



**HAL**  
open science

# Modélisation vibro-acoustique de structures sandwich munies de matériaux visco-élastiques.

Lucie Rouleau

► **To cite this version:**

Lucie Rouleau. Modélisation vibro-acoustique de structures sandwich munies de matériaux visco-élastiques.. Autre. Conservatoire national des arts et metiers - CNAM, 2013. Français. ⟨NNT : 2013CNAM0890⟩. ⟨tel-00957457⟩

**HAL Id: tel-00957457**

**<https://theses.hal.science/tel-00957457v1>**

Submitted on 10 Mar 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

CONSERVATOIRE NATIONAL  
DES  
ARTS ET MÉTIERS

le cnam

École Doctorale du Conservatoire National des Arts et Métiers

Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés (LMSSC)

## THÈSE DE DOCTORAT

*présentée par* : **Lucie ROULEAU**

*prévue le* : **18 Octobre 2013**

*pour obtenir le grade de* : **Docteur du Conservatoire National des Arts et Métiers**

*Spécialité* : **Mécanique**

# Modélisation vibro-acoustique de structures sandwich munies de matériaux viscoélastiques

### Jury composé de :

|                     |   |                              |
|---------------------|---|------------------------------|
| M. CHEVALLIER G.    | LISMMA, Supmeca (Saint-Ouen), France            | <i>Rapporteur</i>            |
| M. OUISSE M.        | FEMTO-ST, ENSMM (Besançon), France              | <i>Rapporteur</i>            |
| M. BALMÈS É.        | PIMM, Arts et Métiers ParisTech (Paris), France | <i>Examineur</i>             |
| M. DAYA E.M.        | LEM3, Univ. de Lorraine (Metz), France          | <i>Examineur</i>             |
| M. SIGRIST J.-F.    | DCNS Research (Nantes), France                  | <i>Examineur</i>             |
| M. DEÜ J.-F.        | LMSSC, Cnam (Paris), France                     | <i>Directeur de thèse</i>    |
| M. LEGAY A.         | LMSSC, Cnam (Paris), France                     | <i>Co-encadrant de thèse</i> |
| Mme. LE LAY F.      | DCNS Research (Nantes), France                  | <i>Invité</i>                |
| M. MARIN-CURTOUD P. | DGA TN (Toulon), France                         | <i>Invité</i>                |



# Résumé

Dans le cadre de la discrétion acoustique des navires militaires, cette thèse contribue à la modélisation de structures amorties par des matériaux viscoélastiques, sous forme de couches contraintes. Afin de pouvoir optimiser et dimensionner la structure et le matériau amortissant, il est souhaitable de disposer d'un outil numérique prédictif et efficace. Dans un premier temps, une stratégie de caractérisation et de modélisation du comportement de matériaux viscoélastiques est proposée. Elle inclue une méthode de recalage de résultats de mesures par DMA basée sur le respect des relations de Kramers-Kronig, permettant ainsi de construire des courbes maîtresses du matériau en accord avec le principe de causalité. Dans un deuxième temps, un code de calcul par éléments finis est développé, puis des essais de vibration sur structures sandwich sont réalisés afin de valider la modélisation par éléments finis de structures munies de matériaux viscoélastiques. Dans le cas d'une fine couche viscoélastique insérée dans une structure maillée par des éléments volumiques, deux éléments d'interface sont développés : ils permettent de tester simplement plusieurs configurations. Enfin, dans un troisième temps, deux catégories de méthodes de réduction adaptées au calcul de la réponse fréquentielle de structures fortement amorties par des matériaux viscoélastiques sont étudiées : les méthodes de projection sur bases modales et la méthode de reconstruction par approximants de Padé. Dans le cadre d'études paramétriques pour l'optimisation des performances acoustiques des traitements viscoélastiques contraints, les avantages des méthodes développées sont mis en avant à travers deux cas d'application.

**Mots clés :** Matériaux viscoélastiques, Éléments finis, Essais DMA, Relations de Kramers-Kronig, Analyse modale expérimentale, Interfaces viscoélastiques, Projection modale, Approximants de Padé



# Abstract

In the context of acoustic discretion of naval ships, this thesis contributes to the modelling of viscoelastically damped structures by means of thin constrained layers. In order to optimize and design the structure and the damping material, a predictive and efficient numerical tool is desirable. Firstly, a characterization and modelling strategy of the behaviour of viscoelastic materials is proposed. A shifting procedure of DMA measurements based on the fulfilment of the Kramers-Kronig relations is developed in order to build master curves of the material which are consistent with the causality principle. Secondly, a finite element code is developed, and vibration experiments are realized in order to validate the finite element modelling of structures with viscoelastic materials. In the case of thin constrained viscoelastic layers applied to a structure meshed using brick elements, two interface finite elements are developed, which facilitate parametric studies. Finally, two families of reduction methods adapted to the calculation of the frequency response of structures highly damped by viscoelastic materials are studied : modal projection methods and Padé approximants reconstruction method. The advantages of the proposed methods, in the frame of parametric studies for the optimization of the acoustic performances of constrained viscoelastic layers, are highlighted through two applications.

**Keywords :** Viscoelastic materials, Finite element method, DMA measurements, Kramers-Kronig relations, Modal analysis testing, Viscoelastic interfaces, Modal projection methods, Padé approximants



# Remerciements

Cette thèse a été réalisée au sein du Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés du Conservatoire national des arts et métiers de Paris, dans le cadre d'un contrat Cifre-Défense avec DCNS Nantes et la DGA.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Jean-François Deü, et mon co-encadrant, Antoine Legay, pour leur accueil chaleureux, leur disponibilité, les nombreux conseils et encouragements qu'ils m'ont donnés. Ils ont su me transmettre leur passion pour la recherche et j'espère avoir l'occasion de continuer de travailler avec eux.

Je remercie sincèrement mes rapporteurs, Morvan Ouisse et Gaël Chevallier, pour avoir accepté la lourde charge de rapporter mes travaux de thèse en si peu de temps, et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Je remercie également Etienne Balmès et Mostafa El Daya pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury de thèse.

Mes remerciements vont également à Mathieu Aucejo, Aurélien Sénéchal et Olivier Thomas pour leur aide dans la partie expérimentale de ma thèse, et pour avoir introduit un peu de "réel" dans mon monde de simulation.

Je remercie Frédérique Le Lay, Mathieu Priser et Patrick Heuillet pour avoir partagé avec moi leur expertise sur les matériaux polymères.

Je remercie Pierre Marin-Curtoud pour avoir suivi mon travail pendant ces trois années et pour ses précieux conseils.

Je remercie également Jean-François Sigrist pour avoir réussi à me convaincre de faire une thèse et pour m'avoir suivi depuis mon stage de master.

Je remercie Roger Ohayon qui par son art d'enrober conseils et encouragements dans une conversation a su m'aider à aller de l'avant.

J'ai bénéficié durant ces trois années d'un cadre et d'une ambiance de travail exceptionnels et je remercie l'ensemble du laboratoire LMSSC pour cela. Mes coéquipiers de badminton et mes partenaires de danse sévillane/flamenco ont également contribué par leur amitié et leur bonne humeur à rendre ces trois années des plus agréables. Merci à eux.

Enfin, je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance à mes parents qui m'ont toujours soutenu et cru en moi. Je vous suis tellement redevable de ce que je suis aujourd'hui, je ne sais comment vous remercier de vos efforts et encouragements.

Merci également à Pablo pour ta patience et pour avoir vécu au jour le jour avec moi les enthousiasmes et les déceptions propres à la vie de chercheur.



---

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduction</b>  | <b>17</b> |
| <b>I Caractérisation et modélisation des propriétés du comportement viscoélastique</b> | <b>21</b> |
| <b>1 Mesure des propriétés mécaniques dynamiques de matériaux viscoélastiques</b>      | <b>27</b> |
| 1.1 Introduction . . . . .   | 27        |
| 1.2 Méthodes de mesure des propriétés mécaniques viscoélastiques . . . . .             | 28        |
| 1.2.1 Techniques de mesure dans le domaine temporel . . . . .                          | 28        |
| 1.2.2 Techniques de mesure dans le domaine fréquentiel . . . . .                       | 31        |
| 1.2.3 Synthèse . . . . .   | 36        |
| 1.3 Description des essais réalisés . . . . .  | 37        |
| 1.3.1 Mesure du module de cisaillement dynamique . . . . .                             | 37        |
| 1.3.2 Mesure du module de compressibilité dynamique . . . . .                          | 39        |
| 1.3.3 Mesure de la température de transition vitreuse . . . . .                        | 43        |
| 1.4 Conclusion . . . . .   | 45        |
| <b>2 Obtention des courbes maîtresses du matériau</b>                                  | <b>47</b> |
| 2.1 Introduction . . . . .   | 47        |

## TABLE DES MATIÈRES

---

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 2.2      | Procédure automatique de recalage pour l'application du principe de superposition temps-température . . . . . | 52        |
| 2.2.1    | Relations de Kramers-Kronig . . . . .   | 52        |
| 2.2.2    | Algorithme d'optimisation . . . . .   | 56        |
| 2.3      | Résultats et validation de la méthode proposée . . . . .  | 58        |
| 2.3.1    | Applicabilité du principe de superposition temps-température . . . . .  | 59        |
| 2.3.2    | Courbes maîtresses . . . . .  | 61        |
| 2.3.3    | Analyse critiques des coefficients de glissement optimisés . . . . .  | 67        |
| 2.4      | Incertitudes de mesure . . . . .  | 72        |
| 2.5      | Conclusion . . . . .  | 74        |
| <b>3</b> | <b>Modélisation du comportement viscoélastique</b>  | <b>77</b> |
| 3.1      | Introduction . . . . .  | 77        |
| 3.2      | Principaux modèles viscoélastiques utilisés . . . . .   | 78        |
| 3.2.1    | Modèles rhéologiques de base . . . . .  | 78        |
| 3.2.2    | Modèles rhéologiques complexes . . . . .  | 81        |
| 3.2.3    | “Spring-pot” et modèle à dérivées fractionnaires . . . . .  | 83        |
| 3.2.4    | Représentation générale des modèles rhéologiques et aspects thermodynamiques . . . . .                        | 85        |
| 3.3      | Identification des paramètres des modèles . . . . .   | 86        |
| 3.3.1    | Estimation des paramètres des modèles viscoélastiques . . . . .   | 87        |
| 3.3.2    | Résultats pour le module de cisaillement du Deltane 350 . . . . .   | 90        |
| 3.3.3    | Propriétés asymptotiques . . . . .  | 94        |
| 3.3.4    | Application au module de compressibilité du Deltane 350 . . . . .   | 95        |
| 3.4      | Conclusion . . . . .  | 95        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| <b>II</b> | <b>Modélisation par éléments finis de structures sandwich</b>                         | <b>99</b>  |
| <b>4</b>  | <b>Modélisation éléments finis de structures munies de matériaux visco-élastiques</b> | <b>105</b> |
| 4.1       | Introduction . . . . .  | 105        |
| 4.2       | Modélisation de structures avec couche viscoélastique contrainte . . . . .            | 106        |
| 4.3       | Modélisation d'une structure munie de matériaux viscoélastiques . . . . .             | 108        |
| 4.3.1     | Loi de comportement tridimensionnelle des matériaux viscoélastiques                   | 109        |
| 4.3.2     | Formulation éléments finis . . . . .  | 110        |
| 4.3.3     | Choix des éléments finis . . . . .  | 113        |
| 4.4       | Validation du code de calcul développé . . . . .                                      | 115        |
| 4.4.1     | Cas d'étude 1 : poutre sandwich encastree-libre . . . . .                             | 115        |
| 4.4.2     | Cas d'étude 2 : modélisation d'une tuyère . . . . .                                   | 116        |
| 4.5       | Conclusion . . . . .  | 118        |
| <b>5</b>  | <b>Validation expérimentale des modèles développés</b>                                | <b>121</b> |
| 5.1       | Introduction . . . . .  | 121        |
| 5.2       | Description des essais et des simulations réalisés . . . . .                          | 122        |
| 5.2.1     | Dispositif expérimental . . . . .   | 122        |
| 5.2.2     | Modélisation numérique . . . . .  | 128        |
| 5.2.3     | Séries d'expérimentation . . . . .  | 130        |
| 5.3       | Résultats . . . . .   | 131        |
| 5.3.1     | Critères de comparaison des résultats . . . . .                                       | 131        |
| 5.3.2     | Analyse des résultats . . . . .   | 132        |
| 5.4       | Analyse des écarts observés . . . . .   | 134        |
| 5.4.1     | Influence de la dépendance fréquentielle du module de compressibilité                 | 136        |
| 5.4.2     | Influence de l'incertitude de mesure du module de cisaillement . . .                  | 136        |

## TABLE DES MATIÈRES

---

|  |   |            |
|--|---|------------|
| 5.4.3  | Influence du collage . . . . .  | 138        |
| 5.5  | Conclusion . . . . .  | 146        |
| <b>6</b>   | <b>Éléments d'interface pour la modélisation d'interfaces viscoélastiques</b>                                 | <b>147</b> |
| 6.1  | Introduction . . . . .  | 147        |
| 6.2  | Approches existantes pour la modélisation de discontinuités géométriques<br>ou matérielles . . . . .          | 148        |
| 6.3  | Formulation des éléments d'interface . . . . .  | 149        |
| 6.3.1  | Éléments joints . . . . .   | 149        |
| 6.3.2  | Éléments d'interface volumiques . . . . .   | 153        |
| 6.4  | Validation des éléments d'interface . . . . .   | 155        |
| 6.4.1  | Cas d'étude 1 : Poutre sandwich console . . . . .   | 155        |
| 6.4.2  | Cas d'étude 2 : Structure 3D complexe . . . . .   | 159        |
| 6.5  | Conclusion . . . . .  | 160        |
| <b>III Réduction de modèle par approches modales et approximations<br/>de Padé</b> |   | <b>165</b> |
| <b>7</b>   | <b>Méthode de réduction de modèle par approches modales</b>   | <b>169</b> |
| 7.1  | Introduction . . . . .  | 169        |
| 7.2  | Rappel sur les approches modales . . . . .  | 170        |
| 7.2.1  | Cas sans amortissement . . . . .  | 170        |
| 7.2.2  | Cas d'une structure amortie . . . . .   | 171        |
| 7.3  | Méthodes de projection modale adaptées aux structures amorties par des<br>matériaux viscoélastiques . . . . . | 172        |
| 7.3.1  | Méthode des énergies modales . . . . .  | 172        |
| 7.3.2  | Extensions de la méthode des énergies modales . . . . .   | 172        |

## TABLE DES MATIÈRES

---

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 7.3.3    | Approche multi-modèles . . . . .  | 175        |
| 7.3.4    | Enrichissement de la base modale . . . . .                                      | 176        |
| 7.4      | Comparaison des méthodes de projection modale . . . . .                         | 178        |
| 7.5      | Conclusion . . . . .  | 183        |
| <b>8</b> | <b>Reconstruction de la réponse fréquentielle par approximants de Padé</b>      | <b>187</b> |
| 8.1      | Introduction . . . . .  | 187        |
| 8.2      | Approximants de Padé . . . . .  | 188        |
| 8.2.1    | Cas d'une fonction unidimensionnelle . . . . .                                  | 188        |
| 8.2.2    | Application au problème de vibrations de structures amorties . . . . .          | 191        |
| 8.3      | Aspects numériques des approximants de Padé . . . . .                           | 192        |
| 8.4      | Procédure automatique de reconstruction de la solution . . . . .                | 195        |
| 8.5      | Conclusion . . . . .  | 197        |
| <b>9</b> | <b>Applications des méthodes pour des études paramétriques</b>                  | <b>199</b> |
| 9.1      | Introduction . . . . .  | 199        |
| 9.2      | Cas d'application 1 : modèle tridimensionnel de tuyère de turbine . . . . .     | 200        |
| 9.2.1    | Description de l'étude . . . . .  | 200        |
| 9.2.2    | Description de la stratégie de réduction . . . . .                              | 202        |
| 9.2.3    | Analyse des résultats . . . . .   | 206        |
| 9.3      | Cas d'application 2 : modèle d'anneau sandwich bidimensionnel immergé . . . . . | 209        |
| 9.3.1    | Description de l'étude . . . . .  | 209        |
| 9.3.2    | Description de la stratégie de modélisation et de réduction . . . . .           | 210        |
| 9.3.3    | Analyse des résultats . . . . .   | 221        |
| 9.4      | Conclusion . . . . .  | 226        |

## TABLE DES MATIÈRES

---

|  |            |
|--|------------|
| <b>Conclusion</b>  | <b>229</b> |
| <b>Bibliographie</b>   | <b>232</b> |
| <b>Annexes</b>   | <b>257</b> |
| <b>A Identification des paramètres des modèles viscoélastiques</b>             | <b>257</b> |
| <b>B Comparaisons calculs/essais</b>   | <b>261</b> |
| <b>C Éléments finis et fonctions de forme</b>                                  | <b>271</b> |
| C.1 Triangle à 6 nœuds (T6) . . . . .  | 271        |
| C.2 Prisme à 12 nœuds (P12) . . . . .  | 271        |
| <b>D Expressions de <math>\mathbf{A}_m</math> et <math>\mathbf{B}_m</math></b> | <b>273</b> |

# Introduction

**Contexte industriel.** Dans le domaine naval militaire, la maîtrise des performances acoustiques est primordiale, en particulier pour les sous-marins où la furtivité et la discrétion contribuent à donner l'avantage acoustique nécessaire à la bonne réalisation de ses missions. La discrétion d'un sous-marin passe par une réduction et un masquage de sa signature acoustique. Or, il existe de nombreuses sources de bruit et de vibrations à bord d'un sous-marin. On peut citer par exemple le bruit et les vibrations engendrées par le fonctionnement des moteurs et générateurs, les échappements de gaz du moteur, le système de propulsion, ou encore l'écoulement de l'eau sur la coque externe. Des technologies d'isolation vibratoire et de contrôle du bruit sont déjà mises en place dans certaines parties du sous-marin. Les traitements amortissants par couche viscoélastique contrainte constituent un pan important des techniques de réduction de bruit et de vibration. Ils consistent à intégrer au sein de la structure vibrante une couche d'un matériau viscoélastique ayant une bonne capacité d'amortissement. Une partie de l'énergie vibratoire est alors dissipée par chaleur lors des déformations de cisaillement subies par la couche viscoélastique. Ce traitement passif est notamment appliqué dans le dôme sonar afin d'atténuer les bruits parasites liés entre autres à l'écoulement de l'eau [128] ou encore dans les pales de propulseur pour éviter les vibrations et les phénomènes de cavitation [130]. Cependant, la constante évolution des techniques de contrôle de bruit et de vibration conduit à rechercher de manière continue des solutions technologiques de plus en plus performantes [9, 79]. Cette thèse, financée par un contrat Cifre/Défense, a été initiée par la volonté de DCNS d'améliorer les performances des traitements viscoélastiques existants, ainsi que d'étendre leur domaine d'application.

Des techniques expérimentales peuvent être utilisées pour déterminer le matériau, les di-

mensions et les placements optimaux de la couche viscoélastique qui conduisent à un amortissement maximal des vibrations de la structure. Une approche classique consiste à exciter la structure amortie sur une gamme de fréquence par un pot vibrant et à mesurer sa réponse par des accéléromètres ou un vibromètre laser à balayage. Néanmoins, cette approche nécessite non seulement des moyens financiers importants, mais également des équipements adaptés. En effet, certaines structures du sous-marin munies de matériaux viscoélastiques pèsent jusqu'à 2 tonnes, ce qui rend leur mise en vibration difficile. Afin de s'affranchir des inconvénients de l'analyse expérimentale, les traitements amortissants sont dimensionnés dès la conception de la structure. La stratégie d'optimisation des traitements viscoélastiques se fait généralement en trois étapes [177] :

- développement d'un outil numérique prédictif et efficace,
- optimisation du traitement amortissant par simulation numérique,
- validation de la méthodologie par comparaison des résultats de simulation avec l'expérience.

La première étape requiert une méthodologie de modélisation capable de représenter convenablement le comportement de structures intégrant des matériaux viscoélastiques. Bien que de nombreuses solutions analytiques existent pour l'étude des vibrations forcées de poutres ou de plaques sandwich, la simulation par éléments finis est classiquement utilisée. Néanmoins, la modélisation de structures amorties par des matériaux viscoélastiques se heurte à deux difficultés : la dépendance des propriétés du matériau amortissant avec certains paramètres tels que la fréquence et la température, ainsi que la nécessité de prendre en compte avec précision les effets de cisaillement dans la couche viscoélastique. C'est pourquoi une validation expérimentale du modèle éléments finis est souvent souhaitable.

Dans le cadre d'un Projet d'Etude Amont, DCNS a mené il y a quelques années une série d'essais de vibration en air et en eau sur des plaques métalliques munies de couches viscoélastiques, dans le but de comparer et de valider plusieurs stratégies de modélisation. Cependant, cette étude a mis en évidence des écarts entre expérience et simulation. Mon stage de master a été l'occasion d'exploiter les résultats des essais en air lors d'une nouvelle comparaison calculs/essais en utilisant une autre approche de modélisation. Pour cela, un code de calcul par éléments finis a été développé pour la modélisation de structures avec

matériaux viscoélastiques intégrés. Des écarts ont à nouveau été observés et ont alors soulevé le besoin d'une étude plus approfondie dans le but d'identifier les sources potentielles d'erreurs tant expérimentales que numériques.

**Objectifs et contenu de la thèse.** Le premier objectif de la thèse est de proposer une stratégie de caractérisation et de modélisation du comportement des matériaux viscoélastiques. L'approche développée se limite à l'étude des effets de fréquence et de température dans le domaine de la viscoélasticité linéaire, et est appliquée à la caractérisation d'un élastomère industriel. Ce travail correspond à la première partie de la thèse.

Le premier chapitre présente les principales méthodes de mesure des propriétés mécaniques dynamiques de matériaux viscoélastiques. Il décrit également le protocole expérimental des essais réalisés pour la mesure du module de cisaillement et du module de compressibilité de l'élastomère étudié.

Le deuxième chapitre concerne l'obtention des courbes maîtresses à partir des essais de caractérisation décrits au chapitre précédent. Les bases du principe de superposition temps-température classiquement appliqué pour extrapoler les propriétés mécaniques des matériaux viscoélastiques au-delà du domaine de fréquences expérimentales sont décrites. La méthode de recalage basée sur le respect des relations de Kramers-Kronig et développée pour la construction de courbes maîtresses en accord avec le principe de causalité est décrite, puis validée dans le cas de l'élastomère étudié.

Le troisième chapitre traite de la modélisation du comportement des matériaux viscoélastiques. Les principaux modèles viscoélastiques existants sont présentés, puis les paramètres de ces modèles sont identifiés à partir des courbes maîtresses des modules de cisaillement et de compressibilité issues du deuxième chapitre.

Le deuxième objectif de cette thèse porte sur la modélisation par éléments finis de structures munies de matériaux viscoélastiques. On s'intéresse plus particulièrement à la modélisation d'une couche viscoélastique contrainte insérée dans une structure maillée par des éléments volumiques.

Le quatrième chapitre présente une analyse bibliographique des méthodologies existantes de modélisation de structures amorties par une couche viscoélastique contrainte. Puis, après un rappel sur la formulation variationnelle et la discrétisation par éléments finis, la stratégie de modélisation adoptée est décrite, puis validée par comparaison avec le code industriel éléments finis Nastran. Une loi de comportement tridimensionnelle du matériau viscoélastique est construite à partir des modèles unidimensionnels identifiés dans le troisième chapitre.

Le modèle éléments finis défini est ensuite confronté à l'expérience, via des essais de vibration de structures sandwich. Le cinquième chapitre décrit le protocole de réalisation des essais expérimentaux et numériques et présente l'analyse comparative des résultats.

Dans le sixième chapitre, deux éléments finis d'interface sont proposés pour modéliser de fines couches viscoélastiques. Ces éléments, définis à partir d'une surface entre deux parties élastiques de la structure, peuvent être utilisés en tant que modèle réduit dans le cadre d'une étude paramétrique.

Le troisième objectif de cette thèse est d'identifier des méthodes de réduction adaptées au calcul de la réponse fréquentielle de structures fortement amorties par des matériaux viscoélastiques. Il est en effet important de disposer d'un outil de calcul efficace en terme de coût numérique pour l'optimisation des traitements viscoélastiques. Deux approches sont proposées dans les deux premiers chapitres de la troisième partie dans le but de réduire le coût de calcul de la réponse fréquentielle.

Le septième chapitre présente diverses méthodes de projection sur bases modales pour le calcul de la réponse fréquentielle de structure munies de matériaux viscoélastiques. Une étude comparative de la précision et du temps de calcul de la solution approchée par chacune de ces méthodes est réalisée.

Le huitième chapitre présente une méthode de reconstruction de la réponse fréquentielle par approximations de Padé. Une procédure automatique de reconstruction de la réponse sur toute la gamme de fréquence est proposée.

Enfin, le dernier chapitre est constitué de deux cas d'application dont le but est de montrer les avantages des approches décrites dans les chapitres précédents.

Première partie

Caractérisation et modélisation  
des propriétés du comportement  
viscoélastique



# Introduction

Les polymères sont constitués de molécules très longues (macromolécules) formées par la jonction d'un grand nombre de petites unités chimiques appelées monomères. Ces molécules peuvent être liées entre elles par des liaisons physiques ou chimiques. Les propriétés mécaniques d'un polymère sont fortement liées au mouvement des chaînes macromoléculaires. La figure 1 met en évidence l'influence de la température et de la fréquence sur le module élastique et le facteur de perte d'un polymère amorphe. Plusieurs zones distinctes du comportement peuvent être identifiées. Pour chacune d'entre elles, il est possible de faire le lien entre le comportement macromoléculaire et les caractéristiques macroscopiques du matériau :

- Plateau vitreux : dans cette zone, l'énergie thermique est faible, empêchant ainsi tout mouvement d'extension ou de rotation des chaînes macromoléculaires. Par conséquent, le polymère est rigide, le module élevé et le facteur de perte faible.
- Zone de transition vitreuse ou viscoélastique : cette zone marque le début des mouvements de segments de chaînes. Elle est caractérisée par une chute du module et une variation importante du facteur de perte. Une partie de l'énergie est dissipée sous forme visqueuse lors du glissement des segments de chaînes, ce qui se traduit par un retard à la déformation.
- Plateau caoutchoutique : dans cette zone, l'énergie thermique est suffisante pour que les mouvements des chaînes puissent s'effectuer très rapidement, sans retard à la déformation, d'où un facteur de perte du matériau faible. Le polymère est souple et le module relativement faible.

Certains polymères présentent une zone d'écoulement indiquant la fusion du polymère, caractérisée par une chute du module due au désenchevêtrement des chaînes à grande

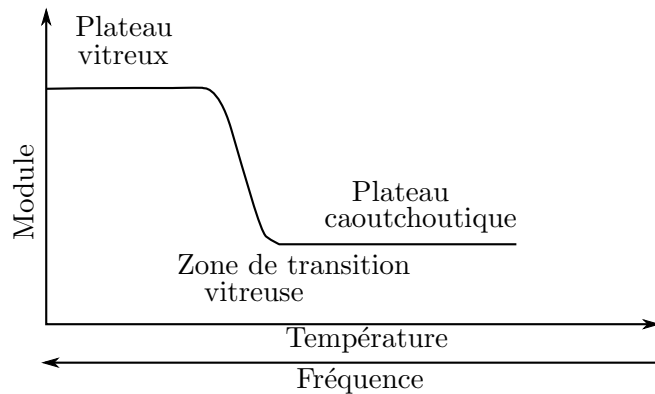


FIGURE 1 – Influence de la température et de la fréquence sur le module et le facteur de perte d'un polymère amorphe.

échelle. En revanche, pour les matériaux amorphes ou réticulés, la fusion n'a pas lieu : le polymère se dégrade suite à la destruction des liaisons chimiques.

En général, les propriétés mécaniques des polymères ne dépendent pas uniquement de la température et de la fréquence [52], mais également de l'amplitude et du type d'excitation [173], de la pression [83, 115], de la pré-contrainte [88], de la structure moléculaire du polymère [67, 72, 127, 150], ... . Dans ce travail, seuls les effets de température et de fréquence sont considérés et on se place dans le contexte de viscoélasticité linéaire.

On parle de matériau viscoélastique lorsque le polymère présente une zone viscoélastique prononcée, c'est à dire une forte dépendance du module avec la fréquence ou la température. Les propriétés amortissantes optimales de ce type de matériau sont très largement utilisées dans les applications industrielles pour répondre à des problématiques de réduction et de contrôle du bruit et des vibrations [118, 144]. La simulation numérique de structures amorties par des matériaux viscoélastiques est une étape importante de la conception qui permet de prédire l'efficacité du traitement amortissant appliqué. Cependant cette étape requiert une bonne connaissance du comportement du matériau dans la zone de transition vitreuse. Le but de cette première partie de la thèse est de proposer une stratégie efficace de caractérisation et de modélisation des propriétés mécaniques viscoélastiques. Celle-ci est appliquée au Deltane 350, un élastomère synthétique et amorphe de Paulstra®, couramment utilisé dans le domaine aéronautique [132].

---

Le premier chapitre concerne la mesure des propriétés mécaniques dynamiques de matériaux viscoélastiques. Le deuxième chapitre décrit une procédure originale d'obtention des courbes maîtresses du matériau à partir des essais dynamiques réalisés. Enfin, le troisième chapitre porte sur la modélisation du comportement viscoélastique.

---

# Chapitre 1

## Mesure des propriétés mécaniques dynamiques de matériaux viscoélastiques

### 1.1 Introduction

Dans le cas d'un matériau homogène et isotrope, seules deux grandeurs élastiques (avec la densité) sont nécessaires pour caractériser le matériau, les autres pouvant être déduites de ce couple à partir de relations de correspondance classiques. Dans la littérature, le module d'Young  $E$ , le module de cisaillement  $G$  (aussi appelé module de Coulomb), le module de compressibilité  $K$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  sont les quantités les plus étudiées pour caractériser un matériau viscoélastique. Bien que le coefficient de Poisson ou le module de compressibilité soient souvent considérés comme constants, cette approche peut se révéler erronée pour certains matériaux. Il convient alors de réaliser la mesure de deux grandeurs élastiques pour s'assurer de la validité de cette hypothèse.

Une étude théorique réalisée par Guillot et Trivett [70] a pour but d'établir quel couple de grandeurs élastiques il est préférable de mesurer afin de garantir une erreur minimale lors du calcul des autres quantités élastiques, pour une erreur de mesure donnée. Les auteurs concluent que les couples  $(G, K)$  et  $(E, K)$  sont les plus adaptés. Les résultats de cette étude sont en accord avec ceux de Pritz [140] qui conclut que le module de compressibilité et le module de cisaillement (ou le module d'Young) constituent la meilleure paire à mesurer afin de garantir une précision optimale pour le calcul indirect du coefficient de Poisson.

Dans un article de 2002, Tschoegl [188] précise que pour obtenir une précision satisfaisante sur le calcul du coefficient de Poisson à partir de la mesure de deux quantités élastiques, il est important que les essais soient réalisés en accord avec un “protocole standard”. La principale directive de ce protocole est une mesure simultanée des deux grandeurs élastiques choisies pour caractériser le matériau. Le développement de moyens de mesure permettant de déterminer de manière simultanée deux grandeurs élastiques fait l’objet d’une recherche active depuis le début des années 2000 [33, 100, 141]. En revanche, l’accès à ces techniques de mesure étant réduit, leur utilisation reste limitée. La caractérisation des matériaux consiste donc généralement à combiner les résultats de mesures uniaxiales du module de cisaillement (ou du module d’Young) et du module de compressibilité. C’est cette approche qui est utilisée dans ce travail.

La première section de ce chapitre décrit les principales méthodes de mesures uniaxiales disponibles pour caractériser le matériau viscoélastique. Ceci permettra d’introduire la loi de comportement d’un matériau viscoélastique, ainsi que la notion de module complexe, qui seront utilisées par la suite. La deuxième section s’attache à décrire le protocole expérimental utilisé pour mesurer les propriétés mécaniques dynamiques du Deltane 350.

## 1.2 Méthodes de mesure des propriétés mécaniques viscoélastiques

### 1.2.1 Techniques de mesure dans le domaine temporel

Le fluage et la relaxation de contraintes sont deux méthodes couramment utilisées pour déterminer l’évolution du module de relaxation en traction ou en cisaillement d’un polymère dans le domaine temporel.

Pour un essai de fluage, une sollicitation uniaxiale en contrainte est imposée à l’instant  $t_0$  à une éprouvette de polymère initialement non chargée, puis maintenue constante. On remarque sur la figure 1.1 que la réponse uniaxiale correspondante est constituée d’une partie instantanée ( $\epsilon(t_0) \neq 0$ ) et d’une partie différée (augmentation de la déformation). La déformation  $\epsilon(t)$  en fonction du temps rapportée à la contrainte imposée  $\sigma_0$  (supposée

## 1.2. MÉTHODES DE MESURE DES PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES VISCOÉLASTIQUES

---

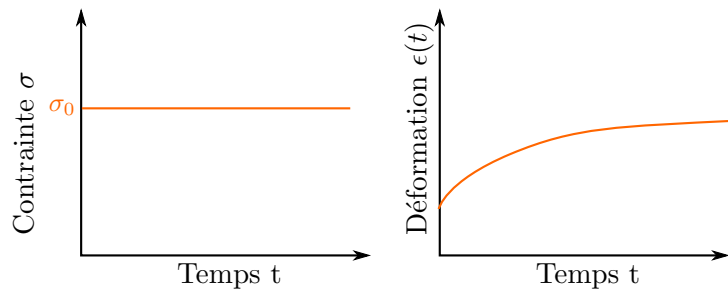


FIGURE 1.1 – Courbe caractéristique de fluage.

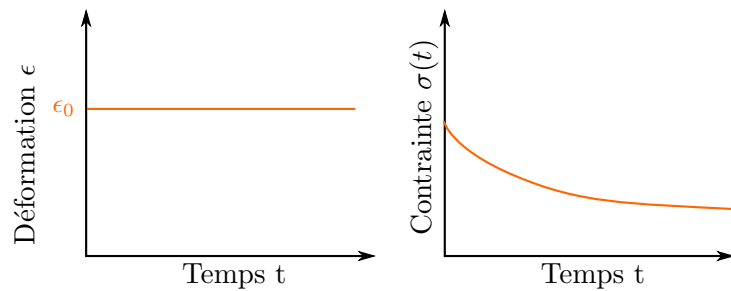


FIGURE 1.2 – Courbe caractéristique de relaxation de contrainte.

constante) permet de définir la complaisance de fluage :

$$J(t) = \frac{\epsilon(t)}{\sigma_0}. \quad (1.1)$$

Réciproquement, un essai de relaxation de contrainte consiste à imposer une déformation uniaxiale maintenue constante à l'éprouvette de polymère initialement non déformée, et à mesurer la contrainte résultante. De la même manière que pour un essai de fluage, la réponse est constituée d'une partie instantanée ( $\sigma(t_0) \neq 0$ ) et d'une partie différée (diminution de la contrainte). Le rapport entre la contrainte mesurée  $\sigma(t)$  et la déformation appliquée à l'éprouvette  $\epsilon_0$  donne accès au module de relaxation :

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0}. \quad (1.2)$$

La complaisance de fluage et le module de relaxation sont reliés par la relation suivante

## 1.2. MÉTHODES DE MESURE DES PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES VISCOÉLASTIQUES

---

[55](chap.3, p56-79) :

$$\int_0^t J(t-\tau)E(\tau)d\tau = t. \quad (1.3)$$

Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, le module de relaxation et la complaisance de fluage mesurés sont indépendants de l'amplitude du chargement. De plus, le principe de superposition de Boltzmann s'applique : la superposition des sollicitations implique la superposition analogue des réponses. Ainsi, la réponse d'un matériau viscoélastique dépend de l'histoire de chargement. Cet effet de mémoire est transcrit dans la loi de comportement [34, 187] :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t-\tau) \frac{\partial \epsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.4)$$

où  $\sigma(t)$  et  $\epsilon(t)$  correspondent aux évolutions temporelles de la contrainte et de la déformation. En supposant que la déformation est nulle avant l'application du chargement à  $t = 0$ , la loi de comportement devient :

$$\sigma(t) = E(t)\epsilon(0) + \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial \epsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.5)$$

En écrivant le module de relaxation comme la somme d'une constante  $E_\infty = E(\omega \rightarrow \infty) = E(t \rightarrow 0)$  et d'une fonction dépendante du temps  $h(t)$  :

$$E(t) = E_\infty + h(t), \quad (1.6)$$

l'équation (1.5) s'écrit :

$$\sigma(t) = E_\infty \epsilon(t) + h(t)\epsilon(0) + \int_0^t h(t-\tau) \frac{\partial \epsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.7)$$

Après application de la transformée de Laplace, et en considérant des conditions initiales nulles ( $\epsilon(t=0) = 0$ ), on obtient exactement :

$$\tilde{\sigma}(s) = \tilde{E}(s)\tilde{\epsilon}(s), \quad (1.8)$$

avec  $\tilde{E}(s) = E_\infty + \tilde{h}(s)$  et  $\tilde{h}(s) = sh(s)$ .

$E_\infty \tilde{\epsilon}(s)$  correspond à la réponse instantanée du matériau observée lors d'un essai de relaxation de contrainte, alors que  $\tilde{h}(s)\tilde{\epsilon}(s)$  correspond à la réponse différée, prenant en compte l'histoire du chargement. Pour cette raison, la fonction  $h(t)$  est couramment appelée fonction de mémoire.

Dans les essais de fluage et de relaxation, il est difficile de générer une déformation ou une contrainte constante de manière instantanée, c'est pourquoi l'acquisition de données débute généralement quelques secondes après l'application du chargement. Ce type d'essai est donc adapté à la caractérisation d'un matériau viscoélastique pour des phénomènes d'une durée suffisamment longue. En revanche, lorsqu'ils sont beaucoup plus rapides, des tests dynamiques dans le domaine fréquentiel s'avèrent nécessaires.

### 1.2.2 Techniques de mesure dans le domaine fréquentiel

Les techniques existantes pour mesurer les caractéristiques mécaniques d'un matériau viscoélastique en fonction de la fréquence peuvent être classées en trois catégories : les méthodes hors-résonances, les méthodes résonantes et les méthodes de propagation d'onde.

#### 1.2.2.1 Méthodes hors-résonances

Les essais appartenant à cette classe de méthode consistent à appliquer un chargement dynamique sinusoïdal au matériau et à mesurer sa réponse. Lorsqu'un matériau viscoélastique est soumis à une déformation sinusoïdale de pulsation  $\omega$  et une fois l'état stationnaire atteint, la contrainte résultante est également sinusoïdale, de même fréquence mais déphasée (figure 1.3) :

$$\begin{aligned}\epsilon(t) &= \epsilon_0 \sin(\omega t), \\ \sigma(t) &= \sigma_0 \sin(\omega t + \phi).\end{aligned}\tag{1.9}$$

Cette réponse est constituée d'une partie en phase et d'une partie en quadrature de phase :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cos(\phi) \sin(\omega t) + \sigma_0 \sin(\phi) \cos(\omega t).\tag{1.10}$$

Une réponse en phase avec la sollicitation correspond au comportement d'un matériau purement élastique pour lequel l'énergie stockée est intégralement restituée lorsque la sollicitation est relâchée. Une réponse en quadrature de phase avec la sollicitation correspond au comportement d'un matériau purement visqueux, dissipant l'énergie de déformation par chaleur. L'équation (1.10) suggère qu'un matériau viscoélastique combine des effets élastiques et des effets visqueux. Ces effets combinés peuvent être facilement représentés

## 1.2. MÉTHODES DE MESURE DES PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES VISCOÉLASTIQUES

---

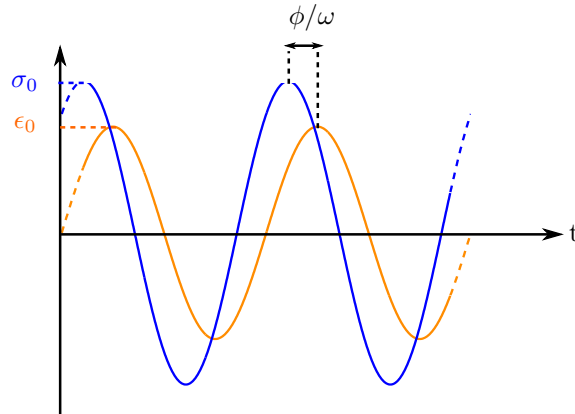


FIGURE 1.3 – Déphasage observé entre la déformation sinusoïdale appliquée à l'échantillon et la contrainte mesurée, une fois l'état stationnaire atteint.

par un module complexe, qui peut être introduit en réécrivant l'équation (1.8) sous forme complexe :

$$\sigma^*(\omega) = E^*(\omega)\epsilon^*(\omega). \quad (1.11)$$

Ce module complexe peut s'écrire sous forme cartésienne :

$$E^*(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega) = E'(\omega)(1 + i\eta(\omega)), \quad (1.12)$$

ou sous forme polaire :

$$E^*(\omega) = |E^*(\omega)| \exp(i\phi(\omega)). \quad (1.13)$$

La partie réelle du module complexe  $E'(\omega)$  est appelée module de stockage et traduit la capacité du matériau à stocker et à restituer l'énergie de déformation, tandis que la partie imaginaire du module  $E''(\omega)$ , appelée module de perte, est reliée à la dissipation d'énergie. Le facteur de perte  $\eta$  est le rapport entre le module de stockage et le module de perte :  $\eta(\omega) = E''(\omega)/E'(\omega)$ . La forme polaire du module complexe fait intervenir l'amplitude du module  $|E^*(\omega)| = \sqrt{E'(\omega)^2 + E''(\omega)^2}$ , reliée à la différence d'amplitude observée entre les deux signaux représentés sur la figure 1.3, et la phase  $\phi$ , dont la tangente est égale au facteur de perte et qui correspond au déphasage entre la sollicitation et la réponse.

Les essais dynamiques hors-résonances permettent de mesurer l'amplitude et la phase du module sur une gamme de fréquence, décrivant ainsi complètement l'évolution fréquentielle du module complexe. Ces essais sont classiquement réalisés sur des viscoanalyseurs - on

## 1.2. MÉTHODES DE MESURE DES PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES VISCOÉLASTIQUES

---

parle alors d'essais DMA ("Dynamical Mechanical Analysis") - ou des machines hydrauliques. Des pendules de torsion peuvent également être utilisés [93]. Afin d'éviter les effets d'inertie, les fréquences d'excitation doivent être loin des premières fréquences propres de l'échantillon testé [122] ou du système de mesure, d'où le terme "hors-résonants".

### 1.2.2.2 Méthodes résonantes

Les essais résonants consistent à solliciter une éprouvette du matériau à caractériser à une fréquence de résonance afin de remonter à l'information de la raideur et de l'amortissement à cette fréquence.

Les essais sont souvent réalisés sur des éprouvettes de type poutre [138] ou plaque [41], pour lesquelles des solutions analytiques existent [119]. La mesure de la fréquence de résonance  $f_0$  permet d'accéder au module de stockage à partir des expressions théoriques des fréquences de résonance. Quant au facteur de perte, il est mesurée sur la courbe de réponse en fréquence (figure 1.4) en utilisant par exemple la méthode de la bande passante à  $-3\text{dB}$  :

$$\eta = \frac{\Delta f}{f_0}, \quad (1.14)$$

où  $\Delta f$  est la largeur du pic à  $-3\text{dB}$ . D'autres méthodes peuvent être utilisées pour calculer les paramètres modaux  $f_0$  et  $\eta$  à partir de la fonction de réponse en fréquence dont la méthode de lissage du cercle de Nyquist.

La représentation d'un modèle à un degré de liberté autour du pic de résonance dans le plan de Nyquist, i.e. dans le plan complexe, est un cercle dont les caractéristiques dépendent de la fréquence de résonance et de l'amortissement modal [54]. La méthode de lissage du cercle de Nyquist consiste à déterminer le centre et le rayon du cercle qui ajustent au mieux la fonction de réponse en fréquence dans le plan complexe au voisinage d'un pic (figure 1.5), puis à calculer la fréquence angulaire  $\omega_i$  et l'amortissement du mode  $\eta_i$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \omega_i^2 &= \frac{\omega_1^2 \tan(\theta_2/2) - \omega_2^2 \tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2) - \tan(\theta_1/2)}, \\ \eta_i &= \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_i^2 (\tan(\theta_1/2) + \tan(\theta_2/2))}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

où  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont définis sur la figure 1.5

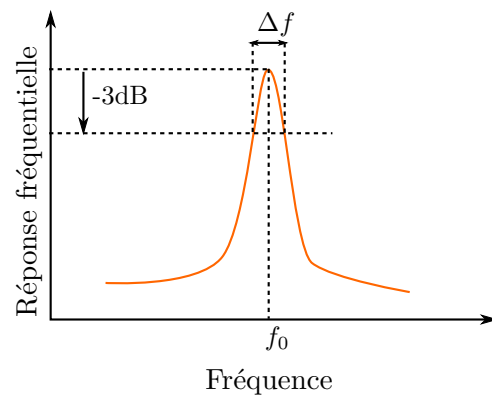


FIGURE 1.4 – Illustration de la méthode de la bande passante à  $-3\text{dB}$ .

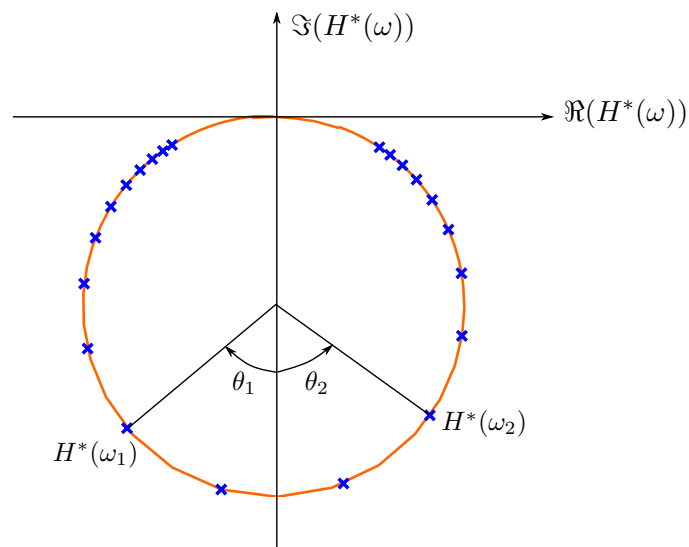


FIGURE 1.5 – Illustration de la méthode de lissage de Nyquist.

## 1.2. MÉTHODES DE MESURE DES PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES VISCOÉLASTIQUES

---

Afin de couvrir une gamme de fréquences, plusieurs fréquences de résonances ou plusieurs échantillons de géométries différentes doivent être considérés.

Ce type d'essais convient notamment pour des matériaux assez rigides et peu amortissants. En revanche, pour des matériaux relativement mous, ou fortement amortissants, il est plus classique de mesurer leurs propriétés viscoélastiques en utilisant la méthode Oberst [11, 59, 194]. Cette méthode, décrite en détails dans la norme ASTM 756 [8], consiste à réaliser des essais résonants sur des poutres amorties par une couche (libre ou contrainte) du matériau viscoélastique à caractériser. Une fois les paramètres modaux ( $f_0$  et  $\eta$ ) déterminés, le module de stockage et le facteur de perte sont calculés en utilisant les relations analytiques introduites par Ross, Ungar et Kerwin [151] pour ce type de structure, et reprises dans l'ouvrage de référence de Nashif et Jones [119].

Cette approche offre la possibilité d'étudier les propriétés du matériau viscoélastique appliqué à une structure, ainsi que d'étudier des structures de géométrie non normalisées en associant aux essais une modélisation par éléments finis.

L'identification des propriétés mécaniques du matériau par des essais résonants peut toutefois nécessiter des outils d'analyse modale expérimentale, tels que le logiciel Modan [134] dans le cas de modes couplés, notamment pour les essais sur plaques [38, 51].

### 1.2.2.3 Méthodes de propagation d'onde

Un essai de propagation d'onde consiste à mesurer la vitesse et l'atténuation d'une onde unidirectionnelle de pulsation  $\omega$  au passage d'un échantillon de matière. Dans le cas d'un matériau viscoélastique isotrope homogène, la vitesse de propagation  $c$  et l'atténuation  $\alpha$  de l'onde sont liées à l'amplitude et à la phase du module complexe [34](chap.4, p131-138)[93] :

$$\begin{aligned}c &= \sqrt{\frac{|E^*|}{\rho}} \sec(\phi/2), \\ \alpha &= \frac{\omega \tan(\phi/2)}{c}.\end{aligned}\tag{1.16}$$

Une méthode de mesure de l'atténuation de l'onde classiquement utilisée consiste à comparer l'amplitude du signal après le passage dans deux échantillons de tailles différentes. Afin de limiter les effets liés au coefficient de Poisson, la longueur caractéristique de l'onde

## 1.2. MÉTHODES DE MESURE DES PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES VISCOÉLASTIQUES

---

traversant l'échantillon doit être très petite devant la largeur ou le diamètre de l'échantillon testé. Ceci explique que l'utilisation d'essais de propagation d'onde dans un échantillon de matériau viscoélastique permette de déterminer ses propriétés mécaniques à des fréquences plus élevées qu'avec les méthodes précédemment présentées.

### 1.2.3 Synthèse

Plusieurs méthodes de mesure des propriétés mécaniques de matériaux viscoélastiques ont été présentées. Les propriétés déterminées par chacun de ces essais sont reliées entre elles [34](chap.4, p141-146) [55](chap.3, p56-79). On a déjà cité la relation entre la compliance de fluage et le module de relaxation (Eq. 1.3). Il existe également un lien entre le module de relaxation dépendant du temps et le module complexe dépendant de la fréquence [34] :

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= E_0 + \omega \int_0^{\infty} [E(t) - E_0] \sin(\omega t) dt, \\ E''(\omega) &= \omega \int_0^{\infty} [E(t) - E_0] \cos(\omega t) dt, \end{aligned} \tag{1.17}$$

avec  $E_0 = E(\omega \rightarrow 0) = E(t \rightarrow +\infty)$ . En revanche, bien que ces relations théoriques existent, les propriétés identifiées par différents types d'essais peuvent présenter des écarts. Par exemple, Corn [36] a procédé à une comparaison des modules et des facteurs de perte obtenus par plusieurs techniques de mesure : essais au viscoanalyseur, essai d'analyse modale, essai de fluage et essai de propagation d'onde. Bien qu'il observe une concordance globale des résultats, le module mesuré au viscoanalyseur semble être surestimé. Une sensibilité des résultats à la calibration du système est invoquée, ce qui est en accord avec les conclusions de Deng [44] qui compare les propriétés mesurées au viscoanalyseur dans plusieurs configurations.

Il a été choisi de mesurer le couple  $(G, K)$ , plutôt que  $(E, K)$ , pour caractériser complètement le Deltane 350. De plus, toutes les analyses dans la suite de cette thèse se feront dans le domaine fréquentiel, pour des fréquences pouvant aller de quelques Hz à quelques kHz. Des méthodes hors-résonances, adaptées à cette gamme de fréquence, sont utilisées pour mesurer le module de cisaillement et le module de compressibilité. Comme cela a déjà été évoqué, ces méthodes présentent des limitations en fréquences. Le principe

de superposition temps-température, expliqué dans le chapitre suivant, permet d'étendre la gamme de fréquence étudiée, comme illustré sur la figure 1. C'est pourquoi les essais présentés dans la section suivante sont réalisés pour une gamme de fréquence et une gamme de température données.

## 1.3 Description des essais réalisés

### 1.3.1 Mesure du module de cisaillement dynamique

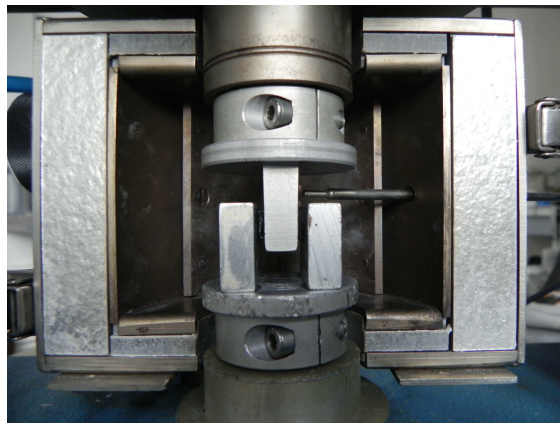
Les essais de mesure du module de cisaillement ont été réalisés par moi-même à DCNS Nantes sur un viscoanalyseur Metravib VA 3000 (figure 1.6(a)). La figure 1.6(b) représente le schéma de montage pour un essai en double cisaillement. Deux échantillons sont fixés aux mors. Le plateau inférieur est fixe tandis qu'une vibration d'amplitude et de fréquence imposées est appliquée au plateau supérieur. Le plateau inférieur est équipé d'un capteur permettant la mesure de la force transmise par le matériau. La mesure du déplacement imposé et de la force transmise par le matériau conduisent à la détermination du module complexe selon le principe décrit dans la section 1.2.2.1. Le pilotage et l'acquisition de données se font via le logiciel Dynatest de Metravib [1]. Les plateaux sont placés dans une enceinte thermorégulée dont la température est mesurée par un thermocouple.

Deux échantillons parallélépipédiques de dimensions  $6\text{mm} \times 9\text{mm} \times 2\text{mm}$  sont découpés aux ciseaux (adaptés au découpage de matériaux mous [122]) dans une plaque de Deltane 350 d'épaisseur 2mm. Une colle cyanoacrylate est utilisée pour coller ces deux échantillons aux mors, afin d'éviter tout glissement durant la mesure.

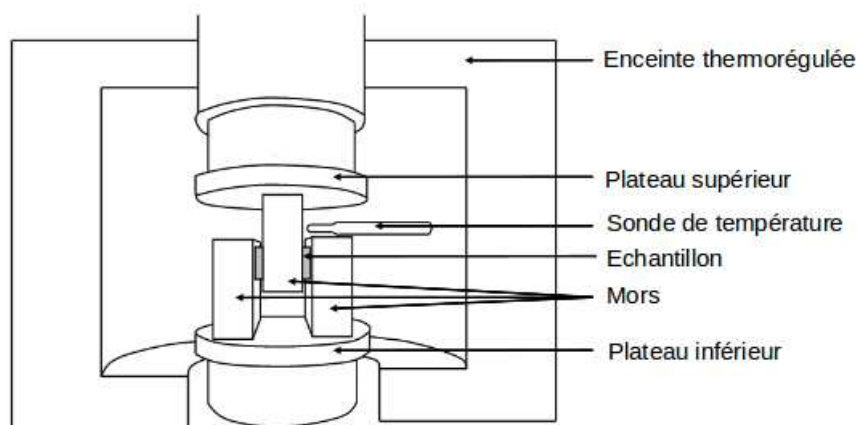
Un premier essai, de linéarité, consistant à effectuer un balayage en déplacement à fréquence et température constantes a pour but de déterminer le déplacement dynamique à appliquer pour garantir que l'essai est réalisé dans le domaine linéaire du matériau sur la gamme de fréquence considérée. Les résultats sont tracés sur la figure 1.7 : on observe au niveau du module de stockage une légère non-linéarité du matériau. On suppose que pour un déplacement dynamique de  $5\mu\text{m}$ , ces effets non-linéaires sont limités. Cette valeur sera retenue pour les essais dynamiques. La fréquence maximale d'excitation est déterminée par

### 1.3. DESCRIPTION DES ESSAIS RÉALISÉS

---



(a)



(b)

FIGURE 1.6 – Viscoanalyseur Metravib VA 3000 (a) et schéma de montage pour un essai en double cisaillement (b).

### 1.3. DESCRIPTION DES ESSAIS RÉALISÉS

---

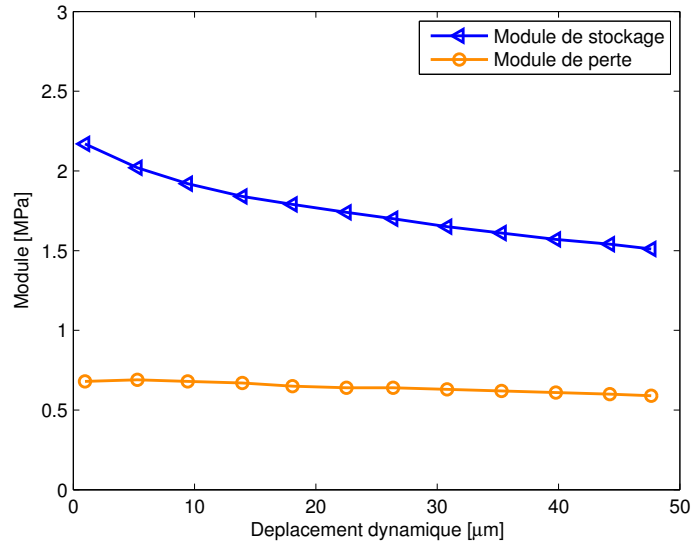


FIGURE 1.7 – Mesures du module de stockage et du module de perte du Deltane 350 pour un balayage en déplacement sur la plage  $[1 - 47]\mu\text{m}$ , pour une fréquence d’excitation de 10Hz, à température ambiante  $T = 21^\circ\text{C}$ .

les limites de la machine d’essai, mais également par la taille des échantillons testés. La fréquence maximale d’excitation doit être bien inférieure à la première fréquence propre de l’échantillon, pour éviter des phénomènes de résonance [124]. Cette dernière a été estimée à environ 1100Hz pour la géométrie des échantillons considérés, ce qui est bien inférieur à la fréquence maximale accessible par le viscoanalyseur, de l’ordre de 200Hz.

Les mesures du module complexe ont été réalisées avec un balayage en fréquence de 5Hz à 258Hz (9 points de mesure) et un balayage en température de  $-40^\circ\text{C}$  à  $+43^\circ\text{C}$  (18 points de mesure), pour une vitesse de chauffe de  $2^\circ\text{C}/\text{min}$ . Des paliers en température, d’une durée de 1min sont effectués avant toute mesure.

Les résultats de cette série de mesure sont donnés sur la figure 1.8. Plusieurs séries de mesure ont été réalisées seront présentés dans la section 2.4.

#### 1.3.2 Mesure du module de compressibilité dynamique

Les essais de mesure du module de compressibilité ont été confiés au LRCCP (Laboratoire de Recherches et de Contrôle du Caoutchouc et des Plastiques), à Vitry. Une machine servo-hydraulique SCHENCK VHF7 n°2010 est utilisée pour la réalisation des essais dy-

### 1.3. DESCRIPTION DES ESSAIS RÉALISÉS

---

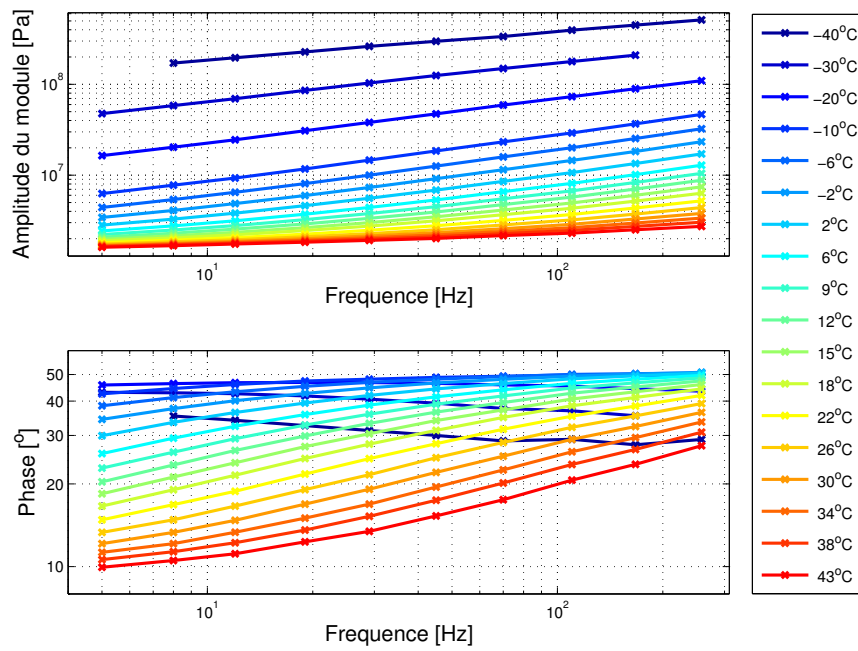


FIGURE 1.8 – Mesures au viscoanalyseur de l’amplitude et de la phase du module de cisaillement complexe du Deltane 350, sur la gamme de fréquence [5 — 258]Hz et la gamme de température [−40 — +43]°C.

### 1.3. DESCRIPTION DES ESSAIS RÉALISÉS

---



FIGURE 1.9 – Machine servo-hydraulique SCHENCK VHF7 [152].

namiques (figure 1.9). Les résultats de mesure fournis par le LRCCP sont présentés après une explication du principe de la mesure [152].

La figure 1.11 montre le schéma de montage pour un essai en compression hydrostatique. Un plot réalisé dans le matériau à caractériser est placé dans un dispositif chambre piston. Celui-ci est confiné jusqu'à une pression de 20 bars, en appliquant un effort statique sur la section du piston. Le jeu existant entre les supports du montage et de la machine, ainsi que la présence de la bille assurent un bon positionnement latéral et axial. Une sollicitation sinusoïdale est ensuite appliquée autour de la pression statique. L'ensemble est placé dans une enceinte thermorégulée. La mesure du déplacement imposé (lié à la variation de volume de l'éprouvette) et de la force résultante (lié à la pression hydrostatique) permettent, de la même façon que pour un essai sur viscoanalyseur, de déterminer l'amplitude et la phase du module de compressibilité complexe.

Plusieurs échantillons d'un diamètre de 14mm ont été découpés à l'emporte pièce dans une plaque de Deltane 350 de 2mm d'épaisseur, puis introduits dans la chambre (figure 1.10). L'empilement de ces échantillons cylindriques vise à reproduire artificiellement un plot de compression, classiquement utilisé pour ce type de caractérisation mais qu'il n'a pas

### 1.3. DESCRIPTION DES ESSAIS RÉALISÉS

---



FIGURE 1.10 – Dispositif chambre piston et éprouvette de Deltane 350 constituée d'un empilement d'échantillons cylindriques [152].

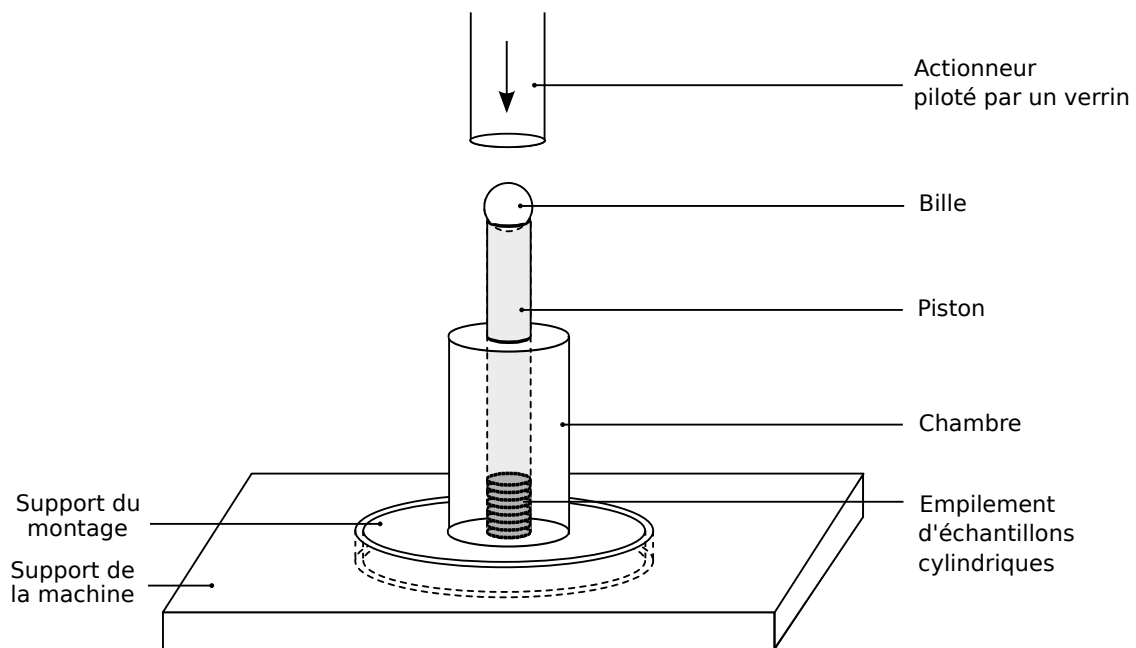


FIGURE 1.11 – Schéma de montage pour un essai en compression hydrostatique.

### 1.3. DESCRIPTION DES ESSAIS RÉALISÉS

---

été possible de se procurer auprès de Paulstra. Un emporte pièce a été spécialement usiné pour ces essais afin que le jeu entre les échantillons et la chambre soit suffisamment petit pour garantir au mieux la compression hydrostatique de l'éprouvette dès l'application de la charge sur le piston. On considère que l'échantillon ne voit qu'un champ de contrainte hydrostatique, ce qui n'est pas tout à fait le cas. Pour cela, il faudrait appliquer un champ de contrainte transmis par un fluide, comme pour des essais au K-mètre [145].

A l'issue d'essais préliminaires, un déplacement dynamique de  $10\mu\text{m}$  a été choisi pour rester dans le domaine linéaire du Deltane 350. Le module de compressibilité complexe est mesuré sur la gamme de fréquence  $[3 - 200]\text{Hz}$  (40 points de mesure) et la gamme de température  $[-30 - +23]^\circ\text{C}$  (6 points de mesure). Les résultats sont donnés sur la figure 1.12. Il est important de noter que les pics observés à certaines fréquences résultent d'une interférence électrique, et non d'un phénomène de résonance. Deux séries de mesure ont été réalisées pour la caractérisation du module de compressibilité complexe et conduisent à des résultats similaires.

#### 1.3.3 Mesure de la température de transition vitreuse

La température de transition vitreuse  $T_g$  des polymères est généralement considérée comme la température moyenne de passage d'une zone dans laquelle les chaînes macromoléculaires sont figées ( $T < T_g$ ) à une zone dans laquelle ces chaînes deviennent mobiles ( $T > T_g$ ). C'est une caractéristique importante du matériau qui conditionne notamment sa mise en œuvre ou sa gamme de température fonctionnelle. La transition vitreuse n'étant pas une transition thermodynamique, sa définition est assez arbitraire. Lorsque la température de transition vitreuse est déterminée à partir des courbes du module mesuré au viscoanalyseur, cinq valeurs différentes peuvent être mesurées en fonction de la définition choisie. Elles sont obtenues : i) soit à partir du point d'intersection de la bissectrice des tangentes à la courbe de mesure du module de stockage ou de perte, ou de la phase (voir par exemple figure 1.13), ii) soit à partir du pic de la courbe de mesure du module de perte ou de la phase [85]. Des écarts de température relativement importants peuvent être observés entre ces différentes valeurs. De plus, la température de transition vitreuse dépend fortement de la vitesse de chauffe, de la fréquence d'excitation et de structure

### 1.3. DESCRIPTION DES ESSAIS RÉALISÉS

---

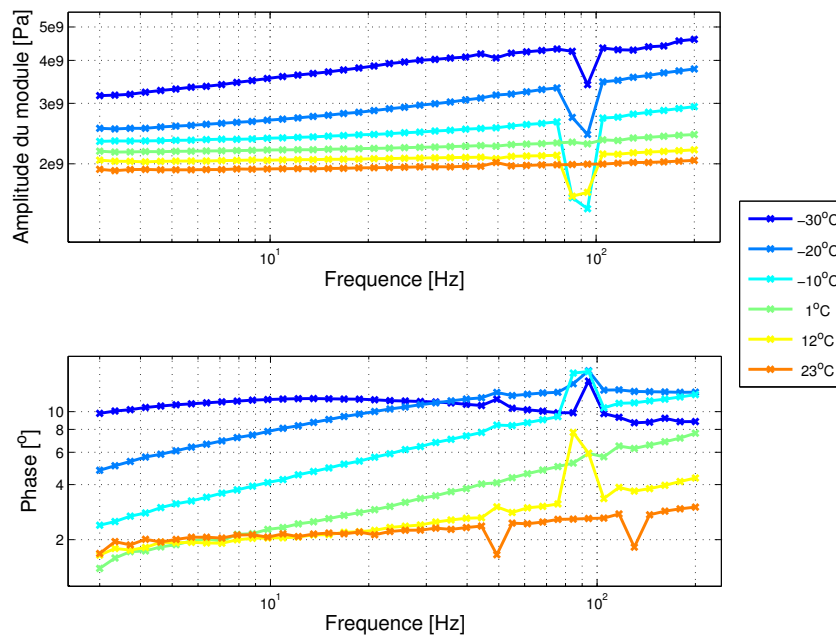


FIGURE 1.12 – Mesures en compression hydrostatique de l’amplitude et de la phase du module de compressibilité complexe du Deltane 350, sur la gamme de fréquence [3 — 200]Hz et la gamme de température [−30 — +23]°C.

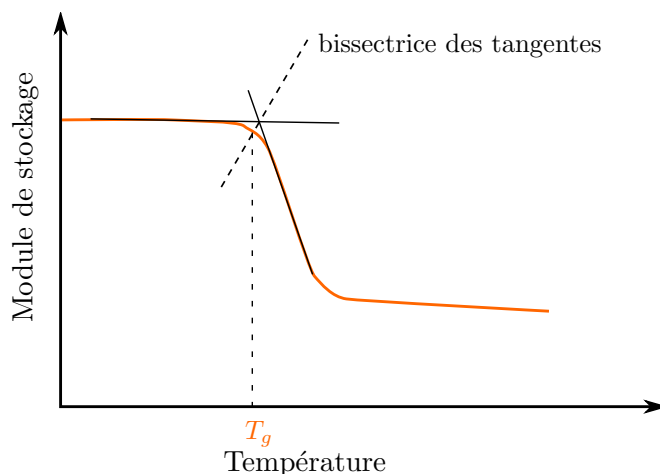


FIGURE 1.13 – Définition de la température de transition vitreuse comme étant le point d’intersection de la bissectrice des tangentes à la courbe de mesure du module de stockage.

moléculaire du matériau [110, 133]. C’est pourquoi il est important de décrire la procédure utilisée pour sa détermination et de parler d’une zone de transition vitreuse plutôt que d’une température de transition vitreuse.

Un balayage en température est réalisé dans les mêmes conditions que pour la mesure du module de cisaillement sur la gamme de température  $[-40 - +45]^{\circ}\text{C}$  pour une fréquence d’excitation de 12Hz. La vitesse de chauffe est de  $2^{\circ}\text{C}/\text{min}$  et des paliers en température d’une durée de 1min sont effectués avant toute mesure. La phase du module de cisaillement est tracée en fonction de la température sur la figure 1.14. La température de transition vitreuse est estimée à  $-17^{\circ}\text{C}$  en prenant comme définition la température correspondant au pic de la phase. La figure 1.14 met en évidence la forte dépendance de cette caractéristique avec la fréquence d’excitation de l’échantillon. En effet, le pic de la phase est observé à  $-7^{\circ}\text{C}$  pour une fréquence d’excitation de 107Hz, au lieu de  $-17^{\circ}\text{C}$  à 12Hz.

## 1.4 Conclusion

Ce chapitre aboutit à la mesure du module de compressibilité et du module de cisaillement complexes en fonction de la température et de la fréquence, par des essais dynamiques hors-résonances. Pour ce type d’essais, la gamme de fréquence de mesure est limitée à cause des risques de résonance de l’échantillon et la machine d’essai. Afin de caractériser le Del-

## 1.4. CONCLUSION

---

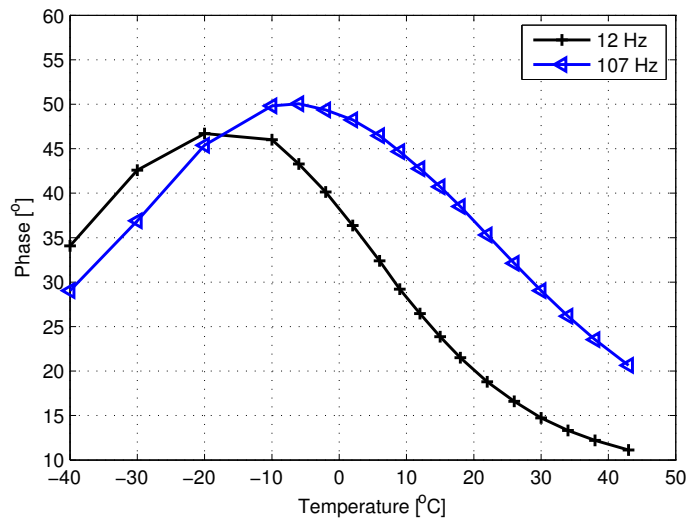


FIGURE 1.14 – Mesures de la phase du module de cisailment complexe du Deltane 350, sur la gamme de température  $[-40 \text{ — } +43]^{\circ}\text{C}$  aux fréquences 12Hz et 107Hz.

tane 350 à de plus hautes fréquences, le principe de superposition temps-température est appliqué, tirant partie de l'équivalence entre les effets de fréquence et de température sur les propriétés mécaniques, comme illustré sur la figure 1. L'exploitation des résultats présentés dans ce chapitre pour obtenir les courbes maîtresses du Deltane 350 fait l'objet du chapitre suivant.

## Chapitre 2

# Obtention des courbes maîtresses du matériau

### 2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, les mesures des modules de cisaillement et de compressibilité dynamiques ont été présentés. Cependant, les moyens de mesures ont une gamme de fréquence d'utilisation limitée. Afin d'obtenir les courbes maîtresses du matériau, représentant le comportement sur une large bande de fréquence, il est nécessaire d'appliquer le principe de superposition temps-température [42, 52] [55](chap.11, p266-320). Celui-ci stipule que les données mesurées à différentes températures  $T$  peuvent être translatées verticalement et horizontalement pour obtenir les courbes maîtresses sur une large bande de fréquence à la température de référence  $T_0$  choisie. Ainsi des mesures à basses températures permettent de déduire les propriétés à hautes fréquences, et inversement des mesures à hautes températures permettent de connaître le comportement à basses fréquences. Le principe de superposition temps-température généralement appliqué ne considère que des coefficients de glissement horizontal  $a_T$ , et donne une équivalence entre les propriétés mécaniques mesurées à une fréquence  $f$  et une température  $T$  et les propriétés mécaniques à la fréquence réduite  $f_r$  et à la température de référence  $T_0$ . Cependant pour certains matériaux, il est nécessaire d'introduire des coefficients de glissement vertical, notés  $b_T$ . Le principe de

superposition temps-température dans sa forme générale s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}f_r &= a_T(T, T_0)f, \\G'(f_r, T_0) &= b_T(T, T_0)G'(f, T), \\G''(f_r, T_0) &= b_T(T, T_0)G''(f, T),\end{aligned}\tag{2.1}$$

où  $f_r$  est la fréquence réduite et  $T_0$  est la température de référence. La figure 2.1 illustre le principe de superposition temps-température. Celui-ci est applicable pour des matériaux dits thermo-rhéologiquement simples, c'est-à-dire que [55](chap.11, p266-320) :

- l'application de coefficient de glissement permet une superposition des isothermes mesurées ;
- les coefficients de glissement déterminés sont les mêmes pour toutes les fonctions viscoélastiques ;
- la dépendance avec la température des coefficients de glissement déterminés doit suivre certaines tendances.

Le “wicket plot” [189] et le “Cole-Cole plot” [71] sont deux indicateurs couramment utilisés pour vérifier la simplicité thermo-rhéologique des matériaux. Le “wicket plot” trace le module complexe dans l'espace de Black, c'est-à-dire que le module de perte  $G''(\omega)$  est représenté en fonction du module de stockage  $G'(\omega)$ . Le “Cole-Cole plot” trace la phase  $\phi(\omega)$  en fonction de l'amplitude du module  $|G^*(\omega)|$ . Des isothermes superposées, formant une courbe lisse, indiquent qu'un recalage vertical n'est pas nécessaire. En revanche un recalage vertical doit être appliqué si les isothermes forment des courbes parallèles.

Les coefficients de glissement horizontal décrivent la dépendance du temps de relaxation avec la température. Pour des températures proches de la température de transition vitreuse  $T_g$  ( $T_g < T < T_g + 100^\circ\text{C}$ ), une expression empirique de ces coefficients en fonction de la température est donnée par l'équation de Williams-Landel-Ferry (WLF). Cette équation, basée sur la théorie des volumes libres, suppose que la fraction de volume libre du polymère augmente avec la température [193] :

$$\log(a_T(T, T_0)) = \frac{-C_1(T - T_0)}{C_2 + T - T_0},\tag{2.2}$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des coefficients empiriques de l'ordre de 10 et 100 respectivement [193][55](chap.11, p266-320). La valeur de ces coefficients varie d'un matériau à l'autre,

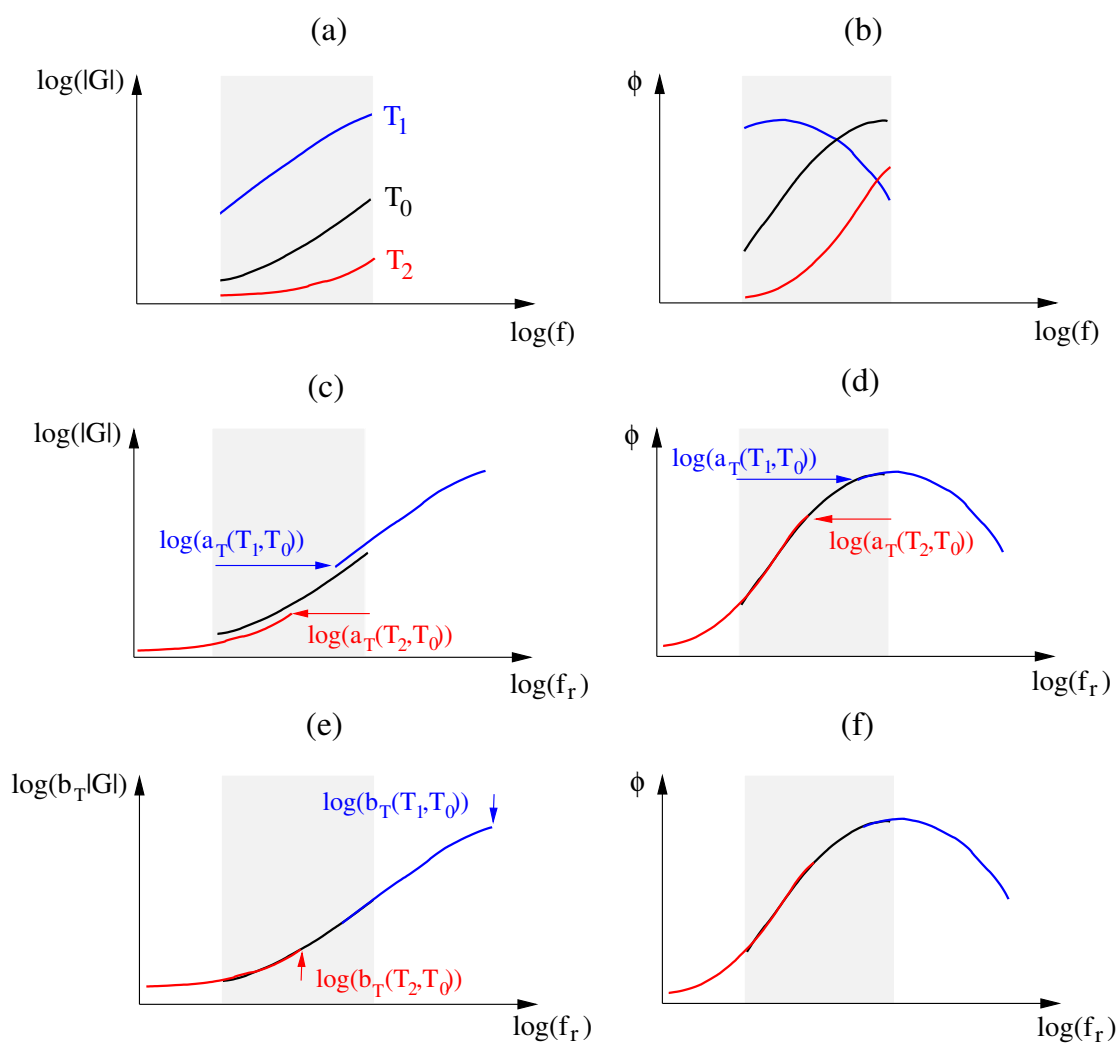


FIGURE 2.1 – Principe de superposition temps-température. (a), (b) Isothermes de l'amplitude et de la phase du module complexe sur une bande de fréquence mesurable aux températures  $T_0$ ,  $T_1$  et  $T_2$ , avec  $T_1 < T_0 < T_2$ . (c), (d) Isothermes de l'amplitude et de la phase du module complexe après recalage horizontal par rapport à une température de référence  $T_0$ . (e), (f) Isothermes de l'amplitude et de la phase du module complexe après recalage horizontal et vertical par rapport à une température de référence  $T_0$ .

mais les coefficients de glissement horizontal sont généralement en accord avec l'équation de Williams-Landel-Ferry [24, 57, 69, 106]. C'est pourquoi une loi WLF est souvent utilisée pour lisser les coefficients de glissement horizontal afin de tester la validité des résultats. Pour des températures bien inférieures ou bien supérieures à la température de transition vitreuse, l'équation d'Arrhenius est généralement plus adaptée pour décrire la dépendance des coefficients de glissement horizontal avec la température [55](chap.11, p266-320) :

$$\ln(a_T(T, T_0)) = \frac{E_a}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right), \quad (2.3)$$

où  $E_a$  est l'énergie d'activation relative au processus de relaxation et  $R$  est la constante des gaz parfaits ( $R = 8.3144 \cdot 10^{-3}$  kJ/mol K).

Les coefficients de glissement vertical décrivent les effets d'expansion thermique du matériau et leur dépendance avec la température est généralement beaucoup moins importante que les coefficients de glissement horizontal. La théorie de Bueche-Rouse explique le mouvement des chaînes de polymère pour des matériaux non enchevêtrés dans le contexte de la viscoélasticité linéaire [26, 43]. Cette théorie prédit que le module de relaxation est proportionnel à  $\rho T$ , où  $\rho$  et  $T$  sont respectivement la densité du polymère et la température. Lorsque la température varie, les effets d'expansion thermique modifient la densité du matériau, ce qui correspond au coefficient  $b_T$  appliqué au module viscoélastique [42] :

$$b_T(T, T_0) = \frac{T_0 \rho_0}{T \rho}, \quad (2.4)$$

où  $\rho_0$  correspond à la densité du matériau à la température  $T_0$ . En supposant que la masse de l'échantillon reste constante durant un essai DMA, l'équation (2.4) devient :

$$b_T(T, T_0) = \frac{T_0}{T} (1 + \alpha(T)(T - T_0))^3, \quad (2.5)$$

où  $\alpha(T)$  est le coefficient d'expansion thermique linéaire du matériau, fonction de la température. Connaissant ce coefficient, la théorie de Bueche-Rouse peut être utilisée pour donner une estimation des coefficients de glissement vertical [150].

Il est possible d'estimer les coefficients  $b_T$  à partir de l'équation (2.5), en réalisant des mesures du module ou de la densité en fonction de la température. Par exemple, Resh montre que la mesure précise de la complaisance d'équilibre (valeur de la complaisance

à la fin de la relaxation) en fonction de la température fournit une bonne estimation des coefficients de glissement vertical [150]. Toutefois, ces coefficients étant faiblement dépendants de la température, ce genre de mesure requiert une précision importante, difficilement atteignable en pratique.

Pour des polymères non réticulés de faible masse moléculaire, il existe une relation entre les coefficients de glissement horizontal et la viscosité statique  $\eta$  [55](chap.11, p266-320) :

$$a_T(T, T_0) = \frac{\eta_0 T_0 \rho_0}{\eta T \rho}, \quad (2.6)$$

où l'indice 0 fait référence à la température de référence. En revanche, cette relation ne s'applique qu'à peu de matériaux. Dans [135], des mesures de la viscosité statique ont été réalisées afin d'estimer les coefficients de glissement horizontal à appliquer aux mesures de la complaisance de fluage d'un polystyrène. Les résultats obtenus font état d'une mauvaise superposition des isothermes de complaisance de fluage en raison d'une masse moléculaire trop importante. De plus, dans notre cas, les élastomères couramment utilisés pour la réduction de bruit et de vibrations de structure, tel que le Deltane 350, sont souvent réticulés ; l'équation (2.6) ne s'applique donc pas.

Des procédures manuelles et automatiques sont généralement utilisées pour déterminer ces coefficients [1, 55, 61, 175]. Une technique courante consiste à ajuster les isothermes afin d'obtenir la meilleure superposition. Par exemple, le logiciel Dynatest de Metravib repose sur une méthode des moindres carrés. Les procédures manuelles, contrairement aux procédures automatiques, manquent d'objectivité. Cependant, aucune de ces techniques ne donne de sens physique aux coefficients de glissement.

Certains auteurs proposent d'autres types de méthodes pour lesquelles les coefficients de glissement sont déterminés avec les paramètres d'un modèle viscoélastique [57, 69, 106]. De cette manière, les coefficients de glissement ont une signification physique puisque le modèle viscoélastique vérifie certaines conditions, dont la causalité [139]. En revanche, cela nécessite de fixer à priori une fonction pour le module complexe. Or, un modèle inadapté peut entraîner des écarts significatifs entre le modèle et les expériences [36].

Les relations de Kramers-Kronig imposent des relations entre la partie réelle et la partie imaginaire du module qui sont une conséquence du principe de causalité. La méthode originale développée ici consiste à utiliser ces relations pour le calcul des coefficients de

glissement afin d'assurer le respect du principe de causalité tout en évitant de choisir un modèle viscoélastique qui peut s'avérer par la suite inadapté. Une version approchée de ces relations, décrite dans [23] est déjà utilisée dans [27, 30] pour déterminer les coefficients de glissement. Bien que les résultats soient satisfaisants, ils sont limités par les hypothèses considérées. Le but de ce chapitre est de présenter la méthodologie développée pour le calcul des coefficients de glissement horizontal et vertical, qui s'appuie sur les relations exactes de Kramers-Kronig. La première section présente les différents aspects théoriques de la méthode avant d'être appliquée dans la deuxième section aux mesures effectuées sur le Deltane 350 et présentées dans le chapitre précédent.

### 2.2 Procédure automatique de recalage pour l'application du principe de superposition temps-température

La méthode développée dans ce travail consiste à déterminer les coefficients de glissement  $a_T$  et  $b_T$  de manière à générer des courbes maîtresses en accord avec le principe de causalité, i.e. à caractériser un module complexe dont les parties réelles et imaginaires respectent au mieux les relations de Kramers-Kronig. Dans un premier temps, la définition des relations de Kramers-Kronig, ainsi que leur calcul numérique sont présentés. Dans un deuxième temps, la procédure d'optimisation utilisée pour obtenir les coefficients de glissement est exposée.

#### 2.2.1 Relations de Kramers-Kronig

##### 2.2.1.1 Définition

La loi de comportement d'un matériau viscoélastique dans le domaine fréquentiel est donnée par l'équation (1.11) avec

$$G^*(\omega) = G_\infty + h^*(\omega). \quad (2.7)$$

Pour assurer le respect des principes de thermodynamique et de causalité, des conditions s'imposent sur le module complexe  $G^*(\omega)$  [53, 190]. Les deux premiers principes thermo-

## 2.2. PROCÉDURE AUTOMATIQUE DE RECALAGE POUR L'APPLICATION DU PRINCIPE DE SUPERPOSITION TEMPS-TEMPÉRATURE

---

dynamiques requièrent le respect des conditions suivantes :

$$\begin{aligned}\Re(G^*(\omega \rightarrow 0)) &= E_\infty > 0, \\ \Im(G^*(\omega)) &> 0, \quad \forall \omega > 0.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Le principe de causalité, généralement formulé ainsi : “l’effet ne peut précéder la cause”, s’exprime simplement dans le domaine temporel :  $h(t) = 0 \quad \forall t < 0$ . En revanche, dans le domaine fréquentiel, le principe de causalité fait intervenir des relations complexes entre la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction mémoire  $h^*(\omega)$  :

$$\begin{aligned}\Re(h^*(\omega)) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{u \Im(h^*(u))}{\omega^2 - u^2} du, \\ \Im(h^*(\omega)) &= \frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Re(h^*(u))}{u^2 - \omega^2} du.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Ces relations, dites de Kramers-Kronig et originellement introduites pour la dispersion de la lumière [90, 91], sont une condition nécessaire et suffisante de la causalité, à condition que la fonction  $h^*(\omega)$  soit de carré intégrable [53]. L’équation (2.9) peut s’écrire sous une forme plus synthétique en utilisant la transformée de Hilbert  $\mathcal{H}$  :

$$h^*(\omega) = i\mathcal{H}(h^*(\omega)).\tag{2.10}$$

En introduisant (2.7) dans l’équation (2.9), on obtient des relations entre la partie réelle et la partie imaginaire du module complexe :

$$G'(\omega) = G_\infty + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{u G''(u)}{\omega^2 - u^2} du,\tag{2.11a}$$

$$G''(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{G'(u)}{u^2 - \omega^2} du.\tag{2.11b}$$

Des relations similaires existent pour relier l’amplitude et la phase du module complexe :

$$\ln(|G^*(\omega)|) = \ln(|G_\infty|) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{u \phi(u)}{\omega^2 - u^2} du,\tag{2.12a}$$

$$\phi(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln(|G^*(u)|)}{u^2 - \omega^2} du.\tag{2.12b}$$

Ce sont ces relations qui seront utilisées par la suite.

## 2.2. PROCÉDURE AUTOMATIQUE DE RECALAGE POUR L'APPLICATION DU PRINCIPE DE SUPERPOSITION TEMPS-TEMPÉRATURE

---

### 2.2.1.2 Calcul numérique des relations de Kramers-Kronig

Booij et Thoone proposent une première approximation des relations de Kramers-Kronig basée sur des hypothèses de monotonie des fonctions à intégrer [23] :

$$G''(\omega) \approx \frac{\pi}{2} \left( \frac{dG'(u)}{d \ln u} \right)_{u=\omega}, \quad (2.13a)$$

$$G'(\omega) - G'(0) \approx -\frac{\omega\pi}{2} \left( \frac{d[G''(u)/u]}{d \ln u} \right)_{u=\omega}, \quad (2.13b)$$

$$\phi(\omega) \approx \frac{\pi}{2} \left( \frac{d \ln |G^*(u)|}{d \ln u} \right)_{u=\omega}. \quad (2.13c)$$

Ces relations approximées sont utilisées par Caracciolo [27] pour calculer la phase du module à partir de mesures de l'amplitude, mais elles n'impliquent aucune intégration. Parot et Duperray [129] montrent que cette approche introduit un bruit important dans les résultats quand elle est appliquée à des données expérimentales, ce qui est le cas ici. Ils proposent alors une méthode numérique permettant d'évaluer les relations exactes de Kramers-Kronig des équations (2.11) et (2.12) [129]. Seules les grandes lignes de cette méthode sont exposées ici. Considérons  $n$  mesures de  $\ln(|G^*|)$  et  $\phi$  aux fréquences  $(\omega_i)_{1\dots n}$ . La première étape est de moyenner le logarithme de l'amplitude de manière à obtenir les fonctions lissées,  $\ln(|G^*|)$  et  $\phi$ , évaluées aux points de demi-fréquence de mesure. La deuxième étape est d'étendre les fonctions afin d'obtenir des fonctions continues sur le domaine d'intégration  $[0, +\infty[$  :

- $\ln(|G^*|)$  est une fonction paire supposée constante aux basses et hautes fréquences pour rendre compte de la faible dépendance fréquentielle du module observée dans la zone vitreuse et le plateau caoutchoutique :

$$\ln(|G^*(\omega)|) = \ln(|G^*(\omega_1)|), \quad \forall \omega \in [0, \omega_1],$$

$$\ln(|G^*(\omega)|) = \ln(|G^*(\omega_n)|), \quad \forall \omega \in [\omega_n, +\infty[.$$

- $\phi$  est une fonction impaire égale à 0 en  $\omega = 0$  puisque le module complexe est réel à  $\omega = 0$  (module statique). Elle est supposée linéaire sur l'intervalle  $[0, \omega_1]$  et constante sur l'intervalle  $[\omega_n, +\infty[$ . Bien que dépourvues de sens physique, ces hypothèses simples sont raisonnables et permettent une intégration plus aisée de relations de

## 2.2. PROCÉDURE AUTOMATIQUE DE RECALAGE POUR L'APPLICATION DU PRINCIPE DE SUPERPOSITION TEMPS-TEMPÉRATURE

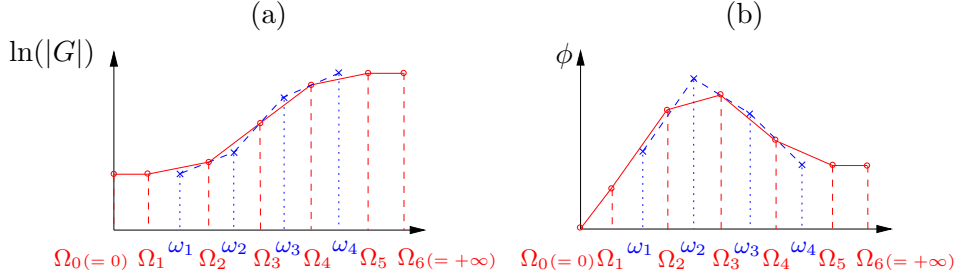


FIGURE 2.2 – Lissage, extension et linéarisation des fonctions  $\ln(|G^*|)$  (a) et  $\phi$  (b).

Kramers-Kronig :

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \phi(\omega_1) \frac{\omega}{\omega_1}, & \forall \omega \in [0, \omega_1], \\ \phi(\omega) &= \phi(\omega_n), & \forall \omega \in [\omega_n, +\infty[. \end{aligned}$$

La justification de ces extensions est basée sur la parité des fonctions  $\ln(|G^*|)$  et  $\phi$ . L'intervalle d'intégration discrétisé est composé des points de demi fréquence de mesure, des limites d'intégration 0 et  $+\infty$ , auxquels sont ajoutés les points  $\omega_1/2$  et  $\omega_n + (\omega_n - \omega_{n-1})/2$  :

$$\begin{aligned} [\Omega_0 = 0, \Omega_1 = \frac{\omega_1}{2}, \Omega_2 = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}, \dots, \Omega_n = \frac{\omega_{n-1} + \omega_n}{2}, \Omega_{n+1} = \omega_n + \frac{\omega_n - \omega_{n-1}}{2}, \\ \Omega_{n+2} = +\infty[. \end{aligned}$$

Les fonctions  $\ln(|G^*|)$  et  $\phi$  sont supposées affines sur chaque intervalle :

$$\begin{cases} \ln(|G^*(\omega)|) = a_i \omega + b_i, & \forall \omega \in [\Omega_i, \Omega_{i+1}], \\ \phi(\omega) = c_i \omega + d_i, & \forall \omega \in [\Omega_i, \Omega_{i+1}]. \end{cases} \quad (2.14)$$

Le diagramme de la figure 2.2 explique la procédure de lissage, d'extension et de linéarisation des fonctions  $\ln(|G^*|)$  et  $\phi$  à intégrer. Après intégration analytique des équations (2.12a) et (2.12b) en utilisant les relations (2.14), on obtient :

$$\begin{aligned} \ln(|G^*(\omega)|) - \ln(|G_\infty|) &= -\frac{2c_0}{\pi} \Omega_1 - \frac{c_0 \omega}{\pi} \ln \left| \frac{\Omega_1 - \omega}{\Omega_1 + \omega} \right| - \\ &\sum_{i=1}^n \left[ \frac{2c_i}{\pi} (\Omega_{i+1} - \Omega_i) + \frac{c_i \omega}{\pi} \ln \left| \frac{(\Omega_{i+1} - \omega)(\Omega_i + \omega)}{(\Omega_{i+1} + \omega)(\Omega_i - \omega)} \right| + \frac{d_i}{\pi} \ln \left| \frac{\Omega_{i+1}^2 - \omega^2}{\Omega_i^2 - \omega^2} \right| \right], \\ \phi(\omega) &= \frac{b_0}{\pi} \ln \left| \frac{\Omega_1 - \omega}{\Omega_1 + \omega} \right| + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{a_i \omega}{\pi} \ln \left| \frac{\Omega_{i+1}^2 - \omega^2}{\Omega_i^2 - \omega^2} \right| + \right. \\ &\left. \frac{b_i}{\pi} \ln \left| \frac{(\Omega_{i+1} - \omega)(\Omega_i + \omega)}{(\Omega_{i+1} + \omega)(\Omega_i - \omega)} \right| \right] + \frac{b_{n+1}}{\pi} \ln \left| \frac{\Omega_{n+1} + \omega}{\Omega_{n+1} - \omega} \right|. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Cette méthode permet le calcul de la phase à partir de l'amplitude du module et vice-versa. La précision du calcul des intégrales dépend de l'intervalle de fréquence d'intégration, de

## 2.2. PROCÉDURE AUTOMATIQUE DE RECALAGE POUR L'APPLICATION DU PRINCIPE DE SUPERPOSITION TEMPS-TEMPÉRATURE

---

la densité et de la répartition des points de mesure. L'intervalle de fréquence doit être assez large pour justifier les extensions considérées pour les fonctions  $\ln(|G^*|)$  et  $\phi$ . La densité et la répartition des points de mesure doivent permettre de valider les hypothèses d'affinité faites sur les intervalles d'intégration discrétisés. Cette méthode sera utilisée dans la section suivante pour calculer l'amplitude et la phase du module à partir des données expérimentales.

### 2.2.2 Algorithme d'optimisation

La procédure d'optimisation utilisée pour calculer les coefficients de glissement horizontal et vertical se fait en deux étapes. La première consiste à choisir un point initial approprié pour l'optimisation. La seconde étape est d'optimiser les coefficients de glissement en minimisant une fonction de coût basée sur les relations de Kramers-Kronig.

**Étape d'initialisation** L'intégration analytique des relations de Kramers-Kronig nécessite que l'amplitude et la phase du module complexe soient des fonctions continues sur une bande de fréquence assez large, pour justifier les extensions de ces fonctions sur  $[0, +\infty]$  selon la procédure précédemment décrite. C'est pourquoi il est important que les coefficients de glissement choisis dans l'initialisation de l'algorithme d'optimisation entraînent une quasi superposition des isothermes. Les coefficients de glissement horizontal initiaux considérés, notés  $\mathbf{a}_T^0$ , sont les coefficients minimisant la norme de la fonction de coût  $\mathbf{F}_0$  (voir équation (2.18)) représentant l'erreur d'ajustement entre les isothermes mesurées recalées horizontalement et une courbe polynomiale :

$$\mathbf{a}_T^0 = \left\{ \mathbf{x} \left| \min_{\mathbf{x}} \left( \sum_{i=1}^{n_f} |F_0(\mathbf{x}, f_r^i)|^2 \right) \right. \right\}. \quad (2.16)$$

On note  $n_f$  le nombre de points de fréquence et  $n_T$  le nombre de points de température. L'amplitude et la phase du module complexe sont mesurées sur la bande de fréquence  $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_{n_f}]$  et la gamme de température  $\mathbf{T} = [T_1, T_2, \dots, T_{n_T}]$ , conduisant à un nuage de  $n = n_T \times n_f$  points de mesure. À chaque étape de l'algorithme, un jeu de paramètres  $\mathbf{x} = [a_T(T_1), \dots, a_T(T_{n_T})]$  est appliqué aux données expérimentales pour obtenir les données

## 2.2. PROCÉDURE AUTOMATIQUE DE RECALAGE POUR L'APPLICATION DU PRINCIPE DE SUPERPOSITION TEMPS-TEMPÉRATURE

---

recalées horizontalement :

$$\begin{aligned} f_r^i &= a_T(T_j) f_k, \\ \ln(|G_{\text{shift}}^*(\mathbf{x}, f_r^i(\mathbf{x}))|) &= \ln(b_T(T_j)) + \ln(|G_{\text{exp}}^*(T_j, f_k)|), \\ \phi_{\text{shift}}(\mathbf{x}, f_r^i(\mathbf{x})) &= \phi_{\text{exp}}(T_j, f_k), \end{aligned} \quad (2.17)$$

où  $i = 1 \dots n$ ,  $j = 1 \dots n_T$  et  $k = 1 \dots n_f$ . Les données recalées sont ensuite ajustées par un polynôme. Comme il est plus facile d'ajuster les modules de stockage  $G'_{\text{shift}}$  et de perte  $G''_{\text{shift}}$  par un polynôme que le logarithme de l'amplitude  $\ln(|G_{\text{shift}}^*|)$  et la phase du module  $\phi_{\text{shift}}$ , la fonction de coût à minimiser est définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0(\mathbf{x}, f_r^i) &= \frac{G_{\text{shift}}^*(\mathbf{x}, f_r^i(\mathbf{x})) - G_{\text{fit}}^*(\mathbf{x}, f_r^i(\mathbf{x}))}{G_{\text{shift}}^*(\mathbf{x}, f_r^i(\mathbf{x}))}, \\ &= \frac{G'_{\text{shift}}(\mathbf{x}, f_r^i(\mathbf{x})) + iG''_{\text{shift}}(\mathbf{x}, f_r^i(\mathbf{x})) - G'_{\text{fit}}(\mathbf{x}, f_r^i(\mathbf{x})) - iG''_{\text{fit}}(\mathbf{x}, f_r^i(\mathbf{x}))}{G'_{\text{shift}}(\mathbf{x}, f_r^i(\mathbf{x})) + iG''_{\text{shift}}(\mathbf{x}, f_r^i(\mathbf{x}))}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

où  $G'_{\text{fit}}$  et  $G''_{\text{fit}}$  sont les ajustements polynomiaux des données expérimentales recalées horizontalement  $G'_{\text{shift}}$  et  $G''_{\text{shift}}$  respectivement. Des polynômes d'ordre 7 centrés et normalisés sont utilisés pour l'ajustement polynomial. Le coefficient de glissement associé à la température de référence  $a_T(T_0)$  est égal à 1.

Pour beaucoup de matériaux, les coefficients de glissement vertical sont proches de l'unité, et sont généralement d'un ordre de grandeur inférieur aux coefficients de glissement horizontal [58, 69]. C'est pourquoi ils sont fixés à 1 dans cette phase d'initialisation. Une autre possibilité pour l'initialisation des coefficients de glissement vertical serait de les estimer à partir de l'équation (2.5) après avoir mesuré le coefficient d'expansion thermique.

**Boucle d'optimisation** Le but de la procédure d'optimisation est de trouver les coefficients de glissement produisant les courbes maîtresses qui respectent le mieux les relations de Kramers-Kronig. Les coefficients de glissement optimaux sont ceux minimisant une fonction de coût  $\mathbf{F}$  représentant les écarts entre le module mesuré recalé par un jeu de paramètres donné et le module calculé par les relations de Kramers-Kronig :

$$[\mathbf{a}_T^{\text{opt}}, \mathbf{b}_T^{\text{opt}}] = \left\{ \mathbf{x} \left| \min_{\mathbf{x}} \left( \sum_{i=1}^{n_f} |F(\mathbf{x}, f_r^i)|^2 \right) \right. \right\}. \quad (2.19)$$

Pour un jeu de paramètres donné  $\mathbf{x} = [a_T(T_1), \dots, a_T(T_{n_T}), b_T(T_1), \dots, b_T(T_{n_T})]$ , le principe de superposition temps-température est appliqué aux données expérimentales pour

### 2.3. RÉSULTATS ET VALIDATION DE LA MÉTHODE PROPOSÉE

---

obtenir les données recalées, comme dans l'équation (2.17). Les fonctions  $\ln(|G_{\text{shift}}^*|)$  et  $\phi_{\text{shift}}$  sont lissées et étendues sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  ( $\ln(|G_{\text{int}}^*|$  et  $\phi_{\text{int}}$ ), puis intégrées numériquement selon les relations de Kramers-Kronig, comme décrit dans la section 2.2.1.2 :

$$\begin{aligned}\ln(|G_{\text{KK}}^*(\mathbf{x}, f_r)|) &= \ln(|G_{\text{int}}^*_{\infty}|) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u \phi_{\text{int}}(\mathbf{x}, u)}{f_r^2 - u^2} du, \\ \phi_{\text{KK}}(\mathbf{x}, f_r) &= \frac{f_r}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\ln(|G_{\text{int}}^*(\mathbf{x}, u)|)}{u^2 - f_r^2} du.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Des relations de Kramers-Kronig exactement vérifiées correspondent à  $\ln(G_{\text{KK}}^*) = \ln(G_{\text{shift}}^*)$ .

La fonction de coût à minimiser est définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x}, f_r^i) &= \frac{\ln(G_{\text{shift}}^*(\mathbf{x}, f_r^i(\mathbf{x}))) - \ln(G_{\text{KK}}^*(\mathbf{x}, f_r^i(\mathbf{x})))}{\ln(G_{\text{shift}}^*(\mathbf{x}, f_r^i(\mathbf{x})))}, \\ &= \frac{\ln(|G_{\text{shift}}^*(\mathbf{x}, f_r^i(\mathbf{x}))|) + i\phi_{\text{shift}}(\mathbf{x}, f_r^i(\mathbf{x}))}{\ln(|G_{\text{shift}}^*(\mathbf{x}, f_r^i(\mathbf{x}))|) + i\phi_{\text{shift}}(\mathbf{x}, f_r^i(\mathbf{x}))} \\ &\quad - \frac{\ln(|G_{\text{KK}}^*(\mathbf{x}, f_r^i(\mathbf{x}))|) + i\phi_{\text{KK}}(\mathbf{x}, f_r^i(\mathbf{x}))}{\ln(|G_{\text{shift}}^*(\mathbf{x}, f_r^i(\mathbf{x}))|) + i\phi_{\text{shift}}(\mathbf{x}, f_r^i(\mathbf{x}))}.\end{aligned}\tag{2.21}$$

La fonction *lsqnonlin* de la boîte à outils d'optimisation de Matlab® a été utilisée pour trouver les coefficients  $\mathbf{x}$  qui minimisent la fonction de coût  $\mathbf{F}$ . Cette fonction fait appel à un algorithme réflexif de zone de confiance, qui permet de traiter des problèmes d'optimisation non linéaire sous contraintes [45].

Une fois les courbes maîtresses obtenues, un modèle viscoélastique peut être identifié. Cette approche permet de déterminer simultanément et de manière automatique les coefficients de glissement horizontal et vertical à partir des données brutes expérimentales.

### 2.3 Résultats et validation de la méthode proposée

Dans cette section, la procédure de recalage décrite dans la section précédente est appliquée aux mesures des modules de compressibilité et de cisaillement présentées dans la section 1.3. Une analyse critique des coefficients de glissement obtenus ainsi qu'une discussion sur l'hypothèse de simplicité thermo-rhéologique sont faites. Une réflexion sur l'incertitude de mesure conclura ce chapitre.

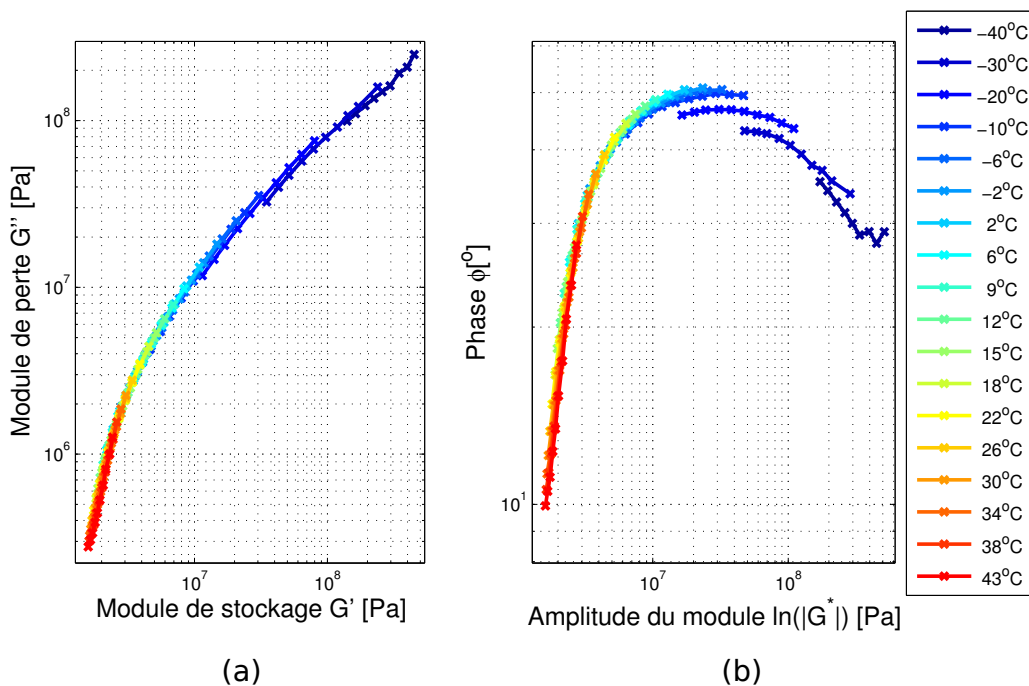


FIGURE 2.3 – (a) Wicket plot et (b) “Cole-Cole plot” pour le module de cisaillement du Deltane 350.

### 2.3.1 Applicabilité du principe de superposition temps-température

Afin de vérifier la validité du principe de superposition temps-température, le “wicket plot” et le “Cole-Cole plot” sont tracés pour le module de cisaillement (figure 2.3) et le module de compressibilité (figure 2.4).

Sur les figures 2.3 et 2.4, la partie correspondante à la fin de la zone de transition vitreuse (au delà du pic de la phase) est assez pauvrement représentée. Des difficultés expérimentales n’ont pas permis de réaliser des mesures à des températures plus basses. Celles-ci sont relatives i) à des problèmes de descente en température pour les essais au viscoanalyseur, et ii) à des problèmes de contrôle en effort (lors de l’application de la pression statique) à une pression relativement faible pour les essais en compression hydrostatique. Cependant, les gammes de fréquence et de température considérées sont suffisantes pour caractériser le Deltane 350 dans la zone d’intérêt, à savoir la zone de transition vitreuse. Pour le module de compressibilité, la figure 2.4 met en évidence des points expérimentaux inconsistants avec les courbes de tendance générale, qui sont dus soit à des erreurs de

### 2.3. RÉSULTATS ET VALIDATION DE LA MÉTHODE PROPOSÉE

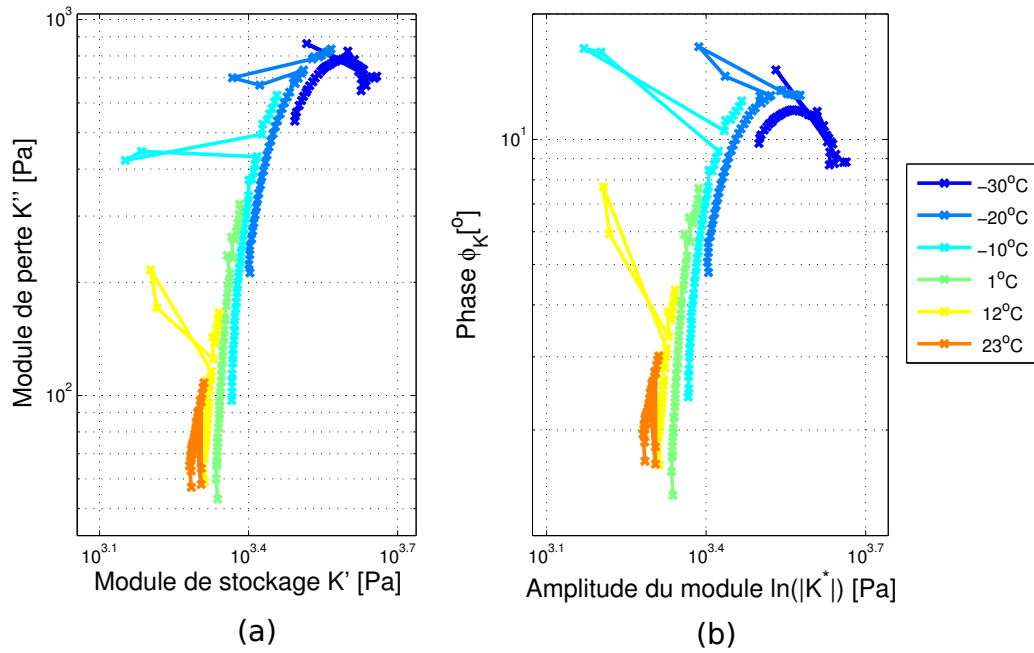


FIGURE 2.4 – (a) Wicket plot et (b) “Cole-Cole plot” pour le module de compressibilité du Deltane 350.

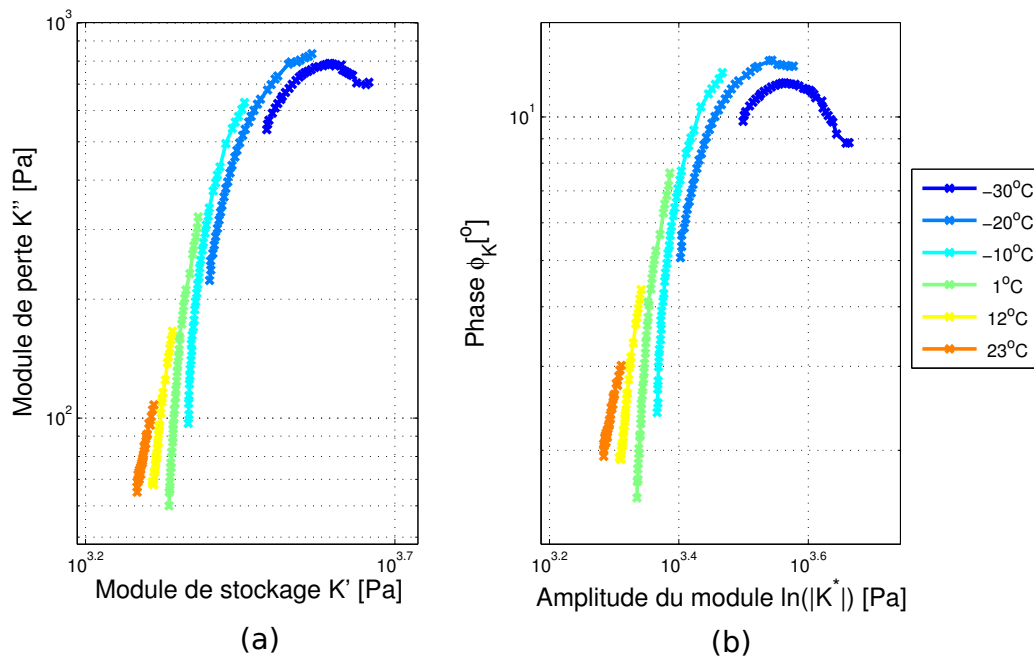


FIGURE 2.5 – (a) Wicket plot et (b) “Cole-Cole plot” pour le module de compressibilité du Deltane 350 après suppression des points inconsistants.

mesure, soit aux interférences électriques. Ces points sont alors supprimés, ce qui aboutit à la figure 2.5.

Les figures 2.3 et 2.5 montrent que la plupart des points expérimentaux tendent à décrire une unique courbe. Cependant, les isothermes ne sont pas complètement superposées, indiquant une légère inconsistance avec l’hypothèse de simplicité thermo-rhéologique (plus prononcée pour les mesures du module de compressibilité). Ceci peut indiquer des erreurs de mesure ou un besoin de recalibrer verticalement les isothermes (on rappelle que les figures 2.3 et 2.5 sont indépendantes des coefficients de glissement horizontal appliqués). Dans le cas de la première hypothèse, il s’agirait d’erreurs systématiques, difficilement contrôlables. En effet, plusieurs échantillons différents ont été testés et conduisent à des résultats similaires (voir section 2.4 pour plus de détails).

Au vu de ces résultats, on suppose que le Deltane 350 est thermo-rhéologiquement simple. Le principe de superposition temps-température est donc appliqué aux courbes isothermes des figures 1.8 et 1.12, en considérant des coefficients de glissement horizontal et vertical.

### 2.3.2 Courbes maîtresses

La température de référence choisie pour l’application du principe de superposition temps-température est la température d’utilisation du matériau  $T_0 = 12^\circ\text{C}$  dans son application industrielle.

**Courbes maîtresses pour le module de cisaillement complexe** La figure 2.6 montre les courbes maîtresses obtenues pour le module de cisaillement complexe par la méthode décrite précédemment. La méthode appliquée pour le calcul des coefficients de glissement conduit à une superposition plutôt bonne des isothermes bien que les points correspondant aux trois isothermes de la phase de plus basses températures ne se superposent pas exactement avec les autres. Ces trois isothermes sont également celles qui présentent le plus de déviation par rapport à la tendance du “wicket plot” ou du “Cole-Cole plot” sur la figure 2.3. Comme les coefficients de glissement vertical ne s’appliquent pas à la phase du module, il est normal que des écarts similaires apparaissent sur les courbes maîtresses. Ce phénomène peut être attribué à l’influence des charges présentes dans l’élastomère qui

### 2.3. RÉSULTATS ET VALIDATION DE LA MÉTHODE PROPOSÉE

---

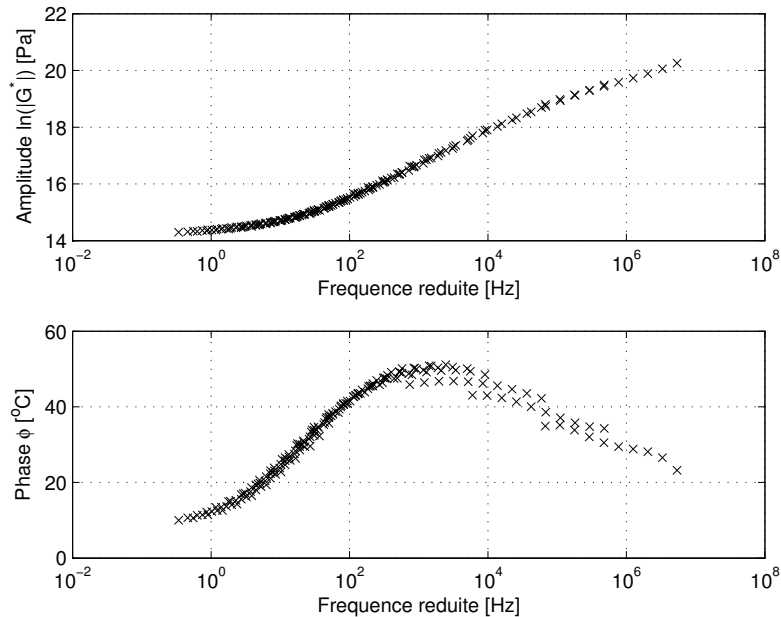


FIGURE 2.6 – Courbes maîtresses du module de cisaillement du Deltane 350 à une température de référence de  $T_{ref} = 12^\circ\text{C}$ .

modifient la mobilité des chaînes moléculaires [142][55](chap.11, p266-320). On observe un comportement similaire pour les mélanges bitumineux fortement chargés en agrégats [125]. Le Deltane 350 étant un polymère industriel, les informations sur sa composition sont difficilement accessibles. Une analyse thermogravimétrique réalisée par DCNS a permis de déterminer que les charges minérales présentes dans le Deltane 350 sont de l'ordre de 27%. Ce pourcentage relativement élevé de charges pourrait expliquer les décalages observés sur les isothermes de plus basses températures.

La figure 2.7 compare l'amplitude et la phase du module de cisaillement complexe expérimentales à l'amplitude et la phase calculées par intégration analytique des relations de Kramers-Kronig, à la première étape d'optimisation. Les coefficients de glissement pris pour l'initialisation de l'algorithme donnent de bons résultats : les deux courbes sont très proches l'une de l'autre. Cependant, la figure 2.7 montre des écarts sur le module statique ( $G^*(\omega \rightarrow 0)$ ) et sur la fréquence ainsi que sur la valeur au pic de la phase.

Les mêmes comparaisons sont faites à la dernière étape d'optimisation (voir figure 2.8) et

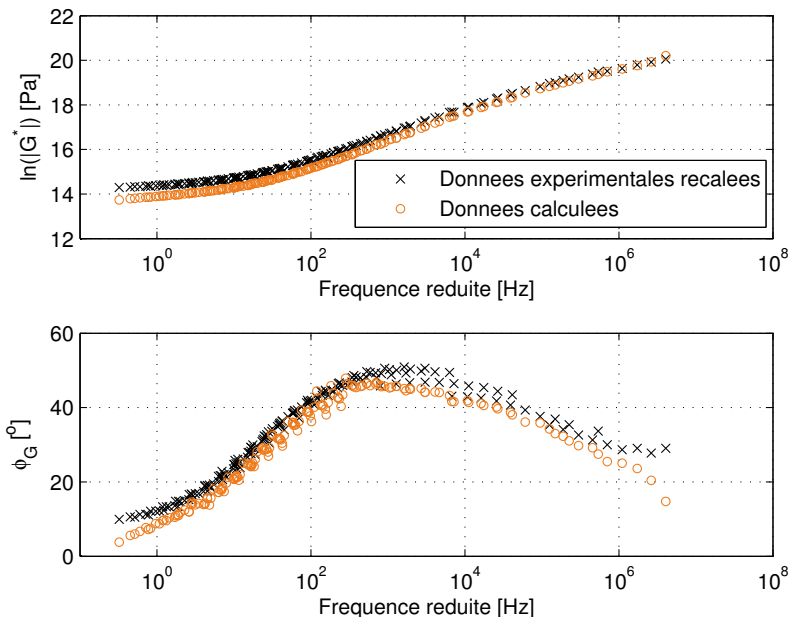


FIGURE 2.7 – Comparaison entre les données expérimentales (croix) et les données calculées à partir des relations de Kramers-Kronig (cercles) pour le module de cisaillement du Deltane 350, à la première étape d’optimisation.

montrent une nette amélioration des résultats. En effet, les deux courbes sont quasiment superposées, ce qui traduit un bon respect des relations de Kramers-Kronig.

**Courbes maîtresses pour le module de compressibilité complexe** Les courbes maîtresses pour le module de compressibilité du Deltane 350, obtenues par la méthode décrite précédemment, sont tracées sur la figure 2.9. On observe une bonne superposition des isothermes pour l’amplitude du module, sauf pour l’isotherme de plus basse température (points situés à plus hautes fréquences). En revanche, malgré une tendance générale correcte, les isothermes pour la phase du module ne se superposent pas très bien. De même que pour le module de cisaillement, on pouvait s’attendre à ces résultats au vu des courbes dans l’espace de Black (wicket plot) ou dans le plan de Cole-Cole. Le décalage des isothermes de phase, limité aux trois isothermes de plus basses températures pour le module de cisaillement, est observé sur l’ensemble de la plage de fréquence considérée pour le module de compressibilité. Ceci peut suggérer une influence des charges sur le

### 2.3. RÉSULTATS ET VALIDATION DE LA MÉTHODE PROPOSÉE

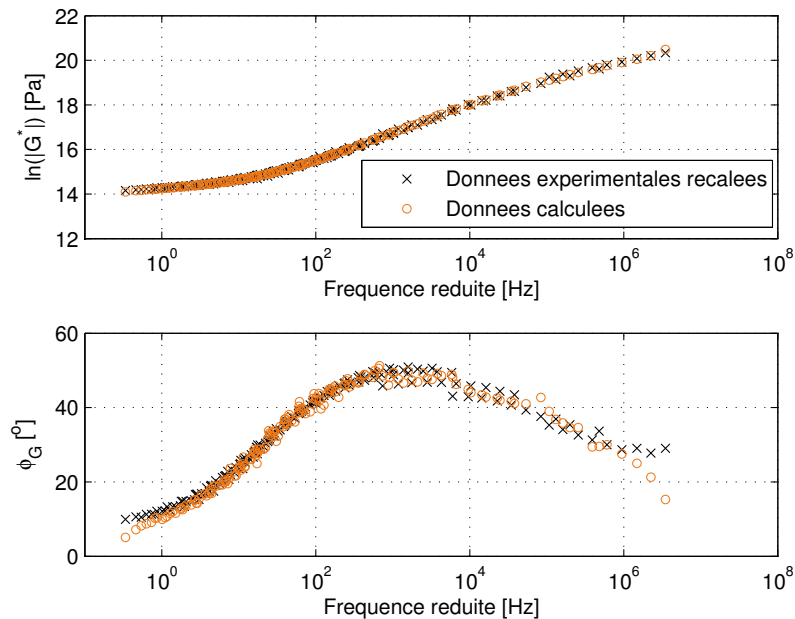


FIGURE 2.8 – Comparaison entre les données expérimentales (croix) et les données calculées à partir des relations de Kramers-Kronig (cercles) pour le module de cisaillement du Deltane 350, à la dernière étape d’optimisation.

comportement global du matériau plus importante à mesure que la pression augmente.

Les figures 2.10 et 2.11 comparent l’amplitude et la phase du module de compressibilité complexe expérimentales à l’amplitude et la phase calculées par intégration numérique des relations de Kramers-Kronig, à la première étape d’optimisation et à la fin de l’optimisation. Une fois de plus, l’application de la méthode proposée permet d’obtenir des courbes maîtresses plus en accord avec le principe de causalité. Cependant, on remarque sur la figure 2.11 que les points correspondant à l’isotherme de plus basse température s’écartent de la courbe de tendance générale par rapport à la figure 2.10. De plus, contrairement aux figures 2.7 et 2.8, la figure 2.11 met en évidence une dispersion importante sur la phase du module calculée à partir des relations de Kramers-Kronig. Comme ce phénomène ne s’observe qu’aux plus hautes fréquences (aux basses fréquences, les points décrivent une courbe relativement nette), il est probable qu’il soit la conséquence d’effets de bord lors du calcul numérique des relations de Kramers-Kronig. En effet, le manque de mesures à basses températures ne permet pas de représenter correctement le comportement du Del-

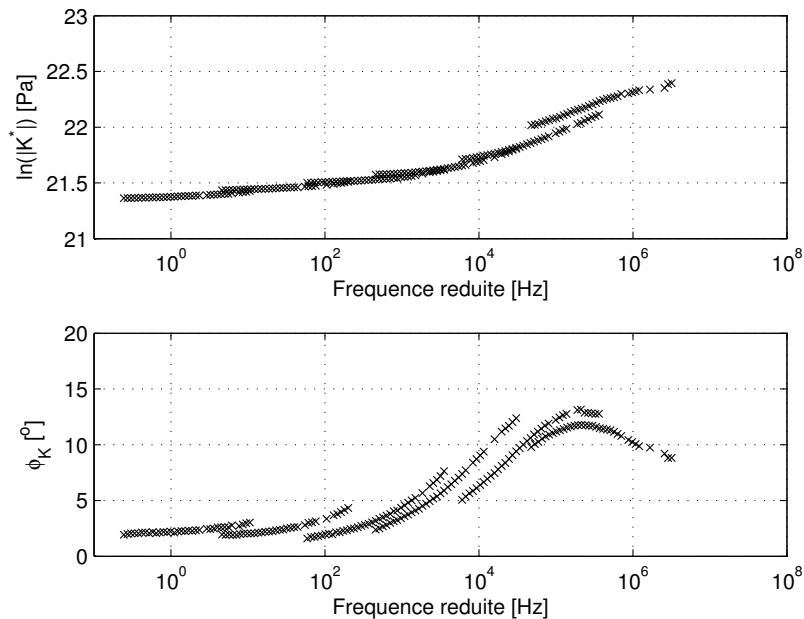


FIGURE 2.9 – Courbes maîtresses du module de compressibilité du Deltane 350 à une température de référence de  $T_{ref} = 12^\circ\text{C}$ .

tane 350 au-delà du pic de la phase. Or, une des hypothèses de la technique utilisée pour le calcul numérique des intégrales dans les relations de Kramers-Kronig est que l'intervalle de fréquence réduite soit suffisamment grand pour justifier les extensions prises pour l'amplitude et la phase du module. Néanmoins, nous verrons dans la Section 5.4.1, que le module de compressibilité n'a que peu d'influence sur les résultats. Aucune nouvelle mesure du module de compressibilité n'a donc été réalisée.

### Comparaison des courbes maîtresses pour les modules de cisaillement et de

**compressibilité** La figure 2.12 compare les courbes maîtresses obtenues pour les modules de cisaillement et de compressibilité. En accord avec les résultats de la littérature [55](chap.11, p266-320) [70], la dépendance fréquentielle du module de cisaillement est très grande devant celle du module de compressibilité. De plus, le facteur de perte associé au module de compressibilité est beaucoup plus faible que celui du module de cisaillement. C'est pourquoi le module de compressibilité est souvent considéré comme constant. Les conséquences de cette hypothèse sur le comportement dynamique global d'une structure

### 2.3. RÉSULTATS ET VALIDATION DE LA MÉTHODE PROPOSÉE

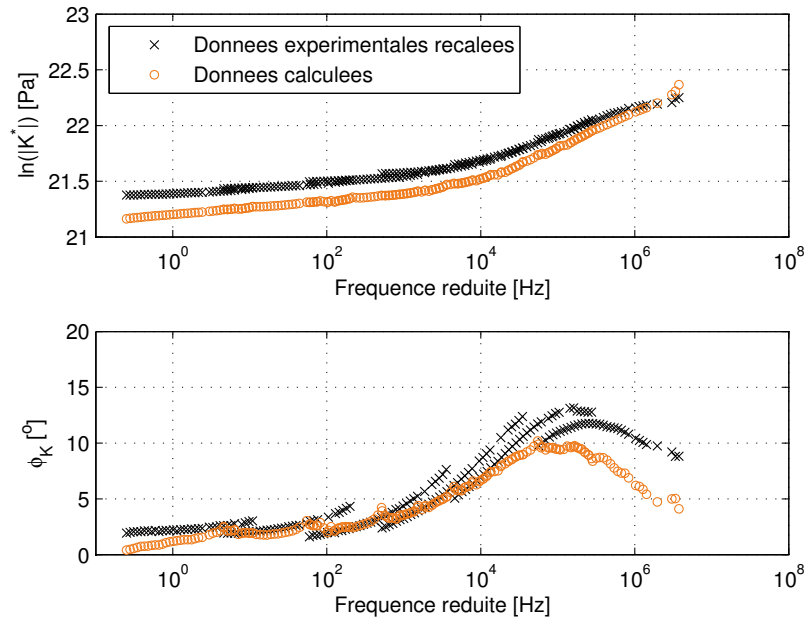


FIGURE 2.10 – Comparaison entre les données expérimentales (croix) et les données calculées à partir des relations de Kramers-Kronig (cercles) pour le module de compressibilité du Deltane 350, à la première étape d’optimisation.

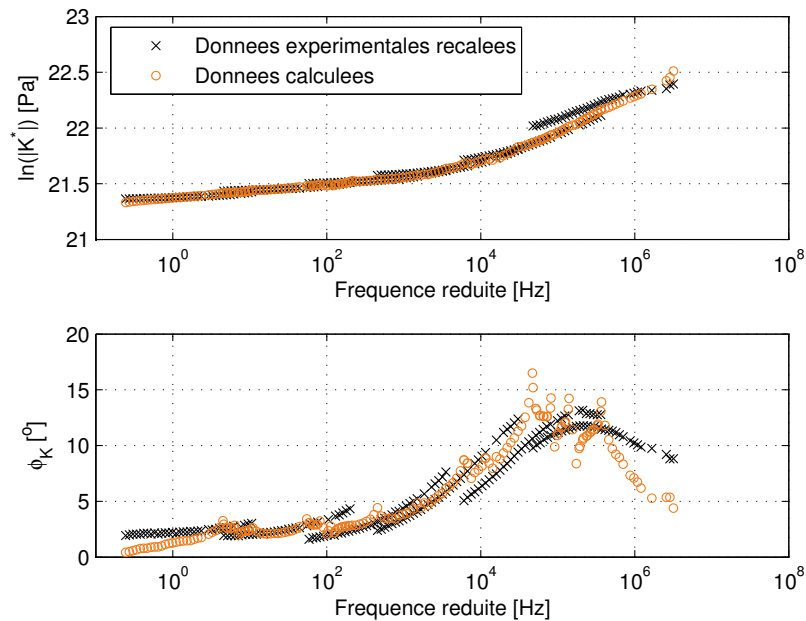


FIGURE 2.11 – Comparaison entre les données expérimentales (croix) et les données calculées à partir des relations de Kramers-Kronig (cercles) pour le module de compressibilité du Deltane 350, à la dernière étape d’optimisation.

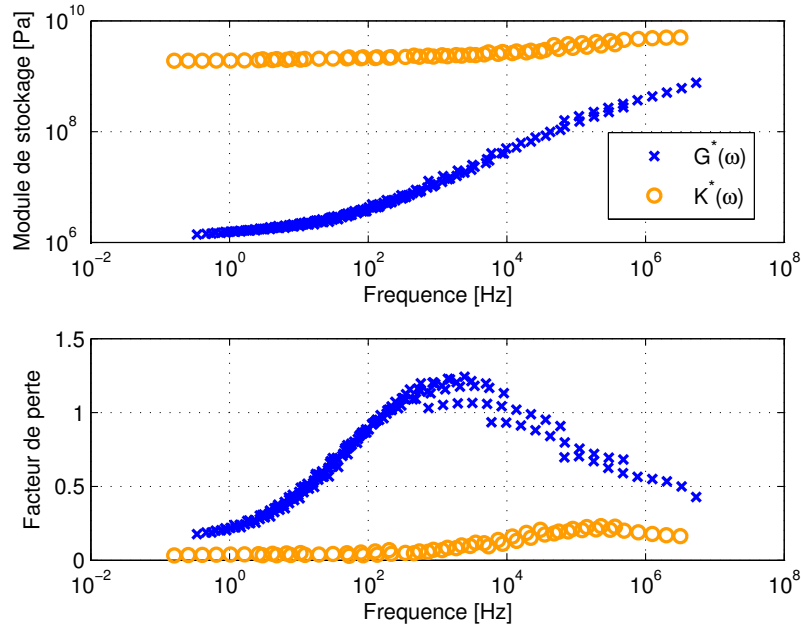


FIGURE 2.12 – Comparaison des courbes maîtresses pour les modules de cisaillement (croix bleues) et de compressibilité (cercles oranges) du Deltane 350 à la température de référence  $T_{\text{ref}} = 12^\circ\text{C}$ .

sandwich avec matériau viscoélastique seront étudiées dans la Section 5.4.1.

### 2.3.3 Analyse critiques des coefficients de glissement optimisés

**Coefficients de glissement pour le module de cisaillement** Les coefficients de glissement horizontal et vertical calculés par l’algorithme d’optimisation décrit dans la section 2.2.2 sont tracés en fonction de la température relative sur les figures 2.13 et 2.14. Les coefficients de glissements horizontal sont ajustés par l’équation WLF (équation (2.2)) : les paramètres  $C_1 = 6.71$  et  $C_2 = 135.0\text{K}$  permettent d’obtenir un bon ajustement des courbes. La figure 2.13 montrent que les coefficients de glissement horizontal optimisés sont très proches de ceux pris à l’initialisation de l’algorithme. Les écarts observés sur la figure 2.7 sont donc principalement dus à l’absence de recalage vertical. En effet, la figure 2.14 montre que les coefficients de glissement vertical dépendent de manière non négligeable de la température.

Afin de comparer les coefficients de glissement vertical optimisés à ceux prédits par la

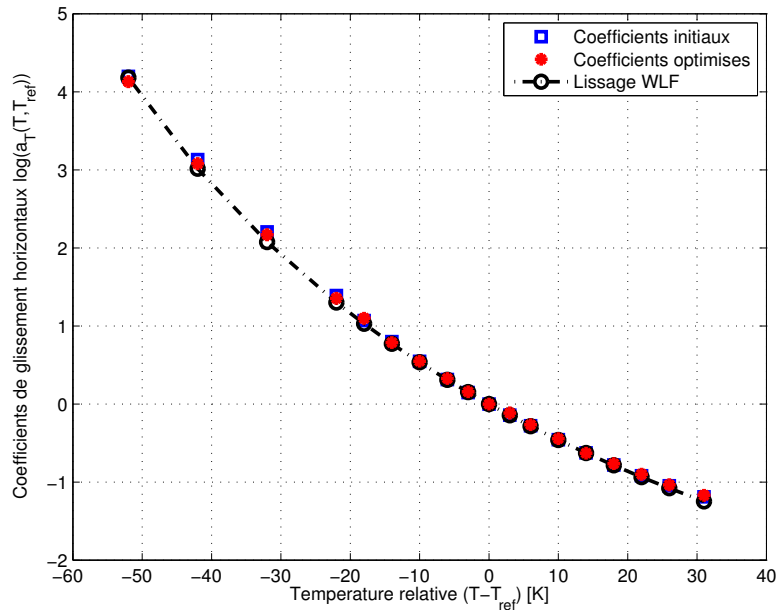


FIGURE 2.13 – Coefficients de glissement horizontal appliqués aux mesures du module de cisaillement à la première (croix) et la dernière (cercles) étapes d’optimisation. Les coefficients de glissement optimisés sont ajustés par une équation WLF (ligne).

théorie de Bueche-Rouse, des mesures du coefficient d’expansion thermique linéaire en fonction de la température sont réalisées par analyse thermomécanique sur un TMA 402 F3 Hyperion (mesures réalisées au laboratoire Netzch à Selb en Allemagne). Les résultats de cet essai montrent que le coefficient d’expansion thermique varie très peu avec la température. Il est donc considéré comme constant en prenant  $\alpha = 2.6 \cdot 10^{-4} 1/K$ . Les coefficients de glissement vertical calculés à partir de l’équation (2.5), et utilisant les coefficients d’expansion thermique mesurés sont tracés sur la figure 2.14. De manière générale, les coefficients calculés par la procédure d’optimisation proposée sont assez proches de ceux prédits par la théorie de Bueche-Rouse, et la tendance est respectée. Seul le point à  $T - T_k = -52$  K s’en écarte.

**Coefficients de glissement pour le module de compressibilité** La même analyse est réalisée pour les coefficients de glissement calculés pour l’obtention des courbes maîtresses du module de compressibilité du Deltane 350. Les résultats sont donnés sur les

### 2.3. RÉSULTATS ET VALIDATION DE LA MÉTHODE PROPOSÉE

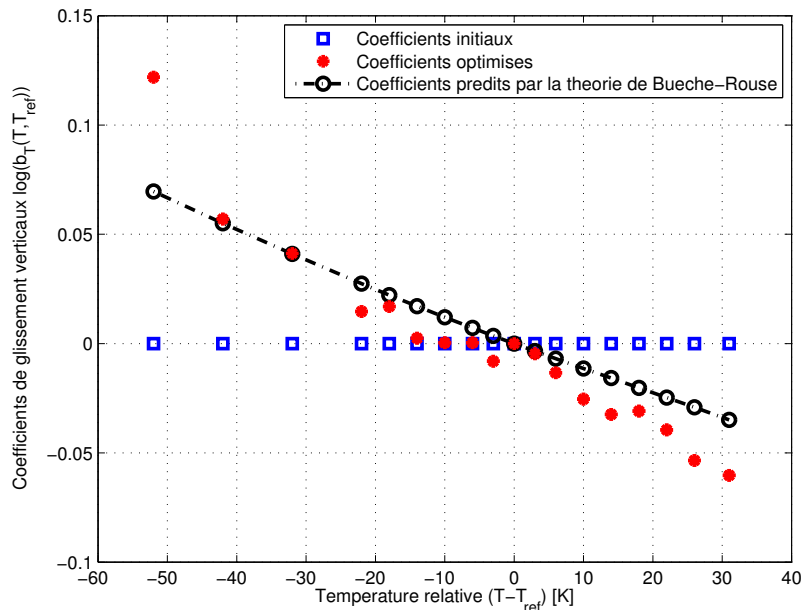


FIGURE 2.14 – Coefficients de glissement vertical appliqués aux mesures du module de cisaillement à la première (croix) et la dernière (cercles) étapes d’optimisation. Les coefficients de glissement optimisés sont comparés à ceux prédits par la théorie de Bueche-Rouse.

figures 2.15 et 2.16.

Les coefficients de glissement horizontal optimisés décrivent une courbe qui peut-être lissée par la loi WLF (équation (2.2)), avec pour coefficients  $C_1 = -45.7$  et  $C_2 = -418.9\text{K}$ . Le signe de ces coefficients, bien que surprenant, n’est pas incohérent. Sullivan [178] obtient également des coefficients négatifs pour des mesures réalisées à des températures inférieures à la température de transition vitreuse. Dans le cas du Deltane 350, la température de transition vitreuse mesurée est de  $T = -10^\circ\text{C}$  à pression atmosphérique. En revanche, celle-ci augmentant avec la pression [169], il est tout à fait possible que les températures auxquelles ont été mesurées le module de compressibilité soient inférieures à la température de transition vitreuse.

La figure 2.16 montre que les coefficients de glissement vertical optimisés ont les mêmes ordres de grandeur que ceux prédits par la théorie de Bueche-Rouse, mais ne suivent pas la même tendance.

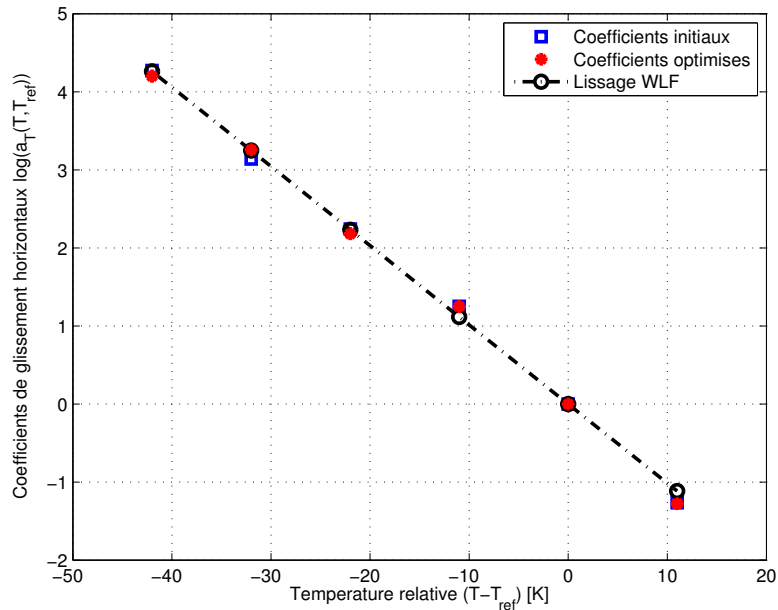


FIGURE 2.15 – Coefficients de glissement horizontal appliqués aux mesures du module de compressibilité à la première (croix) et la dernière (cercles) étapes d’optimisation. Les coefficients de glissement optimisés sont ajustés par une équation WLF (ligne).

### Retour sur l’applicabilité du principe de superposition temps-température

L’hypothèse de simplicité thermo-rhéologique suppose que les coefficients de glissement sont les mêmes pour toutes les fonctions viscoélastiques. Afin de vérifier la validité de cette hypothèse, les coefficients de glissement obtenus pour les modules de cisaillement et de compressibilité sont comparés sur la figure 2.17. Une bonne corrélation est observée pour les coefficients de glissement vertical des deux modules. Néanmoins, bien que les ordres de grandeurs soient identiques, les coefficients de glissement horizontal calculés pour le module de compressibilité présentent une dépendance plus importante avec la température que ceux calculés pour le module de cisaillement. Les pressions différentes auxquelles ont été réalisés les essais pour les deux modules peuvent expliquer cette différence.

De manière générale, d’autres essais sont nécessaires pour valider ou non l’hypothèse de simplicité thermo-rhéologique. Il serait notamment intéressant de déterminer avec précision l’influence de la pression et du taux de charges dans le matériau. De plus, une

### 2.3. RÉSULTATS ET VALIDATION DE LA MÉTHODE PROPOSÉE

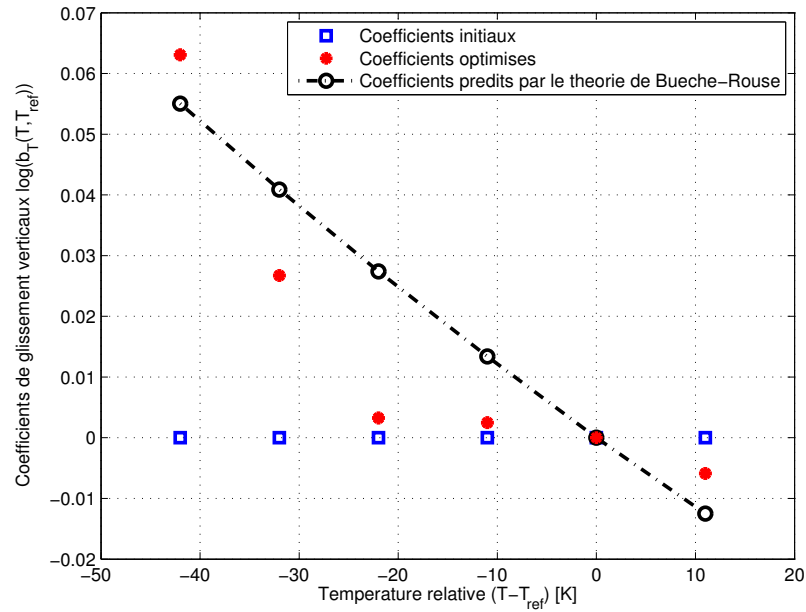


FIGURE 2.16 – Coefficients de glissement vertical appliqués aux mesures du module de compressibilité à la première (croix) et la dernière (cercles) étapes d’optimisation. Les coefficients de glissement optimisés sont comparés à ceux prédits par la théorie de Bueche-Rouse.

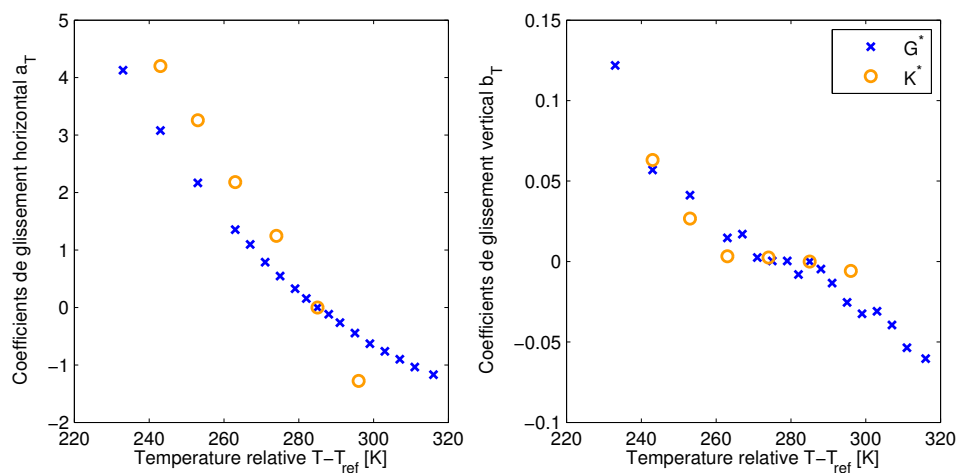


FIGURE 2.17 – Comparaison des coefficients de glissement obtenus pour les modules de cisaillement et de compressibilité du Deltane 350.

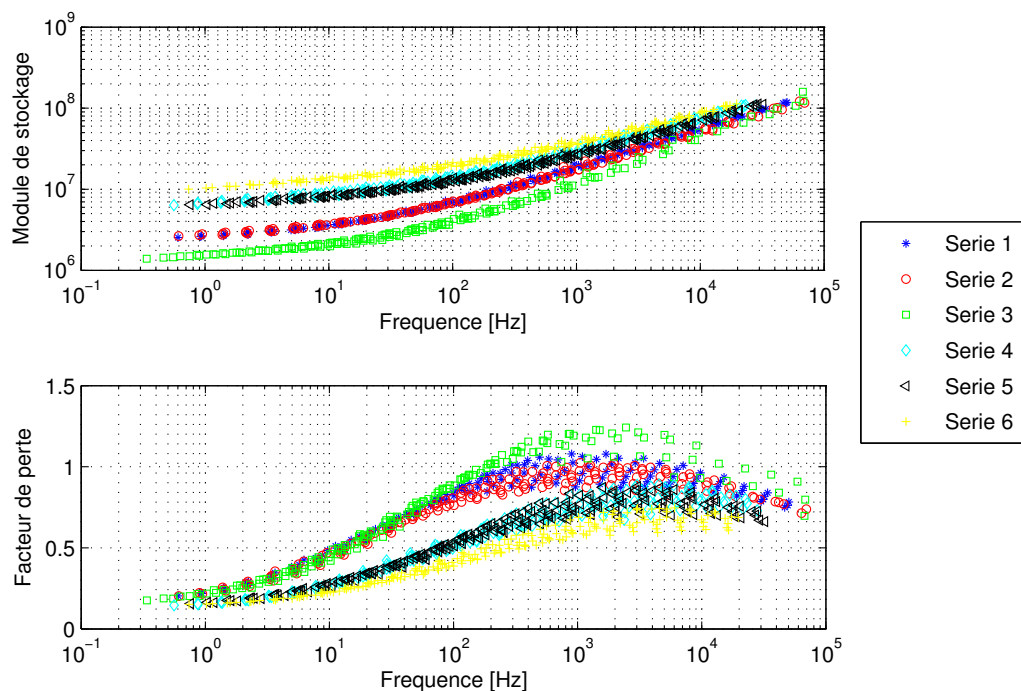


FIGURE 2.18 – Superposition des courbes maîtresses du module de cisaillement du Deltane à la température de référence  $T_{\text{ref}} = 12^{\circ}\text{C}$  pour 6 séries de mesure.

meilleure régulation thermique de l’essai de compressibilité est souhaitable.

Les résultats montrent cependant une bonne superposition des isothermes pour l’amplitude des modules. Le Deltane 350 peut donc être considéré comme au moins “partiellement thermo-rhéologiquement simple”, dans le sens défini par Olard [125].

## 2.4 Incertitudes de mesure

Plusieurs séries de mesure ont été réalisées pour chaque module. Les figures 2.18 et 2.19 superposent les courbes maîtresses obtenues pour chaque série de mesure. Les échantillons testés proviennent tous du même lot de fabrication, à l’exception de l’échantillon utilisé pour la série 3.

Les écarts relativement importants observés sur la figure 2.18 entre les séries de mesure du module de cisaillement peuvent avoir plusieurs origines. Une des principales incertitudes de mesure concerne le collage des échantillons sur les mors du viscoanalyseur (figure

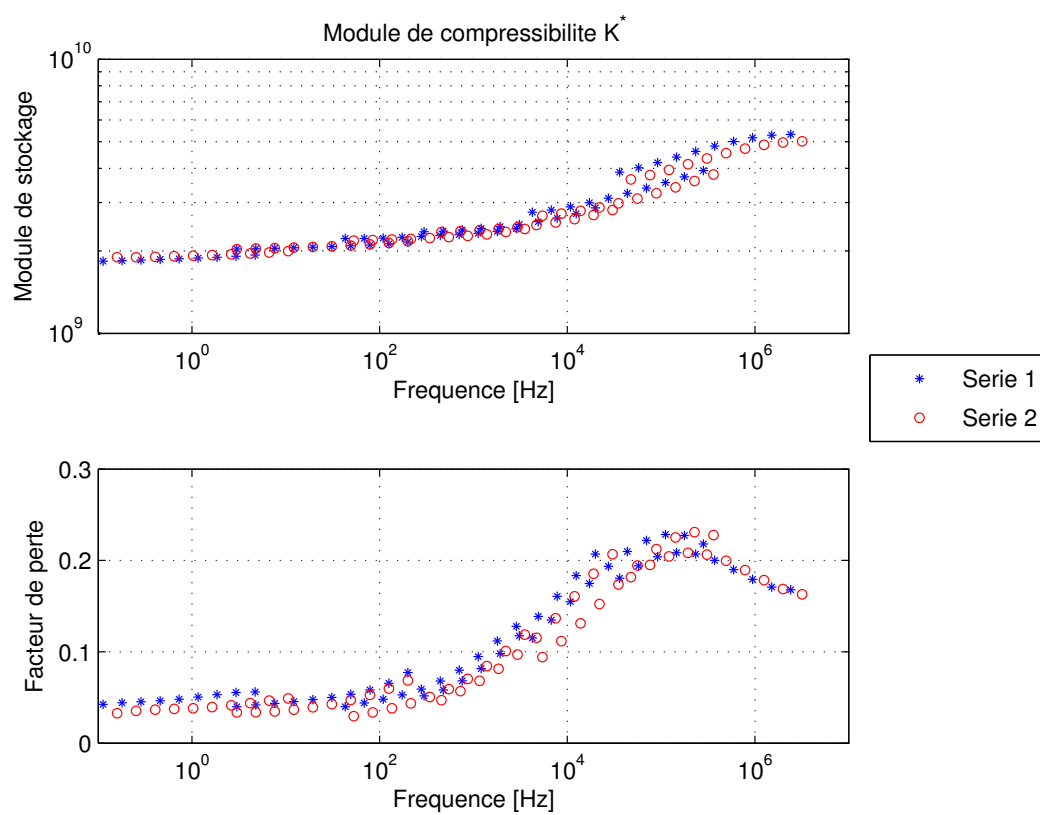


FIGURE 2.19 – Superposition des courbes maîtresses du module de compressibilité du Deltane à la température de référence  $T_{\text{ref}} = 12^\circ\text{C}$  pour 2 séries de mesure.

## 2.5. CONCLUSION

---

1.6). Le logiciel d'acquisition utilise les données géométriques des échantillons entrées par l'expérimentateur pour calculer les caractéristiques du matériau. Ainsi, une surface de collage non uniforme modifie les valeurs du module (ce défaut de collage conduit généralement à un module d'amplitude et de phase plus faibles). L'épaisseur de colle ou le positionnement des échantillons sont d'autres paramètres qui peuvent influencer les résultats. D'autre part, les séries 1 à 3 correspondent à des essais réalisés sur des échantillons parallélépipédiques tandis que les séries 4 à 6 correspondent à des essais sur des échantillons cylindriques (de diamètre 9.5mm obtenus à l'emporte pièce). On remarque clairement sur la figure 2.18 une influence de la géométrie des échantillons testés, qui peut par exemple être due à des incertitudes de collage différentes ou à des incertitudes sur la mesure des dimensions des échantillons. Nous verrons l'influence des erreurs de mesure du module de cisaillement sur le comportement global d'une structure sandwich avec matériau viscoélastique dans la section 5.4.2.

Contrairement au module de cisaillement, la figure 2.19 permet de conclure à une bonne répétabilité des mesures du module de compressibilité, malgré les difficultés de mises en œuvre expérimentales. Au vu de ces résultats, nous avons choisi de ne pas étudier l'influence des erreurs de mesures sur le module de compressibilité.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre est proposée une méthode de calcul des coefficients de glissement permettant de construire les courbes maîtresses du matériau sur une large bande de fréquence par application du principe de superposition temps-température. L'originalité de cette approche repose sur la méthode utilisée pour calculer les coefficients de glissement, qui impose le respect des relations exactes de Kramers-Kronig, et donc celui du principe de causalité. Elle présente certains avantages par rapport aux autres méthodes de recalage. Tout d'abord, la méthode proposée conserve le sens physique des coefficients de glissement, contrairement aux méthodes empiriques. De plus, son utilisation est plus générale dans le sens où elle requiert moins d'hypothèses que les autres méthodes. Par exemple, Parot et Duperray [129] montrent que l'application de méthodes basées sur les approximations des relations de Kramers-Kronig décrites dans [23] introduit un bruit significatif sur

## 2.5. CONCLUSION

---

les résultats. Un autre exemple concerne les méthodes basées sur un modèle viscoélastique [57, 69, 106, 148]. Celles-ci nécessitent de choisir a priori un modèle viscoélastique, qui peut s'avérer inadapté pour représenter la dépendance fréquentielles des propriétés mécaniques. Nous verrons dans le prochain chapitre que la plupart des modèles viscoélastiques sont construits de manière à assurer la consistance interne, telle que la causalité. Les méthodes basées sur ce type de modèle peuvent donc être vues comme une restriction de la méthode de recalage proposée dans ce travail.

Le principe de superposition temps-température est appliqué à des mesures en cisaillement et en compression hydrostatique du Deltane 350 en utilisant la méthode décrite dans la section 2.2. Les résultats montrent que la méthode proposée permet d'obtenir des courbes maîtresses plus en accord avec le principe de causalité. De plus, les coefficients de glissement optimisés sont cohérents avec l'équation WLF, la théorie de Bueche-Rouse, ainsi que d'autres travaux. Des écarts plus importants sont cependant observés pour les coefficients de glissement appliqués aux mesures du module de compressibilité. D'autres essais sont souhaitables, d'une part dans le but de vérifier l'applicabilité du principe de superposition, en déterminant précisément le rôle de la pression et des charges dans le matériau ; d'autre part pour valider davantage la méthode de recalage utilisée, en comparant par exemple les résultats avec d'autres types de mesure. Des essais résonants ou des essais de propagation d'ondes permettraient de mesurer les propriétés viscoélastiques sur plusieurs décades à des fréquences plus élevées que les méthodes hors-résonances. Le développement récent de viscoanalyseurs utilisant des actionneurs piézoélectriques [148] permettrait de réaliser des mesures jusqu'à quelques kHz, sans avoir recours au principe de superposition temps-température.

Enfin, des incertitudes de mesures significatives sont observées sur le module de cisaillement. L'influence de ces incertitudes sur le comportement global d'une structure sandwich avec matériau viscoélastique sera étudiée dans la section 5.4.2.

Toutes les courbes maîtresses tracées dans ce chapitre sont obtenues pour une température de référence de 12°C. La même procédure peut être appliquée pour différentes températures de référence. Le nomogramme est alors obtenu en faisant varier les couples de fréquences et températures, et en dessinant les courbes des fréquences réduites à température constante.

## 2.5. CONCLUSION

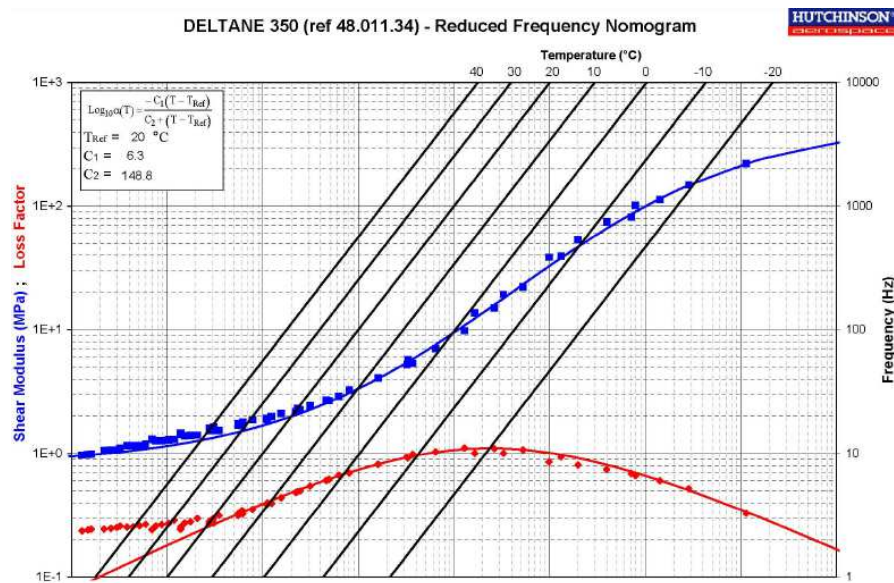


FIGURE 2.20 – Nomogramme du Deltane 350 fourni par Paulstra® [Fiche Hutchinson].

La figure 2.20 montre le nomogramme du Deltane 350 fourni par Paulstra® [132]. Ce graphe à trois entrées prend en compte la dépendance en fréquence et en température du module de stockage et du facteur de perte du matériau. La lecture du nomogramme se fait de la manière suivante : i) pour une fréquence donnée, trouver le point d'intersection entre la droite horizontale à cette fréquence et la droite isotherme de la température d'intérêt, ii) relever la fréquence réduite de ce point, iii) tracer la verticale à cette fréquence réduite et iv) relever les valeurs aux intersections avec les courbes du module de stockage et du facteur de perte.

Les courbes maîtresses obtenues dans ce chapitre à la température de référence choisie de 12°C sont en accord avec le nomogramme de la figure 2.20. La procédure de caractérisation décrite dans ce chapitre peut être appliquée dans le but de connaître les propriétés mécaniques effectives du matériau utilisé, de manière à s'affranchir des dispersions d'un lot de fabrication à l'autre. Elle peut également être utilisée pour tester efficacement des matériaux développés localement.

## Chapitre 3

# Modélisation du comportement viscoélastique

### 3.1 Introduction

Le chapitre précédent avait pour but de décrire la procédure utilisée pour l'obtention des courbes maîtresses d'un matériau viscoélastique. Ces données peuvent être directement entrées sous forme de tables dans un code de calcul par éléments finis pour prédire l'efficacité d'un traitement viscoélastique amortissant. Cette représentation tabulée du module complexe est d'ailleurs la seule manière de prendre en compte la dépendance fréquentielle des propriétés mécaniques viscoélastiques dans le code de calcul Nastran, pour une analyse dans le domaine fréquentiel [117]. Dans cette approche, comme le module complexe est déterminé seulement pour un nombre de fréquences discrètes, des interpolations numériques sont utilisées pour estimer la valeur du module complexe entre deux valeurs discrètes de la table.

Cependant, il est parfois souhaitable de disposer d'une description analytique. Un modèle viscoélastique permet de représenter simplement les variations du module complexe avec la fréquence : l'information sur une large bande de fréquence est concentrée sur quelques paramètres. Ces derniers sont identifiés à partir des courbes maîtresses expérimentales. Bien que ces aspects ne soient pas abordés dans cette thèse, la représentation du module complexe par un modèle viscoélastique permet de traiter les incertitudes sur les propriétés du matériau en appliquant des densités de probabilité aux paramètres du modèle [18]. Un autre avantage de cette approche concerne la possibilité de définir les paramètres du

modèle viscoélastique comme paramètres d'optimisation. Le modèle viscoélastique peut alors servir de base à l'identification du module complexe en optimisant les paramètres du modèle pour recalculer des essais [164]. De plus, l'utilisation d'un modèle viscoélastique facilite la conversion des mesures réalisées dans le domaine fréquentiel vers le domaine temporel. Enfin, pour un utilisateur de code de calcul, il est plus pratique de fournir en entrée du modèle éléments finis les paramètres d'un modèle viscoélastique que de rentrer des données tabulées.

Le but de ce chapitre est de décrire les modèles viscoélastiques unidimensionnels couramment utilisés. Les paramètres des modèles présentés sont ensuite identifiés à partir des courbes maîtresses expérimentales du Deltane 350, obtenues au chapitre précédent. Les modèles unidimensionnels ainsi identifiés seront utilisés dans la deuxième partie pour construire une loi de comportement tridimensionnelle du Deltane 350.

## 3.2 Principaux modèles viscoélastiques utilisés

### 3.2.1 Modèles rhéologiques de base

Nous avons déjà vu dans le premier chapitre, au travers des différents essais de caractérisation, que le comportement d'un matériau viscoélastique combinait les propriétés d'un solide purement élastique à celles d'un fluide purement visqueux. Les modèles rhéologiques élémentaires sont des éléments permettant de représenter ces comportements mécaniques de base :

- l'élasticité avec un ressort (figure 3.5(a)) dont la raideur  $k$  correspond au coefficient de proportionnalité entre la contrainte et la déformation uniaxiales :  $\sigma = k\epsilon$
- la viscosité avec un amortisseur (figure 3.5(b)) dont le paramètre  $\eta$  correspond au coefficient de proportionnalité entre la contrainte et le taux de déformation uniaxiale :  
$$\sigma = \eta\dot{\epsilon}$$

La plupart des modèles viscoélastiques sont construits à partir de ces modèles élémentaires, en assemblant des ressorts et des amortisseurs en série ou en parallèle. Les modèles rhéologiques les plus simples sont : le modèle de Kelvin-Voigt, le modèle de Maxwell et le modèle de Zener.

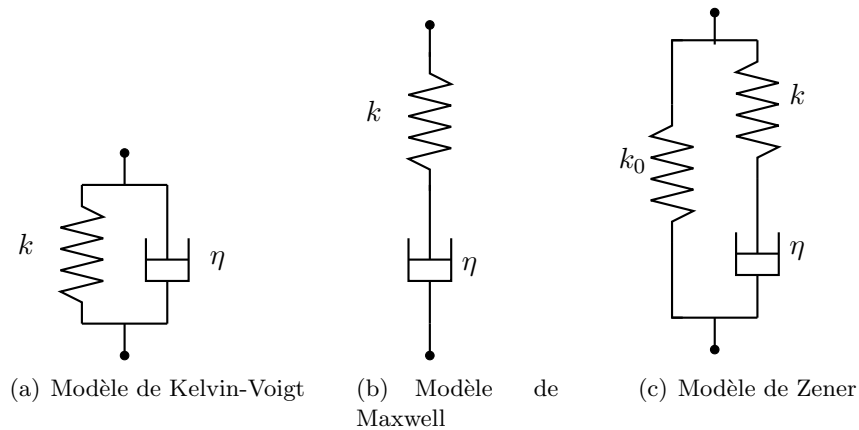


FIGURE 3.1 – Modèles rhéologiques simples.

**Modèle de Kelvin-Voigt** Le modèle de Kelvin-Voigt, aussi appelé modèle d’amortisseur visqueux, consiste à assembler en parallèle un ressort et un amortisseur (figure 3.1(a)). On note  $\sigma_1$  et  $\epsilon_1$  la contrainte et la déformation dans le ressort, et  $\sigma_2$ ,  $\epsilon_2$  la contrainte et la déformation dans l’amortisseur. En écrivant le loi de comportement de chaque élément, on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_1 = k\epsilon_1, \\ \sigma_2 = \eta\dot{\epsilon}_2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Lorsque deux éléments sont assemblés en parallèle, ils sont soumis à la même déformation  $\epsilon$  et la contrainte totale  $\sigma$  est égale à la somme des contraintes induites dans chaque élément, ce qui conduit à :

$$\begin{cases} \epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2, \\ \sigma = \sigma_1 + \sigma_2. \end{cases} \quad (3.2)$$

La loi de comportement associée au modèle de Kelvin-Voigt est obtenue en combinant les équations (3.1) et (3.2) :

$$\sigma = k\epsilon + \eta\dot{\epsilon}. \quad (3.3)$$

Le module complexe correspondant est :

$$E^*(\omega) = E + i\omega\eta, \quad (3.4)$$

avec  $E = k$ .

**Modèle de Maxwell** Le modèle de Maxwell est composé d'un ressort et d'un amortisseur en série (figure 3.1(b)). Lorsque deux éléments sont en série, la déformation totale  $\epsilon$  est donnée par la somme de chacune des déformations, et la même contrainte  $\sigma$  s'applique aux deux éléments, d'où :

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_1 = \sigma_2, \\ \epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2. \end{cases} \quad (3.5)$$

La combinaison des équations (3.1) et (3.5) conduit à la loi de comportement suivante pour le modèle de Maxwell :

$$k\sigma + \eta\dot{\sigma} = \eta k\dot{\epsilon}. \quad (3.6)$$

Le module complexe correspondant est :

$$E^*(\omega) = \frac{iE\omega\eta}{E + i\omega\eta} = E \frac{i\omega\tau}{1 + i\omega\tau}, \quad (3.7)$$

avec  $E = k$  et  $\tau = \eta/E$  le temps de relaxation.

**Modèle de Zener** Le modèle de Zener, également appelé modèle solide linéaire standard (SLS) de type Maxwell, est obtenu par assemblage en parallèle d'un ressort et d'un modèle de Kelvin-Voigt (figure 3.1(c)). Le loi de comportement est donnée par l'équation suivante :

$$k\sigma + \eta\dot{\sigma} = k k_0 \epsilon + \eta(k + k_0)\dot{\epsilon}. \quad (3.8)$$

Le module complexe correspondant est :

$$E^*(\omega) = \frac{E_0 + E_\infty i\omega\tau}{1 + i\omega\tau}, \quad (3.9)$$

où  $E_0 = k_0$  appelé module relaxé correspond à la valeur du module en basses fréquences,  $E_\infty = k_0 + k$  est le module non-relaxé, i.e. la valeur du module à hautes fréquences.

Ces modèles viscoélastiques présentent l'avantage d'être très simples, mais ne sont pas représentatif d'un comportement expérimental. En effet, le modèle de Kelvin-Voigt ne permet pas de représenter le phénomène de relaxation de contrainte observé lors de l'application d'une déformation (section 1.2.1), et le modèle de Maxwell conduit à un taux de déformation constant pour un essai de fluage. Le modèle de Zener est assez représentatif d'un comportement réel pour des sollicitations simples, comme dans les essais de fluage ou de relaxation de contrainte, mais pour des essais dynamiques, le module de perte varie trop rapidement avec la fréquence. C'est pourquoi des modèles plus complexes sont établis.

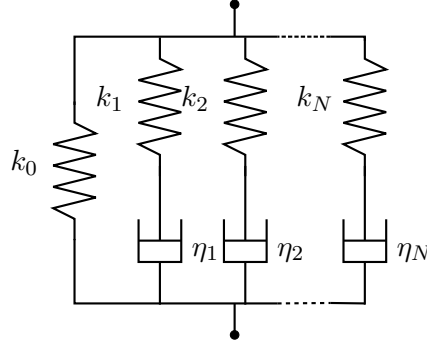


FIGURE 3.2 – Modèle de Maxwell généralisé.

### 3.2.2 Modèles rhéologiques complexes

**Modèle de Maxwell généralisé** Le modèle de Maxwell généralisé, ou modèle de Weichert [192], est constitué de  $N$  éléments de Maxwell montés en parallèle avec un ressort (figure 3.2). La contrainte totale est égale à la somme des contraintes  $\sigma_k$  associées à chaque élément de Maxwell  $k$  ajoutée à la contrainte du ressort isolé  $\sigma_e$  :

$$\sigma = \sigma_e + \sum_{k=1}^N \sigma_k. \quad (3.10)$$

Le module de relaxation intervenant dans la loi de comportement (équation (1.4)) s'écrit :

$$E(t) = E_0 + \sum_{k=1}^N E_k \exp\left(-\frac{E_k t}{\eta_k}\right), \quad (3.11)$$

et son module complexe associé est :

$$E^*(\omega) = E_0 + \sum_{k=1}^N \frac{E_k i\omega\eta_k}{E_k + i\omega\eta_k} = E_0 \left( 1 + \sum_{k=1}^N \gamma_k \frac{i\omega\tau_k}{1 + i\omega\tau_k} \right), \quad (3.12)$$

où  $E_0$  est le module relaxé. Le module non-relaxé est égal à  $E_\infty = \sum_k E_k = E_0(1 + \sum_k \gamma_k)$ . Chaque élément  $k$  de Maxwell est associé à un temps de relaxation  $\tau_k = \eta_k/E_k$ . La distribution de temps de relaxation ainsi créée permet de représenter des phénomènes de relaxation sur des temps beaucoup plus longs qu'avec un modèle de Zener (modèle de Maxwell généralisé avec  $N = 1$ ).

**Modèle de Golla-Huges-McTavish (GHM)** Le modèle de Golla-Hughes-McTavish (GHM) [65, 111] est constitué d'une série de mini-oscillateurs amortis montés en parallèles

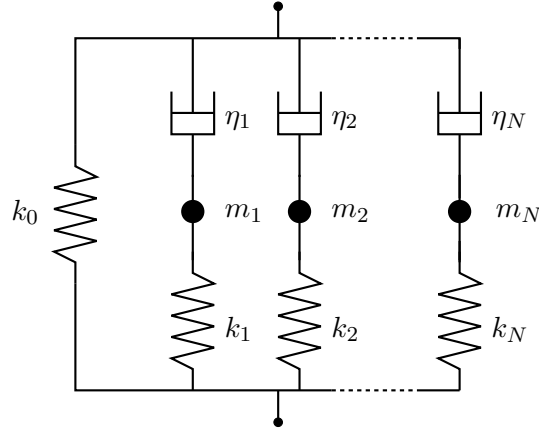


FIGURE 3.3 – Modèle de Golla-Hughes-McTavish.

avec un ressort (figure 3.3). Le module complexe s'écrit :

$$E^*(\omega) = E_0 \left( 1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k \frac{2i\zeta_k \omega_k \omega - \omega^2}{2i\zeta_k \omega_k \omega + \omega_k^2 - \omega^2} \right), \quad (3.13)$$

où  $E_0$  est le module relaxé. Les paramètres  $\alpha_k$ ,  $\zeta_k$  et  $\omega_k$  sont reliés à la raideur  $E_k$ , la viscosité de l'amortisseur  $\eta_k$  et la masse  $m_k$  de chaque mini-oscillateur et la raideur  $E_0$  du ressort isolé par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_k = \frac{k_k}{k_0}, \\ \omega_k = \sqrt{\frac{k_k}{m_k}}, \\ \zeta_k = \frac{\eta_k}{2\sqrt{m_k k_k}}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Dans ce modèle, dit à variables internes, chaque oscillateur est associé à une variable de dissipation. L'introduction de ces variables auxiliaires permet de réduire l'ordre de l'équation différentielle de comportement en utilisant une représentation d'état, au prix d'une augmentation du nombre d'inconnues.

**Modèle “Anelastic Displacement Fields” (ADF)** Le modèle “Anelastic Displacement Fields” (ADF), introduit par Lesieutre et Bianchini [98, 99], est composé d'un assemblage en série d'éléments de Voigt et d'un ressort isolé (figure 3.4). Le module com-

### 3.2. PRINCIPAUX MODÈLES VISCOÉLASTIQUES UTILISÉS

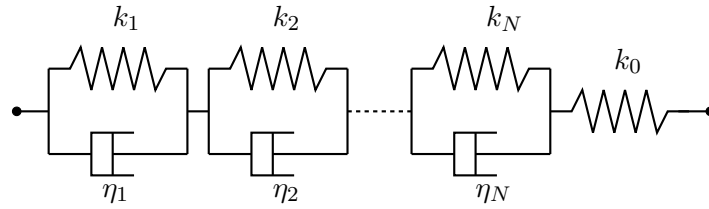


FIGURE 3.4 – Modèle “Anelastic Displacement Fields”.

plexe associé à ce modèle s’écrit :

$$E^*(\omega) = E_0 \left( 1 + \sum_{k=1}^N \Delta_k \frac{\omega^2 + i\omega\Omega_k}{\omega^2 + \Omega_k^2} \right), \quad (3.15)$$

où  $E_0$  est le module relaxé,  $\Omega_k$  est l’inverse du temps caractéristique de relaxation à déformation constante et  $\Delta_k$  est la résistance à la relaxation, liée au paramètre  $C_k$  décrivant le couplage du processus physique de relaxation au déplacement total :

$$C_k = \frac{1 + \sum_k \Delta_k}{\Delta_k}. \quad (3.16)$$

Cette méthode est basée sur la séparation du champ de déformation en une partie élastique, instantanément proportionnelle à la contrainte et d’une partie anélastique, représentant la relaxation du matériau. La partie anélastique peut être considérée comme une somme de contributions individuelles pour créer une distribution de temps de relaxation. Sur la figure 3.4, le ressort isolé correspond à la partie élastique, et chaque élément de Voigt correspond à une composante de la partie anélastique. Le modèle ADF est un modèle à variables internes où les degrés de libertés ajoutés sont des déplacements anélastiques.

Dans chacun des modèles présentés, le nombre de séries considérées est à déterminer en fonction de la qualité de l’approximation souhaitée. Nous verrons dans la section 3.3 que plusieurs séries sont nécessaires pour représenter de manière satisfaisante les variations fréquentielles du module complexe. Le nombre de paramètres à identifier devient vite très grand.

#### 3.2.3 “Spring-pot” et modèle à dérivées fractionnaires

Une autre approche pour modéliser les variations fréquentielles du module complexe consiste, non plus à associer des éléments élastiques (ressorts) et (visqueux), mais à

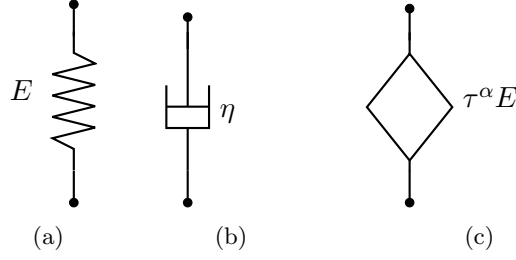


FIGURE 3.5 – éléments rhéologiques élémentaires : le ressort (a), l’amortisseur (b) et le spring-pot (c).

construire un élément dissipatif particulier : le “spring-pot” (figure 3.5(c)). La loi de comportement associée à cet élément s’écrit :

$$\sigma = \tau^\alpha E \mathcal{D}^\alpha (\epsilon), \quad (3.17)$$

où  $\mathcal{D}^\alpha$  est l’opérateur différentiel temporel d’ordre fractionnaire, avec  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Le nom de “spring-pot” vient du fait que :

- pour  $\alpha = 0$ , le comportement est celui d’un élément élastique (“spring”, figure 3.5(a)) :

$$\sigma = \tau^0 E \mathcal{D}^0 (\epsilon_0) = E \epsilon, \quad (3.18)$$

où  $E$  est le module élastique ;

- pour  $\alpha = 1$ , le comportement est celui d’un élément visqueux (“dash-pot”, figure 3.5(b)) :

$$\sigma = \tau^1 E \mathcal{D}^1 (\dot{\epsilon}) = \tau E \dot{\epsilon}, \quad (3.19)$$

où  $\tau = \eta/E$  est le temps de relaxation.

L’utilisation de dérivées fractionnaires dans le contexte de la viscoélasticité, initialement proposée par Germant [62], est justifiée par les théories moléculaires. La théorie de Rouse [162] pour des polymères non réticulés, modifiée par Ferry [56], conduit à la loi de comportement suivante :

$$\sigma(t) = \left[ \frac{3\mu\rho RT}{2M} \right]^{1/2} \mathcal{D}^{1/2}(\epsilon(t)), \quad (3.20)$$

où  $\mu$  est la viscosité,  $\rho$  la densité,  $R$  la constante universelle des gaz parfaits,  $T$  la température et  $M$  la masse moléculaire. Havriliak et Negami [73], puis Bagley et Torvik [12] ont ensuite proposé les premiers modèles viscoélastiques à dérivées fractionnaires.

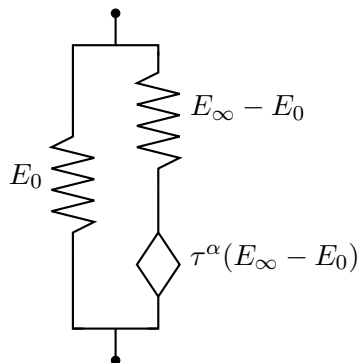


FIGURE 3.6 – Modèle fractionnaire de Zener.

Le modèle à dérivées fractionnaires étudié ici est le modèle fractionnaire de Zener. L’amortisseur dans le modèle de Zener (figure 3.1(c)) est remplacé par un “spring-pot” (figure 3.5(c)) La loi de comportement associée à ce modèle s’écrit :

$$\sigma + \tau^\alpha \mathcal{D}^\alpha(\sigma) = E_0 \epsilon + \tau^\alpha E_\infty \mathcal{D}^\alpha(\epsilon). \quad (3.21)$$

Dans le domaine fréquentiel, le module complexe s’écrit :

$$E^*(\omega) = \frac{E_0 + E_\infty (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha}. \quad (3.22)$$

### 3.2.4 Représentation générale des modèles rhéologiques et aspects thermodynamiques

On remarque que les modèles viscoélastiques présentés peuvent s’écrire de façon plus générale :

- soit sous la forme d’une fraction rationnelle pour les modèles construits à partir de ressorts ou d’amortisseurs :

$$E^*(\omega) = E_0 \frac{1 + \sum_{k=1}^N a_k (i\omega)^k}{1 + \sum_{k=1}^M b_k (i\omega)^k}. \quad (3.23)$$

- soit sous la forme d’une fraction de polynômes à puissances non entières pour les modèles à dérivées fractionnaires :

$$E^*(\omega) = E_0 \frac{1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (i\omega)^{\alpha_k}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (i\omega)^{\beta_k}}. \quad (3.24)$$

avec  $\alpha_k > 0$  et  $\beta_k > 0$  pour tout  $k$ .

Des conditions sont à imposer sur les coefficients des modèles afin de respecter les principes thermodynamiques, ainsi que la causalité. Les modèles construits à partir d'éléments rhéologiques purement élastiques ou purement visqueux permettent une représentation du matériau qui satisfait automatiquement les deux premiers principes de la thermodynamique [37, 108]. Une étude des éléments “spring-pot” d'un point de vue thermodynamique est réalisée par Lion [102].

Le respect du principe de causalité, associé au respect des relations de Kramers-Kronig, a déjà été abordé dans la section 2.2.1.1. Pour les modèles construits à partir de ressorts et d'amortisseurs, on notera que la condition  $M > N$  dans l'équation (3.23) impose la causalité [107]. Il est facile de montrer que le modèle de Maxwell est causal tandis que le modèle de Kelvin-Voigt ne l'est pas.

### 3.3 Identification des paramètres des modèles

Dans cette section, on présente l'identification de paramètres des modèles de Maxwell généralisé, GHM, ADF et de Zener fractionnaire, à partir des courbes maîtresses du Del-tane 350 obtenues dans le chapitre précédent. Le tableau 3.1 récapitule les paramètres à identifier pour chaque modèle. Les résultats de l'analyse des différents modèles ne sont présentés que pour le module de cisaillement.

L'identification des paramètres consiste à utiliser une méthode des moindres carrés qui optimise les paramètres afin de minimiser l'écart entre le module complexe expérimental et calculé. Les techniques des moindres carrés nécessitent de définir une valeur initiale pour chaque paramètre à identifier. Or, on observe une sensibilité des résultats aux paramètres initiaux choisis, indiquant l'existence de plusieurs minima locaux. C'est pourquoi il est important de savoir bien estimer ces coefficients.<sup>1</sup> La première partie de cette section concerne l'estimation des paramètres des modèles viscoélastiques pour l'étape d'initialisation d'une méthode de moindres carrés.

La fonction *lsqnonlin* de Matlab®, déjà évoquée dans la section 2.2.2, est utilisée pour

---

1. Une autre technique consiste à générer plusieurs vecteurs de paramètres initiaux et à comparer les résidus obtenus à la fin de l'optimisation pour chacun d'eux. De cette manière, il est possible d'identifier le minimum global dans le cas où plusieurs minima locaux seraient observés.

### 3.3. IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES DES MODÈLES

TABLE 3.1 – Identification des paramètres de modèles viscoélastiques.

| Modèle viscoélastique | Module complexe   | Nombre de paramètres à identifier |
|-----------------------|---|-----------------------------------|
| Maxwell généralisé    | $G^*(\omega) = G_0 \left( 1 + \sum_{k=1}^N \gamma_k \frac{i\omega\tau_k}{1 + i\omega\tau_k} \right)$  | 2N+1                              |
| GHM                   | $G^*(\omega) = G_0 \left( 1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k \frac{2i\zeta_k\omega_k\omega - \omega^2}{2i\zeta_k\omega_k\omega + \omega_k^2 - \omega^2} \right)$ | 3N+1                              |
| ADF                   | $G^*(\omega) = G_0 \left( 1 + \sum_{k=1}^N \Delta_k \frac{\omega^2 + i\omega\Omega_k}{\omega^2 + \Omega_k^2} \right)$                                   | 2N+1                              |
| Zener fractionnaire   | $G^*(\omega) = \frac{G_0 + G_\infty(i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha}$   | 4                                 |

résoudre le problème des moindres carrés non linéaires. Les résultats de l'identification, pour le module de cisaillement du Deltane 350, sont ensuite présentés et analysés.

Enfin, les propriétés asymptotiques des modèles identifiés sont étudiées.

#### 3.3.1 Estimation des paramètres des modèles viscoélastiques

La difficulté à estimer les paramètres d'un modèle de Maxwell généralisé, GHM ou ADF croît avec le nombre de séries utilisées. Bien que les paramètres des modèles peuvent être identifiés par un algorithme basé sur des méthodes graphiques [149], on choisit dans ce travail de procéder de manière incrémentale : les paramètres optimisés d'un modèle à  $n$  séries sont utilisés pour estimer les paramètres d'un modèle à  $n + 1$  séries. On ne présente donc ici que l'estimation des paramètres de ces modèles pour une série.

**Modèle de Maxwell à une série** Pour un modèle de Maxwell à une série, trois paramètres sont à identifier (équation (3.12) en prenant  $E = G$  et  $N = 1$ ) :  $G_0$ ,  $\gamma_1$  et  $\tau_1$ . Les valeurs asymptotiques (module relaxé et module non relaxé) du module conduisent à la

détermination des deux premiers paramètres :

$$\begin{cases} G_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} G^*(\omega), \\ \gamma_1 = \frac{\lim_{\omega \rightarrow \infty} G^*(\omega)}{\lim_{\omega \rightarrow 0} G^*(\omega)} - 1 = \frac{G_\infty}{G_0}. \end{cases} \quad (3.25)$$

Le temps de relaxation est donné par la valeur de fréquence  $\omega_{\text{pic}}$  correspondant au pic de la phase :

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_{\text{pic}}} \sqrt{\frac{G_0}{G_\infty}}. \quad (3.26)$$

**Modèle GHM à une série** Le modèle GHM possède quatre paramètres à identifier (équation (3.13) en prenant  $E = G$  et  $N = 1$ ) :  $G_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\zeta_1$  et  $\omega_1$  où  $G_0$  correspond au module relaxé ( $G_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} G^*(\omega)$ ). Connaissant les modules relaxé et non relaxé, il est possible de déterminer  $\alpha_1 = G_\infty/G_0 - 1$ . La fréquence correspondant au pic de la phase dépend de manière complexe des paramètres  $\alpha_1$ ,  $\zeta_1$  et  $\omega_1$ , ce qui rend difficile l'estimation de  $\zeta_1$  et  $\omega_1$ . En effet, une étude réalisée sur l'influence des paramètres du modèle GHM à une série montre que la valeur du pic de la phase est décalée pour une modification d'un de ces trois paramètres. Il convient de trouver un autre point caractéristique des courbes maîtresses pour estimer les paramètres  $\zeta_1$  et  $\omega_1$ . On remarque sur la figure 3.7(b) que le point d'intersection de la bissectrice des tangentes à la courbe de mesure de l'amplitude du module (voir figure 1.13 pour la définition graphique) reste inchangé par une modification du paramètre  $\alpha_1$ .

**Modèle ADF à une série** Trois paramètres sont à identifier pour un modèle ADF à une série (équation (3.15) en prenant  $E = G$  et  $N = 1$ ) :  $G_0$  la module relaxé,  $\Delta_1$  et  $\Omega_1$ . Le paramètre  $\Delta_1$  est calculé à partir des modules relaxé et non relaxé :  $\Delta_1 = G_\infty/G_0 - 1$ .  $\Omega_1$  a la dimension d'une fréquence. Il est calculé à partir de la fréquence  $\omega_{\text{pic}}$  correspondante au pic de la phase :

$$\Omega_1 = \omega_1 \sqrt{1 + \Delta_1}. \quad (3.27)$$

**Modèle fractionnaire de Zener** L'estimation des quatres paramètres du modèle fractionnaire de Zener est donnée dans l'article [60]. Nous nous limiterons ici à en donner les

### 3.3. IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES DES MODÈLES

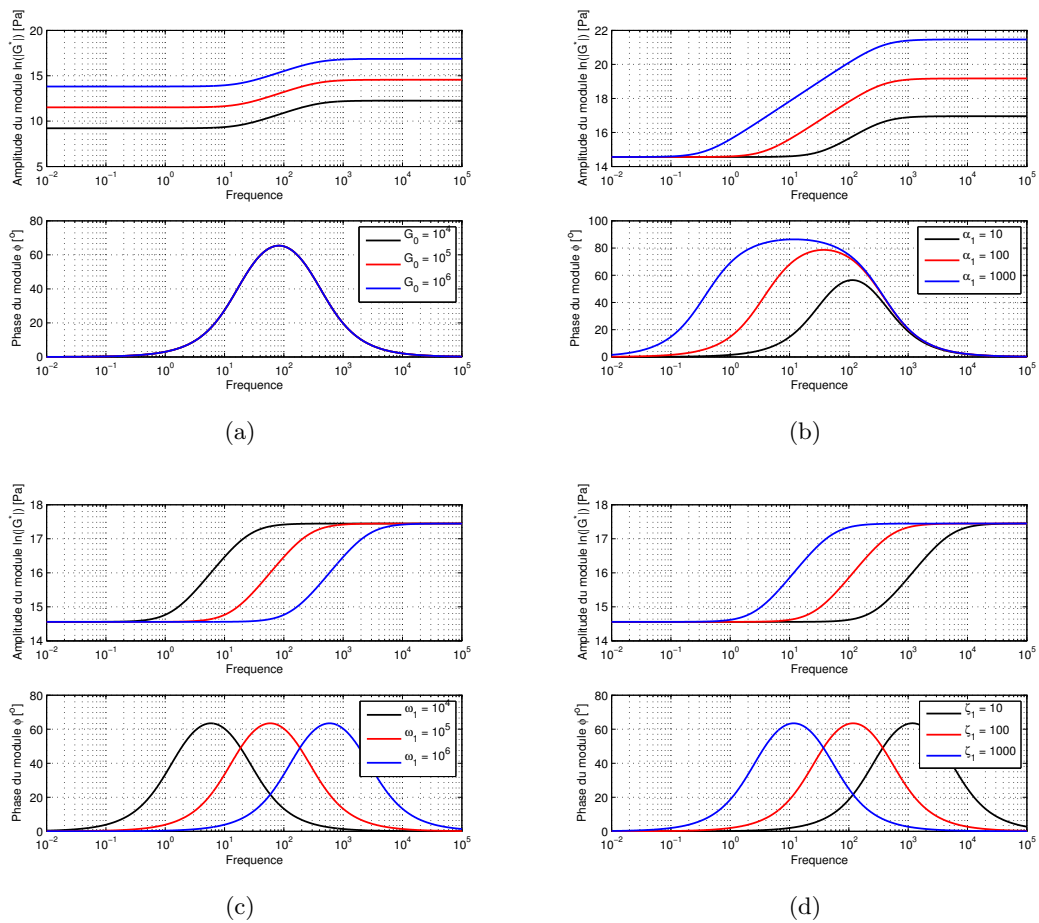


FIGURE 3.7 – Etude de l'influence des paramètres  $G_0$  (a),  $\alpha_1$  (b),  $\zeta_1$  (c) et  $\omega_1$  (d) d'un modèle GHM à une série sur le comportement.

résultats :

$$\begin{cases} G_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega), \\ G_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(\omega), \\ \alpha = \frac{2}{\pi} \arcsin \left[ \eta_{\text{pic}}(G_\infty - G_0) \frac{2\sqrt{G_0 G_\infty} + (G_\infty + G_0)\sqrt{1 + \eta_{\text{pic}}^2}}{\eta_{\text{pic}}(G_\infty + G_0)^2 + (G_\infty - G_0)^2} \right], \\ \tau = \frac{1}{\omega_{\text{pic}}} \left( \frac{G_0}{G_\infty} \right)^{1/2\alpha}, \end{cases} \quad (3.28)$$

où  $\omega_{\text{pic}}$  est la fréquence correspondante au maximum de l'angle de perte  $\eta_{\text{pic}}$  qui est la tangente du maximum de la phase du module.

#### 3.3.2 Résultats pour le module de cisaillement du Deltane 350

Les résultats de l'identification sont présentés sur

- la figure 3.8 pour le modèle de Maxwell généralisé en faisant varier le nombre de séries de un à cinq ;
- la figure 3.9 pour le modèle GHM en faisant varier le nombre de séries de un à cinq ;
- la figure 3.10 pour le modèle ADF en faisant varier le nombre de séries de un à cinq ;
- la figure 3.11 pour le modèle fractionnaire de Zener.

Les valeurs des paramètres optimisés de chaque modèle viscoélastique considéré sont données en annexe A. On remarque que pour les modèles de Maxwell généralisé, GHM et ADF, cinq séries sont nécessaires pour obtenir une approximation satisfaisante de l'amplitude et de la phase du module de cisaillement complexe. Des oscillations, dont le nombre dépend du nombre de séries considérées, sont observées autour des courbes expérimentales. Une seule série ne permet pas de représenter des phénomènes de relaxation sur des temps aussi longs que ceux observés expérimentalement pour le Deltane 350 (figures 3.8(a), 3.9(a) et 3.10(a)). C'est pourquoi il est nécessaire de prendre plusieurs séries de manière à représenter le phénomène de relaxation par une distribution de temps de relaxation.

En revanche, le modèle fractionnaire de Zener permet d'approcher de manière très satisfaisante les courbes maîtresses expérimentales (figure 3.11), et ce avec seulement quatre paramètres. Ce modèle présente donc le meilleur compromis entre précision et nombre de

### 3.3. IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES DES MODÈLES

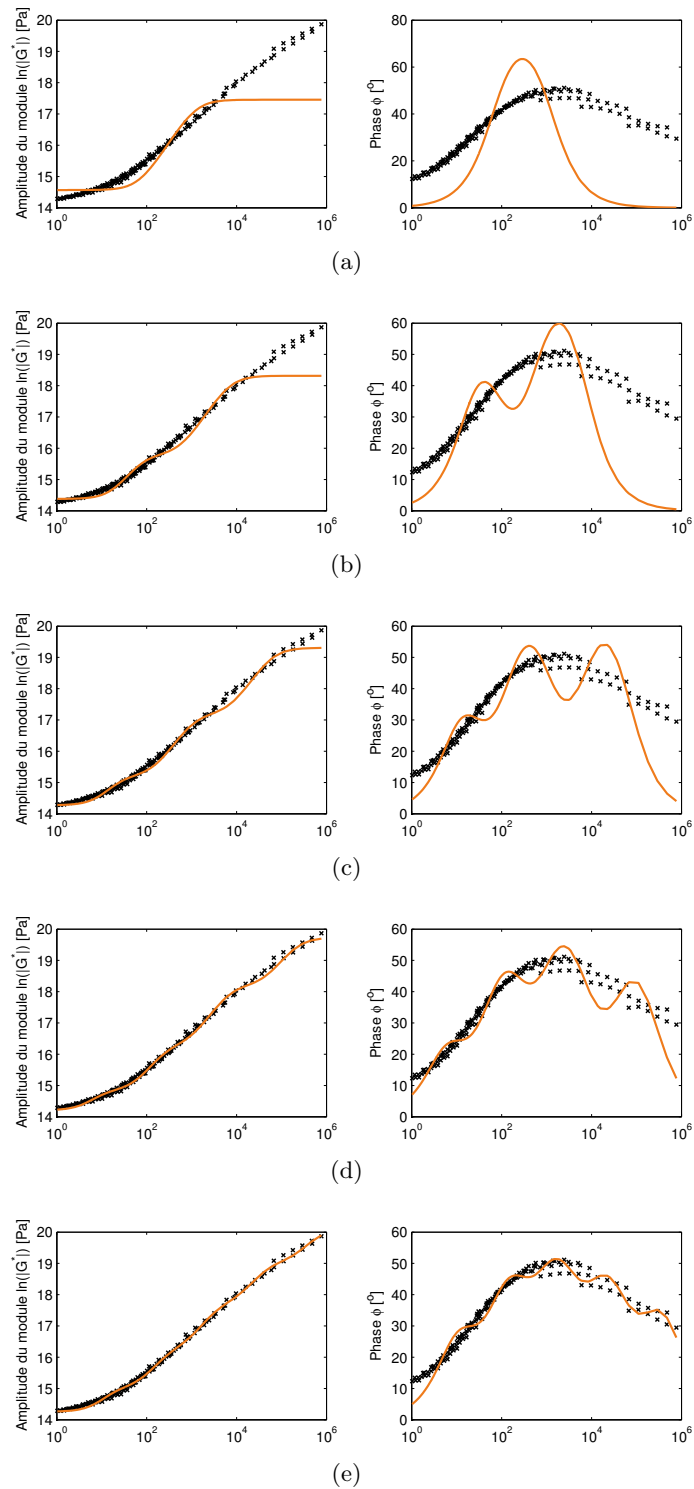


FIGURE 3.8 – Courbes maîtresses du module de cisaillement du Deltane 350 expérimentales (croix noires) et modélisées par un modèle de Maxwell généralisé à une (a), deux (b), trois (c), quatre (d) et cinq (e) séries (trait plein orange).

### 3.3. IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES DES MODÈLES

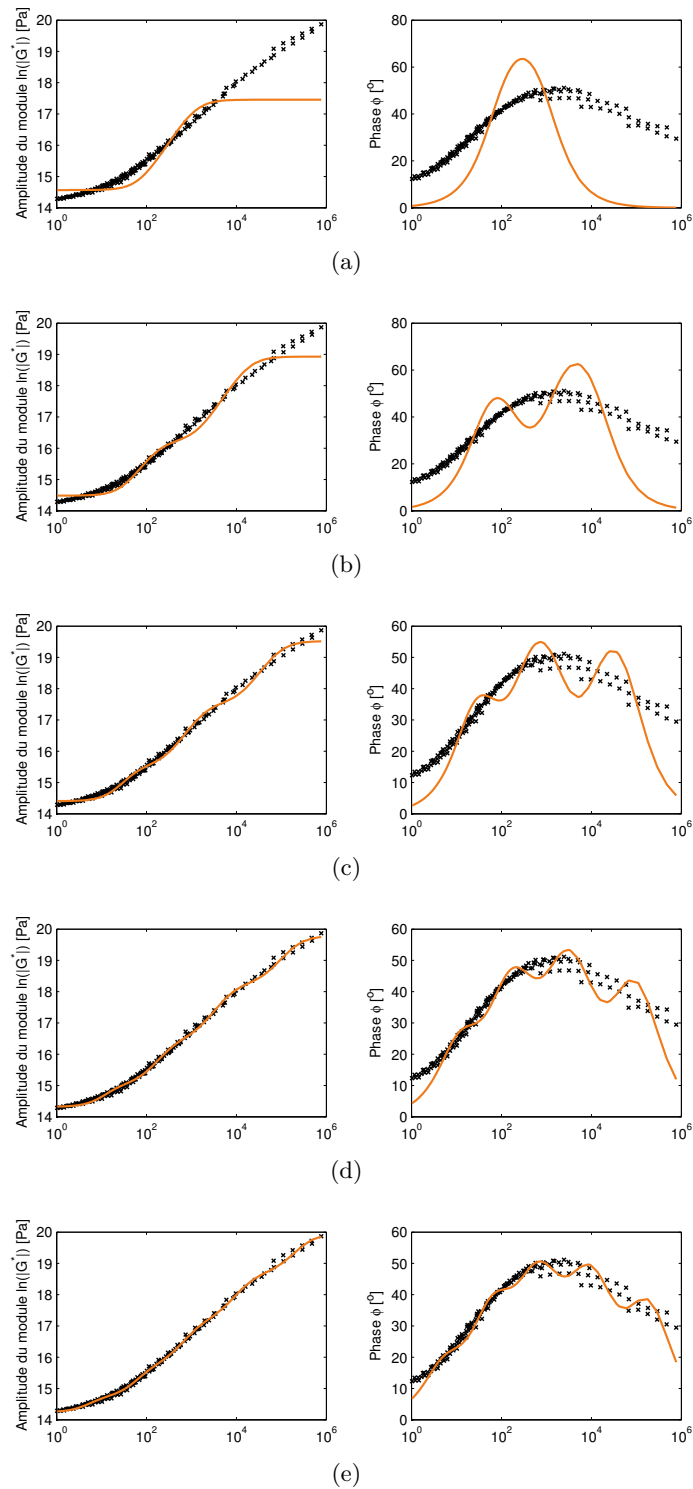


FIGURE 3.9 – Courbes maîtresses du module de cisaillement du Deltane 350 expérimentales (croix noires) et modélisées par un modèle GHM à une (a), deux (b), trois (c), quatre (d) et cinq (e) séries (trait plein orange).

### 3.3. IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES DES MODÈLES

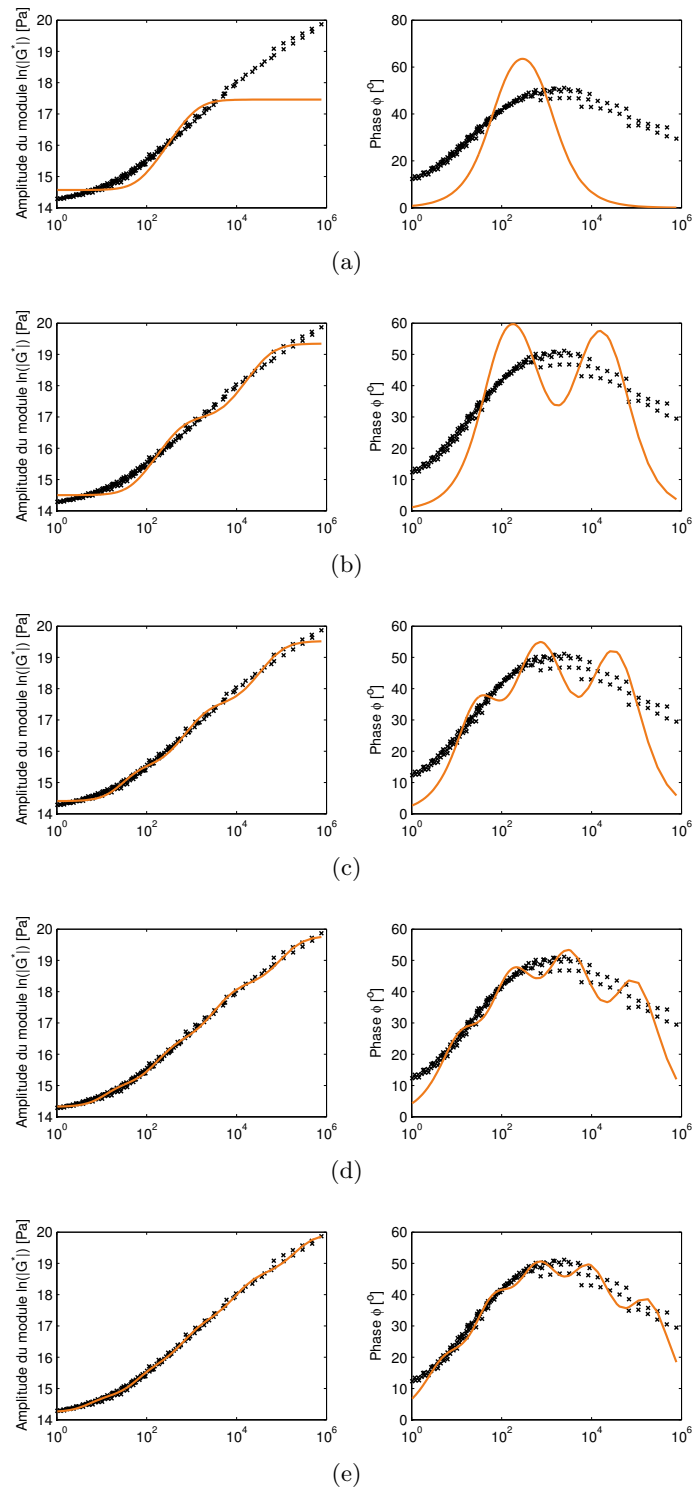


FIGURE 3.10 – Courbes maîtresses du module de cisaillement du Deltane 350 expérimentales (croix noires) et modélisées par un modèle ADF à une (a), deux (b), trois (c), quatre (d) et cinq (e) séries (trait plein orange).

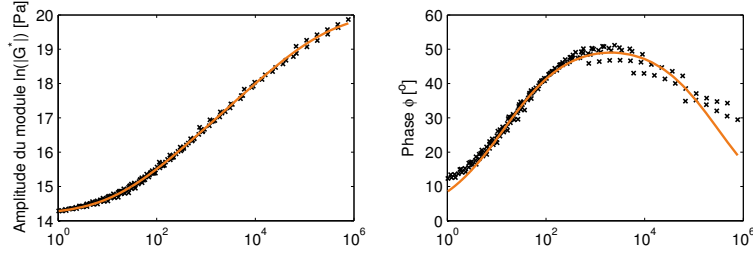


FIGURE 3.11 – Courbes maîtresses du module de cisaillement du Deltane 350 expérimentales (croix noires) et modélisées par un modèle fractionnaire de Zener (trait plein orange).

paramètres. Les paramètres optimisés pour ce modèle sont les suivants :

$$G_0 = 1.4 \text{ MPa}, \quad G_\infty = 0.54 \text{ GPa}, \quad \tau = 0.52 \mu\text{s}, \quad \alpha = 0.59. \quad (3.29)$$

Ce sont les paramètres qui seront utilisés dans le reste de la thèse pour modéliser le comportement du Deltane 350. Les paramètres estimés à partir de l'équation (3.28) sont de l'ordre de ceux optimisés :

$$G_0 = 1.6 \text{ MPa}, \quad G_\infty = 0.37 \text{ GPa}, \quad \tau = 6.85 \mu\text{s}, \quad \alpha = 0.63. \quad (3.30)$$

On peut noter que l'ordre de la dérivation  $\alpha$  est assez proche de 0.5, intervenant dans l'équation (3.20).

#### 3.3.3 Propriétés asymptotiques

Dans les parties suivantes de cette thèse, les structures sandwich avec matériau viscoélastique seront étudiées jusqu'à quelques kHz. Afin de limiter l'erreur aux bords de la bande de fréquence, l'identification des paramètres des modèles viscoélastiques a été réalisée à partir des courbes maîtresses du matériau sur une gamme de fréquence plus large :  $[1 - 7.7 \cdot 10^5] \text{ Hz}$ . Au cas où lors d'une excitation quelconque, des modes situés hors de cette bande seraient sollicités, il est important de s'assurer des propriétés asymptotiques des modèles identifiés.

Pour chaque modèle viscoélastique étudié, les limites asymptotiques du module sont déterminées. Pour les modèles de Maxwell généralisé, GHM et ADF, l'analyse est réalisée sur les modèles de meilleure approximation, i.e. à 5 séries.

## 3.4. CONCLUSION

---

La figure 3.12 montre que les propriétés asymptotiques sont équivalentes pour les quatre modèles étudiés. On peut tout de même noter des variations moins abruptes de l'amplitude du module aux bords de la bande de fréquence expérimentale pour le modèle fractionnaire de Zener.

### 3.3.4 Application au module de compressibilité du Deltane 350

Au vu des résultats pour le module de cisaillement, seul le modèle fractionnaire de Zener est identifié à partir des courbes maîtresses du module de compressibilité du Deltane 350. Les résultats sont présentés figure 3.13 et les coefficients optimisés sont les suivants :

$$K_0 = 1.95 \text{ GPa}, \quad K_\infty = 8.3 \text{ GPa}, \quad \tau = 0.15 \text{ } \mu\text{s}, \quad \alpha = 0.36. \quad (3.31)$$

Le modèle fractionnaire permet également de bien représenter la dépendance fréquentielle du module de compressibilité, avec des propriétés asymptotiques cohérentes (figure 3.14). On note que l'ordre de dérivation obtenu pour le module de compressibilité est bien inférieur à celui calculé pour le module de cisaillement. Ceci peut s'expliquer par une dépendance fréquentielle nettement plus faible du module de compressibilité (figure 3.15).

## 3.4 Conclusion

Plusieurs modèles viscoélastiques de la littérature ont été présentés pour modéliser la dépendance fréquentielle des modules de cisaillement et de compressibilité. Les paramètres de ces modèles ont été identifiés par une méthode des moindres carrés non linéaire à partir des courbes maîtresses expérimentales du Deltane 350 obtenues dans le chapitre précédent. Les résultats montrent que les modèles de Maxwell généralisé, GHM et ADF nécessitent un nombre de paramètres relativement important pour représenter correctement le comportement du Deltane 350. En revanche, le modèle fractionnaire de Zener donne une bonne approximation des courbes maîtresses avec seulement quatre paramètres. De plus, ces paramètres peuvent être facilement estimés à partir du module relaxé (module basses fréquences), du module non relaxé (module hautes fréquences) et de la détermination du pic de la phase du module. Les propriétés asymptotiques des modèles étudiés sont satisfaisantes.

### 3.4. CONCLUSION

---

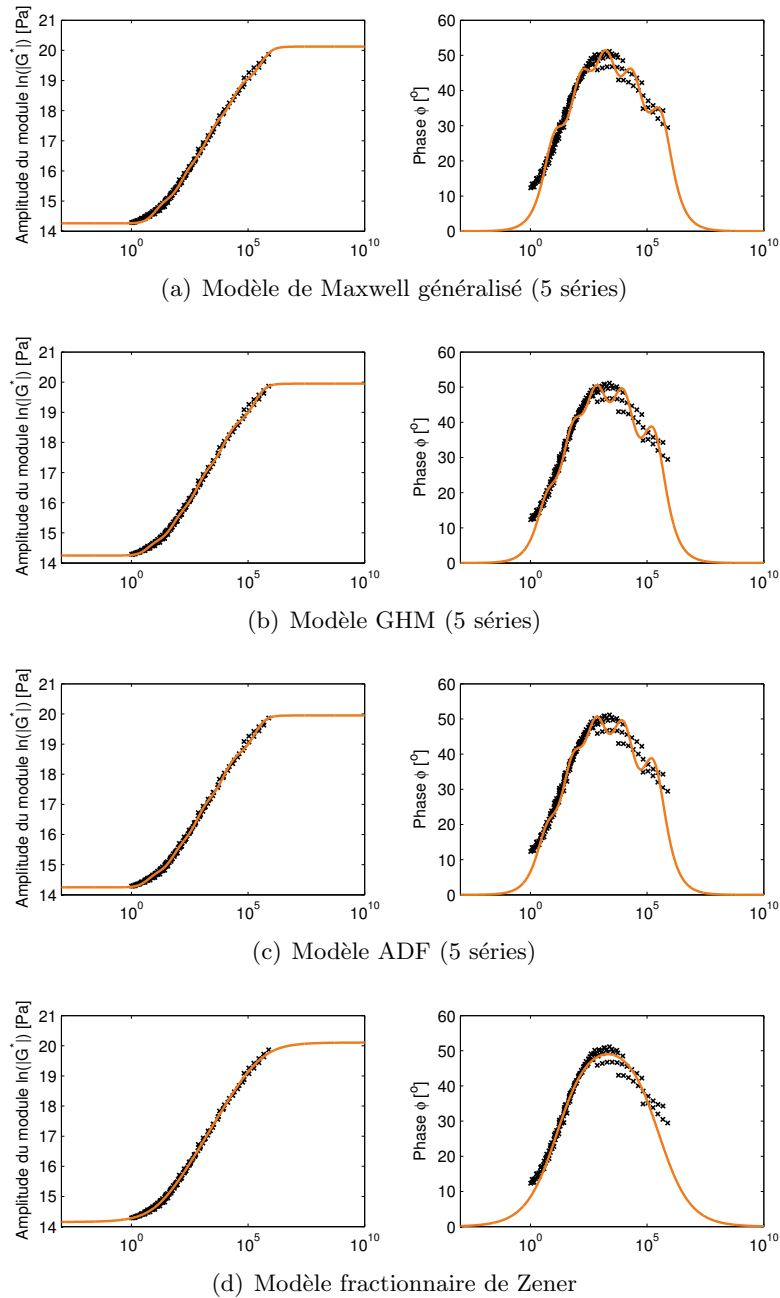


FIGURE 3.12 – Courbes maîtresses du module de cisaillement du Deltane 350 expérimentales (croix noires) et modélisées par un modèle ADF à une (a), deux (b), trois (c), quatre (d) et cinq (e) séries (trait plein orange) sur une large bande de fréquence.

### 3.4. CONCLUSION

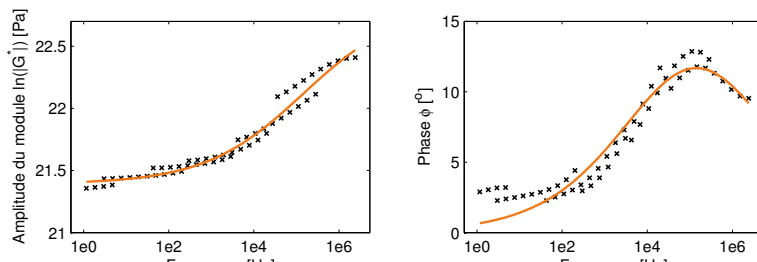


FIGURE 3.13 – Courbes maîtresses du module de compressibilité du Deltane 350 expérimentales (croix noires) et modélisées par un modèle fractionnaire de Zener (trait plein orange).

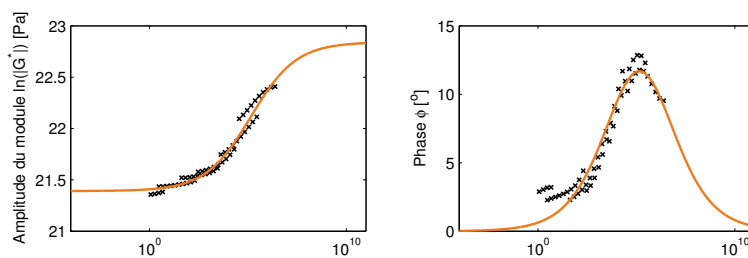


FIGURE 3.14 – Courbes maîtresses du module de compressibilité du Deltane 350 expérimentales (croix noires) et modélisées par un modèle fractionnaire de Zener (trait plein orange) sur une large bande de fréquences.

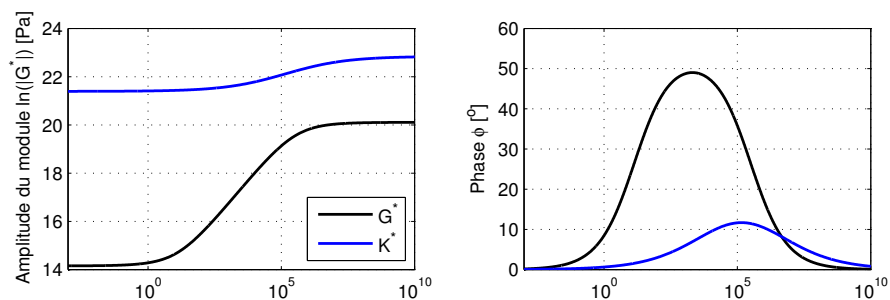


FIGURE 3.15 – Comparaison des modèles fractionnaires de Zener identifiés pour les modules de cisaillement et de compressibilité du Deltane 350.

### 3.4. CONCLUSION

---

Les logiciels de calcul par éléments finis offrent généralement la possibilité de décrire le comportement d'un matériau viscoélastique par un modèle de Maxwell généralisé. Ce n'est pas le cas pour le modèle fractionnaire de Zener. On peut noter également qu'en raison de la présence de dérivées fractionnaires, l'implémentation du modèle fractionnaire de Zener dans le domaine temporel est assez complexe [48, 60].

L'identification des paramètres du modèle fractionnaire de Zener a été réalisée pour les modules de cisaillement et de compressibilité. Les modèles ainsi identifiés en unidimensionnel seront utilisés dans la partie suivante pour construire une loi de comportement tridimensionnelle.

Deuxième partie

Modélisation par éléments finis de  
structures sandwich



# Introduction

Nous avons vu dans la partie précédente que lorsqu'un matériau viscoélastique était soumis à un champ de déformation, celui-ci dissipait une partie de l'énergie par chaleur. Dans cette partie, nous nous intéressons au comportement dynamique de structures munies de matériaux viscoélastiques.

Les matériaux viscoélastiques sont très largement utilisés pour leurs propriétés amortissantes, soit pour isoler une structure vibrante, soit pour contrôler les vibrations et le bruit généré. Dans les sous-marins, où il est capital de réduire la signature acoustique, les matériaux viscoélastiques sont très présents, comme le montre la Figure 3.16. On retrouve notamment des systèmes d'isolation vibratoire à travers de nombreuses suspensions (par exemple de l'appareil propulsif ou des équipements électroniques), ainsi que des structures sandwich (comme dans le dôme sonar, ou les pales de l'hélice) [68, 130]. Parmi les traitements passifs permettant de contrôler les vibrations d'une structure, on distingue différentes configurations : d'une part les revêtements simples, d'autre part les revêtements contraints. Les revêtements simples consistent à fixer une couche de matériau viscoélastique à la surface de la structure (Figure 3.17.(a)). Sous une déformation de flexion de la structure, le matériau viscoélastique, sollicité principalement en traction/compression, dissipe une partie de l'énergie. Dans le cas de revêtements contraints, la couche de matériau viscoélastique est intégrée à la structure vibrante, ou une couche de matériau rigide est ajoutée à la surface libre d'un revêtement simple (Figure 3.17.(b)). Ainsi, le matériau viscoélastique travaille principalement en cisaillement lorsque la structure se déforme. Pour obtenir un amortissement important avec un revêtement simple, le contraste de rigidité entre le matériau viscoélastique et la structure à laquelle il est appliqué doit être le plus faible possible. Or, les matériaux viscoélastiques ayant une rigidité élevée présentent un

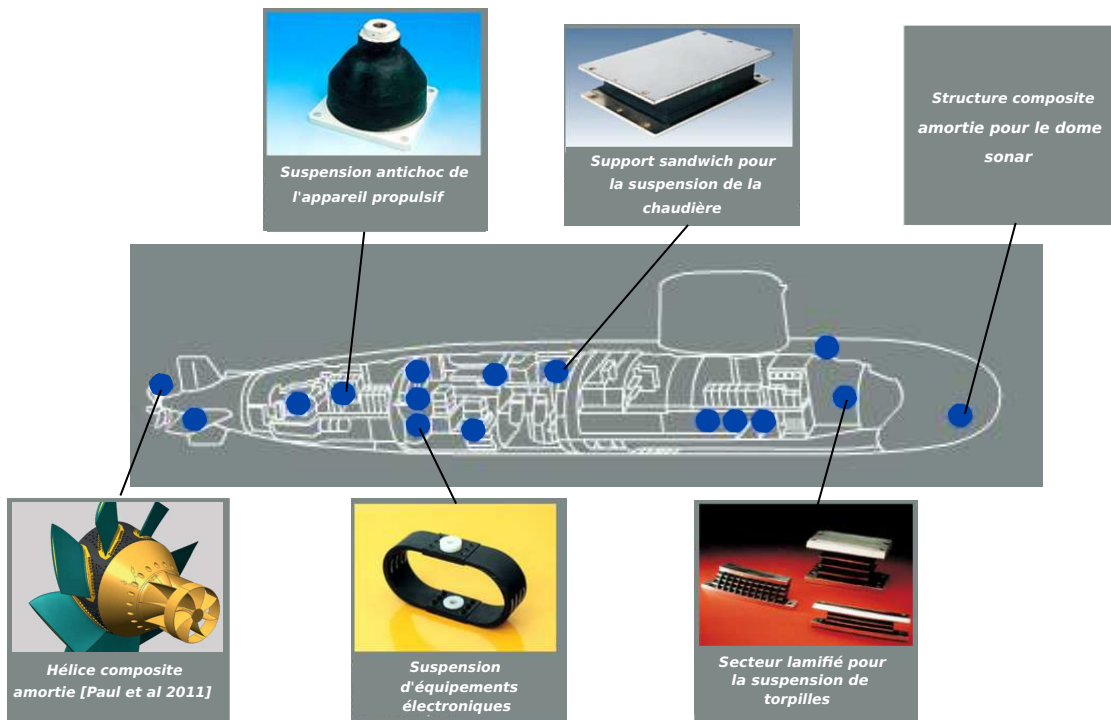


FIGURE 3.16 – Application de matériaux viscoélastiques dans un sous-marin [131].

faible amortissement. C'est pourquoi la deuxième configuration (figure 3.17.(b)) permet généralement d'aboutir à de meilleures performances. Ce travail se limite à l'étude des revêtements de type couche contrainte, pour amortir les vibrations et le bruit en basse fréquence.

La prédiction et l'optimisation des performances d'un traitement amortissant nécessitent un outil de calcul par éléments finis fiable. La modélisation numérique de structures munies de matériaux viscoélastiques fait l'objet d'une recherche active. Les éléments finis sont généralement choisis pour la modélisation de la structure et de la couche viscoélastique. La structure est classiquement maillée par des éléments finis 3D, ce qui permet de traiter des structures relativement massives, mais également des structures à géométrie complexe. L'objectif du premier chapitre de cette partie est de présenter les méthodes existantes de modélisation de couches viscoélastiques, ainsi que le code de calcul par éléments finis réalisé sous Matlab®.

Le deuxième chapitre s'attache à valider le modèle viscoélastique et le modèle éléments finis choisis par des comparaisons calculs/essais. L'influence des erreurs de mesure des

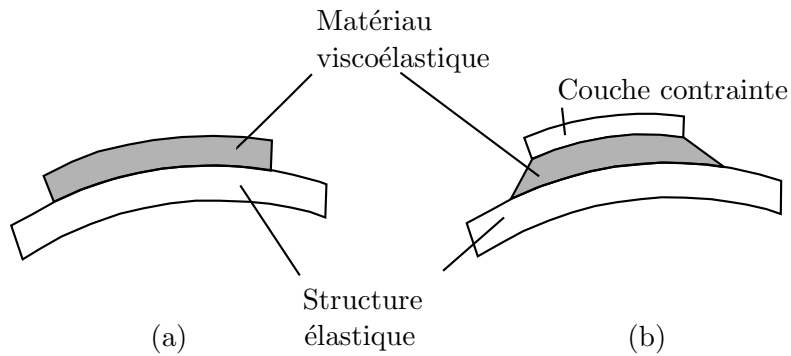


FIGURE 3.17 – Traitements viscoélastiques : revêtement simple ou couche libre (a), revêtement contraint ou couche contrainte (b).

propriétés mécaniques, ainsi que la validité de l'hypothèse classique de module de compressibilité constant sont étudiées.

Enfin, le troisième chapitre de cette partie met en évidence les limites d'utilisation des éléments 3D pour modéliser une couche viscoélastique de fine épaisseur dans un contexte d'optimisation structurelle. Deux éléments finis d'interface sont alors proposés et validés pour palier à cette difficulté.

---

## Chapitre 4

# Modélisation éléments finis de structures munies de matériaux viscoélastiques

### 4.1 Introduction

Le dimensionnement de structures intégrant une couche viscoélastique contrainte requiert un modèle prédictif capable de quantifier la réduction du niveau de vibration. La difficulté d'analyse de telles structures provient de la dépendance fréquentielle du matériau viscoélastique, ainsi que de la nécessité de bien représenter le cisaillement transverse dans l'épaisseur de la couche viscoélastique. Il existe diverses approches, analytiques ou numériques, permettant d'estimer l'amortissement induit par l'application du traitement passif. Celles-ci sont brièvement présentées dans la première section de ce chapitre.

Dans le cadre de cette thèse, un code de calcul par éléments finis a été entièrement développé dans l'environnement Matlab®. Ce choix de développer notre propre outil de calcul est motivé par :

- la liberté dans le choix des modèles utilisés, comme par exemple l'utilisation d'un modèle fractionnaire de Zener pour représenter le module complexe dépendant de la fréquence, ou la prise en compte des dépendances fréquentielles des modules de cisaillement et de compressibilité (contrairement à certains codes éléments finis commerciaux comme Nastran qui ne permettent de définir qu'un seul module dépendant de la fréquence);

- la facilité d’implémentation de nouvelles techniques numériques, telles que les éléments d’interface introduits dans le chapitre 6, ou les méthodes de réduction de modèle testées dans les chapitres 6 et 8.

Dans la deuxième section, la loi de comportement tridimensionnelle adoptée pour le matériau viscoélastique est décrite. La formulation variationnelle et la discrétisation éléments finis utilisant cette loi de comportement sont présentées.

Enfin, afin de valider le code de calcul par éléments finis développé, une comparaison avec le code Nastran est réalisée sur deux cas d’étude. Ceci fait l’objet de la troisième section de ce chapitre.

### 4.2 Modélisation de structures avec couche viscoélastique contrainte

Les structures munies de matériaux viscoélastiques font l’objet de nombreuses études. En raison d’importants effets de cisaillement transverse dus à la différence des propriétés mécaniques entre couches, il est difficile de prédire le comportement global de ce type de structures. Une grande partie de la littérature est dédiée aux développements de théories pour ce type de structures, ainsi qu’à des études de leur comportement statique et dynamique à travers des méthodes analytiques ou numériques.

Concernant les méthodes analytiques, les premières estimations des facteurs de perte et des fréquences propres de structures intégrant une couche viscoélastique sont réalisées par Ross, Ungar et Kerwin [89, 151]. Ils présentent une approche théorique de poutres sandwich à cœur viscoélastique simplement appuyées, en utilisant un module complexe constant pour modéliser le comportement viscoélastique. Des extensions de leurs travaux ont été réalisées par DiTaranto [49], Mead et Markus [112], Yan et Dowell [195] et Rao [143] pour traiter le cas de poutres ou de plaques sandwich avec d’autres conditions aux limites. Des méthodes analytiques de propagation d’ondes dans les structures sandwich ont également été proposées dans [11, 63, 181]. Les solutions analytiques développées étant limitées à l’étude de poutres ou de plaques, avec des conditions aux limites relativement simples, l’applicabilité de ces approches pour prédire la réponse amortie d’une structure sandwich est réduite. En revanche, ces solutions analytiques sont couramment utilisées pour valider

## 4.2. MODÉLISATION DE STRUCTURES AVEC COUCHE VISCOÉLASTIQUE CONTRAINTE

---

les modèles éléments finis et pour calculer les propriétés mécaniques amortissantes d'un matériau à partir d'essais de vibration sur une structure sandwich [8, 120].

Le développement de la méthode des éléments finis a permis d'étudier des structures pour des géométries, des chargements et des conditions aux limites plus complexes. Pour modéliser correctement les effets de cisaillement dans une structure amortie par un matériau viscoélastique, la continuité des contraintes transverses doit être assurée aux interfaces entre la structure élastique et le matériau amortissant. La littérature fait montre d'une grande diversité d'approches pour analyser le comportement de structures composites, comme celles qui nous intéressent. Un état de l'art des modèles éléments finis de type poutres/plaques/coques sandwich est donné dans [28, 87, 146]. Les théories à la base de ces approches peuvent être classées en trois catégories : la théorie de couche équivalente (ESL - *Equivalent Single-Layer*), la théorie de couches discrètes (LW - *Layer-Wise*), et la théorie en zig-zag (qui peut être vue comme un cas particulier des méthodes de type couches discrètes). Les modèles de couche équivalente traitent la structure sandwich comme une unique couche statiquement équivalente [147]. Les déplacements et les déformations sont continus dans l'épaisseur, ce qui conduit alors à des discontinuités du champ de contrainte aux interfaces. Les modèles de couches discrètes, où le déplacement de chaque couche est représenté, permettent d'éviter ce problème [95]. Cependant, le nombre de degrés de liberté étant dépendant du nombre de couches considérées, la taille de ces modèles augmente rapidement. Dans le cas d'une structure avec une couche viscoélastique, une théorie zig-zag est classiquement utilisée. Les déplacements sont exprimés en fonction de degrés de liberté à la surface moyenne de la structure sandwich, afin de satisfaire la continuité des contraintes transverses aux interfaces. Cette approche, introduite par Lekhnitski [97] a donné lieu à de nombreuses théories, dont une grande partie sont analysées par Carrera [28]. La recherche de nouveaux modèles éléments finis sandwich est encore active dans ce domaine, comme le prouvent les récents articles combinant les modèles de couche équivalente avec une théorie zig-zag [31, 179].

Une autre stratégie de modélisation consiste à utiliser des éléments solides pour la couche viscoélastique et des éléments coques pour les faces élastiques. Ainsi, plusieurs auteurs [82, 137, 176] modélisent la couche viscoélastique par des hexaèdres à 8 nœuds, connectés

aux éléments coques des faces élastiques. Plusieurs éléments peuvent être nécessaires dans l'épaisseur afin de représenter correctement les déformations de cisaillement dans la couche viscoélastique. Pour palier à cette difficulté, Alvelid et Enelund [6] proposent un élément fini basé sur le développement du champ de déplacement dans la direction de l'épaisseur en séries de puissance. Cet élément peut être connecté aux éléments coques modélisant la structure élastique.

Les méthodes citées ci-dessus sont adaptées à des structures minces ou élancées, telles que celles rencontrées dans des applications automobiles ou aéronautiques, où la modélisation de la structure se fait couramment par des éléments coques. En revanche, pour certaines applications, il est nécessaire de modéliser la structure par des éléments solides. Par exemple, Det Norske Veritas recommande l'utilisation d'éléments solides quadratiques pour représenter la géométrie curviligne complexe et les variations d'épaisseurs dans une pale de propulseur [47]. Dans [167], des éléments solides sont également utilisés pour mailler un vilebrequin à contrepoids amortis par un matériau amortissant.

Dans ce travail, nous nous plaçons dans le cas général où la géométrie de la structure nécessite une modélisation tridimensionnelle. La couche viscoélastique est alors généralement modélisée également par des éléments solides. Nous verrons dans le chapitre 6 une autre manière de la modéliser, dans le cas où l'épaisseur de la couche viscoélastique est faible devant les autres dimensions.

### **4.3 Modélisation d'une structure munie de matériaux visco-élastiques**

Dans cette section, le modèle éléments finis développé pour la résolution d'un problème de dynamique amortie dans la domaine fréquentiel est présenté. Dans un premier temps, la loi de comportement tridimensionnelle pour le matériau viscoélastique est décrite. Dans un deuxième temps, on rappelle la formulation variationnelle aboutissant au système à résoudre. Enfin, une étude est réalisée sur l'ordre des éléments finis à utiliser pour modéliser la couche viscoélastique.

### 4.3.1 Loi de comportement tridimensionnelle des matériaux viscoélastiques

Dans le domaine fréquentiel, la loi de comportement unidimensionnelle fait intervenir un module complexe dépendant de la fréquence (équation (1.11)). Cette formulation peut être étendue à une approche tridimensionnelle en introduisant des quantités tensorielles et en décrivant le comportement viscoélastique par une loi de Hooke dont les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  sont complexes et dépendants de la fréquence :

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\omega) = 2\mu^*(\omega)\boldsymbol{\epsilon}^*(\omega) + \lambda^*(\omega)\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^*(\omega))\mathbf{1}, \quad (4.1)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}^*(\omega)$  et  $\boldsymbol{\epsilon}^*(\omega)$  sont respectivement les transformées de Fourier du champ de contrainte et de déformation écrits en notation de Voigt :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^*(\omega) &= [\sigma_{11}^*, \sigma_{22}^*, \sigma_{33}^*, \sigma_{23}^*, \sigma_{13}^*, \sigma_{12}^*]^T, \\ \boldsymbol{\epsilon}^*(\omega) &= [\epsilon_{11}^*, \epsilon_{22}^*, \epsilon_{33}^*, 2\epsilon_{23}^*, 2\epsilon_{13}^*, 2\epsilon_{12}^*]^T, \end{aligned} \quad (4.2)$$

et  $\mathbf{1}$  est le tenseur unitaire d'ordre 2 écrit en notations de Voigt :

$$\mathbf{1} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (4.3)$$

La matrice d'élasticité est obtenue de la manière suivante :

$$\mathbb{C}^*(\omega) = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^*(\omega)}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^*(\omega)}. \quad (4.4)$$

La partie sphérique est séparée de la partie déviatorique des déformations comme ce qui est fait par Kaliske [86] dans le domaine temporel. L'expression suivante de la matrice d'élasticité pour un matériau viscoélastique linéaire isotrope est obtenue :

$$\mathbb{C}^*(\omega) = K^*(\omega)[\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] + 2G^*(\omega) \left[ \mathbb{1} - \frac{1}{3}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right], \quad (4.5)$$

avec  $\mathbb{1}$  les tenseurs unitaires d'ordre 4, qui s'écrit en notations de Voigt sous la forme suivante :

$$\mathbb{1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

### 4.3. MODÉLISATION D'UNE STRUCTURE MUNIE DE MATÉRIAUX VISCOÉLASTIQUES

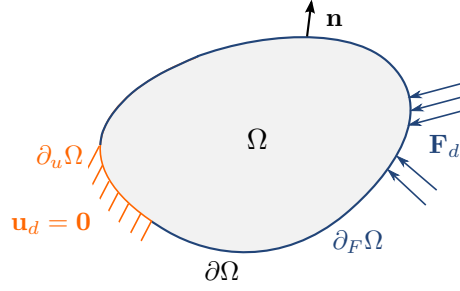


FIGURE 4.1 – Problème continu considéré.

La partie sphérique est portée par le module de compressibilité  $K^*(\omega) = \lambda^*(\omega) + \frac{2}{3}\mu^*(\omega)$  et la partie déviatorique par le module de cisaillement  $G^*(\omega) = \mu^*(\omega)$ . Les modules complexes  $K^*(\omega)$  et  $G^*(\omega)$  sont ceux obtenus à l'issue des essais de caractérisation et de modélisation présentés dans la partie 1. L'équation (4.5) peut être réécrite sous forme matricielle en écrivant les tenseurs d'ordre 2 et 4 en notation de Voigt :

$$\mathbb{C}^*(\omega) = K^*(\omega) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + G^*(\omega) \begin{bmatrix} 4/3 & -2/3 & -2/3 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 4/3 & -2/3 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & -2/3 & 4/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

#### 4.3.2 Formulation éléments finis

Considérons une structure  $\Omega$  à laquelle des conditions aux limites en déplacement sont imposées ( $\mathbf{u} = \mathbf{u}_d$  sur  $\partial_u\Omega$ ). On cherche à connaître le champ de déplacement de la structure sous l'effet d'une sollicitation harmonique d'amplitude  $\mathbf{F}_d$  appliquée sur  $\partial_F\Omega$  (voir figure 4.1). En l'absence d'effort volumique, la dynamique fréquentielle de la structure est gouvernée par le système d'équations :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_d = 0 & \text{sur } \partial_u\Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_d & \text{sur } \partial_F\Omega, \end{cases} \quad (4.8)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal extérieur à  $\partial\Omega$ ,  $\rho$  la densité du matériau, et  $\omega$  la pulsation harmonique.

On définit  $C_{\mathbf{u}}$  un ensemble de fonctions suffisamment régulières et  $C_{\mathbf{u}}^* = \{\delta \mathbf{u} \in C_{\mathbf{u}} |$

### 4.3. MODÉLISATION D'UNE STRUCTURE MUNIE DE MATÉRIAUX VISCOÉLASTIQUES

---

$\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  sur  $\partial_u \Omega$ } l'espace des fonctions tests admissibles. La formulation variationnelle est obtenue en multipliant la première équation du système (4.8) par une fonction test  $\delta \mathbf{u} \in C_{\mathbf{u}}^*$ , puis en intégrant sur  $\Omega$  :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \rho \omega^2 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in C_{\mathbf{u}}^*. \quad (4.9)$$

En intégrant par parties et en prenant en compte les conditions aux limites, l'équation (4.9) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{grad}(\delta \mathbf{u}) d\Omega - \rho \omega^2 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega = \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \delta \mathbf{u} dS, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in C_{\mathbf{u}}^*. \quad (4.10)$$

La structure est découpée en  $n_E$  éléments finis  $\Omega_e$  (opération de maillage). Le déplacement en tout point  $M$  d'un élément  $\mathbf{u}_e(M)$  est approximé à partir d'une base de fonctions d'interpolation  $N_k$  (fonctions de forme) en s'appuyant sur les déplacements nodaux  $U_e$  [81, 198] :

$$\mathbf{u}_e(M) = \mathbf{N} \mathbf{U}_e, \quad (4.11)$$

où la matrice  $\mathbf{N}$  contient les fonctions de forme  $N_k$  :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & \dots & N_{n_N} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N_1 & \dots & N_{n_N} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & N_1 & \dots & N_{n_N} \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

et  $\mathbf{U}_e$  contient les déplacements nodaux dans les trois directions :

$$\mathbf{U}_e = [U_x^1 \quad \dots \quad U_x^{n_N} \quad U_y^1 \quad \dots \quad U_y^{n_N} \quad U_z^1 \quad \dots \quad U_z^{n_N}]^T, \quad (4.13)$$

où  $n_N$  est le nombre de nœuds de l'élément considéré.

Les déformations élémentaires  $\boldsymbol{\epsilon}_e$  sont exprimées en fonction du déplacement  $\mathbf{u}_e$  à partir de l'opérateur gradient  $\mathbf{D}$  :

$$\boldsymbol{\epsilon}_e = \mathbf{D} \mathbf{u}_e, \quad (4.14)$$

avec

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

### 4.3. MODÉLISATION D'UNE STRUCTURE MUNIE DE MATÉRIAUX VISCOÉLASTIQUES

---

En introduisant l'équation (4.11) dans (4.14), les déformations élémentaires sont exprimées directement en fonction du vecteur des degrés de libertés élémentaires :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{U}_e, \quad (4.16)$$

où  $\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{N}$  est la matrice du gradient discrétisé. Après discrétisation des différents termes de l'équation (4.10) par la méthode des éléments finis, le système matriciel suivant est obtenu :

$$[\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}] \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (4.17)$$

avec  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur,  $\mathbf{M}$  la matrice de masse,  $\mathbf{F}$  le vecteur des sollicitations et  $\mathbf{U}$  le vecteur des degrés de liberté. Les matrices de masse et de raideur sont obtenues par assemblage de matrices élémentaires :

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \sum_{k=1}^{n_E} \mathbf{K}_e^k \quad \mathbf{M} = \mathbf{A} \sum_{k=1}^{n_E} \mathbf{M}_e^k, \quad (4.18)$$

L'expression des matrices élémentaires est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega_e, \\ \mathbf{M}_e &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} d\Omega_e, \end{aligned} \quad (4.19)$$

où  $\mathbf{C}$  est la matrice de comportement. Dans le cas d'une structure munie de matériaux viscoélastiques, la matrice de raideur devient complexe et dépendante de la fréquence :

$$\mathbf{K}^*(\omega) = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_V^*(\omega), \quad (4.20)$$

où l'indice  $E$  renvoie à la partie élastique de la structure et l'indice  $V$  renvoie à la partie viscoélastique de la structure. En utilisant la loi de comportement du matériau viscoélastique décrite dans l'équation (4.5), la matrice de raideur associée à la partie viscoélastique peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{K}_V^*(\omega) = K^*(\omega)\mathbf{K}_V^s + G^*(\omega)\mathbf{K}_V^d, \quad (4.21)$$

où  $\mathbf{K}_V^s$  et  $\mathbf{K}_V^d$  sont des matrices constantes associées respectivement aux parties sphérique et déviatorique de la matrice de raideur viscoélastique. Le système matriciel à résoudre s'écrit donc :

$$\left[ \mathbf{K}_E + K^*(\omega)\mathbf{K}_V^s + G^*(\omega)\mathbf{K}_V^d - \omega^2\mathbf{M} \right] \mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (4.22)$$

### 4.3. MODÉLISATION D'UNE STRUCTURE MUNIE DE MATÉRIAUX VISCOÉLASTIQUES

---

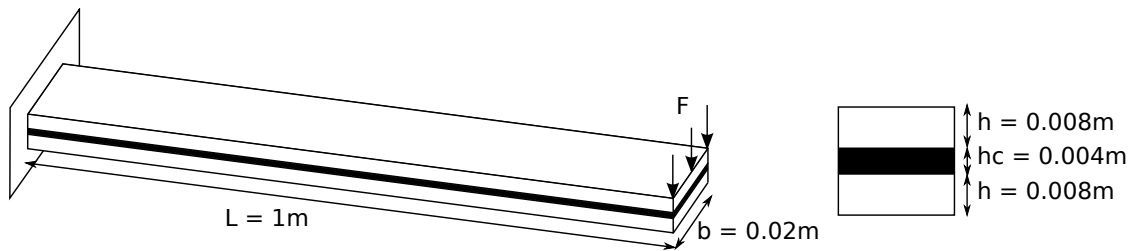


FIGURE 4.2 – Géométrie de la structure étudiée pour l'analyse comparative des éléments concernant le blocage en cisaillement.

Cette écriture du système matriciel présente l'avantage de faire intervenir la dépendance fréquentielle des modules de cisaillement et de compressibilité complexes  $G^*(\omega)$  et  $K^*(\omega)$  en facteur de matrices constantes. De cette manière, les matrices de raideur n'ont pas à être recalculées pour chaque fréquence.

#### 4.3.3 Choix des éléments finis

Dans ce travail, nous avons choisi de modéliser la structure par des éléments solides. Cependant, l'utilisation d'éléments finis solides pour la modélisation de la couche viscoélastique peut entraîner un phénomène de blocage [25, 105], et conduire à une réponse non physique. Le but de cette section est de déterminer quel type d'éléments finis il est préférable d'utiliser pour éviter ce phénomène.

Une étude comparative des éléments finis est réalisée pour une poutre encastree-libre, excitée à son extrémité libre par une sollicitation par force linéique de  $1/b$  N (voir figure 4.2). Les faces élastiques sont en acier et la couche viscoélastique est en Deltane 350. Les propriétés mécaniques des matériaux sont rappelées dans le tableau 4.1. Plusieurs éléments finis sont testés : hexaèdres linéaires à 8 nœuds (H8), hexaèdres quadratiques à 20 nœuds (H20), tétraèdres linéaires à 4 nœuds (T4) et tétraèdres quadratiques à 10 nœuds (T10) ; ainsi que plusieurs maillages, en faisant varier la longueur caractéristique des éléments finis de  $l_c = 0.02\text{m}$  à  $l_c = 0.002\text{m}$  (tableau 4.1). Pour le maillage correspondant à  $l_c = 0.002\text{m}$ , seuls les éléments linéaires sont testés. Pour chaque élément fini et chaque maillage, la réponse statique de la structure est calculée. Les résultats sont présentés sur la figure 4.3, et comparés à la solution convergée obtenue avec des éléments H20 pour le maillage 5.

On remarque que les éléments finis linéaires conduisent à des phénomènes de blo-

### 4.3. MODÉLISATION D'UNE STRUCTURE MUNIE DE MATÉRIAUX VISCOÉLASTIQUES

TABLE 4.1 – Propriétés mécaniques des matériaux

| Matériau                        | Module de cisaillement  | Module de compressibilité   | Masse volumique             |
|---------------------------------|---|---|-----------------------------|
| Acier                           | $G = 8.08 \cdot 10^{10} \text{Pa}$  | $K = 1.75 \cdot 10^{11} \text{Pa}$  | $\rho = 7800 \text{kg/m}^3$ |
| Viscoélastique<br>(Deltane 350) | $G^*(\omega) = \frac{G_0 + G_\infty(i\omega\tau_G)^{\alpha_G}}{1 + (i\omega\tau_G)^{\alpha_G}}$ $G_0 = 1.4 \text{MPa}$ $G_\infty = 0.54 \text{GPa}$ $\tau_G = 0.52 \mu\text{s}$ $\alpha_G = 0.59$ | $K^*(\omega) = \frac{K_0 + K_\infty(i\omega\tau_K)^{\alpha_K}}{1 + (i\omega\tau_K)^{\alpha_K}}$ $K_0 = 1.95 \text{GPa}$ $K_\infty = 8.3 \text{GPa}$ $\tau_K = 0.15 \mu\text{s}$ $\alpha_K = 0.36$ | $\rho = 1460 \text{kg/m}^3$ |

TABLE 4.2 – Résolutions spatiales des maillages testés.  $N_x$ ,  $N_y$  indiquent le nombre d'éléments pris dans la direction  $x$  et  $y$ .  $N_z^f$  est le nombre d'éléments considérés dans l'épaisseur de chaque face élastique et  $N_z^v$  celui dans l'épaisseur de la couche viscoélastique.

| Maillage | $l_c$ | $N_x$ | $N_y$ | $N_z^f$ | $N_z^v$ |
|----------|-------|-------|-------|---------|---------|
| 1        | 0.02  | 50    | 1     | 1       | 1       |
| 2        | 0.01  | 100   | 2     | 1       | 1       |
| 3        | 0.008 | 125   | 3     | 2       | 1       |
| 4        | 0.006 | 167   | 4     | 2       | 1       |
| 5        | 0.004 | 250   | 5     | 2       | 1       |
| 6        | 0.002 | 500   | 10    | 4       | 2       |

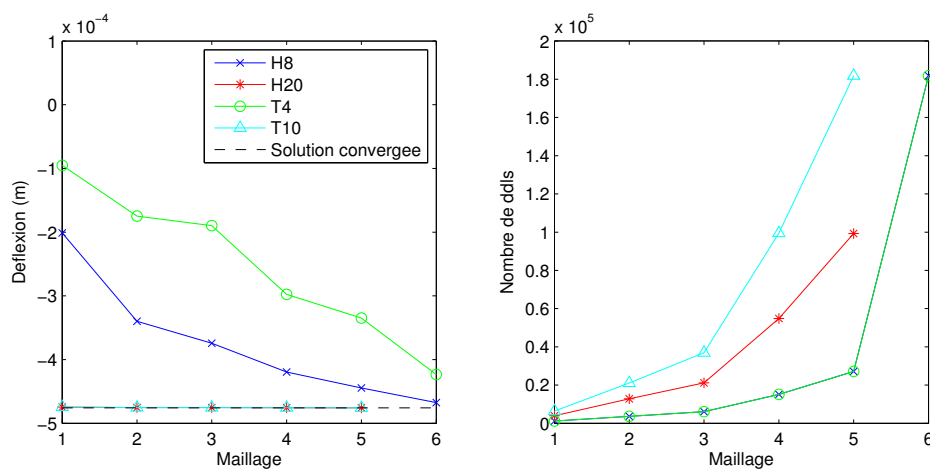


FIGURE 4.3 – Etude comparative des réponses statiques de la poutre encastree-libre (à gauche), et comparaison du nombre de degré de liberté (à droite) pour chaque élément fini et chaque maillage considéré.

cage en cisaillement caractérisés par une réponse trop raide de la structure. Les fonctions de forme de ces éléments ne permettent pas d'approximer correctement la distribution de déformation dans l'épaisseur associée à la flexion. La solution semble converger en raffinant suffisamment le maillage (figure 4.3). Les éléments quadratiques en revanche permettent une très bonne approximation de la solution même pour des maillages relativement grossiers : le maillage 1 avec des H20 ou des T10 conduit à une erreur inférieure à 0.1% sur la réponse statique. Bien que les éléments quadratiques augmentent significativement la taille du modèle, à nombre de degré de liberté égal ils sont plus précis, ce qui justifie leur utilisation dans ce travail pour la modélisation de structures munies de matériaux viscoélastiques.

Les éléments H20 et T10 donnent des résultats équivalents. Cependant, on peut également noter sur la figure 4.3 que pour une discrétisation donnée, un maillage de la structure par des éléments T10 contient plus de nœuds (donc plus de degrés de liberté) qu'un maillage utilisant des éléments H20. C'est pourquoi, lorsque cela est possible, il est préférable d'utiliser les éléments H20. Néanmoins, pour des structures à géométrie complexe, le maillage est très souvent généré automatiquement avec des éléments T10.

## 4.4 Validation du code de calcul développé

Afin de valider le code éléments finis développé, une comparaison avec le code Nastran a été réalisée sur deux cas d'étude.

### 4.4.1 Cas d'étude 1 : poutre sandwich encastree-libre

Dans le premier cas d'étude, la réponse fréquentielle d'une poutre sandwich encastree-libre est étudiée. La structure est celle de la figure 4.2 en prenant pour dimensions :  $L = 1\text{m}$ ,  $b = 0.1\text{m}$ ,  $h = 0.048\text{m}$  et  $h_c = 0.004\text{m}$ . Celle-ci est excitée en flexion par une sollicitation harmonique unitaire.

Comme Nastran ne permet de définir qu'un seul module dépendant de la fréquence, le module de compressibilité est considéré comme réel et constant :  $K^*(\omega) = 2.22\text{ GPa}$ . Pour prendre en compte les variations fréquentielles du module de cisaillement, une table de valeurs, générée à partir du modèle viscoélastique (dont les paramètres sont rappelés dans

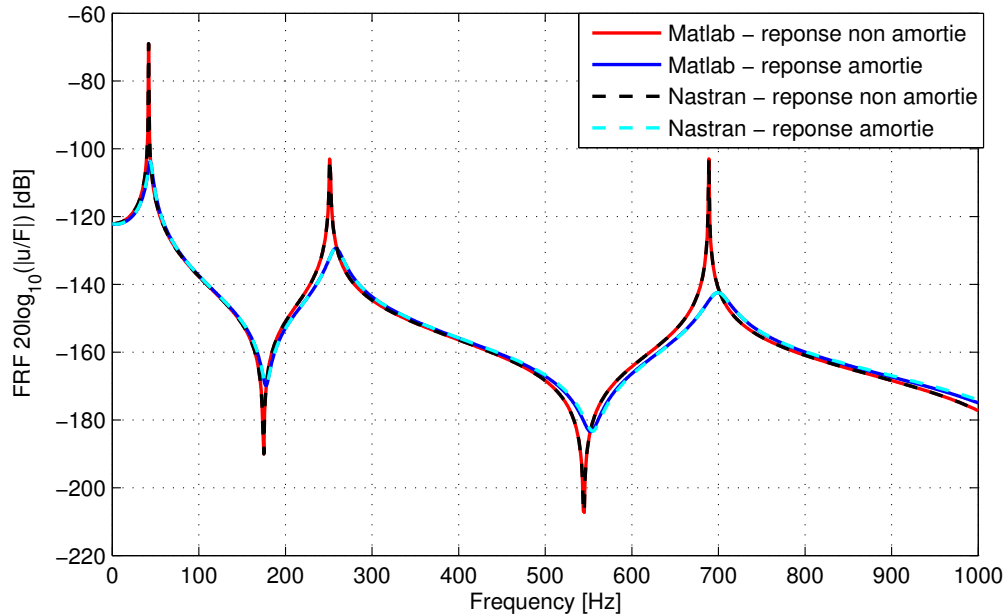


FIGURE 4.4 – Courbes de réponses en fréquence de la poutre amortie et non amortie calculées par le code de calcul développé sous Matlab et par Nastran.

le tableau 4.1), est donnée en entrée dans Nastran.

La structure est maillée par des tétraèdres quadratiques à 10 nœuds. La réponse fréquentielle de la poutre amortie et non amortie (module de cisaillement du matériau viscoélastique pris constant :  $G^* = G_0$ ) est calculée par le code de calcul développé sous Matlab et par Nastran, pour le même maillage éléments finis sur la plage de fréquence  $[0 - 1000]$ Hz. Dans les deux cas, les courbes de réponse en fréquence calculées par une méthode directe sont superposées (figure 4.4).

#### 4.4.2 Cas d'étude 2 : modélisation d'une tuyère

Un modèle simple de tuyère de propulseur dont la géométrie est donnée sur la figure 4.5 constitue le deuxième cas d'étude. La structure est en acier et une couche viscoélastique est introduite au cœur de la partie cylindrique (figure 4.6). Les propriétés des matériaux sont les mêmes que pour le premier cas d'étude. La structure est encastree au niveau de l'intersection des renforts et un effort harmonique ponctuel et unitaire est appliqué (figure 4.6). La structure est maillée par des tétraèdres quadratiques à 10 nœuds. La comparai-

#### 4.4. VALIDATION DU CODE DE CALCUL DÉVELOPPÉ

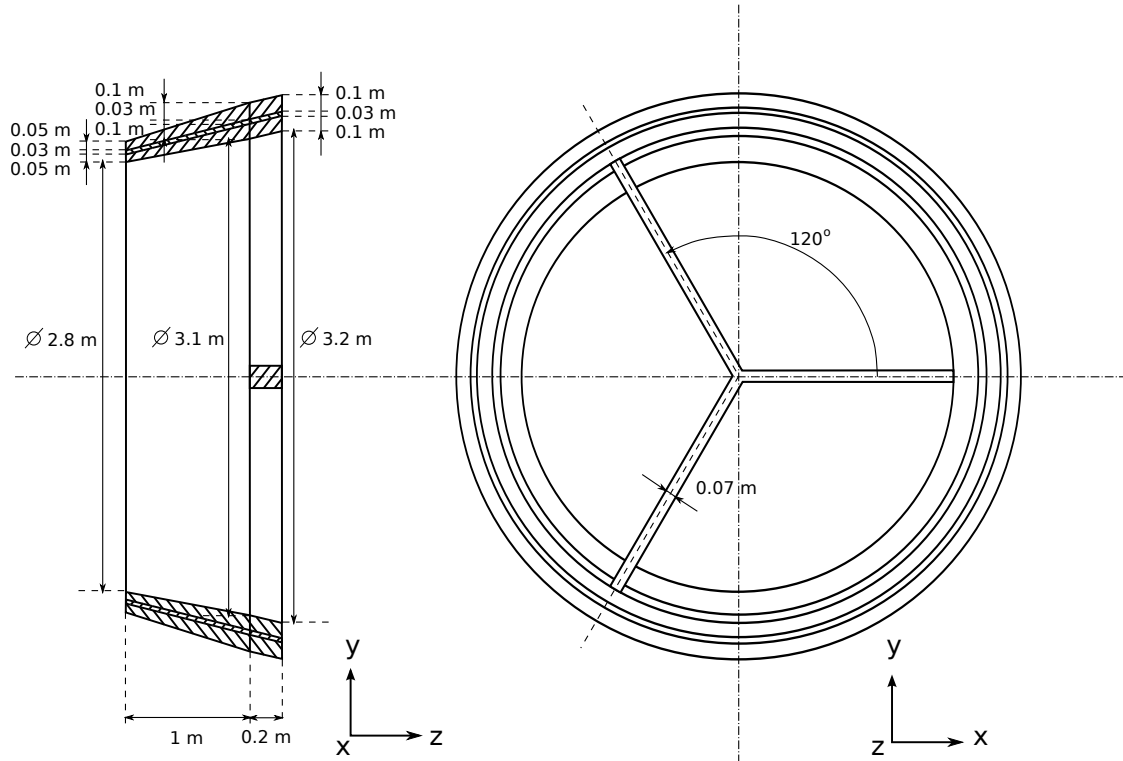


FIGURE 4.5 – Géométrie de la structure étudiée.



FIGURE 4.6 – Maillage éléments finis de la structure étudiée.

## 4.5. CONCLUSION

---

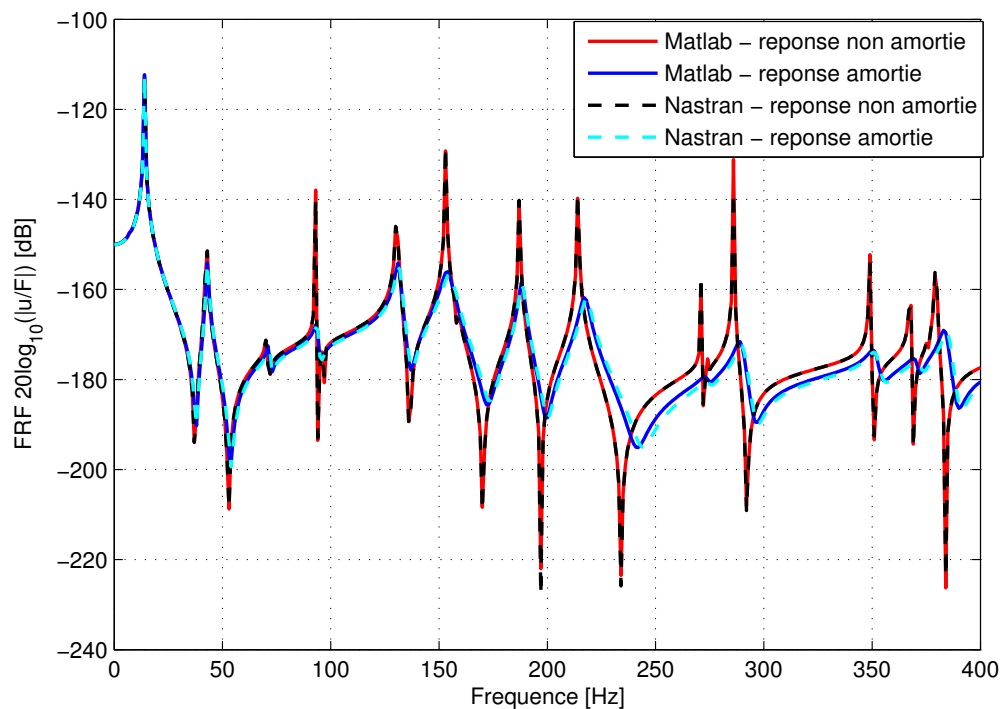


FIGURE 4.7 – Courbes de réponses en fréquence de la tuyère amortie et non amortie calculées par le code de calcul développé sous Matlab et par Nastran.

son des réponses fréquentielles calculées par le code de calcul développé et Nastran est présentée sur la figure 4.7. On remarque une très bonne superposition des courbes.

Les résultats obtenus pour les deux cas d'étude permettent de valider le code de calcul par éléments finis développé sous Matlab dans le cadre de la thèse. Par la suite, tous les résultats présentés sont obtenus à partir du code développé.

## 4.5 Conclusion

Ce chapitre décrit la méthodologie de modélisation adoptée dans le code de calcul par éléments finis développé pour l'étude de structures munies de matériaux viscoélastiques :

- La structure élastique ainsi que la couche viscoélastique sont modélisées par des éléments solides, de manière à pouvoir traiter des structures à géométrie complexe.

#### 4.5. CONCLUSION

---

De plus, les éléments finis utilisés sont quadratiques (tétraédriques ou hexaédriques) afin d'éviter les problèmes de blocage en cisaillement.

- La loi de comportement du matériau viscoélastique est écrite sous la forme d'une somme de composantes déviatorique et sphérique. Cette approche permet d'aboutir à un système matriciel à résoudre ne comprenant que des matrices réelles et constantes. La dépendance fréquentielle des modules de cisaillement et de compressibilité est prise en compte par des modules complexes en facteur de ces matrices.

Le code de calcul développé a été validé par comparaison avec Nastran des réponses fréquentielles de deux structures amorties par une couche viscoélastique.

## 4.5. CONCLUSION

---

# Chapitre 5

## Validation expérimentale des modèles développés

### 5.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de valider les résultats de la partie I, concernant la caractérisation et la modélisation du matériau viscoélastique, et du chapitre précédent, concernant la modélisation d'une structure munie de matériaux viscoélastiques. Pour cela, une comparaison calculs/essais du comportement dynamique d'une structure amortie par une couche viscoélastique est réalisée.

La structure retenue pour l'étude est une poutre sandwich, en raison de son faible coût de mise en œuvre et de sa facilité de réalisation. La couche viscoélastique prise en sandwich entre deux lames d'acier inoxydable 304L est en Deltane 350, le matériau étudié dans la partie I. Deux géométries sont testées :

- $L = 0.26\text{m}$ ,  $b = 0.026\text{m}$ ,  $h_a = 2\text{mm}$ ,  $h_b = 1\text{mm}$  et  $h_c = 0.9\text{mm}$  ,
- $L = 0.26\text{m}$ ,  $b = 0.052\text{m}$ ,  $h_a = 2\text{mm}$ ,  $h_b = 1\text{mm}$  et  $h_c = 0.9\text{mm}$  ,

où  $L$  et  $b$  sont respectivement la longueur et la largeur de la poutre,  $h_a$  et  $h_b$  sont les épaisseurs des lames d'acier et  $h_c$  l'épaisseur de la couche viscoélastique. Pour chaque géométrie, les résultats sont comparés sur la plage de fréquence  $[0 - 400]\text{Hz}$ .

Dans un premier temps, le protocole expérimental mis en œuvre, ainsi que la modélisation du système sont décrits. Dans un deuxième temps, après avoir introduit les critères de comparaison choisis, les résultats expérimentaux et numériques sont présentés, puis comparés. Enfin, dans un troisième temps, les écarts observés sont analysés en étudiant l'influence

de plusieurs facteurs.

## 5.2 Description des essais et des simulations réalisés

### 5.2.1 Dispositif expérimental

#### 5.2.1.1 Montage

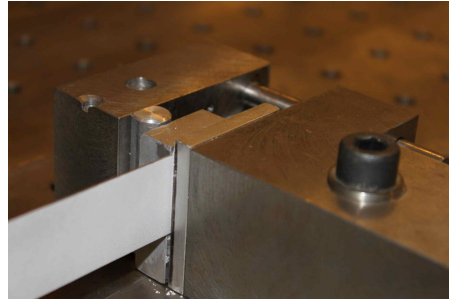
La structure étudiée est une poutre sandwich, encastrée-libre. Un étau, réalisé au laboratoire, est utilisé pour l'encastrement (figure 5.1(a)). Une pige métallique faisant pivot permet de répartir la pression de contact lors du serrage.

On souhaite mesurer la fonction de réponse en fréquence vitesse/effort (mobilité)<sup>1</sup>. La structure est excitée par un système bobine/aimant et sa réponse est mesurée par un vibromètre laser à balayage. La figure 5.2 montre le schéma de montage. Un générateur de signaux crée un signal en tension et un amplificateur de puissance asservi en courant envoie dans la bobine un courant proportionnel à ce signal. L'aimant, collé à la structure à mettre en vibration, se déplace sous l'effet de la force électro-magnétique générée par la bobine. Le vibromètre laser à balayage mesure la réponse de la structure. Les fonctions de réponse en fréquence sont obtenues sur une grille de points définie dans le logiciel d'acquisition. L'utilisation d'un vibromètre laser à balayage permet d'effectuer d'importantes séries de mesures sans modification de l'état de surface, ni ajout de masse (contrairement aux accéléromètres). Le système bobine-aimant possède plusieurs avantages par rapport au marteau de choc et au pot vibrant :

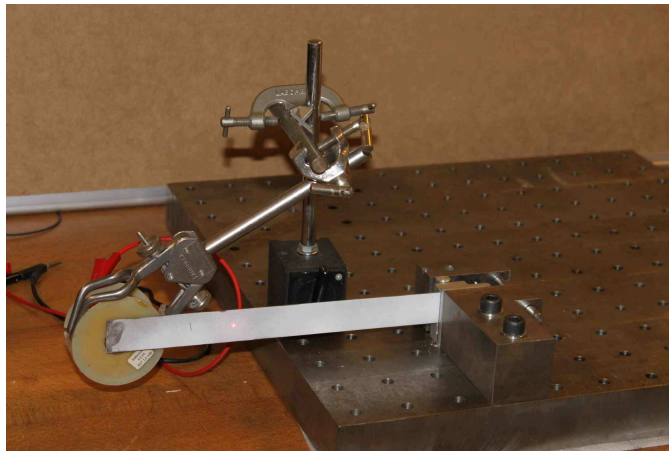
- Le marteau de choc ne permet qu'une excitation impulsionnelle alors qu'une excitation sinusoïdale est généralement souhaitée pour des essais de vibration.
- Le pot vibrant est très souvent utilisé pour générer une excitation sinusoïdale. Mais l'effort est transmis à la structure par une tige de poussée ("stinger"), ce qui peut provoquer un couplage entre la structure et le pot vibrant, et modifier légèrement les propriétés dynamiques de la structure [35]. Le système bobine/aimant présente l'avantage d'être sans contact : les aimants collés à la structure n'apportent ni raideur

---

1. Le vibromètre laser utilisé dans les essais effectue une mesure de la vitesse (figure 5.1(b)). La mesure de la mobilité est préférée à celle de l'admittance car elle ne nécessite pas d'intégration susceptible d'introduire du bruit supplémentaire dans les résultats.



(a)



(b)

FIGURE 5.1 – Photographie de l'encastrement (a) et du montage (b).

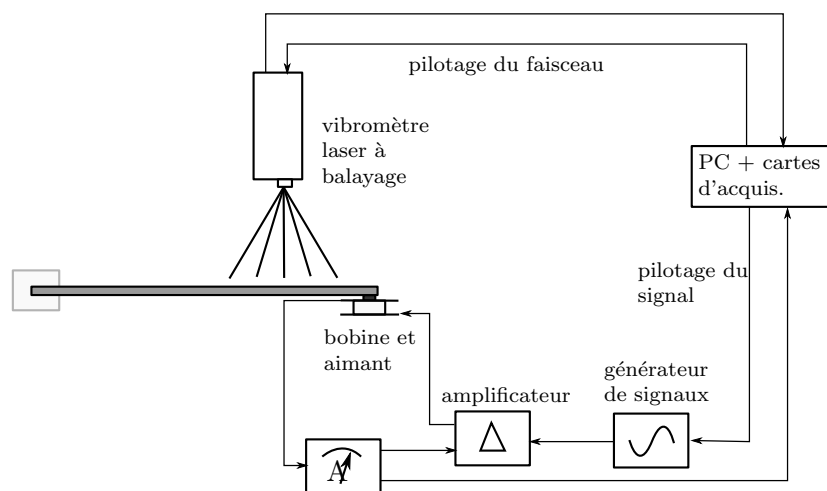
ni amortissement, et peuvent être modélisés par une masse ajoutée pure.

Afin de connaître la force agissant sur l'aimant collé à la structure, il est nécessaire de réaliser des mesures de calibration du système d'excitation.

### 5.2.1.2 Calibration de l'excitateur électromagnétique

La calibration de l'excitateur électromagnétique a pour but de mesurer le rapport entre l'effort transmis à la structure et l'intensité du courant circulant dans la bobine. Dans [182], la calibration est réalisée grâce à un dispositif spécialement construit à cet effet (figure 5.3). Celui-ci est composé d'un ensemble mobile se déplaçant de manière rectiligne grâce à une glissière à billes. À une des extrémités sont placés deux aimants mis en mouvement par la force électromagnétique créée par la bobine. Des ressorts précontraints créent une force

## 5.2. DESCRIPTION DES ESSAIS ET DES SIMULATIONS RÉALISÉS



| Appareils                  | Constructeur | Modèles                     |
|----------------------------|--------------|-----------------------------|
| Amplificateur de puissance | Brüel & Kjær | 2719                        |
| Vibromètre laser           | Polytec      | PSV-Z-040-H / OFV 050       |
| Boîtier d'acquisition      | Polytec      | OFV 3001 S                  |
| Logiciel d'acquisition     | Polytec      | Polytec Scanning Vibrometer |

FIGURE 5.2 – Dispositif expérimental et références des matériels utilisés.

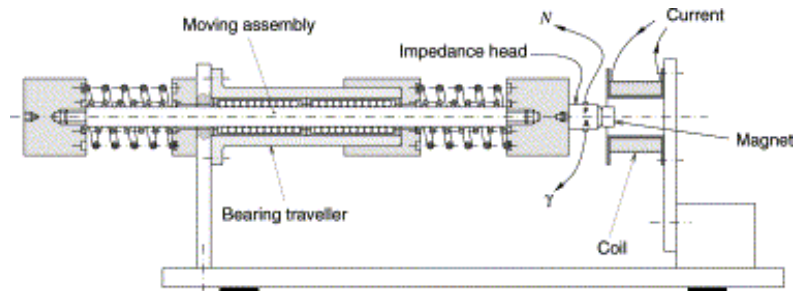


FIGURE 5.3 – Schéma de l'oscillateur masse-ressort-amortisseur utilisé pour la calibration de l'excitateur électromagnétique [182].

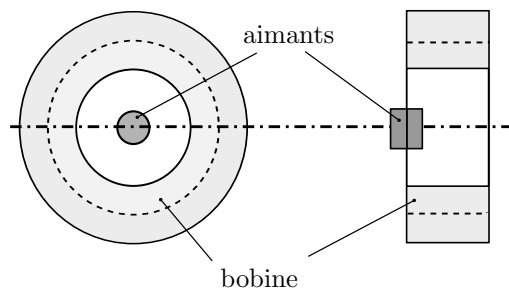


FIGURE 5.4 – Position préférentielle des aimants par rapport à la bobine.

de rappel proportionnelle au déplacement, de sorte que l'ensemble est équivalent à un système masse-ressort-amortisseur à un degré de liberté. Une tête d'impédance, placée entre les aimants et l'ensemble mobile, permet de mesurer la force imposée à l'aimant. Thomas [182] étudie l'influence de la position des aimants par rapport à la bobine sur la force appliquée à l'aimant. Il montre que cette influence est minimale lorsque l'axe des aimants est centré sur celui de la bobine et que le plan d'interface entre les deux aimants correspond avec la face latérale de la bobine (figure 5.4). Dans cette configuration, il observe que le rapport force/intensité est faiblement dépendant de la fréquence et peut être considéré comme constant.

Dans les expériences réalisées par Thomas, la bobine est fixée sur un support en translation au moyen de vis positionnées sur l'armature (figure 5.3). En revanche, dans les essais de vibration réalisés dans le cadre de cette thèse, un bras articulé en métal est utilisé pour positionner plus librement la bobine (figure 5.1(b)). Des mesures du rapport force/intensité ont été effectuées sur le système masse-ressort-amortisseur de la figure 5.3 pour ces deux

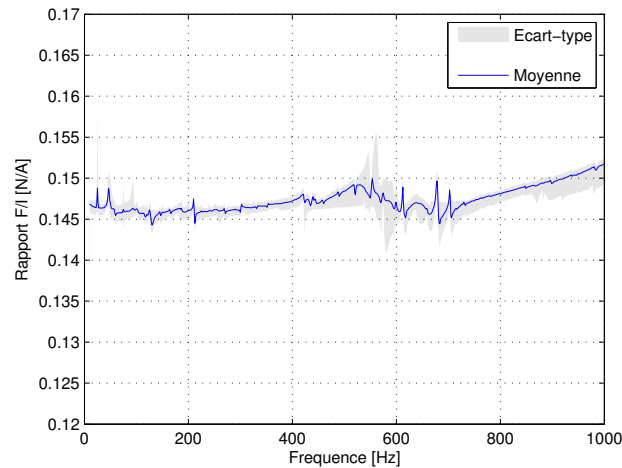


FIGURE 5.5 – Moyenne et écart-type du rapport force/intensité de la série de mesure réalisée.

systèmes de fixation de la bobine. Des valeurs différentes ont été obtenues. Ceci peut s'expliquer par une perturbation du champ magnétique par le bras articulé métallique qui est en contact indirect avec les spires de la bobine (séparés par un ruban plastique). Une autre cause possible des écarts de calibration de la bobine entre les deux montages peut être la réponse mécanique du bras articulé à la force de réaction. Une étude a été réalisée afin de savoir si le rapport force/intensité variait après un remontage de la bobine. Les résultats d'une série de dix mesures de ce coefficient en fonction de la fréquence (figure 5.5) montrent que l'écart-type est faible. La valeur moyenne du coefficient  $F/I \approx 0.147\text{N/A}$  sur la plage de fréquence  $[0 - 800]\text{Hz}$  est retenue pour la suite de l'étude sur les structures sandwich.

### 5.2.1.3 Réalisation des structures sandwich

Le Deltane 350 utilisé pour les essais de vibration dans ce chapitre est issu d'un lot de fabrication différent de celui utilisé pour les essais de caractérisation dans la première partie. Le collage de la couche viscoélastique aux deux lames en acier est réalisé par deux procédés différents :

- un collage avec une colle structurale à base de résine époxy (3M<sup>TM</sup>DP 490 [2]), appliquée au pistolet à colle ;

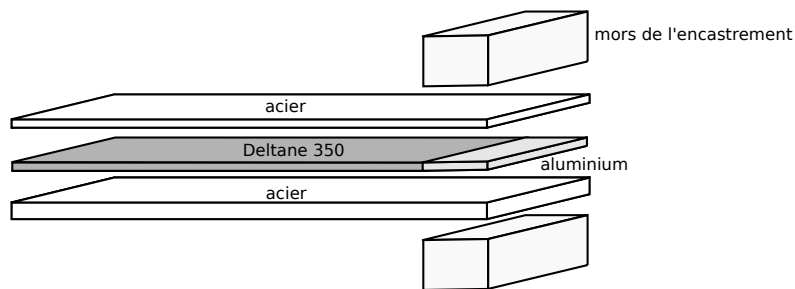


FIGURE 5.6 – Réalisation de structures sandwich encadrées-libres.

- un collage par application d'un ruban adhésif double face (3M<sup>TM</sup>9040 [3]).

Une étude effectuée par l'entreprise 3M<sup>TM</sup> a permis de déterminer dans les deux cas l'adhésif le mieux adapté au collage du Deltane 350 sur de l'acier.

Afin d'obtenir les performances optimales des adhésifs, les surfaces des lames en acier sont nettoyées à l'aide d'un spray à base d'alcool isopropylique (CSM-2 Degreaser de Vishay, classiquement utilisé pour le collage des jauges), et les surfaces de la couche viscoélastique sont dégraissées à l'acétone.

La colle structurale est étendue sur les surfaces à l'aide d'une spatule afin de contrôler l'épaisseur de colle et d'assurer une surface de collage homogène. La transparence du ruban adhésif double face permet de vérifier l'absence de bulles d'air lors du collage.

Afin de garantir un encastrement correct, une cale en aluminium remplace la couche viscoélastique dans la zone encadrée, comme indiqué sur la figure 5.6. Cet assemblage permet également de limiter les effets de précontraintes dans le matériau viscoélastique, qui ne sont pas pris en compte dans la modélisation du Deltane 350. C'est pourquoi, afin de limiter les effets de précontrainte, une cale en aluminium remplace la couche viscoélastique dans la zone encadrée, comme indiqué sur la figure 5.6.

Les structures sandwich sont ensuite mises sous pression (environ 7kPa) pendant 24h. Les épaisseurs de colle mesurées au pied à coulisse à la fin de l'étape de collage sont de l'ordre de 100 $\mu$ m pour les deux adhésifs.

Des difficultés ont été rencontrées lors du collage des différentes couches :

- défauts de planéité des lames en acier qui ne permettent pas d'obtenir un collage optimal ;
- légers glissements des couches les unes par rapport aux autres lors de la mise en

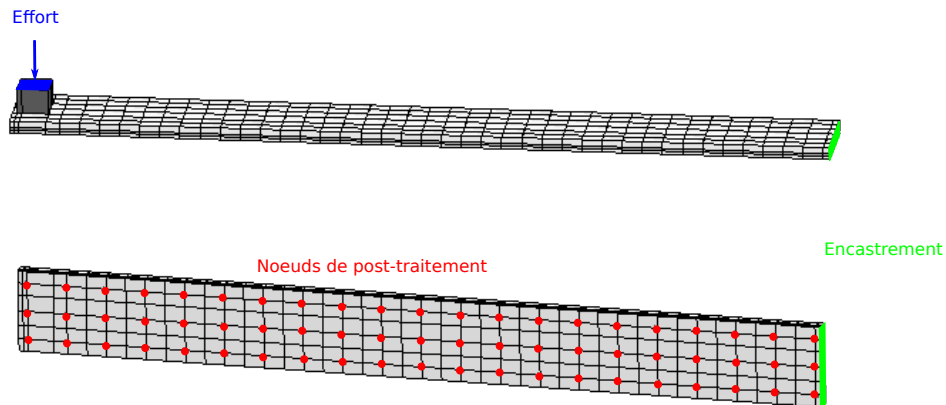


FIGURE 5.7 – Maillage de la structure sandwich considérée.

pression pour les structures sandwich collées avec la colle structurale ;

- apparition de bavures de colle lors de la mise en pression pour le collage avec la colle structurale, pouvant entraîner la création de ponts vibratoires entre les lames en acier.

Nous reviendrons plus loin sur l'influence du procédé de collage sur les résultats de réponse en fréquence des structures sandwich.

### 5.2.2 Modélisation numérique

Les principales caractéristiques du modèle éléments finis défini pour prédire le comportement de la structure sandwich testée sont présentées ici. Le but est de reproduire au mieux les conditions expérimentales.

**Maillage** Tout d'abord, les aimants sont modélisés par éléments finis de manière à prendre en compte l'effet de masse ajoutée. La structure et les aimants sont maillés par des éléments hexaédriques à 20 nœuds. Un élément fini est considéré dans l'épaisseur de chaque couche. Le maillage est réalisé de manière à faire correspondre les nœuds du maillage avec la grille de points de mesure expérimentale pour que les comparaisons se fassent aux mêmes points. Le maillage de la structure est représenté sur la figure 5.7.

**Conditions aux limites et excitation** L'effort appliqué à la structure est réparti sur la face supérieure des aimants, comme indiqué sur la figure 5.7. L'encastrement est modélisé comme parfait.

**Propriétés des matériaux** Le module de cisaillement du matériau viscoélastique utilisé pour ces essais est décrit par un modèle fractionnaire de Zener dont les coefficients identifiés sur la gamme de fréquence  $[10^{-1} - 10^4]$ Hz sont :

$$G_0 = 2.11 \text{ MPa}, \quad G_\infty = 0.59 \text{ GPa}, \quad \tau = 0.44 \mu\text{s}, \quad \alpha = 0.53 \quad (5.1)$$

Le module de compressibilité est pris constant  $K^*(\omega) \approx 2.22 \text{ GPa}$ , et la masse volumique du Deltane 350 est de  $\rho = 1460 \text{ kg/m}^3$ .

Pour la modélisation des aimants, seule la masse volumique importe puisque seuls les effets de masse ajoutée nous intéressent. Les modules sont pris suffisamment grands pour que les aimants n'entrent pas en résonance sur la plage de fréquence considérée. La masse volumique est déterminée à partir des mesures du volume et de la masse des aimants :  $\rho_{\text{aimants}} = 6250 \text{ kg/m}^3$ .

La masse volumique de l'acier inoxydable utilisé pour les essais (304L) est calculée de deux manières différentes pour plus de précision : soit à partir des mesures du volume et de la masse, soit par poussée d'Archimède. La valeur moyenne obtenue est de  $\rho_{\text{acier}} = 7450 \text{ kg/m}^3$ . Le coefficient de Poisson est pris égal à 0.3. Le module d'Young est déterminé par recalage des pics des réponses en fréquence expérimentale et numérique obtenues pour une poutre en acier nue encastree-libre. Un amortissement structural pour les lames en acier est également déterminé. Un module d'Young égal à  $E = 1.70 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$  et un amortissement structural de 0.5% permettent de recalculer correctement les courbes mesurées et calculées dans le cas d'une poutre encastree-libre en acier de dimensions  $0.26\text{m} \times 0.026\text{m} \times 0.002\text{m}$  (figure 5.8). Cette valeur apparaît un peu faible pour un acier inoxydable ; c'est pourquoi une mesure du module d'Young a été effectuée. Une mesure par extensométrie lors d'un essai de traction donne un module d'Young  $E = 1.77 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ , ce qui est cohérent avec le module recalé.

En raison de la sensibilité des résultats aux dimensions de la structure testée et à la position des aimants, un modèle éléments finis est défini pour chaque essai, en prenant

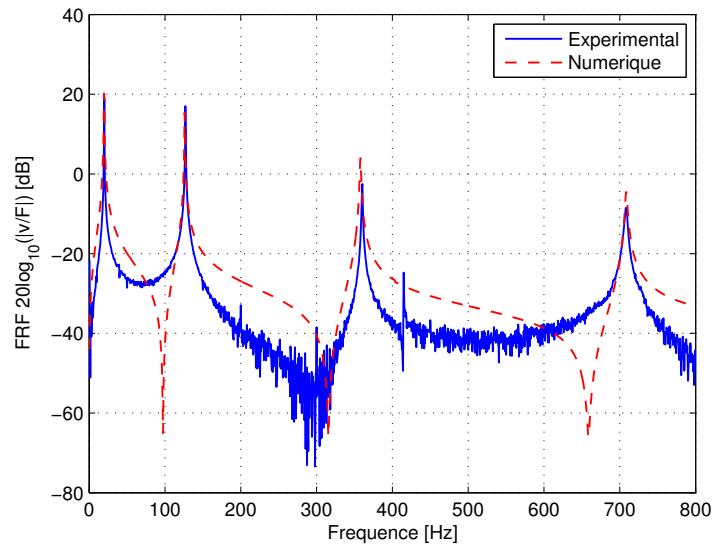


FIGURE 5.8 – Recalage des courbes expérimentale et numérique de la réponse en fréquence d’une poutre en acier encastrée-libre de dimensions  $0.26\text{m} \times 0.026\text{m} \times 0.002\text{m}$  pour un module d’Young de  $E = 1.71 \cdot 10^{11}\text{Pa}$  et un amortissement structural de  $0.5\%$ .

en compte les mesures des dimensions de la poutre, de la position des aimants et de la position de la grille de points de mesure.

### 5.2.3 Séries d’expérimentation

Nous venons de voir le protocole expérimental, ainsi que la démarche de modélisation adoptée pour reproduire au mieux les conditions expérimentales. Nous rappelons ici les différentes simulations et expériences réalisées.

Deux géométries de structures sandwich sont testées :

- Géométrie 1 :  $L = 0.26\text{m}$ ,  $b = 0.026\text{m}$ ,  $h_a = 2\text{mm}$ ,  $h_b = 1\text{mm}$  et  $h_c = 0.9\text{mm}$ ,
- Géométrie 2 :  $L = 0.26\text{m}$ ,  $b = 0.052\text{m}$ ,  $h_a = 2\text{mm}$ ,  $h_b = 1\text{mm}$  et  $h_c = 0.9\text{mm}$ ,

où  $L$  et  $b$  sont respectivement la longueur et la largeur de la poutre,  $h_a$  et  $h_b$  sont les épaisseurs des lames d’acier et  $h_c$  l’épaisseur de la couche viscoélastique.

Deux types d’adhésifs sont utilisés pour la réalisation des structures sandwich :

- Collage 1 : colle structurale à base de résine époxy ( $3\text{M}^{\text{TM}}\text{DP 490}$ ),
- Collage 2 : ruban adhésif double face ( $3\text{M}^{\text{TM}}\text{9040}$ ).

TABLE 5.1 – Matrice d’essais.

|             | Collage 1    | Collage 2      |
|-------------|--------------|----------------|
| Géométrie 1 | Essais 1 à 3 | Essais 4 à 6   |
| Géométrie 2 | Essais 7 à 9 | Essais 10 à 12 |

Les essais expérimentaux et numériques réalisés sont référencés dans le tableau 5.1. La numérotation des essais est utilisée pour la présentation des résultats dans la section suivante.

## 5.3 Résultats

### 5.3.1 Critères de comparaison des résultats

Les résultats expérimentaux et numériques sont comparés selon certains critères qui doivent permettre une compréhension qualitative et quantitative de la corrélation dynamique entre le modèle et l’expérience. Les critères choisis dans cette étude sont le MAC (“Modal Assurance Criterion”), le FRAC (“Frequency Response Assurance Criterion”) et les erreurs relatives sur les fréquences de résonance et les amortissements modaux. La réponse fréquentielle de la structure sandwich près du bord libre est également étudiée. Le MAC est une mesure de la similarité des déformées modales [4], défini de la manière suivante :

$$MAC_{cd} = \frac{|\Phi_c^H \Phi_d|^2}{(\Phi_c^H \Phi_c) (\Phi_d^H \Phi_d)}, \quad (5.2)$$

où  $\Phi_c$  et  $\Phi_d$  sont les modes dont on cherche le degré de consistance, et  $^H$  représente la transposée hermitienne. Le MAC est compris entre 0 et 1. Chaque mode contient les valeurs mesurées ou calculées par éléments finis des déplacements dans la direction normale à la surface de mesure sur la grille de points définie précédemment (figure 5.7). Une valeur de MAC proche de 0 indique un degré de similarité très faible entre les deux modes tandis qu’une valeur proche de 1 indique une bonne correspondance entre les modes. Dans l’analyse des résultats qui suit, le MAC est tracé pour les trois modes propres excités sur la gamme de fréquence considérée.

Le FRAC est une mesure de la similarité des fonctions de réponse en fréquence [4, 76],

défini de la manière suivante :

$$FRAC_{cd} = \frac{\left| \sum_{\omega=\omega_1}^{\omega_2} H_c^H(\omega) H_d(\omega) \right|^2}{\left( \sum_{\omega=\omega_1}^{\omega_2} H_c^H(\omega) H_c(\omega) \right) \left( \sum_{\omega=\omega_1}^{\omega_2} H_d^H(\omega) H_d(\omega) \right)}, \quad (5.3)$$

où  $H_c$  et  $H_d$  sont les fonctions de réponse en fréquence à comparer. Comme pour le MAC, le FRAC est compris entre 0 et 1, 1 indiquant une bonne correspondance des fonctions de réponse en fréquence. Ce critère est complémentaire au MAC dans le sens où le FRAC prend en compte l'amortissement de la structure (puisque l'amortissement est inhérent à la réponse de la structure). De plus, contrairement au MAC, le FRAC est un critère local : les fonctions de réponse en fréquence sont comparées en un point donné. Dans l'analyse des résultats, le FRAC est tracé pour tous les points de la grille de mesure (points rouge sur la figure 5.7) sur la gamme de fréquence  $[0 - 800]$ Hz. Sur les figures 5.10, 5.13, 5.16 et 5.19, les points les plus à droite sont ceux proches de l'encastrement et ceux les plus à gauche, ceux proches du bord libre. Dans tout ce chapitre, les réponses fréquentielles sont calculées pour un pas fréquentiel de 1Hz et sont tracées au point de la grille de mesure situé près du bord libre et à mi-largeur des poutres.

Les fréquences de résonance et les amortissements modaux sont des critères de conception importants. C'est pourquoi l'erreur relative sur ces deux paramètres est calculée pour chaque mode observé.

Dans cette étude, on considère que les fréquences propres de la structure sandwich sont suffisamment espacées sur la bande de fréquence étudiée pour pouvoir utiliser un modèle à un degré de liberté pour l'identification des paramètres modaux. La méthode de la bande passante à  $-3$ dB (voir section 1.2.2.2) est utilisée pour calculer les amortissements modaux. Les amortissements modaux ont également été déterminés par la méthode de lissage du cercle de Nyquist. Les résultats obtenus par cette méthode sont similaires à ceux obtenus par la méthode de la bande passante, et ne sont pas présentés ici.

### 5.3.2 Analyse des résultats

Les résultats expérimentaux et numériques sont analysés sur la gamme de fréquence  $[0 - 800]$ Hz, où les trois premiers modes de flexion sont excités. On observe une bonne

### 5.3. RÉSULTATS

---

répétabilité des résultats : les trois essais réalisés pour chaque géométrie et chaque collage testés (tableau 5.1) conduisent à des observations similaires. C'est pourquoi nous choisissons de ne présenter ici que les résultats pour un des trois essais de chaque série (essais 1,4,7 et 10). Les autres sont donnés dans l'annexe B.

De manière générale, les valeurs de FRAC sont plus faibles près de l'encastrement (figures 5.10, 5.12, 5.15 et 5.18). En effet, l'encastrement est considéré comme parfait dans le modèle, ce qui n'est jamais réellement le cas. On fait l'hypothèse dans cette étude que l'influence de l'encastrement physique sur les résultats est négligeable. Cette hypothèse semble justifiée au vu des bonnes corrélations calculs/essais obtenues pour ce système d'encastrement lors d'études antérieures pour des essais de vibrations de poutres amorties par des patchs piézoélectriques [50, 171].

Pour tous les essais réalisés, des décalages fréquentiels des pics de résonance plus ou moins importants sont observés. Les fréquences de résonance prédites par la simulation sont en général supérieures à celles mesurées. Les décalages fréquentiels sont assez petits pour les essais 1 à 3 : l'erreur commise sur les fréquences de résonance est inférieure à 4%. Cette erreur est légèrement plus grande pour les essais 7 à 9, mais reste dans une limite acceptable de 10%. En revanche, pour les essais 4 à 6 et 10 à 12, correspondant aux essais sur les structures sandwich réalisés avec le ruban adhésif double face, ces décalages fréquentiels sont importants (tableaux 5.12(c) et 5.18(c), et figures 5.14 et 5.20). Nous tenterons d'expliquer ces écarts dans la section suivante.

On observe une bonne correspondance entre les déformées modales expérimentales et celles calculées par le modèle éléments finis : les MACs des figures 5.9(a), 5.12(a), 5.15(a) et 5.18(a) sont proches d'une matrice diagonale unitaire. Cependant, pour l'essai 4, le troisième mode de flexion est légèrement couplé avec le premier mode de torsion (figure 5.12(b)). Ce couplage est plus prononcé sur les deux autres essais de cette série (Annexe B). Il est possible qu'en raison des décalages fréquentiels importants des modes observés pour cet essai, la fréquence propre du premier mode de torsion soit assez proche de celle du troisième mode de flexion.

Comme pour les fréquences de résonance, les amortissements modaux sont presque systématiquement surestimés par le calcul. En revanche, on remarque dans les tableaux 5.9(c),

5.12(c), 5.15(c) et 5.18(c) que pour les essais correspondant à l'usage de la colle structurale epoxy, les amortissements modaux calculés varient dans le même sens que ceux mesurés expérimentalement, ce qui n'est pas le cas pour les essais correspondant à l'usage du ruban adhésif double face. En effet, pour les essais 4 et 10, on observe des amortissements modaux plus faibles pour le mode 3 que pour le mode 1, tandis que la simulation prédit l'inverse. Ces écarts seront étudiés dans la section suivante. Une meilleure concordance des amortissements modaux est observée pour les essais 7 à 9 que pour les essais 1 à 3, qui peut être due à des effets de bord (bavures de colle par exemple). Les structures testées dans les essais 7 à 9 ayant une largeur deux fois plus grande que celle des structures testées dans les essais 1 à 3, elles sont moins sujettes aux effets de bord. Enfin, bien que des erreurs allant jusqu'à environ 50% soient observées pour les essais utilisant la colle structurale epoxy, l'erreur commise sur l'amplitude des pics de résonance est inférieure à 1dB pour les essais 1 à 3 et inférieure à 2dB pour les essais 7 à 9. De plus, pour des structures fortement amorties, il est difficile d'estimer de manière précise les amortissements modaux par des méthodes classiques. L'amplitude de la réponse fréquentielle apparaît alors comme un critère de conception du traitement amortissant plus fiable que l'amortissement modal.<sup>2</sup>

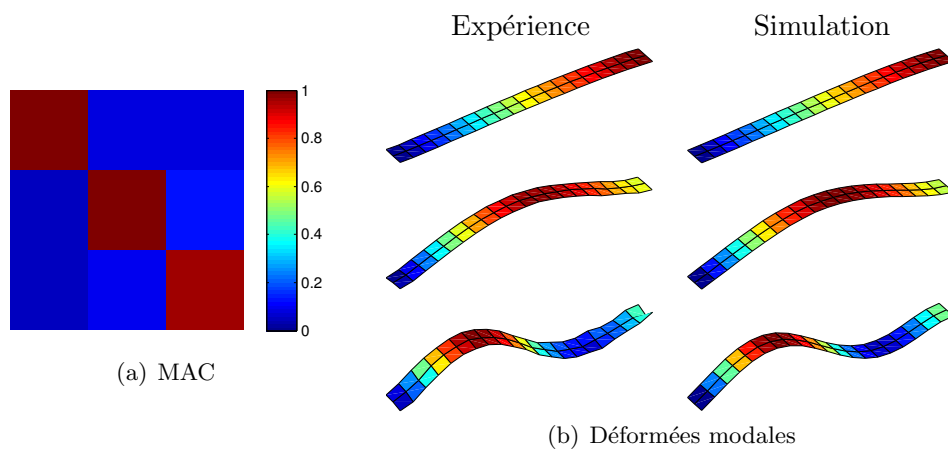
### 5.4 Analyse des écarts observés

Le but de cette section est d'étudier l'influence de certains paramètres sur le comportement dynamique des structures sandwich étudiées dans ce chapitre afin d'identifier les origines des écarts observés entre l'expérience et la simulation. Dans un premier temps, la validité de l'hypothèse d'un module de compressibilité constant est vérifiée. Dans un deuxième temps, l'influence de l'incertitude de mesure du module de cisaillement sur les courbes de réponse en fréquence est étudiée. Enfin, dans un troisième temps, le rôle de l'adhésif sur le comportement dynamique des structures est analysé.

---

2. Des logiciels spécifiques tels que Modan, développé au Laboratoire de Mécanique Appliquée de l'Université de Franche-Comté [134], ou PolyMAX, proposé par le LMS [94], permettent d'obtenir des estimations plus précises des paramètres modaux.

## 5.4. ANALYSE DES ÉCARTS OBSERVÉS



|        | Fréquence de résonance [Hz] |        |            | Taux d'amortissement [%] |       |            |
|--------|-----------------------------|--------|------------|--------------------------|-------|------------|
|        | Exp.                        | Sim.   | Erreur (%) | Exp.                     | Sim.  | Erreur (%) |
| Mode 1 | 36.58                       | 35.65  | 2.53       | 13.21                    | 18.46 | 39.77      |
| Mode 2 | 175.75                      | 178.68 | 1.67       | 22.21                    | 28.45 | 28.08      |
| Mode 3 | 432.33                      | 459.47 | 6.28       | 24.97                    | 32.22 | 29.02      |

(c) Fréquences de résonance et amortissements modaux

FIGURE 5.9 – Analyse des paramètres modaux pour l'essai 1.

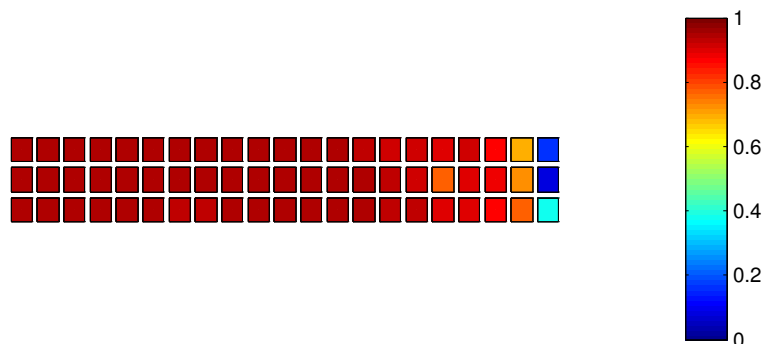


FIGURE 5.10 – FRAC pour l'essai 1.

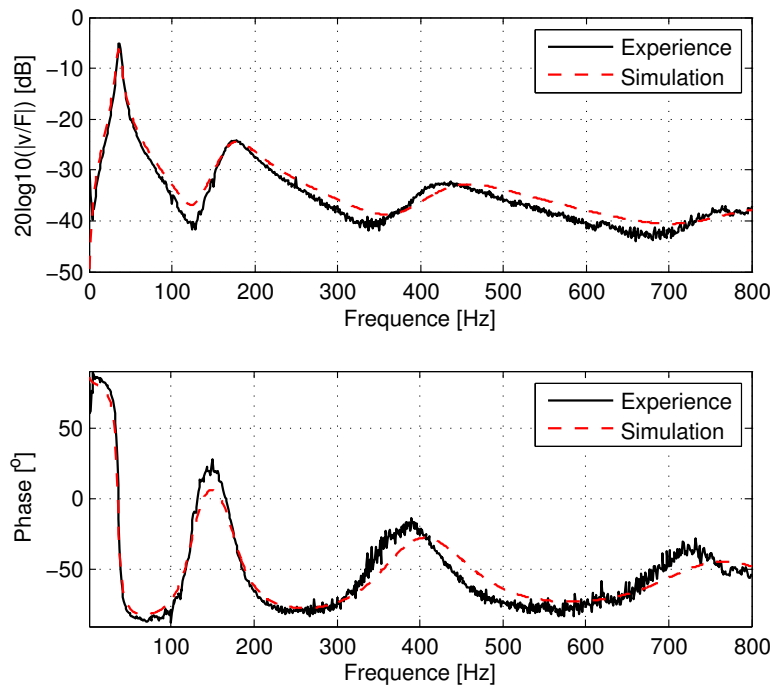


FIGURE 5.11 – Réponse fréquentielle près du bord libre pour l'essai 1.

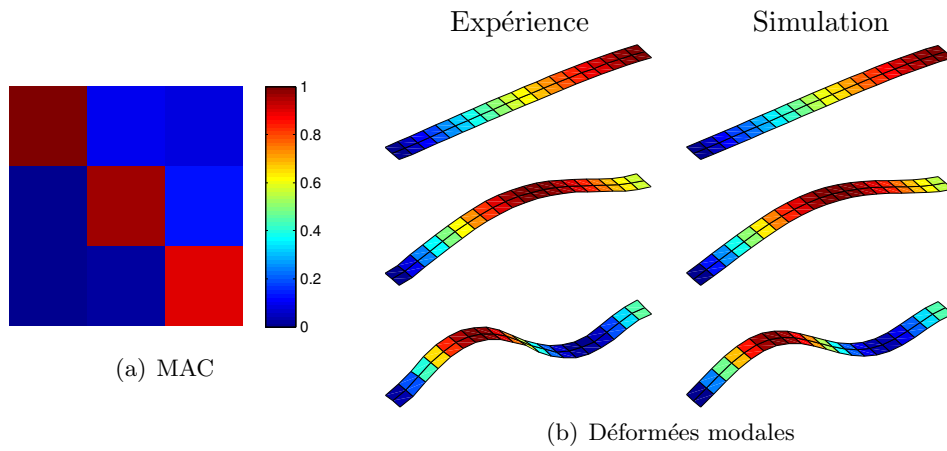
#### 5.4.1 Influence de la dépendance fréquentielle du module de compressibilité

Dans tous les résultats numériques présentés dans la section précédente, le module de compressibilité est pris constant. Pour vérifier cette hypothèse, la courbe de réponse en fréquence correspondant à l'essai 1 est recalculée en prenant un module de compressibilité dépendant de la fréquence. Un modèle fractionnaire de Zener dont les paramètres sont ceux donnés dans le tableau 4.1 est utilisé pour décrire la dépendance fréquentielle du module de compressibilité. La figure 5.21 montre que celle-ci n'a pas d'influence notable sur la dynamique de la structure sandwich étudiée.

#### 5.4.2 Influence de l'incertitude de mesure du module de cisaillement

Dans le chapitre 2, plusieurs séries de mesures du module de cisaillement ont été réalisées et des écarts importants, associés à des erreurs de mesure ont été observés sur l'amplitude et la phase de celui-ci (figure 2.18). Afin d'étudier l'influence de cette incertitude de mesure du module de cisaillement sur les résultats, la courbe de réponse en

## 5.4. ANALYSE DES ÉCARTS OBSERVÉS



|        | Fréquence de résonance [Hz] |        |            | Taux d'amortissement [%] |       |            |
|--------|-----------------------------|--------|------------|--------------------------|-------|------------|
|        | Exp.                        | Sim.   | Erreur (%) | Exp.                     | Sim.  | Erreur (%) |
| Mode 1 | 22.76                       | 35.08  | 54.13      | 19.97                    | 19.81 | 0.80       |
| Mode 2 | 129.34                      | 175.83 | 35.95      | 16.74                    | 28.60 | 70.84      |
| Mode 3 | 357.91                      | 452.31 | 26.37      | 15.72                    | 32.75 | 108.24     |

(c) Fréquences de résonance et amortissements modaux

FIGURE 5.12 – Analyse des paramètres modaux pour l'essai 4.

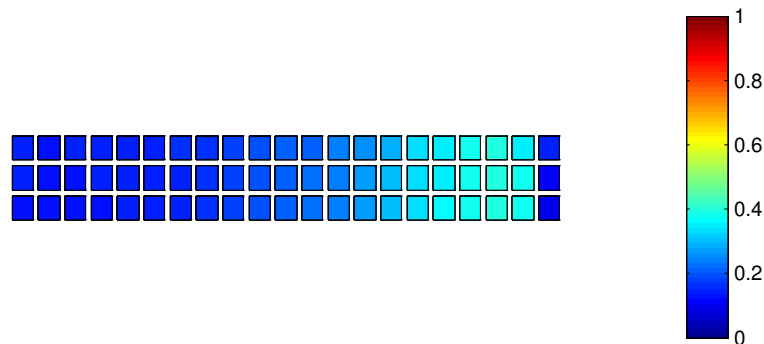


FIGURE 5.13 – FRAC pour l'essai 4.

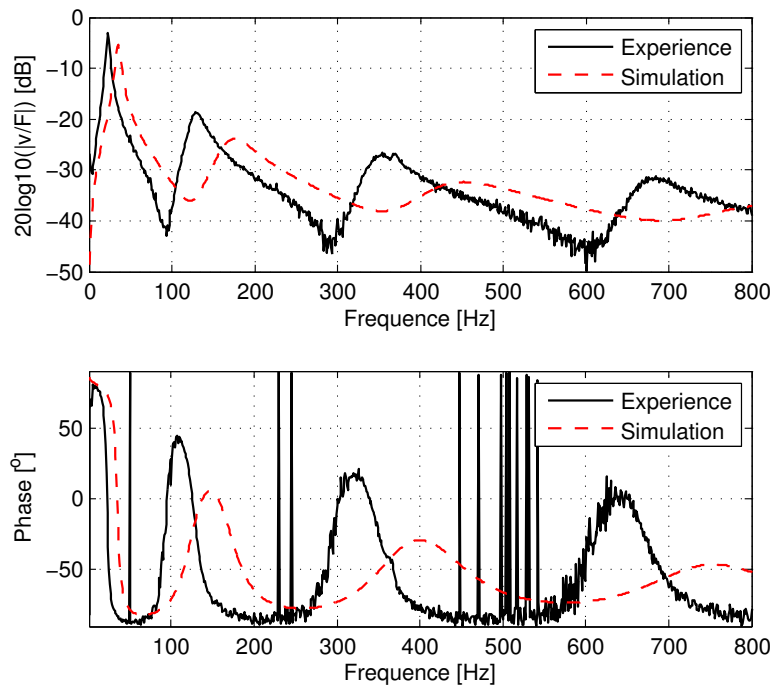


FIGURE 5.14 – Réponse fréquentielle près du bord libre pour l'essai 4.

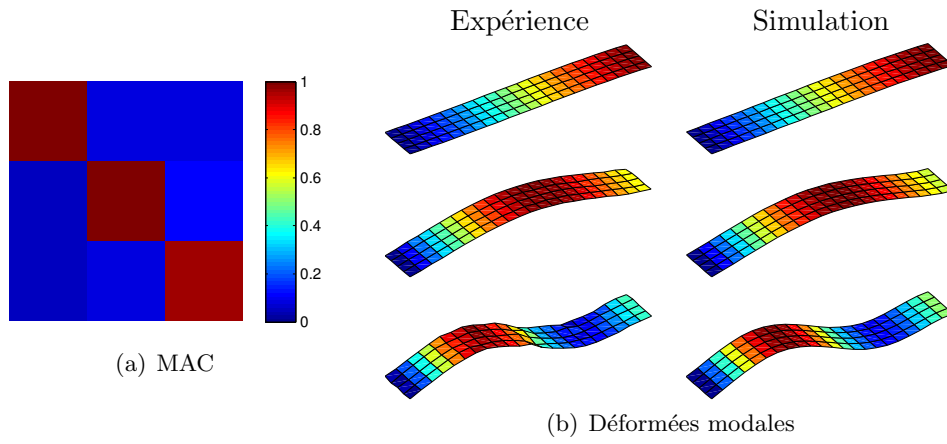
fréquence correspondant à l'essai 1 est calculée à partir des courbes maîtresses issues de trois séries de mesure (séries 1 à 3 sur la figure 2.18). Aucun modèle n'est utilisé pour décrire l'évolution du module complexe avec la fréquence. De cette manière, l'erreur de modélisation est écartée.

Des écarts sont observés sur les pics de résonance des courbes de réponse en fréquence obtenues pour les différentes séries de mesure du module de cisaillement (voir figure 5.22) : ils sont, en terme d'amplitude et de fréquence, du même ordre de grandeur que ceux observés entre la réponse fréquentielle mesurée et calculée (figure 5.11). L'incertitude sur la mesure du module de cisaillement constitue donc une source possible des écarts observés entre les résultats expérimentaux et numériques dans les essais réalisés avec la colle structurale epoxy.

### 5.4.3 Influence du collage

Afin de mieux comprendre le rôle de l'adhésif sur le comportement dynamique des structures sandwich étudiées dans la section précédente, on réalise les trois essais suivants,

## 5.4. ANALYSE DES ÉCARTS OBSERVÉS



|        | Fréquence de résonance [Hz] |        |            | Taux d'amortissement [%] |       |            |
|--------|-----------------------------|--------|------------|--------------------------|-------|------------|
|        | Exp.                        | Sim.   | Erreur (%) | Exp.                     | Sim.  | Erreur (%) |
| Mode 1 | 35.39                       | 36.53  | 3.21       | 19.55                    | 20.08 | 2.68       |
| Mode 2 | 170.94                      | 181.53 | 6.19       | 22.86                    | 27.53 | 20.43      |
| Mode 3 | 423.52                      | 464.42 | 9.66       | 24.34                    | 29.88 | 22.75      |

(c) Fréquences de résonance et amortissements modaux

FIGURE 5.15 – Analyse des paramètres modaux pour l'essai 7.

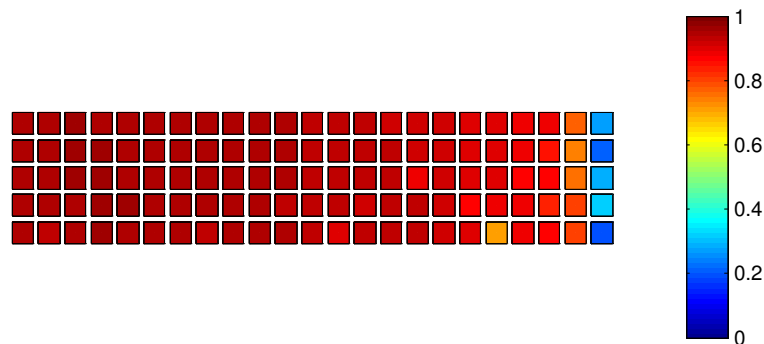


FIGURE 5.16 – FRAC pour l'essai 7.

## 5.4. ANALYSE DES ÉCARTS OBSERVÉS

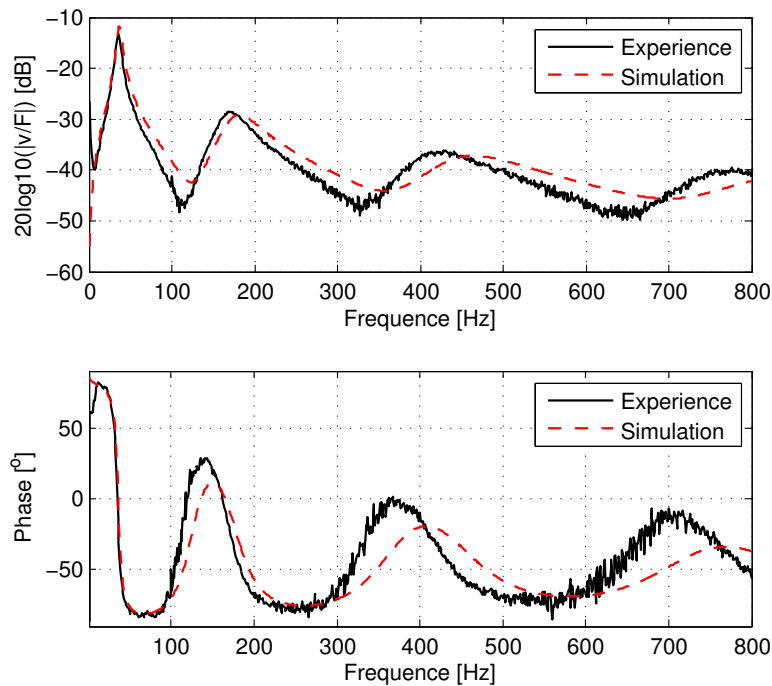


FIGURE 5.17 – Réponse fréquentielle près du bord libre pour l'essai 7.

en suivant le protocole décrit dans la section 5.2 :

**Essai A** : une poutre en acier de dimensions  $0.27\text{m} \times 0.026\text{m} \times 0.002\text{m}$ ,

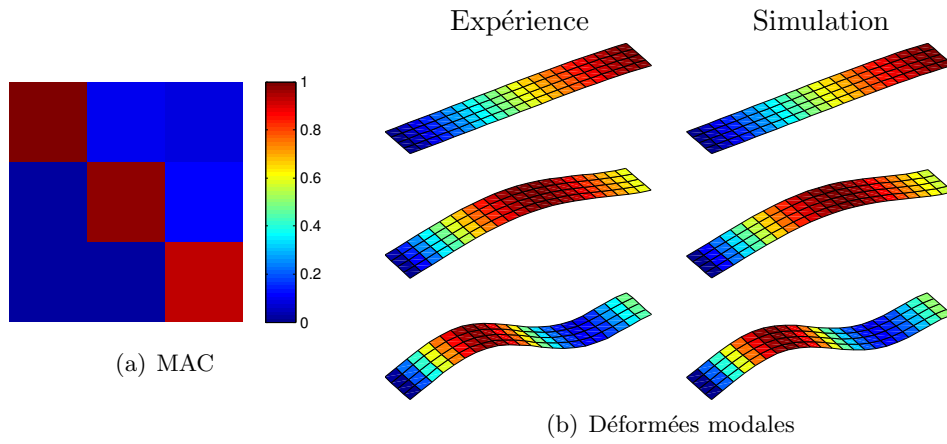
**Essai B** : deux poutres en acier de dimensions  $0.27\text{m} \times 0.026\text{m} \times 0.001\text{m}$ , assemblées grâce à la colle structurale epoxy,

**Essai C** : deux poutres en acier de dimensions  $0.27\text{m} \times 0.026\text{m} \times 0.001\text{m}$ , collées par un film du ruban adhésif double face.

De même que pour les essais précédents, l'épaisseur de l'adhésif est estimée à environ  $0.1\text{mm}$ . Les courbes de réponse en fréquence mesurées pour chaque essai sont tracées sur la figure 5.23. Celle-ci montre que l'influence de la colle sur le comportement dynamique des structures testées est non négligeable. Notamment, d'importants écarts sur les fréquences et les amplitudes de pics de résonance sont observés entre les essais A et C.

Afin de mieux comprendre les écarts observés, on définit un modèle éléments finis associé à chaque essai. La masse volumique de la colle epoxy est donnée par la fiche technique [2] :  $\rho_{\text{epoxy}} = 1030\text{kg/m}^3$ , et celle du ruban adhésif est estimée à  $\rho_{\text{ruban}} = 800\text{kg/m}^3$ .

## 5.4. ANALYSE DES ÉCARTS OBSERVÉS



|        | Fréquence de résonance [Hz] |        |            | Taux d'amortissement [%] |       |            |
|--------|-----------------------------|--------|------------|--------------------------|-------|------------|
|        | Exp.                        | Sim.   | Erreur (%) | Exp.                     | Sim.  | Erreur (%) |
| Mode 1 | 22.47                       | 36.29  | 61.55      | 16.42                    | 18.43 | 12.24      |
| Mode 2 | 132.16                      | 180.26 | 36.40      | 16.54                    | 27.57 | 66.65      |
| Mode 3 | 361.31                      | 461.32 | 27.68      | 14.53                    | 29.89 | 105.66     |

(c) Fréquences de résonance et amortissements modaux

FIGURE 5.18 – Analyse des paramètres modaux pour l'essai 10.

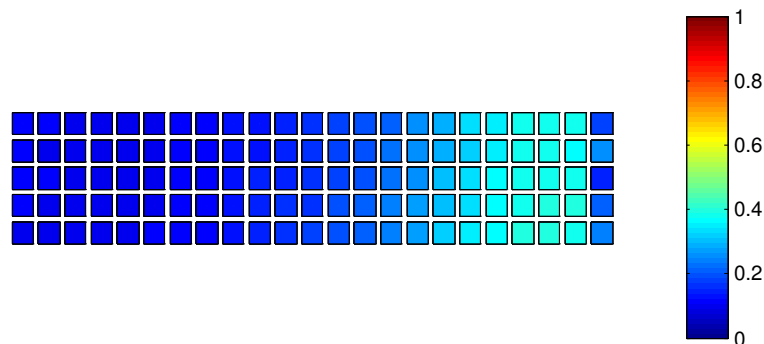


FIGURE 5.19 – FRAC pour l'essai 10.

#### 5.4. ANALYSE DES ÉCARTS OBSERVÉS

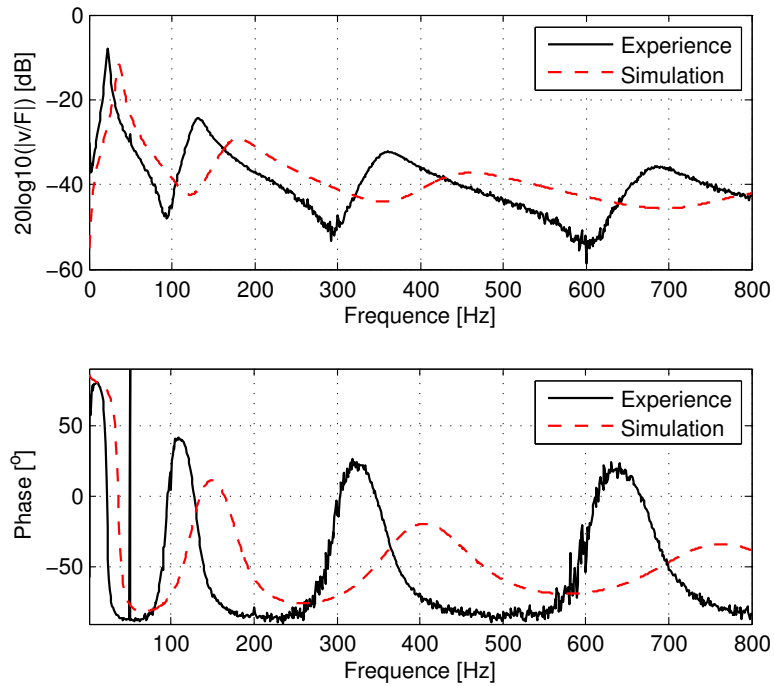


FIGURE 5.20 – Réponse fréquentielle près du bord libre pour l’essai 10.

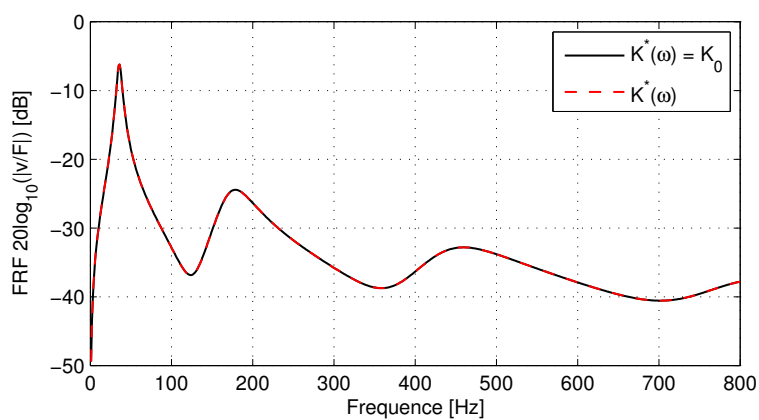


FIGURE 5.21 – Courbes de réponse en fréquence de la structure sandwich de l’essai 1 pour un module de compressibilité constant (trait plein noir) et un module de compressibilité dépendant de la fréquence (traits pointillés rouge).

## 5.4. ANALYSE DES ÉCARTS OBSERVÉS

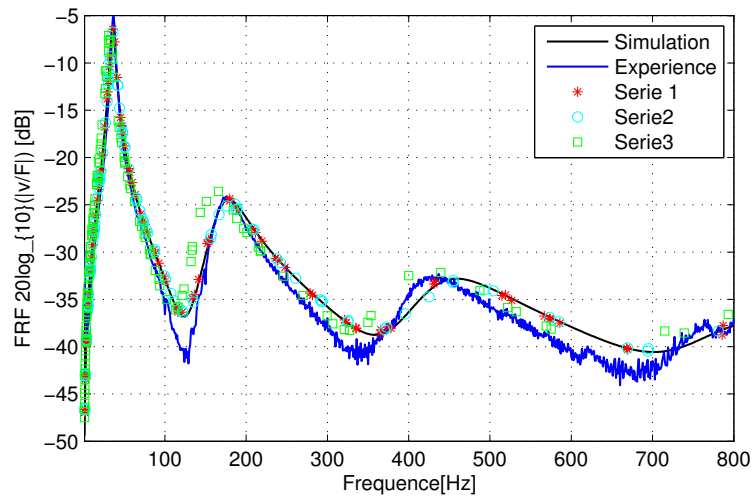


FIGURE 5.22 – Courbes de réponse en fréquence de la structure sandwich de l’essai 1 pour trois séries de mesure du module de cisaillement (marqueurs), comparées aux courbes mesurée (trait bleu) et calculée à partir du modèle viscoélastique défini dans l’équation (5.1).

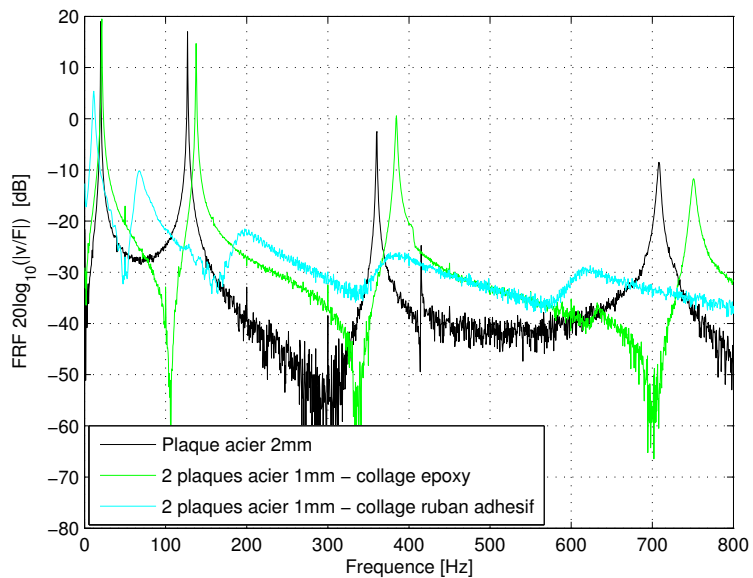


FIGURE 5.23 – Courbes de réponse en fréquence mesurées pour les essais A (noir), B (vert) et C (cyan).

#### 5.4. ANALYSE DES ÉCARTS OBSERVÉS

---

Les modules des deux adhésifs ne sont pas connus. Ils seront recalés sur les courbes expérimentales de réponse en fréquence.

La figure 5.24 montre les résultats du recalage dans le cas d'un collage avec la colle structurale. En prenant pour la colle structurale un module d'Young assez proche de celui de l'acier, les courbes de réponse en fréquence peuvent être correctement recalées. La figure 5.24 est obtenue pour un module d'Young de la colle de  $E_{\text{epoxy}} = 3 \cdot 10^{10} \text{Pa}$ . Des résultats similaires sont obtenus pour un module d'Young compris entre  $10^8 \text{Pa}$  et le module de l'acier. Une rigidité élevée de l'adhésif permet généralement de s'assurer qu'il n'y a pas de glissement entre les couches assemblées [59]. Dans le cas d'une structure munie de matériaux viscoélastiques, l'utilisation d'adhésifs présentant une forte rigidité permet de garantir un cisaillement optimal de la couche amortissante.

La figure 5.25 montre qu'un module d'Young de  $E_{\text{ruban}} = 10^5 \text{Pa}$  pour le ruban adhésif permet de recaler le premier pic de réponse en fréquence et d'approcher raisonnablement les suivants. Cependant, un amortissement important et croissant avec la fréquence est observé sur la réponse fréquentielle mesurée, qu'il n'est pas possible de prédire par un simple amortissement structural sur le module d'Young du ruban adhésif. La faible valeur du module identifié suggère un possible cisaillement du ruban entre les deux lames d'acier [59]. De plus, le comportement expérimental observé sur la figure 5.25 évoque un comportement viscoélastique du ruban adhésif. Ces observations permettent une meilleure compréhension des résultats obtenus sur les structures sandwich avec couche viscoélastique réalisées avec le ruban adhésif. Un cisaillement du ruban adhésif :

- limite le cisaillement dans la couche viscoélastique et donc la dissipation d'énergie, ce qui expliquerait les importants écarts sur les amortissements modaux et les amplitudes de la réponse fréquentielle observés sur les figures 5.17 et 5.20,
- entraîne une rigidité globale de la structure sandwich plus faible qui peut être à l'origine des décalages fréquents des pics de résonance (figures 5.17 et 5.20).

En revanche, la rigidité élevée identifiée pour la colle structurale epoxy rend improbable un glissement aux interfaces entre les couches assemblées. On s'attend donc à observer pour les essais réalisés avec cet adhésif des erreurs plus faibles sur les amortissements modaux que pour les essais réalisés avec le ruban adhésif.

## 5.4. ANALYSE DES ÉCARTS OBSERVÉS

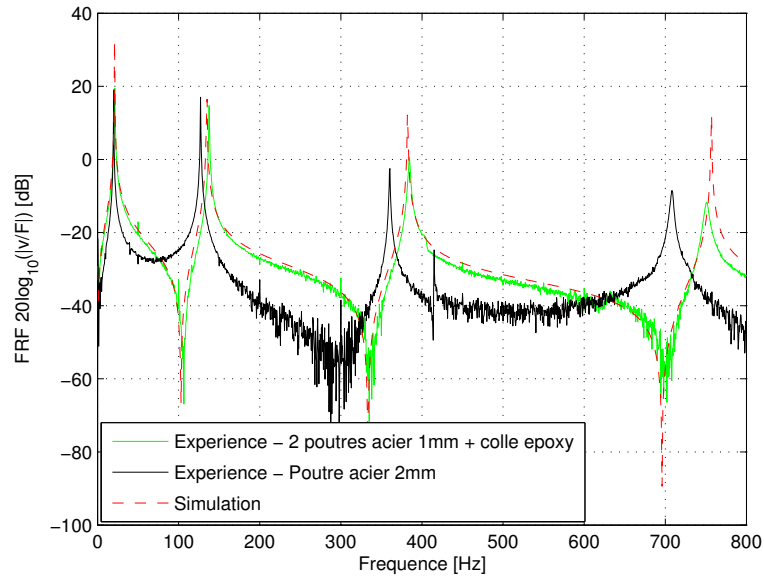


FIGURE 5.24 – Courbes de réponse en fréquence mesurées pour les essais A (noir) et B (vert), superposées à la courbe de réponse en fréquence simulée, recalée avec  $E_{\text{epoxy}} = 3 \cdot 10^{10} \text{Pa}$  (rouge).

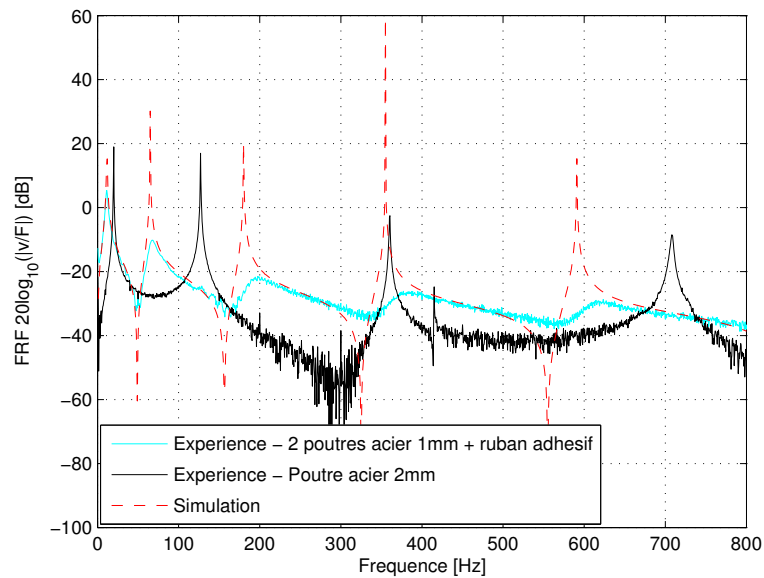


FIGURE 5.25 – Courbes de réponse en fréquence mesurées pour les essais A (noir) et C (cyan), superposées à la courbe de réponse en fréquence simulée, recalée avec  $E_{\text{ruban}} = 10^5 \text{Pa}$  (rouge).

## 5.5 Conclusion

Une assez bonne corrélation est obtenue entre les résultats expérimentaux et numériques. En revanche, on observe des écarts plus ou moins importants suivant les essais réalisés, notamment sur les fréquences de résonance et les amortissements modaux, souvent utilisés comme critères de conception de la couche viscoélastique. Deux origines possibles de ces écarts sont identifiées : la couche adhésive et l'incertitude de mesure sur le module de cisaillement. Des essais DMA des adhésifs permettraient de mieux caractériser la part de l'erreur observée entre les réponses fréquentielles et expérimentales due à l'influence du collage réalisé. La connaissance des propriétés mécaniques des adhésifs rend possible la prise en compte de la couche de colle dans le modèle éléments finis. Dans les résultats présentés, l'incertitude de mesure sur les propriétés mécaniques de la couche viscoélastique a une influence moins importante que le collage sur le comportement dynamique des structures sandwich. Celle-ci peut être prise en compte dans le modèle par des approches stochastiques. Ce type d'approches est déjà utilisé pour prendre en compte l'incertitude de mesure et de modélisation lors de l'identification des propriétés mécaniques de matériaux viscoélastiques [196] ou de matériaux poreux [32].

## Chapitre 6

# Éléments d'interface pour la modélisation d'interfaces viscoélastiques

### 6.1 Introduction

L'efficacité d'un traitement viscoélastique dépend du matériau utilisé, de la position et des dimensions de la couche amortissante. Une modélisation par éléments finis permet de réaliser des études paramétriques dans le but d'optimiser le traitement viscoélastique. Par exemple, dans une étude de poutre sandwich, Sher et Moreira [174] mettent en évidence l'existence d'une épaisseur optimale de couche viscoélastique maximisant la dissipation d'énergie. Pour cela, des éléments finis de type poutre sandwich sont utilisés pour modéliser la structure sandwich. Pour des structures complexes, maillées par des éléments solides, ce genre d'étude est plus délicat puisque l'effort numérique nécessaire à la détermination des paramètres optimaux devient très important. Le coût de calcul d'études paramétriques est d'autant plus important lorsque l'épaisseur de la couche viscoélastique est petite. Des maillages assez fins sont alors nécessaires pour permettre une bonne représentation du comportement dans la couche amortissante et pour éviter des problèmes de mauvais conditionnement dus à des rapports de forme des éléments finis. De plus, chaque épaisseur ou position testée de la couche viscoélastique nécessite un remaillage de la structure, et les matrices de masse et de raideur de la structure doivent alors être recalculées.

Ce chapitre concerne la modélisation de fines couches viscoélastiques dans le cadre d'une

optimisation des paramètres structuraux (épaisseur et position). La première section présente les différentes approches existantes pour modéliser une discontinuité géométrique ou matérielle, telle que la discontinuité observée entre la couche viscoélastique et la structure élastique à amortir. La deuxième section décrit la formulation des éléments finis d'interface développés. Ces derniers sont validés par rapport à une approche tridimensionnelle dans la troisième section.

### 6.2 Approches existantes pour la modélisation de discontinuités géométriques ou matérielles

Dans de nombreuses applications on retrouve des structures présentant des discontinuités géométriques ou matérielles que l'on souhaite prendre en compte efficacement dans un modèle éléments finis. Ces discontinuités peuvent se manifester par une fine couche dont les propriétés sont très différentes des couches adjacentes. C'est le cas par exemple pour la fine couche de mortier dans les structures maçonnées [64] ou le film mince d'oxyde déposés sur des substrats de systèmes électromagnétiques [22]. Les discontinuités peuvent également consister en une interface entre deux milieux se déplaçant l'un par rapport à l'autre, comme par exemple l'interface entre des milieux géologiques lors de glissements en géotechnique [123], ou l'interface entre les plis d'une structure composite lors du délaminage [5]. Il existe globalement deux manières de représenter ces discontinuités : soit par un milieu continu de petite épaisseur<sup>1</sup>, soit par une surface associée à une épaisseur fictive.

Le premier cas donne lieu aux éléments finis dits de couche mince ("thin layer elements"), introduits par Desai [46]. Leur formulation est très similaire à celle des éléments solides, mais en considérant une loi constitutive adaptée : on peut montrer que pour un coefficient de Poisson nul, les contraintes et les déformations dans le plan deviennent négligeables lorsque l'épaisseur des éléments tend vers zéro [126, 172]. L'application des éléments de couche mince, ainsi que les problèmes associés à leur utilisation sont longuement traités dans la littérature [40, 121, 172].

---

1. Le terme épaisseur ici est un abus de langage, il est souvent utilisé dans la littérature pour faire référence à la plus petite dimension d'un volume ou d'un élément fini.

La deuxième représentation possible des discontinuités correspond aux éléments sans épaisseur (“zero thickness elements”) ou éléments joints (“joint elements”), initialement développés par Goodman [66] pour des applications géotechniques. Ces éléments consistent à autoriser des sauts de déplacement entre deux ou plusieurs couches adjacentes. Le concept d’éléments sans épaisseur a été repris par de nombreux auteurs [77, 84, 109, 168, 170].

Dans le cas d’une structure amortie par une fine couche viscoélastique, la couche amortissante peut être vue comme une interface entre deux parties élastiques de la structure. Les importantes déformations de cisaillement subies par la couche viscoélastique peuvent alors être assimilées à un glissement des deux parties élastiques. On parlera alors d’interface viscoélastique. Nous présentons dans la section suivante deux éléments finis d’interface pour la prédiction de l’amortissement dans une structure munie de fines couches viscoélastiques. Le premier est une adaptation des éléments joints décrits dans [170], le second est une dégénérescence d’un élément solide. Les deux éléments finis développés sont définis à partir d’une surface, ce qui rend aisée l’optimisation de l’épaisseur de la couche viscoélastique puisqu’un changement d’épaisseur ne nécessite pas de remaillage de la structure.

### 6.3 Formulation des éléments d’interface

#### 6.3.1 Éléments joints

L’élément joint considéré dans cette étude est une adaptation de l’élément sans épaisseur décrit par Segurado [170] pour modéliser la rupture et la décohésion d’inclusions dans un matériau composite. Cet élément est constitué de deux surfaces triangulaires qui connectent les faces de deux tétraèdres quadratiques adjacents (voir figure 6.1.a). Des modifications sont apportées à cet élément afin d’être appliqué à la modélisation de l’interface viscoélastique.

Considérons une surface triangulaire à 6 nœuds représentant l’interface entre les deux faces élastiques contraignant la couche viscoélastique. Pour chaque point à l’interface, une paire de nœuds est placée à la même position géométrique (figure 6.1.b). Les deux surfaces triangulaires quadratiques ainsi créées forment l’élément joint à 12 nœuds. Ces surfaces étant superposées dans la configuration initiale, l’épaisseur de l’élément est initialement égale à

### 6.3. FORMULATION DES ÉLÉMENTS D'INTERFACE

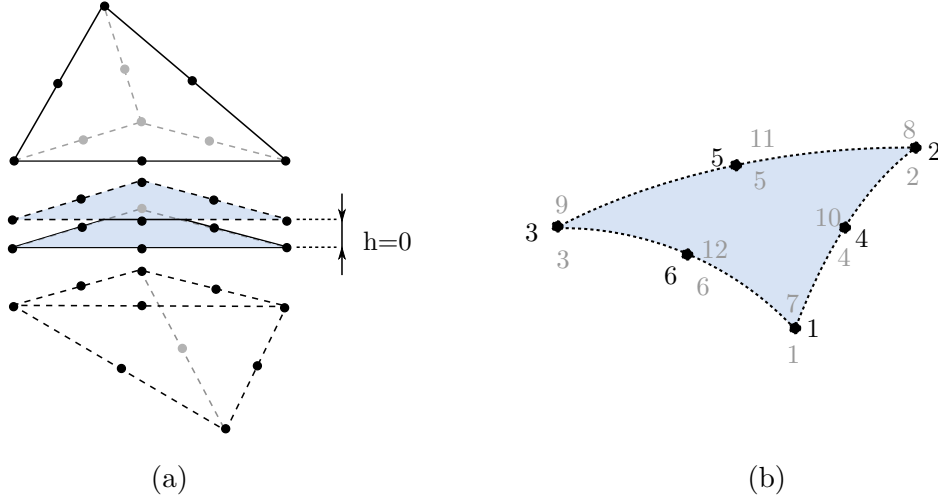


FIGURE 6.1 – (a) Élément joint connecté aux faces de deux tétraèdres quadratiques adjacents dans la position initiale. (b) Position des nœuds de la surface triangulaire d'interface (points noirs) et des nœuds formant l'élément fini d'interface (points gris).

zéro. Chaque nœud possède trois degrés de liberté, conduisant au vecteur de déplacements nodaux  $\mathbf{U}_e$  élémentaires dans le système de coordonnées globales  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  :

$$\mathbf{U}_e = [U_x^1, \dots, U_x^{12}, U_y^1, \dots, U_y^{12}, U_z^1, \dots, U_z^{12}]^T, \quad (6.1)$$

et au vecteur  $\hat{\mathbf{U}}_e$  dans le système de coordonnées locales  $(\mathbf{n}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$  :

$$\hat{\mathbf{U}}_e = [U_n^1, \dots, U_n^{12}, U_{t_1}^1, \dots, U_{t_1}^{12}, U_{t_2}^1, \dots, U_{t_2}^{12}]^T, \quad (6.2)$$

où  $n$  indique la direction normale à la surface d'interface, et  $t_1$  et  $t_2$  indiquent les directions tangentiels à la surface d'interface. Le vecteur des déplacements relatifs élémentaires entre chaque paire de nœuds est relié au vecteur des déplacements nodaux élémentaires dans le système de coordonnées locales par :

$$\Delta \hat{\mathbf{U}}_e = \underset{[18 \times 1]}{\mathbb{L}} \underset{[18 \times 36]}{\mathbb{L}} \underset{[36 \times 1]}{\hat{\mathbf{U}}_e}, \quad (6.3)$$

où la matrice  $\mathbb{L}$  est définie par :

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_6 & -\mathbb{1}_6 & \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 \\ \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 & \mathbb{1}_6 & -\mathbb{1}_6 & \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 \\ \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 & \mathbb{1}_6 & \mathbb{1}_6 \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

où  $\mathbb{1}_6$  est la matrice diagonale unitaire de dimensions  $6 \times 6$ , et  $\mathbf{O}_6$  est la matrice remplie de zéros de dimensions  $6 \times 6$ . Les déplacements relatifs continus  $\Delta \hat{\mathbf{u}} = [\Delta u_n, \Delta u_{t_1}, \Delta u_{t_2}]$

### 6.3. FORMULATION DES ÉLÉMENTS D'INTERFACE

s'écrivent dans le système de coordonnées locales de la manière suivante :

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \underset{[3 \times 1]}{\mathbf{N}} \underset{[3 \times 18]}{\Delta \hat{\mathbf{U}}_e} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_e & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_e \end{bmatrix} \underset{[18 \times 1]}{\Delta \hat{\mathbf{U}}_e}, \quad (6.5)$$

où  $\mathbf{N}_e$  contient les fonctions de forme d'un élément triangle à 6 nœuds (voir annexe C).

Finalement on obtient :

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{N} \mathbf{L} \hat{\mathbf{U}}_e. \quad (6.6)$$

La matrice de rotation  $\mathbf{R}$  du système de coordonnées globales au système de coordonnées locales ( $\hat{\mathbf{U}}_e = \mathbf{R} \mathbf{U}_e$ ), de taille  $36 \times 36$ , est donnée par :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} n(1)\mathbf{1}_{12} & n(2)\mathbf{1}_{12} & n(3)\mathbf{1}_{12} \\ t_1(1)\mathbf{1}_{12} & t_1(2)\mathbf{1}_{12} & t_1(3)\mathbf{1}_{12} \\ t_2(1)\mathbf{1}_{12} & t_2(2)\mathbf{1}_{12} & t_2(3)\mathbf{1}_{12} \end{bmatrix}, \quad (6.7)$$

où  $\mathbf{1}_{12}$  est la matrice diagonale unitaire de dimensions  $12 \times 12$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{t}_1$  et  $\mathbf{t}_2$  sont calculés à partir des coordonnées des nœuds de la surface triangulaire d'interface,  $\mathbf{X}_0 = [x^1, \dots, x^6, y^1, \dots, y^6, z^1, \dots, z^6]^T$ , et des fonctions de forme  $\mathbf{N}_e$  :

$$\begin{cases} \mathbf{n} = \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial r} \mathbf{X}_0 \times \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} \mathbf{X}_0 \right) / \left\| \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial r} \mathbf{X}_0 \times \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} \mathbf{X}_0 \right\|, \\ \mathbf{t}_1 = \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial r} \mathbf{X}_0 \right) / \left\| \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial r} \mathbf{X}_0 \right\|, \\ \mathbf{t}_2 = \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} \mathbf{X}_0 \right) / \left\| \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} \mathbf{X}_0 \right\|, \end{cases} \quad (6.8)$$

où  $r$ ,  $s$ , et  $t$  sont les coordonnées associées au repère de référence de l'élément fini (voir annexe C). Si l'épaisseur de la couche viscoélastique est suffisamment petite, les contraintes et les déformations dans le plan sont supposées négligeables (comme c'est couramment le cas dans les éléments de couche mince [126, 172]), c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned} \epsilon_{t_1 t_1} = 0 & \quad \epsilon_{t_2 t_2} = 0 & \quad \gamma_{t_1 t_2} = 0, \\ \sigma_{t_1 t_1} = 0 & \quad \sigma_{t_2 t_2} = 0 & \quad \tau_{t_1 t_2} = 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

De plus, lorsque l'épaisseur de la couche viscoélastique  $h$  tend vers zéro, les gradients des déplacements  $u_n$ ,  $u_{t_1}$  et  $u_{t_2}$  dans la direction normale sont dominants par rapport aux gradients dans les autres directions, et peuvent être approximés par :

$$\frac{\partial u_n}{\partial n} \approx \frac{\Delta u_n}{h} \quad \frac{\partial u_{t_1}}{\partial n} \approx \frac{\Delta u_{t_1}}{h} \quad \frac{\partial u_{t_2}}{\partial n} \approx \frac{\Delta u_{t_2}}{h}. \quad (6.10)$$

### 6.3. FORMULATION DES ÉLÉMENTS D'INTERFACE

---

Les déformations hors-plan s'écrivent alors :

$$\epsilon_{nn} = \frac{\Delta u_n}{h} \quad \gamma_{t_1 n} = \frac{\Delta u_{t_1}}{h} \quad \gamma_{t_2 n} = \frac{\Delta u_{t_2}}{h} \quad , \quad (6.11)$$

et sont reliées aux contraintes hors-plan par la loi de Hooke avec des modules complexes et dépendants de la fréquence :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \tau_{t_1 n} \\ \tau_{t_2 n} \end{bmatrix} = \left( \underbrace{K^*(\omega) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + G^*(\omega) \begin{bmatrix} 4/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbb{C}^*(\omega)} \right) \begin{bmatrix} \epsilon_{nn} \\ \gamma_{t_1 n} \\ \gamma_{t_2 n} \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

Le travail virtuel des efforts intérieurs (premier terme de l'équation (4.10)) s'écrit dans le système de coordonnées de référence de l'élément  $(r, s, t)$  :

$$\delta W_e = \int_{-1}^1 \int_0^{1-s} \int_0^{1-r} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} \det(\mathbb{J}) dr ds dt, \quad (6.13)$$

où  $\det(\mathbb{J})$  est le Jacobien de la transformation entre le système de coordonnées de référence  $(r, s, t)$  et le système de coordonnées global  $(x, y, z)$  :

$$\det(\mathbb{J}) = \sqrt{\left(\frac{D(x, y)}{D(r, s)}\right)^2 + \left(\frac{D(x, z)}{D(r, s)}\right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(r, s)}\right)^2}, \quad (6.14)$$

où :

$$\frac{D(x, y)}{D(r, s)} = \det \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \right) \quad (6.15)$$

Une intégration analytique est réalisée dans la direction  $t$ , et une intégration numérique est utilisée pour calculer les deux autres intégrales de l'équation (6.13). Une intégration à trois points est implémentée, comme suggérée dans [170]. La matrice de raideur élémentaire est définie de la manière suivante :

$$\mathbb{K}_e = \mathbb{R}^T \mathbb{L}^T \left( \sum_{j=1}^3 \mathbb{N}^T \frac{\mathbb{C}^*(\omega)}{h} \mathbb{N} w_j \det(\mathbb{J}) \right) \mathbb{L} \mathbb{R}, \quad (6.16)$$

où  $w_j$  est le poids associé au point de Gauss  $j$ . Le terme  $\mathbb{C}/h$  peut être interprété comme la loi de comportement d'un matériau fictif se comportant comme un ressort [77, 78].

La matrice de masse associée à l'élément d'interface est construite à partir d'une matrice

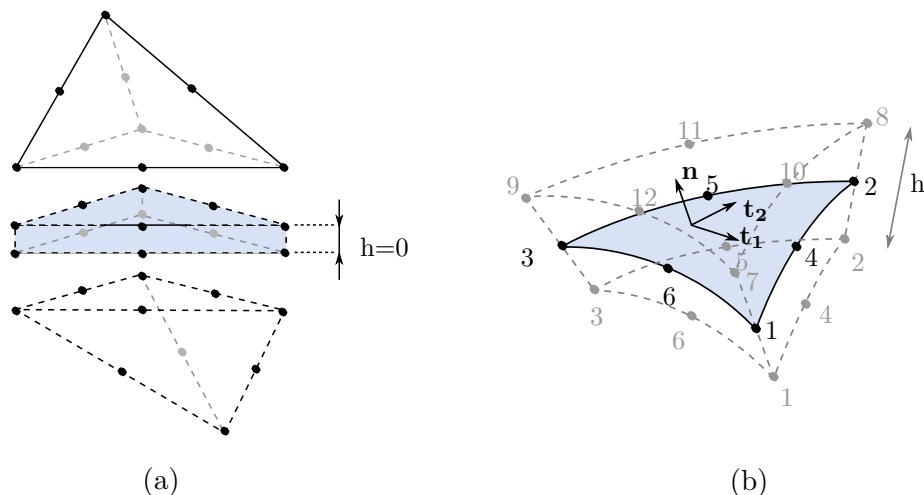


FIGURE 6.2 – (a) Élément d'interface volumique connecté aux faces de deux éléments tétraédriques quadratiques. (b) Surface d'interface triangulaire ou surface moyenne (trait plein bleu) et volume prismatique fictif représenté par l'élément d'interface (traits pointillés gris).

de masse d'un élément triangle quadratique, en répartissant uniformément la masse sur les nœuds des surfaces triangulaires de l'élément d'interface :

$$\mathbf{M}_e^+ = \mathbf{M}_e^- = \sum_{j=1}^3 \mathbf{N}^T \frac{\rho h}{2} \mathbf{N} w_j \det(\mathbf{J}), \quad (6.17)$$

où  $\mathbf{M}_e^+$  et  $\mathbf{M}_e^-$  représentent respectivement la partie de la matrice de masse relative aux nœuds de la surface supérieure et inférieure de l'élément d'interface, et  $\rho$  est la densité du matériau viscoélastique.

### 6.3.2 Éléments d'interface volumiques

Le deuxième élément d'interface proposé pour la modélisation d'interfaces viscoélastiques est un élément prismatique à 12 nœuds. L'épaisseur physique de cet élément est initialement nulle et les bases triangulaires du prisme sont connectées aux faces de deux éléments tétraédriques quadratiques adjacents (figure 6.2.a). L'élément d'interface volumique est décrit par une surface triangulaire quadratique, ou surface moyenne, dont les coordonnées des nœuds sont notées  $\mathbf{X}_0 = [x_0^1, \dots, x_0^6, y_0^1, \dots, y_0^6, z_0^1, \dots, z_0^6]$ , et une épaisseur fictive  $h$ , prise dans la direction normale à la surface moyenne, supposée constante (figure 6.2.b). La

### 6.3. FORMULATION DES ÉLÉMENTS D'INTERFACE

---

normale à la surface moyenne  $\mathbf{n}_i$  est évaluée en chaque point de la surface triangulaire :

$$\mathbf{n}_i = \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial r} \Big|_{\substack{r=r_i \\ s=s_i}} \mathbf{X}_0 \times \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} \Big|_{\substack{r=r_i \\ s=s_i}} \mathbf{X}_0 \right) / \left\| \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial r} \Big|_{\substack{r=r_i \\ s=s_i}} \mathbf{X}_0 \times \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} \Big|_{\substack{r=r_i \\ s=s_i}} \mathbf{X}_0 \right\|, \quad (6.18)$$

où  $\mathbf{N}$  est la matrice introduite dans l'équation (6.5) qui contient les fonctions de forme d'un élément triangle à 6 nœuds,  $(r_i, s_i)$  sont les coordonnées du nœud  $i$  dans le système de coordonnées de référence  $(r, s)$ . Comme pour l'élément joint, une paire de nœuds est placée à la même position géométrique que les nœuds de la surface moyenne. Ces nœuds forment un volume fictif, représenté en gris sur la figure 6.2.b. Les coordonnées  $\mathbf{X}^i = [x^i, y^i, z^i]$  du nœud  $i$  appartenant à ce volume sont calculées de la manière suivante :

$$\mathbf{X}^i = \mathbf{X}_0^i + \xi \frac{h}{2} \mathbf{n}_i, \quad (6.19)$$

où  $\xi \in [-1, 1]$ . Une fois que les coordonnées des nœuds formant le volume fictif sont calculées, l'élément d'interface est formulé comme un élément solide classique (voir section 4.3.2). Le champ de déplacement  $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T$  est approximé à l'aide des fonctions de forme  $\mathbf{H}_e$  d'un élément solide prismatique à 12 nœuds (voir annexe C) et les degrés de liberté  $\mathbf{U}_e$  sont exprimés dans le système de coordonnées globales  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  :

$$\mathbf{u} = \mathbf{H} \mathbf{U}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_e & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_e \end{bmatrix} \mathbf{U}_e. \quad (6.20)$$

Une approximation polynomiale de degré 1 du déplacement dans la direction normale à la surface moyenne de l'élément d'interface est considérée dans cette approche. Les matrices de masse et de raideur élémentaires sont données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= \sum_{j=1}^{n_G} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^*(\omega) \mathbf{B} w_j \det(\mathbf{J}), \\ \mathbf{M}_e &= \sum_{j=1}^{n_G} \mathbf{H}^T \rho \mathbf{H} w_j \det(\mathbf{J}), \end{aligned} \quad (6.21)$$

où  $\mathbf{B}$  est la matrice de gradient discrétisé,  $n_G$  est le nombre de points d'intégration,  $w_j$  est le poids associé au point d'intégration  $j$  et  $\rho$  est la densité du matériau viscoélastique. La matrice d'élasticité  $\mathbf{C}^*(\omega)$  est donnée par l'équation (4.7). La matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  de la transformation du système de coordonnées de référence  $(r, s, t)$  au système de coordonnées

globales  $(x, y, z)$ , est calculée à partir des coordonnées des nœuds formant le volume fictif (équation (6.19)) :

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial r} x_i & \frac{\partial H_i}{\partial s} x_i & \frac{\partial H_i}{\partial t} x_i \\ \frac{\partial H_i}{\partial r} y_i & \frac{\partial H_i}{\partial s} y_i & \frac{\partial H_i}{\partial t} y_i \\ \frac{\partial H_i}{\partial r} z_i & \frac{\partial H_i}{\partial s} z_i & \frac{\partial H_i}{\partial t} z_i \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Plusieurs méthodes d'intégration ont été testées et celle utilisant trois points d'intégration est suffisante pour obtenir une bonne approximation des intégrales dans l'expression du travail virtuel des efforts intérieurs et du travail virtuel des quantités d'accélération (deuxième terme de l'équation (4.10)).

## 6.4 Validation des éléments d'interface

Les éléments d'interface présentés dans la section précédente sont validés sur deux cas d'étude : une poutre sandwich encastree-libre et un modèle de tuyère.

### 6.4.1 Cas d'étude 1 : Poutre sandwich console

Considérons une poutre sandwich encastree-libre, représentée sur la figure 6.3, soumise à un chargement linéique ( $F = 1/b$  N) harmonique appliqué à l'extrémité libre de la poutre. Une couche viscoélastique de Deltane 350 est contrainte par deux faces élastiques en acier. Un modèle fractionnaire de Zener, dont les paramètres sont donnés dans l'équation (5.1) est utilisé pour représenter les variations fréquentielles du module de cisaillement. Le module de compressibilité est supposé constant :  $K^*(\omega) = 2.22$  GPa. Les faces élastiques sont modélisées par des éléments tétraédriques quadratiques, et la couche viscoélastique est modélisée soit par des éléments tétraédriques à 10 nœuds (référence), soit par l'un des deux éléments d'interface présentés dans la section précédente, soit par des éléments solides prismatiques à 12 nœuds (référence 2). Les maillages correspondants sont montrés sur la figure 6.4.

La réponse fréquentielle de la poutre sandwich est calculée pour chaque maillage pour différents ratios entre l'épaisseur de la couche viscoélastique et l'épaisseur totale de la

#### 6.4. VALIDATION DES ÉLÉMENTS D'INTERFACE

---

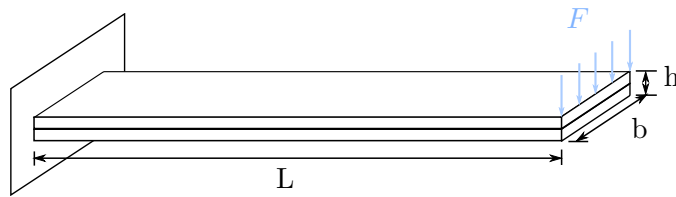


FIGURE 6.3 – Poutre sandwich console ( $L = 1\text{m}$ ,  $b = 0.1\text{m}$ ,  $h = 0.1\text{m}$ ) soumise à un chargement harmonique unitaire  $F(t) = \sin(2\pi\omega t)$ , avec  $\omega \in [0 - 1000]\text{Hz}$ .

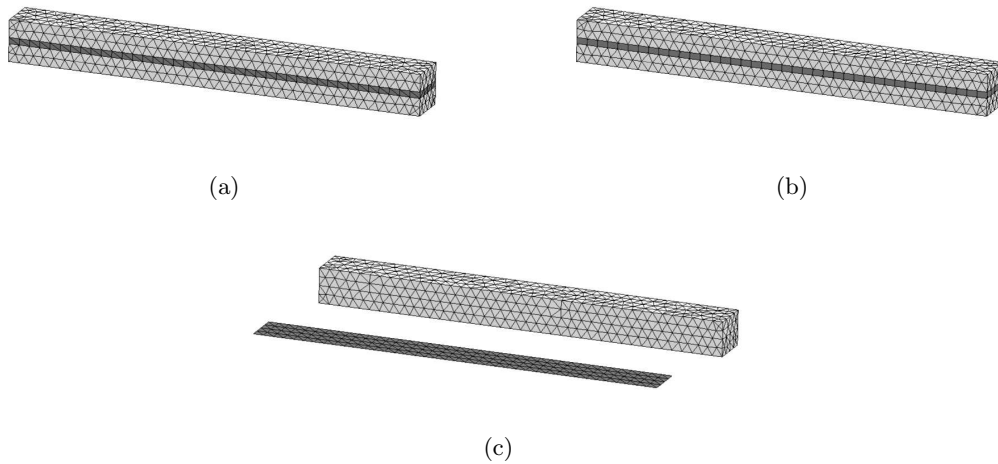


FIGURE 6.4 – Maillage de référence (a), maillage de référence 2 (b) et maillage avec éléments d'interface (c) de la poutre sandwich.

structure<sup>2</sup> (constante durant l'étude). Les résultats de l'étude, présentés sur la figure 6.5, montrent que le modèle avec éléments d'interface converge vers la solution de référence lorsque le ratio d'épaisseur diminue, validant ainsi les approches proposées pour modéliser une interface viscoélastique. On remarque également que les écarts observés aux anti-résonances entre le modèle de référence et les modèles avec éléments d'interface sont dûs à l'approximation de degré 1 du déplacement dans l'épaisseur (voir figure C.2 dans l'annexe C), puisque les mêmes écarts sont observés entre le modèle de référence et le modèle où la couche viscoélastique est modélisée par des éléments solides prismatiques à 12 nœuds. De plus, en l'absence de courbure, l'élément d'interface volumique est équivalent à un élément solide prismatique, comme le prouve la superposition des courbes de réponses en fréquence calculées pour une couche viscoélastique modélisée par ces deux éléments. Pour les deux modèles avec éléments d'interface, les erreurs sur la fréquence de résonance et l'amortissement modal du troisième mode par rapport à la solution de référence sont calculées (une méthode de bande passante à  $-3\text{dB}$  est utilisée). On remarque sur la figure 6.6 qu'une très bonne précision est obtenue avec des éléments d'interface volumiques, même pour des petits ratios d'épaisseur : l'erreur sur la fréquence de résonance est inférieure à  $0.04\%$  et celle sur l'amortissement modal est inférieure à  $0.3\%$ . Le modèle avec des éléments joints conduit à des erreurs plus importantes qu'avec un modèle avec éléments d'interface volumiques, notamment sur l'amortissement modal, ce qui suggère qu'une partie de l'énergie est dissipée lors de déformations dans le plan. Sur la figure 6.6, on observe une convergence plus rapide<sup>3</sup> avec des éléments joints qu'avec des éléments d'interface volumiques, laissant penser que pour des ratios d'épaisseur très faibles (inférieurs à  $1/100$ ), un modèle avec éléments joints peut être plus efficace qu'un modèle avec éléments d'interface volumiques.

---

2. L'épaisseur totale de la structure correspond à la somme des épaisseurs des faces en acier et de la couche viscoélastique dans le cas d'une modélisation tridimensionnelle, et à la somme des épaisseurs des faces en acier dans le cas d'une modélisation de la couche viscoélastique avec éléments d'interface

3. La notion de vitesse de *convergence* est ici un abus de langage. On fait référence à la vitesse à laquelle la solution obtenue par un modèle avec éléments d'interface s'approche de la solution obtenue pour une modélisation tridimensionnelle de la couche viscoélastique quand  $h \rightarrow 0$

## 6.4. VALIDATION DES ÉLÉMENTS D'INTERFACE

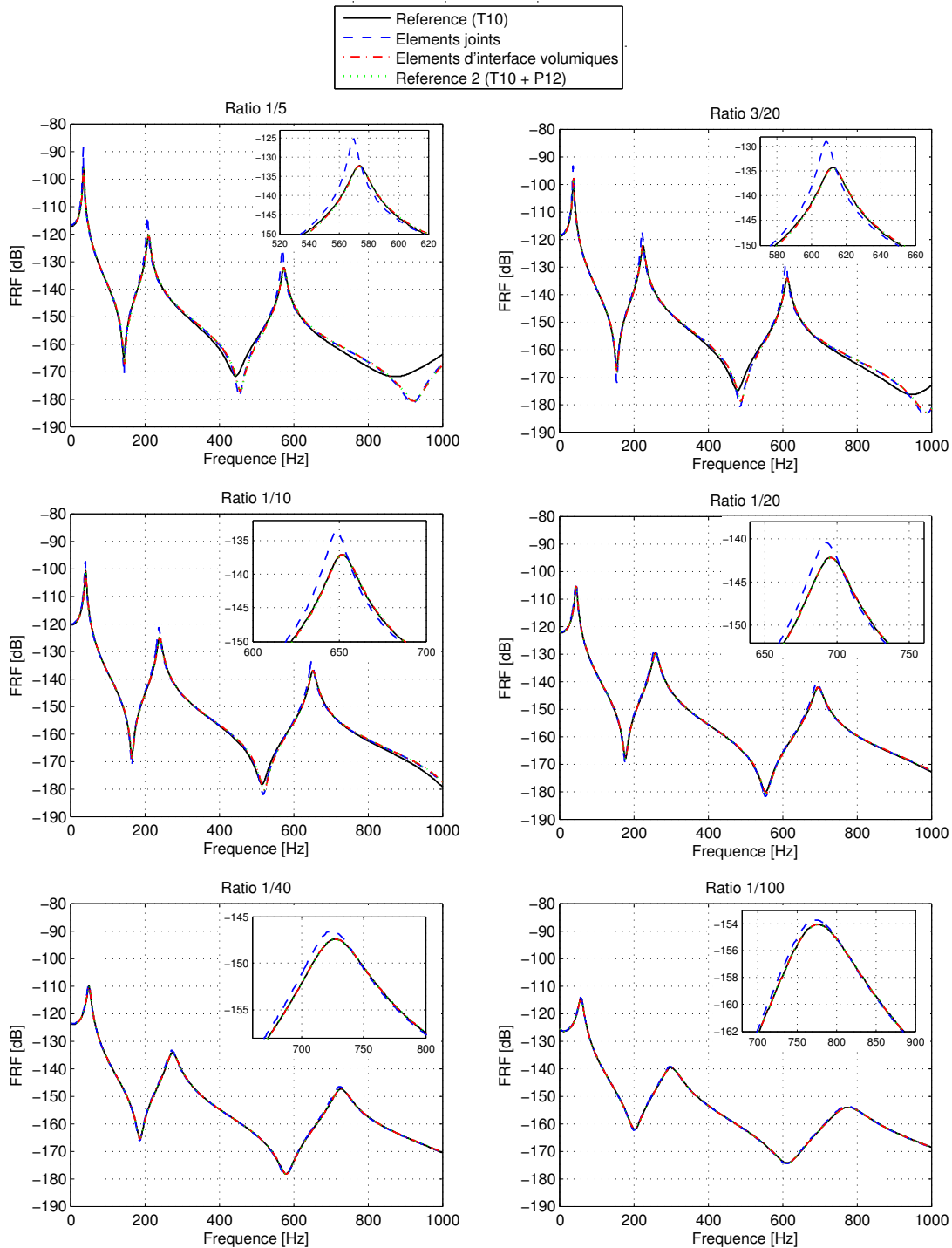


FIGURE 6.5 – Réponse fréquentielle de la poutre sandwich console pour différents maillages de la couche viscoélastique, en faisant varier le ratio d'épaisseur de 1/5 à 1/100.

## 6.4. VALIDATION DES ÉLÉMENTS D'INTERFACE

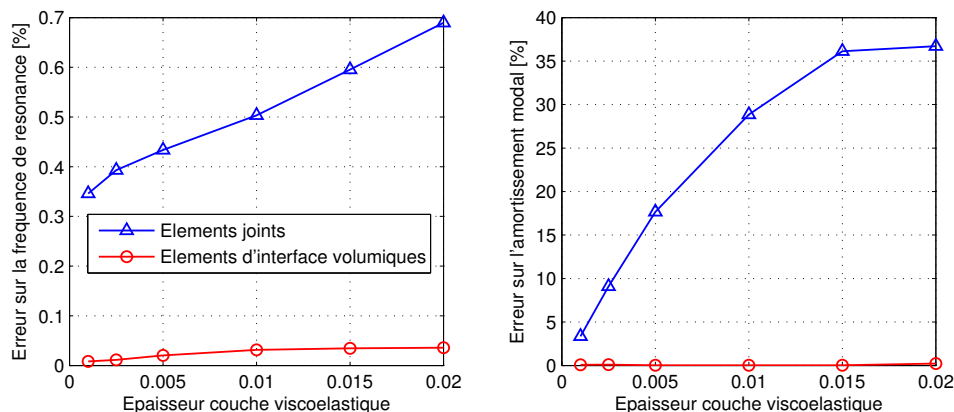


FIGURE 6.6 – Erreur sur la fréquence de résonance et l’amortissement modal du troisième mode de la poutre sandwich entre les modèles avec éléments d’interface et le modèle de référence en fonction de l’épaisseur de la couche viscoélastique (l’épaisseur totale de la poutre sandwich reste constante).

### 6.4.2 Cas d’étude 2 : Structure 3D complexe

On considère comme deuxième cas d’étude la structure étudiée dans la section 4.4.2, représentée sur la figure 4.6. La structure élastique est maillée par des éléments tétraédriques quadratiques et la couche viscoélastique est modélisée soit par des éléments tétraédriques à 10 nœuds (référence), soit par l’un des deux éléments d’interface développés. Les maillages correspondants sont donnés sur la figure 6.7 . La réponse fréquentielle de la structure est calculée pour une épaisseur de couche viscoélastique variant de 40mm à 5mm sur la gamme de fréquence  $[0 - 250]$ Hz. Les résultats, tracés sur la figure 6.8, mettent en évidence une convergence des modèles avec éléments d’interface vers la solution de référence. En revanche, contrairement au cas d’étude précédent, on observe un décalage fréquentiel persistant en modélisant l’interface viscoélastique par des éléments fins d’interface. Ceci peut s’expliquer par la courbure de la structure. En effet, puisque la structure est courbe, la modélisation d’une couche viscoélastique tridimensionnelle par une surface crée des décalages des lignes moyennes de chaque couche, qui ne sont pas pris en compte. Le volume de la face élastique externe de la partie cylindrique est alors plus petite en utilisant des éléments d’interface au lieu d’éléments solides pour la couche viscoélastique. De cette erreur introduite dans le modèle, résultent des décalages fréquentiels sur la réponse. Cependant, à mesure que l’épaisseur de la couche viscoélastique diminue, le volume de la

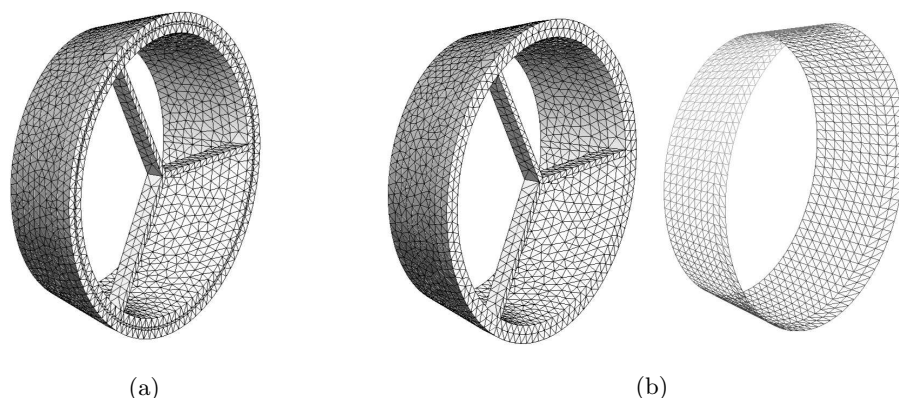


FIGURE 6.7 – Maillage de la tuyère, référence (a), maillage avec éléments d’interface (b) .

face élastique externe est mieux estimée et l’erreur décroît, comme indiqué sur la figure 6.8. Comme dans le premier cas d’étude, les erreurs sur la fréquence de résonance et l’amortissement modal du huitième mode (dernier mode excité sur la bande de fréquence considérée) par rapport à la solution de référence sont calculées (figure 6.9). On remarque encore une fois que la convergence est plus rapide pour les éléments joints que pour les éléments d’interface volumiques. D’ailleurs, pour une couche viscoélastique de 5mm, le modèle utilisant des éléments joints donne une meilleure approximation de la fréquence de résonance que celui utilisant les éléments d’interface volumiques. Enfin, on peut noter que l’amortissement augmente lorsque l’épaisseur de la couche viscoélastique diminue, ce qui est cohérent avec les résultats de Sher et Moreira [174], considérant les dimensions de la structure étudiée.

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre sont proposés deux éléments finis d’interface afin de modéliser de fines couches viscoélastiques. Les résultats montrent que le modèle avec éléments d’interface s’approche de la solution de référence, obtenue en modélisant la couche viscoélastique par des éléments solides. Les éléments d’interface volumiques donnent globalement de meilleurs résultats que les éléments joints puisque, contrairement à ces derniers, aucune hypothèse n’est faite sur les contraintes et les déformations dans le plan.

En revanche, l’utilisation d’éléments d’interface pour modéliser la couche viscoélastique

## 6.5. CONCLUSION

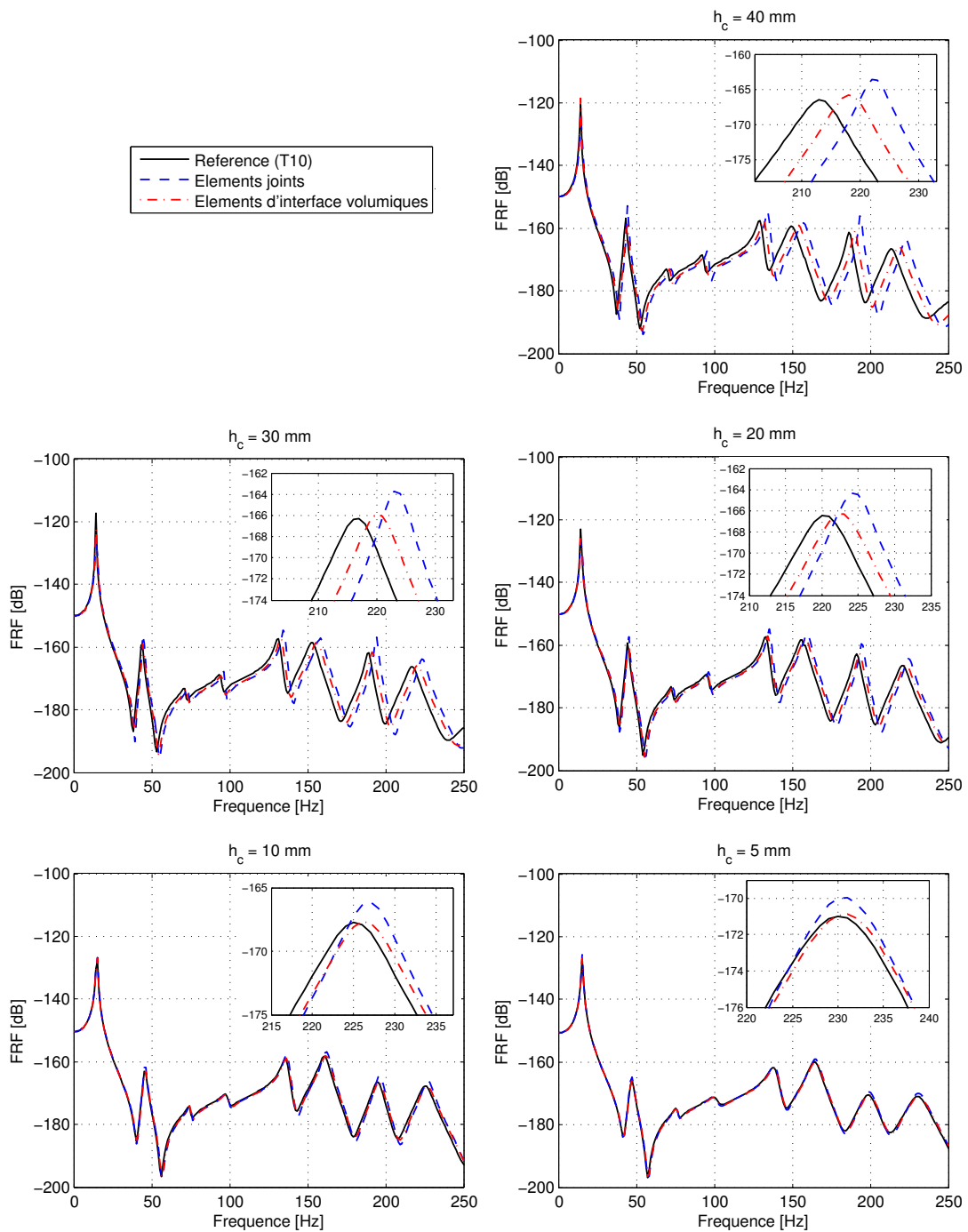


FIGURE 6.8 – Réponse fréquentielle de la tuyère pour différents maillages de la couche viscoélastique, en faisant varier l'épaisseur de la couche viscoélastique de 40mm à 5mm.

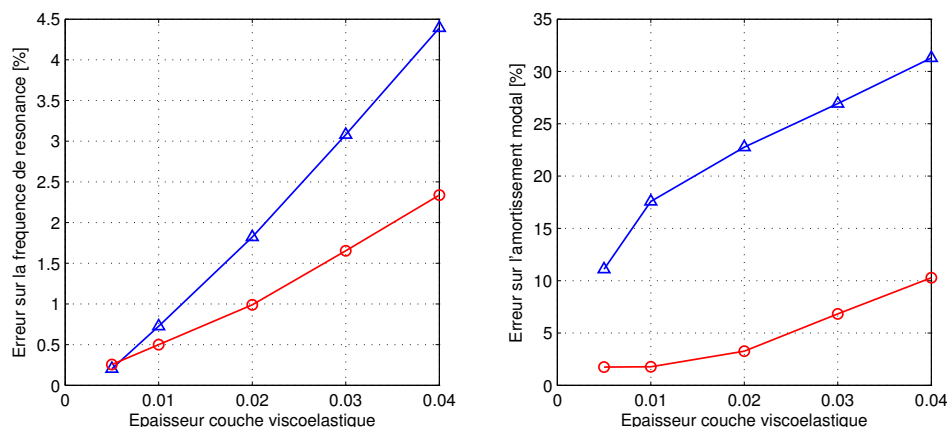


FIGURE 6.9 – Erreur sur la fréquence de résonance et l’amortissement modal du huitième mode de la tuyère entre les modèles avec éléments d’interface et le modèle de référence en fonction de l’épaisseur de la couche viscoélastique.

induit des décalages des lignes moyennes des différentes couches lorsque la structure est fortement courbée, ce qui provoque des erreurs sur les rayons de courbure des peaux de la structure. Les erreurs ainsi introduites dans la solution restent raisonnables pour des couches amortissantes de faibles épaisseurs.

Les éléments d’interface sont décrits par une surface moyenne et une épaisseur fictive. Le principe de la procédure de maillage d’une structure sandwich avec modélisation de la couche viscoélastique par des éléments d’interface est illustré sur la figure 6.10. L’utilisation des éléments d’interface dans un contexte d’optimisation ou d’études paramétriques représente un réel avantage puisqu’un changement d’épaisseur ne nécessite ni remaillage ni recalcul des matrices de masse et de raideur, et un changement de position de la couche viscoélastique ne requiert qu’un recalcul local des matrices de masse et de raideur. La modélisation de la couche viscoélastique par les éléments d’interface rend possible la réalisation, à moindre coût, d’études similaires à celle de Sher et Moreira [174], pour déterminer l’épaisseur optimale de la couche amortissante appliquée à une structure complexe. L’intérêt d’utiliser les éléments d’interface dans le cadre d’une étude paramétrique est mis en évidence dans le chapitre 9 à travers un cas d’application.

Enfin, ces éléments d’interface peuvent être utilisés pour représenter simplement des épaisseurs de colle dans un modèle éléments finis à partir de la définition d’une surface.

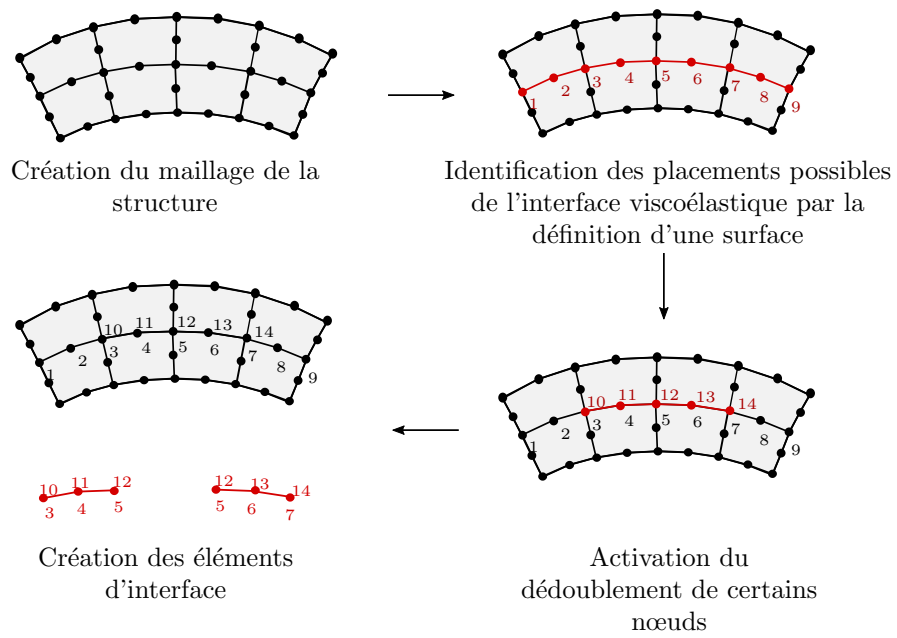


FIGURE 6.10 – Procédure de maillage d'une structure sandwich avec modélisation de la couche viscoélastique par des éléments d'interface.

## 6.5. CONCLUSION

---

## Troisième partie

# Réduction de modèle par approches modales et approximations de Padé



# Introduction

Afin de maximiser les performances du traitement viscoélastique appliqué, des études paramétriques sont généralement réalisées lors de l'étape de conception pour déterminer le matériau, les dimensions et les placements optimaux. Le modèle doit alors être modifié et la réponse fréquentielle de la structure amortie par une couche viscoélastique calculée pour chaque nouveau paramètre testé. C'est pourquoi une voie importante de la recherche concerne le développement de techniques permettant de réduire le coût numérique de calcul de la solution. Nous avons déjà vu dans le chapitre précédent que l'utilisation d'éléments finis d'interface pour modéliser de fines couches viscoélastiques permettait de tester plusieurs épaisseurs sans avoir à remailler la structure, ni recalculer les matrices de masse et de raideur de la structure. En revanche, pour des modèles de grande taille, le calcul de la réponse fréquentielle par une méthode directe devient très vite prohibitif. Des techniques de réduction de modèle peuvent alors être appliquées pour réduire le temps de calcul de la réponse.

Dans le cas d'une structure amortie par des matériaux viscoélastiques et soumise à un chargement harmonique, la discrétisation par éléments finis conduit au système d'équations suivant, de dimension  $n$ , dans le domaine fréquentiel :

$$[\mathbb{K}^*(\omega) - \omega^2 \mathbb{M}] \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (6.23)$$

où  $\mathbb{K}^*(\omega)$  est la matrice de raideur complexe et dépendante de la fréquence,  $\mathbb{M}$  la matrice de masse,  $\mathbf{F}$  est le vecteur de chargement et  $\mathbf{U}$  est le vecteur solution à déterminer pour chaque fréquence. La dépendance fréquentielle de la matrice de raideur ne permet pas d'appliquer directement les méthodes de réduction classiques. Diverses techniques de réduction adaptées aux structures fortement amorties sont proposées dans la littérature. Le but de cette partie est d'étudier l'efficacité de certaines d'entre elles, en terme de précision et de

---

coût de calcul. Le premier chapitre concerne les méthodes de réduction par projection sur base modale adaptées pour le calcul de la réponse de structures amorties par des matériaux viscoélastiques. Dans le deuxième chapitre, la reconstruction de la réponse fréquentielle par approximations de Padé est abordée. Ces méthodes sont ensuite appliquées et comparées dans le troisième chapitre sur le modèle de tuyère précédemment étudié, en utilisant le modèle viscoélastique identifié dans la première partie, et le modèle avec éléments d'interface développé dans la deuxième partie. Enfin, nous étudions un cas simple d'interaction fluide/structure à travers une application bidimensionnelle de structure amortie immergée dans l'eau. Ce dernier exemple introduit un opérateur de masse ajoutée pour le fluide, qui nous permet de réaliser simplement une étude paramétrique.

## Chapitre 7

# Méthode de réduction de modèle par approches modales

### 7.1 Introduction

Ce chapitre concerne l'étude de différentes méthodes de réduction modale appliquées à une structure fortement amortie par des matériaux viscoélastiques. Ces méthodes visent à réduire la taille du système d'équations à résoudre, et par conséquent le coût de calcul de la réponse fréquentielle, par projection sur une base d'un sous-espace de l'espace formé par les fonctions de forme éléments finis et de dimension  $n$ .

La méthode de superposition modale classiquement appliquée, apparentée à la méthode de Rayleigh-Ritz, consiste à utiliser une base tronquée de modes propres pour réduire la dimension du système à résoudre. Cependant, dans le cas de structures avec matériaux viscoélastiques, la dépendance fréquentielle de la matrice de raideur ne permet pas de définir simplement des modes propres. Plusieurs stratégies peuvent alors être adoptées pour traiter ce type de problème. Celles-ci sont présentées dans la deuxième section, après un rappel succinct sur la technique de superposition modale classique dans la première section. Ces méthodes sont ensuite appliquées à une structure munie d'une couche viscoélastique dans le but de déterminer la méthode présentant le meilleur compromis entre précision de la solution approchée et temps de calcul de la réponse fréquentielle. Cette étude comparative fait l'objet de la troisième section.

## 7.2 Rappel sur les approches modales

### 7.2.1 Cas sans amortissement

Dans le cas d'une structure non amortie, le système à résoudre s'écrit :

$$(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}) \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (7.1)$$

avec  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{M}$  des matrices symétriques respectivement positive et définie positive de dimensions  $n \times n$ . Le problème aux valeurs propres associé s'écrit :

$$(\mathbb{K} - \omega_k^2 \mathbb{M}) \Phi_k = \mathbf{0}, \quad (7.2)$$

avec  $\omega_k$  et  $\Phi_k$  respectivement la pulsation propre et le mode propre associé au mode  $k$ . On montre facilement que les modes  $\Phi_k$  sont orthogonaux par rapport aux matrices de masse  $\mathbb{M}$  et de raideur  $\mathbb{K}$  :

$$\Phi_r^T \mathbb{M} \Phi_s = 0 \quad \text{et} \quad \Phi_r^T \mathbb{K} \Phi_s = 0 \quad \text{pour } r \neq s. \quad (7.3)$$

La base constituée des vecteurs propres  $\Phi_k$  constitue une base complète de l'espace des fonctions de forme éléments finis, et peut être représentée par une matrice  $\mathbb{T}$  :

$$\mathbb{T} = [\Phi_1, \dots, \Phi_n]. \quad (7.4)$$

Compte tenu des propriétés d'orthogonalité précisées, et en normalisant ces modes par rapport à la matrice de masse, on a :

$$\mathbb{T}^T \mathbb{M} \mathbb{T} = \mathbf{1} \quad \text{et} \quad \mathbb{T}^T \mathbb{K} \mathbb{T} = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2). \quad (7.5)$$

En projetant le système (7.1) sur cette base, la solution s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^n \Phi_k \chi_k = \mathbb{T} \mathbf{X}, \quad (7.6)$$

où  $\mathbf{X}$  est solution du problème diagonal suivant :

$$\mathbb{T}^T (\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}) \mathbb{T} \mathbf{X} = \mathbb{T}^T \mathbf{F}. \quad (7.7)$$

La méthode de Rayleigh-Ritz consiste à chercher la solution dans un sous-espace de solutions admissibles de dimension réduite, en projetant le système (7.1) sur une base de

dimension  $N \ll n$ . Les  $N$  premiers modes propres d'une structure sont couramment utilisés pour former cette base de projection réduite. La solution approchée s'écrit alors :

$$\mathbf{U}_r = \sum_{k=1}^N \Phi_k \chi_k. \quad (7.8)$$

La méthode de Rayleigh-Ritz revient donc à tronquer la série dans l'équation (7.6), en ne conservant que les contributions des modes à basses fréquences :

$$\mathbf{U} = \underbrace{\sum_{k=1}^N \Phi_k \chi_k}_{\mathbf{U}_r} + \sum_{k=N+1}^n \Phi_k \chi_k. \quad (7.9)$$

L'ajout d'une correction statique  $\mathbf{T}_s = \mathbb{K}^{-1} \mathbf{F}$  (pour  $\mathbb{K}$  inversible) dans la base de projection permet généralement d'améliorer la précision de la solution approchée en prenant en compte les contributions des modes à hautes fréquences. Dans le cas où  $\mathbb{K}$  n'est pas inversible, c'est à dire en présence de modes de corps rigides, un pseudo-mode statique peut être obtenu par un décalage en masse :  $\mathbf{T}_e = (\mathbb{K} + \alpha \mathbb{M})^{-1} \mathbf{F}$ . La base de projection réduite est :

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}_s, \Phi_1 \dots \Phi_N]. \quad (7.10)$$

### 7.2.2 Cas d'une structure amortie

Dans le cas d'une structure amortie par des matériaux viscoélastiques, la matrice de raideur devient complexe et dépend de la fréquence et le problème à résoudre s'écrit :

$$(\mathbb{K}^*(\omega) - \omega^2 \mathbb{M}) \mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (7.11)$$

Le problème aux valeurs propres associé s'écrit :

$$[\mathbb{K}^*(\lambda_k^*) - \lambda_k^{*2} \mathbb{M}] \Phi_k^* = \mathbf{0}, \quad (7.12)$$

où les pulsations propres  $\lambda_k^{*2} = \omega_k^2(1 + i\eta_k)$  et les vecteurs propres  $\Phi_k^*$  associés au mode  $k$  sont complexes et ne peuvent être calculés simplement en raison de la non linéarité du problème aux valeurs propres. Différentes méthodes de projection modale permettant d'éviter la résolution du problème aux valeurs propres complexes non linéaire (7.12) sont proposées dans la littérature et sont présentées dans la section suivante.

## 7.3 Méthodes de projection modale adaptées aux structures amorties par des matériaux viscoélastiques

### 7.3.1 Méthode des énergies modales

Dans la méthode des énergies modales (MSE - *Modal Strain Energy*), développée par Johnson et Kienholz [82], on suppose que les modes propres du système non amorti, calculés pour une matrice de raideur constante, sont représentatifs des modes propres du système amorti. La base de projection est définie comme :

$$\mathbb{T} = [\mathbf{T}_s, \Phi_1(0) \dots \Phi_N(0)], \quad (7.13)$$

où les modes  $\Phi_k(0)$ , parfois appelés pseudo-modes propres, sont réels et solutions de :

$$[\mathbb{K}_0 - \lambda_k^2 \mathbb{M}] \Phi_k = \mathbf{0}, \quad (7.14)$$

où  $\mathbb{K}_0 = \mathbb{K}^*(\omega = 0)$  est la matrice de raideur statique. Cette méthode permet d'obtenir une bonne estimation des amortissements modaux dans le cas de structures faiblement amorties [82, 116]. Certains auteurs utilisent la même approche en prenant la matrice  $\Re(\mathbb{K}^*(\omega = \omega_{\max}))$ , c'est-à-dire une matrice de raideur réelle évaluée à la fréquence maximale d'étude [137].

En revanche, lorsque l'amortissement devient trop important, ce type d'approche conduit à des erreurs significatives. D'autres techniques peuvent alors être adoptées qui consistent :

- à étendre la méthode des énergies modales, en cherchant une meilleure approximation des modes complexes solutions de l'équation (7.12) par des méthodes itératives,
- à combiner plusieurs bases modales dans le cadre d'une approche multi-modèles,
- à enrichir la base modale de l'équation (7.13) en ajoutant des composantes dans la base de projection pour une meilleure représentation du comportement.

Ces approches sont décrites dans les sections suivantes.

### 7.3.2 Extensions de la méthode des énergies modales

#### 7.3.2.1 Méthode itérative des énergies modales

La méthode itérative des énergies modales (IMSE - *Iterative Modal Strain Energy*) [185, 191, 197] permet de prendre en compte la dépendance fréquentielle du module complexe

### 7.3. MÉTHODES DE PROJECTION MODALE ADAPTÉES AUX STRUCTURES AMORTIES PAR DES MATÉRIAUX VISCOÉLASTIQUES

---

en cherchant par itérations successives une valeur convergée des fréquences propres du problème :

$$[\Re(\mathbb{K}^*(\omega_p)) - \lambda_k^2(\omega_p)\mathbb{M}] \Phi_k(\omega_p) = \mathbf{0}, \quad (7.15)$$

où  $\lambda_k(\omega_p)$  et  $\Phi_k(\omega_p)$  sont respectivement la pulsation propre et le pseudo-mode propre du  $k^{\text{ième}}$  mode, calculés pour un module complexe évalué à la pulsation  $\omega_p$ .

Pour chaque mode  $k$ , des itérations sont réalisées dans le but de déterminer  $\omega_p$  tel que :

$$\frac{|\omega_p - \lambda_k(\omega_p)|}{\lambda_k(\omega_p)} < \epsilon_{\text{tol}}, \quad (7.16)$$

avec  $\epsilon_{\text{tol}}$  un critère de convergence de l'algorithme itératif. La méthode itérative des énergies modales permet ainsi de déterminer à quelles fréquences le module complexe doit être évalué pour le calcul des pseudo-modes propres formant la base de projection. La procédure correspondante est donnée par l'algorithme 1.

Cette méthode est basée sur l'hypothèse que la partie imaginaire de la matrice de raideur n'a pas d'influence sur le comportement dynamique de la structure.

---

**Algorithm 1** Algorithme de calcul de la base de projection par la méthode itérative des énergies modales.

---

1. Calcul des  $N$  premiers couples  $(\lambda_k(0), \Phi_k(0))$ , solutions de l'équation (7.14).
  2. Initialisation de la base de projection :  $\mathbb{T} = [\mathbf{T}_s]$ .
  3. **for**  $j = 1$  **to**  $N$  **do**
  4. Initialisation de la pulsation à laquelle est évalué le module complexe :  $\omega_p = \lambda_j(0)$  et de l'erreur :  $\epsilon = 1$ .
  5. **while**  $\epsilon > \epsilon_{\text{tol}}$  **do**
  6. Calcul des  $j$  premiers couples  $(\lambda_k(\omega_p), \Phi_k(\omega_p))$ , solutions de l'équation (7.15).
  7. Calcul de l'erreur  $\epsilon = \frac{|\omega_p - \lambda_j(\omega_p)|}{\lambda_j(\omega_p)}$ .
  8. Mise à jour de la pulsation d'évaluation du module complexe  $\omega_p = \lambda_j(\omega_p)$ .
  9. **end while**
  10. Mise à jour de la base de projection  $\mathbb{T} = [\mathbb{T}, \Phi_j(\omega_p)]$ .
  11. **end for**
- 

#### 7.3.2.2 Méthode itérative des valeurs propres complexes

La méthode itérative des valeurs propres complexes (ICE - *Iterative Complex Eigen-solution*) [101, 191] est similaire à la méthode itérative des énergies modales dans le sens où le même algorithme itératif est utilisé. En revanche, les méthodes diffèrent par le problème

### 7.3. MÉTHODES DE PROJECTION MODALE ADAPTÉES AUX STRUCTURES AMORTIES PAR DES MATÉRIAUX VISCOÉLASTIQUES

---

aux valeurs propres considéré pour le calcul des pulsations et des pseudo-modes propres (voir étape 6 des algorithmes 1 et 2). Contrairement à la méthode itérative des énergies modales qui calcule des pseudo-modes propres réels (équation (7.15)), la base de projection déterminée par la méthode itérative des valeurs propres complexes est formée de pseudo-modes propres complexes, issus de la résolution de :

$$[\mathbb{K}^*(\omega_p) - \lambda_k^{*2}(\omega_p)\mathbb{M}] \Phi_k^*(\omega_p) = \mathbf{0}. \quad (7.17)$$

Dans le cas de structures fortement amorties, l'utilisation de pseudo-modes propres complexes dans la base de projection permet d'améliorer la précision de la réponse approchée [113]. Cependant, le coût de calcul peut-être plus important, les solveurs numériques étant généralement moins performants pour résoudre un problème aux valeurs propres complexes.

---

**Algorithm 2** Algorithme de calcul de la base de projection par la méthode itérative des valeurs propres complexes.

---

1. Calcul des  $N$  premiers couples  $(\lambda_k(0), \Phi_k(0))$ , solutions de l'équation (7.14).
  2. Initialisation de la base de projection :  $\mathbb{T} = [\mathbf{T}_s]$ .
  3. **for**  $j = 1$  **to**  $N$  **do**
  4. Initialisation de la pulsation à laquelle est évalué le module complexe :  $\omega_p = \lambda_j(0)$  et de l'erreur :  $\epsilon = 1$ .
  5. **while**  $\epsilon > \epsilon_{\text{tol}}$  **do**
  6. Calcul des  $j$  premiers couples  $(\lambda_k^*(\omega_p), \Phi_k^*(\omega_p))$ , solutions de l'équation (7.17).
  7. Calcul de l'erreur  $\epsilon = \frac{|\omega_p - \sqrt{\Re(\lambda_j^{*2}(\omega_p))}|}{\sqrt{\Re(\lambda_j^{*2}(\omega_p))}}$ .
  8. Mise à jour de la pulsation d'évaluation du module complexe  $\omega_p = \sqrt{\Re(\lambda_j^{*2}(\omega_p))}$ .
  9. **end while**
  10. Mise à jour de la base de projection  $\mathbb{T} = [\mathbb{T}, \Phi_j^*(\omega_p)]$ .
  11. **end for**
- 

#### 7.3.2.3 Méthode itérative des énergies modales modifiée

La méthode itérative des énergies modales modifiée [80, 114] vise à améliorer la méthode itérative des énergies modales en évitant d'avoir à résoudre un problème aux valeurs propres complexes. La contribution de la partie imaginaire de la matrice de raideur, négligée dans la méthode itérative des énergies modales, est prise en compte à travers

### 7.3. MÉTHODES DE PROJECTION MODALE ADAPTÉES AUX STRUCTURES AMORTIES PAR DES MATÉRIAUX VISCOÉLASTIQUES

---

un coefficient empirique  $\beta(\omega_p)$  :

$$[\Re(\mathbb{K}^*(\omega_p)) + \beta(\omega_p)\Im(\mathbb{K}^*(\omega_p)) - \lambda_k(\omega_p)\mathbb{M}] \Phi_k(\omega_p) = \mathbf{0}, \quad (7.18)$$

où le coefficient  $\beta(\omega_p)$  est calculé de la manière suivante :

$$\beta(\omega_p) = \frac{\text{Tr}(\Im(\mathbb{K}^*(\omega_p)))}{\text{Tr}(\Re(\mathbb{K}^*(\omega_p)))}. \quad (7.19)$$

La procédure correspondante est donnée par l'algorithme 3.

---

**Algorithm 3** Algorithme de calcul de la base de projection par la méthode itérative des énergies modales modifiée.

---

1. Calcul des  $N$  premiers couples  $(\lambda_k(0), \Phi_k(0))$ , solutions de l'équation (7.14).
  2. Initialisation de la base de projection :  $\mathbb{T} = [\mathbf{T}_s]$ .
  3. **for**  $j = 1$  **to**  $N$  **do**
  4. Initialisation de la pulsation à laquelle est évalué le module complexe :  $\omega_p = \lambda_j(0)$  et de l'erreur :  $\epsilon = 1$ .
  5. **while**  $\epsilon > \epsilon_{\text{tol}}$  **do**
  6. Calcul du coefficient  $\beta(\omega_p)$  par l'équation (7.19).
  7. Calcul des  $j$  premiers couples  $(\lambda_k(\omega_p), \Phi_k(\omega_p))$ , solutions de l'équation (7.18).
  8. Calcul de l'erreur  $\epsilon = \frac{|\omega_p - \lambda_j(\omega_p)|}{\lambda_j(\omega_p)}$ .
  9. Mise à jour de la pulsation d'évaluation du module complexe  $\omega_p = \lambda_j(\omega_p)$ .
  10. **end while**
  11. Mise à jour de la base de projection  $\mathbb{T} = [\mathbb{T}, \Phi_j(\omega_p)]$ .
  12. **end for**
- 

#### 7.3.3 Approche multi-modèles

L'approche multi-modèles est une approche mathématique inspirée des modèles flous de Takagi-Sugeno [180] qui consiste à estimer la réponse d'un système non linéaire en interpolant la réponse de plusieurs modèles linéaires définis pour divers points de fonctionnement [29]. Cette approche est appliquée par Balmès [15, 16] pour estimer une base de projection modale représentative du problème aux valeurs propres complexes non-linéaire (équation (7.12)). Celle-ci est obtenue en combinant plusieurs bases modales  $\mathbb{T}_{p_j}$ , auxquelles s'ajoute la correction statique  $\mathbf{T}_s$  :

$$\mathbb{T} = [\mathbf{T}_s, \mathbb{T}_{p_1} \dots \mathbb{T}_{p_m}]. \quad (7.20)$$

### 7.3. MÉTHODES DE PROJECTION MODALE ADAPTÉES AUX STRUCTURES AMORTIES PAR DES MATÉRIAUX VISCOÉLASTIQUES

---

Chaque base  $\mathbb{T}_{p_j}$  est formée de pseudo-modes propres solutions du problème aux valeurs propres complexes suivant :

$$[\mathbb{K}^*(\omega_{p_j}) - \lambda_k^*(\omega_{p_j})\mathbb{M}] \Phi_k^*(\omega_{p_j}) = \mathbf{0}, \quad (7.21)$$

où les  $\omega_{p_j}$  sont imposés a priori. Entre deux bases  $\mathbb{T}_{p_j}$  les pseudo-modes propres peuvent être fortement colinéaires ce qui conduit à un mauvais conditionnement des matrices réduites. C'est pourquoi les vecteurs formant la base de projection sont orthogonalisés par un algorithme de Gramm-Schmidt, et normalisés par rapport à la matrice de masse. Dans [137, 183], la base de projection est composée de pseudo-modes propres calculés pour une matrice de raideur évaluée aux fréquences minimale et maximale de la gamme de fréquence étudiée :

$$\mathbb{T} = [\mathbf{T}_s, \Phi_1(\omega_{\min}) \dots \Phi_N(\omega_{\min}), \Phi_1(\omega_{\max}) \dots \Phi_N(\omega_{\max})]. \quad (7.22)$$

Cette base de projection conduit à une bonne approximation de la réponse dynamique de la structure amortie [137, 183].

#### 7.3.4 Enrichissement de la base modale

##### 7.3.4.1 Ajout de corrections d'ordre un

La résolution d'un problème aux valeurs propres réelles implique généralement un coût de calcul bien inférieur à celui d'un problème aux valeurs propres complexes. C'est pourquoi la partie imaginaire de la matrice de raideur est couramment négligée lors du calcul des pseudo-modes propres formant la base de projection. En revanche, dans le cas de structures fortement amorties par des matériaux viscoélastiques, cette approximation n'est plus valide et peut générer des erreurs importantes. Plouin et Balmès [136] proposent de limiter ces erreurs en enrichissant la base modale de l'équation (7.13) par les relèvements statiques des efforts résiduels  $\mathbf{T}_{c_k}$  générés par les pseudo-modes propres  $\Phi_k$  issus de la méthode des énergies modales :

$$\mathbf{T}_{c_k} = \mathbb{K}_0^{-1} \Im(\mathbb{K}^*(\lambda_k)) \Phi_k \quad k = 1 \dots N, \quad (7.23)$$

### 7.3. MÉTHODES DE PROJECTION MODALE ADAPTÉES AUX STRUCTURES AMORTIES PAR DES MATÉRIAUX VISCOÉLASTIQUES

---

où  $\mathbb{K}_0$  est la matrice de raideur statique et  $\lambda_k$  la pulsation propre associée au pseudo-mode propre  $\Phi_k$ . La base de projection devient alors :

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}_s, \Phi_1 \dots \Phi_N, \mathbf{T}_{c_1} \dots \mathbf{T}_{c_N}]. \quad (7.24)$$

De même que dans l'approche multi-modèles, une étape d'orthonormalisation des vecteurs de la base de projection est appliquée.

#### 7.3.4.2 Ajout de résidus en déplacement

Toutes les bases de projection présentées précédemment induisent une erreur sur la solution qui peut être due à la troncature de la base modale, à la difficulté de représentation de la dépendance fréquentielle de la matrice de raideur, ou encore à l'approximation qui consiste à négliger la partie imaginaire de la matrice de raideur. Afin de tester la précision de la solution approchée  $\mathbf{U}_r$  par la méthode de projection considérée, un résidu en déplacement  $\mathbf{R}_d$  peut être calculé aux pulsations propres  $\lambda_k$  :

$$\mathbf{R}_d(\lambda_k) = \mathbb{K}_0^{-1} ([\mathbb{K}^*(\lambda_k) - \lambda_k^2 \mathbf{M}] \mathbf{U}_r(\lambda_k) - \mathbf{F}). \quad (7.25)$$

Un indicateur d'erreur en énergie de déformation, basé sur le résidu en déplacement, est alors défini :

$$\epsilon_R = \frac{\|\mathbf{R}_d^T \mathbb{K}_0 \mathbf{R}_d\|}{\|\mathbf{U}_r^T \mathbb{K}_0 \mathbf{U}_r\|}. \quad (7.26)$$

Si cette erreur est supérieure à une valeur de tolérance, le résidu peut être utilisé pour enrichir la base de projection. Cette procédure est répétée jusqu'à obtenir la convergence de la solution, i.e. la précision souhaitée pour la solution. L'algorithme 4 explique le principe de cette procédure itérative pour enrichir la base de projection calculée par la méthode des énergies modales. Cette approche, introduite par Balmès et Bobillot [17, 21], permet de contrôler la précision de la solution obtenue. Cependant, chaque calcul de résidu nécessite la résolution d'un système d'équations de dimension  $n$ , ce qui entraîne un coût de calcul important, même si la matrice  $\mathbb{K}_0$  peut être triangularisée une seule fois.

---

**Algorithm 4** Algorithme de la méthode itérative d'enrichissement sur les résidus.

---

1. Calcul de la base modale  $\mathbf{T}$  selon la méthode des énergies modales (équation (7.13)).
  2. **for**  $k = 1$  **to**  $N$  **do**
  3.   Calcul du résidu  $\mathbf{R}_d(\lambda_k)$  selon l'équation (7.25).
  4.   Calcul de l'erreur en énergie selon l'équation (7.26).
  5.   **while**  $\epsilon_R > \epsilon_{\text{tol}}$  **do**
  6.     Mise à jour et orthogonalisation de la base de projection :  $\mathbf{T} = [\mathbf{T}, \mathbf{R}_{d_k}(\lambda_k)]$ .
  7.     Calcul du résidu  $\mathbf{R}_d(\lambda_k)$  selon l'équation (7.25).
  8.     Calcul de l'erreur en énergie selon l'équation (7.26).
  9.   **end while**
  10. **end for**
- 

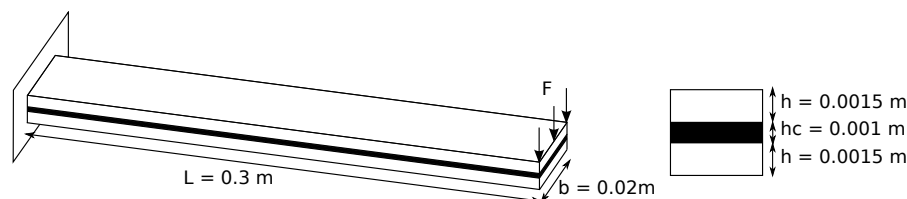


FIGURE 7.1 – Géométrie de la structure sandwich étudiée.

## 7.4 Comparaison des méthodes de projection modale

Plusieurs des méthodes de réduction présentées dans la section précédente peuvent être combinées afin d'améliorer la précision de la solution. En revanche, dans le cadre d'études paramétriques ou d'optimisation, on cherche souvent à appliquer la méthode de réduction présentant le meilleur compromis entre la précision et le temps de calcul de la solution approchée. Dans cette section, une étude comparative des performances des méthodes de réduction est réalisée dans le cas d'une poutre sandwich encastree-libre, soumise à un chargement harmonique appliqué à l'extrémité libre de la poutre figure 7.1. La couche viscoélastique, en Deltane 350, est contrainte par deux faces élastiques en acier. Les trois couches sont modélisées par des éléments hexaédriques à 20 nœuds. Un modèle fractionnaire de Zener, dont les paramètres sont donnés dans l'équation (5.1) est utilisé pour représenter les variations fréquentielles du module de cisaillement. Le module de compressibilité est supposé constant :  $K^*(\omega) = 2.22$  GPa. Afin de tester les méthodes de réduction dans un cas défavorable, les dimensions de la couche viscoélastique sont choisies de manière à introduire un amortissement important au niveau de la structure.

La réponse fréquentielle de la structure amortie est calculée sur la gamme de fréquence

[0 — 800]Hz en utilisant chacune des méthodes de réduction présentées dans la section précédente. Une tolérance de convergence de 0.005 est considérée pour l’algorithme itératif des méthodes basées sur la méthode des énergies modales, comme suggéré dans [185]. La tolérance de convergence de l’algorithme de la méthode itérative d’enrichissement sur les résidus est fixée à  $10^{-3}$ , comme dans [19]. Quatre simulations sont réalisées par méthode de réduction en faisant varier le critère de sélection des pseudo-modes propres à introduire dans la base de projection :  $f < f_{\max}$ ,  $f < 2f_{\max}$ ,  $f < 3f_{\max}$  et  $f < 4f_{\max}$ , où  $f_{\max}$  est la fréquence maximale d’étude.

Afin de comparer la précision de la solution approchée obtenue, deux indicateurs d’erreur sont calculés :

- l’erreur basée sur la solution calculée par une méthode directe  $\mathbf{U}$  :

$$\epsilon_U(\omega) = \frac{\|\mathbf{U}_r(\omega) - \mathbf{U}(\omega)\|}{\|\mathbf{U}(\omega)\|}, \quad (7.27)$$

- le carré de l’estimateur d’erreur en énergie de déformation basé sur le résidu en déplacement défini dans l’équation (7.26) [21] :

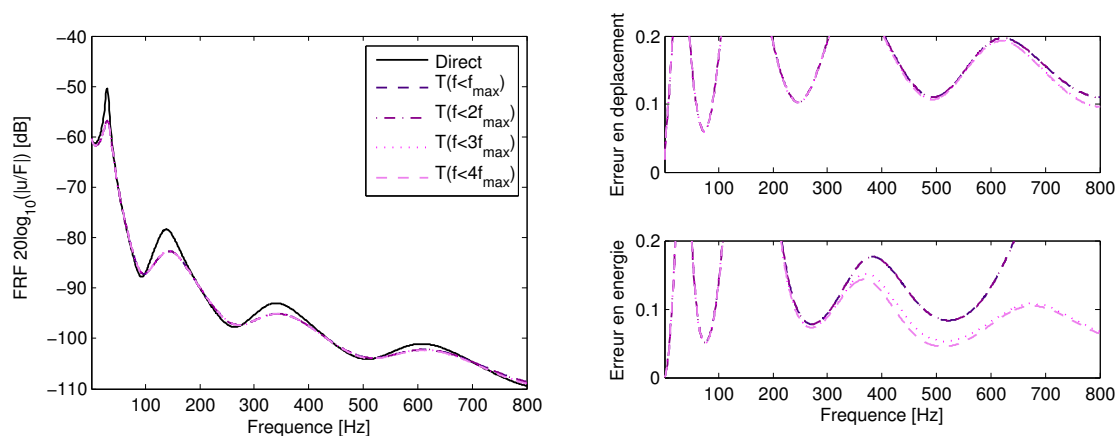
$$\epsilon_R(\omega) = \frac{\|\mathbf{R}_d^T(\omega)\mathbb{K}_0\mathbf{R}_d(\omega)\|^2}{\|\mathbf{U}_r^T(\omega)\mathbb{K}_0\mathbf{U}_r(\omega)\|^2}. \quad (7.28)$$

Sur les figures 7.2, 7.3 et 7.4 sont tracées la réponse fréquentielle calculée par une méthode directe, prise comme référence, et celles approchées par une des méthodes de réduction testées pour chaque critère de sélection des modes. On peut tout d’abord remarquer que l’ensemble des méthodes de réduction converge vers la solution de référence en augmentant le nombre de pseudo-modes propres dans la base de projection, bien que celle-ci soit très lente pour la méthode des énergies modales (figure 7.2(a)). Des résultats équivalents sont observés en prenant comme critère de sélection  $f < f_{\max}$  ou  $f < 2f_{\max}$ . Ces résultats s’expliquent par la présence d’un seul mode entre les fréquences  $f_{\max}$  et  $2f_{\max}$ .

Les figures 7.2, 7.3 et 7.4 comparent également les erreurs obtenues par les deux estimateurs d’erreur. On remarque que celles-ci ont des ordres de grandeur équivalents et évoluent de manière similaire. L’indicateur d’erreur en énergie de déformation est donc un bon estimateur à posteriori de l’erreur commise sur le calcul de la réponse fréquentielle.

La figure 7.5 compare les temps de calcul de la réponse fréquentielle pour chaque méthode de réduction, rapportés au temps de calcul de la solution directe, en fixant le

#### 7.4. COMPARAISON DES MÉTHODES DE PROJECTION MODALE



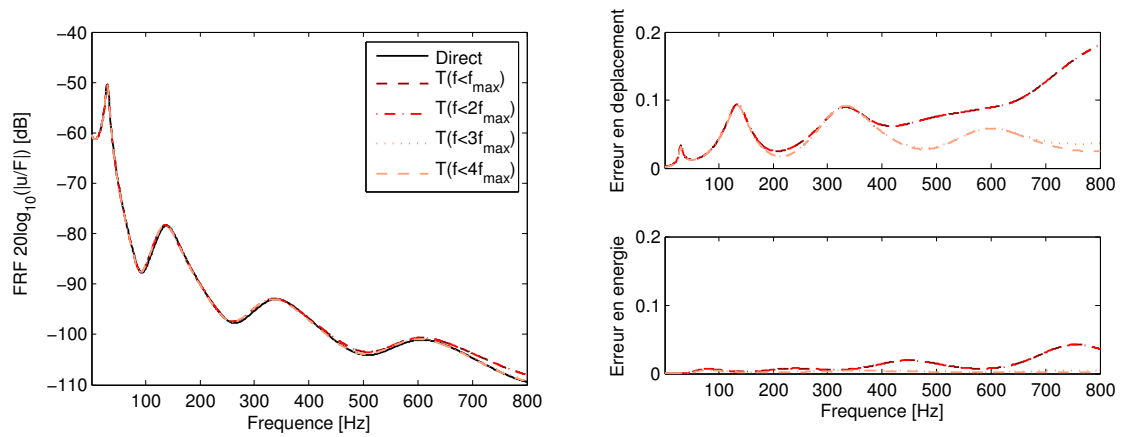
(a) Méthode des énergies modales (MSE)

FIGURE 7.2 – Comparaison des réponses fréquentielles de la structure calculées par projection du système sur la base obtenue par une méthode de réduction et par calcul direct pour différents critères de sélection des pseudo-modes propres (gauche), et erreurs sur le déplacement et sur l'énergie (droite).

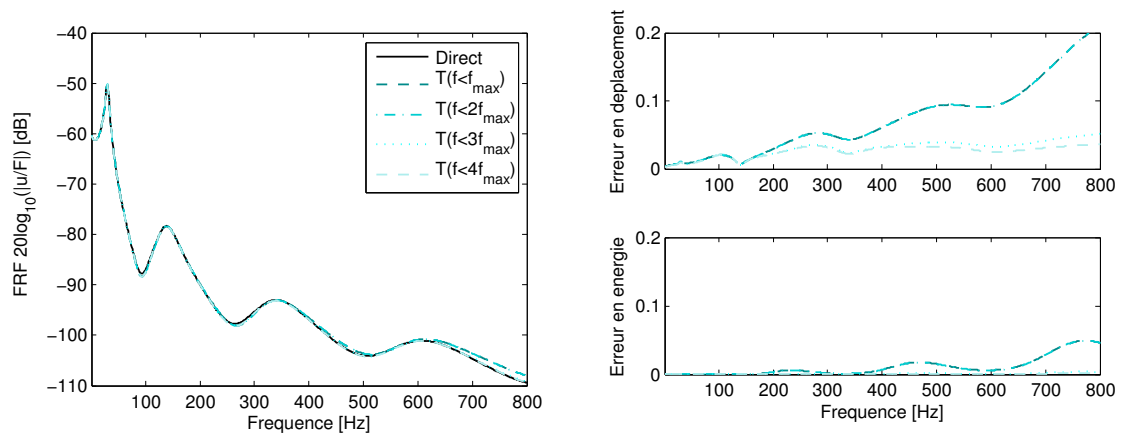
critère de sélection à  $f < 2f_{\max}$ . Les étapes de création de maillage et de calcul des matrices de masse et de raideur étant communes à toutes les méthodes, le temps de calcul associé n'est pas représenté. On remarque que la construction de la base modale est l'étape correspondant au coût numérique le plus important. Le temps de calcul de la réponse fréquentielle réduite est lié à la taille de la base de projection. Pour la structure étudiée et pour le critère de sélection considéré, les bases de projection contiennent peu de pseudo-modes, ce qui explique le faible coût de calcul de la solution réduite.

Pour permettre une comparaison globale des méthodes de réduction testées, la figure 7.6 trace la moyenne de l'erreur en déplacement en fonction du temps de calcul de la solution approchée rapporté au temps de calcul de la solution de référence. La méthode des énergies modales conduit à la solution la moins précise, mais permet d'obtenir rapidement une approximation de la réponse. A l'inverse, la solution obtenue par la méthode itérative d'enrichissement sur les résidus est la plus précise, au prix d'un coût numérique plus important. L'utilisation de cette méthode présente l'avantage de pouvoir contrôler la précision de la réponse approchée. Au vu des résultats, les variantes itératives de la méthode des énergies modales ne constituent pas un bon compromis entre le temps de calcul et la précision de la solution. En revanche, ces méthodes peuvent être utilisées pour

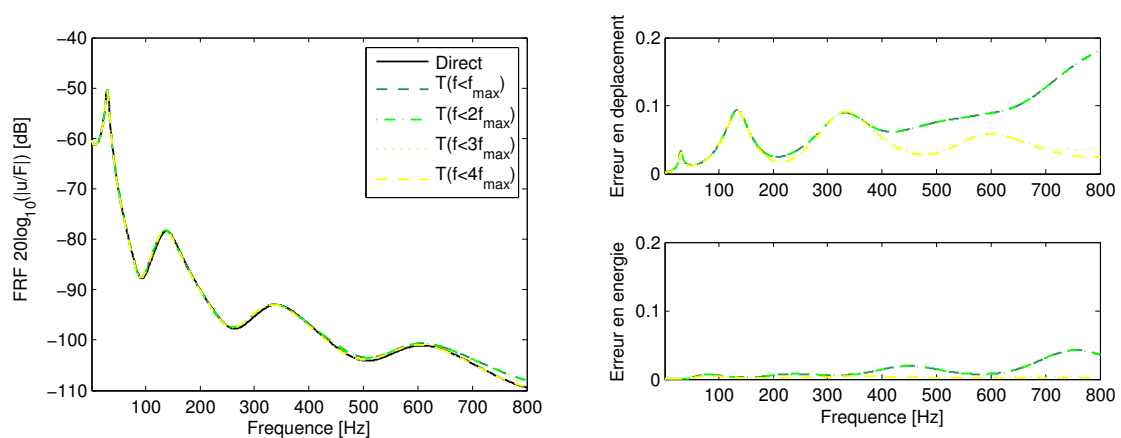
## 7.4. COMPARAISON DES MÉTHODES DE PROJECTION MODALE



(a) Méthode itérative des énergies modales



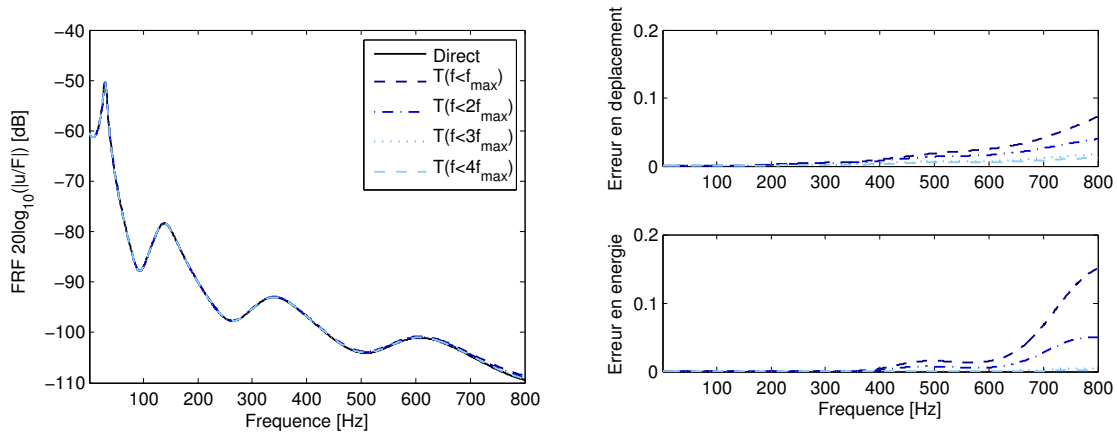
(b) Méthode itérative des valeurs propres complexes



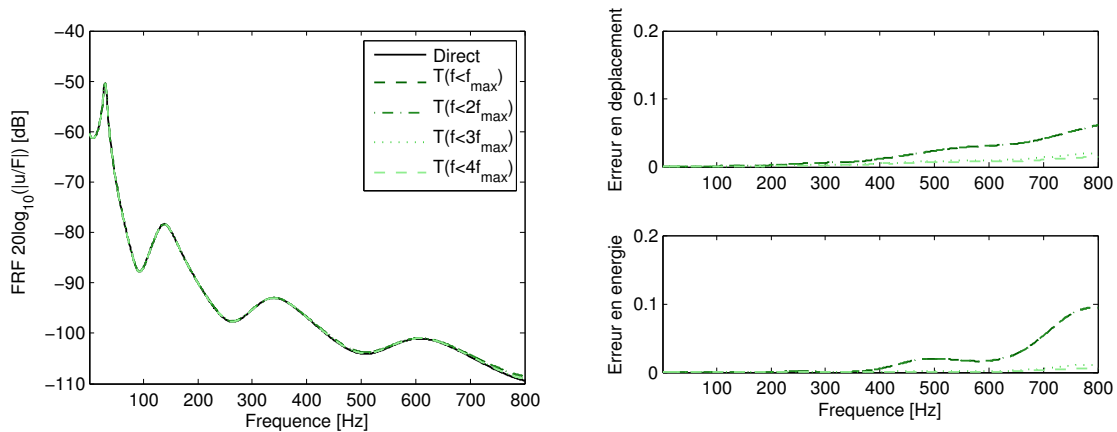
(c) Méthode itérative des énergies modales modifiée

FIGURE 7.3 – Comparaison des réponses fréquentielles de la structure calculées par projection du système sur la base obtenue par une méthode de réduction et par calcul direct pour différents critères de sélection des pseudo-modes propres (gauche), et erreurs sur le déplacement et sur l'énergie (droite).

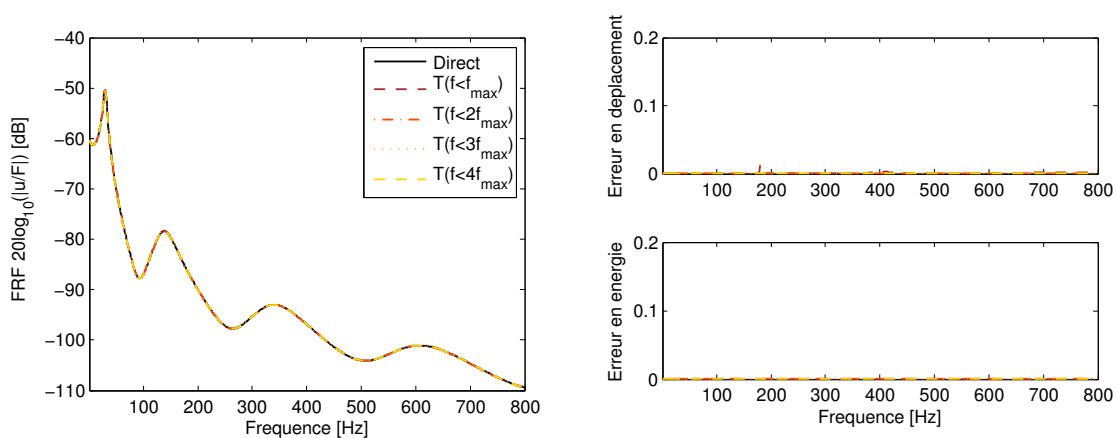
## 7.4. COMPARAISON DES MÉTHODES DE PROJECTION MODALE



(a) Méthode multi-modèles



(b) Enrichissement de la base de projection MSE par des termes de correction d'ordre 1



(c) Enrichissement de la base de projection MSE par des résidus en déplacement

FIGURE 7.4 – Comparaison des réponses fréquentielles de la structure calculées par projection du système sur la base obtenue par une méthode de réduction et par calcul direct pour différents critères de sélection des pseudo-modes propres (gauche), et erreurs sur le déplacement et sur l'énergie (droite).

## 7.5. CONCLUSION

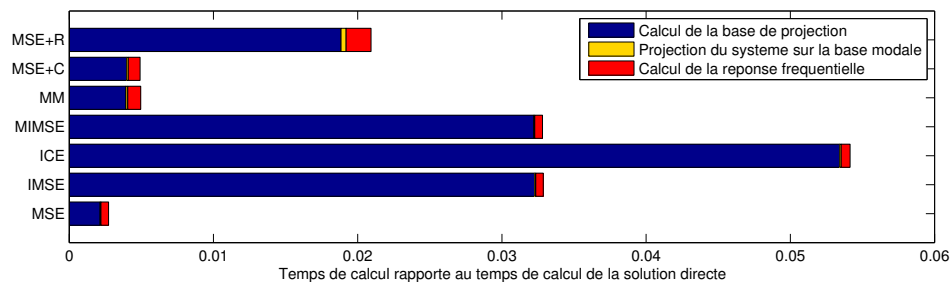


FIGURE 7.5 – Temps de calcul de la solution approchée rapportée au temps de calcul de la solution par une méthode directe, pour : la méthode des énergies modales (MSE), la méthode itérative des énergies modales (IMSE), la méthode itérative des valeurs propres complexes (ICE), la méthode itérative des énergies modales modifiée (MIMSE), la méthode multi-modèles (MM), la méthode d’enrichissement de la base MSE par des termes de correction d’ordre 1 (MSE+C) et la méthode d’enrichissement de la base MSE par des résidus (MSE+R).

le calcul direct des paramètres modaux (fréquences de résonance et amortissements modaux) [191]. Enfin, l’approche multi-modèles et l’enrichissement par des termes correctifs liés à la partie imaginaire de la matrice de raideur présentent des performances similaires en termes de précision et de temps de calcul de la solution approchée. Dans l’application traitée, l’approche multi-modèles semble représenter le meilleur compromis. Celle-ci est utilisée dans le chapitre 9 en combinaison avec une méthode de synthèse modale.

## 7.5 Conclusion

Dans ce chapitre est présentée une synthèse des méthodes de réduction de type projection sur bases modales adaptées aux structures amorties par des matériaux viscoélastiques. Une étude comparative de ces méthodes a été réalisée dans le cas d’une poutre encastree-libre fortement amortie par une couche viscoélastique contrainte. Les résultats montrent que l’approche multi-modèles, ou un enrichissement de la base par des termes correctifs prenant en compte la partie imaginaire de la matrice de raideur présentaient le meilleur compromis entre le temps de calcul et la précision de la solution approchée (figure 7.6). Les temps de calcul ont été comparés sur le même ordinateur et les différentes méthodes ont été implémentées dans le même environnement. Malgré tout, les temps de calcul pourraient être différents pour d’autres méthodes et langages de programmation. De plus, les résultats



## 7.5. CONCLUSION

---

adaptées à l'amortissement introduit par les matériaux viscoélastiques se posent donc pour la synthèse modale. Un exemple d'application de l'approche multi-modèles en combinaison d'une méthode de synthèse modale est réalisé dans le chapitre 9.

## 7.5. CONCLUSION

---

## Chapitre 8

# Reconstruction de la réponse fréquentielle par approximants de Padé

### 8.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent que des bases de projection adaptées étaient nécessaires dans les techniques de projection modale pour bien représenter le comportement dynamique de structures fortement amorties par des matériaux viscoélastiques. Le but de ce chapitre est de proposer une méthode alternative aux méthodes de projection modale. Celle-ci permet de calculer une solution approximée sur toute la gamme de fréquence étudiée à partir de calculs directs de la solution en un nombre limité de fréquences grâce à l'utilisation d'approximants de Padé. Cette méthode peut également être utilisée en complément de méthodes de projection modales pour réduire le temps de calcul de la solution du système réduit [166]. En revanche, dans notre cas, c'est le temps de calcul de la base de projection qui est limitant et non le temps de calcul de la réponse fréquentielle. C'est pourquoi la méthode de reconstruction de la réponse fréquentielle par approximants de Padé est appliquée ici au système non réduit.

Dans la première section de ce chapitre, une présentation générale des approximants de Padé et de leur utilisation pour reconstruire la réponse fréquentielle est donnée. Dans une deuxième section, la méthode est appliquée au calcul de la réponse vibratoire d'une structure amortie par une couche viscoélastique contrainte. Une comparaison est faite avec les

approximations de Taylor. Dans une troisième section, une procédure automatique permettant de déterminer le choix des fréquences pour lesquelles la solution directe est calculée est présentée. L'efficacité de cette procédure sera testée à travers l'application simple déjà traitée dans le chapitre précédent.

## 8.2 Approximants de Padé

Dans cette section, on présente la méthode d'approximation de Padé appliquée à une fonction unidimensionnelle. La méthode sera ensuite généralisée à une fonction de dimension  $n$  et appliquée au type de problème traité.

### 8.2.1 Cas d'une fonction unidimensionnelle

Considérons une fonction scalaire  $u$  de  $\omega$  suffisamment régulière que l'on souhaite calculer sur l'intervalle  $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ . Lorsque le coût d'évaluation de la fonction est trop élevé, des approximations locales sont souvent utilisées. Celles-ci consistent à calculer la solution et ses dérivées de manière exacte en quelques points et à construire une solution approchée autour de ces points. L'expansion en séries de Taylor et l'approximation de Padé sont les approximations locales les plus fréquemment rencontrées dans la littérature. L'expansion en séries de Taylor consiste à approximer la solution autour d'un point  $\omega_0$  par une fonction de la forme :

$$u(\omega_0 + \Delta\omega) \approx \sum_{k=0}^T a_k (\Delta\omega)^k = A_T(\Delta\omega), \quad (8.1)$$

où  $T$  est l'ordre de troncature de la série et les coefficients  $a_k$  sont liés à  $u^{(k)}(\omega_0)$ , les dérivées successives de la fonction  $u$  évaluées en  $\omega = \omega_0$  :

$$a_k = \frac{u^{(k)}(\omega_0)}{k!}. \quad (8.2)$$

La vitesse de convergence des séries de Taylor est liée à la distance entre le point  $\omega_0$  et la singularité la plus proche. Si la singularité la plus proche est un pôle, la vitesse de convergence peut être améliorée en factorisant ce pôle [92]. Une approximation de Padé est donc plus à même de représenter une fonction contenant des pôles puisqu'elle consiste

à approximer la solution par une fraction rationnelle du type :

$$u(\omega_0 + \Delta\omega) \approx \frac{\sum_{k=0}^L p_k(\Delta\omega)^k}{\sum_{k=0}^M q_k(\Delta\omega)^k} = \frac{P_L(\Delta\omega)}{Q_M(\Delta\omega)}, \quad (8.3)$$

où  $P_L(\Delta\omega)$  et  $Q_M(\Delta\omega)$  sont deux séries entières tronquées respectivement à l'ordre  $L$  et  $M$ . Lorsqu'ils existent, les coefficients  $p_k$  et  $q_k$  de l'équation (8.3), aussi appelés approximants de Padé, sont uniques [7]. Ceux-ci peuvent être déterminés simplement suivant la méthode décrite dans [13], qui consiste à écrire l'approximation de Padé comme une série de Taylor d'ordre  $L + M$  :

$$A_T(\Delta\omega) = \frac{P_L(\Delta\omega)}{Q_M(\Delta\omega)}. \quad (8.4)$$

Le système d'équations suivant en résulte :

$$\left( \sum_{k=0}^T a_k(\Delta\omega)^k \right) \left( \sum_{k=0}^M q_k(\Delta\omega)^k \right) = \sum_{k=0}^L p_k(\Delta\omega)^k. \quad (8.5)$$

Comme ce système possède une inconnue de plus que de nombre d'équations, le coefficient  $q_0$  est classiquement fixé à 1 [13] sans perte de généralité. En identifiant les coefficients de chaque puissance de  $\Delta\omega$ , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = a_0, \\ p_1 - a_0q_1 = a_1, \\ \vdots \\ p_L - a_{L-1}q_1 - \cdots - a_0q_L = a_L, \\ -a_Lq_1 - a_{L-1}q_2 - \cdots - a_{L-M+1}q_M = a_{L+1}, \\ \vdots \\ -a_{L+M-1}q_1 - a_{L+M-2}q_2 - \cdots - a_Lq_M = a_{L+M}, \end{array} \right. \quad (8.6)$$

où  $k$  est un entier positif. Lorsque  $k > M$ ,  $q_k = 0$ . En remplaçant les coefficients  $a_k$  par l'expression de l'équation (8.2), chaque ligne du système d'équations (8.6) peut s'écrire sous la forme explicite suivante :

$$k!p_k - \left( \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} l!u^{(k-l)}(\omega_0)q_l \right) = u^{(k)}(\omega_0), \quad (8.7)$$

en faisant varier  $k$  de 0 à  $(L + M + 1)$ , et en imposant :

$$\begin{cases} p_k = 0 \text{ si } k > L, \\ q_l = 0 \text{ si } l > M. \end{cases} \quad (8.8)$$

On rappelle que les coefficients binomiaux sont donnés par :

$$\binom{k}{l} = \frac{k!}{l!(k-l)!}. \quad (8.9)$$

Il est possible d'écrire le système sous forme matricielle en faisant intervenir une matrice  $\mathbb{D}$  :

$$\mathbb{D} \begin{bmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_L \\ q_1 \\ \vdots \\ q_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(\omega_0) \\ \vdots \\ u^{(L)}(\omega_0) \\ u^{(L+1)}(\omega_0) \\ \vdots \\ u^{(L+M)}(\omega_0) \end{bmatrix}. \quad (8.10)$$

Les conditions sur les coefficients  $p_k$  et  $q_k$  données dans l'équation (8.8) font que la matrice  $\mathbb{D}$  est de la forme :

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}_{(L+1) \times (L+1)} & \mathbb{D}_{(L+1) \times M} \\ \mathbf{O}_{M \times (L+1)} & \mathbb{D}_{M \times M} \end{bmatrix}, \quad (8.11)$$

où  $\mathbb{D}_{(L+1) \times (L+1)}$  est une matrice diagonale et  $\mathbb{D}_{(L+1) \times M}$  une matrice triangulaire inférieure.

Ainsi, il est possible de résoudre le système d'équations (8.10) en deux étapes [13] :

- Calcul des coefficients  $q_k$  de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_M \end{bmatrix} = \mathbb{D}_{M \times M}^{-1} \begin{bmatrix} u^{(L+1)}(\omega_0) \\ \vdots \\ u^{(L+M)}(\omega_0) \end{bmatrix}, \quad (8.12)$$

- Calcul des coefficients  $p_k$  à partir des coefficients  $q_k$  précédemment déterminés :

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_L \end{bmatrix} = \mathbb{D}_{(L+1) \times (L+1)}^{-1} \left( \begin{bmatrix} u^{(0)}(\omega_0) \\ \vdots \\ u^{(L)}(\omega_0) \end{bmatrix} - \mathbb{D}_{(L+1) \times M} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_M \end{bmatrix} \right). \quad (8.13)$$

Cette manière de procéder pour calculer les coefficients  $p_k$  et  $q_k$  permet de limiter les problèmes de conditionnement liés aux ordres de grandeur différents entre les coefficients  $p_k$  et  $q_k$ . Il est alors possible de reconstruire la fonction  $u$  au voisinage de  $\omega_0$  à partir de l'équation (8.3).

### 8.2.2 Application au problème de vibrations de structures amorties

Dans le cas d'une structure munie de matériaux viscoélastiques soumise à un chargement harmonique, le problème s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{Z}(\omega)\mathbf{U}(\omega) = \mathbf{F}, \quad (8.14)$$

où

$$\mathbf{Z}(\omega) = (\mathbf{K}_E + K_0\mathbf{K}_V^s) + G^*(\omega)\mathbf{K}_V^d - \omega^2(\mathbf{M}_E + \mathbf{M}_V). \quad (8.15)$$

La méthode présentée précédemment pour le cas unidimensionnel peut être appliquée pour résoudre le système (8.14) de dimension  $n$ , en utilisant des approximations de Padé pour chaque degré de liberté  $U_i(\omega)$ .

Afin de construire la matrice  $\mathbf{D}$  et le second membre de l'équation (8.10), il convient de calculer les  $(L + M)$  premières dérivées du vecteur solution  $\mathbf{U}^{(k)}(\omega_0)$  évaluées en  $\omega = \omega_0$ . Pour cela, l'équation (8.14) est différenciée à l'ordre  $k$  :

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{l} \mathbf{Z}^{(k-j)}(\omega_0)\mathbf{U}^{(j)}(\omega_0) = \mathbf{0}, \quad k = 1 \dots (L + M). \quad (8.16)$$

La dérivée  $k$ -ième de  $\mathbf{Z}$  peut alors s'écrire de manière récursive en fonction des dérivées d'ordres inférieurs :

$$\mathbf{Z}(\omega_0)\mathbf{U}^{(k)}(\omega_0) = - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{l} \mathbf{Z}^{(k-j)}(\omega_0)\mathbf{U}^{(j)}(\omega_0), \quad k = 1 \dots (L + M). \quad (8.17)$$

La dépendance fréquentielle de la matrice  $\mathbf{Z}(\omega)$  étant portée par des scalaires en facteurs de matrices constantes (équation (8.15)), les dérivées successives de  $\mathbf{Z}$  peuvent être facilement calculées :

$$\mathbf{Z}^{(k)}(\omega) = \begin{cases} \frac{dG^*(\omega)}{d\omega}\mathbf{K}_V^d - 2\omega(\mathbf{M}_E + \mathbf{M}_V) & \text{si } k = 1, \\ \frac{d^2G^*(\omega)}{d\omega^2}\mathbf{K}_V^d - 2(\mathbf{M}_E + \mathbf{M}_V) & \text{si } k = 2, \\ \frac{d^kG^*(\omega)}{d\omega^k}\mathbf{K}_V^d & \text{si } k > 2, \end{cases} \quad (8.18)$$

où les dérivées du module complexe, représenté par un modèle fractionnaire de Zener, sont calculées par la *Toolbox Symbolic* de Matlab.

Les  $(L + M)$  premières dérivées du vecteur solution  $\mathbf{U}^{(k)}(\omega_0)$  sont ensuite utilisées pour

calculer les approximants de Padé pour chaque degré de liberté à partir de l'équation (8.10), en prenant  $u = U_i$ . Enfin, la solution est approchée autour de  $\omega_0$  en utilisant l'équation (8.3) avec  $u = U_i$ .

Dans la littérature, les ordres de troncature des séries au numérateur et au dénominateur de l'équation (8.3) sont souvent pris de sorte que  $M = L + 1$  [10, 166]. Cette condition sur  $L$  et  $M$  est considérée dans ce travail.

### 8.3 Aspects numériques des approximants de Padé

Cette section aborde certains aspects de calcul des approximations de Padé tels que la convergence ou le coût de calcul. Les propos sont illustrés par des applications de la méthode au calcul de la réponse fréquentielle de la poutre console sandwich étudiée dans le chapitre précédent.

On cherche à reconstruire la réponse fréquentielle de la structure amortie sur la gamme de fréquence  $[0 - 800]$ Hz à partir d'une évaluation directe de la solution à  $f_0 = 340$ Hz. Pour cela, des approximations de Padé d'ordres  $[L = 1|M = 2]$ ,  $[L = 2|M = 3]$  et  $[L = 3|M = 4]$ <sup>1</sup>, ainsi que des approximations de Taylor d'ordres équivalents  $[T = L + M]$  sont utilisées. Pour chacune, on trace la réponse fréquentielle en un point situé au bord libre de la poutre sandwich, et l'estimateur d'erreur en énergie, définie au chapitre précédent, en fonction de la fréquence (figure 8.1). On remarque sur la figure 8.1 que le rayon de convergence augmente avec l'ordre de troncature mettant en évidence la convergence des approximations de Taylor et de Padé pour le cas considéré. Cependant, contrairement aux approximations de Padé, une divergence brutale de la solution approximée par une série entière de Taylor est observée en dehors du rayon de convergence. De plus, la figure 8.1 montre que pour des approximations d'ordres équivalents, les approximations de Padé donnent de bien meilleurs résultats que celles de Taylor en terme de précision et de vitesse de convergence. Dans le cas d'une structure en vibration, la réponse fréquentielle possède des pôles correspondant aux résonances de la structure. La présence de ces pôles limite le rayon de convergence de la série entière dans l'approximation de Taylor, comme en at-

---

1. En raison des problèmes de conditionnement de la matrice  $\mathbb{D}$  (définie dans l'équation (8.10)) rencontrés pour  $L > 3$ , et ce malgré la résolution de l'équation (8.10) en deux étapes, des approximations de Padé d'ordres supérieurs n'ont pas été utilisées.

testent les figures 8.1(b), 8.1(d) et 8.1(f).

Le tableau 8.1 donne le temps de calcul de la solution reconstruite par approximations de Padé, et le rayon de convergence, défini comme la gamme de fréquence autour de la fréquence  $f_0$  sur laquelle l'erreur en énergie est inférieure à une valeur de tolérance fixée à 0.001. Une augmentation de l'ordre de l'approximation permet d'obtenir un rayon de convergence plus grand, mais au prix d'un coût de calcul plus élevé. Un pourcentage important du temps de calcul de la réponse fréquentielle approximée concerne le calcul des approximants de Padé, et plus particulièrement du calcul des dérivées de la solution. En effet, le calcul des  $(L + M)$  premières dérivées de la solution nécessite la résolution de  $(L + M)$  systèmes linéaires à  $n$  équations. Le meilleur compromis entre le temps de calcul et la qualité de l'approximation semble être obtenu pour des ordres de troncature de  $L = 2$  et  $M = 3$ . C'est l'ordre de l'approximation qui est considéré par la suite.

Une seule évaluation directe de la solution ne suffit pas à reconstruire la réponse fréquentielle sur l'ensemble de la gamme de fréquence considérée (figure 8.1) avec une précision satisfaisante. Il est alors possible d'implémenter une méthode d'approximation de Padé multi-points, qui permet d'augmenter le rayon de convergence par rapport à une approximation de Padé à un point [10, 14]. Mais l'approche la plus couramment utilisée consiste à calculer la solution par une méthode directe pour une sélection de fréquences et à reconstruire la solution autour de chacune d'entre elles [31, 74, 165]. Cette approche soulève le problème du choix des fréquences auxquelles la solution directe est calculée. Dans [10], ce choix est fait à partir des fréquences propres de la structure, calculées pour un maillage grossier. Afin de s'affranchir d'une analyse modale, Rumpler [166] propose dans le cadre de problèmes poro-acoustiques une approche adaptative de décomposition de la gamme de fréquence en intervalles centrés sur les fréquences de calcul direct de la solution. En revanche, des non-chevauchements des intervalles peuvent être observés avec cette méthode. Dans la section suivante est présentée une procédure automatique de reconstruction de la réponse fréquentielle sur l'ensemble de la gamme de fréquence.

### 8.3. ASPECTS NUMÉRIQUES DES APPROXIMANTS DE PADÉ

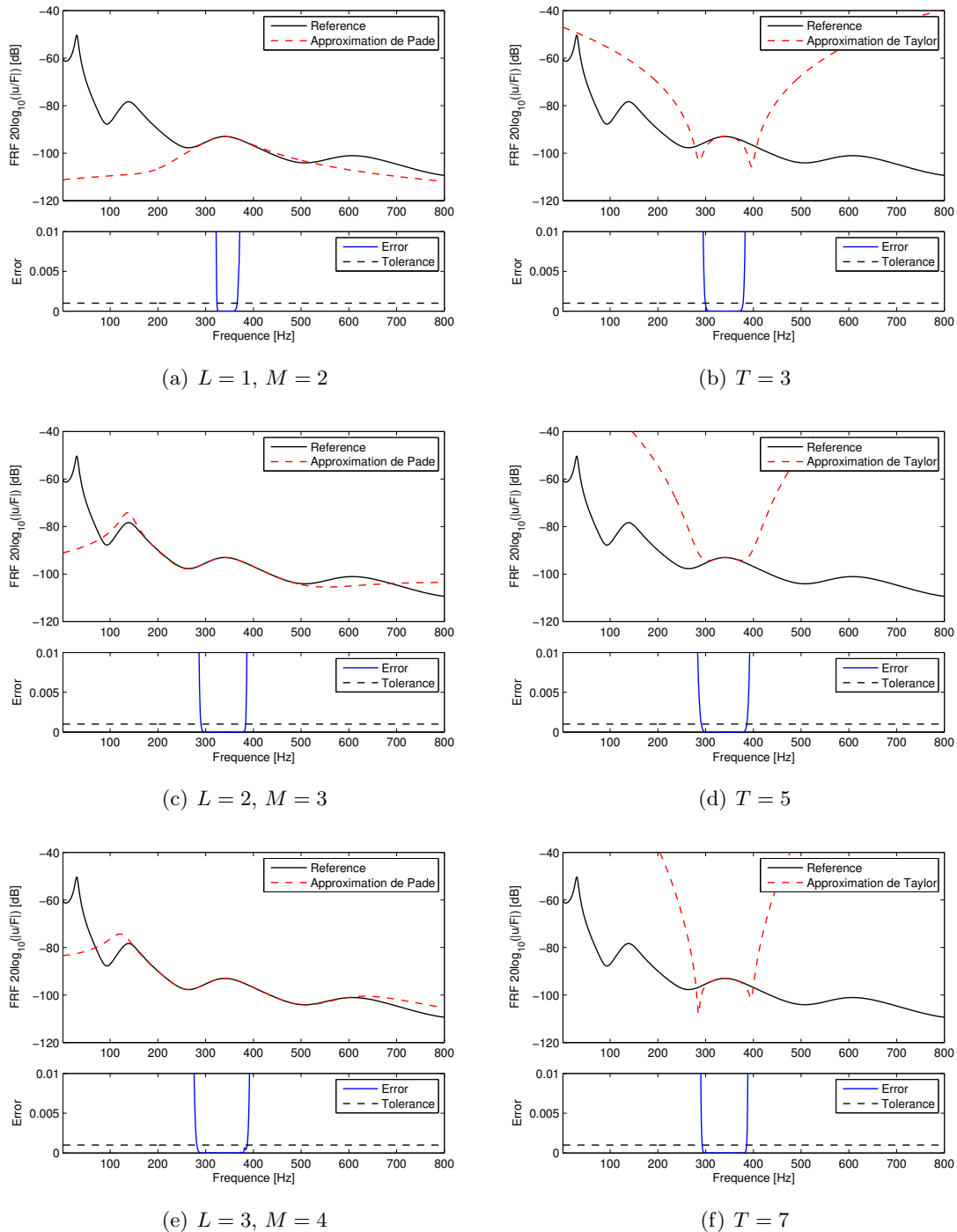


FIGURE 8.1 – Influence de l'ordre de troncature sur la reconstruction de la réponse fréquentielle sur  $[0 - 800]$ Hz par approximations de Padé et de Taylor à partir d'une évaluation directe de la solution à  $f_0 = 340$  Hz.

## 8.4. PROCÉDURE AUTOMATIQUE DE RECONSTRUCTION DE LA SOLUTION

TABLE 8.1 – Comparaison des temps de calcul de la reconstruction de la réponse fréquentielle et du rayon de convergence en fonction de l'ordre de troncature considéré pour l'approximation de Padé.

| Ordre de l'approximation  | $[L = 1 M = 2]$ | $[L = 2 M = 3]$ | $[L = 3 M = 4]$ |
|---------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Temps de calcul (s)       | 9.5             | 14.4            | 20.0            |
| Rayon de convergence (Hz) | [324 — 366]     | [291 — 383]     | [282 — 387]     |

### 8.4 Procédure automatique de reconstruction de la solution

La méthode proposée ici permet de déterminer automatiquement le nombre et la position des fréquences auxquelles la solution est calculée par une méthode directe afin de reconstruire la réponse fréquentielle sur l'ensemble de la gamme de fréquence, tout en contrôlant l'erreur en énergie.

Considérons l'intervalle de fréquence  $I$  sur lequel on souhaite reconstruire la solution. La première étape de la procédure consiste à calculer les approximants de Padé à partir d'un calcul direct de la solution à la fréquence médiane de l'intervalle  $I$ , notée  $\tilde{I}$ . Ces approximants sont ensuite utilisés pour reconstruire la solution aux fréquences minimale  $\min(I)$  et maximale  $\max(I)$  de l'intervalle  $I$ . L'erreur en énergie, définie dans l'équation (7.28), est calculée à ces points et comparée à la valeur de tolérance choisie afin de tester la convergence de la solution. Si l'erreur à  $f = \max(I)$  est inférieure à la valeur de tolérance, la solution est reconstruite sur  $[\tilde{I}, \max(I)]$ . Si elle est supérieure à la valeur de tolérance, on cherche à obtenir une meilleure approximation de la solution sur  $[\tilde{I}, \max(I)]$  à partir d'approximants de Padé calculés pour la fréquence  $\frac{\tilde{I} + \max(I)}{2}$ . On procède de manière similaire sur l'intervalle  $[\min(I), \tilde{I}]$  suivant la valeur de l'erreur en énergie à la fréquence  $f = \min(I)$ . Cette procédure, semblable à une approche par dichotomie, est répétée pour chaque intervalle de fréquence jusqu'à obtenir une convergence sur toute la gamme de fréquence.

La méthode peut être vue comme le parcours d'un arbre dont les nœuds correspondent à des intervalles de fréquence, et chaque branche à une division de ces intervalles. Une illustration de ce concept est donnée sur la figure 8.2. Un algorithme de parcours en profondeur est utilisé pour parcourir récursivement chaque branche de l'arbre jusqu'à obtenir

#### 8.4. PROCÉDURE AUTOMATIQUE DE RECONSTRUCTION DE LA SOLUTION

---

la convergence. Les nœuds correspondant aux intervalles de plus hautes fréquences sont visités avant ceux de plus basses fréquences. Grâce à cette procédure, la gamme de fréquence initiale est automatiquement découpée de manière à garantir la convergence de la solution reconstruite.

La réponse fréquentielle de la structure étudiée dans la section précédente est reconstruite sur la gamme de fréquence  $[0 - 800]$  Hz en utilisant la procédure automatique développée, en fixant le critère de tolérance sur l'erreur en énergie à 0.001. Vingt-deux points d'évaluation de la solution directe sont nécessaires pour obtenir la convergence de la solution sur toute la bande de fréquences, à l'exception d'un point à 180Hz. On remarque sur la figure 8.3 que le nombre de fréquences auxquelles la solution est calculée par méthode directe est plus important à basses fréquences qu'à plus hautes fréquences. La qualité de l'approximation de Padé est fortement liée à la régularité de la fonction. Or, l'amortissement de la structure par une couche viscoélastique étant plus important aux hautes fréquences qu'aux basses fréquences, la fonction de réponse en fréquence est donc plus régulière à hautes fréquences, ce qui explique que l'approximation de Padé est meilleure à hautes fréquences. En revanche, on n'explique pas la pauvreté de l'approximation de Padé à très basses fréquences. En effet, on observe sur la figure 8.3 que sur la gamme de fréquence  $[0 - 10]$ Hz, trois approximations de Padé sont nécessaires pour reconstruire la réponse fréquentielle à la précision souhaitée, et ce malgré la bonne régularité de la fonction de réponse en fréquence. Dans les exemples d'application des approximants de Padé publiés dans [10, 74, 75] dans le cas de vibrations de structures, la réponse fréquentielle n'est jamais calculée à très basses fréquences. Il est possible que les caractéristiques de la fonction de réponse en fréquence à très basse fréquence ne soient pas favorables à une approximation de Padé.

Le temps de calcul de la solution approchée sur  $[0 - 800]$  Hz, dont environ un tiers est réservé à l'approximation de la solution sur l'intervalle de fréquence  $[0 - 100]$ Hz, est environ trois fois inférieur au temps de calcul de la solution exacte. Le calcul de l'erreur en énergie à chaque itération requiert la résolution d'un système linéaire de taille  $n$ . Une autre erreur pourrait être considérée dans le but d'améliorer le gain en temps de calcul. Par exemple, dans [75], une erreur en effort est utilisée pour tester la convergence de la

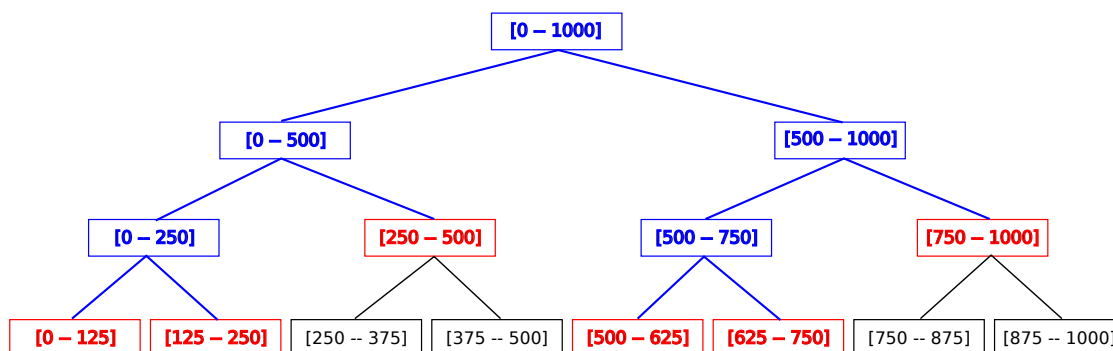


FIGURE 8.2 – Parcours d’un arbre dont chaque nœud correspond à un intervalle de fréquence et chaque branche, à une division de cet intervalle. On représente en bleu les nœuds visités pour lesquels l’erreur en énergie est supérieure à la valeur de tolérance et en rouge les nœuds pour lesquels l’erreur en énergie est inférieure à la valeur de tolérance.

solution. En revanche, dans l’exemple traité dans ce chapitre, il a été observé que cette erreur n’était pas représentative de l’erreur en déplacement, et a donc été écartée.

## 8.5 Conclusion

Dans ce chapitre est présentée la méthode de reconstruction de la réponse fréquentielle par approximants de Padé. Celle-ci consiste à calculer la solution de manière directe à une fréquence autour de laquelle la solution est approximée. Les avantages de cette méthode par rapport à une approximation de Taylor sont mis en évidence sur une application à une structure amortie par des matériaux viscoélastiques.

Afin de reconstruire la réponse fréquentielle sur une large bande de fréquence, une procédure automatique est développée afin de déterminer les fréquences auxquelles la solution directe est calculée. La procédure est une combinaison d’une approche par dichotomie et d’un algorithme de parcours en profondeur qui permet de contrôler la qualité de l’approximation finale obtenue. Les résultats obtenus pour la structure amortie traitée indiquent que les approximations de Padé sont plus efficaces lorsque la structure est très amortie. Malgré de faibles rayons de convergence observés à très basses fréquences, l’approche proposée permet d’obtenir une bonne approximation de la solution pour un coût de calcul réduit tout en contrôlant l’erreur sur la solution calculée. Le choix d’un autre estimateur d’erreur permettrait d’améliorer le gain en temps de calcul.

## 8.5. CONCLUSION

---

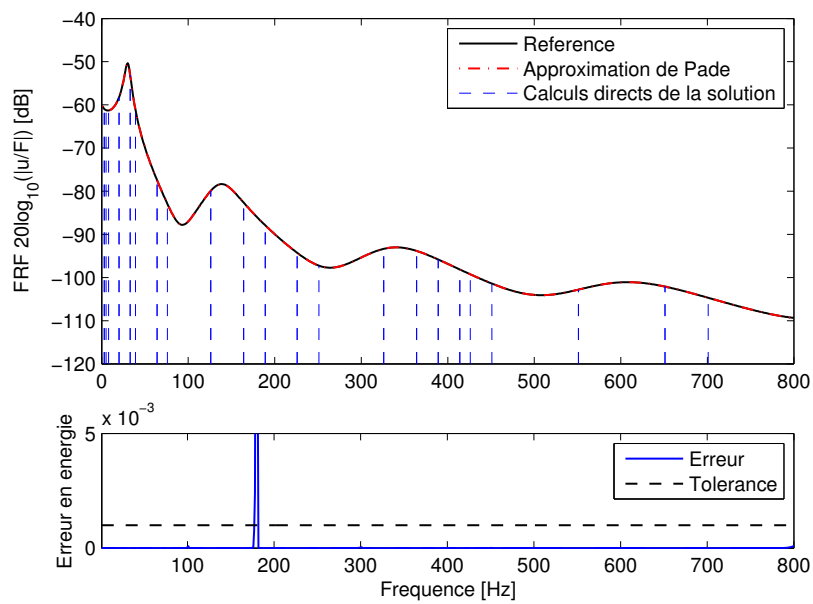


FIGURE 8.3 – Reconstruction de la réponse fréquentielle par la procédure automatique.

## Chapitre 9

# Applications des méthodes pour des études paramétriques

### 9.1 Introduction

Ce chapitre constitue l'aboutissement final de ce travail de thèse : les méthodologies développées et présentées précédemment sont combinées et leurs avantages, dans le contexte d'une étude paramétrique visant à optimiser les performances acoustiques du traitement viscoélastique appliqué, sont mis en avant. Deux cas d'application sont traités.

Le premier, correspondant à la première section de ce chapitre, reprend l'étude paramétrique réalisée dans le chapitre 6 sur la tuyère de turbine, qui consiste à étudier l'influence de l'épaisseur de la couche viscoélastique sur l'amortissement de la structure. Dans ce chapitre, le modèle avec éléments finis d'interface pour la modélisation de la couche viscoélastique est combiné à une méthode de synthèse modale pour réduire efficacement le coût numérique de l'étude paramétrique.

Le second cas d'application, traité dans la deuxième section, concerne un anneau sandwich bidimensionnel couplé à un liquide externe, considéré comme incompressible. L'étude réalisée consiste à optimiser le placement d'une couche viscoélastique dans le but de maximiser l'amortissement modal d'un mode de déformation de la structure sandwich. Pour cela, des éléments de type poutre sandwich sont utilisés et les effets inertiels du fluide sur la structure sont pris en compte à travers un opérateur de masse ajoutée calculé de façon semi-analytique. Les amortissements modaux sont calculés par la méthode itérative des valeurs propres complexes.

## 9.2. CAS D'APPLICATION 1 : MODÈLE TRIDIMENSIONNEL DE TUYÈRE DE TURBINE

TABLE 9.1 – Propriétés mécaniques des matériaux

| Matériau                        | Module de cisaillement   | Module de compressibilité   | Masse volumique                 |
|---------------------------------|--|-----------------------------|---------------------------------|
| Acier                           | $G = 8.08 \cdot 10^{10}$ Pa  | $K = 1.75 \cdot 10^{11}$ Pa | $\rho = 7800$ kg/m <sup>3</sup> |
| Viscoélastique<br>(Deltane 350) | $G^*(\omega) = \frac{G_0 + G_\infty(i\omega\tau_G)^{\alpha_G}}{1 + (i\omega\tau_G)^{\alpha_G}}$<br>$G_0 = 2.11 \cdot 10^6$ Pa<br>$G_\infty = 0.59 \cdot 10^9$ Pa<br>$\tau_G = 0.44 \cdot 10^{-6}$ s<br>$\alpha_G = 0.53$ | $K = 2.2 \cdot 10^9$ Pa     | $\rho = 1460$ kg/m <sup>3</sup> |

## 9.2 Cas d'application 1 : modèle tridimensionnel de tuyère de turbine

### 9.2.1 Description de l'étude

La première structure étudiée dans cette section, représentée sur la figure 9.1.(a), est la tuyère de turbine utilisée dans le chapitre 4 (pour la validation du code de calcul développé) et dans le chapitre 6 (pour la validation des éléments d'interface). On rappelle ici ses principales caractéristiques.

La structure élastique en acier est amortie par une couche viscoélastique insérée au cœur de la partie cylindrique. La structure est fixée à l'intersection des renforts et un effort harmonique ponctuel et unitaire est appliqué (figure 9.1.(a)). Les propriétés des matériaux sont données dans le tableau 9.1. La structure élastique est maillée par des éléments tétraédriques à 10 nœuds et la couche viscoélastique est modélisée soit par éléments tétraédriques quadratiques (figure 9.1.(a)), soit par des éléments d'interface volumiques (figure 9.1.(b)).

Afin d'étudier l'influence de l'épaisseur de la couche viscoélastique sur le comportement dynamique de la structure amortie, la réponse fréquentielle est calculée sur la plage de fréquence  $[0 - 250]$ Hz pour différentes épaisseurs de couche contrainte. Tout d'abord, la stratégie de réduction retenue pour limiter le coût numérique de l'étude paramétrique est décrite. Ensuite, les résultats obtenus après réduction sont comparés à ceux obtenus pour un modèle non réduit, c'est-à-dire en calculant la réponse fréquentielle par une méthode

## 9.2. CAS D'APPLICATION 1 : MODÈLE TRIDIMENSIONNEL DE TUYÈRE DE TURBINE

---

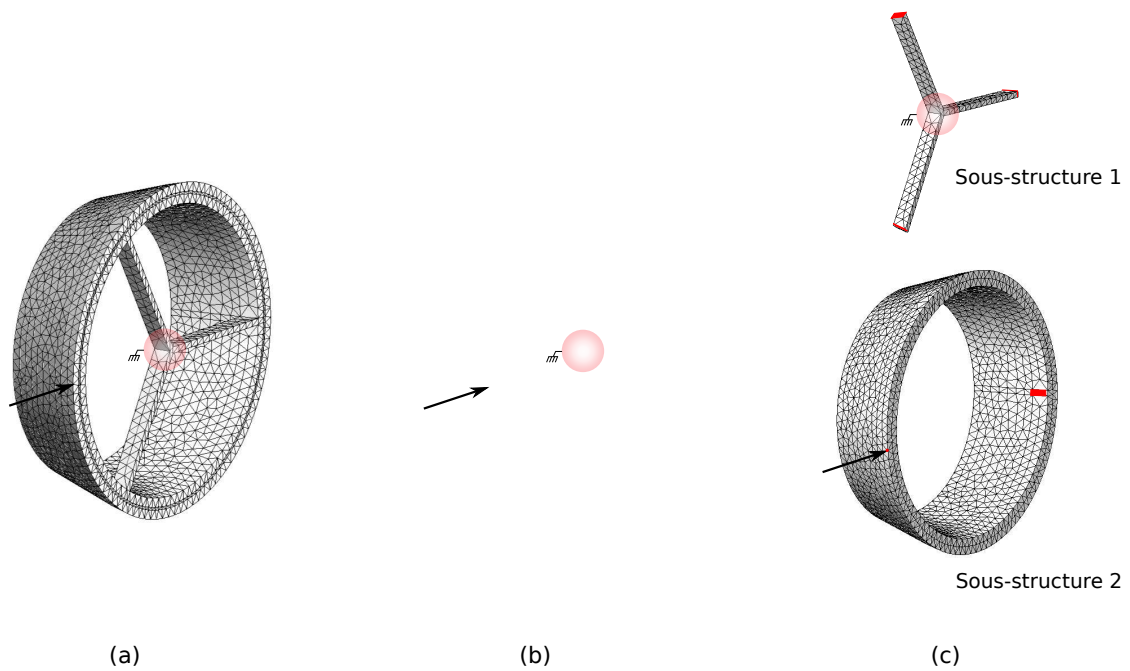


FIGURE 9.1 – Stratégie de réduction proposée pour le calcul de la réponse fréquentielle de la tuyère de turbine amortie par une couche viscoélastique. (a) Modèle tridimensionnel non réduit de la structure, (b) Modèle avec éléments d'interface, (c) Sous-structuration de la structure : les zones en rouge indiquent la position des degrés de liberté d'interface.

directe à partir du modèle éléments finis tridimensionnel (figure 9.1.(a)).

### 9.2.2 Description de la stratégie de réduction

#### 9.2.2.1 Modèle avec éléments d'interface

La première étape de réduction consiste à modéliser la fine couche viscoélastique par des éléments d'interface volumiques, développés dans le chapitre 6. De cette manière, le nombre de degrés de libertés inconnus est réduit. En effet, pour un même volume considéré, un élément prismatique à 12 nœuds (à partir duquel est formulé l'élément d'interface volumique) possède moins de nœuds qu'un élément tétraédrique à 10 nœuds (illustré sur la figure 9.2). Une modélisation de la couche viscoélastique par des éléments d'interface conduit donc à réduire la taille du système à résoudre :

$$\left[ \mathbb{K}_E + K^* \mathbb{K}_V^s + G^*(\omega) \mathbb{K}_V^d - \omega^2 \mathbb{M} \right] \mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (9.1)$$

Dans le cas de la structure étudiée, et pour une discrétisation équivalente, le modèle avec éléments d'interface possède 107 784 degrés de liberté (figure 9.1.(b)), au lieu de 138 018 degrés de liberté pour une modélisation de la couche viscoélastique par des tétraèdres quadratiques (figure 9.1.(a)).

Cependant, le principal avantage à utiliser un modèle avec éléments finis d'interface, déjà évoqué dans le chapitre 6, concerne la possibilité de modifier l'épaisseur de la couche viscoélastique sans avoir à remailler la structure. La matrice de raideur associée à la structure élastique  $\mathbb{K}_E$ , la matrice de masse  $\mathbb{M}$ , ainsi que le vecteur de chargement  $\mathbf{F}$  n'ont donc pas à être recalculés pour chaque valeur testée de l'épaisseur de couche amortissante.<sup>1</sup>

#### 9.2.2.2 Synthèse modale et approche multi-modèles

La deuxième étape de réduction consiste à appliquer une méthode de synthèse modale, qui combine une sous-structuration dynamique et une méthode de projection sur base modale.

---

1. On peut noter également que dans le cas où la couche viscoélastique est modélisée par des éléments joints, la dépendance des matrices  $\mathbb{K}_V^s$  et  $\mathbb{K}_V^d$  avec l'épaisseur de la couche viscoélastique peut être prise en compte par des scalaires en facteur de matrices constantes. Le recalcul des matrices  $\mathbb{K}_V^s$  et  $\mathbb{K}_V^d$  à chaque valeur testée de l'épaisseur de couche viscoélastique n'est donc pas requis.

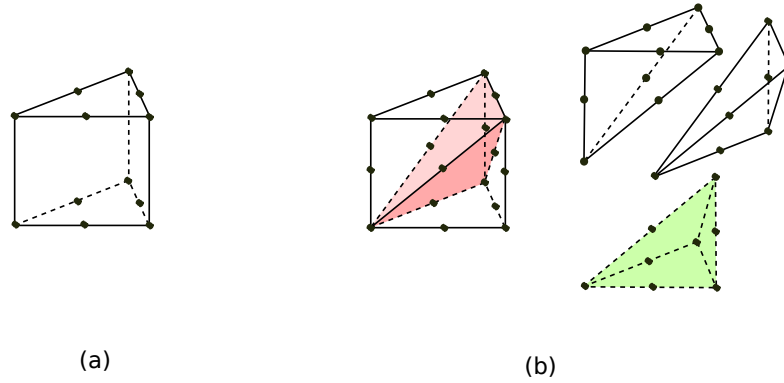


FIGURE 9.2 – Maillage d'un même volume par (a) des éléments prismatiques à 12 nœuds et (b) par des éléments tétraédriques à 10 nœuds.

**Sous-structuration dynamique** La sous-structuration dynamique repose sur un découpage de la structure en sous-structures, qui peuvent être étudiées de manière indépendante dans un premier temps. Pour chaque sous-structure  $j$ , le système à résoudre s'écrit :

$$[\mathbf{K}_j - \omega^2 \mathbf{M}_j] \mathbf{U}_j = \mathbf{F}_j, \quad (9.2)$$

où  $\mathbf{U}_j$  contient les degrés de liberté associés à la sous-structure  $j$ . Ces degrés de liberté peuvent être séparés en degrés de liberté internes  $\mathbf{U}_i$  et d'interface  $\mathbf{U}_b$ . Les degrés de liberté d'interface sont ceux connectés aux autres sous-structures, auxquels le chargement est appliqué, et auxquels la réponse de la structure est post-traitée. En prenant en compte cette séparation, le système (9.2) s'écrit :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bi} \\ \mathbf{K}_{ib} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix}_j - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bi} \\ \mathbf{M}_{ib} & \mathbf{M}_{ii} \end{bmatrix}_j \right) \begin{bmatrix} \mathbf{U}_b \\ \mathbf{U}_i \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_b \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_j. \quad (9.3)$$

Le couplage entre les sous-structures est réalisé en imposant la continuité des déplacements aux interfaces.

La sous-structuration, proposée pour la réduction du problème amorti, traitée dans cette section, est présentée sur la figure (figure 9.1.(c)) : les renforts constituent la première sous-structure, et la partie cylindrique de la structure constitue la deuxième sous-structure.

**Projection sur base modale** Une fois la structure divisée en sous-domaines, une méthode de projection sur base modale est appliquée dans le but de réduire le nombre de degrés de liberté inconnus. Comme pour la méthode de projection sur base modale

## 9.2. CAS D'APPLICATION 1 : MODÈLE TRIDIMENSIONNEL DE TUYÈRE DE TURBINE

---

décrite dans la section 7.2.1, pour chaque sous-structure  $j$ , une base de projection  $\mathbb{T}_j$ , dont la taille est très inférieure à celle du système (9.3), est définie. Le vecteur des degrés de liberté associés à une sous-structure  $j$  s'écrit alors :

$$\mathbf{U}_j = \mathbb{T}_j \mathbf{X}_j, \quad (9.4)$$

avec  $\mathbf{X}_j$  le vecteur des amplitudes modales associées aux composantes de la base de projection.

Deux types de synthèse modale sont généralement appliqués : la méthode de Craig-Bampton [163], qui fait intervenir des modes propres à interfaces fixes, et la méthode de MacNeal [104], qui utilise des modes propres à interfaces libres. La méthode de Craig-Bampton est considérée dans la présente étude. La base de projection appliquée aux degrés de liberté de chaque sous-structure est composée d'une base de modes propres à interfaces fixes  $\mathbb{T}_i$ , permettant de réduire le nombre de degrés de liberté internes, à laquelle est ajoutée une base de modes contraints  $\mathbb{T}_b$  dans le but de prendre en compte la liaison entre les sous-structures :

$$\mathbb{T}_j = [\mathbb{T}_b, \mathbb{T}_i]. \quad (9.5)$$

Les modes propres à interfaces fixes  $\Phi_k$  sont solutions du problème aux valeurs propres suivant :

$$[\mathbb{K}_{ii} - \omega_k^2 \mathbb{M}_{ii}] \Phi_k = \mathbf{0}, \quad (9.6)$$

de sorte qu'en introduisant les zéros associés aux degrés de liberté d'interface, la base de modes propres à interfaces fixes s'écrit :

$$\mathbb{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_b & \dots & \mathbf{0}_b \\ \Phi_1 & \dots & \Phi_N \end{bmatrix}, \quad (9.7)$$

où  $N$  est l'ordre de troncature choisi, et  $\mathbf{0}_b$  une colonne de  $n_b$  zéros, avec  $n_b$  le nombre de degrés de liberté d'interface.

Les modes contraints sont calculés à partir de la deuxième équation du système (9.3), en négligeant les termes inertiels :

$$\mathbf{U}_{i,stat} = -\mathbb{K}_{ii}^{-1} \mathbb{K}_{ib} \mathbf{U}_b. \quad (9.8)$$

Chaque mode contraint correspond à la réponse statique de la sous-structure à un déplacement unitaire imposé à un des degrés de liberté d'interface, pendant que les autres degrés

## 9.2. CAS D'APPLICATION 1 : MODÈLE TRIDIMENSIONNEL DE TUYÈRE DE TURBINE

---

de liberté d'interface sont fixés. La base de modes contraints s'écrit alors :

$$\mathbb{T}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{bb} \\ -\mathbb{K}_{ii}^{-1}\mathbb{K}_{ib} \end{bmatrix}, \quad (9.9)$$

où  $\mathbf{1}_{bb}$  est la matrice diagonale unitaire de dimensions  $n_b \times n_b$ .

Dans le cas où la sous-structure est amortie par des matériaux viscoélastiques, les mêmes problématiques que celles rencontrées pour les méthodes de projection modale, décrites dans le chapitre 7, se posent : le système aux valeurs propres (9.6) devient complexe et non linéaire, en raison de la dépendance fréquentielle des propriétés du matériau viscoélastique. Le chapitre 7 présente plusieurs méthodes de projection modale adaptées aux structures amorties par des matériaux viscoélastiques. Ces méthodes peuvent être appliquées dans le cadre de la synthèse modale pour obtenir une base de projection représentative du comportement dynamique de la sous-structure amortie. Dans l'application traitée, une approche multi-modèles (section 7.3.3) est considérée pour la sous-structure 2 (figure 9.1.(c)). La base de projection utilisée est la suivante :

$$\mathbb{T}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{bb} & \mathbf{0}_b & \dots & \mathbf{0}_b & \mathbf{0}_b & \dots & \mathbf{0}_b \\ -\mathbb{K}_{0,ii}^{-1}\mathbb{K}_{0,ib} & \mathbf{\Phi}_1 & \dots & \mathbf{\Phi}_N & \mathbf{\Psi}_1 & \dots & \mathbf{\Psi}_M \end{bmatrix}, \quad (9.10)$$

où la matrice  $\mathbb{K}_0$  est définie de la manière suivante :

$$\mathbb{K}_0 = \Re \left( \mathbb{K}_E + K^* \mathbb{K}_V^s + G^*(0) \mathbb{K}_V^d \right). \quad (9.11)$$

Les pseudo-modes propres  $\mathbf{\Phi}_k$  sont solutions de :

$$[\mathbb{K}_{0,ii} - \omega_k^2 \mathbb{M}_{ii}] \mathbf{\Phi}_k = \mathbf{0}, \quad (9.12)$$

et les pseudo-modes propres  $\mathbf{\Psi}_k$  sont solutions de :

$$\left[ \Re \left( \mathbb{K}_{E,ii} + K^* \mathbb{K}_{V,ii}^s + G^*(\omega_{\max}) \mathbb{K}_{V,ii}^d \right) - \omega_k^2 \mathbb{M}_{ii} \right] \mathbf{\Psi}_k = \mathbf{0}, \quad (9.13)$$

où  $\omega_{\max}$  correspond à la pulsation maximale d'étude, c'est-à-dire 250 Hz, dans cette application.

Les ordres de troncature des modes et pseudo-modes propres pris en compte dans les bases de projection des deux sous-structures représentées sur la figure 9.1.(c) sont déterminés de manière à ne conserver que les modes et pseudo-modes dont la fréquence est inférieure à  $1.5f_{\max}$ , c'est-à-dire inférieure à 375Hz.

## 9.2. CAS D'APPLICATION 1 : MODÈLE TRIDIMENSIONNEL DE TUYÈRE DE TURBINE

---

**Assemblage** Après avoir calculé les bases de projection  $\mathbb{T}_j$  associées à chaque sous-structure  $j$ , un assemblage est réalisé :

$$\mathbb{T} = \mathbf{A} \begin{matrix} n_s \\ \mathbf{T}_j \\ j=1 \end{matrix}, \quad (9.14)$$

où  $n_s$  est le nombre de sous-structures. Le système (9.1) est alors projeté sur cette base, ce qui permet de réduire drastiquement le nombre de degrés de liberté du système à résoudre. Dans l'application traitée, la méthode de synthèse modale appliquée permet de passer de 107784 degrés de liberté à 135 degrés de liberté.

### 9.2.3 Analyse des résultats

L'étude paramétrique réalisée consiste à calculer la réponse fréquentielle de la structure au point d'excitation sur la gamme de fréquence  $[0 - 250]$ Hz, pour une épaisseur de couche viscoélastique variant de 40mm à 5mm. Pour chaque épaisseur de couche amortissante testée, la réponse est calculée soit à partir du modèle réduit décrit dans la section précédente, soit à partir du modèle non réduit : calcul direct de la solution en modélisant la couche viscoélastique par des tétraèdres quadratiques (figure 9.1.(a)).

Une étude de l'influence de l'épaisseur de couche amortissante sur le comportement dynamique de la structure a déjà été réalisée dans le chapitre 6. Une augmentation de l'amortissement a été mise en évidence lorsque l'épaisseur de couche viscoélastique diminue, ce qui est en accord avec les résultats de Sher et Moreira [174] pour des structures sandwich de dimensions équivalentes.

La figure 9.3 compare les réponses fréquentielles obtenues pour une couche viscoélastique d'épaisseur 10mm, à partir :

- du modèle non réduit,
- du modèle après la première réduction consistant à modéliser la couche viscoélastique par des éléments d'interface volumiques,
- du modèle après la deuxième réduction consistant à appliquer une méthode de synthèse modale combinée à une approche multi-modèles pour la sous-structure 2.

Les stratégies de réduction appliquées successivement introduisent très peu d'erreur sur le calcul de la réponse fréquentielle. En effet, l'erreur sur la fréquence du dernier mode observé est inférieure à 1% et celle sur l'amortissement modal est d'environ 2%.

## 9.2. CAS D'APPLICATION 1 : MODÈLE TRIDIMENSIONNEL DE TUYÈRE DE TURBINE

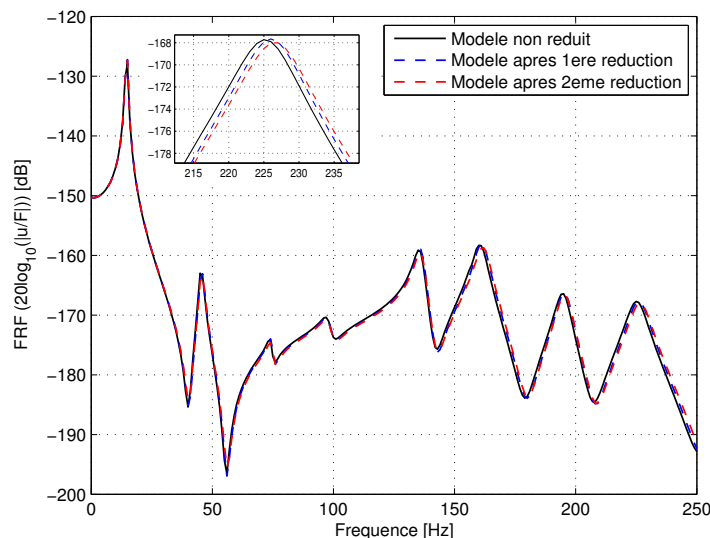


FIGURE 9.3 – Comparaison des réponses fréquentielles obtenues à partir du modèle non réduit (trait plein) ou des modèles réduits (traits pointillés).

Afin de mettre en avant l'intérêt de la stratégie de réduction proposée pour l'étude paramétrique, une analyse des temps de calcul hors-lignes et en-lignes est réalisée (voir tableau 9.2). Par opposition aux opérations en-lignes, une opération est dite hors-ligne lorsqu'elle est réalisée en dehors de la boucle sur le paramètre à faire varier (ici l'épaisseur de la couche viscoélastique). Grâce à l'utilisation d'éléments d'interface volumiques pour la modélisation de la couche viscoélastique, le maillage de la structure, ainsi que le calcul de  $\mathbf{K}_E$ ,  $\mathbf{M}$ , et  $\mathbf{F}$  dans l'équation (9.1) peuvent être considérés comme des opérations hors-lignes.

En utilisant une méthode de résolution directe après la première réduction (modèle avec éléments d'interface volumiques), le gain en temps de calcul associé aux opérations hors-lignes est négligeable. En effet, la réalisation des opérations hors-lignes ne représente que 1% du temps de calcul total (voir tableau 9.2). En revanche, dans le cas où une méthode de synthèse modale est appliquée (modèle après deuxième réduction), ce pourcentage atteint 34%. Le gain en temps de calcul dû à l'utilisation d'éléments d'interface pour la modélisation de la couche viscoélastique devient donc conséquent.

## 9.2. CAS D'APPLICATION 1 : MODÈLE TRIDIMENSIONNEL DE TUYÈRE DE TURBINE

TABLE 9.2 – Comparaison des temps de calcul hors-lignes et en-lignes.

|   | Modèle non réduit  | Modèle après 1 <sup>ère</sup> réduction | Modèle après 2 <sup>ème</sup> réduction |
|---|--------------------|---|---|
| $t_{\text{hors-ligne}}$ (s)                         | 0                  | 68                                      | 68                                      |
| $t_{\text{en-ligne}}$ (s)                           | $1.93 \times 10^4$ | $7.16 \times 10^3$                      | $2.01 \times 10^2$                      |
| $\% \frac{t_{\text{hors-ligne}}}{t_{\text{total}}}$ | 0%                 | 1%                                      | 34%                                     |

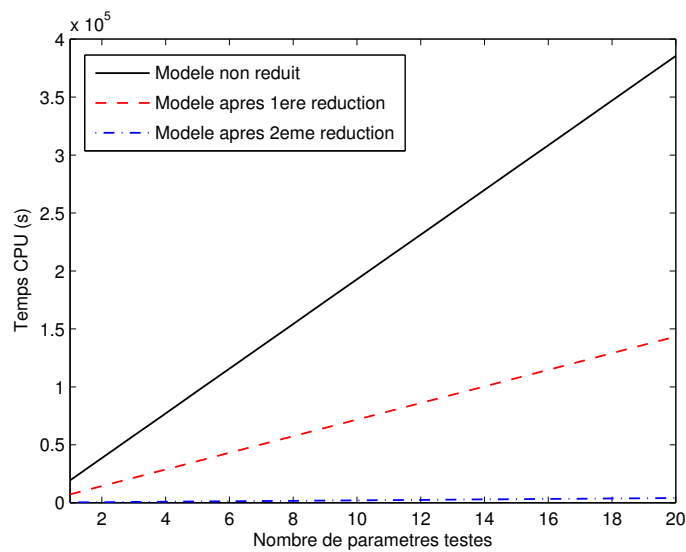


FIGURE 9.4 – Estimation du temps de calcul de l'étude paramétrique en fonction du nombre de paramètres testés, en utilisant un modèle réduit ou non réduit.

La stratégie de réduction proposée permet donc de réduire efficacement le coût numérique d'études paramétriques, comme le montre la figure 9.4. Cependant, la méthode de synthèse modale appliquée présente certaines limitations.

- La fréquence maximale d'intérêt conditionne le nombre de modes à considérer dans les bases de projection indépendamment de la fréquence minimale d'intérêt. Or le temps de calcul des bases de projection représente la majorité du temps de calcul de la solution (voir figure 7.5). Par exemple, dans le cas d'application traité, le coût de calcul de la solution sur l'intervalle de fréquence  $[200 - 250]$ Hz est similaire à celui sur l'intervalle  $[0 - 250]$ Hz, puisque, dans les deux cas, les modes et pseudo-modes propres dont la fréquence est inférieure à  $1.5f_{\max} = 375$ Hz sont calculés.
- La taille des bases de projection est fortement dépendante de l'amortissement introduit dans la structure. Plus l'amortissement est important, plus la base de projection doit être enrichie.

À l'inverse, pour la méthode de reconstruction par approximants de Padé (cf. chapitre 8), le temps de calcul de la solution dépend directement de la taille de la bande de fréquence étudiée. De plus, la convergence de la solution obtenue par cette méthode étant liée au degré de régularité de la réponse fréquentielle, plus l'amortissement introduit dans la structure est important, meilleure sera l'approximation réalisée autour de chaque fréquence d'évaluation de la solution par méthode directe.

Les points faibles de la méthode de synthèse modale appliquée constitue donc les points forts de la méthode de reconstruction par approximants de Padé, et vice-versa, ce qui contribue à la complémentarité de ces deux approches de réduction. Les résultats pour une méthode de reconstruction par approximations de Padé ne sont pas présentés dans ce chapitre.

## 9.3 Cas d'application 2 : modèle d'anneau sandwich bidimensionnel immergé

### 9.3.1 Description de l'étude

La deuxième application traitée dans cette section est un anneau bidimensionnel en acier, contenant de l'eau et immergé dans l'eau, de rayon  $R = 2.448$ m et d'épaisseur

### 9.3. CAS D'APPLICATION 2 : MODÈLE D'ANNEAU SANDWICH BIDIMENSIONNEL IMMERGÉ

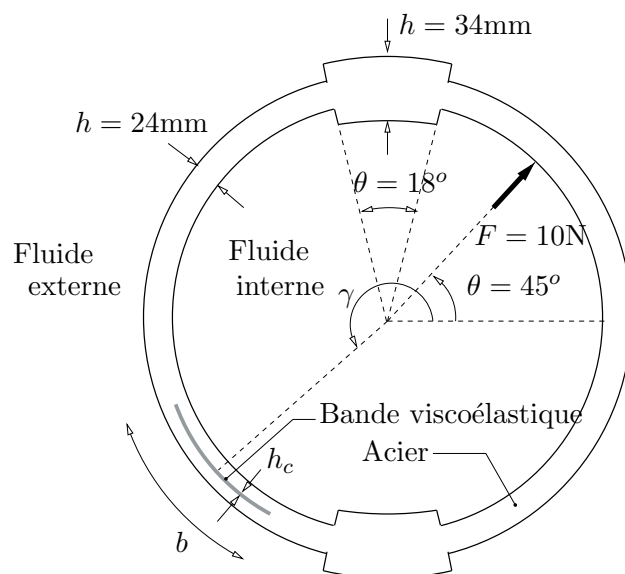


FIGURE 9.5 – Description du problème traité.

variable, comme indiqué sur la figure 9.5. Un effort ponctuel de 10N est appliqué à l’anneau à  $\theta = 45^\circ$ . On se fixe comme objectif arbitraire de réduire les vibrations du 4<sup>ème</sup> mode de vibration de l’anneau par application d’une bande viscoélastique en ISD112 au cœur de la structure. Les dimensions de la bande viscoélastique,  $b = 2\pi R/10 \approx 1.538\text{m}$  et  $h_c = 5\text{mm}$  sont fixées. Les paramètres d’un modèle fractionnaire de Zener, identifiés à partir des courbes maîtresses expérimentales de l’ISD112 [184], sont donnés dans le tableau 9.3. Le coefficient de Poisson du matériau viscoélastique est supposé réel et constant.

Afin de maximiser l’amortissement du 4<sup>ème</sup> mode de vibration de la structure, la position optimale de la bande viscoélastique est cherchée. Pour cela, on fait varier la position radiale de la bande viscoélastique, repérée par l’angle  $\gamma$  défini sur la figure 9.5, en choisissant d’éviter les zones de surépaisseurs. Tout d’abord, la stratégie de modélisation et de réduction est décrite puis les résultats de l’étude paramétrique sont donnés.

#### 9.3.2 Description de la stratégie de modélisation et de réduction

##### 9.3.2.1 Modèle avec éléments de type poutre sandwich

Dans ce cas d’application très simple, les dimensions de la structure sont telles que des éléments de type poutre sandwich peuvent être utilisés pour mailler l’anneau amorti

### 9.3. CAS D'APPLICATION 2 : MODÈLE D'ANNEAU SANDWICH BIDIMENSIONNEL IMMERGÉ

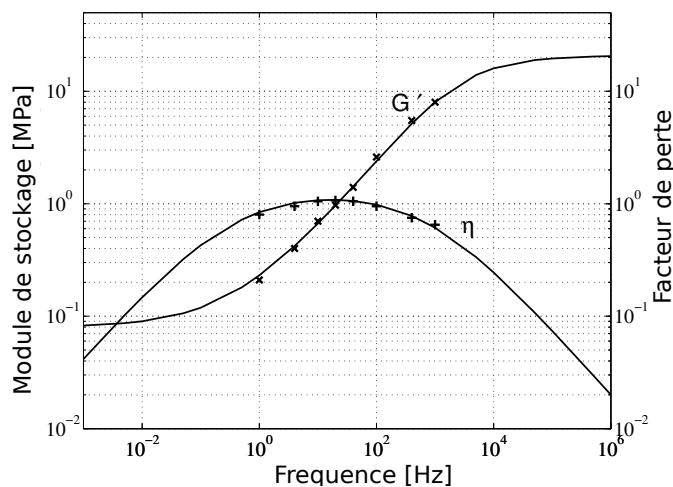


FIGURE 9.6 – Courbes maîtresses de l’ISD112 à 20°C mesurées (croix) et modélisées (traits pleins).

TABLE 9.3 – Propriétés mécaniques des matériaux

| Matériau                | Module de cisaillement  | Coefficient de Poisson  | Masse volumique              |
|-------------------------|---|-------------------------|------------------------------|
| Acier                   | $G = 8.08 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$   | $\nu = 0.3 \text{ Pa}$  | $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ |
| Viscoélastique (ISD112) | $G^*(\omega) = \frac{G_0 + G_\infty(i\omega\tau_G)^{\alpha_G}}{1 + (i\omega\tau_G)^{\alpha_G}}$ $G_0 = 8.07 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ $G_\infty = 2.08 \cdot 10^7 \text{ MPa}$ $\tau_G = 8.37 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ $\alpha_G = 0.5870$ | $\nu = 0.49 \text{ Pa}$ | $\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$ |

### 9.3. CAS D'APPLICATION 2 : MODÈLE D'ANNEAU SANDWICH BIDIMENSIONNEL IMMERGÉ

---

par une bande viscoélastique dans la circonférence. Les éléments de type poutre sandwich utilisés possèdent 2 nœuds et 4 degrés de liberté par nœud [60, 186], et sont basés sur les théories “zig-zag” : la théorie de Euler-Bernoulli est considérée pour les faces élastiques de la structure, et des hypothèses de Timoshenko sont prises pour le cœur viscoélastique. Le champ de déplacement dans la  $i$ -ème couche (figure 9.7) s'écrit dans le repère de coordonnées locales  $(x, z)$  :

$$\begin{cases} u_{xi}(x, z) = u_i(x) - (z - z_i)\theta_i(x), \\ u_{zi}(x, z) = w(x), \end{cases} \quad (9.15)$$

où  $u_{xi}$  et  $u_{zi}$  sont respectivement le déplacement axial et transverse,  $i = a, b$  pour les faces inférieures et supérieures de la structure, et  $i = c$  pour le cœur viscoélastique. Le déplacement axial de la ligne moyenne et la rotation dans chaque couche  $u_i$  et  $\theta_i$ , ainsi que le déplacement transverse  $w$  sont représentés sur la figure 9.7. En raison des cinématiques considérées dans chaque couche, ils peuvent être exprimés en fonction de  $\bar{u}$ ,  $w'$  et  $\tilde{u}$  [186] définis de la manière suivante :

$$\bar{u} = \frac{u_a + u_b}{2}, \quad \tilde{u} = u_a - u_b, \quad w' = \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (9.16)$$

Le déplacement axial est discrétisé par des fonctions de forme linéaires, tandis que des fonctions de forme cubiques sont utilisées pour la déflexion. Les déplacements généralisés  $\mathbf{d}^e = [\bar{u}, w, \tilde{u}]^T$  sont reliés aux degrés de liberté élémentaires  $\mathbf{q}^e = [\bar{u}_1, w_1, w'_1, \tilde{u}_1, \bar{u}_2, w_2, w'_2, \tilde{u}_2]^T$  par la matrice d'interpolation  $\mathbf{N}$  :

$$\mathbf{d}^e = \mathbf{N}\mathbf{q}^e \quad \text{avec} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \mathbf{q}^e, \quad (9.17)$$

où les fonctions de forme  $N_i$  sont définies par :

$$\begin{aligned} N_1 &= (1 - \xi)/2, & N_4 &= L_e(1 + \xi)(1 - \xi)^2/8, \\ N_2 &= (1 + \xi)/2, & N_5 &= (1 + \xi)^2(2 - \xi)/4, \\ N_3 &= (2 + \xi)(\xi - 1)^2/4, & N_6 &= L_e(1 + \xi)^2(\xi - 1)/8, \end{aligned} \quad (9.18)$$

où  $\xi = -1$  correspond au nœud 1 et  $\xi = +1$  correspond au nœud 2. Les degrés de liberté élémentaires dans le système de coordonnées locales  $\mathbf{q}^e$  sont liés aux degrés de liberté

### 9.3. CAS D'APPLICATION 2 : MODÈLE D'ANNEAU SANDWICH BIDIMENSIONNEL IMMERGÉ

---

élémentaires dans le système de coordonnées globales  $\mathbf{U}^e = [u_X^1, u_Y^1, w'_1, \tilde{u}_1, u_X^2, u_Y^2, w'_2, \tilde{u}_2]^T$  par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ w \\ w' \\ \tilde{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_X \\ u_Y \\ w' \\ \tilde{u} \end{bmatrix}, \quad (9.19)$$

où  $\alpha$  est l'angle de rotation entre les axes du repère global  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  et ceux du repère local  $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ . Le système matriciel suivant est obtenu après discrétisation :

$$[-\omega^2 (\mathbf{M}_a + \mathbf{M}_b + \mathbf{M}_c) + (\mathbf{K}_a + \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_c^*(\omega))] \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (9.20)$$

où  $\mathbf{M}_i$  et  $\mathbf{K}_i$  ( $i = a, b, c$ ) sont les matrices globales obtenues par assemblage des matrices élémentaires  $\mathbf{M}_i^e$  et  $\mathbf{K}_i^e$  de chaque couche :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_i^e = \int_0^{L_e} \rho_i A_i (\mathbf{N}_{xi}^T \mathbf{N}_{xi} + \mathbf{N}_z^T \mathbf{N}_z + \mathbf{N}_{ri}^T \mathbf{N}_{ri}) dx, & i = a, b, c, \\ \mathbf{K}_f^e = E_f \left( A_f \int_0^{L_e} \mathbf{B}_{mf}^T \mathbf{B}_{mf} dx + I_f \int_0^{L_e} \mathbf{B}_{bf}^T \mathbf{B}_{bf} dx \right), & f = a, b, \\ \mathbf{K}_c^e = E_c^*(\omega) \left( A_c \int_0^{L_e} \mathbf{B}_{mc}^T \mathbf{B}_{mc} dx + I_c \int_0^{L_e} \mathbf{B}_{bc}^T \mathbf{B}_{bc} dx \right) + \\ \quad k_c G_c^*(\omega) A_c \int_0^{L_e} \mathbf{B}_{sc}^T \mathbf{B}_{sc} dx, \end{cases} \quad (9.21)$$

où  $L_e$  est la longueur de l'élément physique  $e$  ;  $\rho_i$ ,  $E_i$ ,  $A_i$  et  $I_i$  sont respectivement la masse volumique, le module d'Young, la section et le moment d'inertie de la  $i^{\text{ème}}$  couche.  $G_c$  et  $k_c$  sont le module de cisaillement et le facteur de correction en cisaillement.  $\mathbf{U}$  est le vecteur de déplacements nodaux et  $\mathbf{F}$  le vecteur de chargement nodal externe. Les matrices lignes  $\mathbf{N}_{xi}$ ,  $\mathbf{N}_z$ ,  $\mathbf{N}_{ri}$ ,  $\mathbf{B}_{mi}$ ,  $\mathbf{B}_{bi}$  et  $\mathbf{B}_{sc}$  sont fonctions des fonctions de forme  $N_i$  et leurs expressions pour les faces ( $f = a(+), b(-)$ ) et le cœur ( $c$ ) sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{xf} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pm \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{N}, \\ \mathbf{N}_{xc} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{\tilde{h}}{2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{N}, & \mathbf{B}_{mf} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \pm \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{N}, \\ \mathbf{N}_z &= [0 \quad 1 \quad 0] \mathbf{N}, & \mathbf{B}_{mc} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\tilde{h}}{4} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{N}, \\ \mathbf{N}_{rf} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{N}, & \mathbf{B}_{sc} &= \begin{bmatrix} 0 & \left(1 + \frac{\tilde{h}}{h_c}\right) \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{N}, \\ \mathbf{N}_{rc} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\tilde{h}}{h_c} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{N}, \end{aligned} \quad (9.22)$$

### 9.3. CAS D'APPLICATION 2 : MODÈLE D'ANNEAU SANDWICH BIDIMENSIONNEL IMMERGÉ

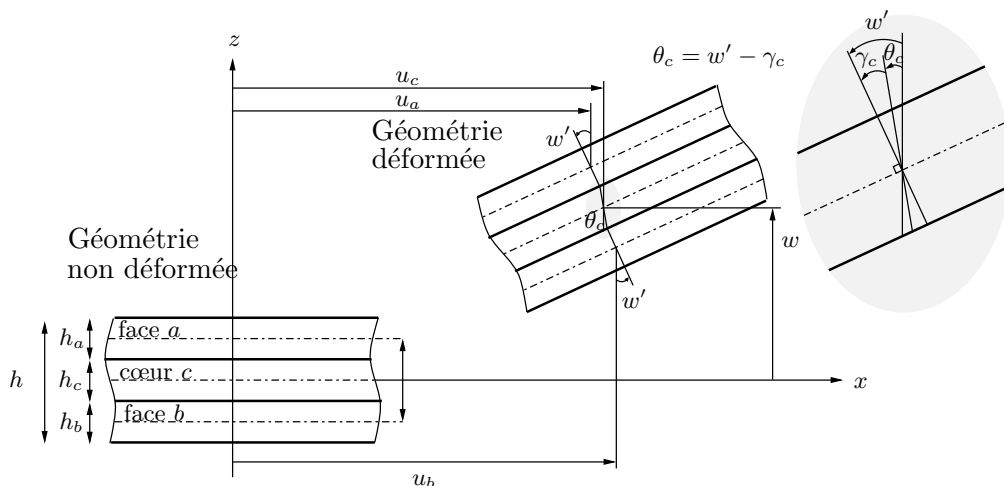


FIGURE 9.7 – Cinématiques d'un élément de type poutre sandwich

avec  $\bar{h} = \frac{h_a + h_b}{2}$  et  $\tilde{h} = h_a - h_b$ .

#### 9.3.2.2 Modélisation des fluides interne et externe

Afin de prendre en compte les effets inertiels des fluides interne et externe sur la dynamique de la structure, un opérateur de masse ajoutée semi-analytique, calculé à partir de la solution analytique existant pour un anneau homogène, est développé.

**Solution analytique d'un anneau homogène couplé à des fluides interne et externe** Considérons l'anneau homogène élastique couplé à des fluides interne et externe représenté sur la figure 9.8. L'anneau est caractérisé par son module d'Young  $E$ , son coefficient de Poisson  $\nu$ , et sa masse volumique  $\rho_s$ . L'anneau est couplé à un fluide interne de masse volumique  $\rho_I$  et un fluide externe de masse volumique  $\rho_E$ . On suppose que les déplacements de la structure sont petits et que le fluide est au repos et incompressible sur la gamme de fréquence étudiée. Les fluides exercent des efforts normaux sur la frontière intérieure  $\Sigma_I$  et extérieure  $\Sigma_E$  de l'anneau. Des efforts extérieurs notés  $\mathbf{F}_I$  et  $\mathbf{F}_E$  sont appliqués sur  $\Sigma_I$  et  $\Sigma_E$ . Les domaines occupés par la structure et les fluides interne et externe sont respectivement notés  $\Omega_S$ ,  $\Omega_I$  et  $\Omega_E$ . La normale unitaire extérieure à la structure est notée  $\mathbf{n}_S$ .

9.3. CAS D'APPLICATION 2 : MODÈLE D'ANNEAU SANDWICH  
 BIDIMENSIONNEL IMMERGÉ

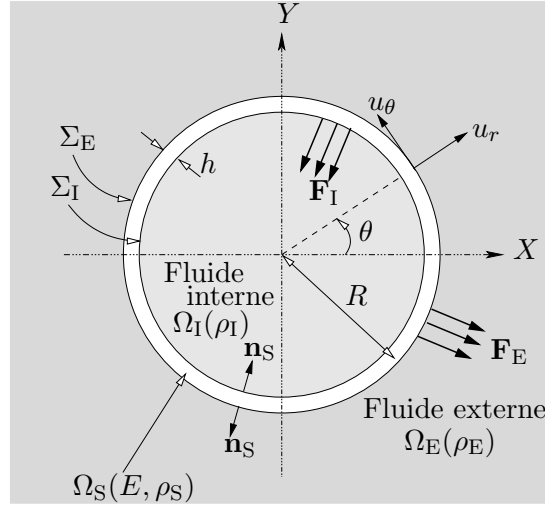


FIGURE 9.8 – Anneau homogène élastique couplé à des fluides interne et externe.

Les équations gouvernant la dynamique du système couplé sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_S \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 & \text{dans } \Omega_S, \quad (9.23a) \\ \Delta p_I = 0 & \text{dans } \Omega_I, \quad (9.23b) \\ \Delta p_E = 0 & \text{dans } \Omega_E, \quad (9.23c) \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_S = -p_I \mathbf{n}_S + \mathbf{F}_I & \text{sur } \Sigma_I, \quad (9.23d) \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_S = -p_E \mathbf{n}_S + \mathbf{F}_E & \text{sur } \Sigma_E, \quad (9.23e) \\ \mathbf{grad} p_I \cdot \mathbf{n}_S = -\rho_I \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{n}_S & \text{sur } \Sigma_I, \quad (9.23f) \\ \mathbf{grad} p_E \cdot \mathbf{n}_S = -\rho_E \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{n}_S & \text{sur } \Sigma_E, \quad (9.23g) \end{array} \right.$$

où  $\mathbf{u}$  est le déplacement de la structure et  $p_I$  et  $p_E$  sont les pressions dans les fluides interne et externe. Le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  est relié au tenseur des déformations  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})$  par la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \mathbf{u} + \mathbf{grad}^T \mathbf{u}), \quad (9.24)$$

où  $(\lambda, \mu)$  sont les coefficients de Lamé.

Les efforts extérieurs  $\mathbf{F}_I$  et  $\mathbf{F}_E$  sont pris dans la direction radiale  $\mathbf{e}_r$  ( $\mathbf{n}_S = -\mathbf{e}_r$  sur  $\Sigma_I$  et  $\mathbf{n}_S = \mathbf{e}_r$  sur  $\Sigma_E$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_I &= -F_I \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{F}_E &= F_E \mathbf{e}_r. \end{aligned} \quad (9.25)$$

### 9.3. CAS D'APPLICATION 2 : MODÈLE D'ANNEAU SANDWICH BIDIMENSIONNEL IMMERGÉ

---

On considère que les dimensions de l'anneau sont telles que la théorie des coques cylindriques s'applique. Les équations du mouvement pour un anneau mince bidimensionnel élastique homogène obtenues par la théorie de Love-Timoshenko sont [96](p32) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_s h \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} - \frac{Eh}{(1-\nu^2)R^2} \left[ \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{h^2}{12R^2} \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^3 u_r}{\partial \theta^3} \right) \right] = 0, \\ \rho_s h \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{Eh}{(1-\nu^2)R^2} \left[ u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{h^2}{12R^2} \left( \frac{\partial^4 u_r}{\partial \theta^4} - \frac{\partial^3 u_\theta}{\partial \theta^3} \right) \right] = \\ p_I \Big|_{r=R} - p_E \Big|_{r=R} + F_E - F_I, \end{array} \right. \quad (9.26a)$$

où  $u_r$  et  $u_\theta$  sont respectivement le déplacement radial et orthoradial. En prenant en compte l'axisymétrie de la géométrie, les déplacements radial et orthoradial, ainsi que la pression dans les fluides, peuvent s'écrire sous la forme d'une série de Fourier. Pour une excitation harmonique, les expressions pour le déplacement de la structure et les pressions des fluides sont :

$$u_r = \left( u_r^0 + \sum_{m \geq 1} \left( u_r^{m(s)} \cos(m\theta) + u_r^{m(a)} \sin(m\theta) \right) \right) e^{i\omega t}, \quad (9.27a)$$

$$u_\theta = \left( u_\theta^0 + \sum_{m \geq 1} \left( u_\theta^{m(a)} \cos(m\theta) + u_\theta^{m(s)} \sin(m\theta) \right) \right) e^{i\omega t}, \quad (9.27b)$$

$$p_I = \left( p_I^0(r) + \sum_{m \geq 1} \left( p_I^{m(s)}(r) \cos(m\theta) + p_I^{m(a)}(r) \sin(m\theta) \right) \right) e^{i\omega t}, \quad (9.27c)$$

$$p_E = \left( p_E^0(r) + \sum_{m \geq 1} \left( p_E^{m(s)}(r) \cos(m\theta) + p_E^{m(a)}(r) \sin(m\theta) \right) \right) e^{i\omega t}, \quad (9.27d)$$

En utilisant l'équation (9.27) dans les équations (9.23b), (9.23c), (9.23f) et (9.23g), on obtient :

9.3. CAS D'APPLICATION 2 : MODÈLE D'ANNEAU SANDWICH  
BIDIMENSIONNEL IMMERGÉ

---

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \right) p_{\text{I}}^{m(k)}(r) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\text{I}}, \quad (9.28a) \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \right) p_{\text{E}}^{m(k)}(r) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\text{E}}, \quad (9.28b) \\ \left. \frac{\partial p_{\text{I}}^{m(k)}(r)}{\partial r} \right|_{r=R} = \rho_{\text{I}} \omega^2 u_r^{m(k)} \quad \text{sur } \Sigma_{\text{I}}, \quad (9.28c) \\ \left. \frac{\partial p_{\text{E}}^{m(k)}(r)}{\partial r} \right|_{r=R} = \rho_{\text{E}} \omega^2 u_r^{m(k)} \quad \text{sur } \Sigma_{\text{E}}, \quad (9.28d) \end{array} \right. \quad (9.28e)$$

pour les composantes symétrique et antisymétrique ( $k = s, a$ ).

Les coefficients  $p_{\text{I}}^{m(k)}(r)$  et  $p_{\text{E}}^{m(k)}(r)$  vérifiant le système d'équations (9.28) sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{\text{I}}^0(r) = 0 \quad \text{et} \quad p_{\text{I}}^{m(k)}(r) = \rho_{\text{I}} \omega^2 \frac{r^m}{m R^{m-1}} u_r^{m(k)} \quad \text{pour } m \geq 1 \text{ dans } \Omega_{\text{I}}, \quad (9.29a) \\ p_{\text{E}}^0(r) = 0 \quad \text{et} \quad p_{\text{E}}^{m(k)}(r) = -\rho_{\text{E}} \omega^2 \frac{R^{m+1}}{m r^m} u_r^{m(k)} \quad \text{pour } m \geq 1 \text{ dans } \Omega_{\text{I}}. \quad (9.29b) \end{array} \right.$$

Le système matriciel à résoudre pour déterminer les modes du système couplé est obtenu en combinant les équations (9.26a-b), (9.27a-d) et (9.29a-b) :

$$\begin{pmatrix} c_1 \begin{bmatrix} (1 + m^4 c_2) & m(1 + m^2 c_2) & 0 & 0 \\ m(1 + m^2 c_2) & m^2(1 + c_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 + m^4 c_2) & -m(1 + m^2 c_2) \\ 0 & 0 & -m(1 + m^2 c_2) & m^2(1 + c_2) \end{bmatrix} \\ -\omega^2 \begin{bmatrix} \rho_{\text{S}} h + \rho_{\text{I}} \frac{R}{m} + \rho_{\text{E}} \frac{R}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{\text{S}} h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{\text{S}} h + \rho_{\text{I}} \frac{R}{m} + \rho_{\text{E}} \frac{R}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{\text{S}} h \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_r^{m(s)} \\ u_{\theta}^{m(s)} \\ u_r^{m(a)} \\ u_{\theta}^{m(a)} \end{bmatrix} \quad (9.30)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-F_{\text{I}} + F_{\text{E}}) \cos(mx) dx \\ 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-F_{\text{I}} + F_{\text{E}}) \sin(mx) dx \\ 0 \end{bmatrix},$$

où les constantes  $c_1$  et  $c_2$  sont définies par  $c_1 = \frac{Eh}{(1 - \nu^2)R^2}$  et  $c_2 = \frac{h^2}{12R^2}$ .

Les coefficients  $\rho_{\text{I}} \frac{R}{m}$  et  $\rho_{\text{E}} \frac{R}{m}$  représentent les termes de masse ajoutée dus à la présence des fluides interne et externe.

### 9.3. CAS D'APPLICATION 2 : MODÈLE D'ANNEAU SANDWICH BIDIMENSIONNEL IMMERGÉ

---

**Opérateur de masse ajoutée semi-analytique** La formulation faible du problème couplé est obtenue de la même manière que dans la section 4.3.2 à partir des équations (9.23d) et (9.23e) :

$$\int_{\Omega_S} \boldsymbol{\epsilon}(\delta \mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \omega^2 \int_{\Omega_S} \rho_S \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \int_{\Sigma_I} p_I \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_S + \int_{\Sigma_E} p_E \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_S = \int_{\Sigma_I} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_I + \int_{\Sigma_E} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_E, \forall \delta \mathbf{u}, \quad (9.31)$$

Les deux derniers termes du membre de droite représentent les effets des fluides sur la structure. Les équations (9.27a-b) et (9.29a-b) conduisent à l'expression suivante des champs de pression dans les fluides interne et externe :

$$\begin{cases} p_I = \sum_{m \geq 1} \rho_I \frac{r^m}{m R^{m-1}} \omega^2 \left( u_r^{m(s)} \cos(m\theta) + u_r^{m(a)} \sin(m\theta) \right), \\ p_E = \sum_{m \geq 1} \rho_E \frac{R^{m+1}}{m r^m} \omega^2 \left( u_r^{m(s)} \cos(m\theta) + u_r^{m(a)} \sin(m\theta) \right), \end{cases} \quad (9.32)$$

où  $u_r^{m(c)}$  et  $u_r^{m(s)}$  sont les coefficients harmoniques du déplacement radial  $u_r$  :

$$u_r^{m(s)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_r(\gamma) \cos(m\gamma) d\gamma \quad \text{et} \quad u_r^{m(a)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_r(\gamma) \sin(m\gamma) d\gamma, \quad (9.33)$$

En introduisant les fonctions

$$D_m^s(u_r) \mapsto \int_0^{2\pi} u_r(\gamma) \cos(m\gamma) d\gamma \quad \text{et} \quad D_m^a(u_r) \mapsto \int_0^{2\pi} u_r(\gamma) \sin(m\gamma) d\gamma, \quad (9.34)$$

et en remplaçant  $u_r^{m(s)}$  et  $u_r^{m(a)}$  dans l'équation (9.32) par leurs expressions respectives données dans l'équation (9.33), les pressions interne et externe peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} p_I = \sum_{m \geq 1} \rho_I \frac{r^m \omega^2}{\pi m R^{m-1}} \left( D_m^s(u_r) \cos(m\theta) + D_m^a(u_r) \sin(m\theta) \right), \\ p_E = \sum_{m \geq 1} \rho_E \frac{R^{m+1} \omega^2}{m r^m} \left( D_m^s(u_r) \cos(m\theta) + D_m^a(u_r) \sin(m\theta) \right). \end{cases} \quad (9.35)$$

### 9.3. CAS D'APPLICATION 2 : MODÈLE D'ANNEAU SANDWICH BIDIMENSIONNEL IMMERGÉ

---

Les termes de couplage dans l'équation (9.33) deviennent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \int_{\Sigma_I} p_I \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_S = \int_0^{2\pi} \delta u_r p_I|_{r=R} R d\theta \\ \quad \quad \quad = \sum_{m \geq 1} \frac{\rho_I \omega^2 R^2}{\pi m} (D_m^s(\delta u_r) D_m^s(u_r) + D_m^a(\delta u_r) D_m^a(u_r)), \\ - \int_{\Sigma_E} p_E \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_S = \int_0^{2\pi} \delta u_r p_E|_{r=R} R d\theta \\ \quad \quad \quad = \sum_{m \geq 1} \frac{\rho_E \omega^2 R^2}{\pi m} (D_m^s(\delta u_r) D_m^s(u_r) + D_m^a(\delta u_r) D_m^a(u_r)). \end{array} \right. \quad (9.36)$$

Le déplacement radial  $u_r$  est approximé par éléments finis :

$$u_r(\theta) = \mathbf{N}(\theta) \mathbf{U}_r, \quad (9.37)$$

où  $\mathbf{N} = \mathbf{A}_{e \in \Sigma_{I,E}} \mathbf{N}^e$ , est la matrice ligne assemblée des fonctions de forme élémentaires  $\mathbf{N}^e$  sur les interfaces  $\Sigma_I$  ou  $\Sigma_E$ , et  $\mathbf{U}_r = \mathbf{A}_{e \in \Sigma_{I,E}} \mathbf{U}_r^e$  est le vecteur des déplacements radiaux. La matrice ligne des fonctions de forme élémentaires  $\mathbf{N}^e$  et le vecteur des déplacements radiaux élémentaires sont définis en s'appuyant sur les notations de la figure 9.9 par :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^e &= [N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6], \\ \mathbf{U}_r^e &= [w^{e①} \quad w'^{e①} \quad w^{e②} \quad w'^{e②}]^T, \end{aligned} \quad (9.38)$$

où  $N_i$  sont les fonctions de forme introduites dans l'équation (9.18). En utilisant cette discrétisation, les intégrales  $D_m^c(\bullet)$  et  $D_m^s(\bullet)$  sur la circonférence de l'anneau sont approximées par :

$$\begin{aligned} D_m^s(u_r) &= \left( \mathbf{A}_{e \in \Sigma_{I,E}} \int_{\theta_a}^{\theta_b} \mathbf{N}^e(\gamma) \cos(m\gamma) d\gamma \right) \mathbf{U}_r = \mathbf{A}_m \mathbf{U}_r, \\ D_m^a(u_r) &= \left( \mathbf{A}_{e \in \Sigma_{I,E}} \int_{\theta_a}^{\theta_b} \mathbf{N}^e(\gamma) \sin(m\gamma) d\gamma \right) \mathbf{U}_r = \mathbf{B}_m \mathbf{U}_r. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Les angles  $\theta_a$  et  $\theta_b$  sont définis sur la figure 9.9. Les matrices lignes  $\mathbf{A}_m$  et  $\mathbf{B}_m$  peuvent être déterminées analytiquement, et sont détaillées dans l'annexe D.

Pour chaque nœud à l'interface  $\textcircled{i}$ , correspondant au nœud  $i$  dans la numérotation globale :

$$\begin{bmatrix} w^{\textcircled{i}} \\ w'^{\textcircled{i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_X^i \\ u_Y^i \\ w^i \\ \tilde{u}^i \end{bmatrix}. \quad (9.40)$$

### 9.3. CAS D'APPLICATION 2 : MODÈLE D'ANNEAU SANDWICH BIDIMENSIONNEL IMMERGÉ

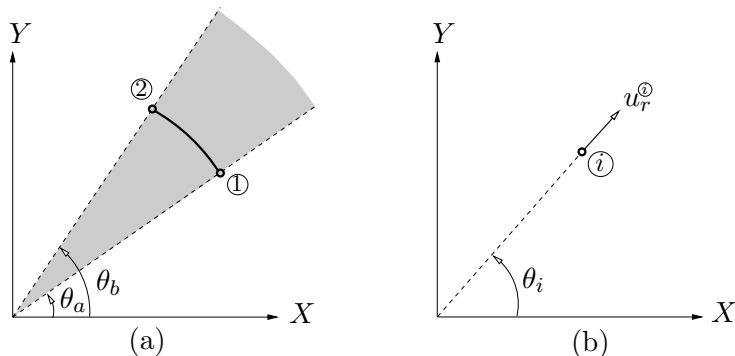


FIGURE 9.9 – Définition des angles (a)  $\theta_a$ ,  $\theta_b$  et (b)  $\theta_i$ .

En utilisant cette équation, une matrice de passage  $\mathbf{P}$  entre les déplacements radiaux des nœuds à l'interface  $\mathbf{U}_r$  et les degrés de liberté  $\mathbf{U}$  est définie :  $\mathbf{U}_r = \mathbf{P}\mathbf{U}$ . Les termes de couplage peuvent alors être directement exprimés en fonction des degrés de liberté :

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Sigma_I} p_I \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_S &= \omega^2 \delta \mathbf{U}^T \left( \underbrace{\sum_{m \geq 0} \frac{\rho_I R^2}{\pi m} \mathbf{P}^T (\mathbf{A}_m^T \mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m^T \mathbf{B}_m) \mathbf{P}}_{\mathbf{M}_a^I} \right) \mathbf{U}, \\
 - \int_{\Sigma_E} p_E \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_S &= \omega^2 \delta \mathbf{U}^T \left( \underbrace{\sum_{m \geq 0} \frac{\rho_E R^2}{\pi m} \mathbf{P}^T (\mathbf{A}_m^T \mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m^T \mathbf{B}_m) \mathbf{P}}_{\mathbf{M}_a^E} \right) \mathbf{U}.
 \end{aligned} \tag{9.41}$$

Le problème discrétisé associé à l'équation (9.31) est alors :

$$[\mathbf{K}_S^*(\omega) - \omega^2 (\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_a^I + \mathbf{M}_a^E)] \mathbf{U} = \mathbf{F}, \tag{9.42}$$

où les matrices de raideur, de masse et de masse ajoutée du fluide sont définies par :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_S} \boldsymbol{\epsilon}_{ij}(\delta \mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{u}) &\implies \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K}_S^*(\omega) \mathbf{U}, \\
 \int_{\Omega_S} \rho_S \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} &\implies \omega^2 \delta \mathbf{U}^T \mathbf{M}_S \mathbf{U}, \\
 - \int_{\Sigma_I} p_I \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_S &\implies \omega^2 \delta \mathbf{U}^T \mathbf{M}_a^I \mathbf{U}, \\
 - \int_{\Sigma_E} p_E \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_S &\implies \omega^2 \delta \mathbf{U}^T \mathbf{M}_a^E \mathbf{U}.
 \end{aligned} \tag{9.43}$$

### 9.3.2.3 Méthode itérative des valeurs propres complexes

L'objectif de l'étude paramétrique étant de maximiser l'amortissement du 4<sup>ème</sup> mode de vibration de l'anneau rempli d'eau et immergé dans l'eau, la méthode itérative des valeurs propres complexes est utilisée pour calculer l'amortissement modal correspondant. La méthode itérative des valeurs propres complexes, décrite dans la section 7.3.2.2, permet d'approcher par itérations les modes propres  $\Phi_k^*$  et les valeurs propres  $\lambda_k^*$  complexes solutions de :

$$[\mathbf{K}_S^*(\lambda_k^*) - \lambda_k^{*2} (\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_a^I + \mathbf{M}_a^E)] \Phi_k^* = \mathbf{0}. \quad (9.44)$$

Les valeurs propres complexes  $\lambda_k^*$  obtenues à la fin de l'algorithme 2 sont reliées à la pulsation propre  $\omega_k$  et à l'amortissement modal  $\eta_k$  par la relation :

$$\lambda_k^* = \omega_k^2 (1 + i\eta_k). \quad (9.45)$$

Pour chaque position radiale de la bande viscoélastique, l'algorithme itératif des valeurs propres complexes est appliqué afin de déterminer l'amortissement modal du 4<sup>ème</sup> mode de vibration :

$$\eta_4 = \frac{\Im(\lambda_4^*)}{\Re(\lambda_4^*)}. \quad (9.46)$$

## 9.3.3 Analyse des résultats

### 9.3.3.1 Validation de l'approche

Dans un premier temps, la validité de la stratégie de modélisation et de réduction est testée. Pour cela, la réponse fréquentielle d'un anneau homogène en acier rempli d'eau et immergé dans l'eau de masse volumique  $\rho_I = \rho_E = 1000\text{kg/m}^3$  est calculée. L'anneau homogène est excité par un effort ponctuel  $F = 100\text{N}$  appliqué à  $\theta = 0$ . La structure est maillée par 360 éléments de type poutre sandwich, dont la formulation a été donnée dans la section précédente. Un amortissement structural de 0.1% est considéré pour l'acier. La réponse fréquentielle, calculée par une méthode directe est comparée à la solution analytique obtenue par résolution du système (9.30). La figure 9.10 montre une très bonne concordance entre les résultats numériques et analytiques, validant ainsi l'approche adoptée.

### 9.3. CAS D'APPLICATION 2 : MODÈLE D'ANNEAU SANDWICH BIDIMENSIONNEL IMMERGÉ

---

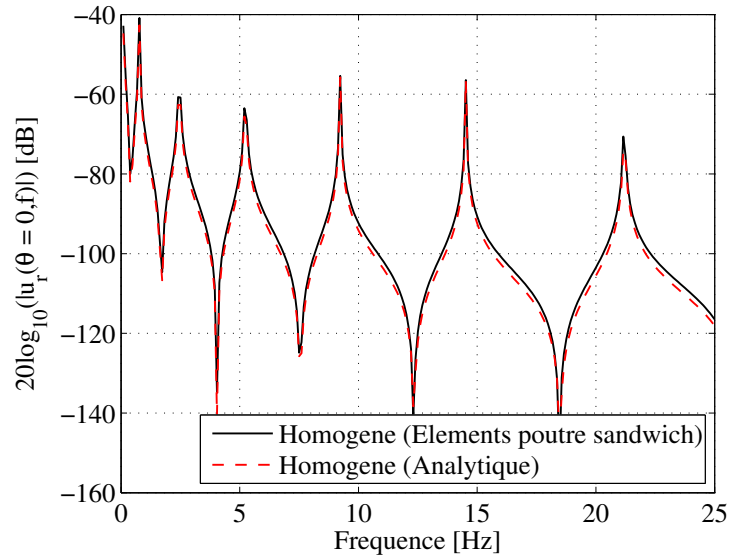


FIGURE 9.10 – Réponse fréquentielle de l'anneau homogène en acier rempli d'eau et immergé dans l'eau à  $\theta = 0$ .

Afin de donner un ordre de grandeur à l'erreur commise sur le calcul de l'amortissement modal par la méthode itérative des valeurs propres complexes, une étude est réalisée sur un anneau sandwich comprenant une couche viscoélastique à cœur d'épaisseur  $h_c = 5\text{mm}$ , rempli d'eau et immergé dans l'eau. Les fréquences propres et les amortissements modaux des cinq premiers modes de vibration de l'anneau sandwich couplé aux fluides sont calculés par la méthode itérative des valeurs propres complexes. Ils sont comparés à ceux obtenus par l'application de la méthode de la bande passante à  $-3\text{dB}$  à la réponse fréquentielle calculée par une méthode directe. Les résultats de l'étude, donnés dans le tableau 9.4, montrent que les deux méthodes donnent des résultats similaires. Il est à noter que l'erreur relative calculée ne tient pas compte de l'erreur de détermination des paramètres modaux par la méthode de la bande passante à  $-3\text{dB}$ .

#### 9.3.3.2 Résultats de l'analyse paramétrique

La figure 9.11 montre l'évolution de l'amortissement modal du 4<sup>ème</sup> mode de vibration en fonction de la position radiale de la bande viscoélastique. L'étude paramétrique met en évidence deux positions optimales de la bande viscoélastique, correspondant aux angles

### 9.3. CAS D'APPLICATION 2 : MODÈLE D'ANNEAU SANDWICH BIDIMENSIONNEL IMMERGÉ

TABLE 9.4 – Fréquences propres et amortissements modaux des cinq premiers modes de vibration d'un anneau sandwich rempli d'eau et immergé dans l'eau, calculés par la méthode itérative des valeurs propres complexes (ICE) et par la méthode de la bande passante à  $-3\text{dB}$  appliquée à la réponse fréquentielle obtenue par un calcul direct (DFR).

| Mode | Fréquences propres (Hz) |      |                     | Amortissement modal (%) |      |                     |
|------|-------------------------|------|---------------------|-------------------------|------|---------------------|
|      | DFR                     | ICE  | Erreur relative (%) | DFR                     | ICE  | Erreur relative (%) |
| 1    | 0.31                    | 0.31 | 0.32                | 13.3                    | 13.1 | 1.3                 |
| 2    | 0.96                    | 0.96 | 0.16                | 12.7                    | 12.8 | 1.1                 |
| 3    | 2.02                    | 2.02 | 0.03                | 11.4                    | 11.7 | 3.1                 |
| 4    | 3.52                    | 3.51 | 0.05                | 10.2                    | 10.7 | 4.7                 |
| 5    | 5.50                    | 5.49 | 0.10                | 9.3                     | 9.8  | 5.7                 |

$\gamma = -14^\circ$  (figure 9.12) et  $\gamma = 14^\circ$ . Ces deux positions symétriques maximisent la réduction du 4<sup>ème</sup> mode. Cependant, on observe que ces solutions optimales ne sont pas très robustes puisqu'une légère variation de la position de la bande viscoélastique (par exemple pour  $\gamma \in [-30^\circ - -14^\circ]$ , l'amortissement modal du 4<sup>ème</sup> mode varie de 0.0018 à 0.014). L'étude paramétrique permet néanmoins de définir deux zones dans lesquelles l'amortissement modal varie peu : autour de  $\gamma = 0^\circ (\pm 14^\circ)$  et autour de  $\gamma = 180^\circ (\pm 14^\circ)$ .

La figure 9.13 compare les réponses fréquentielles calculées sur l'intervalle de fréquence  $[0 - 5]\text{Hz}$  avec et sans traitement viscoélastique. La réponse fréquentielle de la structure amortie est calculée pour une position optimale de la bande viscoélastique, correspondant à  $\gamma = 14^\circ$ . Un amortissement structural de 0.1% est pris pour la structure non amortie afin de pouvoir comparer l'amplitude des pics de résonance. On remarque que l'application de la bande viscoélastique permet de réduire efficacement l'amplitude des vibrations de la structure autour du 4<sup>ème</sup> mode (figure 9.13), ainsi que les niveaux de pression dans les fluides interne et externe (figure 9.14).

La stratégie de réduction adoptée, consistant à modéliser le fluide par un opérateur de masse ajoutée et à calculer les amortissements modaux par la méthode itérative des valeurs propres complexes, permet donc de tester efficacement plusieurs configurations de traitement amortissant dans le cadre d'une étude paramétrique.

### 9.3. CAS D'APPLICATION 2 : MODÈLE D'ANNEAU SANDWICH BIDIMENSIONNEL IMMERGÉ

---

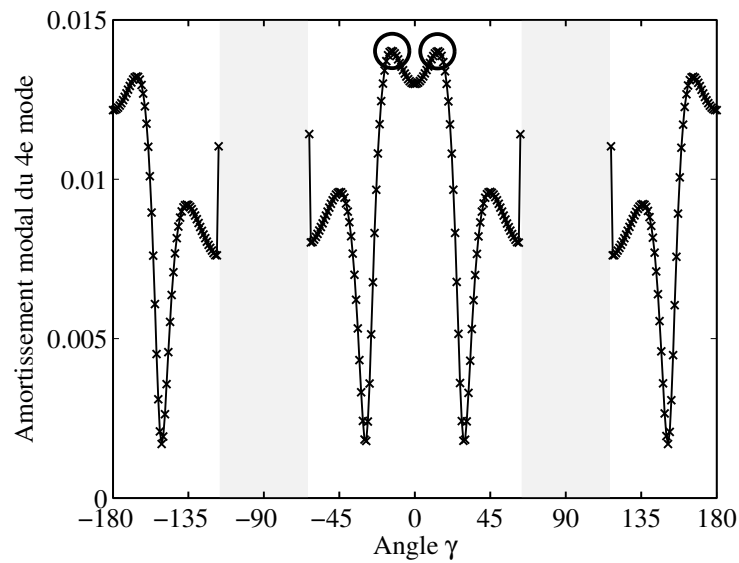


FIGURE 9.11 – Amortissement modal du 4<sup>ème</sup> mode de vibration en fonction de la position radiale de la bande viscoélastique.

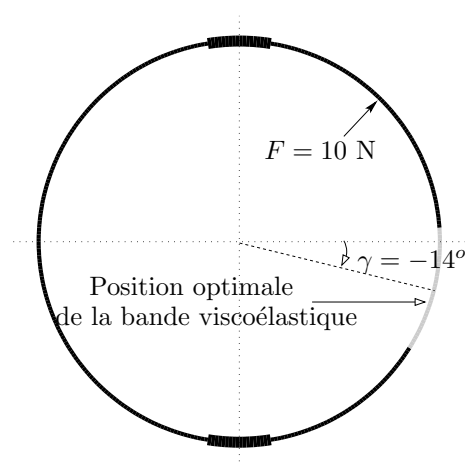


FIGURE 9.12 – Position optimale de la bande viscoélastique, correspondant à  $\gamma = -14^\circ$ .

### 9.3. CAS D'APPLICATION 2 : MODÈLE D'ANNEAU SANDWICH BIDIMENSIONNEL IMMERGÉ

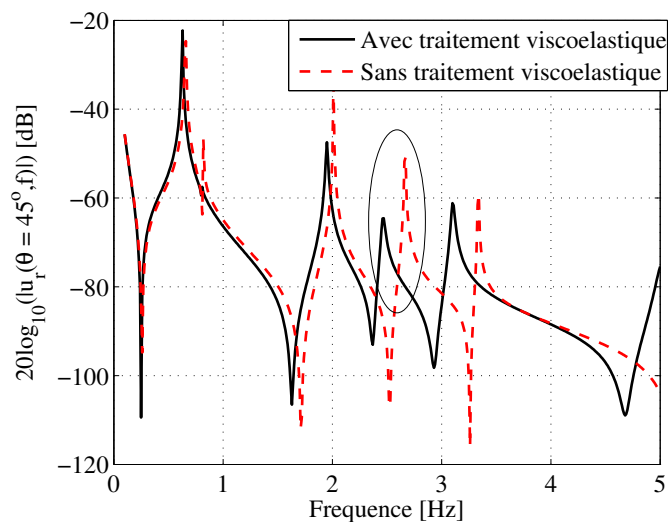


FIGURE 9.13 – Réponse fréquentielle de l'anneau rempli d'eau et immergé dans l'eau, avec et sans amortissement viscoélastique.

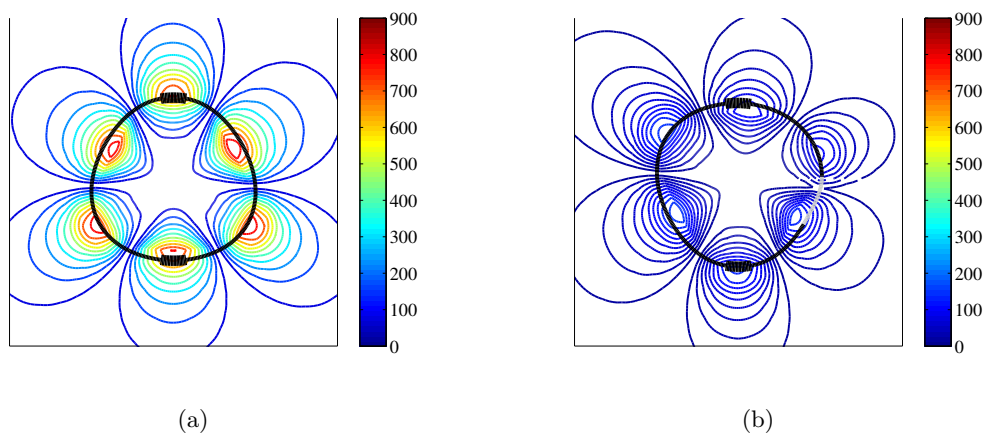


FIGURE 9.14 – Champ de pression dans les fluides interne et externe à la fréquence de résonance du 4<sup>ème</sup> mode de vibration de l'anneau (a) non amorti ( $f = 2.67$  Hz -  $P_{\max} = 838$  Pa) et (b) amorti ( $f = 2.45$  Hz -  $P_{\max} = 173$  Pa) par une bande viscoélastique positionnée à  $\gamma = 14^\circ$ .

## 9.4 Conclusion

Ce chapitre avait pour but de montrer les potentiels des méthodologies et techniques développées dans cette thèse pour l'optimisation de structures munies de matériaux viscoélastiques, à travers deux cas d'application.

Le premier cas d'application met en évidence l'intérêt d'utiliser des éléments finis d'interface en combinaison d'une méthode de synthèse modale avec approche multi-modèles. La précision obtenue après double réduction sur les paramètres modaux est très satisfaisante (dans le domaine de validité des éléments d'interface). De plus, pour un modèle avec éléments d'interface, aucun remaillage n'est requis lors du changement d'épaisseur de la couche viscoélastique à chaque itération de l'étude paramétrique. Ceci permet de réduire efficacement le temps de calcul de la solution. Bien que non discuté dans ce chapitre, un changement de position de la couche viscoélastique sur une surface prédéfinie ne nécessite qu'une mise à jour locale des matrices de masse et de raideur. La stratégie de réduction appliquée à la structure traitée peut être utilisée par la suite pour la création d'abaques numériques ou le développement d'outils d'aide à la conception de traitements amortissants.

Dans le deuxième cas d'application traité, une méthode originale de couplage entre une structure de forme circulaire et un fluide incompressible est présentée. Elle est basée sur une prise en compte des effets inertiels du fluide sur la dynamique de la structure par un opérateur de masse ajoutée semi-analytique. Il a été montré que cette méthode permettait la réalisation d'études d'optimisation de structures circulaires non symétriques amorties par des matériaux viscoélastiques et couplées à des fluides. Le cas simple traité constitue un démonstrateur numérique qui peut être utilisé pour le développement d'autres méthodes de couplage fluide/structure impliquant une discrétisation du fluide. Le cas d'application proposé dans ce chapitre se limite à la prise en compte des effets inertiels d'un fluide incompressible sur la structure. Cependant, il est possible d'introduire les effets radiatifs d'un fluide compressible dans l'opérateur de masse ajoutée calculé, qui devient alors complexe et dépendant de la fréquence. La validité des méthodes de réduction décrites dans le chapitre 7 dans le cas d'un fluide compressible reste alors à déterminer.

# Conclusion



## CONCLUSION

---

L'objectif de cette thèse était de proposer des méthodes fiables et performantes pour la prédiction du comportement vibratoire de structures amorties par des matériaux viscoélastiques en vue de l'optimisation de traitements viscoélastiques de type couche contrainte. Pour cela, une méthodologie de caractérisation et de modélisation du comportement viscoélastique des matériaux amortissants utilisés est mise en place. Le modèle viscoélastique identifié à la fin de cette étape sert à alimenter le code de calcul par éléments finis développé. La stratégie de modélisation adoptée est ensuite validée par des comparaisons calculs/essais sur des structures sandwich. Dans un deuxième temps, plusieurs stratégies de réduction sont proposées afin de garantir l'efficacité en terme de coût de calcul des outils numériques mis en place. Celles-ci sont appliquées à deux cas d'application pour mettre en avant leurs avantages dans le cadre d'études paramétriques.

**Principales contributions.** La **première contribution** de cette thèse concerne le développement d'une méthode automatique de recalage appliquée aux mesures non résonantes, présentées dans le chapitre 1, pour l'obtention de courbes maîtresses en accord avec le principe de causalité (chapitre 2). L'originalité de cette approche repose sur l'utilisation des relations exactes de Kramers-Kronig dans l'algorithme calculant les coefficients de glissement horizontal et vertical intervenant dans le principe de superposition temps-température. Par rapport à d'autres techniques de recalage, la méthode développée présente l'avantage d'être non empirique et d'assurer la consistance interne sans s'appuyer sur un modèle viscoélastique. L'application de cette méthode à un élastomère conduit à des résultats en accord avec les théories existantes et d'autres travaux. Les paramètres d'un modèle viscoélastique adapté peuvent ensuite être identifiés à partir des courbes maîtresses ainsi obtenues. Dans le chapitre 3, nous avons vu qu'un modèle fractionnaire de Zener permettait avec seulement quatre paramètres de bien représenter l'évolution fréquentielle des propriétés mécaniques du matériau viscoélastique étudié. Ces travaux ont été présentés dans plusieurs conférences nationales et internationales [155, 156, 157, 160], et ont fait l'objet d'une publication dans un journal à comité de lecture international [154].

La **deuxième contribution** de cette thèse, plutôt d'un intérêt industriel, concerne les

résultats de l'étude comparative entre simulations et expériences, présentée dans le chapitre 5. Bien que les écarts observés entre calculs et essais soient similaires à ceux observés lors de précédentes campagnes d'essais réalisées par DCNS, l'analyse effectuée dans ce travail contribue à une meilleure compréhension de ces écarts. Plusieurs sources d'erreurs possibles ont été identifiées : les incertitudes de mesure des propriétés mécaniques de matériaux viscoélastiques et l'influence de la colle utilisée pour l'assemblage des différentes couches.

La **troisième contribution** de cette thèse est le développement de deux éléments finis d'interface pour la modélisation de fines couches viscoélastiques (chapitre 6). Ces éléments sont fondés sur la représentation de la couche viscoélastique par une surface d'interface entre deux parties élastiques de la structure à amortir. Ils permettent ainsi de palier aux problèmes liés à une représentation tridimensionnelle de la couche amortissante : mauvais conditionnement des matrices de masse et de raideur dû à de trop grands rapports de forme des éléments finis, modèle de très grande taille induite par une discrétisation fine de la couche viscoélastique. Les éléments d'interface développés présentent également un intérêt particulier dans le cadre d'études paramétriques. En effet, de part leur construction, un changement de l'épaisseur de couche viscoélastique ne nécessite pas de remaillage de la structure (et donc pas de recalcul des matrices de masse et de raideur), et un changement de position de la couche viscoélastique sur une surface prédéfinie ne requiert qu'une mise à jour locale des matrices de masse et de raideur. Le gain en temps de calcul associé à l'utilisation de ces éléments, en combinaison d'autres méthodes de réduction, a été mis en évidence dans le chapitre 9. Ces résultats ont été présentés dans plusieurs conférences nationales et internationales [153, 155, 156].

La **quatrième contribution** de cette thèse concerne le travail de synthèse réalisé sur les méthodes de réduction de modèle adaptées au calcul de la réponse fréquentielle de structures fortement amorties par des matériaux viscoélastiques. Le chapitre 7 passe en revue plusieurs méthodes de réduction par approches modales visant à réduire la taille du système à résoudre par projection sur une base de modes tronquée. On montre que ces méthodes permettent de prendre en compte la dépendance fréquentielle des propriétés mécaniques des matériaux viscoélastiques de trois manières différentes : soit en cherchant

une approximation des modes complexes de la structure amortie, soit en appliquant une approche multi-modèles, soit en enrichissant la base de termes correctifs. L'application de méthodes de synthèse modale utilisant une approche multi-modèles à des structures amorties par des matériaux viscoélastiques a été présentée dans deux conférences internationales [160, 161]. Les méthodes de réduction par approches modales présentent cependant deux limitations principales : le nombre de modes à considérer dans la base est conditionné par la fréquence maximale d'intérêt, et la taille de la base augmente avec la quantité d'amortissement introduite dans la structure via le traitement viscoélastique. Le chapitre 8 présente alors une méthode de reconstruction de la réponse fréquentielle par approximations de Padé, qui constitue une alternative aux méthodes de réduction par approches modales. En effet, pour la méthode de réduction par approximants de Padé, le temps de calcul est directement lié à la bande de fréquence étudiée et l'efficacité de cette méthode est améliorée lorsque la réponse est très amortie.

Enfin, la **cinquième et dernière contribution** de ce travail concerne l'opérateur de masse ajoutée semi-analytique développé pour prendre en compte les effets inertiels d'un fluide incompressible sur la dynamique d'une structure de forme circulaire munie de matériaux viscoélastiques. Le calcul de cet opérateur est basé sur la solution analytique existant pour un anneau homogène couplé à des fluides interne et externe (chapitre 9). Cet opérateur de masse ajoutée permet de traiter des cas génériques avec applications industrielles et peut également être utilisé pour la validation d'autres méthodes de couplage fluide/structure. Les développements réalisés ont été présentés dans deux conférences [158, 161], et ont été publiés dans un journal à comité de lecture international [159].

**Perspectives.** De nombreuses perspectives sont envisageables pour la suite des travaux de thèse, comme par exemple :

- Tout d'abord, une validation plus poussée de la méthode de recalage, développée pour l'obtention de courbes maîtresses en accord avec le principe de causalité, est souhaitable. Pour cela, la démarche de validation appliquée dans le chapitre 2 sur le Deltane 350 est à répéter sur un large panel de familles d'élastomères. De plus, une comparaison des courbes maîtresses obtenues par cette méthode sont à comparer

avec les courbes maîtresses obtenues par d'autres méthodes de mesure ne nécessitant pas l'application du principe de superposition temps/température. D'autres essais du module de compressibilité, réalisés sur un Kmètre, en développement à DCNS, sont prévus.

- L'étude comparative entre expériences et simulations, réalisée sur des structures sandwich, a permis de déterminer plusieurs facteurs susceptibles d'être à l'origine des écarts observés. Une autre campagne d'essais est à envisager pour quantifier l'influence de ces facteurs sur les résultats. Par exemple, pour étudier l'influence du collage sur la dynamique de la structure, les essais réalisés sur des structures assemblées par différents procédés de collage peuvent être accompagnés d'une caractérisation des propriétés mécaniques des colles testées, ainsi que d'une comparaison à un essai pour lequel l'élastomère est adhésivé à chaud. En parallèle, la prise en compte d'aspects stochastiques dans le modèle éléments finis permettrait de gérer les incertitudes de mesure des propriétés des matériaux viscoélastiques.
- Une étude plus précise du domaine de validité des éléments d'interface, en fonction des dimensions et de la courbure de la structure, est à réaliser. Une autre perspective concernant les éléments d'interface est l'utilisation de méthodes X-FEM pour éviter d'avoir à définir la surface, nécessaire à la construction des éléments d'interface, dès le maillage de la structure élastique.
- Les effets inertiels et radiatifs d'un fluide compressible peuvent être pris en compte dans l'opérateur de masse ajoutée développé. La matrice de masse ajoutée devient alors complexe et dépendante de la fréquence. Il reste alors à déterminer s'il est possible d'appliquer les méthodes de réduction par approches modales, décrites dans le chapitre 7, pour prendre en compte la dépendance fréquentielle de la matrice de masse ajoutée de la même manière que la dépendance fréquentielle du module complexe viscoélastique.

D'autres perspectives à plus longs termes sont envisageables pour se rapprocher des applications industrielles et pour traiter le couplage fluide/structure dans des cas tridimensionnels.

# Bibliographie

- [1] 01dB-METRAVIB. *Dynatest User Manual DYNATEST.06/NUT/002/B*, Version 6.70. 37, 51
- [2] 3M. Scotch-Weld DP 490 - Colle structurale pour pistolet E.P.X, 1999. 126, 140
- [3] 3M. Fiche technique 3M 9040 - Ruban double face d'utilisation générale, 2010. 127
- [4] ALLEMANG, R. The modal assurance criterion (MAC) : twenty years of use and abuse. In *Proceedings of the 20th International Modal Analysis Conference (2002)*. 131
- [5] ALLIX, O., AND LADEVÈZE, P. Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination. *Composite Structures 22* (1992), 235–242. 148
- [6] ALVELID, M., AND ENELUND, M. Modelling of constrained thin rubber layer with emphasis on damping. *Journal of Sound and Vibration 300*, 3 (2007), 662–675. 108
- [7] APRESYAN, L. Padé approximants (review). *Radiophysics and Quantum Electronics 22*, 6 (1979), 449–466. 189
- [8] ASTM INTERNATIONAL. ASTM E756-05 - standard test method for measuring vibration-damping properties of materials, 2010. 35, 107
- [9] AUDOLY, C., RENOU, Y., AND PRISER, M. Matériaux acoustiques pour la furtivité. *Research - Les avancées scientifiques et technologiques de DCNS 1* (2013), 52–53. 17
- [10] AVERY, P., FARHAT, C., AND REESE, G. Fast frequency sweep computations using a multi-point padé-based reconstruction method and an efficient iterative solver.

- International Journal of Numerical Methods in Engineering* 69 (2007), 2848–2875.  
192, 193, 196
- [11] BACKSTRÖM, D. *Vibration of sandwich beams*. PhD thesis, KTH Stockholm, 2006.  
35, 106
- [12] BAGLEY, R. L., AND TORVIK, P. J. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Rheology* 27, 3 (1983), 201–210. 84
- [13] BAKER, G. J., AND GRAVES-MORIS, P. *Padé approximants*. Cambridge University Press, 1996, ch. 1, pp. 1–8. 189, 190
- [14] BAKER, G. J., AND GRAVES-MORIS, P. *Padé approximants*. Cambridge University Press, 1996, ch. 7, pp. 335–362. 193
- [15] BALMÈS, E. Parametric families of reduced finite element models. Theory and applications. *Mechanical Systems and Signals Processing* 10, 4 (1996), 381–394. 175
- [16] BALMÈS, E. Superelements representation of a model with frequency dependent properties. In *Proceedings of the 21st International Seminar on Modal Analysis* (1996). 175
- [17] BALMÈS, E., AND BOBILLOT, A. Analysis and design tools for structures damped by viscoelastic materials. In *Proceedings of the 20th International Modal Analysis Conference* (2002). 177
- [18] BANKS, H. T., HU, S., KENZ, Z. R., KRUSE, C., SHAW, S., WHITEMAN, J. R., BREWIN, M. P., GREENWALD, S. E., AND BIRCH, M. J. Material parameter estimation and hypothesis testing on a 1D viscoelastic stenosis model : methodology. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems* 21, 1 (2013), 25–57. 77
- [19] BEN SMIDA, B., MAJED, R., BOUHADDI, N., AND OUISSE, M. Investigations for a model reduction technique of fluid-structure coupled systems. *Journal of Mechanical Engineering Science* 226 (2012), 42–54. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineering. 179

- [20] BILASSE, M., DAYA, E., AND AZRAR, L. Linear and nonlinear vibrations analysis of viscoelastic sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration* 329 (2010), 4950–4969. 184
- [21] BOBILLOT, A. *Méthodes de réduction pour le recalage. Application au cas d’Ariane 5*. PhD thesis, Ecole Centrale de Paris, 2002. 177, 179
- [22] BODY, C., REYNE, G., AND MEUNIER, G. Nonlinear finite element modelling of magneto-mechanical phenomenon on giant magnetostrictive thin films. *IEEE Transactions on Magnetics* 33 (1997), 1620–1623. 148
- [23] BOOIJ, H. C., AND THOONE, G. P. J. M. Generalization of Kramers-Kronig transforms and some approximations of relations between viscoelastic quantities. *Rheologica Acta* 21 (1982), 15–24. 52, 54, 74
- [24] BOSSEMEYER, H. G. Evaluation technique for dynamic moduli. *Mechanics of Time-Dependent Materials* 5 (2001), 273–291. 50
- [25] BOWER, A. *Applied Mechanics of Solids*. CRC Press, 2010, ch. 8, pp. 530–543. 113
- [26] BUECHE, F. The viscoelastic properties of plastics. *Journal of Chemical Physics* 22 (1954), 603–609. 50
- [27] CARACCILO, R., GASPARETTO, A., AND GIOVAGNONI, M. Applications of causality check and of the reduced variables method for experimental determination of Young’s modulus of a viscoelastic material. *Mechanics of Materials* 33 (2001), 693–703. 52, 54
- [28] CARRERA, E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells. *Applied Mechanical Review* 56, 3 (2003), 287–308. 107
- [29] CHADLI, M. *Stabilité et commande de systèmes décrits par des structures multi-modèles*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2002. 175
- [30] CHAILLEUX, E., RAMOND, G., SUCH, C., AND DE LA ROCHE, C. A mathematical-based master-curve construction method applied to complex modulus of bituminous materials. *Road Materials and Pavement Design* 7 (2006), 75–92. 52

- [31] CHAZOT, J.-D., NENNIG, B., AND CHETTAH, A. Harmonic response computation of viscoelastic multilayered structures using a ZPST shell element. *Computers and Structures* 89, 23-24 (2011), 2522–2530. 107, 193
- [32] CHAZOT, J.-D., ZHANG, E., AND ANTONI, J. Acoustical and mechanical characterization of poroelastic materials using a bayesian approach. *Journal of the Acoustical Society of America* 131, 6 (2012), 4584–4595. 146
- [33] CHOI, A. P. C. *Estimation of Young's modulus and Poisson's ratio of soft tissue using indentation*. PhD thesis, Hong Kong Polytechnic University, 2008. 28
- [34] CHRISTENSEN, R. M. *Theory of viscoelasticity*. Dover Publications, Inc., 1982. 30, 35, 36
- [35] CLOUTIER, D., AVITABILE, P., BONO, R., AND PERES, M. Shaker/stinger effects on measured frequency response functions. In *Proceedings of the 27th International Modal Analysis Conference* (2009). 122
- [36] CORN, S., IENNY, P., DUPUY, J., AND DARIDON, L. Identification de propriétés viscoélastiques d'un PMMA par analyse vibratoire : comparaison entre différentes méthodes expérimentales. In *19ème Congrès Français de Mécanique, Marseilles* (2009). 36, 51
- [37] COSSON, P. *Contribution à la modélisation du comportement mécanique des solides viscoélastiques par des opérateurs différentiels d'ordre non entier*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 1995. 86
- [38] CUGNONI, J. *Identification par recalage modal et fréquentiel de propriétés constitutives de coques en matériaux composites*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2005. 35
- [39] DAYA, E., AND POTIER-FERRY, M. A numerical method for nonlinear eigenvalue problems application to vibrations of viscoelastic structures. *Computers and Structures* 79 (2001), 533–541. 184

- [40] DE GENNARO, V. *Etude du comportement mécanique des interfaces sol/structure. Application à l'analyse des pieux*. PhD thesis, Ecole National des Ponts et Chaussées, Paris, 1999. 148
- [41] DE VISSCHER, J., SOL, H., AND DE WILDE, W. P. Identification of the damping properties of orthotropic composite materials using a mixed numerical experimental method. *Applied Composite Materials* 4 (1997), 13–33. 33
- [42] DEALY, J., AND PLAZEK, D. Time-temperature superposition - a users guide. *Rheology Bulletin* 78 (2009), 16–31. 47, 50
- [43] DEALY, J., AND WISSBRUN, K. D. *Melt rheology and its role in plastics processing : theory and applications*. Van Nostrand Reinhold (New-York), 1990. 50
- [44] DENG, S., HOU, M., AND YE, L. Temperature-dependent elastic moduli of epoxies measured by DMA and their correlations to mechanical testing data. *Polymer Testing* 26 (2007), 803–813. 36
- [45] DENNIS, J. J. *Non-linear least squares - State of the art in numerical analysis*. Academic Press, 1977. 58
- [46] DESAI, C., ZAMAN, M., LIGHTNER, L., AND SIRIWARDANE, H. Thin-layer element for interfaces and joints. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 8, 1 (1984), 19–43. 148
- [47] DET NORSKE VERITAS. DNV 51.1 - ice strengthening of propulsion machinery (Classification Notes), 2011. 108
- [48] DEÜ, J.-F., AND MATIGNON, D. Simulation of fractionally damped mechanical systems by means of a Newmark-diffusive scheme. *Computers and Mathematics with Application* 59 (2010), 1745–1753. 98
- [49] DITARANTO, R. Theory of vibratory bending for elastic and viscoelastic layered finite length beams. *Journal of Applied Mechanics* 87 (1965), 881–886. 106

- [50] DUCARNE, J. *Modélisation et optimisation de dispositifs non-linéaires d'amortissement de structures par systèmes piézoélectriques commutés*. PhD thesis, Conservatoire national des arts et métiers, Paris, 2009. 133
- [51] DUPUY, J., CORN, S., IENNY, P., AND DARIDON, L. Comparaison de méthodes dynamiques d'analyse du comportement mécanique de matériaux. In *18ème Congrès Français de Mécanique, Grenoble (2007)*. 35
- [52] EMRI, I. Rheology of solid polymers. *Rheology Reviews 3* (2005), 49–100. 24, 47
- [53] ENELUND, M., AND OLSSON, P. Damping described by fading memory - analysis and application to fractional derivative models. *International Journal of Solids and Structures 36* (1999), 939–970. 52, 53
- [54] EWINS, D. J. *Modal testing - Theory and practice*. Mechanical engineering research studies, 1984, ch. 3, pp. 158–168. 33
- [55] FERRY, J. D. *Viscoelastic properties of polymers*. John Wiley & Sons, 1980. 30, 36, 47, 48, 50, 51, 62, 65
- [56] FERRY, J. D., LANDEL, R. F., AND WILLIAMS, M. L. Extensions to the rouse theory of viscoelastic properties to undiluted linear polymers. *Journal of Applied Physics 26*, 4 (1955), 359–362. 84
- [57] FOWLER, B., AND ROGERS, L. A new approach to temperature shift functions in modeling complex modulus damping data. In *Proceedings of the 75th Shock and Vibration Symposium* (2004). 50, 51, 75
- [58] FOWLER, B., AND ROGERS, L. A new approach to the vertical shift of complex modulus data for damping polymers. In *Proceedings of the 77th Shock and Vibration Symposium* (2006). 57
- [59] GALLIMORE, C. A. Passive viscoelastic constrained layer damping application for a small aircraft landing gear system. Master's thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2008. 35, 144

- [60] GALUCIO, A. C., DEÜ, J.-F., AND OHAYON, R. Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators. *Computational Mechanics* 33 (2004), 282–291. 88, 98, 212
- [61] GERGESOVA, M., ZUPANCIC, B., SAPRUNOV, I., AND EMRI, I. The closed form t-T-P shifting (CFS) algorithm. *Journal of Rheology* 55 (2011), 1–16. 51
- [62] GERMANT, A. On fractional differentials. *Philosophical Magazine* 25 (1938), 540–549. 84
- [63] GHINET, S. *Statistical energy analysis of the transmission loss of sandwich and laminae composite structures*. PhD thesis, Université de Sherbrooke, 2005. 106
- [64] GIAMBANCO, G., SCIMENI, G. F., AND SPADA, A. The interphase finite element. *Computational Mechanics* 50 (2012), 353–366. 148
- [65] GOLLA, D. F., AND HUGHES, P. C. Dynamics of viscoelastic structures - A time-domain finite formulation. *Journal of Applied Mechanics* 52 (1985), 897–906. 81
- [66] GOODMAN, R., TAYLOR, R., AND BREKKE, T. A model for the mechanics of jointed rock. *Journal of Soil Mechanics and Foundation Divisions* 99 (1968), 637–659. 149
- [67] GREASSLEY, W. Effect of long branches on the temperature dependence of viscoelastic properties in polymer melts. *Macromolecules* 15 (1982), 1164–1167. 24
- [68] GREENAWALD, E., BAILEY, W., BELLINGER, E., CAMPBELL, K., HAM, Y., HU, H., LEE, K., LEVENBERRY, L., MOTT, P., SCHRADER, H., SMALLHORN, J., AND WOO, H. Synthesis and characterization of advanced materials. Tech. Rep. GC-2801, Geo-Centers, Inc., 2001. 101
- [69] GUEDES, R. M. A viscoelastic model for a biomedical ultra-high molecular weight polyethylene using the time-temperature superposition principle. *Polymer testing* 30 (2011), 294–302. 50, 51, 57, 75
- [70] GUILLOT, F. M., AND TRIVETT, D. H. Complete elastic characterization of viscoelastic materials by dynamic measurements of the complex bulk and Young’s moduli

- as a function of temperature and hydrostatic pressure. *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011), 3334–3351. 27, 65
- [71] HAN, C. D., AND KIM, J. K. On the use of time-temperature superposition in multicomponent/multiphase polymer systems. *Polymer* 34 (1993), 2533–2539. 48
- [72] HATZIKIRIAKOS, S. Long chain branching and polydiversity effects on the rheological properties of polyethylenes. *Polymer Engineering and Science* 40, 11 (2000), 2279–2287. 24
- [73] HAVRILIAK, S., AND NEGAMI, S. A complex plane representation of dielectric and mechanical relaxation processes in some polymers. *Polymer* 8 (1967), 161–210. 84
- [74] HETMANIUK, U., TEZAUER, R., AND FARHAT, C. Review and assessment of interpolatory model order reduction methods for frequency response structural dynamics and acoustics problems. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 90 (2012), 1636–1662. 193, 196
- [75] HETMANIUK, U., TEZAUER, R., AND FARHAT, C. An adaptative scheme for a class of interpolatory model reduction methods for frequency response problems. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 93 (2013), 1109–1124. 196
- [76] HEYLEN, W., AND LAMMENS, S. FRAC : a consistent way of comparing frequency response functions. In *Proceedings of the 3rd International Conference on Identification in Engineering* (1996). 131
- [77] HOHBERG, J.-M. *A joint element for the nonlinear dynamic analysis of arch dams*. PhD thesis, ETH Zürich, 1992. 149, 152
- [78] HOSTEN, B., AND CASTAINGS, M. Finite elements methods for modeling the guided waves propagation in structures with weak interfaces. *Journal of the Acoustical Society of America* 117, 3 (2005), 1108–1113. 152
- [79] HOWARD, C. Recent developments in submarine vibration isolation and noise control. In *Proceedings of the 1st Submarine Science Technology and Engineering Conference* (2011). 17

- [80] HU, B.-G., DOKAISHI, M., AND MANSOUR, W. A modified MSE method for viscoelastic systems : a weighted stiffness matrix approach. *Transactions of the ASME* 117 (1995), 226–231. 174
- [81] HUGHES, T. *The finite element method*. Dover Publications, Inc, 1987. 111
- [82] JOHNSON, C., KIENHOLZ, D., AND ROGERS, L. Finite element prediction of damping in beams with constrained viscoelastic layers. *Shock and Vibration Bulletin* 1 (1980), 71–81. 107, 172
- [83] JONES PARRY, E., AND TABOR, D. Pressure dependence of the shear modulus of various polymers. *Journal of Polymer Science* 9 (1974), 289–292. 24
- [84] KALIAKIN, V., AND LI, J. Insight into deficiencies associated with commonly used zero-thickness interface elements. *Computers and Geotechnics* 17 (1995), 225–252. 149
- [85] KALIAPPAN, S. K. *Characterization of physical properties of polymers using AFM force/distance curves*. PhD thesis, Universiyät Siegen, 2007. 43
- [86] KALISKE, M., AND ROTHERT, H. Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains. *Computational Mechanics* 19 (1997), 228–239. 109
- [87] KANT, T., AND SWAMINATHAN, K. Estimation of transverse interlaminar stresses in laminated composites - A selective review and survey of current developments. *Composite Structures* 49, 1 (2000), 65–75. 107
- [88] KERGOULAY, G. *Mesure et prédiction vibro-acoustique de structures viscoélastiques. Application à une enceinte acoustique*. PhD thesis, Ecole Centrale de Paris, 2004. 24
- [89] KERWIN, E. M. Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer. *The Journal of Acoustical Society of America* 31, 7 (1959), 952–957. 106
- [90] KRAMERS, H. La diffusion de la lumière par les atomes. In *Atti del Congresso Internazionale dei Fisici* (1927). 53

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [91] KRONIG, R. On the theory of dispersion of x-rays. *Journal of the Optical Society of America* 12 (1926), 547–557. 53
- [92] LA MON, K. Removal of singularities from Taylor series. Tech. Rep. LBL-27689, Lawrence Berkeley Laboratory, 1989. 188
- [93] LAKES, R. Viscoelastic measurement techniques. *Review of scientific instruments* 75 (2004), 797–810. 33, 35
- [94] LAU, J. Automatic modal analysis : myth or reality? In *LMS Conference Europe* (2007). 134
- [95] LEE, C., AND LIU, D. An interlaminar stress continuity theory for laminated composite analysis. *Computers and Structures* 42, 1 (1992), 69–78. 107
- [96] LEISSA, A. *Vibrations of shells*. Acoustical Society of America, 1993. 216
- [97] LEKHNITSKII, S. Strength calculation of composite beams. *Vestnik inzhen i teknikov* 9 (1935), 137–148. 107
- [98] LESIEUTRE, G. A., AND BIANCHINI, E. Time domain modeling of linear viscoelasticity using anelastic displacement fields. *Journal of Vibration and Acoustics* 117, 4 (1995), 424–430. 82
- [99] LESIEUTRE, G. A., BIANCHINI, E., AND MAIANI, A. Finite element modeling of one-dimensional viscoelastic structures using anelastic displacement fields. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* 19, 3 (1996), 520–527. 82
- [100] LI, L., GOMES, J., BROWN, G., UTTAMCHANDANI, D., PAN, W., WEILANG, D., BEBGIE, M., LOWRIE, C., AND DESMULLIEZ, M. P. Y. Simultaneous determination of the Young’s modulus and Poisson’s ratio in micro-nano materials. *Journal of Micromechanics and Microengineering* 19 (2009), 125027(9pp). 28
- [101] LIN, R., AND LIM, M. Complex eigensensitivity-based characterization of structures with viscoelastic damping. *Journal of the Acoustical Society of America* 100, 5 (1996), 3182–3191. 173

- [102] LION, A. On the thermodynamics of fractional damping elements. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 9 (1997), 83–96. 86
- [103] MA, B.-A., AND HE, J.-F. Finite element analysis of viscoelastically damped sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration* 52 (1992), 107–123. 184
- [104] MACNEAL, R. A hybrid method of component mode synthesis. *Computers and Structures* 1 (1971), 581–601. 204
- [105] MACNEAL, R. *Finite elements : their design and performance*. Marcel Dekker, Inc., 1994, ch. 6, pp. 203–260. 113
- [106] MADIGOSKY, W. M., LEE, G. F., AND NIEMIEC, J. M. A method for modeling polymer viscoelastic data and the temperature shift function. *Journal of the Acoustical Society of America* 119 (2006), 3760–3765. 50, 51, 75
- [107] MAKRIS, N., AND KAMPAS, G. Analyticity and causality of the three-parameter rheological models. *Rheologica Acta* 48 (2009), 815–825. 86
- [108] MANDEL, J. *Cours de mécanique des milieux continus*. Ed., 1966. 86
- [109] MAYER, M., AND GAUL, L. Segment-to-segment contacts elements for modelling joint interfaces in finite element analysis. *Mechanical Systems and Signals Processing* 21 (2007), 724–734. 149
- [110] MAZURIN, O. V. Problems of compatibility of the values of glass transition temperatures published in the world literature. *Glass Physics and Chemistry* 33, 1 (2007), 22–36. 45
- [111] MCTAVISH, D. J., AND HUGHES, P. C. Modeling of linear viscoelastic space structures. *Journal of Vibration and Acoustics* 115, 1 (1993), 103–110. 81
- [112] MEAD, D., AND MARKUS, S. The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration* 10 (1969), 163–175. 106

- [113] MERLETTE, N., GERMÈS, S., VAN HERPE, F., JÉZÉQUEL, L., AND AUBRY, D. The use of suitable modal bases for dynamic predictions of structures containing high damping materials. In *Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering* (2004). 174
- [114] MERLETTE, N., PAGNACCO, E., AND LADIER, A. Recent developments in Code\_Aster to compute FRF and modes of VEM with frequency dependent properties. In *Proceedings of the Acoustics 2012 Nantes Conference* (2012). 174
- [115] MOONAN, W., AND TSCHOEGL, N. Effect of pressure on the mechanical properties of polymers. Expansivity and compressibility measurements. *Macromolecules* 16 (1983), 55–59. 24
- [116] MOREIRA, R., AND RODRIGUES, J. Partial constrained viscoelastic damping treatments of structures : a modal strain energy approach. *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 6, 3 (2006), 397–411. 172
- [117] MSC NASTRAN. *Reference Manual*, 2004. 77
- [118] NAKRA, B. Vibration control in machines and structures using viscoelastic damping. *Journal of Sound and Vibration* 211, 3 (1998), 449–465. 24
- [119] NASHIF, A. D., AND JONES, D. I. G. *Vibration damping*. Wiley-Interscience, 1985, ch. 6, pp. 203–212. 33, 35
- [120] NASHIF, A. D., AND JONES, D. I. G. *Vibration damping*. Wiley-Interscience, 1985, ch. 6, pp. 303–312. 107
- [121] NG, P., PYRAH, I., AND ANDERSON, W. Assessment of three interface elements and modification of the interface element in CRISP90. *Computers and Geotechnics* 21, 4 (1997), 315–339. 148
- [122] NI, J. Préparation des échantillons pour les mesures DMA en cisaillement. *Analyse thermique Usercom* 34 (2011), 15–19. 33, 37

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [123] NOGAMI, T., AND KAZAMA, M. Thin layer element method for dynamic soil-structure interaction analysis of axi-symmetric structure in submerged soil. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 16 (1997), 337–351. 148
- [124] NORMES INTERNATIONALES ISO. ISO 6721-6 - plastiques - Détermination des propriétés mécaniques dynamiques. Partie 6 : Vibration en cisaillement - Méthode hors résonance, 1996. 39
- [125] OLARD, F., DI BENEDETTO, H., DONY, A., AND VANISCOTE, J.-C. Properties of bituminous mixtures at low temperatures and relations with binder characteristics. *Materials and Structures* 38 (2005), 121–126. 62, 72
- [126] PANDÉ, G., AND SHARMA, K. On joint/interface elements and associated problems of ill-conditioning. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 3, 3 (1979), 293–300. 148, 151
- [127] PARK, H., DEALY, J., AND MÜNSTEDT, H. Influence of long-chain branching on time-pressure and time-temperature shift factors for polystyrene and polyethylene. *Rheologica Acta* 46 (2006), 153–159. 24
- [128] PARNEIX, P., AND LUCAS, D. Les structures composites en construction navale militaire. Tech. Rep. AM5665, Les techniques de l'ingénieur, 2010. 17
- [129] PAROT, J.-M., AND DUPERRAY, B. Applications of exact causality relationships to materials dynamic analysis. *Mechanics of Materials* 39 (2007), 419–433. 54, 74
- [130] PAUL, A., SCHMIDT, A., AND WOLF, E. Acoustically optimized propeller made from composite materials. *ThyssenKrupp techforum* 1 (2011), 58–63. 17, 101
- [131] PAULSTRA HUTCHINSON. [http ://www.paulstra-vibrachoc.com/paulstra-vibrachoc.html](http://www.paulstra-vibrachoc.com/paulstra-vibrachoc.html) (consulté le 27 août 2013). 102
- [132] PAULSTRA HUTCHINSON. Fiche technique Deltane 350, 2009. 24, 76
- [133] PEYSER, P. *Glass transition temperatures of polymers, in Polymer Handbook*. John Wiley & Sons, 1989, ch. 6, pp. 209–277. 45

- [134] PIRANDA, J. *Manuel d'utilisation du logiciel MODAN*. Laboratoire de Mécanique Appliquée R. Chaléat, Université de Franche-Comté, Besançon, 1994. 35, 134
- [135] PLAZEK, D. Temperature dependence of the viscoelastic behavior of polystyrene. *Journal of Physical Chemistry* 69 (1965), 3480–3487. 51
- [136] PLOUIN, A.-S., AND BALMÈS, E. Pseudo-modal representations of large models with viscoelastic behavior. In *Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference* (1998). 176
- [137] PLOUIN, A.-S., AND BALMÈS, E. Steel-viscoelastic-steel sandwich shells computational methods and experimental validation. In *Proceedings of the 18th International Modal Analysis Conference* (2000). 107, 172, 176
- [138] PRITZ, T. Dynamic Young's modulus and loss factor of floor covering materials. *Applied Acoustics* 49, 2 (1996), 179–190. 33
- [139] PRITZ, T. Verification of local Kramers-Kronig relations for complex modulus by means of fractional derivative model. *Journal of Sound and Vibration* 228 (1999), 1145–1165. 51
- [140] PRITZ, T. Measurement methods of complex Poisson's ratio of viscoelastic materials. *Applied Acoustics* 60, 3 (2000), 279–292. 27
- [141] QVALE, D., AND RAVI-CHANDAR, K. Viscoelastic characterization of polymers under multiaxial compression. *Mechanics of Time-Dependent Materials* 8 (2004), 193–214. 28
- [142] RAMIER, J. *Comportement mécanique d'élastomères chargés, influence de l'adhésion charge - polymère, influence de la morphologie*. PhD thesis, INSA Lyon, 2004. 62
- [143] RAO, D. K. Frequency and loss factors of sandwich beams under various boundary conditions. *Journal of Mechanical Engineering Science* 20, 5 (1978), 271–282. 106
- [144] RAO, M. Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes. *Journal of Sound and Vibration* 262 (2003), 457–474. 24

- [145] RAY, P. La mesure directe du module de compressibilité dynamique : présentation du Kmètre et de ses difficultés expérimentales. *Acta Acoustica* 82 (1996), 431–441. 43
- [146] REDDY, J., AND ARCINIEGA, R. Shear deformation plate and shell theories : from stavsky to present. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 11, 6 (2004), 535–582. 107
- [147] REDDY, J., AND LIU, C. A higher order shear deformation theory of laminated elastic shells. *International Journal of Engineering Science* 23, 3 (1985), 319–330. 107
- [148] RENAUD, F., CHEVALLIER, G., DION, J.-L., AND LEMAIRE, R. Viscoelasticity measurements and identification of viscoelastic parametric models. In *Proceedings of the ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference* (2011). 75
- [149] RENAUD, F., DION, J.-L., CHEVALLIER, G., TAWFIQ, I., AND LEMAIRE, R. A new identification method of viscoelastic behavior : Application for the generalized maxwell model. *Mechanical Systems and Signals Processing* 25, 3 (2010), 991–1010. 87
- [150] RESH, J. A., STADLER, F. J., KASCHTA, J., AND MÜNSTEDT, H. Temperature dependence of the linear steady-state shear compliance of linear and long-chain branched polyethylenes. *Macromolecules* 42 (2009), 5676–5683. 24, 50, 51
- [151] ROSS, D., UNGAR, E. E., AND KERWIN, E. M. *Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminae*. American Society of Mechanical Engineering, 1959, ch. Section 3, pp. 49–87. 35, 106
- [152] ROUILLARD, F., AND HEUILLET, P. Caractérisation du comportement viscoélastique d'un élastomère en compression hydrostatique. Tech. Rep. 371780, LRCCP, 2012. 41, 42

- [153] ROULEAU, L., DEÜ, J.-F., AND LEGAY, A. Interface finite elements for parametric studies of structures with thin constrained layer damping. In *Proceedings of the 2nd ECCOMAS Young Investigators Conference (YIC 2013)* (2013). 230
- [154] ROULEAU, L., DEÜ, J.-F., LEGAY, A., AND LE LAY, F. Application of Kramers-Kronig relations to time-temperature superposition for viscoelastic materials. *Mechanics of Materials* 65 (2013), 66–75. 229
- [155] ROULEAU, L., DEÜ, J.-F., LEGAY, A., AND LE LAY, F. Caractérisation et modélisation d’interfaces viscoélastiques. In *Actes du 11ème Colloque National en Calcul des Structures (CSMA 2013)* (2013). 229, 230
- [156] ROULEAU, L., DEÜ, J.-F., LEGAY, A., AND LE LAY, F. Characterization and modeling of viscoelastic interfaces. In *Proceedings of the 12th International Conference on Computational Plasticity. Fundamentals and Applications (COMPLAS XII)* (2013). 229, 230
- [157] ROULEAU, L., DEÜ, J.-F., LEGAY, A., AND LE LAY, F. Dynamical mechanical characterization and modeling of viscoelastic materials in the frequency domain. In *Proceedings of EUROMECH Colloquium 550. Multiphysics of solid polymers : Experiments and modeling.* (2013). 229
- [158] ROULEAU, L., DEÜ, J.-F., LEGAY, A., AND SIGRIST, J.-F. Modélisation du comportement vibratoire et dissipatif de structures métalliques avec couches viscoélastiques couplées à des fluides interne et externe. In *Actes du 10ème Colloque National en Calcul des Structures (CSMA 2011)* (2011). 231
- [159] ROULEAU, L., DEÜ, J.-F., LEGAY, A., AND SIGRIST, J.-F. Vibro-acoustic study of a viscoelastic sandwich ring immersed in water. *Journal of Sound and Vibration* 331 (2012), 522–539. 231
- [160] ROULEAU, L., DEÜ, J.-F., LEGAY, A., SIGRIST, J.-F., LE LAY, F., AND MARIN-CURTOUD, P. A component mode synthesis approach for dynamic analysis of viscoelastically damped structures. In *Proceedings of the 10th World Congress on Computational Mechanics (WCCM 2012)* (2012). 229, 231

- [161] ROULEAU, L., DEÜ, J.-F., LEGAY, A., SIGRIST, J.-F., AND MARIN-CURTOUD, P. Reduced-order model for noise and vibration attenuation of water immersed viscoelastic sandwich structures. In *Proceedings of Acoustics 2012* (2012). 231
- [162] ROUSE, P. A theory of the linear viscoelastic properties of dilute solutions of coiling polymers. *Journal of Chemical Physics* 21 (1953), 1272–1280. 84
- [163] ROY, R., CRAIG, J., AND BAMPTON, M. Coupling of substructures for dynamic analysis. *AIAA Journal* 6 (1968), 1313–1319. 204
- [164] ROYSTON, T. J., DAI, Z., CHAUNALI, R., LIU, Y., PENG, Y., AND MAGIN, R. L. Estimating material viscoelastic properties based on surface wave measurements : a comparison of techniques and modeling assumptions. *Journal of the Acoustical Society of America* 130, 6 (2011), 4126–4138. 78
- [165] RUMPLER, R., DEÜ, J.-F., AND GÖRANSSON, P. A Padé approximants reconstruction scheme for fast resolution of structural-acoustic finite element models including porous materials. In *Proceedings of Noise and Vibration : Emerging Methods (NOVEM)* (2012). 193
- [166] RUMPLER, R., GÖRANSSON, P., AND DEÜ, J.-F. A finite element approach combining a reduced-order system Padé approximants, and an adaptative frequency windowing for fast multi-frequency solution of poro-acoustic problems. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 00 (2012), 1–26. submitted. 187, 192, 193
- [167] SAUVAGE, O., BALMÈS, E., LAGACHE, J., AND QUIQUE, F. Simulation des vibrations d’organes moteur complexes à amortissement non-standard par méthodes modales étendues. In *Actes du 19ème Congrès Français de Mécanique* (2009). 108
- [168] SCHELLEKENS, J., AND DE BORST, R. On the numerical integration of interface elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 36 (1993), 43–66. 149

- [169] SCHNEIDER, H. A., RUDOLF, B., KARLOU, K., AND CANTOW, H.-J. Pressure influence on the glass transition of polymers and polymer blends. *Polymer Bulletin* 32 (1994), 645–652. 69
- [170] SEGURADO, J., AND LLORCA, J. A three-dimensional interface finite element to simulate fracture in composites. *International Journal of Solids and Structures* 41 (2004), 2977–2993. 149, 152
- [171] SÉNÉCHAL, A. *Réduction de vibrations de structure complexe par shunts piézoélectriques. Application aux turbomachines*. PhD thesis, Conservatoire national des arts et métiers, Paris, 2011. 133
- [172] SHARMA, K., AND DESAI, C. Analysis and implementation of thin-layer element for interfaces and joints. *Journal of Engineering Mechanics* 118 (1992), 2442–2462. 148, 151
- [173] SHASKA, K., IBRAHIM, R. A., AND GIBSON, R. F. Influence of excitation amplitude on the characteristics of nonlinear butyl rubber isolators. *Nonlinear Dynamics* 47 (2007), 83–104. 24
- [174] SHER, B., AND MOREIRA, R. Dimensionless analysis of constrained damping treatments. *Composite Structures* 99 (2013), 241–254. 147, 160, 162, 206
- [175] SIHN, S., AND TSAI, S. W. Automated shift for time-temperature superposition. In *Proceedings of the 12th International Committee on Composite Materials* (1999). 51
- [176] SONI, M., AND BOGNER, F. Finite element vibration analysis of damped structures. *AIAA Journal* 20, 5 (1982), 700–707. 107
- [177] SUBRAMANIAN, S., SURAMPUDI, R., THOMSON, K. R., AND VALLURUPALLI, S. Optimization of damping treatments for structure borne noise reduction. In *Proceedings of the SAE 2003 Noise & Vibration Conference and Exhibition* (2003). 18
- [178] SULLIVAN, J. Creep and physical aging of composites. *Composite Science and Technology* 36 (1990), 207–232. 69

- [179] SULMONI, M., GMÜR, T., CUGNONI, J., AND MATTER, M. Modal validation of sandwich shell finite elements based on a  $p$ -order shear deformation theory including zigzag terms. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 75, 11 (2008), 1301–1319. 107
- [180] TAKAGI, T., AND SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 15, 1 (1985), 116–132. 175
- [181] TAVALLAEY, S. *Wave propagation in sandwich structures*. PhD thesis, KTH, Stockholm, 2001. 106
- [182] THOMAS, O., TOUZÉ, C., AND CHAIGNE, A. Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. Part II : experiments. *Journal of Sound and Vibration* 265 (2003), 1075–1101. 123, 125
- [183] TRAN, G., OUISSE, M., AND BOUHADDI, N. A robust component mode synthesis method for stochastic damped vibroacoustics. *Mechanical Systems and Signals Processing* 24 (2010), 164–181. 176
- [184] TRINDADE, M. Reduced-order finite element models of viscoelastically damped beams through internal variable projection. *Journal of Vibration and Acoustics* 128 (2006), 501–508. 210
- [185] TRINDADE, M., BENJEDDOU, A., AND OHAYON, R. Modeling of frequency-dependent viscoelastic materials for active-passive vibration damping. *Journal of Vibration and Acoustics* 122, 2 (2000), 169–174. 172, 179
- [186] TRINDADE, M., BENJEDDOU, A., AND OHAYON, R. Finite element modelling of hybrid active-passive vibrations damping of multi-layered piezoelectric sandwich beams – part I : formulation ; part II : system analysis. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 51 (2001), 835–864. 212
- [187] TSCHOEGL, N. *The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior*. Springer-Verlag, 1989. 30

- [188] TSCHOEGL, N., KNAUSS, W. G., AND EMRI, I. Poisson's ratio in linear viscoelasticity - a critical review. *Mechanics of Time-Dependent Materials* 6 (2002), 3–51. 28
- [189] VAN GURP, M., AND PALMEN, J. Time-temperature superposition for polymeric blends. *Rheology Bulletin* 67, 1 (1998), 5–8. 48
- [190] VAN KAMPEN, N., AND LURCAT, F. Causalité et relations de Kramers-Kronig. *Journal de Physique et le Radium* 22, 3 (1961), 179–191. 52
- [191] VASQUES, C., MOREIRA, R., AND RODRIGUES, J. Viscoelastic damping technologies - Part I : modeling and finite element implementation. *Journal of Advanced Research in Mechanical Engineering* 1, 2 (2010), 76–95. 172, 173, 183
- [192] WEICHERT, E. *Ueber elastische Nachwirkung*. PhD thesis, Königsberg Universität, 1889. 81
- [193] WILLIAMS, M. L., LANDEL, R. F., AND FERRY, J. D. The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids. *Journal of the American Chemical Society* 77 (1955), 3701–3707. 48
- [194] WOJTOWICKI, J.-L., JAOUEN, L., AND PANNETON, R. A new approach for the measurement of damping properties of materials using the Oberst beam. *Review of Scientific Instruments* 75, 8 (2004), 2569–2574. 35
- [195] YAN, M., AND DOWELL, E. Governing equations for vibrating constrained-layer damping sandwich plates and beams. *Journal of Applied Mechanics* 39, 4 (1972), 1041–1046. 106
- [196] ZHANG, E., CHAZOT, J.-D., ANTONI, J., AND HAMDI, M. Bayesian characterization of Young's modulus of viscoelastic materials in laminated structures. *Journal of Sound and Vibration* 332, 16 (2013), 3654–3666. 146
- [197] ZHANG, S., AND CHEN, H. A study on the damping characteristics of laminated composites with integral viscoelastic layers. *Composite Structures* 74, 1 (2006), 63–69. 172

- [198] ZIENKIEWICZ, O., AND TAYLOR, R. *The finite element method - Volume 1 : the basis*, 5th ed. Butterworth Heinemann, 2000. 111

## BIBLIOGRAPHIE

---

# Annexes



## Annexe A

# Identification des paramètres des modèles viscoélastiques

Dans cette annexe sont donnés les paramètres des modèles de Maxwell généralisé (tableau A.1), GHM (tableau A.2) et ADF (tableau A.3) identifiés à partir des courbes maîtresses du module de cisaillement du Deltane 350, en faisant varier le nombre de séries de 1 à 5.

TABLE A.1 – Paramètres du modèle de Maxwell généralisé identifiés pour le module de cisaillement du Deltane 350.

|          | $G_0$ (Pa)        | $\gamma_k$           | $\tau_k$ (s)         |
|----------|-------------------|----------------------|----------------------|
| 1 série  | $2.12 \cdot 10^6$ | $1.70 \cdot 10^1$    | $1.29 \cdot 10^{-4}$ |
| 2 séries | $1.76 \cdot 10^6$ | $4.75 \cdot 10^1$    | $2.25 \cdot 10^{-5}$ |
|          |                   | 2.77                 | $2.17 \cdot 10^{-3}$ |
| 3 séries | $1.58 \cdot 10^6$ | $1.37 \cdot 10^2$    | $2.61 \cdot 10^{-6}$ |
|          |                   | $1.41 \cdot 10^1$    | $1.49 \cdot 10^{-4}$ |
|          |                   | 1.38                 | $7.25 \cdot 10^{-3}$ |
| 4 séries | $1.48 \cdot 10^6$ | $2.01 \cdot 10^2$    | $7.59 \cdot 10^{-7}$ |
|          |                   | $4.21 \cdot 10^1$    | $2.40 \cdot 10^{-5}$ |
|          |                   | 4.92                 | $6.54 \cdot 10^{-4}$ |
|          |                   | $8.04 \cdot 10^{-1}$ | $1.90 \cdot 10^{-2}$ |
| 5 séries | $1.42 \cdot 10^6$ | $2.43 \cdot 10^2$    | $4.32 \cdot 10^{-7}$ |
|          |                   | $6.38 \cdot 10^1$    | $9.37 \cdot 10^{-6}$ |
|          |                   | $1.13 \cdot 10^1$    | $1.47 \cdot 10^{-4}$ |
|          |                   | 2.06                 | $2.17 \cdot 10^{-3}$ |
|          |                   | $5.40 \cdot 10^{-1}$ | $3.92 \cdot 10^{-2}$ |

TABLE A.2 – Paramètres du modèle GHM (Golla-Hughes-McTavish) identifiés pour le module de cisaillement du Deltane 350.

|          | $G_0$ (Pa)        | $\alpha_k$           | $\zeta_k$         | $\omega_k$        |
|----------|-------------------|----------------------|-------------------|-------------------|
| 1 série  | $2.12 \cdot 10^6$ | $1.70 \cdot 10^1$    | $1.32 \cdot 10^2$ | $2.05 \cdot 10^6$ |
| 2 séries | $1.95 \cdot 10^6$ | 4.14                 | $2.06 \cdot 10^3$ | $4.56 \cdot 10^6$ |
|          |                   | $8.02 \cdot 10^1$    | $4.63 \cdot 10^2$ | $1.10 \cdot 10^8$ |
| 3 séries | $1.80 \cdot 10^6$ | 1.82                 | $4.38 \cdot 10^3$ | $2.92 \cdot 10^6$ |
|          |                   | $1.75 \cdot 10^1$    | $6.15 \cdot 10^3$ | $1.51 \cdot 10^8$ |
|          |                   | $1.46 \cdot 10^2$    | $6.11 \cdot 10^2$ | $6.88 \cdot 10^8$ |
| 4 séries | $1.66 \cdot 10^6$ | $9.21 \cdot 10^{-1}$ | $9.12 \cdot 10^3$ | $1.98 \cdot 10^6$ |
|          |                   | 5.33                 | $1.10 \cdot 10^4$ | $5.03 \cdot 10^7$ |
|          |                   | $3.87 \cdot 10^1$    | $1.18 \cdot 10^3$ | $1.17 \cdot 10^8$ |
|          |                   | $1.89 \cdot 10^2$    | $2.70 \cdot 10^2$ | $6.93 \cdot 10^8$ |
| 5 séries | $1.54 \cdot 10^6$ | $5.81 \cdot 10^{-1}$ | $3.07 \cdot 10^4$ | $2.65 \cdot 10^6$ |
|          |                   | 2.30                 | $4.05 \cdot 10^4$ | $5.51 \cdot 10^7$ |
|          |                   | $1.18 \cdot 10^1$    | $1.70 \cdot 10^4$ | $2.98 \cdot 10^8$ |
|          |                   | $6.10 \cdot 10^1$    | $1.15 \cdot 10^3$ | $2.90 \cdot 10^8$ |
|          |                   | $2.23 \cdot 10^2$    | $2.55 \cdot 10^2$ | $1.42 \cdot 10^9$ |

TABLE A.3 – Paramètres du modèle ADF (Anelastic Displacement Field) identifiés pour le module de cisaillement du Deltane 350.

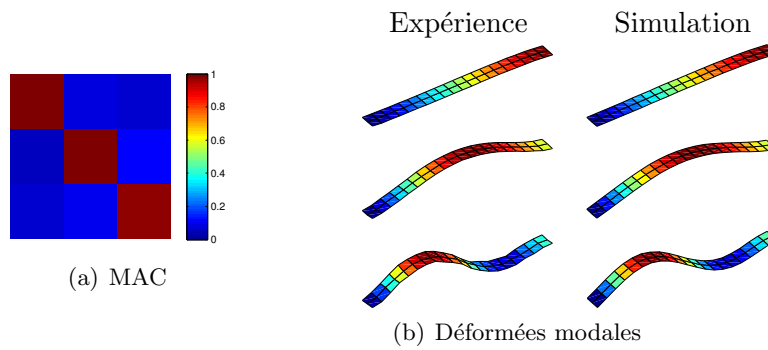
|          | $G_0$ (Pa)        | $\Delta_k$           | $\Omega_k$ (s)    |
|----------|-------------------|----------------------|-------------------|
| 1 série  | $2.12 \cdot 10^6$ | $1.71 \cdot 10^1$    | $7.79 \cdot 10^3$ |
| 2 séries | $1.95 \cdot 10^6$ | $8.02 \cdot 10^1$    | $1.19 \cdot 10^5$ |
|          |                   | 4.14                 | $1.10 \cdot 10^3$ |
| 3 séries | $1.80 \cdot 10^6$ | $1.46 \cdot 10^2$    | $5.64 \cdot 10^5$ |
|          |                   | $1.76 \cdot 10^1$    | $1.23 \cdot 10^4$ |
|          |                   | 1.82                 | $3.34 \cdot 10^2$ |
| 4 séries | $1.66 \cdot 10^6$ | $1.89 \cdot 10^2$    | $1.28 \cdot 10^6$ |
|          |                   | $3.87 \cdot 10^1$    | $4.94 \cdot 10^4$ |
|          |                   | 5.33                 | $2.29 \cdot 10^3$ |
|          |                   | $9.21 \cdot 10^{-1}$ | $1.09 \cdot 10^2$ |
| 5 séries | $1.54 \cdot 10^6$ | $2.23 \cdot 10^2$    | $2.24 \cdot 10^6$ |
|          |                   | $6.10 \cdot 10^1$    | $1.26 \cdot 10^5$ |
|          |                   | $1.18 \cdot 10^1$    | $8.76 \cdot 10^3$ |
|          |                   | 2.30                 | $6.80 \cdot 10^2$ |
|          |                   | $58.1 \cdot 10^{-1}$ | $4.30 \cdot 10^1$ |

---

## Annexe B

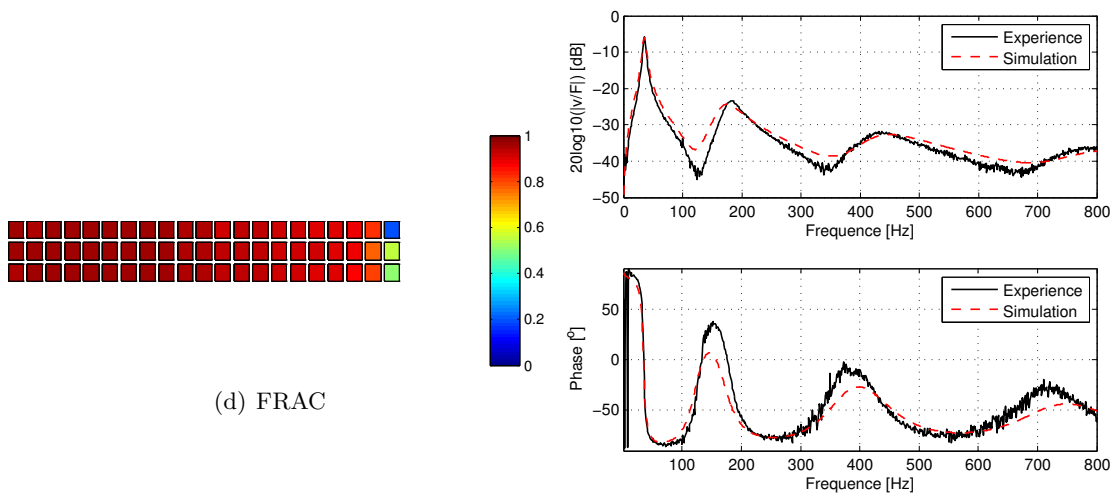
# Comparaisons calculs/essais

Cette annexe présente les résultats de la comparaison calcul/essai réalisée dans le chapitre 5 pour les essais 2 (Figure B.1), 3 (Figure B.2), 5 (Figure B.3), 6 (Figure B.4), 8 (Figure B.5), 9 (Figure B.6), 11 (Figure B.7) et 12 (Figure B.8).



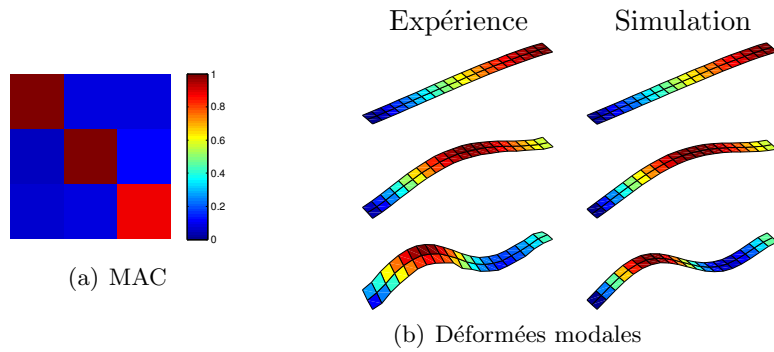
|        | Fréquence de résonance [Hz] |        |            | Taux d'amortissement [%] |       |            |
|--------|-----------------------------|--------|------------|--------------------------|-------|------------|
|        | Exp                         | Sim    | Erreur (%) | Exp                      | Sim   | Erreur (%) |
| Mode 1 | 35.38                       | 35.00  | 1.08       | 12.97                    | 18.23 | 40.51      |
| Mode 2 | 182.69                      | 175.31 | 4.04       | 17.75                    | 28.38 | 59.92      |
| Mode 3 | 436.53                      | 450.57 | 3.22       | 23.12                    | 32.02 | 38.48      |

(c) Fréquences de résonances et amortissements modaux



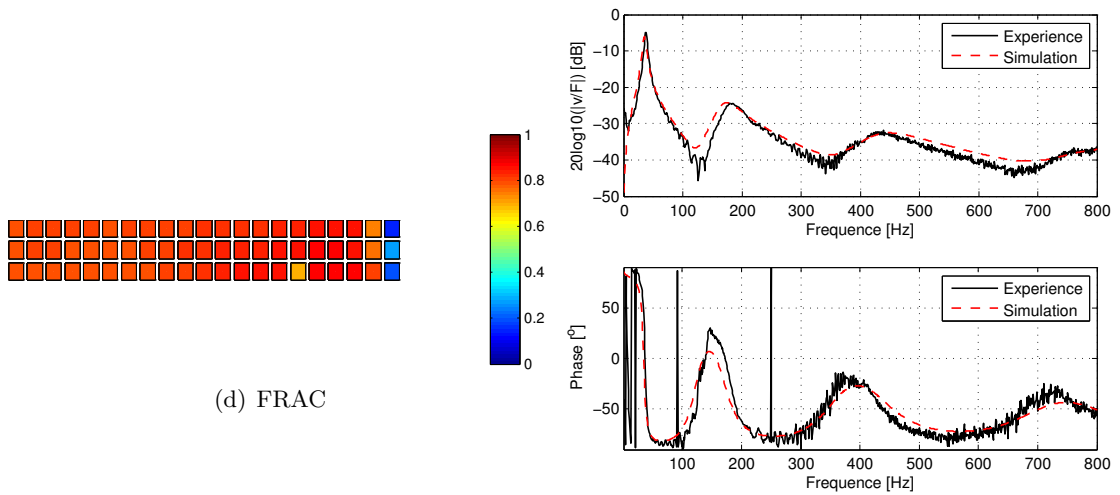
(e) Réponse fréquentielle

FIGURE B.1 – Comparaisons calculs/essais pour l'essai 2.



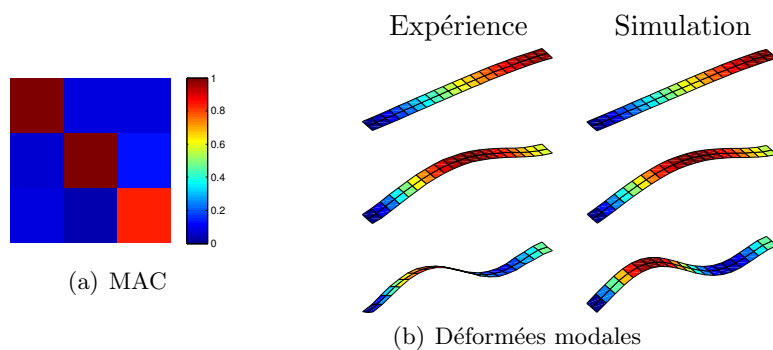
|        | Fréquence de résonance [Hz] |        |            | Taux d'amortissement [%] |       |            |
|--------|-----------------------------|--------|------------|--------------------------|-------|------------|
|        | Exp                         | Sim    | Erreur (%) | Exp                      | Sim   | Erreur (%) |
| Mode 1 | 37.58                       | 34.97  | 6.95       | 12.59                    | 18.24 | 44.86      |
| Mode 2 | 181.62                      | 175.01 | 3.64       | 21.77                    | 28.36 | 30.26      |
| Mode 3 | 432.03                      | 449.23 | 3.98       | 24.02                    | 32.21 | 34.07      |

(c) Fréquences de résonances et amortissements modaux



(e) Réponse fréquentielle

FIGURE B.2 – Comparaisons calculs/essais pour l'essai 3.



|        | Fréquence de résonance [Hz] |        |            | Taux d'amortissement [%] |       |            |
|--------|-----------------------------|--------|------------|--------------------------|-------|------------|
|        | Exp                         | Sim    | Erreur (%) | Exp                      | Sim   | Erreur (%) |
| Mode 1 | 23.93                       | 35.38  | 47.83      | 22.08                    | 19.83 | 10.21      |
| Mode 2 | 143.17                      | 177.36 | 23.88      | 27.81                    | 28.54 | 2.60       |
| Mode 3 | 374.82                      | 456.32 | 21.74      | 20.97                    | 32.50 | 55.00      |

(c) Fréquences de résonances et amortissements modaux

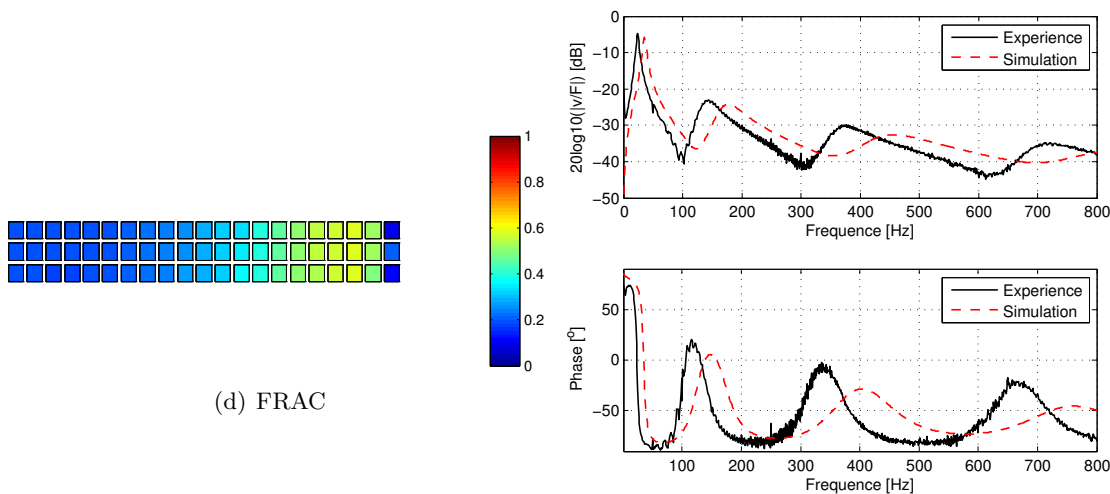
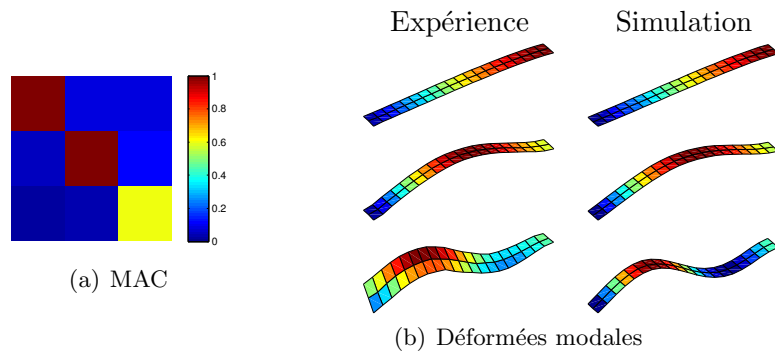


FIGURE B.3 – Comparaisons calculs/essais pour l'essai 6.



|        | Fréquence de résonance [Hz] |        |            | Taux d'amortissement [%] |       |            |
|--------|-----------------------------|--------|------------|--------------------------|-------|------------|
|        | Exp                         | Sim    | Erreur (%) | Exp                      | Sim   | Erreur (%) |
| Mode 1 | 22.89                       | 34.55  | 50.95      | 21.09                    | 19.84 | 5.91       |
| Mode 2 | 134.85                      | 172.99 | 28.28      | 25.17                    | 28.72 | 14.11      |
| Mode 3 | 352.41                      | 445.10 | 26.30      | 23.36                    | 33.37 | 42.82      |

(c) Fréquences de résonances et amortissements modaux

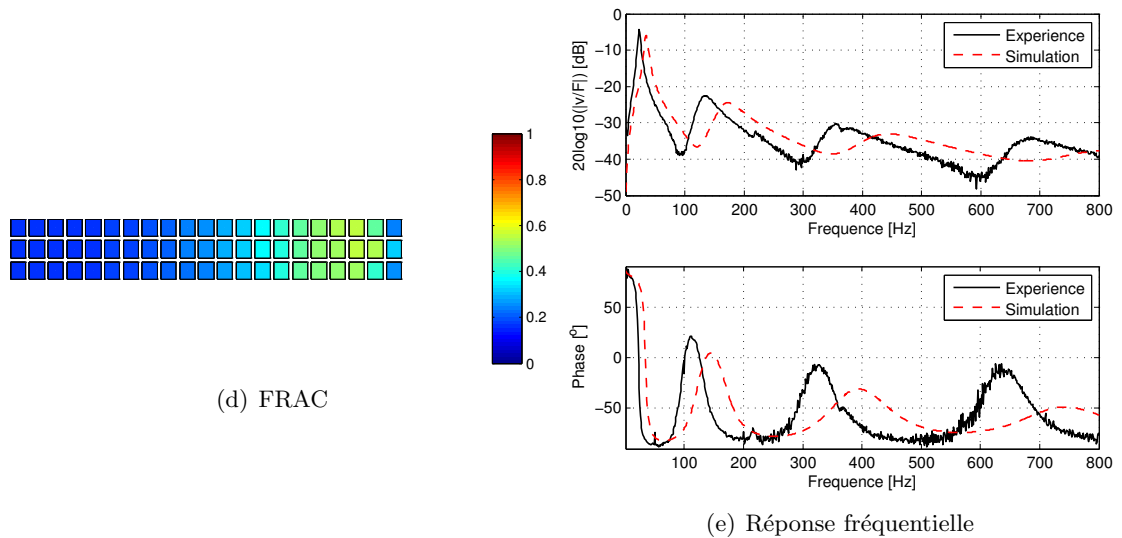
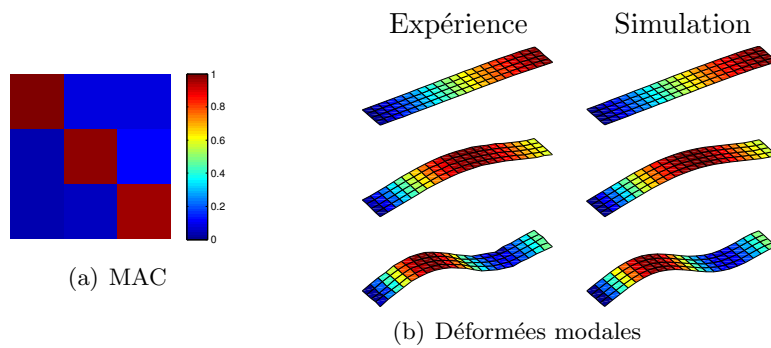
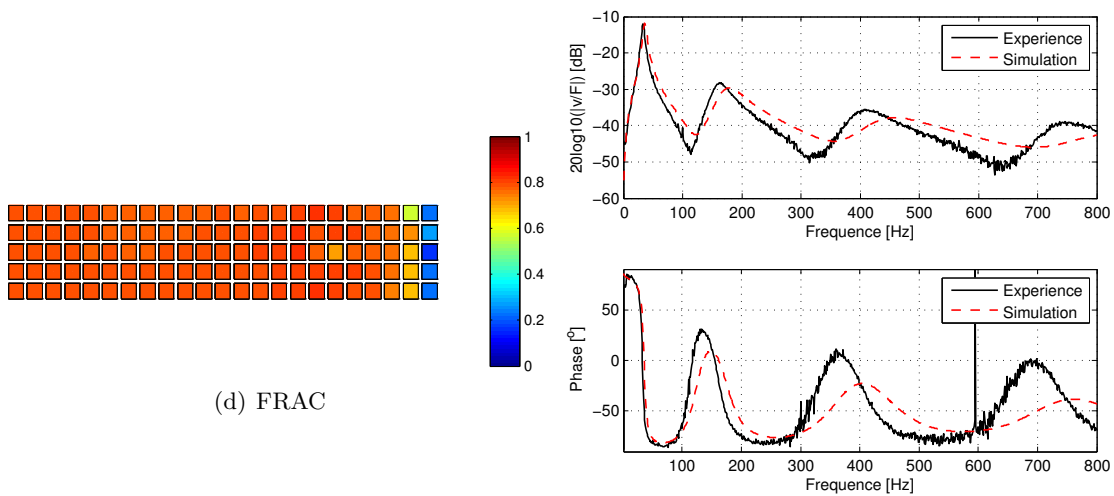


FIGURE B.4 – Comparaisons calculs/essais pour l'essai 6.



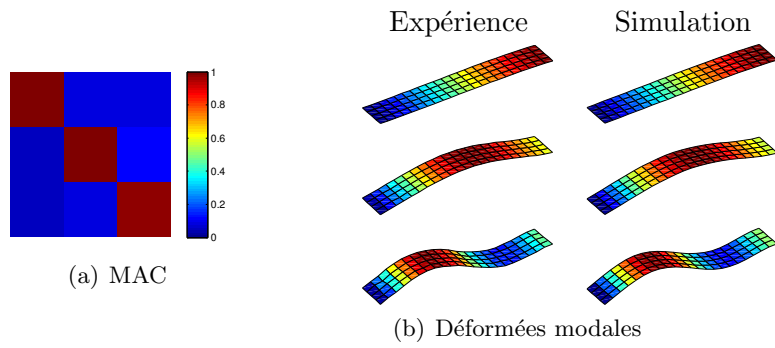
|        | Fréquence de résonance [Hz] |        |            | Taux d'amortissement [%] |       |            |
|--------|-----------------------------|--------|------------|--------------------------|-------|------------|
|        | Exp                         | Sim    | Erreur (%) | Exp                      | Sim   | Erreur (%) |
| Mode 1 | 33.10                       | 35.94  | 8.57       | 19.45                    | 19.86 | 2.07       |
| Mode 2 | 162.97                      | 179.07 | 9.88       | 20.63                    | 27.76 | 34.61      |
| Mode 3 | 410.32                      | 458.85 | 11.83      | 19.39                    | 30.71 | 58.41      |

(c) Fréquences de résonances et amortissements modaux



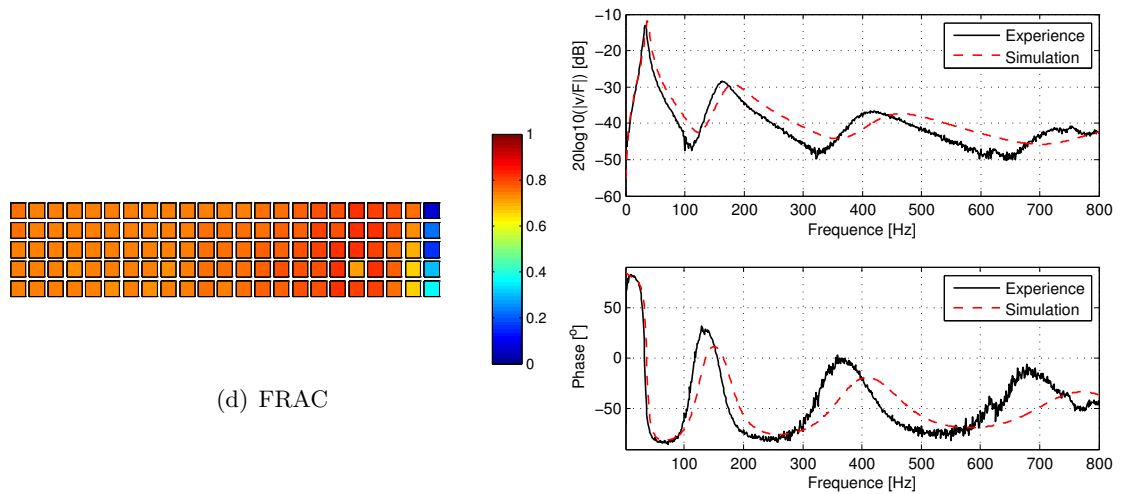
(e) Réponse fréquentielle

FIGURE B.5 – Comparaisons calculs/essais pour l'essai 8.



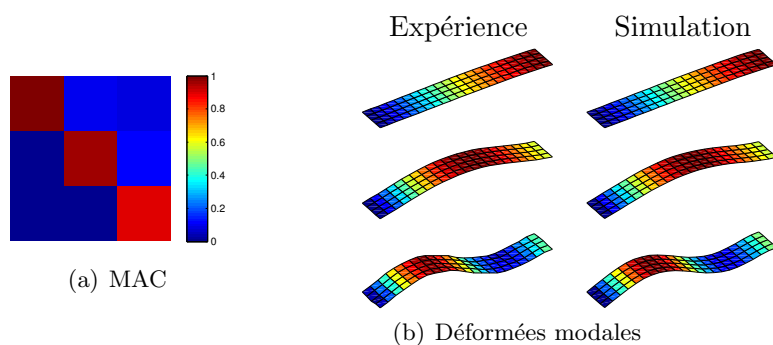
|        | Fréquence de résonance [Hz] |        |            | Taux d'amortissement [%] |       |            |
|--------|-----------------------------|--------|------------|--------------------------|-------|------------|
|        | Exp                         | Sim    | Erreur (%) | Exp                      | Sim   | Erreur (%) |
| Mode 1 | 33.21                       | 36.67  | 10.43      | 20.54                    | 20.10 | 2.13       |
| Mode 2 | 164.38                      | 182.19 | 10.84      | 21.11                    | 27.51 | 30.29      |
| Mode 3 | 417.10                      | 466.03 | 11.73      | 22.96                    | 29.80 | 29.82      |

(c) Fréquences de résonances et amortissements modaux



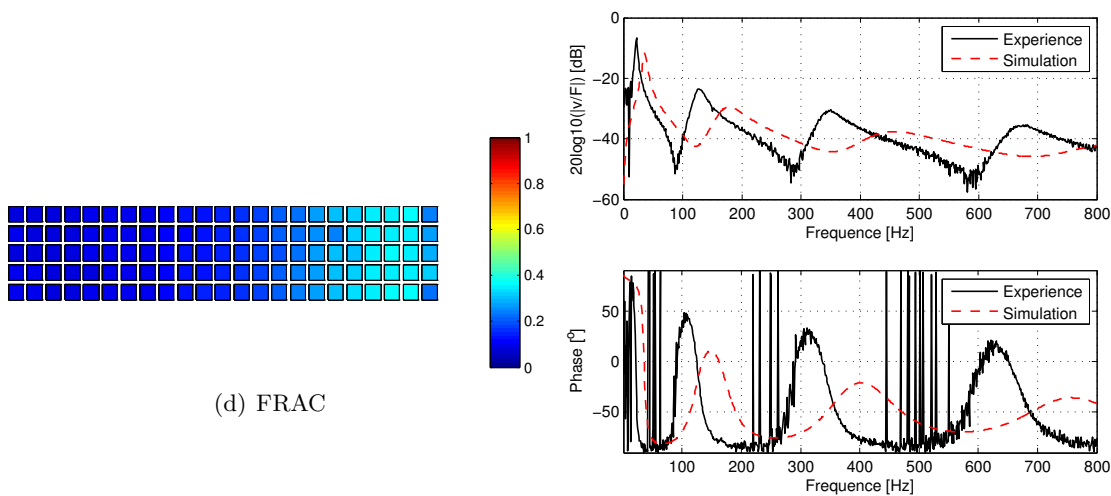
(e) Réponse fréquentielle

FIGURE B.6 – Comparaisons calculs/essais pour l'essai 9.



|        | Fréquence de résonance [Hz] |        |            | Taux d'amortissement [%] |       |            |
|--------|-----------------------------|--------|------------|--------------------------|-------|------------|
|        | Exp                         | Sim    | Erreur (%) | Exp                      | Sim   | Erreur (%) |
| Mode 1 | 21.78                       | 35.93  | 64.95      | 16.55                    | 18.35 | 10.88      |
| Mode 2 | 127.95                      | 178.65 | 39.62      | 16.38                    | 27.67 | 68.87      |
| Mode 3 | 348.07                      | 457.42 | 31.42      | 12.60                    | 30.24 | 140.03     |

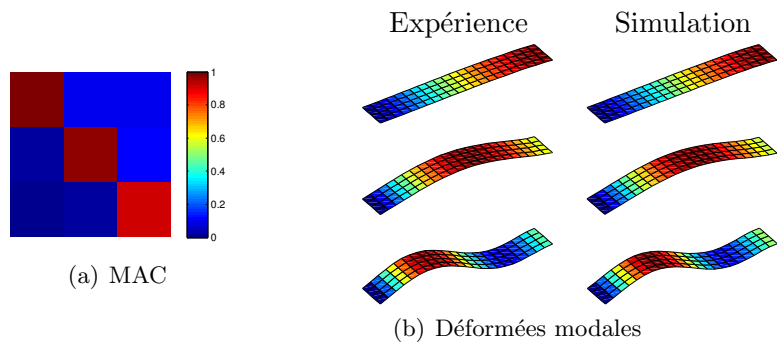
(c) Fréquences de résonances et amortissements modaux



(d) FRAC

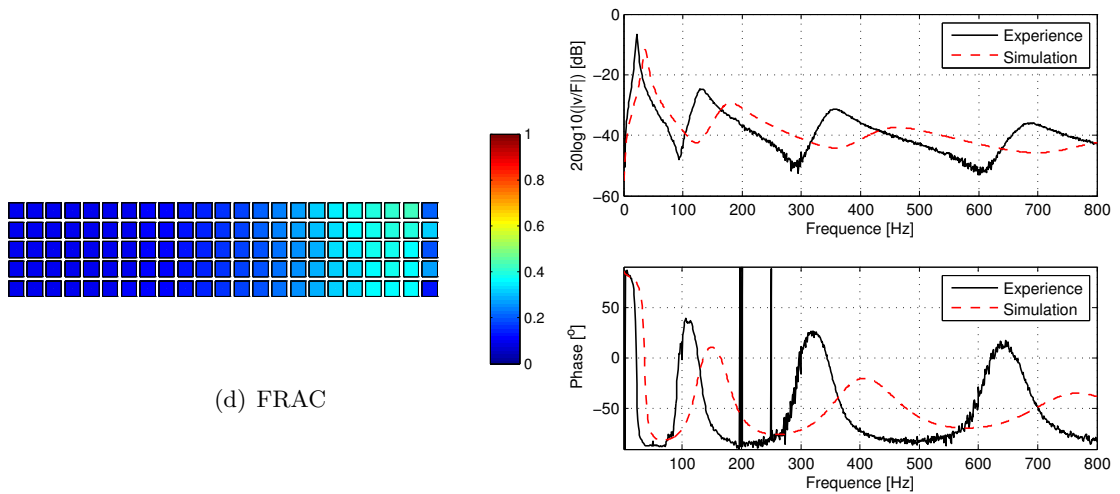
(e) Réponse fréquentielle

FIGURE B.7 – Comparaisons calculs/essais pour l'essai 11.



|        | Fréquence de résonance [Hz] |        |            | Taux d'amortissement [%] |       |            |
|--------|-----------------------------|--------|------------|--------------------------|-------|------------|
|        | Exp                         | Sim    | Erreur (%) | Exp                      | Sim   | Erreur (%) |
| Mode 1 | 21.78                       | 35.93  | 64.95      | 16.55                    | 18.35 | 10.88      |
| Mode 2 | 127.95                      | 178.65 | 39.62      | 16.38                    | 27.67 | 68.87      |
| Mode 3 | 348.07                      | 457.42 | 31.42      | 12.60                    | 30.24 | 140.03     |

(c) Fréquences de résonances et amortissements modaux



(e) Réponse fréquentielle

FIGURE B.8 – Comparaisons calculs/essais pour l'essai 12.



## Annexe C

# Éléments finis et fonctions de forme

### C.1 Triangle à 6 nœuds (T6)

Considérons le triangle à 6 nœuds représenté sur la figure C.1. Les fonctions de forme associées sont :

$$\begin{aligned} N_1 &= r(2r - 1), & N_4 &= 4rs, \\ N_2 &= s(2s - 1), & N_5 &= 4su, \\ N_3 &= u(2u - 1), & N_6 &= 4ru, \end{aligned} \tag{C.1}$$

où  $t = 1 - r - s$ .

### C.2 Prisme à 12 nœuds (P12)

Considérons le prisme à base triangulaires à 12 nœuds représenté sur la figure C.2. Les fonctions de forme associées sont :

$$\begin{aligned} N_1 &= r(2r - 1)(1 - t)/2, & N_7 &= r(2r - 1)(1 + t)/2, \\ N_2 &= s(2s - 1)(1 - t)/2, & N_8 &= s(2s - 1)(1 + t)/2, \\ N_3 &= u(2u - 1)(1 - t)/2, & N_9 &= u(2u - 1)(1 + t)/2, \\ N_4 &= 2rs(1 - t), & N_{10} &= 2rs(1 + t), \\ N_5 &= 2su(1 - t), & N_{11} &= 2su(1 + t), \\ N_6 &= 2ru(1 - t), & N_{12} &= 2ru(1 + t), \end{aligned} \tag{C.2}$$

où  $u = 1 - r - s - t$ .

C.2. PRISME À 12 NŒUDS (P12)

---

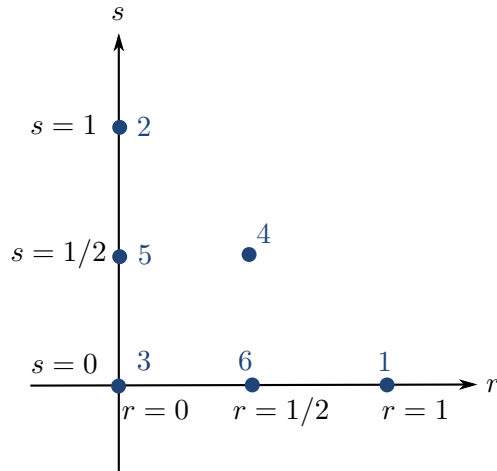


FIGURE C.1 – Triangle à 6 nœuds dans le repère de référence  $(r, s)$ .

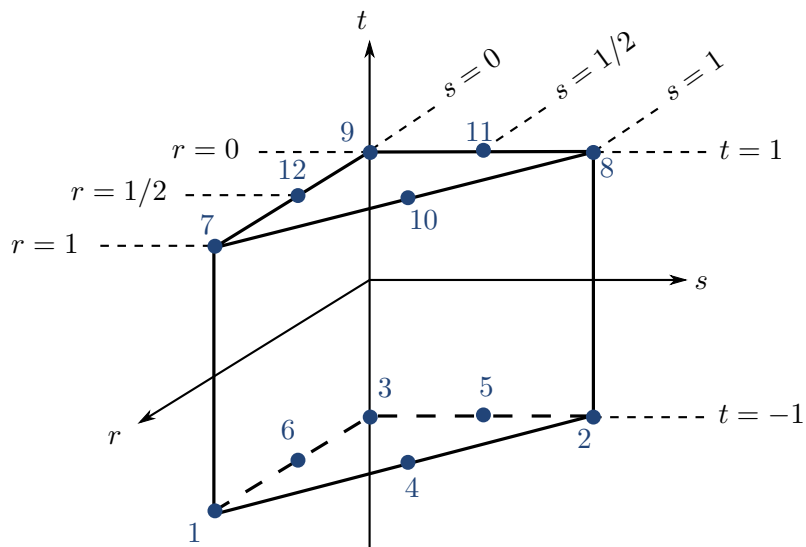


FIGURE C.2 – Prisme à 12 nœuds dans le repère de référence  $(r, s, t)$ .

## Annexe D

# Expressions de $\mathbf{A}_m$ et $\mathbf{B}_m$

Les matrices lignes  $\mathbf{A}_m$  et  $\mathbf{B}_m$  intervenant dans l'équation (9.39) sont obtenues par assemblage de matrices élémentaires  $\mathbf{A}_m^e$  et  $\mathbf{B}_m^e$  :

$$\mathbf{A}_m = \mathbf{A} \mathbf{A}_m^e \quad \mathbf{B}_m = \mathbf{B} \mathbf{B}_m^e. \quad (\text{D.1})$$

L'expression des matrices élémentaires  $\mathbf{A}_m^e$  et  $\mathbf{B}_m^e$  est donné par :

$$\mathbf{A}_m^e = [A_m^1, A_m^2, A_m^3, A_m^4]; \quad \mathbf{B}_m^e = [B_m^1, B_m^2, B_m^3, B_m^4],$$

avec :

$$A_m^1 = -\frac{12(\cos(m\theta_1) - \cos(m\theta_2)) - 6m(\sin(m\theta_1) + \sin(m\theta_2))(\theta_2 - \theta_1)}{m^4(\theta_1 - \theta_2)^3} + \frac{\sin(m\theta_1)}{m},$$

$$A_m^2 = \frac{6L_e(\cos(m\theta_2) - \cos(m\theta_1)) + L_e^2 m^2 (\theta_2 - \theta_1)^2 \cos(m\theta_1) + 2L_e m (2\sin(m\theta_1) + \sin(m\theta_2))(\theta_2 - \theta_1)}{m^4(\theta_1 - \theta_2)^3},$$

$$A_m^3 = \frac{12(\cos(m\theta_1) - \cos(m\theta_2)) - 6m(\sin(m\theta_1) + \sin(m\theta_2))(\theta_2 - \theta_1)}{m^4(\theta_1 - \theta_2)^3} + \frac{\sin(m\theta_2)}{m},$$

$$A_m^4 = -\frac{6L_e(\cos(m\theta_1) - \cos(m\theta_2)) + L_e^2 m^2 (\theta_2 - \theta_1)^2 \cos(m\theta_2) + 2L_e m (\sin(m\theta_1) + 2\sin(m\theta_2))(\theta_1 - \theta_2)}{m^4(\theta_1 - \theta_2)^3},$$

---

et :

$$\begin{aligned}
B_m^1 &= -\frac{12\left(\sin(m\theta_1) - \sin(m\theta_2)\right) + 6m\left(\cos(m\theta_1) + \cos(m\theta_2)\right)\left(\theta_2 - \theta_1\right)}{m^4(\theta_1 - \theta_2)^3} + \frac{\cos(m\theta_1)}{m}, \\
B_m^2 &= \frac{6L_e\left(\sin(m\theta_2) - \sin(m\theta_1)\right) + L_e^2m^2(\theta_2 - \theta_1)^2\sin(m\theta_1) + \frac{2L_em\left(2\cos(m\theta_1) + \cos(m\theta_2)\right)\left(\theta_1 - \theta_2\right)}{m^4(\theta_1 - \theta_2)^3}}{m^4(\theta_1 - \theta_2)^3}, \\
B_m^3 &= \frac{12\left(\sin(m\theta_1) - \sin(m\theta_2)\right) + 6m\left(\cos(m\theta_1) + \cos(m\theta_2)\right)\left(\theta_2 - \theta_1\right)}{m^4(\theta_1 - \theta_2)^3} - \frac{\cos(m\theta_2)}{m}, \\
B_m^4 &= -\frac{6L_e\left(\sin(m\theta_1) - \sin(m\theta_2)\right) + L_e^2m^2(\theta_2 - \theta_1)^2\sin(m\theta_2) + \frac{2L_em\left(\cos(m\theta_1) + 2\cos(m\theta_2)\right)\left(\theta_2 - \theta_1\right)}{m^4(\theta_1 - \theta_2)^3}}{m^4(\theta_1 - \theta_2)^3},
\end{aligned}$$

où  $L_e$  est la longueur de l'élément 1D.