

Caractérisation numérique couplée fluide-aérothermique/structure dédiée à partir de techniques aux frontières immergées

Hong Quan Luu

▶ To cite this version:

Hong Quan Luu. Caractérisation numérique couplée fluide-aérothermique/structure dédiée à partir de techniques aux frontières immergées. Autre. ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechique - Poitiers, 2013. Français. NNT: 2013ESMA0032. tel-00957783

HAL Id: tel-00957783 https://theses.hal.science/tel-00957783

Submitted on 11 Mar 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

Pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE MÉCANIQUE ET D'AÉRONAUTIQUE

(Diplôme national – Arrêté du 7 août 2006)

École Doctorale : SIMMEA

Secteur de Recherche: ENERGETIQUE, THERMIQUE, COMBUSTION

Présentée par :

HONG QUAN LUU

CARACTERISATION NUMERIQUE COUPLEE FLUIDE-AEROTHERMIQUE / STRUCTURE DEDIEE A PARTIR DE TECHNIQUES AUX FRONTIERES IMMERGEES

Directeur de thèse : Frédéric PLOURDE **Co-encadrant** de thèse : Dominique COUTON

Soutenue le 18 Décembre 2013 devant la Commission d'Examen

-Jury-

Rapporteurs

Denis CLODIC, Professeur Emérite PARIS TECH, Président et Directeur R&D EReIE SAS Patrick GLOUANNEC, Professeur, Université de Bretagne Sud-Centre de Recherche

Examinateurs

Marc MEDALE, Université Aix-Marseille, Politech'Marseille

Dominique COUTON, Maître de Conférences, Université de Poitiers, Institut PPrime

Frédéric PLOURDE, Directeur de Recherche CNRS, ENSMA, Institut PPrime

Table des matières

Nomenclature	7
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	
CHAPITRE 2 EQUATIONS GENERALES ET METHODES DE RESOLUTION	13
2.1 DYNAMIQUE DES FLUIDES	
2.1.1 Equation du problème fluide	
2.1.2.1 Discrétisation spatiale et temporelle	
2.1.2.2 Problème de Poisson et parallélisation	
2.2 MECANIQUE & THERMIQUE DANS LA PHASE SOLIDE	24
2.2.1 Problème des mécanique du solide déformable	
2.2.1.1 Equations d'équilibre	24
2.2.1.2 Lois de comportement	25
2.2.2 Prise en compte des transferts thermiques	26
2.2.2.1 Equations de conduction de la chaleur	26
2.2.2.2 Conditions aux limites	
2.2.3 Méthode aux éléments finis	
CHAPITRE 3	EDEC
POTENTIALITES ET LIMITATIONS DES TECHNIQUES AUX FRONTII IMMERGEES ASSOCIEES AU TRANSFERT DE MASSE ET DE CHALEUR	
IMMERGLES ASSOCIEES AU TRANSFERT DE MASSE ET DE CHALEUR	
3.1 INTRODUCTION AUX METHODES IBM: VERS UNE APPROCE	HE MULTI
PHYSIQUES	31
3.1.1 Etat de l'art	
3.1.2 Variance des techniques d'interpolation	33
2.2 COUDLAGE ELLIDE THERMIQUE	29

3.2.1 Conditions aux limites à l'interface	38
3.2.2 Schémas de couplage IBM/ASTER	
3.2.3 Ecoulement au sein d'une canalisation thermorégulée	
a) Contexte de l'étude	47
b) Couplage fluide/thermique	50
3.3 TRAITEMENT DES OUVRANTS/OBJETS MOBILES	56
3.3.1 Accessibilité directe	56
3.3.2 Prise en compte des modifications temporelles	58
a) Configuration de l'étude	58
b) Ecoulements autour de l'aile NACA 2412 mobile (flutter de 20°)	60
3.4 APPLICATION A UNE CARACTERISATION D'UN CAISSON FRIGO 3.4.1 Contexte de l'étude	
3.4.2 Description des mécanismes instationnaires des transferts	
3.4.2.1 Configuration de l'étude	
3.4.2.2 Ecoulement en caisson	
3.4.2.3 Phase instationnaire d'ouverture des portes	74
CHAPITRE 4	
COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE AVEC METHODE IBM	85
4.1 ETAT DE L'ART	87
4.2 CFS ET METHODE IBM	89
4.2.1 Principes du couplage	89
4.2.1.1 Côté fluide	89
4.2.1.2 Côté solide	90
a) Equations du problème de mécanique du solide déformable	90
b) Lois de comportement	91
4.2.1.3 Couplage	93
4.2.2 Procédure du couplage	93
4.2.3 Couplage CFD-IBM/ASTER	96
4.3 TRAITEMENT AUX FRONTIERES IMMERGEES	
4.3.1 Estimation des efforts fluide/structure	
4.3.2 Identification de la nature des instabilités numériques	
4.3.2.1 Oscillations des efforts fluide/structure	
4.3.2.2 Traitement des forces parasites	10/
4.4 CALCUL COUPLE FLUIDE/STRUCTURE	
4.4.1 Ecoulement laminaire autour d'une plaque plane	
4.4.1.1 Contexte de l'étude	
4.4.1.2 Analyse des résultats	120

4.4.2 Inter	raction entre un écoulement laminaire avec une plaque souple	126
4.4.2.1	Oscillations sans écoulement traversier	126
4.4.2.2	Ecoulement d'impact avec une plaque souple	130
	ulement laminaire autour d'un cylindre-poutre	
4.4.3.1	Configuration de l'étude	134
4.4.3.2	Analyse de l'écoulement obtenu	136
	ulement turbulent autour d'une aile d'avion	
4.4.4.1	Contexte de l'étude	144
4.4.4.2	Résultats obtenus	148
CONCLUSIO	N & PERSPECTIVES	. 153
ANNEXES		157
		. 157
ANNEXE N°	I : LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	159
BIBLIOGRAF	PHIE	. 183

Nomenclature

a	vitesse du son	(m/s)
C_p	chaleur spécifique massique à pression constante	(J/kgK)
C_v	chaleur spécifique massique à volume constant	
C_p	coefficient de la pression	
C_x	coefficient de traînée	
C_z	coefficient de portance	
ds	surface unitaire	
D	diamètre du cylindre	(m)
\overrightarrow{D}	force de traînée	(N)
E	énergie totale par unité de masse	(J/kg)
\overrightarrow{g}	accélération de la pesanteur	(m/s^2)
g_0	accélération de la pesanteur locale	(m/s^2)
I_1	inertie longitudinale	(kgm^2)
I_2, I_3	Inerties transversales	(kgm ²)
$\vec{\mathrm{L}}$	force de portance	(N)
m	masse	(kg)
M	nombre de Mach	
\vec{n}	vecteur normal à la surface	
p_t	pression statique moyenne	(Pa)
P	matrice du Jacobien $P = \partial Q / \partial Q_v$	
Pr	nombre de Prandtl	
q	flux de chaleur	(W/m^2)
q_j	tenseur de sous-maille d'énergie	
R	constante universelle des gaz parfait	
R_{ij}	matrices des coefficients visqueux	
Re	nombre de Reynolds	

t	temps	(s)
T	température	(K)
u_i	composante de vitesse	(m/s)
u,v	composante longitudinale et transversale de vitesse	(m/s)
u_{τ}	vitesse de frottement	(m/s)
u^{+}	vitesse adimensionnée $u^+ = U/u_\tau$	
<i>x</i> , <i>y</i> , <i>z</i>	Coordonnées cartésiennes ou position	
У	distance normale	(m)

Lettres grecques

α	angle d'incidence	(°)
δ_0	epaisseur de la couche limite	(m)
κ	conductivité thermique	(W/m.K)
μ	viscosité dynamique	(kg.m/s)
μ_0	viscosité dynamique de référence	(kg.m/s)
μ_T	viscosité turbulente	(kg.m/s)
ho	Masse volumique	(kg/m^3)
σ_{ij}	tenseur visqueux	(kg.m/s)
τ	contraintes de cisaillement	
$ au_{ij}$	tenseur des contraintes de sous-maille	
${\cal T}_{\scriptscriptstyle yz}$	termes transversaux	
θ	angle de hausse	(°)
v	viscosité cinématique moléculaire	(m^2/s)
V_t	viscosité cinématique turbulente	(m^2/s)
ω_i	composantes de vitesse de rotation	(rad/s)
Δt	pas de temps	(s)
Δt_{CFL}	pas de temps déterminé par condition CFL	(s)

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

La caractérisation des transferts multi-physiques s'impose de plus en plus comme une approche accessible numériquement, supportée en cela par l'extraordinaire augmentation de puissance des calculateurs au cours de ces dernières décennies. L'avenir semble aujourd'hui conduire vers de telles approches. En mécanique des fluides, les transferts turbulents peuvent être prédits de manière quantitative. Par exemple, les échanges thermiques au sein d'échangeurs de forme ondulée ont été calculés avec une excellente corrélation, une différence maximale de 5% étant constatée entre les essais dédiés et les résultats numériques sur une large gamme du nombre de Reynolds [1]. Plus récemment, une prédiction des coefficients d'échanges convectifs entre un écoulement turbulent et une électrovanne placée dans un environnement thermiquement contrôlé a été trouvée en parfait accord avec les mesures expérimentales dédiées [2]. Côté fluide, l'utilisation de modèles de turbulence aux grandes échelles (nommé LES pour Large Eddy Simulation par la suite) a effectivement offert un moyen des plus intéressants et d'autant plus accessible que les approches massivement parallèles deviennent de plus en plus faciles. Le cas de l'électrovanne est en fait une approche typiquement industrielle dont les résultats numériques sont prédictifs. Côté fluide, les outils numériques actuels deviennent de plus en plus riches, avec des prises en comptes de lois de comportements toujours plus complètes comme par exemple les lois relatives à des matériaux en cours d'endommagement [3].

Alors que des outils commerciaux ou bien les codes libres de droits (Open source) existent pour traiter les parties mécaniques et fluidiques, la prise en compte d'une approche couplée est déjà plus rare et une véritable stratégie de couplage est donc nécessaire; cette dernière peut devenir un véritable enjeu. En effet, les outils de simulation ont quasiment tous été développés sans initialement les préparer pour communiquer avec d'autres outils et les coupler ensemble n'est donc pas direct. Reprendre intégralement l'ensemble des codes et les développer dans un environnement favorable n'est pas faisable et ce n'est d'ailleurs pas souhaitable; le couplage doit être pensé de manière souple et aisée. Les travaux sur les simulations de couplage fluide/structure sont néanmoins accessibles, notamment avec des outils commerciaux, en appliquant des hypothèses sur les développements considérés et les variations spatiales. En effet, dans le cadre de faibles déformations, une gestion de la déformation des maillages est appliquée. Pour des déformations plus importantes en revanche, un couplage des solveurs avec un outil de maillage automatique est indispensable. Hormis les problèmes de qualité de maillage, une couche de gestion de l'ensemble des codes est nécessaire et il existe des démarches dans ce sens. Bien sûr, de telles approches demeurent peu flexibles, non universelles et les temps de calculs s'en trouvent d'autant amplifiés.

Un des objectifs qui a motivé ce travail est de caractériser thermiquement les caissons frigorifiques de camion dans le cadre du projet ISO4CAR financé par OSEO. Au cours de la définition de ce projet, les industriels y participant (Gruau, Carrier TransiCold, Cooper) ont exprimé leur attente en termes de modélisation et les attentes se focalisent principalement sur le besoin d'une approche multi-physique couplée; une des motivations de ce travail a donc consisté à proposer et développer de telles modèlisations.

Parmi les différentes techniques pour assurer les couplages, les approches aux frontières immergées ont récemment connu un essor remarquable. Sans entrer ici dans les détails, ces techniques reposent sur la prise en compte de termes sources pour simuler les effets d'une paroi par exemple. Si une telle prise en compte est effective, il devient alors aisé de faire déplacer cette même paroi. Au sein de notre équipe, les techniques aux frontières immergées ont été introduites pour la simulation d'écoulements au sein de géométries complexes avec un maillage automatique pour des solveurs incompressibles [1] mais également pour des solveurs compressibles [4] et dans ce dernier cas, un véritable couplage fluide/mécanique du vol/thermique a été réalisé. Un des problèmes relatifs aux frontières immergées est leur manque d'universalité se traduisant notamment par un défaut de visibilité sur les conséquences de l'introduction de ces techniques.

Dans ces conditions, l'objectif de notre travail consiste à mettre en place une stratégie de couplage fluide/solide et d'en tester le potentiel technique. Alors que la partie fluide sera traitée par le modèle fluide préalablement développé [5,1,6], la partie solide (aussi bien thermique que mécanique) sera simulée par l'outil ASTER, développé par EDF [7]. Les principaux résultats sont détaillés dans les deux chapitres 3 et 4. Au préalable, le chapitre 2 souligne les principales caractéristiques des solveurs numériques mis en place. Le chapitre 3 s'attache à décrire et valider les couplages fluide/solide en considérant les transferts thermiques essentiellement tout en y intégrant la prise en compte d'objets mobiles (ouvrants comme des portes par exemples) et leur effet au sein de l'écoulement. Le chapitre 4 est, quant à lui, principalement dédié à la modélisation des couplages fluide/structure et à partir d'une série de cas tests à difficulté croissante, la problématique de la modélisation est particulièrement mise en avant. Finalement une conclusion ponctue ce travail en se basant à décrire les points positifs et négatifs des schémas mis en œuvre.

CHAPITRE 2

EQUATIONS GENERALES ET METHODES DE RESOLUTION

2.1 DYNAMIQUE DES FLUIDES

La simulation numérique des écoulements fluides est basée sur les équations de Navier-Stokes dont la résolution est détaillée.

2.1.1 Equation du problème fluide

L'évolution d'un fluide est régie par les équations de Navier-Stokes. Celles-ci traduisent la conservation de trois quantités : masse, quantité de mouvement et énergie dans l'espace physique (*) :

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \operatorname{div}(\rho^* \mathbf{u}^*) = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \rho^* \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + div(\rho^* \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{u}^* + p^*) = 0$$
 (2.2)

$$\frac{\partial \rho^* E}{\partial t^*} + div ((\rho^* E + p^*) \mathbf{u}^*) = 0$$
 (2.3)

où ρ^* , \mathbf{u}^* , p^* et ρ^*E sont respectivement la masse volumique, la vitesse, la pression et la densité d'énergie du fluide. Ces équations nécessitent une relation complémentaire de fermeture fondée sur des hypothèses physiques du comportement du fluide. La plus simple, qui sera adoptée par la suite, est l'hypothèse des gaz parfaits. Suivant les caractéristiques du fluide, une loi d'état sera choisie, précisant la relation entre la pression, la densité et la température :

$$p^* = R^* \rho^* T^* \tag{2.4}$$

 R^* étant la constante de Mariotte du gaz. Ces équations sont complétées de conditions initiales et de conditions aux limites : conditions d'entrée, de sortie ou de paroi suivant la situation. En deux dimensions d'espace, les équations d'Euler sans termes visqueux peuvent donc s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t^*} + \frac{\partial f_x(\varphi)}{\partial x^*} + \frac{\partial f_y(\varphi)}{\partial y^*} = 0$$

$$où \varphi = \begin{pmatrix} \rho^* \\ \rho^* u^* \\ \rho^* v^* \\ \rho^* E \end{pmatrix}, \qquad f_x(\varphi) = \begin{pmatrix} \rho^* u^* \\ \rho^* u^{*2} + p^* \\ \rho^* u^* v^* \\ \rho^* u^* v^* \\ (\rho^* E + p^*) u^* \end{pmatrix}, \qquad f_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \rho^* v^* \\ \rho^* u^* v^* \\ \rho^* v^{*2} + p^* \\ (\rho^* E + p^*) v^* \end{pmatrix}$$

$$(2.5)$$

La forme de ces équations sous forme conservative se prête bien à la simulation par des méthodes de « différences finies » sur maillage cartésien. En effet, f_x et f_y s'interprètent comme les flux dans les directions x et y respectivement. Tout l'enjeu est alors de calculer des flux numériques approchés à l'interface entre les cellules, et l'évolution de w s'obtient par un bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie sur la maille pendant un pas de temps.

L'ensemble des équations, présentées ci-avant, peut s'écrire sous une forme adimensionnée à partir des grandeurs caractéristiques de référence. La vitesse de référence a été prise comme :

$$U_0^* = \sqrt{g^* H^*} \tag{2.6}$$

Toutes les grandeurs utilisées dans les équations (2.1) à (2.4) sont adimensionnées à partir des grandeurs de références (Tableau 2.1).

Grandeurs	Variables	Grandeurs	Variables
Coordonnées	$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^*}{D^*}$	Température	$T = \frac{T^* - T_0^*}{T_s^* - T_0^*}$
Vitesse	$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}^*}{U_0^*}$	Pression thermodynamique	$p_0 = \frac{p_0^*}{\rho_0^* R^* T_0^*}$
Temps	$t = \frac{t^* U_0^*}{D^*}$	Fluctuation de pression	$p' = \frac{p'^*}{\rho_0^* U_0^{*2}}$
Masse volumique	$\rho = \frac{\rho^*}{\rho_0^*}$	Viscosité dynamique	$\mu = \frac{\mu^*(T^*)}{\mu_0^*}$

Tableau 2.1: Variables adimensionnelles

Les équations sans dimension s'écrivent alors :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{2.7}$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p' - (\rho - 1) \frac{\delta_{iz}}{Fr^2} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \mathbf{\sigma}$$
 (2.8)

$$\rho \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{\mu}{\text{Pr}} \nabla T \right)$$
 (2.9)

$$p_0 = \rho \left(Fr^2 T + 1 \right) \tag{2.10}$$

Cette transformation fait alors apparaître les nombres sans dimension :

$$Re = \frac{\rho_0^* U_0^* D^*}{\mu_0^*}$$
 nombre de Reynolds

$$Pr = \frac{\mu_0^* c_p^*}{k_0^*}$$
 nombre de Prandtl

$$Fr = \sqrt{\frac{U_0^{*2}}{H^* g^*}}$$
 nombre de Froude

$$Gr = \left(\frac{\rho_0^*}{\mu_0^*}\right)^2 g^* D^{*3} \frac{T_s^* - T_0^*}{T_0^*} = \text{Re}^2$$
 nombre de Grashof

La prise en compte des écoulements turbulents nécessite de choisir une stratégie et une méthode adaptée :

a) DNS ou Direct Numerical Simulation

Cette simulation cherche à résoudre toutes les structures présentes dans l'écoulement, allant des structures les plus petites aux plus grandes. Cette approche du calcul a comme inconvénient un temps de calcul qui dépasse de plusieurs ordres de grandeur la capacité des calculateurs actuels si l'on souhaite l'appliquer à des écoulements industriels.

b) RANS ou « Reynolds Average Navier Stokes »

Cette approche ne cherche pas à résoudre toutes les structures du fluide, plutôt à résoudre le comportement général de l'écoulement en omettant les structures les plus petites. Cette approche a comme avantage la diminution du temps de calcul, mais par contre elle s'appuie totalement sur la pertinence des modèles de turbulence.

c) LES ou Large Eddy Simulation

Cette approche est d'une certaine façon à mi-chemin entre les deux autres déjà présentées. La simulation LES ou simulation aux grandes échelles utilise un filtre spatial afin d'éliminer certaines échelles du calcul. Cela mène à un temps de calcul beaucoup plus raisonnable que celui des simulations DNS tout en résolvant une partie de l'écoulement.

La Figure 2- 1 schématiquement interprète les modèles turbulents mis en jeu ; pour une grandeur G quelconque qui évolue au cours du temps on peut constater que tandis que la DNS résout précisément l'évolution de cette grandeur, la méthode RANS en détermine la quantité moyenne, et la LES est à mi-chemin entre les deux.

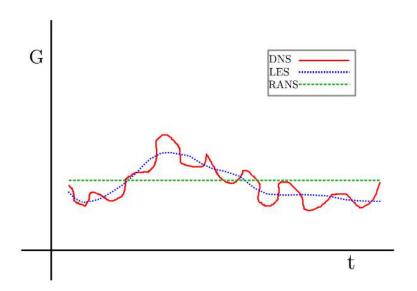


Figure 2-1: Approche d'une grandeur par DNS, LES et RANS

2.1.2 Méthode de résolution

2.1.2.1 Discrétisation spatiale et temporelle

Dans le cas d'une simulation directe (DNS), l'ensemble des échelles de l'écoulement doit être résolu directement, ce qui impose alors l'utilisation d'un maillage suffisamment fin pour bien capter toutes les échelles. Au contraire, la mise en œuvre d'une simulation des grandes échelles (LES) permet l'utilisation d'un maillage plus large tout en étant suffisamment fin pour capter des grandes échelles, les plus petites échelles étant modélisées. Les deux méthodes nécessitent néanmoins des schémas numériques précis n'introduisant pas trop de dissipation numérique. Dans ces conditions, les simulations numériques directes sont généralement développées avec l'emploi de schémas d'ordre élevé [8,9,10]. Les méthodes spectrales sont alors

généralement utilisées mais pour atteindre des ordres supérieurs à l'ordre 2, les conditions aux limites de type périodique doivent être utilisées [11,12]. De plus, des géométries complexes rendent délicates les transformations de maillage à effectuer. Néanmoins, des simulations directes à partir de schémas d'ordre 2 et d'une discrétisation dans l'espace physique ont été réalisées avec succès [13,14,15], l'ordre 2 présentant le double avantage d'accéder à des géométries plus complexes tout en prenant en compte une multitude de conditions aux limites.

Pour la discrétisation temporelle, le schéma adopté pour résoudre les systèmes des équations de conservation est du type Adams-Bashforth de différences finies semi-implicite d'ordre 2 [16]. Le schéma s'organise en deux étapes, dites de prédiction et de correction. Afin de passer de l'instant n à l'instant n+1, les différentes procédures au cours des 2 étapes se résument ainsi :

a/ Procédure au cours de l'étape de prédiction (n) à (+)

1) A partir des variables de l'écoulement à l'instant n :

$$\frac{\partial T}{\partial t}\Big|^n$$
 et $\frac{\partial \rho}{\partial t}\Big|^n = -\rho \frac{Fr^2}{Fr^2T + 1} \frac{\partial T}{\partial t}\Big|^n$ sont estimées.

2) Prédiction de la densité ρ^+ et de la température T^+

$$\frac{\rho^{+} - \rho^{n}}{\Delta t} = \frac{3}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|^{n} - \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|^{n-1} \text{ et } T^{+} = \frac{1}{Fr^{2}} \left(\frac{p_{0}}{\rho^{+}} - 1 \right)$$
(2.11)

3) Détermination des vitesses intermédiaires à partir des équations de conservation de quantités de mouvement sans prendre en compte la contribution de la pression [17]

$$\frac{\rho^+ \hat{\mathbf{u}} - \rho^n \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \frac{3}{2} \mathbf{F}^n - \frac{1}{2} \mathbf{F}^{n-1}$$
(2.12)

avec
$$\mathbf{F} = -\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\rho - 1) \frac{\delta_{iz}}{Fr^2} + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \mathbf{\sigma}$$

4) Recherche de la pression dynamique à partir de l'équation de Poisson

5) Prédiction de la vitesse à partir du champ de pression obtenu

$$\frac{\rho^+ \mathbf{u}^+ - \rho^+ \hat{\mathbf{u}}}{\Lambda t} = -\nabla p'^+ \tag{2.14}$$

b/ Correction – passage de (+) à (n+1)

1) Estimation des dérivées temporelles de température et de masse volumique sont estimées

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|^{++} \text{ et } \left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|^{++}$$

2) Estimation de la densité et de la température

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} = \frac{3}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \bigg|^{n+1} - \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \bigg|^{n} \text{ et } T^{n+1} = \frac{1}{Fr^2} \left(\frac{p_0}{\rho^{n+1}} - 1 \right)$$
(2.15)

3) Détermination des vitesses à partir des équations de conservation de quantité de mouvement sans prendre en compte la contribution de la pression

$$\frac{\rho^{n+1}\hat{\mathbf{u}} - \rho^n \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \frac{3}{2}\mathbf{F}^n - \frac{1}{2}\mathbf{F}^{n-1}$$
(2.16)

4) Recherche de la pression dynamique à partir de l'équation de Poisson

$$\nabla^{2} p'^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left[\nabla \cdot \left(\rho^{n+1} \hat{\mathbf{u}} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right]^{n+1}$$
 où $\frac{\partial \rho}{\partial t} \right]^{n+1} = \frac{1}{2\Delta t} \left(3\rho^{n+1} - 4\rho^{n} + \rho^{n-1} \right)$ (2.17)

5) Correction de la vitesse à partir du champ de pression obtenu :

$$\frac{\rho^{n+1}\mathbf{u}^{n+1} - \rho^{n+1}\hat{\hat{\mathbf{u}}}}{\Delta t} = -\nabla p'^{n+1}$$
 (2.18)

La stabilité temporelle du schéma utilisé est basée sur le critère du nombre de Courant-Friedrichs-Levy.

2.1.2.2 Problème de Poisson et parallélisation

L'une des parties les plus coûteuses en temps de calcul pour un calcul incompressible ou faiblement compressible est la résolution de l'équation de Poisson, permettant d'accéder au champ de pression. Supposons l'équation de Poisson appliquée à un domaine tridimensionnel avec un nombre de points suivant chaque direction de discrétisation égal à N. La méthode de discrétisation impose alors un système linéaire de $N^3 \times N^3$ points à résoudre, dont la résolution avec une méthode directe de Gauss nécessite un ordre $O(N^6)$ d'opérations. Il est pratiquement impossible d'utiliser ce type de méthode pour des raisons de temps de calcul et des méthodes itératives moins « gourmandes » en calcul sont généralement préférées. Par exemple, la méthode de Gauss-Seidel offre un nombre d'opérations de l'ordre $O(N^6 \log \varepsilon)$ alors que le coût d'un gradient conjugué s'élève à $O(N^{9/2} \log \varepsilon)$. La méthode de type « multi-grid » permet de diminuer le nombre d'opérations jusqu'à $O(N^3 \log \varepsilon)$. Cependant, ces méthodes itératives sont très sensibles et leur convergence reste intimement liée au problème à résoudre. Des méthodes spectrales sont également disponibles [18][19] et le nombre d'opérations est de l'ordre de $O(N^3 \log N)$ [20]. Vu le coût du nombre d'opérations, la résolution spectrale a été retenue pour l'équation de Poisson et nous allons rapidement décrire cette méthode dans le cas d'une équation de Poisson en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = f(x, y, z)$$
(2.19)

Tout d'abord, l'équation de Poisson se discrétise en différences finies suivant :

$$\frac{p_{i+1,j,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{p_{i,j+1,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} + \frac{p_{i,j,k+1} - 2p_{i,j,k} + p_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} = f_{i,j,k}$$
(2.20)

En appliquant la transformation rapide de Fourier sur l'équation précédente dans la direction z et ensuite dans la direction y pour un maillage décalé, on obtient :

$$\begin{cases} \hat{p}_{k} = \sum_{n=1}^{N} p_{n} e^{\frac{-2\pi \hat{j}k(n-1/2)}{N}} \\ \hat{p}_{j} = \sum_{m=1}^{M} p_{m} e^{\frac{-2\pi \hat{j}j(m-1/2)}{M}} \end{cases}$$
(2.21)

avec $\hat{j}^2 = -1$. On démontre aisément que la transformation rapide de Fourier se réduit en une somme de fonction de sinus, ou de cosinus, en fonction des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann respectivement. Par exemple, pour les conditions aux limites de Dirichlet et Neumann dans les deux directions de z et y respectivement, la transformation rapide est :

$$\begin{cases} \hat{p}_k = \sum_{n=1}^{N} p_n \sin\left(\frac{\pi k(n-1/2)}{N}\right) & \to \text{ Dirichlet} \\ \hat{p}_j = \sum_{m=1}^{M} p_m \cos\left(\frac{\pi(j-1)(m-1/2)}{M}\right) & \to \text{ Neumann} \end{cases}$$
(2.22)

L'équation de Poisson peut s'exprimer sous forme :

$$\frac{\hat{p}_{i+1,j,k} - 2\hat{p}_{i,j,k} + \hat{p}_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \lambda_y \hat{p}_{i,j,k} + \lambda_z \hat{p}_{i,j,k} = \hat{f}_{i,j,k}$$
(2.23)

avec
$$\begin{cases} \lambda_z = \frac{1}{\Delta z^2} \left(2\cos\left(\frac{n\pi}{N}\right) - 2 \right) \\ \lambda_y = \frac{1}{\Delta y^2} \left(2\cos\left(\frac{(m-1)\pi}{M}\right) - 2 \right) \end{cases}$$

L'équation de Poisson forme un système linéaire tri-diagonal, la résolution s'effectuant en $O(N^3)$ nombre d'opérations. Après avoir résolu le système linéaire, la solution est considérée comme s'assimilant à des ondes dans l'espace fréquentiel et une transformation inverse de Fourier est appliquée pour en déduire la solution dans l'espace physique. Le coût total en nombre d'opérations est donc de l'ordre de $O(N^3 \log N)$.

La méthode de transformation rapide de Fourier présentée ci-avant offre une intéressante efficacité en termes de temps de calcul. De plus, il s'agit d'une méthode directe, donc très stable aussi bien en temps de calcul qu'en précision. Néanmoins, cette technique offre également quelques rigidités. Premièrement, elle ne peut s'adapter à plusieurs conditions aux limites qu'à l'ordre 2. Si l'ordre du schéma utilisé est supérieur à 2, seules les conditions de périodicité peuvent être prises en compte. Deuxièmement, cette méthode offre une certaine lourdeur lors de la parallélisation du code de calcul en multi-domaines notamment dans la direction de la transformation de Fourier rapide. Pour éviter ces difficultés, le code a été parallélisé en découpant le domaine par tranche suivant la direction z pour la résolution de la vitesse et de la température. La parallélisation du module de Poisson utilise la transformation de Fourier suivant

la direction z et cette dernière s'effectue en tranche suivant la direction y. Cela nécessite un transfert croisé entre les processeurs pour obtenir l'ensemble des données après la transformation de Fourier rapide sur chaque processeur. Cette méthode permet d'éviter la parallélisation de l'algorithme de transformation de Fourier rapide, offrant un gain considérable en temps de temps de calcul CPU en fonction du nombre de processeurs et permettant d'assurer une précision équivalente par rapport à un calcul séquentiel.

L'utilisation d'un maillage cartésien limite par nature même la complexité des géométries étudiées et de simples interpolations au niveau des conditions aux limites réalisées entre les points frontières et ceux internes aux domaines peuvent générer des erreurs substantielles au voisinage de rayons de courbure importants et des fortes discontinuités de la forme géométrique des frontières. Afin de prendre en compte les parois complexes sans augmenter significativement le coût de calcul, la technique dite « Immersed Boundary Method » a été développée. La méthode des frontières immergées repose sur l'introduction de termes sources dans les équations pour tenir compte de la présence d'une paroi, cette dernière n'étant plus nécessairement et explicitement maillée. Afin de représenter la frontière rigide, une force directe F_i est implicitement ajoutée aux équations des fluides [21]. L'équipe a développé depuis plusieurs années des approches aux frontières immergées [1] à partir d'un maillage cartésien régulier.

Il existe plusieurs familles de modèles aux frontières immergées et l'une des toutes premières utilise les « forcing-points » (les points de fluide avec au moins un voisin dans le solide) pour définir les forces au voisinage de la frontière immergée. Cette technique a été largement utilisée dans le domaine biomédical et est considérée comme robuste. La technique de reconstruction doit s'appliquer afin d'être la plus flexible possible [22,23] en assurant un ordre de précision le plus élevé. Plusieurs variantes existent [24] alors que la très populaire méthode de reconstruction par cellule fictive « ghost-cell » (les points à l'intérieur du solide avec au moins un voisin dans le fluide) a été appliquée sur des écoulements à géométries complexes. Lorsque le corps se déplace dans le domaine de calcul, les natures mêmes des cellules sont modifiées (des cellules solides deviennent des cellules fictives, des cellules fictives deviennent fluide...). Par exemple, lorsqu'une cellule solide devient fluide, il n'existe pas d'antécédents dans la phase fluide et aucune valeur de vitesse et pression au pas de temps précédent. Le choix de ces valeurs peut introduire des parasites en vorticité près de la frontière, pouvant conduire à des erreurs importantes. Yang et al. [25] ont proposé une méthode de reconstruction locale similaire en utilisant « forcing-points » et « ghost-cells » afin de traiter les obstacles mobiles. Pour les problèmes des frontières immobiles, ils n'utilisent que la reconstruction de type « forcingpoint ». Dans notre champ application, nous utilisons l'approche couplé ghost-cell points et forcing-points.

2.2 MECANIQUE & THERMIQUE DANS LA PHASE SOLIDE

2.2.1 Problème des mécanique du solide déformable

2.2.1.1 Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre sont obtenues à partir du bilan de la quantité de mouvement. L'écriture des grandes transformations impose la distinction entre les configurations initiale et finale. Nous considérons ici la formulation du problème d'équilibre dans les deux configurations. Le solide considéré occupe un domaine noté Ω dans la configuration initiale non déformée et ω dans la configuration déformée (cf.). La frontière du domaine est notée $\partial\Omega$ ($\partial\omega$ respectivement). Cette frontière est décomposée classiquement en deux parties disjointes, $\partial\Omega_{\rm u}$ ($\partial\omega_{\rm u}$ respectivement) et $\partial\Omega_{\sigma}$ ($\partial\omega_{\sigma}$ respectivement) (Figure 2-2). Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{\overline{u}} & sur \quad \partial \omega_{\rm u} \\ \vec{t} = \sigma \vec{n} = \vec{\overline{t}} & sur \quad \partial \omega_{\sigma} \end{cases}$$
 (2.24)

avec l'équation (2.24) exprimant la condition limite en déplacement (notée $\vec{\overline{u}}$) et l'équation (2.24) la condition limite de type effort (notée $\vec{\overline{t}}$). σ est le tenseur des contraintes qui est symétrique. On peut également introduire le tenseur de Kirchhoff $\tau = J\sigma$, souvent utilisé avec J et σ correspondant au jacobien et la contrainte de Cauchy.

En utilisant la définition du vecteur des contraintes, et le théorème de la divergence, on obtient l'équation d'équilibre (Conservation de la quantité de mouvement - première loi de Cauchy) dans la configuration actuelle :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{2.25}$$

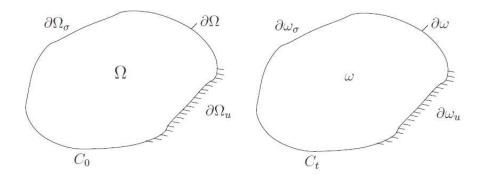


Figure 2-2 Formulation du problème d'équilibre

avec le champ de déplacements u, le tenseur des contraintes de Cauchy σ_{ij} (d'ordre 2) et un effort volumique f (comme la gravité g, par exemple). La forme locale de la conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} = 0 \tag{2.26}$$

avec la masse volumique ρ du matériau et le champ de vitesses \vec{V} .

2.2.1.2 Lois de comportement

Dans le cas de l'élasticité linéaire isotrope, la relation contraintes - déformations dépend simplement de deux paramètres, le module d'Young E et le coefficient de Poisson ϑ :

Cette relation, nommée loi de Hooke, peut aussi se résumer sous la forme :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \, \varepsilon_{kl} \tag{2.28}$$

où C_{ijkl} est un tenseur du quatrième ordre appelé tenseur des rigidités ou tenseur d'élasticité et σ_{ij} est le tenseur des contraintes et ε_{kl} le tenseur des déformations.

2.2.2 Prise en compte des transferts thermiques

2.2.2.1 Equations de conduction de la chaleur

En considérant le matériau comme ayant des liaisons parfaites et en négligeant toute transformation chimique ou physique de la matière, l'énergie interne est proportionnelle à la température absolue T par l'intermédiaire d'une constante C_p , la capacité calorique massique (en J/kg/K) [26]:

$$\frac{de}{dt} = C_p \frac{dT}{dt} \tag{2.29}$$

Tout comme pour le fluide, la loi de conduction de Fourier dans le solide stipule que le flux de chaleur par unité de surface est une fonction linéaire du gradient thermique :

$$q = -\lambda \vec{\nabla} T \tag{2.30}$$

et en supposant le matériau thermiquement isotrope, la conductivité thermique λ est un scalaire. Si le corps n'est pas isotrope, cela devient un tenseur. Dans le cadre de cette thèse, les matériaux étudiés sont tous considérés comme isotropes. De plus, λ est supposée indépendante des déformations mécaniques, d'autant plus que ces dernières sont petites (au maximum, de l'ordre de 10^{-2}). Le solide étant mobile, l'équation de la chaleur doit faire apparaître la dérivée particulaire du champ de température à travers le solide :

$$\rho C_p \left(\frac{dT}{dt} + \vec{\nabla} T \cdot \vec{V} \right) = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{D} + \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T)$$
 (2.31)

D'une part, dans les cas étudiés dans le cadre de la thèse, le terme convectif $\vec{\nabla}T.\vec{V}$ dû à la prise en compte de la vitesse de déplacement du solide peut être négligé. D'autre part, la contrainte et le taux de déformation sont faibles. Le terme de production de chaleur mécanique $\tilde{\sigma}:\tilde{D}$, peut également être négligé, par comparaison avec les autres termes. L'analyse du transfert de chaleur est donc découplée du problème mécanique, la température T, inconnue du problème, ne dépendant pas des contraintes ou des déformations. L'équation de la chaleur (2.9) se simplifie donc :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} - \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) = 0$$
 (2.32)

2.2.2.2 Conditions aux limites

Lorsque le solide est en contact avec un fluide, le transfert de chaleur à l'interface est traduit par une loi convective linéarisée de type Robin :

$$q = -\lambda \frac{dT}{dn} = h(T - T_0) + q_0$$
 (2.33)

avec le coefficient d'échange thermique h avec le milieu extérieur, une température caractéristique T_0 et un flux de chaleur supplémentaire q_0 .

2.2.3 Méthode aux éléments finis

Le code Aster [27] a été utilisé pour les calculs mécanique et thermique au sein des solides considérés. ASTER est un logiciel développé principalement par EDF R&D [7] depuis 1989 en utilisant la méthode des éléments finis pour résoudre les problèmes de mécanique, thermique, acoustique et sismique... Le code est développé en langage FORTRAN et se réfère à de nombreux modules écrits en langage PYTHON. Le choix de se référer à ASTER est principalement lié au fait qu'il s'agit d'un logiciel libre de droit, disponible en Open Source.

En mécanique du solide, l'équilibre du système est exprimé par une formulation « faible », souvent en termes de bilan énergétique, discrétisé par la suite. La méthode des éléments finis utilise une formulation intégrale (formulation faible de Galerkin) pour réduire le problème à un système d'équations algébriques, pouvant être résolu numériquement. Elle est basée sur deux principes fondamentaux : la discrétisation et l'interpolation. La méthode de Rayleigh-Ritz pose les bases des éléments finis en approximant la solution de l'équation différentielle par un nombre fini de fonctions u(x, y, z) dont la forme est connue, sur des formes géométriques simples. Les paramètres sont évalués par la minimisation de l'énergie potentielle du système. L'approximation polynomiale est la plus répandue.

Le principe de la méthode des éléments finis consiste à restreindre la solution continue à un nombre fini de points du domaine, par une technique de discrétisation. Le champ restant inconnu dans le domaine entre les nœuds, un modèle approché et continu est défini par interpolation des valeurs nodales. Pour cela, des fonctions de forme sont utilisées à l'intérieur de chaque maille joignant un groupe de nœuds. L'expression générale de l'interpolation est donnée par :

$$\hat{u}(x,y,z) \approx u(x,y,z) = \sum_{i} N_i(x,y,z)u_i$$
 (2.34)

avec le champ réel continu $\hat{u}(x,y,z,t)$, son approximation continue u(x,y,z,t) et la fonction de forme (ou d'interpolation) $N_i(x,y,z)$ représentant le poids associé au nœud i de l'élément. Les fonctions de forme doivent être continues sur le domaine, conduire à des valeurs uniques du champ en tout point du domaine (c'est-à-dire à l'intérieur de l'élément et sur ses frontières) et satisfaire les valeurs nodales : une fonction $N_i(x,y,z)$ doit donc avoir la valeur 1 au nœud i et 0 à tous les autres nœuds.

La méthode des éléments finis consiste à définir une forme discrétisée de l'équilibre structural (minimisation de l'énergie potentielle, par exemple). Pour plus d'information, la méthode des éléments finis et plus largement détaillée en Annexe n°1. Elle conduit à un système non linéaire dont les inconnus sont les déplacements. Ils peuvent être interprétés comme visant à assurer l'équilibre des efforts interne et externe. Classiquement, le système est exprimé sous forme incrémentale et résolu par une méthode dite de « quasi-Newton ». La résolution du système tangent permet d'obtenir les corrections des incréments des déplacements nodaux ainsi que les contraintes et les déformations en tout point de la structure. Pour résoudre le système matriciel tangent, il existe deux grandes familles de méthodes : « directe » (Gauss, directe par factorisation de la matrice de rigidité, etc.) ou « itérative » (Gauss-Seidel, relaxation, gradient conjugué).

Ce chapitre a rapidement listé les moyens de calcul dans les phases fluide et solide. Il est important de souligne que le code fluide, basé sur une formulation aux frontières immergées, a été retenu car l'idée est de s'appuyer sur une telle formulation pour atteindre une approche multiphysique simplifiée. Le chapitre suivant s'attache à décrire l'approche multi-physique dans le cas de transferts thermiques.

CHAPITRE 3

POTENTIALITES ET LIMITATIONS DES TECHNIQUES AUX FRONTIERES IMMERGEES ASSOCIEES AU TRANSFERT DE MASSE ET DE CHALEUR

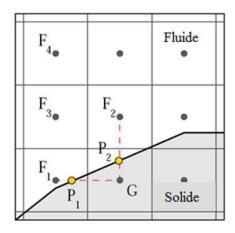
3.1 INTRODUCTION AUX METHODES IBM : VERS UNE APPROCHE MULTI-PHYSIQUES

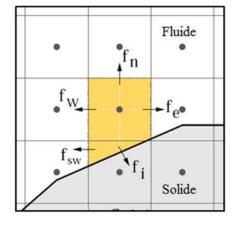
3.1.1 Etat de l'art

La méthode avec frontières immergées a été initialement introduite par Peskin [28] pour étudier l'écoulement sanguin au sein d'un cœur humain. La position des valves et la force élastique qu'elles exercent sur le fluide sont transmises au maillage cartésien par un terme de forçage. Selon la nature du terme de forçage, deux approches différentes : le *forçage continu* et le *forçage discret*.

Dans l'approche forçage continu, le terme source est introduit avant la discrétisation du système d'équations. Cette approche est donc indépendante du schéma numérique. Le terme de forçage contient une approximation de la fonction de Dirac pour localiser la frontière. Cette approximation entraine un lissage des géométries considérées. On peut ainsi voir la frontière comme une interface diffuse. Le forçage continu nécessite également le calcul de la solution à l'intérieur du domaine solide. Par contre, aucune condition aux limites n'est requise pour la pression. Pour l'approche forçage discret, le terme de forçage s'ajoute après la discrétisation. La méthode dépend du schéma de discrétisation ce qui permet de contrôler directement la précision et la stabilité de la simulation. Cette approche permet de considérer des interfaces "pointues" et donc s'adapte même à des géométries complexes. En revanche, la solution à l'intérieur du domaine solide n'est pas calculée. Pratiquement, il y a 2 façons d'imposer les conditions aux limites directement : l'approche de la cellule coupée (*Cut-cell*) et l'approche de la cellule fictive (Ghost-cell) schématiquement mises en évidence Figure 3-1. Les approches cellules coupées sont adaptées aux volumes finis et garantissent la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique totale. Cette technique demeure cependant complexe à mettre en place. D'un autre côté, les approches par cellules fictives sont particulièrement flexibles puisqu'elles permettent une modification de la discrétisation au voisinage de la frontière de manière quasi-transparente; il suffit d'extrapoler une variable fictive à l'ordre voulu et de transposer facilement en 3D avec rapidité, flexibilité et précision.

Les méthodes aux frontières immergées (méthode IBM) offrent la possibilité de traiter des problèmes complexes avec des systèmes dont la géométrie peut fortement varier au cours du calcul. L'introduction des méthodes aux frontières immergées constitue une opportunité de





Méthode de la cellule fictive

Méthode de la cellule coupée

Figure 3-1: Détail de la discrétisation

multi-couplages physiques et malgré les défauts de l'approche discrète explicite [29], notre volonté de traiter des mécanismes de multi-couplage (couplage fluide-structure, régression de surface par combustion, ablation...) requiert un traitement robuste et rapide. La méthode de forçage discret explicite sera donc la méthode retenue. La tendance générale associée à ses techniques de forçage, que ce soit la méthode "forcing" [25] ou la méthode "ghost-cell" [24], est d'introduire un terme source de manière explicite au sein des équations de conservation de la quantité de mouvement assurant alors d'imposer la valeur souhaitée (cette valeur est à interpoler ou extrapoler grâce aux valeurs fluides et à la condition à la limite à imposer aux frontières). Détaillons ce principe sur une formulation incompressible:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = RHS_i + f_i \tag{3.1}$$

avec u_i la composante de vitesse suivant la direction i, RHS_i intégrant l'ensemble des termes convectif, diffusif et de pression et f_i correspondant au terme lié à la méthode IBM. Une discrétisation en temps est faite au "forcing point" (ou "ghost-cell point"), on a donc :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = RHS_i + f_i \tag{3.2}$$

La force f_i n'existe que pour le point proche de la frontière pour prendre en compte la condition aux limites désirée. Soit u_{Ψ} la vitesse calculée par une interpolation ou extrapolation à partir des

points fluides proches et de la condition à imposer à la frontière. La force f_i est donc donnée par:

$$f_i = -RHS_i + \frac{u_{\Psi} - u^n}{\Delta t} \tag{3.3}$$

Au pas de temps suivant, la valeur de vitesse de u_i^{n+1} est donc la valeur u_{Ψ} . Grâce à la fonction f_i , on peut calculer la valeur de vitesse au nouveau pas de temps et cette valeur est évidemment calculée par une méthode d'interpolation ou d'extrapolation.

Ces dernières années, les méthodes IBM ont été utilisées pour appliquer avec succès à de nombreux problèmes de couplage fluide-solide. En effet, on peut citer par exemple des études fluide/structure avec un objet fixe [30], un objet mobile [31,32] voire avec une solide mobile et déformable [33,34]. L'un des objectifs de nos travaux consiste donc à poursuivre la modélisation fluide/structure en se basant sur les méthodes avec cellules fictives en les utilisant dans une modélisation incompressible ou compressible. En effet, cette méthode n'ayant pas besoin de remaillage après chaque mouvement de la structure, le coût des calculs couplés serait alors maitrisé. Dans le cadre de ce travail, le choix s'est porté sur une méthode de couplage explicite, avec une unique évaluation des flux numériques, des forces et des moments par pas de temps. L'objectif d'une telle approche consiste à construire un schéma numérique stable, consistant et dont le coût global n'excède pas significativement le coût total des calculs fluide et solide pris séparément.

3.1.2 Variance des techniques d'interpolation

Comme nous l'avons préalablement indiqué, les techniques discrètes de forçage ont retenu notre attention. La philosophie de telles techniques réside dans l'approximation des valeurs des différents champs immédiatement voisins de la condition limite à traiter. La Figure 3- 2 définit de manière schématique la topologie complète des points du maillage au voisinage d'une paroi. Les définitions suivantes accompagnant les différents points sont listées ci-après :

- **Point fluide**: point fluide n'ayant aucun point solide comme voisin.
- **Point solide**: point dans la partie solide n'ayant comme point fluide comme voisin.
- **Point marqueur** : point définissant l'interface fluide/solide.

- **Forcing point**: point fluide proche de la surface. Il faut donc introduire un terme source pour calculer les variables en ces points.
- **Ghost-cell point**: similaire à la définition du "forcing point" mais côté solide, ils peuvent servir, similairement au forcing point, à la caractérisation des variables (pression, vitesse, température) par interpolation avec les cellules fictives.

• Fluid point
• Forcing point
• Ghost-cell point
• Solid point
• Marker point

Figure 3- 2 Définition de la topologie des différents points fluide, forcing point, solide, ghost-cell et marqueur définissant l'interface fluide/solide

Le principe du forçage discret, que ce soit la méthode des ghost-cell ou des forcing points, est de construire une approximation des valeurs aux nœuds et une telle construction est bien évidemment fonction du type de condition aux limites à appliquer, i.e. conditions de Dirichlet, de Neumann voire condition mixte de Robin :

• Condition de Dirichlet :
$$\Phi|_{O} = f$$
 (3.4)

• Condition de Neumann :
$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_{\Omega} = f$$
 (3.5)

• Condition de Robin :
$$\alpha \Phi + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\Omega} = f$$
 (3.6)

avec Φ la variable à considérer. La valeur est calculée grâce à une formule d'interpolation ou d'extrapolation. L'interpolation est dédiée au forcing point alors que l'extrapolation est induite dans le cas d'un ghost-cell point. Dans le premier cas, prenons par exemple le forcing point FP (Figure 3- 3) dont sa projection sur la surface frontière est le point BI. La valeur des paramètres (vitesses, pression, température,...) au point FP est déduite par une interpolation entre les points formant le triangle entourant le point FP. Dans le cas d'une construction à partir d'un ghost-cell point (par exemple le point GC dont la projection sur l'interface est le point BI), l'extrapolation

peut conduire à de fortes instabilités et mettre en péril l'intégrité même du calcul. Pour éviter d'en arriver là, la plupart des travaux utilisant la notion de Ghost-cell point transforme ce traitement en une interpolation. Pour cela, le point GC est projeté dans le domaine fluide et une interpolation de ce point image contenu dans un domaine dont les nœuds correspondent à des points fluides (point fluide ou forcing point) est réalisée (Figure 3- 3).

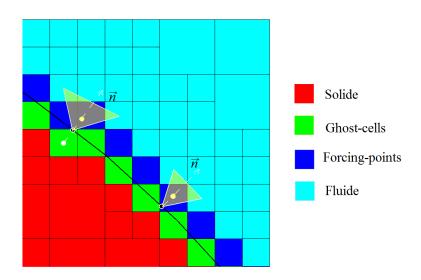


Figure 3- 3 Présentation de la méthode IBM avec quatre catégories de points (fluide, forcing-point, ghost-cell point et solide)

Tout d'abord, le maillage cartésien adaptatif est divisé en quatre catégories de points différents : nœuds fluides, forcing-points, ghost-cells points et nœuds solides. Détaillons l'application de ces forcing points F_i^k :

$$F_i^k = \frac{u_s - \tilde{u}_i^k}{\Delta t} - RHS_i^k \tag{3.7}$$

où *RHS*_i^k contient les termes de convection, de viscosité et du gradient de pression. En raison du fait que la plupart des forcing-points ne coïncident pas avec les frontières solides, les vitesses, température et pression sont alors reconstruites par une procédure d'interpolation quadratique. En 2D, la fonction d'interpolation s'écrit :

$$\phi = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_2 x y + a_4 x^2 + a_5 y^2$$
(3.8)

Les six constantes du polynôme sont évaluées à partir de cinq nœuds fluides voisins et du point sur la paroi. Pour les conditions aux limites de type Dirichlet, a_i est calculé par :

$$a = B^{-1}\phi \tag{3.9}$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 & x_0^2 & x_0 y_0 & y_0^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 \end{pmatrix}$$
(3.10)

Pour les conditions aux limites de Neumann (gradient de pression imposé ou gradient de température imposé), la forme de la matrice *B* change légèrement :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\sin(\theta_0) & \cos(\theta_0) & -2\sin(\theta_0)x_0 & \cos(\theta_0)x_0 & 2\cos(\theta_0)y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 \end{pmatrix}$$
(3.11)

avec θ_0 la pente locale au niveau du nœud frontière. Finalement, les coefficients peuvent être obtenus systématiquement pour la reconstruction :

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_5 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \\ \phi_1 \\ \dots \\ \phi_5 \end{pmatrix}$$
(3.12)

avec $\partial \phi_0 / \partial n$ la condition Neumann pour la pression ou la température. Ce traitement aux frontières immergées peut s'appliquer sur un obstacle rigide et sans mouvement mais également sur un objet déformable et en mouvement.

Les techniques d'interpolation, comme celle présentée auparavant, sont multiples et le Tableau 3.1 recense la majorité des formules disponibles dans la littérature. Comme le tableau le souligne, les formulations vont d'une simple interpolation mettant en jeu deux points à l'utilisation d'une multitude de points.

Désignation	Formulation	Ordre	Référence
2 points	$\phi(x) = c_1 x + c_2$	1	[22]
3 points	$\phi(x, y) = c_1 x + c_2 y + c_3$	1	[25]
4 points	$\phi(x, y) = c_1 xy + c_2 x + c_3 y + c_4$	1	[32]
6 points	$\phi(x, y) = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 xy + c_4 x^2 + c_5 y^2$	2	[24]
N points	$\phi(x', y', z') \approx \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} c_{ijk}(x')^{i}(y')^{i}(z')^{i}$	Dépend de N	[33]
	avec $i + j + k \le N$		

Tableau 3.1 : Liste des principales formulations d'interpolation identifiées dans la littérature

En imposant, par exemple, une condition de Dirichlet à la frontière, le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}$$
(3.13)

Dans le cas d'une condition de Neumann à la paroi, on a alors :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\Omega} = \Phi_0 = \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y = c_1 n_x + c_2 n_y$$
(3.14)

On a donc,

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & n_x & n_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \Phi_0 \end{bmatrix}$$
 (3.15)

Ainsi, quelle que soit la condition aux limites considérée (Dirichlet, Neumann ou Robin), l'obtention des coefficients d'interpolation est assez aisée; dans le cas du traitement d'une surface immobile, les coefficients calculés au préalable sont conservés. Lorsque la géométrie est mobile, la procédure de détermination des coefficients d'interpolation est à effectuer à chaque

mise à jour de la géométrie. Cette procédure s'applique évidemment à une interpolation en trois dimensions nécessitant plus de points.

3.2 COUPLAGE FLUIDE – THERMIQUE

3.2.1 Conditions aux limites à l'interface

Le couplage fluide-thermique traite de l'interaction thermique entre deux domaines fluide et solide (fixe et indéformable) présentant une surface commune. Notre objectif est d'étudier les interactions thermiques entre un domaine fluide et un domaine solide, ce qui implique de coupler les équations de Navier-Stokes et de transfert d'énergie par conduction dans le solide. La résolution de chacun des systèmes fluide et solide a été exposée dans les chapitres précédents. Notons que le rayonnement dans cette étude n'est pas pris en compte.

Dans le cas d'un couplage fluide/solide, Giles [35] a montré qu'une condition de température vue par le fluide (condition de type Dirichlet) et une condition de flux imposé par le fluide à la paroi solide (condition de type Neumann) assure une certaine stabilité numérique, cette approche ayant été réalisée par une étude monodimensionnelle. L'étude des conditions à l'interface dans le cas d'un couplage fluide/thermique stationnaire par décomposition de domaines, réalisée par Roux et Garaud [36], a permis de généraliser les résultats obtenus par Giles et de confirmer que les conditions de Dirichlet sont préférablement à imposer aux frontières du domaine qui présente la conductivité thermique la plus faible. Dans un second temps, l'étude du complément de Schur [37] a permis de mettre en évidence l'instabilité potentielle de cette condition de Dirichlet-Neumann. La convergence peut être améliorée en introduisant un paramètre de relaxation dans la condition de température à l'interface, la vitesse de convergence étant liée à la valeur de ce paramètre ; le processus peut être lent si le coefficient de relaxation est faible. L'utilisation d'une condition mixte de Robin (ou de Fourier) permet non seulement de formuler le problème local associé de manière appropriée (contrairement à la condition de Neumann) mais aussi d'introduire une raideur d'interface, ce qui force les frontières des deux domaines à se comporter de la même manière. Egalement préconisé par Chemin [38], ce type de conditions de raccord mixte a prouvé son efficacité en terme de gain en stabilité dans le cas de couplages fluide/thermique. La condition aux limites de Fourier est en fait une combinaison linéaire des équilibres des flux de chaleur $(q_s = -q_f)$ et des températures $(T_s = T_f)$), de sorte que :

$$q_s + \beta T_s = -q_f + \beta T_f \tag{3.16}$$

Les températures T_s et T_f correspondant respectivement à la température de paroi exprimée côté solide et à la température de paroi côté fluide. Le coefficient numérique β est homogène à un coefficient de transfert de chaleur. En arrangeant l'équation (3.16)**Erreur! Source du renvoi introuvable.**, on obtient :

$$q_s = -q_f - \beta (T_s - T_f)$$
 (3.17)

A la place du coefficient β , Chemin [38] préconise d'utiliser le coefficient d'échange h_f calculé par le code fluide. D'une part, cela permet de respecter la condition aux limites en considérant T_0 comme la température de référence fluide et le flux comme sortant du fluide (donc entrant dans le solide : le signe est inversé), la condition (3.9) devient :

$$q_s = -h_f(T_s - T_0) (3.18)$$

D'autre part, coté fluide, en négligeant la contribution radiative, le flux sortant peut s'exprimer selon une loi convective en fonction des paramètres de l'écoulement stationnaire :

$$q_f = h_f (T_f - T_0) \tag{3.19}$$

Ainsi, à l'interface du couplage fluide-thermique, une condition aux limites de Dirichlet est imposée côté fluide alors qu'une condition de Fourier est imposée côté solide :

$$T_f = T_s (3.20)$$

$$q_s = -q_f - h_f \left(T_s - T_f \right) \tag{3.21}$$

L'emploi de ces conditions aux limites implique la continuité des températures et des flux de chaleur à l'interface fluide-structure, ce qui permet d'assurer le couplage conduction-convection. En effet, lorsque l'équilibre $T_f - T_s$ est atteint, l'équation (3.21) donne bien $q_s = -q_f$.

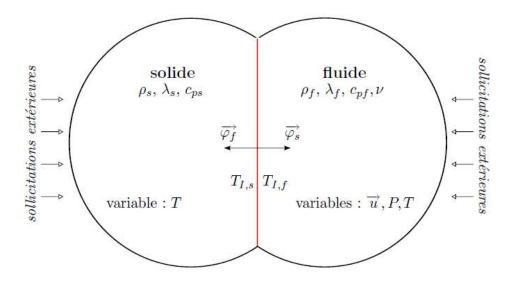


Figure 3- 4: Schéma théorique des transferts de chaleur : interactions thermiques fluide/solide

3.2.2 Schémas de couplage IBM/ASTER

Dans notre approche couplée fluide/thermique, la volonté de coupler notre modèle à un code existant traitant les transferts dans la partie solide a conduit à étudier le couplage entre le code fluide du laboratoire et le code ASTER. Alors que l'approche fluide est un solveur développé au sein de notre équipe et est basé sur une approche différences finies et une modélisation aux frontières immergées [1], ASTER [27] est un code open source capable de traiter l'approche mécanique des structures tout en considérant les transferts, l'aspect numérique étant réalisé par une approche de type Galerkine par des éléments finis. Notre volonté est d'utiliser un code maison avec traitement aux frontières immergées côté fluide et coupler ce dernier avec des codes mécaniques existants en se focalisant sur l'aspect de couplage.

En effet, le couplage sert de relais d'informations entre les deux codes échangeant les grandeurs thermiques au niveau de leur interface commune. Les grandeurs provenant d'un code sont utilisées pour calculer les conditions aux limites à imposer à l'autre code. L'avantage est que la généralité et la specificité de chaque code est conservée. De plus, aucune intrusion n'est faite dans les parties fluide et solide car le couplage consiste simplement à un échange d'informations. Une méthode de couplage définie peut donc être appliquée à différents codes, dans la mesure de la compatibilité des formats d'entrée et de sortie de chaque solveur. Un autre avantage est que ce processus offre la liberté de faire évoluer deux codes de manière indépendante, et d'utiliser des pas de temps différents pour chacun d'entre eux. Un pas de temps

approprié peut donc être choisi dans chacun des domaines et ainsi réduire le cout du calcul de manière significative. L'inconvénient de cette méthode provient du caractère non conservatif que peut offrir l'échange des données. L'échange des grandeurs à l'interface nécessite que l'énergie extraite à un système soit exactement égale à celle reçue par l'autre système. Une perte ou un gain d'énergie sur l'ensemble des domaines induit alors une erreur sur le résultat du calcul.

Il existe trois grandes catégories de processus, schématisées sur la Figure 3-5, Q représentant l'ensemble des quantités échangées entre solveurs : la température en chaque point de l'interface T, le flux de chaleur sortant φ et un éventuel paramètre numérique h lié au modèle de couplage :

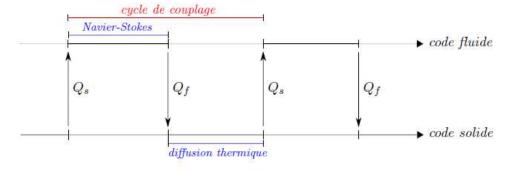
$$Q_f = (T_f, \varphi_f, h_f) \tag{3.22}$$

$$Q_f = (T_f, \varphi_f, h_f) \tag{3.23}$$

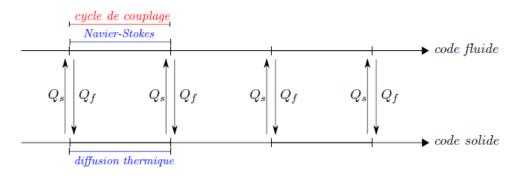
$$Q_{\scriptscriptstyle S} = (T_{\scriptscriptstyle S}, \varphi_{\scriptscriptstyle S}, h_{\scriptscriptstyle S} \tag{3.24})$$

Le processus successif décrit l'intégration alternée de chaque code (Figure 3- 5(a)). Lorsqu'un code a réalisé son calcul, les données de l'interface partagée avec l'autre code sont échangées et ainsi de suite. Un pas de temps de couplage Δt_c correspond alors à deux échanges. Le deuxième processus correspond aux intégrations simultanées des codes, échangeant leurs quantités à l'interface au même instant Figure 3- 5 (b)) et effectuant leurs calculs en parallèle. Le dernier cas (Figure 3- 5(c)) est inspiré du processus successif, les calculs de chaque domaine, étant réalisés l'un après l'autre, sont réitérés jusqu'à atteindre un critère de convergence fixé au préalable.

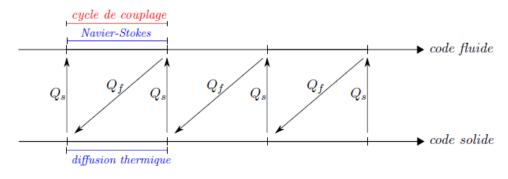
La procédure de couplage utilisée dans le cadre de cette partie est le processus de couplage itératif avec l'algorithme développé sous-cyclé (cf. Figure 3- 6). La première variante de l'algorithme retenu provient de la constatation suivante : la taille des pas de temps doit y être à la fois convenable côté fluide et côté structure. Généralement, les phénomènes fluides nécessitent des pas de temps beaucoup plus petits que ceux de la structure (d'un facteur 100 ou 1000). Ainsi, le sous-cyclage consiste à ne réaliser le couplage qu'à certains instants, par exemple à la fréquence de la physique la plus lente. La physique la plus rapide ne sera donc couplée qu'à certains de ses pas de temps. L'algorithme résultant est, suivant le rapport entre les temps caractéristiques des deux physiques, beaucoup plus « léger » et ne dégrade pas nécessairement la stabilité de la solution couplée.



(a) processus de couplage successif



(b) processus de couplage simultané



(c) processus de couplage itératif

Figure 3-5: Différents stratégie de processus de couplage des codes en aérothermique

Détaillons les conditions aux limites imposées à l'interface du couplage :

$$T_f^n = T_s^n \tag{3.25}$$

$$\varphi_s^n = \varphi_f^{n+1} \tag{3.26}$$

avec T^n la température à l'instant n et les indices f et s correspondant à la partie fluide et solide respectivement et φ^n le flux de chaleur à l'interface. Les étapes de la résolution du système couplé sont :

- a) Calcul du flux côté fluide à l'interface φ_f^{n+1} à l'instant de couplage $t^{n+1} = t_c + \Delta t_c$, avec sous-cyclage de pas de temps Δt_f ,
- b) Transfert des quantités φ_f^{n+1} du fluide vers le solide,
- c) Le solveur solide utilise le flux de chaleur $\varphi_s^n = \varphi_f^{n+1}$ comme la condition aux limites pour calculer l'état à l'instant t^{n+1} notamment la température du solide T_s^{n+1} ,
- d) Transfert des températures T_s^{n+1} à l'interface du fluide vers le solide.

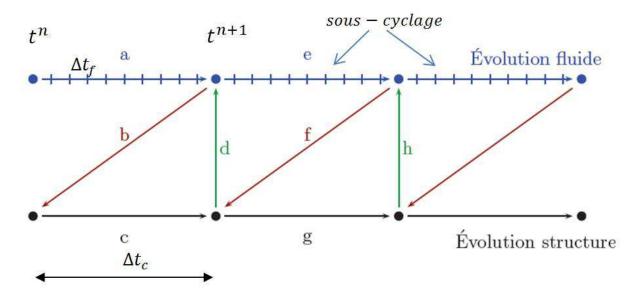


Figure 3- 6: Processus de couplage retenu

Un algorithme de couplage a ainsi été proposé et est schématiquement présenté Figure 3-7. Comme cela est souligné, 4 étapes constituent l'algorithme et détaillons les ci-après :

1. Phase d'initialisation

Cette phase est nécessaire des deux côtés du modèle, i.e. côté mécanique et fluide et elle possède trois sous-étapes :

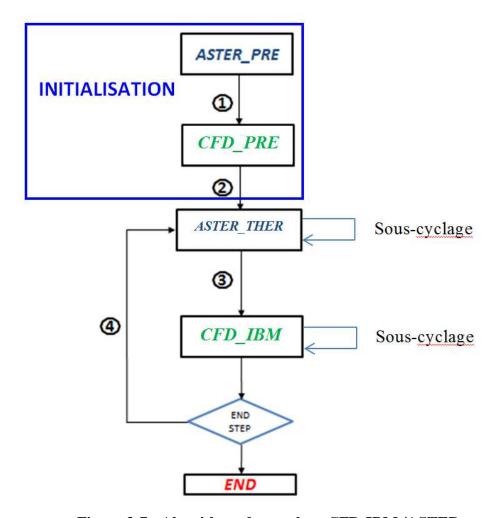


Figure 3-7: Algorithme de couplage CFD-IBM /ASTER

- Traitement du maillage pour les deux parties mécanique et fluide :

Le maillage du problème mécanique est effectué par le logiciel SALOME en format .med assurant une lecture par le code ASTER. Dans notre cas, on crée simplement un maillage volumique quadra ainsi qu'un maillage surfacique en triangle au niveau de l'interface fluide/structure.

Pour le domaine fluide, le code requiert en fait un maillage régulier maillant à la fois la partie solide et la partie fluide mais la séparation des deux nécessite un maillage surfacique. Tout domaine de la partie fluide est maillé simplement avec le maillage volumique cartésien régulier. En effet, le code fluide récupère directement le maillage surfacique à partir de la partie mécanique (du code ASTER) et en partageant aussi les mêmes points définissant l'interface.

- Définition des paramètres du couplage et des paramètres de simulation des deux parties CFD et Thermique : pas de temps, matériaux, conditions aux limites.
- Définition de l'état initial du système.

2. Code Thermique (ASTER)

Concernant la partie thermique solide, les échanges suivants sont effectués :

- En entrée, la partie ASTER-THER doit récupérer les informations de flux de chaleur sur toutes les mailles surfaciques et les utiliser comme conditions aux limites. ASTER-THER effectue alors une résolution du problème thermique permettant l'accès aux distributions de température dans le solide.
- Sortie : Températures aux nœuds sur l'interface.

Les informations des températures sont traitées et stockées en mémoire pour un transfert vers la partie fluide.

3. CFD-IBM

- Entrée : ASTER-THER donne les informations de la température du solide et une nouvelle température de l'interface est alors définie. Parce que le solide est fixe et indéformable, le code fluide avec traitement IBM n'a pas besoin de mettre à jour les coefficients d'interpolation (§3.1.1.2) et l'écoulement peut être calculé rapidement.
- Sortie : Flux de chaleur au niveau des éléments (mailles) surfaciques de l'interface fluide/structure. Le flux de chaleur par unité de surface est une fonction linéaire du gradient thermique :

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \tag{3.27}$$

avec λ la conductivité thermique et Γ représente l'interface solide/fluide. Dans notre modèle, la surface du corps solide est composée de mailles triangles non-structurées. Le flux de chaleur sur chaque élément surfacique est estimé par une procédure d'interpolation de la distance inverse des points de projection des forcing-point sur la surface. Le point référant de chaque élément triangle est le centre de l'élément (CE) calculé par :

$$x_c = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \tag{3.28}$$

$$y_c = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \tag{3.29}$$

$$z_c = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \tag{3.30}$$

La procédure d'interpolation cherche les points de projection des forcing-point sur la surface les plus proches du point référant de l'élément (cf. Figure 3- 8). Ensuite, on peut

alors estimer le flux de chaleur q sur les éléments surfaciques au niveau de l'interface F/S par une interpolation de la distance inverse :

$$q_c = \frac{\frac{1}{d_1}q_1 + \frac{1}{d_2}q_2 + \frac{1}{d_3}q_3}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3}}$$
(3.31)

avec q_c , q_i et d_i le flux de chaleur au point référant, les flux des points d'interpolation (les points de projection des forcing-point sur la surface) et les distances entre le point référant et les points d'interpolation respectivement.

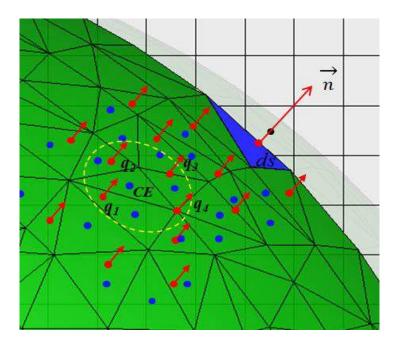


Figure 3-8: Interpolation pour calculer les flux de chaleur

4. Passage des conditions aux limites

Le passage des conditions aux limites est effectué par l'échange des informations du couplage à l'interface fluide/structure, c'est-à-dire de la température solide vers le fluide et du flux de chaleur pariétal en retour. Pour assurer ce transfert de manière efficace, l'ensemble des données nécessaires aux échanges est transféré en mémoire. Les deux codes CFD-IBM et ASTER communiquent alors par l'intermédiaire du gestionnaire de mémoire JEVEUX et le SUPERVISEUR d'exécution du code ASTER.

o JEVEUX : gestion dynamique d'une zone mémoire dont la taille est précisée parmi les paramètres d'exécution et éventuellement allouée et désallouée

- dynamiquement. Une telle structure permet de créer, utiliser, décharger sur disque et détruire des objets nommés.
- o Le Superviseur est un ensemble de routines disponibles en langage Fortran, langage C et en langage Python. Il fournit un ensemble de fonctions permettant de dénombrer les valeurs associées aux mots-clés des commandes et éventuellement de récupérer ces valeurs à la demande.

Avec la programmation de quelques routines Fortran pour l'introduction des nouvelles commandes au code ASTER, et en utilisant les fonctions du JEVEUX (JECREO, JEECRA, JEVEUO) et du SUPERVISEUR (GETXXX), un système de communication a ainsi pu être mis en place de manière relativement aisée.

3.2.3 Ecoulement au sein d'une canalisation thermorégulée

a) Contexte de l'étude

Après avoir programmé le couplage précédemment décrit, un calcul de validation a été conduit et l'expérience aérothermique instationnaire réalisée par le Laboratoire de Thermo-Mécanique (LTM) de l'Université de Reims Champagne-Ardenne pris comme référence [38]. Cette expérience modélise un cas de convection laminaire forcée sur une plaque plane (cf. Figure 3-9). Un flux de chaleur (condition de Neumann) est imposé en face arrière de la plaque à l'aide de projecteurs halogènes. L'instationnarité du problème est provoquée par deux changements instantanés du flux imposé en face arrière, passant d'une valeur nulle à un premier palier, puis à un second palier (cf. Figure 3-9). Le but de ces essais est de déterminer l'évolution de la température à la paroi en contact avec l'air en fonction du temps. L'évolution des températures est mesurée en cinq abscisses de la face avant de la plaque : x = 5, 11, 17, 20 et 23 cm à l'aide d'une caméra infrarouge.

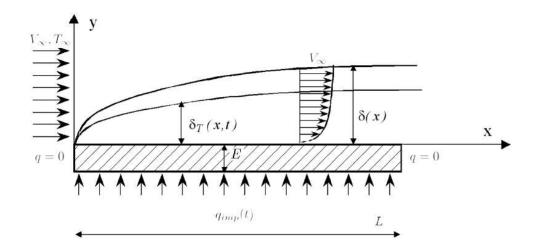


Figure 3-9: Schéma de développement des couches limites aérodynamique δ_x et thermique $\delta_t(x,t)$

La plaque plane rectangulaire test est en PVC (choisie pour sa faible conductivité thermique) offrant une épaisseur E=12~mm et une longueur L=35~cm. Initialement (à t=0~s), la paroi est à la même température que l'air dont l'écoulement est établi (état isotherme) $T(x,y,0)=T_{\infty}=300K$. La face arrière de la plaque est alors soumise à un premier échelon de flux thermique $q_{imp}(t)=140\pm10W/m^2$ et ce flux est maintenu jusqu'à t=5400~s où un second échelon $q_{imp}(t)=170\pm20W/m^2$ est appliqué pour une durée identique au précédent (cf. Figure 3-10).

Caractéristiques de l'air		Valeur		
Masse volumique	$ ho_f$	1.1614 kg/m3		
Viscosité dynamique	μ_f	$184,6 \times 10^{-7} N. s/m2$		
Conductivité thermique	λ_f	$23.6 \times 10^{-3} \ W/m/K$		
Chaleur spécifique à pression constante	C_{p_f}	1007 J/kg/K		

Tableau 3.2 Caractéristiques de l'air

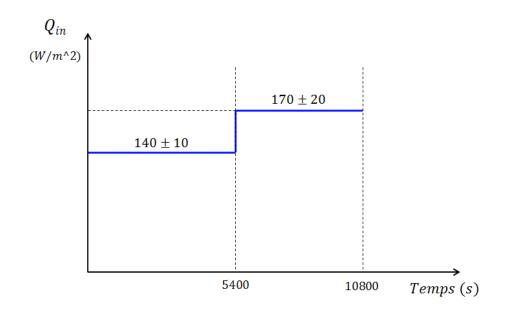


Figure 3-10: Evolution du flux de chaleur appliqué

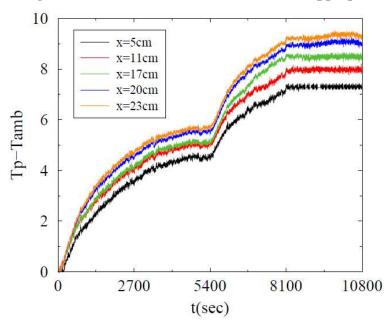


Figure 3-11: Evolution des températures expérimentales aux cinq positions x = 5, 11, 17, 20, 23 cm.

Côté fluide, un écoulement d'air de vitesse homogène $V_{\infty} = 5.6 \pm 0.7 \, m/s$ est généré sur la face avant de la plaque plane. Les caractéristiques thermophysiques prises pour l'air sont présentées dans le Tableau 3.2. La Figure 3-11 présente l'évolution de la température pariétale par rapport à la température ambiante Tamb suite aux deux échelons mesurée par LTM. Ces résultats expérimentaux ont permis à Chemin [38] de valider une méthode de couplage aérothermique en régime transitoire en utilisant le même algorithme de couplage présenté §3.1.2.1 et §3.1.2.2 mais utilisant des codes de calculs (MSD côté fluide et ZeBuLoN côté solide). L'objectif de cette

étude numérique est de retrouver des résultats de calcul fluide/thermique équivalents en utilisant un solveur fluide IBM développé par notre équipe et le solveur thermique open source ASTER de l'EDF. En retenant la même configuration que celle expérimentalement utilisée, l'idée est de pouvoir comparer directement nos résultats avec ceux de la littérature.

b) Couplage fluide/thermique

Dans le cadre de notre étude, il est apparu intéressant de considérer la configuration ainsi proposée et conduire des simulations avec notre stratégie de couplage précédemment décrite. Une simulation couplée fluide/thermique a donc été réalisée et les résultats numériques sont comparés aux mesures expérimentales pour souligner la consistance de la démarche proposée. Le domaine de calcul est schématisé Figure 3-12 et la géométrie considérée s'appuie sur celle décrite dans l'approche expérimentale. Les conditions aux limites imposées sont évidemment choisie afin de correspondre à la configuration expérimentale, les dimensions du domaine étant de 20mm, 200mm et 350mm suivant les directions X, Y, Z respectivement.

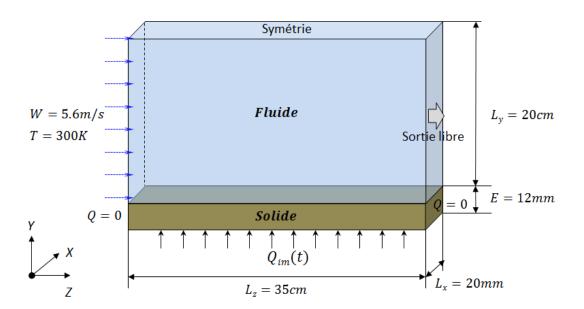


Figure 3-12: Configuration de l'étude

Caractéristiques de la plaque		Valeur
Largeur	L_x	10 <i>mm</i>
Longueur	L_z	350 mm
Epaisseur	E	12 mm
Masse volumique	$ ho_s$	$1200~kg/m^3$
Conductivité thermique	λ_s	0,16 W/m/K
Chaleur spécifique à pression constante	C_{p_s}	1400 J/kg/K

Tableau 3.3 : Paramètres caractéristiques de la plaque

Le Tableau 3.3 présente les principales propriétés thermophysiques de la plaque que l'on considérera constant dans la plage des températures étudiée. La discrétisation spatiale est quant à elle, composée de 1120 cellules TETRA et 650 nœuds (cf. Figure 3-13).

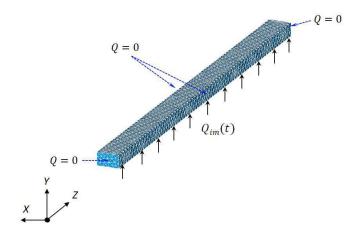


Figure 3-13: Maillage de la plaque

En supposant que la plaque est isolée thermiquement à ses extrémités, une première condition aux limites de flux nul (adiabatique) est imposée sur les faces perpendiculaires à la direction de l'écoulement (x = 0 et L):

$$Q_s(0, y) = 0 (3.32)$$

$$Q_s(L, y) = 0 (3.33)$$

L'application d'un flux constant sur la face arrière de la plaque (en y=-E) est définie par la condition :

$$Q_s(x, -E) = \lambda_s \frac{\partial T(x, -E, t)}{\partial y} = Q_{imp}(t)$$
 (3.34)

A l'interface fluide-structure, la condition imposée est du type :

$$Q_s(x,0) = \lambda_s \frac{\partial T(x,0,t)}{\partial y} = \lambda_f \frac{\partial T_f(x,0,t)}{\partial y}$$
(3.35)

C'est-à-dire que l'on impose l'égalité des flux à l'interface. Dans la zone fluide, la répartition longitudinale des mailles est régulière dans le sens de l'écoulement avec $\Delta Z = 2 \, mm$. Le domaine fluide contient donc au total 84000 cellules. Les conditions aux limites imposées aux frontières du domaine fluide sont les suivantes :

- une vitesse d'entrée de $W = 5.6 \, m/s$ en direction Z,
- une sortie libre à pression ambiante (p = 1atm),
- une paroi couplée à l'interface fluide-structure, telle que : $V_p=0$; $T_p=T_s$
- une condition de symétrie sur les autres faces du domaine.

D'un point de vue mécanique, la paroi est indéformable et il s'agit d'une condition de paroi sans glissement ($\vec{V}=0$). A t=0 s (instant initial), le champ de température est constant et homogène fixé à 300 K. La vitesse de l'écoulement étant de 5.6 m/s et la plaque mesurant 0.35 m de long, une particule fluide met approximativement 0.06 s pour effectuer le trajet et un pas de temps fixé à 0.005 s est initialement retenu pour les calculs fluide. Ce dernier est cependant contrôlé par CFL. Au sein du couplage aérothermique, l'influence du fluide sur le solide est prise en compte par l'intermédiaire d'un calcul Navier-Stokes. Il s'agit de l'algorithme de couplage présenté Figure 3-6. Les conditions aux limites de Dirichlet-Neumann sont imposées sur la face solide au contact du fluide :

$$T_f^n = T_s^n (3.36)$$

$$q_s^{n+1} = -q_f^n (3.37)$$

avec le pas de temps du couplage choisi égal au pas de temps du calcul thermique $\Delta t_s = \Delta t_c = 20 \text{ s}$.

L'évolution des températures a été relevée en cinq abscisses sur la face avant de la plaque : $\mathbf{Z} =$ 5, 11, 17, 20 et 23 cm. Les résultats correspondent aux différences de température (T-Tambiante) caractérisant l'échange entre l'air et la paroi. Les champs de température de la plaque en fonction du temps en 3D sont présentés Figure 3-14 tandis que les évolutions des températures calculées par couplage fluide/thermique sont tracées Figure 3- 15. Par comparaison avec l'expérience menée par Chemin (cf. Figure 3- 15), nous pouvons faire quelques remarques. Globalement, les résultats obtenus par le calcul sont en bon accord avec ceux obtenus numériquement et expérimentalement par Chemin. On constate que les valeurs numériques sont très proches des valeurs expérimentales pour le premier échelon et la première partie du deuxième échelon. En effet, l'erreur relative entre les valeurs calculées et mesurées à la fin de la première phase de l'expérience est de moins de 10 %. Cependant, on observe, à partir de $t = 6000 \, s$, une différence plus marquée à cause d'une décroissance anormale du profil expérimental. Comme Chemin [38] l'a indiqué, cette décroissance est due à une modification des conditions de mesures et plus précisément une modification de la température de l'air ambiant provoquée par des perturbations extérieures (courants d'air dans la pièce).

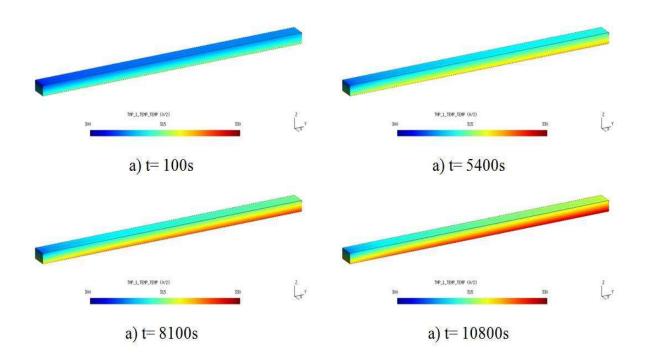


Figure 3-14: Champ de température du solide

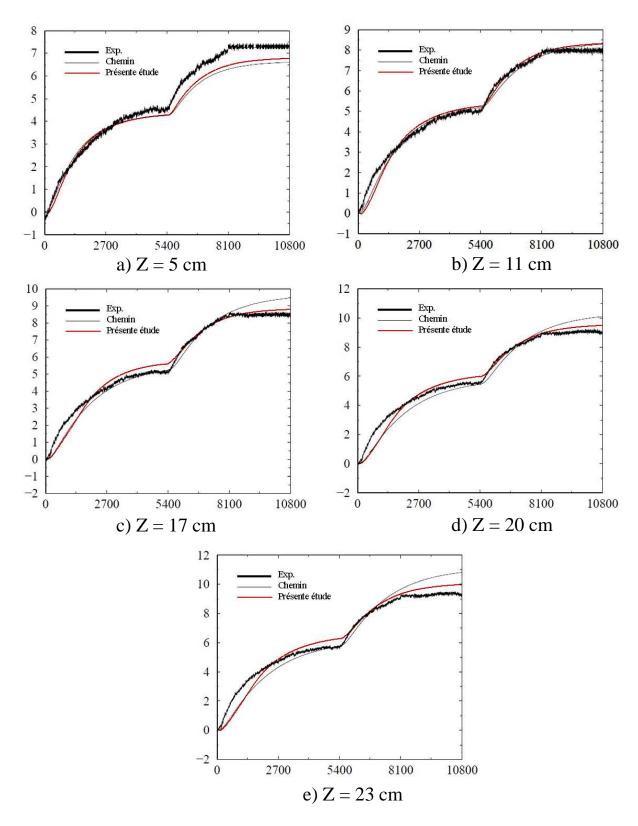


Figure 3- 15: Evolution des températures au niveau des 5 positions longitudinales de référence

Les différences entre les valeurs expérimentales et numériques peuvent globalement s'expliquer par la détermination de certaines données de l'expérience comme les conditions aux limites (vitesse et température d'arrêt, paroi adiabatique en entrée/sortie) et les caractéristiques physiques de la plaque (conductivité thermique et capacité calorifique) : elles comportent une marge d'erreur par rapport à la réalité de l'expérience et entraînent fatalement des écarts au niveau des températures. De plus, la diffusion de la chaleur intervient expérimentalement dans la troisième direction alors que les calculs effectués par Chemin sont réalisés en 2D. Notre calcul 3D offre des résultats globalement plus proches des résultats expérimentaux ce qui peut s'expliquer par la prise en compte 3D instationnaire.

La Figure 3- 16 présente dans le plan médian le champ de température moyen côté fluide et côté solide et pour le point milieu de la surface de la plaque (Z = 17 cm), les profils de température et vitesse sont également présenté Figure 3- 17. Dans le solide, un profil linéaire de température a trouvé, lors dans le fluide, un profil de couche limite thermique de 12 mm et de vitesse sont retrouvé au niveau de la paroi (cf. Figure 3- 16 et Figure 3- 17). On constate que le champ de température varie de manière continue au niveau de l'interface fluide/solide (cf. Figure 3- 16 et Figure 3- 17) montré le fonctionnement du calcul de couplage.

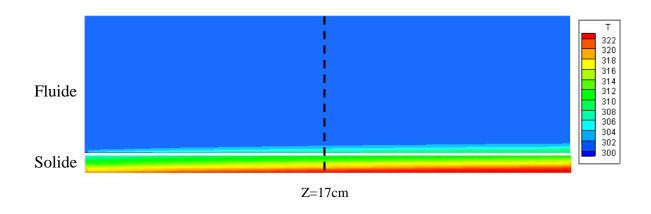


Figure 3- 16: Champ continu de température fluide-solide

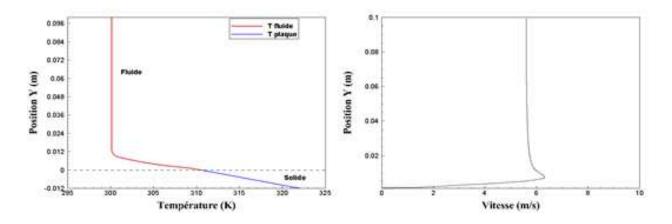


Figure 3- 17: Profils de température et de vitesse à Z=17cm

Les résultats obtenus sur le cas de validation ont montré que l'algorithme retenu donnait de très bons résultats. Nous avons validé avec succès notre méthode de couplage retenue grâce à des données expérimentales instationnaires au cours d'un transfert le long d'une plaque plane.

3.3 TRAITEMENT DES OUVRANTS/OBJETS MOBILES

3.3.1 Accessibilité directe

La problématique de systèmes mobiles en mécanique des fluides devient une thématique de plus en plus abordée et les modèles adaptés de plus en plus usuels. Lorsque l'on s'intéresse à un corps en mouvement dans le domaine de calcul, comme par exemple le déplacement d'un objet au cours du calcul, quelques méthodes numériques existent comme la méthode du maillage mobile lagrangien avec suivi d'interface [39]. Cette méthode permet de combiner les avantages de la représentation lagrangienne (bonne définition des frontières mobiles, facilité d'imposer les conditions aux limites adéquates) et ceux de la formulation eulérienne (possibilité de prise en compte de grandes distorsions). La partie solide se déplace par rapport au maillage, comme pour une formulation eulérienne pure, mais la forme extérieure des éléments est contrôlée par les conditions aux limites du problème, comme dans une formulation lagrangienne. Hirt et al. [40] utilisent une technique ALE (« Arbitrary Langragian Eulerian ») associée à des discrétisations par différences finies pour étudier l'effet de chocs dans des conduites, les écoulements autour d'obstacles voire les écoulements instables ou les écoulements dans l'atmosphère en présence d'explosion. Nomura [41] et Nomura et Hughes [42] simulent également des écoulements dans

lesquels un solide, considéré comme indéformable, est en mouvement. En se basant sur la technique ALE, un modèle de DYNAMIC MESH dans FLUENT peut être utilisé pour modéliser les écoulements où la forme du domaine est en train d'évoluer dans le temps en raison du mouvement sur les frontières du domaine. Le mouvement peut être un mouvement prescrit ou un mouvement non prédéterminé. La mise à jour du maillage volumique est traitée à chaque pas de temps basée sur les nouvelles positions des frontières. Lorsque le déplacement de la structure est en translation ou en rotation uniquement, des techniques de glissement des maillages dites de « Sliding mesh » sont mises en œuvre. Une mise à jour du maillage volumique est à traiter à chaque pas de temps. Par exemple, Baker et al. [43] ont étudié une pale de turbine en rotation avec succès en utilisant la technique « Sliding mesh » pour différents nombres de Reynolds. Steijl et Barakos [44] ont, quant à eux, étudier les interactions entre un rotor en rotation et le fuselage d'un hélicoptère. Ce choix permet de gérer le problème de frontières mobiles. Par contre, cette méthode requiert une procédure de remaillage à chaque mouvement du solide. De plus, traiter des grandes déformations est difficile.

Bien entendu, que ce soient les méthodes ALE ou bien la technique de Sliding mesh, ces techniques requièrent des phases de remaillage conséquentes qui complexifient grandement l'accessibilité à ces techniques. Or, dans les années 70, une nouvelle technique prometteuse avait été proposée par Peskin [28], la technique aux frontières immergées. En fait, comme nous l'avons préalablement évoqué, le principe de la méthode immergée est de prendre en compte une paroi au sein d'un maillage cartésien régulier, l'effet du frottement étant alors modélisé par des termes sources. S'agissant numériquement de traiter des termes sources, la gestion du mouvement d'un objet au cours du calcul en est alors d'autant plus aisée à modéliser et explique sans aucun doute le succès grandissant de cette technique à partir des années 2000. En effet, les méthodes IBM connaissent depuis lors un véritable regain d'intérêt notamment pour traiter les interactions fluide/structure. Borazjani et al. [30] ou encore Yang et al. [31], pour n'en citer que deux, ont utilisé les méthodes aux frontières immergées pour simuler le comportement de plusieurs cylindres en mouvement de manière oscillatoire dans un domaine fluide avec le nombre de Reynolds faible (Re = 90-200). La méthode IBM s'en est alors retrouvée des plus efficaces et la communauté scientifique devient de plus en plus active dans ce domaine.

Dans le cadre de cette thèse, une méthode fictive pour traiter le problème du solide mobile est préférée. Le principe de cette méthode est de superposer un solide mobile sur un domaine fluide fixe, et d'imposer des conditions différentes entre les domaines pour intégrer la non-pénétration du fluide à travers la frontière solide. L'algorithme préalablement présenté des méthodes aux frontières immergées est directement applicable aux problèmes de frontières mobiles à condition que l'interface ainsi que les coefficients d'interpolation soient réévalués chaque fois que l'interface fluide/solide, i.e. la frontière immergée considérée est mise à jour.

3.3.2 Prise en compte des modifications temporelles

Il existe une multitude de problèmes avec des objets mobiles et par exemple, le déplacement d'une aile d'avion positionnée au sein d'un écoulement est une des applications les plus intéressantes.

a) Configuration de l'étude

La maquette étudiée est une aile rectangulaire avec une section profilée de type NACA 2412, un profil des plus typiques en aérodynamique. La Figure 3- 18 détaille la configuration du profil NACA à 4 chiffres 2412. En supposant la longueur de la corde du profil comme unité (la corde est la ligne droite qui joint le bord d'attaque au bord de fuite), le profil NACA 2412 présente une cambrure de 2 % placée à 40 % de la corde et une épaisseur relative de 12 %. Cette section (profil cambré) est dissymétrique. Les dimensions réelles de ce profil sont représentées Figure 3- 19 avec la corde de C = 0.1m pour une envergure de E=0.1m.

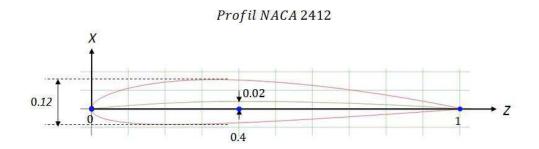


Figure 3-18: Profil NACA 2412

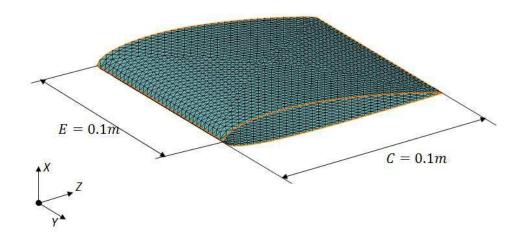


Figure 3- 19: Configuration 3D de l'aile NACA 2412

Plaçons alors l'aile NACA 2412 dans un domaine fluide matérialisé Figure 3-20. Le domaine de calcul est un volume de $0.40m \times 0.20m \times 1.0m$. Le maillage fluide est régulier avec les résolutions spatiales de $1 \times 10^{-3}m$, $3 \times 10^{-3}m$ et $2 \times 10^{-3}m$ dans les directions de l'espace X, Y et Z respectivement. Un champ homogène de vitesse de 10 m/s est imposé à l'entrée (cf. Figure 3-20) avec un nombre de Reynolds fixé à $Re = 5.4 \times 10^4$. Le fluide utilisé a une viscosité cinématique $v = 1.85 \times 10^{-5} \, m. \, s^2$ et une masse volumique $\rho = 1.0 \, kg/m^3$. Les dimensions et les conditions aux limites du domaine sont listées dans le Tableau 3.4.

Etudions alors les effets de la rotation de l'aile NACA par rapport à son axe qui traverse le point A(0,0,0) dans la direction Y et l'amplitude de la rotation est de $\alpha = -10^{\circ} \rightarrow 10^{\circ}$ (cf. Figure 3-21) l'aile offrant un mouvement d'oscillation continue à une vitesse de rotation $\omega = \pi/18 \, rad/s$.

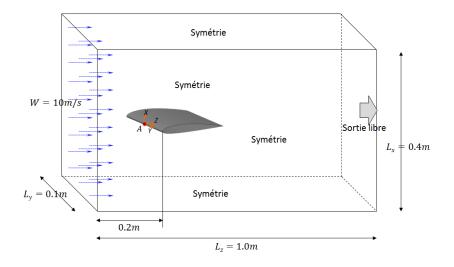


Figure 3-20: Configuration de l'étude

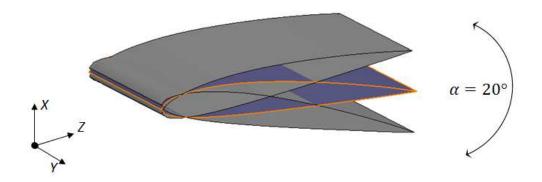


Figure 3-21: Rotation de l'aile NACA2412

Caractéristiques de la géomét	Valeur [m]	
Hauteur du domaine	L_{x}	0.2
Largeur du domaine	L_y	0.1
Longueur du domaine	L_z	0.6
Résolution en direction X	Δx	0.78×10^{-3}
Résolution en direction Y	Δy	3.125×10^{-3}
Résolution en direction Z	Δz	2.34×10^{-3}
Fluide		Valeur
Masse volumique	ρ	1.206 kg.m ⁻³
Viscosité cinématique	μ	$1.85 \times 10^{-5} \text{m/s}^2$
Vitesse d'entrée	V_y	10 m/s
Pression	$P_{\scriptscriptstyle \infty}$	1 bar
Température	$T_{\scriptscriptstyle \infty}$	20°C

Tableau 3.4: Caractéristiques du domaine de calcul

b) Ecoulements autour de l'aile NACA 2412 mobile (flutter de 20°)

Les simulations numériques ont alors été effectuées et le mouvement oscillant s'assimile à un mouvement sinusoïdal forcé en rotation suivant la direction principale avec un angle d'attaque telle que :

$$\alpha = \alpha_0 . \sin(\omega t) \tag{3.38}$$

avec α_0 et ω l'amplitude d'angle égale de 10° et la phase de $-\pi$ respectivement dans cette étude. Les calculs sont effectués sur 10s avec un pas de temps choisi de 10^{-5} s, alors que l'écoulement uniforme est utilisé comme condition initiale. La Figure 3-22 présente le champ de vitesse autour de l'aile NACA 2412 pour trois angles d'attaque différents $\alpha=0^\circ,-10^\circ$ et 10° . Il est évident que l'épaisseur de la couche limite est considérablement plus petite au niveau du bord d'attaque et augmente le long de la corde. Au niveau des surfaces supérieure et inférieure (extrados et intrados), le profil de la couche limite est dissymétrique aux trois angles d'attaque comme prévu à cause du profil dissymétrique de l'aile NACA 2412. Le renversement de l'écoulement est évident aux angles d'attaque élevés, en raison du développement de la région à haute pression sur la surface inférieure de l'aile au niveau du bord d'attaque.

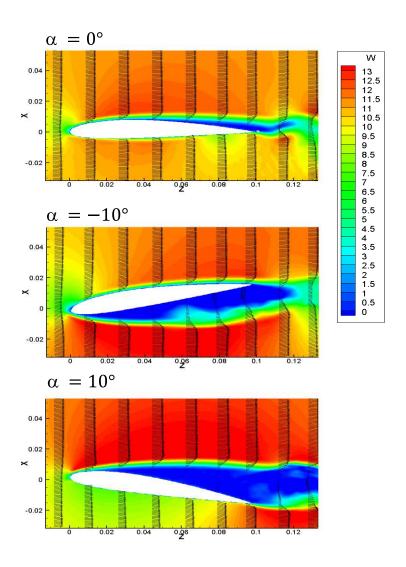


Figure 3-22 : Champs de vitesse longitudinale aux phases différentes $(\alpha=0^\circ, -10^\circ~et~+10^\circ)$

Cela se traduit par une vitesse élevée dans cette région. Par conséquent, la grande différence entre les pressions au niveau des deux surfaces de l'aile génère une portance. Dans les deux cas des angles d'attaque de -10° et 10° (cf. Figure 3-22), l'écoulement ne peut pas rester attaché à la surface de l'aile en raison d'un fort angle d'attaque. La Figure 3-23 présente les contours de vorticité à ces instants extrêmes.

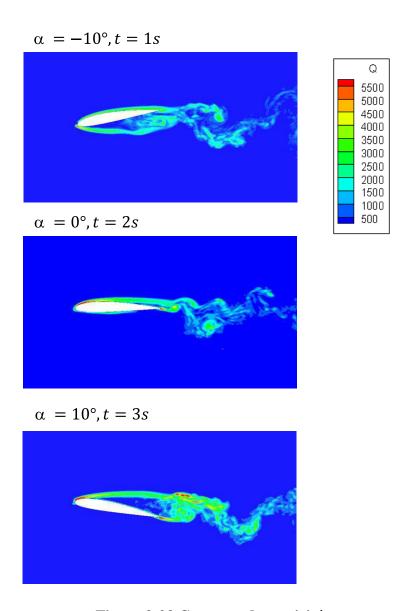


Figure 3-23 Contours de vorticité

Après s'être attaché à décrire l'outil numérique et ses aptitudes à caractériser un objet mobile en cours en calcul, notre outil numérique a été utilisé dans le cadre du projet ISO4CAR financé par OSEO en partenariat avec GRUAU notamment, visant à mieux maitriser les environnements thermiques des caissons frigorifiques.

3.4 APPLICATION A UNE CARACTERISATION D'UN CAISSON FRIGORIFIQUE

3.4.1 Contexte de l'étude

Différentes études (INSEE [45], Eurostat [46]) montrent une possibilité de définir un homme européen moyen qui consommerait une quantité annuelle de 530 kg d'aliments solides par an (hors boissons), y compris 350 kg de nourriture réfrigérée et/ou surgelée nécessairement transportés sous régime de froid. Il est ainsi possible d'estimer qu'en Europe, 136 millions de tonnes de denrées sont transportées sous température contrôlée, répartis en 16 millions de tonnes en surgelé ou congelé et 120 millions de tonnes en réfrigéré. Ces chiffres montrent que l'industrie de transport frigorifique aujourd'hui joue un rôle important dans le monde en général et en Europe en particulier.

A partir des données d'évaluation basées sur le marché des groupes frigorifiques dont la production est à 90% partagée entre deux constructeurs (Carrier Transicold et Thermoking [47]) et en supposant que la durée de vie moyenne de ce type d'équipement est de 10 ans, le parc de véhicules frigorifiques circulant en Europe peut être évalué à 450 000 unités, partagés en 234 000 camionnettes et petits véhicules porteurs (charge utile inférieure à 3,5 tonnes), 99000 camions et porteurs frigorifiques (> 3,5 tonnes) et 117 000 remorques et semi-remorques (charge utile de 20 à 24 tonnes). Pour ces véhicules, l'équipement essentiel est le groupe froid qui fabrique et fournit de l'air de refroidissement au caisson frigorifique. Son rôle est de contrôler la température et la qualité de l'air froid dans le caisson frigorifique. Le contrôle de la température des produits transportés a offert de véritables modifications de la vie quotidienne, participant à la diversité, à la qualité et à l'hygiène des produits alimentaires consommés. Depuis 70 ans, dépendant des combustibles fossiles et des agents réfrigérants fluorés, les sous-produits issus de cette technologie entraînent une pollution sonore et atmosphérique. Le constructeur Thermoking a récemment proposé un nouveau concept de groupe frigorifique au CO2 (combinée au dioxyde de carbone liquide provenant de déchets recyclés et offrant un refroidissement fiable, efficace et silencieux) avec détente à deux étages, une production de froid à l'étage intermédiaire et production d'électricité sur l'étage final de détente. Cette électricité peut être utilisée pour le fonctionnement des auxiliaires du groupe frigorifique comme les ventilateurs par exemple. Grace à l'absence de pièces mobiles, comme les moteurs thermiques et les compresseurs, ce groupe est 90 % plus silencieux qu'un groupe frigorifique thermique classique et moins bruyant également que le niveau sonore de la norme PIEK [48]. Les réglementations PIEK ont été établies aux Pays-Bas et fixent une limite de 60 dB(A) pendant les livraisons de nuit dans les zones urbaines. Ainsi, les performances de ces systèmes sont bien supérieures à celles des groupes classiques. Par contre, le marché est clairement dominé par les groupes froids et il est important de pouvoir les optimiser.

Afin d'améliorer la distribution de l'air dans la caisse, Moured et al. [49] ont étudié les caractéristiques de l'écoulement à l'intérieur d'un véhicule frigorifique avec l'utilisation de conduits de distribution d'air dans la caisse. Cette étude montre que l'utilisation de ces dispositifs très simple d'emploi permet une grande amélioration de la distribution de l'air dans la caisse, ce qui a des conséquences très favorables sur l'homogénéité des températures dans le chargement. Bien entendu, une meilleure isolation contribue également à réduire les consommations des groupes froids. La recherche destinée à développer une meilleure isolation porte essentiellement sur l'amélioration de la conductivité thermique des matériaux. Des changements apportés aux agents expanseurs des mousses isolantes au cours des 10 dernières années ont entraîné une légère baisse de la qualité de l'isolation utilisée pour les caisses refroidies. De nouveaux matériaux isolants, par exemple de nouveaux types de mousse, de panneaux d'isolation sous vide et d'aérogels ont fait récemment leur apparition sur le marché mais peu de retours sont disponibles à ce jour pour le transport frigorifique. En outre, l'isolation devrait être améliorée en employant des structures composites complexes, dans lesquelles la protection des rayonnements thermiques et la réflexion peuvent améliorer les caractéristiques de l'isolation.

Une grande partie de l'énergie est bien échangée au voisinage des ouvrants lorsque les portes sont ouvertes pour la manutention par exemple ainsi que dans les phases d'ouverture/fermeture. En effet, l'air immédiatement dans l'environnement du caisson va être introduit dans la cellule et la température va rapidement et significativement augmenter. Pour des véhicules de petites tailles destinées à des livraisons locales dans les centres urbains, les phases d'ouverture/fermeture sont fréquentes et l'impact sur la consommation du groupe froid significatif. À notre connaissance, il n'existe pas d'études directement liées à la compréhension des mécanismes de transfert instationnaires au cours des phases de livraison et notre objectif s'inscrit dans l'analyse des phases dynamiques instationnaires. Etre capable de traiter numériquement ces phases dynamiques nécessite de nouveaux outils, et pour cela, une étude a été entreprise avec la modèle aux frontières immergées.

L'objectif de ce travail a donc été d'étudier l'influence des phases d'OUVERTURE et de FERMETURE des portes et plus généralement des phases de livraison en utilisant une méthode IBM pour simuler les mouvements des portes. Avec cette méthode, le domaine fluide n'a pas besoin de remaillage après chaque mouvement de la structure. Cette partie s'inscrit pleinement dans le cadre du projet OSEO afin de caractériser l'aéraulique au sein du cours en frigorifique et de caractériser les transferts autour des ouvrants.

3.4.2 Description des mécanismes instationnaires des transferts

3.4.2.1 Configuration de l'étude

L'approche numérique proposée peut être divisée en thèmes successives dont les objectifs sont :

- améliorer la compréhension de l'aéraulique interne des caissons frigorifiques,
- identifier les transferts convectifs chauds et froids,
- identifier le rôle des phases d'ouverture et de fermeture des portes du caisson,
- proposer des solutions d'amélioration afin de réduire la perte de l'air froid interne.

Pour cela, la société GRUAU, pilote de ce projet, a donc mené une compagne statistique auprès de plusieurs de ses clients en vue de définir une tournée type. Un scénario a alors pu être établi en différentes étapes. Afin de limiter les nombreux paramètres de l'étude, les conditions climatiques interne et externe ont été figées. La température extérieure est de 30°C alors que la consigne du caisson est réglée à 0°C. Les étapes sont matérialisées par rappelées :

- Le **cycle chargement** initial (Tableau 3-5),
- Le **cycle livraison** suit 10 étapes successives. Pour des raisons de temps de simulation numérique qui ne doivent pas être prohibitifs, il a été convenu avec GRUAU de réduire les « temps de simulation » des phases longues, c'est-à-dire, les phases 13 (attente) et 18 (redémarrage du groupe). Les temps de simulation retenus sont mentionnés dans le tableau ci-après.

CYCLES	ETAPES	PHASES		DUREES	CAS REEL	PROTO LIMATB	CALCULS ENSMA
	1 – Descente en froid	1	Descente en froid T°ext=30°C; Tconsigne int=0°C	A définir	х	х	
		2	Arrêt du groupe	5 min	х	Х	
CYCLE CHARGEMENT	2 - Chargement 3 - Retour consigne	3	Ouverture portes G, D	2 s	х	Х	
		4	Chargement	20 min	х	Х	
		5	Fermeture portes D, G	2 s	х	х	
		6	Attente	5 min	х	Х	
		7	Redémarrage groupe T°ext=30°C; Tconsigne int=0°C	A définir	х	х	x
	4 - Régulation	8	Régulation à 0°C	5 min	х	Х	

Tableau 3.5: Caractéristiques des cycles de chargement

CYCLES	ETAPES	PHASES		DUREES	CAS REEL	PROTO LIMATB	CALCULS ENSMA
		9	Arrêt du groupe	10 s	х	Х	
		10	Ouverture portes G, D	2 s	х	Х	х
		11	Attente	20 s	х	х	х
	5 - Livraison	12	Fermeture portes D, G	2 s	х	Х	х
		13	Attente	5 min	х	х	X (10 s)
CYCLE LIVRAISON		14	Ouverture portes G, D	2 s	х	х	х
		15	Attente	10 s	х	Х	х
		16	Fermeture portes D, G	2 s	х	Х	х
		17	Attente	10 s	х	Х	х
		18	Redémarrage groupe T°ext=30°C; Tconsigne int=0°C	A définir	х	х	X (50 s)
		19	Arrêt du groupe	10 s			х

Tableau 3.6: Caractéristiques des cycles de chargement

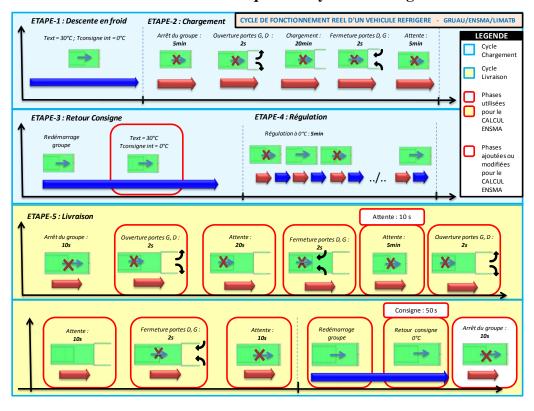


Figure 3- 24 : Cycle de fonctionnement réel d'un véhicule réfrigéré – Spécification des simulations

L'analyse des échanges convectifs entre un caisson et l'environnement extérieur est effectuée de manière instationnaire en intégrant les phases d'ouverture et de fermeture des portes. Considérons alors un caisson frigorifique de volume utile de 1.67 m³ (cf. Figure 3- 25). Le groupe froid est intégrée dans la partie haute en fond-avant du caisson et deux portes constituant l'arrière. S'agissant d'une étude instationnaire au cours de laquelle les portes sont mobiles, un scénario a été défini en accord avec les partenaires. La société GRUAU, pilote de ce projet, a donc mené une compagne statistique auprès de plusieurs de ses clients en vue de définir une tournée type. Un scénario a alors pu être établi avec 6 différentes étapes et afin de limiter les nombreux paramètres de l'étude, les conditions climatiques interne et externe ont été figées. La température extérieure est de 30°C alors que la consigne du caisson est réglée à 0°C. Les 6 étapes sont matérialisées Figure 3- 26 et listées ci-après :

Etape 1: mise en froid

Le groupe frigorifique (cf. Figure 3- 25) démarre en pulsant à grande vitesse de l'air froid à 0°C. Le groupe est localisé dans la cellule au niveau du plafond et offre un débit de 186 m³/h. En termes de renouvellement d'air, il assure ainsi un renouvellement de 111 volume par heure ; la section de soufflage est de 0.0405 m² et la vitesse est alors de 1.5 m/s au niveau de la buse de sortie.

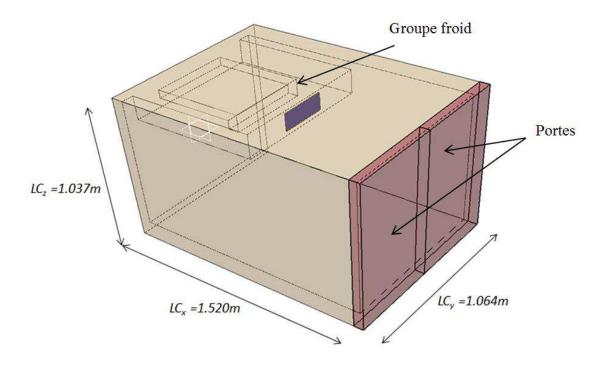


Figure 3-25: Caisson frigorifique

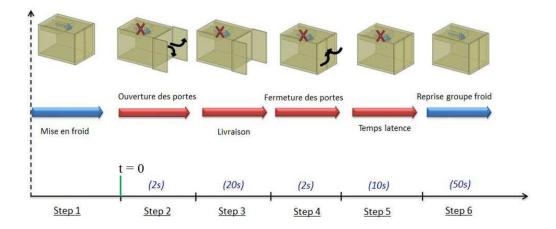


Figure 3-26 : Cycle de simulation de référence

L'étape 1 doit permettre d'atteindre une température au sein du caisson homogène et constante. Dans un premier temps, considérant les parois du caisson adiabatiques, seuls les transferts convectifs seront traités.

Etape n° 2: Ouverture des portes

A partir des études statistiques, le temps d'ouverture des deux portes a été fixé à 2 secondes. L'ouverture des portes est effectuée en considérant une rotation d'un angle de 90° par rapport aux deux axes de rotation (cf. *Erreur! Source du renvoi introuvable.*) et la porte gauche est ouverte en 1s puis la porte droite (en 1s également). La Figure 3-28 présente quelques vues de la cellule au cours de la phase d'ouverture des portes. Au cours de cette phase, le groupe froid est arrêté.

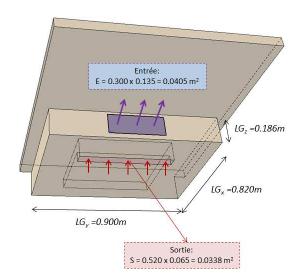


Figure 3-27: Groupe frigorifique

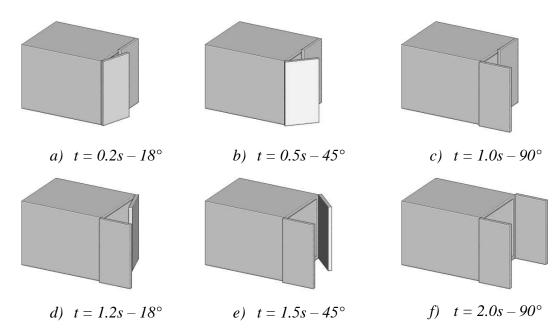


Figure 3-28: Phase d'ouverture des deux portes

Etape n° 3: Livraison

Un temps de 20 secondes au cours duquel les deux portes sont ouvertes est appliqué et c'est précisément au cours de cette étape que nous allons nous focaliser sur à décrire les échanges.

Etape n° 4: fermeture des portes

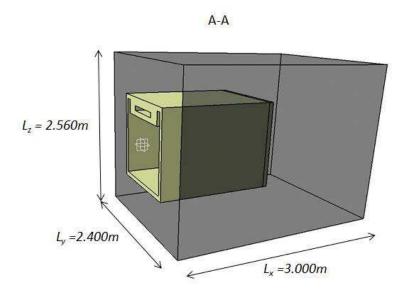
Une fois l'intervention effectuée, la procédure de fermeture des portes est enclenchée au cours de laquelle les portes gauche puis droite sont refermées sur un temps de 2s.

Etape n° 5 : temps de latence

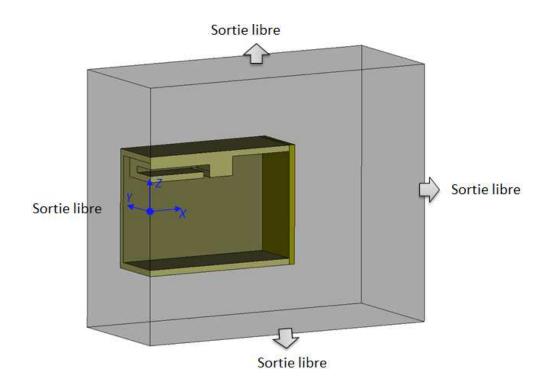
Après avoir refermé la porte, la livreur retourne dans son véhicule et démarre alors son véhicule entrainant la reprise du groupe froid.

Etape n° 6: reprise du groupe froid

L'idée est de lancer le groupe froid pendant 50s pour simuler la reprise du groupe et d'étudier la distribution de la température au sein du caisson. Bien entendu, la prise en compte de l'inertie des matériaux isolants constituant le caisson permet d'accéder au temps réellement nécessaire pour refroidir le caisson.



a) domaine de calcul



b) plan A-A à Y = 0

Figure 3-29 : Domaine de calcul avec conditions aux limites considérées

N'ayant pas d'inertie thermique au niveau des parois, les transferts ciblés concernent uniquement l'aspect convectif entre le caisson initialement à température froid de 0°c et l'environnement

extérieur dont la température est figée à 30° C. Le domaine de calcul est donc un volume de $3.00m \times 2.40m \times 2.56m$ englobant le caisson. Comme le souligne la coupe A-A, ce dernier est appuyé à X = 0m et sauf la partie caisson qui correspond à une paroi, l'ensemble des conditions aux limites sont des conditions libre, i.e. le fluide peut à la fois entrer ou sortir.

Les conditions aux limites au sein du caisson sont données **Erreur! Source du renvoi introuvable.** et seul une entrée à débit imposé et une sortie libre sont appliquées. Par contre, dès que la phase d'ouverture des portes est enclenchée (ouverture des portes de manière séquentielle), les conditions de débit sont modifiées avec une vitesse alors imposée à zéro. En considérant la dimension des ouvrants (largeur de 0.532m) ainsi que les temps d'ouverture, la vitesse caractéristique des portes atteint un niveau de 0.8 m/s. Au cours du calcul, le pas de temps est variable et piloté par le nombre de CFL pour caractériser les étapes préalablement définis. Concernant la résolution spatiale, un maillage $N_x \times N_y \times N_z$ de $200 \times 160 \times 256$ a été retenu soit un total de 8 millions de points environ. Les Tableau 3.7, Tableau 3.8, Tableau 3.9 résument l'ensemble des paramètres numériques. Les conditions aux limites d'entrée libre assurent une entrée ou une sortie de l'écoulement en fonction des conditions locales au voisinage de la frontière et ceci permet de choisir un domaine relativement restreint.

Caractéristiques du groupe fri	Valeur [m]	
Longueur	LG_x	0.820
Hauteur	LG_y	0.900
Largeur	LG_z	0.186
Entrée [m ²]	E	0.3 x 0.135
Sortie [m ²]	S	0.52 x 0.065

Tableau 3.7 : Caractéristiques du groupe froid (envergure et dimensions caractéristiques)

Caractéristiques de la géome	Caractéristiques de la géométrie	
Longueur du domaine	L_x	3.00
Hauteur du domaine	$L_{\rm y}$	2.40
Largeur du domaine	L_{z}	2.56
Longueur de la cellule	LC_x	1.520
Hauteur de la cellule	LC_y	1.064
Largeur de la cellule	LC_z	1.037
Épaisseur panneaux	e	0.060
Résolution en direction X	Δx	1.0 x 10 ⁻²
Résolution en direction Y	Δy	1.5 x 10 ⁻²
Résolution en direction Z	Δz	1.0 x 10 ⁻²

Tableau 3.8 : Caractéristiques de la géométrie du domaine de calcul et de la cellule frigorifique

Caractéristiques de l'air			
Masse volumique [kg/m3]	1.166		
Viscosité dynamique [kg/(m.s)]	1.75 x 10-5		
Capacité thermique massique [J/(kg.K)]	1004		
Caractéristiques des simulations			
CFL	0.6		
$U_{_{\infty}}$ en m/s	1.305		
Δt en s	1×10^{-6}		
P_{∞} en bar	1		
T_{∞} en K	30°C		
Nombre de cellules	8192000		

Tableau 3.9 : Caractéristiques numériques

3.4.2.2 Ecoulement en caisson

Avant l'ouverture des portes, le débit imposé par le groupe froid est repris au niveau de la sortie, i.e. l'écoulement est alors établi avec une température quasi constante de 0°C. En fait, on ne considère pas l'inertie thermique des parois (condition adiabatiques) et il ne s'agit que d'un problème convectif. Afin d'assurer un refroidissement de l'air interne, le groupe frigorifique soufflera de l'air froid de 0°C à l'intérieur du caisson avec un débit de 186 m³/h (111 renouvellent par heure). Ce dernier induit des vitesses de soufflage de 1,3 m/s environ. La durée de refroidissement est numériquement estimée à 180s. Une fois l'écoulement établi, on constate que la structure de l'écoulement est principalement marquée par un mouvement de rotation, comme le souligne le suivi des lignes de courant dans le plan symétrique Y=0 (cf. Erreur! Source du renvoi introuvable.). Au niveau du groupe, la vitesse de 1.3 m/s est imposée et les lignes de courant parallèles soulignent le balayage imposé par le groupe froid. La déviation de l'air par le fait de la présence des portes fermées force l'écoulement à principalement s'organiser de manière verticale et l'écoulement subit un mouvement descendant une nouvelle fois dévié par la présence du plancher.

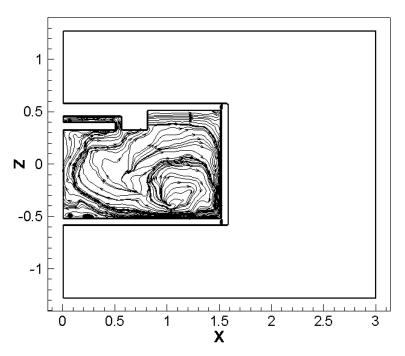
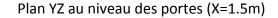


Figure 3-30 : Ligne de courant - Vue de coté

3.4.2.3 Phase instationnaire d'ouverture des portes

Une fois l'écoulement établi (étape 1), l'ouverture des portes intervient séquentiellement : ouverture porte gauche en une seconde puis ouverture de la porte droite dans les mêmes conditions. La référence de temps est fixée à t=0 lors de la phase d'ouverture de la première porte ; on rappelle qu'à partir de cet instant, le groupe est à l'arrêt et plus aucun soufflage n'intervient. Détaillons alors l'écoulement autour de la porte lors de son ouverture (sur la période de 1 seconde). La présente la Figure 3-31 distribution de la composante de vitesse u instantanée dans le plan des portes ($X=1.500 \, m$) et dans le plan au milieu à Z=0 à trois instants différents.



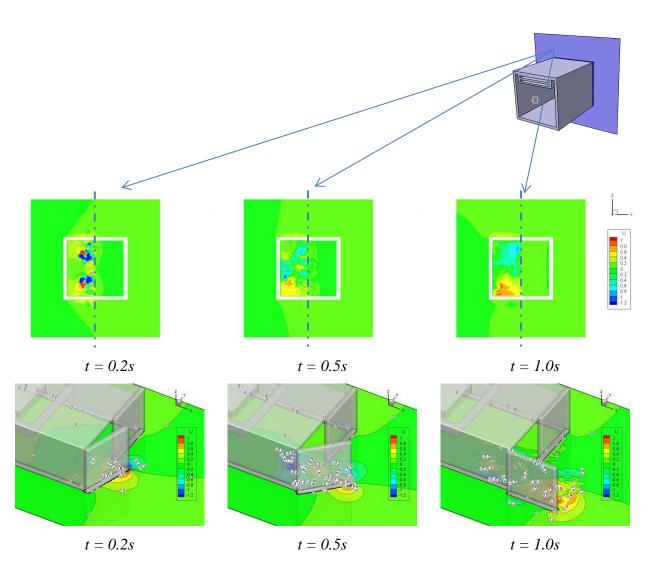


Figure 3-31: Champ de vitesse longitudinale en phase d'ouverture

Dans le plan des portes, les premiers instants (à $t=0.2\,s$) mettent en jeu des vitesses négative et positive de l'ordre de $0.8\,m/s$; il s'agit ici du déplacement d'air imposé par le mouvement de la porte.

Afin de souligner les échanges entre intérieur du caisson et extérieur, les lignes de courant ont également été dessinées sur une vue 3D globales mais également dans le plan d'ouverture des portes (X = constant = 1.5 m) (cf. Figure 3- 32Erreur! Source du renvoi introuvable.). A t = 0.2 s, un effet d'aspiration s'effectue dans les parties haute et basse de la porte alors que le long de cette dernière, les filets fluides s'organisant en boucle. L'écoulement mis en jeu reste cependant relativement homogène sur l'ensemble de la hauteur de la porte. A t = 0.5 s, une certaine dissymétrie entre le haut et le bas intervient ; alors que l'écoulement est principalement caractérisé par une vitesse positive dans la partie basse, des valeurs plutôt négatives sont présentes dans la partie haute et un tel comportement est favorisé à t = 1.0 s. Les lignes de courant bien que complexes, soulignent une aspiration du fluide extérieur vers l'intérieur du caisson par la partie supérieure et un mouvement contraire dans la partie basse.

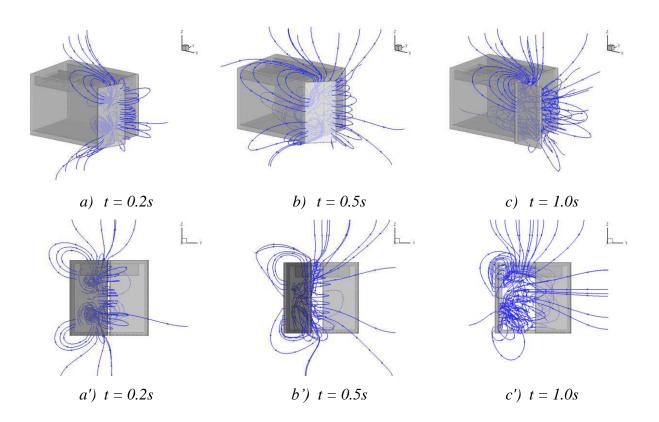


Figure 3-32: Ligne de courant en phase d'ouverture

Les figures suivantes (Figure 3- 33 et Erreur! Source du renvoi introuvable.) présentent l'évolution des vitesses et des lignes de courant avec des vues identiques mais pour les temps 1.2, 1.5 et 2.0 s, i.e. au cours de la phase d'ouverture de la seconde porte. La Figure 3- 33 souligne l'appel d'air créé lors de l'ouverture de la seconde porte (côté droit) initialisant des vitesses positives conséquentes dans le plan des deux portes. Sur le plan médian (Z = 0 m), force est de constater que les distributions de vitesses significatives interviennent plutôt de part et d'autre des portes en mouvement en s'éloignant du plan des portes.

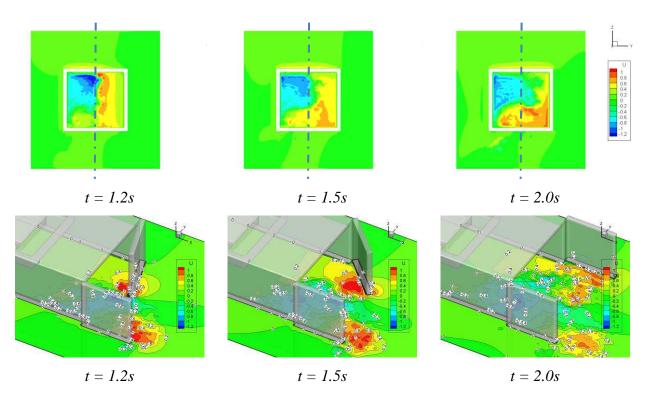


Figure 3-33: Champ de vitesse longitudinale en phase d'ouverture

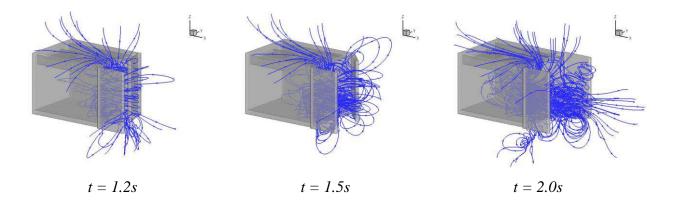


Figure 3-34: Ligne de courant et champ de vitesse longitudinale en phase d'ouverture

La nature des vitesses mises en jeu est donc principalement liée au mouvement des portes mais existe-t-il un échange entre l'extérieur et l'intérieur du caisson? Pour identifier les éventuels transferts, intéressons-nous au champ thermique au cours de l'ouverture des portes. Figure 3- 34 donne dans le plan XZ médian (Y = 0 m) les champs de température instantanés. Au cours de la phase d'ouverture de la première porte, de l'air chaud pénètre dès t = 0.5 s mais sa pénétration au sein du caisson reste limitée à environ X = 0.4 m soit environ le 1/4 de la longueur du caisson. La phase d'ouverture de la seconde porte favorise un développement dissymétrique du champ thermique mais, à cette hauteur, la pénétration longitudinale du champ de température demeure réduite.

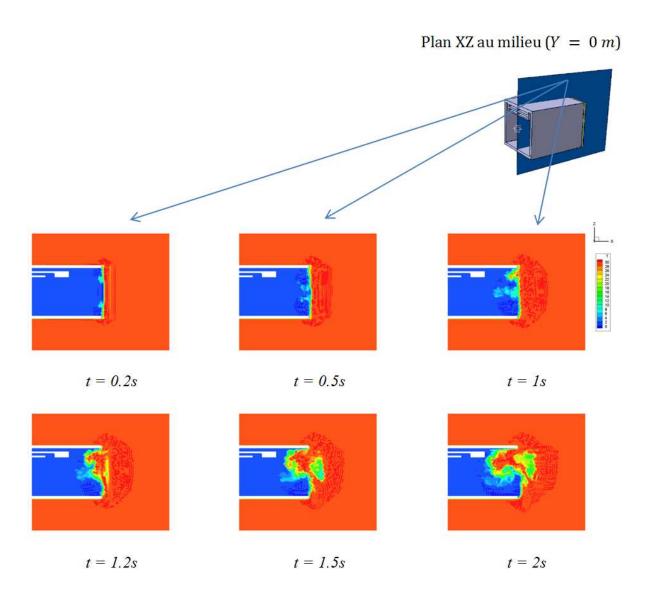


Figure 3-35: Champs de température en fonction du temps – vue de face

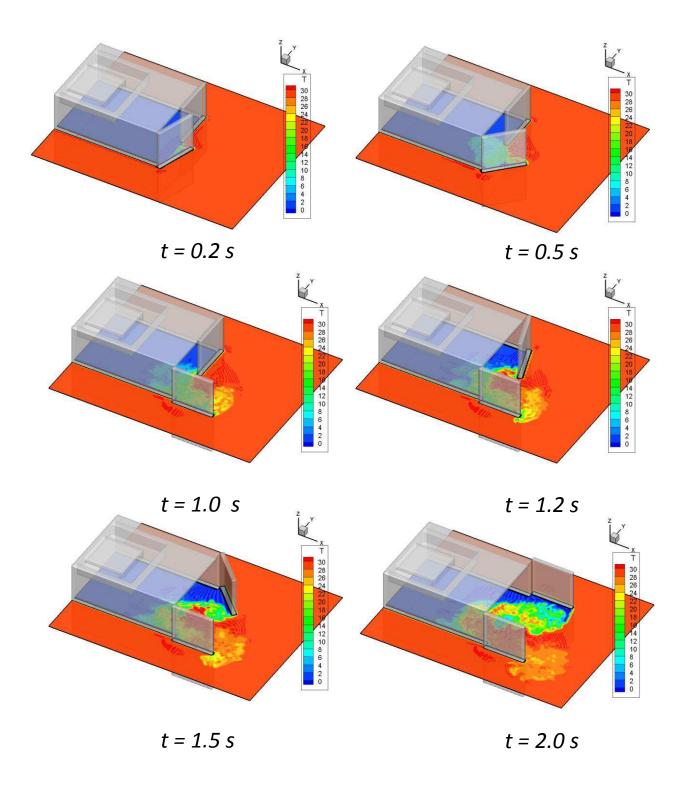


Figure 3- 36: Champs de température en fonction du temps – vue de dessus

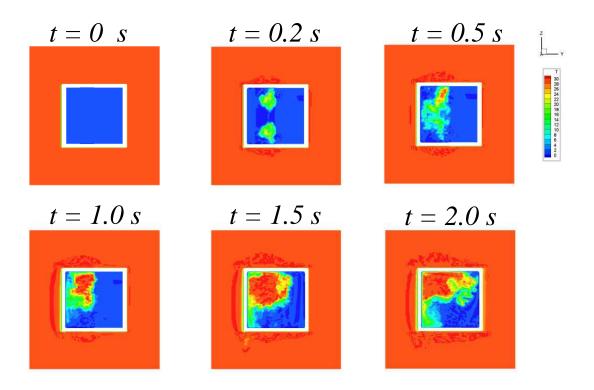


Figure 3-37: Champs de température en fonction du temps – vue de coté

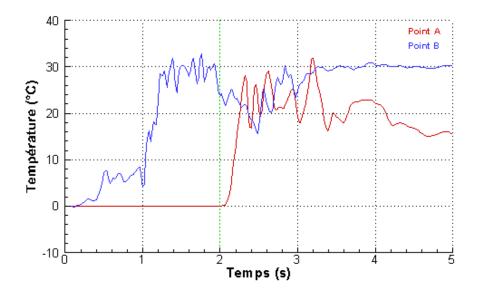


Figure 3-38 : Evolution de la température des point A et B

La Figure 3- 38**Erreur! Source du renvoi introuvable.** présente l'évolution de la température du point A qui se situe au milieu de la cellule et du point B qui se situe au niveau des portes. Au point B (courbe bleue), la température augmente immédiatement jusqu'à la température

ambiante après deux secondes d'ouverture des portes seulement. Dans le même temps, l'air chaud n'atteint pas encore le point A.

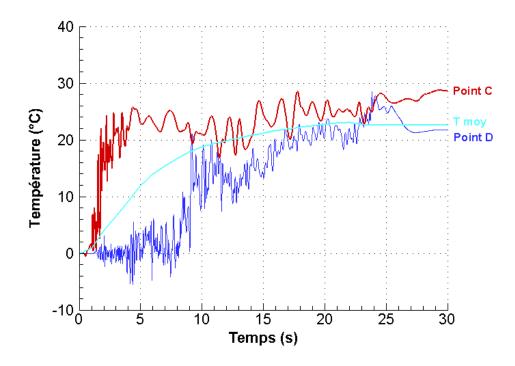


Figure 3-39 : Evolution de la température des point C et D

De manière similaire, la Figure 3- 39 présente l'historique de l'évolution des températures au point C (en haut) et D (en bas). La température au point C est toujours plus importante que celle au point D. Puisque l'air chaud est plus léger que l'air froid, il se déplace vers le haut (point C). Par contre, les différences haut/bas sont de plus en plus faibles. La température moyenne à l'intérieur de la cellule est calculée par la formule suivante :

$$\bar{T} = \int_{V} T dV \tag{3.39}$$

Afin d'évaluer les pertes thermiques lors de l'ouverture des portes, calculons le transfert d'énergie :

$$Q(t) = \int_{V} \rho V C_p(T(t) - T_{init}) dV$$
 (3.40)

La Figure 3- 40 présente l'évolution des températures pendant un cycle du fonctionnement de la cellule (courbe rouge pour le point A, bleue pour le point B, courbe verte pour la température moyenne). Les températures des points A et B varient beaucoup pendant l'ouverture et la fermeture des portes (24s). Quand le groupe froid est redémarré à t=34s, la

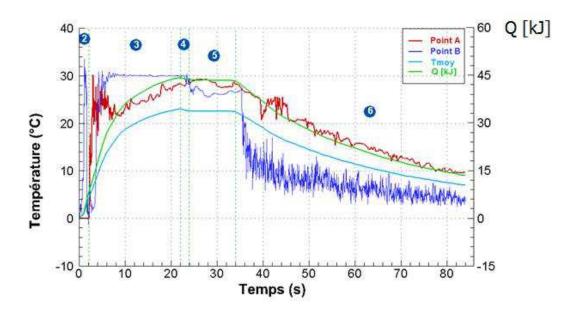


Figure 3-40 : Evolution de la température d'un cycle

température au point B diminue très vite et fluctue beaucoup car le point B localisé sur le chemin de l'écoulement froid. La température moyenne donne une vue plus globale des échanges. A l'ouverture et la fermeture des portes, 44 kJ environ sont échangé. Par contre, grâce au fonctionnement du groupe froid pendant 50s, la température moyenne de la cellule est passée de 22.6°c à 7°C consommant aussi 30 kJ d'énergie.

Un scénario de la procédure du fonctionnement du véhicule frigorifique a été développé et caractérisé dans cette étude. En utilisant la méthode IBM, l'influence de l'interaction aérodynamique et thermique entre les portes en mouvement et le fluide au cours de phase d'ouverture a pu être simulée. Grace aux résultats obtenus, les remarques suivantes sont :

- la dynamique de transfert est très rapide,
- l'ouverture des portes initie des mouvements complexes 3D,
- les phases de transferts thermiques interviennent au cours de la phase stationnaire des portes ouvertes.

La procédure d'ouverture du véhicule frigorifique entraînera inévitablement une perte d'énergie. Les résolutions qui minimisent les pertes d'énergie afin d'augmenter l'efficacité du refroidissement sont toujours nécessaires. À notre connaissance, le rideau d'air a été utilisé avec succès pour les stockages frigorifiques et cabinet frigorifique [50,51] et est une possibilité pour contrôler l'ambiance thermique du caisson. Ce travail fait partie du programme OSEO dont les objectifs visent à prédire les écoulements au sein des caissons frigorifiques.

Dans ce chapitre, l'introduction d'un traitement de type frontière immergée rend accessible les couplages thermiques entre fluide et paroi et comme nous venons de le voir, la prise en compte du déplacement d'un objet au cours du calcul a été effectuée de manière efficace. L'idée alors d'un véritable couplage fluide/structure, en prenant en compte notamment la réaction mécanique à une sollicitation fluide, fait l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 4

COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE AVEC METHODE IBM

Les phénomènes d'interaction fluide-structure font partie de la vaste classe des problèmes multi-physiques. Les deux domaines en présence n'obéissent pas aux mêmes lois de comportement, mais ils peuvent interagir dans un système fortement couplé. Dans notre étude, nous nous intéressons à l'interaction entre un solide mobile, rigide ou déformable avec un écoulement fluide. Ce dernier est conditionné par la déformation de la structure solide et réciproquement, la déformation de la structure est influencée par les efforts fluides sur ses parois.

4.1 ETAT DE L'ART

Dans les domaines de la mécanique des fluides et de la mécanique des structures, les progrès de la connaissance scientifique de leur comportement respectif offrent des perspectives d'analyse numérique toujours plus prédictives. La plupart des études ne requiert généralement pas d'interactions entre les deux physiques, l'interface fluide/solide étant considérée comme une simple condition aux limites. Il existe cependant des applications pour lesquelles l'interaction entre les deux milieux doit être considérée. En fait, en cherchant à reproduire de plus en plus finement de telles interactions, il devient nécessaire de développer des modèles numériques, à la frontière des deux mécaniques, capable d'analyser de manière exhaustive les phénomènes. De surcroit, certaines approches expérimentales peuvent s'avérer délicates et les compléter par des développements numériques est alors des plus utiles. L'intérêt pour la prise en compte des mécanismes de couplage et d'interactions fluide/structure n'est évidemment pas récente et a même donné naissance à des expertises dédiées. Deux approches numériques peuvent être envisagées :

- une résolution couplée,
- une résolution découplée.

La résolution découplée consiste en général à résoudre le problème fluide sur un domaine fixe, puis à intégrer les efforts du fluide sur la structure pour en déduire son déplacement. Cette approche n'est effective que dans le cas où le mouvement de la structure est extrêmement lent par rapport au temps caractéristique d'évolution du fluide. Dans le cas où les temps caractéristiques des deux mécaniques sont comparables et que les déformations sont conséquentes, une approche couplée complète est nécessaire.

La principale difficulté liée à l'interaction d'un fluide et d'une structure réside dans le couplage des modèles initialement développés dans des environnements différents. En effet, le fluide est classiquement décrit en formulation eulérienne et la structure élastique en formulation lagrangienne. Le couplage de ces différentes formulations rend l'étude de ces systèmes très complexe, tant d'un point de vue numérique que mathématique. Une première avancée a été réalisée par Donea [39] qui introduit la méthode ALE basée sur un compromis entre les descriptions lagrangienne et eulérienne. Une autre avancée significative a été réalisée par Peskin [52] où le couplage avec la structure élastique est représenté par un terme source dans les équations du fluide. Cette technique a été utilisée avec succès dans de nombreuses applications, principalement en biomécanique.

Le calcul couplé fluide/structure correspond en fait à un problème à frontières mobiles pour lequel le domaine de résolution du fluide varie en fonction du temps suivant le déplacement du solide. En général, il y a trois principaux types d'approche envisageables pour traiter la déformation du domaine fluide :

- une approche multiphasique,
- une méthode avec déformation du maillage,
- une approche utilisant un domaine fictif.

L'approche multiphasique (lagrangienne ou eulérienne) est limitée au cas où le solide et le fluide peuvent être décrits par les mêmes équations avec des paramètres physiques variables affectés à chaque phase et advectés au cours du mouvement de l'interface. En général, les méthodes eulériennes (le domaine de calcul est fixe et ne suit pas le matériau) sont préférées pour le calcul de l'écoulement fluide, afin d'éviter de trop grandes distorsions des mailles de calcul. Au contraire, le solide est plutôt simulé avec des méthodes lagrangiennes (le domaine se déforme en suivant le déplacement matériel), permettant de suivre les discontinuités matérielles avec précision et de traiter les phénomènes de plasticité. Les approches de déformation du maillage permettent d'assurer une transition lisse entre ces deux types de modélisation. L'exemple typique d'une telle approche est la méthode ALE (Arbitrairement Eulérienne-Lagrangienne) : le domaine fluide est déformé de façon à suivre l'interface fluide-solide, sans toutefois subir de déformations aussi grandes que dans une approche purement lagrangienne pour le fluide. La déformation du maillage induit des termes additionnels dans la résolution des équations du fluide. Cependant, des difficultés apparaissent lorsque le déplacement de la structure est trop important : le domaine fluide doit alors être remaillé, ce qui peut entraîner des coûts de calculs accrus en trois

dimensions. C'est pour contourner la question du remaillage que les méthodes avec domaine fictif ont été développées. Afin d'éviter de déformer le domaine fluide, les méthodes avec domaine fictif travaillent sur un maillage fluide fixe. Le solide est alors superposé au maillage fluide et la valeur prise par le fluide dans les mailles occupées par le solide est totalement fictive. La question est alors de savoir quelles conditions imposer afin que le fluide « voit » la présence du solide. Cette problématique ne se posait pas pour la méthode ALE car les deux maillages fluide et solide ont une interface bien définie et ne se recouvrent pas. Plusieurs méthodes différentes ont été proposées afin de traiter cette question.

Nous proposons d'utiliser notre approche fluide aux Frontières Immergées afin et de caractériser des couplages de type fluide/structure.

4.2 CFS ET METHODE IBM

4.2.1 Principes du couplage

4.2.1.1 Côté fluide

Les équations générales de la mécanique des fluides sont résolues dans le domaine fluide et s'écrivent en formulation incompressible :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p - \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} + \vartheta \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = RHS + \boldsymbol{f}$$
(4.1)

avec \mathbf{u} le vecteur de vitesse, p la pression et σ le tenseur des contraintes visqueuses. f représente la force introduite par la méthode IBM uniquement active au voisinage de la paroi considérée.

Les hypothèses justifiant une telle écriture sont pour un fluide incompressible ou faiblement compressible newtonien et dans les équations de quantité de mouvement, un terme source rend compte des frontières immergées. Dans le cadre de ce travail, nous n'avons pas développé le code fluide IBM, décrit de manière exhaustive en §2.1, mais plutôt utilisé un code maison développé au sein de notre équipe [1,3] en vue d'un couplage fort. L'avantage de ce code est sa formulation aux frontières immergées essentielle pour la prise en compte des interactions fluide/structure. Le lecteur intéressé par le code fluide IBM est invité à se référer aux travaux antérieurs de l'équipe. Pour prendre en compte un problème couplé fluide/structure à partir d'un maillage cartésien eulérien, la définition du corps immergé est donnée par un maillage surfacique

constitué d'éléments triangulaires (cf. Figure 4-1) et les vecteurs normaux assurent la position de la zone fluide et solide vis-à-vis de l'interface. La prise en compte de son mouvement est alors assurée par un traitement de type frontière immergée. Le terme source de forcing est imposé sur les forcing-points pour représenter les effets d'un corps rigide immergé sur l'écoulement du fluide. En utilisant une approche simple par reconstruction directe, la solution près de la frontière immergée est réalisée pour évaluer les termes sources de forcing tout en s'assurant d'appliquer les conditions aux limites adéquates.

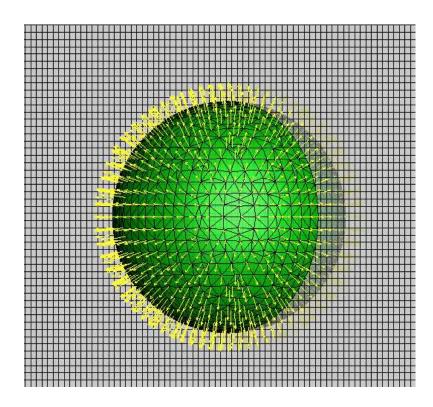


Figure 4-1: Maillage triangle de la surface de l'objet et vecteurs normaux associés à chaque élément triangle

4.2.1.2 Côté solide

La partie de résolution de la mécanique des solides a été intégralement effectuée par l'intermédiaire des techniques de modélisation que nous rappelons brièvement par la suite.

a) Equations du problème de mécanique du solide déformable

Les équations d'équilibre sont obtenues à partir du bilan de la quantité de mouvement. L'écriture des grandes transformations impose la distinction entre les configurations initiales et la configuration déformée. Le solide considéré occupe un domaine noté Ω initialement non

déformé et ω dans la configuration déformée (cf. Figure 4- 2). La frontière du domaine est notée $\partial\Omega$ ($\partial\omega$ respectivement). Cette frontière est décomposée classiquement en deux parties disjointes, $\partial\Omega_u$ ($\partial\omega_u$ respectivement) et $\partial\Omega_\sigma$ ($\partial\omega_\sigma$ respectivement). L'équation d'équilibre et les conditions aux limites dans la configuration actuelle peuvent s'écrire suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} & dans & \omega \\ \vec{u} = \vec{u} & sur & \partial \omega_u \\ \vec{t} = \sigma \vec{n} = \vec{t} & sur & \partial \omega_\sigma \end{cases}$$
(4.2)

avec l'équation **Erreur! Source du renvoi introuvable.**(4.2)-a correspondant à l'équation de conservation de la quantité de mouvement (première loi de Cauchy) avec le champ de déplacements u (en m), le tenseur des contraintes de Cauchy σ_{ij} (d'ordre 2) d'éventuels et efforts volumiques f (comme la gravité g, par exemple). L'équation (4.2)-b exprime la condition limite en déplacement notée \vec{u} (conditions de Dirichlet) et l'équation (4.2)-c traduit la condition limite de type effort notée \vec{t} (conditions de Neumann). On peut également introduire le tenseur de Kirchhoff $\tau = J\sigma$, souvent utilisé avec J et σ correspondant au jacobien et la contrainte de Cauchy.

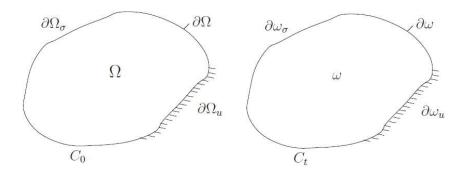


Figure 4- 2: Formulation du problème d'équilibre

b) Lois de comportement

Les lois de comportement du matériau définissent l'expression des contraintes. La relation entre la contrainte (causée par les forces externes) et la déformation (provenant du changement de géométrie) dépend du type de matériau. Dans le cadre de ce travail, seules les déformations

élastiques linéaires seront considérées. L'élasticité du matériau correspond à l'aptitude de ce dernier à reprendre sa forme initiale dès lors que les contraintes ayant conduit à sa déformation sont libérées. La loi de comportement doit permettre de relier le tenseur des contraintes à l'instant t au tenseur des déformations en tout point du solide, quel que soit l'instant considéré. La façon pour représenter une relation linéaire entre le tenseur des contraintes σ_{ij} et le tenseur des déformations ε_{kl} est donnée par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \, \varepsilon_{kl} \tag{4.3}$$

avec C_{ijkl} le tenseur du quatrième ordre appelé tenseur des rigidités ou tenseur d'élasticité, et le tenseur de déformation $\varepsilon_{kl} = (\partial u_l/\partial x_k + \partial u_k/\partial x_l)/2$. Parmi les nombreux matériaux, la relation entre la contrainte appliquée est directement proportionnelle à la déformation qui en résulte (jusqu'à une certaine limite), et la relation entre ces deux grandeurs est linéaires (cf. Figure 4-3).

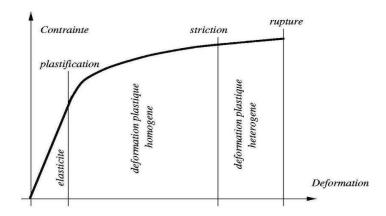


Figure 4-3: Relation entre la contrainte et la déformation

Dans le cas particulier d'un matériau isotrope élastique, la contrainte des déformations s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \tag{4.4}$$

avec λ et μ les coefficients de Lame et δ_{ij} est le delta de Kronecker respectivement. En formulation matricielle, on a :

$$\begin{pmatrix}
\sigma_{x} \\
\sigma_{y} \\
\sigma_{z} \\
\tau_{xy} \\
\tau_{yz} \\
\tau_{zx}
\end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix}
1-\nu & \nu & \nu \\
\nu & 1-\nu & \nu & 0 \\
\nu & \nu & 1-\nu & 0 \\
0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0
\end{bmatrix} \begin{pmatrix}
\varepsilon_{x} \\
\varepsilon_{y} \\
\varepsilon_{z} \\
\gamma_{xy} \\
\gamma_{yz} \\
\gamma_{zx}
\end{pmatrix} (4.5)$$

Le code Aster [27], présenté pour les calculs thermiques, a été utilisé pour les calculs mécanique et en Annexe sont rappelés les principales caractéristiques de la résolution des équations en éléments finis.

4.2.1.3 Couplage

Les problèmes d'interaction fluide-structure font intervenir un fluide et une structure couplés par des conditions aux limites au bord reliant les vitesses et les contraintes dans le fluide et le solide à l'interface ω (cf. Figure 4- 2) les séparant. Les continuités des vitesses (condition cinématique de Dirichlet) et des contraintes (condition dynamique de Neumann) à l'interface découlent respectivement des conditions aux limites imposées côté fluide et côté solide :

$$\overrightarrow{u_f} = \overrightarrow{u_s} \tag{4.6}$$

$$\sigma_f.\overrightarrow{n_f} = \sigma_S \overrightarrow{n_s} \tag{4.7}$$

avec u_s et u_f , n_s et n_f , σ_s et σ_f désignant respectivement la vitesse, la normale extérieure sortante et la contrainte du solide et du fluide. Deux approches sont possibles pour satisfaire la condition de bord (4.6) ou (4.7) : une approche monolithique ou une approche partitionnée détaillées par la suite.

4.2.2 Procédure du couplage

Après avoir détaillé les différents modèles dans les zones à considérer (fluide, solide et à leur interface), la stratégie de couplage à ce stade est indispensable. Deux tendances sont alors identifiées.

L'approche dite monolithique correspond à un traitement au cours duquel l'ensemble des équations est traité simultanément. En effet, comme le détaillent Heil et al. [53], le système complet des équations algébriques non-linéaires, provenant de la discrétisation de l'ensemble des équations des domaines fluide et solide, est résolu en bloc généralement à partir d'une résolution de type méthode de Newton. D'après Heil et al. [53], une telle approche est réputée robuste mais reste peu utilisée en raison d'un manque évident de modularité. En effet, une modélisation de ce type interdit ou rend difficile de disposer d'outils (fluide et solide) ayant été développés de manière indépendante. De plus, leur résolution peut s'avérer significative en temps de calcul, notamment lors de la prise en compte de problèmes de grandes échelles. On rappelle que notre but est de positionner « une couche » de type frontière immergée pour offrir une modularité dans les choix des solveurs. Ainsi, une approche dite partitionnée sera privilégiée. Dans une telle approche, le système couplé fluide/structure est résolu sous-système par sous-système, successivement ou itérativement, et des variables (correspondant aux forces d'action et de réaction d'un point de vue physique) sont échangées à l'interface fluide-structure (directement entre les solveurs ou par l'intermédiaire d'un coupleur). Felippa [54] soulignent les avantages d'une telle approche:

- tout d'abord, l'adaptation aux spécificités de chaque milieu en matière de performance des modèles de résolution (discrétisations spatiales et temporelles, algorithmes,...) est assurée,
- l'indépendance de la modélisation (possibilité d'utiliser des méthodes de discrétisation différentes et des maillages non coïncidents, par exemple) est favorisée,
- ceci offre la possibilité de réutiliser des codes existants, spécialisés dans la résolution d'une physique particulière et assure une grande modularité dans l'implémentation de nouveaux modèles, indépendamment du couplage.

Notons que le plus souvent, le choix d'une méthode partitionnée par rapport à une méthode monolithique est motivé par les contraintes de réutilisation des codes existants. C'est également la motivation dans le cadre de cette étude. La procédure de couplage utilisée est présentée schématiquement Figure 4-4, les conditions aux limites suivantes étant imposées à l'interface :

$$u_f^n = u_s^n \tag{4.8}$$

$$F_{s}^{n} = F_{f}^{n+1} (4.9)$$

avec u^n la vitesse du solide à l'instant n, les indices f et s correspondant à la partie fluide et solide respectivement, et F^n la force surfacique particulaire. Les principales étapes de résolution des systèmes couplés sont :

- 1. Calcul de l'état solide S^{n+1} à l'instant de couplage $t_c + \Delta t_c$. Pour atteindre cet instant, plusieurs boucles en temps (sous cyclage) peuvent être appliquées pour la partie solide,
- Transferts des nouvelles positions (des déplacements) et des vitesses aux frontières du solide.
- 3. Calcul de l'état du fluide \mathbf{F}^{n+1} jusqu'à l'instant du couplage $t_c + \Delta t_c$, avec intégration des conditions imposées par la partie solide avec sous cyclage du pas de temps fluide,
- 4. Transferts des contraintes fluides imposées au solide à l'instant $t_c + \Delta t_c$.

La Figure 4- 4 détaillant le couplage présente une stratégie basée sur une procédure dite CSS pour « Conventional Serial Staggered » décrite par Piperno et al. [55]. L'approche CSS offre effectivement plusieurs avantages et, en premier lieu, son coût d'utilisation. Ce dernier représente en fait la somme des temps de calcul des deux milieux.

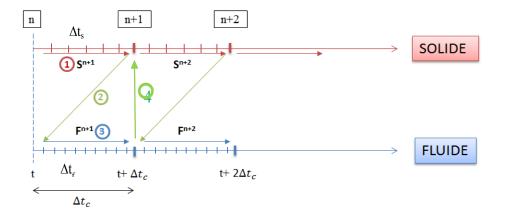


Figure 4- 4: Procédure du couplage

Le calcul d'une des physiques a généralement besoin d'une résolution temporelle plus fine que l'autre et ceci est sans conséquence sur la procédure couplée. De plus, le sous-cyclage des calculs permet d'effectuer l'échange des données entre les deux solveurs à certains instants de la physique la plus rapide, à la fréquence de la physique la plus lente (par exemple avec un pas de temps de couplage Δt_s correspondant au temps caractéristique). Cette procédure CSS avec sous-cyclage offre un gain en temps de calcul et en transferts.

4.2.3 Couplage CFD-IBM/ASTER

En partant des différents points évoqués précédemment pour réaliser le couplage fluide/structure (solveur fluide avec approche IBM, solveur mécanique, couplage partitionné,...), un algorithme de couplage a été proposé et repose sur une architecture similaire à celle proposé §3.2.2 dans le cadre du couplage fluide/solide thermique.

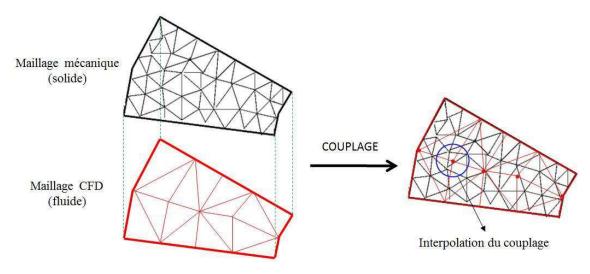


Figure 4- 5: interpolation à l'interface fluide/structure

Pour un problème de couplage fluide/structure traité avec deux solveurs différents, les deux solveurs utilisent généralement 2 maillages surfaciques différents (cf. Figure 4- 5), les nœuds et les éléments à l'interface fluide/structure des deux solveurs ne coïncidant pas généralement puisque les exigences étant différentes pour les systèmes correspondants (utilisation d'éléments différents pour le fluide et la structure solide – triangles et quadrangles – et de plus l'utilisation d'un maillage raffiné de manière différente). Par conséquent, une procédure d'interpolation est donc nécessaire pour échanger les informations (pression, déplacements, vitesse,...) à l'interface. Pratiquement, il y a plusieurs de techniques d'interpolation proposée, par exemple l'interpolation linéaire [49], l'interpolation de la distance inverse [50] et même l'interpolation polynomiale [51]. Par contre, la procédure d'interpolation surfacique engendre toujours des erreurs numériques qui n'assurent pas la conservation d'énergie du système couplés. Afin d'éviter la mise en place d'une procédure d'interpolation surfacique, une seule surface est utilisée. En effet, le maillage surfacique utilisé pour la partie mécanique définit également l'interface côté fluide et ainsi, en partageant ses informations, les procédures d'échange s'en trouvent améliorées. Détaillons alors les entrée/sorties des deux codes :

• Code mécanique (ASTER)

Concernant la partie mécanique solide, on a les échanges suivants :

- En entrée, la partie ASTER-MECA doit récupérer les informations de pression sur toutes les mailles surfaciques et les utiliser comme conditions aux limites. ASTER-MECA effectue alors une résolution du problème dynamique des solides déformables permettant l'accès aux déformations subies par le solide.
- Sortie : Déplacement aux nœuds sur l'interface. Les informations des déplacements sont traitées et stockées en mémoire pour un transfert vers la partie fluide et doivent permettre à la partie CFD-IBM de recalculer la nouvelle position de l'interface fluide/structure.

• CFD-IBM

Une fois le positionnement de l'interface, le calcul fluide est lancé.

- Entrée : ASTER-MECA donne les informations du déplacement du solide et une nouvelle position de l'interface est alors définie.

Le code fluide à partir de la méthode IBM met à jour les coefficients d'interpolation et l'écoulement peut être calculé.

- Sortie : Pression/force au niveau des éléments (mailles) surfaciques de l'interface fluide/structure. La force fluide agissant sur l'interface est calculée par l'intégrale surfacique suivante:

$$\vec{F} = \iint (-p\vec{n} + \tau_{ij}\vec{n})ds \tag{4.10}$$

avec p la pression, τ_{ij} les contraintes de cisaillement, ds la surface élémentaire, et \vec{n} le vecteur normal de la surface s. Dans la modélisation retenue, la surface du corps est composée par les mailles triangles non-structurées, ds étant la surface élémentaire par élément triangle. En projetant l'équation sur les trois axes (x, y, z), nous obtenons les forces aérodynamiques :

$$F_x = \iint [(\tau_{11} - p)n_x + \tau_{12}n_y + \tau_{13}n_z] ds$$
 (4.11)

$$F_{y} = \iint [\tau_{21}n_{x} + (\tau_{22} - p)n_{y} + \tau_{23}n_{z}]ds$$
 (4.12)

$$F_z = \iint [\tau_{31} n_x + \tau_{32} n_y + (\tau_{33} - p) n_z] ds$$
 (4.13)

avec

$$\tau_{12} = \tau_{21} = \mu(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}) \tag{4.14}$$

$$\tau_{13} = \tau_{31} = \mu \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \tag{4.15}$$

$$\tau_{32} = \tau_{23} = \mu \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right) \tag{4.16}$$

$$\tau_{ii} = 2\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) \tag{4.17}$$

avec U, V, W sont les composantes de vitesse suivant les directions x, y, z respectivement et μ est la viscosité cinématique. La pression et les contraintes sur chaque élément surfacique sont estimées par une procédure d'interpolation similaire à celle décrite cf. \$4.2.2 a. Dans ce cas, la pression p et les forces F_i doivent être calculées au niveau des éléments triangles surfaciques sur l'interface.

Il est important de souligner qu'à chaque modification de la position ou déformation de l'objet, la mise à jour de la nouvelle géométrie nécessite une identification de la topologie dédiée aux frontières immergées (forcing point, ghost-cell point, ...)

4.3 TRAITEMENT AUX FRONTIERES IMMERGEES

La réalisation des calculs numériques et les résultats obtenus sont évidemment directement conditionnés par les conditions aux limites imposées. Dans le cas d'un calcul couplé, les résultats du calcul fluide servent de conditions aux limites utilisés pour le calcul solide et vice-versa. L'estimation des forces aérodynamiques est donc déterminante et une attention particulière doit être apportée à cette étape. En effet, cette procédure s'effectue par l'intermédiaire du traitement IBM et il est important de caractériser la consistance des forces ainsi estimées.

4.3.1 Estimation des efforts fluide/structure

Comme indiqué $\S4.2.4$, l'intégrale des forces de pression et de viscosité est estimée sur la surface solide. Pour qualifier cette estimation, prenons un domaine fluide au sein duquel un cylindre de diamètre d est translaté (). Le cylindre subit un mouvement sinusoïdal forcé en translation suivant la direction principale avec une vitesse telle que :

$$U_{cylindre} = U_c \sin(2\pi f t) \tag{4.18}$$

Cette configuration a été proposée par Luo et al. [56] et bien que le domaine soit relativement de faible envergure, l'idée réside principalement dans l'estimation des forces de trainée et il s'agit de les comparer avec celles obtenues avec notre modèle. Comme le souligne Keulegan et al. [57], les caractéristiques de l'écoulement sont pilotées par le nombre de Reynolds *Re* et le nombre de Keulegan-Charpentier *KC* [57] définis respectivement comme :

$$Re = \frac{Ud}{\vartheta} \tag{4.19}$$

$$KC = \frac{U}{fd} \tag{4.20}$$

avec U, d, ϑ et f la vitesse de l'écoulement, le diamètre du cylindre, la viscosité cinématique et f la fréquence d'oscillation respectivement. Le cas test alors réalisé utilise les paramètres suivants :

$$Re = 100$$
; $1/KC = 0.2$; $U_c = 0.1\pi U = 0.25d$ (4.21)

Pour ce cas d'étude, nous avons considéré le fluide comme de l'air assimilé à un gaz parfait et les principaux paramètres de la simulation sont listés dans le Tableau 4.1. La Figure 4-7 présente l'évolution du coefficient de trainée en fonction du temps :

$$C_{x} = \frac{F_{x}}{\frac{1}{2}\rho U^{2}S} \tag{4.22}$$

avec F_x la composante longitudinale de la force aérodynamique, S la surface du cylindre.

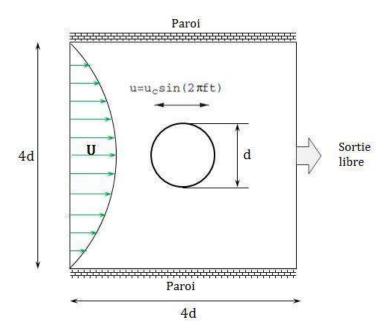


Figure 4- 6: Configuration test d'un cylindre en oscillation horizontale forcée

Géométrie	2D	
Diamètre d	1 <i>m</i>	
$L_x \times L_y \times L_z$	$4d \times 4d \times 0.1d$	
$N_x \times N_y \times N_z$	128 × 128 × 3	
Amplitude d'oscillation, U_c	0.25d	
Fréquence d'oscillation, f	0.2 Hz	
Fluide	Air	
Vitesse fluide maximale	U = 1 m/s	
Viscosité cinématique	$\vartheta = 1 \times 10^{-2} \ m^2/s$	
Température	$T = 20^{\circ}C$	
Pression	1 atm	

Tableau 4.1 : Caractéristiques de la géométrie et du fluide

Pour valider notre approche, les résultats obtenus avec nos modèles seront comparés aux résultats publiés par Luo et al. [56]. Dans leurs travaux Luo et al. [56] ont souligné l'existence et le développement d'oscillations dès lors que la technique de forçage discret est appliquée à un solide en déplacement. Avant de suivre les éventuelles recommandations prônées par Luo et al. [56], comparons les résultats obtenus dans des conditions paramétriques similaires (résolution spatiale et temporelle similaire). A cet effet, le tracé de la force de trainée en fonction du temps est donné Figure 4-7.

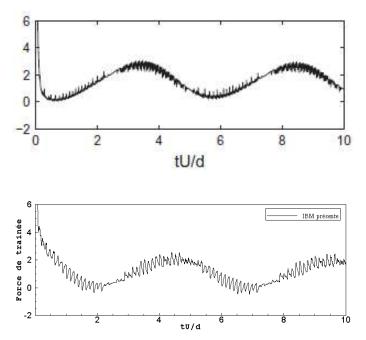


Figure 4-7: cylindre oscillant horizontalement (Luo et al. [56])

Dans un premier temps, les résultats obtenus témoignent de variations temporelles de la force de trainée attendues au regard de la configuration étudiée. Par contre, ces variations sont accompagnées d'oscillations parasites typiques d'instabilités numériques. Luo et al. [56] a également observées de telles oscillations et l'ordre de grandeur des instabilités semble plus faible pour Luo et al. [56] que celle observée dans nos résultats. Cependant, les calculs ont été conduits avec une approche de reconstruction linéaire d'ordre 1 au niveau des forcing points en appliquant comme conditions aux limites un gradient de pression nul. D'un point de vue pratique, aucune reconstruction n'est nécessaire au cours du calcul instationnaire sauf bien évidement dès lors que l'on désire estimer des forces s'exerçant sur le solide. Quel que soit le traitement (ordre1 ou ordre 2) appliqué, on observe que l'ordre de grandeur des coefficients de trainée est similaire ; de plus, l'amplitude de la variation de C_x de +2.45 et -0.01 est bien captée par nos calculs tout comme l'est la période (qui correspond évidemment à la période d'oscillations imposées). Cependant, le fait marquant de nos résultats correspond à la présence d'oscillations parasites dont l'existence semble directement liée au développement d'instabilités d'ordre numérique.

4.3.2 Identification de la nature des instabilités numériques

Afin d'analyser le comportement instable détecté auparavant, il est nécessaire d'identifier leur origine. En considérant la restriction appliquée au choix du pas de temps lié au critère CFL, l'interface solide/fluide ne peut se déplacer de plus d'un élément du maillage à chaque pas de temps. Dans le cadre de la méthode IBM, quand un corps solide se déplace dans un maillage du fluide, deux phénomènes peuvent intervenir. Soit une maille fluide à l'instant précédent devient une maille solide, soit il s'agit du contraire, une maille fluide devient une maille solide. Ce processus est schématiquement souligné Figure 4- 8, le cylindre se translatant d'une maille de l'instant t^n à l'instant t^{n+1} . Ce processus va générer de nouvelles cellules fluides notées F (F pour cellules « fraîches ») et en même temps, certaines cellules fluides disparaissent, devenant de nouvelles cellules solides notées par le symbole D (D pour cellules « mortes »).

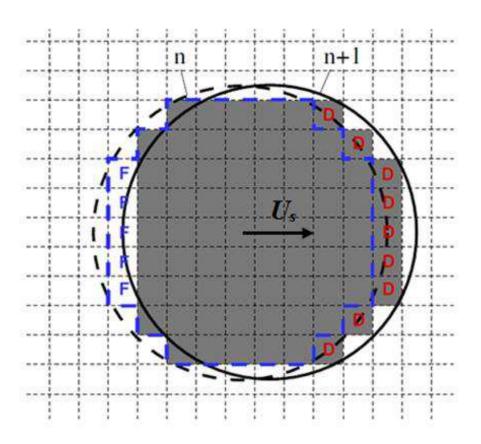


Figure 4- 8: Mouvements du cylindre par rapport à son maillage fixe: F cellules « fraîches » (nouvelles cellules fluides) et D cellules mortes (nouvelles cellules solides)

Pour le schéma de l'avancement temporel utilisé dans cette étude, l'évaluation du RHS de l'équation de quantité de mouvement à l'instant t^{n+1} nécessite des valeurs physiques du vecteur de vitesse et de la pression, ainsi que leurs dérivés à l'instant précédent t^n à tous les points du fluide (voir équation 3.2). A cause du déplacement de l'interface, il est possible que certaines des valeurs requises à l'instant t^n ne soient pas physiques. Suivons le changement d'état pour tenter de souligner le développement d'instabilités potentielles.

4.3.2.1 Oscillations des efforts fluide/structure

Pour identifier les cas particuliers qui sont des sources potentielles d'erreurs lors de la procédure d'avancement du temps, considérons un déplacement de l'interface solide/fluide (cf. Figure 4-9). Les zooms des deux phénomènes de changement d'état (a et b) des points sont présentés

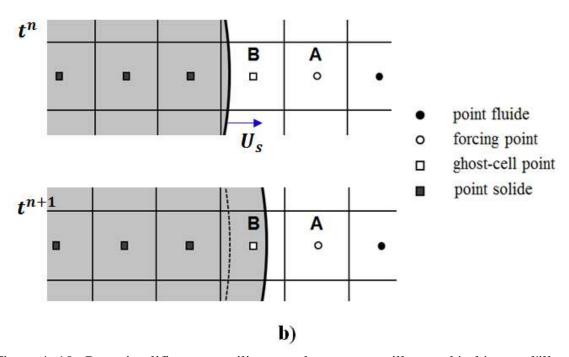


Figure 4- 10. Pour simplifier, nous utilisons seulement une grille non-décalée pour l'illustration.

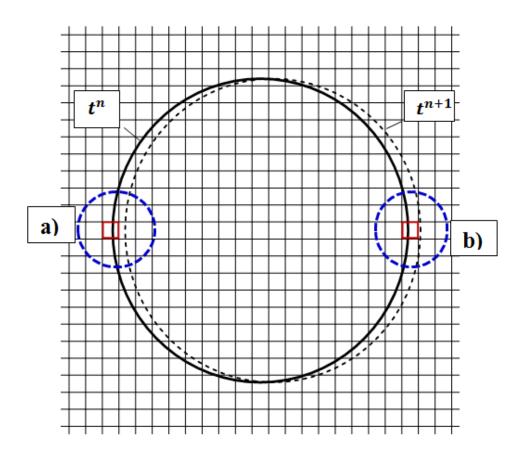


Figure 4- 9: Mouvement d'un cylindre sur un maillage fixe

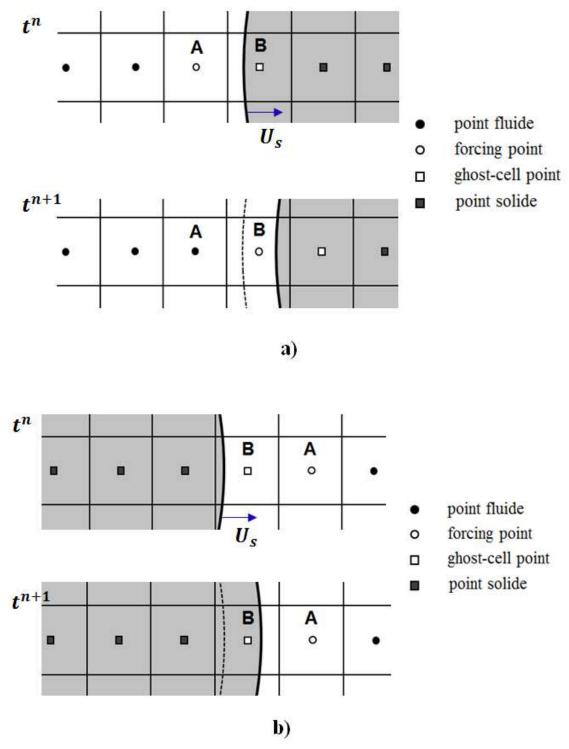


Figure 4- 10: cas a): changement de l'état des points IBM (point A) forcing point → point fluide and (point B) GC point → forcing point cas b): changement de l'état des points IBM (Point A) point fluide → forcing point et (point B) forcing point → ghost-cell point.

La frontière se déplace dans la région solide, le point $\bf A$ sera occupé par la partie solide au pas de temps suivant (t^{n+1}) et le point $\bf B$ deviendra ainsi un point d'interpolation (forcing point) (cf.

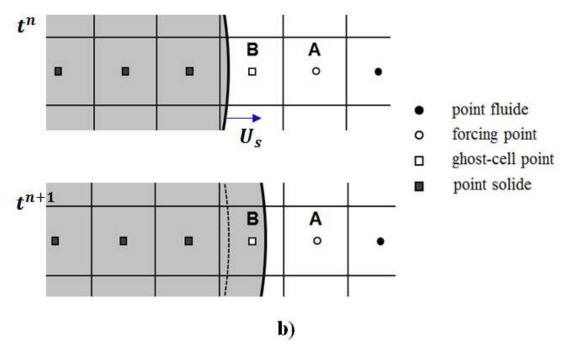


Figure 4- 10). Pour le point $\bf B$, il n'y a pas de problèmes relatifs au schéma d'avancement temporel. En effet, à l'instant t^{n+1} , tous les forcing points sont reconstruits par une procédure d'interpolation et ne dépend pas de l'évolution des champs de vitesse ou de pression. Par contre, pour tous les points fluides nouvellement définis (le point $\bf A$), les termes sources (RHS) impliquent des dérivées ne pouvant être correctes (équation (2.8)). Ces points à l'instant t^n sont des forcings points, et même si leurs valeurs sont obtenues à partir des procédures d'interpolation pour la vitesse et la pression, leurs dérivées n'auront pas de valeurs physiques ; ils impliquent en effet des points solides. Pour supprimer l'effet de cette distribution de pression non-physique, Yang et Balaras [25] ont proposé une approche «extension du champ » afin de recouvrir les valeurs physiques des dérivées de vitesse et pression. Dans cette méthode, la pression et la vitesse de ces points sont obtenues à partir d'une extrapolation des pressions et des vitesses de fluide à l'extérieur de la frontière immergée avant que la frontière immergée soit relocalisée à chaque pas de temps. Cette méthode sera détaillée dans le paragraphe §4.3.2.2.

La frontière se déplace dans la région fluide et au pas de temps suivant, le solide occupera le point **B** alors que le point **A** deviendra un point d'interpolation (forcing point). Pour le point **B**, où le point fluide se déplace dans le solide, il ne pose clairement aucun problème puisque le traitement intérieur du corps solide n'influence pas la solution fluide. Par contre, le point **A** pose un problème de discontinuité temporelle de vitesse. C'est parce que la vitesse au point **A** a

changé subitement à partir des différences finies pour résoudre les équations de Navier-Stokes à l'instant $t=t^n$ (quand le point $\mathbf A$ était fluide) pour être reconstruite par interpolation dans la condition de forcing point à l'instant suivant $t=t^{n+1}$ (quand le point $\mathbf A$ devient forcing point). Bien que les deux schémas discrets (la différence finie et l'interpolation) sont des approximations valables sur le même champ d'écoulement, les deux descriptions différentes offrent des discontinués dans la discrétisation propre. Par conséquent, la différence entre les deux types d'erreur crée une discontinuité temporelle de la vitesse.

La partie suivante, propose des solutions pour tenter de traiter les oscillations des forces dans les deux cas précédemment identifiés.

4.3.2.2 Traitement des forces parasites

a) Extension du champ

Comme nous l'avons préalablement évoqué, le besoin d'une estimation temporelle lors d'un changement d'état a poussé Yang et Balaras [25] à créer une procédure d'extension des champs afin de récupérer les valeurs physiques des dérivées de pression/vitesse aux points fluides, points étant solides au pas de temps précédent. Cette extension peut être mise en œuvre en extrapolant les informations physiques à partir du champ d'écoulement fluide pour les régions contenant des informations non physiques (ghost-cells points) avant que la frontière immergée se déplace à chaque pas de temps.

Le but de cette méthode d'extension est de procurer des valeurs physiques aux valeurs de vitesse et de pression au niveau des forcing points afin que les termes du second membre estimés à l'instant suivant (t^{n+1}) soient même sujet à des perturbations. La prise en compte des points fictifs est identique à celle présentée §4.2.2.1.

Le centre de cette procédure est encore le point sur l'interface où la normale du point de ghost-cell correspondant. Le stencil comporte deux points de plus de la phase fluide, comme indiqué dans Figure 4- 11. Les coefficients d'interpolation sont calculés en résolvant un système d'équations identique à celui détaillé dans le cadre d'une formulation aux frontières immergées classique.

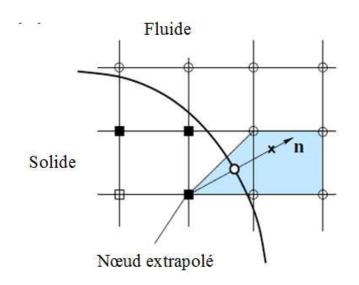


Figure 4- 11: Extrapolation pour les ghost-cell points

En utilisant le problème du cylindre forcé à se translater, appliquons la méthode d'extension des champs sur 10 s avec exactement les mêmes conditions aux limites précédemment utilisée (§4.3.1). La Figure 4- 12 présente une comparaison entre les forces de trainée calculées avec et sans extension et on constate que les forces de trainée présentent des oscillations numériques affaiblies mais néanmoins toujours présentes.

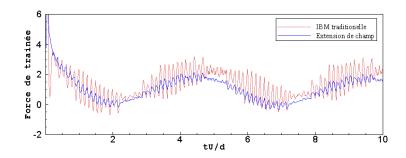


Figure 4- 12 : Force de trainée sans et avec la méthode extension de champ

b) Méthode hybride

Alors que l'extension des champs scalaires et des vitesses joue clairement un rôle sur les niveaux d'oscillations, un remède pour assurer une transition continue a été proposé par H. Luo et al. [56].

Lorsque les ghost-cell points ont des valeurs physiques, les équations (4.1) peuvent être discrétisées à tous les points situés côté fluide. Cependant, on introduit une topologie mixte pour

les forcing points. La nouvelle description numérique pour les forcing points est une combinaison de l'équation discrète de Navier-Stokes et d'interpolation IBM. On exigera que la description numérique subisse une transition en douceur quand les nœuds hybrides se rapprochent ou s'éloignent de la topologie IBM de la frontière immergée. En utilisant l'expression suivante :

$$u = (1 - \alpha). u_{NS} + \alpha. u_{Inter} \tag{4.23}$$

$$p = (1 - \alpha). p_{Poisson} + \alpha. p_{Inter}$$
(4.24)

avec α le coefficient de poids d'interpolation compris en $0 \le \alpha \le 1$, u_{NS} la vitesse est calculée par l'équation de Navier-Stokes discrète et u_{Inter} calculée par interpolation. $P_{Poisson}$ la pression calculée par l'équation de Poisson et P_{Inter} est déterminée par interpolation. Dans l'équation (4.23), α change de zéro (0) à unité (1) quand le point se déplace au loin de la frontière, ce qui permet donc une transition en douceur temporelle de la description numérique proche de l'interface. Le coefficient de pondération α dans l'équation (4.23) et (4.24) détermine l'importance relative des valeurs interpolées par rapport à la solution de l'équation Navier-Stokes. Pour déterminer α , les principes suivants sont définis :

- 1. quand le forcing point devient un point fluide régulier, α doit tendre vers zéro,
- 2. quand le nœud de forçage devient un nœud fictif dans le corps solide, α doit s'approcher de l'unité (1),
- 3. en général, α doit augmenter si le forcing point se déplace vers l'interface, et diminuer dans le cas contraire.

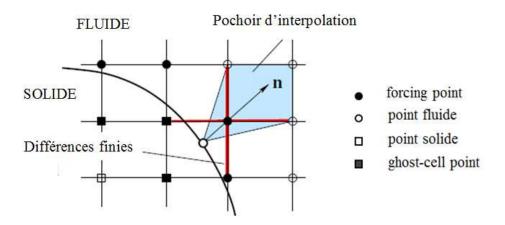


Figure 4-13: IBM et traitement via des interpolations et par différences finies.

Pour trouver un algorithme approprié pour déterminer α , les informations liées aux ghost-cell points et aux voisins des forcing points sont utilisées. La Figure 4- 13a présente, en 2D pour simplifier la compréhension, les nœuds fictifs G1 et G2 voisins du forcing point. (G1 dans la direction X et G2 dans la direction Y). α est alors déterminé comme :

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\Delta_1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_2}{\Delta y}\right)^2} \tag{4.25}$$

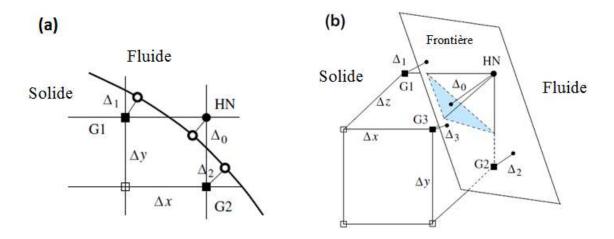


Figure 4-14: Traitement au forcing point

avec Δx et Δy les intervalles du maillage dans les directions X et Y respectivement, Δ_1 et Δ_2 les distances des nœuds fictifs considérées à l'interface respectivement. Si le forcing point possède un seul GC point dans son voisinage, le coefficient α dans l'équation ci-dessus n'est pas défini et

est simplement mis à zéro. Dans un cas tridimensionnel (cf. Figure 4- 13b), l'algorithme de détermination de α s'écrit :

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\Delta_1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_2}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_3}{\Delta z}\right)^2} \tag{4.26}$$

où Δx , Δy et Δz sont les intervalles du maillage dans les directions x, y et z respectivement ; Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 sont les distances des GC points à l'interface respectivement comme le montre la Figure 4-14b. Dans ce cas, si le nœud hybride a seulement un ou deux GC dans son voisinage, la valeur de α est mise à zéro. A noter que si le rayon de courbure locale de la frontière est grand par rapport à la taille de la cellule et que la frontière est une ligne droite en 2D et un plan en 3D, alors la valeur α dans les équations (4.33) et (4.34) est toujours entre soit nulle soit égale à un pour satisfaire les principes énumérés précédemment. Dans un tel cas, la procédure hybride n'apporte alors aucune amélioration. Cette technique hybride peut cependant jouer un rôle sensible dans le cas test entrepris préalablement (cylindre en translation). En comparant justement sur la même configuration l'apport potentiel de la technique hybride, force est de constater le rôle déterminant sur les instabilités et bien que de légères fluctuations demeurent encore visibles, les résultats alors obtenus sont en très bon d'accord avec ceux attendus dans la littérature.

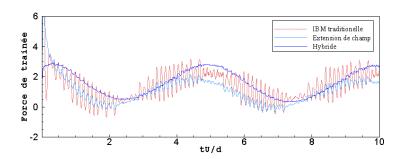


Figure 4-15 : Force de trainée sans et avec la méthode hybride

En étudiant le champ de vitesse Figure 4- 16 au cours d'une période d'oscillation du cylindre, on constate que les contours de vitesse sont continus même près de la surface du cylindre et ceci indépendamment de l'existence de légères fluctuations à haute fréquence indiquées Figure 4- 17. En effet, le problème de discontinuité provient essentiellement de la reconstruction des champs au niveau de la paroi.

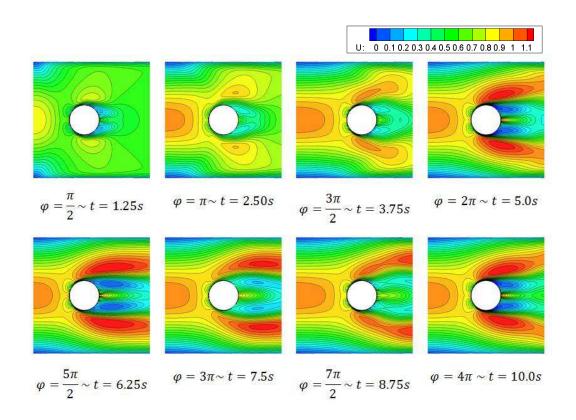


Figure 4-16: Champs de vitesse présentés pour 8 phases différentes de l'oscillation

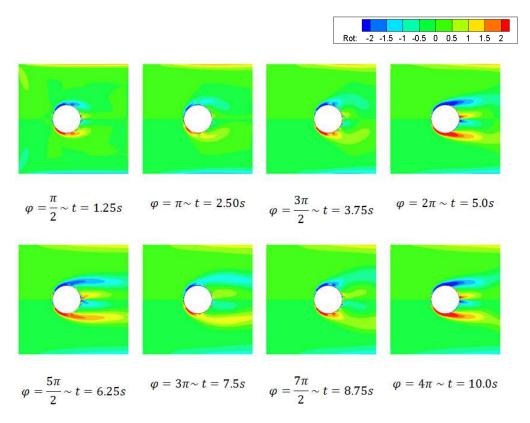


Figure 4- 17: Contours instantanés de la composante (Ω_z) du vecteur tourbillon aux différentes phases de l'oscillation

c) Influence du pas d'espace et du pas temps

En théorie, la vitesse du point au niveau de fluide (u_i) proche de la frontière immergée doit approcher la vitesse du corps solide (U_s) . Cependant, dans le cadre de la méthode IBM, lorsque la frontière immergée s'approche très près du point voisinage (i.e. forcing point), u_i converge vers U_s avec une erreur de discrétisation spatiale de second ordre en raison de l'interpolation de second ordre utilisant les vitesses locales à proximité de la frontière i.e.:

$$u_i = U_s + O(\Delta X_i^2)$$

En supposant négligeable l'accélération du corps solide pour des raisons de la simplicité, la dérivée temporelle de la vitesse à cette maille devient :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} O(\Delta X_j^2) \tag{4.27}$$

Dans le paragraphe §4.3.2.1, on a évoqué que la discontinuité de vitesse temporelle est la raison qui génère des comportements non-physiques de la pression à proximité de la frontière $(\partial u/\partial t \sim \partial p/\partial x_i)$ et ainsi génère des oscillations dans les efforts. L'estimation du gradient temporel de la vitesse étant proportionnelle au carré du pas d'espace et inversement proportionnelle au pas de temps (l'équation (4.26)), la réduction des oscillations peut trouver son origine soit dans la résolution temporelle soit dans la résolution spatiale.

En effet, augmenter la résolution spatiale du maillage afin de réduire l'erreur de troncature est une option facile, encore faut-il estimer ses conséquences sur les instabilités observées et que le maillage ne devienne pas alors pénalisant en termes de temps CPU. Afin d'estimer les effets du maillage, trois résolutions spatiales ont été conduites $(64 \times 64, 128 \times 128, 256 \times 256)$ en adaptant le pas de temps en fixant $\Delta t U/d$ à une valeur constante égale à 0.004.

La Figure 4- 19 présente l'amplitude de l'oscillation des forces parasites diminuant proportionnelle au carré du pas de maillage (selon l'équation (4.26)). La solution s'approche la solution exacte pour le maillage le plus fin (les résultats sont identiques avec Luo et al. [56]).

On peut également réduire les oscillations des forces parasites en augmentant le pas de temps de calcul. Bien sûr, une telle augmentation est limitée par le CFL. Pour en souligner les effets, considérons l'effet du pas de temps de calcul sur les oscillations des forces en fixant le maillage avec les points de la grille de 128 × 128 et en faisant varier le pas de temps de calcul:

 $\Delta t U/d = 0.001$, 0.002 et 0.004. La plus petite oscillation a obtenue avec le plus gros pas de temps. On voit que l'amplitude d'oscillation est inversement proportionnelle avec le pas de temps (équation (4.26)). Nous allons par la suite, et sauf au contraire, poursuivre les calculs fluide/structure avec des techniques d'extension du champ et de la méthode hybride.

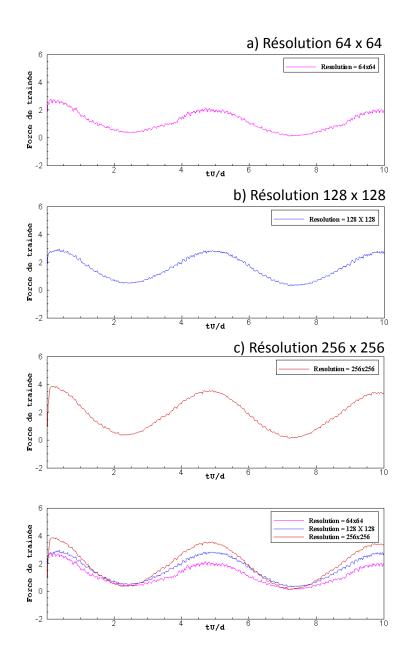


Figure 4- 18: Coefficient de trainée en fonction de la résolution spatiale avec un pas de temps contraint $\Delta t U/d = 0.004$

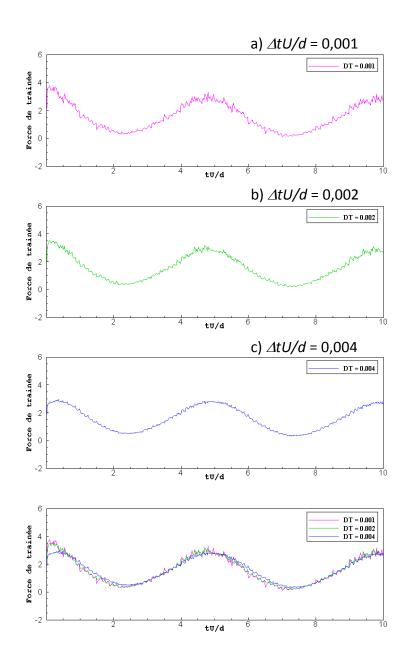


Figure 4- 19: Coefficient de traînée avec la solution fixée 128×128 .

4.4 CALCUL COUPLE FLUIDE/STRUCTURE

Après avoir détaillé la stratégie de couplage et la procédure aux frontières immergées jouant le rôle d'interface et de plateforme de transfert des informations fluide → solide et solide → fluide, le modèle est techniquement prêt pour être utilisé sur des configurations complexes couplées. Notre démarche se voulant graduelle, les différents cas envisagés sont principalement

mis en œuvre afin de souligner la potentialité du modèle ainsi proposé. Dans un premier temps, le couplage entre un écoulement laminaire autour d'une plaque plane est envisagé.

4.4.1 Ecoulement laminaire autour d'une plaque plane

4.4.1.1 Contexte de l'étude

Un des cas les plus standards et des plus académiques en mécanique des structures est sans contexte le cas d'une poutre encastrée à une extrémité et soumise à une force à l'autre (cf. Figure 4- 20) [58]. Si une force continue est appliquée F_y , une solution analytique stationnaire existe [59] et la flèche à l'extrémité de la poutre s'estime par :

$$dy = -\frac{4F_y L^3}{Fdh^3} (4.28)$$

avec *E*, *b*, *d*, *L* le module d'Young du matériau et les trois dimensions de la poutre dans les trois directions de l'espace X, Y, Z respectivement. Analytiquement, la fréquence naturelle de la poutre encastrée est donnée par la relation [60] :

$$f = \frac{3.516}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI_{xy}}{\rho bd}} \tag{4.29}$$

avec I_{xy} le moment d'inertie dans le plan XY et ρ la masse volumique du matériau. Une approche numérique corrèle évidemment ce résultat théorique. Pour le vérifier, conduisons ce calcul. Pour cela, un maillage volumique en TETRA4 [27] est réalisé et les conditions aux limites précédentes (encastrement et forçage continu) sont appliquées à la poutre. L'ensemble des paramètres caractéristiques est listé dans le Tableau 4.2. Pour un tel cas, le maillage volumique ainsi réalisé comprend 6311 éléments TETRA4 utilisant 1750 nœuds.

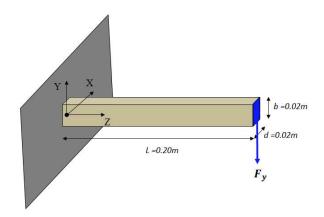


Figure 4- 20: Configuration

Les étapes du calcul mécanique sont les suivantes. Tout d'abord, une sollicitation F_y est imposée et la poutre se fléchit (cf. Figure 4- 21). Une fois la position d'équilibre atteinte, la force F_y est supprimée et la courbe de déplacement du point A positionné à l'extrémité libre de la poutre suit un déplacement instationnaire (Figure 4- 22). Ce dernier est sinusoïdal avec une amplitude de $\pm 0.1 \, mm$ à une fréquence de 2.30 Hz. Ces deux valeurs corrèlent parfaitement l'aspect théorique obtenu à partir des équations (4.28) et (4.29).

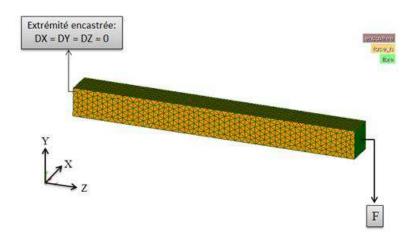


Figure 4-21: Maillage mécanique

Caractéristiques de la géome	étrie	Valeur (mm)
Longueur de la poutre	L	200
Hauteur de la poutre	b	20
Largeur de la poutre	d	20
Caractéristiques du matéria	и	Valeur
Masse volumique	ρ	2600 kg.m ⁻³
Ratio de Poisson	v	0.3
Modules de Young	E	2.1 ^{E6} Pa
Maillage mécanique		Valeur
Eléments volumiques		6311
Nœuds		1750

Tableau 4.2 : Caractéristique de la simulation de la poutre

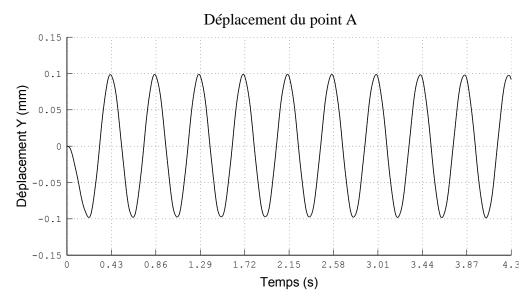


Figure 4- 22: Déplacement au niveau de l'extrémité libre de la poutre (point A) en fonction du temps.

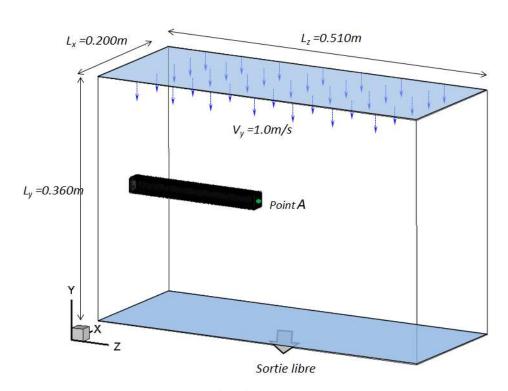


Figure 4-23: Configuration du couplage

Plaçons alors la même poutre dans un domaine fluide pour effectuer un couplage fluide/structure complet. La Figure 4- 23 témoigne du domaine utilisé, la poutre étant appuyée sur la plan XY à Z=0. Les dimensions et les conditions aux limites du domaine sont listées dans le Tableau 4.3. Le maillage fluide dans les directions de l'espace est régulier avec une résolution spatiale de

 1×10^{-3} m et un champ homogène de vitesse entrant est imposé (cf. Figure 4- 23). L'écoulement est laminaire avec un nombre de Reynolds fixé à Re = 200, le fluide utilisé offrant une viscosité cinématique $v = 10^{-4} \, m. \, s^2$. Deux valeurs de masse volumique ($\rho = 1.0$ et $\rho = 10.0 \, \text{kg/m}^3$) sont étudiées pour voir le rôle de la force résultante de l'impact de l'écoulement sur le structure.

L_x L_y L_z Δx Δy	200 360 510 2.0
L_z Δx	510 2.0
Δχ	2.0
Δy	1.0
	1.8
Δz	2.0
	Valeur
Masse volumique ρ	1 kg.m ⁻³
ρ	10 kg.m ⁻³
Re	200
μ	$10^{-4}{\rm m/s^2}$
V_y	1 m/s
$P_{\!\scriptscriptstyle \infty}$	1 bar
T_{∞}	30°C
	$ ho$ Re μ V_y P_{∞}

Tableau 4.3 : Caractéristique de la géométrie du domaine de calcul et de la poutre

Bien sûr, afin que le nombre de Reynolds de 200 soit conservé quel que soit la masse volumique considérée, la vitesse imposée en entrée est modulée d'autant. Pour réaliser ce calcul couplé, une procédure constituée de plusieurs étapes est mise en place :

- la plaque est initialement chargée d'une force F_y à l'extrémité de la poutre,
- A t = 0, on supprime brutalement cette force et cet instant correspond au lancement du
 calcul couplé fluide/structure. Initialement, la vitesse fluide est supposée constante et
 conforme égale à la vitesse d'entrée imposée sur la frontière supérieure (cf. Figure 4- 23).

En se basant sur l'analyse théorique, la période d'oscillations attendue du première mode de la plaque est proche de 0.43 s. Donc, pour capter le mouvement de la poutre, le pas de couplage entre fluide et solide a été pris égal à 0.01 s (environ 43 pas de temps par cycle). Les autres paramètres de la simulation sont listés dans le Tableau 4.4. Les techniques de l'extension de champ et de la méthode hybride présentées précédemment ont été appliquées pour traiter les oscillations des forces dans la méthode IBM du côté fluide.

4.4.1.2 Analyse des résultats

Une fois l'ensemble des paramètres du couplage configuré, le calcul couplé a été lancé sur 5 secondes correspondant à 11 périodes. Ce calcul a été réalisé sur un CPU possédant 4 processeurs cadencée à 2.27 GHz et une mémoire de 5 Go et 10 heures de calcul ont été nécessaires pour l'analyse instationnaire. Etudions l'effet de l'écoulement fluide au cours du déplacement de la poutre. La Figure 4- 24 présente les déplacements du point A situé à l'extrémité de la poutre pour trois cas :

- cas de référence « sans fluide » et en appliquant la force F_y équivalente,
- une configuration avec le calcul fluide offrant une masse volumique de $\rho_f = 1 \, kg/m^3$,
- et le même calcul couplé mais pour une densité fluide de $\rho_f=10~kg/m^3$.

Comme le suggère l'approche théorique, les déplacements du point **A** attendus sont de nature sinusoïdale s'exprimant sous la forme :

$$dy = A_0 + Asin\varphi$$

avec A_0 , A et φ la position d'équilibre, l'amplitude et phase d'oscillations respectivement. Pour chaque cas étudié, les valeurs caractéristiques de ce déplacement sinusoïdal sont répertoriées (cf. Tableau 4.5). En présence d'un écoulement traversier, la position d'équilibre A_0 est bien sur

évidemment différente. Alors que sans écoulement l'obstacle vibre de part et d'autre de sa position verticale ($A_0 = 0$), la présence d'un écoulement influence d'autant plus la position d'équilibre que la masse volumique du fluide est importante.

Caractéristiques de simulation			
Nombre de cellules du domaine	N	5.12 × 10 ⁶	
Nombre de maillage surfacique	M	2408	
Pas de temps du fluide	$\Delta t_{\mathbf{f}}$	0.0005 s	
Pas de temps de la mécanique	Δt_{s}	0.005 s	
Pas de temps du couplage	Δt	0.01 s	

Tableau 4.4 : Caractéristiques de la simulation

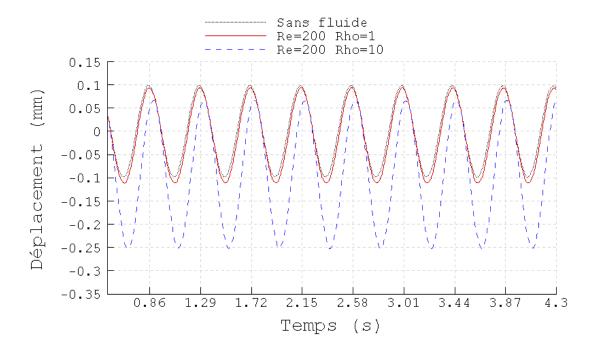


Figure 4- 24: Déplacements au bout de la poutre

Au-delà de la position d'équilibre, le mouvement sinusoïdal est également fortement affecté. Alors que l'amplitude A n'est augmentée que de 3% avec l'écoulement offrant une masse volumique de $\rho_f=1\,kg/m^3$, l'augmentation de la densité à la valeur $\rho_f=1\,kg/m^3$

 $10 \, kg/m^3$ engendre une augmentation significative de l'amplitude correspondante de 30% de plus par rapport au cas sans écoulement. L'introduction de la prise en compte de l'écoulement joue également un rôle d'amortisseur, au moins vis-à-vis de la période de l'oscillation qui a tendance à le réduire.

Masse volumique	Position d'équilibre	Amplitude	Période
(kg/m³)	$A_0 \text{ (mm)}$	A (mm)	T(s)
Sans fluide	0.00	0.100	0.445
1	-0.011	0.103	0.440
10	-0.11	0.131	0.435

Tableau 4.5 : Amplitude et période oscillation

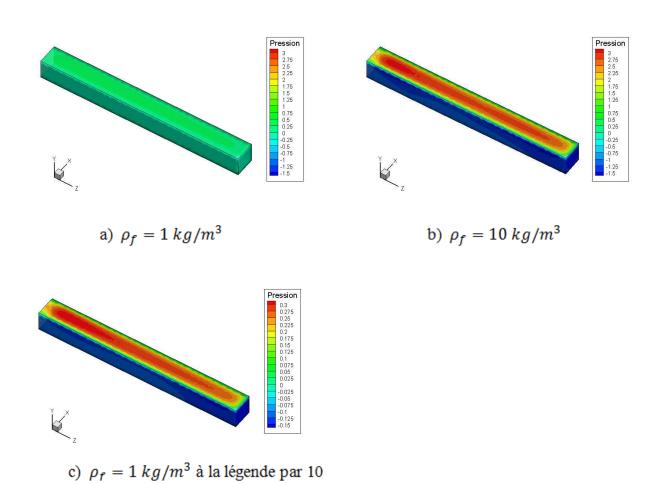


Figure 4- 25: Distribution de pression sur la surface de la plaque

La Figure 4- 25 présente une comparaison des distributions surfacique de la pression entre les deux cas de densité $\rho_f=1\,kg/m^3$ à gauche et $\rho_f=10\,kg/m^3$ à droite au même instant $t=2.4\,s$ quand la poutre atteint sa déformation maximale. On voit que la pression maximale sur la plaque pour $\rho_f=10\,kg/m^3$ est beaucoup plus importante que celle du cas $\rho_f=1\,kg/m^3$. Ceci est plus évident Figure 4- 26 en traçant la pression dans le plan neutre X=0, à partir de la racine de la poutre sur la face avant et puis la face arrière en direction Y. La différence de la pression entre surface avant (up-stream) et la surface arrière (down-stream) pour le cas $\rho_f=10\,kg/m^3$ est plus importante que celle du cas $\rho_f=10\,kg/m^3$. En conséquence, le déplacement du cas $\rho_f=10\,kg/m^3$ est plus important (Figure 4- 24).

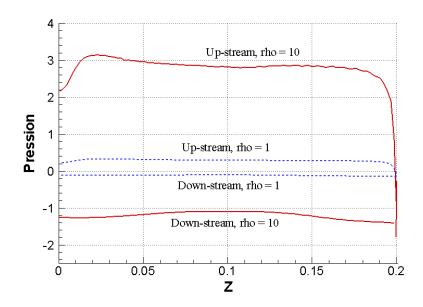


Figure 4- 26 : Comparaison des pressions sur la plaque à t = 2.4s

La Figure 4- 27 présente le champ de vitesse longitudinale et le vecteur de vitesse à X=0 et à l'instant $t=2.4 \, s$ pour deux cas de $\rho_f=1 \, kg/m^3$ et $\rho_f=10 \, kg/m^3$, ainsi le zoom à l'extrémité de la poutre présenté Figure 4- 28. La Figure 4- 29 présente l'évolution du champ de vitesse longitudinale à quatre instants différents à partir de l'amplitude maximale $(t=2.15 \, s)$ à l'amplitude minimale $(t=2.4 \, s)$.

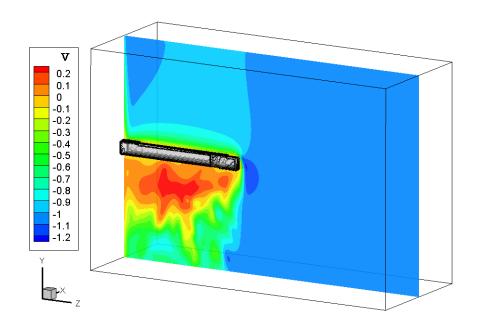


Figure 4- 27 : Champ de vitesse longitudinale $\rho_f=10~kg/m^3$ à X = 0.0m, $t=2.4~{
m s}$

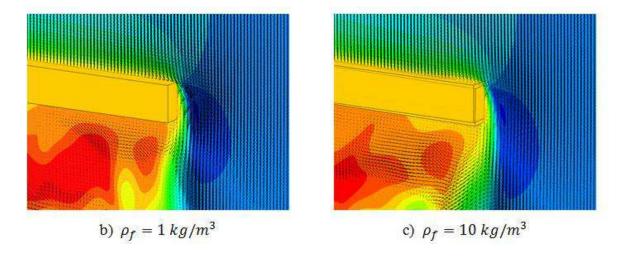


Figure 4- 28: Zooms des vecteurs vitesses à l'extrémité de la poutre à $\mathbf{X}=\mathbf{0.0m}, t=\mathbf{2.4s}$

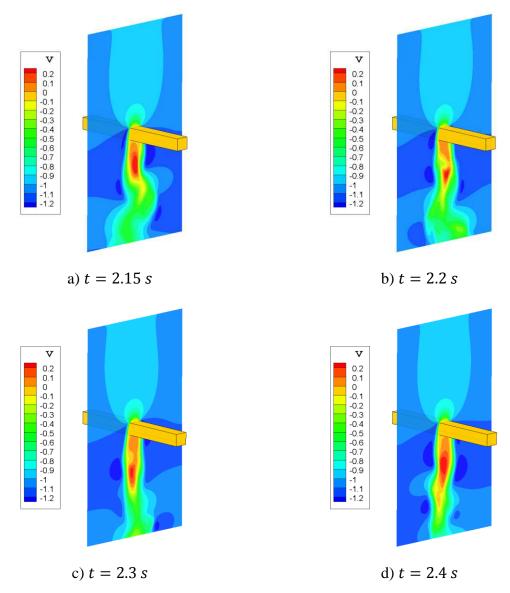


Figure 4- 29 Champ de vitesse longitudinale à $Z=0.15~m,~\rho_f=10~kg/m^3$

Après avoir traité un problème de couplage Fluide/Structure complet de manière instationnaire, les résultats montrent que la poutre déformée subit un impact de l'écoulement pour des nombres Reynolds faibles. Bien que les déformations de la poutre soient faibles, la conduite des calculs a souligné la faisabilité de la méthode retenue. Poursuivrons alors les calculs en se focalisant sur un cas de couplage offrant une plus grande déformation de la structure vis-à-vis de la sollicitation fluide.

4.4.2 Interaction entre un écoulement laminaire avec une plaque souple

4.4.2.1 Oscillations sans écoulement traversier

Le couplage fluide/structure a été réalisé avec succès et les quelques ondulations parasites des forces fluides s'exerçant sur le solide peuvent être réduites et contrôlées (mais pas complètement supprimée). Le couplage fluide/structure a été réalisé sur une barre et souhaitant amplifier des déformations imposées au solide, une plaque composée d'un matériau s'assimilant à un aluminium est utilisé. La configuration numérique est décrite Figure 4- 30 et pour des raisons de coût CPU, nous limiterons la troisième direction pour réaliser un calcul 2D (uniquement 3 mailles sont considérées dans la troisième direction).

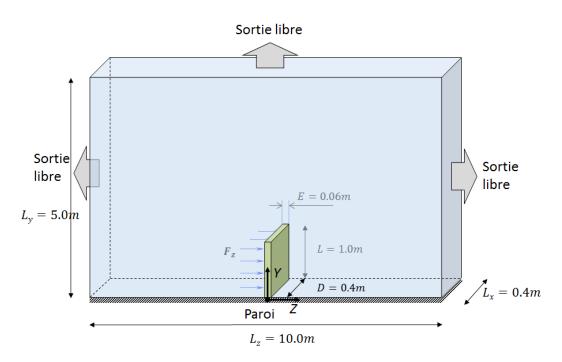


Figure 4- 30: Configuration du couplage

Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont :

- module d'élasticité E = 2.5 MPa,
- module de Poisson $\nu = 0.35$,
- ρ_s masse volumique de 2550 kg/m^3 .

Comme nous l'avons préalablement effectué, la poutre est initialement excitée mécaniquement par une force distribuée $F_z = 75 N$ appliquée sur un créneau temporelle compris entre 0 et 0.5 s (cf. Figure 4- 30), le temps que la plaque soit en position de déformation initiale. A t = 0.5 s, la

force F_z est directement supprimée et le calcul est réalisé afin de suivre les déplacements de la plaque soumis aux aléas convectifs qu'elle engendre. Côté solide, le maillage de la barre est réalisé par des éléments de type TETRA4, 17569 éléments étant requis et généré à partir de 3312 nœuds. Côté fluide, un maillage régulier avec une résolution de $0.005m \times 0.005m$ dans le plan d'intérêt est utilisé. L'ensemble des paramètres de calcul est listé Tableau 4.7 et Tableau 4.8.

Caractéristiques de la géométr	rie	2D
Largeur	D	0.4 m
Hauteur	L	1.0 m
Epaisseur	E	0.06 m
Caractéristiques du matériau		Valeur
Masse volumique	$ ho_s$	2550 kg.m ⁻³
Ratio de Poisson	v	0.35
Modules de Young	E	$2.5 \times 10^6 \text{Pa}$
Maillage mécanique		Valeur
Eléments volumiques		17569
Nœuds		3312

Tableau 4.6 : Caractéristiques de la simulation de la plaque

Pour cette étude, la masse volumique fluide est fixée égale à $\rho=1\,kg/m^3$ et trois cas de viscosité cinématique de $\mu=0.2\,Pa.s$, $\mu=1.0\,Pa.s$ et $\mu=5.0\,Pa.s$ sont considérées pour étudier les comportements différents de l'écoulement. A partir de l'équation théorique, la fréquence naturelle de la plaque encastrée est analytiquement estimée égale à 0.30 Hz correspondant à une période de 3.33 secondes. Donc, pour capter le mouvement de la plaque, on choisit le pas de temps du couplage de 0.05s (environ 66 pas de temps par cycle). Les autres paramètres de la simulation sont détaillés Tableau 4.7 et Tableau 4.8.

Caractéristiques de la géon	ıétrie	Valeur [m]
Largeur du domaine	L_x	0.4
Hauteur du domaine	L_y	5.0
Longueur du domaine	L_z	10.0
Résolution en direction X	Δx	0.004
Résolution en direction Y	Δy	0.02
Résolution en direction Z	Δz	0.01
Fluide		Valeur
Masse volumique	ρ	$1 kg.m^{-3}$
Viscosité cinématique	μ	0.2; 1.0; 5.0 Pa.s
Vitesse d'entrée	U=V=W	0.0 m/s
Pression	$P_{\!\scriptscriptstyle \infty}$	1 bar
Température	T_{∞}	30°C

Tableau 4.7 : Caractéristiques du domaine de calcul

Caractéristiques de simulation			
Nombre de cellules du domaine	N	2.62 × 10 ⁶	
Nombre de maillage surfacique	M	3054	
Pas de temps du fluide	Δt_f	0.00001 s	
Pas de temps de la mécanique	Δt_s	0.05 s	
Pas de temps du couplage	Δt_c	0.05 s	

Tableau 4.8 : Caractéristiques de la simulation

La Figure 4-31 présente les mouvements du point **B** situé à l'extrémité de la plaque dans le plan médian et ceci pour les trois calculs réalisés avec les trois valeurs de viscosité différentes. Tout d'abord, les forces de traînée engendrent un amortissement du point **B** s'assimilant à un mouvement sinusoïdal amorti. La fréquence d'oscillation est relevée égale à 0.31 Hz ce qui est en accord avec la solution théorique de l'équation. Plus la viscosité du fluide est conséquente et plus les forces de traînée sont importantes ayant pour conséquence d'amortir d'autant plus le mouvement de la plaque.

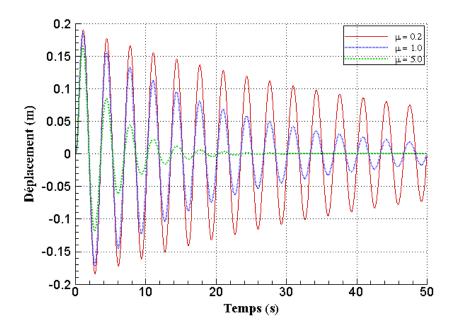


Figure 4- 31 Déplacements de la poutre

La Figure 4- 32 présente le champ de vitesse dans la direction principale de l'écoulement en fonction de la position de la plaque.

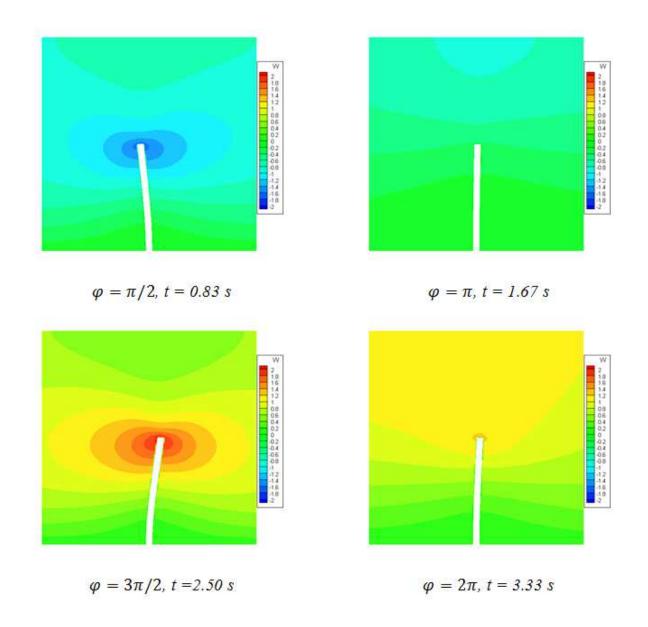


Figure 4- 32: Contours de vitesse instantanée aux différentes phases

4.4.2.2 Ecoulement d'impact avec une plaque souple

La même configuration étudiée précédemment a été reprise (même dimensions, même matériau,...) et seules les conditions fluides sont modifiées en prenant en compte un écoulement traversier. En effet, un écoulement laminaire avec un nombre de Re équivalent à 50 (basé sur l'équation $\mathbf{Re} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D}/\mathbf{\vartheta}$) et une vitesse d'entrée homogène de 10 m/s est imposée. La viscosité fluide est prise égale à 0.2 Pa.s. Les autres conditions aux limites du domaine sont représentées Figure 4- 33 et listées Tableau 4.10. Un pas de temps de couplage de $\mathbf{0.01} \, \mathbf{s}$ a été choisi comme dans la section précédente. Les autres paramètres de la simulation sont détaillés

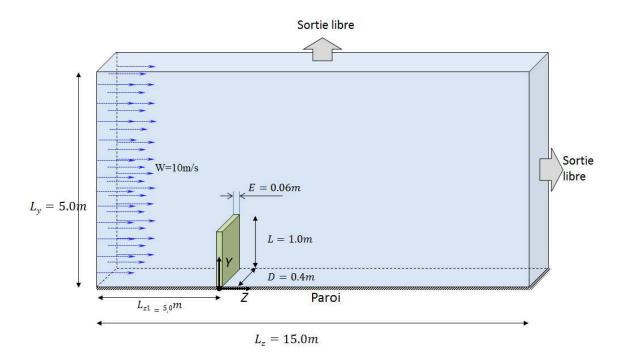


Figure 4- 33 Configuration du couplage

Caractéristiques de simulation		
Nombre de cellules du domaine	N	1.6×10^{6}
Nombre de maillage surfacique	M	3650
Pas de temps du fluide	Δt_{f}	0.00001 s
Pas de temps de la mécanique	Δt_{s}	0.005 s
Pas de temps du couplage	Δt	0.02 s

Tableau 4.9 : Caractéristiques du domaine de calcul

Caractéristiques de la géome	étrie	Valeur [m]
Largeur du domaine	L_{x}	0.4
Hauteur du domaine	L_y	5.0
Longueur du domaine	L_z	15.0
Résolution en direction X	Δx	0.004
Résolution en direction Y	Δy	0.005
Résolution en direction Z	Δz	0.005
Fluide		Valeur
Masse volumique	ρ	1 kg.m ⁻³
Reynolds	Re	50
Viscosité cinématique	μ	0.2 Pa.s
Vitesse d'entrée	W_{in}	10 m/s
Pression	$P_{\!\scriptscriptstyle\infty}$	1 bar
Température	T_{∞}	30°C

Tableau 4.10 : Caractéristiques de la géométrie du domaine de domaine de calcul et de la poutre

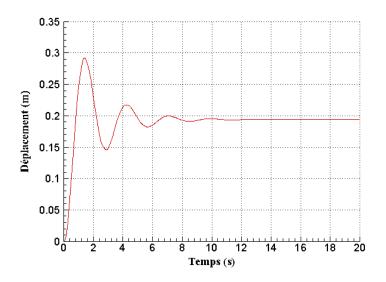


Figure 4- 34 : Déplacements au bout de la poutre

Afin de souligner l'influence de l'écoulement traversier, les déplacements du point **B** sont exprimés sur la forme $A_0 + Asin\varphi$ avec A_0 , A et φ représentant respectivement la position d'équilibre, l'amplitude et la phase d'oscillations (cf. Figure 4- 34). Ces valeurs caractéristiques ont été estimées (Tableau 4.11).

Cas test	Position Equilibrée	Amplitude	Période
Cas test	A_0 (m)	A (m)	T (s)
Sans écoulement	0.00	0.19	2.0
(§4.4.2.1)	0.00	0.19	2.0
Avec écoulement Re = 50	0.19	amortie	2.1

Tableau 4.11 : Amplitude et période oscillation

Les figures suivantes montrent les principales caractéristiques de l'écoulement (vitesse, tourbillon) aux instants différents. Le champ de vitesse est représenté Figure 4- 35, les lignes de courant avec déformation de la structure Figure 4- 36.

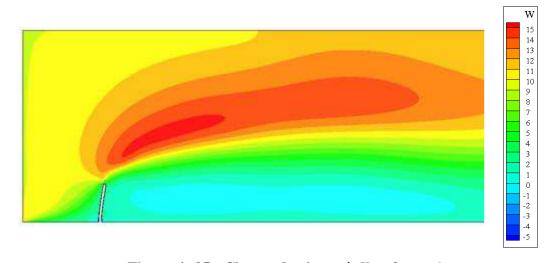


Figure 4- 35 : Champ de vitesse à X = 0, t = 4s

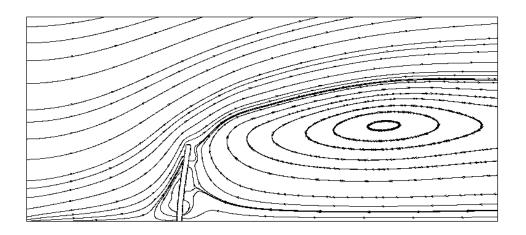


Figure 4-36: Ligne de courant

Les simulations présentées ici illustrent la validité du couplage entre les différents opérateurs mis en jeu dans cette interaction fluide-structure. C'est un couplage dit faible avec des effets rétroactifs du fluide sur la structure, qui, en se déformant agit sur la nature de l'écoulement du fluide.

4.4.3 Ecoulement laminaire autour d'un cylindre-poutre

4.4.3.1 Configuration de l'étude

Dans notre quête de caractériser des écoulements toujours plus complexes, la configuration proposée par Hron et al. [61] composée d'un cylindre accouplé à une plaque plane (cf. Figure 4- 37) est étudié. La poutre élastique est d'une longueur de 0.35 m et d'épaisseur 0.02 m suit une loi matériau de St. Venant-Kirchhoff [62] caractérisée par un coefficient de Poisson de 0.4 et un module d'Young de 1.4×10^6 Pa pour une masse volumique de 1000 kg/m^3 . La tenue de la structure est supposée rigide au niveau du cylindre alors que la poutre est laissée libre de tout mouvement. La structure est localisée au sein d'un canal avec des parois solides en haut et bas et un écoulement laminaire d'air dont un profil parabolique est imposé avec la vitesse centrale maximale égale à U_m . La forme du profil imposé en entrée est :

$$U = \frac{4U_m y(H - y)}{H^2} \tag{4.30}$$

avec U_m la vitesse maximale. Le nombre de Reynolds défini comme $Re=\overline{U}D/v$, et la vitesse moyenne $\overline{U}=2U_m/3$. Le côté droit du canal est une condition de sortie libre et une condition limite de non-glissement est appliquée sur les autres parois. Sous ces conditions, l'écoulement autour du cylindre est instationnaire, et les caractéristiques de l'écoulement peuvent spécifiées par les coefficients de trainée et coefficients de portance.

$$C_x = \frac{2F_x}{\rho \overline{U}^2 D}$$

$$C_y = \frac{2F_y}{\rho \overline{U}^2 D}$$

$$(4.31)$$

$$C_y = \frac{2F_y}{\rho \bar{U}^2 D} \tag{4.32}$$

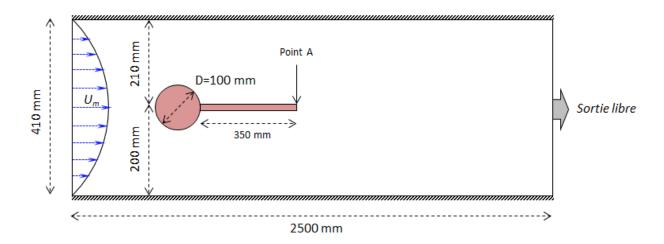


Figure 4- 37: Configuration du cas cylindre-poutre

2D
L = 2.5m
H = 0.41m
C(0.2, 0.2)
D = 0.1m
l = 0.35m
h = 0.02m
A(0.6, 0.2)

Tableau 4.12 : Paramètres de la géométrie

Caractéristiques mécaniques		Valeur
Masse volumique	$ ho_s$	$10^3 kg/m^3$
Modules de Young	E	$1.4 \times 10^6 Pa$
Ratio de Poisson	θ	0.4
Gravité appliquée	а	$2 m/s^2$
Pas de temps	Δt_s	$5 \times 10^{-2} s$

Tableau 4.13 : Conditions aux limites du cas mécanique

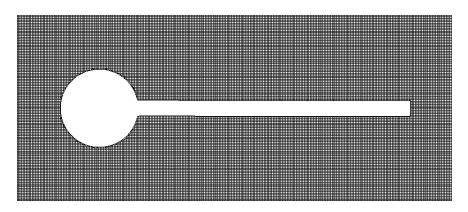


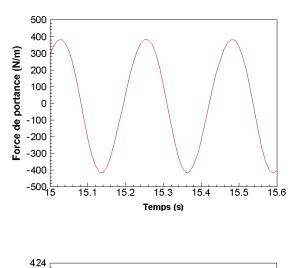
Figure 4-38: Maillage du domaine

4.4.3.2 Analyse de l'écoulement obtenu

En supposant que la poutre flexible (Figure 4- 37) reste rigide, le problème du couplage fluide/structure se réduit en un cas test CFD similaire à celui entrepris par Turek et Hron [61]. Ce cas test purement fluide a été dans un premier temps considéré pour validation du solveur fluide. Etudions la convergence en fonction de la résolution spatiale et pour cela, considérons trois résolutions spatiales, successivement raffinées d'un facteur deux. En effet, le maillage grossier M1 est constitué de 205×1250 mailles offrant une résolution de 2mm (cf. Figure 4- 38. Ainsi, les maillages M2 et M3 possèdent des résolutions de 1 et 0.5 mm respectivement. La configuration de calcul, à des nombres de Reynolds aussi faibles, offre une certaine stabilité qui est principalement pilotée par les effets visqueux. Par conséquent, le pas de temps de $\Delta t_f = 10^{-4}s$ pour le maillage grossier M1 et $5 \times 10^{-5}s$ pour les maillages M2 et M3 sont appliqués pour les calculs. Les conditions aux limites sont listées Tableau 4.14.

Fluide		Valeur
Masse volumique	$ ho_f$	$10^3 \ kg/m^3$
Reynolds	Re	200
Viscosité cinématique	μ	$10^{-3} \ m^2/s$
Vitesse d'entrée	U_m	3 m/s
Pression	P_{∞}	1 bar
Température	T_{∞}	30°C

Tableau 4.14: Conditions aux limites du cas CFD



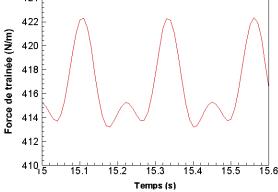


Figure 4-39 : Force de portance et force de trainée

Malgré la lame séparatrice derrière le cylindre, des tourbillons se développent à Re = 200. Les tourbillons se déplacent vers l'aval et interagissent avec la structure (Figure 4- 39 et

Figure 4- 40). L'évolution de la force de portance présente un signal sinusoïdal dont la valeur moyenne n'est pas égale à zéro en raison de la position légèrement décentrée de la structure dans le canal. Pour comparer les résultats, les valeurs minimales et maximales sont présentées dans le Tableau 4.15 pour les trois résolutions du maillage. Il est évident que les valeurs de la force de portance minimale et la force de portance maximale convergent étape par étape vers les données de référence lorsque le maillage est d'autant plus fin. En fait, la force de portance atteinte pour la résolution la plus fine est de 1% par rapport aux valeurs attendues de la littérature.

Considérant le phénomène tourbillonnaire, la fréquence de la force de traînée est doublée par rapport à la force de portance (cf. Figure 4- 40). Le Tableau 4.15 liste les valeurs des extrema absolue. Encore une fois, on observe que les valeurs de la force de traînée convergent vers les données de référence lorsque la grille est raffinée.

Maillage	Force de trainée		Force de portance			
	minimum	maximum	fréquence	minimum	maximum	fréquence
M1	413	423	8.878	-415	397	4.439
M2	425	435	8.886	-425	421	4.443
M3	433	444	8.888	-445	425	4.444
Référence [61]	434	445	8.792	-450	426	4.396

Tableau 4.15 : Forces aérodynamiques obtenues en fonction des différentes discrétisations spatiales

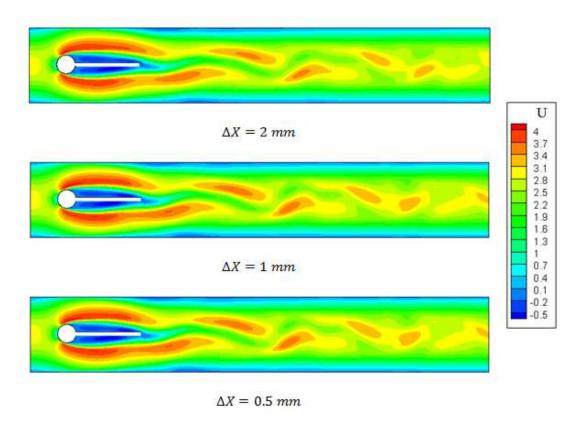


Figure 4- 40 : Contours de la vitesse instantanée en fonction des résolutions spatiales différentes

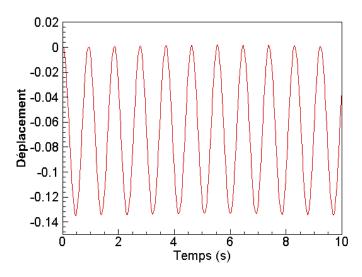


Figure 4-41 : Déplacement du point A à l'extrémité de la poutre flexible

En se basant sur la configuration présentée Figure 4- 37, considérons seulement la poutre élastique sans influence du fluide. Afin de prévoir une déformation de la structure, une accélération gravitationnelle de $g = 2m/s^2$ dans la direction Y est ajoutée. Le cas mécanique est

alors calculé de manière instationnaire (dynamique) à partir de la configuration non déformée. Les paramètres de matériau restent identiques (

Tableau **4.13**). Le maillage est constitué de 20731 mailles volumiques tétras et 5312 nœuds. La Figure 4- 41 présente le déplacement du point A à l'extrémité de la poutre élastique en fonction du temps alors que le Tableau 4.16 présente la comparaison des déplacements extrêmes du cas mécanique instationnaire avec celles du cas référence [61] ainsi que la fréquence d'oscillation obtenue. Un écart maximum de 1,1% est observé pour le déplacement en *Y* tandis que la fréquence prédite est parfait accord avec la valeur attendue.

	Déplacement (m)				
Maillage	Minimum	maximum	fréquence		
présent	-0.135	0	2.32		
Réf.	-0.13	0	2.33		
Ecart	1.1%	0	1.0%		

Tableau 4.16: résultats calculés

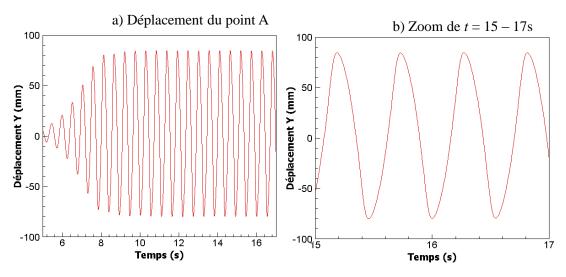
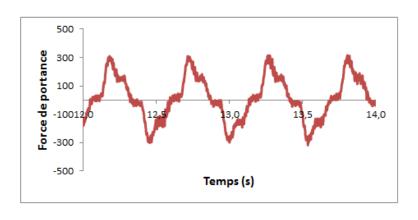


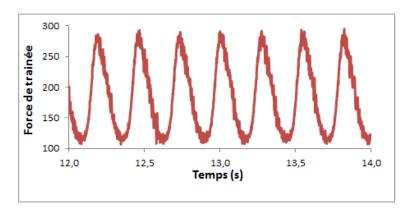
Figure 4-42 : Déplacements du point A en fonction du temps du calcul couplé

Après avoir étudié séparément les mécanismes, le calcul couplé a été réalisé correspondant au cas « FSI2 » de Turek et al. [63]. La Figure 4- 42 présente l'évolution du déplacement du point A à l'extrémité de la poutre élastique en fonction du temps et un zoom de

t = 15 s - 17 s. L'oscillation à l'extrémité libre est périodique avec une amplitude significative de 0.080 m représentant 400% de l'épaisseur de la poutre. La fréquence de l'oscillation de 1.98 Hz est en bon d'accord avec la référence [61]. L'évolution de la force de portance sur l'ensemble de la structure est présentée en Figure 4- 43. Après une phase de transition, l'amplitude de l'oscillation atteint des valeurs constantes qui sont à nouveau asymétrique autour de l'axe zéro en raison de l'asymétrie de la configuration et les valeurs obtenues sont en accord avec la littérature [64]. En ce qui concerne la fréquence de la force de portance, cette dernière converge vers les données dans Turek et al. [63] avec un écart de 5,4% environ. Les Figure 4- 44 et Figure 4-45 représentent les contours de vitesse et de tourbillon à différentes instants. Similairement à ce qui a été observé dans le cas d'un cylindre, les tourbillons se détachent du cylindre d'une manière alternée. Ils se déplacent vers l'aval et commencent à interagir avec la structure flexible conduisant à une structure oscillante. Dans la Figure 4- 44, la distribution de vitesse asymétrique s'effectue sur les deux côtés de la poutre flexible comme une source d'oscillation alors que le phénomène de détachement est clairement visible.



a) Evolution de la force de portance



b) Evolution de la force de traînée

Figure 4- 43: Forces de portante et de trainée du cylindre-poutre

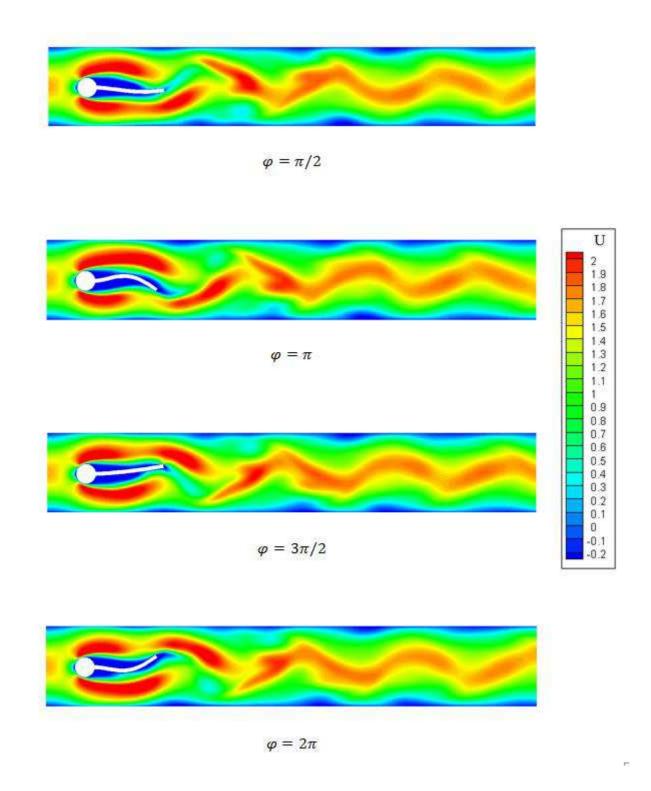


Figure 4- 44: Contours de vitesse instantanée aux phases différentes

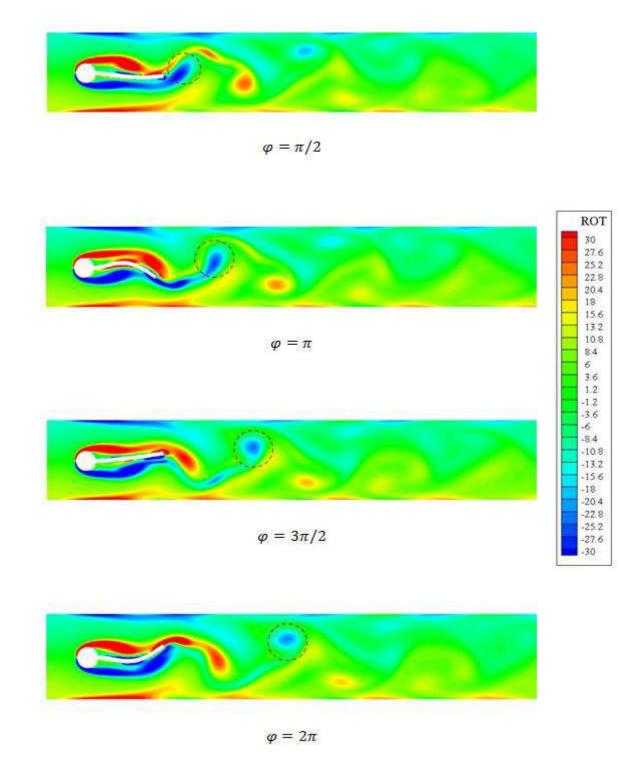


Figure 4-45 : Contours des tourbillons aux phases différentes

4.4.4 Ecoulement turbulent autour d'une aile d'avion

4.4.4.1 Contexte de l'étude

La méthode numérique a finalement été appliquée pour résoudre le problème d'interaction fluide/structure entre l'écoulement et une aile AGARD 445.6, cas test bien connu pour des problèmes d'aéroélasticité. Les expériences en soufflerie ont été effectuées sur l'aile AGARD 445.6 dans le « Langley Transonic Dynamics Tunnel » (LTDT) afin de prédire les caractéristiques de réponse dynamique et la limite de flutter [65]. L'aile AGARD 445.6 a un rapport de conicité de 0,66, un rapport d'aspect de 1,65 et une aile en flèche de 45°. La section d'aile correspond à un profil de type NACA 65A004, ce qui est une aile symétrique avec une épaisseur maximale de 4% de la corde locale. Le forme plane aile est présentée Figure 4- 46 et les paramètres de l'aile sont listés Tableau 4.17.

En effet, en 3D, les structures ont plusieurs degrés de liberté et chacun sera soumis à un effort de traction du fluide, ce qui influence le mode correspondant de vibration. En général, les phases de la structure et du fluide sont différentes pour tous les modes de vibration. Notons que la différence de phase (pas de l'amplitude) est à l'origine du phénomène de flutter [66], i.e. si la différence de phase entre la force aérodynamique et la vitesse de la structure est supérieure à 90°, le mécanisme de flutter se produira. Plusieurs modèles de l'aile ont été testés dans le LTDT y compris les modèles pleine portée et semi-portée. Le modèle utilisé dans cette étude est une semi-portée. La corde de l'envergure de ce modèle est 1.833 m. Afin d'obtenir des données de flottement pour une large gamme de nombre de Mach, des trous ont été forés à travers l'aile en l'acajou pour réduire sa rigidité. La forme aérodynamique de l'aile d'origine a été conservée par le remplissage de ces trous de mousse plastique rigide. Les données de flottement pour ce modèle testé dans l'air sont présentées dans [67] sur une gamme de nombre de Mach de 0,338 à 1,141. Yates [67] a également calculé les caractéristiques de flottement, en utilisant l'analyse en éléments finis, où le module d'Young de l'aile a été recalculé afin d'assurer que les modes de vibration soient en accord avec ceux calculés/mesurés dans son article précédent [65]. Les propriétés de matériau de l'aile AGARD445.6 sont donc : densité $\rho = 415 \, kg/m^3$, module d'Young $E = 3,2456 \, GPa$ et ratio de Poisson v = 0.3. Dans les calculs de flottement conséquents, les propriétés des matériaux ont été traités comme homogène. L'aile est modélisée structurellement par les quatre premiers modes de vibration naturelle souligné Figure 4- 47 [67] i.e. le premier mode de flexion, le premier mode de torsion, le second mode de flexion, et le second mode de torsion respectivement. Les fréquences naturelles de ces modes sont également représentées Figure 4- 47.

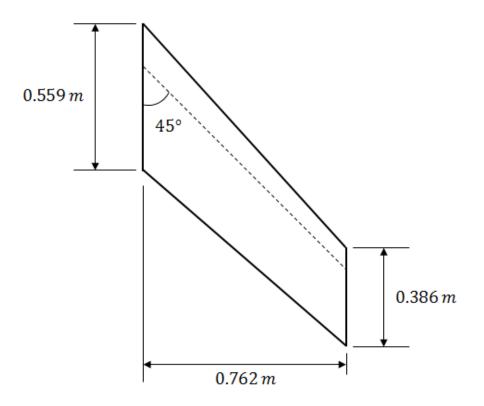


Figure 4-46: Forme en plan AGARD 445.6

Wing configuration			
Aspect ratio	4.0		
Quarter-chord sweep	45°		
Taper-ratio	0.6		
Chord length	1.833 feet = 0.559 m		
Semi- span	2.5 feet = 0.762 m		
Angle Attack	-5 degree		
Type of airfoil	NACA 65A004		

Tableau 4.17 : Configuration de l'aile AGARD 445.6

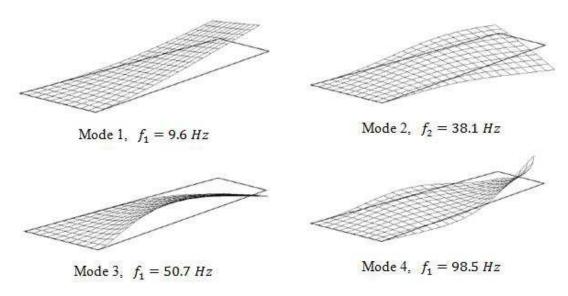


Figure 4- 47 : Flexion aux quatre premières modes [67]

Cette étude a effectuée pour un écoulement incompressible au nombre de Mach M=0.338. Les propriétés du matériau de l'aile ont été données par Yates [67] pour le $3^{\text{ème}}$ modèle et listées Tableau 4.18. Le maillage de l'aile a été généré en utilisant le logiciel open source SALOME et présenté **Erreur! Source du renvoi introuvable.** Pour un tel cas, le maillage volumique ainsi réalisé comprend 17902 éléments TETRA4 utilisant 8832 nœuds. Une condition d'encastrement a été appliquée à la racine de l'aile. Pour le cas test, l'aile offre un angle d'attaque de -5°. L'ensemble des paramètres caractéristiques est listé dans le Tableau 4.18.

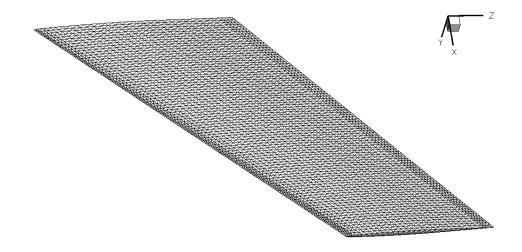


Figure 4- 48: Maillage du fluide et maillage de l'aile

Plaçons alors l'aile AGARD 445.6 dans un domaine fluide pour effectuer un couplage fluide/structure complet. Les dimensions du domaine et les conditions aux limites utilisées sont présentées Figure 4- 49. Le maillage régulier du domaine de calcul pour la simulation CFD a été généré facilement grâce à l'avance de la méthode IBM utilisée avec une résolution spatiale de 1×10^{-3} m. Un champ homogène de vitesse entrant est imposé (cf. Figure 4- 49) pour l'écoulement incompressible au nombre de Mach M=0.338. Le fluide utilisé offrant une viscosité cinématique $v=1.416 \times 10^{-3}$ m. s^2 et une masse volumique $\rho=1.225$ kg/m3.

Caractéristiques du matériau	Valeur		
Masse volumique	ρ_s	415 kg.m ⁻³	
Ratio de Poisson	ν	0.3	
Modules de Young	E 3.2456 GPa		
Maillage mécanique		Valeur	
Eléments volumiques		17569	
Nœuds		3312	

Tableau 4.18 : Caractéristiques de l'aile AGARD 445.6

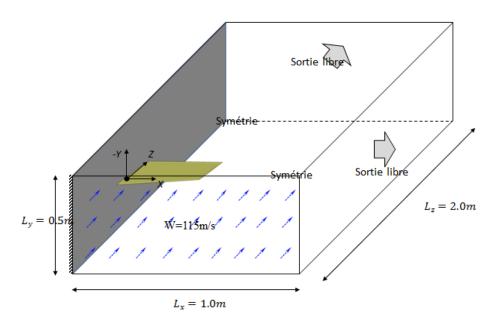


Figure 4-49: Configuration du couplage

Caractéristiques de la géométrie		Valeur [m]	
Largeur du domaine	L_x	1.0	
Hauteur du domaine	L_y	0.5	
Longueur du domaine	L_z	L_z 2.0	
Résolution en direction X	Δx	∆x 0.01	
Résolution en direction Y	Δy	0.0015	
Résolution en direction Z	Δz	0.003	
Fluide		Valeur	
Masse volumique	ρ	$1.225 \ kg.m^{-3}$	
Viscosité cinématique	υ	$1.416 \times 10^{-3} \ m.s^2$	
Vitesse d'entrée	M	0.338	
Pression	P_{∞}	1 bar	
Température	T_{∞}	20°C	

Tableau 4.19 : Caractéristiques du domaine de calcul

A l'état initial de la simulation CFS complète, l'écoulement est uniforme et l'aile a seulement été soumise une condition à déplacement fixe (DX = DY = DZ = 0) à sa racine. Cette étude veut seulement capter la première mode de la vibration, donc le pas de temps est calculé pour ce but. Comme les résultats expérimentaux sont disponibles [65], la première fréquence de l'aile AGARD 445.6 est égale 9.6 Hz. Dans ces conditions, on choisit le pas de temps de 0.001 s (environ 100 pas de temps par cycle) pour le calcul couplé.

4.4.4.2 Résultats obtenus

Ce calcul parallèle a été réalisé sur un serveur possédant 16 processeurs et utilisant une mémoire de 60 Go et 168 heures de calcul ont été nécessaires pour l'analyse instationnaire. Les déplacements des point A et point B situés à l'extrémité de l'aile sont présentés Figure 4-50. Les valeurs d'équilibres sont égales à 1.8 cm et 2.5 cm aux point A et point B respectivement. Au début, l'extrémité de l'aile a été excitée et déformée par la force aérodynamique ; à $t=0.25\,s$,

la position équilibre est attente et ne change plus, la différence des déplacements des points A et B montre que la charge fluide sur l'aile agit principalement en flexion ainsi qu'en torsion. Un zoom à l'extrémité de l'aile pour la position initiale et la position extrême est présenté Figure 4-51.

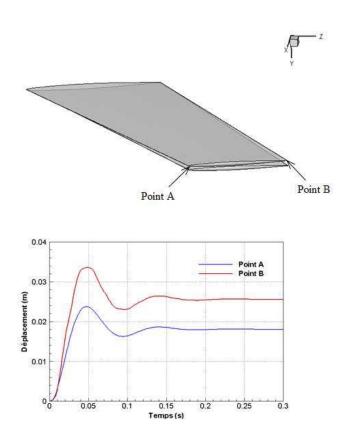


Figure 4- 50: Mach M = 0.338 déplacement au niveau du bout de l'aile au bord de fuite

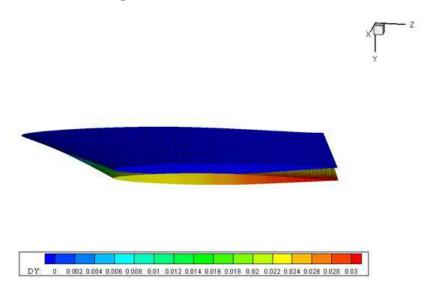


Figure 4-51 : Champ de déplacement à l'extrémité de l'aile

La Figure 4- 52 présente les champs de vitesse pour différents plans X = 0.1, 0.4, 0.7 m et un écoulement turbulent après le bord de fuite se développe. A partir de ces résultats, le mécanisme de flutter n'est pas capté. Le maillage n'est peut-être pas suffisamment fin pour capturer la physique de l'écoulement, notamment au niveau de l'interface fluide/structure où les effets de la couche limite sont importants. Malheureusement, le raffinement du maillage est très difficile ; en doublant la densité du maillage seulement dans les trois directions de l'espace, une augmentation de 8 de la résolution engendrerait 200 millions de mailles environ, qui exigerait environ 200 Gb de mémoire du processeur. De plus, lorsque la densité du maillage augmente, le pas de temps CFD devra être réduit afin de se conformer avec le critère CFL. Le temps de calcul nécessaire serait significative amplifié.

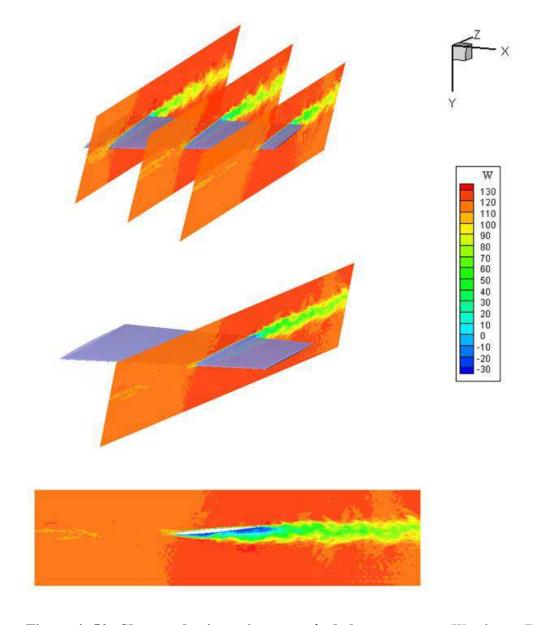


Figure 4-52: Champs de vitesse instantanée de la composante W suivant Z

CONCLUSION & PERSPECTIVES

Ce travail de thèse s'inscrit dans la volonté de caractériser les écoulements fluides, en présence d'objets mobiles au sein du domaine fluide, tout en considérant d'éventuels couplages forts entre plusieurs physiques.

En considérant le déplacement d'objets au sein du domaine fluide, les études ont été réalisées à partir d'un outil numérique propre développé par l'équipe et reposant sur une approche aux frontières immergées. Cette technique, basée sur un solveur faiblement compressible et un maillage cartésien régulier, a permis de prendre en compte les problématiques de couplage fluide/thermique de manière efficace. En effet, en se référant à un cas expérimental de transfert thermique entre un écoulement et une paroi, le traitement thermique côté solide a été opéré par le solveur ASTER et le couplage fluide/ASTER a été géré par la méthode aux frontières immergées. L'excellente corrélation entre les résultats expérimentaux disponibles et les calculs numériques témoigne de l'intérêt d'un tel couplage. La prise en compte des ouvrants au cours de calcul a également été effectuée à partir d'une étude originale : l'estimation des transferts entre un caisson frigorifique et son environnement extérieur. L'introduction des frontières immergées apporte un véritable accès à l'analyse instationnaire notamment lors de l'ouverture des portes. Dans le cadre du projet OSEO iSO4CAR, l'utilisation de ce modèle doit permettre de corréler des essais expérimentaux en cours, avec comme objectif, d'assurer une isolation optimale des caissons frigorifiques. Après avoir souligné les résultats encourageants dans le cadre d'un couplage thermique fluide/paroi, le couplage thermique des parois, couplé à la résolution fluide au cours du cycle test, devrait permettre d'accéder à la simulation du système complet et donc jouer un rôle prédominant dans l'amélioration des analyses physiques.

La technique des frontières immergées a également été déterminante dans l'approche fluide/structure engagée et les différentes configurations ont mis en exergue les points forts comme les points faibles. On note tout d'abord que côté fluide, la prise en compte du déplacement d'un objet s'effectue sans problème et qu'un tel couplage s'avère des plus efficaces. En revanche, certains problèmes ont été soulignés. Tout d'abord, les changements brutaux d'état de la topologie du maillage provoquent des instabilités lors de l'estimation des efforts fluides s'exerçant sur l'objet. Ceci se traduit par l'existence de fluctuations parasites sur les courbes des efforts pariétaux. Des tentatives de réduction ont bien sûr été testées engendrant une véritable réduction de ces bruits parasites sans toutefois les éliminer complétement. De plus, les travaux réalisés sur le couplage fluide/structure ont souligné le manque de souplesse de l'organisation côté fluide de la résolution spatiale, le solveur fluide étant basé sur une résolution constante, devenue alors pénalisante pour ce type de traitement.

Pour conclure, la méthode aux frontières immergées est un formidable vecteur favorisant la connexion entre plusieurs modèles différents mais pour obtenir des résultats des plus précis le traitement des frontières immergées devait être amélioré. Bien que les techniques dites de forçage ont été préférées en raison de leur simplicité dans leur mise en œuvre, leur limite s'exprime par une grande difficulté à prévenir l'apparition de faibles instabilités numériques. L'approche conservative devrait sans doute être explorée. En parallèle, le solveur fluide offrant un maillage régulier sur l'ensemble du domaine n'est pas des plus souples et l'idée de se baser sur des mailleurs automatiques hiérarchisés (octree, 2ⁿ tree) pourrait s'avérer être un choix des plus stratégiques. En parallèle, le solveur fluide doit être également plus souple dans la résolution spatiale en se basant par exemple sur des mailleurs automatiques hiérarchisés.

ANNEXES

ANNEXE N°I: LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Dans le cadre du calcul couplé, le code ASTER source de solveur côté solide. L'objectif de cette annexe consiste à décrire rapidement les fondements de modélisation des milieux continus et rappelle les principaux refuis établis dans ASTER. On rappelle tout d'abord le passage d'une formulation forte à une formulation variationnelle, en détaillant par la suite la discrétisation par éléments finis : utilisation d'un élément de référence, calcul des fonctions de forme et évaluation des termes élémentaires. Le principe de l'assemblage de ces termes et de l'imposition des conditions aux limites sont également rappelés ainsi que les méthodes de résolution matricielle.

1 Introduction

La méthode des éléments finis est employée dans de nombreux domaines scientifiques pour résoudre des équations aux dérivées partielles. Elle permet de construire une approximation simple des inconnues pour transformer ces équations continues en un système d'équations de dimension finie, que l'on peut écrire schématiquement sous la forme suivante:

$$[A].\{U\} = \{L\}$$
 (I.1)

avec $\{U\}$ est le vecteur des inconnues, [A] une matrice et $\{L\}$ un vecteur.

Dans un premier temps, on transforme les équations aux dérivées partielles en une formulation intégrale (ou formulation forte du problème), souvent cette première forme intégrale est modifiée (affaiblie) en utilisant la formule de Green (formulation faible). La solution approchée est cherchée comme combinaison linéaire de fonctions données. Ces fonctions doivent être simples mais assez générales pour pouvoir «bien» approcher la solution. Elles doivent notamment permettre de générer un espace de dimension finie qui soit aussi proche que l'on veut de l'espace de fonctions dans lequel se trouve la solution. A partir de la méthode des résidus pondérés, les diverses façons de choisir ces fonctions donnent lieu à différentes méthodes numériques (collocation, méthodes spectrales, éléments finis, etc.).

L'originalité de la méthode des éléments finis est de prendre comme fonctions d'approximation des polynômes qui sont nuls sur presque tout le domaine, et participent donc au calcul seulement au voisinage d'un point particulier. Ainsi, la matrice [A] est très creuse, ne

contenant que les termes d'interaction entre «points voisins», ce qui réduit le temps de calcul et la place mémoire nécessaire au stockage. De plus, la matrice [A] et le vecteur $\{L\}$ peuvent être construits par assemblage de matrices et vecteurs élémentaires, calculés localement.

2 Obtention d'une formulation variationnelle

La formulation variationnelle d'un problème à partir des équations aux dérivées partielles est obtenue, en multipliant celles-ci par des fonctions tests et en intégrant par parties. En mécanique des solides, la formulation faible alors obtenue est identique à celle donnée par le Principe des Travaux Virtuels et dans le cas conservatif, la minimisation de l'énergie potentielle totale de la structure. Notons cependant que pour certains problèmes, les équations du modèle sont plus faciles à établir dans le cadre variationnel (cas des plaques et des coques par exemple).

2.1 Modélisation du problème physique – Principes et notation

Un système physique est le plus souvent modélisé par des équations aux dérivées partielles qui agissent sur des inconnues **u** qui peuvent être:

- un scalaire comme la température dans les problèmes thermiques,
- un vecteur comme les déplacements dans les problèmes de mécanique,
- un tenseur comme les contraintes dans les problèmes de mécanique.

On peut également utiliser plusieurs champs d'inconnues simultanément, reliés par des équations aux dérivées partielles dans le cas de problèmes couplés. Dans le code ASTER, les problèmes thermo-hydro-mécanique couplent déplacements, pression et température. Les champs d'inconnues sont paramétrés par:

- l'espace, qui peut être décrit par un système de coordonnées cartésiennes ou n'importe quel autre type de paramétrisation noté x par la suite,
- le temps noté t.

2.2 Équations du système

Un système physique continu peut être représenté par un système d'équations aux dérivées partielles que l'on écrira dans le domaine Ω :

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = \mathbf{0} \ dans \ \Omega \tag{I.2}$$

Ce système est associé aux conditions aux limites sur la frontière Γ du domaine Ω :

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}) = \mathbf{h} \operatorname{sur} \Gamma = \partial \Omega \tag{I.3}$$

L'opérateur différentiel peut s'exprimer sur plusieurs équations aux dérivées partielles. On pourrait écrire:

$$L_1(\mathbf{u}) + f_1 = 0$$
 (I.4)

•••

 $L_i(\mathbf{u})$ est un opérateur différentiel agissant sur le vecteur des inconnues \mathbf{u} . De manière plus générale, l'opérateur différentiel $L_i(\mathbf{u})$ s'écrit en fonction des inconnues et de leurs dérivées partielles :

$$L_{i}\left(\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_{1}}, \frac{\partial^{2} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_{1} \partial \mathbf{x}_{2}}, \dots, \frac{\partial^{m} \mathbf{u}}{\partial x^{m}}, t, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{t}}, \dots, \frac{\partial^{p} \mathbf{u}}{\partial t^{p}}\right)$$
(I.5)

Un tel opérateur est dit d'ordre m en espace et d'ordre p en temps. S'il ne dépend pas du temps (et de ses dérivées), le problème est stationnaire. Dans la suite du document on ne considérera que les problèmes stationnaires.

2.3 Méthode des résidus pondérés – Formulation intégrale forte

Le résidu R(u) est défini comme étant la quantité s'annulant quand \mathbf{u} est la solution du problème physique :

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{L}(\mathbf{u}) - \mathbf{f} = \mathbf{0} \ dans \ \Omega \tag{I.6}$$

La méthode des résidus pondérés consiste :

1. à construire une solution approchée **u** par la combinaison linéaire de fonctions judicieusement choisies

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} c_i.\,\phi_i(\mathbf{x}) \tag{I.7}$$

avec $\phi_i(x)$ les fonctions de forme de l'approximation et c_i des coefficients à identifier.

2. à résoudre le système sous forme intégrale :

Trouver
$$u \in E_w$$
 tel que $\forall \mathbf{P} \in E_p$

Avec
$$W = \int_{\Omega} R(u) \cdot P(u) \cdot d\Omega + \int_{\Gamma} [C(u) - h] \cdot P(u) \cdot d\Gamma = 0$$
 (I.8)

Les mêmes fonctions de pondération pour le système principal et pour les conditions limites sont utilisées, mais ce n'est pas obligatoire. $\mathbf{P}(\mathbf{u})$ sont les fonctions de pondération appartenant à un ensemble de fonctions E_p . La solution \mathbf{u} appartient à l'espace E_u des fonctions « suffisamment » régulières (dérivables jusqu'à l'ordre m). Le choix des fonctions de pondération $\mathbf{P}(\mathbf{u})$ permet de dégager plusieurs méthodes:

- si la fonction P(u) est une distribution de Dirac, on obtient la méthode de collocation par points,
- si la fonction **P(u)** est constante sur des sous-domaines, on obtient la méthode de collocation par sous domaines,
- si les fonctions de pondération P(u) utilisent les mêmes fonctions de forme $\phi_i(x)$ que l'approximation de la solution (7), on obtient la méthode de Galerkin.

On obtient ainsi la forme intégrale forte.

2.4 Formulation intégrale faible

La formulation intégrale (I.8) requiert des espaces de fonctions dérivables à l'ordre m pour E_u . La formulation faible consiste à réaliser une intégration par parties (par application de la formule de Green) du système (I.8). En contrepartie, on augmente les exigences de régularité sur les fonctions de pondérations $\mathbf{P}(\mathbf{u})$. La formule de Green s'énonce comme suit :

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{P} \cdot d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{P} \cdot \nabla \cdot \mathbf{u} \cdot d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \cdot d\Omega$$
 (I.9)

avec \mathbf{n} est la normale sortante à la frontière Γ du domaine.

3 Méthode des éléments finis

3.1 Principes généraux

La recherche d'une fonction approchée idoine sur tout le domaine devient difficile dans le cas général d'une géométrie de forme quelconque. L'idée de la méthode des éléments finis est donc de construire cette approximation en deux temps :

- identifier des sous-domaines Ω_e géométriquement simples qui pavent le domaine,
- définir une fonction approchée sur chaque sous-domaine,

Un certain nombre de caractéristiques de cette construction est défini comme :

- le pavage du domaine Ω_e par les sous-domaines Ω_e doit être aussi précis que possible,
- la fonction approchée sur le sous-domaine doit respecter des conditions de continuité entre les différents sous-domaines,
- la fonction approchée sur le sous-domaine doit avoir des propriétés cohérentes avec les conditions de dérivabilité et en rapport avec la description physique de la solution (ce qui peut impliquer d'utiliser une formulation affaiblie par exemple).

3.2 Approximation de la géométrie

3.2.1 Principe

On identifie les N_e sous-domaines (ou éléments) Ω_e qui pavent l'espace Ω du solide :

$$\Omega = \sum_{e=1}^{N} \Omega_e \tag{I.10}$$

Notons $x_{\alpha=1,3}$ les coordonnées d'un point x dans le repère absolu. La géométrie du sousdomaine est construite avec une approximation nodale, soit pour un élément avec N_{nd} nœuds

$$x^{e} = \sum_{i=1}^{N_{nd}} x_{i}^{e} . \overline{N}_{i}^{e} \text{ ou } x_{\alpha}^{e} = \sum_{i=1}^{N_{nd}} x_{\alpha,i}^{e} . \overline{N}_{i}^{e}$$
 (I.11)

Ce pavage (maillage) est une opération pouvant être complexe surtout en 3D. Il existe des algorithmes généraux pour mailler. On utilise des triangles ou des quadrangles en 2D et des tétraèdres ou des hexaèdres en 3D (plus quelques éléments servant de raccords). Les triangles et tétraèdres donnent ce qu'on appelle des maillages libres, les quadrangles et les hexaèdres forment des maillages réglés. Les maillages libres sont relativement faciles à construire grâce à des

techniques largement éprouvées comme celles des cellules de Voronoï construisant une triangulation de Delaunay ou méthodes de propagation (méthodes dites frontales), alors que les maillages réglés sont beaucoup plus délicats à générer. Le maillage induit nécessairement une erreur de discrétisation géométrique Par exemple, sur la figure (1), on voit qu'une frontière courbe n'est qu'imparfaitement approchée par des éléments linéaires.

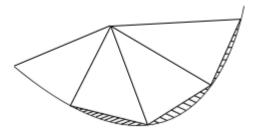


Illustration 1: Erreur de discrétisation géométrique

De même le maillage doit être conforme : pas de trous ou de recouvrement (voir figure (2)).

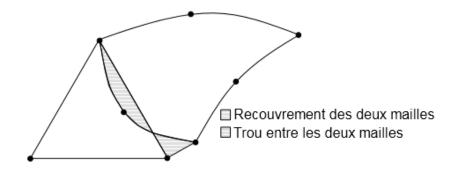


Illustration 2: Non-conformité du maillage

Pour respecter cette condition de conformité, deux règles sont définies :

- 1. chaque élément doit être défini de manière unique à partir des coordonnées de ses nœuds géométriques (et pas ceux de ses voisins !),
- 2. la frontière d'un élément doit être définie de manière unique à partir des nœuds de ces frontières, les nœuds étant communs entre les éléments partageant cette frontière.

Ces conditions de conformité sont une différence importante par rapport aux volumes finis qui n'ont pas ces exigences. Le pavage du domaine permet d'appliquer la méthode des éléments finis sur des géométries complexes, au contraire des méthodes par différences finies. Le pavage géométrique du domaine induit une première erreur: il n'est pas possible, dans le cas général, de représenter une géométrie réelle par un maillage par des polygones réguliers, en particulier sur la frontière du domaine.

3.2.2 Éléments de référence

Le calcul des fonctions de forme pour un élément quelconque peut être assez compliqué. C'est pourquoi on préfère souvent se ramener à un élément dit de référence, à partir duquel on peut générer tous les éléments d'une même famille par une transformation géométrique. Les fonctions de forme sont alors calculées sur cet élément générique noté Ω_r , et le transport des grandeurs sur l'élément réel Ω_e est effectué grâce à la connaissance de la transformation géométrique.

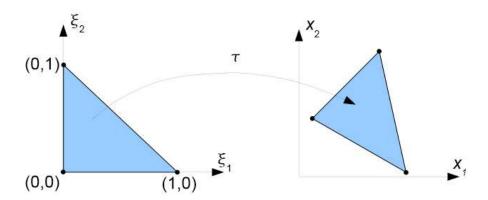


Illustration 3: Passage de l'espace de référence à l'espace réel

Les points de l'élément de référence seront décrits en termes de coordonnées paramétriques $\xi_{\alpha=1,3}$. La transformation τ doit être bijective et transformer les sommets et côtés de l'élément de référence en sommets et côtés de l'élément réel :

$$\xi_{\alpha} \xrightarrow{\tau} \chi_{\alpha}$$
 (I.12)

3.2.3 Fonctions d'interpolation géométrique

La géométrie de l'élément est donc approchée par le biais de fonctions d'interpolation géométrique. Ces fonctions notées $\overline{N}(\xi)$ sont définies sur l'élément de référence ; elles permettent de connaître les coordonnées x_{α} d'un point quelconque de l'élément réel à partir de ses coordonnées ξ_{α} de son antécédent dans l'élément de référence et des coordonnées x_{α} des nœuds (de numéro local I) de l'élément réel :

$$x^{e} = \sum_{i=1}^{N_{nd}} x_{i}^{e} . \overline{N}_{i}^{e} \text{ ou } x_{\alpha}^{e} = \sum_{i=1}^{N_{nd}} x_{\alpha,i}^{e} . \overline{N}_{i}^{e}$$
 (I.13)

3.2.4 Matrice jacobienne de la transformation

La jacobienne de la transformation est la matrice des dérivées partielles des coordonnées réelles x_{α} par rapport aux coordonnées ξ_{α} dans l'élément de référence :

$$J_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial \xi_{\beta}} \tag{I.14}$$

En tenant compte de la définition des coordonnées x_{α} en fonction des coordonnées $x_{\alpha,i}$ des nœuds, on obtient une expression équivalente de la matrice jacobienne :

$$J_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N_{nd}} \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \xi_{\beta}} \cdot x_{\alpha,i}$$
 (I.15)

Où $\frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \xi_\beta}$ sont les termes de la matrice $\left[\frac{\partial \bar{N}}{\partial \xi}\right]^T$, dont le nombre de lignes est le nombre de directions de l'espace, et le nombre de colonnes le nombre de nœuds de l'élément. Notons que la matrice $\left[\frac{\partial \bar{N}}{\partial \xi}\right]^T$ ne dépend que de la définition de l'élément de référence et non de celle de l'élément réel. Le déterminant de la matrice jacobienne, utile dans les calculs qui vont suivre, s'appelle le jacobien de la transformation géométrique. Il est non nul lorsque la transformation τ qui fait passer de l'élément de référence à l'élément réel est bijective, et positif lorsque respecte l'orientation de l'espace.

$$J = det \left[\frac{\partial \overline{N}}{\partial \xi} \right]^T \ge 0 \tag{I.16}$$

3.3 Représentation des inconnues

Pour résoudre le problème, on considère une approximation par éléments finis d'un champ inconnu. Les espaces E_p et E_u sont représentés par des espaces discret E^h . Il y a deux façons équivalentes de représenter les inconnues dans un élément : par les coefficients de leur approximation polynomiale ou par leurs valeurs nodales. Ces deux possibilités correspondent aux deux manières complémentaires de définir un élément par la donnée d'une base de monômes ou par la donnée des fonctions de forme associées aux nœuds. De manière générale, on construit la fonction approchée en écrivant la relation linéaire suivante sur chaque élément :

$$\mathbf{u}^{e}(\xi) = \sum_{i=1}^{N_{nd}} \alpha_i^{e} \cdot \phi_i^{e}(\xi)$$
 (I.17)

avec les $\phi_i^e(\xi)$ sont des fonctions linéaires indépendantes. Ils constituent la base de l'approximation, les paramètres généraux de l'approximation étant les coefficients a_i .

3.3.1 Approximation nodale

La première idée de la méthode des éléments finis est de construire une approximation de type nodale pour laquelle les coefficients $u_i = a_i$ correspondent à la solution en ces nœuds

$$\mathbf{u}^{e}(\xi) = \sum_{i=1}^{N_{nd}} u_{i}^{e} . N_{i}^{e}(\xi)$$
 (I.18)

On obtient alors une approximation nodale avec $N_i^e(\xi)$ les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence. Sur chacun de ces sous-domaines, on construit une fonction approchée différente d'un sous – domaine à l'autre. L'approximation en éléments finis est élémentaire car la fonction ne dépend que des valeurs nodales constituant l'élément:

$$\mathbf{u}^{e}(x) = \sum_{i=1}^{N_{nd}} u_{i}^{e} . N_{i}^{e}(x)$$
 (I.19)

Un élément est isoparamétrique lorsqu'il est basé sur des interpolations identiques pour sa géométrie et ses inconnues : $\overline{N}(\xi) = N(\xi)$. Pour assurer la continuité de la solution sur l'élément et, éventuellement, la continuité de ses dérivées, il faut que les fonctions $N_i^e(x)$ soient continues et, éventuellement, à dérivées continues. De même si l'on veut assurer la continuité de la solution et de ses dérivées aux frontières des éléments (conformité de l'approximation), il faut que la solution et ses dérivées dépendent de manière unique des variables nodales des nœuds de la frontière.

3.3.2 Base polynomiale

La façon la plus simple de définir un élément est de choisir une base polynomiale composée d'un certain nombre de monômes indépendants. Pour une inconnue donnée, le nombre de monômes utilisés doit être égal au nombre de variables nodales, c'est-à-dire au nombre de nœuds utilisés pour représenter l'inconnue. On définit généralement la base polynomiale sur

l'élément de référence ; elle contient des monômes de la forme ξ_1^{γ} . ξ_2^{δ} . ξ_3^{ε} , où γ , δ et ε sont des exposants entiers positifs ou nuls. Le degré d'un tel monôme est l'entier $+\delta + \varepsilon$. La base est dite complète de degré n lorsque tous les monômes de degré n sont présents. Dans certains cas, on emploie des bases incomplètes. On note $P_p(\xi)$ le $p^{ième}$ monôme de la base (qui en comprend m). Les composantes du vecteur déplacement $\mathbf{u}(\xi)$ dans l'élément sont alors données par la formule :

$$u_{\alpha}(\xi) = \sum_{p=1}^{m} a_{\alpha,p}.P_{p}(\xi)$$
 (I.20)

On notera Π la matrice donnant les valeurs prises par les monômes de la base polynomiale sur les nœuds de l'élément de référence :

$$\Pi_{Ip} = P_p(\xi_I) \tag{I.21}$$

où p est le numéro d'ordre du monôme dans la base, I le numéro du nœud localement à l'élément et ξ_I les coordonnées du nœud I dans l'élément de référence. Cette matrice est carrée, sa dimension est le carré du nombre de nœuds de l'élément. Au nœud I, le déplacement u^I_α vaut :

$$u_{I,\alpha} = a_{I,\alpha}. \Pi_{Ip} \tag{I.22}$$

On distingue trois grands types d'éléments finis fréquemment utilisés:

- les éléments finis de Lagrange qui reposent sur des bases polynomiales complètes et différents types de géométries (symplectiques pour les triangles et les tétraèdres, à structure tensorielle pour les quadrangles et les hexaèdres ou de type prismatique),
- les éléments finis de type Serendip, qui sont des éléments finis de Lagrange avec des bases incomplètes,
- les éléments finis d'Hermite, de haute précision, qui utilisent les inconnues nodales et leurs dérivées.

Éléments finis de Lagrange symplectiques

Pour déterminer si une base polynomiale est complète avec les éléments symplectiques, il suffit d'utiliser le triangle de Pascal :

Ordre

Constant 1

Linéaire
$$\xi_1$$
 ξ_2

Quadratiqu $(\xi_1)^2$ $\xi_1.\xi_2$ $(\xi_2)^2$

e

Cubique $(\xi_1)^3$ $(\xi_1)^2.\xi_2$ $\xi_1.(\xi_2)^2$ $(\xi_2)^3$

Ordre 4 $(\xi_1)^4$ $(\xi_1)^3.\xi_2$ $(\xi_1)^2.(\xi_2)^2$ $\xi_1.(\xi_2)^3$ $(\xi_2)^3$

Une base polynomiale complète d'ordre deux comportes six monômes: $\{1; \xi_1; \xi_2; (\xi_1)^2; (\xi_2)^2; \xi_1, \xi_2\}$ et donc l'élément géométrique support sera un triangle à six nœuds.

Éléments finis de Lagrange à structure tensorielle

Pour décrire des éléments finis quadrangulaires (ou hexaédriques), il suffit de prendre des polynômes complets de l'ordre donné et en faire le produit.

Ordre	Constant	Linéaire	Quadratique	Cubique
Constant	1	ξ_1	$(\xi_1)^2$	$(\xi_1)^3$
Linéaire	${f \xi}_2$	$\xi_1.\xi_2$	$(\xi_1)^2.\xi_2$	$(\xi_1)^3.\xi_2$
Quadratique	$(\xi_2)^2$	ξ_1 . $(\xi_2)^2$	$(\xi_1)^2 \cdot (\xi_2)^2$	$(\xi_1)^3 \cdot (\xi_2)^2$
Cubique	$(\xi_2)^3$	$\xi_1.(\xi_2)^3$	$(\xi_1)^2.(\xi_2)^3$	$(\xi_1)^3 \cdot (\xi_2)^3$

Une base polynomiale « sur »-complète d'ordre deux pour un élément quadrangulaire comporte neuf monômes: $\{1; \xi_1; \xi_1^2; \xi_2; \xi_2^2; \xi_1.\xi_2; \xi_1.\xi_2^2; \xi_1^2.\xi_2^2; \xi_1^2.\xi_2^2; \xi_1^2.\xi_2^2, \xi_1^2\}$, ce qui signifie neuf nœuds. Un tel élément comporte des termes d'ordre 3 et 4.

Éléments finis de Serendip

Les éléments de Serendip, pour un polynôme d'ordre s, excluent les termes croisés de degré supérieur à s+1 pour ne pas avoir de nœuds à l'intérieur des éléments. Par exemple, pour un élément de Serendip d'ordre deux, les monômes seront $\{1; \xi_1; \xi_1^2; \xi_2; \xi_2^2; \xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2^2; \xi_1^2, \xi_2^2; \xi_1^$

3.3.3 Fonctions de forme

Une façon équivalente de définir un élément fini est de donner, pour chaque inconnue, l'expression des fonctions de forme de l'élément. Pour une inconnue scalaire donnée (composante du déplacement selon y par exemple), il y en a autant que de nœuds où l'inconnue

doit être calculée. Dans beaucoup de cas, on utilise les mêmes fonctions de forme pour toutes les composantes d'un vecteur inconnu, mais ce n'est pas obligatoire. Dans ce qui suit, on supposera cependant pour simplifier les écritures que c'est le cas.

Les fonctions de forme peuvent être définies sur l'élément réel Ω_e : on les note alors $N^e(\mathbf{x})$, elles dépendent de la géométrie de l'élément réel, et sont donc différentes d'un élément à l'autre. Il est plus simple de les exprimer sur l'élément de référence, ce qui donne les fonctions $N(\xi)$ indépendantes de la géométrie de l'élément réel. Rappelons que ces fonctions sont polynomiales sur l'élément et que la fonction de forme associée à un nœud donné y prend la valeur un, alors qu'elle s'annule en tous les autres nœuds de l'élément. Les inconnues s'expriment alors comme combinaison linéaire des fonctions de forme, les coefficients $u_{\alpha,i}$ de la combinaison étant appelés les variables nodales :

$$u_{\alpha}(\xi) = \sum_{i=1}^{N_{nd}} u_{\alpha,i}. N_{i}(\xi)$$
 (I.23)

En utilisant la transformation τ entre l'élément de référence et l'élément réel:

$$\xi_{\alpha} \xrightarrow{\tau} \chi_{\alpha}$$
 (I.24)

On a:

$$u_{\alpha}(\xi) = \sum_{i=1}^{N_{nd}} u_{\alpha,i}. N_i(\tau^{-1}(x))$$
 (I.25)

3.3.4 Correspondance entre base polynomiale et fonctions de forme

Deux relations existent entre les bases. La première provient de l'approximation de la solution par une base polynomiale :

$$u_{\alpha}(\xi) = \sum_{p=1}^{m} a_{\alpha,p}.P_{p}(\xi)$$
 (I.26)

La seconde est l'approximation nodale :

$$u_{\alpha}(\xi) = \sum_{i=1}^{N_{nd}} u_{\alpha,i} \cdot N_i(\xi)$$
 (I.27)

La matrice donnant les valeurs prises par les monômes de la base polynomiale sur les nœuds de l'élément de référence :

$$\Pi_{Ip} = P_p(\xi_I) \tag{I.28}$$

En un nœud I, on a écrit l'approximation polynomiale suivante :

$$u_{I,\alpha} = a_{\alpha,p}.\Pi_{Ip} \tag{I.29}$$

En injectant l'équation (29) dans l'expression nodale (27), on obtient :

$$u_{\alpha}(\xi) = \sum_{i=1}^{N_{nd}} a_{\alpha,p} . \Pi_{Ip} . N_i(\xi)$$
 (I.30)

Par comparaison avec l'approximation polynomiale (26), on en déduit la relation suivante entre la base polynomiale et les fonctions de forme :

$$\Pi_{In}.N_i(\xi) = P_n(\xi_I) \tag{I.31}$$

En pratique, on trouvera dans la littérature les écritures des fonctions de forme nodale pour les éléments les plus courants, selon le choix de la base polynomiale.

3.4 Résultats d'existence et d'unicité

On peut écrire le problème de manière plus abstraite :

Trouver
$$\mathbf{u} \in E_u$$
 tel que $\forall \mathbf{v} \in E_v$ (I.32) $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v})$

 E_u et E_v sont des espaces vectoriels de fonctions définies sur Ω . Ce sont des espaces de Hilbert. a(u,v) est une forme bilinéaire sur $E_u \times E_v$ (on a supposé que $\mathbf{L}(\mathbf{u})$ représente un problème physique linéaire par rapport à \mathbf{u}). f(v) est une forme linéaire et continue sur E_v . Pour établir les conditions d'existence et d'unicité, on applique le théorème de Lax-Milgram. Dans un premier temps, on suppose que la solution appartient au même espace que les fonctions test $E_u = E_v$. Si la forme $a(\mathbf{u},\mathbf{v})$ est coécrive c'est-à-dire :

$$\forall \mathbf{u} \in E_{u} \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \ge c. \|\mathbf{u}\|_{E_{u}}^{2} \quad avec \ c > 0$$
 (I.33)

Alors le problème :

Trouver
$$\mathbf{u} \in E_u$$
 tel que $\forall \mathbf{v} \in E_u$ (I.34)
$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v})$$

4 Méthode de Ritz

La méthode de Galerkine, dans certains cas, équivaut à rendre stationnaire une fonctionnelle. C'est le cas si la forme bilinéaire a(**u,v**) est symétrique et positive :

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_u \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \text{ et } a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \ge 0$$
 (I.35)

Dans ce cas le problème (34) admet une et une seule solution \mathbf{u} minimise sur E_u la fonctionnelle suivante :

$$\pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \cdot a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - f(\mathbf{u})$$
 (I.36)

Du point de vue mécanique, celui signifie que le principe des puissances virtuelles peut aussi s'écrire comme la minimisation d'une grandeur scalaire: l'énergie totale de la structure. Cette manière d'écrire l'équilibre est très fréquemment employée. Nous allons ici en présenter quelques résultats.

Nous rappelons d'abord qu'une fonctionnelle est une fonction d'un ensemble de fonctions (et de ses dérivées). On écrira π cette fonctionnelle. On se limitera aux formulations en déplacement, sachant qu'il en existe d'autres. Dans ce cas, la fonctionnelle π s'écrira :

$$\pi(\mathbf{u}) = \pi\left(\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right) \tag{I.37}$$

Pour les problèmes conservatifs, on peut démontrer qu'écrire que la première variation de π est nulle (condition de stationnarité de la fonctionnelle) équivaut à appliquer le principe des travaux virtuels, ou encore à utiliser la méthode de Galerkine en prenant les déplacements virtuels comme fonction de pondération. On appelle que la méthode de Galerkine consiste à partir du problème aux dérivées partielles établissant l'équilibre de la structure, soit :

$$L(u) + f = 0 \ dans \ \Omega \ avec \ \sigma. \ n = g \ sur \ \Gamma_N \ et \ u = u^D \ sur \ \Gamma_D$$
 (I.38)

On cherche alors à résoudre le problème sous forme intégrale en utilisant des fonctions de pondération qui sont de la même nature que la solution approchée :

$$W = \int_{\Omega} [L(u) + f] \cdot \psi(u) \cdot d\Omega = 0$$

$$A \operatorname{vec} \sigma \cdot n = g \operatorname{sur} \Gamma_{N} \operatorname{et} u = u^{D} \operatorname{sur} \Gamma_{D}$$
(I.39)

Si on choisit comme fonction de pondération la variation des inconnues $\psi = \delta u$ et après avoir intégré par parties une fois, on obtient :

$$\delta\pi(\mathbf{u}) = W(\mathbf{u}) = 0 \text{ et } \mathbf{u} = \mathbf{u}^D \text{ sur } \mathbf{\Gamma}_D$$
 (I.40)

Trouver la forme exacte de la fonctionnelle n'est pas immédiat dans le cas général. En mécanique, pour les cas conservatifs, il se trouve que cette fonctionnelle équivaut à l'énergie potentielle totale du système. Après discrétisation de la fonctionnelle (par une approximation éléments finis), on se retrouve avec un système matriciel strictement équivalent à celui de la méthode de Galerkine (ou son principe mécanique équivalent, la méthode des puissances virtuelles).

Intuitivement, on comprend qu'une faible variation δu de la solution est un champ qui peut être cinématiquement admissible et qui correspond donc bien aux hypothèses de la méthode des puissances virtuelles.

5 Construction du système matriciel

Nous allons maintenant présenter les différents ingrédients menant à la construction du système matriciel qui permettra de résoudre le problème.

5.1 Nouvelle notation (notation de Voigt)

Afin de bien comprendre la construction des termes discrets dans la méthode des éléments finis, nous allons utiliser une notation plus compacte:

- $\langle V \rangle$ est un vecteur ligne
- $\{V\}$ est un vecteur colonne

[A] est une matrice

Ainsi l'interpolation géométrique s'écrit suivant les trois dimensions de l'espace :

$$x_{1}^{e} = \langle x_{1,i}^{e} \rangle. \{ N_{i}^{e} \} = \langle N_{i}^{e} \rangle. \{ x_{1,i}^{e} \}$$

$$y_{1}^{e} = \langle y_{1,i}^{e} \rangle. \{ N_{i}^{e} \} = \langle N_{i}^{e} \rangle. \{ y_{1,i}^{e} \}$$

$$z_{1}^{e} = \langle z_{1,i}^{e} \rangle. \{ N_{i}^{e} \} = \langle N_{i}^{e} \rangle. \{ z_{1,i}^{e} \}$$
(I.41)

Ou encore de manière plus compacte sous forme vectorielle :

$$\{x^e\} = [N_i^e].\{x_i^e\} = \langle x_i^e \rangle.[N_i^e]^T$$
 (I.42)

Avec la matrice N des fonctions de forme. En considérant un élément à deux nœuds, on obtient sous forme développée :

$$\begin{cases} x^e \\ y^e \\ z^e \end{cases} = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & 0 & N_2^e & 0 & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & 0 & N_2^e & 0 \\ 0 & 0 & N_1^e & 0 & 0 & N_2^e \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} x_1^e \\ y_1^e \\ z_1^e \\ x_2^e \\ y_2^e \\ z_2^e \end{cases} \tag{I.43}$$

5.2 Système discrétisé

On se place dans le cas hyperélastique en petites déformations, le problème de mécanique à résoudre on écrit de manière plus compacte :

Trouver
$$\mathbf{u} \in E^h$$
 tel que $\forall \widetilde{\mathbf{u}} \in E^{\widetilde{h}}$
$$a(\mathbf{u}, \widetilde{\mathbf{u}}) + l(\widetilde{\mathbf{u}}) = 0$$
 (I.44)

Avec $a(\mathbf{u}, \widetilde{\mathbf{u}})$ une forme bilinéaire, symétrique qui représente l'énergie potentielle de la structure et $l(\widetilde{\mathbf{u}})$ le potentiel des efforts volumiques et surfaciques :

$$a(\mathbf{u}, \widetilde{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega^h} \varepsilon(\widetilde{\mathbf{u}}) : \sigma(u) . d\Omega^h$$
 (I.45)

$$l(\widetilde{\boldsymbol{u}}) = \int_{\Omega^h} f.\widetilde{\boldsymbol{u}}.d\Omega^h + \int_{\Gamma^h} g.\widetilde{\boldsymbol{u}}.d\Gamma^h = 0$$

La discrétisation consiste à choisir une base de l'espace Ω^h et à calculer numériquement les termes de la matrice A et du vecteur L. Pour cela, on exprime la forme bilinéaire a(.,.) et la forme linéaire l (.) comme une somme sur des éléments, définis par découpage du domaine de base :

$$\begin{cases}
a(u_i, \tilde{u}_j) = \sum_{\substack{\text{\'el\'ement } \Omega^e}} \int \sigma_{kl}(u_i) \cdot \varepsilon_{kl}(\tilde{u}_j) \cdot d\Omega^e \\
l(\tilde{u}_i) = \sum_{\substack{\text{\'el\'ement } \Omega^e}} \int f_i \cdot \tilde{u}_i \cdot d\Omega^e + \int g_i \cdot \tilde{u}_i \cdot d\Gamma_N^e
\end{cases}$$
(I.46)

Les termes A_{ij} , qui représentent l'interaction entre deux degrés de liberté i et j sont construits en assemblant (l'opération notée \sum éléments) les contributions provenant de chacun des éléments qui contiennent les nœuds correspondants ; on procède de la même façon pour construire le vecteur second membre L_i . Ces contributions, appelées termes élémentaires, sont calculées lors d'une boucle sur les éléments et ne dépendent que des seules variables de l'élément Ω^e :

$$\begin{cases} a^{e} = \int \sigma_{kl} \cdot \varepsilon_{kl} \cdot d\Omega^{e} \\ l^{e} = \int f_{i} \cdot w_{i} \cdot d\Omega^{e} + \int g_{i} \cdot w_{i} \cdot d\Gamma_{N}^{e} \end{cases}$$
 (I.47)

La relation entre le tenseur des contraintes de Cauchy σ et les déplacements \mathbf{u} est donnée par la relation de comportement, et est indépendante de l'écriture de la formulation variationnelle. Dans le cas élastique, on a :

$$\sigma_{ij}(w_i) = \Lambda_{ijkl} \varepsilon_{ku}(w_i) \tag{I.48}$$

 Λ_{ijkl} est le tenseur d'élasticité de Hooke. Cette forme tensorielle est peu pratique, on utilise préférentiellement la notation de Voigt, qui permet d'écrire :

$$\sigma: \varepsilon = \langle \sigma \rangle. \{\varepsilon\} \tag{I.49}$$

En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz} \rangle$$
 (I.50)

Et une forme modifiée des composantes de déformation pour permettre d'exprimer le produit contracté, soit:

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad 2\varepsilon_{xy} \quad 2\varepsilon_{xz} \quad 2\varepsilon_{yz} \rangle$$
 (I.51)

Dans l'intégration des lois de comportement, les composantes de cisaillement des contraintes et de déformations utilisés par Code_Aster sont :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sqrt{2}\sigma_{xy} \quad \sqrt{2}\sigma_{xz} \quad \sqrt{2}\sigma_{yz} \rangle$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \sqrt{2} \varepsilon_{xy} \quad \sqrt{2} \varepsilon_{xz} \quad \sqrt{2} \varepsilon_{yz} \rangle$$

Le produit de ces deux vecteurs donne bien le même résultat que le double produit contracté (49). Avec cette nouvelle notation, nous avons en élasticité :

$$\{\sigma\} = [A].\{\varepsilon\} \tag{I.52}$$

Nous repartons de l'écriture EF du champ des déplacements :

$$\{u^e\} = [N_i^e].\{u_i^e\} = \langle u_i^e \rangle.[N_i^e]^T$$
 (I.53)

Et, de manière analogue, le champ des déplacements virtuels:

$$\{\tilde{u}^e\} = [N_i^e].\{\tilde{u}_i^e\} = \langle \tilde{u}_i^e \rangle.[N_i^e]^T \tag{I.54}$$

Par souci de simplification des notations, on omettra la référence à l'élément. Il est nécessaire d'exprimer le tenseur des déformations (virtuelles ou réelles):

$$\{\varepsilon\} = [B].\{u\} = \langle u \rangle.[B]^T \text{ et}$$

 $\{\tilde{\varepsilon}\} = [B].\{\tilde{u}\} = \langle \tilde{u} \rangle.[B]^T$
(I.55)

On obtient alors pour la matrice relative à la forme bilinéaire:

$$[a] = \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle \int_{\Omega^e} [B]^T \cdot [\Lambda] \cdot [B] \cdot d\Omega^e \cdot \{u\}$$
 (I.56)

Les matrices [B] et $[\Lambda]$ contiennent la non-linéarité éventuelle du comportement et dépendront des déplacements:

- 1. [B] est une fonction des déplacements si on se trouve dans la situation des grandes déformations ou des grandes transformations (grandes rotations et/ou grands déplacements).
- 2. [Λ] est la matrice de comportement. Elle devient dépendante des déplacements (et d'autres variables) dans le cas des comportements non-linéaires et/ou non-élastiques.

Dans ces deux cas, le processus de résolution des équations impliquera un traitement spécifique (le plus souvent, une linéarisation de type Newton-Raphson). De manière analogue, on obtiendra facilement la forme élémentaire pour le second membre.

5.3 Calcul des termes élémentaires

Les termes élémentaires à calculer sont de la forme :

$$\int_{\Omega_{e}} f\left(u(x), \frac{\partial u(x)}{\partial x}\right) . dx \tag{I.57}$$

Trois types d'opérations sont à effectuer :

- 1. la transformation des dérivées par rapport à \mathbf{x} en dérivées par rapport à ξ ,
- 2. le passage d'une intégration sur l'élément réel à une intégration sur l'élément de référence,
- 3. la réalisation numérique de cette intégration qui est généralement faite par une formule de quadrature.

5.3.1 Transformation des dérivées

La transformation des dérivées s'effectue grâce à la matrice jacobienne J, d'après la règle de dérivation en chaîne :

$$\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} = \frac{\partial \xi_{\gamma}}{\partial x_{\beta}} \cdot \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \xi_{\gamma}} = J^{-1} \cdot \left[\frac{\partial N}{\partial \xi} \right] \cdot u_{\alpha}^{nod}$$
 (I.58)

où u_{α}^{nod} est le vecteur des valeurs nodales de la composante α du déplacement.

5.3.2 Changement de domaine d'intégration

Le passage à l'intégration sur l'élément de référence s'effectue en multipliant l'intégrante par le déterminant de la matrice jacobienne, appelé jacobien :

$$\int_{\Omega_{e}} f\left(\mathbf{u}(x), \frac{\partial \mathbf{u}(x)}{\partial x}\right) . dx = \int_{\Omega_{r}} f\left(\mathbf{u}(\xi), \frac{\partial \mathbf{u}(\xi)}{\partial \xi}\right) . \det(\mathbf{J}(\xi)) . d\xi$$
 (I.59)

Le passage de l'élément de référence à l'élément réel implique la bijectivité de la transformation τ . Il faut donc $\det(J(\xi))\neq 0$, ce qui implique que l'élément ne doit pas se retourner ou dégénérer (par exemple il ne faut pas que le quadrangle dégénère en triangle).

5.3.3 Intégration numérique

Dans certains cas particuliers, on peut calculer analytiquement les intégrales. Par exemple, pour un triangle en deux dimensions, le Jacobien est constant sur le triangle, et les intégrandes se ramènent à des monômes que l'on sait intégrer exactement grâce à la formule d'intégration numérique dite « de Gauss »2:

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{1-\xi} \xi_{1}^{\alpha} . \, \xi_{2}^{\beta} . \, d\xi_{1} . \, d\xi_{2} = \frac{\alpha! \, \beta!}{(\alpha+\beta+2)!}$$
 (I.60)

Cependant, ces cas particuliers sont rares, et on préfère évaluer numériquement les intégrales en faisant appel à des formules de quadrature. Celles-ci donnent une approximation de l'intégrale sous forme d'une somme pondérée des valeurs de l'intégrande en un certain nombre de points de l'élément appelés points d'intégration :

$$\int_{\Omega_r} g(\xi). d\xi \approx \sum_{g=1}^r \omega_g. g(\xi_g)$$
 (I.61)

Les scalaires ω_g sont appelés les poids d'intégration, et les coordonnées ξ_g sont les coordonnées des r points d'intégration dans l'élément de référence. Dans les méthodes d'intégration de Gauss, les points et poids d'intégration sont déterminés de manière à intégrer exactement des polynômes d'ordre donné. C'est ce type de méthode que l'on utilise dans Code_Aster, les points d'intégration s'appellent alors des points de Gauss. Le nombre de points de Gauss choisi permet d'intégrer exactement dans l'élément de référence. En fait, à cause de la non-linéarité éventuelle de la transformation géométrique ou de la dépendance spatiale des coefficients (par exemple pour des éléments déformées ou de second ordre), l'intégration n'est pas exacte dans l'élément réel. Pour

chaque élément Ω_e , on a su calculer les termes dits élémentaires : matrice élémentaire A^e et vecteur élémentaire L^e . La matrice A et le vecteur L sont obtenus par une procédure que l'on appelle l'assemblage des termes élémentaires. Si on reprend la forme élémentaire de rigidité:

$$[a] = \int_{\Omega^e} \{\sigma\}.\langle \varepsilon \rangle. d\Omega^e$$
 (I.62)

L'intégration numérique implique que l'on évalue les contraintes et les déformations aux points d'intégration:

$$[a] = \int_{\Omega^e} \{\sigma\}. \langle \varepsilon \rangle. d\Omega^e \approx \sum_{g=1}^r \omega_g. \{\sigma(\xi_g)\}. \langle \varepsilon(\xi_g) \rangle$$
 (I.63)

Ce qui signifie que les contraintes et les déformations sont les plus exactes (ou les moins fausses) aux points d'intégration (champs dits « ELGA » dans Code_Aster). Le simple fait d'extrapoler ces valeurs aux nœuds pour l'affichage introduit une erreur. Il s'agit d'ailleurs d'une méthode d'évaluation de l'erreur, appelée indicateur d'erreur de Zhu-Zienkiewicz.

En élasticité 2D, un triangle exhibant un jacobien constant, un seul point de Gauss est suffisant pour intégrer exactement les termes de la matrice et du second membre (s'il est constant).

Le coût calcul augmente avec le nombre de points d'intégration, particulièrement pour les lois de comportement non-linéaires. Par exemple, un hexaèdre à 27 nœuds a besoin de 27 points de Gauss pour intégrer les quantités. Il arrive donc fréquemment qu'on « sous-intègre », c'est à dire qu'on utilise moins de points d'intégration que le minimum requis, commettant ainsi une erreur que l'on compensera éventuellement par un maillage plus fin. En plus de cette erreur systématique, cette sous-intégration doit être faite avec précaution car elle peut produire des défauts de rang de la matrice et rendre ainsi le système linéaire non inversible.

6 Résolution du système matriciel

On obtient donc un système linéaire à résoudre:

$$\langle \widetilde{\boldsymbol{u}} \rangle . [\boldsymbol{A}] . \{\boldsymbol{u}\} + \langle \widetilde{\boldsymbol{u}} \rangle . \{\boldsymbol{L}\} = 0$$
 (I.64)

Quel que soit le champ des déplacements virtuels, donc:

$$[A].\{u\} = \{L\} \tag{I.65}$$

6.1 Imposition des conditions aux limites cinématiques

Le traitement des conditions aux limites cinématiques du type $u=u^D$ se fait de deux manières différentes:

- 1. la méthode « cinématique » (AFFE_CHAR_CINE dans ASTER) consiste à modifier la matrice et le second membre. Cette méthode est rapide et n'introduit pas de variables supplémentaires. Par contre, elle n'est pas générale et ne permet pas d'appliquer des conditions limites complexes du style $\sum u_i$. $a_i = u^D$,
- la méthode par dualisation (AFFE_CHAR_MECA dans ASTER) consiste à introduire un vecteur de multiplicateurs (ou paramètres) de Lagrange λ, ce qui augmente le nombre d'inconnues mais permet de traiter tous les cas.

$$\begin{cases}
[A] \cdot [u] + [Q]^T [\lambda] = \{L\} \\
[Q] \cdot \{u\} = \{u^D\}
\end{cases}$$
(I.66)

6.2 Résolution

Le système linéaire peut être résolu par un certain nombre de méthodes numériques. Les méthodes utilisées dans ASTER sont la factorisation LDL^T par blocs, la méthode multifrontale (ou son équivalent avec pivotage, MUMPS), et le gradient conjugué préconditionné. Les méthodes de résolution se divisent en trois catégories:

- les méthodes directes qui résolvent exactement (aux erreurs numériques près),
- les méthodes itératives,
- les méthodes hybrides, très utilisées dans les méthodes de décomposition de domaines. (voir la méthode FETI [R6.01.03]).

Les matrices issues de la méthode des éléments finis sont très creuses (elles comportent une majorité de termes nuls). En pratique, sur des systèmes de taille standard (quelques dizaines de milliers d'équations), la densité de termes non nuls dépasse rarement les 0.01%. Elles sont donc stockées sous forme creuse (ou « sparse ») et prennent peu de place en mémoire. A contrario, les matrices ne sont pas construites pour être utilisés efficacement avec les bibliothèques de

programmes mathématiques optimisées dédiées aux matrices pleines (libraires BLAS par exemple). Des solveurs sont donc développés spécifiquement pour ces problèmes. Un solveur direct a pour principe de décomposer la matrice en un produit de matrices de forme particulières. Par exemple, la décomposition LDL^T:

$$[A] = [L].[D].[L]^T$$
 (I.67)

avec la matrice D diagonale et la matrice L triangulaire inférieure. Cette décomposition n'est valable que pour les matrices symétriques. Si ce n'est pas le cas, il faut utiliser d'autres décompositions. Le principe est le suivant:

- A partir de la matrice initiale (très creuse), on construit un produit de matrices remarquables. C'est l'opération de factorisation,
- Ces matrices remarquables permettent de résoudre le problème de manière très rapide. C'est la phase de descente-remontée.

La phase de factorisation est la plus coûteuse. Pour les décompositions les plus répandues, le coût machine est en n³ où n est le nombre d'équations. Le coût mémoire dépendra du profil de la matrice (de la numérotation des éléments finis). Des procédés automatiques cherchent à optimiser cette numérotation pour avoir une structure aussi compacte que possible. Même avec cette optimisation, il est fréquent que la matrice factorisée prennent plusieurs centaines de fois, voire plusieurs milliers de fois plus de mémoire que la matrice initiale. Les solveurs directs consomment donc beaucoup de mémoire et ça en devient rédhibitoire à partir de plusieurs centaines de milliers de degrés de liberté, même sur les machines les plus puissantes. Par contre, ces méthodes directes sont particulièrement robustes. Les problèmes en mécanique des structures et des solides conduisent bien souvent à des matrices avec un mauvais conditionnement (c'est particulièrement le cas de toutes les dernières innovations numériques qui utilisent des méthodes mixtes avec beaucoup de multiplicateurs de Lagrange). Lorsque cela est possible, on utilise préférentiellement des méthodes itératives dont le principe consiste à trouver une approximation de l'inverse de la matrice et à procéder ensuite à une résolution itérative, pas par pas, qui n'utilise que des produits matrices-vecteurs, très efficaces et peu coûteux en mémoire.

Toutefois, ces méthodes itératives ont plusieurs défauts:

• Elles sont moins robustes que les méthodes directes, particulièrement lorsque le conditionnement est mauvais,

- Les méthodes de préconditionnement sont très nombreuses et il en existe autant que de problèmes différents (voire plusieurs possibles par problème). Ce qui oblige l'utilisateur à jongler avec les différentes méthodes, sans jamais être assuré d'obtenir un résultat à la fin,
- Ce sont des méthodes itératives, ce qui implique un critère d'arrêt du processus, et donc un paramètre à gérer mais aussi des problèmes de cumul d'arrondis.

Enfin les méthodes hybrides tentent de concilier les avantages des deux approches. Le plus souvent, on les utilise dans les méthodes de décomposition de domaines, où chaque domaine est traité par un solveur direct tandis que le problème d'interface est résolu par un solveur itératif. On peut citer la méthode FETI (et ses variantes, voir [R6.01.03]) ou encore les déclinaisons de la méthode LATIN. Il s'agit d'un domaine de recherche extrêmement actif.

7 Bibliographie

- 1) P.G. Ciarlet, « The finite element method for elliptic problems », Studies in Applied Mathematics, North Holland, 1978.
- 2) A. Ern, J.-L. Guermond, « Éléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre », Springer, 2002.
- 3) G. Dhatt, G. Touzot, E. Lefrançois, « Méthode des éléments finis : une présentation », Hermès, 2004.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. V. Pham, F. Plourde, and S. K. Doan, "Turbulent heat and mass transfer in sinusoidal wavy channels," *Int. J. Heat Fluid Flow*, vol. 29, no. 5, pp. 1240–1257, Oct. 2008.
- [2] J. Hennebil, "Refroidissement d'une electro-vanne et validation experimentale / numerique," Contrat ENSMA-AIRBUS 20110025-2012.
- [3] M. Brünig, O. Chyra, D. Albrecht, L. Driemeier, and M. Alves, "A ductile damage criterion at various stress triaxialities," *Int. J. Plast.*, vol. 24, no. 10, pp. 1731–1755, Oct. 2008.
- [4] V. T. Luu, "Modélisation numérique multiphysiques couplés : application à un projectile en écoulement supersonique," Thèse ENSMA 2012.
- [5] M. V. PHAM, "Analyse expérimentale: simulation directe et des grandes échelles d'un panache thermique tridimensionnel en rotation," Thèse ENSMA 2005.
- [6] M. V. Pham, F. Plourde, and S. Doan Kim, "Effect of swirl on pure turbulent thermal plume development," *Int. J. Heat Fluid Flow*, vol. 27, no. 3, pp. 502–513, Jun. 2006.
- [7] "EDF R&D," http://research.edf.com/research-and-innovation-44204.html.
- [8] S. A. Stanley, S. Sarkar, and J. P. Mellado, "A study of the flow-field evolution and mixing in a planar turbulent jet using direct numerical simulation," *J. Fluid Mech.*, vol. 450, Jan. 2002.
- [9] C. B. da Silva, O. MéTais, "On the influence of coherent structures upon interscale interactions in turbulent plane jets," *J. Fluid Mech.*, vol. 473, Dec. 2002.
- [10] S. Nagarajan, S. K. Lele, and J. H. Ferziger, "A robust high-order compact method for large eddy simulation," *J. Comput. Phys.*, vol. 191, no. 2, pp. 392–419, Nov. 2003.
- [11] M. Lesieur, *Turbulence in fluids*. Dordrecht; London: Springer, 2007.
- [12] S. Lardeau, É. Lamballais †, and J.-P. Bonnet, "Direct numerical simulation of a jet controlled by fluid injection," *J. Turbul.*, vol. 3, p. N2, Jan. 2002.
- [13] H. Choi, P. Moin, and J. Kim, "Direct numerical simulation of turbulent flow over riblets," *J. Fluid Mech.*, vol. 255, no. -1, p. 503, Apr. 2006.
- [14] R. Kristoffersen and H. I. Andersson, "Direct simulations of low-Reynolds-number turbulent flow in a rotating channel," *J. Fluid Mech.*, vol. 256, no. -1, p. 163, Apr. 2006.
- [15] P. Moin and K. Mahesh, "Direct Numerical Simulation: A Tool in Turbulence Research," *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 30, no. 1, pp. 539–578, Jan. 1998.
- [16] H. N. Najm, P. S. Wyckoff, and O. M. Knio, "A Semi-implicit Numerical Scheme for Reacting Flow," *J. Comput. Phys.*, vol. 143, no. 2, pp. 381–402, Jul. 1998.
- [17] J. Kim and P. Moin, "Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations," *J. Comput. Phys.*, vol. 59, no. 2, pp. 308–323, Jun. 1985.
- [18] R. W. Hockney, "A Fast Direct Solution of Poisson's Equation Using Fourier Analysis," *J. ACM*, vol. 12, no. 1, pp. 95–113, Jan. 1965.
- [19] P. N. Swarztrauber and R. A. Sweet, "Vector and parallel methods for the direct solution of Poisson's equation," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 27, no. 1–2, pp. 241–263, Sep. 1989.
- [20] E. Braverman, M. Israeli, and A. Averbuch, "A Fast Spectral Solver for a 3D Helmholtz Equation," *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 20, no. 6, pp. 2237–2260, Jan. 1999.
- [21] E. Balaras, "Modeling complex boundaries using an external force field on fixed Cartesian grids in large-eddy simulations," *Comput. Fluids*, vol. 33, no. 3, pp. 375–404, Mar. 2004.
- [22] P. De Palma, M. D. de Tullio, G. Pascazio, and M. Napolitano, "An immersed-boundary method for compressible viscous flows," *Comput. Fluids*, vol. 35, no. 7, pp. 693–702, Aug. 2006.
- [23] C.-K. Kim, S.-T. J. Yu, and Z.-C. Zhang, "Cavity Flows in a Scramjet Engine by the Space-Time Conservation and Solution Element Method," *AIAA J.*, vol. 42, no. 5, pp. 912–919, May 2004.
- [24] Y.-H. Tseng and J. H. Ferziger, "A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry," *J. Comput. Phys.*, vol. 192, no. 2, pp. 593–623, Dec. 2003.

- [25] J. Yang and E. Balaras, "An embedded-boundary formulation for large-eddy simulation of turbulent flows interacting with moving boundaries," *J. Comput. Phys.*, vol. 215, no. 1, pp. 12–40, Jun. 2006.
- [26] R. Hill, "Cours de Mécanique des Milieux Continus. Tome 1.Théorie générale. By P. G ERMAIN. Masson et Cie, 1973. 417 pp.," *J. Fluid Mech.*, vol. 73, no. 01, p. 191, Mar. 2006.
- [27] EDF, "Code Aster," http://www.code-aster.org/V2/spip.php?rubrique1.
- [28] C. S. Peskin, "Numerical analysis of blood flow in the heart," *J. Comput. Phys.*, vol. 25, no. 3, pp. 220–252, Nov. 1977.
- [29] H. Bandringa, "Immersed boundary methods," University of Groningen, 2010.
- [30] I. Borazjani, L. Ge, and F. Sotiropoulos, "Curvilinear immersed boundary method for simulating fluid structure interaction with complex 3D rigid bodies," *J. Comput. Phys.*, vol. 227, no. 16, pp. 7587–7620, Aug. 2008.
- [31] J. Yang, S. Preidikman, and E. Balaras, "A strongly coupled, embedded-boundary method for fluid–structure interactions of elastically mounted rigid bodies," *J. Fluids Struct.*, vol. 24, no. 2, pp. 167–182, Feb. 2008.
- [32] R. Mittal, H. Dong, M. Bozkurttas, F. M. Najjar, A. Vargas, and A. von Loebbecke, "A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries," *J. Comput. Phys.*, vol. 227, no. 10, pp. 4825–4852, May 2008.
- [33] H. Luo, R. Mittal, X. Zheng, S. A. Bielamowicz, R. J. Walsh, and J. K. Hahn, "An immersed-boundary method for flow–structure interaction in biological systems with application to phonation," *J. Comput. Phys.*, vol. 227, no. 22, pp. 9303–9332, Nov. 2008.
- [34] W.-X. Huang and H. J. Sung, "An immersed boundary method for fluid–flexible structure interaction," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 198, no. 33–36, pp. 2650–2661, Jul. 2009.
- [35] M. B. Giles, "Stability analysis of numerical interface conditions in fluid-structure thermal analysis," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 25, no. 4, pp. 421–436, Aug. 1997.
- [36] J.-D. Garaud, "Développement de méthodes de couplage aéro-thermo-mécanique pour la pré- diction d'instabilités dans les structures spatiales chaudes," Université Pierre et Marie Curie, 2008.
- [37] F. Zhang, The Schur complement and its applications. New York: Springer, 2005.
- [38] S. Chemin, "Etudes des interactions thermiques fuide-structure par un couplage de codes de calcul," Université de Reims, 2006.
- [39] J. Donea, S. Giuliani, and J. P. Halleux, "An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 33, no. 1–3, pp. 689–723, Sep. 1982.
- [40] C. W. Hirt, A. A. Amsden, and J. L. Cook, "An Arbitrary Lagrangian–Eulerian Computing Method for All Flow Speeds," *J. Comput. Phys.*, vol. 135, no. 2, pp. 203–216, Aug. 1997.
- [41] T. Nomura and M. Shinmyo, "ALE Finite Element Analysis of Flow Interaction with a Flexible Filament," *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, vol. 13, no. 1, pp. 65–82, Jan. 1999.
- [42] N. Takashi and T. J. R. Hughes, "An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for interaction of fluid and a rigid body," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 95, no. 1, pp. 115–138, Feb. 1992.
- [43] Bakker, A., Oshinowo, L.M. and Marshall, E.M., "The use of large eddy simulation to study stirred vessel hydrodynamics," *the 10th European Conference on Mixing*, Delft, The Netherlands, pp. 247–254, 02-Jul-2000.
- [44] R. Steijl and G. Barakos, "Sliding mesh algorithm for CFD analysis of helicopter rotor-fuselage aerodynamics," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 58, no. 5, pp. 527–549, Oct. 2008.
- [45] "INSEE." [Online]. Available: http://www.insee.fr/fr/.

- [46] "EUROSTAT." [Online]. Available: http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/eurostat/home.
- [47] "Thermoking." [Online]. Available: http://www.thermoking.com/.
- [48] "PIEK-program." [Online]. Available: http://www.piek-international.com/.
- [49] N. J. Smale, J. Moureh, and G. Cortella, "A review of numerical models of airflow in refrigerated food applications," *Int. J. Refrig.*, vol. 29, no. 6, pp. 911–930, Sep. 2006.
- [50] A. M. Foster, M. J. Swain, R. Barrett, P. D'Agaro, L. P. Ketteringham, and S. J. James, "Three-dimensional effects of an air curtain used to restrict cold room infiltration," *Appl. Math. Model.*, vol. 31, no. 6, pp. 1109–1123, Jun. 2007.
- [51] J. C. Gonçalves, J. J. Costa, A. R. Figueiredo, and A. M. G. Lopes, "Study of the aerodynamic sealing of a cold store Experimental and numerical approaches," *Energy Build.*, vol. 55, pp. 779–789, Dec. 2012.
- [52] C. S. Peskin, "The immersed boundary method," Acta Numer., vol. 11, Jul. 2003.
- [53] M. Heil, A. L. Hazel, and J. Boyle, "Solvers for large-displacement fluid-structure interaction problems: segregated versus monolithic approaches," *Comput. Mech.*, vol. 43, no. 1, pp. 91–101, Mar. 2008.
- [54] C. A. Felippa and T. L. Geers, "Partitioned analysis for coupled mechanical systems," *Eng. Comput.*, vol. 5, no. 2, pp. 123–133, 1988.
- [55] S. Piperno, C. Farhat, and B. Larrouturou, "Partitioned procedures for the transient solution of coupled aroelastic problems Part I: Model problem, theory and two-dimensional application," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 124, no. 1–2, pp. 79–112, Jun. 1995.
- [56] H. Luo, H. Dai, P. J. S. A. Ferreira de Sousa, and B. Yin, "On the numerical oscillation of the direct-forcing immersed-boundary method for moving boundaries," *Comput. Fluids*, vol. 56, pp. 61–76, Mar. 2012.
- [57] G. . Keulegan and G. . Patterson, "Mathematical theory of irrotational translation waves (1940)," *National Bureau of Standards*.
- [58] A. . Slone, K. Pericleous, C. Bailey, M. Cross, and C. Bennett, "A finite volume unstructured mesh approach to dynamic fluid–structure interaction: an assessment of the challenge of predicting the onset of flutter," *Appl. Math. Model.*, vol. 28, no. 2, pp. 211–239, Feb. 2004.
- [59] G. W. Housner, "Dynamics of structures," *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, vol. 4, no. 5, pp. 516–517, Jul. 1976.
- [60] R. T. Fenner, Engineering elasticity: application of numerical and analytical techniques. Chichester, West Sussex; New York: E. Horwood; Halsted Press, 1986.
- [61] J. Hron and S. Turek, "A monolithic FEM solver for an ale formulation of fluid-structure interaction with configuration for numerical benchmarking."
- [62] T. Belytschko, *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Chichester [u.a.: Wiley, 2003.
- [63] S. Turek and J. Hron, "Proposal for numerical benchmarking of fluid-structure interaction between an elastic object and laminar incompressible flow," Vogelpothsweg 87, 44227 Dortmund, Germany.
- [64] S. Turek, J. Hron, M. Mádlík, M. Razzaq, H. Wobker, and J. F. Acker, "Numerical Simulation and Benchmarking of a Monolithic Multigrid Solver for Fluid-Structure Interaction Problems with Application to Hemodynamics," in *Fluid Structure Interaction II*, vol. 73, H.-J. Bungartz, M. Mehl, and M. Schäfer, Eds. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011, pp. 193–220.
- [65] Yates, Land, and Foughner, "Measured and Calculated Subsonic and Transonic Flutter Characteristics of a 45° Sweptback Wing Planform in Air and Freon-12 in the Langley Transonic Dynamic Tunnel," *NASA Technical Note D-1616*, NASA, p. NASA Technical Note D–1616, 1963.

- [66] M. B. Giles, "Stability and accuracy of numerical boundary conditions in aeroelastic analysis," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 24, no. 8, pp. 739–757, Apr. 1997.
- [67] Yates and E. Carson, "AGARD standard aeroelastic configurations for dynamic response. Candidate configuration I.-wing 445.6 (August 1, 1987)."

Caractérisation numérique couplée Fluide-Aérothermique/Structure

dédiée à partir de techniques aux frontières immergées

RESUME:

La caractérisation des mécanismes de transfert entre un écoulement fluide incompressible et une

structure solide constitue l'objectif principal de ce présent mémoire. A partir d'un solveur

développé au sein de l'équipe, les travaux se sont plus particulièrement focalisés sur les

stratégies de couplage avec un solveur solide, afin de traiter à la fois les échanges énergétiques et

les mouvements de la structure. Dans notre approche, le modèle traitant la partie solide est le

solveur ASTER et une attention particulière a été portée sur la stratégie de couplage à mettre en

place.

Dans la partie couplage fluide/structure, des cas de référence ont été réalisés avec une complexité

croissante et l'intégration de la problématique des frontières immergées a été étudiée. En effet,

alors que la modélisation avec des frontières immergées semble ne pas perturber les traitements

côté fluide, les changements d'état de la topologie induit par le mouvement du solide dans le

domaine de calcul génèrent des discontinuités dans les forces fluides estimées sur la structure.

Ces dernières peuvent être plus ou moins amorties par l'introduction de techniques hybrides dans

les traitements aux frontières immergées.

Malgré ses quelques limitations, le solveur est capable de traiter de grande déformation assurant

un fonctionne robuste et rapide pour la caractérisation des mécanismes fortement couplés. Pour

le souligner, une application sur des écoulements anisothermes au sein d'une cavité représentant

une cellule frigorifique a été réalisée dans le cadre du projet de recherche OSEO. A notre

connaissance, les traitements réalisés ont pour la première fois permis de quantifier l'effet des

ouvrants (dans les phases d'ouverture et fermeture des portes de la cellule) sur les écoulements et

les échanges thermiques. Une telle modélisation permet alors de proposer des améliorations de la

géométrie en cours d'analyse.

Mots clés: Interaction fluide-structure – Transfert d'énergie – turbulence – simulation par

ordinateur

190