$ , where  $\mathbf{A}$  has a singularity. Since the poles are far from each other, it is enough to prove the assertion in the case of one pole. We assume

$$\mathbf{A}(x) = \alpha \frac{(x - X)^{\perp}}{|x - X|^2}.$$

We note  $B = B(X, r)$ ,  $B' = B(X, r/2)$ . Let us note  $v(\mathbf{t}) = t_1\mathbf{e}_1 + t_2\mathbf{e}_2$  for concision. If  $x \in B'$ ,  $\Phi_{\mathbf{t}}(x) = x + v(\mathbf{t})$ , and therefore

$$F(\Phi_{\mathbf{t}}(x)) = \mathbf{A}(x) - \mathbf{A}_{\mathbf{t}}(\Phi_{\mathbf{t}}(x)) = \alpha \left( \frac{(x - X)^{\perp}}{|x - X|^2} - \frac{(x + v(\mathbf{t}) - X - v(\mathbf{t}))^{\perp}}{|x + v(\mathbf{t}) - X - v(\mathbf{t})|^2} \right) = 0.$$

If  $x \notin B'$ , we have  $|x - X| \geq r/2$ . We can chose  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  small enough so that, for all  $y \in \mathbb{R}^2$ ,  $|\Phi_{\mathbf{t}}(y) - y| \leq r/8$ . In that case,

$$|\Phi_{\mathbf{t}}(x) - \Phi_{\mathbf{t}}(X)| \geq |x - X| - |x - \Phi_{\mathbf{t}}(x)| - |\Phi_{\mathbf{t}}(X) - X| \geq r/2 - r/8 - r/8 = r/4.$$

This shows that both  $|\mathbf{A}(x)|$  and  $|\mathbf{A}_{\mathbf{t}}(x)|$  are bounded by  $4|\alpha|/r$  for  $\mathbf{t}$  small enough. Therefore, there exists a constant  $C$ , independent of  $x$  and  $\mathbf{t}$ , such that  $|F(\Phi_{\mathbf{t}})(x)| \leq C$  for  $\mathbf{t}$  small enough.

Expanding Equation (2.5.1), we find

$$\begin{aligned} r_{\mathbf{t}}(u) &= q_{\alpha}^{\mathbf{X}}(u) + 2Re \left( \int_{\Omega} \overline{(-i\nabla + \mathbf{A})u}^T E(\Phi_{\mathbf{t}})(-i\nabla + \mathbf{A})u dx \right) \\ &\quad + 2Re \left( \int_{\Omega} \overline{(-i\nabla + \mathbf{A})u} \cdot F(\Phi_{\mathbf{t}})u dx \right) + \int_{\Omega} \|F(\Phi_{\mathbf{t}})u\|^2 dx. \end{aligned}$$

We have

$$\left| \operatorname{Re} \left( \int_{\Omega} \overline{(-i\nabla + \mathbf{A})u}^T E(\Phi_{\mathbf{t}})(-i\nabla + \mathbf{A})u \, dx \right) \right| \leq \sup_{\Omega} |E(\Phi_{\mathbf{t}})| \|(-i\nabla + \mathbf{A})u\|^2,$$

and

$$\int_{\Omega} |F(\Phi_{\mathbf{t}})u|^2 \, dx \leq \sup_{\Omega} |F(\Phi_{\mathbf{t}})|^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Applying the Cauchy-Schwarz and Young inequalities, we find

$$\begin{aligned} & \left| 2\operatorname{Re} \left( \int_{\Omega} \overline{(-i\nabla + \mathbf{A})u} \cdot F(\Phi_{\mathbf{t}})u \, dx \right) \right| \\ & \leq 2 \|(-i\nabla + \mathbf{A})u\|_{L^2(\Omega)} \|F(\Phi_{\mathbf{t}})u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \|(-i\nabla + \mathbf{A})u\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \|F(\Phi_{\mathbf{t}})u\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

From that we deduce

$$|r_{\mathbf{t}}(u) - q_{\alpha}^{\mathbf{X}}(u)| \leq \left( 2 \sup_{\Omega} \|E(\Phi_{\mathbf{t}})\| + \frac{1}{2} \right) q_{\alpha}^{\mathbf{X}}(u) + 3 \sup_{\Omega} |F(\Phi_{\mathbf{t}})|^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

We conclude that there exist  $0 < a < 1$  and  $b \geq 0$ , independent of  $u$ , such that, for  $\mathbf{t}$  small enough,

$$|r_{\mathbf{t}}(u) - q_{\alpha}^{\mathbf{X}}(u)| \leq a q_{\alpha}^{\mathbf{X}}(u) + b \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

The family of forms  $\mathbf{t} \rightarrow r_{\mathbf{t}}$  is therefore *uniformly*  $q_{\alpha}^{\mathbf{X}}$ -bounded for  $\mathbf{t}$  in a neighborhood of 0. According to standard results on the perturbation of sesquilinear sectorial forms (c.f. [23, Th. VI-1.33]), this means that the form domain of  $r_{\mathbf{t}}(u)$  is equal to  $\mathcal{Q}_{\alpha}^{\mathbf{X}}$  for all  $\mathbf{t}$  small enough. It is obvious that for  $u \in \mathcal{Q}_{\alpha}^{\mathbf{X}}$ ,  $r_{\mathbf{t}}(u)$  depends analytically on  $\mathbf{t}$ . The family  $\mathbf{t} \rightarrow r_{\mathbf{t}}$  therefore depends analytically on  $\mathbf{t}$  in the sense of Kato. Theorem 2.1.3 is a consequence of the general perturbation theory.

Let us now give a proof of Theorem 2.1.4. We first give a precise definition of a  $K_{\mathbf{X}}$ -real eigenfunction, as announced in the introduction. We assume in the rest of this section that  $\alpha_i \in \mathbb{Z} + 1/2$  for all  $1 \leq i \leq N$ . According to Lemma 2.2.2, there exists a gauge function  $\psi$  defined on  $\Omega_{\mathbf{X}}$  such that  $-i\bar{\psi}\nabla\psi = 2\mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}}$ . Let us fix such a  $\psi$ . We define  $K_{\mathbf{X}}$  by

$$K_{\mathbf{X}}u = \psi \bar{u},$$

and say that a function  $u$  is  $K_{\mathbf{X}}$ -real if  $K_{\mathbf{X}}u = u$ .

A direct calculation shows that

$$-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}} \circ K_{\mathbf{X}} = K_{\mathbf{X}} \circ (-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}).$$

We can therefore choose a basis of  $K_{\mathbf{X}}$ -real eigenfunctions for  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}$ . We will use the local description of the nodal lines of a  $K_{\mathbf{X}}$ -real eigenfunction of  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}$  given in [2] (see also [27]).

**Theorem 2.5.1.** *Let  $\alpha \in (\mathbb{Z} + 1/2)^N$  and  $X \in \mathbb{R}^{2N}$ . Let us fix  $1 \leq i \leq N$  with  $X_i \in \Omega$ . Let  $k \geq 1$  and assume that  $u$  is a  $K_{\mathbf{X}}$ -real eigenfunction associated with  $\lambda_k(\mathbf{X}, \alpha)$ . Let  $(r, \theta)$  be the polar coordinates centered at  $X_i$  in a neighborhood of  $X_i$ . There exist a non-negative integer  $m$  and  $C^1$  functions  $f$  and  $g$  such that*

$$\begin{aligned} f(0) & \neq 0, \\ u(x) & = r^{m+1/2} f(x), \end{aligned}$$

and

$$u(x) = r^{m-1/2} g(x).$$

Furthermore,  $2m + 1$  is the number of nodal lines meeting at  $X_i$ .

The basic idea of the proof of Theorem 2.1.4 is the following. We construct a family of diffeomorphisms  $\Phi_h$  that depends on a parameter  $h > 0$ . Using the Feynman-Hellmann formula, we compute  $\lambda'_k(0)$  (which does not depend on  $h$ ) as an integral  $I(h)$  depending on  $h$ . We then use Theorem 2.5.1, with  $m \geq 1$ , to show that  $\lim_{h \rightarrow 0} I(h) = 0$ .

To simplify notation, let us assume  $X_i = 0$ . Let us first construct a family of diffeomorphisms  $\Phi_{h,t}$  that allows us to write the eigenvalue problem on the fixed domain  $\Omega_{\mathbf{X}}$ . We fix  $r > 0$  such that  $B(0, r) \subset \Omega$  and  $X_j \notin B(0, r)$  for  $j \neq i$ . We then fix a vector field  $\mathbf{V} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  such that

1.  $\mathbf{V}(x) = v$  if  $x \in B(0, r/2)$ ,
2.  $\mathbf{V}(x) = 0$  if  $x \notin B(0, r)$ ,

We then define, for  $t > 0$ ,  $\Phi_{h,t}(x) = x + t\mathbf{V}(h^{-1}x)$ , and  $\mathbf{X}(t) = \Phi_{h,t}(\mathbf{X})$ . It is easy to see that for any fixed  $h > 0$ , for  $|t|$  small enough,  $\Phi_{h,t}$  is a family of diffeomorphisms such that  $\Phi_{h,t}(\Omega) = \Omega$ . As in the proof of Theorem 2.1.3, we define the family of unitary operators  $U(h, t) : L^2(\omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  by

$$U(h, t)v = J(\Phi_{h,t}^{-1})^{1/2}v \circ \Phi_{h,t}^{-1},$$

and the family of sesquilinear forms  $r_{h,t} = q_{\alpha}^{\mathbf{X}(t)} \circ U(h, t)^{-1}$ . The same reasoning as in the proof of Theorem 2.1.3 shows that  $t \mapsto q_{h,t}$  is analytic in the sense of Kato in a neighborhood of 0. We can therefore apply the Feynman-Hellmann formula :

$$\lambda'_k(0) = \frac{1}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} \partial_t r_{t,h}(u)|_{t=0}. \quad (2.5.2)$$

We set  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}}$ ,  $\mathbf{A}(h, t) = \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}(t)}$ , and otherwise keep the notations used in the proof of Theorem 2.1.3. We have

$$\begin{aligned} r_{h,t}(u) &= q_{\alpha}^{\mathbf{X}}(u) + 2 \operatorname{Re} \left( \int_{\Omega} \overline{(-i\nabla + \mathbf{A})u}^T E(\Phi_{h,t})(-i\nabla + \mathbf{A})u \, dx \right) \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \left( \int_{\Omega} \overline{(-i\nabla + \mathbf{A})u} \cdot F(\Phi_{h,t})u \, dx \right) + \int_{\Omega} \|F(\Phi_{h,t})u\|^2 \, dx. \end{aligned}$$

We apply Equation (2.5.2) to the preceding expression. Since  $\Phi_{h,t}(x) = x + t\mathbf{V}\left(\frac{x}{h}\right)$ , we find

$$D\Phi_{h,t}(x) = Id + \frac{t}{h} D\mathbf{V}\left(\frac{x}{h}\right).$$

We deduce

$$\partial_t E(\Phi_{h,t})|_{t=0}(x) = \partial_t \left( (D(\Phi_{h,t})^T)^{-1} \right)|_{t=0} = -\frac{1}{h} (D\mathbf{V})^T \left( \frac{x}{h} \right).$$

We also have

$$J(D\Phi_{h,t})(x) = \det \left( Id + \frac{t}{h} D\mathbf{V}\left(\frac{x}{h}\right) \right),$$

which gives

$$\partial_t (J(D\Phi_{h,t})(x))|_{t=0} = \frac{1}{h} \operatorname{Tr}(D\mathbf{V}) \left( \frac{x}{h} \right).$$

From this we deduce

$$\begin{aligned} \partial_t \left( \nabla_x \left( J(D\Phi_{h,t})^{-1/2} \right) \left( \frac{x}{h} \right) \right)|_{t=0} &= \nabla_x \left( \partial_t \left( J(D\Phi_{h,t})^{-1/2} \right) \left( \frac{x}{h} \right) \right)|_{t=0} \\ &= \nabla_x \left( -\frac{1}{2h} \operatorname{Tr}(D\mathbf{V}) \left( \frac{x}{h} \right) \right) = -\frac{1}{2h^2} \nabla_x \operatorname{Tr}(D\mathbf{V}) \left( \frac{x}{h} \right). \end{aligned}$$

We obtain

$$\partial_t F(\Phi_{h,t})(x)|_{t=0} = \partial_t \left( (D(\Phi_t)^T)^{-1} \mathbf{A}(x) - \mathbf{A}_{h,t} \circ \Phi_{h,t}(x) \right)|_{t=0} - \frac{1}{2h^2} \nabla_x \operatorname{Tr}(D\mathbf{V}) \left( \frac{x}{h} \right).$$

For  $|x| \leq hr/2$ , we have  $\Phi_{h,t}(x) = x + v$ . We therefore have

$$(D(\Phi_t)^T)^{-1} \mathbf{A}(x) - \mathbf{A}_{h,t} \circ \Phi_{h,t}(x) = 0$$

and

$$\partial_t \left( (D(\Phi_t)^T)^{-1} \mathbf{A}(x) - \mathbf{A}_{h,t} \circ \Phi_{h,t}(x) \right)|_{t=0} = 0.$$

We now do the computations for  $|x| > hr/2$ . We write

$$\mathbf{A} = \alpha_i \frac{x^\perp}{|x|^2} + \mathbf{A}',$$

where  $\mathbf{A}$  is smooth on a neighborhood of 0.

We have

$$\partial_t \left( \frac{(x + t\mathbf{V}(x/h))^\perp}{|x + t\mathbf{V}(x/h)|^2} \right)_{|t=0} = \frac{1}{|x|^2} - \frac{x \cdot \mathbf{V}(x/h)}{|x|^4} x^\perp.$$

We conclude that there exists a constant  $C$ , such that for all  $h > 0$  and all  $x \in \Omega$ ,

$$\left| \partial_t E(\Phi_{h,t})(x)_{|t=0} \right| \leq \frac{C}{h}$$

and

$$\left| \partial_t F(\Phi_{h,t})(x)_{|t=0} \right| \leq \frac{C}{h^2}.$$

We have

$$\begin{aligned} \partial_t r_{h,t}(u)_{|t=0} &= 2 \operatorname{Re} \left( \int_{\Omega} \overline{(-i\nabla + \mathbf{A})u}^T \partial_t E(\Phi_{h,t})_{|t=0} (-i\nabla + \mathbf{A})u \, dx \right) \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \left( \int_{\Omega} \overline{(-i\nabla + \mathbf{A})u} \cdot \partial_t F(\Phi_{h,t})_{|t=0} u \, dx \right) + \int_{\Omega} \left\| \partial_t F(\Phi_{h,t})_{|t=0} u \right\|^2 \, dx. \end{aligned}$$

We deduce immediately

$$\begin{aligned} |\partial_t r_{h,t}(u)_{|t=0}| &\leq \frac{2C}{h} \|(-i\nabla + \mathbf{A})u\|_{L^2(B(0,hr))}^2 + \\ &\quad \frac{2C}{h^2} \|(-i\nabla + \mathbf{A})u\|_{L^2(B(0,hr))} \|u\|_{L^2(B(0,hr))} + \frac{C^2}{h^4} \|u\|_{L^2(B(0,hr))}. \end{aligned}$$

According to Theorem 2.5.1, there exist an integer  $m \geq 0$  and  $C^1$ -functions  $f$  and  $g$  such that in a neighborhood of 0,

$$u(x) = |x|^{m+1/2} f(x)$$

and

$$(-i\nabla + \mathbf{A})u = |x|^{m-1/2} g(x),$$

where  $f(0) \neq 0$  and  $2m+1$  is the number of nodal lines meeting at 0.

From this we deduce the estimates

$$\begin{aligned} \int_{B(0,hr)} |u|^2 \, dx &= O(h^{2m+3}), \\ \int_{B(0,hr)} |(-i\nabla + \mathbf{A})u|^2 \, dx &= O(h^{2m+1}), \end{aligned}$$

and finally

$$|\partial_t r_{h,t}(u)_{|t=0}| = O(h^{2m-1}).$$

Since we have assumed that at least three nodal lines meet at 0, we have in fact  $m \geq 1$  and we deduce

$$|\partial_t r_{h,t}(u)_{|t=0}| = O(h).$$

Since this holds for all  $h > 0$  and since the left-hand side does not depend on  $h$ , we obtain

$$\partial_t r_{h,t}(u)_{|t=0} = 0,$$

which concludes the proof.



The Kato-Rellich perturbation theory gives some information in the case when  $\lambda_k(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha})$  is not simple. Let us denote by  $m$  the multiplicity of  $\lambda_k(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha})$ . Let us fix an  $N$ -tuple  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$  of vectors in  $\mathbb{R}^2$ . For any  $t$  in  $\mathbb{R}$ , we note

$$\mathbf{X}(t) = (X_1 + t\mathbf{v}_1, \dots, X_N + t\mathbf{v}_N).$$

There exist  $m$  functions  $t \mapsto \lambda_1(t), \dots, t \mapsto \lambda_m(t)$  (not necessarily distinct), analytical in a neighborhood of 0, such that for  $1 \leq j \leq m$ ,  $\lambda_j(0) = \lambda_k(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha})$  and  $\lambda_j(t)$  is an eigenvalue of the operator  $-\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{X}(t)}$ . There also exist  $m$  analytical functions  $t \mapsto u_j(t)$  from a neighborhood of 0 to  $L^2(\Omega)$  such that  $\|u_j(t)\|_{L^2(\Omega)} = 1$  and  $u_j(t)$  is an eigenfunction associated with  $\lambda_j(t)$ . They can be chosen so that  $u_j(t)$  is  $K_{\mathbf{X}}$ -real.

Furthermore, the Feynman-Hellmann formula then tells us that

$$\lambda_j'(0) = \langle \partial_t(-\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{X}(t)})|_{t=0} u_j(0), u_j(0) \rangle.$$

Let us now fix  $1 \leq i_0 \leq N$  and consider the case where  $\mathbf{v}_i = 0$  for all  $i \neq i_0$  (we only move the point  $X_{i_0}$ ) and  $\alpha_{i_0} \in \mathbb{Z} + 1/2$ . Assume that there exists  $1 \leq j_0 \leq m$  such that  $u_{j_0}(0)$  is  $K_{\mathbf{X}}$ -real and has at least three nodal lines meeting at  $X_{i_0}$ . The proof of Theorem 2.1.4 applies; we obtain  $\lambda_{j_0}'(0) = 0$ . However, the existence of a  $K_{\mathbf{X}}$ -real eigenfunction associated with  $\lambda_k(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha})$  with at least three nodal lines meeting at  $X_{i_0}$  is *a priori* not enough to ensure the existence of  $1 \leq j_0 \leq m$  such that  $\lambda_{j_0}'(0) = 0$ .

## 2.6 Perspectives

One motivation of this work was the investigation of the properties of spectral minimal partitions. A  $k$ -partition of  $\Omega$ , with  $k$  an integer, is a set  $\{D_1, \dots, D_k\}$  of  $k$  disjoint, connected, open sets contained in  $\Omega$ . It is said to be minimal if the quantity

$$\max_{1 \leq i \leq k} \lambda_1^D(D_i)$$

is minimal among all the  $k$ -partitions.

This problem has been the subject of various investigations in recent years (see e.g. [12, 14, 13, 11, 18, 27, 17]). In particular, the paper [18], by S. Terracini, B. Helffer, and T. Hoffmann-Ostenhof shows that a minimal partition of  $\Omega$  exists for any integer  $k$  provided  $\partial\Omega$  is sufficiently regular. It also proves regularity properties of minimal partitions. The paper [17], by B. Helffer and T. Hoffmann-Ostenhof, establishes a connection between minimal partitions and nodal partitions for an Aharonov-Bohm operator, that we can summarize in the following statement. We recall that a nodal domain of a  $K_{\mathbf{X}}$ -real eigenfunction  $u$  of  $-\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{X}}$  is a connected component of the set  $\Omega \setminus u^{-1}(\{0\})$ .

**Theorem 2.6.1.** *Let us assume that  $\Omega$  is a connected (possibly with holes) regular open set. Let  $k \geq 1$  be an integer and  $\{D_1, \dots, D_k\}$  be a minimal  $k$ -partition. There exist a finite number of points  $X_1, \dots, X_\ell$  in  $\mathbb{R}^2$  such that  $\{D_1, \dots, D_k\}$  is the nodal partition (i.e. the set of all nodal domains) of a  $K_{\mathbf{X}}$ -real eigenfunction  $u$  of  $-\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{X}}$ , with*

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_\ell)$$

and

$$\boldsymbol{\alpha} = (1/2, \dots, 1/2).$$

Furthermore,  $u$  is associated with the eigenvalue  $\lambda_k(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha})$ .

Roughly speaking, this result shows that a minimal partition is nodal, provided that we add enough poles with a normalized flux of  $1/2$ . Let us note that we may have to add poles both in  $\Omega$  and in  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ . One can indeed define the boundary of a sufficiently regular partition (which is roughly the union of the boundary of all the  $D_i$ 's), and it has almost the same properties as the nodal set of a real eigenfunction of  $-\Delta_{\Omega}^D$ . However, there may be singular points where an odd number of lines meet. We have to add a pole at these points. In the case where  $\Omega$  is not

simply connected, we may also have to add a pole in some holes (i.e. in some bounded connected components of  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ ).

Theorem 2.6.1 allows us to give a spectral characterization of minimal partitions. Let us note

$$\mathfrak{L}_k(\Omega) = \inf_{\mathcal{D}} \max_{1 \leq i \leq k} \lambda_i(D_i),$$

with  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$  a  $k$ -partition. If  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2N}$  and  $\boldsymbol{\alpha} = (1/2, \dots, 1/2)$ , we denote by  $L_k(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha})$  the smallest eigenvalue of  $-\Delta_{\mathbf{X}}^{\boldsymbol{\alpha}}$  that has a  $K_{\mathbf{X}}$ -real eigenfunction with  $k$  nodal domains. If there is no such eigenfunction, we set  $L_k(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}) = +\infty$ . Then

$$\mathfrak{L}_k(\Omega) = \inf_{N \geq 1} \inf_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2N}} L_k(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}).$$

Since each pole has a normalized flux of  $1/2$ , the only unknown is the number and the positions of the poles. Let us assume that for some  $N$ ,  $\mathbf{X}$  realizes this minimum. There is a  $K_{\mathbf{X}}$ -real eigenfunction  $u$  associated with  $\lambda_k(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha})$  whose nodal partition is a minimal  $k$ -partition. If we assume additionally that  $\lambda_k(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha})$  is simple,  $\mathbf{X}$  is a critical point for the function  $\mathbf{Y} \mapsto \lambda_k(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\alpha})$ . Indeed, if  $1 \leq i \leq N$ , there are two possible cases.

- $X_i \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ . In that case  $\lambda_k(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\alpha}) = \lambda_k(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha})$  if  $Y_j = X_j$  for  $j \neq i$  and  $Y_i$  is close enough to  $X_i$ .
- $X_i \in \Omega$ . In that case at least three nodal lines of  $u$  meet at  $X_i$ . Therefore, according to Theorem 2.1.4,  $X_i$  is a critical point for the function

$$Y \mapsto \lambda_k((X_1, \dots, X_{i-1}, Y, X_{i+1}, \dots, X_N), \boldsymbol{\alpha}).$$

The paper [17] gives the magnetic characterization. The fact that  $\mathbf{X}$  is a critical point had been proved in the case  $N = 1$  for the minimal 3-partitions of a simply connected domain in [27]. As far as we know, this property had not yet been stated for a general  $k$ -partition.

The identification of spectral minimal partitions with nodal partitions for Aharonov-Bohm operators was used in [7, 8, 5, 9, 6] to investigate numerically minimal 3-partitions of some examples of convex open sets  $\Omega$  (rectangles, square, finite tilings by regular hexagons, disk, and sector). More precisely, the authors compute the third eigenvalue of an Aharonov-Bohm operators with one moving pole  $X \in \Omega$  and a normalized flux  $1/2$ , and some associated  $K_X$ -real eigenfunction. This method relies on the assumption that the boundary of a minimal 3-partition of  $\Omega$  contains only one interior singular point. This is supported, in the examples considered, by numerical computations (see [8]). The computation, made by V. Bonnaillie-Noël, use a finite elements method applied to a double covering of the domain (see [5] for details).

Note that in these papers, it is assumed that  $\Omega$  has at least one axis of symmetry, denoted by  $d$ . It is then reasonable, as in [7, 8], to look for partitions with the same symmetry, which implies  $X \in d$ . Then, as shown in [7], the spectrum of  $-\Delta_{1/2}^X$  is the union of the spectra of two eigenvalue problems with mixed Dirichlet and Neumann conditions. To write these problems, we choose the coordinates in such a way that  $d$  is the axis  $\{y = 0\}$ . We note  $\Omega^+ = \Omega \cap \{y > 0\}$ ,  $\Gamma^+ = \partial\Omega \cap \{y > 0\}$ , and  $\Omega \cap \{y = 0\} = [O, M]$ , with  $O = (0, 0)$  and  $M = (m, 0)$ . For  $x \in [0, m]$ , we note  $X = (x, 0)$  the corresponding point of  $[O, M]$ . The Dirichlet-Neumann problem reads

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u \text{ in } \Omega^+, \\ u &= 0 \text{ on } [O, X] \cup \Gamma^+, \\ \partial_{\mathbf{n}} u &= 0 \text{ on } (X, M); \end{cases} \quad (2.6.1)$$

and the Neumann-Dirichlet problem reads

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u \text{ in } \Omega^+, \\ \partial_{\mathbf{n}} u &= 0 \text{ on } (O, X), \\ u &= 0 \text{ on } [X, M] \cup \Gamma^+. \end{cases} \quad (2.6.2)$$

The authors then move the point  $X$  along the axis of symmetry  $[O, M]$ . For each  $X$ , they compute the nodal set of a real eigenfunction associated with the second eigenvalue for both mixed problems; they look for  $X = X_0$  such that this nodal set consists in a line joining  $X_0$  with  $\Gamma^+$ .

As far as we know, there is no proof that such a point exist, but numerical evidence was found by the authors in all the cases considered so far. When such an  $X_0$  is found, they obtain a 3-partition of  $\Omega$  by symmetrization with respect to  $\{y = 0\}$ . Let us note  $\lambda_k(x) = \lambda_k(X, 1/2)$  for  $k \geq 1$  and  $x \in [0, m]$ . Section 2.4 shows that the function  $x \mapsto \lambda_k(x)$  is continuous in  $[0, m]$  and analytic in  $(0, m)$ . As proved in [7], to a point  $X_0 = (x_0, 0)$  as above corresponds an eigenfunction  $u$  associated with  $\lambda_3(X_0, 1/2)$  that has three nodal lines meeting at  $X_0$ . Let us assume that  $\lambda_3(X_0, 1/2)$  is simple. Then, according to Theorem 2.1.4,  $x_0$  is a critical point for the function  $x \mapsto \lambda_3(x)$ . But the eigenvalue  $x \mapsto \lambda_3(x)$  is also the eigenvalue of either Problem 2.6.1 or Problem 2.6.2. According to basic monotonicity results, the function  $x \mapsto \lambda_3(x)$  is increasing (resp. decreasing) in a neighborhood of  $x_0$  in the Dirichlet-Neumann (resp. Neumann-Dirichlet) case. The point  $x_0$  is therefore a point of inflexion for the function  $x \mapsto \lambda_3(x)$ . This result has consequences in the search for minimal 3-partitions. Indeed, one has to compute the nodal set of an eigenfunction associated with  $\lambda_3(x)$  only if  $x$  is a point of inflexion. However, since locating an inflexion point is difficult in practice, one is left with a range of values for  $x$  to test.

Let us present a numerical example, taken from [9]. The method is applied to a circular sector of angular opening  $\pi/3$  and radius 1. It is found that only the Neuman-Dirichlet problem permits the construction of a 3-partition. It is represented schematically on Figure 2.1, after symmetrization. The Neumann boundary condition is applied on the part  $]O, X_0[$  of the boundary, represented

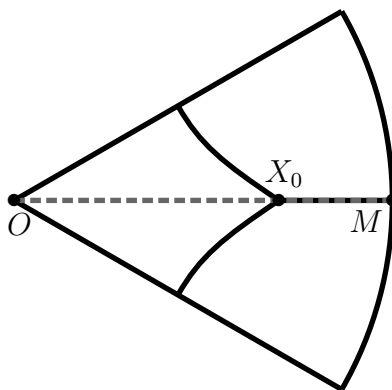


FIGURE 2.1 – Neuman-Dirichlet problem on a sector.

by a dashed grey line. The Dirichlet boundary condition is applied on the part  $[X_0, M]$  of the boundary, represented by a solid grey line. Figure 2.2 shows the second eigenvalue as a function of  $x$ . Numerically, it is found that for  $x_0 \simeq 0.64$ , the nodal set of the second eigenfunction consists in a line from  $X_0$  to the upper boundary. Figure 2.3 shows the 3-partition obtained after symmetrization. It is also the nodal set of a  $K_{X_0}$ -real eigenfunction associated with  $\lambda_3(X_0, 1/2)$ . This partition is the best candidate known so far in this example.

We hope that further study of the spectral properties of Aharonov-Bohm operators with multiple poles and half-integer normalized flux will give more information about spectral minimal partitions. In particular, one should further investigate the case where the eigenvalue  $\lambda_k(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha})$  is not simple. We would be interested in a necessary condition that the point  $\mathbf{X}$  should satisfy, relative to the function  $\mathbf{Y} \mapsto \lambda_k(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\alpha})$ , when  $\lambda_k(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha})$  has multiplicity at least two and there exists an associated  $K_{\mathbf{X}}$ -real eigenfunction  $u$  whose nodal domains form a minimal  $k$ -partition.

## Bibliographie

- [1] Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, 115 :485–491, Aug 1959.
- [2] B. Alziary, J. Fleckinger-Pellé, and P. Takáč. Eigenfunctions and Hardy inequalities for a magnetic Schrödinger operator in  $\mathbb{R}^2$ . *Math. Methods Appl. Sci.*, 26(13) :1093–1136, 2003.

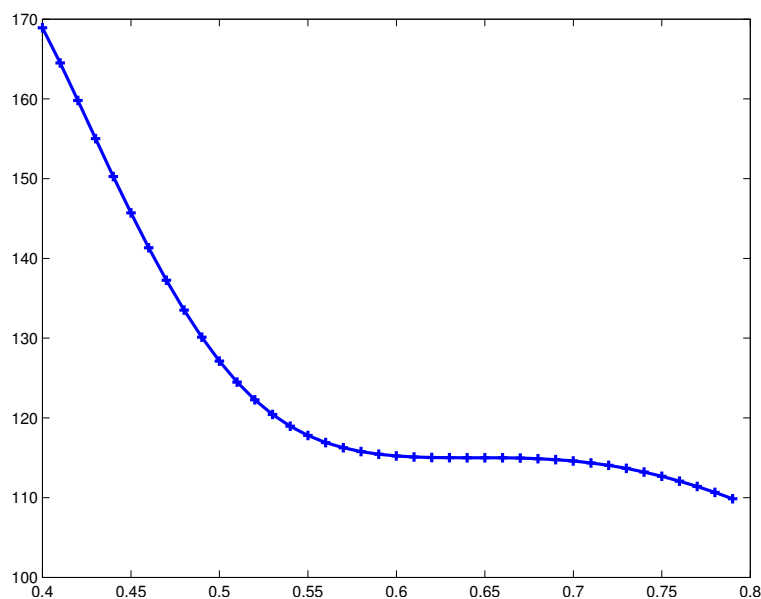
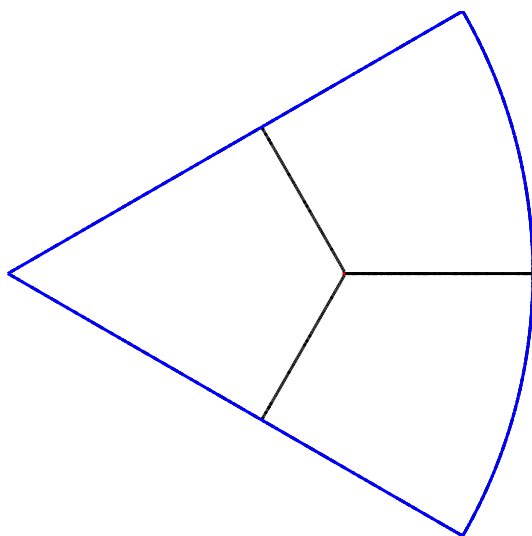
FIGURE 2.2 – Eigenvalue  $\lambda_2^{ND}(x)$  as a function of  $x$ .

FIGURE 2.3 – Nodal set of a third eigenfunction of an Aharonov-Bohm operator.

- [3] J. Avron, I. Herbst, and B. Simon. Schrödinger operators with magnetic fields. I. General interactions. *Duke Math. J.*, 45(4) :847–883, 1978.
- [4] J. Berger and J. Rubinstein. On the zero set of the wave function in superconductivity. *Comm. Math. Phys.*, 202(3) :621–628, 1999.
- [5] V. Bonnaillie-Noël and B. Helffer. Numerical analysis of nodal sets for eigenvalues of Aharonov-Bohm Hamiltonians on the square with application to minimal partitions. *Exp. Math.*, 20(3) :304–322, 2011.
- [6] V. Bonnaillie-Noël and B. Helffer. On spectral minimal partitions : the disk revisited. *Annals of the University of Bucharest, XIe Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées*, 4(LXII) :321–342, 2013.
- [7] V. Bonnaillie-Noël, B. Helffer, and T. Hoffmann-Ostenhof. Aharonov-Bohm Hamiltonians, isospectrality and minimal partitions. *J. Phys. A*, 42(18) :185203, 20, 2009.

- [8] V. Bonnaillie-Noël, B. Helffer, and G. Vial. Numerical simulations for nodal domains and spectral minimal partitions. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 16(1) :221–246, 2010.
- [9] V. Bonnaillie-Noël and C. Léna. Spectral minimal partitions of a sector. Preprint. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00763467>. To appear in *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 26 p (2013).
- [10] V. Bonnaillie-Noël, B. Noris, M. Nys, and S. Terracini. On the eigenvalues of Aharonov-Bohm operators with varying poles. Preprint 2013.
- [11] B. Bourdin, D. Bucur, and É. Oudet. Optimal partitions for eigenvalues. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31(6) :4100–4114, 2009/10.
- [12] D. Bucur, G. Buttazzo, and A. Henrot. Existence results for some optimal partition problems. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 8(2) :571–579, 1998.
- [13] L. A. Cafferelli and F. H. Lin. An optimal partition problem for eigenvalues. *J. Sci. Comput.*, 31(1-2) :5–18, 2007.
- [14] M. Conti, S. Terracini, and G. Verzini. An optimal partition problem related to nonlinear eigenvalues. *J. Funct. Anal.*, 198(1) :160–196, 2003.
- [15] L. C. Evans and R. F. Gariépy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [16] B. Helffer, M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, and M. P. Owen. Nodal sets for groundstates of Schrödinger operators with zero magnetic field in non-simply connected domains. *Comm. Math. Phys.*, 202(3) :629–649, 1999.
- [17] B. Helffer and T. Hoffmann-Ostenhof. On a magnetic characterization of spectral minimal partitions. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, To appear.
- [18] B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof, and S. Terracini. Nodal domains and spectral minimal partitions. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(1) :101–138, 2009.
- [19] A. Henrot and M. Pierre. *Variation et Optimisation de Formes : Une Analyse Géométrique*. Mathématiques et Applications. Springer, 2005.
- [20] L. Hillairet and C. Judge. The eigenvalues of the Laplacian on domains with small slits. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362(12) :6231–6259, 2010.
- [21] T. Iwai and Y. Yabu. Aharonov-Bohm quantum systems on a punctured 2-torus. *J. Phys. A*, 39(4) :739–777, 2006.
- [22] T. Kato. Schrödinger operators with singular potentials. *Israel Journal of Mathematics*, 13(1-2) :135–148, 1972.
- [23] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*, volume 132 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1976.
- [24] A. Laptev and T. Weidl. Hardy inequalities for magnetic Dirichlet forms. In *Mathematical results in quantum mechanics (Prague, 1998)*, volume 108 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 299–305. Birkhäuser, Basel, 1999.
- [25] H. Leinfelder. Gauge invariance of Schrödinger operators and related spectral properties. *J. Operator Theory*, 9(1) :163–179, 1983.
- [26] M. Melgaard, E.-M. Ouhabaz, and G. Rozenblum. Negative discrete spectrum of perturbed multivortex Aharonov-Bohm Hamiltonians. *Ann. Henri Poincaré*, 5(5) :979–1012, 2004.
- [27] B. Noris and S. Terracini. Nodal sets of magnetic Schrödinger operators of Aharonov-Bohm type and energy minimizing partitions. *Indiana Univ. Math. J.*, 59(4) :1361–1403, 2010.
- [28] K. Pankrashkin and S. Richard. Spectral and scattering theory for the Aharonov-Bohm operators. *Rev. Math. Phys.*, 23(1) :53–81, 2011.
- [29] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical physics. II. Fourier Analysis, Self-Adjointness*. Academic Press, New York, 1975.



## Chapitre 3

# Spectral minimal partitions of a sector

### 3.1 Introduction

In this article, we are interested in the properties of the 'minimal'  $k$ -partitions of an open set  $\Omega$  by  $k$  disjoint open sets  $D_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) in  $\Omega$ . These partitions are minimal in the sense that they minimize the maximum over  $i = 1, \dots, k$  of the lowest eigenvalue of the Dirichlet realization of the Laplacian in  $D_i$ . Similar problems naturally appear in Biomathematics, to characterize the final states of competition-diffusion systems (e.g. in [11]). In the case of 2-partitions, it is well known that the partition by the nodal domains of a second eigenfunction gives a minimal 2-partition. For  $k \geq 3$ , although general properties of these minimal partitions have been proved in [7, 9, 8, 17], the minimal  $k$ -partitions are generally not known, even for simple domains (see however [17, 4, 18, 15] for some particular examples). The aim of this paper is to exhibit, in the case of angular sectors, some candidates to be minimal  $k$ -partitions and to estimate the minimal energy by establishing more accurate bounds than the previously existing ones.

#### 3.1.1 Notations and known results

Let us first state the definition of a minimal partition and review briefly known results about this object that will be useful in our study. In the following,  $\Omega$  is an open, bounded, and connected set in  $\mathbb{R}^2$ . We assume that  $\partial\Omega$  satisfies some regularity properties. Following [17], we can for example assume that  $\partial\Omega$  is compact, piecewise  $\mathcal{C}^{1,+}$  and that  $\Omega$  satisfies the uniform cone property.

**Definition 3.1.1.** *For any integer  $k \geq 1$ , a  $k$ -partition is a finite set*

$$\mathcal{D} = \{D_i : 1 \leq i \leq k\}$$

*of open, connected and mutually disjoint subsets of  $\Omega$ . The  $D_i$ 's are called the domains of the  $k$ -partition. The  $k$ -partition  $\mathcal{D}$  is called strong if*

$$\text{Int} \left( \overline{\bigcup_{i=1}^k D_i} \right) \setminus \partial\Omega = \Omega.$$

*The set of all  $k$ -partitions is denoted by  $\mathfrak{P}_k$ .*

*If we do not want to specify the number of domains, we simply speak of a partition.*

For any bounded open set  $\omega \in \mathbb{R}^2$ , the sequence  $(\lambda_k(\omega))_{k \geq 1}$  denotes the eigenvalues of the Dirichlet Laplacian on  $\omega$ , in increasing order and counted with multiplicity. Let us now define the energy of a partition and state the minimization problem we are concerned.

**Definition 3.1.2.** With any  $k$ -partition  $\mathcal{D} = \{D_i : 1 \leq i \leq k\}$ , is associated the energy

$$\Lambda_k(\mathcal{D}) = \max_{1 \leq i \leq k} \lambda_1(D_i).$$

For any integer  $k \geq 1$ , we set

$$\mathfrak{L}_k(\Omega) = \inf_{\mathcal{D} \in \mathfrak{P}_k} \Lambda_k(\mathcal{D}). \quad (3.1.1)$$

A partition  $\mathcal{D} \in \mathfrak{P}_k$  such that  $\Lambda_k(\mathcal{D}) = \mathfrak{L}_k(\Omega)$  is called a minimal  $k$ -partition.

The following existence result for the minimization problem (3.1.1) was proved in [7, 9, 8]. Let us notice that similar existence results were previously proved in a more general setting in [6].

**Theorem 3.1.3.** For any integer  $k \geq 1$ , there exists a minimal  $k$ -partition of  $\Omega$ . Furthermore, minimal partitions are strong.

Let us now deal with the regularity of the minimal partition.

**Definition 3.1.4.** If  $\mathcal{D} = \{D_i : 1 \leq i \leq k\}$  is a strong partition, its boundary set is defined by

$$N(\mathcal{D}) = \overline{\bigcup_{i=1}^k \Omega \cap \partial D_i}.$$

The partition  $\mathcal{D}$  is called regular if its boundary set satisfies the following properties. First, it is constituted of a finite number of simple regular curves that meet in  $\Omega$  at interior singular points and meet  $\partial\Omega$  at boundary singular points. Additionally, the curves meeting at an interior singular point form equal angles, and the curves hitting a boundary singular point and  $\partial\Omega$  form equal angles.

As proved in [17], we have the following regularity result :

**Theorem 3.1.5.** For any  $k \geq 1$ , minimal  $k$ -partitions are regular (up to zero capacity sets).

We give additional definitions that help us to describe the topology of a partition.

**Definition 3.1.6.** Let  $\mathcal{D} = \{D_i : 1 \leq i \leq k\}$  be a strong partition. Two domains  $D_i$  and  $D_j$  are said to be neighbors if  $\text{Int}(\overline{D_i \cup D_j}) \setminus \partial\Omega$  is connected.

A strong partition is called bipartite if one can color its domains, using only two colors, in such a way that two neighbors have a different color.

Let us recall some definitions and results from the spectral theory of the Laplacian. They are used throughout the paper. Let  $u$  be an eigenfunction for the Dirichlet Laplacian.

**Definition 3.1.7.** We call nodal set of  $u$  the set

$$N(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) = 0\}}.$$

The connected components of  $\Omega \setminus N(u)$  are called the nodal domains of  $u$ . The number of nodal domains is denoted by  $\mu(u)$ . The set

$$\{D_i : 1 \leq i \leq \mu(u)\},$$

where the  $D_i$ 's are the nodal domains of  $u$ , is a regular partition of  $\Omega$ , called the nodal partition associated with  $u$ .

The following result was proved by Courant (cf. [10]).

**Theorem 3.1.8.** Let  $k \geq 1$  and  $u$  be an eigenfunction associated with  $\lambda_k(\Omega)$ , then  $\mu(u) \leq k$ .

Following [17], we introduce a new definition.

**Definition 3.1.9.** Let  $k \geq 1$ . An eigenfunction  $u$  for the Dirichlet Laplacian associated with  $\lambda_k(\Omega)$  is said to be Courant-sharp if  $\mu(u) = k$ .



To give some upper-bound for  $\mathfrak{L}_k(\Omega)$ , it could be interesting to use  $k$ -partitions obtained from eigenfunctions. Thus, we introduce a new spectral element.

**Definition 3.1.10.** For  $k \geq 1$ ,  $L_k(\Omega)$  is the smallest eigenvalue of the Dirichlet Laplacian that has an eigenfunction with  $k$  nodal domains. If there is no such eigenvalue, we set  $L_k(\Omega) = +\infty$ .

With this notation, Theorem 3.1.8 reads as the inequality  $\lambda_k(\Omega) \leq L_k(\Omega)$ . We can now give two results of [17] that link minimal and nodal partitions.

**Theorem 3.1.11.** A minimal partition  $\mathcal{D}$  is nodal if, and only if, it is bipartite.

**Theorem 3.1.12.** For any integer  $k \geq 1$ ,

$$\lambda_k(\Omega) \leq \mathfrak{L}_k(\Omega) \leq L_k(\Omega).$$

Furthermore, if  $\mathfrak{L}_k(\Omega) = L_k(\Omega)$  or  $\lambda_k(\Omega) = \mathfrak{L}_k(\Omega)$ , then

$$\lambda_k(\Omega) = \mathfrak{L}_k(\Omega) = L_k(\Omega),$$

and in this case, any minimal  $k$ -partition is nodal.

Let us point out a few consequences of Theorem 3.1.12.

**Remark 3.1.13.** A nodal partition associated with a Courant-sharp eigenfunction is minimal.

**Remark 3.1.14.** Minimal 2-partitions are nodal. Indeed, let  $u$  be an eigenfunction associated with  $\lambda_2(\Omega)$ . The function  $u$  is orthogonal to the eigenspace for  $\lambda_1(\Omega)$  and thus has at least two nodal domains. It has at most two nodal domains by Courant's theorem. It is therefore Courant-sharp, which implies that  $\mathfrak{L}_2(\Omega) = \lambda_2(\Omega)$  and that any minimal 2-partition of  $\Omega$  is nodal.

### 3.1.2 Main results

In this article, we are concerned with the minimal  $k$ -partitions of angular sectors. For  $0 < \alpha \leq 2\pi$ , we set

$$\Sigma_\alpha = \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) : 0 < \rho < 1 \text{ and } -\frac{\alpha}{2} < \theta < \frac{\alpha}{2}\}.$$

This domain is the circular sector of opening  $\alpha$ . We denote by  $(\lambda_k(\alpha))_{k \geq 1}$  the eigenvalues of the Dirichlet Laplacian on  $\Sigma_\alpha$ , in increasing order and counted with multiplicity. Due to the inclusion of the form domains and the min-max principle, the function  $\alpha \mapsto \lambda_k(\alpha)$  is decreasing for any  $k \geq 1$ .

In Section 3.2, we recall explicit formulas for the spectrum of the Dirichlet Laplacian on  $\Sigma_\alpha$  and determine the minimal 2-partitions. Furthermore, we establish in Proposition 3.2.3 when the  $k$ -partition constituted of  $k$  equal angular sectors is minimal, according to  $\alpha$  and  $k$ . In particular, such a partition can never be minimal for  $k \geq 6$ .

In Section 3.3, we prove in Proposition 3.3.1 that for any  $k$ , the minimal  $k$ -partition is nodal as soon as  $\alpha$  is small enough. In Sections 3.4-3.6, we focus on 3-partitions. First, we determine when minimal 3-partitions are nodal (Section 3.4). Then, Section 3.5 deals with non nodal symmetric minimal 3-partitions, with some remarks about the particular case  $\alpha = \pi/3$ . In these two sections, we prove the following result :

**Theorem 3.1.15.** There exists  $0 < \alpha_3^1 < \alpha_3^2 < 2\pi$  such that

- $\mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha) = \lambda_3(\alpha)$ , when  $\alpha \in (0, \alpha_3^1] \cup [\alpha_3^2, 2\pi]$ ,
- Let  $L_3^{sym}(\alpha)$  be the infimum of the energy  $\Lambda_3(\mathcal{D})$  when we minimize among the partitions in  $\mathfrak{P}_3$  which are symmetric according to the bissector axis. Then

$$\lambda_3(\alpha) < \mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha) \leq L_3^{sym}(\alpha) < L_3(\alpha), \quad \forall \alpha \in (\alpha_3^1, \alpha_3^2).$$

This last upper-bound is better than Theorem 3.1.12 and the improvement is quantified in Figure 3.12.

Then we use a double covering approach in Section 3.6. In this way, we refute the seemingly natural conjecture that any domain with an axis of symmetry has a minimal 3-partition that is symmetric, and find some non-symmetric candidates.

Finally we give in Section 3.7 some negative results for minimal  $k$ -partitions when  $k = 4, 5, 6$  and give configurations of partitions that are never minimal.

## 3.2 Nodal partitions

### 3.2.1 Explicit eigenmodes

The eigenvalues and eigenfunctions of the Dirichlet Laplacian in  $\Sigma_\alpha$  can be computed exactly using separation of variables (see e.g. [10, chap. 5, sec. 5]). We recall the results.

**Proposition 3.2.1.** *The eigenmodes  $(\lambda_{m,n}(\alpha), u_{m,n}^\alpha)$  of the Dirichlet Laplacian on the angular sector  $\Sigma_\alpha$  are given by*

$$\lambda_{m,n}(\alpha) = j_{m\frac{\pi}{\alpha},n}^2, \quad (3.2.1)$$

$$u_{m,n}^\alpha(\rho, \theta) = J_{m\frac{\pi}{\alpha}}(j_{m\frac{\pi}{\alpha},n}\rho) \sin(m\pi(\frac{\theta}{\alpha} + \frac{1}{2})), \quad (3.2.2)$$

where  $j_{m\frac{\pi}{\alpha},n}$  is the  $n$ -th positive zero of the Bessel function of the first kind  $J_{m\frac{\pi}{\alpha}}$ .

*Démonstration.* In polar coordinates, the Laplacian reads

$$-\partial_\rho^2 - \frac{1}{\rho}\partial_\rho - \frac{1}{\rho^2}\partial_\theta^2.$$

Let us look for an eigenpair  $(\lambda, u)$  of the Dirichlet Laplacian on  $\Sigma_\alpha$  where  $\lambda > 0$  and  $u$  is not identically zero. Using a separation of variables, we set  $u(\rho, \theta) = \varphi(\rho)\psi(\theta)$ , this yields

$$-\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)} = \frac{\rho^2}{\varphi(\rho)} \left( \varphi''(\rho) + \frac{1}{\rho}\varphi'(\rho) + \lambda\varphi(\rho) \right).$$

According to the Dirichlet conditions,  $\psi(-\frac{\alpha}{2}) = \psi(\frac{\alpha}{2}) = 0$ . Therefore there exists an integer  $m \geq 1$  such that, up to a constant multiplicative factor,

$$\psi(\theta) = \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha}\left(\theta + \frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

Then, we get

$$\varphi''(\rho) + \frac{1}{\rho}\varphi'(\rho) + \left(\lambda - \frac{m^2\pi^2}{\alpha^2\rho^2}\right)\varphi(\rho) = 0.$$

If we set

$$\nu = \frac{\pi}{\alpha}, \quad \lambda = \omega^2, \quad t = \omega\rho, \quad f(t) = \varphi(\rho),$$

we recognize the Bessel differential equation

$$f''(t) + \frac{1}{t}f'(t) + \left(1 - \frac{m^2\nu^2}{t^2}\right)f(t) = 0.$$

The function  $u$  is assumed to be in  $H^1(\Sigma_\alpha)$  and to satisfy the Dirichlet boundary condition. This implies that  $f$  is proportional to the Bessel function of the first kind  $J_{m\nu}$  and that  $\omega$  is a zero of  $J_{m\nu}$ .

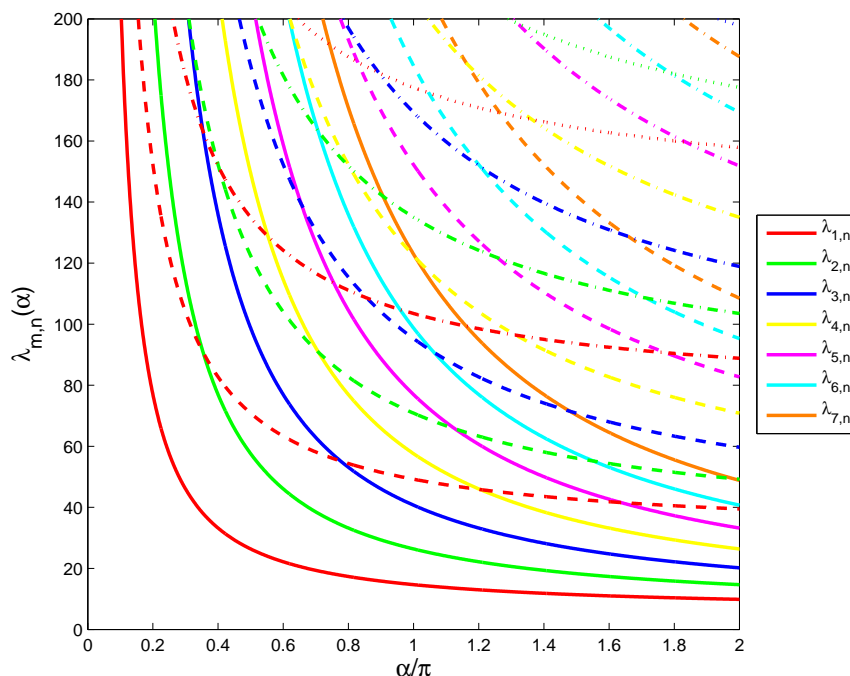
We have obtained a family of eigenmodes  $(\lambda_{m,n}(\alpha), u_{m,n}^\alpha)$  indexed by  $m \geq 1$  and  $n \geq 1$ . More precisely, we have the expressions (3.2.2)–(3.2.1). We can check that the set  $\{u_{m,n}^\alpha\}_{m,n}$  is orthogonal and spans  $L^2(\Sigma_\alpha)$ . Therefore there is no other eigenvalue.  $\square$

**Corollary 3.2.2.** *For any  $k \geq 2$  and  $\alpha \in (0, 2\pi]$ , we have the first estimate*

$$\lambda_k(\alpha) \leq \mathfrak{L}_k(\alpha) \leq L_k(\Sigma_\alpha) \leq \inf\{\lambda_{m,n}(\alpha) : mn = k\}.$$

*Démonstration.* It is enough to use Theorem 3.1.12, Proposition 3.2.1 and to notice that for any  $m \geq 1, n \geq 1$ , and  $\alpha \in (0, 2\pi]$ , the eigenfunction  $u_{m,n}^\alpha$  has  $mn$  nodal domains.  $\square$

In Figure 3.1 are plotted some eigenvalues  $\lambda_{m,n}(\alpha)$  for  $1 \leq m \leq 7$ ,  $1 \leq n \leq 4$ , and  $\alpha \in (0, 2\pi]$ . These eigenvalues are computed with the MATLAB software and the *fslove* command to determine the zero  $j_{m\nu,n}$  of the implemented Bessel functions.

FIGURE 3.1 –  $\lambda_{m,n}(\alpha)$  vs.  $\alpha/\pi$  for  $1 \leq m \leq 7$ ,  $1 \leq n \leq 4$ .

### 3.2.2 Minimal nodal partition

**Proposition 3.2.3.** For  $2 \leq k \leq 5$ , we define

$$\alpha_k^2 = \inf\{\alpha \in (0, 2\pi] : \lambda_{k,1}(\alpha) < \lambda_{1,2}(\alpha)\}.$$

Then for any  $\alpha \in [\alpha_k^2, 2\pi]$ , the nodal partition associated with  $u_{k,1}^\alpha$  is a minimal  $k$ -partition and we have

$$\mathfrak{L}_k(\Sigma_\alpha) = \lambda_{k,1}(\alpha).$$

For  $2 \leq k \leq 5$  and  $\alpha \in (\alpha_k^2, 2\pi]$ , the minimal  $k$ -partition consists then of  $k$  angular sectors with the same aperture.

For  $k \geq 6$ , any  $k$ -partition constituted of  $k$  angular sectors is never minimal.

*Démonstration.* Let us use the expression of the eigenvalues given in (3.2.1) and compare  $\lambda_{m,1}(\alpha)$  with  $\lambda_{1,2}(\alpha)$ , computed with the MATLAB software, in Figure 3.2.

We have

$$\lambda_{k,1}(2\pi) < \lambda_{1,2}(2\pi) \quad \text{for } k = 2, \dots, 5.$$

By continuity of  $\alpha \mapsto \lambda_{k,1}(\alpha)$ , the real number  $\alpha_k^2$  is well defined for  $2 \leq k \leq 5$ , and for any  $\alpha \in (\alpha_k^2, 2\pi]$ , we have

$$\lambda_{k,1}(\alpha) < \lambda_{1,2}(\alpha) \quad \text{for } k = 2, \dots, 5.$$

Using the definition of  $\alpha_k^2$ , we have

$$\lambda_k(\alpha) = \lambda_{k,1}(\alpha), \quad \forall \alpha \in (\alpha_k^2, 2\pi].$$

Since  $u_{k,1}^\alpha$  has  $k$  nodal domains, it is Courant-sharp and its nodal partition, composed of  $k$  equal angular sectors, is minimal according to Remark 3.1.13.

For  $k \geq 6$ , we observe that  $\lambda_{k,1}(\alpha) > \lambda_{1,2}(\alpha)$  for any  $\alpha \in (0, 2\pi]$ . Then  $\lambda_{k,1}(\alpha) > \lambda_k(\alpha)$ , the eigenfunction  $u_{k,1}^\alpha$  is not Courant-sharp, and its nodal partition is not minimal.

Still assuming  $k \geq 6$ , let us prove by contradiction that a  $k$ -partition  $\mathcal{D}_k = (D_1, \dots, D_k)$  with  $D_i$  angular sector cannot be minimal. Let us assume that it is minimal. Then the aperture for each sector must be the same, otherwise we could decrease the energy by increasing some angles and decreasing others. The partition  $\mathcal{D}_k$  is therefore nodal, associated with  $u_{k,1}$ , and thus not minimal.  $\square$

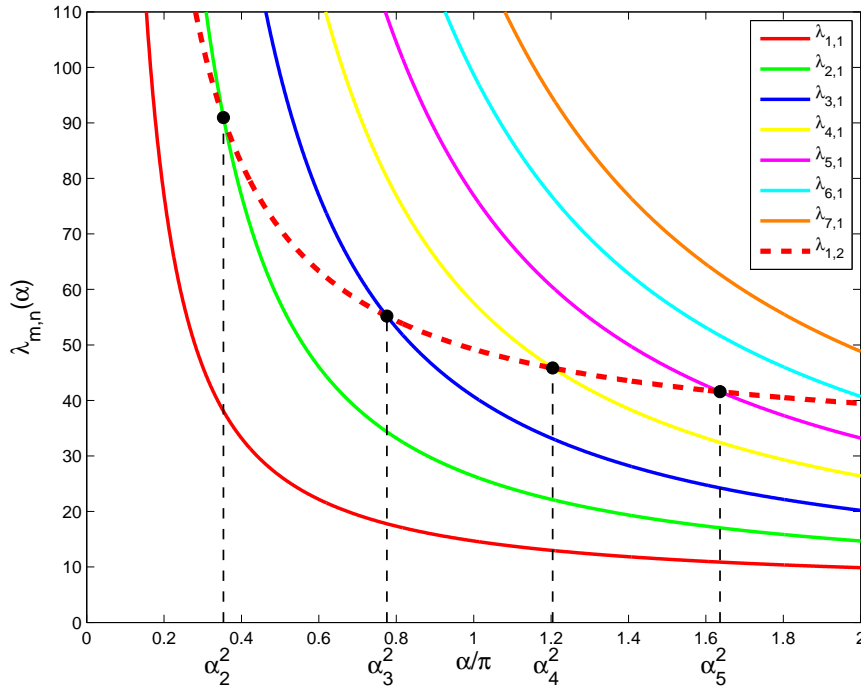


FIGURE 3.2 –  $\lambda_{m,1}(\alpha)$  vs.  $\alpha/\pi$  for  $1 \leq m \leq 7$ , compared with  $\lambda_{1,2}(\alpha)$ .

### 3.2.3 Minimal 2-partition

According to Remark 3.1.14, we know that

$$\mathfrak{L}_2(\Sigma_\alpha) = \lambda_2(\alpha), \quad \forall 0 < \alpha \leq 2\pi.$$

Furthermore a minimal 2-partition is given by the nodal partition associated with  $\lambda_2(\alpha)$ . To be more precise, for  $\alpha < \alpha_2^2$ ,  $\lambda_2(\alpha)$  is simple and equal to  $\lambda_{1,2}(\alpha)$  and for  $\alpha > \alpha_2^2$ ,  $\lambda_2(\alpha)$  is simple and equal to  $\lambda_{2,1}(\alpha)$ . For  $\alpha < \alpha_2^2$  and  $\alpha > \alpha_2^2$ , there is a unique minimal 2-partition, given by the nodal domains of  $u_{1,2}^\alpha$  and  $u_{2,1}^\alpha$  respectively. Thus we have

**Proposition 3.2.4.**

$$\mathfrak{L}_2(\Sigma_\alpha) = \begin{cases} \lambda_{1,2}(\alpha) & \text{for } 0 < \alpha \leq \alpha_2^2, \\ \lambda_{2,1}(\alpha) & \text{for } \alpha_2^2 \leq \alpha \leq 2\pi. \end{cases}$$

Figure 3.3 gives the unique minimal 2-partition when  $\alpha \neq \alpha_2^2$ .

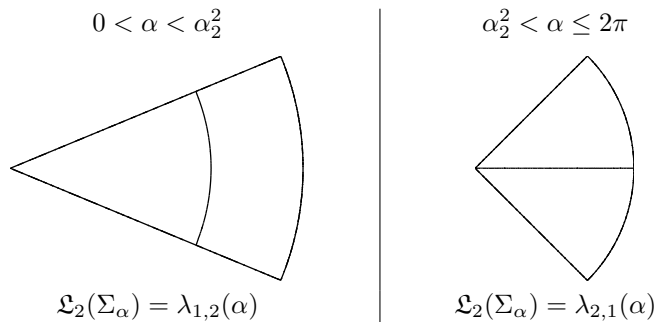


FIGURE 3.3 – Minimal 2-partition on  $\Sigma_\alpha$ .

We notice that the eigenfunction  $u_{1,2}^\alpha$  is symmetric with respect to the axis  $\{y = 0\}$  while  $u_{2,1}^\alpha$  is antisymmetric.

Let us determine  $\alpha_2^2$  and the associated eigenvalue using (3.2.1). We set  $\nu = \pi/\alpha_2^2$  and  $j = j_{\nu,2} = j_{2\nu,1}$ . The pair  $(\nu, j)$  is a solution of the (nonlinear) system

$$\begin{cases} J_\nu(j) &= 0, \\ J_{2\nu}(j) &= 0. \end{cases}$$

We can solve this system numerically by any iterative method. The initial values must be chosen so that  $j$  is indeed the second zero of  $J_\nu$  and the first of  $J_{2\nu}$ . In practice we find approximations of  $j$  and  $\nu$  thanks to Figure 3.2 and use them as initial values. We get

$$\begin{aligned} \alpha_2^2 &\simeq 0.3541 \pi \simeq 1.1125, \\ \lambda_2(\alpha_2^2) &\simeq 90.7745. \end{aligned}$$

For  $\alpha = \alpha_2^2$ ,  $\lambda_2(\alpha) = \lambda_{1,2}(\alpha) = \lambda_{2,1}(\alpha)$  has a two-dimensional eigenspace and the nodal domains of any nonzero linear combination of  $u_{1,2}^\alpha$  and  $u_{2,1}^\alpha$  give a minimal 2-partition (see Figure 3.4). The eigenfunctions were computed by using the Finite Element Library MÉLINA [19]. We then used the MATLAB software to compute linear combinations of two eigenfunctions and to catch the nodal lines of the new function.

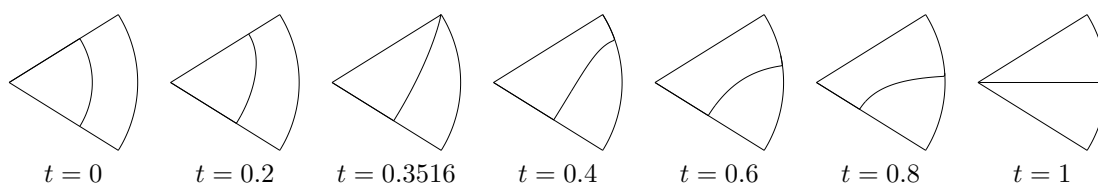


FIGURE 3.4 – Minimal 2-partitions obtained as nodal partitions of  $(1-t)u_{1,2}^\alpha + tu_{2,1}^\alpha$ ,  $\alpha = \alpha_2^2$ .

### 3.3 Minimal partition for small angles

For sufficiently small angles, the minimal  $k$ -partition is nodal as explained in the following proposition.

**Proposition 3.3.1.** *Let  $k \geq 2$ , we define*

$$\alpha_k^1 := \inf\{\alpha \in (0, 2\pi] : \lambda_{1,k}(\alpha) \geq \lambda_{2,1}(\alpha)\}. \quad (3.3.1)$$

*Then  $\alpha_k^1 > 0$  and for any  $0 < \alpha < \alpha_k^1$ , there is a unique minimal  $k$ -partition of  $\Sigma_\alpha$ , which is nodal, and more precisely consists of the nodal sets of  $u_{1,k}^\alpha$ .*

*Démonstration.* Using [12], we determine the asymptotic expansion of the  $n$ -th zero  $j_{\tilde{\nu},n}$  of the Bessel function  $J_{\tilde{\nu}}$  for large  $\tilde{\nu}$  :

$$j_{\tilde{\nu},n} = \tilde{\nu} - 2^{-1/3} a_n \tilde{\nu}^{1/3} + \mathcal{O}(\tilde{\nu}^{-1/3}).$$

Here  $a_n$  is the  $n$ -th negative zero of the Airy function  $Ai$ . Together with (3.2.1) and the relation  $\tilde{\nu} = m\pi/\alpha$ , this yields an asymptotic expansion for the eigenvalues :

$$\lambda_{m,n}(\alpha) = \frac{m^2 \pi^2}{\alpha^2} + 2^{2/3} |a_n| \left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^{4/3} + \mathcal{O}(\alpha^{-2/3}). \quad (3.3.2)$$

Let  $k \geq 2$  be an integer. The asymptotic expansion (3.3.2) implies that for  $\alpha$  small enough,  $\lambda_{1,k}(\alpha) < \lambda_{2,1}(\alpha)$ . Then the real number  $\alpha_k^1$  defined by relation (3.3.1) is strictly positive. For  $\alpha \in (0, \alpha_k^1)$ , we have  $\lambda_{1,k}(\alpha) < \lambda_{2,1}(\alpha)$  and therefore the first  $k$  eigenvalues of the Dirichlet Laplacian on  $\Sigma_\alpha$  are  $\lambda_{1,1}(\alpha), \dots, \lambda_{1,k}(\alpha)$ . These eigenvalues are simple. Let  $u_{1,1}^\alpha, \dots, u_{1,k}^\alpha$  be the associated eigenfunctions defined by (3.2.2). The eigenfunction  $u_{1,k}^\alpha$  has  $k$  nodal domains and therefore is Courant-sharp. According to Theorem 3.1.13, the nodal partition associated with  $u_{1,k}^\alpha$  is minimal. Furthermore, the eigenspace associated with  $\lambda_{1,k}^\alpha$  has dimension 1 and thus this partition is unique.  $\square$

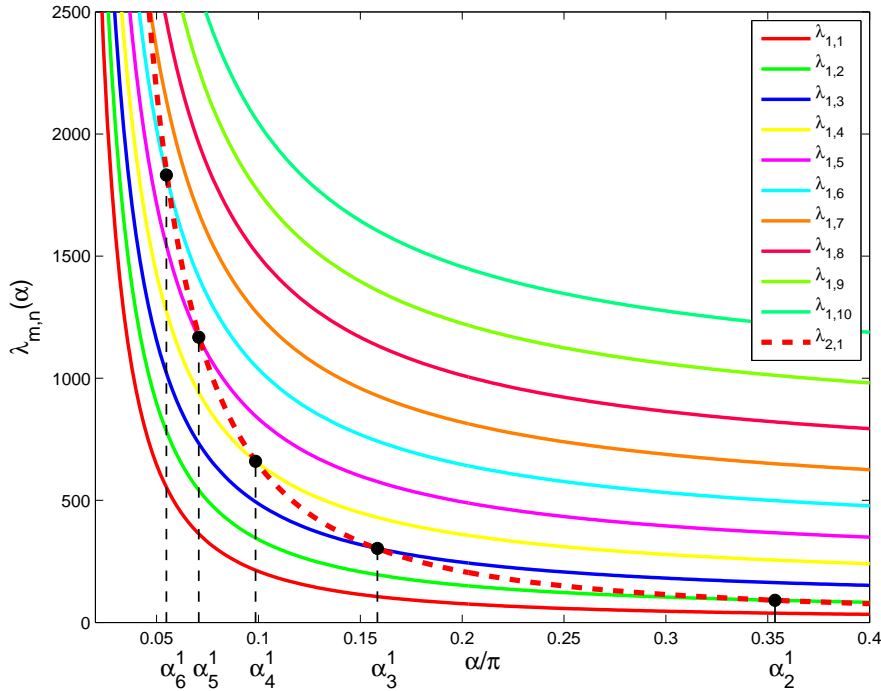


FIGURE 3.5 –  $\lambda_{1,k}(\alpha)$  vs.  $\alpha/\pi$  for  $1 \leq k \leq 10$ , compared with  $\lambda_{2,1}(\alpha)$ .

Figure 3.5 gives the first ten eigenvalues  $\lambda_{1,k}(\alpha)$  compared with  $\lambda_{2,1}(\alpha)$  and shows the critical angles  $\alpha_k^1$ . We have

$$\begin{aligned} \alpha_2^1 &= \alpha_2^2, \\ \alpha_k^1 &< \alpha_k^2, \quad \text{for } k = 3, \dots, 5. \end{aligned}$$

Then we deduce from Propositions 3.2.3 and 3.3.1 the estimate of the energy of a minimal  $k$ -partition

**Proposition 3.3.2.** *For any  $2 \leq k \leq 5$ ,*

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_k(\Sigma_\alpha) &= \lambda_k(\alpha), \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_k^1] \cup [\alpha_k^2, 2\pi], \\ \lambda_k(\alpha) &< \mathfrak{L}_k(\Sigma_\alpha) < L_k(\alpha), \quad \forall \alpha \in (\alpha_k^1, \alpha_k^2). \end{aligned}$$

**Remark 3.3.3.** *Using the asymptotic expansion, we deduce that  $\lambda_{1,k}(\alpha) \leq \lambda_{k,1}(\alpha)$  as soon as  $\alpha$  is small enough. Let  $k$  be a prime number, we define*

$$\beta_k = \inf\{\alpha \in (0, 2\pi] : \lambda_{1,k}(\alpha) \geq \lambda_{k,1}(\alpha)\}. \quad (3.3.3)$$

Then, we have  $\beta_2 = \alpha_2^1 = \alpha_2^2$  and

$$L_k(\Sigma_\alpha) \leq \begin{cases} \lambda_{1,k}(\alpha) & \text{if } 0 < \alpha \leq \beta_k, \\ \lambda_{k,1}(\alpha) & \text{if } \beta_k \leq \alpha \leq 2\pi. \end{cases}$$

### 3.4 Minimal nodal 3-partition

This section is devoted to the proof of the first point of Theorem 3.1.15. As in the case of the 2-partition, we estimate numerically the transition angles  $\alpha_3^1$ ,  $\alpha_3^2$ ,  $\beta_3$  :

$$\begin{aligned} \alpha_3^1 &\simeq 0.1579 \pi \simeq 0.4961, & \lambda_3(\alpha_3^1) &\simeq 303.9139, \\ \alpha_3^2 &\simeq 0.7761 \pi \simeq 2.4382, & \lambda_3(\alpha_3^2) &\simeq 55.1671, \\ \beta_3 &\simeq 0.3533 \pi \simeq 1.1098, & L_3(\beta_3) &\simeq 163.3786. \end{aligned}$$

Proposition 3.3.2 and Remark 3.3.3 give estimates for  $\mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha)$  illustrated in Figure 3.6 :

- for  $0 < \alpha \leq \alpha_3^1$ ,  $\mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha) = \lambda_3(\alpha) = \lambda_{1,3}(\alpha)$ ,
- for  $\alpha_3^1 < \alpha \leq \beta_3$ ,  $\lambda_{2,1}(\alpha) = \lambda_3(\alpha) < \mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha) < L_3(\Sigma_\alpha) = \lambda_{1,3}(\alpha)$ ,
- for  $\beta_3 \leq \alpha \leq \beta_2$ ,  $\lambda_{2,1}(\alpha) = \lambda_3(\alpha) < \mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha) < L_3(\Sigma_\alpha) = \lambda_{3,1}(\alpha)$ ,
- for  $\beta_2 \leq \alpha < \alpha_3^2$ ,  $\lambda_{1,2}(\alpha) = \lambda_3(\alpha) < \mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha) < L_3(\Sigma_\alpha) = \lambda_{3,1}(\alpha)$ ,
- for  $\alpha_3^2 \leq \alpha \leq 2\pi$ ,  $\mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha) = \lambda_3(\alpha) = \lambda_{3,1}(\alpha)$ .

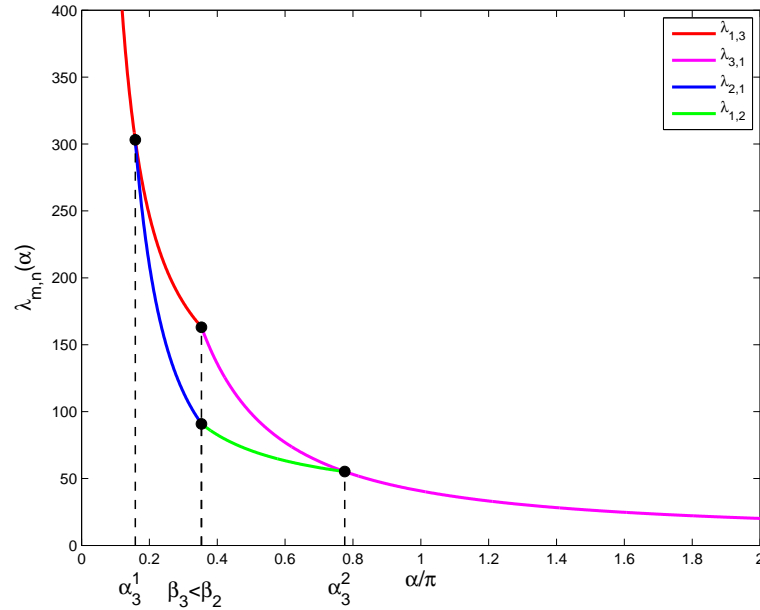


FIGURE 3.6 – Lower and upper bounds for  $\mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha)$ .

If  $\alpha \leq \alpha_3^1$  or  $\alpha \geq \alpha_3^2$ , the eigenvalue  $\lambda_3(\alpha)$  has a Courant-sharp eigenfunction. According to Remark 3.1.13,  $\mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha) = \lambda_3(\alpha)$  and the minimal 3-partition is nodal, given by the nodal sets of an eigenfunction associated with  $\lambda_3(\alpha)$ . On the other hand, if  $\alpha_3^1 < \alpha < \alpha_3^2$ , no minimal 3-partition is nodal. Table 3.1 gives the nodal partition associated with the third eigenfunction. We notice that the eigenfunctions  $u_{1,3}^\alpha$  and  $u_{3,1}^\alpha$  are symmetric with respect to the axis  $\{y = 0\}$ .

$0 < \alpha \leq \alpha_3^1$	$\alpha_3^1 < \alpha < \alpha_2^1$	$\alpha_2^1 < \alpha < \alpha_3^2$	$\alpha_3^1 \leq \alpha \leq 2\pi$
$\mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha) = \lambda_{1,3}(\alpha)$ <i>minimal 3-partition</i>	$\lambda_{2,1}(\alpha) < \mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha)$	$\lambda_{1,2}(\alpha) < \mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha)$	$\mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha) = \lambda_{3,1}(\alpha)$ <i>minimal 3-partition</i>

TABLE 3.1 – Nodal partition associated with  $\lambda_3(\alpha)$  on  $\Sigma_\alpha$ .

Let us now look at the transition angles  $\alpha_3^1$  and  $\alpha_3^2$ . For such angles, the minimal 3-partition is no more unique.

Figure 3.7 represents the nodal partitions of some linear combination  $(1-t)u_{1,3}^\alpha + tu_{2,1}^\alpha$  for  $\alpha = \alpha_3^1$ . There is a transition between a 2-partition and a 3-partition. When we have a 3-partition, it is a minimal one since the eigenfunction is associated with  $\lambda_3(\alpha)$  and then Courant-sharp (see

Remark 3.1.13). Notice that the function  $u_{1,3}^\alpha$  is symmetric with respect to the  $y$ -axis whereas the function  $u_{2,1}^\alpha$  is antisymmetric. Thus, by considering linear combinations, we break the symmetry of the 3-partition and exhibit some minimal 3-partitions which are non symmetric.

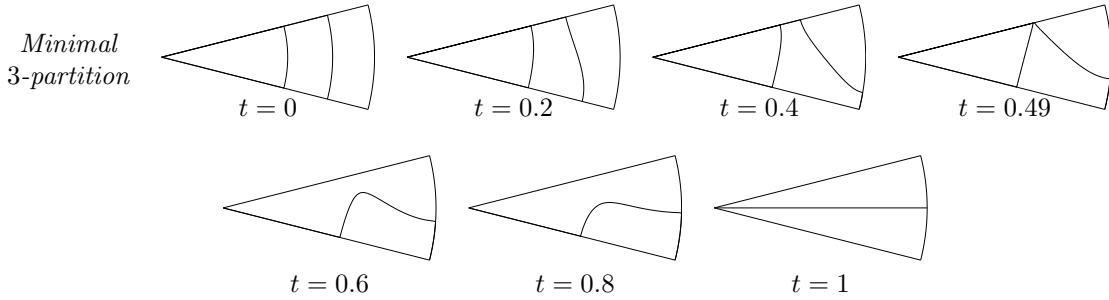


FIGURE 3.7 – Nodal partitions of  $(1 - t)u_{1,3}^\alpha + tu_{2,1}^\alpha$ ,  $\alpha = \alpha_3^1$ .

The following proposition gives information about the transition in the linear combinations between 2-partition and 3-partition.

**Proposition 3.4.1.** *There are eigenfunctions associated with  $\lambda_3(\alpha_3^1)$  whose nodal set has a boundary singular point with two nodal lines which hit at this point. The polar coordinates of this boundary singular point is either  $(\rho_c, \alpha_3^1/2)$  or  $(\rho_c, -\alpha_3^1/2)$  with  $\rho_c \simeq 0.6558$ .*

*Démonstration.* We recall that

$$\lambda_3(\alpha_3^1) = \lambda_{1,3}(\alpha_3^1) = \lambda_{2,1}(\alpha_3^1).$$

We set

$$\nu = \frac{\pi}{\alpha_3^1}, \quad j = j_{\nu,3} = j_{2\nu,1}.$$

Any associated eigenfunction is of the form

$$u(\rho, \theta) = aJ_\nu(j\rho) \cos(\nu\theta) + bJ_{2\nu}(j\rho) \sin(2\nu\theta),$$

where  $a$  and  $b$  are coefficients to be determined. It can be factorized as

$$u(\rho, \theta) = J_{2\nu}(j\rho) \cos(\nu\theta) \left( a \frac{J_\nu(j\rho)}{J_{2\nu}(j\rho)} + 2b \sin(\nu\theta) \right).$$

Let us define

$$v(\rho, \theta) = a \frac{J_\nu(j\rho)}{J_{2\nu}(j\rho)} + 2b \sin(\nu\theta).$$

We are looking for values of  $a$  and  $b$  for which  $v$  has a zero that is also a singular point. The equation  $\nabla v(\rho, \theta) = 0$  can be solved and yields

$$\begin{cases} \theta_c &= \pm \alpha_3^1/2, \\ \rho_c &\simeq 0.6558. \end{cases}$$

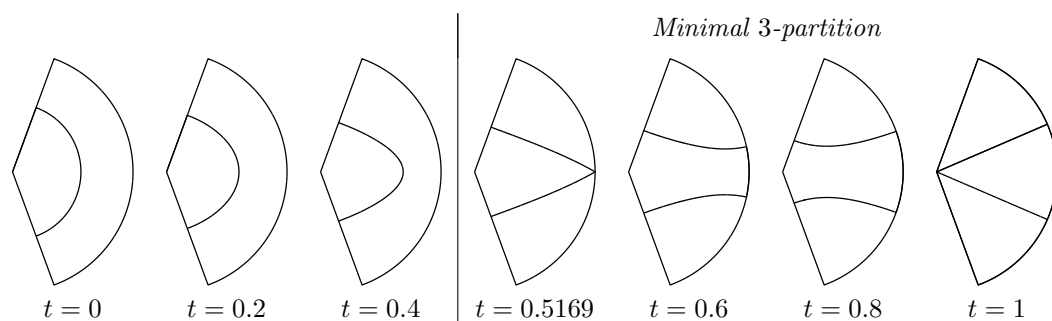
Thanks to the equation  $v(\theta_c, \rho_c) = 0$ , we then find  $a$  and  $b$  up to a common multiplicative factor.  $\square$

Similarly, Figure 3.8 gives the nodal partition associated with the linear combination  $(1 - t)u_{1,2}^\alpha + tu_{3,1}^\alpha$  for  $\alpha = \alpha_3^2$ . In this case, the functions  $u_{1,2}$  and  $u_{3,1}$  are both symmetric with respect to the  $y$ -axis. Then any linear combination satisfies this symmetry too. As previously, we observe a transition between a 2-partition and a 3-partition. When we have a 3-partition, it is still a minimal one. We can characterize the transition between 2-partition and 3-partition :

**Proposition 3.4.2.** *There are eigenfunctions associated with  $\lambda_3(\alpha_3^2)$  for which the point of coordinates  $(1, 0)$  is a boundary singular point. Two nodal lines meet at this point.*

*Démonstration.* This proposition is proved in the same way than Proposition 3.4.1.  $\square$



FIGURE 3.8 – Nodal partition of  $(1-t)u_{1,2}^\alpha + tu_{3,1}^\alpha$ ,  $\alpha = \alpha_3^2$ .

### 3.5 Minimal symmetric 3-partitions

In this section, we prove the second point of Theorem 3.1.15. We restrict ourselves to symmetric 3-partitions and analyze the minimization problem with that additional condition. We study each possible symmetric configuration and exhibit better upper-bounds for the energy  $\mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha)$  and also give new candidates to be minimal 3-partitions. This approach was used in [5] to catch symmetric candidates for the square and the disk.

Looking at nodal minimal 3-partitions obtained in Section 3.4, we observe that for any  $\alpha \in (0, \alpha_3^1] \cup [\alpha_3^2, 2\pi]$ , there exists a symmetric minimal 3-partition. Now, we exhibit symmetric candidates to be minimal symmetric 3-partitions for  $\alpha \in (\alpha_3^1, \alpha_3^2)$ . We refer to [5] to explain the possible symmetric configurations. Using the Euler formula (cf. [14]), there are only three configurations, represented in Figure 3.9, for the minimal 3-partition when  $\alpha_3^1 < \alpha < \alpha_3^2$ :

- (a) The 3-partition has one interior singular point  $X_0$ , which is necessarily on the symmetry axis.
- (b) The 3-partition has two interior singular points  $X_0, X_1$  and no boundary singular point.
- (c) The 3-partition has two interior singular points and two boundary singular points. Moreover  $\partial D_1 \cap \partial D_2$  consists of two curves, each one joining one boundary singular point to one interior singular point.

In configurations (b) and (c), the interior singular points  $X_0, X_1$  (and boundary singular points for case (c)) are either on the symmetry axis, or symmetric to each other.

#### 3.5.1 Partitions with one interior singular point

Let us first consider configurations of type (a). To catch such configuration, it is enough to deal with the half-domain  $\Sigma_\alpha^+ = \Sigma_\alpha \cap \{y > 0\}$  and look at 2-partitions on this half-domain. The main advantage is that the minimal 2-partitions are nodal; to determine them, it is enough to compute the second eigenfunction. The unknown parameter is the position of the singular point  $X_0^\alpha$ . Thus we compute the second eigenvector of the Neumann-Dirichlet and Dirichlet-Neumann Laplacian on  $\Sigma_\alpha^+$  and move the singular point all along the axis  $\{y = 0\}$ ; we denote by  $x_\alpha$  the abscissa of the singular point  $X_0^\alpha$  and by  $\lambda_2^{ND}(x_\alpha)$  and  $\lambda_2^{DN}(x_\alpha)$  the second eigenvalue of the Neumann-Dirichlet and Dirichlet-Neumann Laplacian respectively (see Figures 3.9(a1) and 3.9(a2)):

$$\begin{array}{cc}
 \text{Neumann-Dirichlet} & \text{Dirichlet-Neumann} \\
 \text{(a1)} \quad \begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda\varphi & \text{in } \Sigma_\alpha^+, \\ \partial_{\mathbf{n}}\varphi = 0 & \text{on } [O, X_0^\alpha], \\ \varphi = 0 & \text{elsewhere.} \end{cases} & \text{(a2)} \quad \begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda\varphi & \text{in } \Sigma_\alpha^+, \\ \partial_{\mathbf{n}}\varphi = 0 & \text{on } [X_0^\alpha, M], \\ \varphi = 0 & \text{elsewhere,} \end{cases}
 \end{array}$$

For each mixed problem, the nodal line of the second eigenvector meets the axis  $\{y = 0\}$  at a point of abscissa denoted by  $y^{ND}(x_\alpha)$  and  $y^{DN}(x_\alpha)$  respectively. The choice of the interior singular point  $X_0^\alpha$  gives a 3-partition after symmetrization if and only if

- $y^{ND}(x_\alpha) \geq x_\alpha$  in the Neumann-Dirichlet case,
- $y^{DN}(x_\alpha) \leq x_\alpha$  in the Dirichlet-Neumann case.

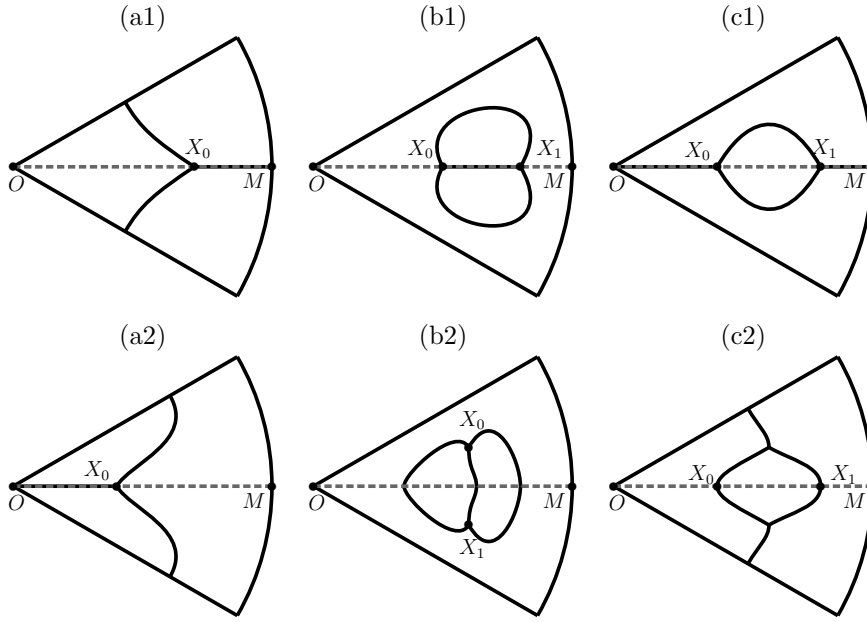


FIGURE 3.9 – Configuration of the non bipartite symmetric minimal 3-partition.

We compute the eigenmodes associated with the mixed problems (a1)–(a2) by using the Finite Element Library MÉLINA [19]. Figure 3.10 gives examples of nodal partitions for several values of  $x_\alpha$ . The Dirichlet condition on the boundary are represented in blue line and the Neumann condition in red dotted line. The nodal line is plotted in black. For the Neumann-Dirichlet configuration (see Figure 3.10(a)), we obtain a 2-partition after symmetrization if  $x_\alpha$  is too large. If  $x_\alpha$  is such that  $x_\alpha < y^{ND}(x_\alpha)$ , we obtain a 3-partition whose energy can be reduced by removing the Dirichlet line ( $Y^{ND}(x_\alpha), X_0^\alpha$ ) (where  $Y^{ND}(x_\alpha)$  is the point of coordinates  $(y^{ND}(x_\alpha), 0)$ ) in this subdomain of the partition. We can make a similar analysis in the Dirichlet-Neumann case (see Figure 3.10(b)).

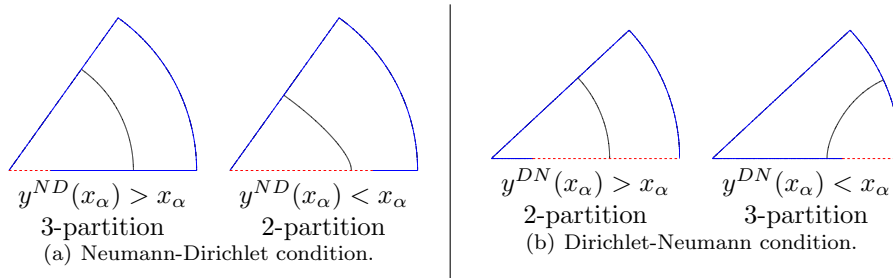


FIGURE 3.10 – Examples of nodal partition for the mixed problems.

Since the function  $x \mapsto \lambda_2^{ND}(x)$  is decreasing with  $x$  and  $x \mapsto \lambda_2^{DN}(x)$  is increasing with  $x$ , the optimal singular points are :

$$x_\alpha^{ND} = \max\{x_\alpha : y^{ND}(x_\alpha) \geq x_\alpha\}, \quad x_\alpha^{DN} = \min\{x_\alpha : y^{DN}(x_\alpha) \leq x_\alpha\}. \quad (3.5.1)$$

For numerical simulations, we use the discretization

$$\alpha \in \left\{ \frac{k}{100}\pi, 16 \leq k \leq 77 \right\} \quad \text{and} \quad x_\alpha \in \left\{ \frac{j}{100}, 0 \leq j \leq 100 \right\}.$$

We denote by  $\tilde{x}_\alpha^{ND}$  and  $\tilde{x}_\alpha^{DN}$  the singular points defined by (3.5.1) for a discretization  $x_\alpha \in \left\{ \frac{j}{100}, 0 \leq j \leq 100 \right\}$ . Figure 3.11 represents these singular points according to  $\alpha$ .

The 3-partitions obtained after symmetrization give upper-bounds for  $\mathfrak{L}_3(\alpha)$  as illustrated in

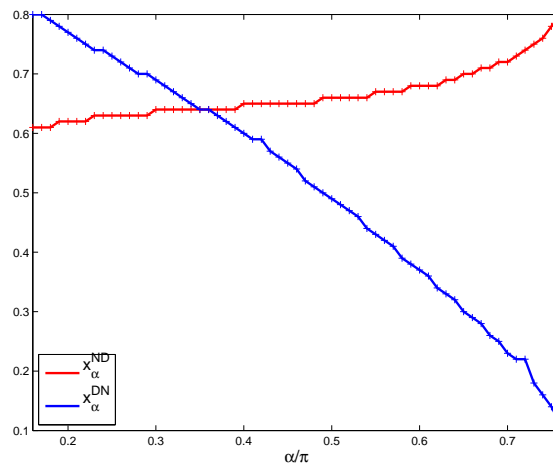


FIGURE 3.11 –  $\tilde{x}_\alpha^{ND}$  and  $\tilde{x}_\alpha^{DN}$  vs.  $\alpha \in \{k\pi/100, 16 \leq k \leq 77\}$ .

Figure 3.12. We observe that the energy for the Neumann-Dirichlet Laplacian (green curve) is smaller than the one obtained with the Dirichlet-Neumann Laplacian (cyan curve) and smaller than  $L_3(\alpha)$  (red and pink curves). Thus using Theorem 3.1.12, we deduce

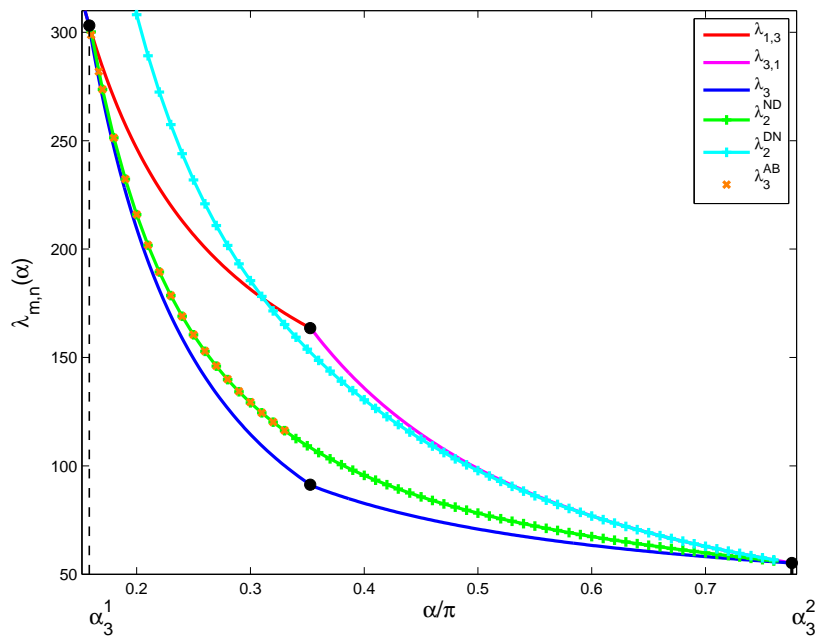


FIGURE 3.12 – Upper-bound of  $\mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha)$  using symmetric partitions.

**Proposition 3.5.1.** For any  $\alpha \in (\alpha_3^1, \alpha_3^2)$ ,

$$\lambda_3(\alpha) < \mathfrak{L}_3(\Sigma_\alpha) \leq L_3^{sym}(\alpha) < L_3(\alpha),$$

with  $L_3^{sym}(\alpha) := \min(\lambda_2^{DN}(x_\alpha^{DN}), \lambda_2^{ND}(x_\alpha^{ND})) = \lambda_2^{ND}(x_\alpha^{ND})$ .

Looking at Figure 3.12, this new upper-bound  $L_3^{sym}(\alpha)$  (represented by the green curve) is much more accurate than the previously known upper-bound  $L_3(\alpha)$  represented by the red and pink curves. Figure 3.13 gives examples of minimal symmetric 3-partitions of type (a) for several angles. We denote by  $\mathcal{D}_\alpha^{sym}$  the best candidate obtained like this.

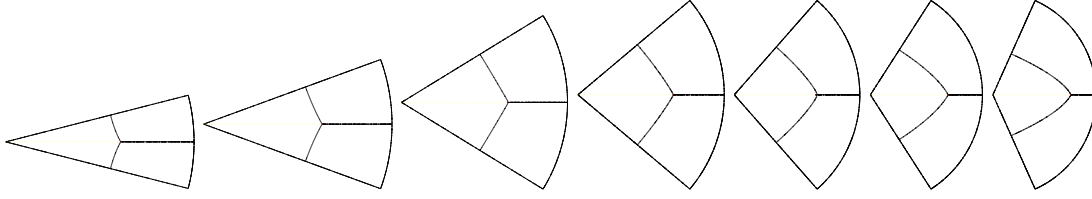


FIGURE 3.13 – Best candidates for symmetric 3-partition.

### 3.5.2 Partitions with two interior singular points

We have now to deal with the other configurations (b) and (c). Then, as illustrated in Figure 3.9, the two interior singular points  $X_0$  and  $X_1$  are either on the axis  $\{y = 0\}$ , or symmetric to each other. Their coordinates are therefore :

1.  $X_0 = (x_0, 0)$  and  $X_1 = (x_1, 0)$  in case (b1) or (c1),
2.  $X_0 = (x_0, y_0)$  and  $X_1 = (x_0, -y_0)$  in case (b2) or (c2).

Let us first rule out configurations (b2) and (c2) :

**Lemma 3.5.2.** *Let  $\alpha \in (\alpha_3^1, \alpha_3^2)$  and  $\mathcal{D}_\alpha$  be a minimal 3-partition. We assume that this partition is symmetric with respect to the  $y$ -axis. Then the interior singular points are necessarily on the axis  $\{y = 0\}$ .*

*Démonstration.* This is clear for configuration of type (a) and we have used this property previously. Let us now assume that the partition  $\mathcal{D}_\alpha$  is of type (b2) or (c2). Then, since  $\mathcal{D}_\alpha^+ = \mathcal{D}_\alpha \cap \{y > 0\}$  is a 3-partition with Neumann condition on the symmetry axis  $\{y = 0\}$ , we infer, by the min-max principle,

$$\Lambda_3(\mathcal{D}_\alpha) \geq \lambda_3^N(\alpha),$$

where  $\lambda_3^N(\alpha)$  is the third eigenvalue on  $\Sigma_\alpha^+$  with Neumann condition on  $\{y = 0\}$  and Dirichlet condition elsewhere. But  $\lambda_3^N(\alpha) = \lambda_{1,3}(\alpha)$  if  $\alpha_3^1 < \alpha \leq \beta_3$  and  $\lambda_3^N(\alpha) = \lambda_{3,1}(\alpha)$  if  $\beta_3 \leq \alpha < \alpha_3^2$ , that is to say

$$\lambda_3^N(\alpha) = L_3(\alpha), \quad \forall \alpha \in (\alpha_3^1, \alpha_3^2).$$

Using Proposition 3.5.1 and Figure 3.12, we observe that for any  $\alpha \in (\alpha_3^1, \alpha_3^2)$ , we find a symmetric 3-partition  $\mathcal{D}_\alpha^{sym}$  of type (a1) such that

$$\Lambda_3(\mathcal{D}_\alpha^{sym}) < L_3(\alpha) \leq \Lambda_3(\mathcal{D}_\alpha).$$

Thus  $\mathcal{D}_\alpha$  cannot be a minimal 3-partition. □

We have then reduced the study to configurations (b1) and (c1). The associated mixed problems read

<p style="text-align: center;">Neumann-Dirichlet-Neumann</p> <p>(b1) <math>\begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda\varphi &amp; \text{in } \Sigma_\alpha^+, \\ \partial_{\mathbf{n}}\varphi = 0 &amp; \text{on } [O, X_0^\alpha] \cup [X_1^\alpha, M], \\ \varphi = 0 &amp; \text{elsewhere,} \end{cases}</math></p>	<p style="text-align: center;">Dirichlet-Neumann-Dirichlet</p> <p>(c1) <math>\begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda\varphi &amp; \text{in } \Sigma_\alpha^+, \\ \partial_{\mathbf{n}}\varphi = 0 &amp; \text{on } [X_0^\alpha, X_1^\alpha], \\ \varphi = 0 &amp; \text{elsewhere.} \end{cases}</math></p>
---	---

Using the results of Subsection 3.5.1 for the configuration (a), we can restrict the possible critical points for configuration (c1) :

**Proposition 3.5.3.** *Let  $\mathcal{D} = (D_1, D_2, D_3)$  be a symmetric 3-partition of type (c1) with the interior singular points  $X_0^\alpha$  and  $X_1^\alpha$  of coordinates  $(x_0, 0)$  and  $(x_1, 0)$ . We assume either  $x_0 < x_1 \leq x_\alpha^{ND}$ , or  $x_\alpha^{DN} \leq x_0 < x_1$ . Then this partition cannot be minimal.*

*Démonstration.* We assume that  $x_0 < x_1 < x_\alpha^{ND}$  and that  $D_1 \subset \{y > 0\}$  and  $D_3^+ = D_3 \cap \{y > 0\} \neq \emptyset$ . Then the partition  $\mathcal{D}^+ = (D_1, D_3^+)$  satisfies the Dirichlet-Neumann-Dirichlet problem (c1) and we have then, by the min-max principle,

$$\Lambda_3(\mathcal{D}) \geq \lambda_2^{DND}(x_0, x_1),$$

with  $\lambda_2^{DND}(x_0, x_1)$  the second eigenvalue of the Dirichlet-Neumann-Dirichlet Laplacian (c1) on  $\Sigma_\alpha^+$ . By monotonicity due to the Dirichlet condition and since  $x_0 < x_1 \leq x_\alpha^{ND}$ , we have

$$\lambda_2^{DND}(x_0, x_1) > \lambda_2^{ND}(x_1) \geq \lambda_2^{ND}(x_\alpha^{ND}) = L_3^{sym}(\alpha) \geq \mathfrak{L}_3(\alpha).$$

Thus the partition  $\mathcal{D}$  can not be minimal.

The proof is similar if we assume  $x_\alpha^{DN} \leq x_0 < x_1$ . □

Figure 3.11 gives an approximation at  $1/100$  for  $x_\alpha^{ND}$  and  $x_\alpha^{DN}$  and thus the location for possible interior singular points for configuration (c1).

When we search for candidates of type (b1) or (c1) numerically, we use the discretization

$$\alpha \in \left\{ \frac{k}{100}\pi, 16 \leq k \leq 77 \right\} \quad \text{and} \quad X_k^\alpha = (x_k^\alpha, 0), \quad x_k^\alpha \in \left\{ \frac{j}{100}, 0 \leq j \leq 100 \right\}, \quad k = 0, 1.$$

As in [5] for the square and the disk, the second eigenfunction associated with these mixed problems never produces a configuration of type (b) or (c). Then the mixed Neumann-Dirichlet problem provides the best symmetric candidates for any  $\alpha \in (\alpha_3^1, \alpha_3^2)$ .

This concludes the proof of Theorem 3.1.15.

### 3.5.3 Angular sector of opening $\alpha = \pi/3$

Let us analyze more specifically the case  $\alpha = \pi/3$ . Using the approach developed in Subsection 3.5.1, the best candidate obtained is represented in Figure 3.14 with  $\tilde{x}_{\pi/3}^{ND} = 0.64$  (we recall that for the numerics,  $x_\alpha \in \{k/100, 0 \leq k \leq 100\}$ ). It seems that the nodal lines are straight lines. This is compatible with the equal angle properties : At the interior singular point, the nodal lines have to meet with angle  $2\pi/3$  whereas the nodal lines meet the boundary at right angles.

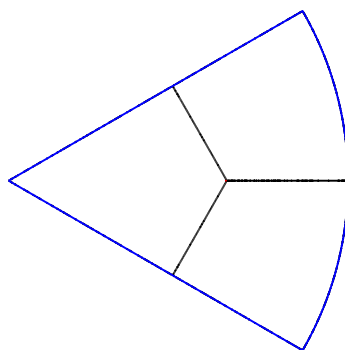


FIGURE 3.14 – Symmetric candidate for  $\Sigma_{\pi/3}$ .

Let us try to understand some properties of such a partition. We reproduce this 3-partition of  $\Sigma_{\pi/3}$  by rotation of  $\pm\pi/3$  and  $\pm 2\pi/3$  to tile the disk. Figure 3.15 represents this tiling of the disk. Let us compare the areas of the subdomains  $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  of the partition of  $\Sigma_{\pi/3}$ , assuming that the nodal lines are straight lines. We denote by  $A$  the interior singular point of coordinates  $(L, 0)$ . Let  $B$  be the boundary singular point of coordinates  $L/4(3, \sqrt{3})$  and  $C$  its symmetric point with respect to the axis  $\{y = 0\}$ . The area of the total disk  $Disk$  equals  $\mathcal{A}(Disk) = \pi$ . The area of the regular hexagon plotted in red in Figure 3.15 is

$$\mathcal{A}(\text{Hex}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2.$$

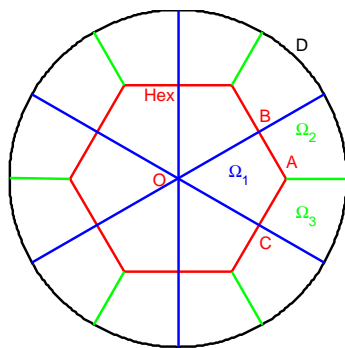


FIGURE 3.15 – Tiling of the disk with the 3-partition of Figure 3.14.

We deduce

$$\mathcal{A}(\Omega_1) = \frac{\sqrt{3}L^2}{4}.$$

Let us now compute the area of  $\Omega_2$ . We have

$$\mathcal{A}(\Omega_2) = \frac{1}{12}(\mathcal{A}(Disk) - \mathcal{A}(Hex)) = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}L^2}{24}.$$

With  $L = 0.64$ , we obtain

$$\mathcal{A}(\Omega_1) \simeq 0.177 \quad \text{and} \quad \mathcal{A}(\Omega_2) \simeq 0.173.$$

Since the accuracy on  $L$  is  $10^{-2}$ , this gap is not significant. Let us determine now for which value of  $L$  we have the equality :

$$\mathcal{A}(\Omega_1) = \mathcal{A}(\Omega_2) \iff \frac{\sqrt{3}L^2}{4} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}L^2}{24} \iff L = \sqrt{\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}} \simeq 0.634875.$$

In this case, we have  $\mathcal{A}(Hex) = \pi/3$ .

This result is coherent with the discretization step for  $x_\alpha$  which equals  $1/100$ . Therefore it seems that the areas of every domains of the partition are equal.

## 3.6 Laplacian on the double covering

The method proposed in Section 3.5 can only catch symmetric candidates. However, we have seen in Figure 3.7 that for the angle  $\alpha = \alpha_3^1$ , there exists non symmetric minimal 3-partitions. So we would like to find a method to catch non symmetric candidates. The method we use now was introduced in [4] to explain why we find two symmetric configurations with the same energy in the square. Let us explain this method. Let us go back to a general bounded open and simply connected set  $\Omega$  with piecewise  $\mathcal{C}^{1,+}$  boundary. In the non nodal case, there are three topological types possible for a minimal 3-partition of such a domain. They are given by configuration (a), (b), and (c) in Section 3.5, removing the symmetry assumption. As suggested by the numerical study of the symmetric case, we only look for minimal partitions of type (a). Then, there is an interior singular point where three half-curves meet. Following [4], we consider a double Riemannian covering of the domain  $\Omega$  punctured by this point. We then look for a minimal partition of  $\Omega$  as the projection of a nodal partition of the double covering.

### 3.6.1 Double covering of the domain

We will give a rather informal description of the double covering. Let us consider a point  $X_0 \in \Omega$ . We denote  $\Omega \setminus \{X_0\}$  by  $\Omega_{X_0}$ . We now choose a simple regular curve  $\gamma$  contained in  $\Omega$  that links  $X_0$

to a point in  $\partial\Omega$ . We consider two copies of  $\Omega \setminus \gamma$  that we glue in such a way that a side of  $\gamma$  on one sheet is connected to the opposite side on the other sheet (cf. Figure 3.16). The resulting object is a two dimensional manifold with boundary, that we denote by  $\tilde{\Omega}_{X_0}$ , with a natural projection map  $\Pi : \tilde{\Omega}_{X_0} \rightarrow \Omega_{X_0}$ . It is a double covering of  $\Omega_{X_0}$ , that we equip with the Riemannian metric lifted from  $\Omega_{X_0}$  through  $\Pi$ . A rigorous and general construction is explained in [13]. In particular, it can be shown that the result does not depend on the choice of  $\gamma$ .

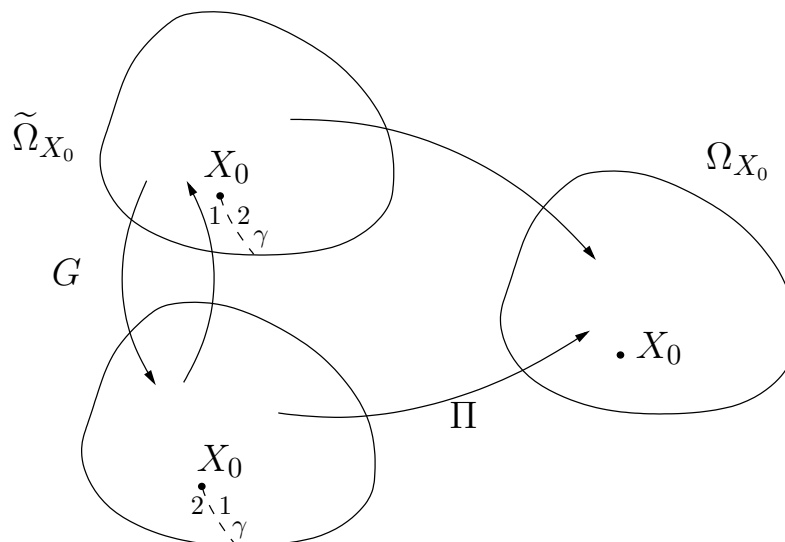


FIGURE 3.16 – Double covering of  $\Omega_{X_0}$ .

### 3.6.2 Symmetric and antisymmetric eigenvalues

Let us now define a mapping  $G$  from  $\tilde{\Omega}_{X_0}$  onto itself, called the *deck map*. For any  $X_1 \in \tilde{\Omega}_{X_0}$ ,  $G(X_1)$  is the only element  $X_2 \in \tilde{\Omega}_{X_0}$  such that  $X_2 \neq X_1$  and  $\Pi(X_2) = \Pi(X_1)$ . Intuitively, the mapping  $G$  moves points from one sheet of the double covering to the other one. We have of course  $G^2 = \text{Id}$ . A function  $f : \tilde{\Omega}_{X_0} \rightarrow \mathbb{C}$  is said to be *symmetric* if  $f \circ G = f$  and *antisymmetric* if  $f \circ G = -f$ . If we call  $\mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{A}$ ) the space of functions in  $L^2(\tilde{\Omega}_{X_0})$  that are symmetric (resp. antisymmetric), we have the orthogonal decomposition :

$$L^2(\tilde{\Omega}_{X_0}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

We call *lifted Laplacian* the Laplace-Beltrami operator on  $\tilde{\Omega}_{X_0}$  with Dirichlet boundary condition. The lifted Laplacian preserves symmetric and antisymmetric functions. We can therefore choose a basis of eigenfunctions for each subspace  $\mathcal{S}$  and  $\mathcal{A}$ . Their reunion is a basis of eigenfunctions for  $L^2(\tilde{\Omega}_{X_0})$ . The eigenvalues associated with a symmetric (resp. antisymmetric) eigenfunction will be called *symmetric* (resp. *antisymmetric*). The symmetric eigenvalues are actually the eigenvalues of the Dirichlet Laplacian on  $\Omega$ , since any symmetric eigenfunction is lifted from an eigenfunction on  $\Omega_{X_0}$ . We call the antisymmetric eigenvalues *Aharonov-Bohm* eigenvalues, denoted by  $\lambda_k^{AB}$ , since they can be considered as the eigenvalues of a so-called *Aharonov-Bohm* operator with pole at  $X = X_0$  and flux  $\Phi = 1/2$  (cf. [1, 13, 2, 21]).

Let us now consider a nodal partition  $\mathcal{D} = \{D_i : 1 \leq i \leq \ell\}$  associated with an antisymmetric eigenfunction  $u$ . The image of a domain of  $\mathcal{D}$  by the deck map  $G$  is another domain where  $u$  has the opposite sign. We can therefore group together the domains of  $\mathcal{D}$  in pairs  $\{D_i, D_j\}$  such that  $D_i \cap D_j = \emptyset$  and  $\Pi(D_i) = \Pi(D_j)$ . The set  $\Pi(\mathcal{D}) = \{\Pi(D_i) : 1 \leq i \leq \ell\}$  is then a strong  $k$ -partition of  $\Omega$ , with  $2k = \ell$  (we deduce in particular that  $\ell$  is even). Furthermore, contrary to  $\mathcal{D}$ , the partition  $\Pi(\mathcal{D})$  is not necessarily bipartite. We will use this to build non nodal candidates to be a minimal  $k$ -partition.

Consequently, if we find for some  $\alpha$  a singular point  $X$  such that there exists an antisymmetric eigenfunction with 6 nodal domains and associated with  $\lambda_6(\widetilde{(\Sigma_\alpha)}_X)$  such that

$$\lambda_6(\widetilde{(\Sigma_\alpha)}_X) < \Lambda_3(\mathcal{D}_\alpha^{sym}),$$

then the symmetric 3-partition  $\mathcal{D}_\alpha^{sym}$  is not minimal. Indeed, the projection of this sixth eigenfunction on the first sheet is a 3-partition whose energy is less than  $\Lambda_3(\mathcal{D}_\alpha^{sym})$ .

We have another way of checking that a 3-partition is not minimal. According to [16, Remark 5.2], a minimal 3-partition must be Courant-sharp for the Aharonov-Bohm operator, that is to say, its energy must be  $\lambda_3^{AB}$ .

Let us now combine the double covering approach and the results of Section 3.5 to obtain more information. The first result consists in invalidating possibly some candidates of type (a1) obtained in Subsection 3.5.1. Let us use the best candidates obtained in Subsection 3.5.1. For any  $\alpha \in \{k\pi/100, 16 \leq k \leq 76\}$ , we compute the first eigenvalues of the Dirichlet Laplacian on the double covering  $(\widetilde{\Sigma_\alpha})_X$  with  $X = (\tilde{x}_\alpha^{ND}, 0)$  and we split the spectrum between the symmetric eigenvalues  $\lambda_k(\Sigma_\alpha)$  and the antisymmetric ones  $\lambda_k^{AB}((\Sigma_\alpha)_X)$ . Figure 3.17 gives the first seven

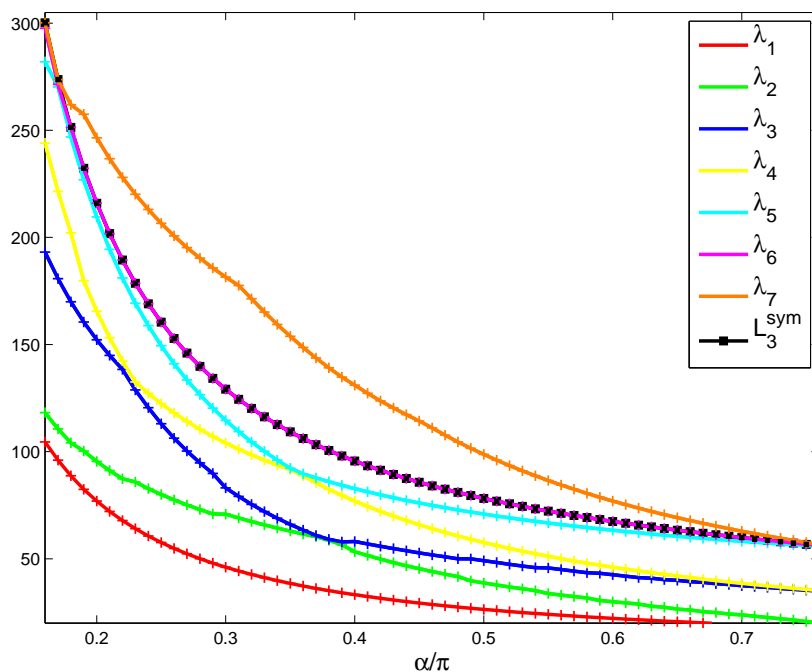


FIGURE 3.17 –  $\lambda_j(\widetilde{(\Sigma_\alpha)}_X)$ , with  $X = (\tilde{x}_\alpha^{ND}, 0)$ ,  $\alpha \in \{\frac{k\pi}{100}, 16 \leq k \leq 76, 1 \leq j \leq 7\}$ .

eigenvalues on  $(\widetilde{\Sigma_\alpha})_X$  and the nodal partition of the eigenfunctions are represented on Figure 3.18 for several  $\alpha$ . We notice that

$$\Lambda_3(\mathcal{D}_\alpha^{sym}) = \lambda_7(\widetilde{(\Sigma_\alpha)}_X) = \lambda_4^{AB}((\Sigma_\alpha)_X) > \lambda_5(\widetilde{(\Sigma_\alpha)}_X) = \lambda_3^{AB}((\Sigma_\alpha)_X), \text{ for } \alpha = 16\pi/100,$$

$$\Lambda_3(\mathcal{D}_\alpha^{sym}) = \lambda_7(\widetilde{(\Sigma_\alpha)}_X) = \lambda_4^{AB}((\Sigma_\alpha)_X) > \lambda_6(\widetilde{(\Sigma_\alpha)}_X) = \lambda_3^{AB}((\Sigma_\alpha)_X), \text{ for } \alpha = 17\pi/100,$$

$$\Lambda_3(\mathcal{D}_\alpha^{sym}) = \lambda_6(\widetilde{(\Sigma_\alpha)}_X) = \lambda_3^{AB}((\Sigma_\alpha)_X), \text{ for } \alpha \in \{\frac{k\pi}{100}, k = 18, \dots, 76\}.$$

Consequently, the minimal symmetric 3-partition  $\mathcal{D}_\alpha^{sym}$  is not minimal for  $\alpha = 16\pi/100$  and  $\alpha = 17\pi/100$ .

To make simulations, we use the techniques we have previously explained in [3] : this consists in meshing the double covering for the domain and using the Finite Element Library MÉLINA (see [19]).



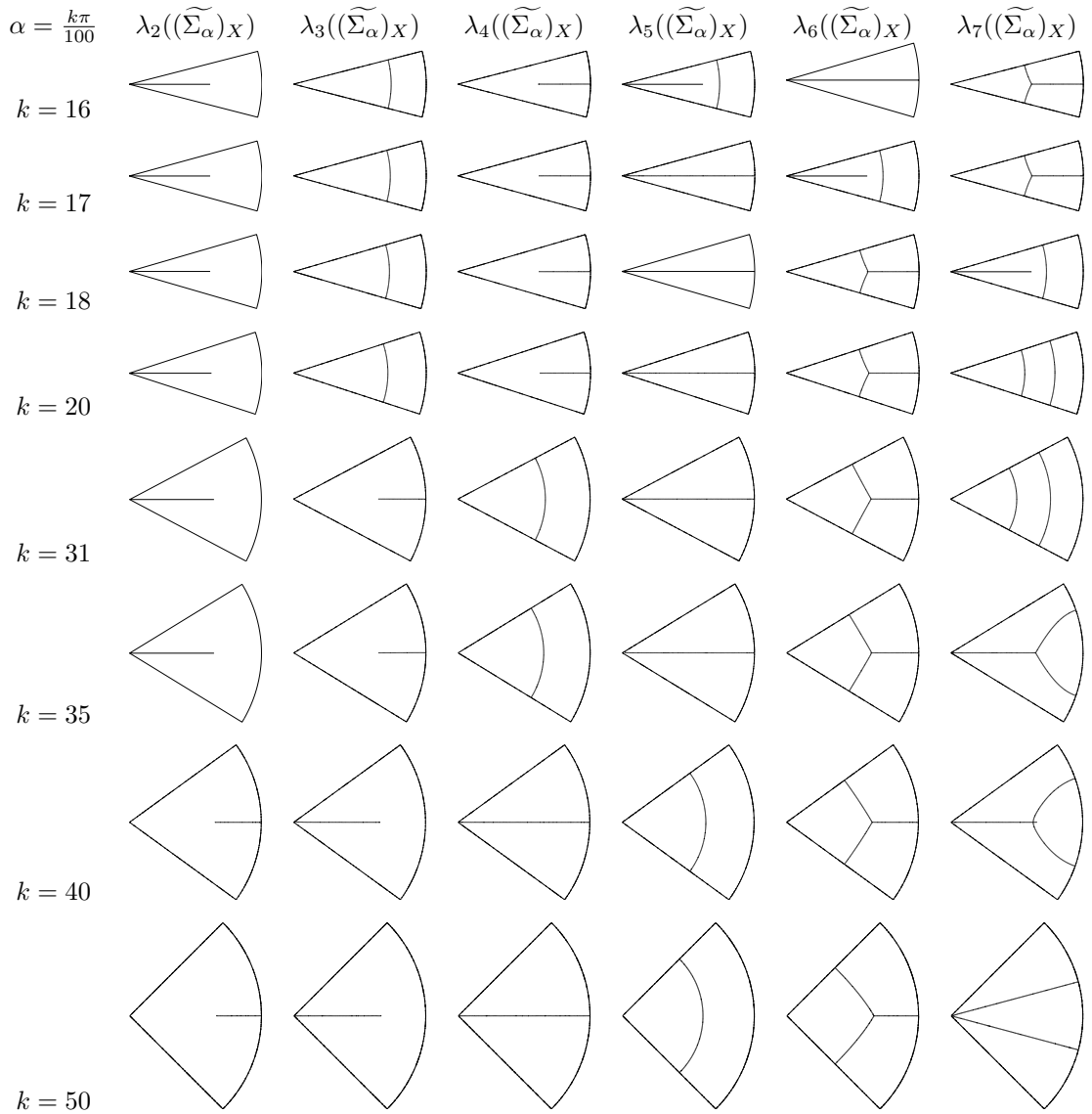


FIGURE 3.18 – Nodal partition associated with  $\lambda_j((\widetilde{\Sigma}_\alpha)_X)$ ,  $X = (\tilde{x}_\alpha^{ND}, 0)$ ,  $\alpha = \frac{k\pi}{100}$ ,  $2 \leq j \leq 7$ .

### 3.6.3 Numerical simulations for non symmetric candidates

Let us consider an angle  $\alpha = \alpha_3^1 + \varepsilon$  with  $\varepsilon$  very small and positive. We have seen that the 3-partition  $\mathcal{D}_\alpha^{sym}$  is not minimal when  $\varepsilon$  is small enough.

We would like to use the double covering approach to catch some non symmetric candidates. For any point  $X \in \Omega$ , we compute the first six eigenvalues of the Dirichlet Laplacian on the double covering  $(\widetilde{\Sigma}_\alpha)_X$ . The symmetric eigenvectors are those of the Dirichlet Laplacian on  $\Sigma_\alpha$  and we are interested in the antisymmetric ones. We move the puncturing point on  $\Sigma_\alpha$  and hope to find a 3-partition given by the 6-th eigenfunction of the Dirichlet Laplacian on  $(\widetilde{\Sigma}_\alpha)_X$ .

Proposition 3.4.1 gives us an idea to localize the puncturing point  $X$ . Starting with  $\Sigma_\alpha$  for  $\alpha = \alpha_3^1$ , we can pick an eigenfunction whose nodal set has a boundary singular point with polar coordinates  $(\rho_c, \alpha_3^1/2)$ . Its nodal partition has three domains and a boundary singular point at  $(\rho_c, \alpha_3^1/2)$  where two lines meet. We recall that at a singular point, nodal lines satisfy the equal angle property. We can use this property to localize a possible singular point for  $\Sigma_\alpha$  with  $\alpha = \alpha_3^1 + \varepsilon$ . If the minimal 3-partition for  $\Sigma_\alpha$  has a singular point on the boundary  $\{y = x \tan \frac{\alpha}{2}\}$  with only

one nodal line reaching this point, then this nodal line is normal to the boundary at the singular point. If  $\varepsilon$  is very small, the distance between this singular point and the origin should be close to  $\rho_c$ .

When the angle is increasing, this approximation is not efficient. For  $\alpha = \pi/3$ , the boundary singular point seems to have polar coordinates  $(\rho_3, \pi/6)$  with  $\rho_3 = L\sqrt{3}/2 \simeq 0.5498$ .

For numerical computations, we choose  $X$  on some perpendicular axes to the boundary (see Figure 3.19) :

$$X \in \{X_k = (1 - \frac{k}{100})C_\rho + \frac{k}{100}A_\rho, 0 \leq k \leq 100\},$$

where  $C_\rho$  and  $A_\rho$  are the points of coordinates

$$C_\rho = \rho(\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2}) \text{ and } A_\rho = \rho(1/\cos \frac{\alpha}{2}, 0), \quad \hat{E} \text{ with } \rho \in \{0.54 + k/50, k = 0, \dots, 6\}.$$

Then we catch a 3-partition among the 6-th eigenfunction of the Dirichlet Laplacian on  $(\widetilde{\Sigma_\alpha})_X$ . With this method, we obtain, for several values of  $\alpha$ , new partitions  $\mathcal{D}_\alpha^{AB}$  better than the minimal symmetric 3-partition  $\mathcal{D}_\alpha^{sym}$  obtained by the mixed Neumann-Dirichlet approach (see Figure 3.20).

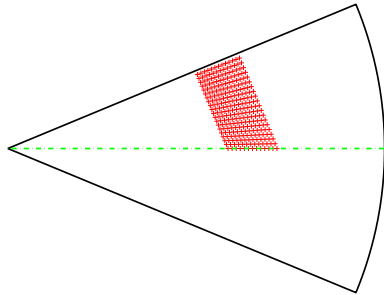


FIGURE 3.19 – Localization of the puncturing point for numerical simulations,  $\alpha = 0.5$ .

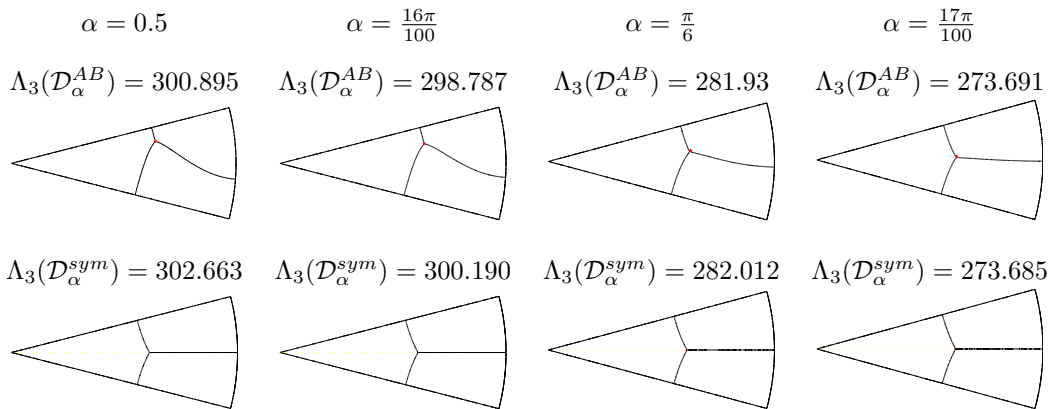


FIGURE 3.20 – Candidates for the minimal 3-partition of  $\Sigma_\alpha$ .

For different sectors, we proceed in the same way and obtain new candidates whose energy is represented in orange color in Figure 3.12 (see also Figure 3.20). We obtain a better candidate than the symmetric one for angles close to  $\alpha_3^1$  and especially for  $\alpha = 16\pi/100$  and  $\alpha = \pi/6$ . For larger angles, the double covering approach gives candidates whose energy is so close to those of the symmetric candidates that we cannot be affirmative. This is probably due to the fact that the best candidate obtained by the double covering approach has an interior singular point close to (or on) the symmetry axis for larger  $\alpha$  and then, by continuity, the eigenvalues are close to those of the mixed Neumann-Dirichlet Laplacian.

Notice that for  $\alpha = \alpha_3^2$ , all candidates in Figure 3.8 are symmetric. This encourages us to make the conjecture :

**Conjecture 3.6.1.** *There exists  $\alpha_3^3$  such that*

- for  $\alpha \in (\alpha_3^1, \alpha_3^3)$ , the minimal 3-partitions are non symmetric,
- for  $\alpha \in (\alpha_3^3, \alpha_3^2)$ , any minimal 3-partition is symmetric.

### 3.7 Negative results for minimal $k$ -partitions, $k = 4, 5, 6$

#### 3.7.1 4-partition

Figure 3.21 represents the eigenvalues  $\lambda_{m,n}(\alpha)$  for  $(m, n) = (1, 4), (2, 2), (4, 1)$  and  $\lambda_4(\alpha)$  given by (3.2.1) computed with the MATLAB software and illustrates the lower and upper bounds for  $\mathfrak{L}_4(\Sigma_\alpha)$  :

$$\lambda_4(\alpha) \leq \mathfrak{L}_4(\Sigma_\alpha) \leq \min(\lambda_{1,4}(\alpha), \lambda_{2,2}(\alpha), \lambda_{4,1}(\alpha)).$$

Since  $\lambda_{2,2}(\alpha) > \lambda_4(\alpha)$ , partitions having the topology of  $u_{2,2}$  and illustrated in Figure 3.22 cannot be minimal for any  $\alpha$ .

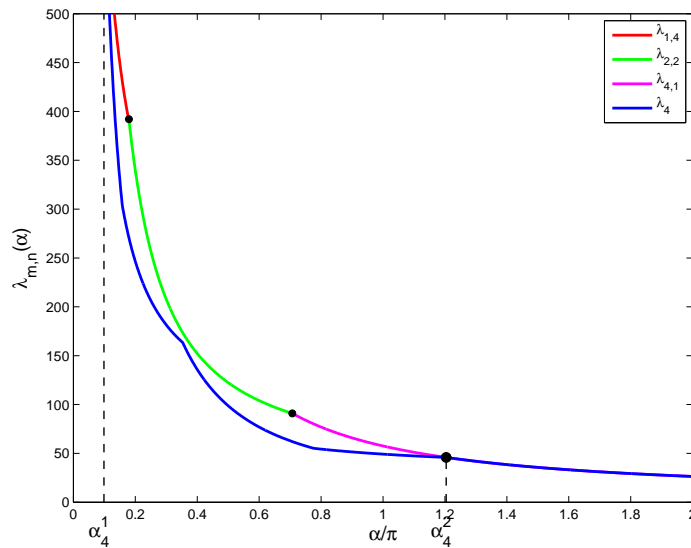


FIGURE 3.21 – Lower and upper bounds for  $\mathfrak{L}_4(\Sigma_\alpha)$ .

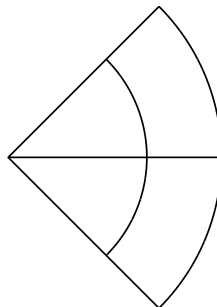


FIGURE 3.22 – Non minimal 4-partition.

### 3.7.2 5-partition

Since  $k = 5$  is a prime number, we only have the bounds given by Proposition 3.3.2 and Remark 3.3.3 :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_5(\alpha) &= \lambda_5(\alpha) && \text{for } \alpha \in (0, \alpha_5^1] \cup [\alpha_5^2, 2\pi], \\ \lambda_5(\alpha) < \mathfrak{L}_5(\alpha) < L_5(\Sigma_\alpha) &\leq \min(\lambda_{1,5}(\alpha), \lambda_{5,1}(\alpha)) && \text{for } \alpha \in (\alpha_5^1, \alpha_5^2). \end{aligned}$$

Figure 3.23 illustrates these estimates using the MATLAB software.

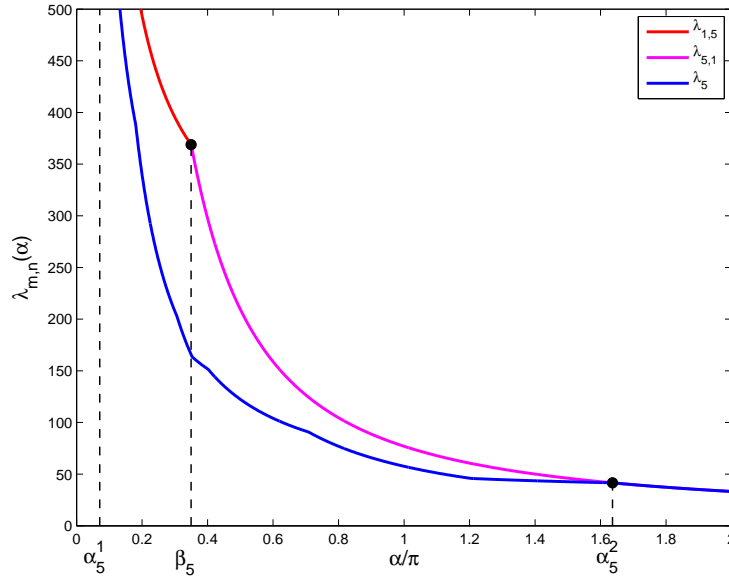


FIGURE 3.23 – Lower and upper bounds for  $\mathfrak{L}_5(\Sigma_\alpha)$ .

### 3.7.3 6-partition

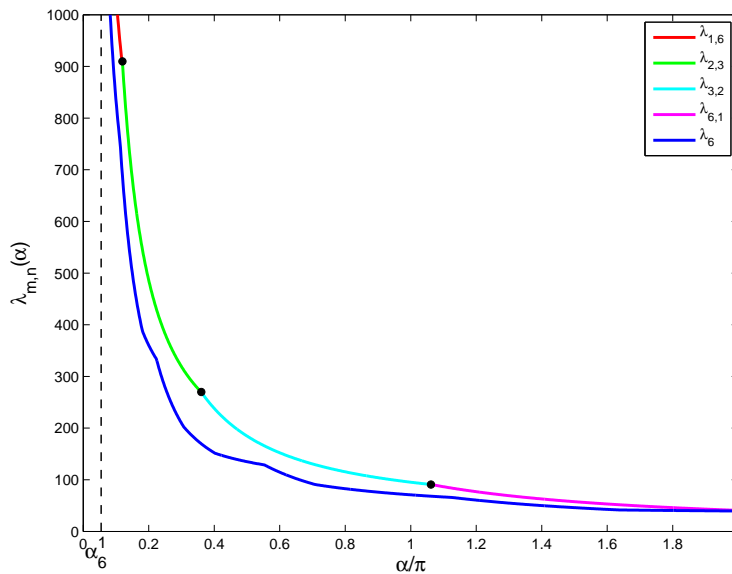


FIGURE 3.24 – Lower and upper bounds for  $\mathfrak{L}_6(\Sigma_\alpha)$ .

Using Figure 3.24 (obtained by the MATLAB software), we notice that

$$\min(\lambda_{2,3}(\alpha), \lambda_{3,2}(\alpha), \lambda_{6,1}(\alpha)) > \lambda_6(\alpha), \quad \forall \alpha \in (0, 2\pi].$$

Thus candidates of the types illustrated in Figure 3.25 (i.e. having the topologies of the eigenfunctions  $u_{2,3}$ ,  $u_{3,2}$  and  $u_{6,1}$ ) are never minimal.

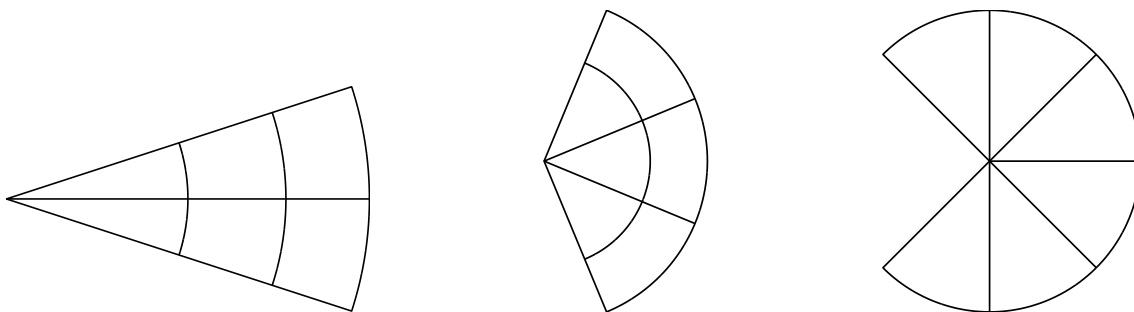


FIGURE 3.25 – Non minimal 6-partitions.

**Acknowledgements.** The authors thank Bernard Helffer for many suggestions and discussions concerning this work. This work was partially supported by the ANR (Agence Nationale de la Recherche), projects GAOS n° ANR-09-BLAN-0037-03 and OPTIFORM n° ANR-12-BS01-0007-02. The first author is grateful to the Mittag-Leffler Institute where this paper was achieved.

## Bibliographie

- [1] Y. AHARONOV, D. BOHM. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.* **115** (Aug 1959) 485–491.
- [2] B. ALZIARY, J. FLECKINGER-PELLÉ, P. TAKÁČ. Eigenfunctions and Hardy inequalities for a magnetic Schrödinger operator in  $\mathbb{R}^2$ . *Math. Methods Appl. Sci.* **26**(13) (2003) 1093–1136.
- [3] V. BONNAILLIE-NOËL, B. HELFFER. Numerical analysis of nodal sets for eigenvalues of Aharonov-Bohm Hamiltonians on the square with application to minimal partitions. *Exp. Math.* **20**(3) (2011) 304–322.
- [4] V. BONNAILLIE-NOËL, B. HELFFER, T. HOFFMANN-OSTENHOF. Aharonov-Bohm Hamiltonians, isospectrality and minimal partitions. *J. Phys. A* **42**(18) (2009) 185203, 20.
- [5] V. BONNAILLIE-NOËL, B. HELFFER, G. VIAL. Numerical simulations for nodal domains and spectral minimal partitions. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **16**(1) (2010) 221–246.
- [6] D. BUCUR, G. BUTTAZZO, A. HENROT. Existence results for some optimal partition problems. *Adv. Math. Sci. Appl.* **8**(2) (1998) 571–579.
- [7] M. CONTI, S. TERRACINI, G. VERZINI. An optimal partition problem related to nonlinear eigenvalues. *J. Funct. Anal.* **198**(1) (2003) 160–196.
- [8] M. CONTI, S. TERRACINI, G. VERZINI. On a class of optimal partition problems related to the Fučík spectrum and to the monotonicity formulae. *Calc. Var. Partial Differential Equations* **22**(1) (2005) 45–72.
- [9] M. CONTI, S. TERRACINI, G. VERZINI. A variational problem for the spatial segregation of reaction-diffusion systems. *Indiana Univ. Math. J.* **54**(3) (2005) 779–815.
- [10] R. COURANT, D. HILBERT. *Methods of Mathematical Physics. Vol. I.* Interscience Publishers, Inc., New York, N.Y. 1953.
- [11] E. C. M. CROOKS, E. N. DANCER, D. HILHORST. On long-time dynamics for competition-diffusion systems with inhomogeneous Dirichlet boundary conditions. *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **30**(1) (2007) 1–36.

- [12] NIST Digital Library of Mathematical Functions. <http://dlmf.nist.gov/>, Release 1.0.5 of 2012-10-01. Online companion to [20].
- [13] B. HELFFER, M. HOFFMANN-OSTENHOF, T. HOFFMANN-OSTENHOF, M. P. OWEN. Nodal sets for groundstates of Schrödinger operators with zero magnetic field in non-simply connected domains. *Comm. Math. Phys.* **202**(3) (1999) 629–649.
- [14] B. HELFFER, T. HOFFMANN-OSTENHOF. On minimal partitions : new properties and applications to the disk. In *Spectrum and dynamics*, volume 52 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 119–135. Amer. Math. Soc., Providence, RI 2010.
- [15] B. HELFFER, T. HOFFMANN-OSTENHOF. Minimal partitions for anisotropic tori. *J. Spectr. Theory* (To appear).
- [16] B. HELFFER, T. HOFFMANN-OSTENHOF. On a magnetic characterization of spectral minimal partitions. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* (To appear).
- [17] B. HELFFER, T. HOFFMANN-OSTENHOF, S. TERRACINI. Nodal domains and spectral minimal partitions. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **26**(1) (2009) 101–138.
- [18] B. HELFFER, T. HOFFMANN-OSTENHOF, S. TERRACINI. On spectral minimal partitions : the case of the sphere. In *Around the research of Vladimir Maz'ya. III*, volume 13 of *Int. Math. Ser. (N. Y.)*, pages 153–178. Springer, New York 2010.
- [19] D. MARTIN. MÉLINA, bibliothèque de calculs éléments finis.  
<http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina> (2007).
- [20] F. W. J. OLVER, D. W. LOZIER, R. F. BOISVERT, C. W. CLARK, editors. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press, New York, NY 2010. Print companion to [12].
- [21] K. PANKRASHKIN, S. RICHARD. Spectral and scattering theory for the Aharonov-Bohm operators. *Rev. Math. Phys.* **23**(1) (2011) 53–81.

## Chapitre 4

# Spectral minimal partitions for a family of tori

### 4.1 Introduction

This paper studies the minimal partitions  $\mathcal{D} = \{D_i : 1 \leq i \leq k\}$  of a two-dimensional flat torus

$$T(a, b) = (\mathbb{R}/a\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/b\mathbb{Z}) ,$$

with  $0 < b \leq a$ , into  $k$  open, connected, and mutually disjoint subsets, with  $k \geq 1$  an integer. We look for partitions for which the energy

$$\max_{1 \leq i \leq k} \lambda_1(D_i)$$

is minimal, where  $\lambda_1(D_i)$  is the lowest eigenvalue of the Dirichlet Laplacian on  $D_i$ . This problem was studied by Bernard Helffer, Thomas Hoffmann-Ostenhof, and Susanna Terracini in [11], where existence and regularity were proved for a large class of domains. In the case of the torus, B. Helffer and T. Hoffmann-Ostenhof showed, in [10], that when the ratio  $b/a$  is small enough, a minimal  $k$ -partition is obtained by dividing the torus in  $k$  equal strips along its length.

One of the motivations of this work is to investigate the nature of minimal partitions when the ratio  $b/a$  increases. In particular, we are interested in the value of the ratio for which the 'vertical' partition defined above is no longer minimal. We present some conjectures on these transition values, inspired by the methods in [10].

To check these conjectures, and to look for minimal partitions when the ratio  $b/a$  is larger, we need an efficient optimization procedure. We have adapted the method presented by Blaise Bourdin, Dorin Bucur and Édouard Oudet in [2]. Our numerical computations support the conjectures, give better upper bounds for the optimal energy, and produce some quite remarkable candidates to be minimal partitions.

Inspired by the preceding numerical computations, we have constructed families of  $k$ -partitions, for  $k = 3, 4, 5$ , that are tilings of the torus by isometric polygons. These tilings additionally satisfy a geometrical constraint, the so-called 'equal angle property'. For some  $k$ , and some values of the ratio  $b/a$ , we obtain in this way partitions that closely resemble the best candidates produced by the optimization algorithm. In some other cases, the tilings seem not to be optimal. In any case, however, the first eigenvalue of the Dirichlet Laplacian on the fundamental domain of the tiling gives an upper bound for the optimal energy.

The paper is organized in the following way. In Section 4.2, we recall the fundamental properties of minimal partitions. In Section 4.3, we recall the results of [10] for the flat torus. In section 4.4, we present a heuristic method, inspired by [10], to compute the transition value for  $a/b$ . We also present some candidates to be minimal partitions, in connection with the nodal set of eigenfunction of the Laplacian on  $T(a, b)$ . In Section 4.5, we study other versions of the energy, corresponding to the replacement of the  $\ell^\infty$ -norm by a  $\ell^p$ -norm. We discuss the minimality of the partitions obtained in Section 4.4 with respect to this new energy. These other definitions of the energies are

used in the numerical method described in the following sections. In Section 4.6, we describe the numerical method that we have used, and study its performance. The results of the implementation of this method are presented in Section 4.7. For a fixed  $k$  ( $k = 3, 4, 5$ ), the algorithm gives some candidates for a minimal  $k$ -partition of  $T(a, b)$ , with  $b/a \in ]0, 1[$ . We test more values of  $b/a$  around the conjectured transition values. The computations of Section 4.7 suggest the existence of hexagonal tilings of some tori. In Section 4.8, we construct such families of tilings by three, four, or five isometric hexagons, for a certain range of values of  $b/a$ . We compute the energy of these partitions, and compare them to the formerly obtained bounds. This work allows us to give bounds on the optimal energy that are better than the already known ones. In some cases, we even conjecture the value of this optimal energy.

I would like to thank my advisors, Virginie Bonnaillie-Noël and B. Helffer, for their guidance and their encouragements. I also thank V. Bonnaillie-Noël and É. Oudet for their help with the numerical methods.

## 4.2 Minimal partitions

### 4.2.1 Definitions

Let us first state the definition of a minimal partition, and review briefly known results about this object. In the following,  $M$  is a compact two-dimensional Riemannian manifold without boundary. The following definitions and results are taken from [11]. Our statements are somewhat simplified due to the absence of a boundary.

**Definition 4.2.1.** *For any integer  $k \geq 1$ , a  $k$ -partition is a family*

$$\mathcal{D} = \{D_i : 1 \leq i \leq k\}$$

*of  $k$  open, connected, and mutually disjoint subsets of  $M$ . The  $D_i$ 's are called the domains of the  $k$ -partition.*

*The set of all  $k$ -partitions is denoted by  $\mathfrak{P}_k$ .*

If we do not want to specify the number of domains, we simply use the term *partition*. For any open set  $\omega \subset M$ , the sequence  $(\lambda_k(\omega))_{k \geq 1}$  denotes the eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator, restricted to  $\omega$ , with Dirichlet boundary conditions. They are arranged in increasing order and counted with multiplicity.

**Definition 4.2.2.** *With any  $k$ -partition  $\mathcal{D} = \{D_i : 1 \leq i \leq k\}$  is associated the energy*

$$\Lambda_k(\mathcal{D}) = \max_{1 \leq i \leq k} \lambda_1(D_i).$$

We are concerned in this paper with minimizing for fixed  $k$  this energy over all  $k$ -partitions of  $T(a, b)$ , for different values of  $b/a$ .

**Definition 4.2.3.** *For any integer  $k \geq 1$ , we set*

$$\mathfrak{L}_k(M) = \inf_{\mathcal{D} \in \mathfrak{P}_k} \Lambda_k(\mathcal{D}).$$

*A partition  $\mathcal{D} \in \mathfrak{P}_k$  such that  $\Lambda_k(\mathcal{D}) = \mathfrak{L}_k(M)$  is called a minimal  $k$ -partition.*

The following existence result is proved in the papers [4, 6, 5].

**Theorem 4.2.4.** *For any integer  $k \geq 1$ , there exists a minimal  $k$ -partition of  $M$ .*

These papers in fact prove a stronger result, namely the existence of a regular minimal partition in the sense of Subsection 4.2.2.



### 4.2.2 Properties of minimal partitions

Following [11], let us now define a regular partition.

**Definition 4.2.5.** *The  $k$ -partition  $\mathcal{D} = \{D_i : 1 \leq i \leq k\}$  is called strong if*

$$\bigcup_{i=1}^k \overline{D_i} = M.$$

**Definition 4.2.6.** *If  $\mathcal{D} = \{D_i : 1 \leq i \leq k\}$  is a strong partition, its boundary is defined by*

$$N(\mathcal{D}) = \bigcup_{i=1}^k \partial D_i.$$

**Definition 4.2.7.** *A strong partition  $\mathcal{D}$  is called regular if the following properties are satisfied :*

- (i) *The set  $N(\mathcal{D})$  is locally a  $C^{1,1^-} = \cap_{\alpha < 1} C^{1,\alpha}$  curve, except in the neighborhood of a finite set  $\{x_i : 1 \leq i \leq \ell\}$ . The elements of this set are called singular points.*
- (ii) *For each  $1 \leq i \leq \ell$ , there is an integer  $\nu_i \geq 3$  such that, in a neighborhood of  $x_i$ , the set  $N(\mathcal{D})$  is the union of  $\nu_i$  half curves of class  $C^{1,+} = \cup_{\alpha > 0} C^{1,\alpha}$ , which meet at  $x_i$ .*
- (iii) *At each singular point, the half curves meet with equal angles.*

As proved in [11], we have the following regularity result :

**Theorem 4.2.8.** *For any  $k \geq 1$ , minimal  $k$ -partitions are strong and regular (up to zero capacity sets).*

We give additional definitions that help us to describe the topology of a partition.

**Definition 4.2.9.** *Let  $\mathcal{D} = \{D_i : 1 \leq i \leq k\}$  be a strong partition. Two domains  $D_i$  and  $D_j$  are said to be neighbors if  $\text{Int}(\overline{D_i \cup D_j})$  is connected.*

**Definition 4.2.10.** *A strong partition is called bipartite if one can color its domains, using only two colors, in such a way that two neighbors have different colors.*

Let us recall some definitions and results from the spectral theory of the Laplace-Beltrami operator, used in all the following sections.

Let  $u$  be an eigenfunction for the Laplace-Beltrami operator.

**Definition 4.2.11.** *We call nodal set of  $u$  the set*

$$N(u) = \{x \in M : u(x) = 0\}.$$

*The connected components of  $M \setminus N(u)$  are called the nodal domains of  $u$ . The number of nodal domains is denoted by  $\mu(u)$ . Let  $D_i$ , for  $1 \leq i \leq \mu(u)$ , be the nodal domains of  $u$ . The set*

$$\{D_i : 1 \leq i \leq \mu(u)\},$$

*is a strong partition of  $M$ , called the nodal partition associated with  $u$ .*

The following result was proved by Courant (cf. [7]).

**Theorem 4.2.12** (Courant).

*If  $k \geq 1$  and  $u$  is an eigenfunction associated with  $\lambda_k(M)$ ,*

$$\mu(u) \leq k.$$

Following [11], we introduce a new definition.

**Definition 4.2.13.** *Let  $k \geq 1$ . An eigenfunction  $u$  for the Laplace-Beltrami operator, associated with  $\lambda_k(M)$ , is said to be Courant-sharp if  $\mu(u) = k$ .*

To give an upper-bound of  $\mathfrak{L}_k(M)$ , one can use  $k$ -partitions obtained from eigenfunctions. To make it explicit, we introduce a new spectral element.

**Definition 4.2.14.** For  $k \geq 1$ ,  $L_k(M)$  is the smallest eigenvalue of the Dirichlet Laplacian that has an eigenfunction with  $k$  nodal domains. If there is no such eigenvalue, we set  $L_k(M) = +\infty$ .

With this notation, Theorem 4.2.12 reads as the inequality

$$\lambda_k(M) \leq L_k(M).$$

We can now give two results of [11] that link minimal and nodal partitions.

**Theorem 4.2.15.** A minimal partition is nodal if, and only if, it is bipartite.

**Theorem 4.2.16.** For any integer  $k \geq 1$ ,

$$\lambda_k(M) \leq \mathfrak{L}_k(M) \leq L_k(M).$$

Furthermore, if  $\mathfrak{L}_k(M) = L_k(M)$  or  $\lambda_k(M) = \mathfrak{L}_k(M)$ , then

$$\lambda_k(M) = \mathfrak{L}_k(M) = L_k(M),$$

and in this case, any minimal  $k$ -partition is nodal.

Let us point out a few consequences of Theorem 4.2.16.

**Remark 4.2.17.** A nodal partition associated with a Courant-sharp eigenfunction is minimal.

**Remark 4.2.18.** Minimal 2-partitions are nodal. Indeed, let  $u$  be an eigenfunction associated with  $\lambda_2(M)$ . The function  $u$  is orthogonal to the eigenspace for  $\lambda_1(M)$ , and thus has at least two nodal domains. It is therefore Courant-sharp, which implies that  $\mathfrak{L}_2(M) = \lambda_2(M)$ , and that any minimal 2-partition of  $M$  is nodal.

### 4.2.3 Euler formula for partitions

The topology of the underlying manifold creates constraints on the minimal  $k$ -partitions. Let us give a result, taken from [10], in the particular case of a two-dimensional flat torus. It can be generalized to other manifolds (see Theorem 0.2.16).

**Proposition 4.2.19.** Let  $T$  be a two-dimensional flat torus and  $\mathcal{D} = \{D_i : 1 \leq i \leq k\}$  a strong regular  $k$ -partition of  $T$ . Let  $\{x_j : 1 \leq j \leq \ell\}$  be the set of singular points. For  $1 \leq j \leq \ell$ , let  $\nu_j$  be the number of half-lines meeting at  $x_j$ . Then

$$\sum_{j=1}^{\ell} \left( \frac{\nu_j}{2} - 1 \right) = \sum_{i=1}^k \chi(D_i), \quad (4.2.1)$$

where  $\chi(D_i)$  is the Euler-Poincaré characteristic of  $D_i$ .

The partition  $\mathcal{D}$  does not need to satisfy all the properties of Definition 4.2.7 for the formula (4.2.1) to hold. It is valid even if the regular parts of the boundary do not meet with equal angles at the singular points.

We can use Proposition 4.2.19 to get information about the singular points.

**Proposition 4.2.20.** Let  $\mathcal{D} = \{D_i : 1 \leq i \leq k\}$  be a strong regular  $k$ -partition and  $\{x_j : 1 \leq j \leq \ell\}$  the set of its singular points. We have the inequality

$$\ell \leq 2k.$$

*Démonstration.* We have  $\nu_j \geq 3$  for  $1 \leq j \leq \ell$ , and therefore

$$\sum_{j=1}^{\ell} \left( \frac{\nu_j}{2} - 1 \right) \geq \frac{\ell}{2}.$$

On the other hand  $\chi(D_i) \leq 1$  for  $1 \leq i \leq k$ , and therefore

$$\sum_{i=1}^k \chi(D_i) \leq k.$$

Equation (4.2.1) gives the desired result.  $\square$

**Proposition 4.2.21.** *Let  $\mathcal{D} = \{D_i ; 1 \leq i \leq k\}$  be a strong regular  $k$ -partition and  $\{x_j ; 1 \leq j \leq \ell\}$  the set of its singular points. Let us assume that  $\nu_j = 3$  for all  $j \in \{1, \dots, \ell\}$ . The integer  $\ell$  is even.*

*Démonstration.* The sum  $\sum_{i=1}^k \chi(D_i)$  is an integer. According to the hypothesis, we have

$$\sum_{j=1}^{\ell} \left( \frac{\nu_j}{2} - 1 \right) = \frac{\ell}{2}.$$

Therefore, according to Equation (4.2.1),  $\ell$  is even.  $\square$

We conjecture that the hypothesis  $\nu = 3$  for all singular points is generically satisfied for a minimal  $k$ -partition.

The two propositions above show that a strong regular 3-partition for which  $\nu = 3$  for all singular points has 0, 2, 4, or 6 singular points.

## 4.3 The case of a thin torus

### 4.3.1 Eigenmodes

We recall that we denote by  $T(a, b)$  the torus  $(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/b\mathbb{Z})$ . We denote by  $(\lambda_k(a, b))_{k \geq 1}$  the sequence of the eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator on  $T(a, b)$ , counted with multiplicity. In the rest of this paper we study the minimal  $k$ -partitions of  $T(a, b)$ , and give bounds on  $\mathfrak{L}_k(T(a, b))$ , according to the ratio  $b/a$ .

In order to apply Theorem 4.2.16, we need to determine the eigenmodes of the torus, which are easy to compute using a separation of variables method and the periodic boundary conditions.

**Proposition 4.3.1.** *The eigenvalues of  $T(a, b)$  are of the form*

$$\lambda_{m,n}(a, b) = 4\pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right),$$

with  $m$  and  $n$  in  $\mathbb{N}$ . For each pair  $(n, m)$ , there is a canonical basis of eigenfunctions.

If  $m = n = 0$ ,  $(x, y) \mapsto 1$ .

If  $m > 0$  and  $n = 0$ ,

- $(x, y) \mapsto \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right)$ ,
- $(x, y) \mapsto \sin\left(\frac{2\pi m x}{a}\right)$ .

If  $m = 0$  and  $n > 0$ ,

- $(x, y) \mapsto \cos\left(\frac{2\pi n y}{b}\right)$ ,
- $(x, y) \mapsto \sin\left(\frac{2\pi n y}{b}\right)$ .

Finally, if  $m > 0$  and  $n > 0$ ,

- $(x, y) \mapsto \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi n y}{b}\right)$ ,
- $(x, y) \mapsto \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi n y}{b}\right)$ ,
- $(x, y) \mapsto \sin\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi n y}{b}\right)$ ,

$$\bullet (x, y) \mapsto \sin\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi ny}{b}\right).$$

The following notation is useful to state our results.

**Definition 4.3.2.** For each pair  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ , we denote by  $E_{m,n}$  the vector space in  $L^2(T(a, b))$  spanned by the basis of eigenfunctions canonically associated with  $\lambda_{m,n}(a, b)$  in Proposition 4.3.1.

### 4.3.2 Minimal partitions

We first consider a very simple  $k$ -partition.

**Definition 4.3.3.** For  $0 < b \leq a$  and  $k \geq 1$ , we denote by  $\mathcal{D}_k$  the  $k$ -partition of  $T(a, b)$  with domains

$$D_i = \left] \frac{i-1}{k}a, \frac{i}{k}a \right[ \times ]0, b[, \quad \text{for } i = 1, \dots, k.$$

We have

$$\Lambda_k(\mathcal{D}_k) = k^2 \pi^2.$$

Let us note that any partition obtained from  $\mathcal{D}_k$  by translation has the same energy. Furthermore, if  $k$  is an even integer, with  $k = 2\ell$ , the partition  $\mathcal{D}_k$ , and all the partitions obtained from  $\mathcal{D}_k$  by translation, are nodal partitions of functions in  $E_{\ell,0} \setminus \{0\}$ .

We now ask for which values of  $b/a$  the partition  $\mathcal{D}_k$  is minimal, among all the  $k$ -partitions of the torus  $T(a, b)$ . In our study, we consider separately the case where the integer  $k$  is even and the case where it is odd. If  $k$  is even, the answer to our question is obtain by a direct application of Theorem 4.2.16. Contrary to the even case, we do not know, when  $k$  is odd, all the values of  $b/a$  for which  $\mathcal{D}_k$  is minimal. However, a more complicated analysis, performed by B. Helffer and T. Hoffmann-Ostenhof in [10], gives a range of values for which  $\mathcal{D}_k$  is minimal.

**Proposition 4.3.4.** Let  $k$  be an even integer,  $k = 2\ell$ . If  $b/a \leq 1/\ell$ , the partition  $\mathcal{D}_k$  is a minimal  $k$ -partition of  $T(a, b)$ .

Furthermore, if  $b/a \leq 1/\ell$ ,  $\mathcal{D}_k$  is, up to a translation, the only minimal  $k$ -partition of  $T(a, b)$ .

Finally, if  $b/a > 1/\ell$ , the partition  $\mathcal{D}_k$  is not minimal.

When  $b/a = 1/\ell$ , we will see in Section 4.4 that  $\mathcal{D}_k$  is not the only minimal partition of  $T(a, b)$ .

*Démonstration.* We have noticed that  $\mathcal{D}_k$  is the nodal partition of an eigenfunction  $u$  associated with the eigenvalue  $\lambda_{\ell,0}(a, b)$ . According to Remark 4.2.16, it suffices to prove that if  $b/a \leq 1/\ell$ ,  $u$  is  $\mathcal{D}_k$ . If  $b/a \leq 1/\ell$ , the lowest eigenvalues of  $T(a, b)$  are

$$\lambda_{0,0}(a, b) < \lambda_{1,0}(a, b) < \dots < \lambda_{\ell-1,0}(a, b) < \lambda_{\ell,0}(a, b) \leq \lambda_{0,1}(a, b)$$

with respective multiplicities  $1, 2, \dots, 2, 2$ . There are therefore  $2\ell - 1 = k - 1$  eigenvalues, counted with multiplicity, that are smaller than  $\lambda_{\ell,0}(a, b)$ , thus  $\lambda_{\ell,0}(a, b) = \lambda_k(a, b)$ . This proves that  $u$  is a Courant-sharp eigenfunction.

If  $b/a < 1/\ell$ , then  $E_{\ell,0}$  is the eigenspace associated with  $\lambda_{\ell,0}(a, b)$ . We have seen that

$$\mathfrak{L}_k(T(a, b)) = \lambda_{\ell,0}(a, b).$$

Then, according to Theorem 4.2.16, minimal  $k$ -partitions are nodal partitions of functions in  $E_{\ell,0}$ . If we consider the two eigenfunctions, defined in Proposition 4.3.1, that span  $E_{\ell,0}$ , we see that the nodal partition of any combination of these two eigenfunctions is a translation of  $\mathcal{D}_k$ .

If  $b/a > 1/\ell$ , then  $\lambda_{0,1}(a, b) < \lambda_{\ell,0}(a, b)$ , and  $\lambda_{0,1}(a, b)$  is of multiplicity 2. Furthermore, we still have

$$\lambda_{0,0}(a, b) < \lambda_{1,0}(a, b) < \dots < \lambda_{\ell-1,0}(a, b) < \lambda_{\ell,0}(a, b),$$

with respective multiplicities  $1, 1, 2, \dots, 2, 2$ . We conclude that there are at least  $2\ell + 1 = k + 1$  eigenvalues, counted with multiplicities, that are strictly smaller than  $\lambda_{\ell,0}(a, b)$ . If  $\mathcal{D}_k$ , a nodal partition whose energy is  $\lambda_{\ell,0}(a, b)$ , was minimal, we would have, according to Theorem 4.2.16,  $\lambda_{\ell,0}(a, b) = \lambda_k(a, b)$ , leading to a contradiction.  $\square$

The authors of [10] showed that it is useful, in order to better understand minimal partitions of  $T(a, b)$ , to see if one can lift them as nodal partitions on a suitable Riemannian covering. Let us describe precisely what this means. The torus  $T(a, b)$  can be defined as the quotient of the plane  $\mathbb{R}^2$  by the group of translations generated by the vectors  $(a, 0)$  and  $(0, b)$ . This construction provides a canonical projection map  $\Pi_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow T(a, b)$ . For any pair  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  with  $m \geq 1$  and  $n \geq 1$ , we can define the torus  $T(ma, nb)$  in the same way. The map  $\Pi_0$  can then be factorized into  $\Pi_0 = \Pi_2 \circ \Pi_1$  with  $\Pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow T(ma, nb)$  and  $\Pi_2 : T(ma, nb) \rightarrow T(a, b)$ . We have obtained a canonical Riemannian covering of  $T(a, b)$  by  $T(ma, nb)$ . We will always denote by  $\Pi$  the associated projection map (the context should leave no ambiguity). Using these objects, we can now study the minimal  $k$ -partitions of  $T(a, b)$ , with  $k$  an odd integer.

**Proposition 4.3.5.** *Let  $k > 1$  be an odd integer. If  $\frac{b}{a} < \frac{1}{k}$ , then  $\mathcal{D}_k$  is a minimal  $k$ -partition of  $T(a, b)$ .*

*Démonstration.* Without loss of generality, we assume  $a = 1$ . The result is proved in [10]. Let us review briefly the arguments. They assume  $b < 1/k$  and consider an optimal  $k$ -partition  $\mathcal{D}$  of  $T(1, b)$ . They note that  $\mathfrak{L}_k(T(1, b)) \leq \Lambda_k(\mathcal{D}) = k^2\pi^2$ . Using this *a priori* bound and a Steiner symmetrization argument, they prove that no domain of  $\mathcal{D}$  is homeomorphic to a disk. They use this fact to show that  $\mathcal{D}$  can be lifted to a  $2k$ -partition  $\hat{\mathcal{D}}$  on  $T(2, 2b)$  through the canonical projection map  $\Pi$ . The partitions  $\mathcal{D}$  and  $\hat{\mathcal{D}}$  have the same energy. Applying Proposition 4.3.4, they get  $\mathfrak{L}_{2k}(T(2, 2b)) = k^2\pi^2$ , and therefore  $\Lambda_k(\mathcal{D}) \geq k^2\pi^2$ .  $\square$

## 4.4 Transitions

### 4.4.1 Definition

**Definition 4.4.1.** *Let  $k \leq 1$ . We define the transition values  $b_k$  and  $\bar{b}_k$  by*

$$b_k = \sup\{b > 0 ; \forall b' \in ]0, b[, \mathcal{D}_k \text{ is a minimal } k\text{-partition of } T(1, b')\}$$

and

$$\bar{b}_k = \sup\{b > 0 ; \mathcal{D}_k \text{ is a minimal } k\text{-partition of } T(1, b)\}.$$

We have for  $b_k$  the equivalent definition

$$b_k = \inf\{b > 0 ; \mathcal{D}_k \text{ is not a minimal } k\text{-partition of } T(1, b)\}.$$

Obviously we have  $b_k \leq \bar{b}_k$ .

Using Proposition 4.3.4 and Proposition 4.3.5, we have immediately

**Proposition 4.4.2.**

*If  $k$  is even,  $b_k = \bar{b}_k = 2/k$ .*

*If  $k$  is odd,  $b_k \geq 1/k$ .*

We are interested in finding  $b_k$  and  $\bar{b}_k$  for  $k$  odd, and also in understanding the transitions from  $\mathcal{D}_k$  to another minimal partition when  $b$  becomes greater than  $b_k$ .

### 4.4.2 Heuristic analysis for $b_3$

In this subsection, we present a conjecture on the value of  $b_3$ , based on a heuristic analysis of the possible deformations of the partition  $\mathcal{D}_3$ .

To explain our reasoning, it is useful to go back to a similar analysis for the case of a rectangle with Dirichlet boundary conditions, explained in [1].

Let us consider the open set

$$\mathcal{R}(a, b) = ]0, a[ \times ]0, b[$$

in  $\mathbb{R}^2$ . The eigenvalues of the Dirichlet Laplacian on  $\mathcal{R}(a, b)$  are

$$\lambda_{m,n}^{\mathcal{R}}(a, b) = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right),$$

with the associated orthogonal basis of eigenfunctions

$$u_{m,n}^{\mathcal{R}}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

If  $b/a < \sqrt{3/8}$ ,

$$\lambda_{3,1}^{\mathcal{R}}(a, b) < \lambda_{1,2}^{\mathcal{R}}(a, b),$$

and therefore

$$\lambda_3(\mathcal{R}(a, b)) = \lambda_{3,1}^{\mathcal{R}}(a, b),$$

and this eigenvalue is simple. In that case, the eigenfunction  $u_{3,1}^{\mathcal{R}}$  is Courant-sharp, and therefore, according to Remark 4.2.17, its nodal partition is minimal. To be more explicit, the 3-partition with domains

$$\mathcal{D}_i = \left] \frac{i-1}{3}a, \frac{i}{3}a \right[ \times ]0, b[ ,$$

for  $i \in \{1, 2, 3\}$ , is minimal. Since the eigenvalue  $\lambda_3(\mathcal{R}(a, b))$  is simple, Theorem 4.2.16 implies that there is no other minimal 3-partitions.

If  $b/a = \sqrt{3/8}$ ,

$$\lambda_{3,1}^{\mathcal{R}}(a, b) = \lambda_{1,2}^{\mathcal{R}}(a, b),$$

and therefore

$$\lambda_3(\mathcal{R}(a, b)) = \lambda_{3,1}^{\mathcal{R}}(a, b) = \lambda_{1,2}^{\mathcal{R}}(a, b).$$

In that case,  $\lambda_3(\mathcal{R}(a, b))$  has multiplicity 2. The nodal partition of  $u_{3,1}^{\mathcal{R}}$  is still a minimal 3-partition, but it is no longer unique. If an eigenfunction associated with  $\lambda_3(\mathcal{R}(a, b))$  has three nodal domains, its nodal partition is minimal.

If  $\sqrt{3/8} < b/a \leq 1$ ,

$$\lambda_{2,1}^{\mathcal{R}}(a, b) \leq \lambda_{1,2}^{\mathcal{R}}(a, b) < \lambda_{3,1}^{\mathcal{R}}(a, b),$$

and therefore

$$\lambda_3(\mathcal{R}(a, b)) = \lambda_{1,2}^{\mathcal{R}}(a, b).$$

The eigenvalue  $\lambda_3(\mathcal{R}(a, b))$  is simple if  $\sqrt{3/8} < b/a < 1$ , and it has multiplicity 2 if  $b/a = 1$ . In any case, if  $\sqrt{3/8} < b/a \leq 1$ , the eigenfunctions associated with  $\lambda_3(\mathcal{R}(a, b))$  have two nodal domains. Theorem 4.2.16 then shows that a minimal 3-partition of  $\mathcal{R}(a, b)$  is not nodal. According to Theorem 4.2.15, it is therefore not bipartite. We can then show that it has at least one interior singular point.

The authors of [1] conjecture that if

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{3}{8}} + \varepsilon,$$

with  $\varepsilon > 0$  small enough, a minimal 3-partition of  $\mathcal{R}(a, b)$  is 'close' to some minimal 3-partition of  $\mathcal{R}(a, \sqrt{3/8}a)$ . We recall that a minimal 3-partition  $\mathcal{D}$  of  $\mathcal{R}(a, b)$  has an interior singular point. The corresponding nodal minimal 3-partition of  $\mathcal{R}(a, \sqrt{3/8}a)$  must be both close to  $\mathcal{D}$  and bipartite. The boundary of  $\mathcal{R}(a, \sqrt{3/8}a)$  must therefore contain a point where two nodal lines meet. We find only two possible nodal partitions of  $\mathcal{R}(a, \sqrt{3/8}a)$ , associated with the eigenfunctions

$$(x, y) \mapsto 2 \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \pm \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right).$$

Two nodal lines of the preceding eigenfunctions meet on the boundary of  $\mathcal{R}(a, b)$ , either at the point  $(a/2, 0)$  or at the point  $(a/2, b)$ . The deformation mechanism seems to start from one of these partitions with one singular point at which two nodal lines meet and move this singular point inside the domain (see Figure 4.1).

We now try to use the example of the rectangle to understand which deformation of the nodal partition gives the transition to a non nodal partition in the case of the torus. By definition of  $b_3$ ,

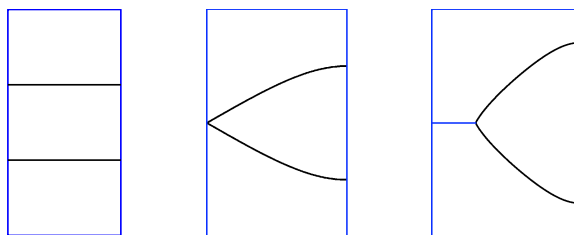


FIGURE 4.1 – Deformation mechanism for rectangles.

the partition  $\mathcal{D}_3$  is a minimal 3-partition of  $T(1, b)$  for  $b < b_3$ . We recall that  $\mathcal{D}_3$  can be lifted to  $\mathcal{D}_6$ , a nodal 6-partition of  $T(2, b)$ , by the canonical projection map  $\Pi$ .

We conjecture that for  $b = b_3$ , all minimal 3-partitions of  $T(2, b)$  are lifted to nodal 6-partitions of  $T(2, b)$ . We also conjecture that there exist minimal 3-partitions of  $T(1, b)$  that are not translations of  $\mathcal{D}_3$ . This implies that the nodal 6-partition of  $T(2, b_3)$  obtained after lifting is associated with an eigenvalue of multiplicity larger than 2.

As this alone is not enough to determine  $b_3$ , we make additional conjectures. Let us first note that for  $0 < b < b_3$ , the nodal 6-partition on  $T(2, b)$ , obtained after lifting the minimal partition  $\mathcal{D}_3$ , is associated with the antisymmetric eigenfunction

$$u(x, y) = \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right).$$

By antisymmetric, we mean that  $u(x+1, y) = -u(x, y)$ . Geometrically, this means that  $u \circ \sigma = -u$ ,  $\sigma$  being the deck-map associated with the covering

$$\Pi : T(2, b) \rightarrow T(1, b).$$

**Conjecture 4.4.3.** *All minimal 3-partitions of  $T(1, b_3)$  can be lifted to nodal 6-partitions of  $T(2, b_3)$  associated with antisymmetric eigenfunctions.*

If all these conjectures are satisfied, there must exist  $(m, n) \neq (3, 0)$  such that

$$\lambda_{m,n}(2, b_3) = \lambda_{3,0}(2, b_3),$$

and the eigenfunction  $u_{m,n}$  is antisymmetric. Let us note that this last condition simply means that  $m$  is odd. We finally conjecture that the transition from  $\mathcal{D}_3$  to another type of partition occur for the smallest  $b$  that satisfies the previous property.

We find that the smallest suitable  $b$  satisfies

$$\lambda_{1,1}(2, b) = \lambda_{3,0}(2, b),$$

that is to say

$$4\pi^2 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{b^2} \right) = 9\pi^2.$$

All this leads us to the conjecture

$$b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

By analogy with the case of the rectangle, we can make a guess on the shape of the minimal 3-partition on  $T(1, b)$ , with  $b = 1/\sqrt{2} + \varepsilon$ , and  $\varepsilon > 0$  close to 0. Assuming some continuity of the shape of the minimal partitions with respect to  $b$ , we can conjecture a plausible mechanism for the transition from  $\mathcal{D}_3$  to another type of partition. We start from a 3-partition of  $T(1, 1/\sqrt{2})$  whose boundary contains singular points. We recall that the boundary is the projection on  $T(1, 1/\sqrt{2})$  of the nodal set of an eigenfunction on  $T(2, 1/\sqrt{2})$ . As a consequence, an even number of lines meet at each singular point. The image of this 3-partition of  $T(1, 1/\sqrt{2})$  by the mapping

$$(x, y) \mapsto \left( x, \frac{1/\sqrt{2} + \varepsilon}{1/\sqrt{2}} y \right)$$

is a 3-partition of  $T(1, 1/\sqrt{2} + \varepsilon)$ . We conjecture that, by a small deformation of this last partition, we obtain a minimal 3-partition of  $T(1, 1/\sqrt{2} + \varepsilon)$ . We also conjecture that this deformation splits a singular point, where an even number of lines meet, into two singular points, where an odd number of lines meet (cf Figure 4.21 for numerical simulations with  $b$  close to  $1/\sqrt{2}$ ).

### 4.4.3 Examples of 3-partitions

Assuming  $b_3 = 1/\sqrt{2}$ , we obtain  $\mathfrak{L}_3(T(1, 1/\sqrt{2})) = 9\pi^2$ . In this subsection, we study families of 3-partitions with energy  $9\pi^2$ , and look for those that have singular points.

To obtain these partitions, let us consider the eigenspace of the Laplace-Beltrami operator on  $T(2, 1/\sqrt{2})$  associated with the eigenvalue  $9\pi^2$ . It has dimension 6, and is spanned by the eigenfunctions

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto \cos(3\pi x), \\ (x, y) &\mapsto \sin(3\pi x), \\ (x, y) &\mapsto \cos(\pi x) \cos(2\sqrt{2}\pi y), \\ (x, y) &\mapsto \cos(\pi x) \sin(2\sqrt{2}\pi y), \\ (x, y) &\mapsto \sin(\pi x) \cos(2\sqrt{2}\pi y), \\ (x, y) &\mapsto \sin(\pi x) \sin(2\sqrt{2}\pi y). \end{aligned}$$

Due to this high multiplicity, there is a great variety of possible nodal partitions for an eigenfunction associated with the eigenvalue  $9\pi^2$ .

Let us note that all the functions in the list above are antisymmetric. This means that every eigenfunction associated with the eigenvalue  $9\pi^2$  is antisymmetric. As a consequence, if  $u$  is such an eigenfunction on  $T(2, 1/\sqrt{2})$  and has 6 nodal domains, the projection of its nodal partition is a 3-partition of  $T(1, 1/\sqrt{2})$ . Furthermore, this partition has the energy  $9\pi^2$ .

We will not give all the possible nodal 6-partitions of  $T(2, 1/\sqrt{2})$ , but Figure 4.2 presents some examples that possess singular points. In Figure 4.2(b),

$$\alpha = 3\sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}} \simeq 1.18.$$

Other examples can be obtained by the obvious translations and symmetries. There are other examples, not obtained in this way, that we have not represented.

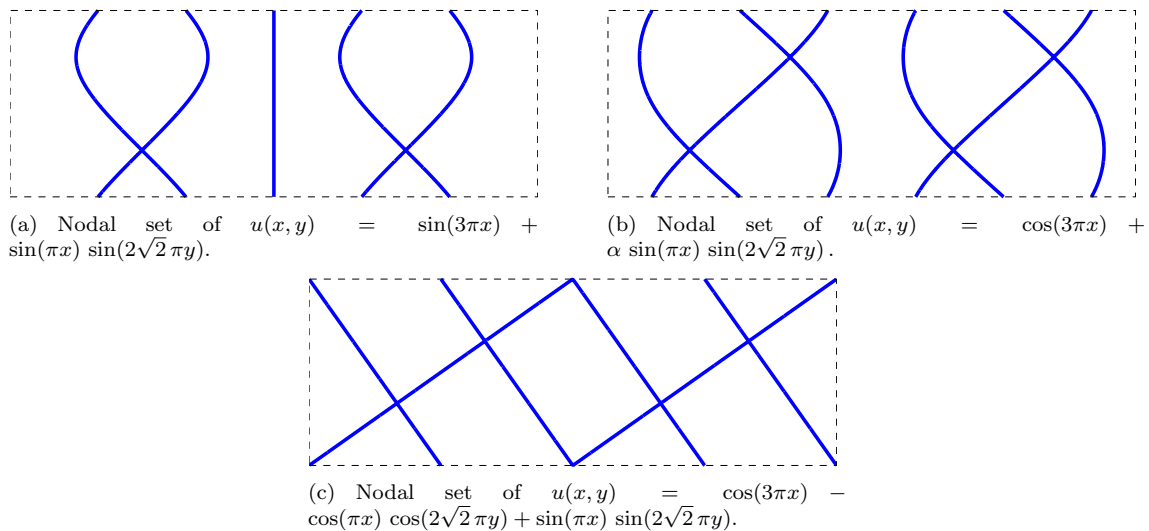


FIGURE 4.2 – Examples of nodal 6-partitions of  $T(2, 1/\sqrt{2})$ .



### 4.4.4 Examples of minimal 4-partitions

According to Proposition 4.3.4,  $b_4 = \bar{b}_4 = 1/2$ . Any nodal partition of  $T(1, 1/2)$  associated with the eigenvalue  $16\pi^2$  that has four nodal domains is therefore minimal. The eigenspace of the Laplace-Beltrami operator on  $T(1, 1/2)$  associated with the eigenvalue  $16\pi^2$  is spanned by the eigenfunctions

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto \cos(4\pi x), \\ (x, y) &\mapsto \sin(4\pi x), \\ (x, y) &\mapsto \cos(4\pi y), \\ (x, y) &\mapsto \sin(4\pi y). \end{aligned}$$

This allows us to compute a series of nodal patterns, represented on Figure 4.3. Let us note that

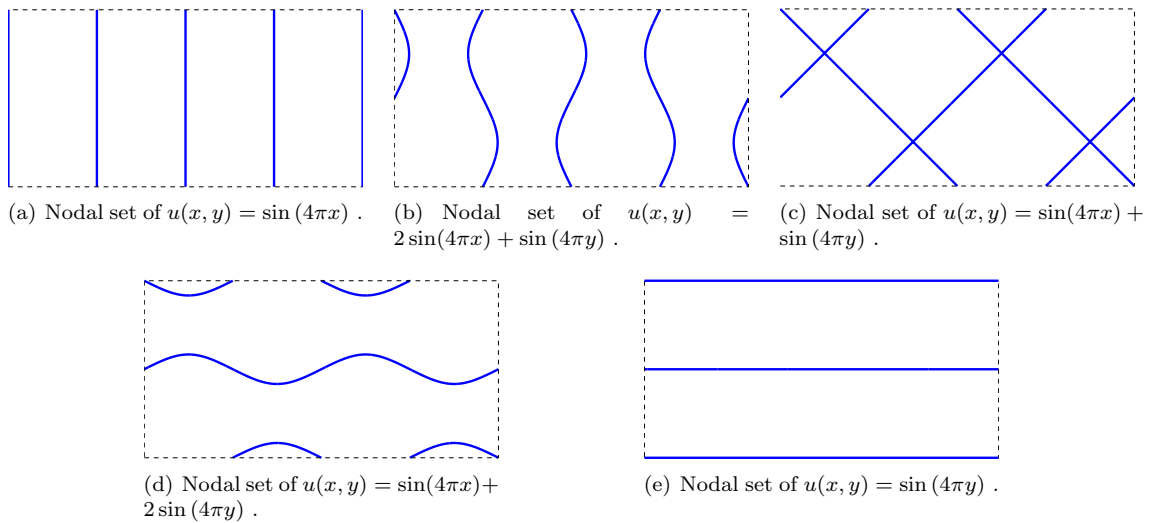


FIGURE 4.3 – Examples of nodal partitions of  $T(1, 1/2)$ .

up to symmetries and translations, there is only one nodal set, represented on Figure 4.3(c), that contains singular points. The associated nodal partition is a 4-partition, and is therefore minimal. We conjecture that this partition is a starting point for the appearance of non-nodal 4-partitions of  $T(1, b)$  when  $b = 1/2 + \varepsilon$ , with  $0 < \varepsilon \ll 1$ . More precisely, we conjecture that each singular point of order four splits into two singular points of order three (see Subsection 4.7.2 and Figure 4.25 for numerical simulations).

### 4.4.5 Generalization

We can apply the heuristics of Subsection 4.4.2 to the determination of  $b_k$  for any odd integer  $k \geq 3$ . According to this reasoning, the transition value  $b_k$  should be the smallest  $b$  such that the eigenvalue  $\lambda_{k,0}(2, b)$  of the Laplace-Beltrami operator has a multiplicity strictly greater than 2. Furthermore, there should exist an antisymmetric eigenfunction, associated with  $\lambda_{k,0}(2, b)$ , which is not a linear combination of the functions  $(x, y) \mapsto \cos(k\pi x)$  and  $(x, y) \mapsto \sin(k\pi x)$ . This leads us to the conclusion that  $b_k$  should be solution of the equation (in  $b$ )

$$\lambda_{k,0}(2, b) = \lambda_{1,1}(2, b).$$

**Conjecture 4.4.4.** For any odd integer  $k \geq 3$ ,

$$b_k = \frac{2}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

This would be an improvement on Proposition 4.4.2. In particular, we conjecture that  $b_5 = 1/\sqrt{6}$ . As in Subsection 4.4.2, we try to build a nodal 10-partition of  $T(2, 1/\sqrt{6})$  (associated with

the eigenvalue  $25\pi$ ) with singular points on its boundary. The projection on  $T(1, 1/\sqrt{6})$  of such a partition would give a good candidate for a minimal 5-partition  $T(1, 1/\sqrt{6})$  that could be deformed into a minimal 5-partition of  $T(1, 1/\sqrt{6} + \varepsilon)$ , with  $0 < \varepsilon \ll 1$ . An example of a nodal 10-partition of  $T(2, 2/\sqrt{6})$  with ten singular points is represented in Figure 4.4. Numerical simulations are presented in Subsection 4.7.3.

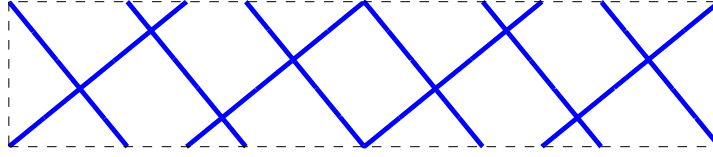


FIGURE 4.4 – Example of a nodal 10-partition of  $T(2, 1/\sqrt{6})$  (nodal set of  $u(x, y) = \cos(5\pi x) + \sin(\pi x) \sin(2\pi\sqrt{6}y) - \cos(\pi x) \cos(2\pi\sqrt{6}y)$ ).

## 4.5 Comparison for different energies

In Section 4.4, we have found several 3-partitions of  $T(1, 1/\sqrt{2})$ , obtained as projections of nodal 6-partitions of  $T(2, 1/\sqrt{2})$ . In this section, we test the minimality of these partitions with respect to other energies than  $\Lambda_k$ . This is related to the stability of these partitions for the numerical algorithm introduced in Section 4.6.

### 4.5.1 A minimality criterion for nodal partitions

Let us define other energies, that appear in the numerical study and in [3, 2]. In this section,  $M$  denotes a two-dimensional Riemannian manifold without boundary.

**Definition 4.5.1.** For any  $1 \leq p < \infty$  and  $k \geq 1$ , if  $\mathcal{D} = \{D_i, 1 \leq i \leq k\}$  is a  $k$ -partition, we define

$$\Lambda_{k,p}(\mathcal{D}) = \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_1(D_i)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Let us note that if we set  $\Lambda_{k,\infty}(\mathcal{D}) = \Lambda_k(\mathcal{D})$  for any fixed  $k$ -partition  $\mathcal{D}$ , we have a consistent definition in the following sense :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \Lambda_{k,p}(\mathcal{D}) = \Lambda_{k,\infty}(\mathcal{D}).$$

**Definition 4.5.2.** For any  $1 \leq p \leq \infty$  and  $k \geq 1$ ,

$$\mathfrak{L}_{k,p}(M) = \inf \{ \Lambda_{k,p}(\mathcal{D}), \mathcal{D} \in \mathfrak{P}_k \}.$$

**Proposition 4.5.3.** If  $\mathcal{D} = \{D_i, 1 \leq i \leq k\}$  is a  $k$ -partition and  $1 \leq p < q \leq \infty$ ,

$$\Lambda_{k,p}(\mathcal{D}) \leq \Lambda_{k,q}(\mathcal{D}).$$

*Démonstration.* This is a direct consequence of the Hölder inequality for finite sequences.

If  $q < \infty$ , we set  $r = q/p \geq 1$  and  $s$  such that  $1/r + 1/s = 1$ . We get

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_1(D_i)^p \leq \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_1(D_i)^{pr} \right)^{1/r} \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k 1^s \right)^{1/s},$$

which gives

$$\left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_1(D_i)^p \right)^{1/p} \leq \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_1(D_i)^q \right)^{1/q}.$$

The case  $q = \infty$  follows from

$$\left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_1(D_i)^p \right)^{1/p} \leq \max_{1 \leq i \leq k} \lambda_1(D_i).$$

□

**Corollary 4.5.4.** For  $k \geq 1$  and  $1 \leq p < q \leq \infty$ ,  $\mathfrak{L}_{k,p}(M) \leq \mathfrak{L}_{k,q}(M)$ .

**Corollary 4.5.5.** Let  $k \geq 1$  and  $1 \leq p < q \leq \infty$ . Let  $\mathcal{D}$  be a  $k$ -partition such that  $\Lambda_{k,p}(\mathcal{D}) = \mathfrak{L}_{k,p}(M)$ . If  $\mathcal{D}$  is an equipartition, i.e. if all  $\lambda_1(D_i)$  for  $1 \leq i \leq k$  are equal, then  $\mathfrak{L}_{k,q}(M) = \mathfrak{L}_{k,p}(M)$ .

*Démonstration.* Let us note  $\lambda$  the common value of all the  $\lambda_1(D_i)$ . For all  $1 \leq r \leq \infty$ ,  $\Lambda_{k,r}(\mathcal{D}) = \lambda$ . In particular,  $\Lambda_{k,p}(\mathcal{D}) = \Lambda_{k,q}(\mathcal{D}) = \lambda$ . Let us now pick  $\mathcal{D}' \in \mathfrak{P}_k$ . According to Proposition 4.5.3,

$$\Lambda_{k,p}(\mathcal{D}') \leq \Lambda_{k,q}(\mathcal{D}'),$$

and by minimality

$$\lambda = \mathfrak{L}_{k,p}(M) \leq \Lambda_{k,p}(\mathcal{D}').$$

We conclude that

$$\Lambda_{k,q}(\mathcal{D}) = \lambda \leq \Lambda_{k,q}(\mathcal{D}'),$$

and therefore  $\Lambda_{k,q}(\mathcal{D}) = \mathfrak{L}_{k,q}(\mathcal{D})$ . □

**Definition 4.5.6.** For  $k \geq 1$ , the transition exponent  $p(k, M)$  is the infimum of the  $1 \leq p \leq \infty$  such that there exists an equipartition  $\mathcal{D} \in \mathfrak{P}_k$  with  $\Lambda_{k,p}(\mathcal{D}) = \mathfrak{L}_{k,p}(M)$ .

Let us note that this definition makes sense since, for  $p = \infty$ , any minimal partition is an equipartition. For  $p \geq p(k, M)$ ,  $\mathfrak{L}_{k,p}(\Omega) = \mathfrak{L}_{k,p(k,M)}(M)$ . This implies that for  $p \geq p(k, M)$ , any minimal  $k$ -partition for the energy  $\Lambda_{k,p}$  is also a minimal partition for  $\Lambda_k$ , and therefore an equipartition.

We cannot *a priori* say that  $p(k, M) < \infty$  for all  $M$ . We now explain some ideas from [9] to exhibit an open, bounded, and connected set  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  such that  $p(2, \Omega) = \infty$ . Since all nodal partitions are equipartitions, the authors start from a nodal partition and look for a necessary condition satisfied if it is minimal for  $\Lambda_{k,p}$ , with  $1 \leq p < \infty$ .

For the sake of simplicity, we consider the case of a nodal 2-partition,  $\mathcal{D} = \{D_1, D_2\}$ , of a simply connected regular domain  $\Omega$ . It is completely defined if the boundary between  $D_1$  and  $D_2$  is given. We call this boundary  $\Gamma$ . It is a curve, regular inside  $\Omega$ , which may or may not touch  $\partial\Omega$ . We have assumed that  $\mathcal{D}$  is a nodal partition. Let us note  $u$  the corresponding eigenfunction, and  $\lambda$  the corresponding eigenvalue. In that case  $\lambda_1(D_1) = \lambda_1(D_2) = \lambda$  and  $u|_{D_1}$  (resp.  $u|_{D_2}$ ) is an eigenfunction associated with  $\lambda_1(D_1)$  (resp.  $\lambda_1(D_2)$ ).

Let us fix  $1 \leq p \leq \infty$ . We want to study how the energy  $\Lambda_{2,p}(\mathcal{D})$  changes under a deformation of the partition  $\mathcal{D}$ . Let  $s \mapsto \mathbf{X}(s)$  be a regular vector field, defined on  $\Gamma$ , with support in  $\Omega \cap \Gamma$ . For  $t$  small, we note  $\Gamma_t = \{s + t\mathbf{X}(s); s \in \Gamma\}$ . We define the new partition  $\mathcal{D}(t) = \{D_1(t), D_2(t)\}$ , where  $D_1(t)$  and  $D_2(t)$  are the two connected components of  $\Omega \setminus \Gamma_t$ , such that  $D_1(0) = D_1$  and  $D_2(0) = D_2$ . We note  $\lambda^{(1)}(t) = \lambda_1(D_1(t))$  and  $\lambda^{(2)}(t) = \lambda_1(D_2(t))$ . Let  $\mathbf{n}(s)$  be the unit vector at  $s$ , normal to  $\Gamma$ , and oriented from  $D_1$  to  $D_2$ . According to the classical Hadamard variation formula (see e.g. [13]), we have,

$$(\lambda^{(1)})'(0) = -\frac{1}{\|u\|_{L^2(D_1)}^2} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 (\mathbf{X}(s) \cdot \mathbf{n}(s)) \, ds$$

and

$$(\lambda^{(2)})'(0) = \frac{1}{\|u\|_{L^2(D_2)}^2} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 (\mathbf{X}(s) \cdot \mathbf{n}(s)) \, ds.$$

We set  $\Lambda(t) = \Lambda_{2,p}(\mathcal{D}(t))$ .

We have

$$\Lambda'(0) = \frac{1}{2} \left( \lambda^{(1)'}(0)(\lambda^{(1)}(0))^{p-1} + \lambda^{(2)'}(0)(\lambda^{(2)}(0))^{p-1} \right) \left( \frac{1}{2} \left( (\lambda^{(1)}(0))^p + (\lambda^{(2)}(0))^p \right) \right)^{\frac{1}{p}-1},$$

and therefore

$$\Lambda'(0) = \frac{1}{2} \left( \lambda^{(1)'}(0) + \lambda^{(2)'}(0) \right).$$

This finally implies

$$\Lambda'(0) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\|u\|_{L^2(D_2)}^2} - \frac{1}{\|u\|_{L^2(D_1)}^2} \right) \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 (\mathbf{X}(s) \cdot \mathbf{n}(s)) ds.$$

A necessary condition for  $\mathcal{D}$  to be minimal for the energy  $\Lambda_{2,p}$  is therefore

$$\|u\|_{L^2(D_1)} = \|u\|_{L^2(D_2)}.$$

This result is easily generalized in the following way.

**Proposition 4.5.7.** *If a nodal  $k$ -partition  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$  of a domain  $\Omega$ , given by the eigenfunction  $u$ , is minimal for the energy  $\Lambda_{k,p}$ , then  $\|u\|_{L^2(D_i)}$  must be the same for all  $1 \leq i \leq k$ .*

The paper [9] then shows that if  $\mathcal{T}$  is an equilateral triangle of side  $2/3$ ,  $\lambda_2^D(\mathcal{T}) = 28\pi^2$  and there exists a corresponding eigenfunction  $u$  with two nodal domains  $D_1$  and  $D_2$  such that  $\|u\|_{L^2(D_1)} \neq \|u\|_{L^2(D_2)}$ . According to the preceding criterion, for any  $1 \leq p < \infty$ , the partition  $\mathcal{D} = \{D_1, D_2\}$  is not minimal, and therefore  $\mathfrak{L}_{2,p}(\mathcal{T}) < \lambda_2^D(\mathcal{T})$ . But according to Remark 4.2.18,  $\mathfrak{L}_{2,\infty}(\mathcal{T}) = \lambda_2^D(\mathcal{T})$ . Corollary 4.5.5 then implies that  $p(2, \mathcal{T}) = \infty$ .

## 4.5.2 Application to the torus

We now apply the criterion of Proposition 4.5.7 to the partitions found in Section 4.4. In that subsection, we have build examples of equispectral 3-partitions of  $T(1, 1/\sqrt{2})$  which we conjecture to be minimal for the energy  $\Lambda_{3,\infty}$ . They were obtained as projections on  $T(1, 1/\sqrt{2})$  of nodal 6-partitions of  $T(2, \sqrt{2})$ . While these partition are not nodal, the reasoning leading to the criterion in Proposition 4.5.7 can be applied to this case. Let us consider a 3-partition  $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3\}$  of  $T(1, 1/\sqrt{2})$  that is the projection of a nodal 6-partition of  $T(2, 1/\sqrt{2})$ ,

$$\overline{\mathcal{D}} = \{\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_6, \},$$

given by a real antisymmetric eigenfunction  $u$  on  $T(2, 1/\sqrt{2})$ .

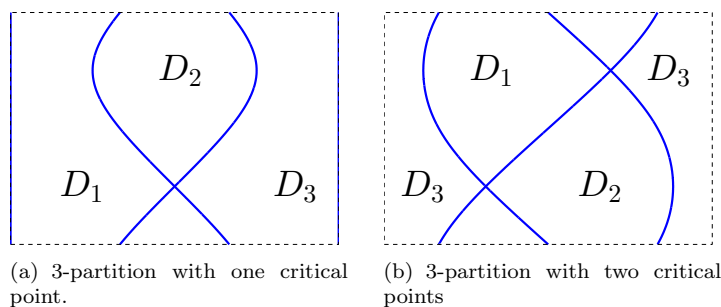
If  $\mathcal{D}$  is  $p$ -minimal, with  $1 \leq p < \infty$ , then  $\|u\|_{L^2(\overline{D}_i)}$  is the same for all  $1 \leq i \leq 6$ . Let us note that, since  $u$  is antisymmetric,  $u^2$  is symmetric, and therefore there exists a unique function  $f$  defined on  $T(1, 1/\sqrt{2})$  such that  $f = u^2 \circ \Pi$  on  $T(2, 1/\sqrt{2})$ . To simplify the notation, we denote this function  $f$  by  $u^2$ . This allows us to rewrite the preceding criterion : if  $\mathcal{D}$  is  $p$ -minimal, with  $1 \leq p < \infty$ , then

$$\int_{D_1} u^2 dx dy = \int_{D_2} u^2 dx dy = \int_{D_3} u^2 dx dy. \quad (4.5.1)$$

The nodal 6-partition of  $T(2, 1/\sqrt{6})$  represented on Figure 4.2(c) has nodal domains that are all isometric. Therefore, the 3-partition of  $T(1, 1/\sqrt{2})$  obtained by projection satisfies the minimality criterion (4.5.1). The 3-partitions corresponding to Figures 4.2(a) and 4.2(b) are represented on Figure 4.5.

Numerical computations with the Matlab software show that for the partition represented on Figure 4.5(a),

$$\int_{D_1} u^2 dx dy = \int_{D_3} u^2 dx dy < \int_{D_2} u^2 dx dy.$$

FIGURE 4.5 – Examples of 3-partition of  $T(1, 1/\sqrt{2})$ .

More precisely, we find

$$\int_{D_1} u^2 dx dy = \int_{D_3} u^2 dx dy \simeq 0.0768,$$

and

$$\int_{D_2} u^2 dx dy \simeq 0.1116.$$

We conclude that this 3-partition is not minimal for the energy  $\Lambda_{3,p}$ , for any  $1 \leq p < \infty$ .

For the partition represented on Figure 4.5(b), we find that

$$\int_{D_1} u^2 dx dy = \int_{D_2} u^2 dx dy < \int_{D_3} u^2 dx dy.$$

More precisely, we find

$$\int_{D_1} u^2 dx dy = \int_{D_2} u^2 dx dy \simeq 0.0752,$$

and

$$\int_{D_3} u^2 dx dy \simeq 0.0929.$$

This 3-partition is also not minimal for the energy  $\Lambda_{3,p}$ , for any  $1 \leq p < \infty$ .

We have found a regular equispectral 3-partition of  $T(1, 1/\sqrt{2})$ , whose energy is  $9\pi^2$ , that can, for any  $p$ , be deformed into a 3-partition with lower  $p$ -energy. This implies the following result.

**Proposition 4.5.8.** *For any  $1 \leq p < \infty$ ,  $\mathfrak{L}_{3,p}(T(1, 1/\sqrt{2})) < 9\pi^2$ .*

Assuming that Conjecture 4.4.4 is true, we have  $\mathfrak{L}_3(T(1, 1/\sqrt{2})) = 9\pi^2$ . According to Proposition 4.5.8, we would therefore have  $p(3, T(1, 1/\sqrt{2})) = \infty$ .

This could explain some difficulties encountered by the numerical method of Section 4.6, where the  $\infty$ -energy is replaced by a  $p$ -energy, for  $b$  close to  $1/\sqrt{2}$ .

## 4.6 Numerical method

### 4.6.1 Relaxed formulation

#### Continuous version

Our numerical investigations are based on the method introduced by Bourdin-Bucur-Oudet in [2]. In this paper, the authors study the minimization of the sum of the eigenvalues. This corresponds to the minimal energy  $\mathfrak{L}_{k,p}(M)$  with  $p = 1$  in the notation of Section 4.5. We generalize this method to deal with  $\mathfrak{L}_{k,p}(M)$  for  $1 \leq p < \infty$ . To approach the energy  $\mathfrak{L}_k(M)$ , corresponding to the case  $p = \infty$ , we search for the energy  $\mathfrak{L}_{k,p}(M)$  with  $1 < p < \infty$  large enough. Note that this

method can succeed only if  $p(k, M) < \infty$ . Let us note that in [2], the authors also study partitions  $\mathcal{D} = \{D_i : 1 \leq i \leq k\}$  that are minimal for the energy

$$\sum_{j=1}^k \lambda_n(D_j)$$

with  $n > 1$ . Here, we will not consider this energy.

Let us give now more details about this method. Following [2], we replace the original optimization problem with a relaxed formulation.

As we have already mentioned, the first step consists in replacing, for a  $k$ -partition  $\mathcal{D}$ , the energy  $\Lambda_k(\mathcal{D})$  with an energy  $\Lambda_{k,p}(\mathcal{D})$  for  $p \gg 1$ . It is justified by the following statement, proved in [11].

**Proposition 4.6.1.** *Let  $k \geq 1$ . The minimal energy  $\mathfrak{L}_{k,p}(M)$  is increasing with respect to  $p$  and  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \mathfrak{L}_{k,p}(M) = \mathfrak{L}_k(M)$ .*

The second step consists in replacing  $k$ -partitions with  $k$ -tuples of functions.

**Definition 4.6.2.** *For  $k \geq 1$ , the set of admissible  $k$ -tuples is given by*

$$\mathfrak{F}_k(M) = \{\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_k) : f_i : M \rightarrow [0, 1] \text{ measurable, } \sum_{i=1}^k f_i(x) = 1 \text{ a.e.}\}.$$

To compute the energy of such a  $k$ -tuple, we define a relaxed version of the eigenvalue problem.

**Definition 4.6.3.** *Let  $f : M \rightarrow [0, 1]$  be a measurable function and  $\varepsilon$  be a positive constant. The quantity  $\lambda_1(f, \varepsilon)$  is defined as the first eigenvalue of the operator  $-\Delta + \varepsilon^{-1}(1 - f)$ . To be more precise,  $\lambda_1(f, \varepsilon)$  is defined by the Rayleigh quotient*

$$\lambda_1(f, \varepsilon) = \inf_{u \in H_0^1(M) \setminus \{0\}} \frac{\int_M (|\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon}(1 - f)u^2) dx dy}{\int_M u^2 dx dy}.$$

**Definition 4.6.4.** *Let  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_k)$  be an admissible  $k$ -tuple, and let us fix  $p \geq 1$  and  $\varepsilon > 0$ . We define the energy of  $\mathcal{F}$  as*

$$M_{k,p,\varepsilon}(\mathcal{F}) = \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_1(f_i, \varepsilon)^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.6.1)$$

**Definition 4.6.5.** *Let  $p \geq 1$ ,  $k \geq 1$ , and  $\varepsilon > 0$ , the minimal energy is*

$$\mathfrak{M}_{k,p,\varepsilon}(M) = \inf_{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_k(M)} M_{k,p,\varepsilon}(\mathcal{F}). \quad (4.6.2)$$

The parameter  $\varepsilon$  can be seen as a penalization of the overlapping of the supports of the functions  $f_i$ . More precisely, [2] shows the following result

**Proposition 4.6.6.** *Let  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_k)$  be a  $k$ -tuple that solves the optimization problem (4.6.2). Then it satisfies the following property :*

$$\text{for all } i \in \{1, \dots, k\}, f_i(x) = 0 \text{ or } f_i(x) = 1 \text{ for almost every } x \text{ in } M.$$

The penalization approach is justified by an adaptation of a result in [2] :

**Proposition 4.6.7.** *Let  $k \geq 1$ . Then  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathfrak{M}_{k,p,\varepsilon}(M) = \mathfrak{L}_{k,p}(M)$ .*

This suggests a method for determining numerically a minimal  $k$ -partition for  $\mathfrak{L}_k(M)$ , for a given domain  $M$  and integer  $k$ . We fix  $p \gg 1$  and  $0 < \varepsilon \ll 1$ . The numerical method consists first in computing an approximation of a minimal admissible  $k$ -tuple

$$\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_k)$$

for the optimization problem (4.6.2). We then take the sets

$$D_i = \{x \in M; f_i(x) = 1\}$$

as domains of an approximate minimal partition.

Let us point out that to make this procedure effective, we need to specify how we represent the function  $f_i$  numerically, and how we construct the domain  $D_i$  from this representation. This question is addressed in Subsections 4.6.1 and 4.6.2.

Note that we present here the implementation of the method in the case of the torus  $T(1, b)$  but we can extend it to any domain, even domain with boundary conditions.

### Discretization

We replace problem (4.6.2) by a discrete version.

We approximate the torus  $T(1, b)$  by a  $m \times n$  grid of points in the rectangle  $[0, 1] \times [0, b]$  (with a constant step in each direction). Let us note  $N = mn$  the total number of points.

An admissible  $k$ -tuple of functions is represented, in this setting, by a  $N \times k$  matrix  $\Phi$ , whose columns  $\phi_1, \dots, \phi_k$  contain the values of the functions  $f_1, \dots, f_k$  at each point of the grid. For  $1 \leq i \leq k$  and  $1 \leq I \leq N$ , we will sometimes denote the element  $[\Phi]_{I,i}$  by  $[\phi_i]_I$  if we want to focus on the vector  $\phi_i$ .

We impose the following constraints on  $\Phi$  :

- $\forall 1 \leq i \leq k, \forall 1 \leq I \leq N, 0 \leq [\Phi]_{I,i}$ ,
- $\forall 1 \leq I \leq N, \sum_{i=1}^k [\Phi]_{I,i} = 1$ .

Let us give a geometric formulation of these conditions. For  $k \geq 1$ , we define the simplex  $\mathcal{S}_k$  in  $\mathbb{R}^k$  by

$$\mathcal{S}_k = \{(x_1, \dots, x_k); 0 \leq x_i, \sum_{j=0}^k x_i = 1\}.$$

We can express the constraints as  $([\Phi]_{I,1}, \dots, [\Phi]_{I,k}) \in \mathcal{S}_k$  for  $1 \leq I \leq N$ .

Let us now define the energy that we optimize numerically. With each column  $\phi \in \{[\Phi]_{I,j}, 1 \leq j \leq k\}$ , we associate  $\tilde{\lambda}_1(\phi, \varepsilon)$  the lowest eigenvalue of the matrix

$$L + \frac{1}{\varepsilon} (Id_N - Diag(\phi)) ,$$

which we will take as an approximation of  $\lambda_1(f, \varepsilon)$ .

In this formula,

- $\phi$  is an  $N \times 1$  vector,
- $L$  is the first order finite difference approximation of  $-\Delta$  on a  $m \times n$  grid with periodic boundary conditions<sup>1</sup>,
- $Id_N$  is the  $N \times N$  identity matrix,
- $Diag(\phi)$  is the  $N \times N$  diagonal matrix such that for  $1 \leq I \leq N, [Diag(\phi)]_{I,I} = \phi_I$ .

In the following, we denote by  $U(\phi, \varepsilon)$  an eigenvector associated with  $\tilde{\lambda}_1(\phi, \varepsilon)$ .

Finally, we replace the energy  $M(p, k, \varepsilon, \mathcal{F})$  by its discrete version :

$$\tilde{M}(p, k, \varepsilon, \Phi) = \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \tilde{\lambda}_1(\phi_i, \varepsilon)^p \right)^{\frac{1}{p}} . \quad (4.6.3)$$

### Optimization method

We want to minimize  $\tilde{M}(p, k, \varepsilon, \Phi)$  with respect to the  $Nk$  variables  $[\Phi]_{i,I}$ , under the constraint  $([\Phi]_{I,1}, \dots, [\Phi]_{I,k}) \in \mathcal{S}_k$  for  $1 \leq I \leq N$ . Since we use a projected gradient algorithm, we need to compute the derivatives of the function  $\tilde{M}(p, k, \varepsilon, \Phi)$ . This is done in [2].

1. To deal with other geometries or boundary conditions, we only have to change the matrix  $L$ .

**Proposition 4.6.8.** *For all  $\varepsilon > 0$  and  $N \times 1$  vector  $\phi$ ,*

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}_1}{\partial [\phi]_I} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{[U(\phi, \varepsilon)]_I^2}{\|U(\phi, \varepsilon)\|^2}.$$

A straightforward calculation, using Proposition 4.6.8, gives the derivatives of the energy.

**Proposition 4.6.9.** *For all  $p \geq 1$ ,  $k \geq 1$ ,  $\varepsilon > 0$ , and  $N \times k$  matrix  $\Phi$ ,*

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial [\Phi]_{I,i}}(p, k, \varepsilon, \Phi) = -\frac{p}{k} \frac{1}{\varepsilon} \tilde{\lambda}_1(p, k, \varepsilon, \phi_i)^{p-1} \tilde{M}(p, k, \varepsilon, \Phi)^{1-p} \frac{[U(\phi_i, \varepsilon)]_I^2}{\|U(\phi_i, \varepsilon)\|^2}.$$

To make the convergence easier, we adopt the multistep procedure described in [2], which seems empirically very effective<sup>2</sup>. We begin with applying the projected gradient algorithm on a very small grid, starting from a randomly generated  $\Phi$ . For these first steps, we do not use the orthogonal projection operator but the so-called simple projection operator  $S_k$ .

**Definition 4.6.10.** *Let  $k \geq 1$ . The simple projection operator on the simplex  $S_k$  is defined by*

$$[S_k x]_i = \frac{|x_i|}{\sum_{j=1}^k |x_j|},$$

for each  $x \in \mathbb{R}^k$  and  $1 \leq i \leq k$ .

Once this step has converged, we double the number of points in the grid and extend the optimal  $\Phi$  to the new grid by linear interpolation. We reiterate the same procedure, using the interpolated  $\Phi$  as a starting point. Once we have repeated this step a certain number of times, we perform one last iteration using the orthogonal projection operator.

In practice, coefficients in the final  $\Phi$  are either 0 or 1. There is, as far as we know, no proof of this fact in this discrete version but it is coherent with Proposition 4.6.6. Taking it for granted, we can interpret each column of the matrix  $\Phi$  as the discretization of the characteristic function of a set. This gives us a discrete  $k$ -partition of the grid : we find  $k$  subsets  $(\tilde{D}_i)_{1 \leq i \leq k}$  of points of the grid. From these subsets, we construct, in Subsection 4.6.2, a  $k$ -partition  $(D_i)_{1 \leq i \leq k}$  of  $T(1, b)$  and compute its energy.

## 4.6.2 Construction of a $k$ -partition and computation of its energy

The implementation of the iterative gradient algorithm gives us a discrete  $k$ -partition  $(\tilde{D}_i)_{1 \leq i \leq k}$  and a numerical relaxed energy  $\tilde{M}(p, k, \varepsilon, \Phi)$  (see (4.6.3)). To approximate  $\mathfrak{L}_{k,p}(T(1, b))$ , we have now two further steps :

- Construction of a partition of a  $k$ -partition  $\mathcal{D} = (D_i)_{1 \leq i \leq k}$  of  $T(1, b)$  from  $(\tilde{D}_i)_{1 \leq i \leq k}$ ,
- Computation of the associated energy  $\Lambda_{k,p}(\mathcal{D})$ .

This work has been done in collaboration with V. Bonnaillie-Noël.

Let us explain these points a little more. We recall that the result of the optimization algorithm is a  $N \times k$  matrix. Here  $N = mn$ , with  $m \times n$  the dimensions of the grid used to represent the torus. Each column of this matrix contains the value 0 or 1. Furthermore, if  $1 \leq I \leq N$ , only one of the entries

$$[\phi_1]_I, \dots, [\phi_k]_I,$$

is equal to 1. From the column  $\phi_i$ , we only have values at the point of the grid. This not completely determine a partition of  $T(1, b)$ . Therefore we must choose a method to construct a  $k$ -partition  $\mathcal{D} = (D_i)_{1 \leq i \leq k}$  from the data in the matrix  $\Phi$ .

Let us explain the form of the partition that we construct. Since we want to keep the same size of discretization and since the torus is represented with a  $m \times n$  grid, we construct the subdomains  $D_i$  of the new partition as the union of elementary cells, of the form

$$\left[ \frac{p-1}{m}, \frac{p}{m} \right] \times \left[ \frac{q-1}{n} b, \frac{q}{n} b \right],$$

2. We thank Édouard Oudet for giving us detailed explanations on this point.



with  $1 \leq p \leq n$  and  $1 \leq q \leq n$ .

Then we compute the first eigenvalue of the Dirichlet Laplacian of each domain  $D_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , by a finite difference method. We can then, for any  $1 \leq p \leq \infty$ , compute an approximation of the energy  $\Lambda_{k,p}(\mathcal{D})$  without relaxation.

We present now three approaches to construct partitions and their numerical implementation with the Matlab software. The results of these different methods will be indexed by an integer  $j = 1, 2, 3$ . We explain these methods for  $p = \infty$  but they can be generalized to any  $p \in [1, +\infty]$ .

In the rest of this section, we use a convenient graphical representation of the data in the matrix  $\Phi$ . Let us explain it on an example. We choose  $m = 7$ ,  $n = 6$  (therefore  $N = 42$ ) and  $k = 3$ . Points in the grid are indexed from left to right and from bottom to top, as shown on Figure 4.6(a). A

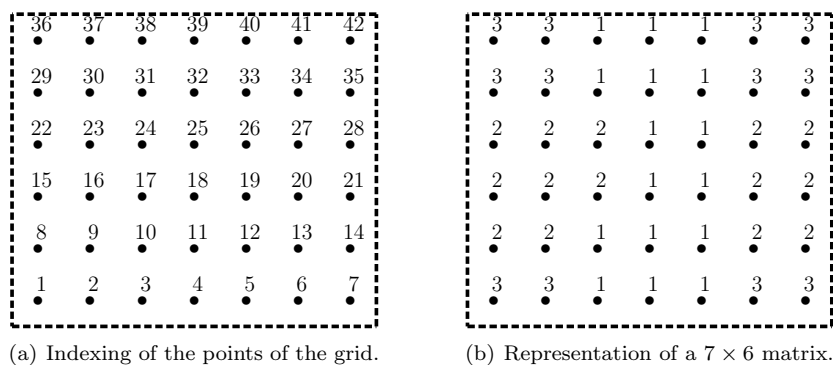


FIGURE 4.6 – Graphical representation of a discrete partition.

matrix  $\Phi$  of the type produced by the optimization algorithm is represented in the following way : for  $1 \leq I \leq N$  and  $1 \leq i \leq k$ , if  $[\phi_i]_I = 1$ , we label the point indexed by  $I$  by the integer  $i$  (see Figure 4.6(b)).

### Rough domain extraction

Let us now describe a first naive method. We give a procedure to compute the energy, which implicitly defines a procedure to construct the approximate partition. For each  $1 \leq i \leq k$ , we construct the domain  $D_i$  by imposing a Dirichlet condition at each point of index  $I$  such that  $[\phi_i]_I = 0$ . To be more precise, we extract a matrix  $L^{(i)}$  from the matrix  $L$ , with the following rules.

- For some integers  $I$ ,  $1 \leq I \leq N$ , we remove the column  $I$  and the line  $I$  from  $L$ , so that we still have a square symmetric matrix.
- We remove column  $I$  and line  $I$  from  $L$  if, and only if,  $[\phi_i]_I = 0$ .

For each  $1 \leq i \leq k$ , we compute the first eigenvalue  $\mu_1(i)$  of  $L^{(i)}$  and the quantity

$$\tilde{\Lambda}_k^{(1)} = \max_{1 \leq i \leq k} \mu_1(i).$$

This method has a geometrical interpretation, that we now explain on the example of Figure 4.6(b). For each  $i \in \{1, 2, 3\}$ , the matrix  $L^{(i)}$  is the finite difference approximation of the Dirichlet Laplacian on a domain  $D_i^{(1)}$  described in Figure 4.7.

In this example, as can be seen on Figure 4.7, the domains  $D_i^{(1)}$  overlap. Therefore these domains do not constitute a partition in the sense of Definition 4.2.1. The energy  $\tilde{\Lambda}_k^{(1)}$  defined in equation (4.6.2) will probably be lower than  $\mathfrak{L}_k(T(1, b))$ .

Consequently this method is not well adapted for our problem.

### Construction of the boundary : rough approach

Let us now describe a second method. It is based on the fact that the energy  $\Lambda_k(\mathcal{D})$  of a  $k$ -partition  $\mathcal{D}$  of the torus  $T(1, b)$  can be seen as the first eigenvalue of the Dirichlet Laplacian on the

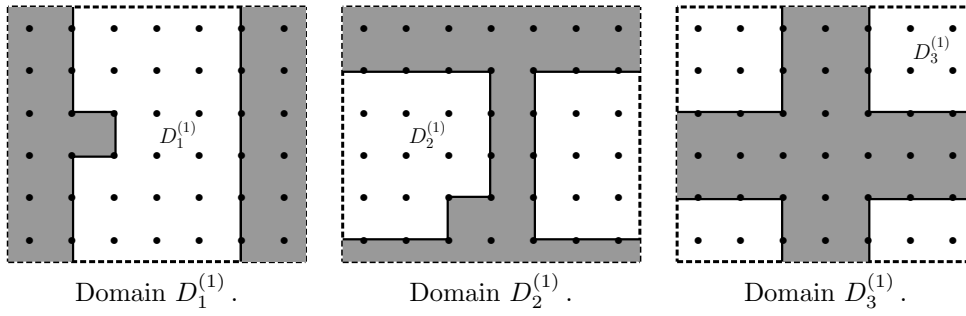


FIGURE 4.7 – Domains obtained by the first method.

(non-connected) domain

$$T(1, b) \setminus N(\mathcal{D}),$$

with  $N(\mathcal{D})$  defined in Definition 4.2.6. We construct a discrete version of the boundary, extract from  $L$  the finite difference matrix of the Laplacian, with Dirichlet conditions on this discrete boundary, and compute the eigenvalues of this matrix.

We first describe a simple idea. For each  $1 \leq I \leq N$ , we say that the point of the grid of index  $I$  is on the boundary if there exists a neighbor of  $I$ , whose index we denote by  $J$ , such that  $I$  and  $J$  are labelled with different integers in  $\{1, \dots, k\}$ .

We have to precise what we mean by neighbor. The neighbor of a point on the grid are the points immediately above, below, to the left, or to the right. Let us note that we take into account the periodic boundary condition. For instance, on Figure 4.6(a), the neighbors of the point 10 are the points 7, 3, 9, and 11, the neighbors of the point 6 are the points 13, 41, 5, and 7, etc.

The domains limited by this discrete boundary form a partition denoted by

$$\mathcal{D}^{(2)} = \{D_1^{(2)}, \dots, D_k^{(2)}\}.$$

We denote by  $\tilde{\lambda}_1(D_i^{(2)})$  the finite difference approximation of the first eigenvalue of the Dirichlet Laplacian on  $D_i^{(2)}$ . We then define a second version of the approximate energy :

$$\tilde{\Lambda}_k^{(2)} = \max_{1 \leq i \leq k} \tilde{\lambda}_1(D_i^{(2)}).$$

Let us study this method on the example of Figure 4.6(b). The discrete boundary is represented on Figure 4.8.

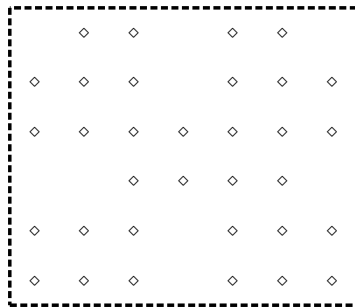


FIGURE 4.8 – Boundaries of the partition with the second method.

The three domains of the approximate partition are represented on Figure 4.9. These domains form a 3-partition in the sense of Definition 4.2.1. However this partition is not strong. The approximate energy  $\tilde{\Lambda}_k^{(2)}$  defined by Equation (4.6.2) therefore gives a too coarse upper-bound for  $\mathfrak{L}_k(T(1, b))$ .

We now modify this approach in order to obtain a strong partition.

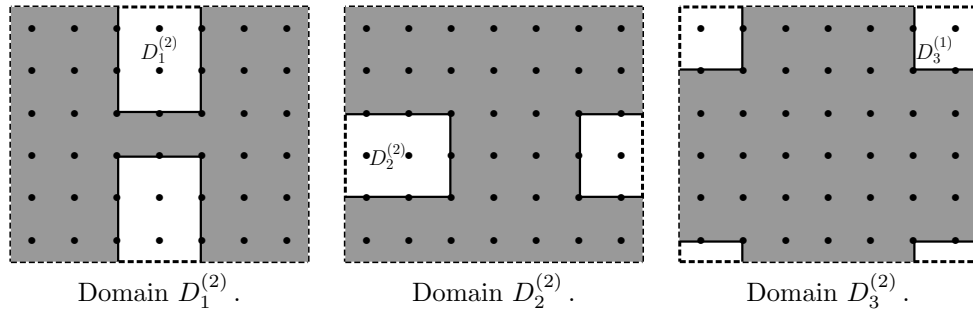


FIGURE 4.9 – Domains obtained by the second method.

**Construction of the boundary : refined approach**

Let us now describe a third approach to compute the energy, also based on the computation of the boundary of a partition. For more clarity, we explain it only in the case of the matrix  $\Phi$  described on Figure 4.6(b).

We can imagine each point of the grid to be the center of a rectangular cell, which is of the form

$$\left[ \frac{p-1/2}{m}, \frac{p+1/2}{m} \right] \times \left[ \frac{q-1/2}{n} b, \frac{q+1/2}{n} b \right],$$

with  $0 \leq p \leq m-1$  and  $1 \leq q \leq n$ . This new mesh (which is in some sense a dual mesh of the first one) is represented on Figure 4.10(a). The torus can, in our example, be divided in three domains

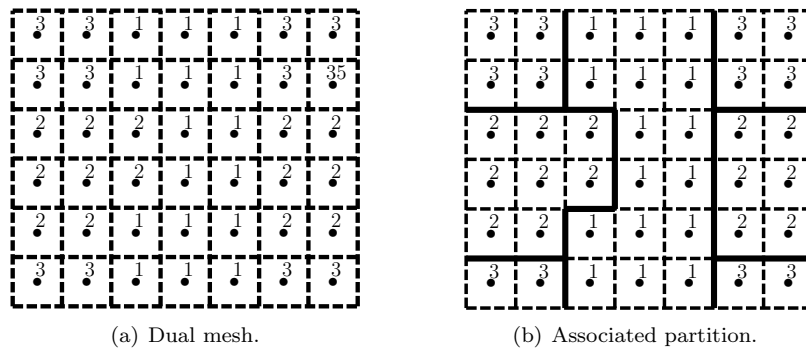


FIGURE 4.10 – Partition obtained with the third method.

$D_1^{(3)}, D_2^{(3)}, D_3^{(3)}$ . For each  $i \in \{1, 2, 3\}$ , the domain  $D_i^{(3)}$  is the union of all the cells whose center is labelled by the integer  $i$ . This time,

$$\mathcal{D}^{(3)} = \{D_1^{(3)}, D_2^{(3)}, D_3^{(3)}\}$$

is a strong 3-partition in the sense of Definition 4.2.1. This partition is represented on Figure 4.10(b).

We can then define and compute the boundary of the partition. It is a union of some edges of the cells : an edge of a cell is in the boundary if, and only if, it separates two cells that belong to different domains. To construct the boundary, we consider each cell successively. An edge of one cell is added to the boundary if the cell on the other side is labelled by a different integer. Actually, since all the cells are considered in turn, it is enough to look at the right and upper edges (for instance) of each cell. Let us finally note that by translating the boundary by the vector

$$\mathbf{v} = \left( -\frac{1}{2m}, -\frac{b}{2n} \right),$$

we can use the points of the original grid to represent the boundary. This refined boundary, in the example considered, is represented on Figure 4.11. As in the second method, we construct a

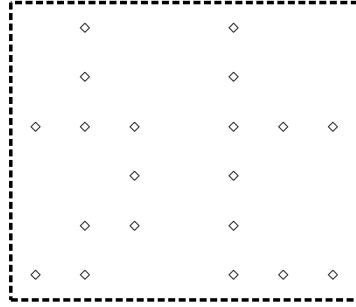


FIGURE 4.11 – Boundaries of the partition with the third method.

partition denoted by

$$\mathcal{D}^{(3)} = \{D_1^{(3)}, \dots, D_k^{(3)}\}.$$

Let  $\tilde{\lambda}_1(D_i^{(3)})$  be the finite difference approximation of the first eigenvalue of the Dirichlet Laplacian on  $D_i^{(3)}$ . We define the associated energy :

$$\tilde{\Lambda}_k^{(3)} = \max_{1 \leq i \leq k} \tilde{\lambda}_1(D_i^{(3)}).$$

In the following, we use this third method and omit the index (3) in the notation.

### 4.6.3 Implementation of the method

#### Algorithm

Let us sum up the algorithm we implement to catch candidates to be minimal  $k$ -partition. We fix  $J$  be the number of steps,  $\varepsilon > 0$ ,  $p \geq 1$ .

#### Initialization

- Let  $m^{(1)}, n^{(1)}$  be two integers
- Let  $\Phi^{(1)} = (\phi_1^{(1)}, \dots, \phi_k^{(1)})$  be a random matrix of size  $N^{(1)} \times k$  with  $N^{(1)} = m^{(1)}n^{(1)}$ .
- Construct a uniform mesh the torus  $T(1, b)$  with  $N^{(1)} = m^{(1)} \times n^{(1)}$  points
- Implement the matrices  $L^{(1)} + \varepsilon^{-1} (Id_{N^{(1)}} - Diag(\phi_i^{(1)}))$ , for  $i = 1, \dots, k$
- Apply the projected gradient algorithm with the initial data  $\Phi^{(1)}$  to obtain a new matrix  $\Phi^{(1)}$  (see Proposition 4.6.9)

#### Induction For $j = 2, \dots, R$

- $m^{(j)} = 2m^{(j-1)}$ ,  $n^{(j)} = 2n^{(j-1)}$ ,  $N^{(j)} = 4N^{(j-1)}$
- Construct  $\Phi^{(j)}$  by interpolation of  $\Phi^{(j-1)}$  in the uniform refined mesh with  $N^{(j)}$  points
- Implement the matrix  $L^{(j)} + \varepsilon^{-1} (Id_{N^{(j)}} - Diag(\phi_i^{(j)}))$ , for  $i = 1, \dots, k$
- Apply the projected gradient algorithm with the initial data  $\Phi^{(j)}$  to obtain a new matrix  $\Phi^{(j)}$

#### Finalisation

- Orthogonal projection with  $\Phi^{(J)}$
- Construction of a  $k$ -partition  $\mathcal{D}$  by the third method
- Compute the energy  $\tilde{\Lambda}_k$

#### Performance of the method

We now present the results of a concrete implementation of the algorithm with the Matlab software. We analyze two simulations. Let us deal with the example  $k = 5$  and  $b = 0.46$ . We chose

the following values for the parameters :

$$p = 5, \quad \varepsilon = 10^{-4}, \quad J = 5, \quad n^{(1)} = 16, \quad m^{(1)} = 16.$$

In particular, the first step of the computations is done on a  $16 \times 16$  grid and, after four successive refinements, the last step is done on a  $256 \times 256$  grid. Let us explain how we decide the stopping of the projected gradient algorithm at each step. For  $1 \leq j \leq J$ , we denote by  $\Phi^{(j,r)}$  the matrix  $\Phi$ , at the step  $j$ , after  $r$  iterations of the projected gradient algorithm. In this notation, the projected gradient algorithm stops when one of the two following conditions is met :

- $\frac{1}{kN} \sum_{I,i} \left| \Phi_{I,i}^{(j,r+1)} - \Phi_{I,i}^{(j,r)} \right| < \delta$ , where  $\delta$  is a fixed threshold,
- $r \geq R$ , where  $R$  is the maximal number of iterations, chosen beforehand.

In the present examples, we have fixed  $\delta = 10^{-6}$  and  $R = 500$ .

The differences between the two examples illustrate how different initial data produce a different behavior of the algorithm, and different results. Using the values of the parameters fixed above, we have started from a random initial data, different in each case. In the first case, summarized on Figures 4.12, 4.14, and 4.16, the algorithm has given a better candidate for a minimal 5-partition than in the second case, summarized on Figures 4.13, 4.15, and 4.17.

Figures 4.12 and 4.13 show the first eigenvalue of the Dirichlet Laplacian on each domain of the partition, as a function of the steps in the algorithm. This eigenvalue is computed by a finite difference method, without relaxation, as explained in Subsection 4.6.2. These curves show, in two different ways, that the first simulation gives a better candidate than the second. We recall first that a minimal partition is necessarily equispectral. A good candidate should therefore have the same first eigenvalue for each of its domain, up to numerical errors. In the first case, as we can see on Figure 4.12, the first eigenvalues seem to converge to a common limit when the number of steps increases. But Figure 4.13 shows that this is not true in the second case : the first eigenvalues on each domain remain distinct. Furthermore, when we compare the minimal energy given by the algorithm in each case, we find  $\tilde{\Lambda}_5 \simeq 219$  in the first and  $\tilde{\Lambda}_5 \simeq 229$  in the second.

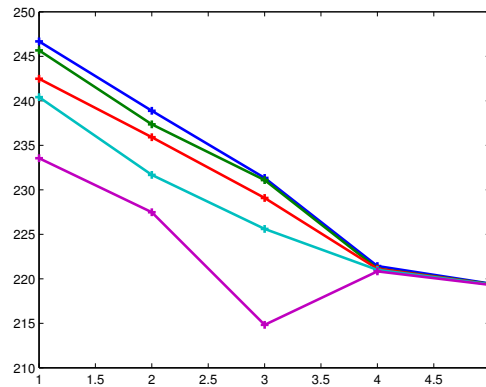


FIGURE 4.12 – Energy vs. number of steps, first case.

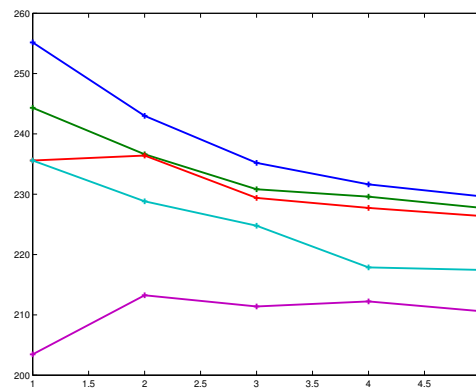


FIGURE 4.13 – Energy vs. number of steps, second case.

Differences between the two cases are also visible on Figures 4.14 and 4.15. These figures show, for each of the five steps of the method, a picture of the partition given by the projected gradient algorithm. On Figure 4.14, we see that the domains gradually take the same shape in the first case. Figure 4.15 shows that different shapes appear in the second case.

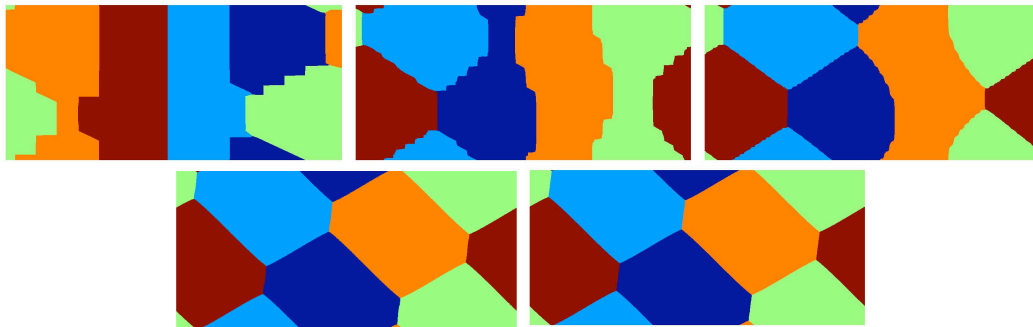


FIGURE 4.14 – Partitions vs. number of steps, first case.

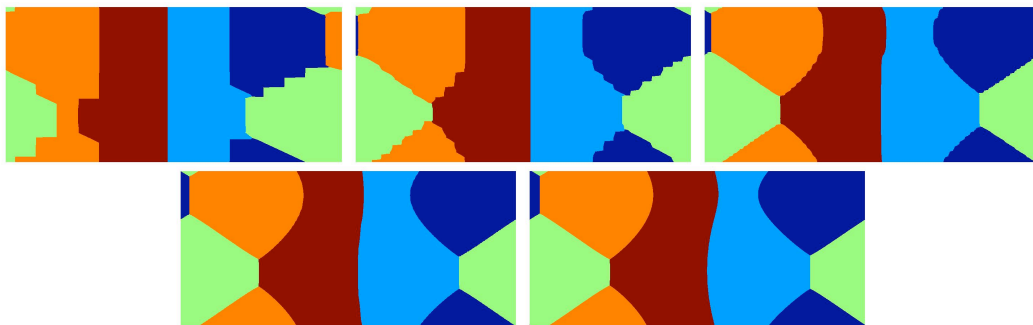


FIGURE 4.15 – Partitions vs. number of steps, second case.

Figures 4.12, 4.13, 4.14, and 4.15 show, for each step, the results of the projected gradient algorithm. To understand better the difference between the two cases, we now study the iterations of this algorithm at each step. On Figures 4.16 and 4.17 are shown, for each step  $j$ , the relaxed eigenvalue  $\tilde{\lambda}_1(\phi_i^{(j,r)}, \varepsilon)$  for  $i = 1, \dots, 5$  and the relaxed energy  $\tilde{M}(p, k, \varepsilon, \Phi^{(j,r)})$  as functions of  $r$ . On Figure 4.16, the eigenvalues and the energy seem to converge quite well to a common limit, but they remain distinct on Figure 4.17. The way the projected gradient algorithm stops also show

that we have a better convergence in the first case. Let us focus on the last step of both cases. We see on Figure 4.16 that in the first case, the projected gradient algorithm performs 95 iterations during this last step. This means that the algorithm stops because the  $\ell^1$ -norm of the difference between two successive  $\Phi^{J,r}$  is lower than the threshold value  $\delta = 10^{-6}$ . In the second case, the algorithm performs 500 iterations, the maximal number that we have imposed. Therefore, it stops before reaching convergence.

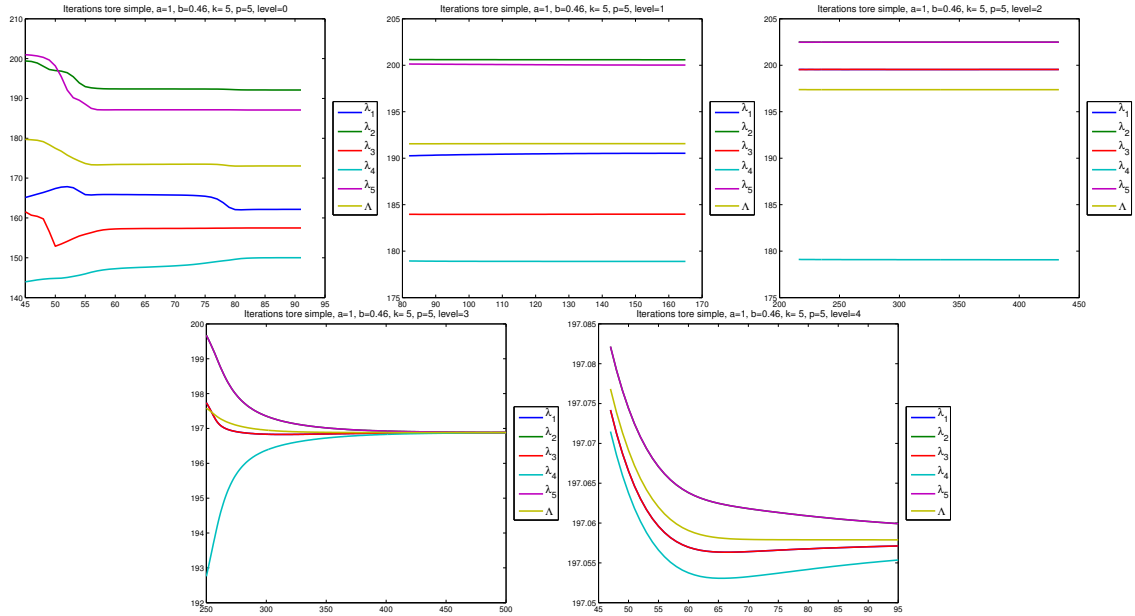


FIGURE 4.16 – Energies at each step vs. iteration of the gradient method (first case).

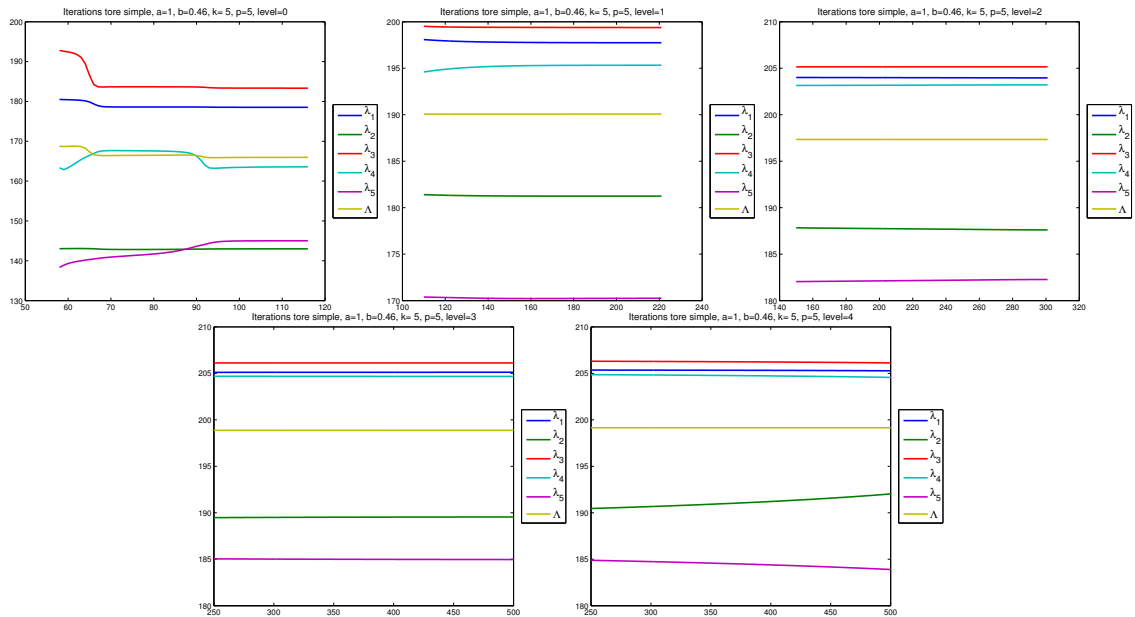


FIGURE 4.17 – Energies at each step vs. iteration of the gradient method (second case).

We have thus seen a weakness of this optimization algorithm. All the other parameters being equal, it converges rapidly to a good candidate for some initial data, whereas for others, it termi-

nates without reaching convergence. To overcome this problem, we have made several simulations, starting for different random initial data. We have also tested some particular initial data, for example the results of previous optimizations for different values of  $b$ . In any case, we cannot accept a result of the optimization algorithm without precaution. We must check whether the algorithm has converged, and compare the energy of the resulting partition with other simulations for the same values of the parameters.

## 4.7 Numerical study of transitions

Let us now apply the algorithm for some  $k$  to bound from above  $\mathfrak{L}_k(T(1, b))$  and to catch candidates to be minimal  $k$ -partition according to the values for  $b$ . In the following subsections, we analyze each situation  $k = 3, 4, 5$ . We use the following values for the parameters :

$$p = 5, \quad \varepsilon = 10^{-4}, \quad J = 5, \quad n^{(1)} = 16, \quad m^{(1)} = 16.$$

Since  $J = 5$ , we refine four times the initial mesh to obtain finally a  $256 \times 256$  mesh. By convention, we label the partition  $\mathcal{D} = (D_i)_{1 \leq i \leq k}$  obtained with the optimization algorithm such that

$$\Lambda_k(\mathcal{D}) = \lambda_1(D_1) \geq \lambda_1(D_2) \geq \dots \geq \lambda_1(D_k).$$

### 4.7.1 3-partitions of the torus $T(1, b)$

Using the partition  $\mathcal{D}_3$  introduced in Definition 4.3.3, we have

$$\mathfrak{L}_3(T(1, b)) \leq 9\pi^2, \quad \forall b \in (0, 1]. \quad (4.7.1)$$

In the case of the 3-partition, we know from Proposition 4.4.2, that  $b_3 \geq 1/3$  (therefore (4.7.1) is an equality for  $b < 1/3$ ). We have conjectured in Subsection 4.4.2 that  $b_3 = 1/\sqrt{2} \simeq 0.707$ . We compare this conjecture with the numerical computations realized with the previous algorithm. Let us focus on the case  $1/3 < b < 1/\sqrt{2}$ . We make computations for  $b \in \{j/50, j = 17, \dots, 34\}$ . As shown in Figure 4.18, we obtain the partition  $\mathcal{D}_3$  of Definition 4.3.3, which validates the conjecture.

Let us analyze more closely the interval around  $1/\sqrt{2}$ . Applying the algorithm as previously gives the results presented in Figure 4.19 for  $b \in \{j/100, j = 71, \dots, 81\}$ . These partitions  $\mathcal{D}' = (D'_i)_{1 \leq i \leq 3}$  seems to have two singular points and two isometric subdomains  $D'_1, D'_2$ . We observe numerically

$$\tilde{\lambda}_1(D'_3) < \tilde{\lambda}_1(D'_1) \simeq \tilde{\lambda}_1(D'_2), \quad \tilde{\Lambda}_3(\mathcal{D}') = \tilde{\lambda}_1(D'_1).$$

In these configurations (Figure 4.19), the gap between  $\tilde{\lambda}_1(D'_3)$  and the other eigenvalues is sufficiently significant to think that such partitions are not minimal. For example, when  $b = 0.81$ , we have

$$\tilde{\lambda}_1(D'_1) \simeq 81.123, \quad \tilde{\lambda}_1(D'_2) \simeq 81.036, \quad \tilde{\lambda}_1(D'_3) \simeq 73.646.$$

To obtain better candidates, we can test the algorithm with other random initial conditions. In the case  $b = 0.81$ , Figure 4.20 gives the results for two random conditions  $\Phi$ . The partition  $\mathcal{D}'' = (D''_i)_{1 \leq i \leq 3}$  represented on Figure 4.20(b) seem to consist in three isometric subdomains and we have

$$\tilde{\lambda}_1(D''_1) \simeq 78.032, \quad \tilde{\lambda}_1(D''_2) \simeq 78.030, \quad \tilde{\lambda}_1(D''_3) \simeq 78.024.$$

This is close to an equipartition (which is a necessary condition to have a minimal 3-partition). The energy of partition  $\mathcal{D}''$  is smaller than those of  $\mathcal{D}'$  and we obtain therefore a better upper-bound for  $\mathfrak{L}_3(T(1, b))$ .

Figure 4.20 shows that the results of the optimization algorithm depend strongly on the initial data. This suggests to make new simulations with imposed initial matrix  $\Phi$ . In Figure 4.21, we use as initial condition for  $\Phi$  the matrix obtained after the second iteration that leads to partition  $\mathcal{D}''$  (Figure 4.20(b)). Figure 4.22 compares the upper bound (4.7.1) with the energies of partitions  $\mathcal{D}'$  of Figure 4.19 and  $\mathcal{D}''$  of Figure 4.21, for  $b \in \{j/100, j = 71, \dots, 81\}$ . The partitions of Figure 4.21



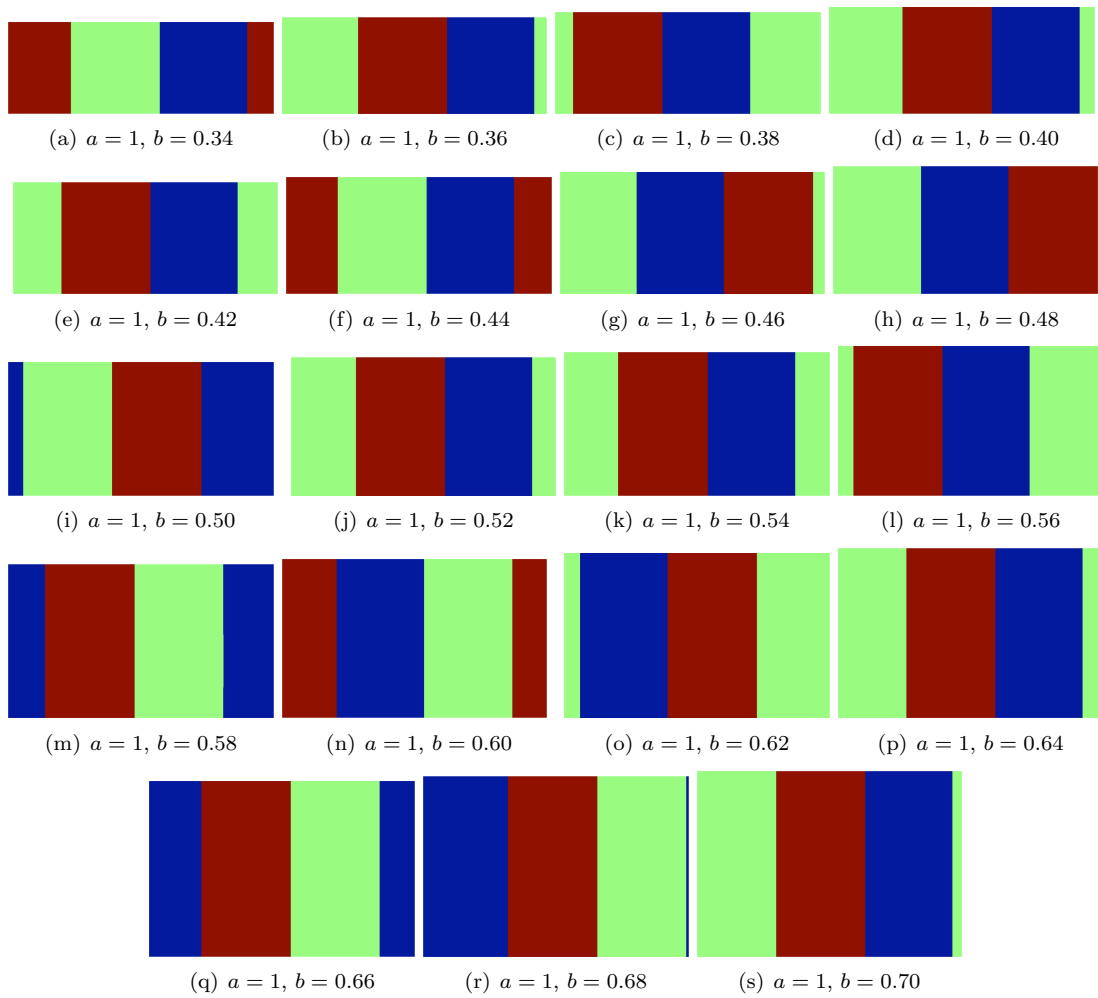
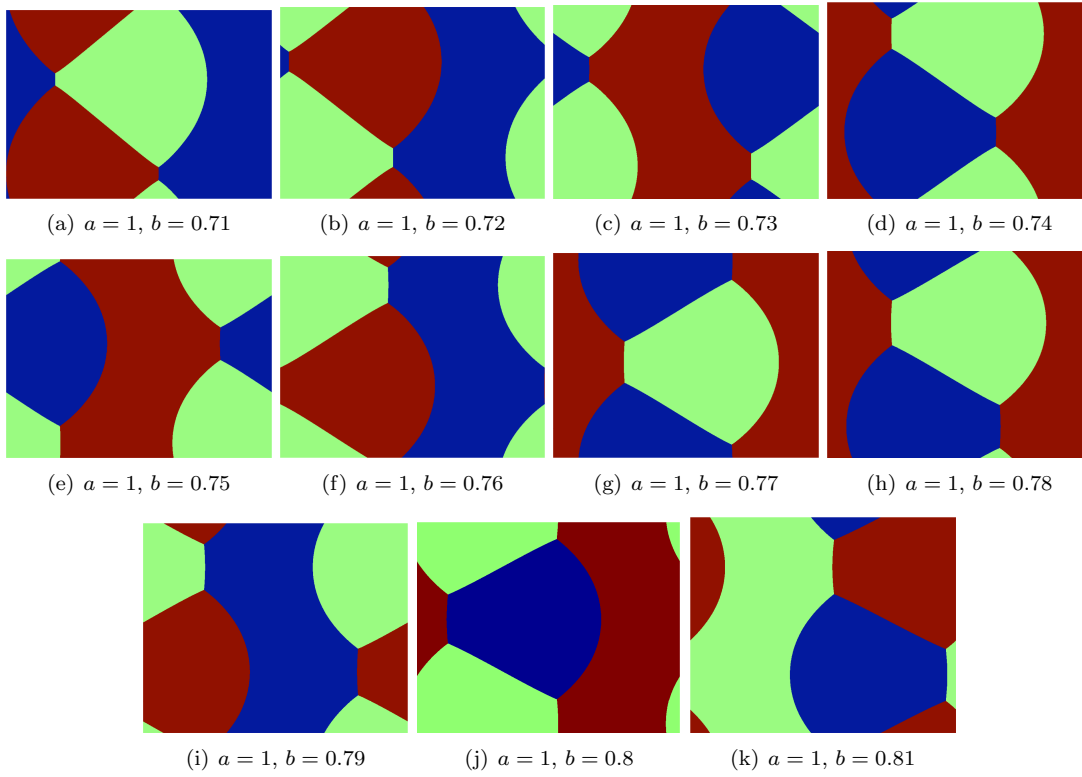
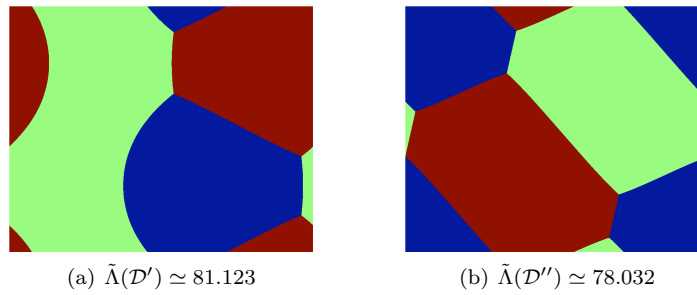


FIGURE 4.18 – 3-partitions obtained by the algorithm,  $b \in \{j/50, j = 17, \dots, 34\}$ .

are thus better. According to the values of  $b$ , the best candidates produced by the optimization algorithm are of two types :

- Partitions  $\mathcal{D}_3$  for  $b \leq 0.71$ . This does not contradict the conjecture since  $1/\sqrt{2} \simeq 0.707$  is very close to 0.71 and we have made several approximations.
- For  $0.72 \leq b \leq 0.81$ , it seems that we have a tiling with isometric hexagons.

Computations for larger  $b$  are given in Figure 4.23 and produce hexagon tilings of the torus  $T(1, b)$ . Such tilings will be discussed in Section 4.8. Figure 4.24 represents the graph of  $\tilde{\Lambda}_3$  for the best partitions we obtained according to  $b \in \{j/50, j = 15, \dots, 32\} \cup \{j/100, j = 66, \dots, 100\}$ .

FIGURE 4.19 – 3-partitions for  $b \in \{j/100, j = 71, \dots, 81\}$  with random initial conditions.FIGURE 4.20 – 3-partitions for  $b = 0.81$  with two random initial conditions.

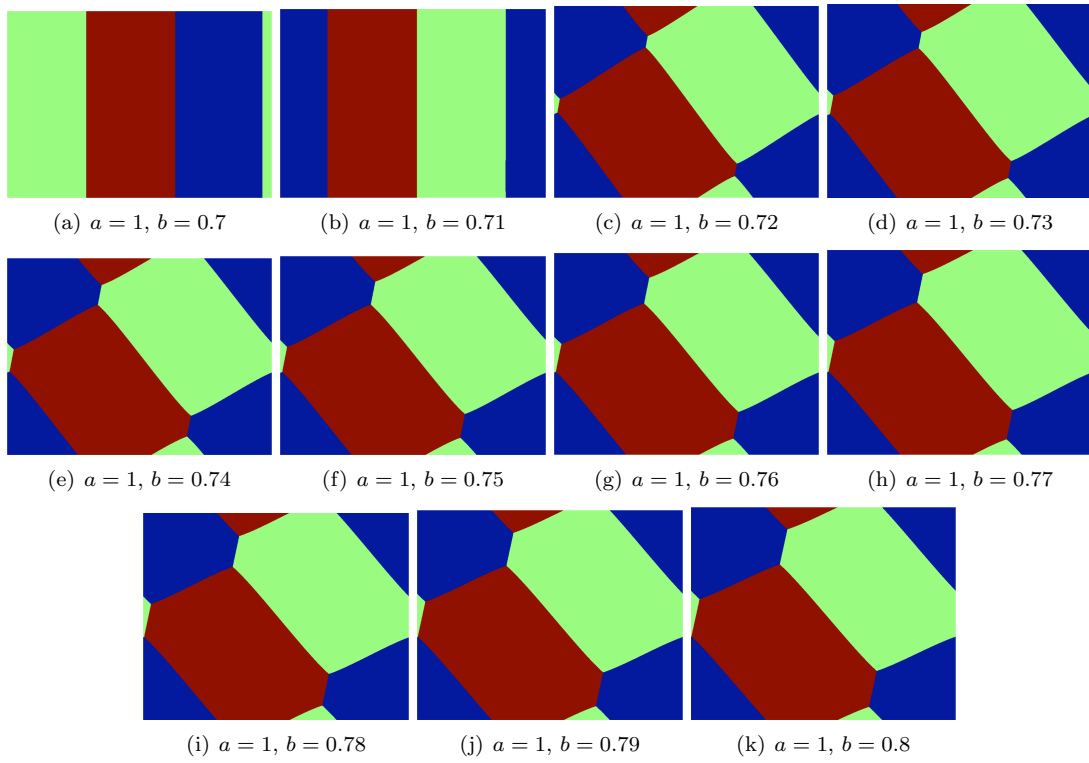


FIGURE 4.21 – 3-partitions for  $b \in \{j/100, j = 7, \dots, 8\}$  with imposed initial condition.

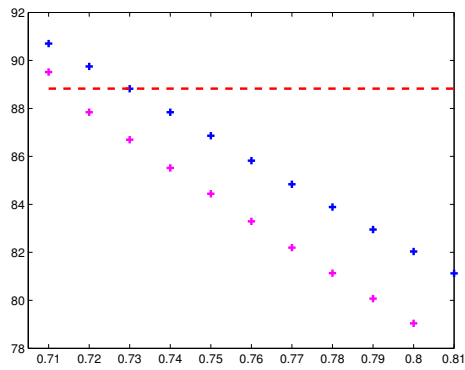
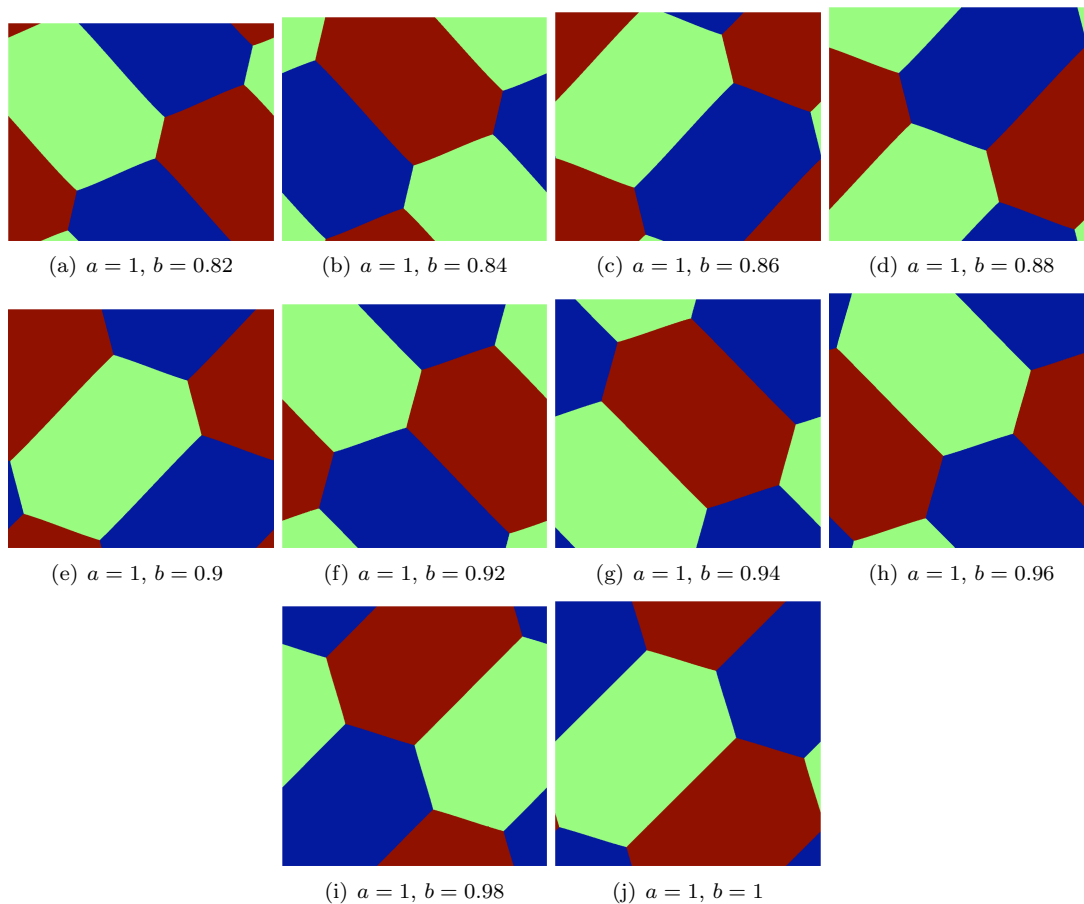


FIGURE 4.22 – Comparison of the energy of three types of 3-partitions for  $b \in \{j/100, j = 71, \dots, 81\}$  ( $\mathcal{D}_3$  in red,  $\mathcal{D}'$  in blue and  $\mathcal{D}''$  in magenta).

FIGURE 4.23 – 3-partitions for  $b \in \{j/50, j = 41, \dots, 50\}$ .

#### 4.7.2 4-partitions of the torus $T(1, b)$

Proposition 4.4.2 shows that we have  $b_4 = 1/2$ . Then, using also Proposition 4.3.4, we know that  $\mathcal{D}_4$  (see Definition 4.3.3) is a minimal 4-partition only for  $b \in (0, 1/2]$ . In any case, we have

$$\mathfrak{L}_4(T(1, b)) \leq 16\pi^2, \quad \forall b \in ]0, 1],$$

with equality if and only if  $b \in ]0, 1/2]$ . Figure 4.25 focuses on the transition  $b_4$ . The simulations, starting from random initial data, give the partitions  $\mathcal{D}_4$  for  $b \leq 0.51$ . For  $b = 0.52$ , we obtain a deformation the  $\mathcal{D}_4$ . Theoretically, we know that the minimal 4-partition is not bipartite for  $b > 1/2$ . The results are therefore not satisfying for  $b = 0.51$  and  $b = 0.52$ . Nevertheless, for  $b \geq 0.53$  (see Figures 4.25–4.27), we obtain new candidates constituted of four isometric hexagons. Such tilings will be studied theoretically in Section 4.8. When  $b$  increases, the hexagonal tiling seems to be stretched in the vertical direction. Note that when  $b = 1$ , we have a symmetry with respect to  $x = y$ .

The convergence of the algorithm to non-minimal partitions for  $b = 0.51$  and  $b = 0.52$  seems to be caused by a bad choice of the initial data. Figure 4.26 shows the results of other simulations for  $b = 0.51$  and  $b = 0.52$ . Rather than using a random initial data, these two simulations start from the matrix  $\Phi$  obtained after the second step of the previous simulation for  $b = 0.53$ . The optimization algorithm then gives 4-partitions with isometric hexagonal domains, whose energy is lower than the previous partitions.

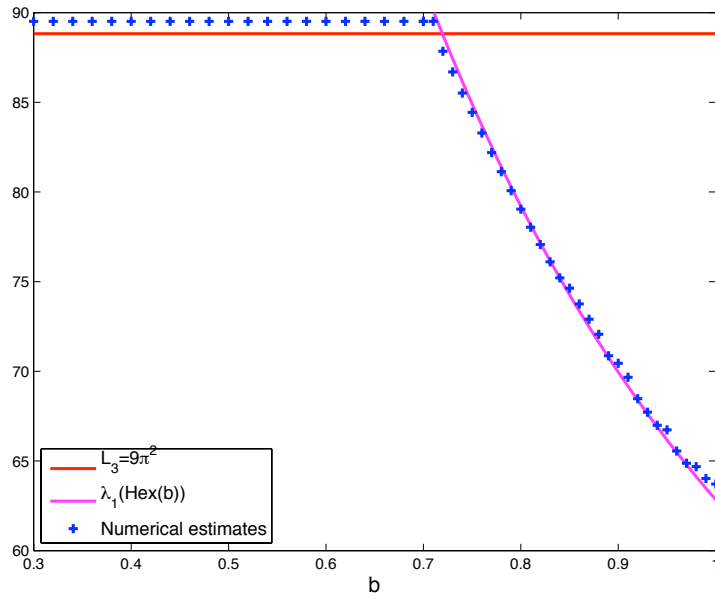


FIGURE 4.24 – Upper bounds of  $\mathfrak{L}_3(T(1,b))$  according to  $b$  ( $9\pi^2$  in red,  $\lambda_1(Hex)$  in magenta, numerical simulations in blue).

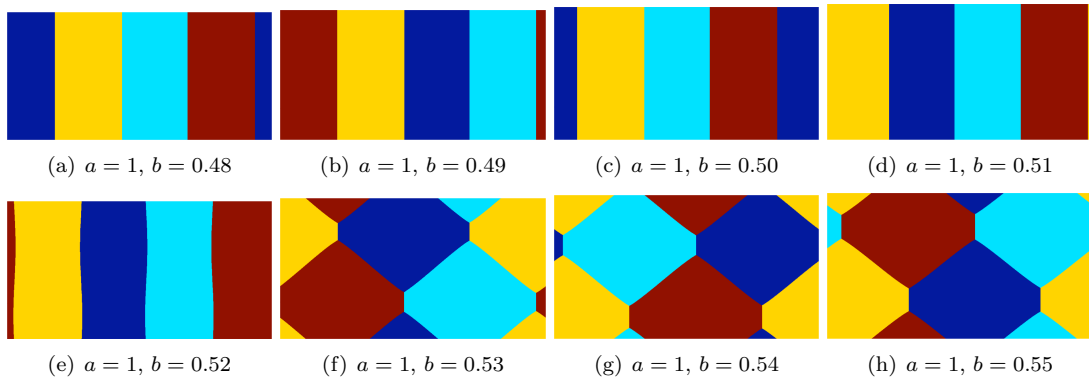


FIGURE 4.25 – 4-partition for  $b \in \{j/100, j = 48, \dots, 55\}$ .

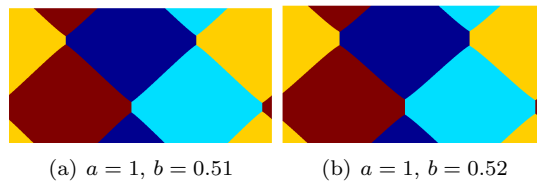


FIGURE 4.26 – 4-partition for  $b \in \{j/100, j = 51, 52\}$  with imposed initial condition.

Figure 4.28 gives the computed energy  $\tilde{\Lambda}_4$  for  $b \in \{j/100, j = 48, \dots, 100\}$  and compare it with  $16\pi^2$ .

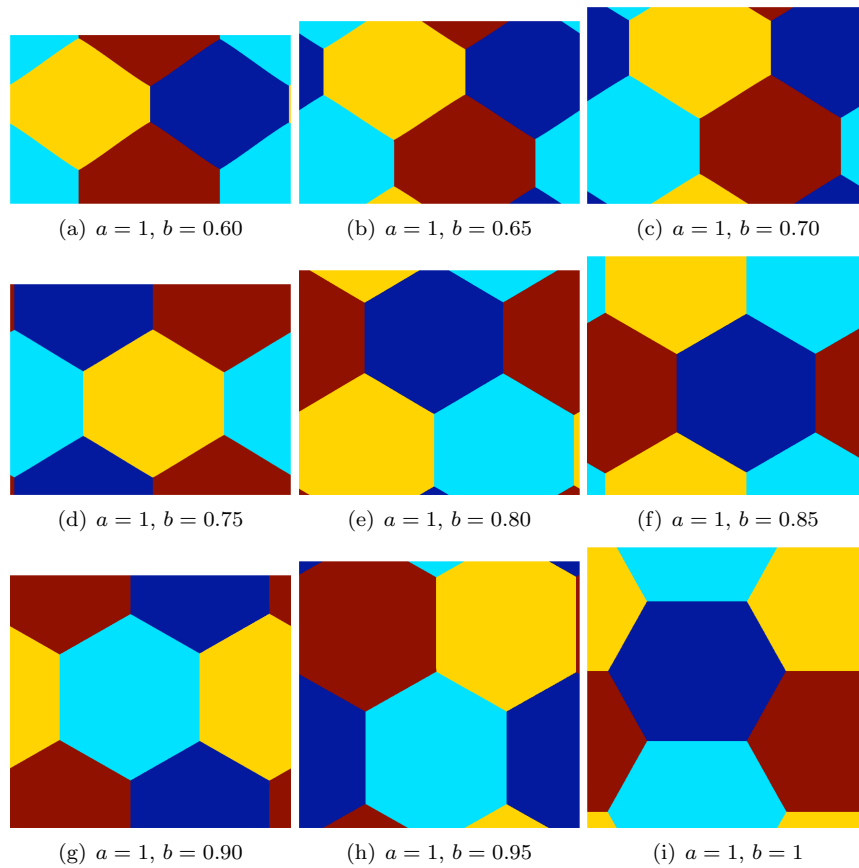


FIGURE 4.27 – 4-partition for  $b \in \{j/20, j = 12, \dots, 20\}$ .

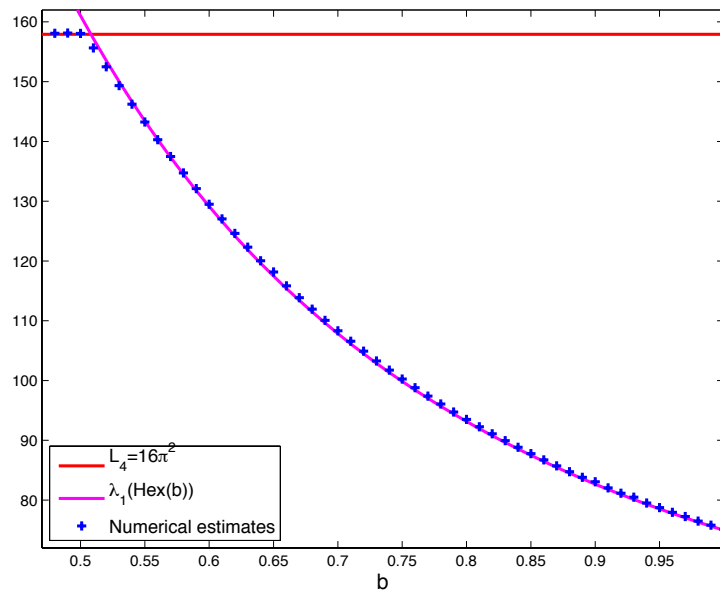


FIGURE 4.28 – Upper bounds of  $\mathfrak{L}_4(T(1, b))$  according to  $b \in \{j/100, j = 48, \dots, 100\}$  ( $16\pi^2$  in red,  $\lambda_1(Hex)$  in magenta, numerical simulations in blue)

### 4.7.3 5-partitions of the torus $T(1, b)$

Using Proposition 4.4.2, we have  $b_5 \geq 1/5$ . It was conjectured in Subsection 4.4.2 that  $b_5 = 1/\sqrt{6} \simeq 0.408$ . Using partition  $\mathcal{D}_5$  (see Definition 4.3.3), we still have

$$\mathfrak{L}_5(T(1, b)) \leq 25\pi^2, \quad \forall b \in (0, 1]. \tag{4.7.2}$$

Simulations for  $b \in \{j/50, j = 9, \dots, 20\}$  are represented in Figure 4.29 and we always find the  $\mathcal{D}_5$  partition. This supports the conjectured value for  $b_5$ .

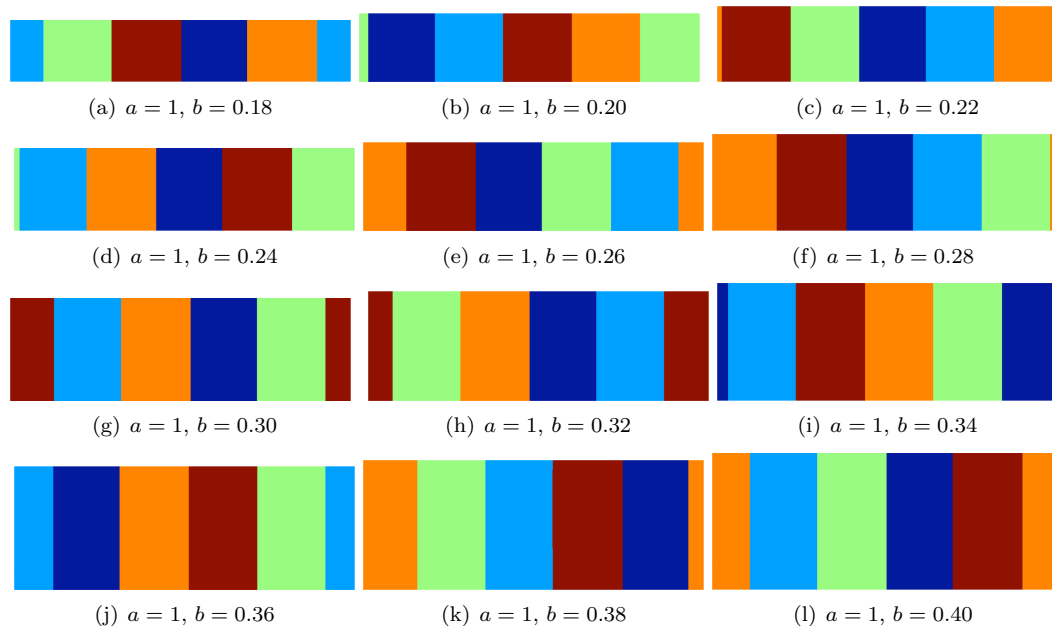


FIGURE 4.29 – 5-partitions for  $b \in \{j/50, j = 9, \dots, 20\}$ .

Starting from a random initial condition for  $\Phi$ , we find the partition  $\mathcal{D}_5$  for  $0.4 \leq b \leq 0.43$  and the partitions given in Figure 4.30 for  $b = 0.44, 0.45, 0.46$ .

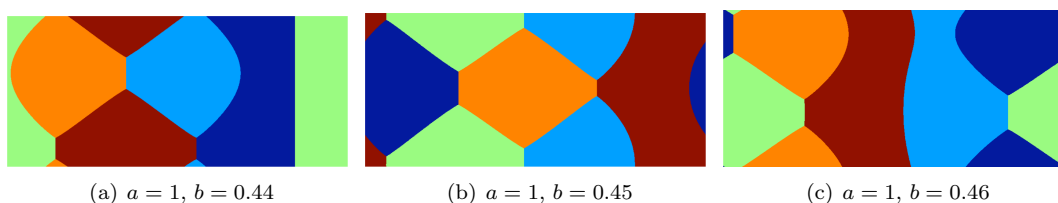
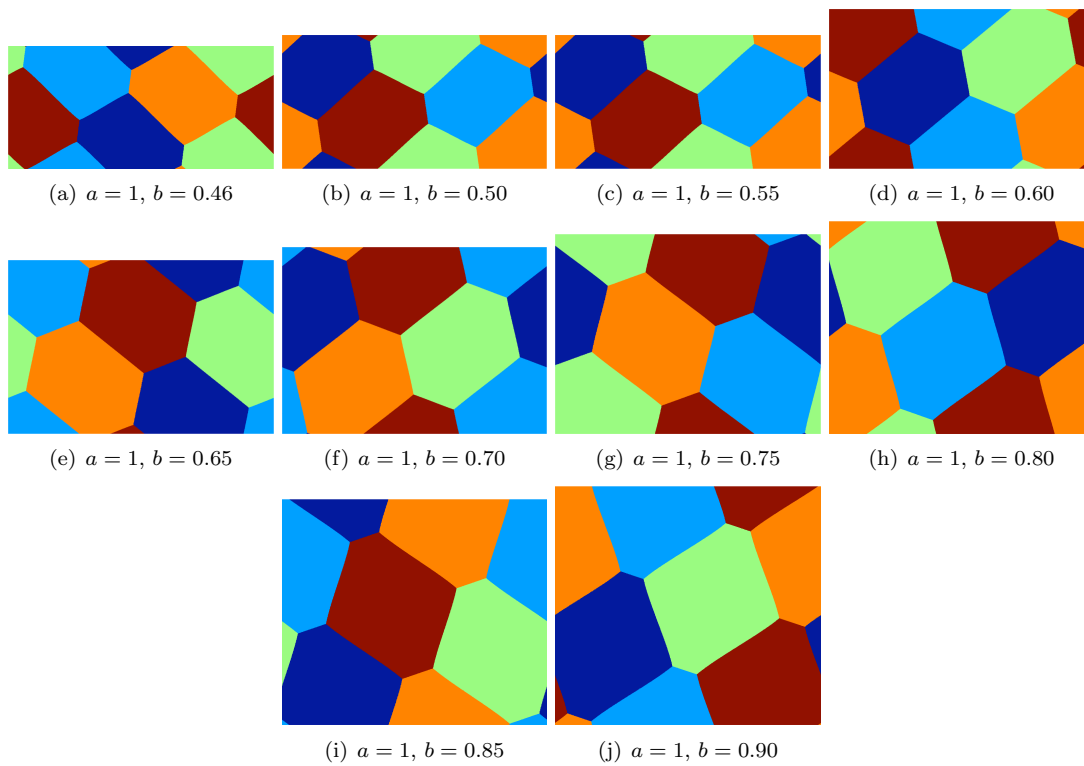
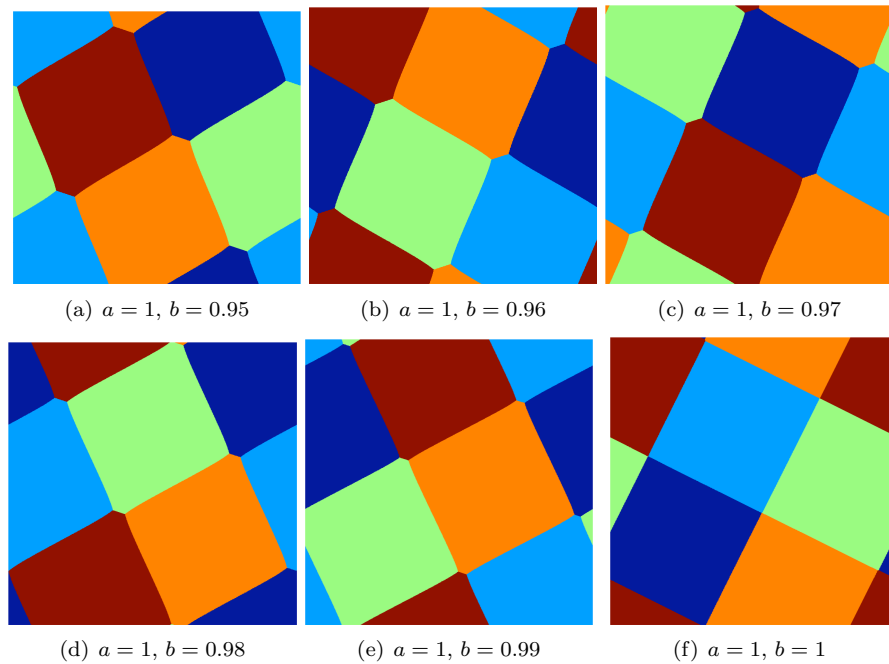


FIGURE 4.30 – Examples of 5-partitions.

For  $b \geq 0.46$ , we represent some numerical results in Figures 4.31 and 4.32. As for the 3-partition, the partitions with isometric subdomains produce better upper bounds than the partitions of Figure 4.30. The analysis of the hexagonal tiling will be addressed in Section 4.8.

If we use as initial condition for  $\Phi$  what we obtain in the case  $b = 0.46$  of Figure 4.31, we generate better candidates given in Figure 4.33.

Figure 4.34 gives upper-bounds for  $\mathfrak{L}_5(T(1, b))$  using the computations. Let us comment a little more Figure 4.32 for  $b \in \{j/100, j = 95, \dots, 100\}$ . The tiling with five hexagons seems to be deformed into a tiling with five squares as  $b$  tends to 1. These tilings will be described with more details in Section 4.8. In the following, we call *order* of a singular point the number of regular half-lines that meet at this point, that is to say the integer  $\nu$  in the notation of Definition 4.2.7. The mechanism of transition from a hexagonal tiling to a square tiling seems to

FIGURE 4.31 – 5-partition for  $b = 0.46$  and  $b \in \{j/20, j = 10, \dots, 18\}$ .FIGURE 4.32 – 5-partition for  $b \in \{j/100, j = 95, \dots, 100\}$ .

be the fusion of two singular points of order three into one singular point of order four. Since the equal angle property is always satisfied for the singular points of a minimal partition, this could be accomplished, assuming some continuity of the deformation, if all the regular parts of the boundary



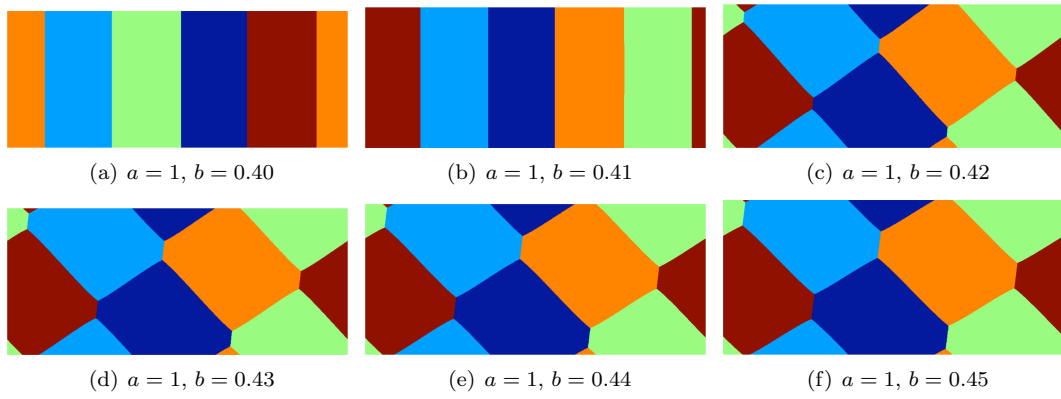


FIGURE 4.33 – 5-partition for  $b = 0.4, \dots, 0.45$  with imposed initial condition.

are straight lines. Therefore, if  $b$  is close to 1, the boundary of the minimal partition should contain curved regular part, and thus differ from a hexagonal tiling with straight edges.

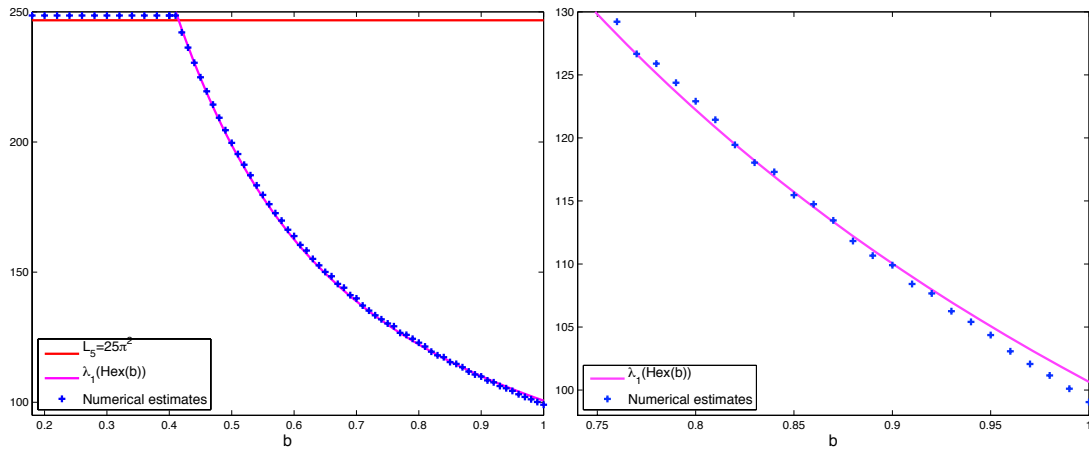


FIGURE 4.34 – Upper bounds of  $\mathfrak{L}_5(T(1, b))$  according to  $b \in \{j/100, j = 18, \dots, 100\}$  ( $25\pi^2$  in red,  $\lambda_1(Hex)$  in magenta, numerical simulations in blue).

## 4.8 Examples of partitions

### 4.8.1 Generalities

The partitions obtained in Section 4.7, with the help of the optimization algorithm, present some striking features. It seems that, if  $b$  is large enough, the optimization algorithm produces a  $k$ -partition of  $T(1, b)$  whose domains are isometric and have a hexagonal shape (except for  $k = 5$  and  $b = 1$ ). Furthermore, its boundary seems to consist of straight lines joining the singular points. We are not able to prove these properties. However, finding regular partitions of the torus that satisfy them, as well as the equal angle property at each singular point, is a purely geometrical problem.

We can therefore determine partitions closely resembling those of Section 4.7. While we are not able to prove that they are minimal, they provide at least upper bounds for  $\mathfrak{L}_k(T(1, b))$ . Using a finite element method to compute the lowest eigenvalue of the Dirichlet Laplacian on the polygonal tiling domain, we estimate numerically these upper-bounds and compare them to the former ones. This is done with a better accuracy than for the partitions in Section 4.7.

Let us note that the partitions we are looking for are well known geometrical objects, called *tilings* of the torus (see e.g. [8]). In the context of these geometric studies, a singular point of the boundary is usually called a *vertex*, a regular portion of the joining two vertices is called an *edge*, and a domain is called a *face*. For the sake of brevity, we will use this terminology in the following.

In the rest of this section, we construct tilings of  $T(1, b)$  with  $k$  faces, where  $0 < b \leq 1$ , and  $k \in \{3, 4, 5\}$ . We consider candidates  $\mathcal{D}$  that satisfy the following properties.

- The faces of  $\mathcal{D}$  are isometric hexagons.
- At each vertex of  $\mathcal{D}$ , the edges meet with equal angles.

In our study, we will make additional hypotheses, inspired by the the computations in Section 4.7. They will be made explicit when they are used.

### 4.8.2 Hexagonal tilings

#### Topological parameters

As suggested by the computation in Section 4.7, we focus on tilings of the torus by hexagons. Let us fix  $0 < b \leq 1$ , and an integer  $k$ . Let us assume that there exists a tiling  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$  of  $T(1, b)$  by hexagons. We now explain how to give a precise description of such a tiling. As before, we consider  $T(1, b)$  as the quotient of the plane  $\mathbb{R}^2$  by the rectangular lattice  $\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$ . We denote by  $\Pi : \mathbb{R}^2 \mapsto T(1, b)$  the canonical projection map. The tiling  $\mathcal{D}$  is lifted, through  $\Pi$ , into a tiling of the plane, that we denote by  $\widehat{\mathcal{D}}$ . More precisely, for any  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\Pi^{-1}(D_i)$  consists in an infinite number of connected components. The set of all the connected components of all the sets  $\Pi^{-1}(D_i)$ , for  $1 \leq i \leq k$ , is the tiling  $\widehat{\mathcal{D}}$ . Each domain of  $\widehat{\mathcal{D}}$  is a hexagon.

Let us consider a domain of the tiling  $\widehat{\mathcal{D}}$ , denoted by *Hex*, represented on Figure 4.35.

Since *Hex* is a tiling domain, we can divide its sides in pairs of parallel segments of the same length :

- $A_1A_2$  and  $A_4A_5$ , of length  $c_1$ ,
- $A_2A_3$  and  $A_5A_6$ , of length  $c_2$
- $A_3A_4$  and  $A_1A_6$ , of length  $c_3$ .

We denote by  $\mathbf{v}_1$  (resp.  $\mathbf{v}_2$ ) the vector  $\overrightarrow{A_1A_5}$  (resp.  $\overrightarrow{A_1A_3}$ ).

Let us denote by  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  and  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  the canonical basis of  $\mathbb{R}^2$ . Since, by construction, the lattice  $\mathbb{Z}\mathbf{v}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{v}_2$  is projected by  $\Pi$  to a lattice of the torus  $T(1, b)$ ,  $\mathbb{Z}\mathbf{e}_1 + \mathbb{Z}(b\mathbf{e}_2)$  must be a sublattice of  $\mathbb{Z}\mathbf{v}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{v}_2$ . Let us denote by  $S = (s_{ij}) \in M(2, \mathbb{Z})$  the matrix that satisfies

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 &= s_{1,1}\mathbf{v}_1 + s_{2,1}\mathbf{v}_2, \\ b\mathbf{e}_2 &= s_{1,2}\mathbf{v}_1 + s_{2,2}\mathbf{v}_2. \end{cases} \quad (4.8.1)$$

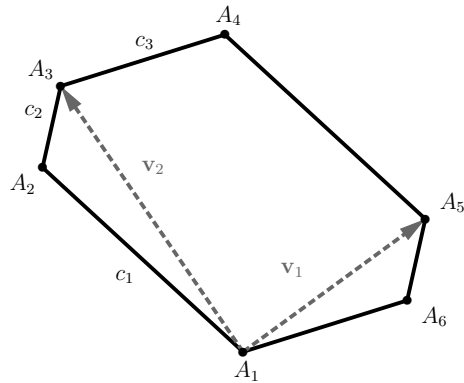


FIGURE 4.35 – A hexagonal tiling domain.

Let us call  $Par$  the parallelogram spanned by the vectors  $\mathbf{v}_1$  and  $\mathbf{v}_2$ . It has the same area as  $Hex$ . The area of  $Par$  is easy to compute with a determinant :

$$|Par| = |\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)| = b \det(S^{-1}) \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \frac{b}{\det(S)}.$$

Let us now call  $k$  the number of domains of  $\mathcal{D}$ , the original tiling of  $T(1, b)$ . Each domain of the original partition  $\mathcal{D}$  has area  $|Hex|$ , and therefore

$$k|Hex| = b. \tag{4.8.2}$$

We obtain  $\det(S) = k$ .

The matrix  $S$  gives a topological description of the tiling  $\mathcal{D}$ .

**Geometrical parameters**

We now give geometrical conditions that  $Hex$  must satisfy in order to be a tiling domain of  $T(1, b)$ .

Let us go back to Figure 4.35. We denote by  $\theta$  the angle  $(\mathbf{e}_1, \overrightarrow{A_2A_1})$ . Let us consider the vertex  $A_2$  as the point of origin, denoted by  $O$ . Let us consider all the edges meeting at  $O$  (see Figure 4.36).

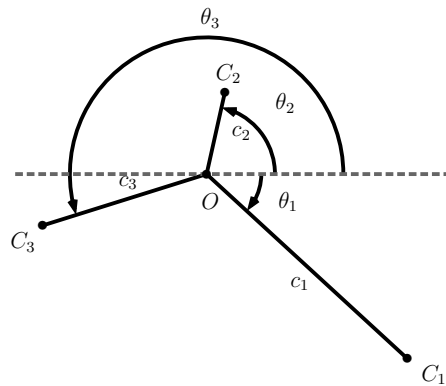


FIGURE 4.36 – Geometrical parameters of a tiling.

The equal angle property at  $O$  implies

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta, \\ \theta_2 = \theta + \frac{2\pi}{3}, \\ \theta_3 = \theta + \frac{4\pi}{3}. \end{cases}$$

With this notation, we can write the vectors  $\mathbf{v}_1$  and  $\mathbf{v}_2$  in the canonical coordinates :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} c_2 \cos(\theta_2) - c_3 \cos(\theta_3) \\ c_2 \sin(\theta_2) - c_3 \sin(\theta_3) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} c_2 \cos(\theta_2) - c_1 \cos(\theta_1) \\ c_2 \sin(\theta_2) - c_1 \sin(\theta_1) \end{pmatrix}.$$

The system (4.8.1) becomes, in the canonical coordinates,

$$\begin{cases} -s_{2,1} \cos(\theta_1) c_1 + (s_{2,1} + s_{1,1}) \cos(\theta_2) c_2 - s_{1,1} \cos(\theta_3) c_3 = 1, \\ -s_{2,1} \sin(\theta_1) c_1 + (s_{2,1} + s_{1,1}) \sin(\theta_2) c_2 - s_{1,1} \sin(\theta_3) c_3 = 0, \\ -s_{2,2} \cos(\theta_1) c_1 + (s_{2,2} + s_{1,2}) \cos(\theta_2) c_2 - s_{1,2} \cos(\theta_3) c_3 = 0, \\ -s_{2,2} \sin(\theta_1) c_1 + (s_{2,2} + s_{1,2}) \sin(\theta_2) c_2 - s_{1,2} \sin(\theta_3) c_3 = b. \end{cases} \quad (4.8.3)$$

If we were able, for a given  $b \in ]0, 1]$ , to determine all the parameters  $\theta \in [0, 2\pi[$  and  $(s_{1,1}, s_{1,2}, s_{2,1}, s_{2,2}, s_{1,1}) \in \mathbb{Z}^4$  such that there exist  $c_1, c_2$ , and  $c_3$  that satisfy the system (4.8.3) with  $c_i > 0$  for  $i \in \{1, 2, 3\}$ , we could describe all the tilings of  $T(1, b)$  by isometric hexagons. However, this problem seem to be difficult, and we will not attempt to solve it.

We will instead use the system (4.8.3) to generate examples of  $k$ -partitions of a torus by isometric hexagons. We start by fixing the matrix  $S$ . We are guided in our choice by the pictures obtained in Section 4.7. Then, we use the angle  $\theta$  as a parameter. For a given value of  $\theta$ , we use the first three lines of (4.8.3) to compute  $c_1, c_2$  and  $c_3$ . This can be done assuming that the matrix

$$Q(S, \theta) = \begin{pmatrix} -s_{2,1} \cos(\theta) & (s_{2,1} + s_{1,1}) \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -s_{1,1} \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \\ -s_{2,1} \sin(\theta) & (s_{2,1} + s_{1,1}) \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -s_{1,1} \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \\ -s_{2,2} \cos(\theta) & (s_{2,2} + s_{1,2}) \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -s_{1,2} \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

is invertible. We then use the last line of System (4.8.3) to compute  $b$ .

Let use note that the method described above produces a tiling of a torus if the following conditions are met. For the chosen  $S$  and  $\theta$ , the matrix  $Q(S, \theta)$  must be invertible, and, denoting by  $(c_1, c_2, c_3)$  the solution of the system formed by the fist three lines of (4.8.3), we must have  $c_i > 0$  for all  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Furthermore, the fourth line of (4.8.3) must give a  $b$  that belongs to  $]0, 1]$ .

In the examples that we will consider, we only obtain tilings of the torus by hexagons associated with a given matrix  $S$  for a limited range of value of the parameter  $\theta$ . To this limited range of  $\theta$  corresponds a limited range of  $b$ 's such that there exists a tiling of  $T(1, b)$  by hexagons associated with the matrix  $S$ . All this will be made explicit in the following subsection in the case of 3-partitions and 5-partitions. We will treat the simpler case of 4-partitions by a different method.

### 4.8.3 Hexagonal 3-partitions

We use the notation of Subsection 4.8.2. As suggested by the numerical results in Subsection 4.7.1, we assume that

$$S = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} \\ s_{2,1} & s_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.8.4)$$

Table 4.1, computed with the Matlab software, gives  $c_1, c_2, c_3$ , and  $b$  as functions of  $\theta$ . The corresponding 3-partitions of  $T(1, b)$  are represented in Figure 4.37.

In practice, we are interested in a bounded range of values for  $\theta$  gives positive  $c_1, c_2, c_3$ , and  $b$ , with  $b \leq 1$ . We will now determine explicitly this range, denoted  $]\theta_3^{min}, \theta_3^{max}[$ .

A first bound is obtained by considering a suitable tiling of  $T(1, 1)$ . In Section 4.7, we have obtained numerically a 3-partition of  $T(1, 1)$  that seems to be a tiling by hexagons. Furthermore, each tiling domain seems to have an axis of symmetry, parallel to the line  $x + y = 0$ . Assuming such a tiling exists, let us try to determine the corresponding  $\theta, c_1, c_2$ , and  $c_3$ . Let us consider a hexagonal tiling domain. We say that the sides of this domain that are parallel to the line  $x + y = 0$  have length  $c_1$ . We can chose a point of origin such that  $\theta = -\pi/4$  (see Figure 4.38). By symmetry, we have  $c_2 = c_3$ . Let us now consider the corresponding hexagonal tiling domain, represented on Figure 4.39. Using the notation of this figure, we have  $L = c_1, H = 2 \sin(\pi/3) c_2$ ,

$\theta$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$b$
-0.785	0.571	0.272	0.272	1
-0.775	0.550	0.239	0.284	0.925
-0.764	0.531	0.208	0.295	0.854
-0.754	0.513	0.180	0.305	0.790
-0.743	0.498	0.153	0.314	0.729
-0.732	0.484	0.127	0.323	0.672
-0.722	0.471	0.103	0.330	0.619
-0.712	0.460	0.803	0.337	0.569
-0.701	0.450	0.586	0.343	0.522
-0.691	0.441	0.381	0.349	0.478
-0.681	0.433	0.019	0.354	0.436
-0.670	0.425	0	0.358	0.396

TABLE 4.1 – Hexagonal tilings with three faces as a function of  $\theta$ .

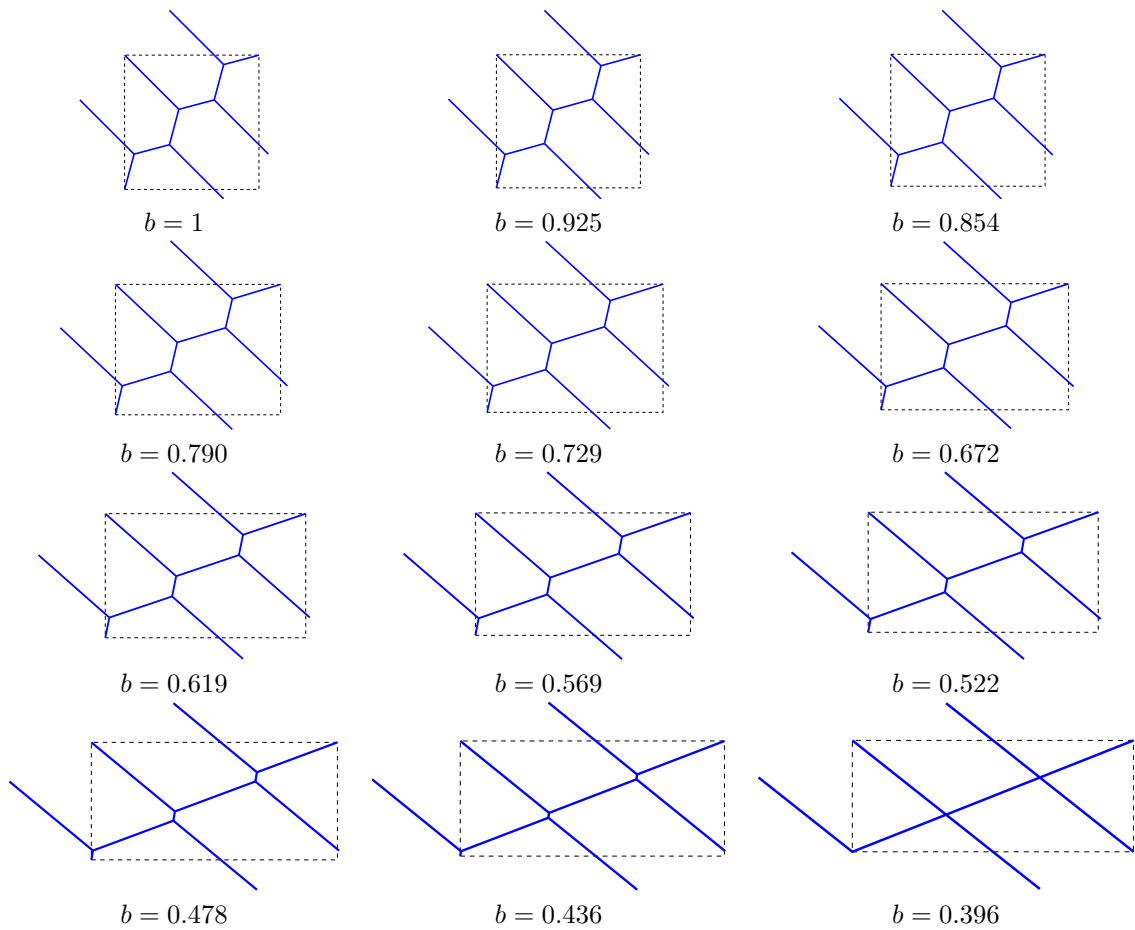
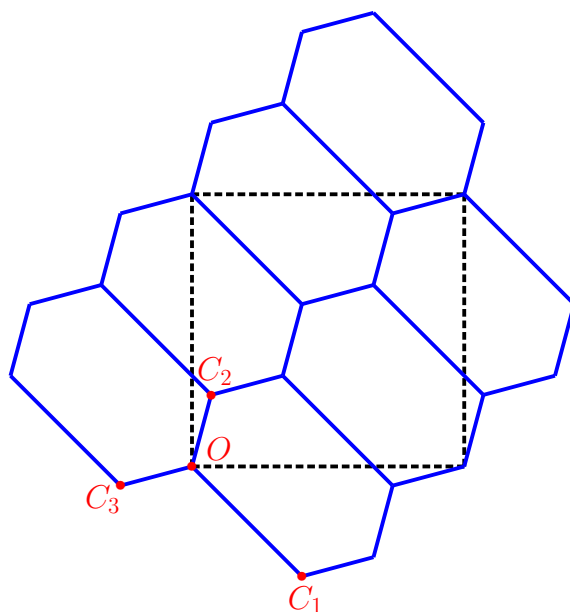
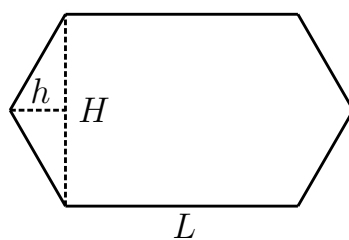


FIGURE 4.37 – Hexagonal tilings of the torus  $T(1, b)$  with three faces.

FIGURE 4.38 – Tiling of  $T(1,1)$  by three hexagons.FIGURE 4.39 – A hexagonal tiling domain of  $T(1,1)$ , for  $k = 3$ .

and  $h = c_1 \cos(\pi/3)$ . Figure 4.38 shows that we have

$$3H = \sqrt{2},$$

and

$$2L + 2h = \sqrt{2}.$$

We find

$$H = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Since  $H = 2 \tan(\pi/3) h$ , we have

$$h = \frac{1}{3\sqrt{6}}.$$

Finally,

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{6}}.$$

This gives the values

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{6}},$$

and

$$c_2 = c_3 = \frac{1}{3\sqrt{6}}.$$

We can check that these values are indeed solutions of the system (4.8.3), with  $\theta = -\pi/4$  and  $b = 1$ . This shows that a tiling satisfying our hypothesis exist. We therefore choose

$$\theta_3^{min} = -\pi/4,$$

as a bound for the range of values of  $\theta$  that we will explore.

The other bound can be determined by considering the last tiling represented in Figure 4.37. It is a degenerate case, in which the torus is covered by three parallelograms. It is easy to compute

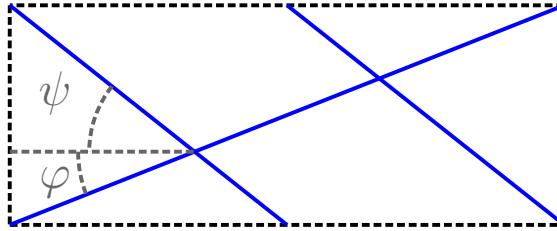


FIGURE 4.40 – Tiling of  $T(1, b_3^c)$  by three parallelograms.

the corresponding critical length  $b_3^c$ . Let us consider Figure 4.40. Using the notation on this figure, we have  $\tan(\varphi) = b_3^c$  and  $\tan(\psi) = 2b_3^c$ . We also have  $\varphi + \psi = \pi/3$ . The addition formula for the tangent function yields

$$\sqrt{3} = \frac{3b_3^c}{1 + 2(b_3^c)^2},$$

and finally

$$b_3^c = \frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{4}. \tag{4.8.5}$$

The corresponding  $\theta$  is equal to  $-\psi$ . Therefore, we have

$$\theta_3^{max} = -\arctan\left(\frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{2}\right).$$

Let us note that for  $b < b_3^c$ , we cannot find a hexagonal tiling of  $T(1, b)$  associated with the matrix  $S$  defined by Equation (4.8.4). However, since  $b_3^c$  is smaller than the conjectured transition value  $1/\sqrt{2}$ , we find a new upper bound on  $\mathfrak{L}_3(T(1, b))$  for  $b \in [1/\sqrt{2}, 1]$ . The numerical computation of this upper bound as a function of  $b$  is shown on Figure 4.24.

We now summarize the above discussion in a proposition.

**Proposition 4.8.1.** *Let us note*

$$b_3^c = \frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{4}.$$

For  $b_3^c < b \leq 1$ , there exists a tiling of  $T(1, b)$  by three hexagons, whose associated matrix is

$$S = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} \\ s_{2,1} & s_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Let us note  $Hex_{1,b}^3$  the corresponding hexagonal tiling domain. We have, for  $b \in ]b_3^c, 1]$ ,

$$\mathfrak{L}_3(T(1, b)) \leq \min(9\pi^2, \lambda_1(Hex_{1,b}^3)). \quad (4.8.6)$$

**Remark 4.8.2.** *The numerical computations of Figure 4.24 indicate that when  $b$  is greater than  $1/\sqrt{2}$  but close to  $1/\sqrt{2}$ ,  $\lambda_1(Hex_{1,b}^3)$  is greater than  $9\pi^2$ . An hexagonal tiling of the type we have considered is therefore not an optimal partition of  $T(1, b)$  for  $b$  close to the conjectured transition value. This supports the idea that, for  $b$  close to  $1/\sqrt{2}$ , the boundary of a minimal partition is not made uniquely of straight lines joining the singular points, but contains curved regular parts. In support of this idea, Figure 4.24 also shows that for  $b$  close to  $1/\sqrt{2}$ , the numerical simulations give candidates with an energy lower than  $\lambda_1(Hex_{1,b}^3)$ .*

#### 4.8.4 Hexagonal 4-partitions

In the case  $k = 4$ , the numerical computations in Subsection 4.7.2 suggest, as a candidate for a minimal partition, a very simple tiling of the torus by four hexagons. It is presented on Figure 4.41. It is easy to determine the shape of the corresponding hexagonal domain, represented on Figure

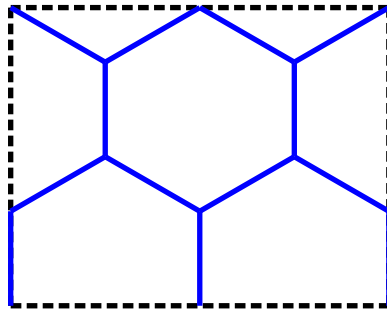


FIGURE 4.41 – Tiling of the torus by 4 hexagons.

4.42. We find immediately

$$L = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

and

$$h = \frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

Considering Figure 4.41, we see that  $b = 2(H + h)$ . A tiling of this type is therefore possible only if  $b$  is greater than the critical value

$$b_4^c = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$



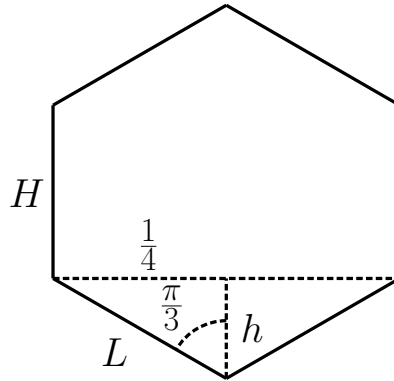


FIGURE 4.42 – A hexagonal tiling domain of  $T(1, b)$ , for  $k = 4$ .

**Proposition 4.8.3.** *Let us note*

$$b_4^c = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

For  $b_4^c < b \leq 1$ , there exists a tiling of  $T(1, b)$  by four hexagons, with a pair of vertical sides. Let us note  $Hex_{1,b}^4$  the corresponding hexagonal tiling domain. We have, for  $b \in ]b_4^c, 1]$ ,

$$\mathfrak{L}_4(T(1, b)) \leq \min(16\pi^2, \lambda_1(Hex_{1,b}^4)). \tag{4.8.7}$$

Since  $b_4^c < b_4 = 1/2$ , we obtain a new upper bound on  $\mathfrak{L}_4(T(1, b))$  for  $b \in [1/2, 1]$ . The numerical computation of this upper bound as a function of  $b$  is shown on Figure 4.28. Remark 4.8.2 also applies here, with the additional observation that  $16\pi^2$  cannot be the minimal energy for  $b > 1/2$  by Proposition 4.3.4.

### 4.8.5 Hexagonal 5-partitions

We use again the notation of Subsection 4.8.2. In the case  $k = 5$ , the numerical computations of Section 4.7.3 suggest

$$S = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} \\ s_{2,1} & s_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.8.8}$$

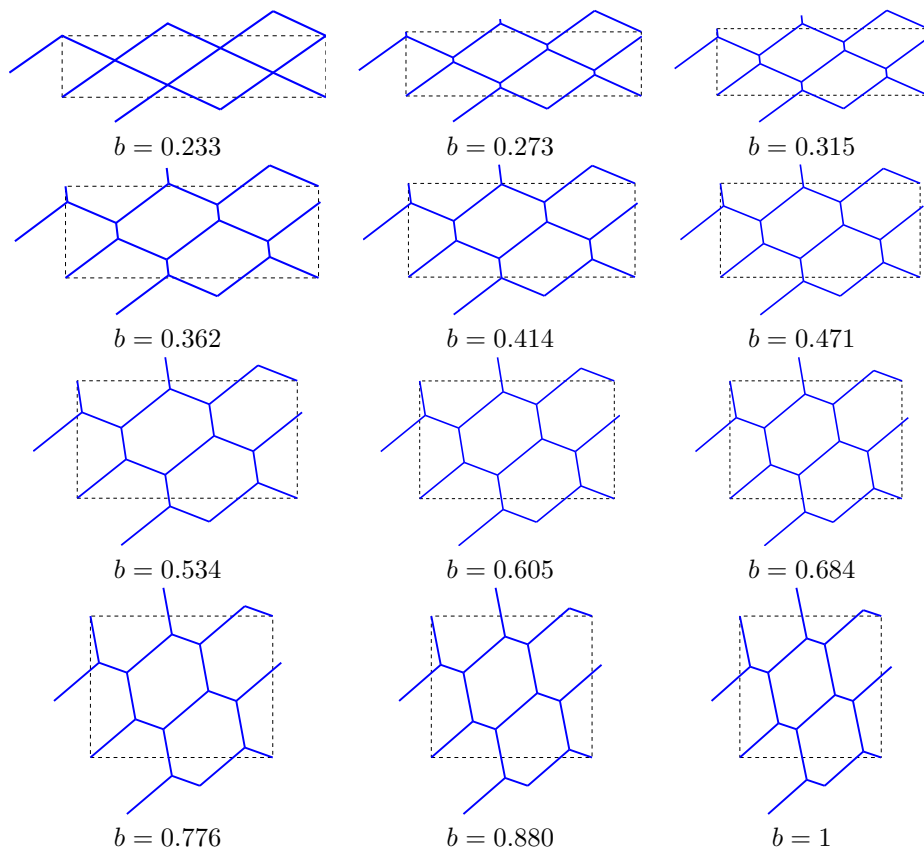
Table 4.2 gives  $c_1, c_2, c_3$  and  $b$  as functions of  $\theta$ . The corresponding 3-partitions of  $T(1, b)$  are

$\theta$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$b$
-1.484	0	0.244	0.220	0.233
-1.473	0.019	0.248	0.218	0.273
-1.463	0.040	0.253	0.214	0.315
-1.452	0.627	0.259	0.210	0.362
-1.442	0.875	0.266	0.204	0.414
-1.432	0.115	0.274	0.199	0.471
-1.421	0.145	0.284	0.192	0.534
-1.411	0.179	0.295	0.183	0.605
-1.400	0.217	0.308	0.174	0.684
-1.390	0.260	0.324	0.163	0.776
-1.379	0.309	0.343	0.149	0.880
-1.369	0.365	0.365	0.134	1

TABLE 4.2 – Hexagonal tilings with five faces as a function of  $\theta$ .

represented in Figure 4.43.

We are again interested in a bounded range of values for  $\theta$ , that we denote by  $[\theta_5^{min}, \theta_5^{max}]$ .

FIGURE 4.43 – Hexagonal tilings of the torus  $T(1, b)$  with five faces.

The first picture of Figure 4.43 shows a degenerate case : a tiling of the torus by five parallelograms. We can directly compute the corresponding critical value for  $b$ . Let us consider Figure 4.44. Using the notation on this figure, we have  $\tan(\varphi) = 3b_5^\xi$ ,  $\tan(\psi) = 2b_5^\xi$ , and  $\varphi + \psi = \pi/3$ . We

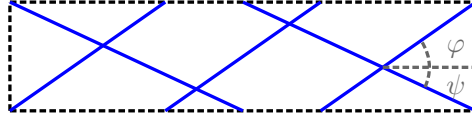


FIGURE 4.44 – Tiling of  $T(1, b_5^\xi)$  by five parallelograms.

obtain

$$\frac{5b_5^\xi}{1 - 6(b_5^\xi)^2} = -\sqrt{3},$$

and finally

$$b_5^\xi = \frac{\sqrt{97} - 5}{12\sqrt{3}}.$$

With our notation,  $\theta = -\psi$ . Therefore

$$\theta_3^{min} = -\arctan\left(\frac{\sqrt{97} - 5}{4\sqrt{3}}\right).$$

The case  $b = 1$  gives a second bound. Numerically (see Table 4.2), it seems that, in that case,  $c_1 = c_2$ . Let us assume that this is the case, and let us try to derive the values of  $c_1$ ,  $c_3$ , and  $\theta$  from this hypothesis. Considering the second and third equations of System (4.8.3), we see that  $c_1 = c_2 \neq 0$  is possible only if the determinant

$$\begin{vmatrix} \sin(\theta_1) + 2\sin(\theta_2) & -3\sin(\theta_3) \\ -\sin(\theta_1) + \cos(\theta_2) & \cos(\theta_3) \end{vmatrix}$$

is zero.

This gives the equation

$$3\sqrt{3}\tan(\theta)^2 + 30\tan(\theta) + 13\sqrt{3} = 0.$$

Taking into account the condition  $-\pi/2 < \theta < 0$ , we find

$$\tan(\theta) = -\frac{5}{\sqrt{3}} - 2. \tag{4.8.9}$$

We finally obtain

$$\theta_5^{max} = -\arctan\left(2 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right).$$

The values of  $c_1$ ,  $c_2$ , and  $c_3$  can then be computed. We have assumed  $c_1 = c_2$ . We have

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \ker \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}\cos(\theta) & 3\sin(\theta) + 3\sqrt{3}\cos(\theta) \\ -5\cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta) & -\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

This implies

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \ker \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 3\tan(\theta) + 3\sqrt{3} \\ -5 - \sqrt{3}\tan(\theta) & -1 + \sqrt{3}\tan(\theta) \end{pmatrix}.$$

Using Equation (4.8.9), we conclude that there exists a constant  $a_0 > 0$  such that

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 6 + 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

The area of the hexagonal tiling domain can therefore be written

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) c_1^2 + 2c_1 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) c_3 = 9a_0^2 (2 + \sqrt{3}).$$

Since the area of the tiling domain is  $1/5$ , we finally get

$$c_1 = c_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{15} \sqrt{2 + \sqrt{3}}},$$

and

$$c_3 = \frac{1}{\sqrt{15} \sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$$

It can be shown that  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ , and  $\theta_5^{max}$  satisfy System (4.8.3) for  $b = 1$ . This shows that the torus  $T(1, 1)$  is indeed covered by five copies of the corresponding hexagonal tiling domain.

Let us summarize our results in the case  $k = 5$  in a proposition.

**Proposition 4.8.4.** *Let us note*

$$b_5^c = \frac{\sqrt{97} - 5}{12\sqrt{3}}.$$

*For  $b_5^c < b \leq 1$ , there exists a tiling of  $T(1, b)$  by three hexagons, whose associated matrix is*

$$S = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} \\ s_{2,1} & s_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Let us note  $Hex_{1,b}^5$  the corresponding hexagonal tiling domain. We have, for  $b \in ]b_5^c, 1]$ ,*

$$\mathfrak{L}_5(T(1, b)) \leq \min(25\pi^2, \lambda_1(Hex_{1,b}^5)). \quad (4.8.10)$$

Since  $b_5^c < 1/\sqrt{6}$ , we obtain a new upper bound on  $\mathfrak{L}_4(T(1, b))$  for  $b \in [1/\sqrt{6}, 1]$ . The numerical computation of this upper bound as a function of  $b$  is shown on Figure 4.34. Remark 4.8.2 also applies to this case.

#### 4.8.6 A square 5-partition

When looking for the minimal 5-partition  $T(1, 1)$ , the algorithm of Section 4.6 gives the result presented on Figure 4.45. As shown on Figure 4.46, this figure can be seen as a tiling of  $T(1, 1)$  by

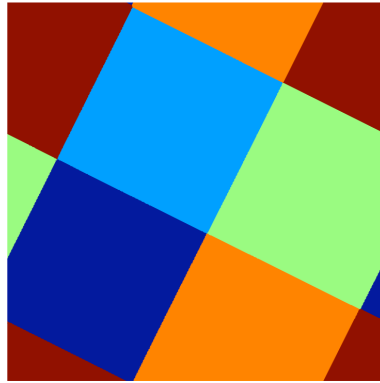


FIGURE 4.45 – 5-partition of  $T(1, 1)$  (result of the optimization algorithm).

five squares. We observe that each domain of the partition is a neighbor of every other domains. This implies that the domains of this partition cannot be colored with less than five colors, if we want two neighboring domains to have different colors. This partition is not bipartite, and therefore not nodal.

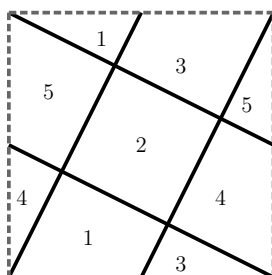


FIGURE 4.46 – Tiling of  $T(1, 1)$  by five squares.

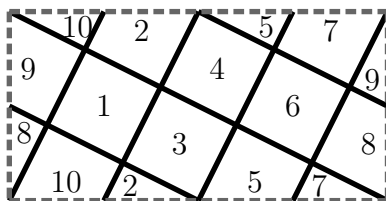


FIGURE 4.47 – Tiling of  $T(2, 1)$  by ten squares.

Let us now consider the 10-partition obtained after lifting the 5-partition of Figure 4.46 on the torus  $T(2, 1)$ . It is represented on Figure 4.47. This partition is clearly not bipartite. For instance, the domain (labelled by) 1 on Figure 4.47 is a neighbor of domain 2, which is a neighbor of domain 3, which is itself a neighbor of domain 1. At least three colors are therefore needed to color this partition in such a way that two neighboring domains have different colors. In particular, this partition cannot be nodal.

Finally, let us consider the 20-partition obtained after lifting the 5-partition of Figure 4.46 on the torus  $T(2, 2)$ . It is represented on Figure 4.48. This last partition is obviously bipartite. To see

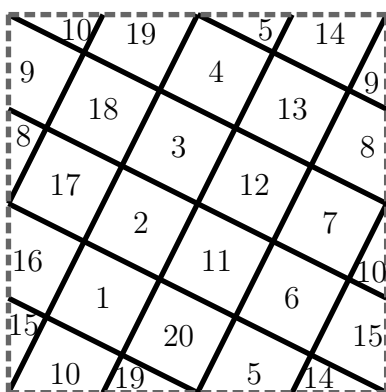


FIGURE 4.48 – Tiling of  $T(2, 2)$  by twenty squares.

it we can, on Figure 4.48, color the domains with an even index using one color, and those with an odd index using another.

The 20-partition of  $T(2, 2)$  seen on Figure 4.48 is actually nodal. It is associated with the following eigenfunction of the Laplace-Beltrami operator on  $T(2, 2)$  :

$$u(x, y) = 2 \sin(\pi(2x - y)) \cos(\pi(x + 2y)) = \sin(3\pi x) \cos(\pi y) + \cos(3\pi x) \sin(\pi y) + \sin(\pi x) \cos(3\pi y) - \cos(\pi x) \sin(3\pi y).$$

The associated eigenvalue is  $10\pi^2 \simeq 98.6960$ , to be compared with the result of the numerical optimization :  $\Lambda_3 \simeq 98.1771$ .

The eigenfunction  $u$  is not Courant-sharp. Indeed, after ordering the eigenvalues given by Proposition 4.3.1, we see that

$$10\pi^2 = \lambda_{26}(T(2, 2)),$$

while  $u$  has 20 nodal domains.

However, as in [12], we can define a new notion of a Courant-sharp eigenfunction, that takes into account the symmetries of  $T(2, 2)$ , and can be applied to the eigenfunction  $u$ .

Let us define two operations on the torus  $T(2, 2)$ , in the standard coordinates :

$$\begin{aligned}\tau_x : (x, y) &\mapsto (x + 1, y), \\ \tau_y : (x, y) &\mapsto (x, y + 1).\end{aligned}$$

We define four subspaces of  $L^2(T(2, 2))$ , according to the symmetries of the functions under the actions of  $\tau_x$  and  $\tau_y$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{++} &= \{u \in L^2(T(2, 2)) \mid u \circ \tau_x = u \text{ and } u \circ \tau_y = u\}, \\ \mathcal{H}^{-+} &= \{u \in L^2(T(2, 2)) \mid u \circ \tau_x = -u \text{ and } u \circ \tau_y = u\}, \\ \mathcal{H}^{+-} &= \{u \in L^2(T(2, 2)) \mid u \circ \tau_x = u \text{ and } u \circ \tau_y = -u\}, \\ \mathcal{H}^{--} &= \{u \in L^2(T(2, 2)) \mid u \circ \tau_x = -u \text{ and } u \circ \tau_y = -u\}.\end{aligned}$$

Those subspaces are stable under the action of the Laplace-Beltrami operator  $-\Delta$ . Furthermore, we have the orthogonal decomposition

$$L^2(T(2, 2)) = \mathcal{H}^{++} \oplus \mathcal{H}^{-+} \oplus \mathcal{H}^{+-} \oplus \mathcal{H}^{--}.$$

The spectrum of the Laplace-Beltrami operator  $-\Delta$  on  $T(2, 2)$  can therefore be split into four sequences, according to those symmetries :

$$(\lambda_k) = (\lambda_k^{++}) \cup (\lambda_k^{-+}) \cup (\lambda_k^{+-}) \cup (\lambda_k^{--}).$$

Let us note that the sequence  $(\lambda_k^{++})$  is actually the spectrum of  $-\Delta$  on  $T(1, 1)$ . We recall that the eigenvalues of  $-\Delta$  on  $T(2, 2)$  are

$$\lambda_{m,n} = \pi^2(m^2 + n^2).$$

The following list gives some eigenvalues of  $-\Delta$  on  $T(2, 2)$ , with the corresponding symmetries.

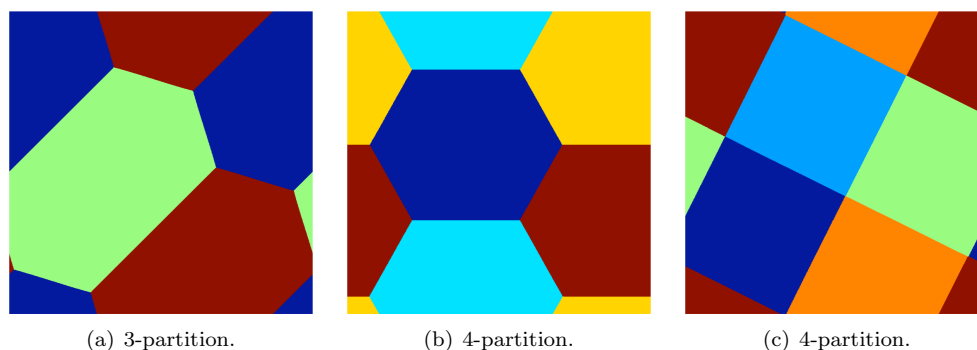
$\lambda$	$(m, n)$	multiplicity	symmetries
0	(0, 0)	1	++
$\pi^2$	(1, 0)	2	-+
$\pi^2$	(0, 1)	2	+-
$2\pi^2$	(1, 1)	4	--
$5\pi^2$	(1, 2)	4	-+
$5\pi^2$	(2, 1)	4	+-
$8\pi^2$	(2, 2)	4	++
$9\pi^2$	(3, 0)	2	-+
$9\pi^2$	(0, 3)	2	+-
$10\pi^2$	(3, 1)	4	--
$10\pi^2$	(1, 3)	4	--

Thus  $10\pi^2 = \lambda_5^{--}$  (with multiplicity 8).

We have shown the following property of the eigenfunction  $u$ .

**Proposition 4.8.5.** *The eigenfunction  $u$  is Courant-sharp among the eigenfunctions in  $\mathcal{H}^{--}$ , that is to say,*

- i.  $u \in \mathcal{H}^{--}$ ,
- ii.  $u$  is associated with the eigenvalue  $\lambda_5^{--}$ ,
- iii. the projection on  $T(1, 1)$  of the nodal set of  $u$  divides  $T(1, 1)$  into five connected components.

FIGURE 4.49 – Candidates for minimal  $k$ -partitions of  $T(1, 1)$ .

## 4.9 Conclusion

### 4.9.1 Transitions

We have studied in this work the transition values  $b_k$  and  $\bar{b}_k$  defined in Subsection 4.4.1, when  $k$  is an odd integer. We have presented a heuristic argument, inspired by the idea in [10] of lifting minimal partitions to nodal partitions on coverings, that leads to the conjecture

$$b_k = \frac{2}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

Our numerical simulations support this conjecture in the cases  $k = 3$  and  $k = 5$ .

Assuming the preceding conjecture to be true, we have also explored, in the case  $k = 3$ , a mechanism, inspired by [1], predicting the appearance of minimal 3-partitions with singular points when  $b$  becomes larger than  $b_3$ . For  $b = b_3$ , we have constructed examples of 3-partitions of  $T(1, b)$  with energy  $9\pi^2$  as projections of nodal 6-partitions of  $T(2, b)$ . We have looked for partitions that have singular points of order four, which can split into two singular points of order three when  $b$  increases. Because we have considered an eigenspace of dimension six, more types of partitions are possible than in the case of the rectangle, treated in [1]. Our numerical simulations singled out a partition of  $T(1, b)$  into three rectangles, which can be deformed into a 3-partition with six singular points and three isometric, possibly curved, hexagonal domains when  $b$  increases. We have obtained a similar partition of  $T(1, \sqrt{6})$  into five rectangles by the same method, and have exhibited numerically its deformation into a partitions with five hexagonal, possibly curved, domains when  $b$  increases. We have found a similar deformation mechanism, supported by our numerical simulations, in the case  $k = 4$ , around  $b_4 = 1/2$ .

For  $k = 3, 4, 5$ , we have improved the formerly known upper bounds of  $\mathfrak{L}_k(T(1, b))$  by constructing explicit examples of partitions : hexagonal tilings of  $T(1, b)$ . See Figures 4.24, 4.28, and 4.34 for numerical computations of these upper bounds.

### 4.9.2 The case of $T(1, 1)$

For  $k = 3$  and  $k = 4$ , we have found in particular a  $k$ -partition of  $T(1, 1)$  into  $k$  isometric hexagons, represented on Figures 4.49(a) and 4.49(b), that seems to be minimal (according to numerical simulations).

For  $k = 5$ , we have found a square tiling of  $T(1, 1)$ , represented on Figure 4.49(c), that seems to be minimal and gives the upper bound  $10\pi^2$  of  $\mathfrak{L}_5(T(1, 1))$ . In support of the minimality of this partition, we have shown that it satisfies a generalized Courant-sharp condition inspired by [12].

## Bibliographie

- [1] V. Bonnaillie-Noël, B. Helffer, and T. Hoffmann-Ostenhof. Aharonov-Bohm Hamiltonians, isospectrality and minimal partitions. *J. Phys. A*, 42(18) :185203, 20, 2009.

- [2] B. Bourdin, D. Bucur, and É. Oudet. Optimal partitions for eigenvalues. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31(6) :4100–4114, 2009/10.
- [3] L. A. Cafferelli and F. H. Lin. An optimal partition problem for eigenvalues. *J. Sci. Comput.*, 31(1-2) :5–18, 2007.
- [4] M. Conti, S. Terracini, and G. Verzini. An optimal partition problem related to nonlinear eigenvalues. *J. Funct. Anal.*, 198(1) :160–196, 2003.
- [5] M. Conti, S. Terracini, and G. Verzini. On a class of optimal partition problems related to the Fučík spectrum and to the monotonicity formulae. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 22(1) :45–72, 2005.
- [6] M. Conti, S. Terracini, and G. Verzini. A variational problem for the spatial segregation of reaction-diffusion systems. *Indiana Univ. Math. J.*, 54(3) :779–815, 2005.
- [7] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics. Vol. I.* Interscience Publishers, Inc., New York, N.Y., 1953.
- [8] H. S. M. Coxeter. *Regular Polytopes.* Second edition. The Macmillan Co., New York, 1963.
- [9] B. Helffer and T. Hoffmann-Ostenhof. Remarks on two notions of spectral minimal partitions. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 20(1) :249–263, 2010.
- [10] B. Helffer and T. Hoffmann-Ostenhof. Minimal partitions for anisotropic tori. *J. Spectr. Theory*, To appear.
- [11] B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof, and S. Terracini. Nodal domains and spectral minimal partitions. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(1) :101–138, 2009.
- [12] B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof, and S. Terracini. On spectral minimal partitions : the case of the sphere. In *Around the research of Vladimir Maz'ya. III*, volume 13 of *Int. Math. Ser. (N. Y.)*, pages 153–178. Springer, New York, 2010.
- [13] A. Henrot. *Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators.* Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.



# Chapitre 5

## Perspectives

Nous considérons en guise de conclusion quelques directions possibles pour l'étude future des partitions minimales. Comme nous l'avons mis en évidence dans l'introduction, et comme l'indique l'article [8], de nombreuses questions restent ouvertes. Nous nous intéressons ici à celles qui peuvent être abordées par une extension des méthodes utilisées dans cette thèse. Nous suivons l'ordre d'exposition de la thèse en considérant d'abord l'étude asymptotique des domaines nodaux, puis les opérateurs d'Aharonov-Bohm et enfin la méthode d'optimisation numérique du quatrième chapitre. Nous présentons en complément une condition nécessaire pour la minimalité des partitions, tirée de l'article [3], qui pourrait être utilisée pour tester nos résultats.

### 5.1 Étude asymptotique des domaines minces

#### 5.1.1 Tores

Rappelons que tout d'abord les résultats obtenus par Helffer et Hoffmann-Ostenhof dans l'article [11], que nous avons exposés dans le quatrième chapitre. Pour tout  $b \in ]0, 1[$ , nous définissons le tore plat

$$T(1, b) = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/b\mathbb{Z})$$

et, pour tout entier  $k \geq 1$ , la  $k$ -partition  $\mathcal{D}_k(b) = \{D_1, \dots, D_k\}$  avec, pour  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,

$$D_i = \left] \frac{i-1}{k}, \frac{i}{k} \right[ \times ]0, b[$$

dans les coordonnées standard. Notons que cette partition a pour énergie  $\Lambda_k(\mathcal{D}_k(b)) = k^2\pi$ . Énonçons maintenant les résultats démontrés dans [11]. Tout d'abord, si  $k$  est pair et  $b \leq 2/k$ , la partition  $\mathcal{D}_k(b)$  est minimale. De plus, dans le cas où  $b < 2/k$ ,  $\mathcal{D}_k(b)$  est, à une translation près, l'unique partition minimale. Enfin, si  $k$  est impair et que  $b < 1/k$ , la partition  $\mathcal{D}_k(b)$  est minimale. Notons que la valeur  $1/k$  dans ce dernier énoncé n'est probablement pas optimale, comme nous l'avons vu dans le quatrième chapitre.

Il semble possible, moyennant quelques modifications, d'étendre ces résultats à des tores plus généraux. Nous pouvons en effet reprendre les arguments utilisés dans [11], en remplaçant le calcul explicite des valeurs propres par un calcul de développements asymptotiques analogue à celui du deuxième chapitre. Nous allons préciser cette idée et esquisser un schéma de démonstration dans un cas simple.

Considérons la sous-variété  $T_\varepsilon$  de  $\mathbb{R}^3$  donnée par la description paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x(\varepsilon, \theta, \varphi) &= \cos(\theta) (1 + \varepsilon f(\theta) \cos(\varphi)) , \\ y(\varepsilon, \theta, \varphi) &= \sin(\theta) (1 + \varepsilon f(\theta) \cos(\varphi)) , \\ z(\varepsilon, \theta, \varphi) &= \varepsilon f(\theta) \sin(\varphi) , \end{cases}$$

où  $0 < \varepsilon < 1$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $2\pi$ -périodique de classe  $C^\infty$  telle qu'il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\delta \leq f(\theta) \leq 1 .$$

Les variétés  $T_\varepsilon$  sont des tores de grand rayon 1 et dont le petit rayon est modulé par la fonction  $f$  et multiplié par le facteur de dilatation  $\varepsilon$ . La métrique induite sur  $T_\varepsilon$  par la métrique euclidienne de  $\mathbb{R}^3$  est décrite dans les coordonnées  $(\theta, \varphi)$  par la matrice

$$g(\varepsilon, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} h_\theta(\varepsilon, \theta, \varphi)^2 & 0 \\ 0 & h_\varphi(\varepsilon, \theta, \varphi)^2 \end{pmatrix},$$

avec

$$h_\theta(\varepsilon, \theta, \varphi) = \sqrt{(1 + \varepsilon f(\theta) \cos(\varphi))^2 + \varepsilon^2 f'(\theta)^2},$$

et

$$h_\varphi(\varepsilon, \theta, \varphi) = \varepsilon f(\theta).$$

Notons qu'en raison de notre choix de coordonnées, la matrice  $g$  est diagonale, puisque les vecteurs  $(\partial_\theta x, \partial_\theta y, \partial_\theta z)$  et  $(\partial_\varphi x, \partial_\varphi y, \partial_\varphi z)$  sont orthogonaux. Ceci simplifie beaucoup les calculs.

L'opérateur de Laplace-Beltrami sur la variété  $T_\varepsilon$  s'écrit, dans les coordonnées  $(\theta, \varphi)$ ,

$$\Delta = \frac{1}{h_\theta h_\varphi} \left( \partial_\theta \left( \frac{g_\varphi}{h_\theta} \partial_\theta \right) + \partial_\varphi \left( \frac{h_\theta}{h_\varphi} \partial_\varphi \right) \right).$$

Suivant la convention usuelle, nous notons  $(\lambda_k(T_\varepsilon))_{k \geq 1}$  la suite des valeurs propres de cet opérateur, comptées avec multiplicité, et  $(u_k)_{k \geq 1}$  une base orthonormée formée de fonctions propres.

Nous recherchons maintenant une approximations des valeurs propres et fonctions propres de  $-\Delta$  sur  $T_\varepsilon$  pour  $\varepsilon$  petit. Nous donnons ici un argument heuristique, qui devra bien entendu être remplacé par une étude asymptotique rigoureuse. Pour  $\varepsilon$  petit, nous faisons l'approximation  $h_\theta(\varepsilon, \theta, \varphi) \approx 1$ , qui entraîne l'approximation suivante pour l'opérateur de Laplace-Beltrami :

$$-\Delta \approx P_{f,\varepsilon} = -\frac{1}{f(\theta)} \partial_\theta (f(\theta) \partial_\theta) - \frac{1}{\varepsilon^2 f(\theta)^2} \partial_\varphi^2.$$

Nous avons ainsi approché l'opérateur  $-\Delta$  par un opérateur à variables séparées dans les coordonnées  $(\theta, \varphi)$ . Pour  $\varepsilon$  petit, les premières fonctions propres de  $P_{f,\varepsilon}$  ne dépendent pas de  $\varphi$ . Ce sont les fonctions propres de l'opérateur différentiel en  $\theta$  défini sur  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

$$-\frac{1}{f(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left( f(\theta) \frac{d}{d\theta} \right),$$

ou plus précisément de sa réalisation  $Q_f$  comme opérateur autoadjoint sur l'espace de Hilbert

$$L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, f(\theta)d\theta).$$

Les premières valeurs propres de  $Q_f$  donnent donc une approximation des premières valeurs propres de  $-\Delta$ .

Notons  $(\mu_k)_{k \geq 1}$  la suite des valeurs propres de  $Q_f$ , et  $(v_k)_{k \geq 1}$  une base orthonormée associée. Notons que l'on a, dans le cas présent,  $\mu_1 = 0$  et  $v_1 = \pm 1/2\pi$ . Les fonctions  $v_k$  sont de classe  $C^\infty$ . De plus, d'après la théorie des problèmes de Sturm-Liouville périodiques et réguliers (voir par exemple [7]), nous avons les propriétés suivantes.

- Pour tout  $\ell \geq 1$ ,  $\mu_{2\ell-1} < \mu_{2\ell+1}$ . Notons que ceci implique que les valeurs propres sont de multiplicité au plus 2.
- Pour tout  $\ell \geq 1$ , les fonctions  $v_{2\ell}$  et  $v_{2\ell+1}$  ont  $2\ell$  zéros dans  $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ .

Nous pouvons alors noter, pour tout  $\ell \geq 1$ ,  $(\theta_j^{2\ell})_{1 \leq j \leq 2\ell}$  la suite des zéros de  $v_{2\ell}$  et  $(\theta_j^{2\ell+1})_{1 \leq j \leq 2\ell}$  la suite des zéros de  $v_{2\ell+1}$ .

Nous nous attendons à ce que, pour un entier  $k \geq 1$  fixé, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, la valeur propre  $\lambda_k(T_\varepsilon)$  tende vers  $\mu_k$ , et que les lignes nodales de  $u_k$  tendent vers les cercles définis par  $\theta = \theta_j^k$ . Ceci impliquerait en particulier que, pour  $\varepsilon$  petit,  $u_k$  a  $k$  domaines nodaux si  $k$  est pair et  $k-1$  si  $k$  est impair.

Supposons ces résultats asymptotiques démontrés. Alors, si  $k$  est un entier pair, la valeur propre  $\lambda_k(T_\varepsilon)$  possède, pour  $\varepsilon$  assez petit, une fonction propre associée Courant-strict. Le critère fondamental rappelé dans l'introduction implique alors que la partition nodale associée à cette fonction est minimale, et donc que  $\mathfrak{L}_k(T_\varepsilon) = \lambda_k(T_\varepsilon)$ .

Il semble alors possible de reprendre la démarche de [11] pour traiter le cas où  $k$  est impair. Avant toute chose, notons  $T_{\varepsilon,2}$  le revêtement riemannien à deux feuillets de  $T_\varepsilon$  obtenu en doublant  $T_\varepsilon$  dans la direction des  $\theta$ . Nous pouvons remarquer que  $T_{\varepsilon,2}$  est une variété riemannienne de dimension deux, mais pas une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ . Nous voulons montrer que, pour  $k$  impair fixé, pour  $\varepsilon$  assez petit,  $\mathfrak{L}_k(T_\varepsilon) = \lambda_{2k}(T_{\varepsilon,2})$ , et la projection sur  $T_\varepsilon$  de la partition nodale d'une fonction propre Courant-strict et antisymétrique associée à  $\lambda_{2k}(T_{\varepsilon,2})$  est une  $k$ -partition minimale.

Nous considérerons, dans un premier temps, une  $k$ -partition minimale  $\mathcal{D}$  de  $T_\varepsilon$ . Il faudrait alors montrer, en utilisant des arguments topologiques et une inégalité de réarrangement, que pour  $\varepsilon$  assez petit, la partition  $\mathcal{D}$  se relève en une  $2k$ -partition  $\mathcal{D}_2$  de  $T_{\varepsilon,2}$ , d'énergie  $\mathfrak{L}_k(T_\varepsilon)$ . Nous appliquerions alors les arguments asymptotiques précédents à la variété  $T_{\varepsilon,2}$ . Ceci démontrerait que pour  $\varepsilon$  assez petit,  $\mathfrak{L}_{2k}(T_{\varepsilon,2}) = \lambda_{2k}(T_{\varepsilon,2})$ , et que toute partition nodale Courant-strict associée est minimale. En particulier, nous obtiendrions alors  $\lambda_{2k}(T_{\varepsilon,2}) \leq \mathfrak{L}_k(T_\varepsilon)$ . Dans une dernière étape, nous remarquerons que, par construction de la variété  $T_{\varepsilon,2}$ , les fonctions propres associées à  $\lambda_{2k}(T_{\varepsilon,2})$  sont antisymétriques. Nous pouvons alors voir que la projection sur  $T_{\varepsilon,2}$  d'une  $2k$ -partition nodale associée  $\lambda_{2k}(T_{\varepsilon,2})$  est une  $k$ -partition de  $T_{\varepsilon,2}$  d'énergie  $\lambda_{2k}(T_{\varepsilon,2})$ . À supposer que nous soyons parvenus à montrer que  $\lambda_{2k}(T_{\varepsilon,2}) \leq \mathfrak{L}_k(T_\varepsilon)$ , par l'étude sur le revêtement menée à l'étape précédente, nous aboutirions à la conclusion voulue.

### 5.1.2 Domaines cylindriques

Il est sans doute également possible d'étendre à un cadre plus général les résultats démontrés par Helffer et Hoffmann-Ostenhof dans [10]. Rappelons tout d'abord ces résultats. Nous considérons la variété cylindrique

$$\mathcal{C} = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$$

munie de la métrique plate standard, et nous définissons l'ouvert  $\mathcal{C}_\varepsilon$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , par les inégalités  $-\varepsilon/2 < y < \varepsilon/2$  dans les coordonnées standard. Nous nous intéressons alors au problème des partitions minimales de  $\mathcal{C}_\varepsilon$  lorsque l'on impose une condition de Neumann sur chacun des bords  $\Gamma_\varepsilon^- = \{y = -\varepsilon/2\}$  et  $\Gamma_\varepsilon^+ = \{y = \varepsilon/2\}$ .

Helffer et Hoffmann-Ostenhof ont montré que, pour un entier  $k \geq 1$  donné la partition de  $\mathcal{C}_\varepsilon$  en  $k$  bandes verticales est minimale lorsque la largeur  $\varepsilon$  est assez petite. Si  $k$  est pair, ceci correspond à une partition nodale pour le laplacien sur  $\mathcal{C}_\varepsilon$  (avec condition de Neumann sur  $\Gamma_\varepsilon^-$  et  $\Gamma_\varepsilon^+$ ), associée à la  $k$ -ième valeur propre. Si  $k$  est impair, ceci correspond à la projection d'une partition nodale associée à la  $2k$ -ième valeur propre sur le revêtement à deux feuillets de  $\mathcal{C}_\varepsilon$ ,

$$\mathcal{C}_{\varepsilon,2} = (\mathbb{R}/2\mathbb{Z}) \times \left] -\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2} \right[.$$

Nous allons maintenant expliquer l'extension envisagée. Donnons-nous  $f$  et  $g$  des fonctions de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{R}$ , telles que  $f(x) < g(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous définissons l'ouvert  $\mathcal{C}_{f,g,\varepsilon}$  de  $\mathcal{C}$  par l'équation  $\varepsilon g(x) < y < \varepsilon f(x)$ . Nous notons  $\Gamma_{f,\varepsilon} = \{y = \varepsilon f(x)\}$  et  $\Gamma_{g,\varepsilon} = \{y = \varepsilon g(x)\}$  les bords supérieur et inférieur de cet ouvert. Nous notons enfin  $\mathfrak{L}_k^N(\mathcal{C}_{f,g,\varepsilon})$  l'énergie minimale pour les  $k$ -partitions avec conditions de Neumann sur  $\Gamma_{f,\varepsilon}$  et  $\Gamma_{g,\varepsilon}$  et  $(\lambda_k^N(\mathcal{C}_{f,g,\varepsilon}))_{k \geq 1}$  la suite des valeurs propres du laplacien avec conditions de Neumann sur  $\Gamma_{f,\varepsilon}$  et  $\Gamma_{g,\varepsilon}$ , comptées avec multiplicité.

En reproduisant la démarche exposée en détail dans la sous-section précédente, qui combine une étude asymptotique, un passage au revêtement, une inégalité de réarrangement et des arguments topologiques, nous devrions pouvoir démontrer des résultats analogues à ceux de [10]. Nous obtiendrions tout d'abord que si  $k \geq 1$  est un entier pair, la partition nodale associée à  $\lambda_k^N(\mathcal{C}_{f,g,\varepsilon})$  est minimale pour  $\varepsilon$  assez petit. Elle correspondrait à un découpage en bandes presque verticales.

Si  $k \geq 1$  est un entier impair, il nous faudrait utiliser le revêtement à deux feuillets

$$\mathcal{C}_{f,g,\varepsilon,2} = (\mathbb{R}/2\mathbb{Z}) \times ]\varepsilon f_2(x), \varepsilon g_2(x)[,$$

où  $f_2$  et  $g_2$  sont les relèvements sur  $\mathbb{R}/2\mathbb{Z}$  des fonctions  $f$  et  $g$ . Nous démontrerions alors que pour  $\varepsilon$  assez petit,  $\mathfrak{L}_k^N(\mathcal{C}_{f,g,\varepsilon}) = \lambda_{2k}^N(\mathcal{C}_{f,g,\varepsilon,2})$ . Nous démontrerions également que la projection sur  $\mathcal{C}_{f,g,\varepsilon}$  de la partition nodale de  $\mathcal{C}_{f,g,\varepsilon,2}$  associée à  $\lambda_{2k}^N(\mathcal{C}_{f,g,\varepsilon,2})$  est une  $k$ -partition minimale.

## 5.2 Opérateurs d’Aharonov-Bohm sur les variétés

### 5.2.1 Tores plats

La fin du quatrième chapitre suggère qu’il est possible d’étendre aux tores plats de dimension deux le théorème de Helffer et Hoffmann-Ostenhof, présenté dans l’article [12] selon lequel toute partition minimale d’un domaine ouvert, borné et régulier de  $\mathbb{R}^2$  est une partition nodale pour un certain opérateur de type Aharonov-Bohm. Considérons, pour fixer les idées, le tore  $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ . La généralisation évoquée plus haut nécessiterait la construction d’un potentiel magnétique adapté, c’est à dire d’un champ de vecteurs  $x \mapsto \mathbf{A}(x)$  défini sur  $\mathbb{T}^2$  privé d’un nombre fini de pôles. Nous demandons qu’à chaque pôle soit associé un flux réduit  $\pm 1/2$ , que  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$  en dehors de ces pôles et que la partition minimale soit une partition nodale pour l’opérateur

$$-\Delta_{\mathbf{A}} = (-i\nabla - \mathbf{A})^2,$$

où  $\nabla$  est le gradient covariant sur  $\mathbb{T}^2$ .

La construction d’un tel potentiel  $\mathbf{A}$  dans le cas du tore pose plusieurs problèmes techniques. Tout d’abord, il ne peut y avoir un unique pôle avec un flux réduit non nul. En effet, tout chemin fermé faisant une fois le tour de ce pôle dans le sens direct pourrait être déformé continuellement en un chemin fermé faisant le tour de n’importe quel autre point de  $\mathbb{T}^2$  dans le sens indirect. La condition  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$  implique que la circulation de  $\mathbf{A}$  sur ces deux chemins serait la même, et nous arriverions à une contradiction. Le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  a donc au moins deux pôles. Si  $\mathbf{A}$  a exactement deux pôles, le raisonnement précédent montre que les flux réduits en chacun de ces pôles sont opposés. Nous pouvons également montrer que les pôles ayant un flux réduit  $n + 1/2$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$ , sont en nombre pair.

Il nous faut donc une méthode pour construire le potentiel vecteur associé à deux pôles  $X_1$  et  $X_2$ , de flux réduit respectifs  $-1/2$  et  $1/2$ . Afin de préciser cet objectif, indiquons une première approche, qui va se heurter à un problème. Nous définissons le potentiel

$$\mathbf{A}_0(x) = -\frac{1}{2} \frac{(x - X_1)^\perp}{|x - X_1|^2} + \frac{1}{2} \frac{(x - X_2)^\perp}{|x - X_2|^2}$$

sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{X_1, X_2\}$ . Si la série

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{A}_0(x + m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2)$$

convergeait, sa somme serait un champ de vecteurs de périodes  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ . La projection de cette somme sur  $\mathbb{T}^2$  serait alors un potentiel vecteur adapté. Malheureusement, la série définie ci-dessus ne converge pas.

L’idée de construire un champ de vecteurs doublement périodique sur  $\mathbb{R}^2$  peut néanmoins être mise en œuvre à l’aide de fonctions elliptiques. Pour ce faire, nous interprétons  $\mathbb{R}^2$  comme le plan complexe  $\mathbb{C}$  et notons  $z_j = x_j^1 + ix_j^2$  le nombre complexe associé au point  $X_j = (x_j^1, x_j^2)$ , pour  $j = 1, 2$ . À un point quelconque  $x = (x^1, x^2)$  de  $\mathbb{R}^2$  est associé le nombre complexe  $z = x^1 + ix^2$ . Nous posons alors

$$\mathbf{A}(x) = (\Re(f(z)), -\Im(f(z))),$$

où  $f$  est une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$ , de périodes 1 et  $i$ , ayant des pôles en  $z_1$  et  $z_2$  avec pour résidus respectifs  $-1/2$  et  $1/2$ . Une telle fonction peut être construite à l’aide de la fonction  $\mathfrak{P}$  de Weierstrass, définie par

$$\mathfrak{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z - m - in)^2} - \frac{1}{(m + in)^2} \right)$$

(voir par exemple [5]). Il suffit en effet de poser

$$f(z) = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{P}'\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right)}{\mathfrak{P}\left(z - \frac{z_2 - z_1}{2}\right) - \mathfrak{P}\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right)}.$$

Le potentiel  $\mathbf{A}$  ainsi construit a pour périodes  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  et a des pôles en  $X_1$  et  $X_2$ , avec flux réduits respectifs  $-1/2$  et  $1/2$ . De plus, les conditions de Cauchy-Riemann sur la fonction  $f$  impliquent  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$  en dehors des pôles. La projection du potentiel  $\mathbf{A}$  sur  $\mathbb{T}^2$  vérifie donc toutes les propriétés voulues. Notons que des constructions semblables ont déjà été exposées dans [16], par Iwai et Yabu.

Un autre problème est mis en évidence par le dernier exemple du quatrième chapitre (voir figure 4.46). Bien que la frontière de cette partition ne contienne aucun point d'ordre impair, elle n'est pas nodale, car elle n'est pas bipartite. Nous ne pouvons donc pas choisir comme potentiel  $\mathbf{A} = 0$ . Nous avons montré, dans la sous-section 4.8.6, que le relèvement de cette partition sur le revêtement à quatre feuillettes de  $\mathbb{T}^2$  était nodale. Ceci revient à dire que la partition est nodale pour l'opérateur  $-\Delta_{\mathbf{A}}$  avec  $\mathbf{A} = (\pi, \pi)$ . La topologie du tore implique que la circulation de ce potentiel sur certains chemins fermés n'est pas nulle, bien qu'il n'ait pas de pôle.

Il semble finalement possible de reproduire la démonstration de l'article [12] afin d'obtenir le résultat suivant : si  $\mathcal{D}$  est une partition minimale de  $\mathbb{T}^2$ , il existe un potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  tel que  $\mathcal{D}$  soit une partition nodale associée à l'opérateur  $-\Delta_{\mathbf{A}}$ . Pour obtenir ce potentiel, nous divisons tout d'abord l'ensemble des points singuliers d'ordre impair en paires. Remarquons que ceci est toujours possible, puisque la formule d'Euler exposée dans l'introduction implique que les points singuliers d'ordre impair sont en nombre pair. À chaque paire de points, nous associons un potentiel sur  $\mathbb{T}^2$  privé de ces points, de flux réduit  $-1/2$  sur l'un des points et  $1/2$  sur l'autre. Nous faisons la somme de tous ces potentiels. Nous ajoutons enfin à cette somme le champ de vecteur constant  $(\pi, 0)$ , ou  $(0, \pi)$ , ou les deux.

### 5.2.2 Généralisation : variétés riemanniennes de dimension deux

Il devrait être possible de généraliser les constructions faites sur le tore à des variétés quelconques, même si nous n'aurons pas en général de formules explicites du type de celles utilisant des fonctions elliptiques. Une approche équivalente serait de considérer l'opérateur de Laplace-Beltrami sur un revêtement de la variété de départ, et de décomposer le spectre suivant les symétries des fonctions propres correspondantes, généralisant ainsi l'analyse de la sous-section 4.8.6 (voir aussi [9]). Si la frontière de la partition contient des points singuliers impairs, le revêtement adapté sera une variété riemannienne possédant des points coniques (voir par exemple [14, 15]).

## 5.3 Applications possibles de l'algorithme d'optimisation

### 5.3.1 Étude de la dépendance en $p$ des partitions

L'algorithme d'optimisation élaboré par Bourdin, Bucur et Oudet dans l'article [4] recherche des  $k$ -partitions 1-minimales, c'est à dire minimale pour l'énergie  $\Lambda_{k,1}$ . Cette énergie est définie comme la moyenne des premières valeurs propres du laplacien de Dirichlet sur chaque sous-domaine. Nous nous sommes intéressés dans cette thèse aux  $k$ -partitions minimales pour l'énergie  $\Lambda_k$ , qui est définie comme le maximum des valeurs propres. Pour rechercher des candidats, nous avons étendu l'algorithme présenté dans [4] aux énergies  $\Lambda_{k,p}$  définies, pour  $1 \leq p < \infty$ , comme la norme  $\ell^p$  du  $k$ -uplet formé par les valeurs propres. Nous avons ensuite cherché des partitions minimales pour  $\Lambda_{k,p}$  avec  $p \ll \text{grand}$ , en pratique  $p = 5$  dans les exemples présentés. Cette démarche est justifiée par le résultat, démontré dans [13], selon lequel, pour tout domaine  $\Omega$  et tout entier  $k$ ,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathfrak{L}_{k,p}(\Omega) = \mathfrak{L}_k(\Omega).$$

Il serait intéressant d'étudier numériquement, pour un domaine  $\Omega$  et un entier  $k$  fixé, l'évolution de  $\mathfrak{L}_{k,p}(\Omega)$  et des partitions minimales en fonction de  $p$ . Comme nous l'avons vu dans le quatrième chapitre, il existe un exposant de transition  $p(k, \Omega)$  (éventuellement infini) telle que les  $k$ -partitions  $p$ -minimales sont équispectrales pour  $p > p(k, \Omega)$ . Nous pourrions étudier cet exposant de transition dans des cas simples, par exemple celui du carré pour  $k \in \{2, \dots, 5\}$ .

L'étude numérique des partitions 1-minimales du carré a été faite dans l'article [6] par Babin, Cybulski et Hołyst, par des méthodes différentes de celles exposées dans cette thèse. Nous pourrions comparer ces résultats à ceux obtenus avec l'algorithme d'optimisation de Bourdin, Bucur et Oudet.

### 5.3.2 Domaines plans

L'algorithme d'optimisation a été appliqué dans cette thèse à des tores plats définis, pour  $0 < b \leq 1$ , par

$$T(1, b) = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/b\mathbb{Z}).$$

Nous prévoyons d'appliquer cet algorithme à des (approximations de) domaines plan bornés contenus dans  $\mathbb{R}^2$ . Le but de ces calculs serait de vérifier certaines conjectures obtenues par d'autres méthodes, et de rechercher des candidats dans des situations nouvelles.

Un exemple particulièrement intéressant serait l'étude d'une famille de rectangles dépendants d'un paramètre  $b \in ]0, 1]$  et définis par

$$\mathcal{R}(1, b) = ]0, 1[ \times ]0, b[.$$

On sait que lorsque  $b$  est assez petit, les partitions en bandes égales selon la longueur sont minimales. Dans le cas des 3-partitions, Bonnaillie-Noël, Helffer, Hoffmann-Ostenhof et Vial ont fait, dans [2, 3], une étude de la transition depuis la 3-partition en trois bande jusqu'à des partitions minimales non-nodales. Ces études s'appuient cependant sur deux hypothèses faites à propos des partitions minimales : elles ne possèdent qu'un seul point critique, et elles ont un axe de symétrie.

L'application de l'algorithme d'optimisation permettrait d'étudier la transition pour des  $k$ -partitions sans faire d'hypothèse sur leur nature géométrique ou topologique. Il faudrait commencer par étudier les cas  $k \in \{3, 4, 5\}$ , comme pour le tore.

Le cas  $b = 1$  présente un intérêt particulier, puisque Bonnaillie-Noël, Helffer et Hoffmann-Ostenhof ont trouvé dans ce cas une famille de 3-partitions candidates à être minimales. Elles correspondent à des partitions nodales pour un opérateur d'Aharonov-Bohm avec un pôle situé au centre du carré et un flux réduit  $1/2$ . Il convient de vérifier si l'algorithme d'optimisation s'approche d'un élément de cette famille. De plus, l'article [1] contient une conjecture portant sur les 5-partitions que l'algorithme permettrait de tester.

### 5.3.3 Domaines cylindriques

Dans cette thèse, l'algorithme est utilisé uniquement avec des conditions aux limites périodiques sur la frontière du domaine. Nous avons évoqué ci-dessus les conditions de Dirichlet. Il est également possible d'imposer des conditions de Neumann. Nous pouvons ainsi adapter l'algorithme d'optimisation au problème étudié par Helffer et Hoffmann-Ostenhof dans l'article [10], que nous avons exposé dans la sous-section 5.1.2. Ici encore, le résultat théorique de [10] nous assure que la partition en bandes égales selon la longueur est minimale lorsque la hauteur du cylindre est petite. Nous pouvons ensuite mener la même étude de déformation que dans le cas du tore ou du rectangle.

### 5.3.4 Extensions et limitations de l'algorithme

L'algorithme d'optimisation peut en théorie être appliqué à un domaine quelconque (par exemple un disque, une ellipse, un secteur angulaire). Nous pourrions ainsi rechercher numériquement des partitions minimales de ces domaines et les comparer aux conjectures et résultats asymptotiques présentés dans cette thèse.

Nous pouvons toutefois noter une limitation de cette méthode. Notons  $\Omega$  le domaine étudié. Comme nous l'avons exposé dans le quatrième chapitre (en suivant [4]), l'algorithme d'optimisation remplace le problème des partitions minimales par une formulation relaxée, qui fait intervenir le laplacien sur  $\Omega$ . Nous utilisons ensuite une discrétisation du laplacien par les différences finies. Le calcul de l'énergie relaxée est donc assez précis dans le cas des rectangle ou des tores, mais le sera moins pour des domaines plus généraux ayant des frontières non rectilignes. Notons néanmoins que ce même problème se pose déjà, dans le cas d'un domaine rectangulaire, lorsque nous calculons l'énergie (sans relaxation) de la partition obtenue à l'aide de l'algorithme d'optimisation. En effet, la discrétisation par les différences finies n'est *a priori* pas adaptée aux sous-domaines de la partitions que nous avons construite. Les valeurs propres de ces sous-domaines ne sont donc pas calculées avec une très grande précision.

## 5.4 Tests numériques sur des partitions candidates

### 5.4.1 Partitions du tore

L'article [13], par Helffer, Hoffmann-Ostenhof et Terracini, contient une condition nécessaire que doivent vérifier les partitions minimales. En effet, d'après [13], toute partition extraite d'une partition minimale est elle-même minimale. Ceci implique en particulier que toute partition minimale d'un domaine est aussi une partition minimale du domaine obtenu en imposant des conditions de Dirichlet sur une partie de la frontière de la partition (on obtient en général des domaines avec fissures). Considérons une partition minimale  $\mathcal{D}$  d'un domaine  $\Omega$  et notons  $\mathcal{N}(\mathcal{D})$  la frontière de  $\mathcal{D}$ . Il est possible de choisir un sous-ensemble  $\mathcal{N}'$  de  $\mathcal{N}(\mathcal{D})$  tel que  $\mathcal{D}$  soit une partition bipartie du domaine avec fissures  $\Omega' = \Omega \setminus \mathcal{N}'$ . Nous avons vu d'autre part que  $\mathcal{D}$  est une partition minimale de  $\Omega'$ . Le théorème fondamental de [13] nous assure que  $\mathcal{D}$  est une partition nodale associée à une valeur propre Courant-strictes du laplacien de Dirichlet sur  $\Omega'$ .

Comme le montre l'article [3], par Bonnaillie-Noël, Helffer et Vial, cette condition est accessible à une vérification numérique. Les auteurs de cet article cherchent à vérifier que la partition d'une réunion d'hexagones en ses hexagones constituants est minimale. Ils considèrent une réunion de  $k$  hexagones et réalisent un maillage du domaine obtenu en enlevant assez d'arêtes pour que la partition en les hexagones constituants soit bipartie. Ils calculent alors, par la méthode des éléments finis, les valeurs propres et fonctions propres de ce domaine, et vérifient que la  $k$ -ième fonction propre a pour domaines nodaux les hexagones constituants.

Nous pouvons appliquer ce test afin de déterminer si les pavages du tore indiqués par les résultats de l'algorithme d'optimisation et calculés au quatrième chapitre peuvent être des partitions minimales.

### 5.4.2 Partitions de la sphère

Le test présenté dans la sous-section précédente peut aussi être appliqué à des partitions régulières de la sphère. Il permettrait par exemple d'étudier la conjecture selon laquelle les faces d'un tétraèdre sphérique forment une 4-partition minimale de  $\mathbb{S}^2$ , la sphère unité de dimension deux.

## Bibliographie

- [1] V. BONNAILLIE-NOËL et B. HELFFER : Numerical analysis of nodal sets for eigenvalues of Aharonov-Bohm Hamiltonians on the square with application to minimal partitions. *Exp. Math.*, 20(3):304–322, 2011.
- [2] V. BONNAILLIE-NOËL, B. HELFFER et T. HOFFMANN-OSTENHOF : Aharonov-Bohm Hamiltonians, isospectrality and minimal partitions. *J. Phys. A*, 42(18):185203, 20, 2009.
- [3] V. BONNAILLIE-NOËL, B. HELFFER et G. VIAL : Numerical simulations for nodal domains and spectral minimal partitions. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 16(1):221–246, 2010.
- [4] B. BOURDIN, D. BUCUR et É. OUDET : Optimal partitions for eigenvalues. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31(6):4100–4114, 2009/10.
- [5] H. CARTAN : *Théorie Élémentaire des Fonctions Analytiques d'une ou Plusieurs Variables Complexes*. Avec le concours de Reiji Takahashi. Enseignement des Sciences. Hermann, Paris, 1961.
- [6] O. CYBULSKI, V. BABIN et R. HOLYST : Minimization of the renyi entropy production in the space-partitioning process. *Phys. Rev. E*, 71:046130, Apr 2005.
- [7] J. DIEUDONNÉ : *Calcul Infinitésimal*. Hermann, Paris, 1968.
- [8] B. HELFFER : On spectral minimal partitions : a survey. *Milan J. Math.*, 78(2):575–590, 2010.
- [9] B. HELFFER, M. HOFFMANN-OSTENHOF, T. HOFFMANN-OSTENHOF et M. P. OWEN : Nodal sets for groundstates of Schrödinger operators with zero magnetic field in non-simply connected domains. *Comm. Math. Phys.*, 202(3):629–649, 1999.

- [10] B. HELFFER et T. HOFFMANN-OSTENHOF : Spectral minimal partitions for a thin strip on a cylinder or a thin annulus like domain with neumann condition. *In Operator Methods in Mathematical Physics*, volume 227 de *Operator Theory : Advances and Applications*, pages 107–115. Springer, 2013.
- [11] B. HELFFER et T. HOFFMANN-OSTENHOF : Minimal partitions for anisotropic tori. *J. Spectr. Theory*, À paraître.
- [12] B. HELFFER et T. HOFFMANN-OSTENHOF : On a magnetic characterization of spectral minimal partitions. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, À paraître.
- [13] B. HELFFER, T. HOFFMANN-OSTENHOF et S. TERRACINI : Nodal domains and spectral minimal partitions. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(1):101–138, 2009.
- [14] L. HILLAIRET : Formule de trace sur une surface euclidienne à singularités coniques. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 335(12):1047–1052, 2002.
- [15] L. HILLAIRET et A. KOKOTOV : Krein formula and  $S$ -matrix for Euclidean surfaces with conical singularities. *J. Geom. Anal.*, 23(3):1498–1529, 2013.
- [16] T. IWAI et Y. YABU : Aharonov-Bohm quantum systems on a punctured 2-torus. *J. Phys. A*, 39(4):739–777, 2006.