



**HAL**  
open science

# Graphes de groupes et groupes co-hopfiens

Christophe Moioli

► **To cite this version:**

Christophe Moioli. Graphes de groupes et groupes co-hopfiens. Théorie des groupes [math.GR]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2013. Français. NNT: . tel-00961301

**HAL Id: tel-00961301**

**<https://theses.hal.science/tel-00961301>**

Submitted on 1 Apr 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

---

**Présentée et soutenue par :**

**Christophe MOIOLI**

Le mercredi 18 décembre 2013

**Titre :**

GRAPHES DE GROUPES ET GROUPES CO-HOPFIENS

---

ED MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques fondamentales

**Unité de recherche :**

Laboratoire Emile Picard

**Directeur(s) de Thèse :**

François DAHMANI, Professeur, Université de Grenoble I

Vincent GUIRARDEL, Professeur, Université de Rennes I

**Rapporteurs :**

François GAUTERO, Professeur, Université de Nice Sophia Antipolis

Luisa PAOLUZZI, Professeur, Université d'Aix-Marseille

**Autre(s) membre(s) du jury :**

Javier ARAMAYONA, Maître de Conférences, Université de Toulouse III

Peter HAISSINSKY, Professeur, Université de Toulouse III



## Résumé

Un groupe est dit co-hopfien si tout endomorphisme injectif de ce groupe est un automorphisme. En utilisant la théorie de Bass-Serre, nous montrons sous quelles conditions certains graphes de groupes, ayant leurs groupes d'arêtes finis, ont des groupes fondamentaux co-hopfiens. Nous donnons tout d'abord, dans le cas de certains graphes de groupes ayant tous leurs groupes d'arêtes de même cardinal, une caractérisation géométrique vue dans l'arbre de Bass-Serre  $T$  : il s'agit de la finitude du diamètre des sous-arbres de  $T$  fixés point par point par chaque groupe d'arêtes du graphe de groupes. On généralise ensuite ce résultat à certains graphes de groupes  $\Gamma$  ayant leurs groupes d'arêtes finis. On note alors  $\Gamma_n$  le graphe obtenu après écrasement des arêtes pour lesquelles le cardinal du groupe d'arêtes est strictement supérieur à  $n$  et  $T_n$  l'arbre de Bass-Serre correspondant à ce graphe écrasé. Nous donnons alors la caractérisation suivante :

**Théorème 0.0.1.** *Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes fini et réduit avec tous ses groupes d'arêtes finis et de groupe fondamental  $G$ . Posons  $n_\Gamma$  le cardinal maximum des groupes d'arêtes de  $\Gamma$ . Supposons de plus que chaque groupe de sommets soit co-hopfien et au plus à un bout. Alors on a :*

*$G$  est co-hopfien si et seulement si  $\forall n \leq n_\Gamma, \forall e \in E(\Gamma)$  tel que  $|G_e| = n$ , alors  $\text{diam}(\text{Fix}_{T_n}(G_e))$  fini.*

Ce résultat donne en particulier une caractérisation des groupes virtuellement libres co-hopfiens. On donnera aussi une équivalence algébrique à ce résultat avec des conditions sur les normalisateurs des groupes d'arêtes. Ces conditions pourront alors se rendre complètement algorithmiques dans la classe des groupes hyperboliques. On étudiera par conséquent la propriété co-hopf dans le cas des groupes hyperboliques à un bout, afin d'utiliser le théorème précédent et de pouvoir caractériser les groupes hyperboliques co-hopfiens. On généralisera alors le résultat de Z.Sela dans le cas sans torsion, des groupes hyperboliques non élémentaires librement indécomposables, au cas avec torsion. On utilisera pour cela les scindements  $JSJ$  de B. Bowditch des groupes hyperboliques à un bout au-dessus de groupes virtuellement cycliques. Nous montrons ainsi que tout groupe hyperbolique à un bout est co-hopfien.

Nous terminons avec un algorithme général décidant, étant donné un groupe hyperbolique, si ce groupe est co-hopfien ou non.



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement François Dahmani et Vincent Guirardel d'avoir encadré cette thèse. Je m'estime en effet très privilégié d'avoir eu deux directeurs, et de surcroît de cette qualité. Ils ont su, depuis le mémoire de master 2, être toujours disponibles pour moi et faire face à toutes mes interrogations. Je les remercie aussi d'avoir eu la gentillesse et la patience d'encadrer une thèse plus longue qu'à la normale. Je garderai aussi avec eux d'excellents souvenirs de discussions dans leur bureau, au téléphone (parfois tardives...), ainsi que de séminaires mathématiques dont ils ont pu me faire bénéficier.

Je souhaite aussi remercier Luisa Paoluzzi et François Gautero d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je les remercie pour leur lecture très attentive ainsi que leurs remarques détaillées. Elles ont permis une nette amélioration de la rédaction de cette thèse. Je remercie aussi Peter Haissinsky de sa gentillesse, d'avoir pris le temps de m'écouter et de me conseiller avant la soutenance. Merci aussi à Javier Aramayona d'avoir accepté de faire partie du jury.

Un grand merci à Agnès Requis qui, avec grande gentillesse, m'a toujours sauvé des difficultés administratives de dernières minutes... Aussi, merci à la bibliothèque de mathématiques qui, toujours avec compréhension et dû à mon éloignement géographique, a reporté de nombreuses dates d'empreints des livres.

Je remercie aussi les différents directeurs du collège du Pays de Serres où j'enseigne depuis le début de cette thèse. Ils ont tous pris en compte ma situation et m'ont permis de m'investir dans ce travail parallèlement à celui du collège. Merci à tous mes collègues de Lauzerte d'avoir supporté, pendant tout ce temps, mes petits dessins bizarres un peu partout dans le collège. Je les remercie aussi pour le soutien que certains m'ont apporté dans des moments plus difficiles. Un merci spécial à Sophia pour la finalisation du manuscrit...

Je remercie aussi ma belle-famille de m'avoir encouragé pendant toutes ces années, ainsi que d'avoir fait semblant de s'intéresser à mes recherches... (Je continuerai quoi qu'il arrive à vous maintenir au niveau, ne vous en faites pas!)

Un grand merci enfin à mes parents, mon frère et ma compagne. Merci de m'avoir toujours poussé au maximum. Merci à ma mère pour son soutien inébranlable. Merci à mon père de m'avoir expliqué les mathématiques au primaire avec la boîte de mouchoirs à proximité, ta méthode marche : la preuve ! Un grand merci à mon frère pour tous ses conseils, ainsi que nos longues conversations mathématiques... Enfin merci à ma chérie de sa présence et de son soutien au quotidien.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>20</b>
2.1	Théorie de Bass-Serre . . . . .	20
2.2	Isométries d'un arbre . . . . .	23
2.3	Notations . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Graphes de groupes avec groupes d'arêtes finis</b>	<b>28</b>
3.1	Premières propriétés . . . . .	28
3.2	Condition nécessaire . . . . .	35
3.3	Condition suffisante . . . . .	40
3.4	Condition nécessaire et suffisante . . . . .	48
3.5	Caractérisation globale . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Application aux groupes hyperboliques</b>	<b>55</b>
4.1	Préliminaires sur les groupes hyperboliques . . . . .	55
4.2	Groupes fuchsien compacts . . . . .	59
4.3	Scindements JSJ . . . . .	63
4.4	Automorphismes des groupes hyperboliques à un bout . . . . .	66
4.5	Groupes hyperboliques à un bout . . . . .	70
4.6	Accessibilité et détermination algorithmique . . . . .	75





# 1 Introduction

## Propriété co-Hopf

Un groupe  $G$  est dit co-hopfien si tout endomorphisme injectif  $\varphi : G \hookrightarrow G$  est un automorphisme. Les groupes finis sont ainsi co-hopfiens et les groupes cycliques infinis ne le sont pas. On a aussi le résultat suivant : un produit libre de groupes non triviaux n'est jamais co-hopfien. En effet si  $G = A * B$ , prenons  $c = b_0 a_0$  avec  $a_0 \in A \setminus \{1\}$  et  $b_0 \in B \setminus \{1\}$ . Posons l'endomorphisme injectif

$$\begin{aligned} \varphi : \quad G &\longrightarrow G \\ a \in A &\mapsto a \\ b \in B &\mapsto c b c^{-1} \end{aligned}$$

L'application  $\varphi$  est alors non surjective car aucun élément non trivial de  $B$  admet un antécédent par  $\varphi$ .

En particulier les groupes libres ne sont pas co-hopfiens. Cependant dans le cas des groupes virtuellement libres, la question reste plus subtile. Il existe en effet des produits amalgamés qui sont co-hopfiens.

**Exemple 1.0.2.** Prenons le groupe  $G = A *_C B$  un amalgame réduit, où  $A$  et  $B$  sont des groupes finis avec  $C$  sous-groupe propre de  $A$  et  $B$  et tel que le normalisateur  $N_G(C)$  de  $C$  dans  $G$  soit égal à  $C$ . Soit  $\varphi$  un endomorphisme injectif de  $G$ , son image  $\varphi(G)$  agit sur l'arbre de Bass-Serre  $T$  correspondant au produit amalgamé de  $G$ . La lecteur pourra se reporter à la section 2.1. Les groupes  $A$  et  $B$  étant finis, les images  $\varphi(A)$  et  $\varphi(B)$  fixent au moins un sommet de l'arbre  $T$  d'après le lemme de Serre. Le sous-groupe  $C$  étant propre dans  $A$  et  $B$ , les groupes  $\varphi(A)$  et  $\varphi(B)$  fixent alors respectivement un unique sommet de  $T$ . Ces deux sommets sont de plus distincts par injectivité de  $\varphi$ . L'image  $\varphi(C)$  fixe alors le chemin de  $T$  reliant ces deux sommets. Cependant la condition  $N_G(C) = C$  impose que le chemin fixé par  $\varphi(C)$  soit de longueur au plus un. Quitte à un prendre une puissance de  $\varphi$ ,  $\varphi(A)$  est un sous-groupe d'un conjugué de  $A$ , donc  $\varphi(A) = g A g^{-1}$  avec  $g \in G$  car  $A$  est fini. De même on a  $\varphi(B) = g B g^{-1}$  pour le même conjuguant  $g$  car  $\varphi(C)$  ne fixe qu'une seule arête. L'application  $\varphi$  composée par l'automorphisme intérieur de la conjugaison par  $g$  envoie  $A$  sur  $A$  et  $B$  sur  $B$ . Cette application est donc un automorphisme de  $G$ , donc  $\varphi$  également. Un tel groupe est donc co-hopfien.

Un groupe qui illustre notre premier exemple est le groupe  $S_3 *_S_2 S_3$  où  $S_3$  est le groupe des permutations de  $\{1, 2, 3\}$ . Nous donnerons dans l'exemple 3.4.5 des critères pratiques permettant de construire "à la main" des groupes co-hopfiens.

Un des objectifs de cette thèse est donc de caractériser les groupes virtuellement libres co-hopfiens. Cela permettra une généralisation aux groupes fondamentaux de certains graphes de groupes ayant leurs groupes d'arêtes finis.

Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes fini et réduit ayant tous ses groupes d'arêtes finis. Si  $T$  est l'arbre de Bass-Serre correspondant à  $\Gamma$  et  $e$  une arête de  $\Gamma$ , on note  $Fix_T(G_e)$  le sous-arbre

de  $T$  fixé point par point par le stabilisateur d'un choix de relevé de l'arête  $e$  dans  $T$ . On notera  $\text{diam}(\text{Fix}_T(G_e))$  le diamètre de ce sous-arbre. Si  $v$  est un sommet de  $\Gamma$ , le groupe de sommet  $G_v$  sera dit  $\Gamma$ -monomorphiquement elliptique si pour tout endomorphisme injectif  $\varphi : G \hookrightarrow G$ , alors  $\varphi(G_v)$  fixe un sommet de  $T$ . On donne alors la caractérisation suivante, dans le cas particulier où tous les groupes d'arêtes sont de même cardinal, reliant la propriété co-Hopf avec une condition géométrique dans l'arbre  $T$ .

**Théorème 1.0.3.** *Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes réduit et fini, dont tous les groupes d'arêtes sont finis et de même cardinal, et  $G$  son groupe fondamental.*

*Supposons que  $\forall v \in V(\Gamma)$ ,  $G_v$  co-hopfien et  $\Gamma$ -monomorphiquement elliptique.*

*Alors :  $G$  est co-hopfien si et seulement si  $\forall e \in E(\Gamma)$ ,  $\text{diam}(\text{Fix}_T(G_e))$  est fini.*

Contrairement à nos premières convictions, l'équivalence donnée au théorème 1.0.3 est fautive dans le cas d'un graphe de groupes ayant tous ses groupes d'arêtes finis, mais pas forcément de même cardinal. En effet le groupe  $S_3 *_{S_2} S_4 *_{S_3} S_4$ , où les groupes symétriques  $S_2$  et  $S_3$  sont plongés canoniquement, est co-hopfien avec pourtant  $\text{diam}(\text{Fix}_T(S_2))$  infini.

L'idée est alors de procéder à des écrasements successifs du graphe de groupes, sans en changer son groupe fondamental. On notera ainsi  $\Gamma_n$  le graphe obtenu à partir de  $\Gamma$  après écrasement de ses arêtes pour lesquelles le cardinal du groupe d'arête est strictement supérieur à  $n$ . On notera  $T_n$  l'arbre de Bass-Serre correspondant au graphe écrasé  $\Gamma_n$ . Nous donnons alors le théorème de caractérisation globale suivant, généralisant ainsi le théorème 1.0.3.

**Théorème 1.0.4.** *Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes fini et réduit avec tous ses groupes d'arêtes finis et de groupe fondamental  $G$ . Posons  $n_\Gamma$  le cardinal maximum des groupes d'arêtes de  $\Gamma$ . Supposons que  $\forall v \in V(\Gamma)$ , on a :  $G_v$  co-hopfien et au plus à un bout.*

*Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $G$  est co-hopfien.
2.  $\forall n \leq n_\Gamma$ ,  $\forall e \in E(\Gamma)$  tel que  $|G_e| = n$ , alors  $\text{diam}(\text{Fix}_{T_n}(G_e))$  fini.

Ce résultat donne en particulier une caractérisation des groupes virtuellement libres co-hopfiens. En effet P. Scott et T. Wall montrent dans [SW79] que les groupes virtuellement libres sont des groupes fondamentaux de graphes de groupes dont les groupes de sommets sont tous finis, vérifiant ainsi les hypothèses du théorème 1.0.4.

Cependant si l'on veut rendre la chose algorithmique, vérifier l'assertion 2 de ce théorème n'est pas chose aisée. Si on note  $\Gamma_e$  le graphe obtenu après écrasement de toutes les arêtes de  $\Gamma$  différentes de l'arête  $e$ ,  $i_e$  et  $i_{\bar{e}}$  les plongements du groupe d'arête  $G_e$  dans les groupes de sommets adjacents, on montre l'équivalence du théorème 1.0.4 avec la condition algébrique suivante :

**Théorème 1.0.5.** *Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes fini et réduit avec tous ses groupes d'arêtes finis et de groupe fondamental  $G$ . Posons  $n_\Gamma$  le cardinal maximum des groupes d'arêtes de  $\Gamma$ . Supposons que  $\forall v \in V(\Gamma)$ , on a :  $G_v$  co-hopfien et au plus à un bout.*

*Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $G$  est co-hopfien.
2.  $\forall e \in E(\Gamma)$ ,
  - Si  $\Gamma_e$  est l'amalgame  $A \underset{G_e}{*} B$  alors :  $N_A(i_{\bar{e}}(G_e)) = i_{\bar{e}}(G_e)$  ou  $N_B(i_e(G_e)) = i_e(G_e)$ .
  - Si  $\Gamma_e$  est l'extension HNN  $A \underset{G_e}{*}$  alors :  $i_e(G_e)$  et  $i_{\bar{e}}(G_e)$  sont non conjugués dans  $A$  et  $N_A(i_e(G_e)) = i_e(G_e)$  ou  $N_A(i_{\bar{e}}(G_e)) = i_{\bar{e}}(G_e)$ .

L'avantage de cette assertion 2 est qu'elle ramène l'étude de la condition co-Hopf à un calcul des normalisateurs de groupes finis. La chose peut se rendre alors complètement algorithmique dans certaines classes de groupes, en particulier dans celle des groupes hyperboliques.

Z. Sela et E. Rips donnent dans [RS94] un des premiers résultats sur la condition co-Hopf dans la classe des groupes hyperboliques. Ils montrent que tout groupe hyperbolique rigide, c'est à dire n'admettant aucun scindement au-dessus de groupes virtuellement cycliques, est co-hopfien. Puis Sela généralise ce résultat dans [Sel97], en montrant le théorème suivant :

**Théorème 1.0.6** (Z. Sela). *Soit  $G$  un groupe hyperbolique non élémentaire et sans torsion. Alors  $G$  est co-hopfien si et seulement si  $G$  est librement indécomposable.*

Afin de pouvoir utiliser le théorème 1.0.5, il nous faut généraliser ce théorème de Sela dans le cas avec torsion. On montre alors le résultat suivant :

**Théorème 1.0.7.** *Tout groupe hyperbolique à un bout est co-hopfien.*

Nous terminons alors cette thèse avec le théorème général suivant dans la classe des groupes hyperboliques.

**Théorème 1.0.8.** *Il existe un algorithme qui, étant donné un groupe hyperbolique, décide si ce groupe est co-hopfien ou non.*

Il existe une notion duale à celle de groupe co-hopfien que nous n'aborderons pas ici, celle de groupe hopfien. Un groupe est dit hopfien si tout endomorphisme surjectif de ce groupe est un automorphisme. Un résultat connu de Malcev est que tout groupe de type fini et résiduellement fini est un groupe hopfien. Il montre en particulier que tout sous-groupe de type fini du groupe linéaire est hopfien. Les groupes libres sont alors hopfiens, contrairement à la condition co-Hopf. Dans la classe des groupes hyperboliques, Sela montre dans [Sel99] qu'en absence de torsion, ces groupes sont hopfiens. Il est actuellement difficile de trouver un exemple de groupe hyperbolique non résiduellement fini. Il serait donc intéressant de savoir si tous les groupes hyperboliques sont hopfiens.

## Géométrie des groupes

Faisons maintenant quelques rappels des théories utilisées ainsi qu'un tour d'horizon du contexte historique dans lesquelles elles se situent. Au début du vingtième siècle, H. Poincaré développe un nouvel outil : le groupe fondamental. Ainsi de nombreux problèmes de

topologie peuvent se traduire sous forme de problèmes de théorie des groupes. A l'inverse, les groupes de type fini ont connu un réel essor à partir du moment où on a cessé de les considérer uniquement comme des objets algébriques. Une nouvelle vision possible de ces groupes est topologique et géométrique à travers les graphes de Cayley. C'est certainement avec les méthodes données par Max Dehn pour résoudre le problème du mot, reliant combinatoire des groupes et géométrie hyperbolique, que se développa une nouvelle branche mathématique qui se révélera extrêmement féconde : la géométrie des groupes.

Si  $G$  est un groupe de type fini et  $S$  un ensemble fini de générateurs de  $G$  alors on peut définir le graphe de Cayley de  $G$  associé à  $S$ , noté  $Cay_G(S)$ , de la manière suivante : c'est un complexe simplicial de dimension 1 dont les sommets sont les éléments de  $G$ , et tel que deux sommets  $x$  et  $y$  sont reliés par une arête s'il existe un élément  $s$  de  $S$  tel que  $y = xs$ . On peut alors définir une métrique sur les sommets du graphe comme étant le plus court chemin dans le graphe les reliant. Cela correspond au nombre minimum d'éléments de  $S$  qui multiplié à un sommet de  $Cay_G(S)$  correspond à l'autre sommet en tant qu'élément de  $G$ . Cette métrique est définie comme la métrique du mot sur  $G$  associée au système de générateurs  $S$ . On peut étendre cette métrique à tout le graphe en considérant chaque arête de  $Cay_G(S)$  comme isométrique à un intervalle fermé de longueur 1.

Le graphe de Cayley de  $G$  devient ainsi un espace métrique géodésique propre dans lequel le groupe  $G$  est plongé isométriquement. De plus  $G$  agit à gauche par isométries sur  $Cay_G(S)$ . Maintenant que l'on peut étudier un groupe de type fini en tant qu'espace métrique géodésique à travers son graphe de Cayley, de nombreux résultats géométriques sont utilisables, notamment dans une classe d'espaces métriques géodésiques capitale en mathématiques : celle des espaces hyperboliques. Il s'agit d'espaces métriques dans lesquels tout triangle géodésique est  $\delta$ -fin, dans un sens que l'on précisera à la définition 4.1.1, pour une constante  $\delta \geq 0$ .

Un défaut reste cependant, le graphe de Cayley d'un groupe ainsi que la métrique du mot associée dépend du choix d'un système de générateurs du groupe. A chaque système fini de générateurs d'un groupe correspond donc une forme différente au niveau du graphe de Cayley, mais cette forme n'est pas si différente "vue de loin". La notion qui permet de capturer des propriétés à grande distance et qui permettra de considérer deux graphes de Cayley d'un groupe associés à deux systèmes de générateurs différents comme étant équivalents est la quasi-isométrie.

**Définition 1.0.9.** Soient  $(X, d)$  et  $(X', d')$  deux espaces métriques.

Une application  $f : (X, d) \rightarrow (X', d')$  est une quasi-isométrie s'il existe  $\lambda > 0, \epsilon \geq 0$  et  $C \geq 0$  tels que :

$$\forall x, y \in X, \quad \frac{1}{\lambda}d(x, y) - \epsilon \leq d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + \epsilon$$

et si  $\forall y \in X', \exists x \in X$  tel que  $d'(y, f(x)) \leq C$ .

Les espaces  $X$  et  $X'$  sont dits alors quasi-isométriques.

La quasi-isométrie est en fait une relation d'équivalence entre les espaces métriques. Deux espaces métriques bornés sont donc par exemples quasi-isométriques, ce qui a pour conséquence que tous les groupes finis sont quasi-isométriques entre eux. Il existe un autre

invariant par quasi-isométrie qui est capital en géométrie des groupes : la notion de bouts d'un groupe. Le nombre de bouts d'un groupe de type fini est défini comme la borne supérieure du nombre de composantes connexes non bornées du complémentaire de tout compact d'un graphe de Cayley du groupe. Un groupe de type fini possède en fait 0, 1, 2 ou une infinité de bouts. Le premier cas correspond aux groupes finis et le troisième aux groupes virtuellement cycliques. Le théorème de Stallings montre qu'un groupe possède une infinité de bouts si et seulement s'il se scinde au-dessus d'un sous-groupe fini dont l'indice dans l'un des facteurs est au moins trois. Beaucoup d'autres propriétés algébriques ou géométriques des groupes de type fini comme être de présentation finie, être virtuellement abélien sont aussi invariantes par quasi-isométrie, ce qui en fait un invariant plus souple que l'isomorphisme.

Le théorème suivant est un résultat de Swarc qui fut redécouvert par J. Milnor plus tard. Il permet de relier action de groupe et quasi-isométrie :

**Théorème 1.0.10** (Swarc-Milnor). *Soit  $G$  un groupe agissant proprement discontinûment, de manière cocompacte et par isométries sur un espace métrique géodésique propre  $(X, d)$ . Alors  $G$  est de type fini. De plus  $G$ , muni de la métrique du mot associé à un quelconque système fini de générateurs, et  $X$  sont des espaces quasi-isométriques.*

Il existe un autre invariant par quasi-isométrie qui réunit beaucoup de propriétés et qui est d'une grande richesse : il s'agit de l'hyperbolicité d'un groupe, notion développée par M. Gromov dans l'article novateur [Gro87].

## Groupes hyperboliques

Un groupe de type fini  $G$  est dit hyperbolique au sens de Gromov, s'il existe  $\delta \geq 0$  et un système fini de générateurs  $S$  de  $G$  tel que son graphe de Cayley associé  $Cay_G(S)$  soit  $\delta$ -hyperbolique (voir définition 4.1.1) en tant qu'espace métrique géodésique pour la métrique du mot associée à  $S$ . En fait on montre qu'être hyperbolique pour un groupe ne dépend en aucun cas du choix d'un système fini de générateurs. En effet l'hyperbolicité d'un espace métrique géodésique est aussi un invariant par quasi-isométrie. Ainsi si  $S$  et  $S'$  sont deux systèmes finis de générateurs d'un groupe  $G$  et qu'il existe  $\delta \geq 0$  tel que  $Cay_G(S)$  soit  $\delta$ -hyperbolique alors il existe  $\delta' \geq 0$  tel que le graphe de Cayley  $Cay_G(S')$  soit  $\delta'$ -hyperbolique. Les premiers exemples de groupes hyperboliques sont les groupes finis car leurs graphes de Cayley sont des espaces bornés, ainsi que les groupes libres car leurs graphes de Cayley sont des arbres et donc des espaces 0-hyperboliques. La principale source d'exemples de groupes hyperboliques est donnée à l'aide du théorème 1.0.10. En effet, tout groupe agissant proprement discontinûment, de manière cocompacte et par isométries sur un espace métrique hyperbolique propre est par conséquent un groupe hyperbolique. L'espace hyperbolique de prédilection sur lequel on regarde des actions de groupes est le demi-plan de Poincaré, ce qui nous donne le résultat suivant : le groupe fondamental d'une surface compacte de genre au moins deux est un groupe hyperbolique. Résultat que l'on peut généraliser aux groupes fondamentaux de variétés riemanniennes compactes à courbure négative dont le revêtement universel est l'espace hyperbolique de dimension  $n$ , noté  $\mathbb{H}^n$ . On obtient aussi comme conséquence du théorème 1.0.10 que tout sous-groupe d'indice fini ainsi que toute extension finie

d'un groupe hyperbolique est aussi hyperbolique. Il en résulte par exemple que les groupes virtuellement cycliques et les groupes virtuellement libres sont aussi des groupes hyperboliques.

## Scindements JSJ

Pour pouvoir maintenant déterminer parmi les groupes hyperboliques ceux qui sont co-hopfiens, nous utiliserons la théorie des scindements *JSJ* d'un groupe car elle permet de mieux comprendre les scindements d'un groupe au-dessus d'une classe de sous-groupes donnée. La théorie des scindements *JSJ* fut initié par Jaco-Shalen et Johansson dans le cadre des variétés fermées de dimension 3. Ces idées furent ensuite appliquées dans le cas des groupes de présentation finie par Kropholler pour les groupes à dualité de Poincaré et par Sela pour les groupes hyperboliques sans torsion.

Pour cela, on définit une relation d'ordre partiel sur les arbres simpliciaux munis d'une action minimale d'un même groupe  $G$ . Cette relation est la domination, au sens où un arbre  $T$  domine un arbre  $T'$  s'il existe une application  $G$ -équivariante  $f : T \rightarrow T'$ , ou de manière équivalente si tout sous-groupe de  $G$  elliptique dans  $T$  et aussi elliptique dans  $T'$ .

On se fixe alors une classe  $\mathcal{A}$  de sous-groupes de  $G$  stable par passage au sous-groupe et par conjugaison et on ne considère que des scindements de  $G$  dont les groupes d'arêtes sont dans  $\mathcal{A}$ . On parle alors de scindement au-dessus de  $\mathcal{A}$  et l'arbre de Bass-Serre correspondant est un  $\mathcal{A}$ -arbre. En utilisant les définitions de V. Guirardel et G. Levitt dans [GL09], on peut donner une définition générale d'un scindement *JSJ* par une propriété universelle :

**Définition 1.0.11.** *Un scindement JSJ de  $G$  au-dessus de  $\mathcal{A}$  est un  $\mathcal{A}$ -arbre  $T$  tel que :*

- *$T$  est universellement elliptique, au sens où ses stabilisateurs d'arêtes sont elliptiques dans tout  $\mathcal{A}$ -arbre.*
- *$T$  domine tout  $\mathcal{A}$ -arbre universellement elliptique.*

Ce scindement n'est en général pas unique. Lorsqu'il en existe un, l'ensemble des scindements *JSJ* forme alors un objet, appelé espace de déformation *JSJ*.

Cet espace de déformation peut être aussi relié à un complexe simplicial, généralisant ainsi l'outre espace de Culler-Vogtmann pour les groupes libres. Guirardel et Levitt ont montré dans [GL07b] qu'un espace de déformation est contractile. De plus le groupe des automorphismes extérieurs  $Out(G)$  agit sur cet espace, ce qui permet d'obtenir des informations de nature cohomologique sur  $Out(G)$ . On pourra pour cela consulter [GL07b]. L'espace de déformation *JSJ* peut ne pas exister. Son existence pour une certaine classe de groupes est une conséquence du théorème d'accessibilité de Dunwoody, elle est montrée par Guirardel et Levitt dans [GL09].

**Théorème 1.0.12** (Guirardel-Levitt). *Soit  $G$  un groupe de présentation finie et  $\mathcal{A}$  une classe de sous-groupes de  $G$  stable par passage au sous-groupe et par conjugaison. Alors l'espace de déformation *JSJ* de  $G$  au-dessus de  $\mathcal{A}$  existe.*

Il existe des situations particulières où l'on peut construire un arbre canonique de l'espace de déformation *JSJ* de  $G$ . Cet arbre est alors un point fixe de l'action de  $Out(G)$  sur l'espace

de déformation. C'est le cas des scindements des groupes hyperboliques à un bout au-dessus des groupes virtuellement cycliques de B.H. Bowditch. Dans [Bow98], Bowditch construit un scindement JSJ à partir de la topologie du bord du groupe. Il obtient alors le résultat suivant.

**Théorème 1.0.13** (B.H. Bowditch). *Soit  $G$  un groupe hyperbolique à un bout et  $\mathcal{A}$  la classe des sous-groupes virtuellement cycliques de  $G$ .*

*Il existe un arbre JSJ, noté  $S$ , de  $G$  au-dessus de  $\mathcal{A}$ .*

*De plus les sommets de  $S$  sont de trois types selon leurs stabilisateurs :*

- *le type élémentaire, dont le stabilisateur est un groupe virtuellement cyclique maximal.*

*Ce sommet est de valence finie dans  $S$ .*

- *le type surface, dont le stabilisateur est isomorphe à un groupe fuchsien convexe cocompact, induisant une bijection entre les stabilisateurs des arêtes adjacentes à ce sommet et les stabilisateurs des composantes de bord du coeur convexe du groupe fuchsien. (La définition de groupe fuchsien utilisée par Bowditch est non standard, voir définition 4.2.2).*

- *le type rigide, dont le stabilisateur est un groupe non élémentaire universellement elliptique.*

*Les sommets adjacents de  $S$  ne sont jamais du même type. Si un sommet de  $S$  est de valence 2, alors ses deux sommets adjacents sont de type rigide.*

*Si  $S$  est réduit à un sommet alors  $G$  est un groupe fuchsien cocompact ou un groupe rigide au sens où il n'admet aucun scindement au-dessus de groupes virtuellement cycliques.*

*Enfin cette décomposition est canonique au sens où :  $\forall \alpha \in \text{Aut}(G), \exists h_\alpha : S \rightarrow S$  automorphisme tel que  $\forall g \in G, \forall x \in S$ , on a :  $h_\alpha(gx) = \alpha(g)h_\alpha(x)$ .*

*L'arbre  $S$  est alors invariant par tout automorphisme de  $G$ .*

Sela montre dans [Sel97] l'existence d'un scindement JSJ au-dessus de groupes cycliques des groupes hyperboliques librement indécomposables sans torsion. Il utilise ensuite ce scindement afin de montrer le théorème 1.0.6. Dans le cas avec torsion, la bonne généralisation du scindement JSJ de Sela est alors celui de Bowditch avec le théorème 1.0.13. Nous utiliserons donc fortement ce théorème, tout en s'inspirant des idées de Sela, afin de montrer le théorème 1.0.7.

Les scindements JSJ ont permis aussi de mieux comprendre le groupe d'automorphismes d'un groupe hyperbolique. Dans le cas des groupes hyperboliques à un bout, si  $G$  se scinde au-dessus d'un sous-groupe virtuellement cyclique de centre infini et maximal pour l'inclusion alors les facteurs (ou le facteur dans le cas d'une  $HN$ ) du scindement ne sont pas du type élémentaire d'après le théorème 1.0.13. Le centre de ces groupes est alors fini, résultat que l'on montrera à la proposition 4.1.14. Ceci permet alors de construire un twist de Dehn de  $G$  d'ordre infini, garantissant ainsi que le groupe  $\text{Out}(G)$  est infini. F. Dahmani et V. Guirardel montrent dans [DG11] avec leur critère de rigidité que la réciproque reste vraie pour les groupes hyperboliques à un bout. Le cas sans torsion était déjà connu en utilisant un argument de Bestvina-Paulin ainsi que la théorie de Rips.

Si le groupe  $G$  possède une infinité de bouts, alors le cas sans torsion implique que  $\text{Out}(G)$  est infini. Mais en présence de torsion, les choses sont plus difficiles. On pourra consulter M.



R. Pettet dans [Pet97] pour une caractérisation de la finitude du groupe des automorphismes extérieurs dans la classe des groupes virtuellement libres.

Enfin Guirardel et Levitt donnent dans [GL12] une caractérisation pour tous les groupes hyperboliques. En utilisant le *JSJ* de Bowditch, ils notent un sous-groupe  $Z_{max}$  comme étant un sous-groupe virtuellement cyclique de centre infini et maximal pour l'inclusion. Ils montrent alors, généralisant ainsi le critère de rigidité de Dahmani-Guirardel, le résultat suivant :

**Théorème 1.0.14** (V. Guirardel et G. Levitt). *Soit  $G$  un groupe hyperbolique, alors  $Out(G)$  est infini si et seulement s'il existe un scindement non trivial de  $G$  au-dessus d'un sous-groupe  $Z_{max}$ .*

## Problèmes algorithmiques

D'après Stallings, si un groupe possède au moins deux bouts alors il se scinde au-dessus d'un groupe fini. On peut ainsi vouloir faire un scindement maximal des groupes hyperboliques au-dessus de groupes finis jusqu'à l'obtention de facteurs indécomposables, et au plus à un bout d'après Stallings. Se pose alors le problème de savoir si cette décomposition se termine en un nombre fini d'étapes. Il s'agit de la notion d'accessibilité d'un groupe, problème soulevé en premier par C.T.C. Wall. Dans [SW79], P.Scott et Wall montrent en utilisant le théorème de Stallings, qu'un groupe est accessible s'il est le groupe fondamental d'un graphe de groupes fini avec tous ses groupes d'arêtes finis et ses groupes de sommets au plus à un bout.

Ils énoncent alors la conjecture suivante : tout groupe de type fini est accessible.

Le cas sans torsion est montré avec le théorème de Grushko, et Scott et Wall montrent que cela reste vrai dans le cas de groupes virtuellement libres. P.A. Linnell montre dans [Lin83] que si un groupe de type fini a tous ses sous-groupes finis d'ordre borné alors il est accessible. M.J. Dunwoody donne aussi dans [Dun85] une réponse affirmative dans la classe de groupes suivante :

**Théorème 1.0.15** (M.J. Dunwoody). *Tout groupe de présentation finie est accessible.*

Dunwoody montre cependant que la conjecture énoncée est fautive en donnant dans [Dun93] un exemple de groupe de type fini non accessible.

Puisque les groupes hyperboliques ont un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes finis et sont par ailleurs de présentation finie, ils vérifient les conditions de Linnell et Dunwoody. Ces groupes sont par conséquent accessibles.

Ainsi étant donné un scindement d'un groupe hyperbolique au-dessus de sous-groupes finis ayant tous ses facteurs au plus à un bout, on peut, suite au théorème 1.0.7, déterminer si ce groupe est co-hopfien en utilisant le théorème de caractérisation globale 1.0.5.

Les problèmes sont les suivants : comment peut-on obtenir un tel scindement effectif d'un groupe hyperbolique ? Sommes nous en mesure de calculer les normalisateurs des groupes d'arêtes de ce scindement ? Ces questions sont difficiles en général, mais heureusement les réponses sont positives dans la classe des groupes hyperboliques. En fait ces solutions sont

algorithmiques.

Il existe un algorithme qui, étant donné un groupe hyperbolique, permet d'obtenir un graphe de groupes fini avec ses groupes d'arêtes finis et ses groupes de sommets au plus à un bout. Un tel graphe de groupes est appelé graphe de Stallings-Dunwoody. C'est V. Gerasimov qui donna, dans les années 90, les idées permettant d'obtenir un tel graphe, notamment en donnant un algorithme permettant de calculer le nombre de bouts d'un groupe hyperbolique. Malheureusement, ses idées ne furent jamais publiées. F. Dahmani et D. Groves ont alors utilisé ses idées pour les généraliser aux groupes relativement hyperboliques. On trouve ainsi dans [DG08b], un algorithme qui, étant donné une présentation finie d'un groupe hyperbolique, permet d'obtenir un graphe de groupes de Stallings-Dunwoody de ce groupe.

Il existe aussi un algorithme qui calcule un ensemble de générateurs du centralisateur et du normalisateur d'un sous-groupe fini d'un groupe hyperbolique. La chose est rendue possible grâce à la géométrie du groupe et au fait que le problème du mot et celui de la conjugaison sont résolubles dans la classe des groupes hyperboliques. Les problèmes algorithmiques posés par M. Dehn en 1912 sont en effet à l'origine d'avancées très fructueuses. Il s'agit du problème du mot, du problème de conjugaison et enfin du problème d'isomorphie. Ces problèmes demandent respectivement une méthode pour savoir en un nombre fini d'étapes, si un élément donné comme produit de générateurs est l'élément neutre, si deux éléments donnés sont conjugués entre eux et enfin si deux groupes donnés sont isomorphes.

Dehn résoud le problème du mot pour les groupes fondamentaux de surfaces fermées orientables. L'algorithme de résolution qu'il décrit sera ensuite réutilisé par M. Gromov. Ce dernier montre alors que les groupes hyperboliques sont précisément les groupes de présentation finie pour lesquels il existe une présentation dans laquelle l'algorithme de Dehn résoud le problème du mot.

En 1950, Boone et Novikov montrent l'existence d'un groupe de présentation finie pour lequel le problème du mot n'est pas résoluble. Ce genre d'exemple fait office de groupe très sophistiqué car en réalité le problème du mot et de conjugaison sont résolubles dans beaucoup de classes de groupes. Par contre le problème d'isomorphie est non résoluble dans des classes de groupes beaucoup plus naturelles. Z. Sela apporta une avancée très importante sur cette question, en montrant que le problème d'isomorphie est résoluble dans la classe des groupes hyperboliques rigides sans torsion. Il le généralisa ensuite aux groupes hyperboliques sans torsion. F. Dahmani et D. Groves se sont ensuite inspirés de ses travaux en simplifiant l'argument pour l'adapter aux groupes hyperboliques sans torsion ainsi qu'aux groupes relativement hyperboliques toriques dans [DG08a]. Enfin F. Dahmani et V. Guirardel donnent dans [DG11] une solution générale au problème d'isomorphie dans la classe des groupes hyperboliques.

## Plan de la thèse

- Dans le deuxième chapitre, nous faisons des rappels sur la théorie de Bass-Serre. Nous définissons alors ce qu'est un graphe de groupes, qui est l'objet central de notre étude. Nous rappelons les différentes définitions équivalentes du groupe fondamental d'un graphe de groupes. Puis nous donnons le théorème de structure de Serre qui décrit l'action du groupe

fondamental d'un graphe de groupes sur un arbre  $T$  représentant le revêtement universel de ce graphe. Nous donnons aussi comme exemples, les deux cas de graphe de groupes à une arête, représentant les deux scindements élémentaires possibles d'un groupe à savoir le produit amalgamé et l'extension HNN.

Dans une autre section de ce chapitre, nous rappelons les deux types d'isométries d'un arbre, qui sont les isométries elliptiques et hyperboliques. Nous rappelons aussi sous quelles hypothèses un groupe agissant sur un arbre est elliptique au sens où il fixe au moins un sommet de l'arbre.

Enfin nous donnons les principales notations utilisées dans ce texte.

- Dans le troisième chapitre, nous analysons la propriété co-Hopf pour des graphes de groupes dont les groupes d'arêtes sont finis.

Dans une première section, nous définissons un objet géométrique qui sera la clé dans la caractérisation co-Hopf, à savoir le sous-arbre connexe de l'arbre  $T$  fixé point par point par un groupe d'arête. Nous donnerons alors plusieurs conditions équivalentes pour que ce sous-arbre soit de diamètre infini. Dans le cas particulier des produits amalgamés et des extensions HNN, on précisera que ce diamètre est infini si et seulement si certaines conditions sur les normalisateurs du groupe d'arête sont vérifiées.

Dans une deuxième section, en utilisant la notion de mot réduit dans le cas des amalgames et des extensions HNN, on montre un premier résultat de caractérisation, à savoir une condition nécessaire pour que le groupe fondamental d'un graphe de groupe avec groupes d'arêtes finis soit co-hopfien :

**Théorème 1.0.16.** *Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes fini et réduit avec ses groupes d'arêtes de cardinal fini. Supposons qu'il existe une arête  $e$  du graphe  $\Gamma$  telle que son groupe  $G_e$  soit de cardinal maximum parmi les groupes d'arêtes, avec la condition  $\text{diam}(\text{Fix}_T(G_e)) = +\infty$ . Alors le groupe fondamental de  $\Gamma$  est non co-hopfien.*

Dans la troisième section, nous limitons notre étude au cas des graphes de groupes avec les groupes d'arêtes finis et tous de même cardinal, pour donner une condition suffisante suite au résultat précédent. Ainsi, avec davantage d'hypothèses sur les groupes de sommets du graphe de groupes, nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 1.0.17.** *Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes réduit et fini, dont tous les groupes d'arêtes sont finis et de même cardinal, et  $G$  son groupe fondamental. Supposons que  $\forall v \in V(\Gamma)$ , on a :  $G_v$  co-hopfien et  $\Gamma$ -monomorphiquement elliptique. Supposons que  $\forall e \in E(\Gamma)$ , on a :  $\text{Fix}_T(G_e)$  de diamètre fini. Alors  $G$  est co-hopfien.*

On donne alors dans la quatrième section, en utilisant les théorèmes 1.0.16 et 1.0.17, l'équivalence du théorème 1.0.3. On pourra ainsi donner des exemples simples de groupes co-hopfiens se scindant au-dessus de groupes finis.

Enfin dans la dernière section du chapitre 3, on se replace dans le cas général où le graphe de groupes à tous ses groupes d'arêtes finis, pour démontrer le théorème de caractérisation

globale réunissant les théorèmes 1.0.4 et 1.0.5.

- Le quatrième chapitre a pour objectif de caractériser complètement les groupes hyperboliques co-hopfiens.

Dans une première section, on fera des rappels sur la théorie des groupes hyperboliques. On y donnera notamment quelques propriétés des groupes virtuellement cycliques.

Dans la deuxième section, on étudie les groupes fuchsien au sens de Bowditch. Il s'agit de groupes non élémentaires agissant proprement discontinûment par isométries sur l'espace hyperbolique de dimension 2. On montre alors le résultat suivant :

**Théorème 1.0.18.** *Tout groupe fuchsien cocompact est co-hopfien.*

Dans la troisième section, on introduit le vocabulaire ainsi que les principaux résultats concernant les décompositions  $JSJ$  d'un groupe. On y définit aussi la notion d'espace de déformation  $JSJ$ . On s'intéressera tout particulièrement au scindement  $JSJ$  de Bowditch des groupes hyperboliques à un bout.

Le but de la quatrième section est d'utiliser le  $JSJ$  de Bowditch afin d'étudier le groupe d'automorphismes d'un groupe hyperbolique à un bout. On montrera en particulier que le groupe modulaire de  $G$  défini en 4.4.6 est d'indice fini dans  $Aut(G)$ , généralisant ainsi un résultat de Sela au cas avec torsion.

On utilisera, dans la cinquième section, le  $JSJ$  de Bowditch ainsi que le résultat précédent afin d'adapter les idées de Sela de [Sel97] pour pouvoir démontrer le théorème 1.0.7.

Enfin, dans la dernière section, on abordera la notion de groupe accessible. On utilisera aussi des algorithmes connus dans le cas des groupes hyperboliques afin de montrer le théorème 1.0.8.



## 2 Préliminaires

### 2.1 Théorie de Bass-Serre

Nous allons commencer par faire quelques rappels sur les graphes.

Pour cela donnons nous un graphe orienté  $X$  qui consiste en la donnée de  $V(X)$  l'ensemble de ses sommets et  $E(X)$  l'ensemble de ses arêtes orientées.

On notera  $\forall e \in E(X)$ ,  $o(e)$  l'origine de l'arête  $e$ ,  $t(e)$  sa terminaison et  $\bar{e}$  son arête opposée telles que :  $e \neq \bar{e}$ ,  $\overline{\bar{e}} = e$ ,  $o(e) = t(\bar{e})$ .

On peut définir un chemin dans le graphe  $X$  comme étant une suite d'arêtes  $e_1, \dots, e_n$  de  $X$  telle que  $t(e_i) = o(e_{i+1})$  pour  $1 \leq i \leq n-1$ . Soit  $c$  un tel chemin alors on pose  $o(c) = o(e_1)$  et  $t(c) = t(e_n)$ . Le chemin  $c$  est dit de longueur  $n$ . Un chemin peut être aussi réduit à un sommet de  $X$ . Dans ce cas, ce chemin est dit de longueur nulle.

Un chemin  $c$  est dit réduit si  $e_i \neq \overline{e_{i+1}}$  pour  $1 \leq i \leq n-1$ . Il est dit fermé si de plus on a  $o(c) = t(c)$ .

Un graphe  $X$  est dit connexe si pour tout  $x, y \in V(X)$ , il existe un chemin  $c$  de  $X$  tel que  $o(c) = x$  et  $t(c) = y$ .

Un graphe connexe est un arbre s'il n'admet aucun chemin fermé réduit de longueur strictement positive.

Soit  $X$  un graphe connexe et  $\tau$  un sous-graphe de  $X$ . On définit  $\tau$  comme un arbre maximal de  $X$  si  $\tau$  est un arbre contenant tous les sommets de  $X$ .

Soit  $p : X \rightarrow Y$  où  $X$  et  $Y$  sont des graphes connexes. On a un morphisme de graphes si on a  $a : p(V(X)) \subset V(Y)$  et  $p(E(X)) \subset E(Y)$  avec  $p(o(e)) = o(p(e))$ ,  $p(t(e)) = t(p(e))$ ,  $p(\bar{e}) = \overline{p(e)}$ ,  $\forall e \in E(X)$ .

Si  $p$  est bijectif alors  $p$  est un isomorphisme de graphes. Un isomorphisme  $p$  qui de plus est un endomorphisme est alors un automorphisme de graphes.

Si  $T$  est un arbre et  $p$  un automorphisme de  $T$  alors  $p$  est une inversion s'il existe une arête  $e$  de  $T$  telle que  $p(e) = \bar{e}$ .

**Définition 2.1.1.** *Un graphe de groupes  $(\mathcal{G}, X)$  est la donnée d'un graphe connexe non vide  $X$  avec :*

- pour tout  $v \in V(X)$ , d'un groupe  $G_v$  dit groupe de sommets.
- pour tout  $e \in E(X)$ , d'un groupe  $G_e$  dit groupe d'arêtes tel que  $G_e = G_{\bar{e}}$ .
- pour tout  $e \in E(X)$ , d'un morphisme injectif  $i_e : G_e \hookrightarrow G_{t(e)}$ .

**Définition 2.1.2.** *Soit  $(\mathcal{G}, X)$  un graphe de groupes. Si pour chaque sommet  $v$  de  $X$ , le groupe de sommets  $G_v$  de  $(\mathcal{G}, X)$  a pour présentation  $\langle S_v / R_v \rangle$ , où  $S_v$  est un ensemble de générateurs et  $R_v$  de relations, on peut alors définir le groupe de Bass  $B(\mathcal{G}, X)$  du graphe de groupes  $(\mathcal{G}, X)$  de la manière suivante :*

$$B(\mathcal{G}, X) = \left\langle \bigcup_{v \in V(X)} S_v \cup E(X) \middle/ \bigcup_{v \in V(X)} R_v, \bar{e} = e^{-1}, i_{\bar{e}}(g) = ei_e(g)e^{-1}, \forall g \in G_e, \forall e \in E(X) \right\rangle$$

*On simplifiera cette présentation avec la notation suivante :*

$$B(\mathcal{G}, X) = \left\langle \bigcup_{v \in V(X)} G_v \cup E(X) \middle/ \bar{e} = e^{-1}, i_{\bar{e}}(g) = ei_e(g)e^{-1}, \forall g \in G_e, \forall e \in E(X) \right\rangle$$

**Définition 2.1.3.** Soit  $c$  un chemin de  $X$  d'origine  $v_0$ .

Notons  $e_1, \dots, e_n$  les arêtes de  $c$  et posons  $v_i = t(e_i) = o(e_{i+1})$  pour  $1 \leq i \leq n-1$ .

On appelle mot de type  $c$  dans  $B(\mathcal{G}, X)$  tout couple  $(c, \mu)$  où  $\mu = (r_0, \dots, r_n)$  avec  $r_i \in G_{v_i}$  pour  $0 \leq i \leq n$ .

L'élément  $|c, \mu| = r_0 e_1 r_1 e_2 \dots e_n r_n$  de  $B(\mathcal{G}, X)$  est dit associé au mot  $(c, \mu)$ .

**Définition 2.1.4.** On peut définir le groupe fondamental d'un graphe de groupes  $(\mathcal{G}, X)$  de deux manières :

1) Soit  $v_0$  un sommet de  $X$ .

On définit  $\pi_1(\mathcal{G}, X, v_0) = \{|c, \mu| \in B(\mathcal{G}, X) / o(c) = t(c) = v_0\}$ .

C'est le groupe fondamental de  $(\mathcal{G}, X)$  en  $v_0$ .

2) Soit  $\tau$  un arbre maximal de  $X$ .

On définit  $\pi_1(\mathcal{G}, X, \tau) = B(\mathcal{G}, X) / \langle\langle e \in E(\tau) \rangle\rangle$  où  $\langle\langle e \in E(\tau) \rangle\rangle$  est le sous-groupe distingué engendré par les éléments  $e$  de  $E(\tau)$ .

Soit  $g_e$  l'image de l'élément  $e$  du groupe de Bass  $B(\mathcal{G}, X)$  dans le quotient.

Alors d'après la notation de la définition 2.1.2, on a :

$$\pi_1(\mathcal{G}, X, \tau) = \left\langle \left( \bigcup_{v \in V(X)} G_v \right) \cup \bigcup_{e \in E(X) \setminus E(\tau)} \{g_e\} \middle/ g_{\bar{e}} = g_e^{-1}, i_{\bar{e}}(g) = g_e i_e(g) g_e^{-1}, \forall g \in G_e, \forall e \in E(X) \setminus E(\tau) \right\rangle$$

C'est le groupe fondamental de  $(\mathcal{G}, X)$  en  $\tau$ .

En fait ces deux définitions du groupe fondamental d'un graphe de groupes sont équivalentes à isomorphisme près comme le montre J.P. Serre dans [Ser77] :

**Proposition 2.1.5.** Soient  $(\mathcal{G}, X)$  un graphe de groupes,  $v_0$  un sommet de  $X$  et  $\tau$  un arbre maximal de  $X$ .

Alors on a :

$$\pi_1(\mathcal{G}, X, v_0) \simeq \pi_1(\mathcal{G}, X, \tau)$$

En particulier ces groupes sont indépendants du choix de  $v_0$  et de  $\tau$ .

**Définition 2.1.6.** Soient  $c$  un chemin de  $X$  d'origine  $v_0$  et  $(c, \mu)$  un mot de type  $c$ .

On dit que  $(c, \mu)$  est réduit si :

- $n = 0$ ,  $r_0 \neq 1$ .
- $n \geq 1$ ,  $r_i \notin i_{e_i}(G_{e_i})$  pour tout indice  $i$  tel que  $e_{i+1} = \bar{e}_i$ .

En particulier, tout mot dont le type est un chemin réduit de longueur strictement positive est réduit.

On trouve alors dans [Ser77] le résultat suivant :

**Théorème 2.1.7.** Soient  $(\mathcal{G}, X)$  un graphe de groupes et  $\tau$  un arbre maximal de  $X$ .

Si  $(c, \mu)$  est un mot réduit alors l'élément  $|c, \mu|$  de  $B(\mathcal{G}, X)$  est non trivial.

En particulier si  $(c, \mu)$  est un mot réduit avec  $c$  un chemin fermé alors l'image de  $|c, \mu|$  dans  $\pi_1(\mathcal{G}, X, \tau)$  est non trivial.

De même tout élément non trivial de  $\pi_1(\mathcal{G}, X, \tau)$  est représenté par un lacet réduit de  $X$ .

**Remarque 2.1.8.** On peut définir une longueur d'un mot réduit, notée  $l$ , sur les éléments du groupe de Bass ayant pour type des chemins tous de la même origine.

Si  $v_0$  est un sommet fixé de  $X$  et  $(c, \mu)$  est un mot réduit avec  $c$  d'origine  $v_0$  alors on définit la longueur de l'élément associé  $|c, \mu|$  comme la longueur du chemin  $c$  dans  $X$ . Ainsi  $l(|c, \mu|) = l(c)$ . De plus cette longueur ne dépend pas du choix du mot réduit.

**Définition 2.1.9.** Soient  $T$  un arbre,  $X$  un graphe connexe,  $p : T \rightarrow X$  un morphisme de graphes et  $\tau$  un arbre maximal de  $X$ .

$(\tilde{X}, \tilde{\tau})$  est un relèvement de  $(X, \tau)$  si :

- 1)  $\tilde{X}$  et  $\tilde{\tau}$  sont des sous-arbres de  $T$  avec  $\tilde{\tau} \subset \tilde{X}$ .
- 2) chaque arête de  $\tilde{X} \setminus \tilde{\tau}$  a une extrémité dans  $V(\tilde{\tau})$ .
- 3)  $p$  induit un isomorphisme de  $\tilde{\tau}$  dans  $\tau$  et une bijection de  $E(\tilde{X}) \setminus E(\tilde{\tau})$  dans  $E(X) \setminus E(\tau)$ .

Le théorème suivant est fondamental car il permet de définir le revêtement universel d'un graphe de groupes ainsi que l'action du groupe fondamental de ce graphe de groupes sur ce revêtement.

**Théorème 2.1.10.** Soient  $(\mathcal{G}, X)$  un graphe de groupes,  $\tau$  un arbre maximal de  $X$  et  $G = \pi_1(\mathcal{G}, X, \tau)$  le groupe fondamental de ce graphe de groupes.

Alors il existe un arbre  $T$  munit d'une action sans inversion de  $G$  et un morphisme  $p : T \rightarrow X$  qui passe au quotient en un isomorphisme de  $T/G$  vers  $X$ . De plus les stabilisateurs des sommets et des arêtes de  $T$  dans  $G$  sont les conjugués des groupes de sommets  $G_v, v \in V(X)$  et des groupes d'arêtes plongés  $i_e(G_e), e \in E(X)$ , respectivement, du graphe de groupes  $(\mathcal{G}, X)$ .

De plus il existe un relèvement  $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$  de  $(X, \tau)$  tel que :

- 1) si  $v \in V(\tau)$  et  $\tilde{v} \in V(\tilde{\tau})$  tels que  $p(\tilde{v}) = v$ , alors  $Stab_G(\tilde{v}) = G_v$ .
  - 2) si  $e \in E(X), \tilde{e} \in E(\tilde{X})$  tels que  $t(\tilde{e}) \in V(\tilde{\tau})$  et  $p(\tilde{e}) = e$ , alors  $Stab_G(\tilde{e}) = i_e(G_e)$ .
  - 3) si  $e \in E(X), \tilde{e} \in E(\tilde{X})$  tels que  $t(\tilde{e}) \in V(\tilde{X}) \setminus V(\tilde{\tau})$  et  $p(\tilde{e}) = e$ , alors  $Stab_G(\tilde{e}) = i_{\tilde{e}}(G_e)$ .
- De plus dans les cas 2) et 3), l'élément  $g_{\tilde{e}}^\varepsilon$ , avec  $\varepsilon \in \{1, -1\}$ , envoie l'extrémité de  $\tilde{e}$  n'appartenant pas à  $V(\tilde{\tau})$  sur un sommet de  $\tilde{\tau}$ .

Pour plus de détails, le lecteur intéressé pourra consulter la monographie de Serre [Ser77].

Regardons maintenant 3 cas particuliers de graphes de groupes :

**Exemple 2.1.11.** Supposons que  $(\mathcal{G}, X)$  est un graphe de groupes trivial, c'est-à-dire que  $G_v = \{1\}$  pour tout  $v \in V(X)$ .

Le groupe de Bass de  $(\mathcal{G}, X)$  est alors :  $B(\mathcal{G}, X) = \langle E(X) \mid \bar{e} = e^{-1}, \forall e \in E(X) \rangle$ .

Ainsi  $B(\mathcal{G}, X)$  est isomorphe à un groupe libre de rang  $|E(A)|$ , où  $A$  est le graphe correspondant à une orientation du graphe  $X$ .

Soit  $\tau$  un arbre maximal de  $X$ , alors d'après la définition 2.1.4, on a :

$$\pi_1(\mathcal{G}, X, \tau) = \left\langle \bigcup_{e \in E(X) \setminus E(\tau)} \{g_e\} \mid g_{\bar{e}} = g_e^{-1}, \forall e \in E(X) \setminus E(\tau) \right\rangle$$

Ainsi  $\pi_1(\mathcal{G}, X, \tau)$  correspond au groupe fondamental au sens usuel du graphe  $X$ . Dans ce cas,  $\pi_1(\mathcal{G}, X, \tau)$  est le groupe libre qui admet pour famille génératrice  $\{g_e \mid e \in A \setminus E(\tau)\}$ .



**Exemple 2.1.12.** Supposons que  $(\mathcal{G}, X)$  est un graphe de groupes à une arête  $e$  avec  $v = o(e) \neq t(e) = w$ . Ce graphe de groupes admet pour groupe de Bass :

$$B(\mathcal{G}, X) = \left\langle G_v, G_w, e \mid i_{\bar{e}}(g) = ei_e(g)e^{-1}, \forall g \in G_e \right\rangle.$$

$X$  est un arbre maximal de  $X$ , donc d'après la définition 2.1.4, on a :

$$\pi_1(\mathcal{G}, X, X) = \left\langle G_v, G_w \mid i_{\bar{e}}(g) = i_e(g), \forall g \in G_e \right\rangle$$

Le groupe fondamental  $\pi_1(\mathcal{G}, X, X)$  correspond alors au produit amalgamé de  $G_v$  et  $G_w$  au dessus de  $G_e$ .

On a ainsi  $\pi_1(\mathcal{G}, X, X) = G_v *_{G_e} G_w$ .

**Exemple 2.1.13.** Supposons que  $(\mathcal{G}, X)$  est un graphe de groupes à une arête  $e$  avec  $v = o(e) = t(e)$ . Le groupe de Bass de ce graphe de groupes est alors :

$$B(\mathcal{G}, X) = \left\langle G_v, e \mid i_{\bar{e}}(g) = ei_e(g)e^{-1}, \forall g \in G_e \right\rangle.$$

$\{v\}$  est un arbre maximal de  $X$ , ainsi d'après la définition 2.1.4, le groupe fondamental de  $(\mathcal{G}, X)$  en  $\{v\}$  est isomorphe à son groupe de Bass. On a donc :

$$\pi_1(\mathcal{G}, X, \{v\}) = \left\langle G_v, g_e \mid i_{\bar{e}}(g) = g_e i_e(g) g_e^{-1}, \forall g \in G_e \right\rangle$$

$\pi_1(\mathcal{G}, X, \{v\})$  correspond alors à l'extension HNN de  $G_v$  au dessus de  $G_e$  ayant pour lettre stable l'élément  $g_e$ .

On a ainsi  $\pi_1(\mathcal{G}, X, \{v\}) = G_v *_{G_e}^*$ .

Enfin il nous reste à définir une notion importante pour la suite, celle de graphe de groupes réduit.

**Définition 2.1.14.** Soit  $(\mathcal{G}, X)$  un graphe de groupes. Ce graphe est dit réduit si pour toute arête  $e$  de  $X$  telle que  $o(e) \neq t(e)$ , on a :  $i_e(G_e) \not\subseteq G_{t(e)}$  et  $i_{\bar{e}}(G_e) \not\subseteq G_{o(e)}$ .

## 2.2 Isométries d'un arbre

On identifiera dans la suite un arbre avec sa réalisation géométrique. Chaque arête de l'arbre est ainsi isométrique à l'intervalle  $[0, 1]$ . Si  $c$  est un chemin réduit de  $T$ , la longueur de  $c$  est alors le nombre d'arêtes contenues dans  $c$ . On peut ainsi définir une métrique  $d$  pour l'arbre  $T$ . Si  $x$  et  $y$  sont deux sommets de  $T$ , on définit alors  $d(x; y)$  comme étant la longueur de la géodésique  $[x; y]$  de  $T$ .  $(T; d)$  est alors un espace métrique. Par commodité de notation, on notera encore  $T$  cet espace.

Soit  $g : T \rightarrow T$  un automorphisme de  $T$ , alors  $g$  induit une bijection sur les sommets et les arêtes de  $T$ . Si  $x, y \in V(T)$ , alors  $d(g(x); g(y)) = d([g(x); g(y)]) = d(g([x; y])) = d([x; y]) = d(x; y)$ . Ainsi  $g$  est une isométrie de  $T$  pour cette métrique.

Dorénavant on nommera une isométrie d'un arbre comme un automorphisme de cet arbre.

On dira aussi qu'un groupe  $G$  agit par isométries sur un arbre  $T$  si chaque élément  $g$  de  $G$

induit une application  $g : T \rightarrow T$  étant une isométrie.

On supposera que toutes les actions de groupes sont sans inversion. On peut en effet toujours se ramener à une action sans inversion, quitte à rajouter les milieux des arêtes comme nouveaux sommets de l'arbre.

Ainsi on ne considèrera jamais les inversions d'un arbre en tant qu'isométries de cet arbre. La proposition suivante montre qu'il existe en fait que deux types d'isométries d'un arbre :

**Proposition 2.2.1.** *Soient  $T$  un arbre et  $g : T \rightarrow T$  une isométrie de  $T$ .*

*Posons  $l(g) = \inf_{v \in V(T)} d(g(v); v)$  le déplacement minimal de  $g$  et  $Fix(g)$  l'ensemble de ses points fixes.*

*Alors nous obtenons l'un des cas suivants :*

1)  $l(g) = 0$ . Alors  $Fix(g)$  est un sous-arbre non vide de  $T$ .

*$g$  est alors une isométrie elliptique.*

2)  $l(g) > 0$ . Alors  $Fix(g) = \emptyset$  et il existe  $A_g \subset T$  isométrique à une droite,  $g$ -invariant sur lequel  $g$  agit par translation de longueur  $l(g)$ .  $A_g$  est unique et dit axe de  $g$ .

*$g$  est alors une isométrie hyperbolique.*

**Remarque 2.2.2.** *Soient  $v$  un sommet de  $T$  et  $g$  une isométrie de  $T$ . Alors le milieu de la géodésique  $[v; gv]$  de  $T$  est un point particulier. En effet si  $q$  est ce milieu alors  $q \in Fix(g)$  si  $g$  est elliptique et  $q \in A_g$  si  $g$  est hyperbolique.*

**Proposition 2.2.3.** *Soient  $T$  un arbre et  $T_1, \dots, T_n$  sous-arbres de  $T$  tels que*

*$\forall i \neq j, T_i \cap T_j \neq \emptyset$ , alors  $\bigcap_{i=1}^n T_i \neq \emptyset$ .*

*Démonstration.* Montrons cette propriété par récurrence.

Soit  $\mathcal{P}(n)$  la propriété :  $T_1, \dots, T_n$  sous-arbres de  $T$  avec  $1 \leq i, j \leq n, T_i \cap T_j \neq \emptyset$  alors  $\bigcap_{i=1}^n T_i \neq \emptyset$ .

• Montrons  $\mathcal{P}(3)$ .

Supposons  $T_1 \cap T_2 \cap T_3 = \emptyset$ .

Par hypothèse on a :  $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$  et  $T_3 \neq \emptyset$ , donc  $T_1 \cap T_2$  et  $T_3$  sont deux sous-arbres disjoints fermés non vides. Ainsi il existe un unique sommet  $v$  de  $T_1 \cap T_2$  et un unique sommet  $w$  de  $T_3$  tel que la géodésique  $[v; w]$  soit le plus court chemin reliant les deux sous-arbres. Ainsi  $\forall x \in T_1 \cap T_2$  et  $\forall x' \in T_3$ , on a  $[v; w] \subset [x; x']$ . On a aussi  $T_1 \cap T_3 \neq \emptyset$  par hypothèse. Soit  $y \in T_1 \cap T_3$ , alors  $[v; w] \subset [v; y]$ . Or  $[v; y]$  est contenue dans  $T_1$ , ainsi la géodésique  $[v; w]$  est aussi contenue dans  $T_1$ . De même  $T_2 \cap T_3 \neq \emptyset$  implique que  $[v; w]$  est contenue dans  $T_2$ . Donc on a  $[v; w] \subset T_1 \cap T_2$ , contradiction. On a donc bien  $T_1 \cap T_2 \cap T_3 \neq \emptyset$ .

• Soit  $n \geq 3$ , montrons  $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ .

Soit  $T_1, \dots, T_{n+1}$  sous-arbres de  $T$  avec  $1 \leq i, j \leq n+1, T_i \cap T_j \neq \emptyset$ .

Supposons  $\bigcap_{i=1}^{n+1} T_i = \emptyset$ .

Par hypothèse de récurrence on a  $\bigcap_{i=1}^n T_i \neq \emptyset$ . Posons  $T' = \bigcap_{i=1}^n T_i$ .

On a donc aussi deux sommets uniques  $v$  et  $w$  avec  $v \neq w, v \in V(T'), w \in V(T_{n+1})$  tels que  $[v; w]$  réalise la distance la plus courte entre les sous-arbres  $T'$  et  $T_{n+1}$ . Avec un raisonnement analogue au point précédent, l'hypothèse  $1 \leq i \leq n, T_i \cap T_{n+1} \neq \emptyset$  implique que  $[v; w] \subset T'$ , contradiction. Alors la propriété  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.  $\square$

**Proposition 2.2.4** (Lemme de Serre). *Soient  $T$  un arbre et  $g_1, \dots, g_n$  des isométries de cet arbre tels que pour  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $g_i$  et  $g_j g_i$  sont elliptiques. Alors  $\bigcap_{i=1}^n \text{Fix}(g_i) \neq \emptyset$ .*

*Démonstration.* Supposons  $i \neq j$  tels que  $\text{Fix}(g_i) \cap \text{Fix}(g_j) = \emptyset$ .

Il existe alors  $v \in \text{Fix}(g_i)$  et  $w \in \text{Fix}(g_j)$  sommets uniques de  $T$  tels que  $[v; w]$  réalise la distance la plus courte entre les sous-arbres  $\text{Fix}(g_i)$  et  $\text{Fix}(g_j)$ . On a  $g_j(g_i v) = g_j v$  donc  $[v; g_j(g_i v)] = [v; g_j v]$ . Soit  $q$  le milieu de la géodésique  $[v; g_j v]$ , alors d'après la remarque 2.2.2 on a  $q \in \text{Fix}(g_j) \cap \text{Fix}(g_j g_i)$ . Ainsi  $q = g_j q = g_j g_i q$  et donc  $g_i q = q$  par injectivité de  $g_j$ . Donc  $q \in \text{Fix}(g_i) \cap \text{Fix}(g_j)$ , contradiction.

Alors  $\forall i \neq j$ ,  $\text{Fix}(g_i) \cap \text{Fix}(g_j) \neq \emptyset$ . D'après la proposition 2.2.3, on a  $\bigcap_{i=1}^n \text{Fix}(g_i) \neq \emptyset$ .  $\square$

**Corollaire 2.2.5.** *Soit  $G$  un groupe fini agissant par isométries sur un arbre  $T$ . Alors  $G$  fixe au moins un sommet de  $T$ .*

*Démonstration.* Supposons  $G$  fini, alors  $G$  ne contient aucune isométrie hyperbolique car ces éléments sont d'ordre infini. Par conséquent, tous les éléments de  $G$  sont des isométries elliptiques de  $T$ . Alors d'après la proposition 2.2.4, on a  $\bigcap_{g \in G} \text{Fix}(g) \neq \emptyset$ . Le groupe  $G$  fixe alors dans  $T$  cette intersection non vide.  $\square$

En fait ce corollaire découle de la propriété plus générale suivante :

**Proposition 2.2.6.** *Soit  $G$  un groupe agissant par isométries sur un arbre  $T$ . Si  $G$  possède une orbite bornée dans  $T$  alors  $G$  fixe au moins un sommet de  $T$ .*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe  $v$  sommet de  $T$  tel que son orbite  $Gv$  soit bornée dans  $T$ . Alors  $G$  ne possède que des isométries elliptiques car s'il existe une isométrie hyperbolique  $g$  de  $G$  alors  $\{g^n v / n \in \mathbb{Z}\}$  serait non borné dans  $T$ .

Soit  $K$  l'enveloppe convexe dans  $T$  des sommets de l'orbite  $Gv$ . Puisque  $Gv$  est bornée dans  $T$  alors  $K$  est un sous-arbre de diamètre fini de  $T$ .

Soient  $a, b$  deux sommets extrémités de  $K$  réalisant la plus grande géodésique  $[a; b]$  de  $K$ .

Posons  $l([a; b]) = \text{diam}(K) = n \geq 0$ . Soit  $q$  le milieu de la géodésique  $[a; b]$ .

Supposons qu'il existe  $g \in G$  tel que  $gq = q' \neq q$ . Les sommets  $a$  et  $b$  sont dans l'orbite de  $v$ , il en est donc de même pour les images  $ga = a'$  et  $gb = b'$ . Ainsi  $a'$  et  $b'$  sont des sommets de  $K$  et donc  $g([a; b]) = [a'; b']$  est contenu dans  $K$  par convexité de  $K$ . Les milieux  $q$  et  $q'$ , qui sont les milieux respectifs de  $[a; b]$  et  $[a'; b']$  sont aussi dans  $K$ .

D'après la remarque 2.2.2, si  $x$  est le milieu de  $[q; q']$  alors  $x \in \text{Fix}(g)$  car  $g$  est nécessairement elliptique. De plus  $q, q' \in K$  implique  $[q; q'] \subset K$  et  $x \in K$ .

On peut supposer que  $x \notin [a; q]$ , quitte à remplacer  $a$  par  $b$ . Le segment  $[a; x] \cap \text{Fix}(g)$  est non vide car  $x$  appartient à ce segment. Soit  $x'$  le sommet de  $[a; x] \cap \text{Fix}(g)$  le plus proche du point  $q$ , alors  $g$  envoie la géodésique  $[a; q] \cup [q; x']$  contenue dans  $K$  sur la géodésique  $[a'; q'] \cup [q'; x']$  contenue elle aussi dans  $K$ . Ces deux géodésiques sont bien distinctes car  $q \neq q'$  par hypothèse. Nous obtenons alors la géodésique  $[a; a'] = [a; q] \cup [q; x'] \cup [x'; q'] \cup [q'; a']$  contenue dans  $K$  avec  $l([a; a']) = n + l([q; q']) > n$ . Contradiction avec  $\text{diam}(K) = n$ .

Alors tous les éléments de  $G$  fixent le point  $q$ . Ce qui termine la démonstration.  $\square$

Cette propriété n'est pas seulement vraie dans les arbres mais sur des espaces plus généraux, notamment dans les espaces  $CAT(0)$ . Pour plus de détails on pourra consulter le livre de Bridson-Haefliger [BH99].

**Définition 2.2.7.** Soient  $T$  un arbre,  $e_1$  et  $e_2$  deux arêtes orientées de  $T$  avec  $e_2 \neq \bar{e}_1$ . Les arêtes  $e_1$  et  $e_2$  sont dites orientées dans le même sens si on a  $d(o(e_1); o(e_2)) = d(t(e_1); t(e_2))$ . Autrement dit, ces arêtes sont orientées dans le même sens si elles ont la même orientation dans la géodésique de  $T$  les reliant.

**Proposition 2.2.8.** Soient  $G$  un groupe agissant par isométries sur un arbre  $T$  et  $e_1, e_2$  deux arêtes orientées distinctes de cet arbre.

Si ces arêtes sont orientées dans le même sens alors tout élément de  $G$  envoyant  $e_1$  sur  $e_2$  est hyperbolique. De plus  $e_1$  et  $e_2$  sont contenues dans l'axe de cette isométrie.

*Démonstration.* Soit  $g \in G$  tel que  $ge_1 = e_2$ .

Supposons  $g$  elliptique, alors  $Fix(g) \neq \emptyset$ . On a  $e_1 \neq e_2$ , donc  $e_1, e_2 \notin Fix(g)$  car  $G$  agit sans inversion. Posons  $v = o(e_1)$  et  $w = o(e_2)$ , alors  $gv = w$ . De plus le milieu  $x$  de la géodésique  $[v; w]$  est tel que  $x \in Fix(g)$ . Ainsi l'image de la géodésique  $[v; x]$  par  $g$  est la géodésique  $[w; x]$ . Alors les arêtes  $e_1$  et  $e_2$  ne sont pas orientées dans le même sens dans la géodésique  $[v; x] \cup [x; w]$  ou  $\bar{e}_1 \cup [v; x] \cup [x; w] \cup e_2$  suivant l'orientation des arêtes, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi  $g$  est une isométrie hyperbolique. Soit  $A_g$  la géodésique de  $T$  isométrique à une droite sur laquelle  $g$  agit par translation. Si  $e_1 \notin A_g$  alors  $e_2$  non plus et elles ne sont pas alors orientées dans le même sens. Par conséquent  $e_1 \in A_g$ , ainsi que  $e_2$  en tant que translaté de  $e_1$ .  $\square$

## 2.3 Notations

Pour simplifier les notations nous noterons dorénavant un graphe de groupes  $(\mathcal{G}, X)$  par  $\Gamma$  que l'on identifiera aussi avec le graphe sous-jacent  $X$ .

On notera  $G$  le groupe fondamental de  $\Gamma$  et  $T$  l'arbre de Bass-Serre donné au théorème 2.1.10 sur lequel agit  $G$  avec  $T/G = \Gamma$ .

On fera aussi l'abus de notation de noter les stabilisateurs de sommets  $v$  et d'arêtes  $e$  de  $T$  dans  $G$  par  $G_v$  et  $G_e$  respectivement. Ces groupes correspondent bien au groupes de sommets et d'arêtes de  $\Gamma$  si  $v$  et  $e$  appartiennent au relevé dans  $T$  du choix d'un arbre maximal de  $\Gamma$ . Sinon ils représentent un groupe conjugué de respectivement un groupe de sommets et d'arêtes de  $\Gamma$ .

Étant donné un groupe  $A$  et un sous-groupe  $B$ , on notera  $Z(A)$  le centre de  $A$ ,  $Z_A(B)$  le centralisateur de  $B$  dans  $A$ , et  $N_A(B)$  le normalisateur de  $B$  dans  $A$ .

On notera aussi, pour un élément  $g$  de  $G$  donné, l'automorphisme intérieur  $i_g$  de  $G$  défini par  $i_g(x) = gxg^{-1}$ ,  $\forall x \in G$ . On notera un groupe conjugué  $A^g$  pour  $i_g(A) = gAg^{-1}$ .



## 3 Graphes de groupes avec groupes d'arêtes finis

### 3.1 Premières propriétés

Considérons un groupe de type fini  $G$  qui se scinde sur des groupes finis.

On rappelle qu'un scindement d'un groupe  $G$  est un isomorphisme entre  $G$  et le groupe fondamental d'un graphe de groupes  $\Gamma$ . On peut ainsi voir un scindement de  $G$  comme une action de  $G$  sur l'arbre de Bass-Serre  $T$  du graphe de groupes.

On supposera ainsi dans cette partie que  $G$  est le groupe fondamental d'un graphe de groupes fini et réduit  $\Gamma$  et tel que ses groupes d'arêtes soient tous finis.

L'objectif de cette partie est de déterminer une équivalence entre le fait que  $G$  soit co-hopfien et une condition géométrique sur  $\Gamma$  vue dans l'arbre de Bass-Serre  $T$  sur lequel agit  $G$ . Pour cela il nous faut utiliser certaines techniques de Guirardel-Levitt, à savoir l'arbre des cylindres [GL11].

Etant donné un arbre  $T$  fixé, l'idée est de décomposer cet arbre en sous-arbres, appelés cylindres, correspondant à une certaine relation d'équivalence entre les arêtes de  $T$ .

Il faut pour cela se fixer une classe  $\mathcal{E}$  de sous-groupes de  $G$  qui est la classe des groupes d'arêtes autorisés. On demande que  $\mathcal{E}$  soit invariant par conjugaison.

La classe  $\mathcal{E}$  que nous utilisons ici est celle des groupes finis de cardinal fixé.

On peut alors définir une relation d'équivalence  $\sim$  sur l'ensemble des arêtes de  $T$  par  $e \sim e'$  si et seulement si  $G_e = G_{e'}$ .

On appelle alors cylindre de  $T$  une classe d'équivalence pour cette relation.

Chaque cylindre est un sous-arbre de  $T$  et deux cylindres s'intersectent en au plus un sommet de  $T$ .

Nous pouvons alors maintenant donner une définition plus générale, qui rejoindra la notion de cylindre dans le cas où le graphe de groupes a tous ses groupes d'arêtes finis et de même cardinal.

**Définition 3.1.1.** Soient  $\Gamma$  un graphe de groupes fini,  $\tau$  un sous-arbre maximal,  $T$  l'arbre de Bass-Serre sur lequel agit le groupe fondamental de  $\Gamma$  et  $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\tau})$  le choix d'un relèvement de  $(\Gamma, \tau)$  dans  $T$ .

Si  $e$  est une arête de  $\Gamma$  et  $G_e$  son groupe d'arête associé, on définit  $Fix_T(G_e)$  comme le sous-arbre de  $T$  fixé point par point par le stabilisateur de l'arête  $\tilde{e}$  relevée de  $e$  dans  $\tilde{\Gamma}$ .

**Remarque 3.1.2.**  $Fix_T(G_e)$  est un sous-arbre non vide de  $T$  car il contient au moins l'arête relevée  $\tilde{e}$ . De plus  $Fix_T(G_e)$  est connexe dans  $T$  car si  $G_e$  fixe deux sommets de  $T$  alors il fixe la géodésique point par point les reliant.

Aussi si deux stabilisateurs d'arêtes de  $T$  sont conjugués par un élément  $g \in G$  alors, par son action sur  $T$ ,  $g$  envoie le sous-arbre fixé par un stabilisateur d'arête sur le sous-arbre fixé par l'autre stabilisateur. Ainsi si  $e, e'$  sont deux arêtes de  $T$  telles que  $G_{e'} = G_e^g$  avec  $g \in G$  alors on a :  $g.Fix_T(G_e) = Fix_T(G_{e'})$ .

Comme nous allons le voir plus tard, le fait que le groupe fondamental d'un graphe de groupes soit co-hopfien est fortement lié à une condition géométrique sur ces sous-arbres de  $T$  fixés par un stabilisateur d'arête. Cette condition est la finitude ou non du diamètre de ces sous-arbres. Nous allons alors énoncer un certain nombre de lemmes utiles pour savoir sous quelles conditions ces sous-arbres sont de diamètres infinis.

**Lemme 3.1.3.** *Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes fini avec ses groupes d'arêtes finis et de groupe fondamental  $G$ . Soit  $e \in E(\Gamma)$  tel que  $G_e$  soit de cardinal maximum parmi les groupes d'arêtes.*

*Soient  $e_1$  et  $e_2$  deux arêtes de  $Fix_T(G_e)$  dans la même  $G$ -orbite et  $g \in G$  tel que  $ge_1 = e_2$ , alors  $g \in N_G(G_e)$ . En particulier  $g$  préserve  $Fix_T(G_e)$ .*

*Démonstration.* Soient  $e_1$  et  $e_2$  deux arêtes de  $Fix_T(G_e)$  dans la même orbite et  $g \in G$  tel que  $ge_1 = e_2$ . Le stabilisateur  $G_e$  fixe  $e_1$  et  $e_2$ , ainsi on a  $G_e < G_{e_1}$  et  $G_e < G_{e_2}$ . Or  $G_e$  est de cardinal maximum dans  $\Gamma$  donc on a  $G_e = G_{e_1} = G_{e_2} = G_{ge_1} = gG_{e_1}g^{-1} = gG_e g^{-1}$ . Ainsi  $g \in N_G(G_e)$ .  $\square$

**Lemme 3.1.4.** *Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes fini dont tous les groupes d'arêtes sont finis, soit  $n$  le nombre d'arêtes de  $\Gamma$ ,  $T$  son arbre de Bass-Serre et  $G$  son groupe fondamental. Si  $e'$  est une arête de  $\Gamma$ , on note  $T_{e'}$  l'arbre obtenu après écrasement de toutes les arêtes de  $T$  n'appartenant pas à la  $G$ -orbite d'un choix de relevé de l'arête  $e'$ .*

*Soit  $e \in E(\Gamma)$  tel que  $G_e$  soit de cardinal maximum parmi les groupes d'arêtes.*

*Les assertions suivantes sont alors équivalentes :*

1.  $diam(Fix_T(G_e)) = +\infty$ .
2.  $diam(Fix_T(G_e)) \geq 2n + 1$ .
3.  $Fix_T(G_e)$  possède deux arêtes dans la même orbite et orientées dans le même sens.
4.  $Fix_T(G_e)$  contient l'axe d'une isométrie hyperbolique.
5.  $Fix_T(G_e)$  possède une arête d'orbite non bornée sous l'action de  $N_G(G_e)$ .
6. Il existe  $e' \in E(\Gamma)$  avec  $G_{e'} = G_e$ , tel que  $diam(Fix_{T_{e'}}(G_e)) = +\infty$ .

*Démonstration.* 1)  $\Rightarrow$  2) Immédiat.

2)  $\Rightarrow$  3) Si  $diam(Fix_T(G_e)) \geq 2n + 1$  alors il existe un segment  $I \subset Fix_T(G_e)$  tel que  $l(I) = 2n + 1$ . Ainsi  $I$  possède au moins 3 arêtes dans la même orbite. De plus si l'on fait le choix d'une orientation de  $\Gamma$  alors on obtient une orientation équivariante de  $T$ . Ainsi deux des trois arêtes dans la même orbite de  $I$  sont alors orientées dans le même sens.

3)  $\Rightarrow$  4) Supposons que  $Fix_T(G_e)$  possède deux arêtes  $e_1$  et  $e_2$  dans la même orbite et orientées dans le même sens. Soit  $g \in G$  tel que  $ge_1 = e_2$ . D'après le lemme 3.1.3, on a  $g \in N_G(G_e)$ , de plus d'après la proposition 2.2.8,  $g$  est une isométrie hyperbolique car  $e_1$  et  $e_2$  sont orientées dans le même sens. Les arêtes  $e_1, e_2$  appartiennent aussi à l'axe  $A_g$  de cette isométrie.  $Fix_T(G_e)$  est un sous-arbre de  $T$ , il est donc connexe. Ainsi si  $e_1, e_2 \in Fix_T(G_e)$  alors la géodésique de l'axe  $A_g$  les reliant est aussi contenue dans  $Fix_T(G_e)$ . L'orbite de cette géodésique par les itérées de  $g$  est alors aussi dans  $Fix_T(G_e)$  car  $g \in N_G(G_e)$ . Ainsi  $A_g \subset Fix_T(G_e)$ .

4)  $\Rightarrow$  5) Immédiat d'après le lemme 3.1.3.

5)  $\Rightarrow$  1) Immédiat.

3)  $\Rightarrow$  6) Soient  $e_1$  et  $e_2$  deux arêtes de  $Fix_T(G_e)$  dans la même orbite et orientées dans le même sens. Soit  $g \in N_G(G_e)$  tel que  $ge_1 = e_2$ . D'après la proposition 2.2.8,  $g$  est une isométrie hyperbolique. Ecrasons toutes les arêtes de l'arbre  $T$  autre que celles de la  $G$ -orbite de  $e_1$ . Nous obtenons ainsi l'arbre  $T_{e_1}$  avec une  $G$ -action à une seule orbite d'arête.  $Fix_{T_{e_1}}(G_e)$  contient l'axe de  $g$ , il est donc de diamètre infini dans l'arbre  $T_{e_1}$ .

6)  $\Rightarrow$  1) Immédiat. □

**Remarque 3.1.5.** *En particulier, sous les mêmes hypothèses,  $Fix_T(G_e)$  est de diamètre infini si et seulement si  $N_G(G_e)$  contient un élément hyperbolique. Ainsi  $Fix_T(G_e)$  est de diamètre fini si et seulement si  $N_G(G_e)$  ne contient que des éléments elliptiques.*

**Lemme 3.1.6.** *Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes fini avec ses groupes d'arêtes finis.*

*Soit  $e \in E(\Gamma)$  tel que  $o(e) = t(e) = v \in V(\Gamma)$  avec  $G_e$  de cardinal maximum, ainsi que  $i_e(G_e)$  et  $i_{\bar{e}}(G_e)$  conjugués dans le groupe de sommet  $G_v$ .*

*Alors  $Fix_T(G_e)$  est de diamètre infini.*

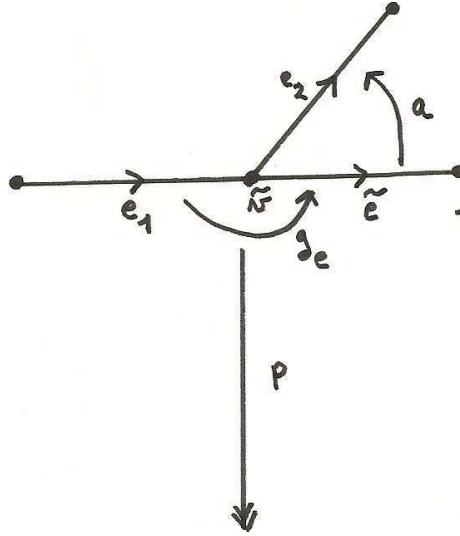


FIGURE 1 – Relevé de l'arête  $e$  de  $\Gamma$  dans l'arbre  $T$

*Démonstration.* Soit  $e \in E(\Gamma)$  tel que  $i_e(G_e)$  et  $i_{\bar{e}}(G_e)$  sont conjugués dans  $G_v$ .

Ainsi il existe  $a \in G_v$  tel que  $ai_{\bar{e}}(G_e)a^{-1} = i_{\bar{e}}(G_e)^a = i_e(G_e)$ .

Soit  $\tau$  un arbre maximal de  $\Gamma$  et  $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\tau})$  un relèvement de  $(\Gamma, \tau)$ , avec  $\tilde{e}$  relevé de  $e$ ,  $\tilde{v}$  relevé de  $v$  dans  $\tilde{\tau} \subset T$  tel que  $o(\tilde{e}) = \tilde{v}$  (voir figure 1). D'après les points 1) et 2) du théorème 2.1.10, on a  $G_{\tilde{v}} = G_v$  et  $G_{\tilde{e}} = i_{\bar{e}}(G_e)$ . Soit  $g_e$  le générateur de  $G = \pi_1(\Gamma)$  associé à l'arête  $e$  de  $\Gamma$ . On rappelle que l'on a la relation dans  $G$  :  $\forall g \in G_e, i_{\bar{e}}(g) = g_e i_e(g) g_e^{-1}$ .

Soit  $e_1$  l'arête de  $T$  tel que  $g_e e_1 = \tilde{e}$ . L'élément  $g_e$  agit comme une isométrie hyperbolique sur  $T$ , ainsi  $e_1$  et  $\tilde{e}$  sont orientées dans le même sens avec  $e_1, \tilde{e} \in A_{g_e}$  et  $t(e_1) = \tilde{v}$ . De plus on a  $G_{e_1} = i_e(G_e)$ .



Soit  $e_2$  l'arête de  $T$  tel que  $a\tilde{e} = e_2$ .  $a$  agit comme une isométrie elliptique sur  $T$  et fixe le sommet  $\tilde{v}$ . Ainsi  $o(e_2) = \tilde{v}$ .

Alors  $ag_e e_1 = e_2$ , et donc  $G_{e_2} = G_{ag_e e_1} = G_{e_1}^{age} = i_e(G_e)^{age} = i_{\bar{e}}(G_e)^a = i_e(G_e) = G_{e_1}$ .

Ainsi  $Fix_T(G_{e_1})$  possède deux arêtes  $e_1$  et  $e_2$  dans la même orbite et orientées dans le même sens. D'après le lemme 3.1.4, on a  $Fix_T(G_{e_1})$  de diamètre infini. Les groupes  $G_e$  et  $G_{e_1}$  sont conjugués, donc d'après la remarque 3.1.2,  $Fix_T(G_e)$  est aussi de diamètre infini.  $\square$

**Lemme 3.1.7.** *Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes réduit et fini, dont tous les groupes d'arêtes sont finis et de même cardinal et soit  $G$  son groupe fondamental.*

*Alors on obtient l'un des deux cas suivants :*

- *Les stabilisateurs de sommets de  $T$  contiennent tous strictement les stabilisateurs des arêtes qui sont adjacentes.*
- $\forall d \in E(\Gamma)$ , *on a  $Fix_T(G_d)$  de diamètre infini.*

*Démonstration.* Supposons que le premier point ne soit pas vérifié.

Alors il existe  $\tilde{v}_0$  sommet de  $T$  et  $\tilde{e}$  arête adjacente avec  $t(\tilde{e}) = \tilde{v}_0$  tels que  $G_{\tilde{v}_0} = G_{\tilde{e}}$ . Il existe donc au quotient,  $v_0 \in V(\Gamma)$  et  $e \in E(\Gamma)$  tels que  $i_e(G_e) = G_{v_0}$ .  $\Gamma$  étant un graphe de groupes réduit, par définition on a  $o(e) = t(e) = v_0$ . Il en est de même pour toute arête adjacente au sommet  $v_0$  puisque tous les groupes d'arêtes ont le même cardinal. Le graphe  $\Gamma$  est alors un bouquet de cercles de sommet  $v_0$ .

On a  $i_e(G_e) = G_{v_0} = i_{\bar{e}}(G_e)$ , donc  $i_e(G_e)$  et  $i_{\bar{e}}(G_e)$  sont conjugués dans  $G_{v_0}$ . D'après le lemme 3.1.6, on a  $Fix_T(G_e)$  de diamètre infini. Les groupes d'arêtes de  $\Gamma$  étant tous de même cardinal, on a aussi  $i_d(G_d) = i_{\bar{d}}(G_d)$  pour toute arête  $d$  de  $\Gamma$ . Ce qui donne le second point.  $\square$

**Remarque 3.1.8.** *Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes réduit et fini, avec tous ses groupes d'arêtes finis et de même cardinal. Supposons qu'il existe  $e \in E(\Gamma)$  avec  $Fix_T(G_e)$  de diamètre fini. Alors, d'après le lemme 3.1.7, pour tous sommets distincts  $v, w$  de  $T$ , on a  $G_v \not\subseteq G_w$  et  $G_w \not\subseteq G_v$ . On peut donc en déduire que les stabilisateurs des sommets  $v$  et  $w$  sont différents.*

Tout groupe fondamental d'un graphe de groupes peut s'écrire comme une succession de produits amalgamés et d'extensions HNN des groupes de sommets au dessus de ses groupes d'arêtes. Regardons alors le cas particulier d'un graphe de groupes à une arête.

**Proposition 3.1.9.** *Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes à une arête  $e$  tel que son groupe d'arête  $G_e$  soit fini.*

*Nous avons alors les deux cas suivants :*

1. *Si  $G$  est un produit amalgamé  $G = A *_{{G_e}} B$  alors on a :*  
 $diam(Fix_T(G_e)) = +\infty$  *si et seulement si  $i_A(G_e) \not\subseteq N_A(i_A(G_e))$  et  $i_B(G_e) \not\subseteq N_B(i_B(G_e))$*
2. *Si  $G$  est une extension HNN  $G = A *_{{G_e}}$  alors on a :*  
 $diam(Fix_T(G_e)) = +\infty$  *si et seulement si  $(i_e(G_e) \not\subseteq N_A(i_e(G_e)) \text{ et } i_{\bar{e}}(G_e) \not\subseteq N_A(i_{\bar{e}}(G_e)))$   
ou  $(i_e(G_e) \text{ et } i_{\bar{e}}(G_e) \text{ sont conjugués dans } A)$ .*

*Démonstration.* 1) Supposons que  $G$  est un produit amalgamé  $G = A *_B G_e$  alors  
 $G = \langle A, B / i_A(g) = i_B(g), \forall g \in G_e \rangle$  avec  $i_A : G_e \hookrightarrow A$  et  $i_B : G_e \hookrightarrow B$ , les morphismes injectifs associés à l'arête  $e$ .

Posons  $\tilde{e}$  le relevé de  $e$  dans  $T$  avec  $o(\tilde{e}) = v$ ,  $t(\tilde{e}) = w$ ,  $v \neq w$ .

On a de plus, d'après le théorème 2.1.10,  $G_v = A$ ,  $G_w = B$  et  $G_{\tilde{e}} = i_A(G_e) = i_B(G_e)$ .

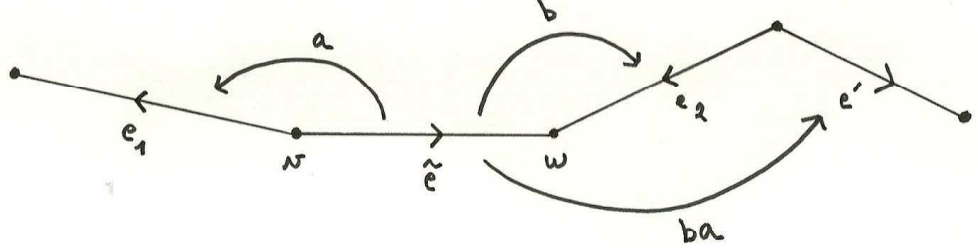


FIGURE 2 – Relevé de l'arête  $e$  de l'amalgame  $\Gamma$  dans l'arbre  $T$

$\Rightarrow$  Supposons que  $\text{diam}(\text{Fix}_T(G_e)) = +\infty$ .

Alors par définition de  $\text{Fix}_T(G_e)$ , on a  $\text{Fix}_T(G_{\tilde{e}})$  de diamètre infini.

Ainsi d'après le lemme 3.1.4, il existe une droite  $D$  de  $T$  contenue dans  $\text{Fix}_T(G_e)$ .

On peut de plus supposer que cette droite  $D$  contient l'arête  $\tilde{e}$ .

En effet si  $\tilde{e}$  et  $D$  sont disjointes dans  $\text{Fix}_T(G_e)$  alors comme toutes les arêtes de  $T$  sont dans la même orbite, si  $e'$  est une arête de  $D$ , il existe  $g \in G$  tel que  $ge' = \tilde{e}$ . D'après le lemme 3.1.3,  $g$  préserve  $\text{Fix}_T(G_e)$ . De plus  $g$  agit par isométrie sur  $\text{Fix}_T(G_e)$ , ainsi l'image de  $D$  par  $g$  est encore une droite contenue dans  $\text{Fix}_T(G_e)$  et contenant l'arête  $\tilde{e}$ .

Soient  $e_1$  et  $e_2$  deux arêtes de  $D$ , adjacentes à  $\tilde{e}$  tel que  $o(e_1) = v$  et  $t(e_2) = w$  (voir figure 2). Chaque stabilisateur de sommet de  $T$  a une action transitive sur ses arêtes adjacentes, ainsi il existe  $b \in G_w = B$  tel que  $b\tilde{e} = e_2$ . De même il existe  $a \in G_v = A$  tel que  $a\tilde{e} = e_1$ .

$e_1$  et  $e_2$  sont dans  $\text{Fix}_T(G_e)$ , alors d'après le lemme 3.1.3, on a  $b \in N_B(G_{\tilde{e}})$  et  $a \in N_A(G_{\tilde{e}})$ .

De plus  $b \notin G_{\tilde{e}}$  car  $b\tilde{e} = e_2$  avec  $\tilde{e} \neq e_2$ . On a vu que  $G_{\tilde{e}} = i_B(G_e)$ , ainsi on a  $b \in N_B(i_B(G_e)) \setminus i_B(G_e)$  et donc  $i_B(G_e) \not\leq N_B(i_B(G_e))$ .

De même on a  $a \notin G_{\tilde{e}}$  car  $a\tilde{e} = e_1$  avec  $\tilde{e} \neq e_1$ . On a vu aussi que  $G_{\tilde{e}} = i_A(G_e)$ , ainsi on a  $a \in N_A(i_A(G_e)) \setminus i_A(G_e)$  et donc  $i_A(G_e) \not\leq N_A(i_A(G_e))$ .

En conclusion on obtient bien  $i_A(G_e) \not\leq N_A(i_A(G_e))$  et  $i_B(G_e) \not\leq N_B(i_B(G_e))$ .

$\Leftarrow$  Supposons que  $i_A(G_e) \not\leq N_A(i_A(G_e))$  et  $i_B(G_e) \not\leq N_B(i_B(G_e))$ .

Soit  $a \in N_A(i_A(G_e)) \setminus i_A(G_e)$  et  $b \in N_B(i_B(G_e)) \setminus i_B(G_e)$  avec  $i_A(G_e) = i_B(G_e) = G_{\tilde{e}}$ .

Posons  $e' = ba\tilde{e}$  (voir figure 2). Alors  $G_{e'} = G_{ba\tilde{e}} = G_{\tilde{e}}^{ba} = b(aG_{\tilde{e}}a^{-1})b^{-1} = bG_{\tilde{e}}b^{-1} = G_{\tilde{e}}$ .

Ainsi  $e'$  est une arête de  $\text{Fix}_T(G_{\tilde{e}})$ . De plus  $e'$  est une arête orientée dans le même sens que  $\tilde{e}$  dans l'arbre  $T$ . Alors  $\text{Fix}_T(G_{\tilde{e}})$  possède deux arêtes dans la même orbite et orientée dans le même sens, d'après le lemme 3.1.4, on a  $\text{Fix}_T(G_{\tilde{e}})$ , soit  $\text{Fix}_T(G_e)$ , de diamètre infini.

2) Supposons que  $G$  est une extension HNN  $G = A *_G$  alors

$G = \langle A, t \mid i_{\tilde{e}}(g) = ti_e(g)t^{-1}, \forall g \in G_e \rangle$  où  $t = g_e$ .

Posons  $\tilde{e}$  le relevé de  $e$  dans  $T$  avec  $o(\tilde{e}) = v$  et  $t(\tilde{e}) = w$ .

D'après le théorème 2.1.10, on a  $G_v = A$  et  $G_{\tilde{e}} = i_{\tilde{e}}(G_e) = i_e(G_e)^t$ .

$\Rightarrow$  Supposons que  $\text{diam}(\text{Fix}_T(G_e)) = +\infty$ .

Alors d'après le lemme 3.1.4, il existe une droite  $D$  de  $T$  contenue dans  $\text{Fix}_T(G_e)$ . On peut, comme au cas 1), supposer que cette droite  $D$  contient l'arête  $\tilde{e}$ .

Nous obtenons alors deux cas :

i) Supposons que  $D$  contienne deux arêtes adjacentes et orientées dans le même sens pour une orientation équivariante des arêtes.

Notons  $e_1$  et  $e_2$  ces deux arêtes avec  $t(e_1) = o(e_2)$  (voir figure 3).

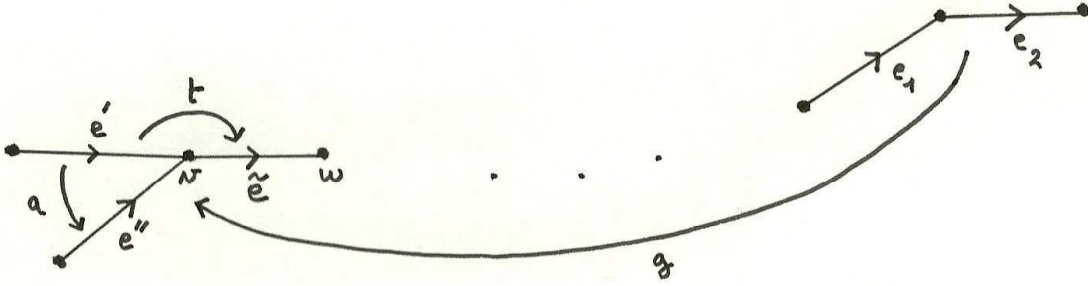


FIGURE 3 – Relevé de l'arête  $e$  de l'extension HNN  $\Gamma$  dans l'arbre  $T$

Il existe une seule orbite d'arête dans  $T$ , ainsi il existe  $g \in G$  tel que  $ge_2 = \tilde{e}$ .

On a  $\tilde{e}, e_2 \in D \subset \text{Fix}_T(G_e)$  donc d'après le lemme 3.1.3,  $g \in N_G(G_{\tilde{e}})$ .

Soit  $e''$  l'image de  $e_1$  par  $g$  (voir figure 3). Alors  $e''$  est une arête adjacente à  $\tilde{e}$  telle que  $t(e'') = o(\tilde{e}) = v$ . De plus  $e''$  est une arête de  $\text{Fix}_T(G_e)$  car  $g \in N_G(G_{\tilde{e}})$ .

Soit  $e'$  l'arête de  $T$  ayant pour image  $\tilde{e}$  par l'élément  $t$ . Alors on a  $G_{e'} = i_e(G_e)$ .

Le stabilisateur du sommet  $v$  de  $T$  a une action transitive sur toutes les arêtes de terminaison  $v$ . On a  $t(e'') = t(e') = v$ , ainsi il existe  $a \in G_v = A$  tel que  $ae' = e''$ .

Donc  $i_{\tilde{e}}(G_e) = G_{\tilde{e}} = G_{e''} = G_{ae'} = G_{e'}^a = i_e(G_e)^a$ . Ainsi  $i_e(G_e)$  et  $i_{\tilde{e}}(G_e)$  sont conjugués dans  $A$ .

ii) Supposons qu'aucune paire d'arêtes adjacentes dans  $D$  ne soit orientée dans le même sens (cas analogue de la figure 2).

Soient  $e_1$  et  $e_2$  les deux arêtes adjacentes dans  $D$  à l'arête  $\tilde{e}$ , orientées selon l'orientation équivariante. Alors on a  $o(e_1) = o(\tilde{e}) = v$  et  $t(e_2) = t(\tilde{e}) = w = tv$ .

Le stabilisateur  $G_v$  a une action transitive sur toutes les arêtes d'origine  $v$ . De même  $G_w$  a une action transitive sur toutes les arêtes de terminaison  $w$ .

Ainsi il existe  $a \in G_v = A$  tel que  $a\tilde{e} = e_1$  et il existe  $x \in G_w = G_{tv} = G_v^t = A^t$  tel que  $x\tilde{e} = e_2$ .

De plus on a  $a, x \in N_G(G_{\tilde{e}}) \setminus G_{\tilde{e}}$  par le lemme 3.1.3 et car  $e_1, \tilde{e}$  et  $e_2$  sont distinctes dans  $T$ .  
On a  $G_{\tilde{e}} = i_{\tilde{e}}(G_e)$  et  $a \in A$  donc  $a \in N_A(i_{\tilde{e}}(G_e)) \setminus i_{\tilde{e}}(G_e)$ .  
Aussi  $x \in A^t$  ainsi il existe  $b \in A$  tel que  $x = tbt^{-1}$ .  
On rappelle que  $x \in N_G(G_{\tilde{e}})$  avec  $G_{\tilde{e}} = i_{\tilde{e}}(G_e) = i_e(G_e)^t$ .  
Alors on a  $G_{\tilde{e}} = xG_{\tilde{e}}x^{-1} = tbt^{-1}G_{\tilde{e}}tb^{-1}t^{-1}$ .  
Donc  $t^{-1}G_{\tilde{e}}t = bt^{-1}G_{\tilde{e}}tb^{-1}$ , ainsi  $i_e(G_e) = bi_e(G_e)b^{-1}$  et donc  $b \in N_A(i_e(G_e))$ .  
De plus  $b \notin i_e(G_e)$  car sinon  $x\tilde{e} = tbt^{-1}\tilde{e} = \tilde{e}$ , contradiction avec  $x \notin G_{\tilde{e}}$ .  
En résumé il existe  $a \in N_A(i_{\tilde{e}}(G_e)) \setminus i_{\tilde{e}}(G_e)$  et  $b \in N_A(i_e(G_e)) \setminus i_e(G_e)$ .  
Ainsi on a bien  $i_e(G_e) \not\leq N_A(i_e(G_e))$  et  $i_{\tilde{e}}(G_e) \not\leq N_A(i_{\tilde{e}}(G_e))$ .

$\Leftrightarrow$  Supposons que  $(i_e(G_e) \leq N_A(i_e(G_e)) \text{ et } i_{\tilde{e}}(G_e) \leq N_A(i_{\tilde{e}}(G_e)))$  ou  $(i_e(G_e) \text{ et } i_{\tilde{e}}(G_e) \text{ sont conjugués dans } A)$ .

- Si  $i_e(G_e)$  et  $i_{\tilde{e}}(G_e)$  sont conjugués dans  $A$ , alors d'après le lemme 3.1.6, on a bien  $Fix_T(G_e)$  de diamètre infini.

- Si  $i_e(G_e) \leq N_A(i_e(G_e))$  et  $i_{\tilde{e}}(G_e) \leq N_A(i_{\tilde{e}}(G_e))$ .

Soit  $a \in N_A(i_e(G_e)) \setminus i_e(G_e)$  et  $b \in N_A(i_{\tilde{e}}(G_e)) \setminus i_{\tilde{e}}(G_e)$  avec  $i_{\tilde{e}}(G_e) = i_e(G_e)^t = G_{\tilde{e}}$ .  
Posons  $e' = \alpha\tilde{e}$  où  $\alpha = bta^{-1}$  (voir figure 4).

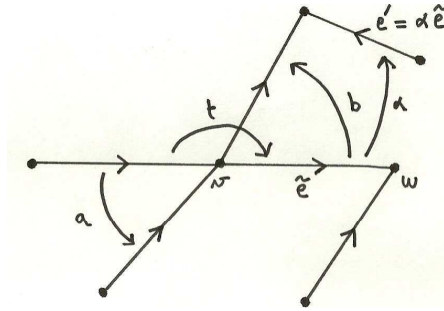


FIGURE 4 – Relevé de l'arête  $e$  de l'extension HNN  $\Gamma$  dans l'arbre  $T$

Alors on a :  $G_{e'} = G_{bta^{-1}\tilde{e}} = bta(t^{-1}G_{\tilde{e}}t)a^{-1}t^{-1}b^{-1} = bt(ai_e(G_e)a^{-1})t^{-1}b^{-1} = b(ti_e(G_e)t^{-1})b^{-1} = bi_{\tilde{e}}(G_e)b^{-1} = i_{\tilde{e}}(G_e) = G_{\tilde{e}}$ . Ainsi  $e'$  est une arête de  $Fix_T(G_{\tilde{e}})$ .

De plus  $e'$  est une arête orientée dans le même sens que  $\tilde{e}$  dans l'arbre  $T$ . Alors  $Fix_T(G_{\tilde{e}})$  possède deux arêtes dans la même orbite et orientée dans le même sens, d'après le lemme 3.1.4, on a  $Fix_T(G_{\tilde{e}})$ , soit  $Fix_T(G_e)$ , de diamètre infini. □

**Remarque 3.1.10.** Cette proposition nous permet de donner une caractérisation algébrique d'une propriété géométrique des cylindres de  $T$ .

La difficulté se ramène alors, dans le cas d'un graphe de groupes à une arête, aux calculs des normalisateurs du groupe d'arête.

## 3.2 Condition nécessaire

Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant :

**Théorème 3.2.1.** *Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes fini et réduit avec ses groupes d'arêtes de cardinal fini.*

*Supposons qu'il existe une arête  $e$  du graphe  $\Gamma$  tel que son groupe  $G_e$  soit de cardinal maximum parmi les groupes d'arêtes, avec la condition  $\text{diam}(\text{Fix}_T(G_e)) = +\infty$ .*

*Alors le groupe fondamental de  $\Gamma$  est non co-hopfien.*

Pour cela nous avons besoin de la notion de mot réduit dans le cas particulier d'un produit amalgamé et d'une extension HNN.

En utilisant, dans les rappels de théorie de Bass-Serre, la définition 2.1.6, nous obtenons les deux lemmes suivants :

**Lemme 3.2.2.** *Soit  $G$  un produit amalgamé  $G = A *_{G_e} B$ .*

*Tout élément  $g \neq 1$  de  $G$  peut s'écrire sous la forme :*

•  $g = a_0$  avec  $a_0 \in A \setminus \{1\}$ .

$g$  est alors un mot réduit de longueur nulle.

•  $g = a_1 b_1 \dots a_k b_k a_{k+1}$  avec  $k \geq 1$ ,  $a_1, \dots, a_{k+1} \in A$  et  $b_1, \dots, b_k \in B$  tels que  $a_i \notin G_e$  si  $2 \leq i \leq k$  et  $b_i \notin G_e$  si  $1 \leq i \leq k$ .

$g$  est alors un mot réduit de longueur  $2k$ .

*L'écriture d'un tel élément est dite sous forme réduite.*

*Réciproquement, tout élément de  $G$  s'écrivant sous forme réduite est non trivial.*

La définition d'écriture réduite utilisée ici dans le cas d'un produit amalgamé  $A *_{G_e} B$  correspond au choix d'un point base  $v_0$  dans l'arbre de Bass-Serre fixé par le groupe  $A$ . Ainsi à chaque élément de  $B \setminus G_e$  apparaissant dans l'écriture réduite correspond un aller-retour en  $v_0$  du chemin associé au graphe quotient. La longueur du mot réduit, correspondant au nombre d'arêtes traversées, est bien égale au double du nombre d'apparitions d'éléments de  $B \setminus G_e$  dans l'écriture réduite.

**Lemme 3.2.3.** *Soit  $G$  une extension HNN  $G = A *_{G_e} = \langle A, t \mid i_{\bar{e}}(g) = t i_e(g) t^{-1}, \forall g \in G_e \rangle$ .*

*Tout élément  $g \neq 1$  de  $G$  peut s'écrire sous la forme :*

•  $g = a_0$  avec  $a_0 \in A \setminus \{1\}$ .

$g$  est alors un mot réduit de longueur nulle.

•  $g = a_0 t^{n_1} a_1 \dots a_{k-1} t^{n_k} a_k$  avec  $k \geq 1$ ,  $a_0, \dots, a_k \in A$ ,  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}^*$  et tels que si  $k \geq 2$  alors  $a_i \notin i_e(G_e)$  si  $n_i > 0$  et  $n_{i+1} < 0$  ainsi que  $a_i \notin i_{\bar{e}}(G_e)$  si  $n_i < 0$  et  $n_{i+1} > 0$  pour  $1 \leq i \leq k-1$ .

$g$  est alors un mot réduit de longueur  $|n_1| + \dots + |n_k|$ .

*L'écriture d'un tel élément est dite sous forme réduite.*

*Réciproquement, tout élément de  $G$  s'écrivant sous forme réduite est non trivial.*

**Remarque 3.2.4.** *Etant donné un sommet  $v_0$  de l'arbre de Bass-Serre  $T$  et  $g$  un mot réduit, la longueur de la géodésique  $[v_0; gv_0]$  dans  $T$  correspond à la longueur du mot réduit  $g$  définie à*

la remarque 2.1.8. Ainsi, quitte à remplacer dans l'écriture de  $g$  tous les éléments appartenant aux groupes de sommets par des éléments appartenant à la même classe à gauche du groupe d'arête incidente du chemin dans le groupe de sommets correspondant, l'écriture sous forme réduite d'un élément n'est pas unique, contrairement à sa longueur.

**Proposition 3.2.5.** *Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes à une arête, réduit tel que son groupe d'arête  $G_e$  soit fini. Supposons de plus que  $\text{diam}(\text{Fix}_T(G_e)) = +\infty$ . Alors le groupe fondamental de  $\Gamma$  est non co-hopfien.*

*Démonstration.*  $\Gamma$  possède une seule arête, alors son groupe fondamental  $G$  se distingue suivant l'un des deux cas suivants :

1.  $G$  est un produit amalgamé  $G = A *_G B = \langle A, B \mid i_A(g) = i_B(g), \forall g \in G_e \rangle$ .

$\text{Fix}_T(G_e)$  est de diamètre infini par hypothèse, alors d'après la proposition 3.1.9, on a :  $i_A(G_e) \not\subseteq N_A(i_A(G_e))$  et  $i_B(G_e) \not\subseteq N_B(i_B(G_e))$ .

Ainsi  $\exists a_0 \in N_A(i_A(G_e)) \setminus i_A(G_e)$  et  $\exists b_0 \in N_B(i_B(G_e)) \setminus i_B(G_e)$ .

Posons  $\beta = b_0 a_0$  alors  $G_e^\beta = b_0(a_0 G_e a_0^{-1}) b_0^{-1} = G_e$ . Alors l'automorphisme intérieur  $i_\beta$  préserve  $G_e$ . Le groupe  $G_e$  est fini, ainsi il existe  $n \geq 1$  tel que en restriction à  $G_e$ , on a  $i_\beta^n = i_{\beta^n} = \text{id}_{G_e}$ . Posons  $\beta^n = \gamma$ , alors  $\forall g \in G_e$ , on a :  $\gamma g \gamma^{-1} = g$ .

Nous allons alors construire un "twist de Dehn" injectif et non surjectif de  $G$  dans  $G$ , ce qui montrera que  $G$  est non co-hopfien. Définissons l'application  $\varphi$  de  $G$  dans  $G$  par l'identité sur  $A$  et par la conjugaison par l'élément  $\gamma$  sur  $B$ .

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad G &\longrightarrow G \\ a \in A &\longmapsto a \\ b \in B &\longmapsto \gamma b \gamma^{-1} \end{aligned}$$

- Montrons que  $\varphi$  s'étend bien en un morphisme de groupes.

Soit  $g \in G_e$ , alors  $i_A(g) = i_B(g)$  dans  $G$ . Ainsi  $\varphi(i_A(g)) = i_A(g)$  et  $\varphi(i_B(g)) = \gamma i_B(g) \gamma^{-1} = i_B(g)$  par définition de  $\gamma$ . Donc on a  $\varphi(i_A(g)) = \varphi(i_B(g))$  dans  $G$ ,  $\forall g \in G_e$ .

Ainsi  $\varphi$  définit bien un morphisme de  $G$  dans  $G$ .

- Montrons que  $\varphi$  est injectif.

Soit  $g \neq 1$ , alors d'après le lemme 3.2.2,  $g$  peut s'écrire sous forme réduite dans  $G$ .

Ainsi on a :

- $g = x_0$  avec  $x_0 \in A \setminus \{1\}$ .

Donc  $\varphi(g) = x_0 \neq 1$ .

- $g = a_1 b_1 \dots a_k b_k a_{k+1}$  avec  $k \geq 1$ ,  $a_1, \dots, a_{k+1} \in A$  et  $b_1, \dots, b_k \in B$  tels que  $a_i \notin G_e$  si  $2 \leq i \leq k$  et  $b_i \notin G_e$  si  $1 \leq i \leq k$ . Ainsi  $\varphi(g) = a_1 \gamma b_1 \gamma^{-1} a_2 \gamma b_2 \gamma^{-1} \dots a_k \gamma b_k \gamma^{-1} a_{k+1}$ .

Les écritures  $a_0 b_0$  et  $b_0 a_0$  sont bien réduites par définition des éléments  $a_0$  et  $b_0$ . De plus, on a :

$1 \leq i \leq k$ ,  $\gamma b_i \gamma^{-1} = b_0 a_0 \dots b_0 a_0 b_i a_0^{-1} b_0^{-1} \dots a_0^{-1} b_0^{-1}$  sous forme réduite car  $b_i \notin i_B(G_e)$ .

$2 \leq i \leq k$ ,  $\gamma^{-1} a_i \gamma = a_0^{-1} b_0^{-1} \dots a_0^{-1} b_0^{-1} a_i b_0 a_0 \dots b_0 a_0$  sous forme réduite car  $a_i \notin i_A(G_e)$ .

Ainsi l'écriture de  $\varphi(g)$  est bien sous forme réduite dans  $G$ , alors  $\varphi(g)$  est un élément

non trivial de  $G$  d'après le lemme 3.2.2.

• Montrons que  $\varphi$  n'est pas surjectif.

Supposons que  $g$  soit l'antécédent par  $\varphi$  de l'élément  $b_0$ , alors  $g \neq 1$ .

Alors d'après le lemme 3.2.2,  $g$  peut s'écrire sous forme réduite. On a  $l(g) > 0$  car sinon l'image de  $g$  par  $\varphi$  est un élément non trivial de  $A$ , ce qui est en contradiction avec  $b_0 \in B \setminus i_B(G_e)$ .

Ainsi  $l(g) \geq 2$  et donc l'écriture sous forme réduite de  $g$  contient au moins un élément  $x \in B \setminus i_B(G_e)$  d'après le lemme 3.2.2. De plus l'image de l'écriture réduite de  $x$  par  $\varphi$  reste une écriture sous forme réduite. Aussi, le mot  $\varphi(g)$  écrit comme produit des images des éléments composant  $g$  par le morphisme  $\varphi$  est encore sous forme réduite d'après le point précédent. L'élément  $\varphi(x)$  correspond alors à un sous-mot de  $\varphi(g)$ . La longueur du mot réduit ne dépendant pas de l'écriture sous forme réduite d'après la remarque 3.2.4, on a donc :

$l(b_0) = l(\varphi(g)) \geq l(\varphi(x)) = l(\gamma x \gamma^{-1}) = 4n + 2 \geq 4 + 2 = 6$ , ce qui est en contradiction avec  $l(b_0) = 2$ . Donc  $b_0$  n'admet aucun antécédent par  $\varphi$ .

2.  $G$  est une extension HNN  $G = A *_G = \langle A, t \mid ti_e(g)t^{-1} = i_{\bar{e}}(g), \forall g \in G_e \rangle$ .

$Fix_T(G_e)$  est de diamètre infini par hypothèse, alors d'après la proposition 3.1.9, on a deux cas :  $i_e(G_e) \not\cong N_A(i_e(G_e))$  et  $i_{\bar{e}}(G_e) \not\cong N_A(i_{\bar{e}}(G_e))$  ou bien  $i_e(G_e)$  et  $i_{\bar{e}}(G_e)$  sont conjugués dans  $A$ .

i) Supposons que  $i_e(G_e)$  et  $i_{\bar{e}}(G_e)$  soient conjugués dans  $A$ .

Ainsi  $\exists \alpha \in A$  tel que  $\alpha i_e(G_e) \alpha^{-1} = i_{\bar{e}}(G_e)$ . De plus on a dans  $G$  la relation  $\forall g \in G_e$ ,  $ti_e(g)t^{-1} = i_{\bar{e}}(g)$ . Posons  $\beta = t\alpha^{-1}$  alors  $i_{\bar{e}}(G_e)^\beta = t(\alpha^{-1}i_{\bar{e}}(G_e)\alpha)t^{-1} = i_{\bar{e}}(G_e)$ .

Ainsi la restriction de l'automorphisme intérieur de  $G$  donne l'application suivante :  $i_\beta : i_{\bar{e}}(G_e) \rightarrow i_{\bar{e}}(G_e)$  avec  $i_{\bar{e}}(G_e)$  fini. Donc  $\exists n \geq 1$  tel que  $i_\beta^n = i_{\beta^n} = id_{i_{\bar{e}}(G_e)}$ . Posons  $\beta^n = \gamma$ , alors  $\forall g \in G_e$ , on a :  $\gamma i_{\bar{e}}(g) \gamma^{-1} = i_{\bar{e}}(g)$ .

Nous allons construire un "twist de Dehn" injectif et non surjectif de  $G$  dans  $G$ , ce qui montrera que  $G$  est non co-hopfien. Définissons l'application  $\varphi$  de  $G$  dans  $G$  par l'identité sur  $A$  et tel que l'image de  $t$  soit  $\gamma t$ .

Ainsi on a :

$$\begin{array}{ccc} \varphi : & G & \longrightarrow G \\ & a \in A & \longmapsto a \\ & t & \longmapsto \gamma t \end{array}$$

• Montrons que  $\varphi$  s'étend bien en un morphisme de groupes.

Soit  $g \in G_e$ , alors  $ti_e(g)t^{-1} = i_{\bar{e}}(g)$  dans  $G$ . Ainsi  $\varphi(i_{\bar{e}}(g)) = i_{\bar{e}}(g)$  car  $i_{\bar{e}}(g) \in A$  et  $\varphi(ti_e(g)t^{-1}) = \gamma ti_e(g)t^{-1} \gamma^{-1} = i_{\bar{e}}(g)$  par définition de  $\gamma$ .

Donc  $\varphi(i_{\bar{e}}(g)) = \varphi(ti_e(g)t^{-1})$  dans  $G$  et  $\varphi$  définit bien un morphisme de  $G$  dans  $G$ .

• Montrons que  $\varphi$  est injectif.

Soit  $g \neq 1$ , alors d'après le lemme 3.2.3,  $g$  peut s'écrire sous forme réduite dans  $G$ .

Ainsi on a :

•  $g = a_0$  avec  $a_0 \in A \setminus \{1\}$ .

Alors  $\varphi(g) = a_0 \neq 1$ .

•  $g = a_0 t^{n_1} a_1 \dots a_{k-1} t^{n_k} a_k$  avec  $k \geq 1$ ,  $a_0, \dots, a_k \in A$ ,  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}^*$  et tels que si  $k \geq 2$  alors  $a_i \notin i_e(G_e)$  si  $n_i > 0$  et  $n_{i+1} < 0$  ainsi que  $a_i \notin i_{\bar{e}}(G_e)$  si  $n_i < 0$  et  $n_{i+1} > 0$  pour  $1 \leq i \leq k-1$ .

Ainsi  $\varphi(g) = a_0(\gamma t)^{n_1} a_1(\gamma t)^{n_2} \dots a_{k-1}(\gamma t)^{n_k} a_k$ .

Si  $k = 1$  alors on a  $\varphi(g) = a_0(\gamma t)^{n_1} a_1$ .

Si  $n_1 > 0$  alors  $\varphi(g) = a_0 \gamma t \dots \gamma t a_1 = a_0 t \alpha^{-1} t \alpha^{-1} \dots t \alpha^{-1} t \dots t \alpha^{-1} t \alpha^{-1} \dots t \alpha^{-1} t a_1$  qui est bien sous forme réduite car les exposants de  $t$  sont tous de même signe.

Il en est de même si  $n_1 < 0$ .

Si  $k \geq 2$  alors pour  $1 \leq i \leq k-1$ , on a :

Si  $n_i > 0 > n_{i+1}$ ,  $(\gamma t)^{n_i} a_i (\gamma t)^{n_{i+1}} = \gamma t \dots \gamma t a_i t^{-1} \gamma^{-1} \dots t^{-1} \gamma^{-1}$  sous forme réduite car  $a_i \notin i_e(G_e)$  par définition de  $g$  réduit.

Si  $n_i < 0 < n_{i+1}$ ,  $(\gamma t)^{n_i} a_i (\gamma t)^{n_{i+1}} = t^{-1} \gamma^{-1} \dots t^{-1} \gamma^{-1} a_i \gamma t \dots \gamma t$  sous forme réduite car  $\gamma^{-1} a_i \gamma = \alpha t^{-1} \dots \alpha t^{-1} a_i t \alpha^{-1} \dots t \alpha^{-1}$  et  $a_i \notin i_{\bar{e}}(G_e)$ .

Ainsi l'écriture de  $\varphi(g)$  est bien sous forme réduite dans  $G$ , alors  $\varphi(g)$  est un élément non trivial de  $G$  d'après le lemme 3.2.3.

• Montrons que  $\varphi$  n'est pas surjectif.

Supposons que  $g$  soit l'antécédent de  $t$  par  $\varphi$ , alors on a  $g \neq 1$ .

D'après le lemme 3.2.3,  $g$  peut s'écrire sous forme réduite. De plus on a  $l(g) > 0$  car sinon  $g \in A$  et son image par  $\varphi$  est un élément non trivial de  $A$ , ce qui est en contradiction avec  $t \notin A$ .

Ainsi  $l(g) \geq 1$  et donc l'écriture sous forme réduite de  $g$  contient au moins une puissance non triviale  $n_1$  du générateur  $t$  d'après le lemme 3.2.3. De plus l'image de  $t^{n_1}$  par  $\varphi$  reste une écriture sous forme réduite. Aussi, le mot  $\varphi(g)$  écrit comme produit des images des éléments composant  $g$  par le morphisme  $\varphi$  est encore sous forme réduite d'après le point précédent. L'élément  $\varphi(t^{n_1})$  correspond alors à un sous-mot de  $\varphi(g)$ . La longueur du mot réduit ne dépendant pas de l'écriture sous forme réduite d'après la remarque 3.2.4, on a donc :

$$l(t) = l(\varphi(g)) \geq l(\varphi(t^{n_1})) = l((\gamma t)^{n_1}) = |n_1|l(\gamma) + |n_1| = |n_1|n + |n_1| \geq 1 + 1 = 2,$$

ce qui est en contradiction avec  $l(t) = 1$ .

Donc  $t$  n'admet aucun antécédent par  $\varphi$ .

ii) Supposons que  $i_e(G_e) \not\cong N_A(i_e(G_e))$  et  $i_{\bar{e}}(G_e) \not\cong N_A(i_{\bar{e}}(G_e))$ .

Ainsi  $\exists x \in N_A(i_e(G_e)) \setminus i_e(G_e)$  et  $\exists y \in N_A(i_{\bar{e}}(G_e)) \setminus i_{\bar{e}}(G_e)$ . Posons  $\beta = txt^{-1}y$  alors  $i_{\bar{e}}(G_e)^\beta = txt^{-1}yi_{\bar{e}}(G_e)y^{-1}tx^{-1}t^{-1} = i_{\bar{e}}(G_e)$ .

Ainsi la restriction de l'automorphisme intérieur de  $G$  donne l'application suivante :



$i_\beta : i_{\bar{e}}(G_e) \rightarrow i_{\bar{e}}(G_e)$  avec  $i_{\bar{e}}(G_e)$  fini. Donc  $\exists n \geq 1$  tel que  $i_\beta^n = i_{\beta^n} = id_{i_{\bar{e}}(G_e)}$ . Posons  $\beta^n = \gamma$ , alors  $\forall g \in G_e$ , on a  $\gamma i_{\bar{e}}(g) \gamma^{-1} = i_{\bar{e}}(g)$ .

Nous allons construire un "twist de Dehn" injectif et non surjectif de  $G$  dans  $G$ , ce qui montrera que  $G$  est non co-hopfien. Définissons l'application  $\varphi$  de  $G$  dans  $G$  par l'identité sur  $A$  et tel que l'image de  $t$  soit  $\gamma t$ .

Ainsi on a :

$$\begin{array}{ccc} \varphi : & G & \longrightarrow G \\ & a \in A & \mapsto a \\ & t & \mapsto \gamma t \end{array}$$

• Montrons que  $\varphi$  s'étend bien en un morphisme de groupes.

Soit  $g \in G_e$ , alors  $ti_e(g)t^{-1} = i_{\bar{e}}(g)$  dans  $G$ . Ainsi  $\varphi(i_{\bar{e}}(g)) = i_{\bar{e}}(g)$  car  $i_{\bar{e}}(g) \in A$  et  $\varphi(ti_e(g)t^{-1}) = \gamma ti_e(g)t^{-1} \gamma^{-1} = i_{\bar{e}}(g)$  par définition de  $\gamma$ .

Donc  $\varphi(i_{\bar{e}}(g)) = \varphi(ti_e(g)t^{-1})$  dans  $G$  et  $\varphi$  définit bien un morphisme de  $G$  dans  $G$ .

• Montrons que  $\varphi$  est injectif.

Soit  $g \neq 1$ , alors d'après le lemme 3.2.3,  $g$  peut s'écrire sous forme réduite dans  $G$ .

Ainsi on a :

•  $g = a_0$  avec  $a_0 \in A \setminus \{1\}$ .

Alors  $\varphi(g) = a_0 \neq 1$ .

•  $g = a_0 t^{n_1} a_1 \dots a_{k-1} t^{n_k} a_k$  avec  $k \geq 1$ ,  $a_0, \dots, a_k \in A$ ,  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}^*$  et tels que si  $k \geq 2$  alors  $a_i \notin i_e(G_e)$  si  $n_i > 0$  et  $n_{i+1} < 0$  ainsi que  $a_i \notin i_{\bar{e}}(G_e)$  si  $n_i < 0$  et  $n_{i+1} > 0$  pour  $1 \leq i \leq k-1$ .

Ainsi  $\varphi(g) = a_0 (\gamma t)^{n_1} a_1 (\gamma t)^{n_2} \dots a_{k-1} (\gamma t)^{n_k} a_k$ .

Si  $k = 1$  alors on a  $\varphi(g) = a_0 (\gamma t)^{n_1} a_1$ .

Si  $n_1 > 0$  alors  $\varphi(g) = a_0 \gamma t \dots \gamma t a_1 = a_0 t x t^{-1} y t x t^{-1} y \dots t x t^{-1} y t a_1$  qui est bien sous forme réduite car on a par définition  $x \notin i_e(G_e)$  et  $y \notin i_{\bar{e}}(G_e)$ .

Il en est de même si  $n_1 < 0$ .

Si  $k \geq 2$ , alors pour  $1 \leq i \leq k-1$ , on a :

Si  $n_i > 0 > n_{i+1}$ ,  $(\gamma t)^{n_i} a_i (\gamma t)^{n_{i+1}} = \gamma t \dots \gamma t a_i t^{-1} \gamma^{-1} \dots t^{-1} \gamma^{-1}$  sous forme réduite car  $a_i \notin i_e(G_e)$  par définition de  $g$  réduit.

Si  $n_i < 0 < n_{i+1}$ ,  $(\gamma t)^{n_i} a_i (\gamma t)^{n_{i+1}} = t^{-1} \gamma^{-1} \dots t^{-1} \gamma^{-1} a_i \gamma t \dots \gamma t$  sous forme réduite car  $\gamma^{-1} a_i \gamma = y^{-1} t x^{-1} t^{-1} \dots y^{-1} t x^{-1} t^{-1} a_i t x t^{-1} y \dots t x t^{-1} y$  et  $a_i \notin i_{\bar{e}}(G_e)$ .

L'écriture de  $\varphi(g)$  est bien sous forme réduite dans  $G$ , alors  $\varphi(g)$  est un élément non trivial de  $G$  d'après le lemme 3.2.3.

• Montrons que  $\varphi$  n'est pas surjectif.

Supposons que  $g$  soit l'antécédent de  $t$  par  $\varphi$ , alors on a  $g \neq 1$ .

D'après le lemme 3.2.3,  $g$  peut s'écrire sous forme réduite. De plus on a  $l(g) > 0$  car sinon  $g \in A$  et son image par  $\varphi$  est un élément non trivial de  $A$ , ce qui est en contradiction avec  $t \notin A$ .

Ainsi  $l(g) \geq 1$  et donc l'écriture sous forme réduite de  $g$  contient au moins une puissance non triviale  $n_1$  du générateur  $t$  d'après le lemme 3.2.3. De plus l'image de  $t^{n_1}$  par

$\varphi$  reste une écriture sous forme réduite. Aussi, le mot  $\varphi(g)$  écrit comme produit des images des éléments composant  $g$  par le morphisme  $\varphi$  est encore sous forme réduite d'après le point précédent. L'élément  $\varphi(t^{n_1})$  correspond alors à un sous-mot de  $\varphi(g)$ . La longueur du mot réduit ne dépendant pas de l'écriture sous forme réduite d'après la remarque 3.2.4, on a donc :

$$l(t) = l(\varphi(g)) \geq l(\varphi(t^{n_1})) = l((\gamma t)^{n_1}) = |n_1|l(\gamma) + |n_1| = 2|n_1|n + |n_1| \geq 2 + 1 = 3,$$

ce qui est en contradiction avec  $l(t) = 1$ .

Donc  $t$  n'admet aucun antécédent par  $\varphi$ .

□

Nous sommes en mesure maintenant de démontrer le théorème 3.2.1 :

*Démonstration.* Supposons qu'il existe une arête  $e$  du graphe  $\Gamma$  tel que son groupe  $G_e$  soit de cardinal maximum parmi les groupes d'arêtes et tel que  $Fix_T(G_e)$  soit de diamètre infini. Alors d'après le lemme 3.1.4, il existe une arête  $e'$  de  $\Gamma$  avec  $G_{e'} = G_e$  telle que l'arbre écrasé  $T_{e'}$  de  $T$ , à une seule  $G$ -orbite d'arête, a pour sous-arbre  $Fix_{T_{e'}}(G_e)$  de diamètre infini. Le quotient de  $T_{e'}$  par  $G$  est un graphe de groupes à une arête, noté  $\Gamma_{e'}$ .  $\Gamma_{e'}$  est le graphe écrasé de  $\Gamma$  ayant pour unique arête  $e'$ . Ce graphe est par conséquent aussi réduit. Nous pouvons alors appliquer la proposition 3.2.5 précédente à ce graphe de groupes. Le groupe fondamental de  $\Gamma_{e'}$ , c'est à dire  $G$ , est donc non co-hopfien.

□

### 3.3 Condition suffisante

Pour la condition nécessaire, à la section précédente, nous avons besoin que de très peu d'hypothèses sur le graphe de groupes  $\Gamma$ . Pour la condition suffisante, par contre, nous allons avoir besoin de conditions plus rigides, notamment sur les groupes de sommets.

**Définition 3.3.1.** Soit  $v \in V(\Gamma)$ ,  $G_v$  est dit  $\Gamma$ -monomorphiquement elliptique si pour tout endomorphisme injectif  $\varphi : G \hookrightarrow G$ , alors  $\varphi(G_v)$  fixe au moins un sommet de l'arbre de Bass-Serre  $T$  correspondant.

Nous allons dans cette partie montrer le théorème suivant :

**Théorème 3.3.2.** Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes réduit et fini, dont tous les groupes d'arêtes sont finis et de même cardinal, et  $G$  son groupe fondamental. Supposons que :

- $\forall v \in V(\Gamma)$ ,  $G_v$  co-hopfien et  $\Gamma$ -monomorphiquement elliptique.
- $\forall e \in E(\Gamma)$ ,  $Fix_T(G_e)$  de diamètre fini.

Alors  $G$  est co-hopfien.

**Lemme 3.3.3.** Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes réduit et fini, dont tous les groupes d'arêtes sont finis et de même cardinal. Supposons que  $\forall v \in V(\Gamma)$ ,  $G_v$  est  $\Gamma$ -monomorphiquement elliptique et  $\forall e \in E(\Gamma)$ ,  $Fix_T(G_e)$  est de diamètre fini.

Soit  $\varphi : G \hookrightarrow G$  un endomorphisme injectif, alors  $\forall v \in V(T)$ ,  $\varphi(G_v)$  fixe un unique sommet de  $T$ . On peut ainsi définir une application  $\varphi^* : V(T) \rightarrow V(T)$  où  $\varphi^*(v)$  est le sommet de  $T$  fixé par  $\varphi(G_v)$ ,  $\forall v \in V(T)$ .

*Démonstration.* Soit  $v \in V(T)$ . Par hypothèse, tous les groupes d'arêtes de  $\Gamma$  sont finis et de même cardinal. Posons  $\forall e \in E(\Gamma), |G_e| = n$ .

• Supposons  $|G_v| > n$ , alors  $\varphi(G_v)$  ne fixe pas d'arête de  $T$  car sinon il existe une arête  $d$  de  $T$  tel que  $\varphi(G_v) < G_d$ . Les stabilisateurs d'arêtes de  $T$  sont des conjugués des groupes d'arêtes de  $\Gamma$ , ils ont donc tous pour cardinal  $n$ . Ainsi  $|\varphi(G_v)| = |G_v| \leq n$ , contradiction.

$G_v$  est  $\Gamma$ -monomorphiquement elliptique ainsi  $\varphi(G_v)$  fixe au moins un sommet de  $T$ . Par conséquent,  $\varphi(G_v)$  fixe un unique sommet de  $T$ .

• Supposons  $|G_v| = n$ , alors  $G_v$  est le stabilisateur des arêtes adjacentes à  $v$  dans  $T$ , et d'après le lemme 3.1.7, on a  $Fix_T(G_e)$  de diamètre infini,  $\forall e \in E(\Gamma)$ . Ce qui est contraire aux hypothèses. Par conséquent ce second point est impossible et donc du premier point découle que  $\varphi(G_v)$  ne fixe qu'un unique sommet de  $T$ . □

**Lemme 3.3.4.** *Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes réduit et fini, dont tous les groupes d'arêtes sont finis et de même cardinal. Soit  $G$  son groupe fondamental. Supposons que :*

- $\forall v \in V(\Gamma), G_v$  co-hopfien et  $\Gamma$ -monomorphiquement elliptique.
- $\forall e \in E(\Gamma), Fix_T(G_e)$  de diamètre fini.

Soit  $\varphi : G \hookrightarrow G$  un endomorphisme injectif et  $\varphi^* : V(T) \rightarrow V(T)$  dont l'existence est assurée par le lemme 3.3.3.

Soit  $\mathcal{Y}$  un sous-arbre de  $T$  tel que l'ensemble de ses sommets  $V(\mathcal{Y})$  soit stable par  $\varphi^*$ .

Supposons qu'il existe  $U$  sous-groupe de  $G$  qui préserve  $\mathcal{Y}$  et tel que  $\varphi(U) = U$ .

Si  $\mathcal{Y}/U$  est un graphe fini, alors il existe  $q \geq 1$  tel que  $\forall v \in V(\mathcal{Y}), \exists g_v \in U, \varphi^q(G_v) = G_v^{g_v}$ .

*Démonstration.* Posons la relation suivante :  $v \sim w$  pour  $v, w \in V(\mathcal{Y})$  si et seulement si  $\exists g \in U$  tel que  $v = gw$ .

Montrons alors que l'application  $\varphi^*$  passe au quotient.

Soient  $v, w \in V(\mathcal{Y})$  tel que  $v \sim w$ , montrons que  $\varphi^*(v) \sim \varphi^*(w)$ .

Si  $v \sim w$ , alors  $G_v = G_{gw} = G_w^g$  avec  $g \in U$ . Ainsi  $\varphi(G_v) = \varphi(G_w^g) = \varphi(G_w)^{\varphi(g)}$ .

De plus  $\varphi(U) = U$  par hypothèse, donc  $\varphi(G_v)$  et  $\varphi(G_w)$  sont conjugués par un élément de  $U$ . Ainsi  $\varphi^*(v)$  et  $\varphi^*(w)$  sont dans la même orbite sous l'action de  $U$  et donc  $\varphi^*(v) \sim \varphi^*(w)$ .

L'application  $\varphi^*$  peut donc passer au quotient avec le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} V(\mathcal{Y}) & \xrightarrow{\varphi^*} & V(\mathcal{Y}) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ V(\mathcal{Y})/U & \xrightarrow{\varphi_*} & V(\mathcal{Y})/U \end{array}$$

Soit  $\pi(v)$ , noté  $[v]$ , un sommet fixé de  $V(\mathcal{Y})/U$ . Regardons alors l'orbite de  $[v]$  dans  $V(\mathcal{Y})/U$  par les itérées de  $\varphi_*$ .

$\mathcal{Y}/U$  est un graphe fini, ainsi il existe des entiers  $k, l$  minimaux avec  $k > l$  et  $[\tilde{v}] \in V(\mathcal{Y})/U$  tels que :  $\varphi_*^k([v]) = \varphi_*^l([v]) = [\tilde{v}]$ .

Posons  $p = k - l > 0$ , alors on a :  $\varphi_*^p([\tilde{v}]) = \varphi_*^{k-l}(\varphi_*^l([v])) = \varphi_*^k([v]) = [\tilde{v}]$ .

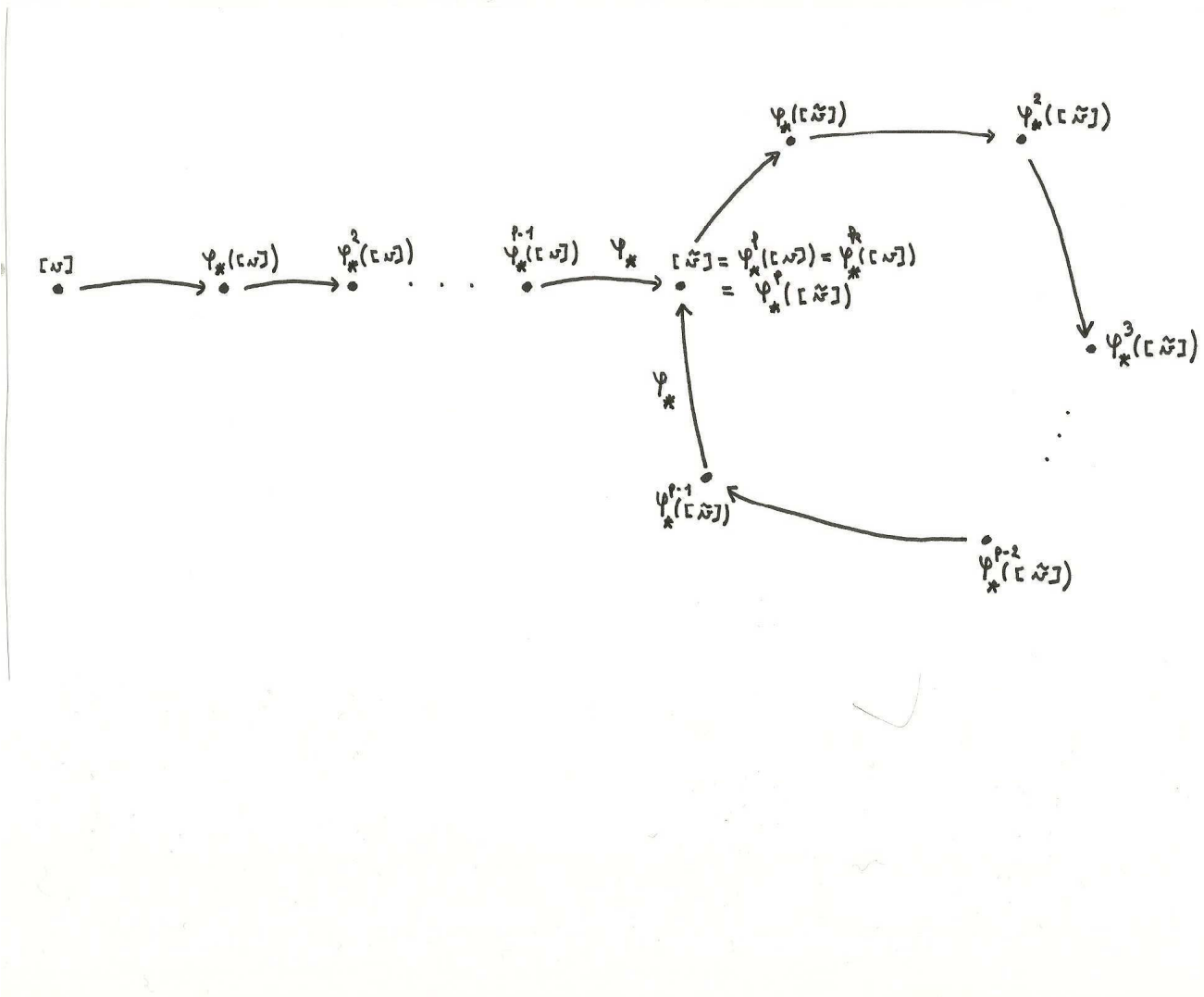


FIGURE 5 – Orbite de  $[v]$  dans  $V(\mathcal{Y})/U$  par les itérées de  $\varphi_*$

Montrons que  $[v] = [\tilde{v}]$ .

Supposons que  $[v] \neq [\tilde{v}]$ . Alors  $\varphi_*^{l-1}([v])$  et  $\varphi_*^{p-1}([\tilde{v}])$  ont la même image  $[\tilde{v}]$  par  $\varphi_*$  (voir figure 5). Par définition de  $\varphi_*$ , on a :  $\varphi_*^{l-1}([v]) = [\varphi^{*l-1}(v)]$  et  $\varphi_*^{p-1}([\tilde{v}]) = [\varphi^{*p-1}(\tilde{v})]$ . Ainsi  $\varphi^*(\varphi^{*l-1}(v)) \sim \tilde{v}$  et  $\varphi^*(\varphi^{*p-1}(\tilde{v})) \sim \tilde{v}$ . Alors par définition de  $\varphi^*$ , il existe  $x, y \in U$  tel que  $\varphi(G_{\varphi^{*l-1}(v)}) < G_{\tilde{v}}^x$  et  $\varphi(G_{\varphi^{*p-1}(\tilde{v})}) < G_{\tilde{v}}^y$ . On a aussi  $\varphi^{p-1}(G_{\tilde{v}}) < G_{\varphi^{*p-1}(\tilde{v})}^u$  avec  $u \in U$ .

On a alors la suite d'inclusions :

$$\varphi^p(G_{\tilde{v}}) = \varphi(\varphi^{p-1}(G_{\tilde{v}})) < \varphi(G_{\varphi^{*p-1}(\tilde{v})}^u) = \varphi(G_{\varphi^{*p-1}(\tilde{v})})^{\varphi(u)} < G_{\tilde{v}}^{\varphi(u)y}.$$

Or  $G_{\tilde{v}}$  est co-hopfien par hypothèse et  $\varphi$  est injective. Ainsi  $i_{y^{-1}\varphi(u)^{-1}} \circ \varphi_{G_{\tilde{v}}}^p : G_{\tilde{v}} \xrightarrow{\sim} G_{\tilde{v}}$  est un automorphisme. La suite d'inclusions précédentes est donc en fait une suite d'égalités.

En particulier, on a  $\varphi(G_{\varphi^{*p-1}(\tilde{v})})^{\varphi(u)} = G_{\tilde{v}}^{\varphi(u)y}$ , ce qui implique que  $\varphi(G_{\varphi^{*p-1}(\tilde{v})}) = G_{\tilde{v}}^y$ .

On a  $x, y \in U$  et  $\varphi(U) = U$ , ainsi il existe  $a, b \in U$  tel que  $\varphi(a) = x^{-1}$  et  $\varphi(b) = y^{-1}$ . On a donc  $\varphi(G_{\varphi^{*l-1}(v)}^a) < G_{\tilde{v}}$  et  $\varphi(G_{\varphi^{*p-1}(\tilde{v})}^b) = G_{\tilde{v}}$ .

Par minimalité de  $l$ , on a  $\varphi^{*l-1}(v) \approx \varphi^{*p-1}(\tilde{v})$  (voir figure 5), donc  $a\varphi^{*l-1}(v) \approx b\varphi^{*p-1}(\tilde{v})$ . Alors d'après la remarque 3.1.8, le stabilisateur  $G_{a\varphi^{*l-1}(v)}$  n'est pas contenu dans  $G_{b\varphi^{*p-1}(\tilde{v})}$ , ce qui contredit l'injectivité de  $\varphi$ . On a donc bien  $[v] = [\tilde{v}]$ .

On obtient alors le fait suivant :  $\forall [v] \in V(\mathcal{Y})/U$ , il existe  $p_v > 0$  tel que  $\varphi_*^{p_v}([v]) = [v]$ .

Alors l'application  $\varphi_* : V(\mathcal{Y})/U \rightarrow V(\mathcal{Y})/U$  est surjective, donc bijective car  $V(\mathcal{Y})/U$  est fini. Il existe donc  $q \geq 1$  tel que  $\varphi_*^q = id_{V(\mathcal{Y})/U}$ .

Soit  $v \in V(\mathcal{Y})$ , alors il existe  $\exists g_v \in U$  tel que  $\varphi^{*q}(v) = g_v v$ . Par définition de  $\varphi^*$ , on a donc  $\varphi^q(G_v) < G_{g_v v} = G_v^{g_v}$ .  $G_v$  est supposé co-hopfien, donc  $\varphi^q(G_v) = G_v^{g_v}$ .  $\square$

**Lemme 3.3.5.** *Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes réduit et fini, dont tous les groupes d'arêtes sont finis et de même cardinal. Alors  $Fix_T(G_e)/N_G(G_e)$  est un graphe fini.*

*Démonstration.* On rappelle que  $N_G(G_e)$  préserve le sous-arbre  $Fix_T(G_e)$ .

On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} Fix_T(G_e) & \xrightarrow{i} & T \\ \pi \downarrow & & \downarrow p \\ Fix_T(G_e)/N_G(G_e) & \xrightarrow{\bar{f}} & T/G \end{array}$$

Montrons que l'application  $\bar{f}$  est injective sur les arêtes de  $Fix_T(G_e)/N_G(G_e)$ .

Soit  $e_1, e_2$  deux arêtes de  $Fix_T(G_e)$  tel que  $\bar{f}(\pi(e_1)) = \bar{f}(\pi(e_2))$ , alors  $p \circ i(e_1) = p \circ i(e_2)$ . Ainsi il existe  $g \in G$  tel que  $ge_1 = e_2$ . D'après le lemme 3.1.3,  $g \in N_G(G_e)$ . Donc  $\pi(e) = \pi(e')$ . En fait  $\bar{f}$  induit une bijection sur les arêtes entre  $Fix_T(G_e)/N_G(G_e)$  et  $Fix_T(G_e)/G$  contenu dans  $\Gamma$ .  $Fix_T(G_e)/G$  a un nombre fini d'arêtes car  $\Gamma$  est un graphe fini. Il en est donc de même pour  $Fix_T(G_e)/N_G(G_e)$  par bijection de  $\bar{f}$ .  $Fix_T(G_e)$  est un sous-arbre de  $T$  donc  $Fix_T(G_e)/N_G(G_e)$  est un graphe connexe avec un nombre fini d'arêtes d'après ce qui précède. Alors  $Fix_T(G_e)/N_G(G_e)$  est un graphe fini.  $\square$

**Définition 3.3.6.** *Soient  $H$  un sous-groupe de  $G$ ,  $\varphi : G \hookrightarrow G$  un endomorphisme injectif.*

*Notons  $I_\infty(\varphi) = \bigcap_{n \geq 0} Im \varphi^n$ .*

*$H$  est dit  $\varphi$ -stable si  $\exists g \in I_\infty(\varphi)$ ,  $\exists k \geq 1$  tel que  $i_g \circ \varphi^k(H) = H$ .*

**Lemme 3.3.7.** Soient  $H$  un sous-groupe de  $G$ ,  $\varphi : G \hookrightarrow G$  un endomorphisme injectif. Si  $H$  est  $\varphi$ -stable alors  $H$  est  $\varphi^p$ -stable,  $\forall p \geq 1$ .

*Démonstration.* Soit  $p \geq 1$ .

Par définition de  $H$   $\varphi$ -stable,  $\exists g \in I_\infty(\varphi)$ ,  $\exists k \geq 1$  tel que  $i_g \circ \varphi^k(H) = H$ .

Ainsi  $(i_g \circ \varphi^k)^p(H) = H$  or  $(i_g \circ \varphi^k)^p = i_{g\varphi^k(g)\dots\varphi^{k(p-1)}(g)} \circ \varphi^{kp}$ .

Posons  $\tilde{g} = g\varphi^k(g)\dots\varphi^{k(p-1)}(g)$ , on a bien  $\tilde{g} \in I_\infty(\varphi)$  avec  $i_{\tilde{g}} \circ (\varphi^p)^k(H) = H$ .

Donc  $H$  est  $\varphi^p$ -stable. □

**Remarque 3.3.8.** En particulier si  $H$  est  $\varphi$ -stable alors  $H \subset I_\infty(\varphi)$  puisque  $g \in I_\infty(\varphi)$ .

**Lemme 3.3.9.** Soient  $\varphi : G \hookrightarrow G$  un endomorphisme injectif et  $H$  un sous-groupe de  $G$ .

Posons  $\psi = i_a \circ \varphi^p$  avec  $p \geq 1$  et  $a \in I_\infty(\varphi)$ .

Alors on a  $I_\infty(\psi) = I_\infty(\varphi)$  et si  $H$  est  $\psi$ -stable alors  $H$  est  $\varphi$ -stable.

*Démonstration.* Soit  $g \in I_\infty(\psi)$  et  $n \geq 1$ . Il existe  $x \in G$  tel que  $\psi^n(x) = g$ . Alors  $(i_a \circ \varphi^p)^n(x) = i_{a\varphi^p(a)\dots\varphi^{p(n-1)}(a)} \circ \varphi^{pn}(x) = g$ . De plus  $a\varphi^p(a)\dots\varphi^{p(n-1)}(a) \in I_\infty(\varphi)$  car  $a \in I_\infty(\varphi)$ , ainsi il existe  $\tilde{a} \in G$  tel que  $\varphi^{pn}(\tilde{a}) = a\varphi^p(a)\dots\varphi^{p(n-1)}(a)$ . Donc  $\psi^n(x) = i_{\varphi^{pn}(\tilde{a})} \circ \varphi^{pn}(x) = \varphi^{pn}(i_{\tilde{a}}(x)) = \varphi^n(\varphi^{n(p-1)} \circ i_{\tilde{a}}(x)) = g \in \text{Im}\varphi^n$ . Alors  $g \in I_\infty(\varphi)$  et donc  $I_\infty(\psi) \subset I_\infty(\varphi)$ .

De  $\psi^n = \varphi^{pn} \circ i_{\tilde{a}}$ , on a aussi  $\text{Im}\varphi^{pn} \subset \text{Im}\psi^n$ ,  $\forall n \geq 1$ . La suite  $(\text{Im}\varphi^q)_{q \geq 0}$  étant décroissante, on a  $I_\infty(\varphi) \subset \bigcap_{q \geq np} \text{Im}\varphi^q \subset \text{Im}\psi^n$ ,  $\forall n \geq 1$ . Alors on a  $I_\infty(\varphi) \subset I_\infty(\psi)$ , ce qui montre l'égalité.

Supposons  $H$   $\psi$ -stable, alors  $\exists g \in I_\infty(\psi)$ ,  $\exists k \geq 1$  tel que  $i_g \circ \psi^k(H) = H$ .

De plus  $\psi = i_a \circ \varphi^p$  donc  $\psi^k = (i_a \circ \varphi^p)^k = i_{a\varphi^p(a)\dots\varphi^{p(k-1)}(a)} \circ \varphi^{pk}$ . Alors on a  $i_g \circ \psi^k(H) = i_{ga\varphi^p(a)\dots\varphi^{p(k-1)}(a)} \circ \varphi^{pk}(H) = H$ . De  $I_\infty(\varphi) = I_\infty(\psi)$ , on a  $g \in I_\infty(\varphi)$  et  $a\varphi^p(a)\dots\varphi^{p(k-1)}(a) \in I_\infty(\varphi)$  car  $a \in I_\infty(\varphi)$ . Par conséquent  $H$  est  $\varphi$ -stable. □

**Proposition 3.3.10.** Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes réduit et fini, dont tous les groupes d'arêtes sont finis et de même cardinal. Supposons que :

- $\forall v \in V(\Gamma)$ ,  $G_v$  co-hopfien et  $\Gamma$ -monomorphiquement elliptique.
- $\forall e \in E(\Gamma)$ ,  $\text{Fix}_T(G_e)$  de diamètre fini.

Soit  $\varphi : G \hookrightarrow G$  un endomorphisme injectif,  $v_0$  et  $w_0$  deux sommets adjacents de  $T$ .

Si  $G_{v_0}$  est  $\varphi$ -stable alors  $G_{w_0}$  est  $\varphi$ -stable.

*Démonstration.* Soit  $e \in E(T)$  tel que  $o(e) = v_0$  et  $t(e) = w_0$ .

Par hypothèse  $G_{v_0}$  est  $\varphi$ -stable, ainsi  $\exists g \in I_\infty(\varphi)$ ,  $\exists k \geq 1$  tel que  $i_g \circ \varphi^k(G_{v_0}) = G_{v_0}$ .

Posons  $\varphi_1 : G \hookrightarrow G$  l'endomorphisme injectif tel que  $\varphi_1 = i_g \circ \varphi^k$  et  $\varphi_1(G_{v_0}) = G_{v_0}$ .

D'après le lemme 3.3.9, il nous suffit de montrer que  $G_{w_0}$  est  $\varphi_1$ -stable.

- Posons  $\mathcal{S} = \{G_d / d \in E(T), o(d) = v_0\}$ .

Soit  $G_d \in \mathcal{S}$  alors montrons que  $\varphi_1(G_d)$  fixe une arête d'origine  $v_0$ .

Posons  $t(d) = w$ . Le groupe  $\varphi_1(G_d)$  fixe le sommet  $v_0$  car  $\varphi_1(G_{v_0}) = G_{v_0}$ .

Supposons que  $\varphi_1(G_d)$  ne fixe que le sommet  $v_0$ ,  $G_w$  est  $\Gamma$ -monomorphiquement elliptique

donc  $\varphi_1(G_w)$  fixe aussi le sommet  $v_0$ . Ainsi  $\varphi_1(G_w) < G_{v_0}$  avec  $\varphi_1(G_{v_0}) = G_{v_0}$ , ce qui contredit l'injectivité de  $\varphi_1$  car  $w \neq v_0$  et  $G_w \not\subseteq G_{v_0}$  d'après la remarque 3.1.8.

Ainsi  $\varphi_1(G_d)$  fixe un autre sommet  $\tilde{w}$  que  $v_0$  et donc  $\varphi_1(G_d)$  fixe le chemin  $[v_0; \tilde{w}]$  dans  $T$  et  $\varphi_1(G_d)$  fixe alors l'arête de ce chemin d'origine  $v_0$ . Notons  $\tilde{d}$  cette arête, alors  $\varphi_1(G_d) < G_{\tilde{d}}$ . Les groupes d'arêtes sont tous de même cardinal par hypothèse, donc par injectivité de  $\varphi_1$  et finitude des groupes d'arêtes, on a :  $\varphi_1(G_d) = G_{\tilde{d}}$  avec  $G_{\tilde{d}} \in \mathcal{S}$ . L'ensemble  $\mathcal{S}$  est donc bien stable par  $\varphi_1$ .

Aussi on a une action de  $G_{v_0}$  sur  $\mathcal{S}$  par conjugaison.

Soient  $G_a, G_b \in \mathcal{S}$  tels qu'il existe  $x \in G_{v_0}$  vérifiant  $G_a = G_b^x$ , alors  $\varphi_1(G_a) = \varphi_1(G_b^x) = \varphi_1(G_b)^{\varphi_1(x)}$ . Or  $\varphi_1(G_{v_0}) = G_{v_0}$  donc  $\varphi_1(x) \in G_{v_0}$ .

L'application  $\varphi_1$  peut donc passer au quotient avec le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathcal{S} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{S}/G_{v_0} & \xrightarrow{\varphi_*} & \mathcal{S}/G_{v_0} \end{array}$$

Montrons que l'application  $\varphi_* : \mathcal{S}/G_{v_0} \rightarrow \mathcal{S}/G_{v_0}$  est injective.

Soient  $G_a, G_b \in \mathcal{S}$  tels que  $\varphi_*(\pi(G_a)) = \varphi_*(\pi(G_b))$  alors on a  $\pi(\varphi_1(G_a)) = \pi(\varphi_1(G_b))$  donc  $\exists x \in G_{v_0}$  tel que  $\varphi_1(G_a) = \varphi_1(G_b)^x$  or  $\varphi_1(G_{v_0}) = G_{v_0}$  donc  $\exists y \in G_{v_0}$  tel que  $\varphi_1(y) = x$ , ainsi on a :  $\varphi_1(G_a) = \varphi_1(G_b)^{\varphi_1(y)} = \varphi_1(G_b^y)$ . Par injectivité de  $\varphi_1$  on a  $G_a = G_b^y$  et donc  $\pi(G_a) = \pi(G_b)$ . L'application  $\varphi_* : \mathcal{S}/G_{v_0} \rightarrow \mathcal{S}/G_{v_0}$  est donc bien injective.

De plus l'ensemble  $\mathcal{S}/G_{v_0}$  est fini car la valence des sommets de  $\Gamma$  est fini et donc en particulier au sommet  $v_0$ . Donc  $\varphi_*$  est une permutation de  $\mathcal{S}/G_{v_0}$ . Ainsi  $\exists m \geq 1$  tel que  $\varphi_*^m = id_{\mathcal{S}/G_{v_0}}$ . En particulier on a  $G_e \in \mathcal{S}$ , donc  $\varphi_1^m|_{G_e} : G_e \hookrightarrow G_e^{a^{-1}}$  où  $a \in G_{v_0}$ .

Ainsi, en posant  $\psi = i_a \circ \varphi_1^m : G \rightarrow G$ , on a  $\psi$  injective, avec  $\psi(G_e) \subset G_e$ . Le groupe  $G_e$  étant fini,  $\psi|_{G_e}$  est un automorphisme de  $G_e$ . De plus  $a \in G_{v_0}$  et  $\varphi_1(G_{v_0}) = G_{v_0}$ , donc  $a \in I_\infty(\varphi_1)$ . D'après le lemme 3.3.9, il nous suffit de montrer que  $G_{w_0}$  est  $\psi$ -stable.

- On a donc défini au point précédent une application injective  $\psi : G \rightarrow G$  telle que  $\psi|_{G_e}$  est un automorphisme de  $G_e$ .  $Fix_T(G_e)$  est, par hypothèse, un sous-arbre de  $T$  de diamètre fini et de plus on a une action de  $N_G(G_e)$  sur ce sous-arbre. Pour simplifier les notations, posons  $\mathcal{Y} = Fix_T(G_e)$  et  $U = N_G(G_e)$ . Soit  $v$  un sommet de  $\mathcal{Y}$ . D'après le lemme 3.3.3, avec les conditions sur le graphe de groupes  $\Gamma$  et  $\psi$  étant un morphisme injectif,  $\psi(G_v)$  ne fixe qu'un unique sommet de  $T$ , noté  $\psi^*(v)$ . Ainsi  $\psi$  induit une application  $\psi^* : V(T) \rightarrow V(T)$ . De plus on a :  $\psi^*(v) \in Fix_T(\psi(G_e)) = Fix_T(G_e)$ . Par conséquent  $\psi^*|_{V(\mathcal{Y})} : V(\mathcal{Y}) \rightarrow V(\mathcal{Y})$ , que l'on note encore  $\psi^*$ . Le sous-groupe  $U$  préserve le sous-arbre  $\mathcal{Y}$  de diamètre fini, ainsi les orbites des sommets de  $\mathcal{Y}$  sous  $U$  sont toutes bornées dans  $\mathcal{Y}$ . Alors d'après la proposition 2.2.6,  $U$  fixe au moins un sommet de  $\mathcal{Y}$ . Nous distinguons alors deux cas :

i)  $U$  fixe au moins deux sommets de  $\mathcal{Y}$ .

Ainsi  $U$  fixe au moins une arête de  $\mathcal{Y}$  et donc  $U < G_e \Rightarrow U = G_e$ . On peut alors ap-

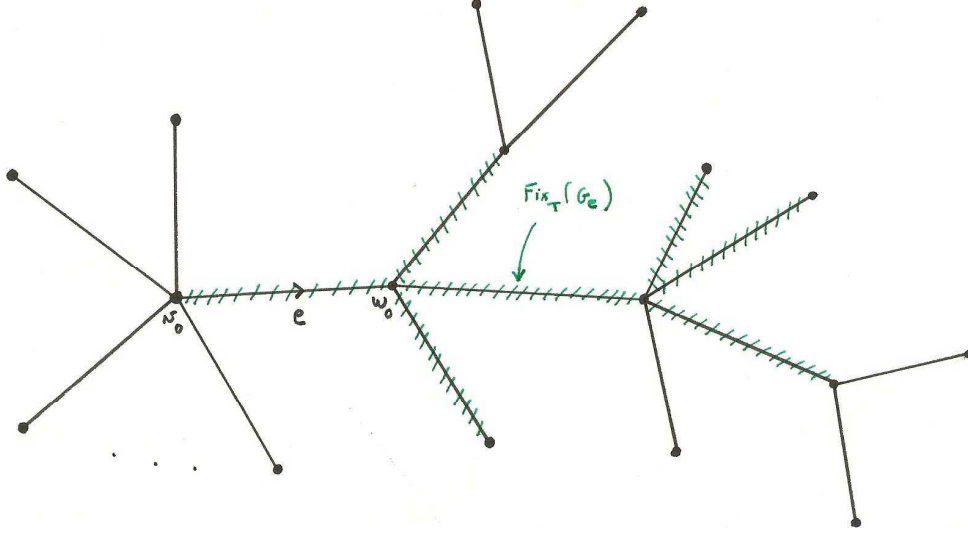


FIGURE 6 –  $Fix_T(G_e)$  dans l'arbre  $T$

plier le lemme 3.3.4. En effet, le groupe  $G_e$  agit trivialement sur le sous-arbre  $\mathcal{Y}$ . On a vu de plus que  $V(\mathcal{Y})$  est stable par  $\psi^*$  et que  $\psi|_{G_e}$  est un automorphisme de  $G_e$ . Enfin le lemme 3.3.5 nous donne que  $\mathcal{Y}/G_e$ , isométrique à  $\mathcal{Y}$ , est un graphe fini. Ainsi il existe  $q \geq 1$  tel que  $\forall v \in V(Fix_T(G_e)), \exists g_v \in G_e$  tel que  $\psi^q(G_v) = G_v^{g_v} = G_v$  car  $G_e < G_v$ . En particulier, on a  $w_0 \in V(Fix_T(G_e))$ . Ainsi  $\psi^q(G_{w_0}) = G_{w_0}$ , et donc  $G_{w_0}$  est  $\psi$ -stable.

ii)  $U$  ne fixe qu'un seul sommet de  $\mathcal{Y}$ .

Notons  $s$  ce sommet de  $\mathcal{Y}$ . Alors on a :  $U < G_s$  et donc  $U = N_{G_s}(G_e)$ . De plus  $\forall v \in V(\mathcal{Y}), v \neq s$ , on a  $N_{G_v}(G_e)$  qui fixe à la fois le sommet  $v$  et le sommet  $s$ , donc il fixe une arête de  $\mathcal{Y}$  et alors  $N_{G_v}(G_e) = G_e$ . Regardons l'image de  $G_s$  par  $\psi$ . On a défini au-dessus  $\psi^* : V(\mathcal{Y}) \rightarrow V(\mathcal{Y})$ , regardons alors l'image  $\psi^*(s)$ .

Supposons que  $\psi^*(s) = v$  avec  $v \neq s$ , alors  $\psi(G_s) < G_v$ . Ainsi  $\psi(N_{G_s}(G_e)) = N_{\psi(G_s)}(\psi(G_e)) = N_{\psi(G_s)}(G_e) < N_{G_v}(G_e) = G_e$ . De plus  $G_e = \psi(G_e) < \psi(N_{G_s}(G_e)) \Rightarrow \psi(N_{G_s}(G_e)) = G_e$ , ce qui contredit l'injectivité de  $\psi$ . En effet,  $\psi : G_e \xrightarrow{\sim} G_e$  est un automorphisme et  $G_e \not\subseteq N_{G_s}(G_e)$  car sinon  $N_{G_s}(G_e) = U$  fixe tous les sommets de  $\mathcal{Y}$ , ce qui contredit ii).

Ainsi  $\psi(s) = s$  et donc  $\psi(G_s) < G_s$ . Le groupe  $G_s$  étant co-hopfien, on a  $\psi(G_s) = G_s$ . Donc  $\psi(N_{G_s}(G_e)) = N_{\psi(G_s)}(\psi(G_e)) = N_{G_s}(G_e)$ . L'application  $\psi|_{N_{G_s}(G_e)} : N_{G_s}(G_e) \xrightarrow{\sim} N_{G_s}(G_e)$  est ainsi un automorphisme. On peut alors appliquer le lemme 3.3.4. En effet, on a  $V(\mathcal{Y})$  stable par  $\psi^*$ ,  $U = N_{G_s}(G_e)$  préserve le sous-arbre  $\mathcal{Y}$  et  $\psi(U) = U$ . Le lemme 3.3.5 nous donne de plus que  $\mathcal{Y}/U$  est un graphe fini. Ainsi d'après le lemme 3.3.4, il existe  $q \geq 1$  tel que  $\forall v \in V(Fix_T(G_e)), \exists g_v \in N_{G_s}(G_e)$  tel que  $\psi^q(G_v) = G_v^{g_v}$ .

En particulier,  $w_0 \in V(Fix_T(G_e))$ , donc il existe  $g_{w_0} \in N_{G_s}(G_e)$  tel que  $\psi^q(G_{w_0}) = G_{w_0}^{g_{w_0}}$ .  $\psi|_{N_{G_s}(G_e)}$  est un automorphisme de  $N_{G_s}(G_e)$ , donc  $g_{w_0} \in I_\infty(\psi)$ .  $i_{g_{w_0}^{-1}} \circ \psi^q(G_{w_0}) = G_{w_0}$  implique bien que  $G_{w_0}$  est  $\psi$ -stable.  $\square$



Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème central de cette partie, à savoir le théorème 3.3.2.

*Démonstration.* Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes réduit et fini, dont tous les groupes d'arêtes sont finis et de même cardinal. Supposons que  $\forall v \in V(\Gamma)$ , on a  $G_v$  co-hopfien et  $\Gamma$ -monomorphiquement elliptique et que  $\forall e \in E(\Gamma)$ , on a  $Fix_T(G_e)$  de diamètre fini. Montrons que  $G$  est co-hopfien.

Soit  $\psi : G \hookrightarrow G$  un endomorphisme injectif et  $v$  un sommet de  $T$ . D'après le lemme 3.3.3,  $\psi(G_v)$  fixe un unique sommet de  $T$  ce qui nous permet de définir l'application  $\psi^* : V(T) \rightarrow V(T)$ .

Regardons l'orbite de  $v$  dans  $T$  par les itérées de  $\psi^*$ .  $\Gamma$  est un graphe fini, ainsi il n'existe qu'un nombre fini de  $G$ -orbites de sommets. Donc dans l'orbite de  $v$  par les itérées de  $\psi^*$ , il existe un sommet de  $T$  dont l'image par une certaine puissance de  $\psi^*$  est un sommet conjugué dans  $G$ . Notons  $v_0$  ce sommet, ainsi il existe  $g \in G$  et  $k \geq 0$  tel que  $\psi^{*k}(v_0) = gv_0$ . Alors  $\psi^k(G_{v_0}) \leq G_{gv_0} = G_{v_0}^g$ . Ainsi  $i_{g^{-1}} \circ \psi^k : G_{v_0} \hookrightarrow G_{v_0}$  est injectif et  $G_{v_0}$  est co-hopfien par hypothèse, donc  $i_{g^{-1}} \circ \psi^k(G_{v_0}) = G_{v_0}$ . Posons  $\varphi = i_{g^{-1}} \circ \psi^k$  alors  $\varphi(G_{v_0}) = G_{v_0}$  et  $G_{v_0}$  est donc  $\varphi$ -stable. De plus  $\varphi : G \rightarrow G$  est injectif car  $\psi$  l'est.

Si nous montrons que  $\varphi$  est surjectif, alors  $\varphi$  est un automorphisme de  $G$  ainsi que  $\psi^k$ . Par conséquent  $\psi$  est un automorphisme de  $G$ , ce qui montre bien que  $G$  est un groupe co-hopfien. Montrons alors que l'application  $\varphi$  est bien surjective.

L'idée générale est de montrer que les groupes de sommets de  $\Gamma$  ainsi que certains éléments associés aux arêtes de  $\Gamma$ , qui engendrent le groupe fondamental  $\pi_1(\Gamma) = G$ , sont dans l'image de  $\varphi$ . Faisons alors quelques rappels de notations :

Soit  $\tau$  un arbre maximal de  $\Gamma$ . D'après les rappels 2.1 de théorie de Bass-Serre, on a :  $G = \pi_1(\Gamma) = B(\Gamma) / \ll e \in E(\tau) \gg$  où  $B(\Gamma)$  est le groupe de Bass de  $\Gamma$  défini par :

$$B(\Gamma) = \left\langle \bigcup_{v \in V(\Gamma)} G_v \cup E(\Gamma) \mid \bar{e} = e^{-1}, i_{\bar{e}}(g) = ei_e(g)e^{-1}, \forall g \in G_e, \forall e \in E(\Gamma) \right\rangle \text{ et } \ll e \in E(\tau) \gg \text{ est le sous-groupe distingué engendré par les éléments } e \text{ de } E(\tau).$$

Si on note  $g_e$  l'image du générateur  $e$  dans le quotient, on a donc :

$$\pi_1(\Gamma) = \left\langle \left( \bigcup_{v \in V(\Gamma)} G_v \right) \cup \bigcup_{e \in E(\Gamma) \setminus E(\tau)} \{g_e\} \mid g_{\bar{e}} = g_e^{-1}, i_{\bar{e}}(g) = g_e i_e(g) g_e^{-1}, \forall g \in G_e, \forall e \in E(\Gamma) \setminus E(\tau) \right\rangle$$

De plus d'après le théorème 2.1.10, il existe un relèvement  $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\tau})$  de  $(\Gamma, \tau)$  dans  $T$  tel que :

- 1) si  $v \in V(\tau)$  et  $\tilde{v} = p^{-1}(v) \in V(\tilde{\tau})$  alors  $G_{\tilde{v}} = G_v$ .
- 2) si  $e \in E(\Gamma)$  et  $\tilde{e} = p^{-1}(e) \in E(\tilde{\Gamma})$  tels que  $t(\tilde{e}) \in V(\tilde{\tau})$  alors  $G_{\tilde{e}} = i_e(G_e)$ .
- 3) si  $e \in E(\Gamma)$  et  $\tilde{e} = p^{-1}(e) \in E(\tilde{\Gamma})$  tels que  $t(\tilde{e}) \in V(\tilde{\Gamma}) \setminus V(\tilde{\tau})$  alors  $G_{\tilde{e}} = i_{\tilde{e}}(G_e)$ .
- 4) si  $e \in E(\Gamma)$  et  $\tilde{e} = p^{-1}(e) \in E(\tilde{\Gamma}) \setminus E(\tilde{\tau})$  alors l'élément  $g_{\tilde{e}}^\varepsilon$ , avec  $\varepsilon \in \{1, -1\}$ , envoie l'extrémité de  $\tilde{e}$  n'appartenant pas à  $V(\tilde{\tau})$  sur un sommet de  $\tilde{\tau}$ .

On peut choisir le relèvement  $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\tau})$  de  $(\Gamma, \tau)$  dans  $T$  tel que  $v_0 \in V(\tilde{\tau})$ .

D'après la présentation de  $G = \pi_1(\Gamma)$  donnée ci-dessus, il nous faut montrer que les groupes de sommets de  $\Gamma$  ainsi que les éléments  $g_e$  pour  $e \notin E(\tau)$  sont dans l'image de  $\varphi$ .

On a vu précédemment qu'il existe  $v_0 \in V(\tilde{\tau})$  tel que  $G_{v_0}$  est  $\varphi$ -stable. D'après la propriété 3.3.10, les stabilisateurs de sommets adjacents à  $v_0$  sont aussi  $\varphi$ -stables. Ainsi en faisant un raisonnement de proche en proche, on montre que pour tout  $v \in V(\tilde{\Gamma})$ , on a  $G_v$   $\varphi$ -stable. Les stabilisateurs de sommets de  $\tilde{\tau}$  sont bien en l'occurrence les groupes de sommets de  $\tau$  donc de  $\Gamma$  car  $\tau$  est maximal. Alors d'après la remarque 3.3.8, on a  $G_v \subset I_\infty(\varphi) \subset \text{Im}\varphi$ ,  $\forall v \in V(\Gamma)$ . Les groupes de sommets de  $\Gamma$  sont bien dans l'image de  $\varphi$ .

Soit  $g_e$  un générateur de  $G$  pour  $e \notin E(\tau)$ . Soit  $\tilde{e}$  le relevé de  $e$  dans  $\tilde{\Gamma} \setminus \tilde{\tau}$  et soient  $a, b$  ses extrémités avec  $a \notin V(\tilde{\tau})$  et  $b \in V(\tilde{\tau})$ . D'après le théorème 2.1.10, il existe  $w \in V(\tilde{\tau})$  tel que  $g_e^\varepsilon a = w$  avec  $\varepsilon \in \{1, -1\}$ . De plus les groupes  $G_a$  et  $G_w$  sont  $\varphi$ -stables. Ainsi il existe  $x, y \in I_\infty(\varphi)$  et  $k_1, k_2 \geq 1$  tel que  $i_x \circ \varphi^{k_1}(G_a) = G_a$  et  $i_y \circ \varphi^{k_2}(G_w) = G_w$ .

On a  $(i_x \circ \varphi^{k_1})^{k_2} = i_{x\varphi^{k_1}(x)\dots\varphi^{k_1(k_2-1)}(x)} \circ \varphi^{k_1 k_2}$ . Posons  $n = k_1 k_2 \geq 1$  et  $g_a^{-1} = x\varphi^{k_1}(x)\dots\varphi^{k_1(k_2-1)}(x)$  alors on a  $\varphi^n(G_a) = G_a^{g_a}$ . De plus  $x \in I_\infty(\varphi)$  ainsi  $x\varphi^{k_1}(x)\dots\varphi^{k_1(k_2-1)}(x) \in I_\infty(\varphi)$  et donc  $g_a$  aussi. De même  $(i_y \circ \varphi^{k_2})^{k_1} = i_{y\varphi^{k_2}(y)\dots\varphi^{k_2(k_1-1)}(y)} \circ \varphi^{k_2 k_1}$ . Posons  $g_w^{-1} = y\varphi^{k_2}(y)\dots\varphi^{k_2(k_1-1)}(y)$  alors on a  $\varphi^n(G_w) = G_w^{g_w}$ . De plus  $y \in I_\infty(\varphi)$ , donc  $g_w$  aussi. On a aussi  $G_w = G_{g_e^\varepsilon a} = G_a^{g_e^\varepsilon}$  car  $g_e^\varepsilon a = w$ . Ainsi  $\varphi^n(G_w) = \varphi^n(G_a^{g_e^\varepsilon}) = \varphi^n(G_a)\varphi^n(g_e^\varepsilon) = G_a^{\varphi^n(g_e^\varepsilon)g_a}$  et  $\varphi^n(G_w) = G_w^{g_w} = G_a^{g_w g_e^\varepsilon}$ . Donc on obtient  $G_a^{\varphi^n(g_e^\varepsilon)g_a} = G_a^{g_w g_e^\varepsilon}$ . Par conséquent  $g_e^{-\varepsilon} g_w^{-1} \varphi^n(g_e^\varepsilon) g_a \in N_G(G_a)$ .

De plus  $N_G(G_a) = G_a$ . En effet soit  $g \in N_G(G_a)$  tel que  $ga = \tilde{a}$  dans  $T$ .

Supposons que  $a \neq \tilde{a}$ , alors d'après la remarque 3.1.8, on a  $G_a \neq G_{\tilde{a}}$ . Or  $G_{\tilde{a}} = G_{ga} = G_a^g = G_a$  car  $g \in N_G(G_a)$ , contradiction. Par conséquent on a  $a = \tilde{a}$ . Ainsi  $ga = a$  et donc  $g \in G_a$ . En conclusion on a :  $g_e^{-\varepsilon} g_w^{-1} \varphi^n(g_e^\varepsilon) g_a \in G_a$ . On a :  $G_a$   $\varphi$ -stable, donc  $G_a \subset I_\infty(\varphi) \subset \text{Im}\varphi$ . De plus  $\varphi^n(g_e^\varepsilon) \in \text{Im}\varphi$  et  $g_a, g_w \in I_\infty(\varphi) \subset \text{Im}\varphi$ . Donc  $g_e \in \text{Im}\varphi$ .

Ainsi les générateurs  $g_e$  de  $G$  pour  $e \notin E(\tau)$  sont dans l'image de  $\varphi$ . Ce qui montre bien que l'endomorphisme  $\varphi$  est surjectif.  $\square$

### 3.4 Condition nécessaire et suffisante

Nous pouvons maintenant énoncer le corollaire suivant en combinant le théorème 3.3.2 et le théorème 3.2.1 dans le cas d'un graphe de groupes où tous les groupes d'arêtes sont finis et de même cardinal.

**Corollaire 3.4.1.** *Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes réduit et fini, dont tous les groupes d'arêtes sont finis et de même cardinal, et  $G$  son groupe fondamental.*

*Supposons que  $\forall v \in V(\Gamma)$ ,  $G_v$  co-hopfien et  $\Gamma$ -monomorphiquement elliptique.*

*Alors :  $G$  est co-hopfien si et seulement si  $\forall e \in E(\Gamma)$ ,  $\text{diam}(\text{Fix}_T(G_e))$  est fini.*

Dans le cas particulier d'un graphe de groupes à une arête, nous avons une caractérisation simple pour que son groupe fondamental soit co-hopfien en nous servant de la proposition 3.1.9.

**Proposition 3.4.2.** *Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes réduit à une arête  $e$  tel que son groupe d'arête  $G_e$  soit fini et les groupes de sommet  $A$  et  $B$  soient co-hopfiens et  $\Gamma$ -monomorphiquement elliptiques. Soit  $G$  son groupe fondamental.*

*Nous avons alors les deux résultats suivants :*

1. Si  $G$  est un produit amalgamé  $G = A *_G B$  alors les assertions suivantes sont équivalentes :
  - $G$  est co-hopfien.
  - $i_A(G_e) = N_A(i_A(G_e))$  ou  $i_B(G_e) = N_B(i_B(G_e))$ .
  - $\text{diam}(\text{Fix}_T(G_e))$  fini.
2. Si  $G$  est une extension HNN  $G = A *_G$  alors les assertions suivantes sont équivalentes :
  - $G$  est co-hopfien.
  - $(i_e(G_e) = N_A(i_e(G_e))$  ou  $i_{\bar{e}}(G_e) = N_A(i_{\bar{e}}(G_e)))$  et  $(i_e(G_e)$  et  $i_{\bar{e}}(G_e)$  sont non conjugués dans  $A$ ).
  - $\text{diam}(\text{Fix}_T(G_e))$  fini.

**Remarque 3.4.3.** Cette proposition nous permet de donner une caractérisation algébrique et géométrique des groupes co-hopfiens se scindant au-dessus de groupes finis sous les bonnes hypothèses. On peut alors donner des exemples simples de groupes co-hopfiens, notamment en calculant les normalisateurs de groupes d'arêtes.

**Exemple 3.4.4.** Soit  $G = S_3 *_Z S_3$  avec  $S_3$  groupe des permutations, alors le groupe  $G$  est co-hopfien.

En effet, soit  $Z_2 = \langle c \rangle$  où  $c$  est la transposition  $(1\ 2)$ . Calculons  $N_{S_3}(Z_2)$ .

$\forall \tau \in S_3$ , on a  $\tau c \tau^{-1} = (\tau(1)\ \tau(2))$ . Ainsi  $\tau \in N_{S_3}(Z_2)$  si  $(\tau(1)\ \tau(2)) \in \{id; c\}$ .

On a  $(\tau(1)\ \tau(2)) \neq id$  par injectivité de  $\tau$  donc  $(\tau(1)\ \tau(2)) = c = (1\ 2)$ .

Si  $\tau(1) = 1$  alors  $\tau(2) = 2$  et donc  $\tau = id$ . Si  $\tau(1) = 2$  alors  $\tau(2) = 1$  et donc  $\tau = c$ .

Ainsi on a  $N_{S_3}(Z_2) = \{id; c\} = \langle c \rangle = Z_2$ .

$G$  est un produit amalgamé où les groupes de sommet sont finis donc co-hopfiens et  $\Gamma$ -monomorphiquement elliptiques. Alors d'après la proposition 3.4.2, le groupe  $G$  est bien co-hopfien.

**Exemple 3.4.5.** Plus généralement, si  $G = S_{n+1} *_S S_m$  avec  $n \geq 2$ ,  $m \geq n+1$  et  $S_n$  plongé canoniquement, alors  $G$  est co-hopfien.

Soit  $n \geq 2$ ,  $S_{n+1}$  est le groupe des permutations de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n+1\}$ , donc le stabilisateur  $\text{Stab}_{S_{n+1}}(n+1)$  de l'élément  $n+1$  est  $S_n$ . De plus  $\tau \in N_{S_{n+1}}(S_n)$  si et seulement si on a :  $\tau S_n \tau^{-1} = \tau \text{Stab}_{S_{n+1}}(n+1) \tau^{-1} = \text{Stab}_{S_{n+1}}(\tau(n+1)) = S_n$ . Ce qui est équivalent à  $\tau(n+1) = n+1$ , et donc  $\tau \in S_n$ . Ainsi on a  $N_{S_{n+1}}(S_n) = S_n$ . Alors d'après la proposition 3.4.2, le groupe  $G$  est co-hopfien.

En particulier pour  $n = 2$  et  $m = 3$ , on a  $S_2 = Z_2$ , et l'on retrouve l'exemple précédent.

Par contre ce résultat est faux pour  $n = 1$ , car sinon  $G$  est le produit libre  $S_2 * S_m$  qui est non co-hopfien.

**Exemple 3.4.6.** Soit  $G = Z_4 *_Z Z_6 \cong SL_2(\mathbb{Z})$ , le groupe modulaire.

Alors le groupe  $G$  n'est pas co-hopfien.

En effet on a  $N_{Z_4}(Z_2) = Z_4$  et  $N_{Z_6}(Z_2) = Z_6$  car  $Z_4$  et  $Z_6$  sont abéliens.

Ainsi on a la condition  $Z_2 \not\subseteq N_{Z_4}(Z_2)$  et  $Z_2 \not\subseteq N_{Z_6}(Z_2)$ , ce qui implique d'après la proposition 3.4.2, que le groupe modulaire n'est pas co-hopfien.

### 3.5 Caractérisation globale

Au vu de la section précédente, on aimerait généraliser le corollaire 3.4.1 dans le cas d'un graphe de groupes où les groupes d'arêtes sont finis, mais pas de même cardinal, et avoir le résultat suivant :

**Énoncé 3.5.1.** *Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes réduit et fini.*

*Supposons que  $\forall v \in V(\Gamma)$ , on a  $: G_v$  co-hopfien et  $\Gamma$ -monomorphiquement elliptique.*

*Supposons que  $\forall e \in E(\Gamma)$ , on a  $: G_e$  fini .*

*Alors :  $G$  est co-hopfien  $\iff \forall e \in E(\Gamma)$ ,  $\text{diam}(\text{Fix}_T(G_e))$  fini.*

Cependant cet énoncé est faux. Nous donnons le contre-exemple suivant :

**Exemple 3.5.2.** *Soit  $G = S_3 *_{S_2} S_4 *_{S_3} \overline{S_4}$  où  $S_2, S_3$  sont plongés canoniquement et  $\overline{S_4}$  isomorphe à  $S_4$ . Alors  $\text{diam}(\text{Fix}_T(S_2)) = +\infty$  avec pourtant  $G$  co-hopfien.*

On a montré dans l'exemple 3.4.5, pour tout  $n \geq 2$ , que le groupe  $S_{n+1} *_{S_n} S_m$  avec  $m \geq n + 1$  est co-hopfien. En particulier, on a donc  $S_4 *_{S_3} \overline{S_4}$  co-hopfien.

Soit  $\tilde{\Gamma}$  le graphe de groupes obtenu après écrasement de l'arête  $e_2$  de  $\Gamma$  de groupe  $S_3$ . Soit  $\tilde{T}$  l'arbre de Bass-Serre correspondant au nouveau graphe de groupes  $\tilde{\Gamma}$ .  $\tilde{T}$  est alors l'arbre obtenu après écrasement de la  $G$ -orbite de l'arête  $e_2$  dans  $T$ .

Montrons que  $S_4 *_{S_3} \overline{S_4}$  est  $\tilde{\Gamma}$ -monomorphiquement elliptique.

Les deux groupes de sommets  $S_4$  et  $\overline{S_4}$  sont finis, alors leurs images par tout endomorphisme injectif  $\varphi$  de  $G$  fixent des sommets de  $T$ . Le cardinal des stabilisateurs d'arêtes de  $T$  étant inférieur ou égal à 6, les images  $\varphi(S_4)$  et  $\varphi(\overline{S_4})$  fixent respectivement un unique sommet de  $T$ . Ces deux sommets sont de plus distincts par injectivité de  $\varphi$ . Le chemin dans  $T$  reliant ces deux sommets ne passe alors que par des arêtes dont le stabilisateur est de cardinal  $|S_3| = 6 > |S_2| = 2$ . Les arêtes de ce chemin dans  $T$  sont donc dans la  $G$ -orbite de l'arête  $e_2$ . En passant à l'arbre écrasé  $\tilde{T}$ , ces sommets sont donc identifiés. Cela montre que le groupe de sommet  $S_4 *_{S_3} \overline{S_4}$  de  $\tilde{\Gamma}$  est bien  $\tilde{\Gamma}$ -monomorphiquement elliptique.

Le groupe de sommet  $S_3$  étant fini, son image par tout endomorphisme injectif de  $G$  est elliptique dans  $\tilde{T}$ . Ainsi  $S_3$  est  $\tilde{\Gamma}$ -monomorphiquement elliptique.

Le groupe  $G = S_3 *_{S_2} (S_4 *_{S_3} \overline{S_4})$  est donc un produit amalgamé de facteurs  $S_3$  et  $S_4 *_{S_3} \overline{S_4}$  co-hopfiens et  $\tilde{\Gamma}$ -monomorphiquement elliptiques. On a montré de plus à l'exemple 3.4.4 que  $N_{S_3}(S_2) = S_2$ . Alors d'après la proposition 3.4.2,  $G$  est bien un groupe co-hopfien.

Montrons cependant que  $\text{Fix}_T(S_2)$  est de diamètre infini dans l'arbre initial  $T$ .

On a  $S_2 \subsetneq N_{S_4}(S_2)$  car  $(3\ 4) \in N_{S_4}(S_2)$  et  $(3\ 4) \notin S_2$ . Le groupe d'arête  $S_2$  se plonge aussi dans l'autre copie  $\overline{S_4}$  de  $S_4$  du groupe  $G$ . Notons  $\overline{(3\ 4)}$  l'élément de  $N_{\overline{S_4}}(S_2) \setminus S_2$ . Alors les éléments  $(3\ 4)$  et  $\overline{(3\ 4)}$  fixent deux sommets consécutifs de  $T$ , sans fixer d'arête. L'élément  $(3\ 4)\overline{(3\ 4)}$  de  $N_G(S_2)$  est alors hyperbolique. Le sous-arbre  $\text{Fix}_T(S_2)$  contient alors l'axe de cet élément, et donc  $\text{diam}(\text{Fix}_T(S_2)) = +\infty$ . Ce qui conclut ce contre-exemple.

Il nous faut alors définir des notions plus fines dans le graphe de groupes  $\Gamma$  pour avoir l'équivalence recherchée.

**Définition 3.5.3.** Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes fini et réduit où les groupes d'arêtes sont finis. Soient  $n \geq 0$  et  $e$  une arête de  $\Gamma$ .

• On définit le graphe  $\Gamma_n$  comme celui obtenu à partir de  $\Gamma$  après écrasement de ses arêtes pour lesquelles le cardinal du groupe d'arête est strictement supérieur à  $n$ .

On note alors  $T_n$  l'arbre de Bass-Serre correspondant à ce scindement.

• On définit le graphe  $\Gamma_e$  comme celui obtenu à partir de  $\Gamma$  après écrasement de ses arêtes différentes de  $e$ .  $\Gamma_e$  est donc le graphe écrasé de  $\Gamma$  à une arête, d'arête  $e$ .

On note alors  $T_e$  l'arbre de Bass-Serre correspondant à ce scindement.

Nous pouvons alors énoncer le théorème de caractérisation globale suivant :

**Théorème 3.5.4.** Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes fini et réduit avec tous ses groupes d'arêtes finis et de groupe fondamental  $G$ . Posons  $n_\Gamma$  le cardinal maximum des groupes d'arêtes de  $\Gamma$ .

Supposons que  $\forall v \in V(\Gamma)$ , on a :  $G_v$  co-hopfien et au plus à un bout.

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $G$  est co-hopfien.
2.  $\forall n \leq n_\Gamma, \forall e \in E(\Gamma)$  tel que  $|G_e| = n$ , alors  $\text{diam}(\text{Fix}_{T_n}(G_e))$  fini.
3.  $\forall e \in E(\Gamma)$ , alors  $\text{diam}(\text{Fix}_{T_e}(G_e))$  fini.
4.  $\forall e \in E(\Gamma)$ ,
  - Si  $\Gamma_e$  est l'amalgame  $A \underset{G_e}{*} B$  alors :  
 $N_A(i_{\bar{e}}(G_e)) = i_{\bar{e}}(G_e)$  ou  $N_B(i_e(G_e)) = i_e(G_e)$ .
  - Si  $\Gamma_e$  est l'extension HNN  $A \underset{G_e}{*}$  alors :  
 $i_e(G_e)$  et  $i_{\bar{e}}(G_e)$  sont non conjugués dans  $A$  et  $N_A(i_e(G_e)) = i_e(G_e)$  ou  $N_A(i_{\bar{e}}(G_e)) = i_{\bar{e}}(G_e)$ .

*Démonstration.* 1)  $\Rightarrow$  2) Par contraposée, supposons  $\exists n \leq n_\Gamma$  et  $\exists e \in E(\Gamma)$  avec  $|G_e| = n$  tel que  $\text{diam}(\text{Fix}_{T_n}(G_e))$  est infini.

$G_e$  est de cardinal maximum dans  $\Gamma_n$  par définition. De plus  $\Gamma$  étant réduit, son écrasé  $\Gamma_n$  l'est aussi. Ainsi, d'après le théorème 3.2.1, le groupe fondamental de  $\Gamma_n$ , soit  $G$ , n'est pas co-hopfien.

2)  $\Rightarrow$  1) Supposons que :  $\forall n \leq n_\Gamma, \forall e \in E(\Gamma)$  tel que  $|G_e| = n$ , alors  $\text{diam}(\text{Fix}_{T_n}(G_e))$  fini.

Raisonnons par récurrence décroissante sur le cardinal des groupes d'arêtes de  $\Gamma$ .

Soit  $k \geq 0$  et posons  $\mathcal{P}(k)$  l'hypothèse de récurrence suivante : tous les groupes de sommets de  $\Gamma_k$  sont co-hopfiens et ne se scindent pas au-dessus d'un groupe de cardinal inférieur ou

égal à  $k$ . L'assertion 1) sera alors montrée si  $\mathcal{P}(0)$  est vérifiée car  $\Gamma_0$  est un graphe réduit à un seul sommet dont le groupe est co-hopfien.

$\Gamma$  est un graphe fini avec ses groupes d'arêtes de cardinal inférieur ou égal à  $n_\Gamma$ , alors on a :  $\Gamma = \Gamma_{n_\Gamma}$ . Par hypothèse,  $\Gamma$  a ses groupes de sommets co-hopfiens et au plus à un bout, ainsi ils ne se scindent sur aucun groupe fini d'après le théorème de Stallings, donc  $\mathcal{P}(n_\Gamma)$  est vérifiée.

Soit  $1 \leq k \leq n_\Gamma$  tel que  $\mathcal{P}(k)$  soit vraie. Montrons alors que  $\mathcal{P}(k-1)$  est vraie.

- Si  $\Gamma_k$  ne possède aucune arête de cardinal  $k$ , alors  $\Gamma_k = \Gamma_{k-1}$ .

Donc  $\mathcal{P}(k-1)$  est vraie par hypothèse de récurrence.

- Si  $\Gamma_k$  possède au moins une arête de cardinal  $k$ .

Le passage de  $\Gamma_k$  à  $\Gamma_{k-1}$  s'effectue en écrasant les arêtes dont le groupe est de cardinal  $k$ . Ainsi il existe un nombre fini de sous-graphes connexes maximaux disjoints de  $\Gamma_k$  de groupes d'arêtes de cardinal  $k$ . Soit  $\Gamma'$  l'un de ces sous-graphes. Le groupe fondamental de  $\Gamma'$  sera alors un nouveau groupe de sommet dans le graphe écrasé  $\Gamma_{k-1}$ .

Montrons alors que  $\pi_1(\Gamma')$  est un groupe co-hopfien.

Nous allons pour cela montrer que  $\Gamma'$  possède les bonnes hypothèses pour appliquer le théorème 3.3.2.  $\Gamma'$  est un sous-graphe connexe du graphe fini et réduit  $\Gamma_k$ ,  $\Gamma'$  est donc aussi fini et réduit. De plus tous les groupes d'arêtes de  $\Gamma'$  sont de même cardinal  $k$ . Ce cardinal est maximal dans  $\Gamma_k$ . Soit  $e'$  une arête de  $\Gamma'$ , si  $T'$  est l'arbre de Bass-Serre correspondant au graphe  $\Gamma'$ , alors  $Fix_{T'}(G_{e'}) \subset Fix_{T_k}(G_{e'})$ . D'après 2),  $\Gamma$  vérifie la condition :  $\forall e \in E(\Gamma)$  tel que  $|G_e| = k$ ,  $diam(Fix_{T_k}(G_e))$  est fini. Ainsi  $Fix_{T'}(G_{e'})$  est aussi de diamètre fini.

Par hypothèse de récurrence, les groupes de sommets de  $\Gamma'$  sont co-hopfiens et ne se scindent sur aucun groupe de cardinal inférieur ou égal à  $k$ . Ainsi ces groupes de sommets sont elliptiques dans tout arbre ayant des stabilisateurs d'arêtes de cardinal inférieur ou égal à  $k$ . Les groupes de sommets de  $\Gamma'$  sont donc aussi  $\Gamma'$ -monomorphiquement elliptiques. On peut alors appliquer le théorème 3.3.2 pour le graphe  $\Gamma'$ , et donc  $\pi_1(\Gamma')$  est un groupe co-hopfien. Montrons aussi que  $\pi_1(\Gamma')$  ne se scinde sur aucun groupe de cardinal inférieur ou égal à  $k-1$ . Les groupes de sommets de  $\Gamma'$  ne se scindent sur aucun groupe de cardinal inférieur ou égal à  $k$  par hypothèse de récurrence, ils sont alors elliptiques pour toute action sur un arbre  $S$  à stabilisateurs d'arêtes de cardinal inférieur ou égal à  $k-1$ . Les groupes d'arêtes de  $\Gamma'$  ne peuvent fixer des arêtes de  $S$  car de cardinal supérieur, ainsi chaque groupe de sommets de  $\Gamma'$  fixe le même sommet de  $S$ .  $\pi_1(\Gamma')$  est alors bien elliptique dans son action sur  $S$ . Il ne se scinde donc sur aucun groupe de cardinal inférieur ou égal à  $k-1$ .

Nous avons alors montré que le groupe fondamental de chaque nouveau groupe de sommet du graphe écrasé  $\Gamma_{k-1}$  est co-hopfien et ne se scinde sur aucun groupe de cardinal inférieur ou égal à  $k-1$ . Les autres groupes de sommets de  $\Gamma_k$  ayant des groupes d'arêtes adjacentes de cardinal inférieur ou égal à  $k-1$  sont inchangés après écrasement du graphe  $\Gamma_k$  pour donner le graphe  $\Gamma_{k-1}$ . Ces sommets sont donc co-hopfiens et ne se scindent sur aucun groupe de cardinal inférieur ou égal à  $k$  par hypothèse de récurrence. En particulier, ils ne se scindent sur aucun groupe de cardinal inférieur ou égal à  $k-1$ .

On a donc montré que  $\mathcal{P}(k - 1)$  est vraie.

Ainsi par récurrence, on a  $\mathcal{P}(k)$  vraie, pour tout  $0 \leq k \leq n_\Gamma$ .  
 En particulier, on a  $\mathcal{P}(0)$  qui est vérifiée.  $\Gamma_0$  est un graphe réduit à un seul sommet. Alors son groupe fondamental  $\pi_1(\Gamma_0) = \pi_1(\Gamma) = G$  est bien co-hopfien.

2)  $\Rightarrow$  3) Soit  $e$  une arête de  $\Gamma$ .

Si le groupe d'arête  $G_e$  est de cardinal  $n$ , alors  $Fix_{T_n}(G_e)$  est de diamètre fini par hypothèse.  $G_e$  est de cardinal maximum parmi les groupes d'arêtes du graphe écrasé  $\Gamma_n$ .

Alors d'après le lemme 3.1.4, pour l'arbre écrasé  $T_e$ , on a  $Fix_{T_e}(G_e)$  de diamètre fini.

3)  $\Rightarrow$  2) Soit  $n \leq n_\Gamma$  et  $e$  une arête de  $\Gamma$  telle que  $|G_e| = n$ .

Par hypothèse, tous les écrasés  $\tilde{T}$  de  $T$  à une  $G$ -orbite d'arête sont tels que  $Fix_{\tilde{T}}(G_e)$  est de diamètre fini. En particulier,  $\forall e' \in E(\Gamma)$  tel que  $G_{e'} = G_e$ , on a donc  $Fix_{T_{e'}}(G_e)$  de diamètre fini. Ces écrasés  $T_{e'}$  sont aussi les écrasés de l'arbre  $T_n$  par définition.  $n$  est le cardinal maximum des groupes d'arêtes de  $\Gamma_n$ , alors d'après le lemme 3.1.4,  $Fix_{T_n}(G_e)$  est de diamètre fini.

3)  $\Leftrightarrow$  4) Soit  $e$  une arête de  $\Gamma$ , alors  $\Gamma_e$  est le graphe écrasé de  $\Gamma$  à une arête, d'arête  $e$ .  
 Alors d'après la proposition 3.1.9, on a l'équivalence recherchée.  $\square$

Etant donné un graphe de groupes vérifiant les hypothèses du théorème précédent, on utilisera alors l'assertion 4 pour déterminer si le groupe fondamental du graphe de groupes est co-hopfien. En effet, cela revient à calculer les normalisateurs de groupes finis par hypothèse. Plusieurs algorithmes existent pour déterminer un ensemble de générateurs du normalisateur d'un sous-groupe fini dans certaines classes de groupes, en particulier dans celle des groupes hyperboliques.





## 4 Application aux groupes hyperboliques

### 4.1 Préliminaires sur les groupes hyperboliques

Rappelons quelques définitions utiles.

**Définition 4.1.1.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique géodésique et  $\delta \geq 0$ .

Un triangle géodésique  $ABC$  de  $X$  est dit  $\delta$ -fin si pour tout point  $P$  du côté  $AB$ , il existe un point  $Q$  de  $AC$  ou  $BC$  tel que  $d(P, Q) \leq \delta$ .

L'espace  $(X, d)$  est dit de plus  $\delta$ -hyperbolique si tout triangle géodésique de  $X$  est  $\delta$ -fin.

Nous pouvons donner maintenant la définition de groupe hyperbolique.

**Définition 4.1.2.** Soit  $G$  un groupe de type fini.

$G$  est dit hyperbolique s'il existe  $\delta \geq 0$  et un système fini de générateurs  $S$  de  $G$  tel que le graphe de Cayley,  $Cay_S(G)$ , de  $G$  relativement à  $S$  soit  $\delta$ -hyperbolique.

En fait la notion de groupe hyperbolique ne dépend pas du système fini de générateurs du groupe. En effet si l'on considère un autre système de générateurs fini  $S'$  du groupe  $G$  alors on montre que le graphe de Cayley  $Cay_{S'}(G)$  est  $\delta'$ -hyperbolique avec  $\delta' \geq 0$ .

L'hyperbolicité d'un groupe est un invariant géométrique au sens où il est préservé par quasi-isométrie. Pour plus de détails on pourra consulter [GdlH90].

Rappelons maintenant la notion de bord d'un groupe hyperbolique qui peut être généralisée à tout espace métrique hyperbolique dans [BH99].

**Définition 4.1.3.** Soient  $G$  un groupe hyperbolique et  $S$  un système fini de générateurs de  $G$ .

Soient  $R$  et  $R'$  deux rayons géodésiques du graphe de Cayley  $Cay_S(G)$ .

Posons la relation d'équivalence suivante :  $R \sim R'$  s'ils sont à distance de Hausdorff finie c'est à dire qu'il existe  $H > 0$  tel que  $R$  et  $R'$  sont contenus chacun dans le  $H$ -voisinage de l'autre.

On définit alors le bord de  $G$ , noté  $\partial G$ , comme l'ensemble des classes d'équivalences des rayons géodésiques de  $Cay_S(G)$ .

De plus l'action de  $G$  par isométries sur son graphe de Cayley induit une action de  $G$  sur les rayons géodésiques qui préserve la relation d'équivalence de la définition précédente. Ainsi on a une action de  $G$  sur son bord  $\partial G$  par homéomorphisme.

**Définition 4.1.4.** Soient  $G$  un groupe hyperbolique,  $S$  un système fini de générateurs de  $G$  et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Soit  $x$  un point du graphe de Cayley  $Cay_S(G)$ .

L'ensemble des points de  $\partial G$  qui sont limites de points de l'orbite  $Hx$  ne dépend pas du choix de  $x$ . C'est l'ensemble limite de  $H$ , noté  $\Lambda(H)$ .

En particulier, on a  $\Lambda(G) = \partial G$ .

Si  $G$  est un groupe hyperbolique alors son action par isométries sur son graphe de Cayley permet de classer ses éléments en deux catégories : elliptique et hyperbolique.

Ils peuvent être caractérisés de la manière suivante :

- $g \in G$  est dit elliptique si et seulement si  $\Lambda(\langle g \rangle)$  est vide.

Les éléments elliptiques de  $G$  sont donc ceux qui sont d'ordre fini.

- $g \in G$  est dit hyperbolique si et seulement si  $\Lambda(\langle g \rangle)$  contient deux éléments.

Ces deux éléments de l'ensemble limite sont en fait les points du bord de l'axe de  $g$ . Ce sont aussi les deux points fixes de  $g$ .

Il existe une classe particulière de groupes hyperboliques qui permettra d'obtenir de nouveaux résultats à partir de scindements de groupes au-dessus de cette classe de groupes.

Il s'agit des groupes virtuellement cycliques. Ils seront fortement utilisés par la suite, notamment lors de la décomposition  $JSJ$  de Bowditch [Bow98].

**Définition 4.1.5.** *Un groupe est dit virtuellement cyclique s'il admet un sous-groupe cyclique infini d'indice fini. De manière équivalente, c'est aussi un groupe à deux bouts.*

**Remarque 4.1.6.** *Il existe deux types de groupes  $G$  virtuellement cycliques :*

- ceux qui admettent pour suite exacte  $1 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$  avec  $F$  fini.
- ceux qui admettent la suite  $1 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow D_\infty \rightarrow 1$  avec  $F$  fini et où  $D_\infty$  est le groupe diédral infini.

*Ils se différencient par leur centre  $Z(G)$ , qui est infini dans le premier cas et fini dans le second.*

L'ensemble limite d'un sous-groupe d'un groupe hyperbolique étant bien défini d'après la définition 4.1.4, on donne la proposition suivante qui trouve une formulation équivalente dans [GdlH90] :

**Proposition 4.1.7.** *Soient  $G$  un groupe hyperbolique et  $H$  un sous-groupe de  $G$ .*

*i)  $H$  est fini si et seulement si son ensemble limite est vide.*

*ii)  $H$  est virtuellement cyclique si et seulement si son ensemble limite a précisément deux éléments.*

*iii) Dans les autres cas,  $\Lambda(H)$  comporte au moins trois éléments et dans ce cas l'ensemble limite est infini non dénombrable.*

*Dans les cas i) et ii), on dit que le sous-groupe  $H$  est élémentaire.*

**Remarque 4.1.8.** *Si un sous-groupe d'un groupe hyperbolique est non élémentaire alors il contient un sous-groupe libre à deux générateurs par application du lemme du ping-pong.*

On peut alors énoncer le corollaire suivant :

**Corollaire 4.1.9.** *Soient  $G$  un groupe hyperbolique et  $H$  un sous-groupe de  $G$ .*

*Si  $H$  fixe globalement deux points distincts du bord de  $G$ , alors  $H$  est fini ou virtuellement cyclique.*

*Démonstration.* Soient  $S$  un système fini de générateurs de  $G$  et  $H$ , sous-groupe de  $G$ , tel que  $H$  fixe globalement deux points distincts  $\{\xi^-; \xi^+\} \subset \partial G$ . D'après la finesse des triangles, il existe des géodésiques reliant les points du bord  $\xi^-$  et  $\xi^+$ . On pourra consulter [BH99]. Soient  $K$  la réunion des géodésiques du graphe de Cayley de  $G$  relativement à  $S$ , d'extrémités  $\xi^-$  et  $\xi^+$  et  $x$  un sommet de  $K$ . Par définition de  $K$ ,  $K$  est stable par l'action du groupe  $H$ . L'ensemble limite ne dépendant pas du sommet choisi, on a  $\Lambda(H) = \overline{Hx} \cap \partial G \subset \{\xi^-; \xi^+\}$ . Puisque  $|\Lambda(H)| \leq 2$ , d'après la proposition 4.1.7, on a  $H$  fini ou virtuellement cyclique.  $\square$

Nous donnons quelques lemmes qui seront utiles pour la suite :

**Lemme 4.1.10.** *Soit  $G$  un groupe virtuellement cyclique.*

*Si  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , alors  $H$  est fini ou bien virtuellement cyclique d'indice fini dans  $G$ .*

*Démonstration.* Si  $G$  est un groupe virtuellement cyclique alors il possède un sous-groupe normal cyclique d'indice fini, noté  $G_0$ . Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ .

- Si  $H \cap G_0 = \{1\}$  alors  $H$  se plonge dans le quotient  $G/G_0$ . Le groupe  $G/G_0$  est fini par définition de  $G_0$ , donc  $H$  aussi.
- Si  $H \cap G_0 \neq \{1\}$  alors  $H \cap G_0$  est un sous-groupe cyclique infini de  $G_0$ . Alors  $H \cap G_0$  est d'indice fini dans  $G_0$ , donc aussi dans  $G$ . Des inclusions  $H \cap G_0 \subset H \subset G$ , on obtient bien  $H$  virtuellement cyclique et d'indice fini dans  $G$ .

$\square$

**Lemme 4.1.11.** *Soit  $U$  un sous-groupe virtuellement cyclique d'un groupe hyperbolique  $G$ .*

*Alors le normalisateur  $N_G(U)$  de  $U$  dans  $G$  est virtuellement cyclique.*

*De plus  $U$  est un sous-groupe d'indice fini dans  $N_G(U)$ .*

*Démonstration.* Si  $U$  est virtuellement cyclique dans  $G$ , alors son ensemble limite  $\Lambda(U)$  possède exactement deux éléments  $\xi^-$  et  $\xi^+$ , d'après la proposition 4.1.7. Alors  $N_G(U)$  fixe globalement  $\{\xi^-, \xi^+\}$ . D'après le corollaire 4.1.9,  $N_G(U)$  est fini ou virtuellement cyclique.  $N_G(U)$  est infini car il contient  $U$ , ainsi  $N_G(U)$  est virtuellement cyclique. Le lemme 4.1.10 donne  $U$  d'indice fini dans  $N_G(U)$ .  $\square$

**Lemme 4.1.12.** *Soit  $G$  un groupe hyperbolique, alors tout sous-groupe virtuellement cyclique de  $G$  est contenu dans un unique groupe virtuellement cyclique maximal de  $G$ .*

*Démonstration.* Soit  $H$  virtuellement cyclique dans  $G$ . D'après la proposition 4.1.7, son ensemble limite  $\Lambda(H)$  possède exactement deux éléments  $\xi^-$  et  $\xi^+$ . Soit  $E$  le sous-groupe de  $G$  fixant globalement  $\{\xi^-, \xi^+\}$ . D'après le corollaire 4.1.9,  $E$  est fini ou virtuellement cyclique.  $H$  étant contenu dans  $E$  et infini,  $E$  est donc virtuellement cyclique.

Montrons que  $E$  contient tout groupe virtuellement cyclique contenant  $H$ .

Si  $H$  est contenu dans un groupe  $U$  virtuellement cyclique, alors d'après le lemme 4.1.10,  $H$  est d'indice fini dans  $U$  et donc  $\Lambda(H) = \Lambda(U) = \{\xi^-, \xi^+\}$ . Le sous-groupe  $U$  est alors contenu dans  $E$ .  $\square$

Dans [GdlH90], on a aussi le résultat suivant :

**Proposition 4.1.13.** *Soit  $H$  un sous-groupe d'un groupe hyperbolique. Si tous les éléments de  $H$  sont d'ordre fini, alors  $H$  est fini.*

On peut alors montrer le résultat suivant qui sera utile dans le cas des décompositions JSJ avec le théorème 4.5.3.

**Proposition 4.1.14.** *Soient  $G$  un groupe hyperbolique et  $U$  un sous-groupe non élémentaire de  $G$ . Alors le centralisateur  $Z_G(U)$  de  $U$  dans  $G$  est fini.*

*Démonstration.* Si  $U$  est un sous-groupe non élémentaire de  $G$  alors  $U$  est infini. D'après la proposition 4.1.13,  $U$  possède un élément d'ordre infini  $\gamma$ . Cet élément est donc hyperbolique de points fixes  $\{\gamma^-; \gamma^+\} \subset \partial G$ . Si  $U$  fixe globalement  $\{\gamma^-; \gamma^+\}$ , alors d'après le corollaire 4.1.9,  $U$  est élémentaire. Il existe donc  $\rho \in U$  envoyant  $\gamma^-$  ou  $\gamma^+$  sur un élément  $\xi^-$  distinct de  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$ . L'élément  $\xi = \rho\gamma\rho^{-1}$  de  $U$  fixe alors le point  $\xi^-$ . Il est de plus hyperbolique car conjugué à  $\gamma$ . Notons  $\xi^+$  l'autre point du bord fixé par  $\xi$ . On remarque que  $\xi^+$  peut être le point  $\gamma^-$  ou  $\gamma^+$ . Soit  $g$  un élément du centralisateur de  $U$  dans  $G$ , alors  $g$  commute avec  $\gamma$  et  $\xi$ . Ainsi  $g$  préserve globalement  $\Lambda(\gamma) = \{\gamma^-; \gamma^+\}$ , ainsi que  $\Lambda(\xi) = \{\xi^-; \xi^+\}$ .

Soit  $Stab_G(\Lambda(\gamma))$  l'ensemble des éléments de  $G$  qui préserve globalement  $\{\gamma^-; \gamma^+\}$ . D'après ce qui précède, on a  $Z_G(U) \subset Stab_G(\Lambda(\gamma)) \cap Stab_G(\Lambda(\xi))$ .

Supposons  $Stab_G(\Lambda(\gamma)) \cap Stab_G(\Lambda(\xi))$  infini, alors d'après la proposition 4.1.13, il contient un élément  $\alpha$  d'ordre infini. L'élément  $\alpha$ , restreint à  $\Lambda(\gamma)$  et  $\Lambda(\xi)$ , agit comme l'identité ou une transposition, ainsi  $\alpha^2$  fixe les points  $\gamma^+, \gamma^-, \xi^+$  et  $\xi^-$  du bord dont au moins trois sont distincts. Il y a alors contradiction car l'élément hyperbolique  $\alpha^2$  ne peut fixer trois points distincts du bord de  $G$ . Ainsi  $Stab_G(\Lambda(\gamma)) \cap Stab_G(\Lambda(\xi))$  est un sous-groupe fini de  $G$  et par conséquent  $Z_G(U)$  aussi.  $\square$

On termine cette partie avec la notion de sous-groupe quasi-convexe qui donne une stabilité de l'hyperbolicité par passage aux sous-groupes. On pourra consulter [CDP90] pour plus de détails.

**Définition 4.1.15.** *Soit  $G$  un groupe de type fini et  $S$  un système fini de générateurs.*

*Un sous-groupe  $H$  de  $G$  est dit quasi-convexe s'il existe  $C > 0$  tel que toute géodésique du graphe de Cayley de  $G$ , reliant deux sommets appartenant à  $H$ , est contenue dans le  $C$ -voisinage de  $H$ .*

[CDP90] montre en fait que cette définition ne dépend pas du système de générateurs du groupe. On trouve alors la proposition de stabilité suivante dans la classe des groupes hyperboliques :

**Proposition 4.1.16.** *Tout sous-groupe quasi-convexe d'un groupe hyperbolique est hyperbolique.*

B. Bowditch donne dans [Bow98] le résultat suivant :

**Proposition 4.1.17.** *Si un groupe hyperbolique est le groupe fondamental d'un graphe de groupes fini avec ses groupes d'arêtes quasi-convexes, alors les groupes de sommets sont quasi-convexes.*

**Remarque 4.1.18.** *Ce résultat nous permet donc d'affirmer que si un groupe hyperbolique est le groupe fondamental d'un graphe de groupes fini avec ses groupes d'arêtes quasi-convexes, alors les groupes de sommets sont aussi hyperboliques d'après 4.1.16. En particulier, les deux scindements d'un groupe hyperbolique que l'on utilisera sont, d'une part ceux au-dessus de groupes finis et d'autre part ceux au-dessus de groupes virtuellement cycliques. Dans les deux cas, ces groupes sont quasi-convexes. On obtient bien alors la conclusion précédente.*

## 4.2 Groupes fuchsien cocompacts

Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant :

**Théorème 4.2.1.** *Tout groupe fuchsien cocompact est co-hopfien.*

Rappelons la notion d'action proprement discontinue d'un groupe sur le demi-plan de Poincaré  $\mathbb{H}$ , ainsi que celle de domaine fondamental d'un groupe dans  $\mathbb{H}$ .

On dit qu'un groupe  $G$  opère proprement discontinûment sur  $\mathbb{H}$  si pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{H}$ , l'ensemble  $\{g \in G/gK \cap K \neq \emptyset\}$  est fini.

De manière générale, si  $G$  est un sous-groupe discret de  $PSL_2(\mathbb{R})$ ,  $D \subset \mathbb{H}$  est dit domaine fondamental de  $G$ , si  $D$  est un fermé connexe non vide de  $\mathbb{H}$  tel que  $\bigcup_{g \in G} gD = \mathbb{H}$  et  $\overset{\circ}{D} \cap g\overset{\circ}{D} = \emptyset$

pour tout  $g \neq 1$ . Dans la pratique, nous choisirons comme domaine fondamental de  $G$  un domaine, dit de Dirichlet, convexe et ayant pour côtés des géodésiques de  $\mathbb{H}$ . On pourra consulter [Kat92] pour sa construction.

La définition que nous allons donner maintenant de groupe fuchsien n'est pas la définition standard. En effet, nous ne définissons pas un groupe fuchsien comme un sous-groupe discret du groupe des isométries positives de  $\mathbb{H}$  (voir [Kat92]). Nous choisissons plutôt la définition utilisée par Bowditch dans [Bow98].

**Définition 4.2.2.** *Un groupe  $G$  est dit fuchsien s'il est non élémentaire et qu'il agit proprement discontinûment par isométries sur  $\mathbb{H}$ .*

*$G$  est dit de plus cocompact si l'espace topologique quotient  $\mathbb{H}/G$  est compact.*

**Remarque 4.2.3.** *L'action des groupes fuchsien sur  $\mathbb{H}$  n'est pas supposée fidèle. Alors le noyau de l'action est un groupe fini car le groupe agit proprement discontinûment.*

*Un groupe fuchsien  $G$  admet donc la suite exacte suivante :*

$1 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 1$  où  $F$  et  $\mathcal{O}$  sont déterminés de la manière suivante :

*$F$  est l'unique sous-groupe normal fini maximal de  $G$  et  $\mathcal{O}$  est le groupe fondamental d'un orbifold hyperbolique de dimension 2 agissant fidèlement sur  $\mathbb{H}$ .*

**Remarque 4.2.4.** *Un groupe est dit élémentaire s'il rejoint les deux premières conditions de la proposition 4.1.7, à savoir s'il est fini ou virtuellement cyclique.*

*Ainsi un groupe fuchsien  $G$  est infini, ainsi que son ensemble limite. De plus l'action étant supposée proprement discontinue, les orbites  $Gx$  pour  $x \in \mathbb{H}$  sont discrètes dans  $\mathbb{H}$ .*

Alors l'ensemble limite  $\Lambda(G)$ , représentant l'ensemble des points d'accumulation de  $Gx$ , est contenu dans  $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Si de plus  $G$  est cocompact alors  $G$  est un groupe hyperbolique.

Son ensemble limite dans  $\partial\mathbb{H}$  s'identifie alors avec son bord.

Nous allons à présent, nous intéresser à la condition co-Hopf sur les groupes fuchsien cocompacts afin de montrer le théorème 4.2.1.

En fait l'étude peut se ramener au quotient d'un groupe fuchsien cocompact par le noyau de son action sur  $\mathbb{H}$  comme le montre la proposition suivante :

**Proposition 4.2.5.** *Soit  $G$  un groupe fuchsien cocompact admettant la suite exacte suivante :  $1 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 1$  avec  $F$  fini et  $\mathcal{O}$  groupe fuchsien agissant fidèlement sur  $\mathbb{H}$ . Supposons  $\mathcal{O}$  co-hopfien alors  $G$  l'est aussi.*

*Démonstration.* Soit  $\varphi : G \hookrightarrow G$  endomorphisme injectif.

• Montrons que  $\varphi(F) \subset F$ .

Notons  $\bar{H}$  l'image de  $H \subset G$  dans le groupe quotient  $G/F$  isomorphe à  $\mathcal{O}$ . On a  $F$  distingué dans  $G$  donc  $\varphi(F) \triangleleft \varphi(G)$ , alors  $N_{\varphi(G)}(\varphi(F)) = \varphi(G)$ .  $\varphi(F)$  est un sous-groupe fini de  $G$ , ainsi  $\overline{\varphi(F)}$  est elliptique dans  $\mathbb{H}$ . Regardons alors son nombre de points fixes.

i) Si  $\overline{\varphi(F)}$  fixe un unique point de  $\mathbb{H}$  alors  $N_{\mathcal{O}}(\overline{\varphi(F)})$  fixe aussi cet unique point.  $N_{\mathcal{O}}(\overline{\varphi(F)})$  est alors fini car l'action est supposée proprement discontinue. De plus on a  $N_G(\overline{\varphi(F)}) \subset N_{\mathcal{O}}(\overline{\varphi(F)})$ , ainsi  $N_G(\overline{\varphi(F)})$  est aussi fini.  $F$  étant un groupe fini, on a aussi  $N_G(\varphi(F))$  fini. Alors  $N_{\varphi(G)}(\varphi(F))$  est aussi fini car contenu dans  $N_G(\varphi(F))$ . Or  $N_{\varphi(G)}(\varphi(F)) = \varphi(G)$ , isomorphe à  $G$ , fini est en contradiction avec  $G$  non élémentaire.

ii) Si  $\overline{\varphi(F)}$  fixe deux points de  $\mathbb{H}$  alors  $N_{\mathcal{O}}(\overline{\varphi(F)})$  fixe la géodésique de  $\mathbb{H}$  passant par ces deux points. Ainsi  $N_{\mathcal{O}}(\overline{\varphi(F)})$  fixe globalement deux points du bord. D'après le corollaire 4.1.9,  $N_{\mathcal{O}}(\overline{\varphi(F)})$  est alors un groupe fini ou virtuellement cyclique. Comme pour le point précédent, cela implique que  $N_{\varphi(G)}(\varphi(F)) = \varphi(G)$ , isomorphe à  $G$ , est aussi fini ou virtuellement cyclique. Ce qui est en contradiction avec  $G$  non élémentaire.

iii) Enfin si  $\overline{\varphi(F)}$  fixe trois points non alignés de  $\mathbb{H}$  alors  $\overline{\varphi(F)}$  fixe tous les points de  $\mathbb{H}$  et donc  $\overline{\varphi(F)} = \bar{1}$  dans  $\mathcal{O}$ . On a donc  $\varphi(F) \subset F$ .

•  $\varphi$  est injective et d'après ce qui précède  $\varphi(F) \subset F$  avec  $F$  fini alors  $\varphi(F) = F$ .

L'application  $\varphi$  peut donc passer au quotient avec le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{O} & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \mathcal{O} \end{array}$$

L'application  $\bar{\varphi}$  définie dans le diagramme est de plus injective.

En effet, soient  $x, y \in G$  tels que  $\bar{\varphi}(\pi(x)) = \bar{\varphi}(\pi(y))$ . Alors on a  $\pi(\varphi(x)) = \pi(\varphi(y))$  et donc  $\varphi(x)^{-1}\varphi(y) = \varphi(x^{-1}y) \in F = \varphi(F)$ . Ainsi par injectivité de  $\varphi$ , on a  $x^{-1}y \in F$  et donc  $\pi(x) = \pi(y)$ .

Ainsi on a  $\bar{\varphi} : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$  injective avec  $\mathcal{O}$  supposé co-hopfien, donc  $\bar{\varphi}$  est bijective. Alors  $\varphi(G) = \pi^{-1}(\bar{\varphi}(\pi(G))) = G$  et donc  $\varphi$  est aussi surjective.  $G$  est alors co-hopfien.  $\square$

Pour montrer le théorème 4.2.1, il nous reste alors à montrer que tout groupe fondamental d'un orbifold hyperbolique compact de dimension deux est un groupe co-hopfien.

Pour faciliter cette étude, nous allons nous ramener à un sous-groupe distingué d'indice fini et sans torsion. Cela nous ramènera alors au cas du groupe fondamental d'une surface hyperbolique compacte et orientable.

Pour faire ce passage à un sous-groupe d'indice fini sans torsion, on utilise le lemme de Selberg :

**Lemme 4.2.6.** [Selberg] Soient  $\mathbb{K}$  un corps de caractéristique 0 et  $n \geq 2$ .

Tout sous-groupe de type fini de  $GL_n(\mathbb{K})$  admet un sous-groupe d'indice fini et sans torsion.

**Remarque 4.2.7.** Dans le lemme de Selberg, on peut supposer que le sous-groupe d'indice fini sans torsion est de plus normal.

En effet, si  $H$  est un sous-groupe d'indice fini sans torsion d'un groupe  $G$ , alors on considère l'action de  $G$  sur l'ensemble fini  $G/H$  des classes à gauches modulo  $H$  par translation. Cette action n'est pas fidèle en général.

Posons  $\rho : G \rightarrow S(G/H)$  le morphisme associé à l'action, avec  $S(G/H)$  groupe des permutations de  $G/H$ .

Alors on a :  $\ker \rho = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ .

Ainsi  $\ker \rho$  est normal dans  $G$ , avec  $\ker \rho \subset H$  donc sans torsion.

De plus  $G/\ker \rho$  est isomorphe à un sous-groupe du groupe fini des permutations d'un ensemble fini. Le noyau  $\ker \rho$  est donc encore d'indice fini dans  $G$ .

On peut alors maintenant considérer le cas du groupe fondamental d'une surface hyperbolique fermée, au sens où elle est compacte sans bord .

On montre alors le résultat suivant :

**Proposition 4.2.8.** Soit  $S$  une surface hyperbolique fermée et orientable.

Alors son groupe fondamental est un groupe co-hopfien.

*Démonstration.* Soit  $G$  le groupe fondamental de  $S$  et  $\varphi : G \hookrightarrow G$  un endomorphisme injectif.  $S$  est une surface fermée orientable, elle est donc caractérisée à homéomorphisme près par son genre  $g$ . De plus  $S$  est hyperbolique, donc  $g \geq 2$ . Soit  $H = \varphi(G)$  sous-groupe de  $G$  isomorphe à  $G$ . D'après la théorie des revêtements, il existe une surface  $\tilde{S}$  et un revêtement  $p : \tilde{S} \rightarrow S$  tel que  $p_*(\pi_1(\tilde{S})) = H$ .

- Supposons que  $p$  soit un revêtement fini de degré  $n$ .

La caractéristique d'Euler de  $S$  est  $\chi(S) = 2 - 2g$ . La caractéristique d'Euler est multiplicative par un revêtement fini, ainsi on a :  $\chi(\tilde{S}) = 2n - 2ng$ . De plus on a  $S$  et  $\tilde{S}$  asphériques car  $\mathbb{H}$  est contractile et  $\pi_1(S) = \pi_1(\tilde{S})$  car  $H$  et  $G$  sont isomorphes, alors  $S$  et  $\tilde{S}$  sont équivalents homotopes. Ainsi  $S$  et  $\tilde{S}$  ont la même caractéristique d'Euler. Donc  $\chi(\tilde{S}) = \chi(S)$  avec  $\chi(S) \neq 0$  car  $g \geq 2$ . Par conséquent  $n = 1$ , et donc  $p$  est un homéomorphisme. Ainsi  $p_*$  est un isomorphisme et donc  $\varphi(G) = H = p_*(\pi_1(\tilde{S})) = \pi_1(S) = G$ .

Alors  $\varphi$  est bien surjectif et donc  $G$  est co-hopfien.

- Supposons que  $p$  ne soit pas de degré fini.

Alors  $H$  est un sous-groupe de  $G$  d'indice infini avec  $\tilde{S}$  de volume infini.  $H$  est isomorphe à  $G$ , donc  $H$  est hyperbolique.  $H$  est donc un sous-groupe discret de  $PSL_2(\mathbb{R})$  de type fini. D'après [Kat92],  $H$  est donc géométriquement fini. Il existe alors un domaine de Dirichlet  $F$  de  $H$  dans  $\mathbb{H}$  ayant un nombre fini de côtés, dont l'un d'eux soit un segment de l'axe réel. Soit  $\tilde{F}$  le plus petit convexe fermé non vide de  $F$  invariant par  $H$ , nommé le coeur convexe de  $H$ . Alors le quotient de  $\tilde{F}$  par  $H$  est une surface compacte à bord de même groupe fondamental que  $\tilde{S}$ . Toute surface compacte à bord a pour groupe fondamental un groupe libre.  $H$  est donc un groupe libre. Ainsi  $H$  possède une infinité de bouts. D'après le lemme de Swarc-Milnor 1.0.10,  $G$  est quasi-isométrique au revêtement universel de  $S$  qui est le demi-plan de Poincaré  $\mathbb{H}$  car  $S$  est hyperbolique.  $\mathbb{H}$  est un espace à un bout donc  $G$  aussi, ce qui est en contradiction avec  $H$  isomorphe à  $G$ . □

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 4.2.1 :

*Démonstration.* Soit  $G$  un groupe fuchsien cocompact. D'après la remarque 4.2.3,  $G$  admet la suite exacte suivante :  $1 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 1$  avec  $F$  fini et  $\mathcal{O}$  groupe fondamental d'un 2-orbifold hyperbolique compact agissant de manière non triviale sur  $\mathbb{H}$ . D'après la proposition 4.2.5, si  $\mathcal{O}$  est co-hopfien, alors  $G$  l'est aussi. Montrons donc que  $\mathcal{O}$  est co-hopfien.

Soit  $\varphi : \mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{O}$  un endomorphisme injectif.

Posons  $SL_2^*(\mathbb{R}) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) / \det(A) \in \{1, -1\}\}$  sous-groupe de  $GL_2(\mathbb{R})$ .

Soit  $p : SL_2^*(\mathbb{R}) \twoheadrightarrow PSL_2^*(\mathbb{R}) = SL_2^*(\mathbb{R}) / \{Id, -Id\}$  la surjection canonique.

En fait  $PSL_2^*(\mathbb{R})$  est le groupe des isométries de  $\mathbb{H}$ , ainsi  $\mathcal{O}$  est un sous-groupe de type fini de  $PSL_2^*(\mathbb{R})$ . Posons  $\tilde{\mathcal{O}} = p^{-1}(\mathcal{O})$ , alors  $\tilde{\mathcal{O}}$  est aussi un sous-groupe de type fini de  $SL_2^*(\mathbb{R})$  donc de  $GL_2(\mathbb{R})$ . D'après le lemme de Selberg et la remarque 4.2.7, il existe  $\tilde{H}$  sous-groupe distingué de  $\tilde{\mathcal{O}}$ , d'indice fini et sans torsion. Posons  $H = p(\tilde{H})$ ,  $H$  est alors un sous-groupe distingué de  $\mathcal{O}$ . De plus  $-Id$  est un élément de torsion de  $SL_2^*(\mathbb{R})$  car d'ordre 2, ainsi  $-Id \notin \tilde{H}$ . Les sous-groupes  $H$  et  $\tilde{H}$  sont donc isomorphes, ce qui implique que  $H$  est aussi sans torsion. On a aussi  $[\mathcal{O} : H] \leq [\tilde{\mathcal{O}} : \tilde{H}]$ , donc  $H$  est d'indice fini dans  $\mathcal{O}$ .

Supposons que  $[\mathcal{O} : H] = n \geq 1$ . Posons alors  $S = \bigcap_{\substack{U \triangleleft \mathcal{O} \\ [\mathcal{O} : U] \leq n}} U$ .

L'ensemble  $I = \{U \triangleleft \mathcal{O} / [\mathcal{O} : U] \leq n\}$  correspond à l'ensemble des noyaux des morphismes de  $\mathcal{O}$  dans un groupe de cardinal au plus  $n$ . Fixons un groupe  $N$  fini de cardinal  $n$ .  $\mathcal{O}$  est de type fini, donc à chaque choix de correspondance des générateurs de  $\mathcal{O}$  dans  $N$  correspond au plus un morphisme de  $\mathcal{O}$  dans  $N$  et donc au plus un noyau de l'ensemble  $I$ . Ainsi si  $\mathcal{O}$  admet  $k$  générateurs alors le nombre de morphisme de  $\mathcal{O}$  dans  $N$  est majoré par  $n^k$ , donc fini. Il existe de plus un nombre fini de groupes de cardinal  $n$ , ainsi le nombre de morphismes de  $\mathcal{O}$  dans un groupe de cardinal  $n$  est bien fini. En réitérant l'argument précédent pour des groupes de cardinal fixé inférieur à  $n$ , on montre bien que  $I$  est un ensemble fini.  $S$  est alors une intersection finie.



Soit  $U$  un élément de  $I$  et  $\rho : \mathcal{O} \twoheadrightarrow \mathcal{O}/U$  la surjection canonique. Alors  $\rho \circ \varphi$  est aussi un morphisme de  $\mathcal{O}$  dans  $\mathcal{O}/U$  avec  $|\mathcal{O}/U| \leq n$ . Son noyau est donc un élément de  $I$ .

On a :  $\ker(\rho \circ \varphi) = (\rho \circ \varphi)^{-1}\{1\} = \varphi^{-1}(\rho^{-1}\{1\}) = \varphi^{-1}(U)$ , donc  $\varphi^{-1}(U) \in I$ . Ainsi  $\varphi^{-1}(S) = \varphi^{-1}(\bigcap_{U \in I} U) = \bigcap_{U \in I} \varphi^{-1}(U) \supset S$ . De  $S \subset \varphi^{-1}(S)$  on a alors  $\varphi(S) \subset \varphi(\varphi^{-1}(S)) \subset S$  et donc  $S$  est stable par  $\varphi$ .

$S$  est un sous-groupe de  $H$ ,  $S$  est donc aussi sans torsion. Il est aussi d'indice fini dans  $\mathcal{O}$  car c'est une intersection finie de sous-groupes d'indice fini dans  $\mathcal{O}$ . De plus  $S$  est distingué dans  $\mathcal{O}$  car chaque sous-groupe  $U$  de  $I$  l'est.

$S$  est alors le groupe fondamental d'une surface hyperbolique compacte. Cette surface est de plus orientable car  $S$  est contenue dans les sous-groupes de  $\mathcal{O}$  d'indice au plus 2 qui préservent l'orientation. Alors d'après la proposition 4.2.8,  $S$  est co-hopfien. Ainsi  $\varphi(S) \subset S$  implique  $\varphi(S) = S$ .

L'application  $\varphi$  peut donc passer au quotient avec le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{O}/S & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \mathcal{O}/S \end{array}$$

L'application  $\bar{\varphi}$  définie dans le diagramme est de plus injective.

En effet, soient  $x, y \in \mathcal{O}$  tels que  $\bar{\varphi}(\pi(x)) = \bar{\varphi}(\pi(y))$ . Alors on a  $\pi(\varphi(x)) = \pi(\varphi(y))$  et donc  $\varphi(x)^{-1}\varphi(y) = \varphi(x^{-1}y) \in S = \varphi(S)$ . Ainsi par injectivité de  $\varphi$ , on a  $x^{-1}y \in S$  et donc  $\pi(x) = \pi(y)$ . Alors on a  $\bar{\varphi} : \mathcal{O}/S \rightarrow \mathcal{O}/S$  injective.

De plus  $S \triangleleft \mathcal{O}$  et d'indice fini, donc  $\mathcal{O}/S$  est un groupe fini.  $\bar{\varphi}$  est alors aussi bijective. Ainsi  $\varphi(\mathcal{O}) = \pi^{-1}(\bar{\varphi}(\pi(\mathcal{O}))) = \mathcal{O}$  et donc  $\varphi$  est aussi surjective.  $\mathcal{O}$  est alors co-hopfien. □

### 4.3 Scindements JSJ

Fixons nous un groupe  $G$  agissant par isométries, de manière minimale sur des arbres, tous considérés simpliciaux.

Une action de  $G$  sur un arbre  $T$  est dite minimale si  $T$  n'admet aucun sous-arbre propre  $G$ -invariant.

Un sous-groupe de  $G$  est dit elliptique dans  $T$  s'il fixe au moins un point de  $T$ .

Toutes les définitions et résultats que nous utilisons ici sont issues de l'article de Guirardel-Levitt [GL11].

**Définition 4.3.1.** Soient  $T$  et  $T'$  deux arbres munis d'une action minimale d'un groupe  $G$ . On dit que l'arbre  $T$  domine  $T'$  s'il existe une application  $G$ -équivariante  $f : T \rightarrow T'$ , soit  $\forall g \in G, \forall x \in T, f(gx) = gf(x)$ .

De manière équivalente,  $T$  domine  $T'$  si tout sous-groupe de  $G$  elliptique dans  $T$  est aussi elliptique dans  $T'$ .

Fixons nous un ensemble  $\mathcal{A}$  de sous-groupes de  $G$  stable par passage aux sous-groupes et par conjugaison.

On ne considère alors que des scindements de  $G$  dont les groupes d'arêtes sont dans  $\mathcal{A}$ .

Un scindement de la sorte est dit au-dessus de  $\mathcal{A}$  et son arbre de Bass-Serre correspondant est un  $\mathcal{A}$ -arbre.

**Définition 4.3.2.** Soient  $H$  un sous-groupe de  $G$  et  $T$  un  $\mathcal{A}$ -arbre.

$H$  est dit universellement elliptique s'il est elliptique dans tout  $\mathcal{A}$ -arbre.

$T$  est dit universellement elliptique si ses stabilisateurs d'arêtes le sont.

Un exemple d'arbre universellement elliptique est l'arbre de Bass-Serre correspondant à une décomposition en produit libre du groupe  $G$ .

Par contre si  $G$  est le groupe fondamental d'une surface fermée possédant deux courbes fermées simples dont le nombre d'intersection est non nul, alors les arbres duaux à ces deux courbes ne sont pas universellement elliptiques. En effet, l'élément de  $G$  correspondant à l'une de ces courbes est hyperbolique dans l'autre scindement.

**Définition 4.3.3.** Une décomposition  $JSJ$  (ou arbre  $JSJ$ ) de  $G$  au-dessus de  $\mathcal{A}$  est un  $\mathcal{A}$ -arbre  $T$  tel que :

- $T$  est universellement elliptique.
- $T$  domine tout  $\mathcal{A}$ -arbre universellement elliptique.

Le deuxième point de cette définition est une condition de maximalité.

Ainsi tout stabilisateur de sommet d'un arbre  $JSJ$  de  $G$  au-dessus de  $\mathcal{A}$  est elliptique dans tout  $\mathcal{A}$ -arbre universellement elliptique.

Cependant un arbre  $JSJ$  d'un groupe  $G$  au-dessus de  $\mathcal{A}$  n'est pas unique.

Il existe un objet canonique associé à un scindement de  $G$  au-dessus de  $\mathcal{A}$ , celui d'espace de déformation, qui fut défini par Forester de la manière suivante :

**Définition 4.3.4.** Soit  $T$  un  $\mathcal{A}$ -arbre.

L'espace de déformation de  $T$  au-dessus de  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des  $\mathcal{A}$ -arbres  $T'$  tels que  $T$  et  $T'$  se dominent l'un l'autre.

De manière équivalente, c'est l'ensemble des  $\mathcal{A}$ -arbres  $T'$  ayant les mêmes sous-groupes elliptiques que  $T$ .

En particulier tout arbre  $JSJ$  de  $G$  au-dessus de  $\mathcal{A}$  domine tout autre arbre  $JSJ$  de  $G$  d'après la définition 4.3.3.

On peut alors définir l'espace de déformation  $JSJ$  de  $G$  au-dessus de  $\mathcal{A}$  :

**Définition 4.3.5.** S'il est non vide, l'espace de déformation  $JSJ$  d'un groupe  $G$  au-dessus de  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des arbres  $JSJ$  de  $G$  au-dessus de  $\mathcal{A}$ . On le note  $\mathcal{D}_{JSJ}$ .

L'espace de déformation  $JSJ$  n'est pas défini s'il n'y a pas d'arbre  $JSJ$ .

Son existence pour une certaine classe de groupes est une conséquence du théorème d'accessibilité de Dunwoody. Elle est montrée par Guirardel et Levitt dans [GL09] :

**Théorème 4.3.6** (Guirardel-Levitt). *Soient  $G$  un groupe de présentation finie et  $\mathcal{A}$  un ensemble de sous-groupes de  $G$  stable par passage aux sous-groupes et par conjugaison. Alors l'espace de déformation  $JSJ$  de  $G$  au-dessus de  $\mathcal{A}$  existe.*

Guirardel et Levitt montrent même, dans [GL11], qu'un espace de déformation peut être identifié à un complexe simplicial, de manière analogue à l'outre espace de Culler-Vogtmann. L'espace de déformation possède alors une topologie naturelle le rendant contractile. Il est alors intéressant de faire agir un groupe sur ce complexe pour en recueillir de nouvelles informations, notamment le groupe des automorphismes extérieurs  $Out(G)$ .

Dans le cas des scindements des groupes hyperboliques à un bout au-dessus de groupes virtuellement cycliques, B.H. Bowditch montre que l'on peut construire un arbre canonique de l'espace de déformation  $JSJ$  de  $G$ . Cet arbre est alors un point fixe de l'action de  $Out(G)$  sur  $\mathcal{D}_{JSJ}$ .

Bowditch donne dans [Bow98], le théorème suivant :

**Théorème 4.3.7** (B.H. Bowditch). *Soit  $G$  un groupe hyperbolique à un bout et  $\mathcal{A}$  la classe des sous-groupes virtuellement cycliques de  $G$ .*

*Il existe un arbre  $JSJ$ , noté  $S$ , de  $G$  au-dessus de  $\mathcal{A}$ .*

*De plus les sommets de  $S$  sont de trois types selon leurs stabilisateurs :*

- *le type élémentaire, dont le stabilisateur est un groupe virtuellement cyclique maximal. Ce sommet est de valence finie dans  $S$ .*
- *le type surface, dont le stabilisateur est isomorphe à un groupe fuchsien convexe cocompact, induisant une bijection entre les stabilisateurs des arêtes adjacentes à ce sommet et les stabilisateurs des composantes de bord du coeur convexe du groupe fuchsien.*
- *le type rigide, dont le stabilisateur est un groupe non élémentaire universellement elliptique.*

*Les sommets adjacents de  $S$  ne sont jamais du même type. Si un sommet de  $S$  est de valence 2, alors ses deux sommets adjacents sont de type rigide.*

*Si  $S$  est réduit à un sommet alors  $G$  est un groupe fuchsien cocompact ou un groupe rigide au sens où il n'admet aucun scindement au-dessus de groupes virtuellement cycliques.*

*Enfin cette décomposition est canonique au sens où :  $\forall \alpha \in Aut(G), \exists h_\alpha : S \rightarrow S$  automorphisme tel que  $\forall g \in G, \forall x \in S$ , on a :  $h_\alpha(gx) = \alpha(g)h_\alpha(x)$ .*

*L'arbre  $S$  est alors invariant par tout automorphisme de  $G$ .*

**Remarque 4.3.8.** *Par définition d'un arbre  $JSJ$  d'un groupe, l'arbre  $S$  est universellement elliptique. Ainsi les stabilisateurs d'arêtes de  $S$  sont elliptiques dans tout arbre correspondant à un scindement de  $G$  au-dessus de groupes virtuellement cycliques. Les stabilisateurs de sommet de type élémentaire sont eux aussi universellement elliptiques. En effet, ils contiennent un stabilisateur d'arête d'indice fini. On peut donc utiliser la proposition 2.2.6.*

**Remarque 4.3.9.** *Il y a dans la littérature de nombreuses définitions de la rigidité. Pour nous, le type rigide est défini par le troisième point du théorème 4.3.7.*

**Remarque 4.3.10.** *Le stabilisateur d'un sommet de  $S$  de type surface est isomorphe à un groupe fuchsien convexe cocompact. Il s'identifie donc à un groupe fuchsien au sens de la*

définition 4.2.2 et le quotient de son coeur convexe est un orbifold compact avec bord. Par définition, le coeur convexe d'un groupe fuchsien est le plus petit convexe fermé non vide invariant de  $\mathbb{H}$ .

Guirardel et Levitt donnent dans [GL09], la proposition 7.6.(2), que l'on formule de la manière suivante :

**Proposition 4.3.11.** *Soient  $G$  un groupe hyperbolique à un bout,  $v$  un sommet de type surface de l'arbre JSJ  $S$  de  $G$ . On suppose le stabilisateur  $G_v$  non universellement elliptique. Si  $H$  est un sous-groupe infini de  $G_v$ , alors  $H$  fixe une arête de  $S$  incidente sur  $v$  ou alors il existe un scindement de  $G$  dans lequel  $H$  n'est pas elliptique.*

**Remarque 4.3.12.** *Le stabilisateur d'un sommet  $v$  de  $S$  de type surface peut être universellement elliptique. En effet, si  $G_v$  est isomorphe au groupe fondamental d'une surface dite "pantalon", alors toute courbe fermée simple de cette surface est homotope à l'une de ses trois composantes de bord. D'après la proposition 7.6.(1) de [GL09], cela implique que  $G_v$  est universellement elliptique.*

## 4.4 Automorphismes des groupes hyperboliques à un bout

On se fixe dans cette partie un groupe  $G$  hyperbolique à un bout.

Nous allons utiliser le scindement JSJ de Bowditch du théorème 4.3.7 afin de mieux comprendre la structure du groupe des automorphismes de  $G$ . Le but de cette partie est de montrer que le groupe modulaire de  $G$  défini en 4.4.6 est d'indice fini dans  $Aut(G)$ , généralisant ainsi un résultat de Sela au cas avec torsion.

On note  $\Gamma$  le graphe de groupes correspondant au scindement JSJ de  $G$ . Nous utilisons dans la suite les notations et résultats de G. Levitt de l'article [Lev05].

Nous commençons notre étude par la définition du groupe  $Out_0(G)$ . Nous construirons ensuite le morphisme  $\rho$  de  $Out_0(G)$  dans  $\prod_{v \in V(\Gamma)} Out(G_v)$  dont on étudiera le noyau puis l'image.

Soit  $S$  le scindement JSJ de Bowditch du groupe hyperbolique à un bout  $G$  et  $\Gamma$  le graphe de groupes correspondant.

Soit  $Aut_\Gamma(G)$  l'ensemble des automorphismes de  $G$  préservant l'arbre  $S$  au sens suivant :  $\alpha \in Aut_\Gamma(G)$  si et seulement s'il existe un automorphisme  $\alpha$ -équivariant  $h_\alpha : S \rightarrow S$  tel que  $\forall g \in G, \forall x \in S$ , on a :  $h_\alpha(gx) = \alpha(g)h_\alpha(x)$ . Montrons que, étant donné  $\alpha \in Aut_\Gamma(G)$ , l'automorphisme  $h_\alpha$  est unique.

Soit  $\tilde{h}_\alpha$  un autre automorphisme  $\alpha$ -équivariant. L'automorphisme  $h = \tilde{h}_\alpha^{-1} \circ h_\alpha$  est alors une isométrie  $G$ -équivariante de  $S$ . L'isométrie  $h$  ne peut être du type hyperbolique car sinon l'axe de  $h$  est  $G$ -invariant, ce qui contredit l'action minimale du groupe  $G$  sur l'arbre  $S$  non isométrique à une droite. L'isométrie  $h$  est alors elliptique. Si  $g \in G$  agit de manière hyperbolique sur  $S$ , alors  $h$  préserve l'axe  $A_g$  de  $g$  et en préserve l'orientation. Comme  $h$  est elliptique,  $h$  est l'identité sur  $A_g$ . L'action de  $G$  étant minimale,  $S$  est l'union des axes des éléments hyperboliques de  $G$ . L'isométrie  $h$  est donc l'identité de  $S$ , ce qui termine la démonstration.

L'application  $\alpha \mapsto h_\alpha$  est alors un morphisme de  $Aut_\Gamma(G)$  dans  $Aut(S)$ , définissant ainsi une action du groupe  $Aut_\Gamma(G)$  sur  $S$ . De plus, si  $\alpha \in Aut_\Gamma(G)$ , l'automorphisme  $h_\alpha$  induit un automorphisme de  $\Gamma$ , que l'on note encore  $h_\alpha$ , et donc une action de  $Aut_\Gamma(G)$  sur  $\Gamma$ .

D'après le théorème 4.3.7, on a  $Aut_\Gamma(G) = Aut(G)$ . On définit alors  $Aut_0(G)$  comme étant le sous-groupe d'indice fini de  $Aut(G)$  agissant trivialement sur  $\Gamma$ .

Soit  $f : Aut(G) \rightarrow Aut(\Gamma)$  le morphisme de groupes. Le groupe  $Int(G)$  des automorphismes intérieurs de  $G$  est un sous-groupe normal de  $Aut(G)$  et si  $\alpha = i_g$  avec  $g \in G$  alors  $\forall x \in S$ ,  $h_\alpha(x) = gx$ . Soient  $g \in G$ ,  $x \in S$  et  $[x]$  sa classe dans  $\Gamma$ , alors  $f(i_g)([x]) = [gx] = [x]$ , ainsi  $Int(G)$  est contenu dans  $ker f$ . Le morphisme  $f$  passe alors au quotient, donnant ainsi un morphisme de  $Out(G)$  dans  $Aut(\Gamma)$  et donc une action de  $Out(G)$  sur  $\Gamma$ . On note  $Out_0(G)$  l'image de  $Aut_0(G)$  dans  $Out(G)$ .

Soit  $v \in V(\Gamma)$  et  $\alpha \in Aut_0(G)$ . On choisit un relevé du sommet  $v$  dans l'arbre  $S$ , que l'on note encore  $v$ . Ainsi il existe  $m \in G$  tel que  $h_\alpha(v) = mv$ . Alors on a  $\alpha(G_v) = G_{h_\alpha(v)} = G_{mv} = G_v^m = i_m(G_v)$  et donc  $i_{m^{-1}} \circ \alpha(G_v) = G_v$ . Ainsi  $i_{m^{-1}} \circ \alpha \in Aut(G_v)$ . De plus un autre choix que l'élément  $m$  diffère de  $m$  par un élément de  $G_v$ , la classe de  $i_{m^{-1}} \circ \alpha$  dans  $Out(G_v)$  ne dépend donc pas du choix de  $m$ .

On peut alors définir  $\rho'_v : Aut_0(G) \rightarrow Out(G_v)$  par  $\rho'_v(\alpha) = [i_{m^{-1}} \circ \alpha]$  dans  $Out(G_v)$ . On vérifie que  $\rho'_v$  est bien un morphisme de groupes. De plus  $Int(G)$  est contenu dans  $ker \rho'_v$ , l'application  $\rho'_v$  passe donc au quotient en un morphisme  $\rho_v : Out_0(G) \rightarrow Out(G_v)$ .

$$\text{On définit alors : } \rho = \prod_{v \in V(\Gamma)} \rho_v : Out_0(G) \rightarrow \prod_{v \in V(\Gamma)} Out(G_v).$$

Montrons que le noyau de ce morphisme est engendré par les twists. Ils sont définis de la manière suivante :

**Définition 4.4.1.** Soit  $v$  un sommet de  $\Gamma$ ,  $e$  une arête de  $\Gamma$  adjacente à  $v$  et  $z \in Z_{G_v}(G_e)$ . Le twist de Dehn, noté  $D_z$ , autour de l'arête  $e$  du côté de  $v$ , est l'automorphisme extérieur de  $G$  défini de la manière suivante :

Si  $e$  est une arête séparante correspondant à un amalgame  $G = A *_e B$ , alors  $D_z$  restreint à  $A$  est l'identité et  $D_z$  restreint à  $B$  est la conjugaison par l'élément  $z$ .

Si  $e$  est non séparante correspondant à une extension HNN  $G = A *_e \langle A, t / t i_e(g) t^{-1} = i_e(g), \forall g \in G_e \rangle$ , alors  $D_z$  restreint à  $A$  est l'identité et  $D_z(t) = zt$ .

On note alors  $\mathcal{T}$  le sous-groupe de  $Out_0(G)$  engendré par tous les twists de Dehn.

**Proposition 4.4.2.** On a  $ker \rho = \mathcal{T}$ .

*Démonstration.* D'après la proposition 2.2 de [Lev05], on a  $ker \rho = BT(\Gamma)$  où  $BT(\Gamma)$  est le sous-groupe de  $Out(G)$  engendré par les bitwists autour des arêtes de  $\Gamma$ .

Le bitwist  $D_{z_v, z_w}$  autour d'une arête  $e$  de  $\Gamma$  d'extrémités  $v$  et  $w$  est l'automorphisme extérieur de  $G$  défini par deux éléments  $z_v \in N_{G_v}(G_e)$  et  $z_w \in N_{G_w}(G_e)$  tels que  $z_v$  et  $z_w$  aient la même action par conjugaison sur  $G_e$ . Avec les notations de la définition 4.4.1, si  $e$  est une arête séparante, alors  $D_{z_v, z_w}$  restreint à  $A \ni z_v$  est la conjugaison par  $z_v$  et  $D_{z_v, z_w}$  restreint à  $B \ni z_w$  est la conjugaison par  $z_w$ . Si  $e$  est non séparante,  $D_{z_v, z_w}$  est alors l'identité sur  $A$

et envoie la lettre stable  $t$  sur  $z_v t z_w^{-1}$ .

On a  $\mathcal{T} \subset BT(\Gamma)$  car si  $z \in Z_{G_v}(G_e)$  alors  $D_{z,1} = D_z$  dans  $Out(G)$ .

Réciproquement, si toute arête  $e$  de  $\Gamma$  a une extrémité  $v$  telle que  $N_{G_v}(G_e) = G_e$  alors le bitwist  $D_{z_v, z_w}$  coïncide dans  $Out(G)$  avec le bitwist  $D_{1, z_v^{-1} z_w}$  qui est un twist. Dans ce cas on a  $BT(\Gamma) \subset \mathcal{T}$ , ce qui donne l'égalité voulue.

Montrons que cette condition sur les normalisateurs des groupes d'arêtes est bien vérifiée dans le graphe  $\Gamma$ .

Notons  $V_1, V_2, V_3$  les sommets de  $\Gamma$  correspondant respectivement aux sommets de type élémentaire, surface et rigide, d'après le théorème 4.3.7.

Si une arête  $e$  de  $\Gamma$  est adjacente à un sommet  $v$  de  $V_1$  alors l'autre extrémité de  $e$  est un sommet  $w \in V_2 \cup V_3$  car des sommets adjacents de  $\Gamma$  ne sont jamais du même type. De plus, d'après 4.3.7,  $G_v$  est élémentaire maximal. D'après le lemme 4.1.11,  $N_{G_w}(G_e)$  est virtuellement cyclique et contient  $G_e$ . Or d'après le lemme 4.1.12,  $G_e$  est contenu dans un unique sous-groupe virtuellement cyclique maximal de  $G$  qui n'est autre que  $G_v$ . Ainsi  $N_{G_w}(G_e) \subset G_v$ . Le groupe  $N_{G_w}(G_e)$  stabilise alors l'arête  $e$  et donc  $N_{G_w}(G_e) = G_e$ .

Enfin supposons que  $e$  est une arête de  $\Gamma$  reliant un sommet  $v$  de type surface avec un sommet  $w$  de type rigide. D'après le théorème 4.3.7, on peut identifier  $G_v$  avec un groupe fuchsien convexe cocompact. En particulier,  $G_e$  s'identifie avec le stabilisateur d'une composante de bord  $c$  du coeur convexe de  $G_v$ . Puisque la géodésique  $c$  est l'unique géodésique  $G_e$ -invariante, le groupe  $N_{G_v}(G_e)$  préserve globalement  $c$ . Ainsi  $N_{G_v}(G_e) \subset G_e$ . On a bien  $N_{G_v}(G_e) = G_e$ , ce qui termine la démonstration.  $\square$

G. Levitt étudie davantage le groupe  $\mathcal{T}$  des twists dans la section 3 de [Lev05] en donnant la suite exacte suivante :

$$1 \rightarrow Z(G) \rightarrow \prod_{v \in V(\Gamma)} Z(G_v) \times \prod_{e \in \mathcal{E}} Z(G_e) \rightarrow \prod_{e \in E(\Gamma)} Z_{G_{o(e)}}(G_e) \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow 1$$

telle que :  $Z(G_v)$  est plongé diagonalement dans le produit  $\prod_{e \in E_v} Z_{G_v}(G_e)$  pour  $v \in V(\Gamma)$  et

$E_v$  ensemble des arêtes d'origine  $v$  ;

$Z(G_e)$  est plongé diagonalement dans  $Z_{G_v}(G_e) \times Z_{G_w}(G_e)$  si l'arête  $e$  a pour terminaisons  $v$  et  $w$ , où  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des arêtes non orientées de  $\Gamma$ .

**Définition 4.4.3.** Soit  $v$  un sommet de  $\Gamma$  de valence  $k$  et d'arêtes incidentes  $e_1, \dots, e_k$ . Pour  $1 \leq i \leq k$ , on identifie les groupes d'arêtes  $G_{e_i}$  avec leurs images dans  $G_v$  par les morphismes d'arêtes correspondants. On définit  $\mathcal{H}_v = \{G_{e_1}, \dots, G_{e_k}\}$  comme étant la structure périphérique du groupe de sommet  $G_v$ .

**Définition 4.4.4.** Soient  $v$  un sommet de  $\Gamma$  et  $\mathcal{H}_v = \{G_{e_1}, \dots, G_{e_k}\}$  la structure périphérique du groupe de sommet  $G_v$ .

Soit  $Aut_{\mathcal{H}_v}(G_v) = \{\alpha \in Aut(G_v) / \forall i \in \{1, \dots, k\}, \exists a_i \in G_v \text{ tel que } \alpha(g) = a_i g a_i^{-1}, \forall g \in G_{e_i}\}$ .  $Aut_{\mathcal{H}_v}(G_v)$  est le groupe des automorphismes de  $G_v$  qui restreint à chaque groupe de la structure périphérique est un automorphisme intérieur de  $G_v$ .

Soit  $Aut(G_v; \mathcal{H}_v) = \{\alpha \in Aut(G_v) / \forall i \in \{1, \dots, k\}, \exists a_i \in G_v \text{ tel que } \alpha(G_{e_i}) = G_{e_i}^{a_i}\}$ .

$Aut(G_v; \mathcal{H}_v)$  est le groupe des automorphismes de  $G_v$  envoyant chaque groupe d'arête de la structure périphérique sur un conjugué de lui même.

On vérifie que  $Aut_{\mathcal{H}_v}(G_v)$  et  $Aut(G_v; \mathcal{H}_v)$  sont bien des groupes où  $Aut_{\mathcal{H}_v}(G_v) < Aut(G_v; \mathcal{H}_v)$ . On note respectivement  $Out_{\mathcal{H}_v}(G_v)$  et  $Out(G_v; \mathcal{H}_v)$  les images de  $Aut_{\mathcal{H}_v}(G_v)$  et  $Aut(G_v; \mathcal{H}_v)$  dans  $Out(G_v)$ .

**Proposition 4.4.5.** On a  $\prod_{v \in V(\Gamma)} Out_{\mathcal{H}_v}(G_v) < Imp\rho < \prod_{v \in V(\Gamma)} Out(G_v; \mathcal{H}_v)$ .

Ces deux inclusions sont de plus d'indice fini.

*Démonstration.* Ces inclusions sont données par la section 2.3 de [Lev05]. De plus d'après la démonstration de la proposition 2.3 de [Lev05], si  $Out(G_e)$  est fini  $\forall e \in E(\Gamma)$ , alors  $Out_{\mathcal{H}_v}(G_v)$  est d'indice fini dans  $Out(G_v; \mathcal{H}_v)$  pour tout sommet  $v$  de  $\Gamma$ . Ceci s'applique bien dans notre cas puisque tous les groupes d'arêtes de  $\Gamma$  sont virtuellement cycliques. Donc  $Out(G_e)$  est fini,  $\forall e \in E(\Gamma)$ .  $\square$

Ce résultat est donné aussi par V. Guirardel et G. Levitt dans [GL12] au lemme 2.10.

**Définition 4.4.6.** On définit le groupe modulaire  $Mod(G)$  comme le sous-groupe des automorphismes de  $G$  agissant trivialement sur le graphe  $\Gamma$ , et dont la restriction à chaque groupe de sommet de type élémentaire ou rigide coïncide avec un automorphisme intérieur de  $G$ .

**Remarque 4.4.7.** Le groupe modulaire, tel qu'il est défini, dépend du scindement JSJ du groupe  $G$ . Cependant dans le cas des groupes hyperboliques à un bout, le groupe modulaire ne dépend pas du scindement JSJ d'après le théorème 4.3.7.

On peut, à présent, montrer le résultat suivant généralisant un résultat de Sela au cas avec torsion :

**Proposition 4.4.8.** Soit  $G$  un groupe hyperbolique à un bout et  $\Gamma$  le graphe de groupes correspondant au scindement JSJ de  $G$ . Le groupe modulaire  $Mod(G)$  est alors un sous-groupe d'indice fini de  $Aut(G)$ .

*Démonstration.* On a défini précédemment l'application  $\rho : Out_0(G) \rightarrow \prod_{v \in V(\Gamma)} Out(G_v)$  qui

d'après les propositions 4.4.2 et 4.4.5, vérifie :

$ker\rho = \mathcal{T}$  et  $\prod_{v \in V(\Gamma)} Out_{\mathcal{H}_v}(G_v) < Imp\rho < \prod_{v \in V(\Gamma)} Out(G_v; \mathcal{H}_v)$  où les inclusions sont d'indice

fini.

Soient  $V_1, V_2, V_3$  les sommets de  $\Gamma$  correspondant respectivement aux sommets de type élémentaire, surface et rigide du théorème 4.3.7. Le groupe des automorphismes extérieurs d'un groupe virtuellement cyclique est un groupe fini, ainsi  $\forall v \in V_1$ ,  $Out_{\mathcal{H}_v}(G_v)$  est un groupe fini en tant que sous-groupe de  $Out(G_v)$ . D'après [Lev05], on a aussi  $Out_{\mathcal{H}_v}(G_v)$  fini si  $v \in V_3$ , en utilisant Bestvina-Paulin et la théorie de Rips.

Le groupe  $H = \prod_{v \in V_1 \cup V_3} \{1\} \times \prod_{v \in V_2} Out_{\mathcal{H}_v}(G_v)$  est donc d'indice fini dans  $Imp\rho$ . Il est de plus

normal dans  $Imp\rho$  car  $Out_{\mathcal{H}_v}(G_v)$  est un sous-groupe normal de  $Out(G_v; \mathcal{H}_v)$ ,  $\forall v \in V(\Gamma)$ . Posons  $Out_1(G) = \rho^{-1}(H)$ , alors  $Out_1(G)$  est un sous-groupe normal d'indice fini de  $Out_0(G)$ .  $Out_0(G)$  étant lui même d'indice fini dans  $Out(G)$ , on a  $Out_1(G)$  d'indice fini dans  $Out(G)$ . Le groupe modulaire  $Mod(G)$  est alors la préimage du groupe  $Out_1(G)$  par la surjection canonique de  $Aut(G)$  dans  $Out(G)$ . Ce groupe est bien d'indice fini dans  $Aut(G)$ .  $\square$

## 4.5 Groupes hyperboliques à un bout

Le but de cette partie est de généraliser les travaux de Sela aux groupes hyperboliques à un bout en présence de torsion. Nous allons pour cela utiliser le *JSJ* de Bowditch, afin de montrer le théorème suivant :

**Théorème 4.5.1.** *Tout groupe hyperbolique à un bout est co-hopfien.*

Sela utilise dans [Sel97], le fait que tout groupe hyperbolique sans torsion, non cyclique et librement indécomposable ne contient qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes qui lui sont isomorphes.

Pour utiliser les idées de Sela, nous avons donc besoin d'un résultat similaire en présence de torsion. Ce résultat est un corollaire du théorème de T. Delzant dans [Del95] :

**Théorème 4.5.2.** *[T.Delzant] Soit  $G$  un groupe hyperbolique. Si  $G$  ne se scinde pas sur un groupe fini alors il ne contient qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes isomorphes à  $G$ .*

En s'inspirant des idées de la partie 4 de [Sel97], nous allons aussi procéder en deux étapes suivant si le scindement *JSJ* de Bowditch du théorème 4.3.7 d'un groupe hyperbolique à un bout possède un sommet de type rigide ou non.

**Théorème 4.5.3.** *Soit  $G$  un groupe hyperbolique à un bout. Supposons que son scindement *JSJ* possède un sommet de type rigide, alors  $G$  est co-hopfien.*

*Démonstration.* Soit  $\varphi : G \hookrightarrow G$  un endomorphisme injectif de  $G$ .

Supposons  $\varphi$  non surjectif. Alors  $\forall n \geq 0$  on a  $\varphi^{n+1}(G) \subsetneq \varphi^n(G)$ .

$G$  est par hypothèse un groupe à un bout donc il ne se scinde pas sur un groupe fini. Ainsi d'après le théorème de Delzant 4.5.2, il existe un nombre fini de classes de conjugaisons de sous-groupes de  $G$  isomorphes à  $G$ . Or  $\forall n \geq 0$ ,  $\varphi^n(G)$  est un sous-groupe de  $G$  isomorphe à  $G$ , ainsi  $\exists k_0, l_0$  avec  $l_0 > k_0$  et  $\exists g \in G$  tel que

$$\varphi^{k_0+l_0}(G) = g^{-1}\varphi^{k_0}(G)g \quad (*)$$

Soient  $S$  l'arbre *JSJ* de  $G$  et  $k \geq 0$ . Notons  $S_k$  l'arbre *JSJ* de  $\varphi^k(G)$ .

Les groupes  $G$  et  $\varphi^k(G)$  étant isomorphes, on a un isomorphisme  $\varphi^k$ -équivariant  $i_k : S \rightarrow S_k$  tel que  $\forall g \in G, \forall x \in S, i_k(gx) = \varphi^k(g)i_k(x)$ . Notons  $G_{k,v}$  le stabilisateur dans  $\varphi^k(G)$  d'un sommet  $v$  de  $S_k$ . Ainsi  $\forall v \in V(S)$ , on vérifie que  $\varphi^k(G_v) = G_{k,i_k(v)}$ .

Montrons que  $i_k$  envoie les sommets de type rigide de l'arbre *JSJ*  $S$  sur les sommets de



types rigides de l'arbre  $S_k$ .

Soit  $U$  le stabilisateur d'un sommet  $v$  de  $S$  de type rigide. Par définition  $U$  est non élémentaire, alors  $\varphi^k(U) = G_{k, i_k(v)}$  est aussi non élémentaire. Ainsi  $i_k(v)$  n'est pas un sommet de type élémentaire de l'arbre  $S_k$ .  $U$  est de plus universellement elliptique, donc  $U$  est elliptique dans tout arbre correspondant à un scindement élémentaire du groupe  $G$ . Donc, par isomorphisme,  $\varphi^k(U)$  est elliptique dans tout arbre correspondant à un scindement élémentaire de  $\varphi^k(G)$ . D'après la proposition 4.3.11,  $\varphi^k(U)$  ne peut être le stabilisateur d'un sommet de type surface non universellement elliptique de  $S_k$ . Le sommet  $i_k(v)$  de  $S_k$  est donc de type rigide.

D'après la remarque 4.3.12,  $\varphi^k(U)$  peut être le stabilisateur d'un sommet de type surface pantalon. Dans ce cas,  $\varphi^k(U)$  est universellement elliptique. On a bien considéré ces sommets comme étant de type rigide.

Soit  $l \geq 0$ , alors  $\varphi^{k+l}(G)$  agit aussi sur l'arbre  $S_k$  en tant que sous-groupe de  $\varphi^k(G)$ .  $U$  est de nouveau le stabilisateur d'un sommet  $v$  de  $S$  de type rigide et dans la suite le restera.  $\varphi^{k+l}(U)$  étant elliptique dans tout arbre correspondant à un scindement élémentaire de  $\varphi^{k+l}(G)$ , on a  $\varphi^{k+l}(U)$  elliptique dans  $S_k$ . Etant non élémentaire, il ne stabilise aucune arête de  $S_k$ . Par conséquent,  $\forall l \geq 0$ ,  $\varphi^{k+l}(U)$  fixe un sommet de type rigide de  $S_k$  et ne fixe que ce sommet.

Prenons maintenant  $k = k_0$  défini en (\*). On peut regarder la dynamique des sommets de  $S_{k_0}$  fixés par les itérées de  $\varphi^{l_0}$  en partant du sommet  $v_0$  fixé par  $\varphi^{k_0}(U)$ . L'image de  $\varphi^{k_0}(U)$  par les itérées de  $\varphi^{l_0}$  ne fixe que des sommets de type rigide de  $S_{k_0}$ .  $\forall p \geq 0$ , notons  $v_p$  l'unique sommet fixé par  $\varphi^{k_0+pl_0}(U)$  dans  $S_{k_0}$ . Le graphe quotient  $S/G$  ne comporte qu'un nombre fini de sommets de type rigide, il en est donc de même pour  $S_{k_0}/\varphi^{k_0}(G)$  qui lui est isomorphe. Ainsi  $\exists m_1 < m_2$  tel que  $v_{m_1}$  et  $v_{m_2}$  soient dans la même  $\varphi^{k_0}(G)$ -orbite. Posons alors  $m = m_2 - m_1 > 0$ . On a  $\varphi^{k_0+m_1l_0}(U) < G_{k_0, v_{m_1}}$  et  $\varphi^{k_0+m_2l_0}(U) < G_{k_0, v_{m_2}}$ . Donc  $\varphi^{ml_0}(G_{k_0, v_{m_1}}) < G_{k_0, v_{m_2}}$  car  $G_{k_0, v_{m_1}}$  est le stabilisateur d'un sommet de type rigide de  $S_{k_0}$  ainsi son image par  $\varphi^{ml_0}$  fixe un unique sommet de type rigide de  $S_{k_0}$ . De plus on a  $G_{k_0, v_{m_2}} = \bar{h}^{-1}G_{k_0, v_{m_1}}\bar{h}$  avec  $\bar{h} \in \varphi^{k_0}(G)$  car  $v_{m_1}$  et  $v_{m_2}$  sont dans la même  $\varphi^{k_0}(G)$ -orbite. Ainsi on a  $\varphi^{ml_0}(G_{k_0, v_{m_1}}) < \bar{h}^{-1}G_{k_0, v_{m_1}}\bar{h}$  avec  $\bar{h} \in \varphi^{k_0}(G)$ .  $S$  et  $S_{k_0}$  sont isomorphes par  $i_{k_0}$  et  $G_{k_0, v_{m_1}} = \varphi^{k_0}(G_{i_k^{-1}(v_{m_1})})$  avec  $G_{i_k^{-1}(v_{m_1})}$  stabilisateur de sommet de type rigide dans  $S$ , que l'on note de nouveau  $U$  par commodité de notation. Ainsi il existe  $U$  stabilisateur de sommet de type rigide dans la décomposition  $JSJ$  de  $G$  tel que :

$$\varphi^{ml_0}(G_{k_0, v_{m_1}}) = \varphi^{ml_0}(\varphi^{k_0}(U)) = \varphi^{k_0+ml_0}(U) < \bar{h}^{-1}\varphi^{k_0}(U)\bar{h} \text{ avec } \bar{h} \in \varphi^{k_0}(G) (**).$$

D'après (\*) on a :  $\varphi^{k_0+l_0}(G) = g^{-1}\varphi^{k_0}(G)g$ . Ainsi  $\alpha = i_g \circ \varphi^{l_0} : \varphi^{k_0}(G) \hookrightarrow \varphi^{k_0}(G)$  est un automorphisme de  $\varphi^{k_0}(G)$ . D'après la proposition 4.4.8, on a  $Mod(\varphi^{k_0}(G))$  d'indice fini dans  $Aut(\varphi^{k_0}(G))$ , ainsi  $\exists n \geq 1$ , multiple de  $m$ , tel que  $\alpha^n \in Mod(\varphi^{k_0}(G))$  et donc par définition de  $Mod(\varphi^{k_0}(G))$ ,  $\exists y \in \varphi^{k_0}(G)$  tel que  $\alpha^n|_{\varphi^{k_0}(U)} = i_{y^{-1}}|_{\varphi^{k_0}(U)}$ .

$$\text{On a : } \alpha^n = (i_g \circ \varphi^{l_0})^n = i_{g\varphi^{l_0}(g)\dots\varphi^{(n-1)l_0}(g)} \circ \varphi^{nl_0}.$$

Posons  $z = \varphi^{l_0}(g) \dots \varphi^{(n-1)l_0}(g) \in \varphi^{l_0}(G) \subsetneq \varphi^{k_0}(G)$  car  $l_0 > k_0$ , alors on a :

$$\forall u \in U, \alpha^n(\varphi^{k_0}(u)) = y^{-1}\varphi^{k_0}(u)y = i_{gz}(\varphi^{k_0+nl_0}(u)) \text{ ainsi } \varphi^{k_0+nl_0}(u) = z^{-1}g^{-1}y^{-1}\varphi^{k_0}(u)ygz.$$

Prenons  $l = nl_0$ , alors  $\forall u \in U, \varphi^{k_0+l}(u) = z^{-1}g^{-1}y^{-1}\varphi^{k_0}(u)ygz$  avec  $y, z \in \varphi^{k_0}(G)$ .

De plus d'après (\*\*), on a  $\varphi^{k_0+l}(U) < h^{-1}\varphi^{k_0}(U)h$  avec  $h \in \varphi^{k_0}(G)$ .  
 Donc  $\forall u \in U, \exists \bar{u} \in U$  tel que  $\varphi^{k_0+l}(u) = h^{-1}\varphi^{k_0}(\bar{u})h$  avec  $h \in \varphi^{k_0}(G)$ .  
 Ainsi  $\forall u \in U$

$$\varphi^l(\varphi^{k_0+l}(u)) = \varphi^l(h^{-1})\varphi^l(h\varphi^{k_0+l}(u)h^{-1})\varphi^l(h) \quad (1)$$

$$= \varphi^l(h^{-1})\varphi^l(\varphi^{k_0}(\bar{u}))\varphi^l(h) \quad (2)$$

$$= \varphi^l(h^{-1})z^{-1}g^{-1}y^{-1}\varphi^{k_0}(\bar{u})ygz\varphi^l(h) \quad (3)$$

$$= \varphi^l(h^{-1})z^{-1}g^{-1}y^{-1}h\varphi^{k_0+l}(u)h^{-1}ygz\varphi^l(h) \quad (4)$$

De plus  $\varphi^l(\varphi^{k_0+l}(u)) = \varphi^l(z^{-1}g^{-1}y^{-1}\varphi^{k_0}(u)ygz) = \varphi^l(z^{-1}g^{-1}y^{-1})\varphi^{l+k_0}(u)\varphi^l(ygz)$ .

Ainsi on a :  $\varphi^l(h^{-1})z^{-1}g^{-1}y^{-1}h\varphi^{k_0+l}(u)h^{-1}ygz\varphi^l(h) = \varphi^l(z^{-1}g^{-1}y^{-1})\varphi^{l+k_0}(u)\varphi^l(ygz)$ .

Donc  $\varphi^l(ygz h^{-1})z^{-1}g^{-1}y^{-1}h\varphi^{k_0+l}(u)h^{-1}ygz\varphi^l(hz^{-1}g^{-1}y^{-1}) = \varphi^{l+k_0}(u), \forall u \in U$ .

Alors  $x = \varphi^l(ygz h^{-1})z^{-1}g^{-1}y^{-1}h \in Z_G(\varphi^{l+k_0}(U))$ . Posons  $a = \varphi^l(ygz h^{-1})z^{-1} \in \varphi^{k_0}(G)$  et  $b = y^{-1}h \in \varphi^{k_0}(G)$ . Alors on a  $x = ag^{-1}b \in Z_G(\varphi^{l+k_0}(U))$  (\*\*\*) .

$U$  est le stabilisateur d'un sommet de type rigide de  $S$ , il est donc non élémentaire. Par conséquent,  $\forall n \geq 0, \varphi^n(U)$  est aussi non élémentaire. D'après la proposition 4.1.14,  $Z_G(\varphi^n(U))$  est alors fini,  $\forall n \geq 0$ . Il existe donc  $p \geq 0$  tel que  $x^p = 1$ .

D'après (\*), on a  $\varphi^{k_0+l_0}(G) = g^{-1}\varphi^{k_0}(G)g$ . Or par hypothèse on a  $\varphi^{k_0+l_0}(G) \subsetneq \varphi^{k_0}(G)$  donc  $\varphi^{k_0}(G) \subsetneq g\varphi^{k_0}(G)g^{-1}$ . On a  $g^{-1} = a^{-1}xb^{-1}$  donc  $\varphi^{k_0}(G) \subsetneq g\varphi^{k_0}(G)g^{-1} = bx^{-1}a\varphi^{k_0}(G)a^{-1}xb^{-1}$ .

Donc  $\varphi^{k_0}(G) \subsetneq x^{-1}\varphi^{k_0}(G)x$  car  $a, b \in \varphi^{k_0}(G)$ . Alors  $\forall n \geq 1$ , on a  $\varphi^{k_0}(G) \subsetneq x^{-n}\varphi^{k_0}(G)x^n$ .

En particulier, pour  $n = p$ , on a  $\varphi^{k_0}(G) \subsetneq x^{-p}\varphi^{k_0}(G)x^p = \varphi^{k_0}(G)$ , contradiction.

L'endomorphisme  $\varphi$  est donc surjectif et  $G$  est alors co-hopfien.  $\square$

**Théorème 4.5.4.** *Soit  $G$  un groupe hyperbolique à un bout. Supposons que son scindement  $JSJ$  ne possède aucun sommet de type rigide, alors  $G$  est co-hopfien.*

*Démonstration.* Soit  $G$  un groupe hyperbolique à un bout,  $S$  son arbre  $JSJ$  sur lequel agit  $G$  et  $\Gamma$  le graphe quotient.

$\Gamma$  possède forcément un sommet de type surface ou rigide car sinon  $\Gamma$  n'est réduit qu'à un sommet de type élémentaire car les sommets adjacents de  $\Gamma$  ne sont pas du même type et donc  $G$  serait virtuellement cyclique soit à 2 bouts, contradiction.

De plus  $\Gamma$  ne possède aucun sommet de type rigide par hypothèse, alors  $\Gamma$  possède au moins un sommet de type surface. Nous avons alors deux cas :  $\Gamma$  est réduit à un point et donc  $G$  est un groupe fuchsien cocompact ou  $\Gamma$  ne possède que des arêtes adjacentes à un sommet de type surface et de type élémentaire.

- Supposons que  $G$  soit un groupe fuchsien cocompact.

Alors d'après le théorème 4.2.1,  $G$  est co-hopfien.

- Supposons que  $\Gamma$  ne possède que des arêtes adjacentes à un sommet de type surface et de type élémentaire.

On reprend ci-dessous la même stratégie que pour le théorème 4.5.3 en prenant un sommet de type élémentaire au lieu d'un sommet rigide.

Soit  $\varphi : G \hookrightarrow G$  un endomorphisme injectif de  $G$ .

Supposons  $\varphi$  non surjectif. Alors  $\forall n \geq 0$  on a  $\varphi^{n+1}(G) \subsetneq \varphi^n(G)$ .

$G$  est par hypothèse un groupe à un bout donc il ne se scinde pas sur un groupe fini. Ainsi d'après le théorème de Delzant 4.5.2, il existe un nombre fini de classes de conjugaisons de sous-groupes de  $G$  isomorphes à  $G$ . Or  $\forall n \geq 0$ ,  $\varphi^n(G)$  est un sous-groupe de  $G$  isomorphe à  $G$ , ainsi  $\exists k_0, l_0$  avec  $l_0 > k_0$  et  $\exists g \in G$  tel que

$$\varphi^{k_0+l_0}(G) = g^{-1}\varphi^{k_0}(G)g \quad (*)$$

Soient  $S$  l'arbre  $JSJ$  de  $G$ ,  $k \geq 0$ . Notons  $S_k$  l'arbre  $JSJ$  de  $\varphi^k(G)$ .

Les groupes  $G$  et  $\varphi^k(G)$  étant isomorphes, on a une isométrie équivariante par  $\varphi^k$ , notée  $i_k$ , entre  $S$  et  $S_k$ . Ainsi  $\forall x \in S$  et  $\forall g \in G$ , on a  $i_k(gx) = \varphi^k(g)i_k(x)$ . Notons  $G_{k,v}$  le stabilisateur d'un sommet  $v$  de  $S_k$  dans  $\varphi^k(G)$ . Alors  $\forall v \in V(S)$ , on a  $\varphi^k(G_v) = G_{k,i_k(v)}$ .

Montrons que  $i_k$  envoie les sommets de  $S$  d'un type donné (élémentaire ou surface) sur un sommet de  $S_k$  de même type.

Soit  $H$  le stabilisateur d'un sommet de  $S$  de type surface. Par définition ce groupe est non élémentaire. Son image  $\varphi^k(H)$  est donc non élémentaire aussi. Le sommet de  $S_k$  stabilisé par  $\varphi^k(H)$  est donc aussi de type surface. Soit  $U$  le stabilisateur d'un sommet de  $S$  qui n'est pas de type surface. Il est donc élémentaire.

Le même argument pour  $(\varphi^k)^{-1}$  montre que seul un sommet de type surface peut être envoyé sur un sommet de type surface par  $i_k$ . Par bijectivité, l'isométrie  $i_k$  envoie un sommet de type élémentaire sur un sommet de type élémentaire.

Soit  $U$  un des groupes de sommets élémentaires de la décomposition  $JSJ$  de  $G$ .

Soit  $l \geq 1$ , d'après ce qui précède  $\varphi^{k+l}(U)$  fixe un sommet de type élémentaire dans  $S_{k+l}$ .

Par ailleurs, montrons que  $\varphi^{k+l}(U)$ , en tant que sous-groupe de  $\varphi^k(G)$ , est elliptique dans  $S_k$ .  $\varphi^{k+l}(G)$  agit aussi sur l'arbre  $S_k$  en tant que sous-groupe de  $\varphi^k(G)$ . Or d'après la remarque 4.3.8,  $G$  n'admet aucun scindement élémentaire dans lequel  $U$  est non elliptique. Ainsi, par isomorphisme,  $\varphi^{k+l}(G)$  n'admet aussi aucun scindement élémentaire dans lequel  $\varphi^{k+l}(U)$  est non elliptique. Alors en regardant l'action de  $\varphi^{k+l}(G)$  sur  $S_k$ , on a  $\varphi^{k+l}(U)$  elliptique dans  $S_k$ . Par conséquent  $\varphi^{k+l}(U)$  fixe un sommet  $v$  de  $S_k$ .

Si  $v$  est un sommet de type surface, alors d'après la proposition 4.3.11,  $\varphi^{k+l}(U)$  fixe une arête de  $S_k$  incidente sur  $v$ .  $\varphi^{k+l}(U)$  fixe alors un sommet adjacent à  $v$ , qui est du type élémentaire d'après le scindement  $JSJ$  de Bowditch.

Par conséquent,  $\forall l \geq 0$ ,  $\varphi^{k+l}(U)$  fixe au moins un sommet de type élémentaire de  $S_k$ . Observons que  $\varphi^{k+l}(U)$  ne fixe qu'un unique sommet de type élémentaire de  $S_k$ . En effet, le stabilisateur d'une arête adjacente à un sommet de type surface est son propre normalisateur d'après le lemme 4.1.12 dans ce stabilisateur, et le stabilisateur d'une composante de bord du coeur convexe associé à la surface n'en fixe qu'une.

Prenons  $k = k_0$ , on peut alors regarder la dynamique des sommets de type élémentaire de  $S_{k_0}$  fixés par les itérées de  $\varphi^{l_0}$  en partant du sommet  $v_0$  fixé par  $\varphi^{k_0}(U)$ . L'image de  $\varphi^{k_0}(U)$  par les itérées de  $\varphi^{l_0}$  fixe des sommets élémentaires de  $S_{k_0}$ .

$\forall p \geq 0$ , notons  $v_p$  un sommet élémentaire fixé par  $\varphi^{k_0+pl_0}(U)$  dans  $S_{k_0}$ .

Le graphe quotient  $S/G$  ne comporte qu'un nombre fini de sommets de type élémentaire, il en est donc de même pour  $S_{k_0}/\varphi^{k_0}(G)$  qui lui est isomorphe, ainsi  $\exists m_1 < m_2$  tel que  $v_{m_1}$  et  $v_{m_2}$  soient dans la même  $\varphi^{k_0}(G)$ -orbite. Posons  $m = m_2 - m_1 > 0$ .

Alors on a  $\varphi^{k_0+m_1l_0}(U) < G_{k_0,v_{m_1}}$  et  $\varphi^{k_0+m_2l_0}(U) < G_{k_0,v_{m_2}}$ .

Donc  $\varphi^{ml_0}(G_{k_0,v_{m_1}}) < G_{k_0,v_{m_2}}$  car  $G_{k_0,v_{m_1}}$  est le stabilisateur d'un sommet de type élémentaire de  $S_{k_0}$  ainsi son image par  $\varphi^{ml_0}$  fixe un unique sommet de type élémentaire de  $S_{k_0}$ .

De plus on a  $G_{k_0,v_{m_2}} = \bar{h}^{-1}G_{k_0,v_{m_1}}\bar{h}$  avec  $\bar{h} \in \varphi^{k_0}(G)$  car  $v_{m_1}$  et  $v_{m_2}$  sont dans la même orbite. Ainsi on a  $\varphi^{ml_0}(G_{k_0,v_{m_1}}) < \bar{h}^{-1}G_{k_0,v_{m_1}}\bar{h}$  avec  $\bar{h} \in \varphi^{k_0}(G)$ .

$S$  et  $S_{k_0}$  sont isométriques par  $i_{k_0}$  et  $G_{k_0,v_{m_1}} = \varphi^{k_0}(G_{i_{k_0}^{-1}(v_{m_1})})$  avec  $G_{i_{k_0}^{-1}(v_{m_1})}$  groupe de type élémentaire dans  $S$ . Notons de nouveau  $U$  ce groupe de type élémentaire dans  $S$  par commodité de notation, alors il existe  $U$  groupe de type élémentaire dans la décomposition  $JSJ$  de  $G$  tel que :

$$\varphi^{ml_0}(G_{k_0,v_{m_1}}) = \varphi^{ml_0}(\varphi^{k_0}(U)) = \varphi^{k_0+ml_0}(U) < \bar{h}^{-1}\varphi^{k_0}(U)\bar{h} \text{ avec } \bar{h} \in \varphi^{k_0}(G) (**).$$

D'après (\*) on a :  $\varphi^{k_0+l_0}(G) = g^{-1}\varphi^{k_0}(G)g$ . Ainsi  $\alpha = i_g \circ \varphi^{l_0} : \varphi^{k_0}(G) \hookrightarrow \varphi^{k_0}(G)$  est un automorphisme. D'après la proposition 4.4.8, on a  $Mod(\varphi^{k_0}(G))$  d'indice fini dans  $Aut(\varphi^{k_0}(G))$ , ainsi  $\exists n \geq 1$ , multiple de  $m$ , tel que  $\alpha^n \in Mod(\varphi^{k_0}(G))$  et donc par définition de  $Mod(\varphi^{k_0}(G))$ ,  $\exists y \in \varphi^{k_0}(G)$  tel que  $\alpha^n_{|\varphi^{k_0}(U)} = i_{y^{-1}|_{\varphi^{k_0}(U)}}$ .

On a :  $\alpha^n = (i_g \circ \varphi^{l_0})^n = i_{g\varphi^{l_0}(g)\dots\varphi^{(n-1)l_0}(g)} \circ \varphi^{nl_0}$ .

Posons  $z = \varphi^{l_0}(g) \dots \varphi^{(n-1)l_0}(g) \in \varphi^{l_0}(G) \not\subseteq \varphi^{k_0}(G)$  car  $l_0 > k_0$ , alors on a :

$$\forall u \in U, \alpha^n(\varphi^{k_0}(u)) = y^{-1}\varphi^{k_0}(u)y = i_{gz}(\varphi^{k_0+nl_0}(u))$$

$$\text{ainsi } \varphi^{k_0+nl_0}(u) = z^{-1}g^{-1}y^{-1}\varphi^{k_0}(u)ygz.$$

Ainsi, prenons  $l = nl_0$ , on a :

$$\forall u \in U, \varphi^{k_0+l}(u) = z^{-1}g^{-1}y^{-1}\varphi^{k_0}(u)ygz \text{ avec } y, z \in \varphi^{k_0}(G).$$

De plus d'après (\*\*), on a  $\varphi^{k_0+l}(U) < h^{-1}\varphi^{k_0}(U)h$  avec  $h \in \varphi^{k_0}(G)$ .

Donc  $\forall u \in U, \exists \bar{u} \in U$  tel que  $\varphi^{k_0+l}(u) = h^{-1}\varphi^{k_0}(\bar{u})h$  avec  $h \in \varphi^{k_0}(G)$ .

Ainsi  $\forall u \in U$

$$\varphi^l(\varphi^{k_0+l}(u)) = \varphi^l(h^{-1})\varphi^l(h\varphi^{k_0+l}(u)h^{-1})\varphi^l(h) \quad (5)$$

$$= \varphi^l(h^{-1})\varphi^l(\varphi^{k_0}(\bar{u}))\varphi^l(h) \quad (6)$$

$$= \varphi^l(h^{-1})z^{-1}g^{-1}y^{-1}\varphi^{k_0}(\bar{u})ygz\varphi^l(h) \quad (7)$$

$$= \varphi^l(h^{-1})z^{-1}g^{-1}y^{-1}h\varphi^{k_0+l}(u)h^{-1}ygz\varphi^l(h) \quad (8)$$

De plus  $\varphi^l(\varphi^{k_0+l}(u)) = \varphi^l(z^{-1}g^{-1}y^{-1}\varphi^{k_0}(u)ygz) = \varphi^l(z^{-1}g^{-1}y^{-1})\varphi^{l+k_0}(u)\varphi^l(ygz)$ .

Ainsi on a :  $\varphi^l(h^{-1})z^{-1}g^{-1}y^{-1}h\varphi^{k_0+l}(u)h^{-1}ygz\varphi^l(h) = \varphi^l(z^{-1}g^{-1}y^{-1})\varphi^{l+k_0}(u)\varphi^l(ygz)$ .

Donc  $\varphi^l(ygz h^{-1})z^{-1}g^{-1}y^{-1}h\varphi^{k_0+l}(u)h^{-1}ygz\varphi^l(hz^{-1}g^{-1}y^{-1}) = \varphi^{l+k_0}(u)$ ,  $\forall u \in U$ .

Alors  $x = \varphi^l(ygz h^{-1})z^{-1}g^{-1}y^{-1}h \in Z_G(\varphi^{l+k_0}(U))$ .

Posons  $a = \varphi^l(ygz h^{-1})z^{-1} \in \varphi^{k_0}(G)$  et  $b = y^{-1}h \in \varphi^{k_0}(G)$ .

Alors on a  $x = ag^{-1}b \in Z_G(\varphi^{l+k_0}(U))$  (\*\*\*) .

Regardons maintenant l'action de  $\varphi^{k_0+l}(U)$  sur l'arbre  $JSJS$  de  $G$ . On a vu que  $\varphi^{k_0+l}(U)$  est elliptique dans  $S$  et fixe un sommet de type élémentaire. Notons  $w$  ce sommet de  $S$ , alors on a  $\varphi^{k_0+l}(U) < G_w$ . L'image  $\varphi^{k_0+l}(U)$  est un sous-groupe infini de  $G_w$  car  $U$  l'est, et donc d'après le lemme 4.1.10,  $\varphi^{k_0+l}(U)$  est d'indice fini dans  $G_w$ . De plus  $N_G(\varphi^{k_0+l}(U))$  est aussi virtuellement cyclique d'après 4.1.11. D'après le théorème 4.3.7 et le lemme 4.1.12,  $G_w$  est l'unique sous-groupe élémentaire maximal de  $G$  contenant  $\varphi^{k_0+l}(U)$ , ainsi  $N_G(\varphi^{k_0+l}(U))$  est un sous-groupe de  $G_w$ . Par conséquent on a  $Z_G(\varphi^{k_0+l}(U)) < G_w$ .

Ainsi  $\varphi^{k_0+l}(U) \cap Z_G(\varphi^{k_0+l}(U))$  est un sous-groupe d'indice fini de  $Z_G(\varphi^{k_0+l}(U))$ .

D'après  $(***)$ ,  $x \in Z_G(\varphi^{k_0+l}(U))$ ; alors il existe  $p \geq 0$  tel que :

$$x^p \in \varphi^{k_0+l}(U) \subset \varphi^{k_0+l}(G) \subset \varphi^{k_0}(G).$$

D'après  $(*)$ , on a  $\varphi^{k_0+l_0}(G) = g^{-1}\varphi^{k_0}(G)g$ . Or par hypothèse on a  $\varphi^{k_0+l_0}(G) \subsetneq \varphi^{k_0}(G)$  donc  $\varphi^{k_0}(G) \subsetneq g\varphi^{k_0}(G)g^{-1}$ . On a  $g^{-1} = a^{-1}xb^{-1}$  donc  $\varphi^{k_0}(G) \subsetneq g\varphi^{k_0}(G)g^{-1} = bx^{-1}a\varphi^{k_0}(G)a^{-1}xb^{-1}$ .

Donc  $\varphi^{k_0}(G) \subsetneq x^{-1}\varphi^{k_0}(G)x$  car  $a, b \in \varphi^{k_0}(G)$ . Alors  $\forall n \geq 1$ , on a  $\varphi^{k_0}(G) \subsetneq x^{-n}\varphi^{k_0}(G)x^n$ .

Ainsi pour  $n = p$ , on a  $\varphi^{k_0}(G) \subsetneq x^{-p}\varphi^{k_0}(G)x^p = \varphi^{k_0}(G)$ , contradiction.

Donc  $\varphi$  est surjective et par conséquent  $G$  est co-hopfien.  $\square$

## 4.6 Accessibilité et détermination algorithmique

Prenons la définition utilisée par P. Scott et T. Wall dans [SW79] :

**Définition 4.6.1.** *Soit  $G$  un groupe de type fini.*

*$G$  est dit 0-accessible s'il est au plus à un bout.*

*$G$  est dit  $n$ -accessible, pour  $n \geq 1$ , si  $G$  admet un scindement au-dessus de sous-groupes finis tel que chaque facteur du scindement soit  $(n-1)$ -accessible.*

*$G$  est dit alors accessible s'il existe un entier  $n$  tel que  $G$  soit  $n$ -accessible.*

D'après un théorème de Stallings, un groupe est au plus à un bout si et seulement s'il ne se scinde pas au-dessus d'un groupe fini. Cela justifie le fait que les facteurs d'un scindement maximal au-dessus de sous-groupes finis d'un groupe accessible sont bien au plus à un bout. On trouve alors assez naturellement dans [SW79], la proposition suivante :

**Proposition 4.6.2.** *Soit  $G$  un groupe de type fini.*

*$G$  est accessible si et seulement si  $G$  est le groupe fondamental d'un graphe de groupes fini avec ses groupes d'arêtes finis et ses groupes de sommets au plus à un bout.*

**Définition 4.6.3.** *Soit  $\Gamma$  un graphe de groupes fini.*

*$\Gamma$  est dit graphe de Stallings-Dunwoody si ses groupes d'arêtes sont finis et ses groupes de sommets sont au plus à un bout.*

**Remarque 4.6.4.** *Les graphes de Stallings-Dunwoody ne sont pas tous réduits et il n'y a pas une manière canonique de le rendre de la sorte. Par contre, on ne change pas l'espace de déformation d'un graphe en le rendant réduit. En effet, écraser certaines arêtes de terminaisons différentes du graphe dont le morphisme d'arête est surjectif sur l'un des groupes de sommets, ne change pas l'espace de déformation du graphe car ce procédé ne fait apparaître*

aucun sous-groupe elliptique nouveau dans les arbres correspondants. On dit que ces écrasements sont admissibles.

Étant donné un graphe de Stallings-Dunwoody, on peut alors rendre ce graphe réduit et de manière algorithmique. En effet, les groupes d'arêtes du graphe étant tous finis et en nombre fini, on peut lister tous les éléments des groupes d'arêtes de terminaisons différentes dans chacun des groupes de sommets correspondants. Il suffit alors de comparer les générateurs de ces groupes de sommets avec les éléments du groupe d'arête incidente. Cette comparaison des éléments se fera à l'aide du problème du mot qui, dans notre cas, est bien résoluble dans les groupes de sommets du graphe. En effet, d'après la remarque 4.1.18, les groupes de sommets des graphes de Stallings-Dunwoody que nous utilisons sont hyperboliques.

Deux résultats bien connus sur les groupes accessibles sont donnés par P.A. Linnell et M. J. Dunwoody. Linnell montre dans [Lin83] le théorème suivant :

**Théorème 4.6.5** (P.A. Linnell). *Soit  $G$  un groupe de type fini.*

*S'il existe un entier  $N$  tel que tous les sous-groupes finis de  $G$  sont d'ordre au plus  $N$ , alors le groupe  $G$  est accessible.*

Dunwoody le montre, dans [Dun85], pour la classe de groupes suivante :

**Théorème 4.6.6** (M.J. Dunwoody). *Tout groupe de présentation finie est accessible.*

En particulier, les groupes hyperboliques ont un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes finis et sont des groupes de présentation finie.

Ils vérifient les conditions de Linnell et Dunwoody, on obtient alors le corollaire suivant :

**Corollaire 4.6.7.** *Tout groupe hyperbolique est accessible.*

Alors d'après la proposition 4.6.2, tout groupe hyperbolique est le groupe fondamental d'un graphe de groupes fini avec ses groupes d'arêtes finis et ses groupes de sommets au plus à un bout. La question qui se pose est : existe-t-il un algorithme qui, étant donné un groupe hyperbolique, permet d'obtenir un graphe de groupes de ce type? C'est V. Gerashimov qui donna, dans les années 90, une réponse à cette question en donnant un algorithme permettant de calculer le nombre de bouts d'un groupe hyperbolique. F. Dahmani et D. Groves ont ensuite utilisé ses idées pour les généraliser aux groupes relativement hyperboliques dans [DG08b]. En se restreignant au cas hyperbolique, on trouve dans [DG08b] le théorème suivant :

**Théorème 4.6.8.** [F. Dahmani et D. Groves] *Il existe un algorithme qui, étant donné une présentation finie d'un groupe hyperbolique, permet d'obtenir un graphe de groupes de Stallings-Dunwoody de ce groupe.*

Une fois obtenu un graphe de Stallings-Dunwoody  $\Gamma$  d'un groupe hyperbolique, il nous faut un algorithme permettant de calculer les graphes écrasés  $\Gamma_e$  pour toute arête  $e$  de  $\Gamma$ , afin de pouvoir utiliser le théorème de caractérisation globale 3.5.4.

**Remarque 4.6.9.** Soit  $e$  une arête du graphe de groupes  $\Gamma$ . Etant donnée une présentation du graphe  $\Gamma$  comme présentation de ses groupes de sommets et d'arêtes ainsi que de ses morphismes d'attachements, on peut donner une présentation du graphe écrasé  $\Gamma_e$ .

- Si  $e$  est une arête séparante de  $\Gamma$  d'extrémités  $v$  et  $w$ , alors  $\Gamma \setminus e$  est composé de deux sous-graphes connexes disjoints. Notons les  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Après avoir fait le choix d'un sous-arbre maximal de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , notés respectivement  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , on donne une présentation des groupes fondamentaux de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  comme le quotient des groupes de Bass par les sous-groupes distingués engendrés par les arêtes de  $\tau_1$  et  $\tau_2$  (voir définition 2.1.4).

Le groupe d'arête  $G_e$  de l'arête  $e$  est plongé par les morphismes d'attachements  $i_e$  et  $i_{\bar{e}}$  dans les groupes de sommets  $G_v$  et  $G_w$  en tant que sous-groupes des groupes fondamentaux de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

$\Gamma_e$  correspond alors à l'amalgame  $\pi_1(\Gamma_1) \underset{G_e}{*} \pi_1(\Gamma_2)$ .

- Si  $e$  est une arête non séparante de  $\Gamma$  d'extrémités  $v$  et  $w$ , alors  $\Gamma \setminus e$  est encore un graphe connexe. Notons le  $\Gamma'$ . Après avoir fait le choix d'un sous-arbre maximal  $\tau$  de  $\Gamma'$ , on donne une présentation du groupe fondamental de  $\Gamma'$  comme le quotient du groupe de Bass de  $\Gamma'$  par le sous-groupe distingué engendré par les arêtes de  $\tau$  (voir définition 2.1.4).

Le groupe d'arête  $G_e$  de l'arête  $e$  est plongé par les morphismes d'attachements  $i_e$  et  $i_{\bar{e}}$  dans les groupes de sommets  $G_v$  et  $G_w$  en tant que sous-groupes du groupe fondamental de  $\Gamma'$ .

$\Gamma_e$  correspond alors à l'extension HNN  $\pi_1(\Gamma') \underset{G_e}{*}$ .

Dans toute la suite, les algorithmes utilisés prennent en entrée une présentation finie du groupe considéré. Dans [DG11], on peut trouver le lemme suivant :

**Lemme 4.6.10.** Il existe un algorithme qui calcule un ensemble de générateurs du centralisateur et du normalisateur d'un sous-groupe fini d'un groupe hyperbolique.

**Proposition 4.6.11.** Soient  $G$  un groupe hyperbolique et  $H$  un sous-groupe fini.

Il existe un algorithme qui décide si le normalisateur  $N_G(H)$  et  $H$  sont égaux.

*Démonstration.* D'après le lemme 4.6.10, il existe un algorithme calculant un ensemble de générateurs de  $N_G(H)$ .

$H$  étant fini, on peut lister tous les éléments de  $H$ . On teste ensuite si chaque générateur de  $N_G(H)$  est un élément de  $H$  par le problème du mot. Si un générateur n'est pas dans la liste, alors  $N_G(H)$  contient strictement  $H$ . Sinon on a bien égalité.  $\square$

**Proposition 4.6.12.** Soient  $G$  un groupe hyperbolique,  $A$  et  $B$  deux sous-groupes finis isomorphes de  $G$ .

Il existe un algorithme qui décide si  $A$  et  $B$  sont conjugués dans  $G$ .

*Démonstration.*  $A$  et  $B$  étant deux sous-groupes finis isomorphes de  $G$ , ils ont même cardinal.

On peut alors lister toutes les bijections de  $A$  dans  $B$ .

Soit  $\sigma : A \rightarrow B$  l'une de ces bijections. On utilise alors le problème de conjugaison simultanée dans  $G$  au sens où l'on se demande si, pour tout élément  $a$  de  $A$ , les éléments  $a$  et  $\sigma(a)$  sont conjugués par un même élément de  $G$ . Si tel est le cas alors  $A$  et  $B$  sont conjugués par cet

élément. Sinon on réitère le problème pour une autre bijection. Si le problème de conjugaison simultanée n'est vérifié pour aucune bijection de  $A$  dans  $B$ , alors ces sous-groupes ne sont pas conjugués dans  $G$ .  $\square$

**Théorème 4.6.13.** *Il existe un algorithme qui, étant donné un groupe hyperbolique, décide si ce groupe est co-hopfien ou non.*

*Démonstration.* Soit  $G$  un groupe hyperbolique donné, ainsi que sa présentation. Le théorème 4.6.8 nous donne un algorithme permettant d'obtenir un graphe de groupes  $\Gamma$  de Stallings-Dunwoody. Les groupes de sommets de  $\Gamma$  sont au plus à un bout, hyperboliques d'après la remarque 4.1.18 et co-hopfiens d'après le théorème 4.5.1. De plus les groupes d'arêtes sont finis par définition d'un graphe de groupes de Stallings-Dunwoody. On peut aussi rendre ce graphe de groupes réduit de manière algorithmique, d'après la remarque 4.6.4, sans changer son groupe fondamental. On peut alors maintenant utiliser le théorème de caractérisation globale 3.5.4.

Pour toute arête  $e$  de  $\Gamma$ , on peut calculer le graphe écrasé  $\Gamma_e$  d'après la remarque 4.6.9.

Si  $\Gamma_e$  est un amalgame  $A *__{G_e} B$ , alors on utilise l'algorithme de la proposition 4.6.11 appliqué au sous-groupe fini  $i_{\bar{e}}(G_e)$  dans  $A$ , ainsi qu'à  $i_e(G_e)$  dans  $B$ . Si le normalisateur de  $i_{\bar{e}}(G_e)$  dans  $A$  contient strictement  $i_{\bar{e}}(G_e)$  et si le normalisateur de  $i_e(G_e)$  dans  $B$  contient strictement  $i_e(G_e)$ , alors l'algorithme s'arrête et  $G$  est non co-hopfien. Sinon on passe à une autre arête de  $\Gamma$ .

Si  $\Gamma_e$  est une extension HNN  $A *__{G_e}$ , alors on utilise l'algorithme de la proposition 4.6.11 appliqué au sous-groupe fini  $i_{\bar{e}}(G_e)$  dans  $A$ , ainsi qu'à  $i_e(G_e)$  dans  $A$ . On utilise aussi l'algorithme de la proposition 4.6.12 appliqué aux sous-groupes finis  $i_e(G_e)$  et  $i_{\bar{e}}(G_e)$  dans  $A$ . Si le normalisateur de  $i_e(G_e)$  dans  $A$  contient strictement  $i_e(G_e)$  et si le normalisateur de  $i_{\bar{e}}(G_e)$  dans  $A$  contient strictement  $i_{\bar{e}}(G_e)$ , alors l'algorithme s'arrête et  $G$  est non co-hopfien. Si  $i_{\bar{e}}(G_e)$  et  $i_e(G_e)$  sont conjugués dans  $A$ , l'algorithme s'arrête aussi et  $G$  est non co-hopfien. Sinon on passe à une autre arête de  $\Gamma$ .

Si l'algorithme ne s'est arrêté pour aucune arête de  $\Gamma$ , il certifie alors, en un temps fini pour chaque arête, que l'on a bien l'assertion 4 du théorème 3.5.4. D'après ce théorème, le groupe  $G$  est alors co-hopfien.  $\square$

## Références

- [BH99] M.R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer **319** (1999).
- [Bow98] B.H. Bowditch, *Cut points and canonical splittings of hyperbolic groups*, Acta Math. **180** (1998), 145–186.
- [CDP90] M. Coornaert, T. Delzant, and A. Papadopoulos, *Notes sur les groupes hyperboliques de Gromov*, Lecture Notes in Math. **1441** (1990).
- [Del95] T. Delzant, *L'image d'un groupe dans un groupe hyperbolique*, Comment. Math. Helvetici **70** (1995), 267–284.
- [DG08a] F. Dahmani and D. Groves, *The isomorphism problem for toral relatively hyperbolic groups*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. **107** (2008), 211–290.



- [DG08b] ———, *Detecting free splittings in relatively hyperbolic groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **360**(12) (2008), 6303–6318.
- [DG11] F. Dahmani and V. Guirardel, *The isomorphism problem for all hyperbolic groups*, Geom. Funct. Anal. **21** (2011), no. 2, 223–300.
- [Dun85] M.J. Dunwoody, *The accessibility of finitely presented groups*, Invent. Math. **81**(3) (1985), 449–457.
- [Dun93] ———, *An inaccessible group*, Geometric Group Theory Vol 1 LMS Lecture Notes **181** (1993), 75–78.
- [GdlH90] E. Ghys and P. de la Harpe, *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics **83** (1990).
- [Ger96] S.M. Gersten, *Introduction to Hyperbolic and Automatic Groups*, CRM Proceedings Lecture Notes **17** (1996), 45–70.
- [GL11] V. Guirardel and G. Levitt, *Trees of cylinders and canonical splittings*, Geom. Topol. **15** (2011), no. 2, 977–1012.
- [GL09] ———, *JSJ decompositions : definitions, existence, uniqueness. I : The JSJ deformation space*, arXiv :0911.3173v2 [math.GR] (2009).
- [GL07a] ———, *Deformation spaces of trees*, Groups Geom. Dyn. **1**(2) (2007), 135–181.
- [GL07b] ———, *The outer space of a free product*, Proc. Lond. Math. Soc.(3) **94**(3) (2007), 695–714.
- [GL12] ———, *Splittings and automorphisms of relatively hyperbolic groups*, arXiv : 1212.1434v1 [math.GR] (2012).
- [Gro87] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, M.S.R.I. **8** (1987), 75–263.
- [Gui00] V. Guirardel, *Reading small actions of a one-ended hyperbolic group on  $\mathbb{R}$ -trees from its JSJ splitting*, Amer. J. Math. **122** (2000), 667–688.
- [Kat92] S. Katok, *Fuchsian Groups*, Chicago Lectures in Mathematics (1992).
- [Lev05] G. Levitt, *Automorphisms of hyperbolic groups and graphs of groups*, Geom. Dedicata **114** (2005), 49–70.
- [Lin83] P.A. Linnell, *On accessibility of groups*, J. Pure Appl. Algebra **30**(1) (1983), 39–46.
- [Pet97] M.R. Pettet, *Virtually free groups with finitely many outer automorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **349**(11) (1997), 4565–4587.
- [RS94] E. Rips and Z. Sela, *Structure and rigidity in hyperbolic groups I*, Geom. Funct. Anal. **4** (1994), 337–371.
- [Sel97] Z. Sela, *Structure and rigidity in (Gromov) hyperbolic groups and discrete groups in rank 1 Lie groups. II.*, Geom. Funct. Anal. **7** (1997), 561–593.
- [Sel99] ———, *Endomorphisms of hyperbolic groups I : the Hopf property*, Topology **38** (1999), 301–321.
- [Ser77] J.P. Serre, *arbres, amalgames,  $SL_2$* , Astérisque **46** (1977).
- [SW79] P. Scott and T. Wall, *Topological methods in group theory*, in *Homological Group Theory*, London Math. Soc. Lecture Note **36** (1979), 137–203.