



HAL
open science

Sous-algèbres de l'algèbre de Steenrod équivariante et une propriété de détection pour la K-théorie d'Atiyah

Nicolas Ricka

► **To cite this version:**

Nicolas Ricka. Sous-algèbres de l'algèbre de Steenrod équivariante et une propriété de détection pour la K-théorie d'Atiyah. Topologie algébrique [math.AT]. Université Paris-Nord - Paris XIII, 2013. Français. NNT: . tel-00953049

HAL Id: tel-00953049

<https://theses.hal.science/tel-00953049>

Submitted on 28 Feb 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS 13
Laboratoire Analyse,
Géométrie et Applications, UMR 7539

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS 13

Discipline : Mathématiques

présentée et soutenue publiquement par :

Nicolas RICKA

le 10 décembre 2013

Sous-algèbres de l'algèbre de Steenrod équivariante et une propriété de détection pour la K -théorie d'Atiyah

RAPPORTEURS

M. Robert BRUNER professor (*Wayne State*)
Mme Sarah WHITEHOUSE reader in mathematics (*Sheffield*)

JURY

M. Christian AUSONI professeur (*Paris 13*)
M. Hans-Werner HENN professeur (*Strasbourg*)
M. Eric HOFFBECK maître de conférences (*Paris 13*)
M. Hà LE MINH associate professor (*Vietnam National university*)
M. Geoffrey POWELL directeur de recherche (*Angers*)
M. Jérôme SCHERER collaborateur scientifique (*EPFL*).

Directeur de thèse : Geoffrey POWELL

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur Geoffrey Powell, pour son investissement dans l'accompagnement de cette thèse. Ses encouragements et la patience dont il a fait preuve lors de nos discussions furent précieuses tout au long de l'élaboration de cette thèse. Il me faut également saluer l'engouement dont il a fait preuve pour me faire découvrir des sujets dont je ne soupçonnais pas le lien avec mes travaux. La qualité de ce texte n'aurait pas été la même sans ses relectures méticuleuses et exigeantes, et je lui en suis extrêmement reconnaissant.

Je remercie également Robert Bruner et Sarah Whitehouse qui me font l'honneur de rapporter cette thèse. Mes remerciements vont également à Christian Ausoni, Hans-Werner Henn, Eric Hoffbeck, Lê Minh Há et Jérôme Scherer pour avoir accepté d'être membres de mon jury.

Je suis particulièrement reconnaissant envers les membres du LAGA, et plus particulièrement l'équipe de topologie algébrique. J'ai grandement apprécié les nombreux groupes de travail, et autres activités de l'équipe, et les échanges que j'ai pu avoir avec ses membres, ainsi que la présence toujours bienveillante d'Eric Hoffbeck, Muriel Livernet et, depuis son arrivée au LAGA, de Christian Ausoni.

J'ai une pensée toute particulière pour l'école doctorale Galilée et le Bureau de la Recherche et des Etudes doctorales.

Tout au long de mon parcours en tant qu'étudiant, de nombreux enseignants ont nourri mon envie de faire des mathématiques en partageant leur enthousiasme. Je remercie donc Alexandru Oancea pour son investissement dans les séances d'exercices de topologie générale et les nombreuses discussions qui ont pu les suivre, ainsi que pour son encadrement exceptionnel qu'il m'a fourni lors de mon mémoire de Licence, me permettant d'apercevoir le formidable lien entre l'algèbre et la topologie fourni par les théories de cohomologie. Je remercie encore une fois Geoffrey Powell et Hans-Werner Henn pour l'ambitieux mais très cohérent dernier semestre de Master qu'ils ont enseigné à Strasbourg.

Tout au long de ces trois années, les formidables opportunités fournies par le GdR de Topologie Algébrique m'ont permis de rencontrer ses membres au cours d'activités toujours enrichissantes.

Tout au long de nos chemins parallèles, nos échanges m'ont tant apporté, autant humainement que scientifiquement, et je tiens absolument à te remercier pour ça Sinan.

Le plaisir que j'ai pu avoir à faire des mathématiques au LAGA n'aurait pas été le même sans l'ensemble des doctorants que j'ai eu l'occasion de rencontrer. Je n'oublierais pas les jeux de construction au restaurant administratif avec Cuong, les échanges passionnants que j'ai pu avoir avec Roland, et les débats polémiques avec Thomas. Les bureaux de doctorants n'auraient pas été les mêmes sans Giovanni, Javier, Giuseppe, Julien et Rémi.

Marie, je te remercie pour ton soutien constant, et ta présence tout au long de ce travail.

Merci enfin à ma famille, sans le soutien de laquelle tout cela ne serait certainement pas arrivé.



Table des matières

1	Eléments de la théorie d’homotopie stable équivariante	13
1.1	La catégorie d’homotopie stable $\mathbb{Z}/2$ -équivariante	13
1.1.1	Théorie d’homotopie $\mathbb{Z}/2$ -équivariante	13
1.1.2	Espaces universels	14
1.1.3	Stabilisation	17
1.1.4	Foncteurs de Mackey	18
1.1.5	Théories d’homologie et de cohomologie	21
1.2	Tour de Postnikov $\mathbb{Z}/2$ -équivariante et théories de cohomologie ordinaires	22
1.2.1	Tour de Postnikov $\mathbb{Z}/2$ -équivariante	22
1.2.2	L’anneau de coefficients de $H\underline{F}_2^*$	24
1.3	Tour des tranches $\mathbb{Z}/2$ -équivariante	27
1.3.1	Définition	27
1.3.2	La suite spectrale des tranches	29
1.4	La tour des tranches fixe	30
1.4.1	Points fixes tordus	30
1.4.2	La tour des tranches fixe	31
1.5	K -théories réelles	33
1.5.1	Définitions et premières propriétés	33
1.5.2	La tour des tranches du $\mathbb{Z}/2$ -spectre $k\mathbb{R}$	34
2	Opérations cohomologiques équivariantes	37
2.1	L’algèbre de Steenrod non-équivariante	38
2.2	Opérations cohomologiques $\mathbb{Z}/2$ -équivariantes	39
2.2.1	Théories de cohomologie $\mathbb{Z}/2$ -équivariantes	39
2.2.2	Préliminaires autour de la structure monoïdale sur la catégorie $\mathbb{Z} - Mod$	40
2.2.3	Le cas général d’un $\mathbb{Z}/2$ -spectre en anneaux commutatif	42
2.3	L’algèbre de Steenrod équivariante et sa duale	45
2.3.1	Structure d’algèbroïde de Hopf	45
2.3.2	Les formules de Cartan pour l’anneau de coefficients	50
2.4	Une famille d’algèbroïdes de Hopf quotients de \mathcal{A}_* et leurs propriétés	52
2.4.1	Algèbroïdes de Hopf quotient	52
2.4.2	Liberté des algèbroïdes de Hopf quotient	53
2.4.3	Quotients de l’algèbre de Steenrod $\mathbb{Z}/2$ -équivariante duale	56
2.4.4	Coliberté pour les quotients de l’algèbre de Steenrod $\mathbb{Z}/2$ -équivariante	60
3	Le foncteur R	63
3.1	Le foncteur de comparaison	63
3.2	Une étude directe du foncteur R_1	68
3.2.1	Caractérisation de R_1	69
3.2.2	Le foncteur R et la cohomologie de Margolis	71
3.2.3	Dualités et le foncteur R_1	72

4	La H_{01}-homologie	75
4.1	Définitions et premières propriétés de H_{01}	75
4.1.1	Définition de H_{01}	75
4.1.2	Un peu d'algèbre homologique relative	76
4.1.3	Suites exactes longues en H_{01}^* -homologie	80
4.1.4	Dualité	89
4.1.5	Modules libres	94
4.2	La catégorie stable	95
4.2.1	L'entrée en scène de la catégorie stable	95
4.2.2	La classe d'équivalence stable de $\widetilde{HF}_2^*(BV)$	100
4.3	Calculs explicites	101
5	La K-théorie	105
5.1	Propriétés générales des K -théories réelles	106
5.1.1	L'anneau de coefficients de la K -théorie réelle connexe	106
5.1.2	Conséquences de la structure de l'anneau de coefficients et périodicités	112
5.2	Détection	116
5.2.1	Le principe de détection	116
5.2.2	h -détection et calcul de $k_\bullet^*(X)$	117
5.2.3	Transport et vérification de la propriété de détection	118
5.3	Détection en K -théories	120
5.3.1	La forme particulière des tours tirées de la K -théorie	120
5.3.2	Détection en $E\mathbb{Z}/2_+ \wedge \Sigma^{\bullet(1+\alpha)}k\mathbb{R}$ -cohomologie	121
5.3.3	Conséquences de la 2-détection pour $k\mathbb{R}$	124
5.4	1-détection pour la tour de Postnikov réindexée de ko	125
5.4.1	la tour des tranches fixe de $k\mathbb{R}$	126
5.4.2	Démonstration du théorème 5.4.1	131

Introduction

Ces dernières années, la théorie homotopique stable équivariante, c'est-à-dire l'étude des théories de cohomologie sur la catégorie \mathcal{GT} des G -espaces topologiques pointés où G est un groupe discret, a montré son efficacité époustouflante, en particulier lors de la résolution par Hill, Hopkins et Ravenel [HHR09] du problème de l'invariant de Kervaire, une question restée sans réponse depuis que la question a été soulevée par Kervaire en 1960 dans [Ker60]. Dans leur démonstration, les auteurs introduisent un outil puissant : la suite spectrale des tranches.

Avant l'introduction de la suite spectrale des tranches par Hill-Hopkins-Ravenel dans [HHR09], des cas particuliers de cette suite spectrale, dans le cas du groupe à deux éléments, étaient alors déjà apparues, sous d'autres noms, dans deux situations.

- Tout d'abord, dans le cas particulier du groupe $G = \mathbb{Z}/2$, cette suite spectrale avait été étudiée auparavant par Hu et Kriz dans [HK01]. Les auteurs identifient les différentielles de la suite spectrale des tranches pour le $\mathbb{Z}/2$ -spectre de Brown-Peterson réel avec certaines opérations cohomologiques $\mathbb{Z}/2$ -équivariantes.
- Dans [Ati66], Atiyah introduit la K -théorie réelle, une théorie de cohomologie généralisée $\mathbb{Z}/2$ -équivariante $K\mathbb{R}^*$. C'est une généralisation $\mathbb{Z}/2$ -équivariante de la K -théorie unitaire périodique, dans le sens où, pour X un objet de $\mathbb{Z}/2$, $K\mathbb{R}^0(X)$ est le groupe de Grothendieck des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels réels (i.e. les fibrés vectoriels complexes dans la catégorie $\mathbb{Z}/2\mathcal{T}$ tels que l'action de $\mathbb{Z}/2$ se restreint sur les fibres en une application anti-linéaire). Avant [HHR09], Dugger [Dug03] construisait déjà une suite spectrale pour effectuer des calculs en K -théorie réelle qui s'identifie avec la suite spectrale des tranches pour le $\mathbb{Z}/2$ -spectre $K\mathbb{R}$.

Ces deux points motivent une étude plus approfondie de la structure de l'algèbre de Steenrod $\mathbb{Z}/2$ -équivariante pour effectuer des calculs de K -théorie réelle.

Soit V un 2-groupe abélien élémentaire. Considérons l'espace classifiant BV , vu comme un $\mathbb{Z}/2$ -espace muni de l'action triviale de $\mathbb{Z}/2$. Soit $RO(\mathbb{Z}/2)$ le groupe de Grothendieck des classes d'isomorphisme des $\mathbb{Z}/2$ -représentations réelles. En tant que groupe abélien, $RO(\mathbb{Z}/2)$ est librement engendré par la représentation triviale, 1, et la représentation signe, α . Dans cette thèse, on adopte la convention commune avec [HK01] suivante : un $*$ en exposant ou en indice d'un objet désigne une \mathbb{Z} -graduation, et un \star en exposant ou en indice d'un objet signifie que l'objet en question est $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué. De la même façon que les théories de cohomologie non-équivariantes prennent leurs valeurs dans la catégorie des groupes abéliens \mathbb{Z} -gradués, dans le monde $\mathbb{Z}/2$ -équivariant, les théories de cohomologie $\mathbb{Z}/2$ -équivariantes prennent naturellement leurs valeurs dans la catégorie des objets $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués dans une certaine catégorie abélienne : la catégorie des foncteurs de Mackey pour le groupe $\mathbb{Z}/2$. La construction, ainsi que les rappels nécessaires sur la catégorie des foncteurs de Mackey seront fait au cours de cet exposé.

L'objectif de cette thèse est d'étudier le foncteur de Mackey $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué $k\mathbb{R}^*(BV)$, où $k\mathbb{R}$ désigne la version connexe de $K\mathbb{R}$.

Les motivations pour l'étude de $k\mathbb{R}^*(BV)$ sont multiples. Tout d'abord, ce calcul permet une interprétation unifiée des calculs déjà effectués en homologie et cohomologie généralisée des groupes. En 1987, Ossa [Oss89] effectue le calcul de la ku -homologie et ku -cohomologie des p -groupes abéliens élémentaires, pour p un nombre premier. Son approche repose sur une étude fine des produits tensoriels itérés de la cohomologie modulo 2 de $B\mathbb{Z}/2$ en tant que module sur l'algèbre extérieure engendrée par les deux premières opérations de Milnor.

Plus tard, Bruner et Greenlees [BG03] poussent l'étude de ces groupes plus en avant, et Powell [Pow11] détermine la structure des foncteurs $V \mapsto ku^*(BV)$ et $V \mapsto ku_*(BV)$. Il est à noter que via la théorie

de Lannes (voir [HLS93]) le foncteur $V \mapsto ku^*(BV)$ donne des informations concernant la structure des espaces apparaissant dans le Ω -spectre associé à ku .

La suite de ce travail est le calcul de la ko -homologie et ko -cohomologie des 2-groupes abéliens élémentaires. Ce calcul est effectué dans [BG03] et [Pow12] et s'appuie à chaque fois sur le calcul de la K -théorie complexe des 2-groupes abéliens élémentaires. Dans ces deux travaux, un ingrédient essentiel est la suite exacte longue de complexification-réalification associée à la suite cofibre de spectres

$$ko \xrightarrow{c} ku \xrightarrow{R} \Sigma^2 ko,$$

ainsi que la structure de $\mathcal{A}^*(1)$ -module de $H\mathbb{F}_2^*(BV)$, où $\mathcal{A}^*(1)$ est la sous-algèbre de l'algèbre de Steenrod modulo 2 engendrée par les carrés de Steenrod Sq^1 et Sq^2 . Ossa [Oss89] a également considéré le cas de ko , mais son calcul est incorrect (la description correcte des résultats concernant les $\mathcal{A}^*(1)$ -modules $H\mathbb{F}_2^*(BV)$ est un résultat de la thèse de Yu [CY]).

On sait depuis Atiyah [Ati66] que la suite cofibre qui induit la suite complexification-réalification est de nature profondément $\mathbb{Z}/2$ -équivariante (voir [Ati66, p.377]), et provient d'une suite cofibre de $\mathbb{Z}/2$ -spectres faisant intervenir $k\mathbb{R}$. On souhaite donc effectuer tout le calcul dans le monde $\mathbb{Z}/2$ -équivariant, afin de traiter en une seule théorie les deux calculs, ainsi que la détermination de la suite exacte longue de complexification-réalification.

Deuxièmement, le foncteur de \mathbb{R} -réalisation de Voevodsky [MV, section 3.3] crée un lien entre la \mathbb{A}^1 -théorie d'homotopie des schémas sur \mathbb{R} et la théorie d'homotopie stable $\mathbb{Z}/2$ -équivariante. Le $\mathbb{Z}/2$ -spectre $k\mathbb{R}$ est la réalisation du spectre de la K -théorie algébrique (voir [Dug03]).

Le chapitre 1 a pour objectif de mettre en place la catégorie d'homotopie stable $\mathbb{Z}/2$ -équivariante, ainsi que toutes les propriétés et tous les objets dont on a besoin, en laissant de côté un maximum de détails techniques, pour lesquels on donne une référence à la littérature. D'une part, on donne quelques éléments de la théorie d'homotopie stable $\mathbb{Z}/2$ -équivariante, et on rappelle la construction de la t -structure canonique sur la catégorie d'homotopie stable $\mathbb{Z}/2$ -équivariante. Comme dans la catégorie d'homotopie stable classique \mathcal{SH} , la t -structure ainsi définie permet de considérer les spectres d'Eilenberg-MacLane $\mathbb{Z}/2$ -équivariants. Bien qu'on ait choisi de se restreindre au cas du groupe $\mathbb{Z}/2$, ces résultats peuvent être formulés pour un groupe discret G quelconque. D'autre part, on donne la définition de la filtration par tranches, une généralisation équivariante de la tour de Postnikov introduite dans les travaux récents de Hill-Hopkins-Ravenel [HHR09] comme un outil essentiel à la résolution du problème de l'invariant de Kervaire, et on explicite certains résultats pour le cas particulier du groupe $\mathbb{Z}/2$. Cette partie fait apparaître l'importance du $\mathbb{Z}/2$ -spectre $H\underline{\mathbb{Z}}$, qui apparaît comme 0-tranche du $\mathbb{Z}/2$ -spectre des sphères. On termine ce chapitre par une preuve du résultat de Dugger [Dug03] qui identifie la tour des tranches du $\mathbb{Z}/2$ -spectre $K\mathbb{R}$ avec la tour périodique

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \\ \Sigma^{n(1+\alpha)} k\mathbb{R} \\ \downarrow v_1 \\ \Sigma^{(n-1)(1+\alpha)} k\mathbb{R} \\ \downarrow v_1 \\ \Sigma^{(n-2)(1+\alpha)} k\mathbb{R} \\ \downarrow v_1 \\ \vdots \end{array}$$

où v_1 désigne la multiplication par la classe de Bott $\mathbb{Z}/2$ -équivariante (voir proposition 1.5.2), qui est un relèvement $\mathbb{Z}/2$ -équivariant de la classe de Bott en K -théorie unitaire connexe.

Le chapitre 2 commence avec un rappel des propriétés principales de l'algèbre de Steenrod classique modulo p , pour p un nombre premier, et des opérations cohomologiques pour une théorie de cohomologie

généralisée. On se tourne ensuite vers la généralisation $\mathbb{Z}/2$ -équivariante. Dans ce cas, comme pour n'importe quel $\mathbb{Z}/2$ -spectre en anneaux, le couple $(H\underline{\mathbb{F}}_{2*}, H\underline{\mathbb{F}}_{2*}H\underline{\mathbb{F}}_2)$ est naturellement muni d'une structure d'algébroïde de Hopf. Ici, $H\underline{\mathbb{F}}_{2*}H\underline{\mathbb{F}}_2$ s'identifie avec l'algèbre des coopérations homologiques en $H\underline{\mathbb{F}}_{2*}$ -homologie. On étudie ensuite les quotients de l'algébroïde de Hopf $(H\underline{\mathbb{F}}_{2*}, H\underline{\mathbb{F}}_{2*}H\underline{\mathbb{F}}_2)$. Les travaux de Hu et Kriz [HK01] fournissent un isomorphisme de $H\underline{\mathbb{F}}_{2*}$ -algèbres

$$H\underline{\mathbb{F}}_{2*}H\underline{\mathbb{F}}_2 \cong H\underline{\mathbb{F}}_{2*}[\xi_{i+1}, \tau_i | i \geq 0]/I$$

où I est l'idéal engendré par les relations $\tau_i^2 = a\tau_{i+1} + (\sigma^{-1} + a\tau_0)\xi_{i+1}$, pour $i \geq 0$. On définit, à l'aide de la proposition 2.4.17, une famille d'algébroïdes de Hopf de la forme $(H\underline{\mathbb{F}}_{2*}, H\underline{\mathbb{F}}_{2*}H\underline{\mathbb{F}}_2/J)$, c'est-à-dire obtenues comme quotient de l'algébroïde de Hopf $(H\underline{\mathbb{F}}_{2*}, H\underline{\mathbb{F}}_{2*}H\underline{\mathbb{F}}_2)$ par certain idéal J de $H\underline{\mathbb{F}}_{2*}H\underline{\mathbb{F}}_2$.

Dans le cas où $(H\underline{\mathbb{F}}_{2*}, H\underline{\mathbb{F}}_{2*}H\underline{\mathbb{F}}_2/J)$ est muni d'une structure d'algébroïde de Hopf, il n'est pas clair que $H\underline{\mathbb{F}}_{2*}H\underline{\mathbb{F}}_2/J$ soit libre en tant que $H\underline{\mathbb{F}}_{2*}$ -module. On introduit une restriction sur l'idéal J précédemment considéré (voir définition 2.4.19) pour que $(H\underline{\mathbb{F}}_{2*}, H\underline{\mathbb{F}}_{2*}H\underline{\mathbb{F}}_2/J)$ soit libre (voir proposition 2.4.21).

On définit les opérations $\mathbb{Z}/2$ -équivariantes Sq^i et les opérations de Milnor $\mathbb{Z}/2$ -équivariantes β_i à la définition 2.3.10, et on construit les analogues $\mathbb{Z}/2$ -équivariants des sous-algèbres de Hopf de l'algèbre de Steenrod classique $\mathcal{A}^*(n) = \langle Sq^1, \dots, Sq^{2^n} \rangle$ et $\mathcal{E}^*(n) = \langle Q_0, \dots, Q_n \rangle$, que l'on note $\mathcal{A}^*(n)$ et $\mathcal{E}^*(n)$ respectivement. On détermine ensuite la structure des algèbres $\mathcal{E}^*(n)$ dans la proposition 2.4.26.

En particulier, on a une sous-algèbre $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) \subset \mathcal{E}^*(1)$, et donc un foncteur de restriction $\mathcal{E}^*(1) - Mod \rightarrow \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod$.

Le point de départ du chapitre 3 est l'observation élémentaire suivante : soit X un espace topologique. On sait que $H\underline{\mathbb{F}}_2^*(X)$ est un module sur l'algèbre de Steenrod. On peut également considérer X comme un $\mathbb{Z}/2$ -espace muni de l'action triviale de $\mathbb{Z}/2$, et alors $H\underline{\mathbb{F}}_2^*(X)$ est un module sur l'algèbre de Steenrod $\mathbb{Z}/2$ -équivariante. La question naturelle est alors : quelle est la relation entre ces deux modules ?

Dans la définition 3.1.10, on construit un foncteur $R : \mathcal{A}^* - Mod \rightarrow \mathcal{A}^* - Mod$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{SH} & \xrightarrow{(-)^{triv}} & \mathbb{Z}/2\mathcal{SH} \\ \downarrow H\underline{\mathbb{F}}_2^* & & \downarrow H\underline{\mathbb{F}}_2^* \\ \mathcal{A}^* - Mod & \xrightarrow{R} & \mathcal{A}^* - Mod \end{array}$$

On montre ensuite que le foncteur R se restreint en des foncteurs $R_n : \mathcal{A}^*(n) - Mod \rightarrow \mathcal{E}^*(n) - Mod$. Le foncteur

$$R_1 : \mathcal{A}^*(1) - Mod \rightarrow \mathcal{E}^*(1) - Mod$$

joue un rôle primordial dans notre étude de $k\underline{\mathbb{R}}^*(BV)$. On le renomme donc simplement R . On fait ensuite le calcul explicite de ce foncteur R :

Théorème (Théorème 3.2.3). *Le foncteur R est déterminé par les formules suivantes :*

1. En tant que $H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ -module, $R(-) = H\underline{\mathbb{F}}_2^* \otimes (-)$,
2. Pour $h \in H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ et $m \in M \in \mathcal{A}^* - Mod$, l'action de β_0 et β_1 sur $hm \in RM$ est donnée par

$$\beta_0(hm) = \beta_0(h)m + hQ_0(m)$$

et

$$\beta_1(hm) = \beta_1(h)m + a\beta_0(h)Q_0(m) + h(\sigma^{-1}Q_1(m) + aSq^2(m)).$$

Le reste du chapitre est consacré à une étude des propriétés principales du foncteur R : l'exactitude (proposition 3.1.15) et une compatibilité entre la dualité \mathbb{F}_2 -linéaire dans la catégorie des $\mathcal{A}^*(1)$ -modules et dans la catégorie des $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules (proposition 3.2.13).

Depuis Margolis [Mar83], on sait que certaines théories de cohomologie sur les $\mathcal{A}^*(1)$ -modules capturent des informations essentielles. Les cohomologies de Margolis $H_i = Ker(Q_i)/Im(Q_i)$ pour $i = 0$ ou 1 permettent de détecter la liberté des $\mathcal{A}^*(1)$ -modules connexes par exemple (voir [Bru12, théorème 2.7]). Le chapitre 4 est consacré à l'étude du foncteur $H_{01}^* : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \rightarrow \mathbb{F}_2 - Mod$, où $\mathbb{F}_2 - Mod$ désigne la catégorie des \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués, défini par $H_{01}^* = \frac{Ker(\beta_0) \cap Ker(\beta_1)}{\beta_1(Ker(\beta_0))}$. Cette

définition du foncteur H_{01}^* est celle qui apparait naturellement dans l'étude de $k\mathbb{R}^*(BV)$ faite au chapitre suivant. Afin d'obtenir une description plus conceptuelle du foncteur H_{01}^* , on se place dans le cadre de l'algèbre homologique relative, introduite par Hochschild [Hoc56] : on identifie le foncteur H_{01}^* avec $\Sigma^{-i(1+\alpha)}Ext^i_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))}(\mathbb{F}_2, -)$, où $Ext^i_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))}(\mathbb{F}_2, -)$ est le i -ième foncteur dérivé à droite de $Hom_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(\mathbb{F}_2, -)$. On obtient alors automatiquement des suites exactes longues associées aux suites $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exactes courtes de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules. Ces suites exactes longues sont l'outil principal de l'étude du foncteur H_{01}^* . Au passage, afin de rendre l'énoncé des résultats plus joli, on introduit une version générale d'homologie et de cohomologie de Tate dans la catégorie des $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules à la définition 4.1.24. Ces outils rendent possible le calcul explicite de $H_{01}^*(R(H\mathbb{F}_2^*(BV)))$, un objet essentiel à la compréhension de $k\mathbb{R}^*(BV)$. Il s'agit du théorème 4.3.2 qui est le résultat principal de ce chapitre.

Le chapitre final de cette thèse commence par définir et étudier la notion de h -détection de niveau n relativement à un $\mathbb{Z}/2$ -spectre X pour une tour de $\mathbb{Z}/2$ -spectres. Cette notion est une généralisation de la notion de détection introduite par Powell dans [Pow12] pour étudier la $ko < n >$ -cohomologie des spectres BV , où V désigne un 2-groupe abélien élémentaire et $ko < n >$ le n -ième spectre dans la tour de Postnikov de ko , et coïncide avec celle-ci pour $h = 1$.

Pour une tour de spectres de la forme

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \\ \Sigma^{n(1+\alpha)}k \\ \downarrow v \\ \Sigma^{(n-1)(1+\alpha)}k \\ \downarrow v \\ \Sigma^{(n-2)(1+\alpha)}k \\ \downarrow v \\ \vdots \end{array}$$

pour $k = k\mathbb{R}$, ou $k = E\mathbb{Z}/2_+ \wedge k\mathbb{R}$, où $E\mathbb{Z}/2$ désigne l'espace universel du groupe $\mathbb{Z}/2$, la propriété de h -détection à tout niveau pour un $\mathbb{Z}/2$ -spectre X coïncide avec le fait que le module de v -torsion $tors_v(k^*(X))$ vérifie $tors_v(k^*(X)) = Ker(v^h : k^*(X) \rightarrow k^*(X))$, où $v^h : \Sigma^{(n+h)(1+\alpha)}k \rightarrow \Sigma^{n(1+\alpha)}k$ est l'application apparaissant dans la tour.

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

Théorème (Théorème 5.3.8). *Soit V un 2-groupe abélien élémentaire. La tour $(E\mathbb{Z}/2_+ \wedge \Sigma^{\bullet(1+\alpha)}k\mathbb{R})$ vérifie la propriété de 1-détection à tout niveau pour BV .*

La méthode utilisée pour la preuve est la suivante : dans le point 3 de la proposition 5.3.3, on montre que l'obstruction à la propriété de 1-détection à tout niveau relativement à un $\mathbb{Z}/2$ -espace X pour une

tour

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \downarrow \\
 k_n \\
 \downarrow e_n \\
 k_{n-1} \\
 \downarrow e_{n-1} \\
 k_{n-2} \\
 \downarrow v_{n-2} \\
 \vdots
 \end{array}$$

est un endomorphisme de $\mathbb{F}_2[a]$ -modules de degré 2 d'un certain $\mathbb{F}_2[a]$ -module $h^*(X)$ construit à partir de la tour k_\bullet . Le lemme 5.3.5 identifie $h^*(X)$ avec $H_{01}^* \circ R(H\mathbb{F}_2^*(BV))$, dont la détermination a été faite au chapitre 4. Le théorème est finalement une conséquence de la non-existence d'endomorphismes non-triviaux de $\mathbb{F}_2[a]$ -modules de degré 2 de $h^*(X)$.

L'étude des propriétés de h -détection faite au début du chapitre permet de déduire le résultat suivant à partir du théorème 5.3.8 :

Théorème (Théorème 5.3.9). *La tour des tranches de $k\mathbb{R}$ vérifie la propriété de 2-détection à tout niveau pour BV .*

Le théorème 5.3.9 fournit une nouvelle démonstration du théorème principal de [Pow12].

Dans [Wil73, Wil75], Wilson introduit des spectres $BP \langle n \rangle$, pour $n \in \mathbb{N}$ et des morphismes

$$BP \rightarrow \dots \rightarrow BP \langle n+1 \rangle \rightarrow BP \langle n \rangle \rightarrow \dots \rightarrow BP \langle 0 \rangle = H\mathbb{Z}.$$

On a une équivalence faible 2-locale

$$BP \langle 1 \rangle \cong ku.$$

Dans [Pow13], Powell montre comment les techniques élaborées dans [Pow12] permettent d'avoir des informations sur la $BP \langle n \rangle$ -cohomologie des groupes abéliens 2-élémentaires. Le calcul de $k\mathbb{R}^*(BV)$ est une première approche à la compréhension de $BP\mathbb{R} \langle n \rangle^*(BV)$, où les spectres $BP\mathbb{R} \langle n \rangle$ sont les analogues $\mathbb{Z}/2$ -équivariants $BP \langle n \rangle$, introduits par Hu [Hu02]. Le traitement fait dans cette thèse de la structure de l'algèbre de Steenrod $\mathbb{Z}/2$ -équivariante et de l'algèbre homologique relative est assez général pour vouloir appliquer ces idées dans les $\mathbb{Z}/2$ -spectres suivants de la tour chromatique $\mathbb{Z}/2$ -équivariante.

Cette voie est une possible approche au calcul des analogues chromatiquement plus élevés de $ko^*(BV) = k\mathbb{R}^*(BV)$: les anneaux $(BP\mathbb{R} \langle n \rangle)^*(BV) \subset (BP\mathbb{R} \langle n \rangle)^*(BV)$.

Chapitre 1

Eléments de la théorie d'homotopie stable équivariante

L'objectif de ce chapitre est de donner les idées de la construction de la catégorie d'homotopie stable $\mathbb{Z}/2$ -équivariante ainsi que d'introduire le spectre $\mathbb{Z}/2$ -équivariant $k\mathbb{R}$. Nous allons donc introduire une catégorie de modèles monoïdale symétrique $\mathbb{Z}/2\mathcal{S}p$ telle que la catégorie homotopique associée soit la catégorie d'homotopie stable $\mathbb{Z}/2$ -équivariante $\mathbb{Z}/2\mathcal{S}\mathcal{H}$. La catégorie des spectres orthogonaux $\mathbb{Z}/2$ -équivariants est un modèle possible pour la catégorie des spectres $\mathbb{Z}/2$ -équivariants, et c'est ce modèle que nous choisissons implicitement dans la suite de cette thèse.

Nous allons éviter le plus possible les détails techniques relatifs à la construction et aux propriétés de la catégorie des spectres $\mathbb{Z}/2$ -équivariants, en faisant référence à [HHR09, Appendices A et B] et au début de [Dug03] dans le cas particulier du groupe à deux éléments, ainsi que [MMSS01] pour la construction de la catégorie des spectres orthogonaux équivariants. Pour un panorama détaillé de la théorie nos références sont [LMSM86], [May96] et [HK01], [TW95] et [FL04] (pour les foncteurs de Mackey).

Le premier objectif de cette partie (section 1.1) est de donner les idées d'une construction de la catégorie d'homotopie stable $\mathbb{Z}/2$ -équivariante $\mathbb{Z}/2\mathcal{S}\mathcal{H}$, en mettant en évidence les différences essentielles avec la construction classique. En particulier on rappellera la t -structure classique sur la catégorie des $\mathbb{Z}/2$ -spectres qui met en évidence le rôle des foncteurs de Mackey dans la théorie.

Ensuite, on s'intéresse à deux tours d'endofoncteurs de la catégorie des $\mathbb{Z}/2$ -spectres : la tour de Postnikov $\mathbb{Z}/2$ -équivariante, dans la section 1.2, et la tour des tranches, dans la section 1.3. Notre référence pour la filtration par tranches (*slice filtration*) est le papier dans lequel elle est introduite : [HHR09]. Sa construction est également rappelée dans [Hil11].

Pour finir, on définit la K -théorie réelle d'Atiyah, introduite dans [Ati66], et on étudie ses premières propriétés, ainsi que sa tour des tranches dans la section 1.5.

1.1 La catégorie d'homotopie stable $\mathbb{Z}/2$ -équivariante

1.1.1 Théorie d'homotopie $\mathbb{Z}/2$ -équivariante

Notation 1.1.1. Soit \mathcal{T} la catégorie des espaces topologiques compactement engendrés pointés. La catégorie $\mathbb{Z}/2\mathcal{T}$ désigne la catégorie dont les objets sont les espaces topologiques pointés, munis d'une action continue de $\mathbb{Z}/2$ fixant le point base, et les morphismes sont les morphismes $\mathbb{Z}/2$ -équivariants. Pour un objet $X \in \mathbb{Z}/2\mathcal{T}$, et $x \in X$, on note $\bar{x} \in X$ l'image de x par l'élément non-trivial de $\mathbb{Z}/2$.

Définition 1.1.2. Soient

1. $U_{\mathbb{Z}/2} : \mathbb{Z}/2\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ le foncteur d'oubli,
2. $Triv : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathcal{T}$ le foncteur action triviale,
3. $(-)/\mathbb{Z}/2 : \mathbb{Z}/2\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ le foncteur orbites,
4. $(-)^{\mathbb{Z}/2} : \mathbb{Z}/2\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ le foncteur des points fixes.

Proposition 1.1.3 ([May96, paragraphe I.2]). *On a les adjonctions suivantes :*

$$(-)/\mathbb{Z}/2 \dashv \text{Triv} \dashv (-)^{\mathbb{Z}/2}$$

$$\mathbb{Z}/2_+ \wedge (-) \dashv U_{\mathbb{Z}/2} \dashv \mathcal{T}(\mathbb{Z}/2_+, -).$$

Proposition 1.1.4 ([May96, paragraphe I.2]). *La catégorie $\mathbb{Z}/2\mathcal{T}$ est monoïdale fermée. La structure monoïdale est donnée par le bifoncteur \wedge , le produit smash des espaces muni de l'action diagonale de $\mathbb{Z}/2$.*

Le $\mathbb{Z}/2$ -espace des morphismes est l'espace $\text{Map}(U_{\mathbb{Z}/2}(-), U_{\mathbb{Z}/2}(-))$ des applications non équivariantes, muni de l'action de $\mathbb{Z}/2$ par conjugaison.

La structure homotopique de la catégorie $\mathbb{Z}/2\mathcal{T}$ à laquelle on s'intéresse est encodée par une structure de catégorie de modèles sur $\mathbb{Z}/2\mathcal{T}$. Pour la notion de catégorie de modèles, [DS95] est une bonne référence.

La proposition suivante est contenue dans [MM02, III.1].

Proposition 1.1.5 ([MM02, III.1]). *Soient X, Y deux objets de $\mathbb{Z}/2\mathcal{T}$ et $f \in \mathbb{Z}/2\mathcal{T}(X, Y)$.*

– On dit que f est une équivalence faible si $U_{\mathbb{Z}/2}f$ et $f^{\mathbb{Z}/2}$ sont des équivalences faibles dans \mathcal{T} .

– On dit que f est une cofibration si $U_{\mathbb{Z}/2}f$ et $f^{\mathbb{Z}/2}$ sont des cofibrations dans \mathcal{T} .

Alors, les classes des équivalences faibles, celle des cofibrations, et celle des fibrations définies par la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations acycliques munit $\mathbb{Z}/2\mathcal{T}$ d'une structure de catégorie de modèles.

Notation 1.1.6. 1. Soit $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}$ la catégorie dont les objets sont les $\mathbb{Z}/2$ -ensembles transitifs, et les morphismes les applications $\mathbb{Z}/2$ -équivariantes. On note $\mathbb{Z}/2$ et $*$ les objets $\mathbb{Z}/2/\{e\}$ et $\mathbb{Z}/2/\mathbb{Z}/2$ de cette catégorie, avec les notations évidentes.

2. Soit $\mathbb{Z}/2\text{FinSet}$ la catégorie des $\mathbb{Z}/2$ -ensembles finis et des applications $\mathbb{Z}/2$ -équivariantes.

3. On dispose d'un foncteur

$$\begin{aligned} (-)_+ : \mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2} &\rightarrow \mathbb{Z}/2\mathcal{T} \\ \mathbb{Z}/2/H &\mapsto \mathbb{Z}/2/H_+. \end{aligned}$$

Définition 1.1.7. Soit $E : \mathbb{Z}/2\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^{\mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}}$ le foncteur défini par

$$X \mapsto \mathbb{Z}/2\mathcal{T}((-)_+, X).$$

Pour H un sous-groupe de $\mathbb{Z}/2$, on note $W_{\mathbb{Z}/2}(H)$ le groupe de Weyl de H dans $\mathbb{Z}/2$. C'est le groupe d'automorphismes de $\mathbb{Z}/2/H$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}$. On a $W_{\mathbb{Z}/2}(\{e\}) = \mathbb{Z}/2$ et $W_{\mathbb{Z}/2}(\mathbb{Z}/2) = *$.

Par conséquent, le groupe $\text{Aut}(\mathbb{Z}/2/H)$ agit sur $X^H = \mathbb{Z}/2\mathcal{T}((\mathbb{Z}/2/H)_+, X)$ via cette identification.

Remarque 1.1.8. On rappelle la notion de structure de modèles projective sur une catégorie de diagrammes, définie dans [Hir03, Théorème 11.6.1]. La structure de modèles sur $\mathbb{Z}/2\mathcal{T}$ coïncide avec la structure de catégorie de modèles tirée en arrière de la structure projective sur $\mathcal{T}^{\mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}}$, via le foncteur E de la définition 1.1.7.

1.1.2 Espaces universels

Définition 1.1.9. Soit $\text{Rep}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}/2)$ la catégorie des représentations réelles de $\mathbb{Z}/2$ de dimension finie munies d'un produit scalaire $\mathbb{Z}/2$ -équivariant. Cette catégorie est munie d'une structure monoïdale symétrique donnée par la somme directe des représentations. On note $RO(\mathbb{Z}/2)$ le groupe de Grothendieck associé.

Définition 1.1.10. Soit $S^{(-)} : \text{Rep}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathcal{T}$ le foncteur qui associe à une représentation de $\mathbb{Z}/2$ son compactifié en un point. On appelle *sphère de représentation* un objet dans l'image de ce foncteur. Pour $V \in \text{Rep}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}/2)$, on note S^V le $\mathbb{Z}/2$ -espace obtenu, et $S(V)$ la sphère unité dans V , c'est un $\mathbb{Z}/2$ -espace non-pointé.

- Notation 1.1.11.**
1. On note 1 (resp. α) la représentation triviale (resp. signe) de $\mathbb{Z}/2$ de dimension réelle 1 . Ce sont des générateurs de $RO(\mathbb{Z}/2)$ en tant que groupe abélien libre.
 2. Le groupe abélien $RO(\mathbb{Z}/2)$ est également muni d'une structure d'anneau, dont le produit est induit par le produit tensoriel des représentations.
 3. On note $a \in \pi_{-\alpha}(S^0)$ la classe d'homotopie de l'inclusion des points fixes $S^0 \rightarrow S^\alpha$.
 4. Le choix d'une représentation V fournit un morphisme de groupes abéliens

$$\mathbb{Z}.V \rightarrow RO(\mathbb{Z}/2).$$

En particulier, on a un morphisme induit par 1 :

$$\mathbb{Z} \rightarrow RO(\mathbb{Z}/2).$$

5. On appelle *twist* d'une représentation de la forme $n + m\alpha \in RO(\mathbb{Z}/2)$ l'entier m .
6. On a un morphisme $dim : RO(\mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}$ qui, à un élément $n + m\alpha$ de $RO(\mathbb{Z}/2)$, associe l'entier $n + m$, appelé dimension de $n + m\alpha$.
7. On a un morphisme $w : RO(\mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}$ qui, à un élément $n + m\alpha$ de $RO(\mathbb{Z}/2)$, associe $m - n$, appelé poids de $n + m\alpha$.

Remarque 1.1.12. Pour une représentation non virtuelle V , c'est-à-dire une représentation dans l'image du morphisme canonique $Rep_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}/2) \rightarrow RO(\mathbb{Z}/2)$, l'entier $dim(V)$ correspond bien à la dimension réelle de la représentation.

Établissons maintenant quelques conventions générales concernant les objets $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués.

Définition 1.1.13. Soit \mathcal{C} une catégorie.

- Un objet $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué dans \mathcal{C} est un foncteur $RO(\mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathcal{C}$, où $RO(\mathbb{Z}/2)$ désigne la catégorie discrète dont les objets sont les éléments de $RO(\mathbb{Z}/2)$. On note un tel foncteur avec \star en exposant ou en indice.
- Un objet \mathbb{Z} -gradué dans \mathcal{C} est un foncteur $\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{C}$, où \mathbb{Z} désigne la catégorie discrète dont les objets sont les entiers relatifs. On note un tel foncteur avec $*$ en exposant ou en indice.
- Si \mathcal{C} est une catégorie concrète, pour m un élément de M , un objet gradué de \mathcal{C} , on note $|m|$ le degré de m .

Soient M^\star (respectivement N_\star) un tel objet, et $V \in RO(\mathbb{Z}/2)$. Alors M^V (respectivement N_V) désigne l'évaluation du foncteur M^\star (respectivement N_\star) en V .

Remarque 1.1.14. En vertu du point 1 de la notation 1.1.11, la donnée d'un objet $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué est équivalente à celle d'un objet bigradué.

Notation 1.1.15. Quand on représente un objet $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué (par exemple un groupe abélien $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué) dans le plan, on utilisera toujours la convention : l'axe des abscisses contient les éléments dont le degré est un multiple de la représentation triviale, et l'axe des ordonnées contient les éléments dont le degré est un multiple de la représentation signe. Un objet représenté au point (n, m) est donc de degré $n + m\alpha \in RO(\mathbb{Z}/2)$.

On définit maintenant des foncteurs de troncature dans la catégorie des groupes abéliens $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués.

Définition 1.1.16. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Notons $\mathbb{Z} - Mod$ la catégorie des groupes abéliens $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués. On note

$$(-)_{twist \geq n} : \mathbb{Z} - Mod \rightarrow \mathbb{Z} - Mod$$

le foncteur de troncature, défini par $(M^\star)_{twist \geq n} = \bigoplus_{k+l\alpha, k \in \mathbb{Z}, l \geq n} M^{k+l\alpha}$ et

$$(-)_{twist \leq n} : \mathbb{Z} - Mod \rightarrow \mathbb{Z} - Mod$$

le foncteur défini par $(M^\star)_{twist \leq n} = \bigoplus_{k+l\alpha, k \in \mathbb{Z}, l \leq n} M^{k+l\alpha}$.

Proposition 1.1.17. 1. Soit V une représentation de $\mathbb{Z}/2$. On a une suite cofibre dans $\mathbb{Z}/2\mathcal{T}$

$$S(V)_+ \rightarrow S^0 \rightarrow S^V$$

où la seconde flèche est induite par l'inclusion de $\{0\} \hookrightarrow V$.

2. En particulier, on a une suite cofibre

$$\mathbb{Z}/2_+ \rightarrow S^0 \xrightarrow{a} S^\alpha.$$

Démonstration. Ce sont les suites cofibres qui apparaissent dans [FL04] pages 90-91. Les deux suites cofibres proviennent de suites cofibres :

$$S(V)_+ \rightarrow D(V)_+ \rightarrow S^V$$

où $D(V)$ désigne le disque unité dans V , de sorte que $S(V)_+ \rightarrow D(V)_+$ est l'inclusion d'un sous- $\mathbb{Z}/2$ -CW-complexe.

Le second point est un cas particulier du premier. \square

Notation 1.1.18. Soient $E\mathbb{Z}/2$ un $\mathbb{Z}/2$ -espace universel, c'est-à-dire un $\mathbb{Z}/2$ -espace tel que $U_{\mathbb{Z}/2}E\mathbb{Z}/2 \cong \emptyset_+$ et $E\mathbb{Z}/2^{\mathbb{Z}/2} = \emptyset$ et $\widetilde{E\mathbb{Z}/2} = \text{hocolim}(E\mathbb{Z}/2_+ \rightarrow S^0)$.

Pour le $\mathbb{Z}/2$ -espace universel et le $\mathbb{Z}/2$ -espace $\widetilde{E\mathbb{Z}/2}$, on peut choisir un modèle particulier. Le modèle suivant est présent dans [HHR09, 2.5.2], dans le cas particulier $G = \mathbb{Z}/2$, et provient, pour le cas général d'un groupe discret, de [GM95, p.5].

Proposition 1.1.19 ([GM95, p.5]). On a les modèles suivants pour les $\mathbb{Z}/2$ -espaces $E\mathbb{Z}/2$ et $\widetilde{E\mathbb{Z}/2}$:

- $E\mathbb{Z}/2 = \text{colim } S(n\alpha)$
- $\widetilde{E\mathbb{Z}/2} = \text{colim } S^{n\alpha}$.

De plus, la suite cofibre

$$E\mathbb{Z}/2_+ \rightarrow S^0 \rightarrow \widetilde{E\mathbb{Z}/2}$$

est la colimite des suites cofibres dans $\mathbb{Z}/2\mathcal{T}$

$$S(n\alpha)_+ \rightarrow S^0 \rightarrow S^{n\alpha}.$$

Lemme 1.1.20 ([GM95, p.5]). Soit $X \in \mathbb{Z}/2\mathcal{T}$. On a une suite cofibre

$$E\mathbb{Z}/2_+ \wedge X \rightarrow S^0 \wedge X \rightarrow \widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge X. \quad (1.1)$$

Soient $X, Y \in \mathbb{Z}/2\mathcal{T}$ et $f \in \mathbb{Z}/2\mathcal{T}(X, Y)$. Alors $U_{\mathbb{Z}/2}f$ est une équivalence faible d'espaces topologiques pointés si et seulement si $E\mathbb{Z}/2_+ \wedge f$ est une équivalence faible dans $\mathbb{Z}/2\mathcal{T}$.

Démonstration. Le foncteur $X \wedge (-)$ envoie suite cofibre sur suite cofibre, d'où le premier point. Par construction, le foncteur d'oubli est monoïdal, donc $U_{\mathbb{Z}/2}(E\mathbb{Z}/2_+ \wedge X) \cong U_{\mathbb{Z}/2}X$ et $U_{\mathbb{Z}/2}(\widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge X) \cong \emptyset_+$. Par naturalité de la transformation $E\mathbb{Z}/2_+ \wedge (-) \rightarrow Id_{\mathbb{Z}/2\mathcal{T}}$, le résultat suit. \square

Définition 1.1.21. Soit $B\mathbb{Z}/2$ l'espace topologique $E\mathbb{Z}/2/\mathbb{Z}/2$, un modèle pour l'espace classifiant de $\mathbb{Z}/2$.

On termine cette sous-section avec la définition du $\mathbb{Z}/2$ -espace $B'\mathbb{Z}/2$, et sa relation avec l'espace classifiant $B\mathbb{Z}/2$.

Définition 1.1.22. Soit $E'\mathbb{Z}/2$ le $\mathbb{Z}/2$ -espace non-pointé $\text{colim}_n(S(n(1+\alpha)))$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, identifions $S(n(1+\alpha))$ avec la sphère unité de \mathbb{C}^n , munie de la structure de $\mathbb{Z}/2$ -espace induite par la conjugaison complexe. On a également une action du groupe symétrique Σ_2 sur $S(n(1+\alpha))$ induite par la représentation signe de Σ_2 sur \mathbb{C}^n . De plus, ces deux actions de groupe commutent entre elles, ainsi l'action de Σ_2 sur chaque $S(n(1+\alpha))$ induit une action de Σ_2 sur $E'\mathbb{Z}/2$ qui est compatible avec sa structure de $\mathbb{Z}/2$ -espace.

Définition 1.1.23. Soit $B'\mathbb{Z}/2$ le $\mathbb{Z}/2$ -espace pointé $E'\mathbb{Z}/2/\Sigma_2$.

Proposition 1.1.24. L'inclusion $\iota : (B\mathbb{Z}/2_+)^{Triv} \hookrightarrow B'\mathbb{Z}/2_+$ induite par les monomorphismes $n\alpha \hookrightarrow n(1 + \alpha)$ est une équivalence faible non-équivariante.

Démonstration. Par functorialité de $S(-) : Rep_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathcal{T}op$, où $\mathbb{Z}/2\mathcal{T}op$ désigne la catégorie des $\mathbb{Z}/2$ -espaces non pointés, il est clair que les morphismes $n\alpha \hookrightarrow n(1 + \alpha)$ induisent une application $\mathbb{Z}/2$ -équivariante $E\mathbb{Z}/2 \rightarrow E'\mathbb{Z}/2$. Le fait que $E\mathbb{Z}/2 \rightarrow E'\mathbb{Z}/2$ est induite par des morphismes dans $Rep_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}/2)$ assure que le morphisme en question est Σ_2 -équivariant par rapport à l'action antipodale à la source et au but, d'où le morphisme $\iota : (B\mathbb{Z}/2_+)^{Triv} \hookrightarrow B'\mathbb{Z}/2_+$. La dernière assertion est claire. \square

1.1.3 Stabilisation

Définition 1.1.25. Pour tout $V \in Rep_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}/2)$, le produit smash avec le $\mathbb{Z}/2$ -espace S^V définit un foncteur $S^V \wedge (-) : \mathbb{Z}/2\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathcal{T}$. On appelle *foncteurs de suspension* les foncteurs obtenus de cette façon.

De la même façon que dans le cadre non-équivariant, on construit la catégorie stable en inversant formellement tous les foncteurs de suspension.

Remarque 1.1.26. Plus précisément, la catégorie construite en inversant *tous* les foncteurs de suspension est la catégorie d'homotopie stable par rapport à un univers complet. On peut se référer à Lewis [Lew95] pour la notion d'univers et les différentes saveurs d'homotopie stable équivariantes correspondantes.

Un point important est qu'il existe des modèles de la catégorie des $\mathbb{Z}/2$ -spectres monoïdaux symétriques avant passage à la catégorie homotopique associée. C'est une motivation du choix fait ici de considérer la catégorie des $\mathbb{Z}/2$ -spectres orthogonaux. Pour la construction et les propriétés homotopiques de cette catégorie, [HHR09, Appendice A et B] est une bonne référence.

Notation 1.1.27. On note $\mathbb{Z}/2Sp$ la catégorie de modèles des $\mathbb{Z}/2$ -spectres orthogonaux, et $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$ la catégorie homotopique associée. On note $\Sigma^\infty : \mathbb{Z}/2\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{Z}/2Sp$ le foncteur canonique.

On relie la catégorie des $\mathbb{Z}/2$ -spectres avec la catégorie usuelle des spectres non-équivariants.

Notation 1.1.28. Soit $(-)^u : \mathbb{Z}/2Sp \rightarrow Sp$ le foncteur d'oubli.

On rappelle la définition de Hovey-Palmeri-Strickland d'une catégorie stable [HPS97, Définition 1.1.4].

Proposition 1.1.29 ([HPS97, Théorème 9.4.3]). *La catégorie d'homotopie stable gr-équivariante $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$ est une catégorie stable, engendrée par les objets fortement dualisables $\mathbb{Z}/2$ et $*$. En particulier $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$ est une catégorie triangulée.*

Proposition 1.1.30 (cas particulier de [May96, XVI Théorème 4.9]). *Les orbites $\Sigma^\infty\mathbb{Z}/2$ et $\Sigma^\infty*$ sont des objets auto-duaux de $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$ pour la dualité de Spanier-Whitehead $\mathbb{Z}/2$ -équivariante.*

Notation 1.1.31 ([HHR09, paragraphe 2.2.1]). On note $[-, -] : \mathbb{Z}/2\mathcal{SH}^{op} \times \mathbb{Z}/2\mathcal{SH} \rightarrow Ab$ le foncteur qui à X et Y associe le groupe abélien constitué des classes d'homotopie $\mathbb{Z}/2$ -équivariante stables de morphismes de $\mathbb{Z}/2$ -spectres $X \rightarrow Y$.

Par construction, pour tout $V \in Rep_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}/2)$, les foncteurs $S^V \wedge (-)$ sont inversibles dans $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$, par conséquent les objets S^V sont inversibles dans cette catégorie.

Proposition 1.1.32 ([HHR09, paragraphe A.2.4]). *Le foncteur $S^{(-)} : Rep_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/2Sp$ s'étend en un foncteur*

$$S^{(-)} : RO(\mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/2Sp$$

tel que le foncteur composé $S^{(-)} : RO(\mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/2Sp \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$ est fortement monoïdal.

Notation 1.1.33. Soit $\mathbb{Z}/2Sp_{naïf}$ la catégorie des $\mathbb{Z}/2$ -spectres *naïfs*, c'est-à-dire la catégorie obtenue en inversant uniquement les foncteurs de suspension par rapport aux sphères de représentation obtenues à partir de représentations triviales. On note $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}_{naïf}$ la catégorie homotopique associée.

Dans la catégorie stable $\mathbb{Z}/2$ -équivariante, on a également les analogues des résultats énoncés à la proposition 1.1.3.

1.1. LA CATÉGORIE D'HOMOTOPIE STABLE $\mathbb{Z}/2$ -ÉQUIVARIANTE

Proposition 1.1.34 ([Lew95, XVI, équations 1.1 et 1.4]). *Il existe un foncteur des points fixes $(-)^{\mathbb{Z}/2} : \mathbb{Z}/2\mathcal{SH} \rightarrow \mathcal{SH}$ et un isomorphisme naturel $(\Sigma^\infty(-))^{\mathbb{Z}/2} \cong \Sigma^\infty(-)$ de foncteurs $\mathbb{Z}/2\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{SH}$ où \mathcal{SH} désigne la catégorie d'homotopie stable non-équivariante. De plus, $(-)^{\mathbb{Z}/2}$ est adjoint à droite au foncteur d'action triviale $i_* : \mathcal{SH} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$ défini par Lewis [Lew95, XVI, p.196].*

Notation 1.1.35. On appelle suite de séparation d'isotropie d'un $\mathbb{Z}/2$ -spectre X la suite cofibre

$$E\mathbb{Z}/2_+ \wedge X \rightarrow X \rightarrow \widetilde{E}\mathbb{Z}/2 \wedge X$$

obtenue en appliquant le foncteur $(-) \wedge X$ à la suite cofibre donnée au lemme 1.1.20, pour $X = S^0$.

Remarque 1.1.36. Dans la notation précédente, le spectre $(\widetilde{E}\mathbb{Z}/2 \wedge X)^u$ est contractile, donc pour tout spectre Y , un morphisme $f : \widetilde{E}\mathbb{Z}/2 \wedge X \rightarrow Y$ est une équivalence faible si et seulement si $f^{\mathbb{Z}/2} : (\widetilde{E}\mathbb{Z}/2 \wedge X)^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow Y^{\mathbb{Z}/2}$ est une équivalence faible.

Ceci motive la définition suivante.

Définition 1.1.37. Soit $\Phi^{\mathbb{Z}/2} : \mathbb{Z}/2\mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$ le foncteur $(\widetilde{E}\mathbb{Z}/2 \wedge (-))^{\mathbb{Z}/2}$. On appelle $\Phi^{\mathbb{Z}/2}$ le foncteur des points fixes géométriques.

1.1.4 Foncteurs de Mackey

Définition 1.1.38. Soient $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}^s$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$ ayant pour objets les $\mathbb{Z}/2$ -ensembles transitifs munis d'un point base disjoint et $\mathbb{Z}/2\mathit{FinSet}$ la sous-catégorie pleine des $\mathbb{Z}/2$ -ensembles finis.

Remarque 1.1.39. 1. La catégorie $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}^s$ est enrichie en groupes abéliens car $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$ l'est.

2. Tout objet de $\mathbb{Z}/2\mathit{FinSet}$ se décompose en un (co)produit d'objets de $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}^s$.

3. Les catégories $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}^s$ rentrent dans un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2} & \xrightarrow{\Sigma^\infty(-)_+} & \mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}^s \\ \downarrow & & \downarrow (-)_+ \\ \mathbb{Z}/2\mathcal{T} & \xrightarrow{\Sigma^\infty} & \mathbb{Z}/2\mathcal{SH} \end{array} .$$

Proposition 1.1.40. [GM95, chapitre 5] *La catégorie $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}^s$ est isomorphe à $\mathit{Span}(\mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}^s)$, la catégorie des correspondances de $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}$.*

Pour une définition de la catégorie Span en toute généralité, voir [PS07]. C'est également la catégorie notée $\Omega_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2)$ dans l'article de Thévenaz et Webb [TW95, p. 1869].

Définition 1.1.41. Un foncteur de Mackey est un foncteur additif $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}^s \rightarrow \mathcal{A}b$. On note $\mathcal{M}(\mathbb{Z}/2)$ la catégorie des foncteurs de Mackey pour le groupe $\mathbb{Z}/2$.

Remarque 1.1.42. La catégorie des foncteurs de Mackey est la catégorie des foncteurs d'une petite catégorie vers une catégorie abélienne. En tant que telle, c'est une catégorie abélienne, avec noyaux et conoyaux calculés sur chaque évaluation sur un objet de $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}^s$.

Ferland et Lewis [FL04] donnent une description plus explicite de la catégorie des foncteurs de Mackey pour le groupe \mathbb{Z}/p pour p premier quelconque. Voici la description dans le cas du groupe $\mathbb{Z}/2$.

Définition 1.1.43. La catégorie $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}^s$ est la catégorie enrichie en groupes abéliens générée par

$$\begin{array}{c} * \\ \tau \uparrow \downarrow \rho \\ \mathbb{Z}/2 \\ \theta \downarrow \end{array}$$

où $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}^s(*, *) = \mathbb{Z}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}^s(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}^2$ engendré par 1 et θ , $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}^s(*, \mathbb{Z}/2) = \mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}^s(\mathbb{Z}/2, *) = \mathbb{Z}$ engendrés par τ et ρ respectivement. Enfin, ces morphismes sont sujets aux relations suivantes :

- $\theta^2 = id$,
- $\tau\rho = id$,
- $\theta\rho = \rho$,
- $\tau\theta = \tau$,
- $\tau\rho = id$,
- $\rho\tau = 1 + \theta$.

Définition 1.1.44. Soit M un foncteur de Mackey. On appelle restriction le morphisme de groupes abéliens $M(*) \rightarrow M(\mathbb{Z}/2)$ induit par ρ , et transfert le morphisme de groupes abéliens $M(\mathbb{Z}/2) \rightarrow M(*)$ induit par τ .

Exemple 1.1.45. On a deux familles d'exemples de foncteurs de Mackey : pour tout $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2]$ -module M , on définit les foncteurs de Mackey

$$\begin{array}{c} M^{\mathbb{Z}/2} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{tr} \end{array} \left(\begin{array}{c} \downarrow \\ i \end{array} \right) \\ M \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \theta \end{array} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{c} M/\mathbb{Z}/2 \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ pr \end{array} \left(\begin{array}{c} \downarrow \\ tr \end{array} \right) \\ \mathbb{Z}/2 \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \theta \end{array} \end{array}$$

où θ désigne l'action de $\mathbb{Z}/2$ sur M , $i : M^{\mathbb{Z}/2} \hookrightarrow M$ est l'inclusion des points fixes, $pr : M \rightarrow M/\mathbb{Z}/2$ est la projection canonique, et tr désigne le morphisme trace.

La définition suivante du produit tensoriel de deux foncteurs de Mackey pour le groupe $\mathbb{Z}/2$ est dans [FL04, p.11].

Définition 1.1.46. Soient $M, N \in \mathcal{M}(\mathbb{Z}/2)$. On définit le foncteur de Mackey $M \boxtimes N$ par :

$$\begin{array}{c} (M(*) \otimes N(*) \oplus (M(\mathbb{Z}/2) \otimes N(\mathbb{Z}/2)))/\cong \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ i_2 \end{array} \left(\begin{array}{c} \downarrow \\ (\rho_M \otimes \rho_N, tr) \end{array} \right) \\ M(\mathbb{Z}/2) \otimes N(\mathbb{Z}/2), \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \theta_M \otimes \theta_N \end{array} \end{array}$$

où ρ_M, ρ_N désignent les restrictions de M et N respectivement, θ_M, θ_N désignent l'action de $\mathbb{Z}/2$ sur $M(\mathbb{Z}/2)$ et $N(\mathbb{Z}/2)$ respectivement. Le morphisme tr est la trace sous l'action de $\theta_M \otimes \theta_N$ et i_2 est induit par l'inclusion. Enfin, la relation d'équivalence \cong est $m_{\mathbb{Z}/2} \otimes \tau_N n_e \cong \rho_M m_{\mathbb{Z}/2} \otimes n_e$ et $\tau_M m_e \otimes n_{\mathbb{Z}/2} \cong m_e \otimes \rho_N n_{\mathbb{Z}/2}$ pour $m_H \in M(\mathbb{Z}/2/H)$, $n_H \in N(\mathbb{Z}/2/H)$, pour H un sous-groupe de $\mathbb{Z}/2$.

Proposition 1.1.47 ([FL04]). *Le produit \boxtimes munit $\mathcal{M}(\mathbb{Z}/2)$ d'une structure de catégorie monoïdale symétrique. On note A l'unité bilatère de cette structure monoïdale. On appelle A le foncteur de Mackey de Burnside.*

Remarque 1.1.48. – On donnera l'interprétation topologique de cette structure monoïdale dans les propositions 1.2.9 et 1.2.10.

- La terminologie *foncteur de Mackey de Burnside* est justifiée par le fait que $A(\mathbb{Z}/2)$ s'identifie avec l'anneau de Burnside du groupe $\mathbb{Z}/2$ (voir [GM95, p.8]).

On termine cette sous-section avec quelques exemples explicites de foncteurs de Mackey.

On suit les notations de [FL04]. Dans le tableau suivant, on note \mathbb{Z} la représentation triviale de $\mathbb{Z}/2$ et \mathbb{Z}_- sa représentation signe, C désigne un groupe abélien quelconque. Les foncteurs de Mackey de la

1.1. LA CATÉGORIE D'HOMOTOPIE STABLE $\mathbb{Z}/2$ -ÉQUIVARIANTE

partie droite sont les versions réduites modulo 2 du foncteur de Mackey correspondant à gauche, i.e. on a des suites exactes courtes de foncteurs de Mackey

$$M \xrightarrow{2} M \rightarrow M_2 \tag{1.2}$$

pour M n'importe quel foncteur de Mackey de la colonne de gauche du tableau.

Notation	foncteur de Mackey	Notation	foncteur de Mackey
$R = \mathbb{Z}$	$\begin{array}{c} \mathbb{Z} \\ \uparrow \downarrow \\ 2 \end{array} =$	$R_2 = \mathbb{F}_2$	$\begin{array}{c} \mathbb{Z}/2 \\ \uparrow \downarrow \\ 0 \end{array} =$
L	$= \begin{array}{c} \mathbb{Z} \\ \uparrow \downarrow \\ 2 \end{array}$	L_2	$= \begin{array}{c} \mathbb{Z}/2 \\ \uparrow \downarrow \\ 0 \end{array}$
R_-	$\begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \downarrow \\ \mathbb{Z}_- \end{array}$	$R_{2,-}$	$\begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \downarrow \\ 0 \\ \mathbb{Z}/2 \end{array}$
L_-	$\begin{array}{c} \mathbb{Z}/2 \\ \uparrow \downarrow \\ \pi \\ \mathbb{Z}_- \end{array} 0$	L_2	$= \begin{array}{c} \mathbb{Z}/2 \\ \uparrow \downarrow \\ 0 \\ \mathbb{Z}/2 \end{array}$
$\langle C \rangle$	$\begin{array}{c} C \\ \uparrow \downarrow \\ 0 \end{array}$	$\langle C \otimes \mathbb{F}_2 \rangle$	$\begin{array}{c} C \otimes \mathbb{F}_2 \\ \uparrow \downarrow \\ 0 \end{array}$

On dispose des suites exactes courtes de foncteurs de Mackey suivantes, utiles pour la suite.

Proposition 1.1.49. *On a des suites exactes courtes de foncteurs de Mackey*

$$L \rightarrow R \rightarrow \langle \mathbb{Z}/2 \rangle$$

et

$$R_- \rightarrow L_- \rightarrow \langle \mathbb{Z}/2 \rangle .$$

Démonstration. La preuve est un calcul. Le résultat est une conséquence du fait que dans les deux diagrammes suivants, les lignes sont bien des suites exactes courtes de groupes abéliens.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z} & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}/2 \\ \uparrow \downarrow & & \uparrow \downarrow & & \uparrow \downarrow \\ = & & 2 & & = \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{=} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow \downarrow & & \uparrow \downarrow & & \\ = & & = & & \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{=} & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow \scriptstyle{0} & & \uparrow \scriptstyle{\pi} & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_- & \xrightarrow{=} & \mathbb{Z}_- \\
 \downarrow \scriptstyle{0} & & \downarrow \scriptstyle{-1} & & \downarrow \scriptstyle{-1}
 \end{array}$$

□

Comme la catégorie $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}^s$ provient de la topologie $\mathbb{Z}/2$ -équivariante, on dispose également d'une famille de foncteurs de Mackey apparaissant naturellement dans ce contexte. C'est l'objet de la sous-section suivante.

1.1.5 Théories d'homologie et de cohomologie

On rappelle la définition du foncteur $S^{(-)} : RO(\mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$ donné à la proposition 1.1.32, ainsi que la notation $[-, -]$ donnée à la notation 1.1.31.

Notation 1.1.50. Soit $[-, -]^* : \mathbb{Z}/2\mathcal{SH}^{op} \times \mathbb{Z}/2\mathcal{SH} \rightarrow \mathbb{Z} - Mod$, où $\mathbb{Z} - Mod$ désigne la catégorie des groupes abéliens $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués, le foncteur défini par $[X, Y]^V : \mathbb{Z}/2/H \rightarrow [X \wedge S^{-V}, Y]$. On note $[-, -]_* : V \rightarrow [-, -]^{-V}$.

Définition 1.1.51. Soit E un $\mathbb{Z}/2$ -spectre. On définit les foncteurs

1. $\underline{E}^* : \mathbb{Z}/2\mathcal{SH}^{op} \rightarrow Fun(RO(\mathbb{Z}/2), \mathcal{M}(\mathbb{Z}/2))$ par $\underline{E}^*(X)((\mathbb{Z}/2/H)_+) = [X \wedge (\mathbb{Z}/2/H)_+, E]^*$ pour H un sous-groupe de $\mathbb{Z}/2$,
2. $\underline{E}_* : \mathbb{Z}/2\mathcal{SH} \rightarrow Fun(RO(\mathbb{Z}/2), \mathcal{M}(\mathbb{Z}/2))$ par $\underline{E}_*(X)((\mathbb{Z}/2/H)_+) = [(\mathbb{Z}/2/H)_+, X \wedge E]_*$ pour H un sous-groupe de $\mathbb{Z}/2$.
3. Enfin, on notera simplement $E_*(X)$ et $E^*(X)$ les groupes abéliens $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués $\underline{E}^*(X)(*)$ et $\underline{E}_*(X)(*)$ respectivement.

On rappelle la notation 1.1.11, qui introduit la classe $a \in [S^0, S^\alpha]$, qui est la classe d'homotopie du morphisme de $\mathbb{Z}/2$ -espaces $S^0 \rightarrow S^\alpha$ induite par $\{0\} \hookrightarrow \alpha$.

Remarque 1.1.52. – La classe a vérifie $2a = 0 \in \pi_{-\alpha}(S^0)$.

- Soient $X, Y \in \mathbb{Z}/2Sp$. Le groupe abélien $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué $[X, Y]^*$ est naturellement un $\mathbb{Z}[a]/(2a)$ -module, où a agit par la pré-composition par le morphisme $S^0 \rightarrow S^\alpha$ définie à la notation 1.1.11. Le degré de a est α .

Le lemme suivant relie la structure de $\mathbb{Z}[a]/(2a)$ -module de E_* donnée par la remarque 1.1.52 avec la structure de foncteur de Mackey $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué de \underline{E}_* . On rappelle la terminologie introduite à la définition 1.1.44.

Lemme 1.1.53. Soit E un $\mathbb{Z}/2$ -spectre.

1. $Im(a) = Ker(\rho)$ où $\rho : \underline{E}_*(*) \rightarrow \underline{E}_*(\mathbb{Z}/2/\{e\})$ désigne la restriction.
2. $Ker(a) = Im(\tau)$ où τ est le transfert.
3. Soit x un élément de E_* . Supposons que x est multiple de a , et que x n'est pas dans $Ker(a)$. Alors x induit un monomorphisme scindé de foncteurs de Mackey $\langle \mathbb{F}_2 \rangle \hookrightarrow \underline{E}_*$.
4. Supposons de plus que E_*^u est sans 2-torsion. Soit $x \in E_*$. Alors x est multiple de a si et seulement si il est de 2-torsion.

Démonstration. Les deux premiers points sont une conséquence de la suite exacte longue associée à la suite cofibre

$$\mathbb{Z}/2_+ \rightarrow S^0 \rightarrow S^\alpha;$$

en effet :

1.2. TOUR DE POSTNIKOV $\mathbb{Z}/2$ -ÉQUIVARIANTE ET THÉORIES DE COHOMOLOGIE ORDINAIRES

1. Appliquons le foncteur exact $[-, \Sigma^{-*}E]$ à la suite cofibre. On a l'identification suivante :

$$\begin{array}{ccccc} [S^\alpha, \Sigma^{-*}E] & \longrightarrow & [S^0, \Sigma^{-*}E] & \longrightarrow & [\mathbb{Z}/2_+, \Sigma^{-*}E] \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \pi_{\star+\alpha}(E)(*) & \xrightarrow{a} & \pi_\star(E)(*) & \xrightarrow{\rho} & \pi_\star(E)(\mathbb{Z}/2) \end{array}$$

où les lignes sont exactes. Le premier point suit.

2. Appliquons le foncteur exact $[S^\star, (-) \wedge E]$ à la suite cofibre. On a l'identification suivante :

$$\begin{array}{ccccc} [S^\star, \mathbb{Z}/2_+ \wedge E] & \longrightarrow & [S^\star, E] & \longrightarrow & [\Sigma^{\star-\alpha}, E] \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \pi_\star(E)(\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\tau} & \pi_\star(E)(*) & \xrightarrow{a} & \pi_\star(E)(*) \end{array}$$

où les lignes sont exactes. Le second point suit.

3. Appliquons les deux premiers points à l'élément x . Par le premier point, $x \notin \text{Im}(\tau)$, et par le second point, x est dans le noyau de la restriction ρ . De plus, x multiple de a implique $2x = 0$ car $2a = 0$ (voir la remarque 1.1.52). Par conséquent, le monomorphisme de foncteurs de Mackey

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_2 & \xrightarrow{x_*} & E_\star \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \underline{E}_\star(\mathbb{Z}/2), \end{array}$$

où le morphisme étiqueté x_* est induit par l'élément x , est scindé.

4. Pour le troisième point, par la remarque 1.1.52, $2a = 0$ dans $\pi_{-\alpha}(S^0)$ donc la condition est suffisante. Elle est nécessaire en vertu du premier point du lemme, car si x est de 2-torsion, alors $\rho x = 0$ puisque $0 = \rho(2x) = 2\rho(x)$. □

En degrés entiers, dans le cas particulier de $E = S^0$, on utilise la notation habituelle suivante.

Notation 1.1.54. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On définit un foncteur

$$\pi_n : \mathbb{Z}/2\mathcal{SH} \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{Z}/2),$$

par $\pi_n = \underline{(S^0)}_n$.

1.2 Tour de Postnikov $\mathbb{Z}/2$ -équivariante et théories de cohomologie ordinaires

1.2.1 Tour de Postnikov $\mathbb{Z}/2$ -équivariante

Dans cette section, on parle des t -structures sur les catégories \mathcal{SH} et $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$. Une référence pour la notion de t -structure est [ATJLSS03]. Dans le cadre non-équivariant, la catégorie d'homotopie stable classique est munie d'une t -structure donnée par la connexité, qui donne la tour de Postnikov classique. Le cœur de cette t -structure est la catégorie des groupes abéliens. De la même façon, dans le monde $\mathbb{Z}/2$ -équivariant, on peut construire une t -structure sur $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$ à l'aide de la notion de connexité donnée par les foncteurs π_n .

Définition 1.2.1. Soient

- $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}_{\geq 0}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$ dont les objets sont les spectres connexes, c'est-à-dire les spectres X tels que $\forall n < 0, \pi_n(X) = 0$;

– $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}_{\leq -1}$ par $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}_{\leq -1} := \mathbb{Z}/2\mathcal{SH}_{\geq 0}^\perp$, c'est-à-dire la sous-catégorie pleine de $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$ dont les objets sont les spectres X tels que $\forall Y \in \text{Ob}(\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}_{\geq 0})$, $[X, Y] = *$. On appelle les spectres de cette catégorie spectres co-connexes.

Proposition 1.2.2. $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}_{\geq n} := \Sigma^n \mathbb{Z}/2\mathcal{SH}_{\geq 0}$ et $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}_{\leq n-1} = \Sigma^n \mathbb{Z}/2\mathcal{SH}_{\leq -1}$ définissent une t -structure sur $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$. Le cœur de cette t -structure est isomorphe à la catégorie abélienne des foncteurs de Mackey. Pour un tel foncteur M , on note HM l'élément du cœur correspondant. Il est l'unique objet de $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$ à équivalence faible près tel que, $\forall i \in \mathbb{Z}$,

$$\pi_i(HM) = \begin{cases} M & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Cette proposition rassemble la proposition [LMSM86, proposition I.7.14] qui implique l'existence d'une t -structure sur $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$ dont les objets $\geq n$ sont les objets n -connexes, et une conséquence de [Lew95, Théorème 1.13] qui, dans le cas particulier d'un univers complet, identifie le cœur de cette t -structure comme la catégorie des spectres d'Eilenberg-MacLane $H\underline{M}$, pour \underline{M} un foncteur de Mackey. \square

Définition 1.2.3. On appelle la tour naturelle définie par cette t -structure la tour de Postnikov $\mathbb{Z}/2$ -équivariante.

Notation 1.2.4. Dans la catégorie homotopique \mathcal{SH} des spectres non-équivariants, on note $(-) \langle n \rangle$ le foncteur de localisation par rapport aux sphères S^k , pour $k < n$. Il s'agit du foncteur "recouvrement $(n-1)$ -connexe" de la tour de Postnikov classique. C'est un foncteur dont l'image est la sous-catégorie pleine des spectres $(n-1)$ -connexes. De plus, on a des transformations naturelles $(-) \langle n \rangle \rightarrow (-) \langle n-1 \rangle$ et $(-) \langle n \rangle \rightarrow Id_{\mathcal{SH}}$.

Remarque 1.2.5. Suivant [GM95], la tour de Postnikov équivariante, que nous avons défini pour le groupe $\mathbb{Z}/2$, admet une définition générale pour tout groupe discret G . La tour de Postnikov classique coïncide alors avec la tour de Postnikov équivariante par rapport au groupe trivial.

Exemple 1.2.6. Pour tout spectre non-équivariant X et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les cofibres des applications $X \langle n \rangle \rightarrow X \langle n-1 \rangle$ sont des spectres d'Eilenberg-MacLane.

Corollaire 1.2.7 (Corollaire de la proposition 1.2.2). *Une suite exacte courte de foncteurs de Mackey*

$$M \hookrightarrow N \twoheadrightarrow P$$

donne une suite cofibre de $\mathbb{Z}/2$ -spectres

$$HM \rightarrow HN \rightarrow HP.$$

Exemple 1.2.8. Par exemple la suite exacte courte

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{F}_2$$

donne lieu à une suite cofibre de $\mathbb{Z}/2$ -spectres

$$H\mathbb{Z} \xrightarrow{2} H\mathbb{Z} \twoheadrightarrow H\mathbb{F}_2.$$

On termine cette section avec une interprétation topologique de la structure monoïdale décrite à la définition 1.1.46.

Dans le cas classique, $\pi_0(S^0) \cong \mathbb{Z}$ est l'unité bilatère d'une structure monoïdale symétrique sur la catégorie des groupes abéliens. Nous allons maintenant énoncer un résultat $\mathbb{Z}/2$ -équivariant analogue. On rappelle la définition 1.1.46 du produit de deux foncteurs de Mackey.

Proposition 1.2.9 ([FL04]). *On a un isomorphisme de foncteurs de Mackey $\pi_0(S^0) \cong A$.*

Proposition 1.2.10 ([May96, paragraphe XIII.5]). *Soient M et N deux foncteurs de Mackey, alors on a un isomorphisme de foncteurs de Mackey $M \boxtimes N \cong \pi_0(HM \wedge HN)$.*

Voici quelques conséquences cruciales en ce qui concerne les $\mathbb{Z}/2$ -spectres d'Eilenberg-MacLane.

Corollaire 1.2.11. *Soient M et N deux foncteurs de Mackey.*

- *Il existe un morphisme canonique $\iota : HM \wedge HN \rightarrow H(M \boxtimes N)$.*
- *On a une correspondance entre les structures de $\mathbb{Z}/2$ -spectre en anneau sur HM et les structures de monoïde de M dans la catégorie $(\mathcal{M}(\mathbb{Z}/2), \boxtimes, A)$.*

Exemple 1.2.12. – Par définition du produit (voir la définition 1.1.46), on a un isomorphisme $\mathbb{F}_2 \boxtimes \mathbb{F}_2 \cong \mathbb{F}_2$, d'où un unique morphisme non trivial $\mathbb{F}_2 \boxtimes \mathbb{F}_2 \cong \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ donné par l'identité de \mathbb{F}_2 . Ce morphisme induit une structure de monoïde commutatif sur \mathbb{F}_2 , et $H\mathbb{F}_2$ est muni d'une structure de $\mathbb{Z}/2$ -spectre en anneau commutatif.

- De la même façon, on a un isomorphisme $\mathbb{Z} \boxtimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ (voir [FL04, table 1.1]). Le morphisme $\mathbb{Z} \boxtimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ induit une structure de gr -spectre en anneau commutatif sur $H\mathbb{Z}$.
- Le morphisme $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_2$ est compatible avec ces produits, et induit un morphisme de $\mathbb{Z}/2$ -spectres en anneau $H\mathbb{Z} \rightarrow H\mathbb{F}_2$.

1.2.2 L'anneau de coefficients de $H\mathbb{F}_2^*$

Dans le cas non-équivariant, le calcul de l'homologie du point est une conséquence directe des axiomes du spectre d'Eilenberg-MacLane $H\mathbb{F}_2$. Dans le monde équivariant, la propriété de $H\mathbb{F}_2$ donnée à la proposition 1.2.2 ne donne pas directement l'homologie $RO(\mathbb{Z}/2)$ graduée du point. Nous allons ici esquisser le calcul de $H\mathbb{F}_2^*$ en tant qu'algèbre ($H\mathbb{F}_2$ est un $\mathbb{Z}/2$ -spectre en anneaux en vertu de l'exemple 1.2.12). La preuve est faite dans [HK01, proposition 6.2]. On peut commencer par définir une classe d'homologie à la main.

Définition 1.2.13. Soit a la classe de cohomologie définie par l'image de $a \in [S^0, S^\alpha]$ par le morphisme d'Hurewicz modulo 2,

$$[S^0, S^\alpha] \rightarrow H\mathbb{Z}_{-\alpha}(S^0) \rightarrow H\mathbb{F}_2_{-\alpha}(S^0),$$

son degré homologique est par définition $-\alpha$. On appelle *classe d'Euler* de la représentation α l'élément a .

Maintenant, passons au calcul ; pour l'approche esquissée ici, le choix du foncteur de Mackey \mathbb{F}_2 est essentiel (et plus particulièrement le fait que la restriction de \mathbb{F}_2 est $\rho = id_{\mathbb{F}_2}$). On va profiter de cette propriété supplémentaire pour effectuer le calcul comme dans [HK01], ou plus récemment dans [Dug03, Appendice B]. Néanmoins, cette hypothèse n'est pas nécessaire pour comprendre cet anneau, et les arguments de Caruso [Car99, Appendice] dans le cas d'un foncteur de Mackey quelconque aboutissent. Un résultat très général se trouve dans [FL04], et le cas particulier du foncteur de Mackey \mathbb{Z} y est effectué explicitement.

Proposition 1.2.14 ([HK01] proposition 6.2). *Il existe une classe d'homologie $\sigma^{-1} \in H\mathbb{F}_2_{1-\alpha}$, appelée classe d'orientation, telle que l'anneau $H\mathbb{F}_2^*$ est isomorphe au \mathbb{F}_2 -espace vectoriel $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué*

$$\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \oplus \sigma^{-2}\mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma]$$

où la structure d'algèbre est celle de l'extension à carré nul de l'algèbre $\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}]$ par le $\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}]$ -module $\sigma^2\mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma]$. Les degrés (homologiques) sont :

$$\begin{aligned} |a| &= -\alpha \\ |\sigma| &= 1 - \alpha. \end{aligned}$$

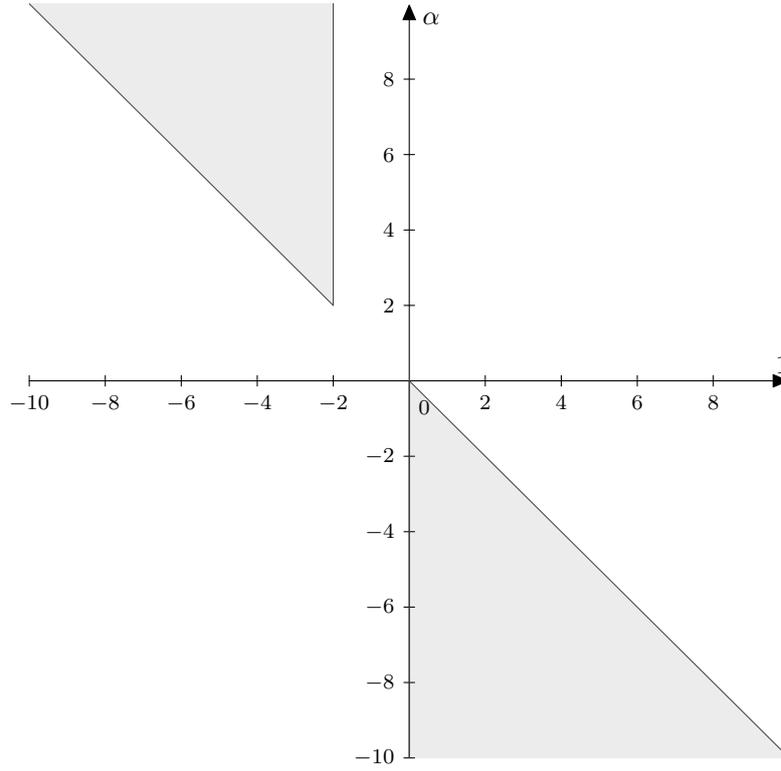
Remarque 1.2.15. En degrés $V \in RO(\mathbb{Z}/2)$ tels que $w(V) \in \{1, 2, 3\}$, $H\mathbb{F}_2_V = 0$. Cette observation est le point de départ de [HHR09, Théorème 8.5 (gap theorem)], qui est un ingrédient majeur dans la preuve du résultat principal de cet article.

On rappelle la définition de scindé pour un $\mathbb{Z}/2$ -spectre :

Définition 1.2.16. On dit qu'un spectre D est scindé si l'inclusion des points fixes

$$D^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow D$$

est un morphisme scindé dans la catégorie homotopique des $\mathbb{Z}/2$ -spectres naïfs (pour la notion de spectre naïf, voir la notation 1.1.33).


 FIGURE 1.1 – L’anneau d’homologie du point $H\underline{\mathbb{F}}_{2*}$, en un degré V dans la zone grisée, $H\underline{\mathbb{F}}_{2V} \cong \mathbb{F}_2$

Indications de la preuve de 1.2.14. Le spectre $H\underline{\mathbb{F}}_2$ est scindé (voir par exemple [May96, XVI 2]), donc on peut calculer explicitement l’homotopie du spectre fonctionnel $F(E\mathbb{Z}/2_+, H\underline{\mathbb{F}}_2)$ en utilisant [May96, XVI 2.4], qui donne les isomorphismes suivants :

1. $F(\Sigma^{k\alpha} E\mathbb{Z}/2, H\underline{\mathbb{F}}_2) \cong F(B\mathbb{Z}/2^{k\gamma_1}, H\underline{\mathbb{F}}_2)$ où γ_1 est le fibré canonique de $B\mathbb{Z}/2$.
2. $(\Sigma^{k\alpha} E\mathbb{Z}/2 \wedge H\underline{\mathbb{F}}_2)^{\mathbb{Z}/2} \cong B\mathbb{Z}/2^{k\gamma_1} \wedge H\underline{\mathbb{F}}_2$.

Les fibrés $k\gamma_1$ sont orientés (puisqu’on travaille modulo 2), et l’isomorphisme de Thom fournit

$$T_k : H\underline{\mathbb{F}}_2^{n-k\alpha}(E\mathbb{Z}/2) \cong H\underline{\mathbb{F}}_2^{n-k}(B\mathbb{Z}/2, \mathbb{F}_2), \quad (1.3)$$

où à droite, l’espace vectoriel est la cohomologie modulo 2 de l’espace topologique non-équivariant $B\mathbb{Z}/2$. On rappelle la propriété des $\mathbb{Z}/2$ -spectres d’Eilenberg-MacLane exprimée à la proposition 1.2.2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$H\underline{\mathbb{F}}_{2n} = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}.$$

Ce fait nous sert à étudier la suite de séparation d’isotropie (voir notation 1.1.35) de $H\underline{\mathbb{F}}_2$:

$$\begin{array}{ccccc} F(\tilde{E}\mathbb{Z}/2, H\underline{\mathbb{F}}_2)_* & \longrightarrow & H\underline{\mathbb{F}}_{2*} & \longrightarrow & F(E\mathbb{Z}/2_+, H\underline{\mathbb{F}}_2)_* \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \sigma^2 \mathbb{F}_2[\sigma, a^{\pm 1}] & \longrightarrow & \mathbb{F}_2[\sigma^{-1}, a] \oplus \sigma^2 \mathbb{F}_2[\sigma, a^{-1}] & \longrightarrow & \mathbb{F}_2[\sigma^{\pm 1}, a] \end{array}$$

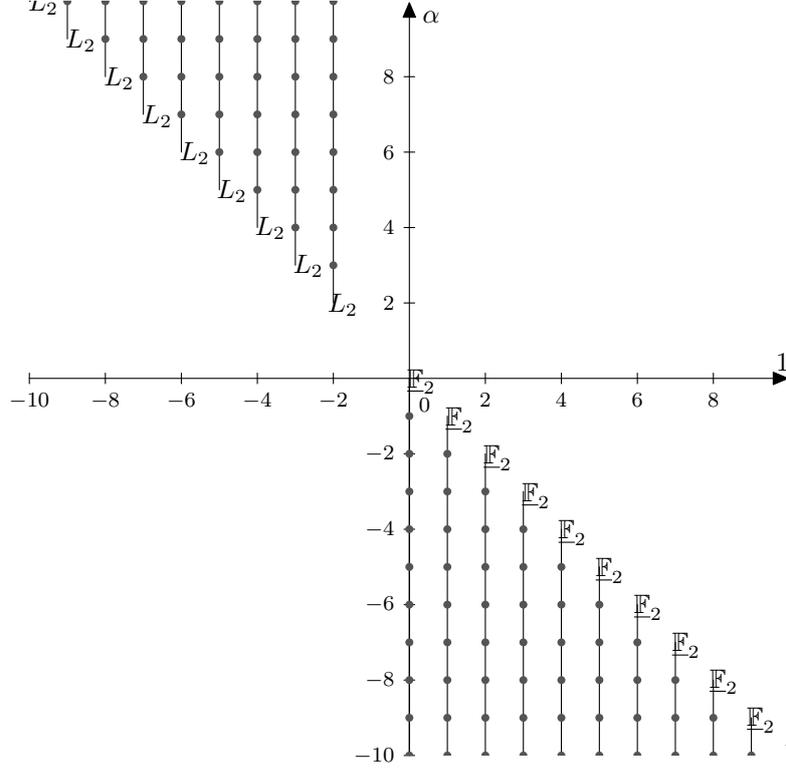
La structure d’anneau du \mathbb{F}_2 -module $\mathbb{F}_2[\sigma^{-1}, a] \oplus \sigma^2 \mathbb{F}_2[\sigma, a^{-1}]$ est donnée par l’extension à carré nul de l’anneau $\mathbb{F}_2[\sigma^{-1}, a]$ par le $\mathbb{F}_2[\sigma^{-1}, a]$ -module $\sigma^2 \mathbb{F}_2[\sigma, a^{-1}]$. \square

Nous allons terminer l’étude de la $H\underline{\mathbb{F}}_2$ -cohomologie du point par sa structure en tant que foncteur de Mackey.

1.2. TOUR DE POSTNIKOV $\mathbb{Z}/2$ -ÉQUIVARIANTE ET THÉORIES DE COHOMOLOGIE ORDINAIRES

Proposition 1.2.17. *Le foncteur de Mackey $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué $\underline{H}\underline{\mathbb{F}}_2$ est représenté sur la figure suivante. Un symbole \bullet représente le foncteur de Mackey $\langle \mathbb{Z}/2 \rangle$. Les segments $\underline{\mathbb{F}}_2$ représentent la multiplication par la classe d'Euler a , qui induit un morphisme de foncteur de Mackey qui est l'un des morphismes suivants :*

- l'identité de $\langle \mathbb{F}_2 \rangle$,
- l'unique morphisme non-trivial $\mathbb{F}_2 \rightarrow \langle \mathbb{F}_2 \rangle$,
- l'unique morphisme non-trivial $\langle \mathbb{F}_2 \rangle \hookrightarrow \underline{\mathbb{F}}_2$.



Démonstration. La proposition 1.2.14 donne $\underline{H}\underline{\mathbb{F}}_2(\star)$ en tant que $\mathbb{Z}[a]$ -module. Par adjonction,

$$\underline{H}\underline{\mathbb{F}}_2(\mathbb{Z}/2) = [\mathbb{Z}/2_+ \wedge S^\star, \underline{H}\underline{\mathbb{F}}_2]^{\mathbb{Z}/2} = \underline{H}\underline{\mathbb{F}}_2 \dim(\star)$$

c'est-à-dire 0 si $\dim(\star) = 0$ et \mathbb{F}_2 sinon. Le lemme 1.1.53 fournit les formules pour la restriction et le transfert. \square

Le spectre d'Eilenberg-MacLane $H\mathbb{Z}$ a un intérêt tout particulier pour nous (à cause de son lien avec la tour des tranches, voir la section 1.3). On rappelle donc également la structure de l'anneau de coefficients $H\mathbb{Z}_\star$ dans la proposition suivante

Proposition 1.2.18 ([FL04]). *On a un isomorphisme d'anneau*

$$H\mathbb{Z}_\star \cong \mathbb{Z}[a, \sigma^{-2}]/(2a) \oplus x\mathbb{Z}[a^{-1}, \sigma^2] \oplus 2\sigma^2\mathbb{Z}[\sigma^2]$$

où la structure d'anneau est celle de l'extension à carré nul de l'anneau $\mathbb{Z}[a, \sigma^{-2}]/(2a)$ par le $\mathbb{Z}[a, \sigma^{-2}]/(2a)$ -module $x\mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma^2] \oplus 2\sigma^2\mathbb{Z}[\sigma^2]$. Les degrés sont

- $|a| = -\alpha$,
- $|\sigma^{-1}| = 1 - \alpha$,
- $|x| = -3 + 3\alpha$.

Une représentation graphique est donnée à la figure 1.2.

Corollaire 1.2.19. *Pour $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2$, le spectre $\Sigma^{k(1+\alpha)}H\mathbb{Z}$ est une suspension d'un spectre d'Eilenberg-MacLane. Précisément, par la propriété universelle des spectres d'Eilenberg-MacLane, on a des équivalences faibles de $\mathbb{Z}/2$ -spectres :*

$$\Sigma^{-(1+\alpha)}H\mathbb{Z} = \Sigma^{-2}HR_-$$

$$\Sigma^{-2(1+\alpha)}H\mathbb{Z} = \Sigma^{-4}HL$$

$$\Sigma^{-3(1+\alpha)}H\mathbb{Z} = \Sigma^{-6}HL_-.$$

Notation 1.2.20. On appelle x l'unique classe non nulle de $H\mathbb{Z}_*$ en degré $-3 + 3\alpha$, et σ^{-2} l'unique classe non nulle de $H\mathbb{Z}_{2-2\alpha}$.

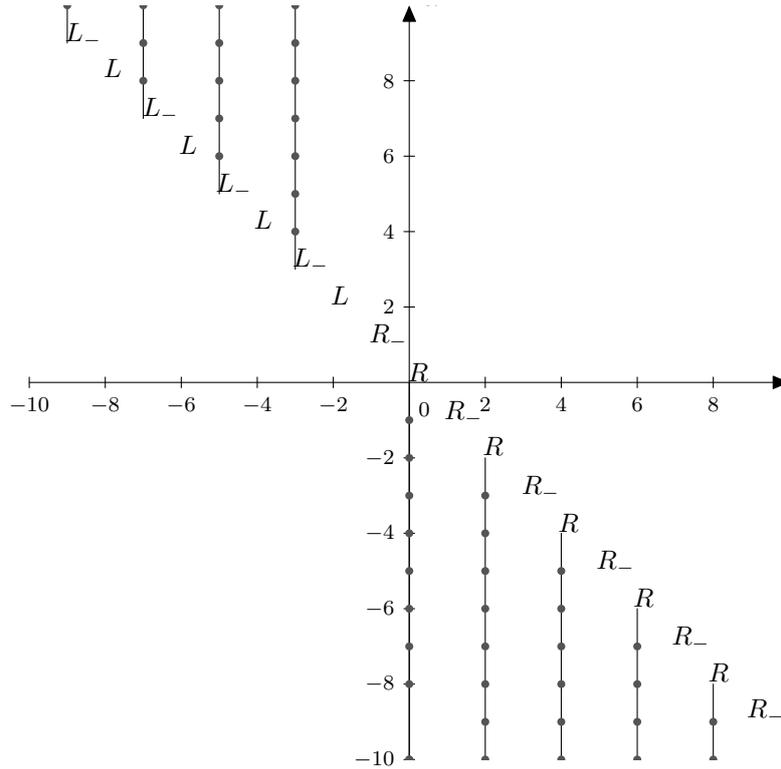


FIGURE 1.2 – Le foncteur de Mackey $H\mathbb{Z}_*$. Les segments verticaux représentent la multiplication par la classe a , qui réduit le degré de α , le morphisme de foncteurs de Mackey induit est à chaque fois l'unique morphisme non trivial.

1.3 Tour des tranches $\mathbb{Z}/2$ -équivariante

Dans cette section, nous allons donner les idées de la construction de la tour des tranches, introduite dans [HHR09], dans le cas particulier du groupe $\mathbb{Z}/2$. Nous allons ensuite introduire la notion de tour des tranches fixe.

1.3.1 Définition

La tour des tranches est une tour fonctorielle de la catégorie stable $\mathbb{Z}/2$ -équivariante introduite dans l'article [HHR09]. Une motivation provenait de la tour des tranches en homotopie stable motivique introduite par Voevodski [Voe02]. Un exposé efficace de la tour des tranches est fait par Hill [Hil11, partie 2].

1.3. TOUR DES TRANCHES $\mathbb{Z}/2$ -ÉQUIVARIANTE

Comme nous l'avons vu à la section 1.2, la tour de Postnikov est déterminée par le choix, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, d'un ensemble d'objets de $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$, l'ensemble $E_n = \{S^k, \mathbb{Z}/2_+ \wedge S^k \mid k \leq n-1\}$. Un $\mathbb{Z}/2$ -spectre X est alors dit n -connexe si, pour tout $\hat{S} \in E_n$, $[\hat{S}, X] = 0$ (voir définition 1.2.1).

La construction de la tour des tranches est similaire à celle de la tour de Postnikov, en choisissant judicieusement un autre ensemble E_n de *sphères de dimension plus petite que n* . Le choix est le suivant :

Définition 1.3.1 ([HHR09, définition 4.1-4.4]). Soit

$$T_{\leq n} = \{X \in \{\mathbb{Z}/2_+ \wedge S^k, S^{k(1+\alpha)}, S^{k(1+\alpha)-1}\} \mid k \in \mathbb{Z}, \dim(X) \leq n, \},$$

où $\dim(X)$ représente la dimension d'une sphère dans le bouquet $U_{\mathbb{Z}/2}X$. On appelle sphère des tranches de dimension n une sphère de $T_{\leq n} \setminus T_{\leq n-1}$. On dit qu'une sphère des tranches est libre si elle est de la forme $\mathbb{Z}/2_+ \wedge S^n$, pour un certain $n \in \mathbb{Z}$. On dit qu'une cellule des tranches est isotrope si elle est de la forme $S^{m(1+\alpha)}$ et $S^{m-1+n\alpha}$ pour un certain $m \in \mathbb{Z}$.

Définition 1.3.2 ([HHR09, définition 4.8]). Soit $\tau_{\geq n}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$ dont les objets sont les spectres X tels que pour tout $\hat{S} \in T_{\leq n}$, $[\hat{S}, X] = 0$. On appelle les objets de $\tau_{\geq n}$ des spectres $(n-1)$ -connexes au sens de la tour des tranches. Soit $\tau_{\leq n} := (\tau_{\geq n+1})^\perp$, c'est-à-dire la sous-catégorie pleine de $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$ dont les objets sont les spectres X tels que pour tout $Y \in \tau_{\geq n}$, $[X, Y] = 0$. On appelle les objets de $\tau_{\leq n}$ des spectres $(n+1)$ -co-connexes au sens de la tour des tranches.

Remarque 1.3.3. 1. On a un isomorphisme de $\mathbb{Z}/2$ -spectres

$$\mathbb{Z}/2_+ \wedge S^k \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2_+ \wedge S^{\frac{k}{2}(1+\alpha)} & \text{si } k \text{ est pair} \\ \mathbb{Z}/2_+ \wedge S^{\frac{k+1}{2}(1+\alpha)-1} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

On peut donc poursuivre le parallèle entre la n -connexité au sens classique et la n -connexité au sens de la tour des tranches plus en avant. Soit X un $\mathbb{Z}/2$ -spectre,

- X est n -connexe si et seulement si $\pi_k(X) = 0$ pour tout $k \leq n$,
 - X est n -connexe au sens de la tour des tranches si et seulement si $\pi_{k(i)}(X) = 0$ pour tout $i \leq n$,
- où

$$k(i) = \begin{cases} \frac{i}{2}(1+\alpha) & \text{si } i \text{ est pair} \\ \frac{i+1}{2}(1+\alpha) - 1 & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

2. Les notions de cellule *libre* et de cellule *induite* (*free cell* et *induced cell* dans [HHR09, définition 4.3]) coïncident pour le groupe $\mathbb{Z}/2$. Ce sont les cellules de la forme $\mathbb{Z}/2_+ \wedge S^n$.

Exemple 1.3.4. Les résultats [Hil11, corollaire 2.13 et théorème 2.14] impliquent en particulier que $H\mathbb{F}_2$ et $H\mathbb{Z}$ sont (-1) -connexes au sens de la tour des tranches et 1-co-connexes au sens de la tour des tranches, et $\Sigma^{-1}H\mathbb{F}_2$ et $\Sigma^{-1}H\mathbb{Z}$ sont (-2) -connexes au sens de la tour des tranches et 0-co-connexes au sens de la tour des tranches.

Notation 1.3.5 ([HHR09, 4.2]). On note $P^n : \mathbb{Z}/2\mathcal{SH} \rightarrow \tau_{\leq n}$ le foncteur de localisation par rapport à l'ensemble de $\mathbb{Z}/2$ -spectres $\tau_{\geq (n+1)}$. On note également P^n le foncteur $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$ obtenu en composant avec le foncteur d'oubli $\tau_{\leq n} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$. Le foncteur P^n est muni d'une transformation naturelle $p^n : Id_{\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}} \rightarrow P^n$. On note également $P_{n+1} = \text{hofibre}(Id \rightarrow P^n)$, et $P_n^n = \text{hocofibre}(P_{n+1} \rightarrow P_n)$.

Définition 1.3.6. On a une tour de foncteurs

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \\
 \downarrow & & \\
 P_n & \longrightarrow & P_n^n \\
 \downarrow & \swarrow \text{---} & \\
 P_{n-1} & \longrightarrow & P_{n-1}^{n-1} \\
 \downarrow & \swarrow \text{---} & \\
 P_{n-2} & \longrightarrow & P_{n-2}^{n-2} \\
 \downarrow & & \\
 \vdots & &
 \end{array}$$

où les flèches en pointillés de X dans Y désignent un morphisme $X \rightarrow \Sigma Y$ et complètent les triangles distingués apparaissant sur le diagramme. On appelle cette tour la tour des tranches.

Remarque 1.3.7. La définition précédente ne décrit rien d'autre que la sous-catégorie pleine $\tau_{\geq n}$ de $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$ dont les objets sont les acycliques par rapport au foncteur de localisation P^{n-1} , au sens de [Far96].

Une propriété clé de cette filtration est le fait que le foncteur $S^{1+\alpha} \wedge$ envoie bijectivement les sphères des tranches de dimension n sur les sphères des tranches de dimension $n+2$ (pour un groupe G quelconque, la relation générale entre les foncteurs de suspension par rapport à la représentation régulière du groupe G et les sphères des tranches dans la catégorie $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$ est étudiée dans [HHR09, lemma 4.22]). Cette propriété implique le résultat suivant (énoncé pour le groupe $\mathbb{Z}/2$).

Corollaire 1.3.8. [HHR09, corollary 4.24]

Les morphismes naturels

$$S^{n(1+\alpha)} \wedge P_k(X) \rightarrow P_{k+2n}(S^{n(1+\alpha)} \wedge X)$$

et

$$S^{n(1+\alpha)} \wedge P^k(X) \rightarrow P^{k+2n}(S^{n(1+\alpha)} \wedge X)$$

sont des équivalences faibles.

On a l'identification suivante de la 0-tranche du $\mathbb{Z}/2$ -spectre des tranches :

Proposition 1.3.9 ([HHR09, corollaire 4.51]). *La (-1) -tranche de S^{-1} est HA , et la 0-tranche de S^0 est $H\mathbb{Z}$.*

Les deux résultats précédents impliquent :

Corollaire 1.3.10. *La $2n$ -tranche du $\mathbb{Z}/2$ -spectre $S^{n(1+\alpha)}$ est $S^{n(1+\alpha)} \wedge H\mathbb{Z}$.*

1.3.2 La suite spectrale des tranches

Définition 1.3.11. [HHR09, définition 4.54] Un spectre $X \in \mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$ est dit *pur* (resp. *isotrope*) si ses tranches $P_n^n(X)$ s'écrivent $H\mathbb{Z} \wedge W$, où W est un bouquet de sphères de la forme $\mathbb{Z}/2_+ \wedge S^n$ ou $S^{n(1+\alpha)}$ (resp. de la forme $S^{n(1+\alpha)}$ ou $S^{n-1+n\alpha}$).

Proposition 1.3.12. [HHR09, définition 4.42, sous-section 4.7] *Soient $X \in \mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$, $V \in RO(\mathbb{Z}/2)$. Il existe une suite spectrale*

$$E_2^{s,t+V} = \pi_{V+t-s}^{\mathbb{Z}/2} P_{d+t}^{d+t} X \Rightarrow \pi_{V+t-s}^{\mathbb{Z}/2} X$$

1.4. LA TOUR DES TRANCHES FIXE

avec d_r de degré $(r, r - 1)$, en suivant les conventions établies en notation 1.1.11. Si X, Y sont deux spectres purs (voir définition 1.3.11), alors on a un morphisme de suites spectrales

$$E_r^{s,t}(X) \otimes E_r^{s',t'}(Y) \rightarrow E_r^{s+s',t+t'}(X \wedge Y)$$

qui représente l'appareillement

$$\pi_*(X) \otimes \pi_*(Y) \rightarrow \pi_*(X \wedge Y).$$

Remarque 1.3.13. Par construction (voir [HHR09, section 4.4]), la suite spectrale des tranches est la suite spectrale homotopique construite à partir de la tour des tranches. La première différentielle non triviale de la suite spectrale des tranches est donc induite par les k -invariants de la tour des tranches.

1.4 La tour des tranches fixe

1.4.1 Points fixes tordus

Pour toute cette section, soit E un $\mathbb{Z}/2$ -spectre.

Définition 1.4.1. Soit $V \in RO(\mathbb{Z}/2)$. On appelle points fixes V -tordus de E , et on note ${}^V E^{\mathbb{Z}/2}$, le spectre $(\Sigma^V E)^{\mathbb{Z}/2}$.

Remarque 1.4.2. L'homotopie des points $k\alpha$ -fixes tordus d'un spectre E , pour $k \in \mathbb{Z}$, contient exactement l'information de E^* .

Proposition 1.4.3. Supposons de plus que E est un $\mathbb{Z}/2$ -spectre en anneaux, et soit F un E -module. Alors le spectre non équivariant $E^{\mathbb{Z}/2}$ est un spectre en anneaux, et $F^{\mathbb{Z}/2}$ est naturellement muni d'une structure de $E^{\mathbb{Z}/2}$ -module.

Démonstration. Soient $i_F : F^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow F$, $i_E : E^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow E$ les morphismes adjoint à $id_{F^{\mathbb{Z}/2}}$ et $id_{E^{\mathbb{Z}/2}}$ par l'adjonction de la proposition 1.1.34. La flèche $i_E \wedge i_F$ induit un morphisme de spectres non-équivariants

$$E^{\mathbb{Z}/2} \wedge F^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow (E \wedge F)^{\mathbb{Z}/2}.$$

Le morphisme de structure $E \wedge F \rightarrow F$ induit donc $E^{\mathbb{Z}/2} \wedge F^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow F^{\mathbb{Z}/2}$. Le carré extérieur du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} E^{\mathbb{Z}/2} \wedge E^{\mathbb{Z}/2} \wedge F^{\mathbb{Z}/2} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & E^{\mathbb{Z}/2} \wedge^{\mathbb{Z}/2} & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & & \\ & (E \wedge E \wedge F)^{\mathbb{Z}/2} & \longrightarrow & (E \wedge F)^{\mathbb{Z}/2} & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ E^{\mathbb{Z}/2} \wedge F^{\mathbb{Z}/2} & \longrightarrow & (E \wedge F)^{\mathbb{Z}/2} & \longrightarrow & F^{\mathbb{Z}/2} \end{array}$$

est commutatif.

- Pour $E = F$, on déduit qu'une structure de $\mathbb{Z}/2$ -spectre en anneaux sur E induit une structure de spectre en anneau sur $E^{\mathbb{Z}/2}$.
- Pour F un E -module quelconque, on déduit que $F^{\mathbb{Z}/2}$ est un $E^{\mathbb{Z}/2}$ -module avec la structure de spectre en anneaux sur $E^{\mathbb{Z}/2}$ qu'on vient de décrire. □

Proposition 1.4.4. Soient $V \in RO(\mathbb{Z}/2)$ et $\xi : \Sigma^{-V} E \rightarrow E$ un morphisme de E -modules. Via le foncteur des points fixes, ξ induit un morphisme de $E^{\mathbb{Z}/2}$ -modules $E^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow^V E^{\mathbb{Z}/2}$.

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 1.4.3 pour $F = E$ vu comme module sur lui-même. □

Corollaire 1.4.5. Supposons que E est un $\mathbb{Z}/2$ -spectre en anneaux.

1. Soit $x \in E^{-V}$. Le morphisme $x^{\mathbb{Z}/2} : {}^V E^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow E^{\mathbb{Z}/2}$ est un morphisme de $E^{\mathbb{Z}/2}$ -modules.
2. Soit $x \in \pi_V(S^0)$. Le morphisme $(x \wedge id_E)^{\mathbb{Z}/2}$ est un morphisme de $E^{\mathbb{Z}/2}$ -modules ${}^V E^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow E^{\mathbb{Z}/2}$.

Démonstration. C'est une application de la proposition 1.4.4. Dans le premier cas, l'endomorphisme de E choisi est la multiplication par x . Dans le second cas, on utilise l'identification $E = S^0 \wedge E$. \square

Exemple 1.4.6. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a un morphisme de $E^{\mathbb{Z}/2}$ -modules ${}^{-k\alpha} E^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow E^{\mathbb{Z}/2}$ induit par $\Sigma^{-k\alpha} a^k : S^{-k\alpha} \rightarrow S^0$.

Corollaire 1.4.7. Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a l'identification suivante :

1. si $k \geq 0$, ${}^{k\alpha} H\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}/2} = \bigvee_{2i=0}^{k-1} \Sigma^{2i} H\mathbb{F}_2 \bigvee_{\text{si } k \text{ est pair}} \Sigma^k H\mathbb{Z}$
2. si $k \leq -1$, ${}^{k\alpha} H\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}/2} = \bigvee_{2i=k+1}^{-2} \Sigma^{2i-1} H\mathbb{F}_2 \bigvee_{\text{si } k \text{ est pair}} \Sigma^k H\mathbb{Z}$

Démonstration. On utilise la proposition 1.4.5, et le fait que la catégorie des $H\mathbb{Z}$ -modules (non-équivariants) est constitué des bouquets de suspension de spectres d'Eilenberg-MacLane (voir [Ada95, Lemme 6.1]). On conclut par le calcul de l'anneau de coefficients $H\mathbb{Z}^*$ (indiqué figure 1.2), qui donne :

$$\pi_*(\Sigma^{k\alpha} H\mathbb{Z}) = \begin{cases} \bigoplus_{2i=0}^{-k-1} \Sigma^{2i} \mathbb{F}_2 \oplus_{\text{si } k \text{ est pair}} \Sigma^{-k} \mathbb{Z} & \text{si } k \leq 0 \\ \bigoplus_{2i=-k+1}^{-2} \Sigma^{2i-1} \mathbb{F}_2 \oplus_{\text{si } k \text{ est pair}} \Sigma^{-k} \mathbb{Z} & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

\square

Corollaire 1.4.8. $\forall k \in \mathbb{Z}$, on a l'identification suivante :

1. si $k \geq 0$, ${}^{k\alpha} H\mathbb{F}_2^{\mathbb{Z}/2} = \bigvee_{i=0}^k \Sigma^i H\mathbb{F}_2$
2. si $k \leq -1$, ${}^{k\alpha} H\mathbb{F}_2^{\mathbb{Z}/2} = \bigvee_{i=-k}^{-3} \Sigma^i H\mathbb{F}_2$

Démonstration. La preuve est analogue à celle du corollaire précédent, en utilisant 1.2.14 pour conclure. \square

1.4.2 La tour des tranches fixe

Dans cette partie, nous allons étudier la tour obtenue lorsqu'on applique le foncteur exact des points fixes à la tour des tranches pour un $\mathbb{Z}/2$ -spectre E . La tour obtenue est dans la catégorie $\mathcal{S}p$. Nous allons comparer cette tour à la tour de Postnikov classique pour le spectre $E^{\mathbb{Z}/2}$.

Définition 1.4.9. Un $\mathbb{Z}/2$ -spectre E est dit *pair* si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P_{2n-1}^{2n-1} E$ est contractile.

La motivation de cette définition apparaîtra lors de la comparaison entre la tour des tranches et la tour de Postnikov $\mathbb{Z}/2$ -équivariante de la proposition 1.4.12.

Proposition 1.4.10. Soit E un $\mathbb{Z}/2$ -spectre pair. On a des suites cofibres dans $\mathcal{S}\mathcal{H}$

$$(P_{2n} E)^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow (P_{2(n-1)} E)^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow (P_{2(n-1)}^{2(n-1)} E)^{\mathbb{Z}/2}$$

où les morphismes sont induits par les transformations naturelles de la tour des tranches.

Démonstration. On utilise le fait que le foncteur $(-)^{\mathbb{Z}/2} : \mathbb{Z}/2\mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$ envoie les suites cofibres sur des suites cofibres ainsi que l'hypothèse de parité de E . \square

Cette propriété motive la définition suivante.

Définition 1.4.11. Soit E un $\mathbb{Z}/2$ -spectre pair, on appelle tour des tranches fixe la tour suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 & \vdots & \\
 & \downarrow & \\
 (P_{2n}^{2n}E)^{\mathbb{Z}/2} & \longleftarrow & (P_{2n}E)^{\mathbb{Z}/2} \\
 & \nearrow \text{---} & \downarrow \\
 (P_{2(n-1)}^{2(n-1)}E)^{\mathbb{Z}/2} & \longleftarrow & (P_{2(n-1)}E)^{\mathbb{Z}/2} \\
 & & \downarrow \\
 & & \vdots
 \end{array}$$

obtenue en prenant les points fixes de la tour des tranches.

Nous allons maintenant comparer la tour des tranches fixe à la tour de Postnikov classique. On rappelle la notation 1.2.4 et le corollaire 1.2.19, qui est le point crucial dans la preuve de la proposition suivante.

Proposition 1.4.12. *Supposons que E est un $\mathbb{Z}/2$ -spectre pair, pur et isotrope. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. pour $0 \leq n \leq 2$, $(P_{2n}E)^{\mathbb{Z}/2} = (E^{\mathbb{Z}/2}) < n >$ où le spectre de droite est le n -ième spectre dans la tour de Postnikov classique pour le spectre non-équivariant $E^{\mathbb{Z}/2}$.
2. pour $-3 \leq n \leq 0$, $(P_{2n}E)^{\mathbb{Z}/2} = (E^{\mathbb{Z}/2}) < 2n >$ où le spectre de droite est le n -ième spectre dans la tour de Postnikov classique pour le spectre non-équivariant $E^{\mathbb{Z}/2}$.

Démonstration. Commençons par montrer l'existence d'une équivalence faible $(P_{-6}E)^{\mathbb{Z}/2} \cong (E^{\mathbb{Z}/2}) < -6 >$.

Considérons la suite cofibre

$$(P_{-6}E)^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow (P_{-8}E)^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow (P_{-8}^{-8}E)^{\mathbb{Z}/2}$$

donnée par la proposition 1.4.10.

Par pureté du $\mathbb{Z}/2$ -spectre E , $(P_{-8}^{-8}E)$ est isomorphe à un certain bouquet de $S^{-4(1+\alpha)} \wedge H\mathbb{Z}$, et donc ses foncteurs de Mackey d'homotopie $\pi_k(P_{-8}^{-8}E)$ sont nuls pour $k \notin \{-8, -7\}$, Par le calcul de $H\mathbb{Z}^*$ effectué à la proposition 1.2.18.

De plus, par la proposition [HHR09, proposition 4.36], $P_{-6}E$ est -7 -connexe au sens de la tour de Postnikov $\mathbb{Z}/2$ -équivariante, et donc $(P_{-6}E)^{\mathbb{Z}/2}$ est un spectre -7 -connexe au sens classique. Le même résultat, appliqué au $\mathbb{Z}/2$ -spectre $(P_{-8}^{-8}E)$ donne que ce spectre est -9 -connexe. Par la propriété universelle du morphisme $(E^{\mathbb{Z}/2}) < -6 > \rightarrow (E^{\mathbb{Z}/2})$ de la tour de Postnikov $\mathbb{Z}/2$ -équivariante, $(P_{-6}E)^{\mathbb{Z}/2}$ est exactement $(E^{\mathbb{Z}/2}) < -6 >$.

Considérons maintenant les suites cofibres

$$\begin{array}{l}
 (P_2E)^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow (P_0E)^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow (P_0^0E)^{\mathbb{Z}/2} \\
 (P_4E)^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow (P_2E)^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow (P_2^2E)^{\mathbb{Z}/2} \\
 (P_0E)^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow (P_{-2}E)^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow (P_{-2}^{-2}E)^{\mathbb{Z}/2} \\
 (P_{-2}E)^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow (P_{-4}E)^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow (P_{-4}^{-4}E)^{\mathbb{Z}/2} \\
 (P_{-4}E)^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow (P_{-6}E)^{\mathbb{Z}/2} \rightarrow (P_{-6}^{-6}E)^{\mathbb{Z}/2}
 \end{array}$$

données par la proposition 1.4.10.

Par le corollaire 1.2.19 et la proposition [HHR09, proposition 4.36], les suites cofibres précédentes vérifient la propriété universelle de la tour de Postnikov non-équivariante. On en déduit que les spectres $(P_{2n}E)^{\mathbb{Z}/2}$ pour $n = -4, -2, 0, 2, 4$ sont les spectres apparaissant dans la tour de Postnikov classique pour $(P_{-6}E)^{\mathbb{Z}/2}$, comme $(P_{-6}E)^{\mathbb{Z}/2} \cong (E^{\mathbb{Z}/2}) < -6 >$, ce sont également les spectres dans la tour de Postnikov pour $E^{\mathbb{Z}/2}$. \square

Remarque 1.4.13. Pour $n = 0$, l'hypothèse pur isotrope est inutile et le résultat était déjà contenu dans [HHR09], puisque [HHR09, proposition 4.19] donne le fait que P_0E est le 0-ième spectre de la tour de Postnikov $\mathbb{Z}/2$ -équivariante, par conséquent, on a directement $(P_0E)^{\mathbb{Z}/2} = (E^{\mathbb{Z}/2}) < 0 >$.

1.5 K -théories réelles

Dans cette section, nous allons rappeler les idées de la K -théorie réelle d'Atiyah, et étudier sa tour des tranches. La détermination de cette tour est l'ingrédient essentiel de l'article [Dug03].

1.5.1 Définitions et premières propriétés

La K -théorie réelle peut être définie de deux façons équivalentes. Premièrement, on peut la définir comme dans le papier original d'Atiyah [Ati66]

- Définition 1.5.1.**
1. Un fibré vectoriel *Réel* sur un $\mathbb{Z}/2$ -espace X est un $\mathbb{Z}/2$ -fibré vectoriel complexe tel que l'action de l'élément non trivial de $\mathbb{Z}/2$ sur les fibres est antilinéaire.
 2. On note $K\mathbb{R}$ le spectre qui étend $K\mathbb{R}^0(X) = Gr(Vect\mathbb{R}(X))$ en une théorie de cohomologie (qui existe par Atiyah [Ati66]).

Une autre possibilité est de remarquer que le spectre usuel représentant la K -théorie unitaire KU est muni d'une action naturelle de $\mathbb{Z}/2$ (les deux définitions coïncident en vertu de la remarque de [May96, chapitre VII] p.63).

Proposition 1.5.2 (Conséquence de [Ati66, théorème 2.3]). *Soient $U(n)$ (resp. U) le groupe unitaire en dimension n (resp. infinie), vu comme $\mathbb{Z}/2$ -espace via l'action de la conjugaison complexe. Le morphisme de Bott*

$$\Omega^2 U \cong U$$

se relève en une équivalence d'homotopie équivariante

$$\Omega^{1+\alpha} U \cong U$$

qu'on appelle l'isomorphisme de Bott $\mathbb{Z}/2$ -équivariant.

Dans [HK01], les auteurs expliquent comment l'isomorphisme de Bott $\mathbb{Z}/2$ -équivariant permet de relever la construction usuelle du spectre non-équivariant KU en une construction d'un $\mathbb{Z}/2$ -spectre :

Définition 1.5.3 (voir [HK01]). L'isomorphisme de Bott $\mathbb{Z}/2$ -équivariant permet de définir un $\mathbb{Z}/2$ -spectre $K\mathbb{R}$.

La t -structure usuelle sur la catégorie stable $\mathbb{Z}/2$ -équivariante permet de définir la version connexe de la K -théorie.

Définition 1.5.4. On note $k\mathbb{R}$ le spectre $K\mathbb{R}_{\geq 0}$ donné par la tour de Postnikov $\mathbb{Z}/2$ -équivariante. En particulier, ce $\mathbb{Z}/2$ -spectre est muni d'un morphisme canonique

$$k\mathbb{R} \rightarrow K\mathbb{R}.$$

Remarque 1.5.5. Une conséquence de [HHR09, proposition 4.10] est que le spectre $k\mathbb{R}$ peut également être obtenu comme $P_0(K\mathbb{R})$ où P_0 est le foncteur de localisation de la filtration par tranches.

On rappelle les définitions des foncteurs d'oubli $(-)^u : \mathbb{Z}/2\mathcal{SH} \rightarrow \mathcal{SH}$ et des points fixes $(-)^{\mathbb{Z}/2} : \mathbb{Z}/2\mathcal{SH} \rightarrow \mathcal{SH}$ donnés à la notation 1.1.28 et à la proposition 1.1.34.

Proposition 1.5.6 ([Ati66]). *On a des isomorphismes naturels de spectres non-équivariants*

$$(k\mathbb{R})^u \cong ku$$

et

$$k\mathbb{R}^{\mathbb{Z}/2} \cong ko.$$

1.5. K-THÉORIES RÉELLES

Définition 1.5.7. On appelle la *classe de Bott réelle* la classe d'homotopie du morphisme de $\mathbb{Z}/2$ -spectres $v_1 : S^{1+\alpha} \rightarrow k\mathbb{R}$ induit par le morphisme de Bott $\mathbb{Z}/2$ -équivariant.

Proposition 1.5.8. *On a une équivalence faible $K\mathbb{R} \cong k\mathbb{R}[v_1^{\pm 1}]$. Où $k\mathbb{R}[v_1^{\pm 1}]$ désigne la colimite homotopique du diagramme suivant :*

$$k\mathbb{R} \xrightarrow{v_1} \Sigma^{-1-\alpha} k\mathbb{R} \xrightarrow{v_1} \Sigma^{-2(1+\alpha)} k\mathbb{R} \xrightarrow{v_1} \Sigma^{-3(1+\alpha)} k\mathbb{R} \dots$$

Démonstration. Considérons le morphisme

$$f : \text{hocolim} \Sigma^{-n(1+\alpha)} k\mathbb{R} \rightarrow \text{hocolim} \Sigma^{-n(1+\alpha)} K\mathbb{R} \cong K\mathbb{R}$$

où la colimite est prise le long du morphisme induit par la multiplication par la classe de Bott. Les $\mathbb{Z}/2$ -spectres S^V pour V une représentation de $\mathbb{Z}/2$ sont des spectres connexes, d'où $(k\mathbb{R})_V \cong K\mathbb{R}_V$ pour de tels V .

Comme $|v_1| = 1 + \alpha$, ce morphisme de spectres induit un isomorphisme $\pi_*(f)$ entre les foncteurs de Mackey en homotopie en degrés entiers. Par conséquent, f est une équivalence faible. \square

1.5.2 La tour des tranches du $\mathbb{Z}/2$ -spectre $k\mathbb{R}$

Nous allons maintenant passer à l'étude de la tour des tranches de $k\mathbb{R}$. La détermination de cette tour est l'ingrédient essentiel de l'article [Dug03], et la suite spectrale d'Atiyah-Hizebruch qu'il considère n'est autre que la suite spectrale des tranches pour $k\mathbb{R}$.

Notre stratégie est d'utiliser le résultat de reconnaissance de la tour des tranches [HHR09, lemme 4.15].

Proposition 1.5.9. *On a une suite cofibre*

$$\Sigma^{1+\alpha} k\mathbb{R} \rightarrow k\mathbb{R} \rightarrow H\mathbb{Z} \tag{1.4}$$

où la première flèche est la multiplication par l'élément $v_1 \in k\mathbb{R}_{1+\alpha}$.

Démonstration. Commençons par montrer que $P_1^1(k\mathbb{R}) = 0$. On utilise le résultat [HHR09, proposition 4.63] qui affirme en particulier : $P_1^1(k\mathbb{R}) = 0$ si et seulement si pour toute cellule des tranches \hat{S} de dimension 1, $[\hat{S}, k\mathbb{R}] = 0$. Il n'y a que deux cellules des tranches en cette dimension :

- $[\mathbb{Z}/2_+ \wedge S^1, k\mathbb{R}] = \pi_1(ku)$ en vertu de l'adjonction de la proposition 1.1.34. Or $\pi_1(ku) = 0$.
- Pour calculer $[S^\alpha, k\mathbb{R}]$, considérons la suite exacte longue

$$\dots \rightarrow [\Sigma\mathbb{Z}/2_+, k\mathbb{R}] \rightarrow \pi_\alpha(k\mathbb{R}) \xrightarrow{a} \pi_0(k\mathbb{R}) \rightarrow \dots$$

obtenue en appliquant le foncteur $[-, k\mathbb{R}]$ à la suite cofibre

$$\mathbb{Z}/2_+ \rightarrow S^0 \rightarrow S^\alpha.$$

On vient de montrer que $[\Sigma\mathbb{Z}/2_+, k\mathbb{R}] = 0$. Soit $x \in \text{Im}(a : \pi_\alpha(k\mathbb{R}) \rightarrow \pi_0(k\mathbb{R}))$, en vertu du point 1 du lemme 1.1.53, $x \in \text{Ker}(\rho)$. Mais ρ est induit par la complexification des fibrés (voir [Ati66]), donc est injectif en degré 0. Par conséquent, $\text{Im}(a) = 0$. Par conséquent, $[S^\alpha, k\mathbb{R}] = 0$.

On a donc une suite cofibre

$$P_2(k\mathbb{R}) \rightarrow P_0(k\mathbb{R}) \rightarrow H\mathbb{Z}.$$

Il reste à identifier $P_2(k\mathbb{R})$. Le corollaire 1.3.8 donne

$$P_2(k\mathbb{R}) = P_2 P_0(K\mathbb{R}) \xrightarrow{v_1^{-1}} P_2(\Sigma^{1+\alpha} K\mathbb{R}) \cong \Sigma^{1+\alpha} P_0(K\mathbb{R}) = \Sigma^{1+\alpha} k\mathbb{R}.$$

Le résultat suit. \square

Remarque 1.5.10. Le morphisme Bockstein $H\mathbb{Z} \rightarrow \Sigma^{2+\alpha} H\mathbb{Z}$ sera essentiel dans la preuve du résultat principal de cette thèse, et sera identifié explicitement dans le chapitre 5.

$$\begin{array}{ccc}
 & \vdots & \\
 & \downarrow & \\
 \Sigma^{n(1+\alpha)} H\mathbb{Z} & \longleftarrow & \Sigma^{n(1+\alpha)} k\mathbb{R} \\
 & & \downarrow v_1 \\
 \Sigma^{(n-1)(1+\alpha)} H\mathbb{Z} & \longleftarrow & \Sigma^{(n-1)(1+\alpha)} k\mathbb{R} \\
 & & \downarrow v_1 \\
 & & \vdots \\
 & & \downarrow v_1 \\
 \Sigma^{(1+\alpha)} H\mathbb{Z} & \longleftarrow & \Sigma^{(1+\alpha)} k\mathbb{R} \\
 & & \downarrow v_1 \\
 H\mathbb{Z} & \longleftarrow & k\mathbb{R}
 \end{array}$$

 FIGURE 1.3 – La tour des tranches de $k\mathbb{R}$.

Corollaire 1.5.11. *La tour des tranches de $k\mathbb{R}$ est donnée par $P_{2n}k\mathbb{R} = \Sigma^{n(1+\alpha)}k\mathbb{R}$ pour $n \geq 0$, et $P_k k\mathbb{R} = *$ pour k impair ou $k < 0$ comme indiqué dans la figure 1.3.*

Démonstration. L'existence d'une telle tour est une conséquence immédiate de la proposition 1.5.9. Néanmoins, l'identification avec la tour des tranches n'est pas évidente, nous allons donc la montrer.

Le spectre $k\mathbb{R}$ est connexe (au sens classique) et donc par [HHR09, proposition 4.10] il est connexe au sens des tranches; $\Sigma^{1+\alpha}k\mathbb{R}$ est donc 1-connexe au sens de la tour des tranches en vertu de [HHR09, corollary 4.24]. Mais par le calcul du foncteur de Mackey de coefficients du spectre d'Eilenberg-MacLane $H\mathbb{F}_2$, 1.2.14 donne $\Sigma^{-1-\alpha}H\mathbb{Z}$ est -1 -coconnexe, et donc -1 -coconnexe au sens de la tour des tranches, donc $H\mathbb{Z}$ est 1-coconnexe au sens de la tour des tranches. Par conséquent, [HHR09, lemme 4.15] entraîne que la suite cofibre 1.4 est le premier étage de la tour des tranches pour $k\mathbb{R}$. Par récurrence immédiate, on trouve la tour des tranches pour $k\mathbb{R}$ en appliquant le corollaire 1.3.8. \square

Remarque 1.5.12. – La preuve de la 1-coconnexité du spectre $H\mathbb{Z}$ est un peu laborieuse. En réalité, il est possible de voir (cf. [HHR09, proposition 4.47]) que les 0-tranches de la tour des tranches sont les spectres d'Eilenberg-MacLane associés à un foncteur de Mackey dont tous les morphismes de restriction sont des monomorphismes. Ainsi $P_0^0 H\mathbb{Z} = H\mathbb{Z}$, le résultat suit.

- La tour énoncée dans le corollaire 1.5.11 est construite par Dugger [Dug03, p.21] comme une conséquence de la suite cofibre de la proposition 1.5.9 énoncée en [Dug03, corollary 4.2]. La suite spectrale qu'il considère est donc bien la suite spectrale des tranches pour $k\mathbb{R}$.

Chapitre 2

Opérations cohomologiques équivariantes

Dans ce chapitre, nous allons étudier les propriétés algébriques de l'ensemble des opérations cohomologiques stables en $H\mathbb{F}_2^*$ -cohomologie.

Soit E un $\mathbb{Z}/2$ -spectre. On peut toujours considérer l'algèbre des opérations cohomologiques stables en E^* -cohomologie. Notre étude porte spécifiquement sur le $\mathbb{Z}/2$ -spectre $H\mathbb{F}_2$. Cet intérêt est motivé par les travaux récents [HHR09] dans lesquels un ingrédient essentiel est la suite spectrale des tranches : une tour d'endofoncteurs de $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$ qui généralise la tour de Postnikov. Dans ce contexte, la zéro tranche du spectre des sphères S^0 est le spectre d'Eilenberg-MacLane associé au foncteur de Mackey constant \mathbb{Z} , et sa version modulo 2 est le $\mathbb{Z}/2$ -spectre $H\mathbb{F}_2$.

Des résultats dans cette direction sont connus : une étude de l'algèbre des opérations cohomologiques stables pour la cohomologie de Borel modulo un nombre premier p , $E\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \wedge H\mathbb{F}_p$, est effectuée dans les travaux de Greenlees [Gre88, Gre90] afin de comprendre la suite spectrale d'Adams dans ce contexte. Plus tard, les opérations cohomologiques stables pour le foncteur de Mackey constant \mathbb{F}_2 sont considérées dans [Car99], et cette algèbre est entièrement déterminée par Hu et Kriz dans [HK01].

Nous utiliserons les notations suivantes :

Notation 2.0.13.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^* &= [H\mathbb{F}_2, H\mathbb{F}_2]^*, \\ \mathcal{A}_* &= H\mathbb{F}_2_* H\mathbb{F}_2.\end{aligned}$$

Dans la section 2.1, on rappelle la situation classique, tant pour fixer les notations dans le cas non-équivariant que pour permettre une généralisation rapide au cadre équivariant.

La section 2.2 est consacrée aux opérations cohomologiques stables pour une théorie de cohomologie $\mathbb{Z}/2$ -équivariante associée à un $\mathbb{Z}/2$ -spectre en anneau E quelconque. Après avoir brièvement rappelé ce que sont les opérations cohomologiques stables pour une théorie de cohomologie $\mathbb{Z}/2$ -équivariante, nous passerons à l'étude du cas particulier des opérations en $H\mathbb{F}_2$ -cohomologie, c'est-à-dire de l'algèbre de Steenrod $\mathbb{Z}/2$ -équivariante \mathcal{A}^* dans la section 2.3. La duale de cette algèbre est naturellement munie d'une structure d'algèbroïde de Hopf (le raisonnement est analogue à celui exposé par Ravenel [Rav86, Appendice A]).

Dans la section 2.4, nous étudierons en détail certains de ses algèbroïdes de Hopf quotients. On obtiendra un analogue équivariant de chaque algèbre de Hopf quotient de l'algèbre de Steenrod duale classique (ces algèbres de Hopf sont classifiées par Adams et Margolis [AM74]). Le résultat principal est le théorème 2.4.9 qui donne un critère sur un algèbroïde de Hopf \mathcal{B} quotient de \mathcal{A}_* pour que \mathcal{A}_* soit libre en tant que comodule sur \mathcal{B} .

Nous terminerons ce chapitre en étudiant un foncteur qui fait le lien entre les structures de \mathcal{A}_*^* -module et de \mathcal{A}^* -module, où \mathcal{A}_2^* désigne l'algèbre de Steenrod classique modulo 2, et nous étudierons son comportement vis-à-vis de la dualité \mathbb{F}_2 -linéaire (le foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{F}_2}(-, \mathbb{F}_2)$).

2.1 L'algèbre de Steenrod non-équivariante

Classiquement, pour un nombre premier p , l'algèbre de Steenrod \mathcal{A}_p^* est la \mathbb{F}_p -algèbre des opérations naturelles stables en cohomologie modulo p . Le produit sur \mathcal{A}_p^* est induit par la composition des applications. Par le lemme de Yoneda, cette algèbre coïncide avec l'algèbre des classes d'homotopie des endomorphismes du spectre d'Eilenberg-MacLane $H\mathbb{F}_p$, c'est-à-dire

$$\mathcal{A}_p^* = [H\mathbb{F}_p, H\mathbb{F}_p]^*.$$

Mais l'algèbre de Steenrod admet bien plus de structure que cela. En effet, comme $H\mathbb{F}_p$ est un spectre en anneaux commutatif, le couple $(H\mathbb{F}_p^*, \mathcal{A}_p^*)$ est un algébroïde de Hopf gradué co-commutatif (voir section 2.2.3 pour une preuve générale). Mais $H\mathbb{F}_{p^*} = \mathbb{F}_p$ est un corps premier, donc \mathcal{A}_p^* est une algèbre de Hopf graduée sur \mathbb{F}_p . Les références classiques pour les algèbres de Hopf graduées sont [MM65] et [MP12, Chapitres 20 & 21].

La duale linéaire d'une algèbre de Hopf co-commutative est une algèbre de Hopf commutative.

Définition 2.1.1. Soit \mathcal{A}_*^p l'algèbre de Hopf $\text{Hom}(\mathcal{A}_p^*, \mathbb{F}_p)$. On l'appelle l'algèbre de Steenrod duale modulo p .

Le fait que $H\mathbb{F}_{p^*}$ soit un corps a une autre conséquence importante, qui permet d'identifier cette algèbre de Hopf. En effet, $H\mathbb{F}_{p^*}H\mathbb{F}_p$ est plat sur $H\mathbb{F}_{p^*}$, et on a un isomorphisme de \mathbb{F}_p -espaces vectoriels gradués donné par [Boa95, Théorème 9.25] :

$$\text{Hom}_{\mathbb{F}_p}(H\mathbb{F}_{p^*}H\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \cong [H\mathbb{F}_p, H\mathbb{F}_p]^* = \mathcal{A}_p^*. \quad (2.1)$$

Cartan [Car54, Car55] et Serre [Ser53] ont calculé la structure de l'algèbre de Steenrod, et Milnor [Mil58] en a déduit la structure de sa duale. Enfin, le fait que la structure d'algèbre de Hopf de \mathcal{A}_*^p est polynomiale est un résultat d'Adams [AM74]. L'ensemble de ces résultats sont exprimés dans le théorème suivant :

Théorème 2.1.2. *On a un isomorphisme d'algèbres*

$$\mathcal{A}_*^2 = \mathbb{F}_2[\xi_i | i \geq 1]$$

où

$$|\xi_i| = 2^i - 1.$$

Soit p un nombre premier impair. On a un isomorphisme d'algèbres

$$\mathcal{A}_*^p = \mathbb{F}_p[\xi_i | i \geq 1] \otimes \Lambda(\tau_i | i \geq 0)$$

où le produit tensoriel est au dessus de \mathbb{F}_p , et Λ est l'algèbre extérieure. Les degrés sont

$$\begin{aligned} |\xi_i| &= 2(p^i - 1) \\ |\tau_i| &= 2(p^i - 1) + 1. \end{aligned}$$

On a les formules suivantes pour la diagonale dans \mathcal{A}_^p :*

$$\Delta(\xi_n) = \sum_{i=0}^n \xi_{n-i}^{p^i} \otimes \xi_i \quad (2.2)$$

$$\Delta(\tau_n) = \sum_{i=0}^n \xi_{n-i}^{p^i} \otimes \tau_i + \tau_n \otimes 1 \quad (2.3)$$

où par convention $\xi_0 = 1$. Pour $p = 2$, seule la première équation est à prendre en compte.

Définissons maintenant quelques éléments de \mathcal{A}_2^* à l'aide de l'équation 2.1.

Définition 2.1.3 ([Sch94] p.34). On appelle i -ème opération de Milnor, et on note Q_i l'élément de $\mathcal{A}_2^{(2^i-1)}$ dual au ξ_{i+1} par l'isomorphisme de dualité de l'équation (2.1).

Notation 2.1.4. 1. On note Sq^i l'élément dual à ξ_1^i dans \mathcal{A}_2^i , de sorte que $Sq^1 = Q_0$.

2. On note $\mathcal{A}^*(n)$ la sous-algèbre de \mathcal{A}_2^* engendrée par les opérations Sq^{2^i} , $n \geq i \geq 0$.

Remarque 2.1.5. Les formules (2.2) et (2.3) sont des conséquences purement algébriques de l'existence d'une coaction à droite non triviale de \mathcal{A}_*^p sur $H\mathbb{F}_p^*(B\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, et de la naturalité de celle-ci par rapport à la diagonale topologique, c'est le sujet de l'article de Milnor [Mil58].

Par la dualité exprimée à l'équation 2.1, la multiplication de \mathcal{A}_*^2 induit la diagonale sur \mathcal{A}_2^* , d'où découlent les formules de Cartan qui décrivent l'action des Sq^i sur le cup produit de deux classes de cohomologie (explicitées p.22 de [Sch94]). La diagonale dans \mathcal{A}_*^2 donne les relations que vérifient les produits de Sq^i , appelées les formules d'Adem (voir [Sch94, p.17]).

Remarque 2.1.6. D'une manière générale, on a un isomorphisme entre les primitifs d'une algèbre de Hopf et les indécomposables de sa duale linéaire ([MM65, 3.10(2)]). Appliquons cela à l'équation 2.1. On en déduit les faits suivants :

- Les éléments $\xi_1^{2^i}$ engendrent le \mathbb{F}_2 -espace vectoriel des primitifs de \mathcal{A}_*^2 , donc les opérations Sq^{2^i} engendrent les indécomposables de \mathcal{A}_2^* .
- Les ξ_i engendrent le \mathbb{F}_2 -espace vectoriel des indécomposables dans \mathcal{A}_*^2 , donc les éléments Q_i engendrent les primitifs.

Une conséquence du premier point est que les opérations Q_i ne sont pas indécomposables pour $i \geq 1$. La proposition suivante donne leur expression en fonction des Sq^{2^i} .

Proposition 2.1.7 ([Sch94] p.34). *Les opérations Q_i sont de carré nul, et commutent entre elles. Comme tout élément primitif de \mathcal{A}_2^* , elles agissent comme des dérivations sur la cohomologie de n'importe quel espace.*

Enfin, on a l'égalité

$$Q_{i+1} = [Q_i, Sq^{2^{i+1}}]$$

où $[x, y]$ est le commutateur de x et y .

Notation 2.1.8. Pour parler de certains $\mathcal{A}^*(1)$ -modules particulier, on utilise une représentation graphique. Ainsi, pour un $\mathcal{A}^*(1)$ -module M , sa représentation graphique est un graphe, avec les conventions suivantes :

- l'ensemble des points du diagramme représente une base de M en tant que \mathbb{F}_2 -espace vectoriel,
- un segment entre deux points signifie que les deux éléments de base correspondant sont reliés entre eux par une opération Sq^1 ,
- une ligne courbe entre deux points signifie que les deux éléments de base sont reliés entre eux par une opération Sq^2 .

Exemple 2.1.9. Le $\mathcal{A}^*(1)$ -module $\mathcal{A}^*(1)$ est représenté par le diagramme suivant :



2.2 Opérations cohomologiques $\mathbb{Z}/2$ -équivariantes

2.2.1 Théories de cohomologie $\mathbb{Z}/2$ -équivariantes

Nous allons maintenant voir quelle est l'analogie de la structure étudiée à la section 2.1 en homotopie stable $\mathbb{Z}/2$ -équivariante. Pour cela, fixons quelques notations concernant les théories d'homologie et de cohomologie $\mathbb{Z}/2$ -équivariantes.

On rappelle la catégorie $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}^s$ des $\mathbb{Z}/2$ -ensembles transitifs finis introduite à la définition 1.1.38, ainsi que la définition des foncteurs de Mackey 1.1.41 (en particulier $\mathcal{M}(\mathbb{Z}/2)$ désigne la catégorie des foncteurs de Mackey pour le groupe $\mathbb{Z}/2$). La catégorie $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}/2}$ est constituée de deux objets, $\mathbb{Z}/2/\mathbb{Z}/2$ et $\mathbb{Z}/2/\{e\}$.

On rappelle et précise également quelques notations de la sous-section 1.1.5 dans ce qui suit.

Définition 2.2.1. Soient E, X deux spectres et $\star \in RO(\mathbb{Z}/2)$. Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}/2$. On note

$$\underline{E}^\star(X)(\mathbb{Z}/2/H) = [\mathbb{Z}/2_+ \wedge_H S^{-\star} \wedge X, E]$$

et

$$\underline{E}_\star(X)(\mathbb{Z}/2/H) = [\mathbb{Z}/2_+ \wedge_H S^\star, X \wedge E]$$

pour H un sous-groupe de $\mathbb{Z}/2$. Ainsi, une théorie d'homologie ou de cohomologie est naturellement un foncteur de Mackey $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué.

Notation 2.2.2. – On dispose d'un foncteur d'évaluation sur l'orbite triviale $\mathbb{Z}/2/\mathbb{Z}/2$, que l'on note

$$ev_{\mathbb{Z}/2/\mathbb{Z}/2} : \mathcal{M}(\mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathcal{A}b.$$

- On note $\mathbb{Z} - Mod$ la catégorie des groupes abéliens $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués.
- En suivant la convention de [HK01], on note simplement $E^\star(-)$ et $E_\star(-)$ les foncteurs $ev_{\mathbb{Z}/2/\mathbb{Z}/2} \underline{E}^\star(-)$ et $ev_{\mathbb{Z}/2/\mathbb{Z}/2} \underline{E}_\star(-)$ respectivement. Avec les notations précédentes, $E^\star(-)$ et $E_\star(-)$ définissent des foncteurs $\mathbb{Z}/2Sp \rightarrow \mathbb{Z} - Mod$.

Afin de définir correctement les notions d'algèbre commutative, de module sur une algèbre commutative et d'algébroïde de Hopf dans le contexte $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué, il faut considérer la bonne structure monoïdale sur la catégorie des groupes abéliens $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués $\mathbb{Z} - Mod$. C'est l'objet de la sous-section 2.2.2.

2.2.2 Préliminaires autour de la structure monoïdale sur la catégorie $\mathbb{Z} - Mod$

Soient $\otimes : \mathbb{Z} - Mod \times \mathbb{Z} - Mod \rightarrow \mathbb{Z} - Mod$ le foncteur défini par $(x \otimes y)_\star = \bigoplus_{V \oplus W = \star} x_V \otimes y_W$. Pour M, N deux objets de $\mathbb{Z} - Mod$, $\tau : M \otimes N \rightarrow N \otimes M$ l'isomorphisme naturel défini par $\tau(m \otimes n) = (-1)^{dim(|m|)dim(|n|)} n \otimes m$ (dim est défini en 1.1.11 et $|\cdot|$ désigne le degré d'un élément). Alors $(\otimes, \tau, \mathbb{Z})$, avec les morphismes de cohérence évidents, munissent $\mathbb{Z} - Mod$ d'une structure de catégorie monoïdale symétrique fermée, où le Hom interne est défini par $\text{Hom}(M, N)_\star$ est l'ensemble des morphismes de groupes abélien de degré \star . C'est cette structure que nous allons utiliser pour définir les structures algébriques $RO(\mathbb{Z}/2)$ -graduées.

Définition 2.2.3. On définit, comme dans [Boa95, §7]

1. un anneau (commutatif, unitaire) est un monoïde (commutatif, unitaire) dans $(\mathbb{Z} - Mod, \otimes, \mathbb{Z})$,
2. si H est un anneau commutatif, la catégorie $H - Mod$ des H -modules et la catégorie $H - Bimod$ des H -bimodules sont définies via les diagrammes habituels,
3. si R est un co-monoïde commutatif dans $(\mathbb{Z} - Mod, \otimes, \mathbb{Z})$, la catégorie des R -comodules est définie via les diagrammes définissant la structure de module sur un monoïde.

On munit maintenant $H - Bimod$ de deux structures de catégorie monoïdale symétrique :

Définition 2.2.4. Soit H un anneau commutatif.

1. Soit $\otimes_{(r,l)} : H - Bimod \times H - Bimod \rightarrow H - Bimod$ le produit tensoriel au dessus de H , par rapport à la structure de H -module à droite du premier argument et à la structure de H -module à gauche du second. Le H -bimodule H avec la structure de H -bimodule induite par le produit est une unité des deux côtés pour ce produit tensoriel.
2. Soit $\otimes_{(l,l)} : H - Bimod \times H - Bimod \rightarrow H - Bimod$ le produit tensoriel au dessus de H , par rapport à la structure de H -module à gauche des deux arguments. La structure de H -bimodule de $M \otimes_{(l,l)} N$ est donnée par $h(m \otimes n)h' := (mh) \otimes (nh')$. Le H -bimodule H avec la structure de H -bimodule induite par le produit est une unité des deux côtés pour ce produit tensoriel.

On peut maintenant préciser la notion d'algébroïde de Hopf dans le cadre $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué.

Définition 2.2.5. Soit H un anneau commutatif.

1. $H - Alg$ est la catégorie des monoïdes dans $(H - mod, \otimes, H)$,
2. Alg est la catégorie $\mathbb{Z} - Alg$ où \mathbb{Z} désigne ici l'anneau \mathbb{Z} concentré en degré $0 \in RO(\mathbb{Z}/2)$.
3. Un algébroïde de Hopf (H_*, A_*) est un objet en cogroupoïdes dans $\mathbb{Z} - Mod$.

Voici une définition équivalente de la notion d'algébroïde de Hopf $RO(\mathbb{Z}/2)$ -graduée.

Proposition 2.2.6 (voir [Rav86, définition A1.1.1]). Soit (H, A) un couple d'algèbres. Notons μ le produit dans A . Une structure d'algébroïde de Hopf $RO(\mathbb{Z}/2)$ -graduée sur (H, A) est équivalente à la donnée de morphismes d'algèbres

1. unité à gauche $\eta_L : H \rightarrow A$,
2. unité à droite $\eta_R : H \rightarrow A$,
3. coproduit $\Delta : A \rightarrow A \otimes_{(r,l)} A$,
4. co-unité $\epsilon : A \rightarrow H$,
5. et antipode $c : A \rightarrow A$,

vérifiant

1. A est un H -bimodule, avec la structure à gauche induite par η_L et la structure à droite induite par η_R , et pour cette structure, Δ et ϵ sont des morphismes de H -bimodules,
2. les égalités
 - $\epsilon\eta_L = \epsilon\eta_R = Id_H$
 - $(Id_A \otimes_{(r,l)} \epsilon) \circ \Delta = (\epsilon \otimes_{(r,l)} Id_A) \circ \Delta = Id_A$
 - $(Id_A \otimes_{(r,l)} \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes_{(r,l)} Id_A) \circ \Delta$
 - $c\eta_L = \eta_R$
 - $c\eta_R = \eta_L$
 - $c \circ c = Id_A$
3. et qu'il existe des flèches en pointillés faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xleftarrow{\mu \circ (c \otimes Id_A)} & A \otimes_{\mathbb{Z}} A & \xrightarrow{\mu \circ (Id_A \otimes c)} & A \\
 & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & A \otimes_{(r,l)} A & & \\
 & & \uparrow \Delta & & \\
 H & \xleftarrow{\epsilon} & A & \xrightarrow{\epsilon} & H \\
 \eta_R \uparrow & & & & \uparrow \eta_L
 \end{array}$$

Références pour la preuve : Voir [Rav86, définition A1.1.1] et la discussion qui suit (p.302) pour cette caractérisation dans la catégorie des algèbres \mathbb{N} -graduées sur un anneau K . L'équivalence des deux définitions se montre en écrivant les axiomes d'un groupoïde, et en interprétant le résultat dans la catégorie $\mathbb{Z} - Mod$, via le lemme de Yoneda. \square

Définition 2.2.7. Soit (H, A) un algébroïde de Hopf. On appelle primitif de (H, A) un élément $x \in A$ dont la diagonale vérifie $\Delta(x) = 1 \otimes_H x + x \otimes_H 1$.

Nous allons terminer cette sous-section avec une équivalence de catégories entre une certaine catégorie de modules et une catégorie de comodules. L'intérêt de ce résultat pour nous est de pouvoir considérer, moyennant de bonnes hypothèses sur un $\mathbb{Z}/2$ -spectre en anneaux E , la E^* -cohomologie d'un spectre, sur laquelle agissent les opérations cohomologiques stables, comme un comodule sur une certaine cogèbre (voir [Boa95]).

Définition 2.2.8 ([Boa95, définitions §10 et définition 11.11]). 1. Soit A^* un H -bimodule et un anneau. Un module sur A^* est un H -module filtré $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué, complet Hausdorff pour cette filtration M , muni d'un morphisme continu de H -modules $\lambda : A^* \otimes_{(r,l)} M \rightarrow M$ avec les diagrammes de cohérence correspondants.

2. Soit A_* un algébroïde de Hopf $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué. Un A_* -comodule au sens de Boardman est un H -module filtré $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué, complet Hausdorff pour cette filtration M , muni d'un morphisme continu de H -modules $\rho : M \rightarrow M \hat{\otimes}_{(l,l)} A_*$, où l'action de H sur $M \hat{\otimes}_{(l,l)} A_*$ est définie par $h(m \otimes s) = m \otimes \eta_R(h)s$, pour $m \otimes s \in M \hat{\otimes}_{(l,l)} A_*$ et $h \in H$.

Remarque 2.2.9. La différence essentielle entre la notion de comodule au sens de Boardman et la notion de comodule classique (voir la définition 2.2.3) est le fait que le produit tensoriel au but du morphisme de structure $(M \hat{\otimes}_{(l,l)} A_*)$ est complété.

Soient E un $\mathbb{Z}/2$ -spectre en anneaux et X un $\mathbb{Z}/2$ -spectre. L'application que nous ferons par la suite des résultats précédents est de produire une correspondance entre les structures de $End(E)^*$ -module et de E_*E -comodule sur la cohomologie d'un espace (l'existence de telles structure est expliquée par [Boa95, Théorème 11.13] (proposition 2.2.10 et le fait que $Hom(X, E)^*$ est un $End(E)$ -module dans $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$). Dans ce cas, $E^*(X)$ est muni d'une filtration induite par la filtration squelettique.

Le résultat suivant est dans Boardman [Boa95].

Proposition 2.2.10 ([Boa95, Théorème 11.13]). *On suppose A_* libre en tant que H -module à gauche, et on note maintenant $A^* = Hom_{H-Mod}(A_*, H)$. Alors, la catégorie des A^* -modules est équivalente à la catégorie des A_* -comodules.*

2.2.3 Le cas général d'un $\mathbb{Z}/2$ -spectre en anneaux commutatif

Il y a une différence essentielle entre l'algèbre de Steenrod duale non-équivariante, c'est-à-dire l'algèbre $H\mathbb{F}_2^*(H\mathbb{F}_2)$, et son analogue en E -homologie $E_*(E)$ pour un $\mathbb{Z}/2$ -spectre en anneaux E quelconque. En effet, l'anneau de coefficients $E^* := E^*(S^0)$ n'est pas un corps premier concentré en degré 0 en général, et donc la structure des opérations cohomologique est la version $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué d'un algébroïde de Hopf (et non la version $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué d'une algèbre de Hopf). Dans cette section, nous allons associer un algébroïde de Hopf $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué au sens de la définition 2.2.5 à un $\mathbb{Z}/2$ -spectre en anneaux commutatif.

Notation 2.2.11. Dans cette partie, on considère E un $\mathbb{Z}/2$ -spectre en anneaux commutatif. On note les morphismes de structure de la façon suivante :

- $\eta : S^0 \rightarrow E$ désigne l'unité de E
- et $\mu : E \wedge E \rightarrow E$ son produit.

L'analogue en homotopie stable de la catégorie des modules sur un anneau est la catégorie des modules sur un spectre en anneau :

Notation 2.2.12 ([HHR09, A.2.6]). On note $E-Mod$ la catégorie des E -modules à gauche dans $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$. On dispose d'un foncteur d'oubli

$$E-Mod \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathcal{SH}.$$

Proposition 2.2.13 ([HHR09, A.2.6]). *Le foncteur $E \wedge (-)$ est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli $E-Mod \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathcal{SH}$.*

On peut maintenant commencer la description de la structure d'algébroïde de Hopf $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué sur le couple (E_*, E_*E) .

Tout d'abord, pour tous $\mathbb{Z}/2$ -spectres E et F on a une transformation naturelle de foncteurs $\mathbb{Z}/2\mathcal{SH} \times \mathbb{Z}/2\mathcal{SH} \rightarrow \mathbb{Z}-Mod : E_*(-) \otimes F_*(-) \rightarrow (E \wedge F)_* \circ (- \wedge -)$. Par conséquent, l'anneau de coefficients d'un

$\mathbb{Z}/2$ -spectre en anneaux est un anneau, et on peut bien définir les structures d'anneau sur E_\star et $E_\star E$, les produits étant définis par les composées :

$$\mu_E : E_\star \otimes E_\star \rightarrow (E \wedge E)_\star \xrightarrow{\mu_\star} E_\star$$

et

$$\mu_{E_\star E} : E_\star E \otimes E_\star E \longrightarrow (E \wedge E \wedge E \wedge E)_\star \xrightarrow{((\mu \wedge \mu) \circ (Id_E \wedge \tau \wedge Id_E))_\star} E_\star E,$$

où $\tau : E \wedge E \rightarrow E \wedge E$ est l'échange des deux facteurs (le morphisme $(\mu \wedge \mu) \circ (Id_E \wedge \tau \wedge Id_E)$ munit $E \wedge E$ d'une structure de $\mathbb{Z}/2$ -spectre en anneau).

Les résultats contenus dans cette sous-section sont classiques pour les spectres non-équivariants, et sont décrits, par exemple, dans [Ada95, chapitres 12 et 13], [Rav86, section 2.2]. Nous allons ici exposer quelques analogues équivariants, en expliquant la construction des morphismes de structure énoncés à la définition 2.2.6 à chaque fois.

Notation 2.2.14. On définit les morphismes de $\mathbb{Z}/2$ -spectres suivants :

- $\overline{\eta}_L = Id_E \wedge \eta : E \cong E \wedge S^0 \rightarrow E \wedge E$,
- $\overline{\eta}_R = \eta \wedge Id_E : E \cong S^0 \wedge E \rightarrow E \wedge E$.

Définition 2.2.15. On pose $\eta_L = \overline{\eta}_L$ et $\eta_R = \overline{\eta}_R$.

Les morphismes η_L et η_R qui viennent d'être définis munissent bien $E_\star E$ d'une structure de E_\star -module à gauche et à droite respectivement, comme dans le cas classique, à cause de l'échange τ qui intervient dans la définition de $\mu_{E \wedge E}$.

À partir de maintenant, la seule structure de E_\star -module à gauche (resp. à droite) qu'on considère est celle-ci.

Faisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.2.16. $E_\star E$ est plat en tant que E_\star -module à gauche.

Comme l'application

$$\tau : E \wedge E \rightarrow E \wedge E$$

qui échange les deux facteurs échange la structure de E -module à gauche et de E -module à droite est un isomorphisme de $\mathbb{Z}/2$ -spectres, l'hypothèse 2.2.16 est équivalente à

Hypothèse 2.2.17. $E_\star E$ est plat en tant que E_\star -module à droite.

Supposons que ces deux hypothèses sont vérifiées. Alors on a un isomorphisme entre les théories d'homologie

$$E_\star E \otimes_{(r,l)} E_\star(-) \cong E_\star(E \wedge (-)),$$

où le produit tensoriel $\otimes_{(r,l)}$ est pris au dessus de E_\star . En particulier, on a un isomorphisme

$$E_\star E \otimes_{(r,l)} E_\star E \cong E_\star(E \wedge E). \quad (2.4)$$

Définition 2.2.18. On définit donc une diagonale par $\Delta : E_\star E \rightarrow E_\star E \otimes_{E_\star} E_\star E$, via l'isomorphisme donnée à l'équation (2.4).

Remarque 2.2.19. On a même mieux, puisque pour tout spectre X , $E_\star X = \pi_\star(E \wedge X)$ est un comodule sur $E_\star E$ au sens de Boardman (voir la définition 2.2.8, et [Boa95, théorème 4.2] pour la preuve de ce fait dans le cas classique, qui est formellement identique à la situation considérée ici).

Notation 2.2.20. On note

- $\overline{\epsilon} = \mu : E \wedge E \rightarrow E$
- $\overline{c} = \tau : E \wedge E \rightarrow E \wedge E$.

Définition 2.2.21. On définit l'augmentation et l'antipode par

- $\epsilon = \bar{\epsilon}_* : E_*E \rightarrow E_*$
- $c = \bar{c}_* : E_*E \rightarrow E_*E$.

Comme indiqué au début de cette sous-section, la démonstration du fait que ces morphismes définissent une structure d'algèbroïde de Hopf $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué sur le couple (E_*, E_*E) est essentiellement identique au cas classique démontré dans [Rav86, section 2.2].

Considérons maintenant l'algèbre des opérations cohomologiques stables.

En toute généralité, la relation entre les opérations cohomologiques stables $(E^*, [E, E]^*)$ et les opérations cohomologiques (E_*, E_*E) est délicat. Afin de pouvoir appliquer le résultat 2.2.10, il faut construire un isomorphisme d'anneaux et de E_* -modules à gauche

$$\mathrm{Hom}_{E_*}(E_*E, E_*) \cong E^*E$$

et restreindre encore l'hypothèse 2.2.16 en :

Hypothèse 2.2.22. E_*E est isomorphe à une somme directe $\bigoplus_{i \in I} \Sigma^{V_i} E_*$ en tant que E_* -module à gauche.

Remarque 2.2.23. Encore une fois, la précision à gauche est inutile puisque la liberté à gauche et à droite sont équivalentes.

Le reste de cette sous-section est consacré à la construction d'un isomorphisme $\mathrm{Hom}_{E_*}(E_*E, E_*) \cong E^*E$.

D'une façon générale, pour un spectre en anneaux commutatif E , la liberté d'un E -module se comprend de façon algébrique.

Proposition 2.2.24. Soit X un E -module tel que E_*X est isomorphe en tant que foncteur de Mackey à un certain coproduit $\bigoplus_{i \in I} \Sigma^{V_i} E_*$, pour certains $V_i \in RO(\mathbb{Z}/2)$. Alors il existe une équivalence faible de E -modules $\bigvee_{i \in I} \Sigma^{V_i} E \simeq X$.

Démonstration. Soit $\{b_i\}_{i \in I}$ une base de E_*X en tant que E_* -module, avec $|b_i| = V_i$. Considérons $\bigvee_{i \in I} S^{V_i} \xrightarrow{\vee b_i} X$. L'adjonction 2.2.13 fournit alors un morphisme de E -modules

$$\bigvee_{i \in I} \Sigma^{\mathrm{deg}(b_i)} E \rightarrow X.$$

Ce morphisme de $\mathbb{Z}/2$ -spectres induit un isomorphisme en homotopie, et est donc une équivalence faible. \square

On rappelle la définition du morphisme $\Delta : E_*E \rightarrow E_*E \otimes_{E_*} E_*E$, donnée à la définition 2.2.18. La proposition suivante donne l'isomorphisme d'anneaux et de E_* -modules souhaité.

Proposition 2.2.25. Supposons que E vérifie l'hypothèse 2.2.22. Alors on a un isomorphisme d'anneaux et de E_* -modules :

$$\mathrm{Hom}_{E_*-Mod}(E_*E, E_*) \cong E^*E \tag{2.5}$$

où les structures d'anneau sont

1. induite par la composition des morphismes $E \rightarrow E$ pour $E^*E = \pi_*(\mathrm{End}(E))$
2. donnée par $\mathrm{Hom}_{E_*}(E_*E, E_*) \otimes_{E_*} \mathrm{Hom}_{E_*}(E_*E, E_*) \rightarrow \mathrm{Hom}_{E_*}(E_*E \otimes_{E_*} E_*E, E_*) \xrightarrow{\Delta^*} \mathrm{Hom}_{E_*}(E_*E, E_*)$.

Démonstration (indications, voir [Boa95, preuve du théorème 9.25]). Comme E vérifie l'hypothèse 2.2.22, on peut choisir une base $\{b_i\}_{i \in I}$ de E_*E en tant que E_* -module, on a donc $E \wedge E \simeq \bigvee_i \Sigma^{\mathrm{deg}(b_i)} E$. Alors l'application

$$\pi^{-1} : \mathrm{Hom}_{E_*-Mod}(E_*E, E_*) \rightarrow \pi_* \mathrm{Hom}_{E-Mod}(E \wedge E, E) \cong \pi_*(\mathbb{Z}/2Sp(E, E)) = E^*E$$

définie pour $f : b_i \mapsto e_i \in E_*$ par

$$\pi^{-1}(f) : \bigvee_i \Sigma^{deg(b_i)} E \xrightarrow{\vee e_i \wedge E} E \wedge E \xrightarrow{\mu} E$$

définit un isomorphisme inverse de la flèche

$$\pi_* : E^*E \cong \pi_* \text{Hom}_{E\text{-Mod}}(E \wedge E, E) \rightarrow \text{Hom}_{E_*\text{-Mod}}(E_*E, E_*),$$

d'où l'isomorphisme.

Le fait que ce soit un morphisme d'anneaux est une conséquence de la commutativité du diagramme [Boa95, diagramme 4.18]. \square

Remarque 2.2.26. – La preuve du cas classique est [Boa95, preuve du théorème 9.25]. Dans [Boa95], l'auteur considère les topologies naturelles sur les modules $\text{Hom}_{E_*\text{-Mod}}(E_*E, E_*)$ et $[E, E]^*$, et le théorème 9.25 de [Boa95] définit un homéomorphisme de dualité par rapport à ces topologies. Si on fait l'hypothèse que les E_* -modules de l'énoncé sont tous de type fini, les topologies considérées par Boardman sont discrètes, et elles n'importent pas sur le résultat.

– Par [Boa95, proposition 6.15 (e)], le morphisme

$$\text{Hom}_{E_*}(E_*E, E_*) \otimes_{E_*} \text{Hom}_{E_*}(E_*E, E_*) \rightarrow \text{Hom}_{E_*}(E_*E \otimes_{E_*} E_*E, E_*)$$

est un isomorphisme de E_* -modules sous l'hypothèse 2.2.22, et le produit définit sur $\text{Hom}_{E_*}(E_*E, E_*)$ est induit par la diagonale Δ via cet isomorphisme.

On rappelle la notion d'éléments primitifs pour un algébroïde de Hopf $RO(\mathbb{Z}/2)$ -graduée donnée à la définition 2.2.7. Une conséquence de la proposition 2.2.25 est une correspondance primitifs-indécomposables analogue au cas classique d'une algèbre de Hopf :

Corollaire 2.2.27 (de 2.2.25). *Soit E un $\mathbb{Z}/2$ -spectre en anneau vérifiant l'hypothèse 2.2.22. Alors via l'isomorphisme de la proposition 2.2.25, une opération stable $x \in E^*E$ en E^* -cohomologie est indécomposable si et seulement si sa duale $x^\vee \in E_*E$ est primitive.*

Nous allons maintenant étudier les conséquences des résultats établis dans cette section pour le $\mathbb{Z}/2$ -spectre en anneaux commutatif $H\underline{\mathbb{F}}_2$ et les opérations cohomologiques stables en $H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ -cohomologie.

2.3 L'algèbre de Steenrod équivariante et sa duale

2.3.1 Structure d'algébroïde de Hopf

On rappelle la notation 2.0.13. Afin d'étudier l'algèbre des opérations stables en $H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ -cohomologie, nous allons considérer l'algébroïde de Hopf $(H\underline{\mathbb{F}}_{2*}, \mathcal{A}_*)$. Le lien entre ces deux objets est donné par l'isomorphisme d'algèbres 2.5 obtenu dans la section 2.2.3 avec le corollaire 2.3.7.

L'argument de Milnor [Mil58] a été généralisé au cas $\mathbb{Z}/2$ -équivariant par [HK01]. L'ingrédient essentiel de la preuve est l'étude de la coaction de \mathcal{A}_* sur la cohomologie de $B'\mathbb{F}_2$ défini en 1.1.23.

Le $\mathbb{Z}/2$ -spectre $H\underline{\mathbb{F}}_2$ est Réel-orienté au sens de [HK01] par [HK01, exemple p.321], on peut donc considérer la suite exacte longue de Gysin en $H\underline{\mathbb{F}}_2$ -cohomologie associée à la fibration

$$B'\mathbb{F}_2 \rightarrow BS^1 \rightarrow BS^1.$$

On rappelle la définition 1.2.13 et la proposition 1.2.14 qui introduisent les classes de cohomologie a et σ^{-1} . Au passage, Hu et Kriz obtiennent le résultat suivant :

Proposition 2.3.1 (voir les preuves de théorème 6.18 et théorème 6.22 dans [HK01]). *On a un isomorphisme d'algèbres $H\underline{\mathbb{F}}_2^*(B'\mathbb{F}_{2+}) \cong H\underline{\mathbb{F}}_2^*[c, b]/(c^2 = ac + \sigma^{-1}b)$.*

*De plus, il existe des éléments ξ_i et τ_i de $H\underline{\mathbb{F}}_2^*H\underline{\mathbb{F}}_2$ tels que la structure de \mathcal{A}_* -comodule (au sens de la définition 2.2.8) sur $H\underline{\mathbb{F}}_2^*B'\mathbb{Z}/2$ est déterminée par*

2.3. L'ALGÈBRE DE STEENROD ÉQUIVARIANTE ET SA DUALE

– la coaction de \mathcal{A}_\star sur $H\underline{\mathbb{F}}_2^\star$,

– les formules $\psi(b) = \sum_{i \geq 0} b^{2^i} \otimes \xi_i$, et $\psi(c) = \sum_{i \geq 0} b^{2^i} \otimes \tau_i$.

Corollaire 2.3.2. *Le $H\underline{\mathbb{F}}_2^\star$ -module $H\underline{\mathbb{F}}_2^\star(B'\mathbb{F}_{2+})$ est libre. Par conséquent on a une formule de Künneth : $\forall X \in \mathbb{Z}/2Sp$,*

$$H\underline{\mathbb{F}}_2^\star(B'\mathbb{F}_{2+} \wedge X) \cong H\underline{\mathbb{F}}_2^\star(B'\mathbb{F}_{2+}) \otimes_{H\underline{\mathbb{F}}_2^\star} H\underline{\mathbb{F}}_2^\star(X)$$

et en particulier, pour tout $n \geq 0$,

$$H\underline{\mathbb{F}}_2^\star((B'\mathbb{F}_{2+})^{\wedge n}) \cong H\underline{\mathbb{F}}_2^\star(B'\mathbb{F}_{2+})^{\otimes n}$$

où le produit tensoriel est à prendre au dessus de $H\underline{\mathbb{F}}_2^\star$ dans la dernière formule.

En considérant la coaction de l'algèbroïde de Hopf de Steenrod sur la cohomologie de produits de $B'\mathbb{F}_2$, Hu et Kriz détectent ainsi une certaine sous-algèbre de $H\underline{\mathbb{F}}_2^\star H\underline{\mathbb{F}}_2$. À ce point dans le cas classique, Milnor pouvait déjà identifier l'algèbre de Steenrod duale pour des raisons de dimension. Hu et Kriz montrent, en utilisant la suite de séparation d'isotropie, que toute l'algèbre de Steenrod \mathcal{A}^\star est détectée [HK01, theorem 6.41] :

Théorème 2.3.3. *La structure d'algèbroïde de Hopf de l'algèbre de Steenrod duale $\mathbb{Z}/2$ -équivariante est déterminée par les morphismes suivants :*

1. On a un isomorphisme de $H\underline{\mathbb{F}}_2^\star$ -algèbres $H\underline{\mathbb{F}}_2^\star H\underline{\mathbb{F}}_2 \cong H\underline{\mathbb{F}}_2^\star[\xi_{i+1}, \tau_i | i \geq 0] / (\tau_i^2 + a\tau_{i+1} + \eta_R(\sigma^{-1})\xi_{i+1})$ où les degrés sont $|\xi_i| = (2^i - 1)(1 + \alpha)$,
2. Δ est le morphisme de \mathbb{F}_2 -algèbres satisfaisant

$$\Delta(\xi_i) = \sum_{j=0}^i \xi_{i-j}^{2^j} \otimes \xi_j,$$

$$\Delta(\tau_i) = \sum_{j=0}^i \xi_{i-j}^{2^j} \otimes \tau_j,$$

et, pour $h \in H\underline{\mathbb{F}}_2^\star$,

$$\Delta(h) = \eta_L(h) \otimes_{H\underline{\mathbb{F}}_2^\star} 1,$$

3. η_R est le morphisme de \mathbb{F}_2 -algèbres satisfaisant $\eta_R(\sigma^{-1}) = a\tau_0 + \sigma^{-1}$ et $\eta_R(a) = a$,
4. et ϵ est le morphisme de $H\underline{\mathbb{F}}_2^\star$ -algèbres tel que $\epsilon\eta_L = id_{H\underline{\mathbb{F}}_2^\star}$ et $\epsilon(\xi_i) = \epsilon(\tau_i) = 0$.

Justification 2.3.4. On sait déjà (voir [Rav86, Appendice 2]) que, s'il existe une antipode $c : \mathcal{A}_\star \rightarrow \mathcal{A}_\star$ qui complète cette structure en une structure d'algèbroïde de Hopf, elle est unique. De plus, l'automorphisme de $(H\underline{\mathbb{F}}_2 \wedge H\underline{\mathbb{F}}_2)$ qui échange les deux facteurs réalise topologiquement un tel morphisme, comme décrit à la définition 2.2.21. Par conséquent, le théorème précédent définit bien une structure d'algèbroïde de Hopf sur le couple $(H\underline{\mathbb{F}}_2^\star, H\underline{\mathbb{F}}_2^\star H\underline{\mathbb{F}}_2)$.

Remarque 2.3.5. Comme dans le cas classique, voici quelques observations élémentaires, conséquences directes de la définition d'algèbroïdes de Hopf.

- La formule $c\eta_L = \eta_R$ implique que $c(a) = a$ et $c(\sigma^{-1}) = a\tau_0 + \sigma^{-1}$. Ensuite, le fait que c est un morphisme de \mathbb{F}_2 -algèbres permet de la déterminer en entier sur l'anneau de coefficients $H\underline{\mathbb{F}}_2^\star$.
- L'existence de flèches en pointillés rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{A}_\star & \xleftarrow{\mu(c \otimes id)} & \mathcal{A}_\star \otimes_{\mathbb{F}_2} \mathcal{A}_\star & \xrightarrow{\mu(id \otimes c)} & \mathcal{A}_\star \\
 \uparrow \eta_R & \swarrow \text{---} & \downarrow & \searrow \text{---} & \uparrow \eta_L \\
 & & \mathcal{A}_\star \otimes_{H\underline{\mathbb{F}}_2^\star} \mathcal{A}_\star & & \\
 & & \uparrow \Delta & & \\
 H\underline{\mathbb{F}}_2^\star & \xleftarrow{\epsilon} & \mathcal{A}_\star & \xrightarrow{\epsilon} & H\underline{\mathbb{F}}_2^\star
 \end{array}$$

donne une formule pour calculer $c(\xi_i)$ par récurrence sur i . Précisément, pour tout $n > 0$,

$$\sum_{i=0}^n \xi_i^{2^{n-i}} c(\xi_{n-i}) = \eta_L \epsilon(\xi_n) = 0$$

et

$$\sum_{i=0}^n \xi_i^{2^{n-i}} c(\tau_{n-i}) = \eta_L \epsilon(\tau_n) = 0.$$

Le reste de cette sous-section a pour but d'appliquer les résultats de la section 2.2.3 au spectre $H\underline{\mathbb{F}}_2$.

Proposition 2.3.6. *Le $H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star}$ -module $H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star} H\underline{\mathbb{F}}_2$ est librement engendré par*

$$\mathcal{B}\mathcal{M} := \{\Pi_{i,j} \tau_i^{\epsilon_i} \xi_j^{n(j)}, n(j) \in \mathbb{N}, \epsilon(i) \in \{0, 1\}\}.$$

Par la suite, on fera référence à cette base comme la base monomiale de $(H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star}, \mathcal{A}_\star)$.

Démonstration. On va montrer que le morphisme de $H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star}$ -modules

$$\phi : H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star} \{\mathcal{B}\mathcal{M}\} \rightarrow \mathcal{A}_\star$$

est un isomorphisme.

Soit R l'idéal engendré par $a\tau_{k+1} + \eta_R(\sigma^{-1})\xi_{k+1} - \tau_k^2$ pour $k \geq 0$ de telle sorte que $\mathcal{A}_\star \cong H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star}[\xi_{i+1}, \tau_i | i \geq 0]/R$.

- **Surjectivité :** la surjectivité est claire, vue la définition de $\mathcal{B}\mathcal{M}$. En détail, soit $\xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n} \tau_0^{j_1} \dots \tau_m^{j_m}$ un élément de $\mathcal{B}\mathcal{M}$. Pour tout k tel que $j_k \geq 2$, on écrit

$$\xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n} \tau_0^{j_1} \dots \tau_m^{j_m} \equiv \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n} (\Pi_{k|j_k \leq 1} \tau_{j_k}) (\Pi_{k|j_k \geq 2} \tau_k^{j_k-2} (a\tau_{k+1} + \eta_R(\sigma^{-1})\xi_{k+1}))$$

modulo R . Par récurrence descendante sur $\max\{j_k\}$, on trouve un élément de $H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star} \{\mathcal{B}\mathcal{M}\}$ dont l'image par ϕ est $\xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n} \tau_0^{j_1} \dots \tau_m^{j_m}$.

- **Injectivité :** cette partie se montre comme dans le cas classique (dans l'algèbre \mathcal{A}_\star^p , pour p impair). Précisément, $\text{Ker}(\phi) \cong H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star} \{\mathcal{B}\mathcal{M}\} \cap R$. Mais pour tout $0 \neq r \in R$, $\exists i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_k$ et $\exists k \geq k_0 \geq 0$ tel que $j_k \geq 2$ et $pr_{H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star} \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n} \tau_0^{j_1} \dots \tau_m^{j_m}}(r) \neq 0$. Par définition de $\mathcal{B}\mathcal{M}$, $H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star} \{\mathcal{B}\mathcal{M}\} \cap R = 0$. \square

On rappelle que le symbole $H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star}$ désigne le foncteur de la catégorie des $\mathbb{Z}/2$ -spectres dans la catégorie des foncteurs de Mackey $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués (voir notation 1.1.51).

Corollaire 2.3.7. *On a un isomorphisme de foncteurs de Mackey*

$$H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star}(H\underline{\mathbb{F}}_2) \cong \bigoplus_{b \in \mathcal{B}\mathcal{M}} \Sigma^{|b|} H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star}.$$

Démonstration. Commençons par montrer le résultat en degrés $\star = * \in \mathbb{Z} \subset RO(\mathbb{Z}/2)$. Notons $F = \bigoplus_{b \in \mathcal{B}\mathcal{M}} \Sigma^{|b|} H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star}(\mathbb{Z}/2/\{e\})$. Nous allons construire explicitement un isomorphisme de foncteurs de Mackey

$$\begin{array}{ccc} H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star} H\underline{\mathbb{F}}_2 & \longrightarrow & F \\ \tau \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right) \rho & & \tau \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right) \rho \\ H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star}(H\underline{\mathbb{F}}_2)(\mathbb{Z}/2/\{e\}) & \longrightarrow & \bigoplus_{b \in \mathcal{B}\mathcal{M}} \Sigma^{|b|} H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star}(\mathbb{Z}/2/\{e\}). \end{array}$$

La proposition 2.3.6 nous fournit l'isomorphisme $H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star} H\underline{\mathbb{F}}_2 \rightarrow F$ par restriction de ϕ aux degrés entiers.

Il faut donc identifier le reste de la structure de foncteur de Mackey, et montrer qu'on a un isomorphisme.

2.3. L'ALGÈBRE DE STEENROD ÉQUIVARIANTE ET SA DUALE

La propriété universelle vérifiée par le $\mathbb{Z}/2$ -spectre d'Eilenberg-MacLane $H\underline{\mathbb{F}}_2$ donne en particulier $\pi_*(i(H\underline{\mathbb{F}}_2)) = \pi_*(H\underline{\mathbb{F}}_2)(\mathbb{Z}/2) = \mathbb{F}_2$, où i désigne le foncteur d'oubli de l'action de $\mathbb{Z}/2$. En particulier $iH\underline{\mathbb{F}}_2 = H\underline{\mathbb{F}}_2$, et donc on a un isomorphisme de groupes abéliens $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués :

$$\underline{H\underline{\mathbb{F}}_2}_*(H\underline{\mathbb{F}}_2)(\mathbb{Z}/2/\{e\}) = \pi_*(H\underline{\mathbb{F}}_2 \wedge H\underline{\mathbb{F}}_2) = \mathcal{A}_*$$

car le spectre non-équivariant sous-jacent à $H\underline{\mathbb{F}}_2$ est $H\underline{\mathbb{F}}_2$. Le théorème 2.3.3 implique qu'en degrés entiers, la multiplication par la classe d'Euler a sur $\underline{H\underline{\mathbb{F}}_2}_*H\underline{\mathbb{F}}_2$ est injective. Mais le lemme 1.1.53 identifie $\text{Ker}(a)$ et $\text{Im}(\tau)$, donc le transfert est trivial en ces degrés. Par conséquent la trace l'est aussi, et donc l'action de $\mathbb{Z}/2$ sur $\underline{H\underline{\mathbb{F}}_2}_*(H\underline{\mathbb{F}}_2)(\mathbb{Z}/2/\{e\})$ est triviale.

Enfin, comme $\underline{H\underline{\mathbb{F}}_2}_*(\mathbb{Z}/2/\{e\}) = \mathbb{F}_2[\sigma^{\pm 1}]$, $\bigoplus_{b \in \mathcal{BM}} \Sigma^{|b|} \underline{H\underline{\mathbb{F}}_2}_*(\mathbb{Z}/2/\{e\}) = \bigoplus_{b \in \mathcal{BM}} \Sigma^{\text{deg}(b)} \mathbb{F}_2$ avec action triviale de $\mathbb{Z}/2$.

On en déduit que le morphisme d'algèbres \mathbb{Z} -graduées

$$\psi : (\underline{H\underline{\mathbb{F}}_2}_*(H\underline{\mathbb{F}}_2)(\mathbb{Z}/2/\{e\}))_* \rightarrow \left(\bigoplus_{b \in \mathcal{BM}} \Sigma^{|b|} \underline{H\underline{\mathbb{F}}_2}_*(\mathbb{Z}/2/\{e\}) \right)_*$$

qui envoie, pour tout $i \geq 0$, l'élément de l'algèbre de Steenrod $\mathbb{Z}/2$ -équivariante $\sigma^{-2^i+1}\tau_i \in \underline{\mathcal{A}}_{2^{i+1}-1}(\mathbb{Z}/2/\{e\})$ sur $\xi_{i+1} \in \mathcal{A}^* = \underline{H\underline{\mathbb{F}}_2}_*(H\underline{\mathbb{F}}_2)(\mathbb{Z}/2/\{e\})$ est un isomorphisme de $\mathbb{F}_2[\mathbb{Z}/2]$ -modules.

La compatibilité avec les morphismes de transfert est triviale puisque ces morphismes sont nuls.

Le lemme 1.1.53 identifie la co-image du morphisme de restriction de $\underline{H\underline{\mathbb{F}}_2}_*(H\underline{\mathbb{F}}_2)$ et de $\bigoplus_{b \in \mathcal{BM}} \Sigma^{|b|} \underline{H\underline{\mathbb{F}}_2}_*$. Pour des raisons de dimension, le morphisme de restriction de ces deux foncteurs de Mackey sont surjectifs. Par conséquent, quitte à composer ψ^{-1} avec un isomorphisme de \mathbb{F}_2 -espace vectoriel, le morphisme définit par

$$\begin{array}{ccc} \underline{H\underline{\mathbb{F}}_2}_*H\underline{\mathbb{F}}_2 & \xrightarrow{\phi} & F \\ \begin{array}{c} \tau \uparrow \\ \rho \downarrow \end{array} & & \begin{array}{c} \tau \uparrow \\ \rho \downarrow \end{array} \\ \underline{H\underline{\mathbb{F}}_2}_*(H\underline{\mathbb{F}}_2)(\mathbb{Z}/2/\{e\}) & \xrightarrow{\psi} & \bigoplus_{b \in \mathcal{BM}} \Sigma^{|b|} \underline{H\underline{\mathbb{F}}_2}_*(\mathbb{Z}/2/\{e\}) \end{array}$$

est bien un isomorphisme de foncteurs de Mackey. \square

Remarque 2.3.8. On construit un isomorphisme de foncteurs de Mackey car c'est une hypothèse de la proposition 2.2.24, que nous souhaitons appliquer au $\mathbb{Z}/2$ -spectre $H\underline{\mathbb{F}}_2$.

Le corollaire 2.3.7 établit l'hypothèse 2.2.22 pour $E = H\underline{\mathbb{F}}_2$. Par conséquent, on peut appliquer tous les résultats de la sous-section 2.2.3. En particulier,

Proposition 2.3.9. *On a un isomorphisme de \mathbb{F}_2 -algèbres*

$$\text{Hom}_{H\underline{\mathbb{F}}_2}(H\underline{\mathbb{F}}_2_*H\underline{\mathbb{F}}_2, H\underline{\mathbb{F}}_2) = [H\underline{\mathbb{F}}_2, H\underline{\mathbb{F}}_2]^*.$$

Démonstration. Il s'agit de l'isomorphisme 2.5 qui existe sous l'hypothèse 2.2.22 pour $H\underline{\mathbb{F}}_2$, qu'on vient de vérifier dans la proposition 2.3.7. \square

On rappelle la notation 2.0.13 qui introduit l'algèbre de Steenrod $\mathbb{Z}/2$ -équivariante \mathcal{A}^* . L'isomorphisme de la proposition 2.3.9 nous autorise à considérer une base des opérations cohomologiques en tant que $\underline{H\underline{\mathbb{F}}_2}_*$ -module à gauche.

Définition 2.3.10. On appelle base de Milnor la base de \mathcal{A}^* en tant que $\underline{H\underline{\mathbb{F}}_2}_*$ -module constituée des éléments duaux aux $\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \dots \xi_k^{n_k} \tau_0^{\epsilon_0} \tau_1^{\epsilon_1} \dots \tau_l^{\epsilon_l}$ via l'isomorphisme 2.5. On note cette dualité par rapport à l'anneau de coefficients $-\vee$. Nommons quelques éléments d'importance particulière pour la suite :

- Les éléments duaux aux ξ_i^i sont appelés Sq^{2^i} par analogie au cas classique. Leur degré est $i(1 + \alpha)$.
- Les éléments duaux aux $\xi_i^i \tau_0$ sont appelés Sq^{2^i+1} , et leur degré est $i(1 + \alpha) + 1$.

– Les éléments duaux aux τ_i sont appelés β_i , et leur degré est $(2^i - 1)(1 + \alpha) + 1$.

Remarque 2.3.11. – En particulier l'élément β_0 est en degré 1.

– Par le théorème 2.3.3, en degré 1, $\mathcal{A}^1 \cong \mathbb{F}_2\{\beta_0, aSq^2\}$, or le Bockstein associé à la suite cofibre $H\mathbb{Z} \rightarrow H\mathbb{Z} \rightarrow H\mathbb{F}_2$ définit également une opération cohomologique dans l'algèbre de Steenrod $\mathbb{Z}/2$ -équivariante $[\underline{H}\mathbb{F}_2, \Sigma H\underline{\mathbb{F}}_2] = \mathcal{A}^1$ non triviale. Or, comme

$$\Delta(\tau_0\tau_1) = (1 \otimes \tau_0 + \tau_0 \otimes 1)(1 \otimes \tau_1 + \xi_1 \otimes \tau_0 + \tau_1 \otimes 1)$$

et que $\xi_1 \otimes \tau_0^2 = \xi_1 \otimes a\tau_1 + \xi_1 \otimes \eta_R(\sigma^{-1})\xi_1$, $a\xi_1^{\vee 2} = a^2\sigma^{-1}\beta_0\beta_1$, donc la seule opération cohomologique stable de degré 1 de carré nul est β_0 . On en déduit que β_0 s'identifie également à cette opération Bockstein.

Proposition 2.3.12. *Les éléments de la définition 2.3.10 vérifient les propriétés suivantes :*

1. Les éléments Sq^{2^i} sont indécomposables.
2. Les éléments β_i vérifient $\beta_i^2 = 0$.
3. Les éléments β_i commutent deux à deux.
4. On a l'égalité $\beta_i = [Sq^{2^i}, \beta_{i-1}]$.

Démonstration. On rappelle le corollaire 2.2.27, et l'isomorphisme 2.5 qui identifie la multiplication dans \mathcal{A}^* à la duale de la diagonale dans \mathcal{A}_* .

1. On calcule $\Delta((Sq^{2^i})^\vee)$. Pour $i = 0$, $Sq^1 = \tau_0^\vee$, et

$$\Delta(\tau_0) = 1 \otimes \tau_0 + \tau_0 \otimes 1$$

donné au théorème 2.3.3. Pour $i \geq 1$, $Sq^{2^i} = \xi_1^{2^{i-1}}$, et

$$\Delta(\xi_1)^{2^{i-1}} = 1 \otimes \xi_1^{2^{i-1}} + \xi_1^{2^{i-1}} \otimes 1.$$

D'où l'indécomposabilité des Sq^{2^i} .

2. L'élément $\beta_i^2 \neq 0$ si et seulement si il existe un élément $x \in \mathcal{A}_*$ tel que $pr_{\tau_i \otimes \tau_i}(\Delta x) \neq 0$. On peut supposer que x est un élément de la base monomiale. En effet, si il existe $h \in H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ et $y \in \mathcal{B}\mathcal{M}$ tel que $x = hy$, l'élément y vérifie également $pr_{\tau_i \otimes \tau_i}(\Delta y) \neq 0$. On rappelle les formules 2.3.3. Il suffit de faire le calcul de $\Delta(x)$ modulo $(\xi_i, i \geq 1)$, pour tout élément x de $\mathcal{B}\mathcal{M}$. Mais alors
 - si il existe $i \geq 1$ tel que x est multiple de ξ_i , $\Delta(x) \in (\xi_i, i \geq 1)$,
 - et sinon, x est un certain produit d'éléments distincts τ_i pour $i \geq 0$, et $\Delta(\tau_i) = 1 \otimes \tau_i + \tau_i \otimes 1$ donne $pr_{\tau_i \otimes \tau_i}(\Delta x) = 0$.

Dans tous les cas, $pr_{\tau_i \otimes \tau_i}(\Delta x) = 0$. Par conséquent $\beta_i^2 = 0$.

3. On considère la diagonale explicitée au théorème 2.3.3. Encore une fois, on peut raisonner modulo $(\xi_i, i \geq 1)$ puisqu'on s'intéresse uniquement à $pr_{\tau_i \otimes \tau_j}(\Delta b)$ pour b élément de la base monomiale. Pour tous $i, j \geq 0$, le produit de β_i avec β_j provient de l'identification

$$\begin{aligned} \Delta(\tau_i\tau_j) &= \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \xi_{i-k}^{2^k} \xi_{j-l}^{2^l} \otimes \tau_k\tau_l + \sum_{l=0}^j \tau_i \xi_{j-l}^{2^l} \otimes \tau_l + \sum_{k=0}^i \tau_j \xi_{i-k}^{2^k} \otimes \tau_k + \tau_i\tau_j \otimes 1 \\ &= 1 \otimes \tau_i\tau_j + \tau_i \otimes \tau_j + \tau_j \otimes \tau_i + \tau_i\tau_j \otimes 1. \end{aligned}$$

En dualisant cette identification, on trouve bien que $\beta_i\beta_j = (\tau_i\tau_j)^\vee = \beta_j\beta_i$.

4. Les deux seuls éléments de la base monomiale tels que le morphisme

$$\psi := (proj_{\xi_1^{2^i} \otimes \tau_{i-1}} + proj_{\tau_{i-1} \otimes \xi_1^{2^i}}) \circ \Delta$$

est non nul sont τ_i et $\xi_1^{2^i} \tau_i$. On a

$$\psi(\tau_i) = \xi_1^{2^i} \otimes \tau_{i-1}$$

et

$$\psi(\xi_1^{2^i} \tau_i) = \xi_1^{2^i} \otimes \tau_{i-1} + \tau_{i-1} \otimes \xi_1^{2^i},$$

d'où le résultat.

□

Remarque 2.3.13. – La proposition précédente donne des formules analogues à 2.1.3. Avec l'identification de β_0 avec le Bockstein associé à la suite cofibre $H\mathbb{Z} \rightarrow H\mathbb{Z} \rightarrow H\mathbb{F}_2$, on voit que les β_i sont des généralisations des opérations de Milnor Q_i dans l'algèbre de Steenrod classique.

- La proposition précédente n'affirme pas que les opérations β_i agissent comme des dérivations sur la cohomologie des $\mathbb{Z}/2$ -espaces. Nous verrons que ce n'est pas le cas dans la section 2.3.2. C'est une différence essentielle avec les opérations de Milnor classiques.

Nous terminons cette sous-section avec un morphisme de comparaison entre l'algèbre de Steenrod duale $\mathbb{Z}/2$ -équivariante et son analogue classique. On rappelle la structure de foncteur de Mackey de $\underline{\mathcal{A}}_\star$ donnée au corollaire 2.3.7.

Proposition 2.3.14. *Le morphisme de restriction du foncteur de Mackey $H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star}(H\underline{\mathbb{F}}_2)$ est un morphisme d'algèbres*

$$\rho : \mathcal{A}_\star \rightarrow \mathcal{A}_\star[\sigma^{\pm 1}].$$

De plus, il induit un morphisme d'algèbroïdes de Hopf non graduées

$$r : (H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star}, \mathcal{A}_\star) \rightarrow (\mathbb{F}_2, \mathcal{A}_\star)$$

avec l'identification $\mathcal{A}_\star[\sigma^{\pm 1}]/(\sigma^{-1} - 1) \cong \mathcal{A}_\star$.

Démonstration. Le morphisme ρ est induit par $p_+ \wedge id_{H\underline{\mathbb{F}}_2 \wedge H\underline{\mathbb{F}}_2} : \mathbb{Z}/2/\{e\}_+ \wedge H\underline{\mathbb{F}}_2 \wedge H\underline{\mathbb{F}}_2 \rightarrow H\underline{\mathbb{F}}_2 \wedge H\underline{\mathbb{F}}_2$ où $p : \mathbb{Z}/2/\{e\} \rightarrow \mathbb{Z}/2/\mathbb{Z}/2$ est l'unique morphisme de $\mathbb{Z}/2$ -ensembles. Il reste à voir que ρ induit un morphisme d'algèbroïdes de Hopf. Par la sous-section 2.2.3 et le fait que la restriction est induite par un morphisme de $\mathbb{Z}/2$ -spectre en anneaux $p_+ \wedge id_{H\underline{\mathbb{F}}_2 \wedge H\underline{\mathbb{F}}_2}$, on obtient que $\bar{\rho} : (H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star}, \mathcal{A}_\star) \rightarrow (\mathbb{F}_2[\sigma^{\pm 1}], \mathcal{A}_\star[\sigma^{\pm 1}])$ est un morphisme d'algèbroïdes de Hopf. Le résultat suit. □

Remarque 2.3.15. On a choisi de quotienter par l'idéal engendré par $\sigma^{-1} - 1$. Une autre possibilité aurait été de choisir l'idéal engendré par l'élément σ^{-1} , le morphisme obtenu serait alors l'analogue pour l'algèbre de Steenrod duale du morphisme étudié par Caruso [Car99].

2.3.2 Les formules de Cartan pour l'anneau de coefficients

Les hypothèses de la proposition 2.2.10 sont vérifiées pour l'algèbroïde de Hopf $(H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star}, \mathcal{A}_\star)$ en vertu du corollaire 2.3.7. La correspondance entre les modules sur \mathcal{A}^\star et les comodules sur \mathcal{A}_\star a pour conséquence la proposition suivante.

Proposition 2.3.16. 1. *Pour tout $h \in H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star}$, $\eta_R(h) = \sum_{h' \in H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star}, x \in \mathcal{A}_\star} (x^\vee h)x$.*

2. *Soit M un \mathcal{A}^\star -module au sens de Boardman et $x^\vee \in \mathcal{A}^\star$. On définit des éléments x'_i et x''_i de l'algèbre de Steenrod duale \mathcal{A}_\star de la façon suivante :*

$$\sum_{i \geq 0} x'_i \otimes x''_i = \sum_{h, y, z | pr_x(yz) = \eta_R(h)x} hy \otimes z \in \mathcal{A}_\star$$

où la seconde somme est prise sur tous les $h \in H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star}$ et y, z éléments de la base monomiale de \mathcal{A}_\star . Alors, pour tout $h \in H\underline{\mathbb{F}}_{2,\star}$ et $m \in M$,

$$x(hm) = \sum_{i \geq 0} x'_i(h)x''_i(m).$$

Démonstration. On rappelle que la proposition 2.2.10 définit une équivalence de catégories entre la catégorie des \mathcal{A}^\star -modules et celle des \mathcal{A}_\star -comodules via $\lambda(m) = \sum_{x \in \mathcal{B}\mathcal{M}} x^\vee m \otimes x$.

On note les morphismes de structure de la façon suivante :

- $\mu : \mathcal{A}^\star \otimes M \rightarrow M$ pour la structure de \mathcal{A}^\star -module sur M , on note aussi xm pour l'action de $x \in \mathcal{A}^\star$ sur $m \in M$ ainsi définie.

– $\lambda : M \rightarrow M \hat{\otimes} \mathcal{A}_*$ pour la structure de \mathcal{A}_* -comodule au sens de Boardman sur M , définie via la proposition 2.2.10. C'est un morphisme de $H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ -modules à gauche, avec l'action de $H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ sur $M \otimes \mathcal{A}_*$ induite par η_L .

Soit $m \in M$ et $h \in H\underline{\mathbb{F}}_2^*$. Alors, en écrivant $\eta_R(h) = \sum_{i \geq 0} h'_i x_{h,i}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_x x^\vee(hm) \otimes x &= \lambda(hm) \\ &= \left[\sum_x (x^\vee m \otimes x) \right] h \\ &= \sum_x x^\vee m \otimes \eta_R(h)x \\ &= \sum_{i,m',x|x^\vee m=m'} m' \otimes x h'_i x_{h,i} \\ &= \sum_{i,m',x|x^\vee m=m'} h'_i m' \otimes x x_{h,i}. \end{aligned}$$

En particulier, pour $M = H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ et $h = 1$, on trouve $\sum_x x^\vee(m) \otimes x = \sum_x x^\vee(1) \otimes \eta_R(m) = 1 \otimes \eta_R(m)$, d'où le premier point.

Pour le second point, en vertu du premier point on peut ré-indexer la somme :

$$\lambda(hm) = \sum_{i,m',x|x^\vee m=m'} h'_i m' \otimes x x_{h,i} = \sum_{x,x' \in \mathcal{BM}} x'^\vee(h) x^\vee(m) \otimes x x',$$

d'où, pour $y^\vee \in \mathcal{A}^*$, $y(hm) = \sum_{pr_y(xx')=\eta_R(h'y)} h' x'^\vee(h) x'^\vee(m)$. \square

La fin de cette sous-section est dédiée au calcul de l'action des opérations de Milnor $\mathbb{Z}/2$ -équivariantes sur l'anneau de coefficients. On fait le calcul de l'action de toutes les opérations sur la partie positive, et le calcul complet pour les deux premières opérations β_0 et β_1 .

Corollaire 2.3.17 (de la proposition 2.3.16). *Soient $k, n \geq 0$.*

1. *Les opérations β_i induisent un morphisme de $\mathbb{F}_2[a]$ -module sur la $H\underline{\mathbb{F}}_2$ -cohomologie des $\mathbb{Z}/2$ -spectres.*

$$2. \beta_i(a^k \sigma^{-n}) = \binom{n}{2^i} a^{k+2^{i+1}-1} \sigma^{-n+2^i}$$

$$3. \beta_0(a^k \sigma^{-n}) = \begin{cases} a^{k+1} \sigma^{-n+1} & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$4. \beta_0(a^{-k} \sigma^n) = \begin{cases} a^{-k+1} \sigma^{n+1} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$5. \beta_1(a^k \sigma^{-n}) = \begin{cases} a^{k+3} \sigma^{-n+2} & \text{si } n \text{ congru à } 2 \text{ ou } 3 \text{ modulo } 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$6. \beta_1(a^{-k} \sigma^n) = \begin{cases} a^{k+1} \sigma^{-n+1} & \text{si } n \text{ congru à } 2 \text{ ou } 3 \text{ modulo } 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. – On sait déjà que $\eta_R(a) = a$ (par 2.3.3). Or η_R est un morphisme d'anneaux, d'où le premier point par les formules de Cartan.

– On fait le calcul de $\eta_R(a^k \sigma^{-n})$ modulo (ξ_1, ξ_2, \dots) . Comme $\tau_0^{2^i} = a^{2^i} \tau_i$ modulo cet idéal, on a $\eta_R(a^k \sigma^{-n}) = a^k \eta_R(\sigma^{-n}) = a^k (\sigma^{-1} + a\tau_0)^n = a^k \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sigma^{-n+i} a^i \tau_0^i$ et en particulier, le coefficient

devant τ_i est $\binom{n}{2^i} a^{k+2^{i+1}-1} \sigma^{-n+2^i}$.

– Les points 3 et 5 sont une conséquence du point 2.

2.4. UNE FAMILLE D'ALGÈBROÏDES DE HOPF QUOTIENTS DE \mathcal{A}_* ET LEURS PROPRIÉTÉS

- Pour les points 2 et 4, on applique les formules de Cartan à l'égalité $0 = \sigma^{-n+1}a^{-k}\sigma^n$ où on considère le produit de droite comme l'action de $H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ sur lui même via sa structure d'anneau. On trouve

$$\begin{aligned} 0 &= \beta_0(\sigma^{-n+1}a^{-k}\sigma^n) \\ &= \beta_0(\sigma^{-n+1})a^{-k}\sigma^n + \sigma^{-n+1}\beta_0(a^{-k}\sigma^n) \end{aligned}$$

par 3, on obtient 4. Enfin,

$$\begin{aligned} 0 &= \beta_1(\sigma^{-n+1}a^{-k}\sigma^n) \\ &= \beta_1(\sigma^{-n+1})a^{-k}\sigma^n + a\beta_0(\sigma^{-n+1})\beta_0(a^{-k}\sigma^n) + \sigma^{-n+1}\beta_1(a^{-k}\sigma^n) \end{aligned}$$

de 3 et 5 on obtient 6. □

2.4 Une famille d'algèbroïdes de Hopf quotients de \mathcal{A}_* et leurs propriétés

Dans cette section, nous allons nous intéresser aux sous-algèbres de \mathcal{A}^* qui proviennent d'un morphisme d'algèbroïdes de Hopf de la forme

$$(H\underline{\mathbb{F}}_{2*}, \mathcal{A}_*) \rightarrow (H\underline{\mathbb{F}}_{2*}, \mathcal{A}_*/I)$$

où I est un idéal de \mathcal{A}_* , et à leurs propriétés.

Après quelques résultats généraux sur les algèbroïdes de Hopf, nous nous tournerons vers l'étude spécifique de $(H\underline{\mathbb{F}}_{2*}, \mathcal{A}_*)$.

2.4.1 Algèbroïdes de Hopf quotient

Définition 2.4.1 (voir A.1 [Rav86]). Soit (H, A) un algèbroïde de Hopf. Un idéal I de A est un idéal d'algèbroïde de Hopf si

$$\begin{aligned} \epsilon(I) &= 0 \\ \Delta(I) &\subset I \otimes_H A \oplus A \otimes_H I \\ c(I) &\subset I \end{aligned}$$

Définition 2.4.2. Soit (H, A) un algèbroïde de Hopf. On dit que (H, A) est connexe si A admet un système de générateurs en tant que H -module de degrés $V \in RO(\mathbb{Z}/2)$ tels que $\dim(V) > 0$ (voir notation 1.1.11 pour la définition de \dim).

Exemple 2.4.3. L'algèbroïde de Hopf $(H\underline{\mathbb{F}}_{2*}, \mathcal{A}_*)$ est connexe en vertu du théorème 2.3.3.

Proposition 2.4.4. Si (H, A) est connexe, et I est un idéal de A vérifiant

$$\epsilon(I) = 0$$

et

$$\Delta(I) \subset I \otimes_H A \oplus A \otimes_H I.$$

Alors I est un idéal idéal d'algèbroïde de Hopf.

Démonstration. Le point 5. de la définition d'algèbroïde de Hopf implique que, pour tout $x \in A$, $c(x) + \sum c(x')x'' + x = \eta_R \epsilon(x)$ en notant $\Delta(x) = x \otimes 1 + \sum x' \otimes x'' + 1 \otimes x$.

Soit $n \geq 1$ et supposons que, pour tout $x \in I$ tel que $|x| < n$, $c(x) \in I$. Soit $x \in I$ de degré n .

Alors $c(x) = \sum c(x')x'' + x$ car $\epsilon(x) \in \epsilon(I) = 0$. Mais $x \in I$, et $\Delta(I) \subset I \otimes_H A \oplus A \otimes_H I$ implique que $c(x')x'' \in I$ (car, soit $x'' \in I$, soit $x' \in I$, mais alors comme $|x'| < |x| = n$, $c(x') \in I$ par hypothèse de récurrence). D'où $c(x) \in I$. □

Proposition 2.4.5. *Soient (H, A) un algébroïde de Hopf et I un idéal d'algébroïde de Hopf. Alors le couple $(H, A/I)$ muni des applications induites par la structure d'algébroïde de Hopf de (H, A) est un algébroïde de Hopf. De plus, la projection $A \twoheadrightarrow A/I$ induit un morphisme d'algébroïdes de Hopf*

$$(H, A) \rightarrow (H, A/I).$$

Démonstration. L'idéal I est un idéal d'algébroïde de Hopf, les trois équations à vérifier impliquent, dans l'ordre l'existence d'une co-multiplication, d'une augmentation et d'une antipode sur A/I . On définit les nouvelles unités à droite et à gauche par composition avec le passage au quotient

$$A \rightarrow A/I.$$

Par construction, le morphisme de passage au quotient $(H, A) \twoheadrightarrow (H, A/I)$ est un morphisme d'algébroïdes de Hopf. \square

Remarque 2.4.6. Une différence essentielle avec l'étude des quotients d'une algèbre de Hopf est que H n'est pas un corps a priori, donc A/I pas nécessairement libre sur H , même si A vérifiait cette propriété.

2.4.2 Liberté des algébroïdes de Hopf quotient

Soit (H, A) un algébroïde de Hopf $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué connexe (voir définition 2.4.2) sur un corps k (remplacer \mathbb{Z} par un corps k dans la définition d'algébroïde de Hopf, ou bien voir [Rav86, A.1]). On fait de plus l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.4.7. En chaque bidegré A_* est un k espace vectoriel de dimension finie.

Dans le cas classique, la structure d'algèbre de Hopf de \mathcal{A}^* implique des résultats très forts quant aux sous-algèbres de Hopf. En particulier, \mathcal{A}^* est libre en tant que module sur toutes ses sous-algèbres de Hopf (voir [MM65, proposition 4.4]). Pour ce qui est du cas des algébroïdes de Hopf, l'appendice 1 de Ravenel [Rav86] donne des informations, en particulier, le théorème A.1.1.17 (*Comodule Algebra Structure Theorem*) donne une manière de voir si un algébroïde de Hopf est libre en tant que comodule sur un de ses quotients. Il est naturel de se poser cette question dans le cas général d'un algébroïde de Hopf.

Dans la définition suivante, on fait le léger abus de terminologie : on parle de déformation non pas dans le cadre des anneaux locaux complets, et du quotient par leur idéal maximal, mais pour un anneau gradué connexe, et du quotient par son idéal d'augmentation. L'abus est justifié par la grande similitude entre les deux cadres, connue depuis bien longtemps.

La motivation pour ces considérations est le morphisme décrit à la proposition 2.3.14, en considérant \mathcal{A}_* comme un objet $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué concentré en degrés entiers.

Définition 2.4.8. Une déformation d'un algébroïde de Hopf connexe (H, A) est un algébroïde de Hopf connexe (\tilde{H}, \tilde{A}) muni d'un idéal $\mathfrak{m} \subset \tilde{H}$ en degrés de la forme $* + n\alpha$ pour n positif tel qu'on ait une identification $(\tilde{H}/\mathfrak{m}, \tilde{A}/\tilde{A}\eta_L(\mathfrak{m})) \cong (H, A)$. Plus précisément :

1. $\tilde{H}/\mathfrak{m} \cong H$
2. Via l'unité η_L , on peut considérer l'idéal à gauche engendré par \mathfrak{m} dans \tilde{A} . On suppose que $\tilde{A}/\tilde{A}\eta_L(\mathfrak{m}) \cong A$
3. ces deux identifications induisent un isomorphisme d'algébroïdes de Hopf.

Le but de cette partie est d'énoncer un résultat général de coliberté :

Théorème 2.4.9. Soient (\tilde{H}, \tilde{A}) un algèbroïde de Hopf et $\tilde{\mathcal{I}}_B \subset \tilde{\mathcal{I}}_C$ deux idéaux d'algèbroïde de Hopf de (\tilde{H}, \tilde{A}) . On utilise les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\tilde{B} &= \tilde{A}/\tilde{\mathcal{I}}_B \\ \tilde{C} &= \tilde{A}/\tilde{\mathcal{I}}_C \\ \mathcal{I}_B &= \tilde{\mathcal{I}}_B/\tilde{\mathcal{I}}_B \cap \tilde{A}\eta_L(\mathfrak{m}) \\ \mathcal{I}_C &= \tilde{\mathcal{I}}_C/\tilde{\mathcal{I}}_C \cap \tilde{A}\eta_L(\mathfrak{m}) \\ B &= A/\mathcal{I}_B \\ C &= A/\mathcal{I}_C.\end{aligned}$$

On fait de plus les hypothèses suivantes :

1. Les idéaux \mathcal{I}_B et \mathcal{I}_C sont des idéaux d'algèbroïdes de Hopf de A . Ainsi (H, B) et (H, C) sont munis de structures d'algèbroïde de Hopf induites respectivement par les projections $A \rightarrow B$ et $A \rightarrow C$.
2. Le morphisme induit $B = A/\mathcal{I}_B \rightarrow A/\mathcal{I}_C = C$ donne à B une structure de C -comodule. On suppose que B est colibre sur C .
3. \tilde{B} et \tilde{C} sont des H -modules libres.

Alors, \tilde{B} est un \tilde{C} -comodule colibre.

Remarque 2.4.10. Les H -modules à gauche B et C correspondent bien à la réduction modulo \mathfrak{m} de \tilde{B} et \tilde{C} respectivement, i.e. on a des isomorphismes de H -modules à gauche

$$B = \tilde{B}/\tilde{B}\eta_L(\mathfrak{m})$$

et

$$C = \tilde{C}/\tilde{C}\eta_L(\mathfrak{m}).$$

Avant de passer à la preuve de 2.4.9, considérons une source d'exemples sur lesquels appliquer le théorème. Le résultat sur la structure des algèbres de Hopf [MM65, théorème 4.4] implique en particulier que sur un corps les algèbres de Hopf connexes sont toujours libres en tant que module sur leurs sous algèbres. Une déformation d'algèbroïde de Hopf de (\mathbb{F}_2, A) pour A une algèbre de Hopf connexe donne donc des exemples ; les applications que nous ferons seront toutes dans ce cadre.

Démonstration du théorème 2.4.9. La stratégie de la preuve suit la construction utilisée par Ravenel dans [Rav86, théorème A1.1.17].

Le C -comodule B est colibre par hypothèse. Soit $\{1, b_i\}$ une base de B en tant que C -comodule co-unitaire, i.e. un isomorphisme de C -comodules $\psi : B \rightarrow C \otimes_H H\{1, b_i\}$ tel que le morphisme naturel $B \rightarrow C$ soit le morphisme de C -comodules $b_i \mapsto 0$.

Par hypothèse, \tilde{C} est libre en tant que H -module. Choisissons une base $\{1, y_i\}$ de \tilde{C} en tant que \tilde{H} -module, ou l'élément 1 provient de η_L . L'ensemble $\{x_i\} = \{1, y_j\} \times \{1, b_k\}$ forme une base de \tilde{B} en tant que \tilde{H} -module.

De plus, on a l'identification

$$\begin{aligned}B &\cong \tilde{B}/\tilde{B}(\mathfrak{m}) \\ &\cong \tilde{H} \otimes_k k\{x_i\}/((\mathfrak{m}) \otimes_k k\{x_i\}) \\ &\cong \tilde{H}/((\mathfrak{m})) \otimes_k k\{x_i\} \\ &\cong H \otimes_k k\{x_i\}.\end{aligned}$$

donc $\{x_i\}$ forme également une base de B en tant que H -module. Par conséquent, le morphisme de \tilde{H} -modules

$$\tilde{\psi} : \tilde{B} \rightarrow \tilde{H}\{1, b_i\}$$

qui est induit par $y_i \mapsto 0$ étend $(\epsilon \otimes 1) \circ \psi : B \rightarrow H\{1, b_i\}$.

Soit $\tilde{\phi}$ le morphisme de \tilde{H} -modules gradués défini comme la composée

$$\tilde{B} \xrightarrow{\Delta} \tilde{B} \otimes_{\tilde{H}} \tilde{B} \rightarrow \tilde{C} \otimes_{\tilde{H}} \tilde{B} \xrightarrow{id \otimes \tilde{\psi}} \tilde{C} \otimes_{\tilde{H}} \tilde{H}\{1, b_i\}.$$

On définit également ϕ le morphisme de C -comodules

$$\phi : B \xrightarrow{\Delta} B \otimes_H B \rightarrow C \otimes_H B \xrightarrow{id \otimes ((\epsilon \otimes id) \circ \psi)} C \otimes_H H\{b_i\}.$$

Le morphisme ϕ est un isomorphisme. De plus, ψ est un isomorphisme de C -comodules et la projection est compatible avec les diagonales

$$B \rightarrow B \otimes_H B$$

et

$$C \rightarrow C \otimes_H C$$

, donc ϕ est un isomorphisme de C -comodules.

Nous allons montrer que $\tilde{\phi}$ est un isomorphisme. La stratégie est la suivante : on définit deux filtrations décroissantes sur \tilde{B} et $\tilde{C} \otimes_{\tilde{H}} \tilde{H}\{b_i\}$ compatibles avec le morphisme $\tilde{\phi}$. On montre ensuite que $\tilde{\phi}$ induit un isomorphisme sur les gradués associés.

Les filtrations sont définies comme suit sur $\tilde{C} \otimes_{\tilde{H}} \tilde{H}\{b_i\}$ et \tilde{B} :

$$F^d(\tilde{C} \otimes_{\tilde{H}} \tilde{H}\{b_i\}) = \langle c \otimes hb_i \mid \deg(hb_i) \geq d \rangle \quad (2.6)$$

$$F^d(\tilde{B}) = \tilde{\phi}^{-1}(F^d(\tilde{C} \otimes_{\tilde{H}} \tilde{H}\{b_i\})) \quad (2.7)$$

où le symbole $\langle S \rangle$, pour S un ensemble désigne le \tilde{C} -comodule libre sur S . Vérifions que $\tilde{\phi}$ est un isomorphisme sur le gradué associé à cette filtration.

Écrivons $\Delta(b) = \sum b' \otimes b''$ pour b élément de \tilde{B} . Par définition de $\tilde{\phi}$, on a

$$\tilde{\phi}(b) = \sum [b'] \otimes \tilde{\psi}(b'').$$

Soit donc \tilde{b} un élément homogène de \tilde{B} . Écrivons \tilde{B} dans la base $\{x_i\}$ de \tilde{B}

$$\tilde{b} = \sum h_i x_i.$$

On rappelle la définition 1.1.11 qui introduit la notion de *twist* d'une représentation virtuelle. Considérons dans un premier temps le cas d'un élément de la forme $h_i x_i$. Par hypothèse, \mathfrak{m} est concentré en degrés de *twists* positifs, par conséquent, l'égalité $\Delta_{\tilde{B}} = \Delta_B$ modulo \mathfrak{m} donne

$$\Delta_{\tilde{B}}(h_i b_i) \equiv h_i \Delta_{\tilde{B}}(b_i) \equiv h_i \Delta_B(b_i) \pmod{\text{termes de degré de } twist \text{ inférieur};}$$

par conséquent, sur le gradué associé à la filtration F^\bullet , le morphisme $\tilde{\phi}$ coïncide avec l'unique morphisme de \tilde{H} -modules qui étend ϕ .

Définissons une graduation F^\bullet sur $C \otimes_H H\{b_i\}$ par

$$F^d(C \otimes_H H\{b_i\}) = \langle c \otimes hb_i \mid \deg(hb_i) \geq d \rangle$$

et une graduation sur B définie en tirant en arrière cette graduation le long de ϕ .

Le morphisme ϕ étant un isomorphisme, il induit un isomorphisme sur les gradués associés $C \otimes_H H\{b_i\}$ par la filtration F^d . Mais $\tilde{\phi}$ coïncide avec ϕ sur le gradué associé à la filtration F^\bullet , par conséquent $\tilde{\phi}$ est un isomorphisme sur les gradués associés aux filtrations F^\bullet . Enfin, la filtration est exhaustive, et de plus les hypothèses de finitude en chaque degré 2.4.7 permettent d'appliquer le critère de Mittag-Leffler, donc la filtration est aussi complète. Par conséquent, l'application $\tilde{\phi}$ est un isomorphisme de \tilde{C} -comodules. \square

2.4.3 Quotients de l'algèbre de Steenrod $\mathbb{Z}/2$ -équivariante duale

Nous allons adopter des notations proches de celles de Adams-Margolis [AM74] au long de cette section, afin de mettre en évidence les similitudes entre le cas de l'algèbre de Steenrod modulo p impair étudié par [AM74] et l'algèbre de Steenrod duale $\mathbb{Z}/2$ -équivariante pour $p = 2$. Notre but est de construire des quotients de \mathcal{A}_\star par des idéaux engendrés par des générateurs monomiaux bien choisis.

Définition 2.4.11. Soient

$$h : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

et

$$k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

deux applications. On note $I(h, k)$ l'idéal de \mathcal{A}_\star engendré par les éléments $\xi_i^{2^{h(i)}}$ et $\tau_i^{2^{k(i)}}$ avec la convention $x^\infty = 0$.

Exemple 2.4.12. Soient :

- $I_1 = I(h, k_1)$ pour $h = (0, \infty, \infty, \dots)$ et $k_1 = (1, 0, \infty, \infty, \dots)$
- $I_2 = I(h, k_2)$ pour $k_2 = (\infty, 0, \infty, \infty, \dots)$.

Les deux idéaux I_1 et I_2 sont égaux à cause de la relation $\tau_0^2 = a\tau_1 + \eta_R(\sigma^{-1})\xi_1$ dans l'algèbre de Steenrod duale. Ainsi, plusieurs couples (h, k) peuvent donner un même idéal, et donc une même algèbre quotient. Afin de résoudre ce problème, nous allons introduire la notion de minimalité pour un couple (h, k) .

Définition 2.4.13. - On définit une relation d'ordre partiel sur les couples d'applications (h, k) , où

$$h : \mathbb{N} - \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

$$k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

en posant $(h, k) \leq (h', k')$ si $\forall n \geq 0, h(n+1) \leq h'(n+1)$ et $k(n) \leq k'(n)$.

- On dit qu'un couple d'applications (h, k) est minimal si il est minimal pour la relation d'ordre définie au point précédent parmi les (h', k') tels que $I(h', k') = I(h, k)$.

Lemme 2.4.14. 1. Un couple (h, k) est minimal si et seulement si il vérifie la propriété suivante : $\forall i, n \geq 0, \tau_i^{2^n} \in I(h, k)$ si et seulement si $n \geq k(i)$.

2. Soit (h, k) un couple d'applications définissant un idéal $I(h, k)$. Soit

$$\begin{aligned} \tilde{k} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ n &\mapsto \text{Min}\{l \in \mathbb{N} \mid \tau_n^{2^l} \in I(h, k)\}. \end{aligned}$$

Alors le couple (h, \tilde{k}) est l'unique couple d'applications vérifiant

- le couple (h, \tilde{k}) est minimal,
- $I(h, k) = I(h, \tilde{k})$.

Démonstration. 1. Soit (h, k) un couple définissant un idéal $I(h, k)$. Si $\tau_i^{2^n} \notin I(h, k)$, alors $n \leq k(i)$, d'où le sens réciproque.

Pour le sens direct, soit (h, k) un couple définissant un idéal $I(h, k)$. Si le couple (h, k) ne vérifie pas la propriété $\forall i, n \geq 0, \tau_i^{2^n} \in I(h, k)$ si et seulement si $n \geq k(i)$, alors il existe i tel que $\tau_i^{2^{k(i)-1}} \in I(h, k)$. Soit $\tilde{k}(j) = \begin{cases} k(j) & \text{si } j \neq i \\ k(i) - 1 & \text{si } j = i. \end{cases}$ On a l'égalité $I(h, k) = I(h, \tilde{k})$, et $(h, \tilde{k}) < (h, k)$.

Par conséquent (h, k) n'est pas minimal.

2. Les couples (h, k) et (h, \tilde{k}) engendrent les mêmes idéaux, et par le premier point, le couple (h, \tilde{k}) est minimal. La seule chose à vérifier est l'unicité du couple minimal. Mais si $I(h, k) = I(h', k')$, alors $h = h'$. Le premier point implique par conséquent que pour tout couple (h', k') dans la classe de $I(h, k)$, $(h, \tilde{k}) \leq (h', k')$.

□

Exemple 2.4.15. Reprenons les deux idéaux de 2.4.12,

- $I_2 = I(h, k_2)$ n'est pas minimal, car $\tau_0^2 = a\tau_1 + \eta_R(\sigma^{-1})\xi_1 \in I(h, k)$ alors que $k_2(0) = \infty$, ce qui est en contradiction avec le premier point du lemme 2.4.14.
- Son idéal minimal associé est $I_1 = I(h, k_1)$.

Nous allons maintenant nous concentrer sur les hypothèses nécessaires pour qu'un quotient de l'algèbre de Steenrod duale équivariante \mathcal{A}_* soit muni d'une structure d'algèbroïde de Hopf.

On rappelle la convention faite à la définition 2.4.11. Dans le cas classique, Adams et Margolis obtiennent la classification des algèbres de Hopf quotients de \mathcal{A}_*^p suivante [AM74, proposition 2.3] :

Proposition 2.4.16. *Soit p un nombre premier. Pour deux applications*

$$h : \mathbb{N} - \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

et, pour p impair,

$$k : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}.$$

On note $J(h, k)$ l'idéal de \mathcal{A}_*^p engendré par $\xi_i^{p^{h(i)}}$ et $\tau_i^{k(i)}$. Pour $p = 2$ $J(h)$ est l'idéal de \mathcal{A}_*^2 engendré par les $\xi_i^{2^{h(i)}}$. On note $B(h, k)_*$ l'algèbre quotient $\mathcal{A}_*^p/J(h, k)$ si p impair, et $B(h)_*$ l'algèbre quotient $\mathcal{A}_*^2/J(h)$.

Si $J(h, k)$ ou $J(h)$ est un idéal de Hopf, on note $B(h, k)^*$ ou $B(h)^*$ les sous-algèbres de l'algèbre de Steenrod duales aux $B(h, k)_*$ ou $B(h)_*$ respectivement.

1. Si $p = 2$, soit $h : \mathbb{N} - \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. L'application h vérifie

$$\forall i, j \geq 1 \text{ soit } h(i) \leq j + h(i + j) \text{ soit } h(j) \leq h(i + j)$$

si et seulement si $B(h)_*$ est une algèbre de Hopf quotient de \mathcal{A}_*^2 . De plus, toute algèbre de Hopf quotient de l'algèbre de Steenrod duale \mathcal{A}_*^2 est de la forme $B(h)_*$.

2. Si p impair, soient $h : \mathbb{N} - \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $k : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$. Le couple (h, k) vérifie les deux conditions suivantes :

$$\forall i, j \geq 1 \text{ soit } h(i) \leq j + h(i + j) \text{ soit } h(j) \leq h(i + j)$$

et

$$\forall i \geq 1, j \geq 0, \text{ tel que } k(i + j) = 0, \text{ soit } h(i) \leq j \text{ soit } k(j) = 0$$

si et seulement si $B(h, k)_*$ est une algèbre de Hopf quotient de \mathcal{A}_*^p . De plus, toute algèbre de Hopf quotient de l'algèbre de Steenrod duale \mathcal{A}_*^p est de la forme $B(h, k)_*$

L'étude des algèbres de Hopf quotients de l'algèbre de Steenrod duale \mathcal{A}_* modulo 2 est formellement plus proche du cas non-équivariant pour p impair comme nous allons le voir dans la proposition suivante.

Proposition 2.4.17. *Soit (h, k) un couple minimal définissant l'idéal $I(h, k) \subset \mathcal{A}_*$. Alors $I(h, k)$ est un idéal d'algèbroïde de Hopf si et seulement si h et k vérifient*

$$\forall i, j \geq 1, h(i) \leq j + h(i + j) \text{ ou } h(j) \leq h(i + j) \tag{2.8}$$

$$\forall i \geq 1, j \geq 0, h(i) \leq j + k(i + j) \text{ ou } k(j) \leq k(i + j) \tag{2.9}$$

Démonstration. Il faut vérifier que l'idéal $I(h, k)$ est un idéal d'algèbroïde de Hopf de $(H\mathbb{F}_{2_*}, \mathcal{A}_*/I(h, k))$, c'est-à-dire vérifie les trois propriétés de la définition 2.4.1 si et seulement si les conditions (2.8) et (2.9) sont satisfaites.

Par définition de $I(h, k)$, $\epsilon(I(h, k)) = 0$. De plus, la proposition 2.4.4 s'applique à $(H\mathbb{F}_{2_*}, \mathcal{A}_*/I(h, k))$ en vertu de 2.3.3, donc $c(I(h, k)) \subset I(h, k)$ est automatiquement satisfaite si $\Delta(I(h, k)) \subset I(h, k) \otimes \mathcal{A}_* \oplus \mathcal{A}_* \otimes I(h, k)$.

2.4. UNE FAMILLE D'ALGÈBRES DE HOPF QUOTIENTS DE \mathcal{A}_\star ET LEURS PROPRIÉTÉS

Alors, il suffit de montrer que $\Delta(I(h, k)) \subset I(h, k) \otimes \mathcal{A}_\star \oplus \mathcal{A}_\star \otimes I(h, k)$ est équivalente à

$$\forall i, j \geq 1, h(i) \leq j + h(i + j) \text{ ou } h(j) \leq h(i + j) \quad (2.10)$$

$$\forall i \geq 1, j \geq 0, h(i) \leq j + k(i + j) \text{ ou } k(j) \leq k(i + j). \quad (2.11)$$

Vérifions à la main que les deux conditions sont bien équivalentes à l'aide des formules explicites données en 2.3.3. La diagonale Δ est un morphisme d'algèbres, donc $I(h, k)$ vérifie $\Delta(I(h, k)) \subset I(h, k) \otimes \mathcal{A}_\star \oplus \mathcal{A}_\star \otimes I(h, k)$ si et seulement si, pour tout $i \geq 1$, $\Delta(\xi_i^{2^{h(i)}}) \in I(h, k) \otimes \mathcal{A}_\star \oplus \mathcal{A}_\star \otimes I(h, k)$ et pour tout $i \geq 0$, $\Delta(\tau_i^{2^{k(i)}}) \in I(h, k) \otimes \mathcal{A}_\star \oplus \mathcal{A}_\star \otimes I(h, k)$. Mais

$$\Delta(\xi_n^{2^{h(n)}}) = \sum_{i+j=n} \xi_i^{2^{j+h(n)}} \otimes \xi_j^{2^{h(n)}}$$

et

$$\Delta(\tau_n^{2^{k(n)}}) = \sum_{i+j=n} \xi_i^{2^{j+k(n)}} \otimes \tau_j^{2^{k(n)}}.$$

Par la première équation, on trouve que $\Delta(\xi_i^{2^{h(i)}}) \in I(h, k) \otimes \mathcal{A}_\star \oplus \mathcal{A}_\star \otimes I(h, k)$ est équivalente à la condition 2.10. Pour la deuxième équation, $\tau_n^{2^{k(n)}} \in I(h, k)$ par définition de $I(h, k)$. On veut que pour tous i, j tels que $i + j = n$, de deux choses l'une : soit $\xi_i^{2^{j+k(n)}} \in I(h, k)$, soit $\tau_j^{2^{k(n)}} \in I(h, k)$. Par l'hypothèse de minimalité, la deuxième condition est équivalente à $k(j) \leq k(n)$. \square

Remarque 2.4.18. La partie calculatoire de la preuve de la proposition 2.4.17 est très proche de celle de la proposition analogue de [AM74], cas impair. Cette proximité est due au fait que les formules pour la diagonale sont identiques entre \mathcal{A}_\star^p , pour p impair (avec les notations de [AM74]) et \mathcal{A}_\star (avec les notations utilisées ici).

Dans la remarque 2.4.6, on a vu qu'il existe des quotients d'algèbre de Steenrod duale non libres en tant que modules sur la cohomologie du point. Par la suite, nous allons éviter les problèmes posés par ces exemples particuliers. Il s'avère que la liberté de $\mathcal{A}_\star/I(h, k)$ peut se lire de façon combinatoire sur le couple (h, k) et ce même si (h, k) n'est pas minimal. La définition suivante donne la propriété à considérer.

Définition 2.4.19. On dit qu'un couple d'applications (h, k) est libre s'il vérifie la propriété suivante : $\forall i \geq 0, m \geq k(i), j \leq m$, on a

$$k(i + m) = 0$$

et

$$h(i + j) \leq m - j.$$

Lemme 2.4.20. Soit (h, k) un couple libre. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes pour tous $i \geq 0$ et $m \geq 0$:

1. $\tau_i^{2^m} \in I(h, k)$,
2. dans la décomposition de $\tau_i^{2^m}$ dans la base monomiale, i.e. $\tau_i^{2^m} = \sum_j h_j x_j$, pour certains $h_j \in H\mathbb{F}_{2_\star}$ et $x_j \in \mathcal{BM}$, pour tout $j \geq 0$, on a $x_j \in I(h, k)$,
3. $\tau_{i+m} \in I(h, k)$ et $\forall 0 \leq j \leq m - 1, \xi_{i+m-j}^{2^j} \in I(h, k)$.

Démonstration. 2 \Leftrightarrow 3 : on écrit explicitement la décomposition de $\tau_i^{2^m}$ dans la base monomiale. Par 2.3.3, $\tau_i^2 = a\tau_{i+1} + \eta_R(\sigma^{-1})\xi_{i+1}$, donc $\tau_i^{2^m} = a^{2^{m-1}}\tau_{i+1}^{2^{m-1}} + \eta_R(\sigma^{-1})^{2^{m-1}}\xi_{i+1}^{2^{m-1}}$. Par récurrence immédiate, le cas $m = 0$ étant trivial, on trouve

$$\tau_i^{2^m} = a^{2^m-1}\tau_{i+m} + \sum_{j=1}^m a^{2^m-2^j}\eta_R(\sigma^{-1})^{2^{j-1}}\xi_{i+m-j+1}^{2^j}, \quad (2.12)$$

d'où le résultat.

2 \Rightarrow 1 : supposons 2. Alors par l'équation (2.12), $\tau_i^{2^m} \in I(h, k)$, car cet élément s'exprime comme une somme d'éléments de $I(h, k)$.

1 \Rightarrow 2 : si $\tau_i^{2^m} \in I(h, k)$, supposons que l'implication est vraie pour tout $m' < m$ et $i' < i$. De deux choses l'une :

- soit $m \geq k(i)$, et alors (h, k) libre implique tous les éléments de la base monomiale apparaissant dans (2.12) sont dans $I(h, k)$,
- soit $m < k(i)$. Dans ce cas, $a^{2^{m-1}} \tau_{i+1}^{2^{m-1}} + \eta_R(\sigma^{-1})^{2^{m-1}} \xi_{i+1}^{2^{m-1}} \in I(h, k)$, et, comme $I(h, k)$ est généré par des monômes, $\tau_{i+1}^{2^{m-1}} \in I(h, k)$ et $\eta_R(\sigma^{-1})^{2^{m-1}} \xi_{i+1}^{2^{m-1}} \in I(h, k)$. Toutes les puissances de $\tau_{i'}^{2^{m'}}$ apparaissant dans cette expression sont pour $m' < m$ et $i' < i$, donc leur décomposition dans la base monomiale ne font apparaître que des termes de $I(h, k)$ par hypothèse de récurrence.

Le résultat suit. \square

Proposition 2.4.21. *Soit (h, k) un couple d'applications libre définissant un idéal $I(h, k)$. Alors l'algèbre $\mathcal{A}_*/I(h, k)$ est libre en tant que $H\underline{\mathbb{F}}_{2*}$ -module. Une base de ce $H\underline{\mathbb{F}}_{2*}$ -module est donnée par*

$$\mathcal{B}_{(h,k)} = \{[b_i] \mid b_i \in \mathcal{B}\mathcal{M}, b_i \notin I(h, k)\}.$$

Explicitement, une base de $\mathcal{A}_/I(h, k)$ pour un couple (h, k) libre est constituée des monômes de la forme*

$$\prod_{i \geq 0} \xi_{i+1}^{h_i} \tau_i^{\epsilon_i}$$

où $\forall i \geq 0$, $\epsilon_i \leq 2^{k(i)}$ et $h_{i+1} \leq 2^{h(i+1)}$, $\epsilon_i = 0$ ou 1.

Démonstration. On considère le morphisme canonique de $H\underline{\mathbb{F}}_{2*}$ -modules

$$\phi : H\underline{\mathbb{F}}_{2*} \{ \mathcal{B}_{(h,k)} \} \rightarrow \mathcal{A}_*/I(h, k).$$

On montre que (h, k) libre $\Rightarrow \phi$ est un isomorphisme de $H\underline{\mathbb{F}}_{2*}$ -modules.

Soit $x \in \text{Ker}(\phi)$, c'est-à-dire $x = \sum h_i b_i$ pour $h_i \in H\underline{\mathbb{F}}_{2*}$ et $b_i \in \mathcal{B}_{(h,k)}$ tel que $x \in I(h, k)$. Par conséquent, il existe des familles $x_i, y_i \in \mathcal{A}_*$ telles que

$$x = \sum_{i \geq 0} x_i \xi_i^{2^{h(i)}} + y_i \tau_i^{2^{k(i)}}.$$

Alors pour tout $i \geq 0$,

- chaque élément de la base monomiale apparaissant dans la décomposition de $x_i \xi_i^{2^{h(i)}}$ est dans $I(h, k)$ car $\xi_i^{2^{h(i)}} \in I(h, k)$,
- par le lemme 2.4.20, chaque élément de la base monomiale apparaissant dans la décomposition de $\tau_i^{2^{k(i)}}$ est dans $I(h, k)$, dont il en va de même pour les éléments dans la décomposition de $y_i \tau_i^{2^{k(i)}}$ dans la base monomiale.

In fine, on a écrit $x \in H\underline{\mathbb{F}}_{2*} \{ \mathcal{B}_{(h,k)} \} \cap H\underline{\mathbb{F}}_{2*} \{ \mathcal{B}\mathcal{M} \setminus \mathcal{B}_{(h,k)} \}$, d'où $x = 0$. \square

La proximité entre la proposition 2.4.17 et le résultat de [AM74] permet d'expliciter le lien entre les algèbres de Hopf quotients de \mathcal{A}_*^2 et une certaine famille d'algèbroïdes de Hopf quotients de \mathcal{A}_* .

On rappelle la notation 2.1.4 qui introduit la sous-algèbre $\mathcal{A}^*(n)$ de \mathcal{A}_*^2 .

Proposition 2.4.22. *On a un morphisme d'ensembles partiellement ordonnés*

$$\begin{aligned} \{ \text{algèbres de Hopf quotients de } \mathcal{A}_*^2 \} &\rightarrow \{ \text{algèbroïdes de Hopf quotients de } \mathcal{A}_* \} \\ \mathcal{A}_*^2/J(h) &\mapsto \mathcal{A}_*/I(h, 0) \end{aligned}$$

où l'ordre partiel provient des morphismes d'algèbroïdes de Hopf induits par l'inclusion des idéaux $J(h)$ et $I(h, 0)$ respectivement pour différentes valeurs de h .

Démonstration. Soit \mathcal{B}_* une algèbre de Hopf quotient de \mathcal{A}_*^2 . Par la proposition 2.4.16, on sait qu'il existe une unique application $h : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ vérifiant la condition de la proposition 2.4.16 telle que \mathcal{B}_* est isomorphe à $\mathcal{A}_*^2/J(h)$.

Considérons le couple $(h, 0)$. On voit déjà que, lorsque $k = 0$, la deuxième condition de la proposition 2.4.17 devient vide. La première condition est celle apparaissant dans la proposition 2.4.16, par conséquent $I(h, k)$ est un idéal d'algèbroïde de Hopf par 2.4.17. La flèche est bien définie. Le fait que cette application respecte la relation d'ordre est immédiat puisque $J(h) \subset J(h') \Rightarrow I(h, 0) \subset I(h', 0)$. \square

2.4. UNE FAMILLE D'ALGÈBROÏDES DE HOPF QUOTIENTS DE \mathcal{A}_* ET LEURS PROPRIÉTÉS

On a ainsi une certaine famille d'algèbroïdes quotients. En particulier, on a :

Définition 2.4.23. Soit $\widetilde{\mathcal{A}(n)}_* = \mathcal{A}_*/I(h_n, 0)$ pour $h_n = (n-1, n-2, n-3, \dots, 0, 0, \dots)$. On note $\widetilde{\mathcal{A}(n)}^* = \text{Hom}_{H\mathbb{F}_2}(\widetilde{\mathcal{A}(n)}_*, H\mathbb{F}_2)$.

Passons maintenant à l'étude de quelques autres algèbroïdes de Hopf quotients de \mathcal{A}_* qui auront un rôle à jouer plus tard.

Définition 2.4.24. Soit $\mathcal{E}(n)_* = \mathcal{A}_*/I(0, k_n)$ pour $k_n = (n, n-1, n-2, \dots, 0, 0, \dots)$. On note $\mathcal{E}(\infty)_*$ l'algèbre $\mathcal{A}_*/I(0, k)$ pour $k = (\infty, \infty, \infty, \dots)$.

Notation 2.4.25. Par abus de notation, on écrit $\Lambda_{H\mathbb{F}_2^*}$ le foncteur $H\mathbb{F}_2^* \otimes_{\mathbb{F}_2} \Lambda_{\mathbb{F}_2}$ des \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués dans les $H\mathbb{F}_2^*$ -modules $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués, où $\Lambda_{\mathbb{F}_2}$ désigne le foncteur algèbre extérieure sur le corps \mathbb{F}_2 .

Proposition 2.4.26. L'algèbre $\mathcal{E}(\infty)^*$ est $\Lambda_{H\mathbb{F}_2^*}(\beta_0, \dots, \beta_n, \dots)$, où le produit est induit par

- $\beta_i \beta_j = \beta_j \beta_i$ pour $n \geq i, j \geq 0$,
- les formules de Cartan pour l'anneau de coefficients.

L'algèbre $\mathcal{E}(n)^*$ s'identifie avec la sous-algèbre

$$\Lambda_{H\mathbb{F}_2^*}(\beta_0, \dots, \beta_n) \subset \Lambda_{H\mathbb{F}_2^*}(\beta_0, \dots, \beta_n, \dots).$$

Démonstration. La proposition 2.4.21 et le fait que les couples (h, k) définissant $\mathcal{E}(\infty)_*$ et $\mathcal{E}(n)_*$ sont libres au sens de la définition 2.4.19 impliquent que ces algèbres sont des $H\mathbb{F}_2^*$ -modules libres, ayant pour base les $\tau_0^{\epsilon_0}, \dots, \tau_n^{\epsilon_n}$, pour des éléments $\epsilon_i \in \{0, 1\}$ ($n = \infty$ pour $\mathcal{E}(\infty)_*$), d'où l'identification en tant que $H\mathbb{F}_2^*$ -modules. La loi d'algèbre sur $\mathcal{E}(n)^*$ et $\mathcal{E}(\infty)^*$ provient de la proposition 2.3.12. \square

Définition 2.4.27. On définit un algèbroïde de Hopf quotient de l'algèbroïde de Hopf de Steenrod dual comme dans 2.4.17 par les formules suivantes : $\mathcal{A}(n)_* = \mathcal{A}_*/I(h_n, k_n)$ pour $h_n = (n-1, n-2, n-3, \dots, 0, 0, \dots)$ et $k_n = (n, n-1, n-2, \dots, 0, 0, \dots)$.

Notation 2.4.28. Les sous-algèbres de Hopf de l'algèbre de Steenrod classique seront ici notées, comme dans [Pal01], avec un symbole $*$. On note ainsi les algèbres classiques $\mathcal{A}^*(n)$ engendré par les opérations Sq^i , $i \leq 2^n$ (le quotient de l'algèbre de Steenrod duale non-équivariante correspondant à $h = (n-1, n-2, n-3, \dots, 0, 0, \dots)$) et $\mathcal{E}^*(n)$ l'algèbre extérieure sur les n premières opérations de Milnor.

2.4.4 Coliberté pour les quotients de l'algèbre de Steenrod $\mathbb{Z}/2$ -équivariante

Dans cette sous-section, nous allons montrer comment les résultats sur les déformations d'algèbroïdes de Hopf s'appliquent à notre situation. Soient (H, A) l'algèbre de Hopf de Steenrod duale vue comme algèbroïde de Hopf, c'est-à-dire $H = \mathbb{F}_2$ et $A = H[\xi_i]$, avec les morphismes de structure décrits à la section 2.1.

Définition 2.4.29. Soit $(H_{\geq}, \mathcal{A}_{\geq})$ l'algèbroïde de Hopf

$$(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}], \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}][\tau_i, \xi_i + 1, i \geq 0]/\tau_i^2 = a\tau_{i+1} + \eta_R(\sigma^{-1})\xi_{i+1})$$

avec les mêmes formules pour les morphismes de structure que l'algèbre de Steenrod équivariante, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \Delta(\xi_n) &= \sum_{i=0}^n \xi_{n-i}^{\nu^i} \otimes \xi_i \\ \Delta(\tau_n) &= \sum_{i=0}^n \xi_{n-i}^{\nu^i} \otimes \tau_i + \tau_n \otimes 1 \end{aligned}$$

On rappelle la construction de l'extension des objets d'un groupoïde.

Définition 2.4.30. Soient \mathcal{O} l'ensemble des objets et \mathcal{M} l'ensemble des morphismes d'un petit groupoïde. On dit qu'un ensemble \mathcal{Y} au dessus de \mathcal{O} est muni d'une action à gauche de \mathcal{O}, \mathcal{M} s'il est muni d'une flèche

$$\psi : \mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$$

où \mathcal{M} est vu comme un ensemble au dessus de \mathcal{O} via la fonction *source* d'un morphisme. On demande que cette action soit compatible avec la projection, unitaire et associative.

Proposition 2.4.31. Soit \mathcal{Y} un ensemble muni d'une action à gauche d'un petit groupoïde $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$. Alors la structure suivante munit $(\mathcal{Y}, \mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{Y})$ d'une structure naturelle de groupoïde :

1. identité : $\mathcal{Y} = \mathcal{O} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{Y} \xrightarrow{e \times \mathcal{Y}} \mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{Y}$ où e est l'identité du groupoïde
2. source : $pr_{\mathcal{Y}}$
3. but : ψ
4. inverse : $c \text{ pr}_{\mathcal{M}} \times_{\mathcal{O}} \psi : \mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{Y}$ où c est l'inverse du groupoïde
5. composition : $\circ \times \mathcal{Y} : \mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{Y} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{Y}$.

Démonstration. Simple vérification des axiomes d'un groupoïde. □

Proposition 2.4.32. L'algèbre $H\mathbb{F}_{2\star}$ est un $(H_{\geq}, \mathcal{A}_{\geq})$ -comodule algèbre, via le morphisme de structure défini par l'unité à droite, c'est-à-dire la coaction $\psi(a) = a \otimes 1$ et $\psi(\sigma^{-1}) = \sigma^{-1} \otimes 1 + a \otimes \tau_0$, et $\psi(\sigma^2) = \sigma^2 \otimes 1$. Par conséquent, $H\mathbb{F}_{2\star} \otimes_{H_{\geq}} (H_{\geq}, \mathcal{A}_{\geq}) = (H\mathbb{F}_{2\star} \otimes_{H_{\geq}} H_{\geq}, H\mathbb{F}_{2\star} \otimes_{H_{\geq}} \mathcal{A}_{\geq})$ est naturellement muni d'une structure d'algèbroïde de Hopf.

Démonstration. On utilise le fait qu'un algèbroïde de Hopf est un objet en co-groupoïde dans la catégorie des algèbres, c'est-à-dire qu'il représente une paire de foncteurs de la catégorie des algèbres dans la catégorie des ensembles $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$, où pour toute algèbre A , $\mathcal{O}(A), \mathcal{M}(A)$ sont les objets et les morphismes d'un petit groupoïde, et le fait qu'un comodule algèbre représente un foncteur \mathcal{Y} muni d'une action naturelle du groupoïde $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$. La proposition est alors une conséquence de la construction naturelle. □

Proposition 2.4.33. L'algèbroïde de Hopf $(H_{\geq}, \mathcal{A}_{\geq})$ vérifie les deux propriétés suivantes :

1. C'est une déformation de l'algèbre de Steenrod classique, via l'idéal $\mathfrak{m} = (a, 1 - \sigma^{-1})$
2. L'algèbroïde de Hopf $(H\mathbb{F}_{2\star}, \mathcal{A}_{\star})$ est isomorphe à $H\mathbb{F}_{2\star} \otimes_{H_{\geq}} (H_{\geq}, \mathcal{A}_{\geq})$

Démonstration. Le premier point est clair, via les présentations des algèbres mises en jeu : sur les objets,

$$H_{\geq}/\mathfrak{m} = \mathbb{F}_2$$

et sur les morphismes, au niveau des générateurs de H_{\geq} -algèbre, l'isomorphisme vaut :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\geq}/\mathfrak{m} &\rightarrow \mathcal{A}_{\star} \\ \xi_i &\mapsto \xi_i^2 \\ \tau_i &\mapsto \xi_i \end{aligned}$$

Le deuxième point est une conséquence directe des définitions. □

On rappelle la notation 2.4.26. Le théorème 2.4.9 que nous venons d'établir permet de déduire des résultats précédents une proposition importante concernant la structure de l'algèbre de Steenrod duale $\mathbb{Z}/2$ -équivariante :

Proposition 2.4.34. Pour tout $n \geq 0$, l'algèbroïde de Hopf de Steenrod $(H\mathbb{F}_{2\star}, \mathcal{A}_{\star})$ est colibre en tant que comodule sur les quotients $\mathcal{E}(n)_{\star}$ et $\mathcal{A}_{\star}(n)$, avec les notations de 2.3.10 et 2.4.26.

Démonstration. La définition 2.4.27 et le fait que l'algèbre de Steenrod duale classique est colibre sur tous ses quotient par un idéal d'algèbroïde de Hopf impliquent que les hypothèses de la proposition 2.4.9 sont satisfaites, pour la perturbation de l'algèbre de Steenrod donnée à la proposition 2.4.33. Le résultat est donc une conséquence de la proposition 2.4.9. □

Corollaire 2.4.35. En particulier, la \mathbb{F}_2 -algèbre des opérations cohomologiques équivariantes $[H\mathbb{F}_2, H\mathbb{F}_2]$ est libre sur les sous-algèbres $\Lambda_{H\mathbb{F}_{2\star}}(\beta_1, \dots, \beta_n)$.

2.4. UNE FAMILLE D'ALGÈBROÏDES DE HOPF QUOTIENTS DE \mathcal{A}_* ET LEURS PROPRIÉTÉS

Chapitre 3

Le foncteur R

Le but de ce chapitre est d'étudier un foncteur reliant les modules sur l'algèbre de Steenrod équivariante aux modules sur son analogue classique.

3.1 Le foncteur de comparaison

On a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{SH} & \xrightarrow{(-)^{triv}} & \mathbb{Z}/2\mathcal{SH} \\ \downarrow H\mathbb{F}_2^* & & \downarrow H\mathbb{F}_2^* \\ \mathcal{A}^* - mod & & \mathcal{A}^* - mod \end{array}$$

où $(-)^{triv}$ est le foncteur *action triviale* défini en 1.1.2. Le but de cette sous-section est de montrer l'existence et d'identifier un foncteur

$$R : \mathcal{A}^* - mod \rightarrow \mathcal{A}^* - mod$$

qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{SH} & \xrightarrow{(-)^{triv}} & \mathbb{Z}/2\mathcal{SH} \\ \downarrow H\mathbb{F}_2^* & & \downarrow H\mathbb{F}_2^* \\ \mathcal{A}^* - mod & \xrightarrow{R} & \mathcal{A}^* - mod \end{array}$$

à isomorphisme naturel près, puis de comprendre le comportement du foncteur R par rapport aux restrictions $\mathcal{A}^* - mod \rightarrow \mathcal{B}^* - mod$ et $\mathcal{A}^* - mod \rightarrow \mathcal{B}^* - mod$ pour \mathcal{B}^* (resp. \mathcal{B}^*) certaines sous-algèbres de \mathcal{A}^* (resp. \mathcal{A}^*).

Par la proposition 1.2.17, l'anneau $H\mathbb{F}_2^*$ est de dimension au plus 1 sur \mathbb{F}_2 en chaque degré. Ainsi, il existe une unique base homogène de $H\mathbb{F}_2^*$.

Définition 3.1.1. On note $\mathcal{H} = \{h_\star\}$ la base homogène de $H\mathbb{F}_2^*$, avec $|h_\star| = \star$. Ainsi, on à l'identification $h_{-n+(n+k)\alpha} = a^k \sigma^{-n} \in H\mathbb{F}_2^*$ pour $n, k \geq 0$ ou bien $n \leq -2$ et $k \leq 0$.

Remarque 3.1.2. Dans toute cette section, un fait central est que $H\mathbb{F}_2^*$ est de type fini (voir la proposition 1.2.17), et que $H\mathbb{F}_2^{*+k\alpha}$ est de dimension totale finie pour tout k . Ainsi, pour M un \mathbb{F}_2 -espace vectoriel $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué concentré en degrés entiers, le produit tensoriel $H\mathbb{F}_2^* \otimes M \cong H\mathbb{F}_2^* \hat{\otimes} M$, où $\hat{\otimes}$ désigne le produit tensoriel complété, et les sommes indexées sur $H\mathbb{F}_2^{*+k\alpha}$ ou sur une base de cet espace vectoriel sont toutes des sommes finies.

Voici un résultat clé, utilisé de manière répétée dans toute cette section.

3.1. LE FONCTEUR DE COMPARAISON

Lemme 3.1.3. Soit $V \in RO(\mathbb{Z}/2)$. On a un isomorphisme de $H\mathbb{F}_2$ -modules

$$(\Sigma^V H\mathbb{F}_2)^{\mathbb{Z}/2} \cong \bigvee_{h_{V-n} \in \mathcal{H}, \text{ pour } n \in \mathbb{Z}} \Sigma^n H\mathbb{F}_2.$$

Démonstration. Les points fixes de $H\mathbb{F}_2$ par rapport à l'action du groupe $\mathbb{Z}/2$ sont $H\mathbb{F}_2^{\mathbb{Z}/2} = H\mathbb{F}_2$. La définition 1.4.3 munit donc $(\Sigma^V H\mathbb{F}_2)^{\mathbb{Z}/2}$ d'une structure de $H\mathbb{F}_2$ -module.

De plus, par définition de la base \mathcal{H} (définition 3.1.1), on a l'identification

$$\pi_{-n}((\Sigma^V H\mathbb{F}_2)^{\mathbb{Z}/2}) \cong \mathbb{F}_2\{h_{V-n}\}.$$

Par un argument similaire à celui de la proposition 2.2.24, les classes $h_{\star-n} : S^n \rightarrow \Sigma^\star H\mathbb{F}_2$ définissent un morphisme de $\mathbb{Z}/2$ -spectres

$$\bigvee_{h_{\star-n} \in \mathcal{H}, \text{ pour } n \in \mathbb{Z}} S^n \rightarrow \Sigma^\star H\mathbb{F}_2$$

dont le morphisme adjoint par l'adjonction $(-)^{triv} \dashv (-)^{\mathbb{Z}/2}$ fournie par la proposition 1.1.34 est un isomorphisme de $H\mathbb{F}_2$ -modules

$$\bigvee_{h_{\star-n} \in \mathcal{H}, \text{ pour } n \in \mathbb{Z}} \Sigma^n H\mathbb{F}_2 \cong (\Sigma^\star H\mathbb{F}_2)^{\mathbb{Z}/2}.$$

□

Afin d'identifier R , il est d'abord nécessaire de comprendre la théorie de cohomologie $X \mapsto H\mathbb{F}_2^\star(X^{triv})$, pour $X \in \mathcal{SH}$. Cette théorie de cohomologie est naturellement à valeurs dans la catégorie des $H\mathbb{F}_2^\star$ -modules.

Lemme 3.1.4. Le diagramme suivant est commutatif à isomorphisme naturel près :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{SH} & \xrightarrow{(-)^{triv}} & \mathbb{Z}/2 - \mathcal{SH} & \xrightarrow{H\mathbb{F}_2^\star} & \mathcal{A}^\star - mod \\ H\mathbb{F}_2^\star \downarrow & & & & \downarrow \text{oubli} \\ \mathcal{A}^\star - mod & \xrightarrow{\text{oubli}} & \mathbb{F}_2 - e.v. & \xrightarrow{H\mathbb{F}_2^\star \otimes} & H\mathbb{F}_2^\star - mod \end{array}$$

où le produit tensoriel est pris au dessus de \mathbb{F}_2 .

En particulier, pour tout spectre non-équivariant X , le sous- \mathbb{F}_2 -espace vectoriel de $H\mathbb{F}_2^\star(X^{triv})$ engendré par les éléments en degrés entiers est naturellement isomorphe à $H\mathbb{F}_2^\star(X)$.

Démonstration. L'adjonction $(-)^{triv} \dashv (-)^{\mathbb{Z}/2}$ de la proposition 1.1.34 donne $[(-)^{triv}, \Sigma^\star H\mathbb{F}_2]^{\mathbb{Z}/2} = [-, (\Sigma^\star H\mathbb{F}_2)^{\mathbb{Z}/2}]$.

Par l'isomorphisme de $H\mathbb{F}_2$ -modules du lemme 3.1.3, on a bien

$$H\mathbb{F}_2^\star(X^{triv}) \cong \bigoplus_{V \in RO(\mathbb{Z}/2) | h_V \neq 0} \Sigma^V H\mathbb{F}_2^\star(X)$$

en considérant $H\mathbb{F}_2^\star(X)$ comme un \mathbb{F}_2 -espace vectoriel $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué concentré en degrés entiers.

Enfin, cet isomorphisme est un morphisme de $H\mathbb{F}_2^\star$ -modules, par définition de la structure de $H\mathbb{F}_2^\star$ -module sur $H\mathbb{F}_2^\star(X)$, et par construction des isomorphismes $(\Sigma^\star H\mathbb{F}_2)^{\mathbb{Z}/2} \cong \bigvee_{n \in \mathbb{Z} | h_{\star-n} \neq 0 \in H\mathbb{F}_2^{\star-n}} \Sigma^n H\mathbb{F}_2$. □

Exemple 3.1.5. Appliquons le résultat précédent au spectre d'Eilenberg-MacLane $H\mathbb{F}_2$. On obtient une identification $H\mathbb{F}_2^\star(H\mathbb{F}_2) \cong H\mathbb{F}_2^\star \otimes \mathcal{A}_2^\star$.

Définition 3.1.6. On note

$$\psi : \mathcal{A}^* \rightarrow H\underline{\mathbb{F}}_2^* \otimes \mathcal{A}_2^*$$

le morphisme de $H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ -modules induit en $H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ -cohomologie par le morphisme de $\mathbb{Z}/2$ -spectres $H\underline{\mathbb{F}}_2^{triv} \rightarrow H\underline{\mathbb{F}}_2$ adjoint à $H\underline{\mathbb{F}}_2 = H\underline{\mathbb{F}}_2^{\mathbb{Z}/2}$ par l'adjonction de la proposition 1.1.34, avec l'identification fournie par l'exemple 3.1.5.

On rappelle la notation $|\cdot|$ pour le degré d'un élément introduite à la définition 1.1.13.

Lemme 3.1.7. *Le morphisme $\psi : \mathcal{A}^* \rightarrow H\underline{\mathbb{F}}_2^* \otimes_{\mathbb{F}_2} \mathcal{A}_2^*$ s'identifie avec le morphisme de \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués : $\psi(\lambda) = \sum_{h \in H\underline{\mathbb{F}}_2^{n+|\lambda|}} h \otimes \tilde{\psi}(\lambda, h)$ où $\tilde{\psi}(\lambda, h)$ est la classe d'homotopie du morphisme :*

$$H\underline{\mathbb{F}}_2 = H\underline{\mathbb{F}}_2^{\mathbb{Z}/2} \xrightarrow{\lambda^{\mathbb{Z}/2}} (\Sigma^{|\lambda|} H\underline{\mathbb{F}}_2)^{\mathbb{Z}/2} \cong \bigvee_{h_* \in H\underline{\mathbb{F}}_2^{*-|\lambda|}} \Sigma^* H\underline{\mathbb{F}}_2 \rightarrow \Sigma^n H\underline{\mathbb{F}}_2$$

où la dernière flèche est la projection sur le facteur du coproduit correspondant à la classe h .

Démonstration. Ce lemme est une formulation explicite de l'isomorphisme de la proposition 3.1.4 dans le cas particulier du spectre $H\underline{\mathbb{F}}_2$. L'identification de $(\Sigma^{|\lambda|} H\underline{\mathbb{F}}_2)^{\mathbb{Z}/2}$ est donnée au lemme 3.1.3. \square

Remarque 3.1.8. – Le morphisme ψ est relié au morphisme Ω étudié par Caruso [Car99, p.522]. Le morphisme qu'il étudie est plutôt la composée $(\epsilon \otimes id) \circ \psi$ où $\epsilon : H\underline{\mathbb{F}}_2^* \rightarrow \mathbb{F}_2$ est l'augmentation.

- En vertu de la remarque 3.1.2, la somme $\sum_{h \in H\underline{\mathbb{F}}_2^{n+|\lambda|}} h \otimes \tilde{\psi}(\lambda, h)$ ne fait apparaître qu'un nombre fini d'opérations de \mathcal{A}_2^* . En particulier, pour $\lambda \in \mathcal{A}^*$ fixée, $\psi(\lambda)$ factorise à travers $H\underline{\mathbb{F}}_2^* \otimes \mathcal{A}^*(n)$, pour n assez grand. Cette remarque a des conséquences essentielles pour nous, exploitées dans la proposition 3.1.14.

On rappelle la proposition 2.3.16 qui donne les formules de Cartan.

Proposition 3.1.9. *Soit X un spectre non-équivariant. Alors le \mathcal{A}^* -module $H\underline{\mathbb{F}}_2^*(X^{triv})$ est l'unique \mathcal{A}^* -module vérifiant :*

1. le morphisme de $H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ -modules $H\underline{\mathbb{F}}_2^* \otimes H\underline{\mathbb{F}}_2^*(X) \rightarrow H\underline{\mathbb{F}}_2^*(X^{triv})$ induit par $H\underline{\mathbb{F}}_2^*(X) \rightarrow H\underline{\mathbb{F}}_2^*(X^{triv})$ est un isomorphisme,
2. sur les éléments de degré entiers $x \in H\underline{\mathbb{F}}_2^*(X) \subset H\underline{\mathbb{F}}_2^*(X^{triv})$, pour tout $\lambda \in \mathcal{A}^*$, $\lambda(x) = \psi(\lambda)x$ avec l'action de $H\underline{\mathbb{F}}_2^* \otimes \mathcal{A}_2^*$ sur $H\underline{\mathbb{F}}_2^* \otimes H\underline{\mathbb{F}}_2^*(X)$ induite par la structure d'anneau de $H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ et l'action de \mathcal{A}_2^* sur $H\underline{\mathbb{F}}_2^*(X)$,
3. et les formules de Cartan pour les produits de la forme hx , $h \in H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ et $x \in H\underline{\mathbb{F}}_2^*(X)$.

Démonstration. Commençons par montrer que $H\underline{\mathbb{F}}_2^*(X^{triv})$ vérifie bien les trois points énoncés :

1. le premier point est exactement l'assertion du lemme 3.1.4
2. Par construction, l'action d'une opération $\lambda : H\underline{\mathbb{F}}_2 \rightarrow \Sigma^* H\underline{\mathbb{F}}_2$ sur $H\underline{\mathbb{F}}_2^*(X) = [\Sigma^{-*} X^{triv}, H\underline{\mathbb{F}}_2]$ est induite par la composition. L'adjonction de 1.1.34 implique que, via l'isomorphisme du lemme 3.1.4, λ agit via $\lambda^{\mathbb{Z}/2} : H\underline{\mathbb{F}}_2 \rightarrow (\Sigma^* H\underline{\mathbb{F}}_2)^{\mathbb{Z}/2}$ sur $H\underline{\mathbb{F}}_2^*(X^{triv}) \cong H\underline{\mathbb{F}}_2^*(X)$. On conclut par le lemme 3.1.7.
3. le dernier point est un fait général sur la cohomologie des $\mathbb{Z}/2$ -spectres, et est l'énoncé de la proposition 2.3.16.

L'unicité est claire puisque les formules de Cartan imposent l'action de \mathcal{A}^* sur n'importe quel élément de $H\underline{\mathbb{F}}_2^* \otimes H\underline{\mathbb{F}}_2^*(X)$. \square

Le candidat naturel pour le foncteur R est donc le suivant :

Définition 3.1.10. Soit

$$R : \mathcal{A}_2^* - Mod \rightarrow \mathcal{A}^* - Mod$$

l'unique foncteur vérifiant :

1. il existe un isomorphisme naturel de $H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ -modules $R \cong H\underline{\mathbb{F}}_2^* \otimes (-)$,
2. pour $m \in M \in \mathcal{A}_2^* - Mod$, pour tout $\lambda \in \mathcal{A}^*$, $\lambda(m) = \psi(\lambda)m$ avec l'action de $H\underline{\mathbb{F}}_2^* \otimes \mathcal{A}_2^*$ sur $H\underline{\mathbb{F}}_2^* \otimes M$ induite par la structure d'anneau de $H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ et l'action de \mathcal{A}_2^* sur $H\underline{\mathbb{F}}_2^*(X)$,

3.1. LE FONCTEUR DE COMPARAISON

3. les formules de Cartan sont vérifiées pour les produits de la forme hm , $h \in H\mathbb{F}_2^*$ et $m \in M$.

Justification 3.1.11. S'il existe, le foncteur R est unique. Pour l'existence, il suffit de vérifier que les formules munissent bien RM d'une structure de \mathcal{A}^* -module, pour tout $M \in \mathcal{A}_2^* - Mod$. C'est-à-dire pour tous $\lambda, \kappa \in \mathcal{A}^*$, $m \in M$ et $h \in H\mathbb{F}_2^*$, $\lambda(\kappa(hm)) = (\lambda\kappa)(hm)$.

Pour $M = \mathcal{A}_2^*$, on sait déjà que les propriétés énoncées définissent bien une structure de \mathcal{A}^* -module sur $R(M)$, puisque $M = H\mathbb{F}_2^*(H\mathbb{F}_2)$, et donc $R(M) = H\mathbb{F}_2^*(H\mathbb{F}_2^{triv})$. Par conséquent, pour $m = 1$, on sait que pour tout $h \in H\mathbb{F}_2^*$, $\lambda(\kappa(h)) = (\lambda\kappa)(h)$. Par conséquent la relation générale $\lambda(\kappa(hm)) = (\lambda\kappa)(hm)$ est une conséquence des relations d'Adem dans \mathcal{A}_2^* .

Proposition 3.1.12. *Le foncteur R est additif et exact.*

Démonstration. Au niveau des $\mathbb{Z}/2$ -espaces vectoriels sous-jacents, le foncteur R coïncide avec $H\mathbb{F}_2^* \otimes (-)$ en vertu de la proposition 3.1.9. Il est donc additif et exact. \square

Corollaire 3.1.13. 1. *Le foncteur $Triv := H\mathbb{F}_2^*((-)^{triv})$ factorise de la façon suivante :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{SH}^{op} & \xrightarrow{Triv} & \mathcal{A}^* - mod, \\ H\mathbb{F}_2^* \downarrow & \nearrow R & \\ \mathcal{A}^* - mod & & \end{array}$$

2. *Pour un \mathcal{A}^* -module M concentré en degrés ≥ 0 , RM est nul en degrés $k + l\alpha$,*
- *si $l = -1$,*
 - *si $k < -l \leq 0$,*
 - *et si $k \leq -1$ et $l < 0$.*

Les zones d'annulation sont les zones blanches dans la figure 3.1

Démonstration. La première assertion est une conséquence directe de la proposition 3.1.9.

Les zones d'annulations sont une conséquence de la proposition 3.1.9, point 1, et du calcul de l'anneau de coefficients 1.1. \square

Passons maintenant à l'étude de la relation entre le foncteur R et les foncteurs de restriction aux sous-algèbres de \mathcal{A}^* et \mathcal{A}_2^* . On rappelle la construction des idéaux $I(h, k)$, pour un couple d'applications (h, k) faite à la définition 2.4.11.

Proposition 3.1.14. - *Soit \mathcal{X} une sous-algèbre de \mathcal{A}^* associée à un idéal $I(h, k)$ pour (h, k) un certain couple libre. Supposons de plus qu'il existe des générateurs x_i de \mathcal{X}^* en tant qu'algèbre et $n \geq 0$ tel que pour tout i , $\dim(|x_i|) \leq 2^{n+1} - 1$. Alors, il existe des foncteurs $R_{n, \mathcal{X}}$ tels que le diagramme suivant commute à isomorphisme naturel près :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_2^* - mod & \xrightarrow{R} & \mathcal{A}^* - mod \\ res \downarrow & & \downarrow res \\ \mathcal{A}(n)^* - mod & \xrightarrow{R_{n, \mathcal{X}}} & \mathcal{X}^* - mod. \end{array}$$

- *En particulier, il existe des foncteurs R_n tels que chaque composée de R avec une restriction des scalaires $\mathcal{A}^* - Mod \rightarrow \mathcal{E}(n)^* - Mod$ factorise :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_2^* - mod & \xrightarrow{R} & \mathcal{A}^* - mod \\ res \downarrow & & \downarrow res \\ \mathcal{A}(n)^* - mod & \xrightarrow{R_n} & \mathcal{E}(n)^* - mod, \end{array}$$

où $\mathcal{E}(n)^*$ est la sous-algèbre de \mathcal{A}^* donnée par $\Lambda_{H\mathbb{F}_2^*}(\tau_0, \dots, \tau_n)$.

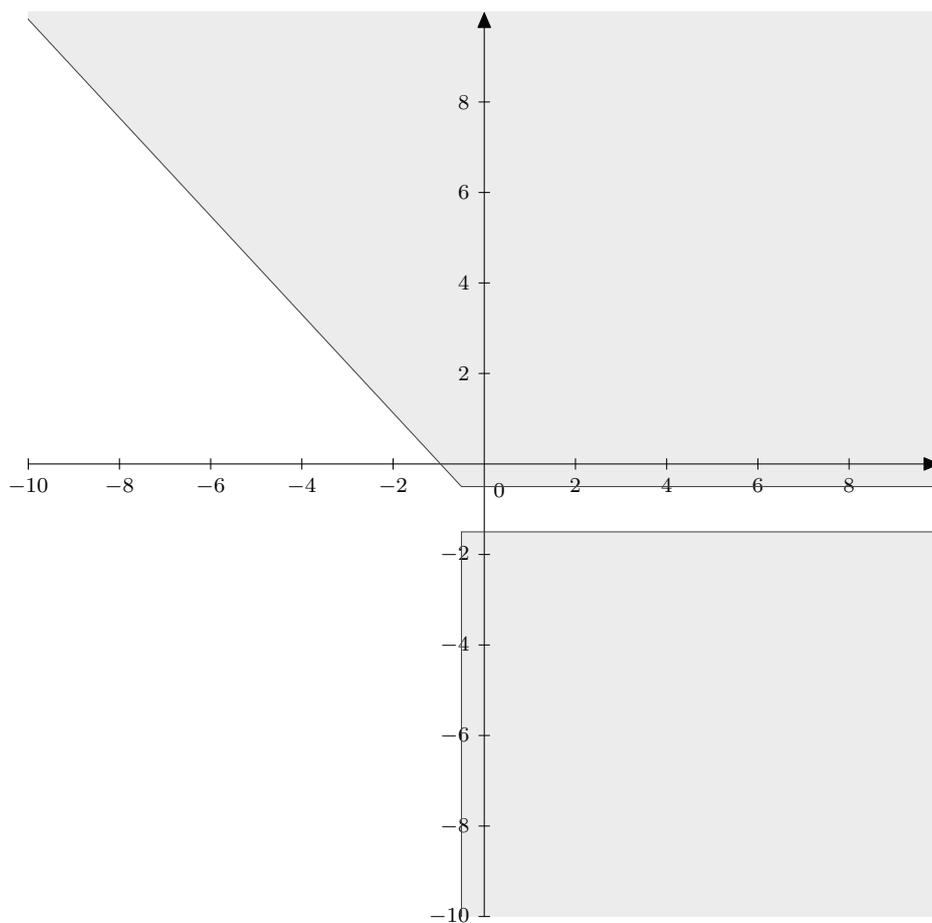


FIGURE 3.1 – zones d’annulation pour RM , où M est un \mathcal{A}^* -module connexe.

3.2. UNE ÉTUDE DIRECTE DU FONCTEUR R_1

Démonstration. Montrons le premier point. Soit $n \geq 0$, il faut considérer la composée

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_2^* - mod & \xrightarrow{R} & \mathcal{A}^* - mod \\ & & \downarrow \text{res} \\ & & \mathcal{X}^* - Mod. \end{array}$$

Il s'agit de préciser l'entier n qui apparaît dans le deuxième point de la remarque 3.1.8.

Soit $x \in \mathcal{X}^*$ un générateur de \mathcal{X}^* , disons en degré $m + m'\alpha$. Par hypothèse, $m + m' \leq 2^{n+1} - 1$. Dans l'anneau de cohomologie du point, dans la ligne $(* + m'\alpha)$ il y a un nombre fini de classes non triviales, toutes en degrés $-m' \leq * \leq 0$, donc les opérations cohomologiques classiques intervenant dans $\psi(x)$ sont en degrés $d = m - j$, pour $-m' \leq j \leq 0$ par le lemme 3.1.7. Par hypothèse, elles sont concentrées en degrés $0 \leq d \leq m + m' \leq 2^{n+1} - 1$, et donc appartiennent à $\mathcal{A}^*(n)$ puisque le plus petit élément indécomposable de \mathcal{A}_2^* qui n'est pas dans $\mathcal{A}^*(n)$ est $Sq^{2^{n+1}}$ en degré 2^{n+1} .

Le second point est une application du premier, en vertu de la proposition 2.4.26. \square

Corollaire 3.1.15. *Pour tout $n \geq 0$, le foncteur R_n est additif et exact.*

Démonstration. Au niveau des $\mathbb{Z}/2$ -espaces vectoriels sous-jacents, le foncteur R_n coïncide avec R , et est donc naturellement isomorphe à $H\mathbb{F}_2^* \otimes (-)$ par la proposition 3.1.9. Il est donc additif et exact. \square

Corollaire 3.1.16. *Pour tous $n \geq m \geq 0$, le diagramme suivant est commutatif à isomorphisme naturel près :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_2^* - mod & \xrightarrow{R} & \mathcal{A}^* - mod \\ \text{res} \downarrow & & \downarrow \text{res} \\ \mathcal{A}^*(n) - mod & \xrightarrow{R_n} & \mathcal{E}^*(n) - mod \\ \text{res} \downarrow & & \downarrow \text{res} \\ \mathcal{A}^*(m) - mod & \xrightarrow{R_m} & \mathcal{E}^*(m) - mod. \end{array}$$

Démonstration. Les foncteurs R_n et R_m rentrent dans un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^*(n) - mod & \xrightarrow{R_n} & \mathcal{E}^*(n) - mod \\ \text{res} \downarrow & & \downarrow \text{res} \\ \mathcal{A}^*(m) - mod & \xrightarrow{R_m} & \mathcal{E}^*(m) - mod. \end{array}$$

Il suffit de montrer que ce diagramme commute à isomorphisme naturel près. La proposition 3.1.14 montre que le grand rectangle et le carré du haut sont commutatifs. De plus, les foncteurs de restriction sont essentiellement surjectifs. Le résultat suit. \square

3.2 Une étude directe du foncteur R_1

Dans cette section, on s'intéresse au foncteur R_1 introduit à la proposition 3.1.14. Une motivation de cette étude est que certaines théories de cohomologie dans les $\mathcal{E}^*(1)$ -modules apparaissent naturellement lors de l'étude de la K -théorie réelle d'Atiyah (chapitre 5).

3.2.1 Caractérisation de R_1

Désormais, notons simplement R le foncteur R_1 de la proposition 3.1.14, c'est-à-dire le foncteur

$$R : \mathcal{A}(1) - \text{mod} \rightarrow \mathcal{E}(1)^* - \text{mod}.$$

La définition 3.1.10 et la proposition 3.1.14 impliquent que, pour comprendre R_1 , il suffit de déterminer $\psi(\beta_0)$ et $\psi(\beta_1)$. C'est le premier objectif de cette sous-section.

Le résultat principal de cette section est la proposition 3.2.3, qui caractérise le foncteur R . On rappelle les formules de Cartan pour β_0 et β_1 , données à la proposition 2.3.16.

Tout d'abord, rappelons les propriétés des espaces classifiants $B\mathbb{Z}/2$ et $B'\mathbb{Z}/2$ (définis en 1.1.23) données à la proposition 1.1.24. La cohomologie de $B'\mathbb{Z}/2$ ainsi que l'action de l'algèbre de Steenrod équivariante ont été établies proposition 2.3.1.

L'inclusion $i : B\mathbb{Z}/2 \subset B'\mathbb{Z}/2$ de la proposition proposition 1.1.24 donne un morphisme de \mathcal{A}^* -modules

$$H\underline{\mathbb{F}}_2^*(B'\mathbb{Z}/2) \rightarrow H\underline{\mathbb{F}}_2^*(B\mathbb{Z}/2).$$

La $H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ -algèbre $H\underline{\mathbb{F}}_2^*(B'\mathbb{Z}/2)$ est connue par 3.1.4.

Lemme 3.2.1. *Le morphisme de $\mathbb{Z}/2$ -spectres $i : B\mathbb{Z}/2 \rightarrow B'\mathbb{Z}/2$ induit en cohomologie le morphisme de \mathcal{A}^* -modules et d'algèbres*

$$\begin{array}{ccc} H\underline{\mathbb{F}}_2^*[b, c]/(c^2 = ac + \sigma^{-1}b) & \xrightarrow{\iota} & H\underline{\mathbb{F}}_2^*[x] \\ c & \mapsto & \sigma^{-1}x \\ b & \mapsto & \sigma^{-1}x^2 + ax \end{array}$$

où $|x| = 1$. De plus, la structure de $\Lambda_{H\underline{\mathbb{F}}_2^*}(\beta_0, \beta_1)$ -module sur $H\underline{\mathbb{F}}_2^*[x]$ vérifie en particulier $\beta_0(x) = x^2$, $\beta_0(x^2) = 0$, et

$$\begin{aligned} \beta_1(x) &= \sigma^{-1}x^4 \\ \beta_1(x^2) &= ax^4 \\ \beta_1(x^3) &= \sigma^{-1}x^6 + ax^5 \\ \beta_1(x^4) &= 0. \end{aligned}$$

Démonstration. Notons ι cette flèche. Pour des raisons de degré, il existe $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon'_1$ et ϵ'_2 dans \mathbb{F}_2 tels que

$$\begin{aligned} \iota c &= \epsilon_1 a + \epsilon_2 \sigma^{-1}x \\ \iota b &= \epsilon'_1 ax + \epsilon'_2 \sigma^{-1}x^2. \end{aligned}$$

Le morphisme ι est une équivalence faible par la proposition 1.1.24, par conséquent $\rho(\iota) : \mathbb{F}_2[x, \sigma^{\pm 1}] \cong \mathbb{F}_2[x, \sigma^{\pm 1}]$, où ρ est la restriction des foncteurs de Mackey en question. Mais $\rho(a) = 0$, donc $\iota(c) \neq 0$ et $\iota(b) \neq 0$ impliquent $\epsilon_2 = \epsilon'_2 = 1$.

On sait par 2.3.1 que $\beta_0(c) = \tau_0^*(c) = b$, comme ι est un morphisme de \mathcal{A}^* -modules,

$$\begin{aligned} \epsilon'_1 ax + \sigma^{-1}x^2 &= \iota(b) \\ &= \iota(\beta_0(c)) \\ &= \beta_0 \iota(c) \\ &= \beta_0(\epsilon_1 a + \sigma^{-1}x) \\ &= 0 + ax + \sigma^{-1}\beta_0(x) \end{aligned}$$

d'où $\epsilon'_1 = 1$ et $\beta_0(x) = x^2$. Quitte à changer de $H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ -base et à remplacer c par $c + a$, on peut se ramener au cas où $\epsilon_1 = 0$. La formule de Cartan implique que

$$\begin{aligned} \beta_1(\iota(c)) &= \beta_1(\sigma^{-1}x) \\ &= \beta_1(\sigma^{-1}x) + a\beta_0(\sigma^{-1})\beta_0(x) + \sigma^{-1}\beta_1(x) \\ &= a^2x^2 + \sigma^{-1}\beta_1(x) \end{aligned}$$

3.2. UNE ÉTUDE DIRECTE DU FONCTEUR R_1

mais $\iota\beta_1(c) = \iota(b^2) = \iota(b)^2 = a^2x^2 + \sigma^{-2}x^4$, d'où $\beta_1(x) = \sigma^{-1}x^4$.

Maintenant qu'on a déterminé les coefficients $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon'_1$ et ϵ'_2 , montrons le résultat concernant l'action de β_0 sur $H\mathbb{F}_2^*(B\mathbb{Z}/2)$. Le \mathbb{F}_2 -espace vectoriel $H\mathbb{F}_2^{*+0\alpha}$ est de dimension 1, concentré en degré 0. Mais on vient de montrer que $\beta_0(x) = x^2$, en particulier $\psi(\beta_0) \neq 0$, donc $\psi(\beta_0) = Sq^1$, l'unique opération de \mathcal{A}_2^1 . Le résultat suit.

Pour l'avant dernière égalité, la formule de Cartan implique que

$$\beta_1(\iota(c^2)) = \sigma^{-2}\beta_1(x^2) + a^2\beta_0(x^2) + a^3x^2,$$

mais $\beta_0(x^2) = Sq^1(x^2) = 0$ et, comme

$$\beta_1(c^2) = \beta_1(ac + \sigma^{-1}b) = ab^2$$

par les formules de Cartan, d'où

$$a^3x^2 + a\sigma^{-2}x^4 = a(ax + \sigma^{-1}x^2)^2 = \iota(ab^2) = \beta_1(\iota(c^2)).$$

Par conséquent $\beta_1(x^2) = ax^4$.

L'identification $\beta_1(x^3) = \sigma^{-1}x^6 + ax^5$ découle de manière analogue de $\beta_1(cb) = b^3$. La dernière égalité vient de la même manière de la formule $\beta_1(c^4) = 0$. \square

Le lemme 3.2.1 permet de déterminer les éléments $\psi(\beta_0)$ et $\psi(\beta_1)$:

Lemme 3.2.2. $\psi(\beta_0) = Sq^1$, et $\psi(\beta_1) = aSq^2 + \sigma^{-1}Sq^2Sq^1 + \sigma^{-1}Sq^1Sq^2 = aSq^2 + \sigma^{-1}Q_1$ ou Q_1 désigne l'opération de Milnor $Q_1 = [Sq^2, Sq^1]$.

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{A}^* - Mod$ et $m \in M \subset RM$, où la dernière inclusion est l'inclusion du sous-espace vectoriel des éléments en degrés entiers.

Le calcul de $\psi(\beta_0)$ est déjà fait dans la démonstration du lemme 3.2.1. On sait déjà que

$$\beta_1 = \epsilon_2aSq^2m + \epsilon_3\sigma^{-1}Sq^1Sq^2m + \epsilon_4\sigma^{-1}Sq^2Sq^1m$$

pour certains $\epsilon_k \in \mathbb{F}_2$.

- $\beta_1(x) = \sigma^{-1}x^4$ implique que $\epsilon_4 = 1$,
- et $\beta_1(x^3) = \sigma^{-1}x^6 + ax^5$ donne $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$.

\square

Le résultat suivant donne explicitement une expression pour le foncteur R , et en particulier les formules pour l'action de β_0 et β_1 .

Théorème 3.2.3. *Le foncteur R est déterminé par les formules suivantes :*

1. En tant que $H\mathbb{F}_2^*$ -module, $R(-) = H\mathbb{F}_2^* \otimes (-)$,
2. Pour $h \in H\mathbb{F}_2^*$ et $m \in M \in \mathcal{A}^* - Mod$, l'action de β_0 et β_1 sur $hm \in RM$ est donnée par

$$\beta_0(hm) = \beta_0(h)m + hQ_0(m)$$

et

$$\beta_1(hm) = \beta_1(h)m + a\beta_0(h)Q_0(m) + h(\sigma^{-1}Q_1(m) + aSq^2(m)).$$

Démonstration. La définition 3.1.10 et la proposition 3.1.14 impliquent que R est caractérisé par les trois points suivants :

1. il existe un isomorphisme naturel de $H\mathbb{F}_2^*$ -modules $R \cong H\mathbb{F}_2^* \otimes (-)$,
2. pour $m \in M \in \mathcal{A}_2^* - Mod$, pour tout $\lambda \in \mathcal{E}^*(1)$, $\lambda(m) = \psi(\lambda)m$ avec l'action de $H\mathbb{F}_2^* \otimes \mathcal{A}_2^*$ sur $H\mathbb{F}_2^* \otimes M$ induite par la structure d'anneau de $H\mathbb{F}_2^*$ et l'action de \mathcal{A}_2^* sur M ,
3. les formules de Cartan sont vérifiées pour les produits de la forme hm , $h \in H\mathbb{F}_2^*$ et $m \in M$.

Le premier point est une conséquence directe du premier point de la proposition 3.1.9, les deux suivants sont équivalents à la caractérisation de l'action de β_0 et β_1 sur tous les éléments de RM par les formules du second point, vu le calcul de $\psi(\beta_0)$ et $\psi(\beta_1)$ fait au lemme 3.2.2 et de l'action de β_0 et β_1 sur l'anneau de coefficients, donné au corollaire 2.3.17. \square

3.2.2 Le foncteur R et la cohomologie de Margolis

Poursuivons l'étude du foncteur R par l'étude des cohomologies de Margolis dans $\mathcal{A}^*(1) - Mod$ et $\mathcal{E}^*(1) - Mod$.

On rappelle que, par la proposition 2.3.12, les opérations β_i commutent entre elles pour différentes valeurs de i , et que $\beta_i^2 = 0$.

Définition 3.2.4. Soit H_i^* , pour $i \in \{0, 1\}$ le foncteur d'homologie de Margolis par rapport à β_i :

$$H^*(-; \beta_i) : \mathcal{E}^*(1) - Mod \rightarrow \mathbb{F}_2[\sigma^{-2^{i+1}}, a] - Mod$$

c'est-à-dire $Ker(\beta_i)/Im(\beta_i)$.

Justification 3.2.5. Le foncteur prend bien ses valeurs dans la catégorie des $\mathbb{F}_2[\sigma^{-2^{i+1}}]$ -modules car $\beta_0(\sigma^{-2}) = 0$ et $\beta_1(\sigma^{-4}) = \beta_0(\sigma^{-4}) = 0$. Pour finir, la classe d'Euler $a \in Ker(\beta_0) \cap Ker(\beta_1)$.

Lemme 3.2.6. Si $M \in \mathcal{E}^*(1) - Mod$ est libre, alors $H_i^*(M) = 0$ pour $i = 0$ et $i = 1$.

Démonstration. Choisissons une base $\{b_j, j \in J\}$ de M en tant que $\mathcal{E}^*(1)$ -module. Les foncteurs $Ker(\beta_i)$ et $Im(\beta_i)$ sont additifs, donc $H_i^*(M) = H_i^*(\mathcal{E}^*(1))\{b_j\}$. Mais par la proposition 2.4.26, le $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1)$ -module $\mathcal{E}^*(1)$ est libre pour $i = 0$ et $i = 1$. \square

Proposition 3.2.7. On a un isomorphisme de $\mathbb{F}_2[\sigma^{-2}]$ -modules

$$H_0^*(H\underline{\mathbb{F}}_2^*) \cong \mathbb{F}_2[\sigma^{\pm 2}].$$

Soit $\Theta = \mathbb{F}_2[a, s^{-1}]/(s^{-2}, a^3)$ le \mathbb{F}_2 -espace vectoriel $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué, avec les degrés $|a| = \alpha$ et $|s^{-1}| = |\sigma^{-1}| = -1 + \alpha$, alors on a un isomorphisme de $\mathbb{F}_2[\sigma^{-4}]$ -modules

$$H_1^*(H\underline{\mathbb{F}}_2^*) \cong \mathbb{F}_2[\sigma^{-4}] \otimes_{\mathbb{F}_2} \Theta \oplus a^{-2}\sigma^3\mathbb{F}_2[\sigma^4] \otimes_{\mathbb{F}_2} \Theta.$$

Démonstration. Nous allons utiliser les formules du corollaire 2.3.17 pour effectuer le calcul de $H_i^*(H\underline{\mathbb{F}}_2^*)$ pour $i = 0$ et 1 .

Pour $i = 0$, on a

$$Ker_{\beta_0}(H\underline{\mathbb{F}}_2^*) = \mathbb{F}_2[\sigma^{-2}, a] \oplus \sigma^2\mathbb{F}_2[\sigma^2, a^{-1}]$$

et

$$Im_{\beta_0}(H\underline{\mathbb{F}}_2^*) = a\mathbb{F}_2[\sigma^{-2}, a] \oplus a^{-1}\sigma^2\mathbb{F}_2[\sigma^2, a^{-1}],$$

par conséquent, $H_0^*(H\underline{\mathbb{F}}_2^*) = \mathbb{F}_2[\sigma^{\pm 2}]$.

Pour $i = 1$,

$$Ker_{\beta_1}(H\underline{\mathbb{F}}_2^*) = \{\sigma^{-2}, \sigma^{-3}\}\mathbb{F}_2[\sigma^{-4}, a] \oplus \{\sigma^2, \sigma^3\}\mathbb{F}_2[\sigma^4, a^{-1}]$$

et

$$Im_{\beta_0}(H\underline{\mathbb{F}}_2^*) = \{a^3\sigma^{-2}, a^3\sigma^{-3}\}\mathbb{F}_2[\sigma^{-4}, a] \oplus \{a^{-3}\sigma^2, a^{-3}\sigma^3\}\mathbb{F}_2[\sigma^4, a^{-1}]$$

d'où

$$H_1^*(H\underline{\mathbb{F}}_2^*) = \mathbb{F}_2[\sigma^{-4}] \otimes_{\mathbb{F}_2} \Theta \oplus a^{-2}\sigma^3\mathbb{F}_2[\sigma^4] \otimes_{\mathbb{F}_2} \Theta.$$

\square

Remarque 3.2.8. Avec les résultats de la proposition 3.1.12, il est naturel de se demander si R envoie les objets libres sur des objets libres.

Considérons le $\mathcal{E}(1)^*$ -module $R(\mathcal{A}^*(1))$. L'élément $Sq^2Sq^1Sq^2 \in \mathcal{A}^*(1) \subset R(\mathcal{A}^*(1))$ ne peut être dans l'image de β_1 , pour des raisons de degré (voir la figure 3.1). Mais $\beta_1(Sq^2Sq^1Sq^2) = aSq^2(Sq^2Sq^1Sq^2) + \sigma^{-1}Q_1(Sq^2Sq^1Sq^2) = 0$. Par conséquent, cet élément représente une classe non nulle $[Sq^2Sq^1Sq^2] \in H_1^*(R(\mathcal{A}(1)))$ en β_1 -cohomologie. Un raisonnement analogue s'applique à l'élément $Sq^2Sq^2Sq^2$, et fournit une deuxième classe $[Sq^2Sq^2Sq^2] \neq 0$ en β_1 -cohomologie. Mais si $R(\mathcal{A}(1))$ était libre sur $\mathcal{E}(1)$, ce groupe serait trivial par le lemme 3.2.6.

En particulier, l'image par R d'un $\mathcal{A}(1)^*$ -module libre non trivial n'est pas un $\mathcal{E}(1)^*$ -module libre.

Cette observation rend le comportement de R plus intéressant.

3.2. UNE ÉTUDE DIRECTE DU FONCTEUR R_1

Passons maintenant à une propriété essentielle de H_0^* :

Proposition 3.2.9. *On a une formule de Künneth*

$$H_0^*(R(M)) \cong H_0^*(H\underline{\mathbb{F}}_2^*) \otimes_{\mathbb{F}_2} H^*(M, Sq^1) = \mathbb{F}_2[\sigma^{\pm 2}] \otimes_{\mathbb{F}_2} H^*(M, Sq^1).$$

Démonstration. La preuve est classique : la formule de Cartan $\beta_0(hm) = \beta_0(h)m + h\beta_0(m)$ implique que l'isomorphisme $R(M) \cong H\underline{\mathbb{F}}_2^* \otimes_{\mathbb{F}_2} M$ est un isomorphisme de complexes de chaînes, où la différentielle est β_0 sur $H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ et Q_0 sur M . La formule de Künneth suit. On conclut par le calcul de $H_0^*(H\underline{\mathbb{F}}_2^*)$, fait dans la proposition 3.2.7. \square

Remarque 3.2.10. On ne peut pas espérer un résultat analogue pour β_1 , simplement parce que le degré de β_1 n'est pas entier, et donc le produit tensoriel $H\underline{\mathbb{F}}_2^* \otimes_{\mathbb{F}_2} M$ ne peut pas être le produit de deux complexes de chaînes.

Corollaire 3.2.11. *Si M est un $\mathcal{A}(1)$ -module Sq^1 -acyclique, alors $R(M)$ est β_0 -acyclique.*

Exemple 3.2.12. 1. $R\mathcal{A}(1)$ est β_0 -acyclique.

2. $H\underline{\mathbb{F}}_2^*(B\mathbb{Z}/2^{triv})$ est β_0 -acyclique.

En général, par la proposition 3.2.9, il suffit de savoir calculer la Sq^1 -cohomologie d'un $\mathcal{A}(1)$ -module M pour connaître $H_0^*R(M)$.

3.2.3 Dualités et le foncteur R_1

L'observation suivante est le point de départ de cette section : comme $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ et $\mathcal{A}^*(1)$ sont des algèbres de Hopf, la catégorie des $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules et la catégorie des $\mathcal{A}^*(1)$ -modules sont chacune munie d'un foncteur de dualité \mathbb{F}_2 -linéaire

$$(-)^\vee : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod^{op} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod$$

et

$$(-)^\vee : \mathcal{A}^*(1) - Mod^{op} \rightarrow \mathcal{A}^*(1) - Mod,$$

définis par $Hom_{\mathbb{F}_2}(-, \mathbb{F}_2)$.

On considère dans cette section le foncteur $\tilde{R} : \mathcal{A}^*(1) - Mod \xrightarrow{\tilde{R}} \mathcal{E}^*(1) - Mod \xrightarrow{res} \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod$.

La question naturelle est de déterminer la relation entre le foncteur $\tilde{R} : \mathcal{A}^*(1) - Mod \rightarrow \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod$ et ces deux foncteurs de dualité.

Le résultat principal de cette section est la proposition suivante.

Proposition 3.2.13. *Le diagramme suivant commute à isomorphisme naturel près :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^*(1) - Mod^{op} & \xrightarrow{(-)^\vee} & \mathcal{A}^*(1) - Mod \\ \tilde{R} \downarrow & & \downarrow \tilde{R} \\ \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod^{op} & \xrightarrow{\Sigma^{2-2\alpha}(-)^\vee} & \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod. \end{array}$$

Le point clef de la preuve est le lemme suivant, qui effectue le calcul pour $\tilde{R}(\mathbb{F}_2)$.

Lemme 3.2.14. *L'appairement*

$$\begin{array}{ccc} H\underline{\mathbb{F}}_2^* \otimes H\underline{\mathbb{F}}_2^* & \rightarrow & \Sigma^{2-2\alpha}\mathbb{F}_2 \\ h \otimes k & \mapsto & \pi_{\sigma^2}(hk) \end{array}$$

induit un isomorphisme de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules

$$w : H\underline{\mathbb{F}}_2^* \xrightarrow{\cong} \Sigma^{2-2\alpha}(H\underline{\mathbb{F}}_2^*)^\vee.$$

De plus, cet isomorphisme satisfait les formules suivantes, pour $m, n \geq 0$,

$$\begin{aligned} a^m \sigma^{-n} &\mapsto \pi_{a^{-m} \sigma^{n+2}} \\ a^{-m} \sigma^{n+2} &\mapsto \pi_{a^m \sigma^{-n}} \end{aligned}$$

où, pour $h \in H\underline{\mathbb{F}}_2^*$, $\pi_h : H\underline{\mathbb{F}}_2^* \rightarrow \mathbb{F}_2$ désigne la projection sur h .

De plus, pour $h, k, l \in H\underline{\mathbb{F}}_2^*$, $w(hk)(l) = w(h)(kl)$.

Démonstration. w est un isomorphisme de \mathbb{F}_2 -espace vectoriel par la proposition 1.2.14. Les formules données au corollaire 2.3.17 donnent l'égalité

$$\beta_i w h = w \beta_i h$$

pour $i = 0$ ou 1 et pour tout $h \in H\underline{\mathbb{F}}_2^*$.

Pour la dernière assertion provient du fait que cet isomorphisme de dualité provient de l'appariement

$$\begin{aligned} H\underline{\mathbb{F}}_2^* \otimes H\underline{\mathbb{F}}_2^* &\rightarrow \Sigma^{2-2\alpha} \mathbb{F}_2 \\ h \otimes k &\mapsto \pi_{\sigma^2}(hk) \end{aligned}$$

avec l'associativité du produit sur $H\underline{\mathbb{F}}_2^*$. □

Démonstration de la proposition 3.2.13. On rappelle que, par la définition 3.1.10, on a un isomorphisme de \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels $RM \cong H\underline{\mathbb{F}}_2^* \otimes M$. Considérons la transformation naturelle $\psi : \tilde{R} \circ (-)^\vee \rightarrow \Sigma^{2-2\alpha}(-)^\vee \circ \tilde{R}$ définie pour tout $M \in \mathcal{A}^*(1)\text{-Mod}$ par

$$\psi_M(h \otimes f) = w(h) f$$

pour tous $h \in H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ et $f : M \rightarrow \mathbb{F}_2$.

Le morphisme ψ_M est clairement un isomorphisme de \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels. Il suffit donc de montrer que ψ_M est un morphisme de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules.

Soient $h \in H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ et $f : M \rightarrow \mathbb{F}_2 \in M^\vee$.

Commençons par l'action de β_0 :

- $\beta_0(h \otimes f) = \beta_0(h) \otimes f + h \otimes (f \circ Q_0)$, d'où $\psi_M(\beta_0(h \otimes f)) = w(\beta_0(h))f + w(h)(f \circ Q_0)$,
- d'autre part, par définition de l'action de β_1 , pour tous $k \in H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ et $m \in M$, on a $\beta_0(\psi_M(h \otimes f))(k \otimes m) = \psi_M(h \otimes f)(\beta_0(k \otimes m))$. De plus,

$$\begin{aligned} \psi_M(h \otimes f)(\beta_0(k \otimes m)) &= \psi_M(h \otimes f)(\beta_0(k) \otimes m + k \otimes Q_0(m)) \\ &= w(h)(\beta_0(k))f(m) + w(h)(k)f(Q_0(m)) \\ &= \beta_0(w(h))(k)f(m) + w(h)(k)(f \circ Q_0)(m) \\ &= w(\beta_0(h))(k)f(m) + w(h)(k)(f \circ Q_0)(m), \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de la première assertion du lemme 3.2.14.

On en déduit $\beta_0(\psi_M(h \otimes f)) = \psi_M(\beta_0(h \otimes f))$.

Montrons maintenant que ψ_M est un morphisme de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1)$ -modules :

- par les formules de Cartan, $\beta_1(h \otimes f) = \beta_1(h) \otimes f + a\beta_0(h) \otimes (f \circ Q_0) + ah \otimes (f \circ Sq^2) + \sigma^{-1}h \otimes (f \circ Q_1)$, d'où $\psi_M(\beta_1(h \otimes f)) = w(\beta_1(h))f + w(a\beta_0(h))(f \circ Q_0) + w(ah)(f \circ Sq^2) + w(\sigma^{-1}h)(f \circ Q_1)$,
- soient $k \in H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ et $m \in M$, on a

$$\begin{aligned} \beta_1(\psi_M(h \otimes f))(k \otimes m) &= \psi_M(h \otimes f)(\beta_1(k \otimes m)) \\ &= \psi_M(h \otimes f)(\beta_1(k) \otimes m + a\beta_0(k) \otimes Q_0 m + ak \otimes Sq^2 m + \sigma^{-1}k \otimes Q_1 m) \\ &= w(h)(\beta_1(k))f(m) + w(h)(a\beta_0(k))f(Q_0 m) + w(h)(ak)f(Sq^2 m) + w(h)(\sigma^{-1}k)f(Q_1 m). \end{aligned}$$

3.2. UNE ÉTUDE DIRECTE DU FONCTEUR R_1

Or, par la première assertion du lemme 3.2.14, $w(h)(\beta_i k) = w(\beta_i h)(k)$, pour $i = 0$ ou 1 , et par la dernière affirmation du lemme 3.2.14, $w(a\beta_0(h))(k) = w(\beta_0(h))(ak)$, $w(ah)(k) = w(h)(ak)$ et $w(\sigma^{-1}h)(k) = w(h)(\sigma^{-1}k)$, d'où

$$\psi_M(\beta_1(h \otimes f)) = \beta_1(\psi_M(h \otimes f)),$$

d'où le résultat. □

Remarque 3.2.15. Un argument antérieur donnait une preuve d'une proposition analogue à la proposition 3.2.13. Le résultat, légèrement plus fort que celui exposé, donnait la compatibilité de la restriction du foncteur $R : \mathcal{A}^*(1) - Mod \rightarrow \mathcal{E}^*(1) - Mod$ à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}^*(1) - Mod$ dont les objets sont libres en tant que $H\overline{\mathbb{F}}_2^*$ -modules et engendrés en degrés entiers, et des foncteurs de dualité.

L'affaiblissement de cette proposition n'entrave pas l'exploitation du résultat fait ici (pour les calculs du chapitre ??), mais permet de donner une preuve du résultat par un calcul direct.

Chapitre 4

La H_{01} -homologie

Dans ce chapitre, on définit et étudie un certain foncteur $H_{01}^* : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \rightarrow \mathbb{F}_2 - Mod$. Ce foncteur est analogue aux homologies de Margolis [Mar83] et apparaît naturellement dans notre étude de la K -théorie réelle des groupes abéliens 2-élémentaires effectuée au chapitre 5.

L'objectif de ce chapitre est la compréhension du foncteur composé

$$\mathcal{A}^*(1) - Mod \xrightarrow{R} \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \xrightarrow{H_{01}^*} \mathbb{F}_2 - Mod$$

et de ses valeurs sur la cohomologie non-équivariante des groupes abéliens 2-élémentaires.

Nous allons tout d'abord définir H_{01}^* , en donner une interprétation en termes de foncteurs dérivés dans le contexte de l'algèbre homologique relative et effectuer le calcul de sa valeur sur l'image par R du $\mathcal{A}^*(1)$ -module libre de rang 1 dans la section 4.1. La simplicité du résultat obtenu donne envie de se placer dans la catégorie stable des $\mathcal{A}^*(1)$ -modules. Dans la section 4.2 on rappelle la définition de la catégorie stable, et les propriétés vérifiées par les $\mathcal{A}^*(1)$ -modules $H\mathbb{F}_2^*(BV)$ pour V un groupe abélien 2-élémentaire (le matériel non-équivariant présent ici provient de [Bru12]). Enfin, dans la dernière section, on effectue le calcul des $H_{01}^*(RP_n)$ où $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme des indécomposables non libres apparaissant dans les $\mathcal{A}^*(1)$ -modules $H\mathbb{F}_2^*(BV)$.

4.1 Définitions et premières propriétés de H_{01}

Nous allons maintenant définir le foncteur H_{01} et faire un inventaire de ses principales propriétés et en particulier les propriétés de H_{01} utiles pour un calcul explicite. L'approche utilisée ici est d'interpréter H_{01} comme un certain foncteur Ext dans la catégorie des $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules. Le cadre dans lequel cette identification est possible est celui de l'algèbre homologique relative.

Dans toute cette section, on se place dans la catégorie des modules $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués sur l'algèbre extérieure $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$. D'une manière générale, sauf indication explicite du contraire, les structures algébriques considérées sont $RO(\mathbb{Z}/2)$ -graduées. Par exemple $\mathbb{F}_2 - Mod$ désigne la catégorie des \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués.

4.1.1 Définition de H_{01}

On utilisera la notation déjà introduite dans le chapitre précédent (notation ??) :

Notation 4.1.1. Soit $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod$ la catégorie des $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués, où les degrés sont $|\beta_0| = 1$, $|\beta_1| = 2 + \alpha$.

Exemple 4.1.2. Comme on l'a déjà observé dans le chapitre précédent, la sous- \mathbb{F}_2 -algèbre de \mathcal{A}^* engendrée par les deux premières opérations de Milnor β_0 et β_1 est une algèbre extérieure sur ces deux générateurs.

On a donc un foncteur d'oubli :

$$U_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}^{\mathcal{A}^*} : \mathcal{A}^* - Mod \rightarrow \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod.$$

Outre les cohomologies de Margolis introduites au chapitre précédent (définition 3.2.4), on définit un autre foncteur de cohomologie : le foncteur H_{01}^* .

Commençons par définir quelques notations :

Notation 4.1.3. Soit A un anneau commutatif et $x \in A$.

1. On note Ker_x le foncteur $A - Mod \rightarrow A - Mod$ défini comme le noyau de la multiplication par l'élément x .
2. De même, on note Im_x le foncteur image de la multiplication par x .
3. On écrira également $Coker_x = id/Im_x$.

Définition 4.1.4. Soit $H_{01}^* : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \rightarrow \mathbb{F}_2 - Mod$ le foncteur défini par $H_{01}^* = (Ker_{\beta_1} \cap Ker_{\beta_0}) / (Im_{\beta_1} \circ Ker_{\beta_0})$.

Justification 4.1.5. Le fait que $\beta_1^2 = 0$ assure que $(Im_{\beta_1} \circ Ker_{\beta_0})$ est bien un sous foncteur de $(Ker_{\beta_1} \circ Ker_{\beta_0})$.

Remarque 4.1.6. 1. Le foncteur $(Ker_{\beta_1} \cap Ker_{\beta_0}) : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \rightarrow \mathbb{F}_2 - Mod$ coïncide avec la composition des foncteurs $Ker_{\beta_1} : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \rightarrow \mathbb{F}_2 - Mod$ et $Ker_{\beta_0} : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \rightarrow \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod$ puisqu'on peut voir Ker_{β_0} comme un sous-foncteur de $id : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \rightarrow \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod$.

2. En toute généralité, il n'y a pas d'interprétation analogue pour $(Im_{\beta_1} \circ Ker_{\beta_0})$. Toutefois, si on se restreint à la sous-catégorie pleine des $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod$ dont les objets sont les modules β_0 -acycliques, de sorte que $Ker_{\beta_0} = Im_{\beta_0}$, alors $(Im_{\beta_1} \circ Ker_{\beta_0}) = Im_{\beta_1 \beta_0}$.

4.1.2 Un peu d'algèbre homologique relative

L'algèbre homologique relative, introduite par Hochschild [Hoc56], puis étudiée dans sa forme générale par Eilenberg-Moore dans [EM65], consiste à construire une nouvelle structure de modèles sur la catégorie des complexes de A -modules, pour un anneau unitaire A , qui néglige les propriétés homologiques du B -module sous-jacent, pour B un sous-anneau de A .

La structure de modèles sur cette catégorie est entièrement déterminée par la notion de (A, B) -exactitude pour un complexe de A -modules. Pour que les suites exactes courtes (ou de manière équivalente, la classe des objets projectifs) définisse bien une structure de modèles sur $A - Mod$ en suivant la construction classique (voir Christensen et Hovey [CH00]), on a une certaine marge de manœuvre sur ce qu'on souhaite appeler une suite exacte courte.

Ainsi, Hochschild [Hoc56] montre que choisir les suites (A, B) -exactes (voir [Hoc56, p.247], ou définition 4.1.7 plus loin) permet la définition de foncteurs (A, B) -dérivés (moyennant une hypothèse de (A, B) -exactitude sur le foncteur en question). Christensen et Hovey [CH00, exemple 3.5] montrent que cette définition permet bien de construire une structure de modèles sur $A - Mod$ telle que les résolutions (A, B) -projectives de Hochschild soient les objets cofibrants.

Le papier d'Hochschild [Hoc56] et le livre d'Enochs et Jenda [EJ11] sont nos principales références pour la définition et les propriétés des foncteurs *Ext* et *Tor* dans le cadre de l'algèbre homologique relative.

La discussion de cette sous-section concerne l'algèbre homologique $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -relative. On rappelle la définition *à la main* des foncteurs dérivés dans cette situation (pour ces définitions, voir par exemple les premières sections de [Hoc56]). Le résultat principal de cette sous-section est la proposition 4.1.22 qui donne une interprétation homologique de H_{01}^* .

Définition 4.1.7. On dit qu'une suite

$$\dots \rightarrow M_i \xrightarrow{d_i} M_{i-1} \rightarrow \dots$$

est $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exacte si c'est une suite exacte de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules telle que la suite exacte de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)$ -modules sous-jacente est scindée.

Remarque 4.1.8. En particulier, une suite exacte courte

$$M \hookrightarrow M' \twoheadrightarrow M''$$

telle que ou M est injectif ou M'' est projectif en tant que $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)$ -module est automatiquement une suite $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exacte.

Les notions d'objet $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectif et d'objet $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -injectif sont analogues au cas classique, en remplaçant la notion d'exactitude par une notion d'exactitude adaptée aux suites $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exactes.

Définition 4.1.9. Soient \mathcal{C} une catégorie abélienne et

$$F : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \rightarrow \mathcal{C}$$

un foncteur additif.

1. On dit que F est $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exact à gauche (respectivement à droite) si, pour toute suite $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exacte courte

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0,$$

le complexe $0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C)$ (resp. $F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow 0$) est exact.

2. On dit que F est $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exact s'il envoie les suites $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exactes sur des suites exactes de \mathcal{C} .
3. Un objet I de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod$ est $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -injectif si le foncteur $Hom_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(-, I)$ est $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exact.
4. Une suite exacte longue de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules de la forme

$$X_* \leftarrow M \leftarrow 0$$

pour un $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module M est appelée $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -résolution injective si elle forme une suite $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exacte et que chaque X_n est $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -injectif.

5. Un objet P de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod$ est $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectif si le foncteur $Hom_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(P, -)$ est $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exact.
6. Une suite exacte longue de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules de la forme

$$Y_* \rightarrow M \rightarrow 0$$

pour un $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module M est une $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -résolution projective si elle forme une suite $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exacte et que chaque Y_n est $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectif.

Remarque 4.1.10. Comme une suite $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exacte de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules est en particulier une suite exacte de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules, un foncteur exact $F : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \rightarrow \mathcal{C}$ est en particulier $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exact.

Un cas particulier d'un résultat de [Hoc56], caractérisant la classe des modules $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectifs et celle des modules $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -injectifs est exprimé dans le lemme suivant.

Lemme 4.1.11. Soit M un $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module.

1. Le $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1) \otimes_{\mathbb{F}_2} M$ est $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectif.
2. Le $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module $Hom_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)}(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), M)$ est $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -injectif.
3. Un facteur direct d'un $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectif (respectivement d'un module $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -injectif) est $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectif (respectivement $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -injectif).
4. On a une surjection naturelle $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) \otimes_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)} M \twoheadrightarrow M$. De plus, M est projectif si et seulement si ce morphisme de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules est la projection sur un facteur direct.

4.1. DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DE H_{01}

5. On a une injection $M \hookrightarrow \text{Hom}_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)}(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), M)$. De plus, M est injectif si et seulement si ce morphisme est l'inclusion d'un facteur direct.

Démonstration. La preuve est faite par Hochschild. Les deux premiers points sont [Hoc56, lemma 1] et [Hoc56, lemma 2].

Pour le troisième point, soit M un module $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectif (respectivement un module $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -injectif), alors pour tout N facteur direct, le foncteur $\text{Hom}_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(N, -)$ est un facteur direct du foncteur exact $\text{Hom}_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(M, -)$ (respectivement $\text{Hom}_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(-, N)$ est un facteur direct du foncteur exact $\text{Hom}_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(-, M)$) et est donc exact.

Les deux points suivants se trouvent dans la discussion qui suit immédiatement [Hoc56, lemma 1] et dans celle qui suit immédiatement [Hoc56, lemma 2]. \square

Proposition 4.1.12. *Soit $F : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - \text{Mod} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - \text{Mod}$ un foncteur exact. Alors F préserve les $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectifs si et seulement si pour tout $M \in \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - \text{Mod}$, $F(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) \otimes_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)} M)$ est $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectif.*

Démonstration. L'implication \Rightarrow est claire. Nous allons montrer l'implication réciproque. Soit M un $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectif. Alors la projection canonique

$$\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) \otimes_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)} M \twoheadrightarrow M$$

scinde, et donc $F(M)$ est un facteur direct du $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectif

$$F(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) \otimes_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)} M),$$

il est donc $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectif par le troisième point du lemme 4.1.11. \square

Proposition 4.1.13. *Les classes des $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -injectifs et la classe des $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectif coïncident. De plus, un $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module appartient à cette classe si et seulement si il est de la forme*

$$\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) \otimes_{\mathbb{F}_2} V_F \oplus \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1) \otimes_{\mathbb{F}_2} V_T$$

où V_F et V_T sont certains \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels.

En particulier, un $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module M est $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectif si et seulement si il est de la forme $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1) \otimes M'$ pour un certain $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)$ -module M' .

Démonstration. On montre que chacune des deux classes coïncide avec celle des modules de la forme $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) \otimes_{\mathbb{F}_2} V_F \oplus \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1) \otimes_{\mathbb{F}_2} V_T$.

– Soit M un $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectif. Alors M est un facteur direct de

$$\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1) \otimes_{\mathbb{F}_2} M.$$

Soit $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0) \otimes_{\mathbb{F}_2} V'_F \oplus V'_T$ une décomposition du $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)$ -modules sous-jacent à M , de sorte que $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1) \otimes_{\mathbb{F}_2} M \cong \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1) \otimes_{\mathbb{F}_2} (\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0) \otimes_{\mathbb{F}_2} V'_F \oplus V'_T)$. Alors M est un facteur direct de

$$\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) \otimes_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)} (\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0) \otimes_{\mathbb{F}_2} V'_F \oplus V'_T) \cong \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) \otimes_{\mathbb{F}_2} V'_F \oplus \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1) \otimes_{\mathbb{F}_2} V'_T.$$

In fine, $M \cong \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) \otimes_{\mathbb{F}_2} V_F \oplus \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1) \otimes_{\mathbb{F}_2} V_T$ pour certains sous- \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels $V_F \subset V'_F$ et $V_T \subset V'_T$. Réciproquement, un $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module de cette forme est $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectif par le lemme 4.1.11.

– Soit M un $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -injectif. Alors M est un facteur direct de

$$\text{Hom}_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)}(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), M).$$

Soit $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0) \otimes_{\mathbb{F}_2} V'_F \oplus V'_T$ une décomposition du $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)$ -modules sous-jacent à M , de sorte que $\text{Hom}_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)}(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), M) \cong \text{Hom}_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)}(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0) \otimes_{\mathbb{F}_2} V'_F \oplus V'_T)$. Mais on a des isomorphismes de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules

$$\text{Hom}_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)}(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)) \cong \Sigma^{-|\beta_1|} \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1)$$

et

$$\text{Hom}_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)}(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \mathbb{F}_2) \cong \Sigma^{-|\beta_1| - \beta_2} \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1),$$

d'où le résultat. \square

Remarque 4.1.14. Une conséquence directe de la proposition précédente est qu'un $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectif β_0 -acyclique est libre, et est en particulier projectif au sens classique en tant que $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module. En particulier, pour un $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module β_0 -acyclique M , le corollaire 4.1.16 fournit un complexe de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules qui est à la fois une $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -résolution projective de M et une résolution projective au sens classique du $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module M .

De même pour les résolutions injectives.

Corollaire 4.1.15. – *Le complexe $I_{\mathbb{F}_2}^\bullet$ défini comme*

$$\dots \xrightarrow{\beta_1} \Sigma^{(n+1)|\beta_1|} \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1) \xrightarrow{\beta_1} \Sigma^{n|\beta_1|} \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1) \xrightarrow{\beta_1} \dots \xrightarrow{\beta_1} \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1) \rightarrow \mathbb{F}_2 \rightarrow 0,$$

où toutes les flèches sont induites par β_1 sauf la dernière, qui est l'unique morphisme non nul de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1) \rightarrow \mathbb{F}_2$ est une résolution $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projective de \mathbb{F}_2 .

– *Le complexe $P_{\mathbb{F}_2}^\bullet$ défini comme*

$$\mathbb{F}_2 \hookrightarrow \Sigma^{-|\beta_1|} \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1) \xrightarrow{\beta_1} \Sigma^{-2|\beta_1|} \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1) \dots$$

où toutes les flèches sont induites par β_1 sauf la dernière, qui est l'unique morphisme non nul de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules $\mathbb{F}_2 \hookrightarrow \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1)$ est une résolution $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -injective de \mathbb{F}_2 .

Démonstration. En vertu de la proposition 4.1.13, $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1)$ est $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectif, de plus le complexe exact de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)$ -modules sous-jacent à ce complexe est constitué de modules triviaux, il est donc scindé. Par conséquent, ce complexe est une résolution $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projective de \mathbb{F}_2 .

Pour le second point, la proposition 4.1.13 affirme également que $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1)$ est un $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -injectif. De plus, le second complexe est le dual \mathbb{F}_2 -linéaire du premier, il est donc également exact, et le complexe de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)$ -modules sous-jacent est scindé. \square

Corollaire 4.1.16. *Soit M un $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module, alors*

- *le complexe de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules $M \otimes I_{\mathbb{F}_2}^\bullet$ est une résolution $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1))$ -injective de M ,*
- *le complexe de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules $M \otimes P_{\mathbb{F}_2}^\bullet$ est une résolution $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1))$ -projective de M .*

Supposons de plus que M est β_0 -acyclique. Alors

1. *il existe une résolution $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projective naturelle de M par des $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectifs et β_0 -acycliques.*
2. *il existe une résolution $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -injective naturelle de M par des $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -injectifs et β_0 -acycliques.*

Démonstration. Commençons par montrer les deux premiers points. Par la proposition 4.1.13, pour tout $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module N , $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1) \otimes N$ est à la fois un $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1))$ -projectif et $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1))$ -injectif, donc $M \otimes I_{\mathbb{F}_2}^\bullet$ et $M \otimes P_{\mathbb{F}_2}^\bullet$ sont bien des complexes de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1))$ -injectifs et $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1))$ -projectifs respectivement.

De plus, le foncteur $M \otimes -$ est exact, donc ces complexes sont exacts. Enfin, le foncteur $UM \otimes - : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0) - \text{Mod} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0) - \text{mod}$, où $U : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - \text{Mod} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0) - \text{Mod}$ désigne le foncteur d'oubli, est additif, et donc les suites exactes longues de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)$ -modules sous-jacentes sont scindées. D'où les deux premiers points.

Pour les deux derniers points, il suffit de remarquer que si M est β_0 -acyclique, alors $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1) \otimes M$ l'est également. \square

Définition 4.1.17. On note $Ch_{\mathbb{Z}}(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - mod)$ la catégorie des complexes de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules (à priori non bornés). Soient

$$P_{\bullet} : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \rightarrow Ch_{\mathbb{Z}}(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - mod)$$

le foncteur $P_{\bullet}^{\mathbb{F}_2} \otimes (-)$, et

$$I^{\bullet} : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \rightarrow Ch_{\mathbb{Z}}(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - mod)$$

le foncteur $I_{\mathbb{F}_2}^{\bullet} \otimes (-)$.

On continue notre description de l'algèbre homologique relative par la notion de foncteurs dérivés relatifs. Encore une fois, les preuves sont contenues dans [EJ11] (et, pour les cas particuliers de Ext et Tor , dans [Hoc56]).

Pour un foncteur F qui est $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exact à gauche (resp. à droite), on peut définir ses foncteurs dérivés à droite (resp. à gauche). Les définitions se trouvent dans [EJ11, sections 8.1 & 8.2].

Lemme 4.1.18 ([EJ11, section 8.1]). *Soient F un foncteur $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exact à gauche (resp. droite), M un $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module, et $M \hookrightarrow I^{\bullet}$ une résolution $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -injective de M (resp. $P_{\bullet} \rightarrow M$ une résolution $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projective de M). Alors, l'homologie du complexe $F(I^{\bullet})$ (resp. $F(P_{\bullet})$) ne dépend pas de la résolution choisie. De plus le 0-ème groupe d'homologie est naturellement isomorphe à $F(M)$.*

Le lemme précédent autorise la définition suivante :

Définition 4.1.19. Soit F un foncteur $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exact à gauche. On définit le n -ième foncteur $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -dérivé à droite de F , et on le note $\mathbb{R}^n F$, le foncteur qui à un $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module M associe $H^n(F(I^{\bullet}))$ où $M \hookrightarrow I^{\bullet}$ est une résolution $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -injective de M . Soit G un foncteur $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exact à droite. On définit le n -ième foncteur $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -dérivé à gauche de G , et on note $\mathbb{L}_n G$, le foncteur qui à un $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module M associe $H_n(F(P_{\bullet}))$ où $P_{\bullet} \rightarrow M$ est une résolution $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projective de M .

Définition 4.1.20. 1. On définit le foncteur $Ext_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))}^i(-, -) : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod^{op} \times \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \rightarrow \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod$ de la façon suivante : pour $M, N \in \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod$, $Ext_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))}^i(-, N)$ est le i -ème foncteur $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -dérivé à gauche de $Hom_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(-, N)$, et $Ext_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))}^i(M, -)$ est le i -ème foncteur $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -dérivé à droite de $Hom_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(M, -)$.

2. On définit le foncteur

$$Tor_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1))}^i(-, -) : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \times \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \rightarrow \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod$$

de la façon suivante : pour $N \in \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod$, $Tor_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1))}^i(-, N)$ est le i -ème foncteur $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -dérivé à gauche de $(-)\otimes_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)} N$, et $Tor_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1))}^i(N, -)$ est le i -ème foncteur $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -dérivé à gauche de $N \otimes_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)} (-)$.

Justification 4.1.21. La preuve du fait que les deux définitions de $Ext_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))}^i$ coïncident et que les deux définitions de $Tor_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1))}^i$ coïncident est dans [Hoc56, 2.].

Enfin, on a les suites exactes longues en $Ext_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))}$ (resp. $Tor_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))}$) induites par une suite $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exacte courte (cf. [Hoc56, p.253]). Nous n'allons pas reproduire le résultat ici puisqu'il est exactement de la même forme que le résultat classique.

4.1.3 Suites exactes longues en H_{01}^* -homologie

Commençons cette sous-section par une définition alternative de H_{01}^* , après quoi nous étudierons les premières conséquences de cette caractérisation.

Proposition 4.1.22. *On a un isomorphisme naturel*

$$\text{Ext}_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))}^0(\mathbb{F}_2, -) \cong \text{Ker}_{\beta_0} \cap \text{Ker}_{\beta_1},$$

et, pour tout $n \geq 1$, on a des isomorphismes naturels

$$H_{01}^* \cong \Sigma^{-n|\beta_1|} \text{Ext}_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))}^n(\mathbb{F}_2, -).$$

Remarque 4.1.23. La suite exacte de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)$ -modules sous jacente à la suite exacte de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules

$$\Sigma^{|\beta_1|} \mathbb{F}_2 \hookrightarrow \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1) \twoheadrightarrow \mathbb{F}_2$$

est la suite exacte scindée

$$\Sigma^{|\beta_1|} \mathbb{F}_2 \hookrightarrow \Sigma^{|\beta_1|} \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2 \twoheadrightarrow \mathbb{F}_2.$$

Par conséquent $\Sigma^{|\beta_1|} \mathbb{F}_2 \hookrightarrow \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1) \twoheadrightarrow \mathbb{F}_2$ est une suite $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exacte courte et induit une suite exacte longue en $\text{Ext}_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))}$.

Mais le $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1)$ est $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectif par la proposition 4.1.13, donc le foncteur $\text{Ext}_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))}^i(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1), -)$ est trivial pour tout $i \geq 1$.

La suite exacte longue donne donc des isomorphismes naturels pour tout $n \geq 1$, entre les foncteurs $\Sigma^{-n|\beta_1|} \text{Ext}_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))}^n(\mathbb{F}_2, -)$ et $\Sigma^{-(n+1)|\beta_1|} \text{Ext}_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))}^{n+1}(\mathbb{F}_2, -)$. Il n'est donc pas surprenant que les foncteurs $\Sigma^{-n|\beta_1|} \text{Ext}_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))}^n(\mathbb{F}_2, -)$ soient naturellement isomorphes entre eux.

Preuve de 4.1.22. Considérons la $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -résolution projective de \mathbb{F}_2 fournie par le corollaire 4.1.15. On a

$$\text{Hom}_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(\mathbb{F}_2, -) = \text{Ker}_{\beta_0} \cap \text{Ker}_{\beta_1},$$

donc $\text{Ext}_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))}^0(\mathbb{F}_2, -) \cong \text{Ker}_{\beta_0} \cap \text{Ker}_{\beta_1}$. De plus, par adjonction,

$$\text{Hom}_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1), -) \cong \text{Hom}_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)}(\mathbb{F}_2, -) \cong \text{Ker}_{\beta_0}(-),$$

et la pré composition par β_1 rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1), -) & \xrightarrow{\beta_1^*} & \text{Hom}_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(\Sigma^{|\beta_1|} \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1), -) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \text{Ker}_{\beta_0}(-) & \xrightarrow{\beta_1|_{\text{Ker}_{\beta_0}}} & \text{Ker}_{\beta_0}(-), \end{array}$$

d'où pour $n \geq 1$,

$$\text{Ext}_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))}^n(\mathbb{F}_2, M) = \text{Ker}_{\beta_1}(\text{Ker}_{\beta_0}(\Sigma^{-n|\beta_1|} M)) / \beta_1(\text{Ker}_{\beta_0}(\Sigma^{-n|\beta_1|} M)) = H_{01}^*(M).$$

□

L'isomorphisme naturel fourni par la proposition 4.1.22 implique l'existence de suites exactes longues de la forme

$$\dots \rightarrow H_{01}^*(A) \rightarrow H_{01}^*(B) \rightarrow H_{01}^*(C) \rightarrow H_{01}^{*+|\beta_1|}(A) \rightarrow H_{01}^{*+|\beta_1|}(B) \rightarrow \dots \rightarrow H_{01}^{*+(n+1)|\beta_1|}(C) \rightarrow$$

$$\text{Ker}_{\beta_0}(\text{Ker}_{\beta_1}(\Sigma^{-(n)|\beta_1|} A)) \rightarrow \text{Ker}_{\beta_0}(\text{Ker}_{\beta_1}(\Sigma^{-(n)|\beta_1|} B)) \rightarrow \text{Ker}_{\beta_0}(\text{Ker}_{\beta_1}(\Sigma^{-(n)|\beta_1|} C)) \rightarrow 0$$

pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $A \rightarrow B \rightarrow C$ suite $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exacte courte.

Afin d'éviter de devoir considérer la partie

$$\dots \rightarrow \text{Ker}_{\beta_0}(\text{Ker}_{\beta_1}(\Sigma^{-(n)|\beta_1|} A)) \rightarrow \text{Ker}_{\beta_0}(\text{Ker}_{\beta_1}(\Sigma^{-(n)|\beta_1|} B)) \rightarrow \text{Ker}_{\beta_0}(\text{Ker}_{\beta_1}(\Sigma^{-(n)|\beta_1|} C)) \rightarrow 0$$

de la suite exacte longue, on introduit maintenant une version "de Tate" des foncteurs dérivés.

4.1. DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DE H_{01}

Définition 4.1.24. Soit $Ch_{\mathbb{Z}}(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod)$ la catégorie des complexes de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules \mathbb{Z} -gradués. Fixons $P^\bullet, I_\bullet : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \rightarrow Ch_{\mathbb{Z}}(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod)$ une résolution $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projective et $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -injective fonctorielles respectivement, définies au moyen du lemme 4.1.11. Comme $coker(P^1 \rightarrow P^0) = Id = ker(I_0 \rightarrow I_1)$, on peut considérer le complexe T_\bullet suivant :

$$\dots \rightarrow P^n \rightarrow P^{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P^2 \rightarrow P^1 \rightarrow P^0 \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_n \rightarrow I_{n+1} \rightarrow \dots,$$

$$\text{c'est-à-dire } T_\bullet = \begin{cases} I_\bullet & \text{si } \bullet \geq 0 \\ P^{-\bullet+1} & \text{si } \bullet < 0. \end{cases}$$

C'est un complexe $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exact de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules projectifs. On appelle complexe de Tate le foncteur T_\bullet .

Soit $F : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exact à droite (respectivement à gauche).

Pour $i \in \mathbb{Z}$, on définit le i -ème foncteur dérivé à gauche (respectivement à droite) de Tate $\mathbb{L}_i \hat{F}$ (respectivement $\mathbb{R}^i \hat{F}$) par $\mathbb{L}_i \hat{F} = H_i(F(T_\bullet(-)))$ (respectivement $\mathbb{R}^i \hat{F} = H_i(F(T_\bullet(-)))$).

- Proposition 4.1.25.**
1. Soit $F : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exact à gauche, alors $\mathbb{R}^i \hat{F}$ est naturellement isomorphe à $\mathbb{R}^i F$ pour tout $i \geq 1$.
 2. Soit $G : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exact à droite, alors $\mathbb{L}_i \hat{F}$ est naturellement isomorphe à $\mathbb{L}_i F$ pour tout $i \geq 1$.
 3. Soit $A \rightarrow B \rightarrow C$ une suite $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exacte courte, alors on a des suites exactes longues associées

$$\dots \rightarrow \mathbb{R}^i \hat{F}(A) \rightarrow \mathbb{R}^i \hat{F}(B) \rightarrow \mathbb{R}^i \hat{F}(C) \rightarrow \mathbb{R}^{i-1} \hat{F}(A) \rightarrow \dots$$

et

$$\dots \rightarrow \mathbb{L}_i \hat{F}(A) \rightarrow \mathbb{L}_i \hat{F}(B) \rightarrow \mathbb{L}_i \hat{F}(C) \rightarrow \mathbb{L}_{i+1} \hat{F}(A) \rightarrow \dots$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un isomorphisme naturel $\mathbb{R}^i Hom_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(\mathbb{F}_2, -) \cong H_{01}^{\star-i|\beta_1|}$.
5. Soit $A \rightarrow B \rightarrow C$ une suite $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exacte courte, alors on a une suite exacte longue

$$\dots H_{01}^\star(A) \rightarrow H_{01}^\star(B) \rightarrow H_{01}^\star(C) \rightarrow H_{01}^{\star+|\beta_1|}(A) \rightarrow \dots$$

Démonstration. Les deux premiers points sont des conséquences directes de la définition de T_\bullet et de l'unicité des foncteurs dérivés au sens $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -relatif à gauche et à droite. La preuve du troisième point est similaire au cas classique, par le lemme du serpent. La proposition 4.1.22 implique l'existence de l'isomorphisme $\mathbb{R}^i Hom_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(\mathbb{F}_2, -) \cong H_{01}^{\star-i|\beta_1|}$.

Enfin, les points 3. et 4. donnent en particulier 5. □

Remarque 4.1.26. Cette interprétation homologique de H_{01}^\star fait apparaître le rôle tout particulier joué par les $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules β_0 -acycliques dans ce contexte. En effet, soit C un $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module β_0 -acyclique. Alors, toute suite exacte courte de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules $A \rightarrow B \rightarrow C$ est scindée en tant que suite exacte de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)$ -modules puisque le $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)$ -module sous-jacent à C est projectif. Donc par définition, toute suite exacte courte $A \rightarrow B \rightarrow C$ est une suite $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exacte, et induit donc des suites exactes longues au niveau des groupes H_{01}^\star par la proposition 4.1.25 :

$$H_{01}^{\star-2+\alpha}(C) \rightarrow H_{01}^\star(A) \rightarrow H_{01}^\star(B) \rightarrow H_{01}^\star(C) \rightarrow H_{01}^{\star+2+\alpha}(A).$$

Jusqu'à présent, nous avons considéré la H_{01}^\star -homologie comme un foncteur $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \rightarrow \mathbb{F}_2 - Mod$. Nous allons maintenant nous tourner vers les propriétés supplémentaires du foncteur composé $H_{01}^\star \circ R$.

Considérons la restriction du foncteur H_{01}^\star aux $\mathcal{E}^\star(1)$ -modules, c'est-à-dire (en vertu de la proposition ??) aux $H\mathbb{F}_2^\star$ -modules dans $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod$.

Lemme 4.1.27. *La restriction de H_{01}^* à la catégorie $H\underline{\mathbb{F}}_2^* - Mod \hookrightarrow \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod$ définit un foncteur, que nous noterons encore H_{01}^* :*

$$H_{01}^* : \mathcal{E}^*(1) - Mod \rightarrow \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-4}] - mod.$$

Démonstration. La proposition 2.3.16, qui donne l'action de β_0 et β_1 sur l'anneau de coefficients, implique que les éléments de $\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-4}]$ sont dans $Ker_{\beta_0}(H\underline{\mathbb{F}}_2^*) \cap Ker_{\beta_1}(H\underline{\mathbb{F}}_2^*)$. Soient M un $H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ -module et x un représentant d'une classe de $H_{01}^*(M)$.

- Par les formules de Cartan, $\forall h \in \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-4}]$, $hx \in Ker_{\beta_0}(M) \cap Ker_{\beta_1}(M)$ et donc $[hx] \in H_{01}^*(M)$,
- de plus, pour $\beta_1(y) \in Im_{\beta_1} \circ Ker_{\beta_0}(M)$, les formules de Cartan impliquent que $h\beta_1(y) = \beta_1(hy) \in Im_{\beta_1} \circ Ker_{\beta_0}(M)$. La classe de cohomologie $[hx]$ ne dépend pas du choix du représentant de $[x]$, et donc le morphisme est bien défini. □

Lemme 4.1.28. *Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ une suite exacte courte de $\mathcal{A}^*(1)$ -modules, scindée en tant que suite exacte courte de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Q_0)$ -modules. Alors*

$$RA \rightarrow RB \rightarrow RC$$

est une suite $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exacte courte.

Démonstration. Soit $i : C \rightarrow B$ le morphisme de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Q_0)$ -modules qui scinde la suite exacte courte. Alors $Ri : RC \rightarrow RB$ vérifie $RgRi = Id_{RC}$, et pour tout $h \in H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ et $c \in C$, $\beta_0(Ri(hc)) = \beta_0(hi(c)) = \beta_0(h)i(c) + hQ_0(i(c)) = RI(\beta_0(h)c + hQ_0(c)) = Ri(\beta_0(hc))$ par la formule de Cartan (voir proposition 2.3.16). Par conséquent la suite exacte courte $RA \rightarrow RB \rightarrow RC$ est bien scindée en tant que suite exacte courte de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Q_0)$ -modules. □

Proposition 4.1.29. *Soit $A \rightarrow B \rightarrow C$ une suite exacte courte de $\mathcal{A}^*(1)$ -modules, scindée en tant que suite exacte courte de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Q_0)$ -modules. Alors on a une suite exacte longue de $\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-4}]$ -modules en H_{01} -cohomologie :*

$$\dots \rightarrow H_{01}^*(RA) \rightarrow H_{01}^*(RB) \rightarrow H_{01}^*(RC) \rightarrow H_{01}^{*+2+\alpha}(RA) \rightarrow \dots$$

L'hypothèse de la proposition est vérifiée en particulier si C est un $\mathcal{A}^(1)$ -module Q_0 -acyclique.*

Démonstration. Le lemme 4.1.28 assure que $RA \rightarrow RB \rightarrow RC$ est une suite $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exacte courte, et on peut donc appliquer la proposition 4.1.25 pour obtenir la suite exacte longue (de \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels) en H_{01}^{star} -homologie annoncée. Les morphismes induits par $A \rightarrow B$ et $B \rightarrow C$ sont des morphismes de $\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-4}]$ -modules par le lemme 4.1.27.

Considérons maintenant le morphisme de bord ∂ de la suite exacte longue. Soit $[x] \in H_{01}^*(RC)$ une classe de H_{01}^* -homologie représentée par un certain $x \in RC$. Soit $y \in RB$ un relèvement de x à RB .

Alors $\partial([x]) = [\beta_1(y)] \in H_{01}^*(RA)$ par construction du morphisme de bord. Soit maintenant $h \in \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-4}]$. Un relèvement de hx à RB est hy . De plus $\beta_1(hy) = h\beta_1(y)$ par les formules de Cartan. Par conséquent $\partial h[x] = h\partial[x]$. Le morphisme de bord est donc aussi un morphisme de $\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-4}]$ -modules, et donc la suite exacte longue est une suite exacte de $\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-4}]$ -modules.

La dernière assertion est une conséquence directe du fait que, dans la catégorie des $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Q_0)$ -modules, un module M est projectif si et seulement si il est Q_0 -acyclique, et que dans ce cas, les suites exactes courtes dont le terme de droite est M sont donc scindées. □

On rappelle la proposition ??, qui identifie la catégorie des $\mathcal{E}^*(1)$ -module avec celle des $H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ -modules dans $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod$.

On rappelle aussi la proposition 1.2.14 : l'anneau de coefficients $H\underline{\mathbb{F}}_2^*$ est une extension à carré nul de l'anneau $\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}]$ par le $\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}]$ -module $\sigma^2\mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma]$.

Définition 4.1.30. On définit le sous-foncteur

$$\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes}(-) : \mathcal{A}^*(1) - Mod \rightarrow \mathcal{E}^*(1) - Mod$$

de R comme le sous- $\mathcal{E}^*(1)$ -module engendré par les éléments de la forme $h \otimes m$, pour $m \in M$ et $h \in \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \subset H\mathbb{F}_2^*$. On note $\sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes}(-)$ le foncteur $\mathcal{A}^*(1) - Mod \rightarrow \mathcal{E}^*(1) - Mod$ quotient.

Remarque 4.1.31. Pour des raisons de degrés (les zones d'annulation de R de la figure 3.1), on a un scindement du foncteur R en $\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes}(-) \oplus \sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes}(-)$.

Pour finir cette sous-section, on montre un résultat qui effectue le calcul de $(H_{01}^* \circ R)(M)$ pour des $\mathcal{A}^*(1)$ -modules M particuliers. Il s'agit de la proposition 4.1.44. Bien que les hypothèses de cette proposition soient relativement restrictives, elles s'appliqueront à plusieurs $\mathcal{A}^*(1)$ -modules dont on aura à calculer la H_{01}^* -homologie, et en particulier à $\mathcal{A}^*(1)$.

Avant de pouvoir énoncer la proposition 4.1.44, on a besoin de quelques lemmes et notations.

Commençons par quelques considérations dans la catégorie des $\mathcal{A}^*(1)$ -modules.

On rappelle les conventions établies à la notation 1.1.13 : * désigne un objet \mathbb{Z} -gradué, et on peut toujours considérer un objet \mathbb{Z} -gradué comme un objet $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué, concentré en degrés $\mathbb{Z} \subset RO(\mathbb{Z}/2)$, de sorte que, pour X^* et Y^* objets \mathbb{Z} -gradués et $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués respectivement, $X^* \otimes Y^*$ est un objet $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué, où \otimes est le produit tensoriel $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués étudié à la sous-section 2.2.2.

Notation 4.1.32. On note $H_{01}^* : \mathcal{A}^*(1) - Mod \rightarrow \mathbb{F}_2 - Mod$ le foncteur $\Sigma^{-3} Ext_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Q_0, Q_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(Q_0))}^1(\mathbb{F}_2, -)$. La graduation provient de la graduation interne de $Ext_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Q_0, Q_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(Q_0))}^1(\mathbb{F}_2, -)$

Remarque 4.1.33. – Le décalage Σ^{-3} est un décalage par $3 = |Q_1|$, analogue au décalage par $|\beta_1|$ dans l'identification du foncteur H_{01}^* effectuée à la proposition 4.1.22.

– La relation précise entre H_{01}^* et le foncteur H_{01}^* étudié précédemment est fournie par le lemme 4.1.41.

Lemme 4.1.34. Pour tout $i \geq 1$, on a des isomorphismes naturels

$$H_{01}^* \cong \Sigma^{-3i} Ext_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Q_0, Q_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(Q_0))}^i(\mathbb{F}_2, -) \cong Ker_{Q_0} \cap Ker_{Q_1} / (Im_{Q_1} \circ Ker_{Q_0}).$$

Démonstration. La preuve de la proposition 4.1.22 donne, mutatis mutandis, une démonstration du résultat. \square

Exemple 4.1.35. Considérons $H_{01}^*(\widetilde{H\mathbb{F}_2}^*(B\mathbb{Z}/2))$ (voir la figure 4.3 pour la structure de $\mathcal{A}^*(1)$ -module de $\widetilde{H\mathbb{F}_2}^*(B\mathbb{Z}/2)$). On a $Ker_{Q_0}(\widetilde{H\mathbb{F}_2}^*(B\mathbb{Z}/2)) = x^2 \mathbb{F}_2[x^2]$. Le $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Q_1)$ -module $Ker_{Q_0}(\widetilde{H\mathbb{F}_2}^*(B\mathbb{Z}/2))$ est concentré en degrés pairs, donc Q_1 agit trivialement.

Finalement, $H_{01}^*(\widetilde{H\mathbb{F}_2}^*(B\mathbb{Z}/2)) \cong x^2 \mathbb{F}_2[x^2]$.

Définition 4.1.36. Soit Λ le produit libre des algèbres $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Sq^2)$ et $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Sq\tau)$, où Sq^2 et $Sq\tau$ sont de degré 2.

Lemme 4.1.37. Soit M un $\mathcal{A}^*(1)$ -module. Alors,

1. $Ker_{Q_1}(M) \cap Ker_{Q_0}(M)$ est naturellement un $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Sq^2)$ -module
2. si de plus, M est Q_0 -acyclique, alors on a une structure de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Sq\tau)$ -module sur $H_{01}^*(M)$, où $Sq\tau$ est l'opération qui vaut $Sq\tau([Q_0(m)]) = [Q_0 Sq^2 m]$ sur un élément de la forme $[Q_0 m] \in H_{01}^*(M)$.

De plus, si on note encore H_{01}^* la restriction de H_{01}^* à la sous-catégorie pleine des $\mathcal{A}^*(1)$ -modules Q_0 -acycliques $\mathcal{A}^*(1) - Mod_{Q_0}$, alors H_{01}^* factorise à travers $\Lambda - Mod$, et donne un foncteur

$$H_{01}^* : \mathcal{A}^*(1) - Mod_{Q_0} \rightarrow \Lambda - Mod.$$

Démonstration. On rappelle la relation d'Adem

$$Sq^2 Sq^2 = Sq^1 Sq^2 Sq^1.$$

1. Soit $x \in Ker_{Q_0}(M) \cap Ker_{Q_1}(M)$.

- Tout d’abord, montrons que $Sq^2x \in Ker_{Q_0}(M) \cap Ker_{Q_1}(M)$. En effet $Q_0Sq^2x = Sq^2Q_0x = 0$ car $Q_1x = 0$ pour la première égalité, et $Q_0x = 0$ pour la seconde, donc $Sq^2x \in Ker_{Q_0}(M)$. De plus,

$$\begin{aligned} Q_1Sq^2x &= Sq^1Sq^2Sq^2x + Sq^2Sq^1Sq^2x \\ &= Sq^1Sq^2Sq^2x + Sq^2Sq^2Sq^1x = 0 \text{ (car } Sq^1Sq^2x = Sq^2Sq^1x) \\ &= Sq^1Sq^1Sq^2Sq^1x + Sq^1Sq^2Sq^1Sq^1x \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Enfin, cette opération est de carré nul, car $Sq^2Sq^2x = Sq^1Sq^2Sq^1x = 0$ pour $x \in Ker_{Q_0}(M)$.

2. Le second point est analogue, soit x un représentant d’une classe de $H_{01}^*(M)$, alors $\exists y$ tel que $x = Q_0y$, par Q_0 -acyclicité.

- Il est clair que $Q_0Sq^2y \in Ker_{Q_0}(M)$. De plus, $Q_1Q_0Sq^2y = Sq^1Sq^2Sq^1Sq^2y = Sq^2Sq^1Sq^2Sq^1y = Sq^2Q_1x = 0$. Par conséquent, parler de la classe de Q_0Sq^2y dans $H_{01}^*(M)$ a un sens.

- Maintenant, montrons que l’opération ne dépend pas du choix de y . Soit donc z la différence de deux préimages de x par Q_0 . Déjà, $z \in Ker_{Q_0}(M)$. Alors $Q_0Sq^2z = Q_1z$. Donc $[Q_0Sq^2z] = 0 \in H_{01}^*(M)$, et l’opération est bien définie.

- Pour finir, montrons que son carré est nul : $Sq^2Sq^2(x) \equiv Sq^2Sq^1Sq^2x \equiv Sq^1Sq^2Sq^2y = 0$.

Passons à la seconde partie.

Soit $M \in \mathcal{A}^*(1) - Mod_{Q_0}$. Pour montrer que le foncteur H_{01}^* factorise à travers la catégorie des Λ -modules, il suffit de montrer qu’on a une structure naturelle de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Sq^2)$ -module et une structure naturelle de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Sq^2)$ -module sur les objets de l’image de $H_{01}^* : \mathcal{A}^*(1) - Mod \rightarrow \mathbb{F}_2 - Vect$. La structure de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Sq^2)$ -module est donnée par le deuxième point du lemme.

L’autre structure est bien définie, car $Ker_{Q_0}(M) \cap Ker_{Q_1}(M)$ est un $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Sq^2)$ -module (on vient de le montrer), et par Q_0 -acyclicité, $Im_{Q_1} \circ Ker_{Q_0} = Im_{Q_1} \circ Im_{Q_0} = Im_{Q_1Q_0}$ est un sous- $\mathcal{A}^*(1)$ -module de $Ker_{Q_0}(M) \cap Ker_{Q_1}(M)$, et donc en particulier un sous- $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Sq^2)$ -module, donc le quotient a un sens dans la catégorie des $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Sq^2)$ -modules. \square

Remarque 4.1.38. – Soit $M \in \mathcal{A}^*(1) - Mod_{Q_0}$ et $[Q_0x] \in H_{01}^*(M)$. Alors on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} Sq^2([Q_0x]) + Sq^2([Q_0x]) &= [Sq^2(Q_0x) + Q_0Sq^2x] \\ &= [Q_1(x)] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Sq^2Sq^2([Q_0x]) &= Sq^2[Q_0Sq^2x] \\ &= [Sq^2Sq^1Sq^2x]. \end{aligned}$$

- Soit M un $\mathcal{A}^*(1)$ -module Q_0 -acyclique. Les actions de Sq^2 et Sq^2 sur $H_{01}^*(M)$ ne commutent pas en général. En effet, reprenons l’exemple 4.1.35, et considérons $[x^2] = [Q_0x] \in H_{01}^*(\widehat{H\mathbb{F}_2}^*(B\mathbb{Z}/2))$, alors

$$Sq^2Sq^2[x^2] = [Sq^2Sq^1Sq^2x] = 0$$

mais

$$\begin{aligned} Sq^2Sq^2[x^2] &= Sq^2[x^4] \\ &= Sq^2[Q_0x^3] \\ &= [Q_0Sq^2x^3] \\ &= [x^6] \end{aligned}$$

et $[x^6] \neq 0$ car $x^6 \notin Im_{Q_1} \circ Ker_{Q_0}(H\mathbb{F}_2^*(B\mathbb{Z}/2))$.

4.1. DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DE H_{01}

On rappelle la définition 4.1.30 du foncteur $\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} (-)$. Les formules de Cartan impliquent en particulier que la multiplication par la classe d'Euler a est un morphisme de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules. De plus ce morphisme induit un morphisme injectif $\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} (-) \xrightarrow{a} \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} (-)$.

Définition 4.1.39. Considérons le foncteur

$$F := \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} (-) / a\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} (-) : \mathcal{A}^*(1) - Mod \rightarrow \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)[\sigma^{-1}] - Mod.$$

Justification 4.1.40. Le seul point délicat est que, pour la structure naturelle de $\mathbb{F}_2[\sigma^{-1}]$ -module sur $F(M)$, l'action de σ^{-1} commute avec β_0 et β_1 . Par les formules de Cartan (proposition 2.3.16), pour tout $x \in M$, $\beta_0(\sigma^{-1}x) = \beta_0(\sigma^{-1})x + \sigma^{-1}Q_0x \equiv \sigma^{-1}Q_0x$ modulo a , et $\beta_1(\sigma^{-1}x) = \beta_1(\sigma^{-1})x + a\beta_0(\sigma^{-1})Q_0x + \sigma^{-1}\beta_1(x) \equiv \sigma^{-1}\beta_1(x)$ modulo a , d'où le résultat.

Pour $M \in \mathcal{A}^*(1) - Mod_{Q_0}$, la suite exacte courte $\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} \xrightarrow{a} \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} \rightarrow F$ est une suite $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exacte, et donc possède de bonnes propriétés d'algèbre homologique relative. Il est donc intéressant de comprendre $H_{01}^* \circ F : \mathcal{A}^*(1) - Mod \rightarrow \mathbb{F}_2 - Mod$ afin de mettre en place une suite spectrale Bockstein permettant de calculer $H_{01}^* \circ \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes}$.

Lemme 4.1.41. On a un isomorphisme naturel de foncteurs $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \rightarrow \mathbb{F}_2 - Mod$

$$H_{01}^* \circ i \circ F \cong Ker_{Q_0} \cap Ker_{Q_1} \oplus \sigma^{-1}H_{01}^*(-)[\sigma^{-1}],$$

où $\sigma^{-1}H_{01}^*(-)[\sigma^{-1}]$ désigne le foncteur à valeurs dans les espaces vectoriels $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués $H_{01}^*(-) \otimes \sigma^{-1}\mathbb{F}_2[\sigma^{-1}]$, et $i : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)[\sigma^{-1}] - Mod \rightarrow \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod$ est le foncteur d'oubli.

Démonstration. Soit M un $\mathcal{A}^*(1)$ -module. La proposition 2.3.16 et le corollaire 2.3.17 donne l'action de β_1 et β_0 sur $\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M$. Nous allons effectuer ce calcul modulo les multiples de a : soit donc $\sigma^{-n} \otimes m \in \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M$. On a

$$\begin{aligned} \beta_0(\sigma^{-n} \otimes m) &= \beta_0(\sigma^{-n}) \otimes m + \sigma^{-n} \otimes Q_0m \\ &\equiv \sigma^{-n} \otimes Q_0m \pmod{a} \end{aligned}$$

car $Im_{\beta_0}(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}]) \subset a\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}]$, d'où $Ker_{\beta_0} \circ F \cong Ker_{Q_0}(-)[\sigma^{-1}]$. De plus,

$$\begin{aligned} \beta_1(\sigma^{-n} \otimes m) &= \beta_1(\sigma^{-n}) \otimes m + a\beta_0(\sigma^{-n}) \otimes Q_0m + a\sigma^{-n} \otimes Sq^2m + \sigma^{-n-1} \otimes Q_1m \\ &\equiv \sigma^{-n-1} \otimes Q_1m \pmod{a}, \end{aligned}$$

d'où $Ker_{\beta_1} \circ Ker_{\beta_0} = Ker_{Q_1} \circ Ker_{Q_0}(-)[\sigma^{-1}]$ et $Im_{\beta_1} \circ Ker_{\beta_0} = \sigma^{-1}Im_{Q_1} \circ Ker_{Q_0}(-)[\sigma^{-1}]$. L'isomorphisme naturel $H_{01}^* \cong (Ker_{Q_0} \cap Ker_{Q_1}) / (Im_{Q_1} \circ Ker_{Q_0})$ donné dans le lemme 4.1.34 donne l'identification souhaitée. \square

La fin de cette sous-section est une étude des conséquences de la suite exacte courte de foncteurs $\Sigma^\alpha \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} (-) \hookrightarrow \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} \rightarrow F$ en H_{01}^* -homologie.

Lemme 4.1.42. Soit M un $\mathcal{A}^*(1)$ -module Q_0 -acyclique. Alors on a une suite exacte longue en H_{01}^* -homologie

$$\dots \rightarrow H_{01}^{*-\alpha}(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M) \xrightarrow{a} H_{01}^*(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M) \xrightarrow{\rho} H_{01}^*(FM) \xrightarrow{\beta} H_{01}^{*+2}(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M) \rightarrow \dots$$

Démonstration. Le $\mathcal{A}^*(1)$ -module M étant Q_0 -acyclique, $(a)\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M \cong \Sigma^\alpha \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} (-)$ est β_0 -acyclique, et donc injectif (c'est-à-dire libre) en tant que $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)$ -module. La suite exacte de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)$ -modules sous-jacente est donc scindée, et donc $0 \rightarrow (a)\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M \rightarrow \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M \rightarrow \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M / a \rightarrow 0$ est une suite $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exacte.

Par conséquent, la proposition 4.1.29 fournit une suite exacte longue en H_{01}^* -homologie :

$$\dots \rightarrow H_{01}^*((a)\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M) \rightarrow H_{01}^*(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M) \xrightarrow{\rho} H_{01}^*(FM) \xrightarrow{\beta} H_{01}^{*+2+\alpha}((a)\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M) \rightarrow \dots$$

$$\begin{array}{ccc}
 H_{01}^{\star-\alpha}(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M) & \xrightarrow{a} & H_{01}^{\star}(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M) \xrightarrow{\rho} H_{01}^{\star}(M[\sigma^{-1}]) \\
 \\
 h\tilde{m} & \xrightarrow{a} & \beta_1(\sigma^{-n}m + a\tilde{m}) \\
 & & \uparrow \beta_1 \\
 & & \sigma^{-n}m + a\tilde{m} \xrightarrow{\rho} \sigma^{-n}m
 \end{array}$$

 FIGURE 4.1 – Le bord β de la suite exacte

L'isomorphisme de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules $(a)\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M \cong \Sigma^\alpha \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M$ donne la suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow H_{01}^{\star-\alpha}(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M) \xrightarrow{a} H_{01}^{\star}(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M) \xrightarrow{\rho} H_{01}^{\star}(M[\sigma^{-1}]) \xrightarrow{\beta} H_{01}^{\star+2}(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M) \rightarrow \dots$$

□

Le lemme précédent fournit un couple exact. On peut donc construire une suite spectrale (la suite spectrale Bockstein associée à l'élément a en H_{01}^{\star} -homologie) dont la page E_1 est isomorphe à $(H_{01}^{\star} \circ F)(M)[\tilde{a}]$, où \tilde{a} est un élément de degré $-\alpha \in RO(\mathbb{Z}/2)$ et de degré homologique 1, et dont l'aboutissant est $(H_{01}^{\star} \circ R)(M)$. Le résultat suivant identifie la première différentielle de cette suite spectrale.

Lemme 4.1.43. *Soit M un $\mathcal{A}^*(1)$ -module Q_0 -acyclique. Considérons l'isomorphisme naturel*

$$H_{01}^{\star}(M[\sigma^{-1}]) \cong Ker_{Q_0}(M) \cap Ker_{Q_1}(M) \oplus \sigma^{-1}H_{01}^{\star}(M)[\sigma^{-1}]$$

fourni par le lemme 4.1.41. Alors la différentielle d_1 de la suite spectrale Bockstein associée à la multiplication par la classe d'Euler a en H_{01}^{\star} -homologie agit sur $H_{01}^{\star+k\alpha}(M[\sigma^{-1}])$ pour $k \geq 0$:

- comme $\tilde{a}Sq^2$ si k est pair,
- comme $\tilde{a}Sq\tau$ si k est impair.

Avec l'action définie au lemme 4.1.37.

Démonstration. Dans les notations du lemme 4.1.42, le morphisme d_1 est la composée

$$H_{01}^{\star}(M[\sigma^{-1}]) \xrightarrow{\beta} H_{01}^{\star+2}(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M) \xrightarrow{\rho} H_{01}^{\star+2}(M[\sigma^{-1}]).$$

Le bord de la suite exacte est représenté figure 4.1 (et la description de la suite spectrale Bockstein donnée, par exemple, dans [BG10, 4.1.A]) : pour $\sigma^{-n}m \in H_{01}^{\star}M[\sigma^{-1}]$, on choisit un relèvement $\sigma^{-n}m + ah'm' \in Ker_{\beta_0}(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M)$ pour un certain $h'm' \in \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M$ de $\sigma^{-n}m$. Alors $\rho\beta_1(\sigma^{-n}m + ah'm') = 0$ et donc provient d'un certain $ah\tilde{m}$ ($h \in H\mathbb{F}_2^{\star}$ et $\tilde{m} \in M$). Alors $\beta(\sigma^{-n}m) = h\tilde{m}$.

Nous allons maintenant identifier explicitement cette différentielle.

Tout d'abord, il faut choisir un relèvement pour chaque élément de $H_{01}^{\star}(M[\sigma^{-1}])$. Avec les notations issues de l'isomorphisme $H_{01}^{\star}(M[\sigma^{-1}]) \cong Ker_{Q_0}(M) \cap Ker_{Q_1}(M) \oplus \sigma^{-1}H_{01}^{\star}(M)[\sigma^{-1}]$ fourni par le lemme 4.1.41, on a trois cas à distinguer afin que le relèvement choisi soit à chaque fois dans Ker_{β_0} . Les cas dépendent du fait que l'élément homogène considéré appartient à $Ker_{Q_0}(M) \cap Ker_{Q_1}(M)$ ou $\sigma^{-1}H_{01}^{\star}(M)[\sigma^{-1}]$, et dans le dernier cas, selon la parité de la puissance de σ^{-1} apparaissant. Soit $k \leq 0$, alors

1. un relèvement de $m \in Ker_{Q_0}(M) \cap Ker_{Q_1}(M) \subset H_{01}^{\star}(M[\sigma^{-1}])$ est $1 \otimes m \in \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M$ car $m \in Ker_{\beta_0}(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M)$.
2. De même, un relèvement de $\sigma^{2k}m \in \sigma^{2k}H_{01}^{\star}(M) \subset H_{01}^{\star}(M[\sigma^{-1}])$ est $\sigma^{2k}m \in \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M$.
3. Enfin, un relèvement de $\sigma^{2k-1}m \in \sigma^{2k-1}H_{01}^{\star}(M) \subset H_{01}^{\star}(M[\sigma^{-1}])$ est $\sigma^{2k-1}m + a\sigma^{2k}\tilde{m} \in \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M$, pour n'importe quel $\tilde{m} \in M$ tel que $Q_0\tilde{m} = m$. En effet, $\beta_0(\sigma^{2k-1}m + a\sigma^{2k}\tilde{m}) = a\sigma^{2k}m + a\sigma^{2k}m = 0$ par les formules de Cartan.

4.1. DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DE H_{01}

On utilise maintenant ces choix de relèvement dans la caractérisation du morphisme

$$\beta : H_{01}^*(M[\sigma^{-1}]) \rightarrow H_{01}^{*+2}(M[\sigma^{-1}])$$

donnée précédemment. On rappelle la formule $\beta_1(m) = \sigma^{-1}Q_1m + aSq^2m$ pour l'action de β_1 sur $M \subset \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M$ ainsi que les formules de Cartan. Soit $k < 0$.

1. pour $m \in Ker_{Q_0}(M) \cap Ker_{Q_1}(M)$, $\beta_1(1 \otimes m) = \sigma^{-1} \otimes Q_1m + a \otimes Sq^2m = aSq^2m$, et donc

$$d_1 = Sq^2 : Ker_{Q_0}(M) \cap Ker_{Q_1}(M) \rightarrow Ker_{Q_0} \cap Ker_{Q_1},$$

2. pour $\sigma^{2k'}m \in \sigma^{2k'}H_{01}^*(M) \subset H_{01}^*(M[\sigma^{-1}])$, il faut en plus distinguer la parité de k' :
 - si l'élément considéré est de la forme $\sigma^{4k}m \in \sigma^{4k}H_{01}^*(M) \subset H_{01}^*(M[\sigma^{-1}])$, comme $\beta_1(\sigma^{4k}m) = \sigma^{4k-1}Q_1m + a\sigma^{4k}Sq^2m = a\sigma^{4k}Sq^2m$, on a

$$d_1 = Sq^2 : \sigma^{4k}H_{01}^*(M) \rightarrow \sigma^{4k}H_{01}^{*+2}(M),$$

- si l'élément considéré est de la forme $\sigma^{4k-2}m$, alors $\beta_1(\sigma^{4k-2}m) = \sigma^{4k-3}Q_1m + a\sigma^{4k-2}Sq^2m + a^3\sigma^{4k}m \equiv a\sigma^{4k-2}Sq^2m$ modulo a^2 , donc

$$d_1 = Sq^2 : \sigma^{4k-2}H_{01}^*(M) \rightarrow \sigma^{4k-2}H_{01}^{*+2}(M),$$

3. considérons maintenant les éléments de la forme $\sigma^{2k'-1}m \in \sigma^{2k'-1}H_{01}^*(M) \subset H_{01}^*(M[\sigma^{-1}])$, il faut encore une fois distinguer selon la parité de k' ,
 - si l'élément considéré est de la forme $\sigma^{4k-1}m$, alors $\beta_1(\sigma^{4k-1}m + a\sigma^{4k}\tilde{m}) \equiv a\sigma^{4k-1}Sq^1Sq^2\tilde{m}$ modulo a^2 , et donc

$$d_1 = Sq^z : \sigma^{4k-1}H_{01}^*(M) \rightarrow \sigma^{4k-1}H_{01}^{*+2}(M),$$

- et enfin, si l'élément considéré est de la forme $\sigma^{4k-3}m$, alors $\beta_1(\sigma^{4k-3}m + a\sigma^{4k-2}\tilde{m}) = a\sigma^{4k-3}Sq^1Sq^2\tilde{m}$ modulo a^2 , donc

$$d_1 = Sq^z : \sigma^{4k-3}H_{01}^*(M) \rightarrow \sigma^{4k-3}H_{01}^{*+2}(M).$$

□

Nous allons maintenant expliciter les conséquences de l'effondrement de la suite spectrale à la page E_2 . C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.1.44. *Soit M un $\mathcal{A}^*(1)$ -module Q_0 -acyclique. Supposons que*

1. $Ker_{Q_0}(M) \cap Ker_{Q_1}(M)$ est Sq^2 -acyclique,
2. $H_{01}^*(M)$ est Sq^2 -acyclique
3. et que $H_{01}^*(M)$ est Sq^z -acyclique.

Alors

$$Ker_a(H_{01}^*(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M)) = H_{01}^*(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M)$$

et on a

$$H_{01}^*(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M) = Ker_{d_1}(H_{01}^*(M[\sigma^{-1}])).$$

Démonstration. Considérons la suite spectrale Bockstein associée à la multiplication par la classe d'Euler en H_{01}^* -homologie. Par définition, on a un isomorphisme $E^1 \cong H_{01}^*(M[\sigma^{-1}])[\tilde{a}]$, et la première différentielle de la suite spectrale est le morphisme d_1 identifié au lemme 4.1.43. Par conséquent, les hypothèses de la proposition sont équivalentes à : la suite spectrale Bockstein associée à a en H_{01}^* -homologie s'effondre à la page E^2 , puisque E^2 est concentré en degrés $\{0\} \times RO(\mathbb{Z}/2) \subset \mathbb{Z} \times RO(\mathbb{Z}/2)$. La multiplication par \tilde{a} augmente le degré homologique, et la page E_2 est concentrée en degré homologique 0, donc la multiplication par \tilde{a} est triviale sur $E^2 = E^\infty$. Donc la multiplication par a sur $H_{01}^*(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M)$, induite par la multiplication par \tilde{a} sur $E^2 = E^\infty$, l'est également.

Pour finir, on identifie la page E^∞ :

$$E^\infty = E^2 = Ker_{d_1}(H_{01}^*(M[\sigma^{-1}])).$$

□

4.1.4 Dualité

Nous allons terminer cette section par un outil de calcul de H_{01} provenant du foncteur de dualité \mathbb{F}_2 -linéaire de la définition ???. On rappelle le lemme ??? et la proposition 3.2.13 concernant le foncteur $(-)^{\vee}$.

Pour comprendre le lien entre le foncteur de dualité et H_{01}^* , on a besoin de propriétés homologiques plus adaptées au cadre relatif.

Lemme 4.1.45. *Le foncteur $(-)^{\vee} : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod^{op} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. *il est $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exact,*
2. *il envoie un objet $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectif (respectivement un objet $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -injectif) sur un $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectif (respectivement un $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -injectif).*

Démonstration. Pour le premier point, on sait déjà que le foncteur est exact, c'est donc une conséquence de la remarque 4.1.10.

Pour le second point, on va utiliser la proposition 4.1.13. On a un isomorphisme $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1))^{\vee} \cong \Sigma^{-2-\alpha} \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1)$ de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules. Donc pour tout $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module M , le dual $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) \otimes_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)} M)^{\vee} \cong (\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1) \otimes_{\mathbb{F}_2} M)^{\vee} \cong \Sigma^{-2-\alpha} \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) \otimes_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)} (M^{\vee})$ (car $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1)$ est de dimension finie) est également $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectif par le dernier point de la proposition 4.1.13. Par conséquent, le foncteur $(-)^{\vee}$ préserve les $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projectifs. \square

Remarque 4.1.46. Le résultat précédent est l'analogie relative du fait que les classes des modules injectifs et projectifs coïncident dans $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod$ (ou plus généralement dans $R - Mod$, pour R une algèbre quasi-Frobenius, comme une algèbre de Hopf finie sur un corps k (voir [AF92, proposition 31.1])).

Nous allons maintenant exploiter le foncteur de dualité linéaire et ses propriétés pour réduire la quantité de calculs nécessaires pour comprendre $H_{01} \circ R$ sur des $\mathcal{A}^*(1)$ -modules particuliers. Les résultats exploités ici sont ceux étudiés dans la sous-section 3.2.3, et en particulier la proposition 3.2.13.

Lorsqu'on applique le foncteur de dualité, un foncteur d'homologie analogue à H_{01}^* apparaît :

Notation 4.1.47. On note H_{\star}^{01} le foncteur

$$\Sigma^{|\beta_1|} \mathbb{L}_1((Id/(Im_{\beta_0} + Im_{\beta_1}))) : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \rightarrow \mathbb{F}_2 - vect.$$

Justification 4.1.48. On a déjà vu que $Hom_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(\mathbb{F}_2, -)$ est $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exact à gauche, donc $Hom_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(\mathbb{F}_2, -)^{\vee}$ est $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exact à droite. Mais on a l'identification :

$$Hom_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(\mathbb{F}_2, -)^{\vee} \cong (Ker_{\beta_0} \cap Ker_{\beta_1})^{\vee} \cong (Id/(Im_{\beta_0} + Im_{\beta_1}))((-)^{\vee}),$$

donc le foncteur $(Id/(Im_{\beta_0} + Im_{\beta_1}))((-)^{\vee})$ est un foncteur contravariant $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exact à droite, et donc $(Id/(Im_{\beta_0} + Im_{\beta_1}))$ est un foncteur covariant $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exact à droite. On peut donc parler de ses foncteurs $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -dérivés à gauche.

On rappelle la définition 4.1.24 des foncteurs dérivés de Tate $\hat{\mathbb{L}}_i$ et $\hat{\mathbb{R}}^i$.

Proposition 4.1.49. 1. *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod^{op} & \xrightarrow{\vee} & \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \\ \downarrow H_{01}^{op} & & \downarrow H^{01} \\ \mathbb{F}_2 - Mod^{op} & \xrightarrow[\vee]{} & \mathbb{F}_2 - Mod. \end{array}$$

2. *De plus, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a un isomorphisme naturel entre le foncteur H_{\star}^{01} et*

$$\Sigma^{i|\beta_1|} \hat{\mathbb{L}}_i((Id/(Im_{\beta_0} + Im_{\beta_1}))) : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \rightarrow \mathbb{F}_2 - vect.$$

4.1. DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DE H_{01}

Démonstration. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod^{op} & \xrightarrow{\vee} & \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \\ \text{Hom}_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(\mathbb{F}_2, -) \downarrow & & \downarrow (Id/(Im_{\beta_0} + Im_{\beta_1})) \\ \mathbb{F}_2 - Mod^{op} & \xrightarrow[\vee]{} & \mathbb{F}_2 - Mod, \end{array}$$

il est commutatif car on a des isomorphismes naturels $\text{Hom}_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(\mathbb{F}_2, -)^\vee \cong (Ker_{\beta_0} \cap Ker_{\beta_1})^\vee \cong (Id/(Im_{\beta_0} + Im_{\beta_1}))((-)^\vee)$. Par le lemme 4.1.45, la duale linéaire d'une résolution $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -projective est une résolution $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -injective, par conséquent, on a un isomorphisme naturel

$$(\mathbb{R}^i(\text{Hom}_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(\mathbb{F}_2, -)))^\vee \cong \mathbb{L}_i((Id/(Im_{\beta_0} + Im_{\beta_1}))) \circ (-)^\vee \quad (4.1)$$

d'où le premier point par définition de H_{01} et H^{01} .

Pour le second point, les cas $i \geq 1$ suivent du même isomorphisme par la proposition 4.1.22. On en déduit un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{Z}$ entre $\hat{\mathbb{L}}_i((Id/(Im_{\beta_0} + Im_{\beta_1})))$ et $\Sigma^{|\beta_1|} \hat{\mathbb{L}}_{i+1}((Id/(Im_{\beta_0} + Im_{\beta_1})))$, d'où le résultat pour tout $i \in \mathbb{Z}$. \square

L'intérêt de la proposition précédente, qui montre la relation entre le foncteur de dualité \mathbb{F}_2 -linéaire et les foncteurs H_{01}^\star et H_\star^{01} est justifié par le lemme 4.1.52, qui permet le calcul de H_\star^{01} lorsqu'on se restreint aux $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules β_0 -acycliques.

Définition 4.1.50. Soit $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod_{\beta_0}$ la sous-catégorie pleine des objets β_0 -acycliques dans $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod_{\beta_0}$.

Avant d'énoncer le lemme, commençons par un résultat général sur la restriction à $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod_{\beta_0}$ des foncteurs $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -dérivés.

Lemme 4.1.51. Soient $F, G : \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod \rightarrow \mathcal{C}$ deux foncteurs $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exacts à gauche ou à droite tels que les restrictions de F et G à la catégorie $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod_{\beta_0}$ coïncident.

Alors les foncteurs dérivés de Tate à droite ou à gauche de F et G coïncident sur $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod_{\beta_0}$.

Démonstration. Par le lemme 4.1.16, le foncteur T_\bullet se restreint en un foncteur

$$\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)_{\beta_0} \rightarrow Ch_{\mathbb{Z}}(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod_{\beta_0}).$$

Considérons le cas où F et G sont $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exacts à droite. Dans ce cas, les foncteurs $F(T_\bullet)$ et $G(T_\bullet)$ sont naturellement isomorphes, et donc on a un isomorphisme naturel $\hat{\mathbb{L}}_i(F) = H_i(F(T_\bullet)) \cong H_i(G(T_\bullet)) = \hat{\mathbb{L}}_i(G)$.

Le cas où F et G sont $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exacts à gauche est analogue. \square

Lemme 4.1.52. Pour tout $i \geq 0$, on a un isomorphisme naturel

$$H_{01}^\star \cong \Sigma H_\star^{01}$$

en tant que foncteurs

$$\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod_{\beta_0} \rightarrow \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-4}] - Mod.$$

Démonstration. Toute la preuve du lemme se place dans la catégorie $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod_{\beta_0}$, de sorte qu'on a un isomorphisme naturel de foncteurs $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod_{\beta_0} \rightarrow \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-4}] - Mod$:

$$\Sigma^{|\beta_0|} Coker_{\beta_0} \xrightarrow{\beta_0} Ker_{\beta_0}.$$

Considérons le diagramme suivant de foncteurs $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod_{\beta_0} \rightarrow \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-4}] - Mod$:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{|\beta_1|} Ker_{\beta_0} & \xrightarrow{\beta_1} & Ker_{\beta_0} \\ \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\ \Sigma^{1+|\beta_1|} Coker_{\beta_0} & \xrightarrow[\beta_1]{} & \Sigma Coker_{\beta_0}. \end{array}$$

Les isomorphismes verticaux sont induits par β_0 , et donc la commutativité de β_0 et β_1 entraîne la commutativité du diagramme. On en déduit que $\cong \Sigma Id/(Im_{\beta_0} + Im_{\beta_1}) \cong Coker_{\beta_1} \circ Ker_{\beta_0}$. On a deux conséquences de ce fait. Premièrement, on obtient une suite exacte à quatre termes de foncteurs $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1) - Mod_{\beta_0} \rightarrow \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-4}] - Mod$

$$\Sigma^{|\beta_1|} Ker_{\beta_1} \circ Ker_{\beta_0} \hookrightarrow \Sigma^{|\beta_1|} Ker_{\beta_0} \xrightarrow{\beta_1} Ker_{\beta_0} \xrightarrow{\beta_0^{-1}} \Sigma Id/(Im_{\beta_0} + Im_{\beta_1}). \quad (4.2)$$

Deuxièmement, le lemme 4.1.51 s'applique à l'isomorphisme naturel $\Sigma Id/(Im_{\beta_0} + Im_{\beta_1}) \cong Coker_{\beta_1} \circ Ker_{\beta_0}$ et donne un isomorphisme naturel $\mathbb{L}_i(\Sigma Id/(Im_{\beta_0} + Im_{\beta_1})) \cong \mathbb{L}_i(Coker_{\beta_1} \circ Ker_{\beta_0})$.

La fin de la preuve repose sur les deux suites spectrales associées à un bi-complexe, qui compare $\mathbb{L}_i(\Sigma Id/(Im_{\beta_0} + Im_{\beta_1}))$ et $H_{01}^* = \mathbb{R}^i(Ker_{\beta_1} \circ Ker_{\beta_0})$. Soit T_\bullet la résolution de Tate de M . Comme M est β_0 -acyclique, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, T_k est un module β_0 -acyclique (corollaire 4.1.16).

Considérons le bicomplexe suivant :

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Sigma^{|\beta_1|} Ker_{\beta_0}(T_{\bullet+1}) & \xrightarrow{\beta_1} & Ker_{\beta_0}(T_{\bullet+1}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Sigma^{|\beta_1|} Ker_{\beta_0}(T_\bullet) & \xrightarrow{\beta_1} & Ker_{\beta_0}(T_\bullet) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Sigma^{|\beta_1|} Ker_{\beta_0}(T_{\bullet-1}) & \xrightarrow{\beta_1} & Ker_{\beta_0}(T_{\bullet-1}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

On va calculer l'aboutissant des deux suites spectrales convergeant vers l'homologie du complexe total. Commençons par la suite spectrale dont la page E^0 est

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \uparrow d_0 & & \uparrow d_0 \\ \Sigma^{|\beta_1|} Ker_{\beta_0}(T_{\bullet+1}) & & Ker_{\beta_0}(T_{\bullet+1}) \\ \uparrow d_0 & & \uparrow d_0 \\ \Sigma^{|\beta_1|} Ker_{\beta_0}(T_\bullet) & & Ker_{\beta_0}(T_\bullet) \\ \uparrow d_0 & & \uparrow d_0 \\ \Sigma^{|\beta_1|} Ker_{\beta_0}(T_{\bullet-1}) & & Ker_{\beta_0}(T_{\bullet-1}) \\ \uparrow d_0 & & \uparrow d_0 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

4.1. DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DE H_{01}

Par l'isomorphisme naturel $Ker_{\beta_0} = Hom_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1), -)$, les groupes apparaissant sur la page E^1 sont triviaux, puisque le $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1)$ est injectif et projectif par le lemme 4.1.11, et donc que $Hom_{\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)}(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1), -)$ est $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exact. La première suite spectrale s'effondre, et $E^\infty = 0$.

Passons à la seconde suite spectrale.
Sa page E^0 est

$$\begin{array}{ccc}
 & \vdots & \vdots \\
 & & \\
 \Sigma^{|\beta_1|} Ker_{\beta_0}(T_{\bullet+1}) & \xrightarrow{\beta_1} & Ker_{\beta_0}(T_{\bullet+1}) \\
 & & \\
 \Sigma^{|\beta_1|} Ker_{\beta_0}(T_{\bullet}) & \xrightarrow{\beta_1} & Ker_{\beta_0}(T_{\bullet}) \\
 & & \\
 \Sigma^{|\beta_1|} Ker_{\beta_0}(T_{\bullet-1}) & \xrightarrow{\beta_1} & Ker_{\beta_0}(T_{\bullet-1}) \\
 & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

et donc, en vertu de l'équation 4.2, on a la page E^1 :

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \vdots \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \Sigma^{|\beta_1|} Ker_{\beta_1} \circ Ker_{\beta_0}(T_{\bullet+1}) & & \Sigma Id / (Im_{\beta_0} + Im_{\beta_1})(T_{\bullet+1}) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \Sigma^{|\beta_1|} Ker_{\beta_1} \circ Ker_{\beta_0}(T_{\bullet}) & & \Sigma Id / (Im_{\beta_0} + Im_{\beta_1})(T_{\bullet}) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \Sigma^{|\beta_1|} Ker_{\beta_1} \circ Ker_{\beta_0}(T_{\bullet-1}) & & \Sigma Id / (Im_{\beta_0} + Im_{\beta_1})(T_{\bullet-1}) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Par définition des foncteurs dérivés de Tate, la page E^2 de cette suite spectrale est la suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \vdots \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \Sigma^{|\beta_1|} \hat{\mathbb{R}}^{\bullet+1} (Ker_{\beta_1} \circ Ker_{\beta_0})(M) & & \Sigma \hat{\mathbb{L}}_{\bullet+1} Id / (Im_{\beta_0} + Im_{\beta_1})(M) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \Sigma^{|\beta_1|} \hat{\mathbb{R}}^{\bullet} (Ker_{\beta_1} \circ Ker_{\beta_0})(M) & & \Sigma \hat{\mathbb{L}}_{\bullet} Id / (Im_{\beta_0} + Im_{\beta_1})(M) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \Sigma^{|\beta_1|} \hat{\mathbb{R}}^{\bullet-1} (Ker_{\beta_1} \circ Ker_{\beta_0})(M) & & \Sigma \hat{\mathbb{L}}_{\bullet-1} Id / (Im_{\beta_0} + Im_{\beta_1})(M) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Mais par les isomorphismes des propositions 4.1.49 point 2. et 4.1.25 point 4., on a un isomorphisme naturel entre la page E_2 de la suite spectrale et

$$\begin{array}{ccc}
 & \swarrow & \searrow \\
 \vdots & & \vdots \\
 & \swarrow d^2 & \searrow \\
 H_{01}^*(M) & & H_{*+2|\beta_1|-1}^{01}(M) \\
 & \swarrow d^2 & \searrow \\
 H_{01}^{*-|\beta_1|}(M) & & H_{*+1|\beta_1|-1}^{01}(M) \\
 & \swarrow d^2 & \searrow \\
 H_{01}^{*-2|\beta_1|}(M) & & H_{*-1}^{01}(M) \\
 & \swarrow d^2 & \searrow \\
 H_{01}^{*-3|\beta_1|}(M) & & H_{*-|\beta_1|-1}^{01}(M) \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Pour terminer, d^2 est nécessairement un isomorphisme, car c'est la seule différentielle possiblement non triviale pour des raisons de degré, et que $E^\infty = 0$. Par conséquent, d^2 réalise l'isomorphisme annoncé dans le lemme. \square

4.1.5 Modules libres

L'objectif de cette section est de calculer $H_{01}^*(RF)$, pour F un $\mathcal{A}^*(1)$ -module libre. Le résultat est énoncé à la proposition . Une représentation de $\mathcal{A}^*(1)$ est donnée à la figure 4.2.



FIGURE 4.2 – L'algèbre $\mathcal{A}^*(1)$

Nous allons d'abord vérifier que les hypothèses de la proposition 4.1.44 sont satisfaites pour le $\mathcal{A}^*(1)$ -module $\mathcal{A}^*(1)$.

Lemme 4.1.53. 1. On a un isomorphisme de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Sq^2)$ -modules

$$Ker_{Q_0}(\mathcal{A}^*(1)) \cap Ker_{Q_1}(\mathcal{A}^*(1)) \cong \{Sq^2Sq^2, Sq^2Sq^2Sq^2\}\mathbb{F}_2,$$

avec $Sq^2(Sq^2Sq^2) = Sq^2Sq^2Sq^2$. En particulier, il est Sq^2 -acyclique.

2. Le $\Lambda(Sq^2)$ -module $H_{01}^*(\mathcal{A}^*(1))$ est nul.

Démonstration. À partir de la figure 4.2, on voit que l'image de $\mathcal{A}^*(1)$ par le foncteur d'oubli $\mathcal{A}^*(1) - Mod \rightarrow \Lambda_{\mathbb{F}_2}(Q_0, Q_1) - Mod$ est isomorphe à $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Q_0, Q_1) \oplus \Sigma^2\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Q_0, Q_1)$, une base en tant que $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Q_0, Q_1)$ -module étant donnée par 1 et Sq^2 .

La structure d'espace vectoriel de $Ker_{Q_0}(\mathcal{A}^*(1)) \cap Ker_{Q_1}(\mathcal{A}^*(1))$ et $H_{01}^*(\mathcal{A}^*(1))$ est facile à déduire de ce fait.

L'action de Sq^2 sur $Ker_{Q_0}(\mathcal{A}^*(1)) \cap Ker_{Q_1}(\mathcal{A}^*(1))$ est induite de l'action de Sq^2 sur les générateurs de $\mathcal{A}^*(1)$ en tant que $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Q_0, Q_1)$ -module : 1 et Sq^2 . \square

Proposition 4.1.54. On a l'identification

$$H_{01}^*(R\mathcal{A}^*(1)) = Sq^2Sq^2Sq^2\mathbb{F}_2 \oplus \sigma^2.Sq^1\mathbb{F}_2.$$

Démonstration. Pour des raisons de degré, on a scindement naturel $R \cong \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} (-) \oplus \sigma^2\mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes} (-)$. Comme le foncteur H_{01}^* est additif, il existe également un scindement naturel

$$H_{01}^* \circ R \cong H_{01}^* \circ \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} (-) \oplus H_{01}^* \circ \sigma^2\mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes} (-).$$

Le lemme 4.1.53 assure que la proposition 4.1.44 s'applique, donnant directement

$$H_{01}^*(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} \mathcal{A}^*(1)) = Sq^2Sq^2Sq^2\mathbb{F}_2.$$

Pour calculer le reste, on applique les propriétés de dualité énoncées à la proposition 4.1.49 et la proposition 3.2.13. On obtient

$$H_{01}^*(R\mathcal{A}^*(1))^\vee \cong H_\star^{01}((R\mathcal{A}^*(1))^\vee)$$

par le premier point de la proposition 4.1.49,

$$H_\star^{01}((R\mathcal{A}^*(1))^\vee) \cong H_\star^{01}(\Sigma^{-2+2\alpha} R(\mathcal{A}^*(1)^\vee))$$

par la proposition 3.2.13,

$$H_\star^{01}(\Sigma^{-2+2\alpha} R(\mathcal{A}^*(1)^\vee)) \cong H_\star^{01}(\Sigma^{-2+2\alpha} R(\Sigma^{-6} \mathcal{A}^*(1)))$$

car $\mathcal{A}^*(1)^\vee \cong \Sigma^{-6}\mathcal{A}^*(1)$, enfin, le lemme 4.1.52 donne

$$\begin{aligned} H_*^{01}(\Sigma^{-2+2\alpha}R(\Sigma^{-6}\mathcal{A}^*(1))) &\cong \Sigma^{-1}H_{01}^*(\Sigma^{-2+2\alpha}R(\Sigma^{-6}\mathcal{A}^*(1))) \\ &\cong \Sigma^{-9+2\alpha}H_{01}^*(R\mathcal{A}^*(1)). \end{aligned}$$

Pour des raisons de degré, cet isomorphisme se restreint, via le scindement

$$H_{01}^* \circ R \cong H_{01}^* \circ \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes}(-) \oplus H_{01}^* \circ \sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes}(-),$$

en deux isomorphismes

$$H_{01}^*(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes}(\mathcal{A}^*(1)))^\vee \cong \Sigma^{-9+2\alpha}H_{01}^*(\sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes}(\mathcal{A}^*(1)))$$

et

$$H_{01}^*(\sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes}(\mathcal{A}^*(1)))^\vee \cong \Sigma^{-9+2\alpha}H_{01}^*(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes}(\mathcal{A}^*(1))).$$

Par conséquent, $H_{01}^*(\sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes}(\mathcal{A}^*(1)))$ est un espace vectoriel de dimension 1 généré par une classe de degré $-6 + 9 - 2\alpha = 3 - 2\alpha$. Pour conclure, il suffit de constater que $\sigma^2 Sq^1$ est dans

$$Ker_{\beta_0}(\sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes}(\mathcal{A}^*(1))) \cap Ker_{\beta_1}(\sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes}(\mathcal{A}^*(1))),$$

à cause de la zone d'annulation décrite à la figure 3.1, et qu'il ne saurait être dans l'image de β_1 , à cause des mêmes zones d'annulation. Sa classe peut donc être choisie comme générateur de $H_{01}^*(\sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes}(\mathcal{A}^*(1)))$. \square

On termine cette section avec le calcul de $H_{01}^* \circ R$ des $\mathcal{A}^*(1)$ -modules libres.

Corollaire 4.1.55. *Soit F un $\mathcal{A}^*(1)$ -module libre. Alors*

$$H_{01}^*(F) \cong (F \otimes_{\mathcal{A}^*(1)} \mathbb{F}_2) \otimes_{\mathbb{F}_2} (Sq^2 Sq^2 Sq^2 \mathbb{F}_2 \oplus \sigma^2 Sq^1 \mathbb{F}_2).$$

En particulier, ce $\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-4}]$ -module est concentré en degrés $\mathbb{Z} \subset RO(\mathbb{Z}/2)$ et $\mathbb{Z} - 2\alpha \subset RO(\mathbb{Z}/2)$.

Démonstration. La proposition 4.1.54 donne le résultat pour le module libre de rang 1. On conclut par additivité des foncteurs H_{01}^* (conséquence de la proposition 4.1.22) et R (proposition 3.1.12). \square

4.2 La catégorie stable

4.2.1 L'entrée en scène de la catégorie stable

Le calcul effectué à la proposition 4.1.55 motive l'étude des $H\mathbb{F}_2^*(BV)$ d'un point de vue stable. Une référence très complète sur la catégorie stable est le livre de Margolis [Mar83, chapitre 14], le mémoire de Palmieri [Pal01] étudie également en détail ce qui se passe pour le cas particulier des sous-algèbres de Hopf de l'algèbre de Steenrod.

Brièvement, il s'agit de considérer la catégorie obtenue à partir de la catégorie des $\mathcal{A}^*(1)$ -modules en négligeant les $\mathcal{A}^*(1)$ -modules libres. On rappelle les définitions et les premières propriétés dans la proposition suivante, contenue dans [Bru12, définition 2.4, propositions 2.5 et 2.6], ainsi que la discussion qui suit cette proposition dans [Bru12].

Proposition 4.2.1. *Soit B une algèbre de Hopf graduée connexe finie.*

1. *Pour toute sous-catégorie \mathcal{C} de $B\text{-Mod}$, on définit la catégorie stable de \mathcal{C} , notée $St(\mathcal{C})$ la catégorie dont les objets sont ceux de \mathcal{C} , et les morphismes sont les classes d'équivalence de morphismes modulo ceux qui factorisent à travers un module projectif. Dans toute la suite, on note \simeq pour une équivalence stable entre deux B -modules, c'est-à-dire un morphisme de B -modules qui induit un isomorphisme dans la catégorie stable.*
2. *Deux B -modules M et N sont stablement équivalents si et seulement si il existe deux B -modules libres P et Q et un isomorphisme $M \oplus P \cong N \oplus Q$.*

4.2. LA CATÉGORIE STABLE

3. Soit $(-)^{red} : Ob(B - Mod) / \cong \rightarrow Ob(B - Mod) / \cong$ l'application qui à un B -module M associe la classe d'isomorphisme de son plus petit sous- B -module M' tel que $M \cong M' \oplus F$ avec F un B -module libre. On appelle M^{red} le B -module réduit associé à M . Avec ces notations, deux modules de type fini bornés inférieurement sont stablement isomorphes si et seulement si leurs modules réduits sont isomorphes.
4. Soit \otimes_B la structure monoïdale symétrique sur $B - Mod$. Le produit tensoriel d'un B -module libre avec un B -module est un B -module libre. En particulier, le produit tensoriel définit bien une structure monoïdale au niveau de la catégorie stable.

Passons maintenant à la définition du foncteur *espace de lacets algébrique*.

Définition 4.2.2. On définit les foncteurs $B - Mod \rightarrow B - Mod$ suivants :

- $\Omega = Ker(B \rightarrow \mathbb{F}_2) \otimes (-)$,
- $\Omega^{-1} = Coker(\mathbb{F}_2 \rightarrow B) \otimes (-)$.

Pour un B -module M , on définit également deux applications $Ob(B - Mod) / \cong \rightarrow Ob(B - Mod) / \cong$ ainsi que $\Omega_r(M) = Ker(F \rightarrow M)$ où F est minimal, et $\Omega_r^{-1}M = Coker(M \hookrightarrow F')$ où F' minimal.

- Remarque 4.2.3.*
1. Stablement, on peut définir $\Omega(M)$ comme étant le noyau de n'importe quel épimorphisme $F \twoheadrightarrow M$, où F est un module libre. En particulier, on peut prendre F minimal.
 2. Supposons M réduit et choisissons $F \twoheadrightarrow M$ minimal. Considérons la suite exacte courte de $\mathcal{A}^*(1)$ -modules

$$\omega M \hookrightarrow F \twoheadrightarrow M.$$

Alors par définition de Ω_r , on a une équivalence stable $\omega M \simeq \Omega_r M$. Écrivons un isomorphisme de $\mathcal{A}^*(1)$ -modules qui est dans la classe de $\omega M \simeq \Omega_r M$. Comme $\Omega_r M$ est réduit, on obtient un isomorphisme

$$\omega M \cong F' \oplus \Omega_r M,$$

avec F' un certain $\mathcal{A}^*(1)$ -module libre. Si on note $F'' = coker(F' \hookrightarrow F)$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{=} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ F'' & \longrightarrow & M. \end{array}$$

On en déduit l'existence d'une surjection $F'' \twoheadrightarrow M$ qui, par l'hypothèse de minimalité de F , implique que $F' = 0$.

3. Pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$, alors pour tout $M \in \mathcal{A}^*(1) - Mod$, on a un isomorphisme de $\mathcal{A}^*(1)$ -modules $\Omega_r^i \circ \Omega_r^j \cong \Omega_r^{i+j}$. Il suffit de constater que $\Omega_r(M) = \Omega(M)^{red}$. Dès lors, le résultat suit de l'isomorphisme naturel $\Omega^i \circ \Omega^j \cong \Omega^{i+j}$.

On rappelle la convention générale : le symbole $*$ désigne un entier naturel, en particulier, pour $M \in \mathbb{F}_2 - Mod$ et $V \in RO(\mathbb{Z}/2)$, M^{*+V} est un espace vectoriel \mathbb{Z} -gradués.

Proposition 4.2.4. Soit M un $\mathcal{A}^*(1)$ -module Q_0 -acyclique. On considère un épimorphisme $F \twoheadrightarrow M$ avec F un $\mathcal{A}^*(1)$ -module libre minimal. On a donc une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Omega_r M \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0.$$

La suite exacte longue en H_{01}^* -homologie de la proposition 4.1.29 se scinde en isomorphismes de \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels \mathbb{Z} -gradués :

1. $H_{01}^*(R\Omega_r M) \cong H_{01}^*(RF)$,
2. $H_{01}^{*+2-2\alpha}(RF) \cong H_{01}^{*+2-2\alpha}(RM)$,
3. et, pour tout $k \notin \{-2, -1\}$, $H_{01}^{*+k\alpha}(RM) \xrightarrow{\cong} H_{01}^{*+2+(k+1)\alpha}(R\Omega_r M)$,

où $*$ $\in \mathbb{Z}$.

Démonstration. L'identification du noyau de $F \rightarrow M$ est le deuxième point de la remarque 4.2.3. Comme M est Q_0 -acyclique, la proposition 4.1.29 s'applique à la suite exacte courte $0 \rightarrow \Omega_r M \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$, et on obtient la suite exacte longue

$$\dots \rightarrow H_{01}^*(R\Omega_r M) \rightarrow H_{01}^*(RF) \rightarrow H_{01}^*(RM) \rightarrow H_{01}^{*+2+\alpha}(R\Omega_r M) \rightarrow H_{01}^{*+2+\alpha}(RF) \rightarrow \dots$$

De plus, le calcul effectué à la proposition 4.1.55 identifie $H_{01}^*(RF)$, concentré en degrés $* + k\alpha$, pour $k = 0, -2$.

Mais pour un $\mathcal{A}^*(1)$ -module N quelconque, les zones d'annulation de la figure 3.1 impliquent que $RN^{*-2} = 0$, et en particulier $H_{01}^{*-2}(RN) = 0$.

Par conséquent, dans la portion de suite exacte longue suivante, pour $* \in \mathbb{Z}$,

$$\dots \rightarrow H_{01}^{*-2-\alpha}(RM) \rightarrow H_{01}^*(R\Omega_r M) \rightarrow H_{01}^*(RF) \rightarrow H_{01}^*(RM) \rightarrow H_{01}^{*+2+\alpha}(R\Omega_r M) \rightarrow H_{01}^{*+2+\alpha}(RF) \rightarrow \dots,$$

les deux termes $H_{01}^{*-2-\alpha}(RM)$ et $H_{01}^{*+2+\alpha}(RF)$ sont triviaux, par la figure 3.1 et la proposition 4.1.55 respectivement, d'où une suite exacte à quatre termes $0 \rightarrow H_{01}^*(R\Omega_r M) \rightarrow H_{01}^*(RF) \rightarrow H_{01}^*(RM) \rightarrow H_{01}^{*+2+\alpha}(R\Omega_r M) \rightarrow 0$. Montrons maintenant qu'elle se scinde en deux isomorphismes.

Raisonnons par l'absurde et supposons que le morphisme $H_{01}^*(R\Omega_r M) \rightarrow H_{01}^*(RF)$ n'est pas surjectif. La proposition 4.1.55 implique qu'il existe un élément dans la classe de $Sq^2 Sq^2 Sq^2 v \in H_{01}^*(F)$, pour un certain $v \in F$ qui n'est pas dans l'image du morphisme $\Omega_r M \rightarrow F$. Mais pour des raisons de degré, la classe de $Sq^2 Sq^2 Sq^2 v$ est réduite à un élément puisque l'image de β_1 est triviale en ce degré. Alors $Sq^2 Sq^2 Sq^2 v$ est envoyé sur un élément non trivial $Sq^2 Sq^2 Sq^2 m$ de M par le morphisme de $\mathcal{A}^*(1)$ -modules $F \rightarrow M$, et donc une copie de $\mathcal{A}^*(1)$ scinde : $F \rightarrow M = f \oplus Id_{\mathcal{A}^*(1)} : F' \oplus \mathcal{A}^*(1) \rightarrow M' \oplus \mathcal{A}^*(1)$, donc M n'est pas réduit. Contradiction. Par conséquent, le morphisme $H_{01}^*(R\Omega_r M) \rightarrow H_{01}^*(RF)$ est surjectif et donc la suite exacte à quatre termes se scinde en les deux isomorphismes : celui du point 1. et point 3. dans le cas où $k = 0$.

Considérons maintenant la portion

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_{01}^{*-3\alpha}(RF) \rightarrow H_{01}^{*-3\alpha}(RM) \rightarrow H_{01}^{*+2-2\alpha}(R\Omega_r M) \\ \rightarrow H_{01}^{*+2-2\alpha}(RF) \rightarrow H_{01}^{*+2-2\alpha}(RM) \rightarrow H_{01}^{*+4-\alpha}(R\Omega_r M) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

de la suite exacte longue précédente. Encore une fois, les termes $H_{01}^{*-3\alpha}(RF)$ et $H_{01}^{*+4-\alpha}(R\Omega_r M)$ sont triviaux, par la proposition 4.1.55 et la figure 3.1 respectivement, fournissant la suite exacte à quatre termes $0 \rightarrow H_{01}^{*-3\alpha}(RM) \rightarrow H_{01}^{*+2-2\alpha}(R\Omega_r M) \rightarrow H_{01}^{*+2-2\alpha}(RF) \rightarrow H_{01}^{*+2-2\alpha}(RM) \rightarrow 0$.

On montre que cette suite exacte à quatre termes est scindée. Il faut constater que M réduit et $F \rightarrow M$ minimal implique que $\Omega_r M$ est réduit. Par conséquent, la suite exacte courte

$$M^\vee \hookrightarrow F^\vee \twoheadrightarrow (\Omega_r M)^\vee$$

vérifie les hypothèses du point précédent. Par conséquent il existe une suite exacte à quatre termes scindée de la forme

$$0 \rightarrow H_{01}^*(RM^\vee) \rightarrow H_{01}^*(RF^\vee) \rightarrow H_{01}^*(R(\Omega_r M)^\vee) \rightarrow H_{01}^{*+2+\alpha}(R(\Omega_r M)^\vee) \rightarrow 0.$$

Par conséquent, on a des isomorphismes

$$H_{01}^*(R(M^\vee)) \cong H_{01}^{*+2+\alpha}(R((\Omega_r M)^\vee))$$

et le lemme 4.1.52 avec la proposition 4.1.49 donnent un isomorphisme

$$H_{01}^{*-3\alpha}(RM) \cong H_{01}^{*+2-2\alpha}(R\Omega_r M).$$

4.2. LA CATÉGORIE STABLE

Enfin, pour tout $k \notin \{-3, -2, -1, 0\}$, la proposition 4.1.55 implique que $H_{01}^{*+k\alpha}(RF)$ et $H_{01}^{*+(k+1)\alpha}(RF)$ sont triviaux. Par conséquent, la suite exacte

$$H_{01}^{*+k\alpha}(RF) \rightarrow H_{01}^{*+k\alpha}(RM) \rightarrow H_{01}^{*+2+(k+1)\alpha}(R\Omega_r M) \rightarrow H_{01}^{*+2+(k+1)\alpha}(RF)$$

fournit les isomorphismes $H_{01}^{*+k\alpha}(RM) \xrightarrow{\cong} H_{01}^{*+2+(k+1)\alpha}(R\Omega_r M)$ annoncés. \square

Remarque 4.2.5. On a réellement une dualité entre les énoncés concernant la partie en degrés $*+k\alpha$ pour $k \geq 0$ et la partie pour $k \leq -2$. En effet, si on connaît le résultat pour la partie pour $k \geq 0$, on considère la suite exacte de $\mathcal{A}^*(1)$ -modules acycliques

$$M^\vee \hookrightarrow F^\vee \rightarrow (\Omega_r(M))^\vee.$$

Par conséquent $\Omega_r((\Omega_r(M))^\vee) \cong M^\vee$.

On applique maintenant la proposition 4.2.4 pour $k \geq 0$ (supposé connu) et on trouve des isomorphismes

$$H_{01}^*(RM^\vee) \cong H_{01}^*(RF^\vee),$$

et

$$H_{01}^{*+k\alpha}(R(\Omega_r(M))^\vee) \xrightarrow{\cong} H_{01}^{*+2+(k+1)\alpha}(RM^\vee)$$

d'où, par la proposition 4.1.49 les isomorphismes en degré $*+k\alpha$ pour $k \leq -2$ annoncés à la proposition 4.2.4.

Nous pouvons maintenant énoncer un résultat concis de calcul de H_{01}^* -homologie pour les modules de la forme RM , pour M un $\mathcal{A}^*(1)$ -module réduit. C'est suffisant par additivité du foncteur $H_{01}^* \circ R$ puisque le calcul de $H_{01}^*(RF)$ pour F un $\mathcal{A}^*(1)$ -module libre a été traité au corollaire 4.1.55.

Notation 4.2.6. On note $\text{soc} : \mathcal{A}^*(1)\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{F}_2\text{-e.v.}$ le foncteur socle, c'est-à-dire $\text{Hom}_{\mathcal{A}^*(1)}(\mathbb{F}_2, -) = \text{Ann}_{\mathcal{A}^*(1)}(-)$.

Proposition 4.2.7. Soit M un $\mathcal{A}^*(1)$ -module réduit Q_0 -acyclique. Alors pour $n \geq 0$,

- $H_{01}^{*+n\alpha}(RM) \cong \Sigma^{2n} \text{soc}(\Omega_r^{-n}(M))$
- $H_{01}^{*-(n+2)\alpha}(RM) \cong \Sigma^{-2n-5} \text{soc}(\Omega_r^{n+2}(M))$
- $H_{01}^{*- \alpha}(RM) = 0$.

Démonstration. Soit M un $\mathcal{A}^*(1)$ -module réduit. Choisissons $F \rightarrow M$ minimal. Le second point de la remarque 4.2.3 fournit une suite exacte courte

$$\Omega_r(M) \hookrightarrow F \rightarrow M.$$

Par conséquent les résultats du corollaire 4.2.4 s'appliquent pour la suite exacte courte de $\mathcal{A}^*(1)$ -modules

$$\Omega_r M \hookrightarrow F \rightarrow M.$$

La première étape de la preuve est de calculer la restriction aux degrés entiers de $H_{01}^*(RM) : H_{01}^{*+0\alpha}(RM)$. A cause des zones d'annulations de RM (voir la figure 3.1), aucun élément du sous-espace vectoriel $M \cong 1 \otimes M \hookrightarrow H\mathbb{F}_2^* \otimes M \cong RM$ n'est dans $\text{Im}_{\beta_1}(RM)$. Par conséquent $H_{01}^{*+0\alpha}(RM) = (\text{Ker}_{\beta_0}(RM) \cap \text{Ker}_{\beta_1}(RM))^{*+0\alpha}$. Maintenant les formules de la proposition 3.2.3 donnent

$$(\text{Ker}_{\beta_0}(RM) \cap \text{Ker}_{\beta_1}(RM))^{*+0\alpha} = \text{Ker}_{Sq^1}(M) \cap \text{Ker}_{Sq^2}(M) \subset RM.$$

L'anneau $\mathcal{A}^*(1)$ étant engendré par Sq^1 et Sq^2 , on a $\text{Ker}_{Sq^1}(M) \cap \text{Ker}_{Sq^2}(M) = \text{soc}(M)$.

Nous allons maintenant raisonner par récurrence sur n pour montrer $H_{01}^{*+n\alpha}(RM) = \Sigma^{2n} \text{soc}(\Omega_r^{-n}(M))$. Soit donc $n \geq 1$.

- Si $n = 1$, la dernière assertion du corollaire 4.2.4 pour la suite exacte courte de $\mathcal{A}^*(1)$ -modules

$$M \hookrightarrow F \twoheadrightarrow \Omega_r^{-1}(M)$$

implique que la suite exacte à quatre termes donnée par le point 1. du même corollaire se scinde, donnant un isomorphisme $H_{01}^{*+\alpha}(RM) \cong H_{01}^{*-2}(R\Omega_r^{-1}M)$. On vient de voir que $H_{01}^{*-2}(R\Omega_r^{-1}M) \cong \Sigma^2 \text{soc}(\Omega_r^{-1}(M))$, d'où un isomorphisme $H_{01}^{*+\alpha}(RM) \cong \Sigma^2 \text{soc}(\Omega_r^{-1}(M))$.

- Si $n \geq 1$, la dernière assertion du corollaire 4.2.4, et le point 3. du même corollaire appliqués à la suite exacte courte de $\mathcal{A}^*(1)$ -modules

$$M \hookrightarrow F \twoheadrightarrow \Omega_r^{-1}(M)$$

donne la chaîne d'isomorphismes

$$H_{01}^{*+n\alpha}(RM) \cong H_{01}^{*-2+(n-1)\alpha}(R\Omega_r^{-1}M) \cong \Sigma^{2n} \text{soc}(\Omega_r^{-n}(M)),$$

où le dernier isomorphisme est donné par l'hypothèse de récurrence.

L'assertion $H_{01}^{*-n\alpha}(RM) = 0$ est une conséquence des zones d'annulations pour RM , voir figure 3.1.

Montrons maintenant le second isomorphisme de la proposition. L'argument est similaire à celui qu'on vient d'utiliser. Le point 2. et la dernière assertion du corollaire 4.2.4 appliqués à la suite exacte

$$\Omega_r^{-n}(M) \hookrightarrow F \twoheadrightarrow M$$

donnent $H_{01}^{*-3\alpha}(RM) \cong H_{01}^{*+2-2\alpha}(R\Omega_r M)$. En utilisant à nouveau 2. et la dernière assertion pour la suite exacte

$$\Omega_r^2 M \hookrightarrow F^{(3)} \twoheadrightarrow \Omega_r M,$$

où $F^{(3)} \twoheadrightarrow \Omega_r M$ est le recouvrement projectif de $\Omega_r(M)$, on trouve $H_{01}^{*+2-2\alpha}(R\Omega_r M) \cong H_{01}^{*+2-2\alpha}(RF^{(3)})$. Mais la proposition 4.1.55 implique que $H_{01}^{*+2-2\alpha}(RF^{(3)}) \cong H_{01}^{*+5}(RF^{(3)})$. Le point 1. et la dernière assertion du corollaire 4.2.4 pour $\Omega_r(M)$ impliquent $H_{01}^{*+5}(RF^{(3)}) \cong H_{01}^{*+5}(R\Omega_r^2 M)$, mais on vient de voir que

$$H_{01}^{*+5}(R\Omega_r^2 M) \cong \Sigma^{-5} \text{soc}(\Omega_r^2 M).$$

Par récurrence immédiate en utilisant le point 3. du corollaire 4.2.4,

$$H_{01}^{*-(n+2)\alpha}(RM) = \Sigma^{-2n-5} \text{soc}(\Omega_r^{n+2}(M)).$$

□

Le défaut de la proposition précédente est qu'on n'a pas identifié la structure de $\mathbb{F}_2[a]$ -module de $H_{01}^*(RM)$, pour M un $\mathcal{A}^*(1)$ -module réduit. Nous allons retrouver une partie de cette structure ($\text{Ker}_a(H_{01}^*(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M))$ et $\text{coKer}_a(H_{01}^*(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M))$) à l'aide du résultat suivant. On rappelle l'identification du lemme 4.1.41.

Proposition 4.2.8. *Soit M un $\mathcal{A}^*(1)$ -module réduit Q_0 -acyclique. On note $\sigma^2 M[\sigma]$ le $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -module $\text{Ker}(a : \sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes} M \rightarrow \sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes} M)$. On a un isomorphisme naturel :*

$$H_{01}^*(\sigma^2 M[\sigma]) = \sigma^2 M / (\text{Im}_{Q_1}(M) + \text{Im}_{Q_0}(M)) \oplus \sigma^3 H_{01}^*(M)[\sigma].$$

De plus, on a deux suites exactes en H_{01}^* -homologie :

$$H_{01}^{*-n\alpha}(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M) \xrightarrow{a} H_{01}^*(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} M) \rightarrow \text{Ker}_{Q_1} \text{Ker}_{Q_0}(M) \oplus \sigma^{-1} H_{01}^*(M)[\sigma^{-1}]$$

et

$$\sigma^2 M / (\text{Im}_{Q_1}(M) + \text{Im}_{Q_0}(M)) \oplus \sigma^3 H_{01}^*(M)[\sigma] \rightarrow H_{01}^*(\sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes} M) \xrightarrow{a} H_{01}^{*+\alpha}(\sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes} M).$$

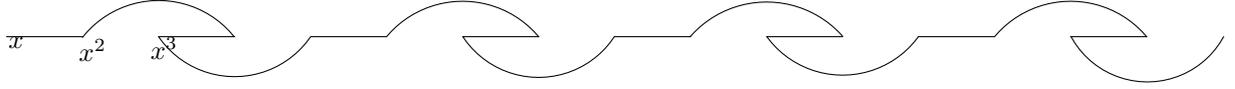


FIGURE 4.3 – La structure de $\mathcal{A}^*(1)$ -module de $H\mathbb{F}_2^*(B\mathbb{Z}/2)$

Démonstration. L'identification annoncée suit de la formule $\beta_1(m) = \sigma^{-1}Q_1m + aSq^2m$ pour $m \in M \subset RM$ et des formules de Cartan de la même façon que dans le lemme 4.1.41. En effet, $\text{Ker}_{\beta_0}(\sigma^2M[\sigma]) = \sigma^2\text{Ker}_{Q_0}M[\sigma]$, et donc $H_{01}^*(\sigma^2M[\sigma]) = \text{Ker}_{\beta_1}(\sigma^2M[\sigma])/Im_{\beta_1}(\sigma^2M[\sigma])$, où $\beta_1(\sigma^n m) = \sigma^{n-1}Q_1(m)$.

Maintenant les suites exactes longues annoncées sont

- la suite exacte longue fournie par le lemme 4.1.42
- la suite exacte longue en H_{01}^* -homologie associée à l'image par le foncteur $\sigma^2\mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma]\tilde{\otimes}(-)$ de la suite exacte courte de $\mathcal{A}^*(1)$ -modules β_0 -acycliques

$$\sigma^2M[\sigma] \hookrightarrow \sigma^2\mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma]\tilde{\otimes}(M) \xrightarrow{a} \sigma^2\mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma]\tilde{\otimes}(M)$$

qui est bien une suite $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exacte de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules sous l'hypothèse de Q_0 -acyclicité pour M , par le même argument que dans la preuve du lemme 4.1.42. □

4.2.2 La classe d'équivalence stable de $\widetilde{H\mathbb{F}_2^*}(BV)$

Rappelons que le but de l'étude est de comprendre $\widetilde{H\mathbb{F}_2^*}(BV)$ en tant que $\mathcal{E}^*(1)$ -module. Le résultat suivant montre qu'il suffit de comprendre les puissances tensorielles du cas de rang 1 ($V = \mathbb{Z}/2$).

Lemme 4.2.9. *Notons P le $\mathcal{A}^*(1)$ -module $\widetilde{H\mathbb{F}_2^*}(B\mathbb{Z}/2)$. On a un isomorphisme de $\mathcal{A}^*(1)$ -modules*

$$\widetilde{H\mathbb{F}_2^*}(BV_n) \cong \bigoplus_{i=1}^n (P^{\otimes i}) \oplus \binom{n}{i}.$$

Démonstration. Tout d'abord, le fait que $BV_n = (B\mathbb{Z}/2)^{\times n}$ donne $BV_{n+} = (B\mathbb{Z}/2)_+^{\wedge n}$, et donc la formule de Künneth permet de conclure. □

On relie maintenant le foncteur Ω défini en 4.2.2 aux $\mathcal{A}^*(1)$ -modules $P^{\otimes i}$. Cette proposition provient de [Bru12, corollaire 3.3].

Proposition 4.2.10. *Dans la catégorie stable des $\mathcal{A}^*(1)$ -modules, $P^{\otimes(n+1)} \simeq \Omega^n \Sigma^{-n} P$.*

Remarque 4.2.11. L'existence d'une structure d'algèbre instable sur l'algèbre de Steenrod sur $\widetilde{H\mathbb{F}_2^*}(B\mathbb{Z}/2) = x\mathbb{F}_2[x]$ (avec x de degré 1) donne immédiatement sa structure de module sur l'algèbre de Steenrod, représentée diagrammatiquement dans la figure 4.3 avec les conventions de 2.1.8.

Enfin, on a un résultat de périodicité stable, issu de [Bru12, théorème 4.3] :

Proposition 4.2.12. *On a des isomorphismes stables : $\Omega^4 P \simeq \Sigma^{12} P$*

La remarque 4.2.3 motive la définition suivante, présente dans [Bru12, définition 4.1], plus appropriée aux calculs :

Définition 4.2.13. On note $P_{n+1} = (\Omega^n \Sigma^{-n} P)^{red}$.

4.3. CALCULS EXPLICITES

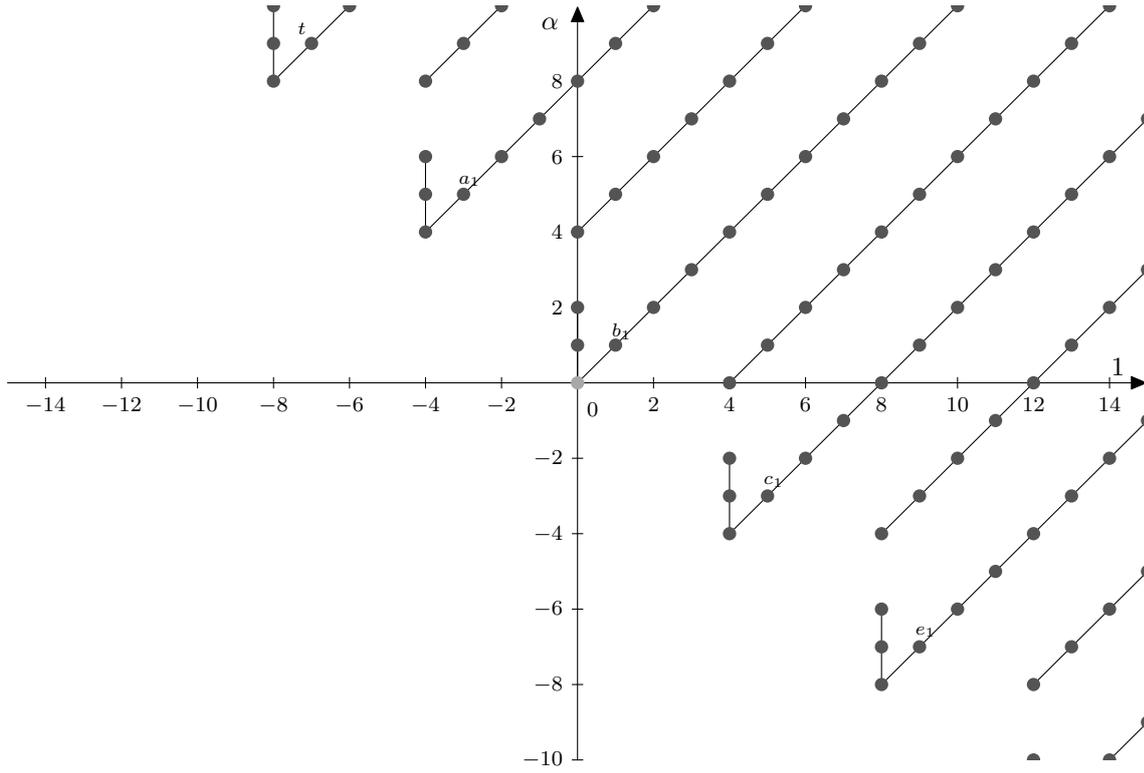


FIGURE 4.4 – Le $\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-4}]$ -module $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué HP^* . Les lignes verticales représentent la multiplication par la classe d'Euler a .

Lemme 4.3.3. *En tant que \mathbb{F}_2 -espace vectoriel, on a un isomorphisme*

$$H_{01}^*(RP_n) = \bigoplus_{i \geq 0} \Sigma^{i(1+\alpha)} soc(P_{n-i}) \oplus \bigoplus_{i \leq -2} \Sigma^{i(1+\alpha)-1} soc(P_{n-i}).$$

Démonstration. La proposition 4.2.7 et la définition 4.2.13 donnent l'identification suivante de $H_{01}^*(RP_n)$: pour $i \geq 0$, $H_{01}^{*+i\alpha}(RP_n) \cong \Sigma^{2i+i\alpha} soc(\Omega_r^{-i}(P_n)) \cong \Sigma^{2i+i\alpha} soc(\Sigma^{-i}(P_{n-i}))$, et pour $i \geq 2$, $H_{01}^{*-i\alpha}(RP_n) \cong \Sigma^{-2i-1-i\alpha} soc(\Omega_r^{-i}(P_n)) \cong \Sigma^{-2i-1-i\alpha} soc(\Sigma^{-i}(P_{n-i}))$, d'où le résultat. \square

Remarque 4.3.4. Par périodicité (proposition 4.2.12), et par définition de P_n (définition 4.2.13), le calcul de $soc(P_n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ ne dépend que de celui pour $0 \leq n \leq 3$ effectué au lemme 4.2.16.

Nous allons maintenant déterminer la structure de $\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-4}]$ -module de $H_{01}^*(RP_n)$, ce qui conclura la preuve de la proposition 4.3.2.

Démonstration de la proposition 4.3.2 . Les lemmes 4.3.3 et 4.2.16 impliquent qu'on a un isomorphisme de \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels

$$H_{01}^*(RP_n) = (\Sigma^{-n(1+\alpha)} HP^*)_{twist \geq 0} \oplus (\Sigma^{-n(1+\alpha)-1} HP^*)_{twist \leq -2}.$$

Pour déterminer la structure de $\mathbb{F}_2[a]$ -module sur cet espace vectoriel, on applique la proposition 4.2.8.

Pour des raisons de degrés, les seuls éléments susceptibles d'être dans $coker(a)$ dans la partie positive sont, via l'identification de la proposition 4.2.7, $1 \in soc(P_0)$ et $y^2 \in soc(P_3)$.

Pour la partie négative, les seuls éléments susceptibles d'être dans $im(a)$ sont, via l'identification de la proposition 4.2.7, $\sigma^2 1 \in \sigma^2(P_0/(Im_{Sq^2}(Ker_{Q_0}P_0)+Im_{Q_1}(Ker_{Q_0}P_0)))$ et $x^2 \in \sigma^2(P_1/(Im_{Sq^2}(Ker_{Q_0}P_1)+Im_{Q_1}(Ker_{Q_0}P_1)))$.

On a déjà calculé $H_{01}^*(RP_0)$ en tant qu'espace vectoriel, et il est clair à partir de la proposition 4.2.15, des identifications du lemme 4.1.41 et de la proposition 4.2.8 que $H_{01}^*(P_0[\sigma^{-1}] = \mathbb{F}_2[x^2][\sigma^{-1}]$ et que $H_{01}^*(\sigma^2 P_0[\sigma]) = \sigma^2 \mathbb{F}_2[x^2][\sigma]$.

Maintenant, les suites exactes courtes de la proposition 4.2.8 donnent un isomorphisme d'espaces vectoriels $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués $\Sigma^{-2} Ker_a(H_{01}^*(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} P_0)) \oplus Coker_a(H_{01}^*(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} P_0)) \cong \mathbb{F}_2[x^2][\sigma^{-1}]$. Par conséquent $1 \in soc(P_0)$ et $y^2 \in soc(P_3)$ sont bien dans $Coker(a)$ puisque ce sont les seuls éléments de $H_{01}^*(RP_0)$ dans le bon degré.

De même pour la partie négative, on a un isomorphisme de \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués $Ker_a(H_{01}^*(\sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes} P_0)) \oplus \Sigma^{-2} Coker_a(H_{01}^*(\sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes} P_0)) \cong \sigma^2 \mathbb{F}_2[x^2][\sigma]$, qui force les éléments $\sigma^2 1 \in \sigma^2(Ker_{Q_0}(P_0)/(im_{Sq^2}(Ker_{Q_0} P_0) + im_{Q_1}(Ker_{Q_0} P_0)))$ et $x^2 \in \sigma^2 Ker_{Q_0}(P_1)/(im_{Sq^2}(Ker_{Q_0} P_1) + im_{Q_1}(Ker_{Q_0}(P_1)))$ à être dans $im(a)$.

Pour terminer, on doit considérer l'action de σ^{-4} sur $H_{01}^*(RP_0)$. Considérons la suite exacte longue en H_{01}^* -homologie associée à la suite $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exacte courte

$$\sigma^{-4} \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} P_0 \hookrightarrow \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} P_0 \rightarrow \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} P_0 / (\sigma^{-4} \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} P_0).$$

On va montrer que $H_{01}^*(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} P_0)$ est un $\mathbb{F}_2[\sigma^{-4}]$ -module libre. Comme en chaque degré, le $\mathbb{F}_2[\sigma^{-4}]$ -module $H_{01}^*(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} P_0)$ est au plus de dimension 1, donc cela suffit à déterminer la structure de $\mathbb{F}_2[\sigma^{-4}]$ -module de $H_{01}^*(\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} P_0)$.

Pour ce faire, on va montrer que le bord de cette suite exacte longue est trivial. Il suffit de voir que pour tout $i \leq 3$, $j \geq 0$ et $m \in P_0$, $\beta_1(a^j \sigma^{-i} m) \notin (\sigma^{-4} \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-1}] \tilde{\otimes} P_0) - \{0\}$. Les formules de Cartan donnent :

$$\begin{aligned} \beta_1(a^j \sigma^{-i} m) &= a^j \beta_1(\sigma^{-i} m) + a^{j+1} \beta_0(\sigma^{-i}) \beta_0(x) + a^j \sigma^{-i} \beta_1(m) \\ &= a^j \beta_1(\sigma^{-i} m) + a^{j+1} \beta_0(\sigma^{-i}) Q_0(x) + a^{j+1} \sigma^{-i} Sq^2(m) + a^j \sigma^{-i-1} Q_1(m). \end{aligned}$$

Pour que $\beta_1(a^j \sigma^{-i} m)$ soit multiple de σ^{-4} , il faut que

- $\beta_1(\sigma^{-i}) = 0$, donc $i = 0$ ou $i = 1$,
- $a^{j+1} \beta_0(\sigma^{-i}) Q_0(x) + a^{j+1} \sigma^{-i} Sq^2(m) + a^j \sigma^{-i-1} Q_1(m)$ est un multiple de σ^{-4} .

Les deux points ne sont simultanément réalisés que si $\beta_1(a^j \sigma^{-i} m) = 0$. D'où le résultat pour la partie positive.

Pour $H_{01}^*(\sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes} P_0)$, considérons la suite exacte longue en H_{01}^* -homologie associée à la suite $(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))$ -exacte courte

$$K \hookrightarrow \sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes} P_0 \rightarrow \Sigma^{|\sigma^{-4}|} \sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes} P_0$$

où $K = Ker(P_0 \rightarrow \Sigma^{|\sigma^{-4}|} \sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes} P_0)$. Montrons que le bord de cette suite exacte longue est nul. Soit $\Sigma^{|\sigma^{-4}|} x$ un représentant d'une classe de $H_{01}^*(\Sigma^{|\sigma^{-4}|} \sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes} P_0)$. L'élément $\sigma^{-4} x \in \sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes} P_0$ est un relèvement de $\sigma^{-4} x$. Mais $\beta_1(\sigma^{-4} x) = \sigma^{-4} \beta_1(x) = 0$, d'où la surjectivité de la multiplication par σ^{-4} sur $H_{01}^*(\sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes} P_0)$. Pour des raisons de dimension, cette donnée suffit à déterminer complètement la structure de $\mathbb{F}_2[\sigma^{-4}]$ -module de $H_{01}^*(\sigma^2 \mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma] \tilde{\otimes} P_0)$.

Pour terminer avec P_0 , il suffit de constater que la structure de $\mathbb{F}_2[\sigma^{-4}]$ -module définie sur HP^* fait que la structure de $\mathbb{F}_2[\sigma^{-4}]$ -module induite sur $(\Sigma^{-n(1+\alpha)} HP^*)_{twist \geq 0} \oplus (\Sigma^{-n(1+\alpha)-1} HP^*)_{twist \leq -2}$ vérifie également les propriétés

- la multiplication par σ^{-4} sur $(\Sigma^{-n(1+\alpha)} HP^*)_{twist \geq 0}$ est injective,
- et la multiplication par σ^{-4} sur $(\Sigma^{-n(1+\alpha)-1} HP^*)_{twist \leq -2}$ est surjective.

On a donc montré le résultat pour P_0 . Pour conclure, le même résultat suit pour chaque P_i car en degrés $* + k\alpha$ pour k loin de 0, les isomorphismes de la proposition 4.2.7 se rassemblent en un isomorphisme de $\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-4}]$ -modules par le lemme 4.1.27 puisqu'ils sont induits par $H_{01}^* \circ R$ d'un morphisme de $\mathcal{A}^*(1)$ -module. \square

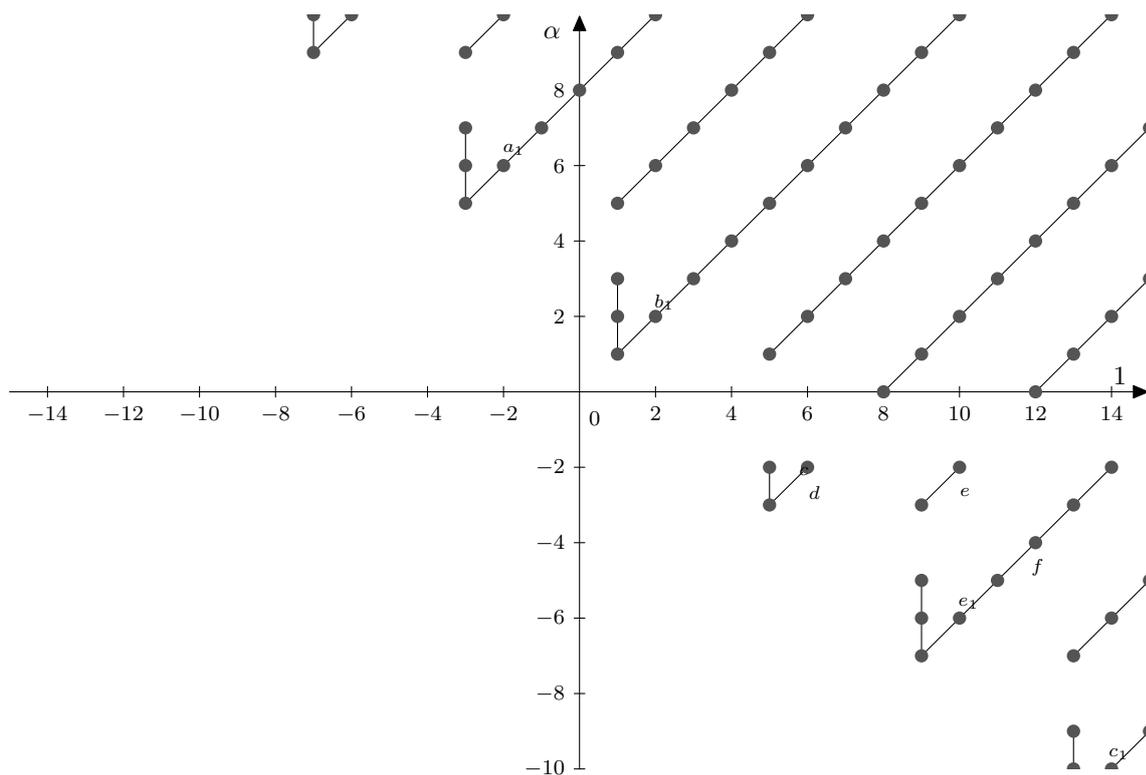


FIGURE 4.5 – Le $\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-4}]$ -module $H_{01}^*(H\mathbb{F}_2^*(B\mathbb{Z}/2))$.

Remarque 4.3.5. Il y a une similitude frappante entre la partie de $H_{01}^*(RP)$ en degrés $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{N}\alpha$ et $Ext_{\mathcal{A}^*(1)}^{(*,*)}(\mathbb{F}_2, P)$ (dont une représentation est donnée dans [BG10, figure A.9.17]). En fait, les deux figures sont identiques si on représente $Ext_{\mathcal{A}^*(1)}^{(*,*)}(\mathbb{F}_2, P)$ en tant que module $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradué, avec $Ext_{\mathcal{A}^*(1)}^{(s,t)}(\mathbb{F}_2, P)$ en degré $(2s-t)+s\alpha$. La raison en est que les deux foncteurs $H_{01}^*(R(-))$ et $Ext_{\mathcal{A}^*(1)}^{(*,*)}(\mathbb{F}_2, -)$ vérifient les propriétés suivantes sur les $\mathcal{A}^*(1)$ -modules Q_0 -acycliques :

1. ils envoient une suite exacte courte sur une suite exacte longue en homologie (mais le degré du morphisme de bord est $(1, 0)$ pour $Ext_{\mathcal{A}^*(1)}^{(*,*)}(\mathbb{F}_2, -)$ et $2 + \alpha$ pour $H_{01}^*(R(-))$) (proposition 4.1.29),
2. $Ext_{\mathcal{A}^*(1)}^{(0,*)}(\mathbb{F}_2, -) = Hom_{\mathcal{A}^*(1)}^*(\mathbb{F}_2, -) = soc$ et $H_{01}^*(R(-)) = soc$ par la proposition 4.2.7,
3. et pour $n \geq 1$, et F un $\mathcal{A}^*(1)$ -module libre, $Ext_{\mathcal{A}^*(1)}^{(n,*)}(\mathbb{F}_2, F) = 0 = H_{01}^{*+n\alpha}(R(F))$ (proposition 4.1.55).

Exemple 4.3.6. Le $\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-4}]$ -module $H_{01}^*(H\mathbb{F}_2^*(B\mathbb{Z}/2))$ est représenté à la figure 4.5.

Chapitre 5

La K -théorie

Les travaux [BG03], [BG10] et [Pow12] effectuent de calcul de ko et ku cohomologie des groupes. Les théories orthogonale et unitaire sont reliées par une suite exacte longue provenant de la suite cofibre

$$\mathbb{Z}/2_+ \rightarrow S^0 \rightarrow S^\alpha, \quad (5.1)$$

qui est de nature fondamentalement $\mathbb{Z}/2$ -équivariante [Ati66]. Il est donc naturel de se demander dans quelle mesure on peut raisonner dans le monde $\mathbb{Z}/2$ -équivariant tout au long du calcul.

Un intérêt de cette approche est, comme nous allons le voir plus loin, qu'elle calcule à la fois les cohomologies par rapport aux spectres $ko = k\mathbb{R}^{\mathbb{Z}/2}$, $ku = k\mathbb{R}^e$ ainsi que les suites réalification-complexification (la suite exacte longue classique, dérivée par Atiyah [Ati66] de la suite cofibre 5.1).

Nous allons effectuer des calculs d'estimation de $k\mathbb{R}$ -cohomologie des 2-groupes abéliens élémentaires, à l'aide d'une étude de la propriété de n -détection, pour $n \in \mathbb{N}$, qui n'est rien d'autre que la propriété de détection de [Pow12] dans le cas $n = 1$. Levons une petite ambiguïté : la $k\mathbb{R}$ -théorie d'un groupe G est par définition $k\mathbb{R}^*(BG)$, où BG est le classifiant de G avec une action triviale de $\mathbb{Z}/2$. Notre intérêt dans cette section se porte uniquement sur les 2-groupes abéliens élémentaires.

Dans la section 5.1 on utilise la suite spectrale des tranches de [HHR09], équivalente à la suite spectrale d'Atiyah-Hizebruch étudiée par [Dug03] pour effectuer le calcul de l'anneau de coefficients de la K -théorie réelle. Le résultat est énoncé en termes d'un foncteur de Green $\underline{k\mathbb{R}}_*$. Ce calcul est exploité pour montrer que le morphisme de $\mathbb{Z}/2$ -spectres $k\mathbb{R} \rightarrow K\mathbb{R}$ induit bien en cohomologies un morphisme naturel $k\mathbb{R}^* \rightarrow K\mathbb{R}^*$ qui coïncide avec $Id \rightarrow (-)[v_1^{\pm 1}]$ où v_1 désigne la classe de Bott réelle. Enfin, on montre quelques résultats de périodicité afin d'avoir une boîte à outils complète pour aborder l'étude de $k\mathbb{R}^*(BV)$, pour V un 2-groupe abélien élémentaire.

Dans la section 5.2, on se place dans le cadre général d'une catégorie triangulée \mathcal{C} . On y définit la propriété de h -détection de niveau n d'une tour d'objets de \mathcal{C} par rapport à un objet $X \in \mathcal{C}$. Dans le cas particulier où la tour étudiée est la tour des tranches de $K\mathbb{R}$, la propriété de h -détection à tout niveau pour un $\mathbb{Z}/2$ -spectre X est équivalente au fait que $tors_{v_1}(k\mathbb{R}^*(X)) = Ker_{v_1^h}(k\mathbb{R}^*(X))$. Après avoir montré quelques conséquences de la propriété de h -détection, on termine cette section par des outils permettant de démontrer cette propriété dans le cas $h = 1$ et $h = 2$, et on montre comment transférer les propriétés de détection le long des morphismes de tours.

On montre ensuite dans la section 5.3 que la tour des tranches de $K\mathbb{R}$ vérifie la propriété de 2-détection à tout niveau pour les $\mathbb{Z}/2$ -espaces BV , puis, dans la section 5.4, on donne une nouvelle démonstration de [Pow12, Theorem 10.1] à l'aide de cette propriété.

Par construction, v_1 est représenté par une application $S^{1+\alpha} \rightarrow k\mathbb{R}$ qui relève v (définition 1.5.7), c'est-à-dire que $v_1 = \sigma v \in k\mathbb{R}_*(\mathbb{Z}/2)$. Par conséquent, on a bien un isomorphisme de groupes abéliens $RO(\mathbb{Z}/2)$ -gradués $k\mathbb{R}_*(\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}[v_1][\sigma^{\pm 1}]$.

Mais par construction, v_1 est la classe d'homotopie d'une application $\mathbb{Z}/2$ -équivariante, donc l'action de $\mathbb{Z}/2$ est triviale sur cet élément. L'action de $\mathbb{Z}/2$ sur $k\mathbb{R}_*(\mathbb{Z}/2)$ est complètement identifiée par la structure d'algèbre, par le lemme 5.1.2. \square

Considérons la suite spectrale des tranches pour le $\mathbb{Z}/2$ -spectre $k\mathbb{R}$. Le lemme suivant donne tous les ingrédients nécessaires au calcul de la page E_∞ de cette suite spectrale. On rappelle le calcul de $H\underline{\mathbb{Z}}_*$, dont le résultat est donné à la figure 1.2, ainsi que les notations 1.2.20 et 1.1.11.

Lemme 5.1.4. *On a une suite spectrale tri-graduée de la forme :*

$$E_2^{s,V} = H\underline{\mathbb{Z}}_*[v_1] \Rightarrow k\mathbb{R}_{V-s}$$

où le degré sont $|a| = (1, 1 - \alpha)$, $|\sigma^{-2}| = (0, 2 - 2\alpha)$, $|x| = (0, -3 - 3\alpha)$ et $|v_1| = (0, 1 + \alpha)$. De plus, la seule différentielle non triviale est d_3 qui s'identifie avec β_1 , un relèvement entier de la première opération de Milnor $\mathbb{Z}/2$ -équivariante. Précisément, pour tout $n \geq 0$ et $h \in H\underline{\mathbb{Z}}_*$, $d_3(hv_1^n) = \beta_1(h)v_1^{n+1}$.

Démonstration. Dans la suite spectrale des tranches pour $k\mathbb{R}$, la première différentielle non triviale est d_3 puisque la tour des tranches de $k\mathbb{R}$ est concentrée en degrés pairs. De plus, cette différentielle s'identifie avec l'action du premier k -invariant de $k\mathbb{R}$, c'est-à-dire avec l'action d'un relèvement entier de β_1 , que nous noterons encore β_1 , sur $H\underline{\mathbb{Z}}_*$: $d_3(hv_1^n) = \beta_1(h)v_1^{n+1}$.

Par conséquent on a un isomorphisme

$$E_4 \cong \text{Ker}_{\beta_1}(H\underline{\mathbb{Z}}_*) \oplus v_1 \frac{\text{Ker}_{\beta_1}(H\underline{\mathbb{Z}}_*)}{\text{Im}_{\beta_1}(H\underline{\mathbb{Z}}_*)}.$$

La structure de $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_1)$ -module de $H\underline{\mathbb{F}}_{2*}$ est déterminée par le corollaire 2.3.17. Par construction, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} H\underline{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & H\underline{\mathbb{F}}_2 \\ \beta_1 \downarrow & & \downarrow \beta_1 \\ H\underline{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & H\underline{\mathbb{F}}_2 \end{array}$$

où les flèches horizontales sont la réduction modulo 2. Mais vu $H\underline{\mathbb{Z}}_*$, dans les seuls degrés $V \in RO(\mathbb{Z}/2)$ dans lesquels l'image de β_1 peut être non triviale, on a $H\underline{\mathbb{Z}}_V \cong H\underline{\mathbb{F}}_{2V}$, ce qui détermine l'action du relèvement β_1 sur $H\underline{\mathbb{Z}}_*$ en fonction de celle de β_1 sur $H\underline{\mathbb{F}}_{2*}$. In fine

$$\text{Ker}_{\beta_1}(H\underline{\mathbb{Z}}_*) = \mathbb{Z}[\sigma^{-4}, a]/(2a) \oplus 2\sigma^{-2}\mathbb{Z}[\sigma^{-4}] \oplus 2\sigma^2\mathbb{Z}[\sigma^2] \oplus \sigma^3\mathbb{F}_2[\sigma^4, a^{-1}]/(a^{-3}) \oplus \sigma^5\mathbb{F}_2[\sigma^4, a^{-1}]$$

représenté à la figure 5.1,

et

$$\frac{\text{Ker}_{\beta_1}(H\underline{\mathbb{Z}}_*)}{\text{Im}_{\beta_1}(H\underline{\mathbb{Z}}_*)} = \mathbb{Z}[\sigma^{-4}, a]/(2a, a^3) \oplus 2\sigma^{-2}\mathbb{Z}[\sigma^{-4}] \oplus \sigma^3\mathbb{F}_2[\sigma^4, a^{-1}]/(a^{-3}) \oplus 2\sigma^2\mathbb{Z}[\sigma^2].$$

représenté à la figure 5.2.

Vues les zones d'annulation des figures 5.1 et 5.2, aucune différentielle ne peut envoyer un élément de la partie en *twist* positif de $\text{Ker}_{\beta_1}(H\underline{\mathbb{Z}}_*)$ ou $\frac{\text{Ker}_{\beta_1}(H\underline{\mathbb{Z}}_*)}{\text{Im}_{\beta_1}(H\underline{\mathbb{Z}}_*)}$ vers celle de *twist* négatif de $\frac{\text{Ker}_{\beta_1}(H\underline{\mathbb{Z}}_*)}{\text{Im}_{\beta_1}(H\underline{\mathbb{Z}}_*)}$. Considérons donc le scindement de suites spectrales

$$E_4 \cong E_4^+ \oplus E_4^-$$

5.1. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES K-THÉORIES RÉELLES

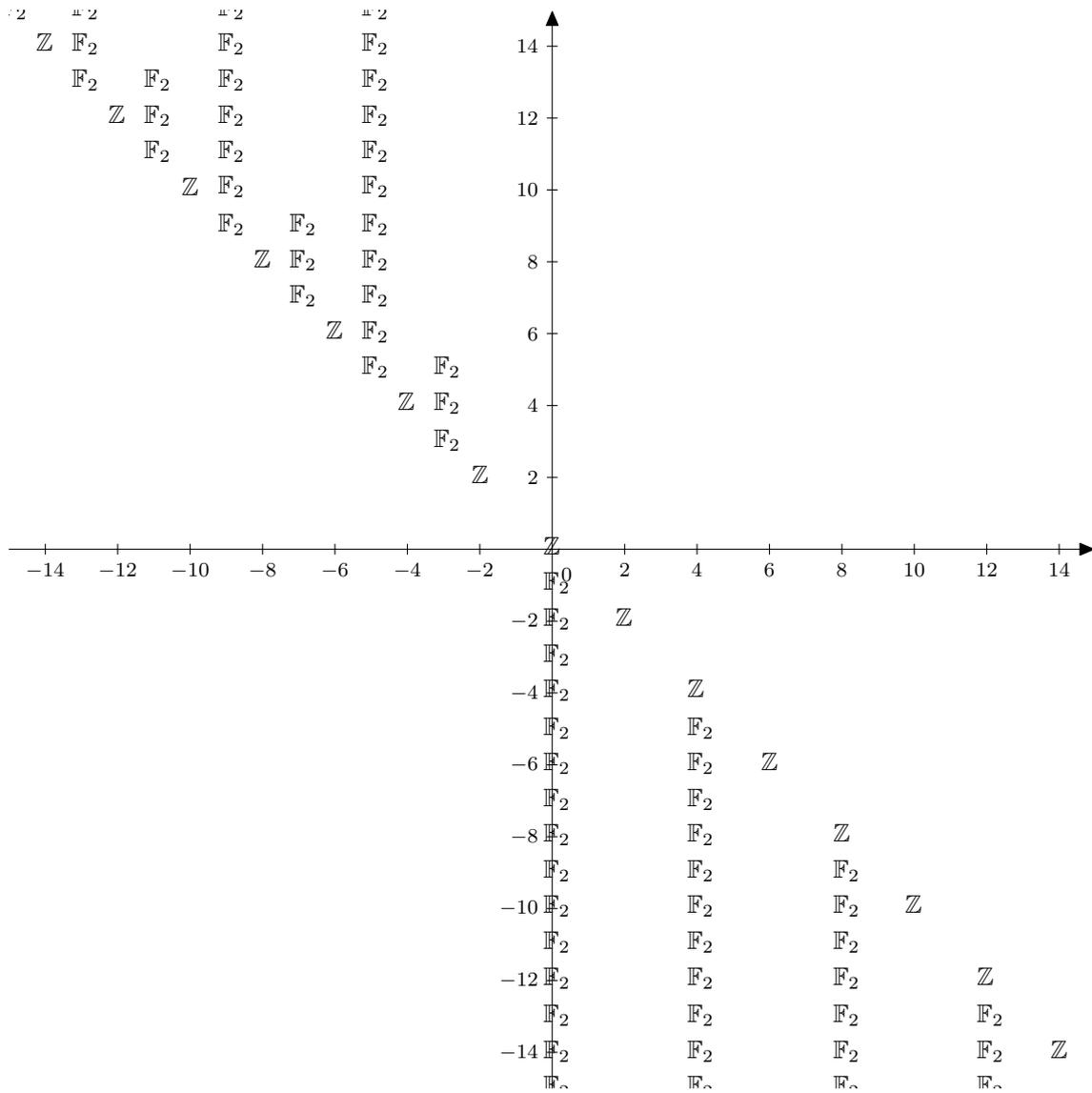


FIGURE 5.1 – Le $\mathbb{F}_2[a]$ -module $\text{Ker}_{\beta_1}(H\mathbb{Z}_*)$

où

$$E_4^+ = (\text{Ker}_{\beta_1}(H\mathbb{Z}_*))_{\text{twist} > 0} \oplus \left(\frac{\text{Ker}_{\beta_1}(H\mathbb{Z}_*)}{\text{Im}_{\beta_1}(H\mathbb{Z}_*)} \right)_{\text{twist} > 0} [v_1]$$

et

$$E_4^- = (\text{Ker}_{\beta_1}(H\mathbb{Z}_*))_{\text{twist} \leq 0} \oplus \left(\frac{\text{Ker}_{\beta_1}(H\mathbb{Z}_*)}{\text{Im}_{\beta_1}(H\mathbb{Z}_*)} \right)_{\text{twist} \leq 0} [v_1].$$

Sur E_4^- , aucune différentielle supérieure ne peut apparaître pour des raisons de degré. Sur E_4^+ , les éléments susceptibles d'être dans l'image d'une différentielle sont les $a^{-i} \sigma^{4k} v_1^n$, pour $n, k \geq 0$ et $i \in \{0, 1, 2\}$. Montrons que ce sont des cycles permanents. Comme la suite spectrale des tranches est une suite spectrale de $\mathbb{Z}[a]$ -modules, il suffit de voir que $\sigma^{4k} v_1^n$ est un cycle permanent.

Le lemme 5.1.3 donne déjà $k\mathbb{R}_*(\mathbb{Z}/2)$. Soit \star le degré d'un des éléments de la forme $\sigma^{4k} v_1^n$ concernés.

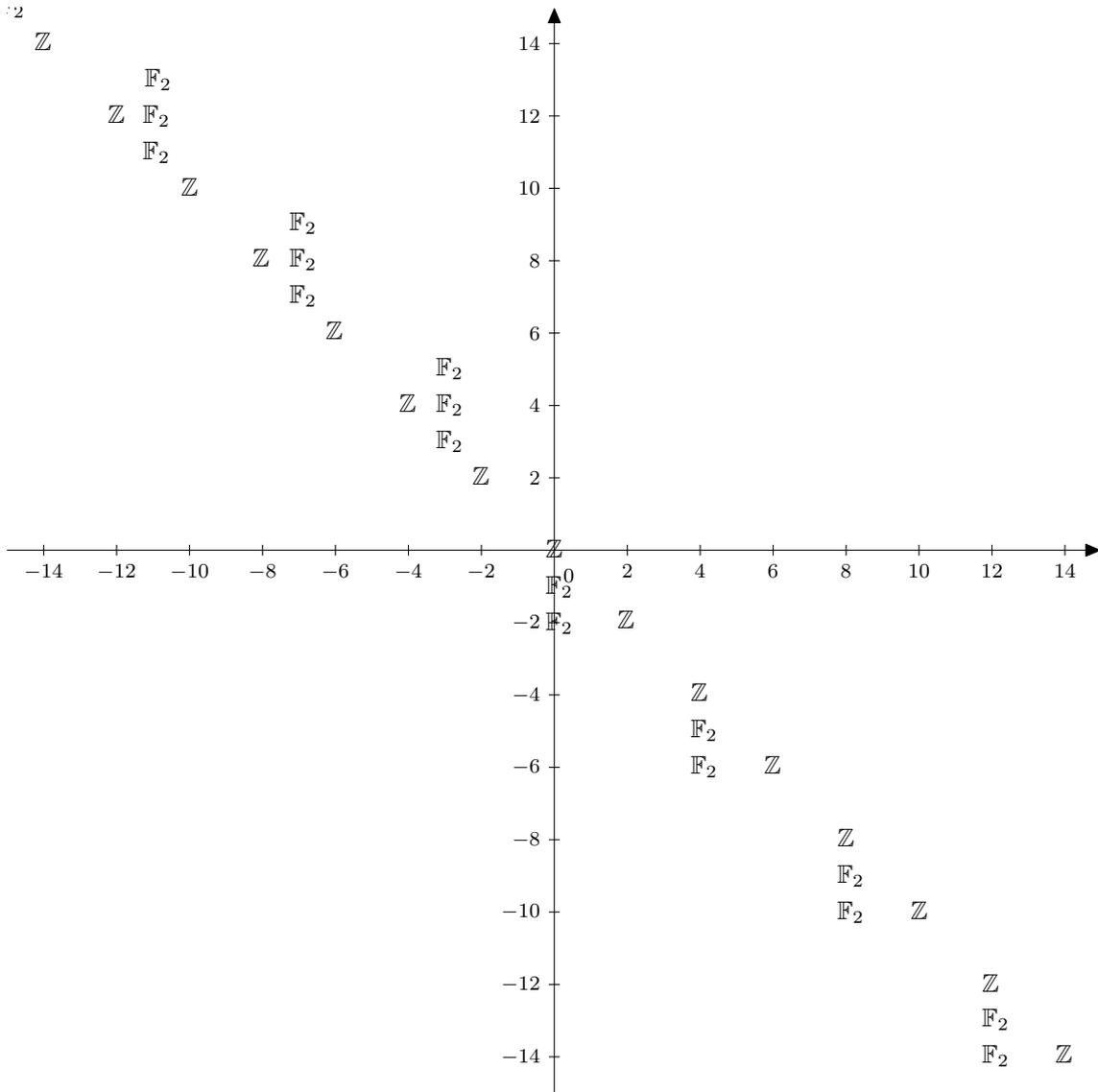


FIGURE 5.2 – Le $\mathbb{F}_2[a]$ -module $\frac{Ker_{\beta_1}(H\mathbb{Z}_*)}{Im_{\beta_1}(H\mathbb{Z}_*)}$

En ce degré, le foncteur de Mackey $k\mathbb{R}_*$ est de la forme :

$$\begin{array}{c} k\mathbb{R}_* \\ \updownarrow \\ \mathbb{Z} \\ \updownarrow \\ \mathbb{Z} \end{array}$$

Mais la composée de la restriction avec le transfert sur le générateur $\sigma^{4k}v_1^n$ de $k\mathbb{R}_*(\mathbb{Z}/2/\{e\}) = ku_*^u = \mathbb{Z}$ est $2\sigma^{4k}v_1^n$ (la trace de l'action de $\mathbb{Z}/2$). Par conséquent \mathbb{Z} s'injecte dans $k\mathbb{R}_*$. Les éléments $\sigma^{4k}v_1^n \in k\mathbb{R}_*$ sont donc des cycles permanents, et la suite spectrale s'effondre à la page E_4 . \square

Remarque 5.1.5. En particulier, on a des éléments v_1 en degré $(1 + \alpha)$, a en degré $-\alpha$ et σ^{-4} en degré $(4 - 4\alpha)$.

La figure 5.3 représente la page E_∞ de la suite spectrale.

$a^{-2}\sigma^{4(k-1)}v_1^{l-1}$ ne peut être multiple de a . Par le lemme 1.1.53 point 4., l'élément correspondant dans $k\mathbb{R}_*$ est donc sans torsion. Par conséquent, l'extension est non-triviale en ce degré, et est

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_2.$$

La deuxième famille de degrés où on pourrait avoir une extension non-triviale $1 - \alpha + k(4 - 4\alpha) + n(1 + \alpha) = |\sigma^{-1-4k}v_1^n| = |a^2\sigma^{-4k}v_1^{n-1}|$ pour $n \geq 1$ et $k \geq 0$. Mais $a^2\sigma^{-4k}v_1^{n-1}$ est dans $\text{Ker}(a)$, et donc par le lemme 1.1.53, cet élément est dans l'image du transfert. En ce degré, $k\mathbb{R}_*(\mathbb{Z}/2/\{e\}) \cong \mathbb{Z}$ avec une action triviale de $\mathbb{Z}/2$ par le lemme 5.1.3, et la trace de $1 \in \mathbb{Z}$ est 2. Par conséquent, l'image de $a^2\sigma^{-4k}v_1^{n-1}$ dans $k\mathbb{R}_*(\mathbb{Z}/2/\{e\})$ par la restriction est non triviale, et donc $k\mathbb{R}_* \cong \mathbb{Z}$ en ce degré, l'extension correspondante de la page E_∞ est

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_2.$$

□

On rappelle la définition 1.1.46 de la structure monoidale symétrique \square sur la catégorie des foncteurs de Mackey.

Proposition 5.1.8. *Le foncteur de Mackey $k\mathbb{R}_*$ est*

$$\begin{array}{c} \frac{\mathbb{Z}[v_1, a, \sigma^{-4}, 2\sigma^{-2}]}{(2a, a^3v_1)} \oplus \left(2\sigma^2\mathbb{Z}[\sigma^2] \oplus v_1 \frac{\mathbb{Z}[\sigma^4, a, 2\sigma^2]}{(2a, a^3)} \oplus y\mathbb{F}_2[a^{-1}, \sigma^4] \right) \\ \rho \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right) \tau \\ \mathbb{Z}[v_1][\sigma^{\pm 1}] \\ \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ (-) \end{array} \end{array}$$

où $|y| = -5 + 5\alpha$, et la restriction et le transfert sont déterminés par

$$\begin{array}{ll} \rho : k\mathbb{R}_* & \rightarrow \mathbb{Z}[v_1][\sigma^{\pm 1}] \\ \sigma^{-4k}v_1^n & \mapsto \sigma^{-4k}v_1^n \text{ pour } k \geq 0 \\ \sigma^{4k}v_1^{n+1} & \mapsto \sigma^{4k}v_1^{n+1} \text{ si } k \geq 0, n \geq 0 \\ \sigma^{4k} & \mapsto 2\sigma^{4k} \text{ pour } k \geq 0 \\ \sigma^{2+4k}v_1^n & \mapsto 2\sigma^{2+4k}v_1^n \text{ pour } k \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ll} \tau : \mathbb{Z}[v_1][\sigma^{\pm 1}] & \rightarrow k\mathbb{R}_* \\ \sigma^{-4k}v_1^n & \mapsto 2\sigma^{-4k}v_1^n \text{ pour } k \geq 0 \\ \sigma^{4k}v_1^{n+1} & \mapsto 2\sigma^{4k}v_1^{n+1} \text{ si } k \geq 0, n \geq 0 \\ \sigma^{4k} & \mapsto \sigma^{4k} \text{ pour } k \geq 0 \\ \sigma^{2+4k}v_1^n & \mapsto \sigma^{2+4k}v_1^n \text{ pour } k \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \\ a^2\sigma^{4k}v_1^{n+1} & \mapsto \sigma^{4k-1}v_1^n \text{ si } k \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \\ y\sigma^{4k} & \mapsto \sigma^{4k+5} \end{array}$$

Une représentation du foncteur de Mackey $k\mathbb{R}_*$ est donnée figure 5.4.

De plus, le produit du $\mathbb{Z}/2$ -spectre en anneau $k\mathbb{R}$ induit un morphisme

$$k\mathbb{R}_* \square k\mathbb{R}_* \rightarrow k\mathbb{R}_*.$$

qui s'identifie avec

$$\begin{array}{ccc}
 (k\mathbb{R}_\star \otimes k\mathbb{R}_\star \oplus \underline{k\mathbb{R}_\star}(\mathbb{Z}/2) \otimes \underline{k\mathbb{R}_\star}(\mathbb{Z}/2)) / \cong & \xrightarrow{\mu + \mu(\tau \otimes \tau)} & k\mathbb{R}_\star \\
 \uparrow \downarrow & & \uparrow \downarrow \\
 \underline{k\mathbb{R}_\star}(\mathbb{Z}/2) \otimes \underline{k\mathbb{R}_\star}(\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\mu_{\mathbb{Z}/2}} & \underline{k\mathbb{R}_\star}(\mathbb{Z}/2) \\
 \underbrace{\quad \quad \quad}_{(-)} & & \underbrace{\quad \quad \quad}_{(-)}
 \end{array}$$

où \cong est la relation d'équivalence $x_{\mathbb{Z}/2} \otimes \tau y_e \cong \rho x_{\mathbb{Z}/2} \otimes y_e$ et $\tau x_e \otimes y_{\mathbb{Z}/2} \cong x_e \otimes \rho y_{\mathbb{Z}/2}$ pour $x_H, y_H \in \underline{k\mathbb{R}_\star}(\mathbb{Z}/2/H)$, et $\mu : k\mathbb{R}_\star \otimes k\mathbb{R}_\star \rightarrow k\mathbb{R}_\star$ est le produit déterminé au lemme 5.1.7, et $\mu_{\mathbb{Z}/2}$ le produit sur $\underline{k\mathbb{R}_\star}(\mathbb{Z}/2)$ déterminé au lemme 5.1.3.

Démonstration. On utilise le lemme 1.1.53 pour déterminer restriction et transfert dans les degrés où $\underline{k\mathbb{R}_\star}(\mathbb{Z}/2)$ est non trivial. Les points 1. et 2. de ce lemme permettent de conclure.

Le résultat sur la structure multiplicative de $k\mathbb{R}_\star$ est énoncé en toute généralité par Hill-Hopkins-Ravenel en [HHR09, paragraphe 4.7]. Le deuxième point est l'objet du lemme 5.1.3.

Enfin, la proposition 1.3 de [Lew88] donne précisément le fait que le morphisme

$$k\mathbb{R}_\star \square k\mathbb{R}_\star \rightarrow k\mathbb{R}_\star$$

est déterminé de cette façon par μ et $\mu_{\mathbb{Z}/2}$. □

Remarque 5.1.9. On peut comparer le résultat obtenu en tant que foncteur de Mackey au résultat de Bruner et Greenlees [BG03, figure 3.7.3].

5.1.2 Conséquences de la structure de l'anneau de coefficients et périodicités

Nous allons démontrer quelques propriétés de $k\mathbb{R}$ à l'aide du calcul de $\underline{k\mathbb{R}_\star}$ effectué dans la section précédente. Les résultats présents ici sont soit présents dans [BG03] ou [Ati66], soit de petites généralisations de résultats provenant de ces références.

La première conséquence de la structure de l'anneau de coefficients est l'identification du morphisme induit par $k\mathbb{R} \rightarrow K\mathbb{R}$ en cohomologie pour les $\mathbb{Z}/2$ -spectres connexes.

Proposition 5.1.10. *Soient $N \in \mathbb{Z}$ et X un $\mathbb{Z}/2$ -spectre N -connexe (i.e. le foncteur de Mackey $\pi_n(X) = 0$ pour $n < N$). Alors le morphisme*

$$k\mathbb{R}^\star(X)[v_1^{-1}] \rightarrow K\mathbb{R}^\star(X)$$

induit par $k\mathbb{R} \rightarrow K\mathbb{R}$ est un isomorphisme.

Avant de passer à la preuve, nous avons besoin de quelques résultats.

Proposition 5.1.11. *(Atiyah) On a une équivalence faible $K\mathbb{R} \cong \Sigma^{1+\alpha} K\mathbb{R}$.*

Démonstration. Par définition du spectre $K\mathbb{R}$ (définition 1.5.3). □

La preuve de la proposition 5.1.10 repose sur le lemme suivant.

Lemme 5.1.12. *Soit N un entier. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $\mathbb{Z}/2$ -spectre N -connexe X , pour tout $\star \in RO(\mathbb{Z}/2)$ et $n \geq n_0$, $k\mathbb{R}^{\star-n(1+\alpha)}(X) = 0$.*

Démonstration. Supposons sans perte de généralité que X est un $\mathbb{Z}/2$ -CW-complexe. Par la théorie d'obstruction $\mathbb{Z}/2$ -équivariante (voir [May96, section I.5]), comme X est N -connexe, on peut également supposer qu'il existe une décomposition de X en cellules de $\{S^k, \mathbb{Z}/2_+ \wedge S^k | k \geq N+1\}$.

Alors la suite spectrale associée à la filtration squelettique de X ramène le problème au cas d'une unique sphère de dimension k , pour $k \geq N$. L'identification $k\mathbb{R}^\star(\mathbb{Z}/2_+ \wedge S^k) = ku^{\dim(\star)}(S^k) = ku^{\dim(\star)-k}$ et $k\mathbb{R}^\star(S^k) = k\mathbb{R}^{\star-k}$ (calculé juste avant, voir fig. 5.4) montre que pour tout $\star \in RO(\mathbb{Z}/2)$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

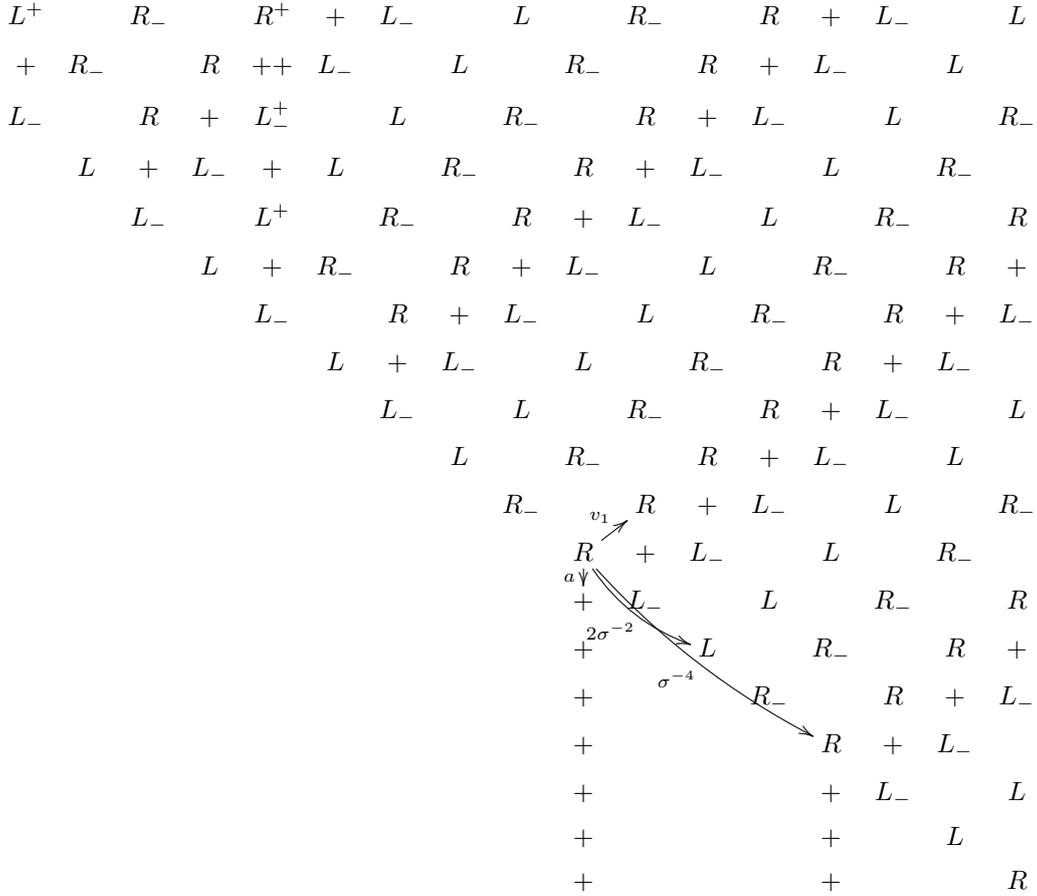


FIGURE 5.4 – Le foncteur de Mackey $\underline{k}\mathbb{R}_*$, les morphismes de foncteur de Mackey induits par la multiplication par a , $2\sigma^{-2}$, σ^{-4} et v_1 sont induits par la structure de foncteur de Green, déterminée à la proposition 5.1.8

1. $\underline{k}\mathbb{R}^{*-n(1+\alpha)}(S^k) = 0$
2. et $\underline{k}\mathbb{R}^{*-n(1+\alpha)}(S^k)(\mathbb{Z}/2/\{e\}) = 0$.

□

Démonstration de la proposition 5.1.10. Par la proposition 5.1.11, la multiplication par la classe v_1 induit un isomorphisme de spectres $\Sigma^{1+\alpha}K\mathbb{R} \cong K\mathbb{R}$, d'où une flèche $k\mathbb{R}^*(X)[v_1^{-1}] \rightarrow K\mathbb{R}^*(X)$ induite par $k\mathbb{R} \rightarrow K\mathbb{R}$. Par la proposition 1.5.8, il est clair que sur les sphères S^n et $\mathbb{Z}/2_+ \wedge S^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme induit est un isomorphisme. On sait que $K\mathbb{R}^*(-)$ définit une théorie de cohomologie. Montrons qu'il en va de même pour $k\mathbb{R}^*(-)[v_1^{-1}]$. Ce foncteur est un foncteur homotopique exact, il reste à montrer qu'il vérifie l'axiome d'additivité pour les espaces. Nous allons même voir que c'est vrai pour la sous-catégorie pleine des $\mathbb{Z}/2$ -spectres constituée des $\mathbb{Z}/2$ -spectres N -connexes, pour $N \in \mathbb{Z}$.

Soit donc X_i , $i \in I$ une famille de spectres N -connexes. Par le lemme 5.1.12, le critère de Mittag-Leffler est vérifié pour la limite des $k\mathbb{R}^*(X_i)[v_1^{-1}] = \text{colim}_{k \rightarrow \infty} k\mathbb{R}^{*-k(1+\alpha)}(X_i)$, ce qui assure que le morphisme

$$k\mathbb{R}^*(\bigvee X_i)[v_1^{-1}] \rightarrow \prod k\mathbb{R}^*(X_i)[v_1^{-1}]$$

est bien un isomorphisme.

□

Remarque 5.1.13. Cette proposition est une généralisation $\mathbb{Z}/2$ -équivariante au $\mathbb{Z}/2$ -spectre $k\mathbb{R}$ du Lemme 1.1.1 de [BG03], qui concerne le spectre ku . Il y a deux différences essentielles :

- les sphères intervenant sont de deux natures différentes, ce qui fait apparaître $k\mathbb{R}^*$ et ku^* ,

5.1. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES K-THÉORIES RÉELLES

- on n'a pas une ligne d'annulation globale de $k\mathbb{R}^*$ ne dépendant que de $\dim(\star)$, mais en chaque degré un certain rang à partir duquel $k\mathbb{R}^{\star-i(1+\alpha)}(X)$ est trivial.

Corollaire 5.1.14. *Soit V un 2-groupe abélien élémentaire. Alors, le noyau de la flèche*

$$k\mathbb{R}^*(BV) \rightarrow K\mathbb{R}^*(BV)$$

s'identifie avec $\text{tors}_{v_1}(k\mathbb{R}^(BV))$, le sous-module de v_1 -torsion de $k\mathbb{R}^*(BV)$. De plus, son image s'identifie à la v_1 -cotorsion, $\text{cotors}_{v_1}(k\mathbb{R}^*(BV))$.*

Démonstration. On utilise le fait que BV est un $\mathbb{Z}/2$ -spectre 0-connexe et la proposition 5.1.10. \square

Identifions maintenant les points fixes géométriques du $\mathbb{Z}/2$ -spectre $k\mathbb{R}$. Ce résultat provient de [BG10, Corollaire 3.6.2].

Notation 5.1.15. On note $i_*H\mathbb{F}_2$ le spectre obtenu en étendant au $\mathbb{Z}/2$ -univers complet le $\mathbb{Z}/2$ -spectre $H\mathbb{F}_2$ muni de l'action triviale de $\mathbb{Z}/2$.

Lemme 5.1.16. *On a un isomorphisme $\pi_*(\widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge i_*H\mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[a^{\pm 1}]$. En particulier, on a une équivalence faible de $\mathbb{Z}/2$ -spectres $\widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge i_*H\mathbb{F}_2 \cong H < \mathbb{F}_2 >$.*

Démonstration. Le calcul de $\pi_*(i_*H\mathbb{F}_2)$ fait dans [HK01, p.361] implique la première assertion, car

$$\pi_*(\widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge i_*H\mathbb{F}_2) \cong \text{colim}_n \pi_{*-n}(i_*H\mathbb{F}_2),$$

où la colimite est prise le long des morphismes induits par la multiplication par la classe d'Euler a . Pour la seconde assertion, le calcul précédent donne en particulier que

$$\pi_n(\widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge i_*H\mathbb{F}_2) = \begin{cases} < \mathbb{F}_2 > & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

Le résultat suit de la propriété universelle de $H < \mathbb{F}_2 >$ donnée dans la proposition 1.2.2. \square

Proposition 5.1.17. *On a une équivalence faible*

$$\widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge k\mathbb{R} \cong \bigvee_{k=0}^{\infty} \Sigma^{4k} \widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge i_*H\mathbb{F}_2.$$

En particulier, $\Phi^{\mathbb{Z}/2}(k\mathbb{R}) \cong \bigvee_{k=0}^{\infty} \Sigma^{4k} H\mathbb{F}_2$.

Démonstration. Le morphisme $p_{k\mathbb{R}}^0 : k\mathbb{R} \rightarrow P^0(k\mathbb{R})$ issu de la notation 1.3.5 s'identifie, par la proposition 1.5.9 à un morphisme de $\mathbb{Z}/2$ -spectres $k\mathbb{R} \rightarrow H\mathbb{Z}$. En appliquant le foncteur $\widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge (-)$, on obtient un morphisme

$$\widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge k\mathbb{R} \rightarrow \widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge H\mathbb{Z} \cong \bigvee_{i=0}^{\infty} \Sigma^{2i} \widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge H\mathbb{F}_2$$

où la dernière identification provient de notre calcul de $H\mathbb{Z}^*$.

En composant avec la projection

$$\bigvee_{i=0}^{\infty} \Sigma^{2i} \widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge H\mathbb{F}_2 \rightarrow \bigvee_{i=0}^{\infty} \Sigma^{4i} \widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge H\mathbb{F}_2,$$

on obtient un morphisme

$$\phi : \widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge k\mathbb{R} \rightarrow \bigvee_{k=0}^{\infty} \Sigma^{4k} \widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge i_*H\mathbb{F}_2.$$

Le morphisme $p_{k\mathbb{R}}^0 : k\mathbb{R} \rightarrow H\mathbb{Z}$ induit le morphisme de bord de la suite spectrale des tranches en homotopie. Par conséquent, le calcul de l'aboutissant de la suite spectrale des tranches représenté figure 5.3 montre que $\pi_*(\phi)$ est un isomorphisme. Mais les spectres non-équivariants sous-jacents à la source et au but de ϕ sont contractiles. Par conséquent ϕ induit un isomorphisme en homotopie, c'est donc une équivalence faible. \square

Corollaire 5.1.18. *La suite cofibre obtenue en appliquant le foncteur exact $\widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge (-)$ à la suite cofibre de la tour des tranches*

$$k\mathbb{R} \rightarrow H\mathbb{Z} \rightarrow \Sigma^{2+\alpha}k\mathbb{R}$$

est la suite scindée

$$\bigvee_{k=0}^{\infty} \Sigma^{4k} \widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge i_* H\mathbb{F}_2 \rightarrow \bigvee_{k=0}^{\infty} \Sigma^{2k} \widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge i_* H\mathbb{F}_2 \rightarrow \bigvee_{k=0}^{\infty} \Sigma^{4k+2} \widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge i_* H\mathbb{F}_2.$$

Démonstration. Par la proposition 5.1.17, la suite cofibre a bien cette forme. Maintenant $\pi_*(\bigvee_{k=0}^{\infty} \Sigma^{4k} \widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge i_* H\mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[\sigma^{-2}, a^{\pm 1}]$, donc pour des raisons de degrés, son bord est nul. Elle est donc scindée. \square

Nous allons maintenant étudier les propriétés de périodicité pour les spectres $k\mathbb{R}$ et $K\mathbb{R}$ utiles pour la suite. Ces résultats utilisent le calcul de l'anneau de coefficients de $k\mathbb{R}$ fait la sous-section 5.1.1. Commençons par considérer le $\mathbb{Z}/2$ -spectre $k\mathbb{R}$. Bien que $k\mathbb{R}_*$ n'ait aucun élément de périodicité, il a tout de même la propriété suivante.

Proposition 5.1.19. *On a une suite cofibre de la forme*

$$\Sigma^4 k\mathbb{R} \rightarrow \Sigma^{4\alpha} k\mathbb{R} \rightarrow E\widetilde{\mathbb{Z}/2} \wedge i_* H\mathbb{F}_2$$

où la première flèche est induite par l'élément $\sigma^{-4} \in k\mathbb{R}_{4-4\alpha}$.

Démonstration. Le calcul de l'anneau de coefficients de $k\mathbb{R}$ effectué à la sous-section 5.1.1 implique que l'homotopie de la cofibre est $\langle \mathbb{Z}/2 \rangle [a^{\pm 1}]$. C'est donc le spectre d'Eilenberg-MacLane $H \langle \mathbb{Z}/2 \rangle = E\widetilde{\mathbb{Z}/2} \wedge i_* H\mathbb{F}_2$, par le lemme 5.1.16. \square

La proposition 1.5.8 fournit une équivalence faible $K\mathbb{R} \cong k\mathbb{R}[v_1^{\pm 1}]$, les théorèmes précédents impliquent des résultats de périodicité pour $K\mathbb{R}$. C'est ce que nous allons voir maintenant.

Proposition 5.1.20. (Atiyah) *On a une équivalence faible $\Sigma^{4-4\alpha} K\mathbb{R} \cong K\mathbb{R}$ réalisé par le morphisme de multiplication par l'élément σ^{-4} .*

Démonstration. C'est une conséquence de la définition de $K\mathbb{R}$ et de la proposition 5.1.19. \square

Remarque 5.1.21. Les propositions 5.1.11 et 5.1.20 montrent un résultat amusant : la 8-périodicité de KO^* n'est qu'une trace de la $1 + \alpha$ -périodicité et $4 - 4\alpha$ -périodicité de $K\mathbb{R}$. En effet,

$$\begin{aligned} \Sigma^8 K\mathbb{R} &\cong \Sigma^{*+4+4\alpha} K\mathbb{R} \\ &\cong K\mathbb{R}. \end{aligned}$$

En particulier, pour X un $\mathbb{Z}/2$ -spectre trivial,

$$\begin{aligned} KO^{*+8}(X) &\cong K\mathbb{R}^{*+8}(X) \\ &\cong K\mathbb{R}^*(X) \\ &\cong KO^*(X). \end{aligned}$$

Cette 8-périodicité de $K\mathbb{R}$ a une conséquence sur les suspensions du spectre $k\mathbb{R}$. On rappelle la notation $k\mathbb{R} \langle n \rangle$ pour le n -ième $\mathbb{Z}/2$ -spectre dans la tour de Postnikov $\mathbb{Z}/2$ -équivariante pour $k\mathbb{R}$.

Proposition 5.1.22. *Le spectre $k\mathbb{R}$ est 8-périodique, dans le sens où $\Sigma^8 k\mathbb{R} \cong k\mathbb{R} \langle 8 \rangle$.*

Démonstration. Par définition de la tour de Postnikov, $k\mathbb{R} \langle 8 \rangle = K\mathbb{R} \langle 8 \rangle = \Sigma^8((\Sigma^{-8} K\mathbb{R}) \langle 0 \rangle)$. Mais $\Sigma^{-8} K\mathbb{R} = K\mathbb{R}$, donc la dernière expression est bien $\Sigma^8(K\mathbb{R} \langle 0 \rangle) = \Sigma^8 k\mathbb{R}$. \square

5.2 Détection

5.2.1 Le principe de détection

Commençons par rappeler la définition de détection introduite [Pow12]. Pour cette section, on considère une catégorie triangulée \mathcal{C} .

Soit k_\bullet une tour au-dessus de K dans la catégorie \mathcal{C} . On note C_{n-1} la cofibre des morphismes $k_n \rightarrow k_{n-1}$. On utilisera de plus les notations indiquées dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \\
 \downarrow & & \\
 k_n & \xrightarrow{c_n} & C_n \\
 \downarrow e_n & \swarrow \delta_{n-1} & \uparrow \theta_{n-1} \\
 k_{n-1} & \xrightarrow{c_{n-1}} & C_{n-1} \\
 \downarrow e_{n-1} & \swarrow \delta_{n-2} & \uparrow \theta_{n-2} \\
 k_{n-2} & \xrightarrow{c_{n-2}} & C_{n-2} \\
 \downarrow e_{n-2} & & \\
 \vdots & &
 \end{array}$$

On appelle de plus f_n les morphismes $k_n \rightarrow K$.

Notation 5.2.1. 1. Pour $X, Y \in \mathcal{C}$, on note $Y^*(X) = [X, Y]$,

2. une tour k_\bullet au-dessus de K définit une filtration décroissante de $K^*(X)$, et on note $\Phi_n(K^*(X)) = \text{Im}(k_n^*(X) \xrightarrow{f_n^*} K^*(X))$,

3. on pose également $T_n = \text{Ker}(k_n^*(X) \xrightarrow{f_n^*} K^*(X))$,

4. enfin, on notera simplement $e_n T_n$ le sous-module $\text{Im}(e_n : T_n \rightarrow T_{n-1})$ et $\text{co}T_n = \text{coker}(e_n : T_n \rightarrow T_{n-1})$.

Définition 5.2.2. Soit $X \in \mathcal{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On dit que la tour k_\bullet a la propriété de h -détection de niveau n pour X si le morphisme $T_n \subset k_n^*(X) \rightarrow \text{coker}(k_{n+h}^*(X) \xrightarrow{e_{n+1} \cdots e_{n+h}} k_n^*(X))$ est injectif.

Proposition 5.2.3. Soit $h \geq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$. Si k_\bullet vérifie la propriété de h -détection de niveau n , alors elle vérifie la propriété de $(h+1)$ -détection de niveau n .

Démonstration. Par hypothèse, k_\bullet vérifie la propriété de h -détection de niveau n , i.e. le morphisme $T_n \subset k_n^*(X) \rightarrow \text{coker}(k_{n+h}^*(X) \xrightarrow{e_{n+1} \cdots e_{n+h}} k_n^*(X))$ est injectif. Autrement dit $T_n \cap \text{Im}(k_{n+h}^*(X) \xrightarrow{e_{n+1} \cdots e_{n+h}} k_n^*(X)) = 0$. Mais $\text{Im}(k_{n+h+1}^*(X) \xrightarrow{e_{n+1} \cdots e_{n+h+1}} k_n^*(X)) \subset \text{Im}(k_{n+h}^*(X) \xrightarrow{e_{n+1} \cdots e_{n+h}} k_n^*(X))$, donc $T_n \cap \text{Im}(k_{n+h+1}^*(X) \xrightarrow{e_{n+1} \cdots e_{n+h+1}} k_n^*(X)) = 0$, et donc le morphisme $T_n \subset k_n^*(X) \rightarrow \text{coker}(k_{n+h+1}^*(X) \xrightarrow{e_{n+1} \cdots e_{n+h+1}} k_n^*(X))$ est injectif. \square

Proposition 5.2.4. 1. La tour k_\bullet vérifie la propriété de h -détection de niveau n pour X si et seulement si le morphisme

$$k_n^*(X) \rightarrow K^*(X) \oplus \text{Cofibre}(k_{n+h} \xrightarrow{e_{n+1} \cdots e_{n+h}} k_n)^*(X)$$

est un monomorphisme.

2. En particulier, une condition équivalente à la propriété de 1-détection de niveau n est : le morphisme

$$k_n^*(X) \rightarrow K^*(X) \oplus C_n^*(X)$$

induit par f_n et δ_n est un monomorphisme.

Démonstration. La suite exacte longue associée à la suite cofibre

$$k_{n+h} \xrightarrow{e_{n+1} \cdots e_{n+h}} k_n \rightarrow \text{Cofibre}(k_{n+h} \xrightarrow{e_{n+1} \cdots e_{n+h}} k_n)$$

fournit une injection

$$\text{Cofibre}(k_{n+h}^*(X) \xrightarrow{(e_{n+1} \cdots e_{n+h})^*} k_n^*(X)) \hookrightarrow \text{Cofibre}(k_{n+h} \xrightarrow{e_{n+1} \cdots e_{n+h}} k_n)^*(X),$$

le résultat suit. Le second point est un cas particulier du premier. \square

Remarque 5.2.5.

Par le point 2 de la proposition 5.2.4, la propriété de 1-détection est équivalente à la propriété de détection définie dans [Pow12, définition 2.2]. Par conséquent, des exemples de tours vérifiant une propriété de détection sont fournies par certaines tours issues des tours de Postnikov des K -théories ku et ko , par rapport aux spectres BV , pour V un 2-groupe abélien élémentaire (voir [Pow12]).

5.2.2 h -détection et calcul de $k_\bullet^*(X)$

Dans cette sous-section, on fait l'hypothèse supplémentaire suivante :

Hypothèse 5.2.6. $\forall n \in \mathbb{Z}$, la tour k_\bullet vérifie la propriété de h -détection de niveau n pour X .

Définition 5.2.7. Dans ces conditions, on dispose d'une filtration de T_n , avec les sous-quotients F_n^0 , F_n^1 et F_n^2 définis dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} 0 \hookrightarrow & \text{Ker}(e_n |_{\text{Im}(e_{n+1})}) & \hookrightarrow & \text{Ker}(e_n) & \hookrightarrow & T_n \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & F_n^0 & & F_n^1 & & F_n^2 \end{array}$$

Remarque 5.2.8. Il faut bien noter que cette filtration ne dépend pas de l'entier naturel h . La définition de cette filtration ne fait pas appel à l'hypothèse 5.2.6.

Commençons par déterminer F_n^1 .

Proposition 5.2.9. On a un isomorphisme $F_n^1 \xrightarrow{\sim} \text{Im}(\theta_{n-1})$ induit par c_n .

Démonstration. Par exactitude, $\text{Ker}(e_n) = \text{Im}(\delta_{n-1})$, donc on a bien un morphisme

$$\text{Ker}(e_{n-1}) = \text{Im}(\delta_{n-1}) \xrightarrow{c_n^{-1}} \text{Im}(\theta_{n-1}).$$

Par définition, $\theta_{\bullet-1} = c_\bullet \delta_{\bullet-1}$, donc le morphisme $F_n^1 \xrightarrow{\sim} \text{Im}(\theta_n)$ est clairement surjectif. Calculons son noyau.

Par exactitude, un élément x est dans le noyau de cette flèche si et seulement si il est dans $\text{Ker}(e_n |_{\text{Im}(e_{n+1})})$, d'où le résultat. \square

Passons maintenant à la détermination de F_n^0 et F_n^2 .

Proposition 5.2.10. On a un complexe de chaînes

$$F_n^2 \xrightarrow{c_n} \frac{\text{Ker}(\theta_n)}{\text{Im}(\theta_{n-1})} \xrightarrow{\delta_n} \Sigma^1 F_{n+1}^0$$

où le premier morphisme est induit par c_n et le second par δ_n . De plus, son homologie est Φ_n / Φ_{n+1} .

5.2. DÉTECTION

Démonstration. Construisons le complexe de chaînes. Par exactitude, $\text{Ker}(e_n) = \text{Im}(\delta_{n-1})$, donc la flèche

$$\frac{T_n}{\text{Ker}(e_n)} =: F_n \xrightarrow{\overline{c_n}} \frac{\text{Ker}(\theta_n)}{\text{Im}(\theta_{n-1})}$$

est bien définie. La seconde flèche est bien définie car $\delta_n \circ \theta_{n-1} = 0$.

Nous allons maintenant construire directement un morphisme

$$\psi : \Phi_n / \Phi_{n+1} \rightarrow \text{Ker}(\overline{\delta_n}) / \text{Im}(\overline{c_n})$$

et montrer que c'est un isomorphisme.

Soit $[f_n(x)] \in \Phi_n / \Phi_{n+1}$ où $x \in k_n^*(X)$. Par construction, $c_n(x) \in \text{Ker}(\delta_n) \subset \text{Ker}(\theta_n)$, donc $c_n(x)$ définit bien une classe $[c_n(x)] \in \frac{\text{Ker}(\theta_n)}{\text{Im}(\theta_{n-1})}$ de plus, par construction, $\delta_n \circ c_n = 0$, $[c_n(x)] \in \text{Ker}(\overline{\delta_n})$. On pose $\psi([f_n(x)]) = [c_n(x)] \in \text{Ker}(\overline{\delta_n}) / \text{Im}(\overline{c_n})$.

Ce morphisme est bien défini car, si $t \in T_n$ et $y \in \Phi_{n+1}$, on a $c_n(t + e_n y) = c_n(t) \in \text{Im}(\overline{c_n})$.

- Injectivité : si $[f_n(x)] \in \Phi_n / \Phi_{n+1}$ tel que $c_n(x) \in \text{Im}(\overline{c_n})$, alors $\exists t \in T_n$ et $y \in k_{n+1}^*(X)$ tels que $x = t + e_{n+1}y$, d'où $[f_n(x)] = [f_n(t + e_{n+1}y)] = [f_n(e_{n+1}y)] = 0$.
- Surjectivité : soit $[y] \in \text{Ker}(\overline{\delta_n}) / \text{Im}(\overline{c_n})$, où $y \in \text{Ker}(\delta_n)$. Par exactitude, $\exists x \in k_n^*(X)$ tel que $c_n(x) = y$. Alors $[f_n(x)]$ est une pré-image de $[y]$.

□

Remarque 5.2.11. Dans le cas où $h = 1$, on retrouve les suites exactes courtes

$$0 \rightarrow \text{Im}(\Sigma^{-1}\theta_{n-1}^*) \rightarrow \text{Ker}(\theta_n^*) \rightarrow \Phi_n K^*(X) / \Phi_{n+1} K^*(X) \rightarrow 0$$

de [Pow12, Théorème 2.9].

5.2.3 Transport et vérification de la propriété de détection

Soit k_\bullet une tour au-dessus de K dans la catégorie \mathcal{C} . Soient $E, \tilde{E} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ deux foncteurs exacts et un triangle distingué naturel

$$E \rightarrow id_{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{E}.$$

Enfin, on suppose que la transformation naturelle $EK \rightarrow K$ est l'identité, ce qui fait du morphisme $E k_\bullet \rightarrow k_\bullet$ un morphisme au-dessus de K .

Les notations utilisées ici sont les mêmes que dans toute la section, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 EC_n & \xleftarrow{Ec_n} & Ek_n & \xrightarrow{\quad} & k_n & \xrightarrow{c_n} & C_n \\
 \uparrow \scriptstyle E\theta_{n-1} & \nearrow \scriptstyle E\delta_{n-1} & \downarrow \scriptstyle Ee_n & & \downarrow \scriptstyle e_n & \nwarrow \scriptstyle \delta_{n-1} & \uparrow \scriptstyle \theta_{n-1} \\
 EC_{n-1} & \xleftarrow{Ec_{n-1}} & Ek_{n-1} & \xrightarrow{\quad} & k_{n-1} & \xrightarrow{c_{n-1}} & C_{n-1} \\
 \uparrow \scriptstyle E\theta_{n-2} & \nearrow \scriptstyle E\delta_{n-2} & \downarrow \scriptstyle Ee_{n-1} & & \downarrow \scriptstyle e_{n-1} & \nwarrow \scriptstyle \delta_{n-2} & \uparrow \scriptstyle \theta_{n-2} \\
 EC_{n-2} & \xleftarrow{Ec_{n-2}} & Ek_{n-2} & \xrightarrow{\quad} & k_{n-2} & \xrightarrow{c_{n-2}} & C_{n-2} \\
 & & \downarrow \scriptstyle Ee_{n-2} & & \downarrow \scriptstyle e_{n-2} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

et f_n est le morphisme $k_n \rightarrow K$.

Remarque 5.2.12. Le fait de considérer un tel triangle distingué naturel est motivé par la suite de séparation d'isotropie, introduite à la notation 1.1.35.

Proposition 5.2.13. *Supposons que la tour Ek_\bullet au-dessus de K vérifie la propriété de h -détection à tout niveau pour X . Supposons de plus que les morphismes $\tilde{E}e_\bullet$ sont tous triviaux. Alors k_\bullet vérifie la propriété de $(h+1)$ -détection à tout niveau pour X .*

Démonstration. La preuve est une chasse au diagramme. On veut montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$T_n \rightarrow k_n^*(X) \rightarrow \operatorname{coker}(k_{n+h+1}^*(X) \xrightarrow{e_{n+1} \cdots e_{n+h+1}} k_n^*(X))$$

est injectif, c'est-à-dire que

$$T_n \cap \operatorname{Im}(k_{n+h+1}^*(X) \xrightarrow{e_{n+1} \cdots e_{n+h+1}} k_n^*(X)) = 0.$$

Soit $x \in T_n \cap \operatorname{Im}(k_{n+h+1}^*(X) \xrightarrow{e_{n+1} \cdots e_{n+h+1}} k_n^*(X))$. Considérons le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccc}
 Ek_{n+h+1}^*(X) & \longrightarrow & k_{n+h+1}^*(X) & \longrightarrow & \tilde{E}k_{n+h+1}^*(X) \\
 \downarrow \scriptstyle Ee_{n+h+1} & & \downarrow \scriptstyle e_{n+h+1} & & \downarrow \scriptstyle \tilde{E}e_{n+h+1}=0 \\
 Ek_{n+h}^*(X) & \longrightarrow & k_{n+h}^*(X) & \longrightarrow & \tilde{E}k_{n+h}^*(X)
 \end{array}$$

La propriété $\tilde{E}e_{n+h+1} = 0$ et l'exactitude des lignes du diagramme impliquent que $e_{n+h+1}(x)$ provient d'un certain élément $y \in Ek_{n+h}^*(X)$. Mais $x \in T_n$, donc $y \in \operatorname{Ker}(Ef_n)$. Par conséquent

$$y \in \operatorname{Ker}(Ef_n) \cap \operatorname{Im}(Ek_{n+h}^*(X) \xrightarrow{Ee_{n+1} \cdots Ee_{n+h}} Ek_n^*(X)).$$

Par h -détection pour Ek_\bullet , $y = 0$, d'où $x = 0$. □

5.3. DÉTECTION EN K -THÉORIES

Nous terminons cette sous-section avec une caractérisation particulière des propriétés de h -détection, pour $h = 1$ et $h = 2$.

Proposition 5.2.14. 1. k_\bullet vérifie la propriété de 1-détection à tout niveau pour X si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $F_n^0 = 0$.

2. On a un monomorphisme

$$\begin{aligned} \iota_{n+1} : F_n^0 &\hookrightarrow F_{n+1}^2 \\ e_{n+1}x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

qui est un isomorphisme si et seulement si k_\bullet vérifie la propriété de 2-détection de niveau $n - 1$ pour X .

Démonstration. 1. Supposons que k_\bullet vérifie la propriété de 1-détection à tout niveau pour X , alors $T_n \cap \text{Im}(e_{n+1}) = 0$. Par conséquent, $F_n^0 = \text{Ker}(e_n|_{\text{Im}(e_{n+1})}) \subset T_n \cap \text{Im}(e_{n+1}) = 0$, donc $F_n^0 = 0$.

$$0 \hookrightarrow T_n \xrightarrow{\cong} T_n$$

Supposons maintenant que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $F_n^0 = 0$. Le noyau du morphisme surjectif $\text{Ker}(e_n e_{n+1}) \rightarrow \text{Ker}(e_n|_{\text{Im}(e_{n+1})})$ induit par e_{n+1} est $\text{Ker}(e_{n+1})$, donc $e_{n+1} : \frac{\text{Ker}(e_n e_{n+1})}{\text{Ker}(e_{n+1})} = F_n^0 \rightarrow \text{Ker}(e_n|_{\text{Im}(e_{n+1})})$ est un isomorphisme. On en déduit que pour tout n , $\text{Ker}(e_n e_{n+1}) = \text{Ker}(e_{n+1})$. Par conséquent pour tout n , $T_{n+1} = \text{Ker}(e_{n+1})$, et donc le morphisme $T_n \rightarrow \text{Coker}(e_{n+1})$ est une injection. Par définition k_\bullet vérifie la propriété de 1-détection à tout niveau pour X .

2. Le morphisme est bien défini car, par définition, $F_{n+1}^2 = \frac{T_{n+1}}{\text{Ker}(e_{n+1})}$. L'injectivité est claire vue la définition du morphisme.

Dans le cas où k_\bullet vérifie la propriété de 2-détection de niveau $n - 1$ pour X , le morphisme $e_n e_{n+1} : T_{n+1} \rightarrow T_{n-1}$ est trivial. Par conséquent, le morphisme induit par $e_{n+1} : T_{n+1} \rightarrow T_n$ se restreint en un morphisme $\overline{e_{n+1}} : \frac{T_{n+1}}{\text{Ker}(e_{n+1})} \rightarrow \text{Ker}(e_n|_{\text{Im}(e_{n+1})})$, qui est inverse à l'injection $F_n^0 \hookrightarrow F_{n+1}^2$ par construction.

Réciproquement, si la tour k_\bullet au dessus de K ne vérifie pas la propriété de 2-détection de niveau $n - 1$ pour X , alors il existe un élément $x \in T_{n+1}$ tel que $e_n e_{n+1} x \neq 0$. Mais $e_{n+1} x$ n'est pas dans $\text{ker}(e_n)$, et donc la classe de x n'est pas dans l'image de $F_n^0 \hookrightarrow F_{n+1}^2$. □

5.3 Détection en K -théories

5.3.1 La forme particulière des tours tirées de la K -théorie

Dans cette sous-section, on s'intéresse aux tours de $\mathbb{Z}/2$ -spectres de la forme $k_n = \Sigma^{n(1+\alpha)}k$, pour un certain $\mathbb{Z}/2$ -spectre en anneau k et $e_n = \Sigma^{n(1+\alpha)}v$ pour un certain $v \in k_{1+\alpha}$. Ainsi, on a la tour suivante :

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^{n(1+\alpha)}k & \xrightarrow{\Sigma^{n(1+\alpha)}c} & \Sigma^{n(1+\alpha)}C \\ \downarrow \Sigma^{n(1+\alpha)}v & \swarrow \Sigma^{n(1+\alpha)}\delta & \uparrow \Sigma^{(n-1)(1+\alpha)}\theta \\ \Sigma^{(n-1)(1+\alpha)}k & \xrightarrow{\Sigma^{(n-1)(1+\alpha)}c} & \Sigma^{(n-1)(1+\alpha)}C \\ \downarrow \Sigma^{(n-1)(1+\alpha)}v & \swarrow \Sigma^{(n-1)(1+\alpha)}\delta & \uparrow \Sigma^{(n-1)(1+\alpha)}\theta \\ \Sigma^{(n-2)(1+\alpha)}k & \xrightarrow{\Sigma^{(n-2)(1+\alpha)}c} & \Sigma^{(n-2)(1+\alpha)}C \\ \downarrow \Sigma^{(n-2)(1+\alpha)}v & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

On rappelle la définition 1.2.13, qui introduit la classe d'Euler $a \in H\mathbb{Z}^\alpha$.

Définition 5.3.1. Soit $h^*(X) = \frac{Ker_\theta(C^*(X))}{Im_{\Sigma^{-1-\alpha\theta}}(C^*(X))}$, et $t : h^*(X) \rightarrow h^{*+3+2\alpha}(X)$ le morphisme de $\mathbb{Z}[a]$ -modules défini comme la composée

$$h^*(X) \xrightarrow{\delta} Ker_v(Im_v(k^{*+2+\alpha}(X))) \xrightarrow{\iota_1} \frac{tors_v(k^{*+3+2\alpha}(X))}{Ker_v(k^{*+3+2\alpha}(X))} \xrightarrow{\Sigma^{*+3+2\alpha}c} h^{*+3+2\alpha}(X).$$

Remarque 5.3.2. Le $\mathbb{Z}[a]$ -module $h^*(X)$ est par définition le terme central apparaissant dans le complexe de chaînes de la proposition 5.2.10, pour les tours satisfaisant les restrictions posées au début de cette section.

Proposition 5.3.3. 1. On a un complexe de $\mathbb{Z}[a]$ -modules

$$\frac{tors_v(k^*(X))}{Ker_v(k^*(X))} \xrightarrow{c\bar{c}_n} h^*(X) \xrightarrow{\delta_n \Sigma^{2+\alpha} \frac{Ker_{v,2}(k^*(X))}{Ker_v(k^*(X))}}$$

dont l'homologie est Φ_n/Φ_{n+1} .

2. L'image du morphisme $t : h^*(X) \rightarrow h^{*+3+2\alpha}(X)$ est isomorphe à $\Sigma^{1+\alpha} \frac{Ker_{v,2}(k^*(X))}{Ker_v(k^*(X))}$.
3. Le morphisme t est trivial si et seulement si la tour k_\bullet vérifie la propriété de 1-détection à tout niveau pour X .

Démonstration. 1. Les morphismes du complexe sont induits par c et δ , ce sont donc des morphismes de $\mathbb{Z}[a]$ -module. Par conséquent, le premier point est une reformulation de la proposition 5.2.10.

2. La proposition 5.2.10 et le monomorphisme donné à la proposition 5.2.14 impliquent que l'image de t est isomorphe à l'image de ι_1 . Le résultat suit.

3. Si t est trivial, alors l'injection $\iota_1 : Ker_v(Im_v(k^{*+2+\alpha}(X))) \hookrightarrow \frac{tors_v(k^{*+3+2\alpha}(X))}{Ker_v(k^{*+3+2\alpha}(X))}$ a une image nulle, donc $Ker_v(Im_v(k^{*+2+\alpha}(X))) = 0$. Le résultat suit par la caractérisation de la propriété de 1-détection donnée au dernier point de la proposition 5.2.10. \square

5.3.2 Détection en $E\mathbb{Z}/2_+ \wedge \Sigma^\bullet(1+\alpha)k\mathbb{R}$ -cohomologie

Soit V un 2-groupe abélien élémentaire.

L'objectif de cette section est de démontrer la propriété de 1-détection à tout niveau pour BV de la tour $(E\mathbb{Z}/2_+ \wedge \Sigma^\bullet(1+\alpha)k\mathbb{R})_\bullet$. Cette tour vérifie les hypothèses de la sous-section 5.3.1 avec $C = E\mathbb{Z}/2_+ \wedge H\mathbb{Z}$.

La stratégie de la preuve est d'utiliser le résultat énoncé au point 3 la proposition 5.3.3. L'ingrédient essentiel est l'identification du $\mathbb{F}_2[a]$ -module $h^*(BV)$ apparaissant dans la proposition 5.3.3. Cette identification est l'objet du lemme 5.3.5.

Commençons par identifier $H\mathbb{Z}^*(BV)$.

Lemme 5.3.4. On a

$$H\mathbb{Z}^*(BV) = Ker(\beta_0 : H\mathbb{F}_2^*(BV) \rightarrow H\mathbb{F}_2^*(BV)).$$

Démonstration. Considérons la suite cofibre

$$H\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} H\mathbb{Z} \rightarrow H\mathbb{F}_2$$

et soit $\delta : H\mathbb{F}_2 \rightarrow H\mathbb{Z}$ son bord.

En cohomologie $\times 2 \in End(H\mathbb{Z}^*(BV))$ est nul. Par conséquent la suite exacte longue associée en cohomologie scinde pour donner le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & H\mathbb{F}_2^{*-1}(BV) & & & & \\ & & \downarrow \delta_* & \searrow \beta_0 & & & \\ H\mathbb{Z}^*(BV) & \xrightarrow{0} & H\mathbb{Z}^*(BV) & \xrightarrow{\rho} & H\mathbb{F}_2^*(BV) & \xrightarrow{\delta_*} & H\mathbb{Z}^{*+1}(BV) \xrightarrow{0} H\mathbb{Z}^{*+1}(BV) \\ & & & & \searrow \beta_0 & & \downarrow \rho \\ & & & & & & H\mathbb{F}_2^{*+1}(BV) \end{array}$$

5.3. DÉTECTION EN K-THÉORIES

d'où le résultat, vu que $Im\beta_0 = Im\rho = Ker\beta^* = Ker\beta_0$ par exactitude de la suite horizontale. \square

On rappelle la définition du foncteur R , introduit dans la proposition 3.1.14 ainsi que le foncteur H_{01}^* donné à la définition 4.1.4.

Lemme 5.3.5. *Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $k \geq 0$, on a un isomorphisme*

$$\frac{Ker_{EZ/2_+ \wedge \beta_1}(EZ/2_+ \wedge H\mathbb{Z}^{n+k\alpha}(BV))}{Im_{EZ/2_+ \wedge \beta_1}(EZ/2_+ \wedge H\mathbb{Z}^{n+k\alpha}(BV))} \cong H_{01}^*((EZ/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2)^*(BV))$$

de plus, $H_{01}^*((EZ/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2)^*(BV)) = (H_{01}^*(H\mathbb{F}_2^*(BV)))_{twist \geq 0}[\sigma^{\pm 4}]$.

Démonstration. Le premier isomorphisme est une conséquence du lemme 5.3.4.

Le morphisme de $H\mathbb{F}_2$ -modules $EZ/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2 \rightarrow H\mathbb{F}_2$ induit un morphisme de \mathcal{A}^* -modules

$$(EZ/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2)^*(BV) \rightarrow H\mathbb{F}_2^*(BV)$$

qui fait partie d'une suite exacte longue de $\mathbb{F}_2[a]$ -modules

$$\dots \rightarrow (EZ/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2)^*(BV) \rightarrow H\mathbb{F}_2^*(BV) \xrightarrow{(-)[a^{\pm 1}]} (\widehat{EZ/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2})^*(BV) \rightarrow (EZ/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2)^{*+1}(BV) \rightarrow \dots$$

L'identification de la structure de $\mathbb{F}_2[a]$ -module de $H\mathbb{F}_2^*(BV)$ donnée par la proposition 3.1.9 identifie deux termes sur trois de la suite exacte longue :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow (EZ/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2)^*(BV) &\rightarrow (R(H\mathbb{F}_2^*(BV)))^* \xrightarrow{(-)[a^{\pm 1}]} \\ (\mathbb{F}_2[\sigma, a^{\pm 1}] \otimes_{\mathbb{F}_2} H\mathbb{F}_2^*(BV))^* &\rightarrow (EZ/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2)^{*+1}(BV) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

d'où un isomorphisme de \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels $(EZ/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2)^*(BV) \cong \mathbb{F}_2[\sigma^{\pm 1}, a^{-1}] \otimes_{\mathbb{F}_2} H\mathbb{F}_2^*(BV)$.

Le morphisme de \mathcal{A}^* -modules $(EZ/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2)^*(BV) \rightarrow H\mathbb{F}_2^*(BV)$ donne la structure de $\lambda_{\mathbb{F}_2}(EZ/2_+ \wedge \beta_1)$ -module sur $(EZ/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2)^*(BV)$ par les formules de Cartan puisque

- ce morphisme est un isomorphisme en degrés $k + n\alpha$ pour tout n et $k \leq -2$,
- et $\sigma^{-1} \in (EZ/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2)^*(BV)$ est inversible, en particulier l'élément $\sigma^{-4} \in (Ker_{EZ/2_+ \wedge \beta_1} \cap Im_{EZ/2_+ \wedge \beta_1})((EZ/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2)^*(BV))$ est inversible.

En particulier $H_{01}^*((EZ/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2)^*(BV))$ est σ^4 -périodique, et le morphisme

$$H_{01}^*((EZ/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2)^*(BV)) \rightarrow H_{01}^*(H\mathbb{F}_2^*(BV))$$

induit par $EZ/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2 \rightarrow H\mathbb{F}_2$ est un isomorphisme en degrés de la forme $k + \mathbb{Z}\alpha$, pour $k \leq -4$ (car $|\beta_1| = 2 + \alpha$).

Le résultat suit. \square

Remarque 5.3.6. Par définition, le $\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-4}]$ -module $h^*(BV)$ pour la tour $EZ/2_+ \wedge \Sigma^{\bullet(1+\alpha)}k\mathbb{R}$ est isomorphe à $\frac{Ker_{EZ/2_+ \wedge \beta_1}(EZ/2_+ \wedge H\mathbb{Z}^{n+k\alpha}(BV))}{Im_{EZ/2_+ \wedge \beta_1}(EZ/2_+ \wedge H\mathbb{Z}^{n+k\alpha}(BV))} \cong H_{01}^*((EZ/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2)^*(BV))$.

Nous allons maintenant appliquer les résultats de 5.2.3 et 5.3.1 pour la tour $(EZ/2_+ \wedge \Sigma^{\bullet(1+\alpha)}k\mathbb{R})_{\bullet}$.

On rappelle la notation HP^* de 4.3.1. Le résultat précédent permet d'identifier le $\mathbb{F}_2[\sigma^{\pm 4}, a]$ -module noté h^* dans la proposition 5.3.3 pour la tour $(EZ/2_+ \wedge \Sigma^{\bullet(1+\alpha)}k\mathbb{R})_{\bullet}$.

Lemme 5.3.7. *Soit $n \geq 1$. On note V_n le 2-groupe abélien élémentaire $\mathbb{Z}/2^n$. On note $c(h)^*(BV_n)$ le $\mathbb{F}_2[\sigma^{\pm 4}, a]$ -module*

$$\frac{Ker_{EZ/2_+ \wedge \beta_1}((EZ/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2)^*(BV_n))}{Im_{\Sigma^{-2-\alpha}EZ/2_+ \wedge \beta_1}((EZ/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2)^*(BV_n))}.$$

Alors on a un isomorphisme

$$c(h)^*(BV_n) \cong \bigoplus_{i=1}^n \left(HP^{*+i(1+\alpha)} \binom{n}{i} \right).$$

Démonstration. On rappelle l'isomorphisme de $\mathcal{A}^*(1)$ -modules

$$H\mathbb{F}_2^*(BV_n) \cong \bigoplus_{i=1}^n (P^{\otimes i}) \oplus \binom{n}{i}$$

donné au lemme 4.2.9.

Comme R et H_{01}^* sont exacts, ils préservent les sommes directes de $\mathcal{A}^*(1)$ -modules, et donc, par le lemme 5.3.5,

$$\begin{aligned} c(h)^*(BV_n) &= H_{01}^*((E\mathbb{Z}/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2)^*(BV)) \\ &\cong (H_{01}^*(H\mathbb{F}_2^*(BV)))_{twist \geq 0}[\sigma^{\pm 4}] \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^n ((H_{01}^*(P^{\otimes i}))_{twist \geq 0}[\sigma^{\pm 4}]) \oplus \binom{n}{i} \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^n ((HP^{*+i(1+\alpha)})_{twist \geq 0}[\sigma^{\pm 4}]) \oplus \binom{n}{i} \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^n (HP^{*+i(1+\alpha)}) \oplus \binom{n}{i} \end{aligned}$$

où la dernière identification provient du fait que, par définition, HP^* est σ^{-4} -périodique. \square

Nous pouvons maintenant montrer le résultat principal de cette sous-section :

Proposition 5.3.8. *Soit V un 2-groupe abélien élémentaire. La tour $(E\mathbb{Z}/2_+ \wedge \Sigma^{\bullet(1+\alpha)}k\mathbb{R})_{\bullet}$ vérifie la propriété de 1-détection à tout niveau pour BV .*

Avant de passer à la preuve de la proposition 5.3.8, nous allons voir une conséquence importante de ce résultat :

Théorème 5.3.9. *La tour des tranches de $k\mathbb{R}$ vérifie la propriété de 2-détection à tout niveau pour BV .*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'on est bien dans les hypothèses de la proposition 5.2.13. Les notations sont les suivantes :

- le foncteur E est $E\mathbb{Z}/2_+ \wedge (-)$, c'est bien un foncteur exact,
- le foncteur \tilde{E} est $\widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge (-)$, il est exact, et la suite de séparation d'isotropie fournit le triangle naturel distingué $\widetilde{EX} \rightarrow X \rightarrow \tilde{E}X$ pour tout $\mathbb{Z}/2$ -spectre X ,
- $\tilde{E}e_{\bullet}$ est le morphisme $\widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge v_1$. Soit $x \in k\mathbb{R}^*(BV_n)$, alors v_1x est de a -torsion car $a^3v_1 = 0$ dans $k\mathbb{R}^*$, donc l'image de v_1x dans $\widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge k\mathbb{R}^*(BV)$ est nulle,
- enfin, $K = K\mathbb{R}$, et $EK \cong K$ car tous les éléments de $K\mathbb{R}^*$ sont de a -torsion (par le calcul de l'anneau de coefficients en tant que $\mathbb{Z}[a]$ -module, voir la figure 5.4), donc le $\mathbb{Z}/2$ -spectre $\widetilde{E\mathbb{Z}/2} \wedge K\mathbb{R}$ a des groupes d'homotopie tous triviaux.

On peut donc appliquer la proposition 5.2.13 pour $h = 1$ par le théorème 5.3.8, d'où le résultat. \square

Démonstration de 5.3.8. Par le troisième point de la proposition 5.3.3, il suffit de montrer que tout morphisme de $\mathbb{F}_2[a]$ -module

$$t : c(h)^*(BV) \rightarrow c(h)^{*+3+2\alpha}$$

5.3. DÉTECTION EN K-THÉORIES

est trivial. Le lemme 5.3.7 donne une identification de la source et du but de t .

On rappelle que $HP^* = \{1, x^4\} \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathbb{F}_2} \mathbb{F}_2[a, \sigma^{-4}, v]/(a^3, av)$, avec les degrés $|x^4| = 4$, $|a| = \alpha$, $|\sigma^{-4}| = -4 + 4\alpha$ et $|v| = 1 + \alpha$, et donc les seules valeurs non triviales d'un tel morphisme sont, $t(ax) = y$ où x est un élément qui n'est pas dans Ker_{a^2} . Mais $t(ax) = at(x) = a0 = 0$ pour des raisons de degré. Par conséquent, tout morphisme t de la forme voulue est trivial. \square

5.3.3 Conséquences de la 2-détection pour $k\mathbb{R}$

Dans cette sous-section, on énumère les conséquences de la 2-détection à tout niveau pour BV de la tour des tranches de $k\mathbb{R}$.

Proposition 5.3.10. *Notons F le plus grand $\mathcal{A}^*(1)$ -module libre contenu dans $H\mathbb{F}_2^*(BV)$.*

1. On a un isomorphisme de $\mathbb{F}_2[a, \sigma^{-4}]$ -modules

$$H_{01}^*(BV) \cong \bigoplus_{i=1}^n \left((\Sigma^{-i(1+\alpha)} HP^*)_{twist \geq 0} \oplus (\Sigma^{-i(1+\alpha)-1} HP^*)_{twist \leq -2} \right) \oplus \binom{n}{i} \oplus H_{01}^*(RF).$$

2. Il existe un morphisme de $\mathbb{F}_2[a]$ -modules $t : H_{01}^*(BV) \rightarrow H_{01}^{*+3+2\alpha}(BV)$ qui factorise de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} H_{01}^*(BV) & \xrightarrow{t} & H_{01}^{*+3+2\alpha}(BV) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \frac{tors_{v_1}(k\mathbb{R}^*(BV))^*}{Ker_{v_1}(k\mathbb{R}^*(BV))} & \xrightarrow{t} & (v_1 Ker_{v_2}(k\mathbb{R}^*(BV)))^{*+2+\alpha} \end{array} .$$

3. On a un isomorphisme d'espaces vectoriels $\Sigma^{1+\alpha} v_1 Ker_{v_1^2} \cong tors_{v_1}(k\mathbb{R}^*(BV))/Ker_{v_1}(k\mathbb{R}^*(BV)) \cong Im(t)$.

4. On a un isomorphisme $\frac{cotor_{v_1}(k\mathbb{R}^*(BV))}{v_1 cotor_{v_1}(k\mathbb{R}^*(BV))} \cong \frac{Ker(t)}{Im(t)}$.

5. Enfin, on a un isomorphisme $\frac{Ker_{v_1}(k\mathbb{R}^*(BV))}{v_1 Ker_{v_1^2}(k\mathbb{R}^*(BV))} \cong Im_{\beta_1} \circ Ker_{\beta_0}(H\mathbb{F}_2^*(BV))$.

Démonstration. Nous allons montrer les cinq points dans l'ordre.

1. Commençons par évaluer $H_{01}^*(H\mathbb{F}_2^*(BV))$. Soit n le rang de V .

$$\begin{aligned} H_{01}^*(H\mathbb{F}_2^*(BV)) &\cong H_{01}^*(RH\mathbb{F}_2^*(BV)) \\ &\cong H_{01}^*\left(\bigoplus_{i=1}^n (RP^{\otimes i}) \oplus \binom{n}{i}\right) \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^n H_{01}^*\left((RP_i) \oplus \binom{n}{i}\right) \oplus H_{01}^*(RF) \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^n \left((\Sigma^{-i(1+\alpha)} HP^*)_{twist \geq 0} \oplus (\Sigma^{-i(1+\alpha)-1} HP^*)_{twist \leq -2} \right) \oplus \binom{n}{i} \oplus H_{01}^*(RF) \end{aligned}$$

d'où le premier point.

2. C'est le second point de la proposition 5.3.3 dans le cas où la tour considérée est la tour des tranches de $k\mathbb{R}$.

3. Le troisième point est une reformulation de la dernière assertion de la proposition 5.3.3 dans le cas où la tour considérée est la tour des tranches de $k\mathbb{R}$.

4. La proposition 5.2.10 donne un isomorphisme $\frac{cotor_{s_{v_1}}(k\mathbb{R}^*(BV))}{v_1 cotor_{s_{v_1}}(k\mathbb{R}^*(BV))} \cong Ker(\bar{\delta})/Im(\bar{c})$. Mais par construction de t , $Ker(t) = Ker(\bar{\delta})$ et $Im(t) = Im(\bar{c})$, d'où le résultat.
5. Le dernier point est la proposition 5.2.9 dans le cas particulier étudié ici.

□

5.4 1-détection pour la tour de Postnikov réindexée de ko

Le but de cette section est de montrer comment le théorème 5.3.9 implique la propriété de 1-détection pour une certaine tour liée au spectre KO de la K -théorie orthogonale.

Pour W un spectre non-équivariant et $n \in \mathbb{Z}$, on rappelle la notation $X \langle n \rangle$ pour le n -ième spectre (non-équivariant) dans la tour de Postnikov (classique) de X . Nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème 5.4.1. (*[Pow12]Theorem 10.1*) *Pour tous les spectres dans la tour de Postnikov de KO , on a un théorème de détection de niveau n pour la famille d'espaces BV , i.e. pour $n = 0, 1, 2$ et 4 , la flèche naturelle*

$$ko \langle n \rangle^*(BV) \rightarrow KO^*(BV) \oplus H(KO_n)^{*+n}(BV)$$

est un monomorphisme.

Remarque 5.4.2. Dans la terminologie introduite à la section 5.2, le théorème 5.4.1 affirme que la tour

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & \swarrow \text{---} & \uparrow \\
 \Sigma^8 ko & \longrightarrow & \Sigma^8 H\mathbb{Z} \\
 \downarrow & \swarrow \text{---} & \uparrow \\
 ko \langle 4 \rangle & \longrightarrow & \Sigma^4 H\mathbb{Z} \\
 \downarrow & \swarrow \text{---} & \uparrow \\
 ko \langle 2 \rangle & \longrightarrow & \Sigma^2 H\mathbb{F}_2 \\
 \downarrow & \swarrow \text{---} & \uparrow \\
 ko \langle 1 \rangle & \longrightarrow & \Sigma^1 H\mathbb{F}_2 \\
 \downarrow & \swarrow \text{---} & \uparrow \\
 ko & \longrightarrow & H\mathbb{Z} \\
 \downarrow & \swarrow \text{---} & \uparrow \\
 \Sigma^{-8} ko \langle 4 \rangle & \longrightarrow & \Sigma^{-4} H\mathbb{Z} \\
 \downarrow & \swarrow \text{---} & \uparrow \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

vérifie la propriété de 1-détection à tout niveau pour BV , pour tout 2-groupe abélien élémentaire V .

Afin de montrer cette propriété, on commence par faire le lien entre la tour des tranches pour le $\mathbb{Z}/2$ -spectre $k\mathbb{R}$ et la tour de Postnikov réindexée de KO .

5.4.1 la tour des tranches fixe de $k\mathbb{R}$

Notation 5.4.3. On note $KO^t \langle n \rangle$ le spectre non-équivariant $(\Sigma^{n(1+\alpha)}k\mathbb{R})^{\mathbb{Z}/2}$.

Proposition 5.4.4. Soit $* + n\alpha \in RO(\mathbb{Z}/2)$. On a l'identification

$$k\mathbb{R}^{*+n\alpha}(BV) = KO^t \langle n \rangle^{*-n}(BV).$$

De plus, les spectres $KO^t \langle n \rangle$ sont des ko -modules.

Démonstration. Pour le premier point, le jeu d'adjonction dont on dispose montre :

$$\begin{aligned} k\mathbb{R}^{*+n\alpha}(BV) &= [BV, \Sigma^{*+n\alpha}k\mathbb{R}] \\ &= [BV, \Sigma^{*-n}(\Sigma^{n(1+\alpha)}k\mathbb{R})] \\ &= \left((P^{2n}K\mathbb{R})^{\mathbb{Z}/2} \right)^{*-k}(BV) \end{aligned}$$

d'où l'identification. Le fait que les $KO^t \langle n \rangle$ sont des tranches fixes résulte de l'identification de $P_{2n}k\mathbb{R}$ avec $\Sigma^{n(1+\alpha)}k\mathbb{R}$ donnée dans l'identification de la tour des tranches de $k\mathbb{R}$ fournie au corollaire 1.5.11.

Pour le dernier point, la proposition 1.4.3 fournit une structure de $k\mathbb{R}^{\mathbb{Z}/2}$ -module sur les spectres $KO^t \langle n \rangle$. L'identification $k\mathbb{R}^{\mathbb{Z}/2} = ko$ fournit le résultat. \square

Notre but est maintenant d'identifier les spectres $KO^t \langle n \rangle$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Comme nous allons le voir ici, une conséquence de l'existence d'une classe d'orientation $\sigma^{-4} \in k\mathbb{R}^*$ qui donne lieu à la suite cofibre de la proposition 5.1.19 donne une forme bien particulière aux spectres $KO^t \langle n \rangle$.

Comme le $\mathbb{Z}/2$ -spectre $k\mathbb{R}$ est isotrope et pur, il y a une relation entre la tour des tranches fixe et la tour de Postnikov classique, le résultat est exprimé dans le corollaire suivant, dont une partie se trouvait dans [BG10, Theorem 3.4.1]. On rappelle la notation employée ici : $KO \langle n \rangle$ désigne le n -ème spectre dans la tour de Postnikov de KO .

Proposition 5.4.5. 1. Pour $k = 0, -1, -2, -3$, on a une équivalence faible

$$(\Sigma^{k(1+\alpha)}k\mathbb{R})^{\mathbb{Z}/2} \simeq KO \langle 2k \rangle .$$

2. Pour $k = 0, 1, 2$, on a une équivalence faible

$$(\Sigma^{k(1+\alpha)}k\mathbb{R})^{\mathbb{Z}/2} \simeq KO \langle k \rangle .$$

Démonstration. On peut appliquer la proposition 1.4.12 vu que $k\mathbb{R}$ est un spectre pur et isotrope. \square

Avant de pouvoir comprendre complètement la tour des $KO^t \langle - \rangle$, on a besoin de quelques observations élémentaires sur ces spectres.

Proposition 5.4.6. Le spectre $KO^t \langle k \rangle$ est $\begin{cases} k-1 - \text{connexe} & \text{si } k \geq 0 \\ (2k-1) - \text{connexe} & \text{si } k \leq 0 \end{cases}$

Démonstration. Par [HHR09, proposition 4.36], le $\mathbb{Z}/2$ -spectre $\Sigma^{k(1+\alpha)}k\mathbb{R}$ est $(k-1)$ -connexe si $k \geq 0$ et $(2k-1)$ -connexe si $k \leq 0$. Le résultat suit par évaluation des foncteurs de Mackey d'homotopie sur l'orbite triviale. \square

Remarque 5.4.7. 1. On peut également voir ce résultat à partir du calcul exposé à la figure 5.4. Sur la k -ème ligne, on lit $\pi_{*+k\alpha}(k\mathbb{R})(pt) = \pi_{*-k}(\Sigma^{k(1+\alpha)}k\mathbb{R})$, et en particulier l'homotopie de $KO^t \langle k \rangle$.

2. Dans le cas particulier étudié dans la proposition 5.4.6, la minoration de la connectivité des $KO^t \langle k \rangle$ donnée par [HHR09] est en fait une égalité puisque $\pi_{-k\alpha}(k\mathbb{R}) = \mathbb{F}_2 \neq 0$ pour $k \geq 0$ et $\pi_{k-k\alpha}(k\mathbb{R})(\mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z} \neq 0$ pour $k \neq 0$.

Nous avons vu que les tours de Postnikov et des tranches sont égales autour de la connexité nulle au corollaire 5.4.5. Nous allons maintenant identifier complètement la tour des tranches fixe de $k\mathbb{R}$.

Définition 5.4.8. Soit $ko^{<1>}$ la fibre homotopique de la composée $ko \rightarrow H\mathbb{Z} \rightarrow H\mathbb{F}_2$ où la première flèche provient de la tour de Postnikov pour ko , et la deuxième flèche est induite par la réduction modulo 2.

Remarque 5.4.9. 1. En réalité, le morphisme $ko \rightarrow H\mathbb{F}_2$ est l'unique morphisme non trivial, puisque $[ko, H\mathbb{F}_2] = H\mathbb{F}_2^0(ko) \cong (\mathcal{A}_2^*/\mathcal{A}^*(1))^0 \cong \mathbb{F}_2$.

2. La notation est expliquée par le fait que $ko^{<1>}$ est le premier spectre dans une résolution d'Adams minimale de ko . En effet, on peut voir que le morphisme $ko \rightarrow H\mathbb{F}_2$ est surjectif en $H\mathbb{F}_2$ -cohomologie.

La proposition 5.4.12 est le résultat principal de cette section, elle compare les deux tours plus avant, et donne une forme explicite pour la tour des tranches fixes de $k\mathbb{R}$ en termes de ko -modules connus. Nous allons commencer par renommer les ko -modules que nous avons vu jusqu'à présent pour avoir un énoncé plus propre.

Définition 5.4.10. – Soit $n \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. On pose

$$KO_+^t \langle n \rangle = \begin{cases} ko & n = 0 \\ ko \langle 1 \rangle & n = 1 \\ ko \langle 2 \rangle & n = 2 \\ ko \langle 8 \rangle = \Sigma^8 ko & n = 3 \end{cases}$$

$$\text{– Soit } n \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \text{ On pose } KO_-^t \langle n \rangle = \begin{cases} ko^{<1>} & n = 0 \\ KO \langle -2 \rangle & n = -1 \\ KO \langle -4 \rangle & n = -2 \\ KO \langle -6 \rangle & n = -3 \end{cases}$$

Remarque 5.4.11. Le spectre KO étant 8-périodique (classe de Bott réelle), la tour de Postnikov de KO est 8-périodique, et on a les identifications $KO \langle -4 \rangle \cong \Sigma^{-8} ko \langle 4 \rangle$ et $KO \langle -6 \rangle \cong \Sigma^{-8} ko \langle 2 \rangle$. De plus, comme $\pi_{-1}(KO) = \pi_{-2}(KO) = 0$, $KO \langle -2 \rangle \cong ko$.

Proposition 5.4.12. – Soit $n \geq 0$, on a une équivalence faible

$$KO^t \langle n \rangle \simeq \Sigma^{8[n/4]} KO_+^t \langle n \rangle \vee \bigvee_{4i=0}^{n-3} \Sigma^{4i+n} H\mathbb{F}_2.$$

– Soit $n < 0$, on a une équivalence faible

$$KO^t \langle n \rangle \simeq \Sigma^{8[n/4]} KO_-^t \langle n \rangle \vee \bigvee_{4i=0}^{-n+5} \Sigma^{n-5-4i} H\mathbb{F}_2.$$

– De plus, le morphisme induit par $k\mathbb{R} \rightarrow H\mathbb{Z}$ sur les tranches fixes est le coproduit du morphisme

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \Sigma^{8[n/4]}ko \longrightarrow \Sigma^{8[n/4]}HZ & \text{si } n \geq 0 \text{ et } n \equiv 0 \pmod{4} \\
 \Sigma^{8[n/4]}ko < 1 > \longrightarrow \Sigma^{8[n/4]+1}H\mathbb{F}_2 & \text{si } n \geq 0 \text{ et } n \equiv 1 \pmod{4} \\
 \Sigma^{8[n/4]}ko < 2 > \longrightarrow \Sigma^{8[n/4]+2}H\mathbb{F}_2 & \text{si } n \geq 0 \text{ et } n \equiv 2 \pmod{4} \\
 \Sigma^{8[n/4]}ko < 8 > \longrightarrow 0 & \text{si } n \geq 0 \text{ et } n \equiv 3 \pmod{4} \\
 \Sigma^{8[n/4]}ko < 1 > \longrightarrow \Sigma^{8[n/4]}HZ \vee \Sigma^{8[n/4]+1}H\mathbb{F}_2 & \text{si } n < 0 \text{ et } n \equiv 0 \pmod{4} \\
 KO < -2 > \longrightarrow 0 & \text{si } n = -1 \\
 \Sigma^{8[n/4]}KO < -2 > \longrightarrow \Sigma^{8[n/4]}H\mathbb{F}_2 & \text{si } n < -1 \text{ et } n \equiv -1 \pmod{4} \\
 \Sigma^{8[n/4]}KO < -4 > \longrightarrow \Sigma^{8[n/4]-4}HZ & \text{si } n < 0 \text{ et } n \equiv -2 \pmod{4} \\
 \Sigma^{8[n/4]}KO < -6 > \longrightarrow \Sigma^{8[n/4]-6}H\mathbb{F}_2 & \text{si } n < 0 \text{ et } n \equiv -3 \pmod{4}
 \end{array} \right.$$

avec l'inclusion du bouquet de spectres d'Eilenberg-MacLane

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \bigvee_{4i=0}^{n-3} \Sigma^{4i+n} H\mathbb{F}_2 \hookrightarrow \bigvee_{2i=0}^{n-1} \Sigma^{2i+n} H\mathbb{F}_2 \bigvee_{\text{si } n \text{ pair}} \Sigma^{2n} H\mathbb{Z} & \text{pour } n \geq 0 \\
 \bigvee_{4i=0}^{-n-6} \Sigma^{n-5-4i} H\mathbb{F}_2 \hookrightarrow \bigvee_{2i-1=n}^{-3} \Sigma^{2i-1+n} H\mathbb{F}_2 \bigvee_{\text{si } n \text{ pair}} \Sigma^{2n} H\mathbb{Z} & \text{pour } n < 0
 \end{array} \right.$$

Remarque 5.4.13. Il y a une forme de 4-périodicité sur la partie réduite positive $KO_+^t < n >$ et négative $KO_-^t < n >$ des spectres $KO^t < n >$.

Comme nous le verrons au cours de la preuve, c'est une manifestation de la trace de la $(4 - 4\alpha)$ -périodicité de $K\mathbb{R}$ sur $k\mathbb{R}$: les suites cofibres de la proposition 5.1.19.

Démonstration. La preuve sera découpée en une série de lemmes. L'argument repose principalement sur les deux suites cofibres suivantes dont l'existence est assurée par la classe d'orientation $\sigma^{-4} \in k\mathbb{R}^*$: considérons les suites cofibres obtenues en suspendant la suite cofibre de 5.1.19 par $S^{k(1+\alpha)+4}$ et $S^{k(1+\alpha)-4}$ respectivement :

$$\Sigma^8 KO^t < k - 4 > \rightarrow KO^t < k > \rightarrow \Sigma^k H\mathbb{F}_2 \quad (5.2)$$

$$KO^t < k > \rightarrow \Sigma^{-8} KO^t < k + 4 > \rightarrow \Sigma^{k-4} H\mathbb{F}_2. \quad (5.3)$$

Nous allons montrer les résultats par récurrence sur $[|n|/4]$. Le résultat est vrai pour $n = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ par 5.4.5. Montrons-le pour $n = 3$.

Lemme 5.4.14. *On a l'identification*

$$KO^t < 3 > = \Sigma^3 H\mathbb{F}_2 \vee ko < 8 > .$$

De plus, le morphisme

$$\Sigma^8 ko \vee \Sigma^3 H\mathbb{F}_2 \rightarrow \Sigma^3 H\mathbb{F}_2 \vee \Sigma^5 H\mathbb{F}_2$$

induit par $\Sigma^{3(1+\alpha)} k\mathbb{R} \rightarrow \Sigma^{3(1+\alpha)} H\mathbb{Z}$ est donné par $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ id_{\Sigma^3 H\mathbb{F}_2} & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration. La suite cofibre 5.2 pour $k = 3$ s'identifie avec un étage de la tour de Postnikov de la forme

$$X \langle 3 \rangle \rightarrow X \rightarrow C$$

pour $X = KO^t \langle 3 \rangle$. En effet, $\Sigma^8 KO^t \langle -1 \rangle$ est -3 -connexe, $KO^t \langle 3 \rangle$ est 2-connexe par 5.4.6 et $\Sigma^3 H\mathbb{F}_2$ est 2-connexe. Donc la deuxième flèche $p : KO^t \langle 3 \rangle \rightarrow \Sigma^3 H\mathbb{F}_2$ est un isomorphisme en π_3 .

Considérons maintenant une portion de la tour des tranches fixe de $k\mathbb{R}$. On a la suite cofibre

$$KO^t \langle 3 \rangle \rightarrow KO^t \langle 2 \rangle \rightarrow \Sigma^{2(1+\alpha)} H\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}/2} = \Sigma^2 H\mathbb{F}_2 \vee \Sigma^4 H\mathbb{Z} \quad (5.4)$$

dont le bord nous fournit une flèche $f : \Sigma^3 H\mathbb{Z} \rightarrow KO^t \langle 3 \rangle$. La suite exacte longue en homotopie en bas degrés est

$$\begin{array}{ccccccccc} KO^t \langle 3 \rangle_4 & \longrightarrow & KO^t \langle 2 \rangle_4 & \longrightarrow & (\Sigma^2 H\mathbb{F}_2 \vee \Sigma^4 H\mathbb{Z})_4 & \longrightarrow & KO^t \langle 3 \rangle_3 & \longrightarrow & KO^t \langle 2 \rangle_3 \\ \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ce qui implique que f factorise à travers $g : \Sigma^3 H\mathbb{F}_2 \rightarrow KO^t \langle 3 \rangle$ qui est un isomorphisme en π_3 . On en déduit que g scinde p et que la suite cofibre (5.2) pour $k = 3$ scinde en

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma^8 KO^t \langle -1 \rangle & \longrightarrow & KO^t \langle 3 \rangle & \longrightarrow & \Sigma^3 H\mathbb{F}_2 \\ \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow = \\ ko \langle 8 \rangle & \longrightarrow & \Sigma^3 H\mathbb{F}_2 \vee ko \langle 8 \rangle & \longrightarrow & \Sigma^3 H\mathbb{F}_2 \end{array}$$

□

Remarque 5.4.15. La preuve du lemme précédent est le cœur de l'identification de la tour des tranches fixe de $k\mathbb{R}$. Le résultat est une conséquence d'un jeu de comparaison entre les suites cofibres (5.2) pour $k \geq 0$ et (5.3) pour $k \leq 0$ avec les suites cofibres provenant de la tour des tranches fixe.

Soit $k \geq 3$, et supposons que le résultat est montré entre les rangs k et $-k$.

Lemme 5.4.16. *Pour $k \geq 4$, la suite cofibre (5.2) scinde.*

Démonstration. La suite cofibre issue de la tour des tranches fixe est maintenant

$$KO^t \langle k+1 \rangle \rightarrow KO^t \langle k \rangle \rightarrow \Sigma^{k(1+\alpha)} H\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}/2} = \bigvee_{2i=0}^{k-1} \Sigma^{2i+k} H\mathbb{F}_2 \bigvee_{\text{si } k \text{ est pair}} \Sigma^{2k} H\mathbb{Z}$$

où l'égalité provient de la proposition 1.4.7.

L'hypothèse $k \geq 4$ assure qu'il y a un terme pour $i = 1$ dans le bouquet de spectres d'Eilenberg-MacLane $\bigvee_{2i=0}^{k-1} \Sigma^{2i+k} H\mathbb{F}_2$. Par conséquent, on obtient un morphisme $f_{k+1} : \Sigma^{k+1} H\mathbb{F}_2 \rightarrow KO^t \langle k+1 \rangle$ par restriction.

La suite exacte longue en homotopie autour du degré $k + 1$ donne

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \downarrow \\
 \Sigma^8 KO^t \langle k \rangle_{k+2} \\
 \downarrow \\
 (\bigvee_{2i=0}^{k-1} \Sigma^{2i+k} H\mathbb{F}_2 \bigvee_{\text{si } k \text{ est pair}} \Sigma^{2k} H\mathbb{Z})_{k+2} \\
 \downarrow \\
 KO^t \langle k+1 \rangle_{k+1} \\
 \downarrow \\
 KO^t \langle k \rangle_{k+1} \\
 \downarrow \\
 \vdots
 \end{array}$$

Le calcul de l'anneau de coefficients (voir figure 5.4) donne $KO^t \langle k \rangle_{k+2} = k\mathbb{R}_{2-k\alpha} = 0$ et $KO^t \langle k \rangle_{k+1} = k\mathbb{R}_{1-k\alpha} = 0$ pour $k \geq 4$. Donc f_{k+1} est un isomorphisme en homotopie en degré $k + 1$.

La suite cofibre (5.2) nous fournit la flèche $p : KO^t \langle k+1 \rangle \rightarrow \Sigma^{k+1} H\mathbb{F}_2$ qui est également un isomorphisme en homotopie en degré $k + 1$. D'où f_{k+1} scinde la suite cofibre (5.2). \square

Lemme 5.4.17. 1. Pour $k \leq -5$, la suite cofibre (5.3) scinde.

2. Pour $k = -5$, c'est la suite cofibre

$$\Sigma^{-8} ko^{\langle 1 \rangle} \rightarrow \Sigma^{-8} ko \rightarrow \Sigma^{-8} H\mathbb{F}_2$$

où la deuxième flèche est Σ^{-8} appliqué à la composition $ko \rightarrow H\mathbb{Z} \rightarrow H\mathbb{F}_2$.

Démonstration. Montrons d'abord le deuxième point. La suite cofibre issue de la tour des tranches fixe est

$$KO^t \langle -4 \rangle \rightarrow KO^t \langle -3 \rangle = \Sigma^{-8} ko \rightarrow^{3(1+\alpha)} H\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}/2} = \Sigma^{-6} H\mathbb{F}_2$$

le deuxième morphisme est une surjection en homotopie en degré -6 , d'où le premier point.

Le plan de la preuve du premier point est essentiellement le même qu'avant. La suite cofibre issue de la tour des tranches fixe est maintenant

$$KO^t \langle k \rangle \rightarrow KO^t \langle k-1 \rangle \rightarrow^{(k-1)(1+\alpha)} H\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}/2} = \bigvee_{2i=k}^{-2} \Sigma^{2i+k-2} H\mathbb{F}_2 \bigvee_{\text{si } k-1 \text{ est pair}} \Sigma^{2k-1} H\mathbb{Z}$$

où la dernière identification provient de la proposition 1.4.7. Comme $k \leq -4$, il y a un terme pour $i = -2$ dans le bouquet de $\mathbb{Z}/2$ -spectres d'Eilenberg-MacLane, ce qui fournit une flèche $f_{k-1} : KO^t \langle k-1 \rangle \rightarrow \Sigma^{k-6} H\mathbb{F}_2$ (il n'y a pas de conflit de notation avec le lemme précédent puisque $k \leq -5$ ici).

La suite exacte longue en homotopie autour du degré $k - 6$ donne

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \downarrow \\
 (\bigvee_{2i=k}^{-2} \Sigma^{2i+k-2} H\mathbb{F}_2 \bigvee_{\text{si } k-1 \text{ est pair}} \Sigma^{2k-1} H\mathbb{Z})_{k-5} \equiv 0 \\
 \downarrow \\
 KO^t \langle k \rangle_{k-6} \\
 \downarrow \\
 KO^t \langle k-1 \rangle_{k-6} \\
 \downarrow \\
 (\bigvee_{2i=k}^{-2} \Sigma^{2i+k-2} H\mathbb{F}_2 \bigvee_{\text{si } k-1 \text{ est pair}} \Sigma^{2k-1} H\mathbb{Z})_{k-6} \equiv \mathbb{F}_2 \\
 \downarrow \\
 KO^t \langle k \rangle_{k-7} \\
 \downarrow \\
 KO^t \langle k \rangle_{k-7} \\
 \downarrow \\
 (\bigvee_{2i=k}^{-2} \Sigma^{2i+k-2} H\mathbb{F}_2 \bigvee_{\text{si } k-1 \text{ est pair}} \Sigma^{2k-1} H\mathbb{Z})_{k-7} \equiv 0 \\
 \downarrow \\
 \vdots
 \end{array}$$

Mais on sait que le morphisme $KO^t \langle k \rangle_{k-6} \rightarrow KO^t \langle k-1 \rangle_{k-6}$ est induit par la multiplication par v_1 . Par le calcul de l'anneau de coefficients de $k\mathbb{R}$ (voir figure 5.4), On connait la structure de $\mathbb{Z}[v_1]$ -module de $k\mathbb{R}_*$. En particulier f_{k-1} est surjective en homotopie en degré $k - 6$.

La suite cofibre (5.3) fournit une flèche $p_{k-1} : \Sigma^{k-6} H\mathbb{F}_2 \rightarrow KO^t \langle k-1 \rangle$. En homotopie, la flèche suivante $KO^t \langle k-1 \rangle \rightarrow KO^t \langle k+3 \rangle$ est induite par la multiplication par l'élément σ^{-4} . La structure de $\mathbb{Z}[\sigma^{-4}]$ -module de $k\mathbb{R}_{star}$ donne que le noyau de la multiplication par v_1 de source $k\mathbb{R}_{-5-k\alpha}$ est \mathbb{F}_2 , donc p_{k-1} est injectif en homotopie. Donc f_{k-1} scinde p_{k-1} , d'où le résultat. \square

Le lemme 5.4.16 fournit une équivalence faible

$$KO^t \langle k+1 \rangle \simeq \Sigma^8 KO^t \langle k-3 \rangle \bigvee \Sigma^{k+1} H\mathbb{F}_2$$

d'où le résultat pour $k \geq 0$ par récurrence. Le lemme 5.4.17 donne une équivalence

$$KO^t \langle k-1 \rangle \simeq \Sigma^{-8} KO^t \langle k+3 \rangle \bigvee \Sigma^{k-6} H\mathbb{F}_2$$

d'où le résultat pour $k \leq 0$ par récurrence. \square

5.4.2 Démonstration du théorème 5.4.1

Cette sous-section est consacrée à la preuve du théorème 5.4.1. Le résultat provient de [Pow12] Theorem 10.1 mais il est montré ici en utilisant des techniques différentes.

Commençons par expliciter une partie de la tour des tranches fixes au moyen de la proposition 5.4.12.

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \\
 \Sigma^6 H\mathbb{F}_2 \vee \Sigma^8 ko < 2 > & \longrightarrow & \Sigma^6 H\mathbb{F}_2 \vee \Sigma^8 H\mathbb{Z} \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \\
 \Sigma^5 H\mathbb{F}_2 \vee \Sigma^8 ko < 1 > & \longrightarrow & (S^5 \vee S^7) \wedge H\mathbb{F}_2 \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \\
 \Sigma^4 H\mathbb{F}_2 \vee \Sigma^8 ko & \longrightarrow & \Sigma^4 H\mathbb{F}_2 \vee \Sigma^6 H\mathbb{Z} \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & id \end{pmatrix} \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \\
 \Sigma^3 H\mathbb{F}_2 \vee \Sigma^8 ko & \longrightarrow & (S^3 \vee S^5) \wedge H\mathbb{F}_2 \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \\
 ko < 2 > & \longrightarrow & \Sigma^2 H\mathbb{F}_2 \vee \Sigma^4 H\mathbb{Z} \\
 u \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \\
 ko < 1 > & \xrightarrow{u} & \Sigma^1 H\mathbb{F}_2 \\
 u \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \\
 ko & \xrightarrow{u} & H\mathbb{Z} \\
 = \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \\
 ko & \xrightarrow{0} & 0 \\
 u \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \\
 \Sigma^{-8} ko < 4 > & \xrightarrow{u} & \Sigma^{-4} H\mathbb{Z} \\
 u \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \\
 \Sigma^{-8} ko < 2 > & \longrightarrow & \Sigma^{-6} H\mathbb{F}_2 \\
 \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \\
 \Sigma^{-8} ko < 1 > & \longrightarrow & \Sigma^{-7} H\mathbb{F}_2 \vee \Sigma^{-8} H\mathbb{Z} \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

où les morphismes notés u sont les morphismes donnés par propriété universelle des recouvrements connexes.

Nous allons vérifier la propriété de 1-détection pour BV à chacun des quatre premiers étages de la tour de Postnikov réindexée de KO . Cela suffit car la tour est 4-périodique.

Ces deux résultats sont les lemmes 5.4.18 et 5.4.19. À eux deux, ils concluent la démonstration du théorème 5.4.1.

Lemme 5.4.18. *Soient $n = 0, 1$ et $x \in ko < n >^*(BV)$ un élément dont l'image dans $KO^*(BV)$ est nul, alors l'image de x dans $\begin{cases} KO < -4 >^*(BV) & \text{si } n = 0 \\ ko < 0 >^*(BV) & \text{sinon} \end{cases}$ (par les morphisme induits par la tour de Postnikov) est nulle.*

Démonstration. On montre les deux cas indépendamment.

- **car** $n = 0$: $x \in ko^*(BV) = KO^t < 0 >^*(BV)$ est alors un élément dans $tors_{v_1}(k\mathbb{R}^{*+0\alpha}(BV))$. Mais alors l'image de x par le morphisme $KO^t < 0 >^*(BV) = ko^*(BV) \rightarrow ko < -4 >^*(BV) = KO^t < -2 >^*(BV)$ est trivial car la tour des tranches de $k\mathbb{R}$ vérifie la propriété de 2-détection à tout niveau par le théorème 5.3.9.
- **car** $n = 1$: dans ce cas, $x \in ko < 1 >^*(BV) = KO^t < 1 >^*(BV)$ est alors un élément dans $tors_{v_1}(k\mathbb{R}^{*+1\alpha}(BV))$. Le morphisme $KO^t < 1 >^*(BV) = ko < 1 >^*(BV) \rightarrow ko^*(BV) = KO^t < -1 >^*(BV)$ envoie donc x sur 0 par 2-détection de la tour des tranches de $k\mathbb{R}$ pour BV .

□

Lemme 5.4.19. *Soit $x \in ko < 4 >^*(BV)$ (respectivement $x \in ko < 2 >^*(BV)$) un élément dont l'image dans $KO^*(BV)$ est nul, alors l'image de x par le morphisme induit par la tour de Postnikov $ko < 4 >^*(BV) \rightarrow ko < 2 >^*(BV)$ (respectivement $ko < 2 >^*(BV) \rightarrow ko < 1 >^*(BV)$) est nul.*

Démonstration. Commençons par montrer le second cas. Considérons la portion de tour

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \\
 \Sigma^6 H\mathbb{F}_2 \vee \Sigma^8 ko < 2 > & \longrightarrow & \Sigma^6 H\mathbb{F}_2 \vee \Sigma^8 H\mathbb{Z} \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \\
 \Sigma^5 H\mathbb{F}_2 \vee \Sigma^8 ko < 1 > & \longrightarrow & (S^5 \vee S^7) \wedge H\mathbb{F}_2 \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \\
 \Sigma^4 H\mathbb{F}_2 \vee \Sigma^8 ko & \longrightarrow & \Sigma^4 H\mathbb{F}_2 \vee \Sigma^6 H\mathbb{Z} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Supposons que x a une image non nulle dans $ko < 1 >^*(BV)$. Le premier morphisme vertical est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$, par conséquent un tel x donc un élément dans $tors_{v_1}(k\mathbb{R}^{*+6\alpha}(BV))$ qui n'est pas dans le noyau de v_1 . Par le point 2 de la proposition 5.3.3, un tel élément est dans l'image du morphisme de $\mathbb{Z}[a]$ -modules $t : h^{*-3+4\alpha}(BV) \rightarrow h^{*+6\alpha}(BV)$ (avec les notations de la proposition). Mais en ces degrés, $H_{01}^*(RF)$ est nul, pour tout $\mathcal{A}^*(1)$ -module libre F , donc $h^*(BV)$ est isomorphe à un certain $\bigoplus_{i \in I} HP^{*+i(1+\alpha)}$ par l'identification du premier point de la proposition 5.3.10, mais on a vu dans la démonstration du théorème 5.3.8 que tout morphisme t de cette forme est nul. Contradiction. On conclut que l'image de x est nulle dans $ko < 1 >^*(BV)$.

Montrons maintenant le premier cas. La stratégie est similaire. Considérons la portion de la tour des tranches fixe pour $k\mathbb{R}$ suivante

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & \dashleftarrow & \vdots \\
 \downarrow & & \\
 \Sigma^{-11} H\mathbb{F}_2 \vee \Sigma^{-16} ko \langle 4 \rangle = KO^t \langle -6 \rangle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} & \longrightarrow & (S^{-9} \vee S^{-11}) \wedge H\mathbb{F}_2 \vee \Sigma^{-12} H\mathbb{Z} \\
 \downarrow & \dashleftarrow & \\
 \Sigma^{-12} H\mathbb{F}_2 \vee \Sigma^{-16} ko \langle 2 \rangle & \longrightarrow & (S^{-10} \vee S^{-12} \vee S^{-14}) \wedge H\mathbb{F}_2 \\
 \downarrow & \dashleftarrow & \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

le premier morphisme vertical est encore une fois induit par le morphisme de la tour de Postnikov réindexée, et donc x fournit un élément de $tors_{v_1}(k\mathbb{R}^{*-6\alpha}(BV))$ qui n'est pas dans $Ker_{v_1}(k\mathbb{R}^{*-6\alpha}(BV))$ c'est-à-dire un élément dans l'image du morphisme de $\mathbb{Z}[a]$ -modules $t : h^{*-3-8\alpha}(BV) \rightarrow h^{*-6\alpha}(BV)$. Encore une fois, le fait que $H_{01}^*(F)$ est concentré en degrés de $\mathbb{Z} + 0\alpha$ et $\mathbb{Z} - 2\alpha$ implique par le premier point de la proposition 5.3.10 que t est un endomorphisme de $\mathbb{Z}[a]$ -modules d'une certaine somme directe $\bigoplus_{i \in I} HP^{*+i(1+\alpha)}$, et est donc trivial. Le résultat suit. □

Bibliographie

- [Ada95] J. F. Adams. *Stable homotopy and generalised homology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1995. Reprint of the 1974 original.
- [AF92] Frank W. Anderson and Kent R. Fuller. *Rings and categories of modules*, volume 13 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1992.
- [AM74] J. F. Adams and H. R. Margolis. Sub-Hopf-algebras of the Steenrod algebra. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 76 :45–52, 1974.
- [Ati66] M. F. Atiyah. K -theory and reality. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 17 :367–386, 1966.
- [ATJLSS03] Leovigildo Alonso Tarrío, Ana Jeremías López, and María José Souto Salorio. Construction of t -structures and equivalences of derived categories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(6) :2523–2543 (electronic), 2003.
- [BG03] R. R. Bruner and J. P. C. Greenlees. The connective K -theory of finite groups. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 165(785) :viii+127, 2003.
- [BG10] Robert R. Bruner and J. P. C. Greenlees. *Connective real K -theory of finite groups*, volume 169 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [Boa95] J. Michael Boardman. Stable operations in generalized cohomology. In *Handbook of algebraic topology*, pages 585–686. North-Holland, Amsterdam, 1995.
- [Bru12] R. R. Bruner. On Ossa’s Theorem and Local Picard Groups. *ArXiv e-prints*, November 2012.
- [Car54] Henri Cartan. Sur les groupes d’Eilenberg-Mac Lane. II. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 40 :704–707, 1954.
- [Car55] Henri Cartan. Sur l’itération des opérations de Steenrod. *Comment. Math. Helv.*, 29 :40–58, 1955.
- [Car99] Jeffrey L. Caruso. Operations in equivariant \mathbf{Z}/p -cohomology. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 126(3) :521–541, 1999.
- [CH00] J. D. Christensen and M. Hovey. Quillen model structures for relative homological algebra. *ArXiv Mathematics e-prints*, November 2000.
- [CY] Yu Cherng-Yih. The connective real k -theory of elementary abelian 2-groups ph.d. thesis, university of notre dame, june 1995.
- [DS95] W. G. Dwyer and J. Spaliński. Homotopy theories and model categories. In *Handbook of algebraic topology*, pages 73–126. North-Holland, Amsterdam, 1995.
- [Dug03] D. Dugger. An Atiyah-Hirzebruch spectral sequence for KR-theory. *ArXiv Mathematics e-prints*, April 2003.
- [EJ11] Edgar E. Enochs and Overtoun M. G. Jenda. *Relative homological algebra. Volume 2*, volume 54 of *de Gruyter Expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2011.
- [EM65] Samuel Eilenberg and J. C. Moore. Foundations of relative homological algebra. *Mem. Amer. Math. Soc. No.*, 55 :39, 1965.
- [Far96] Emmanuel Dror Farjoun. *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization*, volume 1622 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

BIBLIOGRAPHIE

- [FL04] Kevin K. Ferland and L. Gaunce Lewis, Jr. The $RO(G)$ -graded equivariant ordinary homology of G -cell complexes with even-dimensional cells for $G = \mathbb{Z}/p$. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 167(794) :viii+129, 2004.
- [GM95] J. P. C. Greenlees and J. P. May. Equivariant stable homotopy theory. pages 277–323, 1995.
- [Gre88] J. P. C. Greenlees. Stable maps into free G -spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 310(1) :199–215, 1988.
- [Gre90] J. P. C. Greenlees. The power of mod p Borel homology. In *Homotopy theory and related topics (Kinosaki, 1988)*, volume 1418 of *Lecture Notes in Math.*, pages 140–151. Springer, Berlin, 1990.
- [HHR09] Michael A. Hill, Michael J. Hopkins, and Douglas C. Ravenel. On the non-existence of elements of kervaire invariant one, v2, 2009.
- [Hil11] M. A. Hill. The Equivariant Slice Filtration : a Primer. *ArXiv e-prints*, July 2011.
- [Hir03] Philip S. Hirschhorn. *Model categories and their localizations*, volume 99 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [HK01] Po Hu and Igor Kriz. Real-oriented homotopy theory and an analogue of the Adams-Novikov spectral sequence. *Topology*, 40(2) :317–399, 2001.
- [HLS93] Hans-Werner Henn, Jean Lannes, and Lionel Schwartz. The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects. *Amer. J. Math.*, 115(5) :1053–1106, 1993.
- [Hoc56] G. Hochschild. Relative homological algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82 :246–269, 1956.
- [HPS97] Mark Hovey, John H. Palmieri, and Neil P. Strickland. Axiomatic stable homotopy theory. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 128(610) :x+114, 1997.
- [Hu02] Po Hu. On Real-oriented Johnson-Wilson cohomology. *Algebr. Geom. Topol.*, 2 :937–947, 2002.
- [Ker60] Michel A. Kervaire. A manifold which does not admit any differentiable structure. *Comment. Math. Helv.*, 34 :257–270, 1960.
- [Lew88] L. Gaunce Lewis, Jr. The $RO(G)$ -graded equivariant ordinary cohomology of complex projective spaces with linear \mathbb{Z}/p actions. In *Algebraic topology and transformation groups (Göttingen, 1987)*, volume 1361 of *Lecture Notes in Math.*, pages 53–122. Springer, Berlin, 1988.
- [Lew95] L. Gaunce Lewis, Jr. Change of universe functors in equivariant stable homotopy theory. *Fund. Math.*, 148(2) :117–158, 1995.
- [LMSM86] L. G. Lewis, Jr., J. P. May, M. Steinberger, and J. E. McClure. *Equivariant stable homotopy theory*, volume 1213 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. With contributions by J. E. McClure.
- [Mar83] H. R. Margolis. *Spectra and the Steenrod algebra*, volume 29 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983. Modules over the Steenrod algebra and the stable homotopy category.
- [May96] J. P. May. *Equivariant homotopy and cohomology theory*, volume 91 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1996. With contributions by M. Cole, G. Comezana, S. Costenoble, A. D. Elmendorf, J. P. C. Greenlees, L. G. Lewis, Jr., R. J. Piacenza, G. Triantafillou, and S. Waner.
- [Mil58] John Milnor. The Steenrod algebra and its dual. *Ann. of Math. (2)*, 67 :150–171, 1958.
- [MM65] John W. Milnor and John C. Moore. On the structure of Hopf algebras. *Ann. of Math. (2)*, 81 :211–264, 1965.
- [MM02] M. A. Mandell and J. P. May. Equivariant orthogonal spectra and S -modules. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 159(755) :x+108, 2002.
- [MMSS01] M. A. Mandell, J. P. May, S. Schwede, and B. Shipley. Model categories of diagram spectra. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 82(2) :441–512, 2001.

BIBLIOGRAPHIE

- [MP12] J. P. May and K. Ponto. *More concise algebraic topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2012. Localization, completion, and model categories.
- [MV] F. Morel and V. Voevodsky. \mathcal{A}^1 -homotopy theory for schemes, *inst. hautes études sci. publ. math.*, no. 90 (2001), 45–143.
- [Oss89] E. Ossa. Connective K -theory of elementary abelian groups. In *Transformation groups (Osaka, 1987)*, volume 1375 of *Lecture Notes in Math.*, pages 269–275. Springer, Berlin, 1989.
- [Pal01] John H. Palmieri. Stable homotopy over the Steenrod algebra. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 151(716) :xiv+172, 2001.
- [Pow11] G. Powell. On connective K -theory of elementary abelian 2-groups and local duality. *ArXiv e-prints*, December 2011.
- [Pow12] G. Powell. On connective KO -theory of elementary abelian 2-groups. *ArXiv e-prints*, July 2012.
- [Pow13] G. Powell. On the $BP\langle n \rangle$ -cohomology of elementary abelian p -groups. *ArXiv e-prints*, April 2013.
- [PS07] Elango Panchadcharam and Ross Street. Mackey functors on compact closed categories. *J. Homotopy Relat. Struct.*, 2(2) :261–293, 2007.
- [Rav86] Douglas C. Ravenel. *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres*, volume 121 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Orlando, FL, 1986.
- [Sch94] Lionel Schwartz. *Unstable modules over Steenrod algebra and Sullivan’s fixed point set conjecture*. Chicago Lectures in Mathematics. Chicago, IL : Univ. of Chicago Press. x, 229 p. , 1994.
- [Ser53] Jean-Pierre Serre. Cohomologie modulo 2 des complexes d’Eilenberg-MacLane. *Comment. Math. Helv.*, 27 :198–232, 1953.
- [TW95] Jacques Thévenaz and Peter Webb. The structure of Mackey functors. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(6) :1865–1961, 1995.
- [Voe02] Vladimir Voevodsky. Open problems in the motivic stable homotopy theory. I. Bogomolov, Fedor (ed.) et al., *Motives, polylogarithms and Hodge theory. Part I : Motives and polylogarithms*. Papers from the International Press conference, Irvine, CA, USA, June 1998. Somerville, MA : International Press. Int. Press Lect. Ser. 3, No. I, 3-34 (2002)., 2002.
- [Wil73] W. Stephen Wilson. The Ω -spectrum for Brown-Peterson cohomology. I. *Comment. Math. Helv.*, 48 :45–55 ; corrigendum, *ibid.* 48 (1973), 194, 1973.
- [Wil75] W. Stephen Wilson. The Ω -spectrum for Brown-Peterson cohomology. II. *Amer. J. Math.*, 97 :101–123, 1975.

Résumé

L'objectif de ce travail est l'étude de la K -théorie réelle connexe des 2-groupes abéliens élémentaires, c'est-à-dire, pour V un 2-groupe abélien élémentaire, l'objet $k\mathbb{R}^*(BV)$. Cet objet contient, entre autres, la K -théorie orthogonale connexe ko et la K -théorie unitaire connexe ku des 2-groupes abéliens élémentaires, et est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{Z}[v_1]$ -module, où v_1 désigne la classe de Bott réelle, un relèvement équivariant en K -théorie réelle de la classe de Bott en K -théorie unitaire.

En utilisant des outils provenant de la théorie d'homotopie stable $\mathbb{Z}/2$ -équivariante, et en particulier la tour des tranches, une tour naturelle dans la catégorie stable équivariante introduite dans les travaux récents de Hill, Hopkins et Ravenel, on montre que les éléments de torsion pour la classe de Bott réelle dans la K -théorie réelle des 2-groupes abéliens élémentaires sont annihilés par la multiplication par v_1^2 .

On effectue une étude détaillée de l'algèbre de Steenrod $\mathbb{Z}/2$ -équivariante \mathcal{A}^* , constituée des opérations en $H\mathbb{F}_2$ -cohomologie, et de sa relation avec l'algèbre de Steenrod classique modulo 2. On exhibe en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, des sous-algèbres $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \dots, \beta_n) \subset \mathcal{A}^*$, générées par certaines opérations β_i , $i \in \mathbb{N}$, qui est une version $\mathbb{Z}/2$ -équivariante de la sous algèbre $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Q_0, \dots, Q_n)$ de l'algèbre de Steenrod modulo 2, où Q_i désigne la i -ème opération de Milnor. On s'intéresse ensuite l'algèbre homologique relative, dans la catégorie des $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules, relativement au sous-anneau $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)$, et on introduit des outils de calcul très généraux permettant en particulier de déterminer $Ext_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))}^i(\mathbb{F}_2, H\mathbb{F}_2^*(BV))$, pour tout $i \geq 1$.

On introduit ensuite la propriété de h -détection pour une tour d'objets dans une catégorie triangulée, et on relie les propriétés de h -détection à l'estimation de la v_1 -torsion de la K -théorie réelle connexe. On étudie ensuite l'obstruction pour qu'une tour vérifie la propriété de h -détection, pour $h = 1$ ou 2 . On montre ensuite que l'obstruction pour que la tour des tranches de la K -théorie réelle vérifie la propriété de 2-détection est contrôlée par $Ext_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))}^i(\mathbb{F}_2, H\mathbb{F}_2^*(BV))$, qu'on a calculé précédemment. Le résultat précédent concernant la v_1 -torsion de la K -théorie réelle des 2-groupes abéliens élémentaires suit. Une des applications de ce résultat est une détermination explicite de $k\mathbb{R}^*(BV)$.

Abstract

The aim of this work is to study the real connective K -theory of elementary abelian 2-groups *i.e.* for an elementary abelian 2-group V , we want to understand $k\mathbb{R}^*(BV)$. This object contains inter alia orthogonal connective K -theory ko and unitary connective K -theory ku of elementary abelian 2-groups, and has a natural structure of module over $\mathbb{Z}[v_1]$, where v_1 is the real Bott class : an equivariant lift to real K -theory of the classical Bott class in unitary K -theory.

Using methods of $\mathbb{Z}/2$ -equivariant stable homotopy theory, and particularly the slice tower, a natural tower in stable homotopy theory introduced by the recent work of Hill-Hopkins-Ravenel, we show that the elements of torsion with respect to the real Bott class in the real connective K -theory of elementary abelian 2-groups are annihilated by v_1^2 .

We study in detail the $\mathbb{Z}/2$ -equivariant Steenrod algebra \mathcal{A}^* , the algebra of operations in $H\mathbb{F}_2$ -cohomology, and its relationship with the non-equivariant mod 2 Steenrod algebra. In particular, we exhibit $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, some subalgebra $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \dots, \beta_n) \subset \mathcal{A}^*$, generated by some operations β_i , $i \in \mathbb{N}$. These algebras are $\mathbb{Z}/2$ -equivariant version of the well known subalgebras $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(Q_0, \dots, Q_n)$ of non-equivariant mod 2 Steenrod algebra, generated by the Milnor operations Q_i , $i \in \mathbb{N}$. We then bring our attention to relative homological algebra in the category of $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1)$ -modules, relativized with respect to the subring $\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0)$. We introduce general computational tools to determine $Ext_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))}^i(\mathbb{F}_2, H\mathbb{F}_2^*(BV))$, for all $i \geq 1$.

We define the notion of h -detection for a general tower in a triangulated category, and in the particular case of connected real K -theory, relate it to an estimate of v_1 -torsion. We then study more precisely the cases $h = 1$ and $h = 2$, and determine the obstruction for a tower to satisfy such properties. We show that the obstruction for 2-detection for the slice tower of real K -theory is controlled by $Ext_{(\Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0, \beta_1), \Lambda_{\mathbb{F}_2}(\beta_0))}^i(\mathbb{F}_2, H\mathbb{F}_2^*(BV))$, which has already been computed. The result about v_1 -torsion of real K -theory of elementary abelian 2-groups then follows. One of the applications of this fact is an explicit determination of $k\mathbb{R}^*(BV)$.

BIBLIOGRAPHIE

Mots-clefs : Homotopie stable équivariante, K -théorie avec réalité, cohomologie généralisée des groupes, algèbre de Steenrod

Keywords : Equivariant stable homotopy theory, generalised group cohomology, Steenrod algebra

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539
Institut Galilée
Université Paris 13
99, avenue Jean-Baptiste Clément
93430 VILLETANEUSE