

Estimation non biaisée et robuste de l'état et des défauts des systèmes stochastiques linéaires incertains

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 28 Décembre 2013

pour l'obtention du

Doctorat de l'École Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis
(spécialité Génie Electrique)

par

Karim KHEMIRI

Composition du jury

<i>Président :</i>	Naceur BENHADJ BRAIEK	Professeur à l'ESSTT
<i>Rapporteurs :</i>	Faouzi M'SAHLI	Professeur à l'ENIM
	Mounir SAYADI	Maître de Conférences à l'ESSTT
<i>Examineur :</i>	José RAGOT	Professeur à l'INPL (Co-encadreur de thèse)
<i>Directeur de thèse :</i>	Fayçal BEN HMIDA	Maître de Conférences à l'ESSTT

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse ont été effectués au sein de l'unité de recherche en Commande, Surveillance et Sûreté de fonctionnement des systèmes (C3S) de l'Ecole Supérieure des Sciences et Technique de Tunis (ESSTT), Sous la direction de Monsieur Abdalkader CHAARI, Maître de Conférences à l'ESSTT, que je remercie pour m'avoir accueilli au sein de son unité de recherche et mis à ma disposition les moyens nécessaires pour mener cette thèse à son terme.

Je tien à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse Monsieur Fayçal BEN HMIDA, Maître de Conférences à l'ESSTT, qui m'a encadré durant ces quelques années. Qu'il trouve ici l'expression de mes plus vifs remerciements pour la confiance qu'il m'a accordée et pour les conseils judicieux et nos discussions fructueuses, ainsi pour m'avoir fait bénéficier amplement de sa rigueur scientifique, de ses critiques objectives et de ses conseils avisés.

Je suis très reconnaissant envers Monsieur José RAGOT, Professeur à l'Institut Nationale Polytechnique de Lorraine (INPL) et chercheur au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN), d'être mon co-encadreur de thèse, je le remercie vivement pour sa disponibilité, pour sa participation précieuse et ses remarques enrichissantes et constructives.

J'exprime ma gratitude à Monsieur Naceur BENHADJ BRAIEK, Professeur à l'ESSTT, d'avoir accepté de faire partie de jury et de m'avoir fait l'honneur de le présider.

Mes plus vifs remerciements s'adresse à Monsieur Faouzi M'SAHLI, Professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir (ENIM) pour avoir accepté de juger ce travail en qualité de rapporteur au sein du jury.

J'adresse toute ma reconnaissance à Monsieur Mounir SAYADI, Maître de conférences à l'ESSTT, pour son acceptation d'être rapporteur sur mes travaux.

Enfin, je remercie tous mes amis et tous les collègues de l'unité de recherche C3S de l'ESSTT, pour l'ambiance conviviale qu'ils ont contribué à entretenir, les bons et joyeux moments passés en leur compagnie et leur sympathie.

*Je dédie cette thèse
à mon chère père et ma chère mère,
à ma chère femme Dhekra et ma petite Rahma,
à mon chère frère Anis et ma chère soeur Hedia
à tous mes amis de proche et de loin.*

Table des matières

Table des figures	xi
--------------------------	-----------

Liste des tableaux	xiii
---------------------------	-------------

Notations

liste des publications	3
-------------------------------	----------

Introduction générale	7
------------------------------	----------

1	Présentation générale	7
2	Revue de la littérature	8
3	Nos contributions	12
4	Organisation du rapport	15

Chapitre 1

Revue de la littérature sur le filtrage des systèmes linéaires à entrées inconnues	17
---	-----------

1.1	Introduction	18
1.2	Formulation du problème	19
1.3	Synthèse bibliographique sur le filtrage à entrée inconnue	20
1.4	Filtre KF de Kalman 1969	23

1.5	Cas des systèmes où $H_k = 0$	24
1.5.1	Filtre UMVF de Kitanidis 1987	24
1.5.2	Filtre OUMV de Darouach et al. 1997	26
1.5.3	Filtre RTSKF de Hsieh 2000	27
1.5.4	Filtre RUMVF de Gillijns et Moor 2007a	28
1.6	Cas des systèmes où $H_k \neq 0$	30
1.6.1	Filtre de Hou et Patton 1998 (OLMVE)	30
1.6.2	Filtre de Darouach et al. 2003 (OEF)	32
1.6.3	Filtre de Gillijns et Moor 2007b (RTSF)	33
1.6.4	Filtre de Hsieh 2009 (ERTSF)	34
1.6.5	Filtre de Cheng et al. 2009 (UMVSE)	35
1.6.6	Filtre de Khémiri et al. 2013 (RFSF)	37
1.6.6.1	Estimation de l'entrée inconnue	39
1.6.6.2	Estimation de l'état	41
1.7	Tableau récapitulatif	43
1.8	Etude comparative	45
1.8.1	Pour les systèmes où $H_k = 0$	45
1.8.2	Pour les systèmes où $H_k \neq 0$	46
1.9	Discussion	48
1.9.1	Pour la première classe des systèmes où $H_k = 0$	48
1.9.2	Pour la deuxième classe des systèmes où $H_k \neq 0$	48
1.10	Conclusion	49

Chapitre 2**Filtrage proportionnel-intégral des systèmes linéaires à entrées inconnues****51**

2.1	Introduction	52
2.2	Observateur a entrée inconnue	53
2.2.1	Formulation du problème	53
2.2.2	Synthèse de l'observateur PI^P	57
2.2.2.1	Observateur PI	57
2.2.2.2	Observateur PI^P	59
2.2.3	Exemple	61
2.3	Filtrage robuste à entrées inconnues avec des matrices de variance des bruits incertaines	66
2.3.1	Formulation du problème	66
2.3.2	Filtre de Kalman à deux étages	67
2.3.3	Filtre de Kalman à deux étages à gains proportionnel intégral	69
2.3.3.1	Sous-filtre estimateur d'état	69
2.3.3.2	Sous-filtre estimateur des entrées inconnues	71
2.3.4	Exemple illustratif	72
2.4	Estimations robuste des défauts et d'état des systèmes linéaires à entrées inconnues	75
2.4.1	Formulation du problème	75
2.4.2	Filtre de Kalman optimal à trois étages (OThSKF)	77
2.4.2.1	Filtre de Kalman à état augmenté (ASKF)	77
2.4.2.2	Transformation matricielle U-V	78
2.4.2.3	Découplage du filtre	80
2.4.3	Filtre de Kalman à trois étages à gains proportionnel intégral	83

2.4.4	Exemple illustratif	86
2.4.4.1	Première cas	88
2.4.4.2	Deuxième cas	89
2.5	Conclusion	91

<p>Chapitre 3 Estimation jointe et robuste de l'état et des défauts en présence de perturbations inconnues</p>	93
---	-----------

3.1	Introduction	94
3.2	Formulation du problème	96
3.3	Synthèse du filtre ARThSKF	98
3.3.1	Filtre OThSKF	98
3.3.2	Filtre RThSKF	102
3.3.3	Filtre ARThSKF	105
3.4	Synthèse du filtre UMVF	109
3.4.1	Estimation non biaisée	109
3.4.2	Estimation UMV	111
3.4.3	Mise à jour du filtre	113
3.5	Extension du filtre UMVF	114
3.6	Synthèse du filtre ORFSF	117
3.6.1	Estimation du défaut	119
3.6.2	Estimation de l'état du système	122
3.6.3	Mise à jour du filtre	125
3.7	Exemples illustratifs	125
3.7.1	Exemple 1 : estimation simultanée des défauts actionneurs et capteurs	125
3.7.2	Exemple 2 : étude comparative	128
3.8	Conclusion	134

Conclusion générale et perspectives

135

Bibliographie

137

Table des figures

2.1	Entrée et sorties mesurées	62
2.2	Etats vrais et estimés	63
2.3	Entrée inconnue et son estimée	63
2.4	Entrée et sorties mesurées	64
2.5	Etats vrais et estimés	64
2.6	Entrée inconnue et son estimée	64
2.7	Etats vrais et estimés	65
2.8	Entrée inconnue et son estimée	65
2.9	Entrée, entrée inconnue et sorties mesurées	73
2.10	Etats vrais et estimés	73
2.11	Entrée inconnue et son estimée	74
2.12	Entrée et sorties mesurées	87
2.13	Estimation de la variable d'état x_k^1	88
2.14	Estimation du défaut f_k	89
2.15	Estimation de l'entrée inconnue d_k	89

Table des figures

2.16	Estimation de la variable d'état x_k^1	90
2.17	Estimation du défaut f_k	90
2.18	Estimation de l'entrée inconnue d_k	91
3.1	Filtre estimateur de l'état et du défaut	96
3.2	Estimation de l'état x_k	127
3.3	Estimation simultanée d'un défaut actionneur et d'un défaut capteur	128
3.4	Entrée de commande u_k du système	129
3.5	Estimation de la variable d'état x_k^1	130
3.6	Estimation de la variable d'état x_k^2	132
3.7	Estimation de la variable d'état x_k^3	132
3.8	Estimation du défaut f_k^1	133
3.9	Estimation du défaut f_k^2	133

Liste des tableaux

1.1	Algorithme récursif du filtre Kalman [1960] (KF)	23
1.2	Algorithme récursif du filtre de Kitanidis [1987] (UMVF)	26
1.3	Algorithme récursif du filtre de Darouach et Zasadzinski [1997] (OUMV)	27
1.4	Algorithme récursif du filtre de Hsieh [2000] (RTSKF)	28
1.5	Algorithme récursif du filtre de Gillijns et Moor [007a] (RUMVF)	30
1.6	Algorithme récursif du filtre de Hou et Patton [1998] (OLMVE)	32
1.7	Algorithme récursif du filtre de Darouach et al. [2003] (OEF)	33
1.8	Algorithme récursif du filtre de Gillijns et Moor [007b] (RTSF)	34
1.9	Algorithme récursif du filtre de Hsieh [2009] (ERTSF)	35
1.10	Algorithme récursif du filtre de Cheng et al. [2009] (UMVSE)	36
1.11	Algorithme récursif du filtre de Khémiri et al. [2013] (RFSF)	43
1.12	Tableau récapitulatif pour les filtres	44
1.13	Evaluation des valeurs <i>RMSE</i>	45
1.14	Evaluation des valeurs <i>RMSE</i> : <i>cas1</i>	46
1.15	Evaluation des valeurs <i>RMSE</i> : <i>cas2</i>	47

1.16	Evaluation des valeurs <i>RMSE</i> : <i>cas3</i>	47
2.1	Evaluation des valeurs <i>RMSE</i>	74
2.2	Evaluation des valeurs <i>RMSE</i>	88
2.3	Evaluation des valeurs <i>RMSE</i>	91
3.1	Evaluation des valeurs <i>RMSE</i>	128
3.2	Trace des matrices variance-covariance de l'état et des défauts	128
3.3	Evaluation des valeurs <i>RMSE</i>	131
3.4	Trace des matrices variance-covariance de l'état et des défauts	131

Notations

Acronymes

<i>WLS</i>	Weighted Least-Square
<i>SVD</i>	Singular Value Decomposition
<i>RMSE</i>	Root Mean Square Error
<i>LPV</i>	Linear Parameter variant
<i>LTI</i>	Linear Time Invariant
<i>UIO</i>	Unknown Input Observer
<i>PIO</i>	Proportional Integral Observer
<i>KF</i>	Kalman Filter
<i>ASKF</i>	Augmented State Kalman Filter
<i>OTSKF</i>	Optimal Two-Stage Kalman Filter
<i>RTSKF</i>	Robust Two-Stage Kalman Filter
<i>OPT_hSKF</i>	Optimal Three-Stage Kalman Filter
<i>RT_hSKF</i>	Robust Three-Stage Kalman Filter
<i>PITSKF</i>	Proportional Integral Two-Stage Kalman Filter
<i>PIT_hSKF</i>	Proportional Integral Three-Stage Kalman Filter
<i>UMVF</i>	Unbiased Minimum-Variance Filter
<i>RFSF</i>	Recursive Five Step Kalman Filter
<i>ORFSF</i>	Optimal Recursive Five Step Kalman Filter

Vecteurs et matrices

$M > 0$	Matrice M symétrique, définie positive
$M \geq 0$	Matrice M symétrique, semi-définie positive
M^T	Transposée de la matrice M
M^{-1}	Inverse de la matrice M
M^+	Pseudo inverse de la matrice M
$O_{n,m}$	Matrice nulle de dimension $n \times m$
I_n	Matrice identité de dimension n
$\mathcal{E}[\cdot]$	Espérance mathématique
$cov[\cdot]$	Matrice covariance matrix
$\det(M)$	Déterminant de la matrice M
$\dim(M)$	Dimension de la matrice M
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Ensemble des vecteurs et des matrices de dimension $n \times m$

liste des publications

Article de revue scientifiques

1. Khémiri, K., Ben Hmida, F., Ragot, J. et Gossa, M. (2011). Novel optimal recursive filter for state and fault estimation of linear stochastic systems with unknown disturbances. *International Journal of Applied Mathematics and computer Science* , 21(4) :629-637. (Impact factor 2011 : 0.487)
2. Ben Hmida, F., Khémiri, K. et Ragot, J. (2012). Three-stage Kalman filter for state and fault estimation of linear stochastic systems with unknown inputs. *Journal of the Franklin Institute, Engineering and Applied Mathematics*, 349 (7) :2369-2388. (Impact factor 2011 : 2.724)
3. Ben Hmida, F., Khémiri, K., Ragot, J. et Gossa, M. (2010). Unbiased minimum-variance filter for state and fault estimation of linear time-varying systems with unknown disturbances. *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2010 :Article ID 343586, 17 pages. (Impact factor 2010 : 0.535)
4. Ben Hmida, F., Khémiri, K., Ragot, J. et Gossa, M. (2010a). Robust filtering for state and fault estimation of linear stochastic systems with unknown disturbance. *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2010 :Article ID 591639, 24 pages.(Impact factor 2010 : 0.535)

Conférences avec comité de lecture

1. Khémiri K., Ben Hmida F. et Ragot J. " Novel recursive optimal filter for the joint input-state estimation in linear discrete-time systems ". International Conference on Control, Decision and Information Technologies, CODIT'2013, May 6-8, 2013, Hammamet, Tunisia.
2. Khémiri K., Gannouni F., Ben Hmida F., Ragot J. et GOSSA M. "Robust fault and state estimation for linear discrete-time systems with unknown disturbances using PI three-stage Kalman filter ". International Conference on Communications, Computing and Control Application, CCCA'11, March 3-5, 2011, Hammamet, Tunisia.
3. Bessaoudi T., Khémiri K., Ben Hmida F. et Gossa M. " Recursive least-squares estimation for the joint input-state estimation of linear discrete time systems with unknown input". International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices, SSD'11 , March 22-25, 2011, Sousse, Tunisia.
4. Khémiri K., Ben Hmida F., Ragot J. et Gossa M. "Observateur proportionnel multi-intégral pour les systèmes linéaires à entrées inconnues". Conférence Francophone d'Automatique, CIFA2010, Juin 2-4, 2010, Nancy, France.
5. Khémiri K., Bessaoudi T., Ben Hmida F., Gossa M. et Ragot J. " Unbiased minimum-variance estimation for linear stochastic discrete time system with unknown input ". International conference JTEA'2010, March 26-28, 2010., Hammamet , Tunisia
6. Khémiri K., Ben Hmida F., Ragot J. et Gossa M. " Filtre de Kalman à deux étages pour l'estimation d'état et de défauts de systèmes stochastiques linéaires ". Conférence internationale JTEA'08 du 02 au 04 mai 2008 à Hammamet, TUNISIE.
7. Gannouni F., Khémiri K., Ben Hmida F. et Chaari A. " Finite-horizon robust Kalman filter for joint fault-state estimation of linear time-varying uncertain systems ". International conference STA'2010, december 19-21, 2010, Monastir, Tunisia.
8. Gannouni F., Khémiri K., Ben Hmida F. et Ragot J. " Robust fault and state estimation for discrete time-varying uncertain systems". International conference STA'2009, december 19-21, 2009, Hammamet, Tunisia.

-
9. Khémiri K., Ben Hmida F., Ragot J. et Gossa M. "Robust input and state estimation for linear discrete-time systems using PI two-stage Kalman filter ". International conference STA'2008, December 20-22, 2008, Sousse, Tunisia.
 10. Khémiri K. et Ben Hmida F. " Filtrage non biaisé à minimum de variance des systèmes stochastiques linéaires à entrées inconnues ". Conférence internationale STA'2007, du 05 au 07 novembre 2007 à Monastir, TUNISIE.

Introduction générale

1 Présentation générale

L'avancement technologique a rendu les systèmes industriels de plus en plus complexes. Cette complexité toujours croissante peut avoir comme conséquence une détérioration de la sûreté de fonctionnement par augmentation du taux de défaillance du système. De ce fait, une fonction de détection et d'isolation des défauts (FDI : Fault Detection and Isolation) est devenue indispensable pour garantir un niveau de disponibilité et de fiabilité des systèmes industriels. Une fonction de détection doit être capable de détecter d'une manière précoce et avec le minimum de fausse alarme, la présence de tous les défauts qui peuvent affecter le système. Une fois, un défaut est détecté, il vient l'opération d'isolation de l'élément défaillant et l'identification de la (ou les) cause(s) du défaut. L'ensemble de ces solutions fait partie intégrante du module diagnostic. Dans ce cadre là, notre travail constitue une contribution à la synthèse de nouveaux filtres récursifs permettant d'obtenir une estimation non biaisée et à minimum de variance de l'état et des défauts de systèmes stochastiques linéaires en présence de perturbations inconnues additives externes (dites entrées inconnues car on ne dispose d'aucune connaissance a priori sur leur modèle d'évolution). Ces filtres peuvent être appliqués pour résoudre des problèmes de diagnostic de défauts (FDI) ou de commande tolérante aux défauts (FTC : Fault Tolerant Control).

Les systèmes considérés, dans cette étude, sont décrits par des modèles stochastiques linéaires, à temps discret et à temps variant. De par les hypothèses nécessaires à leur établissement, ces

modèles sont souvent entachés d'incertitudes (dynamiques rapides négligées, perturbations non mesurées, retards négligés, variations paramétriques mal connues, etc.) qui peuvent cependant être partiellement pris en compte de plusieurs manières :

- les bruits affectant l'état du système et les mesures peuvent être caractérisés par des séquences aléatoires. Ces dernières sont souvent assimilées à des variables gaussiennes de moyennes nulles et de matrices de covariance constituant les volumes d'incertitudes des phénomènes difficilement modélisables,
- des entrées inconnues peuvent représenter les perturbations externes non mesurables dont les modèles d'évolution temporelle peuvent être en partie connus. Dans [Chen et Patton \[1996, 1999\]](#) et [Hou et Patton \[1998\]](#), elles sont considérées comme étant une classe d'incertitudes additives qui peuvent affecter soit l'équation d'état soit simultanément les deux équations d'état et de mesure. Cela revient à décrire une grande classe de systèmes incertains par un simple modèle linéaire à entrées inconnues.

Ces phénomènes indésirables font partie du fonctionnement normal du système. Par conséquent, ils représentent des paramètres de nuisance au système FDI. On a donc intérêt à concevoir un système FDI robuste vis-à-vis des incertitudes afin de réduire, et si possible d'éliminer, les fausses alarmes lors de la détection. Par ailleurs, la mise en oeuvre d'un système FDI se résume à la conception d'un filtre permettant d'obtenir une estimation non biaisée et robuste des défauts. Cette estimation sera testée par la suite afin de décider selon quel état le système fonctionne (normal, dégradé ou défaillant).

2 Revue de la littérature

Dans la littérature, il existe un ensemble de travaux qui s'intéressent à l'estimation d'état des systèmes stochastiques linéaires affectés par des entrées inconnues. Nous citons à titre indicatif les travaux de [Kitanidis \[1987\]](#), [Alouani et al. \[1992\]](#), [Hou et Patton \[1998\]](#), [Keller \[1999\]](#), [Hsieh \[2000\]](#), [Darouach et al. \[2003\]](#), [Hsieh \[2006\]](#), [Hsieh \[006a\]](#), [Gillijns et Moor \[007a\]](#), [Gillijns et Moor \[007b\]](#) et [Hsieh \[2008\]](#). Ces travaux utilisent, généralement, la technique de filtrage à entrées inconnues qui est connue en anglais sous le vocable "unknown input filtering

(UIF) ". Cette dernière est largement appliquée dans la littérature pour résoudre, par exemple un problème de compensation de biais [Friedland \[1969\]](#), [Alouani et al. \[1992\]](#), [Hsieh et Chen \[1999\]](#), [Ignagni \[2000\]](#), un problème de géophysique et d'environnement [Kitanidis \[1987\]](#) et un problème de détection et d'isolation de défauts [Basseville et Nikiforov \[1994\]](#), [Chen et Patton \[1996\]](#), [Ben Hmida et al. \[2010\]](#), [Ben Hmida et al. \[010a\]](#). Le filtrage à entrées inconnues est généralement abordé par deux approches différentes : avec modèle des entrées inconnues et sans modèle des entrées inconnues.

La première approche utilise le concept de système à état augmenté, qui consiste à concaténer au vecteur d'état le vecteur des entrées inconnues. Dans ce cas, il est supposé qu'un modèle décrivant l'évolution dynamique de ces entrées inconnues soit disponible. Dans la mesure où les propriétés statistiques des différents bruits sont parfaitement connues, le filtre de Kalman à état augmenté (ASKF : Augmented State Kalman Filter) permet d'obtenir une solution optimale au sens de la minimisation de l'erreur quadratique moyenne (MMSE : Minimum Mean Square Error). Pour réduire le nombre d'opérations et le coût de calcul, [Friedland \[1969\]](#) a développé un filtre de Kalman à deux étages (TSKF : Two-Stage Kalman Filter). L'idée principale sur laquelle repose cette technique, consiste à utiliser une double transformation pour découpler le filtre ASKF en deux sous-filtres : un sous-filtre dédié à l'estimation de l'état et un sous-filtre estimateur du biais, ce dernier sous-filtre étant utilisé pour corriger les estimations de l'état. Ce filtre, proposé par Friedland, n'est optimal qu'en présence d'un biais constant. Depuis, plusieurs chercheurs ont étendu l'idée de Friedland pour couvrir des biais stochastiques ; à titre d'exemple on peut citer les travaux de [Alouani et al. \[1992\]](#), [Keller \[1999\]](#), [Hsieh et Chen \[1999\]](#). Récemment, [Kim et al. \[2006\]](#) ont développé une version adaptative du filtre TSKF notée ATSKF (Adaptive Two-Stage Kalman Filter). Dans ce filtre, ils ont introduit deux facteurs d'oubli, variables dans le temps, pour adapter les deux matrices de variance-covariance a priori intervenant dans les deux étages du filtre de Kalman. Ces facteurs d'oubli se calculent en fonction d'une estimation de la matrice de variance-covariance de l'erreur d'innovation. Les mêmes auteurs présentent, un peu plus tard, une analyse de la stabilité du filtre ATSKF dans [Kim et al. \[2007\]](#).

La seconde approche considère le cas où on ne dispose d'aucune informations a priori sur l'évolution temporelle des entrées inconnues, c'est-à-dire sans modèle des entrées inconnues.

Dans ce cas, [Kitanidis \[1987\]](#) a été le premier à résoudre ce problème en utilisant un estimateur linéaire non-biaisé et à minimum de variance (UMV : unbiased minimum-variance). [Darouach et al. \[2003\]](#) ont étendu le filtre de Kitanidis en utilisant une technique de paramétrisation pour obtenir un filtre estimateur optimal (OEF : Optimal Estimator Filter). [Hsieh \[2000\]](#) a développé un filtre équivalent au filtre de Kitanidis mais qui utilise la technique de filtrage à deux étages (TSKF) et qui permet de considérer les systèmes affectés par des entrées inconnues sur l'état. Ce filtre est nommé filtre de Kalman robuste à deux étages (RTSKF : Robust Two-Stage Kalman Filter). Ce filtre a été étendu par la suite dans [Hsieh \[2007\]](#) dans le cas des entrées inconnues affectant l'état et la mesure du système afin d'obtenir l'ARTSKF (Augmented Robust Two-Stage Kalman Filter). Ce même auteur a étendu ces travaux en utilisant une technique de paramétrisation pour obtenir des filtres plus performants, nous citons à titre d'exemple le filtre OMVF (optimal minimum-variance filter) dans [Hsieh \[2006\]](#), le filtre OUMVF (Optimal Unbiased Unimimum-Variance Filter) dans [Hsieh \[2006\]](#), le filtre PMVF (parametrized minimum-variance filter) dans [Hsieh \[007a\]](#), et le filtre PTSKF (parametrized three-stage Kalman filter) dans [Hsieh \[2008\]](#). [Gillijns et Moor \[007a\]](#) ont traité ce problème pour estimer l'état et l'entrée inconnue d'un système stochastique linéaire, à temps variant et à temps discret, tout en considérant que les entrées inconnues affectent uniquement l'équation d'état. Pour cela, ils ont conçu un filtre optimal au sens de la minimisation de variance des erreurs d'estimation de l'état et des entrées inconnues. Les mêmes auteurs dans [Gillijns et Moor \[007b\]](#) ont proposé un nouveau filtre récursif permettant d'obtenir une estimation jointe et UMV de l'état et des entrées inconnues pour la même classe de systèmes sauf qu'ils sont affectés par des entrées inconnues dans l'équation d'état et dans l'équation d'observation. Ce filtre est nommé RTSF (Recursive Three-Step Filter) qui est limité à une matrice de distribution directe des entrées inconnues sur l'équation de mesure (direct feedthrough matrix) et sous réserve qu'elle soit de rang plein. Récemment, on trouve les travaux de [Hsieh \[2008\]](#) et [Cheng et al. \[2009\]](#). Dans [Hsieh \[2008\]](#), une extension du filtre ARTSKF est proposée nommée UERTSKF (Unified Extented Robust Two-Stage Kalman Filter). Dans [Cheng et al. \[2009\]](#), les auteurs ont abordé le problème d'optimalité globale dans le filtre récursif proposé. Ces auteurs montrent également que ce filtre, nommé ROF (Recursive Optimal Filter), est globalement optimal dans des cas particuliers puisque ce dernier est conçu après transformation du modèle original en utilisant la décomposition en valeurs singulières.

Le filtre ROF est limité uniquement à l'estimation de l'état du système et non des entrées inconnues. Par contre, [Hsieh \[2009\]](#) a étendu le travail de [Gillijns et Moor \[007a\]](#) pour traiter le cas où la matrice de distribution directe des entrées inconnues sur l'équation de mesure est de rang arbitraire. Le filtre obtenu est appelé ERTSF (Extended Recursive Three-Step Filter) qui reste limité dans certains cas, puisqu'il délivre une estimation biaisée des entrées inconnues. Plus récemment dans [Hsieh \[2010\]](#), l'auteur propose deux nouveaux filtres GOUMVF (Global Optimal Unbiased Minimum-Variance Filter) et ROUMVF (Refined Optimal Unbiased Minimum-Variance Filter). Ces filtres sont globalement optimaux et se limitent à une estimation non biaisée et à minimum de variance de l'état des systèmes en présence des entrées inconnues affectant à la fois l'état et les mesures.

Le problème de l'estimation des défauts pour les systèmes stochastiques linéaires avec entrées inconnues a retenu l'attention de plusieurs chercheurs, nous citons à titre d'exemple les travaux de [Nikoukhah \[1994\]](#), [Keller \[1998\]](#), [Chen et Patton \[1996\]](#), [Chen et Patton \[1999\]](#), [Jamouli et al. \[2003\]](#), [Ben Hmida et al. \[2010\]](#), [Ben Hmida et al. \[010a\]](#) et [Khémiri et al. \[2011a\]](#). Dans le cas des systèmes à temps continu, [Nikoukhah \[1994\]](#) propose une technique basée sur l'erreur d'innovation pour générer des résidus non biaisés et ayant un caractère de bruit blanc. La détection des défauts sera donc obtenue en utilisant des tests statistiques sur la moyenne et/ou sur la variance de ces résidus. Par contre pour les systèmes à temps discret, nous trouvons les travaux de [Keller \[1998\]](#) et [Jamouli et al. \[2003\]](#) qui se limitent aux systèmes linéaires et à temps invariant (LTI : linear time-invariant). Dans [Keller \[1998\]](#), l'auteur développe un filtre permettant la détection et l'isolation des défauts multiples ou bien des défauts qui apparaissent simultanément ou séquentiellement sur le système. L'idée, sur laquelle repose ces travaux, consiste à générer des résidus directionnels en utilisant un filtre isolateur de défauts. Plus tard, [Jamouli et al. \[2003\]](#) ont étendu ce travail en proposant un nouveau filtre basé sur le concept du système inverse. Dans [Chen et Patton \[1996, 1999\]](#), les problèmes de filtrage optimal et de diagnostic robuste des défauts des systèmes stochastiques linéaires à temps variant (LTV : linear time-variant) en présence des perturbations inconnues sont étudiés. L'optimalité du filtre est obtenue suite à la minimisation de la variance de l'erreur d'estimation de l'état du système après un découplage parfait des perturbations. Les résidus générés représentent donc l'erreur d'estimation découplée de la sortie du système. Par la suite, ces résidus sont traités par des tests statistiques

pour détecter les défauts. Malheureusement, le problème des défauts multiples et plus spécifiquement le cas des défauts actionneurs et capteurs simultanés n'est pas traité dans [Chen et Patton \[1996, 1999\]](#). Récemment, ils sont publiés dans nos travaux, [Ben Hmida et al. \[2010\]](#), [Ben Hmida et al. \[2010a\]](#), [Khémiri et al. \[2011a\]](#), [Ben Hmida et al. \[2012\]](#) et feront l'objet de développements au cours du troisième chapitre.

Nos objectifs, dans ce travail, consistent à résoudre le problème de filtrage non biaisé et à minimum de variance par deux techniques : le filtrage proportionnel intégral et le filtrage robuste à minimum de variance.

3 Nos contributions

Nos contributions, dans la première thématique, demeurent essentiellement dans le développement de trois estimateurs :

- Le premier consiste à la synthèse d'un observateur multi-intégral (PI^P) qui est présenté dans [Khémiri et al. \[2010\]](#). L'estimation non biaisé de l'état pour les systèmes linéaires à temps discret en présence d'entrées inconnues. On propose comme solution la synthèse d'un observateur multi-intégral (PI^P). L'idée de cette approche est de procéder à des intégrations successives de l'erreur d'estimation de sortie pour estimer précisément les entrées inconnues puis de les utiliser pour corriger l'estimation de l'état et de la sortie du système. Une telle opération n'est possible que si on assure un découplage parfait entre l'état observé du système et les entrées inconnues.
- Le deuxième est nommé PI TSKF (Proportional-integral two stage Kalman filter) qui a fait l'objet du travail publié dans [Khémiri et al. \[2008\]](#). Ce travail était dans le but de résoudre le problème d'estimation robuste vis-à-vis des entrées inconnues et des incertitudes sur les matrices de covariance des bruits d'état, des mesures et des entrées inconnues. Dans ce cas, on suppose que les matrices de covariance des bruits ne sont pas parfaitement connues. Ce filtre est obtenu par l'extension du filtre développé par [Hsieh et Chen \[1999\]](#) en ajoutant l'action intégrale sur l'erreur d'estimation de l'état et des entrées inconnues.
- Le troisième filtre PITHSKF (Proportional integral three stage Kalman filter) vient alors

pour résoudre le problème de l'estimation robuste et jointe d'état et des défauts en présence d'entrées inconnues et des incertitudes sur les matrices de covariance des différents bruits d'état, des mesures, des défauts et des entrées inconnues. Pour cela, on propose une extension du filtre OThSKF développé par [Ben Hmida et al. \[010a\]](#) en ajoutant des actions intégrales sur les erreurs d'estimation de l'état, des défauts et des entrées inconnues afin d'obtenir le filtre PThSKF ([Khémiri et al. \[2011b\]](#)).

Nos contributions, dans la deuxième thématique, résident essentiellement dans le développement de trois nouveaux filtres récursifs permettant une estimation jointe et robuste à minimum de variance de l'état et des défauts des systèmes stochastiques linéaires en présence des perturbations inconnues.

- Un premier filtre nommé ARThSKF (Augmented robust three-stage Kalman filter) qui a fait l'objet du travail publié dans [Ben Hmida et al. \[010a\]](#). Il s'agit ici d'une extension des travaux de [Hsieh et Chen \[1999\]](#), [Hsieh \[2000\]](#) et [Hsieh \[007b\]](#). Dans ce travail, on propose d'utiliser le concept du filtre de Kalman à trois étages (ThSKF : Three-stage Kalman filter) qui consiste, moyennant une transformation matricielle, à découpler le filtre ASKF (Augmented State Kalman Filter) en trois sous-filtres : un sous-filtre estimateur de l'état, un sous-filtre estimateur des défauts et un sous-filtre estimateur des perturbations inconnues. Ce filtre est obtenu d'une part, à partir des modifications apportées aux équations de mise à jour du filtre OThSKF (Optimal three-stage Kalman filter) et, d'autre part, en utilisant un modèle augmenté des défauts et des perturbations inconnues. Il s'agit d'obtenir un filtre qui ne dépend que de l'initialisation de l'état du système et d'aucune informations a priori sur les défauts et sur les entrées inconnues. Ce filtre est utilisé, par la suite, pour résoudre le problème d'estimation robuste et simultanée des défauts capteurs et actionneurs des systèmes stochastiques linéaires affectés par des perturbations additives sur l'état et sur les mesures. De plus, il présente l'avantage d'être moins gourmand en temps de calcul (nécessite moins d'opérations d'additions et de multiplications connues sous le terme " flops ") et permettant ainsi de garantir une estimation non biaisée et à minimum de variance de l'état du système et des défauts. Nous montrerons, à travers un exemple de simulation, que ce filtre présente des performances meilleures au sens de la minimisation de l'erreur quadratique moyenne (RMSE : Root Mean Square Error) par rapport à un filtre existant dans la littérature connu

- par UERTSKF (Unified Extension Robust Two-Stage Kalman Filter) publié dans [Hsieh \[2008\]](#).
- Le deuxième filtre récursif nommé EUMVF (Extended Unbiased Minimum-Variance Filter) a fait l'objet du travail publié dans [Ben Hmida et al. \[010a\]](#). Ce travail constitue une extension des travaux de [Gillijns et Moor \[007a\]](#) et de [Hsieh \[2009\]](#) et qui s'intéresse aux systèmes stochastiques linéaires affectés par des perturbations inconnues sur l'état et des défauts sur l'état et sur les mesures. Ce filtre récursif sera conçu par l'utilisation d'un estimateur linéaire non-biaisé et à minimum de variance (LUMVE : Linear Unbiased Minimum-Variance Estimator). L'estimation des défauts sera obtenue en utilisant la méthode des moindres carrés pondérés (WLS : Weighted Least-Square). Nous commençons d'abord à traiter le cas simple où la matrice directe d'injection des défauts sur les mesures est de rang plein, par la suite nous étendons ce travail pour traiter le cas où cette matrice est de rang arbitraire. Malheureusement, ce filtre souffre d'une certaine insuffisance, dans certains cas, en délivrant une estimation biaisée des défauts.
 - Le troisième filtre ORFSF (Optimal Recursive Five Step Filter) vient alors pour combler les insuffisances du filtre EUMVF et a fait l'objet d'un article soumis dans une revue scientifique [Khémiri et al. \[2011a\]](#). L'idée sur laquelle repose ce travail, consiste à transformer l'équation de mesures du système original en utilisant une décomposition en valeurs singulières de la matrice d'injection directe des défauts sur les mesures. Cependant, la sortie et les défauts sont décomposés en deux composantes. Il en découle une estimation des défauts moyennant une superposition de deux termes : un premier qui dépend de la composante estimée directement à partir des mesures et le second terme est estimé indirectement avec un retard d'un pas à partir de l'état du système. En utilisant cette technique, il est possible alors d'améliorer les performances du filtre pour obtenir une estimation non biaisée des défauts même en présence d'une matrice d'injection directe des défauts sur les mesures de rang non plein. Des exemples numériques montrent que ce filtre permet de résoudre efficacement le problème d'estimation simultanée des défauts capteurs et actionneurs et qu'il possède, dans certains cas, des performances nettement meilleures par comparaison à d'autres filtres existants dans la littérature.

4 Organisation du rapport

Ce travail est composé de trois chapitres. Le premier chapitre présentera une revue de la littérature sur le filtrage à entrées inconnues des systèmes linéaires stochastiques à temps discret et une synthèse bibliographique sur le filtrage avec un développement de certaines approches. Une étude comparative entre les différents filtres est effectuée dans le but de mettre en évidence les inconvénients et les avantages de chacune, qui feront par la suite l'objectif de notre travail. Dans le deuxième chapitre, on commencera par traiter les systèmes linéaires à entrées inconnues par la conception d'un observateur proportionnel multi-intégral à entrées inconnues permettant une estimation découplée de l'état et des entrées inconnues sous forme polynomiale de degré " p ". Par la suite, on va étudier le problème d'estimation des systèmes linéaires stochastiques. On développera l'estimateur robuste (PI TSKF) d'état en présence des entrées inconnues et des incertitudes sur les matrices de covariance des différents bruits d'état, de mesures et des entrées inconnues. Ensuite, on développera le filtre PI ThSKF pour résoudre le problème de l'estimation jointe des défauts et d'état en présence des entrées inconnues et des incertitudes sur les matrices de covariances des différents bruits d'état, des défauts et des entrées inconnues. Le troisième chapitre sera dédié à l'estimation jointe non biaisée à minimum de variance d'état et des défauts en présence de perturbations inconnues. Nos contributions, dans cette thématique, résidera essentiellement dans le développement de trois nouveaux filtres récursifs qu'on a cité précédemment ARThSKF, EUMV et ORFSF. Les filtres seront testés et comparés avec des filtres existant dans la littérature par simulation à travers deux exemples numériques. Enfin, on terminera ce rapport par une conclusion générale.

1

Revue de la littérature sur le filtrage des systèmes linéaires à entrées inconnues

Sommaire

1.1	Introduction	18
1.2	Formulation du problème	19
1.3	Synthèse bibliographique sur le filtrage à entrée inconnue	20
1.4	Filtre KF de Kalman 1969	23
1.5	Cas des systèmes où $H_k = 0$	24
1.5.1	Filtre UMVF de Kitanidis 1987	24
1.5.2	Filtre OUMV de Darouach et al. 1997	26
1.5.3	Filtre RTSKF de Hsieh 2000	27

1.5.4	Filtre RUMVF de Gillijns et Moor 2007a	28
1.6	Cas des systèmes où $H_k \neq 0$	30
1.6.1	Filtre de Hou et Patton 1998 (OLMVE)	30
1.6.2	Filtre de Darouach et al. 2003 (OEF)	32
1.6.3	Filtre de Gillijns et Moor 2007b (RTSF)	33
1.6.4	Filtre de Hsieh 2009 (ERTSF)	34
1.6.5	Filtre de Cheng et al. 2009 (UMVSE)	35
1.6.6	Filtre de Khémiri et al. 2013 (RFSE)	37
1.6.6.1	Estimation de l'entrée inconnue	39
1.6.6.2	Estimation de l'état	41
1.7	Tableau récapitulatif	43
1.8	Etude comparative	45
1.8.1	Pour les systèmes où $H_k = 0$	45
1.8.2	Pour les systèmes où $H_k \neq 0$	46
1.9	Discussion	48
1.9.1	Pour la première classe des systèmes où $H_k = 0$	48
1.9.2	Pour la deuxième classe des systèmes où $H_k \neq 0$	48
1.10	Conclusion	49

1.1 Introduction

Ce chapitre a pour objet de décrire les techniques de filtrage à entrées inconnues (UIF : unknown input filtering) existantes dans la littérature des systèmes linéaires stochastiques, à temps discret, à temps variant et en présence des entrées inconnues. Nous présentons une synthèse bibliographique sur les travaux qui portent sur le filtrage optimal non biaisé et à minimum de variance des systèmes linéaires sujets à des entrées inconnues. Dans ce chapitre nous distinguons deux classes de systèmes :

- Une première classe qui concerne les systèmes affectés par des entrées inconnues sur l'équation d'état. Pour cette classe de système, il existe des travaux qui s'intéressent à

l'estimation de l'état du système uniquement [Kitanidis \[1987\]](#), [Darouach et Zasadzinski \[1997\]](#) et d'autres qui estiment simultanément l'état et les entrées inconnues [Hsieh \[2000\]](#), [Gillijns et Moor \[007a\]](#).

- Une deuxième classe où l'entrée inconnue affecte simultanément l'état et les mesures. Il existe des travaux qui s'intéressent à l'estimation d'état uniquement [Hou et Patton \[1998\]](#), [Darouach et al. \[2003\]](#), [Cheng et al. \[2009\]](#) et d'autres qui estiment d'une manière jointe l'état et les entrées inconnues [Gillijns et Moor \[007b\]](#), [Hsieh \[2009\]](#), [Khémiri et al. \[2013\]](#).

Pour chaque classe de système, une étude comparative entre ces différents filtres sera menée par simulation sous Matlab à travers un exemple académique.

1.2 Formulation du problème

Nous considérons un système linéaire stochastique à temps discret décrit par la représentation d'état suivante :

$$x_{k+1} = A_k x_k + G_k d_k + w_k \quad (1.1)$$

$$y_k = C_k x_k + H_k d_k + v_k \quad (1.2)$$

avec $x_k \in \mathfrak{R}^n$ l'état du système, $d_k \in \mathfrak{R}^p$ l'entrée inconnue du système et $y_k \in \mathfrak{R}^m$ la sortie du système. Les matrices A_k , G_k , C_k et H_k sont supposées connues et de dimensions appropriées.

\mathcal{H}_1 : les bruits d'état w_k et de mesure v_k sont gaussiens de moyennes nulles, non corrélés et de matrices variance-covariance :

$$\mathcal{E} [w_k w_l^T] = Q_k \delta_{kl}$$

$$\mathcal{E} [v_k v_l^T] = R_k \delta_{kl}$$

$$\mathcal{E} [w_k v_l^T] = 0 \delta_{kl}$$

\mathcal{H}_2 : l'état initial x_0 est une réalisation d'une séquence gaussienne indépendante des bruits w_k et

v_k :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[x_0] &= \hat{x}_0 \\ \mathcal{E}[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] &= P_0^x\end{aligned}$$

\mathcal{H}_3 : On suppose que

$$\begin{aligned}\text{la paire } (A_k, C_k) &\text{ est observable} \\ \text{rang}[A_k] &= n \text{ et } \text{rang}[C_k] = m (\geq p)\end{aligned}$$

Dans ce chapitre nous proposons d'étudier les deux cas suivants :

- 1ère cas sans matrice de distribution directe des entrées inconnues, c'est-à-dire $H_k = 0$,
- 2ème cas avec matrice de distribution directe des entrées inconnues c'est-à-dire $H_k \neq 0$

L'objectif ici est de décrire les filtres optimaux existants dans la littérature. Il s'agit des filtres récursifs permettant d'obtenir une estimation non biaisée et à minimum de variance soit de l'état du système uniquement soit de l'état et des entrées inconnues simultanément et ceci selon la classe de systèmes considérés.

1.3 Synthèse bibliographique sur le filtrage à entrée inconnue

En 1960, [Kalman \[1960\]](#) a présenté une solution récursive au problème de filtrage pour les systèmes linéaires stochastiques. Le filtre de Kalman (KF) est un ensemble d'équations mathématiques utilisant un calcul récursif pour estimer l'état d'un processus tout en minimisant l'erreur quadratique moyenne. Ce filtre est puissant et largement utilisé dans plusieurs domaines permettant ainsi une estimation de l'état du système avec un minimum de variance. Dans le cas des systèmes linéaires à entrées inconnues le problème d'estimation à minimum de variance de l'état est largement abordé dans la littérature ([Kitanidis \[1987\]](#), [Darouach et Zasadzinski \[1997\]](#), [Hou et Patton \[1998\]](#), [Hsieh \[2000\]](#), [Gillijns et Moor \[007a\]](#), [Cheng et al. \[2009\]](#), [Chen et Patton](#)

[1996] et...). Dans ce contexte, ils existent d'autres approches qui diffèrent du filtre KF standard pour résoudre le problème de l'estimation d'état en présence des entrées inconnues. Ces travaux constituent en quelque sorte une extension du filtre de Kalman standard. Nous citons à titre d'exemple les travaux de [Kitanidis \[1987\]](#), [Gillijns et Moor \[2007b\]](#), [Hsieh \[2009\]](#).

En 1987, [Kitanidis \[1987\]](#) a développé un filtre robuste qui fournit une estimation optimale de l'état indépendamment de la valeur des entrées inconnues. Cette approche consiste à estimer l'état du système en utilisant la forme standard du filtre de Kalman. Elle permet d'avoir un estimateur non biaisé à minimum de variance nommé : filtre non biaisé à minimum de variance (UMVF : "Unbiased Minimum-Variance Filter "). La méthode est développée en présence d'une entrée inconnue déterministe additive ajoutée à l'équation de l'état. [Darouach et Zasadzinski \[1997\]](#) ont utilisé une technique paramétrique pour étendre l'approche de [Kitanidis \[1987\]](#). Cette approche est plus compliquée que l'originale, elle évite seulement l'utilisation de l'optimisation d'un Lagrangien et le calcul des multiplicateurs de Lagrange. [Hou et Patton \[1998\]](#) ont développé une méthode de filtrage optimale robuste. Cette méthode consiste tout d'abord à découpler l'entrée inconnue en utilisant une transformation particulière, par la suite ils utilisent la technique d'innovation pour estimer l'état du système. Le filtre obtenu est similaire à un filtre standard avec des modifications sur les matrices de gain et de covariance. Il a une forme générale car l'entrée inconnue est présente dans les équations d'état et d'observation. De plus, les auteurs considèrent que les bruits de l'état et de mesure sont corrélés. En 2000, [Hsieh \[2000\]](#) a proposé une nouvelle approche pour la synthèse d'un filtre robuste des systèmes dont l'état est affecté par des entrées inconnues. Ce filtre est obtenu par l'extension de l'OTSKF (Optimal Two Stage Kalman Filter) [Hsieh et Chen \[1999\]](#) en se basant sur la technique de découplage qui se traduit en une contrainte algébrique. Ce filtre a été testé sur un exemple numérique et il a permis d'obtenir une estimation optimale à minimum de variance de l'état du système. L'auteur présente également un théorème dans lequel il précise que ce filtre est équivalent au filtre de " Kitanidis " moyennant une condition sur les rangs. Le filtre obtenu est nommé : Filtre de Kalman robuste à deux étages (RTSKF : " Robust two-Stage Kalman Filter "). En 2003, [Darouach et al. \[2003\]](#) ont proposé un nouveau filtre optimal, nommé filtre estimateur optimal (OEF : " Optimal Estimator Filter"), en utilisant la même technique utilisée dans [Darouach et Zasadzinski \[1997\]](#). Ils considèrent ici un cas plus général, c'est-à-dire un système stochastique

linéaire en présence d'une entrée inconnue affectant les équations d'état et d'observation. Les auteurs proposent d'utiliser deux paramètres matriciels k et α pour satisfaire les conditions de synthèse du filtre OEF. Le premier paramètre k joue le rôle d'une matrice gain qui permet de minimiser la variance de l'erreur d'estimation. Le second paramètre α est utilisé pour satisfaire des conditions de rang de certaines matrices. Hsieh [2006] montre que la condition suffisante pour obtenir une estimation non biaisée, est limitée à certaines applications. De ce fait, l'optimalité du filtre au sens de la minimisation de l'erreur quadratique moyenne n'est pas toujours garantie. Pour cela, Hsieh [2006] a proposé un filtre optimal à minimum de variance (OMVF : "Optimal Minimum-Variance Filter"). Ce filtre consiste à résoudre le problème posé par le filtre OEF Darouach et al. [2003] et à avoir une estimation non biaisée à minimum de variance. Dans ce travail, l'auteur utilise une condition plus générale sur les rangs pour éviter la limitation d'applications de ce filtre. En 2007, Gillijns et Moor [007a], par extension des travaux de Kitanidis [1987] et Darouach et Zasadzinski [1997], ont développé un filtre récursif qui consiste à obtenir une estimation non biaisée avec minimum de variance de l'état et de l'entrée inconnue. Gillijns et Moor [007a], moyennant certaines conditions, ont montré que ce filtre récursif est équivalent aux filtres de Kitanidis [1987] et Darouach et Zasadzinski [1997]. De plus, ils ont montré que ce filtre permet d'obtenir une estimation optimale de l'entrée inconnue similaire au filtre proposé par Hsieh [2000]. Enfin, les auteurs ont donné une formulation récursive de ce filtre.

En 2007, Gillijns et Moor [007b], ont développé un nouveau filtre récursif (Récursive Three-Step Filtre : RTSF) qui permet d'étudier les systèmes linéaires à temps discret avec injection directe de l'entrée inconnue dans l'équation de mesures (Direct feedthrough matrix). Ce filtre est établi en trois étapes : une première étape pour l'estimation de l'entrée inconnue, une deuxième étape pour la correction des estimations par les mesures et une troisième étape pour la mise à jour du filtre. Les auteurs supposent que la matrice directe de distribution des entrées inconnues doit être de rang plein. Récemment, Hsieh [2009] a relaxé cette hypothèse en développant un filtre nommé ERTSF (Extension of Recursive Three Step Filtre), c'est-à-dire que matrice (feed-through matrix) est de rang arbitraire. De même, Cheng et al. [2009], ont relaxé cette hypothèse sur la matrice tout en développant un filtre récursif permettant de garantir une optimalité globale au sens de la minimisation de l'erreur quadratique moyenne. Les auteurs ont également développé, dans le cas stationnaire, une condition suffisante de la convergence et de la stabilité

de ce filtre.

Pour la suite de ce chapitre, nous proposons de se limiter au développement des filtres suivants :

- Pour la classe des systèmes où $H_k = 0$: le filtre de Kalman (KF), le filtre de [Kitanidis \[1987\]](#), le filtre de [Hsieh \[2000\]](#), le filtre de [Darouach et Zasadzinski \[1997\]](#) et le filtre de [Gillijns et Moor \[007a\]](#).
- Pour la classe des systèmes où $H_k \neq 0$: le filtre de Hou et Patton (OLMVE), le filtre de [Darouach et al. \[2003\]](#), le filtre de [Gillijns et Moor \[007b\]](#), le filtre de [Hsieh \[2009\]](#) et le filtre de [Cheng et al. \[2009\]](#).

1.4 Filtre KF de Kalman 1969

Le filtre de Kalman est un reconstituteur d'état dans un environnement stochastique. Il permet d'obtenir une solution optimale lorsque certaines hypothèses sont vérifiées telles que \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_3 . Le filtre de Kalman se résume par le tableau qui suit :

<p>Initialisation pour $k = 0$ $\hat{x}_{0/0}$ et $P_{0/0}$ <i>Etape de prédiction</i> $\hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1}\hat{x}_{k-1/k-1}$ $P_{k/k-1}^x = A_{k-1}P_{k-1/k-1}^x A_{k-1}^T + Q_{k-1}$ <i>Etape de filtrage</i> $\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k^x (y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1})$ $K_k^x = P_{k/k-1}^x C_k^T (C_k P_{k/k-1}^x C_k^T + R_k)$ $P_{k/k}^x = (I - K_k^x C_k) P_{k/k-1}^x$</p>

TABLE 1.1 – Algorithme récursif du filtre [Kalman \[1960\]](#) (KF)

Sous les hypothèses \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_3 le filtre de Kalman constitue un estimateur linéaire optimal à minimum de variance. En plus, Il génère un résidu qui est l'erreur d'innovation possédant les caractéristiques d'un bruit blanc reflétant toutes perturbations dans le système. Ce qui a fait du

filtre de Kalman un générateur idéal de résidus pour le diagnostic de fonctionnement dans le cas des systèmes stochastiques linéaires en absence des entrées inconnues.

1.5 Cas des systèmes où $H_k = 0$

Dans cette première classe, on considère $H_k = 0$, le système d'équations (1.1) et (1.2) se réécrit sous la forme suivante :

$$x_{k+1} = A_k x_k + G_k d_k + w_k \quad (1.3)$$

$$y_k = C_k x_k + v_k \quad (1.4)$$

1.5.1 Filtre UMVF de Kitanidis 1987

La synthèse du filtre de Kitanidis [1987] est basée sur la théorie d'optimalité en utilisant les multiplicateurs de Lagrange. L'étape de mise à jour du filtre est déterminée de telle sorte qu'elle ne sera pas affectée par les entrées inconnues, ce qui rend le filtre insensible aux entrées inconnues et par conséquent il améliore la qualité de l'estimation de l'état du système. Nous supposons qu'il est possible de déterminer la matrice gain L_k qui minimise $trace \{P_k^x\}$ sous la contrainte algébrique suivante :

$$L_k C_k G_{k-1} - G_{k-1} = 0 \quad (1.5)$$

La solution de ce problème sera reformulée dans le théorème 1.1

Théorème 1.1. (Kitanidis [1987]) Si la matrice $F_k^T \tilde{R}_k^{-1} F_k$ est régulière, alors la matrice gain L_k garantissant $\min_{L_k} trace \{P_k^x\}$ sachant que $L_k C_k G_{k-1} - G_{k-1} = 0$ est donnée par :

$$L_k = P_{k/k-1}^x C_k^T \tilde{R}_k^{-1} + \left[G_{k-1} - P_{k/k-1}^x C_k^T \tilde{R}_k^{-1} C_k G_{k-1} \right] \left[G_{k-1}^T C_k^T \tilde{R}_k^{-1} C_k G_{k-1} \right]^{-1} G_{k-1}^T C_k^T \tilde{R}_k^{-1} \quad (1.6)$$

avec $F_k = C_k G_{k-1}$

Démonstration. Pour résoudre ce problème, on se propose d'utiliser une technique d'optimisation basée sur les multiplicateurs de Lagrange.

la matrice de covariance $P_{k/k}^x$ est donnée par

$$P_{k/k}^x = (I - L_k C_k) P_{k/k-1}^x (I - L_k C_k)^T + L_k R_k L_k^T \quad (1.7)$$

Calculons la *trace* $\{P_k^x\}$

$$\mathcal{L}(L_k, \Lambda_k) = \text{trace} \left\{ P_{k/k-1}^x - 2P_{k/k-1}^x C_k^T L_k^T + L_k \tilde{R}_k L_k^T \right\} - 2\text{trace} \left\{ (L_k C_k G_{k-1} - G_{k-1}) \Lambda_k^T \right\} \quad (1.8)$$

Les dérivées partielles de $\mathcal{L}(L_k, \Lambda_k)$ par rapport à L_k et Λ_k sont respectivement données :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(L_k, \Lambda_k)}{\partial L_k} = 2\tilde{R}_k L_k^T - 2C_k P_{k/k-1}^x - 2C_k G_{k-1} \Lambda_k^T \quad (1.9a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(L_k, \Lambda_k)}{\partial \Lambda_k} = -2(L_k C_k G_{k-1} - G_{k-1}) \quad (1.9b)$$

Les valeurs optimales de L_k et Λ_k seront obtenues en annulant simultanément les deux équations (1.9a) et (1.9b). Ils sont alors solution du système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_k & -F_k \\ F_k^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_k^T \\ \Lambda_k^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_k P_{k/k-1}^x \\ G_{k-1}^T \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Si la matrice $F_k^T \tilde{R}_k^{-1} F_k$ est non singulière, alors on peut utiliser le complément de Schur pour montrer que (1.10) admet solution unique. On en déduit alors l'expression donnée par (1.6) de la matrice gain L_k . \square

Le filtre de [Kitanidis \[1987\]](#) UMVF est résumé dans le tableau ci-dessous. Le filtre se limite uniquement à l'estimation non biaisée et à minimum de variance de l'état du système. Mais sa performance n'est garantie que si l'entrée inconnue est présente uniquement dans l'équation d'état et que la condition ci-dessous soit satisfaite :

$$\text{rang}[C_k G_{k-1}] = \text{rang}[G_{k-1}] \quad (1.11)$$

<p>Initialisation pour $k = 0$ \hat{x}_0 et P_0 Pour tout $k > 0$, le filtre est $\hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1}\hat{x}_{k-1/k-1}$ $P_{k/k-1}^x = A_{k-1}P_{k-1/k-1}^x A_{k-1}^T + Q_{k-1}$ avec $\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + L_k (y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1})$ $L_k = P_{k/k-1}^x C_k^T \tilde{R}_k^{-1} + [G_{k-1} - P_{k/k-1}^x C_k^T \tilde{R}_k^{-1} C_k G_{k-1}] [G_{k-1}^T C_k^T \tilde{R}_k^{-1} C_k G_{k-1}]^{-1} G_{k-1}^T C_k^T \tilde{R}_k^{-1}$ $P_{k/k}^x = (I - L_k C_k) P_{k/k-1}^x (I - L_k C_k)^T + L_k R_k L_k^T, \tilde{R}_k = C_k P_k^x C_k^T + R_k$</p>

TABLE 1.2 – Algorithme récursif du filtre de [Kitanidis \[1987\]](#) (UMVF)

1.5.2 Filtre OUMV de Darouach et al. 1997

[Darouach et Zasadzinski \[1997\]](#) par extension du travail de [Kitanidis \[1987\]](#) ont développé un estimateur non biaisé et à minimum de variance qui estime l'état en présence des entrées inconnues. De plus, ces auteurs ont analysé la stabilité et la convergence du filtre proposé. Pour que ce filtre soit non biaisé, les auteurs trouvent la même contrainte que celle obtenue par [Kitanidis \[1987\]](#) :

$$L_{k+1}C_{k+1}G_k - G_k = 0 \quad (1.12)$$

Pour que la matrice gain soit optimale, [Darouach et Zasadzinski \[1997\]](#) ont développé une nouvelle approche qui consiste à paramétriser la solution de (1.12) par une matrice arbitraire. Cette dernière est choisie pour minimiser la variance de l'estimateur de l'état. De plus, ils mentionnent que la condition sur les rangs doit être satisfaite :

$$\text{rang} [C_{k+1}G_k] = \text{rang} [G_k] = p \quad (1.13)$$

Dans ce cas, la matrice gain est donnée par cette expression :

$$L_{k+1} = G_k \Pi_k + K_{k+1} T_k \quad (1.14)$$

$$\Pi = (C_{k+1}G_k)^+ \quad (1.15)$$

$$T_k = \alpha_k (I - (C_{k+1}G_k)(C_{k+1}G_k)^+) \quad (1.16)$$

avec $(C_{k+1}G_k)^+$ est la matrice pseudo-inverse de $(C_{k+1}G_k)$, α_k est une matrice choisie de telle

sorte que T_k soit de rang plein.

Il convient ensuite de déterminer la matrice gain K_{k+1} pour minimiser la trace de la matrice variance-covariance de l'erreur d'estimation d'état. Les équations décrivant le filtre OUMV sont résumées dans le tableau suivant :

<p>Initialisation pour $k = 0$ \hat{x}_0 et P_0 Pour tout $k > 0$, le filtre est</p> $\hat{x}_{k+1} = F_k \hat{x}_k + G_k \Pi_k y_{k+1} + K_{k+1} (T_k y_{k+1} - \beta_{k+1} \hat{x}_k)$ $P_{k+1} = (F_k - K_{k+1} \beta_{k+1}) P_k (F_k - K_{k+1} \beta_{k+1})^T + Q_{1k} + K_{k+1} \Theta_k K_{k+1}^T - K_{k+1} S_k^T - S_k K_{k+1}^T$ <p style="text-align: center;">avec</p> $Q_{1,k} = \Sigma_k Q_k \Sigma_k^T + G_k \Pi_k R_k + \Pi_k^T G_k^T, \quad \Sigma_k = I - G_k \Pi_k C_{k+1}$ $F_k = \Sigma_k A_k, \quad \beta_{k+1} = T_k C_{k+1} A_k$ $S_k = \Sigma_k Q_k C_{k+1}^T T_k^T - G_k \Pi_k R_{k+1} T_k^T$ $\Theta_k = T_k (C_{k+1} Q_k C_{k+1}^T + R_{k+1}) T_k^T$ $K_{k+1} = (F_k P_k \beta_{k+1}^T + S_k) (\beta_{k+1} P_k \beta_{k+1}^T + \Theta_k)^{-1}$

TABLE 1.3 – Algorithme récursif du filtre de [Darouach et Zasadzinski \[1997\]](#) (OUMV)

La matrice gain K_{k+1} existe, si la matrice $T_k \tilde{R}_{k+1} T_k^T$ est non singulière.

$$\tilde{R}_{k+1} = C_{k+1} (Q_k + A_k P_k A_k^T) C_{k+1}^T + R_{k+1} \quad (1.17)$$

1.5.3 Filtre RTSKF de Hsieh 2000

L'idée générale de ce travail consiste à concevoir un filtre de Kalman robuste à deux étages avec une entrée inconnue tout en modifiant le filtre optimal de Kalman à deux étages (OTSKF) développé dans [Hsieh \[2000\]](#). L'idée de base repose sur l'utilisation du filtre OTSKF avec une simple modification sur l'étape de mise à jour du filtre de l'entrée inconnue. Un tel filtre (RTSKF) est qualifié de robuste car il permet d'obtenir une estimation sans biais et à minimum de variance malgré la présence d'une entrée inconnue. Cette entrée inconnue peut être déterministe ou stochastique dont on ne dispose d'aucune connaissance a priori sur leur modèle d'évolution. Ce filtre trouve son importance dans le cas où les propriétés statistiques de l'entrée inconnue sont inconnues. Le filtre RTSKF est plus général que le filtre de [Kitanidis \[1987\]](#). En effet, le filtre UMVF se limite pour le cas d'une entrée inconnue qui apparaît dans l'équation

<p>Initialisation pour $k = 0$ \hat{x}_0 et P_0 Pour tout $k > 0$, le filtre est</p> $\hat{x}_{k/k} = \bar{x}_{k/k} + V_k d_{k/k}$ $P_{k/k}^x = P_{k/k}^{\bar{x}} + V_k P_{k/k}^d V_k^T$ $\hat{d}_{k/k} = K_k^d (y_k - C_k \bar{x}_{k/k-1})$ $P_{k/k}^d = \{G_{k-1}^T C_k^T \tilde{R}_k^{-1} C_k G_{k-1}\}^{-1}$ <p style="text-align: center;">avec</p> $\bar{x}_{k/k-1} = A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1}$ $\bar{x}_{k/k} = \bar{x}_{k/k-1} + K_k^{\bar{x}} (y_k - C_k \bar{x}_{k/k-1})$ $P_{k/k-1}^{\bar{x}} = A_{k-1} \hat{P}_{k-1/k-1}^x A_{k-1}^T + Q_{k-1}$ $K_k^{\bar{x}} = P_{k/k-1}^{\bar{x}} C_k^T \tilde{R}_k^{-1}$ $P_{k/k}^{\bar{x}} = (I - K_k^{\bar{x}} C_k) P_{k/k-1}^{\bar{x}}$ $K_k^d = P_{k/k}^d G_{k-1}^T C_k^T \tilde{R}_k^{-1}$ $V_k = (I - K_k^{\bar{x}} C_k) G_{k-1}, \quad \tilde{R}_k = C_k P_{k/k-1}^{\bar{x}} C_k^T + R_k$
--

TABLE 1.4 – Algorithme récursif du filtre de Hsieh [2000] (RTSKF)

d'état, par contre le filtre RTSKF peut considérer la présence de l'entrée inconnue également dans l'équation d'observation. De plus, l'auteur montre dans le théorème 1.2 ci-dessous que le filtre RTSKF est équivalent au filtre de Kitanidis [1987].

Théorème 1.2. (Hsieh [2000]) *On considère le système décrit par les équations (1.3) et (1.4). Si la condition $\text{rang}[C_{k+1}G_k] = \text{rang}[G_k] = p$ est vérifiée, alors le filtre (RTSKF) est équivalent au filtre de Kitanidis [1987] (UMVF).*

1.5.4 Filtre RUMVF de Gillijns et Moor 2007a

Gillijns et Moor [007a] ont proposé un filtre non biaisé à minimum de variance (RMVUF) où l'entrée inconnue affecte uniquement l'équation d'état, pour estimer l'état x_k et l'entrée inconnue d_k , à partir d'une séquence de mesures connues $y_k = \{y_0, \dots, y_k\}$ et on suppose qu'on ne dispose d'aucune information a priori sur l'entrée inconnue. Les auteurs supposent la même condition que Kitanidis [1987] et Darouach et al. [2003], à savoir que $\text{rang}[C_k G_{k-1}] = \text{rang}[G_{k-1}] = p$, et ils ont développé un filtre récursif en introduisant deux gains M_k et K_k , le premier pour garantir que l'estimateur est non biaisé et à minimum de variance et le deuxième pour minimiser la variance de $\hat{x}_{k/k}$. La matrice gain M_k est obtenue par la méthode des moindres carrés (WLS).

L'erreur d'observation \tilde{y}_k est donnée par :

$$\tilde{y}_k = C_k G_{k-1} d_{k-1} + e_k \quad (1.18)$$

avec

$$e_k = C_k (A_{k-1} \tilde{x}_{k-1} + w_{k-1}) + v_k \quad (1.19)$$

$$\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_{k/k} \quad (1.20)$$

pour que l'estimateur soit non biaisé, M_k doit satisfaire

$$M_k C_k G_{k-1} = I \quad (1.21)$$

La matrice M_k représente une solution LS non biaisée en satisfaisant la contrainte (1.21), mais elle n'est pas à minimum de variance car e_k ne satisfait pas la condition de Gauss Markov [Kailath et al. \[2000\]](#). Nous pouvons obtenir un estimateur non biaisé à minimum de variance pour d_{k-1} par la méthode (WLS) en considérant que $E([e_k e_k^T])^{-1}$ est la matrice de pondération on utilise donc l'estimation par moindres carrés.

$$\tilde{R}_k = E[e_k e_k^T] = C_k P_{k/k-1} C_k^T + R_k \quad (1.22)$$

puisque la matrice de covariance \tilde{R}_k est définie positive, nous pouvons chercher une matrice inversible \tilde{S}_k de telle façon que $\tilde{R}_k = \tilde{S}_k \tilde{S}_k^T$. L'équation (1.18) peut être transformée comme suit :

$$\tilde{S}_k^{-1} \tilde{y}_k = \tilde{S}_k^{-1} C_k G_{k-1} d_{k-1} + \tilde{S}_k^{-1} e_k \quad (1.23)$$

La solution (LS) de l'équation (1.23) est donnée sous la forme suivante :

$$d_{k-1} = (F_k^T \tilde{R}_k^{-1} F_k)^{-1} \tilde{R}_k^{-1} \tilde{y}_k \quad (1.24)$$

avec $F_k = C_k G_{k-1}$

Le filtre de Gillijns et Moor [007a] peut être résumé comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \text{Initialisation pour } k = 0 \\
 & \quad \hat{x}_0 \text{ et } P_0 \\
 & \text{Pour tout } k > 0, \text{ le filtre est} \\
 & \quad \hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1} \\
 & \quad \hat{d}_{k-1} = M_k (y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1}) \\
 & \quad \hat{x}_{k/k}^* = \hat{x}_{k/k-1} + G_{k-1} \hat{d}_{k-1} \\
 & \quad \hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k}^* + K_k (y_k - C_k \hat{x}_{k/k}^*) \\
 & \quad P_{k/k-1} = A_{k-1} P_{k-1/k-1} A_{k-1}^T + Q_{k-1} \\
 & \quad P_{k/k}^* = (I_n - G_{k-1} M_k C_k) P_{k/k-1} (I_n - G_{k-1} M_k C_k)^T + G_{k-1} M_k R_k M_k^T G_{k-1}^T \\
 & \quad P_{k/k} = K_k \tilde{R}_k^* K_k^T - V_k^* K_k^T - K_k V_k^{*T} + P_{k/k}^* \\
 & \quad P_{k/k}^d = (F_k^T \tilde{R}_k^{-1} F_k)^{-1} \\
 & \quad \text{avec} \\
 & \quad F_k = (C_k G_{k-1}), \quad M_k = (F_k^T \tilde{R}_k^{-1} F_k)^{-1} F_k^T \tilde{R}_k^{-1} \\
 & \quad V_k^* = P_{k/k}^* C_k^T + S_k^*, \quad S_k^* = -(G_{k-1} M_k R_k) \\
 & \quad \tilde{R}_k^* = C_k P_{k/k}^* C_k^T + R_k + C_k S_k^* + S_k^{*T} C_k^T \\
 & \quad K_k = (P_{k/k}^* C_k^T + S_k^*) \alpha_k^T (\alpha_k \tilde{R}_k^* \alpha_k^T)^{-1} \alpha_k \\
 & \quad \alpha_k = [0 \ I_r] U_k^T \tilde{S}_k^{-1} \\
 & \quad \tilde{R}_k = C_k P_{k/k-1} C_k^T + R_k
 \end{aligned}$$

TABLE 1.5 – Algorithme récursif du filtre de Gillijns et Moor [007a] (RUMVF)

Si la condition (1.21) est satisfaite, le filtre proposé permet une estimation jointe non biaisée et à minimum de variance de l'état du système et de l'entrée inconnue.

1.6 Cas des systèmes où $H_k \neq 0$

Dans cette section, on suppose que l'entrée affecte les deux équations d'état et d'observation ($H_k \neq 0$), d'où le système représenté par les équations (1.1) et (1.2)

1.6.1 Filtre de Hou et Patton 1998 (OLMVE)

En 1998, Hou et Patton [1998] ont développé un filtre optimal qui a une forme similaire à celle du filtre de Kalman. Ce filtre utilise une technique de découplage de l'entrée inconnue

et applique l'approche standard d'innovation. Une condition nécessaire pour l'existence d'un observateur découplé de l'entrée inconnue est :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} H_k & C_k G_k \\ 0 & H_k \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} G_k \\ H_k \end{bmatrix} + \text{rang} H_k \quad (1.25)$$

L'idée est de vérifier cette condition pour construire un système équivalent où l'entrée inconnue est découplée. Pour cela, les auteurs considèrent un système original comme suit :

$$x_{k+1} = A_k x_k + G_k d_k + w_k \quad (1.26)$$

$$y_k = C_k x_k + H_k d_k + w_k \quad (1.27)$$

Le système équivalent est donné sous la forme suivante :

$$x_{k+1} = A_k x_k + \bar{B}_{k,1} y_k + \bar{B}_{k+1,2} y_{k+1} + \bar{G}_{k,1} w_k + \bar{G}_{k+1,2} w_{k+1} \quad (1.28)$$

$$\bar{y}_k = \bar{C}_k x_k + \bar{H}_k w_k \quad (1.29)$$

avec

$$\bar{y}_k = (I - H_k H_k^+) \quad (1.30)$$

$$\bar{A}_k = (I - \bar{B}_k \bar{C}_k) (A_k - G_k H_k^+ C_k) \quad (1.31)$$

$$\bar{B}_k = G_k (I - H_k^+ H_k) [\bar{C}_k G_k (I - H_k^+ H_k)]^+ \quad (1.32)$$

$$\bar{C}_k = (I - H_k H_k^+) C_k \quad (1.33)$$

$$\bar{B}_{1,k} = (I - \bar{B}_k \bar{C}_k) G_k H_k^+ \quad (1.34)$$

$$\bar{B}_{2,k} = \bar{B}_k (I - H_k H_k^+) \quad (1.35)$$

$$\bar{G}_{1,k} = (I - \bar{B}_k \bar{C}_k) (I - G_k H_k^+) \quad (1.36)$$

$$\bar{H}_k = (I - H_k H_k^+) \quad (1.37)$$

Le filtre développé par [Hou et Patton \[1998\]](#) pour le système équivalent est résumé sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & \text{Initialisation pour } k = 0 \\
 & \hat{x}_0, P_0 \text{ et } \bar{P}_0 \\
 & \text{Pour tout } k > 0, \text{ le filtre est} \\
 & \hat{x}_k = \bar{x}_k + \bar{K}_k T_k (y_k - C \bar{x}_k) \\
 & P_k = \bar{P}_k + \bar{H}_k R_k \bar{H}_k^T - \bar{K}_k \bar{R}_k K_k^T \\
 & \text{avec} \\
 & \bar{x}_{k+1} = D_k (\bar{\varphi}_k \hat{x}_k + G_k H_k^+ y_k) + \bar{H}_{k+1} y_{k+1} - D_k G_k H_k^+ R_k \bar{T}_k^T \bar{R}_k^+ T_k (y_k - C_k \bar{x}_k) \\
 & P_{k+1} = D_k \bar{P}_{k+1} D_k^T \\
 & \bar{P}_{k+1} = \bar{\varphi}_k P_k \bar{\varphi}_k^T + \bar{Q}_k \\
 & K_k = \left(\bar{P}_k C_k^T - \bar{H}_k \bar{R}_k \right) \bar{T}_k^T \bar{R}_k^+ \\
 & \bar{H}_k = G_{k-1} U_{k-1} (T_k C_k G_k U_{k-1})^+ T_k \\
 & \bar{R}_k = \bar{T}_k \bar{R}_k \bar{T}_k^T \\
 & \bar{R}_k = C_k \bar{P}_k C_k^T + R_k \\
 & \bar{Q}_k = Q_k + \bar{\varphi}_k L_k R_k (H_k^+)^T G_k^T + G_k H_k^+ R_k L_k^T \bar{\varphi}_k^T + G_k H_k^+ (R_k - R_k \bar{T}_k^T R_k^+ \bar{T}_k R_k) (H_k^+)^T G_k^T \\
 & D_k = (I - H_{k+1} C_{k+1}) \\
 & \bar{\varphi}_k = A_k - G_k H_k^+ C_k \\
 & T_k = (I - H_k H_k^+) \\
 & U_k = (I - H_k^+ H_k) \\
 & L_k = \bar{H}_k + \bar{K}_k \bar{T}_k \\
 & \bar{T}_k = T_k (I - C_k \bar{H}_k)
 \end{aligned}$$

TABLE 1.6 – Algorithme récursif du filtre de Hou et Patton [1998] (OLMVE)

Hou et Patton [1998] ont représenté un filtre optimal simple et rigoureux en utilisant une technique de découplage de l'observateur de l'entrée inconnue. Le filtre proposé par les auteurs peut être considéré comme une amélioration du filtre de Kalman standard en ce qui concerne l'estimation avec minimum de variance. En se basant sur ce travail nous pouvons réaliser un filtre optimal qui découple l'entrée inconnue pour les systèmes stochastiques à temps continu. L'inconvénient de ce travail et que les auteurs n'ont pas discuté la convergence et la stabilité de ce filtre.

1.6.2 Filtre de Darouach et al. 2003 (OEF)

Darouach et al. [2003] ont présenté le filtre OEF (Optimal Estimator Filter) qui constitue une version généralisée du filtre de Kitanidis [1987] (UMVF) et du filtre de Hsieh [2000] (RTSKF). Ils considèrent que l'entrée inconnue apparaît à la fois dans les équations d'état et d'observation

($H_k \neq 0$). L'algorithme du (OEF) peut être résumé comme suit :

<p>Initialisation pour $k = 0$ \hat{x}_0 et P_0 Pour tout $k > 0$, le filtre est $\hat{x}_k = \bar{x}_k + L_k(y_k - C\bar{x}_k)$ $P_k = \bar{P}_k + L_k\tilde{R}_kL_k^T - \bar{P}_kC_k^TL_k^T - L_kC_k\bar{P}_k$ avec $\bar{x}_{k+1} = A_k\hat{x}_k$ $\bar{P}_{k+1} = A_kP_kA_k^T + Q_k$ $L_k = \bar{\Gamma}_k\Sigma_k^+ + \bar{K}_k\hat{H}_k$ $\hat{H}_k = \alpha_k(I - \Sigma_k\Sigma_k^+)$ $\bar{K}_k = (\bar{P}_kC_k^T - \bar{\Gamma}_k\Sigma_k^+\tilde{R}_k)\hat{H}_k^T - (\hat{H}_k\tilde{R}_k\hat{H}_k^T)^{-1}$ $\tilde{R}_k = C_k\bar{P}_kC_k^T + R_k$ $\bar{\Gamma}_k = [0 \ G_{k-1}]$ $\Sigma_k = [H_k \ C_kG_{k-1}]$</p>

TABLE 1.7 – Algorithme récursif du filtre de [Darouach et al. \[2003\]](#) (OEF)

avec α_k est choisi telle que \hat{H}_k soit de plein rang ligne.

Pour garantir l'optimalité de l'OEF, les auteurs imposent une condition sur les rangs :

$$\text{rang}[\Sigma_{k+1}] = \text{rang}[G_k] + \text{rang}[H_{k+1}] \quad (1.38)$$

La condition (1.38) rend l'application du filtre un peu limitée comme discuté dans [Darouach et al. \[2003\]](#). Si $\hat{H}_k = 0$, la performance du filtre sera non acceptable et il perd son optimalité au sens de la minimisation de l'erreur quadratique moyenne.

1.6.3 Filtre de Gillijns et Moor 2007b (RTSF)

[Gillijns et Moor \[007b\]](#), par extension des travaux [Kitanidis \[1987\]](#) et [Gillijns et Moor \[007b\]](#), ont développé un filtre récursif qui peut résoudre le problème de l'estimation de l'état et de l'entrée inconnue du système avec injection de l'entrée inconnue dans l'équation de mesure en utilisant une estimation à minimum de variance. Les auteurs ont considéré que l'estimation de l'entrée inconnue et celle de l'état sont interconnectées et ils supposent que la matrice d'injection de l'entrée inconnue dans l'équation de sortie est de rang plein. Le filtre développé par

Gillijns et Moor [007b] est résumé comme suit :

<p>Initialisation pour $k = 0$ \hat{x}_0 et P_0 Pour tout $k > 0$, le filtre est donné par</p> $\hat{x}_{k+1/k} = A_k \hat{x}_{k/k} + G_k \hat{d}_k$ $P_{k+1/k}^x = [A_k \ G_k] \begin{bmatrix} P_{k/k}^x & P_k^{xd} \\ P_k^{dx} & P_k^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k^T \\ P_k^{dx} \end{bmatrix} + Q_k$ $\hat{d}_k = M_k (y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1})$ $P_k^d = (H_k^T \tilde{R}_k^{-1} H_k)^{-1}$ <p style="text-align: center;">avec</p> $\tilde{R}_k = C_k P_{k/k-1}^x C_k^T + R_k$ $x_{k/k-1} = A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1} + G_{k-1} \hat{d}_{k-1}$ $M_k = (H_k^T \tilde{R}_k^{-1} H_k)^{-1} H_k^T \tilde{R}_k^{-1}$ $K_k = P_{k/k-1}^x C_k^T \tilde{R}_k^{-1}$ $\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k (y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1} - H_k \hat{d}_k)$ $P_{k/k}^x = P_{k/k-1}^x - K_k (\tilde{R}_k - H_k P_k^d H_k^T) K_k^T$ $P_k^{xd} = (P_k^{dx})^T = -K_k H_k P_k^d$

TABLE 1.8 – Algorithme récursif du filtre de Gillijns et Moor [007b] (RTSF)

Pour que l'estimation de l'entrée inconnue soit non biaisée, la matrice M_k doit satisfaire la condition $M_k H_k = I$.

Théorème 1.3. *On considère que $\hat{x}_{k/k-1}$ est non biaisée, alors \hat{d}_k est un estimateur non biaisé pour toute entrée inconnue d_k si et seulement si $M_k H_k = I$ (voir Gillijns et Moor [007b]).*

Les auteurs imposent la condition nécessaire et suffisante $\text{rang} [H_k] = p$ pour l'existence d'un estimateur non biaisé de l'entrée inconnue. On peut dire que cette condition entraîne un inconvénient de ce filtre qui sera limité à certaines applications comme l'a montré Hsieh [2009] ; de plus, les auteurs n'ont pas mentionné l'optimalité globale du filtre.

1.6.4 Filtre de Hsieh 2009 (ERTSF)

Vu l'inconvénient du filtre récursif (RTSF) qui s'applique uniquement pour les systèmes où la matrice H_k est de rang plein, Hsieh [2009] par une extension du travail de Gillijns et Moor

[007b] a développé un filtre optimal là où la matrice d'injection de l'entrée inconnue à l'équation de mesure est supposée de rang arbitraire $0 < \text{rang}(H_k) \leq p$. L'algorithme de Hsieh [2009] peut être représenté comme suit :

<p>Initialisation pour $k = 0$ \hat{x}_0 et P_0 Pour tout $k > 0$, le filtre est donné par</p> $\hat{x}_{k+1/k} = A_k \hat{x}_{k/k} + G_k \hat{d}_k$ $P_{k+1/k}^x = [A_k \ G_k] \begin{bmatrix} P_{k/k}^x & P_{k/k}^{xd} \\ P_{k/k}^{dx} & P_{k/k}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k^T \\ P_k^{dx} \end{bmatrix} + Q_k$ $\hat{d}_{k/k} = M_k^* (y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1})$ $P_{k/k}^d = M_k^* \tilde{R}_k (M_k^*)^T$ <p>avec</p> $\tilde{R}_k = C_k P_{k/k-1}^x C_k^T + R_k$ $S_k = [H_k \ C_k G_{k-1} (I_m - H_{k-1}^+ H_{k-1})]$ $S_k^* = (S_k^T \tilde{R}_k^{-1} S_k)^+ S_k^T \tilde{R}_k^{-1}$ $M_k^* = [H_k^+ H_k \ 0_m] S_k^*$ $K_k = P_{k/k-1}^x C_k^T \tilde{R}_k^{-1}$ $\Gamma_k = [0_{n \times m} \ G_{k-1} (I_m - H_{k-1}^+ H_{k-1})]$ $L_k^* = K_k + (\Gamma_k - K_k S_k) S_k^*$ $\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + L_k^* (y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1})$ $\psi_k = \tilde{R}_k (L_k^*)^T - C_k P_{k/k-1}^x$ $P_{k/k}^x = P_{k/k-1}^x - L_k^* \tilde{R}_k (L_k^*)^T + L_k^* \psi_k + (L_k^* \psi_k)^T$ $P_k^d = M_k^* \tilde{R}_k (M_k^*)^T$

TABLE 1.9 – Algorithme récursif du filtre de Hsieh [2009] (ERTSF)

Hsieh [2009] a présenté une extension de (RTSF) basée sur le développement des approches de Darouach et al. [2003] et de Gillijns et Moor [007b] pour estimer l'état et l'entrée inconnue.

1.6.5 Filtre de Cheng et al. 2009 (UMVSE)

Cheng et al. [2009] ont établi un filtre récursif optimal où l'optimalité globale est démontrée au sens d'un estimateur non biaisé à minimum de variance de l'état en présence d'entrée inconnue dans les deux équations d'état et de sortie. Les auteurs supposent que la matrice d'injection de l'entrée inconnue dans l'équation d'observateur est de rang non plein. Comme solution à ce problème ils proposent d'utiliser la technique de la décomposition en valeur singulière (SVD)

de la matrice d' injection H_k de l'entrée inconnue dans l'équation de sortie.

Pour obtenir un estimateur non biaisé de l'état x_k , les auteurs exigent que la contrainte suivante soit satisfaite :

$$G_{2,k-1} - L_k C_{2,k} G_{2,k-1} = 0 \quad (1.39)$$

ce qui signifie :

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} G_{2,k-1} \\ C_{2,k} G_{2,k-1} \end{bmatrix} \right) = \text{rang} (C_{2,k} G_{2,k-1}) \quad (1.40)$$

Le filtre développé par [Cheng et al. \[2009\]](#) est résumé comme suit :

<p>Initialisation pour $k = 0$ \hat{x}_0 et P_0</p> <p>Pour tout $k > 0$, le filtre est donné par</p> $\hat{x}_k = (A_{k-1} - G_{1,k-1} \Sigma_{k-1}^{-1} C_{1,k-1}) \hat{x}_{k-1} + L_k \tilde{z}_{2,k} + G_{1,k-1} \Sigma_{k-1}^{-1} z_{1,k-1}$ $P_k = (I - L_k C_{2,k}) \tilde{P}_k (I - L_k C_{2,k})^T + L_k R_{2,k} L_k^T$ <p>avec</p> $\tilde{z}_{2,k} = z_{2,k} - C_{2,k} (A_{k-1} - G_{1,k-1} \Sigma_{k-1}^{-1} C_{1,k-1}) \hat{x}_{k-1} - C_{2,k} G_{1,k-1} \Sigma_{k-1}^{-1} z_{1,k-1}$ $\tilde{P}_k = \hat{A}_{k-1} P_{k-1} \hat{A}_{k-1}^T + \hat{Q}_{k-1}$ $\hat{A}_{k-1} = (A_{k-1} - G_{1,k-1} \Sigma_{k-1}^{-1} C_{1,k-1})$ $\hat{Q}_{k-1} = G_{1,k-1} \Sigma_{k-1}^{-1} R_{1,k-1} (\Sigma_{k-1}^{-1})^T G_{1,k-1}^T + Q_{k-1}$ $L_k = G_{2,k-1} \Pi_k + \left[\tilde{P}_k C_{2,k}^T N_k^T - G_{2,k-1} \Pi_{k-1} \left(C_{2,k} \tilde{P}_k C_{2,k}^T + R_{2,k} \right) N_k^T \right] \left(N_k \left(C_{2,k} \tilde{P}_k C_{2,k}^T + R_{2,k} \right) N_k^T \right)^{-1} N_k$ $\Pi_k = (C_k G_{2,k-1})^+, N_k = \text{Null} \left((C_k G_{2,k-1})^T \right)^T$ $R_{1,k} = U_{1,k}^T R_k U_{1,k} - U_{1,k}^T R_k U_{2,k} \left(U_{2,k}^T R_k U_{2,k} \right)^{-1} U_{2,k}^T R_k U_{1,k}$ $R_{2,k} = U_{2,k}^T R_k U_{2,k}$
--

TABLE 1.10 – Algorithme récursif du filtre de [Cheng et al. \[2009\]](#) (UMVSE)

[Cheng et al. \[2009\]](#) ont développé un filtre qui permet une estimation non biaisée et à minimum de variance de l'état en présence des entrées inconnues affectant l'équation d'état et celle des mesures. Nous remarquons que ce filtre se limite à l'estimation de l'état uniquement, mais l'importance de ce filtre c'est qu'il est globalement optimal.

1.6.6 Filtre de Khémiri et al. 2013 (RFSF)

le filtre (RFSF : Robust Five Step Filter) développé par [Khémiri et al. \[2013\]](#) comporte cinq étapes. Le filtre est une extension des travaux de [Hsieh \[2009\]](#) et [Gillijns et Moor \[007b\]](#) dans lequel l'estimation d'entrée inconnue est améliorée dans certains cas. Pour atteindre cet objectif, on a dérivé une nouvelle structure optimale du filtre récursif où la matrice d'injection des entrées inconnues dans l'équation d'observation est de rang plein. Pour résoudre ce problème on a fait appel à la technique la décomposition en éléments simples de la matrice H_k utilisé par [Cheng et al. \[2009\]](#) :

$$H_k = \begin{bmatrix} U_{1,k} & U_{2,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1,k}^T \\ V_{2,k}^T \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

où $\Sigma_k \in \mathfrak{R}^{r_k \times r_k}$, $U_{1,k} \in \mathfrak{R}^{p \times r_k}$, $U_{2,k} \in \mathfrak{R}^{p \times (p-r_k)}$, $V_{1,k} \in \mathfrak{R}^{m \times r_k}$ et $V_{2,k} \in \mathfrak{R}^{m \times (m-r_k)}$.

[Cheng et al. \[2009\]](#) montre qu'il existe une matrice de transformation $T_k = \begin{bmatrix} T_{1,k}^T & T_{2,k}^T \end{bmatrix}^T$ sachant que le système (1.1) et (1.2) est réécrit sous la forme :

$$x_{k+1} = A_k x_k + G_{1,k} d_{1,k} + G_{2,k} d_{2,k} + w_k \quad (1.42)$$

$$z_{1,k} = C_{1,k} x_k + \Sigma_k d_{1,k} + v_{1,k} \quad (1.43)$$

$$z_{2,k} = C_{2,k} x_k + v_{2,k} \quad (1.44)$$

où

$$v_{1,k} = T_{1,k} v_k, \quad v_{2,k} = T_{2,k} v_k$$

$$z_{1,k} = T_{1,k} y_k \in \mathfrak{R}^{r_k}, \quad z_{2,k} = T_{2,k} y_k \in \mathfrak{R}^{(p-r_k)}$$

$$G_{1,k} = G_k V_{1,k}, \quad G_{2,k} = G_k V_{2,k}$$

$$C_{1,k} = T_{1,k} C_k, \quad C_{2,k} = T_{2,k} C_k$$

avec la contrainte : $\text{rang}(C_{2,k} G_{2,k-1}) = \text{rang}(G_{2,k-1}) = p - r_k$.

Tant que $[V_{1,k} \ V_{2,k}]$ est une matrice unitaire, il est donc possible d'écrire l'entrée inconnue

comme suit :

$$d_k = V_{1,k}d_{1,k} + V_{2,k}d_{2,k} \quad (1.45)$$

La matrice de transformation T_k est donnée par :

$$T_k = \begin{bmatrix} I_{r_k} & -U_{1,k}^T R_k U_{2,k} \left(U_{2,k}^T R_k U_{2,k} \right)^{-1} \\ 0_{(p-r_k) \times r_k} & I_{(p-r_k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,k}^T \\ U_{2,k}^T \end{bmatrix}$$

Cheng et al. [2009] ont défini les matrices $R_{1,k}$ et $R_{2,k}$ respectivement comme matrices de variance de $v_{1,k}$ et $v_{2,k}$, et $R_{12}(k, i)$ comme leur matrice de covariance. Alors on a :

$$\begin{aligned} R_{1,k} &= \mathcal{E}[v_{1,k}v_{1,k}^T] = U_{1,k}^T R_k U_{1,k} - U_{1,k}^T R_k U_{2,k} \left(U_{2,k}^T R_k U_{2,k} \right)^{-1} U_{2,k}^T R_k U_{1,k} \\ R_{2,k} &= \mathcal{E}[v_{2,k}v_{2,k}^T] = U_{2,k}^T R_k U_{2,k} \\ R_{12}(k, k) &= \mathcal{E}[v_{1,k}v_{2,k}^T] = 0 \\ R_{12}(k, i) &= \mathcal{E}[v_{1,k}v_{2,i}^T] = 0, \quad \text{pour } k \neq i \end{aligned}$$

Par ailleurs, Cheng et al. [2009] ont choisi les relations suivantes :

- $\text{cov}[v_{1,k}, w_i] = 0$ et $\text{cov}[v_{2,k}, w_i] = 0$ pour $k \neq i$.
- $\text{cov}[v_{1,k}, x_0] = 0$ et $\text{cov}[v_{2,k}, x_0] = 0$.

Selon le système d'équations (1.42)-(1.44), le filtre proposé a la structure suivante :

$$\hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1}\hat{x}_{k-1/k-1} + G_{1,k-1}\hat{d}_{1,k-1/k-1} \quad (1.46)$$

$$\hat{d}_{2,k/k-1} = K_k^{d_2} (z_{2,k} - C_{2,k}\hat{x}_{k/k-1}) \quad (1.47)$$

$$\hat{x}_{k/k-1}^* = \hat{x}_{k/k-1} + G_{2,k-1}\hat{d}_{2,k/k-1} \quad (1.48)$$

$$\hat{d}_{1,k/k} = K_k^{d_1} (z_{1,k} - C_{1,k}\hat{x}_{k/k-1}) \quad (1.49)$$

$$\hat{d}_{k/k} = V_{1,k}\hat{d}_{1,k/k} + V_{2,k}\hat{d}_{2,k/k-1} \quad (1.50)$$

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1}^* + K_k^x (z_{2,k} - C_{2,k}\hat{x}_{k/k-1}) \quad (1.51)$$

où les matrices gain $K_k^{d_1} \in \mathfrak{R}^{r_k \times r_k}$, $K_k^{d_2} \in \mathfrak{R}^{(m-r_k) \times (p-r_k)}$ et $K_k^x \in \mathfrak{R}^{n \times (p-r_k)}$ seront déterminées

ultérieurement, en assurant certaines spécifications concernant les erreurs d'estimation de l'état et de l'entrée inconnue.

1.6.6.1 Estimation de l'entrée inconnue

Les erreurs d'estimation des entrées inconnues $d_{1,k}$ et $d_{2,k}$ sont définies par

$$\tilde{d}_{1,k/k} = d_{1,k} - \hat{d}_{1,k/k} \quad (1.52)$$

$$\tilde{d}_{2,k/k-1} = d_{2,k} - \hat{d}_{2,k/k-1} \quad (1.53)$$

Par conséquent leurs évolutions dynamiques ont les expressions suivantes :

$$\tilde{d}_{1,k/k} = (I_{r_k} - K_k^{d1} \Sigma_k) d_{1,k} - K_k^{d1} e_{1,k} \quad (1.54)$$

$$\tilde{d}_{2,k/k-1} = (I_{m-r_k} - K_k^{d2} C_{2,k} G_{2,k-1}) d_{2,k-1} - K_k^{d2} e_{2,k} \quad (1.55)$$

où

$$e_{1,k} = C_{1,k} \tilde{x}_{k/k-1} + v_{1,k} \quad (1.56)$$

$$\tilde{x}_{k/k-1}^* = x_k - \hat{x}_{k/k-1}^* = \tilde{x}_{k/k-1} + G_{2,k-1} \tilde{d}_{2,k/k-1} \quad (1.57)$$

$$e_{2,k} = C_{2,k} \tilde{x}_{k/k-1} + v_{2,k} \quad (1.58)$$

$$\tilde{x}_{k/k-1} = A_{k-1} \tilde{x}_{k-1/k-1} + G_{1,k-1} \tilde{d}_{1,k-1/k-1} + w_{k-1} \quad (1.59)$$

avec $\tilde{x}_{k/k} := x_k - \hat{x}_{k/k}$.

Les estimateurs $\hat{d}_{1,k/k}$ (1.49) et $\hat{d}_{2,k/k-1}$ (1.47) sont non biaisés si les matrices gains K_k^{d1} et K_k^{d2} sont choisies pour satisfaire les contraintes suivantes :

$$K_k^{d1} \Sigma_k = I_{r_k} \quad (1.60)$$

$$K_k^{d2} S_k = I_{m-r_k} \quad (1.61)$$

où $S_k = C_{2,k} G_{2,k-1}$.

Avec ces conditions, les équations (1.54) et (1.55) se réduisent à :

$$\tilde{d}_{1,k/k} = -K_k^{d1} e_{1,k} \quad (1.62)$$

$$\tilde{d}_{2,k/k-1} = -K_k^{d2} e_{2,k} \quad (1.63)$$

Par conséquent, avec ce choix, l'estimation de l'état $\hat{x}_{k-1/k-1}$ sera non biaisée. Si on suppose que la matrice S_k est de rang plein, alors pour avoir une estimation UMV de l'entrée inconnue, les matrices gain K_k^{d1} et K_k^{d2} sont obtenues en utilisant la méthode d'estimation des moindres carrés pondérés (WLS : Weighted least-square) (Kailath et al. [2000] et Gillijns et Moor [007b]). Alors on obtient :

$$K_k^{d1} = \left(\Sigma_k^T \tilde{R}_{1,k}^{-1} \Sigma_k \right)^{-1} \Sigma_k^T \tilde{R}_{1,k}^{-1} \quad (1.64)$$

$$K_k^{d2} = \left(S_k^T \tilde{R}_{2,k}^{-1} S_k \right)^{-1} S_k^T \tilde{R}_{2,k}^{-1} \quad (1.65)$$

où les pondérations $\tilde{R}_{1,k}$ et $\tilde{R}_{2,k}$ sont respectivement les matrices de covariance de $e_{1,k}$ et $e_{2,k}$. Ces matrices sont calculées à partir des équations (1.56) et (1.58) :

$$\tilde{R}_{1,k} := \mathcal{E} [e_{1,k} e_{1,k}^T] = C_{1,k} P_{k/k-1}^{x*} C_{1,k}^T + R_{1,k} \quad (1.66)$$

$$\tilde{R}_{2,k} := \mathcal{E} [e_{2,k} e_{2,k}^T] = C_{2,k} P_{k/k-1}^x C_{2,k}^T + R_{2,k} \quad (1.67)$$

avec $P_{k/k-1}^{x*} := \mathcal{E} [\tilde{x}_{k/k-1}^* (\tilde{x}_{k/k-1}^*)^T]$ et $P_{k/k-1}^x := \mathcal{E} [\tilde{x}_{k/k-1} (\tilde{x}_{k/k-1})^T]$

En prenant en compte les contraintes (1.60) et (1.61), les variances de la solution WLS (1.47) et (1.49) sont données respectivement par :

$$P_{k/k}^{d1} := \mathcal{E} [\tilde{d}_{1,k/k} (\tilde{d}_{1,k/k})^T] = \left(\Sigma_k^T \tilde{R}_{1,k}^{-1} \Sigma_k \right)^{-1} \quad (1.68)$$

$$P_{k/k-1}^{d2} := \mathcal{E} [\tilde{d}_{2,k/k-1} (\tilde{d}_{2,k/k-1})^T] = \left(S_k^T \tilde{R}_{2,k}^{-1} S_k \right)^{-1} \quad (1.69)$$

Remarque : si on considère le cas où $G_{2,k} = 0$ (par exemple $\text{rang} H_k = m$), on modifie le filtre

proposé en remplaçant les équations (1.65) et (1.69) par :

$$K_k^{d2} = P_{k/k-1}^{d2} S_k^T \tilde{R}_{2,k}^{-1}, \quad P_{k/k-1}^{d2} = \left(S_k^T \tilde{R}_{2,k}^{-1} S_k \right)^+ \quad (1.70)$$

En se référant aux équations (1.50), (1.52) et (1.53), l'erreur d'estimation de l'entrée inconnue $\tilde{d}_{k/k}$ à la forme suivante :

$$\tilde{d}_{k/k} = \begin{bmatrix} V_{1,k} & V_{2,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{d}_{1,k/k} \\ \tilde{d}_{2,k/k-1} \end{bmatrix} \quad (1.71)$$

Utilisant l'équation (1.71), la matrice de covariance $P_{k/k}^d$ est donnée par

$$P_{k/k}^d := \mathcal{E} [\tilde{d}_{k/k} (\tilde{d}_{k/k})^T] = \begin{bmatrix} V_{1,k} & V_{2,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{k/k}^{d1} & P_k^{d12} \\ P_k^{d21} & P_{k/k-1}^{d2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1,k}^T \\ V_{2,k}^T \end{bmatrix} \quad (1.72)$$

où

$$\begin{aligned} P_k^{d12} &= \left(P_k^{d21} \right)^T \\ &= K_k^{d1} C_{1,k} \left(P_{k/k-1}^{x*} C_{2,k}^T - G_{2,k-1} K_k^{d2} \tilde{R}_{2,k} \right) \left(K_k^{d2} \right)^T \end{aligned} \quad (1.73)$$

La structure proposée du filtre (1.46) à (1.51) peut être utilisée pour estimer l'entrée inconnue (1.50) et caractériser cette estimation par sa matrice de covariance (1.72).

1.6.6.2 Estimation de l'état

L'erreur d'estimation de l'état est définie par :

$$\tilde{x}_{k/k} = x_k - \hat{x}_{k/k} \quad (1.74)$$

Tenant compte des équations (1.50) et (1.44), on obtient :

$$\tilde{x}_{k/k} = (I - K_k^x C_{2,k}) \tilde{x}_{k/k-1}^* - K_k^x v_{2,k} \quad (1.75)$$

Considérant les équations (1.57) et (1.63), la matrice $P_{k/k}^x$ est déterminée comme suit :

$$\begin{aligned} P_{k/k}^x &:= \mathcal{E} \left[\tilde{x}_{k/k} \tilde{x}_{k/k}^T \right] \\ &= P_{k/k-1}^{x*} + K_k^x R_k (K_k^x)^T - V_k (K_k^x)^T - K_k^x (V_k)^T \end{aligned} \quad (1.76)$$

où

$$R_k = C_{2,k} P_{k/k-1}^{x*} C_{2,k}^T + R_{2,k} + C_{2,k} S_k + (C_{2,k} S_k)^T \quad (1.77)$$

$$V_k = P_{k/k-1}^x C_{2,k}^T + S_k \quad (1.78)$$

$$S_k = \mathcal{E} \left[\tilde{x}_{k/k-1}^* (v_{2,k})^T \right] = -G_{2,k-1} K_k^{d2} R_{2,k} \quad (1.79)$$

$$P_{k/k-1}^{x*} = (I - G_{2,k-1} K_k^{d2} C_{2,k}) P_{k/k-1}^x (I - G_{2,k-1} K_k^{d2} C_{2,k})^T + G_{2,k-1} K_k^{d2} R_{2,k} (K_k^{d2})^T G_{2,k-1}^T \quad (1.80)$$

Une estimation satisfaisante est obtenue par la minimisation de sa variance. Pour minimiser la trace de (1.76), la matrice gain est donnée par :

$$K_k^x = V_k (R_k)^{-1} = (P_{k/k-1}^{x*} C_{2,k}^T + S_k) (R_k)^{-1} \quad (1.81)$$

Introduisant cette expression dans l'équation (1.75), on obtient la valeur optimale de la matrice de covariance :

$$P_{k/k}^x = P_{k/k-1}^{x*} - V_k (R_k)^{-1} V_k$$

A partir de l'équation (1.59), la matrice de covariance a priori $P_{k+1/k}^x$ a la forme suivante :

$$P_{k+1/k}^x = \begin{bmatrix} A_k & G_{1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{k/k}^x & P_{k/k}^{xd1} \\ (P_{k/k}^{xd1})^T & P_{k/k}^{d1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k^T \\ G_{1,k}^T \end{bmatrix} + Q_k \quad (1.82)$$

où la matrice $P_{k/k}^{xd1}$ est calculée en utilisant les équations (1.54) et (1.73) :

$$\begin{aligned} P_{k/k}^{xd1} &:= \mathcal{E} \left[\tilde{x}_{k/k} (\tilde{d}_{1,k/k})^T \right] \\ &= \left(K_k^x (V_k)^T - P_{k/k-1}^{x*} \right) C_{1,k}^T (K_k^{d1})^T \end{aligned} \quad (1.83)$$

Enfin, le filtre développé par Khémiri et al. [2013] est résumé comme suit :

Initialisation pour $k = 0$
 \hat{x}_0 et P_0

Pour tout $k > 0$, le filtre est donné par

$$\hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1}\hat{x}_{k-1/k-1} + G_{1,k-1}\hat{d}_{1,k-1/k-1}$$

$$P_{k+1/k}^x = [A_k \quad G_{1,k}] \begin{bmatrix} P_{k/k}^x & P_{k/k}^{xd1} \\ (P_{k/k}^{xd1})^T & P_{k/k}^{d1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k^T \\ G_{1,k}^T \end{bmatrix} + Q_k$$

$$P_{k/k}^{xd1} = \left(K_k^x (V_k)^T - P_{k/k-1}^{x*} \right) C_{1,k}^T (K_k^{d1})^T$$

$$K_k^{d2} = P_{k/k-1}^{d2} S_k^T \tilde{R}_{2,k}^{-1}$$

$$\hat{d}_{2,k/k-1} = K_k^{d2} (z_{2,k} - C_{2,k}\hat{x}_{k/k-1})$$

$$P_{k/k-1}^{d2} = \left(S_k^T \tilde{R}_{2,k}^{-1} S_k \right)^+$$

$$\hat{x}_{k/k-1}^* = \hat{x}_{k/k-1} + G_{2,k-1}\hat{d}_{2,k/k-1}$$

$$P_{k/k-1}^{x*} = (I - G_{2,k-1}K_k^{d2}C_{2,k})P_{k/k-1}^x (I - G_{2,k-1}K_k^{d2}C_{2,k})^T + G_{2,k-1}K_k^{d2}R_{2,k}(K_k^{d2})^T G_{2,k-1}^T$$

$$\tilde{R}_{1,k} = C_{1,k}P_{k/k-1}^{x*}C_{1,k}^T + R_{1,k}$$

$$K_k^{d1} = (Sig^T \tilde{R}_{1,k})^{-1} * Sig^{-1} * Sig^T \tilde{R}_{1,k}^{-1}$$

$$\hat{d}_{1,k/k} = K_k^{d1} (z_{1,k} - C_{1,k}\hat{x}_{k/k-1})$$

$$P_{k/k}^{d1} = \left(\Sigma_k^T \tilde{R}_{1,k}^{-1} \Sigma_k \right)^{-1}$$

$$P_k^{d12} = (P_k^{d21})^T = K_k^{d1}C_{1,k} \left(P_{k/k-1}^{x*}C_{2,k}^T - G_{2,k-1}K_k^{d2}\tilde{R}_{2,k} \right) (K_k^{d2})^T$$

$$\hat{d}_{k/k} = V_{1,k}\hat{d}_{1,k/k} + V_{2,k}\hat{d}_{2,k/k-1}$$

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k^x (z_{2,k} - C_{2,k}\hat{x}_{k/k-1})$$

$$K_k^x = V_k(R_k)^{-1} = (P_{k/k-1}^{x*}C_{2,k}^T + S_k)(R_k)^{-1}$$

$$P_{k/k}^x = P_{k/k-1}^{x*} + K_k^x R_k (K_k^x)^T - V_k (K_k^x)^T - K_k^x (V_k)^T$$

$$R_k = C_{2,k}P_{k/k-1}^{x*}C_{2,k}^T + R_{2,k} + C_{2,k}S_k + (C_{2,k}S_k)^T$$

$$V_k = P_{k/k-1}^x C_{2,k}^T + S_k, \quad S_k = G_{2,k-1}K_k^{d2}R_{2,k}$$

$$P_{k/k}^d = [V_{1,k} \quad V_{2,k}] \begin{bmatrix} P_{k/k}^{d1} & P_k^{d12} \\ P_{k/k}^{d21} & P_{k/k-1}^{d2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1,k}^T \\ V_{2,k}^T \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R}_{2,k} = C_{2,k}P_{k/k-1}^x C_{2,k}^T + R_{2,k}$$

$$S_k = C_{2,k}G_{2,k-1}$$

TABLE 1.11 – Algorithme récursif du filtre de Khémiri et al. [2013] (RFSF)

1.7 Tableau récapitulatif

Un tableau récapitulatif qui résume tous les filtres que nous avons traité dans notre étude :

Référence	Filtres	x_k	d_k
Kitanidis [1987]	Unbiased Minimum variance Linear State Estimation (UMV)	oui	non
Darouach et Zasadzinski [1997]	Unbiased Minimum-variance Estimation for System with Unknown Exogenous Input (OUMV)	oui	non
Hou et Patton [1998]	Optimal Filtering for Systems with Unknown Inputs (OLMVE)	oui	non
Hsieh [2000]	Robust Two-Stage Kalman Filters for Systems with Unknown Inputs (RTSKF)	oui	oui
Darouach et al. [2003]	Extension of minimum variance estimation for system with unknown inputs (OEF)	oui	non
Gillijns et Moor [007a]	Unbiased Minimum-variance Input and State Estimation for Linear Discrete Systems (RUMVF)	oui	oui
Gillijns et Moor [007b]	Unbiased Minimum-variance Input and State Estimation for Linear Discrete-Time Systems with direct feed through (RTSF)	oui	oui
Hsieh [2009]	Unbiased Minimum variance input and State Estimation for systems with unknown inputs (ERTSF)	oui	oui
Cheng et al. [2009]	Extension of Unbiased minimum-variance estimation for linear systems with unknown input (UMVSE)	oui	non
Khémiri et al. [2013]	Novel recursive optimal filter for the joint input-state estimation in linear discrete-time systems (RFSF)	oui	non

TABLE 1.12 – Tableau récapitulatif pour les filtres

1.8 Etude comparative

Pour mener cette étude comparative entre les différents filtres, nous considérons l'exemple illustratif suivant :

$$x_{0/0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_{0/0}^x = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix}, A_k = \begin{bmatrix} -0.0005 & -0.0084 \\ 0.0517 & 0.8069 \end{bmatrix}$$

$$C_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R_k = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{bmatrix}, Q_k = \begin{bmatrix} 0.0036 & 0.0342 \\ 0.0342 & 0.3249 \end{bmatrix}$$

Nous supposons que l'entrée inconnue a la forme suivante :

$$d_k = \begin{bmatrix} 5u_s[k] - 5u_s[k-20] + 5u_s[k-70] \\ 4u_s[k] - 4u_s[k-30] + 4u_s[k-65] \end{bmatrix}$$

avec u_s est un échelon de position tel que $u_s(k - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq \tau \\ 0 & \text{si } k < \tau \end{cases}$

1.8.1 Pour les systèmes où $H_k = 0$

L'entrée inconnue affecte uniquement l'équation d'état ($H_k = 0$). Pour mener cette étude comparative entre les différents filtres présentés précédemment la matrice G_k est donnée par

$$G_k = \begin{bmatrix} 0.0129 & 1 \\ -1.2504 & 1 \end{bmatrix}$$

Performances	UMVF	OUMV	RTSKF	RUMVF
$x^1(RMSE)$	0.0957	3.0063	0.0957	0.0957
$x^2(RMSE)$	0.3950	3.9958	0.3950	0.3950
$d^1(RMSE)$	-	-	0.9943	0.9811
$d^2(RMSE)$	-	-	0.7215	0.7181

TABLE 1.13 – Evaluation des valeurs *RMSE*

1.8.2 Pour les systèmes où $H_k \neq 0$

Pour mener cette étude comparative entre les différents filtres (OLMVE, RTSF, ERTSF, OEF, UMVSE et RFSF) présentés précédemment, nous considérons le même exemple qui a été utilisé précédemment.

cas1 : les matrices G_k et H_k sont données par :

$$G_k = \begin{bmatrix} 0.0129 & 0 \\ -1.2504 & 0 \end{bmatrix}, H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} H_k & C_k G_k \\ 0 & H_k \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} G_k \\ H_k \end{bmatrix} + \text{rang} [H_k] = 4$$

$$\text{rang} [\Sigma_{k+1}] = \text{rang} [G_k] + \text{rang} [H_k] = 2 \neq 3$$

$$\text{rang} [H_k] = 2 = p, \text{rang} [G_k] = 1$$

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} G_{2,k-1} \\ C_{2,k} G_{2,k} \end{bmatrix} \right) = \text{rang} (C_{2,k} G_{2,k-1}) = 0$$

Performances	OLMVE	OEF	RTSF	ERTSF	UMVSE	RFSF
$x^1(RMSE)$	0.1808	1.0900	0.1818	0.1818	NAN	0.1818
$x^2(RMSE)$	1.7591	9.9427	1.1791	1.1791	NAN	1.1791
$d^1(RMSE)$	-	-	0.2055	0.2055	NAN	0.2055
$d^2(RMSE)$	-	-	1.2093	1.2093	NAN	1.2093

TABLE 1.14 – Evaluation des valeurs *RMSE* : *cas1*

Cas2 : les matrices G_k et H_k sont données par :

$$G_k = \begin{bmatrix} 0.0129 & 0 \\ -1.2504 & 0 \end{bmatrix}, H_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} H_k & C_k G_k \\ 0 & H_k \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} G_k \\ H_k \end{bmatrix} + \text{rang} [H_k] = 2$$

$$\text{rang} [\Sigma_{k+1}] = \text{rang} [G_k] + \text{rang} [H_k] = 2, \text{rank} [H_k] = 1 < p, \text{rang} [G_k] = 1$$

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} G_{2,k-1} \\ C_{2,k}G_{2,k} \end{bmatrix} \right) = \text{rang} (C_{2,k}G_{2,k-1}) = 1$$

Performances	OLMVE	OEF	RTSF	ERTSF	UMVSE	RFSF
$x^1(RMSE)$	0.1908	0.4709	0.4041	0.1853	0.1969	0.1853
$x^2(RMSE)$	1.5815	8.4647	1.4246	0.4294	7.3958	0.4294
$d^1(RMSE)$	-	-	3.5355	3.5355	-	0.9873
$d^2(RMSE)$	-	-	0.3374	0.2075	-	0.2075

TABLE 1.15 – Evaluation des valeurs *RMSE* : cas2

Cas3 : les matrices G_k et H_k sont données par :

$$G_k = \begin{bmatrix} 0.0129 & 0 \\ -1.2504 & 0 \end{bmatrix}, H_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} H_k & C_k G_k \\ 0 & H_k \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} G_k \\ H_k \end{bmatrix} + \text{rang} [H_k] = 2$$

$$\text{rang} [\Sigma_{k+1}] = \text{rang} [G_k] + \text{rang} [H_k] = 2$$

$$\text{rank} [H_k] = 1 < p, \text{rang} [G_k] = 1$$

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} G_{2,k-1} \\ C_{2,k}G_{2,k} \end{bmatrix} \right) = \text{rang} (C_{2,k}G_{2,k-1}) = 1$$

Performances	OLMVE	OEF	RTSF	ERTSF	UMVSE	RFSF
$x^1(RMSE)$	0.1901	2.0574	0.1809	0.1853	0.1810	0.1853
$x^2(RMSE)$	1.7597	6.7006	0.5316	0.4294	1.9303	0.4294
$d^1(RMSE)$	-	-	0.8371	0.8624	-	0.6774
$d^2(RMSE)$	-	-	0.8778	0.8531	-	0.7357

TABLE 1.16 – Evaluation des valeurs *RMSE* : cas3

1.9 Discussion

1.9.1 Pour la première classe des systèmes où $H_k = 0$

Les résultats de simulation obtenus dans le tableau 1.13 indiquent la valeur RMSE (Root mean square errors) de l'erreur quadratique moyenne calculée pour N échantillons, pour l'état et pour l'entrée inconnue, avec :

$$RMSE(x_{1,k}) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_{1,k} - \hat{x}_{1,k})^2}$$

Nous remarquons qu'en présence d'une entrée inconnue apparaissant seulement dans l'équation d'état, que les filtres UMVF, RTSKF et RUMVF ont des performances équivalentes. En effet, ceci est vrai puisque toutes les conditions imposées par les filtres sont vérifiées. De plus les filtres RTSKF et RUMVF donnent une estimation de l'entrée inconnue avec de bonnes performances, bien que que le RUMVF ne dispose d'aucune information a priori concernant la dynamique de l'entrée inconnue. Le filtre OUMV perd ses performances par comparaison aux autres filtres, ceci s'explique par le fait que le filtre de [Darouach et Zasadzinski \[1997\]](#) se dégrade en présence d'une entrée inconnue dans l'équation d'état bien que la condition de rang soit vérifiée.

1.9.2 Pour la deuxième classe des systèmes où $H_k \neq 0$

Pour le premier cas, H_k est de rang plein, les filtres RTSF, ERTSF et RFSF donnent des résultats équivalents, de bonnes performances et ceci est acceptable tant que les conditions de rang sont vérifiées pour ces filtres. Les filtres OEF et OLMVE, ont des performances dégradées, car ils présentent une grande valeur de RMSE sur la deuxième variable d'état $x_{2,k}$. Ceci s'explique par le fait que l'entrée inconnue n'affecte que la sortie $y_{2,k}$ qui elle-même correspond à la variable d'état $x_{2,k}$ (car la matrice C_k égale à l'identité). Le filtre UMVSE ne permet pas d'obtenir une estimation de l'état car la condition imposée par les auteurs n'est pas vérifiée.

Pour le deuxième cas, les deux matrices H_k et G_k sont de rang non plein, les filtres RFSF et ERTSF donnent des résultats excellents pour l'estimation des deux variables d'état $x_{1,k}$ et $x_{2,k}$, également pour la première variable de l'entrée inconnue, mais pour l'estimation de la deuxième variable $d_{2,k}$, le filtre ERTSF s'avère moins efficace et ceci est normal puisque nous disposons des zéros dans la deuxième colonne pour les deux matrices H_k et G_k . Par contre, le filtre RFSF a donné une meilleure estimation vue son caractère robuste malgré la condition de rang non plein des matrices d'injection des défauts. Les filtres OLMVE, OEF et UMVSE donnent des estimations acceptables en ce qui concerne l'état $x_{1,k}$ mais pour la deuxième variable $x_{2,k}$ ils donnent une estimation biaisée et ceci est dû au fait que nous avons des zéros sur la deuxième colonne des deux matrices. Le filtre de [Gillijns et Moor \[007b\]](#) (RTSF) permet une estimation acceptable de l'état, mais pour l'entrée inconnue on a le même problème que pour le filtre ERTSF.

En ce qui concerne le troisième cas, Les matrices H_k et G_k sont des matrices de rang non plein, nous remarquons que les filtres RFSF, ERTSF et RTSF donnent des résultats proches, mais le premier reste plus performant que les autres. Les filtres OLMVE, OEF et UMVSE donnent de bonnes estimations pour la première variable d'état ; mais pour l'autre variable, l'estimation est dégradée et ceci est dû à la présence de zéros sur la deuxième colonne de G_k .

1.10 Conclusion

Ce chapitre avait pour objet la présentation de plusieurs techniques de filtrage (optimal à minimum de variance) des systèmes linéaires stochastiques à temps discret et en présence des entrées inconnues. Pour cela, nous avons passé en revue les travaux de [Kitanidis \[1987\]](#), [Darouach et Zasadzinski \[1997\]](#), [Darouach et al. \[2003\]](#), [Hou et Patton \[1998\]](#), [Gillijns et Moor \[007a\]](#), [Gillijns et Moor \[007b\]](#), [Cheng et al. \[2009\]](#), [Hsieh \[2000\]](#), [Hsieh \[2009\]](#), [Khémiri et al. \[2013\]](#) etc... qui sont classés en deux catégories. La première concerne la présence de l'entrée inconnue dans l'équation d'état et la deuxième, l'entrée inconnue se présente dans les deux équations d'état et de sortie. Des algorithmes pour les filtres : UMVF, OUMV, RTSKF, RUMVF, OLMVF, OEF, RTSF, ERTSF et UMVSE sont développés. Nous avons, par la suite, procédé au développement

d'un nouveau filtre RFSF ([Khémiri et al. \[2013\]](#)) pour résoudre le problème d'estimation jointe de l'état et de l'entrée inconnue dans le cas où la matrice d'injection de l'entrée inconnue dans l'équation d'observation est de rang non plein. Enfin, une étude comparative des deux classes a été menée par simulation avec le logiciel Matlab à travers un exemple numérique. Cette dernière a permis de dégager les avantages et les inconvénients de chaque filtre.

2

Filtrage proportionnel-intégral des systèmes linéaires à entrées inconnues

Sommaire

2.1	Introduction	52
2.2	Observateur a entrée inconnue	53
2.2.1	Formulation du problème	53
2.2.2	Synthèse de l'observateur PI^p	57
2.2.2.1	Observateur PI	57
2.2.2.2	Observateur PI^p	59
2.2.3	Exemple	61

2.3 Filtrage robuste à entrées inconnues avec des matrices de variance des bruits incertaines	66
2.3.1 Formulation du problème	66
2.3.2 Filtre de Kalman à deux étages	67
2.3.3 Filtre de Kalman à deux étages à gains proportionnel intégral	69
2.3.3.1 Sous-filtre estimateur d'état	69
2.3.3.2 Sous-filtre estimateur des entrées inconnues	71
2.3.4 Exemple illustratif	72
2.4 Estimations robuste des défauts et d'état des systèmes linéaires à entrées inconnues	75
2.4.1 Formulation du problème	75
2.4.2 Filtre de Kalman optimal à trois étages (OThSKF)	77
2.4.2.1 Filtre de Kalman à état augmenté (ASKF)	77
2.4.2.2 Transformation matricielle U-V	78
2.4.2.3 Découplage du filtre	80
2.4.3 Filtre de Kalman à trois étages à gains proportionnel intégral	83
2.4.4 Exemple illustratif	86
2.4.4.1 Première cas	88
2.4.4.2 Deuxième cas	89
2.5 Conclusion	91

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on traite le filtrage proportionnel-intégral pour les systèmes linéaires à entrées inconnues. On va étudier trois problèmes différents d'estimations. Le premier concerne les systèmes linéaires à entrées inconnues qui est largement étudié dans la littérature par les observateurs proportionnel-intégral à entrées inconnues, pour lesquels on peut citer entre autres [Shafai et al. \[1996\]](#), [Orjuela et al. \[2007\]](#) et [Koenig \[2005\]](#). Le deuxième réside dans l'estimation optimale des systèmes linéaires stochastiques à temps discret en présence des entrées

inconnues. Plusieurs solutions sont développées (voir chapitre 1) permettant de donner des bons résultats. Mais si les matrices de covariance (qui sont supposées connues), ne sont pas parfaitement connues, les filtres perdent leurs optimalités. Le troisième problème concerne l'estimation jointe des défauts et d'état en présence d'entrées inconnues. Ce problème est récemment résolu par [Ben Hmida et al. \[2012\]](#) par le développement d'un filtre optimal à trois étages (OThSKF) qui permet une estimation optimale de l'état, des défauts et des entrées inconnues. L'inconvénient de ce dernier réside dans la dégradation de son optimalité si la connaissance des matrices de covariance d'état, des mesures, des défauts et des entrées inconnues, est imparfaite (cas des matrices de covariances incertaines). Ce chapitre est composé de quatre sections. Dans la section 2.2., on présentera l'observateur multi intégral. La section 2.3. sera dédiée au développement du filtre PI TSKF. Le filtre PI ThSKF sera développé dans la section 2.4.. Enfin, on terminera ce chapitre par une conclusion.

2.2 Observateur a entrée inconnue

Dans cette section, on considère les systèmes linéaires déterministes (absence de bruit d'état et de sortie) à entrées inconnues affectant l'état et la sortie du système. On s'intéresse à l'estimation d'état de systèmes linéaires à temps discret, à temps invariant et en présence d'entrées inconnues en utilisant un observateur de type proportionnel multi-intégral c'est-à-dire de façon abrégée sous une forme générale PI^P . L'introduction de multiples actions intégrales dans l'observateur d'état, permet d'assurer une bonne précision de l'estimation même en présence des entrées inconnues décrites par des polynômes de degré P .

2.2.1 Formulation du problème

On considère un système linéaire à temps discret décrit sous forme d'équation d'état :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Dd_k \\ y_k = Cx_k + Ed_k \end{cases} \quad (2.1)$$

où $x \in \mathcal{R}^n$ représente l'état du système, $y \in \mathcal{R}^m$ sa sortie, $u \in \mathcal{R}^r$ son entrée de commande supposée connue et $d \in \mathcal{R}^q$ le vecteur des entrées inconnues à effets additifs. Les matrices A , B , C , D et E sont supposées connues de dimensions appropriées et respectent les contraintes assez peu restrictives suivantes.

- la matrice C est de rang plein.
- Le système (A, C) est observable.
- les matrices D et E sont de rang plein colonne.

Le problème qui se pose maintenant est la synthèse d'un observateur PI^P de système linéaire à entrées inconnues. Ce problème est assez général et peut concerner deux situations assez différentes. La première est celle où un système est effectivement affecté d'entrées inconnues perturbant son fonctionnement, dont il convient alors d'évaluer l'amplitude afin de concevoir une stratégie de commande compensatrice. La deuxième situation est propre au diagnostic de fonctionnement et plus précisément à l'estimation de défauts d'actionneurs ; dans ce cas, une entrée connue peut être estimée en la considérant comme inconnue afin d'analyser l'erreur d'estimation de cette entrée qui peut être révélatrice d'un défaut d'actionneur.

Dans la suite, on considère des observateurs de type Luenberger permettant de reconstruire l'état et les entrées inconnues du système.

L'estimation de l'état est effectuée de la façon suivante

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + D\hat{d}_k + K\tilde{y}_k \\ \tilde{y}_k = y_k - \hat{y}_k \\ \hat{y}_k = C\hat{x}_k + E\hat{d}_k \end{cases} \quad (2.2)$$

où $K \in \mathcal{R}^{n \times m}$, $E \in \mathcal{R}^{m \times q}$. L'estimation des entrées inconnues est réalisée par l'observateur :

$$\begin{cases} \hat{d}_k = \Delta z_k \\ z_{k+1} = \Lambda z_k + \Gamma \tilde{y}_k \end{cases} \quad (2.3)$$

où $z \in \mathcal{R}^{pq}$, $\Delta \in \mathcal{R}^{q \times pq}$, $\Lambda \in \mathcal{R}^{pq \times pq}$, $\Gamma \in \mathcal{R}^{pq \times m}$, et où la matrice Λ contient sur sa diagonale des blocs identité. L'observation est ainsi caractérisé par les matrices K et Γ dont il conviendra d'estimer les coefficients. Les développements qui suivent visent à expliciter les équations qui

régissent l'évolution des erreurs d'estimation. Compte tenu de la structure choisie de la matrice Λ , le vecteur z_k est donc construit à partir des intégrations successives de l'erreur d'estimation \tilde{y} de la sortie. Ce vecteur, ainsi que les différentes matrices introduites dans la structure de l'observateur, sont partitionnés sous la forme :

$$z_k = \begin{pmatrix} z_{1,k} \\ z_{2,k} \\ \dots \\ z_{p,k} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I & I & 0 & \dots & \\ \dots & & & & \\ 0 & \dots & I & I & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I & I \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \dots \\ \Gamma_{p-1} \\ \Gamma_p \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Compte tenu de (2.3) et de l'expression de Δ , on note que :

$$\hat{d}_k = z_{p,k} \quad (2.6)$$

Ainsi, l'entrée inconnue d_k est estimée uniquement à partir de la dernière variable d'intégration. Considérons la variable :

$$\varepsilon_k = Hd_k - z_k \quad (2.7)$$

avec

$$\varepsilon_k = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,k} \\ \varepsilon_{2,k} \\ \dots \\ \varepsilon_{p,k} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \dots \\ H_{p-1} \\ I \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

En particulier, la dernière composante de ε s'explique :

$$\varepsilon_{p,k} = d_k - z_{p,k} \quad (2.9)$$

et en comparant (2.6) et (2.9), on vient de définir très simplement l'erreur d'estimation de l'entrée inconnue par :

$$\begin{aligned} \tilde{d}_k &= \varepsilon_{p,k} \\ &= \Delta \varepsilon_k \end{aligned} \quad (2.10)$$

Définissons les erreurs d'estimation d'état et de sortie respectivement par :

$$\begin{cases} \tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k \\ \tilde{y}_k = C\tilde{x}_k + E\tilde{d}_k \end{cases} \quad (2.11)$$

A partir des équations (2.1), (2.2), (2.7), (2.10), (2.11) et en utilisant l'opérateur d'avance q d'un pas d'échantillonnage, les expressions suivantes permettent d'obtenir la dynamique de l'erreur ε :

$$\begin{cases} \varepsilon_{k+1} = Hd_{k+1} - z_{k+1} \\ \quad = Hd_{k+1} - (\Lambda z_k + \Gamma \tilde{y}_k) \\ \quad = Hqd_k - \Lambda(Hd_k - \varepsilon_k) - \Gamma \tilde{y}_k \\ \quad = Hqd_k - \Lambda(Hd_k - \varepsilon_k) - \Gamma(C\tilde{x}_k + E\tilde{d}_k) \\ \quad = (qI - \Lambda)Hd_k + (\Lambda - \Gamma E \Delta)\varepsilon_k - \Gamma C\tilde{x}_k \end{cases} \quad (2.12)$$

puis celle de l'état :

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1} \\ \quad = Ax_k + Bu_k + Dd_k - (A\hat{x}_k + Bu_k + D\hat{d}_k + K\tilde{y}_k) \\ \quad = (A - KC)\tilde{x}_k + (D - KE)\tilde{d}_k \end{cases} \quad (2.13)$$

Finalement, compte tenu des équations (2.10), (2.12) et (2.13), les deux erreurs d'estimation sont régies par une équation d'état sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{k+1} \\ \tilde{x}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda - \Gamma E \Delta & -\Gamma C \\ (D - KE)\Delta & A - KC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_k \\ \tilde{x}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (qI - \Lambda)H \\ 0 \end{pmatrix} d_k \quad (2.14)$$

L'équation (2.14) traduit la dynamique d'évolution des erreurs d'estimation de l'état et de l'entrée inconnue en fonction de l'entrée inconnue d_k .

On note aussi que les matrices K et Γ interviennent de façon linéaire dans cette équation. Il est donc tout à fait possible de régler les coefficients de ces deux matrices d'une part de façon à respecter la stabilité de l'équation (2.14), où la \mathcal{D} -stabilité (technique de placement de pôles par exemple) et d'autre part de minimiser l'influence de l'entrée inconnue d_k sur l'erreur d'estimation (technique de type \mathcal{H}_∞ par exemple).

En fait dans ce qui suit, on s'intéresse à un découplage exact de l'influence de l'entrée inconnue sur l'erreur d'estimation en précisant la classe d'entrée inconnue permettant ce découplage.

2.2.2 Synthèse de l'observateur PI^P

Au cours de cette section, on va présenter les différentes étapes de la synthèse d'un observateur proportionnel multi-intégral. On commence, tout d'abord, par le cas le plus simple. Il s'agit d'un observateur PI , puis on abordera le cas le plus général, c'est-à-dire celui d'un observateur PI^P .

2.2.2.1 Observateur PI

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la synthèse d'un observateur ayant un seul intégrateur, c'est-à-dire compte tenu des définitions (2.4) et (2.5) caractérisé par :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Si on choisit la matrice H (2.8) sous la forme :

$$H = \begin{pmatrix} (q-1)I \\ I \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

on obtient :

$$(qI - \Lambda)H = \begin{pmatrix} (q-1)^2I \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Compte tenu de ce résultat, en vertu des équations (2.14) et (2.15), on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{1,k+1} \\ \varepsilon_{2,k+1} \\ \tilde{x}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -\Gamma_1 E & -\Gamma_1 C \\ I & I - \Gamma_2 E & -\Gamma_2 C \\ 0 & D - KE & A - KC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,k} \\ \varepsilon_{2,k} \\ \tilde{x}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (q-1)^2I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d_k \quad (2.18)$$

Ainsi, pour garantir un découplage total de l'influence de l'entrée inconnue d_k sur les erreurs d'estimation, il faut respecter la condition :

$$(q-1)^2 d_k = 0 \quad (2.19)$$

Une solution de l'équation (2.19) est donnée pour une entrée inconnue de la forme :

$$d_k = a_1 k + a_0 \quad (2.20)$$

où les paramètres a_0 et a_1 sont quelconques.

Compte tenu de (2.3) l'estimation de l'entrée inconnue peut donc s'obtenir à partir de l'erreur d'estimation de la sortie :

$$\begin{cases} z_{1,k+1} = z_{1,k} + \Gamma_1 \tilde{y}_k \\ z_{2,k+1} = z_{1,k} + z_{2,k} + \Gamma_2 \tilde{y}_k \\ \hat{d}_k = z_{2,k} \end{cases} \quad (2.21)$$

Finalement, il reste à montrer que l'erreur d'estimation \tilde{d}_k de l'entrée inconnue tend asymptotiquement vers zéro, c'est-à-dire $\tilde{d}_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$. Or, compte tenu de la contrainte (2.19)

sur la nature de l'entrée inconnue, le système (2.18) est alors autonome et sa stabilité est assurée par un choix judicieux des gains K , Γ_1 et Γ_2 . Pour cela, la matrice d'état de (2.18) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\bar{A} - \bar{K}\bar{C} \quad (2.22)$$

avec

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ I & I & 0 \\ 0 & D & A \end{pmatrix}, \bar{K} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ K \end{pmatrix}, \bar{C} = \begin{pmatrix} 0 & E & C \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Si la paire (\bar{A}, \bar{C}) est observable, alors, le choix des matrices gains K , Γ_1 et Γ_2 est réalisé par placement de pôles. Les erreurs d'estimation ε et \tilde{x} convergent donc vers 0, et compte tenu de (2.10), cela garantit la convergence asymptotique de \tilde{d} vers 0. L'observateur proposé répond bien aux exigences de reconstruction de l'état et de l'entrée inconnue, les erreurs de reconstruction ayant une convergence garantie vers l'origine. Concernant l'hypothèse d'observabilité de la paire (\bar{A}, \bar{C}) , il est assez simple de la vérifier par le critère de Hautus [1969]. En effet, la matrice

$$\begin{pmatrix} sI - \bar{A} \\ \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s-1)I & 0 & 0 \\ -I & (s-1)I & 0 \\ 0 & -D & sI - A \\ 0 & E & C \end{pmatrix} \quad \forall s \in \mathcal{C}$$

est de rang plein si $\begin{pmatrix} sI - A \\ C \end{pmatrix}$ est de plein rang ce qui est une hypothèse communément admise.

2.2.2.2 Observateur PIP

Dans ce paragraphe on traite le cas général, c'est-à-dire le cas d'un observateur PIP . La démarche est tout à fait semblable à celle décrite précédemment pour l'observateur PI , en prenant

maintenant pour généraliser (2.16) :

$$H = \begin{pmatrix} (q-1)^p \\ (q-1)^{p-1} \\ \dots \\ I \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

L'équation (2.14) s'applique toujours et ici avec :

$$(qI - \Lambda)H = \begin{pmatrix} (q-I)^{p+1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

En vertu de (2.14) et avec la définition (2.25), pour avoir une erreur d'estimation découplée totalement des entrées inconnues il faut donc que :

$$(q-1)^{p+1}d_k = 0 \quad (2.26)$$

ce qui correspond à la classe d'entrée suivante :

$$d_k = a_p k^p + a_{p-1} k^{p-1} + \dots + a_1 k + a_0 \quad (2.27)$$

Pour cette classe d'entrées inconnues, la dynamique de l'erreur d'estimation (2.14) se réduit à :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{k+1} \\ \tilde{x}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda - \Gamma E \Delta & -\Gamma C \\ (D - KE)\Delta & A - KC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_k \\ \tilde{x}_k \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

La matrice d'état de cet observateur peut aussi se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \Lambda - \Gamma E \Delta & -\Gamma C \\ (D - KE)\Delta & A - KC \end{pmatrix} = \bar{A} - \bar{K} \bar{C} \quad (2.29)$$

avec

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ D\Delta & A \end{pmatrix}, \bar{K} = \begin{pmatrix} \Gamma \\ K \end{pmatrix}, \bar{C} = (E\Delta \quad C) \quad (2.30)$$

Ainsi, sous réserve de l'observabilité de la paire (\bar{A}, \bar{C}) , le réglage de l'observateur (c'est-à-dire le choix des gains K et Γ) peut être réalisé par placement de pôles. La condition d'observabilité de Hautus [1969] ici traduite par :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} sI - \Lambda & 0 \\ -D\Delta & sI - A \\ E\Delta & C \end{pmatrix} = n + pq \quad \forall s \in \mathcal{C} \quad (2.31)$$

est satisfaite si la paire (A, C) est observable, la matrice Λ étant par définition de plein rang.

Enfin, l'estimation de l'entrée inconnue est réalisée à partir des équations d'état (2.2) et (2.3) :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - KC & D\Delta \\ -\Gamma C & \Lambda - \Gamma E\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B & K \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ y_k \end{pmatrix} \\ \hat{d}_k = \Delta z_k \end{cases} \quad (2.32)$$

2.2.3 Exemple

On considère les matrices du système décrit par (2.1) avec les valeurs numériques suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1.5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dans cet exemple, on utilise un observateur ayant trois intégrateurs et comme entrée inconnue le signal de la forme suivante :

$$d_k = a_3 k^3 + a_2 k^2 + a_1 k + a_0$$

avec $a_3 = 0.0006$, $a_2 = -0.08$, $a_1 = 2$ et $a_0 = -35$.

La figure (2.1) illustre la forme du signal d'excitation et la sortie du système pour un temps de

simulation correspondent à $N = 100$ échantillons.

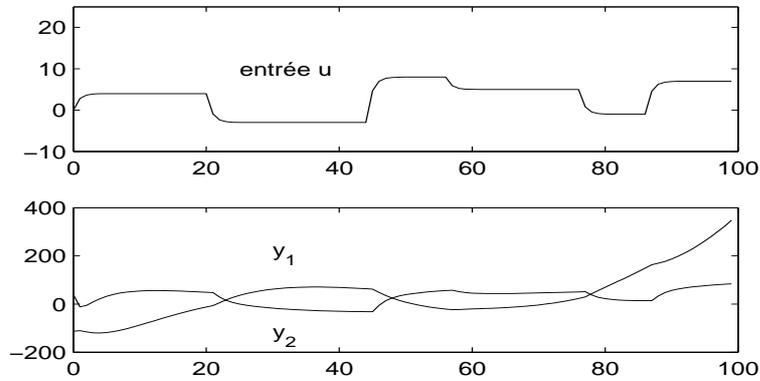


FIGURE 2.1 – Entrée et sorties mesurées

Les matrices gains de l'état K et de l'entrée inconnue Γ sont données respectivement par :

$$K = \begin{pmatrix} -0.2318 & 0.7159 \\ -0.4545 & 0.4773 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0.0633 & 0.1308 \\ 0.0431 & 0.1034 \\ 0.0977 & 0.2762 \\ 0.2808 & 0.2096 \end{pmatrix}$$

Les figures (2.2) et (2.3) montrent les résultats des estimations de l'état et de l'entrée inconnue respectivement pour des conditions initiales :

$$x_0 = \begin{pmatrix} 20 & -50 \end{pmatrix}^T, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T,$$

D'après les résultats obtenus, on constate bien que l'observateur PI^3 permet d'obtenir une bonne estimation de l'état du système et de l'entrée inconnue, les écarts d'estimation constatés, au voisinage de l'origine, étant simplement dus aux conditions initiales arbitrairement choisies.

La mise en oeuvre de l'observateur proposé nécessite l'ajustement de quelques paramètres. Outre le choix des gains de l'observateur liés aux pôles souhaités et qui doit être fait en fonction du niveau de bruit affectant les mesures de la sortie, l'utilisateur peut aussi modifier certains

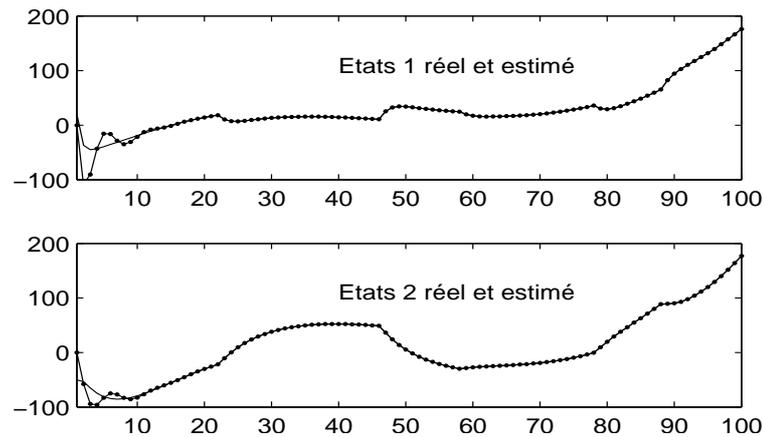


FIGURE 2.2 – Etats vrais et estimés

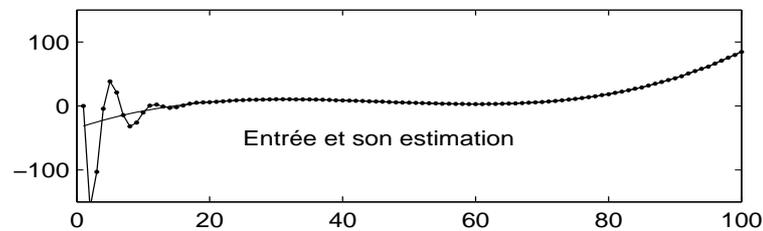


FIGURE 2.3 – Entrée inconnue et son estimée

coefficients de la matrice Λ (2.4) qui intervient dans la définition de l'entrée inconnue \hat{d} . Pour apprécier le rôle de cette matrice, l'exemple précédent est repris mais avec un niveau de bruit plus important sur la mesure de la sortie. Les figures (2.4), (2.5) et (2.6) relatent ce cas en conservant la matrice Λ initiale (2.4). L'estimé des états reste correct, par contre celle de l'entrée inconnue souffre de précision. Par contre, en modifiant la matrice Λ sous la forme :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I & \alpha I & 0 & \dots & \\ \dots & & & & \\ 0 & \dots & I & \alpha I & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I & \alpha I \end{pmatrix}$$

où $0 < \alpha \leq 1$, l'estimé des états reste correct et l'estimé de l'entrée inconnue s'est améliorée. Dans les essais effectués, ce paramètre a été ajusté de façon heuristique, une analyse plus ana-

lytique de sensibilité pourrait sans doute être effectuée.

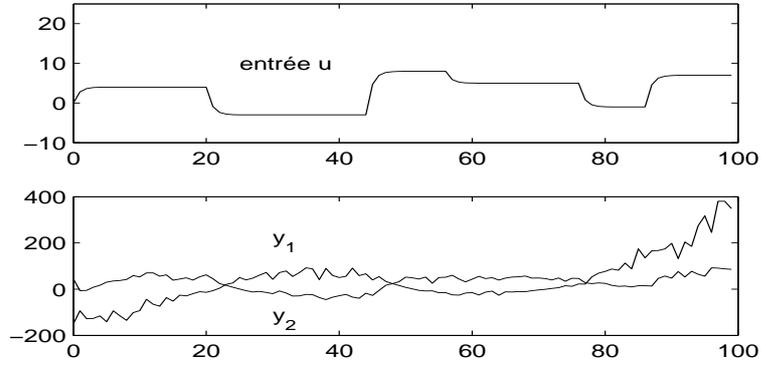


FIGURE 2.4 – Entrée et sorties mesurées

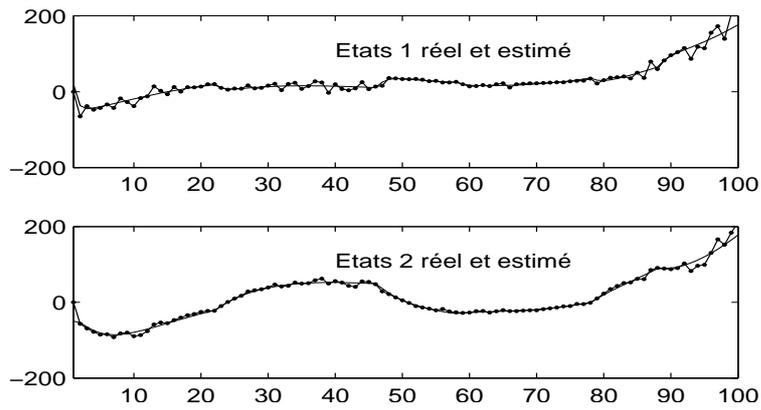


FIGURE 2.5 – Etats vrais et estimés

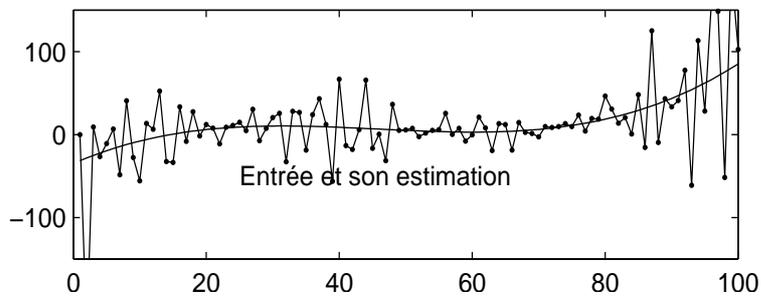


FIGURE 2.6 – Entrée inconnue et son estimation

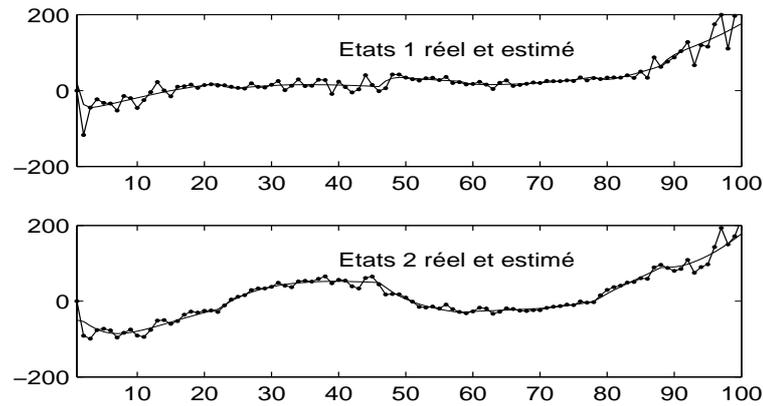


FIGURE 2.7 – États vrais et estimés

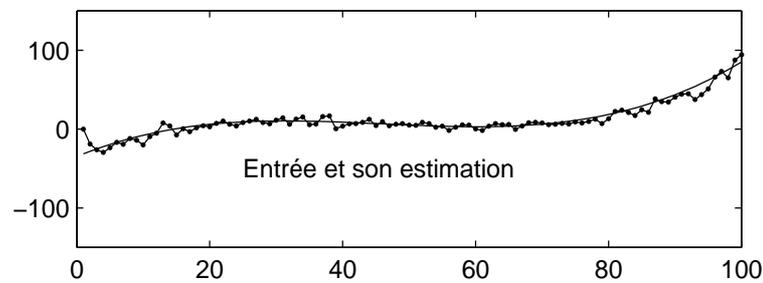


FIGURE 2.8 – Entrée inconnue et son estimée

Dans cette partie, on a présenté une forme générale d'observateur à entrée inconnue des systèmes linéaires à temps discret. L'objectif était de concevoir un observateur proportionnel multi-intégral (PI^p) qui permet de garantir une bonne précision de l'estimation de l'état du système malgré la présence des entrées inconnues sous forme polynomiale de degré p . L'idée sur laquelle repose cet observateur consiste à introduire des intégrations successives sur l'erreur d'estimation de sortie pour obtenir une bonne estimation de l'entrée inconnue et à partir de laquelle on corrige l'estimation de l'état. L'observateur proposé est testé sur un exemple numérique pour un système affecté par une entrée inconnue sous forme de polynôme de degré 3. Les résultats de simulation montrent la bonne précision avec laquelle l'entrée inconnue et l'état du système sont estimés en utilisant un observateur ayant trois actions intégrales (PI^3).

Dans la suite de nos travaux, il semble intéressant de généraliser cette approche à la recherche

d'une classe d'entrées plus générale en recherchant d'autres structures de l'observateur multi-intégral.

2.3 Filtrage robuste à entrées inconnues avec des matrices de variance des bruits incertaines

L'estimation d'état des systèmes linéaires stochastiques à temps discret en présence d'entrées inconnues générées par un modèle dynamique a été largement étudiée dans la littérature. La méthode la plus intéressante est sans doute le filtre de Kalman à deux étages qui a permis une estimation optimale de l'état. Mais, l'optimalité de ce filtre exige une connaissance parfaite des matrices de covariance des différents bruits.

2.3.1 Formulation du problème

On considère un système stochastique linéaire à temps variant et à temps discret décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + E_k^x d_k + w_k^x \\ d_{k+1} &= d_k + w_k^d \\ y_{k+1} &= H_{k+1} x_{k+1} + E_{k+1}^y d_{k+1} + v_{k+1} \end{aligned} \tag{2.34}$$

avec $x_k \in \mathfrak{R}^n$ le vecteur d'état, $y_k \in \mathfrak{R}^m$ le vecteur d'observation, $u_k \in \mathfrak{R}^r$ le vecteur d'entrée supposé connu et $d_k \in \mathfrak{R}^q$ le vecteur des perturbations inconnues. Les matrices A_k , B_k , H_k , E_k^x et E_k^y sont supposées connues et de dimensions appropriées. Les hypothèses suivantes sont formulées

- \mathcal{H}_1 : les bruits d'état w_k et de mesure v_k sont gaussiens de moyennes nulles, non corrélés et

de matrices de variance-covariance :

$$\mathcal{E} [w_k w_l^T] = Q_k \delta_{kl}$$

$$\mathcal{E} [v_k v_l^T] = R_k \delta_{kl}$$

$$\mathcal{E} [w_k v_l^T] = 0 \delta_{kl}$$

- \mathcal{H}_2 : l'état initial x_0 est une réalisation d'une séquence gaussienne indépendante des bruits w_k et v_k :

$$\mathcal{E} [x_0] = \hat{x}_0$$

$$\mathcal{E} [(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] = P_0^x$$

- \mathcal{H}_3 : on suppose que

la paire (A_k, H_k) est observable

$$\text{rank}(E_k^y) = q \text{ et } m \geq q$$

L'objectif de ce travail est de faire la synthèse d'un filtre récursif permettant d'obtenir une estimation jointe, non biaisée et à minimum de variance de l'état et des entrées inconnues en présence des incertitudes sur les matrices de variance des différents bruits d'état de sortie et de l'entrée inconnue.

2.3.2 Filtre de Kalman à deux étages

Le filtre de Kalman optimal à deux étages OTSKF a été développé par [Hsieh et Chen \[1999\]](#) dans le but d'avoir une estimation optimale de l'état malgré la présence des entrées inconnues. Le filtre est résumé par les équations suivantes :

Initialisation

$$k = 0, V_0 = P_0^{xd} \left(P_{0/0}^d \right)^{-1}$$

$$\bar{x}_{0/0} = \bar{x}_0 - V_0 \bar{d}_0, \bar{d}_{0/0} = \bar{d}_0$$

$$\bar{P}_{0/0} = P_0^x - V_0 P_0^d V_0^T, \bar{P}_{0/0}^d = P_0^d$$

Sous-filtre estimateur d'état

$$\bar{x}_{k+1/k} = A_k \bar{x}_{k/k} + B_k u_k + \bar{u}_k \quad (2.35)$$

$$\bar{P}_{k+1/k}^x = A_k \bar{P}_{k/k}^x A_k^T + \bar{Q}_k^x \quad (2.36)$$

$$\bar{x}_{k+1/k+1} = \bar{x}_{k+1/k} + \bar{K}_{k+1}^x (y_{k+1} - H_{k+1} \bar{x}_{k+1/k}) \quad (2.37)$$

$$\bar{K}_{k+1}^x = \bar{P}_{k+1/k}^x H_{k+1}^T (H_{k+1} \bar{P}_{k+1/k}^x H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \quad (2.38)$$

$$\bar{P}_{k+1/k+1}^x = (I - \bar{K}_{k+1}^x H_{k+1}) \bar{P}_{k+1/k}^x \quad (2.39)$$

Sous-filtre estimateur des entrées inconnues

$$\bar{d}_{k+1/k} = \bar{d}_{k/k} \quad (2.40)$$

$$\bar{P}_{k+1/k}^d = \bar{P}_{k/k}^d + Q_k^d \quad (2.41)$$

$$\bar{d}_{k+1/k+1} = \bar{d}_{k+1/k} + \bar{K}_{k+1}^d (y_{k+1} - H_{k+1} \bar{x}_{k+1/k} - S_{k+1} \bar{d}_{k+1/k}) \quad (2.42)$$

$$\bar{K}_{k+1}^d = \bar{P}_{k+1/k}^d S_{k+1}^T (S_{k+1} \bar{P}_{k+1/k}^d S_{k+1}^T + H_{k+1} \bar{P}_{k+1/k}^x H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \quad (2.43)$$

$$\bar{P}_{k+1/k+1}^d = (I - \bar{K}_{k+1}^d S_{k+1}) \bar{P}_{k+1/k}^d \quad (2.44)$$

Correction

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = \bar{x}_{k+1/k+1} + V_{k+1} \bar{d}_{k+1/k+1} \quad (2.45)$$

$$\hat{d}_{k+1/k+1} = \bar{d}_{k+1/k+1} \quad (2.46)$$

avec

$$\bar{U}_{k+1} = A_k V_k + E_k^x$$

$$U_{k+1} = \bar{U}_{k+1} + (Q_k^{xd} - \bar{U}_{k+1} Q_k^d) (\bar{P}_{k+1/k}^d)^{-1}$$

$$\bar{u}_k = (\bar{U}_{k+1} - U_{k+1}) \bar{d}_{k/k}$$

$$\bar{Q}_k^x = Q_k^x - Q_k^{xd} \bar{U}_{k+1}^T - U_{k+1} (Q_k^{xd} - \bar{U}_{k+1} Q_k^d)^T$$

$$V_{k+1} = U_{k+1} - \bar{K}_{k+1}^x S_{k+1}$$

$$S_{k+1} = H_{k+1} U_{k+1} + E_{k+1}^y$$

Le filtre OTSKF permet d'obtenir une estimation optimale de l'état en présence des entrées inconnues. Mais, dans le cas d'incertitude sur les matrices de covariance des différents bruits d'état, de mesure et de l'entrée inconnue le filtre perd son caractère optimal.

2.3.3 Filtre de Kalman à deux étages à gains proportionnel intégral

Dans cette section on va résoudre le problème d'estimation d'état et des entrées inconnues en présence d'incertitudes sur les matrices de variance-covariance des différents bruits. Le filtre proposé consiste à modifier le sous-filtre estimateur d'état et le sous-filtre estimateur des entrées inconnues en introduisant l'action intégrale comme proposé dans [Linder et Shafai \[1998\]](#) et [Shafai et al. \[1996\]](#) sur l'erreur d'estimation afin d'obtenir une estimation robuste de l'état et des entrées inconnues malgré ces incertitudes.

2.3.3.1 Sous-filtre estimateur d'état

Dans ce paragraphe, on modifie le sous-filtre estimateur de l'état décrit par les équations (2.35)-(2.39) en introduisant l'action intégrale. Alors le sous-filtre modifié prend la forme suivante :

$$\bar{x}_{k+1/k} = A_k \bar{x}_{k/k} + B_k u_k + \bar{u}_k \quad (2.47)$$

$$b_{k+1}^x = D_f^x b_k^x + G_{k+1}^{xi} (y_{k+1} - H_{k+1} \bar{x}_{k+1/k}) \quad (2.48)$$

$$\bar{x}_{k+1/k+1} = \bar{x}_{k+1/k} + D_i^x b_{k+1}^x + G_{k+1}^{xp} (y_{k+1} - H_{k+1} \bar{x}_{k+1/k}) \quad (2.49)$$

Avec b_k^x représente le terme intégrale de l'erreur d'estimation et G_k^{xp} et G_k^{xi} sont les matrices de gain proportionnel et de gain intégral du sous-filtre estimateur de l'état qui seront déterminées par la suite.

Pour arriver à développer le nouveau sous filtre on introduit deux matrices arbitraires, qui sont incorporés dans le système ci-dessus. Par conséquent, le sous-filtre résultant d'état de mise

à jour est donné par le système augmenté suivant :

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{k+1/k+1} \\ b_{k+1}^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & D_i^x \\ 0 & D_f^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{k/k} \\ b_k^x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_k \\ 0 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u}_k + \begin{bmatrix} G_{k+1}^{xp} \\ G_{k+1}^{xi} \end{bmatrix} (y_{k+1} - H_k \bar{x}_{k+1/k}) \quad (2.50)$$

où D_i^x et D_f^x sont deux matrices constantes déterminées en fonction des performances du système étudié. La conception optimale des matrices de gain peut être faite en utilisant la matrice augmentée de covariance :

$$\bar{P}_{k/k}^{xa} = \begin{bmatrix} P_{k/k}^{x11} & P_{k/k}^{x12} \\ P_{k/k}^{x21} & P_{k/k}^{x22} \end{bmatrix} = \bar{P}_{k/k-1}^{xa} - \begin{bmatrix} G_k^{xp} \\ G_k^{xi} \end{bmatrix} H_k^a \bar{P}_{k/k-1}^{xa} \quad (2.51)$$

$$\bar{P}_{k/k-1}^{xa} = A_{k-1}^a \bar{P}_{k-1/k-1}^{xa} A_{k-1}^{aT} + Q_{k-1}^{xa} \quad (2.52)$$

avec

$$A_k^a = \begin{bmatrix} A_k & D_i^x \\ 0 & D_f^x \end{bmatrix}, Q_k^{xa} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_k^x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } H_k^a = [H_k \quad 0] \quad (2.53)$$

En introduisant (2.52) dans (2.51) et en utilisant (2.53), les gains proportionnel et intégral prennent les formes suivantes :

$$\begin{aligned} G_{k+1}^{xp} &= \left(A_k P_{k/k}^{x11} A_k^T H_k^T + D_i^x P_{k/k}^{x21} A_k^T H_k^T + A_k P_{k/k}^{x12} D_i^{xT} H_k^T + D_i^x P_{k/k}^{x22} D_i^{xT} H_k^T + Q_k^x H_k^T \right) \left(H_k A_k P_{k/k}^{x11} \right. \\ &\quad \left. \times A_k^T H_k^T + H_k D_i^x P_{k/k}^{x21} A_k^T H_k^T + H_k A_k P_{k/k}^{x12} D_i^{xT} H_k^T + H_k D_i^x P_{k/k}^{x22} D_i^{xT} H_k^T + R_k + H_k Q_k^x H_k^T \right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} G_{k+1}^{xi} &= \left(D_f^x P_{k/k}^{x21} A_k^T H_k^T + D_f^x P_{k/k}^{x22} D_f^{xT} H_k^T \right) \left(H_k A_k P_{k/k}^{x11} A_k^T H_k^T + H_k D_i^x P_{k/k}^{x21} A_k^T H_k^T \right. \\ &\quad \left. + H_k A_k P_{k/k}^{x12} D_i^{xT} H_k^T + H_k D_i^x P_{k/k}^{x22} D_i^{xT} H_k^T + R_k + H_k Q_k^x H_k^T \right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.55)$$

- D_i^x est une matrice de rang plein.
- D_f^x est une matrice constante, où $D_f^x = \alpha I$ avec $0 < \alpha \leq 1$.

2.3.3.2 Sous-filtre estimateur des entrées inconnues

Dans cette partie on suit les mêmes étapes que dans la section précédente pour introduire le terme d'intégration dans le sous-filtre estimateur des entrées inconnues. Ce sous-filtre estimateur a la forme suivante :

$$\bar{d}_{k+1/k} = \bar{d}_{k/k} \quad (2.56)$$

$$b_{k+1}^d = D_f^d b_k^d + G_{k+1}^{di} (y_{k+1} - H_{k+1} \bar{x}_{k+1/k} - S_{k+1} \bar{d}_{k+1/k}) \quad (2.57)$$

$$\bar{d}_{k+1/k+1} = \bar{d}_{k+1/k} + D_i^d b_{k+1}^d + G_{k+1}^{dp} (y_{k+1} - H_{k+1} \bar{x}_{k+1/k} - S_{k+1} \bar{d}_{k+1/k}) \quad (2.58)$$

où b_k^d représente le terme intégral de l'erreur d'estimation et G_k^{dp} et G_k^{di} sont les matrices de gain proportionnel et de gain intégral du sous-filtre estimateur des entrées inconnues qui seront déterminées par la suite.

En introduisant deux matrices arbitraires, le sous-filtre résultant des entrées inconnues de mise à jour est donné dans le système augmenté :

$$\begin{bmatrix} \bar{d}_{k+1/k+1} \\ b_{k+1}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & D_i^d \\ 0 & D_f^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}_{k/k} \\ b_k^d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{k+1}^{dp} \\ G_{k+1}^{di} \end{bmatrix} (y_{k+1} - H_k \bar{x}_{k+1/k} - S_k \bar{d}_{k+1/k}) \quad (2.59)$$

où D_i^d et D_f^d sont deux matrices constantes déterminées en fonction des performances du système étudié. La conception optimale des matrices de gain peut être réalisée en utilisant la matrice augmentée de covariance :

$$\bar{P}_{k/k}^{da} = \begin{bmatrix} P_{k/k}^{d11} & P_{k/k}^{d12} \\ P_{k/k}^{d21} & P_{k/k}^{d22} \end{bmatrix} = \bar{P}_{k/k-1}^{da} - \begin{bmatrix} G_p^d \\ G_i^d \end{bmatrix} S_k^a \bar{P}_{k/k-1}^{da} \quad (2.60)$$

$$\bar{P}_{k/k-1}^{da} = A_{k-1}^d \bar{P}_{k-1/k-1}^{da} A_{k-1}^{dT} + Q_{k-1}^{da} \quad (2.61)$$

avec

$$A_k^d = \begin{bmatrix} I & D_i^d \\ 0 & D_f^d \end{bmatrix}, Q_k^{da} = \begin{bmatrix} Q_k^d & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ et } S_k^a = [S_k \quad 0]$$

Si on introduit (2.61) dans (2.60), alors les matrices gain proportionnel et gain intégral sont données par :

$$G_{k+1}^{dp} = \left(A_k^d P_{k/k}^{d11} A_k^{dT} S_k^T + D_i^d P_{k/k}^{d21} A_k^{dT} S_k^T + A_k^d P_{k/k}^{d12} D_i^{dT} S_k^T + D_i^d P_{k/k}^{d22} D_i^{dT} S_k^T + Q_k^d S_k^T \right) \times \left(H_k A_k P_{k/k}^{x11} A_k^T H_k^T + H_k D_i^x P_{k/k}^{x21} A_k^T H_k^T + H_k A_k P_{k/k}^{x12} D_i^{xT} H_k^T + H_k D_i^x P_{k/k}^{x22} D_i^{xT} H_k^T + S_k A_k^d P_{k/k}^{d11} A_k^{dT} S_k^T + S_k D_i^d P_{k/k}^{d21} A_k^{dT} S_k^T + S_k A_k^d P_{k/k}^{d12} D_i^{dT} S_k^T + S_k D_i^d P_{k/k}^{d22} D_i^{dT} S_k^T + R_k + H_k \bar{Q}_k^x H_k^T + S_k Q_k^d S_k^T \right)^{-1} \quad (2.62)$$

$$G_{k+1}^{di} = \left(D_f^d P_{k/k}^{d21} A_k^{dT} S_k^T + D_f^d P_{k/k}^{d22} D_f^{dT} S_k^T \right) \left(H_k A_k P_{k/k}^{x11} A_k^T H_k^T + H_k D_i^x P_{k/k}^{x21} A_k^T H_k^T + H_k A_k P_{k/k}^{x12} D_i^{xT} H_k^T + H_k D_i^x P_{k/k}^{x22} D_i^{xT} H_k^T + S_k A_k^d P_{k/k}^{d11} A_k^{dT} S_k^T + S_k D_i^d P_{k/k}^{d21} A_k^{dT} S_k^T + S_k A_k^d P_{k/k}^{d12} D_i^{dT} S_k^T + S_k D_i^d P_{k/k}^{d22} D_i^{dT} S_k^T + R_k + H_k \bar{Q}_k^x H_k^T + S_k Q_k^d S_k^T \right)^{-1} \quad (2.63)$$

- D_i^d est une matrice de rang plein.
- D_f^d est une matrice constante, où $D_f^d = \alpha I$ avec $0 < \alpha \leq 1$.

2.3.4 Exemple illustratif

On propose dans cette section de tester le filtre proposé. On considère les paramètres suivants :

$$x_k = \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ x_{3,k} \end{pmatrix}, A_k = \begin{pmatrix} a_k & 0.5 & 0.08 \\ 0.6 & 0.01 & 0.04 \\ 0.1 & 0.7 & 0.05 \end{pmatrix}, a_k = 0.2 + 0.2 \sin(0.1k), B_k = \begin{pmatrix} 2 \\ -1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$H_k = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0 \\ -0.5 & -0.8 & 0.4 \end{pmatrix}, E_k^x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, E_k^y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D_i^x = I_{3 \times 3}, D_f^x = 0.3 I_{3 \times 3}, D_i^d = 1.5, D_f^d = 0.3$$

$$Q_k^x = 0.1 I_{3 \times 3}, R_k = 0.01 I_{2 \times 2}, Q_k^{xd} = [0.1 \ 0.2 \ 0.2]^T \text{ et } Q_k^d = 0.2$$

La figure 2.9 présente les séquences de l'entrée l'entrée inconnue et les sorties du système. Le temps de simulation correspond à N=100 échantillons.

2.3. Filtrage robuste à entrées inconnues avec des matrices de variance des bruits incertaines

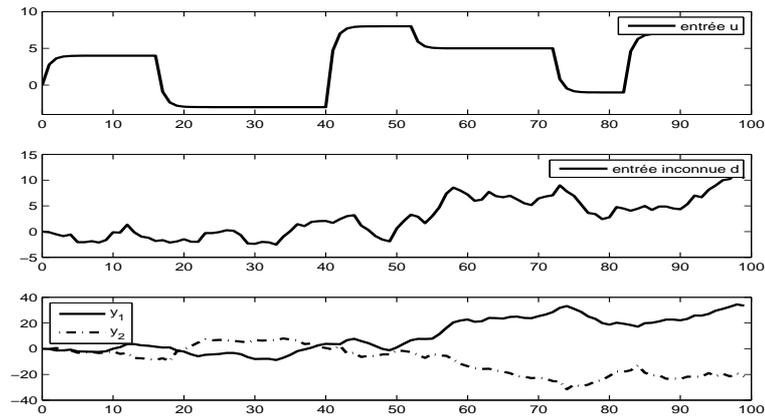


FIGURE 2.9 – Entrée, entrée inconnue et sorties mesurées

Dans la simulation, on introduit une perturbation sur les matrices de variance des bruits d'état, de mesures et des entrées inconnues comme suit :

$$Q_k^x = \begin{cases} Q_k^x & \text{si } k \leq 50 \\ (1 + \alpha_1) Q_k^x & \text{si } k > 50 \end{cases}, R_k = \begin{cases} R_k & \text{si } k \leq 50 \\ (1 + \alpha_2) R_k & \text{si } k > 50 \end{cases}, Q_k^d = \begin{cases} Q_k^d & \text{si } k \leq 50 \\ (1 + \alpha_3) Q_k^d & \text{si } k > 50 \end{cases}$$

Les figures 2.10 et 2.11 représentent l'estimation d'états et l'entrée inconnue.

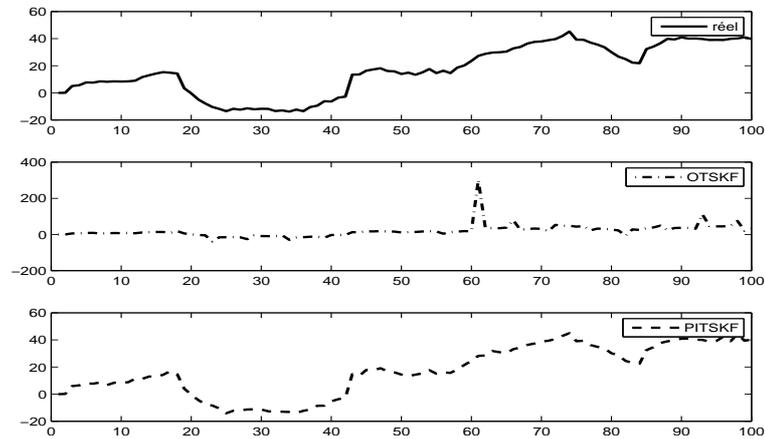


FIGURE 2.10 – Etats vrais et estimés

On peut constater que le filtre PI TSKF donne de bons résultats malgré la présence de perturbations sur les matrices de variance des bruits. Par contre le filtre OTSKF a perdu son caractère optimal.

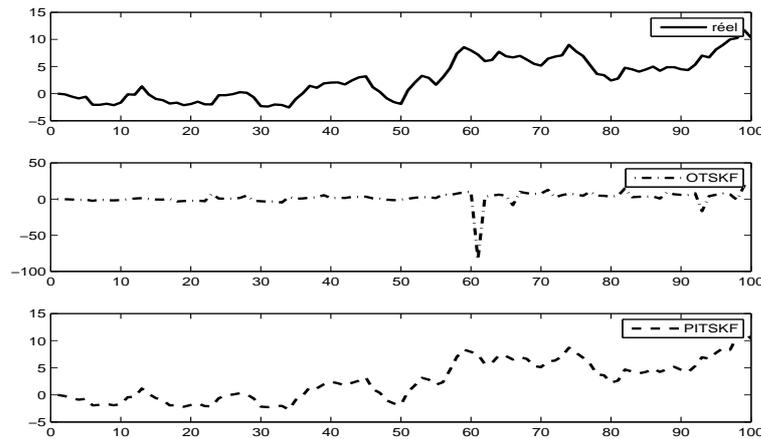


FIGURE 2.11 – Entrée inconnue et son estimée

<i>Performances</i>	x^1	x^2	d^1	d^2
<i>OTSKF</i>	0.0957	3.0063	0.0957	0.0957
<i>PITSKF</i>	0.3950	3.9958	0.3950	0.3950

TABLE 2.1 – Evaluation des valeurs *RMSE*

On peut aussi remarquer les performances du filtre proposé dans le tableau 2.1 qui présente les valeurs de la racine carrée de l’erreur quadratique moyenne (RMSE) sur l’estimation de l’état et des défauts.

Dans cette section, on a résolu le problème d’estimation robuste pour les systèmes linéaires stochastiques à temps discret et à temps variant avec une incertitude sur les matrices de variance des bruits en utilisant un filtre récursif PI TSKF. Le filtre est obtenu par une modification des sous filtres estimateurs d’état et des entrées inconnues de l’OTSKF en introduisant des actions intégrales sur l’erreur d’estimation. Cette méthode récursive est testée par un exemple académique. Il s’avère que le filtre PI TSKF demeure puissant malgré les erreurs faites sur les matrices de variance caractérisant les bruits de l’état Q_k^x , de la mesure R_k et des entrées inconnues Q_k^d .

2.4 Estimations robuste des défauts et d'état des systèmes linéaires à entrées inconnues

Dans cette section, on considère que les défauts et les perturbations inconnues sont injectés dans les deux équations d'état et de sortie. Notre objectif consiste en la synthèse d'un filtre permettant une estimation jointe et robuste des défauts et de l'état vis-à-vis des entrées inconnues et des incertitudes sur les matrices de covariance des bruits d'état, des mesures, des défauts et des entrées inconnues. Le problème est formulé dans la section qui suit.

2.4.1 Formulation du problème

On considère un système stochastique linéaire à temps variant et à temps discret décrit par :

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + F_k^x f_k + E_k^x d_k + w_k^x \quad (2.64)$$

$$f_{k+1} = f_k + w_k^f \quad (2.65)$$

$$d_{k+1} = d_k + w_k^d \quad (2.66)$$

$$y_k = H_k x_k + F_k^y f_k + E_k^y d_k + v_k \quad (2.67)$$

avec $x_k \in \mathfrak{R}^n$ le vecteur d'état, $y_k \in \mathfrak{R}^m$ le vecteur d'observation, $u_k \in \mathfrak{R}^r$ le vecteur d'entrée supposé connu, $f_k \in \mathfrak{R}^p$ le vecteur des défauts et $d_k \in \mathfrak{R}^q$ le vecteur des perturbations inconnues. Les matrices $A_k, B_k, H_k, E_k^x, E_k^y, F_k^x$ et F_k^y sont supposées connues et de dimensions appropriées. Dans cette section les hypothèses suivantes sont utilisées.

- \mathcal{H}_4 : les valeurs initiales des défauts et des entrées inconnues sont caractérisées par :

$$\mathcal{E}(f_0) = \bar{f}_0$$

$$\mathcal{E}(d_0) = \bar{d}_0$$

$$\mathcal{E}((f_0 - \bar{f}_0)(f_0 - \bar{f}_0)^T) = P_0^f$$

$$\mathcal{E}((d_0 - \bar{d}_0)(d_0 - \bar{d}_0)^T) = P_0^d$$

$$\mathcal{E}((x_0 - \bar{x}_0)(f_0 - \bar{f}_0)^T) = P_0^{xf}$$

$$\mathcal{E}((x_0 - \bar{x}_0)(d_0 - \bar{d}_0)^T) = P_0^{xd}$$

$$\mathcal{E}((f_0 - \bar{f}_0)(d_0 - \bar{d}_0)^T) = P_0^{fd}$$

- \mathcal{H}_5 : les bruits w_k^f et w_k^d sont gaussiens de moyennes nulles et de matrice de variance-covariance :

$$\mathcal{E}(w_k^f w_\ell^{fT}) = Q_k^f \delta_{k\ell}$$

$$\mathcal{E}(w_k^d w_\ell^{dT}) = Q_k^d \delta_{k\ell}$$

$$\mathcal{E}(w_k^x w_\ell^{fT}) = Q_k^{xf} \delta_{k\ell}$$

$$\mathcal{E}(w_k^x w_\ell^{dT}) = Q_k^{xd} \delta_{k\ell}$$

$$\mathcal{E}(w_k^f w_\ell^{dT}) = Q_k^{fd} \delta_{k\ell}$$

- \mathcal{H}_6 : les matrices décrivent le système obéissent aux conditions de rang suivantes :

$$\text{rang}(H_{k+1}) = m(\geq \max(p, q))$$

$$\text{rang}(F_k^x) = p$$

$$\text{rang}(H_{k+1}F_k^x) = p$$

$$\text{rang}(E_k^x) = q$$

$$\text{rang}(H_{k+1}E_k^x) = q$$

$$\text{rang}(H_{k+1}F_k^x + F_{k+1}^y) = p$$

$$\text{rang}(H_{k+1}E_k^x + E_{k+1}^y) = q$$

L'objectif de ce travail est de faire la synthèse d'un filtre récursif, permettant d'obtenir une estimation jointe, non biaisée et à minimum de variance de l'état x_k et des défauts f_k en présence des entrées inconnues d_k et des incertitudes sur les matrices de variance des différents bruits d'état, de sortie, de défauts et d'entrées inconnues.

2.4.2 Filtre de Kalman optimal à trois étages (OThSKF)

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au développement de la synthèse des filtres estimateurs de l'état et des défauts. On commence par le filtre de Kalman à état augmenté (ASKF : augmented state Kalman filter). Ensuite, on présente la transformation matricielle U-V et la technique de découplage du filtre ASKF en trois sous-filtres. Enfin, on développe le filtre de Kalman optimal à trois étages (OThSKF : optimal three-stages Kalman filter). Les défauts et les entrées inconnues sont issus respectivement des modèles (2.66) et (2.67). Les matrices Q_k^f , Q_k^d , Q_k^{xf} , Q_k^{xd} et Q_k^{fd} sont connues et les hypothèses \mathcal{H}_4 et \mathcal{H}_6 sont prises en compte. On cherche alors à concevoir un filtre de Kalman à trois étages moyennant la triple transformation matricielle utilisée par [Chen et Hsieh \[2000\]](#).

2.4.2.1 Filtre de Kalman à état augmenté (ASKF)

Considérant x_k , f_k et d_k comme état augmenté, le filtre ASKF est défini par

$$x_{k+1/k}^a = A_k^a x_{k/k}^a + B_k^a u_k \quad (2.68)$$

$$P_{k+1/k}^a = A_k^a P_{k/k}^a A_k^{aT} + Q_k \quad (2.69)$$

$$x_{k+1/k+1}^a = x_{k+1/k}^a + K_{k+1}^a (y_{k+1} - H_{k+1}^a x_{k+1/k}^a) \quad (2.70)$$

$$K_{k+1}^a = P_{k+1/k}^a H_{k+1}^{aT} (H_{k+1}^a P_{k+1/k}^a H_{k+1}^{aT} + R_{k+1})^{-1} \quad (2.71)$$

$$P_{k+1/k+1}^a = (I - K_{k+1}^a H_{k+1}^a) P_{k+1/k}^a \quad (2.72)$$

où

$$x_{(\cdot)}^a = \begin{bmatrix} x_{(\cdot)} \\ f_{(\cdot)} \\ d_{(\cdot)} \end{bmatrix}, A_k^a = \begin{bmatrix} A_k & F_k^x & E_k^x \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, B_k^a = \begin{bmatrix} B_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, H_k^a = \begin{bmatrix} H_k & F_k^y & E_k^y \end{bmatrix}$$

$$P_{(\cdot)}^a = \begin{bmatrix} P_{(\cdot)}^x & P_{(\cdot)}^{xf} & P_{(\cdot)}^{xd} \\ P_{(\cdot)}^{fx} & P_{(\cdot)}^f & P_{(\cdot)}^{fd} \\ P_{(\cdot)}^{dx} & P_{(\cdot)}^{df} & P_{(\cdot)}^d \end{bmatrix}, Q_k = \begin{bmatrix} Q_k^x & Q_k^{xf} & Q_k^{xd} \\ Q_k^{fx} & Q_k^f & Q_k^{fd} \\ Q_k^{dx} & Q_k^{df} & Q_k^d \end{bmatrix}$$

où $P_{k/k+1}^a$ et $P_{k+1/k+1}^a$ représentent respectivement les matrices de variance-covariance de l'erreur d'estimation a priori et a posteriori de l'état augmenté.

L'intégration au cours du temps des équations (2.71)-(2.72) fournit l'état augmenté estimé. Cependant, afin de réduire le volume de calcul, on propose dans la section suivante une procédure numériquement plus adaptée.

2.4.2.2 Transformation matricielle U-V

L'idée principale, sur laquelle repose cette technique de découplage, consiste à utiliser une triple transformation $U - V$ afin de diagonaliser les matrices de variance-covariance $P_{k/k+1}^a$ et $P_{k+1/k+1}^a$. Par conséquent, le filtre ASKF est décomposé en trois sous-filtres : un sous-filtre estimateur d'état du système, un sous-filtre estimateur des défauts et un sous-filtre estimateur des entrées inconnues.

Le but est de déterminer les deux matrices U_{k+1} et V_{k+1} sachant que :

$$P_{k+1/k}^a = U_{k+1} \bar{P}_{k+1/k}^a U_{k+1}^T \quad (2.73a)$$

$$P_{k+1/k+1}^a = V_{k+1} \bar{P}_{k+1/k+1}^a V_{k+1}^T \quad (2.73b)$$

avec $\bar{P}_{(\cdot)}^a = \text{diag} \{ \bar{P}_{(\cdot)}^x, \bar{P}_{(\cdot)}^f, \bar{P}_{(\cdot)}^d \}$ où $\bar{P}_{(\cdot)}^x, \bar{P}_{(\cdot)}^f$ et $\bar{P}_{(\cdot)}^d$ représentent les matrices de covariance transformées.

On définit la structure des matrices U_{k+1} et V_{k+1} comme suit :

$$U_{k+1} = \begin{bmatrix} I & U_{k+1}^{12} & U_{k+1}^{13} \\ 0 & I & U_{k+1}^{23} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.74a)$$

$$V_{k+1} = \begin{bmatrix} I & V_{k+1}^{12} & V_{k+1}^{13} \\ 0 & I & V_{k+1}^{23} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.74b)$$

U_{k+1}^{ij} et V_{k+1}^{ij} pour $i = 1$ ou 2 et $j = 2$ ou 3 seront déterminées par la suite.

2.4. Estimations robuste des défauts et d'état des systèmes linéaires à entrées inconnues

En utilisant (2.73a) et (2.73b), les équations(2.68), (2.70) et (2.71) sont transformées en :

$$x_{k+1/k}^a = U_{k+1} \bar{x}_{k+1/k}^a \quad (2.75a)$$

$$x_{k+1/k+1}^a = V_{k+1} \bar{x}_{k+1/k+1}^a \quad (2.75b)$$

$$K_{k+1}^a = V_{k+1} \bar{K}_{k+1}^a \quad (2.75c)$$

Pour le retour aux variables initiales, les transformations inverses de U_{k+1} et V_{k+1} ont les formes suivantes :

$$U_{k+1}^{-1} = \tilde{U}_{k+1} = \begin{bmatrix} I & \tilde{U}_{k+1}^{12} & \tilde{U}_{k+1}^{13} \\ 0 & I & \tilde{U}_{k+1}^{23} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.76a)$$

$$V_{k+1}^{-1} = \tilde{V}_{k+1} = \begin{bmatrix} I & \tilde{V}_{k+1}^{12} & \tilde{V}_{k+1}^{13} \\ 0 & I & \tilde{V}_{k+1}^{23} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.76b)$$

Avec un calcul direct il est facile d'obtenir

$$\tilde{U}_{k+1}^{12} = -U_{k+1}^{12} \quad (2.77)$$

$$\tilde{U}_{k+1}^{13} = U_{k+1}^{12} U_{k+1}^{23} - U_{k+1}^{13} \quad (2.78)$$

$$\tilde{U}_{k+1}^{23} = -U_{k+1}^{23} \quad (2.79)$$

$$\tilde{V}_{k+1}^{12} = -V_{k+1}^{12} \quad (2.80)$$

$$\tilde{V}_{k+1}^{13} = V_{k+1}^{12} V_{k+1}^{23} - V_{k+1}^{13} \quad (2.81)$$

$$\tilde{V}_{k+1}^{23} = -V_{k+1}^{23} \quad (2.82)$$

puis en utilisant les transformations inverses (2.77)-(2.82), on a

$$\bar{x}_{k+1/k}^a = \tilde{U}_{k+1} x_{k+1/k}^a \quad (2.83)$$

$$\bar{P}_{k+1/k}^a = \tilde{U}_{k+1} P_{k+1/k}^a \tilde{U}_{k+1}^T \quad (2.84)$$

$$\bar{x}_{k+1/k+1}^a = \tilde{V}_{k+1} x_{k+1/k+1}^a \quad (2.85)$$

$$\bar{K}_{k+1}^a = \tilde{V}_{k+1} K_{k+1}^a \quad (2.86)$$

$$\bar{P}_{k+1/k+1}^a = \tilde{V}_{k+1} P_{k+1/k+1}^a \tilde{V}_{k+1}^T \quad (2.87)$$

avec

$$\bar{x}_{(\cdot)}^a = \begin{bmatrix} \bar{x}_{(\cdot)} \\ \bar{f}_{(\cdot)} \\ \bar{d}_{(\cdot)} \end{bmatrix}, \bar{P}_{(\cdot)}^a = \begin{bmatrix} \bar{P}_{(\cdot)}^x & 0 & 0 \\ 0 & \bar{P}_{(\cdot)}^f & 0 \\ 0 & 0 & \bar{P}_{(\cdot)}^d \end{bmatrix} \text{ et } \bar{K}_{(\cdot)}^a = \begin{bmatrix} \bar{K}_{(\cdot)}^x \\ \bar{K}_{(\cdot)}^f \\ \bar{K}_{(\cdot)}^d \end{bmatrix}$$

2.4.2.3 Découplage du filtre

Utilisant la méthode de substitution double, le modèle du filtre (2.68)-(2.72) est transformé en

$$\bar{x}_{k+1/k}^a = \tilde{U}_{k+1} \bar{U}_{k+1} \bar{x}_{k/k}^a + \tilde{U}_{k+1} B_k^a u_k \quad (2.88)$$

$$\bar{P}_{k+1/k}^a = \tilde{U}_{k+1} (\bar{U}_{k+1} P_{k/k}^a \bar{U}_{k+1}^T + Q_k^a) \tilde{U}_{k+1} \quad (2.89)$$

$$\bar{x}_{k+1/k+1}^a = \tilde{V}_{k+1} \bar{U}_{k+1} \bar{x}_{k+1/k}^a + \bar{K}_{k+1}^a (y_{k+1} - S_{k+1} \bar{x}_{k+1/k}^a) \quad (2.90)$$

$$\bar{K}_{k+1}^a = \tilde{V}_{k+1} \bar{U}_{k+1} \bar{P}_{k+1/k}^a S_{k+1}^T (S_{k+1} \bar{P}_{k+1/k}^a S_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \quad (2.91)$$

$$\bar{P}_{k+1/k+1}^a = (\tilde{V}_{k+1} \bar{U}_{k+1} - \bar{K}_{k+1}^a S_{k+1}) \bar{P}_{k+1/k}^a (\tilde{V}_{k+1} \bar{U}_{k+1})^{-1} \quad (2.92)$$

avec les définitions

$$\begin{aligned} \bar{U}_{k+1} &= A_k^a V_k \\ &= \begin{bmatrix} A_k & \bar{U}_{k+1}^{12} & \bar{U}_{k+1}^{13} \\ 0 & I & \bar{U}_{k+1}^{23} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$S_{k+1} = \begin{bmatrix} S_{k+1}^1 & S_{k+1}^2 & S_{k+1}^3 \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

d'où

$$\bar{U}_{k+1}^{12} = A_k V_k^{12} + F_k^x \quad (2.95)$$

2.4. Estimations robuste des défauts et d'état des systèmes linéaires à entrées inconnues

$$\bar{U}_{k+1}^{13} = A_k V_k^{13} + F_k^x V_k^{23} + E_k^x \quad (2.96)$$

$$\bar{U}_{k+1}^{23} = V_k^{23} \quad (2.97)$$

$$S_{k+1}^1 = H_{k+1} \quad (2.98)$$

$$S_{k+1}^2 = H_{k+1} U_{k+1}^{12} + F_{k+1}^y \quad (2.99)$$

$$S_{k+1}^3 = H_{k+1} U_{k+1}^{13} + F_{k+1}^y U_{k+1}^{23} + E_{k+1}^y \quad (2.100)$$

Compte tenu du partitionnement de $\bar{P}_{k+1/k}^a$, en développant l'équation (2.89) on obtient respectivement.

$$\bar{P}_{k+1/k}^x = A_k \bar{P}_{k/k}^x A_k^T + \bar{Q}_k^1 \quad (2.101)$$

$$\bar{P}_{k+1/k}^f = \bar{P}_{k/k}^f + \bar{Q}_k^2 \quad (2.102)$$

$$\bar{P}_{k+1/k}^d = \bar{P}_{k/k}^d + Q_k^d \quad (2.103)$$

$$0 = (\bar{U}_{k+1}^{23} - U_{k+1}^{23}) \bar{P}_{k/k}^d + Q_k^{fd} - U_{k+1}^{23} Q_k^d \quad (2.104)$$

$$0 = (\bar{U}_{k+1}^{13} - U_{k+1}^{13}) \bar{P}_{k/k}^d + Q_k^{xd} - U_{k+1}^{13} Q_k^d \quad (2.105)$$

$$0 = \bar{U}_{k+1}^{12} \bar{P}_{k/k}^f - U_{k+1}^{12} \bar{P}_{k+1/k}^f + \bar{U}_{k+1}^{13} \bar{P}_{k/k}^d \bar{U}_{k+1}^{23T} - U_{k+1}^{13} \bar{P}_{k+1/k}^d U_{k+1}^{23T} \quad (2.106)$$

où

$$\bar{Q}_k^1 = Q_k^x + \bar{U}_{k+1}^{12} \bar{P}_{k/k}^f \bar{U}_{k+1}^{12T} - U_{k+1}^{12} \bar{P}_{k+1/k}^f U_{k+1}^{12T} + \bar{U}_{k+1}^{13} \bar{P}_{k/k}^d \bar{U}_{k+1}^{13T} - U_{k+1}^{13} \bar{P}_{k+1/k}^d U_{k+1}^{13T} \quad (2.107)$$

$$\bar{Q}_k^2 = Q_k^f + \bar{U}_{k+1}^{23} \bar{P}_{k/k}^d \bar{U}_{k+1}^{23T} - U_{k+1}^{23} \bar{P}_{k+1/k}^d U_{k+1}^{23T} \quad (2.108)$$

En se référant aux équations (2.104)-(2.106) et en utilisant les définitions (2.101)-(2.103), on obtient

$$U_{k+1}^{13} = (\bar{U}_{k+1}^{13} \bar{P}_{k/k}^d + Q_k^{xd}) (\bar{P}_{k+1/k}^d)^{-1} \quad (2.109)$$

$$U_{k+1}^{23} = (\bar{U}_{k+1}^{23} \bar{P}_{k/k}^d + Q_k^{fd}) (\bar{P}_{k+1/k}^d)^{-1} \quad (2.110)$$

$$U_{k+1}^{12} = (\bar{U}_{k+1}^{12} \bar{P}_{k/k}^f + \bar{U}_{k+1}^{13} \bar{P}_{k/k}^d \bar{U}_{k+1}^{23T} - U_{k+1}^{13} \bar{P}_{k/k}^f U_{k+1}^{23T} + Q_k^{xf}) (\bar{P}_{k+1/k}^f)^{-1} \quad (2.111)$$

Compte tenu du partitionnement de $\bar{P}_{k+1/k+1}^a$ le développement de l'équation (2.92), donne

$$\bar{P}_{k+1/k+1}^x = (I - \bar{K}_{k+1}^x S_{k+1}^1) \bar{P}_{k+1/k}^x \quad (2.112)$$

$$\bar{P}_{k+1/k+1}^f = (I - \bar{K}_{k+1}^f S_{k+1}^2) \bar{P}_{k+1/k}^f \quad (2.113)$$

$$\bar{P}_{k+1/k+1}^d = (I - \bar{K}_{k+1}^d S_{k+1}^3) \bar{P}_{k+1/k}^d \quad (2.114)$$

$$0 = U_{k+1}^{12} - V_{k+1}^{12} - \bar{K}_{k+1}^x S_{k+1}^2 \quad (2.115)$$

$$0 = U_{k+1}^{13} - V_{k+1}^{13} - V_{k+1}^{12} U_{k+1}^{23} + V_{k+1}^{12} V_{k+1}^{23} - \bar{K}_{k+1}^x S_{k+1}^3 \quad (2.116)$$

$$0 = U_{k+1}^{23} - V_{k+1}^{23} - \bar{K}_{k+1}^f S_{k+1}^3 \quad (2.117)$$

En se référant aux équations (2.115)-(2.117), on obtient

$$V_{k+1}^{12} = U_{k+1}^{12} - \bar{K}_{k+1}^x S_{k+1}^2 \quad (2.118)$$

$$V_{k+1}^{13} = U_{k+1}^{13} - V_{k+1}^{12} \bar{K}_{k+1}^f S_{k+1}^3 - \bar{K}_{k+1}^x S_{k+1}^3 \quad (2.119)$$

$$V_{k+1}^{23} = U_{k+1}^{23} - \bar{K}_{k+1}^f S_{k+1}^3 \quad (2.120)$$

Revenant aux équations (2.88), (2.90) et (2.91), on obtient respectivement

$$\bar{x}_{k+1/k} = A_k \bar{x}_{k/k} + B_k u_k + \bar{u}_k^1 \quad (2.121)$$

$$\bar{f}_{k+1/k} = \bar{f}_{k/k} + \bar{u}_k^2 \quad (2.122)$$

$$\bar{d}_{k+1/k} = \bar{d}_{k/k} \quad (2.123)$$

$$\bar{x}_{k+1/k+1} = \bar{x}_{k+1/k} + \bar{K}_{k+1}^x (y_{k+1} - S_{k+1}^1 \bar{x}_{k+1/k}) \quad (2.124)$$

$$\bar{f}_{k+1/k+1} = \bar{f}_{k+1/k} + \bar{K}_{k+1}^f (y_{k+1} - S_{k+1}^1 \bar{x}_{k+1/k} - S_{k+1}^2 \bar{f}_{k+1/k}) \quad (2.125)$$

$$\bar{d}_{k+1/k+1} = \bar{d}_{k+1/k} + \bar{K}_{k+1}^d (y_{k+1} - S_{k+1}^1 \bar{x}_{k+1/k} - S_{k+1}^2 \bar{f}_{k+1/k} - S_{k+1}^3 \bar{d}_{k+1/k}) \quad (2.126)$$

$$\bar{K}_{k+1}^x = \bar{P}_{k+1/k}^x S_{k+1}^{1T} (S_{k+1}^1 \bar{P}_{k+1/k}^x S_{k+1}^{1T} + R_{k+1})^{-1} \quad (2.127)$$

$$\bar{K}_{k+1}^f = \bar{P}_{k+1/k}^f S_{k+1}^{2T} (S_{k+1}^2 \bar{P}_{k+1/k}^f S_{k+1}^{2T} + S_{k+1}^1 \bar{P}_{k+1/k}^x S_{k+1}^{1T} + R_{k+1})^{-1} \quad (2.128)$$

$$\bar{K}_{k+1}^d = \bar{P}_{k+1/k}^d S_{k+1}^{3T} (S_{k+1}^3 \bar{P}_{k+1/k}^d S_{k+1}^{3T} + S_{k+1}^2 \bar{P}_{k+1/k}^f S_{k+1}^{2T} + S_{k+1}^1 \bar{P}_{k+1/k}^x S_{k+1}^{1T} + R_{k+1})^{-1} \quad (2.129)$$

où

$$\bar{u}_k^1 = (\bar{U}_{k+1}^{12} - U_{k+1}^{12})\bar{f}_{k/k} + (\bar{U}_{k+1}^{13} - U_{k+1}^{13} - U_{k+1}^{12}(\bar{U}_{k+1}^{23} - U_{k+1}^{23}))\bar{d}_{k/k} \quad (2.130)$$

$$\bar{u}_k^2 = (\bar{U}_{k+1}^{23} - U_{k+1}^{23})\bar{d}_{k/k} \quad (2.131)$$

Et enfin, pour corriger les estimations de l'état et du défaut on a les équations suivantes :

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = \bar{x}_{k+1/k+1} + V_{k+1}^{12}\bar{f}_{k+1/k+1} + V_{k+1}^{13}\bar{d}_{k+1/k+1} \quad (2.132)$$

$$\hat{P}_{k+1/k+1}^x = \bar{P}_{k+1/k+1}^x + V_{k+1}^{12}\bar{P}_{k+1/k+1}^f V_{k+1}^{12T} + V_{k+1}^{13}\bar{P}_{k+1/k+1}^d V_{k+1}^{13T} \quad (2.133)$$

$$\hat{f}_{k+1/k+1} = \bar{f}_{k+1/k+1} + V_{k+1}^{23}\bar{d}_{k+1/k+1} \quad (2.134)$$

$$\hat{P}_{k+1/k+1}^f = \bar{P}_{k+1/k+1}^f + V_{k+1}^{23}\bar{P}_{k+1/k+1}^d V_{k+1}^{23T} \quad (2.135)$$

Le filtre OThSKF permet d'obtenir une estimation optimale de l'état et du défaut en présence d'entrées inconnues. Mais, dans le cas d'incertitudes sur les matrices de variance des différents bruits Q_k^f , Q_k^d , Q_k^{xf} , Q_k^{xd} et Q_k^{fd} , le filtre perd son caractère optimal. Dans le but de résoudre ce problème, on propose dans la sous-section qui suit un nouveau filtre nommé PI ThSKF.

2.4.3 Filtre de Kalman à trois étages à gains proportionnel intégral

Cette section est consacrée au développement du filtre PI ThSKF pour résoudre le problème d'estimation d'état et de défauts en présence des entrées inconnues malgré et compte tenu des incertitudes sur les matrices de variance des différents bruits. Ce filtre consiste à modifier les sous-filtres estimateurs du filtre OThSKF en ajoutant l'action intégrale sur l'erreur d'estimation.

Les sous-filtres estimateurs d'état, du défaut et des entrées inconnues sont modifiés en introduisant l'action intégrale, ce qui donne les formes suivantes :

$$\bar{x}_{k+1/k} = A_k \bar{x}_{k/k} + B_k u_k + \bar{u}_k^1 \quad (2.136)$$

$$b_{k+1}^1 = D_f^1 b_k^1 + G_{k+1}^{1i} (y_{k+1} - S_{k+1}^1 \bar{x}_{k+1/k}) \quad (2.137)$$

$$\bar{x}_{k+1/k+1} = \bar{x}_{k+1/k} + D_i^1 b_{k+1}^1 + G_{k+1}^{1p} (y_{k+1} - S_{k+1}^1 \bar{x}_{k+1/k}) \quad (2.138)$$

$$\bar{f}_{k+1/k} = \bar{f}_{k/k} + \bar{u}_k^2 \quad (2.139)$$

$$b_{k+1}^2 = D_f^2 b_k^2 + G_{k+1}^{2i} (y_{k+1} - S_{k+1}^1 \bar{x}_{k+1/k} - S_{k+1}^2 \bar{f}_{k+1/k}) \quad (2.140)$$

$$\bar{f}_{k+1/k+1} = \bar{f}_{k+1/k} + D_i^2 b_{k+1}^2 + G_{K+1}^{2p} (y_{k+1} - S_{k+1}^1 \bar{x}_{k+1/k} - S_{k+1}^2 \bar{f}_{k+1/k}) \quad (2.141)$$

$$\bar{d}_{k+1/k} = \bar{d}_{k/k} \quad (2.142)$$

$$b_{k+1}^3 = D_f^3 b_k^3 + G_{k+1}^{3i} (y_{k+1} - S_{k+1}^1 \bar{x}_{k+1/k} - S_{k+1}^2 \bar{f}_{k+1/k} - S_{k+1}^3 \bar{d}_{k+1/k}) \quad (2.143)$$

$$\bar{d}_{k+1/k+1} = \bar{d}_{k+1/k} + D_i^3 b_{k+1}^3 + G_{K+1}^{3p} (y_{k+1} - S_{k+1}^1 \bar{x}_{k+1/k} - S_{k+1}^2 \bar{f}_{k+1/k} - S_{k+1}^3 \bar{d}_{k+1/k}) \quad (2.144)$$

où b_k^l , G_{k+1}^{lp} et G_{k+1}^{li} , avec $l = 1, 2, 3$ représentent les variables d'intégration, les gains proportionnel et intégral d'état, des défauts et des entrées inconnues.

Les matrices D_i^l , D_f^l , avec $l = 1, 2, 3$, déterminées en prenant compte de la performance du système, ont les caractéristiques suivantes :

- D_i^l avec $l = 1, 2, 3$ sont des matrices de rang plein.
- D_f^l avec $l = 1, 2, 3$ sont des matrices constantes, où $D_f^l = \alpha I$ avec $0 < \alpha \leq 1$

Par l'introduction des matrices arbitraires [Linder et Shafai \[1998\]](#), les étapes de mise à jour d'état, du défaut et des entrées inconnues sont données sous les formes augmentées suivantes :

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{k+1/k+1} \\ b_{k+1}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & D_i^1 \\ 0 & D_f^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{k/k} \\ b_k^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_k \\ 0 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u}_k + \begin{bmatrix} G_{k+1}^{1p} \\ G_{k+1}^{1i} \end{bmatrix} (y_{k+1} - S_{k+1}^1 \bar{x}_{k+1/k}) \quad (2.145)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_{k+1/k+1} \\ b_{k+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & D_i^2 \\ 0 & D_f^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{f}_{k/k} \\ b_k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u}_k + \begin{bmatrix} G_{k+1}^{2p} \\ G_{k+1}^{2i} \end{bmatrix} (y_{k+1} - S_{k+1}^1 \bar{x}_{k+1/k} - S_{k+1}^2 \bar{f}_{k+1/k}) \quad (2.146)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{d}_{k+1/k+1} \\ b_{k+1}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & D_i^3 \\ 0 & D_f^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}_{k/k} \\ b_k^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{k+1}^{3p} \\ G_{k+1}^{3i} \end{bmatrix} (y_{k+1} - S_{k+1}^1 \bar{x}_{k+1/k} - S_{k+1}^2 \bar{f}_{k+1/k} - S_{k+1}^3 \bar{d}_{k+1/k}) \quad (2.147)$$

Alors les matrices définies en (2.112), (2.113) et (2.114) prennent les formes suivantes :

$$\bar{P}_{k/k}^{xa} = \bar{P}_{k/k-1}^{xa} - \begin{bmatrix} G_k^{1p} \\ G_k^{1i} \end{bmatrix} S_k^{1a} \bar{P}_{k/k-1}^{xa} \quad (2.148)$$

$$\bar{P}_{k/k}^{fa} = \bar{P}_{k/k-1}^{fa} - \begin{bmatrix} G_k^{2p} \\ G_k^{2i} \end{bmatrix} S_k^{2a} \bar{P}_{k/k-1}^{fa} \quad (2.149)$$

$$\bar{P}_{k/k}^{da} = \bar{P}_{k/k-1}^{da} - \begin{bmatrix} G_k^{3p} \\ G_k^{3i} \end{bmatrix} S_k^{3a} \bar{P}_{k/k-1}^{da} \quad (2.150)$$

où

$$\bar{P}_{k/k-1}^{xa} = A_{k-1}^a \bar{P}_{k-1/k-1}^{xa} A_{k-1}^{aT} + Q_{k-1}^{xa} \quad (2.151)$$

$$\bar{P}_{k/k-1}^{fa} = A_{k-1}^f \bar{P}_{k-1/k-1}^{fa} A_{k-1}^{fT} + Q_{k-1}^{fa} \quad (2.152)$$

$$\bar{P}_{k/k-1}^{da} = A_{k-1}^d \bar{P}_{k-1/k-1}^{da} A_{k-1}^{dT} + Q_{k-1}^{da} \quad (2.153)$$

sont les matrices de variance-covariance a posteriori de l'état augmenté, constitué de l'état du système, des défauts et des entrées inconnues avec :

$$A_k^a = \begin{bmatrix} A_k & D_i^1 \\ 0 & D_f^1 \end{bmatrix}, A_k^f = \begin{bmatrix} I & D_i^2 \\ 0 & D_f^2 \end{bmatrix}, A_k^d = \begin{bmatrix} I & D_i^3 \\ 0 & D_f^3 \end{bmatrix} \quad (2.154)$$

$$Q_k^{xa} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_k^1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, Q_k^{fa} = \begin{bmatrix} Q_k^b & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, Q_k^{da} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_k^2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.155)$$

$$S_k^{1a} = [S_k^1 \ 0], S_k^{2a} = [S_k^2 \ 0], S_k^{3a} = [S_k^3 \ 0] \quad (2.156)$$

Les matrices de variance-covariance peuvent être décomposées en trois blocs comme suit :

$$\bar{P}_{k/k}^{xa} = \begin{bmatrix} P_{k/k}^{x11} & P_{k/k}^{x12} \\ P_{k/k}^{x21} & P_{k/k}^{x22} \end{bmatrix} \quad (2.157)$$

$$\bar{P}_{k/k}^{fa} = \begin{bmatrix} P_{k/k}^{f11} & P_{k/k}^{f12} \\ P_{k/k}^{f21} & P_{k/k}^{f22} \end{bmatrix} \quad (2.158)$$

$$\bar{P}_{k/k}^{da} = \begin{bmatrix} P_{k/k}^{d11} & P_{k/k}^{d12} \\ P_{k/k}^{d21} & P_{k/k}^{d22} \end{bmatrix} \quad (2.159)$$

Les formes optimales des matrices de gain de l'état, des défauts et des entrées inconnues sont déterminées en introduisant (2.148)-(2.150) dans (2.151)-(2.153) respectivement :

$$\begin{bmatrix} G_k^{1p} \\ G_k^{1i} \end{bmatrix} = \bar{P}_{k+1/k}^{xa} S_{k+1}^{1aT} \left(S_{k+1}^{1a} \bar{P}_{k+1/k}^{xa} S_{k+1}^{1aT} + R_{k+1} \right)^{-1} \quad (2.160)$$

$$\begin{bmatrix} G_k^{2p} \\ G_k^{2i} \end{bmatrix} = \bar{P}_{k+1/k}^{fa} S_{k+1}^{2aT} \left(S_{k+1}^{2a} \bar{P}_{k+1/k}^{fa} S_{k+1}^{2aT} + S_{k+1}^{1a} \bar{P}_{k+1/k}^{xa} S_{k+1}^{1aT} + R_{k+1} \right)^{-1} \quad (2.161)$$

$$\begin{bmatrix} G_k^{3p} \\ G_k^{3i} \end{bmatrix} = \bar{P}_{k+1/k}^{da} S_{k+1}^{3aT} \left(S_{k+1}^{3a} \bar{P}_{k+1/k}^{da} S_{k+1}^{3aT} + S_{k+1}^{2a} \bar{P}_{k+1/k}^{fa} S_{k+1}^{2aT} + S_{k+1}^{1a} \bar{P}_{k+1/k}^{xa} S_{k+1}^{1aT} + R_{k+1} \right)^{-1} \quad (2.162)$$

Dans cette partie on a développé un nouveau filtre, nommé PI ThSKF, en introduisant des actions intégrales sur l'erreur d'estimation dans les sous-filtres estimateurs d'état, des défauts et des entrées inconnues. Les avantages de ce filtre sont spécialement importants dans le cas où les matrices de variance des différents bruits ne sont pas parfaitement connues. Cette idée d'ajouter les actions intégrales se justifie par le souci de fournir une estimation robuste des états, des défauts et des entrées inconnues malgré l'incertitude sur les caractéristiques des différents bruits. Le filtre résultant sera testé dans la section qui suit.

2.4.4 Exemple illustratif

Dans cette section, on présente l'application du filtre proposé PI ThSKF. Les paramètres du système (2.64)-(2.67) sont donnés par :

$$x_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ x_{3,k} \end{bmatrix}, A_k = \begin{bmatrix} a_k & 0.5 & 0.08 \\ 0.6 & 0.01 & 0.04 \\ 0.1 & 0.7 & 0.05 \end{bmatrix}, a_k = 0.2 + 0.2 \sin(0.1k), B_k = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$H_k = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0 \\ -0.5 & -0.8 & 0.4 \end{bmatrix}, E_k^x = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.8 \\ 1 \end{bmatrix}, E_k^y = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.9 \end{bmatrix}, F_k^x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, F_k^y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_k^x = 0.5I_{3 \times 3}, R_k = 0.2I_{2 \times 2}, Q_k^{xf} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}, Q_k^{xd} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$Q_k^f = 0.5, Q_k^d = 0.5, Q_k^{fd} = 0.5$$

La figure 2.12 présente les séquences d'entrées de sortie du système. Le temps de simulation correspond à l'utilisation de $N = 100$ échantillons.

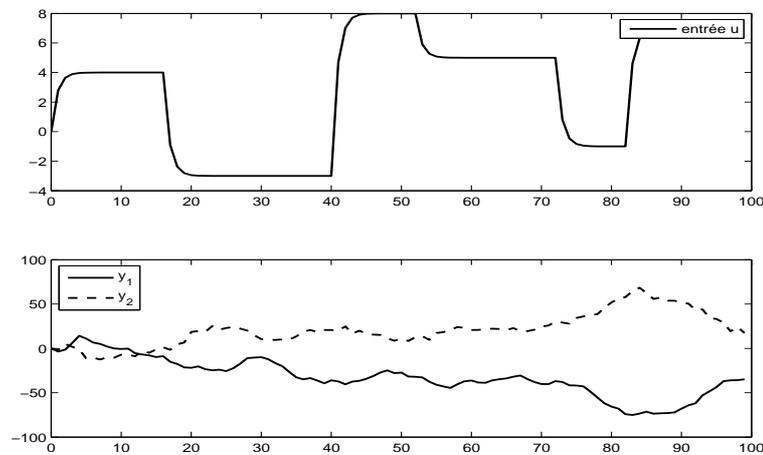


FIGURE 2.12 – Entrée et sorties mesurées

Au cours de la simulation du système, on utilise des valeurs exactes des matrices de variance des différents bruits. Mais, pour la simulation des filtres on suppose que les matrices de variance ne sont pas parfaitement connues. Alors, dans le but de tester les performances du filtre proposé et l'utilité de l'action intégrale on va étudier deux cas.

2.4.4.1 Première cas

Dans ce cas on suppose que les matrices de variances des bruits des défauts et des entrées inconnues.

$$Q_k^{f'} = \begin{cases} Q_k^f & sik \leq 50 \\ 0 \times Q_k^f & sik > 50 \end{cases} \quad \text{et} \quad Q_k^{d'} = \begin{cases} Q_k^d & sik \leq 50 \\ 0 \times Q_k^d & sik > 50 \end{cases}$$

Le tableau 2.2 présente les valeurs RMSE sur les états, le défauts et l'entrée inconnue :

Performances	$x_{1,k}$	$x_{2,k}$	$x_{3,k}$	f_k	d_k
OTSKF	72.21	39.62	42.41	126.58	101.07
PITSKF	0.695	0.595	0.712	0.656	0.694

TABLE 2.2 – Evaluation des valeurs RMSE

Les figures 2.13-2.15 présentent respectivement les valeurs réelles et estimées des états, du défaut et de l'entrée inconnue :

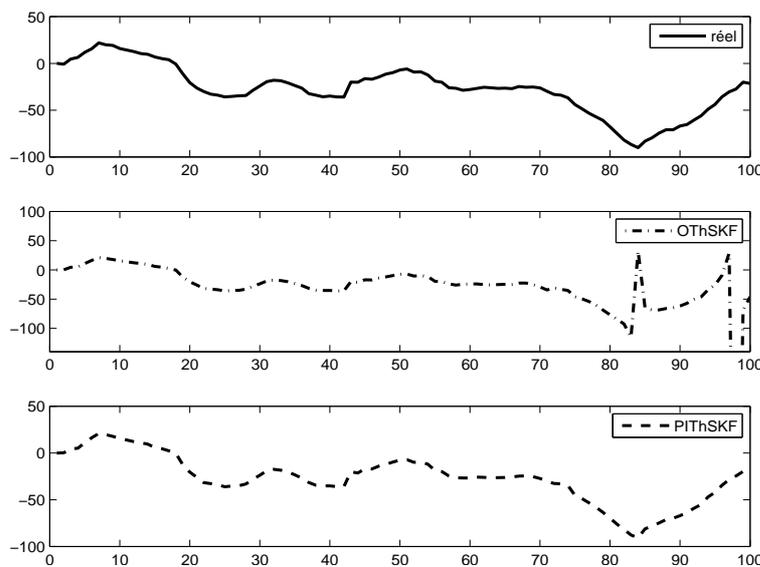


FIGURE 2.13 – Estimation de la variable d'état x_k^1

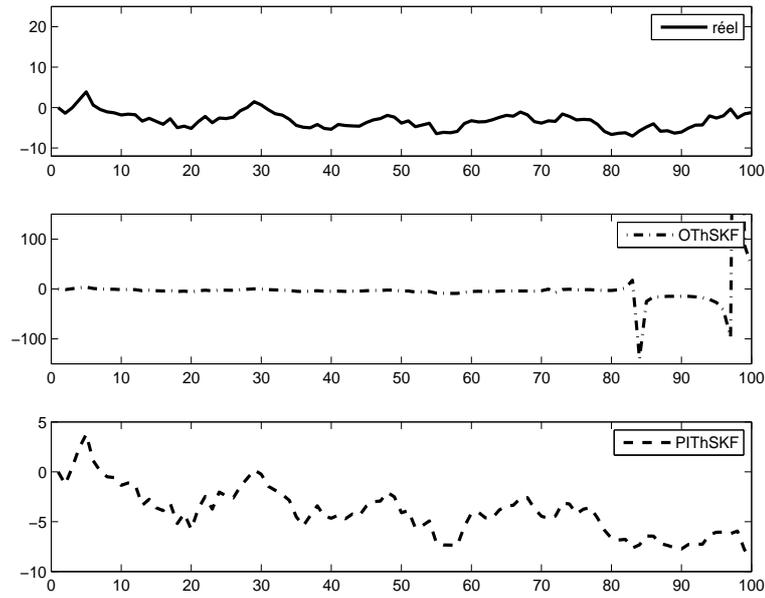


FIGURE 2.14 – Estimation du défaut f_k

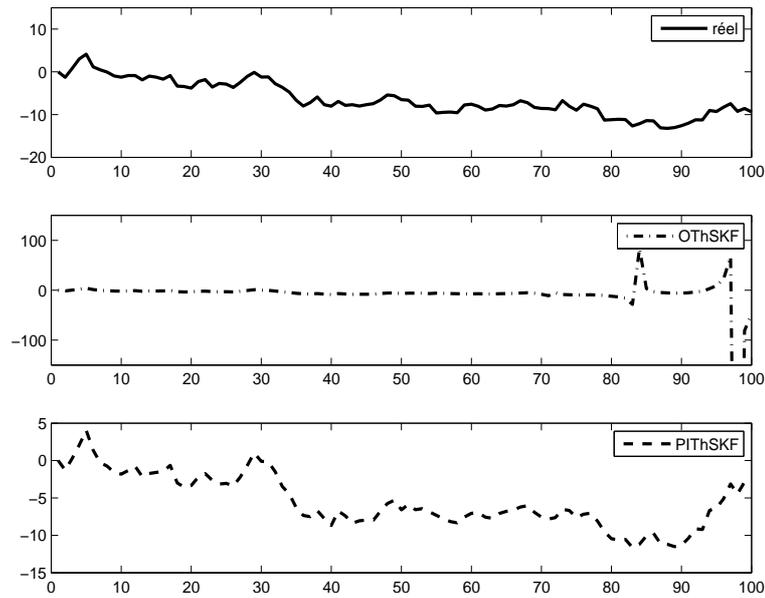


FIGURE 2.15 – Estimation de l'entrée inconnue d_k

2.4.4.2 Deuxième cas

Pour ce cas, les matrices de variance des bruits d'état et de mesure sont définies comme suit :

$$Q_k' = \begin{cases} Q_k^x & sik \leq 50 \\ 0 \times Q_k^x & sik > 50 \end{cases} \quad \text{et} \quad R_k' = \begin{cases} R_k & sik \leq 50 \\ 0 \times R_k & sik > 50 \end{cases}$$

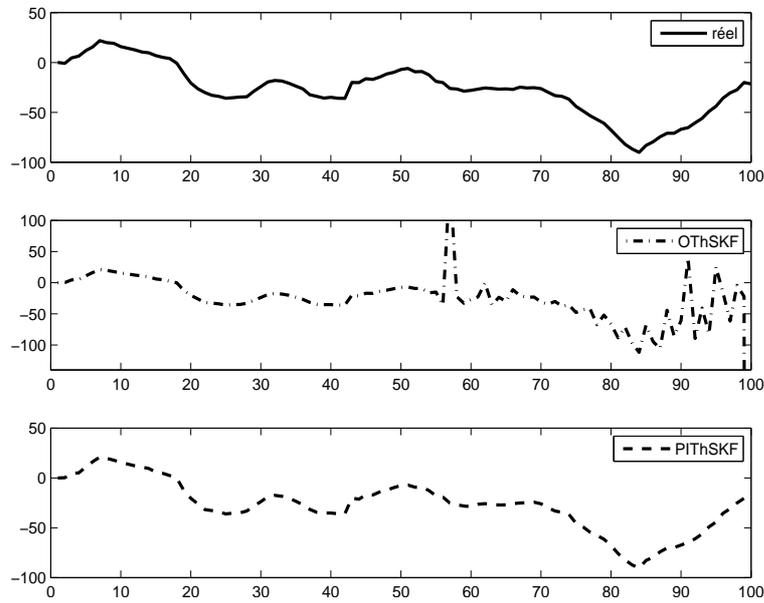


FIGURE 2.16 – Estimation de la variable d'état x_k^1

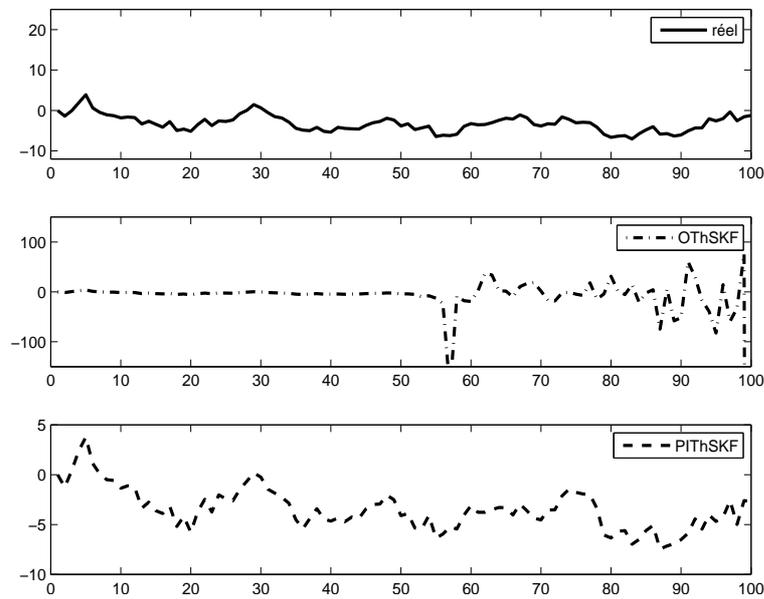
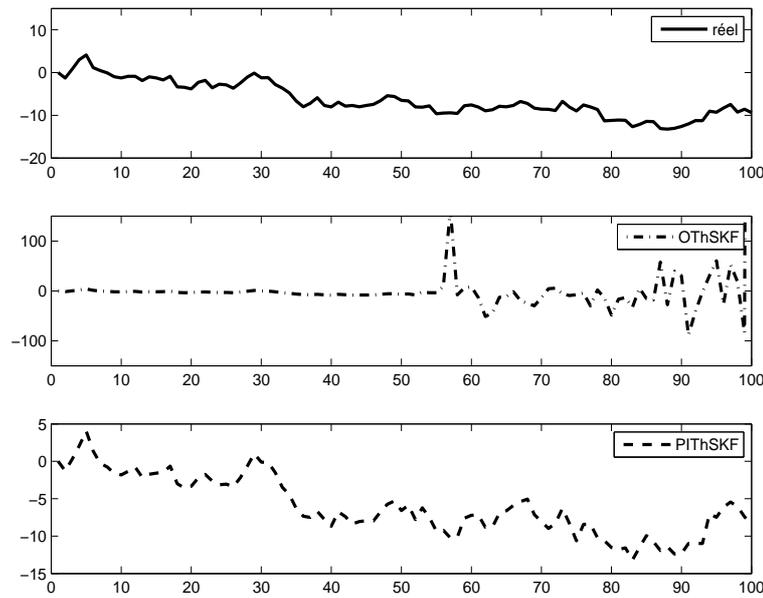


FIGURE 2.17 – Estimation du défaut f_k

A partir des résultats obtenus, figures 2.13-2.18 et le tableau 2.3, on constate que le filtre

FIGURE 2.18 – Estimation de l'entrée inconnue d_k

<i>Performances</i>	$x_{1,k}$	$x_{2,k}$	$x_{3,k}$	f_k	d_k
<i>OTSKF</i>	297.6	54.8	296.1	226.5	203.0
<i>PITSKF</i>	0.728	0.655	0.934	0.946	0.987

TABLE 2.3 – Evaluation des valeurs RMSE

proposé PI ThSKF a donné de bons résultats malgré les perturbations qui sont introduites sur les matrices de variance des différents bruits d'états, de défauts et d'entrées inconnues.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, l'estimation robuste non biaisée des systèmes linéaires à entrées inconnues est résolue. Dans une première partie, on a développé un observateur proportionnel multi-intégral pour le cas des entrées inconnues sous forme polynomiale et qui a permis une estimation non biaisée, cette approche pourra être étendue par la suite pour d'autres formes d'entrées inconnues. Dans une deuxième partie, on a étudié le problème d'estimation d'état en présence d'entrées inconnues et d'incertitudes sur les matrices de variance des bruits. Ce problème est résolu par l'utilisation du filtre OTSKF en ajoutant une action intégrale sur l'erreur d'estimation

d'état et des entrées inconnues ce qui a donné naissance au filtre PI TSKF. Enfin, un filtre robuste PI ThSKF est développé pour résoudre le problème d'estimation jointe des défauts et de l'état en présence des entrées inconnues et des incertitudes sur les matrices de variance des différents bruits où on a utilisé le même principe que précédent par introduire des actions intégrales sur les erreurs d'estimation d'état, des défauts et des entrées inconnues pour anticiper l'effet des incertitudes. Les différentes approches sont testées à travers des exemples académiques et qui ont donné de bons résultats.

3

Estimation jointe et robuste de l'état et des défauts en présence de perturbations inconnues

Sommaire

3.1	Introduction	94
3.2	Formulation du problème	96
3.3	Synthèse du filtre ARThSKF	98
3.3.1	Filtre OThSKF	98
3.3.2	Filtre RThSKF	102
3.3.3	Filtre ARThSKF	105

3.4 Synthèse du filtre UMVF	109
3.4.1 Estimation non biaisée	109
3.4.2 Estimation UMV	111
3.4.3 Mise à jour du filtre	113
3.5 Extension du filtre UMVF	114
3.6 Synthèse du filtre ORFSF	117
3.6.1 Estimation du défaut	119
3.6.2 Estimation de l'état du système	122
3.6.3 Mise à jour du filtre	125
3.7 Exemples illustratifs	125
3.7.1 Exemple 1 : estimation simultanée des défauts actionneurs et capteurs	125
3.7.2 Exemple 2 : étude comparative	128
3.8 Conclusion	134

3.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à la synthèse de trois nouveaux filtres récursifs permettant d'obtenir une estimation non biaisée et à minimum de variance de l'état et des défauts de systèmes stochastiques linéaires en présence de perturbations inconnues. Ces filtres peuvent être appliqués pour résoudre des problèmes de diagnostic de défauts (FDI : Fault Detection and Isolation) ou de commande tolérante aux défauts (FTC : Fault Tolerant Control).

Les systèmes considérés, dans cette étude, sont décrits par des modèles stochastiques linéaires, à temps discret et à temps variant. Le premier filtre nommé ARThSKF (Augmented Robust Three-Stage Kalman Filter) qui a fait l'objet du travail publié dans [Ben Hmida et al. \[010a\]](#). Il s'agit ici d'une extension des travaux de [Hsieh et Chen \[1999\]](#), [Hsieh \[2000\]](#) et [Hsieh \[2007\]](#). Ce filtre est obtenu d'une part, à partir des modifications apportées aux équations de mise à jour du filtre OThSKF (Optimal three-stage Kalman filtre), et d'autre part en utilisant un modèle augmenté des défauts et des perturbations inconnues. Il s'agit d'obtenir un filtre qui ne dépend que de l'initialisation de l'état du système et d'aucune informations a priori sur les défauts et sur

les entrées inconnues. Ce filtre sera utilisé, par la suite, pour résoudre le problème d'estimation robuste et simultanée des défauts capteurs et actionneurs des systèmes stochastiques linéaires affectés par des perturbations additives sur l'état et sur les mesures. Le deuxième filtre récursif nommé EUMVF (Extended Unbiased Minimum-Variance Filter) a fait l'objet du travail publié dans [Ben Hmida et al. \[2010\]](#). Ce travail constitue une extension des travaux de [Gillijns et Moor \[007a\]](#) et de [Hsieh \[2009\]](#) et qui s'intéresse aux systèmes stochastiques linéaires affectés par des perturbations inconnues sur l'état et par des défauts sur l'état et sur les mesures. Ce filtre récursif sera conçu par l'utilisation d'un estimateur linéaire non-biaisé et à minimum de variance (LUMVE : Linear Unbiased Minimum-Variance Estimator). L'estimation des défauts sera obtenue en utilisant la méthode des moindres carrés pondérés (WLS : Weighted Least-Square). Nous commençons d'abord à traiter le cas simple où la matrice directe d'injection des défauts sur les mesures est de rang plein, par la suite nous étendons ce travail pour traiter le cas où cette matrice est de rang arbitraire. Malheureusement, ce filtre souffre d'une certaine insuffisance, dans certains cas, en délivrant une estimation biaisée des défauts. Le troisième filtre ORFSF (Optimal Recursive Five Step Filter) vient alors pour combler les insuffisances du filtre EUMVF et a fait l'objet de l'article [Khémiri et al. \[2011a\]](#). L'idée sur laquelle repose ce travail, consiste à transformer l'équation de mesures du système original en utilisant une décomposition en valeurs singulières de la matrice d'injection directe des défauts sur les mesures. Dans cette procédure, la sortie et les défauts sont décomposés en deux composantes. Il en résulte une estimation des défauts moyennant une superposition de deux termes : un premier qui dépend de la composante estimée directement à partir des mesures et le second terme généré indirectement avec un retard d'un pas à partir de l'état du système. En utilisant cette technique, il est possible alors d'améliorer les performances du filtre pour obtenir une estimation non biaisée des défauts même en présence d'une matrice d'injection directe des défauts sur les mesures de rang non plein. Ces filtres seront testés à travers des exemples numériques pour résoudre le problème d'estimation simultanée des défauts capteurs et actionneurs. Une étude comparative de ces filtres sera effectuée avec d'autres filtres existants dans la littérature.

Ce présent chapitre est organisé comme suit ; on commencera par une formulation du problème dans la section 3.2. Les sections 3.3, 3.4, 3.5 et 3.6 seront dédiées respectivement à la synthèse des filtres récursifs ARThSKF, UMVF, EUMVF et ORFSF. Des exemples illustratifs

par simulation seront présentés dans la section 3.7. Une comparaison des performances de ces trois filtres et d'autres filtres existants dans la littérature et ceci par l'évaluation de la valeur du critère RMSE (Root Mean Square Error) sera également présentée. Enfin, on terminera ce chapitre par une conclusion.

3.2 Formulation du problème

Le problème consiste à concevoir un filtre qui donne une estimation jointe et robuste d'état et de défaut pour les systèmes stochastiques linéaire à temps discret et à temps variant en présence des entrées inconnues. Ce problème est décrit par le bloc suivant :

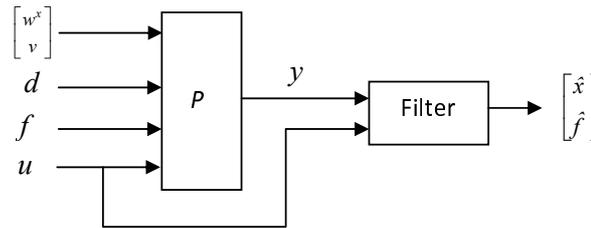


FIGURE 3.1 – Filtre estimateur de l'état et du défaut

On considère un système stochastique linéaire à temps variant et à temps discret :

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + F_k^x f_k + E_k^x d_k + w_k \quad (3.1)$$

$$y_k = H_k x_k + F_k^y f_k + E_k^y d_k + v_k \quad (3.2)$$

avec $x_k \in \mathfrak{R}^n$ le vecteur d'état, $y_k \in \mathfrak{R}^m$ le vecteur d'observation, $u_k \in \mathfrak{R}^r$ le vecteur d'entrée supposé connu, $f_k \in \mathfrak{R}^p$ le vecteur des défauts et $d_k \in \mathfrak{R}^q$ le vecteur des perturbations inconnues. Les matrices $A_k, B_k, H_k, E_k^x, E_k^y, F_k^x$ et F_k^y sont supposées connues et de dimensions appropriées. Les hypothèses considérées, dans ce chapitre, sont les suivantes :

\mathcal{H}_1 : les bruits d'état w_k et de mesure v_k sont gaussiens de moyennes nulles, non corrélés et de

matrices de variance-covariance :

$$\mathcal{E} [w_k w_l^T] = Q_k \delta_{kl}$$

$$\mathcal{E} [v_k v_l^T] = R_k \delta_{kl}$$

$$\mathcal{E} [w_k v_l^T] = 0 \delta_{kl}$$

\mathcal{H}_2 : l'état initial x_0 est une réalisation d'une séquence gaussienne indépendante des bruits w_k et v_k :

$$\mathcal{E} [x_0] = \hat{x}_0$$

$$\mathcal{E} [(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] = P_0^x$$

\mathcal{H}_3 : on suppose que

la paire (A_k, H_k) est observable

$$0 < \text{rank} (F_k^y) \leq p$$

$$m \geq p + q$$

L'objectif de ce travail est de faire la synthèse d'un filtre récursif à partir des mesures disponibles comme l'indique la figure 3.1, permettant d'obtenir une estimation jointe, non biaisée et à minimum de variance de l'état x_k et des défauts f_k en présence de toutes perturbations inconnues d_k . Les caractéristiques de cette estimation sont les suivantes :

- Une estimation non biaisée pour toutes perturbations inconnues

$$\mathcal{E} [\tilde{f}_k] = \mathcal{E} [f_k - \hat{f}_k] = 0 \tag{3.3}$$

$$\mathcal{E} [\tilde{x}_k] = \mathcal{E} [x_k - \hat{x}_k] = 0 \tag{3.4}$$

- Estimation à minimum de variance : $\mathcal{E} [\tilde{f}_k \tilde{f}_k^T]$ est minimisée sous la contrainte (3.3),

$\text{trace} \{P_k^x = \mathcal{E} [\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T]\}$ est minimisée sous les contraintes (3.3) et (3.4)

Pour cela, nous traitons les deux cas suivants :

- un premier cas où la matrice $E_k^y \neq 0$ dans lequel nous proposons de faire la synthèse du filtre ARThSKF qui est basée sur la technique du filtre de Kalman à trois-étages ;
- un second cas où la matrice $E_k^y = 0$ c'est-à-dire où les perturbations inconnues affectent uniquement l'état du système et non les mesures (y_k). Dans ce cas, nous proposons de développer deux nouveaux filtres récursifs EUMVF et RFSE.

3.3 Synthèse du filtre ARThSKF

Dans cette section, on s'intéresse à la synthèse du filtre ARThSKF correspondant au système (3.1) et (3.2) avec $E_k^y \neq 0$. Pour cela, on commencera par décrire brièvement la démarche permettant d'obtenir le filtre de Kalman optimal à trois étages (OThSKF). Ce dernier est obtenu à partir d'une transformation UV du filtre de Kalman à état augmenté (ASKF) et tout en supposant qu'on connaît les modèles décrivant l'évolution des défauts et des perturbations inconnues. Par la suite, on passe moyennant certaines modifications sur les équations de mise à jour du filtre OThSKF pour obtenir le filtre de Kalman robuste à trois étages (RThSKF). Il conviendra ensuite de montrer que l'utilisation des modèles augmentés de défauts et des perturbations inconnues, permettra d'obtenir le filtre ARThSKF. Enfin, on démontrera l'optimalité de ce filtre en ce sens qu'il est capable de fournir une estimation non biaisée et à minimum de variance de l'état du système, des défauts et même des perturbations inconnues.

3.3.1 Filtre OThSKF

On admet maintenant que les défauts et les perturbations inconnues sont décrits respectivement par des processus stochastiques de type marche aléatoire (random-walk processes) :

$$f_k = f_{k-1} + w_{k-1}^f \quad (3.5)$$

$$d_k = d_{k-1} + w_{k-1}^d \quad (3.6)$$

où w_k^f et w_k^d représentent respectivement les signaux exogènes assimilés à des bruits de modèles (3.5) et (3.6). Les hypothèses suivantes sont formulées :

- \mathcal{H}_4 : les bruits w_{k-1}^f et w_{k-1}^d sont gaussiens de moyennes nulles, non corrélés et de matrices variance-covariance

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \left[w_k^f w_l^{fT} \right] &= Q_k^f \delta_{kl} \\ \mathcal{E} \left[w_k^d w_l^{dT} \right] &= Q_k^d \delta_{kl} \\ \mathcal{E} \left[w_k^x w_l^{fT} \right] &= Q_k^{xf} \delta_{kl} \\ \mathcal{E} \left[w_k^x w_l^{dT} \right] &= Q_k^{xd} \delta_{kl} \\ \mathcal{E} \left[w_k^f w_l^{dT} \right] &= Q_k^{fd} \delta_{kl}\end{aligned}$$

- \mathcal{H}_5 : l'état initial du système x_0 est une réalisation d'une séquence gaussienne indépendante des bruits w_k , v_k , w_k^f et w_k^d , de moyenne \bar{x}_0 et de matrice de variance-covariance P_0^x .
- \mathcal{H}_6 : les valeurs initiales du défaut f_0 et de l'entrée inconnue d_0 ont des caractéristiques statiques définies par :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} [f_0] &= \bar{f}_0 \\ \mathcal{E} [d_0] &= \bar{d}_0 \\ \mathcal{E} [(f_0 - \bar{f}_0)(f_0 - \bar{f}_0)^T] &= P_0^f \\ \mathcal{E} [(d_0 - \bar{d}_0)(d_0 - \bar{d}_0)^T] &= P_0^d \\ \mathcal{E} [(x_0 - \bar{x}_0)(f_0 - \bar{f}_0)^T] &= P_0^{xf} \\ \mathcal{E} [(x_0 - \bar{x}_0)(d_0 - \bar{d}_0)^T] &= P_0^{xd} \\ \mathcal{E} [(f_0 - \bar{f}_0)(d_0 - \bar{d}_0)^T] &= P_0^{fd}\end{aligned}$$

Etant donné que les matrices Q_k^f , Q_k^d , Q_k^{xf} , Q_k^{xd} et Q_k^{fd} sont connues et que les hypothèses \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_6 sont vérifiées, le filtre OThSKF sera obtenu en passant par les étapes suivantes :

- une première étape consiste à établir le filtre de Kalman à état augmenté (ASKF) correspondant aux modèles (3.1), (3.2), (3.5) et (3.6),
- la deuxième étape utilise la transformation UV pour découpler le filtre ASKF en trois sous-

filtres : un sous-filtre estimateur de l'état du système, un sous-filtre estimateur des défauts et un sous-filtre estimateur des perturbations,

- la troisième étape consiste à corriger l'estimation de l'état du système et des défauts.

Le détail de calcul, de ces différentes étapes, est développé dans le chapitre 2 et dans [Ben Hmida et al. \[010a\]](#). On résume le filtre OThSKF par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1/k+1} &= \bar{x}_{k+1/k+1} + V_{k+1}^{12} \bar{f}_{k+1/k+1} + V_k^{13} \bar{d}_{k+1/k+1} \\ \hat{P}_{k+1/k+1}^x &= \bar{P}_{k+1/k+1}^x + V_{k+1}^{12} \bar{P}_{k+1/k+1}^f V_{k+1}^{12T} + V_{k+1}^{13} \bar{P}_{k+1/k+1}^d V_{k+1}^{13T} \\ \hat{f}_{k+1/k+1} &= \bar{f}_{k+1/k+1} + V_{k+1}^{23} \bar{d}_{k+1/k+1} \\ \hat{P}_{k+1/k+1}^f &= \bar{P}_{k+1/k+1}^f + V_{k+1}^{23} \bar{P}_{k+1/k+1}^d V_{k+1}^{23T}\end{aligned}$$

avec

$$\bar{x}_{k+1/k} = A_k \bar{x}_{k/k} + B_k u_k + \bar{u}_k^1 \quad (3.7)$$

$$\bar{P}_{k+1/k}^x = A_k \bar{P}_{k/k}^x A_k^T + \bar{Q}_k^2 \quad (3.8)$$

$$\bar{K}_{k+1}^x = \bar{P}_{k+1/k}^x H_{k+1}^T C_{k+1}^{-1} \quad (3.9)$$

$$\bar{x}_{k+1/k+1} = \bar{x}_{k+1/k} + \bar{K}_{k+1}^x (y_{k+1} - H_{k+1} \bar{x}_{k+1/k}) \quad (3.10)$$

$$\bar{P}_{k+1/k+1}^x = (I - \bar{K}_{k+1}^x H_{k+1}) \bar{P}_{k+1/k}^x \quad (3.11)$$

$$\bar{f}_{k+1/k} = \bar{f}_{k/k} + \bar{u}_k^2 \quad (3.12)$$

$$\bar{P}_{k+1/k}^f = \bar{P}_{k/k}^f + \bar{Q}_k^2 \quad (3.13)$$

$$\bar{K}_{k+1}^f = \bar{P}_{k+1/k}^f S_{k+1}^{2T} (S_{k+1}^2 \bar{P}_{k+1/k}^f S_{k+1}^{2T} + S_{k+1}^1 \bar{P}_{k+1/k}^x S_{k+1}^{1T} + R_{k+1})^{-1} \quad (3.14)$$

$$\bar{P}_{k+1/k+1}^f = (I - \bar{K}_{k+1}^f S_{k+1}^2) \bar{P}_{k+1/k}^f \quad (3.15)$$

$$\bar{f}_{k+1/k+1} = \bar{f}_{k+1/k} + \bar{K}_{k+1}^f (y_{k+1} - S_{k+1}^1 \bar{x}_{k+1/k} - S_{k+1}^2 \bar{f}_{k+1/k}) \quad (3.16)$$

$$\bar{d}_{k+1/k} = \bar{d}_{k/k} \quad (3.17)$$

$$\bar{P}_{k+1/k}^d = \bar{P}_{k/k}^d + Q_k^d \quad (3.18)$$

$$\bar{K}_{k+1}^d = \bar{P}_{k+1/k}^d S_{k+1}^{3T} (S_{k+1}^3 \bar{P}_{k+1/k}^d S_{k+1}^{3T} + S_{k+1}^2 \bar{P}_{k+1/k}^f S_{k+1}^{2T} + S_{k+1}^1 \bar{P}_{k+1/k}^x S_{k+1}^{1T} + R_{k+1})^{-1} \quad (3.19)$$

$$\bar{P}_{k+1/k+1}^d = (I - \bar{K}_{k+1}^d S_{k+1}^3) \bar{P}_{k+1/k}^d \quad (3.20)$$

$$\bar{d}_{k+1/k+1} = \bar{d}_{k+1/k} + \bar{K}_{k+1}^d (y_{k+1} - S_{k+1}^1 \bar{x}_{k+1/k} - S_{k+1}^2 \bar{f}_{k+1/k} - S_{k+1}^3 \bar{d}_{k+1/k}) \quad (3.21)$$

où

$$S_{k+1}^1 = H_{k+1} \quad (3.22)$$

$$S_{k+1}^2 = H_{k+1} U_{k+1}^{12} + F_{k+1}^y \quad (3.23)$$

$$S_{k+1}^3 = H_{k+1} U_{k+1}^{13} + F_{k+1}^y U_{k+1}^{23} + E_{k+1}^y \quad (3.24)$$

$$\Pi_{k+1}^{12} = A_k V_k^{12} + F_k^x \quad (3.25)$$

$$\Pi_{k+1}^{13} = A_k V_k^{13} + F_k^x V_k^{23} + E_k^x \quad (3.26)$$

$$\Pi_{k+1}^{23} = V_k^{23} \quad (3.27)$$

$$U_{k+1}^{13} = (\Pi_{k+1}^{13} \bar{P}_{k/k}^d + Q_k^{xd}) (\bar{P}_{k+1/k}^d)^{-1} \quad (3.28)$$

$$U_{k+1}^{23} = (\Pi_{k+1}^{23} \bar{P}_{k/k}^d + Q_k^{fd}) (\bar{P}_{k+1/k}^d)^{-1} \quad (3.29)$$

$$U_{k+1}^{12} = (\Pi_{k+1}^{12} \bar{P}_{k/k}^f + \Pi_{k+1}^{13} \bar{P}_{k/k}^d \Pi_{k+1}^{23T} - U_{k+1}^{13} \bar{P}_{k/k}^f U_{k+1}^{23T} + Q_k^{xf}) (\bar{P}_{k+1/k}^f)^{-1} \quad (3.30)$$

$$V_{k+1}^{12} = U_{k+1}^{12} - \bar{K}_{k+1}^x S_{k+1}^2 \quad (3.31)$$

$$V_{k+1}^{13} = U_{k+1}^{13} - V_{k+1}^{12} \bar{K}_{k+1}^f S_{k+1}^3 - \bar{K}_{k+1}^x S_{k+1}^3 \quad (3.32)$$

$$V_{k+1}^{23} = U_{k+1}^{23} - \bar{K}_{k+1}^f S_{k+1}^3 \quad (3.33)$$

$$\bar{u}_k^1 = (\Pi_{k+1}^{12} - U_{k+1}^{12}) \bar{f}_{k/k} + (\Pi_{k+1}^{13} - U_{k+1}^{13} - U_{k+1}^{12} (\Pi_{k+1}^{23} - U_{k+1}^{23})) \bar{d}_{k/k} \quad (3.34)$$

$$\bar{u}_k^2 = (\Pi_{k+1}^{23} - U_{k+1}^{23}) \bar{d}_{k/k} \quad (3.35)$$

$$\bar{Q}_k^1 = Q_k^x + \Pi_{k+1}^{12} \bar{P}_{k/k}^f \Pi_{k+1}^{12T} - U_{k+1}^{12} \bar{P}_{k+1/k}^f U_{k+1}^{12T} + \Pi_{k+1}^{13} \bar{P}_{k/k}^d \Pi_{k+1}^{13T} - U_{k+1}^{13} \bar{P}_{k+1/k}^d U_{k+1}^{13T} \quad (3.36)$$

$$\bar{Q}_k^2 = Q_k^f + \Pi_{k+1}^{23} \bar{P}_{k/k}^d \Pi_{k+1}^{23T} - U_{k+1}^{23} \bar{P}_{k+1/k}^d U_{k+1}^{23T} \quad (3.37)$$

L'OThSKF est optimal dans le sens de la moyenne minimale de l'erreur quadratique (MMSE : minimum mean square error). Cependant, ce filtre perd son optimalité, quand les propriétés statistiques des modèles (3.5) et (3.6) sont inconnues ou pas parfaitement connues. Ainsi, il vaudrait mieux d'utiliser un filtre de Kalman robuste à trois étages (RThKF) pour obtenir une bonne estimation d'état et de défaut en présence des perturbations inconnues.

3.3.2 Filtre RThSKF

Dans cette section, on présente une version robuste du filtre de Kalman à trois étages (RThKF : robust three-stage Kalman filter) dans le cas où les défauts et les perturbations inconnues affectent seulement l'état du système ($F_k^y = 0$ et $E_k^y = 0$). Le filtre est obtenu par une modification des sous-filtres du défaut et des perturbations inconnues.

Les équations définissent les matrices S_k^2 et S_k^3 deviennent :

$$S_k^2 = H_k U_k^{12} \quad (3.38)$$

$$S_k^3 = H_k U_k^{13} \quad (3.39)$$

Par substitution de (3.12) et (3.17) dans (3.16) et (3.21) et le report de (3.15) et (3.20) dans (3.14) et (3.19), les équations de l'étape de mise à jour des sous-filtres des défauts et des perturbations inconnues se récrivent comme suit :

$$\bar{f}_{k+1/k+1} = (I - \bar{K}_{k+1}^f S_{k+1}^2) \bar{f}_{k+1/k} + \bar{K}_{k+1}^f (y_{k+1} - H_{k+1} \bar{x}_{k+1/k}) \quad (3.40)$$

$$\bar{K}_{k+1}^f = \bar{P}_{k+1/k+1}^f S_{k+1}^{2T} C_{k+1}^{-1} \quad (3.41)$$

$$\bar{d}_{k+1/k+1} = (I - \bar{K}_{k+1}^d S_{k+1}^3) \bar{d}_{k/k} + \bar{K}_{k+1}^d (y_{k+1} - H_{k+1} \bar{x}_{k+1/k} - S_{k+1}^2 \bar{f}_{k+1/k}) \quad (3.42)$$

$$\bar{K}_{k+1}^d = \bar{P}_{k+1/k+1}^d S_{k+1}^{3T} (S_{k+1}^2 \bar{P}_{k+1/k}^f S_{k+1}^{2T} + C_{k+1})^{-1} \quad (3.43)$$

avec

$$C_{k+1} = H_{k+1} \bar{P}_{k+1/k}^x H_{k+1}^T + R_{k+1}$$

Tout d'abord, pour éliminer les termes $\bar{f}_{k+1/k}$ et $\bar{d}_{k/k}$ dans les équations précédentes on doit choisir les matrices gain \bar{K}_{k+1}^f et \bar{K}_{k+1}^d de façon qu'ils satisfassent les conditions suivantes :

$$I - \bar{K}_{k+1}^f S_{k+1}^2 = 0 \quad (3.44)$$

$$I - \bar{K}_{k+1}^d S_{k+1}^3 = 0 \quad (3.45)$$

$$\bar{K}_{k+1}^d S_{k+1}^2 = 0 \quad (3.46)$$

Dans ce cas, les équations (3.40) et (3.42) se réduisent à :

$$\bar{f}_{k+1/k+1} = \bar{K}_{k+1}^f (y_{k+1} - S_{k+1}^1 \bar{x}_{k+1/k}) \quad (3.47)$$

$$\bar{d}_{k+1/k+1} = \bar{K}_{k+1}^d (y_{k+1} - S_{k+1}^1 \bar{x}_{k+1/k}) \quad (3.48)$$

Par la substitution de (3.41) et (3.43) dans (3.44) et (3.45) et en utilisant (3.46), $\bar{P}_{k+1/k+1}^f$ et $\bar{P}_{k+1/k+1}^d$ deviennent

$$\bar{P}_{k+1/k+1}^f = (S_{k+1}^{2T} C_{k+1}^{-1} S_{k+1}^2)^+ \quad (3.49)$$

$$\bar{P}_{k+1/k+1}^d = (S_{k+1}^{3T} C_{k+1}^{-1} S_{k+1}^3)^+ \quad (3.50)$$

La matrice gain \bar{K}_k^d est calculée en considérant les contraintes (3.45) et (3.46) :

$$\bar{K}_{k+1}^d = \bar{P}_{k+1/k+1}^d S_{k+1}^{3T} C_{k+1}^{-1} (I - S_{k+1}^2 S_{k+1}^{2+}) \quad (3.51)$$

Dans l'équation (3.7) on remplace $\bar{x}_{k/k}$ par $\hat{x}_{k/k} - V_k^{12} \bar{f}_{k/k} - V_k^{13} \bar{d}_{k/k}$, les équations (3.7) et (3.12) sont réécrites respectivement comme suit :

$$\bar{x}_{k+1/k} = A_k \hat{x}_{k/k} + B_k u_k + \tilde{u}_k^1 \quad (3.52)$$

$$\bar{f}_{k+1/k} = \bar{f}_{k/k} + \tilde{u}_k^2 \quad (3.53)$$

avec

$$\tilde{u}_k^1 = (F_k^x - U_{k+1}^{12}) \bar{f}_{k/k} + (E_k^x + F_k^x V_k^{23} - U_{k+1}^{13} + U_{k+1}^{12} (\Pi_{k+1}^{23} - U_{k+1}^{23})) \bar{d}_{k/k} \quad (3.54)$$

$$\tilde{u}_k^2 = (\Pi_{k+1}^{23} - U_{k+1}^{23}) \bar{d}_{k/k} \quad (3.55)$$

Dans le but de rendre les estimations (3.52) et (3.53) insensibles aux défauts et aux perturbations inconnues, il faut choisir les matrices U_k^{12} , U_k^{13} et U_k^{23} de telle sorte que $\tilde{u}_k^1 = 0$ et $\tilde{u}_k^2 = 0$.

On en déduit alors à partir de (3.54) et (3.55) les nouvelles expressions des matrices U_k^{12} , U_k^{13}

et U_k^{23}

$$U_{k+1}^{23} = \Pi_{k+1}^{23} = V_k^{23} \quad (3.56)$$

$$U_{k+1}^{12} = F_k^x \quad (3.57)$$

$$U_{k+1}^{13} = E_k^x + F_k^x V_k^{23} \quad (3.58)$$

Dans ces conditions, les équations (3.52) et (3.53) se réduisent à :

$$\bar{x}_{k+1/k} = A_k \hat{x}_{k/k} + B_k u_k \quad (3.59)$$

$$\bar{f}_{k+1/k} = \bar{f}_{k/k} \quad (3.60)$$

Finalement, une estimation non biaisée de l'état et du défaut n'est obtenue que si et seulement si les contraintes (3.44)-(3.46) sont vérifiées et :

$$V_{k+1}^{12} = F_k^x - \bar{K}_{k+1}^x S_{k+1}^2 \quad (3.61)$$

$$V_{k+1}^{23} = -\bar{K}_{k+1}^f H_{k+1} E_k^x \quad (3.62)$$

$$V_{k+1}^{13} = E_k^x - \bar{K}_{k+1}^x H_{k+1} E_k^x + V_{k+1}^{12} V_{k+1}^{23} \quad (3.63)$$

On résume le filtre RThSKF par les équations suivantes

Correction

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = \bar{x}_{k+1/k+1} + V_{k+1}^{12} f_{k+1/k+1} + V_{k+1}^{13} d_{k+1/k+1} \quad (3.64)$$

$$\hat{P}_{k+1/k+1}^x = \bar{P}_{k+1/k+1}^x + V_{k+1}^{12} P_{k+1/k+1}^f V_{k+1}^{12T} + V_{k+1}^{13} P_{k+1/k+1}^d V_{k+1}^{13T} \quad (3.65)$$

$$\hat{f}_{k+1/k+1} = f_{k+1/k+1} + V_{k+1}^{23} d_{k+1/k+1} \quad (3.66)$$

$$\hat{P}_{k+1/k+1}^f = P_{k+1/k+1}^f + V_{k+1}^{23} P_{k+1/k+1}^d V_{k+1}^{23T} \quad (3.67)$$

Sous-filtre estimateur d'état

$$\bar{x}_{k+1/k} = A_k \hat{x}_{k/k} + B_k u_k \quad (3.68)$$

$$\bar{P}_{k+1/k}^x = A_k \hat{P}_{k/k}^x A_k^T + Q_k^x \quad (3.69)$$

$$\bar{K}_{k+1}^x = \bar{P}_{k+1/k}^x H_{k+1}^T C_{k+1}^{-1} \quad (3.70)$$

$$\bar{x}_{k+1/k+1} = \bar{x}_{k+1/k} + \bar{K}_{k+1}^x (y_{k+1} - H_{k+1} \bar{x}_{k+1/k}) \quad (3.71)$$

$$\bar{P}_{k+1/k+1}^x = (I - \bar{K}_{k+1}^x H_{k+1}) \bar{P}_{k+1/k}^x \quad (3.72)$$

Sous-filtre estimateur du défaut

$$\bar{P}_{k+1/k+1}^f = (S_{k+1}^{2T} C_{k+1}^{-1} S_{k+1}^2)^+ \quad (3.73)$$

$$\bar{K}_{k+1}^f = \bar{P}_{k+1/k+1}^f S_{k+1}^{2T} C_{k+1}^{-1} \quad (3.74)$$

$$\bar{f}_{k+1/k+1} = \bar{K}_{k+1}^f (y_{k+1} - H_{k+1} \bar{x}_{k+1/k}) \quad (3.75)$$

Sous-filtre estimateur des perturbations inconnues

$$\bar{P}_{k+1/k+1}^d = (S_{k+1}^{3T} C_{k+1}^{-1} S_{k+1}^3)^+ \quad (3.76)$$

$$\bar{K}_{k+1}^d = \bar{P}_{k+1/k+1}^d S_{k+1}^{3T} C_{k+1}^{-1} (I - S_{k+1}^2 (S_{k+1}^2)^+)^+ \quad (3.77)$$

$$\bar{d}_{k+1/k+1} = \bar{K}_{k+1}^d (y_{k+1} - H_{k+1} \bar{x}_{k+1/k}) \quad (3.78)$$

3.3.3 Filtre ARThSKF

Dans cette section, on considère que les défauts et les perturbations inconnues sont injectés dans les deux équations d'état et de sortie (x_k et y_k). En utilisant la même technique proposée par Hsieh [007a] et Hsieh [2009], l'équation de mesure du système (3.2) peut être réécrite comme suit :

$$y_k = H_k x_k + F_k^y \tilde{f}_k + E_k^y \tilde{d}_k + v_k \quad (3.79)$$

On définit les vecteurs augmentés des défauts et des perturbations inconnues comme suit :

$$d_k \longrightarrow d_k^a = [\tilde{d}_k^T \quad d_k^T]^T \quad (3.80)$$

$$f_k \longrightarrow f_k^a = [\tilde{f}_k^T \quad f_k^T]^T \quad (3.81)$$

Ainsi, le modèle du système (3.1) et (3.2) peut être décrit par :

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + \bar{F}_k^x f_k^a + \bar{E}_k^x d_k^a + w_k \quad (3.82)$$

$$y_k = H_k x_k + \bar{F}_k^y f_k^a + \bar{E}_k^y d_k^a + v_k \quad (3.83)$$

avec

$$\bar{F}_k^x = [0 \quad F_k^x], \quad \bar{F}_k^y = [F_k^y \quad 0] \quad (3.84)$$

$$\bar{E}_k^x = [0 \quad E_k^x], \quad \bar{E}_k^y = [E_k^y \quad 0] \quad (3.85)$$

En se référant à (3.56)-(3.58) et (3.84)-(3.85), on peut définir les matrices

$$\bar{U}_{k+1}^{12} = \bar{F}_k^x \quad (3.86)$$

$$\bar{U}_{k+1}^{13} = \bar{E}_k^x + \bar{F}_k^x \bar{V}_k^{23} \quad (3.87)$$

$$\bar{U}_{k+1}^{23} = \bar{V}_k^{23} \quad (3.88)$$

A partir (3.86)-(3.88) les équations (3.23) et (3.24) deviennent :

$$\bar{S}_{k+1}^2 = H_{k+1} \bar{F}_k^x + \bar{F}_{k+1}^y = [F_k^y \quad S_{k+1}^2] \quad (3.89)$$

$$\bar{S}_{k+1}^3 = H_{k+1} \bar{E}_k^x + \bar{E}_{k+1}^y + \bar{S}_{k+1}^2 \bar{V}_k^{23} = [E_{k+1}^y + F_{k+1}^y V_k^{23} \quad H_{k+1} E_{k+1}^x + S_{k+1}^2 V_k^{23}] \quad (3.90)$$

Le filtre de Kalman robuste à trois étages augmenté (ARThSKF) est obtenu à partir du filtre RThSKF avec certaines modifications. Les équations de correction (3.64)-(3.67) s'écrivent main-

tenant :

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = \bar{x}_{k+1/k+1} + \bar{V}_{k+1}^{12} f_{k+1/k+1} + \bar{V}_k^{13} d_{k+1/k+1} \quad (3.91)$$

$$\hat{P}_{k+1/k+1}^x = \bar{P}_{k+1/k+1}^x + \bar{V}_{k+1}^{12} P_{k+1/k+1}^f \bar{V}_{k+1}^{12T} + \bar{V}_{k+1}^{13} P_{k+1/k+1}^d \bar{V}_{k+1}^{13T} \quad (3.92)$$

$$\hat{f}_{k+1/k+1} = f_{k+1/k+1} + \bar{V}_{k+1}^{23} d_{k+1/k+1} \quad (3.93)$$

$$\hat{P}_{k+1/k+1}^f = P_{k+1/k+1}^f + \bar{V}_{k+1}^{23} P_{k+1/k+1}^d \bar{V}_{k+1}^{23T} \quad (3.94)$$

où $\bar{x}_{k+1/k+1}$ est donné par (3.68)-(3.72), $f_{k/k}$ et $d_{k/k}$ sont donnés par

$$f_{k+1/k+1} = K_{k+1}^f (y_{k+1} - H_{k+1} \bar{x}_{k+1/k}) \quad (3.95)$$

$$K_{k+1}^f = P_{k+1/k+1}^f \bar{S}_{k+1}^{2T} C_{k+1}^{-1} \quad (3.96)$$

$$P_{k+1/k+1}^f = \{\bar{S}_{k+1}^{2T} C_{k+1}^{-1} \bar{S}_{k+1}^2\}^+ \quad (3.97)$$

$$d_{k+1/k+1} = K_{k+1}^d (y_{k+1} - H_{k+1} \bar{x}_{k+1/k}) \quad (3.98)$$

$$K_{k+1}^d = P_{k+1/k+1}^d \bar{S}_{k+1}^{3T} C_{k+1}^{-1} (I - \bar{S}_{k+1}^2 \bar{S}_{k+1}^{2+}) \quad (3.99)$$

$$P_{k+1/k+1}^d = \{\bar{S}_{k+1}^{3T} C_{k+1}^{-1} \bar{S}_{k+1}^3\}^+ \quad (3.100)$$

Théorème 3.1. Pour le système d'équations (3.1) et (3.2) avec ($F_k^y \neq 0$ et $E_k^y \neq 0$), sous respect des hypothèses $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_3$, alors le filtre ARThSKF permet de garantir une estimation non biaisée et à minimum de variance de l'état du système, des défauts et des perturbations inconnues (Ben Hmida et al. [010a]).

Démonstration. l'erreur d'estimation des perturbations inconnues d_k est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{d}_k &= d_k^a - d_{k/k} \\ &= (I - K_k^d \bar{S}_k^3 - K_k^d \bar{S}_k^2 V_k^{23}) d_k^a - K_k^d \bar{S}_k^2 J_k^a - K_k^d e_k \end{aligned}$$

où

$$e_k = H_k (A_{k-1} \tilde{x}_{k-1} + w_{k-1}) + v_k$$

Les contraintes pour avoir une estimation des perturbations inconnues non biaisée sont

$$I - K_k^d \bar{S}_k^3 = 0 \quad (3.101)$$

$$K_k^d \bar{S}_k^2 = 0 \quad (3.102)$$

De même, l'erreur d'estimation de défauts $\tilde{f}_k = f_k^a - \hat{f}_{k/k}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k &= f_k^a - f_{k/k} - \bar{V}_k^{23} d_{k/k} \\ &= (I - K_k^f \bar{S}_k^2) f_k^a - K_k^f (\bar{S}_k^3 - \bar{S}_k^2 \bar{V}_{k-1}^{23}) d_k^a - \bar{V}_k^{23} d_{k/k} - K_k^f e_k \end{aligned}$$

L'estimateur $\hat{f}_{k/k}$ est non biaisé si et seulement si

$$\bar{V}_k^{23} = -K_k^f (\bar{S}_k^3 - \bar{S}_k^2 \bar{V}_{k-1}^{23}) \quad (3.103)$$

$$0 = I - K_k^f \bar{S}_k^2 \quad (3.104)$$

Enfin, l'erreur d'estimation de l'état $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_{k/k}$ a la forme suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k &= (I - \bar{K}_k^x) (A_{k-1} \tilde{x}_{k-1} + w_{k-1}) - \bar{K}_k^x v_k + (\bar{E}_{k-1}^x - K_k^x \bar{S}_k^2) f_k^a - \bar{V}_k^{12} f_{k/k} \\ &\quad + (\bar{E}_{k-1}^x - \bar{K}_k^x \bar{S}_k^3 + \bar{K}_k^x \bar{S}_k^2 \bar{V}_{k-1}^{23}) d_k^a - \bar{V}_k^{13} d_{k/k} \end{aligned}$$

Les paramètres \bar{V}_k^{12} et \bar{V}_k^{13} se définissent alors par les relations suivantes :

$$\bar{V}_k^{12} = \bar{F}_{k-1}^x - \bar{K}_k^x \bar{S}_{k-1}^2 \quad (3.105)$$

$$\bar{V}_k^{13} = \bar{E}_{k-1}^x - \bar{K}_k^x (\bar{S}_k^3 - \bar{S}_k^2 \bar{V}_{k-1}^{23}) + \bar{V}_k^{12} \bar{V}_k^{23} \quad (3.106)$$

Si les matrices gain \bar{K}_k^x , K_k^f et K_k^d sont déterminées pour satisfaire les conditions (3.101) - (3.106), alors le filtre proposé permet d'obtenir une estimation non biaisée et à minimum de variance de l'état, des défauts et des perturbations inconnues. De plus, les erreurs d'estimations

des perturbations inconnues, des défauts et de l'état sont données respectivement par

$$\tilde{d}_k = -K_k^d e_k \quad (3.107)$$

$$\tilde{f}_k = -(K_k^f + \bar{V}_k^{23} K_k^d) e_k \quad (3.108)$$

$$\tilde{x}_k = (I - \bar{K}_k^x)(A_{k-1} \tilde{x}_{k-1} + w_{k-1}) - \bar{K}_k^x v_k - (\bar{V}_k^{12} K_k^f + \bar{V}_k^{13} K_k^d) e_k \quad (3.109)$$

avec $e_k = H_k(A_{k-1} \tilde{x}_{k-1} + w_{k-1}) + v_k$ □

Le filtre ARThSKF est robuste permettant une estimation non biaisée à minimum de variance de l'état du système et des défauts en présence de perturbations inconnues.

3.4 Synthèse du filtre UMVF

Dans ce paragraphe, on considère le système décrit par (3.1) avec $E_k^y = 0$ et on propose de faire la synthèse du filtre récursif ayant la structure suivante :

$$\hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1} \hat{x}_{k-1} + B_{k-1} u_{k-1} + F_{k-1}^x \hat{f}_{k-1} \quad (3.110)$$

$$\hat{f}_k = K_k^f (y_k - H_k \hat{x}_{k/k-1}) \quad (3.111)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k/k-1} + K_k^x (y_k - H_k \hat{x}_{k/k-1}) \quad (3.112)$$

où les matrices gains K_k^f et K_k^x seront déterminées ultérieurement.

3.4.1 Estimation non biaisée

On définit l'erreur d'innovation de la sortie par :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k &= y_k - H_k \hat{x}_{k/k-1} \\ &= F_k^y f_k + H_k E_{k-1}^x d_{k-1} + e_k \end{aligned} \quad (3.113)$$

avec

$$e_k = H_k \tilde{\tilde{x}}_{k/k-1} + v_k \quad (3.114)$$

$$\tilde{\tilde{x}}_{k/k-1} = A_{k-1} \tilde{x}_{k-1} + F_{k-1}^x \tilde{f}_{k-1} + w_{k-1} \quad (3.115)$$

où \tilde{x}_{k-1} est l'erreur d'estimation de l'état et \tilde{f}_{k-1} est l'erreur d'estimation des défauts.

Les erreurs d'estimation \tilde{f}_{k-1} et \tilde{x}_{k-1} sont données respectivement par :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k &= f_k - \hat{f}_k \\ &= (I - K_k^f F_k^y) f_k - K_k^f H_k E_{k-1}^x d_{k-1} - K_k^f e_k \end{aligned} \quad (3.116)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k &= x_k - \hat{x}_k \\ &= (I - K_k^x H_k) \tilde{\tilde{x}}_{k/k-1} - K_k^x F_k^y f_k - (K_k^x H_k E_{k-1}^x - E_{k-1}^x) d_{k-1} - K_k^x v_k \end{aligned} \quad (3.117)$$

En examinant dans (3.116) et (3.117) la dépendance des erreurs d'estimation vis-à-vis de f_k et d_k , on déduit que, les estimateurs (3.111) et (3.112) sont non biaisés si et seulement si :

$$K_k^f G_k = \mathcal{F}_k \quad (3.118)$$

$$K_k^x G_k = \Gamma_k \quad (3.119)$$

avec

$$G_k = [F_k^y \quad H_k E_{k-1}^x]$$

$$\mathcal{F}_k = [I_p \quad 0]$$

$$\Gamma_k = [0 \quad E_{k-1}^x]$$

Lemme 3.1. *Etant donné que $\text{rang}(F_k^y) = p$ et que $\text{rang}(H_k E_{k-1}^x) = q$, alors la condition nécessaire et suffisante pour que les estimateurs (3.111) et (3.112) soient non biaisés est :*

$$\text{rank}(G_k) = \text{rang}(F_k^y \quad H_k E_{k-1}^x) = p + q \quad (3.120)$$

Démonstration. Les équations (3.118) et (3.119) peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{bmatrix} K_k^f \\ K_k^x \end{bmatrix} G_k = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_k \\ \Gamma_k \end{bmatrix}$$

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_k \\ \Gamma_k \\ G_k \end{bmatrix} = \text{rang}(G_k)$$

Enfin on obtient

$$\text{rang} \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & E_{k-1}^x \\ F_k^y & H_k E_{k-1}^x \end{bmatrix} = \text{rang}(F_k^y \quad H_k E_{k-1}^x)$$

Alors, la matrice sur la gauche de l'égalité a un rang égal à $p + q$. prenant en compte l'hypothèse \mathcal{H}_3 et $\text{rang}(F_k^y) = p$, cela peut être facilement justifiée par considération que les défauts et les entrées inconnues ont une influence indépendante. La condition à satisfaire est donner donc par (3.120). \square

3.4.2 Estimation UMV

L'erreur d'innovation peut s'écrire :

$$\tilde{y}_k = G_k \begin{bmatrix} f_k \\ d_{k-1} \end{bmatrix} + e_k \quad (3.121)$$

Une estimation UMV du défaut f_k à partir de l'erreur d'innovation (3.116) peut être obtenue en utilisant la méthode des moindres carrés (LS : least-square).

La matrice de variance-covariance de e_k est donnée par :

$$C_k = \mathcal{E}[e_k e_k^T] = H_k \bar{P}_{k/k-1}^x H_k^T + R_k \quad (3.122)$$

avec

$$\bar{P}_{k/k-1}^x = \mathcal{E}[\tilde{x}_{k/k-1} \tilde{x}_{k/k-1}^T]$$

Dans le cas assez fréquent où la matrice $C_k \neq c I$ avec c est un réel positif alors l'équation (3.122) ne satisfait pas le théorème de Gauss-Markov [Kailath et al. \[2000\]](#) et par conséquent la méthode LS ne permet pas d'obtenir une estimation à variance minimale. Dans ce cas, il faut faire recours à la méthode des moindres carrés pondérés (WLS : weighted least-square) avec une matrice de pondération égale à l'inverse de la matrice C_k .

Théorème 3.2. *Etant donné que $\mathcal{E}[\tilde{x}_{k/k-1}] = 0$, la matrice C_k est définie positive, comme (3.118) est vérifiée, alors la matrice gain K_k^f garantissant une estimation UMV du défaut f_k est donnée par :*

$$K_k^f = \mathcal{F}_k G_k^* \quad (3.123)$$

avec

$$G_k^* = (G_k^T C_k^{-1} G_k)^{-1} G_k^T C_k^{-1}$$

Dans ce cas, l'erreur d'estimation du défaut a la forme suivante :

$$\tilde{f}_k = -K_k^f e_k \quad (3.124)$$

A partir de (3.124), la matrice P_k^f de covariance de l'erreur d'estimation du défaut est donnée par :

$$P_k^f = \mathcal{E}[\tilde{f}_k \tilde{f}_k^T] = K_k^f C_k K_k^{fT} \quad (3.125)$$

Admettons maintenant que la contrainte (3.119) soit satisfaite ; en utilisant l'équation (3.117) on peut déterminer l'expression de la matrice de variance-covariance de l'erreur d'estimation d'état P_k^x

$$P_k^x = (I - K_k^x H_k) \bar{P}_{k/k-1}^x (I - K_k^x H_k)^T + K_k^x R_k K_k^{xT} \quad (3.126)$$

Maintenant, on cherche à déterminer la matrice gain K_k^x qui minimise $trace \{P_k^x = [\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T]\}$ représentant la trace de la matrice variance-covariance de l'erreur d'estimation a posteriori de l'état \tilde{x}_k sous la contrainte algébrique (3.119). La solution de ce problème sera reformulée dans le théorème 3.3.

Théorème 3.3. *si la matrice $G_k^T C_k^{-1} G_k$ est régulière, en utilisant les multiplicateurs de Lagrange, la matrice gain K_k^x est donnée par*

$$K_k^x = \bar{P}_{k/k-1}^x H_k^T C_k^{-1} (I - G_k G_k^*) + \Gamma_k G_k^* \quad (3.127)$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= (G_k^T C_k^{-1} G_k)^{-1} G_k^T C_k^{-1} \\ G_k^* &= (G_k^T C_k^{-1} G_k)^{-1} G_k^T C_k^{-1} \end{aligned}$$

3.4.3 Mise à jour du filtre

Une fois calculées les matrices gain K_k^f et K_k^x (3.123) et (3.127), on passe à l'étape de mise à jour du filtre qui consiste à calculer l'estimation a priori $\hat{x}_{k/k-1}$ de l'état à partir de l'équation (3.110) et la matrice de variance-covariance $\bar{P}_{k/k-1}^x = \mathcal{E}[\tilde{x}_{k/k-1} \tilde{x}_{k/k-1}^T]$:

$$\bar{P}_{k/k-1}^x = \begin{bmatrix} A_{k-1} & F_{k-1}^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{k-1}^x & P_{k-1}^{xf} \\ P_{k-1}^{fx} & P_{k-1}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{k-1}^T \\ F_{k-1}^{xT} \end{bmatrix} + Q_{k-1} \quad (3.128)$$

avec $P_k^{xf} = \mathcal{E}[\tilde{x}_k \tilde{f}_k^T]$ est déterminée en utilisant (3.117) et (3.124).

$$\begin{aligned} P_k^{xf} &= (P_k^{fx})^T \\ &= -(I - K_k^x H_k) \bar{P}_{k/k-1}^x H_k^T K_k^{fT} + K_k^x R_k K_k^{fT} \end{aligned} \quad (3.129)$$

3.5 Extension du filtre UMVF

Dans cette section, on propose d'étendre le filtre UMVF pour considérer le cas où $0 < \text{rank}(F_k^y) \leq p$. Pour résoudre ce problème on va utiliser l'approche proposée par Hsieh [2009]. A partir de (3.146), (3.114) et (3.115) l'erreur d'estimation du défaut est réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k &= -K_k^f H_k F_{k-1}^x \tilde{f}_{k-1} - K_k^f H_k A_{k-1} \tilde{x}_{k-1} + (I - K_k^f F_k^y) f_k \\ &\quad - K_k^f H_k E_{k-1}^x d_{k-1} - K_k^f H_k w_{k-1} - K_k^f v_k \end{aligned} \quad (3.130)$$

Supposant que $\mathcal{E}[\tilde{x}_{k-1}] = 0$ et on définit alors les matrices suivantes :

$$\Phi_k = K_k^f F_k^y = I_p - \Sigma_k \quad (3.131)$$

$$G_k^f = K_k^f H_k F_{k-1}^x \quad (3.132)$$

$$G_k^d = K_k^f H_k E_{k-1}^x \quad (3.133)$$

où

$$\Sigma_k = I - (F_k^y)^+ F_k^y$$

En utilisant la technique proposée dans Hsieh [2009], la valeur moyenne de \tilde{f}_k est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[\tilde{f}_k] &= \Sigma_k f_k - G_k^f \Sigma_{k-1} f_{k-1} + G_k^f (G_{k-1}^f \Sigma_{k-2}) f_{k-2} + \dots \\ &\quad + (-1)^k G_k^f \times \dots \times G_2^f (G_1^f \Sigma_0) f_0 - G_k^d d_{k-1} + G_k^f G_{k-1}^d d_{k-2} + \dots \\ &\quad + (-1)^k G_k^f \times \dots \times G_1^f G_1^d d_0 \end{aligned} \quad (3.134)$$

Si $G_i^f \Sigma_{i-1} = 0$ et $G_i^d = 0$ pour $i = 1, \dots, k$, alors on obtient.

$$\mathcal{E}[\tilde{f}_k] = \Sigma_k f_k \quad (3.135)$$

Pour obtenir une estimation non biaisée à minimum de variance du défaut, la matrice gain K_k^f doit vérifier les contraintes algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} K_k^f F_k^y &= \Phi_k \\ K_k^f H_k F_{k-1}^x \Sigma_{k-1} &= 0 \\ K_k^f H_k E_{k-1}^x &= 0 \end{aligned} \quad (3.136)$$

Les équations (3.136) peuvent être réécrites comme suit :

$$K_k^f \bar{G}_k = \bar{\mathcal{F}}_k \quad (3.137)$$

avec : $\bar{G}_k = \begin{bmatrix} F_k^y & H_k F_{k-1}^x \Sigma_{k-1} & H_k E_{k-1}^x \end{bmatrix}$ et $\bar{\mathcal{F}}_k = \begin{bmatrix} \Phi_k & 0 & 0 \end{bmatrix}$

En utilisant (3.137), la matrice gain K_k^f a la forme suivante :

$$K_k^f = \bar{\mathcal{F}}_k \bar{G}_k^* \quad (3.138)$$

où $\bar{G}_k^* = (\bar{G}_k^T C_k^{-1} \bar{G}_k)^+ \bar{G}_k^T C_k^{-1}$ et X^+ désigne la pseudo inverse de X .

L'erreur d'estimation de l'état (3.117) est donnée par :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k &= (I - K_k^x H_k) \tilde{x}_{k/k-1} - K_k^x F_k^y f_k - (K_k^x H_k E_{k-1}^x - E_{k-1}^x) d_{k-1} - K_k^x v_k \\ &= (I - K_k^x H_k) A_{k-1} \tilde{x}_{k-1} + (I - K_k^x H_k) F_{k-1}^x \Sigma_{k-1} f_{k-1} - K_k^x F_k^y f_k \\ &\quad - (K_k^x H_k E_{k-1}^x - E_{k-1}^x) d_{k-1} + (I - K_k^x H_k) w_{k-1} - K_k^x v_k \end{aligned} \quad (3.139)$$

Pour avoir une estimation non biaisée de l'état, la matrice gain K_k^x doit vérifier les contraintes

suivantes :

$$\begin{aligned}
 K_k^x F_k^y &= 0 \\
 K_k^x H_k F_{k-1}^x \Sigma_{k-1} &= F_{k-1}^x \Sigma_{k-1} \\
 K_k^x H_k E_{k-1}^x &= E_{k-1}^x
 \end{aligned} \tag{3.140}$$

A partir de l'équation (3.140), on obtient par simple concaténation :

$$K_k^x \bar{G}_k = \bar{\Gamma}_k \tag{3.141}$$

avec $\bar{\Gamma}_k = \begin{bmatrix} 0 & F_{k-1}^x \Sigma_{k-1} & E_{k-1}^x \end{bmatrix}$ et où \bar{G}_k à partir de (3.137).

En se référant à (3.139) simplifié grâce aux contraintes (3.136), on calcule la matrice variance-covariance de l'état par

$$P_k^x = (I - K_k^x H_k) \bar{P}_{k/k-1}^x (I - K_k^x H_k)^T + K_k^x R_k K_k^{xT} \tag{3.142}$$

La matrice gain K_k^x est déterminée par la minimisation de la matrice gain P_k^x en prenant compte la contrainte égalité (3.141). En utilisant la méthode de Kitanidis (Kitanidis [1987]), on obtient

$$\begin{bmatrix} C_k & -\bar{G}_k \\ \bar{G}_k^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_k^{xT} \\ \Lambda_k^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_k \bar{P}_{k/k-1}^x \\ \bar{\Gamma}_k^T \end{bmatrix} \tag{3.143}$$

où Λ_k est la matrice des multiplicateurs de Lagrange.

Si la matrice $\bar{G}_k^T C_k^{-1} \bar{G}_k$ est non singulière, l'équation (3.143) a une solution unique. Alors, la matrice gain K_k^x est donnée par

$$K_k^{x*} = \bar{P}_{k/k-1}^x H_k^T C_k^{-1} (I - \bar{G}_k \bar{G}_k^*) + \bar{\Gamma}_k \bar{G}_k^* \tag{3.144}$$

L'étape de mise à jour de ce filtre est la même que celle du filtre UMVF. Elle est donnée par les équations (3.128) et (3.129).

3.6 Synthèse du filtre ORFSF

Dans cette partie, on considère le cas où la matrice d'injection de défauts dans l'équation de sortie est de rang arbitraire et que $E_k^y = 0$. Pour cela, on propose un nouveau filtre ORFSF (Optimal Recursive Five Step Filter) qui repose sur une transformation du système original en utilisant la technique développée dans Cheng et al. [2009]. Soit $r_k = \text{rank}(F_k^y) < p$, alors la décomposition en valeurs singulières de la matrice F_k^y est donnée par :

$$F_k^y = \begin{bmatrix} U_{1,k} & U_{2,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1,k}^T \\ V_{2,k}^T \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

où $\Sigma_k \in \mathfrak{R}^{r_k \times r_k}$, $U_{1,k} \in \mathfrak{R}^{m \times r_k}$, $U_{2,k} \in \mathfrak{R}^{m \times (m-r_k)}$, $V_{1,k} \in \mathfrak{R}^{p \times r_k}$ and $V_{2,k} \in \mathfrak{R}^{p \times (p-r_k)}$. $\begin{bmatrix} U_{1,k} & U_{2,k} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} V_{1,k} & V_{2,k} \end{bmatrix}$ sont des matrices unitaires.

Il existe une matrice de transformation

$$T_k = \begin{bmatrix} T_{1,k}^T & T_{2,k}^T \end{bmatrix}^T,$$

permettant de réécrire le système (3.1) et (3.2) sous la forme :

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + F_{1,k}^x f_{1,k} + F_{2,k}^x f_{2,k} + E_k^x d_k + w_k \quad (3.146)$$

$$z_{1,k} = H_{1,k} x_k + \Sigma_k f_{1,k} + v_{1,k} \quad (3.147)$$

$$z_{2,k} = H_{2,k} x_k + v_{2,k} \quad (3.148)$$

où

$$v_{1,k} = T_{1,k} v_k$$

$$v_{2,k} = T_{2,k} v_k$$

$$z_{1,k} = T_{1,k} y_k \in \mathfrak{R}^{r_k}$$

$$z_{2,k} = T_{2,k} y_k \in \mathfrak{R}^{(m-r_k)}$$

$$F_{1,k}^x = F_k^x V_{1,k}$$

$$\begin{aligned} F_{2,k}^x &= F_k^x V_{2,k} \\ H_{1,k} &= T_{1,k} H_k \\ H_{2,k} &= T_{2,k} H_k \end{aligned}$$

avec les contraintes de rang

$$\begin{aligned} \text{rang}(H_{2,k} F_{2,k-1}^x) &= \text{rang}(F_{2,k-1}^x) \\ \text{rang}(H_{2,k} E_{k-1}^x) &= \text{rang}(E_{k-1}^x) \end{aligned}$$

Comme $[V_{1,k} \ V_{2,k}]$ est une matrice unitaire, on a alors :

$$f_k = V_{1,k} f_{1,k} + V_{2,k} f_{2,k} \quad (3.149)$$

La matrice de transformation T_k est donnée par :

$$T_k = \begin{bmatrix} I_{r_k} & -U_{1,k}^T R_k U_{2,k} \left(U_{2,k}^T R_k U_{2,k} \right)^{-1} \\ 0_{(m-r_k) \times r_k} & I_{(m-r_k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,k}^T \\ U_{2,k}^T \end{bmatrix}$$

Dans [Cheng et al. \[2009\]](#), sont respectivement définies les matrices $R_{1,k}$ et $R_{2,k}$ de variances de $v_{1,k}$ et $v_{2,k}$ et $R_{12}(k, i)$ la matrice de covariance de ces variables. Compte tenu des définitions de $v_{1,k}$ et $v_{2,k}$, alors on a :

$$\begin{aligned} R_{1,k} &= \mathcal{E}[v_{1,k} v_{1,k}^T] = U_{1,k}^T R_k U_{1,k} - U_{1,k}^T R_k U_{2,k} \left(U_{2,k}^T R_k U_{2,k} \right)^{-1} U_{2,k}^T R_k U_{1,k} \\ R_{2,k} &= \mathcal{E}[v_{2,k} v_{2,k}^T] = U_{2,k}^T R_k U_{2,k} \\ R_{12}(k, k) &= \mathcal{E}[v_{1,k} v_{2,k}^T] = 0 \\ R_{12}(k, i) &= \mathcal{E}[v_{1,k} v_{2,i}^T] = 0 \quad \text{pour } k \neq i \end{aligned}$$

Compte tenu des propriétés de v_k et de w_k , [Cheng et al. \[2009\]](#) ont également montré les relations suivantes :

$$- \text{cov}[v_{1,k}, w_i] = 0 \text{ et } \text{cov}[v_{2,k}, w_i] = 0 \text{ pour } k \neq i.$$

$$- \text{cov}[v_{1,k}, x_0] = 0 \text{ et } \text{cov}[v_{2,k}, x_0] = 0.$$

En tenant compte des équations d'état (3.146) - (3.148), on note qu'on ne peut pas estimer la deuxième composante du défaut à l'instant k puisque $f_{2,k-1}$ sera estimé à partir de l'état. Le filtre proposé se résume comme suit :

$$\hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1}\hat{x}_{k-1/k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + F_{1,k-1}^x \hat{f}_{1,k-1} \quad (3.150)$$

$$\hat{f}_{2,k-1} = K_k^{f_2} (z_{2,k} - H_{2,k}\hat{x}_{k/k-1}) \quad (3.151)$$

$$\hat{x}_{k/k-1}^* = \hat{x}_{k/k-1} + F_{2,k-1}^x \hat{f}_{2,k-1} + K_k^{x^*} (z_{2,k} - H_{2,k}\hat{x}_{k/k-1}) \quad (3.152)$$

$$\hat{f}_{1,k} = K_k^{f_1} (z_{1,k} - H_{1,k}\hat{x}_{k/k-1}^*) \quad (3.153)$$

$$\hat{f}_k = V_{1,k}\hat{f}_{1,k} + V_{2,k}\hat{f}_{2,k-1} \quad (3.154)$$

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1}^* + K_k^x (z_{2,k} - H_{2,k}\hat{x}_{k/k-1}^*) \quad (3.155)$$

où les matrices gains $K_k^{f_1} \in \mathfrak{R}^{r_k \times r_k}$, $K_k^{f_2} \in \mathfrak{R}^{(p-r_k) \times (m-r_k)}$, $K_k^{x^*} \in \mathfrak{R}^{n \times (m-r_k)}$ et $K_k^x \in \mathfrak{R}^{n \times (m-r_k)}$ seront déterminées ultérieurement pour satisfaire les critères d'estimation (3.3) et (3.4).

3.6.1 Estimation du défaut

Compte tenu des expressions (3.151), (3.153), (3.147) et (3.148) les erreurs d'estimations des défauts $f_{1,k}$ et $f_{2,k-1}$ s'explicitent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{1,k} &= f_{1,k} - \hat{f}_{1,k} \\ &= (I_{r_k} - K_k^{f_1} \Sigma_k) f_{1,k} - K_k^{f_1} e_{1,k} \end{aligned} \quad (3.156)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{2,k-1} &= f_{2,k-1} - \hat{f}_{2,k-1} \\ &= (I_{p-r_k} - K_k^{f_2} H_{2,k} F_{2,k-1}^x) f_{2,k-1} - K_k^{f_2} H_{2,k} E_{k-1}^x d_{k-1} - K_k^{f_2} e_{2,k} \end{aligned} \quad (3.157)$$

où

$$e_{1,k} = H_{1,k} \tilde{x}_{k/k-1}^* + v_{1,k} \quad (3.158)$$

$$\tilde{x}_{k/k-1}^* = x_k - \hat{x}_{k/k-1}^*$$

$$e_{2,k} = H_{2,k}\tilde{x}_{k/k-1} + v_{2,k} \quad (3.159)$$

$$\tilde{x}_{k/k-1} = A_{k-1}\tilde{x}_{k-1/k-1} + F_{1,k-1}^x\tilde{f}_{1,k-1} + w_{k-1} \quad (3.160)$$

$$\tilde{x}_{k/k} = x_k - \hat{x}_{k/k}$$

En se référant aux équations (3.156) et (3.157), les estimateurs (3.151) et (3.153) sont non biaisés si et seulement si les matrices gains K_k^{f1} et K_k^{f2} satisfont les contraintes algébriques suivantes :

$$K_k^{f1}\Sigma_k = I_{r_k} \quad (3.161)$$

$$K_k^{f2}G_k = \mathcal{F}_k \quad (3.162)$$

où

$$G_k = [H_{2,k}F_{2,k-1}^x \quad H_{2,k}E_{k-1}^x], \quad \mathcal{F}_k = [I_{p-r_k} \quad 0_{(p-r_k) \times q}]$$

Supposant que $\tilde{x}_{k/k-1}^*$, $\tilde{x}_{k-1/k-1}$ et $\tilde{f}_{1,k-1}$ sont non biaisées, les matrices de covariance des erreurs $e_{1,k}$ et $e_{2,k}$ sont définies respectivement comme suit :

$$\tilde{R}_{1,k} = \mathcal{E} [e_{1,k}e_{1,k}^T] = H_{1,k}P_{k/k-1}^{x*}H_{1,k}^T + R_{1,k} \quad (3.163)$$

$$\tilde{R}_{2,k} = \mathcal{E} [e_{2,k}e_{2,k}^T] = H_{2,k}\bar{P}_{k/k-1}^xH_{2,k}^T + R_{2,k} \quad (3.164)$$

où

$$P_{k/k-1}^{x*} = \mathcal{E} [\tilde{x}_{k/k-1}^*\tilde{x}_{k/k-1}^{*T}], \quad \bar{P}_{k/k-1}^x = \mathcal{E} [\tilde{x}_{k/k-1}\tilde{x}_{k/k-1}^T]$$

En utilisant les équations (3.161) et (3.162), les matrices gain K_k^{f1} et K_k^{f2} sont données respectivement par :

$$K_k^{f1} = \left(\Sigma_k^T \tilde{R}_{1,k}^{-1} \Sigma_k \right)^{-1} \Sigma_k^T \tilde{R}_{1,k}^{-1} \quad (3.165)$$

$$K_k^{f2} = \mathcal{F}_k G_k^* \quad (3.166)$$

où $G_k^* = \left(G_k^T \tilde{R}_{2,k}^{-1} G_k\right)^+ G_k^T \tilde{R}_{2,k}^{-1}$ représente l'inverse généralisé de la matrice G_k .

Compte tenu des contraintes (3.161) et (3.162) sur les gains K_k^{f1} et K_k^{f2} , les erreurs d'estimation des défauts se réduisent à :

$$\tilde{f}_{1,k} = -K_k^{f1} e_{1,k} \quad (3.167)$$

$$\tilde{f}_{2,k-1} = -K_k^{f2} e_{2,k} \quad (3.168)$$

et les matrices de variance-covariance des erreurs d'estimations (3.167) et (3.168) se calculent aisément à partir de celles des erreurs $e_{1,k}$ et $e_{2,k}$ donnée en (3.163) et (3.164)

$$\begin{aligned} P_k^{f1} &= \mathcal{E} [\tilde{f}_{1,k} (\tilde{f}_{1,k})^T] \\ &= \left(\Sigma_k^T \tilde{R}_{1,k}^{-1} \Sigma_k\right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.169)$$

$$\begin{aligned} P_k^{f2} &= \mathcal{E} [\tilde{f}_{2,k-1} (\tilde{f}_{2,k-1})^T] \\ &= K_k^{f2} \tilde{R}_{2,k} (K_k^{f2})^T \end{aligned} \quad (3.170)$$

En se référant aux équations (3.149), (3.153), (3.156) et (3.157), on peut réécrire l'erreur d'estimation du défaut \tilde{f}_k sous la forme suivante :

$$\tilde{f}_k = \begin{bmatrix} V_{1,k} & V_{2,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{f}_{1,k} \\ \tilde{f}_{2,k} \end{bmatrix} \quad (3.171)$$

A partir de (3.171), la matrice de variance-covariance P_k^f se calcule par :

$$P_k^f = \begin{bmatrix} V_{1,k} & V_{2,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k^{f1} & P_k^{f12} \\ P_k^{f21} & P_k^{f2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1,k}^T \\ V_{2,k}^T \end{bmatrix} \quad (3.172)$$

où

$$P_k^{f12} = \mathcal{E} [\tilde{f}_{1,k} \tilde{f}_{2,k-1}^T] = K_k^{f1} H_{1,k} \left[\tilde{P}_{k/k-1}^x H_{2,k}^T + \tilde{S}_k \right] (K_k^{f2})^T. \quad (3.173)$$

avec :

$$\begin{aligned}\tilde{S}_k &= \mathcal{E}[\tilde{x}_{k/k-1}^* v_{2,k}^T] \\ &= -(F_{k-1}^x K_k^{f_2} + K_k^{x*}) \tilde{R}_{2,k}\end{aligned}\quad (3.174)$$

3.6.2 Estimation de l'état du système

En se référant aux équations (3.1) et (3.152), l'erreur d'estimation de l'état $\tilde{x}_{k/k-1}^*$ s'écrit :

$$\tilde{x}_{k/k-1}^* = \tilde{\tilde{x}}_{k/k-1} - (K_k^{x*} + F_{2,k-1}^x K_k^{f_2}) e_{2,k} + (E_{k-1}^x - K_k^{x*} H_{2,k} E_{k-1}^x) d_{k-1} - K_k^{x*} H_{2,k} F_{2,k-1}^x f_{2,k-1}\quad (3.175)$$

L'estimateur $\hat{x}_{k/k-1}^*$ est non biaisé si et seulement si K_k^{x*} satisfait la contrainte suivante :

$$K_k^{x*} G_k = \mathcal{F}_k^* \quad (3.176)$$

où

$$G_k = [H_{2,k} F_{2,k-1}^x \quad H_{2,k} E_{k-1}^x], \quad \mathcal{F}_k^* = [0_{n \times (p-r_k)} \quad E_{k-1}^x]$$

Lemme 3.2. *la condition nécessaire et suffisante pour que les estimateurs $\hat{f}_{2,k-1}$ et $\hat{x}_{k/k-1}^*$ soient non-biaisés est :*

$$\text{rank}(G_k) = \text{rang}(F_{2,k-1}^x) + \text{rang}(E_{k-1}^x) \quad (3.177)$$

Démonstration. les équations (3.162) et (3.176) sont réécrites comme suit :

$$\begin{bmatrix} K_k^{f_2} \\ K_k^{x*} \end{bmatrix} G_k = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_k \\ \mathcal{F}_k^* \end{bmatrix} \quad (3.178)$$

et elles doivent être résolues par rapport à $K_k^{f_2}$ et K_k^{x*} .

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution à (3.178) est :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_k \\ \mathcal{F}_k^* \\ G_k \end{bmatrix} = \text{rang}(G_k) \quad (3.179)$$

En développant l'équation (3.179) compte tenu des définitions de \mathcal{F}_k , \mathcal{F}_k^* et G_k on obtient alors

$$\text{rang} \begin{bmatrix} I_{p-r_k} & \mathbf{0}_{(p-r_k) \times q} \\ \mathbf{0}_{n \times (p-r_k)} & E_{k-1}^x \\ H_{2,k} F_{2,k-1}^x & H_{2,k} E_{k-1}^x \end{bmatrix} = \text{rang}(H_{2,k} F_{2,k-1}^x \quad H_{2,k} E_{k-1}^x) \quad (3.180)$$

□

Cependant, dans la pratique, il est justifié de supposer que les défauts et les perturbations inconnues ont des influences indépendantes, la condition à satisfaire étant (3.177). A partir des équations (3.175) et (3.176), la matrice de variance-covariance $P_{k/k-1}^{x*} = \mathcal{E} [\tilde{x}_{k/k-1}^* (\tilde{x}_{k/k-1}^*)^T]$ est donnée par :

$$\begin{aligned} P_{k/k-1}^{x*} &= (I_n - F_{2,k-1}^x K_k^{f_2} H_{2,k} - K_k^{x*} H_{2,k}) \bar{P}_{k/k-1}^x (I_n - F_{2,k-1}^x K_k^{f_2} H_{2,k} - K_k^{x*} H_{2,k})^T \\ &\quad + (F_{2,k-1}^x K_k^{f_2} + K_k^{x*}) R_{2,k} (F_{2,k-1}^x K_k^{f_2} + K_k^{x*})^T \end{aligned} \quad (3.181)$$

La matrice gain K_k^{x*} est déterminée par minimisation de la trace de la matrice $P_{k/k-1}^{x*}$ sachant que (3.176) est vérifiée. En utilisant la méthode de Kitanidis [1987], on obtient :

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_{2,k} & -G_k \\ G_k^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (K_k^{x*})^T \\ (\Lambda_k^*)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{R}_{2,k} (K_k^{f_2})^T (F_{2,k-1}^x)^T + H_{2,k} \bar{P}_{k/k-1}^x \\ \mathcal{F}_k^* \end{bmatrix} \quad (3.182)$$

où Λ_k^* est la matrice des multiplicateurs de Lagrange.

L'équation (3.182) admet une solution unique. Par conséquent, la matrice gain K_k^{x*} est donnée

par :

$$K_k^{x*} = \left[\bar{P}_{k/k-1}^x H_{2,k}^T - F_{2,k-1}^x K_k^{f2} \tilde{R}_{2,k} \right] \tilde{R}_{2,k}^{-1} (I - G_k G_k^*) + \mathcal{F}_k^* G_k^* \quad (3.183)$$

où $G_k^* = \left(G_k^T \tilde{R}_{2,k}^{-1} G_k \right)^+$ $G_k^T \tilde{R}_{2,k}^{-1}$ représente l'inverse généralisé de la matrice G_k .

En utilisant (3.1) et (3.155), l'erreur d'estimation de l'état $\tilde{x}_{k/k} = x_k - \hat{x}_{k/k}$ a comme expression :

$$\tilde{x}_{k/k} = (I - K_k^x H_{2,k}) \tilde{x}_{k/k-1}^* - K_k^x v_{2,k} \quad (3.184)$$

La matrice de variance-covariance $P_{k/k}^x = \mathcal{E} \left[\tilde{x}_{k/k} \tilde{x}_{k/k}^T \right]$ est déterminée à partir des équations (3.184), (3.183), (3.184), (3.176), (3.175) et (3.159).

$$P_{k/k}^x = P_{k/k-1}^{x*} + K_k^x R_k^* K_k^{xT} - V_k^* K_k^{xT} - K_k^x V_k^{*T} \quad (3.185)$$

où

$$R_k^* = H_{2,k} P_{k/k-1}^{x*} H_{2,k}^T + R_{2,k} + H_{2,k} S_k^* + (H_{2,k} S_k^*)^T \quad (3.186)$$

$$V_k^* = P_{k/k-1}^{x*} (H_{2,k})^T + S_k^* \quad (3.187)$$

$$S_k^* = \mathcal{E} \left[\tilde{x}_{k/k-1}^* v_{2,k}^T \right] = -(F_{2,k-1}^x K_k^{f2} + K_k^{x*}) R_{2,k} \quad (3.188)$$

Pour minimiser la trace de $P_{k/k}^x$ (3.185), on prend la matrice gain K_k^x comme suit :

$$K_k^x = (P_{k/k-1}^{x*} H_{2,k}^T + S_k^*) \alpha_k^T (\alpha_k R_k^* \alpha_k^T)^{-1} \alpha_k \quad (3.189)$$

où α_k est une matrice arbitraire qui doit être choisi afin que $\alpha_k R_k^* \alpha_k^T$ soit de rang plein Gillijns et Moor [007a] et Darouach et al. [2003].

3.6.3 Mise à jour du filtre

A partir de (3.160), la matrice de variance-covariance $\bar{P}_{k/k-1}^x$ se calcule par :

$$\begin{aligned}\bar{P}_{k+1/k}^x &= \mathcal{E} [\tilde{x}_{k+1/k}(\tilde{x}_{k+1/k})^T] \\ &= \begin{bmatrix} A_k & F_{1,k}^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{k/k}^x & P_k^{xf_1} \\ (P_k^{xf_1})^T & P_k^{f_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k^T \\ F_{1,k}^{xT} \end{bmatrix} + Q_k\end{aligned}\quad (3.190)$$

où $P_k^{xf_1}$ est calculée en utilisant les équations (3.184) et (3.156). Pour cela on obtient :

$$\begin{aligned}P_k^{xf_1} &= \mathcal{E} [\tilde{x}_{k/k}(\tilde{f}_{1,k})^T] \\ &= (K_k^x(V_k^*)^T - P_{k/k-1}^{x*})(K_k^{f_1}H_{1,k})^T\end{aligned}\quad (3.191)$$

3.7 Exemples illustratifs

Dans cette section, on propose d'utiliser les filtres EUMV, ARThSKF et ORFSF développés respectivement par [Ben Hmida et al. \[2010, 010a\]](#) et [Khémiri et al. \[2011a\]](#) pour résoudre le problème d'estimation simultanée des défauts actionneurs et capteurs. De plus, on propose de mener une étude comparative entre les filtres que nous proposons et des filtres existants dans la littérature, en particulier des filtres développés dans [Hsieh \[2009\]](#) et [Hsieh \[2000\]](#).

3.7.1 Exemple 1 : estimation simultanée des défauts actionneurs et capteurs

On considère le même exemple numérique utilisé dans [Chen et Patton \[1996\]](#), [Chen et Patton \[1999\]](#). Le modèle linéarisé d'un circuit de commande de vol longitudinal simplifié est le suivant :

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= (A_k + \Delta A_k)x_k + (B_k + \Delta B_k)u_k + F_k^a f_k^a + w_k \\ y_k &= H_k x_k + F_k^s f_k^s + v_k\end{aligned}$$

où les variables d'état sont : l'angle de lancement δ_z , la vitesse de lancement ω_z , la vitesse normale η_y , l'entrée de commande u_k le signal de commande d'ascenseur. F_k^a et F_k^s sont respectivement les matrices de distribution du défaut actionneur f_k^a et du défaut capteur f_k^s .

Le système se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + F_k^x f_k + E_k^x d_k + w_k \\ y_k &= H_k x_k + F_k^y f_k + v_k \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} F_k^x &= [F_k^a \quad 0] \\ F_k^y &= [0 \quad F_k^s] \end{aligned}$$

Le terme $E_k^x d_k$ caractérise les incertitudes dans les matrices A_k et B_k :

$$E_k^x d_k = \Delta A_k x_k + \Delta B_k u_k$$

Les données numériques du système sont les suivantes :

$$A_k = \begin{bmatrix} 0.9944 & -0.1203 & -0.4302 \\ 0.0017 & 0.9902 & -0.0747 \\ 0 & 0.8187 & 0 \end{bmatrix}, B_k = \begin{bmatrix} 0.4252 \\ -0.0082 \\ 0.1813 \end{bmatrix},$$

$$H_k = I_{3 \times 3}, x_k = [\eta_y \quad \omega_z \quad \delta_z]^T, Q_k = \text{diag}\{0.1^2, 0.1^2, 0.01^2\}, R_k = 0.1^2 I_{3 \times 3}$$

On propose d'introduire simultanément dans le système deux défauts de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} f_k^a \\ f_k^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4u_s(k-20) - 4u_s(k-60) \\ -2u_s(k-30) + 2u_s(k-70) \end{bmatrix}$$

avec $u_s(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$ la fonction échelon de position d'amplitude unité.

Le premier défaut f_k^a affecte l'actionneur et le deuxième défaut f_k^s affecte le capteur de δ_z . Les perturbations inconnues sont données par :

$$E_k^x d_k = E_k^x \{ [\Delta a_{21} \quad \Delta a_{22} \quad \Delta a_{23}] x_k + \Delta b_2 u_k \}$$

où Δa_{ij} et Δb_j ($i = 1, j = 1, 2, 3$) sont les perturbations affectant les coefficients aérodynamiques a_{ij} et de commande b_j .

Les matrices d'injection des défauts et des perturbations inconnues sont prises comme suit :

$$E_k^x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, F_k^a = \begin{bmatrix} 0.4252 \\ -0.0082 \\ 0.1813 \end{bmatrix}, F_k^s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dans la simulation, les coefficients aérodynamique sont perturbés par $\pm 50\%$, c'est-à-dire $\Delta a_{ij} = -0.5a_{ij}$ et $\Delta b_j = 0.5b_j$. En outre, on va prendre $u_k = 10$, $x_0 = 0$ et $P_0 = 0.1^2 I_{3 \times 3}$.

Dans les figures 3.2 et 3.3, on présente respectivement les vecteurs d'état et des défauts réels et leurs estimés.

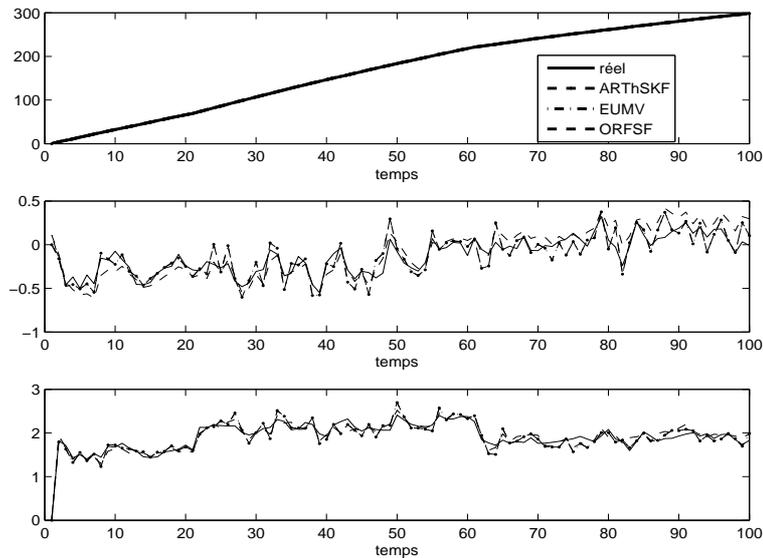


FIGURE 3.2 – Estimation de l'état x_k

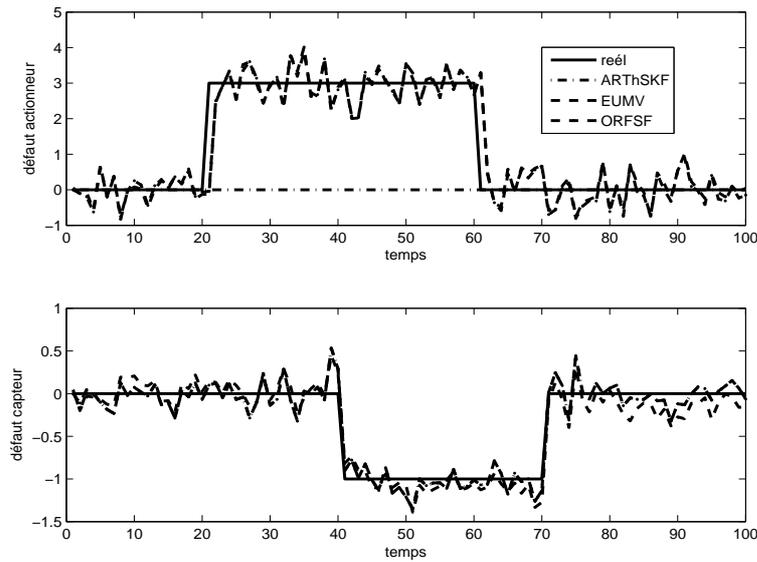


FIGURE 3.3 – Estimation simultanée d'un défaut actionneur et d'un défaut capteur

L'évaluation de performances en utilisant les indicateurs *RMSE* (Root Mean Square Errors) et les traces des matrices de variance-covariance est résumée dans les tableaux 3.1 et 3.2.

Filtres	x^1	x^2	x^3	f^a	f^s
<i>ART hSKF</i>	0.1015	0.1090	0.1203	0.6297	0.1504
<i>EUMV</i>	0.1015	0.1095	0.1205	1.8974	0.1513
<i>ORFSF</i>	0.1015	0.1278	0.1097	0.6330	0.1678

TABLE 3.1 – Evaluation des valeurs RMSE

Filtres	$trace(P_{k/k}^x)$	$trace(P_{k/k}^{f^1})$	$trace(P_{k/k}^{f^2})$	$trace(P_{k/k}^f)$
<i>ART hSKF</i>	0.0329	-	-	0.1820
<i>EUMV</i>	0.0329	-	-	0.0229
<i>ORFSF</i>	0.0255	0.0205	0.1564	0.1769

TABLE 3.2 – Trace des matrices variance-covariance de l'état et des défauts

3.7.2 Exemple 2 : étude comparative

Dans ce paragraphe, on présente une étude comparative des filtres proposés par rapport à deux filtre existants dans la littérature à travers un exemple académique. Les paramètres du système

sont donnés par :

$$x_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ x_{3,k} \end{bmatrix}, A_k = \begin{bmatrix} a_k & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.5 & 0.1 & 0.25 \end{bmatrix}, a_k = 0.3 + 0.2\sin(0.2k), B_k = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$F_k^x = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 1.5 & 1.1 \\ 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}, E_k^x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, H_k = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$Q_k = 0.1I_{3 \times 3}, R_k = 0.01I_{3 \times 3}, x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_0^x = I_{3 \times 3}$$

$$(F_k^y)^1 = \begin{bmatrix} 2 & 1.4 \\ 0.6 & 0.3 \\ 0.2 & 1.6 \end{bmatrix}, (F_k^y)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0.6 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, (F_k^y)^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}, (F_k^y)^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1.4 \\ 0 & 0.3 \\ 0 & 1.6 \end{bmatrix}$$

La figure 3.4 illustre la séquence d'entrée du système pour un temps de simulation correspondant à N=100 échantillons.

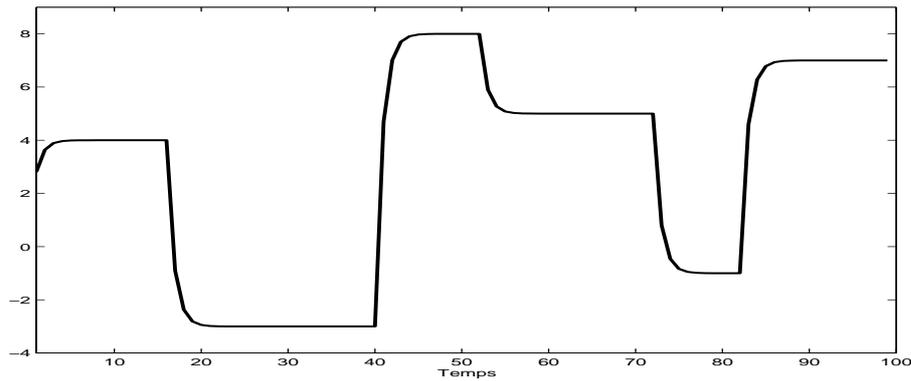


FIGURE 3.4 – Entrée de commande u_k du système

Les défauts et la perturbation sont définis respectivement par :

$$\begin{bmatrix} f_k^1 \\ f_k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4u_s(k-25) - 4u_s(k-70) \\ 5u_s(k-30) - 5u_s(k-65) \end{bmatrix}$$

$$d_k = 4u_s(k-15) - 4u_s(k-55)$$

Les figures 3.5-3.9 représentent l'évolution des grandeurs d'état et des défauts ainsi que leurs estimations. On remarque qu'il y a un découplage parfait de la perturbation inconnue d_k que ce soit sur l'estimation des grandeurs d'état ou sur l'estimation des défauts.

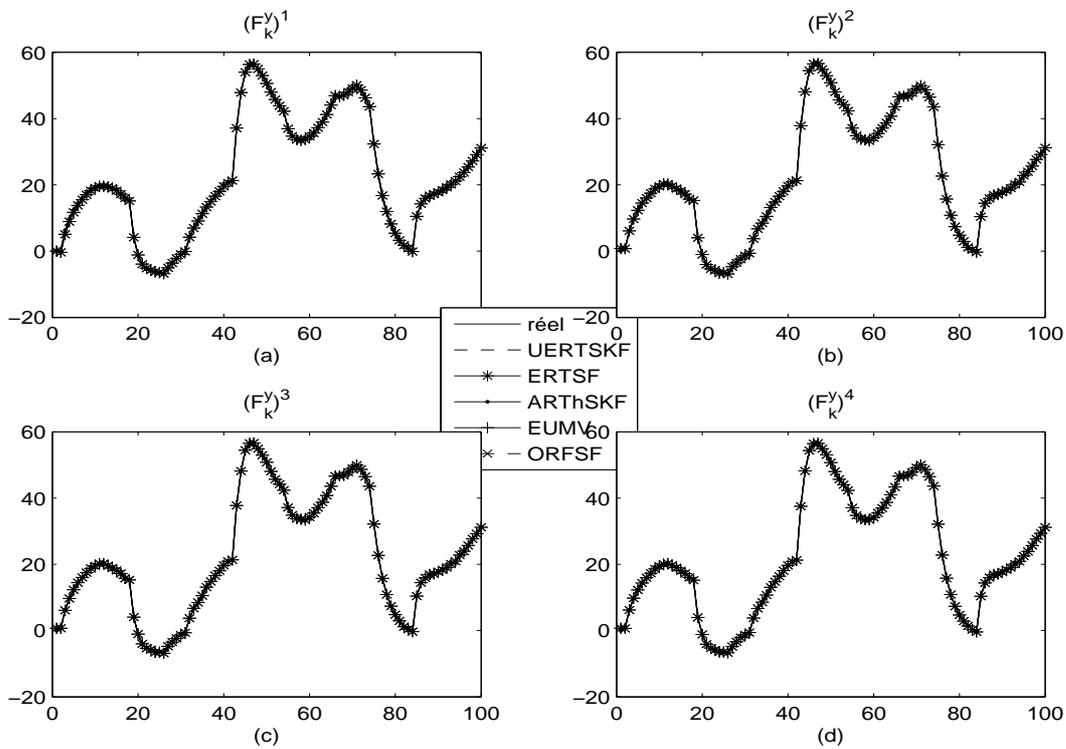


FIGURE 3.5 – Estimation de la variable d'état x_k^1

Les tableaux 3.3 et 3.4 présentent l'évaluation de performances en utilisant les indicateurs *RMSE* et les traces des matrices de variance-covariance.

3.7. Exemples illustratifs

F_k^y	Filter	x_k^1	x_k^2	x_k^3	f_k^1	f_k^2
$(F_k^y)^1$	<i>UERTSKF</i>	0.4246	0.2502	0.4470	0.3813	0.3845
	<i>ERTSF</i>	0.4465	0.1586	0.4705	0.4165	0.4162
	<i>ARThSKF</i>	0.4466	0.2546	0.4729	0.3951	0.3976
	<i>EUMVF</i>	0.4465	0.1586	0.4705	0.4165	0.4162
	<i>RFSF</i>	0.4465	0.1586	0.4705	0.4165	0.4162
$(F_k^y)^2$	<i>UERTSKF</i>	0.2979	0.2228	0.1686	0.7312	1.5223
	<i>ERTSF</i>	0.2813	0.0986	0.1363	0.7312	1.5223
	<i>ARThSKF</i>	0.2959	0.2230	0.1688	0.7311	1.5224
	<i>EUMVF</i>	0.2813	0.0986	0.1363	0.7312	1.5223
	<i>RFSF</i>	0.2813	0.0986	0.1363	0.4757	0.8756
$(F_k^y)^3$	<i>UERTSKF</i>	0.2895	0.2229	0.1697	0.1190	2.9580
	<i>ERTSF</i>	0.2733	0.0986	0.1375	0.1193	2.9580
	<i>ARThSKF</i>	0.2886	0.2229	0.1698	0.1191	0.8127
	<i>EUMVF</i>	0.2733	0.0986	0.1375	0.1193	2.9580
	<i>RFSF</i>	0.2733	0.0986	0.1375	0.1193	0.8133
$(F_k^y)^4$	<i>UERTSKF</i>	0.2126	0.2178	0.2606	2.6833	0.1223
	<i>ERTSF</i>	0.1899	0.0863	0.2409	2.6833	0.1231
	<i>ARThSKF</i>	0.2124	0.2309	0.2639	0.6451	0.1222
	<i>EUMVF</i>	0.1899	0.0863	0.2409	2.6833	0.1231
	<i>RFSF</i>	0.1899	0.0863	0.2409	0.6631	0.1231

TABLE 3.3 – Evaluation des valeurs *RMSE*

F_k^y	Filter	$trace(P_{k/k}^x)$	$trace(P_{k/k}^{f1})$	$trace(P_{k/k}^{f2})$	$trace(P_{k/k}^f)$
$(F_k^y)^1$	<i>UERTSKF</i>	0.4004	-	-	0.2947
	<i>ERTSF</i>	0.4704	-	-	0.3540
	<i>ARThSKF</i>	0.3367	-	-	0.2270
	<i>EUMVF</i>	0.4704	-	-	0.3540
	<i>RFSF</i>	0.4704	0.3540	-	0.3540
$(F_k^y)^2$	<i>UERTSKF</i>	0.1506	-	-	0.0172
	<i>ERTSF</i>	0.1508	-	-	0.0172
	<i>ARThSKF</i>	0.1508	-	-	0.0171
	<i>EUMVF</i>	0.1508	-	-	0.0172
	<i>RFSF</i>	0.1508	0.0172	0.4050	0.4222
$(F_k^y)^3$	<i>UERTSKF</i>	0.1421	-	-	0.0201
	<i>ERTSF</i>	0.1428	-	-	0.0202
	<i>ARThSKF</i>	0.1420	-	-	0.0201
	<i>EUMVF</i>	0.1428	-	-	0.0202
	<i>RFSF</i>	0.1428	0.0202	0.1080	0.1282
$(F_k^y)^4$	<i>UERTSKF</i>	0.1288	-	-	0.0217
	<i>ERTSF</i>	0.1282	-	-	0.0216
	<i>ARThSKF</i>	0.1283	-	-	0.0216
	<i>EUMVF</i>	0.1282	-	-	0.0216
	<i>RFSF</i>	0.1282	0.0216	0.1570	0.1786

TABLE 3.4 – Trace des matrices variance-covariance de l'état et des défauts

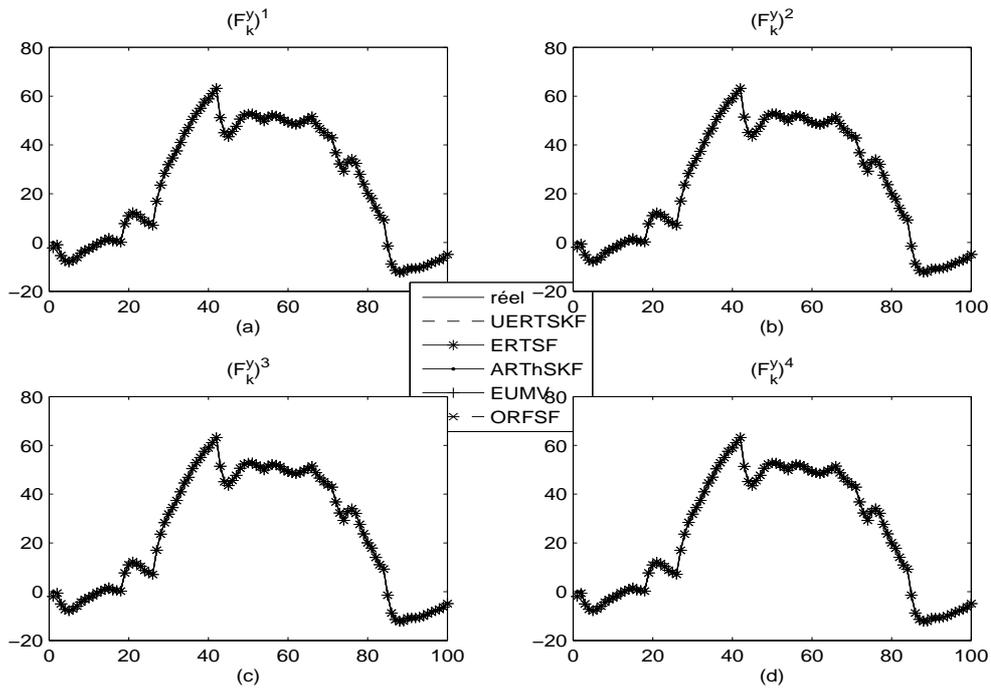


FIGURE 3.6 – Estimation de la variable d'état x_k^2

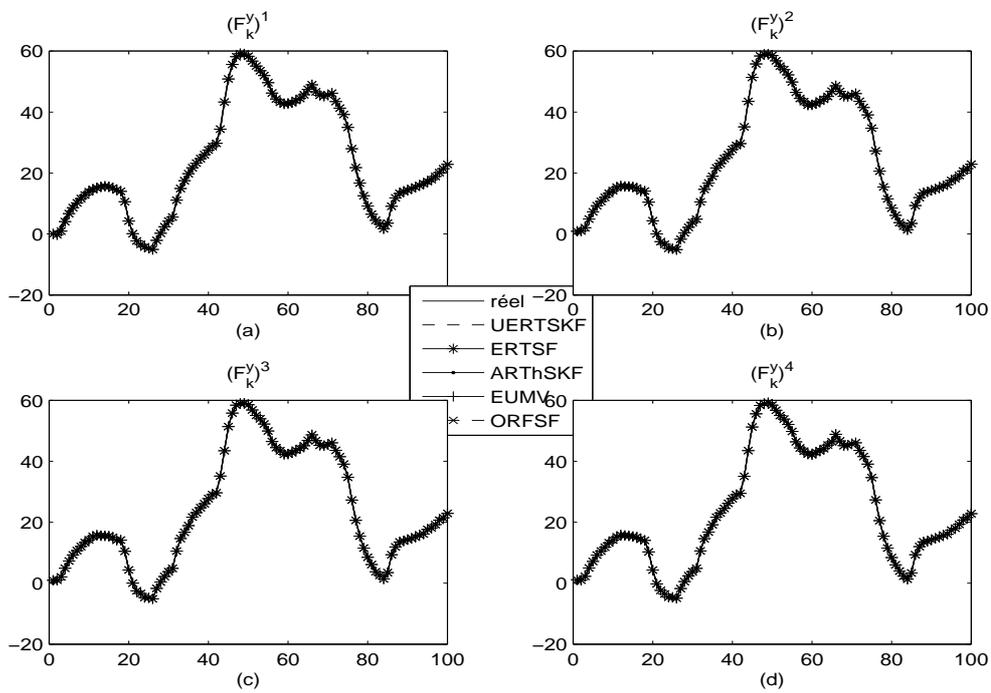


FIGURE 3.7 – Estimation de la variable d'état x_k^3

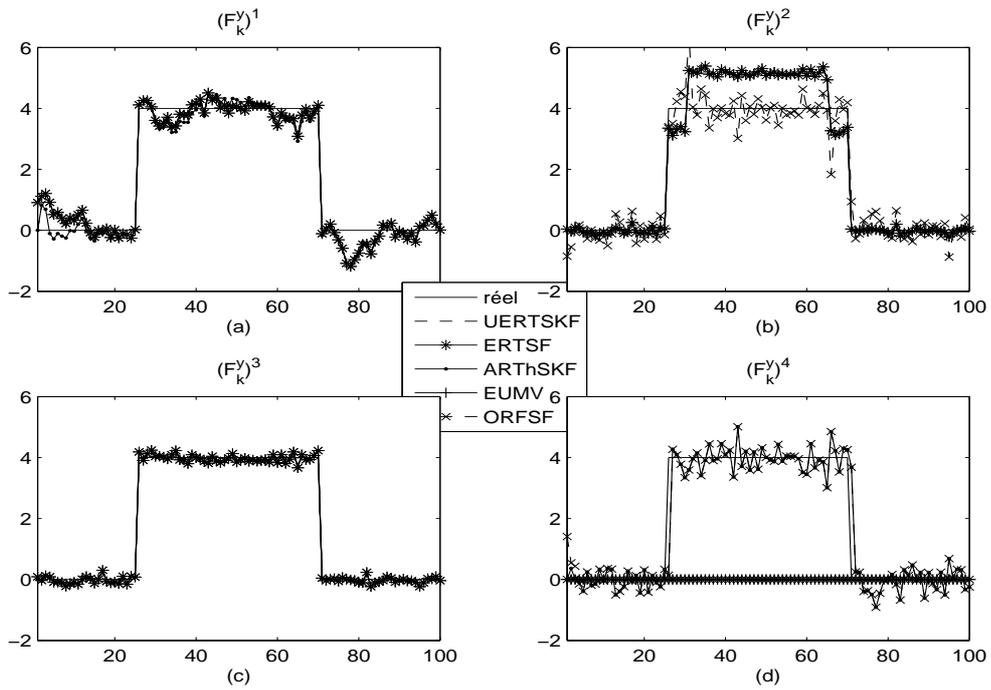


FIGURE 3.8 – Estimation du défaut f_k^1

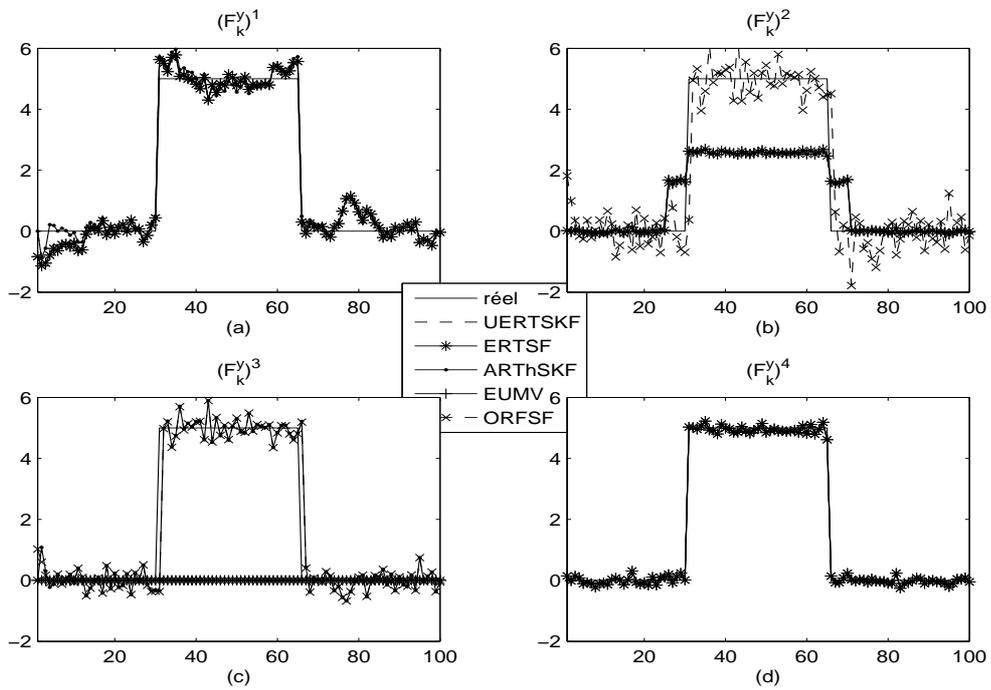


FIGURE 3.9 – Estimation du défaut f_k^2

D'après les résultats présentés dans les figures 3.5-3.9 et les tableaux 3.3 et 3.4, nous tirons les conclusions suivantes :

- Pour le cas où la matrice F_k^y est de rang plein, on constate que les filtres ERTSF, EUMVF et RFSF ont des performances équivalentes et que le filtre UERTSKF possède les meilleures performances ;
- Pour les trois autres cas où la matrice F_k^y est de rang non plein, on remarque que le filtre RFSF est plus performant et plus particulièrement au niveau de l'estimation des défauts.
- D'après le tableau 3.4, on remarque que les traces des matrices de variance-covariance des défauts vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{trace}(P^f(\text{autres filtres})) &\leq \text{trace}(P^f(\text{RFSF})) = \text{trace}(P^{f_1}(\text{RFSF})) + \text{trace}(P^{f_2}(\text{RFSF})) \\ \text{trace}(P^{f_1}(\text{RFSF})) &= \text{trace}(P^f(\text{ERTSF})) = \text{trace}(P^f(\text{EUMV})) \\ &\cong \text{trace}(P^f(\text{UERTSKF})) \cong \text{trace}(P^f(\text{ARThSKF})) \end{aligned}$$

Il est clair que tous les filtres, pour le premier cas, ont presque les mêmes résultats. Par contre pour les autres cas les traces des matrices de variance-covariance des défauts des filtres UERTSKF, ERTSF, ARThSKF et EUMVF sont inférieures à celle du filtre RFSF car elles concernent une seule composante du vecteur défauts.

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, le problème de l'estimation robuste et conjointe de l'état et des défauts de systèmes stochastiques linéaires à temps variant, à temps discret et en présence des perturbations inconnues est résolu par la synthèse de trois nouveaux filtres récursifs. Ces filtres ont été utilisés pour résoudre, d'une part, le problème d'estimation simultanée des défauts actionneurs et capteurs et, d'autre part, pour mener une étude comparative avec des filtres existants dans la littérature. Les résultats de simulation ont montré que les filtres ARThSKF et RFSF permettent d'obtenir de bonnes estimations de l'état et des défauts même si la matrice de distribution directe des défauts n'est pas de rang plein.

Conclusion générale et perspectives

Ce travail avait pour objet l'estimation non biaisée et robuste de défauts affectant des systèmes linéaires, stochastiques à temps discret et incertains. Trois chapitres font état de la mise au point des méthodes d'estimation proposées.

On a présenté une revue de la littérature sur le filtrage à entrées inconnues des systèmes linéaires stochastiques à temps discret. Une étude bibliographique avec un développement de certaines approches a été faite. Ceci, nous a permis d'effectuer une étude comparative entre les diverses approches. Par conséquent, on a pu mettre en évidence les inconvénients et les avantages de chaque approche qui ont fait notre objectif dans le reste de nos travaux.

On a étudié le filtrage proportionnel-intégral des systèmes linéaires à entrées inconnues. Trois solutions en réponse à trois problèmes d'estimation sont présentées. La première est consacrée à la conception d'un observateur proportionnel multi-intégral à entrées inconnues qui a permis une estimation découplée de l'état et des entrées inconnues sous forme polynomiale de degré " p ". L'observateur obtenu testé par un exemple numérique où le système considéré est affecté par des entrées inconnues de degré 3, a donné des résultats tout à fait satisfaisants. La deuxième, nommée PI TSKF, est conçue pour résoudre le problème d'estimation robuste en présence des incertitudes sur les matrices de covariance des bruits d'état, de mesures et des entrées inconnues. La solution proposée s'est révélée efficace et a donné des résultats acceptables. Une autre solution qui apparaît plus intéressante est le filtre PI ThSKF qui est développé pour résoudre le problème d'estimation jointe et robuste des défauts et d'état en présence d'entrées inconnues et

d'incertitudes sur les matrices de covariance des différents bruits d'état, de mesures, des défauts et des entrées inconnues. Les résultats obtenus par simulation à travers un exemple numérique montrent l'efficacité de ce filtre.

Le problème de l'estimation robuste non biaisée à minimum de variance en présence de perturbations inconnues est résolu en présentant trois filtres récursifs robustes. Par une modification des sous-filtres estimateurs de l'OThSKF on a proposé le filtre ARThSKF (Augmented Robust Three Stage Kalman Filter). Le deuxième filtre est conçu par l'utilisation d'un estimateur linéaire non-biaisé et à minimum de variance (LUMVE : Linear Unbiased Minimum-Variance Estimator). L'estimation des défauts est obtenue en utilisant la méthode des moindres carrés pondérés (WLS : Weighted Least-Square). On a commencé par traiter le cas simple où la matrice directe d'injection des défauts sur les mesures est de rang plein, et par la suite nous avons étendu ce travail pour traiter le cas où cette matrice est de rang arbitraire. Malheureusement, ce filtre a souffert d'une certaine insuffisance, dans certains cas, en délivrant une estimation biaisée des défauts. Ces insuffisances sont comblées par le troisième filtre nommé RFSF (Recursive Five Step Filter). Les trois approches sont testés à travers : une application des trois filtres à l'estimation simultanée d'un défaut capteur et d'un défaut actionneur en présence de perturbations inconnues et une étude comparative entre ces trois filtres et des filtres de la littérature.

Ces orientations que nous avons proposées constituent un élément fondamental pour la satisfaction des objectifs d'un système d'aide au diagnostic, à savoir :

- la détection précoce des défauts avec le minimum de fausse alarme.
- la quasi-insensibilité vis-à-vis des entrées inconnues pour obtenir une estimation robuste des défauts.

Enfin, dans la suite de nos travaux on envisage de proposer une structure de commande tolérante aux défauts (dite FTC : Fault Tolerant Control). Une telle structure permettra de garantir une continuité de fonctionnement avec des performances satisfaisantes malgré la présence de certains défauts (c'est-à-dire en mode dégradé).

Bibliographie

- Alouani, A.-T., Rice, T.-R., et Blair, W. D.-A. (1992). A two-stage filter for state estimation in the presence of dynamical stochastic bias. In *American Control Conference, Chicago, IL*, pp. 1784-1788.
- Basseville, M. et Nikiforov, I. (1994). *Detection of abrupt changes : theory and application*. Cliffs, NJ : Prentice-Hall.
- Ben Hmida, F., Khémiri, K., et Ragot, J. (2012). Three-stage Kalman filter for state and fault estimation of linear stochastic systems with unknown inputs. *Journal of the Franklin Institute*, 349 (7) :2369–2388.
- Ben Hmida, F., Khémiri, K., Ragot, J., et Gossa, M. (2010). Unbiased minimum-variance filter for state and fault estimation of linear time-varying systems with unknown disturbances. *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2010 :Article ID 343586, 17 pages.
- Ben Hmida, F., Khémiri, K., Ragot, J., et Gossa, M. (2010a). Robust filtering for state and fault estimation of linear stochastic systems with unknown disturbance. *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2010 :Article ID 591639, 24 pages.
- Chen, F. C. et Hsieh, C. S. (2000). Optimal multi-stage Kalman estimators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(11) :2182–2188.
- Chen, J. et Patton, R. (1996). Optimal filtering and robust fault diagnosis of stochastic system with unknown disturbances. *IEE Proceeding-Control Theory Application*, 143 :31–36.

- Chen, J. et Patton, R. (1999). *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*. Kluwer Academic Publishers.
- Cheng, Y., Ye, H., Wang, Y., et Zhou, D. (2009). Unbiased minimum-variance state estimation for linear systems with unknown input. *Automatica*, 45 :485–491.
- Darouach, M. et Zasadzinski, M. (1997). Unbiased minimum variance estimation for system with unknown exogenous inputs. *Automatica*, 33 :717–719.
- Darouach, M., Zasadzinski, M., et Boutayeb, M. (2003). Extension of minimum variance estimation for systems with unknown inputs. *Automatica*, 39 :867–876.
- Friedland, B. (1969). Treatment of bias in recursive filtering. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 14 :359–367.
- Gillijns, S. et Moor, B. (2007a). Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems. *Automatica*, 43(1) :111–116.
- Gillijns, S. et Moor, B. (2007b). Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems with direct feedthrough. *Automatica*, 43 (1) :934–937.
- Hautus, M. L. J. (1969). Controllability and observability conditions of linear autonomous systems. *Indagationes Mathematicae*, 31 :443–448.
- Hou, M. et Patton, R. J. (1998). Optimal filtering for system with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43 :445–449.
- Hsieh, C. (2006). Optimal minimum-variance filtering for systems with unknown inputs. *in the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation*.
- Hsieh, C. (2009). Extension of unbiased minimum-variance input and state estimation for systems with unknown inputs. *Automatica*, 45 :2149–2153.
- Hsieh, C.-S. . (2007). On the optimality of the two-stage Kalman filtering for systems with unknown inputs. In *In Proceedings of CACS International Automatic Control Conference*.

-
- Hsieh, C. S. (2000). Robust two-stage Kalman filters for systems with unknown inputs. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 45 :2374–2378.
- Hsieh, C.-S. (2006a). Optimal filtering for systems with unknown inputs via unbiased minimum-variance estimation. In *Proceeding of Tencon 2006 - 2006 IEEE Region 10 Conference*.
- Hsieh, C.-S. (2007a). Robust parameterized minimum-variance filtering for uncertain systems with unknown inputs. In *Proceeding of the American control conference, New York, NY*, pages 5118–5123.
- Hsieh, C.-S. (2007b). Extension of the robust two-stage Kalman filtering for systems with unknown inputs. In *In proceedings of IEEE Tencon 2007 - 2007 IEEE Region 10 Conference*.
- Hsieh, C.-S. (2008). A unified solution to unbiased minimum-variance estimation for systems with unknown inputs. In *Proceedings of the 17th IFAC World Congress, Seoul, Korea*, pages 14 502–14 509.
- Hsieh, C. S. (2010). On the global optimality of unbiased minimum-variance state estimation for systems with unknown inputs. *Automatica*, 46 :708–715.
- Hsieh, C. S. et Chen, F. C. (1999). Optimal solution of the two-stage Kalman estimator. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 44 :194–199.
- Ignagni, M. (2000). Optimal and suboptimal separate-bias Kalman estimators of a stochastic bias. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45 :547–551.
- Jamouli, H., Keller, J., et Sauter, D. (2003). Fault isolation filter with unknown inputs in stochastic systems. In *Proceedings of Safeprocess, Washington, DC, USA*.
- Kailath, T., Sayed, A., et Hassibi, B. (2000). *Linear Estimation*. Prentice-Hall, Inc.
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transaction of the ASME, journal of basic engineering*, 82 :34–45.
- Keller, J. (1998). Fault isolation filter design for linear stochastic systems with unknown inputs. In *37th IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, Florida USA, Dcember 1998*.

- Keller, J. (1999). Fault isolation filter design for linear stochastic systems. *Automatica*, 35 :1701–1706.
- Khémiri, K., Ben Hmida, F., et Ragot, J. (2013). Novel recursive optimal filter for the joint input-state estimation in linear discrete-time systems. In *international conference CODIT2013*.
- Khémiri, K., Ben Hmida, F., Ragot, J., et Gossa, M. (2-4 juin 2010). Observateur proportionnel multi-intégral pour les systèmes linéaires à entrées inconnues. In *Conférence Francophone d'Automatique, CIFA2010, Nancy, France*.
- Khémiri, K., Ben Hmida, F., Ragot, J., et Gossa, M. (2008). Robust input and state estimation for linear discrete-time systems using pi two-stage Kalman filter , sousse, tunisia. In *9th international conference on Sciences and Techniques of Automatic Control & Computer Engineering STA2008, Sousse, Tunisia*.
- Khémiri, K., Ben Hmida, F., Ragot, J., et Gossa, M. (2011a). Novel optimal recursive filter for state and fault estimation of linear stochastic systems with unknown disturbances. *Int. J. App. Math. Comput. Sci.*, 21(4) :629–637.
- Khémiri, K., Ben Hmida, F., Ragot, J., et Gossa, M. (March 3-5, 2011b). Robust fault and state estimation for linear discrete-time systems with unknown disturbances using pi three-stage Kalman filter. In *1st International Conference on Communications, Computing and Control Application (CCCA'11), Hammamet, Tunisia*.
- Kim, K. H., Lee, J. G., et Park, C. G. (2006). Adaptive two-stage Kalman filter in the presence of unknown random biais. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 20 :305–319.
- Kim, K. H., Lee, J. G., et Park, C. G. (2007). The stability analysis of the adaptive two-stage Kalman filter. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 21 :856–870.
- Kitanidis, P. (1987). Unbiased minimum-variance linear state estimation. *Automatica*, 23 :775–778.

-
- Koenig, D. (2005). Unknown input proportional multi-integral observer design for linear descriptor systems : application to state and fault estimation. *IEEE Transaction on automatic control*, 50(2) :212–217.
- Linder, S. P. et Shafai, B. (1998). Robust pfi Kalman filters. In *in Proceedings of the 1998 American Control Conference, Philadelphia, USA, IEEE, vol 5 : 3163-3164*.
- Nikoukhah, R. (1994). Innovation generation in the presence of unknown inputs : application to robust failure detection. *Automatica*, 30 :1851–1867.
- Orjuela, R., Marx, B., Ragot, J., et Maquin, D. (2007). Conception d'un observateur PI pour un multimodèle découplé. In *8th International Conference STA'2007, Monastir, Tunisia*.
- Shafai, B., Beale, S., Niemann, H. H., et Stroustrup, J. L. (1996). Ltr design of discrete-time proportional-integral observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 5(7) :1056–1062.

Bibliographie

Résumé Cette thèse traite le problème de filtrage non biaisé et à minimum de variance par deux techniques : le filtrage proportionnel intégral et le filtrage robuste à minimum de variance. Dans la première, le développement d'un observateur multi-intégral (PI^p) a permis une estimation non biaisée de l'état pour les systèmes linéaires à temps discret en présence d'entrées inconnues. Deux nouveaux filtres ont été également développés tels que les filtres PITSKF et PITHSKF pour résoudre le problème d'estimation robuste et jointe d'état et des défauts en présence d'entrées inconnues et des incertitudes sur les matrices de covariance des différents bruits d'état, des mesures, des défauts et des entrées inconnues. Une autre technique de filtrage est également envisagée pour s'affranchir de la connaissance des modèles à priori des défauts et des entrées inconnues, on a donc développé le filtre ARThSKF. De plus, nous avons conçu deux nouveaux filtres EUMVF et ORFSF pour résoudre le problème posé par le rang arbitraire de la matrice directe d'injection des défauts sur les mesures.

Mots-clés Système linéaire, entrée inconnue, observateur à entrée inconnue, observateur proportionnel multi-intégral, défaut, filtre de Kalman, estimation robuste, estimation non biaisée à minimum de variance.

Abstract This thesis addresses the problem of unbiased minimum variance filtering by two techniques : the proportional integral filter and the robust minimum variance filtering. In the first, the development of a multi-integral observer (PI^p) has allowed an unbiased estimation of the state and the unknown input for linear discrete time systems. Two new filters have also developed such as the PITSKF and the PITHSKF to solve the problem of the robust joint state and fault estimation in the presence of unknown inputs and uncertainties in the covariance matrices of different noises of the state, the measurement and the faults. Another filtering technique is also proposed to overcome the knowledge of the prior models of the faults and the unknown inputs, so, we have designed the ARThSKF. In addition, we have developed two new filters the EUMVF and the ORFSF to solve the problem posed by the arbitrary rank of the direct feedthrough matrix distribution of the fault.

Keywords linear system, unknown input, unknown input observer, proportional multi-integral observer, fault, Kalman filter, robust estimation, unbiased minimum variance estimation

