



**HAL**  
open science

# Influence des défauts de forme sur le comportement des liaisons : étude expérimentale et théorique

Hoài Nam Lê

► **To cite this version:**

Hoài Nam Lê. Influence des défauts de forme sur le comportement des liaisons : étude expérimentale et théorique. Autre. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2013. Français. NNT : 2013BOR14958 . tel-00961201

**HAL Id: tel-00961201**

**<https://theses.hal.science/tel-00961201>**

Submitted on 19 Mar 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre : 4958



# THÈSE

PRÉSENTÉE A

**L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1**

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGENIEUR

Par **Hoài Nam LÊ**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

**DOCTEUR**

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

## **INFLUENCES DES DÉFAUTS DE FORME SUR LE COMPORTEMENT DES LIAISONS : ÉTUDE EXPÉRIMENTALE ET THÉORIQUE**

Directeur de recherche : BALLU Alex  
Co-directeur de recherche : LEDOUX Yann

Soutenue le 4 Décembre 2013

Devant la commission d'examen formée de :

M.	LINARES Jean-Marc	Professeur des Universités, Aix Marseille Université	Rapporteur
M.	SAMPER Serge	Professeur des Universités, Université de Savoie	Rapporteur
M.	VILLENEUVE François	Professeur des Universités, Université de J. Fourier Grenoble	Examineur
M.	BALLU Alex	Maitre de conférences, HDR, Université Bordeaux 1	Examineur
M.	LEDOUX Yann	Maitre de conférences, Université Bordeaux 1	Examineur



# Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse ont été réalisés au sein du département IMC (Ingénierie Mécanique et Conception) du laboratoire I2M (Institut de Mécanique et d'Ingénierie – Bordeaux), dirigés par Alex Ballu (maître de conférences, HDR de l'Université Bordeaux 1) et Yann Ledoux (maître de conférences de l'Université Bordeaux 1). Qu'ils trouvent ici ma gratitude et mes sincères remerciements pour m'avoir fait confiance, pour leurs remarques, conseils et soutien tout au long de ces travaux.

Je suis très reconnaissant envers Messieurs Jean-Marc LINARES (professeur à Aix Marseille Université) et Serge SAMPER (professeur à l'Université de Savoie), pour m'avoir accordé de leur temps afin d'évaluer mes travaux de thèse en tant que rapporteurs.

Je remercie vivement Monsieur François Villeneuve (professeur de l'Université de Grenoble) non seulement de l'honneur qu'il m'a fait en présidant ce jury de thèse, mais aussi de son aide au cours de ma scolarité à l'école Génie Industriel – Grenoble.

Un grand merci à tous mes collègues et amis du laboratoire pour leur accueil et leur aide.

Je remercie également mes amis vietnamiens pour m'avoir encouragé et soutenu dans les moments difficiles.

Enfin je pense à ma famille pour leur soutien sans limite et en particulier à Thùy-Dung pour sa patience.

Un grand Merci à tous !



## Table des matières

Chapitre 1.	Introduction.....	5
Chapitre 2.	État de l'art.....	9
2.1	Paramétrage des déplacements.....	10
2.1.1	Matrice rotation, vecteur translation.....	10
2.1.2	Torseurs des petits déplacements (TPD).....	12
2.1.3	Conclusion.....	12
2.2	Caractérisation des mobilités.....	13
2.2.1	Union Pondérée d'Espaces de Liberté (UPEL).....	13
2.2.2	Espace de Faisabilité.....	14
2.2.3	Domaine et torseurs associés.....	15
2.2.4	T-MAP®.....	19
2.2.5	Polytope.....	21
2.2.6	Conclusion.....	21
2.3	Caractérisation des surfaces.....	22
2.3.1	Paramétrage par des composantes harmoniques.....	22
2.3.2	Paramétrage par des polynômes.....	24
2.3.3	Paramétrage par Décomposition Modale Discrète (DMD).....	26
2.4	Travaux expérimentaux sur le comportement des liaisons pour le tolérancement.....	28
2.4.1	Travaux de Radouani et Anselmetti.....	29
2.4.2	Travaux de Morière.....	31
2.4.3	Synthèse.....	34
2.5	Conclusion.....	34
Chapitre 3.	Théorie.....	35
3.1	Surfaces et domaines.....	36
3.1.1	Type de liaison étudiée.....	36
3.1.2	Mesure des déplacements.....	36
3.1.3	Mesure des surfaces et surface des différences.....	39
3.2	Dualité.....	43
3.2.1	Passage surface convexe des différences – domaine jeu.....	43
3.2.2	Passage du domaine jeu à la surface convexe des différences.....	45

3.3	Etudes de morphologie de domaine selon les cas .....	46
3.3.1	Domaine jeu d'une liaison plane parfaite.....	46
3.3.2	Domaines jeux particuliers.....	48
3.3.3	Conclusion .....	51
3.4	Influence d'écarts en position de référence .....	51
3.4.1	Changement de point et de base d'expression.....	51
3.4.2	Position de référence décalée .....	56
3.4.3	Synthèse.....	59
3.5	Influence des incertitudes de mesure.....	60
3.5.1	Influence de la position d'un sommet de la surface.....	60
3.5.2	Influence de la position d'un sommet du domaine.....	61
3.6	Conclusion.....	62
Chapitre 4.	Dispositif expérimental et traitement associé .....	63
4.1	Dispositif expérimental existant.....	64
4.1.1	Un peu d'histoire.....	64
4.1.2	Mesure des surfaces et comparaisons des résultats .....	66
4.1.3	Analyse critique de la procédure .....	68
4.2	Nouveau dispositif .....	69
4.2.1	Cahier des charges.....	69
4.2.2	Recherche de concepts .....	71
4.2.3	Choix de conception.....	72
4.3	Mise en œuvre .....	76
4.3.1	Mesure des déplacements.....	76
4.3.2	Mesure des surfaces .....	79
4.4	Conclusion.....	84
Chapitre 5.	Résultats.....	85
5.1	Validation du dispositif expérimental et des traitements associés.....	86
5.1.1	Validation des références – Contact plan/plan .....	86
5.1.2	Validation de la convexité des zones de contact .....	88
5.1.3	Surface convexe des différences .....	94
5.1.4	Validation sur surfaces à défaut maîtrisés.....	96
5.1.5	Mesures sur surfaces quelconques usinées .....	99

5.2	Influence du chargement sur le comportement de la liaison plane.....	101
5.2.1	Description du dispositif expérimental.....	102
5.2.2	Mesures expérimentales sur le dispositif.....	103
5.2.3	Calcul des valeurs d'écrasements locaux.....	104
5.2.4	Bilan .....	106
5.3	Conclusion.....	107
Chapitre 6.	Conclusion et perspectives .....	109
Référence	.....	113
Annexe A :	Plan des moindres carrés en fonction des TPD.....	119
Annexe B :	Liste des résultats .....	121





# 1

## Introduction

Le comportement mécanique des systèmes et des produits dépend fortement de la qualité géométrique des pièces et plus spécifiquement des surfaces fonctionnelles en contact dans les liaisons. Dès lors que les pièces sont en déplacements relatifs et subissent des chargements mécaniques, des pressions locales, des frottements, il est crucial d'étudier précisément l'influence des phénomènes en jeu (déplacements, déformation, frottement, usure, transferts thermiques...) dans le système afin d'assurer sa performance, sa robustesse et sa longévité.

Dans la littérature, deux domaines scientifiques sont principalement attachés à l'étude du comportement des liaisons. En premier lieu, la tribologie, qui est une science s'intéressant au contact local entre deux pièces selon les matériaux en contact, les défauts locaux des surfaces, les conditions de lubrification, les champs de pression... Ces paramètres sont liés à de multiples et complexes phénomènes physiques mettant en jeu diverses connaissances comme le calcul des déformations locales et des contraintes associées. Les principaux travaux de recherche concernent le frottement, la fatigue au contact et l'usure.

En second lieu, le tolérancement s'intéresse à l'influence des défauts des surfaces sur le fonctionnement des produits. Le but principal du tolérancement est de relier les défauts des surfaces à la montabilité des pièces d'un produit et à son fonctionnement.

De nombreux modèles mathématiques sont développés pour la simulation des assemblages dans le cadre du tolérancement. Dans un premier temps, seuls les défauts dimensionnels étaient pris en compte dans les chaînes de cotes 1D. Désormais, les modèles utilisent des surfaces de contact avec des défauts d'orientation et de position de surfaces de substitution idéales, mais sans toutefois intégrer les défauts de forme. Les hypothèses considérées sont réductrices : l'influence des défauts de forme est négligée, les pièces sont considérées comme infiniment rigides. Les modèles proposés pour étudier les problèmes de tolérancement sont ainsi : le torseur de petits déplacements (TPD), les espaces de faisabilité, les domaines, les T-Map®, les polytopes, etc.

Cependant, avec l'évolution des procédés et des précisions demandées aux produits, les défauts de position ou d'orientation deviennent très proches des défauts de forme. Ces derniers

ne sont donc plus négligeables pour les études de tolérancement. L'évolution des normes ces dernières années en est le témoignage, l'interprétation des spécifications de position ou d'orientation prend désormais en compte explicitement les défauts de forme. Le passage d'une vision macro (surface nominale, défauts géométriques) à une vision micro (défauts de forme) est un point de blocage en tolérancement. Il est nécessaire de proposer les outils et méthodes capables de résoudre les difficultés de prise en compte des défauts de forme. Ces difficultés reposent essentiellement sur le nombre de paramètres à considérer pour traduire ces défauts.

Afin de manipuler des modèles parcimonieux, proches de la réalité des formes obtenues en fabrication, la tendance actuelle est de décrire les surfaces par décomposition : par exemple DCT (Discrete Cosine Transform) ou DMD (Décomposition Modale Discrète). Le comportement des liaisons peut alors être simulé par exemple à partir de la surface des différences en reportant l'ensemble des défauts sur une seule surface, pratique courante en tribologie.

Du point de vue expérimental, la grande majorité des travaux de recherche traite de la métrologie soit des surfaces pour caractériser leurs défauts de forme et d'état surface, soit des pièces isolées pour caractériser les défauts d'orientation et de position. Rares sont les travaux traitant, même partiellement, de la métrologie d'un mécanisme où les jeux et les mobilités dans les liaisons rendent complexe une étude complète dans l'espace. Pourtant, il est impératif de mettre en place des validations par comparaison entre expériences et modèles développés pour l'analyse et la synthèse de tolérances.

L'objectif du travail présenté est d'identifier le comportement des liaisons d'un mécanisme en fonction des défauts et des jeux. Il doit permettre de répondre au moins partiellement aux questions suivantes :

- Comment prendre en compte les défauts de forme dans une liaison ?
- Comment mesurer les déplacements 3D dans une liaison avec jeux ?
- Comment confronter les modèles théoriques, la métrologie des liaisons avec jeux et la métrologie des surfaces de contact ? Quelle est la correspondance entre ces deux métrologies ?

Le sujet est abordé selon une approche théorique et expérimentale. Le mémoire est composé de quatre parties principales.

Le chapitre 2 introduit les modèles mathématiques existants pour caractériser les déplacements 3D dans un assemblage ou une liaison. Contrairement aux pratiques courantes, la caractérisation porte sur l'ensemble des déplacements possibles en considérant des déplacements combinés, rotation et translation simultanées. Plusieurs des modèles sont basés sur le concept de TPD et s'apparentent à des domaines géométriques de l'espace des déplacements. Le chapitre 2 présente également une bibliographie sur le paramétrage des défauts de forme des surfaces généralement basés sur des décompositions. Enfin, deux études expérimentales issues de travaux de thèse récents sont détaillées et analysées en raison de leur proximité avec ce travail.

La partie théorique est développée dans le chapitre 3. Le point essentiel porte sur la dualité entre le domaine jeu qui caractérise les déplacements dans la liaison et la surface convexe des différences qui caractérise les défauts des surfaces en contact. Cette dualité permet de passer de l'espace des déplacements à l'espace des surfaces, passage nécessaire à l'étude expérimentale. Suit une typologie de domaines montrant l'influence des défauts de forme sur le comportement des liaisons. Un recensement des sources d'incertitudes et de leurs effets sur le domaine jeu clos ce chapitre.

Dans le cadre de cette thèse, un dispositif expérimental a été développé pour caractériser le comportement d'une liaison avec jeu. Le dispositif et sa mise en œuvre sont explicités au chapitre 4. La démarche expérimentale porte sur une liaison plane unilatérale et est décomposée en deux approches parallèles permettant une validation (voir Fig. 1.1). La première approche est basée sur la mesure des déplacements d'où sont déduits le domaine jeu, puis la surface convexe des différences. La seconde approche considère la mesure des surfaces en contact et remonte à la surface convexe des différences puis au domaine en utilisant leur dualité. Pour mener à bien ces deux approches, le dispositif et le processus de mesure doivent être suffisamment aboutis pour prendre en compte les déplacements dus aux défauts de forme.

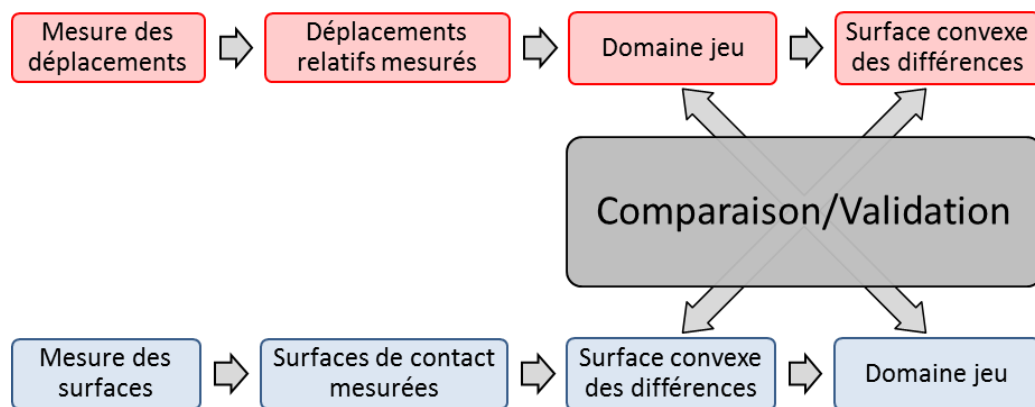


Fig. 1.1 – Démarche expérimentale

Le chapitre 5 présente et confronte les résultats de plusieurs essais effectués selon les deux approches. Les essais portent essentiellement sur des surfaces dont les défauts de forme ont été générés par usinage de manière à les maîtriser. Ce chapitre présente également un essai avec un chargement mécanique de la liaison et donc des déformations locales des pièces.



# 2

## État de l'art

L'état de l'art qui suit a pour objectif de mettre en place les concepts utilisés dans le reste du document. Il s'agit donc de rechercher les outils permettant de paramétrer les déplacements dans une liaison, mais aussi de caractériser les surfaces en contact avec défauts. Nous avons aussi identifié et analysé les travaux de recherche traitant du positionnement relatif des pièces de manière expérimentale.

## 2.1 Paramétrage des déplacements

Afin d'étudier les déplacements relatifs entre les pièces, il est nécessaire de recenser les outils mathématiques pour les modéliser, les paramétrer. Pour cela, différents outils mathématiques permettent de paramétrer les déplacements dans l'espace. On peut citer l'approche matricielle qui est classiquement utilisée ou encore, le TPD. Ce dernier est un outil utilisé dans la communauté scientifique liée au tolérancement et sera par la suite, l'outil qui sera retenu. La présentation du TPD dans la partie suivante est inspirée des travaux de thèse de (Petit, 2004).

### 2.1.1 Matrice rotation, vecteur translation

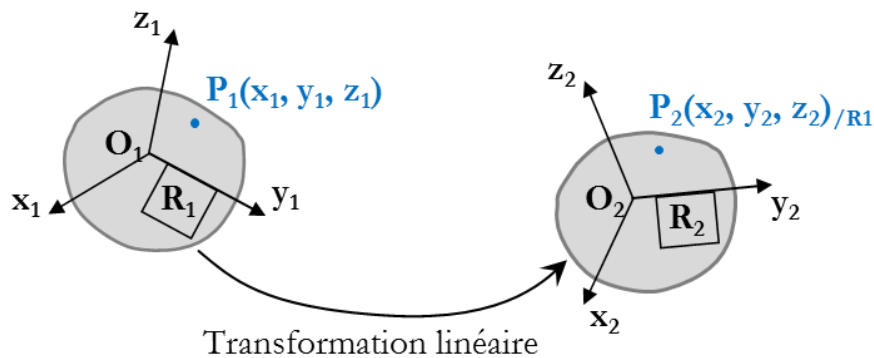


Fig. 2.1 – Déplacement relatif entre deux solides

Dans l'étude d'un assemblage entre deux pièces rigides 1 et 2, les concepts de matrice de rotation et de vecteur translation permettent de paramétrer les déplacements relatifs de la pièce 2 par rapport à la pièce 1. En considérant un repère  $R_1$  rattaché à la pièce 1 et un repère  $R_2$  rattaché à la pièce 2, l'étude des déplacements relatifs entre les deux pièces revient à déterminer la position du repère  $R_2$  par rapport à  $R_1$ . Pour cela, on pose :

- $R$  un repère,  $O$  l'origine du repère et  $P$  un point quelconque de l'espace
- $R_1$  un repère,  $O_1$  l'origine du repère et un point  $P_1$  liés à la pièce 1 tels que  $R_1$ ,  $O_1$  et  $P_1$  coïncident avec  $R$ ,  $O$  et  $P$
- $R_2$  un repère,  $O_2$  l'origine du repère et un point  $P_2$  liés à la pièce 2 tels que  $R_2$ ,  $O_2$  et  $P_2$  coïncident avec  $R$ ,  $O$  et  $P$  dans la position de référence

Le vecteur déplacement d'un point  $P_2$  appartenant à la pièce 2 par rapport à la pièce 1 est noté :

$$\overrightarrow{dP} = \overrightarrow{P_1P_2} \quad (2.1)$$

Par compositions des vecteurs, le déplacement du point  $P_2$  s'exprime:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2P_2} \quad (2.2)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{dP} = -\overrightarrow{O_1P_1} + \overrightarrow{dO} + \overrightarrow{O_2P_2} \quad (2.3)$$

Cette relation est vraie pour toutes les bases d'expression. Soit  $\mathbf{R}_{12}$  la matrice de passage de la base  $b_1$  à la base  $b_2$ , respectivement associée aux repères  $R_1$  et  $R_2$ . On obtient :

$$\overrightarrow{O_2P_2}|_{b_1} = \mathbf{R}_{12} \cdot \overrightarrow{O_2P_2}|_{b_2} \quad (2.4)$$

Les repères et les points étant confondus en position de référence et les pièces étant supposées rigides :

$$\overrightarrow{O_2P_2}|_{b_2} = \overrightarrow{O_1P_1}|_{b_1} \quad (2.5)$$

On a donc :

$$\overrightarrow{O_2P_2}|_{b_1} = \mathbf{R}_{12} \cdot \overrightarrow{O_1P_1}|_{b_1} \quad (2.6)$$

L'équation (2.3) devient :

$$\overrightarrow{dP}|_{b_1} = \overrightarrow{dO}|_{b_1} + (\mathbf{R}_{12} - \mathbf{I}_3) \cdot \overrightarrow{O_1P_1}|_{b_1} \quad (2.7)$$

Avec  $\mathbf{I}_3$  la matrice identité dans l'espace  $\mathbf{R}^3$ .

Le déplacement de la pièce 2 peut donc être exprimé comme la combinaison :

- d'une translation modélisée par le vecteur  $\overrightarrow{dO}$  représentant la position de l'origine  $O_2$  du repère  $R_2$  dans le repère  $R_1$ .
- d'une rotation modélisée par la matrice de passage  $\mathbf{R}_{12}$  représentant les rotations du repère  $R_2$  par rapport au repère  $R_1$ .

Dans le cas général, la matrice  $\mathbf{R}_{12}$  est obtenue par le produit des trois matrices de rotation correspondant aux trois rotations successives. Par la suite, nous considérons les angles de roulis, tangage, lacet  $\rho_x, \rho_y, \rho_z$  (autour des axes  $x, y, z$ ).

$$\mathbf{R}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \rho_x & -\sin \rho_x \\ 0 & \sin \rho_x & \cos \rho_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \rho_y & 0 & \sin \rho_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \rho_y & 0 & \cos \rho_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \rho_z & -\sin \rho_z & 0 \\ \sin \rho_z & \cos \rho_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Après calcul du produit matriciel, on obtient :

$$\mathbf{R}_{12} = \begin{bmatrix} \cos \rho_y \cos \rho_z & -\cos \rho_y \sin \rho_z & \sin \rho_y \\ \sin \rho_x \sin \rho_y \cos \rho_z + \cos \rho_x \sin \rho_z & -\sin \rho_x \sin \rho_y \sin \rho_z + \cos \rho_x \cos \rho_z & -\sin \rho_x \cos \rho_y \\ -\cos \rho_x \sin \rho_y \cos \rho_z + \sin \rho_x \sin \rho_z & \cos \rho_x \sin \rho_y \sin \rho_z + \sin \rho_x \cos \rho_z & \cos \rho_x \cos \rho_y \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Dans le cas de petites rotations, un développement limité au premier ordre des fonctions angulaires permet d'écrire la matrice  $\mathbf{R}_{12}$  sous la forme :



$$\mathbf{R}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 1 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

On obtient donc :

$$\mathbf{R}_{12} - \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

L'expression du déplacement d'un point  $P_2$  est donc linéaire en fonction des angles et des composantes du vecteur translation pour des angles faibles.

### 2.1.2 Torseurs des petits déplacements (TPD)

Le produit d'une matrice antisymétrique avec un vecteur est équivalent à un produit vectoriel entre deux vecteurs. L'équation (2.7) devient donc :

$$\overrightarrow{dP} = \overrightarrow{dO} + \overrightarrow{P_1O_1} \wedge \overrightarrow{d\theta} \quad (2.12)$$

Les petits déplacements de la pièce 2 par rapport à la pièce 1 sont caractérisés par le déplacement  $\overrightarrow{dO}$  de l'origine du repère  $R_2$  et par le vecteur rotation  $\overrightarrow{d\theta}$  de la pièce 2. Nous retrouvons en équation (2.12) le changement de point d'expression d'un moment. Les déplacements des points forment donc un champ de moments qui peut être exprimé par un torseur appelé Torseur des Petits Déplacements (TPD), défini par :

$$\{T\} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{d\theta} = \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix} \\ \overrightarrow{dP} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}_{b_1} \end{bmatrix}_P \quad (2.13)$$

Le torseur complet comprend donc six composantes. Pour une liaison simple, alignée selon les axes du repère, les différentes composantes correspondent soit à des déplacements selon des degrés de liberté, soit à des déplacements selon des degrés de liaisons.

### 2.1.3 Conclusion

Le TPD repose donc sur la linéarisation de la matrice de passage exprimant les déplacements d'une entité géométrique. On suppose que les rotations sont petites afin que l'erreur introduite par la linéarisation soit négligeable.

Le concept de TPD a été développé dans les années 70 par P. Bourdet et A. Clément (Bourdet et Clément, 1976) (Bourdet et al., 1996). Il a été présenté et utilisé initialement en métrologie tridimensionnelle dans le but d'associer une surface géométrique parfaite à un nuage de points issu d'un système de mesure par coordonnées.

Ce concept a été par la suite utilisé dans le travail de (Giordano et Duret, 1993) pour représenter le domaine jeu caractérisant des déplacements relatifs possibles d'une liaison avec jeu.

Plus généralement, le TPD est utilisé pour modéliser les petits déplacements dans le domaine du génie mécanique comme la simulation des défauts de mise en position de pièce sur un montage, le dégauchissage de pièces, l'alignement de pièces en assemblage, l'analyse de tolérance, etc.

## **2.2 Caractérisation des mobilités**

Nous avons précédemment mis en place le torseur de petits déplacements qui permet de paramétrer un déplacement. Afin de caractériser expérimentalement les mobilités dans une liaison, il est nécessaire d'identifier un outil pertinent capable de représenter et caractériser l'ensemble des déplacements au sein d'une liaison. Cette partie présente les concepts et modèles permettant de caractériser ces mobilités dans un assemblage.

### **2.2.1 Union Pondérée d'Espaces de Liberté (UPEL)**

Le concept d'Union Pondérée d'Espaces de Liberté (UPEL) est issu des travaux du laboratoire I2M (ex LMP) de l'université de Bordeaux. Il a été introduit en 1991 par Y. Couétard et développé par D. Teissandier dans sa thèse de doctorat (Teissandier, 1995). Ce concept est basé sur les TPD.

Une UPEL est un ensemble de six intervalles centrés sur « zéro ». Chacun d'eux caractérise les bornes de déplacements admissibles entre deux surfaces idéales (de formes parfaites), à l'intérieur desquels peuvent varier les composantes du TPD. Ce TPD modélise l'orientation et la position relatives entre les deux surfaces idéales, dans une base donnée et en un point donné. Dans ce modèle, les déplacements sont considérés comme indépendants.

Afin de prendre en compte les chaînes de côtes tridimensionnelles, un assemblage est décomposé en pièces, puis les pièces sont décomposées en surfaces fonctionnelles. (Teissandier, 1995) a défini cinq types de surfaces fonctionnelles : le plan, le cylindre, le cône, la sphère et le tore.

Deux types d'UPEL sont distingués : les UPEL de Liaison Interne et les UPEL de Liaison Externe. L'UPEL de Liaison Interne modélise les petits déplacements relatifs entre une surface fabriquée et sa surface nominale en négligeant les défauts de forme. L'UPEL de Liaison Externe modélise les petits déplacements relatifs entre deux surfaces en contact de deux pièces différentes. Les petits déplacements relatifs entre deux surfaces quelconques sont déterminés à l'aide des opérations d'Union et d'Intersection.

L'UPEL n'a pas de représentation graphique car les limites sur les déplacements sont indépendantes selon chaque composante. Ses auteurs ont aussi rencontré des difficultés pour

gérer l'Intersection de deux UPEL Non Bornées (NBO). C'est une des raisons pour laquelle ce concept n'est plus actuellement développé.

## 2.2.2 Espace de Faisabilité

Le concept d'Espace de Faisabilité a été introduit peu à peu par J. U. Turner depuis la publication de sa thèse en 1987 (Turner, 1987). Ce concept s'appuie sur le modèle variationnel présenté par (Turner et Wozny, 1987) dans le but de modéliser à partir d'une géométrie nominale, une pièce fabriquée avec défaut. Ce modèle se base sur la représentation CAO de la pièce dans laquelle chacune des surfaces nominales peut varier. Ces variations sont pilotées par un ensemble de variables indépendantes décrites en fonction du type de surface (cf. Fig. 2.2) (Gupta et Turner, 1993).

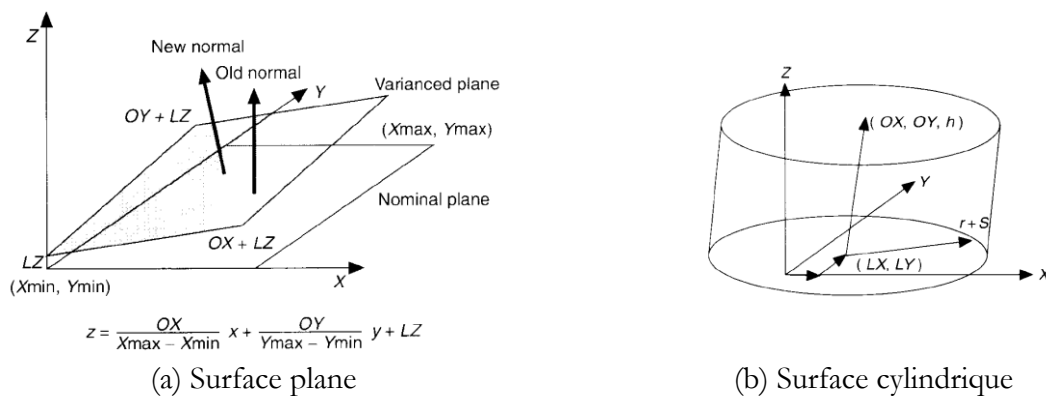


Fig. 2.2 – Variables du modèle pour différents types de surface (Gupta et Turner, 1993)

Une fois que les spécifications géométriques sont associées au modèle (voir exemple Fig. 2.3a), chacune de ces spécifications est exprimée comme un ensemble de contraintes définissant une zone de faisabilité de l'espace des variables du modèle (Turner, 1993).

Le paramétrage et les contraintes associées aux tolérances sont illustrés en Fig. 2.3b.  $M_1$  et  $M_2$  sont les variables du modèle qui contrôlent respectivement la position et l'orientation de la surface plane tolérancée.  $T_1$  et  $T_2$  sont les variables de tolérance associées à la tolérance de localisation.  $T_3$  est la variable de tolérance associée à la tolérance de parallélisme.

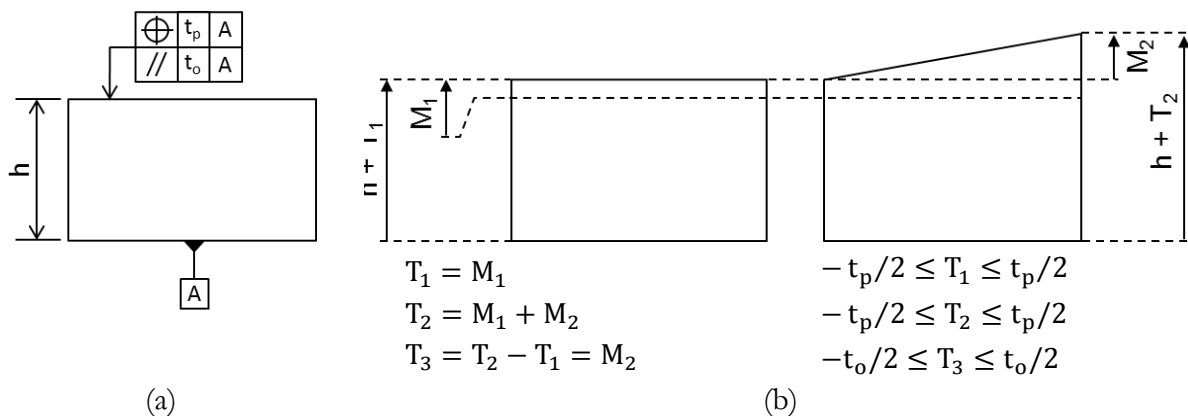


Fig. 2.3 – Exemple

Les Espaces de Faisabilité associés à chaque tolérance sont illustrés en Fig. 2.4.

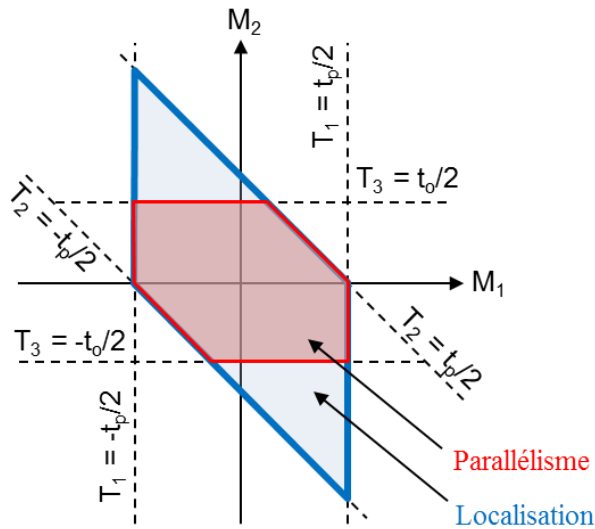


Fig. 2.4 – Espaces de Faisabilité

De la même manière, une tolérance de forme peut être représentée, mais cela suppose de discrétiser une surface en  $n$  points auxquels des variables  $M_i$  sont associées. Cela est une des premières approches qui propose la prise en compte des défauts de forme. Des techniques de maillage sont utilisées (Gupta et Turner, 1993). Cependant ils sont très lourds à mettre en œuvre car il faut un calcul en chaque point, d'où un temps de traitements numériques important.

### 2.2.3 Domaine et torseurs associés

À la même époque, un modèle sous forme de Domaine basé sur le concept du TPD a été défini par M. Giordano et D. Duret au laboratoire SYMME (ex LMéca) à Annecy (Giordano et Duret, 1993). Ce modèle est utilisé dans de nombreux travaux de recherche, essentiellement dans ce laboratoire annécien, pour faire de l'analyse et de la synthèse de tolérances de mécanismes tridimensionnels comme en témoigne les travaux de (Kataya, 2002), (Petit, 2004), (Germain, 2007) et (Mansuy, 2012).

Afin de mettre en œuvre ce modèle, les hypothèses suivantes sont supposées :

- Les pièces sont rigides et indéformables
- Les défauts de forme de surfaces sont négligés
- Les variations géométriques (pour le domaine écart) ainsi que les déplacements relatifs possibles (pour le domaine jeu) sont supposés faibles.

#### 2.2.3.1 Torseur écart et torseur jeu

Les déplacements dans une liaison sont modélisés par les torseurs écart et jeu (cf. Fig. 2.5). Un *torseur écart* modélise un petit déplacement (ou une variation géométrique) d'un élément géométrique par rapport à son nominal. Un *torseur jeu* modélise un déplacement relatif possible

entre deux surfaces potentiellement en contact. Le torseur écart et le torseur jeu se présente sous la forme suivante :

$$T = \begin{pmatrix} \rho_x & \varepsilon_x \\ \rho_y & \varepsilon_y \\ \rho_z & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

avec  $\rho_x, \rho_y, \rho_z$  les rotations et  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  les translations.

Les composantes de petits déplacements du torseur écart correspondant aux degrés d'invariance de l'élément géométrique et aux degrés de liberté de la zone de tolérance sont fixées à 0 (composantes non mesurables). Par contre, celles du torseur jeu correspondant aux degrés de liberté de la liaison ne sont pas limitées.

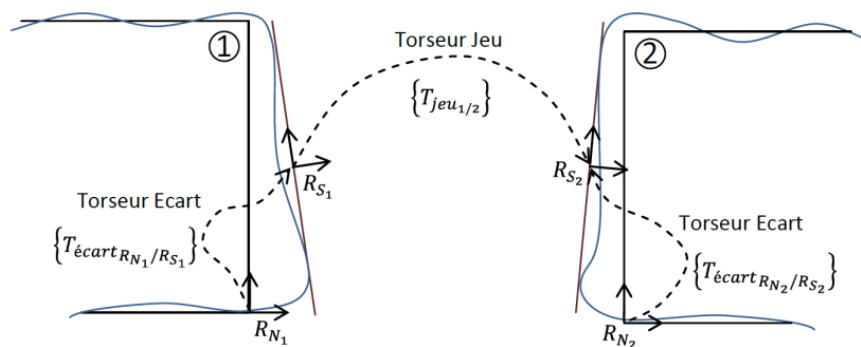


Fig. 2.5 – Modélisation des variations géométriques et déplacements d'une liaison (Mansuy, 2012)

### 2.2.3.2 Domaine écart et domaine jeu

On distingue le domaine écart et le domaine jeu. Le domaine écart, caractérisé par l'ensemble des torseurs écarts, permet de modéliser les variations géométriques d'un élément géométrique par rapport à son nominal à l'intérieur de sa zone de tolérance. Le domaine jeu, caractérisé par l'ensemble des torseurs jeux, permet de modéliser les déplacements relatifs possibles entre deux surfaces des deux pièces potentiellement en contact conformes à la condition de non-interférence.

Dans le cas général, le domaine est présenté dans un espace 6D des déplacements. Les limites du domaine écart sont issues de l'écriture des inéquations traduisant le fait qu'un élément tolérancé doit rester dans une zone de tolérance tandis que le domaine jeu est issu des inéquations traduisant la non-interpénétration des surfaces en contact.

Un des intérêts de la notion de domaine est qu'il est possible d'associer une représentation graphique jusqu'à 3 variables de déplacements.

La Fig. 2.6a illustre l'exemple du tolérancement d'une surface plane par deux spécifications géométriques (localisation et orientation) avec  $t_0 < t_1$  pour que la spécification d'orientation ait un sens. Les torseurs écarts pour la localisation et l'orientation sont respectivement :

$$T_{loc} = \begin{pmatrix} \rho_x & 0 \\ \rho_y & 0 \\ 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$T_{ori} = \begin{pmatrix} \rho_x & 0 \\ \rho_y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Les inéquations correspondantes à ces spécifications sont :

Pour la localisation : 
$$-t_1/2 \leq \pm \frac{b}{2}\rho_x \pm \frac{a}{2}\rho_y + \rho_z \leq t_1/2 \quad (2.17)$$

Pour l'orientation : 
$$\pm \frac{b}{2}\rho_x \pm \frac{a}{2}\rho_y \leq t_0/2 \quad (2.18)$$

Le domaine écart défini par l'intersection de l'ensemble des inéquations (2.17) et (2.18) est représenté en Fig. 2.6b.

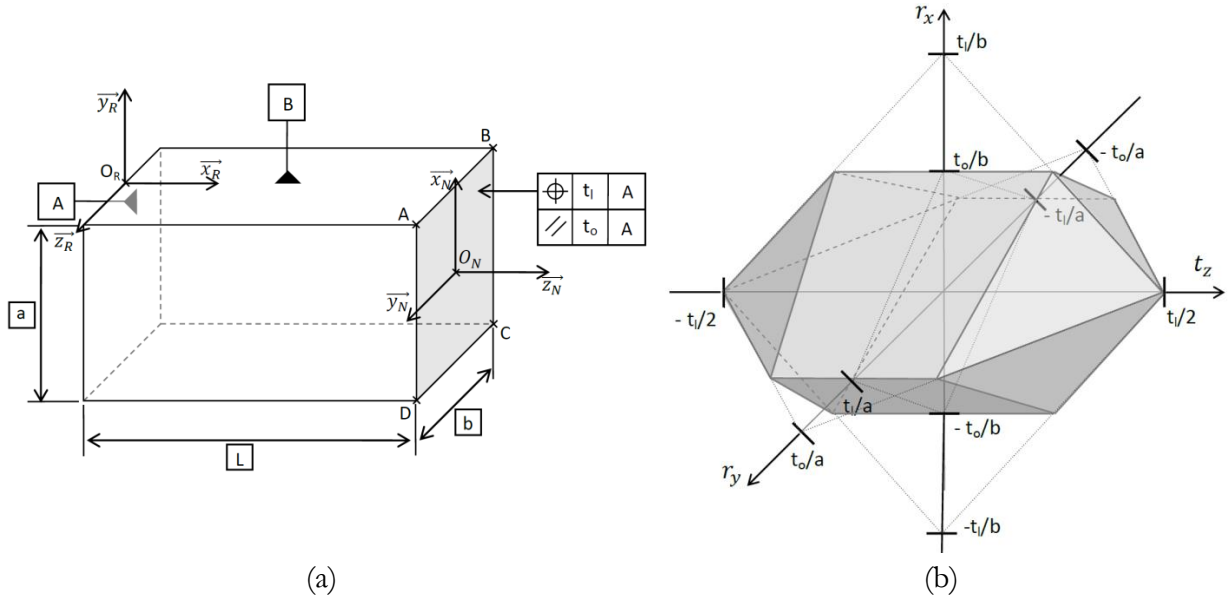


Fig. 2.6 – Exemple du tolérancement d'une surface plane par deux spécifications (Mansuy, 2012)

Le domaine jeu représente l'ensemble des torseurs jeux d'une liaison satisfaisant des *contraintes de non-interférence* (voir paragraphe 3.1.3.2 du chapitre 3). De nombreuses études de domaine jeu pour d'autres types de surfaces sont réalisées : liaison cylindrique (Kataya, 2002), engrenages (Petit, 2004), surface quadratique, surface de contour quelconque et surface de forme quelconque (Mansuy, 2012).

Le domaine jeu est l'outil principal de cette thèse. Il sera donc détaillé au fur et à mesure dans le chapitre 3 pour une liaison plane unilatérale.

### 2.2.3.3 Opération sur les domaines

Différentes opérations sont appliquées aux domaines. On peut référencer des opérations liées au point d'expression et à la base d'expression ou encore des opérations binaires entre domaines (la somme et l'intersection).

- **Changement de base et de point d'expression**

Ces opérations permettent d'exprimer les domaines écart et jeu d'une liaison dans un même repère pour faire l'analyse de tolérance.

Les domaines étant des ensembles de torseurs, ils dépendent du point d'expression choisi. Dans ce cas, leur géométrie est modifiée, mais leur topologie est conservée. Lors de la définition d'un domaine, celui-ci est généralement exprimé tout d'abord en un point central d'une surface ou d'une liaison à étudier. Le changement de point d'expression est important pour ramener tous les domaines en un même point afin de pouvoir appliquer des opérations binaires entre domaines et ainsi pouvoir simuler le fonctionnement d'un mécanisme complet.

Ils dépendent également de la base d'expression. La forme des domaines n'est pas modifiée en elle-même par un changement de base, mais le domaine est déplacé dans l'espace.

Ces opérations sont présentées dans le paragraphe 3.4.1 du chapitre 3.

- **Somme de Minkowski et Intersection**

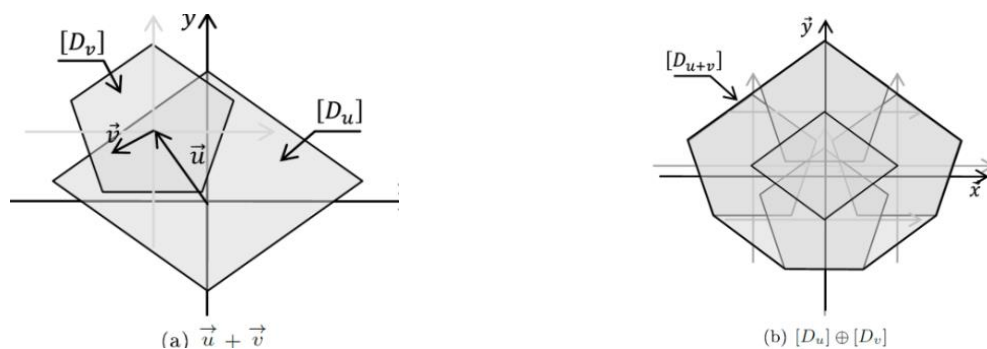


Fig. 2.7 – Somme de Minkowski de deux domaines [Du] et [Dv] (Mansuy, 2012)

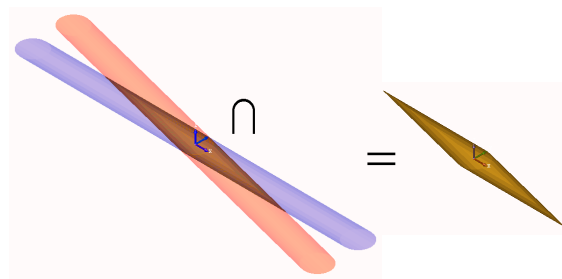


Fig. 2.8 – Intersection de deux 3-polytopes (Homri et al., 2013)

Les opérations de somme et d'intersection de domaines sont utilisées pour l'analyse et la synthèse de tolérances. Ces opérations sont appliquées aux domaines, ainsi qu'aux T-MAP (voir

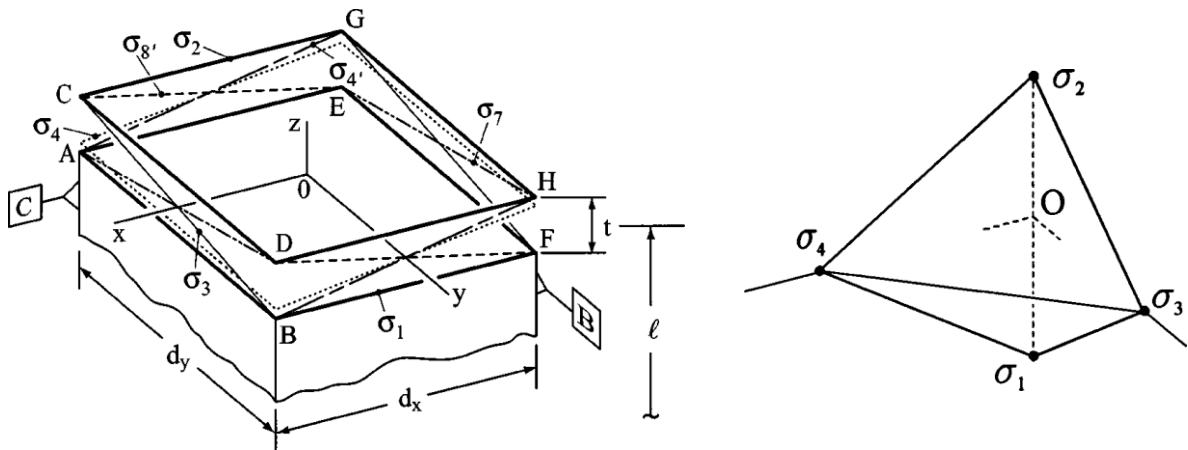
paragraphe 2.2.4) et aux polytopes (voir paragraphe 2.2.5), afin de trouver le domaine (ou T-MAP ou polytope) résultant d'un assemblage. L'opération somme de Minkowski (cf. Fig. 2.7) est effectuée pour un assemblage formant une boucle simple (assemblage en série). L'opération d'intersection (cf. Fig. 2.8) est effectuée pour un assemblage dont les liaisons sont en parallèles.

### 2.2.4 T-MAP®

Plus récemment, le modèle T-MAP® a été développé par J. K. Davidson et son équipe (Ameta, 2006). De même qu'un espace de faisabilité ou qu'un domaine d'écart, un T-MAP est une représentation géométrique dans un espace euclidien des déplacements possibles d'un élément tolérancé dans une zone de tolérance. La dimension  $n$  ( $n \leq 6$ ) de cet espace dépend des degrés de liaison de l'élément tolérancé.

Le T-MAP se base sur la théorie des coordonnées barycentriques (Coxeter, 1989) qui permet de définir le  $n$ -simplexe de base associé à l'espace euclidien de dimension  $n$ . Les  $n+1$  points de base  $\sigma_i$  du simplexe correspondent alors à  $n+1$  configurations caractéristiques de l'élément tolérancé dans sa zone de tolérance. Chaque point de base  $\sigma_i$  est associé à une masse  $\lambda_i$ . Le centre de gravité  $\sigma$  des points de base  $\sigma_i$  est défini pour tout point  $O$  :  $\sum_1^{n+1} \lambda_i \cdot \overrightarrow{O\sigma} = \sum_1^{n+1} (\lambda_i \cdot \overrightarrow{O\sigma_i})$ . Les masses  $\lambda_i$  sont les coordonnées barycentriques de  $\sigma$ . Il est possible de définir des coordonnées barycentriques normalisées avec :  $\sum_1^{n+1} \lambda_i = 1$ .

Considérons l'exemple d'une surface plane (Fig. 2.9). Le T-MAP associé au tolérancement de la surface est défini dans un espace 3D. Quatre points de base ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ ) sont donc nécessaires pour définir le 3-simplexe de base (cf. Fig. 2.9b) dont les dimensions sont  $\sigma_1\sigma_2 = O\sigma_3 = O\sigma_4 = t$  et  $\sigma_3\sigma_4 = t\sqrt{2}$  (cf. Fig. 2.10). Les masses  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  et  $\lambda_4$  sont respectivement affectés aux points  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\sigma_4$ .



(a) Configurations caractéristiques  $\sigma_i$  d'une surface plane

(b) 3-simplexe

Fig. 2.9 – Tolérancement d'une surface plane (Mujezinovic et al., 2004)

Le T-MAP est illustré en Fig. 2.10. Le repère  $(O, p', q', s)$  est orthonormé indirect. L'axe  $s$  représente les variations de la surface plane selon l'axe  $z$ . Les axes  $p'$  et  $q'$  représentent respectivement les variations d'orientation (rotations) autour des axes  $y$  et  $x$ .



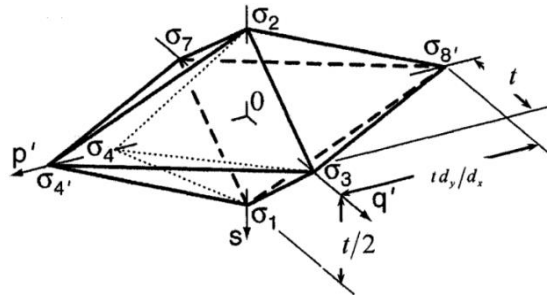


Fig. 2.10 – T-MAP du tolérancement d'une surface plane

De nombreuses études sont réalisées afin de définir le T-MAP® pour les autres types de topologies et d'éléments géométriques : surfaces planes circulaires (Davidson et al., 2002), surfaces planes polygonales (Mujezinovic et al., 2004), profils linéaires (Davidson et Shah, 2012), liaisons hélicoïdales (Davidson et Shah, 2002), axes (Bhide et al., 2005), liaisons pivot glissant (Singh et al., 2009) (Ameta et al., 2007a), groupe point-droite (Ameta et al., 2007b), etc.

Ce modèle peut être appliqué pour des assemblages (Singh et al., 2009), (Ameta et al., 2010), (Jian et al., 2007).

Le T-MAP résultant pour un ensemble de tolérances d'un élément géométrique ou pour un assemblage est obtenu en faisant la somme de Minkowski. Des algorithmes pour faire ces sommes sont développés (Wu et al., 2003).

Les principaux avantages de ce modèle :

- Tous les points du T-MAP® ont des coordonnées de même dimension homogène à une longueur. Cela assure la robustesse des résolutions numériques.

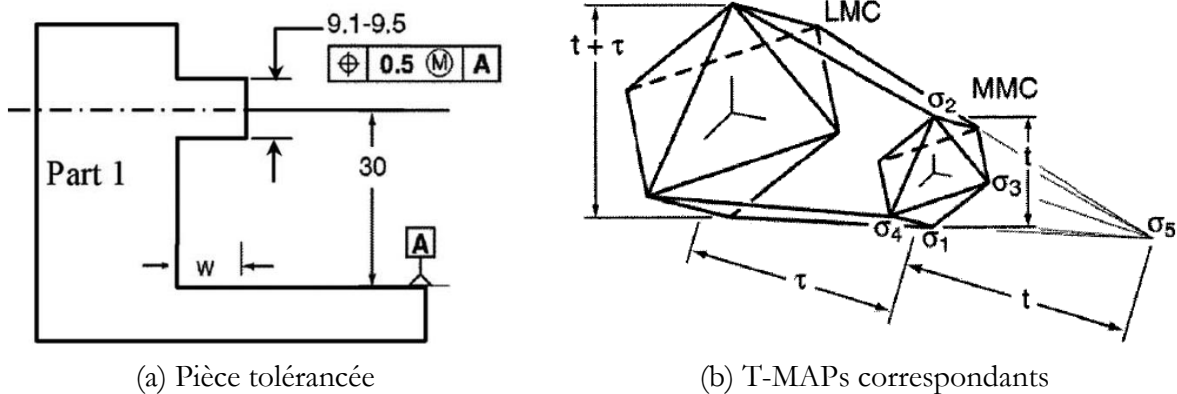


Fig. 2.11 – T-MAPs du tolérancement au maximum de matière (Ameta et al., 2010)

- Il est possible de modéliser les modificateurs (maximum de matière, minimum de matière) (Ameta et al., 2010). Ceci est rendu possible en ajoutant, au modèle précédent, une dimension correspondant à la variation dimensionnelle sur laquelle s'applique le modificateur (Mansuy, 2012). Fig. 2.11 illustre le T-MAP® du tolérancement au maximum de matière.

- Un T-MAP est caractérisé par son volume permettant la recherche d'un optimum dans le remplissage d'un T-MAP fonctionnel (Davidson et al., 2002).

### 2.2.5 Polytope

L'utilisation du concept de polytope pour le tolérancement a débuté en 1999 (Teissandier et al., 1999). Cet outil découle des Domaines présentés au paragraphe 2.2.3 mis à part qu'un polytope est un domaine discrétisé borné au contraire des domaines. En effet, trois propriétés fondamentales doivent être prises en compte dans la mise en œuvre des chaînes de cote 3D par des opérations sur des polytopes (Teissandier, 2012) :

- Les frontières des polytopes sont linéaires par parties (discrétisées), or en tolérancement, certaines limites de déplacements ne sont pas linéaires; par exemple les limites de déplacements d'un segment de droite dans une zone de tolérance cylindrique (Giordano et Duret, 1993).
- Un polytope est un ensemble borné, or en tolérancement, certains déplacements ne sont pas bornés; par exemple les déplacements correspondant aux degrés de liberté d'une liaison.
- Un polytope est un ensemble convexe ; cette propriété est utilisée dans la simulation du respect d'une exigence fonctionnelle, par l'inclusion d'un polytope calculé (ou résultant) dans un polytope fonctionnel.

L'intérêt des polytopes provient directement de ces propriétés. Du fait de ces propriétés, les opérations de somme et d'intersection sont facilitées sans néanmoins qu'elles deviennent triviales. Les algorithmes de calcul sont plus simples avec les polytopes car la gestion des sommets et des facettes des polytopes est suffisante, même en dimension 6 ou supérieure. Pour les polyèdres représentant des domaines, la gestion des parties non bornées est rapidement très complexe.

### 2.2.6 Conclusion

Le modèle d'espace de faisabilité a été développé pour modéliser les défauts des surfaces admissibles pour une spécification géométrique. Il n'est pas basé sur un paramétrage lié aux déplacements. Il n'est donc pas adapté à la modélisation des déplacements dans une liaison. Le modèle des UPEL, basé sur les déplacements, est trop simplifié et ne permet pas de modéliser le comportement d'une liaison. Les modèles des T-MAP, des domaines, et des polytopes présentent des similarités. Néanmoins, les T-MAP sont plus basés sur des configurations particulières que sur des déplacements.

Au bilan, nous utiliserons par la suite le modèle par les domaines et sa restriction aux polytopes, non pas pour la bonne connaissance dont nous en avons de par son origine française, mais pour sa capacité à modéliser le comportement des liaisons et pour son aboutissement scientifique. Les domaines ont été développés au travers de différents travaux et thèses, il est

cohérent avec le paramétrage des déplacements et permet de parfaitement modéliser le comportement d'une liaison avec ou sans défauts géométriques de forme.

Cependant les domaines peuvent être non-linéaires, par exemple le domaine d'une surface plane de contour circulaire. Afin de développer les méthodes de calcul sur les domaines, on doit donc discrétiser les frontières non-linéaires. D'autre part, en considérant uniquement les degrés de liaison d'une liaison, le domaine est borné, cela revient donc à considérer le modèle polytope.

## 2.3 Caractérisation des surfaces

La caractérisation des surfaces représente une problématique importante dans le cadre de ces travaux de thèse. En étudiant les différents paramétrages disponibles dans la littérature, on peut constater des approches distinctes en fonction de la nature des surfaces. Soit les surfaces sont de type continu, soit de type discret. En fonction des types de surfaces, le paramétrage associé est à adapter.

On peut citer les travaux de synthèse de Zhang (Zhang et Lu, 2004), qui recense des méthodes de paramétrage pour l'imagerie numérique. Les auteurs proposent une classification de différentes techniques pour décrire la forme des contours et des régions localisées sur les images. Concernant le tolérancement, Favrelière, dans (Favrelière, 2009), propose une classification des paramétrages de forme des surfaces. Sans vouloir être exhaustif, cette partie se focalise sur quelques méthodes pour caractériser des surfaces avec défauts de forme dans le domaine de l'ingénierie mécanique. Nous avons choisi de regrouper ces méthodes en trois grandes familles :

- Paramétrage par des composantes harmoniques
- Paramétrage par des polynômes
- Paramétrage par Décomposition Modale Discrète

### 2.3.1 Paramétrage par des composantes harmoniques

Les paramétrages par des composantes harmoniques les plus courants sont basés sur :

- une décomposition en cosinus appelée DCT (Transformée Discrète en Cosinus)
- une décomposition en série de Fourier appelée DFT (Transformée de Fourier Discrète)

Ces deux paramétrages peuvent être utilisés pour décomposer la forme une surface en fonction d'une combinaison des harmoniques de fréquences indépendantes. La DCT utilise des coefficients réels alors que la DFT utilise des coefficients complexes. Chacune des approches est détaillée dans les paragraphes 2.3.1.1 et 2.3.1.2. A partir de ces approches, il est possible, de recomposer un défaut de surface par la transformation inverse de la DCT ou de la DFT.

On peut citer encore le paramétrage basé sur des harmoniques sphériques qui est utilisé pour décrire des formes complexes. Dans les travaux de (Zhou et al., 2004), (Wang et Lai, 2008) ou

encore (Burel et Henocq, 1995), les auteurs exploitent les propriétés des harmoniques sphériques pour reconstruire des objets 3D. Cette dernière approche n'est, a priori, pas exploitée pour le paramétrage des défauts de forme des surfaces.

### 2.3.1.1 Décomposition en cosinus

La Transformée en Cosinus Discrète (DCT) a été introduit par (Ahmed et al., 1974). Elle est très utilisée pour la compression d'images au format JPEG (ISO/CEI-10918-1, 1994). Le principe est que chaque image numérique est découpée en blocs de dimension  $N \times N$  pixels (généralement,  $N = 8$  ou  $N = 16$ ). Puis une DCT bidimensionnelle est réalisée sur chacun des blocs  $N \times N$ , ce qui permet de passer de l'image (domaine spatial) à une représentation identique dans le domaine fréquentiel (cf. équation (2.19)). Le résultat est alors stocké dans une matrice de même dimension ( $N \times N$ ).

$$DCT(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} C(u)C(v) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right) \cos\left(\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right) \quad (2.19)$$

Pour  $u, v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . La DCT inverse sur une matrice  $N \times N$  :

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} C(u)C(v) DCT(u, v) \cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right) \cos\left(\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right) \quad (2.20)$$

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ si } x \text{ vaut } 0, \text{ et } 1 \text{ si } x > 0$$

Chacun des coefficients  $DCT(u, v)$  correspond à une amplitude de la fonction cosinus dont la fréquence dépend de la position du coefficient dans la matrice des DCT. Les basses fréquences sont stockées dans le coin en haut à gauche de la matrice et les hautes fréquences, dans le coin en bas à droite. Fig. 2.12 illustre la DCT d'un bloc  $8 \times 8$ .

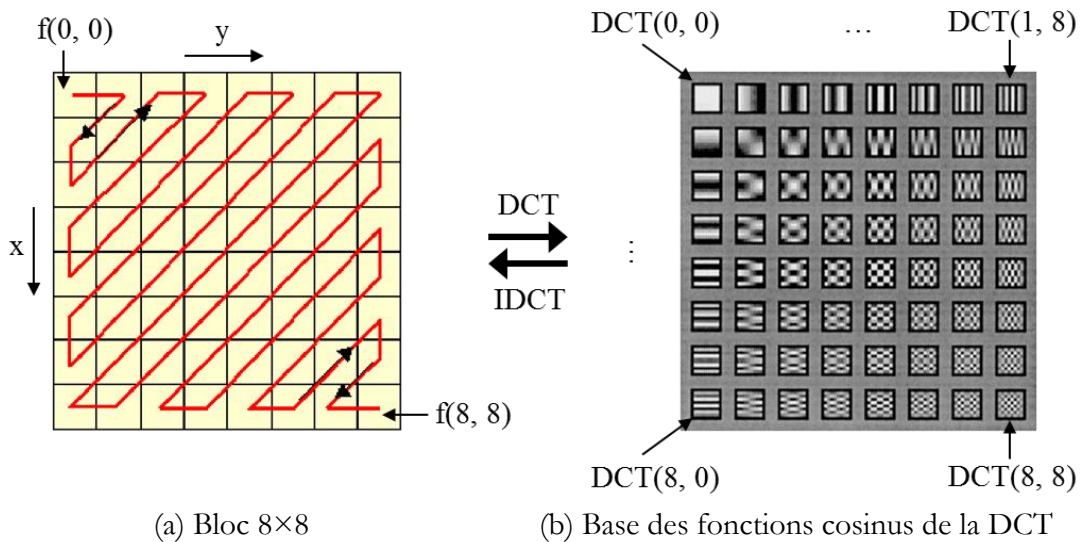


Fig. 2.12 – La DCT d'un bloc  $8 \times 8$

(Huang et Ceglarek, 2002) propose d'utiliser cette approche pour modéliser les défauts de forme d'une surface plane. Les pixels des images sont remplacés par les dimensions  $x$  et  $y$  de la surface et les couleurs sont remplacées par les hauteurs en  $z$  correspondantes aux positions  $(x, y)$  données. Le travail représente une application industrielle du paramétrage DCT sur une pièce emboutie.

(Lecompte et al., 2010) utilise ce paramétrage pour décomposer les défauts de forme d'une surface plane en une somme des défauts technologiques. Dans ce cas, les défauts de position et d'orientation ne sont pas pris en compte. Ce travail permet de compléter les approches géométriques tridimensionnelles pour modéliser les défauts de fabrication et permet d'introduire la caractérisation des défauts technologiques sous forme de descripteurs particuliers.

### 2.3.1.2 Décomposition en série de Fourier

Cette décomposition repose sur une Transformée de Fourier Discrète (DFT) qui est appliquée, dans la majorité des cas, à des objets discrets. Ce paramétrage est plus général que la transformée en cosinus car elle permet de décomposer une information (profil, forme de la géométrie) dans une base constituée d'harmoniques en sinus et en cosinus. Elle est définie par l'équation (2.21) :

$$\text{DFT}(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot \exp\left(-2\pi j \frac{ux + vy}{N}\right) \quad (2.21)$$

Il est aussi possible de reconstruire la forme de la géométrie à partir de la DFT inverse définie par l'équation :

$$f(x, y) = \frac{1}{T^2} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \text{DFT}(u, v) \cdot \exp\left(-2\pi j \frac{ux + vy}{N}\right) \quad (2.22)$$

(Raja et Radhakrishnan, 1977) applique ce paramétrage pour analyser des mesures sur des profils de rugosité. (Chien, 1982) puis (Cho et Tu, 2001) proposent des modèles de prédiction pour paramétrer les profils de circularité des pièces tournées.

### 2.3.2 Paramétrage par des polynômes

Les travaux de (Pfeifer et al., 2001) et (Morière et al., 2009) utilisent directement les fonctions polynomiales de degré 2 pour modéliser les surfaces avec défauts. Cependant ces descriptions sont limitées dans la complexité des défauts à identifier notamment à cause des phénomènes d'instabilité qui peuvent apparaître pour des degrés élevés de polynômes (appelé phénomène de Runge).

Dans ce contexte, plusieurs approches peuvent être listées comme l'utilisation des polynômes de Lagrange ou encore les Splines et surfaces de Bézier classiquement utilisés en conception assistée par ordinateur (Gupta et Turner, 1993). La limitation de ces approches repose

essentiellement sur la caractérisation des surfaces avec des formes très variées qui nécessitent de subdiviser la surface d'étude en différentes zones. On peut citer encore les polynômes de Tchebychev qui ont comme principal intérêt de minimiser l'erreur d'interpolation de Lagrange. Ces polynômes ont été utilisés notamment dans les travaux de (Henke et al., 1999) et (Summerhays et al., 2002) pour l'analyse des défauts de pièces obtenues par des opérations de tournage.

Les polynômes de Zernike sont utilisés dans le domaine de l'optique (Wyant et Creath, 1992) (ISO-10110-5, 2008). Ils correspondent à une série de polynômes orthogonaux qui modélisent la forme d'un front d'onde sur un disque de rayon unité. Ces polynômes peuvent se décomposer en polynômes pairs (2.23) et impairs (2.24) :

$$Z_n^m(\rho, \varphi) = R_n^m(\rho) \cos(m\varphi) \quad (2.23)$$

$$Z_n^{-m}(\rho, \varphi) = R_n^m(\rho) \sin(m\varphi) \quad (2.24)$$

D'où :

- $m$  et  $n$  : nombres entiers naturels non nuls,  $n \geq m$
- $\varphi$  : angle d'azimut exprimé en radians
- $\rho$  : distance radiale normalisée

Les polynômes radiaux  $R_n^m$  sont définis tels que :

$$R_n^m(\rho) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! ((n+m)/2 - k)! ((n-m)/2 - k)!} \rho^{n-2k} & n-m \text{ pair} \\ 0 & n-m \text{ impair} \end{cases} \quad (2.25)$$

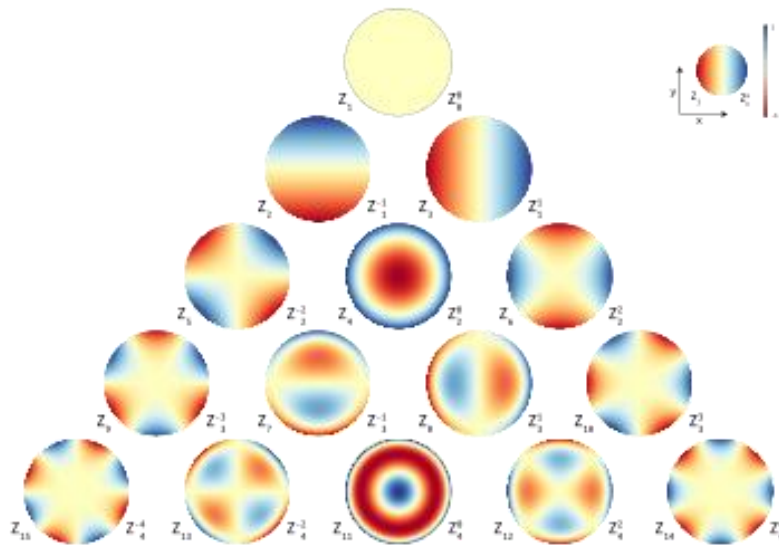


Fig. 2.13 – Représentation des polynômes de Zernike sur un disque de rayon unité (Wikipédia, 2013)

### 2.3.3 Paramétrage par Décomposition Modale Discrète (DMD)

La Décomposition Modale Discrète (DMD) a été initiée par des travaux de recherche de l'équipe SYMME sur la corrélation entre la vibration sonore d'une cloche et ses défauts géométriques (Samper et Formosa, 2007).

La DMD repose sur la construction d'une base de description de défauts. Cette base est définie à partir d'une surface nominale (i.e. plan, cylindre, sphère, etc.). Une analyse vibratoire de cette surface permet ensuite de déduire les modes propres associés à la structure (voir exemple en Fig. 2.14).

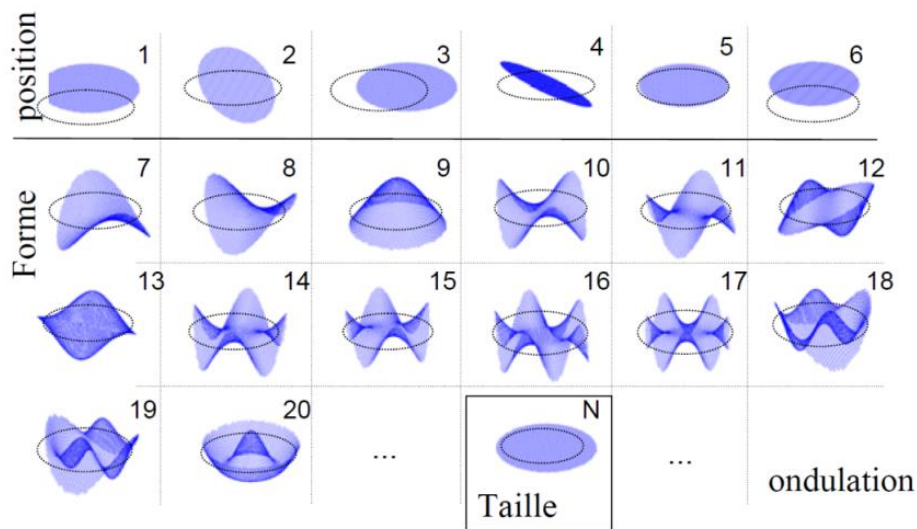


Fig. 2.14 – Modes propres d'un disque (Samper, 2007)

Chaque mode permet de caractériser une forme géométrique dont la complexité est croissante en fonction de la fréquence. Afin de bâtir cette base, il est nécessaire de discrétiser l'élément géométrique initial et de le transformer en une structure mécanique discrète. La structure est alors caractérisée par une matrice de raideur  $K$  et une matrice de masse  $M$ . La détermination des modes propres est obtenue par la résolution de l'équation différentielle donnée en équation (2.26).

$$M \cdot \ddot{q} + K \cdot q = 0 \quad (2.26)$$

La solution de l'équation différentielle (2.26) fournit un système linéaire pour lequel les vecteurs modaux  $Q_i$  sont solutions. Chaque mode  $Q_i$  est associé à une fréquence propre notée  $\omega_i$ .

$$\left( M^{-1} \cdot K - \frac{1}{\omega_i^2} \cdot I \right) \cdot Q_i = 0 \quad (2.27)$$

Il est alors possible d'utiliser tout ou partie des vecteurs modaux calculés dans l'équation (2.27) pour décomposer une surface avec défauts dans la base modale en utilisant l'équation (2.28). On introduit des coordonnées modales notées  $\lambda$  qui décrivent dans la base modale, la

surface décomposée, tel que  $V^{mes}$  correspond aux écarts normaux entre la surface initiale et la surface à caractériser.

$$\lambda = (Q^T \cdot Q^{-1}) \cdot Q^T \cdot V^{mes} \quad (2.28)$$

De manière réciproque, il est possible, à partir d'un vecteur  $\lambda$ , de composer une surface avec défauts à partir de l'équation (2.29) pour un nombre de modes allant de 1 à n.

$$V^{mes} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot Q_i \quad (2.29)$$

Dans les travaux de thèse de Favrelière (Favrelière, 2009), la méthode de métrologie des surfaces MemoSurf® basée sur la DMD a été développée. Les étapes sont représentées dans les Fig. 2.15 et Fig. 2.16.

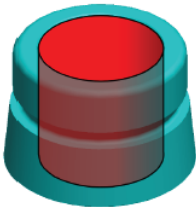
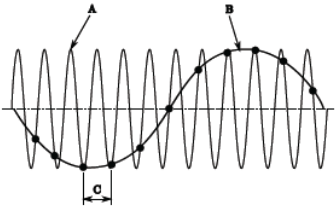
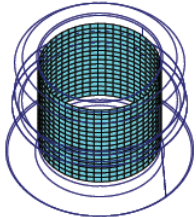
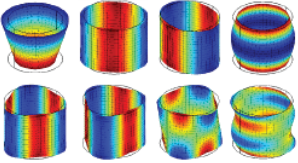
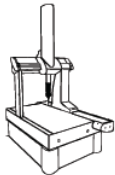
Étapes		Description	Illustration
E1	Identification des surfaces fonctionnelles	Extraire les surfaces fonctionnelles à caractériser et identifier leur typologie dans la classification des éléments géométriques idéaux du tableau 2.4	
E2	Choix du niveau « modal »	Déterminer le nombre de points de mesure nécessaire pour décrire la complexité du défaut recherché : utilisation du critère de Nyquist	
E3	Création du maillage	Construire un réseau de points, uniformément répartis, sur la (ou les) surface(s) fonctionnelle(s) représentée(s) par l'élément géométrique nominal	
E4	Construction de la base modale naturelle	Construire la base modale naturelle à partir de l'élément géométrique nominal identifié	
E5	Choix du moyen de mesure	Choisir un moyen de mesure permettant d'acquérir un grand nombre de points	

Fig. 2.15 – Étapes de MemoSurf issues de (Favrelière, 2009)



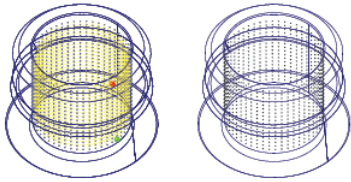
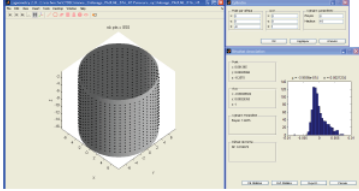
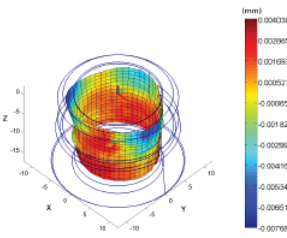
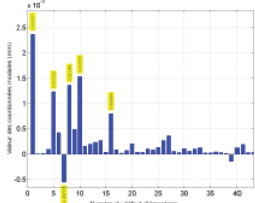
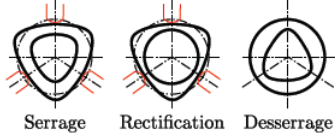
Étapes		Description	Illustration
E6	Acquisition et exportation	Exporter un fichier contenant les coordonnées XYZ des points mesurés	
E7	Association	Associer un élément géométrique idéal à l'élément géométrique mesuré (surface fonctionnelle mesurée) à partir de critères	
E8	Décomposition	Décomposer les écarts résiduels dans la base des modes naturels (DMD)	
E9	Visualisation des résultats	Exploiter et visualiser les résultats issus de la DMD	
E10	Interprétation	Analyser les modes prépondérants et rechercher les causes potentielles	

Fig. 2.16 – Étapes de MemoSurf issues de (Favrelière, 2009)

## 2.4 Travaux expérimentaux sur le comportement des liaisons pour le tolérancement

Au-delà des aspects théoriques sur les déplacements, la modélisation du comportement des liaisons et la modélisation des surfaces avec défauts, l'objectif principal de ce travail est de développer des procédures expérimentales de caractérisation des liaisons. Différents travaux existent sur l'étude expérimentale du comportement des liaisons en fonction de l'état de surface, des vitesses de déplacements et des actions mécaniques, mais peu de travaux expérimentaux s'intéressent au comportement en fonction des défauts de forme.

Dans le domaine du tolérancement nous distinguons essentiellement deux équipes ayant travaillé sur le comportement des liaisons, le LURPA avec les travaux liés à la thèse de Radouani

(Radouani, 2003) et l'EA(MS)<sup>2</sup> avec les travaux liés à la thèse de Morière (Morière, 2010). Ces deux études sont les plus proches de nos travaux.

## 2.4.1 Travaux de Radouani et Anselmetti

Radouani et Anselmetti (Radouani, 2003) (Anselmetti et Radouani, 2002) (Radouani et Anselmetti, 2003) ont mis en place deux dispositifs expérimentaux afin de mesurer les variations de positions relatives entre deux surfaces lors de leur assemblage. L'objectif poursuivi est de prendre en compte les variations de positions en fonction des défauts de forme dans les chaînes de côtes.

### 2.4.1.1 Liaison sans jeu plan/plan

Dans un assemblage boulonné tel que présenté en Fig. 2.17, il existe des zones avec interpénétration de matière et d'autres où il peut y avoir décollement des surfaces. Ces variations dépendent des défauts de forme des surfaces de contact. Le protocole expérimental mis en place permet de mesurer ces interpénétrations et décollements (ou dépassement) entre deux surfaces associées soit avec un critère minimax, soit avec un critère de moindres carrés. Les mesures sont au nombre de 55 et sont réalisées à l'aide d'une MMT.

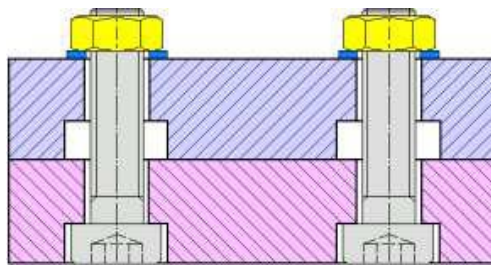


Fig. 2.17 – Assemblage boulonné (Radouani, 2003)

Suite aux mesures réalisées, il apparaît que ces interpénétrations ou décollements entre les plans minimax sont inférieurs à la somme des défauts de planéité des deux surfaces en contact (cf. Fig. 2.18).

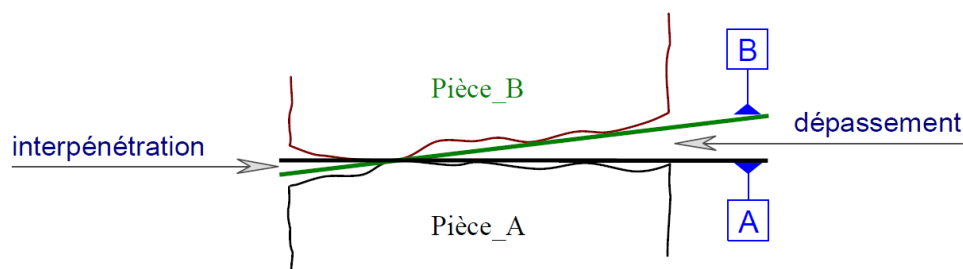


Fig. 2.18 – Contact plan/plan (Radouani, 2003)

Des résultats similaires sont obtenus en considérant les plans des moindres carrés, mais comme les plans minimax sont contraints extérieurement matière et les plans des moindres carrés ne le sont pas, il y a une différence correspondant à la somme de la moitié des deux défauts de forme.

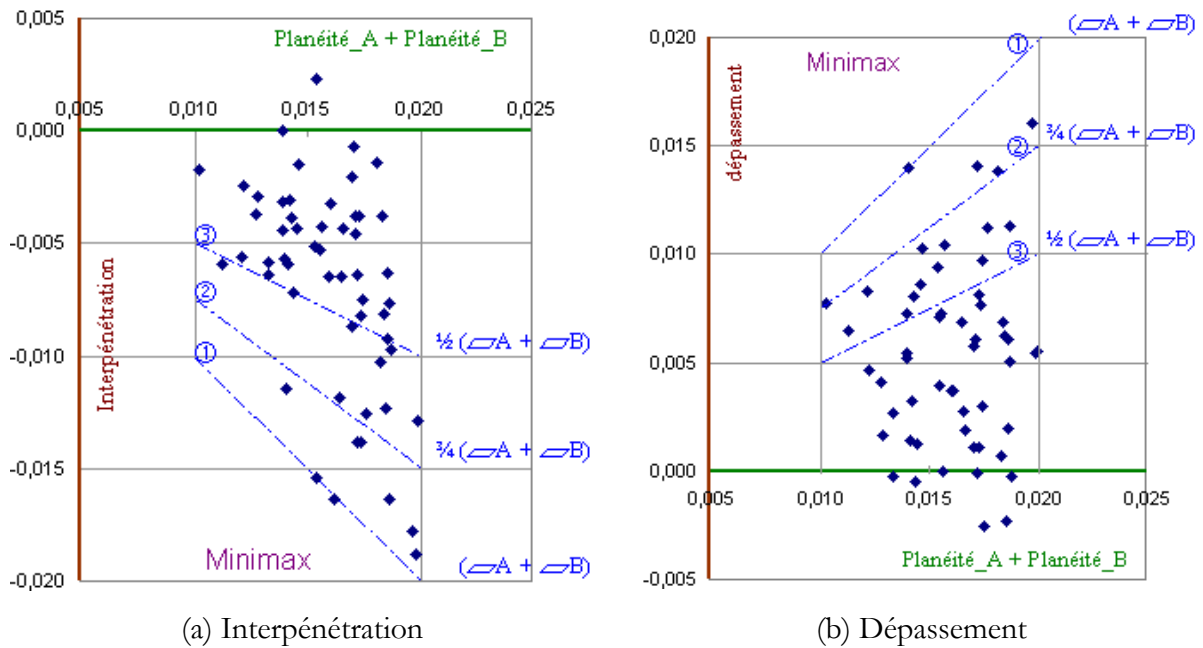


Fig. 2.19 – Interpénétration et dépassement en fonction des défauts de planéité (Radouani, 2003)

Les défauts de forme entraînent également des défauts de position angulaire entre les surfaces.

#### 2.4.1.2 Liaison avec jeu centrage court

Après l'étude du contact fixe plan/plan, une liaison de type centrage court avec jeu est étudiée. Un montage expérimental avec une liaison plane + centrage court est réalisé. Les manipulations consistent à positionner le chapeau, à serrer les vis et à mesurer la position relative des pièces à l'aide d'une MMT.

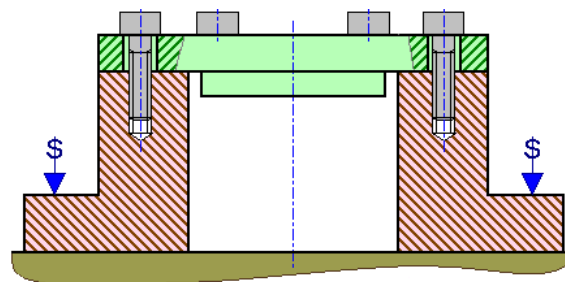
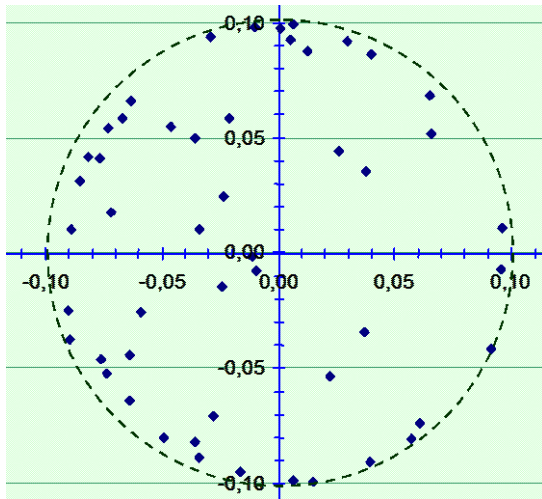


Fig. 2.20 – Montage expérimental (Radouani, 2003)

Pour des assemblages successifs, le défaut de coaxialité entre les pièces est limité à la valeur du jeu et a tendance à s'approcher de cette valeur limite. Un pré-positionnement particulier, ou un ordre particulier de serrage des vis ne conduisent pas à une modification majeure de la répartition des écarts de position. Il faut une opération de retaillage, c'est-à-dire exercer une action dans une direction particulière pendant le serrage pour imposer une « répartition localisée ».



(a) Dispersions de positionnement



(b) Dispersions avec retaillage

Fig. 2.21 – Défaut de coaxialité entre les deux pièces (Radouani, 2003)

### 2.4.2 Travaux de Morière

(Morière, 2010) a réalisé plus récemment des travaux similaires, mais sur une liaison complète constituée de 3 plans perpendiculaires. Pour caractériser le comportement des liaisons entre pièces avec défauts de forme, il met en œuvre un modèle dit G.L.T. basé sur la matrice de Gram et les coordonnées contravariantes. Le modèle G.L.T. a été développé à partir des travaux du LISMMA (Serré et al., 2002). Morière utilise ce modèle dans la partie simulation et dans la partie expérimentale. Une maquette comportant des liaisons planes a été conçue afin de valider les résultats de la simulation. Le travail peut être représenté par la Fig. 2.22.

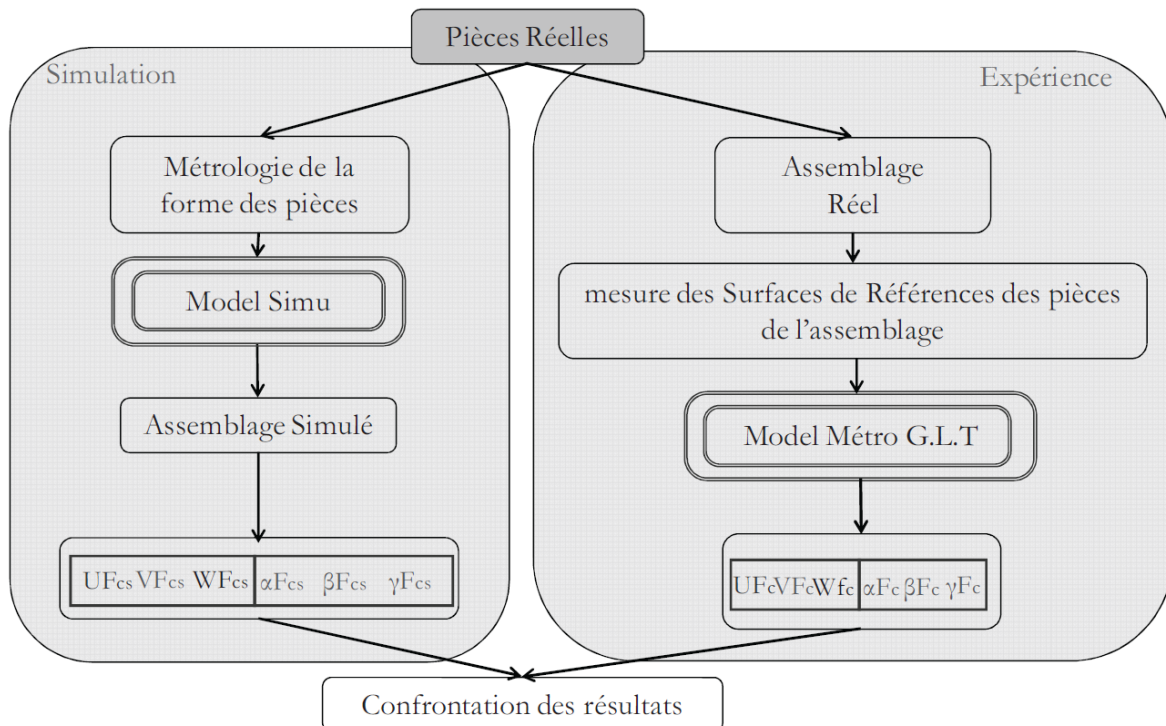


Fig. 2.22 – Résumé du travail de (Morière, 2010)



Pour chacune des configurations, l'assemblage est monté selon une procédure particulière et est maintenu en position par un système de bridage (cf. Fig. 2.25). Les surfaces de référence sont mesurées à l'aide d'une MMT. Ces mesures sont répétées 8 fois pour la configuration 1 et 5 fois pour la configuration 2 afin d'estimer l'incertitude de mise en position. L'assemblage est démonté, puis réassemblé entre chaque série de mesure. L'orientation ( $R_x, R_y, R_z$ ) et la position ( $T_x, T_y, T_z$ ) entre ces 2 pièces sont déterminées à l'aide du modèle vectoriel G.L.T.

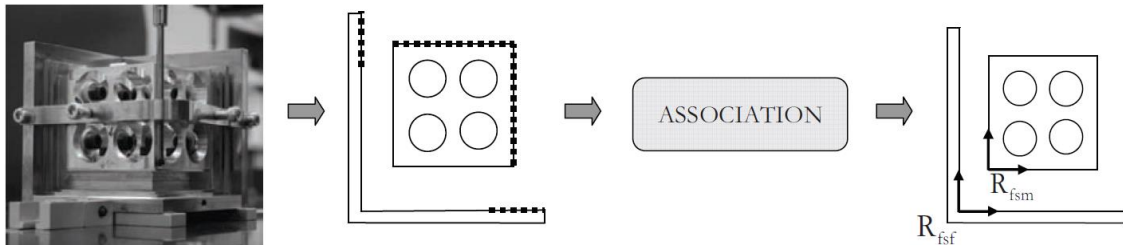


Fig. 2.25 – Association d'un repère

### 2.4.2.2 Simulation

Pour la simulation, les sous-ensembles sont mesurés séparément (3 surfaces de référence, 3 surfaces de contact avec défauts de forme) (cf. Fig. 2.26).

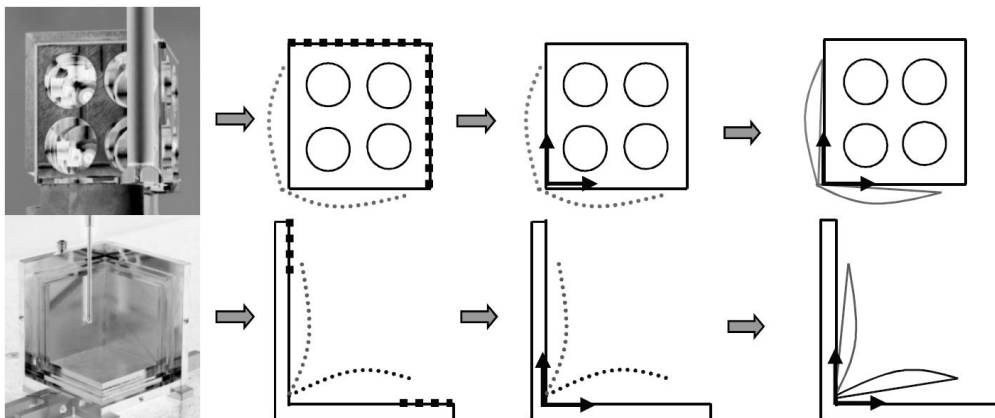


Fig. 2.26 – Détermination des surfaces polynomiales et association des repères locaux (Morière, 2010)

Les surfaces de contact avec défauts de forme du modèle de simulation sont déterminées à partir des nuages de points mesurés des surfaces de contact réelles des pièces de la maquette expérimentale. Un plan des moindres carrés est associé à chaque nuage de points afin d'obtenir la normale de la surface réelle. Une surface polynomiale de degré 2 est associée au nuage de points mesurés. Les coefficients sont déduits du calcul des distances point/surface suivant la normale calculée précédemment.

La simulation d'assemblage réalisée cherche la position de contact minimisant le volume de l'espace jeu entre les surfaces de contact sous contrainte de non-interpénétration. Pour mener la simulation, l'espace jeu est modélisé par un maillage volumique à base de tétraèdre. Les surfaces en contact sont maillées. Cette position donne les valeurs d'orientation et de position optimales.

### 2.4.2.3 Résultats obtenus

Tout d'abord, il faut remarquer la bonne répétabilité de remise en position d'un sous-ensemble par rapport à l'autre. Visiblement, la procédure d'assemblage était bien maîtrisée. Le système étant hyperstatique, ce résultat n'était pas évident a priori. L'écart type maximal sur les translations s'élève à une valeur de 3 micromètres.

Par contre, l'auteur note les écarts entre les résultats expérimentaux et les résultats de simulation. Il est possible d'observer des écarts supérieurs à 0,15mm en translation ce qui semble très élevé pour ce type d'expérimentation. Il explique ces écarts par la discrétisation des facettes et de l'espace jeu utilisé pour la simulation.

Nous pensons que ceci ne permet pas d'expliquer de tels écarts. Par contre, nous remettons en cause le choix de l'objectif, à savoir de minimiser l'espace jeu. Il nous semble que ce critère ne traduit pas le processus d'assemblage mis en œuvre expérimentalement.

### 2.4.3 Synthèse

Les travaux sur l'étude expérimentale du comportement des liaisons sous l'effet des défauts de forme sont rares. Les deux études relevées sont françaises, avec une diffusion restreinte. Elles concernent des liaisons avec un contact fixe. La première concerne un appui plan et un centrage court, la seconde une liaison complète par trois plans perpendiculaires. Les résultats restent limités et présentent parfois des écarts importants par rapport à la simulation.

## 2.5 Conclusion

Notre travail s'inscrit complètement dans la lignée des deux travaux expérimentaux présentés et particulièrement de l'étude de Morière avec une comparaison expérimental/simulation. La différence porte avant tout sur le type de liaison. Nous allons chercher à caractériser les déplacements dans une liaison avec jeu (et non pas fixe). Nous allons également chercher à faire converger les résultats expérimentaux avec la simulation.

Le choix réalisé pour la modélisation des déplacements est le TPD, outil mathématique bien maîtrisé qui permettra de paramétrer les déplacements dans les différents calculs à réaliser.

Pour la caractérisation d'ensembles de déplacements dans une liaison avec jeu, la modélisation par les domaines offre des concepts dont la robustesse a fait ses preuves dans différents travaux de thèse. L'étude présentée s'appuiera donc sur la notion de domaine. D'un point de vue numérique, les calculs seront effectués sur des polytopes (domaines bornés limités par des plans) plus faciles à manipuler.

Enfin, désirant réaliser des expérimentations sur des surfaces dont les défauts sont générés par usinage selon des modèles mathématiques donnés, nous mettrons en œuvre, soit des modèles géométriques simples, soit une composition de modes propres.

# 3

## **Théorie**

Cette partie présente l'essentiel des éléments théoriques nécessaires à la métrologie et à l'analyse des déplacements dans une liaison. Les déplacements étudiés sont uniquement ceux permis par les jeux dans la liaison, c'est-à-dire les déplacements selon les degrés de liaison. Le chapitre débute par une présentation des données manipulées issues des mesures des surfaces et des déplacements et des notions de surface des différences et de domaine jeux. La dualité entre ces deux notions est ensuite mise en évidence de manière à pouvoir passer d'un espace des surfaces à un espace des déplacements et réciproquement selon le point de vue désiré. Le reste du chapitre s'étend sur l'influence des défauts de forme, du repère d'expression et des incertitudes de mesure sur la forme du domaine jeu.



## 3.1 Surfaces et domaines

### 3.1.1 Type de liaison étudiée

Le type de liaison étudiée tout le long de ce travail est une liaison plane unilatérale entre deux pièces 1 et 2 (cf. Fig. 3.1). Le contact entre les surfaces des pièces est limité par un rectangle de dimension  $a \times b$ . Comme présenté au chapitre 2, les repères  $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$  et  $R_2(O_2, x_2, y_2, z_2)$  sont respectivement associés aux pièces 1 et 2.  $R(O, x, y, z)$  est le repère global du mécanisme. Nous considérons les hypothèses suivantes :

- Les pièces étudiées sont rigides (pas de déformation globale ou locale).
- La pièce 1 et le repère associé  $R_1$  sont fixes par rapport au repère  $R$ .
- La pièce 2 et le repère associé  $R_2$  se déplacent par rapport à la pièce 1 ( $R_1$ ).
- En position de référence,  $R$ ,  $R_1$  et  $R_2$  sont considérés comme confondus

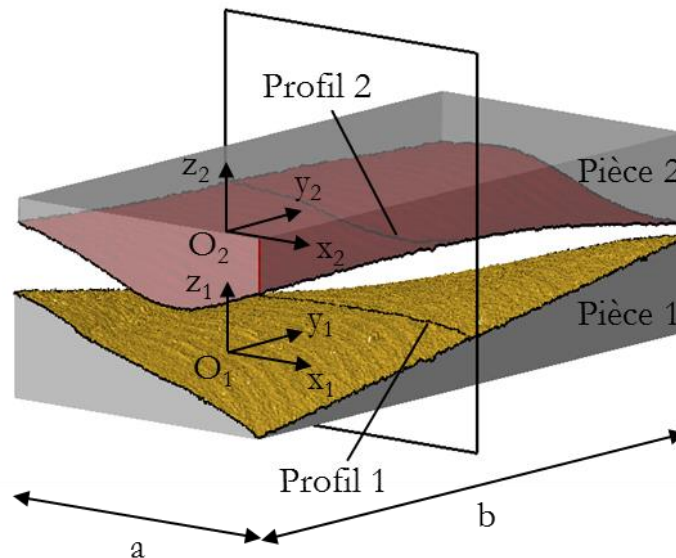


Fig. 3.1 – Liaison plane unilatérale étudiée

La dernière hypothèse entraîne la possibilité d'une interférence de matière dans la position de référence pour certaines combinaisons de pièces. C'est le cas, par exemple, avec les surfaces étudiées en Fig. 3.1. Dans cette configuration, la position de référence n'est alors pas physiquement réalisable. Nous montrerons la conséquence de cette hypothèse et nous en discuterons dans le chapitre 4.

### 3.1.2 Mesure des déplacements

L'objectif principal est de développer et valider une méthode de mesure des déplacements. Les paragraphes suivants donnent le principe de mesure et les méthodes mathématiques

nécessaires associées. Ces méthodes sont basées sur un paramétrage des déplacements par le TPD présenté au chapitre 2.

### 3.1.2.1 Principe de mesure

Le déplacement relatif de la pièce 2 par rapport à la pièce 1 est déterminé à partir de la mesure des déplacements de  $N$  points  $P_k$  ( $k = 1 \dots N$ ) de la pièce 2 selon une normale donnée grâce à des capteurs de déplacements linéaires. Ces points ne doivent pas forcément être à l'intérieur des limites de la surface de contact, ils peuvent être à l'extérieur comme sur le dispositif en Fig. 3.2. Le nombre de points mesurés  $N$  doit être supérieur ou égal au nombre de degrés de liaison de la surface ( $6 - \text{nombre de degrés de liberté}$ ), par exemple, pour une liaison pivot glissante  $N_{\min} = 4$ , pour une liaison plane  $N_{\min} = 3$ . Si  $N > N_{\min}$ , les mesures supplémentaires permettent de diminuer l'incertitude. Dans un tel cas, il est alors nécessaire d'utiliser une méthode particulière de résolution comme par exemple la méthode des moindres carrés.

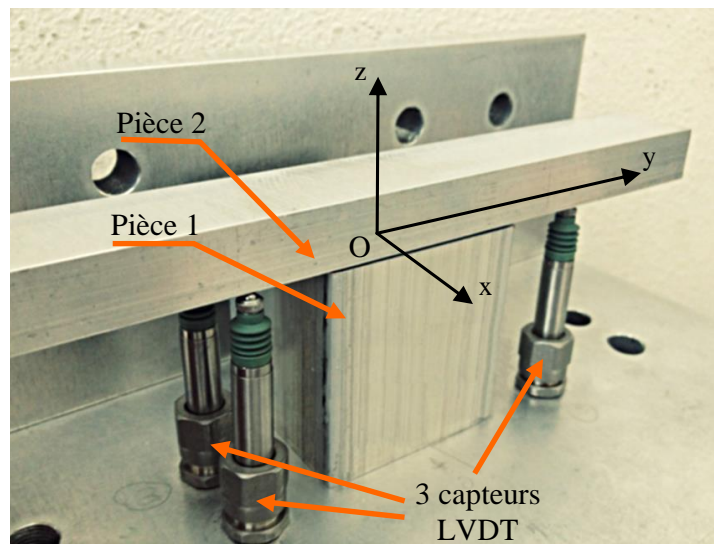


Fig. 3.2 – Dispositif expérimental

La Fig. 3.2 illustre un dispositif utilisé pour mesurer les déplacements relatifs entre deux pièces d'une liaison plane issue de premiers travaux de caractérisation du comportement de liaison plane (Ballu et al., 2010) (Lê et al., 2012). Trois capteurs sont utilisés pour relever les déplacements de la pièce 2 par rapport à la pièce 1 à partir des déplacements verticaux mesurés par les trois capteurs. Il est alors possible de calculer les petits déplacements en rotation  $\rho_x$ ,  $\rho_y$  autour des axes  $x$  et  $y$  et la translation  $\varepsilon_z$  selon l'axe  $z$ . La procédure et les calculs associés sont détaillés au paragraphe suivant.

### 3.1.2.2 Mesure des déplacements

Ce paragraphe permet de mettre en place des relations liant les petits déplacements ( $\rho_x$ ,  $\rho_y$ ,  $\varepsilon_z$ ) de la pièce 2 aux mesures de déplacements obtenues à l'aide des capteurs.

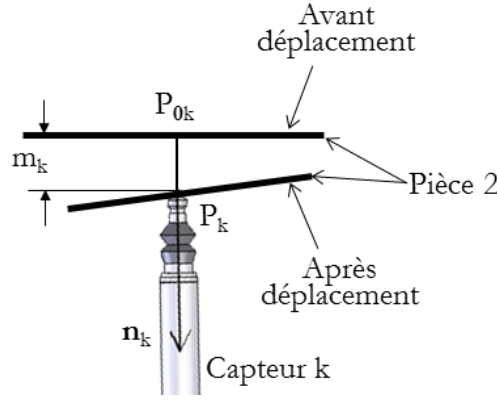


Fig. 3.3 – Déplacement mesuré par le capteur k

Soit  $P_k$  le point de contact du capteur k avec la pièce 2 en position de référence. Lors d'un petit déplacement de la pièce 2, la mesure du capteur correspond au petit déplacement du point  $P_k$  ( $\overrightarrow{dP_k}$ ) projeté sur l'axe du capteur dont le vecteur directeur est noté  $\overline{n_k} = [n_{xk} \quad n_{yk} \quad n_{zk}]^T$ .

$$m_k = \overrightarrow{dP_k}^T \overline{n_k} \quad (3.1)$$

D'après l'équation (2.12) :

$$\overrightarrow{dP_k} = \overrightarrow{dO} + \overline{P_k O_1} \wedge \overrightarrow{d\theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_k \\ -y_k \\ -z_k \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_y z_k \\ -\rho_x z_k \\ -\rho_y x_k + \rho_x y_k + \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

L'équation (3.1) devient donc :

$$m_k = \begin{bmatrix} \rho_y z_k \\ -\rho_x z_k \\ -\rho_y x_k + \rho_x y_k + \varepsilon_z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} n_{xk} \\ n_{yk} \\ n_{zk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_k n_{yk} + y_k n_{zk} \\ z_k n_{xk} - x_k n_{zk} \\ n_{zk} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Pour le dispositif illustré en Fig. 3.2, trois capteurs sont utilisés. L'expression (3.3) est donc composée de trois équations linéaires à trois inconnues ( $\rho_x, \rho_y, \varepsilon_z$ ) :

$$m_k = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_1 n_{y1} + y_1 n_{z1} & z_1 n_{x1} - x_1 n_{z1} & n_{z1} \\ -z_2 n_{y2} + y_2 n_{z2} & z_2 n_{x2} - x_2 n_{z2} & n_{z2} \\ -z_3 n_{y3} + y_3 n_{z3} & z_3 n_{x3} - x_3 n_{z3} & n_{z3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = M \cdot \delta \quad (3.4)$$

Avec  $P_1 = [10 \quad -45 \quad 0]^T$ ,  $P_2 = [10 \quad 45 \quad 0]^T$ ,  $P_3 = [-10 \quad -45 \quad 0]^T$  et  $\overline{n_k} = -\vec{z}$ .

La résolution de (3.4) nous donne les composantes  $\delta$  du TPD de la pièce 2 par rapport la pièce 1 :

$$\delta = M^{-1} \cdot m_k \quad (3.5)$$

Dans ce manuscrit, le cas où  $N > N_{\min}$ , un TPD  $\delta$  peut être calculé par la méthode des moindres carrés et le développement associé est détaillé en Annexe A.

### 3.1.2.3 Domaine mesuré

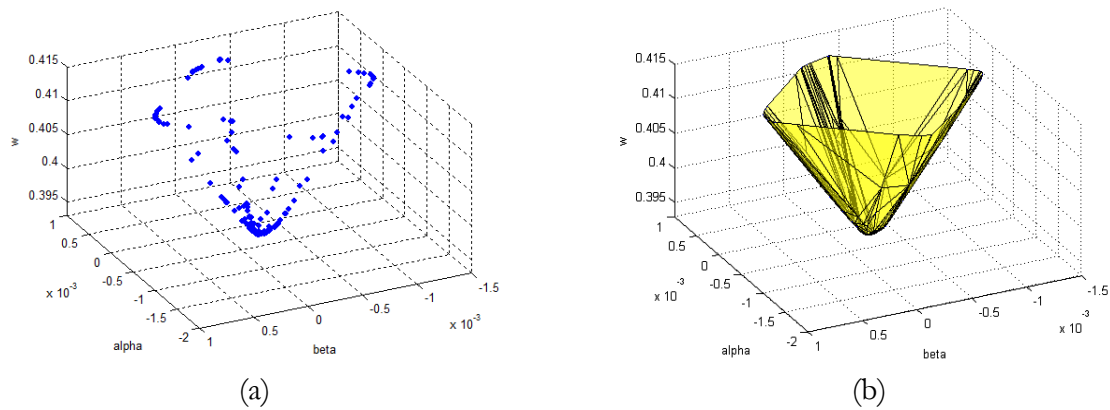


Fig. 3.4 – Domaine mesuré

Dans l'espace des déplacements, chaque position mesurée correspond à un point. Il est alors possible de représenter l'ensemble des positions possible sous forme d'un nuage de point (cf. Fig. 3.4a). L'ensemble des positions extrêmes que peut prendre la pièce 2 par rapport à la pièce 1 correspond à l'enveloppe convexe minimale de l'ensemble des points (cf. Fig. 3.4b).

### 3.1.3 Mesure des surfaces et surface des différences

Dans le cadre de la liaison plane étudiée, si l'on suppose les deux surfaces en contact de formes parfaites, la position relative des pièces est alors unique et correspond à la coïncidence des deux surfaces planes. Dans le cas de surfaces avec défauts de forme, les pièces peuvent avoir des positions relatives différentes selon les points de contact.

Le comportement des liaisons dépend directement des surfaces en contact qui la compose. Afin d'expliciter cette relation, une étude est faite à partir des mesures de défaut des surfaces et permet d'en déduire le domaine jeu associé. Ce domaine caractérise, dans l'espace des déplacements, le comportement de la liaison.

#### 3.1.3.1 Discrétisation des surfaces

Les deux surfaces en contact (en jaune et en rouge sur la Fig. 3.1) ont des défauts de forme et de surface. L'étude de ces surfaces est fondée sur une décomposition des défauts selon quatre composantes : forme, ondulation, rugosité et microrugosité. Une séparation de ces types de défauts n'est pas clairement proposée dans la littérature car elle dépend de la taille des pièces, des procédés de fabrication et des outils mathématiques utilisés (décompositions en fréquences, décomposition modale, etc.). La Fig. 3.5 représente différents types de défauts d'une surface.

Afin de simplifier l'analyse numérique et la représentation des défauts de forme, il est supposé que chaque surface est discrétisée en un ensemble de points d'un maillage structuré (maillage triangulaire). Chacun de ces points sera le résultat de mesures réalisées sur la surface.

Par la suite, les vecteurs position sont notés  $\vec{P}_{ki} = [x_{ki} \ y_{ki} \ z_{ki}]^T$ , où  $k$  est l'indice de la surface et  $i = 1 \dots n$  est l'indice du point.

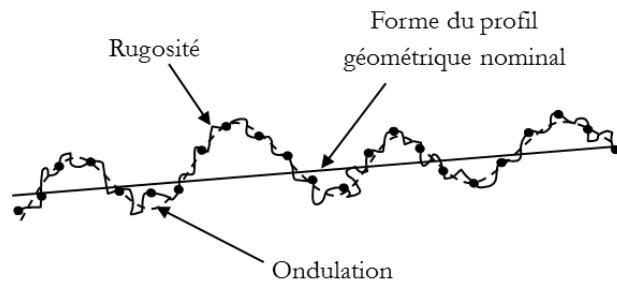


Fig. 3.5 – Texture de surface et sa discrétisation

### 3.1.3.2 Contraintes de non-interférence

La montabilité d'un mécanisme est caractérisée par des contraintes de non-interférence des pièces en contact en faisant l'hypothèse que les pièces sont rigides (pas de déformation globale ou locale). Ces contraintes sont représentées par les inéquations sur les déplacements des surfaces en contact (Giordano et Duret, 1993) (Gaunet, 1994) (Roy and Li, 1999).

La liaison étudiée est toujours celle présentée au paragraphe 3.1.1. Nous cherchons à écrire les contraintes de non-interférence de cette liaison. Soit un point  $P_{2i}$  appartenant à la surface 2. Lors du déplacement relatif des pièces, le point  $P_{2i}$  appartenant à la pièce 2 ne doit pas entrer en interférence avec la surface de la pièce 1.

En considérant que les déplacements tangentiels entre les pièces sont négligeables et que les déplacements angulaires sont faibles, la non-interférence du point  $P_{2i}$  se traduit par une contrainte sur son déplacement normal à la surface. La valeur maximale du déplacement est égale à l'écart du point  $P_{2i}$  de la surface 2 par rapport au point en vis-à-vis sur la surface 1, cela en position de référence.

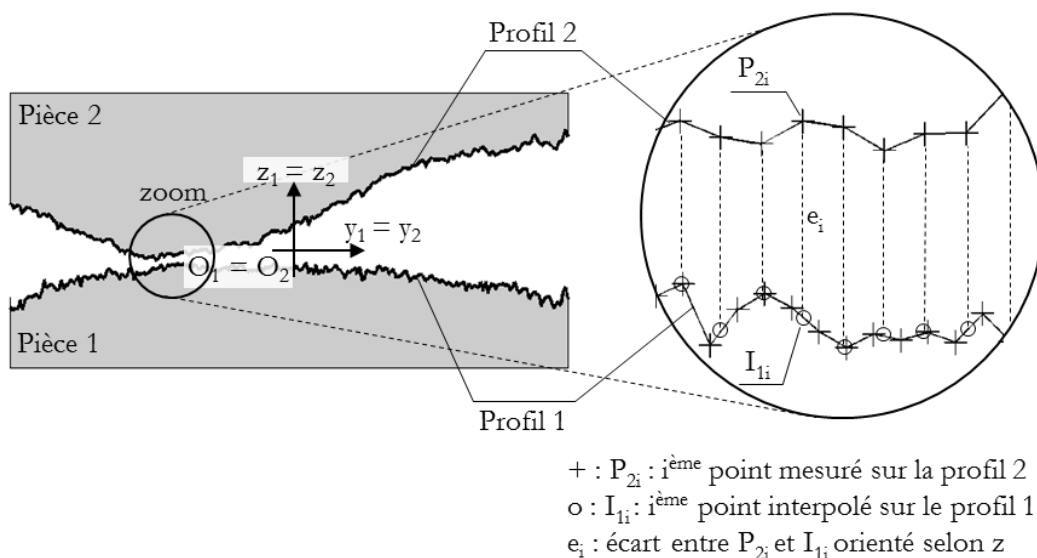


Fig. 3.6 – Procédure d'interpolation

Dans notre cas, les surfaces étant discrétisées en un ensemble de points, il est peu probable que la projection d'un point d'une surface sur l'autre corresponde à un point mesuré. Pour cela, nous avons choisi de calculer, par interpolation linéaire, la distance des points de la seconde surface au maillage construit à partir du nuage de points structuré de la surface en vis-à-vis. Ainsi, comme l'illustre la Fig. 3.6, en partant d'un point  $P_{2i}$  appartenant à la surface 2, le point  $I_{1i}$  est calculé et permet d'en déduire l'écart  $e_i$ .

Les vecteurs position de  $P_{2i}$  et  $I_{1i}$  sont :  $\vec{P}_{2i} = [x_{P_{2i}} \ y_{P_{2i}} \ z_{P_{2i}}]^T$  et  $\vec{I}_{1i} = [x_{I_{1i}} \ y_{I_{1i}} \ z_{I_{1i}}]^T$

Le déplacement de  $R_2$  par rapport à  $R_1$  exprimé au point  $P_{2i}$  s'écrit dans  $R$  :

$$\vec{dP}_{2i} = \vec{dO} + \vec{P}_{2i} \vec{O} \wedge \vec{d\theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_{P_{2i}} \\ -y_{P_{2i}} \\ -z_{P_{2i}} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\Leftrightarrow \vec{dP}_{2i} = \begin{bmatrix} z_{P_{2i}} \rho_y \\ -z_{P_{2i}} \rho_x \\ \varepsilon_z - x_{P_{2i}} \rho_y + y_{P_{2i}} \rho_x \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Lors du déplacement, le point  $P_{2i}$  appartenant à la surface 2 ne doit pas dépasser la surface 1, c'est-à-dire que sa coordonnée en  $z$  dans le repère  $R$  doit être supérieure à la coordonnée en  $z$  de  $I_{1i}$  dans  $R$ . Cette condition s'écrit :

$$z'_{P_{2i}} = z_{P_{2i}} + \vec{dP}_{2i} \cdot \vec{z} \geq z_{I_{1i}} \quad (3.8)$$

La contrainte de non-interférence s'écrit donc :

$$\vec{dP}_{2i} \cdot \vec{z} = \varepsilon_z - x_{P_{2i}} \rho_y + y_{P_{2i}} \rho_x \geq z_{I_{1i}} - z_{P_{2i}} = -e_i \quad (3.9)$$

### 3.1.3.3 Surface des différences

La contrainte de non-interférence au point  $P_{2i}$  ne dépend donc que de l'écart de la surface 2 par rapport à la surface 1. La position absolue des points en  $z$  n'a donc pas de conséquence sur le calcul de la surface des différences, seul compte l'écart relatif entre les surfaces. Des couples de surfaces ayant les mêmes écarts sont donc équivalents du point de vue de leur comportement en déplacement. Deux couples équivalents sont particulièrement intéressants :

- Le couple pour lequel la surface 1 est plane et confondue avec le plan  $Ox_1y_1$  et les points de la surface 2 ont pour coordonnées en  $z$  les écarts  $e_i$  (cf. Fig. 3.7a)
- Le couple pour lequel la surface 2 est plane et confondue avec le plan  $Ox_2y_2$  et les points de la surface 1 ont pour coordonnées en  $z$  les écarts  $-e_i$  (cf. Fig. 3.7b)

Du point de vue des déplacements, le problème de contact entre deux surfaces avec défauts de forme est donc équivalent au problème de contact entre une surface plane parfaite et une surface sur laquelle tous les défauts sont reportés. Cette surface est appelée surface des différences, elle permet de simplifier le problème de contact puisque, en conséquence, l'autre

surface est parfaite. La détermination des déplacements en est donc facilitée. Ceci reste vrai tant que les déplacements sont faibles par rapport aux dimensions des surfaces.

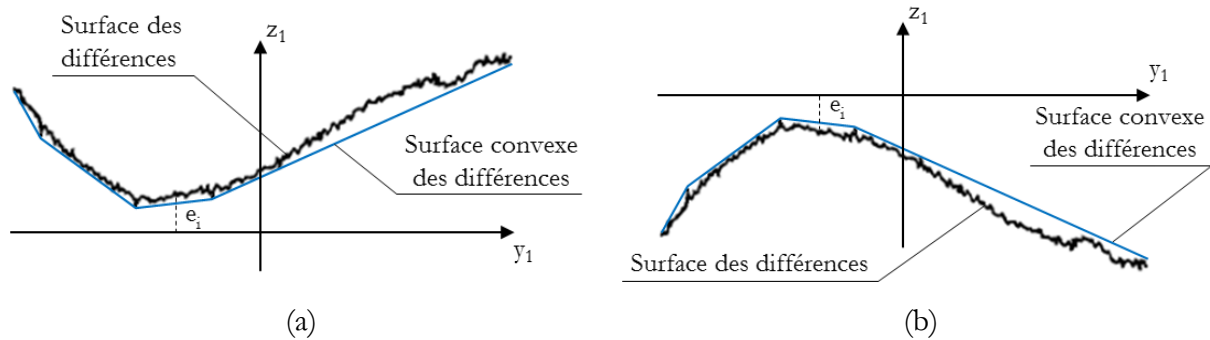


Fig. 3.7 – Surface des différences ; (a) : report sur la surface 2 ; (b) : report sur la surface 1

Le concept de surface des différences a été utilisé en tolérancement par (Samper et al., 2009). Il existe deux configurations différentes, dans la suite du document, nous n'utilisons qu'une des deux configurations. La configuration (b) a été choisie.

La surface des différences étant déterminée, il est possible d'identifier les positions et les points de contact réels entre les surfaces. L'ensemble des positions de contact possibles correspond aux positions d'un plan « roulant » sur la surface des différences pour la configuration (b). L'enveloppe de ces positions correspond à l'enveloppe convexe de la surface des différences. Cette enveloppe convexe est appelée par la suite la surface convexe des différences. Les facettes de la surface convexe des différences représentent les positions de contact réalisables et les sommets de cette surface sont les points de contact possibles.

Sur la Fig. 3.8 sont représentés dans les deux cas de reports des défauts, les surfaces convexes des différences, les plans parfaits et une position de la surface 2 en contact sur la surface 1. En position de référence,  $R_1$  et  $R_2$  sont ici alignés avec la surface plane parfaite.

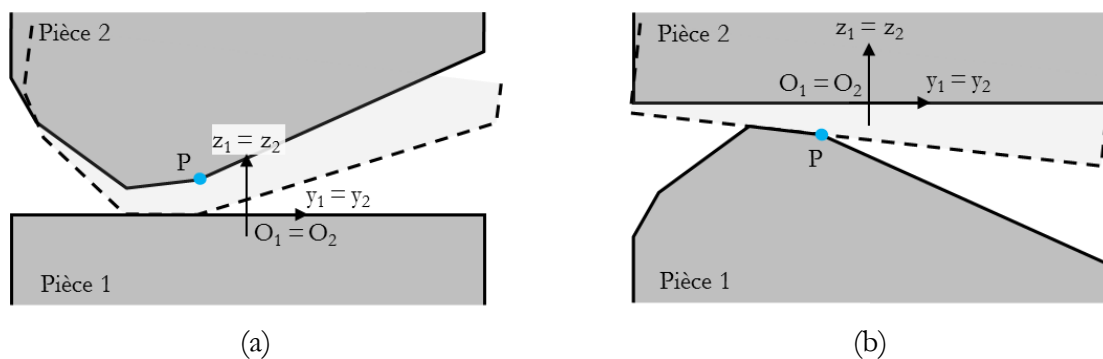


Fig. 3.8 – Surface convexe des différences et position de contact de la surface 2 (trait pointillé)

## 3.2 Dualité

A partir de la surface convexe des différences, l'objectif est d'en déduire le domaine jeu permettant ainsi de passer de l'espace des surfaces constituant la liaison au comportement de la liaison. Par ailleurs, nous souhaitons mettre en place une relation réciproque permettant de passer du domaine à la surface des différences. Cette dualité est basée sur la correspondance entre un sommet/une facette de l'un et une facette/un sommet de l'autre. Les paragraphes qui suivent permettent d'explicitier cette dualité.

### 3.2.1 Passage surface convexe des différences – domaine jeu

#### 3.2.1.1 Correspondance facette – sommet

La correspondance, facette de la surface/sommet du domaine, permet la détermination du domaine jeu à partir des positions de contact entre deux pièces. Chaque position de contact est représentée par une facette de la surface convexe des différences déterminée au paragraphe 3.1.3.3. Dans l'espace des petits déplacements, cette facette correspond à un sommet du domaine jeu.

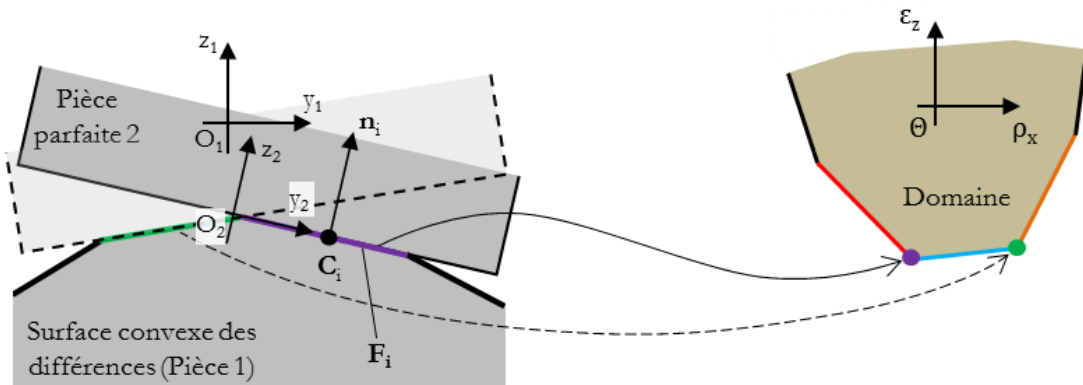


Fig. 3.9 – Domaine jeu à partir des positions de contact

Considérons une facette  $F_i$  de la surface convexe des différences, définie par un point  $\vec{C}_i = [x_{Ci} \ y_{Ci} \ z_{Ci}]^T$  et un vecteur normal unitaire  $\vec{n}_i = [n_{xi} \ n_{yi} \ n_{zi}]^T$ .

Le vecteur normal  $\vec{n}_i$  est orienté extérieur matière. Cela implique que  $n_{zi}$  est strictement supérieur à zéro car la surface convexe des différences est nominale plane et les facettes ne sont jamais parallèles à l'axe  $z$ .  $n_{zi}$  est même très proche de 1, car les défauts des surfaces étudiées sont faibles. En conséquence, nous considérons que le vecteur normal  $\vec{n}_i = [n_{xi} \ n_{yi} \ 1]^T$ . L'équation du plan passant par  $F_i$  s'écrit :

$$n_{xi}x + n_{yi}y + z = a_i, \text{ avec } a_i = n_{xi}x_{Ci} + n_{yi}y_{Ci} + z_{Ci} \quad (3.10)$$

En position de référence :  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1 = \vec{z} = [0 \ 0 \ 1]^T$ . Après déplacement, grâce à l'équation (2.6),  $\vec{z}_2$  devient :



$$\vec{z}_2 = \mathbf{R}_{12} \cdot \vec{z}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \rho_y \\ 0 & 1 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_y \\ -\rho_x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Comme en position de contact sur  $F_i$  :  $\vec{n}_1 = \vec{z}_2$  (cf. Fig. 3.9) et d'après (3.11) :

$$\rho_x = -n_{yi}, \rho_y = n_{xi} \quad (3.12)$$

D'après l'équation (2.12), le petit déplacement du point  $O_2$  s'écrit :

$$\overrightarrow{dO_2} = \overrightarrow{dO} + \overrightarrow{O_2O} \wedge \overrightarrow{d\theta} = \overrightarrow{dO} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

car  $\overrightarrow{O_2O} = \vec{0}$  en position de référence.

Comme en position de contact sur  $F_i$ , le point  $O_2$  doit appartenir à la face  $F_i$ , et d'après les équations (3.10) et (3.13) :

$$\varepsilon_z = a_i \quad (3.14)$$

Chaque triplet  $(\rho_x, \rho_y, \varepsilon_z)$  correspond à un sommet dans l'espace des petits déplacements. Ainsi, le domaine jeu est le polyèdre minimal convexe incluant l'ensemble des sommets déterminés à partir de toutes les facettes de la surface convexe des différences.

### 3.2.1.2 Correspondance sommet – facette

Cette correspondance représente la détermination du domaine jeu à partir des contraintes de non-interférence de la pièce 2 parfaite à tous les sommets  $\vec{P}_i = [x_{Pi} \ y_{Pi} \ z_{Pi}]^T$  de la surface convexe des différences. Les contraintes de non-interférence sont traitées au paragraphe 3.1.3.2. Les contraintes de non-interférence aux points  $P_i$  sont :

$$\overrightarrow{dP}_i \cdot \vec{z} = \varepsilon_z - x_{Pi}\rho_y + y_{Pi}\rho_x \geq z_{Pi} \quad (3.15)$$

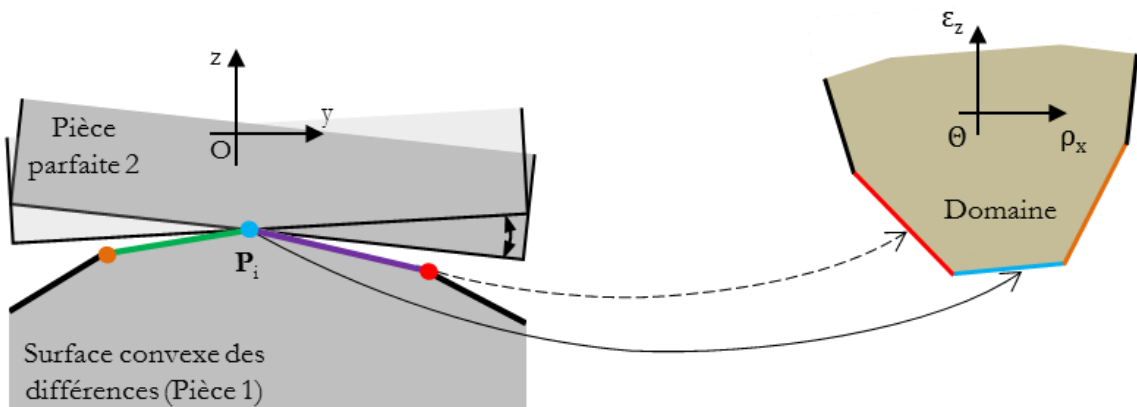


Fig. 3.10 – Domaine jeu à partir des contraintes de non-interférence

Le domaine jeu peut donc être obtenu par les contraintes de non-interférence (inégalités) écrites pour l'ensemble des points de la surface des différences. Chaque contrainte correspond à un demi-espace dans l'espace des petits déplacements.

Comme introduit précédemment, seuls les sommets de la surface convexe des différences définissent des facettes du domaine. En effet, les demi-espaces générés par les points situés au-dessous de la surface convexe n'engendrent pas des nouvelles facettes sur le domaine. Ces demi-espaces sont représentés en vert sur la Fig. 3.11.

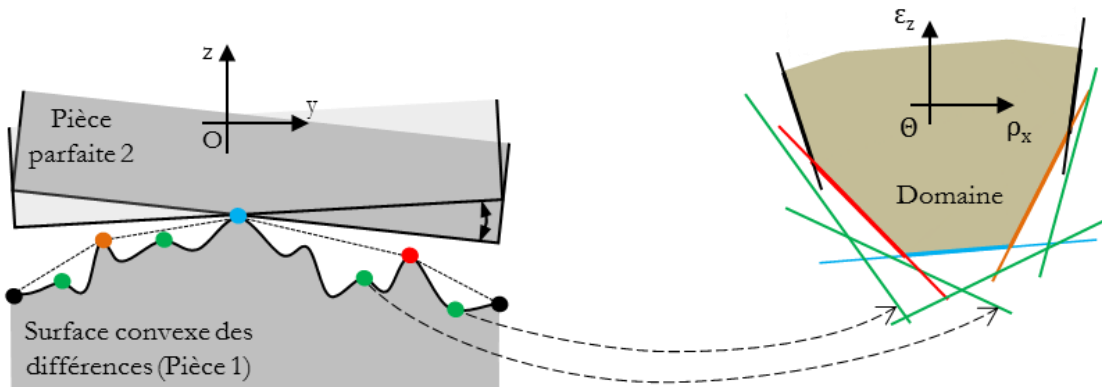


Fig. 3.11 –Détermination du domaine jeu à partir des contraintes de non-interférence

La méthode de détermination du domaine jeu à partir de la surface convexe des différences permet de simplifier le traitement numérique des données (détaillé au chapitre 4) car elle élimine les points qui ne sont pas en contact avec la pièce parfaite 2, donc les demi-espaces qui ne font pas parties du domaine jeu.

### 3.2.2 Passage du domaine jeu à la surface convexe des différences

Le passage du domaine jeu à la surface convexe des différences est similaire au passage inverse présenté ci-dessus car, il s'agit à nouveau de correspondances facette (sommets) – sommet (facette) entre deux entités géométriques convexes. Nous présentons ici la détermination de la surface convexe des différences grâce à la correspondance facette – sommet qui a été choisie pour le traitement numérique.

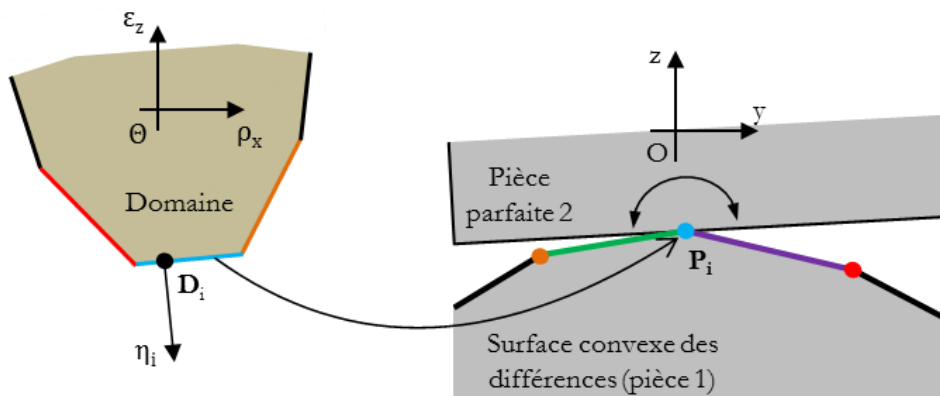


Fig. 3.12 – Passage domaine jeu – surface convexe des différences

Considérons une facette du domaine jeu définie par un point  $\vec{D}_1 = [\rho_{xi} \ \rho_{yi} \ \varepsilon_{zi}]^T$  et un vecteur normal  $\vec{\eta}_1 = [\eta_{\rho xi} \ \eta_{\rho yi} \ \eta_{\varepsilon zi}]^T$  dans l'espace des petits déplacements. L'équation du plan passant par cette facette s'écrit :

$$\eta_{\rho xi}\rho_x + \eta_{\rho yi}\rho_y + \eta_{\varepsilon zi}\varepsilon_z = \tau_i, \text{ avec } \tau_i = \eta_{\rho xi}\rho_{xi} + \eta_{\rho yi}\rho_{yi} + \eta_{\varepsilon zi}\varepsilon_{zi} \quad (3.16)$$

Dû au type de liaison, les facettes du domaine jeu ne sont jamais parallèles à l'axe  $\varepsilon_z$ , ainsi  $\eta_{\varepsilon zi} \neq 0$ . On obtient donc :

$$\frac{\eta_{\rho xi}}{\eta_{\varepsilon zi}}\rho_x + \frac{\eta_{\rho yi}}{\eta_{\varepsilon zi}}\rho_y + \varepsilon_z = \frac{\tau_i}{\eta_{\varepsilon zi}} \quad (3.17)$$

La facette ci-dessus correspond à la contrainte de non-interférence écrite en un sommet  $P_i$  de la surface convexe des différences (cf. équation (3.15)). Quand les deux pièces sont en contact en  $P_i$ , on a alors :

$$-x_{Pi}\rho_y + y_{Pi}\rho_x + \varepsilon_z = z_{Pi} \quad (3.18)$$

En identifiant les paramètres des équations (3.17) et (3.18), on obtient les coordonnées du point  $P_i$  de la surface convexe des différences :

$$x_{Pi} = -\frac{\eta_{\rho yi}}{\eta_{\varepsilon zi}}, y_{Pi} = \frac{\eta_{\rho xi}}{\eta_{\varepsilon zi}}, z_{Pi} = \frac{\tau_i}{\eta_{\varepsilon zi}} \quad (3.19)$$

Ce passage du domaine jeu à la surface convexe des différences est particulièrement intéressant car il est alors possible de connaître cette surface uniquement à partir des déplacements relatifs. Par conséquent, à partir de la mesure des déplacements dans la liaison, cette surface des différences peut être déterminée. Il s'agit d'un résultat remarquable de cette étude sur lequel nous reviendrons lors de l'analyse de résultats en chapitre 5.

### 3.3 Etudes de morphologie de domaine selon les cas

#### 3.3.1 Domaine jeu d'une liaison plane parfaite

Ce paragraphe illustre le domaine jeu d'une liaison plane parfaite (Fig. 3.13a) entre deux pièces 1 et 2. Afin de faciliter la visualisation, la pièce 2 est présentée comme un rectangle. Ce rectangle est aussi la surface en contact. A, B, C et D sont les points caractéristiques<sup>1</sup> de la liaison.

D'après l'inéquation (3.9), la contrainte de non-interférence écrite au point  $P_i$  :

---

<sup>1</sup> Un point caractéristique d'une liaison est un point tel que la contrainte de non-interférence correspondante est le support d'une facette du domaine. Pour une liaison plane parfaite, les points caractéristiques sont les quatre points du rectangle de contact. Pour une liaison plane avec défauts de forme, les points caractéristiques sont les sommets de la surface convexe des différences.

$$\varepsilon_z - x_{P_i}\rho_y + y_{P_i}\rho_x \geq z_{P_i} \quad (3.20)$$

tel que  $P_i$  peut correspondre au point A, B, C ou D.

Le rectangle est supposé parallèle et centré par rapport au repère  $R_1$ . En considérant  $a$  et  $b$  les dimensions du rectangle selon les axes  $x$  et  $y$ , les vecteurs position des points A, B, C et D à la position de référence de la pièce 2 dans le repère  $R_1$  (ou bien dans  $R$  car  $R$  et  $R_1$  sont confondus) sont :

$$\vec{A} = \left[ \frac{a}{2} \quad -\frac{b}{2} \quad 0 \right]^T \quad \vec{B} = \left[ \frac{a}{2} \quad \frac{b}{2} \quad 0 \right]^T \quad \vec{C} = \left[ -\frac{a}{2} \quad \frac{b}{2} \quad 0 \right]^T \quad \vec{D} = \left[ -\frac{a}{2} \quad -\frac{b}{2} \quad 0 \right]^T$$

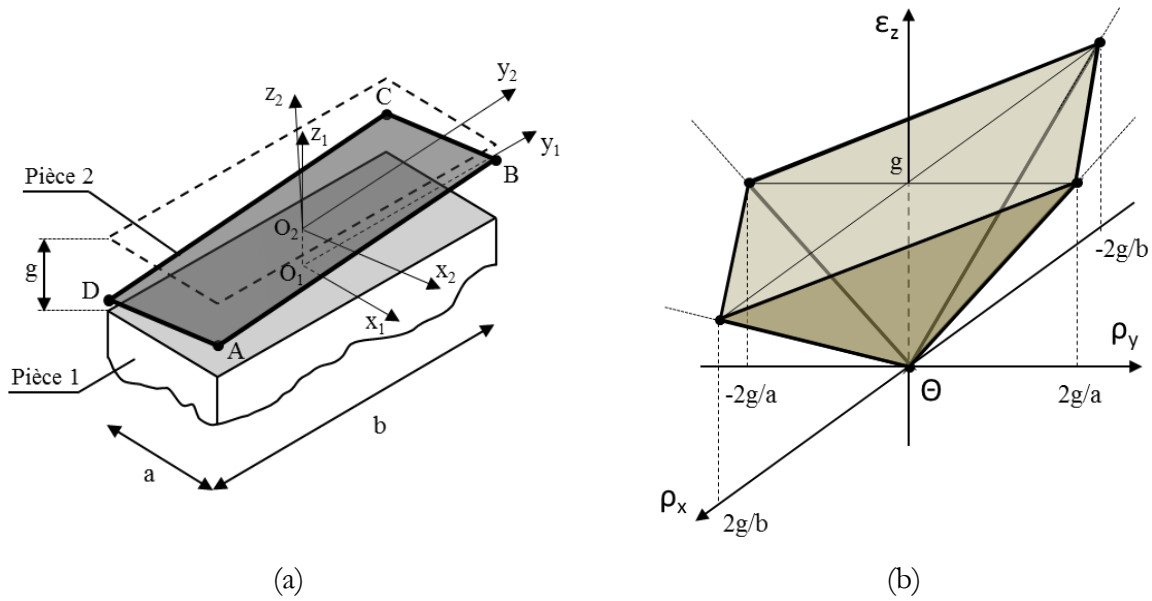


Fig. 3.13 – Domaine jeu (b) d'une liaison plane parfaite (a)

Les contraintes de non-interférence pour ces quatre points sont données par l'ensemble d'inéquations (3.21):

$$\begin{cases} A : \varepsilon_z - \frac{a}{2}\rho_y - \frac{b}{2}\rho_x \geq 0 \\ B : \varepsilon_z - \frac{a}{2}\rho_y + \frac{b}{2}\rho_x \geq 0 \\ C : \varepsilon_z + \frac{a}{2}\rho_y + \frac{b}{2}\rho_x \geq 0 \\ D : \varepsilon_z + \frac{a}{2}\rho_y - \frac{b}{2}\rho_x \geq 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

Ces quatre contraintes permettent de représenter le domaine jeu théorique de la liaison (Fig. 3.13b). Dans l'espace des déplacements, chaque contrainte correspond à une facette et le domaine jeu correspond à une pyramide inversée de hauteur infinie. En pratique, la hauteur du domaine est limitée par le jeu  $g$  de la liaison plane pour lequel l'hypothèse des petits déplacements reste valable.

### 3.3.2 Domaines jeux particuliers

L'ajout de points caractéristiques ou bien la variation d'altitude en  $z$  d'un point caractéristique peut modifier la morphologie du domaine associé. En effet, la variation en  $z$  d'un point peut engendrer une nouvelle facette sur le domaine jeu illustrée à la Fig. 3.14.

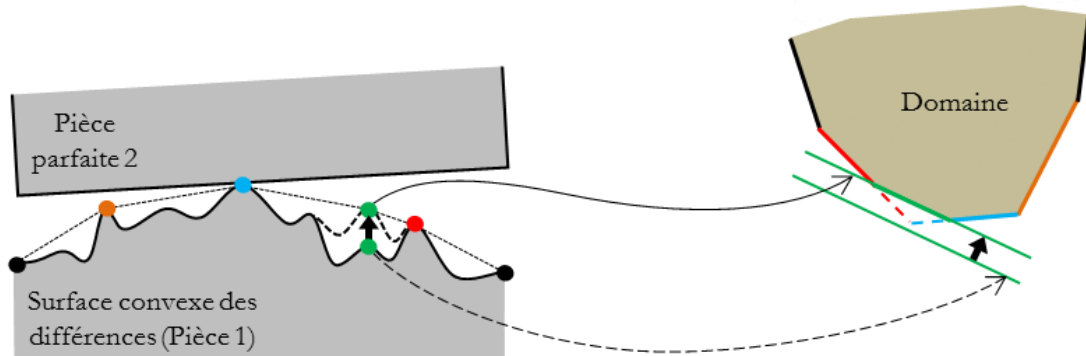


Fig. 3.14 – Variation en  $z$  d'un point

Le but de cette partie est d'étudier les changements de morphologie du domaine lorsque la surface convexe des différences évolue. Des modifications particulières par ajout de points ou variation en  $z$  de points sont étudiées par la suite.

#### 3.3.2.1 Ajout d'un point caractéristique

Soit un nouveau point caractéristique  $\vec{E} = [x_E \ y_E \ z_E]^T$  (cf. Fig. 3.15). D'après l'inéquation (3.20), la contrainte de non-interférence donnée par ce point est la suivante :

$$\varepsilon_z - x_E \rho_y + y_E \rho_x \geq z_E \quad (3.22)$$

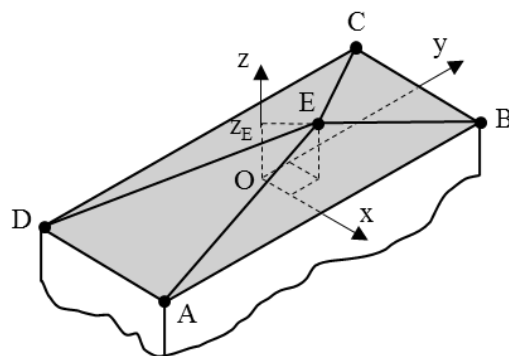


Fig. 3.15 – Ajout d'un point caractéristique (un défaut de forme) sur la surface de contact

Pour  $x_E = 0$  et  $y_E = 0$  (définissant le centre du rectangle initial), le domaine jeu est représenté ci-dessous (Fig. 3.16). Ce point engendre une facette parallèle au plan  $(\Theta \rho_x \rho_y)$ .

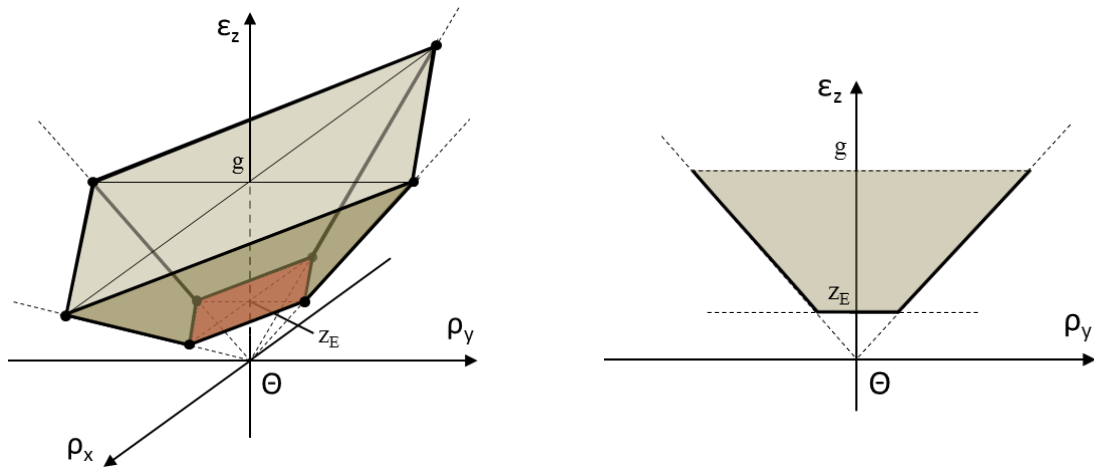


Fig. 3.16 – Domaine jeu d'ajout d'un point caractéristique centré à l'origine

Par ailleurs, par exemple, si  $x_E > 0$  et  $y_E > 0$ , le domaine jeu est alors représenté par le domaine de la Fig. 3.17.

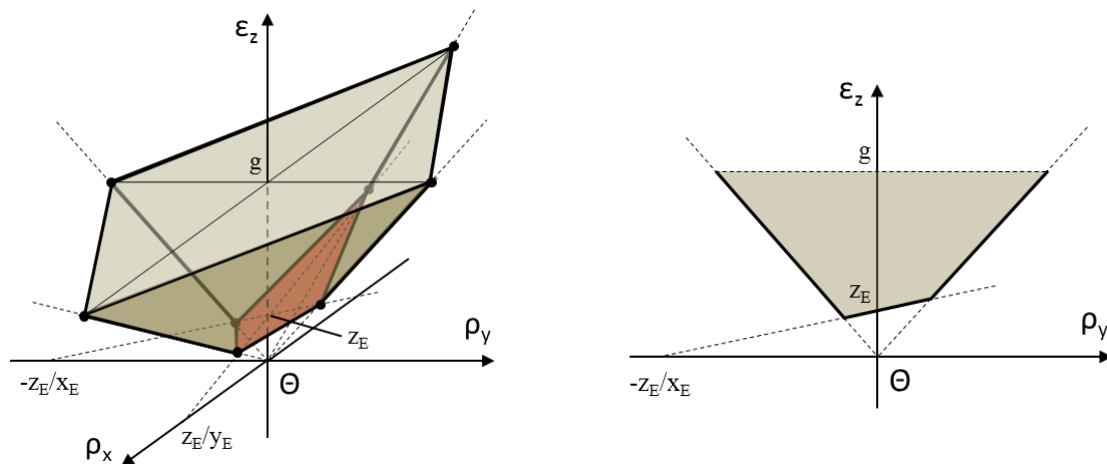


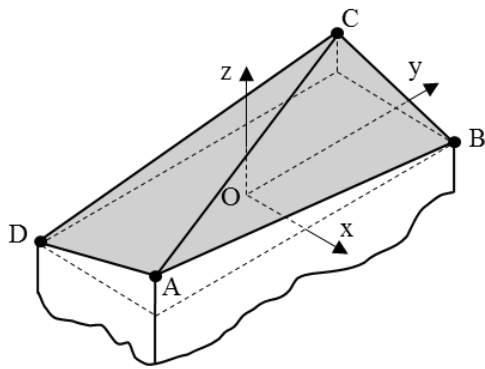
Fig. 3.17 – Domaine jeu d'ajout d'un point caractéristique avec  $x_E > 0$  et  $y_E > 0$

### 3.3.2.2 Quatre sommets non coplanaires

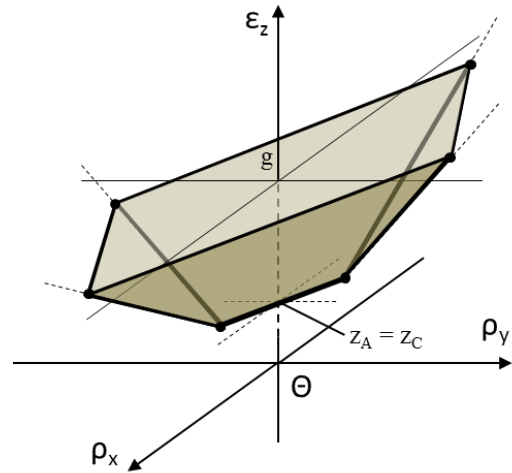
Dans ce paragraphe, nous traitons le cas de quatre points A, B, C et D non coplanaires. Un exemple simple ( $z_A = z_C > 0$ ) est illustré à Fig. 3.18. Les contraintes liées aux points B et D ne sont pas modifiées, par contre, les contraintes liées à A et C sont modifiées entraînant un déplacement des facettes correspondantes d'une valeur de  $z_A$  selon l'axe  $\varepsilon_z$  car :

$$\varepsilon_z - \frac{a}{2}\rho_y - \frac{b}{2}\rho_x \geq z_A \text{ et } \varepsilon_z + \frac{a}{2}\rho_y + \frac{b}{2}\rho_x \geq z_C = z_A \quad (3.23)$$

Le domaine laisse alors apparaître un arête au sommet de la pyramide car les deux facettes liées à A et C ont une droite d'intersection dans le plan  $\varepsilon_z = z_A$ .



(a) Quatre sommets non coplanaires



(b) Domaine jeu

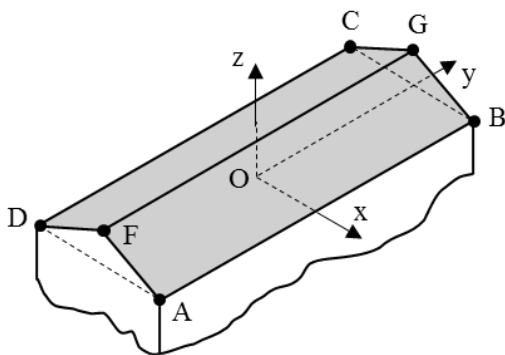
Fig. 3.18 – Domaine jeu des quatre sommets non coplanaires

### 3.3.2.3 Surface avec deux pentes

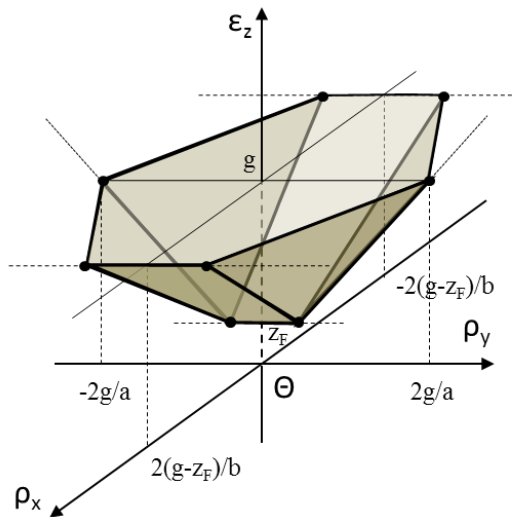
Si l'on considère une surface en forme de toit à deux pentes, le domaine jeu correspondant est illustré en Fig. 3.19. Deux nouvelles contraintes correspondant aux points F et G sont rajoutées.

$$\varepsilon_z - \frac{b}{2} \rho_x \geq z_F \text{ et } \varepsilon_z + \frac{b}{2} \rho_x \geq z_G = z_F \quad (3.24)$$

Pour  $\rho_x = \rho_y = 0$ , les nouvelles facettes ont une valeur en  $\varepsilon_z = z_F$ , valeur plus grande que pour les quatre facettes correspondant aux point A, B, C et D qui passent par l'origine. De plus, ces facettes sont parallèles à l'axe  $\rho_y$ .



(a) Quatre sommets non coplanaires



(b) Domaine jeu

Fig. 3.19 – Domaine jeu de la surface avec deux pentes

### 3.3.3 Conclusion

Sur ces quelques cas types de surfaces ayant des défauts de forme, nous pouvons constater le changement de morphologie du domaine. L'équation (3.22) permet de souligner que l'orientation de la facette dépend directement de la position du point sur la surface ( $x_E$  et  $y_E$ ), tandis que son intersection avec l'axe  $\varepsilon_z$  est définie par la valeur du défaut  $z_E$ . Cette facette vient donc intersecter le domaine correspondant aux quatre sommets et il le tronque. Chaque nouveau point sur la surface convexe des différences entraîne ainsi une nouvelle facette sur le domaine. Si le défaut est au niveau d'un sommet, la facette correspondante est déplacée, « raccourcissant » également le domaine.

## 3.4 Influence des incertitudes liées à la position de référence

La forme du domaine dépend évidemment des défauts de forme, mais également d'autres éléments comme le point et la base d'expression du torseur des petits déplacements ou la position relative des surfaces en position de référence.

### 3.4.1 Changement de point et de base d'expression

Du point de vue de l'étude d'un mécanisme, le changement de point et de base d'expression nous permet de faire l'analyse de tolérance. En effet, les domaines jeux sont exprimés dans les repères locaux fixés aux centres des liaisons, tandis que les domaines écarts sont exprimés dans les repères locaux liés aux centres des surfaces ou aux centres des zones de tolérances des surfaces tolérancées. Pour faire des sommes de Minkowski, ces domaines doivent être exprimés dans un même repère avec une modification du point d'expression et parfois de la base (Mansuy, 2012) (Teissandier, 2012).

Concernant la métrologie, il existe toujours des incertitudes de mesure. Le repère global  $R$  et le repère local  $R_1$  ne sont pas exactement confondus en position de référence comme nous l'avons considéré au paragraphe 3.1.1. Il existe des petits déplacements du repère  $R$ . Le changement du repère  $R$  au repère  $R'$  (qui correspond au repère  $R$  après un petit déplacement) nous permet de voir comment le domaine jeu évolue par rapport aux incertitudes de mesure.

#### 3.4.1.1 Matrice de passage

Dans un premier temps il faut définir le passage de l'expression d'un torseur des petits déplacements exprimés dans une base  $b$  à son expression dans une base  $b'$ . Ce passage sera exprimé à l'aide d'une matrice de passage notée  $\mathbf{P}_{R \rightarrow R'}$  dans l'espace des petits déplacements de dimension 6.

Pour définir cette matrice de passage, nous allons reprendre l'approche présentée par (Gaunet, 1994). Le point de départ est l'expression du changement de repère dans l'espace affine de dimension 3, un changement de repère se décompose en un changement d'origine et un changement de base.



Le changement de repère de R à R' est caractérisé par une matrice de rotation  $\mathbf{R}_{R \rightarrow R'}$  et le vecteur translation  $\overrightarrow{OO'}|_b = [x_{O'} \ y_{O'} \ z_{O'}]^T$ .

La résultante du TPD exprimée dans la base b' devient dans la base b :

$$\overrightarrow{d\theta}|_b = \mathbf{R}_{R \rightarrow R'} \cdot \overrightarrow{d\theta}|_{b'} \quad (3.25)$$

De même, le moment du TPD au point O' exprimé dans la base b' devient dans la base b :

$$\overrightarrow{dO'}|_b = \mathbf{R}_{R \rightarrow R'} \cdot \overrightarrow{dO'}|_{b'} \quad (3.26)$$

De plus, le moment du TPD exprimé au point O' devient au point O dans le repère R :

$$\overrightarrow{dO}|_b = \overrightarrow{dO'}|_b + \overrightarrow{OO'}|_b \wedge \overrightarrow{d\theta}|_b \quad (3.27)$$

Si  $\overrightarrow{OO'}|_b = [x_{O'} \ y_{O'} \ z_{O'}]^T$ , et en notant  $\mathbf{M}_{O'} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{O'} & y_{O'} \\ z_{O'} & 0 & -x_{O'} \\ -y_{O'} & x_{O'} & 0 \end{bmatrix}$ , on obtient :

$$\overrightarrow{dO}|_b = \mathbf{R}_{R \rightarrow R'} \cdot \overrightarrow{dO'}|_{b'} + \mathbf{M}_{O'} \cdot \mathbf{R}_{R \rightarrow R'} \cdot \overrightarrow{d\theta}|_{b'} \quad (3.28)$$

On obtient donc  $\mathbf{P}_{R \rightarrow R'}$  la matrice de passage dans l'espace des petits déplacements tel que :

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{d\theta} \\ \overrightarrow{dO}|_b \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{R \rightarrow R'} \cdot \begin{bmatrix} \overrightarrow{d\theta} \\ \overrightarrow{dO'}|_{b'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{R \rightarrow R'} & 0 \\ \mathbf{M}_{O'} \cdot \mathbf{R}_{R \rightarrow R'} & \mathbf{R}_{R \rightarrow R'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overrightarrow{d\theta} \\ \overrightarrow{dO'}|_{b'} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

### 3.4.1.2 Point d'expression

A partir de la matrice de passage dans l'espace des petits déplacements, il est possible d'étudier l'influence de l'incertitude de position du point d'expression.

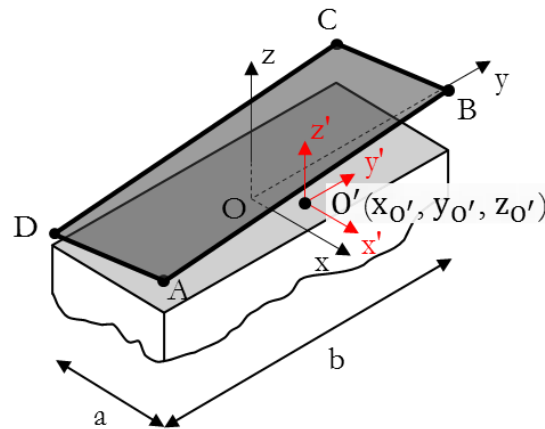


Fig. 3.20 – Changement du point d'expression

Pour un changement d'origine :

$$\mathbf{R}_{R \rightarrow R'} = \mathbf{I}_3 \quad (3.30)$$

Le changement de point d'origine du repère R au repère R' est donc caractérisé par la matrice de passage  $\mathbf{P}_{R \rightarrow R'}$  :

$$\mathbf{P}_{R \rightarrow R'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_{O'} & y_{O'} & 1 & 0 & 0 \\ z_{O'} & 0 & -x_{O'} & 0 & 1 & 0 \\ -y_{O'} & x_{O'} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Pour l'étude des petits déplacements de la liaison plane, la transformation est réduite à :

$$\begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -y_{O'} & x_{O'} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho'_x \\ \rho'_y \\ \varepsilon'_z \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Il s'agit d'une matrice de cisaillement selon l'axe  $\varepsilon_z$ . Le changement de point d'expression entraîne donc une déformation du domaine correspondant à un cisaillement.

Les composantes de petits déplacements dans le repère R s'expriment donc en fonction des petits déplacements dans le repère R' :

$$\begin{cases} \rho_x = \rho'_x \\ \rho_y = \rho'_y \\ \varepsilon_z = -y_{O'} \rho'_x + x_{O'} \rho'_y + \varepsilon'_z \end{cases} \quad (3.33)$$

Pour les points particuliers A, B, C et D, le système d'inéquation (3.21) définissant le domaine jeu devient alors dans le nouveau repère R' :

$$\begin{cases} \text{A : } \varepsilon'_z + \left(x_{O'} - \frac{a}{2}\right) \rho'_y + \left(-y_{O'} - \frac{b}{2}\right) \rho'_x \geq 0 \\ \text{B : } \varepsilon'_z + \left(x_{O'} - \frac{a}{2}\right) \rho'_y + \left(-y_{O'} + \frac{b}{2}\right) \rho'_x \geq 0 \\ \text{C : } \varepsilon'_z + \left(x_{O'} + \frac{a}{2}\right) \rho'_y + \left(-y_{O'} + \frac{b}{2}\right) \rho'_x \geq 0 \\ \text{D : } \varepsilon'_z + \left(x_{O'} + \frac{a}{2}\right) \rho'_y + \left(-y_{O'} - \frac{b}{2}\right) \rho'_x \geq 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

Par exemple, pour  $x_{O'} > 0$  et  $y_{O'} > 0$ , le domaine exprimé au point O' est illustré ci-dessous. Les points extrémités du domaine dans la section  $\varepsilon'_z = g$  (cf. Fig. 3.21a) se déplacent selon les axes  $\rho'_x$  et  $\rho'_y$  par rapport au domaine de liaison plane parfaite (en bleu pointillé).

**Remarque :** La coordonnée en z du point O' n'influence pas le nouveau domaine.

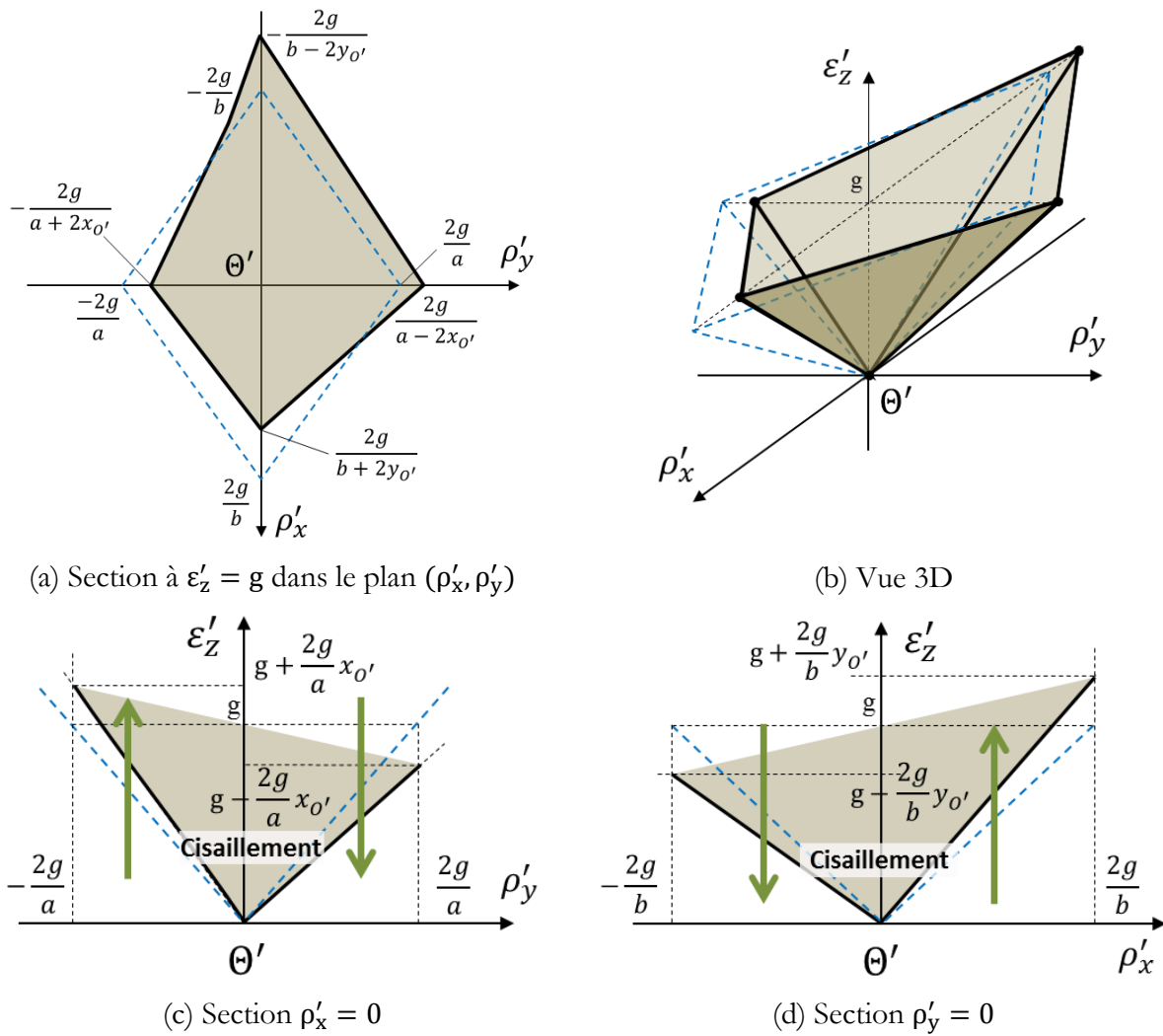


Fig. 3.21 – Domaine jeu correspondant à un changement de point d'expression

### 3.4.1.3 Base d'expression

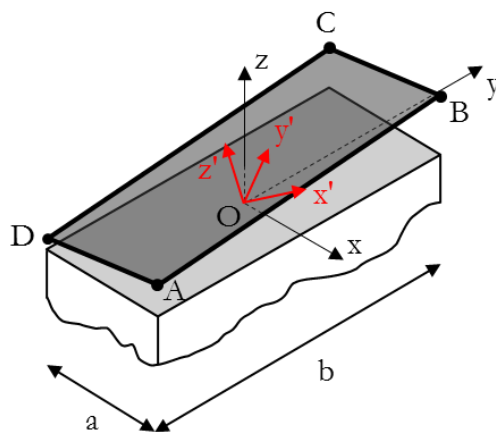


Fig. 3.22 – Changement de base d'expression

Pour un changement de base d'expression, la matrice de rotation est la suivante :

$$\mathbf{R}_{R \rightarrow R'} = \begin{bmatrix} 1 & -\rho_{Oz} & \rho_{Oy} \\ \rho_{Oz} & 1 & -\rho_{Ox} \\ -\rho_{Oy} & \rho_{Ox} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

La matrice de passage du repère R au repère R' s'écrit :

$$\mathbf{P}_{R \rightarrow R'} = \begin{bmatrix} 1 & -\rho_{Oz} & \rho_{Oy} & 0 & 0 & 0 \\ \rho_{Oz} & 1 & -\rho_{Ox} & 0 & 0 & 0 \\ -\rho_{Oy} & \rho_{Ox} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\rho_{Oz} & \rho_{Oy} \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{Oz} & 1 & -\rho_{Ox} \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_{Oy} & \rho_{Ox} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Pour l'étude des petits déplacements de la liaison plane, la transformation est réduite à :

$$\begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\rho_{Oz} & 0 \\ \rho_{Oz} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho'_x \\ \rho'_y \\ \varepsilon'_z \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Les déplacements exprimés dans R sont donc les images des déplacements exprimés dans R' par une petite rotation autour de l'axe  $\theta' \varepsilon'_z$  d'un angle de  $\rho_{Oz}$  radians. Il faut bien préciser que cette rotation s'effectue dans l'espace des petits déplacements, et non dans l'espace affine de dimension 3 de la liaison. Evidemment, la rotation inverse permet de passer des déplacements dans R' aux déplacements dans R.

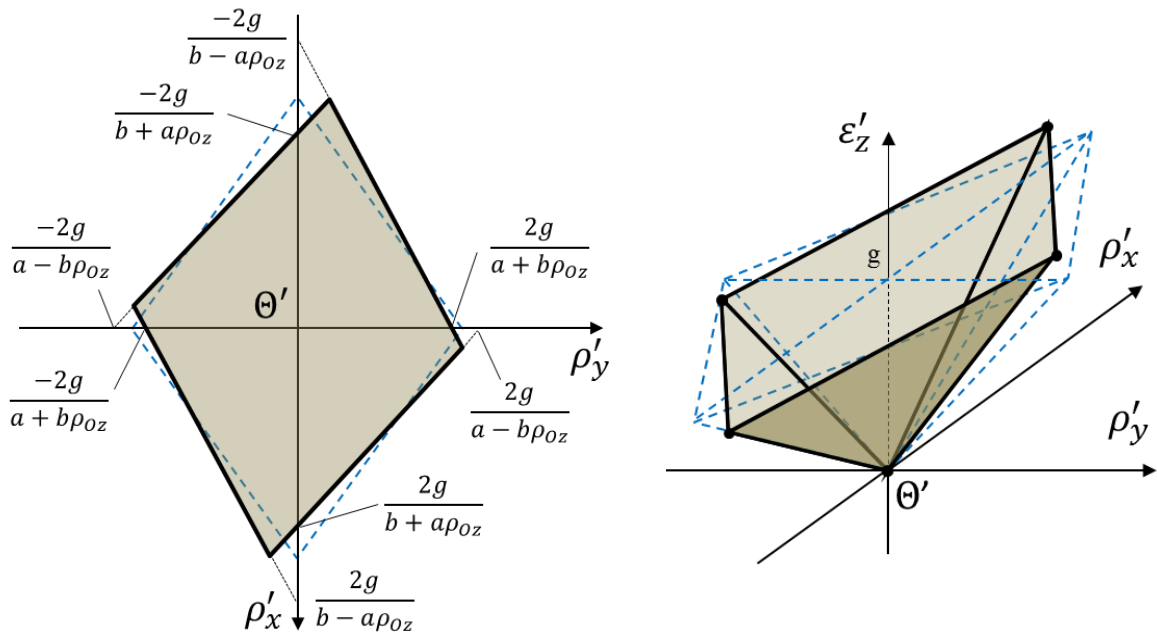
D'après l'équation (3.29), les composantes de petits déplacements dans le repère R s'expriment en fonction des petits déplacements dans le repère R' :

$$\begin{cases} \rho_x = \rho'_x - \rho_{Oz} \rho'_y \\ \rho_y = \rho_{Oz} \rho'_x + \rho'_y \\ \varepsilon_z = \varepsilon'_z \end{cases} \quad (3.38)$$

Le système d'inéquation (3.21) définissant le domaine jeu devient dans le nouveau repère R' :

$$\begin{cases} A : \varepsilon'_z + \left(-\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \rho_{Oz}\right) \rho'_y + \left(-\frac{b}{2} - \frac{a}{2} \rho_{Oz}\right) \rho'_x \geq 0 \\ B : \varepsilon'_z + \left(-\frac{a}{2} - \frac{b}{2} \rho_{Oz}\right) \rho'_y + \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2} \rho_{Oz}\right) \rho'_x \geq 0 \\ C : \varepsilon'_z + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2} \rho_{Oz}\right) \rho'_y + \left(\frac{b}{2} + \frac{a}{2} \rho_{Oz}\right) \rho'_x \geq 0 \\ D : \varepsilon'_z + \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \rho_{Oz}\right) \rho'_y + \left(-\frac{b}{2} + \frac{a}{2} \rho_{Oz}\right) \rho'_x \geq 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

Par exemple pour  $\rho_{Oz} > 0$ , le domaine exprimé au point O' est illustré ci-dessous (Fig. 3.23). Le domaine a subi une rotation telle que décrite précédemment par rapport au domaine dans un repère R (en bleu pointillé).



(a) Section à  $\varepsilon'_z = g$  dans le plan  $(\rho'_x, \rho'_y)$

(b) Vue 3D

Fig. 3.23 – Domaine jeu correspondant

**Remarque :** Les rotations de la base autour des axes  $x$  et  $y$  n'influencent pas le domaine.

### 3.4.2 Position de référence décalée

Dans les cas précédents, nous avons supposé qu'en position de référence, les repères  $R_1$  et  $R_2$  sont confondus. Par contre, si cela n'est pas le cas, (i.e. à la position de référence, la pièce 2 est décalée par rapport à la pièce 1), trois phénomènes interviennent :

- les déplacements selon les degrés de liberté entraînent une modification des points en vis-à-vis,
- les déplacements selon les degrés de liberté entraînent également une modification de la position et de la forme des limites de la surface de contact,
- les déplacements selon les degrés de liaison modifient les jeux en position de références.

Lors d'un petit déplacement dans le plan de la liaison, les points en vis-à-vis ne sont plus les mêmes entraînant une modification de la surface des différences. L'importance de la variation de la surface des différences est liée aux variations de formes locales des surfaces. Ce phénomène sera d'autant plus sensible que ces variations seront importantes. Ces variations locales sont complètement dépendantes des surfaces en présence, aussi nous n'étudierons pas ici leur influence, par contre, l'influence de la variation d'un sommet de la surface convexe des différences est étudiée au paragraphe 0.

En ce qui concerne les limites de la surface de contact, deux cas sont considérés :

- Les deux surfaces en contact ont les mêmes dimensions  $a \times b$ . Les dimensions et la morphologie du rectangle de contact varient donc à cause de la position de référence décalée des repères  $R_1$  et  $R_2$  (cf. Fig. 3.24). Ce cas rend le problème compliqué car la surface de contact change de contour et il ne sera pas étudié.

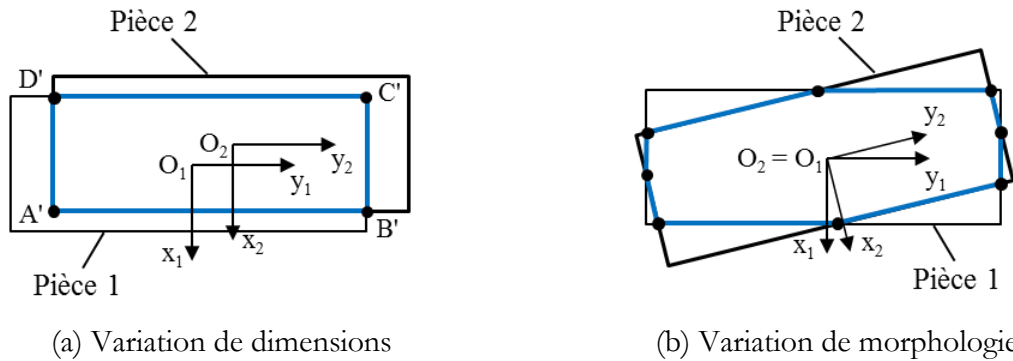


Fig. 3.24 – Variation de contact à cause de la position de référence décalée

- L'une des deux surfaces en contact est plus grande que l'autre. Pour que les dimensions et la morphologie du rectangle de contact restent les mêmes, nous supposons que les déplacements relatifs suivant les degrés de liaisons sont petits. La surface de contact et le repère  $R_2$  peuvent être décalés en translation et/ou en rotation (cf. Fig. 3.25).

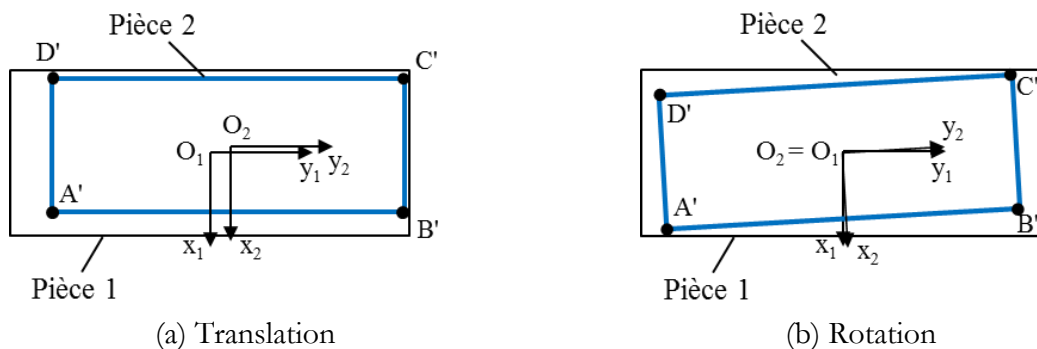


Fig. 3.25 – Décalage de la surface de contact

Le domaine jeu de la surface de contact décalée est déterminé en  $R$  que nous considérons ici confondu avec  $R_1$ . Le problème est similaire au problème précédent, pour lequel le repère  $R$  était décalé par rapport au repère  $R_1$  c'est-à-dire par rapport à la surface de contact. Plus exactement, il est identique au cas où le repère  $R$  est décalé d'une valeur opposée au décalage de la surface de contact considéré. Les résultats obtenus aux paragraphes 3.4.1.2 et 3.4.1.3 vont être retrouvés au signe près par la suite.

### 3.4.2.1 Translation relative des pièces

Ce paragraphe étudie l'influence des translations relatives des pièces (translations relatives de  $R_2$  par rapport  $R_1$ ) sur les contraintes de non-interférences, donc sur le domaine jeu.

Le vecteur position de l'origine  $O_2$  du repère  $R_2$  dans le repère  $R$  est :  $\vec{O}_2 = [x_{O_2} \ y_{O_2} \ z_{O_2}]^T$ .  
Les nouveaux vecteurs position des points caractéristiques sont alors :

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} + x_{O_2} \\ -\frac{b}{2} + y_{O_2} \\ z_{O_2} \end{bmatrix} \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} + x_{O_2} \\ \frac{b}{2} + y_{O_2} \\ z_{O_2} \end{bmatrix} \quad \vec{C} = \begin{bmatrix} -\frac{a}{2} + x_{O_2} \\ \frac{b}{2} + y_{O_2} \\ z_{O_2} \end{bmatrix} \quad \vec{D} = \begin{bmatrix} -\frac{a}{2} + x_{O_2} \\ -\frac{b}{2} + y_{O_2} \\ z_{O_2} \end{bmatrix}$$

D'après les équations (2.12) et (3.9), les nouvelles contraintes de non-interférences s'écrivent :

$$\begin{cases} A : \varepsilon_z + \left(-x_{O_2} - \frac{a}{2}\right) \rho_y + \left(y_{O_2} - \frac{b}{2}\right) \rho_x \geq z_{O_2} \\ B : \varepsilon_z + \left(-x_{O_2} - \frac{a}{2}\right) \rho_y + \left(y_{O_2} + \frac{b}{2}\right) \rho_x \geq z_{O_2} \\ C : \varepsilon_z + \left(-x_{O_2} + \frac{a}{2}\right) \rho_y + \left(y_{O_2} + \frac{b}{2}\right) \rho_x \geq z_{O_2} \\ D : \varepsilon_z + \left(-x_{O_2} + \frac{a}{2}\right) \rho_y + \left(y_{O_2} - \frac{b}{2}\right) \rho_x \geq z_{O_2} \end{cases} \quad (3.40)$$

Ces contraintes ont les mêmes formes que les inéquations (3.34) du changement d'origine d'expression. Le domaine jeu obtenu a donc la même forme, résultat d'un cisaillement mais il est en plus décalé selon l'axe  $\varepsilon_z$  d'une valeur  $z_{O_2}$ .

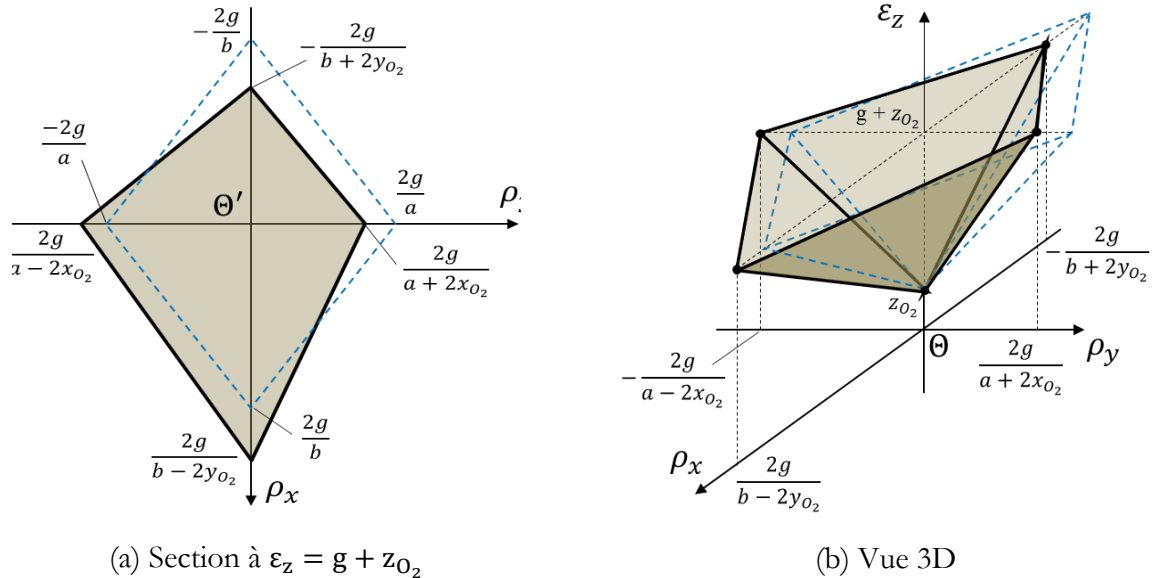


Fig. 3.26 – Domaine jeu correspondant

### 3.4.2.2 Rotation relative des pièces

Ce paragraphe étudie l'influence des rotations relatives des pièces (rotations relatives de  $R_2$  par rapport  $R_1$ ) sur les contraintes de non-interférences, donc sur le domaine jeu.

Les nouveaux vecteurs position des points caractéristiques sont trouvées grâce aux équations (2.6) et (3.35) :

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\rho_{Oz} \\ -\frac{b}{2} + \frac{a}{2}\rho_{Oz} \\ -\frac{b}{2}\rho_{Ox} - \frac{a}{2}\rho_{Oy} \end{bmatrix} \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} - \frac{b}{2}\rho_{Oz} \\ \frac{b}{2} + \frac{a}{2}\rho_{Oz} \\ \frac{b}{2}\rho_{Ox} - \frac{a}{2}\rho_{Oy} \end{bmatrix} \quad \vec{C} = \begin{bmatrix} -\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\rho_{Oz} \\ \frac{b}{2} - \frac{a}{2}\rho_{Oz} \\ \frac{b}{2}\rho_{Ox} + \frac{a}{2}\rho_{Oy} \end{bmatrix} \quad \vec{D} = \begin{bmatrix} -\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\rho_{Oz} \\ -\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\rho_{Oz} \\ -\frac{b}{2}\rho_{Ox} + \frac{a}{2}\rho_{Oy} \end{bmatrix}$$

D'après les équations (2.12) et (3.9), les nouvelles contraintes de non-interférences s'écrivent :

$$\begin{cases} A : \varepsilon_z + \left(-\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\rho_{Oz}\right)\rho_y + \left(-\frac{b}{2} + \frac{a}{2}\rho_{Oz}\right)\rho_x \geq -\frac{b}{2}\rho_{Ox} - \frac{a}{2}\rho_{Oy} \\ B : \varepsilon_z + \left(-\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\rho_{Oz}\right)\rho_y + \left(\frac{b}{2} + \frac{a}{2}\rho_{Oz}\right)\rho_x \geq \frac{b}{2}\rho_{Ox} - \frac{a}{2}\rho_{Oy} \\ C : \varepsilon_z + \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\rho_{Oz}\right)\rho_y + \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\rho_{Oz}\right)\rho_x \geq \frac{b}{2}\rho_{Ox} + \frac{a}{2}\rho_{Oy} \\ D : \varepsilon_z + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\rho_{Oz}\right)\rho_y + \left(-\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\rho_{Oz}\right)\rho_x \geq -\frac{b}{2}\rho_{Ox} + \frac{a}{2}\rho_{Oy} \end{cases} \quad (3.41)$$

Si nous ne considérons que la rotation relative  $\rho_{Oz}$  des deux pièces (donc  $\rho_{Ox} = \rho_{Oy} = 0$ ), les contraintes (3.41) ont la même forme que les contraintes (3.39). Le domaine jeu est donc le résultat d'une transformation du domaine jeu initial par une rotation d'axe  $\varepsilon_z$ .

Si nous considérons en plus les rotations relatives  $\rho_{Ox}$  et  $\rho_{Oy}$ , les quatre facettes du domaine jeu gardent les mêmes pentes que celles du domaine où nous ne considérons que  $\rho_{Oz}$ . Par contre, ces facettes se déplacent selon l'axe  $\varepsilon_z$  en fonction des rotations relatives  $\rho_{Ox}$  et  $\rho_{Oy}$  qui interviennent dans les seconds membres des contraintes (3.41). En raison de ces déplacements, le domaine jeu se déplace selon les axes  $\theta_{\varepsilon_z}$ ,  $\theta_{\rho_x}$  et  $\theta_{\rho_y}$ .

### 3.4.3 Synthèse

Les différents cas d'étude précédents sont résumés dans le tableau suivant. Les deux colonnes correspondent aux points de vue ou espaces considérés, espace des surfaces et espace des déplacements. Les différentes lignes correspondent aux cas étudiés de translation ou de rotation relative des surfaces (ou du repère R dans les cas correspondants lorsqu'ils existent).

Espace des surfaces	Espace des déplacements
Translation relative de la surface 2 par rapport à la surface 1 (ou de $R_0$ par rapport $R_1$ ) selon les degrés de liberté x et y	Cisaillement dans la direction de l'axe $\varepsilon_z$
Translation relative de la surface 2 par rapport à la surface 1 selon le degré de liaison z	Translation selon l'axe $\varepsilon_z$
Rotation relative de la surface 2 par rapport à la surface 1 selon les degrés de liaisons x et y	Translation selon les axes $\rho_x$ et $\rho_y$
Rotation relative de la surface 2 par rapport à la surface 1 (ou de $R_0$ par rapport $R_1$ ) selon le degré de liberté z	Rotation selon l'axe $\varepsilon_z$

Tableau 3.1 – Synthèse



### 3.5 Influence des incertitudes de mesure

Lors de la mesure, la surface convexe des différences et le domaine sont connus avec une incertitude dépendant des moyens de mesure. Chaque sommet de la surface convexe des différences obtenue par la mesure possède des écarts dus aux incertitudes de mesure des surfaces. De même, chaque sommet du domaine mesuré possède des écarts dus aux incertitudes de mesures des déplacements. Des écarts sont donc présents sur les sommets de l'élément mesuré entraînant également des écarts sur l'élément dual lors du passage de l'un à l'autre. Ce paragraphe s'attache à déterminer :

- l'influence de la position des sommets de la surface convexe des différences lors du passage au domaine
- et inversement, l'influence de la position des sommets du domaine sur la surface convexe des différences déduite.

#### 3.5.1 Influence de la position d'un sommet de la surface

La mesure des surfaces introduit une incertitude selon les trois axes de mesure de la machine, c.-à-d. des écarts en translation en  $z$  mais aussi en  $x$  et  $y$  des sommets de la surface convexe des différences. L'influence de ces écarts va être représentée par le nouveau domaine jeu obtenu.

##### 3.5.1.1 Ecart en $z$

Considérons un point  $C_i$  de la surface convexe des différences avec une incertitude  $\delta z_{C_i}$  en  $z$  :  $C_i = [x_{C_i} \ y_{C_i} \ z_{C_i} + \delta z_{C_i}]^T$ . D'après l'inéquation (3.9), la contrainte de non-interférence au point  $C_i$  s'écrit :

$$\varepsilon_z - x_{C_i}\rho_y + y_{C_i}\rho_x \geq z_{C_i} + \delta z_{C_i} \quad (3.42)$$

Cette contrainte représente une facette parallèle à celle du domaine jeu correspondant à la surface convexe des différences sans l'incertitude  $\delta z_{C_i}$  du point  $C_i$  (cf. Fig. 3.27).

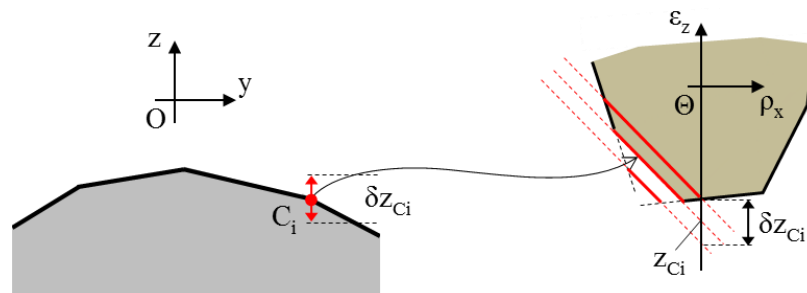


Fig. 3.27 – Ecart en  $z$

Ce phénomène est similaire à l'ajout d'un défaut de forme à la surface convexe des différences (voir paragraphe 3.3.2).

### 3.5.1.2 Ecart en x et y

Considérons un point  $C_i$  de la surface convexe des différences avec les incertitudes  $\delta x_{C_i}$  et  $\delta y_{C_i}$  en x et en y :  $C_i = [x_{C_i} + \delta x_{C_i} \quad y_{C_i} + \delta y_{C_i} \quad z_{C_i}]^T$ . D'après l'inéquation (3.9), la contrainte de non-interférence s'écrit :

$$\varepsilon_z - (x_{C_i} + \delta x_{C_i})\rho_y + (y_{C_i} + \delta y_{C_i})\rho_x \geq z_{C_i} \quad (3.43)$$

La pente de la facette varie avec les angles  $\delta x_{C_i}$  en  $\rho_y$  et  $\delta y_{C_i}$  en  $\rho_x$ . Le point d'intersection avec l'axe  $\varepsilon_z$  est identique. Le nouveau domaine est illustré en Fig. 3.28.

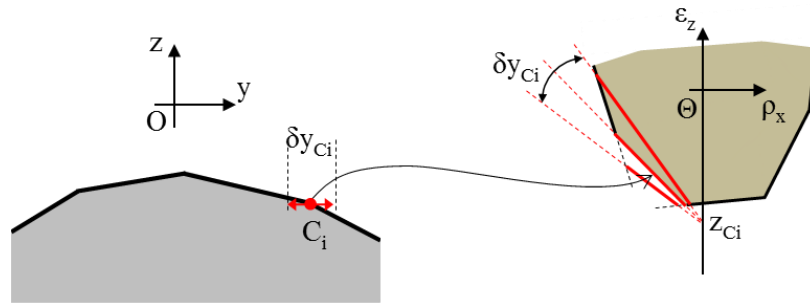


Fig. 3.28 – Ecart en x et y

## 3.5.2 Influence de la position d'un sommet du domaine

La mesure des déplacements introduit une incertitude sur les trois déplacements considérés, c.-à-d. des écarts en  $\varepsilon_z$  et en  $\rho_x$  et  $\rho_y$  des sommets du domaine jeu dans l'espace des petits déplacements. L'influence de ces écarts va être représentée par la nouvelle surface convexe des différences obtenue.

Ces incertitudes proviennent des incertitudes de mesure des capteurs proprement dites, mais également des incertitudes sur la position des capteurs, sur la qualité de la surface au niveau du palpeur, de l'étalonnage du zéro.

### 3.5.2.1 Ecart en $\varepsilon_z$

Considérons un point  $D_i$  du domaine jeu avec une incertitude  $\delta \varepsilon_{zD_i}$  en  $\varepsilon_z$  :  $C_i = [\rho_{xD_i} \quad \rho_{yD_i} \quad \varepsilon_{zD_i} + \delta \varepsilon_{zD_i}]^T$ . Ce point correspond à une facette de la surface convexe des différences. D'après l'équation (3.18), les points  $P_i$  appartenant à cette facette doivent satisfaire la condition suivante :

$$-x_{P_i}\rho_{yD_i} + y_{P_i}\rho_{xD_i} + \varepsilon_{zD_i} + \delta \varepsilon_{zD_i} = z_{P_i} \quad (3.44)$$

Nous observons que cette facette garde la même pente quelle que soit l'incertitude  $\delta \varepsilon_{zD_i}$  en  $\varepsilon_z$  du point  $D_i$ . Par contre, cette facette se déplace parallèlement avec une distance  $\delta \varepsilon_{zD_i}$  selon l'axe z (cf. Fig. 3.29).

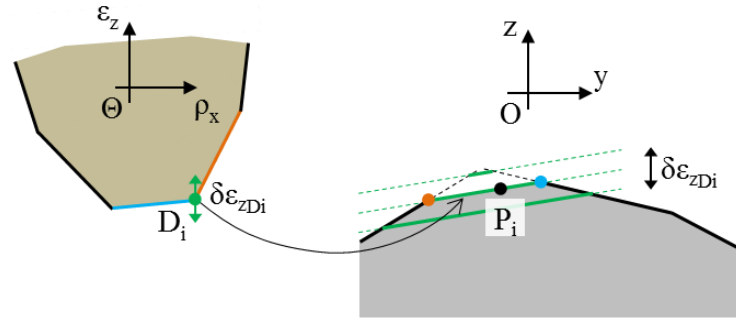


Fig. 3.29 – Ecart en  $\varepsilon_z$

### 3.5.2.2 Ecart en $\rho_x$ et $\rho_y$

Considérons un point  $D_i$  du domaine jeu avec les incertitudes  $\delta\rho_{xDi}$  et  $\delta\rho_{yDi}$  en  $\rho_x$  et en  $\rho_y$  :  $D_i = [\rho_{xDi} + \delta\rho_{xDi} \quad \rho_{yDi} + \delta\rho_{yDi} \quad \varepsilon_{zDi}]^T$ . D'après l'équation (3.18), les points  $P_i$  appartenant à cette facette doivent satisfaire la condition suivante :

$$-x_{Pi}(\rho_{yDi} + \delta\rho_{yDi}) + y_{Pi}(\rho_{xDi} + \delta\rho_{xDi}) + \varepsilon_{zDi} = z_{Pi} \quad (3.45)$$

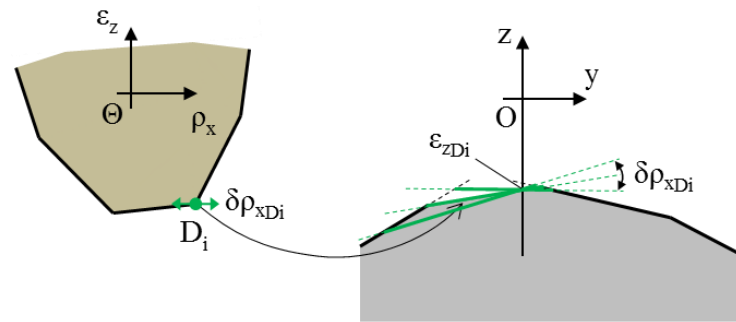


Fig. 3.30 – Ecart en  $\rho_x$  et  $\rho_y$

La pente de la facette illustrée en Fig. 3.30 varie avec les angles  $\delta\rho_{yDi}$  en  $x$  et  $\delta\rho_{xDi}$  en  $y$ .

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu les développements théoriques nécessaires à la métrologie et à l'analyse des déplacements dans une liaison plane unilatérale. Ils montrent principalement la dualité entre les deux concepts : domaine jeu et surface convexe des différences. Cette dualité est utilisée dans le chapitre suivant pour le traitement des données obtenues à partir des mesures. Les développements théoriques montrent également la typologie des domaines et l'influence des incertitudes de mesure sur les domaines. L'étude typologique permet d'obtenir des premières connaissances de l'influence des défauts de forme sur les domaines. Les typologies définies dans ce chapitre seront comparées aux résultats expérimentaux présentés au chapitre 5.

# 4

## **Dispositif expérimental et traitement associé**

Ce chapitre présente le dispositif expérimental nécessaire à la mesure des déplacements et des surfaces d'une liaison plane avec jeu. Le chapitre débute par la présentation de deux anciens dispositifs et de leurs limites qui conduisent à la conception d'un nouveau dispositif. Ce dernier permet de diminuer les incertitudes présentées dans le chapitre précédent. Les procédures de mesure et de traitement des mesures sont ensuite décrites.

## 4.1 Dispositif expérimental existant

### 4.1.1 Un peu d'histoire

Le premier dispositif expérimental de mesure spatiale des petits déplacements d'une liaison plane avec jeux a été développé par (Ballu et Couétard, 1995) dans le cadre des enseignements de cotation à l'université de Bordeaux 1. L'objectif était de sensibiliser les étudiants à la notion de domaine jeu en mettant en évidence la dépendance entre translation et rotation ainsi que l'influence prépondérante des défauts de forme pour un jeu faible.



Fig. 4.1 – Premier dispositif expérimental utilisé pour des enseignements de cotation

La liaison étudiée est une liaison plane bilatérale constituée par une barre à section rectangulaire placée dans une rainure (cf. Fig. 4.3a). Les surfaces de contact entre les deux pièces de la liaison sont deux rectangles de dimensions 25mm×50mm.

Comme nous l'avons présenté sommairement dans le chapitre précédent, la mesure de déplacements relatifs entre les deux pièces s'effectue grâce à des capteurs de déplacements linéaires. Les capteurs utilisés sont capteurs DP5 de Solartron Metrology basés sur la technologie LVDT. La gamme de mesure des déplacements du modèle utilisé est de 5mm avec une précision de  $0.5\mu\text{m} + 2,5 \times D \mu\text{m}$  avec D le déplacement mesuré en millimètres. Dans toutes les mesures effectuées, la valeur de D maximale est de l'ordre de 0,2mm, soit une précision des capteurs d'environ  $1\mu\text{m}$ .

Pour une liaison plane, trois capteurs sont utilisés. Ils sont fixes par rapport à une des deux pièces. Les touches des capteurs sont en contact avec la seconde pièce et mesurent les déplacements relatifs dus aux jeux dans la liaison.

La manipulation consiste alors à déplacer manuellement une pièce selon le jeu dans la liaison, sans déplacements selon les degrés de liberté. Durant le déplacement, l'acquisition des mesures est réalisée automatiquement avec une fréquence de 100Hz pendant environ 30s.

L'étalonnage du zéro des capteurs est réalisé en position d'équilibre d'une pièce sur l'autre. Cette position correspond à l'appui plan sans jeu entre les deux surfaces planes des pièces (cf. Fig. 4.2a).

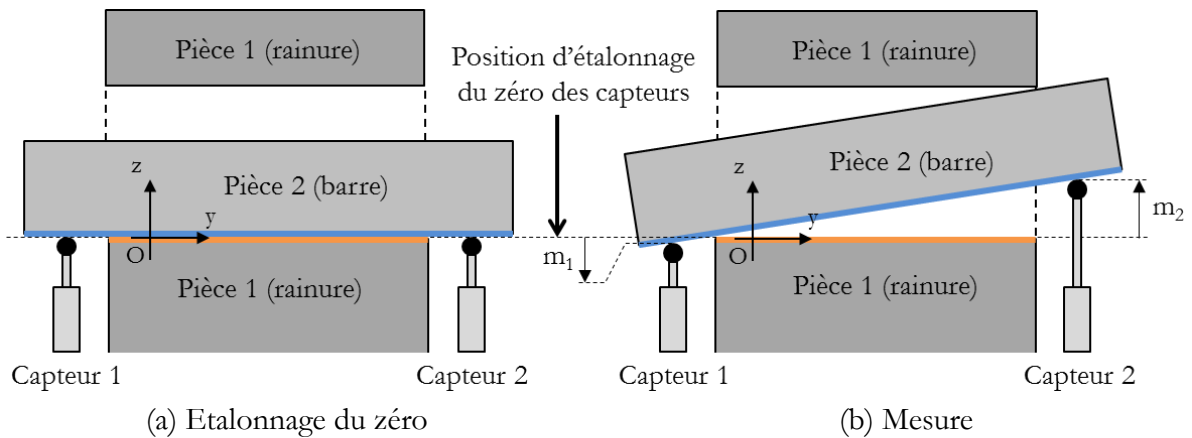


Fig. 4.2 – Procédure d'étalonnage et de mesure

L'acquisition des données et leur traitement étaient réalisés respectivement à l'aide des logiciels Physcope et Maple. Le traitement numérique permet de déterminer les petits déplacements entre les deux pièces à partir des mesures. Grâce au grand nombre de données, le domaine jeu peut être représenté dans des plans de projection 2D.

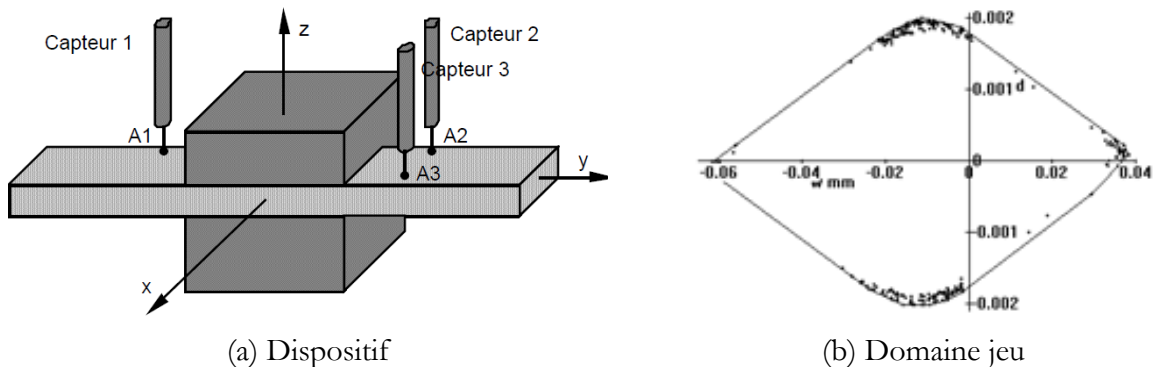


Fig. 4.3 – Premier dispositif

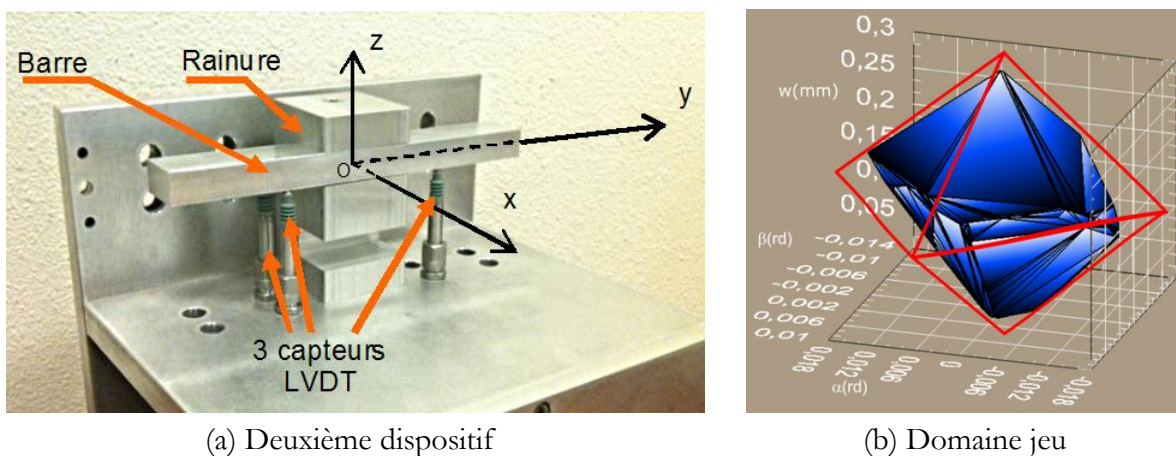


Fig. 4.4 – Deuxième dispositif de mesure d'une liaison plane bilatérale et son domaine jeu

Un deuxième dispositif de mesure d'une liaison plane bilatérale a été réalisé en fixant les capteurs dans la direction opposée (cf. Fig. 4.4a), le principe général de mesure reste parfaitement identique. Sur ce deuxième dispositif, l'acquisition et le traitement ont été intégrés en un seul logiciel développé sous LabVIEW. Les derniers développements réalisés sous LabVIEW permettaient de représenter des domaines jeu 3D, comme présenté en Fig. 4.4b.

#### 4.1.2 Mesure des surfaces et comparaisons des résultats

En parallèle des mesures de déplacements, des mesures des surfaces de contact à l'aide d'une machine à mesurer tridimensionnelle ont été conduites. Ces mesures avaient pour objectifs de montrer l'influence des défauts de forme sur les domaines jeu. Cependant, il s'est avéré que la précision de la MMT n'était pas suffisante pour établir un lien entre les défauts de forme et la forme des domaines.

Etant donné la difficulté à mesurer deux surfaces d'une pièce de normales opposées avec une grande précision, de l'ordre de 1 à 2 micromètres, l'étude s'est orientée vers une liaison unilatérale. En effet, la mesure d'une surface isolée est plus facile et peut-être réalisée avec un appareil de mesure de topographie.

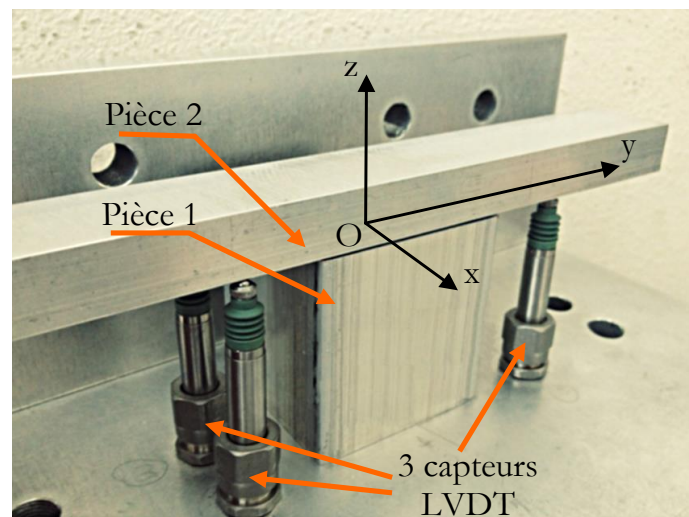


Fig. 4.5 – Liaison plane unilatérale

Mon travail expérimental de thèse a débuté par la mise en place de la procédure de mesure des surfaces en contact de la liaison plane pour vérifier les résultats de la mesure des déplacements. La Fig. 4.6 illustre la méthode expérimentale développée :

- La première ligne concerne la procédure de mesure à partir des déplacements : la mesure des déplacements permet de déterminer le domaine jeu qui permet lui-même de déterminer la surface convexe des différences.
- La dernière ligne illustre la procédure de mesure à partir des surfaces : la mesure des surfaces permet de déterminer la surface convexe des différences qui est utilisée pour déterminer le domaine jeu. La mesure des surfaces est réalisée sur un appareil de mesure



de topographie Altisurf© 500 d'Altimet. Cet appareil permet une précision de mesure entre  $1000\mu\text{m} - 31\text{nm}$ .

- La ligne intermédiaire représente les comparaisons réalisées entre les surfaces et les domaines obtenus.

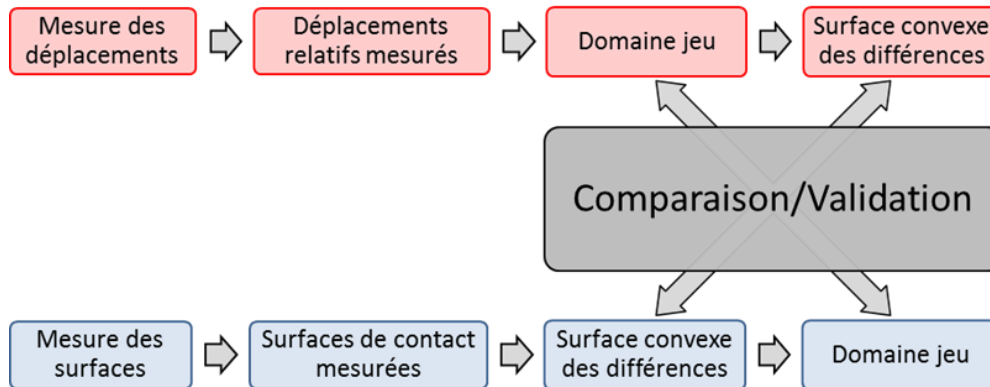


Fig. 4.6 – Méthode expérimentale développée

Les passages du domaine jeu à la surface convexe des différences, et vice-versa, sont rendus possibles grâce aux développements théoriques réalisés au chapitre 3. Le traitement des données est réalisé sous Matlab ainsi qu'une interface graphique permettant de comparer les domaines jeux et les surfaces convexes des différences (cf. Fig. 4.7). A ce stade du travail, la comparaison porte sur la forme des domaines et des surfaces. En effet, leur position relative dépend de références, mais ces références ne sont pas communes pour la mesure des déplacements et pour la mesure des surfaces. Aussi, un ajustement visuel est réalisé pour rapprocher au mieux les entités l'une de l'autre. Un(e) des deux domaines (ou surfaces) est déplacé(e) par rapport à l'autre fixé(e) grâce aux paramètres des petits déplacements. Pour cela, nous utilisons les résultats obtenus dans le paragraphe 3.4.2 du chapitre 3 sur l'influence du décalage des surfaces.

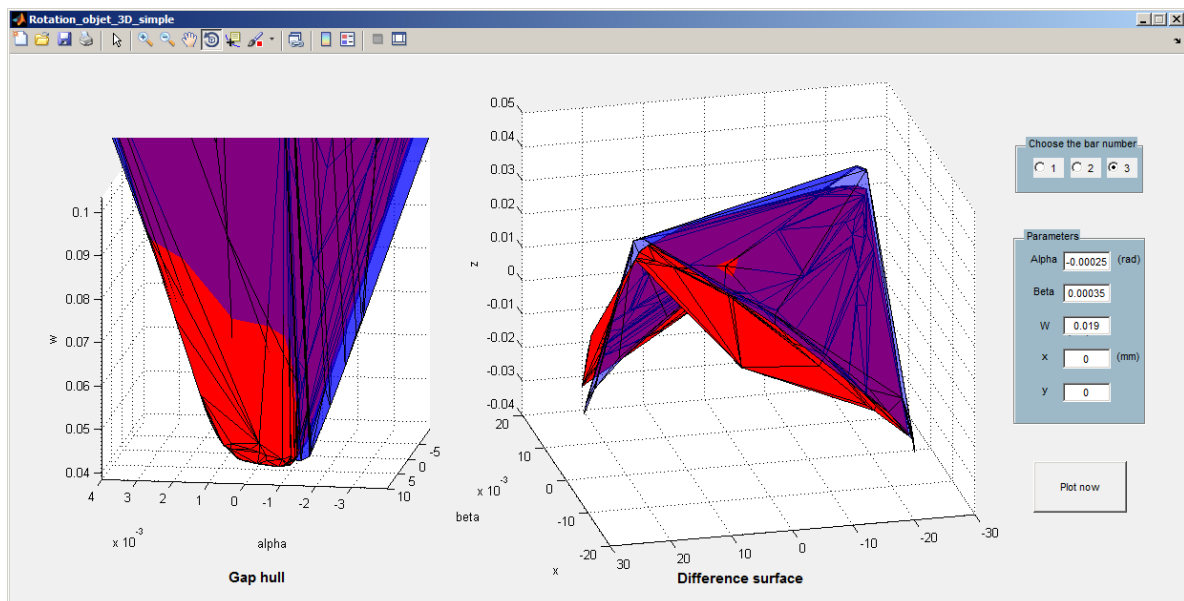


Fig. 4.7 – Interface graphique pour les comparaisons



### 4.1.3 Analyse critique de la procédure

La Fig. 4.7 illustre sur un exemple la bonne concordance des résultats obtenus. Cependant cet exemple a été réalisé avec des pièces ayant des défauts de forme relativement importants (de l'ordre de 0,06mm) par rapport à la dimension de la surface (25mm×50mm). L'objectif est de parvenir à réaliser la comparaison pour des surfaces présentant moins de défauts et avec des références communes. De ce point de vue, le dispositif expérimental montre certaines limites. Elles peuvent influencer les résultats numériques des mesures (des déplacements, des surfaces) ainsi que les comparaisons en fonction des incertitudes et leurs propagations dans les traitements numériques présentées au chapitre 3.

#### 4.1.3.1 Problème de référence selon les degrés de liaison

En premier lieu, le manque de référence commune empêche une comparaison complète des résultats. Le problème de référence selon les degrés de liaison se pose pour les mesures des déplacements et des surfaces en même temps car il faudrait une référence commune.

- Pour la mesure des déplacements :

La procédure d'étalonnage présentée en Fig. 4.2a est une procédure théorique. En effet, notre but est de travailler avec les pièces comportant des défauts de forme. On n'a donc pas une bonne mise en position relative sans jeu comme illustrée en Fig. 4.2a. De plus, les zones en contact avec les capteurs de la pièce 2 ont des défauts d'orientation, de forme et d'états de surface locaux. La procédure réelle est illustrée en Fig. 4.8. Ces défauts entraînent des incertitudes sur les mesures.

- Pour la mesure des surfaces :

La mesure des surfaces donne des surfaces discrétisées (voir paragraphe 3.1.3.1 du chapitre 3). Pour l'étape de calcul de la surface des différences, il manque une position de référence pour laquelle les deux repères associés aux deux surfaces mesurées sont confondus. La surface des différences calculée à partir des distances entre deux surfaces selon l'axe z est donc définie à deux rotations et une translation près.

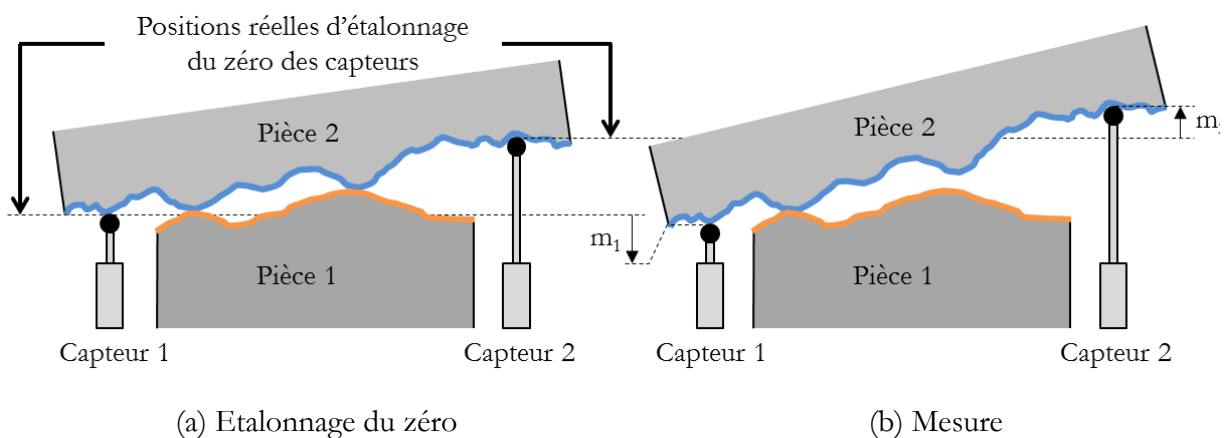


Fig. 4.8 – Procédure réelle d'étalonnage et de mesure

### 4.1.3.2 Problème de positionnement selon les degrés de liberté

Les problèmes de référence se posent pour la mesure des déplacements selon les degrés de liaison. D'autres problèmes se posent pour les déplacements selon les degrés de liberté.

- Lors de la mesure des déplacements :

Selon les degrés de liberté, les translations selon les axes x et y et la rotation autour de l'axe z sont théoriquement nulles. L'étude est restreinte à une position donnée selon les mobilités. Le dispositif n'a pas de système de positionnement des deux pièces permettant de bloquer ces mobilités, c'est l'opérateur qui doit limiter ces déplacements lorsqu'il manipule les pièces. Ceci entraîne des déplacements relatifs des surfaces en contact et donc des points en vis-à-vis, d'où la modification du domaine jeu. Ces déplacements peuvent également avoir une influence sur la mesure elle-même car les points de contact des capteurs sont modifiés et les surfaces de contact ont localement des défauts de forme et de rugosité.

- Lors de la mesure des surfaces :

Les zones de contact sont délimitées par les bords de la pièce dans une direction et par des traits gravés sur la surface plane dans l'autre direction. Un repère de mesure est construit à partir de ces limites. Nous avons remarqué des problèmes de répétabilité de la construction du repère. De plus, l'utilisateur doit aligner visuellement les traits lors de la manipulation afin de garantir que les surfaces en vis-à-vis soient correctement positionnées (c.-à-d. que les origines des repères restent alignées).

### 4.1.3.3 Répétabilité

Un autre point important est la répétabilité des mesures. La manipulation manuelle ne donne pas des mesures répétables, non seulement pour des problèmes de positionnement des pièces comme nous venons de le mettre en évidence, mais aussi à cause de la manipulation manuelle. Les actions et déplacements manuels ne sont pas identiques entre opérateurs et pour un même opérateur lors de manipulations successives. Ainsi, il y a un risque que l'ensemble des positions identifiées du domaine ne soit pas les mêmes. De plus, des efforts différents lors de la manipulation peuvent induire des déformations des pièces et surfaces et engendrer des écarts d'une mesure à une autre.

## 4.2 Nouveau dispositif

Suite à cette analyse critique, nous avons développé un nouveau dispositif afin d'améliorer le système de mesure et la corrélation entre la mesure des déplacements et la mesure des surfaces.

### 4.2.1 Cahier des charges

Dans un premier temps, nous allons présenter les principaux points du cahier des charges.

#### **4.2.1.1 Mesure**

Le dispositif à concevoir doit permettre la mesure des déplacements relatifs entre les surfaces fonctionnelles à l'aide de capteurs de déplacements linéaires de type LVDT. La technologie des capteurs est conservée car elle a fait ses preuves avec l'ancien dispositif et présente des qualités métrologiques suffisantes en termes de justesse et de répétabilité.

De même, la forme des surfaces fonctionnelles sera toujours mesurée à l'aide de l'appareil de mesure de topographie Altisurf© 500 d'Altimet dont nous disposons.

#### **4.2.1.2 Liaison étudiée**

La liaison étudiée reste une liaison plane unilatérale avec une surface de contact rectangulaire. Les dimensions minimales souhaitées sont de 50mm×50mm. Nous faisons donc le choix d'une surface plus importante que pour l'ancien dispositif. La taille maximale est limitée par la taille du champ de mesure de l'appareil de topographie (100mm×100mm).

#### **4.2.1.3 Références**

Le point important du cahier des charges porte sur la mise en place de références communes pour les mesures. Des références doivent donc être considérées sur les deux pièces, ces références devant servir aussi bien à la mesure des déplacements qu'à la mesure des surfaces.

Pour la mesure des déplacements : les références doivent permettre d'effectuer un *zéro* (définition de l'origine) sur les capteurs LVDT.

Pour la mesure des surfaces : les positions en altitude des points mesurés doivent être données par rapport aux références.

#### **4.2.1.4 Positionnement selon les degrés de liberté**

D'une part, le dispositif doit introduire un système qui limite les déplacements relatifs entre les pièces selon les degrés de liberté. D'autre part, il doit laisser un jeu non nul pour que les pièces puissent se déplacer selon les degrés de liaison.

#### **4.2.1.5 Montage des capteurs**

Connaissant le type de capteur de déplacement utilisé, il s'ensuit des contraintes sur leur montage. Ce dernier doit assurer : une orientation dans la direction des déplacements selon les degrés de liaison, orthogonale au plan de contact.

#### **4.2.1.6 Actionnement**

Le dispositif doit introduire une prise en main ergonomique qui permet à l'utilisateur de manipuler facilement les déplacements. Afin de rendre systématique la phase de manipulation, des actionneurs devront pouvoir s'adapter sur le dispositif (actionneurs de déplacement en translation).

## 4.2.2 Recherche de concepts

A partir du cahier des charges, différents concepts de solutions peuvent être développés.

### 4.2.2.1 Références

La solution la plus simple pour les références est d'avoir un plan de référence fixé sur chaque pièce.

Ainsi, le plan de référence associé à la pièce 1 permet l'étalonnage du *zéro* des capteurs. Pour cela, une cale rectifiée est positionnée en appui sur ce plan et la prise d'origine du capteur est alors réalisée.

Le plan de référence de la pièce 2 permet de mesurer les déplacements relatifs des pièces par rapport à ce zéro. L'origine des déplacements est donc identifiée comme la position où les deux plans de référence sont confondus. La procédure d'étalonnage est détaillée au paragraphe 4.3.1.1.1.

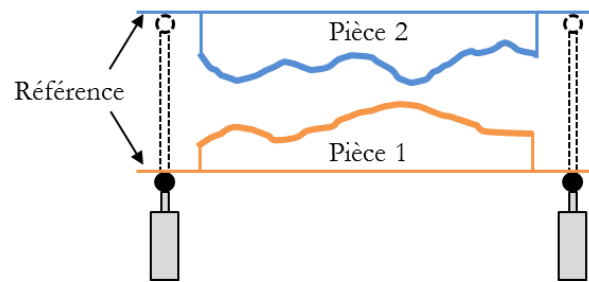


Fig. 4.9 – Références

Les plans de référence doivent donc :

- Avoir une bonne qualité géométrique afin de ne pas introduire d'incertitudes dues à leur état de surface.
- Être perpendiculaires aux capteurs pour :
  - Mesurer la tangente de l'angle de rotation, bien que l'influence sera négligeable dans notre cas car les angles seront faibles,
  - Minimiser les erreurs dues à des déplacements latéraux
- Être en retrait selon l'axe z par rapport aux surfaces étudiées :
  - Comme les références ne peuvent être qu'extérieures aux surfaces étudiées pour conserver l'intégrité des surfaces, elles doivent être en retrait pour ne pas gêner les déplacements (pas d'interférence de matière)
  - Elles ne doivent pas être trop éloignées pour minimiser les incertitudes lors de leur mesure sur l'appareil de mesure de topographie
  - Leurs positions doivent être réglables selon l'axe z par rapport à la surface étudiée de manière à être ajustée en fonction de la position des surfaces.

### 4.2.2.2 Limitation des déplacements selon les degrés de liberté

Un système de limitation des déplacements selon les degrés de liberté doit être mis en place. Cependant, ce système doit laisser un jeu minimal suffisant pour conserver les déplacements relatifs selon les degrés de liaisons.

Du point de vue isostatique, le dispositif à concevoir doit être équivalent à un encastrement (les six degrés de liberté sont bloqués). La liaison plane entre deux surfaces avec défauts de forme limite trois degrés de liaison ( $\rho_x, \rho_y, \varepsilon_z$ ). Le système de limitation doit donc restreindre les autres déplacements. Il peut être modélisé par une liaison linéaire annulaire et une liaison ponctuelle. La modélisation cinématique des liaisons du dispositif est alors représentée en Fig. 4.10.

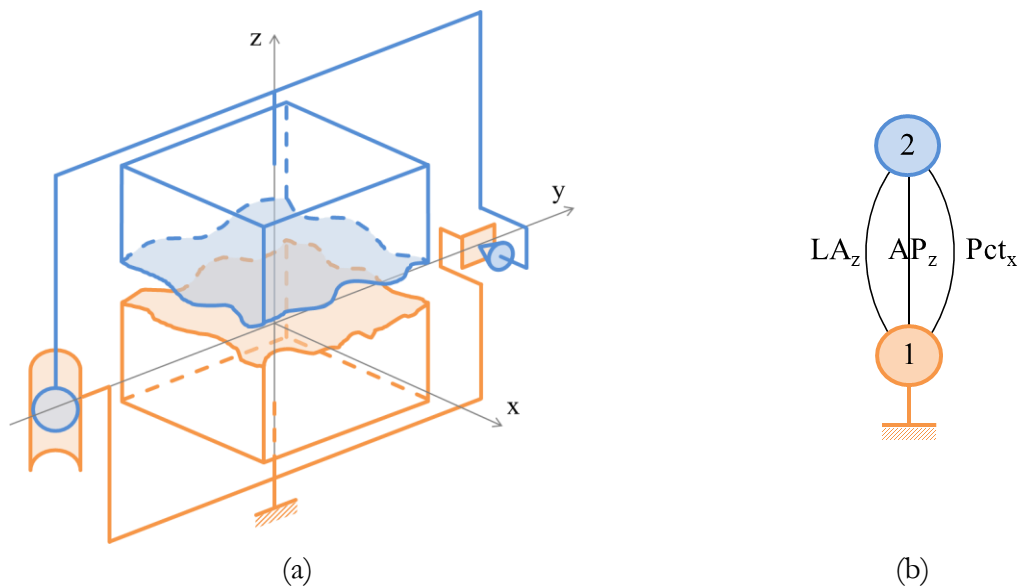


Fig. 4.10 – Modélisation cinématique des liaisons du dispositif (a) et graphe des liaisons (b)

Technologiquement, il a été choisi de réaliser ce montage à l'aide de trous et pions de centrage. Ces derniers permettent d'une part de limiter les déplacements non-bloqués et d'autre part de définir les repères utilisés pour le traitement de la mesure des surfaces (voir paragraphe 4.3.2.2).

### 4.2.3 Choix de conception

#### 4.2.3.1 Architecture

Les principes étant définis, il reste à identifier une architecture du montage. Afin de ne pas gêner le contact, les surfaces de référence doivent être sur les côtés. Diverses architectures sont envisagées (voir Tableau 4.1).

La dernière architecture a été choisie. Elle est justifiée par les critères suivants :

- Simplicité : le dispositif doit contenir un nombre de pièces réduit et des pièces ayant une géométrie simple pour faciliter la fabrication et l'assemblage des pièces. Le système de réglage par des cales est compliqué à mettre en œuvre,

- Rigidité : les liaisons directes barres-pièces de la dernière architecture assure une meilleure rigidité que la solution avec une référence en U.
- Interchangeabilité, adaptabilité : la dernière architecture permet également de s'adapter facilement à des pièces de différentes dimensions sans devoir usiner de nouvelles pièces pour les références.

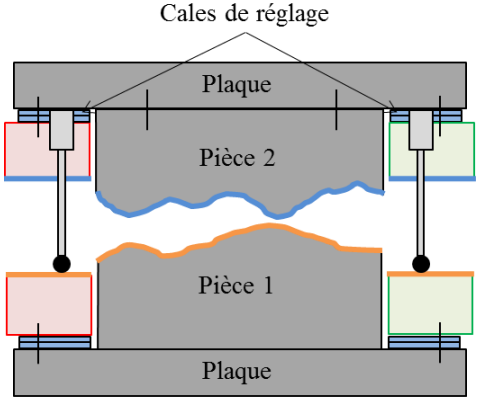
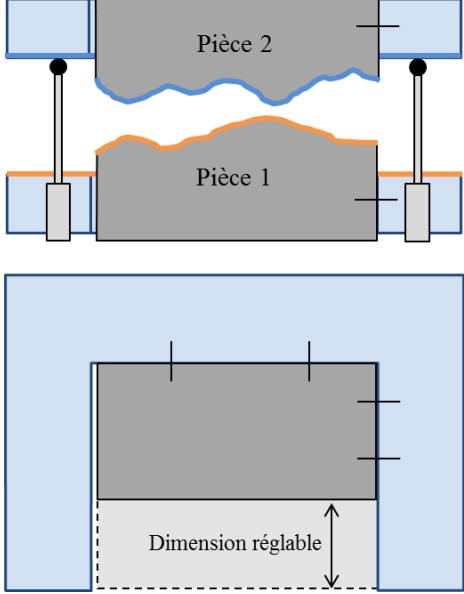
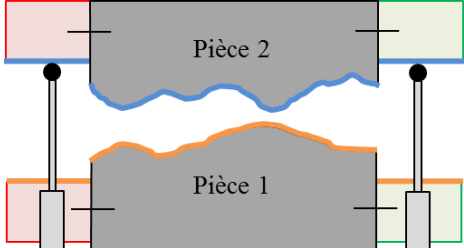
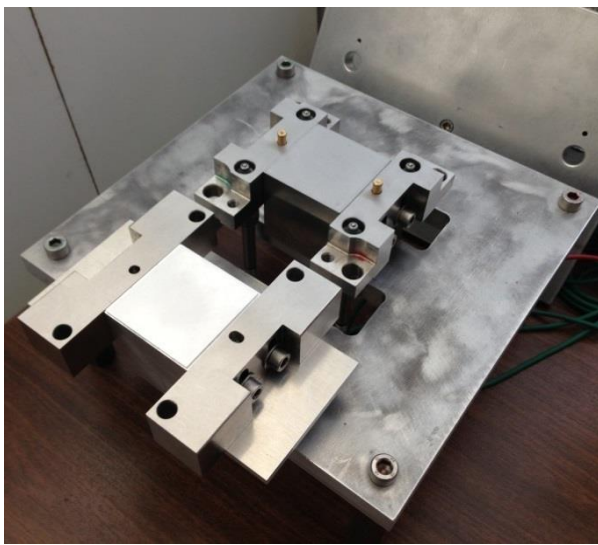
Architecture	Description
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 2 barres de référence séparées pour chaque pièce disposées de part et d'autre</li> <li>• Fixation des barres de référence par une plaque fixée à la pièce. Réglage en hauteur par des cales de réglage</li> <li>• Capteurs fixes par rapport à la pièce 2</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cadre de référence ouvert entourant la pièce</li> <li>• Fixation des cadres de référence par le côté</li> <li>• Réglage en hauteur par des trous oblongs</li> <li>• Capteurs fixes par rapport à la pièce 1</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 2 barres de référence séparées pour chaque pièce</li> <li>• Fixation des barres de référence par le côté</li> <li>• Réglage en hauteur par des trous oblongs</li> <li>• Capteurs fixes par rapport à la pièce 1</li> </ul>

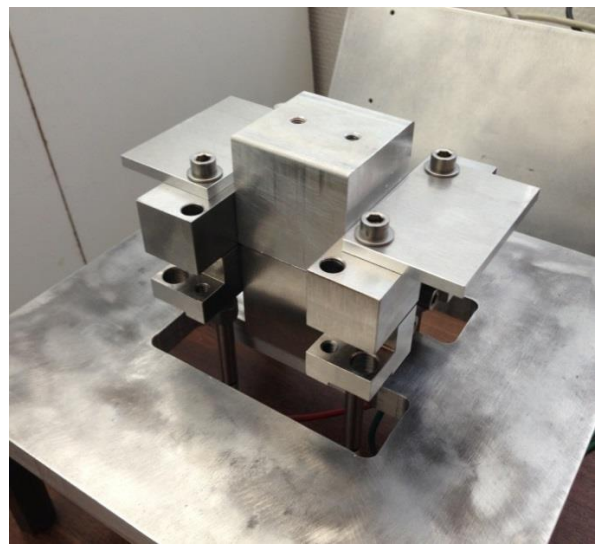
Tableau 4.1 – Architectures envisagées

### 4.2.3.2 Description du dispositif conçu et fabriqué

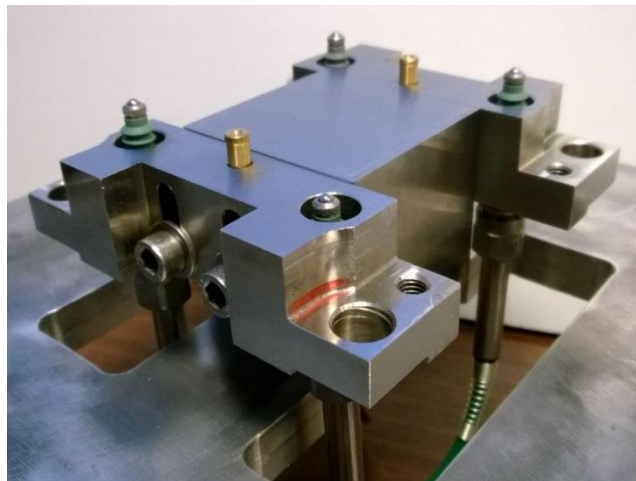
Le dispositif et son modèle CAO sont illustrés aux figures Fig. 4.11 et Fig. 4.12. Les surfaces de référence des barres de référence (3, 4, 5, 6) sont rectifiées afin d'avoir des défauts de forme réduits. Ces barres sont montées sur les pièces (1, 2) par les vis (8). La hauteur de la surface de référence par rapport à la surface de contact de la pièce est réglable par les trous oblongs pour garantir un bon fonctionnement. Les capteurs choisis sont les mêmes que ceux utilisés dans les anciens dispositifs (type LVDT, DP5 de Solartron Metrology). Ils sont fixés aux trous ( $3_1$ ,  $3_2$ ,  $4_1$ ,  $4_2$ ). Le positionnement selon les degrés de liberté (le système de positionnement) est effectué par les pions ( $7$ ,  $7'$ ) et le trou normal ( $6_1$ ) et oblong ( $5_1$ ). Les plaquettes ( $9$ ,  $9'$ ) permettent une prise en main aisée lors de la manipulation manuelle pour rechercher les positions extrêmes de déplacements.



(a) Vue séparée



(b) Vue assemblée



(c) Montage des capteurs sur la pièce 1

Fig. 4.11 – Dispositif réalisé

Des éléments supplémentaires ont été prévus pour une utilisation ultérieure, en particulier afin de pouvoir réaliser un actionnement des déplacements par des vérins électriques.



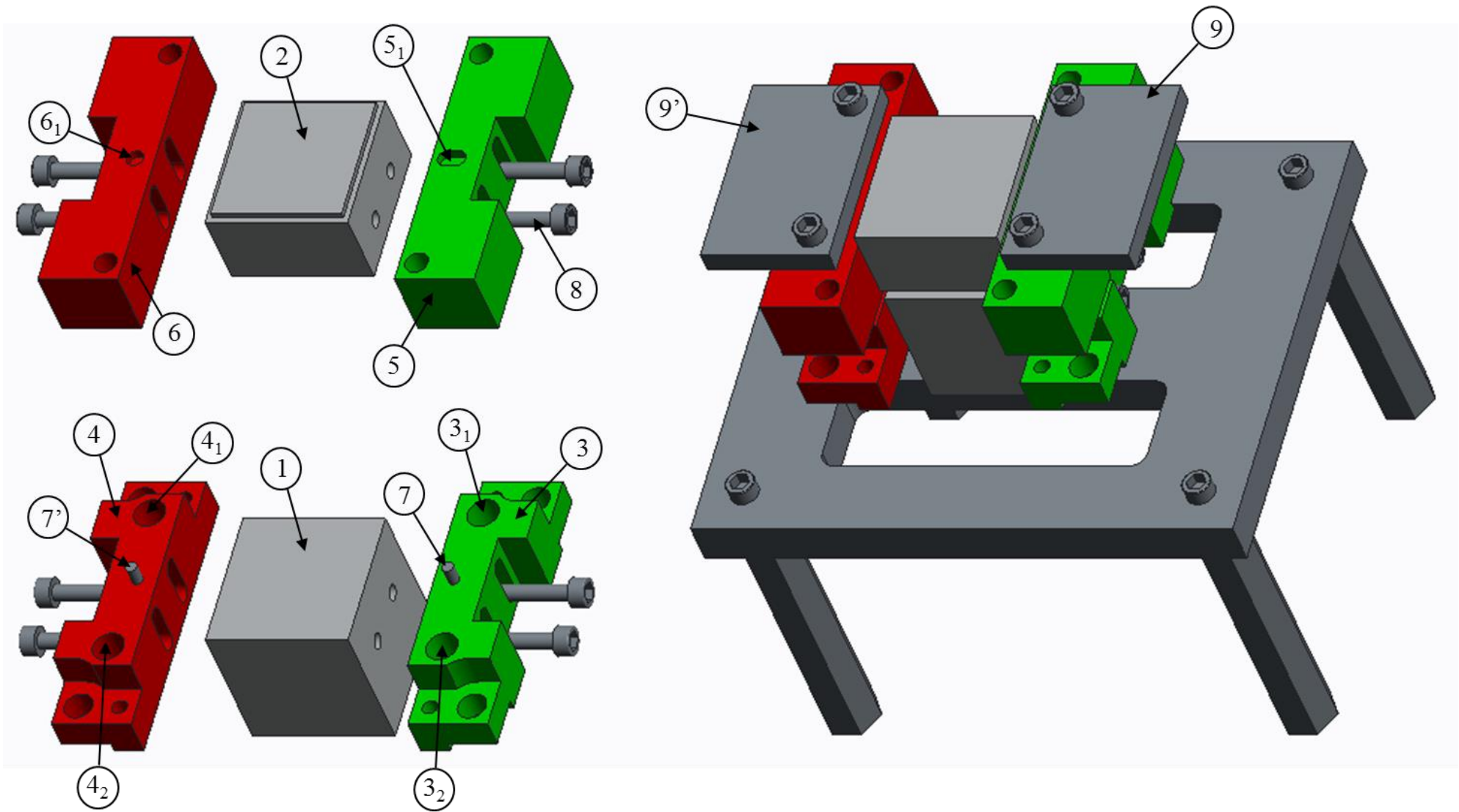


Fig. 4.12 – Modèle CAO du dispositif



## 4.3 Mise en œuvre

Dans la suite du chapitre, nous allons définir la procédure de mise en œuvre du montage, cela permettra de préciser le fonctionnement du dispositif.

### 4.3.1 Mesure des déplacements

La procédure de mesure des déplacements est illustrée en Fig. 4.13. Elle se compose de deux principales étapes : la mesure puis le traitement. Afin de faciliter la lecture, à chaque étape est précisé le numéro du paragraphe explicatif correspondant.

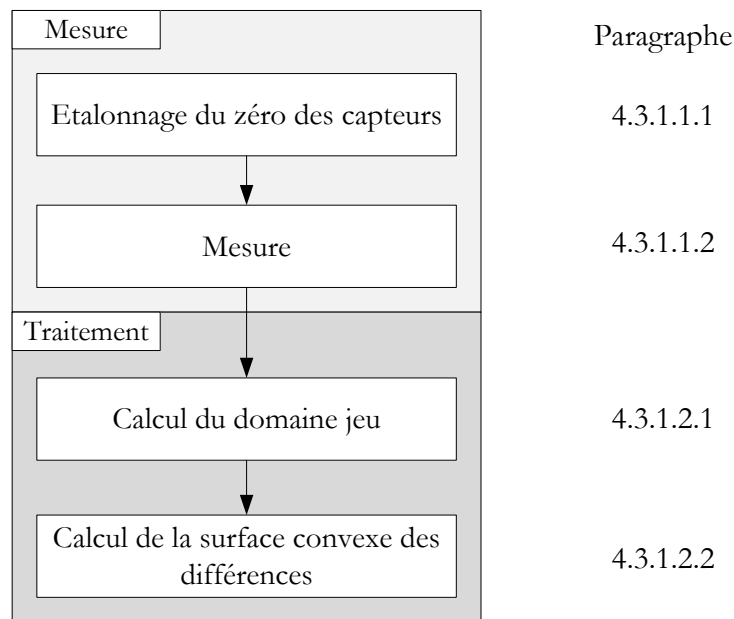


Fig. 4.13 – Synoptique de mesure des déplacements

#### 4.3.1.1 Procédure de mesure

La procédure de mesure se déroule en deux étapes, l'étalonnage du zéro des capteurs et la mesure des déplacements.

##### 4.3.1.1.1 Etalonnage du zéro des capteurs par cales étalons

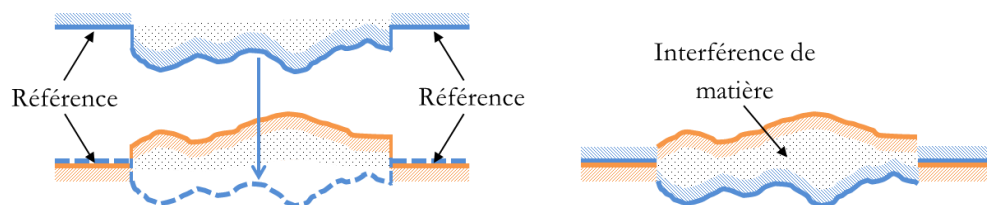


Fig. 4.14 – Méthode d'étalonnage physique

La méthode théorique pour faire l'étalonnage des capteurs est présentée en Fig. 4.14. Cette méthode consiste à considérer qu'à la position de référence, les repères associés à chaque pièce (i.e. leurs surfaces de référence) sont confondus. Cette position est physiquement impossible

puisque'il y a interférence de matière entre les deux pièces en raison de la position des surfaces de référence par rapport aux surfaces de contact (en retrait).

La Fig. 4.15 représente deux méthodes d'étalonnage équivalentes en utilisant des cales étalon. La première, notée (a), utilise deux cales étalons de même hauteur pour écarter les références d'une valeur donnée puis les zéro sont effectués sur les capteurs. La seconde, notée (b), consiste à réaliser un zéro par l'appui de cales sur les références de la pièce 1, comme si il s'agissait des surfaces de référence de la pièce 2.

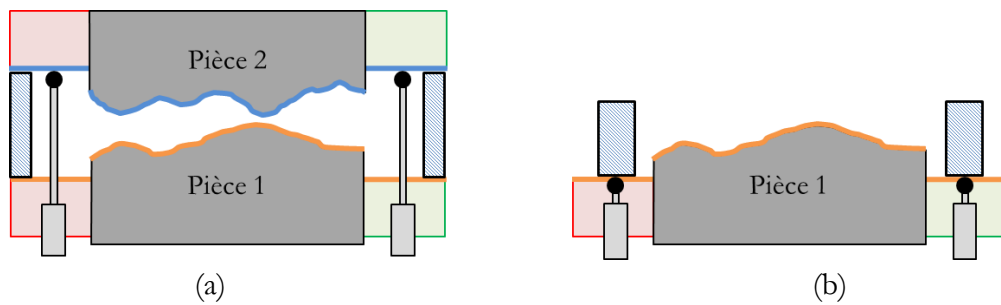


Fig. 4.15 – Méthodes d'étalonnage envisagée à l'aide des cales étalon

La méthode (a) fait intervenir les longueurs des cales et les contacts des cales avec les surfaces de références. D'autre part, les surfaces de référence d'une même partie du dispositif ne sont pas parfaitement parallèles et coplanaires, donc le contact sur les cales ne serait pas stable, la position de référence serait donc indéterminée. Une solution serait d'utiliser trois cales de petites dimensions pour avoir un appui isostatique. Cependant, la méthode (b) a été choisie car elle induit, a priori, moins d'incertitudes.

#### 4.3.1.1.2 Mesure

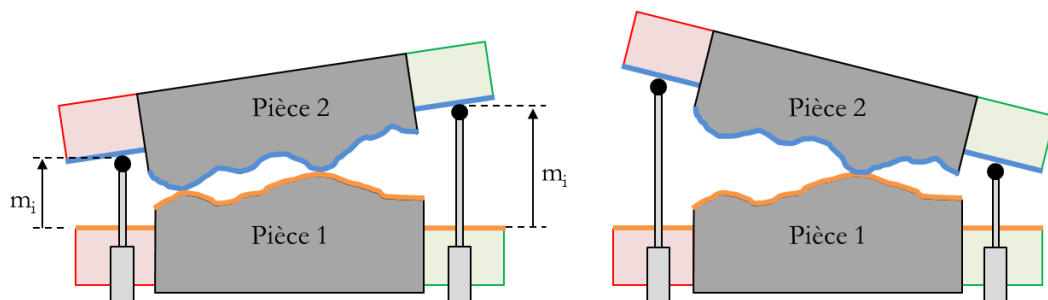


Fig. 4.16 – Mesures

Comme précédemment, la manipulation consiste à déplacer manuellement la pièce 2 dans la direction des jeux. L'objectif est de rechercher l'ensemble des différentes positions relatives des pièces (cf. Fig. 4.16).

#### 4.3.1.2 Procédure de traitement

##### 4.3.1.2.1 Calcul du domaine jeu

A partir des mesures des capteurs, le TPD est calculé à l'aide de la méthode des moindres carrés puisque quatre capteurs sont utilisés (voir Annexe A). Ce calcul est réalisé à partir des

coordonnées des capteurs. Dans une première approximation, les coordonnées considérées sont les coordonnées nominales. Afin de diminuer les incertitudes (liées aux dimensions réelles des pièces), nous avons mesuré les positions réelles des capteurs lors de la mesure des surfaces. Ces positions sont alors prises en compte pour le calcul du TPD. L'ensemble des TPD permet de représenter le domaine jeu.

#### 4.3.1.2.2 Calcul de la surface convexe des différences

Le calcul de la surface convexe des différences est effectué à l'aide de la dualité *facette – sommet* présentée au paragraphe 3.2.2 du chapitre 3.

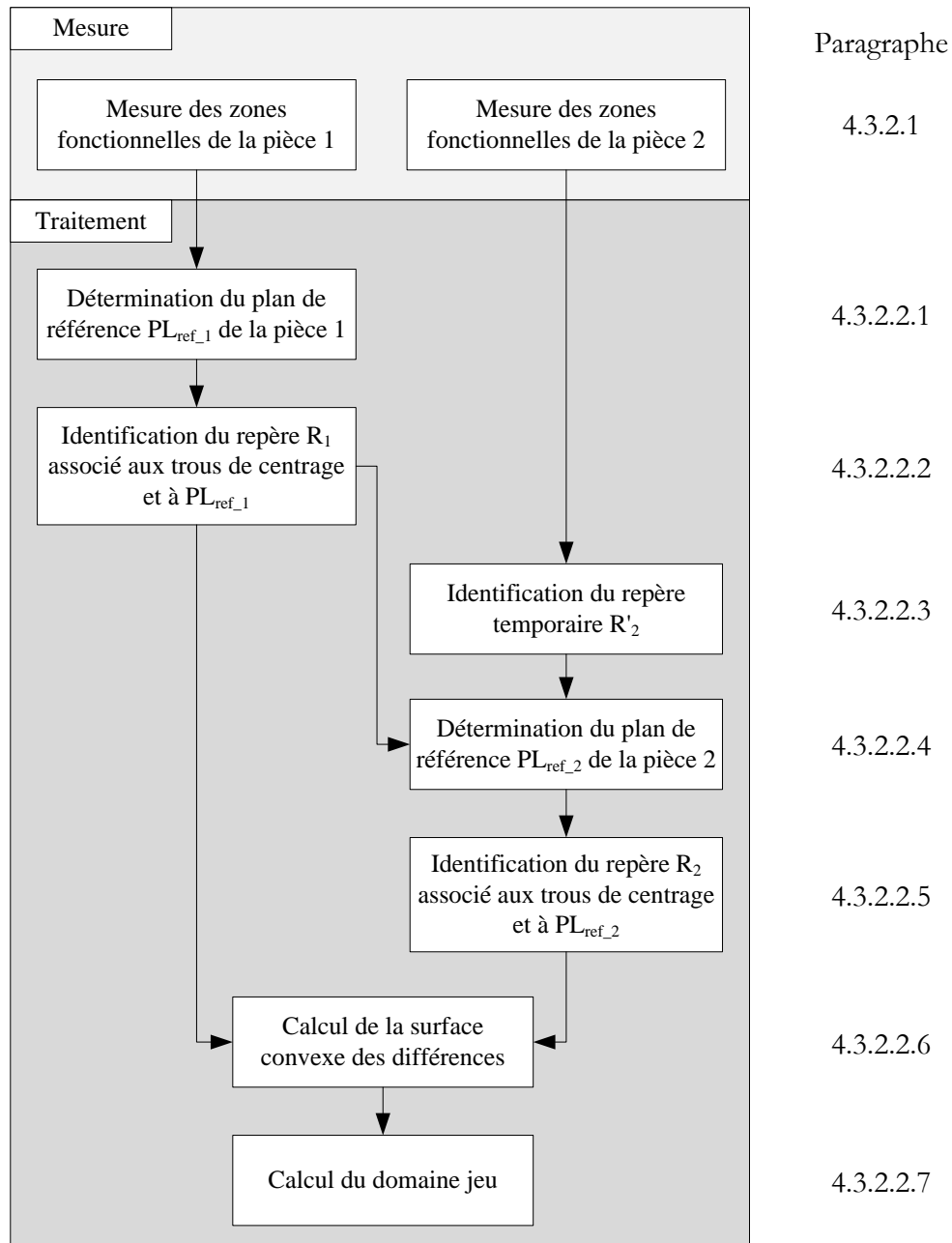


Fig. 4.17 – Mesure des surfaces (à droite, renvoi vers les paragraphes correspondants)

### 4.3.2 Mesure des surfaces

La mesure des surfaces est illustrée en Fig. 4.17 avec un renvoi pour chaque étape vers le paragraphe correspondant. La procédure est plus complexe que celle de la mesure des déplacements. En effet, lors de la mesure des surfaces, il faut identifier : la surface de contact, les surfaces de référence et les éléments de positionnement, c.-à-d. les deux trous (oblong et circulaire) ainsi que les pions de centrage. A partir de ces éléments, les repères de référence sont calculés pour chacune des pièces puis mis en coïncidence. Dans le cas du montage, la mise en coïncidence des repères est réalisée physiquement.

#### 4.3.2.1 Procédure de mesure

Les zones fonctionnelles des pièces sont mesurées individuellement. Ces zones sont les suivantes :

- Zones bleues (z1) : surfaces de contact (éprouvette)
- Zones vertes (z2g et z2d) : pions centrages (de la pièce 1) et trous centrages (de la pièce 2)
- Zones oranges (z3gh, z3gb, z3dh, z3db) : trous de passage des capteurs (de la pièce 1) et zones en contact avec les capteurs (de la pièce 2)

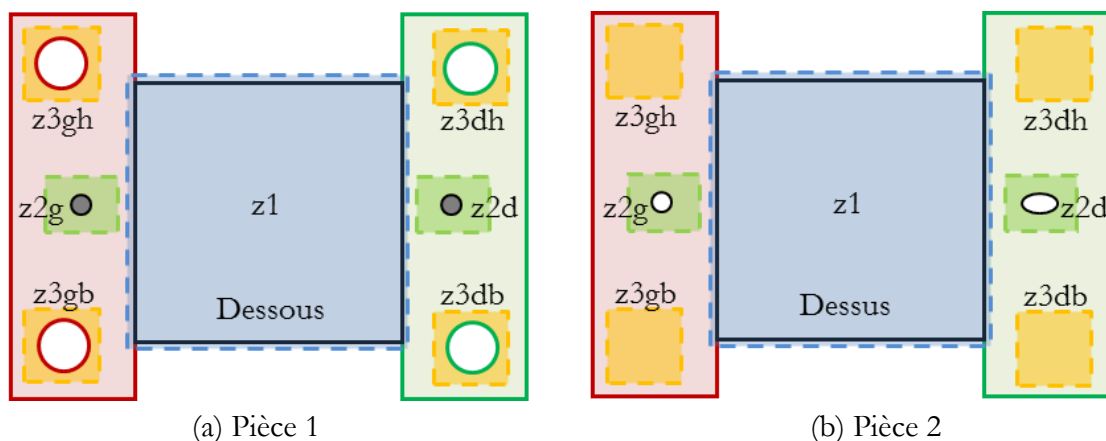


Fig. 4.18 – Zones mesurées

Chaque zone fonctionnelle mesurée d'une pièce est définie dans un repère local associé au premier point mesuré de la zone (point supérieur gauche). Chaque zone est mesurée en suivant une grille avec un pas caractéristique. Les différents pas sont recensés dans le Tableau 4.2.

Nom de la zone	Pas selon x (mm)	Pas selon y (mm)
z1	0,5	0,5
z2	0,03	0,03
z3	0,1	0,1

Tableau 4.2 – Pas de mesure en fonction des zones

Toutes les zones fonctionnelles mesurées sont présentées dans le repère global  $(O, x, y, z)$  associé au repère physique de l'appareil de mesure de topographie.

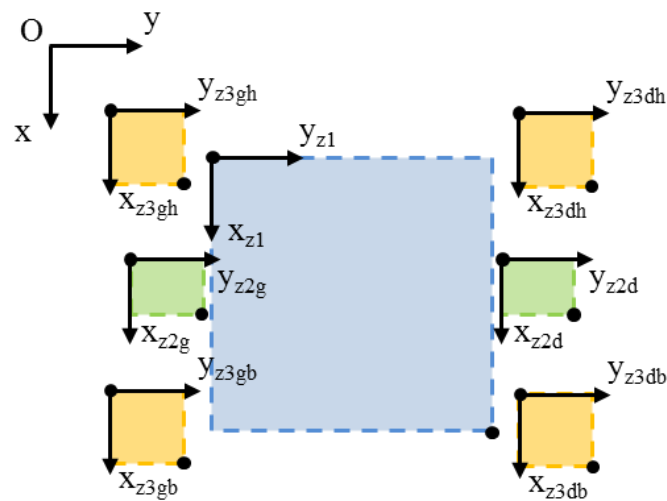


Fig. 4.19 – Repères associés à chaque zone mesurée de la pièce

**Remarque :** Afin de simplifier le traitement, nous considérons que le repère physique de l'appareil de mesure est direct. En réalité, les mesures sont données dans un repère indirect, ce qui nécessite de modifier le signe des coordonnées en y.

La Fig. 4.20 représente la mesure d'une zone fonctionnelle qui contient un trou (cas des zones z3 de la pièce 1 et des zones z2 de la pièce 2). La mesure d'une telle zone donne des points mesurés et des points dits « non mesurés ».

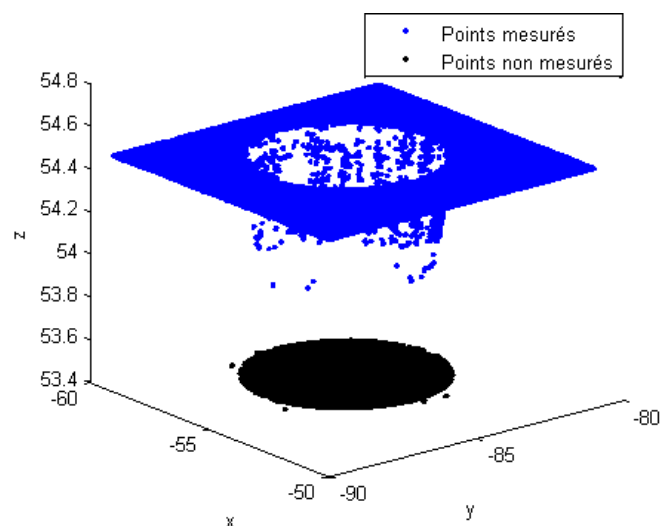


Fig. 4.20 – Exemple de la mesure d'une zone contenant un trou

Les points « non mesurés » sont des points pour lesquels l'appareil ne peut pas donner de valeurs numériques de coordonnée en z. Soit ces points sont le résultat d'un problème de mesure (cas peu fréquent) soit le point physique se trouve éloigné du champ mesure du capteur (cas d'un trou ou d'un pion). Pour le traitement, nous imposons une valeur seuil définie par l'utilisateur qui

doit être suffisamment différente des valeurs des autres points. Pour la mesure, ce phénomène n'a pas d'influence. Pour le traitement de la mesure, ces points vont servir à calculer les coordonnées en x et y du centre des trous et des pions.

### 4.3.2.2 Procédure de traitement

Le traitement consiste essentiellement à identifier un repère pour chaque pièce. L'identification du repère  $R_1$  et du repère  $R_2$  associés aux pièces 1 et 2 a pour but de définir la position relative de référence entre les deux pièces pour laquelle ces deux repères sont confondus. Ils doivent reprendre les références physiques utilisées sur le dispositif de mesure des déplacements. Ils sont donc définis à partir du plan de référence et des centres des pions et des trous de centrage. Les pions et trous permettent de définir l'origine et l'orientation du repère.

#### 4.3.2.2.1 Détermination du plan de référence $PL_{ref,1}$ de la pièce 1

Cette étape contient les sous-étapes suivantes :

- Détermination de la position d'étalonnage du zéro d'un capteur correspondant à une zone  $z_3$  : L'étalonnage d'un capteur se fait en posant une cale étalon sur la surface autour du trou du capteur. La position zéro du capteur est donc le point de contact du capteur avec la cale. La Fig. 4.21 illustre comment déterminer ce point de contact :
  - Les centres des trous des capteurs : comme présenté au paragraphe précédent, le centre  $C_{NM,i}$  (NM – non mesuré) d'un trou correspondant à une des quatre zones  $z_3$  est calculé à partir des points non mesurés de chaque zone (ces points forment alors un disque). Nous considérons que le centre correspond au barycentre de ces points sachant qu'ils sont régulièrement espacés (avec un pas de mesure régulier).
  - L'axe  $L1_i$  du trou est donc colinéaire à l'axe z passant par  $C_{NM,i}$ .
  - La cale étalon est physiquement considérée comme le plan tangent extérieur  $PL1_i$  parallèle au plan des moindres carrés associé aux points mesurés. Le calcul du plan des moindres carrés est présenté en Annexe A.
  - La position d'étalonnage du zéro du capteur  $i$  est physiquement considérée comme l'intersection de  $L1_i$  avec  $PL1_i$ , notée  $C_i$ .

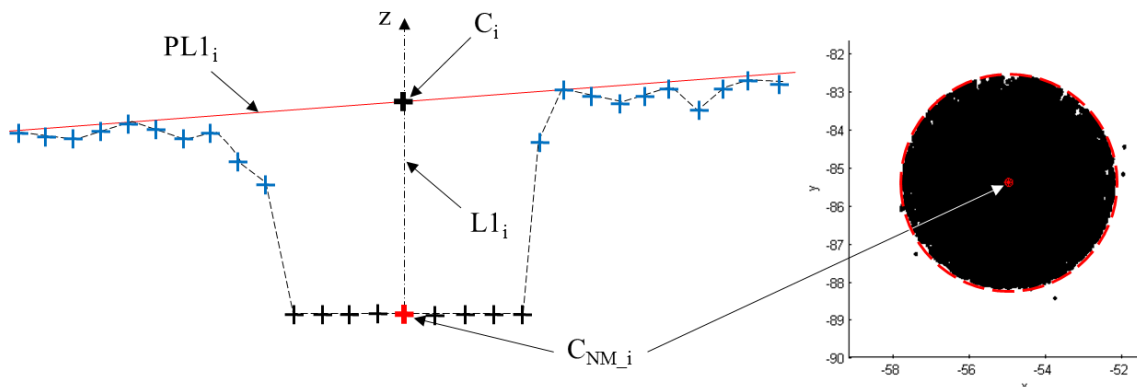


Fig. 4.21 – Position d'étalonnage du zéro calculé pour une des quatre zones  $z_3$

- Le plan de référence  $PL_{ref\_1}$  de la pièce 1 est physiquement considéré comme le plan des moindres carrés des quatre points  $C_i$ , correspondant au zéro des quatre capteurs. Le calcul du plan des moindres carrés est présenté en Annexe A.

#### 4.3.2.2.2 Identification du repère $R_1$

Le repère  $R_1$  est construit à partir du plan de référence  $PL_{ref\_1}$  et des surfaces des pions. La procédure d'identification de  $R_1$  est la suivante :

- L'origine  $O_1$  est le centre du pion correspondant à la zone  $z2g$ .
- L'axe  $O_1y_1$  passe par  $O_1$  et  $A_1$  qui est le centre du pion correspondant à la zone  $z2d$ .
- Le plan  $O_1x_1y_1$  est confondu avec le plan  $PL_{ref\_1}$ , l'axe  $O_1z_1$  est donc orthogonal à  $PL_{ref\_1}$ . Il est orienté vers extérieur de la matière de la pièce 1.

L'algorithme pour calculer  $O_1$  et  $A_1$  est le même que celui utilisé pour identifier les centres  $C_i$  pour l'étalonnage du zéro d'un capteur mis à part que le plan considéré est le plan de référence  $PL_{ref\_1}$ .

#### 4.3.2.2.3 Identification du repère temporaire $R'_2$

Le repère  $R_2$  ne peut pas être identifié sans avoir déterminé le plan de référence  $PL_{ref\_2}$  de la pièce 2. Ce dernier est un plan des moindres carrés des points de contact des capteurs  $C_i$  avec des zones  $z3$  de la pièce 2. Ces points de contact sont notés par la suite  $D_i$ . La recherche de ces points n'est pas directe, il faut savoir où les capteurs vont toucher les surfaces de référence. Pour cela, il est nécessaire d'identifier auparavant un repère temporaire  $R'_2$ . Ce repère est construit à partir des surfaces des trous de centrage. Il permet d'identifier le lieu des points de contact des capteurs sur les surfaces de référence. La procédure d'identification de  $R'_2$  est la suivante :

- Le centre  $O_2$  du trou de centrage de la zone  $z2$  de la pièce 2 est calculé comme les centres des pions du paragraphe précédent.
- Comme le second trou de centrage est oblong.  $A_2$  est considéré comme le barycentre de l'ensemble des points non mesurés (en noir) de la zone  $z2d$  dont la distance avec  $O_{NM\_2}$  est comprise entre  $O_1A_1 - 1$  et  $O_1A_1 + 1$  suivant l'axe  $y$  (cf. Fig. 4.22). L'objectif est de considérer la zone où le pion va venir se centrer.

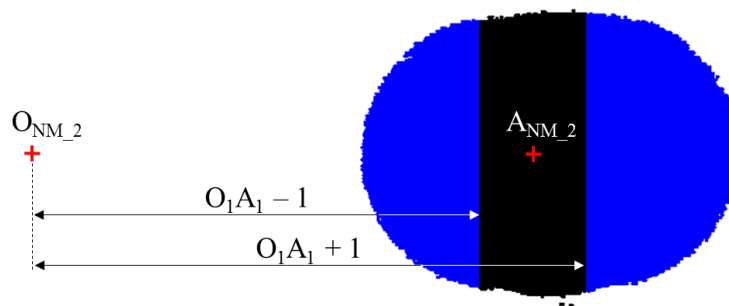


Fig. 4.22 – Calcul du centre  $A_{NM\_2}$  du trou oblong

- Le repère temporaire  $R'_2$  est identifié tel que :
  - l'origine  $O'_2$  est la projection selon  $z$  du point  $O_{NM,2}$ , sur le plan  $Oxy$
  - l'axe  $O'_2y'_2$  est colinéaire à  $\overrightarrow{O'_2A'_2}$ , avec  $A'_2$  la projection selon  $z$  du point  $A_{NM,2}$ , sur le plan  $Oxy$
  - le plan  $O'_2x'_2y'_2$  est le plan  $Oxy$  du repère global, l'axe  $O'_2z'_2$  est donc colinéaire à l'axe  $Oz$  du repère global

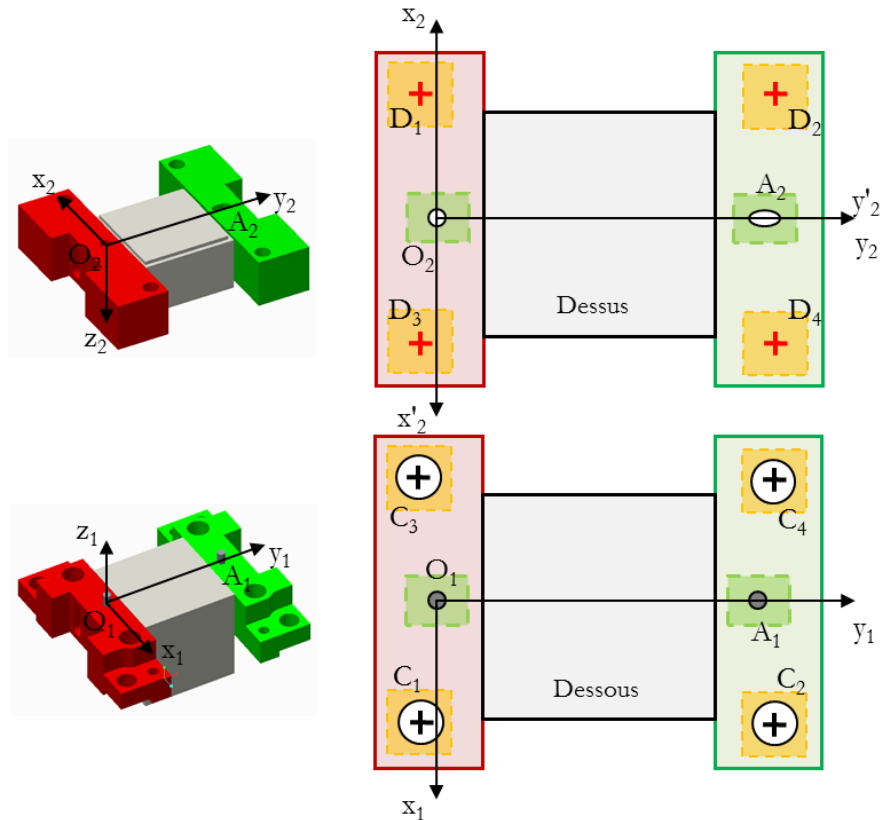


Fig. 4.23 – Repères associés à chaque pièce

#### 4.3.2.2.4 Détermination du plan de référence $PL_{ref,2}$ de la pièce 2

Cette étape contient 2 sous étapes :

- La détermination des points  $D_i$  ayant pour coordonnées en  $x$  et  $y$  dans le repère  $R'_2$  les coordonnées en  $x$  et  $y$  des points  $C_i$  dans le repère  $R_1$ . Pour les coordonnées en  $z$ , les points sont projetés selon  $z$ , dans les plans  $PL_{2i}$  – plans des moindres carrés décalés tangents extérieurs matière des points (en vert) sélectionnés à partir des points mesurés de chaque zone  $z3$  de la pièce 2. Les points en verts sont les points situés à une distance inférieure à 0,5mm de la ligne  $L_{2i}$ .
- Le plan de référence  $PL_{ref,2}$  de la pièce 2 est le plan des moindres carrés des points  $D_i$  calculés précédemment.



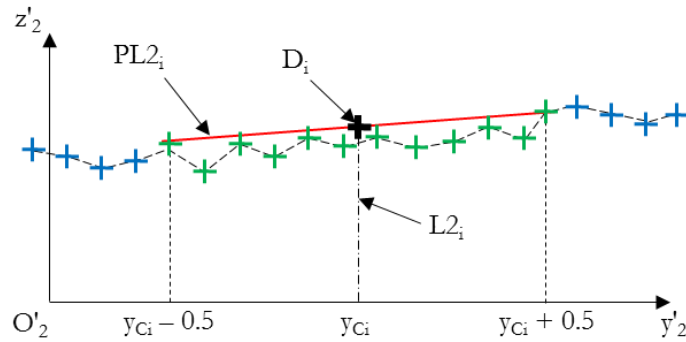


Fig. 4.24 – Détermination des  $D_i$  correspondants à chaque zone  $z_3$  de la pièce 2

#### 4.3.2.2.5 Identification du repère $R_2$

Le repère  $R_2$  associé aux trous de centrage et au plan référence  $PL_{ref,2}$  est identifié de la même façon que  $R_1$  mis à part que l'axe  $O_2z_2$  est orienté vers l'intérieur de la matière de la pièce 2 (cf. Fig. 4.23).

#### 4.3.2.2.6 Calcul de la surface convexe des différences

Une fois que les repères  $R_1$  et  $R_2$  sont identifiés, nous retrouvons la position de référence où  $R_1$  et  $R_2$  sont confondus. La surface des différences est calculée à partir de la procédure présentée au paragraphe 3.1.3.3 du chapitre 3. La surface convexe des différences est également calculée.

#### 4.3.2.2.7 Calcul du domaine jeu

Le calcul du domaine jeu est effectué à l'aide de la dualité *facette – sommet* présentée au paragraphe 3.2.1.1 du chapitre 3.

## 4.4 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre la conception du nouveau dispositif devant permettre de réduire les incertitudes identifiées dans le chapitre précédent. Ces évolutions par rapport aux anciens dispositifs sont les surfaces de références et le système de positionnement (pions et trous de centrage). Grâce aux surfaces de références, nous retrouvons la position de référence entre deux pièces qui permet de faire l'étalonnage du zéro des capteurs et de déterminer la surface des différences. Le système de positionnement permet de limiter les déplacements selon les degrés de liberté, d'où la réduction des incertitudes.

La procédure de traitement des mesures adaptée au nouveau dispositif a été présentée. Elle sera par la suite appliquée à différents essais.

# 5

## Résultats

Suite aux développements théoriques et expérimentaux présentés précédemment, ce chapitre permet de présenter les résultats obtenus, de valider le protocole expérimental et d'identifier les limites atteintes.

Les premiers essais ont pour objectif la validation du protocole du point de vue des références, du contact selon une enveloppe convexe et de la surface des différences. Les deux parties suivantes portent respectivement sur des essais entre surfaces dont les défauts étaient générés volontairement par une opération d'usinage et des essais entre surfaces dont les défauts étaient directement dus à la machine-outil, sans contrôle. Enfin, une dernière partie présente un essai sous chargement mécanique.

## 5.1 Validation du dispositif expérimental et des traitements associés

### 5.1.1 Validation des références – Contact plan/plan

Le premier essai a pour objectif de valider l'utilisation des surfaces de référence, innovation essentielle du dispositif développé. A cette fin, l'influence des surfaces planes en contact doit être réduite au minimum de manière à mettre en évidence l'influence du dispositif expérimental et particulièrement des références. Les surfaces utilisées doivent être quasiment parfaites (cf. Fig. 5.1). Elles ont été finies par une opération de rectification.

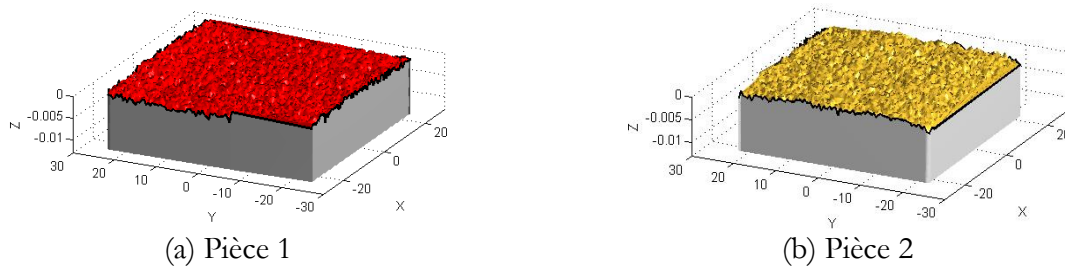


Fig. 5.1 – Surfaces en contact rectifiées mesurées

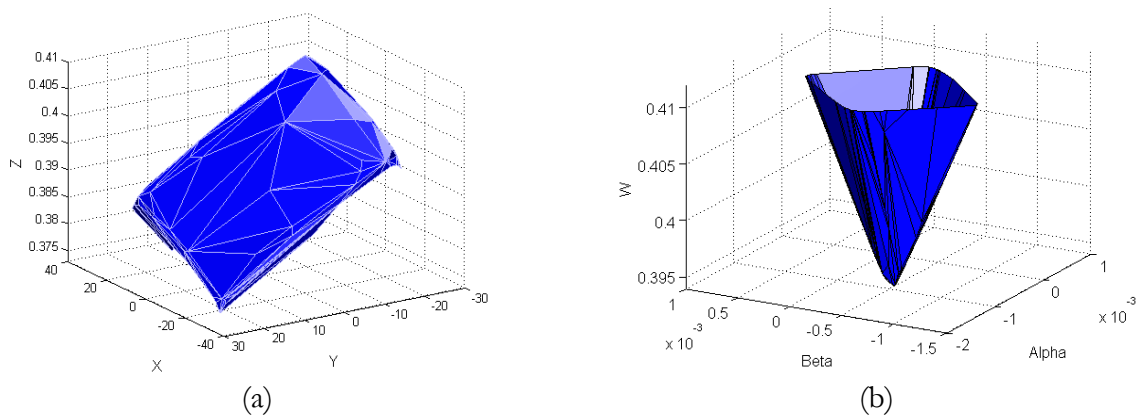


Fig. 5.2 – Surface convexe des différences (a) et domaine (b) issus de la mesure des surfaces

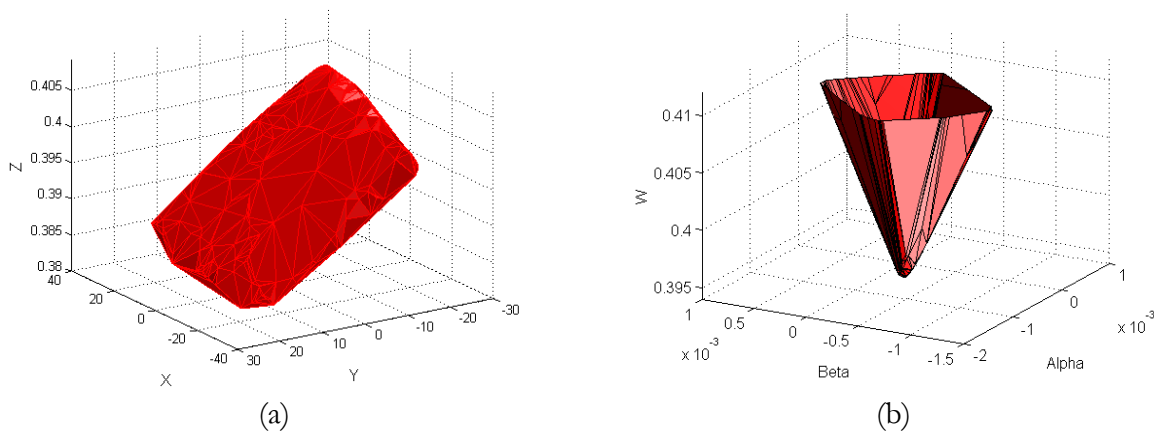


Fig. 5.3 – Surface convexes des différences (a) et domaine (b) issus de la mesure des déplacements

En Fig. 5.2 et Fig. 5.3 sont présentés les surfaces convexes et les domaines respectivement obtenus à partir de la mesure des surfaces et de la mesure des déplacements.

**Remarque :** Par la suite, les surfaces et domaines obtenus à partir de la mesure des surfaces seront systématiquement représentés en bleu, tandis que ceux obtenus par la mesure des déplacements seront représentés en rouge.

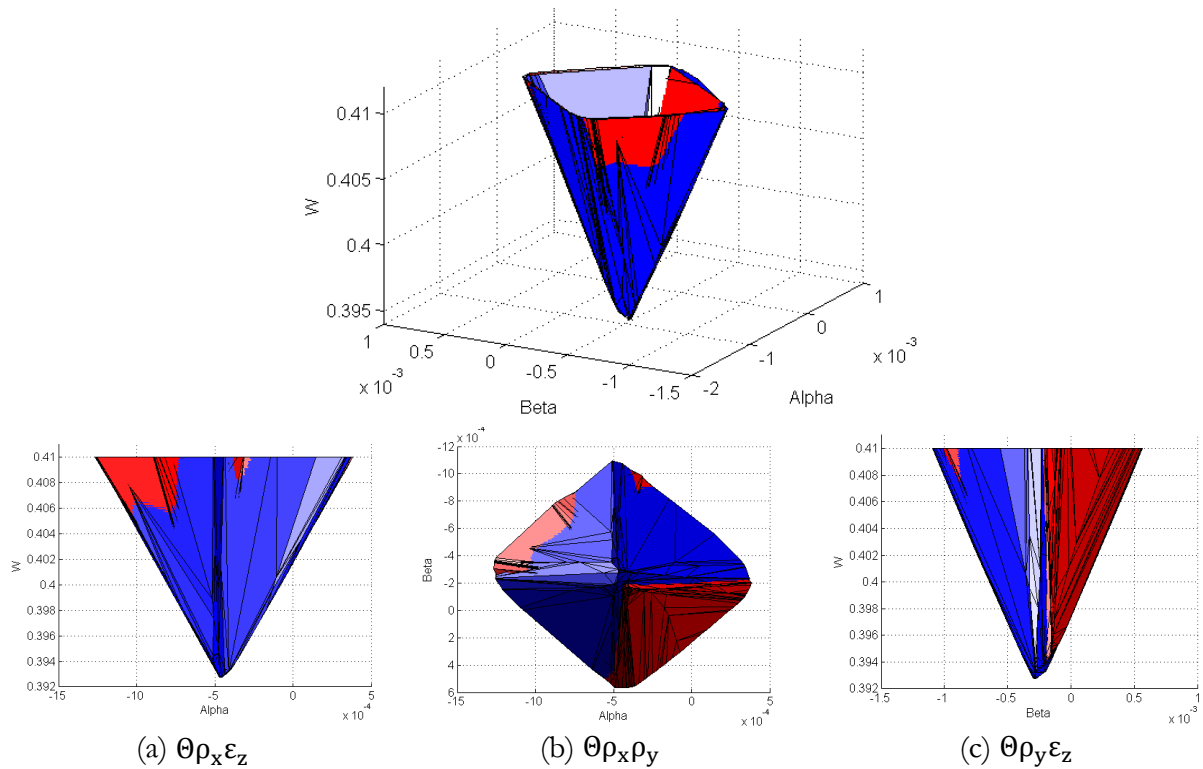


Fig. 5.4 – Comparaisons des domaines

Les domaines jeux à partir des mesures de déplacements et de surfaces sont très proches (Fig. 5.4). Ils forment des pyramides inversées dont les sommets sont les intersections de quatre plans comme représentés au paragraphe 3.3.1. Ils sont caractéristiques d'un contact plan à base rectangulaire. Afin d'évaluer la différence de position entre les deux domaines et par la même occasion les deux surfaces convexes des différences. Un critère significatif est la différence de coordonnées entre les deux sommets des pyramides. Ce critère est repris pour les différents essais. Les écarts entre les sommets des deux pyramides pour cet essai sont donnés dans le tableau suivant :

$\rho_x$ (rd)	$\rho_y$ (rd)	$\varepsilon_z$ ( $\mu\text{m}$ )
3,933e-5	8,473e-5	1.3

Tableau 5.1 – Ecart entre les sommets

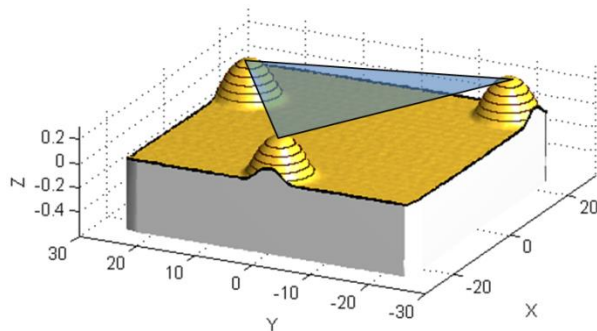
Les angles représentent la différence de position angulaire entre les deux surfaces convexes des différences pour la situation particulière où la translation est minimale au centre de la liaison. L'écart linéaire représente la différence en translation. Il est possible de constater pour cet essai que les différences sont très faibles.



Une même surface plane est utilisée pour ces 3 contacts, il s'agit d'une des surfaces utilisées dans l'essai précédent, à savoir la surface de la pièce 1 du paragraphe 5.1.1.

### 5.1.2.1 Contact isostatique 3 points/plan

Le contact est composé d'une surface plane rectifiée (pièce 1) et une surface avec trois sphères (pièce 2) dont les sommets sont à une même hauteur de 0,3mm par rapport à un plan de manière à assurer que le contact est réalisé sur les trois sphères (cf. Fig. 5.6). Les sommets des trois sphères permettent d'avoir une position stable avec un contact isostatique entre les deux pièces. Ce contact est similaire à un contact plan/plan représenté au paragraphe 5.1.1.

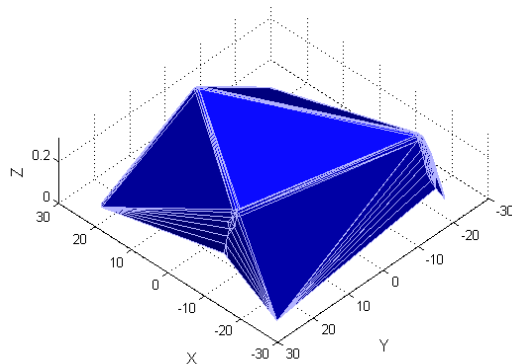


(a) Pièce 2

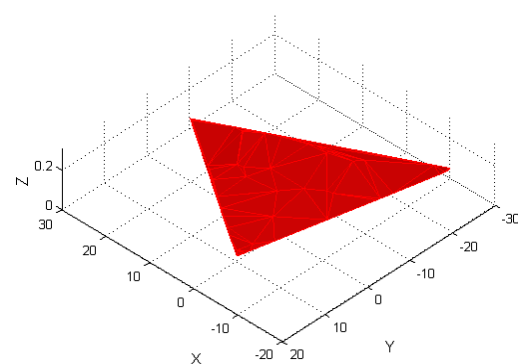


(b) Pièce 2 fabriquée

Fig. 5.6 – Pièce 2 avec 3 sphères



(a) A partir de la mesure des surfaces



(b) A partir de la mesure des déplacements

Fig. 5.7 – Surface des différences

La surface convexe des différences obtenue à partir de la mesure des déplacements (cf. Fig. 5.7b) est similaire à un triangle correspondant au contact isostatique par 3 points. Les autres facettes de la surface convexe calculée à partir de la mesure des surfaces sont indéterminées (cf. Fig. 5.7a) puisque dans la réalité, les déplacements entre les pièces sont petits, la manipulation de dispositif expérimental ne permet pas d'atteindre les positions de contact avec les bords de la pièce correspondant à ces facettes (limitations angulaires).

Pour faciliter la comparaison des surfaces convexes des différences, les facettes correspondantes sur la surface des différences obtenue à partir de la mesure des surfaces ne sont pas représentées (Fig 5.8).

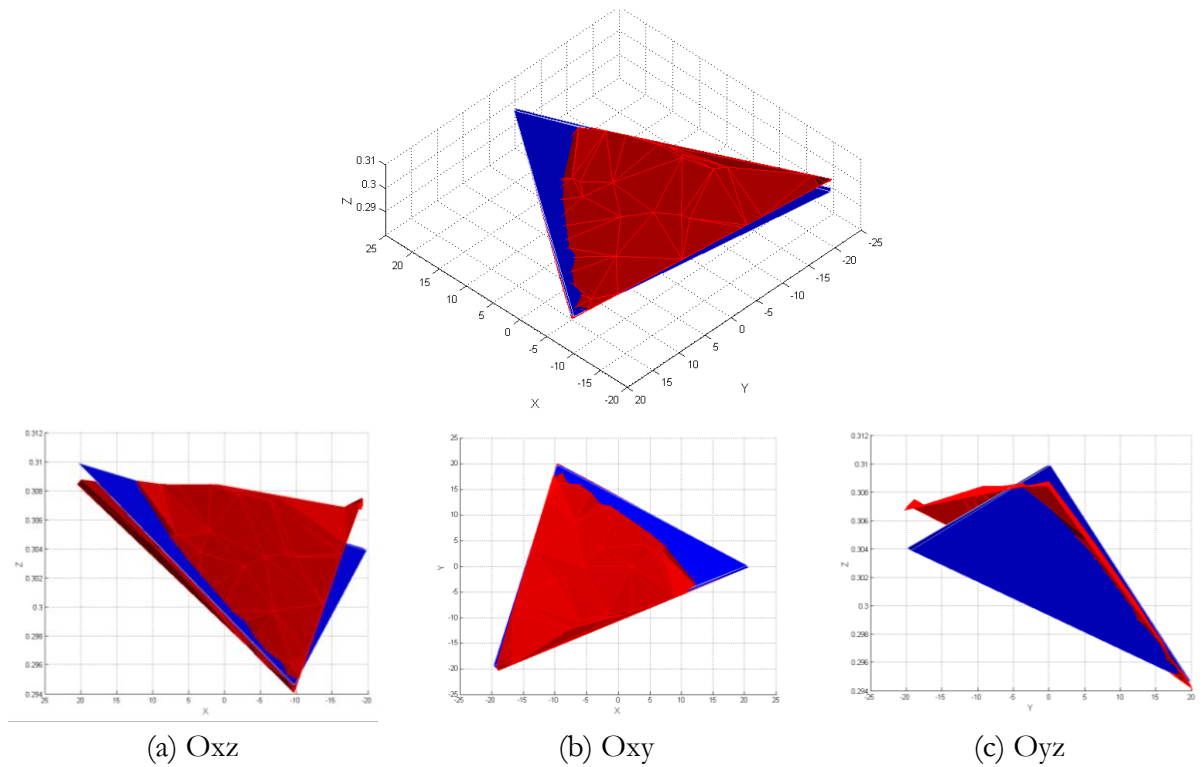


Fig. 5.8 – Comparaisons des surfaces convexes des différences

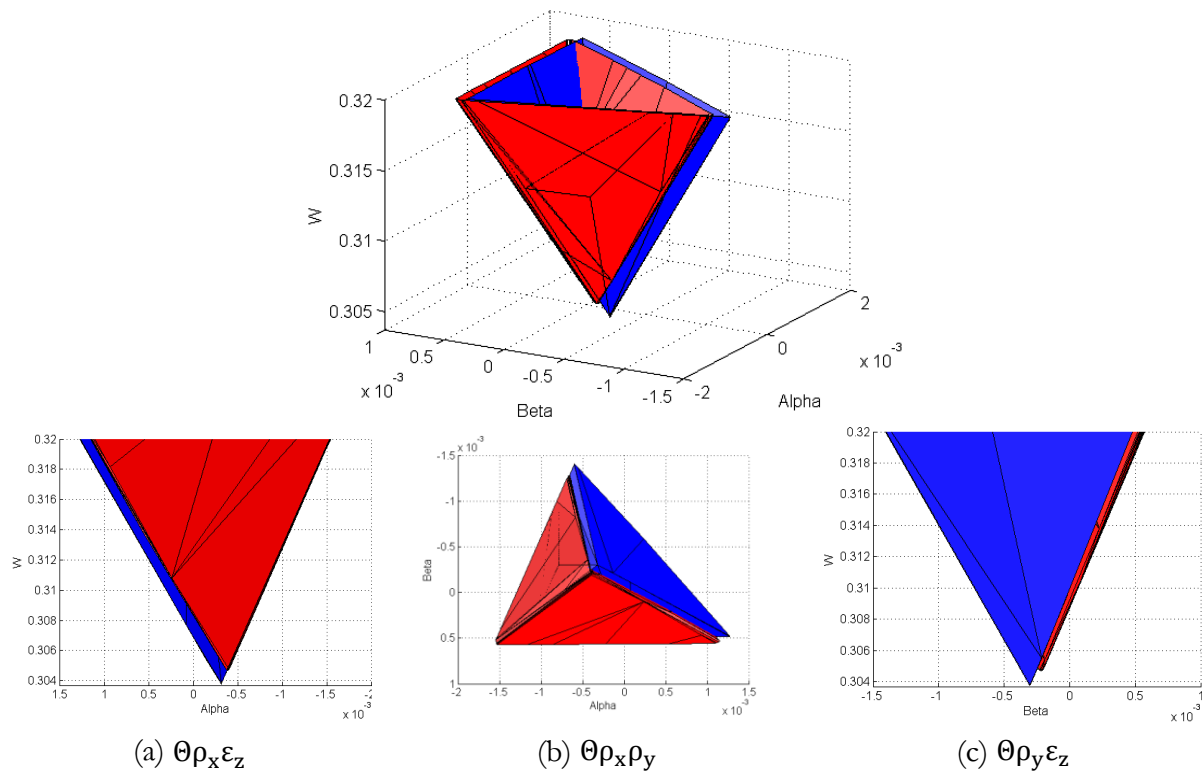


Fig. 5.9 – Comparaisons des domaines



Les domaines obtenus (cf. Fig. 5.9) prennent la forme de pyramides inversées à trois faces caractéristiques d'un contact plan sur une base triangulaire. Les écarts entre les sommets des deux domaines sont donnés dans le tableau suivant :

$\rho_x$ (rd)	$\rho_y$ (rd)	$\varepsilon_z$ ( $\mu\text{m}$ )
-7,384e-5	8,203e-5	0,9

Tableau 5.2 – Ecart entre les sommets

Les écarts sont minimes, la différence sur la translation en z est inférieure à  $1\mu\text{m}$ , valeur très satisfaisante dans le cadre de notre étude.

### 5.1.2.2 Contact 36 points/plan

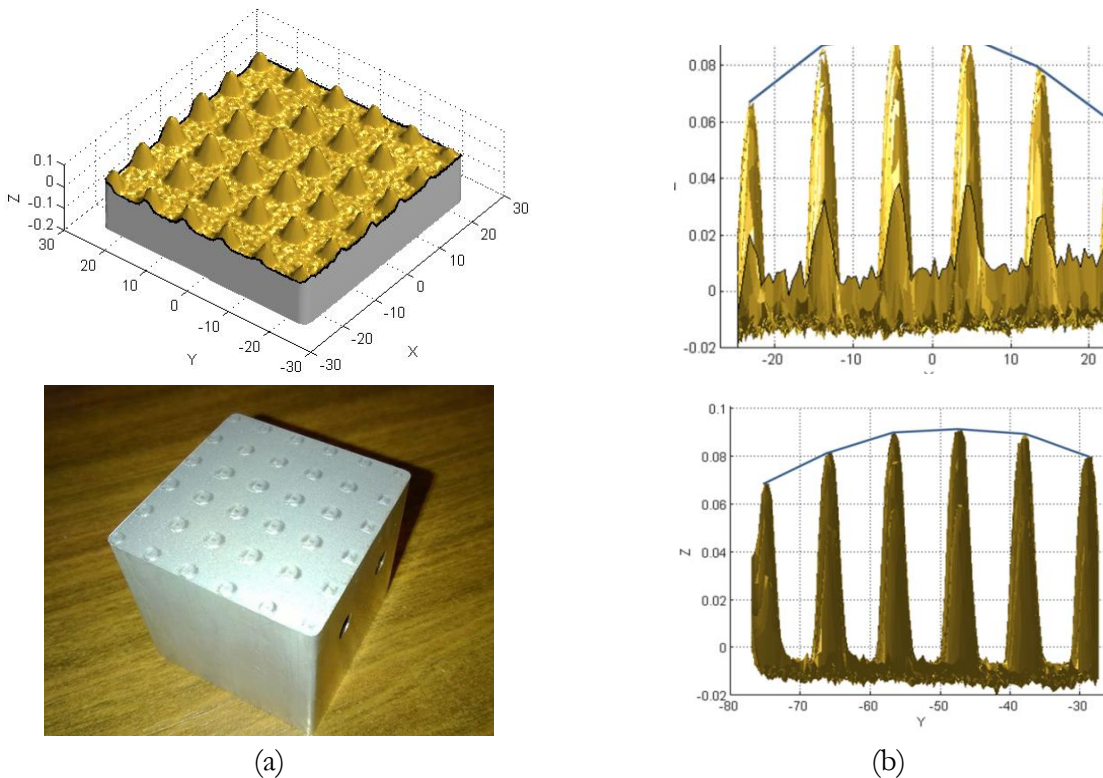


Fig. 5.10 – Pièce 2 avec 36 sphères

Pour le second essai de cette série, le contact est composé d'une surface plane avec défauts très faibles et une surface avec 36 sphères dont les sommets sont répartis sur un ellipsoïde. L'ellipsoïde est volontairement excentré par rapport au centre de la surface (cf. Fig. 5.10b). Les sommets se situent à une hauteur d'environ  $0,1\text{mm}$  par rapport à un plan de manière à assurer un non-contact avec ce plan.

Les écarts entre les sommets des deux domaines sont donnés dans le tableau suivant :

$\rho_x$ (rd)	$\rho_y$ (rd)	$\varepsilon_z$ ( $\mu\text{m}$ )
-2,416e-4	2,340e-4	4

Tableau 5.3 – Ecart entre les sommets



L'écart selon les déplacements en z reste limité à une valeur inférieure à  $5\mu\text{m}$ . Les formes des domaines restent identiques de même que les surfaces convexes des différences.

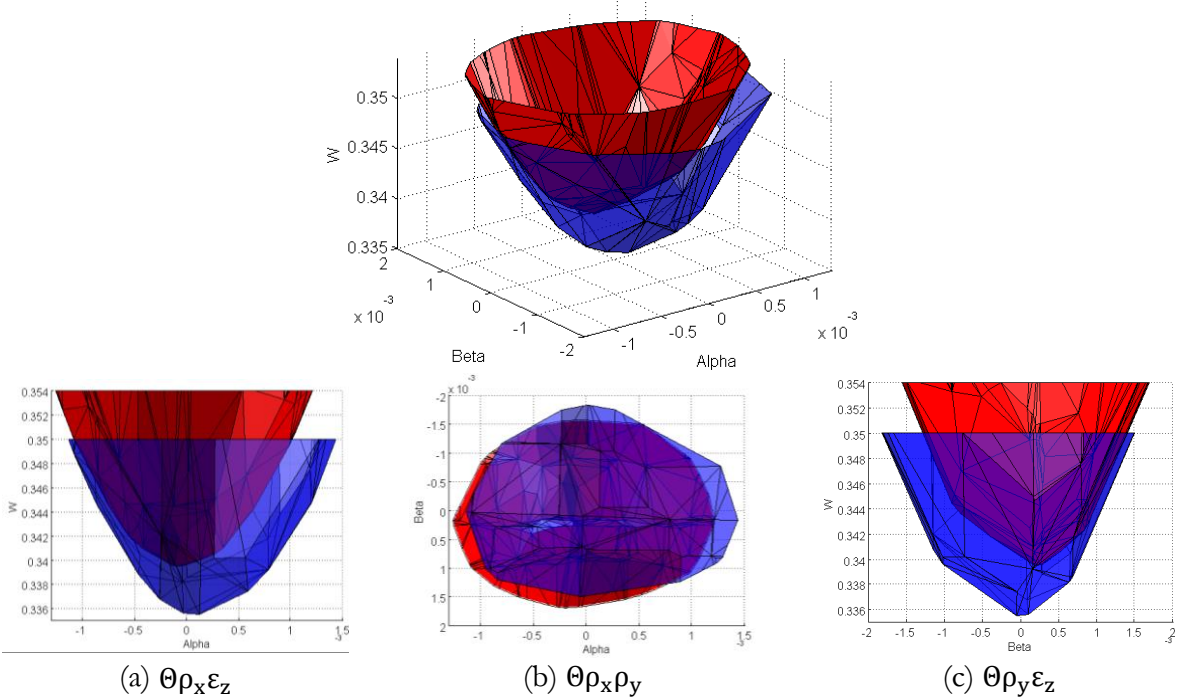


Fig. 5.11 – Comparaisons des domaines

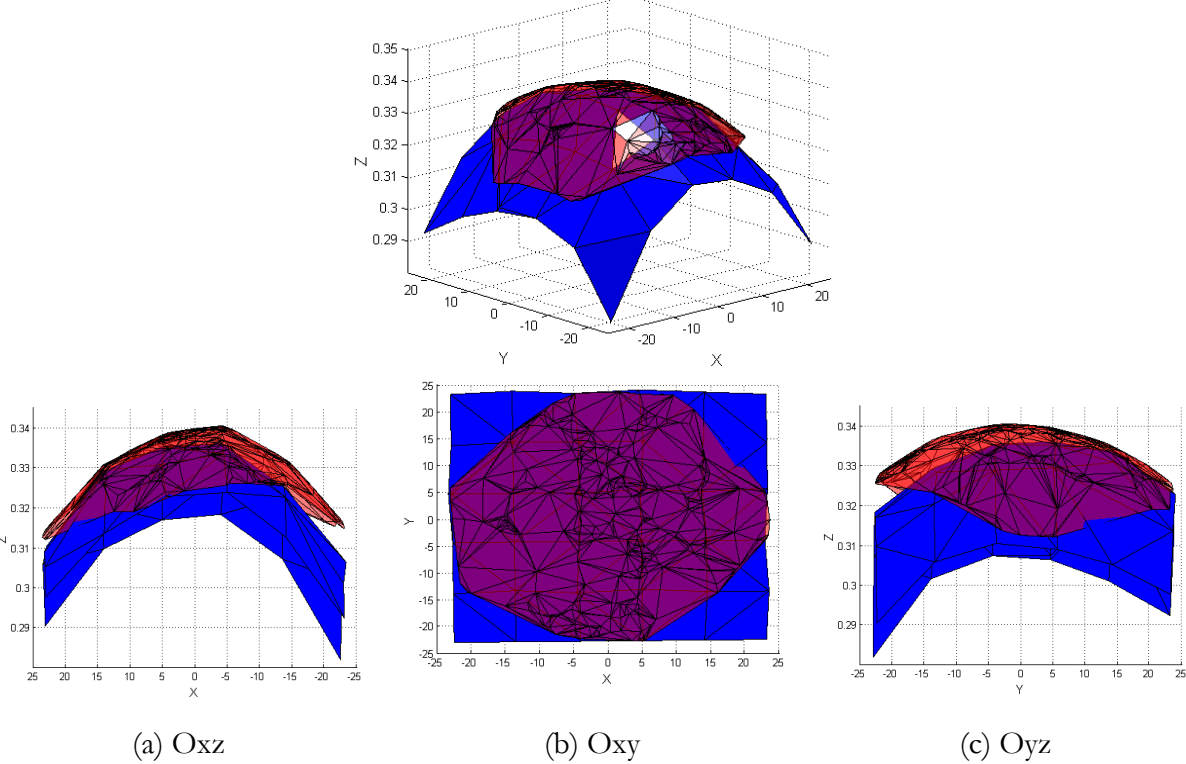


Fig. 5.12 – Comparaisons des surfaces convexes des différences

### 5.1.2.3 Contact surface modale/plan

Le troisième essai de la série propose l'étude d'un contact entre une surface plane et une surface modale. Pour construire cette dernière, nous avons choisi d'utiliser les 30 premiers modes de la base avec des coefficients de pondération choisis aléatoirement. Le défaut de forme de la surface réalisée est d'environ 0,05mm (cf. Fig. 5.13).

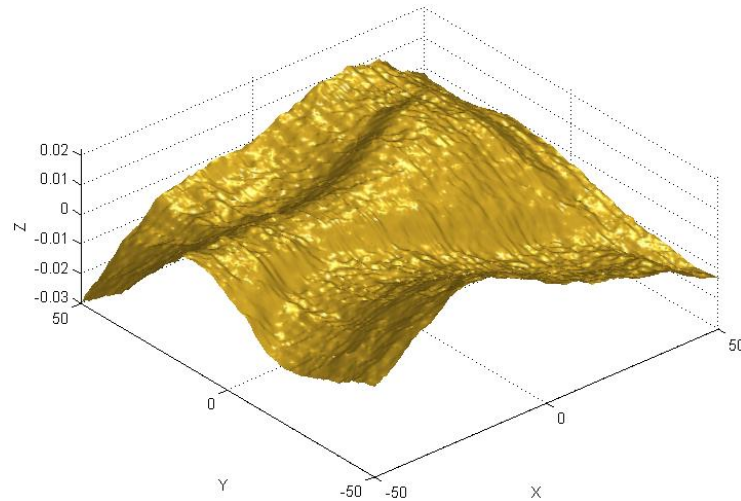


Fig. 5.13 – La surface modale de la pièce 2

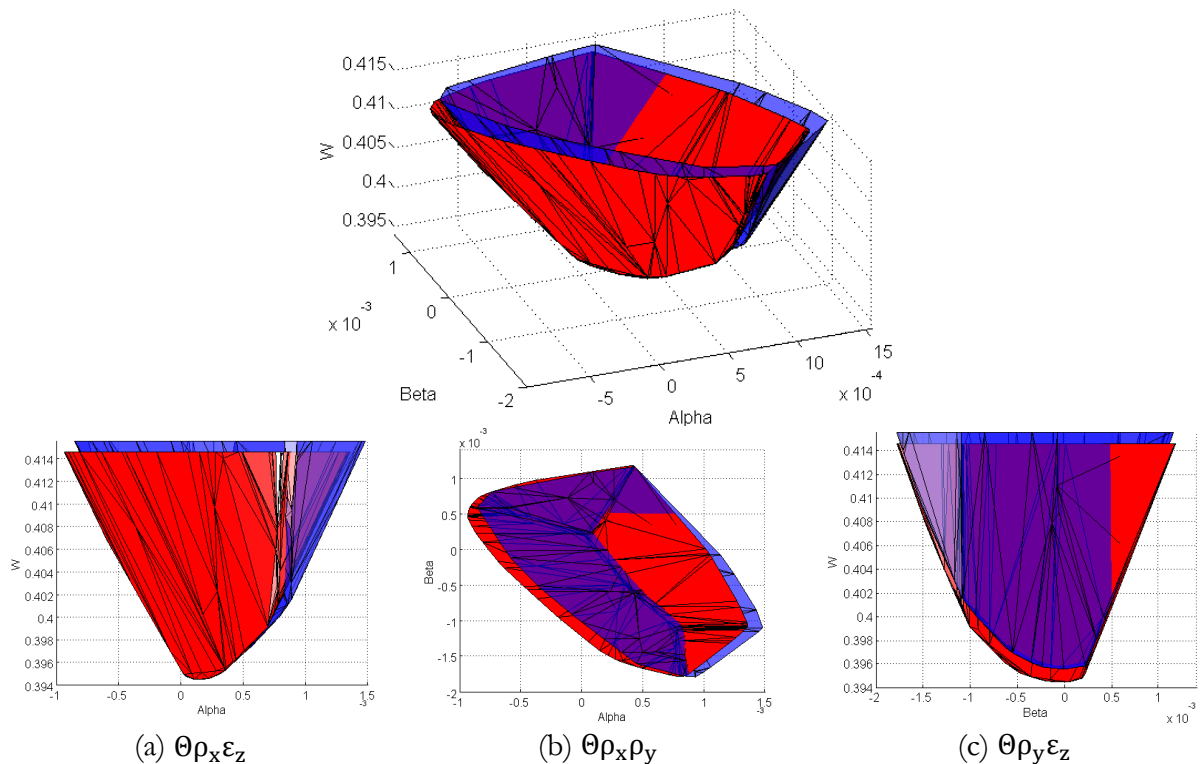
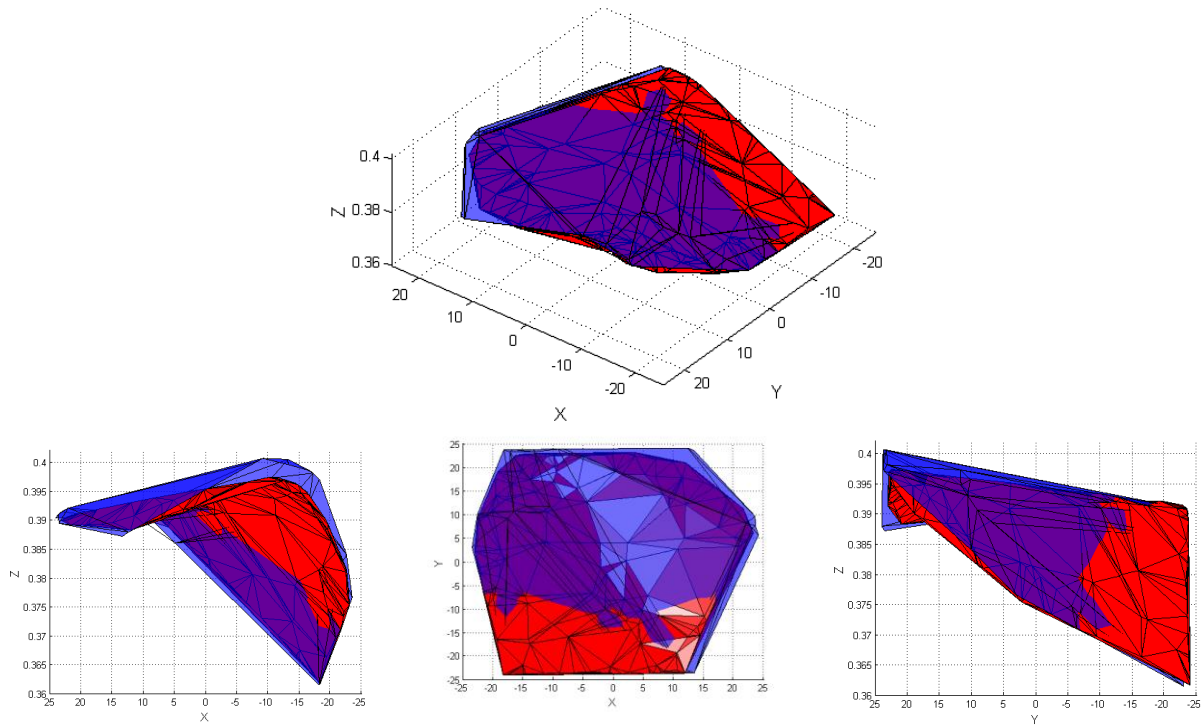


Fig. 5.14 – Comparaisons des domaines

Nous pouvons observer en Fig. 5.14 et Fig. 5.15 la similitude des domaines et des surfaces convexes des écarts. Les écarts entre les sommets sont donnés dans le Tableau 5.4. Les écarts sont très faibles entre les positions de ces sommets, 1,1µm en translation selon z.

$\rho_x$ (rd)	$\rho_y$ (rd)	$\varepsilon_z$ ( $\mu\text{m}$ )
-1,108e-4	6,005e-5	-1,1

Tableau 5.4 – Ecart entre les sommets



(a) Oxz

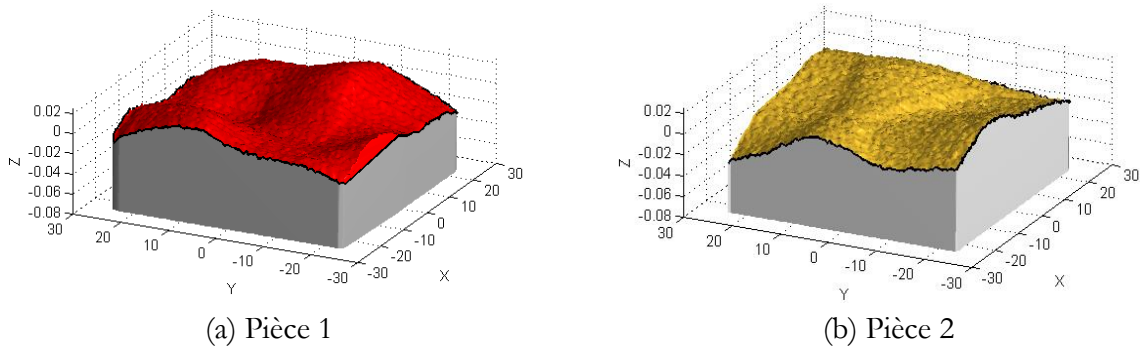
(b) Oxy

(c) Oyz

Fig. 5.15 – Comparaisons des surfaces convexes des différences

### 5.1.3 Surface convexe des différences

L'essai suivant a pour objectif de valider l'usage de la surface convexe des différences dans le calcul des déplacements relatif entre les pièces en fonction des mesures sur les surfaces. Cette fois-ci, l'essai ne comporte plus de surface approximativement plane, mais deux surfaces possédant des défauts de forme. Dans cet essai, les deux surfaces ont été générées par composition modale. La pièce 2 est la même que précédemment, la pièce 1 a été générée avec des coefficients différents. Les défauts de forme des surfaces fabriquées sont d'environ 0,05 mm pour chacune des pièces.



(a) Pièce 1

(b) Pièce 2

Fig. 5.16 – Surface mesurée de la pièce 2 et la forme de la surface convexe des différences

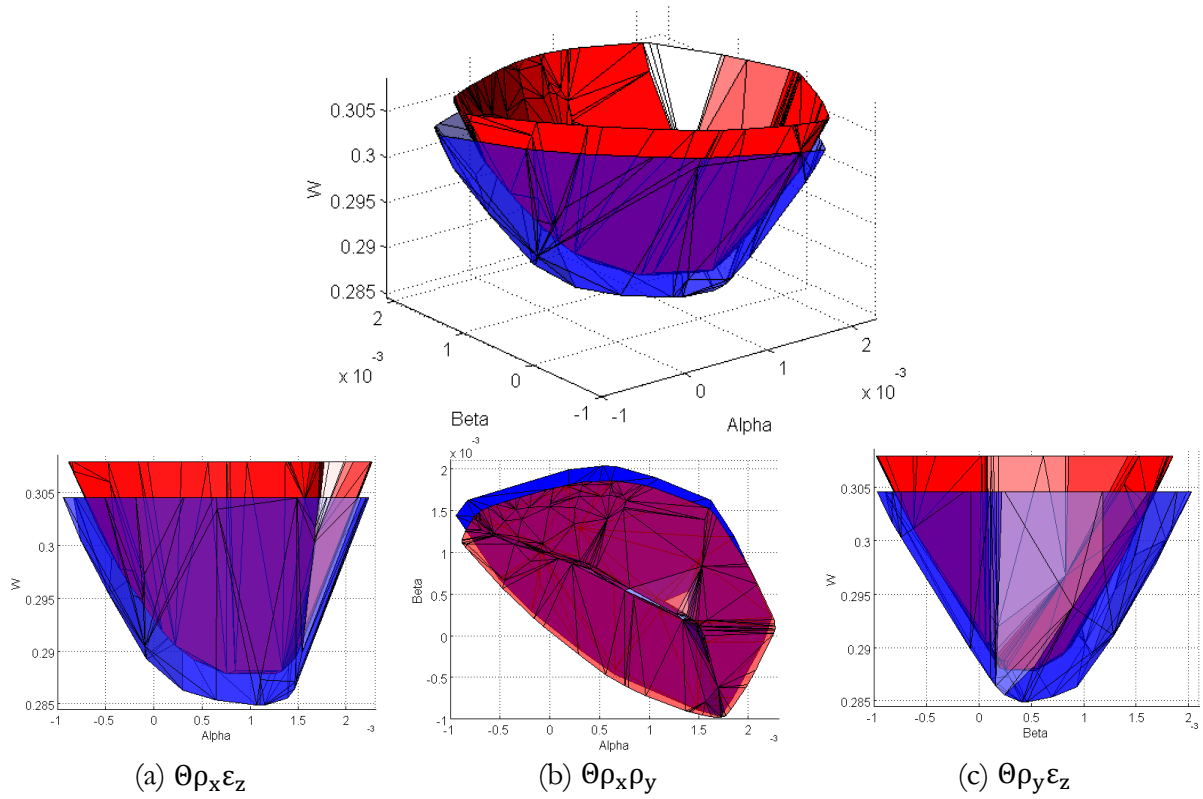


Fig. 5.17 – Comparaisons des domaines

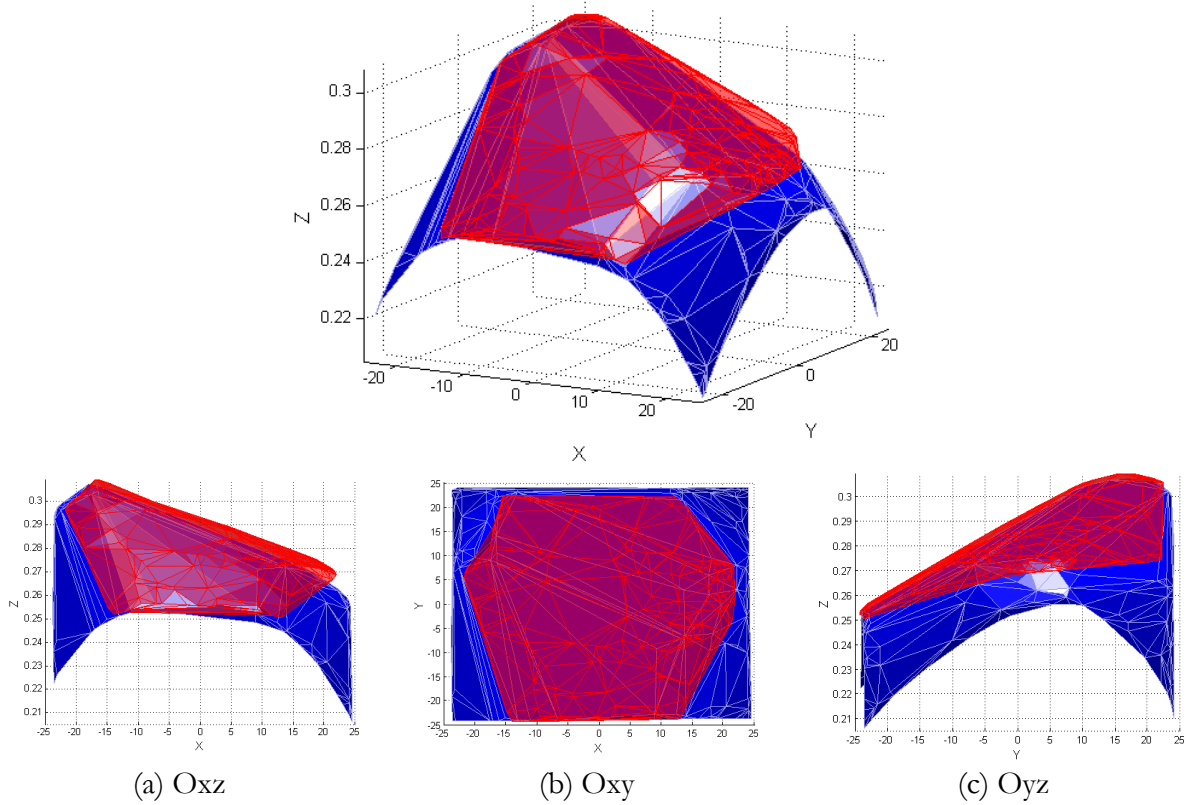


Fig. 5.18 – Comparaisons des surfaces convexes des différences

Nous constatons encore une très grande similitude de forme entre les domaines d'une part et les surfaces convexes des différences d'autre part. Les écarts entre les sommets sont donnés dans le tableau suivant :

$\rho_x$ (rd)	$\rho_y$ (rd)	$\varepsilon_z$ ( $\mu\text{m}$ )
-3,476e-4	1,028e-4	2,9

Tableau 5.5 – Ecart entre les sommets

L'écart en translation selon z reste inférieur à  $3\mu\text{m}$ . Nous pouvons donc valider l'usage de la surface des différences dans la procédure de détermination des déplacements entre les pièces.

### 5.1.4 Validations sur surfaces à défauts maîtrisés

Dans cette partie, nous allons valider le dispositif expérimental avec des couples de surfaces à défaut maîtrisés. Une surface à défauts maîtrisés est une surface dont les défauts ont été générés selon une équation mathématique définie. Les contacts sont composés d'une surface avec défaut maîtrisé et d'une surface plane. Les formes des surfaces avec défauts sont créées auparavant à l'aide de Matlab.

#### 5.1.4.1 Contact ellipsoïde/plan

Le premier essai porte sur un contact entre un ellipsoïde et un plan. Les défauts de forme sont d'environ :  $5\mu\text{m}$  pour la pièce 1 (surface plane),  $0.06\text{mm}$  pour pièce 2 (ellipsoïde). La pièce 1 est la même que celle utilisée lors des essais précédents avec un plan.

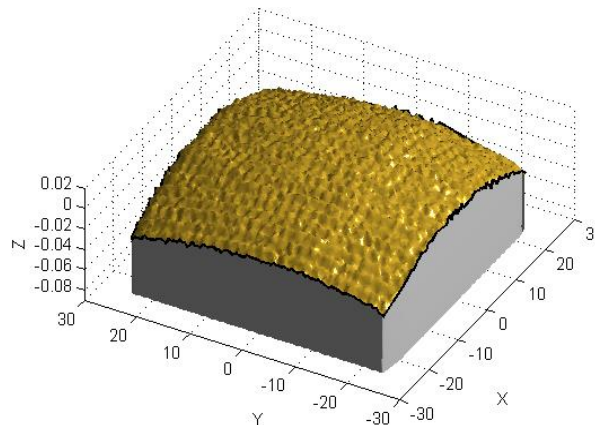


Fig. 5.19 – Surface mesurée de la pièce 2

Pour cet essai encore, les domaines et les surfaces convexes des différences sont tout à fait similaires. Les écarts entre les sommets sont donnés dans le tableau suivant :

$\rho_x$ (rd)	$\rho_y$ (rd)	$\varepsilon_z$ ( $\mu\text{m}$ )
-1,206e-4	6,15e-5	0,3

Tableau 5.6 – Ecart entre les sommets

Les positions entre les domaines sont extrêmement proches l'une de l'autre.



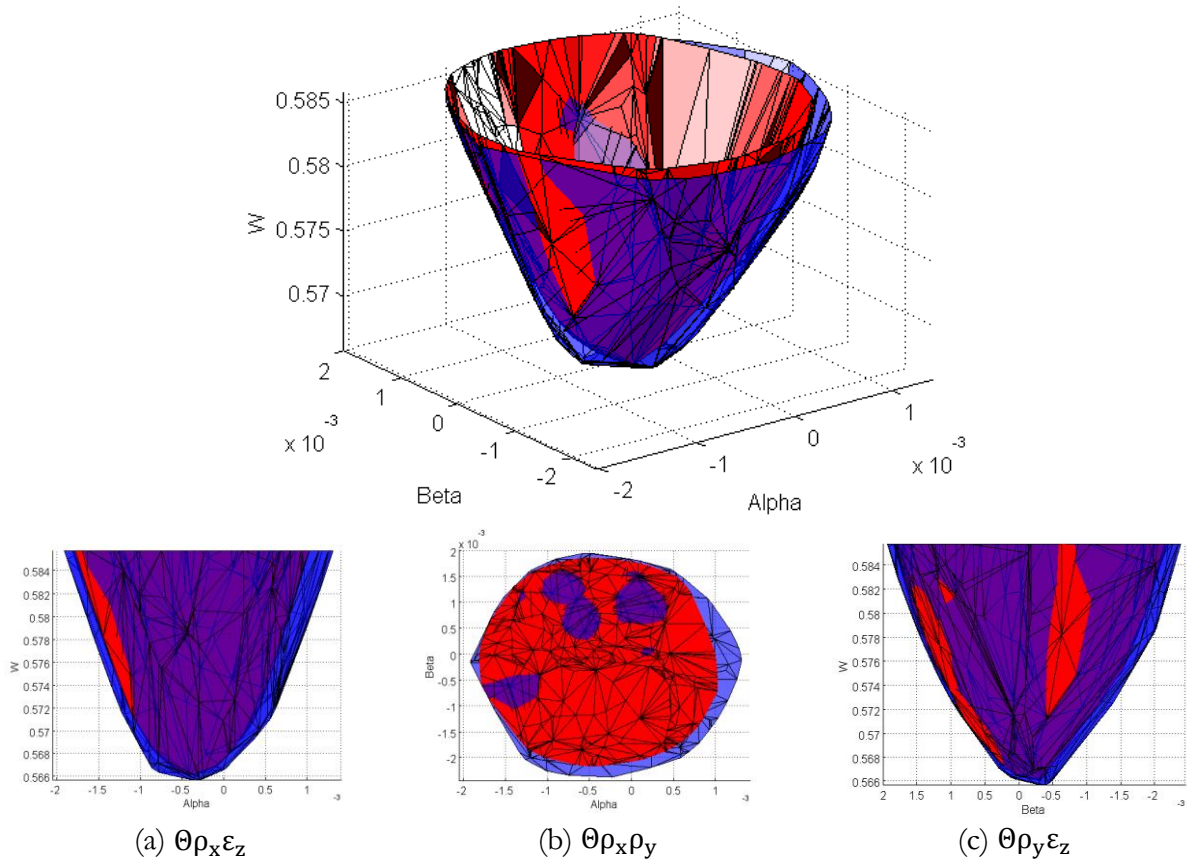


Fig. 5.20 – Comparaisons des domaines

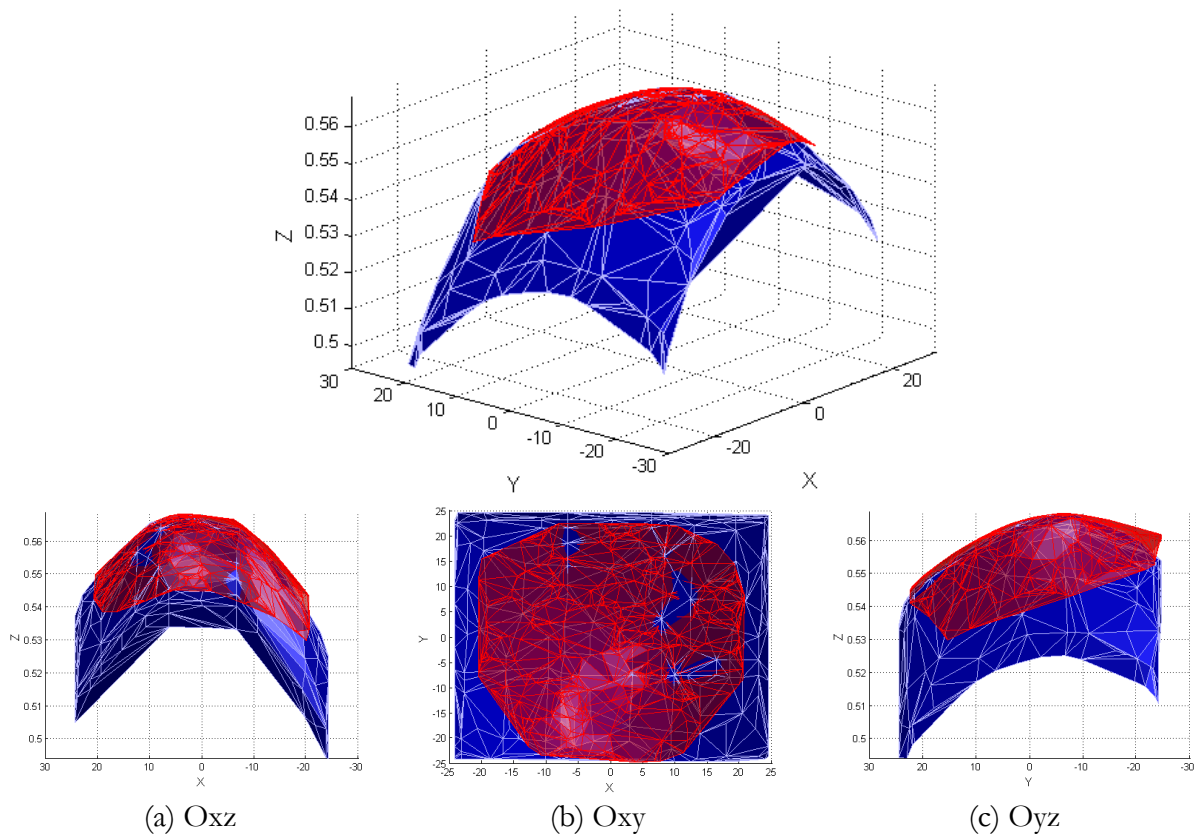


Fig. 5.21 – Comparaisons des surfaces convexes des différences

### 5.1.4.2 Contact surface vrillée/plan

Le second essai de la série porte sur un contact entre une surface vrillée et un plan. Le défaut de forme de la surface vrillée est d'environ 0,03mm. La surface plane reste toujours la même qu'auparavant.

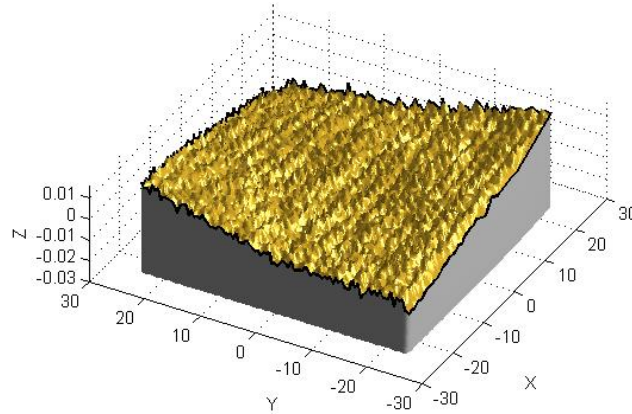


Fig. 5.22 – Surface mesurée de la pièce 2

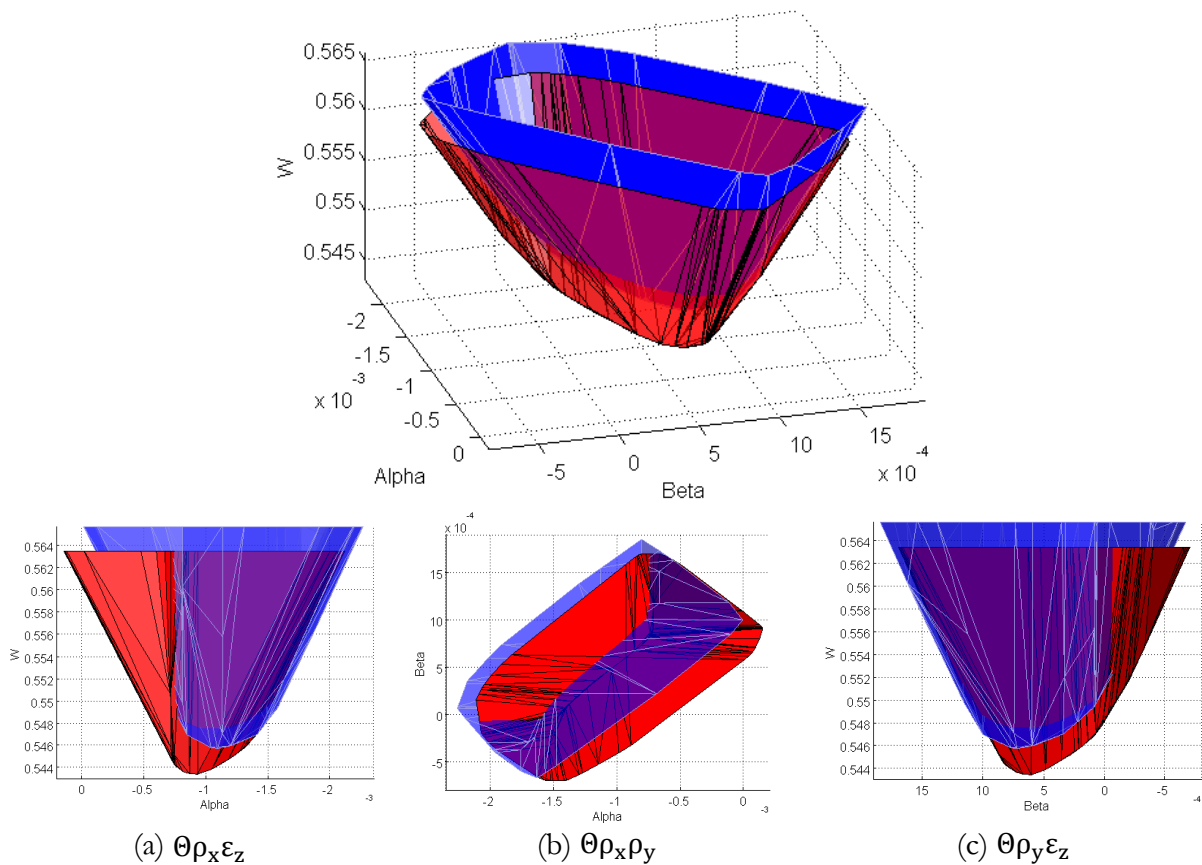


Fig. 5.23 – Comparaisons des domaines

Les domaines obtenus sont caractéristiques d'une surface vrillée. Le bas du domaine n'est plus vraiment formé d'un sommet, mais plutôt d'une arête. Ils ont la forme générale d'un toit à 4 pentes inversé. Les écarts entre les points les plus bas sont donnés dans le tableau suivant :

$\rho_x$ (rd)	$\rho_y$ (rd)	$\varepsilon_z$ ( $\mu\text{m}$ )
1,605e-4	-1,182e-4	-2,3

Tableau 5.7 – Ecart entre les sommets

Pour cet essai, les mêmes similitudes entre les résultats sont retrouvées. La surface convexe des écarts prend la forme générale d'un toit à deux pentes avec deux plans s'intersectant selon une diagonale de la surface. L'arête supérieure (intersection des deux plans) provient des deux sommets opposés de la surface vrillée les plus élevés.

Le domaine en forme de toit à quatre pentes obtenu est identique au domaine simulé au chapitre 3 pour quatre sommets non coplanaires (voir paragraphe 3.3.2.2). Cette similitude est normale car les surfaces convexes des différences ont la même forme d'un toit à deux pentes dans les deux cas.

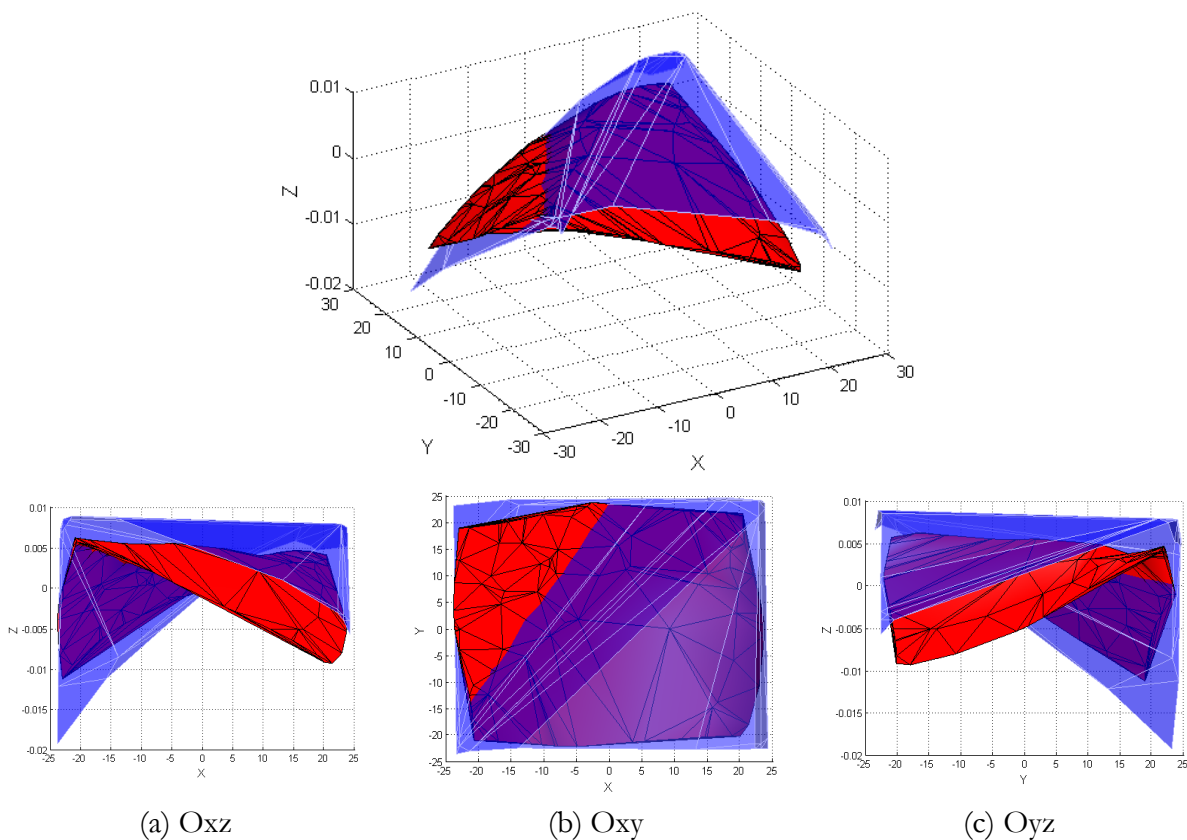


Fig. 5.24 – Comparaisons des surfaces convexes des différences

### 5.1.5 Mesures sur surfaces quelconques usinées

Dans cette partie, le contact utilisé est composé d'une surface plane rectifiée, celle déjà utilisée dans les essais précédent et d'une surface usiné en fraisage en bout avec une fraise de diamètre 32mm. Le surfacage complet est réalisé en deux passages usinant chacun la moitié de la surface. Il est possible de distinguer en Fig. 5.25 une trace en creux orientée selon l'axe y passant au milieu de la pièce. Afin d'ajouter des dispersions, la fraise est déposée et réinsérée dans la broche entre les deux passages. Les défauts de formes obtenus sont d'environ 11,5  $\mu\text{m}$ .



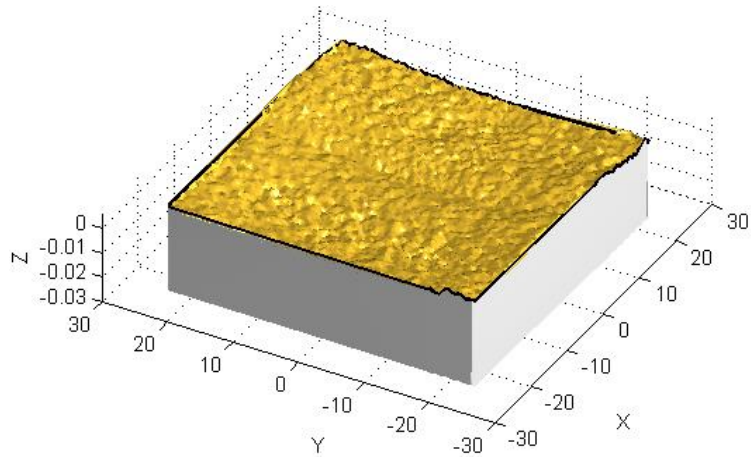


Fig. 5.25 – Surface mesurée de la pièce 2

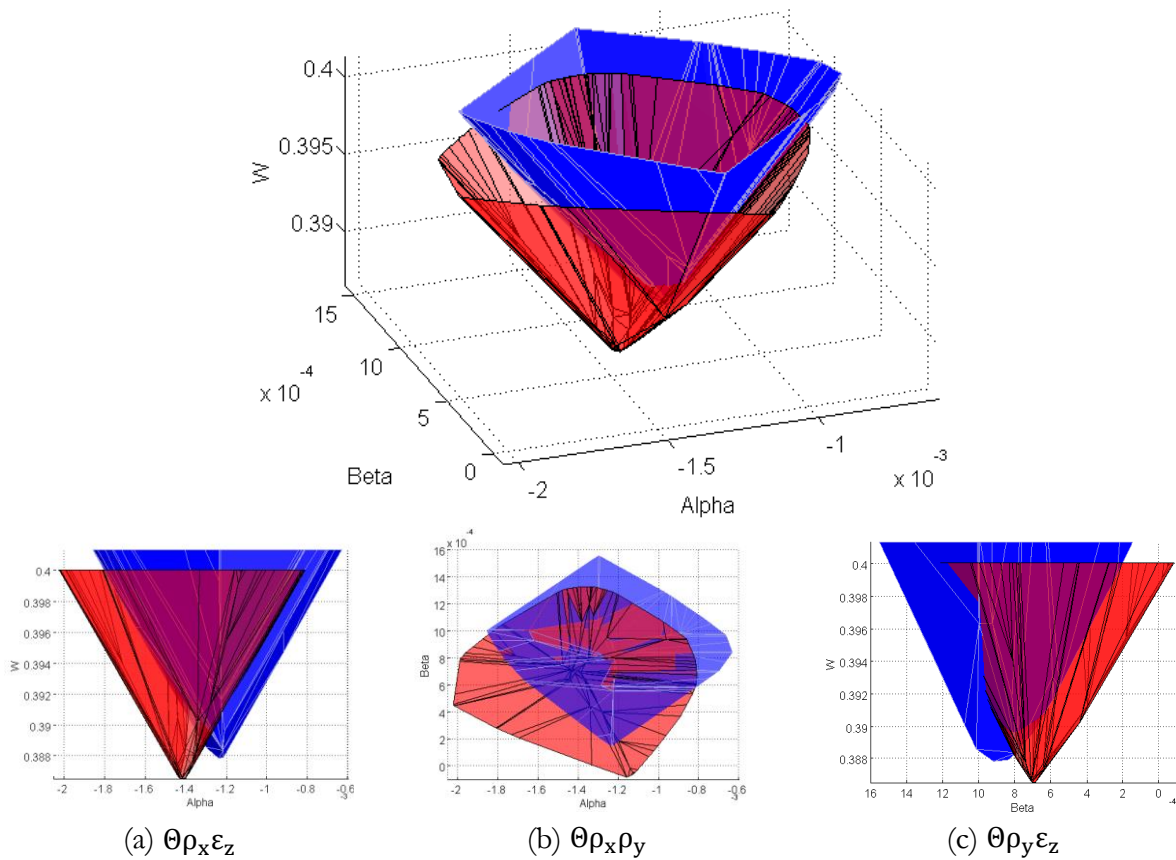


Fig. 5.26 – Comparaisons des domaines

Les domaines obtenus sont similaires à ceux obtenus dans les premiers contacts qui forment nettement des pyramides inversées. Cependant, comme le défaut de forme de la pièce 2 est plus important que celui de la pièce 1, les domaines sont arrondis au niveau des sommets bas. Les écarts entre les points les plus bas sont donnés dans le tableau suivant :

$\rho_x$ (rd)	$\rho_y$ (rd)	$\varepsilon_z$ ( $\mu\text{m}$ )
-1,798e-4	-2,332e-4	-1,3

Tableau 5.8 – Ecart entre les sommets

Nous remarquons un écart faible en translation selon  $z$  entre les deux sommets bas des domaines d'environ  $1.3\mu\text{m}$ . Cependant, nous observons que les surfaces convexes des différences présentent des formes assez différentes. Cela montre les limites du dispositif développé. Il faudrait clairement identifier les raisons de ces écarts par différentes investigations et cela doit être un des axes des futurs travaux.

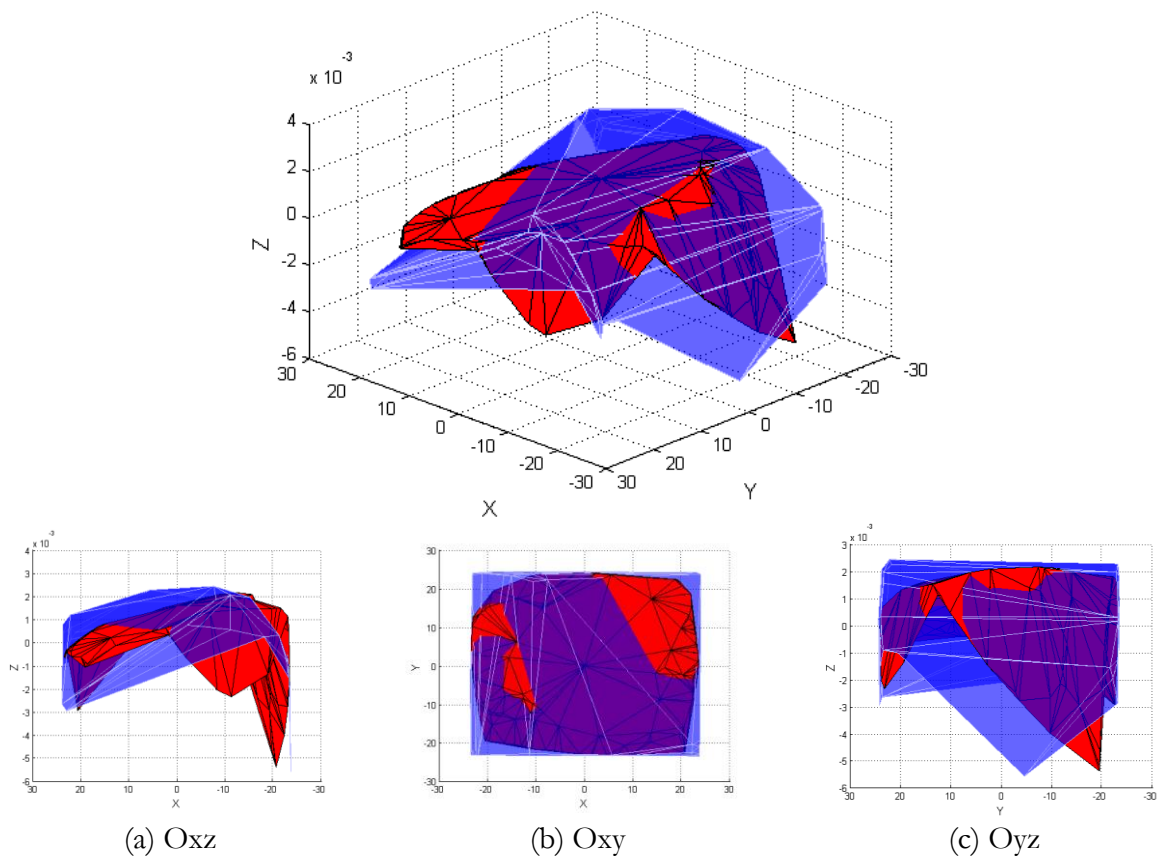


Fig. 5.27 – Comparaisons des surfaces convexes des différences

## 5.2 Influence du chargement sur le comportement de la liaison plane

Dans les parties précédentes, il a été développé l'étude de l'influence des défauts de surface sur le comportement de liaison plane unilatérale. Dès lors que l'on introduit des défauts locaux de surface, la zone de contact se trouve alors localisée sur des surfaces de petites dimensions et peut engendrer des déformations locales non négligeables sous l'action de forces mécaniques. Afin de déterminer l'influence du chargement dans ce type de cas, nous proposons de considérer un chargement extérieur appliqué aux surfaces de liaison. Pour cela, nous avons sélectionné la surface composée de trois sphères qui permet d'avoir une zone de contact maîtrisée. De plus, cette surface permet d'avoir une mise en position isostatique (trois points de contact) et garantit la zone d'appui. Notre étude se focalise alors sur l'évolution du torseur écart en fonction du chargement en partant de la position d'appui isostatique.

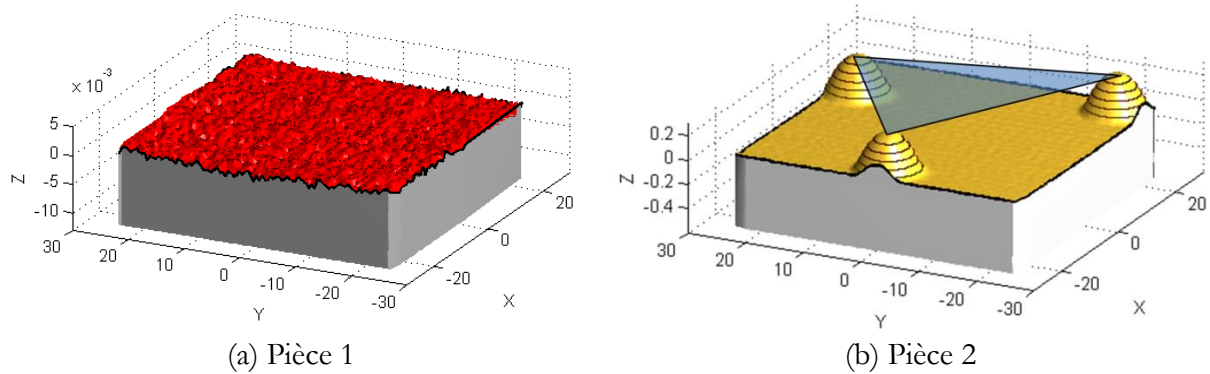


Fig. 5.28 – Le contact isostatique par 3 points (b) et les surfaces en contact mesurées (a)(b)

## 5.2.1 Description du dispositif expérimental

Le dispositif conçu permet d'introduire simplement un chargement extérieur vertical (direction perpendiculaire à la zone de contact) (cf. Fig. 5.29).

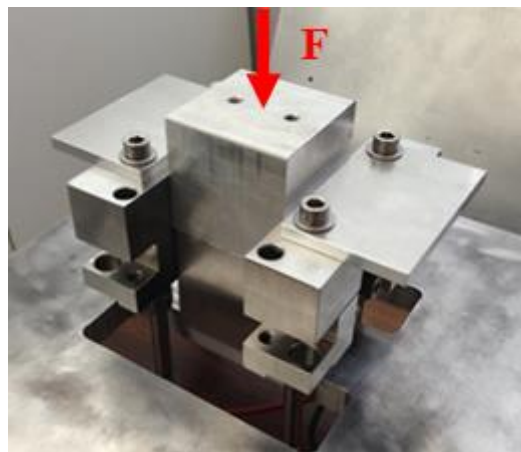


Fig. 5.29 – Représentation du dispositif avec un chargement vertical

Les pièces en contact sont réalisées dans deux matériaux différents. La pièce 2 présentant trois sphères est en alliage d'aluminium (cf. Fig. 5.28b) et la pièce 1 (cf. Fig. 5.28a) possédant une surface avec peu de défauts de forme est réalisée dans un acier inoxydable (304L). Les parties massives des pièces permettent de limiter les déformations liées au chargement  $F$  et l'on suppose que seules les zones de contact sont écrasées. La conséquence de ces écrasements locaux se traduit, à l'échelle de la liaison, par un torseur écart de la pièce 2 par rapport à la pièce 1. Les composantes du torseur sont calculées à partir des mesures de déplacements relevées par les capteurs LVDT. La charge est appliquée par une machine de traction de type Zwick Roell Z010.

La pièce usinée correspond à celle représentée sur la Fig. 5.30. La position des centres  $O_i$  des sphères usinées sont listés dans le Tableau 5.9.

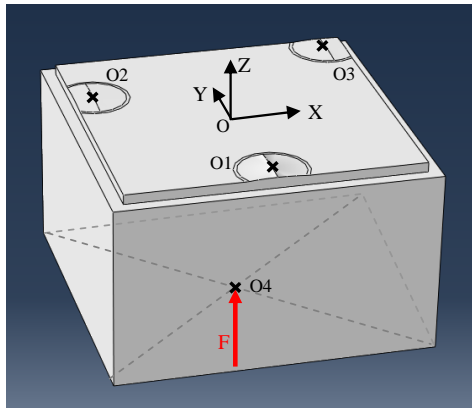


Fig. 5.30 – Pièce 2 avec 3 sphères de rayon 50mm; hauteur au-dessus du plan 0,3mm

O <sub>i</sub>	1	2	3	4
X	0	-20	20	0,5
Y	-20	10	20	0
Z	0	0	0	-27

Tableau 5.9 – Liste des coordonnées des centres O<sub>i</sub> exprimées en mm

### 5.2.2 Mesures expérimentales sur le dispositif

La procédure d'essai consiste à appliquer une charge verticale variant de 0 à un chargement maximal donnée. La charge est appliquée de manière régulière sous forme de rampe. En parallèle, la mesure des déplacements est effectuée. Il est possible de comparer, pour un chargement particulier, la valeur du torseur écart entre les deux pièces. Nous avons choisi de tester des chargements maximaux allant de 500N jusqu'à 2500N. L'ensemble des résultats sont détaillés pour la charge de 2500N et les autres résultats sont disponibles en Annexe B. La comparaison entre ces différentes courbes permettent de qualifier la répétabilité des déformations et les calculs associés (les différentes courbes sont disponibles en Annexe B).

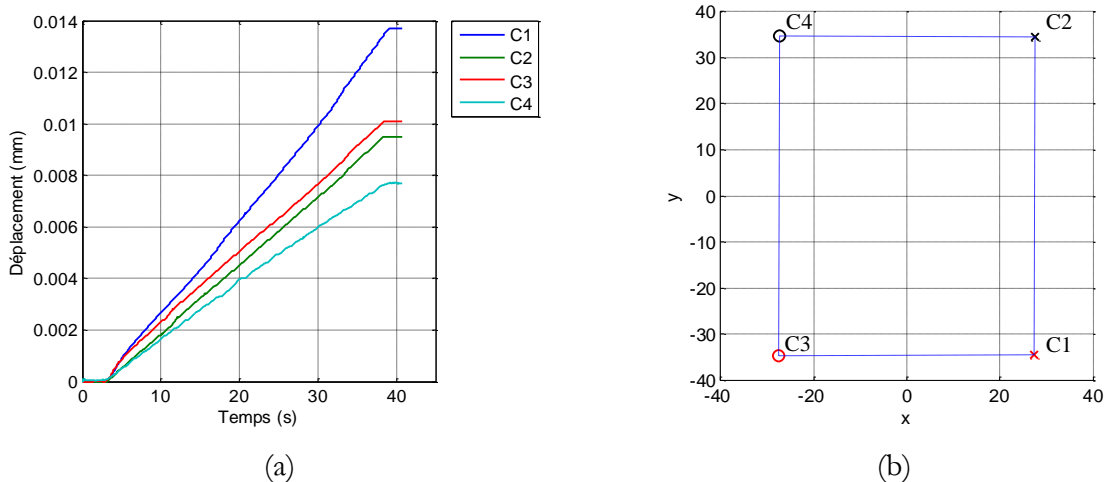


Fig. 5.31 – (a) Déplacements mesurés sur chacun des capteurs LVDT pour un chargement de 2500N; (b) Position des capteurs dans le plan Oxy

La Fig. 5.31a représente l'acquisition des déplacements mesurés par les capteurs. On peut constater que la réponse des capteurs en translation est régulière et l'amplitude en translation est de l'ordre de 1/100mm. On peut remarquer des écarts entre chacun des capteurs avec une valeur de translation maximale de 0,014mm pour le capteur 1 et 0,08mm pour le capteur 4 (les deux autres capteurs ayant une amplitude de 0.01mm). Cet écart traduit à la fois un enfoncement

vertical de la pièce mais aussi une rotation combinée le long d'une diagonale passant par le centre des capteurs 1 et 4. Ainsi, lors de l'identification du torseur écart entre les surfaces, on devrait avoir deux valeurs angulaires de rotation autour de l'axe x ( $\rho_x$ ) et de l'axe y ( $\rho_y$ ).

A partir des relevés des mesures des 4 capteurs, il est possible de calculer les composantes du torseur écart entre les deux pièces (voir le paragraphe 5.2.3 pour le détail des calculs associés).

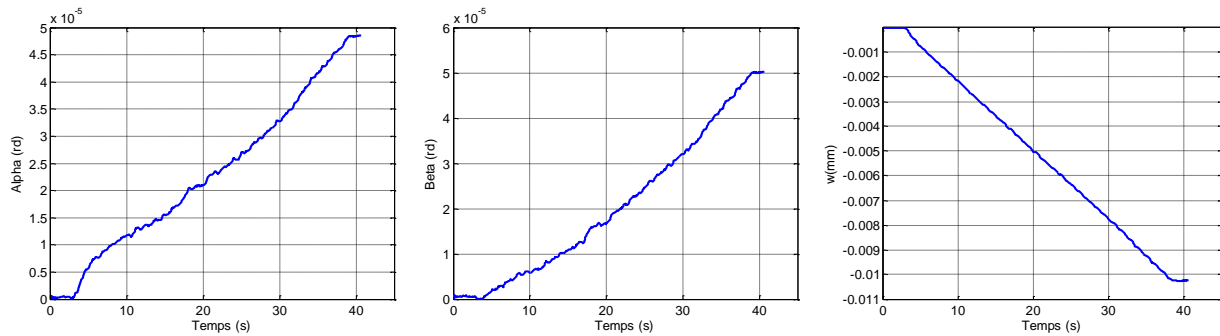


Fig. 5.32 – Evolution des torseurs écarts en fonction de la charge (passant de 0 à 2500N)

Les variations de chacun des paramètres entre le début de l'essai (0N) et le chargement maximal (2500N) sont listées dans le Tableau 5.10.

$\rho_x$ (rd)	$\rho_y$ (rd)	$\varepsilon_z$ (mm)
4,9e-5	5,0e-5	0,010

Tableau 5.10 – Variation des paramètres du torseur écart lors du chargement

D'après ces mesures et connaissant la position des sommets de sphère (voir les données du Tableau 5.9), il est possible de calculer les écrasements locaux de surface. Les différents résultats sont donnés dans le Tableau 5.11.

	Sphère 1	Sphère 2	Sphère 3
Ecrasement (mm)	0,011	0,009	0,010

Tableau 5.11 – Ecrasements locaux de surface

## 5.2.3 Calcul des valeurs d'écrasements locaux

Dans la suite, nous cherchons à comparer les résultats expérimentaux obtenus avec des résultats obtenus par calcul analytique ou simulation numérique.

### 5.2.3.1 Approche analytique

Dans un premier temps, nous proposons d'estimer les valeurs des écrasements locaux à partir d'une approche analytique. Au regard des surfaces de contact (type sphère sur plan), un modèle de contact de type hertzien semble adapté à notre étude. Ce modèle suppose entre autres que les zones déformées restent dans le domaine élastique. Nous supposons aussi que le contact se fait sans frottement. Les différentes relations associées à ce type de contact sont résumées par les équations (5.1) et (5.2). Elles reposent essentiellement sur l'évaluation d'un module d'élasticité

réduit des matériaux en contact puis par la prise en compte de la typologie des zones de contact (sphère sur plan). Il est alors possible d'en déduire la valeur des écrasements locaux (notés  $\delta_i$ ), la dimension de la zone de contact ou encore les valeurs de pression et de contraintes maximales (non étudiées ici).

Estimation du module d'élasticité réduit du matériau :

$$k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi \times E_1} \quad (5.1)$$

avec pour l'alliage d'aluminium  $\nu_1 = 0,33$ ;  $E_1 = 70000\text{MPa}$

$$k_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi \times E_2} \quad (5.2)$$

avec pour l'acier inoxydable  $\nu_2 = 0,3$ ;  $E_2 = 189000\text{MPa}$

Et pour chaque contact sphérique noté  $i$ , on détermine l'écrasement local par l'équation (5.3) :

$$\delta_i = \left( 9 \times \frac{\pi^2}{16} \times (k_1 + k_2)^2 \times \frac{RF_i^2}{R_i} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5.3)$$

Afin de déterminer les charges spécifiques qui sont appliquées sur chacune des zones de contact, il est nécessaire de réaliser une étude statique en supposant que l'effort  $F$  est centré sur la face opposée à celle de contact. Par ailleurs, on considère un contact normal aux surfaces (pas de prise en compte de frottement). Ainsi, les réactions d'appuis (notée  $RF_i$ ) seront portées uniquement par l'axe  $z$ . Afin d'avoir des résultats prenant en compte des défauts liés à l'usinage des surfaces de contact, nous avons calculé les valeurs des rayons de sphère selon le critère des moindres carrés en utilisant les mesures issues de l'appareil de mesure de topographie Altisurf© 500 d'Altimet. On peut constater des écarts entre la consigne d'usinage et les surfaces sphériques effectivement usinées (1 à 3,5mm au rayon). Les différents résultats d'efforts et d'écrasement sont listés dans le Tableau 5.12.

			Rayon (mm)	49,27	46,51	46,93
F (N)	RF <sub>1</sub> (N)	RF <sub>2</sub> (N)	RF <sub>3</sub> (N)	$\delta_1$ (mm)	$\delta_2$ (mm)	$\delta_3$ (mm)
2500	1080	678	742	0,013	0,009	0,010

Tableau 5.12 – Liste des résultats obtenus à partir de la théorie d'Hertz (contact plan/sphère)

Si l'on compare les résultats obtenus par les mesures expérimentales (cf. Tableau 5.11) et les valeurs calculées par l'équation (5.3) données dans le Tableau 5.12, on peut constater que les valeurs sont très proches (écart de l'ordre du micromètre). Cela permet de valider le modèle de comportement choisi pour caractériser les déformations des zones de contact ainsi que la pertinence des mesures.

### 5.2.3.2 Approche numérique

Nous avons en parallèle réalisé une approche par éléments finis pour estimer l'influence du chargement sur les écrasements locaux au moyen du logiciel Abaqus. La pièce est modélisée par des éléments de type tétraédrique dont la densité est importante dans les zones de contact. Au total, 36314 éléments sont utilisés. On suppose un comportement élastique du matériau. Le contact considéré est de type normal à la surface et sans frottement. Les valeurs de déplacements sont présentées sur la Fig. 5.33.

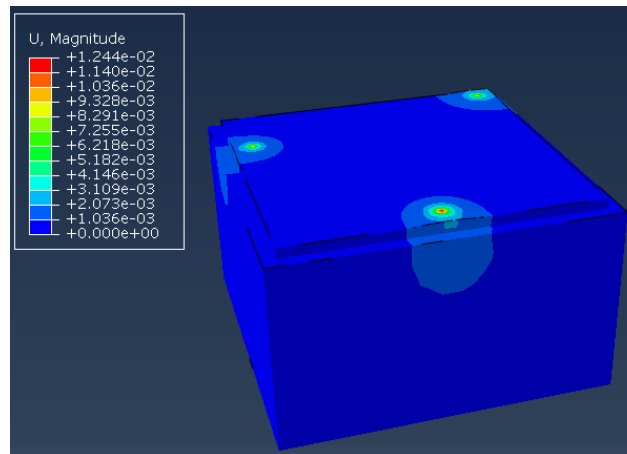


Fig. 5.33 – Pièce 2 avec 3 sphères de rayon 50mm ; hauteur au-dessus du plan 0,3mm

Les valeurs de déplacements sont listées dans le Tableau 5.13. On peut constater de petites variations des valeurs d'enfoncement (de l'ordre du micromètre). Ces écarts sont essentiellement liés au choix que nous avons fait de réaliser la simulation numérique en utilisant les valeurs de rayons nominaux (50mm de rayon).

	Sphère 1	Sphère 2	Sphère 3
Ecrasement (mm)	0,013	0,010	0,010

Tableau 5.13 – Relevé des valeurs de déplacements locaux lié au chargement de 2500N

### 5.2.4 Bilan

On peut remarquer une bonne adéquation entre les résultats expérimentaux et les valeurs calculés tant par une approche analytique basée sur un modèle de contact hertzien ou une approche de type éléments finis pour lesquels les résultats sont quasiment similaires. Cela permet de montrer la précision du dispositif expérimental, notamment, sous charge dans une configuration statique. Ces premiers résultats concernant la mesure de l'influence de chargement extérieur sur une liaison permet d'envisager des poursuites afin d'intégrer la mesure du domaine écart de la liaison plane en fonction du chargement et, par conséquent, de pouvoir intégrer les déformations élastiques des liaisons dans les études de mécanisme.

### 5.3 Conclusion

Ce chapitre a permis de mettre en évidence l'influence des défauts de forme des surfaces en contact sur le comportement d'une liaison plane unilatérale. Pour cela, nous avons procédé par étapes successives afin de valider les différents outils théoriques développés dans le chapitre 3. Tout d'abord, nous avons testé le cas d'une surface plane rectifiée afin de quantifier la précision du dispositif expérimental développé. Ces premiers résultats ont permis de conclure quant à la pertinence de l'utilisation des capteurs LVDT pour la mesure des déplacements ainsi que l'introduction des surfaces de référence afin de simplifier la comparaison entre les déplacements mesurés de la liaison et les défauts de surface. Par la suite, des surfaces incluant plusieurs sphères sont testées. À partir de ces surfaces, nous avons montré que les zones d'appui se situent uniquement sur l'enveloppe convexe des zones de contact. Enfin, des couples de surfaces comportant toutes deux des défauts de forme sont testées et valident la procédure dans son ensemble. Ce chapitre se conclut sur l'étude de l'influence d'un chargement vertical sur la liaison. Les déformations locales sont estimées au travers d'un modèle hertzien et nous avons estimé la variation du torseur écart entre les pièces.





# 6

## Conclusion et perspectives

L'objectif de cette thèse est d'étudier le comportement des liaisons en intégrant des défauts de forme, activité rarement réalisée, les surfaces considérées étant habituellement parfaites.

Tout d'abord, une étude bibliographique a été menée. Elle détaille les modèles mathématiques, pour caractériser les déplacements relatifs dans un assemblage, dont le modèle des domaines utilisé par la suite. Différentes méthodes de paramétrage pour caractériser les surfaces avec défauts de forme sont aussi détaillées dans cette étude dont la méthode DMD (Décomposition Modale Discrète) utilisée dans la génération des surfaces avec défauts de forme à fabriquer. Cette partie montre, également, la rareté et les limites des travaux sur l'étude expérimentale du comportement des liaisons sous l'effet des défauts de forme.

Ensuite, les développements théoriques ont été présentés afin d'enrichir les modèles utilisés dans l'activité de tolérancement. Les concepts connus de domaine et de « surface convexe des différences » ont été utilisés et surtout leur dualité a été clairement présentée. Différents exemples montrent comment la forme de la surface des différences est liée au comportement de la liaison. L'influence des incertitudes de mesure est, également, analysée.

Finalement, la partie expérimentale est la partie essentielle de la thèse. Plusieurs apports sont présentés.

Un dispositif de mesure a été conçu et expérimenté pour obtenir le domaine jeu expérimental d'une liaison. Ceci impose à la fois un grand nombre de mesures et une précision importante. Le

nombre de mesures doit être grand pour permettre de parcourir les limites du domaine jeu. La précision doit permettre de détecter des déplacements dus à des défauts de forme de faibles amplitudes. L'usage habituel d'une MMT ne permettait, ni un grand nombre de mesures, ni la précision nécessaire. Aussi, des capteurs de déplacements de type LVDT ont été retenus.

La difficulté principale portait sur la validation du dispositif par la mesure des surfaces. Le verrou technologique portait sur la matérialisation d'une référence commune à la mesure des déplacements et à la mesure des surfaces. Cela a été résolu par l'ajout de surfaces de références, solution a priori classique. Néanmoins, dans le cas présent, toute la difficulté reposait sur les précisions désirées et l'usage des mêmes références pour la mesure des déplacements et des surfaces. Le choix de capteurs de déplacement de précision et non pas la mesure sur une MMT imposait de trouver une conception particulière de ces références avec une mise en œuvre spécifique.

À notre connaissance, il s'agit, également, du premier travail permettant de remonter de la mesure des déplacements dans une liaison à la forme des surfaces, plus exactement à la forme de la surface convexe des différences. Cela signifie qu'il est possible d'avoir une certaine connaissance des défauts des surfaces, indirectement, à partir de la mesure des déplacements, sans mesurer les surfaces elles-mêmes. Généralement, la mesure des déplacements dans une liaison est uniquement effectuée selon des axes privilégiés, par exemple translations maximales selon les axes principaux et angles maximaux selon ces mêmes axes. Ces mesures ne sont pas suffisantes pour remonter aux surfaces, seule la mesure du domaine jeu le permet.

Différents essais ont validé le système, mais aussi ont montré ses limites. Nous avons pu constater que les incertitudes de mesure devenaient trop importantes pour de faibles défauts de forme. Une première étude de l'influence des chargements sur le comportement de la liaison plane a été réalisée et a donné des résultats prometteurs et ouvrant la voie à la caractérisation sous charge des liaisons avec défauts de forme.

Les différents apports forment également le point de départ vers de futurs travaux. Ceux-ci peuvent être classés en travaux axés vers la recherche de l'amélioration des techniques présentées puis vers des applications technologiques diverses.

La maîtrise des propagations des incertitudes est une réelle problématique dans le cadre du dispositif expérimental développé puisque nous attendons des précisions de mesure de l'ordre du micromètre. La mesure des surfaces semblent être à l'origine de dispersions non négligeable. Afin

de valider la précision, un travail de comparaison entre un relevé optique et un relevé mécanique des surfaces doit être mené. Par ailleurs, lors des relevés de surfaces, les contours des pièces sont difficiles à identifier, car le capteur optique génère des points non mesurés et non la frontière de la surface. La précision de cette frontière dépend alors du pas de mesure. Dans certains cas, des points aberrants sont mesurés. Cela génère des dispersions sur la construction de la surface des différences et, donc, sur les domaines reconstitués. Une approche basée sur le filtrage des surfaces pourrait, dans ce cas, être pertinente comme ceux utilisés dans les travaux de (Le Goïc, 2012) appliqués sur des mesures de surfaces similaires aux nôtres.

Concernant la mesure des déplacements, le point faible est la manipulation manuelle des pièces qui donne des domaines différents selon les essais. Une automatisation des déplacements doit être mise en place. Le dispositif est déjà conçu à cette fin. Les actionneurs prévus sont des vérins électriques. La difficulté porte sur la stratégie de commande des déplacements à appliquer afin de « parcourir » le domaine jeu quel que soit les défauts de forme des surfaces.

Enfin, l'étude de chargement sur la surface plane permet de montrer la faisabilité et la pertinence de la démarche développée. Ces premiers résultats appellent à une étude plus complète sur les déformations locales des surfaces de contact et, plus globale, en intégrant les déformations des pièces supports lors du chargement en un ou plusieurs points de la liaison. Ces chargements pourront représenter soit les efforts transmis par la liaison soit les actions dues à des fixations des pièces entre elles (précontraintes de montage).

À l'issue de cette étude, nous avons montré comment, à partir de l'évolution en position de quelques points particuliers de la surface de contact, les déplacements de la liaison évoluaient ainsi que la forme du domaine. Il serait intéressant de définir des typologies de surface de contact en regard de typologie de domaine ce qui permettrait par la suite, en fonction des comportements attendus sur les mécanismes de privilégier certains types de défauts de surface.

Ces travaux théoriques permettent par ailleurs de soulever des problématiques liées aux critères d'association de surface. Le critère le plus couramment utilisé en métrologie est le critère des moindres carrés. Les normes de spécification géométrique des produits utilisent le critère minimax tangent extérieur matière. Des études plus approfondies sur le critère d'association sur les surfaces nominale ment planes doivent être réalisées pour traduire le comportement de l'appui plan (zone d'appui, orientation des surfaces avec défauts, etc.). Cette étude pourrait ensuite être étendue à d'autres types de liaison.

D'un point de vue plus applicatif, de nombreuses possibilités sont offertes. On peut par exemple envisager l'étude de différents types de liaisons (pivot, pivot glissant, emmanchement conique, etc.). L'étude de ces nouvelles liaisons permettra de démontrer l'aspect générique de l'approche développée. Il faudra alors apporter des compléments théoriques et modifier l'architecture du dispositif en fonction des degrés de liberté de la liaison, néanmoins le principe de mesure reste identique.

On pourra par la suite remonter à l'étude de mécanismes technologiques relativement simples comme des roulements ou des paliers. Dans ce cadre, il faudra mettre en place des moyens adaptés des mesures in situ des mouvements (translation/rotation) ou de chargements statiques ou dynamiques. Sur des assemblages statiques qui requièrent des précisions importantes, on peut aussi citer des montages d'usinage qui doivent présenter des précisions importantes ou des mécanismes plus complexes avec des hautes performances (turbine, pompe, etc.) pour lesquels de véritables problématiques industrielles existent pour gérer les conformités des pièces et les performances finales des assemblages en fonction des défauts élémentaires des pièces assemblées.

Enfin, le principe de mesure permet de caractériser l'état d'une liaison ou d'un assemblage avec jeux, soit pour vérifier sa conformité lors de sa fabrication, soit pour diagnostiquer l'évolution de son comportement au cours de son usage. Des caractéristiques fonctionnelles pourraient être formulées sur le domaine afin de spécifier, directement, le comportement de la liaison et non pas les pièces isolées. De plus, la représentation graphique du domaine permettrait de visualiser les évolutions du comportement. Cette approche compléterait des études vibratoires réalisées sur des mécanismes en fonctionnement dans le cadre d'opérations de maintenance.

# Référence

- (Ahmed et al., 1974) Ahmed, N., Natarajan, T., Rao, K.R., 1974. Discrete Cosine Transform. *IEEE Trans. Comput.* C-23, 90–93.
- (Ameta, 2006) Ameta, G., 2006. Statistical Tolerance Analysis and Allocation for Assemblies using Tolerance-Maps (Thèse de Doctorat). Arizona State University.
- (Ameta et al., 2007a) Ameta, G., Davidson, J.K., Shah, J.J., 2007a. Using Tolerance-Maps to Generate Frequency Distributions of Clearance and Allocate Tolerances for Pin-Hole Assemblies. *J. Comput. Inf. Sci. Eng.* 7, 347–359.
- (Ameta et al., 2007b) Ameta, G., Davidson, J.K., Shah, J.J., 2007b. Tolerance-Maps Applied to a Point-Line Cluster of Features. *J. Mech. Des.* 129, 782–792.
- (Ameta et al., 2010) Ameta, G., Davidson, J.K., Shah, J.J., 2010. Statistical Tolerance Allocation for Tab-Slot Assemblies Utilizing Tolerance-Maps. *ASME Trans. JCISE* 10.
- (Anselmetti et Radouani, 2002) Anselmetti, B., Radouani, M., 2002. Contribution au Calcul Statistique des Chaines de Cotes Mise en Position d'une Pieces dans un Ajustement avec Jeu. Presented at the IDMME, Clermont-Ferrand (France).
- (Ballu et Couétard, 1995) Ballu, A., Couétard, Y., 1995. Dispositif de Mesure Spatiale des Petits Déplacements. Presented at the Séminaire Tolérancement et Chaines de Cotes, ENS Cachan, pp. 179–190.
- (Ballu et al., 2010) Ballu, A., Jay, A., Darnis, P., 2010. Experimental Evaluation of Convexe Difference Surface for Planar Joint Study. Presented at the Proceedings of IDMME - Virtual Concept, Bordeaux (France).
- (Bhide et al., 2005) Bhide, S., Ameta, G., Shah, J.J., Davidson, J.K., 2005. Tolerance-Maps Applied to the Straightness and Orientation of an Axis. Presented at the CIRP: Models for Computer Aided Tolerancing in Design and Manufacturing, pp. 45–54.
- (Bourdet et Clément, 1976) Bourdet, P., Clément, A., 1976. Controlling a Complex Surface with a 3 Axis Measuring Machine. *Ann. CIRP* 25, 359–361.
- (Bourdet et al., 1996) Bourdet, P., Mathieu, L., Lartigue, C., Ballu, A., 1996. The Concept of the Small Displacement Torsor in Metrology. *Ser. Adv. Math. Appl. Sci. Adv. Math. Tools Metrol.* II 40, 110–122.
- (Burel et Henocq, 1995) Burel, G., Henocq, H., 1995. Determination of the Orientation of 3D Objects Using Spherical Harmonics. *Graph. Models Image Process.* 57, 400–408.
- (Chien, 1982) Chien, A.Y., 1982. Approximate Harmonic Models for Roundness Profiles with Equivalent Energy Mean Square Values. *Wear* 77, 247–252.

- (Cho et Tu, 2001) Cho, N., Tu, J., 2001. Roundness Modeling of Machined Parts for Tolerance Analysis. *Precis. Eng.* 25, 35–47.
- (Coxeter, 1989) Coxeter, H.S.M., 1989. *Introduction to Geometry* - Second edition. ISBN 0-471-50458-0.
- (Davidson et al., 2002) Davidson, J.K., Mujezinovic, A., Shah, J.J., 2002. A New Mathematical Model for Geometric Tolerances as Applied to Round Faces. *ASME Trans. J. Mech. Des.* 124, 609–622.
- (Davidson et Shah, 2002) Davidson, J.K., Shah, J.J., 2002. Geometric Tolerances : A New Application for Line Geometry and Screws. *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.* 216, 95–104.
- (Davidson et Shah, 2012) Davidson, J.K., Shah, J.J., 2012. Modeling of Geometric Variations for Line-Profiles. *ASME Trans. JCISE* 12, 041004–041004.
- (Favrelière, 2009) Favrelière, H., 2009. *Tolérancement Modal - De la Métrologie vers les Spécifications* (Thèse de Doctorat). Université de Savoie.
- (Gaunet, 1994) Gaunet, D., 1994. *Modèle formel de tolérancement de position. Contributions à l'aide au tolérancement des mécanismes en CFAO* (Thèse de Doctorat). Ecole Normale Supérieure de Cachan, Laboratoire de Mécatronique de l'I.S.M.C.M.
- (Germain, 2007) Germain, F., 2007. *Tolérancement Statistique Tridimensionnel, Intégration en CFAO* (Thèse de Doctorat). Université de Savoie, Laboratoire Systèmes et Matériaux pour la Mécatronique (SYMME).
- (Giordano et Duret, 1993) Giordano, M., Duret, D., 1993. Clearance Space and Deviation Space. Presented at the 3rd CIRP seminar on Computer Aided Tolerancing, ISBN 2-212-08779-9, Cachan (France), pp. 179–196.
- (Gupta et Turner, 1993) Gupta, S., Turner, J.U., 1993. Variational Solid Modeling for Tolerance Analysis. *Comput. Graph. Appl. IEEE* 13, 64–74.
- (Henke et al., 1999) Henke, R.P., Summerhays, K.D., Baldwin, J.M., Cassou, R.M., Brown, C.W., 1999. Methods for Evaluation of Systematic Geometric Deviations in Machined Parts and their Relationships to Process Variables. *Precis. Eng.* 23, 273–292.
- (Homri et al., 2013) Homri, L., Teissandier, D., Ballu, A., 2013. Tolerancing Analysis by Operations on Polytopes. Presented at the Proceedings of the Fifth International Conference Design and Modeling of Mechanical Systems, ISBN 978-3-642-37142-4, Springer, Djerba (Tunisie), pp. 597–604.
- (Huang et Ceglarek, 2002) Huang, W., Ceglarek, D., 2002. Mode-based Decomposition of Part Form Error by Discrete-Cosine-Transform with Implementation to Assembly and Stamping System with Compliant Parts. *Ann. CIRP* 51, 21–26.
- (ISO/CEI-10918-1, 1994) ISO/CEI-10918-1, 1994. *Technologies de l'Information - Compression Numérique et Codage des Images Fixes de Nature Photographique : Prescriptions et Lignes Directrices.*

- (ISO-10110-5, 2008) ISO-10110-5, 2008. Optique - Indications sur les Dessins pour Eléments et Systèmes Optiques - Partie 5 : Tolérances de Forme de Surface.
- (Jian et al., 2007) Jian, A.D., Ameta, G., Davidson, J.K., Shah, J.J., 2007. Tolerance Analysis and Allocation using Tolerance-Maps for a Power Saw Assembly. Presented at the 9th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, ISBN 978-1-4020-5437-2, Springer, Tempe (Arizona - USA), pp. 267–276.
- (Kataya, 2002) Kataya, B., 2002. Modélisation des Tolérances Géométriques pour leur Intégration en Conception Assistée par Ordinateur (Thèse de Doctorat). Université de Savoie.
- (Lê et al., 2012) Lê, H.-N., Ledoux, Y., Ballu, A., 2012. From Surface Defects of a Planar Joint to Relative Displacements and Vice Versa. Presented at the 12th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing, Huddersfield (UK).
- (Lecompte et al., 2010) Lecompte, J., Legoff, O., Hascoet, J.Y., 2010. Technological Form Defects Identification using Discrete Cosine Transform Method. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 51, 1033–1044.
- (Le Goïc, 2012) Le Goïc, G., 2012, Qualité Géométrique & Aspect des Surfaces : Approches Locales et Globales (Thèse de Doctorat). Université de Grenoble.
- (Mansuy, 2012) Mansuy, M., 2012. Aide au Tolérancement Tridimensionnelle : Modèle des Domaines (Thèse de Doctorat). Université de Grenoble.
- (Morière, 2010) Morière, S., 2010. Contribution à l'Etude des Assemblages avec Prise en Compte des Défauts de Forme : Modélisation et Expérimentation (Thèse de Doctorat). Université de la Méditerranée.
- (Morière et al., 2009) Morière, S., Mailhé, J., Linares, J.M., Sprauel, J.M., 2009. Assembly Method Comparison including Form Defect. *Proc. 11th CIRP Int. Semin. Comput.-Aided Toler.*
- (Mujezinovic et al., 2004) Mujezinovic, A., Davidson, J.K., Shah, J.J., 2004. A New Mathematical Model for Geometric Tolerances as Applied to Polygonal Faces. *ASME Trans. J. Mech. Des.* 126, 504–518.
- (Petit, 2004) Petit, J.P., 2004. Spécification Géométrique des Produits : Méthode d'Analyse de Tolérances. Application en Conception Assistée par Ordinateur (Thèse de Doctorat). Université de Savoie, Laboratoire de Mécanique Appliquée (LMéCA).
- (Pfeifer et al., 2001) Pfeifer, T., Kurokawa, S., Meyer, S., 2001. Derivation of Parameters of Global Form Deviations for 3-Dimensional Surfaces in Actual Manufacturing Processes. *Measurement* 29, 179–200.
- (Radouani, 2003) Radouani, M., 2003. Contribution à la Validation du Modèle des Chaînes de Cotes (Thèse de Doctorat). Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- (Radouani et Anselmetti, 2003) Radouani, M., Anselmetti, B., 2003. Contribution à la Validation du Modèle des Chaînes de Cotes - Etude Expérimentale du



- Comportement de la Liaison Plan sur Plan. Presented at the Conception et Production Intégrées (CPI), Meknès.
- (Raja et Radhakrishnan, 1977) Raja, J., Radhakrishnan, V., 1977. Analysis and Synthesis of Surface Profiles using Fourier Series. *Int. J. Mach. Tool Des. Res.* 17, 245–251.
- (Roy and Li, 1999) Roy, U., Li, B., 1999. Representation and interpretation of geometric tolerances for polyhedral objects. II.: Size, orientation and position tolerances. *Comput.-Aided Des.* 31, 273–285.
- (Samper, 2007) Samper, S., 2007. Tolérancement et Analyse des Structures au Service des Systèmes Souples et du Défaut de Forme (Mémoire d'Habilitation à Diriger les Recherches). Université de Savoie.
- (Samper et al., 2009) Samper, S., Adragna, P.A., Favreliere, H., Pillet, M., 2009. Modeling of 2D and 3D Assemblies Taking into Account Form Errors of Plane Surfaces. *J. Comput. Inf. Sci. Eng.* 9, 041005.
- (Samper et Formosa, 2007) Samper, S., Formosa, F., 2007. Form Defects Tolerancing by Natural Modes Analysis. *J. Comput. Inf. Sci. Eng.* 7.
- (Serré et al., 2002) Serré, P., Clément, A., Rivière, A., 2002. Formal Definition of Tolerancing in CAD and Metrology, in: *Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering*. P. Chedmail et al.
- (Singh et al., 2009) Singh, G., Ameta, G., Davidson, J.K., Shah, J.J., 2009. Worst-Case Tolerance Analysis of a Self-Aligning Coupling Assembly using Tolerance-Maps. Presented at the 11th CIRP International Conference on CAT, F. Villeneuve and M. Giordano, Annecy (France).
- (Summerhays et al., 2002) Summerhays, K.D., Henke, R.P., Baldwin, J.M., Cassou, R.M., Brown, C.W., 2002. Optimizing Discrete Point Sample Patterns and Measurement Data Analysis on Internal Cylindrical Surfaces with Systematic Form Deviations. *J. Int. Soc. Precis. Eng. Nanotechnol.* 26, 105–121.
- (Teissandier, 1995) Teissandier, D., 1995. L'Union Pondérée d'Espaces de Liberté: Un Nouvel Outil pour la Cotation Fonctionnelle Tridimensionnelle (Thèse de Doctorat). Université Bordeaux 1, Laboratoire de Mécanique Physique - UMR 5469.
- (Teissandier, 2012) Teissandier, D., 2012. Contribution à l'Analyse de Tolérances Géométriques d'un Système Mécanique par des Polytopes (Mémoire d'Habilitation à Diriger les Recherches). Université Bordeaux 1.
- (Teissandier et al., 1999) Teissandier, D., Delos, V., Couétard, Y., 1999. Operations on Polytopes: Application to Tolerance Analysis. Presented at the 6th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, ISBN 0-7923-5654-3, Kluwer academic publisher, Enschede (Netherlands), pp. 425–433.

- (Turner, 1987) Turner, J.U., 1987. Tolerances in computer-aided geometric design, (Thèse de Doctorat), Dept. of Computer and System Engineering, Rensselaer Polytechnic Institute.
- (Turner, 1993) Turner, J.U., 1993. A Feasibility Space Approach for Automated Tolerancing. *J. Eng. Ind.* 115, 341–346.
- (Turner et Wozny, 1987) Turner, J.U., Wozny, M.J., 1987. Tolerances in Computer-Aided Geometric Design. *Vis. Comput.* 3, 214–226.
- (Wang et Lai, 2008) Wang, S.F., Lai, S.H., 2008. Reconstructing 3D Shape, Albedo and Illumination from a Single Face Image. *Comput. Graph. Forum* 27, 1729–1736.
- (Wikipédia, 2013) Wikipédia, 2013. [http://en.wikipedia.org/wiki/Zernike\\_polynomials](http://en.wikipedia.org/wiki/Zernike_polynomials).
- (Wu et al., 2003) Wu, Y., Shah, J.J., Davidson, J.K., 2003. Improvements to Algorithms for Computing the Minkowski Sum of 3-polytopes. *Comput.-Aided Des.* 35, 1181–1192.
- (Wyant et Creath, 1992) Wyant, J.C., Creath, K., 1992. Basis Wavefront Aberration Theory for Optical Metrology. *Appl. Opt. Opt. Eng.* 11, 2–53.
- (Zhang et Lu, 2004) Zhang, D., Lu, G., 2004. Review of Shape Representation and Description Techniques. *Pattern Recognit.* 37, 1–19.
- (Zhou et al., 2004) Zhou, K., Bao, H., Shi, J., 2004. 3D Surface Filtering using Spherical Harmonics. *Comput.-Aided Des.* 36, 363–375.



# Annexe A : Plan des moindres carrés en fonction des TPD

Cette annexe rappelle la méthode des moindres carrés (Bourdet et Clément, 1976) qui sert dans ce document à :

- Soit chercher la position de contact  $(\rho_x, \rho_y, \varepsilon_z)$  d'une pièce par rapport à l'autre à partir les 4 mesures des 4 capteurs comme détaillé au paragraphe 3.1.2.2 du chapitre 3
- Soit chercher le plan des moindres carrés d'un nuage de point d'une surface mesurée (voir paragraphe 4.3.1.2 du chapitre 4)

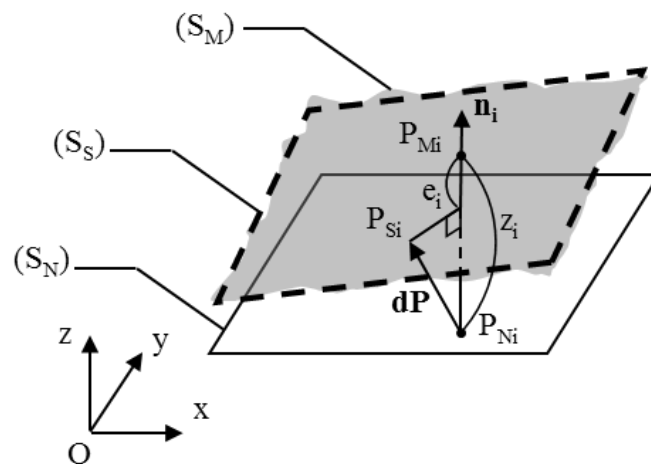


Fig. A.1 – Plan des moindres carrés

Notons :

- $(S_M)$  : surface mesurée
- $P_{Mi}(x_i, y_i, z_i)$  : point mesuré appartenant à  $(S_M)$
- $(S_N)$  : plan nominal
- $R_N(O, x, y, z)$  : repère tel que le plan  $(Oxy)$  est confondu avec le plan  $(S_N)$
- $(S_S)$  : plan de substitution (plan associé à la surface mesurée par le critère des moindres carrés)
- $\{T\}$  : TPD transformant  $(S_N)$  en  $(S_S)$
- $P_{Ni}(x_i, y_i, 0)$  : projection de  $P_{Mi}$  sur  $(S_N)$
- $P_{Si}$  : point appartenant à  $(S_S)$ , image de  $P_{Ni}$  par le petit déplacement

En utilisant le transport du moment d'un torseur, le déplacement du point  $P_{Ni}$  peut s'écrire :

$$\overrightarrow{dP_{Ni}} = \overrightarrow{dO} + \overrightarrow{P_{Ni}O} \times \overrightarrow{d\theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_i \\ -y_i \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_z - x_i\rho_y + y_i\rho_x \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

L'écart entre le point mesuré  $P_{Mi}$  et la surface ( $S_s$ ) s'écrit :

$$e_i = z_i - \overrightarrow{dP_{Ni}} \cdot \vec{n}_i = z_i - \varepsilon_z + x_i\rho_y - y_i\rho_x \quad (A.2)$$

Le critère des moindres carrés consiste à minimiser la fonction  $S$  :

$$S(\rho_x, \rho_y, \varepsilon_z) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (-y_i\rho_x + x_i\rho_y - \varepsilon_z + z_i)^2 \quad (A.3)$$

D'où :

$$\frac{\partial S}{\partial \rho_x}(\rho_x, \rho_y, \varepsilon_z) = \frac{\partial S}{\partial \rho_y}(\rho_x, \rho_y, \varepsilon_z) = \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_z}(\rho_x, \rho_y, \varepsilon_z) = 0 \quad (A.4)$$

D'où le système suivant :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i(-y_i\rho_x + x_i\rho_y - \varepsilon_z + z_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i(-y_i\rho_x + x_i\rho_y - \varepsilon_z + z_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (-y_i\rho_x + x_i\rho_y - \varepsilon_z + z_i) = 0 \end{cases} \quad (A.5)$$

$(\rho_x, \rho_y, \varepsilon_z)$  sont donc solutions du système d'équations linéaires suivant :

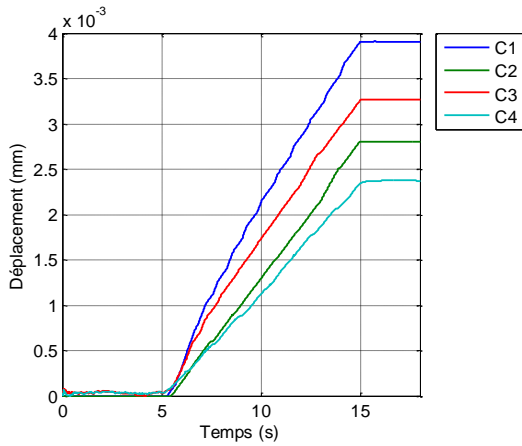
$$\begin{bmatrix} \sum_i y_i^2 & -\sum_i x_i y_i & \sum_i y_i \\ -\sum_i x_i y_i & \sum_i x_i^2 & -\sum_i x_i \\ \sum_i y_i & -\sum_i x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i y_i z_i \\ -\sum_i x_i z_i \\ \sum_i z_i \end{bmatrix} \quad (A.6)$$

De (A.1) nous pouvons déduire l'équation du plan ( $S_s$ ) en fonction de  $(\rho_x, \rho_y, \varepsilon_z)$  :

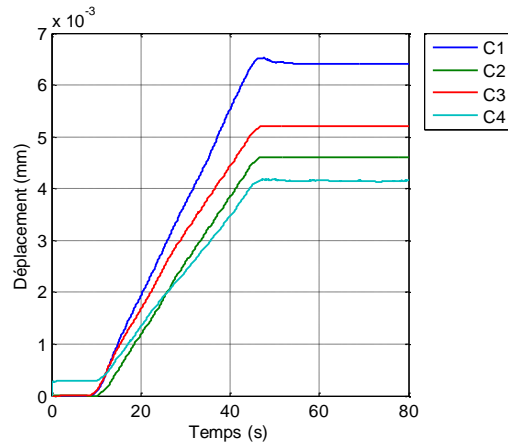
$$z = \varepsilon_z - \rho_y x + \rho_x y \quad (A.7)$$

# Annexe B : Liste des résultats

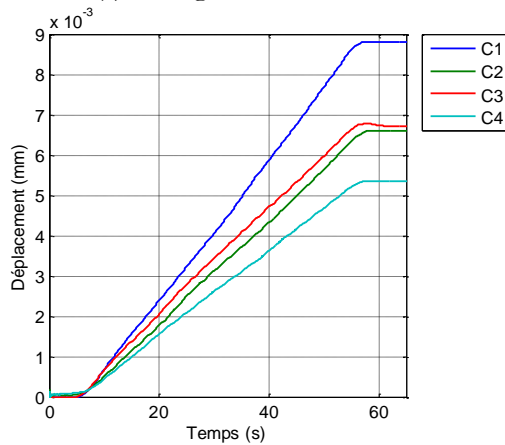
Les données qui suivent recensent les différentes valeurs relevées lors des essais sous chargement sur le dispositif avec une surface plane et la surface 3sphères. Les chargements testés évoluent de 500 à 2500N.



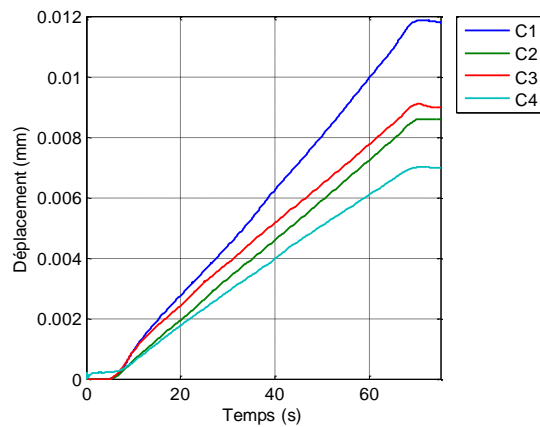
(a) Chargement de 500N



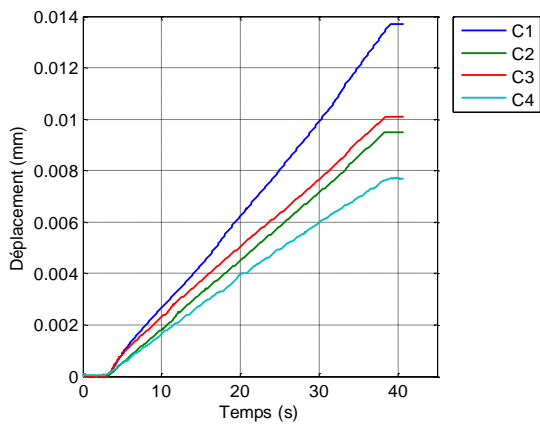
(b) Chargement de 1000N



(c) Chargement de 1500N



(d) Chargement de 2000N



(e) Chargement de 2500N

Fig. A.1 – Valeurs de déplacements mesurés par les capteurs LVDT

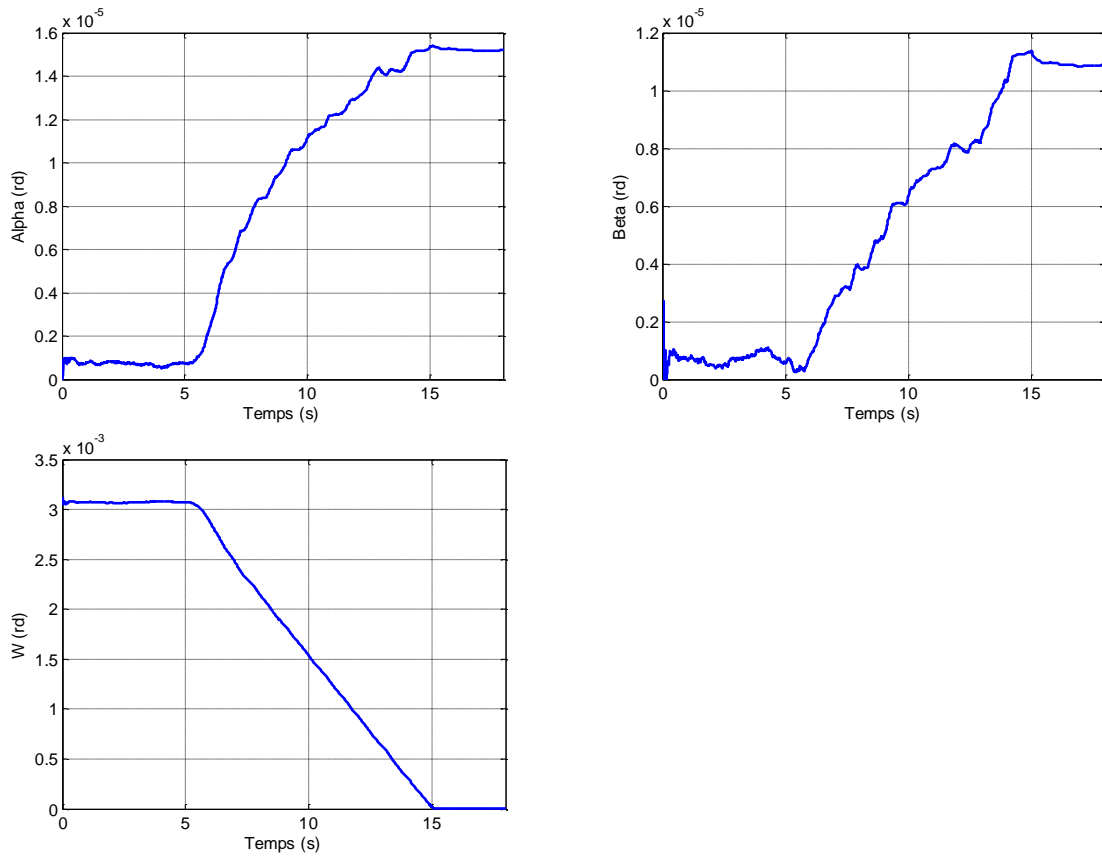


Fig. A.2 – Torseurs correspondant au chargement à 500N

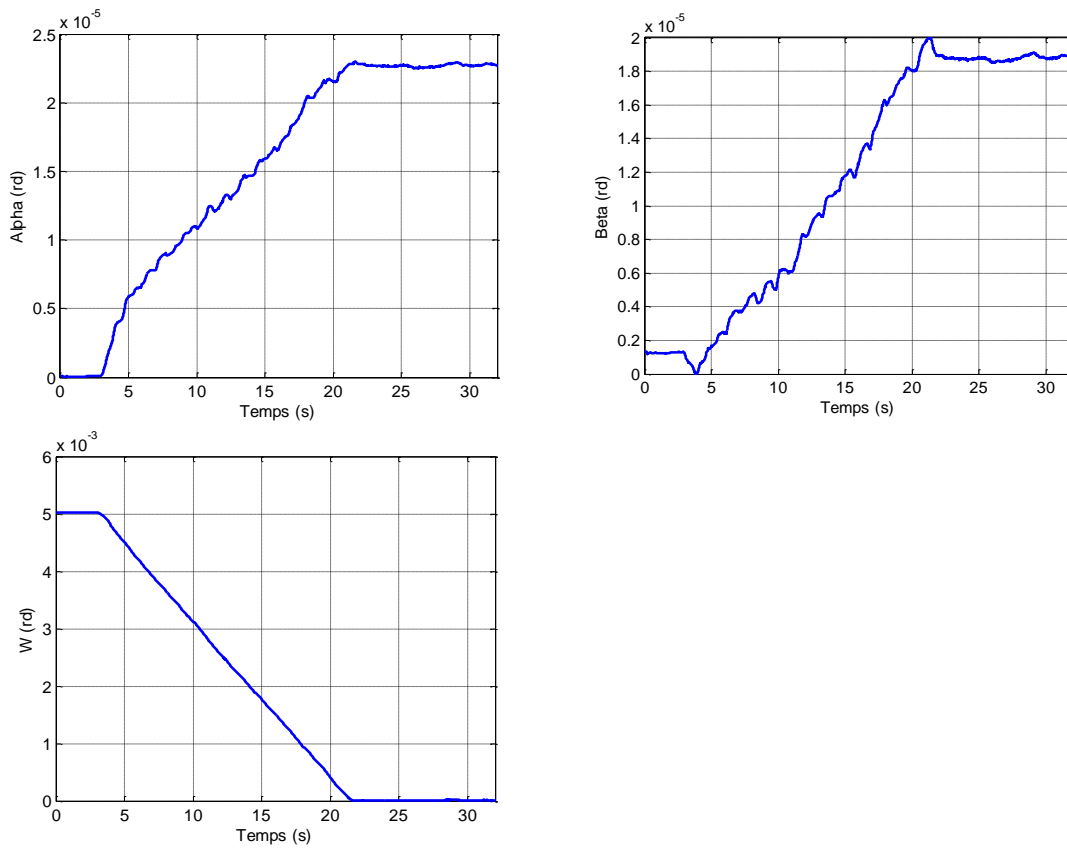


Fig. A.3 – Torseurs correspondant au chargement à 1000N

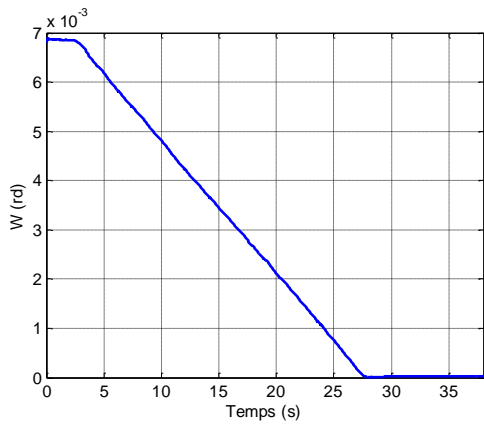
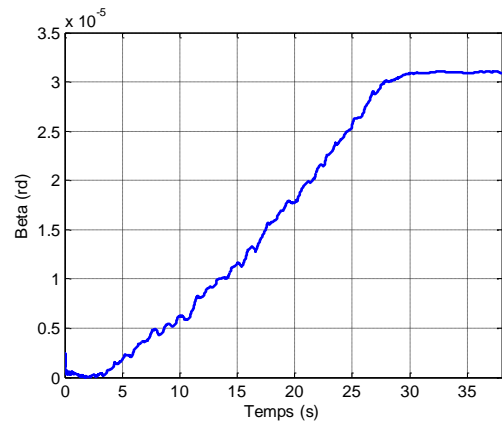
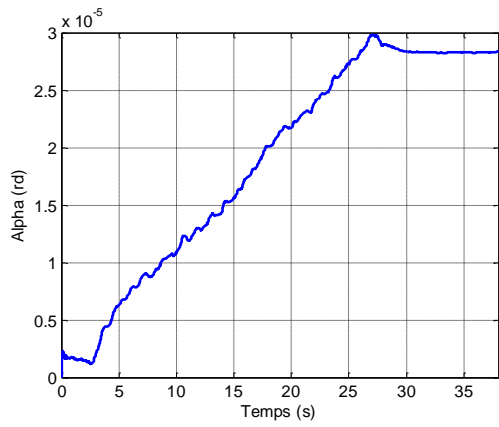


Fig. A.4 – Torseurs correspondant au chargement à 1500N

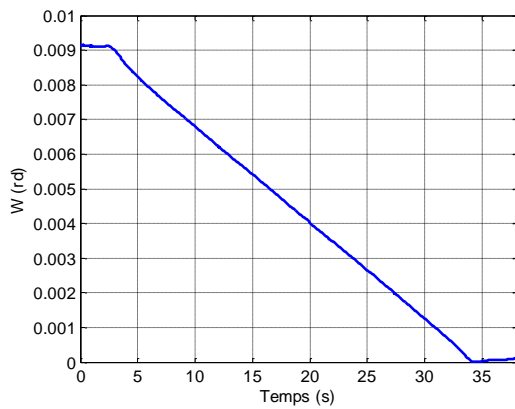
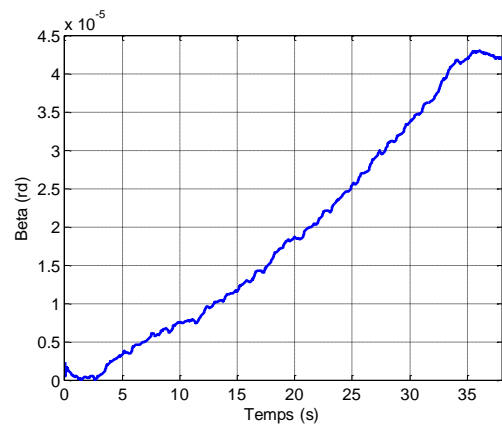
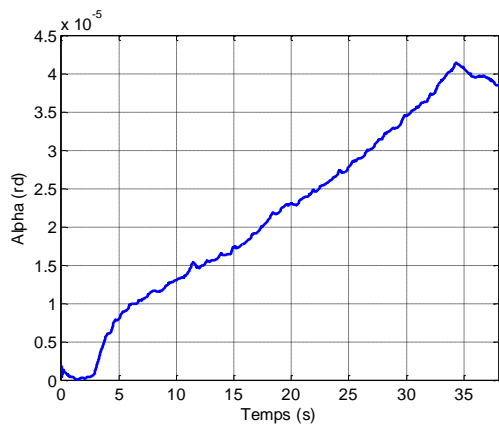


Fig. A.5 – Torseurs correspondant au chargement à 2000N



Ci-dessous est donné le détail des valeurs d'efforts et d'écrasements calculés à partir de la théorie d'Hertz (contact plan/sphère) :

			Rayon (mm)	49.27	46.51	46.93
F (N)	RF1 (N)	RF2 (N)	RF3 (N)	$\delta_{1\text{moy}}$ (mm)	$\delta_{2\text{moy}}$ (mm)	$\delta_{3\text{moy}}$ (mm)
500	216.1	135.7	148.2	0.0043	0.0032	0.0034
1000	432.1	271.4	296.4	0.0069	0.0051	0.0054
1500	648.2	407.1	444.6	0.0090	0.0067	0.0071
2000	864.3	542.9	592.9	0.0110	0.0082	0.0086
2500	1080.4	678.6	741.1	0.0127	0.0095	0.0100

Tableau B.1 – Efforts et écrasements à partir la théorie d'Hertz



**Résumé :**

L'objectif de l'étude est d'identifier le comportement des liaisons d'un mécanisme du point de vue des déplacements en fonction des défauts de forme et des jeux. Le sujet est abordé selon une approche théorique et une approche expérimentale.

La partie théorique montre la dualité entre les deux concepts utilisés : le domaine jeu et la surface convexe des différences. Elle montre également la typologie des domaines et l'influence des incertitudes de forme sur ces domaines.

En parallèle, un dispositif expérimental est développé. Il permet, non seulement, de réaliser la mesure des déplacements dans la liaison avec l'exactitude nécessaire, mais aussi, de valider les résultats par une simulation de l'assemblage à partir de la mesure 3D des surfaces en contact. L'expérimentation porte sur plusieurs couples de surfaces comportant des défauts de forme de différents types. L'influence d'un chargement mécanique est étudiée afin de quantifier les déformations locales de surfaces de contact et l'évolution des écarts de position entre les pièces.

**Mots clés :**

Tolérancement, Comportement des liaisons, Défauts de forme, Domaine jeu, Surface convexe des différences

---

**Abstract :**

The aim of the study is to identify, in terms of displacements, the joint behavior of a mechanism in function of form defects and gaps. Two approaches are proposed : a theoretical approach and an experimental one.

The theoretical part presents the duality between the two concepts used in the experimental approach : gap hull and convex difference surface. It outlines also the typology of gap hulls and the influence of the form uncertainties on gap hulls.

In parallel, an experimental device is developed. It allows, not only, to carry out the measure of displacements in the joint with the necessary accuracy, but also, to validate the results by an assembly simulation from the 3D measurement of the surfaces in contact. The experimentation involves several pairs of surfaces with different types of form defects. The influence of mechanical loads is studied in order to quantify the local deformation of the surfaces in contact and the evolution of location deviations between these surfaces.

**Keywords :**

Tolerancing, Joint behavior, Form defects, Gap hull, Convex difference surface

---