



HAL
open science

Caractérisation robuste de liaisons amortissantes avec dispositifs piezo-électriques pour la réduction de vibrations de structures

Yassine Karim

► **To cite this version:**

Yassine Karim. Caractérisation robuste de liaisons amortissantes avec dispositifs piezo-électriques pour la réduction de vibrations de structures. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Conservatoire national des arts et métiers - CNAM, 2013. Français. NNT : 2013CNAM0880 . tel-00953330

HAL Id: tel-00953330

<https://theses.hal.science/tel-00953330>

Submitted on 28 Feb 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale du Conservatoire National des Arts et Métiers

Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés (LMSSC)

THÈSE DE DOCTORAT

présentée par : Yassine KARIM

soutenue le : 02 décembre 2013

pour obtenir le grade de : Docteur du Conservatoire National des Arts et Métiers

Spécialité : Mécanique

**Caractérisation robuste de liaisons amortissantes avec
dispositifs piézo-électriques pour la réduction de
vibrations de structures.**

Jury composé de :

L. CHAMPANEY

J.J SINOU

G. CHEVALLIER

G. JACQUET-RICHARDET

T. TISON

C. BLANZE

Arts et Métiers ParisTech

LTDS, Ecole Centrale de Lyon

LISMMA, Supméca

LAMCOS, INSA Lyon

LAMIH, Université Valenciennes

LMSSC, CNAM

Rapporteur

Rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur

Directeur de thèse

*"À tous les êtres chers
dont le soutien m'a été indispensable."*

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au sein du Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés (LMSSC) du CNAM Paris d'octobre 2010 à décembre 2013 sous la direction de Claude Blanzé à qui je tiens à adresser mes plus chaleureux remerciements. En plus de son encadrement et de la marge de liberté qu'il m'a confiée, il a été présent pendant toutes les étapes de cette thèse : de la préparation aux différents congrès jusqu'à la relecture du mémoire, en passant par ses conseils de tous les jours. Il n'a eu de cesse de m'encourager et de me soutenir durant ces trois années. Durant cette période, j'ai pu apprécier non seulement ses qualités scientifiques, mais aussi sa qualité humaine. Pour toutes ces raisons, j'en profite pour lui exprimer ici ma plus profonde gratitude.

Je tiens à remercier Messieurs Laurent Champaney et Jean-Jacques Sinou qui ont accepté de rapporter sur ce travail. Leurs appréciations constituent pour moi un tremplin pour la suite de mes recherches.

Je remercie également les membres du jury Messieurs Gaël Chevallier, Georges Jacquet-Richardet, et Thierry Tison pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse.

Je remercie de plus Jean-François Deü pour sa bonne humeur, ses conseils et aussi pour son aide administrative pendant toute la durée de la thèse.

Je tiens aussi à mentionner le plaisir que j'ai eu à travailler au sein du LMSSC, et je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à l'équipe du LMSSC : Luciano, Lucie, Quentin, Philippe, Fred, Antoine, Olivier, Georges, Mathieu, Benjamin, Ming, Enis, Boris, Sonia.

Je remercie mes parents, mes frères Adnane et Ayoub, ma petite sœur Assiya, mes meilleurs amis Nor et Karim pour tout le soutien qu'ils m'ont apporté, un soutien sans faille même aux moments difficiles.

Pour finir, je remercie Sarka d'avoir partagé ma vie pendant la durée de cette thèse, je la remercie pour tout l'aide qu'elle m'a offerte et pour tout l'amour qu'elle m'a réservé.

Résumé

L'étude présentée dans ce document s'intéresse à la réduction de vibrations des structures assemblées par l'utilisation d'éléments piézoélectriques. Le premier mode de réduction de vibrations étudié utilise l'effet piézoélectrique direct : dans ce contexte, la dissipation d'énergie est apportée par la déformation des éléments piézoélectriques connectés à un circuit électrique adapté. Le second mode de réduction de vibrations utilise l'effet piézoélectrique inverse : les éléments piézoélectriques utilisés comme rondelles au niveau des joints boulonnés voient leurs épaisseurs modifiées sous l'effet d'un champ électrique contrôlé. Ce mode de réduction se base sur l'aptitude du joint boulonné à changer les fréquences propres d'une structure en fonction du serrage appliqué, via plusieurs lois de contrôle du serrage afin d'éviter les plages de fréquences critiques. Dans ce cadre, l'étude d'un modèle simplifié d'assemblage de type masse-ressort est réalisée et une résolution analytique du problème dynamique avec frottement sec est proposée. Puis une étude d'un modèle 3D de joint boulonné est réalisée en utilisant une méthode par éléments finis. Enfin une étude probabiliste est effectuée pour déterminer la robustesse de la réduction de vibrations par rapport à une variation de plusieurs paramètres du modèle. Cette étude de robustesse est effectuée à travers des méthodes stochastiques non-intrusives, parmi lesquelles une méthode originale que nous proposons. Celle-ci permet une réduction du modèle stochastique, et ainsi la réduction considérable du temps de calcul, sans perte significative de qualité.

Mots clés : Réduction de vibrations, piézoélectriques, shunt, assemblage boulonné, frottement sec, contrôle passif et actif, robustesse, méthode stochastique non intrusive.

Abstract

The study presented in this thesis focuses on reducing vibration of assembled structures by piezoelectric elements. The first way of vibration reduction studied uses the direct piezoelectric effect ; in this context, the energy dissipation is provided by the deformation of the piezoelectric elements connected to an adapted electrical circuit. The second vibration reduction method uses the inverse piezoelectric effect, so that the piezoelectric elements used as washers at the bolted joint increase or decrease their thicknesses under a controlled electrical field. Thanks to the capability of a bolted joint to change the natural frequencies of a structure according to the applied thickening force via several tightening control laws, vibration on critical frequency ranges can be avoided . In this framework, a study of a simplified joint modeled by spring mass is performed first and an analytical solution of the dynamic problem with dry friction is proposed. Then a study of a bolted joint model is performed using the finite elements method.

Thereafter a probabilistic study is proposed to determine the robustness of the vibration reduction in relation to a variation of some model parameters. The robustness study is done through non-intrusive stochastic methods, among them a proposed dedicated method : a stochastic model reduction is allowed that reduces dramatically the computation time without losing quality of stochastic results.

Keywords : Vibration reduction, piezoelectric, shunt, bolted joint, dry friction, passive and active control, robustness, stochastic non-intrusive method.

Table des matières

Introduction	21
0.1 Contexte	21
0.2 Objectifs du travail	22
I Étude déterministe	25
1 Couplage électromécanique	27
1.1 Formulation électromécanique	29
1.1.1 Modélisation d'un milieu piézoélectrique	29
1.1.2 Hypothèses et formulation	32
1.1.3 Algorithme de résolution	36
1.1.4 Shunt linéaire	37
1.2 Exemple de validation	42
1.2.1 Description	42
1.2.2 Optimisation de la position du patch piézoélectrique	43
1.2.3 Optimisation des paramètres du circuit RL	44
1.3 Première structure d'étude : assemblage boulonné à double recouvrement	46
1.3.1 Description	46
1.3.2 Optimisation de la position du patch piézoélectrique	47

TABLE DES MATIÈRES

1.3.3	Optimisation des paramètres du circuit RL	49
1.4	Deuxième structure d'étude : assemblage boulonné à double recouvrement avec patch modifié	51
1.4.1	Description	51
1.4.2	Optimisation de la position du patch piézoélectrique	52
1.4.3	Optimisation des paramètres du circuit RL	53
1.5	Conclusion	54
2	Assemblage à effort normal contrôlé	57
2.1	Modèle ressort amortisseur	59
2.1.1	Formulation du modèle	59
2.1.2	Résolution du problème	61
2.1.3	Validation des modèles	68
2.1.4	Critère de contrôle	73
2.1.5	Loi de contrôle de la force normale (approche fréquentielle)	76
2.1.6	Loi de contrôle de la force normale (approche temporelle)	78
2.1.7	Conclusion	83
2.2	Modèle éléments finis	84
2.2.1	Principe de la méthode LATIN	85
2.2.2	Étude du modèle 3D	91
2.2.3	Conclusion	96
2.2.4	Étude du modèle 2D	97
2.2.5	Loi de contrôle de la force normale (par fréquence)	99
2.2.6	Conclusion	100

II	Étude probabiliste	103
3	Formalisme	105
3.1	Méthodes de prise en compte des incertitudes	106
3.1.1	Modèles stochastiques et incertitudes	106
3.1.2	Espace de probabilité et variables aléatoires	107
3.1.3	Espace des variables aléatoires de carré sommable	109
3.1.4	Densité de probabilité et fonction de répartition	109
3.1.5	Calcul d'erreur	110
3.2	Les étapes du calcul de robustesse	111
3.2.1	Analyse de sensibilité	111
3.2.2	Estimation des indices de sensibilité par Monte-Carlo	113
3.2.3	Choix de variables aléatoires	114
3.2.4	Calcul stochastique	114
3.2.5	Post-traitement	125
3.3	Conclusion	126
4	Robustesse du modèle électromécanique	129
4.1	Robustesse du coefficient de couplage effectif	130
4.1.1	Choix de la loi de la variable aléatoire	130
4.1.2	Calcul stochastique	130
4.1.3	Post-traitement	134
4.2	Robustesse de la réduction de vibration	134
4.2.1	Analyse de sensibilité	134
4.2.2	Choix des variables aléatoires	135
4.2.3	Calcul stochastique	136
4.2.4	Post-traitement	139

TABLE DES MATIÈRES

4.3	Conclusion	140
5	Robustesse du modèle avec contrôle de la force normale	143
5.1	Robustesse de la loi de contrôle de la force normale (en fonction de la fréquence)	147
5.1.1	Post-traitement	147
5.2	Robustesse de la première loi de contrôle de la force normale en fonction du temps	148
5.2.1	Post-traitement	149
5.3	Robustesse de la deuxième loi de contrôle de la force normale en fonction du temps	150
5.3.1	Post-traitement	151
5.4	Conclusion	151
	Conclusion	155
	Bibliographie	158
	Annexes	171
	A Séries de Fourier	171
	B Loi de Probabilité Gamma	175
	C Polynômes d'Hermite	177
	D Chaos polynômial	181

Liste des tableaux

1.1	Paramètres matériaux du système étudié	42
1.2	Comparaison des paramètres f_r et K_{eff} pour les trois premiers modes.	42
1.3	Paramètres matériaux du joint boulonné	46
1.4	Comparaison entre les cinq premières fréquences calculées par Cas3M et celles calculées par Nastran	47
2.1	Valeurs des paramètres du modèle étudié	59
2.2	Paramètres du modèle	69
3.1	Paramètres du problème étudié	122
3.2	Les quantités d'intérêt $\omega^2(\theta)$ calculées avec la méthode de Monte-Carlo et avec la méthode de réduction de modèle stochastique.	122
3.3	Paramètres du problème étudié	125
4.1	Erreur fonction du nombre de tirages	132
4.2	Les quantité d'intérêt $k_{eff,1}(\theta)$ par différentes méthodes.	134
4.3	Indice de Sobol du premier ordre	134
4.4	Paramètres stochastiques du problème étudié	136
4.5	Erreur fonction du nombre de tirages	138
4.6	Moyenne de la FRF pour les quatre fréquences [$fr_1 = 89Hz$; $fr_{02} = 760Hz$; $fr_2 = 802Hz$; $fr_3 = 1670Hz$]	139

LISTE DES TABLEAUX

4.7	Ecart-type de la FRF pour les quatre fréquences [$fr_1 = 89Hz$; $fr_{02} = 760Hz$; $fr_2 = 802Hz$; $fr_3 = 1670Hz$]	140
5.1	Paramètres du problème étudié	145
5.2	Moyenne et écart-type de la FRF pour la première fréquence propre $\Omega_1 = 50$ [rad/s]	147
5.3	Moyenne et écart-type de la FRF pour la première fréquence propre $\Omega_1 = 50$ [rad/s]	149
5.4	Moyenne et écart-type de la FRF pour la première fréquence propre $\Omega_1 = 50$ [rad/s]	151
B.1	Caractéristiques de loi Gamma α	175
D.1	Formules pour déterminer les polynômes du chaos jusqu'à l'ordre 3.	181
D.2	Polynômes jusqu'à l'ordre 3.	182

Table des figures

1.1	Structure élastique avec deux éléments piézoélectriques	31
1.2	p-ième élément piézoélectrique soumis à la différence de potentiel V^p , avec les charges Q_+^p et Q_-^p aux surfaces des électrodes	31
1.3	Algorithme de génération du coefficient du couplage effectif	36
1.4	Algorithme de génération du coefficient du couplage effectif pour différentes positions	37
1.5	Structure munie d'éléments piézo associés à un circuit shunt (R, RL)	38
1.6	Structure munie d'éléments piézo associés à un circuit résistif	39
1.7	Structure munie d'un élément piézo connecté à un circuit résonant	41
1.8	Structure de validation.	43
1.9	K_{eff} fonction de la position et du mode	44
1.10	FRF pour différentes valeurs d'inductance (R=0)	45
1.11	FRF pour différentes valeurs de résistance électrique (inductances optimales)	45
1.12	Comparaison entre les FRF en circuit fermé et en circuit RL optimal	46
1.13	Dimension de la première structure d'étude	48
1.14	Partie de la structure modélisée	49
1.15	Les cinq premières déformées propres (1-2-3/ 4-5)	49
1.16	Influence de l'épaisseur de la rondelle piezo sur K_{eff}	50
1.17	Influence de l'inductance sur la FRF de la structure	50

TABLE DES FIGURES

1.18	Dimension de la deuxième structure d'étude	51
1.19	Partie de la structure modélisée	52
1.20	L'influence de l'épaisseur de la rondelle piezo sur K_{eff}	52
1.21	Influence de l'inductance sur les FRF ($R = 0$)	53
1.22	Influence de la résistance électrique sur FRF (L optimale)	53
1.23	comparaison entre les d'FRFs en circuit ouvert, fermé et en circuit RL optimal	54
2.1	Modèle en 2 ddl de l'assemblage	60
2.2	Modèles équivalents suivant les phases : A) adhérence , B) glissement	63
2.3	Algorithme de résolution des équations de mouvement	66
2.4	Algorithme de résolution des équations de mouvement	69
2.5	Validation du modèle sans frottement sec.	70
2.6	Modèle à 2 ddl équivalent au modèle à 1 ddl.	71
2.7	Modèle réduit pour validation dans le cas : A) et B).	72
2.8	Validation du modèle.	73
2.9	Validation du modèle.	74
2.10	effort extérieur triangulaire	75
2.11	cycles hystérésis	75
2.12	FRF de l'énergie dissipée	76
2.13	FRF du déplacement maximal	76
2.14	comparaison des FRF avec et sans serrage	77
2.15	Comparaison des FRF avec et sans contrôle	78
2.16	Exemple de loi de commande.	79
2.17	Étude paramétrique de la FRF de la structure pour différentes valeurs de Ω_{ser}	80

TABLE DES FIGURES

2.18	comparaison des FRFs avec et sans contrôle	80
2.19	Comparaison entre les réponses temporelles avec et sans contrôle	81
2.20	Exemple de loi de commande.	82
2.21	Etude paramétrique de la FRF de structure pour différentes valeurs de Ω_{ser}	82
2.22	Comparaison des FRFs avec et sans contrôle	83
2.23	Comparaison des réponses temporelles avec et sans contrôle	84
2.24	Décomposition d'une structure.	86
2.25	Problème sur une sous-structure	87
2.26	Problème posé sur une interface	89
2.27	Schéma itératif	90
2.28	Structures en contact	91
2.29	Différentes sous-structures composant la structure modélisée en 3D	92
2.30	Différentes interfaces entre les sous-structures	93
2.31	Répartition du champ d'effort dans les différentes sous-structures	93
2.32	Convergence du calcul	94
2.33	Décollement au niveau de l'interface entre les deux poutres	94
2.34	Effort imposé à l'extrémité de la poutre	95
2.35	Cycles d'hystérésis pour différentes valeurs de serrage	96
2.36	Cycles d'hystérésis pour différentes valeurs de coefficients de frottement	96
2.37	Structure principale initiale	97
2.38	Modélisation de la structure complète	97
2.39	Zoom sur le joint boulonné	98
2.40	Comparaison de FRF avec serrage (-) et sans serrage (- -)	99
2.41	Comparaison de FRF avec et sans contrôle	100
2.42	Comparaison de FRF avec et sans contrôle.	100

TABLE DES FIGURES

3.1	Structure étudiée	121
3.2	Comparaison de PDF pour la première pulsation propre	122
3.3	L'erreur relative sur la moyenne et écart type entre la méthode de Monte-Carlo et la méthode de réduction de modèle stochastique.	123
3.4	Comparaison de PDF pour la première pulsation propre	125
4.1	La fonction densité de probabilité et la fonction de répartition du coefficient de couplage effectif	131
4.2	Comparaison des CDF entre une simulation Monte-Carlo et les calculs par régression	132
4.3	Comparaison des PDF dans le cas d'une simulation MC classique et dans le cas d'une simulation MC avec un modèle stochastique réduit	133
4.4	PDF des résistances électriques et des inductances.	135
4.5	Enveloppe des FRF amorties par un circuit piézoélectrique comparée à la FRF sans amortissement (- -) et à la FRF calculée avec les paramètres moyens (-)	137
4.6	Comparaison des CDF par une simulation Monte-Carlo et par régression . .	138
4.7	L'enveloppe des FRFs amorties par un circuit piézoélectrique comparée à la FRF sans amortissement (- -) et la FRF calculée avec les paramètres moyens (-)	140
5.1	Simulation du PDF du module de Young normalisé	145
5.2	Simulation des PDF de F_N et μ de la force de frottement	145
5.3	PDF de la force serrage maximal et du coefficient de frottement	146
5.4	Enveloppe des FRFs avec contrôle comparée à la FRF avec serrage (—) et à la FRF sans serrage (- -).	148
5.5	Enveloppe des FRFs avec contrôle, comparée à la FRF avec serrage (—) et à la FRF sans serrage (- -).	149

TABLE DES FIGURES

5.6	enveloppe de la FRF avec contrôle(aléatoire) comparé à la FRF dans le cas avec serrage (—) et sans serrage (- -).	150
A.1	Coefficients de la série de Fourier	172
A.2	Comparaison entre une fonction et son approximation par une série de Fourier de degré 10.	173
B.1	Fonction densité de probabilité (PDF)	176
C.1	Les six premiers polynômes d’Hermite probabilistes	178

TABLE DES FIGURES

Introduction

0.1 Contexte

Dans de nombreux domaines d'application, la lutte contre les vibrations de structures légères en environnement dynamique est un enjeu majeur pour le concepteur. Car la vibration des structures modernes comme les avions, les satellites ou les voitures peuvent provoquer des dysfonctionnements, des dommages de fatigue ou le rayonnement d'un fort bruit indésirable [1-3].

L'amortissement des vibrations d'une structure peut être contrôlé par des méthodes passives ou actives.

Les méthodes passives utilisent la capacité intrinsèque de certains matériaux d'absorber l'énergie vibratoire, par exemple, par déformation mécanique. Les matériaux utilisés pour amortir les vibrations sont principalement des métaux et certains polymères [4] en raison de leur caractère viscoélastique. Cependant, la visco-élasticité n'est pas le seul mécanisme d'amortissement passif. Les défauts tels que les dislocations, les joints et les diverses interfaces contribuent également à l'amortissement, car depuis ces défauts, il peut y avoir, lors d'une vibration, des déplacements et des légers glissements relatifs de surfaces, ce qui provoque une dissipation d'énergie. Ainsi, la microstructure affecte significativement la capacité d'amortissement d'un matériau au sein de chacun des éléments de structure.

De plus, l'amortissement au sein d'une structure complexe est très généralement situé au niveau des liaisons [5]. Par exemple, la dissipation d'énergie par frottement est localisée dans les liaisons boulonnées des structures aéronautiques. Dans le cadre d'une réduction du niveau vibratoire, il apparaît donc judicieux de concevoir et de dimensionner des éléments amortissants placés au niveau des zones de liaisons [6].

Une autre manière de réduire l'amplitude des vibrations consiste à utiliser un résonateur accordé ; celui ci va pomper l'énergie vibratoire de la structure principale, et il va la transmettre à un dispositif viscoélastique qui dissipera cette énergie. Cependant, ce type de dispositif doit être placé dans une zone de déplacement important et impose l'ajout d'une masse, ce qui peut être pénalisant.

Dans le même cadre de réduction de vibrations par des méthode passives, on peut citer l'utilisation d'un circuit électronique couplé à la structure pour réduire l'amplitude vibratoire. On peut citer deux catégories de dispositifs :

- des aimants et des bobines dont le déplacement relatif crée un courant électrique qui va être dissipé par une résistance,
- des dispositifs piézoélectriques associés à un circuit électrique adapté [7] [8] : la déformation de l'élément piézoélectrique induit, par effet piézoélectrique direct, un courant électrique, qui va être dissipé en passant par le circuit électrique associé.

Les méthodes actives utilisent des capteurs et actionneurs pour diminuer l'amplitude des vibrations en temps réel. Les capteurs et les actionneurs peuvent être des dispositifs piézoélectriques [9]. Parmi les méthodes actives de réduction de vibrations [10–12], on peut citer en particulier celles qui permettent de favoriser la dissipation d'énergie dans les joints boulonnés en utilisant des rondelles piézoélectriques pour modifier le serrage [13].

La réponse vibratoire est sensible à de nombreux paramètres, généralement mal connus et susceptibles de varier. Cette variabilité doit être prise en compte pour calculer la réponse vibratoire de façon robuste[14–16].

0.2 Objectifs du travail

Comme rappelé précédemment, l'amortissement au sein de la structure est très généralement situé au niveau des liaisons [5]. Dans le cadre d'une réduction du niveau vibratoire, il apparaît donc judicieux de concevoir et de dimensionner des éléments amortissants placés au niveau des zones de liaisons [6].

L'objectif de cette thèse est d'étudier les mécanismes permettant d'améliorer la réduction de vibrations dans des structures comportant des assemblages et plus précisément des joints

boulonnés. Les recherches se sont orientées selon deux axes :

- Le premier axe se base sur la réduction de vibrations en utilisant les éléments piézoélectriques connectés à un circuit électrique adapté. Pour cela, des éléments piézoélectriques vont être utilisés comme rondelles au niveau du joint boulonné. La vibration de la structure provoque une déformation de ces rondelles qui va par conséquent générer un courant électrique pouvant être dissipé dans un circuit électrique adapté.
- Le deuxième axe se base sur la capacité des joints boulonnés à modifier la rigidité et par conséquent les fréquences propres de la structure en fonction du serrage appliqué. Pour cela on va étudier l'effet d'un serrage variable sur la réponse vibratoire d'une structure selon des lois de commande spécifiques.

A l'issue de ces deux démarches de réduction des vibrations, on peut proposer des modèles permettant une réduction optimale des vibrations, caractérisés par un certain nombre de paramètres pouvant être incertains. L'étape suivante sera de déterminer la robustesse de la réduction des vibrations par rapport à une variation de ces paramètres dans un cadre probabiliste.

Les étapes de l'étude

L'étude proposée comporte deux parties. La première concerne l'étude des mécanismes permettant une amélioration de la réduction de vibrations en utilisant l'effet direct et inverse des éléments piézoélectriques. La deuxième partie porte sur une étude probabiliste des différents modèles proposés afin de qualifier leur robustesse.

Dans la première partie de cette thèse, tous les paramètres sont déterministes.

Dans le premier chapitre, on propose de faire une étude de réduction de vibrations par amortissement électromécanique en utilisant une formulation adaptée [7]. Cette méthode a l'avantage d'utiliser les matrices éléments finis issues de logiciels de calcul standards.

Dans le deuxième chapitre, on propose une étude de la réduction de vibrations par contrôle du serrage au niveau des joints boulonnés. Dans un premier temps, on commence par faire une simplification du joint boulonné en un modèle masse ressort à deux ddl

dans l'objectif de faire une résolution du problème dynamique non linéaire afin de pouvoir tester plusieurs lois de contrôle du serrage. Dans un deuxième temps, on propose une étude numérique avec une démarche adaptée à la résolution des problèmes de contact avec frottement d'un assemblage boulonné représentatif. Un changement de serrage peut provoquer une chute de la rigidité et donc des problèmes de stabilité de la structure : on propose alors une conception de la structure intégrant le joint boulonné en séparant les fonctions de rigidité et d'amortissement.

Dans la deuxième partie de cette thèse, certains paramètres des modèles décrits ci-dessus seront considérés comme aléatoires.

Dans le premier chapitre, après quelques rappels, on exposera les différentes étapes du calcul stochastique : tout d'abord, l'étude de la sensibilité par calcul des indices de Sobol du premier ordre [17] dans l'objectif de réduire la taille du modèle stochastique, puis modélisation des lois des variables aléatoires retenues en se basant sur le principe du maximum d'entropie. Enfin différentes méthodes de calcul stochastique seront exposées et illustrées à travers des exemples : méthode intrusive et non intrusive par rapport au solveur numérique et méthode de réduction adaptée.

Dans le deuxième chapitre de cette partie, une étude de la robustesse du modèle électromécanique sera proposée, pour cela, on utilisera des méthodes non intrusives pour déterminer la robustesse de nos modèles par rapport à un changement des valeurs des paramètres. Trois méthodes seront utilisées pour ce calcul de robustesse : méthode de régression, méthode de Monte-Carlo, et méthode de réduction de modèle stochastique.

Dans le troisième chapitre de la partie d'étude probabiliste, une étude de la robustesse d'un modèle à 2 degrés de liberté (ddl) avec contrôle de force normale sera proposée.

En conclusion, on fera le bilan des avancées lors des différentes études réalisées et on présentera des perspectives envisageables pour la suite de ces travaux.

Première partie

Étude déterministe

Chapitre 1

Couplage électromécanique

« La connaissance s'acquiert par l'expérience, tout le reste n'est que de l'information. » *Albert Einstein*

Dans le contexte de l'amélioration de la réduction de vibrations dans les structures munies d'assemblages boulonnés, on commence par présenter la réduction de vibrations par utilisation d'éléments piézoélectriques connectés à un circuit électrique adapté.

La piézoélectricité est la propriété que possèdent certains corps de se polariser électriquement sous l'action d'une contrainte mécanique et réciproquement de se déformer lorsqu'on leur applique un champ électrique. Les deux effets sont indissociables. Le premier est appelé effet piézoélectrique direct ; le second effet piézoélectrique inverse. Ces deux effets piézoélectriques direct et inverse peuvent être utilisés, l'élément piézo-électrique étant utilisé comme capteur ou actionneur, voire les deux simultanément. Cette propriété trouve un très grand nombre d'applications dans l'industrie et la vie quotidienne. Dans le domaine de l'ingénierie mécanique on peut trouver par exemple comme applications : des capteurs d'accélération et de gyroscopes, capteurs de son, contrôle des vibrations, contrôle ou récupération d'énergie.

Dans cette partie, on propose une modélisation du couplage électromécanique par éléments finis adaptée aux cas de structures élastiques munies de pastilles (patches) piézoélectriques. Cette formulation permet de réduire le nombre de degrés de liberté (ddl) électrique avec un seul ddl électrique par patch piézoélectrique [7].

Les premiers travaux traitant des éléments piézoélectriques par éléments finis [18] proposent un couplage électromécanique entre les variables du déplacement mécanique et les variables du champ électrique, en tenant compte de l'effet piézoélectrique direct et inverse.

Les inconnues électriques peuvent être condensées de sorte que le problème à résoudre ait la forme d'un problème de vibration élastique standard. Dans le cas des actionneurs, l'effet électrique des patches apparaît comme un forçage externe, proportionnel à la tension appliquée, tandis que la rigidité du système reste purement élastique. Par contre, dans le cas des capteurs, l'effet apparaît avec un terme de raideur ajoutée en raison de l'état du circuit ouvert des pastilles piézoélectriques, dont la tension de borne (la sortie du capteur) est proportionnelle aux inconnues de déplacement mécaniques. Cette formulation est la base de beaucoup des études numériques impliquant une structure élastique avec des éléments piézoélectriques [19, 20].

1.1 Formulation électromécanique

Les premiers travaux sur des éléments finis électromécaniques couplés par piézoélectricité [18] reposent sur une formulation couplant, par effet direct et inverse, les champs de déplacement mécanique et de potentiel électrique. On peut remarquer que dans le cas d'applications capteur ou actionneur uniquement, les variables électriques peuvent être condensées de sorte que le problème à résoudre prend la forme d'un problème d'élasticité conventionnel, avec l'effet d'éventuels actionneurs piézoélectriques similaire à un effort imposé (parfois simulé par une contrainte de type thermique) proportionnel à la tension ; cette formulation est la base de la plupart des modèles de structures élastiques avec éléments piézoélectriques [21–25]. On peut trouver dans [21] une revue des développements récents dans le domaine.

À la différence de ces applications, les circuits électriques de type « shunt » ou « switch » imposent uniquement une relation entre la tension et la charge dans le circuit et nécessitent un calcul simultané de l'effet capteur et actionneur. Cela peut être fait en utilisant les fonctions adaptées d'un logiciel commercial éléments finis [26], mais cette démarche est coûteuse en temps de calcul.

On se propose ici d'utiliser un modèle éléments finis adapté au cas d'éléments piézoélectriques minces [7], munis d'électrodes sur leur surface et polarisés dans la direction transverse. La partie mécanique est décrite de manière conventionnelle avec des éléments finis en déplacement. On décrira l'état électrique uniquement par la différence de potentiel et la charge des électrodes, sans passer par la description complète du champ électrique.

1.1.1 Modélisation d'un milieu piézoélectrique

Cette section présente la forme générale des équations utilisées pour modéliser le comportement d'un milieu piézoélectrique, sous forme locale puis sous forme faible adaptée pour un passage à la méthode des éléments finis [27]. Les indices i, j, k, l repèrent les composantes des vecteurs et tenseurs et l'on fait usage de la convention d'Einstein.

L'élément piézoélectrique occupe un domaine Ω_p au repos. Il subit un déplacement imposé u_i^d sur une partie Γ_u de sa frontière et une densité d'efforts t_i^d sur la partie

1.1. FORMULATION ÉLECTROMÉCANIQUE

complémentaire Γ_t de sa frontière. Un potentiel électrique ψ^d et une densité surfacique de charges libres q^d sont prescrits sur des domaines Γ_ψ et Γ_q , qui constituent une partition de la frontière $\partial\Omega_p$.

Les tenseurs de déformation linéarisée et de contrainte sont notés avec leurs composantes ε_{ij} et σ_{ij} , les vecteurs de champ électrique et champ de déplacement électrique sont notés E_i et D_i . n_i est le vecteur normal unitaire sortant de Ω_p , ρ la masse volumique locale et t le temps.

Les équations du problème s'écrivent :

Pour la partie mécanique

$$\sigma_{ij,j} + f_i^d = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \text{dans} \quad \Omega_p \quad (1.1)$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i^d \quad \text{sur} \quad \Gamma_t \quad (1.2)$$

$$u_i = u_i^d \quad \text{sur} \quad \Gamma_u \quad (1.3)$$

Pour la partie électrique

$$D_{i,i} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_p \quad (1.4)$$

$$D_i n_i = -q^d \quad \text{sur} \quad \Gamma_q \quad (1.5)$$

$$\psi = \psi^d \quad \text{sur} \quad \Gamma_\psi \quad (1.6)$$

L'équation (1.1) est l'équation fondamentale de la dynamique ; les équations (1.2) et (1.3) sont les conditions aux limites imposées ; l'équation (1.4) est la loi de Gauss ; les équations (1.5) et (1.6) sont les conditions aux limites.

Et on utilise les relations de comportement suivantes :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k \quad (1.7)$$

$$D_i = e_{ikl} \sigma_{kl} + \epsilon_{ik} E_k \quad (1.8)$$

où c_{ijkl} est le module d'élasticité à champ électrique constant (raideur en court-circuit), e_{kij} les constantes piézoélectriques et ϵ_{ik} la permittivité électrique à déformation constante (permittivité bloquée). Cette écriture simplifie l'approche éléments finis. On utilise les relations de gradient suivantes pour identifier les relations entre le déplacement et les déformations d'une part et le potentiel et champ électrique d'autre part :

1.1. FORMULATION ÉLECTROMÉCANIQUE

$$\varepsilon_{kl}(u) = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (1.9)$$

$$E_k(\psi) = -\psi_{,k} \quad (1.10)$$

Les quantités mécaniques et électriques $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, E_i, D_i, u_i, \psi$ sont fonction du temps et du vecteur position dans Ω_p . La densité volumique imposée f_i^d est fonction du temps et du vecteur position dans Ω_p . Les densités surfaciques imposées u_i^d, t_i^d, ψ^d et q^d sont fonction du temps et du vecteur position sur $\partial\Omega_p$.

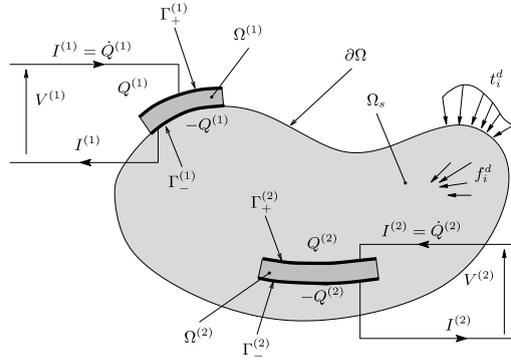


FIGURE 1.1 – Structure élastique avec deux éléments piézoélectriques

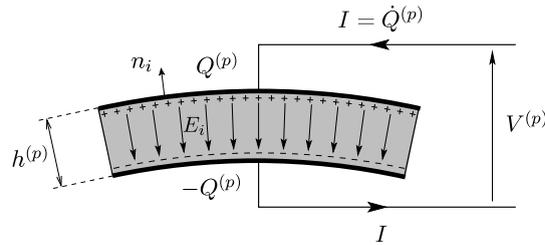


FIGURE 1.2 – p-ième élément piézoélectrique soumis à la différence de potentiel V^p , avec les charges Q_+^p et Q_-^p aux surfaces des électrodes

1.1.2 Hypothèses et formulation

Une structure élastique, occupant un domaine Ω_s , est équipée de P pastilles piezo-électriques. Chaque pastille a sa face inférieure et supérieure recouverte d'une électrode très fine. La p -ième pastille ($p \in \{1, \dots, P\}$) occupe un domaine $\Omega^{(p)}$. Le domaine complet Ω est formé par l'union de Ω_s et de tous les domaines $\Omega^{(p)}$. Le domaine Ω est soumis à une densité volumique d'effort supposé connue f_i^d et le bord $\partial\Omega$ du domaine est soumis à des déplacements imposés u_i^d sur une partie Γ_u et une densité surfacique d'effort imposé t_i^d sur la partie complémentaire Γ_t telle que $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t$. Quelques hypothèses, permettant une formulation simplifiée du problème tout en conservant un grand domaine d'application, sont rappelées ici :

- L'épaisseur des éléments piézo-électriques est constante et plus faible que sa longueur caractéristique.
- L'épaisseur de l'électrode est négligeable devant l'épaisseur du patch.
- Les éléments piézo-électriques sont polarisés dans la direction transverse (normale aux électrodes), souvent noté "3". Cela induit un couplage avec la contrainte transverse notée usuellement "33" et avec la contrainte longitudinale notée usuellement "31". Par la suite, seul ce dernier couplage sera pris en compte.
- Les éléments piézo-électriques sont isotropes dans les directions longitudinales.
- Aucune charge libre surfacique n'est présente sur Γ_0 . Les effets de bord du champ électrique aux extrémités des éléments sont négligés.
- Le vecteur champ électrique de composantes E_k est normal à la surface moyenne du patch et d'amplitude constante sur l'élément :

$$E_K = \frac{\psi_+^{(p)} - \psi_-^{(p)}}{h_{(p)}} n_k = \frac{V_{(p)}}{h_{(p)}} n_k \quad \text{dans } \Omega^p \quad (1.11)$$

Après une discrétisation par éléments finis du problème électromécanique, et en notant \mathbf{U} le vecteur de déplacement au niveau des noeuds et \mathbf{V} le vecteur des différences de potentiel, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{V}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_m & \mathbf{K}_c \\ -\mathbf{K}_c^T & \mathbf{K}_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

1.1. FORMULATION ÉLECTROMÉCANIQUE

\mathbf{M}_m et \mathbf{K}_m sont les matrices de masse et de rigidité de la structure mécanique avec les éléments piézoélectriques. \mathbf{K}_c est la matrice de couplage électromécanique. \mathbf{K}_e est la matrice diagonale des capacités des pastilles piézoélectriques. \mathbf{F} et \mathbf{Q} sont les vecteurs des efforts mécaniques extérieurs et des charges contenues dans les électrodes de chaque pastille. Avec les relations suivantes :

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i d\Omega \Rightarrow \delta \mathbf{U}^T \mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{U}} \quad (1.13)$$

$$\int_{\Omega} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} (\delta u) \varepsilon_{kl} (u) d\Omega \Rightarrow \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K}_m \ddot{\mathbf{U}} \quad (1.14)$$

$$\sum_{p=1}^P \frac{V^p}{h^p} \int_{\Omega^p} e_{ijk} n_i \varepsilon_{kl} d\Omega \Rightarrow \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K}_c \mathbf{V} \quad (1.15)$$

$$\int_{\Omega} f_i^d \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i^d \delta u_i dS \Rightarrow \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F} \quad (1.16)$$

$$\sum_{p=1}^P \frac{V^p}{h^p} \int_{\Omega^p} e_{kij} \varepsilon_{kl} n_i d\Omega \Rightarrow \delta \mathbf{V}^T \mathbf{K}_c^T \mathbf{U} \quad (1.17)$$

$$\sum_{p=1}^P \delta V^p C^p V^p \Rightarrow \delta \mathbf{V}^T \mathbf{K}_e^T \mathbf{V} \quad (1.18)$$

$$\sum_{p=1}^P \delta V^p Q^p \Rightarrow \delta \mathbf{V}^T \mathbf{Q} \quad (1.19)$$

On peut reformuler le système 1.12 avec la charge \mathbf{Q} comme inconnue et une différence de potentiel \mathbf{V} imposée.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{Q}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{K}}_m & \mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \\ \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^T & \mathbf{K}_e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

$$\text{avec} \quad \hat{\mathbf{K}}_m = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^T \quad (1.21)$$

1.1. FORMULATION ÉLECTROMÉCANIQUE

À partir de ces deux écritures 1.12 et 1.20, on peut examiner deux cas particuliers, selon que les patchs sont en court-circuit ($V=0$) ou en circuit ouvert ($Q=0$). Dans ces cas les deux systèmes d'équations ci-dessus peuvent être réduit comme suit :

$$\mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_m \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (\text{court circuit}) \quad (1.22a)$$

$$\mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{U}} + \hat{\mathbf{K}}_m \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (\text{circuit ouvert}) \quad (1.22b)$$

$\hat{\mathbf{K}}_m$ représente la matrice de raideur en circuit ouvert : l'effet du couplage électromécanique en circuit ouvert sur la structure élastique apparaît comme un terme de raideur ajoutée $\mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^T$.

La pulsation ω_r et le mode propre associé Φ_r du système en court circuit sont solution de l'équation :

$$\mathbf{K}_m \Phi_r - \omega_r^2 \mathbf{M}_m \Phi_r = 0 \quad (1.23)$$

On peut écrire une approximation du vecteur déplacement en le projetant sur la base modale tronquée, restreinte aux N premiers modes :

$$\mathbf{U}_N(t) = \sum_{r=1}^N \Phi_r q_r. \quad (1.24)$$

En insérant cette équation dans le système d'équation 1.12 et en multipliant la partie mécanique par Φ_r^T , le problème s'écrit pour tout $r \in [1, N]$.

$$\ddot{q}_r + \omega_r^2 q_r + \chi_r^T \mathbf{V} = F_r \quad (1.25a)$$

$$\mathbf{K}_e \mathbf{V} - \sum_{j=1}^N \mathbf{K}_c \Phi_j q_j = \mathbf{Q} \quad (1.25b)$$

avec

$$\chi_r^T = [\chi_r^1 \dots \chi_r^p \dots \chi_r^P] = \Phi_r^T \mathbf{K}_c \quad (\mathbf{K}_e \mathbf{V})^T = [C^1 V^1 \dots C^p V^p \dots C^P V^P] \quad (1.26)$$

et

$$F_r = \Phi_r^T \mathbf{F} \quad (1.27)$$

1.1. FORMULATION ÉLECTROMÉCANIQUE

on peut obtenir une autre écriture du problème en remplaçant \mathbf{V} fonction de \mathbf{Q} (1.25b) dans l'équation 1.25a :

$$\ddot{q}_r + \omega_r^2 q_r + \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^P \frac{\chi_r^p \chi_j^p}{C^p} q_j + \sum_{p=1}^P \frac{\chi_r^p}{C^p} Q^p = F_r \quad (1.28)$$

Le coefficient de couplage effectif, qui caractérise l'échange d'énergie entre les éléments piézo-électriques et la structure mécanique, est défini pour le r-ième mode dans la norme [28] par :

$$k_{eff,r}^2 = \frac{\hat{\omega}_r^2 - \omega_r^2}{\omega_r^2} \quad (1.29)$$

où ω_r et $\hat{\omega}_r$ sont les fréquences propres en court-circuit et circuit ouvert du r-ième mode respectivement. L'équation 1.28, en négligeant les termes de couplage en q , s'écrit :

$$\ddot{q}_r + (\omega_r^2 + \sum_{p=1}^P \frac{(\chi_r^p)^2}{C^p}) q_r + \sum_{p=1}^P \frac{\chi_r^p}{C^p} Q^p = F_r \quad (1.30)$$

En circuit ouvert Q^p est nul pour tout p : le problème s'écrit alors :

$$\ddot{q}_r + \hat{\omega}_r^2 q_r = F_r \quad (1.31)$$

avec

$$\hat{\omega}_r^2 \simeq \omega_r^2 + \sum_{p=1}^P \frac{(\chi_r^p)^2}{C^p} \quad (1.32)$$

Cette expression est une approximation de la fréquence du r-ième mode en circuit ouvert, noté $\hat{\omega}_r$, à condition que la troncature modale soit valide. Donc on peut écrire le coefficient du couplage modal pour le r-ième mode comme suit :

$$k_{eff,r}^2 \simeq \sum_{p=1}^P (k_r^p)^2 \quad (1.33)$$

avec $k_r^p = \frac{\chi_r^p}{\sqrt{C^p} \omega_r}$.

Ce coefficient peut être écrit avec une écriture matricielle comme suit :

$$k_{eff,r}^2 = \frac{\Phi_r^T \mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^T \Phi_r}{\Phi_r^T \mathbf{K}_m \Phi_r} \quad (1.34)$$

1.1.3 Algorithme de résolution

Après avoir rappelé la définition et la signification du coefficient de couplage électromagnétique, on propose dans cette partie, un algorithme capable de le calculer. Comme on a vu précédemment, pour calculer le coefficient de couplage effectif, on a besoin de construire par éléments finis une matrice de couplage électromagnétique \mathbf{K}_c et une matrice inverse des capacités \mathbf{K}_e comme indiqué dans les équations 1.17 et 1.18, ainsi que les vecteurs et valeurs propres de la structure en court circuit, issus d'un calcul purement mécanique.

La démarche de calcul du coefficient de couplage électromécanique est résumée dans le diagramme de la figure 1.3.

Ce calcul a été réalisé grâce à deux logiciels :

- « CAST3M » pour construire le maillage et déterminer les fréquences et les modes propres (partie mécanique).
- « Matlab » pour construire les matrices \mathbf{K}_c et \mathbf{K}_e et calculer les coefficients de couplage électromécanique par mode.

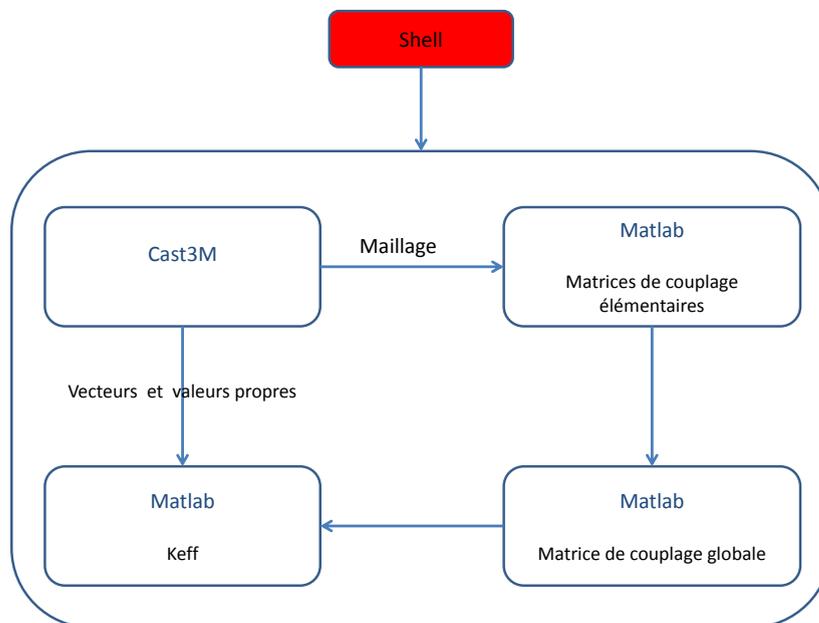


FIGURE 1.3 – Algorithme de génération du coefficient du couplage effectif

Le pilotage des calculs se fait par le langage « Shell » sur le système d'exploitation

Unix, selon le schéma de la figure 1.3.

Cette démarche de calcul est facilement utilisable et adaptable dans le cas d'une stratégie d'optimisation, et notamment lors d'une optimisation de position, car dans ce cas, la géométrie du patch ne changeant pas d'une position à l'autre, les matrices \mathbf{K}_c et \mathbf{K}_e sont construites une seule fois. Dans ce cas, seuls les nœuds de connectivité changent entre les éléments piezo et les éléments de la structure. La figure 1.4 présente l'algorithme qui résume la démarche.

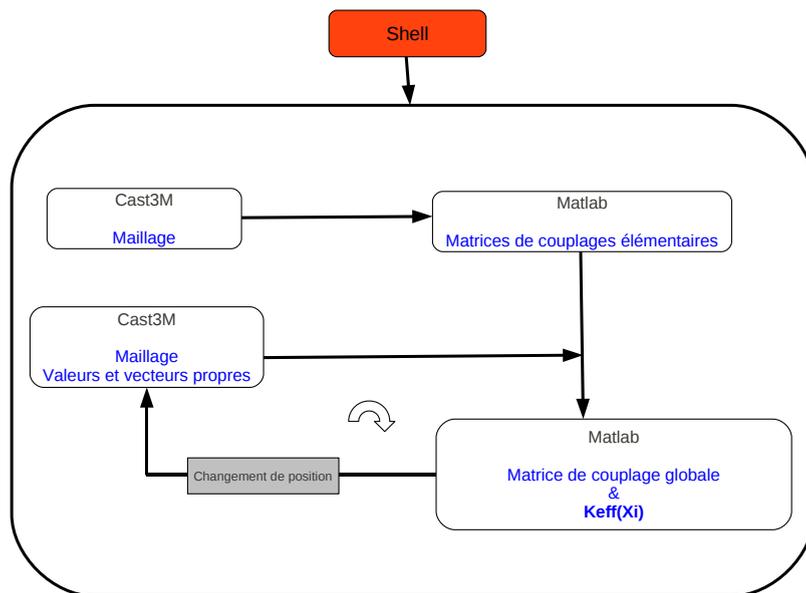


FIGURE 1.4 – Algorithme de génération du coefficient du couplage effectif pour différentes positions

1.1.4 Shunt linéaire

Cette partie présente une optimisation de la réduction des vibrations d'une structure munie d'éléments piézoélectriques (modélisée précédemment) associés à des circuits électriques passifs de type « shunts ». On étudie le cas d'un shunt résistif (shunt « R ») dans lequel une résistance électrique dissipe de la puissance par effet Joule et le cas d'un shunt inductif ou résonant (shunt « RL ») dans lequel une inductance permet augmenter le courant circulant dans le shunt et donc la dissipation par la résistance (Fig. 1.5). Dans ces

1.1. FORMULATION ÉLECTROMÉCANIQUE

deux cas, on utilise le modèle électromécanique de la structure avec patches piézoélectriques obtenu précédemment, le shunt introduisant une relation entre le courant (qui dépend de la charge libre sur le patch) et la tension aux bornes de celui-ci.

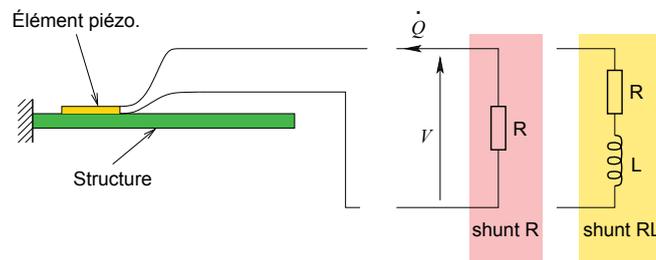


FIGURE 1.5 – Structure munie d’éléments piézo associés à un circuit shunt (R , RL)

Une étude d’optimisation du circuit dans le cas d’un système conservatif à un degré de liberté pour les circuits résonants et les circuits résistifs [6] a permis de donner les indications suivantes :

- les shunts résistifs et résonants doivent être adaptés à la pulsation d’un mode particulier de vibration à réduire et à la capacité de l’élément piézoélectrique ;
- cet accord doit être très précis dans le cas de l’inductance, ce qui exclut l’amortissement de plusieurs modes ;
- la performance obtenue dépend du coefficient de couplage K_{eff} ;
- les valeurs d’inductance requises sont généralement très élevées.

De nombreuses études ont porté sur les différents types de circuit électrique ; dans [29, 30], une comparaison de réduction de vibrations a été faite entre un circuit R – L en série et un circuit R – L en parallèle. L’optimisation des paramètres du circuit électrique permet généralement de réduire les vibrations de modes bien particuliers. Quelques études proposent de concevoir des shunts résonants à plusieurs branches avec pour objectif d’amortir plusieurs modes d’un système à plusieurs degrés de liberté [31, 32]. L’optimisation des paramètres électriques peut conduire à des valeurs très importantes pour l’inductance : ce problème peut être surmonté en ajoutant par exemple un condensateur en série [33].

Les principales propriétés du circuit résistif puis du circuit inductif sont brièvement rappelées.

1.1.4.1 Shunt résistif

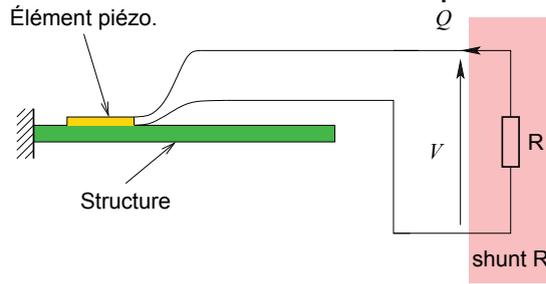


FIGURE 1.6 – Structure munie d'éléments piézo associés à un circuit résistif

Dans cette partie, on souhaite dissiper l'énergie vibratoire de la structure en utilisant un circuit électrique comportant une résistance électrique, cette dissipation se faisant par effet joule. Dans ce contexte, on ajoute à l'ensemble structure munie d'éléments piézoélectriques, le circuit électrique de la figure 1.6, constitué d'une unique résistance R . Cette résistance impose la relation (1.35), à ajouter aux équations précédentes du système électromécanique (1.20) :

$$\mathbf{V} = -\mathbf{R}\mathbf{I} = -\mathbf{R}\dot{\mathbf{Q}} \quad (1.35)$$

En substituant l'équation (1.35) dans (1.20), on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{Q}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{K}}_m & \mathbf{K}_c\mathbf{K}_e^{-1} \\ \mathbf{K}_e^{-1}\mathbf{K}_c^T & \mathbf{K}_e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{Q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

Les déplacements nodaux sont exprimés dans la base des vecteurs propres du système en court-circuit en faisant une troncature sur les N premiers modes :

$$\mathbf{U}_N = \sum_{r=1}^N \Phi_r q_r = \Phi^T \mathbf{q} \quad (1.37)$$

En remplaçant \mathbf{U} par \mathbf{U}_N dans 1.36 on obtient :

$$\begin{pmatrix} \Phi\mathbf{M}_m\Phi^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{Q}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi\hat{\mathbf{K}}_m\Phi^T & \Phi\mathbf{K}_c\mathbf{K}_e^{-1} \\ \mathbf{K}_e^{-1}\mathbf{K}_c^T\Phi^T & \mathbf{K}_e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{Q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi\mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

1.1. FORMULATION ÉLECTROMÉCANIQUE

L'excitation appliquée en un point x_n est supposée de nature harmonique de pulsation Ω :

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}} e^{i\Omega t} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{Q}} \end{pmatrix} e^{i\Omega t} \quad (1.39)$$

donc on peut écrire

$$\mathbf{Z}_R \hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{F}} \quad (1.40)$$

avec

$$\mathbf{Z}_R = \begin{pmatrix} -\Omega^2 \mathbb{I} + \Phi^T \hat{\mathbf{K}}_m \Phi & \Phi^T \mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \\ \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^T \Phi^T & \mathbf{K}_e^{-1} + i\Omega \mathbf{R} \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \Phi \tilde{\mathbf{F}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

On peut obtenir $\hat{\mathbf{q}}$ par :

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{Z}_R^{-1} \hat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \tilde{\mathbf{F}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

On étudie la fonction de réponse en fréquence (déplacement / effort). Le déplacement est mesuré en un point de position x_m et la force est appliquée en un point x_n , ce qui donne :

$$H_{mn} = \Phi_m^T \mathbf{Z}_{11} \Phi_n \quad (1.43)$$

On utilise sur une échelle en dB en utilisant la relation suivante :

$$X_{dB} = 10 \log_{10} (H_{mn} H_{mn}^*) \quad (1.44)$$

1.1.4.2 Shunt résonant

Dans cette partie, on souhaite favoriser la dissipation de l'énergie vibratoire de la structure en utilisant un circuit électrique avec une résistante R et une inductance L en série. Par analogie avec les amortisseurs à masse accordée, on souhaite réaliser un circuit résonant accordé à un des modes de la structure : à la pulsation de résonance du mode considéré, on obtient un courant plus important dans le circuit, et on dissipe plus d'énergie dans la résistance.

1.1. FORMULATION ÉLECTROMÉCANIQUE

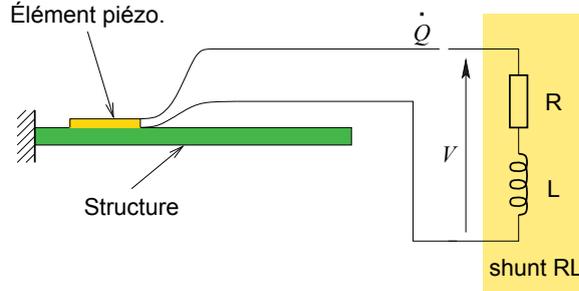


FIGURE 1.7 – Structure munie d'un élément piézo connecté à un circuit résonant .

Dans ce contexte, on ajoute à l'ensemble structure et éléments piézoélectriques le circuit comportant une inductance L et une résistance R aux bornes des éléments (Fig. 1.7) ; on impose alors la relation suivante entre tension et courant, à ajouter aux équations du système électromécanique (1.20) :

$$\mathbf{V} = -\mathbf{R}\mathbf{I} - \mathbf{L}\dot{\mathbf{I}} = -\mathbf{R}\dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{L}\ddot{\mathbf{Q}} \quad (1.45)$$

donc on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{Q}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{K}}_m & \mathbf{K}_c\mathbf{K}_e^{-1} \\ \mathbf{K}_e^{-1}\mathbf{K}_c^T & \mathbf{K}_e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{Q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

De même que précédemment, les déplacements nodaux sont développés dans la base des vecteurs propres du système en court-circuit, tronquée aux N premiers modes :

$$\mathbf{U}_N = \Phi^T \mathbf{q} \quad (1.47)$$

On multipliant la première ligne du système d'équations 1.46 par la matrice des vecteurs propres on obtient :

$$\begin{pmatrix} \Phi\mathbf{M}_m\Phi^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{Q}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi\hat{\mathbf{K}}_m\Phi^T & \Phi\mathbf{K}_c\mathbf{K}_e^{-1} \\ \mathbf{K}_e^{-1}\mathbf{K}_c^T\Phi^T & \mathbf{K}_e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{Q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi\mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

soit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\Omega^2 \mathbf{1} + \Phi \hat{\mathbf{K}}_m \Phi^T & \Phi \mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \\ \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^T \Phi^T & -\mathbf{L} \Omega^2 + \mathbf{K}_e^{-1} + i \Omega \mathbf{R} \end{pmatrix}}_{\mathbf{Z}_R} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{Q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \tilde{\mathbf{F}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

Par la suite, on utilise les équations (1.40, 1.44) pour déterminer la réponse en fréquence sur une échelle en dB.

1.2 Exemple de validation

1.2.1 Description

Paramètres	poutre	pastille piézo
Masse volumique	$\rho_b = 2800 \text{ kg/m}^3$	$\rho_p = 8500 \text{ kg/m}^3$
Coefficient de Poisson	$\nu_b = 0.3$	$\nu_p = 0.2$
Module d'Young	$E_b = 74 \text{ GPa}$	$E_p = 57 \text{ GPa}$
Coefficient de couplage matériau	-	$\hat{k}_{31} = 0.4$
Constante diélectrique modifiée	-	$e_{33} = 2400 \epsilon_0$

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m [28]}$$

TABLE 1.1 – Paramètres matériaux du système étudié

Afin de valider la méthode de calcul de la matrice de couplage sur un exemple simple, on modélise une poutre encastree libre (Fig. 1.8) munie de deux pastilles piézoélectriques montées en série. Les résultats sont comparés à ceux du modèle analytique développé dans [34].

Le tableau 1.2 illustre une comparaison au niveau des fréquences propres et des coefficients de couplage. Le premier calcul, noté ana, a été réalisé analytiquement avec des éléments poutre dans [34], le second, noté EF, est notre calcul réalisé avec des éléments finis 3D de type CUB 20.

Paramètres	mode1 ana/EF	mode2 ana/EF	mode3 ana/EF
f_r [Hz]	69.7/68.9	416.2/411.28	1107.5/1094.94
K_{eff}	0.139/0.138	0.140/0.138	0.126/0.123

TABLE 1.2 – Comparaison des paramètres f_r et K_{eff} pour les trois premiers modes.

1.2. EXEMPLE DE VALIDATION

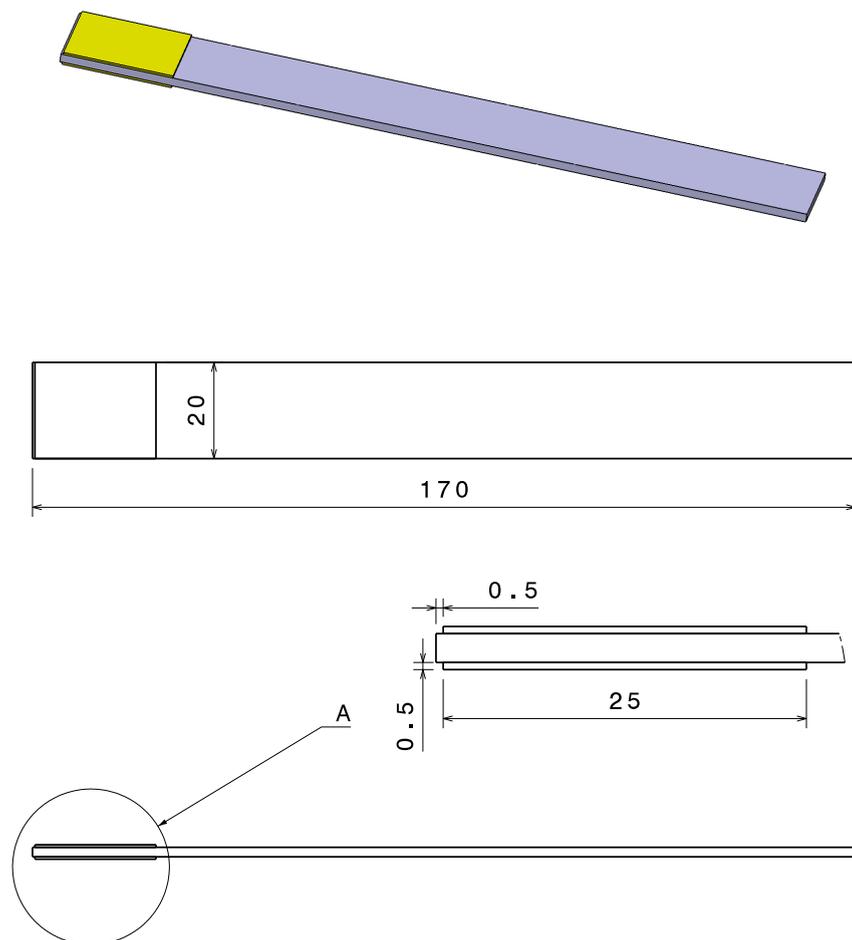
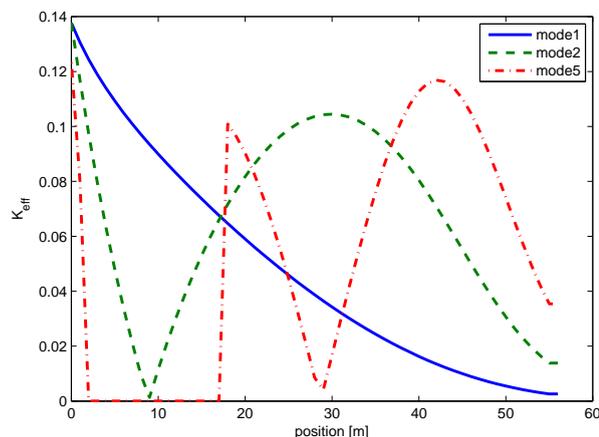


FIGURE 1.8 – Structure de validation.

1.2.2 Optimisation de la position du patch piézoélectrique

Dans cette partie, on fait une étude paramétrique de la position du patch piezo dans la position longitudinale de la poutre pour déterminer la position optimale (selon l'algorithme de la figure 1.4). Cette position sera celle qui maximise le coefficient de couplage effectif, et étant donné qu'on calcule ce coefficient pour chaque mode, on doit chercher une position optimale pour chacun des modes qu'on souhaite réduire.

La figure 1.9 montre la variation de K_{eff} pour différentes positions, et pour les trois

FIGURE 1.9 – K_{eff} fonction de la position et du mode

premiers modes de flexion dans le sens longitudinal de la poutre. On peut voir dans cette figure que, indépendamment du circuit électrique associé, on est capable de déterminer la position optimale du shunt dans la structure.

On peut remarquer que les trois premiers modes partagent tous la même position optimale, qui est celle la plus proche de l'encastrement, cette position permettant une déformation maximale pour chacun des trois modes.

1.2.3 Optimisation des paramètres du circuit RL

La position optimale du patch étant assurée en utilisant les paramètres géométriques optimaux, on fait ensuite une optimisation des paramètres électriques R et L du circuit électrique. Deux approches sont possibles :

- une optimisation (sans contrainte) autour des paramètres optimaux calculés analytiquement [35].
- une optimisation avec des contraintes limitant l'intervalle de variation des paramètres.

Si la première méthode peut s'avérer intéressante pour des géométries simples, elle peut donner une grande valeur pour d'inductance, techniquement difficile à obtenir.

La deuxième méthode consiste à définir des intervalles de variation physiquement acceptables et à faire une étude paramétrique à l'intérieur du domaine ainsi défini.

1.2. EXEMPLE DE VALIDATION

La réduction des vibrations est plus sensible à une variation de l'inductance qu'à une variation de la résistance. La démarche d'optimisation retenue consiste à faire tout d'abord une optimisation de l'inductance pour une résistance donnée sur un intervalle de fréquence (Fig. 1.10). Ensuite, on fait une optimisation de la résistance électrique en utilisant l'inductance fixée à sa valeur optimale sur la même bande (Fig. 1.11). Finalement, la réduction totale optimale est obtenue en utilisant les paramètres géométriques et électriques optimaux (Fig. 1.12).

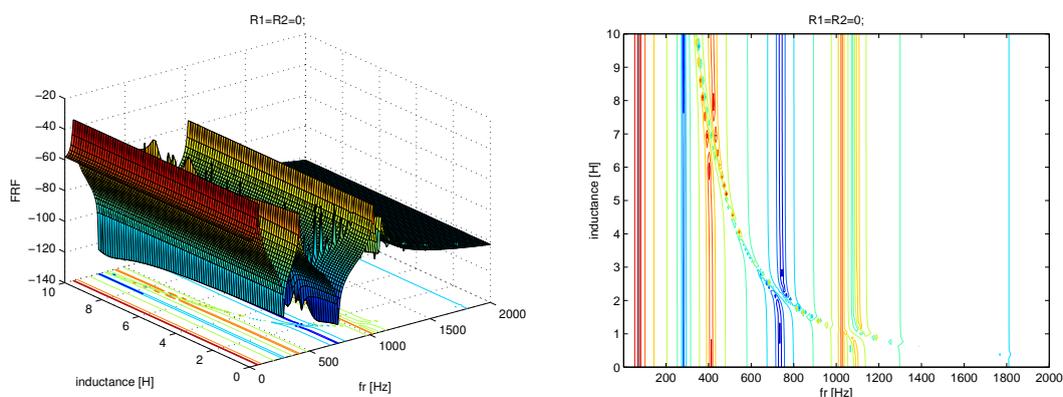


FIGURE 1.10 – FRF pour différentes valeurs d'inductance ($R=0$)

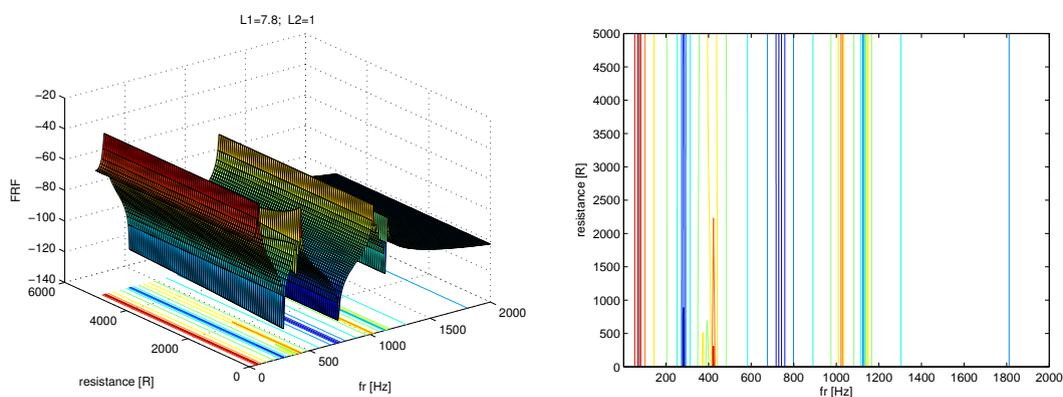


FIGURE 1.11 – FRF pour différentes valeurs de résistance électrique (inductances optimales)

1.3. PREMIÈRE STRUCTURE D'ÉTUDE : ASSEMBLAGE BOULONNÉ À DOUBLE RECOUVREMENT

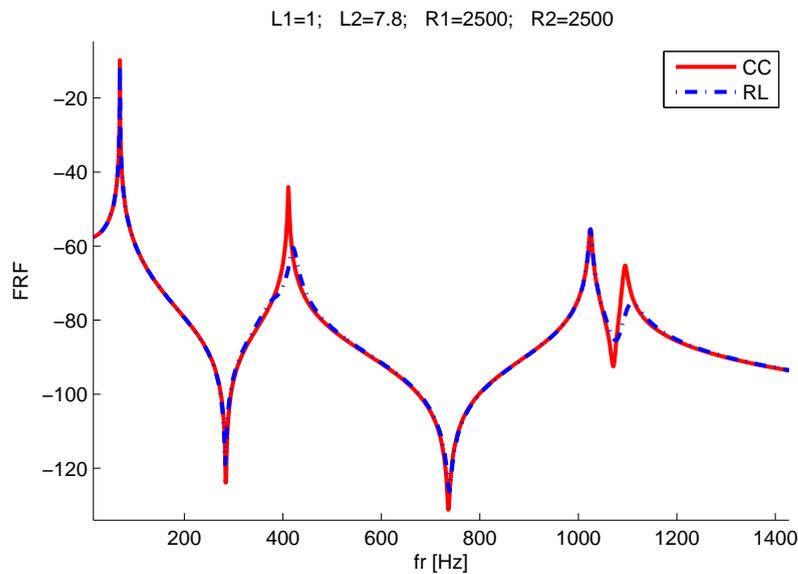


FIGURE 1.12 – Comparaison entre les FRF en circuit fermé et en circuit RL optimal

1.3 Première structure d'étude : assemblage boulonné à double recouvrement

1.3.1 Description

On se propose d'étudier l'influence de l'ajout des éléments piézoélectriques en termes de réduction de vibrations dans les joints boulonnés. La première structure proposée est un assemblage boulonné à double recouvrement composé de deux poutres principales reliées entre elles par deux autres poutres, le tout maintenu en position par des vis qui appliquent un serrage sur l'assemblage. Les éléments piézoélectriques sont ajoutés comme rondelles au niveau des boulons (Fig. 1.13).

Les propriétés des matériaux utilisés dans la simulation sont indiquées dans le tableau 1.3.

Paramètres	structure mère	pastille piézo
Masse volumique (kg/m^3)	2800	8500
Coefficient de Poisson	0.3	0.2
Module d'Young (GPa)	74	57

TABLE 1.3 – Paramètres matériaux du joint boulonné

1.3. PREMIÈRE STRUCTURE D'ÉTUDE : ASSEMBLAGE BOULONNÉ À DOUBLE RECOUVREMENT

Dans cette partie consacrée au couplage électromécanique, on suppose que tous les contacts dans la structure sont des contacts parfaits, qui ne permettent ni glissement ni décollement entre les différentes sous-structures. Cette hypothèse simplificatrice est justifiée tout d'abord par le fait que la dissipation de l'énergie vibratoire par couplage électromécanique doit être supérieure à celle par frottement sec. De plus, la formulation électromécanique proposée précédemment suppose un comportement linéaire de la structure mécanique (sans frottement sec).

On étudie la moitié de la structure (Fig. 1.13) en mettant des conditions de symétrie dans le plan (XZ) de la structure (Fig. 1.14).

Le calcul effectué suit la même démarche que celle proposée dans l'exemple de validation, en suivant l'algorithme (Fig. 1.3).

Deux calculs éléments-finis ont été effectués pour s'assurer de la cohérence des modes obtenus : un calcul sur CAST3M avec un maillage de Cub20 et un calcul sur NASTRAN avec un maillage de Tetra10. Le tableau 1.4 permet une comparaison des fréquences propres selon les deux calculs éléments finis et la figure 1.15 donne un aperçu des déformées associées à chacune de ces fréquences propres.

Nastran	88.1	816.9	1683.1	4652	5380.4
Cast3M	89.2	819.4	1696.5	4635.5	5400.8

TABLE 1.4 – Comparaison entre les cinq premières fréquences calculées par Cas3M et celles calculées par Nastran

1.3.2 Optimisation de la position du patch piézoélectrique

Dans cette partie, on fait une étude paramétrique afin de déterminer l'épaisseur optimale de la rondelle piezo, celle qui va maximiser le coefficient de couplage effectif. Cette étude paramétrique de l'épaisseur de la rondelle a été faite dans un intervalle de $[0.5, 2]$ mm pour rester cohérent avec les hypothèses de la formulation électromécanique, notamment en terme de linéarité du champ électrique dans l'épaisseur de l'élément piezo.

La figure 1.16 montre que dans l'intervalle d'épaisseur étudié, plus l'épaisseur augmente plus le coefficient de couplage effectif est important, et ceci pour les cinq modes propres

1.3. PREMIÈRE STRUCTURE D'ÉTUDE : ASSEMBLAGE BOULONNÉ À DOUBLE RECOUVREMENT

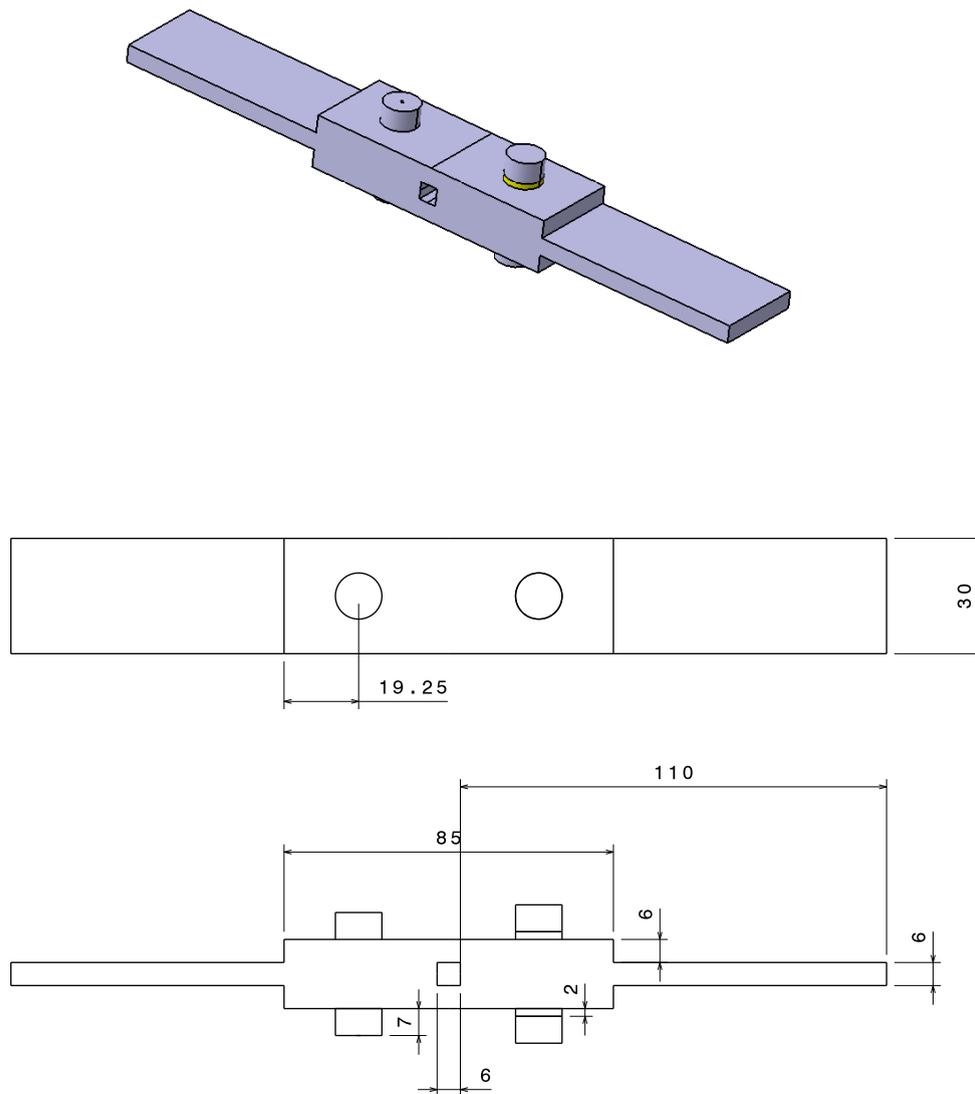


FIGURE 1.13 – Dimension de la première structure d'étude

étudiés.

On peut remarquer que les coefficients effectifs restent relativement réduits, ceci étant dû à la faible taille des rondelles piezo : ces rondelles créent une raideur ajoutée en circuit ouvert négligeable devant la raideur de la structure, et elles sont donc incapables de changer les fréquences propres de la structure en circuit ouvert.

1.3. PREMIÈRE STRUCTURE D'ÉTUDE : ASSEMBLAGE BOULONNÉ À DOUBLE RECOUVREMENT

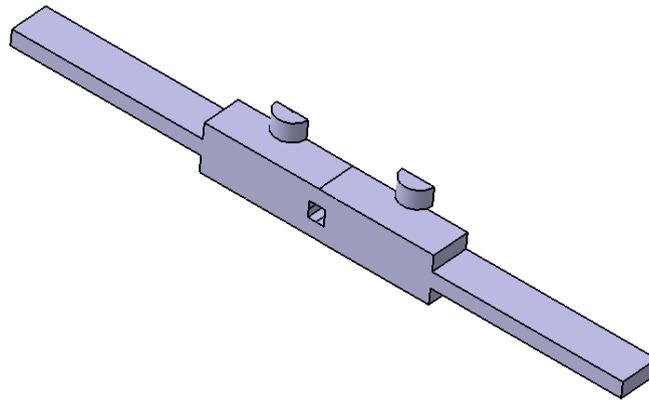


FIGURE 1.14 – Partie de la structure modélisée

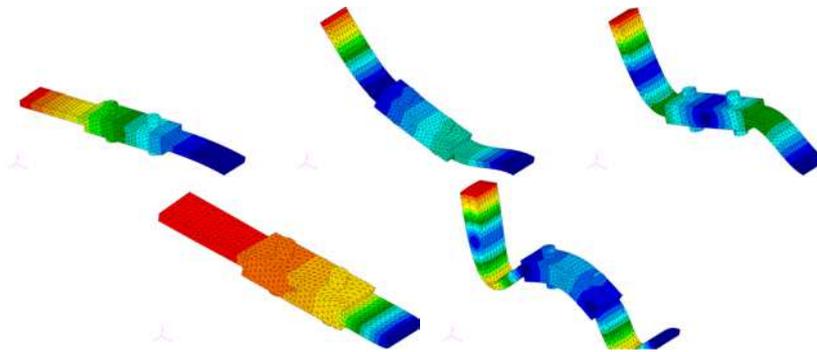


FIGURE 1.15 – Les cinq premières déformées propres (1-2-3/ 4-5)

1.3.3 Optimisation des paramètres du circuit RL

On va faire une optimisation des paramètres électriques pour tenter de compenser un coefficient de couplage effectif faible. On prend comme épaisseur de la rondelle, l'épaisseur optimale (Fig. 1.16), soit $h = 3\text{mm}$.

On optimise tout d'abord l'inductance, pour voir si l'effet de la masse ajoutée apporté par l'ajout de l'inductance a une influence sur la réponse en fréquence de la structure.

Dans l'intervalle d'étude, la valeur de l'inductance n'a pratiquement aucune influence sur la réponse en fréquence de la structure (Fig. 1.17).

On peut conclure que, dans ce type de structure, une rondelle piezo n'a guère d'intérêt en terme de réduction de vibrations, car sa position et sa taille par rapport à la structure

1.3. PREMIÈRE STRUCTURE D'ÉTUDE : ASSEMBLAGE BOULONNÉ À DOUBLE RECOUVREMENT

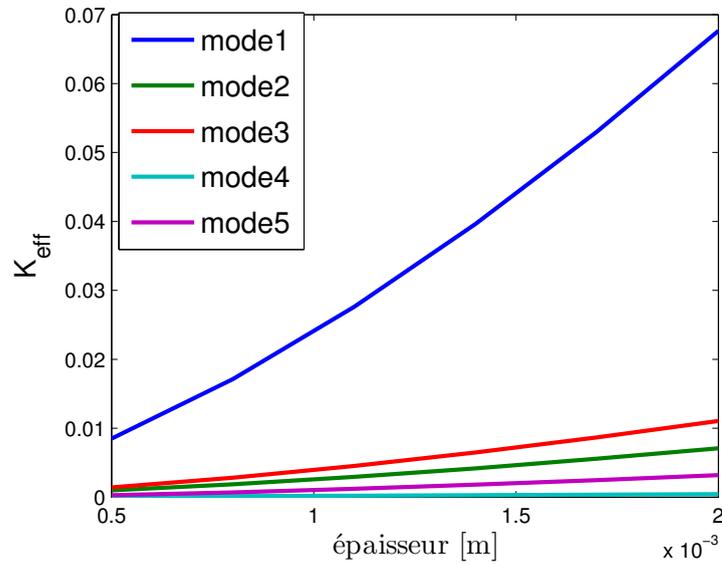


FIGURE 1.16 – Influence de l'épaisseur de la rondelle piezo sur K_{eff}

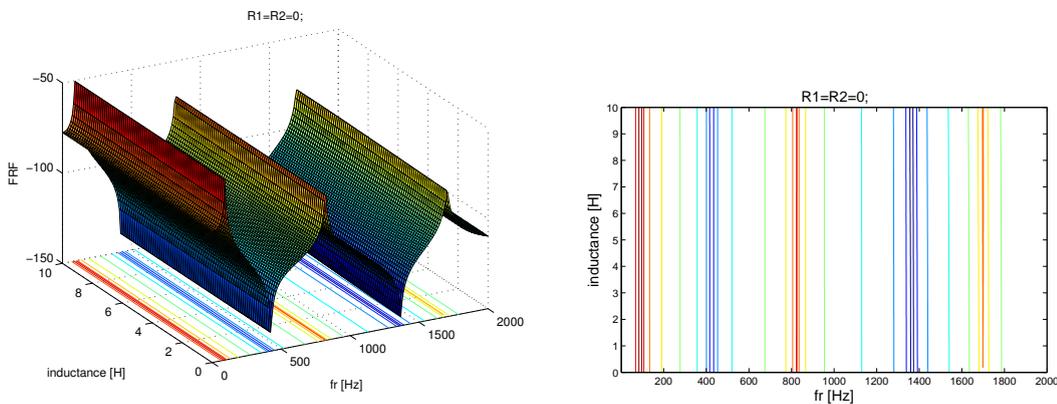


FIGURE 1.17 – Influence de l'inductance sur la FRF de la structure

mère sont telles que la rondelle n'a pratiquement pas d'influence sur la réponse vibratoire de la structure.

Il faut donc imaginer un autre type d'élément piezo, qu'on puisse mettre au niveau de l'assemblage et qui soit capable d'apporter une réduction de vibrations importante. Dans ce cadre on propose d'étudier la même structure, mais cette fois avec le type de patch piézoélectrique représenté figure 1.18.

1.4. DEUXIÈME STRUCTURE D'ÉTUDE : ASSEMBLAGE BOULONNÉ À DOUBLE RECOUVREMENT AVEC PATCH MODIFIÉ

1.4 Deuxième structure d'étude : assemblage boulonné à double recouvrement avec patch modifié

1.4.1 Description

On se propose d'étudier la même structure que précédemment, mais les rondelles piezo sont remplacées par des éléments de forme différente de surface plus importante, qui seront fixés sur la structure (Fig. 1.18).

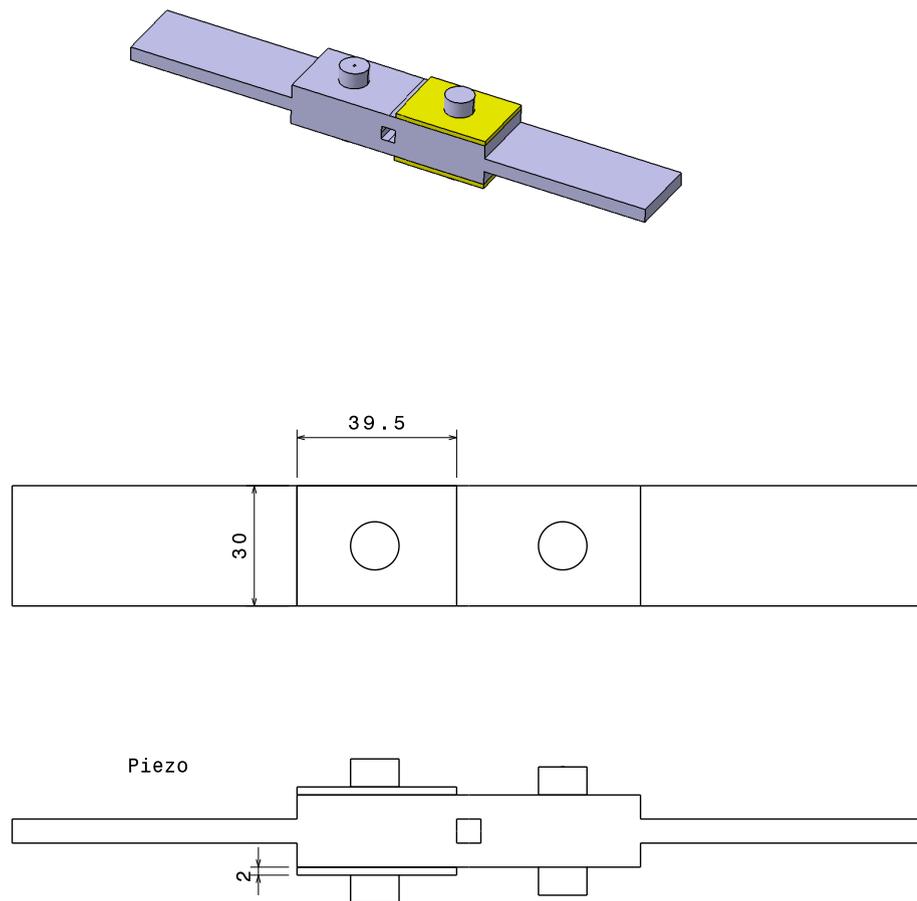


FIGURE 1.18 – Dimension de la deuxième structure d'étude

De même que précédemment, pour des raisons de symétrie, l'étude est faite sur une partie de la structure (Fig. 1.19).

1.4. DEUXIÈME STRUCTURE D'ÉTUDE : ASSEMBLAGE BOULONNÉ À DOUBLE RECOUVREMENT AVEC PATCH MODIFIÉ

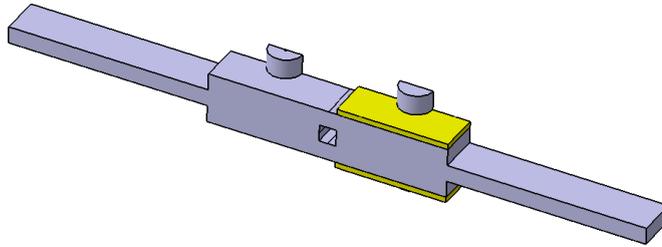


FIGURE 1.19 – Partie de la structure modélisée

1.4.2 Optimisation de la position du patch piézoélectrique

Comme précédemment, l'étude paramétrique de l'épaisseur du patch a été faite dans un intervalle de $[0.5, 3]$ mm pour rester cohérent avec les hypothèses de la formulation électromécanique.

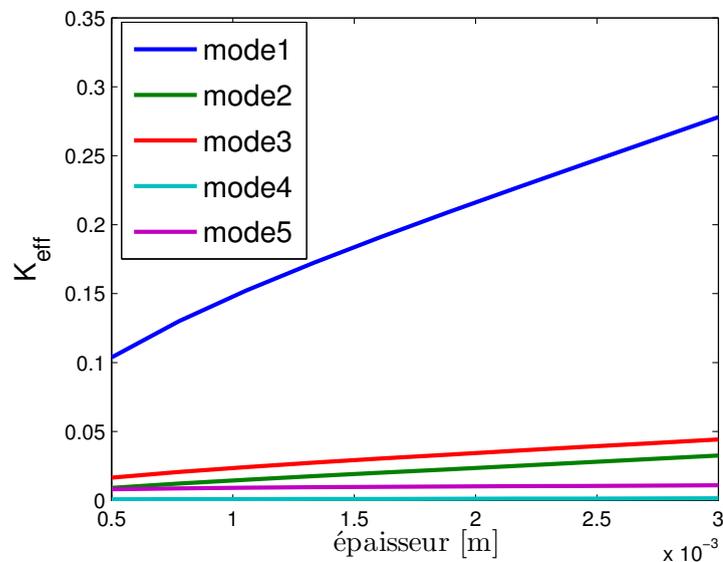


FIGURE 1.20 – L'influence de l'épaisseur de la rondelle piezo sur K_{eff}

Les coefficients effectifs sont plus importants que dans le cas précédent, les autres conclusions étant identiques.

1.4. DEUXIÈME STRUCTURE D'ÉTUDE : ASSEMBLAGE BOULONNÉ À DOUBLE RECOUVREMENT AVEC PATCH MODIFIÉ

1.4.3 Optimisation des paramètres du circuit RL

L'optimisation des paramètres électriques a été effectuée en utilisant l'épaisseur optimale relevée sur la figure 1.20, c'est à dire $h = 3\text{mm}$.

Dans un premier temps, on commence par faire une optimisation de l'inductance, en prenant une valeur de résistance électrique nulle.

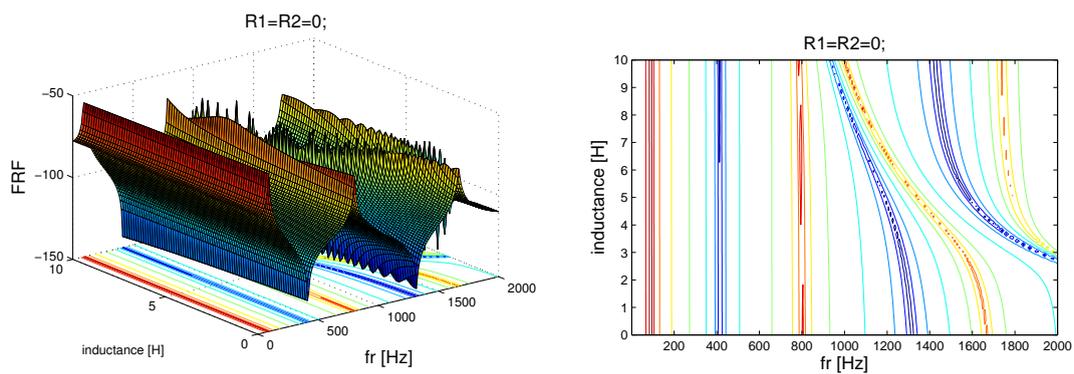


FIGURE 1.21 – Influence de l'inductance sur les FRF ($R = 0$)

On dispose de deux éléments piézoélectriques, ce qui permet de choisir deux valeurs d'inductance différentes et ainsi de pouvoir réduire plusieurs modes propres.

Plusieurs intervalles d'inductance sont possibles pour réduire les fréquences critiques (Fig.1.21).

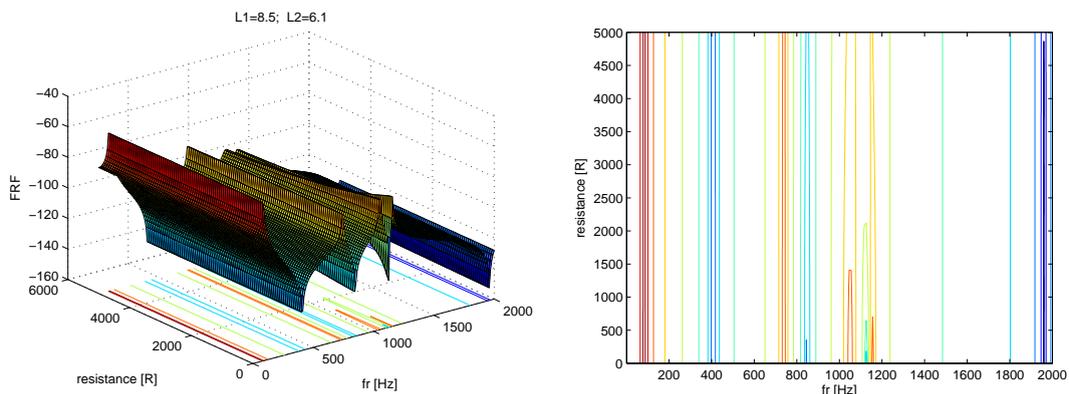


FIGURE 1.22 – Influence de la résistance électrique sur FRF (L optimale)

1.5. CONCLUSION

L'inductance étant fixée à sa valeur optimale, la valeur optimale de la résistance électrique est déterminée (Fig. 1.22).

Une comparaison sur les FRF est effectuée, avec les paramètres optimaux préalablement identifiés, dans les cas suivants : court circuit, circuit ouvert et circuit RL optimal (Fig. 1.23).

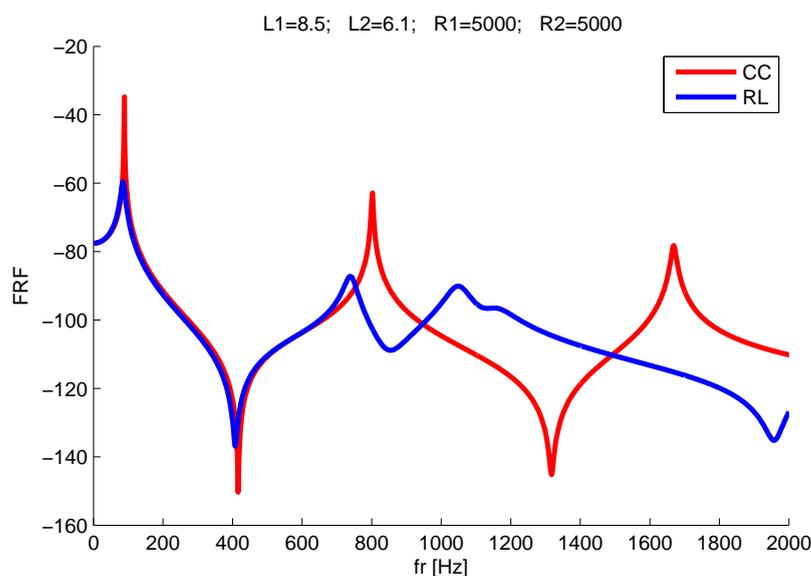


FIGURE 1.23 – comparaison entre les d'FRFs en circuit ouvert, fermé et en circuit RL optimal

1.5 Conclusion

Dans cette partie de réduction de vibrations par amortissement électromécanique, on a utilisé une méthode qui permet de réduire le nombre de variables électriques à une variable par élément piézoélectrique. Cette méthode a l'avantage d'utiliser les matrices éléments finis issues de logiciels de calcul éléments finis standards. Après une validation de notre modèle électromécanique, le calcul du coefficient de couplage effectif pour deux types d'éléments piézoélectriques a permis de faire une optimisation de la géométrie de l'élément piézoélectrique dans les deux cas. Par la suite, une optimisation des paramètres électriques a été proposée. Cette démarche a permis de conserver un seul type d'élément

1.5. CONCLUSION

piézoélectrique, celui qui permet une meilleure réduction de l'amplitude vibratoire. À l'issue de ces deux démarches d'optimisation, le modèle proposé a permis de faire une réduction de vibrations importante au niveau de deux fréquences critiques ; par contre, la réduction du premier mode est restée assez limitée.

En conclusion, la réduction de vibrations apportée par le dispositif d'amortissement électromécanique peut s'avérer très intéressant à condition d'utiliser les paramètres optimisés. Il reste à déterminer le niveau de robustesse de l'amortissement apporté par ce dispositif : à cet effet, on propose dans le chapitre 4 une étude probabiliste permettant d'évaluer la réponse vibratoire aléatoire du système en fonction de paramètres aléatoires d'entrée tels que le module de Young, la résistance électrique et l'inductance.

On se propose également d'explorer une autre voie pour la réduction de vibrations dans les structures comportant des assemblages boulonnés : on tire parti de la capacité des assemblages boulonnés à modifier la rigidité (et par conséquent la réponse vibratoire) de la structure par contrôle du serrage appliqué au niveau des éléments de liaison. Cette étude fera l'objet du chapitre suivant.

1.5. CONCLUSION

Chapitre 2

Assemblage à effort normal contrôlé

« L'homme absurde est celui qui ne change jamais. » *Georges Clemenceau*

Notre approche consiste à mettre en évidence une autre façon de réduire les vibrations, en évitant les fréquences critiques. Dans ce contexte, on va utiliser une possibilité du joint boulonné de changer la rigidité de la structure.

Dans les structures composées de plusieurs sous-structures, un assemblage boulonné réalise une liaison mécanique par adhérence qui participe à la rigidité de la structure par l'intermédiaire du frottement sec et du serrage. En d'autres termes, une structure munie d'un joint boulonné (JB) peut avoir une rigidité variable selon le serrage appliqué au niveau du joint.

Dans une structure munie d'un JB, si on prend en compte juste l'effet du frottement au niveau du JB, sans prendre compte l'effet non linéaire dû à l'effet unilatéral du contact cette structure peut avoir deux valeurs de rigidité :

- lorsque la structure n'admet pas de glissement relatif (serrage relativement important) : configuration avec une liaison parfaite entre les sous-structures en contact.
- lorsque la structure permet toujours un glissement relatif (serrage faible) : configuration avec des nœuds doubles entre les sous-structures en contact.

En outre, si on prend en compte l'effet unilatéral de la liaison au niveau du JB, un changement de serrage, peut changer la valeur de la rigidité même lorsque la structure n'admet pas de glissement d'ensemble, car un serrage important peut occasionner le décollement d'une partie de la surface de contact (Fig. 2.33). D'un point de vue éléments finis, ceci est équivalent à une modélisation avec des nœuds doubles au niveau de la surface de décollement et des nœuds en liaison parfaite au niveau des surfaces en contact.

L'utilisation contrôlée d'un serrage variable au niveau du joint boulonné va permettre de changer la rigidité de la structure et par conséquent de changer ses fréquences propres afin d'éviter sa mise en résonance éventuelle.

La première partie de cette étude a pour but d'illustrer l'intérêt d'un serrage variable. Pour cela, on construit un modèle simplifié du joint boulonné à deux degrés de liberté (ddl). L'intérêt de ce modèle à 2 ddl est d'être représentatif d'une partie des phénomènes non linéaires étudiés tout en pouvant être résolu de manière analytique donc à très faible coût et permettant ainsi de tester différentes lois de serrage.

Dans la deuxième partie de cette étude, on présentera un modèle plus complet d'assemblage boulonné dont la résolution numérique (Méthode LATIN [42]) prendra en compte les deux types de non-linéarité (frottement, liaison unilatérale).

Enfin, on proposera à titre d'illustration, le dimensionnement d'une structure 2D munie d'un JB à effort normal piloté, en vue de la réduction de vibrations.

2.1 Modèle ressort amortisseur

Dans cette partie, une simplification d'un joint boulonné en un modèle à deux degrés de liberté a été faite (Fig. 2.1). Notons K_1 la rigidité en traction et M_1 la masse de la sous-structure à gauche de l'assemblage (deux poutres), K_2 la rigidité en traction et M_2 la masse de la sous-structure à droite de l'assemblage (une poutre) et K_{12} la rigidité en traction de l'assemblage. L'effet du serrage apporté par la rondelle piezo est représenté par une force normale F_N associée à un patin frottant selon la loi de Coulomb avec un coefficient de frottement μ .

Les valeurs des paramètres utilisés pour cette étude sont reportées dans le tableau 2.1 ; ces valeurs respectent les différentes proportions du joint boulonné présenté figure 2.1.

$M_1[Kg]$	$M_2[Kg]$	$K_1[N.m^{-1}]$	$K_{12}[N.m^{-1}]$	$K_2[N.m^{-1}]$	$F_1[N]$	F_2
0.1	0.1	400	80	100	0	1

TABLE 2.1 – Valeurs des paramètres du modèle étudié

2.1.1 Formulation du modèle

Les équations de mouvement du système, en prenant compte l'effet du frottement sec, peuvent s'écrire comme suit :

$$M_1\ddot{X}_1 + K_1X_1 + K_{12}(X_1 - X_2) = F_{ext1} + r_a \quad (2.1a)$$

$$M_2\ddot{X}_2 + K_2X_2 + K_{12}(X_2 - X_1) = F_{ext2} - r_a \quad (2.1b)$$

avec r_a la force de frottement exercée par M_2 sur M_1 .

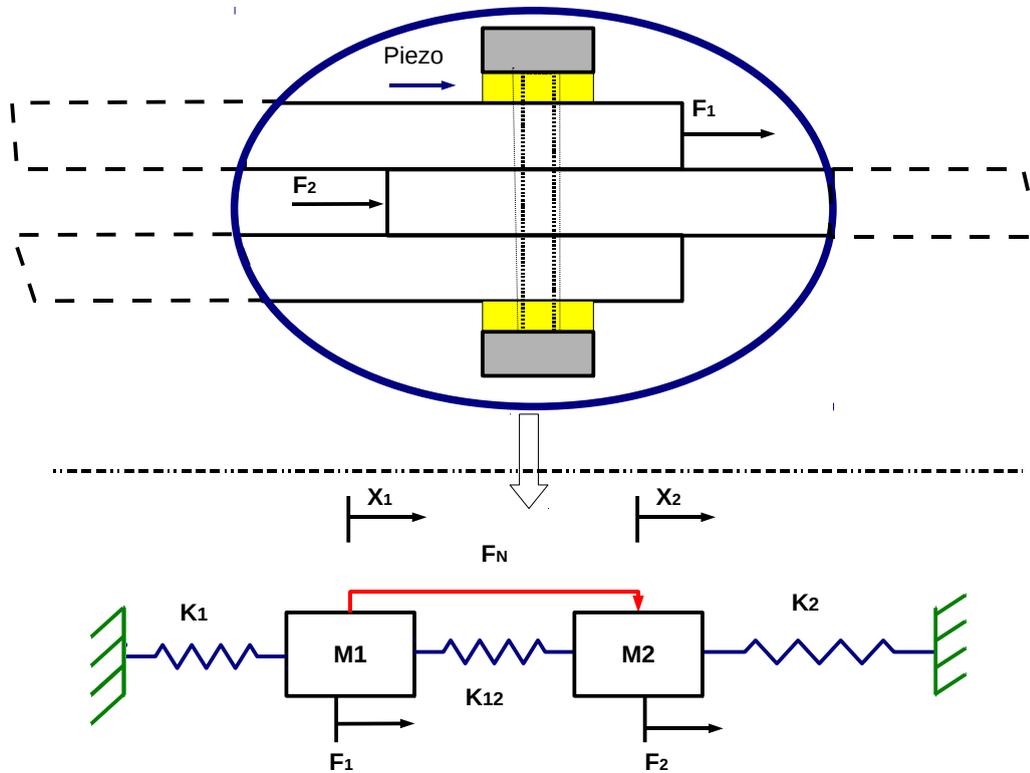


FIGURE 2.1 – Modèle en 2 ddl de l'assemblage

Le modèle de frottement utilisé est un modèle de Coulomb qui peut être présenté comme suit :

$$r_a = \begin{cases} r_y & \text{si } \dot{X}_2 - \dot{X}_1 > 0 \\ [-r_y, r_y] & \text{si } \dot{X}_2 - \dot{X}_1 = 0 \\ -r_y & \text{si } \dot{X}_2 - \dot{X}_1 < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Des discussions plus approfondies sur le frottement de Coulomb peuvent être trouvées dans l'article de synthèse [5].

Lorsqu'il y a un mouvement relatif entre les deux masses M_1 et M_2 , la force de frottement est constante, de direction opposée au mouvement relatif. Par contre, lorsque les vitesses des deux masses restent identiques, la force de frottement n'est pas définie, car elle peut avoir plusieurs valeurs pour une même vitesse relative nulle.

On peut remarquer que dans l'équation (2.1a), la force de frottement dépend tou-

jours de l'effet d'inertie $M_1\ddot{X}_1$, indépendamment de l'état de la liaison (glissement ou adhérence). De même, pour l'équation (2.1b), la force de frottement dépend toujours de l'effet d'inertie $M_2\ddot{X}_2$. Ce qui signifie que lorsque le mouvement relatif est nul ($\dot{X}_1 = \dot{X}_2$), la force de frottement dépend toujours des termes d'accélération \ddot{X}_1 ou \ddot{X}_2 . Cette dépendance peut compliquer la résolution du problème ; c'est la raison pour laquelle on établit une expression de la force de frottement qui ne dépende pas des termes inertiels.

On pose

$$\alpha = \frac{M_1}{M_2} \quad (2.3)$$

et on multiplie la deuxième équation 2.1b par α puis on la soustrait de l'équation 2.1a, et on obtient :

$$M_1(\ddot{X}_1 - \ddot{X}_2) + K_1X_1 - \alpha K_2X_2 + K_{12}(X_1 - X_2)(1 + \alpha) = F_{ext1} - \alpha F_{ext2} + r_a(1 + \alpha) \quad (2.4)$$

soit

$$r_a = \frac{1}{1 + \alpha}(M_1(\ddot{X}_1 - \ddot{X}_2)) + F_c \quad (2.5)$$

avec

$$F_c = \frac{1}{1 + \alpha}(-F_{ext1} + \alpha F_{ext2} + K_1X_1 - \alpha K_2X_2 + K_{12}(X_1 - X_2)(1 + \alpha)) \quad (2.6)$$

Selon l'équation (2.5), lorsqu'il n'y a pas de mouvement relatif, $\dot{X}_1 = \dot{X}_2$ et donc $\ddot{X}_1 - \ddot{X}_2 = 0$. En utilisant la relation de Coulomb 2.2, on peut définir deux phases :

- phase de glissement : si $\dot{X}_1 \neq \dot{X}_2$, alors $r_a = r_y \operatorname{sgn}(\dot{X}_2 - \dot{X}_1)$
- phase d'adhérence : si $\dot{X}_1 = \dot{X}_2$ et $\ddot{X}_1 = \ddot{X}_2$, alors $r_a = F_c$

2.1.2 Résolution du problème

2.1.2.1 Modèle analytique avec force normale constante

Dans cette partie, on va traiter le cas d'un système avec force normale constante dans le temps et force extérieure harmonique et résoudre analytiquement le système d'équations (2.1) dans le domaine temporel.

Au cours de la résolution, on sépare classiquement la phase de glissement de la phase d'adhérence (Fig. 2.2), de sorte de résoudre à chaque fois un système d'équations différentielles linéaires.

En supposant par exemple que la première phase est la phase d'adhérence, la résolution se fait de la façon suivante :

1. **Initialisation**, en faisant une résolution du système d'équations [2.1] avec les conditions suivantes (Fig. 2.2 A) :
 - les conditions initiales sont celles du problème global à résoudre.
 - $X_2 = X_1 - X_{120}$ avec $X_{120} = X_1(t = 0) - X_2(t = 0)$
2. **Phase 1** : résolution du système d'équations (2.1) avec les conditions suivantes (Fig. 2.2 B) :
 - les conditions initiales sont celles de la fin de la phase d'adhérence.
 - la force de frottement a une valeur constante de signe opposée à celle de la vitesse relative .
3. **Phase 2** : résolution du système d'équations [2.1] avec les conditions suivantes (Fig. 2.2 A) :
 - les conditions initiales sont celles de la fin de la phase du glissement.
 - $X_2 = X_1 - X_{12i}$ avec $X_{12i} = X_1(t = t_i) - X_2(t = t_i)$ avec t_i le temps à la fin d'une phase.

L'itération entre les phases 1 et 2 va se poursuivre jusqu'au temps final. Précisons la résolution du problème dans les deux phases :

– **Phase glissement**

Dans cette phase le système d'équations (2.1) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_{12} & -K_{12} \\ -K_{12} & K_{12} + K_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = r_y \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{ext1} \\ F_{ext2} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

avec

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{X}_2 - \dot{X}_1 > 0 \\ -1 & \text{si } \dot{X}_2 - \dot{X}_1 < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

β garde la même valeur pendant une phase de glissement, car elle ne peut changer de valeur qu'après un passage par une vitesse relative nulle, même si la durée de ce passage est nulle [36].

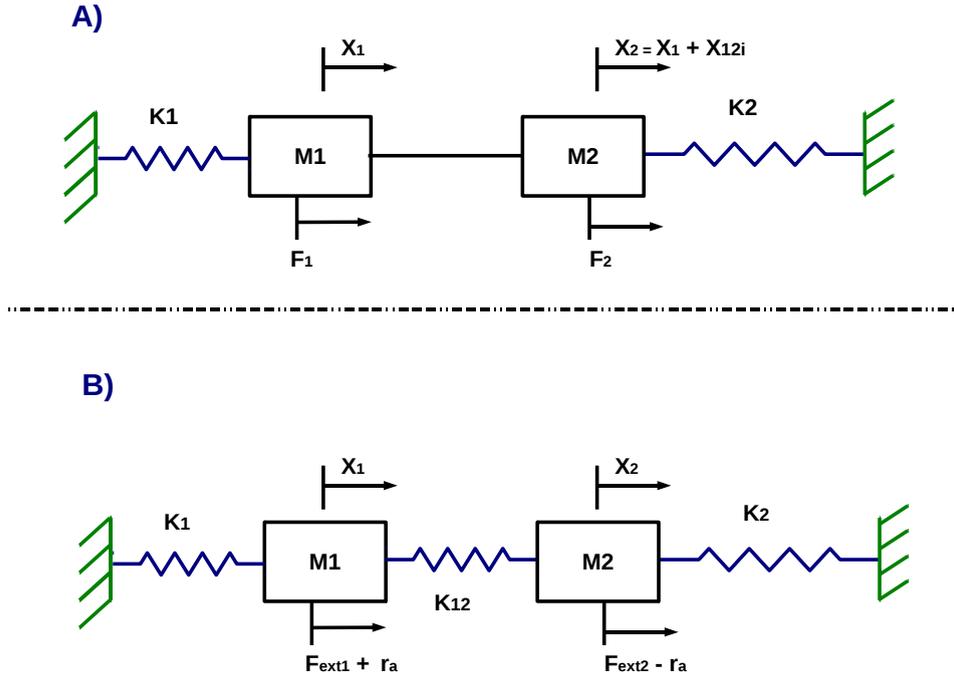


FIGURE 2.2 – Modèles équivalents suivant les phases : A) adhérence , B) glissement

Le système (2.7) peut se mettre sous forme matricielle :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \mathbf{X} = r_y \boldsymbol{\beta} + \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (2.9)$$

La force extérieure est harmonique :

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \sin(\Omega t) \quad (2.10)$$

La solution du système d'équations (2.9) est composée de la somme d'une solution homogène et d'une solution particulière :

La solution homogène :

$$\mathbf{X}_h = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \sin(\omega_1 t) + B_1 \cos(\omega_1 t) \\ A_2 \sin(\omega_2 t) + B_2 \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

avec $\boldsymbol{\Phi}$ et ω_k solution du problème $(\mathbf{K} - \omega_k^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\Phi}_k = 0$

Une solution particulière :

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} A_p \\ B_p \end{pmatrix} \sin(\Omega t) + \mathbf{K}^{-1} r_y \boldsymbol{\beta} \quad (2.12)$$

2.1. MODÈLE RESSORT AMORTISSEUR

avec

$$\begin{pmatrix} A_p \\ B_p \end{pmatrix} = (-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Pour déterminer les coefficients de la solution homogène avec les conditions initiales qui correspondent à la fin de la phase d'adhérence t_i , on doit résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} \sin(\omega_1 t_i) & \Phi_{11} \cos(\omega_1 t_i) & \Phi_{12} \sin(\omega_2 t_i) & \Phi_{12} \cos(\omega_2 t_i) \\ \Phi_{21} \sin(\omega_1 t_i) & \Phi_{21} \cos(\omega_1 t_i) & \Phi_{22} \sin(\omega_2 t_i) & \Phi_{22} \cos(\omega_2 t_i) \\ \Phi_{11} \omega_1 \cos(\omega_1 t_i) & -\Phi_{11} \omega_1 \sin(\omega_1 t_i) & \Phi_{12} \omega_2 \cos(\omega_2 t_i) & -\Phi_{12} \omega_2 \sin(\omega_2 t_i) \\ \Phi_{21} \omega_1 \cos(\omega_1 t_i) & -\Phi_{21} \omega_1 \sin(\omega_1 t_i) & \Phi_{22} \omega_2 \cos(\omega_2 t_i) & -\Phi_{22} \omega_2 \sin(\omega_2 t_i) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} X_1(t_i) \\ X_2(t_i) \\ \dot{X}_1(t_i) \\ \dot{X}_2(t_i) \end{pmatrix} - (-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \sin(\Omega t_i) \\ \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \Omega \cos(\Omega t_i) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_y \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Finalement, la solution du système dans la phase de glissement en présence d'une excitation harmonique et d'une force normale constante peut s'écrire comme suit :

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \sin(\omega_1 t) + B_1 \cos(\omega_1 t) \\ A_2 \sin(\omega_2 t) + B_2 \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix} + (-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \sin(\Omega t) + r_y \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\beta} \quad (2.14)$$

– Phase d'adhérence

Dans cette phase, en faisant la somme des deux équations du système [2.1] on obtient :

$$(M_1 + M_2) \ddot{X}_1 + K_1 X_1 + K_2 X_2 = F_{ext1} + F_{ext2} \quad (2.15)$$

avec

$$X_2 = X_1 - X_{12i} \quad \text{avec} \quad X_{12i} = X_1(t_i) - X_2(t_i) \quad (2.16)$$

ce qui conduit à :

$$(M_1 + M_2) \ddot{X}_1 + (K_1 + K_2) X_1 = F_{ext1} + F_{ext2} + K_2 X_{12i} \quad (2.17)$$

$$= (F_1 + F_2) \sin(\Omega t) + K_2 X_{12i} \quad (2.18)$$

La solution de l'équation 2.18 est composée de la solution homogène et d'une solution particulière :

La solution homogène

$$X_{h1} = A \sin(\tilde{\omega}t) + B \cos(\tilde{\omega}t) \quad (2.19)$$

avec

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{K_1 + K_2}{M_1 + M_2} \quad (2.20)$$

Une solution particulière

$$X_p = \frac{F_1 + F_2}{-\Omega^2(M_1 + M_2) + (K_1 + K_2)} \sin(\Omega t) + \frac{K_2}{K_1 + K_2} X_{12i} \quad (2.21)$$

La solution complète du système dans la phase d'adhérence en présence d'une excitation harmonique peut s'écrire comme suit :

$$X_1 = A \sin(\tilde{\omega}t) + B \cos(\tilde{\omega}t) + \frac{F_1 + F_2}{-\Omega^2 + \tilde{\omega}^2} \sin(\Omega t) + \frac{K_2}{K_1 + K_2} X_{12i} \quad (2.22)$$

Pour déterminer les coefficients de la solution homogène avec des conditions initiales qui correspondent à la fin de la phase du glissement t_i , on doit résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\tilde{\omega} t_i) & \cos(\tilde{\omega} t_i) \\ \tilde{\omega} \cos(\tilde{\omega} t_i) & -\tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega} t_i) \end{bmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} X_1(t_i) \\ \dot{X}_1(t_i) \end{pmatrix} - \frac{F_1 + F_2}{-\Omega^2(M_1 + M_2) + (K_1 + K_2)} \begin{pmatrix} \sin(\Omega t_i) \\ \Omega \cos(\Omega t_i) \end{pmatrix} + \frac{K_2}{K_1 + K_2} X_{12i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Après avoir déterminé la solution analytique dans la phase du glissement et la phase d'adhérence, il faut déterminer les temps origines de chacune des phases, c'est-à-dire les conditions initiales pour chacune des phases. Pour ce faire, on utilise l'algorithme de la figure 2.3 qui décrit le passage de la phase de glissement vers la phase d'adhérence (lorsque $\dot{X}_1 = \dot{X}_2$) puis le passage de la phase d'adhérence vers la phase de glissement (lorsque $r_a < r_y$).

Remarque

- on commence la procédure de calcul par un test sur les vitesses initiales pour déterminer la phase de départ.

2.1. MODÈLE RESSORT AMORTISSEUR

- au moment du passage de la phase d'adhérence vers la phase de glissement, les vitesses relatives reste nulles, donc pour le calcul de la première étape de glissement juste après l'adhérence, on donne un sens à la force de frottement qui est le même que le sens de la force F_c , car dans le premier pas de calcul de la phase de glissement, on a toujours l'égalité $ra = F_c$.

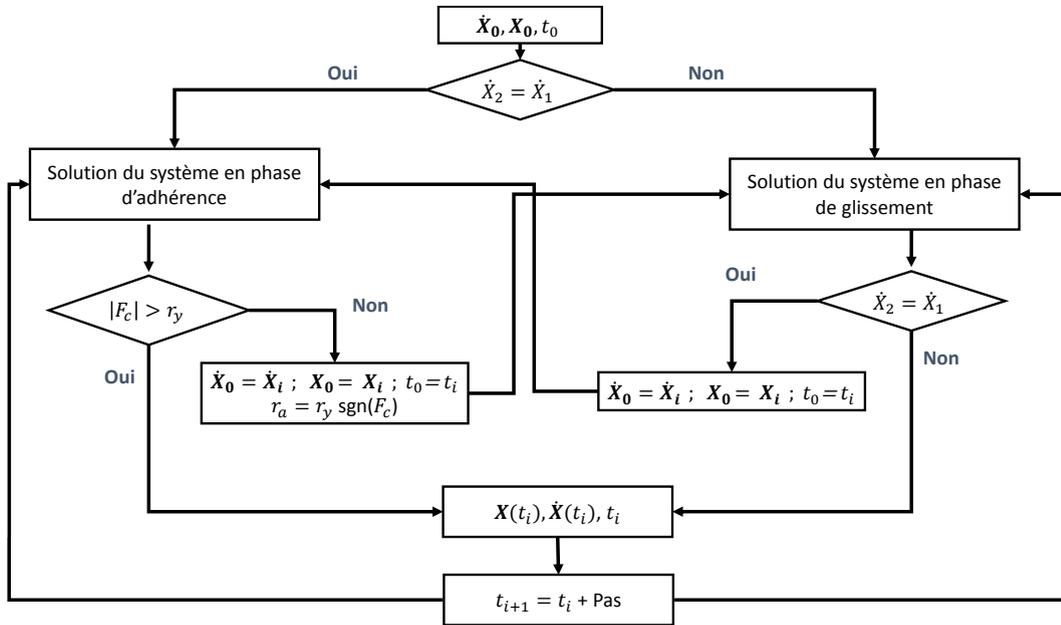


FIGURE 2.3 – Algorithme de résolution des équations de mouvement

2.1.2.2 Modèle analytique avec force périodique

Dans cette partie on va traiter le cas d'un système avec une force normale qui varie périodiquement et une force extérieure excitatrice harmonique. Comme précédemment, on va faire une résolution selon deux phases, une phase d'adhérence et une phase de glissement :

- **phase d'adhérence**

Dans cette phase le même développement que précédemment a été gardé, car l'effet du frottement n'intervient que dans la condition de changement de phase.

- **Phase glissement**

2.1. MODÈLE RESSORT AMORTISSEUR

Pour résoudre les équations de mouvement dans la phase de glissement (2.7), en présence d'une force normale périodique r_y , on commence par faire une décomposition en série de Fourier (voir Annexe A) de la force périodique.

$$r_y(t) = r_{y0} + \sum_{i=1}^N r_{y1i} \sin(2\pi \frac{i}{T}t) + \sum_{i=1}^N r_{y2i} \cos(2\pi \frac{i}{T}t) \quad (2.23)$$

avec T la période de serrage.

La solution particulière du problème est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_p(t) &= \begin{pmatrix} A_p \\ B_p \end{pmatrix} \sin(\Omega t) + \mathbf{K}^{-1} r_{y0} \boldsymbol{\beta} \\ &+ \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} C_{1i} \\ D_{1i} \end{pmatrix} \sin(2\pi \frac{i}{T}t) + \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} C_{2i} \\ D_{2i} \end{pmatrix} \cos(2\pi \frac{i}{T}t) \end{aligned} \quad (2.24)$$

avec

$$\begin{pmatrix} C_{ij} \\ D_{ij} \end{pmatrix} = (-2\pi \frac{j}{T})^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1} r_{yij} \boldsymbol{\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

On utilise les conditions initiales qui correspondent à la fin de la phase d'adhérence t_i et l'équation 2.14 devient :

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} \sin(\omega_1 t_i) & \Phi_{11} \cos(\omega_1 t_i) & \Phi_{12} \sin(\omega_2 t_i) & \Phi_{12} \cos(\omega_2 t_i) \\ \Phi_{21} \sin(\omega_1 t_i) & \Phi_{21} \cos(\omega_1 t_i) & \Phi_{22} \sin(\omega_2 t_i) & \Phi_{22} \cos(\omega_2 t_i) \\ \Phi_{11} \omega_1 \cos(\omega_1 t_i) & -\Phi_{11} \omega_1 \sin(\omega_1 t_i) & \Phi_{12} \omega_2 \cos(\omega_2 t_i) & -\Phi_{12} \omega_2 \sin(\omega_2 t_i) \\ \Phi_{21} \omega_1 \cos(\omega_1 t_i) & -\Phi_{21} \omega_1 \sin(\omega_1 t_i) & \Phi_{22} \omega_2 \cos(\omega_2 t_i) & -\Phi_{22} \omega_2 \sin(\omega_2 t_i) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{aligned} &\begin{pmatrix} X_1(t_i) \\ X_2(t_i) \\ \dot{X}_1(t_i) \\ \dot{X}_2(t_i) \end{pmatrix} - (-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \sin(\Omega t_i) \\ \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \Omega \cos(\Omega t_i) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_y \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{1i} \\ D_{1i} \end{pmatrix} \sin(2\pi \frac{i}{T}t_i) \\ \begin{pmatrix} C_{1i} \\ D_{1i} \end{pmatrix} (2\pi \frac{i}{T}) \cos(2\pi \frac{i}{T}t_i) \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{2i} \\ D_{2i} \end{pmatrix} \cos(2\pi \frac{i}{T}t_i) \\ - \begin{pmatrix} C_{2i} \\ D_{2i} \end{pmatrix} (2\pi \frac{i}{T}) \sin(2\pi \frac{i}{T}t_i) \end{pmatrix} \end{aligned} \right]$$

La solution complète du problème (en phase de glissement) pour une excitation harmonique et une force normale périodique peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \sin(\omega_1 t) + B_1 \cos(\omega_1 t) \\ A_2 \sin(\omega_2 t) + B_2 \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix} + \mathbf{X}_p(t) \quad (2.26)$$

Après avoir déterminé la solution analytique dans la phase de glissement et la phase d'adhérence, on utilise le même algorithme que précédemment dans le cas d'une force

normale constante (Fig. 2.3) pour déterminer les temps origines de chacune des phases, c'est-à-dire les conditions initiales pour chacune des phases.

2.1.2.3 Modèle numérique

Dans le cas plus général, où la force extérieure ou la force de serrage ne sont pas nécessairement périodiques, ou dans le cas où la solution analytique au problème n'est pas connue, on propose de faire une résolution numérique.

Pour cette résolution numérique, on a utilisé un schéma numérique basé sur une intégration d'un système d'équations différentielles d'ordre un, avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre. Dans ce cadre, on fait une transformation de nos équations de mouvement d'ordre deux en un système d'équations d'ordre un et on résout le problème dans l'environnement MatLab.

Pour la résolution numérique, on n'a pas besoin de définir (comme dans les deux cas précédents) des équations différentes dans la phase de glissement et d'adhérence, il suffit de résoudre numériquement les équations de mouvements (2.1), par contre, il faut également définir des conditions de départ et de fin de glissement. Ces conditions sont introduites en suivant l'algorithme représenté figure 2.4.

2.1.3 Validation des modèles

Dans cette partie, une validation des trois modèles proposés est faite.

2.1.3.1 Validation du modèle analytique avec force normale constante

Pour faire une validation du modèle avec une force normale constante, on procède en deux étapes : tout d'abord on valide le modèle sans effet de frottement, dans ce cas on compare les résultats de notre modèle dans le cas $r_{y=0}$ avec un modèle proposé dans [37]. Les paramètres utilisés dans cette comparaison sont présentés dans le tableau 2.2, avec les conditions initiales suivantes :

$$X_1 = 0; \quad X_2 = 0.01; \quad \dot{X}_1 = 0; \quad \dot{X}_2 = 0$$

La figure 2.5 donne une comparaison des déplacements X_1 (à gauche) et X_2 (à droite)

2.1. MODÈLE RESSORT AMORTISSEUR

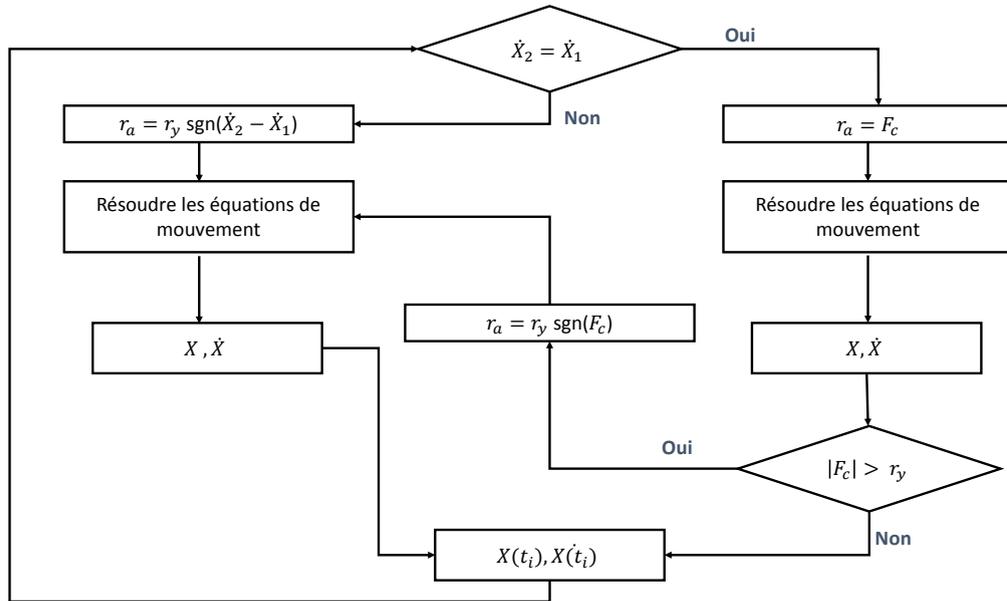


FIGURE 2.4 – Algorithme de résolution des équations de mouvement

$M_1[Kg]$	$M_2[Kg]$	$K_1[N.m^{-1}]$	$K_{12}[N.m^{-1}]$	$K_2[N.m^{-1}]$	$F_1[N]$	F_2	$\omega_d[rad.s^{-1}]$
1	4	3	4	12	0	0	1

TABLE 2.2 – Paramètres du modèle

obtenue par trois résolutions différentes : la résolution analytique proposée dans [37], notre résolution analytique et notre résolution numérique. À partir de ces résultats, on peut valider notre calcul dans le cas d'un mouvement sans frottement.

Ensuite le modèle avec frottement est validé par comparaison des résultats de notre modèle avec ceux du modèle proposé dans [36]. Il s'agit d'un modèle analytique à un degré de liberté avec résolution temporelle de l'équation (2.27).

L'équation de mouvement d'un système masse-ressort avec frottement sec, soumis à une excitation harmonique, s'écrit comme suit :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + r_a(t) = F_{ext} = p_0 \sin \omega_d t \quad (2.27)$$

Avec $m=200 \cdot 10^3$ kg, $k=5000$ kN/m, $r_y=200$ kN, $\omega_d=8$ rad/s et $p_0=1000$ kN.

Pour comparer les deux modèles, on change les paramètres de notre modèle pour qu'il soit comparable à un modèle à 1ddl (Fig. 2.6) :

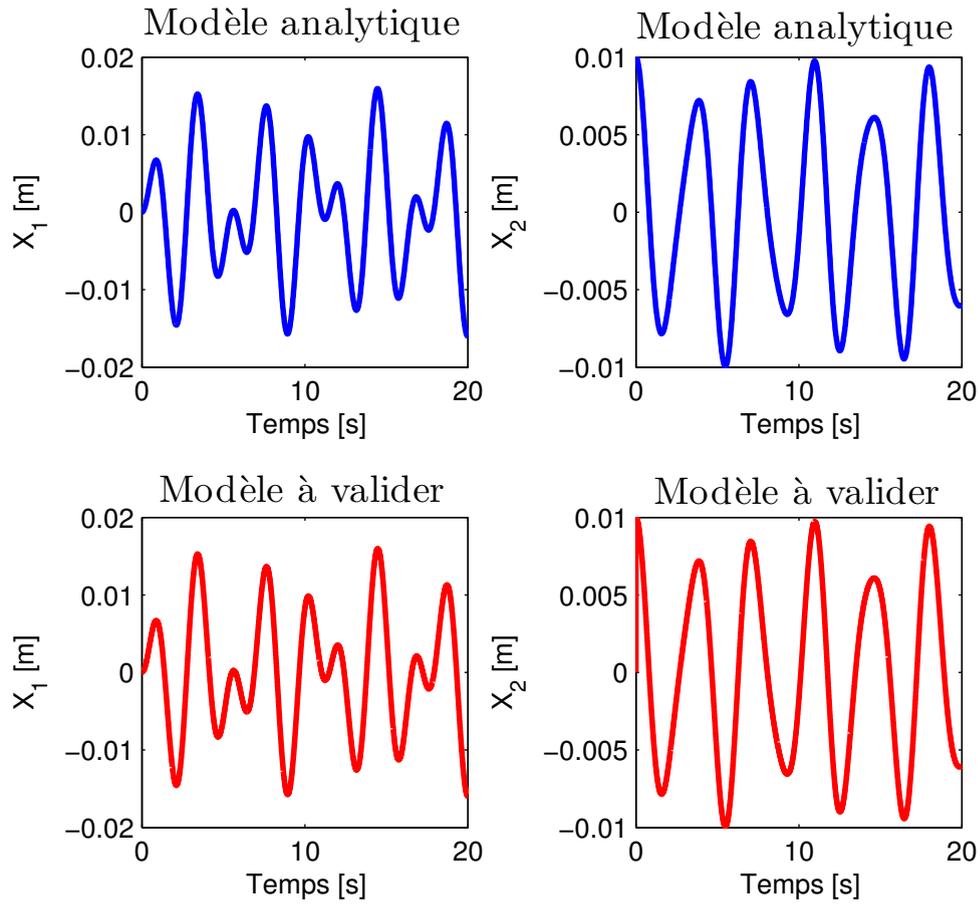


FIGURE 2.5 – Validation du modèle sans frottement sec.

cas A)

$$K_1 = k; K_2 = 10^{15} K_1; K_{12} = 10^{-15} K_1$$

$$M_1 = m; M_2 = 10^{-2} M_1$$

$$F_1 = p_0; F_2 = 0$$

cas B)

$$K_2 = k; K_1 = 10^{15} K_2; K_{12} = 10^{-15} K_2$$

$$M_2 = m; M_1 = 10^{-2} M_2$$

$$F_2 = p_0; F_1 = 0$$

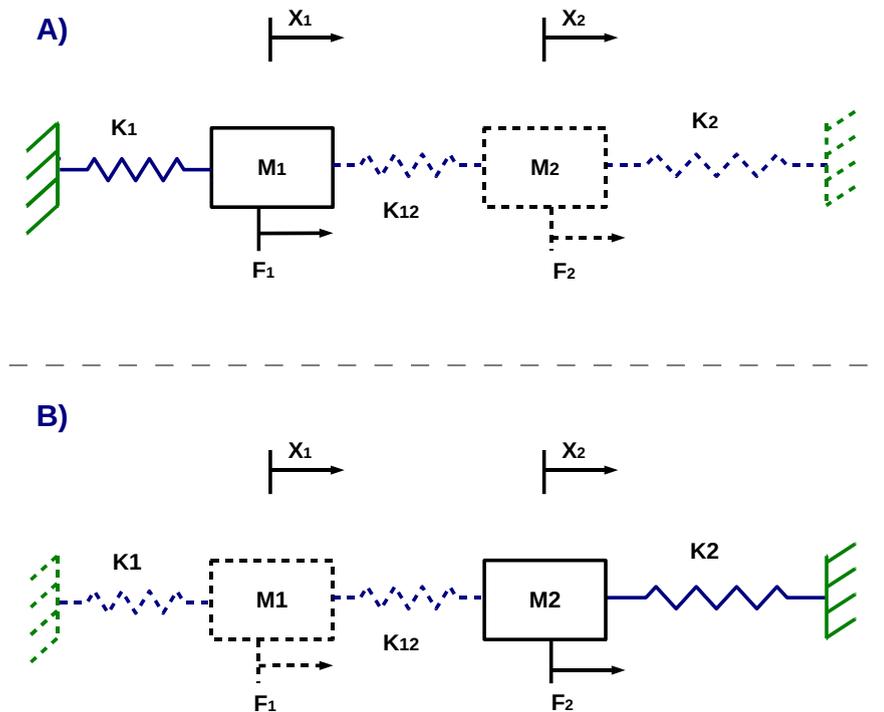


FIGURE 2.6 – Modèle à 2 ddl équivalent au modèle à 1 ddl.

La figure 2.7 donne une comparaison entre les résultats donnés par le développement analytique dans [36] et les résultats donnés par notre modèle simplifié dans les deux cas équivalents *A* et *B* de la figure 2.6.

2.1.3.2 Validation du modèle numérique

Pour valider le modèle numérique, on compare le résultat de notre modèle analytique validé et celui du modèle numérique. On utilise les mêmes paramètres, indiqués dans le tableau 2.2 et en prenant $r_y = 0.3N$

La figure 2.8 donne une comparaison des déplacements X_1 (à gauche) et X_2 (à droite) dans le cas du modèle analytique validé et dans le cas du modèle numérique. Et d'après cette comparaison, on peut considérer notre calcul numérique validé.

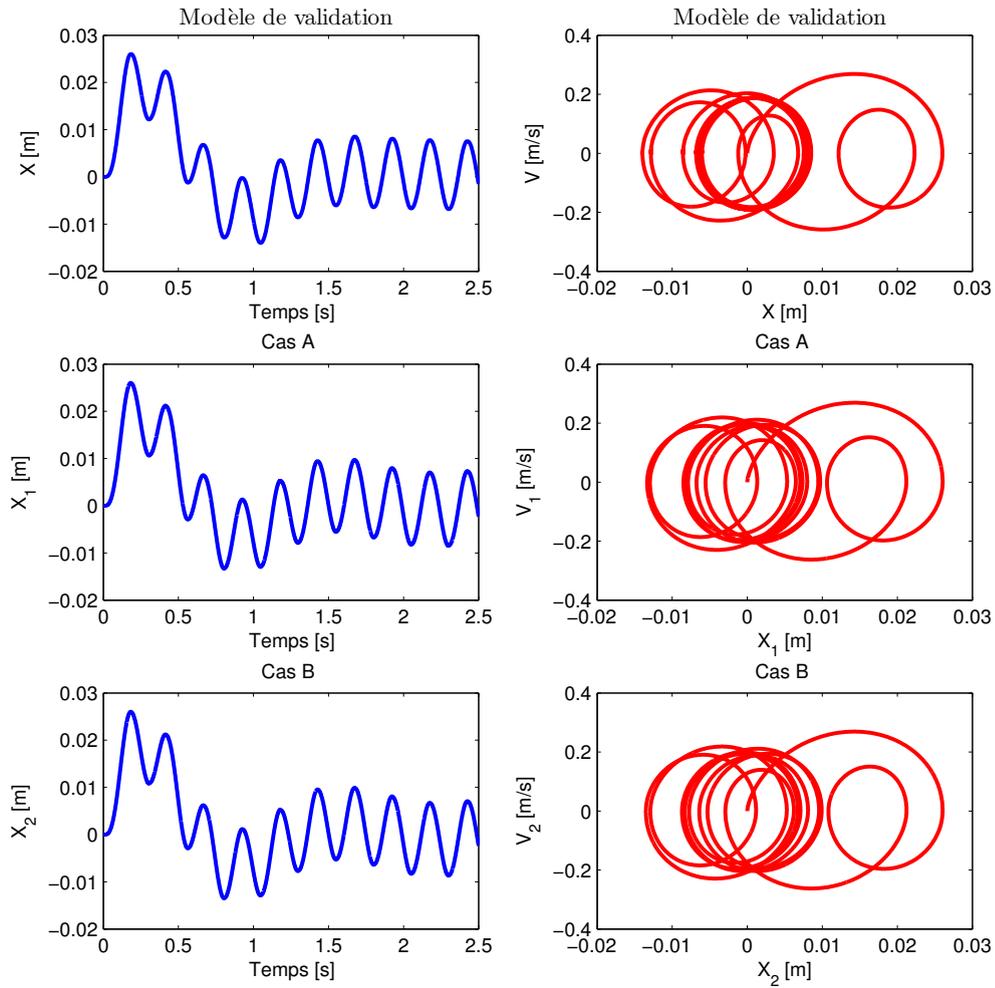


FIGURE 2.7 – Modèle réduit pour validation dans le cas : A) et B).

2.1.3.3 Validation du modèle analytique avec force normale périodique

Dans cette dernière validation, on va utiliser le modèle numérique validé pour valider le modèle analytique avec force normale périodique. On utilise les mêmes paramètres indiqués dans le tableau 2.2 et en prenant $r_{y01} = 0.3N$.

La force normale appliquée suit la loi :

$$r_y(t) = r_{y01} \sin(\cos(t)) + \sin(t); \quad (2.28)$$

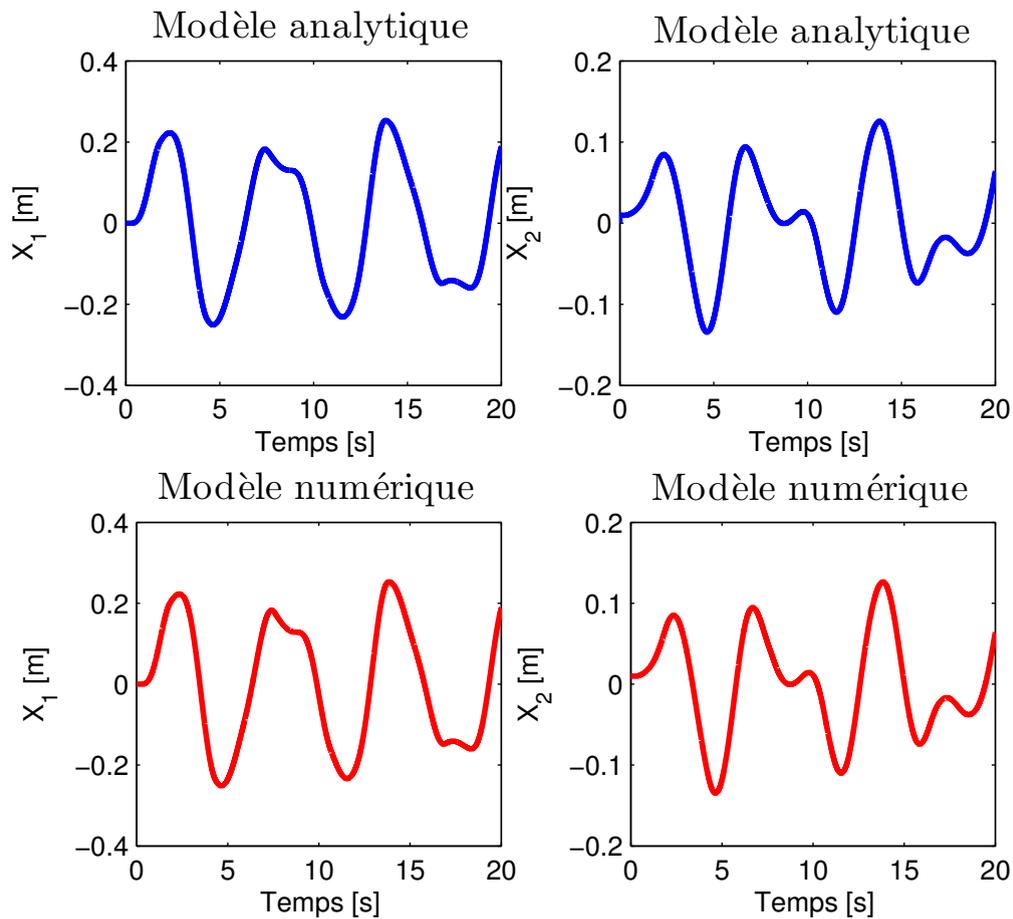


FIGURE 2.8 – Validation du modèle.

La figure 2.9 compare les déplacements X_1 (à gauche) et X_2 (à droite) pour les modèles analytique et numérique : notre démarche de calcul numérique peut être considérée comme validée.

2.1.4 Critère de contrôle

Dans cette partie, on va montrer que dans notre cas particulier, c'est-à-dire l'étude d'une structure équipée d'un seul joint boulonné, la dissipation d'énergie n'est pas le seul critère à prendre en compte pour la réduction des vibrations.

Dans un premier temps, on applique un chargement cyclique (Fig. 2.10) et on détermine

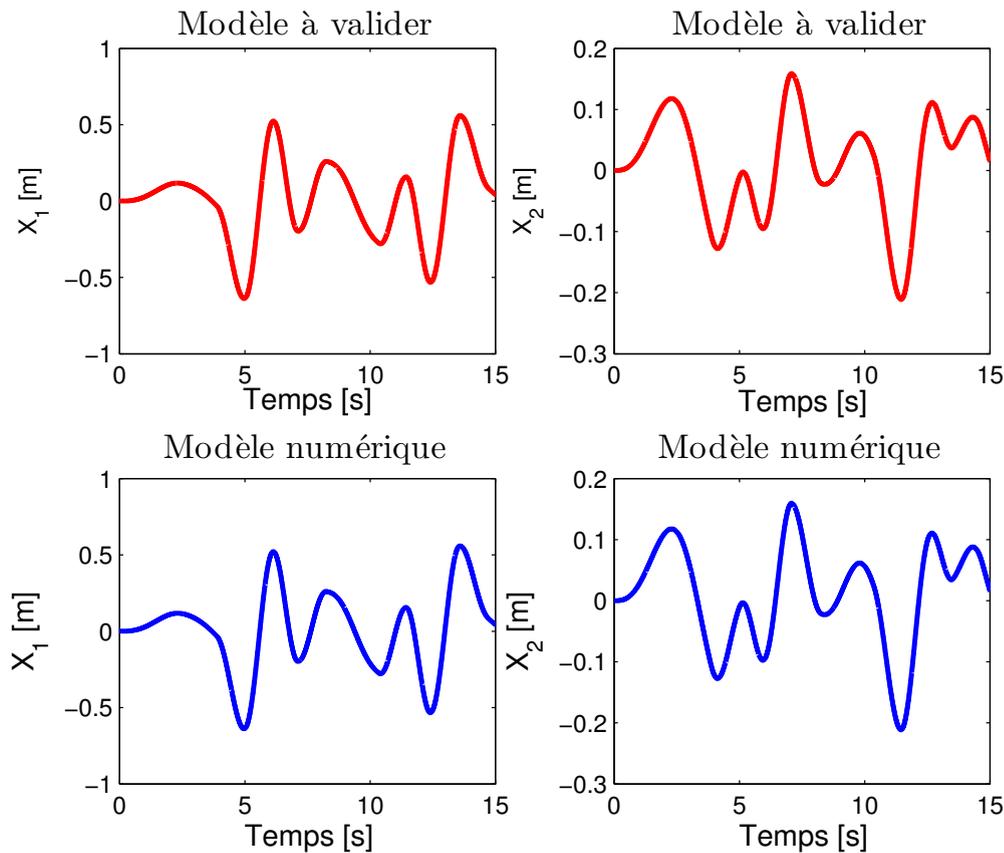


FIGURE 2.9 – Validation du modèle.

le cycle d'hystérésis correspondant (Fig. 2.11). À partir de ces cycles, on peut définir un serrage optimal, qui correspond à la plus grande surface à l'intérieur de la boucle d'hystérésis pour laquelle l'énergie dissipée est maximale.

Dans un deuxième temps, on va comparer la fonction réponse en fréquence (FRF) de l'énergie dissipée (Fig.(2.12) et le déplacement maximal (Fig. 2.13) pour différentes valeurs de la fréquence de la force extérieure.

Remarque : l'énergie dissipée et le déplacement maximal sont calculés pour toute la durée du calcul $T_{max} = 20[s]$

En comparant l'énergie dissipée au déplacement maximal, on constate que le serrage optimal au sens de l'énergie dissipée autorise aussi un déplacement maximal important :

2.1. MODÈLE RESSORT AMORTISSEUR

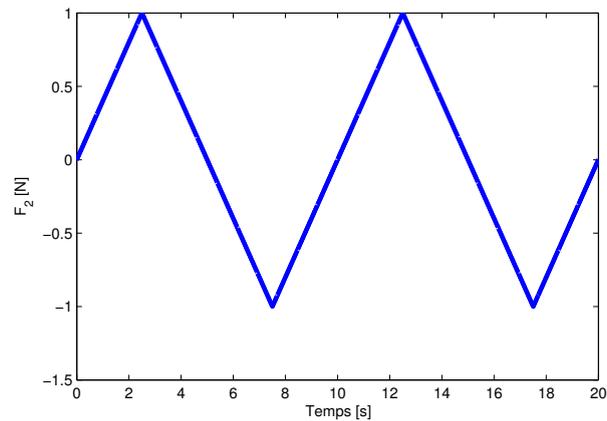


FIGURE 2.10 – effort extérieur triangulaire

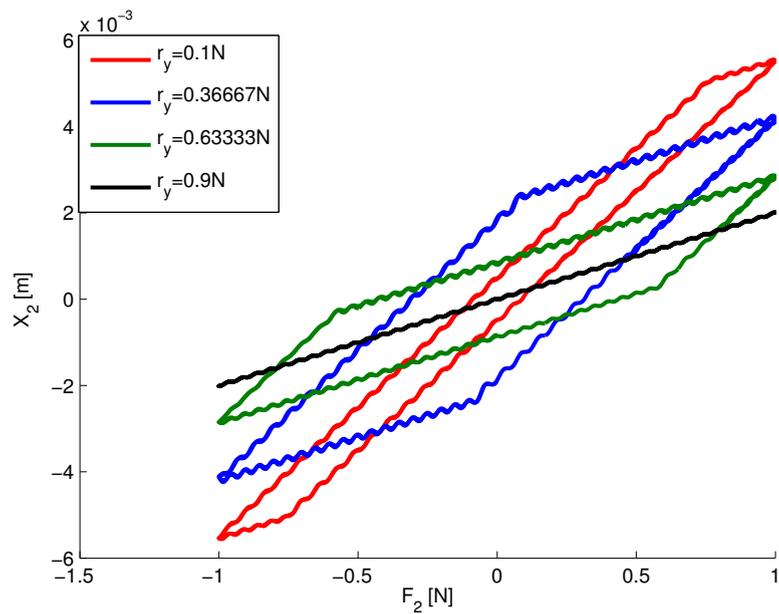


FIGURE 2.11 – cycles hystérésis

maximiser la dissipation d'énergie ne permet pas nécessairement la meilleure réduction de l'amplitude vibratoire. Donc on peut conclure que pour certaines structures, la dissipation d'énergie n'est pas le bon critère de réduction de vibrations.

Dans la suite de notre étude, on va prendre comme critère de réduction, le maximum de l'amplitude vibratoire que l'on va chercher à minimiser.

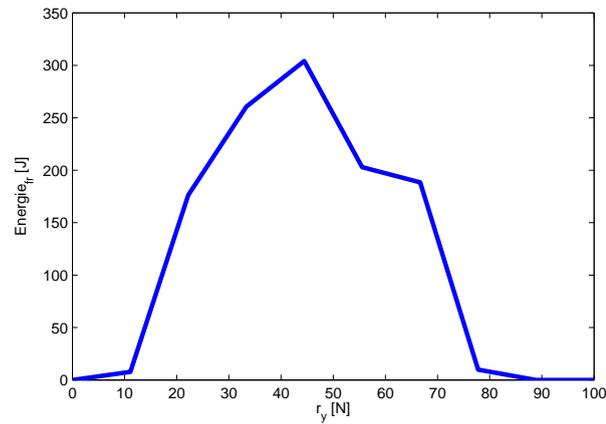


FIGURE 2.12 – FRF de l'énergie dissipée

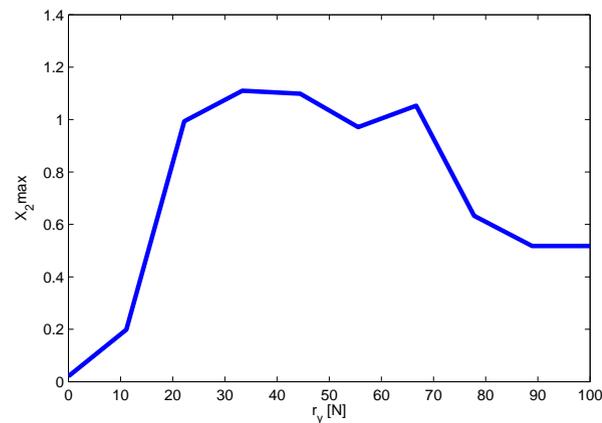


FIGURE 2.13 – FRF du déplacement maximal

2.1.5 Loi de contrôle de la force normale (approche fréquentielle)

Il s'agit d'une loi de contrôle de la force normale, dont la donnée d'entrée est la fréquence d'excitation de la structure. Il s'agit donc d'une loi de contrôle actif, qui nécessite un capteur de fréquence. La connaissance de la fréquence d'excitation permet de contrôler le changement de la rigidité de la structure à opérer au voisinage des zones de fréquences critiques.

Si la structure est excitée avec une force dont la fréquence est voisine de la fréquence critique de la structure, la tension appliquée sur la rondelle piézoélectrique est annulée pour

2.1. MODÈLE RESSORT AMORTISSEUR

pouvoir donner à la force normale une valeur minimale F_{min} . En dehors de la zone critique, la tension aux bornes du piezo est tenue à sa valeur maximale F_{max} . Cette première loi de contrôle peut être formulée comme suit :

$$\begin{cases} r_y = F_{min} & \text{if } \Omega \in \Psi \\ r_y = F_{max} & \text{if } \Omega \notin \Psi \end{cases} \quad \text{with } \Psi = \bigcup_{i=1}^P \Psi_i \quad (2.29)$$

avec P est le nombre de zones critiques à éviter. Ψ est l'ensemble de toutes les zones Ψ_i de fréquences critiques à réduire. F_{max} est une valeur de force normale qui ne permet pas le glissement et F_{min} est une valeur de force normale qui permet le glissement.

Pour réaliser cette loi de contrôle, on commence tout d'abord par faire une étude modale pour déterminer les fréquences propres avec et sans serrage (Fig.2.14). Il faut s'assurer à cette étape que les fréquences propres de la structure avec et sans serrage soient bien distinctes, car c'est la condition nécessaire pour que la méthode de contrôle soit efficace. Après la détermination des fréquences propres, il faut définir les zones autour de ces fréquences dans laquelle le serrage est à changer. Pour le calcul on utilise le développement analytique dans le cas d'une force normale constante.

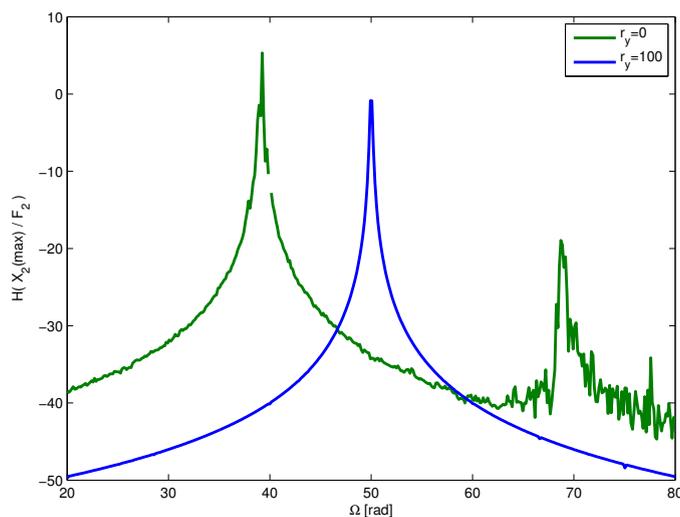


FIGURE 2.14 – comparaison des FRF avec et sans serrage

La figure 2.15 montre qu'avec cette loi de contrôle, on peut réduire considérablement

les vibrations au voisinage des fréquences critiques, à condition que les fréquences propres dans le cas avec et sans serrage soient assez éloignées.

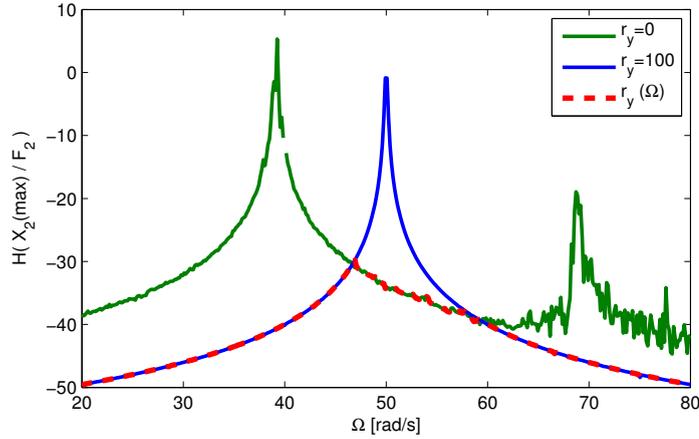


FIGURE 2.15 – Comparaison des FRF avec et sans contrôle

2.1.6 Loi de contrôle de la force normale (approche temporelle)

Dans cette partie, on propose des lois de contrôle de la force normale qui varient dans le temps. Ce type de contrôle peut fonctionner sans l'utilisation de capteur, car il ne nécessite aucun paramètre d'entrée pour la loi de contrôle.

2.1.6.1 Première loi

La première loi de contrôle qu'on propose d'étudier est une loi de variation sinusoïdale de la force normale entre une valeur minimale F_{min} et une valeur maximale F_{max} .

$$r_y(t) = F_{max} Y_1 [Y_2 + \sin(\Omega_{ser} t)] \quad (2.30)$$

Avec

$$Y_1 = \frac{(1 - S_r)}{2}, \quad Y_2 = \frac{1 + S_r}{1 - S_r}, \quad S_r = \frac{F_{min}}{F_{max}} \quad (2.31)$$

Ω_{ser} est la pulsation de la force normale.

2.1. MODÈLE RESSORT AMORTISSEUR

F_{max} ; F_{min} sont respectivement les valeurs du serrage maximal et du serrage minimal appliquées.

La figure 2.16 donne un exemple de la loi de commande de la force normale 2.30 avec $F_{max} = 2$, $F_{min} = 1$, $\Omega_{ser} = 1$.

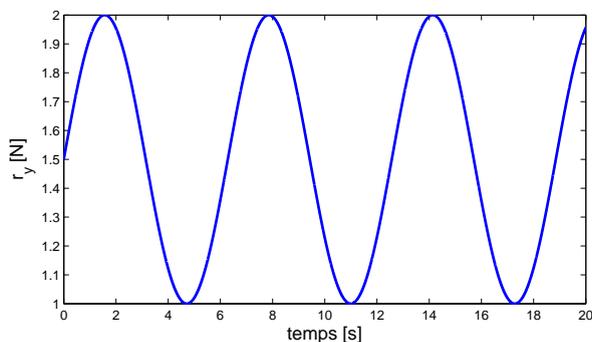


FIGURE 2.16 – Exemple de loi de commande.

Dans un premier temps, il faut chercher Ω_{ser} permettant d'avoir la meilleure réduction de vibrations sur toute la bande de fréquence étudiée. Pour cela on va faire une étude paramétrique en traçant la FRF de structure pour différentes valeurs de la pulsation de la force normale. Pour le calcul on utilise le développement analytique présenté dans le cas d'une force normale périodique.

On peut voir figure 2.17 qu'il existe plusieurs Ω_{ser} permettant une réduction importante des vibrations au niveau des fréquences critiques, par contre, certaines pulsations occasionnent la création d'amplitudes parasites importantes surtout à des fréquences élevées. Le choix de la pulsation optimale de la force normale a été fait en sélectionnant celle qui minimise l'amplitude de la FRF sur toute la bande de fréquences.

On peut voir figure 2.18 une comparaison entre une FRF sans contrôle et une avec la loi de contrôle 2.30, avec $\Omega_{ser} = 4.7[rad]$. figure 2.19 est présentée une comparaison de la réponse temporelle avec et sans contrôle, au niveau de la première fréquence propre.

On peut conclure qu'en utilisant ce type de loi de contrôle, on est capable de réduire d'une façon très significative les vibrations sur toute la bande de fréquences, à condition de bien choisir la pulsation de la force normale.

2.1. MODÈLE RESSORT AMORTISSEUR

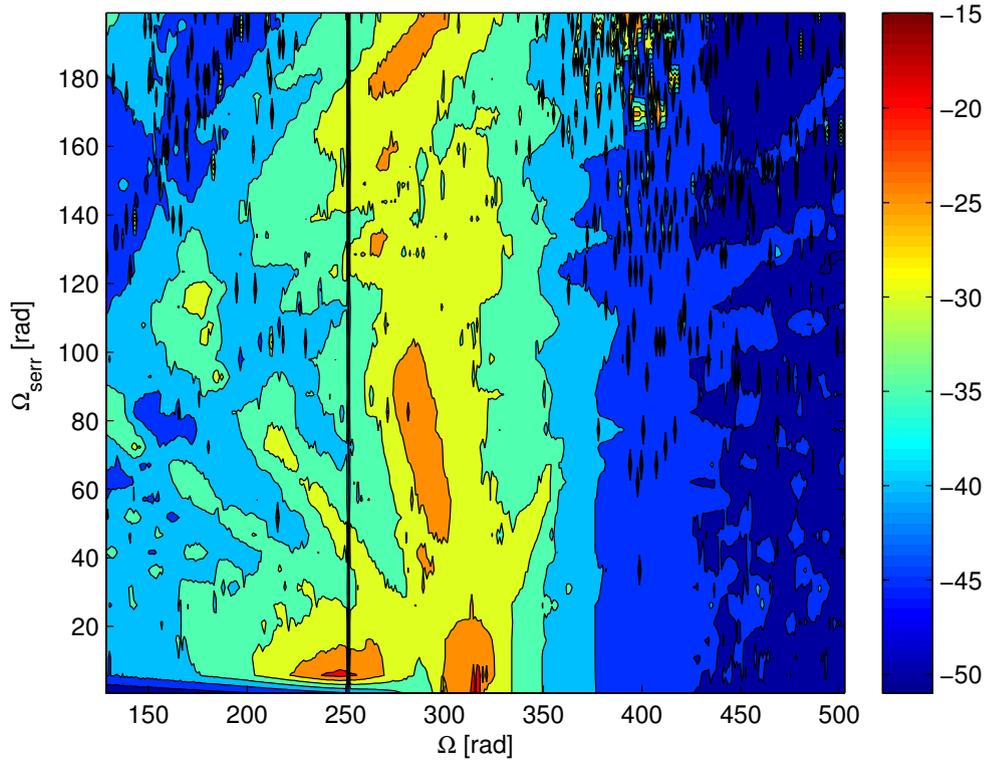


FIGURE 2.17 – Étude paramétrique de la FRF de la structure pour différentes valeurs de Ω_{ser}

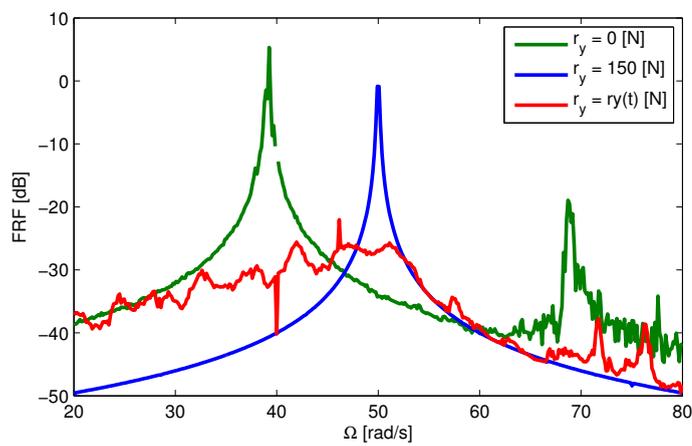


FIGURE 2.18 – comparaison des FRFs avec et sans contrôle

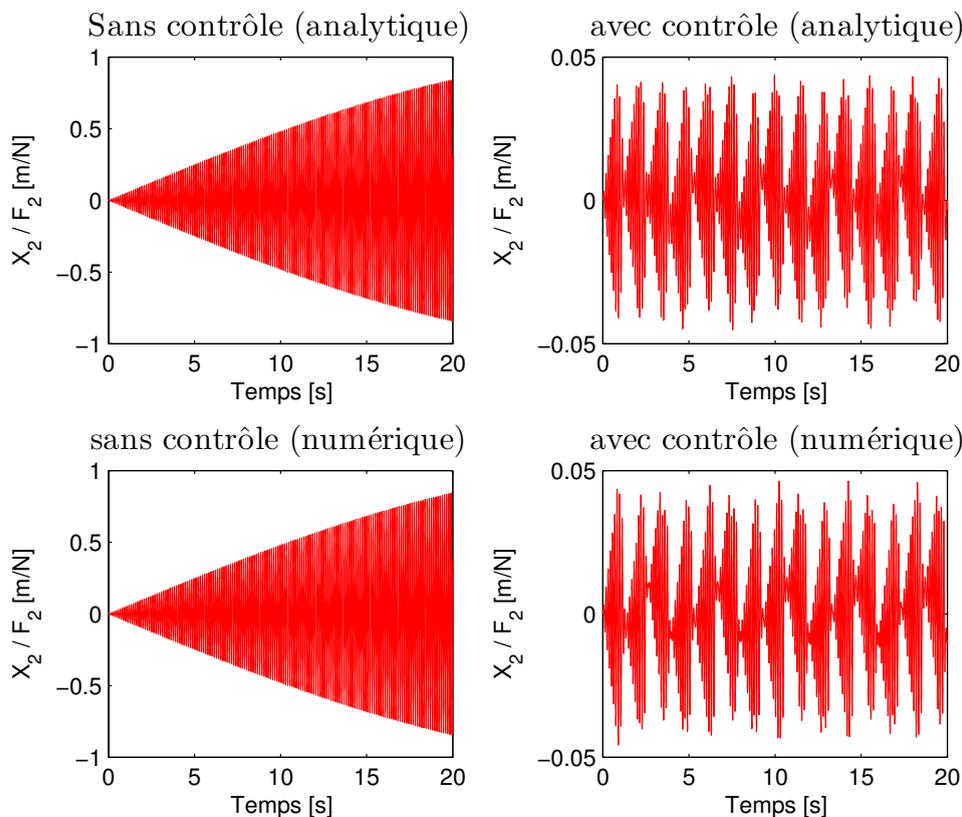


FIGURE 2.19 – Comparaison entre les réponses temporelles avec et sans contrôle

2.1.6.2 Deuxième loi

La deuxième loi de contrôle qu'on se propose d'étudier est une loi de variation binaire de la force normale entre deux valeurs F_{min} et F_{max} , la variation s'effectuant de façon périodique, avec une pulsation Ω_{ser} , selon la loi suivante :

$$r_y(t) = F_{max} Y_1 [Y_2 + \text{sgn}(\sin(\Omega_{ser} t))] \quad (2.32)$$

La figure 2.16 donne un exemple de la loi de commande de la force normale (2.30) avec $F_{max} = 2$; $F_{min} = 1$; $\Omega_{ser} = 1$

Dans un premier temps, il faut chercher Ω_{ser} permettant d'avoir la meilleure réduction de vibrations sur toute la bande fréquence étudiée. Pour cela, on fait une étude paramétrique en traçant la FRF de la structure pour différentes valeurs de la pulsation de la force nor-

2.1. MODÈLE RESSORT AMORTISSEUR

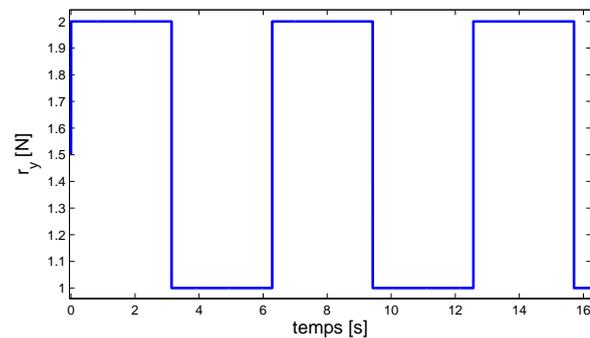


FIGURE 2.20 – Exemple de loi de commande.

male. Pour le calcul, on utilise la résolution analytique développée dans le cas d'une force normale périodique.

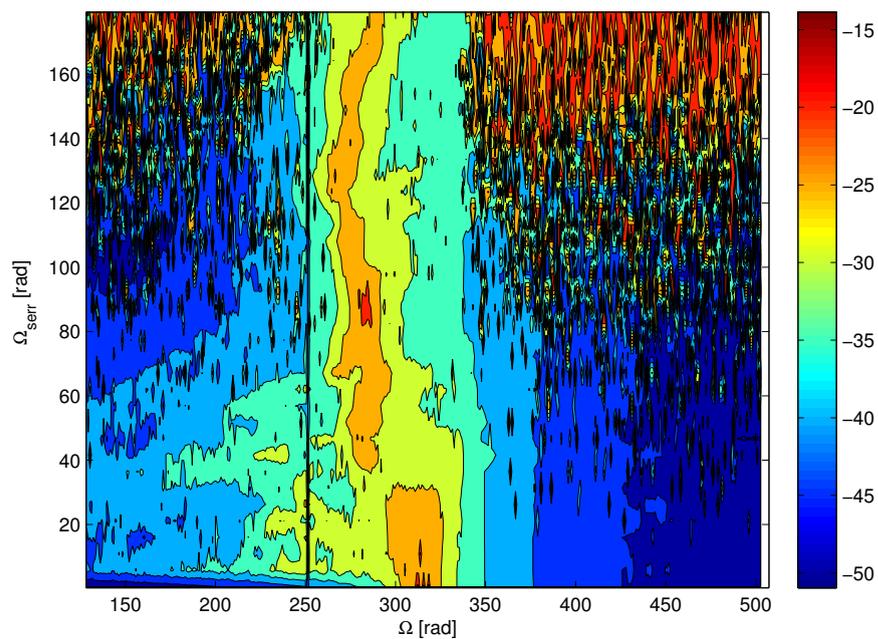


FIGURE 2.21 – Etude paramétrique de la FRF de structure pour différentes valeurs de Ω_{ser}

On peut voir figure 2.21 qu'on peut trouver plusieurs Ω_{ser} permettant une bonne réduction des vibrations au niveau des fréquences critiques, cependant des vibrations parasites apparaissent surtout à des fréquences élevées. Pour le choix de la pulsation optimale

2.1. MODÈLE RESSORT AMORTISSEUR

de la force normale, on fait comme précédemment, en sélectionnant celle qui minimise la surface de FRF. La figure 2.22 permet une comparaison entre une FRF sans contrôle et une FRF avec la loi de contrôle (2.32), de pulsation $\Omega_{ser} = 2.6[rad/s]$. La figure 2.23 présente une comparaison de la réponse temporelle avec et sans contrôle au niveau de la première fréquence propre.

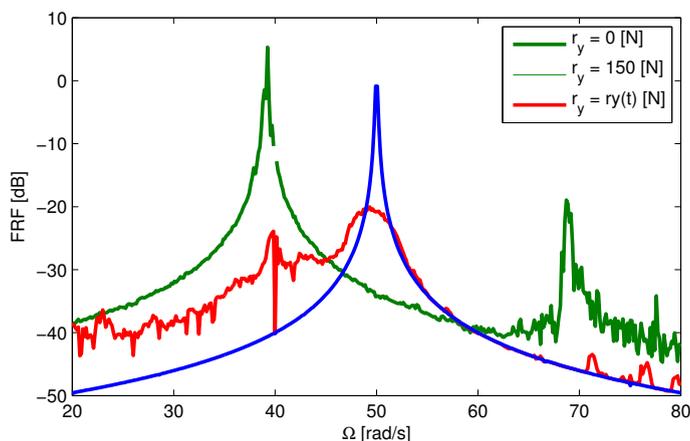


FIGURE 2.22 – Comparaison des FRFs avec et sans contrôle

On peut conclure qu'en utilisant ce type de loi de contrôle, on est capable de réduire d'une façon très significative les vibrations sur toute la bande de fréquence, à condition de faire le bon choix de la pulsation de la force normale.

2.1.7 Conclusion

Dans cette première partie de réduction de vibrations par contrôle de serrage au niveau des joints boulonnés, on a commencé par étudier un modèle simplifié masse ressort à deux ddl. La résolution du problème dynamique non linéaire a permis de tester plusieurs lois de contrôle du serrage.

Dans un premier temps, une résolution analytique du problème dynamique non linéaire a été proposée dans le cas d'un serrage constant et d'un serrage périodique. Ces deux méthodes de résolution ont l'avantage de déterminer le temps de début et de fin de glissement d'une façon automatique. Une résolution numérique a aussi été proposée et a permis de valider les différentes méthodes analytiques proposées.

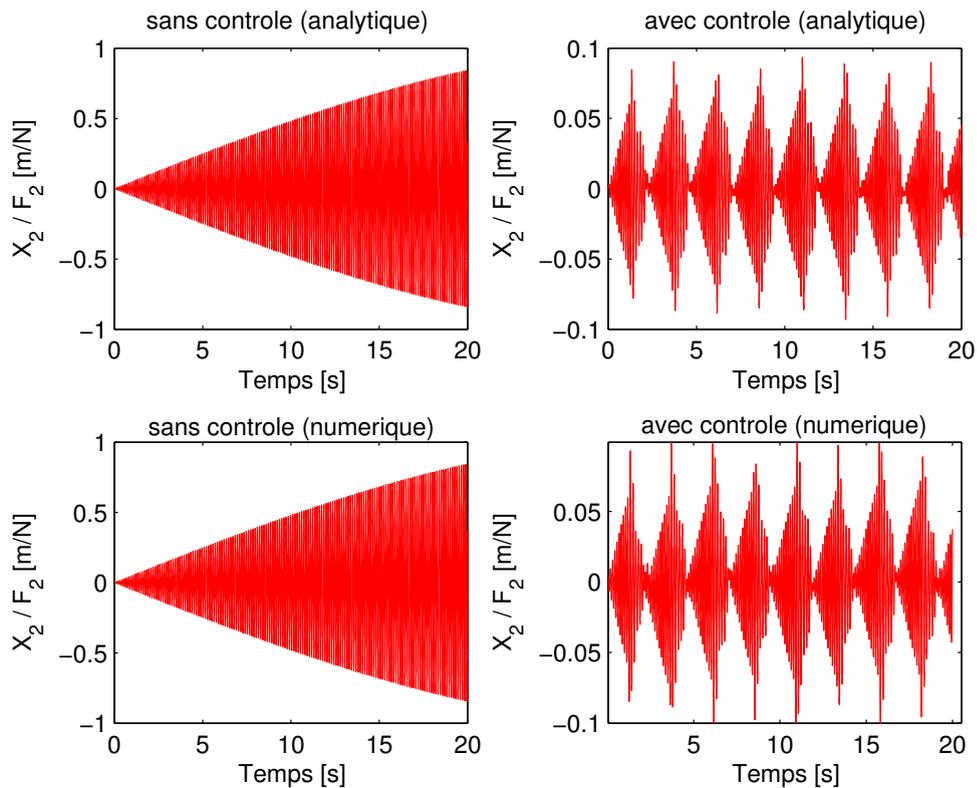


FIGURE 2.23 – Comparaison des réponses temporelles avec et sans contrôle

Dans un deuxième temps, deux types de contrôles de la force normale ont été présentés : en fonction de la fréquence et en fonction du temps.

Les lois de contrôle proposées ont permis de réduire le niveau vibratoire de la réponse sans créer d'amplitudes parasites.

Cette méthode de réduction est capable de réduire significativement les vibrations dans le cas de modèle simplifié à 2 ddl. L'étape suivante portera sur une structure plus complexe, modélisée par éléments finis.

2.2 Modèle éléments finis

Le calcul de structure composée d'assemblages peut créer de sérieuses difficultés, notamment en présence de plusieurs zones de contact unilatéral, avec ou sans frottement, ce

qui rend le comportement globalement non linéaire même avec des structures élastiques. Actuellement, ce type de calcul se fait généralement par la méthode des éléments finis. Mais la difficulté peut surgir dans l'étude de géométries complexes, soumises à des chargements réalistes qui peut conduire à des modèles éléments finis comportant un grand nombre de degrés de liberté difficiles à mettre en œuvre et à manipuler. De plus, les résolutions classiques des problèmes de contact, par pénalité [38], par multiplicateurs de Lagrange [39] ou par éléments de contact [40], entraînent généralement un surcoût numérique très important quand le nombre de conditions est grand. En effet, pour les problèmes de frottement, la taille des incréments de chargement utilisés doit souvent être petite pour assurer la convergence [41]. Ainsi, la détermination d'une solution de bonne qualité nécessite la résolution de problèmes de grande taille entraînant des coûts numériques considérables.

Dans ce cadre, on a choisi de modéliser nos structures avec assemblage en utilisant une méthode qui se base sur une décomposition des assemblages en sous-structures et en interfaces, utilisant la méthode LATIN (LArge Time INcrement method), proposée dans [42]. L'approche par décomposition de domaine utilisée est une approche mixte qui contrairement aux méthodes primales [43] et aux méthodes duales [44], traite à égalité les efforts et les déplacements bords.

Les premiers travaux réalisés [45] ont montré la faisabilité de la méthode pour des problèmes 2D axisymétriques. Cette méthode est apte à analyser rapidement et de façon fiable les situations complexes d'assemblages de structures[46].

2.2.1 Principe de la méthode LATIN

La structure élastique considérée Ω est décomposée en sous-structures dans le but de rompre la globalité du problème. Cette décomposition est obtenue à partir de deux entités mécaniques différentes : les sous-structures Ω_E et les interfaces $\gamma^{EE'}$ ($\gamma^{EE'}$ est l'interface entre les sous-structures Ω_E et $\Omega_{E'}$) (Fig. 2.24). Les interfaces réalisent les liaisons entre les sous-structures internes, mais aussi entre les sous-structures et l'extérieur pour la prise en compte des conditions aux limites.

Dans cette approche et contrairement aux techniques classiques de décomposition de domaine, les interfaces ne sont pas uniquement des objets fictifs engendrés par la

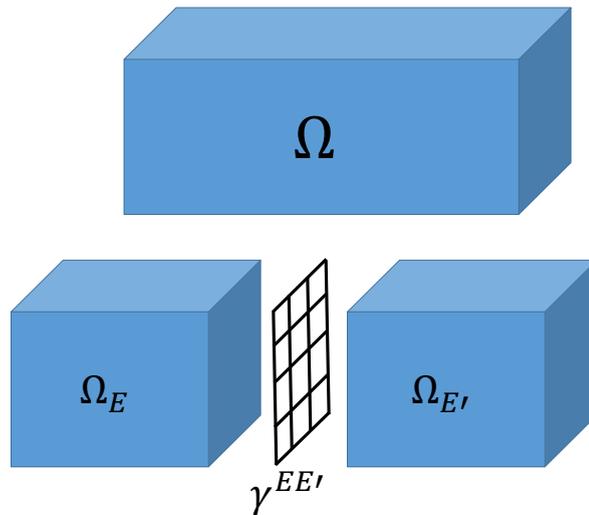


FIGURE 2.24 – Décomposition d’une structure.

décomposition. Ce sont des entités mécaniques à part entière qui disposent de leurs propres inconnues et de leurs propres équations d’équilibre et de comportement. Ce sont les éléments clés de l’approche, car le fait qu’à une même interface puissent être associés divers comportements différents introduit une grande flexibilité des modélisations réalisées.

Un champ de déplacement \mathbf{W}^E et un champ densité surfacique d’effort \mathbf{F}^E représentent l’interaction entre une sous-structure et une interface (\mathbf{F}^E étant l’action de l’interface sur la sous-structure). Ces deux champs sont définis sur les interfaces et sur les frontières des sous-structures.

2.2.1.1 Problème mécanique sur une sous-structure

On considère un comportement linéaire des matériaux sous l’hypothèse des petites perturbations. \mathbf{f}_d représente les forces de volume. Une sous-structure ne communiquant qu’avec des interfaces, les efforts \mathbf{F}^E sont imposés sur toute la frontière $\partial\Omega^E$ (2.25).

La solution est recherchée dans l’espace \mathbb{U}^E défini sur Ω^E et sur lequel les conditions de régularité sont imposées. De même, l’espace vectoriel associé $\mathbf{U}_0^E = \{\mathbf{U}^* \in \mathbb{U}^E, \mathbf{U}^*|_{\partial\Omega^E} = 0\}$ est défini.

Pour une étude en quasi-statique (les effets d’accélération sont négligés devant le

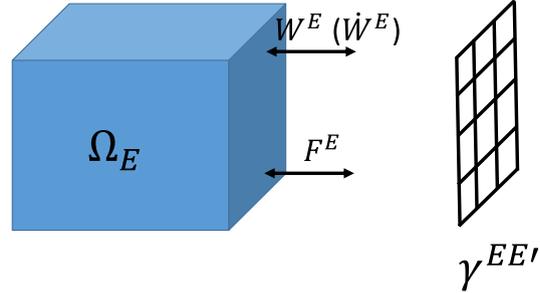


FIGURE 2.25 – Problème sur une sous-structure

chargement), sur chaque sous-structure Ω^E , le problème à résoudre est de trouver $\{\mathbf{U}^E, \sigma^E\}$ tel que les trois groupes d'équations soient vérifiés :

- Liaison cinématique :

$$\mathbf{U}^E|_{\partial\Omega^E} = \mathbf{W}_E, \mathbf{U}^E \in \mathbb{U}^E \quad (2.33)$$

- Équation d'équilibre :

$$\begin{aligned} & \forall \mathbf{U}^* \in \mathbf{U}_0^E : \\ & - \int_{\Omega^E} \text{Tr} [\sigma^E \cdot \varepsilon(\mathbf{U}^*)] d\Omega + \int_{\Omega^E} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{U}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega^E} \mathbf{F}^E \cdot \mathbf{U}^* dS = 0 \end{aligned}$$

- Loi de comportement

$$\sigma^E = \mathbf{K}\varepsilon(\mathbf{U}^E) \quad \mathbf{K} : \text{tenseur de Hooke} \quad (2.34)$$

Pour une étude en dynamique (les effets d'accélération sont pris en compte), sur chaque sous-structure Ω^E , le problème à résoudre est écrit en vitesse : il s'agit de trouver $\dot{\mathbf{U}}^E, \sigma^E$ tel que :

- Liaison cinématique :

$$\dot{\mathbf{U}}^E|_{\partial\Omega^E} = \dot{\mathbf{W}}_E, \dot{\mathbf{U}}^E \in \mathbb{V}^E \quad (2.35)$$

– Équation d'équilibre :

$$\begin{aligned}
 & \forall \dot{\mathbf{U}}^* \in \dot{\mathbf{U}}_0^E : \\
 & - \int_{\Omega^E} Tr \left[\sigma^E . \varepsilon(\dot{\mathbf{U}}^*) \right] d\Omega + \int_{\Omega^E} \mathbf{f}_d . \dot{\mathbf{U}}^* d\Omega \\
 & + \int_{\partial\Omega^E} \mathbf{F}^E . \dot{\mathbf{U}}^* dS = \int_{\Omega^E} \rho \frac{d\dot{\mathbf{U}}}{dt} . \dot{\mathbf{U}}^* d\Omega
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

– Loi de comportement

$$\sigma^E = \mathbf{K}_\varepsilon(\mathbf{U}^E) \tag{2.37}$$

2.2.1.2 Problème mécanique sur une interface

Pour chaque interface $\gamma^{EE'}$, les équations dépendent du comportement de la liaison à modéliser. Ces équations mettent en jeu les champs d'effort et de déplacement (ou de vitesse) de part et d'autre de l'interface. Elles sont locales en variables d'espace et peuvent être écrites sous forme d'une relation de comportement éventuellement non linéaire en tout point M de $\gamma^{EE'}$ (2.26) :

Pour une étude en quasi statique :

$$\forall (M, t) \in \gamma^{EE'} \times [0, T] \quad \mathbf{R}(\mathbf{W}^E(M, t), \mathbf{F}^E(M, t); \mathbf{W}^{E'}(M, t), \mathbf{F}^{E'}(M, t)) = 0$$

Pour une étude en dynamique :

$$\forall (M, t) \in \gamma^{EE'} \times [0, T] \quad \mathbf{R}(\dot{\mathbf{W}}^E(M, t), \mathbf{F}^E(M, t); \dot{\mathbf{W}}^{E'}(M, t), \mathbf{F}^{E'}(M, t)) = 0$$

2.2.1.3 Schéma itératif de résolution

L'approche utilisée est basée sur la méthode LATIN (LArge Time INcrement method) [42]. Cette méthode est une stratégie générale pour traiter des problèmes non-linéaires d'évolution.

On présente, à titre d'illustration, le schéma de résolution pour une étude quasi-statique. Le premier point de la méthode LATIN [42] est de séparer les difficultés dans le but d'éviter la simultanéité du caractère global et du caractère non-linéaire du problème. Ainsi, on prend en compte les propriétés des équations pour les séparer en deux groupes :

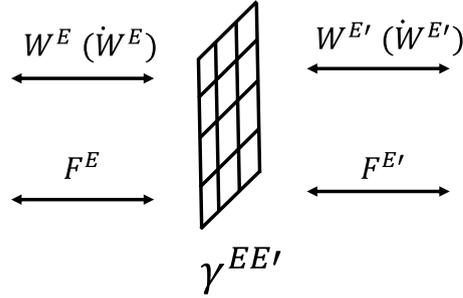


FIGURE 2.26 – Problème posé sur une interface

- Les équations locales en variable d’espace et éventuellement non-linéaires.
- Les équations linéaires et éventuellement globales en variable d’espace

On appelle $s = (\varepsilon, \mathbf{W}; \sigma, \mathbf{F})$ l’ensemble des inconnues du problème et \mathbf{S} l’espace fonctionnel correspondant.

Γ est la variété éventuellement non-linéaire de \mathbf{S} associée à la vérification des équations :

$$s \in \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{R}(\mathbf{W}^E, \mathbf{F}^E; \mathbf{W}^{E'}, \mathbf{F}^{E'}) = 0 \quad \forall M \in \gamma^{EE'}$$

A_d est la variété linéaire de \mathbf{S} associée à la vérification des équations linéaires :

$$s \in A_d \quad \Leftrightarrow \quad s \text{ vérifie les équations (2.35),(2.36),(2.37)}$$

Les équations linéaires vérifiées par A_d sont semi-globales en variables d’espace, c’est-à-dire qu’elles ne sont globales que par sous-structure.

Le deuxième point de la stratégie consiste à utiliser un schéma itératif à deux étapes (une étape locale et une étape semi-globale). Les deux directions de recherche introduites sont : une direction (E^+) de ”montée” pour l’étape locale et une direction E^- de ”descente” pour l’étape globale. La résolution d’une itération est conduite comme suit :

- Étape locale : à partir d’un élément $s_n \in A_d$ connu, on cherche $s_{n+\frac{1}{2}} \in \Gamma$ en utilisant la direction de recherche de l’étape locale.
- Étape semi-globale : à partir d’un élément $s_{n+\frac{1}{2}} \in \Gamma$ connu, on cherche $s_{n+1} \in A_d$ en utilisant la direction de recherche de l’étape semi-globale.

A partir d'un élément initial s_0 , le processus converge, par une succession d'étapes locales et semi-globales, vers l'élément solution s_{sol} qui est l'intersection des deux ensembles A_d et Γ (Fig. 2.27). Il vérifie ainsi toutes les équations du problème.

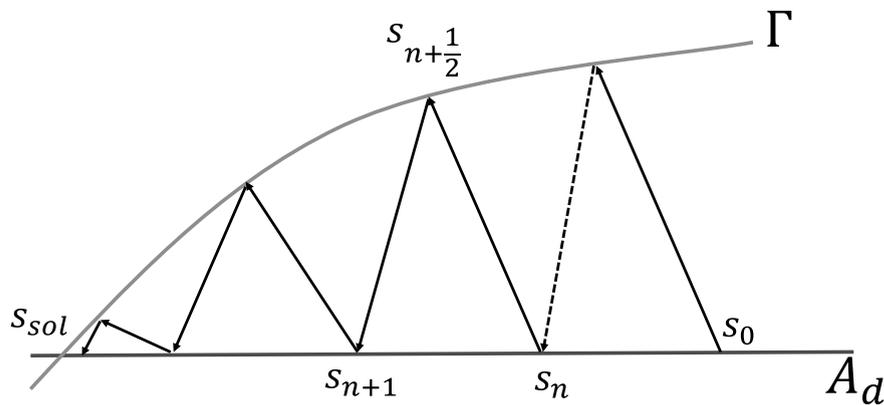


FIGURE 2.27 – Schéma itératif

s_{sol} est la solution du problème.

Avec cette méthode, on peut modéliser à la fois les non-linéarités de frottement décrites précédemment et les non-linéarités dues au contact unilatéral.

Condition de contact unilatéral

On peut formuler les conditions de contact entre deux structures (Fig. 2.28) de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n} \geq 0 \\ F_n = F_{n1} = -F_{n2} \leq 0 \\ ((\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n}) F_n = 0 \\ \vec{F}_t = \vec{F}_{t1} = -\vec{F}_{t2} \end{array} \right.$$

avec

- F_{ni} : composante normale de la force de la structure i

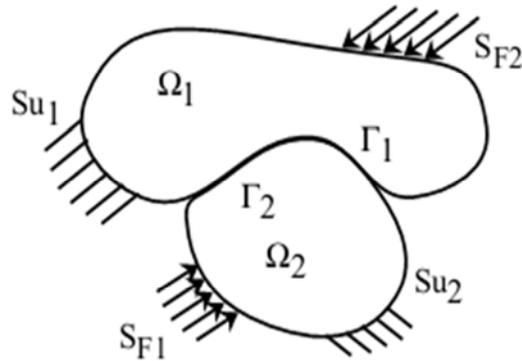


FIGURE 2.28 – Structures en contact

- F_{ti} : force tangentielle de la structure i
- \vec{u}_i : déplacement de la structure i

Le développement numérique de cette approche de calcul est réalisé dans COFAST ; c'est une extension du logiciel d'éléments finis CAST3M pour traiter les problèmes de contact avec frottement. Ce logiciel a été initialement développé par Laurent Champany pendant sa thèse [47] puis enrichi et développé pour prendre en compte différents types de liaisons [48].

2.2.2 Étude du modèle 3D

On a montré à travers le modèle masse-ressort simplifié l'intérêt d'avoir un serrage variable pour la réduction des vibrations. Ce comportement doit être validé dans le cas d'une structure plus complexe dans des conditions de serrage variables. On propose alors de faire une étude numérique avec la méthode LATIN de la structure représentée figure 1.13.

Pour l'étude par la méthode LATIN, on définit les éléments suivants :

1. Sous-structures (Fig. 2.29) :
 - la poutre 1 sur laquelle on applique un effort de chargement dans sa direction longitudinale

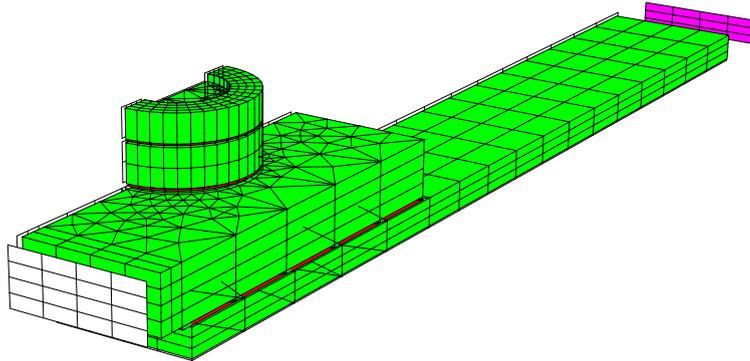


FIGURE 2.29 – Différentes sous-structures composant la structure modélisée en 3D

- la poutre 2 en liaison avec la poutre 1 (Fig. 1.13).
 - la rondelle piézoélectrique qui permet de changer le serrage par une variation d'épaisseur contrôlée
 - le boulon pour assurer la tenue du joint boulonné
2. Interfaces entre les différentes sous-structures (Fig. 2.30) :
- Interfaces « symétrie » qui permettent d'imposer des conditions de symétrie plane.
 - Interface « déplacement imposé » entre la vis et le boulon. Cette interface assure des conditions aux limites de type déplacement imposé sur toutes les composantes.
 - Interface « effort imposé » entre la poutre 1 et l'extérieur. Cette interface assure des conditions aux limites de type « effort imposé » sur toutes les composantes.
 - Interface « contact unilatéral avec frottement » entre toutes les sous-structures sauf entre la vis et le boulon. Cette interface assure des conditions de contact selon la normale et de frottement et d'adhérence dans le plan tangent.

Le serrage est effectué par la déformation de la rondelle piézoélectrique dans le sens de l'épaisseur. D'un point de vue modélisation, il est réalisé en mettant un chargement thermique équivalent au sein de la rondelle piezo. Le chargement thermique contrôle, selon une loi de commande prédéfinie, l'expansion ou la compression de la rondelle piezo.

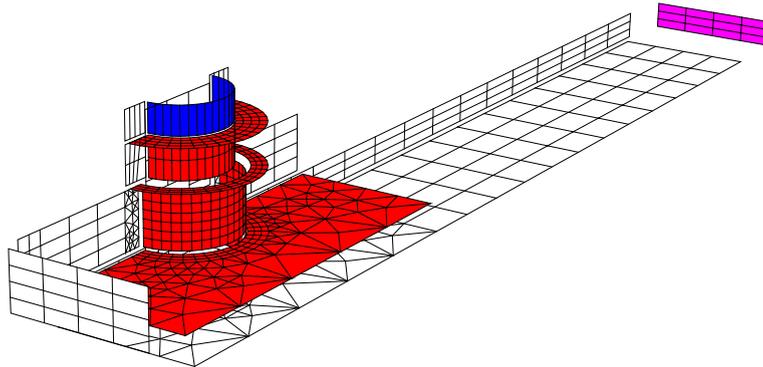


FIGURE 2.30 – Différentes interfaces entre les sous-structures

Cette étude sera réalisée en deux temps :

- dans un premier temps, on va faire une étude de l'effet du serrage sur le fonctionnement de la liaison unilatérale dans le joint boulonné. On représente le décollement entre les deux poutres en fonction du serrage.

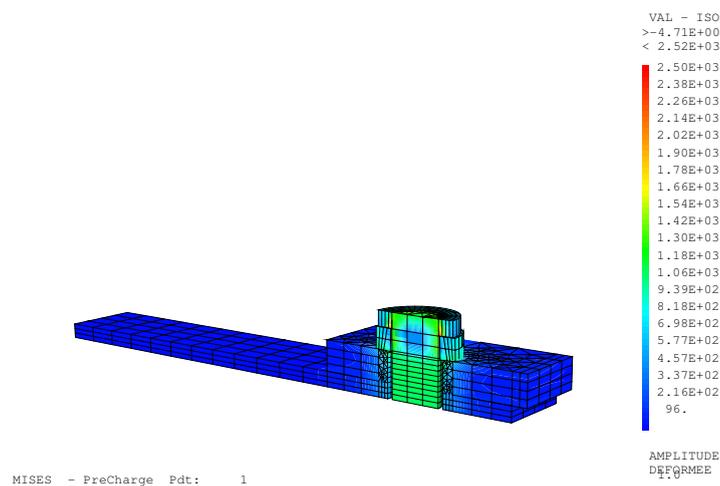


FIGURE 2.31 – Répartition du champ d'effort dans les différentes sous-structures

Pour traiter ce problème, on utilise une modélisation quasi statique (sans effet d'inertie).

2.2. MODÈLE ÉLÉMENTS FINIS

tie). La figure 2.32 représente la convergence de la méthode. La figure 2.33 représente la valeur de décollement entre les deux poutres issue de la déformation de la rondelle piezo (Fig. 2.31). On peut remarquer qu'un serrage peut provoquer le décollement d'une partie de l'interface de contact, surtout dans la zone la plus éloignée de la vis.

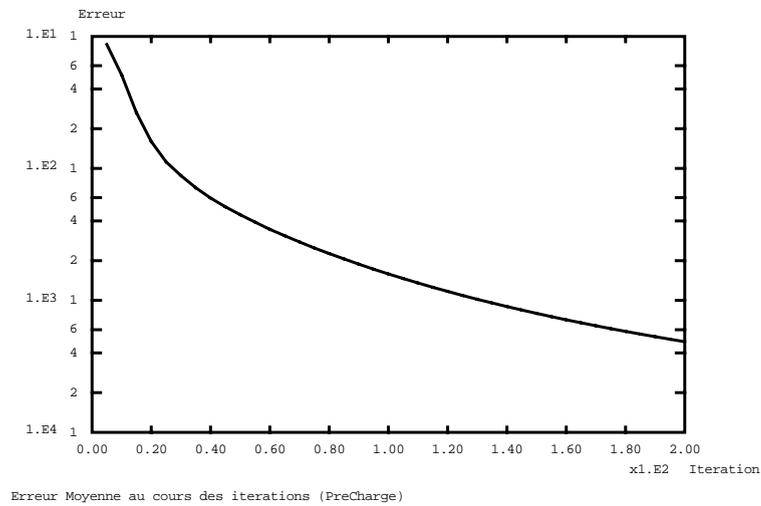


FIGURE 2.32 – Convergence du calcul

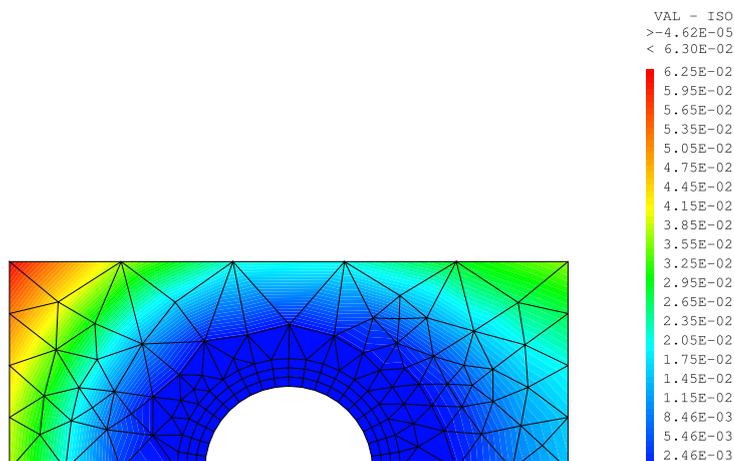


FIGURE 2.33 – Décollement au niveau de l'interface entre les deux poutres

– dans un deuxième temps, on s'intéresse à l'effet d'un serrage variable sur la réponse

en déplacement de la structure.

Le comportement de l'interface de l'assemblage boulonné dépend à la fois du coefficient de frottement et de l'effort normal. Dans ce cadre, on propose de faire une étude de la réponse en déplacement suite à un chargement au niveau de l'extrémité de la poutre 1 (Fig. 2.34), pour différentes valeurs de force normale et pour différentes valeurs de coefficients de frottement .

La figure 2.35 représente l'effet de la force normale sur la réponse en déplacement. Avec un serrage important, on s'approche d'un comportement linéaire, mais sans l'atteindre, car le serrage important provoque un décollement d'une partie de la surface de contact, ce qui laisse un comportement non linéaire dû au contact unilatéral. Par contre lorsqu'on applique une force normale réduite, apparaît un cycle d'hystérésis dû au glissement au niveau des surfaces de contact.

Les mêmes conclusions peuvent être tirées concernant l'effet du coefficient de frottement sur la réponse en déplacement (Fig. 2.36). On peut remarquer que plus la valeur de coefficient de frottement est petite, plus la surface de l'hystérésis est réduite pour tendre vers un comportement linéaire.

Dans ces deux cas lorsque la force de frottement est faible, on voit apparaître un macro glissement, qui provoque une chute de rigidité du joint boulonné ce qui est préjudiciable à l'intégrité de la structure complète.

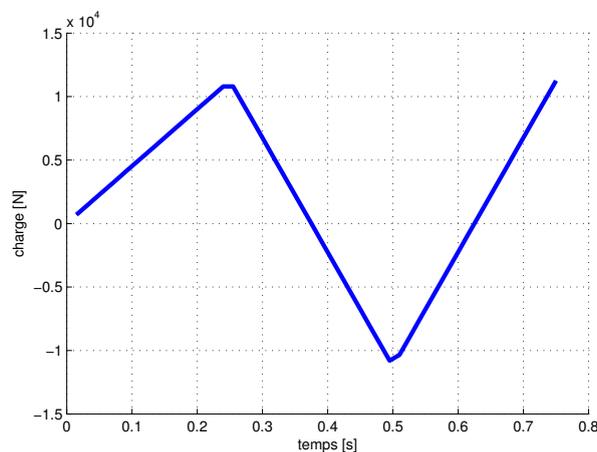


FIGURE 2.34 – Effort imposé à l'extrémité de la poutre

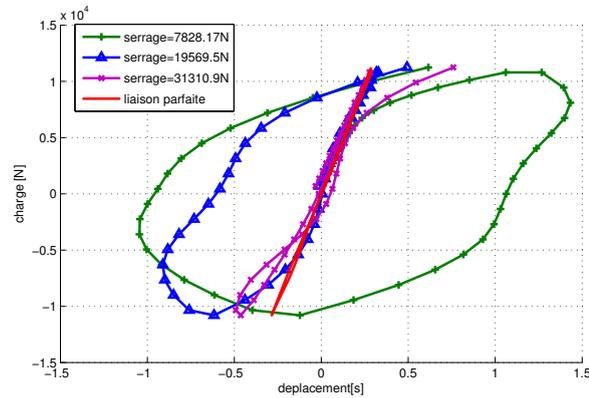


FIGURE 2.35 – Cycles d’hystérésis pour différentes valeurs de serrage

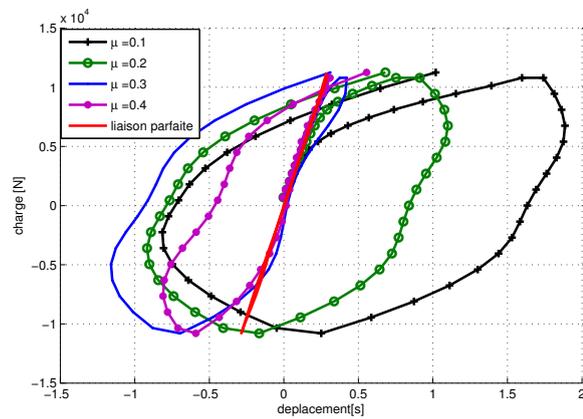


FIGURE 2.36 – Cycles d’hystérésis pour différentes valeurs de coefficients de frottement

2.2.3 Conclusion

On peut conclure d’après la modélisation par élément finis 3D du joint boulonné qu’un changement de serrage bénéfique pour la réduction de vibrations peut provoquer une chute de la rigidité, ce qui peut provoquer des problèmes de stabilité de la structure. Pour résoudre ce problème, il faut imaginer une conception permettant l’intégration du joint boulonné dans une structure mère (dont on souhaite réduire les vibrations) comme élément qui apporte une réduction de vibrations sans causer de perte de rigidité de l’ensemble de la structure. Ceci fait l’objet de l’étude 2D suivante.

2.2.4 Étude du modèle 2D

Dans cette étude, on propose une réduction du niveau vibratoire d'une structure en utilisant un serrage variable selon des lois de commandes proposées dans la partie 2.1.

La structure dont on cherche à réduire le niveau vibratoire est un portique 2D (Fig. 2.37), qui a été modélisé en utilisant COFAST avec un maillage d'éléments QUA8. Pour réduire le niveau vibratoire de cette structure, on propose d'ajouter un joint boulonné qui a comme unique rôle de changer la rigidité selon une loi de commande et par conséquent de changer les fréquences propres de la structure totale (Fig. 2.38).

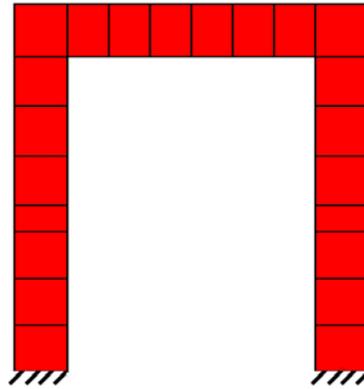


FIGURE 2.37 – Structure principale initiale

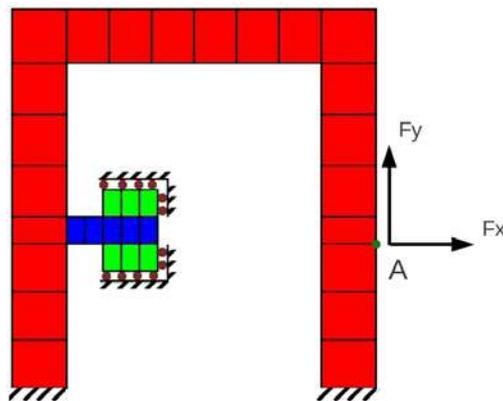


FIGURE 2.38 – Modélisation de la structure complète

Pour l'étude par la méthode LATIN dans COFAST, on définit des :

1. Sous-structures (Fig. 2.38) :
 - La structure mère dont on cherche à réduire le niveau vibratoire.
 - La sous-structure 1 (sub1), dont l'ajout permet de changer la rigidité de la structure totale.
 - Les sous-structures (sub21,sub22), qui représentent l'effet de l'élément piezo.
2. Interfaces entre les différentes sous-structures (Fig. 2.39) :
 - Interfaces « symétriques » qui permettent d'imposer des conditions de symétrie plane,
 - Interface « déplacement imposé » au niveau des deux encastremets.
 - Interface « déplacement imposé nul » (liaison parfaite) entre la structure mère et la sous-structure (sub1).
 - Interface « effort imposé » entre le portique et l'extérieur.
 - Interface « contact unilatéral avec frottement et adhérence » entre les sous-structures (sub21,sub22) et la sous-structure (sub1).

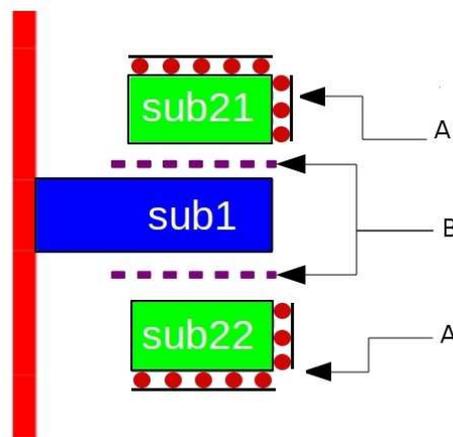


FIGURE 2.39 – Zoom sur le joint boulonné

Le serrage est effectué par la déformation, dans le sens de l'épaisseur, des deux sous-structures (sub21,sub22).

Remarque : Le dimensionnement proposé ne permet de changer que quelques fréquences propres, dans notre cas, les deux premières (Fig. 2.40). Cela montre les limites de cette méthode de réduction .

2.2.5 Loi de contrôle de la force normale (par fréquence)

Pour réaliser une réduction du niveau vibratoire de la structure étudiée en utilisant la loi de contrôle proposée dans 2.1.5, on commence par faire une étude modale pour déterminer les fréquences propres dans le cas avec serrage (liaisons parfaites) et sans serrage (liaisons unilatérales sans frottement) (Fig. 2.40).

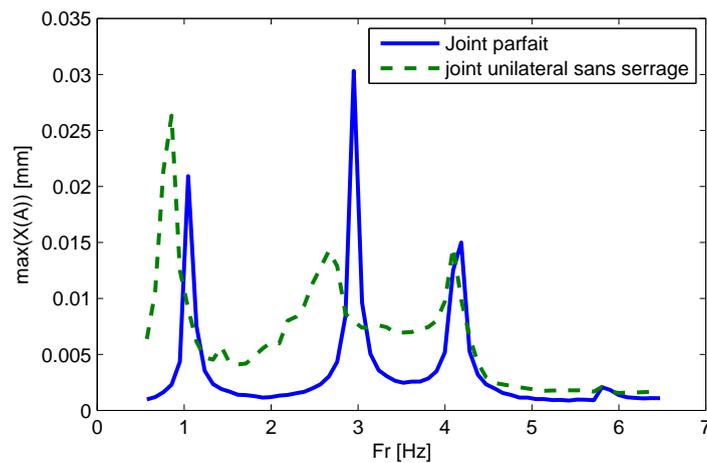


FIGURE 2.40 – Comparaison de FRF avec serrage (—) et sans serrage (- -)

La figure 2.41 montre qu'avec cette loi de contrôle 2.29, on peut réduire considérablement les vibrations au voisinage des fréquences critiques, à condition que les fréquences propres avec et sans serrage soient assez éloignées.

2.2.5.1 Loi de contrôle de la force normale (en fonction de la fréquence)

Dans cette partie, on propose de faire une réduction du niveau vibratoire de la structure étudiée en utilisant la loi de contrôle 2.32.

La figure 2.42 montre qu'avec la loi de contrôle 2.32, on peut réduire considérablement les vibrations au voisinage des fréquences critiques, à condition que les fréquences propres avec et sans serrage soient assez éloignées.

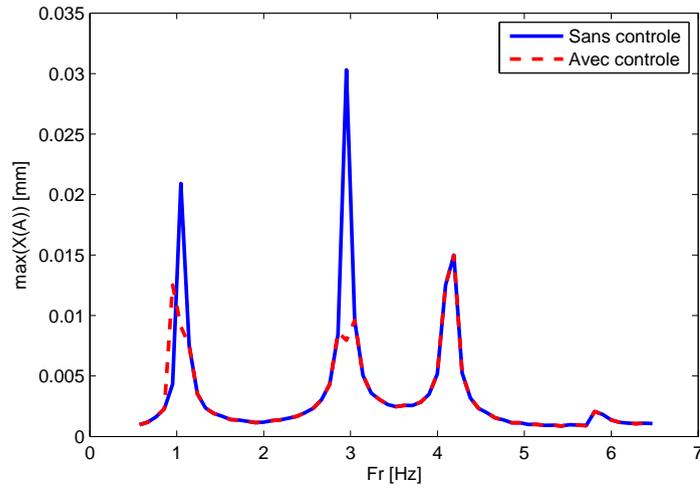


FIGURE 2.41 – Comparaison de FRF avec et sans contrôle

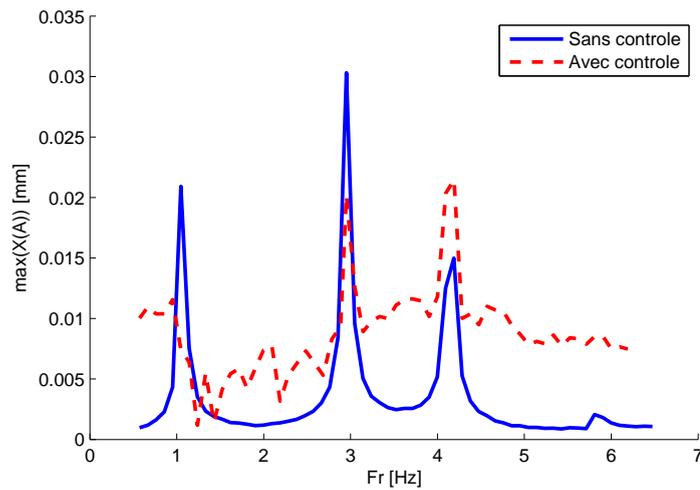


FIGURE 2.42 – Comparaison de FRF avec et sans contrôle.

2.2.6 Conclusion

Après un bref rappel de la méthode LATIN [42], un modèle de joint boulonné a été modélisé par cette méthode en quasi-statique pour voir l'influence de la force de frottement sur la réponse en déplacement de la structure. On a conclu qu'un changement de serrage peut provoquer une chute de la rigidité. Pour résoudre ce problème, on a proposé un dimensionnement de structure permettant une intégration du joint boulonné dans une

2.2. MODÈLE ÉLÉMENTS FINIS

structure mère afin d'apporter une réduction de vibrations, sans que ce joint boulonné intervienne dans la stabilité de la structure mère. Un modèle en 2D a été ensuite proposé pour une étude en dynamique, dans laquelle deux types de contrôle de la force normale ont été présentés :

- contrôle de la force normale en fonction de la fréquence.
- contrôle de la force normale en fonction du temps.

Les deux types de contrôles proposés ont permis de réduire le niveau vibratoire au niveau de voisinage des fréquences critiques, à condition que les fréquences propres dans le cas avec et sans fréquence soient assez éloignées.

Pour que ce type de réduction de vibrations soit efficace, un travail de dimensionnement de la structure est nécessaire afin que les fréquences critiques dans le cas avec et sans serrage soient suffisamment éloignées, dans le but d'avoir une réduction significative du niveau vibratoire de la structure.

2.2. MODÈLE ÉLÉMENTS FINIS

Deuxième partie

Étude probabiliste

Chapitre 3

Formalisme

« Une certitude n'est souvent qu'un manque d'imagination »

Edward de Bono

3.1 Méthodes de prise en compte des incertitudes

La prise en compte des incertitudes et des aléas est devenue pour les ingénieurs une étape indispensable dans la procédure de conception et de modélisation des structures, sa maîtrise permettant de contrôler les risques de défaillance d'un système étudié. La prise en compte des incertitudes est donc de plus en plus présente dans le cadre de la simulation numérique du calcul. Elle revêt différentes caractéristiques selon la nature des informations disponibles et donne lieu à différentes démarches. Lorsque les incertitudes sont dues à l'aspect incomplet, flou de l'information disponible, on peut utiliser des méthodes orientées de type floues (*fuzzy*) [49], arithmétique des intervalles [50], ou ensembles convexes [51]. En revanche, lorsque les incertitudes sont dues à un aspect aléatoire et que l'on dispose d'une information suffisante (sous forme statistique par exemple), le cadre probabiliste fournit un outil de modélisation des phénomènes aléatoires adéquat et bien adapté à la résolution numérique des équations du modèle physique; c'est la raison pour laquelle l'étude de la robustesse des modèles étudiés dans les chapitres précédents va être faite dans un cadre probabiliste.

3.1.1 Modèles stochastiques et incertitudes

L'aspect aléatoire d'un phénomène peut être défini comme une absence de motif clairement identifiable. Cette caractéristique peut être observée dans de nombreux objets définis dans un contexte d'espace et/ou de temps. Deux familles de sources aléatoires sont généralement introduites :

- irrégularités inhérentes aux phénomènes observés et dont la caractérisation déterministe est impossible : principe d'incertitude de la mécanique quantique, théorie cinétique des gaz ;
- manque de connaissances des phénomènes mis en jeu : cela peut concerner le modèle ou ses paramètres, comme la valeur d'un coefficient matériau en un point de l'espace, ainsi que les entrées du modèle comme les effets d'un séisme (aléatoires) sur un bâtiment (de comportement déterministe).

L'incertitude de modèle est plus délicate à prendre en compte, surtout s'il présente des non-linéarités ; on peut citer les travaux de C. Soize qui propose une approche, qualifiée de non paramétrique, permettant de prendre en compte l'incertitude de modèle, représentée par une certaine distance entre le modèle réel et le modèle mathématique retenu [52].

Il s'agit alors de construire la mesure de probabilité directement sur chaque matrice \mathbf{M} et \mathbf{K} issue du modèle vibratoire moyen en utilisant l'information utilisable grâce au principe du maximum d'entropie [53], [54]. Lorsque l'on suppose le modèle choisi, il existe une erreur due à la simplification du modèle en vue d'un traitement numérique. Cette erreur due à la discrétisation peut être estimée *a posteriori*. L'erreur de modèle sera supposé très faible devant l'erreur due aux incertitudes sur les paramètres. En conséquence, on suppose que les incertitudes ne portent plus que sur les paramètres du modèle, on parle alors d'une approche paramétrique. C'est dans ce contexte particulier que l'on se placera tout le long de l'étude.

La prise en compte de la nature aléatoire des propriétés matériaux est au cœur de nombreux travaux ; en particulier dans le domaine de la dynamique des structures, on peut citer [55] où l'auteur modélise le frottement entre deux interfaces par des paramètres aléatoires. On peut citer aussi [56] où l'auteur fait une modélisation de structure avec des paramètres aléatoires au niveau des interfaces. Enfin, dans une analyse probabiliste, les paramètres incertains doivent être identifiés pour être ensuite pris en compte dans le modèle. Des techniques spécifiques de statistique mathématique permettent d'alimenter les modèles probabilistes à partir des résultats expérimentaux en tenant compte des éventuelles incertitudes liées, par exemple, aux moyens de mesures mis en place.

Dans cette partie, on examinera comment les incertitudes sur les paramètres d'un modèle de structure peuvent être modélisées par des variables aléatoires.

3.1.2 Espace de probabilité et variables aléatoires

Classiquement, l'observation d'un phénomène aléatoire est appelée épreuve. Toutes les réalisations possibles d'une épreuve forment l'ensemble Θ de tous les résultats d'une épreuve. Un événement E est défini comme un sous-ensemble de Θ contenant les réalisations $\theta \in \Theta$. Enfin, P est la mesure de probabilité défini sur l'espace des événements. L'ensem-

3.1. MÉTHODES DE PRISE EN COMPTE DES INCERTITUDES

ble de tous les événements possibles ayant une probabilité ainsi définie est appelé une σ -algèbre associée à Θ , et est notée \mathcal{F} . Finalement l'espace de probabilité construit grâce à ces notions est noté (Θ, \mathcal{F}, P) .

Une variable aléatoire réelle X est une application de $X : (\Theta, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{R}, P_X)$ avec \mathbf{R} l'ensemble des réels, \mathcal{R} la tribu de Borel de \mathbf{R} et P_X la mesure de probabilité associée à X . En pratique, une variable aléatoire réelle est caractérisée par la donnée de sa loi P_X et non par la donnée X de l'application, c'est à dire sans préciser explicitement l'espace probabilisé de départ sur lequel est construit la variable X . Pour les variables aléatoires absolument continues, la densité de probabilité et la fonction de répartition sont notées f_X et F_X , respectivement, et l'indice X pourra être omis lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion. On utilisera également la notation PDF (Probability Density Function) pour f et CDF (Cumulative Distribution Function) pour F . Pour souligner le caractère aléatoire de X , on utilise la notation $X(\theta)$. Un vecteur aléatoire \mathbf{X} est un vecteur dont les composantes sont des variables aléatoires. L'espérance mathématique est notée E . La moyenne, la variance et les moments d'ordre n de X sont notés respectivement :

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (3.1)$$

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx \quad (3.2)$$

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x) dx \quad (3.3)$$

Les moments d'ordre 3 et 4 portent respectivement les noms de coefficient d'asymétrie (ou skewness) et coefficient d'aplatissement (ou kurtosis).

La covariance de deux variables aléatoires X et Y est définie par :

$$\text{Cov}[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \quad (3.4)$$

En introduisant la densité de probabilité conjointe $f_{X,Y}(x, y)$ de ces variables, l'équation 3.4 peut s'écrire :

$$\text{Cov}[X, Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (3.5)$$

3.1. MÉTHODES DE PRISE EN COMPTE DES INCERTITUDES

Si σ_x et σ_y sont respectivement les écarts-types des variables X et Y , le coefficient de corrélation entre deux variables aléatoires X et Y est défini par :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (3.6)$$

On notera $\xi = \mathcal{N}(0, 1)$ une variable aléatoire gaussienne centrée réduite (v.a.g.c.r.) de moyenne nulle et d'écart type 1, sa densité de probabilité s'écrit comme suit :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (3.7)$$

et de fonction de répartition :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds \quad (3.8)$$

3.1.3 Espace des variables aléatoires de carré sommable

L'espace vectoriel des variables aléatoires réelles de second moment fini est noté $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$. L'espérance mathématique permet de définir dans cet espace un produit scalaire et une norme associée comme suit :

$$\langle X, Y \rangle = E[XY] \quad (3.9)$$

$$\|X\| = \sqrt{E[X^2]} \quad (3.10)$$

On montre qu'on peut choisir comme base fonctionnelle de $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$ les polynômes d'Hermite multidimensionnels de gaussiennes centrées réduites [57].

3.1.4 Densité de probabilité et fonction de répartition

On considère la probabilité que la variable aléatoire X prenne des valeurs comprises dans un intervalle $[a, b]$ tel que $P(a < X < b)$.

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (3.11)$$

avec f_X est la fonction densité de probabilité.

Pour évaluer numériquement cette intégrale, on utilise une estimation en utilisant la loi des grands nombres comme suit :

$$P(S \in [a, b]) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{[a,b]} x^{(i)} \quad (3.12)$$

$$1_{[a,b]} = \begin{cases} 1 & \text{si } x^{(i)} \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } x^{(i)} \text{ le } i\text{ème tirage selon la loi de } X. \quad (3.13)$$

Pour faire une estimation de la densité de probabilité, on divise l'intervalle de résultat Γ_r (tel que $[\min(S), \max(S)] \in \Gamma_r$) en k intervalles. Ce nombre peut être défini à l'aide d'une heuristique [58] : $k = 1 + \frac{10 \log(n)}{3}$ ou plus simplement $k = \sqrt{n}$.

On détermine la probabilité que le résultat S appartienne à chacune de ces intervalles (fréquence relative) :

$$f_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{]a_j, b_j]} x^{(i)} \quad (3.14)$$

D'une façon similaire on peut approcher la fonction de répartition de la solution aléatoire :

$$F_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{]-\infty, b_j]} x^{(i)} \quad (3.15)$$

3.1.5 Calcul d'erreur

Lorsqu'on souhaite comparer les résultats calculés par deux méthodes différentes, on calcule une erreur entre les deux solutions obtenues.

La comparaison se fait entre un résultat issu d'un solveur de calcul stochastique à tester par rapport un solveur stochastique de référence, comme la méthode de Monte-Carlo (c'est une méthode qui converge presque sûrement vers la solution du problème stochastique, avec une vitesse de convergence en $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$). On définit l'erreur entre ces deux sorties $S(\mathbf{X}(\theta))$ et $S_0(\mathbf{X}(\theta))$ comme suit :

$$\varepsilon_k = \frac{\|S_0(\mathbf{X}(\theta)) - S(\mathbf{X}(\theta))\|_k}{\|S_0(\mathbf{X}(\theta))\|_k} \quad (3.16)$$

Avec k l'indice associé au type de norme.

Pour nos calculs, on utilise une norme quadratique ($k = 2$) :

$$\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (S_0^{(i)} - S^{(i)})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (S_0^{(i)})^2}} \quad (3.17)$$

Avec $S^{(i)} = S(\mathbf{X}^{(i)}(\theta))$ et $S_0^{(i)} = S_0(\mathbf{X}^{(i)}(\theta))$ correspondant respectivement au résultat au point de mesure numéro i .

3.2 Les étapes du calcul de robustesse

3.2.1 Analyse de sensibilité

Dans cette partie, on rappelle quelques notions de sensibilité, extraites de la thèse [59].

Considérons un modèle mathématique qui, à un ensemble de variables d'entrée aléatoires \mathbf{X} , fait correspondre, via une fonction f déterministe, une variable de sortie (ou réponse) Y aléatoire :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{X} &\rightarrow Y = f(\mathbf{X}) \end{aligned}$$

La fonction f du modèle peut être très complexe (solveur numérique d'un système d'équations différentielles...), plus ou moins onéreuse en temps de calcul. L'ensemble des variables d'entrée $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)$ regroupe toutes les variables considérées comme aléatoires dans le modèle.

L'analyse de sensibilité étudie comment des perturbations sur les variables d'entrée du modèle engendrent des perturbations sur la variable réponse ou variable de sortie [60].

Il est possible de grouper les méthodes d'analyse de sensibilité en trois classes : les méthodes de *screening*, qui consistent en une analyse qualitative de la sensibilité de la

variable de sortie aux variables d'entrée, les méthodes d'analyse locale, qui évaluent quantitativement l'impact d'une petite variation autour d'une valeur donnée des entrées et enfin les méthodes d'analyse de sensibilité globale, qui s'intéressent à la variabilité de la sortie du modèle sur l'ensemble de son domaine de variation. L'analyse de sensibilité globale étudie comment la variabilité des entrées se répercute sur celle de la sortie, en déterminant quelle part de variance de la sortie est due à telle entrée ou tel ensemble d'entrées. Si l'analyse de sensibilité locale s'intéresse plus à la valeur de la variable réponse, l'analyse de sensibilité globale s'intéresse quant à elle à sa variabilité. Nous nous intéressons dans ce document à l'analyse de sensibilité globale et omettrons donc par la suite l'adjectif global.

L'étude de sensibilité a l'avantage de déterminer les variables les moins influentes, de façon à les considérer comme des paramètres déterministes, en les fixant par exemple à leur espérance, et obtenir ainsi un modèle plus léger avec moins de variables d'entrée.

De nombreuses publications traitent du sujet. On pourra se référer notamment aux travaux de A. Saltelli [61, 62].

3.2.1.1 Indicateurs de sensibilité : "indices de Sobol"

Nous supposons dans cette section que les variables d'entrée $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)$ du modèle sont indépendantes.

Plaçons nous désormais dans le cas d'une fonction f dont la forme analytique n'est pas connue (par exemple résultant d'un calcul éléments finis). Pour apprécier l'importance de l'effet d'une variable d'entrée X_i sur la variance de la sortie Y , regardons de combien décroît la variance de Y si on fixe la variable X_i à une valeur x_i^* : $V(Y|X_i = x_i^*)$. Le problème de cet indicateur est le choix de la valeur x_i^* de X_i . Ce problème peut être résolu en considérant l'espérance de cette quantité pour toutes les valeurs possibles de x_i^* : $E[V(Y|X_i)]$. Ainsi, plus la variable X_i sera importante vis-à-vis de la variance de Y , plus cette quantité sera petite. Étant donné la formule de la variance totale $V(Y) = V(E[Y|X_i]) + E[V(Y|X_i)]$, nous pouvons utiliser de façon équivalente la quantité : $V(E[Y|X_i])$, qui sera d'autant plus grande que la variable X_i sera importante vis-à-vis de la variance de Y . Afin d'utiliser un

indicateur normalisé, nous définissons l'indice de sensibilité de Y à X_i :

$$S_i = \frac{V(E[Y|X_i])}{V(Y)}$$

Cet indice est appelé indice de sensibilité de premier ordre par Sobol [17]. Il quantifie la sensibilité de la sortie Y à la variable d'entrée X_i , plus précisément la part de variance de Y due à la variable X_i .

3.2.2 Estimation des indices de sensibilité par Monte-Carlo

Considérons un N -échantillon $\tilde{X}_{(N)} = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kp})_{k=1 \dots N}$ de réalisations des variables d'entrée (X_1, \dots, X_p) . L'espérance de Y , $E[Y] = f_0$, et sa variance, $V(Y) = V$, sont estimées par :

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_{k1}, \dots, x_{kp})$$

$$\hat{V} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f^2(x_{k1}, \dots, x_{kp}) - \hat{f}_0^2$$

L'estimation des indices de sensibilité nécessite l'estimation d'espérance de variance conditionnelle. Nous présentons une technique d'estimation due à Sobol [17]. L'estimation des indices de sensibilité de premier ordre consiste à estimer la quantité :

$$V_i = V(E[Y|X_i]) = E[E[Y|X_i]^2] - E[E[Y|X_i]]^2 = U_i - E[Y]^2 \quad (3.18)$$

Sobol propose d'estimer la quantité U_i , c'est-à-dire l'espérance du carré de l'espérance de Y conditionnellement à X_i , comme une espérance classique, mais en tenant compte du conditionnement à X_i en faisant varier entre les deux appels à la fonction f toutes les variables sauf la variable X_i . Ceci nécessite deux échantillons de réalisations des variables d'entrée, que nous notons $\tilde{X}_{(N)}^{(1)}$ et $\tilde{X}_{(N)}^{(2)}$:

$$\hat{U}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_{k1}^{(1)}, \dots, x_{k(i-1)}^{(1)}, x_{ki}^{(1)}, x_{k(i+1)}^{(1)}, \dots, x_{kp}^{(1)}) f(x_{k1}^{(2)}, \dots, x_{k(i-1)}^{(2)}, x_{ki}^{(2)}, x_{k(i+1)}^{(2)}, \dots, x_{kp}^{(2)}).$$

3.2. LES ÉTAPES DU CALCUL DE ROBUSTESSE

Les indices de sensibilité de premier ordre sont alors estimés par :

$$\widehat{S}_i = \frac{\widehat{V}_i}{\widehat{V}} = \frac{\widehat{U}_i - \widehat{f}_0^2}{\widehat{V}} \quad (3.19)$$

Le calcul de l'indice de Sobol permet de déterminer la sensibilité d'une réponse à la variation des paramètres d'entrée.

Dans le cas d'une réponse peu sensible à la variation d'une variable, on peut remplacer cette variable aléatoire par sa moyenne, ce qui permet de réduire le nombre de variables aléatoires du modèle stochastique.

3.2.3 Choix de variables aléatoires

Pour construire *a priori* une loi de probabilité d'une variable aléatoire, on utilise le principe du maximum d'entropie ; pour cela, il faut tenir compte de l'information accessible [63] qui peut être par exemple :

- un support positif,
- moyenne et écart type donné,
- la quantité aléatoire et son inverse représentés par des variables aléatoires du second ordre.

3.2.4 Calcul stochastique

Depuis une vingtaine d'années, de nombreuses méthodes ont été développées pour prendre en compte l'aléa dans les problèmes mécaniques. L'expression « éléments finis stochastiques » regroupe différentes méthodes qui n'ont pas forcément les mêmes origines.

Pour faire des calculs stochastiques, il existe principalement deux familles de méthodes :

3.2.4.1 Les méthode intrusives

Dans le domaine de mécanique, la prise en compte des incertitudes été historiquement étudiée sous l'angle de la fiabilité des structures. Au début des années 1990 est apparue une nouvelle méthode appelée "éléments finis stochastiques spectraux" développée par Ghanem [64–66].

3.2. LES ÉTAPES DU CALCUL DE ROBUSTESSE

Cette méthode se base sur le développement des variables aléatoires sur une base polynomiale spécifique de variables aléatoires centrées réduites $(P_0, P_1, \dots, P_{N-1})$ (par exemple : polynômes multidimensionnels d'Hermite) dans le but de calculer la réponse stochastique complète :

$$S(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} S_i P_i(\xi(\theta)) \quad (3.20)$$

L'ensemble $(P_0, P_1, \dots, P_{N-1})$ constitue une base complète orthogonale et les coefficients S_i sont indépendants. Une approximation numérique est obtenue par troncature des termes les plus élevés de la série :

$$S_N(\theta) = \sum_{i=0}^N S_i P_i(\xi(\theta)) \quad (3.21)$$

La solution du problème est déterminée par les coefficients S_i correspondant au développement polynomial de la variable aléatoire de sortie.

Depuis l'introduction des éléments finis stochastiques [64], beaucoup de chercheurs l'ont adaptée pour traiter différents domaines : initialement développée pour la mécanique linéaire [67], elle a été ensuite appliquée à des problèmes de thermique [68], sismique [69], d'assemblages [15], de mécanique des fluides [70] et des problèmes d'analyse modale [71].

Cependant, les principaux défauts de cette méthode sont :

- elle exige une implémentation spécifique, ce qui nécessite d'intervenir profondément dans le code éléments finis, et cela pour chaque nouveau problème traité.
- le système linéaire généré par la méthode, bien que très creux, est de très grande taille ce qui implique l'utilisation de méthodes de résolution numériques adaptées [72].

3.2.4.2 Les méthodes non intrusives

Dans la famille des méthodes non intrusives on peut citer :

- La méthode de projection

3.2. LES ÉTAPES DU CALCUL DE ROBUSTESSE

La méthode de projection permet de calculer les coefficients du développement de la réponse sur le chaos polynomial à partir de calculs aux éléments finis déterministes. En effet, on fait un développement de la variable aléatoire de sortie sur une base polynomiale adaptée.

Lorsque la variable de sortie $S(\mathbf{X})$ dépend d'un ensemble de M variables aléatoires qu'on peut regrouper dans un vecteur aléatoire $\mathbf{X}(\theta)$, on fait un développement de la variable de sortie sur la base des polynômes multidimensionnels d'Hermite Ψ_i (Annexe D), comme suit :

$$S(\theta) = \sum_{i=0}^N S_i \Psi_i([\xi_1, \dots, \xi_M]) \quad (3.22)$$

Le chaos polynomial de dimension M et d'ordre p est défini comme l'ensemble des polynômes d'Hermite multidimensionnels en M variables aléatoires gaussiennes centrées réduites $\boldsymbol{\xi}(\theta) = [\xi_1, \dots, \xi_M]$.

La méthode de projection, présentée dans [73, 68], utilise l'orthogonalité de la base polynomiale par rapport à la mesure de probabilité gaussienne :

$$S_i = \frac{E[SH_i(\boldsymbol{\xi}(\theta))]}{E[H_i^2(\boldsymbol{\xi}(\theta))]} \quad (3.23)$$

Le dénominateur de l'expression 3.23 étant connu analytiquement, la détermination des coefficients S_i nécessite le calcul de $E[SH_i(\boldsymbol{\xi}(\theta))]$; le problème devient un problème d'évaluation d'intégrale. Cette intégrale peut être évaluée numériquement par une méthode de simulation de Monte-Carlo. On peut aussi utiliser un schéma d'intégration de quadrature de Gauss dans le cas de faible dimension.

– Méthode de régression

Contrairement à la méthode précédente, la méthode de régression [74] ne nécessite pas l'évaluation d'une intégrale. Pour trouver les coefficients du développement polynomial, on cherche à déterminer les meilleurs coefficients permettant de réduire (au sens des moindres carrés) la distance entre la variable aléatoire et son approximation par un développement polynomial [75] .

L'approximation de la réponse du système S s'écrit :

$$\tilde{S}(\theta) = \sum_{i=0}^{P-1} s_i \Psi_i(\boldsymbol{\xi}(\theta)) \quad (3.24)$$

On se donne n réalisations de $\boldsymbol{\xi}(\theta)$ selon une loi de probabilité définie, ces n réalisations constituant un plan d'expériences. On en déduit les n réalisations du vecteur aléatoire des paramètres d'entrée $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$.

Pour chaque réalisation, on évalue $S^{(i)} = S(\mathbf{X}^{(i)})$, où S est la solution recherchée. Alors comme précédemment, pour trouver les coefficients du développement polynomial, on cherche à déterminer les meilleurs coefficients au sens des moindres carrés permettant de minimiser la différence entre la variable aléatoire et son approximation par un développement polynomial. Cela équivaut à minimiser :

$$\Delta S = \sum_{j=1}^n \left(S^{(j)} - \sum_{i=0}^{P-1} s_i \Psi_i(\xi^{(j)}) \right)^2 \quad (3.25)$$

Le minimum est obtenu pour des valeurs de s_i vérifiant :

$$\frac{\partial \Delta S}{\partial s_k} = 0 \quad \forall \{0, 1, \dots, P-1\} \quad (3.26)$$

soit

$$\sum_{i=0}^{P-1} \Psi_k(\xi^{(j)}) \left(S^{(i)} - \sum_{i=0}^{P-1} s_i \Psi_i(\xi^{(j)}) \right) = 0 \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, P-1\} \quad (3.27)$$

Le système à résoudre est le suivant :

$$\sum_{i=0}^{P-1} s_i \left[\sum_{j=1}^n \Psi_k(\xi^{(j)}) \Psi_i(\xi^{(j)}) \right] = \sum_{j=1}^n S^{(j)} \Psi_k(\xi^{(j)}) \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, P-1\} \quad (3.28)$$

Ce système peut également s'écrire :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \Psi_0(\xi^{(j)}) \Psi_0(\xi^{(j)}) & \cdots & \sum_{j=1}^n \Psi_0(\xi^{(j)}) \Psi_{P-1}(\xi^{(j)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n \Psi_{P-1}(\xi^{(j)}) \Psi_0(\xi^{(j)}) & \cdots & \sum_{j=1}^n \Psi_{P-1}(\xi^{(j)}) \Psi_{P-1}(\xi^{(j)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_{P-1} \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n S^{(j)} \Psi_0(\xi^{(j)}) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n S^{(j)} \Psi_{P-1}(\xi^{(j)}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.2. LES ÉTAPES DU CALCUL DE ROBUSTESSE

L'utilisation de cette méthode permet de calculer les coefficients s_i du développement de la réponse aléatoire du système, en résolvant le système linéaire 3.29 de dimension P .

– Méthode de Monte-Carlo

Les méthodes de simulation de Monte-Carlo [76, 77] peuvent être vues comme des méthodes d'approximation au sens statistique du terme. Elles sont basées sur l'application de la loi des grands nombres. Pour appliquer la méthode, il faut générer n réalisations numériques aléatoires ou semi-aléatoires selon une loi de probabilité de la variable d'entrée $\mathbf{X}^{(i)}$ $i = 1, \dots, n$. Ensuite il s'agit d'effectuer n calculs déterministes $S^{(i)} = S(\mathbf{X}^{(i)})$ $i = 1, \dots, n$. Enfin, un traitement statistique sur les réalisations de la variable de sortie $S^{(i)}$ permet de mesurer les incertitudes. La solution obtenue peut faire l'objet d'une étude ultérieure de fiabilité [78].

La convergence de la méthode est assurée et est insensible à la dimension du problème ; elle ne dépend pas de la régularité de la fonction S à intégrer, pourvu que $S(X)$ soit intégrable. Ce sont des avantages clés de la méthode.

Cependant, la difficulté principale de cette méthode tient au nombre très important d'opérations à effectuer pour atteindre des résultats satisfaisants (convergés), étant donné que la vitesse de convergence est de l'ordre de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Cette difficulté s'avère handicapante lorsque le calcul déterministe est onéreux. Certaines techniques permettent de surmonter ces difficultés comme :

- les techniques de réduction de variance [79] qui permettent d'accélérer la vitesse de convergence.
- les techniques de limitation du nombre total de tirages, comme la méthode hypercube-latin [80].
- Autres méthodes

Dans la catégorie de méthodes non intrusives, on peut citer les méthodes de surface de réponse [81], qui présentent d'un point de vue technique une ressemblance avec la méthode de régression. Dans le même contexte, on peut citer la méthode de collocation [82] qui présente l'inconvénient d'avoir le nombre de points de collocation imposé par la taille de la discrétisation dans la base du chaos polynomial.

3.2.4.3 Méthode de réduction du modèle stochastique

Dans certains cas particuliers, la réponse du système peut être écrite comme produit de fonctions déterministe et de variables aléatoires connues. Dans cette partie, nous proposons une méthode permettant de séparer l'aspect aléatoire de l'aspect déterministe, en faisant un développement de la quantité recherchée en fonction des paramètres aléatoires d'entrée. Pour illustrer cette méthode, on propose deux exemples de calcul modal : un premier exemple sur une structure ne possédant qu'une variable aléatoire d'entrée (module d'Young par exemple) et un deuxième exemple avec deux variables aléatoires d'entrée indépendantes.

Premier exemple :

Dans cet exemple, on étudie la réponse vibratoire d'une structure dont le module de Young est aléatoire, ce qui conduit à chercher les valeurs propres et les vecteurs propres aléatoires $(\omega(\theta), \Phi(\theta))$. On considère que le module de Young $Y(\theta)$, commun à toute cette structure, est aléatoire.

Posons :

$$\xi_Y(\theta) = \frac{Y(\theta)}{Y_0} \quad (3.30)$$

$Y(\theta)$ est une variable aléatoire de loi connue.

$\xi_Y(\theta)$ est la variable aléatoire centrée.

$Y_0 = E[Y(\theta)]$ est l'espérance de $Y(\theta)$

On peut écrire la matrice de raideur comme suit :

$$\mathbf{K}(\theta) = \xi_Y(\theta) \mathbf{K} \quad (3.31)$$

\mathbf{K} : est la matrice de rigidité calculée par un module de Young moyen. L'équation de mouvement du système aléatoire s'écrit comme suit :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}(\theta) + \mathbf{K}(\theta) \mathbf{X}(\theta) = \mathbf{F} \quad (3.32)$$

Le problème aux valeurs propres aléatoires peut s'écrire comme :

$$[-\boldsymbol{\lambda}(\theta)\mathbf{M} + \mathbf{K}(\theta)] \boldsymbol{\Phi}(\theta) = 0 \quad (3.33)$$

avec

$$\boldsymbol{\Phi}^T(\theta) \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}(\theta) = \mathbb{I} \quad (3.34)$$

$\boldsymbol{\lambda}$ est la matrice diagonale des valeurs propres et $\boldsymbol{\Phi}(\theta)$ est la matrice des vecteurs propres associés. En remplaçant le développement de la raideur aléatoire 3.31 dans l'équation 3.33, on obtient :

$$[-\boldsymbol{\lambda}(\theta)\mathbf{M} + \xi_Y(\theta) \mathbf{K}] \boldsymbol{\Phi}(\theta) = 0 \quad (3.35)$$

Si l'on divise l'équation 3.35 par $\xi_Y(\theta)$, on obtient :

$$[-\boldsymbol{\lambda}_a(\theta)\mathbf{M} + \mathbf{K}] \boldsymbol{\Phi}(\theta) = 0 \quad (3.36)$$

avec

$$\boldsymbol{\lambda}_a(\theta) = \frac{\boldsymbol{\lambda}(\theta)}{\xi_Y(\theta)} \quad (3.37)$$

Le couple $(\boldsymbol{\lambda}_a(\theta); \boldsymbol{\Phi}(\theta))$ est solution de l'équation aux valeurs propres 3.36.

L'équation aux valeurs propres dans le cas où on utilise les paramètres déterministes moyens s'écrit comme suit :

$$[-\boldsymbol{\lambda}_d\mathbf{M} + \mathbf{K}] \boldsymbol{\Phi}_d = 0 \quad (3.38)$$

Le couple $(\boldsymbol{\lambda}_d; \boldsymbol{\Phi}_d)$ est solution de l'équation aux valeurs propres 3.38.

On peut remarquer que les couples $(\boldsymbol{\lambda}_d; \boldsymbol{\Phi}_d)$ et $(\boldsymbol{\lambda}_a(\theta); \boldsymbol{\Phi}(\theta))$ sont solution du même problème aux valeurs propres.

Si l'on fait un classement des valeurs propres du plus petit au plus grand, en supposant un ordre de multiplicité de 1, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$, on peut dire que :

$$\lambda_{di} = \lambda_{ai}(\theta) = \frac{\lambda_i(\theta)}{\xi_Y(\theta)} \quad i = [1, 2, \dots, n] \quad (3.39)$$

3.2. LES ÉTAPES DU CALCUL DE ROBUSTESSE

donc

$$\lambda_i(\theta) = \xi_Y(\theta)\lambda_{di} \quad i = [1, 2, \dots, n] \quad (3.40)$$

ou

$$\omega_i^2(\theta) = \xi_Y(\theta)\omega_i^2 \quad i = [1, 2, \dots, n] \quad (3.41)$$

Donc, pour calculer les pulsations aléatoires d'une structure dans le cas d'un module de Young aléatoire, il suffit de faire un seul calcul déterministe (avec le module de Young moyen) pour déterminer les ω_i^2 et multiplier ce résultat par la loi de variation du module de Young normalisé $\xi_Y(\theta)$. Pour les vecteurs propres du problème, on peut écrire :

$$\Phi_{di} = \Phi_i(\theta) \quad i = [1, 2, \dots, n] \quad (3.42)$$

Cela signifie que les vecteurs propres aléatoires d'une structure dans le cas d'un module de Young aléatoire sont en réalité déterministes et correspondent à ceux calculés avec un module de Young moyen.

Pour valider cette méthode de calcul, on étudie la structure de la figure 3.1 dont les dimensions sont décrites dans la figure 1.18. On calcule la solution modale du problème en utilisant des éléments finis en 3D. Le calcul de la matrice de raideur (aléatoire) est effectuée à partir d'un module de Young aléatoire.

Dans ce premier exemple on utilise un module de Young aléatoire identique pour toutes les sous-structures de la figure 3.1.

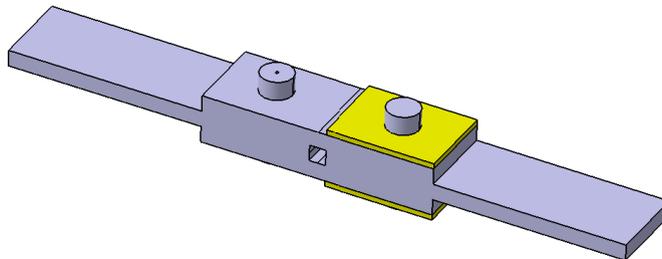


FIGURE 3.1 – Structure étudiée

Les pulsations propres aléatoires de cette structure sont données par l'équation 3.41 :

La figure 3.2 présente une comparaison entre le calcul de la première pulsation propre ($\omega_1^2(\theta)$) issu de 3.41 et un calcul avec la méthode de Monte-Carlo.

3.2. LES ÉTAPES DU CALCUL DE ROBUSTESSE

Pour ce calcul, on utilise les propriétés matériaux de la structure mère décrite dans le tableau 1.3 avec les paramètres aléatoires du tableau 3.1.

On peut voir la totale concordance entre les résultats.

	Distribution	Moyenne	écart type	nombre de tirage
Y	Gamma	$7.5 \cdot 10^{10}$	$2 \cdot 10^9$	5000

TABLE 3.1 – Paramètres du problème étudié

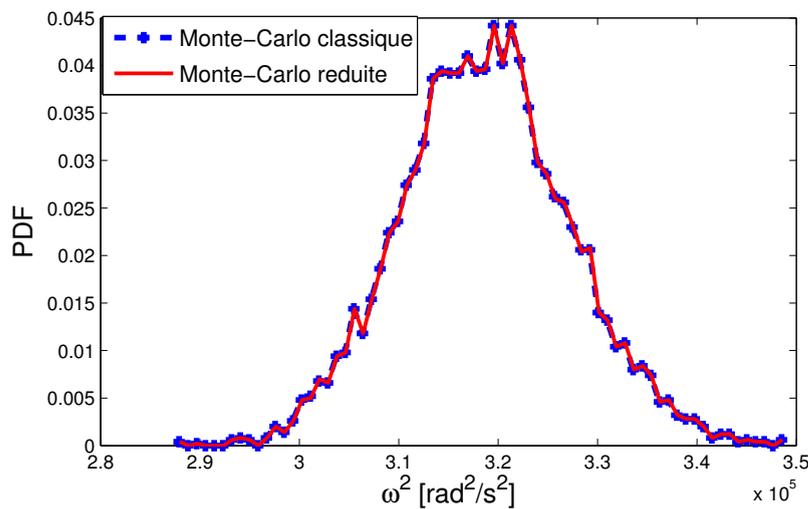


FIGURE 3.2 – Comparaison de PDF pour la première pulsation propre

	$E[\omega^2(\theta)]$	$\sigma(\omega^2(\theta))$
Methode M-C	$3.1868 \cdot 10^5$	8371.9
Methode RMS	$3.187 \cdot 10^5$	8373.7

TABLE 3.2 – Les quantités d'intérêt $\omega^2(\theta)$ calculées avec la méthode de Monte-Carlo et avec la méthode de réduction de modèle stochastique.

On peut voir dans le tableau 3.2 une légère différence au niveau de la moyenne et de l'écart-type entre les deux méthodes utilisées. Cette différence ne peut avoir qu'une source numérique (calcul éléments finis + calcul stochastique par Monte-Carlo). On peut voir dans la figure 3.3, l'erreur quadratique sur la moyenne et sur écart type, calculée par la relation 3.17, entre la méthode de Monte-Carlo et la méthode de réduction de modèle stochastique, en fonction du nombre de tirages. On peut remarquer que l'erreur relative

3.2. LES ÉTAPES DU CALCUL DE ROBUSTESSE

est très faible, et qu'elle converge vers une valeur liée vraisemblablement au calcul élément fini.

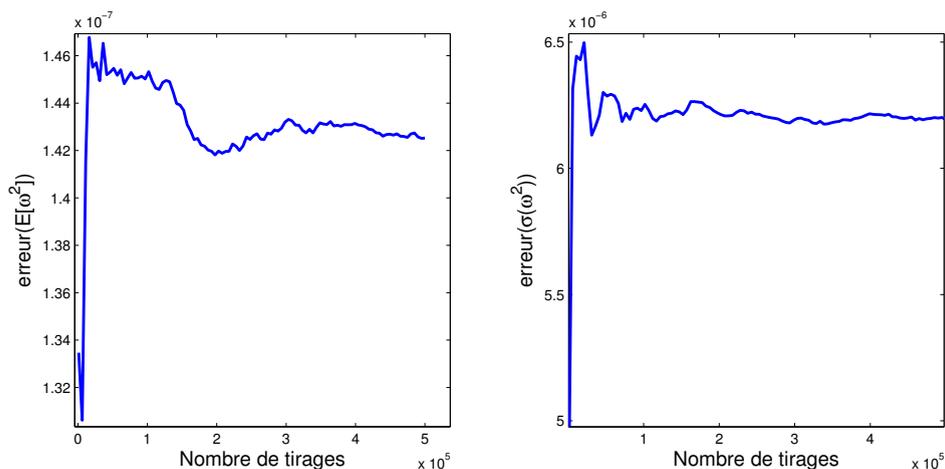


FIGURE 3.3 – L'erreur relative sur la moyenne et écart type entre la méthode de Monte-Carlo et la méthode de réduction de modèle stochastique.

Deuxième exemple :

Dans cet exemple, on considère le cas d'une structure composée de deux sous-structures avec deux modules d'Young différents ($Y_1 ; Y_2$) : par exemple, une structure métallique munie d'un patch piézoélectrique.

Le problème aux valeurs propres aléatoires peut s'écrire comme suit :

$$[-\omega^2(\xi_Y)\mathbf{M} + \mathbf{K}(\xi_Y)] \Phi(\xi_Y) = 0 \quad (3.43)$$

On fait l'hypothèse simplificatrice que le changement de module de Young autour d'une moyenne ne change pas la déformée propre de la structure : la matrice des vecteurs propres correspond à la matrice des vecteurs propres déterministes calculée avec les paramètres moyens.

Cette hypothèse n'a de sens que dans certains cas particuliers, par exemple, dans le cas d'une structure composée de deux sous-structures dont une possède une taille négligeable devant la sous-structure principale. Dans ce cas, l'influence de la variation du module de Young de la plus petite des sous-structures autour de sa moyenne n'aura qu'un effet

3.2. LES ÉTAPES DU CALCUL DE ROBUSTESSE

négligeable sur la structure mère.

Cette hypothèse est justifiée dans notre cas, qui correspond à l'étude d'une structure munie d'éléments piézoélectriques qui possèdent généralement une taille petite devant la structure mère. $(\Phi, \omega^2(\xi_Y))$ sont les solutions du problème aux valeurs propres aléatoires

3.43. Pour déterminer $\omega^2(\xi_Y)$, on se base sur l'équation :

$$\omega_i^2(Y_1(\theta), Y_2(\theta)) = \Phi_i^T \mathbf{K}(\theta) \Phi_i = \Phi_i^T [\xi_{Y_1}(\theta) \mathbf{K}_1 + \xi_{Y_2}(\theta) \mathbf{K}_2] \Phi_i \quad (3.44)$$

Pour valider cette méthode de calcul, on étudie la structure de la figure 3.1 dont les dimensions sont décrites dans la figure 1.18.

Dans cet exemple, la structure mère aura un module de Young aléatoire $Y_m(\theta)$ et les éléments piezo auront un module de Young $Y_p(\theta)$ dont les caractéristiques aléatoires sont décrites dans le tableau 3.3.

On calcule la solution modale du problème en utilisant des éléments finis 3D ; le calcul de la matrice de raideur (aléatoire) est effectué à partir des modules de Young aléatoires.

Dans ce cas, le carré de la pulsation propre aléatoire est donné par :

$$\omega_i^2(Y_m(\theta), Y_p(\theta)) = \xi_{Y_m}(\theta) \Phi_i^T \mathbf{K}_1 \Phi_i + \xi_{Y_p}(\theta) \Phi_i^T \mathbf{K}_2 \Phi_i \quad (3.45)$$

L'intérêt de cette méthode est de déterminer les vecteurs et les valeurs propres en faisant un seul calcul déterministe (pour déterminer les valeurs de $\Phi_i \mathbf{K}_1 \Phi_i$ et $\Phi_i \mathbf{K}_2 \Phi_i$) dans le cas d'une structure constituée de plusieurs sous-structures avec des modules d'Young aléatoires différents.

La figure 3.4 donne une comparaison entre un calcul avec la méthode de Monte-Carlo classique et un calcul issu de la méthode proposée. Pour cela on utilise les propriétés matériaux décrites dans le tableau 1.3. On peut voir une bonne concordance entre les deux résultats. Cette concordance s'explique dans cet exemple par le fait que le terme $\Phi_i \mathbf{K}_2 \Phi_i$ est de l'ordre de 10^2 , négligeable devant $\Phi_i \mathbf{K}_1 \Phi_i$ de l'ordre de 10^5 .

	Distribution	Moyenne	Ecart type	nombre de tirages
Y_m	Gamma	$75 \cdot 10^9$	$2 \cdot 10^9$	5000
Y_p	Gamma	$57 \cdot 10^9$	$1.5 \cdot 10^9$	5000

TABLE 3.3 – Paramètres du problème étudié

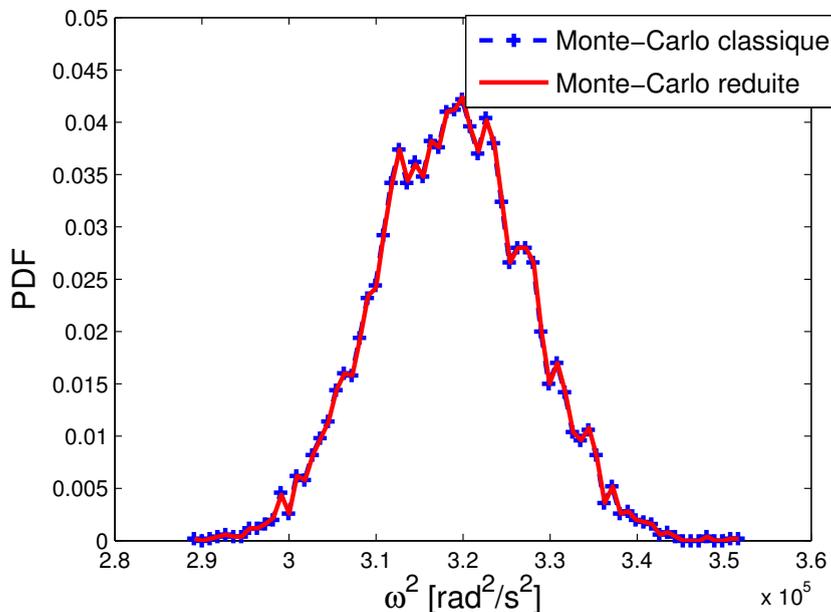


FIGURE 3.4 – Comparaison de PDF pour la première pulsation propre

3.2.5 Post-traitement

Après la détermination de la réponse aléatoire S avec une des méthodes proposées précédemment, on effectue un post-traitement pour déterminer les différentes valeurs de quantités d'intérêt. Cette opération ne coûte presque rien en termes de temps de calcul, car elle utilise les résultats du calcul déjà effectué dans le calcul stochastique précédent.

Plusieurs post-traitements sont possibles, on peut citer :

- le calcul des moments statistiques : dans ce post-traitement, on cherche à déterminer la moyenne et les différents moments stochastiques 3.3.
- l'analyse de fiabilité : le but de l'analyse de fiabilité est de calculer la probabilité de défaillance d'un système mécanique pour un scénario de défaillance donné [83]. Soit $S(X)$ la réponse aléatoire déterminée par le calcul stochastique. Pour chaque mode

3.3. CONCLUSION

de défaillance de la structure, une fonction d'état limite $g(X, S(X))$ est définie dans l'espace des paramètres. Par convention, le domaine de sureté est défini par $D_s = \{X|g(X, S(X)) > 0\}$, et le domaine de défaillance par $D_f = X|g(X, S(X)) \leq 0$. La frontière $\{g(X, S(X)) = 0\}$ est la surface d'état limite. La probabilité de défaillance P_f est donnée par :

$$P_f = P[g(X, S(X)) \leq 0] = \int_{g(X, S(X)) \leq 0} f_X(x) dx \quad (3.46)$$

3.3 Conclusion

Après un bref rappel de la théorie des probabilités, on a exposé les différentes étapes du calcul stochastique : tout d'abord on mène une étude de sensibilité, en déterminant les indices du Sobol du premier ordre, dans l'objectif de réduire la taille du modèle stochastique. Des valeurs déterministes (la moyenne) sont données aux paramètres de peu d'influence sur le résultat. Après cette étape d'étude de sensibilité, on conserve les variables aléatoires influentes pour lesquelles on impose une loi de probabilité en se basant sur le principe du maximum d'entropie. Différentes méthodes de calcul stochastique sont par la suite exposées :

- Les méthodes intrusives : ce sont des méthodes qui permettent de faire un développement polynomial des variables aléatoires d'entrée et de sortie. Le calcul des coefficients du développement polynomial des paramètres de sortie exige une implémentation spécifique dans le code de calcul.
- Les méthodes non intrusives : ce sont des méthodes qui permettent de déterminer les coefficients optimisés du développement des paramètres de sortie, en faisant plusieurs calculs déterministes, ce qui n'exige aucune implémentation spécifique dans le code de calcul.

À la fin de cette étape de calcul stochastique, on propose une méthode de calcul simplifiée, que nous nommons "méthode de réduction du modèle stochastique". À travers deux exemples, on montre qu'on peut déterminer les vecteurs et les valeurs propres aléatoires en faisant un seul calcul déterministe (par éléments finis) avec une qualité de résultats.

3.3. CONCLUSION

À la fin de ce chapitre, on a exposé différents post-traitements possibles pour exploiter les résultats du calcul stochastique.

3.3. CONCLUSION

Chapitre 4

Robustesse du modèle électromécanique

« Votre théorie est folle, mais elle ne l'est pas assez pour être vraie. » *Niels Bohr*

Dans le cadre de l'étude de robustesse du modèle électromécanique, on va utiliser des méthodes non intrusives, décrites précédemment, pour déterminer la robustesse de nos modèles par rapport à un changement de paramètres. Ce choix de méthode a été adopté, car les stratégies de résolution utilisées pour calculer les coefficients électromagnétiques ont pour entrée les résultats issus de logiciels de calcul éléments finis (Fig. 1.3).

4.1 Robustesse du coefficient de couplage effectif

Dans cette partie, une étude de la robustesse du coefficient de couplage effectif est proposée. Généralement les matériaux piézoélectriques sont considérés comme des matériaux de haute précision : les données sur les propriétés électriques et mécaniques seront prises comme déterministes. Dans ce contexte, on va étudier la robustesse du coefficient de couplage effectif par rapport à la variation d'un seul paramètre aléatoire : le module de Young de la structure. Dans ce contexte, l'étude de sensibilité n'a évidemment pas été effectuée, car un seul paramètre aléatoire est considéré.

4.1.1 Choix de la loi de la variable aléatoire

Le module de Young de la structure vérifie les conditions suivantes :

- un support positif,
- moyenne et écart type donnés,
- la quantité aléatoire et son inverse sont représentés par des variables aléatoires du second ordre.

En se basant sur le principe du maximum d'entropie, on peut modéliser le module de Young aléatoire par une loi Gamma (Annexe B). La figure 3.2 représente la distribution de la variable aléatoire $Y(\theta)$, avec les paramètres aléatoires du tableau 3.1.

4.1.2 Calcul stochastique

4.1.2.1 Méthode de Monte-Carlo

On utilise la méthode de Monte-Carlo pour déterminer la robustesse du coefficient de couplage effectif $k_{eff,r}$ présenté dans le paragraphe 1.1.2, par rapport à la variable aléatoire

4.1. ROBUSTESSE DU COEFFICIENT DE COUPLAGE EFFECTIF

$Y(\theta)$. On peut écrire le coefficient de couplage (équation 1.34) dans le cas aléatoire comme suit :

$$k_{eff,r}^2(Y(\theta)) = \frac{\Phi_r^T(Y(\theta)) \mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^T \Phi_r(Y(\theta))}{\omega_r^2(Y(\theta))} \quad (4.1)$$

La simulation par la méthode de Monte-Carlo de 4.1 revient à faire un calcul éléments finis pour déterminer les vecteurs et les valeurs propres du système pour chaque tirage $Y(\theta^{(i)})$.

La figure 4.1 donne la fonction densité de probabilité approchée ainsi que la fonction de répartition approchée de $k_{eff,r}(Y(\theta))$.

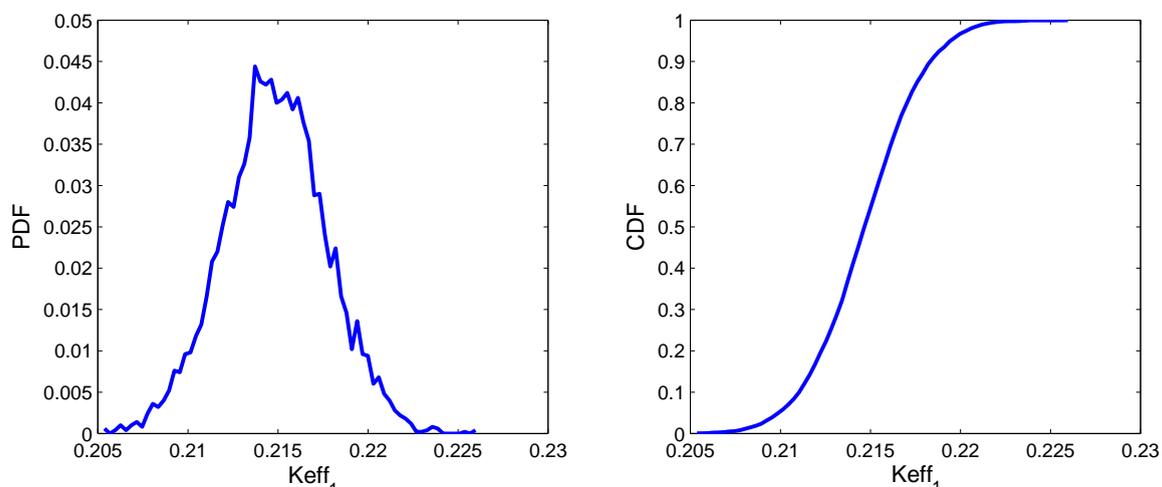


FIGURE 4.1 – La fonction densité de probabilité et la fonction de répartition du coefficient de couplage effectif

4.1.2.2 Méthode de régression

La méthode de régression permet de donner une approximation des coefficients s_i (4.2) à partir de n calculs déterministes effectués à partir de l'équation 4.1. Pour apprécier la qualité de la solution, on compare le résultat issu d'une simulation par Monte-Carlo (5000 tirages), avec celui issu de la méthode de régression, pour différents tirages n .

La figure 4.2 donne une comparaison au niveau de la fonction de répartition, dans laquelle on peut remarquer que même avec un nombre de tirages important (1000 tirages)

le résultat reste médiocre.

$$k_{eff,r}(Y(\theta)) = \sum_{i=0}^P s_i H_i(\xi(\theta)) \quad (4.2)$$

Pour bien illustrer cet écart, on donne l'erreur (3.17) calculée entre la méthode de Monte-Carlo et la méthode de régression pour différents nombres de tirages n (Tableau 4.1). On peut remarquer que pour 2000 tirages, l'erreur relative est de l'ordre de 2.25% par rapport à un calcul Monte-Carlo convergé à 5000 tirages.

Nombre de tirages	100	1000	2000
Erreur [%]	16.81	08.27	02.25

TABLE 4.1 – Erreur fonction du nombre de tirages

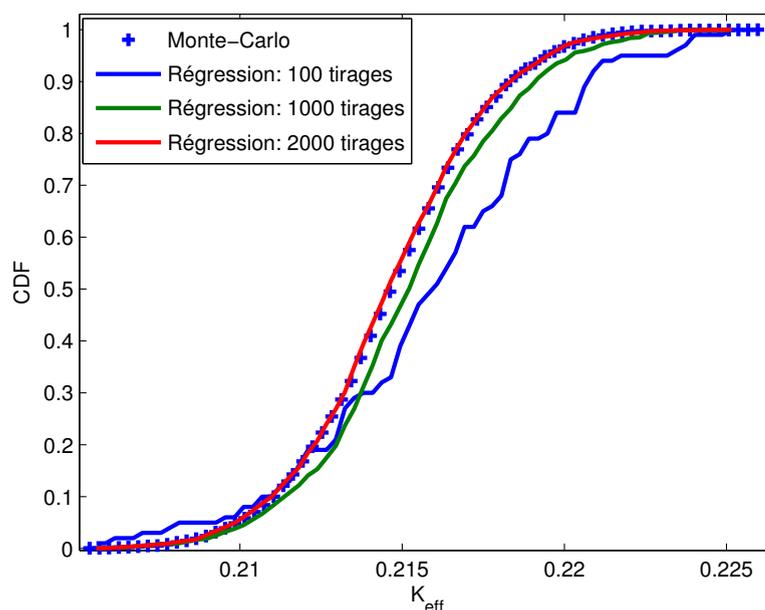


FIGURE 4.2 – Comparaison des CDF entre une simulation Monte-Carlo et les calculs par régression

4.1.2.3 Méthode de réduction du modèle stochastique

Dans cette méthode, on va essayer de séparer l'aspect aléatoire de l'aspect déterministe, en faisant un développement de la quantité recherchée $k_{eff,r}(Y(\theta))$ en fonction du paramètre aléatoire d'entrée $Y(\theta)$.

$$k_{eff,r}^2(Y(\theta)) = \frac{\Phi_r^T \mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^T \Phi_r}{\Phi_r^T \mathbf{K}(\theta) \Phi_r} = \frac{\Phi_r^T \mathbf{K} \Phi_r}{\Phi_r^T \mathbf{K}(\theta) \Phi_r} \bar{k}_{eff,r}^2 \quad (4.3)$$

Avec $\bar{k}_{eff,r}$ le coefficient de couplage effectif calculé avec le module de Young moyen $Y_0 = E[Y(\theta)]$

En utilisant le même développement proposé dans le deuxième exemple de la méthode de réduction de modèle stochastique (équation 3.45), on peut écrire :

$$\Phi_r^T \mathbf{K}(\theta) \Phi_r = \xi_Y(\theta) \Phi_{r1} \mathbf{K}_{11} \Phi_{r1} + \Phi_{r2} \mathbf{K}_{22} \Phi_{r2} \quad (4.4)$$

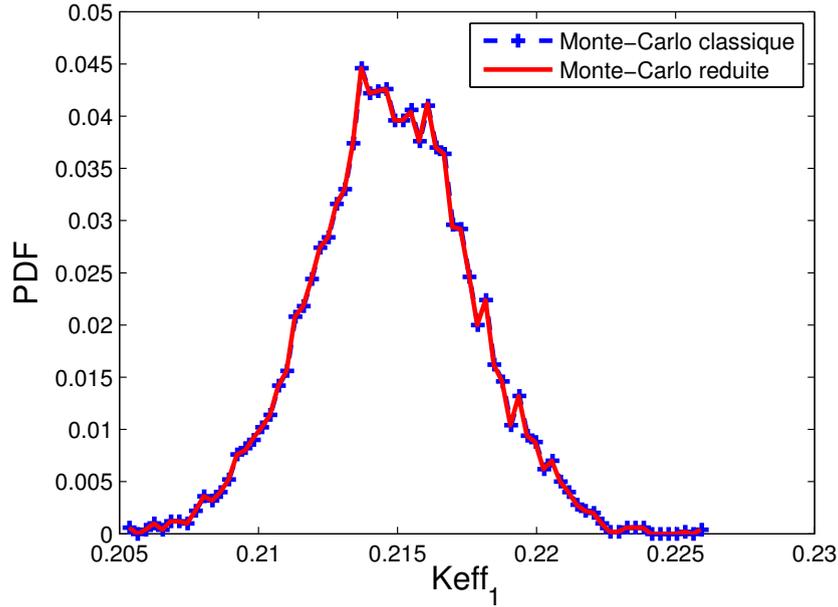


FIGURE 4.3 – Comparaison des PDF dans le cas d’une simulation MC classique et dans le cas d’une simulation MC avec un modèle stochastique réduit

Avec cette méthode, le calcul du coefficient de couplage effectif aléatoire ne demande qu’un seul calcul déterministe (calculé à partir d’un module de Young égal à $E[Y]$). On peut voir dans la figure 4.3 que la comparaison entre la PDF issue de cette méthode et celle issue d’une méthode de Monte-Carlo sont superposées.

4.1.3 Post-traitement

Le tableau 4.2 présente la moyenne et l'écart type du premier coefficient de couplage électromécanique $k_{eff,1}(\theta)$ avec les différentes méthodes. On peut remarquer dans ce tableau que le coefficient de couplage effectif est très robuste par rapport à un module de Young aléatoire.

	$E[k_{eff,1}(\theta)]$	$\sigma(k_{eff,1}(\theta))$
Methode M-C	0.2148	0.0028
Methode regression	0.2148	0.0028
Methode RMS	0.2148	0.0028

TABLE 4.2 – Les quantité d'intérêt $k_{eff,1}(\theta)$ par différentes méthodes.

4.2 Robustesse de la réduction de vibration

Dans cette partie, on va faire une étude de la robustesse de la réduction de vibrations par rapport à la variation du module de Young de la structure $Y(\theta)$ et par rapport à la variation des paramètres électriques : l'inductance $L(\theta)$ et la résistance $R(\theta)$.

4.2.1 Analyse de sensibilité

Pour déterminer la sensibilité de la réduction des vibrations (caractérisée par une réponse en fréquence X_{dB} (4.9)) par rapport à la variation des paramètres aléatoires $Y(\theta)$, $L(\theta)$, $R(\theta)$, on calcule l'indice de Sobol du premier ordre pour ces trois variables (Tab. 4.3).

S_i	inductance	résistance	module de Young
	0.9880	0.1016	0.1037

TABLE 4.3 – Indice de Sobol du premier ordre

Bien que la réponse en fréquence soit beaucoup plus sensible à une variation d'inductance qu'à une variation du module de Young ou de la résistance, nous prenons en compte les trois variables aléatoires lors de nos calculs stochastiques.

4.2.2 Choix des variables aléatoires

Le module de Young de la structure, l'inductance et la résistance électrique vérifient les conditions suivantes :

- le support positif,
- la moyenne et l'écart type donnés,
- la quantité aléatoire et son inverse représentés par des variables aléatoires du second ordre.

Donc les trois variables aléatoires seront modélisées par des lois Gamma indépendantes (Fig. 4.4) avec les paramètres aléatoires du tableau 4.4.

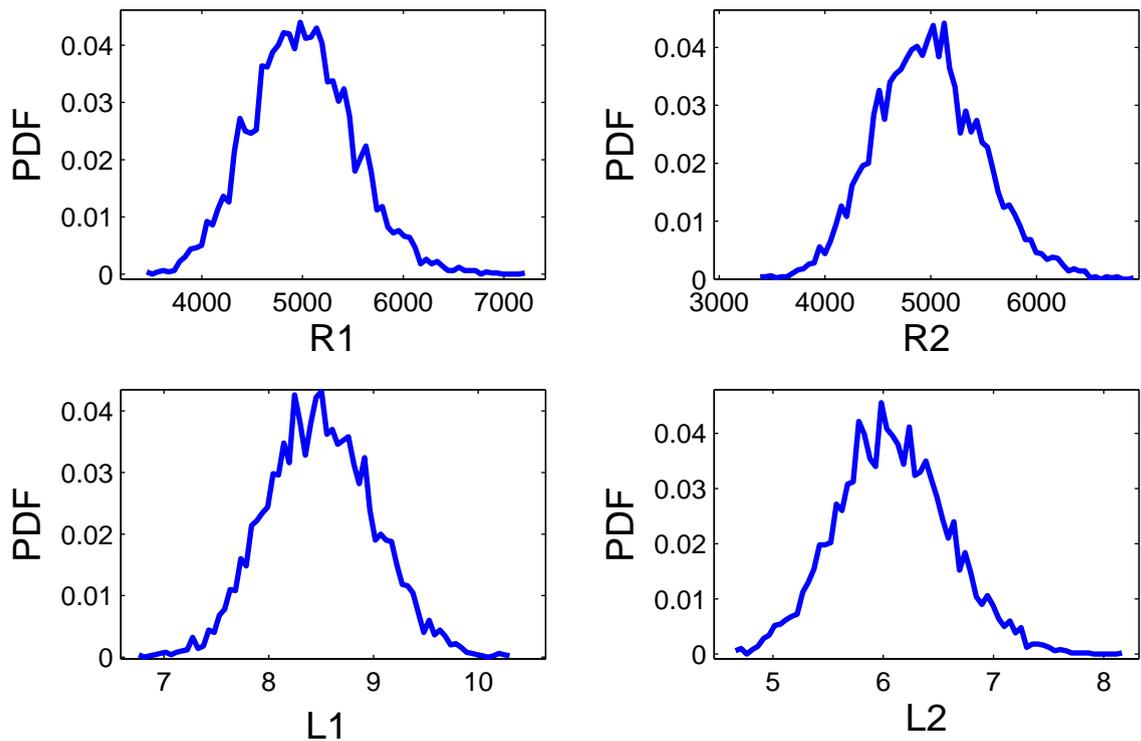


FIGURE 4.4 – PDF des résistances électriques et des inductances.

4.2. ROBUSTESSE DE LA RÉDUCTION DE VIBRATION

	Distribution	Moyenne	écart type	nombre de tirages
$Y(\theta)$	Gamma	$75 \cdot 10^9$	$2 \cdot 10^9$	5000
$L_1(\theta)$	Gamma	8.5	0.5	5000
$L_2(\theta)$	Gamma	6.1	0.5	5000
$R_1(\theta)$	Gamma	5000	500	5000
$R_2(\theta)$	Gamma	5000	500	5000

TABLE 4.4 – Paramètres stochastiques du problème étudié

4.2.3 Calcul stochastique

On cherche à qualifier l'influence de la variation des paramètres aléatoires d'entrée $Y(\theta)$, $L(\theta)$ et $R(\theta)$ sur la réduction des vibrations. On écrit $\mathbf{Z}_R(\theta)$ la matrice d'impédance aléatoire décrite dans le paragraphe 1.1.4.2 comme suit :

$$\mathbf{Z}_R(\theta) = \begin{pmatrix} -\Omega^2 \mathbb{I} + \Phi(Y(\theta)) \hat{\mathbf{K}}_m(Y(\theta)) \Phi^T(Y(\theta)) & \Phi(Y(\theta)) \mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \\ \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^T \Phi^T(Y(\theta)) & -\mathbf{L}(\theta) \Omega^2 + \mathbf{K}_e^{-1} + i\Omega \mathbf{R}(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

On note

$$\mathbf{Z}_R(\theta) \hat{\mathbf{q}}(\theta) = \hat{\mathbf{F}}(\theta) \quad (4.6)$$

On peut obtenir $\hat{\mathbf{q}}$ par :

$$\hat{\mathbf{q}}(\theta) = \mathbf{Z}_R^{-1}(\theta) \hat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{11}(\theta) & \mathbf{Z}_{12}(\theta) \\ \mathbf{Z}_{21}(\theta) & \mathbf{Z}_{22}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi(\theta) \tilde{\mathbf{F}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

On étudie la réponse en fréquence aléatoire (déplacement / effort). Le déplacement est mesuré en un point de position x_m et la force est appliquée en un point x_n , ce qui donne :

$$H_{mn}(\theta) = \Phi_m^T(\theta) \mathbf{Z}_{11}(\theta) \Phi_n(\theta) \quad (4.8)$$

On exprime la réponse sur un échelle en dB en utilisant la formule suivante :

$$X_{dB}(\theta) = 10 \log_{10} (H_{mn}(\theta) H_{mn}^*(\theta)) \quad (4.9)$$

4.2.3.1 Méthode de Monte-Carlo

La simulation par la méthode de Monte-Carlo de 4.5 revient à faire un calcul éléments finis pour déterminer les vecteurs et les valeurs propres du système (pour chaque tirage $Y(\theta^{(i)})$) et faire par la suite une inversion de la matrice \mathbf{Z}_R en utilisant les paramètres aléatoires électriques $R_1(\theta), R_2(\theta), L_1(\theta), L_1(\theta)$.

La figure 4.5 représente l'enveloppe de la FRF amortie par un circuit piézoélectrique, contenant l'ensemble des FRF calculées avec les différents paramètres aléatoires, comparée à la FRF sans amortissement.

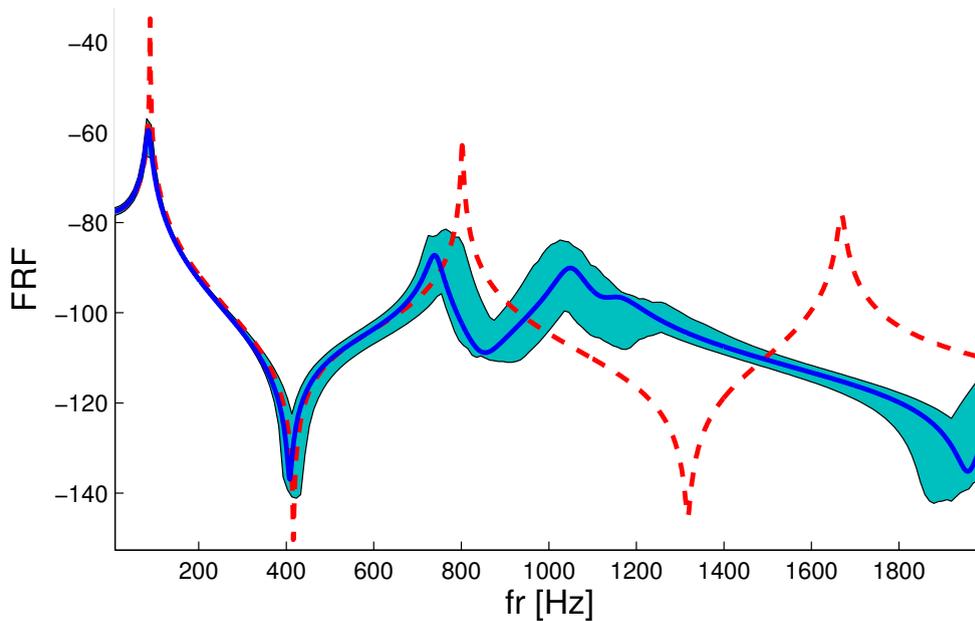


FIGURE 4.5 – Enveloppe des FRF amorties par un circuit piézoélectrique comparée à la FRF sans amortissement (- -) et à la FRF calculée avec les paramètres moyens (-)

4.2.3.2 Méthode de régression

La méthode de régression permet de donner une approximation du coefficient s_i (Eq :4.10) à partir de n calculs déterministes effectués en utilisant l'équation 4.8.

$$H_{mn}(\theta) = \sum_{i=0}^P s_i \Psi_i([\xi_1(\theta), \dots, \xi_5(\theta)]) \quad (4.10)$$

4.2. ROBUSTESSE DE LA RÉDUCTION DE VIBRATION

Pour apprécier la qualité de cette approximation, on compare le résultat issu d'une simulation de Monte-Carlo (5000 tirages) avec celui effectué avec la méthode de régression pour différents tirages n . Pour illustrer cette différence, on donne l'erreur (3.17) calculée entre la méthode de Monte-Carlo et la méthode de régression pour différents nombres de tirages n (Tab. 4.5). On peut remarquer figure 4.6 qu'avec un nombre de 1075 tirages, l'erreur sur la fonction de répartition entre la méthode de régression et la méthode de Monte-Carlo est de l'ordre de 9 % alors qu'à 2000 tirages, l'erreur entre les résultats devient très réduite de l'ordre de 0.3 %.

Nombre de tirages	150	1075	2000
Erreur [%]	8.98	8.95	00.31

TABLE 4.5 – Erreur fonction du nombre de tirages

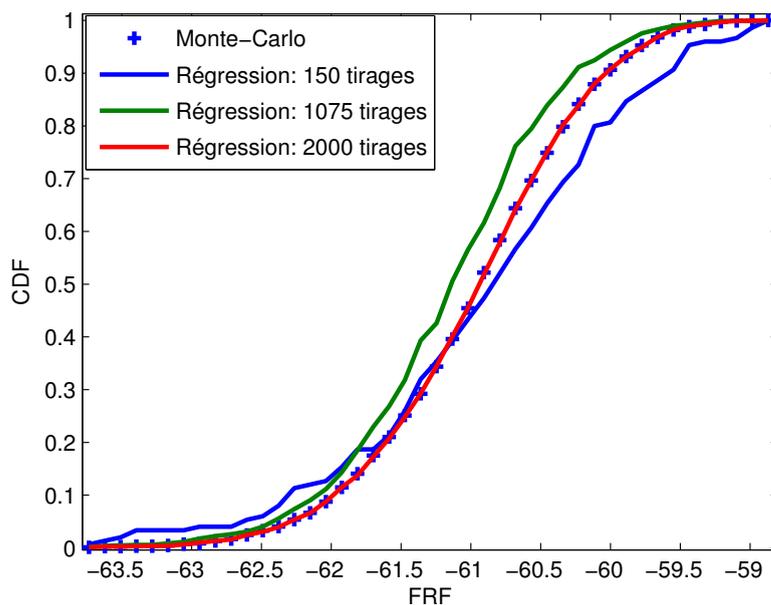


FIGURE 4.6 – Comparaison des CDF par une simulation Monte-Carlo et par régression

4.2.3.3 Méthode de réduction du modèle stochastique

Dans cette méthode, on va essayer de séparer l'aspect aléatoire de l'aspect déterministe, en faisant un développement de la matrice de l'impédance aléatoire $Z_R(\theta)$ en fonction des

paramètres aléatoires d'entrée $Y(\theta)$, $L_1(\theta)$, $L_2(\theta)$, $R_1(\theta)$ et $R_2(\theta)$.

Le même raisonnement proposé dans le deuxième exemple du paragraphe 3.2.4.3 est utilisé pour écrire :

$$\omega(Y(\theta)) = \xi_Y(\theta) \Phi_1 \mathbf{K}_{11} \Phi_1 + \Phi_2 \mathbf{K}_{22} \Phi_2$$

On peut récrire la matrice d'impédance aléatoire $Z_R(\theta)$ (4.5) de la façon suivante :

$$\mathbf{Z}_R(\theta) = \begin{pmatrix} -\Omega^2 \mathbb{I} + \Phi^T \mathbf{K}_C \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_C^T \Phi + \omega(Y(\theta)) & \Phi^T \mathbf{K}_C \mathbf{K}_e^{-1} \\ \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_C^T \Phi^T & -\mathbf{L}(\theta) \Omega^2 + \mathbf{K}_e^{-1} + i\Omega \mathbf{R}(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Par la suite, on utilise les équations (4.6 - 4.9) pour déterminer la réponse en fréquence aléatoire du système étudié.

Cette méthode a l'avantage d'obtenir la solution avec un seul calcul éléments finis. Pour déterminer la valeur de X_{dB} il faut effectuer l'inversion de la matrice Z_R , ce qui n'est pas coûteux en termes de temps de calcul, car sa taille est très réduite (dans notre cas d'étude elle a une taille de 7x7). La figure 4.7 représente l'enveloppe des FRFs amorties par un circuit piézo-électrique (contenant l'ensemble des FRFs calculées avec les différents paramètres aléatoires) comparée à la FRF sans amortissement.

4.2.4 Post-traitement

Les tableaux [4.6- 4.7] donnent respectivement la moyenne et l'écart type de la réponse en fréquence pour les trois valeurs maximales du spectre (Fig. 4.7) dans le cas sans amortissement. On peut remarquer que la réponse vibratoire est assez robuste sur toute la bande de fréquence sauf autour de la deuxième fréquence critique. Cependant, on peut considérer que l'augmentation d'amplitude au niveau de la fréquence $fr_{02} = 760Hz$ reste limitée (caractérisée par un écart-type faible de l'ordre de 2dB).

	$E[H_{mn}(fr_1)]$	$E[H_{mn}(fr_{02})]$	$E[H_{mn}(fr_2)]$	$E[H_{mn}(fr_3)]$
Méthode de regression	-60.9347	-87.2775	-99.5722	-116.1071
Méthode de MC	-60.1104	-87.2530	-97.6705	-115.9564
Méthode de RMS	-60.1041	-87.2544	-97.6540	-115.9552

TABLE 4.6 – Moyenne de la FRF pour les quatre fréquences [$fr_1 = 89Hz$; $fr_{02} = 760Hz$; $fr_2 = 802Hz$; $fr_3 = 1670Hz$]

4.3. CONCLUSION

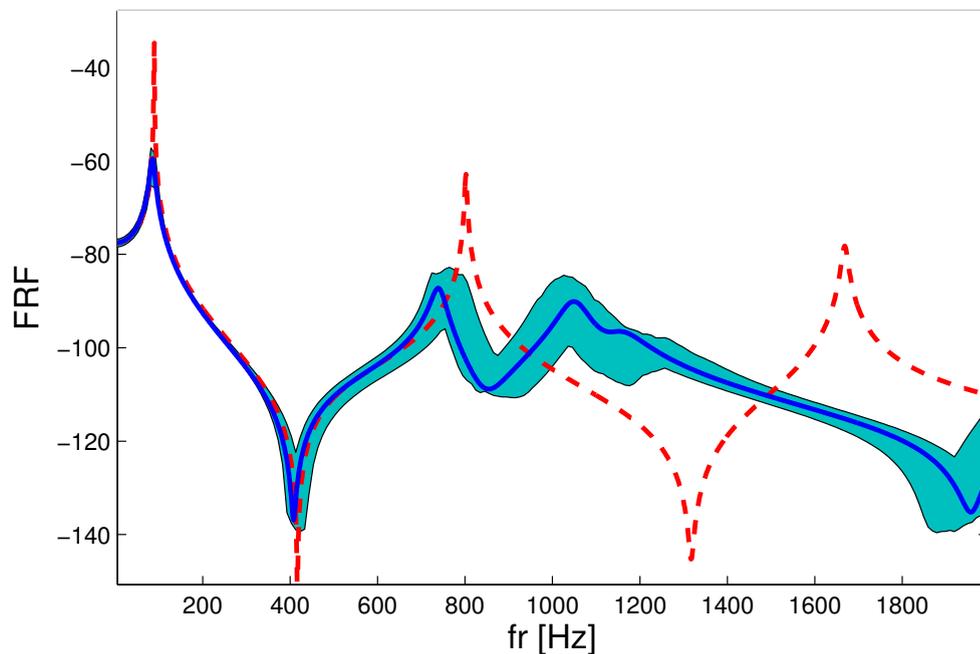


FIGURE 4.7 – L’enveloppe des FRFs amorties par un circuit piézoélectrique comparée à la FRF sans amortissement (- -) et la FRF calculée avec les paramètres moyens (-)

	$\sigma(H_{mn}(fr_1))$	$\sigma(H_{mn}(fr_{02}))$	$\sigma(H_{mn}(fr_2))$	$\sigma(H_{mn}(fr_3))$
Méthode de régression [2000 tirages]	0.7412	2.6603	2.3144	0.6034
Méthode de MC [5000 tirages]	0.9975	2.1161	3.0606	0.577
Méthode de RMS [5000 tirages]	0.9967	2.1127	3.0631	0.5987

TABLE 4.7 – Ecart-type de la FRF pour les quatre fréquences [$fr_1 = 89Hz$; $fr_{02} = 760Hz$; $fr_2 = 802Hz$; $fr_3 = 1670Hz$]

4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, une étude de robustesse du modèle électromécanique a été proposée : on a utilisé des méthodes non intrusives pour déterminer la robustesse de nos modèles par rapport à un changement de paramètres. Trois méthodes ont été utilisées pour ce calcul de robustesse : méthode de régression, méthode de Monte-Carlo, et méthode de réduction de modèle stochastique.

Dans un premier temps, la robustesse du coefficient de couplage électromécanique par rapport à un module d’Young aléatoire a été étudiée, dans laquelle on a pu montrer à

4.3. CONCLUSION

travers les trois méthodes de calcul que ce coefficient reste très robuste par rapport à une variation du module de Young, bien que la largeur de l'intervalle de variation du module de Young soit importante.

Dans un deuxième temps, on a étudié la robustesse de la réponse en fréquence par rapport aux paramètres aléatoires suivants : module de Young, résistance électrique, inductance électrique. Dans cette partie, on a pu montrer que la réponse vibratoire est assez robuste sur toute la bande de fréquence sauf autour de la deuxième fréquence critique. On a considéré cependant que la perte d'amortissement autour de cette fréquence reste limitée (caractérisée par un écart-type faible par rapport à la moyenne).

4.3. CONCLUSION

Chapitre 5

Robustesse du modèle avec contrôle de la force normale

« Un conducteur dangereux, c'est celui qui vous dépasse malgré tous vos efforts pour l'en empêcher... » *Woody Allen*

Divers paramètres, tels que l'espacement des boulons, la finition de surface, influencent directement la dissipation d'énergie dans les assemblages boulonnés [84, 85]. Chaque mécanisme de dissipation de l'énergie dépend non linéairement de l'amplitude de la force appliquée et la tension du boulon diminue généralement avec le temps en fonction de la géométrie du joint, des propriétés de surface et de la contrainte de traction induite dans le boulon. Cette relaxation de la précharge du boulon a été étudiée dans [86] et l'essentiel de la diminution de précharge survient le jour suivant le boulonnage [87].

Le coefficient de frottement n'est plus une constante car les conditions de surface changent au cours du glissement. Puisqu'il y a une diminution de la pression de serrage en fonction de la distance à l'axe, la contrainte tangentielle de frottement diminue dans les régions loin du trou de boulon.

Pour toute ces raisons, on va également modéliser la force normale et le coefficient de frottement par des variables aléatoires.

Dans cette partie, on va étudier la robustesse de la réponse vibratoire du modèle masse ressort décrit dans (2.1) par rapport à la variation des trois paramètres aléatoires suivants : le module de Young des ressorts $Y(\theta)$, le coefficient de frottement $\mu(\theta)$ et la force normale $F_N(\theta)$. Ces trois variables aléatoires vérifient les conditions suivantes :

- un support positif,
- la moyenne et l'écart type donnés,
- la quantité aléatoire et son inverse représentés par des variables aléatoires du second ordre.

Les trois variables aléatoires seront modélisées par des lois Gamma indépendantes (Fig. 5.1 et 5.2) avec les paramètres aléatoires du tableau 5.1.

On pose

$$\xi_Y(\theta) = \frac{Y(\theta)}{E[Y(\theta)]} \quad (5.1)$$

et

$$K_1(\theta) = \xi_Y(\theta)K_1 \quad K_{12}(\theta) = \xi_Y(\theta)K_{12} \quad K_2(\theta) = \xi_Y(\theta)K_2 \quad (5.2)$$

$[K_1, K_{12}, K_2]$ sont les raideurs moyennes du système masse ressort (2.1)

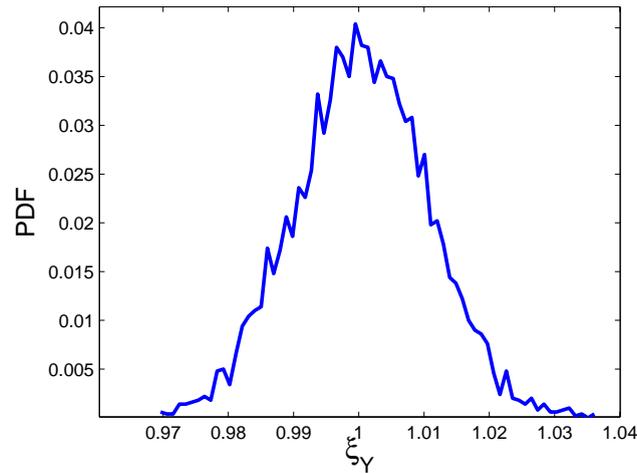


FIGURE 5.1 – Simulation du PDF du module de Young normalisé

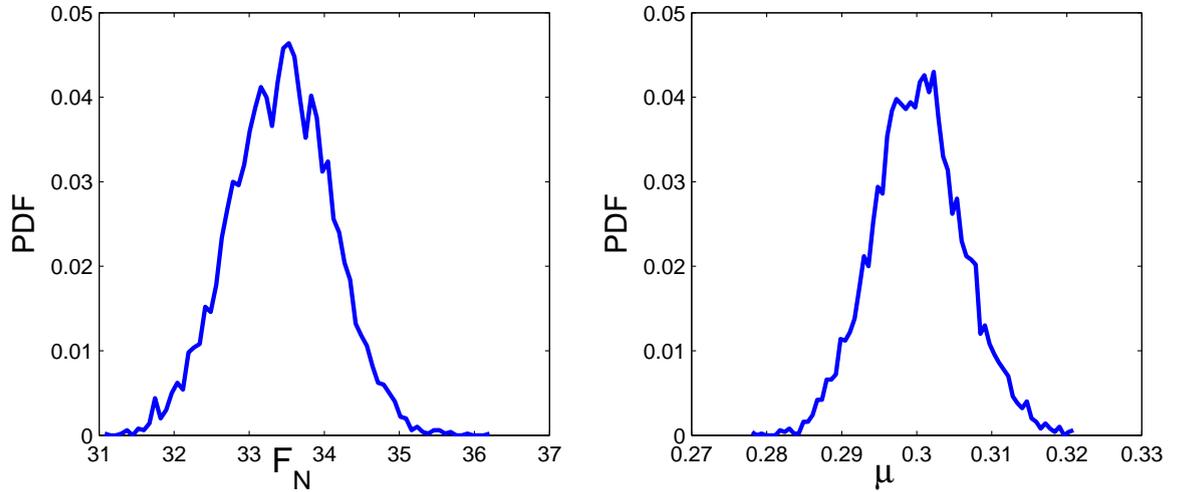


FIGURE 5.2 – Simulation des PDF de F_N et μ de la force de frottement

	Distribution	Moyenne	écart type	nombre de tirages
$\xi_Y(\theta)$	Gamma	1	0.01	5000
$\mu(\theta)$	Gamma	0.3	0.006	5000
$F_N(\theta)$	Gamma	33.4	0.67	5000

TABLE 5.1 – Paramètres du problème étudié

On peut réduire à deux le nombre de variables aléatoires en utilisant le fait que :

$$r_y(\theta) = F_N(\theta) \mu(\theta) \quad (5.3)$$

$r_y(\theta)$ est une variable aléatoire de loi à déterminer. On peut générer un tirage aléatoire selon cette loi en utilisant une simulation de Monte-Carlo de l'équation (5.3). La figure 5.3 donne le PDF de la variable $r_y(\theta)$. Cette étape intermédiaire permet donc de réduire le nombre de variables aléatoires à deux variables aléatoires ($\xi_Y(\theta); r_y(\theta)$).

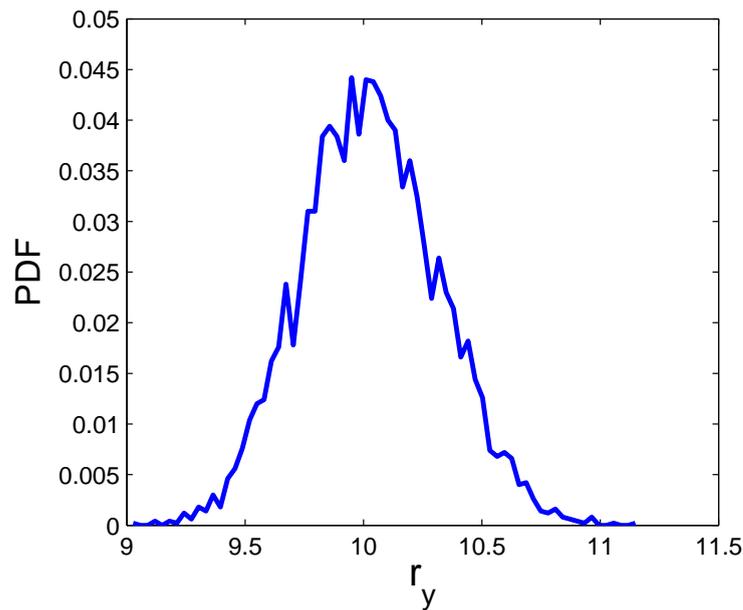


FIGURE 5.3 – PDF de la force serrage maximal et du coefficient de frottement

Comme le nombre de variables est limitée à deux, l'étape de calcul de sensibilité n'est pas effectuée dans ce cas. De plus, la résolution des équations présentées par la suite étant faite analytiquement, on se propose d'utiliser une seule méthode de calcul aléatoire, à savoir la méthode de Monte-Carlo. Cela se justifie par le fait que la résolution analytique n'est pas coûteuse en termes de temps de calcul.

5.1 Robustesse de la loi de contrôle de la force normale (en fonction de la fréquence)

Pour cette loi, on va étudier la robustesse du modèle à 2 ddl par rapport à la variation des deux paramètres aléatoires $\xi_y(\theta)$ et $r_y(\theta)$ avec la loi de contrôle décrite par (2.1.5).

La loi de contrôle (2.29) dans le cas aléatoire peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} r_y = 0 & \text{if } \Omega \in \Psi \\ r_y = \mu(\theta)F_{max}(\theta) & \text{if } \Omega \notin \Psi \end{cases} \quad \text{with } \Psi = \bigcup_{i=1}^P \Psi_i \quad (5.4)$$

Pour déterminer la réponse en fréquence du problème aléatoire, on fait une simulation de Monte-Carlo de l'équation de mouvement décrit par l'algorithme (2.3) avec les paramètres aléatoires $\xi_y(\theta)$ et $r_y(\theta)$, en prenant comme loi de contrôle de la force normale la loi (5.4).

La figure 5.4 représente une enveloppe de la FRF avec contrôle, contenant l'ensemble des FRFs calculées avec les différents paramètres aléatoires, comparée à la FRF sans contrôle.

5.1.1 Post-traitement

Le tableau 5.2 donne la moyenne et l'écart type de la réponse en fréquence pour la première fréquence propre ($\Omega_1 = 50$ [rad/s]). On peut voir que la réponse vibratoire est très robuste par rapport aux variables aléatoires dont les paramètres sont proposés dans le tableau 5.1.

	$E[(H_{mn}(\Omega_1))]$	$\sigma(H_{mn}(\Omega_1))$
Méthode de MC	-34.1785	0.1995

TABLE 5.2 – Moyenne et écart-type de la FRF pour la première fréquence propre $\Omega_1 = 50$ [rad/s]

5.2. ROBUSTESSE DE LA PREMIÈRE LOI DE CONTRÔLE DE LA FORCE NORMALE EN FONCTION DU TEMPS

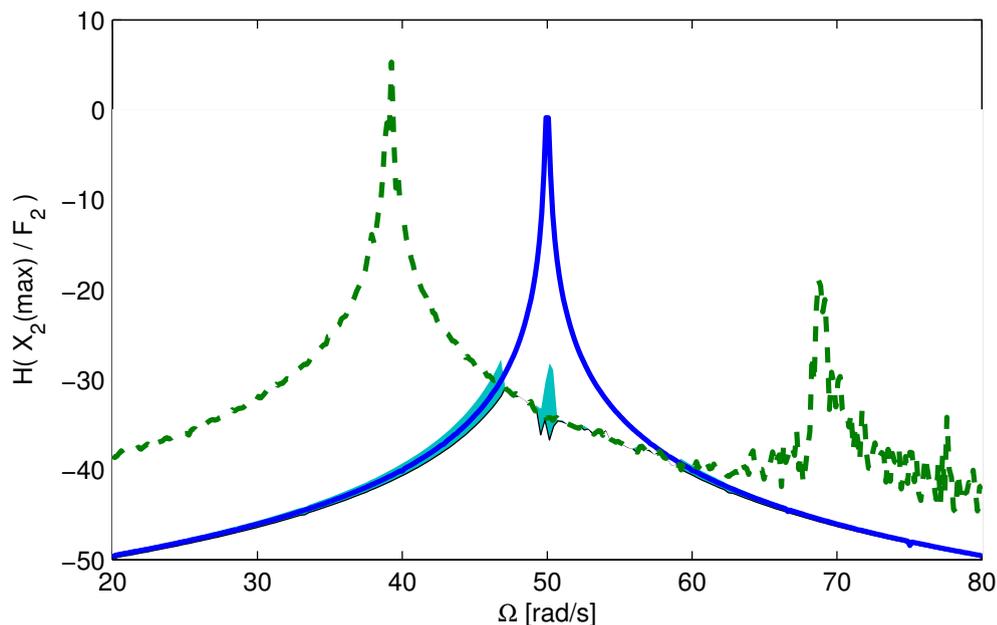


FIGURE 5.4 – Enveloppe des FRFs avec contrôle comparée à la FRF avec serrage (—) et à la FRF sans serrage (- -).

5.2 Robustesse de la première loi de contrôle de la force normale en fonction du temps

Pour cette loi, on va étudier la robustesse du modèle en 2 ddl par rapport à la variation de deux paramètres aléatoires $\xi_y(\theta)$ et $r_y(\theta)$ dont la loi de contrôle est celle décrite dans (2.1.6).

La loi de contrôle (2.30) dans le cas aléatoire peut s'écrire comme :

$$r_y(t; \theta) = F_{max}(\theta) Z_1(\theta) [Z_2(\theta) + \sin(\Omega_{ser} t)] \quad (5.5)$$

Pour déterminer la réponse en fréquence du problème aléatoire, on fait une simulation de Monte-Carlo du mouvement décrit par l'algorithme (2.3) avec les paramètres aléatoires $\xi_y(\theta)$ et $r_y(\theta)$ (en prenant comme loi de contrôle de la force normale la loi (5.5)).

La figure 5.5 représente l'enveloppe de la FRF avec contrôle, contenant l'ensemble des FRFs calculées avec les différents paramètres aléatoires, comparée à la FRF sans contrôle

5.2. ROBUSTESSE DE LA PREMIÈRE LOI DE CONTRÔLE DE LA FORCE NORMALE EN FONCTION DU TEMPS

et à la FRF avec paramètres moyens.

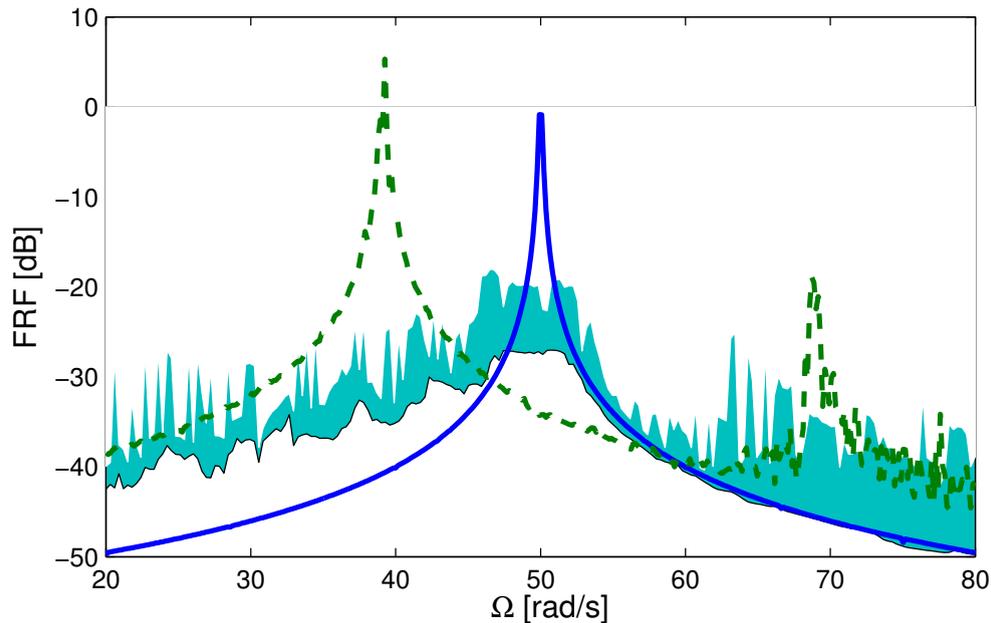


FIGURE 5.5 – Enveloppe des FRFs avec contrôle, comparée à la FRF avec serrage (—) et à la FRF sans serrage (- -).

5.2.1 Post-traitement

Le tableau 5.3 donne la moyenne et l'écart type de la réponse en fréquence pour la première fréquence propre ($\Omega_1 = 50$ [rad/s]). On peut voir que la réponse vibratoire est sensible aux paramètres aléatoires sur toute la bande de fréquences. Cependant, le niveau vibratoire maximal de l'enveloppe des FRFs avec contrôle reste faible par rapport à la valeur maximale de la fréquence critique. On peut donc dire que cette loi reste robuste par rapport aux variables aléatoires dont les paramètres sont proposés dans le tableau 5.1.

	$E[(H_{mn}(\Omega_1))]$	$\sigma(H_{mn}(\Omega_1))$
Methode de MC	-26.7458	0.3167

TABLE 5.3 – Moyenne et écart-type de la FRF pour la première fréquence propre $\Omega_1 = 50$ [rad/s]

5.3 Robustesse de la deuxième loi de contrôle de la force normale en fonction du temps

Dans cette partie on va étudier la robustesse du modèle 2 ddl par rapport à la variation de deux paramètres aléatoires $\xi_y(\theta)$ et $r_y(\theta)$ dont la loi de contrôle est celle décrite dans le paragraphe 2.1.6. La loi de contrôle (2.32) dans le cas aléatoire peut s'écrire comme :

$$r_y(t; \theta) = F_{max}(\theta) Z_1(\theta) [Z_2(\theta) + \text{sgn}(\sin(\Omega_{ser} t))] \quad (5.6)$$

Pour déterminer la réponse en fréquence du problème aléatoire, on fait une simulation de Monte-Carlo du mouvement décrit par l'algorithme (2.3) avec les paramètres aléatoires $\xi_y(\theta)$ et $r_y(\theta)$, en prenant comme loi de contrôle de la force normale la loi (5.6).

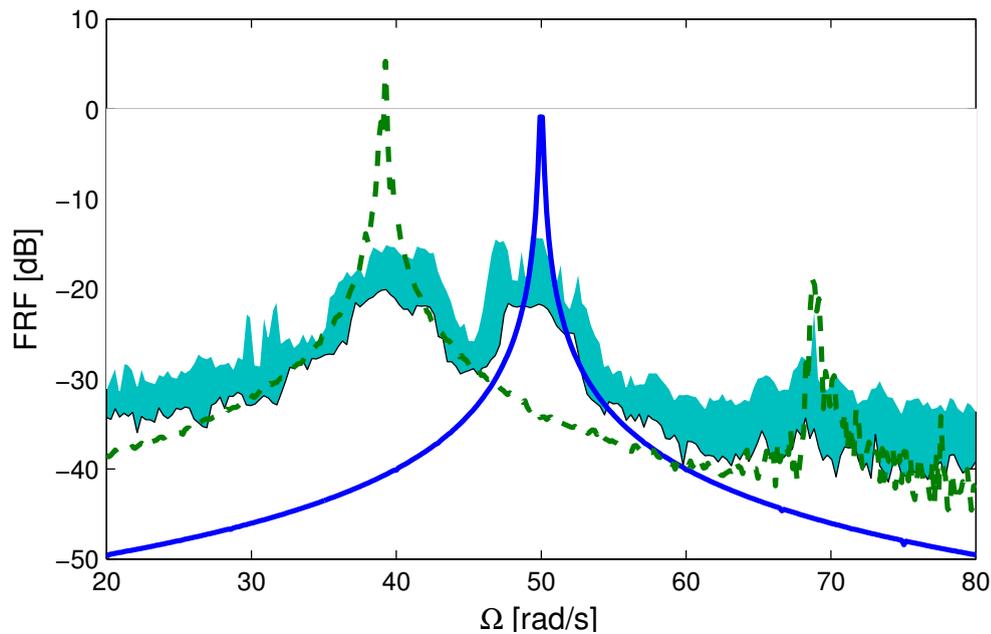


FIGURE 5.6 – enveloppe de la FRF avec contrôle(aléatoire) comparé à la FRF dans le cas avec serrage (—) et sans serrage (- -).

La figure 5.6 représente l'enveloppe des FRFs avec contrôle, contenant l'ensemble des FRFs calculées avec les différents paramètres aléatoires, comparée à la FRF sans contrôle et à la FRF avec paramètres moyens.

5.3.1 Post-traitement

Le tableau 5.4 donne la moyenne et l'écart type de la réponse en fréquence pour la première fréquence propre $\Omega_1 = 50$ [rad/s] (Tab. 4.7). On peut voir que la réponse vibratoire est sensible aux paramètres aléatoires sur toute la bande de fréquence. Cependant, le niveau vibratoire maximal de l'enveloppe des FRFs avec contrôle reste faible par rapport à la valeur maximale de la fréquence critique. Dans ce contexte, on peut dire que cette loi reste robuste par rapport aux variables aléatoires dont les paramètres sont indiqués dans le tableau 5.1.

	$E[(H_{mn}(\Omega_1))]$	$\sigma(H_{mn}(\Omega_1))$
Methode de MC	-20.5168	0.7256

TABLE 5.4 – Moyenne et écart-type de la FRF pour la première fréquence propre $\Omega_1 = 50$ [rad/s]

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, l'étude de robustesse du modèle à 2 ddl avec contrôle de force normale a été proposée ; on a utilisé la méthode de Monte-Carlo pour déterminer la robustesse de nos modèles par rapport à un changement de paramètres. Ce choix de méthode de résolution stochastique a été adopté, car tous les problèmes à 2 ddl ont été résolus analytiquement.

Dans un premier temps, on a étudié la robustesse du modèle à 2 ddl avec force normale, de loi de contrôle (2.29), par rapport à un module de Young aléatoire $Y(\theta)$. Dans cette étude, on a montré que la réponse vibratoire est très robuste par rapport au module de Young aléatoire.

Par la suite, on a proposé deux études de robustesse du modèle à 2 ddl avec force normale, avec deux lois de contrôle différentes (2.30 et 2.32), par rapport à un module de Young aléatoire $Y(\theta)$ et par rapport à une force de frottement aléatoire $r_y(\theta)$. Dans cette étude, on a montré que la réponse vibratoire est sensible aux paramètres aléatoires sur toute la bande de fréquences. Cependant, le niveau vibratoire maximal de l'enveloppe des FRFs avec contrôle reste faible par rapport à la valeur maximale de la fréquence critique. Dans ce contexte, on conclut que ces deux lois de contrôles restent robustes par rapport

5.4. CONCLUSION

aux variables aléatoires.

Conclusion

CONCLUSION

Cette thèse traite de la réduction de vibrations de structure, comportant des liaisons mécaniques de type assemblage boulonné, par dispositif piézoélectrique. Elle est composée de deux parties. La première est une étude des mécanismes permettant une amélioration de la réduction de vibrations en utilisant l'effet direct et inverse des éléments piézoélectriques. La deuxième porte sur une étude probabiliste des différents modèles proposés afin de qualifier leur robustesse.

Dans la première partie de cette thèse, dans laquelle tous les paramètres sont considérés comme déterministes, on a fait tout d'abord une étude de réduction de vibrations par amortissement électromécanique, dans laquelle, on a montré que pour favoriser le couplage électromécanique (caractérisé par un coefficient de couplage effectif important), il fallait que la taille des éléments piézoélectriques situés au niveau de l'assemblage boulonné soit suffisamment importante. Dans ce cas, une optimisation des paramètres du circuit électrique a permis de réduire les vibrations sur une bande de fréquence comportant plusieurs fréquences propres de la structure. En revanche, lorsque l'élément piezo a la taille réduite d'une rondelle, située au niveau du joint boulonné, le circuit électrique n'apporte que très peu d'amortissement. Donc, on a conclu que la réduction de vibration apportée par un circuit électrique connecté à un élément piézoélectrique peut s'avérer intéressante à condition d'utiliser les bons paramètres géométriques et électriques.

Ensuite, on a proposé une étude de la réduction de vibrations par contrôle du serrage au niveau des boulons. Dans un premier temps, on a étudié un modèle simplifié de l'assemblage boulonné, constitué d'un système masse ressort avec patin frottant à deux degrés de liberté. Une résolution du problème dynamique non linéaire a été proposée afin de pouvoir tester plusieurs lois de contrôle du serrage du joint boulonné. La résolution analytique proposée a l'avantage de déterminer le temps de début et de fin du glissement d'une façon automatique selon les algorithmes fournis. Une résolution numérique a aussi été effectuée pour valider le modèle analytique. Le contrôle du serrage permet de changer localement la rigidité de la structure et donc de pouvoir éviter de vibrer dans les plages de fréquences critiques. Dans ce contexte on a proposé trois lois de contrôle, en fonction de la fréquence ou du temps. Les trois lois de contrôle proposées ont permis de réduire le niveau vibratoire au voisinage des fréquences critiques, sans créer de nouveaux pics parasites. En conclusion,

CONCLUSION

avec ces méthodes de contrôle de la force normale au niveau des joints boulonnés, on est capable de réduire significativement les vibrations dans ce cas de modèle simplifié à 2 ddl.

Dans un deuxième temps, on a proposé une étude numérique, avec une démarche adaptée à la résolution des problèmes de contact avec frottement d'un assemblage boulonné représentatif.

Dans ce cadre, une structure munie d'un joint boulonné a été modélisée en utilisant la méthode "LATIN" et le logiciel COFAST pour déterminer l'influence de la force de frottement sur la réponse en déplacement de la structure. On a conclu qu'un changement de serrage peut provoquer une chute de la rigidité, ce qui peut provoquer des problèmes de stabilité de la structure. Pour contourner la difficulté, on a proposé un dimensionnement de structure permettant une intégration du joint boulonné dans la structure principale afin d'apporter une réduction de vibrations, sans que le joint boulonné n'intervienne dans la stabilité de la structure complète. Et pour argumenter le propos, un modèle à 2ddl a été proposé pour une étude en dynamique, dans laquelle la force normale varie selon deux lois de contrôle en fonction de la fréquence ou en fonction du temps. Dans cette partie, on a montré que les deux types de contrôle proposés ont permis de réduire le niveau vibratoire au voisinage des fréquences critiques, sous réserve que les fréquences propres avec et sans action du dispositif soient assez éloignées. Pour ce type de réduction de vibration, un travail de conception et de dimensionnement de structure est nécessaire afin que les fréquences critiques dans le cas avec et sans serrage soient suffisamment éloignées, dans le but d'avoir une réduction significative du niveau vibratoire de la structure.

Les perspectives de cette étude déterministe seront de tester d'autres lois de contrôle de la force normale permettant une meilleure réduction de vibrations, d'appliquer ces lois de contrôle de l'effort normal à des modèles éléments finis 3D et enfin de poursuivre les essais, déjà initiés, pour valider expérimentalement notre approche.

Dans la deuxième partie de cette thèse, certains paramètres des modèles décrits ci-dessus sont considérés comme aléatoires. Dans cette partie, on a choisi d'utiliser des méthodes non intrusives de résolution de modèles stochastiques. On a également proposé une méthode de calcul, nommé "méthode de réduction du modèle stochastique" permettant de déterminer dans le cas d'un seul paramètre aléatoire, comme le module de Young,

CONCLUSION

les vecteurs et les valeurs propres aléatoires de façon exacte en faisant un seul calcul éléments finis déterministe. Dans le cas où plusieurs paramètres aléatoires interviennent et sous réserve d'hypothèses simplificatrices raisonnables, la méthode proposée donne des résultats très comparables à ceux donnés par la méthode de Monte-Carlo tout en ne faisant qu'un seul calcul éléments finis déterministe.

Dans la suite de la partie d'étude probabiliste, une étude de la robustesse du modèle électromécanique a été proposée. Trois méthodes ont été utilisées pour ce calcul de robustesse : méthode de régression, méthode de Monte-Carlo, et méthode de réduction de modèle stochastique. Dans un premier temps, la robustesse du coefficient de couplage électromécanique par rapport à un module de Young aléatoire a été étudiée; on a pu montrer à travers les trois méthodes de calcul que ce coefficient reste très robuste par rapport à une variation du module de Young, malgré un large intervalle de variation. Dans un deuxième temps, on a étudié la robustesse de la réponse en fréquence par rapport aux paramètres aléatoires suivants : le module de Young, la résistance électrique et l'inductance électrique. Dans cette partie on a montré que la réponse vibratoire est assez robuste sur toute la bande de fréquence sauf autour de la deuxième fréquence critique. Cependant, on a considéré que cette diminution d'amortissement autour de cette fréquence, par rapport au modèle déterministe moyen, reste limitée.

Enfin, une étude de la robustesse du modèle à 2 ddl avec contrôle de force normale a été proposée; pour cela, on a utilisé la méthode de résolution de Monte-Carlo pour déterminer la robustesse de nos modèles par rapport à une variation de paramètres, choix justifié par la faible taille du problème à résoudre à chaque tirage. Dans un premier temps, on a étudié la robustesse du modèle à 2 ddl avec force normale contrôlée par rapport à un module de Young aléatoire $Y(\theta)$. Dans cette étude, on a montré que la réponse vibratoire est très robuste par rapport au module de Young aléatoire. Par la suite, on a proposé deux études de robustesse du modèle à 2 ddl avec force normale contrôlée par rapport à un module de Young aléatoire $Y(\theta)$ et par rapport à une force de frottement aléatoire $r_y(\theta)$. Dans cette étude, on a montré que la réponse vibratoire est sensible aux paramètres aléatoires sur toute la bande de fréquences. Cependant, le niveau vibratoire maximal de l'enveloppe des FRFs avec contrôle reste faible par rapport au pic de la fréquence critique.

CONCLUSION

Dans ce contexte, on a conclu que ces deux lois de contrôles restent robustes par rapport aux variables aléatoires.

Les perspectives de cette étude probabiliste seront de développer la méthode de réduction de modèle stochastique pour prendre en compte davantage de paramètres aléatoires et d'étudier la robustesse des modèles éléments finis (2D/3D) en présence de non-linéarité de contact.

Bibliographie

- [1] John Simpson and Johannes Schweiger. Industrial approach to piezoelectric damping of large fighter aircraft components. *Proc. SPIE*, 3326 :34–46, 1998. 21
- [2] Mark A. Hopkins, Douglas A. Henderson, Robert W. Moses, Thomas G. Ryall, David G. Zimcik, and Ronald L. Spangler, Jr. Active vibration-suppression systems applied to twin-tail buffeting. *Proc. SPIE*, 3326 :27–33, 1998.
- [3] Seung J. Kim, Changheon Han, and Chul Y. Yun. Improvement of aeroelastic stability of hingeless helicopter rotor blade by passive piezoelectric damping. *Proc. SPIE*, 3672 :131–141, 1999. 21
- [4] D.D.L. Chung. Review : Materials for vibration damping. *Journal of Materials Science*, 36(24) :5733–5737, 2001. 21
- [5] R.A. Ibrahim and C.L. Pettit. Uncertainties and dynamic problems of bolted joints and other fasteners. *Journal of Sound and Vibration*, 279(3–5) :857 – 936, 2005. 21, 22, 60
- [6] S. Hurlebaus and L. Gaul. Smart structure dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(2) :255 – 281, 2006. 21, 22, 38
- [7] O. Thomas, J.-F. Deu, and J. Ducarne. Vibrations of an elastic structure with shunted piezoelectric patches : efficient finite element formulation and electromechanical coupling coefficients. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 80(2) :235–268, 2009. 22, 23, 28, 29
- [8] O. Thomas C. Blanzé. Atténuation de vibration par shunt piézoélectrique en présence

BIBLIOGRAPHIE

- d'incertitude sur les paramètres électriques. In *Actes du 9ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens, Var, France*, 25-29 mai 2009. 22
- [9] Kazuhiko Adachi, Yoshitsugu Kitamura, and Takuzo Iwatsubo. Integrated design of piezoelectric damping system for flexible structure. *Applied Acoustics*, 65(3) :293–310, March 2004. 22
- [10] C.C. Fuller, S. Elliott, and P.A. Nelson. *Active Control of Vibration*. Elsevier Science, 1996. 22
- [11] W. Gao, J.J. Chen, H.B. Ma, and X.S. Ma. Optimal placement of active bars in active vibration control for piezoelectric intelligent truss structures with random parameters. *Computers and Structures*, 81(1) :53 – 60, 2003.
- [12] S. Hurlebaus, U. Stöbener, and L. Gaul. Vibration reduction of curved panels by active modal control. *Computers and Structures*, 86(3–5) :251 – 257, 2008. 22
- [13] L.Gaul and R. Nitsche. friction control for vibration suppression. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 14(2) :139 – 150, 2000. 22
- [14] U. Andreaus and M. Porfiri. Effect of electrical uncertainties on resonant piezoelectric shunting. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 18(5) :477–485, 2007. 22
- [15] C. Blanzé and L. Champaney. A computational strategy for the random response of assemblies of structures. *International Journal of Solids and Structures*, 41(22–23) :6383 – 6405, 2004. 115
- [16] E. Capiez-Lernout and C. Soize. Robust updating of uncertain damping models in structural dynamics for low- and medium-frequency ranges. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(8) :1774 – 1792, 2008. 22
- [17] I.M Sobol. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their monte carlo estimates. *Mathematics and Computers in Simulation*, 55(1–3) :271 – 280, 2001. The Second IMACS Seminar on Monte Carlo Methods. 24, 113

- [18] Henno Allik and Thomas J. R. Hughes. Finite element method for piezoelectric vibration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2(2) :151–157, 1970. 28, 29
- [19] H.S. Tzou and C.I. Tseng. Distributed piezoelectric sensor/actuator design for dynamic measurement/control of distributed parameter systems : A piezoelectric finite element approach. *Journal of Sound and Vibration*, 138(1) :17 – 34, 1990. 28
- [20] A. Benjeddou. Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements : a survey. *Computers and Structures*, 76 :347–363, 2000. 28
- [21] E. Carrera and M. Boscolo. Classical and mixed finite elements for static and dynamic analysis of piezoelectric plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 70(10) :1135–1181, 2007. 29
- [22] S.-H. Chen, Z.-D. Wang, and X.-H. Liu. Active vibration control and suppression for intelligent structures. *Journal of Sound and Vibration*, 200(2) :167–177, February 1997.
- [23] C.M.A. Vasques and J.D. Rodrigues. Coupled three-layered analysis of smart piezoelectric beams with different electric boundary conditions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(11) :1488–1518, 2005.
- [24] Jaehwan Kim, Vasundara V. Varadan, and Vijay K. Varadan. finite element modelling of structures including piezoelectric active devices. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(5) :817–832, 1997.
- [25] Dimitris A. Saravanos, Paul R. Heyliger, and Dale A. Hopkins. Layerwise mechanics and finite element for the dynamic analysis of piezoelectric composite plates. *International Journal of Solids and Structures*, 34(3) :359–378, January 1997. 29
- [26] C.H. Nguyen and S.J. Pietrzko. Fe analysis of a pzt-actuated adaptive beam with vibration damping using a parallel r-l shunt circuit. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42 :1231–1239, 2006. 29

- [27] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, and J.Z. Zhu. *The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals : Its Basis and Fundamentals*. Elsevier Science, 2005. 29
- [28] Institute of Electrical, Electronics Engineers, and NY. American National Standards Institute. New York. *IEEE Standard on Piezoelectricity : Approved March 12, 1987, IEEE Standards Board; Approved September 7, 1987 American National Standards Institute*, 1987. 35, 42
- [29] G. Caruso. A critical analysis of electric shunt circuits employed in piezoelectric passive vibration damping. *Smart Materials and Structures*, 10(5) :1059, 2001. 38
- [30] C.H. Park. Dynamics modelling of beams with shunted piezoelectric elements. *Journal of Sound and Vibration*, 268(1) :115 – 129, 2003. 38
- [31] S. Behrens, S. O. R. Moheimani, and A. J. Fleming. Multiple mode current flowing passive piezoelectric shunt controller. *Journal of Sound and Vibration*, 266(5) :929 – 942, 2003. 38
- [32] S.O.R. Moheimani. A survey of recent innovations in vibration damping and control using shunted piezoelectric transducers. *Control Systems Technology*, 11(4) :482–494, 2003. 38
- [33] A.J. Fleming, S. Behrens, and S.O.R Moheimani. Reducing the inductance requirements of piezoelectric shunt damping systems. *Smart Materials and Structures*, 12(1) :57, 2003. 38
- [34] J. Ducarne. *Modélisation et optimisation de dispositifs non-linéaires d’amortissement de structures par systèmes piézoélectriques commutés*. PhD thesis, CNAM Paris, 2009. 42
- [35] O. Thomas, J. Ducarne, and J-F. Deu. Performance of piezoelectric shunts for vibration reduction. *Smart Materials and Structures*, 2012. 44
- [36] H.-K. Hong and C.-S. Liu. Coulomb friction oscillator : modelling and responses to harmonic loads and base excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 229(5) :1171–1192, February 2000. 62, 69, 71

- [37] G. Venizelos. *Vibrations des structures*. Technosup. Niveau B : Génie mécanique. Ellipses, 2002. 68, 69
- [38] D. Peric and D.R.J. Owen. Computational model for 3-d contact problems with friction based on the penalty method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35(6) :1289–1309, 1992. 85
- [39] K. J. Bathe and A. Chaudhary. A solution method for planar and axisymmetric contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pages 65–88, 1985. 85
- [40] S. Cescotto and R. Charlier. Frictional contact finite elements based on mixed variational principles. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36 :1681–1701, May 1993. 85
- [41] N. Kikuch and J. T. Oden. *Contact problems in elasticity. A study of variational inequalities and finite element methods.*, volume 8. Society for Industrial & Applied Mathematics , U.S., 1987. 85
- [42] P. Ladevèze and J.G. Simmonds. *Nonlinear computational structural mechanics : new approaches and non-incremental methods of calculation*. Mechanical engineering series. Springer, 1999. 59, 85, 88, 100
- [43] Y.H De Roeck, P. L. Tallec, and M. Vidrascu. A domain-decomposed solver for nonlinear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 99(2–3) :187 – 207, 1992. 85
- [44] C. Farhat, F. X. Roux, and J. T. Oden. *Implicit Parallel Processing in Structural Mechanics*. Computational mechanics advances. North-Holland, 1994. 85
- [45] C. Blanzé, R. Danwé, P. Ladevèze, and Ph. Maurel. A new simplified method for the analysis of 2d structures. In *XXVIIIth International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, HAIFIA, ISRAEL*, 1992. 85
- [46] C. Blanzé, L. Champaney, J.Y. Cognard, and P. Ladevèze. A modular approach

- to structure assembly computations. application to contact problems. *Engineering Computations*, 13(1) :15–32, 1995. 85
- [47] L. Champaney. *Une nouvelle approche modulaire pour l'analyse d'assemblages de structures tridimensionnelles*. PhD thesis, LMT-Cachan, 1996. 91
- [48] L. Champaney, P.-A. Boucard, and S. Guinard. Adaptive multi-analysis strategy for contact problems with friction. *Computational Mechanics*, 42(2) :305–315, 2008. 91
- [49] G. Mauris, V. Lasserre, and L. Foulloy. A fuzzy approach for the expression of uncertainty in measurement. *Measurement*, 29(3) :165 – 177, 2001. 106
- [50] R.E. Moore. *Interval analysis*. Prentice-Hall, 1966. 106
- [51] Y. Ben-Haim. A non-probabilistic measure of reliability of linear systems based on expansion of convex models. *Structural Safety*, 17(2) :91 – 109, 1995. 106
- [52] C. Soize. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3) :277–294, 2000. 107
- [53] E. T. Jaynes. Information theory and statistical mechanics. *Phys. Rev.*, 106 :620–630, 1957. 107
- [54] C. E. Shannon and W. Weaver. *The mathematical Theory of communication*. University of Illinois, 1949. 107
- [55] T.G. Ritto, M.R. Escalante, Rubens Sampaio, and M.B. Rosales. Drill-string horizontal dynamics with uncertainty on the frictional force. *Journal of Sound and Vibration*, 332(1) :145 – 153, 2013. 107
- [56] C. Blanzé and P. Rouch. Analysis of structures with stochastic interfaces in the medium-frequency range. *Journal of Computational Acoustics*, 13(4) :711–729, 2005. 107
- [57] P. Malliavin. *Stochastic Analysis*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 1997. 109

BIBLIOGRAPHIE

- [58] M. Pillet. *Appliquer la maîtrise statistique des procédés : (MSP-SPC)*. Editions d'Organisation, 1994. 110
- [59] Julien Jacques. *Contributions à l'analyse de sensibilité et à l'analyse discriminante généralisée*. These, Université Joseph-Fourier - Grenoble I, December 2005. 111
- [60] A. Saltelli, K. Chan, and E. M. Scott. *Sensitivity Analysis*. Wiley, 2009. 111
- [61] A. Saltelli. *Special Issue on the Role of Sensitivity Analysis in the Corroboration of Models and Its Links to Model Structural and Parametric Uncertainty*. Elsevier, 1997. 112
- [62] A. Saltelli, S. Tarantola, and F. Campolongo. Sensitivity analysis as an ingredient of modeling. *Statistical Science*, 15(4) :377–395, 2000. 112
- [63] C. Soize and R. Ghanem. Physical systems with random uncertainties : Chaos representations with arbitrary probability measure. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(2) :395–410, 2004. 114
- [64] R. G. Ghanem and P. D. Spanos. *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Springer-Verlag, New York, 1991. 114, 115
- [65] R. Ghanem and S. Dham. *Stochastic Finite Element Analysis for Multiphase Flow in Heterogeneous Porous Media*. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [66] R. Ghanem and P. D. Spanos. *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach (revised edition)*. Courier Dover Publications, 2003. 114
- [67] G. I. Schueller. A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 12 :197–321, 1997. 115
- [68] D. Xiu and G.E. Karniadakis. The wiener askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24(2) :619–644, 2002. 115, 116
- [69] D. Ghiocel and R. Ghanem. Stochastic finite-element analysis of seismic soil–structure interaction. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(1) :66–77, 2002. 115

- [70] O. P. Le Maitre, M. T. Reagan, H. N. Najm, R. G. Ghanem, and O. M. Knio. A stochastic projection method for fluid flow : II random process. *Journal of Computational Physics*, 181(1) :9 – 44, 2002. 115
- [71] R. Ghanem and D. Ghosh. Efficient characterization of the random eigenvalue problem in a polynomial chaos decomposition. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72(4) :486–504, 2007. 115
- [72] R. G. Ghanem and R. M. Kruger. Numerical solution of spectral stochastic finite element systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 129(3) :289 – 303, 1996. 115
- [73] B. Puig, P. Fabrice, and C. Soize. Non-gaussian simulation using hermite polynomial expansion : convergences and algorithms. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 17(3) :253 – 264, 2002. 116
- [74] S.S. Isukapalli. *Uncertainty Analysis of Transport-transformation Models*. Rutgers University, 1999. 116
- [75] M. Berveiller, B. Sudret, and M. Lemaire. Presentation of two methods for computing the response coefficients in stochastic finite element analysis. In *9th ASCE specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability*,, Albuquerque, 2004. USA. 116
- [76] R.E. Melchers. *Structural reliability : analysis and prediction*. Ellis Horwood series in civil engineering. Ellis Horwood, 1987. 118
- [77] James E. Gentle. *Simulation and the Monte Carlo Method, 2nd edition by RUBINSTEIN, R. Y. and KROESE, D. P.* Blackwell Publishing Inc, 2008. 118
- [78] G. Augusti, A. Baratta, and F. Casciati. *Probabilistic Methods in Structural Engineering*. Taylor & Francis, 2003. 118
- [79] G. Rubino and B. Tuffin. *Simulations et méthodes de Monte Carlo*. Techniques-Ingenieur, 2007. 118

- [80] M. D. McKay, R. J. Beckman, and W. J. Conover. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 42(1) :55–61, 2000. 118
- [81] L. Faravelli. Response surface approach for reliability analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 115(12) :2763–2781, 1989. 118
- [82] M. D. Webster, M. A. Tatang, and G. J. McRae. *Application of the Probabilistic Collocation Method for an Uncertainty Analysis of a Simple Ocean Model*. MIT Joint Program on the Science and Policy of Global Change, 1996. 118
- [83] B.Sudret and A.D. Kiureghian. Comparison of finite element reliability methods. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 17(4) :337 – 348, 2002. 125
- [84] E.E. Ungar. *Energy Dissipation at Structural Joints : Mechanisms and Magnitudes*. Air Force Flight Dynamics Laboratory, Research and Technology Division, Air Force Systems Command, United States Air Force, 1964. 144
- [85] E.E. Ungar. The status of engineering knowledge concerning the damping of built-up structures. *Journal of Sound and Vibration*, 26(1) :141 – 154, 1973. 144
- [86] J. Tajima. Effects of relaxation and creep on the slip load of the high strength bolted joints. In *Structural Design Office, Japanese National Railways*, Tokyo, 1964. 144
- [87] E. Chesson and W. H. Munse. *Studies of the Behavior of High-strength Bolts and Bolted Joints*. University of Illinois, 1965. 144

BIBLIOGRAPHIE

Annexes

Annexe A

Séries de Fourier

– Définition

La série de Fourier associée à une fonction f continue par morceaux et T périodique est :

$$\sum_{n=0}^{\infty} = a_n \cos(2\pi n \frac{t}{T}) + b_n \sin(2\pi n \frac{t}{T}) \quad (\text{A.1})$$

où $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$

et pour $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi n \frac{t}{T}) dt$ et $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi n \frac{t}{T}) dt$

– Convergence

Si f est continue et dérivable sur $[0, T]$ sauf en un nombre fini de points en lesquels les limites à droite et à gauche (si elles ont un sens) de f et de sa dérivée \dot{f} sont des réels alors la série de Fourier de f converge.

La somme S de la série est définie par : $S(t) = f(t)$ si f est continue en t et $S(t) = \frac{f(t_-) + f(t_+)}{2}$ si f est discontinue en t .

– Propriétés

1. les coefficients sont indépendants de l'intervalle d'amplitude T sur lequel on calcule les intégrales.
2. si f est paire alors tous les b_n sont nuls, $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt$ et $a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(2\pi n \frac{t}{T}) dt$
3. si f est impaire alors tous les a_n sont nuls et $b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(2\pi n \frac{t}{T}) dt$

4. Parseval $\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

– Complexes

Les coefficients complexes de Fourier sont les $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi n \frac{t}{T}} dt$ où $n \in \mathbb{Z}$

$$C_n = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

La série de Fourier s'écrit alors : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t) e^{-2i\pi n \frac{t}{T}}$

– Illustration

A titre d'illustration, on prend la deuxième loi de contrôle 2.32 utilisée dans le calcul analytique d'une force normale périodique.

On peut voir figure A.2 la comparaison entre une loi exacte 2.32 et son développement en série de Fourier (degré 10). On peut voir également figure A.1 les valeurs des coefficients de la série de Fourier qui correspond à ce développement.

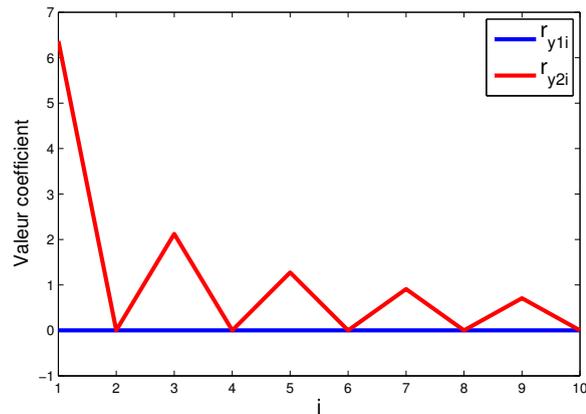


FIGURE A.1 – Coefficients de la série de Fourier

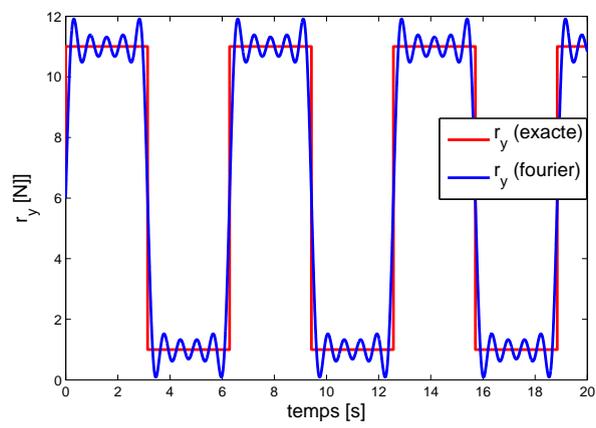


FIGURE A.2 – Comparaison entre une fonction et son approximation par une série de Fourier de degré 10.

Annexe B

Loi de Probabilité Gamma

L'équation qui définit la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire ξ de loi Gamma est :

$$f_{\xi}(x; k, \theta) = \frac{x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(k)\theta^k} \quad (\text{B.1})$$

Où $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-t} dt$ est la fonction gamma et k est un paramètre de forme. Le Tableau B.1 présente les principales caractéristiques de la loi Gamma de paramètre de forme k et θ .

Paramètre de forme	$k > 0$ et $\theta > 0$
Support	$x \in [0, +\infty[$
Espérance	$k\theta$
Variance	$k\theta^2$

TABLE B.1 – Caractéristiques de loi Gamma α

Une variable aléatoire S de support positif qui suit une loi Gamma peut s'écrire comme :

$$S = E[S] \eta_S \xi_S \quad (\text{B.2})$$

ξ_S suit une loi gamma de paramètres k, θ avec un support positif .

η_S : est une constante de normalisation ; on peut la déterminer en prenant l'espérance de l'équation B.2 :

$$E[S] = E[S] \eta_S E[\xi_S] \quad (\text{B.3})$$

donc

$$\eta_S = \frac{1}{E[\xi_S]} = \frac{1}{k\theta} \quad (\text{B.4})$$

La figure B.1 donne une représentation de la fonction densité de probabilité d'une distribution Gamma pour différents valeurs de paramètres k et θ .

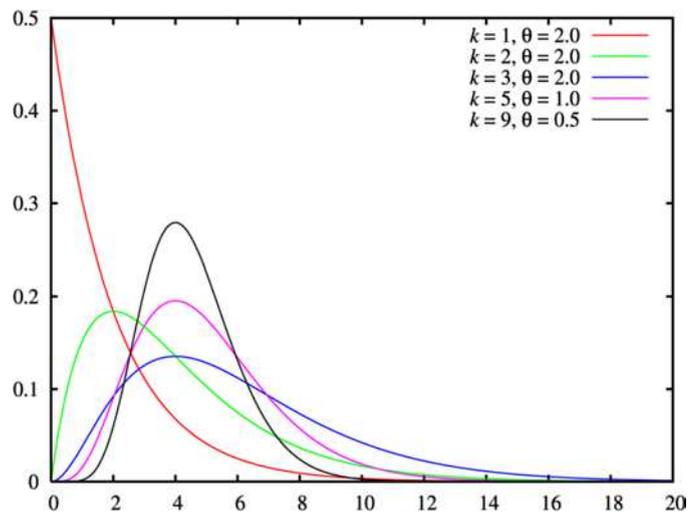


FIGURE B.1 – Fonction densité de probabilité (PDF)

Annexe C

Polynômes d'Hermite

La première définition des polynômes d'Hermite a été donnée en 1864 comme une suite fonctionnelle s'obtenant par dérivations successives.

Il y a deux façons de normaliser les polynômes d'Hermite :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2} \quad (\text{C.1})$$

(Forme dite probabiliste)

$$\hat{H}_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = e^{x^2/2} \left(x - \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2/2} \quad (\text{C.2})$$

(Forme dite physique)

Les deux définitions sont liées par la propriété d'échelle suivante :

$$\hat{H}_n(x) = 2^{n/2} H_n(x\sqrt{2}) \quad (\text{C.3})$$

Les six premiers polynômes d'Hermite probabilistes sont :

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1 \\
H_1(x) &= x \\
H_2(x) &= x^2 - 1 \\
H_3(x) &= x^3 - 3x \\
H_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3 \\
H_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x
\end{aligned} \tag{C.4}$$

La Fig C.1 donne une illustration des six premiers polynômes d'Hermite probabilistes.

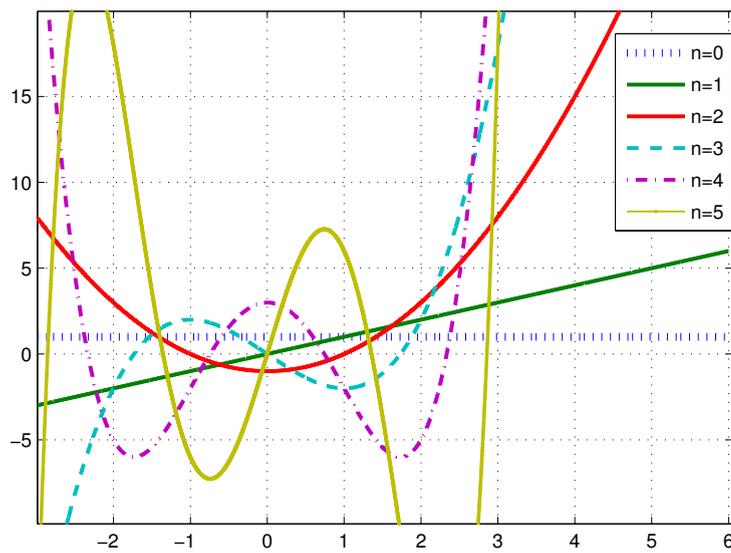


FIGURE C.1 – Les six premiers polynômes d'Hermite probabilistes

Par ailleurs, les polynômes d'Hermite possèdent les propriétés suivantes :

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = n H_{n-1}(x) \tag{C.5}$$

et :

$$H_i(x) H_j(x) = \sum_{k=|i-j|}^{i+j} C_{ijk} H_k(x) \quad (\text{C.6})$$

avec :

$$\begin{cases} C_{ijk} = 0 & \text{si } \frac{i+j+k}{2} \notin \mathbb{N} \\ C_{ijk} = \frac{i!j!}{\left(\frac{i+j-k}{2}\right)! \left(\frac{i-j+k}{2}\right)! \left(\frac{-i+j+k}{2}\right)!} & \text{si } \frac{i+j+k}{2} \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

Ces polynômes vérifient la relation d'orthogonalité pour toute v.a.g.c.r. ξ de densité de probabilité $\varphi(Y(\theta))$:

$$\langle H_n(\xi), H_m(\xi) \rangle = \delta_{nm} n! \quad (\text{C.8})$$

avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) H_m(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \delta_{nm} n! \quad (\text{C.9})$$

enfin d'après C.6, l'espérance du produit de trois polynômes de v.a.g.c.r est égale à :

$$D_{ijk} = \begin{cases} \frac{i!j!k!}{\left(\frac{i+j-k}{2}\right)! \left(\frac{i-j+k}{2}\right)! \left(\frac{-i+j+k}{2}\right)!} & \text{si } i+j+k \text{ pair et } k \in [|i-j|, i+j] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

Annexe D

Chaos polynômial

Le Tableau D.1 donne les formules permettant de déterminer les fonctions de base du chaos polynômial jusqu'à l'ordre $p = 3$ lorsque N variables aléatoires $[\xi_1, \dots, \xi_N]$ sont utilisées.

p	Formules	\forall
0	H_0	
1	$H_1(\xi_i)$	$i=1, \dots, N$
2	$H_2(\xi_i)$	$i=1, \dots, N$
	$H_1(\xi_i) H_1(\xi_j)$	$i=1, \dots, N-1$ $j=i+1, \dots, N$
3	$H_3(\xi_i)$	$i=1, \dots, N$
	$H_1(\xi_i) H_2(\xi_j)$	$i=1, \dots, N-1$ $j=i+1, \dots, N$
	$H_2(\xi_i) H_1(\xi_j)$	$i=1, \dots, N-1$ $j=i+1, \dots, N$
	$H_1(\xi_i) H_1(\xi_j) H_1(\xi_k)$	$i=1, \dots, N-2$ $j=i+1, \dots, N-1$ $k=j+1, \dots, N$

TABLE D.1 – Formules pour déterminer les polynômes du chaos jusqu'à l'ordre 3.

Les expressions des H_i sont décrites dans l'annexe C

Le nombre P de polynômes générés pour M variables de degré inférieur ou égal à p est :

$$P = \frac{(M + p)!}{M! p!} \quad (\text{D.1})$$

Le tableau D.2 donne les expressions des fonctions de base du développement chaos pour les ordres $p = 0$ à $p = 3$ lorsque 2 variables aléatoires ξ_1 et ξ_2 sont utilisées.

p	i	Ψ_i	$E[\Psi_i^2]$
0	0	1	1
1	1	ξ_1	1
	2	ξ_2	1
2	3	$-1 + \xi_1^2$	2
	4	$\xi_1 \xi_2$	1
	5	$-1 + \xi_2^2$	2
3	6	$\xi_1 (-3 + \xi_1^2)$	6
	7	$\xi_2 (-1 + \xi_1^2)$	2
	8	$\xi_1 (-1 + \xi_2^2)$	2
	9	$\xi_2 (-3 + \xi_2^2)$	6

TABLE D.2 – Polynômes jusqu'à l'ordre 3.

le cnam

Yassine KARIM
Caractérisation robuste de liaisons
amortissantes avec dispositifs
piézo-électriques pour la réduction de
vibrations de structures

le cnam

Résumé :

L'étude présentée dans ce document a pour objet l'étude de différents modes de réduction de vibrations dans les structures avec liaisons. Le premier mode étudié se base sur la dissipation d'énergie apportée par la déformation d'éléments piézoélectriques connectés à un circuit électrique adapté. Le second mode proposé se base sur la propriété de la liaison boulonnée à changer les fréquences propres d'une structure en fonction du serrage appliqué. Cette propriété est utilisée avec plusieurs lois de contrôle du serrage afin d'éviter les plages de fréquences critiques.

Ensuite une étude probabiliste est effectuée pour déterminer la robustesse de la réduction de vibrations par rapport à la variation de certains paramètres du modèle. Cette étude de robustesse est effectuée à travers des méthodes stochastiques non-intrusives, parmi lesquelles une méthode originale proposée. Elle permet une réduction de la taille du modèle stochastique à résoudre, ce qui réduit très considérablement le temps de calcul sans perte de qualité significative.

Mots clés :

Réduction de vibrations, piézoélectricité, shunt, joint boulonné, frottement sec, contrôle passif et actif, robustesse, méthode stochastique non intrusive.

Abstract :

The study presented in this thesis aims to explore other ways of vibration reduction in structures with bolted connections. The first way studied is based on the energy dissipation provided by the deformation of piezoelectric elements connected to an adapted electric circuit. The proposed second way is based on the property of the bolted joint of changing the natural frequencies of a structure according to the applied tightening force. This property is used via several control laws to avoid vibration on critical frequency ranges. Thereafter a probabilistic study is made to determine the robustness of the vibration reduction in relation to a variation of some model parameters. The robustness study is done through non-intrusive stochastic methods, among them a dedicated method that we propose. A stochastic model reduction is allowed which reduces dramatically the computation time without losing quality of stochastic results.

Keywords :

Vibration reduction, piezoelectric, shunt, electromechanical coupling, bolted joint, dry friction, passive and active control, robustness, stochastic non-intrusive method.

