Contribution à l'étude des opérateurs de Schrödinger discrets

Claire Guille-Biel Winder

▶ **To cite this version:**

Claire Guille-Biel Winder. Contribution à l'étude des opérateurs de Schrödinger discrets. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 1997. Français. NNT : . tel-00965017

HAL Id: tel-00965017
https://theses.hal.science/tel-00965017

Submitted on 24 Mar 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre :

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université de Provence

spécialité: **Mathématiques**

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES OPÉRATEURS DE SCHRÖDINGER DISCRETS

---

présentée par :

Claire GUILLE-BIEL

le 14 novembre 1997 devant le Jury composé de :

M. Michel DOMERGUE	Président
M. Jean-Michel GHEZ	Examinateur
M. Hervé KUNZ	Rapporteur
M. Pierre LIARDET	Directeur de thèse
M. Jacques PEYRIÈRE	Rapporteur

Remerciements

En premier lieu, je remercie messieurs M. Domergue, J.M. Ghez, H. Kunz, P. Liardet et J. Peyrière de l'honneur qu'ils me font en acceptant de participer au jury de cette thèse.

Je tiens également à remercier ici P. Liardet qui a su orienter cette thèse et dont le soutien a permis de la finaliser.

Ma reconnaissance se porte tout particulièrement vers J.M. Combes, P. Hislop ainsi que J. Peyrière. L'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail a représenté une aide précieuse.

Je remercie également J.P. Allouche et V. Berthé pour leur contribution ainsi que pour la gentillesse qu'ils m'ont témoignée.

Enfin, que tous ceux qui, comme H. Daudé, m'ont entourée d'un soutien amical pendant ces années de travail trouvent ici l'expression de ma sympathie et de mon attachement.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ INTRODUCTIF iv

CHAPITRE 1. Opérateurs aléatoires discrets unidimensionnels ergodiques - Opérateurs de Schrödinger - 1

Introduction 1

Partie A. Opérateurs aléatoires discrets 3
1. Définitions et exemples 3
1.1. Opérateurs aléatoires 3
1.2. Exemples 4
1.2.a. Opérateurs matriciels
1.2.b. Matrices de Jacobi
1.2.c. Opérateurs de Schrödinger discrets unidimensionnels
1.2.d. Opérateurs creux de Schrödinger
2. Spectre et ergodicité 8
2.1. Presque tous les opérateurs ont le même spectre 8
2.2. Eléments remarquables de X par rapport au spectre de A 10
3. Composantes spectrales 12
3.1. Résolution de l'identité 12
3.2. La décomposition spectrale est constante 15
4. Mesures de densité d'états 16
4.1. Construction 16
4.2. Cas où l'opérateur unitaire est irréductible 17
4.3. Cas où l'opérateur unitaire est une translation bilatérale 18

Partie B. Opérateurs de Schrödinger aléatoires unidimensionnels discrets . 23
1. Généralités 24
1.1. Définition et propriétés spectrales générales 24
1.2. Exposant de Lyapunov et spectre absolument continu 25
1.3. Densité intégrée d'états et étiquetage des trous 29
2. Opérateurs de Schrödinger à potentiels périodiques 30
2.1. Introduction 30
2.2. Exposant de Lyapunov et équation discrète de Hill 31
2.3 Dynamique sur le spectre 34
2.4. Exemples 37
2.4.a. Opérateurs 1-périodiques
2.4.b. Opérateurs 2-périodiques
2.4.c. Un exemple d'opérateur 3-périodique

2.4.d. Un exemple d'opérateur 4-périodique
2.5. Compléments 39
3. Modèle d'Anderson 40
4. Potentiels presque périodiques 41
4.1. Potentiels presque périodiques uniformes 42
4.1.a. Système dynamique induit par une suite presque périodique uniforme
4.1.b. Opérateurs de Schrödinger à potentiels presque périodiques uniformes
4.1.c. Mesure de densité d'états et exposant de Lyapunov
4.1.d. Les opérateurs à potentiels limite périodiques
4.1.e. Les opérateurs à potentiels quasi-périodiques
4.2. Potentiels 1-Besicovitch presque périodiques 49
5. Potentiels substitutifs 50
5.1. Système dynamique de substitution 51
5.2. Opérateurs de Schrödinger à potentiel substitutif 51
5.3. Tentative de description systématique des différents exemples rencontrés . . 52
5.3.a. Le potentiel de Fibonacci
5.3.b. Le potentiel de Thue-Morse
5.3.c. Le potentiel à période doublante
5.3.d. Le potentiel de non-Pisot binaire
5.3.e. Le potentiel de non-Pisot ternaire
5.3.f. Le potentiel de Rudin-Shapiro
5.3.g. Le potentiel circulaire substitutif

CHAPITRE 2. Opérateur à potentiel odométrique : exemples d'opérateurs de Schrödinger à potentiel de Gordon fort 57

1. Rappels sur les suites à comportement de Gordon 57
2. Suites à comportement fortement de Gordon 61
2.1. Quelques rappels sur le 2-odomètre 61
2.1.a. L'anneau des entiers dyadiques
2.1.b. Le 2-odomètre, distance et topologie
2.1.c. Construction d'ouverts à partir d'une suite de cylindres
2.2. Construction de suites à comportement fortement de Gordon 64
3. Suite odométrique et système dynamique associé 68
3.1. Définition 69
3.1.a. Condition de continuité de $F_{\alpha,\beta}$
3.1.b. Définition d'une suite odométrique
3.2. Système dynamique associé à une suite odométrique 71
4. Opérateurs de Schrödinger aléatoires à potentiels odométriques 73
4.1. Définition et premières propriétés spectrales 73
4.2. Propriétés du spectre 74
4.2.a. Exposant de Lyapunov et partie absolument continue
4.2.b. Nouvelles propriétés

CHAPITRE 3. Opérateurs creux 79

1. Introduction 83
2. Definitions and first properties 84
   2.1. Dynamical systems and random operators 84
   2.2. Spectral theory 85
   2.3. Definition and immediate properties of sparse Schrödinger operators . . . 85
3. Decomposition of the operator H_Σ^p 87
   3.1. Study of subspaces $\mathcal{K}_i$ 87
   3.2. Associated operators 89
   3.3. Immediate properties of associated operators 89
4. The decomposition of a dynamical system and applications 90
5. The periodic case 93
   5.1. First properties of the associated operators 93
   5.2. Decomposition function and consequences on the spectrum 94
   5.3. Examples 96
6. The random case 97
7. Sparse Schrödinger operators with substitutional potentials 99
   7.1. Substitutional dynamical systems 99
   7.2. Properties of the sparse Schrödinger operators 100
   7.3. Examples 102
8. Conclusion 103

APPENDICES

APPENDICE A. Décomposition du spectre 105
   A.1. Spectre d'un opérateur borné auto-adjoint 105
   A.2. Spectre ponctuel et spectre continu 105
   A.3. Spectre singulier et spectre absolument continu 106
   A.4. Spectre singulier continu 106
   A.5. Spectre discret et spectre essentiel 106

APPENDICE B. Suites presque périodiques 108
   B.1. Presque périodicité uniforme, limite périodicité, quasi-périodicité 108
   B.2. Presque périodicité au sens de Besicovitch 109
   B.3. Tableau récapitulatif 110

APPENDICE C. Suites substitutives 111
   C.1. Lettres, mots, suites, espace topologique 111
   C.2. Substitution 111
   C.3. Suites substitutives 112
   C.4. Une liste non exhaustive de suites substitutives 112

BIBLIOGRAPHIE 117

Résumé introductif

Ce mémoire se place dans le contexte général des opérateurs aléatoires discrets. Il est subdivisé en trois chapitres.

Le premier chapitre situe le sujet dans son cadre général et naturel (partie A), puis s'intéresse plus particulièrement (partie B), au cas des opérateurs de Schrödinger discrets unidimensionnels, dont il évoque les principales propriétés spectrales, décrit les méthodes les plus fréquemment employées puis considère différentes familles de potentiels rencontrés dans la littérature.
Dans la partie A, la démonstration du résultat concernant l'égalité des spectres de presque tous les opérateurs nous permet de dégager une caractérisation des éléments du système dynamique correspondant aux opérateurs de même spectre. Nous démontrons ici que sous l'hypothèse d'ergodicité du système, deux points à la fois génériques et essentiels conduisent à l'égalité spectrale des opérateurs qui leur sont associés.
D'autre part, l'étude menée dans le cadre général sur la mesure de densité d'états nous conduit, dans la partie B, à décrire explicitement cette mesure dans le cas d'un opérateur de Schrödinger à potentiel périodique. En fait, la duplication de la période induit naturellement – via une formule trace – une transformation sur chaque intervalle fondamental du spectre, conjuguée topologique de la transformation logistique $x \mapsto Ax(1-x)$ de l'intervalle $[0,1]$ et qui laisse invariante la mesure de densité d'états. Ce résultat est illustré par quelques exemples pour lesquels nous avons déterminé l'expression de la fonction de répartition $\kappa_0(t)$ de cette mesure correspondant au point e_0 (où $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la base orthonormale canonique de $\ell^2(\mathbb{Z})$). En particulier, lorsque le potentiel est constant égal à v, la fonction $\kappa_0(t)$ est donnée par:

$$\kappa_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, v-2] \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin(\frac{t-v}{2}) & \text{si } t \in [v-2, v+2] \\ 1 & \text{si } t \in [v+2, +\infty[\end{cases},$$

l'intervalle $[v-2, v+2]$ étant le spectre de tous les opérateurs.
Lorsque le potentiel vaut $V(n) = (-1)^n$, on a

$$\kappa_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, -\sqrt{5}] \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}\arcsin(\frac{t^2-3}{2}) & \text{si } t \in [-\sqrt{5}, -1] \\ \frac{1}{2} & \text{si } t \in [-1, 1] \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}\arcsin(\frac{t^2-3}{2}) & \text{si } t \in [1, \sqrt{5}] \\ 1 & \text{si } t \in [\sqrt{5}, +\infty[\end{cases},$$

le spectre de tous les opérateurs étant $[-\sqrt{5}, -1] \cup [1, \sqrt{5}]$.

Le deuxième chapitre traite de cas particuliers d'opérateurs de Schrödinger à potentiel discret de type Gordon, que nous nommons potentiel odométrique. L'introduction de ces potentiels est

originale puisqu'ils sont issus de systèmes dynamiques appelés odomètres. Nous établissons leur existence à partir des fonctions caractéristiques d'une suite de cylindres deux à deux disjoints $(A_m)_{m\in\mathbb{N}} = (C(a_m, p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Z}_2$ (l'ensemble des entiers dyadiques), où $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sont deux suites d'entiers naturels vérifiant certaines conditions. Ce potentiel d'un nouveau type est alors défini par

$$\forall k \in \mathbb{Z}\ ,\ V^{\alpha,\beta}(k) = \beta + \sum_{n\geq 0} \alpha_n \mathbf{1}_{A_n}(k)\ ,$$

où β est un nombre réel et $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombre réels. De type limite périodique, ce potentiel se rattache en outre à la classe des potentiels hiérarchiques. De nouvelles propriétés spectrales de l'opérateur de Schrödinger associé sont alors dégagées, en particulier une approximation de la mesure de Lebesgue du spectre de tous ces opérateurs en fonction de la suite α. Pour illustrer ceci, considérons le cas où pour tout $m \geq 1$, $p_m = 4m + 1$, $a_m = 2^{4m-1}$ et $\alpha_m = 2^{-5m-\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 1$. On obtient

$$4 \geq m_\ell(\Sigma) = m_\ell(\Sigma_{ac}) \geq 4(1 - 2^{1-\varepsilon}).$$

Nous sommes ainsi en mesure de construire des opérateurs de Schrödinger discrets dont la mesure de Lebesgue du spectre est arbitrairement proche de 4.

Dans la continuité du chapitre 1, le troisième et dernier chapitre, publié dans la revue *Reviews in Mathematical Physics*, étudie une famille d'opérateurs aléatoires discrets unidimensionnels que nous avons baptisés opérateurs creux (sparse operators) en raison de leur forme particulière proche de celle des opérateurs de Schrödinger classiques: $H^p = S^p + S^{-p} + V$ (où S désigne le décalage dans $\ell^2(\mathbb{Z})$, p un entier naturel non nul et V est un potentiel). Pour les flots minimaux ergodiques, la décomposition dynamique de Gottschalk, Hedlund et Kamae nous permet d'aboutir à des résultats concernant le spectre et les composantes spectrales de presque tous les opérateurs. Des conséquences de cette décomposition sont présentées, incluant certaines classes de potentiels substitutifs, les potentiels périodiques, ainsi que des potentiels du modèle d'Anderson.
Par exemple nous démontrons dans ce chapitre que si le potentiel est issu de la suite substitutive de Thue-Morse et pour $p = 2^m$ (où $m \in \mathbb{N}^*$), le spectre de presque tous les opérateurs correspondants est un ensemble de Cantor de mesure de Lebesgue nulle et qu'il est purement singulier continu.
Lorsque le potentiel est N-périodique et quel que soit l'entier p, nous sommes parvenus au même résultat que dans le cas classique d'un opérateur de Schrödinger, à savoir que le spectre est purement absolument continu formé d'au plus N bandes.
Enfin il apparaît que le spectre d'un opérateur creux dont la suite de potentiels est formée par des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, est celui de l'opérateur de Schrödinger ayant ce même potentiel.

Chapitre 1

Opérateurs aléatoires discrets unidimensionnels ergodiques - Opérateurs de Schrödinger -

La notion d'opérateurs aléatoires constitue un cadre très abstrait puisque très théorique, mais toutefois très riche puisqu'elle englobe toute la théorie des opérateurs de Schrödinger: les matrices de Jacobi ($\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$), les opérateurs hamiltoniens ($\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$), ainsi que leurs généralisations au cas multidimensionnel. Elle est traitée dans un cadre général par Figotin et Pastur dans [Fi;Pa], ainsi que dans le cas hamiltonien par Carmona et Lacroix dans [Car;L].

La partie A de ce chapitre est un rappel sur les opérateurs aléatoires discrets unidimensionnels: nous en donnons la définition, puis nous nous intéressons à la relation entre l'ergodicité du système dynamique et certaines propriétés spectrales de l'opérateur aléatoire, ce qui nous permet de dégager des éléments remarquables du système dynamique.

La partie B est consacrée aux opérateurs de Schrödinger aléatoires unidimensionnels et discrets. Les premières propriétés spectrales sont déduites de la partie précédente. Dans ce cadre plus restreint, nous nous intéressons aux moyens d'évaluation des propriétés spectrales (composition, nature et localisation du spectre, problème des trous). Pour cela, l'exposant de Lyapunov, la densité d'états, sa fonction d'étiquetage associée sont introduits. Nous avons porté notre attention sur la densité d'états en mettant en évidence diverses propriétés asymptotiques, notamment pour certains opérateurs aléatoires définis sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. Leurs introductions se justifiera par l'usage qui en sera fait dans les chapitres suivants.

Devant la grande diversité des résultats rencontrés dans la littérature, un récapitulatif des différents types de potentiels est donné avec l'idée d'établir un lien entre les études des diverses grandes classes d'opérateurs.
Le cas des opérateurs à potentiel périodique est le premier traité. Après avoir exposé les propriétés générales, nous étudions l'équation associée de Hill qui donne la localisation du spectre, ainsi que l'existence de trous. L'exposant de Lyapunov est utilisé pour démontrer la continuité absolue du spectre et les trous sont distingués par la mesure d'étiquetage. Pour terminer, nous mettons en œuvre cette théorie générale classique pour construire sur le spectre une dynamique naturelle qui laisse invariante la densité d'états et conduit à la détermination explicite de cette mesure. C'est le premier temps fort de ce travail. Quelques exemples illustrent les résultats obtenus.

Le chapitre se poursuit par un catalogue de résultats classiques les plus significatifs et qu'il nous a semblé utile de faire figurer dans cette thèse.
Nous commençons par les opérateurs du type d'Anderson. Il est à l'opposé du précédent puisque le potentiel est donné par une suite de varibles aléatoires indépendantes identiquement distribuées. Le spectre de tels opérateurs est purement singulier. Dans certains cas particuliers, il est possible de le localiser.
Entre ces deux grandes familles, deux classes différentes sont décrites, qui ne sont pas sans liens entre elles: les opérateurs à potentiels presque périodiques et les opérateurs à potentiels substitutifs. Dans chacun de ces cas, le système dynamique associé sera donné. Les résultats énoncés concernent les propriétés spectrales, l'exposant de Lyapunov et la mesure d'étiquetage. Nous décrivons en outre une palette d'exemples traités dans la littérature.

Pour conclure cette présentation du premier chapitre, signalons que pour un expert dans ce domaine, le matériel présenté est connu, à l'exception sans doute de la description complète de la mesure d'étiquetage dans le cas périodique (partie B, paragraphe 2), et dans une moindre mesure, le théorème 2.4 (partie A) qui décrit avec précision l'obtention des éléments caractéristiques du système dynamique aux vues des opérateurs aléatoires et le théorème 4.8 de perturbation des approximations matricielles des opérateurs aléatoires sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ lorsque leurs coefficients non nuls restent cantonnés autour de la diagonale.

PARTIE A - Opérateurs aléatoires discrets

Comme il a été précisé précédemment, de tels opérateurs ont été étudiés en détail dans [Fi;Pa]. Le paragraphe 1 est consacré aux différentes définitions et au vocabulaire utilisé, le tout illustré par des exemples. Les conséquences du lien dynamique qui unit les représentations de l'opérateur aléatoire sont examinées: sous la condition d'ergodicité du système dynamique, presque tous les opérateurs A_x ont le même spectre et les mêmes composantes spectrales. Plus précisément, nous explicitons l'ensemble des x pour lesquels les opérateurs correspondant A_x ont le même spectre "générique". L'étude détaillée de la densité d'états termine cette partie.

1. Définitions et exemples

1.1. Opérateurs aléatoires

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilité. Une *variable aléatoire réelle* est une fonction définie sur X à valeurs réelles, $\mathcal{B}$-mesurable et admettant des valeurs finies sur un sous-ensemble X' de mesure 1 dans X. Une fonction f définie sur X à valeurs dans un ensemble est dite *constante* s'il existe un sous-ensemble $\tilde{X} \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(\tilde{X}) = 1$ et sur lequel f est constante.
Un automorphisme T de $(X, \mathcal{B}, \mu)$ (ou simplement de X) est une application $T : X \to X$ inversible (éventuellement inversible seulement sur un ensemble de mesure pleine), bimesurable et préservant la mesure μ, *i.e.*, $\mu = \mu \circ T^{-1}$. L'espace $(X, \mathcal{B}, \mu)$ sera supposé séparable, hypothèse qui se traduit, par exemple, par la séparabilité de l'espace $L^2(X, \mu)$. Soit $\mathcal{T}$ un groupe d'automorphismes de X, muni de la topologie faible de Halmos. Cette topologie est métrisable et par définition, une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'automorphismes de X converge (faiblement) vers un automorphisme T si

$$\forall Y \in \mathcal{B} \ , \ \lim_{n\to+\infty} \mu(T_n Y \Delta T Y) = 0 \ , \tag{1.1}$$

où Δ désigne la différence symétrique entre deux ensembles.
On dit que $\mathcal{T}$ est *ergodique* (ou *métriquement transitif* dans la terminologie de [Fi;Pa]), si tout ensemble $\mathcal{B}$-mesurable Y, $\mathcal{T}$-invariant (c'est-à-dire tel que $TY = Y$ quel que soit $T \in \mathcal{T}$), est de mesure 0 ou 1.
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $\mathcal{D}$ un sous-espace vectoriel dense dans $\mathcal{H}$. Un *opérateur aléatoire A sur l'espace de probabilité $(X, \mathcal{B}, \mu)$ de domaine $\mathcal{D}$* est une application $A : x \mapsto A_x$ définie sur X à valeurs dans l'ensemble des opérateurs linéaires sur $\mathcal{H}$ (définis sur un sous-espace de $\mathcal{H}$ et à valeurs dans $\mathcal{H}$), telle que le domaine de définition $\mathcal{D}_x$ de A_x contienne $\mathcal{D}$ μ-presque sûrement et telle que pour tout $u \in \mathcal{D}$ et $v \in \mathcal{H}$, l'application $x \mapsto (A_x u, v)$ (où $x \in X$), est une variable aléatoire. Remarquons que cette notion de mesurabilité (faible) est équivalente à la mesurabilité forte qui signifie que pour tout $u \in \mathcal{D}$ l'application $x \mapsto A_x u$ de X dans $\mathcal{H}$ est mesurable (la σ-algèbre des parties boréliennes de $\mathcal{H}$ étant engendrée par la topologie faible). Si, de plus, $(Au, v) = (u, Av)$ quels que soient les éléments u et v du domaine $\mathcal{D}$, alors l'opérateur aléatoire A est dit *symétrique*. Si $\mathcal{D} = \mathcal{H}$, la symétrie de A signifie que μ-presque tous les opérateurs A_x sont auto-adjoints.

Lorsque l'opérateur A_x est borné, il se prolonge par continuité à tout $\mathcal{H}$. Si c'est le cas pour μ-presque tout x, l'opérateur aléatoire A est dit *borné*. Dans ces conditions, on peut choisir $\mathcal{D} = \mathcal{H}$. Un opérateur aléatoire A est *ergodique* s'il existe un homomorphisme $T \mapsto U_T$ d'un

groupe ergodique $\mathcal{T}$ d'automorphismes de $(X, \mathcal{B}, \mu)$ sur un groupe d'opérateurs unitaires de $\mathcal{H}$ noté $\mathcal{U} = \{U_T \ , \ T \in \mathcal{T}\}$, tel que, pour μ-presque tout x, on ait

$$A_{Tx} = U_T A_x U_T^{-1} \ . \tag{1.2}$$

Si de plus A est symétrique, alors son domaine $\mathcal{D}$ est supposé invariant sous $\mathcal{U}$, c'est-à-dire que $U\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, quel que soit $U \in \mathcal{U}$.
L'opérateur aléatoire A est dit *discret* lorsque le groupe $\mathcal{T}$ des automorphismes de X associé à A est de la forme $\mathcal{T} = \{T_k \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$ ou $\mathcal{T} = \{T_k \ ; \ k \in \mathbb{Z}^d\}$. L'opérateur aléatoire est dit alors *d-dimensionnel*. Dans cette situation l'espace $\mathcal{H}$ est le plus souvent $\ell^2(\mathbb{Z})$ ou $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ et $\mathcal{U}$ correspond au groupe des opérateurs de décalage S_m, $m \in \mathbb{Z}^d$ qui, à tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ associe $S_m(x)$ défini par $(S_m(x))_n = x_{n+m}$. On parlera alors d'opérateur aléatoire d-dimensionnel canonique.

Remarque 1.1. Pour plus de détails sur les opérateurs aléatoires, nous renvoyons au livre de Figotin et Pastur [Fi;Pa]. ◇

1.2. Exemples

Tout au long de ce travail, les opérateurs aléatoires bornés ergodiques unidimensionnels canoniques sont les opérateurs qui retiennent essentiellement notre attention. Toutefois, pour avoir une vision un peu plus large des choses, nous décrivons ici une palette d'exemples d'opérateurs aléatoires discrets.

1.2.a. Opérateurs matriciels

Cette notion, traitée dans le cadre général par Figotin et Pastur, a également été développée dans un contexte un peu plus particulier par Kunz et Souillard (*cf* [Ku;Sou]). Nous limitons notre étude à la dimension 1.
Soit donc $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$ (de norme notée $\|\cdot\|$). Le sous-espace $\mathcal{D}$ est celui des suites à support fini dans $\ell^2(\mathbb{Z})$. En accord avec Figotin et Pastur, on considère une famille de variables aléatoires à valeurs complexes ou réelles $(a_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ vérifiant les propriétés suivantes:

(i) $a_{n,m} = \overline{a}_{m,n}$, *pour tous* $n, m \in \mathbb{Z}$, *(où* $\overline{z}$ *désigne le conjugué de* $z \in \mathbb{C}$*);*

(ii) Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_{n,m}|^2 < +\infty$ *presque sûrement.*

Alors l'opérateur aléatoire M défini pour $n \in \mathbb{Z}$ et $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ par:

$$(M_x u)(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{n,m}(x) u(m) \ , \tag{1.3}$$

est symétrique, à valeurs dans $\ell^2(\mathbb{Z})$. En effet, la symétrie est immédiate et l'inégalité de Schwarz donne:

$$|Mu(n)|^2 \leq \|u\|^2 \Big(\sum_{m, u(m)\neq 0} |a_{n,m}|^2 \Big)$$

et donc

$$\|Mu\| \leq \|u\| \Big(\sum_{m, u(m)\neq 0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_{n,m}|^2 \Big)^{1/2}. \tag{1.4}$$

Il est naturel de chercher des conditions pour que M puisse se prolonger à $\ell^2(\mathbb{Z})$. La majoration (1.4) conduit tout naturellement à prendre l'hypothèse $\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} |a_{n,m}|^2 < +\infty$, mais celle-ci est peu satisfaisante. En effet, pour l'opérateur identité par exemple, qui entre bien dans ce cadre avec

$a_{n,m}$ égale à 1 si $n = m$ et 0 sinon, le second membre de (1.4) vaut $+\infty$ si le support de u n'est pas fini. Il en va de même pour toute une large classe d'opérateurs importants, comme les opérateurs de Jacobi examinés plus bas.

Avant de donner une condition plus naturelle pour le prolongement de M à $\ell^2(\mathbb{Z})$, examinons ce qu'implique la relation de commutation (1.2) lorsque U_T désigne l'opérateur de décalage $S = S_1$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. Un calcul simple donne pour $n \in \mathbb{Z}$ et $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$:

$$SM_xS^{-1}u(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u(m)a_{n+1,m+1}(x)$$

de sorte que $M_{Tx} = SM_xS^{-1}$ se traduit par la condition de stationarité diagonale:

(iii) $\forall\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2,\ a_{n,m}(Tx) = a_{n+1,m+1}(x)$.

Il est alors plus intéressant d'essayer de remplacer la condition *(ii)* par:

(ii') $\forall\ m \in \mathbb{Z},\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_X |a_{n,m}(x)|^2 \mu(dx) < +\infty$.

Or par la propriété *(iii)* nous obtenons

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_X |a_{n,m+1}|^2 d\mu = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_X |a_{n+1,m+1}|^2 d\mu = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_X |a_{n,m}|^2 d\mu\ ,$$

qui permet de nous ramener à

(ii") $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_X |a_{n,0}|^2 d\mu < +\infty$.

En introduisant la suite $\alpha = (a_{n,0})_{n\in\mathbb{Z}}$, la propriété *(iii)* donne

(iv) *α est une variable aléatoire sur X à valeurs dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ telle que*

$$\int_X ||\alpha(x)||^2 \mu(dx) < \infty$$
$$\text{et } a(n,m) = \alpha(n-m,0) \circ T^m\ .$$

Sous ces hypothèses, on obtient facilement

$$\sum_n \int_X |M_x u(n)|^2 \mu(dx) \le ||u||^2 \int_X ||\alpha||^2 d\mu.$$

Considérons un sous-espace E dense dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ et engendré par une partie dénombrable. Alors M_x est presque sûrement un opérateur symétrique sur E à valeurs dans $\ell^2(\mathbb{Z})$. Reste cependant que dans le cas aussi simple d'un opérateur diagonal ($a_{n,m} = 0$ si $n \neq m$), *(iv)* n'implique pas que M_x soit borné pour presque tout x; en fait dans ce cas, si $a_{0,0}$ n'est pas bornée, comme T est supposée ergodique, il est facile de voir que pour μ-presque tout $x \in X$, $\sup_{u,||u||=1} ||M_x(u)|| = +\infty$. Une hypothèse raisonnable (parmi d'autres) est de supposer:

(v) *l'application $x \mapsto ||\alpha(x)||$ est bornée.*

Cette condition est satisfaite dans de nombreux cas et donne

$$||M_x(u)|| \le ||u|| \sup_{x\in X} ||\alpha(x)||.$$

Ainsi M devient un opérateur aléatoire borné de domaine $\ell^2(\mathbb{Z})$.

1.2.b. Matrices de Jacobi

L'espace de Hilbert considéré ici est toujours $\ell^2(\mathbb{Z})$. Le sous-espace $\mathcal{D}$ est formé des suites à support fini.

On définit $\mathcal{T} = \{T^n \ ; \ n \in \mathbb{Z}\}$, où T est un automorphisme de X préservant la mesure μ et ergodique. On se place dans le cas canonique. Ainsi, pour tout entier n, $U_{T^n} = S^n$, où $S = S_1$ est l'opérateur de décalage de 1 sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. On a donc $\mathcal{U} = \{S^n \ ; \ n \in \mathbb{Z}\}$.

Soient a et b deux variables aléatoires réelles définies sur X et soient $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les suites de variables aléatoires stationnaires définies par $a_n = a \circ T^n$ et $b_n = b \circ T^n$. L'*opérateur de Jacobi* J défini pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ par

$$(J_x u)(n) = -a_n(x)u(n-1) - a_{n+1}(x)u(n+1) + b_n(x)u(n) \ , \tag{1.5}$$

est un opérateur aléatoire symétrique ergodique de domaine $\mathcal{D}$. Le groupe des automorphismes qui lui est associé est $\mathcal{T}$, le groupe des opérateurs unitaires sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ est $\mathcal{U}$.

Supposons maintenant a et b dans $L^2(X,\mu)$ et notons $\|\cdot\|_2$ la norme de cet espace. Alors, en procédant comme dans 1.2.a,

$$\int_X \sum_{n\in\mathbb{Z}} |J_x u(n)|^2 \mu(dx) \leq 3(2\|a\|_2^2 + \|b\|_2^2)\|u\|^2.$$

Ainsi, pour μ-presque tout $x \in X$, l'opérateur J_x est linéaire dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ et pour tout sous-espace dense $\mathcal{D}_0$ de $\ell^2(\mathbb{Z})$ engendré par une partie dénombrable, $\mathcal{D}(J_x)$ contient presque sûrement $\mathcal{D}_0$. En particulier, on peut choisir pour $\mathcal{D}_0$ l'espace des suites à support fini. Mais J n'est pas pour autant borné si a et b ne le sont pas.

Remarque 1.2. Les matrices de Jacobi sont des cas particuliers des opérateurs matriciels définis ci-dessus. On peut en effet écrire Ju sous la forme $(Ju)(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} j(n,m)u(m)$, avec

$$j(n,m) = \begin{cases} -a_n & \text{si } m = n-1; \\ -a_{n+1} & \text{si } m = n+1; \\ b_n & \text{si } m = n; \\ 0 & \text{sinon, } \textit{i.e.} \text{ si } \mid n-m \mid > 1. \end{cases}$$

Les coefficients $j(n,m)$ sont des variables aléatoires réelles vérifiant pour tous entiers n et m, l'égalité $j(n,m) = j(m,n)$ et pour tout entier m, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |j(n,m)|^2 < +\infty$ avec une probabilité 1. Ainsi J est symétrique. $\diamond$

Faisons une remarque supplémentaire sur la définition d'opérateur matriciel donnée dans [Fi;Pa] (page 34). Avec les notations ci-dessus, les auteurs supposent que la suite de variables aléatoires $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ est ergodique sur $\mathbb{Z}^2$. Il est bien évident que cette condition, qui implique entre autre que les $a_{n,m}$ soient de même loi, est trop restrictive. Les opérateurs de Jacobi n'entrent pas dans ce cas de figure (puisque $a_{0,2} = 0$!). D'autre part, l'action de $\mathbb{Z}^2$ peut être ergodique, sans que l'action correspondant à la diagonale le soit.

Remarque 1.3. L'opérateur J peut évidemment être défini avec des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres réels. Supposons ces suites bornées, il est alors naturel d'introduire le sous-espace $K(a,b)$ de $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{Z}}$ (muni de la topologie produit) obtenu par fermeture de l'orbite de la suite $(a,b) = (a_n,b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sous l'action de l'opérateur de décalage T:

$$K(a,b) = \overline{\{(u_n,v_n)_{n\in\mathbb{Z}}; \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ (u_n,v_n) = (a_{n+k},b_{n+k})\}}.$$

D'après le théorème de Tychonov, $K(a,b)$ est compact. De plus, la restriction de T à $K(a,b)$ est un homéomorphisme. Alors pour $\pi_1 : K(a,b) \to \mathbb{R}$ (resp. $\pi_2 : K(a,b) \to \mathbb{R}$) défini par $\pi_1(u,v) = u_0$ (resp. $\pi_2(u,v) = v_0$), on obtient $a_n = \pi_1(T^n(a,b))$ et $b_n = \pi_2(T^n(a,b))$. Avec une mesure borélienne μ, T-invariante, ergodique sur $K(a,b)$, on obtient un opérateur aléatoire ergodique de Jacobi au sens précédent; l'opérateur de départ se retrouve comme étant l'opérateur $J_{(a,b)}$. Le choix de μ est relativement arbitraire: il existe toujours une mesure sur $K(a,b)$ ergodique et T-invariante (théorème de Krylov-Bogoliubov [Bo;Kr]) mais en général elle n'est pas unique. Il peut cependant exister un choix pertinent pour μ en fonction de la suite (a,b). C'est le cas lorsque qu'il existe une mesure ergodique T-invariante pour laquelle la suite (a,b) est T-générique, *i.e.* telle que pour toute fonction continue $f : K(a,b) \to \mathbb{R}$, la suite des moyennes $N^{-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n(a,b))$ converge vers $\int f d\mu$. $\diamond$

1.2.c. Opérateurs de Schrödinger discrets unidimensionnels

Reprenons $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{T}$ comme dans l'exemple 1.2.b. L'*opérateur de Schrödinger unidimensionnel discret* est un cas particulier des matrices de Jacobi. Il est donné par l'équation :

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ ,\ \forall u \in \ell^2(\mathbb{Z})\ ,\ (Hu)(n) = u(n-1) + u(n+1) + V(n)u(n)\ , \tag{1.6}$$

où $(V(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite aléatoire stationnaire à valeurs réelles appelée *potentiel*. C'est un opérateur aléatoire symétrique ergodique. De même que précédemment, si $||V(0)||_\infty) < +\infty$, un tel opérateur se prolonge presque sûrement à $\ell^2(\mathbb{Z})$. C'est la raison pour laquelle cet opérateur sera par la suite directement défini sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. Notons que la partie B de ce chapitre est entièrement consacrée à l'étude de ce type d'opérateur. Dans le cas où $V(n)$ est une suite bornée de nombres réels, la construction effectuée dans la remarque 1.3 se simplifie en remplaçant la suite $(-1, V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Dans de nombreux cas (voir plus loin), cette suite donne naissance à un système dynamique $(T, K(-1,V))$ n'admettant qu'une seule mesure invariante.

1.2.d. Opérateurs creux de Schrödinger

D'autres cas particuliers d'opérateurs matriciels unidimensionnels canoniques, appelés *opérateurs creux de Schrödinger*, ont été introduits dans [GB]. Leur étude fera l'objet du troisième chapitre de cette thèse.

Dans ce cas $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$, $\mathcal{D}$ est le sous-espace des suites à support fini et $(V(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires stationnaires à valeurs réelles. Etant donné un entier naturel strictement positif p, l'opérateur H^p est défini pour tout élément u de $\ell^2(\mathbb{Z})$ et tout entier n par

$$(H^p u)(n) = u(n-p) + u(n+p) + V(n)u(n)\ . \tag{1.7}$$

Cet opérateur peut également se mettre sous la forme d'une matrice de Jacobi au sens élargi: quel que soit $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et quel que soit $n \in \mathbb{Z}$,

$$(H^p u)(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a(n,m)u(m),$$

avec

$$a(n,m) = \begin{cases} V(n) & \text{si } m = n; \\ 1 & \text{si } m = n-p \text{ ou } m = n+p, \textit{ i.e.} \text{ si } \mid n-m \mid = p; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de voir que les variables aléatoires réelles $a(n,m)$ vérifient $a(n,m) = a(m,n)$ et sont telles que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a(n,m)|^2 < +\infty$ avec une probabilité 1. En tant qu'opérateur matriciel, un tel opérateur est symétrique. Si $||V(0)||_\infty$ est fini, l'opérateur H^p se prolonge presque sûrement à $\ell^2(\mathbb{Z})$ tout entier; il est appelé opérateur aléatoire de Schrödinger unidimensionnel discret et *creux*.

2. *Spectre et ergodicité*

Notre étude est restreinte aux opérateurs aléatoires discrets symétriques bornés ergodiques et unidimensionnels sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Le groupe des automorphismes de X est donc donné par:

$$\mathcal{T} = \{T^n \ ; \ n \in \mathbb{Z}\} \ , \tag{2.1}$$

où le système dynamique $\mathcal{T} = (T, X, \mathcal{B}, \mu)$ est ergodique. Le groupe des opérateurs unitaires est de la forme:

$$\mathcal{U} = \{U^n \ ; \ n \in \mathbb{Z}\} \ . \tag{2.2}$$

Le générateur de $\mathcal{U}$ est appelé opérateur unitaire de conjugaison (de A). Le domaine $\mathcal{D}$ est égal à $\mathcal{H}$. Dans le cadre qui nous intéresse, les opérateurs aléatoires se prolongent en effet sur $\mathcal{H}$ tout entier.

2.1. *Presque tous les opérateurs ont le même spectre*

Soit donc A un opérateur aléatoire discret symétrique borné et ergodique de domaine $\mathcal{H}$, de groupes associés $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$ respectivement donnés par les relations (2.1) et (2.2). Pour tout élément x de X, on notera $\sigma(A_x)$ le spectre de l'opérateur A_x. Les différentes définitions de parties spectrales sont rappelées dans l'appendice A. Le résultat suivant est classique.

PROPOSITION 2.1. *Sous les conditions énoncées ci-dessus, pour μ-presque tout $x \in X$, $\sigma(A_x)$ est un ensemble non vide compact de* $\mathbb{R}$.

L'ergodicité intervient dans la relation qui s'établit entre les spectres des opérateurs A_x. C'est ce qui fait l'objet du théorème 2.2.

THÉORÈME 2.2. *Soit A un opérateur aléatoire discret symétrique borné ergodique, défini sur $\mathcal{H}$, de groupes associés $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$ respectivement donnés par les relations (2.1) et (2.2).*
Il existe un sous-ensemble compact non vide de $\mathbb{R}$, *noté Σ, tel que pour μ-presque tout élément x de X,*

$$\Sigma = \sigma(A_x) \ . \tag{2.3}$$

Remarque 2.1. Un tel résultat est donné dans [Fi;Pa], dans [C;F;Ki;Si] ainsi que dans [Car;L]. Nous allons toutefois le redémontrer pour avoir une meilleure compréhension des mécanismes ergodiques qui interviennent, ce qui nous permettra de les exploiter dans le prochain paragraphe. ◇

Démonstration. Soit la famille $(f_{n,\ell})_{(n,\ell)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z}}$ d'applications continues définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$\forall n \geq 1 \ , \ f_{n,0}(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } |\, t \,| \geq \frac{2}{n} \\ nt + 2 & \text{if } \frac{-2}{n} < t \leq \frac{-1}{n} \\ 1 & \text{if } |\, t \,| \leq \frac{1}{n} \\ -nt + 2 & \text{if } \frac{1}{n} \leq t < \frac{2}{n}, \end{cases}$$

et pour tout $n \geq 1$ et tout $\ell \in \mathbb{Z}$, $f_{n,\ell}(t) = f_{n,0}(t) + \frac{\ell}{n}$. La figure ci-dessous donne l'allure générale des graphes de ces fonctions.

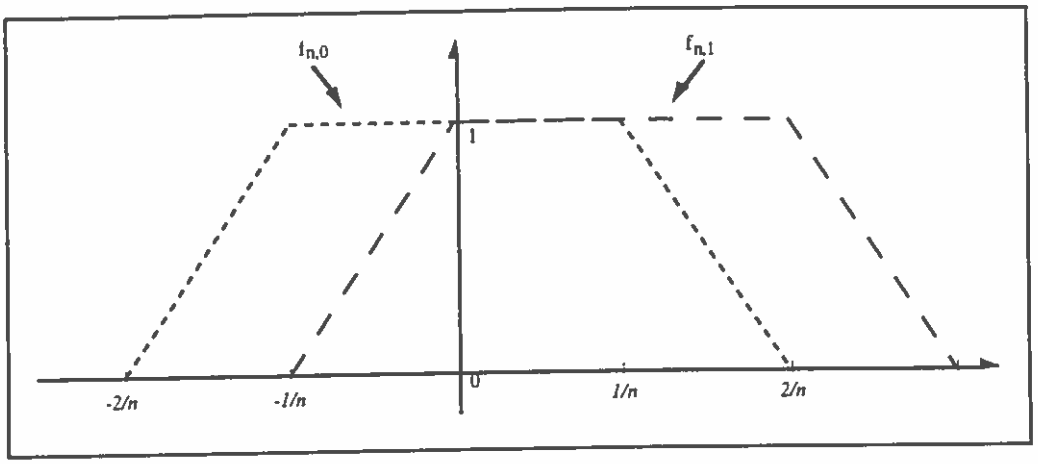


Figure 1. Graphes de $f_{n,0}$ et de $f_{n,1}$.

Nous allons utiliser cette famille pour séparer les points de $\mathbb{R}$. Pour cela, on considère le support $K_{n,\ell} = \left[\frac{\ell-2}{n}, \frac{\ell+2}{n}\right]$ de la fonction $f_{n,\ell}$. Il est de plus évident que μ-presque tous les opérateurs A_x sont simultanément bornés, auto-adjoints et vérifient la relation (1.2): $A_{Tx} = UA_xU^{-1}$. Notons X' le sous-ensemble formé par les éléments x de X correspondant à de tels opérateurs. Par hypothèse $\mu(X') = 1$. Soit maintenant

$$\Gamma_{n,\ell} = \{x \in X' \ ; \ f_{n,\ell}(A_x) \neq 0\} \ .$$

et remarquons que $f_{n,\ell}(A_x) \neq 0$ entraîne $K_{n,\ell} \cap \sigma(A_x) \neq \emptyset$. Pour tout élément x dans X', A_x vérifie l'égalité (1.2), ce qui implique que pour toute application continue f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, $f(A_{Tx}) = Uf(A_x)U^{-1}$. En particulier

$$\forall x \in X' \ , \ f_{n,\ell}(A_{Tx}) = Uf_{n,\ell}(A_x)U^{-1} \ ,$$

d'où l'égalité $T^{-1}(\Gamma_{n,\ell}) = \Gamma_{n,\ell}$. L'ergodicité de $\mathcal{T}$ implique alors $\mu(\Gamma_{n,\ell}) = 0$ ou 1.
Puisque $\sigma(A_x)$, pour $x \in X'$, est un ensemble compact de $\mathbb{R}$, il est clair que pour ℓ assez grand, $K_{n,\ell} \cap \sigma(A_x) = \emptyset$, de sorte que $\mu(\Gamma_{n,\ell}) = 0$. Le spectre de A_x étant non vide, on a pour tout $n \geq 1$,

$$X' = \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}} \Gamma_{n,\ell} \ .$$

Ceci prouve l'existence d'au moins un ℓ pour lequel $\mu(\Gamma_{n,\ell}) \neq 0$, donc $\mu(\Gamma_{n,\ell}) = 1$.
Posons alors

$$Y = \bigcap_{n \geq 1} \Big(\bigcap_{\ell, \, \mu(\Gamma_{n,\ell})=1} \Gamma_{n,\ell} \Big) \subset X'$$

$$S_n = \bigcup_{\ell, \, \mu(\Gamma_{n,\ell})=1} K_{n,\ell}$$

$$\Sigma = \bigcap_{n \geq 1} S_n \subset \mathbb{R} \ .$$

Nous allons montrer que quel que soit x appartenant à Y, $\Sigma = \sigma(A_x)$. Soit d'abord $t \in \Sigma$. Alors pour tout $n \geq 1$, $t \in S_n$, *i.e.* il existe $\ell_n \in \mathbb{Z}$ tel que $t \in K_{n,\ell_n}$ et $\mu(\Gamma_{n,\ell_n}) = 1$. Soit aussi $x \in Y$, alors pour tout $n \geq 1$, on sait que $x \in \bigcap_{\ell, \, \mu(\Gamma_{n,\ell})=1} \Gamma_{n,\ell}$, donc en particulier $x \in \Gamma_{n,\ell_n}$.

Dans ce cas, on a: $f_{n,\ell_n}(A_x) \neq 0$. Finalement, on a montré que pour tout $n \geq 1$, il existe ℓ_n tel que $K_{n,\ell_n} \cap \sigma(A_x) \neq \emptyset$, avec K_{n,ℓ_n} intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$, on s'aperçoit que $t \in \overline{\sigma(A_x)} = \sigma(A_x)$. On a bien

$$\forall x \in Y \ , \ \Sigma \subset \sigma(A_x) \ .$$

Soit maintenant $x \in Y$, et soit $t \in \sigma(A_x)$. Alors, pour tout $n \geq 1$, il existe au moins un entier k pour lequel $f_{n,k}(t) = 1$. Dans ce cas, t est intérieur à $K_{n,k}$ et $f_{n,k}(A_x) \neq 0$, ce qui implique que $x \in \Gamma_{n,k}$. Or $x \in Y$, donc $\mu(\Gamma_{n,k}) = 1$ et $t \in S_n$, pour tout $n \geq 1$. Finalement $t \in \Sigma$, puis $\sigma(A_x) \subset \Sigma$.
La démonstration se termine en remarquant que Y est de mesure égale à 1 (par définition, Y est une intersection dénombrable d'ensembles mesurables de mesures égales à 1). ◇◇◇

2.2. *Eléments remarquables de X par rapport au spectre de A*

Dans la continuité du théorème 2.2, il est légitime de s'interroger sur les éléments x de X pour lesquels le spectre de A_x est exactement Σ. Pour cela, nous considérons le cas d'un sytème dynamique $(T, X, \mathcal{B}, \mu)$ où X est un espace compact métrique, de distance notée δ, et $T : X \to X$ un homéomorphisme de X. La σ-algèbre $\mathcal{B}$ est alors celle des boréliens de X. Pour mettre en évidence ces hypothèses, nous parlerons de système dynamique *topologique*. L'opérateur aléatoire A est alors défini sur tout X, à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}_{BA}(\mathcal{H})$ des opérateurs linéaires bornés auto-adjoints de $\mathcal{H}$. On suppose en outre que l'hypothèse de continuité (C) suivante est satisfaite:

HYPOTHÈSE (C): *(i) A, défini sur X et à valeurs dans $\mathcal{L}_{AB}(\mathcal{H})$, est (fortement) continu, c'est-à-dire: pour tout $u \in \mathcal{H}$, l'application $x \mapsto A_x(u)$ de X dans $\mathcal{H}$ est continue; (ii) la relation (1.2) est vérifiée par tous les A_x, c'est-à-dire:*

$$\forall x \in X \ , \ A_{T^n x} = U^n A_x U^{-n} \ . \tag{2.4}$$

Rappelons qu'un point $x \in X$ est dit *générique* pour T et μ si et seulement si toute fonction f continue sur X et à valeurs réelles (ou complexes) vérifie:

$$\int_X f d\mu \ = \ \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(T^n x) \ . \tag{2.5}$$

D'après le théorème de Birkhoff et par ergodicité de T, presque tout point de X est générique.
Introduisons maintenant la notion de point essentiel pour μ: $x \in X$ est dit *μ-essentiel* si pour tout nombre réel $\rho > 0$, il existe une boule ouverte de rayon ρ, contenant x et de mesure strictement positive. Par définition, l'ensemble de tous les points μ-essentiels correspond exactement au support de la mesure μ. Puisque $\mu(X) = 1$, il est clair que μ-presque tout point de X est un point μ-essentiel. On a donc:

PROPOSITION 2.3. *Soit $(T, X, \mathcal{B}, \mu)$ un système dynamique topologique ergodique. Alors μ-presque tout élément x de X est un point générique et μ-essentiel.*

Pour les résultats de base de théorie ergodique, nous renvoyons au livre de P. Walters [W]. Le théorème suivant justifie l'introduction des points μ-essentiels.

THÉORÈME 2.4. *Soit $(T, X, \mathcal{B}, \mu)$ un système dynamique topologique ergodique. Soit A un opérateur aléatoire discret de X, de groupes associés $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$, vérifiant l'hypothèse (C). Soient aussi x et y deux points à la fois génériques et essentiels de X pour T et μ. Alors:*

$$\sigma(A_x) = \sigma(A_y) \ . \tag{2.6}$$

Remarque 2.2. Dans la littérature, on se contente habituellement d'établir l'existence d'un compact K tel que l'ensemble $X' = \{x \in X \ ; \ \sigma(A_x) = K\}$ soit de mesure 1, sans autre information sur X'. Le théorème 2.4 apporte donc un renseignement supplémentaire: X' contient les points essentiels génériques. ◇

Avant de faire la démonstration de ce théorème, deux lemmes sont nécessaires.

LEMME 2.5. *Soit x un point générique pour T et μ. Soit B une boule ouverte de X de mesure strictement positive. Alors, $T^n x$ appartient à B pour une infinité d'entiers $n \geq 1$.*

Démonstration. La compacité de X entraîne que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe toujours une boule ouverte de rayon ε et de mesure non nulle. On note a le centre de la boule B et ρ son rayon: $B = B(a, \rho)$. Soient aussi les boules fermées $\overline{B}$, ainsi que pour tout $n \geq 1$, $\overline{B_n} = \overline{B}(a, \rho - \frac{1}{n})$ avec $\rho - \frac{1}{n} > 0$.
Il est clair que $B = \cup_{n \geq 1; \rho > 1/n} \overline{B_n}$. Or $\mu(B) > 0$, de sorte qu'il existe au moins un indice n_i pour lequel $\mu(\overline{B_{n_i}}) > 0$. Considérons alors la fonction continue positive f_i définie sur X par:

$$f_i(x) = \max\{0, 1 - n\delta(x, B_{n_i})\}$$

où $\delta(x, E)$ désigne la distance de x au sous-ensemble E de X. L'application f_i vérifie $0 \leq f_i \leq 1$, elle vaut 1 sur $\overline{B_{n_i}}$ et 0 sur le complémentaire de B. Alors,

$$\int_X f_i d\mu \geq \int_{\overline{B_{n_i}}} f_i d\mu = \int_{\overline{B_{n_i}}} 1 d\mu = \mu(\overline{B_{n_i}}) > 0 \ .$$

En outre, la généricité de x implique $\int_X f_i d\mu = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_i(T^n x)$. Par hypothèse, f_i est positive, d'où l'existence d'une infinité d'entiers n tels que $f_i(T^n x) > 0$. ◇◇◇

LEMME 2.6. *Pour tout point essentiel y de X , et pour tout point générique x de X pour T et μ, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k \geq 1}$ telle que la suite $(T^{n_k} x)_{k \geq 1}$ converge vers y dans X. On dit que y est un point limite de l'orbite de x.*

Démonstration. Pour tout entier $k \geq 1$, on note B_k une boule ouverte de rayon $\frac{1}{2^k}$, contenant y et de mesure strictement positive. Une telle boule existe par définition de y. Pour tout $k \geq 1$, la généricité de x implique, d'après le lemme 2.5, l'existence d'une infinité d'indices n pour lesquels $T^n x \in B_k$. Choisissons-en un, et notons-le n_k : $T^{n_k} x \in B_k$. La suite $(n_k)_k$ peut être choisie strictement croissante.
On vient de construire une suite $(T^{n_k} x)_{k \geq 1}$ vérifiant, pour tout k, $\delta(T^{n_k} x, y) < \frac{1}{2^{k-1}}$. Ceci implique la convergence de cette suite dans X vers y. ◇◇◇

Venons à la démonstration du théorème 2.4.
Par hypothèse, x et y sont deux points génériques et essentiels de X. En appliquant le lemme 2.6 à l'élément générique x et à l'élément essentiel y, on aboutit au fait que y est point limite de l'orbite de x. La continuité de A implique que la suite des opérateurs $A_{T^{n_k} x}$ converge fortement vers A_y. On en déduit classiquement que $\sigma(A_y) \subset \overline{\cup_{k \geq 1} \sigma(A_{T^{n_k} x})} = \sigma(A_x)$. L'échange entre x et y aboutit à l'inclusion inverse. ◇◇◇

COROLLAIRE 2.7. *Soit $(T, X, \mathcal{B}, \mu)$ un système dynamique uniquement ergodique (c'est-à-dire que μ est l'unique mesure de probabilité T-invariante). On suppose également que tout ouvert non vide de X est de mesure strictement positive.*
Soit A un opérateur aléatoire défini comme dans le théorème 2.4. Alors tous les opérateurs A_x ont le même spectre:

$$\forall x \in X,\ \Sigma\ =\ \sigma(A_x)\ . \tag{2.7}$$

Démonstration. Puisque la mesure μ charge les ouverts de X, il est clair que tout point de X est un point essentiel. L'unique ergodicité de T implique que tout point de X est un point générique. Finalement, soient x et y deux points quelconques de X. Ils sont simultanément essentiels et génériques, et par application du théorème 2.4, on aboutit au résultat désiré. ◇◇◇

Il apparaît clairement que la mesure sur X ne joue pas un rôle essentiel. En fait, la démontration précédente s'adapte aisément pour donner le résultat suivant.

THÉORÈME 2.8. *Soit T est un homéomorphisme d'un espace métrisable compact X et soit $A : X \to \mathcal{L}_{AB}(\mathcal{H})$ satistait à l'hypothèse (C) pour un opérateur unitaire U de $\mathcal{H}$. Alors si T est minimal, pour tout x et y dans X les spectres $\sigma(A_x)$ et $\sigma(A_y)$ sont égaux.*

Démonstration. Dire que le système dynamique est minimal signifie que les seuls ensembles fermés K de X vérifiant $TK = K$ sont X lui-même et $\emptyset$. Ceci implique que tout point x de X est point limite de tout autre point y de X. Par l'argument de passage à la limite en fin de démonstration du théorème 2.4, on obtient l'égalité des spectres de A_x et A_y. ◇◇◇

3. *Composantes spectrales*

Dans cette section, nous passons rapidement en revue les éléments spectraux associés à un opérateur aléatoire. Bien que la théorie soit développée dans un cadre très général (cf. [Fi;Pa]), on se limitera volontairement aux opérateurs aléatoires bornés symétriques A de domaine $\mathcal{H}$. Sur l'opérateur unitaire de conjugaison U, nous ferons une hypothèse supplémentaire:

> *il n'existe pas de sous-espace propre de dimension finie de $\mathcal{H}$ qui soit invariant sous l'action de $\mathcal{U}$* (3.1)

Remarque 3.1. L'opérateur de décalage S sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ en particulier vérifie cette propriété. ◇

Remarque 3.2. L'hypothèse (3.1) a pour effet d'obtenir des informations sur le rang de certains projecteurs associés à l'opérateur aléatoire. Par exemple, sous certaines conditions de séparabilité de A, la dimension du sous-espace (aléatoire) orthogonal à l'union les espaces $(A - \zeta I)\mathcal{D}$, $\zeta \in \mathbb{C}$, $\Im\mathrm{m}(\zeta) \neq 0$, est soit 0 soit infini presque sûrement. A ce sujet, si cette dimension est nulle presque sûrement, l'opérateur aléatoire symétrique A est dit essentiellement symétrique. C'est en particulier le cas lorsque presque tous les opérateurs A_x sont bornés. ◇

3.1. *Résolution de l'identité*

Sous les conditions précédentes, A_x est un opérateur linéaire continu et auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ pour tout $x \in X'$, avec X' partie mesurable de X de mesure $\mu(X') = 1$. Il n'y a, en général, pas d'inconvénient à supposer $X' = X$. Comme μ-presque tous les opérateurs A_x sont auto-adjoints, on peut, si c'est le cas, associer à A_x une unique mesure spectrale E_x, définie sur la σ-algèbre des parties boréliennes de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans l'ensemble des projecteurs orthogonaux de $\mathcal{H}$.

De manière équivalente, E_x est donnée par la famille spectrale de projecteurs (orthogonaux) $\{E_x(]-\infty,\lambda])\,;\ \lambda\in\mathbb{R}\}$. Pour simplifier, le projecteur $E_x(]-\infty,\lambda]$ sera noté $E_x(\lambda)$. Par ce choix, $E_x(\lambda)$ est une résolution spectrale de l'identité continue à droite associée à A_x, c'est-à-dire une famille croissante de projecteurs orthogonaux, fortement continue à droite (*i.e.*, pour tout $u\in\mathcal{H}$, $\lim_{\substack{\lambda\to t\\ t<\lambda}} E_x(\lambda)u = E_x(t)u$) telle que $\bigwedge_{\lambda\in\mathbb{R}} E_x(\lambda) = \{0\}$, $\bigvee_{\lambda\in\mathbb{R}} E_x(\lambda) = \mathcal{H}$. D'autre part, pour toute application continue $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$,

$$\varphi(A_x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda)E_x(d\lambda) \quad \text{et} \quad \|\varphi(A_x)\| = \sup_{t\in\sigma(A_x)} |\varphi(t)|\,. \tag{3.2}$$

Il est également possible de choisir la famille des projecteurs $E_x^-(\lambda) = E_x(]-\infty,\lambda[)$ qui forme une résolution spectrale de l'unité associée à A_x, mais cette fois-ci continue à gauche. On a

$$E_x(\lambda) = E_x^-(\lambda) + E_x(\{\lambda\})$$

et

$$\lim_{\substack{\lambda\to t\\ \lambda<t}} E_x(\lambda) = E_x^-(t).$$

Pour tout nombre réel λ, l'application $E(\lambda)$ est définie pour μ-presque tout x dans X par $E(\lambda)(x) = E_x(\lambda)$. La question importante qui se pose est alors de savoir dans quelle condition $E(\lambda)$ détermine un opérateur aléatoire, appelé alors *opérateur* ou *famille spectrale aléatoire* de l'opérateur aléatoire A. Le point essentiel est en fait d'avoir la mesurabilité faible des applications $x\mapsto E_x(\lambda)$ (définies μ-presque partout pour tout λ). Une condition naturelle est de supposer A presque sûrement déterminé par sa restriction à un sous-espace fixe $\mathcal{D}_0$ dense dans $\mathcal{D}$ (voir [Fi;Pa] ou [Sk]). C'est notamment le cas lorsque les opérateurs A_x sont presque sûrement symétriques bornés sur $\mathcal{H}$ (et $\mathcal{H}$ séparable).

PROPOSITION 3.1. *Soit A un opérateur aléatoire symétrique borné ergodique, défini sur $\mathcal{H}$ et vérifiant (3.1). Si $\{E(\lambda)\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}\}$ est sa famille spectrale aléatoire, elle possède les propriétés spécifiques suivantes:*

(i) Pour tout nombre réel λ, $E(\lambda)$ est une projection aléatoire, i.e. $E(\lambda)$ est un opérateur aléatoire défini (presque sûrement) sur X à valeurs dans le sous-espace des projections orthogonales sur $\mathcal{H}$, tel que pour deux éléments quelconques u et v de $\mathcal{H}$, l'application définie sur X par $(u, E_x(\lambda)v)$ est $\mathcal{B}$-mesurable .

(ii) Pour tout nombre réel λ, $E(\lambda)$ est ergodique. Le groupe des automorphismes de X qui lui est associé est $\mathcal{T}$, celui des opérateurs unitaires de $\mathcal{H}$ est $\mathcal{U}$.

(iii) Pour tout nombre réel λ, le rang de la projection aléatoire $E(\lambda)$ est une fonction constante sur X. Sa valeur est:

$$rg(E_x(\lambda)) = \begin{cases} \text{soit } 0 & \text{pour } \mu\text{-presque tout } x;\\ \text{soit } +\infty & \text{pour } \mu\text{-presque tout } x.\end{cases}$$

Démonstration. Pour une démonstration (dans un cadre un peu plus général), voir par exemple [Fi;Pa]. Ces questions sont également traitées dans le livre de Cycon, Froese, Kirsch et Simon [C;F;K;Si] mais dans le cadre strict des opérateurs de Schrödinger discrets. ◇◇◇

Notons que la même proposition peut être énoncée pour la famille spectrale $E^-(\lambda)$ déterminée par les résolutions spectrales $E_x^-(\lambda)$. En particulier

COROLLAIRE 3.2. *L'application $x \mapsto E_x(J)$ (définie pour μ-presque tout x) est une projection aléatoire, ergodique pour l'automorphisme T, d'opérateur unitaire associé U.*

La fonction caractéristique 1_J de J peut être remplacée par une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$; plus précisément:

PROPOSITION 3.3. *Sous les hypothèses de la proposition 3.1, pour toute fonction continue bornée $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto \varphi(A_x)$ définit un opérateur aléatoire symétrique borné, ergodique (associé à T et U) de domaine $\mathcal{H}$.*

Démonstration. On peut se restreindre à $\varphi \geq 0$. L'opérateur $\varphi(A_x)$ est borné (dès que la famille spectrale E_x est définie) et pour tout entier $n \geq 1$, il est facile de construire une partition au plus dénombrable de $\mathbb{R}$ en intervalles $J_i^{(n)}$ et des nombres réels $\alpha_i^{(n)} \geq 0$ tels que pour $f_n = \sum_i \alpha_i 1_{J_i}$, on a $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t) - \varphi(t)| \leq \frac{1}{n}$. Alors, $\|f_n(A_x) - \varphi(A_x)\| \leq \frac{1}{n}$. D'autre part, $f_n(A_x) = \sum_i \alpha_i E_x(J_i)$ est mesurable en x d'après le corollaire 3.2. Comme $\varphi(A_x)$ est limite en norme, uniformément en x, de la suite $f_n(A_x)$, il en résulte la mesurabilité de $x \mapsto \varphi(A_x)$. ◇◇◇

Lorsque X est un espace compact et l'application $x \mapsto A_x$, définie sur tout X, est fortement continue, alors pour tout $u \in \mathcal{H}$, il existe une constante finie $C_u \geq 0$ telle que $\|A_x u\| \leq C_u$. D'après le principe de la majoration uniforme (Théorème de Banach-Steinhaus), la famille $\{A_x,\ x \in X\}$ est uniformément bornée *i.e.*,

$$\sup\{\|A_x\| \ ;\ x \in X\} = C < +\infty.$$

Il en résulte une première localisation du spectre:

$$\forall\, x \in X\ ,\ \sigma(A_x) \subset [-C, C]. \tag{3.3}$$

Donnons une autre conséquence:

PROPOSITION 3.4. *Sous l'hypothèse de continuité forte de $x \mapsto A_x$ (X compact), pour toute application continue $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, l'opérateur aléatoire $x \mapsto \varphi(A_x)$ est symétrique, continu, borné, ergodique de domaine $\mathcal{H}$.*

Démonstration. La seule partie intéressante à montrer est la continuité forte. Observons tout d'abord que si $x \mapsto B_x$ est une autre application fortement continue de X dans l'algèbre des opérateurs bornés de $\mathcal{H}$, alors la somme $x \mapsto A_x + B_x$ et le produit $x \mapsto A_x B_x$ sont aussi des applications fortement continues. Il en résulte que la proposition est vérifiée si φ est un polynôme. Supposons maintenant φ continue. Utilisons (3.3); pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un polynôme $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tel que $\sup_{|t|\leq C} |\varphi(t) - p(t)| \leq \varepsilon$. Par suite, A_x étant symétrique et $\sigma(A_x) \subset [-C, C]$, on a

$$\|\varphi(A_x)u - p(A_x)u\| \leq \|u\| \sup_{t\in\sigma(A_x)} |\varphi(t) - p(t)| \leq \varepsilon\|u\|.$$

On en déduit aisément que l'application $x \mapsto \varphi(A_x)u$ est continue pour tout $u \in \mathcal{H}$. ◇◇◇

La question se pose maintenant de la régularité de la famille spectrale. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé et $f_{\lambda,n}$ la fonction continue, affine par morceaux, égale à 1 sur $]-\infty, \lambda]$ et 0 sur $[\lambda + \frac{1}{n}, +\infty[$. Alors, la continuité forte à droite de $E_x(\lambda)$ entraîne que la suite $n \mapsto f_{\lambda,n}(A_x)$ converge fortement vers $E(\lambda) = 1_{]-\infty,\lambda]}(A_x)$, d'où le complément suivant à la proposition 3.1:

PROPOSITION 3.5. *Sous l'hypothèse de continuité forte de $x \mapsto A_x$ (X compact), pour tout tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $u \in \mathcal{H}$, le vecteur aléatoire $x \mapsto E_x(\lambda)u$ est borélien.*

En accord avec les notations de l'appendice A, nous désignons respectivement par π_p^x, π_{ac}^x ,π_{sc}^x les projections orthogonales associées à l'opérateur A_x sur les sous-espaces $\mathcal{H}_p(A_x)$, $\mathcal{H}_{ac}(A_x)$ et $\mathcal{H}_{sc}(A_x)$. Définissons alors Π_p, Π_c ainsi que Π_{sc} par :

$$\forall x \in X \ , \ \Pi_\varepsilon(x) = \pi_\varepsilon^x, \text{ pour } \varepsilon = p, ac, sc \ .$$

PROPOSITION 3.6. *Sous les hypothèses de la proposition 3.1, les applications Π_p, Π_{ac} et Π_{sc} sont des projections aléatoires ergodiques sur $\mathcal{H}$, de groupes associés $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$.*

Démonstration. Le fait que Π_ε soit un opérateur aléatoire provient du caractère aléatoire de la mesure spectrale. De plus, $\mathcal{A}$ est ergodique, de groupes associés $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$ et la relation (1.2) résulte de la définition des Π_ε. ◇◇◇

3.2. *La décomposition spectrale est constante*

Les résultats prédédents nous conduisent au théorème général suivant (voir [Fi;Pa] et [C;F;Ki;Si]).

THÉORÈME 3.7. *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur aléatoire symétrique, borné, ergodique, de domaine $\mathcal{H}$.*

(i) Il existe un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$, noté Σ tel que pour μ-presque tout $x \in X$,

$$\Sigma = \sigma(A_x) \ .$$

(ii) Il existe quatre sous-ensembles de Σ, notés respectivement Σ_c, Σ_{ac}, Σ_{sc} et Σ_{pp}, tels que

$$\Sigma_\varepsilon = \sigma_\varepsilon(A_x) \ , \ \mu - p.p.$$

pour $\varepsilon = c$, sc, ac, pp.

(iii) Pour μ-presque tout $x \in X$, l'opérateur A_x n'a pas de valeur propre isolée de multiplicité finie, c'est-à-dire qu'avec une probabilité égale à 1, $\sigma(A_x)$ est purement essentiel.

(iv) Si λ est un nombre réel, $\mu(\{x \in X \ ; \ \lambda \in \sigma_{dis}(A_x)\}) = 0$.

(v) Si Δ est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors le nombre de valeurs propres de A_x qui appartiennent à Δ est soit nul pour μ-presque tout x, soit infini pour μ-presque tout x, selon que l'opérateur $\int \Pi_p \circ E(\Delta) d\mu$ est nul ou non.

Remarque 3.3. L'assertion *(i)* du théorème précédent constitue le résultat du théorème 2.4, dans un cadre un peu plus "aléatoire"! ◇

Remarque 3.4. L'assertion *(iii)* est équivalente à la propriété suivante: soit Δ un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, on note $int(\Delta)$ l'intérieur de Δ. Alors le cardinal de l'ensemble $\Sigma \cap int(\Delta)$ est soit 0 avec une probabilité 1, soit $+\infty$ avec une probabilité 1, selon que l'opérateur $\int E(\Delta) d\mu$ est nul ou non. ◇

Démonstration. Les assertions *(i)* et *(ii)* découlent des propositions 3.1 et 3.2, et de la définition même des projections spectrales. Les assertions *(iii),(iv)* et *(v)* sont obtenues à partir de la transitivité métrique de la résolution de l'identité de $\mathcal{A}$. Nous nous référons de nouveau à [Fi;Pa] pour une démonstration complète. ◇◇◇

Remarque 3.5. Même sous l'hypothèse plus forte de stricte ergodicité du système dynamique, nous ne pouvons pas conclure à l'égalité partout des spectres purement ponctuels (respectivement absolument continus, singuliers continus). ◇

4. Mesures de densité d'états

4.1. Construction

Soit $(T, X, \mathcal{B}, \mu)$ un système dynamique ergodique, $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et U un opérateur unitaire de $\mathcal{H}$, $\mathcal{U} = \{U^n;\ n \in \mathbb{Z}\}$. On note A un opérateur aléatoire symétrique sur X et ergodique avec T et U comme opérateurs associés. Pour simplifier, nous supposerons toujours que A est borné de domaine $\mathcal{H}$ et Σ désignera le compact défini au théorème 3.7. Pour toute fonction continue $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}$, l'opérateur $\varphi(A_x)$ est presque sûrement défini, borné, et pour tout u, v dans $\mathcal{H}$, l'application $x \mapsto (\varphi(A_x)u, v)$ $(= \int_\Sigma \varphi(\lambda)(E_x(d\lambda)u, v))$ est mesurable. Elle est même, on l'a vu, continue si A est fortement continue. D'après le théorème ergodique individuel,

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{|k|\le L} (\varphi(A_{T^k x})u, v) = \int_X (\varphi(A_t)u, v)\mu(dt)\ \mu\text{-p.p.} \tag{4.1}$$

L'application $\varphi \mapsto \int_X (\varphi(A_t)u, v)\mu(dt)$ est une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{C}_u(\Sigma)$; elle est bornée car

$$\begin{aligned} \left|\int_X (\varphi(A_t)u, v)\mu(dt)\right| &\le \int_X |(\varphi(A_t)u, v)|\mu(dt) \\ &\le \int_X ||\varphi(A_t)|| \cdot ||u|| \cdot ||v||\mu(dt) \\ &\le ||\varphi||_\infty ||u|| \cdot ||v|| \end{aligned} \tag{4.2}$$

et détermine donc une mesure complexe borélienne sur Σ, appelée *mesure de densité d'états* et notée $\nu_{u,v}$. Le cas où $u = v$ correspond à une mesure positive, notée simplement ν_u, telle que $\nu_u(\Sigma) = ||u||^2$.

PROPOSITION 4.1. *L'application $(u, v) \mapsto \nu_{u,v}$ de $\mathcal{H}^2$ dans l'espace $\mathcal{M}(\Sigma)$ des mesures boréliennes sur Σ muni de la norme de la variation totale (i.e., $\mathcal{M}(\Sigma)$ est le dual fort de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\Sigma)$), est hermitienne, continue et pour toute partie borélienne B de Σ, vérifie*

$$|\nu_{u,v}(B)|^2 \le \nu_u(B)\nu_v(B). \tag{4.3}$$

Démonstration. La sesqui-linéarité vient directement des définitions. La continuité est une conséquence de la majoration (4.2). Pour $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\Sigma)$, l'inégalité de Schwarz appliquée à la forme hermitienne positive $(u, v) \mapsto \int_\Sigma |\varphi| d\nu_{u,v}$ donne

$$\left|\int_\Sigma \varphi d\nu_{u,v}\right|^2 \le \int_\Sigma |\varphi| d\nu_u \int_\Sigma |\varphi| d\nu_v.$$

Cette inégalité se prolonge immédiatement aux fonctions boréliennes bornées, en particulier aux fonctions caractéristiques des ensembles boréliens, ce qui donne (4.3). ◇◇◇

Dans (4.1), il est possible remplacer φ par $\mathbf{1}_{]-\infty,\lambda]}$ et le second membre peut être précisé:

PROPOSITION 4.2. *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{|k|\le L} (E_{T^k x}(\lambda)u, v) = \int_X (E_t(\lambda)u, v)\mu(dt) \ \mu\text{-p.p.}$$

et

$$\int_X (E_x(\lambda)u, v)\mu(dx) = \nu_{u,v}(]-\infty, \lambda]). \tag{4.4}$$

Démonstration. La première partie de la proposition relève du théorème ergodique, l'application $t \mapsto (E_t(\lambda)u, v)$ étant mesurable, presque sûrement bornée. Pour la seconde, il suffit de montrer (4.3) pour $u = v$, le cas général s'en déduisant par polarisation. Reprenons la suite des fonctions continues $f_{\lambda,n}$ définies au paragraphe 3.1. Alors, par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, $\int_\Sigma f_{\lambda,n} d\nu_u$ $(= \int_X (f_{\lambda,n}(A_x)u, u)\mu(dx))$ converge vers $\nu_u(]-\infty, \lambda])$. D'autre part, pour μ-presque tout $x \in X$, $f_{\lambda,n}(A_x)$ converge fortement vers $E_x(\lambda)$ - le résultat est classique - d'où, encore par le théorème de la convergence dominée, $\lim_{n\to\infty} \int_X (f_{\lambda,n}(A_x)u, v)\mu(dx) = \int_X (E_x(\lambda)u, v)\mu(dx)$ et l'égalité (4.1) est démontrée. ◇◇◇

On peut remplacer, dans la proposition précédente, $E_x(\lambda)$ par $E_x^-(\lambda)$; la démonstration est analogue. En rassemblant les deux résultats, on obtient le suivant:

THÉORÈME 4.3. *Pour tout intervalle* J *de* $\mathbb{R}$, *on a*

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{|k|\le L} (E_{T^k x}(J)u, v) = \int_X (E_t(J)u, v)\mu(dt) \ \mu\text{-p.p.}$$

et

$$\int_X (E_x(J)u, v)\mu(dx) = \nu_{u,v}(J). \tag{4.4'}$$

En remplaçant dans (4.1) x par $T^n x$, la limite reste inchangée si elle existe et en utilisant la relation $\varphi(A_{T^n x})) = U^n \varphi(A_x) U^{-n}$, on obtient

$$\int_X (\varphi(A_t)u, v)\mu(dt) = \int_X (\varphi(A_t)U^{-n}u, U^{-n}v)\mu(dt).$$

En d'autres termes

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ \forall (u,v) \in \mathcal{H}^2,\ \nu_{u,v} = \nu_{U^m u, U^m v}. \tag{4.5}$$

Cette propriété sera utilisée dans la section suivante.

4.2. *Cas où l'opérateur unitaire* U *est irréductible*

Revenons sur l'hypothèse (3.1). Le résultat précédent suggère de s'intéresser plus particulièrement au cas où l'opérateur unitaire U est irréductible, c'est-à-dire tel que pour tout vecteur non nul h de $\mathcal{H}$, le sous-espace engendré par la famille des vecteurs $U^m h$, $m \in \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathcal{H}$.

THÉORÈME 4.4. *Supposons U irréductible. Pour tous u et v non nuls dans $\mathcal{H}$, les mesures de densité d'états ν_u et ν_v sont équivalentes et ont pour support Σ.*

Démonstration. Notons tout d'abord que pour tout $u \in \mathcal{H}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\nu_{\lambda u} = |\lambda|^2 \nu_u.$$

Avec (4.3) on déduit alors, par un calcul simple, que pour toute combinaison linéaire finie $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$ dans $\mathcal{H}$,

$$\nu_u \leq (\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2)(\sum_{k=1}^{n} \nu_{u_k}).$$

En prenant les u_n parmi les vecteurs $U^m h$, (4.5) donne $\nu_u \leq (\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2)\nu_h$. Ainsi, pour un sous-espace dense E de $\mathcal{H}$, les mesures ν_e, $e \in E$, sont absolument continues par rapport à ν_h. Mais la proposition 4.1 entraîne que $u \mapsto \nu_u$ est continue de sorte que pour tout vecteur v adhérent à E, la mesure ν_v est aussi absolument continue par rapport à ν_h. Par réciprocité, si $v \neq 0$, ν_h est aussi absolument continue par rapport à ν_v. Montrons que $\mathrm{supp}(\nu_h) = \Sigma$. Si φ est une fonction réelle, continue sur $\mathbb{R}$, de support compact disjoint de Σ, alors $\varphi(A_x) = 0$ pour μ-presque tout x. D'où $\mathrm{supp}(\nu_h) \subset \Sigma$. Supposons cette inclusion stricte et soit $t \in \Sigma \setminus \mathrm{supp}(\nu_h)$. Il existe alors un intervalle ouvert J contenant t et disjoint de $\mathrm{supp}(\nu_h)$. D'après (4.4'), $\nu_h(J) = \int_X (E_x(J)h, h)\mu(dx) = 0$. Ainsi $\|E_x(J)h\| = 0$ presque sûrement. Toute les mesures ν_h ($h \in \mathcal{H}$, $h \neq 0$) étant équivalente, elles ont le même support. L'argument précédent montre donc qu'il est possible de construire un ensemble dénombrable E dense dans $\mathcal{H}$, tel que, presque sûrement, $E_x(J)e = 0$ pour tout $e \in E$. Puisque pour μ-presque tout x, $\|E_x(J)\| = 1$, on en déduit l'existence d'un ensemble $X' \subset X$ de μ-mesure 1, tel que

$$\forall x \in X',\ \forall u \in \mathcal{H},\ E_x(J)u = 0.$$

En d'autres termes, $E_x(J) = 0$ presque sûrement, ce qui signifie que $J \cap \Sigma = \emptyset$, en contradiction avec l'hypothèse sur t. En conclusion, Σ est le support commun aux mesures non nulles ν_u. ◇◇◇

4.3. Cas où U est une translation bilatérale

Pour finir, considérons le cas particulier où U est une *translation bilatérale de multiplicité* 1, c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace de dimension 1, noté $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C} \cdot e_0$, $\|e_0\| = 1$, tel que pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, e_0 est orthogonal à $e_n = U^n e_0$ et $\mathcal{H}$ se décompose en la somme hilbertienne

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{-\infty}^{+\infty} U^n \mathcal{H}_0. \tag{4.6}$$

C'est typiquement le cas de l'opérateur de décalage sur $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$. On sait que pour toute autre décomposition hilbertienne de la forme (4.6), l'espace $\mathcal{H}_0$ est de dimension 1 et que U est irréductible. Il est donc naturel de faire jouer un rôle privilégié à la mesure de densité d'états ν_{e_0} qui est alors appelée mesure d'étiquetage. Sa fonction de répartition $\kappa_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\kappa_0(t) = \nu_{e_0}(]-\infty, t]) \tag{4.7}$$

est appelée *fonction de densité intégrée d'états* ou encore fonction d'étiquetage.

Pour tous m, n dans $\mathbb{Z}$ tels que $m \leq n$, notons $\pi_{m,n}$ le projecteur orthogonal de $\mathcal{H}$ sur le sous-espace $H_{m,n} = \bigoplus_{k=m}^{n} U^k H_0$. Supposons A_x borné, de spectre Σ et soit $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\Sigma)$. L'opérateur $\pi_{m,n}\varphi(A_x)$ est de rang fini, il admet une trace qui est donnée par

$$\mathrm{tr}(\pi_{m,n}\varphi(A_x)) = \sum_k (\pi_{m,n}\varphi(A_x)e_k, e_k) = \sum_{m\leq k\leq n} (\varphi(A_x)(e_k), e_k).$$

En particulier, compte tenu de (1.2),

$$\frac{1}{2L+1}\sum_{|k|\leq L} (\varphi(A_{T^k x})e_0, e_0) = \frac{1}{2L+1}\mathrm{tr}(\pi_{-L,L}\varphi(A_x))$$

et par suite (4.1) devient

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1}\mathrm{tr}(\pi_{-L,L}\varphi(A_x)) = \int_X \varphi(t)\nu_{e_0}(dt) \quad \mu\text{-p.p.} \tag{4.8}$$

Un calcul analogue donne

$$\kappa_0(t) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1}\mathrm{tr}(\pi_{-L,L}E_x(t)) \quad \mu\text{-p.p.} \tag{4.9}$$

et plus généralement, à partir du théorème 4.3:

THÉORÈME 4.5. *Pour tout intervalle J,*

$$\nu_{e_0}(J) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1}\mathrm{tr}(\pi_{-L,L}E_x(J)) \quad \mu\text{-p.p.}$$

Ce résultat entraîne une conséquence intéressante:

COROLLAIRE 4.6. *Une condition suffisante pour que la fonction de densité intégrée d'états κ_0 soit continue en t est que le projecteur $E_x(\{t\})$ soit de rang fini presque sûrement.*

Démonstration. Supposons $E_x(\{t\})$ de rang r_x, fini presque sûrement. De

$$\nu_{e_0}(\{t\}) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1}\mathrm{tr}(\pi_{-L,L}E_x(\{t\}))$$

(théorème 4.3) et $\mathrm{tr}(\pi_{-L,L}E_x(\{t\})) \leq \mathrm{tr}(E_x(\{t\})) = r_x$, résultent $\nu_{e_0}(\{t\} = 0$. ◇◇◇

Pour A_x borné et L entier ≥ 1, introduisons l'opérateur $A_x^{(L)} = \pi_{-L,L}A_x\pi_{-L,L}$. L'application $x \mapsto A_x^{(L)}$ est un opérateur aléatoire auto-adjoint. On peut lui associer la mesure $\nu_0^{(L)}$ sur $\mathbb{R}$, définie pour toute application continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\int_{\mathbb{R}} f(\cdot)\nu_0^{(L)}(dt) = \int_X (f(A_x^{(L)})e_0, e_0)\mu(dx). \tag{4.10}$$

On note $\kappa_0^{(L)}$ sa fonction de répartition. Comme dans le cas de la formule (4.4) pour la mesure ν_{e_0}, on obtient par la même méthode

$$\kappa_0^{(L)}(t) = \int_X (E_x^{(L)}(t)e_0, e_0)\mu(dx) \; (= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1}\sum_{|m|\leq M} (E_{T^m x}^{(L)}(t)e_0, e_0) \; \mu\text{-p.p.}), \tag{4.11}$$

où $E_x^{(L)}$ désigne la mesure spectrale associée à $A_x^{(L)}$.

THÉORÈME 4.7. *Les mesures de probabilité $\nu_0^{(L)}$ sont à support dans $[-c,+c]$ où $c = \sup_{s\in\Sigma}|s|$ et la suite $L \mapsto \nu_0^{(L)}$ converge faiblement vers ν_{e_0}. De plus, la suite des fonctions de répartition $L \mapsto \kappa_0^{(L)}$ converge faiblement vers κ_0, i.e., pour tout point t de continuité de κ, on a*

$$\kappa_0(t) = \lim_{L\to\infty} \kappa_0^{(L)}(t).$$

Démonstration. Il est clair que pour μ-presque tout x, $\|A_x^{(L)}\| \leq \|A_x\| = c$. Le support de $\nu_0^{(L)}$ est donc dans $[-c,+c]$. D'autre part, de manière évidente, la suite des opérateurs $L \mapsto \pi_{-L,L}$ converge fortement vers l'unité. Il en résulte que $L \mapsto A_x^{(L)}$ converge fortement vers A_x. Alors, par une argumentation déjà développée précédemment, pour toute application continue $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la suite des opérateurs $L \mapsto \varphi(A_x^{(L)})$ converge fortement vers $\varphi(A_x)$. Ceci entraîne la convergence faible des mesures $\nu_0^{(L)}$ vers ν_0. La convergence faible de la suite des fonctions de répartition correspondantes vers κ_0 est alors un résultat classique en théorie des probabilités. ◇◇◇

Dans la partie suivante nous considérons le cas des opérateurs de Schrödinger bornés pour lesquels, toutes les hypothèses que nous avons faites ici sont vérifiées. Les cas qui vont nous intéresser satisfont en outre à l'hypothèse

$$\text{(D)} \qquad \exists\, R \geq 0,\ \forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2,\ |n-m| > R \implies (A_x e_n, e_m) = 0\ \mu - \text{p.p.}$$

Dans le travail [Fi;Pa 2] sur la densité intégée d'états pour certains opérateurs aléatoires ergodiques, l'un des passages clés consiste à montrer (en se limitant volontairement au cas unidimensionnel) que si A satisfait à l'hypothèse (D) et s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on ait $|(A_x(e_n), e_n)| \leq C$ presque sûrement, alors

$$\kappa_0(t) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1} \mathrm{tr}(E_x^{(L)}(t))$$

en tout point de continuité de κ_0. L'étude des opérateurs de Schrödinger discret nous a conduit à sensiblement généraliser ce résultat. Introduisons tout d'abord la notion de matrice d'angle d'ordre N de taille R comme étant une matrice carrée $M = (M_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$ d'ordre N à coefficients réels ou complexes tels que $M_{i,j} = 0$ si $R \leq i \leq N-R$ ou $R \leq j \leq N-R$. On pose $\|M\|_\infty = \sup_{1\leq i,j\leq N} |M_{i,j}|$. Alors

THÉORÈME 4.8. *Soient R un entier ≥ 0 et C une constante numérique positive. Soit une suite $(x \mapsto M_x^{(L)})_{L\geq 1}$ de matrices carrées aléatoires d'ordre $2L+1$ (indexées sur $\{-L,\ldots,L\}$), à coefficients réels ou complexes $M_{i,j}^{(L)}(x)$ (v.a. définies sur X). On suppose que les $M_x^{(L)}$ sont des matrices d'angle, auto-adjointes, de taille $\leq R$, et telle que $\sup_L \|M_x^{(L)}\|_\infty \leq C$ presque sûrement. Supposons que A vérifie l'hypothèse (D) avec $\sup_{(m,n)\in\mathbb{Z}} |(A_x(e_m), e_n)| \leq C$ presque sûrement. Alors, si $E_{M,x}^{(L)}$ désigne la mesure spectrale de l'opérateur auto-adjoint $A_x^{(L)} + M_x^{(L)}$, on a*

$$\kappa_0(t) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1} \mathrm{tr}(E_{M,x}^{(L)}(t))\ \mu - \text{p.p.}$$

en tout point de continuité de κ_0.

Démonstration. Commençons par montrer que pour tout entier $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}((A_x^{(L)} + M_x^{(L)})^p) &= \mathrm{tr}((A_x^{(L)})^p) + \mathcal{O}(1) \\ &= \mathrm{tr}(\pi_{-L,L} A_x^p) + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

En effet, la condition (D) entraîne $(A_x^p e_n, e_n) = ((A_x^{(L)} + M_x^{(L)})^p)_{n,n} = ((A_x^{(L)})^p)_{n,n}$ lorsque $n \in]-L+(p+1)R, L-(p+1)R[$. Pour les autres indices, on a la majoration grossière (mais suffisante) $|(B^p)_{n,n}| \leq C^p(2pR+1)^{2p}$ si $B = A_x^{(L)}$ ou $B = A_x$ (en posant $B_{i,j} = (A_x e_i, e_j)$) et

$$|(B^p)_{n,n}| \leq \sum_{i_1,\ldots,i_{p-1}} |B_{n,i_1} B_{i_1,i_2} \cdots B_{i_{p-1},n}| \leq (2C)^p \big((2pR+1)^2 + R^2\big)^p$$

pour $B = A_x^{(L)} + M_x^{(L)}$.
On obtient alors, par passage à la limite et compte tenu de (4.8)

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1} \mathrm{tr}\big((A_x^{(L)} + M_x^{(L)})^p\big) = \int_{\mathbb{R}} t^p \nu_{e_0}(dt)$$

pour μ-presque tout x. D'autre part, pour la norme des opérateurs sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ ou $\mathbb{C}^{2L+1}$ (muni du produit scalaire standard), on a facilement $\|A^{(L)}\| \leq \|A\| \leq C(2R+1)$ et $\|M^{(L)}\| \leq 2CR$. Posons $C_1 = C(2R+1)$. Par définition

$$\frac{1}{2L+1} \mathrm{tr}\big((A_x^{(L)} + M_x^{(L)})^p\big) = \int_{C_1}^{C_1} t^p N_{M,x}^{(L)}(dt)$$

où $N_{M,x}^{(L)}(dt)$ est la mesure (discrète) de densité d'états de $A^{(L)} + M^{(L)}$, de support dans $[-C_1, C_1]$, dont la fonction de répartition $t \mapsto N_{M,x}^{(L)}(t)$ est donnée par

$$N_{M,x}^{(L)}(t) = \frac{1}{2L+1} \mathrm{tr}(E_{M,x}^{(L)}(t))$$

Ainsi,

$$\lim_{L\to\infty} \int_{\mathbb{R}} t^p N_{M,x}^{(L)}(dt) = \int_X t^p \nu_{e_0}(dt)$$

pour tout entier p et les supports des mesures $N_{M,x}^{(L)}(dt)$ restent dans un compact fixé. En conséquence, la suite des mesures $N_{M,x}^{(L)}(dt)$ converge faiblement vers ν_{e_0} ainsi que la suite des fonctions de répartition correspondantes. ◇◇◇

Remarque 4.1. Avec les hypothèses du théorème 4.8, on ne peut pas conclure à la continuité de κ_0, comme le montre l'exemple suivant: $A_x = H$ pour tout x avec

$$(He_m, e_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in 2\mathbb{Z}, \\ 1 & \text{si } n+1 \in 2\mathbb{Z} \text{ et } m = n \pm 2, \\ 0 & \text{si } n+1 \in 2\mathbb{Z} \text{ et } m \neq n \pm 2, \end{cases}$$

de sorte que H s'identifie à la somme directe de opérateur nul sur $\mathcal{H}_{pair} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} U^{2n}\mathcal{H}_0$ et de la restriction de $\Delta_2 = U^{-2} + U^2$ sur l'orthogonal de $\mathcal{H}_{pair}$. Pour H, le point $\{0\}$ est une valeur propre de sous espace-propre $\mathcal{H}_{pair}$. C'est la seule valeur propre, le reste du spectre provient de l'opérateur Δ_2 qui est continue et $\sigma(H) = [2,2]$. La fonction de densité intégrée d'état fait un saut de $\frac{1}{2}$ en 0 et plus précisément, en utilisant le théorème 2.6 de la partie B qui suit, on peut obtenir la forme explicite suivante:

$$\kappa_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -2, \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\arcsin(t/2) & \text{si } -2 \leq t < 0, \\ \frac{3}{4} & \text{si } t = 0, \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}\arcsin(t/2) & \text{si } 0 \leq t < 2, \\ 1 & \text{si } 2 \leq t\,. \end{cases}$$

◇

Remarque 4.2. Dans les résultats précédents, le choix des moyennes sur les intervalles d'entiers $[-L, L]$ est une question de goût ou d'esthétique. Il est possible de remplacer ces moyennes par celles, par exemple, sur les intervalles $[1, L]$, le projecteur $\pi_{-L,L}$ étant alors remplacé par le projecteur $\pi_{1,L}$. ◇

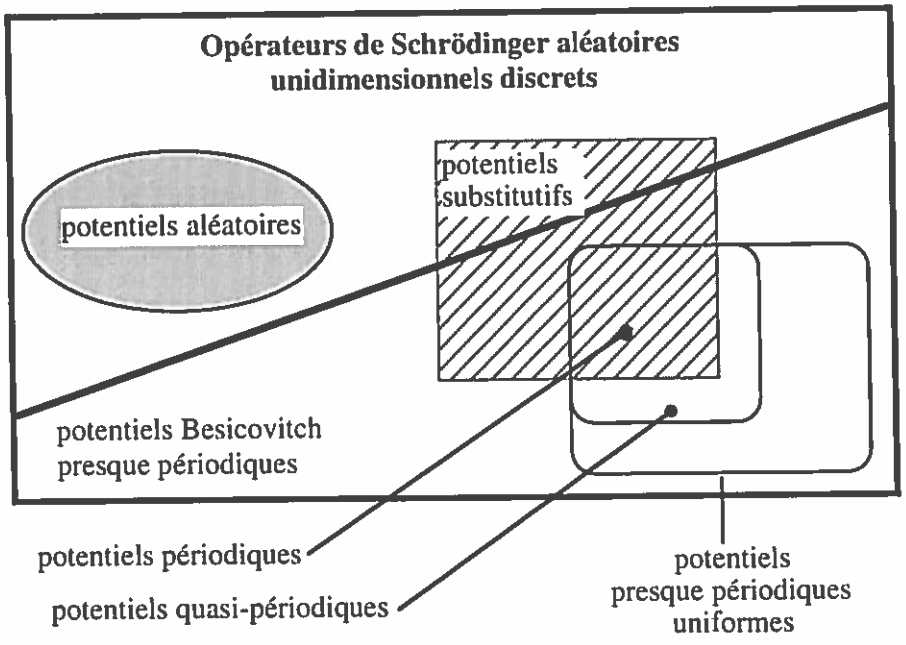
PARTIE B - Opérateurs de Schrödinger aléatoires unidimensionnels discrets

La classe des opérateurs de Schrödinger unidimensionnels discrets, bien qu'elle constitue un cas particulier d'opérateurs aléatoires, est très vaste et a été largement explorée. L'objectif de cette partie est de donner un aperçu global des différentes formes de potentiels qui ont été étudiés dans le cadre d'opérateurs associés à des systèmes dynamiques ergodiques, ainsi que leurs diverses propriétés spectrales.

Le paragraphe 1 est d'abord consacré aux premières propriétés d'un tel opérateur, puis l'exposant de Lyapunov est introduit et le lien qui le relie à la composante absolument continue du spectre est mis en lumière. Nous terminons par un rappel sur la densité intégrée d'états, qui est un bon indicateur de trous spectraux.

Le reste de ce chapitre consiste en une évocation des différents types de potentiels étudiés et donne leurs principales propriétés. En premier lieu, il existe quatre grandes classes d'opérateurs de Schrödinger: les opérateurs à potentiels périodiques, les opérateurs à potentiels presque périodiques (uniforme, Bésicovitch,...), les opérateurs à potentiels substitutifs, ainsi que les opérateurs associés à des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées.

Le diagramme ci-dessous indique sommairement les relations d'inclusion-exclusion entre ces classes.



Différentes classes d'opérateurs de Schrödinger

Le paragraphe 2 est plus particulièrement consacré au cas des opérateurs à potentiels périodiques, qui est le plus évocateur. Les systèmes dynamiques qui leurs sont associés sont finis et strictement ergodiques.

Après avoir donné les propriétés immédiates et remarqué l'égalité de tous les spectres, nous nous intéressons au spectre de cet opérateur. Celui-ci est relié à l'équation discrète de Hill (sous-paragraphe 2.2), qui nous amène, grâce au théorème de Flocquet, à une localisation du spectre: il est formé d'un nombre fini de bandes (intervalles fermés de $\mathbb{R}$). Plus précisément, si $N \in \mathbb{N}^*$ désigne la période du potentiel, le spectre est constitué de N bandes (non forcément disjointes) et il existe au plus $N-1$ trous spectraux, qui sont les intervalles bornés ouverts de $\mathbb{R}$ délimités par les bandes. La nullité de l'exposant de Lyapunov sur tout le spectre implique que celui-ci est purement absolument continu. Nous terminons en donnant une forme explicite de la mesure de densité intégrée d'états qui est une conséquence de l'existence d'une dynamique *logistique* sur le spectre. Elle correspond au système dynamique de l'application trace $\mathrm{tr}A \mapsto \mathrm{tr}(A^2)$ sur les matrices d'ordre 2 de déterminant 1. Une technique analogue mais plus complexe, faisant intervenir la dynamique d'une application trace associée à la substitution de Thue-Morse, a déjà été utilisée par F. Axel et J. Peyrière ([Ax;P]).
La suite constitue un survol des principaux résultats connus pour divers types de potentiels. Le paragraphe 3 est consacré au modèle d'Anderson: le potentiel est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (le cas où le potentiel est presque sûrement constant étant exclu, de principe). Ici, le spectre de presque tous les opérateurs est purement singulier.
Le quatrième paragraphe s'intéresse aux opérateurs à potentiels presque périodiques. Deux notions distinctes de suites presque périodiques sont données. Elles nous permettent un essai de clarification des différentes types d'opérateurs à potentiels presque périodiques. Le cas presque périodique uniforme est tout d'abord abordé: le système dynamique associé est donné. Il est uniquement ergodique. Deux grandes familles d'exemples sont évoquées: les opérateurs à potentiel limite périodique et ceux à potentiel quasi-périodique. Leurs propriétés spectrales particulières sont données. Le cas des opérateurs à potentiel 1-Besicovitch presque périodique est traité dans le sous-paragraphe 4.2 à travers les suites dites circulaires, riches en résultats.
Enfin, dans le paragraphe 5, nous considérons les potentiels dits substitutifs. Le système dynamique induit est strictement ergodique et la partie absolument continue de presque tous les opérateurs est vide. Une tentative de récapitulation des divers exemples rencontrés dans la littérature termine cette partie

1. Généralités

1.1. Définition et propriétés générales

Dans toute cette partie, $(T, X, \mathcal{B}, \mu)$ désigne un système dynamique ergodique qui sera éventuellement explicité et $f : X \mapsto \mathbb{R}$ est une application mesurable bornée. A f est associé le potentiel aléatoire V sur X tel que pour tout $x \in X$,

$$\forall n \in \mathbb{Z}\,,\ V_x(n) = f(T^n x)\ . \tag{1.1}$$

Ainsi, la suite des variables aléatoires $x \mapsto V_x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, est stationnaire. L'opérateur aléatoire $x \mapsto H_x$ associé à V défini sur X par

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ ,\ \forall u \in \ell^2(\mathbb{Z})\ ,\ (H_x u)(n) = u(n+1) + u(n-1) + V_x(n)u(n) \tag{1.2}$$

est appelé opérateur de Schrödinger (unidimensionnel) de potentiel discret V. L'opérateur aléatoire correspondant est noté H. Le résultat suivant est classique et de démonstration immédiate.

PROPOSITION 1.1. *L'opérateur aléatoire H est ergodique sur $\ell^2(\mathbb{Z})$, de groupes associés $\mathcal{T} = \{T^n\ ,\ n \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathcal{U} = \{S^n\ ,\ n \in \mathbb{Z}\}$, où S est l'opérateur décalage sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. De plus, H est borné, symétrique.*

Les propriétés spectrales générales des opérateurs aléatoires de Schrödinger relèvent des théorèmes généraux des parties A.2, A.3 et A.4. La famille spectrale associée à H_x sera notée $E_x(\lambda)$ et $E_x(V,\lambda)$ si la référence à V est utile. ◇◇◇

Le fait que le V soit uniformément borné (par $||f||_\infty$), implique un localisation grossière du spectre. Plus précisément:

PROPOSITION 1.2. *Pour tout $x \in X$, $\sigma(H_x) \subset [-2-\| V \|_\infty, 2+\| V \|_\infty]$.*

1.2. Exposant de Lyapunov et spectre absolument continu

Dans ce qui suit, nous mettons en place les principales notations utiles pour la suite et rappelons la définition des exposants de Lyapunov ainsi que leurs propriétés usuelles.
On considère, pour tout réel E fixé dans $\mathbb{R}$ et appelé (niveau d') énergie, l'équation spectrale:

$$H_x u \ = \ Eu \tag{1.3}$$

pour $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Toute solution de l'équation (1.3) est clairement déterminée de manière unique par ses valeurs en deux coordonnées successives. Pour tout $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$, on introduit la fonction $\mathbf{u}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, donnée pour $n \in \mathbb{Z}$ par

$$\mathbf{u}(n) = \begin{pmatrix} u(n+1) \\ u(n) \end{pmatrix} . \tag{1.4}$$

Pour $n > 0$, l'équation (1.3) peut s'écrire

$$u(n+1) = (E - V_x(n))u(n) - u(n-1) \ ,$$

de sorte que si l'on considère la matrice $A_n(x;E)$, définie par

$$A_n(x;E) = \begin{pmatrix} E - V_x(n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{1.5}$$

le vecteur $\mathbf{u}(n)$, pour $n > 0$, vérifie l'égalité

$$\mathbf{u}(n) \ = \ A_n(x;E)\mathbf{u}(n-1) \ . \tag{1.6}$$

De même u vérifie l'égalité $u(n-1) = (E - V_x(n))u(n) - u(n+1)$, de sorte que l'on peut considérer pour tout entier $n < 0$ la matrice $B_n(x;E)$:

$$B_n(x;E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & E - V_x(n) \end{pmatrix} \ . \tag{1.7}$$

L'égalité vérifiée par le vecteur $\mathbf{u}(n)$, pour $n < 0$ est

$$\mathbf{u}(n) = B_{n+1}(x;E)\mathbf{u}(n+1) \ . \tag{1.8}$$

Les matrices $A_n(E;x)$ et $B_n(x;E)$ sont appelées *matrices de transfert.* Elles sont de déterminant égal à 1. De plus, $B_n(x;E)^{-1} = A_n(x;E)$, quel que soit $n \in \mathbb{Z}$. On obtient de cette façon une relation de récurrence entre les composantes du vecteur u, qui est:

$$\mathrm{u}(n) = \begin{cases} A_n(E;x)A_{n-1}(E;x)\dots A_1(E;x)\mathrm{u}(0) & \text{si } n > 0 \\ A_{n+1}(E;x)^{-1}A_{n+2}(E;x)^{-1}\dots A_0(E;x)^{-1}\mathrm{u}(0) & \text{si } n < 0 \ . \end{cases} \tag{1.9}$$

On pose pour $n > 0$,

$$\Phi_n(E;x) = A_n(E;x)A_{n-1}(E;x)\dots A_1(E;x)$$

et $\Phi_0(E,x) = I_{\mathbb{R}^2}$. De même pour $n < 0$, on note

$$\Phi_n(E;x) = A_{n+1}(E;x)^{-1}A_{n+2}(E;x)^{-1}\dots A_0(E;x)^{-1}.$$

L'équation (1.3) est finalement équivalente à

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \qquad \mathrm{u}(n) = \Phi_n(E;x)\mathrm{u}(0)\,. \tag{1.10}$$

Définissons, lorsqu'elles existent, les quantités $\overline{\vartheta}^{\pm}(E;x)$ et $\underline{\vartheta}^{\pm}(E;x)$ par:

$$\overline{\vartheta}^{\pm}(E;x) = \limsup_{N\to\pm\infty} \frac{1}{\mid N \mid} \log \parallel \Phi_N(E;x) \parallel,$$

$$\underline{\vartheta}^{\pm}(E;x) = \liminf_{N\to\pm\infty} \frac{1}{\mid N \mid} \log \parallel \Phi_N(E;x) \parallel,$$

où $\parallel . \parallel$ est la norme des opérateurs linéaires sur $\mathbb{R}^2$ (muni de la norme euclidienne standard $\|\cdot\|$). Ces quantités mesurent la croissance de la norme de la matrice $\Phi_n(E;x)$. Puisque $A_j(E;x)$ a un déterminant égal à 1, il en est de même pour $\Phi_n(E;x)$ ce qui implique $\parallel \Phi_n(E;x) \parallel \geq 1$. Il est alors clair que, pour tout $n \neq 0$, $\log \parallel \Phi_n(E;x) \parallel \geq 0$, d'où $\overline{\vartheta}^{\pm}(E;x) \geq 0$ et $\underline{\vartheta}^{\pm}(E;x) \geq 0$. Finalement, les quantités $\overline{\vartheta}^{\pm}(E;x)$ et $\underline{\vartheta}^{\pm}(E;x)$ vérifient les inégalités suivantes:

$$0 \leq \underline{\vartheta}^{+}(E;x) \leq \overline{\vartheta}^{+}(E;x)$$
$$0 \leq \underline{\vartheta}^{-}(E;x) \leq \overline{\vartheta}^{-}(E;x)\,.$$

Le théorème suivant affirme l'existence des exposants de Lyapunov.

THÉORÈME DE FURSTENBERG ET KESTEN. *Soit E un nombre réel donné. Pour μ-presque tout $x \in X$,*

$$\underline{\vartheta}^{+}(E;x) = \overline{\vartheta}^{+}(E;x) \text{ et } \underline{\vartheta}^{-}(E;x) = \overline{\vartheta}^{-}(E;x)\,,$$

de sorte que les quantités

$$\vartheta^{\pm}(E;x) = \lim_{N\to\pm\infty} \frac{1}{\mid N \mid} \log \parallel \Phi_N(E;x) \parallel \tag{1.11}$$

existent et sont indépendantes de x. En outre

$$\vartheta^{+}(E) = \vartheta^{-}(E)\,. \tag{1.12}$$

Le nombre $\vartheta^+(E) = \vartheta^-(E) = \vartheta(E)$ est appelé *exposant de Lyapunov* de E associé à H.

Démonstration. La démonstration de ce théorème repose sur le fait que la suite des variables aléatoires $F_N(x) = \log \| \Phi_N(E;x) \|$ vérifie

$$F_{N+M}(x) \leq F_M(T^N x) + F_N(x)$$

et sur le théorème ergodique sous-additif de Kingman (cf. [Kr]) qui permet de conclure à la convergence μ-presque sûre de $\frac{1}{N}F_N(x)$ vers la constante $\Gamma(F) = \inf\{\frac{1}{N}\int(F_N)d\mu \ ; \ N > 0\}$ $(> -\infty)$. ◇◇◇

Remarque 1.1. Sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carées d'ordre 2, à coefficients réels, toutes les normes sont équivalentes. La valeur, ainsi que l'existence, de l'exposant de Lyapunov ne dépendent donc pas de la norme choisie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. ◇

Le théorème suivant, dû à Osseledecs, donne des renseignements complémentaires sur les exposants de Lyapounov. Nous l'énonçons sous la forme qui nous intéresse.

THÉORÈME MULTIPLICATIF ERGODIQUE D'OSSELEDECS. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui satisfont aux conditions suivantes:*

$$(i) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \| A_n \| \neq 0$$
$$(ii) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \det A_n = 1 .$$

Si $\vartheta = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \| A_n \dots A_1 \| > 0$, alors il existe un sous-espace de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$, noté $\mathcal{V}^-$, tel que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \| A_n \dots A_1 v \| = \begin{cases} -\vartheta & \forall v \in \mathcal{V}^- \text{ tel que } v \neq 0 \\ \vartheta & \forall v \notin \mathcal{V}^- . \end{cases} \tag{1.13}$$

Pour une version plus générale, ainsi qu'une démonstration du théorème de Furstenberg-Kesten, nous renvoyons à [Kr].

Revenons à l'exposant de Lyapunov, et supposons $\vartheta^+(E) > 0$. Par le théorème d'Osseledecs, il existe un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^2$, de dimension 1, tel que

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \log \| \Phi_N(E;x)v \| = \begin{cases} -\vartheta^+(E) & \text{si } v \in \mathcal{V} \text{ et } v \neq 0 \\ \vartheta^+(E) & \text{si } v \notin \mathcal{V}. \end{cases} \tag{1.14}$$

Si u est solution de l'équation (1.3), c'est-à-dire $\mathrm{u}(n) = \Phi_n(E;x)\mathrm{u}(0)$ pour tout entier relatif n, où $\mathrm{u}(0)$ est un élément de $\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \| \Phi_n(E;x)\mathrm{u}(0) \| &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \| \mathrm{u}(n) \| \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} \log(| u(n) |^2 + | u(n+1) |^2) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log(| u(n) |) . \end{aligned}$$

Deux cas se présentent: $\mathrm{u}(0)$ appartient ou n'appartient pas au sous-espace $\mathcal{V}$. Dans le premier cas $\frac{1}{n}\log(|u(n)|) \sim_{+\infty} -\vartheta(E)$, ce qui signifie que $|u(n)|$ décroît exponentiellement. Dans le second cas, $|u(n)|$ croît exponentiellement.

Finalement, si $\vartheta^+(E) > 0$, il existe μ-presque sûrement des solutions croissant exponentiellement vite ainsi qu'une solution décroissant exponentiellement vite lorsque $n \to +\infty$ de l'équation (1.3). La solution tendant vers 0 exponentiellement vite ne se produit que pour une condition initiale particulière, qui est notée $\mathbf{u}_+$. De même, pour $\vartheta^-(E) > 0$, lorsque $n \to -\infty$, avec une contition initiale $\mathbf{u}_-$.

Remarque 1.2. Toutes ces considérations sont justifiées lorsque E est fixé, mais si E varie dans un ensemble non dénombrable, il peut se trouver que l'élément x pour lequel $\vartheta^{\pm}(E;x) \neq \vartheta(E) > 0$, appartient à un ensemble de mesure non nulle. ◇

Remarque 1.3. On ne peut pas non plus conclure que pour μ-presque tout x, toute solution de l'équation (1.3) est soit exponentiellement décroissante, soit exponentiellement croissante. ◇

Remarque 1.4. Puisque pour μ-presque tout x, $\vartheta^+(E) = \vartheta^-(E) = \vartheta(E)$, il peut se trouver que l'unique solution décroissant exponentiellement à droite (c'est-à-dire correspondant à $\mathbf{u}_+$), soit aussi celle qui décroît exponentiellement à gauche (*i.e.* celle correspondant à $\mathbf{u}_-$). On parle alors d'*état exponentiellement localisé.* Autrement, pour une énergie E considérée, si toutes les solutions croissent exponentiellement dans au moins l'une des deux directions, on parle d'énergie interdite, et on dit que la solution est physiquement impossible (car il n'existe pas d'état électronique à l'intérieur d'un solide lui correspondant). ◇

Notons m_ℓ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit ν une mesure sur $\mathbb{R}$, et soit ν_{ac} sa partie absolument continue par rapport à m_ℓ. Un ensemble A de $\mathbb{R}$ est un *support essentiel* de ν_{ac} si:

(1) il existe un ensemble B de mesure de Lebesgue nulle tel que $\nu(\mathbb{R} \setminus (A \cup B)) = 0$;

(2) pour tout borélien C tel que $\nu(C) = 0$, la mesure de Lebesgue $m_\ell(A \cap C)$ est nulle.

La *fermeture essentielle* de l'ensemble A est définie par:

$$\overline{A}^{ess} = \{\lambda \in \mathbb{R};\ \forall \varepsilon > 0\ ,\ m_\ell(A \cap]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[) > 0\ \}\ . \tag{1.15}$$

L'exposant de Lyapunov est relié à la partie absolument continue du spectre par le Théorème de Ishii-Kotani-Pastur (voir [C;F;K;Si] et [Si;2]).

THÉORÈME 1.3 (THÉORÈME DE ISHII, KOTANI, PASTUR). *Soit H un opérateur aléatoire de Schrödinger de potentiel discret V borné. Si Σ_{ac} désigne la partie absolument continue des spectres de μ-presque tous les opérateurs H_x, alors:*

$$\Sigma_{ac} = \overline{\{E \in \mathbb{R}; \vartheta(E) = 0\}}^{ess}\ . \tag{1.16}$$

De plus, l'ensemble $\mathcal{E} = \{E \in \mathbb{R}; \vartheta(E) = 0\}$ est le support essentiel de la partie absolument continue de la mesure spectrale $E_x(\cdot)$.

En particulier, ce théorème implique que l'ensemble $\mathcal{E}$ est contenu dans Σ_{ac}, à un ensemble de mesure nulle près. D'où le

COROLLAIRE 1.4. *Sous les hypothèses et notations du théorème 1.3,*

$$m_\ell(\Sigma_{ac}) \geq m_\ell(\mathcal{E})\ . \tag{1.17}$$

Remarque 1.5. Dans [La;2], Y. Last relie $\mathcal{E}$ aux spectres des approximants périodiques canoniques des opérateurs de Schrödinger. Pour tout $x \in X$ et tout entier $m \geq 1$, il considère les

potentiels périodiques V_x^m définis par: $V_x^m(n) = V_x(n)$ pour $1 \leq n \leq m$ et $V_x^m(n+m) = V_x^m(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Les opérateurs de Schrödinger associés à ces potentiels sont notés H_x^m et sont appelés *approximants périodiques canoniques* de H_x. Y. Last démontre, sous les hypothèses du théorème 1.3, l'inégalité suivante pour μ-presque tout $x \in X$:

$$m_\ell(\limsup_{m\to+\infty} \sigma(H_x^m) \setminus \mathcal{E}) = 0 \,, \tag{1.18}$$

où $\limsup_{m\to+\infty} \sigma(H_x^m) = \cap_{i=1}^{\infty} \cup_{m\geq i} \sigma(H_x^m)$. En particulier, il aboutit à

$$\limsup_{m\to+\infty} m_\ell(\sigma(H_x^m)) \leq m_\ell(\mathcal{E}) \,, \tag{1.19}$$

pour μ-presque tout $x \in X$. ◇

De plus, Y. Last (voir [La;1]) a récemment démontré le résultat suivant:

THÉORÈME 1.5. *Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des énergies en lesquelles l'exposant de Lyapunov s'annule; on a*

$$m_\ell(\Sigma \setminus \mathcal{E}) + m_\ell(G) \geq w \,, \tag{1.20}$$

où $w = \sup_{n\in\mathbb{Z}} V_x(n) - \inf_{n\in\mathbb{Z}} V_x(n)$ pour μ-presque tout $x \in X$ et $G = [\min\Sigma, \max\Sigma] \setminus \Sigma$ désigne l'ensemble des trous du spectre.

Comme on a toujours

$$\max\Sigma - \min\Sigma \leq 4 + w \,, \tag{1.21}$$

le résultat suivant de Deift et Simon (voir [Dei;Si]) résulte du théorème 1.5:

THÉORÈME 1.6. *Sous les hypothèses du théorème 1.3,*

$$m_\ell(\mathcal{E}) \leq 4 \,, \tag{1.22}$$

et il y a égalité si et seulement si le potentiel est constant.

Nous terminons ce tour d'horizon par le résultat de Kotani (voir [Ko]):

THÉORÈME 1.7. *Si la suite de variables aléatoires $x \mapsto V_x(n)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs sans être périodique, alors la partie absolument continue du spectre de μ-presque tous les opérateurs H_x est vide:*

$$\Sigma_{ac} = \emptyset \,. \tag{1.23}$$

1.3. Densités intégrées d'états et étiquetage des trous

L'opérateur de Schrödinger H entre dans le cas décrit dans la partie A, section 4.3. avec $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}\cdot e_0$ et $e_0 = (\delta_{0,k})_k$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker habituel. De plus, H satisfait à l'hypothèse (D) du théorème 3.15 section 4.2, partie A, et de manière évidente, l'équation $H_x u = tu$ ($t \in \mathbb{R}$) n'a au plus que deux solutions u linéairement indépendantes, de sorte que

$$\mathrm{tr}(E_s(\{t\})) \leq 2.$$

L'hypothèse du corollaire 4.6 (partie A) est donc vérifiée. Faisons un résumé des conséquences qui s'en déduisent:

THÉORÈME 1.8. *Soit ν_{e_0} la mesure de densité d'états en e_0 et $\kappa_0 : t \mapsto \nu_{e_0}(]-\infty, t])$ sa fonction de densité intégrée d'états. Alors:*

(i) par définition $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\nu_{e_0}(dt) = \int_X (\varphi(H_x)e_0, e_0)\mu(dx)$ pour toute fonction continue bornée $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\nu_{e_0}(dt) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1} \mathrm{tr}(\pi_{-L,L}\varphi(H_x)) \quad \mu\text{-p.p.}; \tag{1.24}$$

(ii) ν_{e_0} est de support Σ et pour tout vecteur non nul $h \in \ell^2(\mathbb{Z})$, la mesure de densité d'état ν_h en h est équivalente à ν_{e_0}; de plus $\nu_{e_n} = \nu_{e_0}$ pour $e_n = U^n e_0$;

(iii) κ_0 est continue et pour tous nombres réels a, b tels que $a \leq b$ et $]a,b[\cap\Sigma = \emptyset$, on a $\kappa(a) = \kappa(b)$;

(iv) pour μ-presque tout x, la suite des fonctions de répartition (en escalier)

$$\kappa_0^{(L)} : t \mapsto \frac{1}{2L+1} \mathrm{tr}(\pi_{-L,L}E_x(t))$$

converge en tout point vers κ_0 et $\kappa_0^{(L)}(t) = 0$ ou 1 suivant que $t < \inf\Sigma$ ou $t \geq \sup\Sigma$;

(v) si $E_x^{(L)}$ est la mesure spectrale de l'opérateur $H_x^{(L)}$ obtenu par restriction à l'espace $\bigoplus_{k=-L}^{L} \mathbb{C}\cdot e_k$ de l'opérateur $\pi_{-L,L}H_x\pi_{-L,L}$ alors, pour μ-presque tout x, la suite des densités intégrées d'états $t \mapsto \frac{1}{2L+1}\mathrm{tr}(E^{(L)}(t))$ converge vers κ_0. De plus $\kappa_0^{(L)}(t) = 0$ ou 1 suivant que $t < -2 - \|f\|_\infty$ ou $t \geq 2 + \|f\|_\infty$.

La propriété *(iii)* se traduit par

$$\Sigma = \mathbb{R} \setminus \bigcup\{]a,b[\,; \kappa_0 \text{ constante sur }]a,b[\}. \tag{1.25}$$

Remarque 1.6. Dans *(v)*, la quantité $N_{L,x}(t) = \mathrm{tr}(E_x^{(L)}(t))$ représente le nombre de valeurs propres de $H_x^{(L)}$ (comptées avec leurs ordres de multiplicité) inférieures ou égales à t. Ainsi $\frac{N_{L,x}(\cdot)}{2L+1}$ est la fonction de répartition des valeurs propres de $H_x^{(L)}$. La propriété *(v)* exprime entre autres que cette suite de distributions, à support dans un intervalle compact fixé, admet une distribution limite (au sens de la convergence faible) quand L tend vers $+\infty$. ◇

2. *Opérateurs de Schrödinger à potentiels périodiques*

2.1. *Introduction*

Le cas d'un potentiel périodique de période p correspond au système dynamique $(X, \mathcal{B}, \mu)$ avec

$$X = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad Tx = x + 1 \bmod (p).$$

La σ-algèbre $\mathcal{B}$ est l'ensemble des parties de X, la mesure μ est l'équidistribution sur X. Il est immédiat que ce système est ergodique. Le potentiel V est alors donné par une application f de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ de sorte que $V_x(n) = f(n+x)$.

La théorie des opérateurs de Schrödinger à potentiel périodique (discret) est bien connue, mais on trouve peu d'ouvrages modernes qui traitent du sujet de manière complète.

Dans ce qui suit, nous développerons cette théorie de manière succinte mais autonome. Cela nous permettra de mettre en pratique les diverses notions rencontrées précédemment.
Dans la suite, H désignera un opérateur de Schrödinger de potentiel périodique V de période p. Puisqu'ici, tous les opérateurs H_x sont conjugués entre eux, il suffit de ne considérer que H_0. Il sera noté H pour simplifier. Nous commencerons par déterminer l'exposant de Lyapunov $\vartheta(E)$ pour toute énergie E. Cette étude conduira à deux résultats classiques importants. Le premier donne le spectre de H sous la forme

$$\Sigma = \{E\,;\, \vartheta(E) = 0\}. \tag{2.1}$$

Cette égalité est la traduction spectrale du théorème suivant dû à Flocquet et que nous redémontrerons car sa preuve mettra en place des éléments essentiels à notre étude:

THÉORÈME 2.1. (THÉORÈME DE FLOCQUET). *Soit H l'opérateur de Schrödinger dont le potentiel V est de période p et soit Σ son spectre. Un nombre réel E appartient à Σ si et seulement si l'équation de Hill*

$$u(n+1) = (E - V(n))u(n) - u(n-1) \tag{2.2}$$

admet une solution u dans $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ qui soit vecteur propre de l'opérateur de décalage S (vu sur $\ell^\infty(\mathbb{Z})$), i.e., il existe un nombre complexe ζ (nécessairement de module 1), tel que

$$S^p(u) = \zeta u\,. \tag{2.3}$$

En d'autres termes, les solutions communes des équations aux valeurs propres $H_0(u) = Eu$ et $S^p u = \zeta u$ dans $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ existent si, et seulement si, $E \in \Sigma$. En fait, les valeurs propres E et ζ sont étroitement liées et cette liaison permet de décrire le spectre de H comme la réunion de p intervalles fermés I_j dont les intérieurs sont non vides et deux-à-deux disjoints. Nous verrons cela plus en détail.
Si le potentiel est de période p, il est aussi de période $2p$! L'analyse du passage au doublement de période, conduira à mettre en évidence une dynamique sur chaque intervalle I_j, dynamique qui est conjuguée (par une application polynomiale explicite) à la transformation logistique classique L sur $[0,1]$ définie par

$$L(x) = 4x(1-x)\,.$$

Ceci permettra de montrer que la mesure de densité d'états ν_0 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et fournira également une expression explicite de sa densité $\frac{d\nu_0}{dm_\ell}$. Celle-ci est non bornée aux bords des intervalles, traduisant une accumulation vers les bords des valeurs propres de la suite des matrices $H^{(\ell)}$ introduites dans la partie A, section 4.3.

2.2. *Exposant de Lyapunov et équation discrète de Hill*

Reprenons les notations de la section 1.2 en les simplifiant ($x = 0$):

$$A_n(E) = \begin{pmatrix} E - V(n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_n(E) = A_n(E)A_{n-1}(E)\dots A_1(E)\,.$$

Puisque V est périodique de période p, on a $\Phi_{pn} = (\Phi_p)^n$. Dans l'algèbre $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre 2 sur $\mathbb{C}$, le résultat suivant est élémentaire: pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ et toute norme sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$,

$$\lim_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}} = \rho(A)\,,$$

où $\rho(A)$ désigne le rayon spectral de A (maximum des modules des valeurs propres de A). D'autre part, pour tout n, soit $n = pq_n + r_n$ la division euclidienne de n par p, alors en choisissant une norme sous-multiplicative (une norme d'opérateur associée à une norme sur $\mathbb{R}^2$ par exemple), on obtient

$$||\Phi_{p(q_n+1)}(E)|| \leq (\Pi_{r_n<j\leq p}||A_j(E)||)||\Phi_n(E)|| \leq (\Pi_{1\leq j\leq p}||A_j(E)||)||\Phi_{pq_n}(E)||,$$

ce qui implique l'existence du coefficient de Lyapunov $\vartheta(E)$ et plus précisément

$$\vartheta(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log||\Phi_n(E)|| = \frac{1}{p}\log\rho(\Phi_p(E)) \,. \tag{2.4}$$

Notons que pour tout $n \geq 1$, $\det(\Phi_n(E)) = 1$ et

$$\Phi_n(E) = \begin{pmatrix} p_n(E) & q_n(E) \\ p_{n-1}(E) & q_{n-1}(E) \end{pmatrix} \,,$$

avec les relations de récurrence:

$$p_{n+1}(E) = p_n(E)(E - V_{n+1}) - p_{n-1}(E) \,, \quad q_{n+1}(E) = q_n(E)(E - V_{n+1}) - q_{n-1}(E) \,,$$

et la condition initiale $\Phi_1 = \begin{pmatrix} E - V_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il en résulte que p_n (resp. q_n) est un polynôme de degré n (resp. $n-1$, pour $n \geq 1$), de coefficient dominant égal à 1 (resp. -1). Comme $\det(\Phi_p(E)) = 1$, $\Phi_p(E)$ est solution de l'équation

$$X^2 - \mathrm{tr}(\Phi_p(E))X + 1 = 0 \,, \tag{2.5}$$

où $\mathrm{tr}(\Phi_p)$ est un polynôme, noté F par la suite, de degré p et de coefficient dominant 1.

Distinguons maintenant deux cas.

Cas (i): $\vartheta(E) = 0$. Les racines de (2.5) sont de module ≤ 1 et donc de la forme $e^{\pm i\theta}$, ($\theta \in [0, 2\pi[$), ce qui est caractérisé par l'équation

$$F(E) = 2\cos\theta \,,$$

avec $e^{\pm i\theta}$ valeurs propres (éventuellement unique mais double) de $\Phi_n(E)$. Un vecteur propre (non nul) associé à une de ces valeurs propres, notée ζ, fournit alors les valeurs initiales $(u(0), u(1))$ d'une solution de l'équation de Hill. A priori, cette solution n'est pas nécessairement bornée, mais de par la définition de Φ_p, elle vérifie $u(n+p) = \zeta u(n)$ pour tout n. Elle est donc bornée et solution de l'équation (2.3). Réciproquement, si u est une solution commune dans $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ de (2.2) (pour une énergie E) et de (2.3), alors nécessairement $|\zeta| = 1$ car S est une isométrie sur $\ell^\infty(\mathbb{Z})$. Enfin, (2.2) et (2.3) entraînent que le vecteur dans $\mathbb{C}^2$, de composantes $(u(0), u(1))$ est un vecteur propre de $\Phi_p(E)$ ce qui a pour conséquence $F(E) = \frac{1}{2}(\zeta + \overline{\zeta})$ et donc $\vartheta(E) = 0$.
Notons que le cas particulier où $\zeta = \pm 1$ correspond à une solution u périodique, de période p si $\zeta = 1$, de période $2p$ si $\zeta = -1$. De même, la solution est périodique si et seulement si ζ est une racine de l'unité.

Cas (ii): $\vartheta(E) > 0$. Cette fois-ci, les racines de (2.5) sont réelles, distinctes, de la forme $e^{\pm\theta}$ ($\theta \in]0, \infty[$), ce qui est caractérisé par l'équation

$$F(E) = 2\mathrm{ch}\,\theta, \quad (\theta > 0).$$

En procédant comme dans le cas (i), tout vecteur propre (non nul) associé à une des valeurs propres $\lambda = e^{\pm\theta}$ est prolongé par la relation de récurrence (2.2) en une suite u qui vérifie $u(n+p) = \lambda u(n)$ pour tout n. Cette relation montre que u n'est pas bornée (du côté de $+\infty$ si $\lambda > 1$ et du côté $-\infty$ si $\lambda < 1$ et de manière plus précise $|u(n)| \in \mathcal{O}(\lambda^{\pm n})$, le signe étant fixé et les deux cas existent. On notera u^+ (resp. u^-) celle qui correspond au signe $-$ (resp. $+$) avec $\lambda > 1$.

Pour compléter le théorème de Flocquet, il reste à établir (2.1).
Revenons au cas (i). Supposons $\vartheta(E) = 0$. Pour vérifier que E est dans le spectre de H, il suffit de montrer que E est une quasi-valeur propre puisque H est auto-adjoint. Soit u la solution dans $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ de l'équation de Hill (et de (2.3)) et posons $u^{(L)} = \pi_{-L,L}u$ la suite coincidant avec u sur l'intervalle $\{-L, \ldots, L\}$ et nulle ailleurs. Pour $L \geq p$, on a nécessairement $u^{(L)} \neq 0$ et par la relation (2.3), il existe deux constantes $a > 0$ et $C > 0$ telles que $aL \leq ||u^{(L)}|| \leq CL$. La relation (2.2) montre que $(Hu^{(L)} - Eu^{(L)}, e_n) = 0$ sauf éventuellement pour $n \in \{-L-1, -L, L, L+1\}$ et dans ce cas, ces valeurs sont, en module, majorées par une constante indépendante de L. On peut donc affirmer l'existence d'une constante $b > 0$ telle que

$$||Hu^{(L)} - Eu^{(L)}|| \leq \frac{b}{n}||u^{(L)}|| \ (n \geq p).$$

Par conséquent, $E \in \Sigma$.
Supposons maintenant $\vartheta(E) > 0$. Les solutions u^+, u^- de (2.2) construites dans (ii) sont évidemment linéairement indépendantes. Considérons l'opérateur $B = H - E \cdot Id$ et montrons qu'il est inversible. Tout d'abord, B est injectif. En effet, tout élément $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ du noyau de B est solution de (2.2); elle s'écrit donc sous la forme d'une combinaison linéaire $u = \alpha u^+ + \beta u^-$. Les conditions de croissance à l'infini de u^+ et u^- montrent que la seule possibilité est d'avoir $\alpha = \beta = 0$. D'où l'injectivité de B. Il suffit maintenant, par le théorème de l'application ouverte, de montrer que B est surjectif. En fait, il est possible de calculer directement l'inverse de B et de montrer qu'il est borné. Montrons que e_0 a une image réciproque η_0 par B telle que

$$|(\eta_0, e_n)| \in \mathcal{O}(\lambda^{-|n|}) \ , \tag{2.6}$$

où λ est la valeur propre > 1 de $\Phi_p(E)$. Pour les autres vecteurs e_n, le résultat est analogue et on notera η_n la suite telle que $B(\eta_n) = e_n$. Introduisons le projecteur π_+ qui à toute suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ associe la suite u' telle que $u'_n = u_n$ si $n \geq 1$ et $u'_n = 0$ si $n \leq 0$. Soit $\pi_- = 1 - \pi_+$ le projecteur supplémentaire. Par construction $\pi_+(u^+)$ et $\pi_-(u^-)$ sont dans $\ell^2(\mathbb{Z})$. Un calcul élémentaire montre que les vecteurs $B(\pi_+(u^+))$ et $B(\pi_-(u^-))$ appartiennent à l'espace $\mathbb{C}\cdot e_0 \oplus \mathbb{C}\cdot e_1$. L'injectivité de B prouve que ces vecteurs sont linéairement indépendants. Il existe donc une combinaison linéaire η_0 de $\pi_+(u^+)$ et $\pi_-(u^-)$ telle que $B(\eta_0) = e_0$. De plus η_0 satisfait bien à (2.6) par construction. Finalement, grâce à la périodicité du potentiel, la construction de η_m et η_{m+p} relève des mêmes équations, ce qui donne $\eta_{m+p} = S^p\eta_m$, d'où l'existence d'une constante $c > 0$ telle que uniformément

$$|(\eta_m, e_n)| \leq c\lambda^{-|m-n|} . \tag{2.7}$$

Définissons maintenant l'opérateur $C : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ par

$$C(u)_n = \sum_{k\in Z} u_k\eta_k = \sum_m (\sum_k u_k\eta_{k,m})e_m \ ,$$

où $\eta_k = (\eta_{k,m})_m$. Les majorations successives

$$\sum_m (\sum_k |u_k \eta_{k,m}|)^2 \leq c^2 \sum_m (\sum_k |u_k|^2 \lambda^{-2|m-k|})$$
$$\leq c^2 \sum_k |u_k|^2 (\sum_m \lambda^{-2|m-k|}) \leq c^2 \frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1} ||u||^2 ,$$

montre que C est à valeurs dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ et détermine un opérateur borné de norme au plus $c\sqrt{\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}}$. Par construction $BC = Id$, d'où B surjective et C inverse continu de B. En conclusion $E \notin \Sigma$, ce qui termine la démonstration du théorème de Flocquet. ◇◇◇

2.3. *Dynamique sur le spectre*

D'après ce qui précède, une énergie E est dans Σ si et seulement si les trois équations

$$Hu = Eu , \quad S^p u = e^{i\theta} u , \quad \mathrm{tr}(\Phi_p(E)) = 2\cos\theta , \tag{2.8}$$

admettent une solution (u, θ) (avec $u \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ et $\theta \in \mathbb{R}$). Ce fait se regroupe en un seul, à savoir:

THÉORÈME 2.2. *$E \in \Sigma$ si, et seulement si, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que E soit valeur propre de la matrice*

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} V(1) & 1 & & & e^{-i\theta} \\ 1 & V(2) & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ e^{i\theta} & & & 1 & V(p) \end{pmatrix} . \tag{2.9}$$

De plus

$$\det(E - A(\theta)) = \mathrm{tr}(\Phi_p(E)) - 2\cos\theta. \tag{2.10}$$

Démonstration. La première partie du théorème est la conséquence de la caractérisation de $E \in \Sigma$ par l'existence d'une solution commune (u, θ) de $Hu = Eu$ et $S^p u = e^{i\theta} u$. La seconde partie résulte alors de ce que les deux polynômes en E dans chaque membre de l'équation (2.10) sont de même degré, de même coefficient dominant et pour chaque $\theta \in \mathbb{R}$, ont les mêmes racines. ◇◇◇

Une des premières conséquences du théorème 2.2 est que toutes les racines de l'équation

$$\mathrm{tr}(\Phi_p(E)) = t, \quad t \in [-2, +2]$$

sont réelles. Il y en a p, comptées avec leur multiplicité. Mais pour $-2 < t < 2$, elles sont nécessairement toutes distinctes, sans quoi la dérivée de $\mathrm{tr}(\Phi_p(E))$ s'annule en un point x tel que $-2 < \mathrm{tr}(\Phi_p(x)) < 2$ et au moins pour une valeur $t \in]-2, +2[$ proche de $\mathrm{tr}(\Phi_p(x))$, l'équation $\mathrm{tr}(\Phi_p(E)) = t$ a un nombre de solutions strictement inférieur à p. Il en résulte la

PROPOSITION 2.3. *L'image réciproque* $\mathrm{tr}(\Phi_p)^{-1}([-2,+2])$ *est formée de* p *intervalles fermés* I_j $(1 \leq j \leq p)$ *dont les intérieurs sont disjoints et les extrémités sont les racines des équations*

$$\mathrm{tr}(\Phi_p(E)) = \pm 2\,.$$

De plus

PROPOSITION 2.4.

$$\Sigma = \bigcup_{j=1}^{p} I_j\,.$$

Démonstration. En effet, tout $E \in \Sigma$ donne par le théorème de Floquet une valeur $\mathrm{tr}(\Phi_p(E))$ dans $[-2,+2]$. Réciproquement, tout E dans un intervalle I , donnant une valeur $\mathrm{tr}(\Phi_p(E)$ qui entraîne l'existence d'une solution du système (2.8) et donc $E \in \Sigma$. ◇◇◇

Les propositions 2.3 et 2.4 déterminent un découpage de Σ en intervalles I_j $(1 \leq j \leq p)$, appelé *découpage fondamental* de période p et noté $\mathcal{P}_0$. Ce qui précède montre que:

PROPOSITION 2.5. *La restriction* F_j *de* $\mathrm{tr}(\Phi_p(\cdot))$ *à* I_j *est strictement monotone, de dérivée non nulle à l'intérieur de* I_j.

Examinons maintenant ce qui se passe lorsque la période est dupliquée. $F = \mathrm{tr}(\Phi_p)$ devient $F^{(1)} = \mathrm{tr}(\Phi_{2p}) = \mathrm{tr}((\Phi_p)^2)$. Le spectre restant inchangé, chaque intervalle $I_j = [a_j, b_j]$ est dupliqué en deux intervalles $I_j^- = [a_j, c_j]$ et $I_j^+ = [c_j, b_j]$ où c_i est précisément la racine de l'équation

$$F(x) = 0$$

qui se trouve dans I_j. Cela provient de la relation classique $\mathrm{tr}(M^2) = (\mathrm{tr}(M))^2 - 2$ lorsque $\det(M) = 1$. Introduisons l'application

$$\gamma : [-2,+2] \to [-2,+2], \quad \gamma(x) = x^2 - 2 \tag{2.11}$$

de sorte que $F^{(1)} = \gamma \circ F$. Il est naturel d'associer à toute énergie $E \in I_j$, l'unique énergie $E' \in I_j$ telle que $\mathrm{tr}(\Phi_p(E')) = \mathrm{tr}(\Phi_{2p}(E))$. L'unicité de E' est garantie par la stricte monotonie de F_j. Cette transformation est donnée par l'application

$$\varphi_j : I_j \to I_j\,, \quad \varphi_j = F_j^{-1} \circ F^{(1)}_{|I_j}.$$

et l'introduction de γ donne la relation de conjugaison

$$\varphi_j = F_j^{-1} \circ \gamma \circ F_j\,. \tag{2.12}$$

Par construction $\varphi_j(I_j^{\pm}) = I_j$.

Itérons la duplication k fois, alors $F^{(k)} := \mathrm{tr}(\Phi_{2^k p}) = \mathrm{tr}((\Phi_p)^{2^k}) = \gamma^k \circ F$ et plus généralement $F^{(k+n)} = \gamma^n \circ F^{(k)}$ pour k, n, entiers ≥ 0. Cela montre que pour tout intervalle I_j^ε du découpage fondamental $\mathcal{P}_k$ de période $2^k p$ contenu dans I_j, on a

$$\begin{aligned}(\varphi_j)^k(I_j^\varepsilon) &= F_j^{-1}\gamma^k F_j(I_j^\varepsilon)\\ &= F_j^{-1}F^{(k)}(I_j^\varepsilon)\\ &= F_j^{-1}([-2,+2]) = I_j\,.\end{aligned}$$

De plus, la restriction de $(\varphi_j)^k$ à I_j^ε est strictement monotone. Ainsi, le découpage fondamental $\mathcal{P}_k$ de période $2^k p$ induit sur I_j un découpage $\mathcal{P}_{k,j}$ qui est le k-ième découpage induit par le système dynamique (φ_j, I_j) et le découpage $\mathcal{P}_{1,j}$ de I_j en les intervalles I_j^- et I_j^+, *i.e.*,

$$\mathcal{P}_{k,j} = \bigvee_{m=0}^{k} \varphi_j^{-m} \mathcal{P}_{1,j}.$$

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le théorème fondamental suivant, qui explicite la mesure de densité d'état:

THÉORÈME 2.6. *Soit H un opérateur de Schrödinger à potentiel périodique, de période p et de mesure de densité d'état ν_{e_0}. Soit $\mathcal{P}_0 := \{I_1, \ldots, I_p\}$ le découpage fondamental (de période p) du spectre Σ, F_j la restriction à I_j de $F = \mathrm{tr}(\Phi_p)$ et $\varphi_j = F_j^{-1} \circ \gamma \circ F_j$. Alors:*
(i) pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, $\nu_{e_0}(I_j) = \frac{1}{p}$;
(ii) soit μ_j la mesure de probabilité borélienne induite par ν_{e_0} sur I_j et soit $\mathcal{B}_j$ la σ-algèbre des parties boréliennes de I_j. Le système dynamique $T_j = (\varphi_j, I_j, \mathcal{B}_j, \mu_j)$ est conjugué par $F_j : I_j \to [-2, +2]$ au système $(\gamma, [-2, +2], \tau)$ où τ est la mesure de probabilité sur $[-2, +2]$, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et de densité

$$\tau(dt) = \frac{dt}{\pi\sqrt{4 - t^2}}. \tag{2.13}$$

En particulier, T_j est isomorphe à un système de Bernoulli;
(iii) ν_{e_0} est de densité

$$\nu_{e_0}(dt) = \frac{|F'(t)|}{p\pi\sqrt{4 - F^2(t)}} 1_\Sigma(t) dt\ , \tag{2.14}$$

où $F(t) = \mathrm{tr}(\Phi_p(t))$.

Démonstration. Avec les notations précédentes, chaque racine de l'équation $F^{(n)}(E) = 0$ est point intérieur d'un intervalle et d'un seul appartenant au découpage fondamental de période $2^n p$. Soit maintenant J un intervalle du découpage fondamental de période $2^n p$ et montrons que

$$\nu_{e_0}(J) = \frac{1}{p2^n}. \tag{2.15}$$

D'après la partie A, théorème 4.8 et remarque 4.2, ainsi que le repérage des intervalles du découpage fondamental $\mathcal{P}_{n+k}$ par les zéros du polynôme $F^{(n+k)}$, on obtient

$$\begin{aligned} \nu_{e_0}(J) &= \lim_{k \to \infty} \frac{\mathrm{card}\{K \in \mathcal{P}_{n+k}\,;\, K \subset J\}}{p2^{n+k}} \\ &= \frac{1}{p2^n}\ , \end{aligned}$$

puisque par duplications successives, J est réunion de 2^k intervalles appartenant à $\mathcal{P}_{n+k}$. D'où *(i)* et un peu plus.
Il est facile de vérifier que l'application γ est conjuguée (au sens topologique) à la transformation logistique $L : x \mapsto 4x(1-x)$, $x \in [0,1]$ par l'application $h : y \in [-2, +2] \mapsto \frac{2-y}{4} \in [0,1]$. Utilisons maintenant le fait que L est conjuguée à la transformation "chapeau" $\Lambda : [0,1] \mapsto [0,1]$ définie par

$\Lambda(t) = 1 - |2t - 1|$. Explicitement, $\psi \circ L = \Lambda \circ \psi$ avec $\psi(t) = \frac{1}{\pi}\arccos(1-2x)$. Il en résulte que l'application $G_j : I_j \to [0,1]$ définie par

$$G_j(t) = \psi \circ h \circ F_j(t) = \frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{F_j(t)}{2}\right),$$

détermine une conjugaison entre φ_j et Λ, *i.e.*, $G_j \circ \varphi_j = \Lambda \circ G_j$. Notons que G_j est dérivable (et même analytique réelle) dans l'intérieur de I_j.
Le découpage de I_j induit par le découpage fondamental de période $p2^n$ correspond alors par G_j au découpage de $[0,1]$ en les intervalles dyadiques $[\frac{r}{2^n}, \frac{r+1}{2^n}]$ $(0 \le r \le n-1)$, dont la mesure de Lebesgue est $\frac{1}{2^n}$. Puisque ν_{e_0} (qui est continue) est caractérisée par ses valeurs sur les intervalles des découpages fondamentaux successifs, il en résulte que μ_j est image par G_j de la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Ainsi $\mu_j(dt) = G_j'(t)dt$, ce qui démontre *(iii)*. Comme conséquence directe, la mesure μ_j est invariante par φ_j et le système dynamique $(\varphi_j, I_j, \mathcal{B}_j, \mu_j)$ est conjugué par G_j au sytème de Bernoulli $(\Lambda, [0,1], m_\ell)$. La propriété *(ii)* est la conséquence de la conjugaison par $\psi \circ h$ de $(\gamma, [-2,+2], \tau)$ avec $(\Lambda, [0,1], m_\ell)$. ◇◇◇

Par intégration, on obtient

COROLLAIRE 2.7. *Effectuons l'indexation des intervalles I_j $(1 \le j \le p)$ du découpage fondamental suivant l'ordre naturel induit par celui de $\mathbb{R}$. Alors*

$$\forall\, t \in I_j \quad \kappa_0(t) = \frac{j-1}{p} + \frac{1}{p}\left(\frac{\varepsilon_j}{\pi}\arcsin\left(\frac{F(t)}{2}\right) + \frac{1}{2}\right), \tag{2.16}$$

où $\varepsilon_j = \pm(-1)^j$ est du signe de la dérivée de F sur I_j. Enfin, pour $t \notin \Sigma$, $\kappa_0(t) = \frac{k}{p}$ si l'intervalle $]-\infty, t]$ contient k intervalles du découpage fondamental.

2.4. *Exemples*

2.4.a. *Opérateurs 1-périodiques*

On considère le potentiel constant égal à $v \in \mathbb{R}$. Alors $X = \mathbb{Z}/1\mathbb{Z} = \{0\}$. Il est immédiat que le spectre Σ de H est contenu dans $[-2-v, 2+v]$. On a

$$\Phi_1(E) = \begin{pmatrix} E-v & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathrm{tr}(\Phi_1(t)) = F(t) = t - v$,

$$\Sigma = F^{-1}([-2,+2]) = [v-2, v+2] \tag{2.17}$$

et $\kappa_0(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{t-v}{2}$ pour $v-2 \le t \le v+2$.

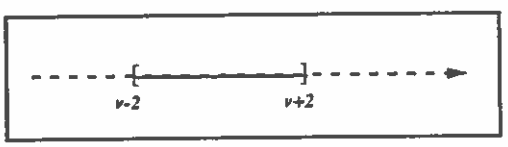


Figure 3. Spectre d'un opérateur 1-périodique.

2.4.b. *Opérateurs 2-périodiques*

Ici, $X = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Soit V le potentiel 2-périodique tel que $V(0) = a$ et $V(1) = b$, où a et b sont deux réels distincts, par exemple $a < b$. Soit H l'opérateur aléatoire de Schrödinger de potentiel V. Les spectres Σ des deux opérateurs H_0 et H_1 sont identiques, inclus dans l'intervalle $[-2 - \sup(a,b), 2 + \sup(a,b)]$. Pour tout nombre réel λ, la matrice $\Phi_2(E)$ est donnée par

$$\Phi_2(E) = \begin{pmatrix} (E-a)(E-b) - 1 & a - E \\ E - b & -1 \end{pmatrix}.$$

Alors $F(t) = (t-a)(t-b) - 2$ et $F(t)^2 - 4 = (t-\alpha)(t-\beta)(t-a)(t-b)$, où $\alpha = (a+b-\sqrt{16+(a-b)^2})/2 < a$ et $\beta = (a+b+\sqrt{16+(a-b)^2})/2 > b$. On en déduit

$$\Sigma = [\frac{a+b-\sqrt{16+(a-b)^2}}{2}, a] \cup [b, \frac{a+b+\sqrt{16+(a-b)^2}}{2}]. \tag{2.18}$$

Le spectre est donc constitué de deux intervalles disjoints de $\mathbb{R}$ et sa mesure de Lebesgue est $m_\ell(\Sigma) = a - b + \sqrt{16+(a-b)^2}$.

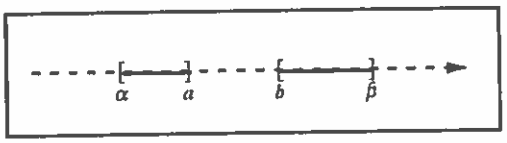


Figure 4. Spectre d'un opérateur 2-périodique.

D'autre part, nous pouvons expliciter la fonction d'étiquetage:

$$\kappa_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, \alpha] \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{(t-a)(t-b)}{2}\right) & \text{si } t \in [\alpha, a] \\ \frac{1}{2} & \text{si } t \in [a, b] \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{(t-a)(t-b)}{2}\right) & \text{si } t \in [b, \beta] \\ 1 & \text{si } t \in [\beta, +\infty[\end{cases}.$$

Remarque 2.1. A une translation près, on peut se ramener au cas particulier $a = -b$ et $b > 0$. Le spectre, ainsi que la fonction de densité d'états, sont alors symétriques par rapport à l'origine: $\Sigma = [-\sqrt{4+b^2}, -b] \cup [b, \sqrt{4+b^2}]$ et

$$\kappa_0(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{t^2 - b^2}{2} - 1\right) \quad \text{si} \quad -\sqrt{4+b^2} \le t \le -b.$$

D'autre part, $\kappa_0(t)$ est nul pour $t \le -\sqrt{4+b^2}$, vaut $\frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[-b, b]$ et dans tous les cas, $\kappa_0(-t) = 1 - \kappa_0(t)$. $\diamond$

2.4.c. *Un exemple d'opérateur 3-périodique*

On se donne le potentiel $V(n) = \cos(2n\pi/3)$, pour tout entier n. L'opérateur de Schrödinger de potentiel V est 3-périodique. Le spectre Σ commun aux trois opérateurs H_0, H_1 et H_2 est contenu dans l'intervalle $[-3, 3]$. Pour tout nombre réel E, la matrice $\Phi_3(E)$ est donnée par

$$\Phi_3(E) = \begin{pmatrix} (E-1)(E+1/2)^2 - 2E + 1/2 & (1-E)(E+1/2) + 1 \\ (E+1/2)^2 - 1 & -E - 1/2 \end{pmatrix}.$$

Alors $F(t) = (t-1)(t+1/2)^2 - 3t$, et le discriminant $\Delta(t) = F^2(t) - 4$ admet six racines réelles disctinctes, qui sont : $\alpha = -(1+\sqrt{57})/4$, $-3/2$, $\beta = (3-\sqrt{33})/4$, $1/2$, $a = (-1+\sqrt{57})/4$, $b = (3+\sqrt{33})/4$. Ainsi le découpage fondamental est formé de trois intervalles disjoints:

$$\Sigma = [\alpha, -\frac{3}{2}] \cup [\beta, \frac{1}{2}] \cup [a, b] \,. \tag{2.19}$$

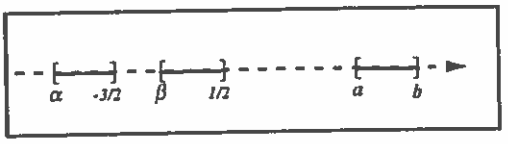


Figure 5. Spectre de l'opérateur 3-périodique.

2.4.d. *Un exemple d'opérateur 4-périodique*

Soit le potentiel $V(n) = \cos(n\pi/2)$, pour tout entier n. L'opérateur de Schrödinger de potentiel V est 4-périodique. Le spectre Σ commun aux quatre opérateurs H_0, H_1, H_2 et H_3 est contenu dans l'intervalle $[-3,3]$. La trace de la matrice $\Phi_3(E)$ est donnée par le polynôme de degré 4 : $F(t) = t^4 - 5t^2 + 2$. Le discriminant $F^2 - 4$ possède 6 racines simples $-\sqrt{5}$, $,-2$, -1, 1, 2, $\sqrt{5}$ et une racine double 0. On a donc le découpage fondamental

$$\Sigma = [-\sqrt{5}, -2] \cup [-1, 0] \cup [0, 1] \cup [2, \sqrt{5}] \,. \tag{2.20}$$

Les deux intervalles du centre étant contigus.

2.5. *Compléments*

Il est possible de donner une minoration de la mesure de Lebesgue du spectre, ainsi que de chacune des bandes. Ce résultat est dû à Last (voir [La;2]).

THÉORÈME 2.8. *Soit H un opérateur aléatoire périodique de période $p \geq 2$, Σ son spectre et G l'ensemble des trous du spectre: $G = [\min\Sigma, \max\Sigma] \setminus \Sigma$. Posons $w = \sup_{0\leq n<p} V(n) - \inf_{0\leq n<p} V(n)$, alors*

$$m_\ell(\Sigma) > \frac{4}{(2+w)^{p-1}} \text{ et } m_\ell(G) \geq w \,.$$

En outre, si B désigne une bande du spectre, on a

$$m_\ell(B) > \frac{4}{pe(2+w)^{p-1}} \,.$$

Remarque 2.2. Pour plus de détails concernant les opérateurs périodiques, nous renvoyons au livre de Toda ([To]), ainsi qu'aux articles de Last ([La;1] et [La;2]). ◇

Remarque 2.7. Les trous du spectre Σ sont étiquetés par les valeurs que prend $\kappa_0(t)$ en les trous, y compris les trous "vides" entre deux intervalles contigus du découpage fondamental. Les étiquettes sont donc de la forme

$$\frac{j}{p} \,,\ j \geq 1 \ \text{ et } j \leq p-1 \,.$$

◇

D'après le théorème 1.3 (Ishii-Kotani-Pastur) et l'identification de Σ comme union finie d'intervalles et identique à $\{E\,;\vartheta(E) = 0\}$, on en déduit:

PROPOSITION 2.9. *Dans le cas périodique,*

$$\Sigma_{ac} = \sigma_{ac}(H) = \overline{\{\lambda \ ; \ \vartheta(\lambda) = 0\}} = \sigma(H) = \Sigma \ ,$$

et le spectre est purement absolument continu.

3. *Modèle d'Anderson*

Soit $(Y, \mathcal{B}_Y)$ un espace de probabilité. On note $(X, \mathcal{B})$ l'espace produit $(\bigotimes_{-\infty}^{+\infty} Y, \mathcal{B})$ et T l'opérateur de décalage sur X donné par $(Tx)_k = x_{k-1}$, pour tout entier k et tout élément x de X. Soit μ une mesure de probabilité sur X, qui soit T-invariante et ergodique.

Un opérateur de Schrödinger aléatoire discret unidimensionnel est dit *du modèle d'Anderson* si le potentiel qui lui est associé est un variable aléatoire $v : X \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \ , \ \forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}) \ , \ (H_x u)(n) = u(n-1) + u(n+1) + V_x(n)u(n) \ ,$$

avec $V_x(n) = v(T^n x)$ pour tout entier n et tout élément x de X.
L'exemple le plus important est le *modèle d'Anderson*, qui correspond à une variable aléatoire v de la forme $v = f \circ \pi_0$ où π_0 est la projection $x \mapsto x_0$ et $\mu = \otimes_{i \in \mathbb{Z}} \mu_0$. Les v.a. v_n sont donc indépendantes, identiquement distribuées de loi μ_0. Dans ce cas, le système dynamique $(T, X, \mathcal{B}, \mu)$ est ergodique, c'est un shift de Bernoulli.
Le modèle d'Anderson détermine un opérateur de Schrödinger aléatoire ergodique pour lequel il existe un ensemble Σ compact non vide de $\mathbb{R}$ qui est le spectre de μ-presque tous les opérateurs H_x. De plus, il existe trois sous-ensembles de $\mathbb{R}$ notés Σ_{ac}, Σ_{sc} et Σ_{pp} tels que

$$\Sigma_\varepsilon = \sigma_\varepsilon(H_x) \ , \ \mu - \text{p.p.} \ . \tag{3.1}$$

Ce résultat est la conséquence d'un théorème donné par Kunz et Souillard dans [Ku;Sou] et prolongé par Kirsch et Martinelli dans [Ki;Mar]. En outre

$$\Sigma_{ac} = \emptyset \ , \tag{3.2}$$

c'est-à-dire que le spectre de μ-presque tous les opérateurs H_x est purement singulier.

Démonstration. Ceci provient du fait que l'exposant de Lyapunov $\vartheta(E)$ est stictement positif pour Lebesgue-presque tout $E \in \mathbb{R}$ (résultat de Kotani). Pour plus de détails, nous renvoyons à [Ku;Sou], [Si;2], [Fi;Pa] ou [C;F;Ki;Si], [B;L] et [Car;L]. ◇◇◇

Sous certaines hypothèses sur la loi commune des variables aléatoires $(V(n))_n$, nous pouvons localiser le spectre. Enonçons par exemple le résultat de Kunz et Souillard [Ku;Sou]:

THÉORÈME 3.1. *Soit H un opérateur aléatoire du modèle d'Anderson. On suppose que la loi commune des variables aléatoires $(V(n))_n$, admette une densité $r(\cdot)$ pour laquelle il existe un nombre réel $0 < \eta < 1$ vérifiant*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} r(t)(1+|t|)^{1+\eta} < +\infty \ . \tag{3.3}$$

Alors le spectre de μ-presque tous les opérateurs H_x est purement ponctuel et égal à

$$\Sigma = [-2,2] + \mathrm{supp}(r) \ , \tag{3.4}$$

où $Supp(r)$ désigne le support de la fonction r. De plus, tous les vecteurs propres sont exponentiellement localisés.

Dans le cas encore plus particulier où la densité commune $r(\cdot)$ est continue et à support compact,

PROPOSITION 3.2. *Soit H un opérateur de Schrödinger aléatoire du modèle d'Anderson et $r(\cdot)$ la densité commune des variables aléatoires $(V(n))_n$. On suppose les deux conditions suivantes:*

(a) $r(\cdot)$ *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$;

(b) $\mathrm{supp}(r)$ *compact.*

Alors le spectre de μ-presque tous les opérateurs H_x est purement ponctuel et égal à

$$\Sigma = [\alpha - 2, \beta + 2] \ . \tag{3.5}$$

De plus, tous les vecteurs propres sont exponentiellement localisés.

Lorsque les variables aléatoires $(V(n))_n$ sont distribuées selon une loi de Bernoulli, on a par exemple le théorème de Carmona, Klein et Martinelli (cf. [Fi;Pa]):

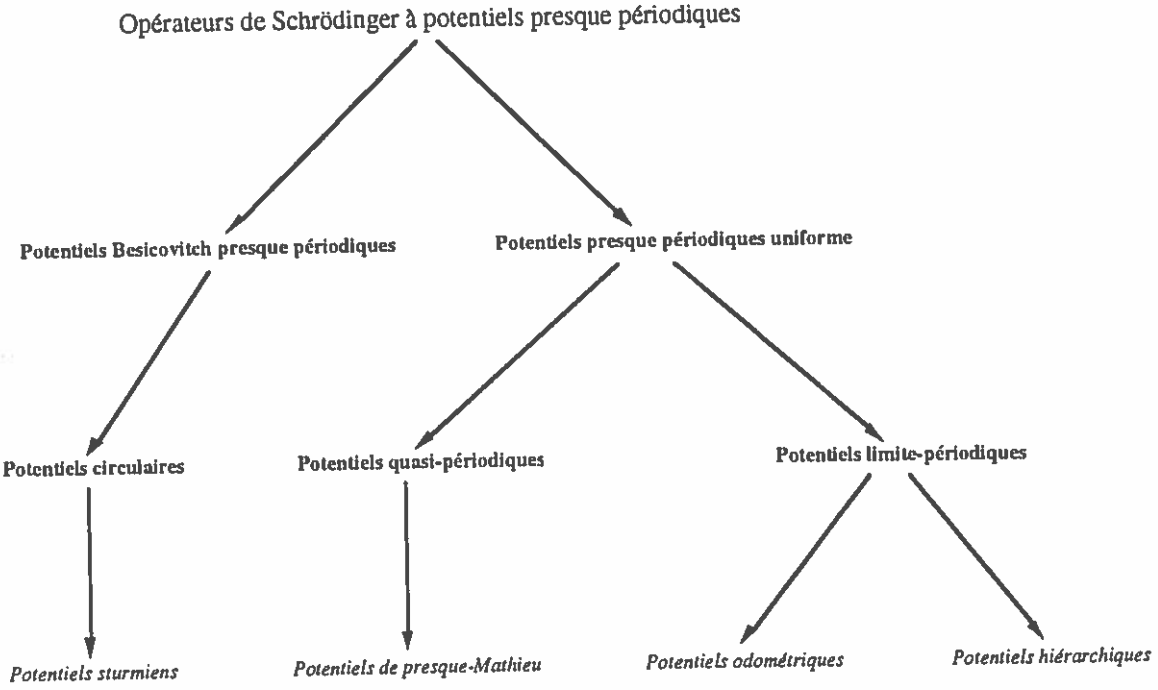
THÉORÈME 3.3. *Soit H un opérateur de Schrödinger aléatoire du modèle d'Anderson tel que $P\{V(0) = 0\} = \rho$ et $P\{V(0) = \alpha\} = 1 - \rho$ avec $0 < \rho < 1$ et $\alpha \neq 0$. Alors le spectre de μ-presque tous les opérateurs H_x est purement ponctuel et égal à*

$$\Sigma = [-2,2] \cup [\alpha - 2, \alpha + 2] \ . \tag{3.6}$$

De plus, tous les vecteurs propres sont exponentiellement localisés.

4. *Potentiels presque périodiques*

Les potentiels presque périodiques sont en un certain sens des intermédiaires entre les potentiels périodiques et les potentiels aléatoires. Une vaste littérature leur est consacrée. Dans cette section nous faisons une synthèse des principaux résultats obtenus sur ce thème. Il est utile de remarquer que ces définitions conduisent à des suites radicalement différentes et à des opérateurs de Schrödinger ayant des propriétés très variées. Le diagramme ci-dessous présente les divers types d'opérateurs rencontrés, ainsi que des exemples.



Différents types d'opérateurs de Schrödinger à potentiel presque périodique

Les opérateurs à potentiels presque périodiques uniformes font l'objet du premier sous-paragraphe. Le système dynamique induit est donné et les propriétés spectrales de ces opérateurs sont évoquées en accord avec [Si;1], [Av;Si;1] et [C;F;Ki;Si]. La notion de module de fréquence est par ailleurs introduite. Elle sert de révélateur d'un spectre de Cantor, c'est-à-dire un ensemble fermé, sans point isolé, de complémentaire dense dans $\mathbb{R}$. Nous nous intéressons en particulier à deux types d'opérateurs à potentiels presque périodiques uniformes: les opérateurs à potentiel limite périodique et les opérateurs à potentiel quasi-périodique. Après les avoir définis, les résultats généraux sont donnés et les principaux exemples présentés.
Le deuxième sous-paragraphe est consacré aux opérateurs aléatoires à potentiels 1-Besicovitch presque périodiques. Ils sont étudiés à travers le cas particulier des opérateurs à potentiels circulaires.

4.1. Potentiels presque périodiques uniformes

Rappelons, qu'une suite réelle $w = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bornée est dite presque périodique uniforme si et seulement si l'ensemble de ses décalées admet une fermeture compacte (appelée l'enveloppe), dans $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ muni de la norme uniforme. On note X l'enveloppe de w et T la restriction à X de l'opérateur de décalage:

$$\forall x \in X \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (Tx)_n = x_{n+1} \tag{4.1}$$

Les suites périodiques sont caractérisées parmi les suites presque périodiques par le résultat suivant:

THÉORÈME 4.1. *Soit w est une suite presque périodique ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, alors w est périodique.*

Démonstration. Notons X l'enveloppe de w et soit v un élément de X. Par définition, il existe une suite de points $(S^{k_i}w)_{i\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers v. Soit $0 < \varepsilon < 1$ et soit I_0 un entier tel que si $i \geq I_0$, alors $\| S^{k_i}w - v \| < \varepsilon$. Puisque w ne prend qu'un nombre fini de valeurs, on peut choisir ε de manière à séparer ces valeurs; ceci signifie que pour tout $i \geq I_0$, on a $S^{k_i}w = v$. D'où la périodicité de v. ◇◇◇

4.1.a. Système dynamique induit par une suite presque périodique uniforme

Rappelons que X peut être muni d'une unique structure de groupe de loi notée $\oplus$, déterminée par

$$T^n(w) \oplus T^m(w) = T^{n+m}(w), \tag{4.2}$$

qui identifie X avec un groupe métrisable compact abélien et T avec une translation sur le groupe muni de sa mesure de Haar notée μ_X ou plus simplement μ.
L'orbite de ω est dense dans X d'où, classiquement,

PROPOSITION 4.2. *Le système (T, X, μ) est minimal, uniquement ergodique.*

Remarque 4.1. Réciproquement, pour toute translation ergodique (τ, G, μ_G) sur un groupe compact (alors abélien) G et toute application continue $f : X \to \mathbb{R}$, la suite $(f(\tau^n x))_n$ est presque périodique uniforme et cela pour tout x. ◇

Le groupe X étant monogène, un caractère χ sur X est déterminé par sa valeur sur ω (suite qui a servi pour construire X). La correspondance $\chi \mapsto \chi(w)$ est un isomorphisme de groupe entre le dual $\widehat{X}$ et d'un sous-groupe D (dénombrable par la compacité de X) du cercle unité. Il est clair que tout $\zeta \in D$ est valeur propre pour l'opérateur unitaire $U_T : f \to f \circ T$ sur $L^2(X, \mu_X)$, de fonction propre égale au charactère dont elle est issue. L'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $e^{2i\pi\alpha} \in D$ est un $\mathbb{Z}$-module appelé *module des fréquences* de X (ou de w). Il n'y a pas d'inconvénient à identifier ce $\mathbb{Z}$-module (modulo 1) avec D, ni D avec $\widehat{X}$. C'est ce que nous ferons.

Ces notations sont conservées dans toute la suite.

4.1.b. Opérateurs de Schrödinger à potentiels presque périodiques uniformes

Soit V une suite bornée presque périodique uniforme Pour tout élément x de l'ensemble X, on note H_x l'opérateur défini pour tout élément $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ par

$$H_x u = Su + S^{-1}u + V_x u\ , \tag{4.3}$$

où pour tout entier n, $(V_x u)(n) = f(T^n x)u(n)$ avec f, fonction continue définie sur X à valeurs réelles. L'opérateur H défini sur X par l'équation (4.3) est un opérateur aléatoire de Schrödinger associé au système dynamique $(T, X, \mathcal{B}, \mu)$. Il est appelé opérateur (aléatoire) de Schrödinger *à potentiel presque périodique (uniforme)*.
Dans la pratique, f est la projection sur la première coordonnée: $\pi_0 = x \mapsto x(0)$.

Remarque 4.2. Dans le Chapitre 2, on étudiera des suites presque périodiques particulières dont le système dynamique induit est un odomètre. Elles seront appelées *suites odométriques*. ◇

Le théorème suivant rappelle les propriétés spectrales des opérateurs de Schrödinger discrets unidimensionnels à potentiel presque périodique uniforme.
Tout d'abord, comme simple corollaire du théorème 2.4, partie A, on a

THÉORÈME 4.3. *Soit H un opérateur aléatoire de Schrödinger à potentiel presque périodique uniforme. Alors*

(i) Il existe un compact Σ de $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in X \quad \sigma(H_x) = \Sigma \tag{4.4}$$

(ii) Le spectre est un ensemble parfait. En particulier, il ne possède pas de valeur propre isolée de multiplicité finie.

(iii) Si $E \in \mathbb{R}$, alors $\mu(\{x \in X \ ; \ E \text{ est valeur propre de } H_x\}) = 0$.

(iv) Il existe trois ensembles $\Sigma_{ac}, \Sigma_{sc}, \Sigma_{pp}$ de $\mathbb{R}$ tels que pour μ-presque tout $x \in X$, on a :

$$\Sigma_{pp} = \sigma_{pp}(H_x)$$
$$\Sigma_{ac} = \sigma_{ac}(H_x)$$
$$\Sigma_{sc} = \sigma_{sc}(H_x)$$

(v) Le spectre ponctuel générique est localement indénombrable:

$$\lambda \in \Sigma_{pp} \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ , \ \Sigma_{pp} \cap]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[\text{ n'est pas dénombrable}.$$

Démonstration. La proposition *(iii)* est dûe à Pastur [Pa;1], *(iv)* à Kirsch et Martinelli [Ki;Mar] ainsi qu'à Kunz et Souillard [Ku;Sou], enfin *(v)* est un résulat de Avron et Simon (voir [Si]). ◇◇◇

Remarque 4.3. Dans la littérature classique, les exemples de potentiels les plus étudiés sont du type $V^{\alpha}(n) = \lambda g(n\alpha)$ où g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période 1 à valeurs réelles, et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Les opérateurs de Schrödinger correspondants ont "tendance" à avoir un spectre de Cantor. Mais tout type de spectre reste possible : spectre purement ponctuel, purement absolument continu, purement singulier continu, *etc* .... ◇

4.1.c. mesure de densité d'états et exposant de Lyapunov

Puisque le système dynamique induit est ergodique, la mesure de densité d'états encore appelée mesure d'étiquetage, existe. Ses propriétés sont résumées dans la proposition suivante

PROPOSITION 4.4. *Sous les hypothèses du théorème 4.3, la densité intégrée d'états κ est:*

(i) indépendante du choix de x dans X;

(ii) continue sur $\mathbb{R}$;

(iii) constante en chaque trou et admet des valeurs différentes en des trous distincts.

Bellissard, Lima et Testard (voir [Be;Lim;Te] ou aussi [Si;1]), ont établi un lien entre le module de fréquence $\widehat{X}$ et la mesure d'étiquetage. Celui-ci est mis en évidence dans le théorème suivant:

THÉORÈME 4.5 (ETIQUETAGE DES TROUS). *Soit H un opérateur aléatoire de Schrödinger à potentiel presque périodique uniforme associé au système dynamique $(T, X, \mathcal{B}, \mu)$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \hat{X}$ tel que*

$$\hat{X} \subset \{n_1\alpha + n_2 \ , \ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Alors la valeur de κ en chaque trou appartient à ce même ensemble $\{n_1\alpha + n_2 \ , \ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$.

Le théorème d'étiquetage des trous est un révélateur d'un spectre de Cantor.

COROLLAIRE 4.6. *Si à tout élément $\hat{x}$ du module de fréquences $\hat{X}$ tel que $0 < \hat{x} < 1$ correspond un trou du spectre sur lequel κ vaut $\hat{x}$, alors le spectre est un ensemble de Cantor.*

La formule de Thouless relie enfin la mesure d'étiquetage à l'exposant de Lyapunov.

THÉORÈME 4.7 (FORMULE DE THOULESS). *Soit V un potentiel presque périodique uniforme. On munit $X \otimes \mathbb{R}$ de la mesure produit $\mu \times m_\ell$, où m_ℓ est la mesure de Lebesgue. Alors pour $(\mu \otimes m_\ell)$-presque tout couple (x, E) appartenant à $X \times \mathbb{R}$, l'exposant de Lyapunov $\vartheta(E)$ existe et vérifie l'égalité:*

$$\vartheta(E) = \int \log \mid E - E' \mid dk(E') \; . \tag{4.5}$$

Démonstration. Voir [Si;1] et [C,F,Ki,Si] par exemple. ◇◇◇

4.1.d. Les opérateurs à potentiels limite périodiques

Rappelons qu'un élément w appartenant à $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ est *limite périodique* lorsqu'il est limite uniforme au sens de la norme $\| \, . \, \|_\infty$ d'une suite d'éléments $w^{(k)}$ de $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ qui sont périodiques:

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{n \in \mathbb{Z}} |w(n) - w^{(k)}(n)| = 0 \; .$$

En général, les périodes sont supposées croissantes lorsque k augmente. De plus, une suite limite périodique est presque périodique uniforme et son module de fréquences $\hat{X}$ a la propriété du diviseur.
Avron et Simon, ainsi que Chulaevsky et Moser ont donné une approche générique des spectres des opérateurs de Schrödinger à potentiels limites périodiques (pour plus de détails se référer à [Si;1] et [C;F;Ki;Si]).

THÉORÈME 4.8. *L'ensemble des potentiels limite périodiques est un espace métrique complet. De plus,*

(i) il existe un ensemble G_δ dense de potentiels limite périodiques conduisant à des opérateurs de Schrödinger aléatoires dont le spectre est un ensemble de Cantor;

(ii) il existe un ensemble dense de potentiels limite périodiques conduisant à des opérateurs de Schrödinger aléatoires dont le spectre est un ensemble de Cantor purement absolument continu.

Ce théorème signifie que les opérateurs à potentiels limite périodiques ont tendance à avoir un spectre de Cantor. De plus, Bellissard (voir [Be;2]) a déterminé les valeurs possibles de la densité intégrée d'états sur les trous spectraux. Ce résultat est un peu plus précis que le théorème 4.5.

THÉORÈME 4.9. *Soit V un potentiel limite périodique (uniforme). Alors la densité intégrée d'états sur les trous spectraux prend ses valeurs dans le module de fréquences de l'enveloppe de V.*

Enfin, Last (voir [La;1]) a établi un théorème concernant la mesure de Lebesgue du spectre et de l'ensemble des trous spectraux.

THÉORÈME 4.10. *Soit V un potentiel limite périodique (uniforme), limite d'une suite de potentiels périodiques V_m de période p_m, où $p_m \to +\infty$ lorsque $m \to +\infty$. Soient C et α deux constantes strictement positives.*
Soit H l'opérateur de Schrödinger aléatoire de potentiel V, de spectre Σ et $G = [\min \Sigma, \max \Sigma] \setminus \Sigma$ l'ensemble des trous spectraux.
On considère enfin la quantité $v_\Sigma = \sup_{n\in\mathbb{Z}} V_x(n) - \inf_{n\in\mathbb{Z}} V_x(n)$ pour μ-presque tout x.

(i) Si pour tout entier m, $\| V - V_m \|_\infty \leq C p_m^{-(1+\alpha)}$, alors $m_\ell(G) \geq v_\Sigma$ et $m_\ell(\Sigma) \leq 4$.

(ii) Si pour tout entier m, $\| V - V_m \|_\infty \leq C m^{-\alpha p_{m+1}}$, alors $m_\ell(\Sigma) > 0$.

Pour illustrer le cas des opérateurs à potentiel limite périodique, nous évoquons deux exemples: les opérateurs à potentiel hiérarchique introduits et étudiés par Kunz, Livi et Süto (voir [Ku;Li;Su]), ainsi que les opérateurs à potentiel odométriques. Ces derniers sont définis et développés dans le deuxième chapitre de cette thèse. Par conséquent, cette nouvelle notion ne sera pas abordée dans cette partie.

Exemple . Le potentiel hiérarchique.
En accord avec [Ku;Li;Su], on considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par

$$V(n) = \lambda f(\ \mathrm{ord}(n))\ , \tag{4.6}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ord}(n) = \max\{k \in \mathbb{N}\ ;\ 2^k \text{ divise } n\}$ et f est une fonction réelle d'une variable réelle donnée pour tout $m \in \mathbb{N}$ par

$$f(m) = f_R(m) = \sum_{k=0}^{m-1} R^k\ , \tag{4.7}$$

avec $0 < R < 1$. Notons que $V(0) = \lambda \lim_{m\to+\infty} f(m) = \lambda/(1-R)$.

Remarque 4.5. Il est évident que si $R \geq 1$, la suite $(V(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est non bornée. Nous ne nous intéressons donc pas à ce cas de figure. ◇

On obtient les résultats suivants (pour plus de détails, voir [Ku;Li;Su], [Ku] et [Su;4]).

PROPOSITION 4.11. *La suite $(V(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par (4.6) sous les hypothèses précédentes, est une suite limite périodique. Son enveloppe X s'identifie au groupe des entiers dyadiques $\mathbb{Z}_2$.*

Le système dynamique associé à V est donc le 2-odomètre et pour tout $x \in \mathbb{Z}_2$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $V_x(n) = V(x+n)$. Un tel potentiel est dit *hiérarchique* et l'opérateur de Schrödinger aléatoire associé est également appelé *hamiltonien hiérarchique*. En tant qu'opérateur aléatoire à potentiel limite périodique, l'hamiltonien hiérarchique vérifie les théorèmes et propositions 4.3 – 4.7, ainsi que 4.9 – 4.10. Mais nous avons quelques bonus:

THÉORÈME 4.12. *Soit H l'opérateur de Schrödinger à potentiel hiérarchique (4.6) associé à la fonction f_R, où $0 < R < 1$. Alors*

(i) le spectre Σ commun aux opérateurs H_x est un ensemble de Cantor de mesure de Lebesgue strictement positive;

(ii) si $0 < R < 1/2$, alors

$$m_\ell(\Sigma) \leq 4\ , \tag{4.8}$$

et si G désigne l'ensemble des trous, $m_\ell(G) > |\ \lambda\ |$.

Démonstration. Par [Ku;Li;Su], on sait que le spectre de H_0 est un ensemble de Cantor de mesure de Lebesgue strictement positive, d'où *(i)*.

Pour tout entier $N \geq 1$, nous notons V^N la suite périodique de période 2^N définie par $V^N(n) = V(n)$ lorsque $1 \leq n \leq 2^N$. Alors V est la limite uniforme de la suite $(V^N)_{N\geq 1}$. Plus précisément, on a

$$\| V - V^N \|_\infty = \sup_{n\geq N} | \lambda f(n) - \lambda f(N) | = | \lambda | \frac{R^N}{1-R} .$$

Lorsque $0 < R < 1/2$, il existe $\alpha > 0$ tel que $R \leq 1/2^{1+\alpha}$. En posant $C = | \lambda | /(1-R) > 0$, on obtient pour tout $N \geq 1$ l'inégalité :

$$\| V - V^N \|_\infty \leq C(2^N)^{-(1+\alpha)} ,$$

et (4.8) est obtenue en appliquant le théorème 4.10. On a également $m_\ell(G) \geq v_\Sigma$, où $v_\Sigma = \sup_{n\in\mathbb{Z}} V(n) - \inf_{n\in\mathbb{Z}} V(n)$ par stricte ergodicité de l'odomètre. Alors

$$v_\Sigma = \sup_{m\geq 1} \lambda f(m) - \inf_{m\geq 1} \lambda f(m) = \frac{| \lambda |}{1-R} .$$

La stricte positivité de R termine la démonstration. ◇◇◇

4.1.e. Les opérateurs à potentiel quasi-périodique

Rappelons qu'une suite presque périodique uniforme w est dite quasi-périodique lorsque son module de fréquences est finiment engendré. Les potentiels quasi-périodiques rencontrés dans la littérature sont de la forme

$$\forall n \in \mathbb{Z} , \ g^{(\alpha)}(n) = g(\alpha n) , \tag{4.9}$$

où g est une fonction continue réelle périodique de période 1 à valeurs réelles, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque 4.6. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, alors $g^{(\alpha)}$ est une suite périodique. L'opérateur de Schrödinger aléatoire associé est alors périodique. ◇

Nous supposons désormais $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. L'enveloppe de la suite $g^{(\alpha)}$ est alors l'ensemble

$$\{ g^{(\alpha,\theta)} , \theta \in [0,1[\} ,$$

où $g^{(\alpha,\theta)}(n) = g(\alpha n + \theta)$. Finalement, l'opérateur de Schrödinger aléatoire associé à une telle suite est donné par

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}) , \ \forall n \in \mathbb{Z} , \ (H_{(\alpha,\theta)}u)(n) = u(n-1) + u(n+1) + V_{(\alpha,\theta)}(n)u(n) ,$$

où pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $V_{(\alpha,\theta)}(n) = g^{(\alpha,\theta)}(n)$ et $\theta \in [0,1[$. Le système dynamique induit est noté $(T, X, \mathcal{B}, \mu)$, où $X = [0,1[$, μ est la restriction de la mesure de Lebesgue sur $[0,1[$, $\mathcal{B}$ est la tribu des boréliens et T est la translation de α.

En tant qu'opérateur à potentiel presque périodique uniforme, $H_{(\alpha,\theta)}$ vérifie les théorèmes et propositions 4.3 – 4.7.

Nous nous intéressons alors à un exemple particulier de suites quasi-périodiques : les suites de presque-Mathieu. Les opérateurs de Schrödinger associés à de telles suites ont été largement étudiés, notamment par Aubry, Avron, Last, Simon, Bellissard... (voir [C;F;Ki;Si], [Av;vM;Si], [La;2], [La;3], [Si;1], [Av;Si;2], [Be;Si]). Ils illustrent un certain nombre de comportements spectraux différents. Nous nous contentons ici de dresser la liste des principales propriétés.

Exemple . L'opérateur de Schrödinger aléatoire à potentiel de presque-Mathieu.
Dans ce cas,

$$\forall n \in \mathbb{Z} \ , \ V_{\lambda,\alpha,\theta}(n) = \lambda \cos(2\pi\alpha n + \theta) \ , \tag{4.10}$$

où λ et α sont des nombres réels, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.
Ici, on peut considérer $X = [0, 2\pi[$; μ est la restriction de la mesure de Lebesgue sur $[0, 2\pi[$ et T est la translation de $2\pi\alpha$ mod 2π.
Par le théorème 4.3, tous les opérateurs $H_{\lambda,\alpha,\theta}$ lorsque $\theta \in [0, 2\pi[$, ont le même spectre $\Sigma(\lambda, \alpha)$, et pour μ-presque tout $\theta \in [0, 2\pi[$,

$$\Sigma_\varepsilon(\lambda, \alpha) = \sigma_\varepsilon(H_{\lambda,\alpha,\theta}) \ ,$$

où $\varepsilon \in \{ \ ac \ , \ sc \ , \ pp \ \}$. De plus, d'après Bellissard et Simon, les opérateurs de Schrödinger aléatoires à potentiels de presque-Mathieu ont "tendance" à avoir un spectre de Cantor. C'est ce qui fait l'objet du Théorème 4.13 (pour plus de détails voir [C;F;Ki;Si;]).

THÉORÈME 4.13 (BELLISSARD, SIMON). *L'ensemble des couples* $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ *pour lesquels* $\Sigma(\lambda, \alpha)$ *est un ensemble de Cantor, est un ensemble* G_δ *dense dans* $\mathbb{R}^2$.

D'après le théorème 4.7, l'exposant de Lyapunov $\vartheta_{\lambda,\alpha}(E)$ existe pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Notons

$$\mathcal{E}_{\lambda,\alpha} = \{ \ E \in \mathbb{R} \ ; \ \vartheta_{\lambda,\alpha}(E) = 0 \ \} \ .$$

Nous savons qu'il existe une relation entre $\mathcal{E}_{\lambda,\alpha}$ et $\Sigma_{ac}(\lambda, \alpha)$. Last approfondit cette relation dans [La;2] :

THÉORÈME 4.14 (LAST). *Soient* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$m_\ell(\Sigma_{ac}(\lambda, \alpha)) \geq m_\ell(\mathcal{E}_{\lambda,\alpha}) \geq 4 - (2 + \frac{\pi}{5})\lambda \ . \tag{4.11}$$

Suivant les propriétés de α et les valeurs de λ, il existe différents résultats concernant les composantes spectrales ainsi que la mesure de Lebesgue du spectre.
On dit que α est un *nombre de Liouville* si pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $p_n, q_n \to \infty$ et vérifiant

$$| \ \alpha - \frac{p_n}{q_n} \ | \leq n^{-q_n} \ .$$

On dit que α vérifie la condition *(C1)* si pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$\lim_{n \to \infty} q_n^2 \ | \ \alpha - \frac{p_n}{q_n} \ | = 0 \ .$$

Remarque 4.7. Notons en outre que l'ensemble des nombres réels vérifiant la condition *(C1)* est de mesure de Lebesgue égale à 1. ◇

On dit que α vérifie la condition *(C2)* s'il existe une constante $C > 0$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ où $q_n \to +\infty$, tels que

$$q_n^4 \ | \ \alpha - \frac{p_n}{q_n} \ | < C \ .$$

Remarque 4.8. Il est clair que si α vérifie la condition *(C2)*, alors α vérifie la condition *(C1)*. De plus, l'ensemble des nombres réels vérifiant la condition *(C2)* est de mesure de Lebesgue nulle. ◇

On connait alors les résultats suivants :

THÉORÈME 4.15. *Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(i) Si α vérifie la condition (C1), alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ , m_\ell(\Sigma(\lambda,\alpha)) = |4 - 2|\lambda|| \,. \tag{4.12}$$

(ii) Si α vérifie la condition (C1) et si $0 \leq \lambda < 2$, alors

$$m_\ell(\Sigma(\lambda,\alpha)) = m_\ell(\Sigma_{ac}(\lambda,\alpha)) = m_\ell(\mathcal{E}_{\lambda,\alpha}) = 4 - 2\lambda \,. \tag{4.13}$$

(iii) Si α vérifie la condition (C1) et si $\lambda = 2$, alors $\Sigma(2,\alpha)$ est un ensemble de Cantor de mesure de Lebesgue nulle.
Si, en outre α vérifie la condition (C2), alors la dimension de Hausdorff de $\Sigma(2,\alpha)$ est inférieure ou égale à $1/2$.

(iv) Si α est un nombre de Liouville et si $|\lambda| > 2$, alors $\Sigma(\lambda,\alpha)$ est purement singulier continu.

Démonstration. (i) est un résultat récent de Last (voir [La;3]) sur une conjecture d'Aubry et André qui portait sur tous les irrationnels α. De plus, *(iii)* est un corollaire de *(i)* (voir [La;3]). Pour *(ii)* nous nous référons à [La;2]. Enfin *(iv)* est abordé dans [C;F;Ki;Si] (voir également [Av;Si;2] et [Si;1]). ◇◇◇

Remarque 4.9. Certains résultats (en particulier *(iv)*) se basent sur la *dualité d'Aubry*, résultat qui concerne la densité intégrée d'états : soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la densité intégrée d'états $k_{\lambda,\alpha}$ existe et ne dépend pas de θ; elle vérifie l'égalité

$$\forall E \in \mathbb{R}\ ,\ k_{\lambda,\alpha}(E) = k_{\frac{4}{\lambda},\alpha}(\frac{2E}{\lambda}) \,. \tag{4.14}$$

Pour plus de détails, voir par exemple [Si;1]. ◇

4.2. Potentiels 1-Besicovitch presque périodiques

Nous rappelons qu'une suite bornée w est *1-Besicovitch presque périodique* s'il existe une suite de polynômes trigonométriques P_n tels que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{2m+1} \sum_{k=-m}^{m} |u_k - P_n(k)| \right) = 0 \,.$$

Le principal exemple de potentiel 1-Besicovitch presque périodique rencontré dans la littérature est le cas des *potentiels circulaires* :

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ ,\ V_{\lambda,\alpha,x}(n) = \lambda 1_{[1-\alpha,1]}(T^n x) \,, \tag{4.15}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0,1]$ est un nombre irrationel, $x \in [0,1[$ (identifié au tore), et $Tx = x + \alpha \bmod 1$. Lorsque $\lambda = 1$, on parle de *potentiel sturmien.*

Remarque 4.10. Le potentiel circulaire n'est pas une suite presque périodique uniforme, sinon, ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, il serait périodique. ◇

Remarque 4.11. Plus généralement, un potentiel sturmien est de la forme $V_{\alpha,x}(n) = 1_I(T^n x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, où $\alpha \in [0,1[\setminus\mathbb{Q}$ et $I \in \{]0,\alpha],[0,\alpha[,[1-\alpha,1[,]1-\alpha,1[\cup\{0\}\}$. ◇

Les propriétés spectrales de l'opérateur aléatoire de Schrödinger associé à un potentiel circulaire sont résumées dans le théorème 4.16 (pour plus de détails, nous nous référons à [Be;Io;Sco;Tes]).

THÉORÈME 4.16. *Soit $H_{\lambda,\alpha}$ l'opérateur de Schrödinger aléatoire à potentiel circulaire donné par la relation (4.15), où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$.*

(i) Le système dynamique associé est strictement ergodique. Il est aussi minimal. En conséquence, il existe un ensemble compact non vide $\Sigma(\lambda,\alpha)$ tel que

$$\forall x \in [0,1[\ ,\ \Sigma(\lambda,\alpha) = \sigma(H_{\lambda,\alpha,x})\ .$$

(ii) Il existe trois sous-ensembles de $\mathbb{R}$ notés $\Sigma_{ac}(\lambda,\alpha)$, $\Sigma_{pp}(\lambda,\alpha)$ et $\Sigma_{sc}(\lambda,\alpha)$ qui vérifient pour presque tout $x \in [0,1[$:

$$\Sigma_\varepsilon(\lambda,\alpha) = \sigma_\varepsilon(H_{\lambda,\alpha,x})\ ,$$

avec $\varepsilon \in \{ac, sc, pp\}$.

(iii) Pour presque tout $x \in [0,1[$, on a $\sigma_{ac}(H_{\lambda,\alpha,x}) = \emptyset$.

(iv) L'exposant de Lyapunov $\vartheta_{\lambda,\alpha}(E)$ existe et

$$\Sigma(\lambda,\alpha) = \{E \in \mathbb{R}\ ;\ \vartheta_{\lambda,\alpha}(E) = 0\}\ .$$

(v) $\Sigma(\lambda,\alpha)$ est un ensemble de Cantor de mesure de Lebesgue nulle.

Démonstration. L'unique ergodicité du système dynamique associé est classique, elle implique *(i)* et *(ii)*. La propriété *(iii)* est le théorème de Kotani car le potentiel $V_{\lambda,\alpha,x}$ décrit un ensemble fini de valeurs. *(iv)* est un résultat de [Be;Io;Sco;Tes], et *(v)* en est un corollaire. ◇◇◇

Un cas particulier d'opérateur de Schrödinger à potentiel circulaire est l'hamiltonien de Fibonacci, défini pour tout $x \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ par

$$V_x(n) = \lambda 1_{]1-\alpha,1[}(< n\alpha + x >)\,, \tag{4.16}$$

où $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$ est le nombre d'or, λ est un nombre réel non nul que l'on peut choisir positif et $< >$ désigne la partie fractionnaire. Cet opérateur a particulièrement été étudié par Süto (voir [Su;1],[Su;2],[Su;4]). Celui-ci a montré que V_x peut se mettre sous la forme suivante :

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ ;\ V_x(n) = \lambda\big([(n+1)\alpha + x] - [n\alpha + x]\big)\ , \tag{4.17}$$

où [ ] désigne la partie entière.

Remarque 4.11. En fait, la propriété est bien connue et elle vaut pour tous les potentiels sturmiens. D'autre part, si dans la définition de suite sturmienne on choisit l'intervalle fermé ou ouvert, le système dynamique associé n'est plus minimal, bien qu'il reste uniquement ergodique. ◇

En tant qu'opérateur à potentiel circulaire, l'hamiltonien de Fibonacci vérifie le théorème 4.16. En particulier, en ce qui concerne l'opérateur H_0 associé au potentiel V_0, on a :

PROPOSITION 4.17. *Le spectre de l'hamiltonien de Fibonacci est un ensemble de Cantor purement singulier continu.*

Démonstration. Voir [Su;4]. ◇◇◇

5. *Potentiels substitutifs*

Dans un premier temps, nous nous intéressons au système dynamique associé à des potentiels substitutifs.

Remarque 5.1. Une suite substitutive non périodique **n'est pas** une suite presque périodique uniforme car elle est à valeurs dans un ensemble fini. ◇

5.1. Système dynamique d'une substitution

Soit ξ une substitution sur l'alphabet $\mathcal{A}$, l'espace produit $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ sera muni de la topologie produit usuelle. Soit T l'opérateur de décalage (vers la droite) sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Si x est un élément de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, on appelle *orbite* de x sous l'action de T l'ensemble:

$$Orb(x;T) = Orb(x) = \{T^k x, k \in \mathbb{Z}\} \ . \tag{5.1}$$

La fermeture de l'orbite est un compact T-invariant, c'est-à-dire $T(\ \overline{Orb(x)}\ ) = \overline{Orb(x)}$.
On considère maintenant un couple cyclique ab pour ξ, correspondant à une suite w^{ab} minimale. Si ξ est une substitution primitive, on pose $X(\xi) = \overline{Orb(w^{ab})}$. On notera encore T la restriction de T à $X(\xi)$. La topologie induite sur $X(\xi)$ fait de $X(\xi)$ un espace métrique compact.

PROPOSITION 5.1. *Le système dynamique topologique (encore appelé flot) $(X(\xi),T)$ est minimal.*

On dit que $(X(\xi),T)$ est engendré par ξ (et ab). On parle aussi de *flot de substitution.*

Remarque 5.2. Si la suite engendrée w^{ab} est périodique, alors le flot $X(\xi)$ est fini. Dans ce cas, on parle de *substitution périodique.* ◇

PROPOSITION 5.2. *Si ξ est une substitution primitive, alors tous les couples cycliques engendrant une suite presque périodique, engendrent le même flot minimal. De plus, pour tout $n \geq 1$, on a*

$$X(\xi) = X(\xi^n) \ . \tag{5.2}$$

Démonstration. Confère le travail de M. Dekking [Dek]. ◇◇◇

Enfin, toujours sous la condition de primitivité, le flot $(X(\xi),T)$ admet une unique mesure de probabilité μ borélienne et T-invariante. Soit $\mathcal{B}$ la σ-algèbre des boréliens de $X(\xi)$; le triplet $(X(\xi),T,\mathcal{B},\mu)$ est appelé *système dynamique substitutif.* Il est uniquement ergodique et minimal.

Remarque 5.3. Signalons que le système dynamique ainsi obtenu n'est pas le même objet que le système dynamique introduit dans le paragraphe B.4.1, sauf si la suite w^{ab} est périodique. ◇

5.2. Opérateurs de Schrödinger à potentiel substitutif

On considère désormais une substitution primitive ξ sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0,\ldots,s-1\}$, ainsi qu'une suite substitutive $w = w^{ab} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ associée. Soit $X = X(\xi)$ l'orbite fermée de w suivant T. On note $\mathcal{T} = (X,T,\mathcal{B},\mu)$ le système dynamique induit. A partir d'une telle suite, il est possible de construire différents opérateurs aléatoires de Schrödinger. En effet, soit $v : X \longrightarrow \mathbb{R}$, une application mesurable bornée non constante. Pour tout élément x de X, on définit une suite $(V_x(n))_{n\in\mathbb{Z}}$, appelée *potentiel substitutif*, par:

$$\forall\ n \in \mathbb{Z}\ ,\ V_x(n) = v(T^n x) \ . \tag{5.3}$$

L'application v sera choisie de telle manière que la suite des valeurs du potentiel V_x soit apériodique. Dans la littérature classique on suppose $V_x(n) = v(x_n)$, où x_n est la n-ième lettre de la suite x, et v est une application bornée sur $\mathcal{A}$ à valeurs réelles, supposée non constante.

Remarque 5.4. Pour certains auteurs, le potentiel est construit à partir du point fixe unilatéral de la substitution: si $\tilde{w} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est ce point fixe, on pose $V_{\tilde{w}}(-n-1) = V_{\tilde{w}}(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et

l'enveloppe d'une telle suite est dans une majorité des cas un compact de $\mathbb{R}$. Or cette "majorité de cas" correspond aux exemples de substitutions dont un couple cyclique minimal est de la forme w^{aa} pour un certain $a \in \mathcal{A}$. Dans ces conditions, le système dynamique induit est strictement ergodique. Le cadre théorique que nous nous sommes donné est donc bien adapté. $\diamond$

Un *opérateur de Schrödinger aléatoire à potentiel substitutif* est défini pour tout élément x de X par

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ ,\ \forall u \in \ell^2(\mathbb{Z})\ ,\ (H_x u)(n) = u(n-1) + u(n+1) + V_x(n)u(n)\ , \tag{5.4}$$

où $(V_x(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un potentiel substitutif défini par (5.3).
En accord avec les théorèmes 1.2 et 1.3, nous pouvons énoncer le

THÉORÈME 5.3. *Soit H un opérateur de Schrödinger aléatoire à potentiel substitutif.*

(i) Il existe un compact non vide de $\mathbb{R}$, noté Σ, qui est le spectre de tous les opérateurs H_x $(x \in X)$.

(ii) il existe trois sous-ensembles de $\mathbb{R}$, notés Σ_{ac}, Σ_{asc} et Σ_{pp} tels que pour μ-presque tout $x \in X$,

$$\Sigma_\varepsilon = \sigma_\varepsilon(H_x)\ ,$$

avec $\varepsilon \in \{ac, sc, pp\}$.

(iii) Pour μ-presque tout $x \in X$, la partie absolument continue du spectre de H_x est vide, c'est-à-dire

$$\Sigma_{ac} = \emptyset\ .$$

(iv) La mesure de Lebesgue de Σ est nulle.

Remarque 5.5. D'après Bellisssard, Bovier et Ghez, il existe une autre caractérisation de l'étiquetage des trous. Celui-ci s'effectue à l'aide de la fonction trace définie sur le $\mathcal{K}_0$ groupe associé, et dépendant de la mesure μ. Ils ont en outre caractérisé l'ensemble des valeurs possibles de k, ce qui fait l'objet de la proposition 5.3. Pour plus de détails, nous nous référons à [Be;Bo;Gh;1], [Be;Bo;Gh;2] et [Be;2]. $\diamond$

PROPOSITION 5.4 (BELLISSARD, BOVIER, GHEZ). *Les valeurs possibles de k dans les trous sont les combinaisons linéaires à coefficients entiers des nombres d'occurence de tout mot fini de lettres de $\mathcal{A}$ apparaissant dans $x \in X$.*

Remarque 5.6. Certaines étiquettes correspondent à des trous fermés (qui n'apparaissent donc pas dans le spectre). $\diamond$

5.3. Tentative de description systématique des différents exemples rencontrés

Le but de ce sous-paragraphe est d'établir pour chaque exemple proposé une fiche descriptive des différentes propriétés de l'opérateur de Schrödinger aléatoire associé à la suite substitutive. Les définitions ainsi que les propriétés caractéristiques de ces substitutions sont données dans l'Appendice C. La substitution est notée ξ, le système dynamique $(X(\xi), T, \mathcal{B}, \mu)$ et la suite substitutive w. Le tableau ci-dessous dresse une liste des potentiels étudiés, puis les propriétés spectrales ainsi que divers résultats (en particulier sur l'étiquetage des trous spectraux) sont évoqués dans les sous-paragraphes suivants.

Nom de la substitution	Substitution		Suite substitutive	Potentiel	Références bibliographiques
Fibonacci	ξ : 0 —> 01 1 —> 0	- primitive - longueur non constante	w^{00}	$v(0) = V$ et $v(1) = -V$, avec $V>0$.	[Be;2] ; [Be;Bo;Gh;1] ; [Be;Bo;Gh;2] ; [Bo;Gh;3] ; [Que;2]
Thue-Morse	ξ : 0 —> 01 1 —> 10	- primitive - longueur constante	w^{00}	v est quelconque	[Ax;P] ; [Be;1] ; [Be;2] ; [Be;Bo;Gh;1] ; [Be,Bo;Gh; [Bo;Gh;3] ; [Lu] ; [Que;2] ; [Su;4]
Période doublante	ξ : 0 —> 01 1 —> 00	- primitive - longueur constante	w^{00}	$v(0) = V$ et $v(1) = -V$, avec $V>0$.	[Be;2] ; [Be;Bo;Gh;1] ; [Be;Bo;Gh;2] ; [Bo;Gh;1] ; [Bo;Gh;3] ; [Lu] ; [Que;2] ; [Su;4]
Non-Pisot binaire	ξ : 0 —> 01 1 —> 000	- primitive - longueur non constante	w^{00}	$v(0) = V$ et $v(1) = -V$, avec $V>0$.	[Be;Bo;Gh;2] ; [Bo;Gh;1]
Fibonacci généralisée	ξ : 0 —> 01...1 1 —> 0	- primitive - longueur non constante	w^{00}	$v(0) = V$ et $v(1) = -V$, avec $V>0$.	[Bo;Gh;1]
Non-Pisot ternaire	ξ : 0 —> 2 1 —> 0 2 —> 101	- primitive - longueur non constante	w^{00}	v est quelconque	[Be;Bo;Gh;2] ; [Bo;Gh;1]
Rudin-Shapiro	ξ : 0 —> 02 1 —> 32 2 —> 01 3 —> 31	- primitive - longueur constante	Point fixe unilatéral	$v(0) = v(2) = 1$ $v(1) = v(3) = -1$	[Be;2] ; [Be;Bo;Gh;2] ; [Bo;Gh;1] ; [Bo,Gh [Bo;Gh;3] ; [Lu]
Circulaire substitutive	ξ : 0 —> 202 1 —> 02202 2 —> 01202	- primitive - longueur non constante	Point fixe unilatéral	v est quelconque	[Be;Bo;Gh;2] ; [Bo;Gh;1]

Différents potentiels substitutifs - Références

5.3.a. Le potentiel de Fibonacci

Le *potentiel de Fibonacci* est défini pour tout $x \in X(\xi)$ et tout entier n par $V_x(n) = v(T^n x)$, où

$$v(x) = \begin{cases} \mathcal{V} & \text{si } x_0 = 0 \\ -\mathcal{V} & \text{si } x_0 = 1 \end{cases},$$

avec $\mathcal{V} > 0$. Le théorème 5.3 s'applique donc. De plus, la proposition 5.4 induit le résultat suivant:

COROLLAIRE 5.5. *La fonction d'étiquetage prend ses valeurs dans l'ensemble*

$$\{\, p + \frac{q}{\theta} \;;\; (p,q) \in \mathbb{Z}^2 \,\}, \tag{5.5}$$

où $\theta = (1+\sqrt{5})/2$ est le nombre d'or.

Démonstration. Pour plus de détails voir [Be;2] ainsi que [Be;Bo;Gh;2]. ◇◇◇

Remarque 5.7. Par contre, nous ne savons pas si à chaque étiquette correspond effectivement un trou spectral. ◇

Par ailleurs, la nature du spectre de l'opérateur auto-adjoint H_w, où w est la suite de Fibonacci bi-infinie, est connue.

PROPOSITION 5.6. *Le spectre de H_w est purement singulier continu : $\sigma(H_w) = \sigma_{sc}(H_w)$.*

Démonstration. Elle se fait à l'aide de la fonction trace (voir [Bo;Gh;1] et [Que;2]). ◇◇◇

5.3.b. Le potentiel de Thue-Morse

Le *potentiel de Thue-Morse* est défini pour tout $x \in X(\xi)$ et tout entier n par $V_x(n) = v(x_n)$, où $v : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. Le théorème 5.3 s'applique donc. Plus exactement, on a

PROPOSITION 5.7. *Le spectre Σ est un ensemble de Cantor de mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. Voir [Be;2]. ◇◇◇

De plus, la Proposition 5.4 induit le résultat suivant:

COROLLAIRE 5.8. *La fonction d'étiquetage prend ses valeurs dans l'ensemble*

$$\{ \frac{p}{3.2^q} \; ; \; (p,q) \in \mathbb{N}^2 \} \; . \tag{5.6}$$

De plus, les trous correspondant aux valeurs $p = 3j + 1$ ou $p = 3j + 2$ sont effectivement ouverts, alors que les autres sont fermés. ◇◇◇

Par ailleurs, la nature du spectre de l'opérateur H_w, où w est la suite de Thue-Morse est connue.

PROPOSITION 5.9. *Le spectre de H_w est purement singulier continu : $\sigma(H_w) = \sigma_{sc}(H_w)$.*

Démonstration. Elle se fait à l'aide de la fonction trace (voir [Bo;Gh;1], [Ax;P] et [Que;2]). ◇◇◇

Remarque 5.8. Luck (voir [Lu]) s'intéresse à la localisation des trous spectraux de l'opérateur H_w dont le potentiel est associé à l'application v telle que $v(0) = 1$ et $v(1) = -1$. Dans ce cas, $\sigma(H_w)$ est symétrique par rapport à 0. ◇

5.3.c. Le potentiel à période doublante

Le *potentiel à période doublante* est défini comme le potentiel de Fibonacci. Le théorème 5.3 s'applique donc et de plus

PROPOSITION 5.9. *Le spectre Σ est un ensemble de Cantor de mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. Voir [Be;Bo;Gh;1]. ◇◇◇

La proposition 5.4 induit le résultat suivant:

COROLLAIRE 5.10. *La fonction d'étiquetage prend ses valeurs dans l'ensemble*

$$\{ \frac{p}{3.2^q} \; ; \; (p,q) \in \mathbb{N}^2 \} \; , \tag{5.7}$$

et chaque étiquette correspond à un trou spectral ouvert.

Démonstration. Pour plus de détails voir [Be;2] et [Be;Bo;Gh;1]. ◇◇◇

Par ailleurs, la nature du spectre de l'opérateur H_w, où w est la suite à période doublante est connue.

PROPOSITION 5.11. *Le spectre de H_w est purement singulier continu : $\sigma(H_w) = \sigma_{sc}(H_w)$.*

Démonstration. Elle se fait à l'aide de la fonction trace (voir [Bo;Gh;1] et [Que;2]). ◇◇◇

Remarque 5.9. Luck (voir [Lu]) s'intéresse à la localisation des trous spectraux de l'opérateur H_w dont le potentiel est associé à l'application v telle que $\mathcal{V} = 1$. ◇

5.3.d. Le potentiel de non-Pisot binaire

Le *potentiel de non-Pisot binaire* est défini comme le potentiel de Fibonacci. Le théorème 5.3 s'applique encore. De plus, la proposition 5.4 induit le résultat suivant:

COROLLAIRE 5.12. *La fonction d'étiquetage prend ses valeurs dans l'ensemble*

$$\{ \frac{1}{3^p}(q + r\theta) \; ; \; (p,q,r) \in \mathbb{Z}^3 \} \; , \tag{5.8}$$

où $\theta = (1 + \sqrt{13})/2$.

Démonstration. Voir [Be;Bo;Gh;2]. ◇◇◇

Remarque 5.10. On ne sait pas si les étiquettes correspondent à des trous spectraux ouverts. ◇

Par ailleurs, la nature du spectre de l'opérateur auto-adjoint H_w, où w est la suite de non-Pisot binaire est connue.

PROPOSITION 5.13. *Le spectre de H_w est singulier à support sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. Elle se fait à l'aide de la fonction trace (voir [Bo;Gh;1]). ◇◇◇

5.3.e. Le potentiel de non-Pisot ternaire

Le *potentiel de non-Pisot ternaire* est défini à partir d'une application v quelconque. Le théorème 5.3 s'applique. De plus, la proposition 5.4 induit le résultat suivant:

COROLLAIRE 5.14. *La fonction d'étiquetage prend ses valeurs dans l'ensemble*

$$\{ \frac{1}{2^p}(q + r\theta + s\theta^2) \; ; \; (p,q,r,s) \in \mathbb{Z}^4 \} \; , \tag{5.9}$$

où θ est l'unique racine réelle de $\theta^3 - \theta - 2 = 0$.

Démonstration. Pour plus de détails voir [Be;Bo;Gh;2]. ◇◇◇

Remarque 5.11. On ne sait pas si les étiquettes correspondent à des trous spectraux ouverts. ◇

Par ailleurs, la nature du spectre de l'opérateur H_w, où w est la suite de non-Pisot ternaire est connue.

PROPOSITION 5.15. *Le spectre de H_w est purement singulier continu.*

Démonstration. Elle se fait à l'aide de la fonction trace (voir [Bo;Gh;1]). ◇◇◇

5.3.f. Le potentiel de Rudin-Shapiro

Le *potentiel de Rudin-Shapiro* est défini à partir de l'application v vérifiant $v(0) = v(2) = 1$ et $v(1) = v(3) = -1$. Le théorème 5.3 s'applique et la proposition 5.4 induit le résultat suivant:

COROLLAIRE 5.14. *La fonction d'étiquetage prend ses valeurs dans l'ensemble*

$$\{ \frac{p}{2^q} \; ; \; (p,q) \in \mathbb{N}^2 \} \; . \tag{5.10}$$

Démonstration. Pour plus de détails voir [Be;Bo;Gh;2] ou [Be;2]. ◇◇◇

Remarque 5.12. On ne sait pas si les étiquettes correspondent à des trous spectraux ouverts. ◇

5.3.g. Le potentiel circulaire substitutif

Le *potentiel circulaire substitutif* est défini à partir d'une application v quelconque. Le théorème 5.3 s'applique et la proposition 5.4 induit le résultat suivant:

COROLLAIRE 5.15. *La fonction d'étiquetage prend ses valeurs dans l'ensemble*

$$\{ \frac{p+q\theta}{2} \; ; \; (p,q) \in \mathbb{Z}^2 \} \; , \tag{5.11}$$

où $\theta = 2 + \sqrt{5}$.

Démonstration. Voir [Be;Bo;Gh;2]. ◇◇◇

Remarque 5.13. On ne sait pas si les étiquettes correspondent à des trous spectraux ouverts. ◇

Par ailleurs, la nature du spectre de l'opérateur auto-adjoint H_w, où w est la suite circulaire substitutive est connue.

PROPOSITION 5.16. *Le spectre de H_w est singulier continu.*

Démonstration. Elle se fait à l'aide de la fonction trace (voir [Bo;Gh;1]). ◇◇◇

Chapitre 2

Opérateur à potentiel odométrique : exemples d'opérateurs de Schrödinger à potentiel de Gordon fort

Nous introduisons ce chapitre en rappelant la notion de suites *à comportement de Gordon* ainsi que les propriétés spectrales particulières d'un opérateur de Schrödinger ayant un tel potentiel. Nous définissons alors un type de suites plus particulier: les suites *à comportement fortement de Gordon*. Le premier but de ce chapitre est de montrer l'existence de telles suites. Pour cela, nous nous plaçons dans le cadre des odomètres dont nous rappelons les principales propriétés. Nous construisons dans $\mathbb{Z}_2$ une suite d'ouverts/fermés deux à deux disjoints. Ce procédé est relativement explicite et permet de construire toute une famille de suites réelles bornées à comportement fortement de Gordon et qui sont presque périodiques. Finalement, en mettant en pratique l'arsenal des connaissances sur les opérateurs de Schrödinger à potentiels presque périodiques, nous construisons de tels potentiels pour lesquels le spectre Σ est de mesure de Lebesgue strictement positive égale à celle de sa composante absolument continue.

1. Rappels sur les suites à comportement de Gordon

Une application V bornée, définie sur $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ a un *comportement de Gordon* si et seulement s'il existe une suite d'applications $(V_m)_{m\geq 1}$ définies sur $\mathbb{Z}$ à valeurs réelles et bornées vérifiant les quatre conditions suivantes:

(G1) Pour tout entier $m \geq 1$, V_m est T_m-périodique;

(G2) $\lim_{m\to+\infty} T_m = +\infty$;

(G3) $\sup_{m\geq 1} \sup_{k\in\mathbb{Z}} | V_m(k) | < +\infty$;

(G4) Il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout entier $m \geq 1$:

$$\sup_{-2T_m\leq k\leq 2T_m} | V(k) - V_m(k) | \leq Cm^{-T_m} \ . \tag{1.1}$$

Remarque 1.1. Les conditions *(G1)-(G4)* expriment une très bonne approximation de V par des suites périodiques. Toutefois, il est à noter qu'une suite ayant un comportement de Gordon n'est pas obligatoirement une suite limite périodique qui, rappelons-le, est la limite uniforme d'une suite d'applications périodiques définies sur $\mathbb{Z}$ à valeurs réelles. Réciproquement, une suite limite

périodique n'a pas en général un comportement de Gordon. En effet, la condition *(G4)* indique sur la fenêtre $\{k \in \mathbb{Z} \ ; \ -2T_m \leq k \leq 2T_m\}$, (et uniquement sur elle), une très bonne approximation de V par V_m. $\diamond$

Un opérateur de Schrödinger unidimensionnel discret est à *potentiel de Gordon* lorsque le potentiel auquel il est associé est une suite ayant un comportement de Gordon. Le théorème de Gordon (voir [Gor] ou [Si;1]), ainsi que son corollaire (voir [C;F;Ki;Si] p. 201), sont rappelés dans le théorème 1.1 que nous redémontrons.

THÉORÈME 1.1. *Soit H un opérateur de Schrödinger unidimensionnel discret à potentiel de Gordon V. Alors toute solution non nulle $u = (u(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ de l'équation $Hv = Ev$, vérifie l'inégalité suivante:*

$$\limsup_{|n|\to+\infty} \frac{u(n+1)^2 + u(n)^2}{u(1)^2 + u(0)^2} \geq \frac{1}{4} \ . \tag{1.2}$$

En particulier, l'opérateur H n'admet pas de fonction propre dans $\ell^2(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire que son spectre discret est vide : $\sigma_{dis}(H) = \emptyset$.

Démonstration. Cette démonstration est basée sur un résultat général que nous énonçons et démontrons dans une première étape.

Etape 1 : On se donne une matrice carrée M inversible d'ordre 2. Soit x un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$. Nous allons montrer que

$$\max(\| M^{-2}x \|, \| M^{-1}x \|, \| Mx \|, \| M^2x \|) \geq \frac{1}{2} \ , \tag{1.3}$$

où $\| \ . \ \|$ est la norme quadratique des matrices carrées d'ordre deux. Puisque M est une matrice inversible, elle vérifie l'équation $M^2 - (trM)M + (detM)I_2 = 0$, soit

$$a_1M^2 + a_2M + a_3I_2 = 0 \ ,$$

avec $a_i = 1$ pour un indice $i \in \{1,2,3\}$, et $| a_j | \leq 1$ si $j \neq i$ et $j \in \{1,2,3\}$. Supposons par exemple $a_2 = 1$ et $| a_1 |$, $| a_3 | \leq 1$. L'équation devient $a_1M^2 + M + a_3I_2 = 0$, c'est-à-dire $a_1M + I_2 + a_3M^{-1} = 0$. Alors $x = -a_1Mx - a_3M^{-1}x$, et puisque x est de norme 1, on a $1 \leq \| Mx \| + \| M^{-1}x \|$. On en déduit que $\| Mx \| \geq 1/2$ ou que $\| M^{-1}x \| \geq 1/2$. On obtient ainsi le résultat. Dans les deux autres cas $a_1 = 1$ et $a_3 = 1$, la démonstration est semblable et l'on aboutit à l'inégalité (1.3). Si enfin x est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$, alors

$$\max(\| M^{-2}x \|, \| M^{-1}x \|, \| Mx \|, \| M^2x \|) \geq \frac{1}{2} \ \| x \| \ . \tag{1.4}$$

Etape 2 : On note H_m l'opérateur de Schrödinger uni-dimensionnel discret de potentiel périodique V_m. Soit E un réel. Soit u une solution de $Hv = Ev$, dont les conditions initiales sont $u(0)$ et $u(1)$, deux réels non nuls. Soit u_m une solution non nulle de $H_mv = Ev$, dont les conditions initiales sont données par $u_m(0) = u(0)$ et $u_m(1) = u(1)$. On définit ensuite

$$\phi(n) = \begin{pmatrix} u(n+1) \\ u(n) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \phi_m(n) = \begin{pmatrix} u_m(n+1) \\ u_m(n) \end{pmatrix} \ .$$

Alors $\phi(0) = \phi_m(0)$. Dans cette deuxième étape nous cherchons une majoration de $\| \phi(n) - \phi_m(n) \|$ lorsque $| n | \leq 2T_m$. Définissons les matrices $A(n)$ et $A_m(n)$ vérifiant $A(0) = A_m(0) = I_2$ par

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad A(n) = \begin{pmatrix} E - V(n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A_m(n) = \begin{pmatrix} E - V_m(n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Lorsque $n > 0$, on obtient les égalités :

$$\phi(n) = A(n)\phi(n-1) = A(n)\dots A(1)\phi(0) \text{ et } \phi_m(n) = A_m(n)\dots A_m(1)\phi_m(0) .$$

Par hypothèse sur les conditions initiales de u et u_m on déduit que

$$\sup_{0\leq n\leq 2T_m} \| \phi(n) - \phi_m(n) \| = \sup_{0\leq n\leq 2T_m} \| \left(A(n)\dots A(1)A(0) - A_m(n)\dots A_m(1)A_m(0)\right) \phi(0) \| .$$

Or $A(0) = A_M(0) = I_2$ et nous introduisons pour tout $n \geq 0$, la notation suivante :

$$\mathcal{N}(n) = \| \left(A(n)\dots A(1)A(0) - A_m(n)\dots A_m(1)A_m(0)\right) \phi(0) \| .$$

Il est clair alors que

$$\mathcal{N}(n) \leq \| A(n) \| \mathcal{N}(n-1) + \| A(n) - A_m(n) \| \| A_m(n-1) \| \dots \| A(0) \| \| \phi(0) \| .$$

L'hypothèse *(G3)* implique l'existence d'un réel $K_1 > 0$ tel que $\| A_m(k) \| \leq K_1$ quels que soient $m \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$. De plus la suite V étant bornée, on note K_2 le réel strictement positif tel que $\| A(n) \| \leq K_2$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Enfin la condition *(G4)* indique que

$$\| A(n) - A_m(n) \| = | V(n) - V_m(n) | \leq Cm^{-T_m}$$

pour tout $0 < n \leq 2T_m$. On obtient ainsi

$$\forall n \in \{1,\dots,2T_m\}, \ \mathcal{N}(n) \leq K_2\mathcal{N}(n-1) + K_1^n Cm^{-T_m} \| \phi(0) \| .$$

Par récurrence sur $n > 0$, cette inégalité conduit à

$$\mathcal{N}(n) \leq K_2^n\mathcal{N}(0) + Cm^{-T_m}(K_1^n + K_1^{n-1}K_2 + \dots + K_1K_2^{n-1}) \| \phi(0) \| .$$

Notons que $\mathcal{N}(0) = 0$. Par suite,

$$\forall n \in \{1,\dots,2T_m\}, \ \mathcal{N}(n) \leq K_1^n Cm^{-T_m} \frac{K_2}{K_1} \frac{1-(K_2/K_1)^n}{1-K_2/K_1} \| \phi(0) \| .$$

On peut montrer que les conditions *(G4)* et *(G2)* impliquent $K_2 \leq K_1$, d'où

$$\forall n \in \{1,\dots,2T_m\}, \ \mathcal{N}(n) \leq K_1^n Cm^{-T_m} \| \phi(0) \| \frac{1}{1-K_2/K_1} .$$

La matrice A_m est de déterminant égal à 1, d'où $K_1 \geq 1$ ainsi que

$$\sup_{0\leq n\leq 2T_m} \| \phi(n) - \phi_m(n) \| = \sup_{0\leq n\leq 2T_m} \mathcal{N}(n) \leq K_1^{2T_m} \| \phi(0) \| Cm^{-T_m} \frac{1}{1-K_2/K_1} . \qquad (1.5)$$

Lorsque $n < 0$, notons que

$$A(n)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & E - V(n) \end{pmatrix} \text{ de même que } A_m(n)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & E - V_m(n) \end{pmatrix} ,$$

et par suite $\phi(n) = A(n+1)^{-1}\phi(n+1) = A(n+1)^{-1}\dots A(0)^{-1}\phi(0)$ de même que $\phi_m(n) = A_m(n+1)^{-1}\dots A_m(0)^{-1}\phi(0)$. Par un démonstration identique à la précédente, on obtient la deuxième inégalité:

$$\sup_{-2T_m \le n \le 0} \| \phi(n) - \phi_m(n) \| \le K_1^{2T_m} \| \phi(0) \| C m^{-T_m} \frac{1}{1 - K_2/K_1} . \tag{1.6}$$

Etape 3 : D'après les majorations (1.5) et (1.6), $\| \phi(aT_m) - \phi_m(aT_m) \| \le K_1^{2T_m} C' m^{-T_m} \| \phi(0) \|$, où $C' = \frac{C}{1-K_2/K_1}$, pour $a \in \{-2,-1,1,2\}$. Par la deuxième inégalité triangulaire, $\| \phi_m(aT_m) \| - K_1^{2T_m} C' m^{-T_m} \| \phi(0) \| \le \| \phi(aT_m \|$, de sorte que :

$$\max_{a=-2,-1,1,2} \| \phi(aT_m) \| \ge \max_{a=-2,-1,1,2} \| \phi_m(aT_m) \| - K_1^{2T_m} C' m^{-T_m} .$$

La périodicité de V_m implique celle de A_m : $A_m(n+T_m) = A_m(n)$ quel que soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors $\phi_m(2T_m) = (\phi_m(T_m))^2$, $\phi_m(-T_m) = (\phi_m(T_m))^{-1}$ et $\phi_m(-2T_m) = (\phi_m(T_m))^{-2}$. L'inégalité (1.4) conduit alors à

$$\max_{a=-2,-1,1,2} \| \phi_m(aT_m) \| = \max_{a=-2,-1,1,2} \| (\phi_m(T_m))^a \| \ge \frac{1}{2} \| \phi_m(0) \| .$$

En remarquant que $\phi_m(0) = \phi(0)$, l'inégalité devient

$$\max_{a=-2,-1,1,2} \frac{\| \phi(aT_m) \|}{\| \phi(0) \|} \ge \frac{1}{2} - K_1^{2T_m} C' m^{-T_m} .$$

De plus la limite lorsque $n \to +\infty$ de la quantité $K_1^{2T_m} C' m^{-T_m}$ est nulle, d'où

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{\| \phi(n) \|}{\| \phi(0) \|} \ge \limsup_{m \to +\infty} \frac{\max_{a=-2,-1,1,2} \| \phi(aT_m) \|}{\| \phi_m(0) \|} \ge \frac{1}{2} . \tag{1.7}$$

La démonstration se termine en notant que $\| \phi(n) \| = u(n)^2 + u(n+1)^2$. ◇◇◇

Remarque 1.3. La condition *(G4)* peut être affaiblie sensiblement; explicitons ce fait: ◇

THÉORÈME 1.2. *Soit H un opérateur de Schrödinger (uni-dimensionnel discret) de potentiel V. On suppose que V vérifie les conditions (G1), (G2) et (G3), ainsi que la condition*

(G'4) Il existe une constante $C > 0$, une fonction $\theta : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ vérifiant $0 \le \theta(m) \le T_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, ainsi qu'une application $\varepsilon : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{m \to +\infty} \varepsilon(m) = +\infty$, telles que pour tout entier $m \ge 1$:

$$\sup_{-2T_m \le k \le 2T_m} | V(k) - V_m(k) | \le C^{\theta(m)} \varepsilon(m)^{-T_m} . \tag{1.8}$$

Alors toute solution non nulle $u = (u(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ de l'équation $Hv = Ev$, vérifie l'inégalité suivante :

$$\limsup_{|n| \to +\infty} \frac{u(n+1)^2 + u(n)^2}{u(1)^2 + u(0)^2} \ge \frac{1}{4} . \tag{1.9}$$

En particulier, l'opérateur H n'admet pas de fonction propre dans $\ell^2(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire que son spectre est purement essentiel.

Démonstration. En reprenant la démonstration du théorème 1.1, nous obtenons une majoration de la quantité $\mathcal{N}(n)$:

$$\forall\, n \in \{1-2T_m, \ldots, 2T_m\}\,,\ \mathcal{N}(n) \leq K_1^{2T_m} C^{\theta(m)} \varepsilon(m)^{-T_m} \parallel \phi(0) \parallel \frac{1}{1-K_2/K_1}\,,$$

où l'on a toujours $K_2 \leq K_1$. Il reste alors à remarquer que

$$K_1^{2T_m} C^{\theta(m)} \varepsilon(m)^{-T_m} \leq e^{T_m(2\ln K_1 + \ln C - \ln \varepsilon(m))}$$

pour terminer la démonstration. ◇◇◇

2. *Suites à comportement fortement de Gordon*

Une application V bornée, définie sur $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ sera dite avoir un *comportement fortement de Gordon* si et seulement s'il existe une suite d'applications $(V_m)_{m\geq 1}$ bornées, définies sur $\mathbb{Z}$, à valeurs réelles et vérifiant :

(GF1) Pour tout entier $m \geq 1$, V_m est T_m-périodique;
(GF2) $\lim_{m\to+\infty} T_m = +\infty$;
(GF3) $\sup_{m\geq 1} \sup_{k\in\mathbb{Z}} \mid V_m(k) \mid < +\infty$;
(GF4) Pour tout entier $m \geq 1$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\mid k \mid \leq 2T_m$, on a $V(k) = V_m(k)$.

Une suite à comportement fortement de Gordon a, *a fortiori*, un comportement de Gordon. D'où le corollaire immédiat:

COROLLAIRE 2.1. *Soit H un opérateur de Schrödinger dont le potentiel a un comportement fortement de Gordon. Alors la partie discrète du spectre de H est vide.*

2.1. *Quelques rappels sur le 2-odomètre*

2.1.a. *L'anneau des entiers dyadiques*

Soit $\mathbb{Z}_2$ l'anneau des entiers 2-adiques. Classiquement, $\mathbb{Z}_2$ est la limite projective (algébrique et topologique) de la suite des groupes cycliques $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ munis de leurs topologies discrètes et reliés entre eux par les morphismes $h_{n,m} : \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}$ définis pour $m \leq n$ par $h_{n,m}(a + 2^n\mathbb{Z}) = a + 2^m\mathbb{Z}$. Tout élément ω de $\mathbb{Z}_2$ s'écrit selon la notation de Hensel

$$\omega = \sum_{k\geq 0} \omega_k 2^k \quad , \text{ où } \omega_k \in \{0,1\}\,. \tag{2.1}$$

Cette écriture est alors unique et la série est convergente dans $\mathbb{Z}_2$. A tout élément de $\mathbb{Z}_2$ est aussi naturellement associée une suite infinie de symboles:

$$\omega = \sum_{k\geq 0} \omega_k 2^k \in \mathbb{Z}_2 \quad \longleftrightarrow \quad \omega_0\omega_1\omega_2 \ldots \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\,. \tag{2.2}$$

Cette correspondance est bijective, et l'on note $S(\omega)$ la suite de symboles associée à l'élément ω et on identifiera dans la pratique ω et $S(\omega)$.

Remarque 2.1. Tout entier naturel peut s'écrire comme une combinaison linéaire finie unique de puissances de 2, ce qui permet d'identifier les entiers naturels à des éléments de $\mathbb{Z}_2$. D'autre part, si e est l'élément de $\mathbb{Z}_2$ vérifiant $e_k = 1$ pour tout $k \geq 0$, alors le calcul dans $\mathbb{Z}_2$ donne

$$e + 1 = 0$$

de sorte que e peut être identifié à l'entier relatif (-1). De même, si dans la représentation de ω il n'existe qu'un nombre fini de 0, c'est-à-dire si $S(\omega) = \omega_0\omega_1 \ldots \omega_{K-1}11\underline{1}\ldots$, alors $\omega = \sum_{0\leq k<K} \omega_k 2^k + 2^K e$, ce qui identifie ω avec l'entier $z = \sum_{0\leq k<K} \omega_k 2^k - 2^K$. Comme $-2^K \leq \omega < 0$, z est négatif. On identifie ainsi $\mathbb{Z}$ à un sous-ensemble de $\mathbb{Z}_2$ et cette identification préserve les lois d'addition et de multiplication. De fait, l'arithmétique sur $\mathbb{Z}_2$ est obtenue par extension de celle de $\mathbb{Z}$. $\diamond$

2.1.b. Le 2-odomètre, distance et topologie

L'anneau $\mathbb{Z}_2$ est muni d'une distance d donnée pour deux entiers dyadiques ω et ω' par :

$$d(\omega,\omega') = \begin{cases} \sup\{\frac{1}{2^n} \ ; \ \omega_n \neq \omega'_n\} & \text{si } \omega \neq \omega' \\ 0 & \text{si } \omega = \omega'. \end{cases} \tag{2.3}$$

PROPOSITION 2.2. *La distance d définie sur $\mathbb{Z}_2$ par la relation (2.3) est ultramétrique:*

$$\forall\, (\omega,\omega',\omega_1) \in (\mathbb{Z}_2)^3\,, \quad d(\omega,\omega') \leq \max\{d(\omega,\omega_1), d(\omega_1,\omega')\} \quad , \tag{2.4}$$

et il y a égalité lorsque $d(\omega,\omega_1) \neq d(\omega_1,\omega')$.

Une base d'ouverts pour la topologie associée à cette distance est donnée par les cylindres (ou boules ouvertes):

$$C(\omega,n) = C_{\omega_0\omega_1\ldots\omega_{n-1}} = \{\omega' \in \mathbb{Z}_2 \ ; \ \omega'_0 = \omega_0\,,\ \omega'_1 = \omega_1, \ldots, \omega'_{n-1} = \omega_{n-1}\}\,. \tag{2.5}$$

Remarquons que ω est un élément de $2^n\mathbb{Z}_2$ si et seulement si $S(\omega) = 00\ldots0\omega_n\omega_{n+1}\ldots$, de sorte que $2^n\mathbb{Z}_2 = C(0,n)$. De même le cylindre $C(\omega,n)$ de $\mathbb{Z}_2$ peut s'écrire $\omega + 2^n\mathbb{Z}_2$. Nous rappelons dans la proposition 2.3 les propriétés typiques des espaces espaces ultramétriques.

PROPOSITION 2.3.

(i) Toute boule ouverte (respectivement fermée) est fermée (respectivement ouverte) : les cylindres sont des ouverts/fermés qui admettent une frontière vide.

(ii) Tout point d'une boule est centre de cette boule:

$$\forall \omega \in \mathbb{Z}_2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \omega' \in C(\omega,n) \iff C(\omega',n) = C(\omega,n)\ .$$

(iii) Si deux boules fermées (ou ouvertes) ne sont pas disjointes alors l'une est incluse dans l'autre.

(iv) Tout ouvert non fermé A de $\mathbb{Z}_2$ est une réunion dénombrable de cylindres disjoints deux à deux:

$$A = \bigcup_{m\geq 0} (a_m + 2^{p_m}\mathbb{Z}_2)\,, \quad \text{avec } \ a_m\,,\ p_m \ \in \mathbb{N}\,. \tag{2.6}$$

(v) Pour tout $n \geq 0$, on a $\mathbb{Z}_2 = \bigcup_{0\leq k<2^n-1} C(k,n)$.

(vi) Pour tout $\omega \in \mathbb{Z}_2$, et pour tout $k \in \{0,\ldots,2^n-1\}$, l'ensemble

$$C(k,n) \cap \{\omega, \omega+1, \ldots, \omega+2^n-1\}$$

est un singleton.

(vii) Les cylindres sont disconnexes : $C(\omega,n) = C(\omega,n+1) \cup C(\omega+2^n,n+1)$.

La topologie sur $\mathbb{Z}_2$ déterminée par la distance d est celle de la limite projective; elle fait de $\mathbb{Z}_2$ un groupe topologique métrisable et compact. Soit alors $\mathcal{B}$ la σ-algèbre des boréliens de $\mathbb{Z}_2$. On notera par τ l'application "addition de 1":

$$\forall\, z \in \mathbb{Z}_2\ ,\ \tau(z) = z+1\ .$$

En tant que groupe topologique compact, $\mathbb{Z}_2$ admet une unique mesure de probabilité borélienne invariante par les translations (et en particulier par τ); c'est sa *mesure de Haar*, notée h.

PROPOSITION 2.4. *Le quadruplet* $(\tau,\mathbb{Z}_2,\mathcal{B},h)$ *est un système dynamique minimal et uniquement ergodique appelé le 2-odomètre.*

Remarque 2.2. On définierait de la même façon le *q-odomètre*, où q est un nombre premier strictement supérieur à 2, en remplaçant 2 par q. ◇

2.1.c. Construction d'ouverts à partir d'une suite de cylindres

On se donne deux suites d'entiers $(p_m)_{m\geq 0}$ et $(a_m)_{m\geq 0}$, en supposant que $(p_m)_{m\geq 0}$ est strictement croissante. On considère la famille de cylindres de $\mathbb{Z}_2$:

$$\forall\, m \geq 0\,,\quad A_m \;=\; a_m + 2^{p_m}\mathbb{Z}_2 \;=\; C(a_m,p_m)\,, \tag{2.7}$$

ainsi que le sous-ensemble A de $\mathbb{Z}_2$, réunion des A_m:

$$A \;=\; \bigcup_{m\geq 0} A_m\,. \tag{2.8}$$

Les A_m étant ouverts, l'ensemble A aussi est ouvert. Il est intéressant de visualiser les éléments du cylindre A_m. Notons N_m l'entier naturel non nul vérifiant :

$$N_m = \inf\{n \geq 0\,;\ \forall\, i \geq n \quad S(a_m)_i = 0\}\,. \tag{2.9}$$

Il est alors possible d'écrire $S(a_m) = \bullet\bullet\bullet\ldots\bullet\,0\underline{0}\ldots$ de sorte que

$$\omega \in A_m \Longleftrightarrow S(\omega) = \begin{cases} \bullet\bullet\bullet\ldots\bullet\ 0_{N_m}\ldots 0_{p_m-1}\ \omega_{p_m}\ \omega_{p_m+1}\cdots & \text{si } p_m > N_m \\ \bullet\bullet\bullet\ldots\bullet\ \omega_{N_m}\ \omega_{N_m+1}\cdots & \text{si } p_m = N_m \\ \bullet\bullet\bullet\ldots\bullet\ \omega_{p_m}\ \omega_{p_m+1}\cdots & \text{si } p_m < N_m. \end{cases}$$

Remarque 2.3. Lorsque $p_m < N_m$, seules les p_m premières coordonnées de $S(a_m)$ interviennent dans la définition de A_m. Il nous suffit donc de choisir a_m tel que $N_m \leq p_m$, c'est-à-dire :

$$0 \leq a_m < 2^{p_m}\ . \tag{2.10}$$

Désormais on suppose l'inégalité (2.10) vérifiée par a_m quel que soit $m \geq 0$. ◇

PROPOSITION 2.5. *Soit $(A_m)_{m\geq 0}$ la suite de cylindres définis par (2.7), avec la suite $(a_m)_{m\geq 0}$ vérifiant (2.10). Alors l'entier dyadique ω est un élément de A_m si et seulement si $\omega + 2^{p_m} \in A_m$.*

Démonstration. Cette démonstration peut s'illustrer par les deux additions de la Figure 2.1.

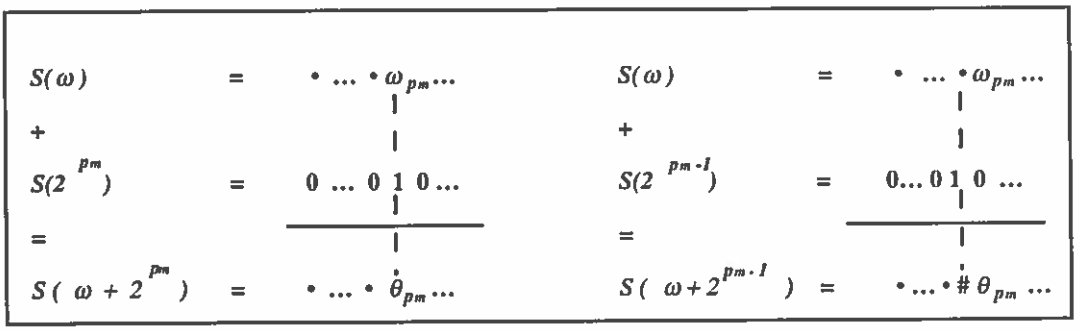


Figure 2.1. Addition de ω et 2^{p_m}.

En effet, $\omega \in A_m$ si et seulement s'il existe $\omega' \in \mathbb{Z}_2$ tel que $\omega = a_m + 2^{p_m}\omega'$. Alors $\omega + 2^{p_m} = a_m + 2^{p_m}(\omega' + 1) = a_m + 2^{p_m}\tau(\omega')$, ce qui est équivalent à $\omega + 2^{p_m} \in A_m$. Par contre, $\omega + 2^{p_m - 1} = (a_m + 2^{p_m - 1}) + 2^{p_m}\omega'$, de sorte que $\omega + 2^{p_m - 1}$ n'appartient pas à A_m. ◇◇◇

Le corollaire suivant sera utilisé ultérieurement.

COROLLAIRE 2.6. *La fonction caractéristique 1_{A_m} de A_m est une fonction continue sur $\mathbb{Z}_2$, à valeurs réelles, 2^{p_m}-périodique. Sa restriction à $\mathbb{Z}$, également notée 1_{A_m}, est 2^{p_m}-périodique sur $\mathbb{Z}$.*

Démonstration. La première partie découle immédiatement de la proposition 2.5. Les cylindres A_m sont ouverts et fermés dans $\mathbb{Z}_2$, d'où la continuité de 1_{A_m} sur $\mathbb{Z}_2$. ◇◇◇

Remarque 2.4. Puisque la suite $(p_m)_{m\geq 0}$ a été choisie strictement croissante, si $\omega \in A_m$, alors quel que soit $0 \leq n < m$, $\omega + 2^{p_n} \notin A_m$. ◇

Remarque 2.5. Les cylindres A_m ne sont pas forcément disjoints. Ultérieurement, nous serons amenés à étudier, sous des hypothèses plus restrictives sur les suites $(a_m)_{m\geq 0}$ et $(p_m)_{m\geq 0}$, les conditions nécessaires conduisant à des ensembles deux à deux disjoints. ◇

2.2. *Construction de suites à comportement fortement de Gordon*

Soit $(p_n)_{n\geq 0}$ une suite d'entiers naturels strictement croissante. On suppose $p_0 \neq 0$. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite d'entiers naturels vérifiant l'inégalité (2.10). On considère $(A_n)_{n\geq 0}$ la suite des boules ouvertes/fermées données par la relation (2.7). On suppose également que ces cylindres sont deux à deux disjoints. Soit enfin A le sous-ensemble ouvert de $\mathbb{Z}_2$ donné par la relation (2.8). Définissons d'abord, pour tout $m \geq 1$, la suite $\left(V_m(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}$, par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad V_m(k) = 1_{\bigcup_{0\leq n<m} A_n}(k). \tag{2.11}$$

Alors $V_m(k) = \sum_{0\leq n<m} 1_{A_n}(k) < +\infty$, et $V_m \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$. Nous considérons également sur $\mathbb{Z}$ l'application V suivante :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad V(k) = 1_A(k). \tag{2.12}$$

Remarque 2.6. Par construction, $\sup_{m\geq 1} \sup_{k\in\mathbb{Z}} |V_m(k)| = 1$, de sorte que l'hypothèse *(GF3)* est vérifiée par la suite $(V_m)_{m\geq 1}$. ◇

PROPOSITION 2.7. *Pour tout $m \geq 1$, la suite V_m est périodique de période 2^{p_m-1}.*

Démonstration. Le corollaire 2.5 implique que pour tout n, 1_{A_n} est 2^{p_n}-périodique. La suite $(p_n)_{n\geq 0}$ étant strictement croissante, pour $0 \leq n < m$, 2^{p_n} divise 2^{p_m-1}, de sorte que V_m est périodique de période exactement 2^{p_m-1}. ◇◇◇

Remarque 2.7. D'après la proposition 2.6, la suite d'applications bornées $(V_m)_{m\geq 1}$ vérifie la condition *(GF1)* et la croissance stricte de la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ entraîne la condition *(GF2)*. Reste à satisfaire à l'hypothèse *(GF4)*. ◇

Pour cela, nous avons à étudier les conditions sous lesquelles $V(k) = V_m(k)$ lorsque $|\, k \,| \leq 2.2^{p_m-1}$. Fixons $m \geq 1$ et $-2.2^{p_m-1} \leq k \leq 2.2^{p_m-1}$. Puisque les ensembles A_m sont deux à deux disjoints, on a $V(k) = \sum_{n\geq 0} 1_{A_n}(k)$ et

$$V(k) = 1 \iff \exists n_0 \geq 0\,;\ k \in A_{n_0}$$
$$V_m(k) = 1 \iff \exists n_0\,,\ 0 \leq n_0 < m\,;\ k \in A_{n_0}\,.$$

De plus $A_n \subset A$ pour tout $n \geq 0$, donc si $k \in A_{n_0}$ avec $0 \leq n_0 < m$, alors $V(k) = V_m(k) = 1$. De même, si $k \notin A$, alors $V(k) = V_m(k) = 0$. En conclusion, la condition *(GF4)* ne pourra pas être vérifiée s'il existe un entier k de valeur absolue inférieure à 2.2^{p_m-1}, qui appartient à A sans appartenir à $\bigcup_{0\leq n<m} A_n$.

LEMME 2.8. *Pour qu'aucun entier positif inférieur ou égal à 2.2^{p_m-1} n'appartienne à $\bigcup_{n\geq m} A_n$, il faut et il suffit que*

$$\forall n \geq m\,, \quad N_n > p_{m-1} + 2\,. \tag{2.12}$$

Démonstration. Soit $n \geq m$. Nous cherchons l'existence d'un entier $k \geq 0$, tel que $k \leq 2.2^{p_m-1}$ et $k \in \cup_{n\geq m} A_n$, donc tel que $k \in A_{n_0}$ et $n_0 \geq m$. Par hypothèse sur k, $S(k)_i = 0$ pour $i > p_{m-1} + 1$, de sorte que la figure *2.2* illustre $S(k)$:

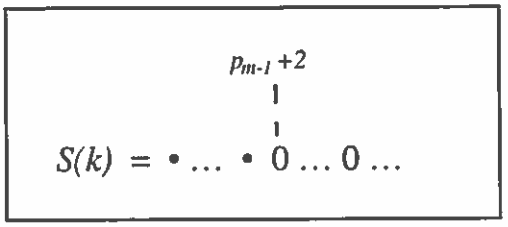


Figure 2.2. L'entier dyadique k.

Or un entier dyadique ω appartient à A_n si et seulement s'il est de la forme illustrée par la figure *2.3* lorsque $S(a_n) = \bullet\bullet\ldots\bullet 00\ldots$ et $S(a_n)_{N_n-1} \neq 0$:

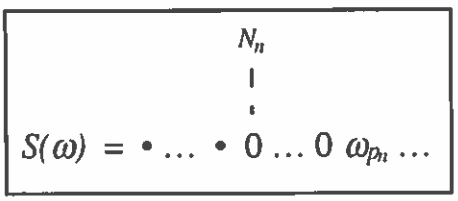


Figure 2.3. Un élément de A_n.

Si l'on supppose $N_n > p_{m-1} + 2$, et si k appartient à A_n, alors $S(k)_i = S(a_n)_i$ pour $0 \leq i < N_n$. En particulier, $S(k)_{N_n-1}$ est non nul, ce qui contredit l'hypothèse $k \leq 2^{p_{m-1}+1} < 2^{N_n-1}$. Il n'existe donc pas de naturel positif $k \leq 2.2^{p_{m-1}}$ tel que $k \in A$ et $k \notin \cup_{0 \leq n < m} A_n$. D'autre part, si $N_n \leq p_{m-1} + 2$, alors $a_n \leq 2^{p_{m-1}+1}$, donc $k = a_n$ est un élément de A et $k \notin \cup_{0 \leq n < m} A_n$ ce qui termine la démonstration. ◇◇◇

Le lemme 2.8 implique en particulier que $N_m > p_{m-1} + 2$, c'est-à-dire que $2^{N_m-1} > 2.2^{p_{m-1}}$. Puisque N_m a été défini tel que $a_m \geq 2^{N_m-1}$, alors il faut que $a_m > 2.2^{p_{m-1}}$. De plus, a_m a été choisi strictement inférieur à 2^{p_m}. On obtient l'encadrement suivant:

$$2.2^{p_{m-1}} < a_m < 2^{p_m} , \tag{2.13}$$

qui implique une nouvelle condition sur p_m :

$$p_{m-1} + 1 < p_m . \tag{2.14}$$

De plus l'hypothèse *(GF4)* doit être vérifiée pour tout $m \geq 1$, de sorte que les conditions (2.13) et (2.14) doivent être vérifiées pour tout $m \geq 1$.

LEMME 2.9. *Supposons les conditions (2.13) et (2.14) vérifiées pour tout $m \geq 1$. Pour qu'aucun entier négatif supérieur ou égal à $-2.2^{p_{m-1}}$ n'appartienne à $\cup_{n \geq m} A_n$, il suffit que*

$$\forall n \geq m , \quad N_n < p_n . \tag{2.15}$$

Démonstration. Si (2.13) et (2.14) sont vérifiées pour tout $m \geq 1$, soit un entier k tel que $-2.2^{p_{m-1}} \leq k \leq 0$. Alors, $S(k)_i = 1$ pour tout $i \geq p_{m-1} + 1$. La Figure 2.4 est une représentation de l'entier k.

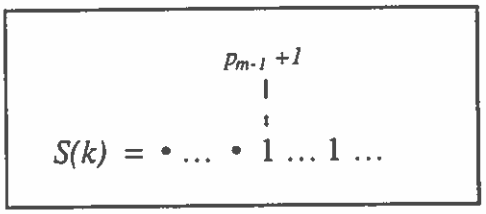


Figure 2.4. L'entier dyadique négatif k.

Supposons que $N_n < p_n$ pour $n \geq m$. Puisque $\omega \in A_n$ si et seulement si $\omega_i = 0$, pour $N_n \leq i < p_n$, il apparaît que $k \notin A_n$, quel que soit $n \geq m$, ce qui termine la démonstration. ◇◇◇

Le lemme 2.9 ainsi que la définition de N_n amènent à une nouvelle condition sur a_n. En effet, nous savons que $a_n < 2^{N_n} \leq 2^{p_n-1}$, de sorte que pour $n \geq m$, on a $a_n < 2^{p_n-1}$. Or l'hypothèse *(GF4)* doit être vérifiée pour tout $m \geq 1$. Alors, en accord avec la relation (2.13), on obtient l'encadrement suivant:

$$\forall m \geq 1 , \; 2.2^{p_{m-1}} < a_m < 2^{p_m-1} . \tag{2.16}$$

La condition (2.16) implique en particulier $p_{m-1} + 1 < p_m - 1$, c'est-à-dire

$$\forall , m \geq 1 \;\; p_{m-1} + 2 < p_m . \tag{2.17}$$

Remarquons que la relation (2.17) implique la relation (2.14). On peut alors énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 2.10. *Soit $(p_m)_{m\geq 0}$ une suite d'entiers positifs vérifiant la relation (2.17). Soit $(a_m)_{m\geq 0}$ une suite d'entiers positifs vérifiant la relation (2.16). On suppose les ouverts $A_m = a_m + 2^{p_m}\mathbb{Z}$ disjoints deux à deux. Soient V et V_m, $m \geq 1$, les potentiels respectivement définis par (2.11) et (2.10). Alors la condition (GF4) est vérifiée.*

Démonstration. Fixons $m \geq 1$. Soit $-2.2^{p_m-1} \leq k \leq 2.2^{p_m-1}$. Si $k \geq 0$ et d'après la relation (2.15), $k \notin \cup_{n\geq m} A_n$. Si $k < 0$, alors l'hypothèse (2.15) implique que $N_m < p_m$, pour tout $m \geq 0$, de sorte que $k \notin \cup_{n\geq m} A_n$. On en déduit que $V(k) = V_m(k)$. ◇◇◇

Remarque 2.8. Le théorème 2.10 a été établi sous l'hypothèse que les cylindres A_n sont deux à deux disjoints. Pour terminer cette partie, nous allons chercher sous quelle(s) condition(s) cette hypothèse est vérifiée. C'est l'objet du théorème suivant. ◇

THÉORÈME 2.11. *On considère deux suites d'entiers $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(a_n)_{n\geq 0}$, vérifiant respectivement les relations (2.16) et (2.17). Pour que $A_n \cap A_m = \emptyset$, il faut et il suffit que $a_m \notin A_n$. Ceci est équivalent à la condition*

$$a_m - a_n \quad \textit{n'est pas divisible par } 2^{p_n}\,. \tag{2.18}$$

Démonstration. Les suites $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(a_n)_{n\geq 0}$ sont, sous ces hypothèses, strictement croissantes. En particulier pour tout $n \geq 0$, on a

$$a_n < 2^{p_n-1} < 2.2^{p_n} < a_{n+1}\,, \tag{2.19}$$

qui implique également

$$N_n < p_n < N_{n+1} < p_{n+1}\,. \tag{2.20}$$

Soit n un entier positif quelconque. Nous étudions $A_n \cap A_{n+1}$. Or $\omega \in A_n \cap A_{n+1}$ si et seulement si $S(a_{n+1})_i = S(a_n)_i$ pour $i = 0, \ldots, N_n - 1$, et $S(a_{n+1})_i = 0$ pour $i = N_n, \ldots, p_n - 1$, ce qu'illustre la figure *2.5.*

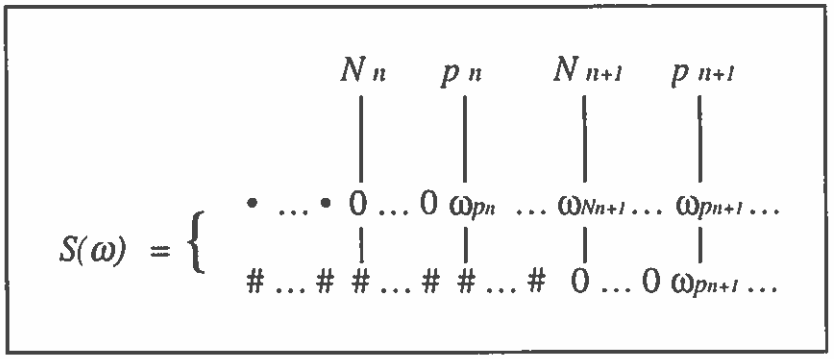


Figure 2.5. Représentation d'un élément de $A_n \cap A_{n+1}$.

Par conséquent, A_n et A_{n+1} ont des éléments communs si et seulement si $a_{n+1} = a_n + 2^{p_n}\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, c'est-à-dire si et seulement si $a_{n+1} \in A_n$.
Soient plus généralement n et m deux entiers distincts, par exemple $n < m$. Pour que $A_n \cap A_m = \emptyset$, il faut et il suffit que $a_m \notin A_n$, ce qui est équivalent à la condition $a_m - a_n$ n'est pas divisible par 2^{p_n}. D'où le théorème. ◇◇◇

Finalement:

THÉORÈME 2.12. *Soit $(p_m)_{m\geq 0}$ une suite d'entiers positifs vérifiant la relation (2.17) :*

$$\forall\, m \geq 1\,,\ p_{m-1} + 2 < p_m\,.$$

Soit $(a_m)_{m\geq 0}$ une suite d'entiers positifs tels que :

$$\forall\, m \geq 1\,,\ 2.2^{p_m-1} < a_m < 2^{p_m-1}\,,$$

et

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2\,,\ n \neq m \implies a_m \notin A_n\,.$$

Alors la suite V définie pour tout entier k par $V(k) = 1_A(k)$, a un comportement fort de Gordon.

L'ensemble A défini par la relation (2.7) à partir de suites d'entiers $(p_m)_{m\geq 0}$ et $(a_m)_{m\geq 0}$ vérifiant les hypothèses du théorème 2.12, est appelé un *ouvert de Gordon.*

Remarque 2.9. Un ouvert de Gordon n'est jamais fermé dans $\mathbb{Z}_2$, sinon la réunion des A_m serait finie. ◇

Exemple: On considère $p_{m+1} = p_m + 3$, pour $m \geq 0$, et $p_0 = 1$. Alors $p_{m+1} = 3m + 4$ et $2^{p_{m+1}} = 2.8^{m+1}$. Soit $a_m = 3.2^{p_m-4}$. L'ensemble A est un ouvert de Gordon et V est une suite à comportement fortement de Gordon.
A partir d'un ouvert de Gordon A, il est en fait possible de construire une infinité de potentiels de Gordon forts. C'est ce qui est énoncé dans le théorème 2.13.

THÉORÈME 2.13. *Pour tout réel β et toute suite réelle bornée $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0}$, la suite définie pour tout $k \in \mathbb{Z}$ par*

$$V_{\alpha,\beta}(k) = \beta + \sum_{n\geq 0} \alpha_n 1_{A_n}(k)\,, \tag{2.20}$$

est une suite à comportement fortement de Gordon.

Démonstration. Soit β et $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ donnés. Soit $V_{\alpha,\beta}$ la suite définie par la relation (2.20). Pour tout entier $m \geq 1$, on considère la suite V_m donnée par

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}\,,\quad V_m(k) = \beta + \sum_{0\leq n<m} \alpha_n 1_{A_n}(k)\,. \tag{2.21}$$

Alors V_m est périodique de période 2^{p_m-1}, et puisque la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ est bornée, on a

$$\sup_{m\geq 1} \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\, V_m(k)\,| \leq |\,\beta\,| + \sup_{n\geq 0} |\,\alpha_n\,| < +\infty\,.$$

Enfin, il est clair que la suite $(V_m)_{m\geq 1}$ vérifie la condition *(GF4)*, d'où le résultat. ◇◇◇

3. Suite odométrique et système dynamique associé

Nous avons exhibé dans la section 2 une famille de suites à comportement fortement de Gordon associées à des ouverts non fermés particuliers de $\mathbb{Z}_2$ appelés ouverts de Gordon. dans cette section, nous exploitons le fait que tout ouvert est une union dénombrable de cylindres $a_m + 2^{p_m}\mathbb{Z}_2$ deux à deux disjoints, pour construire une large famille de potentiels limite périodiques.

3.1. *Définition*

Soit $(p_m)_{m\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs, $(a_m)_{m\geq 0}$ une suite d'entiers et $A_m = a_m + 2^{p_m}\mathbb{Z}_2$. On suppose les ouverts A_m disjoints deux à deux et on pose $A = \bigcup_{n\geq 0} A_n$. On se donne également un nombre réel quelconque β ainsi qu'une suite réelle bornée $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0}$. On note $\| \alpha \|_+ = \sup_{n\geq 0} | \alpha_n |$. Soit $F = F_{\alpha,\beta}$ l'application définie sur $\mathbb{Z}_2$ par

$$F(\omega) = \beta + \sum_{n\geq 0} \alpha_n 1_{A_n}(\omega) \, . \tag{3.1}$$

Cette application est bornée à valeurs réelles, et

$$\| F_{\alpha,\beta} \|_\infty = \sup_{\omega\in\mathbb{Z}_2} | F(\omega) | \leq | \beta | + \| \alpha \|_+ \, . \tag{3.2}$$

3.1.a. *Condition de continuité de $F_{\alpha,\beta}$*

THÉORÈME 3.1. *La fonction $F_{\alpha,\beta}$ définie par l'égalité (3.1) (avec les A_m disjoints) est continue sur $\mathbb{Z}_2$ si et seulement si la suite réelle $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0}$ converge vers zéro.*

Démonstration. La démonstration de ce théorème s'effectue en plusieurs étapes.
Etape 1 : On suppose la suite α convergente vers zéro. Soit F_N, pour tout entier $N \geq 1$, l'application définie en tout $\omega \in \mathbb{Z}_2$ par

$$F_N(\omega) = \beta + \sum_{0\leq n<N} \alpha_n 1_{A_n}(\omega) \, . \tag{3.3}$$

C'est une application continue sur $\mathbb{Z}_2$ car une somme finie d'applications continues sur $\mathbb{Z}_2$ (*cf.* le Corollaire 2.2). De plus, $|F(\omega) - F_N(\omega)| \leq \sum_{n\geq N} |\alpha_n| \ | 1_{A_n}(\omega) | \leq \sup_{n\geq N} |\alpha_n|$ du fait que les A_n sont deux à deux disjoints. Par hypothèse, la suite α converge vers zéro, de sorte que $\lim_{N\to+\infty}(\sup_{n\geq N} |\alpha_n|) = 0$. On en déduit la convergence uniforme de la suite de fonctions $(F_N)_{N\geq 0}$ vers la fonction F. Ainsi, F est continue sur $\mathbb{Z}_2$.
Etape 2 : Supposons F continue. Par hypothèse, la suite α est bornée. Elle admet alors des valeurs d'adhérence. Nous cherchons à montrer que ces valeurs d'adhérences sont toutes égales à zéro.
Notons ξ l'une d'entre elles. Alors il existe une suite strictement croissante d'entiers naturels $(n_i)_{i\geq 0}$ telle que la suite extraite $(\alpha_{n_i})_{i\geq 0}$ de α converge vers ξ.
Remarquons également que $F(a_n) = \alpha_n + \beta$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $F(a_{n_i}) = \alpha_{n_i} + \beta$. De plus, par compacité de $\mathbb{Z}_2$ la suite $(a_{n_i})_{i\geq 0}$ admet des valeurs d'adhérence. Soit x l'une d'entre elles. Il existe donc une suite strictement croissante d'entiers naturels $(n_{i_j})_{j\geq 0}$ telle que la suite extraite $(a_{n_{i_j}})_{j\geq 0}$ converge vers x. Dans ce cas, la suite $(\alpha_{n_{i_j}})_{j\geq 0}$ converge encore vers ξ, et la continuité de F entraîne l'égalité :

$$F(x) = \xi + \beta \, .$$

Etape 3 : Soit $\epsilon > 0$. On note I_ϵ le voisinage de $\xi + \beta$ dans $\mathbb{R}$ défini par :

$$I_\epsilon =](\xi + \beta) - \epsilon, (\xi + \beta) + \epsilon[\, .$$

Puisque $F(x) = \xi + \beta$, on a $x \in F^{-1}(I_\epsilon)$. La fonction F étant continue, $F^{-1}(I_\epsilon)$ est un ouvert de $\mathbb{Z}_2$. Par conséquent, il existe une boule ouverte de centre x contenue dans $F^{-1}(I_\epsilon)$. Notons-la U_ϵ. On définit alors deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$:

$$\mathcal{N}_\epsilon = \{ n \in \mathbb{N} \ ; \ a_n \in U_\epsilon \}$$
$$\mathcal{N}'_\epsilon = \{ n \in \mathbb{N} \ ; \ a_n \notin U_\epsilon \}$$

Le fait que x soit valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ implique que l'ensemble $\mathcal{N}_\epsilon$ est infini. De plus, $\mathcal{N}_\epsilon \cup \mathcal{N}'_\epsilon = \mathbb{N}$.
Montrons que $A_n \subset U_\epsilon$ dès que $n \in \mathcal{N}_\epsilon$. Soit maintenant n et m deux entiers distincts dans $\mathcal{N}_\epsilon$. Comme $a_m \notin A_n$ on en déduit que $U_\epsilon \not\subset A_n$. D'après la propriété (vi) des boules ouvertes de $\mathbb{Z}_2$ (voir paragraphe 2.1.c), on obtient

$$\forall\, n \in \mathcal{N}_\epsilon\,,\ A_n \subset U_\epsilon\,.$$

De ceci, on déduit $\bigcup_{n\in\mathcal{N}_\epsilon} A_n \subset U_\epsilon$. Cette inclusion est stricte. En effet, U_ϵ étant également une boule fermée, c'est un ensemble compact de $\mathbb{Z}_2$, et $(A_n)_{n\in\mathcal{N}_\epsilon}$ est une suite d'ouverts deux à deux disjoints, tous contenus dans U_ϵ. Leur réunion ne peut donc pas recouvrir U_ϵ. Il existe ainsi un élément $\omega_\epsilon \in U_\epsilon$ tel que $\omega_\epsilon \notin \bigcup_{n\in\mathcal{N}_\epsilon} A_n$.
Montrons que $A_n \cap U_\epsilon = \emptyset$ dès que $n \in \mathcal{N}'_\epsilon$: soit un entier n tel que $a_n \notin U_\epsilon$. Alors $A_n \not\subset U_\epsilon$. D'autre part, s'il existe $n_0 \in \mathcal{N}'_\epsilon$ et tel que $U_\epsilon \subset A_{n_0}$, d'après ce qui précède, on obtient $A_n \subset A_{n_0}$ pour tout $n \in \mathcal{N}_\epsilon$ (rappelons que $\mathcal{N}_\epsilon$ est infini), ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle les A_n sont deux à deux disjoints.
Ainsi ω_ϵ n'appartient pas à A_n $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ et donc $F(\omega_\epsilon) = \beta$. Or $F(\omega_\epsilon) \in I_\epsilon$, c'est-à-dire $\beta \in I_\epsilon$.
Etape 4 : Nous venons de montrer que β appartient à l'intervalle $](\xi+\beta)-\epsilon, (\xi+\beta)+\epsilon[$ quel que soit $\epsilon > 0$. Si ξ est non nul, alors en choisissant $\epsilon < \frac{|\xi|}{2}$, on aboutit à une contradiction. On en conclut $\xi = 0$. Ainsi α admet une unique valeur d'adhérence qui est zéro. ◇◇◇

En particulier, si la suite α est à support fini, alors F est continue et périodique. Plus précisément, si $\alpha_k = 0$ pour tout $k \geq K$, alors $F = F_K$ est continue et 2^{p_k-1}-périodique.

3.1.b. Définition d'une suite odométrique

Soit F l'application définie sur $\mathbb{Z}_2$ par la relation (3.1). On suppose les ouverts A_m disjoints deux à deux et F continue. Définissons alors sur $\mathbb{Z}$ le potentiel V par :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}\,,\quad V(k) = F(k)\,. \tag{3.4}$$

Par définition de F, V est bornée, et

$$\| V \|_\infty \leq |\beta| + \| \alpha \|_+\ .$$

THÉORÈME 3.2. *Sous l'hypothèse de continuité de la fonction F, la suite V est limite périodique, c'est-à-dire qu'elle est limite uniforme d'une suite d'éléments périodiques.*

La suite V définie par la relation (3.4) à partir d'une application $F_{\alpha,\beta}$ de la forme (3.1) (avec les A_m disjoints deux à deux) continue est appelée une *suite odométrique*. Une suite odométrique est donc une suite réelle bornée limite périodique. Elle sera dite de type Gordon (fort) si la réunion des boules A_m est un ouvert de Gordon.

Démonstration. Définissons pour tout entier $m > 0$, la suite V_m par (2.21):

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}\,,\quad V_m(k) = \beta + \sum_{0\leq n<m} \alpha_n 1_{A_n}(k)\,.$$

Une telle suite peut aussi être définie pour tout entier k, par $V_m(k) = F_m(k)$, où F_m est donnée par la relation (3.3). Puisque cette appplication est bornée, V_m est un élément de $\ell^\infty(\mathbb{Z})$. De plus, $\| V - V_m \|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\sum_{n\geq m} \alpha_k 1_{A_k}(n)| \leq \sup_{n\geq m} |\alpha_n|$ (puisque les cylindres sont deux à deux

disjoints). Par hypothèse F est continue, ce qui est équivalent à la convergence de la suite α vers zéro. Cette convergence implique alors

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sup_{n\geq m}|\alpha_n|\right)=0\ .$$

Ainsi $(V_m)_{m>0}$ converge uniformément vers V dans $\ell^\infty(\mathbb{Z})$. Nous terminons cette démonstration en remarquant que chaque V_m est une suite périodique de période 2^{p_m-1} (voir la démonstration du théorème 2.12). La suite V est donc limite périodique. ◇◇◇

3.2. Système dynamique associé à une suite odométrique

Nous avons vu (dans le chap. 1-B, section 4), qu'à une suite presque périodique, et en particulier limite périodique, est associé un système dynamique qui est issu de l'enveloppe de la suite. Soit V une suite odométrique. On pose pour tous entiers relatifs i et k, $V^{(i)}(k)=V(k+i)$. Alors

$$\|\,V^{(i)}\,\|_\infty\leq|\,\beta\,|+\|\,\alpha\,\|_+\ .$$

L'*enveloppe* de V est la fermeture de l'ensemble $\{\,V^{(i)}\ ,\ i\in\mathbb{Z}\,\}$ dans $\ell^\infty(\mathbb{Z})$. On la note Γ. C'est un sous-ensemble fermé et borné de $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ contenu dans la boule fermée de centre 0 et de rayon $|\,\beta\,|+\|\,\alpha\,\|_+$.

Remarque 3.1. Si la suite α est à support fini, alors V est un potentiel périodique et réciproquement. Nous supposons donc désormais que la suite α n'est pas à support fini, le cas d'un potentiel périodique ayant déjà été traité (chapitre 1-B, section 2). ◇

PROPOSITION 3.3. *L'enveloppe Γ d'une suite odométrique V est compacte dans $\ell^\infty(\mathbb{Z})$.*

Démonstration. Cette proposition est un corollaire immédiat du théorème 3.2 et de la définition d'une suite presque périodique, sachant que toute suite limite périodique est *a fortiori* une suite presque périodique. ◇◇◇

On considère également, pour tout entier dyadique ω, la suite définie par

$$\forall k\in\mathbb{Z},\quad V^{(\omega)}(k)=V(\omega+k)\,. \tag{3.5}$$

Comme précédemment, $\|\,V^{(\omega)}\,\|_\infty\leq|\,\beta\,|+\|\,\alpha\,\|_+$.

PROPOSITION 3.4. *L'enveloppe Γ de la suite odométrique V est exactement $\{\,V^{(\omega)}\ ,\ \omega\in\mathbb{Z}_2\,\}$.*

Démonstration. Notons $\Omega=\{V^{(\omega)}\,,\ \omega\in\mathbb{Z}_2\}$. La fonction F étant bornée sur $\mathbb{Z}_2$, Ω est bien un sous-ensemble de $\ell^\infty(\mathbb{Z})$. En raison de l'inclusion $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}_2$, on a $\{V^{(i)}\,,\ i\in\mathbb{Z}\}\subset\Omega$, donc $\Gamma\subset\overline{\Omega}$. Il nous reste à démontrer que $\Omega\subset\Gamma$. Soit donc ω un entier dyadique quelconque. Par densité de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}_2$, il existe une suite d'entiers $(i_j)_{j\geq0}$ qui converge vers ω, c'est-à-dire telle que $\lim_{j\to+\infty}d(\omega,i_j)=0$. Etudions $\|\,V^{(\omega)}-V^{(i_j)}\,\|_\infty=\sup_{k\in\mathbb{Z}}|\,F(\omega+k)-F(i_j+k)\,|$. Soit $\epsilon>0$. Par continuité uniforme de F, il existe un réel $\eta>0$ tel que quels que soient les entiers dyadiques ω_1 et ω_2, si $d(\omega_1,\omega_2)<\eta$, alors $|\,F(\omega_1)-F(\omega_2)\,|<\epsilon$. Or il existe un indice $J\in\mathbb{N}$ tel que si $j>J$ alors $d(\omega,i_j)<\eta$. Soit $j>J$. Alors $d(\omega+k,i_j+k)=d(\omega,i_j)<\eta$, ce qui implique $|\,F(\omega+k)-F(i_j+k)\,|<\epsilon$. Ceci étant vrai quel que soit $k\in\mathbb{Z}$, on a :

$$\lim_{j\to+\infty}V^{(i_j)}=V^{(\omega)}\ .$$

Ainsi $\omega\in\Gamma$, et la proposition est démontrée. ◇◇◇

Remarque 3.2. Pour plus de précision concernant les suites presque périodiques, nous nous référons à [Si;1] par exemple. ◇

PROPOSITION 3.5. *L'ensemble* Γ *est un groupe topologique métrisable compact isomorphe à* $\mathbb{Z}_2$.

Démonstration. On définit sur $\{V^{(i)}\,,\ i \in \mathbb{Z}\}$ l'addition $\oplus$ par

$$\forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2\,, \quad V^{(i)} \oplus V^{(j)} = V^{(i+j)}\,.$$

Il est facile de voir que cette addition est uniformément continue sur $\mathbb{Z}$ (muni de la distance ultramétrique d). Par densité de cet ensemble dans Γ, l'opération $\oplus$ se prolonge sur Γ. Il est banal de vérifier que $\oplus$ fait de Γ un groupe commutatif dont l'élément neutre est $V^{(0)} = V$. Par définition, Γ est fermé dans $\ell^\infty(\mathbb{Z})$. La topologie induite sur Γ par celle de $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ fait de Γ un groupe topologique métrisable compact. Définissons alors sur $\mathbb{Z}_2$ l'application Φ à valeurs dans Γ suivante :

$$\forall \omega \in \mathbb{Z}_2\,, \quad \Phi(\omega) = V^{(\omega)}\,. \tag{3.6}$$

Soient ω et ω' deux entiers dyadiques quelconques, alors $\Phi(\omega+\omega') = V^{(\omega+\omega')} = \Phi(\omega) \oplus \Phi(\omega')$; de plus $\Phi(0) = V^{(0)} = V$. Ainsi, Φ est un homomorphisme de groupe.
La surjectivité de Φ provient de la proposition 3.4 ($\Phi(\mathbb{Z}_2) = \Gamma$). Soit ω un entier dyadique tel que $\Phi(\omega) = V^{(0)}$. Ceci signifie que $V^{(\omega)}(k) = V(k)$, c'est-à-dire $F(\omega + k) = F(k)$, quel que soit $k \in \mathbb{Z}$. Soit ω' un entier dyadique quelconque. Par densité de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}_2$, il existe une suite d'entiers relatifs $(k_i)_{i\geq 0}$ qui converge vers ω'. Par continuité de F, $\lim_{i\to+\infty} F(k_i) = F(\omega')$ et $\lim_{i\to+\infty} F(\omega+k_i) = F(\omega+\omega')$. Or, par hypothèse sur ω, quel que soit $i \geq 0$, on a $F(\omega+k_i) = F(\omega)$. On en déduit que

$$\forall \omega' \in \mathbb{Z}_2\,, \quad F(\omega+\omega') = F(\omega)\,.$$

Puisque F est non constante (le cas périodique étant exclu), on a $\omega = 0$. On en déduit l'injectivité de Φ.
Montrons enfin que Φ est continue. Soient $\omega \in \mathbb{Z}_2$ et $(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers dyadiques convergeant vers ω. Soit ϵ un réel quelconque strictement positif. La continuité uniforme de F entraîne l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que si $d(\omega,\omega_i) < \eta$ alors $|F\omega) - F(\omega_i)| < \epsilon$. Or il existe un indice $I \in \mathbb{N}$ tels que $i > I \Rightarrow d(\omega,\omega_i) < \eta$ et $d(\omega+k,\omega_i+k) < \eta$ donc $|\, F(\omega+k) - F(\omega_i+k)\,| < \epsilon$ quel que soit $k \in \mathbb{Z}$. D'où la convergence de $(V^{\omega_i})_{i\geq 0}$ vers $V^{(\omega)}$ dans Γ.
Ainsi Φ est continue, et par compacité de $\mathbb{Z}_2$, Φ est même bicontinue. En conclusion, Φ est un isomorphisme de groupes topologiques. ◇◇◇

Notons T l'addition de 1 définie sur Γ, par

$$T(V^{(\omega)}) = V^{(\omega+1)}\,. \tag{3.7}$$

PROPOSITION 3.6. *L'application* $T : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ *définie par (3.7) est continue. Elle vérifie en outre la relation*

$$\Phi \circ \tau = T \circ \Phi\,. \tag{3.8}$$

Démonstration. La continuité de T est immédiate, grâce à celle de F. De plus, on vérifie aisément que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\Phi} & \Gamma \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T} \\ \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow[\Phi]{} & \Gamma \end{array}$$

D'où la relation (3.8). ◇◇◇

On note $\mathcal{B}'$ la σ-algèbre des boréliens sur Γ. Puisque $(\Gamma,\oplus)$ est un groupe topologique métrisable compact, il admet une unique mesure de probabilité borélienne μ, invariante sous T.

PROPOSITION 3.7. *Le système dynamique $(T,\Gamma,\mathcal{B}',\mu)$ est isomorphe au système dynamique $(\tau,\mathbb{Z}_2,\mathcal{B},h)$. Il est strictement ergodique.*

Démonstration. C'est une conséquence du fait que $(T,\Gamma,\mathcal{B}',\mu)$ et $(\tau,\mathbb{Z}_2,\mathcal{B},h)$ sont topologiquement conjugués. ◇◇◇

Désormais, nous confondons les deux systèmes dynamiques $(T,\Gamma,\mathcal{B}',\mu)$ et $(\tau,\mathbb{Z}_2,\mathcal{B},h)$.

4. Opérateurs de Schrödinger aléatoires à potentiel odométrique

4.1. Définition et premières propriétés spectrales

Considérons V la suite définie par la relation (3.4), la fonction F étant continue. Pour tout $\omega \in \mathbb{Z}_2$, on note $V^{(\omega)}$ la suite réelle bornée définie par (3.5). Soit $\mathcal{T}$ le système dynamique $(\tau,\mathbb{Z}_2,\mathcal{B},h)$. On définit, pour tout entier dyadique ω, l'opérateur H_ω sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ par

$$H_\omega = S + S^{-1} + V_\omega \ , \tag{4.1}$$

où S est l'opérateur décalage sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ et $V_\omega : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ est défini, pour tout élément $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et tout entier n, par $(V_\omega u)(n) = V^{(\omega)}(n)u(n)$. Alors H_ω est un opérateur borné auto-adjoint sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. Soit $H : \mathbb{Z}_2 \to \mathcal{L}_{BA}(\ell^2(\mathbb{Z}))$, qui à tout entier dyadique ω associe l'opérateur H_ω, avec $V^{(\omega)} = \Phi(\omega)$, l'application Φ étant donnée par la relation (3.6). Remarquons que, si ω est un entier dyadique quelconque, l'application V_ω vérifie l'égalité suivante :

$$V_{\tau\omega} = S\, V_\omega\, S^{-1} \ . \tag{4.3}$$

Résumons:

PROPOSITION 4.1. *L'opérateur $H : \omega \to H_\omega$ $(\omega \in \mathbb{Z}_2)$ est un opérateur aléatoire symétrique et ergodique sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. Le groupe des opérateurs unitaires sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ associé au groupe des automorphismes $\{\tau^k \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$ est exactement $\{S^k \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$. Cet opérateur H est appelé opérateur de Schrödinger aléatoire à potentiel odométrique.* ◇◇◇

En appliquant les théorèmes généraux de la partie B, chapitre 1, on peut énoncer:

THÉORÈME 4.2. *Soit H défini par (4.1). Alors*

(i) il existe un sous-ensemble compact non vide de $\mathbb{R}$, noté Σ, tel que

$$\forall\, \omega \in \mathbb{Z}_2 \ , \quad \sigma(H_\omega) = \Sigma \, ; \tag{4.4}$$

en outre $\Sigma \subset [-2 - |\beta| - ||\alpha||_+, 2 + |\beta| + ||\alpha||_+]$;

(ii) il existe trois sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}$, notés respectivement Σ_{pp}, Σ_{ac} et Σ_{sc}, tels que pour h-presque tout $\omega \in \mathbb{Z}_2$, on a

$$\Sigma_{pp} = \sigma_{pp}(H_\omega) \ , \tag{4.5}$$
$$\Sigma_{ac} = \sigma_{ac}(H_\omega) \ , \tag{4.6}$$
$$\Sigma_{sc} = \sigma_{sc}(H_\omega) \ ; \tag{4.7}$$

(iii) quel que soit $\omega \in \mathbb{Z}_2$, le spectre de H_ω est purement essentiel :

$$\sigma_{dis}(H_\omega) = \emptyset \, ; \tag{4.8}$$

(iv) quel que soit le nombre réel λ, l'ensemble $\{\omega \in \mathbb{Z}_2$; λ est valeur propre de multiplicité finie de $H_\omega\}$ est de mesure nulle;

(v) pour h-presque tout $\omega \in \mathbb{Z}_2$, si $\sigma_{pp}(H_\omega)$ est non vide alors il est localement indénombrable.

Remarque 4.1. Lorsque la suite α est nulle à partir d'un certain rang, alors le potentiel est périodique. Plus exactement, si $\alpha_k = 0$ pour $k \geq K$, alors V_ω est une suite $2^{p_K - 1}$-périodique, et le spectre de l'opérateur de Schrödinger H_ω est purement absolument continu formé de 2^{p_K-1} bandes. ◇

4.2. *Propriétés du spectre*

Poursuivons l'énoncé de propriétés qui se déduisent des résultats exposés antérieurement.

4.2.a. *Exposant de Lyapunov et partie absolument continue*

Le théorème de Furstenberg et Kesten, ainsi que le théorème de Ishii, Pastur, Kotani, donnent comme premier résultat:

THÉORÈME 4.3. *L'exposant de Lyapunov $\vartheta_\omega(E)$ existe quel que soit $E \in \mathbb{R}$, et il est constant (égal à $\vartheta(E)$) pour presque tout $\omega \in \mathbb{Z}_2$. Soit alors $\mathcal{E} = \{E \in \mathbb{R}$; $\vartheta(E) = 0\}$, on a*

$$\Sigma_{ac} = \overline{\mathcal{E}}^{ess}. \tag{4.9}$$

D'autre part,

PROPOSITION 4.4. *Sous l'hypothèse de continuité de F, la mesure de Lebesgue de $\mathcal{E}$ vérifie l'inégalité*

$$|\,\mathcal{E}\,| \leq 4\,, \tag{4.10}$$

qui devient une égalité si et seulement si le potentiel est constant.

Démonstration. Ce résultat est dû à Deift et Simon (voir [Dei;Si]). ◇◇◇

Notons, pour tout $\omega \in \mathbb{Z}_2$,

$$v_\omega = \sup_{n\in\mathbb{Z}} V_\omega(n) - \inf_{n\in\mathbb{Z}} V_\omega(n)\,. \tag{4.11}$$

PROPOSITION 4.5. *Sous l'hypothèse de continuité de F,*

$$\forall \omega \in \mathbb{Z}_2\,, \quad v_\omega = v = \sup_{\omega\in\mathbb{Z}_2} F(\omega) - \inf_{\omega\in\mathbb{Z}_2} F(\omega)\,. \tag{4.12}$$

Démonstration. Le résultat est immédiat par densité de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}_2$ et continuité de F. ◇◇◇

COROLLAIRE 4.6. *Sous l'hypothèse de continuité de la fonction F,*

$$v = \sup_{n\geq 0} \alpha_n - \inf_{n\geq 0} \alpha_n\,. \tag{4.13}$$

Démonstration. Puisque les ensembles A_n sont deux à deux disjoints, $\sup_{\omega\in\mathbb{Z}_2} \sum_{n\geq 0} \alpha_n 1_{A_n}(\omega) = \sup_{n\geq 0} \alpha_n$. On en déduit le résultat. ◇◇◇

On note G l'ensemble constitué de la réunion des trous du spectre Σ :

$$G = [\min \Sigma, \max \Sigma] \setminus \Sigma\,.$$

D'après les résultats de Last ([La;1],théorème 1 p. 348), on obtient les renseignements suivants, résumés dans le théorème suivant:

THÉORÈME 4.7. *Sous l'hypothèse de continuité de F :*

$$m_\ell(\Sigma \setminus \mathcal{E}) + m_\ell(G) \geq \sup_{n\geq 0} \alpha_n - \inf_{n\geq 0} \alpha_n$$

$$\max \Sigma - \min \Sigma \leq 4 + \sup_{n\geq 0} \alpha_n - \inf_{n\geq 0} \alpha_n \ .$$

4.2.b. Nouvelles propriétés

Nous utiliserons le résultat secondaire suivant:

LEMME 4.8. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $(A_n)_n$ une suite d'opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$ auto-adjoints qui converge en norme vers un opérateur (auto-adjoint) A. Alors*

$$\sigma(A) = \bigcap_m \overline{\bigcup_{k\geq m} \sigma(A_k)} .$$

Démonstration. La suite $(A_n)_n$ converge fortement vers A d'où, classiquement, $\sigma(A) \subset \bigcap_m K_m$ avec $K_m = \overline{\bigcup_{k\geq m} \sigma(A_k)}$. Posons $K = \bigcap_m K_m$. Puisque $\sup_n ||A_n|| = C < +\infty$, les ensembles K_m sont des compacts inclus dans $[-C, C]$ et forment une suite décroissante pour l'inclusion. Il en résulte, par compacité, que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier M_ε tel que $K_m \subset W_\varepsilon(K)$ $(= \bigcup_{t\in K}]t-\varepsilon, t+\varepsilon[)$ pour tout $m \geq M_\varepsilon$. Fixons $t \in K$; d'après ce qui précède, il existe $t_m \in K_m$ pour un entier $m \geq M_\varepsilon$ tel que $|t - t_m| \leq \varepsilon$. Utilisons le fait que t_m soit une quasi-valeur propre de A_m. Il existe un vecteur unitaire $e_m \in \mathcal{H}$ tel que $||H_m e_m - t_m e_m|| \leq \varepsilon$. Alors, par l'inégalité du triangle,

$$||\hat{H} e_m - t e_m|| \leq ||\hat{H} - \hat{H}_m|| + 2\varepsilon.$$

Mais m peut être choisi tel que $||\hat{H} - \hat{H}_m|| \leq \varepsilon$. Ainsi $||Ae_m - te_m|| \leq 3\varepsilon$, ce qui montre que t est une quasi-valeur propre de A, d'où $t \in \sigma(A)$. ◇◇◇

Soit $(\alpha_n)_n$ une suite de nombres réels et soit l'application $F : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(\omega) = \beta + \sum_{n\geq 0} \alpha_n 1_{A_n}(\omega) \ ,$$

avec $A_m = a_m + 2^{p_m}\mathbb{Z}_2$, les ouverts A_m étant supposés disjoints deux à deux et la suite des entiers p_m strictement croissante. Rappelons que F est continue si et seulement si la suite $(\alpha_n)_n$ converge vers 0. On choisit $1 \leq a_m \leq 2^p_m$ et on ne fait pour l'instant pas d'autres hypothèses. Comme précédemment, H désigne l'opérateur (aléatoire) de Schrödinger sur la dynamique $(\tau, \mathbb{Z}_2, h)$ de potentiel $V_n = F \circ \tau^n$.

THÉORÈME 4.9. *Supposons F continue et notons $H^{(m)}$ l'opérateur de Schrödinger de potentiel périodique $F^{(m)}(n) = \beta + \sum_{0\leq n<m} \alpha_n 1_{A_n}(n)$ (de période 2^{p_m-1}). Alors pour tout $\omega \in \mathbb{Z}_2$,*

$$\sigma(H_\omega) = \Sigma = \bigcap_m \overline{\bigcup_{k\geq m} \sigma(H^{(k)})} \ .$$

Démonstration. Le potentiel V étant presque périodique uniforme, tous les spectres $\sigma(H_\omega)$ sont identiques et égaux à $\sigma(H_0)$. Au vu du lemme 4.8, il suffit de montrer que la suite $(H^{(m)})_{m\geq 0}$ converge en norme vers H_0. Cela résulte immédiatement de la majoration facile $||H - H^{(m)}|| \leq ||F - F^{(m)}||_\infty = \sup_{k\geq m} |\alpha_k|$ et de la continuité de F (théorème 3.1). ◇◇◇

Pour obtenir des information plus intéressantes, nous allons introduire des hypothèses supplémentaires. Celles-ci vont nous permettre d'utiliser un théorème de perturbation de Lidskii [Lid] que nous énonçons sous la forme suivante:

THÉORÈME (V. B. LIDSKII). *Soit A, B des matrices réelles ou complexes d'ordre N, auto-adjointes. Posons $C = B - A$ et notons par ordre croissant, les valeurs propres de A , B, C respectivement par a_n, b_n, c_n (comptées avec leurs multiplicités). Alors*

$$\sum_{n=1}^{N} |b_n - a_n| \leq \sum_{n=1}^{N} |c_n|.$$

Introduisons l'espace métrique $(\mathcal{K}(\mathbb{R}), \delta)$, où $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des parties compactes de $\mathbb{R}$ et δ la distance de Hausdorff. Rappelons à ce sujet que pour deux parties compactes K et K' de $\mathbb{R}$,

$$\delta(K, K') = \inf\{\eta \geq 0 , K' \subset W_\eta(K) \quad \& \quad K \subset W_\eta(K')\}$$

où, pour toute partie A de $\mathbb{R}$, $W_\eta(A) = \{x \in \mathbb{R}, \exists y \in A , |x - y| < \eta\}$. Il est bien connu que l'espace métrique $(\mathcal{K}(\mathbb{R}), \delta)$ est complet. De plus, toute suite décroissante (pour l'inclusion $\subset$) de compact K_n converge, au sens de la distance de Hausdorff, vers l'intersection $\cap_n K_n$.
Renforçons maintenant l'hypothèse $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$:

THÉORÈME 4.10. *Supposons la série $\sum_{n\geq 0} |\alpha_n|$ convergente, alors $\sigma(H^{(m)})$ converge vers $\sigma(H)$ au sens de la distance δ de Hausdorff sur les compacts de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Comme précédemment, on n'étudie que le spectre de H_0. Pour tout $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, posons

$$A_p(f, \theta) = \begin{pmatrix} f(1) & 1 & & & & e^{-i\theta} \\ 1 & f(2) & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ e^{i\theta} & & & & 1 & f(2^p) \end{pmatrix}.$$

La matrice $A_{p_m}(F^{(m+1)}, \theta) - A_{p_m}(F^{(m)}, \theta)$ a tous ses coefficients nuls sauf celui qui est sur la diagonale d'indice (a_m, a_m) et vaut α_m. Il résulte donc du théorème de Lidskii que

$$\delta\Big(\sigma(A_{p_m}(F^{(m+1)}, \theta), \sigma(A_{p_m}(F^{(m)}, \theta))\Big) \leq |\alpha_m|.$$

D'après l'étude faite pour les potentiels périodiques (théorème 2.2, Chapitre 1-A), en faisant varier θ, on parcourt simultanément tout le spectre de $H^{(m+1)}$ et de $H^{(m)}$ au moyen des valeurs propres des matrices $A_{p_m}(F^{(m+1)}, \theta)$ et $A_{p_m}(F^{(m)}, \theta)$, ces valeurs propres étant associées à distance au plus $|\alpha_m|$. D'où le passage aux spectres des opérateurs $H^{(m+1)}$ et $H^{(m)}$:

$$\delta(\sigma(H^{(m+1)}), \sigma(H^{(m)})) \leq |\alpha_m|. \tag{4.14}$$

Alors, pour tous p, q entiers, $\delta(\sigma(H^{(p)}, H^{(q)}) \leq \sum_{m\geq \inf\{p,q\}} |\alpha_m|$. La suite des spectres $\sigma(H^{(m)})$ est donc une suite de Cauchy dans l'espace des parties compactes de $\mathbb{R}$ muni de la distance de Hausdorff. Cet espace est complet d'où la convergence des spectres vers un compact K. Mais classiquement, cette limite est précisément $\bigcap_{m\geq 0} \overline{\bigcup_{k\geq m} \sigma(H^{(k)})}$ c'est-à-dire $\sigma(H)$ d'après le lemme 4.8.
◇◇◇

THÉORÈME 4.11. *Supposons la série* $\sum_{n\geq 0} 2^{p_n}|\alpha_n|$ *convergente et* $2^{p_{m-1}} < a_m \leq 2^{p_m}$ *pour tout* $m \geq 0$. *Alors*

$$\lim_{m\to\infty} m_\ell(\sigma(H^{(m)})\Delta\sigma(H)) = 0 \tag{4.15}$$

et $m_\ell(\sigma_{ac}(H)) = m_\ell(\sigma(H))$.

Démonstration. En associant par paire les intervalles des découpages fondamentaux de période 2^{p_m} des spectres des opérateurs $H^{(m)}$ et $H^{(m+1)}$, l'inégalité (4.14) montre que

$$m_\ell(\sigma(H^{(m)})\Delta\sigma(H^{(m+1)})) \leq 2^{1+p_m}|\alpha_m|\,. \tag{4.16}$$

Introduisons $R_m = \bigcup_{k\geq m}\sigma(H^{(m)})$, puis $K_m = \overline{R_m}$ et soit $H_{(1,s)}$ l'opérateur de Schrödinger de potentiel périodique, de période s, définie par $V(k) = F(k)$ si $1 \leq k \leq s$ et $V(k+s) = V(k)$. Les hypothèses faites sur les entiers a_m impliquent $H^{(m)} = H_{(1,p_{m-1})}$. De manière évidente,

$$\limsup_m \sigma(H^{(m)}) \subset \limsup_s \sigma(H_{(1,s)})\,.$$

La majoration (4.16) montre que

$$m_\ell(R_m) \leq m_\ell(\sigma(H^{(m)})) + 2\sum_{k\geq m} 2^{p_k}|\alpha_k|\,.$$

D'autre part, $\sigma(H^{(m)}) \subset R_m \subset \overline{V_{\gamma_m}(\sigma(H^{(m)}))}$ avec $\gamma_m = \sum_{k\geq m}|\alpha_k|$, d'où

$$m_\ell(\sigma(H^{(m)})\Delta K_m) \leq 2^{1+p_{m-1}}\gamma_m \leq \sum_{k\geq m} 2^{p_k}|\alpha_k|\,.$$

Mais $\overline{R_m}$ $(= K_m)$ converge en décroissant vers $\sigma(H)$ d'après la démonstration précédente, d'où la première partie du théorème car $m_\ell(\sigma(H)\Delta\sigma(H^{(m)}) \leq m_\ell(\sigma(H)\Delta K_m) + m_\ell(K_m\Delta\sigma(H^{(m)})$. Il s'en suit également que

$$m_\ell(\sigma(H)) = \lim_m m_\ell(K_m) = \lim_m \sigma(H^{(m)}) \leq \limsup_s m_\ell(\sigma(H_{(1,s)}))\,.$$

Utilisons maintenant les résultats de Last (cf. chap. 1-B, section (1.2)), qui donnent

$$\limsup_s m_\ell(\sigma(H_{1,s})) \leq m_\ell(\mathcal{E})\,,$$

pour conclure à

$$m_\ell(\sigma(H)) \leq m_\ell(\mathcal{E}) \leq m_\ell(\sigma_{ac}(H)) \leq m_\ell(\sigma(H))\,,$$

d'où $m_\ell(\sigma_{ac}(H)) = m_\ell(\sigma(H))$. ◇◇◇

Remarque 4.2. En choisissant dans le théorème 4.11 un potentiel de type Gordon, on obtient en outre un spectre purement essentiel. ◇

COROLLAIRE 4.12. *Sous les hypothèses du théorème 4.11,*

$$m_\ell(G) \geq \sup_n \alpha_n - \inf_n \alpha_n\,. \tag{4.17}$$

Notons pour terminer que l'on peut choisir la suite α de sorte que $m_\ell(\sigma(H)) > 0$.
La majoration (4.16) donne $m_\ell(\sigma(H^{(0)})\Delta\sigma(H^{(k+1)})) \leq 2\sum_{j=0}^{k} 2^{p_j}|\alpha_j|$, d'où par passage à la limite

$$m_\ell(\sigma(H^{(0)})\Delta\sigma(H)) \leq 2\sum_{j=0}^{\infty} 2^{p_j}|\alpha_j|\,.$$

Remarquons maintenant que $H^{(0)}$ est 1-périodique, donc $m_\ell(\sigma(H^{(0)})) = 4$.

THÉORÈME 4.13. *Sous les hypothèses du théorème 4.11, on a*

$$m_\ell(\sigma(H)) \geq 2(2 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^{p_j} |\alpha_j|) . \tag{4.18}$$

Exemple: Considérons pour tout $m \geq 0$, les suites $p_m = 4m + 1$, $a_m = 2^{4m-1}$ et $\alpha_m = 2^{-5m-\varepsilon}$, avec $\varepsilon > 1$. Nous sommes alors dans les conditions du théorème 4.11. Nous obtenons un encadrement de la mesure de Lebesgue du spectre Σ:

$$4(1 - 2^{1-\varepsilon}) \leq m_\ell(\Sigma) = m_\ell(\Sigma_{ac}) \leq 4 ,$$

ainsi que celle de l'ensemble G des trous du spectre:

$$m_\ell(G) \geq 2^{-\varepsilon} .$$

Chapitre 3

Opérateurs creux

L'objet de ce chapitre est l'étude d'opérateurs aléatoires unidimensionnels discrets de forme plus générale que celle des opérateurs aléatoires de Schrödinger "classiques", mais conservant toutefois un potentiel. Il correspond à l'article *Sparse Schrödinger Operators,* paru dans Reviews in Mathematical Physics, Vol 9-3 (1997), pages 315-341.

Comme il a été remarqué au chapitre 1, la théorie des opérateurs de Schrödinger fait partie du domaine beaucoup plus vaste des opérateurs aléatoires, les résultats généraux concernant les propriétés spectrales de tels opérateurs étant données dans [Fi;Pa] ainsi que [Car;La].
Nous nous proposons ici d'étudier des opérateurs aléatoires de domaine $\ell^2(\mathbb{Z})$ associés à des systèmes dynamiques et définis comme suit: si $\mathcal{T} = (T, X, \mathcal{B}, \mu)$ est un système dynamique et si p est un entier naturel non nul, on considère pour tout élément x de X l'opérateur noté H_x^p tel que

$$\forall\, u \in \ell^2(\mathbb{Z})\ ,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}\ ,\ (H_x^p u)(n) = u(n-p) + u(n+p) + V_x(n)u(n)\ ,$$

où $V_x(n) = f(T^n x)$ et f est une fonction mesurable bornée définie sur X à valeurs réelles.
Le cas $p = 1$ correspond bien évidemment aux opérateurs de Schrödinger discrets unidimensionnels. En outre, cette généralisation peut être considérée comme la plus immédiate dans le cadre discret unidimensionnel.

Dans un premier temps (section 2), et en accord avec les résultats de la partie A du chapitre 1, nous nous attachons aux propriétés spectrales générales de tels opérateurs. En particulier la condition d'ergodicité du système dynamique implique l'invariance μ-presque partout du spectre et des composantes spectrales de tels opérateurs, ainsi que l'absence de partie discrète μ-presque sûrement.

Dans la section 3, la forme très particulière de ces opérateurs nous conduit à une décomposition naturelle de $\ell^2(\mathbb{Z})$ en une somme directe de sous-espaces orthogonaux qui restent stables sous l'action de chaque opérateur auto-adjoint H_x^p (où $x \in X$). En effet, si $(e_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ désigne la base orthonormale canonique de $\ell^2(\mathbb{Z})$, et si, pour tout $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, on note $\mathcal{K}_i$ le sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{Z})$ engendré par les vecteurs de la forme e_{mp+i}, où $m \in \mathbb{Z}$, on a

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \bigoplus_{0\le i<p} \mathcal{K}_i\ ;$$
$$\forall i, j \in \{0, \ldots, p-1\}\ ,\ i \neq j \Longrightarrow \mathcal{K}_i \perp \mathcal{K}_j\ ;$$
$$\forall x \in X\ ,\ \forall i \in \{0, \ldots, p-1\}\ ,\ H_x^p(\mathcal{K}_i) \subset \mathcal{K}_i\ .$$

De plus, l'étude spectrale de la restriction de chaque opérateur H_x^p au sous-espace $\mathcal{K}_i$ (pour $i \in \{0, \ldots, p-1\}$), revient à celle d'un nouvel opérateur de Schrödinger discret unidimensionnel noté $\tilde{H}_x^{p,i}$ défini pour tout $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ par

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}\ ,\ (\tilde{H}_x^{p,i} u)(n) = u(n-1) + u(n+1) + \tilde{V}_x^{p,i}(n)u(n)\,,$$

où pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\tilde{V}_x^{p,i}(n) = V_x(np+i)\,.$$

Finalement, l'étude spectrale de chaque opérateur H_x^p sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ se décompose en l'étude de p opérateurs de Schrödinger unidimensionnels discrets, avec

$$\sigma(H_x^p) = \bigcup_{0\le i<p} \sigma(\tilde{H}_x^{p,i})\,,$$

ainsi que pour $\varepsilon \in \{ac, sc, pp\}$,

$$\sigma_\varepsilon(H_x^p) = \bigcup_{0\le i<p} \sigma_\varepsilon(\tilde{H}_x^{p,i})\,.$$

Les p familles d'opérateurs de Schrödinger $(\tilde{H}_x^{p,i})_{x\in X}$, $0 \le i < p$, ainsi obtenues sont alors associées au système dynamique $\mathcal{T}^p = (T^p, X, \mathcal{B}, \mu)$. Les $\tilde{H}^{p,i}$, $0 \le i < p$, sont des opérateurs de Schrödinger aléatoires discrets unidimensionnels.

Il faut remarquer que l'étude des opérateurs aléatoires $\tilde{H}^{p,i}$, $0 \le i < p$, est liée à l'ergodicité du système dynamique $\mathcal{T}^p$. La section 4 est donc consacrée aux propriétés ergodiques de $\mathcal{T}^p$, ainsi que leurs conséquences sur le comportement spectral des opérateurs aléatoires.
En fait W.H. Gottschalk et G.A. Hedlund (voir [G;H]), ont établi le résultat suivant: lorsque le système dynamique $\mathcal{T}$ est ergodique et minimal, il existe une partition de X en m sous-espaces fermés, invariants sous T^p, deux à deux disjoints, notés $X_0, \ldots, X_{m-1}$. Nous établissons que sous cette condition, il suffit de restreindre notre attention au système dynamique $\mathcal{T}_0^p = (T^p_{|X_0}, X_0, \mathcal{B}_{|X_0}, \mu_0)$, où $\mu_0(A) = \mu(A \cap X_0)/\mu(X_0)$ pour tout borélien A de X, qui peut être ergodique suivant les valeurs de m. Il s'ensuit une discussion sur les propriétés spectrales de chaque famille d'opérateurs associés en fonction de m.

Le reste de ce chapitre traite trois classes d'exemples: les opérateurs à potentiel périodique, les opérateurs à potentiel aléatoire, et enfin les opérateurs à potentiel substitutif. Le cas périodique est étudié dans la section 5. On démontre que si le potentiel est une suite N-périodique (où N est un entier naturel non nul), alors le spectre Σ^p de tous les opérateurs H_x^p (où $x \in X = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$), est purement absolument continu , formé de N bandes non nécessairement disjointes. Ce résultat est le même que pour un opérateur de Schrödinger aléatoire unidimensionnel discret "classique". En outre nous pouvons décrire explicitement Σ^p, qui dépend uniquement de p modulo N. On a:

$$\forall p \in \mathbb{N}^*\ ,\ \Sigma^p = \Sigma^{p \bmod (N)} = \Sigma^{N-(p \bmod (N))}\ .$$

Ainsi, en fonction des valeurs de p, il existe exactement $[\frac{N}{2}] + 1$ spectres possibles , qui sont $\Sigma^1, \ldots, \Sigma^{[\frac{N}{2}]}$ et Σ^N.

La section 6 concerne le cas où les $(V_x(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. Nous montrons qu'alors les résultats généraux établis dans le chapitre 1 dans le cas "classique" des opérateurs de Schrödinger discrets unidimensionnels s'étendent aux opérateurs creux. En particulier, nous avons une extension du théorème de Kotani et Simon, à savoir: la partie absolument continue du spectre de μ-presque tous les opérateurs H_x^p est vide. De plus, lorsque la fonction densité est continue sur $\mathbb{R}$ et à support compact $[\alpha, \beta]$, le spectre Σ^p de μ-presque tous les opérateurs est purement ponctuel et on a

$$\Sigma^p = \Sigma^p_{pp} = [\alpha - 2, \beta + 2]\,.$$

De même, nous établissons un analogue au théorème de Kunz et Souillard, à savoir: lorsque la suite $(V(n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une distribution de Bernoulli ($V_x(n) = 0$ avec une probabilité ρ et $V_x(n) = \alpha$ avec une probabilité $1-\rho$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$), alors le spectre est μ-presque sûrement purement ponctuel et

$$\Sigma^p = \Sigma^p_{pp} = [-2,2] \cup [\alpha - 2, \alpha + 2] \ .$$

En conclusion, dans le cadre du modèle d'Anderson, la nature du spectre ne change pas lorsque p varie; elle est la même que pour un opérateur de Schrödinger "classique".

Enfin dans la section 7, nous considérons le cas des potentiels substitutifs définis comme dans le chapitre 1 (partie B, paragraphe 5). Le système dynamique associé à une suite de substitution sur un alphabet fini (la substitution ξ étant primitive) est strictement ergodique, de sorte qu'il est possible d'appliquer les résultats de la section 4. Nous montrons que lorsque $m = 1$ ou $m = p$, la partie absolument continue du spectre est μ-presque sûrement vide. De plus, lorsque $m = 1$ ou p et que la substitution ξ est à longueur constante ℓ, les opérateurs associés sont des opérateurs de Schrödinger "classiques" à potentiels substitutifs, et si $p = \ell^n$ pour $n \geq 1$, la substitution correspondant à ces potentiels est encore ξ. Sous ces hypothèses, tous les spectres Σ^{ℓ^n}, pour $n \geq 1$, ont même nature que le spectre de l'opérateur aléatoire "classique" ayant le même potentiel.

Sparse Schrödinger Operators

Claire GUILLE-BIEL

Université de Provence
CMI, 39 rue E. Joliot-Curie
F-13453 Marseille Cedex 13 (France)

Abstract. We study spectral properties of a family $(H_x^p)_{x\in X}$, indexed by a non-negative integer p, of one dimensional discrete operators associated to an ergodic dynamical system $(T, X, \mathcal{B}, \mu)$ and defined for u in $\ell^2(\mathbb{Z})$ and n in $\mathbb{Z}$ by $(H_x^p u)(n) = u(n-p) + u(n+p) + V_x(n)u(n)$, where $V_x(n) = f(T^n x)$ and f is a real-valued measurable bounded map on X. In some particular cases, we prove that the nature of the spectrum does not change with p. Applications include some classes of random and quasi-periodic substitutional potentials.

1. Introduction

The one dimensional discrete Schrödinger operator H, sometimes called the Jacobi matrix, is defined on $\ell^2(\mathbb{Z})$ (the Hilbert space of square summable sequences), and for any integer n by

$$(Hu)(n) = u(n-1) + u(n+1) + V(n)u(n)\ , \quad \forall n \in \mathbb{Z}\ , \tag{1.1}$$

where $(V(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ is a bounded real *potential.* There has been a lot of interest for Schrödinger operators to be associated with a dynamical system $\mathcal{T} = (T, X, \mathcal{B}, \mu)$ as follows. For all x in X, let H_x be defined by

$$(H_x u)(n) = u(n-1) + u(n+1) + V_x(n)u(n)\ , \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \text{and} \quad \forall\, u \in \ell^2(\mathbb{Z})\ , \tag{1.2}$$

where $V_x(n) = f(T^n x)$ and f is a real-valued bounded measurable function on X. Under the ergodicity of $\mathcal{T}$, the invariance of the spectral properties of such operators is true for μ-almost every operator H_x, which means that μ-almost all operators have the same spectrum and spectral components (see [B, L], [Be, Bo, Gh], [Bo, Gh], [C, F, Ki, Si], [Car, L], [Fi, Pa], [Ko], [Ku, Sou] and [Su] for more details).

In this paper, we introduce more general operators defined on $\ell^2(\mathbb{Z})$, associated with the dynamical system $\mathcal{T}$ and indexed by a non-negative integer p. More precisely, we put for all x in X,

$$(H_x^p u)(n) = u(n-p) + u(n+p) + V_x(n)u(n)\ , \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \text{and} \quad \forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}) \tag{1.3}$$

where the potential V_x is defined as previously by a bounded mesurable map f from X to $\mathbb{R}$. Each H_x^p operator will be called a p-sparse Schrödinger operator associated with the dynamical system $\mathcal{T}$ and with the potential V_x. Our purpose is to study spectral properties of such operators, according to the values of p.

In Section 2, we first set up notations and terminologies of dynamical systems, spectral theory and random operators. We can also see that the notion of sparse Schrödinger operators is included in the more general theory of random ergodic operators described in details by A. Figotin and L. Pastur in [Fi, Pa]. According to [Fi, Pa] and under the ergodicity of $\mathcal{T}$, immediate spectral properties like invariance μ-almost everywhere of the spectrum and the spectral components, or absence μ-almost surely of the discrete component, can be deduced for sparse Schrödinger operators.

The specific form of p-sparse Schrödinger operators allows a more accurate understanding of their spectra and spectral components. In Part 3, the natural decomposition of $\ell^2(\mathbb{Z})$ in a direct sum of orthogonal subspaces, which are stable under each H_x^p, permits the study of p classical discrete one-dimensional Schrödinger operators associated to H_x^p, instead of studying H_x^p itself. We thus obtain p families of associated operators, each of them being defined for any x in X. In this case, we prove that each family is associated with the dynamical system $\mathcal{T}^p = (T^p, X, \mathcal{B}, \mu)$. Let us note that $\mathcal{T}^p$ is not necessarily ergodic.

When the dynamical system $\mathcal{T}$ is ergodic and minimal, we can cut X into m disjoint T^p-invariant closed subspaces, denoted by $X_0, \ldots, X_{m-1}$, where m is a non-negative integer depending on p and less than or equal to p. This result is due to W.H. Gottschalk and G.A. Hedlund (see [G, H]), and T. Kamae ([Ka]) for substitutional dynamical systems. We also refer the reader to [Dek]. Section 4 of this article states this theorem and discusses the spectral properties of each family of associated operators, according to the value of m. We prove in particular it suffices to restrict our attention to elements of X_0.

The forthcoming three sections concern special cases of potentials. In Part 5, we deal with the periodic case: $X = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, where N is a non-negative integer. For any x belonging to X, the sequences $(V_x(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ are N-periodic. We prove that the spectrum Σ^p of any operator H_x^p is purely absolutely continuous and composed of N not necessarily disjoint bands (closed intervals of $\mathbb{R}$). This is exactly the same result as in the classical case of discrete unidimensional N-periodic Schrödinger operators, which can be found in [To], chapter 4. Moreover, we show that Σ^p can be explicitly described and depends only on p modulo N. More precisely, $\Sigma^p = \Sigma^{p \bmod (N)} = \Sigma^{N-(p \bmod (N))}$, for all $p \in \mathbb{N}^*$, and there exist exactly $[\frac{N}{2}] + 1$ possible spectra, which are Σ^1, Σ^2, ..., $\Sigma^{[\frac{N}{2}]}$ and Σ^N.

Section 6 treats the random case: we suppose that the $(V_x(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ are independent identically distributed random variables. We prove that the general results stated for discrete one-dimensional Schrödinger operators with such potentials, can be extended to sparse Schrödinger operators.
More precisely, we prove an analogue of the Kotani and Simon theorem: the absolutely component of μ-almost all operators is empty (see [Ko] and [Si], or [B, L], for more details). Moreover, when the density function is continuous on $\mathbb{R}$ and compactly supported, the spectrum Σ^p of μ-almost all operators H_x^p is pure point and equal to $[\alpha - 2, \beta + 2]$, if $[\alpha, \beta]$ is the support of the density function. This is an analogue of the Kunz and Souillard theorem.
In the same way we state an analogue of the Carmona, Klein and Martinelli theorem (random variables admitting a Bernoulli distribution). In these two extremal cases, we show that the nature of the spectrum does not change with p.

We analyze in Section 7 the case of substitutional potentials: the dynamical system $\mathcal{T}$ is generated by a primitive substitution ξ on a finite alphabet $\mathcal{A} = \{0, \ldots, r-1\}$. It is strictly ergodic, and we can apply the main theorem of Section 4. In the cases $m = 1$ or $m = p$, we state that the spectrum Σ^p of any operator H_x^p is the union of the spectra of any associated operator on X_0 and there is no absolutely continuous part almost everywhere. Moreover, when ξ has a constant length ℓ and $m = 1$ or p, the associated operators are classical Schrödinger operators with substitutional potentials. Finally, if $p = \ell^n$ for $n \geq 1$, then this new substitution is again ξ and the spectra of almost all associated operators have same nature which is the same for all Σ^{ℓ^n}.

2. Definitions and first properties

2.1. Dynamical systems and random operators

Let $\mathcal{T} = (T, X, \mathcal{B}, \mu)$ be a (topological) dynamical system: X is an non-empty, compact metrizable space, $\mathcal{B}$ denotes the $\sigma-$algebra of Borel sets of X, μ is a Borel probability measure on X and

$T : X \to X$ is a homeomorphism of X, preserving the measure μ (that is to say for any $A \in \mathcal{B}$, $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$). The dynamical system $\mathcal{T}$ is said to be ergodic if each Borel subset A of X such that $T^{-1}A = A$ has a μ-measure equal to 0 or 1. It is called uniquely ergodic if there exists a unique T-invariant probability measure on X which turns out to be ergodic. If X has no closed T-invariant subspace other than $\emptyset$ and X itself, then $\mathcal{T}$ is said to be a minimal (topological) dynamical system. When $\mathcal{T}$ is uniquely ergodic and minimal it is called strictly ergodic. In this paper, we will always suppose that $\mathcal{T}$ is ergodic.

Let us denote by $(.,.)$ the inner product of $\ell^2(\mathbb{Z})$ and by $\| \, . \, \|_2$ its associated norm. Moreover, S denotes the shift operator on $\ell^2(\mathbb{Z})$. We recall that a (real) random variable on the probability space $(X, \mathcal{B}, \mu)$ is a real-valued $\mathcal{B}$-measurable function on X eventually taking infinite values on a set μ-measure 0.
A random operator A on the probability space $(X, \mathcal{B}, \mu)$ of domain $\ell^2(\mathbb{Z})$ is a map defined on X into the set of linear operators on $\ell^2(\mathbb{Z})$ by

$$A \; : \; x \longrightarrow A_x \; , \tag{2.1}$$

where A_x is for μ-almost every x in X a bounded linear operator on $\ell^2(\mathbb{Z})$, and such that for all u and v in $\ell^2(\mathbb{Z})$, the map $(Au, v) \; : \; x \in X \to (A_x u, v) \in \mathbb{R}$ is a random variable. If, in addition, μ-almost all operators A_x are self-adjoint, A is said to be symmetric.
Moreover, if $\mathcal{T}$ is ergodic, and if there exists a homomorphism from the group $\{T^n \; ; \; n \in Z\}$ onto a group $\{U_n \; ; n \in \mathbb{Z}\}$ of unitary operators on $\ell^2(\mathbb{Z})$ such that, for μ-almost all x in X,

$$A_{T^n x} = U_n A_x U_n^{-1} \; , \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{2.2}$$

then A is called ergodic or metrically transitive. One of the best general reference for random operators theory is [Fi, Pa].

2.2. Spectral theory

We recall that the spectrum $\sigma(H)$ of a self-adjoint continuous linear operator H is defined as the complement in $\mathbb{C}$ of the set of values λ for which $(H - \lambda Id)^{-1}$ exists and is a bounded linear operator on $\ell^2(\mathbb{Z})$. By self-adjointness and continuity of H, the set $\sigma(H)$ is a non-empty compact subset of $\mathbb{R}$. A real number λ for which there exists $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $u \neq 0$, verifying $Hu = \lambda u$ is called an eigenvalue of H. The set of all eigenvalues of H is called the point spectrum $\sigma_p(H)$. The pure point spectrum, denoted by $\sigma_{pp}(H)$, is defined by

$$\sigma_{pp}(H) = \overline{\sigma_p(H)} \; ,$$

where $\overline{\sigma_p(H)}$ denotes the closure of $\sigma_p(H)$ in $\mathbb{R}$. The set $\sigma(H) \backslash \sigma_p(H)$ is the continuous spectrum. It can be cut into two parts, according to the Lebesgue decomposition of the spectral measure: the absolutely continuous spectrum $\sigma_{ac}(H)$, and the singular continuous spectrum $\sigma_{sc}(H)$. We thus have

$$\sigma(H) = \sigma_{pp}(H) \bigcup \sigma_{ac}(H) \bigcup \sigma_{sc}(H) \; , \tag{2.3}$$

and these sets are not necessarily disjoint. For more details, we refer the reader to Berthier ([Ber]) and Dunford and Schwarz ([Dun, Sch]).

2.3. Definition and immediate properties of sparse Schrödinger operators

Let $(H_x^p)_{x \in X}$ be a family of p-sparse Schrödinger operators defined by Equation (1.3) and associated with the ergodic dynamical system $\mathcal{T}$. We firstly note that each operator H_x^p can be written under the following form:

$$H_x^p = S^p + S^{-p} + V_x \tag{2.4}$$

where $(V_x u)(n) = V_x(n)u(n)$, for all u in $\ell^2(\mathbb{Z})$ and all n in $\mathbb{Z}$. Secondly, we remark that every operator H_x^p is a linear continuous self-adjoint operator from $\ell^2(\mathbb{Z})$ to itself. Its norm satisfies $\| H_x^p \| \leq 2 + \sup_{n\in\mathbb{Z}} | V_x(n) | \leq 2 + \| f \|_\infty$.
By measurability of f, for given u and v in $\ell^2(\mathbb{Z})$, the map $(H^p u, v)$ defined on X by $(H^p u, v)(x) = (H_x^p u, v)$ is a random variable. Hence H^p is a symmetric random operator on $(X, \mathcal{B}, \mu)$ in $\ell^2(\mathbb{Z})$. Moreover for all $x \in X$, H_x^p satisfies

$$H_{Tx}^p = S H_x^p S^{-1} \ . \tag{2.5}$$

This leads to the following proposition.

PROPOSITION 2.1. *The operator $H^p : x \to H_x^p$ for all x in X, is a symmetric ergodic random operator on $(X, \mathcal{B}, \mu)$ in $\ell^2(\mathbb{Z})$. The group of unitary operators on $\ell^2(\mathbb{Z})$ associated with the group of automorphisms $\{T^n \ ; n \in \mathbb{Z}\}$ is exactly $\{S^n \ ; n \in \mathbb{Z}\}$.*

Proof. We have already seen that H^p is a symmetric random operator. By Relation (2.5) and by induction, we deduce Equation (2.2) with $U_n = S^n$ for all n. The ergodicity of the dynamical system T implies the metric transitivity of H^p. ◇◇◇

It is now possible to have information about the spectra and their components of operators H_x^p. Let us denote by $\sigma(H_x^p)$ (respectively $\sigma_{pp}(H_x^p)$, $\sigma_{ac}(H_x^p)$ and $\sigma_{sc}(H_x^p)$), the spectrum (resp. the pure point, absolutely continuous, and singular continuous parts of the spectrum), of each operator H_x^p. According to the previous part, we can remark that each $\sigma(H_x^p)$ is a non-empty compact subset of $\mathbb{R}$, included in the interval $\left[-2 - \sup_{n\in\mathbb{Z}} | V_x(n) |, 2 + \sup_{n\in\mathbb{Z}} | V_x(n) |\right]$.
Moreover, by Figotin and Pastur (see [Fi, Pa]), we obtain directly some properties of the spectrum of symmetric ergodic random operators.

THEOREM 2.2. *Let H^p be as in Proposition 2.1, then*

(i) there exist a non-empty compact set of $\mathbb{R}$, denoted by Σ^p, such that

$$\Sigma^p = \sigma(H_x^p) \qquad \text{for } \mu\text{-almost all } x \in X \ ; \tag{2.6}$$

(ii) there exist three closed subsets of $\mathbb{R}$, denoted respectively by Σ_{pp}^p, Σ_{ac}^p and Σ_{sc}^p, such that for μ-almost all x in X,

$$\Sigma_{pp}^p = \sigma_{pp}(H_x^p) \ , \tag{2.7}$$
$$\Sigma_{ac}^p = \sigma_{ac}(H_x^p) \ , \tag{2.8}$$
$$\Sigma_{sc}^p = \sigma_{sc}(H_x^p) \ ; \tag{2.9}$$

(iii) for μ-almost x in X, the spectrum of H_x^p admits no isolated eigenvalues of finite multiplicity, that is to say it is purely essential μ-almost everywhere:

$$\sigma_{dis}(H_x^p) = \emptyset \quad \mu - \text{a.e.}; \tag{2.10}$$

(iv) for any given λ in $\mathbb{R}$, $\mu(\{x \in X \ ; \ \lambda \text{ is a eigenvalue of finite multiplicity of } H_x^p\}) = 0$;

(v) for μ-almost all x in X and if $\sigma_{pp}(H_x^p)$ is not empty then it is locally uncountable.

Proof. See Theorems 2.10, 2.11, 2.12 and 2.16 of [Fi, Pa]. ◇◇◇

Remark 2.1. When the dynamical system T is ergodic and minimal, it can be shown that

$$\Sigma^p = \sigma(H_x^p) \ , \quad \forall x \in X \ . \tag{2.11}$$

For details we again refer the reader to [Fi, Pa]. ◇

Thanks to random operator theory, we have obtained interesting results about non randomness of the spectrum and its components. But we do not know exactly neither their form nor the nature of the spectrum. It is the object of the next part of this article.

Remark 2.2. The random real-valued map $V(n)$ defined on X by $V(n)(x) = V_x(n)$, for all $x \in X$ where n is fixed, can be viewed as random variable on the probability space $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Thus $(V(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ is a sequence of random variables. Consequently p-sparse Schrödinger operators are special cases of random finite difference operators introduced by H. Kunz and B. Souillard in [Ku, Sou]. ◇

3. Decomposition of the operator H_x^p

Let us denote by $(e_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ the canonical orthonormal basis of $\ell^2(\mathbb{Z})$: $e_m(n) = \delta_{n,m}$ for all n and m in $\mathbb{Z}$, where δ is the Kronecker symbol. For $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, we consider the linear subspace of $\ell^2(\mathbb{Z})$ spanned by all vectors of the form e_{mp+i}, with $m \in \mathbb{Z}$. We denote it by $\mathcal{K}_i^p$ or $\mathcal{K}_i$ when there is no ambiguity. Thus

$$\mathcal{K}_i^p = \mathcal{K}_i = \text{ vect } \{e_{mp+i} \ , \ m \in \mathbb{Z}\} \ . \tag{3.1}$$

It is clear that every element v of $\mathcal{K}_i$ looks like $(\ldots 0 \ldots 0\ v_{i-p}\ 0 \ldots 0\ v_i\ 0 \ldots 0\ v_{i+p}\ 0 \ldots 0\ v_{i+2p}\ \ldots)$. Moreover, the $\mathcal{K}_i$ are mutually orthogonal, and $\ell^2(\mathbb{Z})$ is their orthogonal direct sum:

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{K}_i \quad \text{with} \quad \mathcal{K}_i \perp \mathcal{K}_j \quad \text{for} \quad i \neq j \ . \tag{3.2}$$

Let us now consider the behavior of operators H_x^p on each subspace $\mathcal{K}_i$.

LEMMA 3.1. *For $0 \leq i < p$, if $\mathcal{K}_i$ is given by (3.1) then $\mathcal{K}_i$ is stable under H_x^p.*

This lemma together with (3.2) implies Proposition 3.2.

PROPOSITION 3.2. *For any x in X, the spectrum of H_x^p as well as its spectral components can be cut into p parts as follows:*

$$\sigma(H_x^p) = \bigcup_{i=0}^{p-1} \sigma(H_{x|\mathcal{K}_i}^p) \tag{3.3}$$

$$\sigma_\varepsilon(H_x^p) = \bigcup_{i=0}^{p-1} \sigma_\varepsilon(H_{x|\mathcal{K}_i}^p) \tag{3.4}$$

with $\varepsilon \in \{pp, ac, sc\}$.

Instead of studying H_x^p on $\ell^2(\mathbb{Z})$, we will do the study on each subspace $\mathcal{K}_i$. Before this, we have to look a little bit more at these subspaces.

3.1. Study of subspaces $\mathcal{K}_i$

First of all notice that every subspace $\mathcal{K}_i$ is isometrically isomorphic to $\ell^2(\mathbb{Z})$. Indeed let us consider for each $0 \leq i < p$, the map $\phi_i^p = \phi_i : \mathcal{K}_i \to \ell^2(\mathbb{Z})$ defined for all $v \in \mathcal{K}_i$ and all n by

$$(\phi_i(v))(n) = v(np + i) \ .$$

Conversely, the map $\psi_i^p = \psi_i : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \mathcal{K}_i$, given for any $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ and all m, by

$$(\psi_i(u))(m) = \begin{cases} u(n) & \text{if } m = np + i \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

is such that $\psi_i = (\phi_i)^{-1}$.

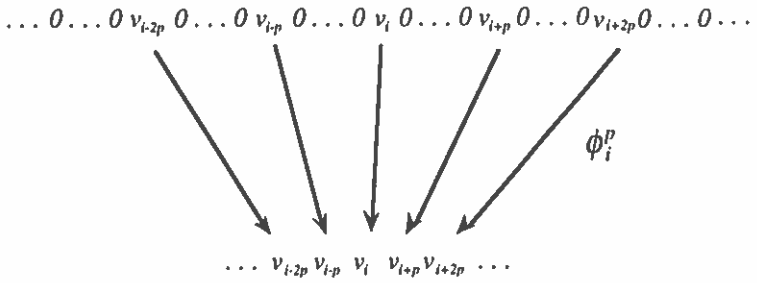


Figure 1. The ϕ_i^p function.

Moreover, ϕ_i and ψ_i, for $0 \leq i < p$, are linear isometries. Thus each $\mathcal{K}_i$ is isometrically isomorphic to $\ell^2(\mathbb{Z})$. This also implies that every subspace $\mathcal{K}_i$ is isometrically isomorphic to any $\mathcal{K}_j$ $(0 \leq i, j < p)$ and in particular the following lemma can be deduced.

LEMMA 3.3. *For any $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, if S denotes the shift operator on $\ell^2(\mathbb{Z})$, then*

$$S\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_{p-1} \tag{3.5}$$

$$S\mathcal{K}_i = \mathcal{K}_{i-1}\ , \quad \text{for} \quad 1 \leq i < p\ . \tag{3.6}$$

For $0 \leq i < p$, let us denote by $S_{|\mathcal{K}_i}$ the restriction of S to the subspace $\mathcal{K}_i$. Then

$$S_{|\mathcal{K}_0} : \mathcal{K}_0 \longrightarrow \mathcal{K}_{p-1}$$
$$S_{|\mathcal{K}_i} : \mathcal{K}_i \longrightarrow \mathcal{K}_{i-1}\ , \quad \text{for} \quad 1 \leq i < p\ .$$

Similarly, if $(S^{-1})_{|\mathcal{K}_i}$ is the restriction of S^{-1} on the subspace $\mathcal{K}_i$, we have

$$(S^{-1})_{|\mathcal{K}_i} : \mathcal{K}_i \longrightarrow \mathcal{K}_{i+1}\ , \quad \text{for} \quad 0 \leq i < p-1$$
$$(S^{-1})_{|\mathcal{K}_{p-1}} : \mathcal{K}_{p-1} \longrightarrow \mathcal{K}_0\ .$$

Finally it can be shown that

$$(S_{|\mathcal{K}_0})^{-1} = (S^{-1})_{|\mathcal{K}_{p-1}} \tag{3.7}$$

$$(S_{|\mathcal{K}_i})^{-1} = (S^{-1})_{|\mathcal{K}_{i-1}}\ , \text{for} \quad 1 \leq i < p\ . \tag{3.8}$$

Relations (3.5) to (3.8) lead to a dependence of the ϕ_i functions.

PROPOSITION 3.4. *For any $i \in \{0, \ldots, p-2\}$, we have*

$$\phi_i \circ S_{|\mathcal{K}_{i+1}} = \phi_{i+1} \ . \tag{3.9}$$

Moreover if $i = p-1$,

$$\phi_{p-1} \circ S_{|\mathcal{K}_0} = S \circ \phi_0 \ . \tag{3.10}$$

The proof is left to the reader. ◇◇◇

Remark 3.1. This proposition implies that, for any i in $\{0, \ldots, p-2\}$ (and respectively for $i = p-1$), the following diagrams commute:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}_{i+1} & \xrightarrow{S_{|\mathcal{K}_{i+1}}} & \mathcal{K}_i \\ {\scriptstyle \phi_{i+1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_i} \\ \ell^2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow[Id]{} & \ell^2(\mathbb{Z}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{K}_0 & \xrightarrow{S_{|\mathcal{K}_0}} & \mathcal{K}_{p-1} \\ {\scriptstyle \phi_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{p-1}} \\ \ell^2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow[S]{} & \ell^2(\mathbb{Z}) \end{array}$$

PROPOSITION 3.5. *For $0 \leq i < p$, the subspace $\mathcal{K}_i$ is stable under S^p, and if $(S^p)_{|\mathcal{K}_i}$ denotes the restriction of S^p to $\mathcal{K}_i$, then*

$$S \circ \phi_i = \phi_i \circ (S^p)_{|\mathcal{K}_i} \ . \tag{3.11}$$

This signifies that the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}_i & \xrightarrow{S^p_{|\mathcal{K}_{i+1}}} & \mathcal{K}_i \\ {\scriptstyle \phi_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_i} \\ \ell^2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow[S]{} & \ell^2(\mathbb{Z}) \end{array}$$

The proof is left to the reader. ◇◇◇

3.2. Associated operators

We have already noticed that we had to study each operator $H^p_{x|\mathcal{K}_i}$, for $0 \leq i < p$. Because each subspace $\mathcal{K}_i$ is isometrically isomorphic to $\ell^2(\mathbb{Z})$, we will lift this study from $\mathcal{K}_i$ to $\ell^2(\mathbb{Z})$ by putting for all $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ and all $x \in X$:

$$\tilde{H}^{p,i}_x = \phi_i \circ H^p_{x|\mathcal{K}_i} \circ (\phi^p_i)^{-1} \ . \tag{3.12}$$

The $\tilde{H}^{p,i}_x$ are continuous linear self-adjoint operators on $\ell^2(\mathbb{Z})$. They are the H^p_x associated operators. Each operator $\tilde{H}^{p,i}_x$ being unitarly equivalent to $H^p_{x|\mathcal{K}_i}$, the following proposition can be deduced.

PROPOSITION 3.6. *For all $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ and all $x \in X$,*

$$\sigma(\tilde{H}^{p,i}_x) = \sigma(H^p_{x|\mathcal{K}_i}) \tag{3.13}$$

$$\sigma_\varepsilon(\tilde{H}^{p,i}_x) = \sigma_\varepsilon(H^p_{x|\mathcal{K}_i}) \ , \quad \textit{with} \quad \varepsilon \in \{pp, ac, sc\} \ . \tag{3.14}$$

Consequently we can conclude by Theorem 3.7 concerning the spectrum of H^p_x.

THEOREM 3.7. *Under the ergodicity of the dynamical system $\mathcal{T}$, and with notations of Theorem 2.2, we have*

$$\Sigma^p = \bigcup_{i=0}^{p-1} \sigma(\tilde{H}_x^{p,i}) \tag{3.15}$$

$$\Sigma_\varepsilon^p = \bigcup_{i=0}^{p-1} \sigma_\varepsilon(\tilde{H}_x^{p,i}) \tag{3.16}$$

for $\varepsilon \in \{pp, ac, sc\}$ and μ-almost all x in X.

Proof. It is an immediate consequence of Theorem 2.2, together with Propositions 3.2 and 3.6. ◇◇◇

Remark 3.2. It is a interesting fact that the $\tilde{H}_x^{p,i}$ spectra are "globally" invariants, that is to say their union is invariant μ-almost everywhere. But we do not know anything about the behavior of each one of these operators. ◇

Remark 3.3. If moreover the dynamical system $\mathcal{T}$ is minimal, then Σ^p is equal to the union of the spectra of $\tilde{H}_x^{p,i}$ for any x in X. ◇

3.3. Immediate properties of associated operators

In this section, we see the strong links between the operators $\tilde{H}_x^{p,i}$. We begin by a new characterization of them.

PROPOSITION 3.8. *For $0 \leq i < p$ and all $x \in X$, $\tilde{H}_x^{p,i}$ is the operator defined on $\ell^2(\mathbb{Z})$ by*

$$\tilde{H}_x^{p,i} = S + S^{-1} + \tilde{V}_x^{p,i} , \tag{3.17}$$

$$\text{where} \quad \tilde{V}_x^{p,i}(n) = V_x(np+i) , \quad \forall n \in \mathbb{Z} . \tag{3.18}$$

Proof. The result directly follows from the definition of $\tilde{H}_x^{p,i}$. ◇◇◇

This proposition means that the sequence of potentials $\tilde{V}_x^{p,i}$ is a subsequence of V_x.

PROPOSITION 3.9. *For $0 \leq i < p$ and all $x \in X$, we have the following relations:*

$$\tilde{H}_{Tx}^{p,p-1} = S\tilde{H}_x^{p,0}S^{-1} \tag{3.19}$$

$$\tilde{H}_{Tx}^{p,i} = \tilde{H}_x^{p,i+1}. \tag{3.20}$$

Proof. By definition of operators $\tilde{H}_x^{p,i}$, and according to Propositions 3.4 and 3.5, we complete the proof. ◇◇◇

COROLLARY 3.10. *If $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, and if j is a non-negative integer such that $i+j = np+m$ where $0 \leq m < p$ and $n \in \mathbb{N}$, then*

$$\tilde{H}_{T^j x}^{p,i} = S^n \tilde{H}_x^{p,m} S^{-n} . \tag{3.21}$$

Proof. The result follows inductively from the previous proposition. ◇◇◇

Remark 3.4. In particular, for all $x \in X$ and all $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, we deduce that $\tilde{H}_x^{p,i} = \tilde{H}_{T^i x}^{p,0}$. ◇

Remark 3.5. Corollary 3.10 implies for example that $\tilde{H}_{Tx}^{p,i}$ and $\tilde{H}_x^{p,i+1}$ are unitarly equivalent. They also have same spectra and same spectral components. ◇

COROLLARY 3.11. *Let i be given in $\{0,\dots,p-1\}$. For all $x \in X$, $\tilde{H}_x^{p,i}$ verifies*

$$\tilde{H}_{T^p x}^{p,i} = S \tilde{H}_x^{p,i} S^{-1} \ . \tag{3.22}$$

Proof. Since $0 \leq i < p$, Corollary 3.11 can be applied with $n = 1$ and $m = i$. Thus the proof is complete. ◇◇◇

To end this part, we put $g_i = f \circ T^i$, for $0 \leq i < p$. Then g_i is a bounded measurable function from X to $\mathbb{R}$, and

$$\tilde{V}_x^{p,i}(n) = g_i\big((T^p)^n x\big) \ , \quad \forall n \in \mathbb{Z} \ , \quad \forall x \in X \ . \tag{3.23}$$

This permits us to conclude with a theorem.

THEOREM 3.12. *Let i be given in $\{0,\dots,p-1\}$. Then $(\tilde{H}_x^{p,i})_{x\in X}$ is a family of discrete unidimensional Schrödinger operators associated with the dynamical system $(T^p, X, \mathcal{B}, \mu)$.*

Proof. According to Propositions 3.8 and 3.11 with Relation (3.23), we complete the proof. ◇◇◇

Remark 3.6. We can also say that $\tilde{H}^{p,i}$ is a symmetric random operator on the probability space $(X, \mathcal{B}, \mu)$ of domain $\ell^2(\mathbb{Z})$. But we do not know if it is ergodic or not: in the general case, the dynamical system $(T^p, X, \mathcal{B}, \mu)$ is not supposed to be ergodic! This is the object of the next section. ◇

4. The decomposition of a dynamical system and applications

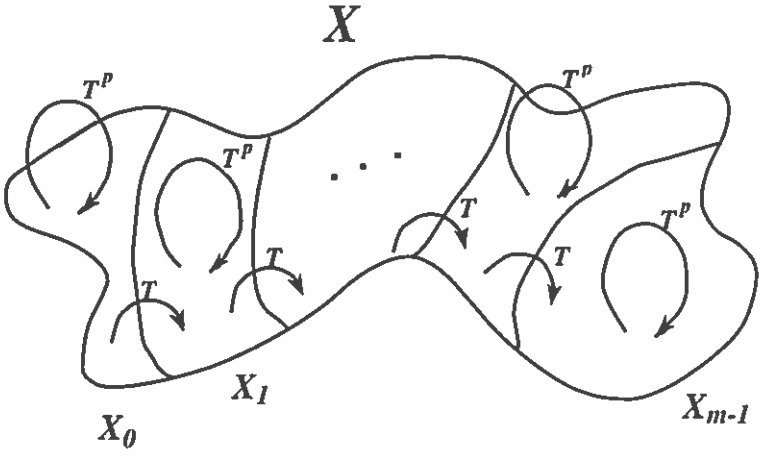
Let $\mathcal{T}$ be an ergodic dynamical system. If p is a non-negative integer, we denote by $\mathcal{T}^p$ the new dynamical system $(T^p, X, \mathcal{B}, \mu)$. In this section, we are concerning into the ergodicity of the dynamical system $\mathcal{T}^p$. In general case, we are not able to give any answer. When $\mathcal{T}$ is ergodic and minimal, the following theorem, given in [Dek] (see also [Ka] and [G, H]), is a useful tool.

THEOREM 4.1 (GOTTSCHALK, HEDLUND, KAMAE). *Let $\mathcal{T} = (T, X, \mathcal{B}, \mu)$ be a minimal and ergodic dynamical system. Let p be a non-negative integer. Then there exists a finite partition of X, denoted by $\{X_0,\dots,X_{m-1}\}$, such that*

(i) $\bigcup_{k=0}^{m-1} X_k = X$ *and* $X_k \cap X_\ell = \emptyset$ *if* $k \neq \ell$;
(ii) *each X_k is a closed non-empty subset of X;*
(iii) *each X_k is T^p-invariant: $T^p X_k = X_k$;*
(iv) *X_k does not admit any closed T^p-invariant proper subspace;*
(v) *the partition is cyclic: $TX_0 = X_1, \dots, TX_{m-2} = X_{m-1}, TX_{m-1} = X_0$.*

This partition is unique up to a cyclic permutation of its terms.

We illustrate this result by figure 2.



Remark 4.1. Under the notations of Theorem 4.1, each dynamical system $(T^p_{|X_k}, X_k, \mathcal{B}_{|X_k}, \mu_k)$ is minimal, where $\mu_k(A) = \mu(A \cap X_k)/\mu(X_k)$ for any Borel subset A of X. The partition is also said to be minimal. Moreover, $\mu(X_k) = 1/m$. $\diamond$

Remark 4.2. The non-negative integer m defined in Theorem 4.1 depends on p and is less than or equal to it. From now on will we denote $m = \delta(p)$ and $\delta(.)$ is called the decomposition function of powers of T. It is linked to p by $\delta(p) \mid p$. $\diamond$

In all this section, we will suppose $\mathcal{T}$ ergodic and minimal. We also state some corollaries, which can be found in [Dek].

COROLLARY 4.2. *Assume that the dynamical system $\mathcal{T}$ is strictly ergodic. Then, under notations of Theorem 4.1, each dynamical system $(T^{\delta(p)}_{|X_k}, X_k, \mathcal{B}_{|X_k}, \mu_k)$ is uniquely ergodic.*

Moreover, Remark 4.1 and Corollary 4.2 imply the following result.

COROLLARY 4.3. *Assume that the dynamical system $\mathcal{T}$ is strictly ergodic. If, moreover, $\delta(p) = p$, then each dynamical system $(T^p_{|X_k}, X_k, \mathcal{B}_{|X_k}, \mu_k)$ is strictly ergodic.*

The following theorem yields information about spectral behavior of the associated operators.

PROPOSITION 4.4. *If Σ^p is the spectrum of H^p_x for all x in X, then*

$$\Sigma^p = \bigcup_{i=0}^{p-1} \sigma(\tilde{H}^{p,i}_x) \ , \quad \forall x \in X_0 \ . \tag{4.1}$$

Moreover, if Σ^p_{pp}, Σ^p_{ac} and Σ^p_{sc} are the spectral components of the spectrum of μ-almost all H^p_x,

$$\Sigma^p_\varepsilon = \bigcup_{i=0}^{p-1} \sigma_\varepsilon(\tilde{H}^{p,i}_x) \tag{4.2}$$

for $\varepsilon \in \{pp, ac, sc\}$ and for μ_0-almost all x in X_0.

Remark 4.3. In our study, we have to consider each associated operator $\tilde{H}^{p,i}_x$ on the dynamical system $\mathcal{T}^p$. Theorem 4.1 allows us to restrict our attention to $\tilde{H}^{p,i}_x$ on each "sub"-dynamical system $\mathcal{T}^p_k = (T^p_{|X_k}, X_k, \mathcal{B}_{|X_k}, \mu_k)$. Now Proposition 4.4 permits us to study the associated operators only on the dynamical system $\mathcal{T}^p_0 = (T^p_{|X_0}, X_0, \mathcal{B}_{|X_0}, \mu_0)$. $\diamond$

Proof. Let i be given in $\{0, \ldots, p-1\}$ and k be in $\{0, \ldots, \delta(p)-1\}$. By minimality and ergodicity of $\mathcal{T}$, we know that Σ^p is the spectrum of any operator H^p_x, and (4.1) is deduced.
By Theorem 4.1, $X_k = T^k X_0$ and if y is given in X_k, then there exists $x \in X_0$ such that $y = T^k x$. This implies $\tilde{H}^{p,i}_y = \tilde{H}^{p,i}_{T^k x}$. If $i + k = np + m$ where $n \geq 0$ and $0 \leq m < p$, then by Corollary 3.10, $\tilde{H}^{p,i}_y = S^n \tilde{H}^{p,m}_x S^{-n}$, and for $\varepsilon \in \{pp, ac, sc\}$,

$$\bigcup_{i=0}^{p-1} \sigma_\varepsilon(\tilde{H}^{p,i}_y) = \bigcup_{m=0}^{p-1} \sigma_\varepsilon(\tilde{H}^{p,m}_x) \ .$$

This last equality is verified for any $y \in X_k$.
If there exist $A_0 \subset X_0$ of μ_0-measure 1 on which the spectral component Σ^p_ε is not equal to the union of $\sigma_\varepsilon(\tilde{H}^{p,i}_x)$, then for any $1 \leq k < \delta(p)$, $A_k = T^k A_0 \subset X_k$ has the same property that A_0. We put $A = \cup_{k=0}^{\delta(p)-1} A_k \subset X$. The set A verifies $\mu(A) = 1$ and has the same property that A_0. This is in contradiction with Theorem 2.2 and the proof is complete. $\diamond\diamond\diamond$

Remark 4.4. We have an analogous of Proposition 4.4 in replacing $\mathcal{T}^p_0$ by any $\mathcal{T}^p_k$. $\diamond$

As a direct consequence of Remark 3.4 and Proposition 4.4, we get:

COROLLARY 4.5.

$$\Sigma^p = \bigcup_{i=0}^{p-1} \sigma(\tilde{H}^{p,0}_{T^i x}) \ , \quad \forall\, x \in X_0 \tag{4.3}$$

$$\Sigma^p_\varepsilon = \bigcup_{i=0}^{p-1} \sigma_\varepsilon(\tilde{H}^{p,0}_{T^i x}) \ , \quad \forall\, \varepsilon \in \{pp, ac, sc\} \text{ and } \mu_0 - a.e. \tag{4.4}$$

Let us now consider associated operators $\tilde{H}^{p,i}_x$ on the dynamical system $\mathcal{T}^p_0$. For any i belonging to $\{0,\dots,p-1\}$, $(\tilde{H}^{p,i}_x)_{x\in X_0}$ is a family of Schrödinger operators associated with $\mathcal{T}^p_0$. But we do not know whether $\mathcal{T}^p_0$ is ergodic in general case: in fact, when $\mathcal{T}$ is strictly ergodic, it depends on the values taking by $\delta(p)$.

PROPOSITION 4.6. *Let $\mathcal{T}$ be strictly ergodic dynamical system and p a non-negative integer such that $\delta(p) = p$.*

(i) There exist p non-empty compact subsets of $\mathbb{R}$, denoted by $\tilde{\Sigma}^{p,0},\dots,\tilde{\Sigma}^{p,p-1}$ verifying

$$\Sigma^p = \bigcup_{i=0}^{p-1} \tilde{\Sigma}^{p,i} \ . \tag{4.5}$$

Each $\tilde{\Sigma}^{p,i}$ corresponds to the spectrum of $\tilde{H}^{p,i}_x$ ($\forall x \in X_0$).

(ii) For $\varepsilon \in \{pp, ac, sc\}$ there exists a compact subset $\tilde{\Sigma}^{p,i}_\varepsilon$ of $\mathbb{R}$ such that $\sigma_\varepsilon(\tilde{H}^{p,i}_x) = \tilde{\Sigma}^{p,i}_\varepsilon$ for μ_0-almost all x in X_0. Moreover

$$\Sigma^p_\varepsilon = \bigcup_{i=0}^{p-1} \tilde{\Sigma}^{p,i}_\varepsilon \ . \tag{4.6}$$

Proof. By Corollary 4.3, Proposition 4.4, Theorem 2.2 and Corollary 2.3. ◇◇◇

Remark 4.5. Under notations of Proposition 4.6, Remark 3.4 implies that the spectrum $\tilde{\Sigma}^{p,i}$ of any $\tilde{H}^{p,i}_x$ on X_0 is also the spectrum of $\tilde{H}^{p,0}_y$, for any $y \in X_i$. ◇

Now we describe explicit cases in the next section.

5. The periodic case

Let us consider $X = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, where $N \in \mathbb{N}^*$. We denote by $\mathcal{B}$ the σ-algebra of Borel subsets of X and by μ the counting probability measure on X (defined for all $0 \le j < N$ by $\mu(\{j\}) = \frac{1}{N}$). The transformation $T : x \to x+1$ is an invertible measure-preserving transformation of X. The dynamical system $\mathcal{T} = (T, X, \mathcal{B}, \mu)$ is strictly ergodic. If f is a measurable bounded map from X to $\mathbb{R}$, we define the potential for all $x \in X$ by

$$V_x(n) = f(T^n x) \ , \quad \forall n \in \mathbb{Z} \ . \tag{5.1}$$

In addition, we suppose f such that the sequence $(V_x(n))_n$ is exactly N-periodic. Let p be given in $\mathbb{N}^*$. In this section, we study p-sparse Schrödinger operators associated with the dynamical system $\mathcal{T}$ and with the potential (5.1). For general results on discrete one-dimensional periodic Schrödinger operators, we refer the reader to Toda ([To]).

5.1. First properties of the associated operators

We now can introduce the associated operators $\tilde{H}^{p,i}_x$ defined by Equations (3.12) and (3.17)-(3.18). For all $i \in \{0,\dots,p-1\}$ and all $x \in X$, $\tilde{H}^{p,i}_x$ is given by $\tilde{H}^{p,i}_x = S + S^{-1} + \tilde{V}^{p,i}_x$, where

$$\tilde{V}^{p,i}_x(n) = V_x(np+i) = f(x+np+i) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \ . \tag{5.2}$$

PROPOSITION 5.1. *Let i be given in $\{0,\dots,p-1\}$ and $x \in X$. Then $\tilde{H}_x^{p,i}$ is a discrete one dimensional periodic Schrödinger operator, where the period $\tilde{N}_p$ does not depend on i and is given by*

$$\tilde{N}_p = \frac{N}{\gcd(p,N)} \,. \tag{5.3}$$

Proof. It is easy to see that $\tilde{H}_x^{p,i}$ is a periodic Schrödinger operator. For the calculation of its period, which clearly does not depend on i, we consider two cases: $p = \alpha N$ or not.
First, if $p = \alpha N$, $\alpha \geq 1$, $\tilde{V}_x^{p,i}(n) = f(x+i)$ is constant for all n. Thus $\tilde{N}_p = 1$. Remark that $\gcd(N,p) = N$. Suppose now $p \neq \alpha N$. If $1 \leq p < N$, the period $\tilde{N}_p$ is such that $\tilde{N}_p \times p$ is the lowest multiple of N, which is of course a multiple of p. Therefore

$$\tilde{N}_p = \frac{\operatorname{lcm}(N,p)}{p} \,.$$

If $p > N$, let us consider the Euclidian division of p by N: $p = qN + r$, where $0 < r < N$ ($p \neq \alpha N$). It appears that $\tilde{V}_x^{p,i}(n) = f(x + nr + i)$ so that $\tilde{N}_p = \operatorname{lcm}(N,r)/r$.
Moreover for all a and b non-negative integers, $ab = \operatorname{lcm}(a,b) \times \gcd(a,b)$. Thus

$$\frac{\operatorname{lcm}(a,b)}{b} = \frac{a}{\gcd(a,b)} \,.$$

Finally, notice that for all $\alpha \geq 1$, $\gcd(a,b) = \gcd((a+\alpha b),b)$, and $\gcd(N,r) = \gcd(N,p)$. This concludes the proof. ◇◇◇

Recall that the spectrum of a discrete one-dimensional P-periodic Schrödinger operator is well known. Namely it is purely absolutely continuous and composed of P bands, which are closed intervals of $\mathbb{R}$. These bands are not necessarily disjoint. For a treatment of this case, we refer the reader to [To], chapter 4. We can now formulate a similar result for periodic sparse Schrödinger operators.

THEOREM 5.2. *For all $x \in X$, Σ^p is absolutely continuous and defined by*

$$\Sigma^p = \bigcup_{i=0}^{p-1} \sigma(\tilde{H}_x^{p,i}) \,. \tag{5.4}$$

There are at most $p\tilde{N}_p$ bands in the spectrum.

Proof. By minimality and ergodicity of $\mathcal{T}$, the spectrum is the same for all x (Corollary 2.3). From the previous proposition, the associated operators are $\tilde{N}_p$-periodic. Thus, the spectrum of each associated operator $\tilde{H}_x^{p,i}$ is purely absolutely continuous and composed of $\tilde{N}_p$ bands. Theorem 3.7 completes the proof. ◇◇◇

5.2. Decomposition function and consequences on the spectrum

By the strict ergodicity of the dynamical system $\mathcal{T}$, we can apply Theorem 4.1. Let $\delta(p)$ be the decomposition function corresponding to p. Thanks to the peculiar form of X and to the definition of T, we have information about $\delta(p)$.

THEOREM 5.3. *If $X = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ and $Tx = x + 1$ on X, then the decomposition function is given for any non-negative integer p, by*

$$\delta(p) = \gcd(p, N) \ . \tag{5.5}$$

Moreover, each dynamical system $(T^p_{|X_k}, X_k, \mathcal{B}_{|X_k}, \mu_k)$ is strictly ergodic.

Proof. It is clear that $\delta(p)$ is linked with the period of T^p. By Relation (5.3), T^p is $\tilde{N}_p$-periodic with $\tilde{N}_p = N/\gcd(N,p)$. This means that each T^p-invariant subset of X admits exactly $\tilde{N}_p$ elements. By definition of the decomposition function, there are $\delta(p)$ such subsets. Thus $\delta(p) \times \tilde{N}_p = N$, and we deduce the expression of $\delta(p)$. The second statement is clear. ◇◇◇

Remark 5.1. This theorem implies that $1 \leq \delta(p) \leq \min(p, N)$. ◇

Remark 5.2. When p and N are relatively prime we know immediately that $\delta(p) = 1$. Moreover

$$\begin{aligned} \delta(p) = p &\iff N = \alpha p \quad \text{where} \quad \alpha \geq 1 \ , \\ \delta(p) = N &\iff p = \beta N \quad \text{where} \quad \beta \geq 1 \ . \end{aligned}$$

Remark 5.3. We suppose X_0 to be the subset of the partition $\{X_0, \ldots, X_{\delta(p)-1}\}$ containing 0. ◇

This theorem allows us to an analogue of Proposition 4.6, whatever the value of $\delta(p)$.

THEOREM 5.4. *Let p be a non-negative integer, and $(H^p_x)_{x\in X}$ be a family of p-sparse N-periodic Schrödinger operators. Then*

$$\Sigma^p = \bigcup_{i=0}^{\delta(p)-1} \tilde{\Sigma}^{p,i} \ , \tag{5.6}$$

where $\tilde{\Sigma}^{p,i}$ is the spectrum of every operator $\tilde{H}^{p,i}_x$ when $x \in X_0$. In the same way, for $\varepsilon \in \{pp, ac, sc\}$, the ε-spectral component of the spectrum Σ^p is given by

$$\Sigma^p_\varepsilon = \bigcup_{i=0}^{\delta(p)-1} \tilde{\Sigma}^{p,i}_\varepsilon \ , \tag{5.7}$$

with $\sigma_\varepsilon(\tilde{H}^{p,i}_x) = \tilde{\Sigma}^{p,i}_\varepsilon$ for μ_0-almost all x in X_0.

Proof. Thanks to strict ergodicity given by Theorem 5.3, and as in the proof of Proposition 4.6, we see that

$$\Sigma^p = \bigcup_{i=0}^{p-1} \tilde{\Sigma}^{p,i} \quad \text{and} \quad \Sigma^p_\varepsilon = \bigcup_{i=0}^{p-1} \tilde{\Sigma}^{p,i}_\varepsilon \ .$$

But the main property of $\delta(p)$ is $\delta(p) \mid p$. Let us consider α the non-negative integer verifying $p = \alpha\delta(p)$. Thus

$$\Sigma^p = \bigcup_{j=0}^{\alpha-1} \Big(\bigcup_{i=0}^{\delta(p)-1} \tilde{\Sigma}^{p,i+j\delta(p)} \Big) \ .$$

For any $j \in \{0, \ldots, \alpha-1\}$ and $i \in \{0, \ldots, \delta(p)-1\}$ we know that $\tilde{\Sigma}^{p,i} = \sigma(\tilde{H}^{p,i}_x)$ for all $x \in X_0$. By Proposition 3.9 and for any x in X_0, we see that $\tilde{H}^{p,i+j\delta(p)}_x = \tilde{H}^{p,i}_{(T^{\delta(p)})^j x}$ and $T^{\delta(p)}x \in X_0$. Thus $\tilde{\Sigma}^{p,i} = \sigma(\tilde{H}^{p,i}_{(T^{\delta(p)})^j x}) = \tilde{\Sigma}^{p,i+j\delta(p)}$, and Relation (5.6) is proved. For (5.7) equalities hold μ_0-almost everywhere. ◇◇◇

COROLLARY 5.5. *When $p = \beta N$ where $\beta \geq 1$, then we know exactly Σ^p.*

$$\Sigma^p = \bigcup_{i=0}^{N-1} [f(i) - 2, f(i) + 2] \,. \tag{5.8}$$

Proof. By Remark 5.2 $\delta(p) = N$. Thus $X_0 = \{0\}$ and Theorem 5.4 implies for $\varepsilon \in \{pp, ac, sc\}$ that

$$\Sigma^p = \bigcup_{i=0}^{N-1} \sigma(\tilde{H}_0^{p,i}) \quad \text{and} \quad \Sigma_\varepsilon^p = \bigcup_{i=0}^{N-1} \sigma_\varepsilon(\tilde{H}_0^{p,i}) \,.$$

But, as we have already noticed in the proof of Proposition 5.1, $\tilde{V}_0^{p,i}$ is a constant sequence equal to $f(i)$. In this case, we know (*cf* [To]), that $\sigma(\tilde{H}_0^{p,i}) = [f(i) - 2, f(i) + 2]$. This concludes the proof. ◇◇◇

The following corollary is another direct consequence of Proposition 5.4.

COROLLARY 5.6. *If p is a non-negative integer and if $q = \alpha N + p$ when $\alpha \geq 1$, then*

$$\Sigma^p = \Sigma^q \,. \tag{5.9}$$

Proof. By Theorem 5.4, Σ^p (respectively Σ^q) depends on the sets $\tilde{\Sigma}^{p,0}, \ldots, \tilde{\Sigma}^{p,\delta(p)-1}$ (respectively on the sets $\tilde{\Sigma}^{q,0}, \ldots, \tilde{\Sigma}^{q,\delta(q)-1}$), which are the spectra of $\tilde{H}_x^{p,0}, \ldots, \tilde{H}_x^{p,\delta(p)-1}$ on X_0^p (respectively of $\tilde{H}_y^{q,0}, \ldots, \tilde{H}_y^{q,\delta(q)-1}$ on X_0^q). But, as we have already noticed in the proof of Proposition 5.1, $\delta(q) = \delta(\alpha N + p) = \delta(p)$ and therefore $\tilde{N}_p = \tilde{N}_q$.
Moreover X_0^p (respectively X_0^q), contains 0 and is exactly equal to the set $\{0, T^p 0, \ldots, T^{(\tilde{N}_p - 1)p} 0\}$ (respectively $X_0^q = \{0, T^q 0, \ldots, T^{(\tilde{N}_q - 1)q} 0\}$). For $0 \leq n < \tilde{N}_p$, $nq \bmod (N) \equiv np \bmod (N)$ and then $T^{nq} 0 = T^{np} 0$. This implies that $X_0^p = X_0^q$.
Let us now compare $\tilde{\Sigma}^{p,i}$ and $\tilde{\Sigma}^{q,i}$ for $i = 0, \ldots, \delta(p) - 1$. For all n and all $x \in X_0$, let us note that $x + nq + i \bmod (N) \equiv x + np + i \bmod (N)$ and $\tilde{V}_x^{q,i}(n) = \tilde{V}_x^{p,i}(n)$. Thus $\tilde{H}_x^{q,i} = \tilde{H}_x^{p,i}$ and the proof is complete. ◇◇◇

Remark 5.4. This corollary means that the spectrum does not change if p is replaced by $p + \alpha N$, with $\alpha \geq 1$. Thus the spectrum of H_x^p with $p = \alpha N$ is exactly Σ^N and we find again the result of Corollary 5.5. ◇

Remark 5.5. Now, Σ^p admits a most $\delta(p)\tilde{N}_p$ bands, that is to say at most N bands. ◇

PROPOSITION 5.7. *Let p be given in $\{1, \ldots, N-1\}$. We put $q = N - p$. Then*

$$\Sigma^p = \Sigma^q \,. \tag{5.10}$$

Proof. When N is even and $p = N/2$ the result is evident. We suppose now $1 \leq q < p < N$. It is easy to prove that $\delta(p) = \delta(q)$. Consequently $\tilde{N}_p = \tilde{N}_q$. Thus the associated operators $\tilde{H}_x^{p,i}$ and $\tilde{H}_x^{q,i}$ are periodic Schrödinger operators with same periods, and according to Theorem 5.4 their spectra are decomposed into the same number of parts: $\Sigma^p = \bigcup_{i=0}^{\delta(p)-1} \sigma(\tilde{H}_x^{p,i})$ for all x in X_0^p, and $\Sigma^q = \bigcup_{i=0}^{\delta(p)-1} \sigma(\tilde{H}_x^{q,i})$ for all x in X_0^q. But $X_0^p = \{0, T^p 0, \ldots, T^{(\tilde{N}_p - 1)p} 0\}$ and $X_0^q = \{0, T^q 0, \ldots, T^{(\tilde{N}_p - 1)q} 0\}$. For $1 \leq n < \tilde{N}_p$, it is clear that $(\tilde{N}_p - n)p \bmod (N) \equiv N(p/\gcd(N,p)) - np \bmod (N) \equiv n(N-p) \bmod (N)$, and $T^{(\tilde{N}_p - n)p} 0 = T^{nq} 0$. Hence $X_0^p = X_0^q$.

Moreover for $0 \leq i < \delta(p)$, all x in X_0 and all n, $x+n(N-q)+i \bmod (N) \equiv x+(-n)q+i \bmod (N)$ and $\tilde{V}_x^{p,i}(n) = \tilde{V}_x^{q,i}(-n)$. We use the Floquet theorem which characterizes elements of the spectrum of a P-periodic one-dimensional discrete Schrödinger operator H as follows (for more details see [To]).

$$\lambda \in \sigma(H) \Longleftrightarrow \exists u \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) \text{ such that } \begin{cases} Hu = \lambda u \\ u(n+P) = \rho u(n) \ \forall n \end{cases}, \text{ where } \rho \in \mathbb{C} \text{ and } \mid \rho \mid = 1.$$

For any $u \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, we put $\bar{u}(n) = u(-n)$. Then $\bar{u} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$.
Let us consider $\lambda \in \sigma(\tilde{H}_x^{p,i})$ and u like in the Floquet theorem. Then $\tilde{H}_x^{p,i}u = \lambda u \Longrightarrow \tilde{H}_x^{q,i}\bar{u} = \lambda\bar{u}$, and for all n, $u(n+\tilde{N}_p) = \rho u(n) \Longrightarrow \bar{u}(n+\tilde{N}_q) = (1/\rho)\bar{u}(n)$ with $\mid 1/\rho \mid = \mid \rho \mid = 1$ ($\tilde{N}_p = \tilde{N}_q$). We thus get $\sigma(\tilde{H}_x^{p,i}) \subset \sigma(\tilde{H}_x^{q,i})$. In the same manner, we establish the equality of the spectra and the proof is complete. ◇◇◇

We formulate our main results in a theorem.

THEOREM 5.8. *Let p be a non-negative integer, and H_x^p a p-sparse N-periodic Schrödinger operator. Then*

(i) $\sigma(H_x^p) = \Sigma^p$ *for all* $x \in X$;
(ii) *If* $p \equiv 0 \bmod (N)$, *then* $\Sigma^p = \cup_{i=0}^{N-1}[f(i)-2, f(i)+2]$;
(iii) *If* $p \not\equiv 0 \bmod (N)$, *then* $\Sigma^p = \Sigma^{p \bmod (N)} = \Sigma^{N-(p \bmod (N))}$;
(iv) Σ^p *is purely absolutely continuous and it is composed of* N *bands.*

The nature of the spectrum of a family of p-sparse N-periodic Schrödinger operators does not change with p. It is always purely absolutely continuous and always composed of N bands. Moreover, the spectrum itself can change according to the values of p. Notice that Σ^p is exactly the spectrum of the classical N-periodic Schrödinger operator when $p \equiv 1 \bmod (N)$.

5.3. Examples

Example 5.3.1 . The case of p-sparse 1-periodic Schrödinger operators
Let us consider $X = \mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$ (*i.e.* $X = \{\overline{0}\}$), and $V_0(n) = \alpha$ for all n. Then Σ^p is absolutely continuous and composed of a unique band for any non-negative integer p.

$$\Sigma^p = [\alpha-2, \alpha+2] \ .$$

Example 5.3.2. The case of p-sparse 2-periodic Schrödinger operators
Let us consider $X = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. The potential takes two values α and β. We suppose $\alpha < \beta$. Then

$$\Sigma^p = \begin{cases} \Sigma^1 & \text{if } p \text{ is even} \\ \Sigma^2 & \text{if } p \text{ is odd.} \end{cases}$$

We know exactly the form of these spectra.

$$\Sigma^1 = [\frac{\alpha+\beta-\sqrt{16+(\alpha-\beta)^2}}{2}, \alpha] \bigcup [\beta, \frac{\alpha+\beta+\sqrt{16+(\alpha-\beta)^2}}{2}]$$
$$\Sigma^2 = [\alpha-2, \alpha+2] \bigcup [\beta-2, \beta+2] \ .$$

Thus, there exist exactly two disjoint bands in the spectrum when p is odd, but in the case where p is even, one or two bands can appear.

In particular when $\alpha = -\beta$, with $\beta > 0$, we always have exactly two bands in the spectrum.

$$\Sigma^1 = [-\sqrt{4+\beta^2}, -\beta] \bigcup [\beta, \sqrt{4+\beta^2}]$$
$$\Sigma^2 = [-\beta - 2, -\beta + 2] \bigcup [\beta - 2, \beta + 2] .$$

In this case, notice that the spectrum is symmetric with respect to the origin.

Example 5.3.3 . The case of p-sparse 3-periodic Schrödinger operators
Let us consider $X = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Then

$$\Sigma^p = \begin{cases} \Sigma^1 & \text{if } p \equiv 1 \text{ or } 2 \bmod (3) \\ \Sigma^3 & \text{if } p \equiv 0 \bmod (3). \end{cases}$$

We know the form of these spectra:

$$\Sigma^1 = \{\lambda \in \mathbb{R} \ / \ [(\lambda - f(0))(\lambda - f(1))(\lambda - f(2)) - (\lambda - f(0)) - (\lambda - f(1)) - (\lambda - f(2))]^2 \leq 4\}$$
$$\Sigma^3 = [f(0) - 2, f(0) + 2] \bigcup [f(1) - 2, f(1) + 2] \bigcup [f(2) - 2, f(2) + 2]$$

and there exist at most three bands. Notice that the three values of f play the same role in Σ^p. If we suppose $f(0) = 0$, $f(1) = \alpha$ and $f(2) = -\alpha$ with $\alpha > 0$, then we immediately have

$$\Sigma^3 = [-\alpha - 2, -\alpha + 2] \bigcup [-2, 2] \bigcup [\alpha - 2, \alpha + 2] .$$

Moreover, $\Sigma^1 = \{\lambda \in \mathbb{R} \ / \ [\lambda^3 - (3+\alpha^2)\lambda + 2][\lambda^3 - (3+\alpha^2)\lambda - 2] \leq 0\}$, and we can show there exist three positive reals $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, such that

$$\Sigma^1 = [-\lambda_3, -\lambda_2] \bigcup [-\lambda_1, \lambda_1] \bigcup [\lambda_2, \lambda_3] .$$

Thus Σ^1 is always composed of 3 disjoint bands whereas Σ^3 can have 1 or 3 bands according to α is strictly greater than 4 or not. Anyway, the spectrum is again symmetric with respect to the origin.

6. The random case

Let us consider $X = S^{\mathbb{Z}}$, where S is a compact subset of $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ the σ-algebra generated by the cylinder sets, *i.e.* by sets of the form $\{x \ / \ x_{n_1} \in A_1, \ \ldots \ , x_{n_q} \in A_q\}$ for $n_1, \ldots, n_q \in \mathbb{Z}$ and $A_1, \ldots, A_q$ Borel sets in $\mathbb{R}$. We consider a sequence $(V(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ of random variables. The sequence of potentials is given by $V_x(n) = V(n)(x)$ for all x in X (we say V_x is a realization).
In all this part , we will suppose the $V(n)$ are independent identically distributed random variables of product distribution μ and of same law $r(.)$. Remark that the dynamical system $\mathcal{T} = (T, X, \mathcal{B}, \mu)$, where T is the shift operator on X, is ergodic. The discrete one-dimensional Schrödinger operator H_x associated with the sequence of potentials $(V_x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$, is referred to as the Anderson model (see [C, F, Ki, Si], chapter 9, or [Fi, Pa]). According to this, the p-sparse Schrödinger operator H_x^p is called a p-sparse Anderson model.

PROPOSITION 6.1. *Let $(H_x^p)_{x \in X}$ be a p-sparse Anderson model. Then, $(\tilde{H}_x^{p,i})_{x \in X}$, for all $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, is an Anderson model.*

Proof. Each $\tilde{V}_x^{p,i}$ is a realization of a sequence of the random variables $(V(np+i))_{n \in \mathbb{Z}}$. This sequence is also an independent identically distributed random variables sequence, whose common product distribution is again μ and law is $r(.)$. ◇◇◇

This proposition directly leads to a more precise result as Theorem 3.7.

COROLLARY 6.2. *Under the assumptions of Proposition 6.1, the spectrum Σ^p of μ-almost all operators H_x^p is the union of p compact subsets of $\mathbb{R}$. More precisely*

$$\Sigma^p = \bigcup_{i=0}^{p-1} \Sigma^{p,i} \text{ where } \quad \Sigma^{p,i} = \sigma(\tilde{H}_x^{p,i}) \quad \mu - p.p. \tag{6.1}$$

Moreover, if $\varepsilon \in \{pp, ac, sc\}$, and if Σ_ε^p (respectively $\Sigma_\varepsilon^{p,i}$) is the ε-component of μ-almost all operators H_x^p (resp. $\tilde{H}_x^{p,i}$), then

$$\Sigma_\varepsilon^p = \bigcup_{i=0}^{p-1} \Sigma_\varepsilon^{p,i} \ . \tag{6.2}$$

Proof. It is a consequence of a theorem given by Kunz and Souillard in [Ku, Sou] and extended by Kirsch and Martinelli in [Ki, Mar]. By Proposition 6.1, i being fixed in $\{0, \ldots, p-1\}$, $(\tilde{H}_x^{p,i})_{x \in X}$ is an Anderson model. Thus μ-almost all operators $\tilde{H}_x^{p,i}$ have the same spectrum and spectral components. Theorem 3.7 concludes the proof. ◇◇◇

Moreover, an analogue of the Kotani-Simon theorem can be stated.

THEOREM 6.3. *Let $(H_x^p)_{x \in X}$ be a p-sparse Anderson model.Then $\sigma_{ac}(H_x^p) = \emptyset$ for μ-almost all x.*

Proof. By Proposition 6.1, $(\tilde{H}_x^{p,i})_{x \in X}$ is an Anderson model. The theorem of Kotani-Simon establishes that for μ-almost all x, $\sigma_{ac}(\tilde{H}_x^{p,i}) = \emptyset$ (for more details, we refer the reader to [Ko] and [Si]). Corollary 6.2 concludes the proof. ◇◇◇

According to some peculiar properties of the common density function $r(.)$, several results can be deduced. Firstly we can state an analogue of the Kunz and Souillard theorem (see for instance [Ku, Sou], [Fi, Pa] or [C, F, Ki, Si], [B, L] and [Car, L]).

THEOREM 6.4. *Let $(H_x^p)_{x \in X}$ be a p-sparse Anderson model. We suppose that the common density function of $(V(n))_n$ is a non-negative function such that there exist a real $0 < \lambda < 1$ with*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \mid r(t)(1+ \mid t \mid)^{1+\lambda} \mid < +\infty \ . \tag{6.3}$$

Then, with probability 1, the spectrum is pure point and equal to

$$\Sigma^p = [-2, 2] + Supp(r) \ . \tag{6.4}$$

Moreover all eigenvectors are exponentially localized.

Remark 6.1. $Supp(r)$ denotes the support of the function r. If A and B are two subsets of $\mathbb{R}$, then $A + B = \{a + b \ ; \ a \in A \ \text{ and } b \in B\}$. ◇

Remark 6.2. According to Property (6.3), r is a bounded function. ◇

Proof. By Proposition 6.1, we can apply the Kunz and Souillard theorem, given in [Ku, Sou], to each family $(\tilde{H}_x^{p,i})_{x \in X}$. For μ-almost all x, the spectrum of $\tilde{H}_x^{p,i}$ is pure point and equal to $[-2, 2] + Supp(r)$. Applying Corollary 6.2 completes the proof. ◇◇◇

In the particular case where the common density function $r(.)$ is continuous with compact support, we get Corollary 6.5.

COROLLARY 6.5. *Let $(H_x^p)_{x\in X}$ be a p-sparse Anderson model. We suppose that the common density function of $(V(n))_n$ verifies the following conditions:*

(a) r is a continuous function on $\mathbb{R}$;

(b) $r(t) = 0 \Longleftrightarrow t \notin]\alpha,\beta[\subset \mathbb{R}$.

Then the spectrum is μ-almost surely pure point and equal to

$$\Sigma^p = [\alpha - 2, \beta + 2] \,. \tag{6.5}$$

Moreover, all eigenvectors are exponentially localized.

Proof. Support of $r(.)$ is $[\alpha,\beta]$ and r verifies Relation (6.3) for any λ in $]0,1[$. Proof is complete in applying Theorem 6.4. ◇◇◇

On another hand, if the random variables $V(n)$ are Bernoulli distributed, an analogue of the Carmona, Klein and Martinelli theorem is verified (see [Fi, Pa] for instance).

THEOREM 6.6. *Let $(H_x^p)_{x\in X}$ be a p-sparse Anderson model. We suppose that the sequence $(V(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ admits a Bernoulli distribution, that is to say:*

$$V(n)(x) = \begin{cases} 0 & \text{with probability } \rho \\ \alpha & \text{with probability } 1-\rho, \text{ and } \alpha \text{ real.} \end{cases}$$

Then the spectrum is μ-almost surely pure point and equal to

$$\Sigma^p = [-2,2] \bigcup [\alpha - 2, \alpha + 2] \,. \tag{6.6}$$

Moreover, all eigenvectors are exponentially localized.

Proof. Using the same arguments as in the proof of Theorem 6.4 and according to the Carmona, Klein and Martinelli theorem given in [Fi, Pa], we obtain the proof. ◇◇◇

Remark 6.3. Let us mention that in the special cases corresponding to Theorems 6.4 and 6.6, and to Corollary 6.5, neither the spectrum nor its nature changes with p. ◇

7. Sparse Schrödinger operators with substitutional potentials

The class of almost periodic potentials lies between periodic and random cases. We study here the subclass of substitutional potentials. In the first part, we recall some elementary results in substitutional sequences. For more details, we refer the reader to [Que].

7.1. Substitutional dynamical systems

Let us consider a finite set $\mathcal{A} = \{0, \ldots, r-1\}$ called an alphabet. We denote by $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ the set of all bi-infinite sequences of letters from $\mathcal{A}$. A word is a finite sequence of letters. We consider a substitution ξ which associates to any letter a in $\mathcal{A}$, a word $\xi(a)$. Moreover ξ will be supposed primitive, which means that there exist a non-negative integer k such that for all pairs of letters a and b in $\mathcal{A}$, the word $\xi^k(a)$ contains the letter b. We also assume that there exists a letter c such that c is the first letter of $\xi(c)$.

Under the primitivity condition, ξ admits fixed-points, that is to say there exist bilateral sequences $w = \ldots\ w_{-1}\ w_0\ w_1\ \ldots$ in $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ such that $\xi(w) = w$ (see [Dek] and [Que]). Such a fixed-point w is called a substitutional sequence. It is a minimal sequence, which means that every word of w occurs in w with bounded gaps (the bound depending on the word).

We denote by T the shift operator on $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. A topological dynamical system can be assigned in a natural way to the substitutional sequence w. Precisely

$$X(\xi) = \overline{\{T^k w \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}} \ , \tag{7.1}$$

where the closure is according to the usual product topology on $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. $X(\xi)$ is a compact metrizable set. The restriction of T to $X(\xi)$ is again denoted by T. The pair $(X(\xi), T)$ is a topological dynamical system. Moreover it is minimal. Notice that under the primitivity condition on ξ, any fixed-point w of ξ generates the same dynamical system. From now on, a fixed-point w is given. Let $\mathcal{B}$ be the σ-algebra of Borel subsets of $X(\xi)$. Under primitivity of ξ, there exists a unique T-invariant probability measure μ on $X(\xi)$, which turns out to be ergodic (for more details see [Que]). Thus $\mathcal{T} = (T, X(\xi), \mathcal{B}, \mu)$ is a strictly ergodic dynamical system. $\mathcal{T}$ is called the dynamical system generated by substitution ξ. Apply Theorem 4.1 for a given non-negative integer p, we find a partition of $X(\xi)$ into $\delta(p)$ parts. We always choose X_0 to be the member of the partition containing w. When $\delta(p) = p$, we deduce immediately from Corollary 4.3, the strict ergodicity of $\mathcal{T}_0^p = (T^p_{|X_0}, X_0, \mathcal{B}_{|X_0}, \mu_0)$.

PROPOSITION 7.1. *If p is a non-negative integer such that $\delta(p) = 1$, then $\mathcal{T}^p = (T^p, X(\xi), \mathcal{B}, \mu)$ is a minimal ergodic dynamical system.*

Proof. According to [Dek], T^p is minimal if and only if it is ergodic. ◇◇◇

Now, if $B = b_0 \dots b_{j-1}$ is a word of letters from $\mathcal{A}$, then j is called the length of B and is denoted by $|B|$. When for any letter a of $\mathcal{A}$, the length of $\xi(a)$ is equal to ℓ, where ℓ is a non negative integer, the substitution ξ is said to have constant length or uniform length. Otherwise, it has non constant length. In the case where ξ is a substitution with constant length, we can say more about the dynamical system $\mathcal{T}^p$ (we refer the reader to [Dek]).

PROPOSITION 7.2. *Let us consider a substitution ξ with a constant length ℓ, and a non-negative integer p.*

(i) If $\delta(p) = 1$, then there exist a finite alphabet $\hat{\mathcal{A}}$ and a primitive substitution η with constant length equal to ℓ on $\hat{\mathcal{A}}$, such that the dynamical system generated by the substitution η is isomorphic to $\mathcal{T}^p$.

(ii) If $\delta(p) = p$, then there exist a finite alphabet $\hat{\mathcal{A}}$ and a primitive substitution η with constant length equal to ℓ on $\hat{\mathcal{A}}$, such that the dynamical system generated by the substitution η is isomorphic to $\mathcal{T}_0^p$.

(iii) In particular when $p = \ell^m$, with $m \geq 1$, we know $\delta(\ell^m) = \ell^m$. Moreover $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, $\eta = \xi$, thus $\mathcal{T}_0^p$ is isomorphic to $\mathcal{T}$.

Remark 7.1. The alphabet $\hat{\mathcal{A}}$ and the substitution η, just as the isomorphism between $\mathcal{T}^p$ (respectively $\mathcal{T}_0^p$) and the dynamical system generated by η, are explicitly constructed in the proof of M.F. Dekking (see [Dek]). ◇

7.2. Properties of the sparse Schrödinger operators

We only suppose that ξ is a primitive substitution. Let us consider the potential $(V_x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ given by

$$V_x(n) = f(T^n x) \ , \ \forall \ n \in \mathbb{Z} \tag{7.2}$$

where f is a real-valued bounded measurable application on $X(\xi)$. Then H_x^p is called a p-sparse Schrödinger operator with substitutional potential. In the theory of Schrödinger operators we usually consider f verifying

$$f(x) = v(x_0) \ , \tag{7.3}$$

where v is a finite real-valued map from $\mathcal{A}$ and x_0 is the first component of x. Moreover v is chosen so that the resulting sequence of potential values $V_w = (v(w_n))_{n\in\mathbb{Z}}$ is aperiodic.
According to Proposition 4.6, we know that if $\delta(p) = p$, then Σ^p and its components are the unions of p compact sets, which are respectively the spectra and the spectral components of the associated operators on the dynamical system $\mathcal{T}_0^p$. In other words,

$$\Sigma^p = \bigcup_{i=0}^{p-1} \tilde{\Sigma}^{p,i} \quad \text{and} \quad \Sigma_\varepsilon^p = \bigcup_{i=0}^{p-1} \tilde{\Sigma}_\varepsilon^{p,i} \ ,$$

where $\varepsilon \in \{pp, ac, sc\}$, $\tilde{\Sigma}^{p,i} = \sigma(\tilde{H}_x^{p,i})$ for any $x \in X_0$, and $\tilde{\Sigma}_\varepsilon^{p,i} = \sigma_\varepsilon(\tilde{H}_x^{p,i})$ for μ_0-almost every x in X_0. By Proposition 7.1, we find a similar result when $\delta(p)$ equals 1.

PROPOSITION 7.3. *If p is a non-negative integer such that $\delta(p) = 1$, then*
(i) there exists a non-empty compact set of $\mathbb{R}$, denoted by $\tilde{\Sigma}^{p,0}$ which is the spectrum of $\tilde{H}_x^{p,0}$ for any $x \in X(\xi)$, and such that

$$\Sigma^p = \tilde{\Sigma}^{p,0} \ ; \tag{7.4}$$

(ii) for $\varepsilon \in \{pp, ac, sc\}$ and if $\tilde{\Sigma}_\varepsilon^{p,0}$ denotes the ε-component of the spectrum of $\tilde{H}_x^{p,0}$ for μ-almost all x in $X(\xi)$, we see that

$$\Sigma_\varepsilon^p = \tilde{\Sigma}_\varepsilon^{p,0} \ . \tag{7.5}$$

Proof. According to (4.3), (4.4) and Proposition 7.1, and since $X_0 = X(\xi)$, the proof is complete. ◇◇◇

This proposition means that in the case where $\delta(p)$ is equal to 1, Σ^p is exactly the spectrum of a certain family of Schrödinger operators $(\tilde{H}_x^{p,0})_{x\in X(\xi)}$ whose potentials are given for any x in $X(\xi)$ by

$$\tilde{V}_x^{p,0}(n) = V_x(np) = v(x_{np}) \ , \ \forall n \in \mathbb{Z} \ . \tag{7.6}$$

In the case where $\delta(p)$ equals p, we have to study the p families of the associated operators $(\tilde{H}_x^{p,i})_{x\in X_0}$, with $0 \le i < p$, whose potentials are given for any x in X_0 and for $0 \le i < p$, by

$$\tilde{V}_x^{p,i}(n) = V_x(np+i) = v(x_{np+i}) \ , \ \forall n \in \mathbb{Z} \ . \tag{7.7}$$

We are now able to state, in the extremal cases $\delta(p) = 1$ and $\delta(p) = p$, a theorem concerning the absolutely continuous component of Σ^p.

THEOREM 7.4. *Let ξ be a primitive substitution on the alphabet $\mathcal{A}$ and p a non-negative integer. If p is such that $\delta(p) = 1$ (respectively, $\delta(p) = p$), then there is no absolutely continuous spectrum μ-almost surely (respectively, μ_0-almost surely).*

Proof. We first consider the case $\delta(p) = 1$. By (7.6) and Proposition 7.3, we have to study a new family of Schrödinger operators $(\tilde{H}_x^{p,0})_{x\in X(\xi)}$, associated with the strictly μ-ergodic dynamical system $\mathcal{T}^p$. But aperiodicity of V_w means that the topological support of μ is not a finite set. Thus $\tilde{V}_w^{p,0}$ is not periodic, and we can apply the Kotani theorem to the family $(\tilde{H}_x^{p,0})_{x\in X(\xi)}$ (see for instance [Ko]): for μ-almost every x in $X(\xi)$, $\tilde{H}_x^{p,0}$ does not admit any absolutely continuous part in its spectrum.
For the second case $\delta(p) = p$, we use (7.7) and the fact that the topological support of μ_0 is finite if and only if it is the same for the topological support of μ, in view to apply the Kotani theorem to the p families $(\tilde{H}_x^{p,i})_{x\in X_0}$ with $0 \le i < p$. Proposition 4.6 completes the proof. ◇◇◇

When the substitution ξ is primitive and has constant length, Proposition 7.2 can be applied, and means, under the condition $\delta(p) = 1$ or p, that each operator $\tilde{H}_x^{p,i}$ is a Schrödinger operator with substitutional potential. Moreover, when $p = \ell^m$, the corresponding substitution is again ξ, and the nature of the spectrum of these ℓ^m-sparse Schrödinger operators is the same as in the classical case of one-dimensional discrete Schrödinger operators with the same substitutional potential. We can say more: the nature of the spectrum Σ^{ℓ^m} does not change with $m \geq 1$.
We will illustrate these results by examples.

7.3. Examples

Example 7.3.1. The period-doubling substitution
We consider the alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. The period doubling substitution is defined by

$$\begin{aligned} \xi: \quad 0 &\longrightarrow 01 \\ 1 &\longrightarrow 00 \, . \end{aligned}$$

It is a primitive substitution with constant length equal to 2. We can choose the fixed-point $w = \lim_{\leftarrow} \xi^{2n}(0) \lim_{\rightarrow} \xi^{2n}(0)$, *i.e.*

$$w = \ldots \, 0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,\overline{0}\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,0 \, \ldots$$

where the overline corresponds to the component w_0. By primitivity of ξ, $X(\xi)$ is generated by any fixed-point, and the dynamical system generated by ξ is strictly ergodic.

Moreover, the decomposition function can be calculated (for more details see [Dek]):

$$\begin{aligned} \delta(2^n) &= 2^n \quad \forall n \geq 1 \\ \delta(m) &= 1 \, , \quad \text{if } m \text{ is odd} \\ \delta(2^n m) &= 2^n \, , \quad \forall n \geq 1 \, , \quad \forall \, m \text{ odd} \, . \end{aligned}$$

According to Theorem 7.4, the following proposition is deduced.

PROPOSITION 7.5. *Let us consider the period doubling substitution on $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Then*

(i) for any (non-negative) odd integer p, Σ^p is the spectrum of a Schrödinger operator with substitutional potential $\tilde{H}_x^{p,0}$, for any $x \in X(\xi)$, and $\Sigma_{ac}^p = \emptyset$;

(ii) for any non-negative integer n, Σ^{2^n} is a Cantor set of zero Lebesgue measure, and for μ-almost all x in X, it is purely singular continuous.

Proof. (i) is a direct consequence of Theorem 7.4. For (ii), we remark that each $\tilde{H}_x^{p,i}$ is a Schrödinger operator with substitutional potential generated by the period doubling substitution. But we know, according to [Be, Bo, Gh] (see also [Bo, Gh], [P], [su]), that the spectrum of every associated operator on X_0 is a Cantor set of zero Lebesgue measure, and it is for μ_0-almost x in X_0 purely singular continuous. So is Σ^{2^n}. ◇◇◇

Example 7.3.2. The Thue-Morse substitution
We consider the alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. The Thue-Morse substitution is defined by

$$\begin{aligned} \xi: \quad 0 &\longrightarrow 01 \\ 1 &\longrightarrow 10 \, . \end{aligned}$$

It is a primitive substitution with constant length equal to 2. We can choose the fixed-point $w = \lim_{\leftarrow} \xi^{2n}(0) \lim_{\rightarrow} \xi^{2n}(0)$, *i.e.*

$$w = \ldots \, 0\,1\,1\,0\,\overline{0}\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,1 \, \ldots \quad .$$

By primitivity the dynamical system generated by ξ is strictly ergodic. Moreover, the decomposition function is known:

$$\delta(2^n) = 2^n \ , \quad \forall n \geq 1$$
$$\delta(m) = 1 \ , \quad \text{if } m \text{ is odd}$$
$$\delta(2^n m) = 2^n \ , \quad \forall n \geq 1 \ , \quad \forall\ m \text{ odd} \ .$$

According to Theorem 7.4, we find an analogue of Proposition 7.5:

PROPOSITION 7.6. *Let us consider the Thue-Morse substitution on $\mathcal{A} = \{0,1\}$. Then*

(i) for any (non-negative) odd integer p, Σ^p is the spectrum of a Schrödinger operator with substitutional potential $\tilde{H}_x^{p,0}$, for any $x \in X(\xi)$, and $\Sigma_{ac}^p = \emptyset$;

(ii) for any non-negative integer m, Σ^{2^m} is a Cantor set of zero Lebesgue measure, and for μ-almost all x in X, it is purely singular continuous.

8. Conclusion

We can now compare the three special cases of p-sparse Schrödinger operators treated in this paper. When the potential is a sequence of independent identically distributed random variables, neither the nature of the spectrum nor its location change with p: the spectrum of H^p is exactly the one of the corresponding Schrödinger operator $H = H^1$.
On the other side, if the potential is N-periodic, then the nature of the spectrum does not change with p, just as the number of its bands (there are always N bands). But Σ^p (the spectrum of H^p), is the same as the spectrum of the classical N-periodic Schrödinger operator only in the case of $p \equiv 1 \bmod (N)$ or $p \equiv N-1 \bmod (N)$.
The case of the substitutional potentials, which lies between the two others, is more complicated because linked with the decomposition function $\delta(p)$. In fact we only know that there exists no absolutely continuous part in the spectrum of H^p if $\delta(p) = 1$ or p. Moreover, if the primitive substitution has a constant length ℓ and if $p = \ell^n$, then the nature of Σ^p is the one of the spectrum of the corresponding substitutional Schrödinger operator H.
Finally, in these cases (random, periodic and substitutional), the spectral behavior of p-sparse Schrödinger operators is similar to the one of the corresponding Schrödinger operators for all p when the potential is random or periodic, and for $\delta(p) = 1$ or p when it is substitutional. We could conjecture similar results for sparse Schrödinger operators with limit periodic or quasi-periodic potentials. Such a study will surely leads us to a more accurate understanding of these random operators.

References

[B, L] BOUGEROL P., LACROIX J.; *Products of random matrices with applications to Schrödinger operators*; Birkhauser, Boston (1985).

[Be, Bo, Gh] BELLISSARD J., BOVIER A., GHEZ J. M.; *Spectral properties of a tight binding Hamiltonian with period doubling potential*; Commun. in Math. Phys.; **135**, 379–399 (1991).

[Ber] BERTHIER A. M.; *Spectral theory and waves operators for the Schrödinger equation*; Research Notes in Math. **71**; Pitman Advanced Publishing Program (1982).

[Bo, Gh] BOVIER A., GHEZ J. M., *Spectral properties of one-dimensional Schrödinger operators with potentials generated by substitutions*; Commun. Math. Phys.; Springer Verlag; **158**, 45–66 (1993). *Erratum* in Commun. Math. Phys.; Springer Verlag; **166**, 431–432 (1994).

[Car, L] CARMONA R. , LACROIX J. ; *Spectral properties of random Schrödinger operators*;

Birkhauser, Boston (1990).

[C, F, Ki, Si] CYCON H. L., FROESE R. G., KIRSCH W., SIMON B.; *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*; Springer Verlag (1987).

[Dek] DEKKING F. M.; *The spectrum of dynamical systems arising from substitutions of constant length*; Springer Verlag; **41**, 221–239 (1978).

[Dun, Sch] DUNFORD, SCHWARZ L.; *Linear operators*; vol. I and II; Interscience Publishers (1963).

[Fi, Pa] FIGOTIN A., PASTUR L.; *Spectra of random and almost-periodic operators*; Springer Verlag (1992).

[G, H] GOTTSCHALK W.H., HEDLUND G.A.; *Topological dynamics*; Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.; vol. 36; Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1955).

[Ka] KAMAE T.; *A topological invariant of substitution minimal sets*; J. Math. Soc. Japan; **24**, 285–306 (1972).

[Ki, Mar] KIRSCH W., MARTINELLI F.; *On the ergodic properties of the spectrum of general random operators*; J. Reine Angew. Math.; **334**, 141–156 (1982).

[Ko] KOTANI S.; *Jacobi matrices with random potentials taking finite many values*; Rev. Math. Phys.; **1**, 129–133 (1988).

[Ku, Sou] KUNZ H., SOUILLARD B.; *Sur le spectre des opérateurs aux différences finies aléatoires*; Commun. Math. Phys.; Springer Verlag; **78**, 201–246 (1980).

[P] PEYRIERE J.; *On the trace maps for products of matrices associated with substitutive sequences*; J. Stat. Phys.; **62**, 411–414 (1991).

[Que] QUEFFELEC M.; *Substitution dynamical systems-Spectral analysis*; Lecture notes in Math. ; **1294**; Springer Verlag (1987).

[Si] SIMON B.; *Kotani theory for one-dimensional Stochastic Jacobi matrices*; Commun. Math. Phys.; **89**, 227–234 (1983).

[Su] SÜTO A.; *Schrödinger difference equation with deterministic ergodic potentials*; in "Beyond quasi-crystals", Les éditions de Physique, Springer Verlag; ed. by Axel F. and Gratias D. ; course 17, 481–549 (1995).

[To] TODA M.; *Theory of nonlinear lattices*; Springer Verlag (1989).

APPENDICE A

Décomposition du spectre

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. On considère A un opérateur linéaire borné auto-adjoint de $\mathcal{H}$ dans lui-même. On note $\{E(\lambda)\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ sa famille spectrale. Nous donnons ici quelques définitions et rappelons a cette occasion quelques faits utiles. Cet appendice sert aussi à fixer les notations en usage dans la thèse Pour plus de détails, nous renvoyons à [Dun,Sch],[Ber],[Fi;Pa],[Ile] et [Kato].

A.1. Spectre d'un opérateur borné auto-adjoint

Le spectre $\sigma(A)$ d'un opérateur linéaire borné A est l'ensemble des valeurs λ pour lesquelles l'opérateur $(\lambda Id - A)$ n'admet pas d'opérateur inverse borné défini sur $\mathcal{H}$. Le spectre de A est un ensemble compact non vide de $\mathbb{C}$. Lorsque A est auto-adjoint, $\sigma(A)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, contenu dans l'intervalle $[-\| A \|, \| A \|]$.

Nous supposerons désormais que A est un opérateur (linéaire) auto-adjoint. Il lui est associé une mesure spectrale $E(\cdot)$. Le spectre de l'opérateur A peut aussi être caractérisé comme étant l'ensemble (fermé) des points de croissance de la famille spectrale $(E(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{R}}$. Plus exactement,

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \,/\, \forall\, \varepsilon > 0\ ,\ E(\lambda+\varepsilon) - E(\lambda-\varepsilon) \neq 0\}\ .$$

A.2. Spectre ponctuel et spectre continu

Le nombre réel λ est une *valeur propre* de A s'il existe un vecteur non nul $h \in \mathcal{H}$ tel que $Ah = \lambda h$. Le *spectre ponctuel* de A, noté $\sigma_p(A)$, est l'ensemble de toutes les valeurs propres de A. C'est un ensemble au plus dénombrable, caractérisé par

$$\lambda \in \sigma_p(A) \iff E(\{\lambda\}) \neq 0\ .$$

Dans tout ce travail, nous utilisons la notation $\sigma_{pp}(A)$ pour désigner la fermeture du spectre pontuel. On parle alors de *spectre purement ponctuel.* Notons $\mathcal{H}_p(A) = \mathcal{H}_p$ le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$, engendré par tous les vecteurs propres de A, ainsi que π_p^A $(= \pi_p)$ la projection orthogonale sur $\mathcal{H}_p$. Alors $\pi_p = \sum_{i,\lambda_i \in \sigma_p(A)} E(\{\lambda_i\})$. Puisque toutes les projections orthogonales $E(\{\lambda_i\})$ commutent avec A, il en est de même pour π_p. On considère l'opérateur $A_p = A \circ \pi_p(A)$, appelé *partie ponctuelle* de l'opérateur A. Alors $A_p = \pi_p \circ A \circ \pi_p$, et surtout

$$\sigma(A_p) = \overline{\sigma_p(A)} = \sigma_{pp}(A)\ .$$

De plus, si $\mathcal{H}_c(A) = \mathcal{H}_c$ désigne le complémentaire orthogonal de $\mathcal{H}_p$ dans $\mathcal{H}$, on peut définir la projection orthogonale sur $\mathcal{H}_c$ notée $\pi_c^A = \pi_c$. Alors $\pi_c = Id - \pi_p$, π_c commute avec A et $A \circ \pi_c = \pi_c \circ A \circ \pi_c$. Posons $A_c = A \circ \pi_c$. Le spectre de ce nouvel opérateur A_c est fermé dans $\mathbb{R}$ et n'admet pas de valeurs propres: c'est le *spectre continu* de A. On dit alors que A_c est la *partie continue* de l'opérateur A, et on a $\sigma_c(A) = \sigma(A_c)$.
Lorsque $\mathcal{H}_p = \mathcal{H}$, alors $\sigma(A) = \overline{\sigma_p(A)}$. On dit que A a un spectre *purement ponctuel.* Le spectre de A est alors formé par les valeurs propres de A, ainsi que par les valeurs d'adhérence de $\sigma_p(A)$. Par contre lorsque $\mathcal{H}_p = \emptyset$, *i.e.* $\mathcal{H}_c = \mathcal{H}$, on parle de spectre *purement continu* et $\sigma(A) = \sigma_c(A)$.

Les sous-espaces $\mathcal{H}_p$ et $\mathcal{H}_c$ peuvent aussi être définis à partir des mesures boréliennes m_f $(m_f(\Delta) = (f, E(\Delta)f)$ pour tout borélien Δ de $\mathbb{R}$ et tout vecteur f de $\mathcal{H}$. Alors $\mathcal{H}_p$ (respectivement $\mathcal{H}_c$), est formé par les vecteurs f pour lesquels la mesure m_f est atomique (respectivement continue).

En résumé,

$$\sigma(A) = \overline{\sigma_p(A)} \cup \sigma_c(A)$$
$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_p(A) \oplus \mathcal{H}_c(A),$$

mais $\sigma_c(A)$ et $\overline{\sigma_p(A)}$ ne sont pas toujours des ensembles disjoints.

A.3. Spectre singulier et spectre absolument continu

Il est possible d'appliquer le théorème de décomposition de Lebesgue aux mesures m_f. On obtient alors une unique décomposition de m_f en la somme d'une mesure $m_{f,ac}$ absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue), et d'une mesure $m_{f,s}$ singulière par rapport à cette même mesure.
De par sa définition, la mesure m_f dépend de la famille spectrale associée à A. On dit alors que f est *absolument continu* (respectivement *singulier*) *par rapport à* A si $m_f = m_{f,ac}$ (respectivement si $m_f = m_{f,s}$).
Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$, engendré par les vecteurs absolument continus par rapport à A est noté $\mathcal{H}_{ac}(A) = \mathcal{H}_{ac}$. C'est *le sous-espace de continuité absolue de* A. De même, le sous-espace engendré par les vecteurs singuliers par rapport à A, noté $\mathcal{H}_s(A) = \mathcal{H}_s$, est *le sous-espace des singularités de* A. Ces deux sous-espaces sont fermés et vérifient $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac}(A) \oplus \mathcal{H}_s(A)$. Remarquons que les projections orthogonales $\pi_{ac}(A) = \pi_{ac}$ et $\pi_s(A) = \pi_s$ sur ces deux sous-espaces respectifs, commutent avec A.
Le *spectre absolument continu* de A, noté $\sigma_{ac}(A)$, est le spectre de l'opérateur $A \circ \pi_{ac} = \pi_{ac} \circ A \circ \pi_{ac}$ vu comme un opérateur de $\mathcal{H}_{ac}$. Le *spectre singulier* de A, $\sigma_s(A)$ est de la même façon, celui de l'opérateur $A \circ \pi_s = \pi_s \circ A \circ \pi_s$ sur $\mathcal{H}_s$. Ces deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ sont fermés et $\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_{ac}(A)$.

A.4. Spectre singulier continu

Il existe en fait des liens très forts entre les spectres ponctuel et continu, et les spectres absolument continu et singulier. Tout d'abord $\mathcal{H}_p \subseteq \mathcal{H}_s$ et donc $\sigma_p(A) \subseteq \sigma_s(A)$. De plus, $\mathcal{H}_s^\perp = \mathcal{H}_{ac} \subset \mathcal{H}_p^\perp = \mathcal{H}_c$, de sorte que $\sigma_{ac}(A) \subseteq \sigma_c(A)$. Il est alors possible de décomposer $\mathcal{H}_c$ en une somme directe orthogonale $\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sc}$, où $\mathcal{H}_{sc}$ est le complémentaire de $\mathcal{H}_{ac}$ dans $\mathcal{H}_c$. L'espace $\mathcal{H}_{sc}$ correspond par ailleurs à l'ensemble des vecteurs f de $\mathcal{H}$ pour lesquels la mesure m_f est singulière continue par rapport à la mesure de Lebesgue. On obtient la somme orthogonale

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac}(A) \oplus \mathcal{H}_{sc}(A) \oplus \mathcal{H}_p(A)\,.$$

Si $\pi_{sc}(A) = \pi_{sc}$ désigne la projection orthogonale sur $\mathcal{H}_{sc}$, le spectre de l'opérateur $A \circ \pi_{sc}$ sur $\mathcal{H}_{sc}$ est alors appelé le *spectre singulier continu* de A et noté σ_{sc}. Une décomposition du spectre est donnée par:

$$\sigma(A) = \overline{\sigma_p(A)} \cup \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_{sc}(A),$$

et ces ensembles ne sont pas forcément disjoints.

A.5. Spectre discret et spectre essentiel

Il existe une dernière décomposition du spectre. Le *spectre discret* est l'ensemble de toutes les valeurs propres isolées dans $\sigma(A)$, de multiplicité finie. On le note $\sigma_{dis}(A)$. On a

$$\lambda \in \sigma_{dis}(A) \iff \lambda \text{ point isolé de } \sigma(A) \text{ et } 0 < \dim(E(\{\lambda\})\mathcal{H}) < +\infty\,.$$

Le *spectre essentiel* de A est $\sigma_{ess}(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_{dis}(A)$. C'est un ensemble fermé caractérisé par

$$\lambda \in \sigma_{ess}(A) \iff \forall \varepsilon > 0\,,\ \dim E((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon])\mathcal{H} = \infty\,.$$

Le spectre essentiel est donc constitué par

- le spectre continu;
- les valeurs propres isolées de multiplicité infinie (ce qui ne se produit pas dans le cadre d'opérateurs définis sur $\ell^2(\mathbb{Z})$);
- les points d'accumulation du spectre ponctuel.

Lorsque le spectre ne possède pas de valeur propre isolée, on parle d'*ensemble parfait.*

Une *quasi-valeur propre* de A ou *valeur propre généralisée* est un réel λ pour lequel il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de norme 1 de $\mathcal{H}$, telle que $\lim_n \|Ah_n - \lambda h_n\| = 0$. Pour un opérateur auto-adjoint, λ appartient au spectre si et seulement si λ est une quasi-valeur propre. On parle de *valeur propre approximée* pour une quasi-valeur propre lorsque la suite $(h_n)_n$ de la définition converge faiblement vers 0.
La caractérisation de *Weyl* du spectre essentiel est donnée par l'équivalence suivante:

$$\lambda \in \sigma_{ess}(A) \iff \lambda \text{ est une valeur propre approximée .}$$

On obtient ainsi la décomposition $\sigma(A) = \sigma_{dis}(A) \cup \sigma_{ess}(A)$ avec $\sigma_{dis}(A) \cap \sigma_{ess}(A) = \emptyset$. Lorsque $\sigma(A) = \sigma_{ess}(A)$, on parle de *spectre purement essentiel.*

APPENDICE B

Suites presque périodiques

Dans cet appendice, deux définitions différentes de suites presque périodiques sont énoncées, en accord avec celles de J.L. Mauclaire (voir [M]). Dans la littérature se rapportant aux opérateurs de Schrödinger aléatoires, la distinction entre ces deux notions n'est jamais parfaitement claire, alors qu'elle induit des résultats différents. On parle de potentiels presques périodiques, qu'il s'agisse de suites de presque-Mathieu (quasi-périodiques uniformes), de potentiels hiérarchiques (limite périodiques uniformes) ou de suites sturmiennes (1-Besicovitch presque périodiques).
Nous terminons cet appendice avec un tableau récapitulatif des divers types de suites presque périodiques rencontrés.

Dans l'espace vectoriel $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ des suites réelles bornées, on se donne un élément $w = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. On note S l'opérateur décalage bilatéral.

B.1. Presque périodicité uniforme, limite périodicité, quasi-périodicité

L'ensemble des décalés de v dans $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ est, par définition,

$$\Gamma = \{S^k w \ ; \ k \in \mathbb{Z}\} \ . \tag{B.1}$$

On dit que v est *presque périodique uniforme* (ou encore *presque périodique au sens de Bohr*), si et seulement si l'ensemble Γ admet une fermeture compacte dans $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ muni de la norme uniforme. Le fermé $X = \overline{\Gamma}$ est appelé l'*enveloppe*, ou aussi l'*orbite*, de la suite w. Alors x est un élément de X si et seulement s'il est limite uniforme d'une suite $(S^{k_i}w)_{i\in\mathbb{N}}$.

PROPOSITION B.1. *Soit w une suite presque périodique uniforme. Alors son enveloppe X est un groupe topologique compact.*

Pour plus de détails, nous nous référons à [M], [Ped] et [Car;L].
On remarque également que l'application qui à tout entier k associe $S^k w$ est un morphisme continu de groupes. Par dualité, il est alors possible de considérer le morphisme de $\hat{X}$ à valeurs dans $\hat{\mathbb{Z}}$. L'ensemble $\hat{X}$ est le *module de fréquence* associé à la suite presque périodique w. Par le théorème de Peter-Weyl sur X, w est limite uniforme d'une combinaison linéaire de la forme $e^{2i\pi\alpha k}$, où $\alpha \in \hat{X}$ et $k \in \mathbb{Z}$.
Un élément w de $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ est dit *limite-périodique* (*uniforme*) lorsqu'il est la limite uniforme d'une suite $(v^n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments périodiques de $\ell^\infty(\mathbb{Z})$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{Z}} |v_k^n - w_k| = 0 \, . \tag{B.2}$$

On a alors la

PROPOSITION B.2. *Si w est limite-périodique (uniforme), alors w est presque périodique uniforme.*

On en déduit que si w est limite-périodique, il admet un module de fréquence $\hat{X}$. De plus, les éléments de son module de fréquence sont rationnels: on dit que $\hat{X}$ a *la propriété du diviseur*, à savoir

$$\forall \hat{x}, \hat{y} \in \hat{X} \ , \ \exists \hat{z} \in \hat{X} \ ; \ \frac{\hat{x}}{\hat{z}} \text{ et } \frac{\hat{y}}{\hat{z}} \in \mathbb{Z} \, . \tag{B.3}$$

Remarque B.1. Une telle caractérisation est donnée par exemple par Avron et Simon (voir [Av;Si;1]). ◇

Soit enfin w une suite presque périodique de module de fréquence $\hat{X}$. On dit que w est *quasi-périodique* si et seulement si $\hat{X}$ est finiment engendré.

Exemple 1. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, continue et périodique de période 1. Soit également α un nombre irrationnel. On définit la suite $w^{(\alpha)}$ comme suit:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \ , \ w^{(\alpha)}(n) = g(n\alpha) \ .$$

La suite $w^{(\alpha)}$ est presque périodique uniforme, et son enveloppe est $X = \{w^{(\alpha,x)} \ ; \ x \in [0,1[\}$. Plus précisément, si g est telle que $\{k \in \mathbb{Z} \ ; \ \hat{g}(k) \neq 0\}$ engendre $\mathbb{Z}$ (où $\hat{g}(k)$ sont les coefficients de Fourier de g), alors la suite $w^{(\alpha)}$ est quasi-périodique.

Exemple 2. En particulier si $g(.) = \lambda \cos(.)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite $w^{(\alpha)}$ est quasi-périodique. Elle est appelée *suite de presque Mathieu.*

B.2. Presque périodicité au sens de Besicovitch

Dans $\ell^\infty(\mathbb{Z})$, on peut également définir

$$\forall u, \ v \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) \ , \ d_1(u,v) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} |u_k - v_k| \ . \tag{B.4}$$

Notons que d_1 n'est pas une distance. Un élément w de $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ est dit *1-Besicovitch presque périodique* s'il existe une suite de polynômes trigonométriques $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que

$$\lim_{n \to \infty} d_1(P_n, w) = 0 \ , \tag{B.5}$$

avec $P_n(k) = \sum_{j=1}^{J_n} a_{n,j} e^{2i\pi\alpha_j k}$. Ainsi, w est une suite 1-Besicovitch presque périodique lorsque w est limite, au sens de d_1, d'une suite d'éléments presque périodiques uniformes.

Exemple 3. La suite w définie par

$$\forall k \in \mathbb{Z} \ , \ w_k = \lambda \chi_I(k\alpha (\mathrm{mod}\, 1)) \ , \tag{B.6}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, α est un irrationnel tel que $0 < \alpha < 1$ et $\mathbf{1}_I$ la fonction caractéristique d'un intervalle I de $[0,1[$, est 1-Besicovitch presque périodique. Elle est appelée *suite circulaire.*

Remarque B.4. Une suite circulaire **n'est pas** une suite presque périodique uniforme. $\diamond$

Remarque B.5. En particulier, les suites circulaires qui apparaissent dans la théorie des opérateurs aléatoires de Schrödinger sont de l'une des formes suivantes:

$$w_k = \lambda \mathbf{1}_{]0,\alpha]}(k\alpha (\mathrm{mod}\, 1)) \ ,$$
$$w_k = \lambda \mathbf{1}_{]0,\alpha]}(k\alpha \mathrm{mod}\, 1)) \ ,$$
$$w_k = \lambda \mathbf{1}_{[1-\alpha,1]}(k\alpha (\mathrm{mod}\, 1)) \ .$$

où $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in [0,1[\backslash\mathbb{Q}$. $\diamond$

Remarque B.6. Par ailleurs, si w est une suite circulaire de l'une des trois formes précédentes et si $\lambda = 1$, on parle de *suites sturmiennes.* $\diamond$

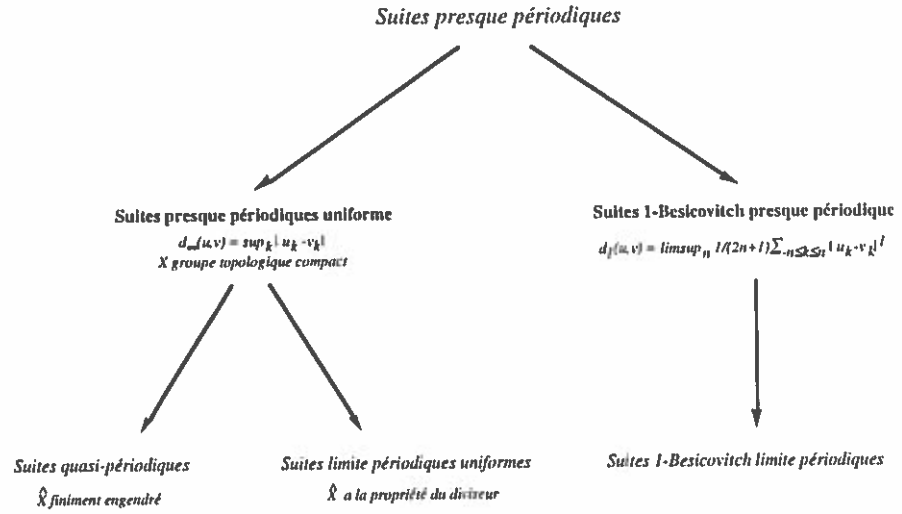
Remarque B.7. Si enfin w est une suite circulaire de l'une des trois formes de la remarque F.5 et si $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$, on parle de la *suite de Fibonacci.* $\diamond$

Exemple 4. Plus généralement, soit f une fonction réelle d'une variable réelle, périodique de période 1 et Riemann-intégrable. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors la suite w définie par

$$\forall k \in \mathbb{Z} \ , \ w_k = f(k\alpha) \ , \tag{B.7}$$

est 1-Besicovitch presque périodique.
De même que dans le cadre uniforme, il est possible de définir une suite 1-Besicovitch limite-périodique comme limite, au sens de d_1, d'une suite d'éléments périodiques.

B.3. Tableau récapitulatif



APPENDICE C

Suites substitutives

Dans cet appendice, nous redonnons les définitions de base, nécessaires à la bonne compréhension des opérateurs de Schrödinger à potentiels substitutifs, et nous dressons une liste non exhaustive des différentes suites de substitution rencontrées dans la littérature. Rien n'est évidemment démontré. Pour plus de détails, nous renvoyons à [Que;1] et [Dek;1] en particulier.

C.1. Lettres, mots, suites, espace topologique

Soit $\mathcal{A}$ un *alphabet* fini formé de s lettres, avec $s \geq 2$; explicitement, posons $\mathcal{A} = \{0, \ldots, s-1\}$. On note $\mathcal{A}^k$ l'ensemble des *mots* formés de k lettres de $\mathcal{A}$. L'ensemble de tous les mots finis est $\mathcal{A}^* = \cup_{k \geq 1} \mathcal{A}^k$. Si $\alpha = \alpha_0 \ldots \alpha_{n-1}$ est un élément de $\mathcal{A}^*$, alors n est la *longueur* de ce mot, et on écrit $|\alpha| = n$. Le nombre de fois où la lettre a apparaît dans le mot α est noté $N_a(\alpha)$. Les éléments de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ sont les *suites bi-infinies* de lettres de $\mathcal{A}$. Ils sont notés sous la forme $x = \ldots x_{-1}x_0x_1x_2 \ldots$, où $x_n \in \mathcal{A}$ pour tout n. Si $x = \ldots x_{-1}x_0x_1 \ldots$ est une suite, alors $x_{[k,n]}$, pour $k \leq n$, représente le mot $x_kx_{k+1} \ldots x_n$. Si $(A_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une suite bi-infinie de mots (finis), on peut alors former un élément de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ par concaténation: $x = \ldots A_{-1}\dot{A}_0A_1 \ldots$, où $\dot{A}_0$ signifie que $x_{[0,|A_0|-1]} = A_0$.
On peut munir $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ de la métrique d définie par: $d(x,y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|k|}} |x_k - y_k|$. La base de la topologie induite sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ par d est formée par les cylindres ainsi que leurs décalés: ceci correspond à la topologie produit. Un *cylindre* $[\alpha]$, où α est un mot fini, est exactement $\{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}; x_{[0,|\alpha|-1]} = \alpha\}$. Le décalage sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est notée T; il est défini par $(Tx)_n = x_{n+1}$, pour tout n et tout $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

C.2. Substitution

Une *substitution* est une application $\xi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$. La matrice associée à la substitution est notée $M(\xi)$, elle est définie par $M(\xi)_{i,j} = N_i(\xi(j))$, pour $0 \leq i,j \leq s-1$. La j-ème colonne représente la composition du mot $\xi(j)$ et $|\xi(j)| = \sum_{i=0}^{s-1} M(\xi)_{i,j} = l_j$. La *longueur* de la substitution ξ est le vecteur $(l_0, \ldots, l_{s-1})$. Si tous les l_j sont égaux, on dit que la substitution est *à longueur constante*. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est *à longueur non constante*.
L'application ξ se prolonge par concaténation à $\mathcal{A}^*$, puis à $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. On définit en effet:

$$\xi(\alpha) = \xi(\alpha_0) \ldots \xi(\alpha_n) \quad \text{si } \alpha = \alpha_0 \ldots \alpha_n \in \mathcal{A}^*$$
$$\xi(x) = \ldots \xi(x_{-1})\dot{\xi}(x_0)\xi(x_1) \ldots \quad \text{si } x = \ldots x_{-1}x_0x_1 \ldots \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$$

La substitution ξ est dite *irréductible* si elle vérifie la condition suivante:

$$\forall\, a\,,\, b \in \mathcal{A}\,,\, \exists\, k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \xi^k(a) \text{ contient } b\,.$$

Si k peut être choisi indépendamment de a et de b, on parle de substitution *primitive*. La primitivité de ξ signifie qu'il existe un entier non nul k pour lequel chaque $\xi^k(a)$ contient tous les éléments de $\mathcal{A}$.

Remarque C.1. Il est également possible de considérer la substitution ξ^n, définie par $\xi^n(a) = \xi(\xi^{n-1}a)$, pour tout entier $n \geq 1$. On peut vérifier que la matrice correspondant à ξ^n, est exactement $M(\xi)^n$. La primitivité de ξ est alors équivalente à l'existence d'un entier $k \geq 1$ tel que $M(\xi)^k > 0$, soit $M(\xi^k)_{i,j} \geq 1$ pour toutes les lettres i et j de $\mathcal{A}$. De plus ξ est primitive si et seulement si ξ^k est primitive. ◇

Lorsque ξ est primitive, le théorème de Perron-Frobénius assure l'existence d'une valeur propre dominante positive θ de $M(\xi)$ qui soit telle que toute autre valeur propre soit de module inférieur ou égal à θ. Par ailleurs, il existe un vecteur propre associé à θ dont les composantes $(d_1, \ldots, d_s)$ sont positives et vérifient $\sum_{1 \leq i \leq s} d_i = 1$. Enfin, pour $i \in \{1, \ldots, s\}$ et pour tout $a \in \mathcal{A}$,

$$d_i = \lim_{n \to \infty} \frac{N_i(\xi^n(a))}{|\xi^n(a)|} .$$

Remarque C.2. Si ξ est une substitution primitive et à longueur constante, alors la valeur propre de Perron-Frobénius de $M(\xi)$ est exactement cette longueur. ◇

C.3. Suites substitutives

Pour toute substitution ξ, on peut trouver deux lettres a et b de $\mathcal{A}$, ainsi qu'un entier $n \geq 1$, tels que la dernière lettre de $\xi^n(a)$ est égale à a, et que la première lettre de $\xi^n(b)$ est exactement b. On dit alors que ab est un *couple cyclique* pour ξ. Tout couple cyclique ab engendre une suite w^{ab} de la manière suivante:

$$\forall k \geq 0 \ , \ w^{ab}_{[-|\xi^{nk}(a)|, |\xi^{nk}(b)|-1]} = \xi^{nk}(a)\xi^{nk}(b) .$$

De plus, parmi les couples cycliques pour ξ, il en existe toujours au moins un pour lequel la suite w^{ab} est *minimale* (dite encore *presque périodique*), c'est-à-dire que toute apparition d'un mot fini dans w^{ab} ne se produit qu'avec des lacunes bornées. On parle alors de *suite substitutive*.

Remarque C.3. Pour plus de détails sur les couples cycliques, nous nous réfèrerons à Dekking [Dek;1]. Des exemples de tels couples sont donnés dans le paragraphe suivant. ◇

C.4. Une liste non exhaustive de suites substitutives

La suite de Fibonacci

La substitution de Fibonacci est définie sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ par:

$$\begin{aligned} \xi \ : \ 0 &\longmapsto 01 \\ 1 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

Sa matrice $M(\xi)$ est alors $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Cette substitution est à longueur non constante $(2, 1)$, mais primitive $(M(\xi)^2 > 0)$. La valeur propre de Perron-Frobénius est le nombre d'or $\theta = (1 + \sqrt{5})/2$, et le vecteur propre normalisé associé a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1/\theta \\ 1/\theta^2 \end{pmatrix}$.

De plus, $\xi^2(0) = \underline{0}1\underline{0}$, donc 00 est un couple cyclique possible. w^{00} est exactement la *suite de Fibonacci bi-infinie*. C'est une suite minimale.

La suite à période doublante

La substitution à période doublante est définie sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ par:

$$\begin{aligned} \xi \ : \ 0 &\longmapsto 01 \\ 1 &\longmapsto 00 \end{aligned}$$

Sa matrice $M(\xi)$ est alors $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. C'est une substitution à longueur constante égale à 2 et primitive $(M(\xi)^2 > 0)$. La valeur propre de Perron-Frobénius est $\theta = 2$, et le vecteur propre normalisé associé a pour

coordonnées $\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$. De plus, $\xi^2(0) = \underline{0}10\underline{0}$, donc 00 est un couple cyclique possible. w^{00} est exactement la *suite à période doublante bi-infinie*. C'est une suite minimale.

La suite de Thue-Morse

La substitution de Thue-Morse est définie sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ par:

$$\begin{aligned} \xi \ : \ 0 &\longmapsto 01 \\ 1 &\longmapsto 10 \end{aligned}$$

Sa matrice $M(\xi)$ est alors $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. C'est une substitution à longueur constante égale à 2 et primitive ($M(\xi) > 0$). La valeur propre de Perron-Frobénius est $\theta = 2$, et le vecteur propre normalisé associé a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.
De plus, $\xi^2(0) = \underline{0}11\underline{0}$, donc 00 est un couple cyclique possible. w^{00} est exactement la *suite de Thue-Morse bi-infinie*. C'est une suite minimale.

La suite de Rudin-Shapiro

La substitution de Rudin-Shapiro est définie sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3\}$ par:

$$\begin{aligned} \xi \ : \ 0 &\longmapsto 02 \\ 1 &\longmapsto 32 \\ 2 &\longmapsto 01 \\ 3 &\longmapsto 31 \end{aligned}$$

Sa matrice $M(\xi)$ est alors $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. C'est une substitution à longueur constante égale à 2 et primitive ($M(\xi)^3 > 0$). La valeur propre de Perron-Frobénius est $\theta = 2$, et le vecteur propre normalisé associé a toutes ses coordonnées égales (à 1/4). De plus, $\xi^2(1) = 310\underline{1}$ et $\xi^2(0) = \underline{0}201$, donc 10 est un couple cyclique possible.

La suite de pliage de papier

La substitution de pliage de papier est définie sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3\}$ par:

$$\begin{aligned} \xi \ : \ 0 &\longmapsto 01 \\ 1 &\longmapsto 13 \\ 2 &\longmapsto 02 \\ 3 &\longmapsto 23 \end{aligned}$$

Sa matrice $M(\xi)$ est alors $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. C'est une substitution à longueur constante égale à 2, et primitive ($M(\xi)^3 > 0$). La valeur propre de Perron-Frobénius est $\theta = 2$.
De plus, $\xi(3) = 2\underline{3}$ et $\xi(0) = \underline{0}1$, donc 10 est un couple cyclique possible. C'est une suite minimale.

La suite de non-Pisot binaire

La substitution de non-Pisot binaire est définie sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ par:

$$\begin{aligned} \xi \ : \ 0 &\longmapsto 01 \\ 1 &\longmapsto 000 \end{aligned}$$

Sa matrice $M(\xi)$ est alors $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. ξ est une substitution à longueur non constante (2,3), mais primitive ($M(\xi)^2 > 0$). La valeur propre de Perron-Frobénius est $\theta = (1 + \sqrt{13})/2$, et le vecteur propre normalisé associé a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 - \theta \\ \theta - 2 \end{pmatrix}$.
De plus, $\xi^2(0) = \underline{0}00\underline{0}$, donc 00 est un couple cyclique possible.w^{00} est exactement la *suite de non-Pisot binaire*. C'est une suite minimale.

La suite de non-Pisot ternaire

La substitution de non-Pisot ternaire est définie sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$ par:

$$\begin{aligned} \xi \ : \ 0 &\longmapsto 2 \\ 1 &\longmapsto 0 \\ 2 &\longmapsto 101 \end{aligned}$$

Sa matrice $M(\xi)$ est alors $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ξ est une substitution à longueur non constante (1,1,3), mais primitive ($M(\xi)^5 > 0$). De plus, $\xi^3(0) = \underline{0}2\underline{0}$, donc 00 est un couple cyclique possible.w^{00} est exactement la *suite de non-Pisot ternaire*. C'est une suite minimale.

La suite circulaire

La substitution circulaire est définie sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$ par:

$$\begin{aligned} \xi \ : \ 0 &\longmapsto 202 \\ 1 &\longmapsto 02202 \\ 2 &\longmapsto 01202 \end{aligned}$$

Sa matrice $M(\xi)$ est alors $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. ξ est une substitution à longueur non constante (3,5,5), mais primitive ($M(\xi)^2 > 0$). La valeur propre de Perron-Frobénius est $\theta = 2 + \sqrt{5}$, et le vecteur propre normalisé associé a pour coordonnées $(1/2)\begin{pmatrix} 5 - \theta \\ \theta - 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. De plus, 20 est un couple cyclique possible.
C'est une suite minimale.

La suite de Thue-Morse généralisée

La substitution de Thue-Morse généralisée est définie sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3\}$ par:

$$\begin{aligned} \xi \ : \ 0 &\longmapsto 013 \\ 1 &\longmapsto 102 \\ 2 &\longmapsto 231 \\ 3 &\longmapsto 320 \end{aligned}$$

Sa matrice $M(\xi)$ est alors $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et ξ est une substitution à longueur constante égale à 3; elle est primitive ($M(\xi)^2 > 0$). La valeur propre de Perron-Frobénius est $\theta = 3$; le vecteur propre normalisé associé a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$. De plus, $\xi^2(0) = \underline{0}13102320\underline{0}$, donc 00 est un couple cyclique possible. w^{00} est exactement la *suite de Thue-Morse généralisée*. C'est une suite minimale.

La suite de Fibonacci généralisée

La substitution de Fibonacci généralisée est définie sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ par:

$$\begin{array}{rcl} \xi_n : 0 & \longmapsto & 01 \ldots 1 = 01^n \\ 1 & \longmapsto & 0 \end{array},$$

où n est un entier naturel non nul (pour $n = 1$, on retrouve la substitution de Fibonacci classique). Sa matrice $M(\xi_n)$ est alors $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. ξ_n est une substitution à longueur non constante $(n+1, 1)$, mais primitive ($M(\xi_n)^2 > 0$). La valeur propre de Perron-Frobénius est $\theta_n = (1+\sqrt{4n+1})/2$, et le vecteur propre normalisé associé a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1/\theta_n \\ n/\theta_n^2 \end{pmatrix}$.
De plus, $\xi_n^2(0) = \underline{0}1^n0^{n-1}\underline{0}$, donc 00 est un couple cyclique possible. w^{00} est exactement la *suite de Fibonacci généralisée*. C'est une suite minimale.

Bibliographie

[Al;P] ALLOUCHE J.P., PEYRIERE J.; *Sur une formule de récurrence sur les traces de produits de matrices associées à certaines substitutions*; C. R. Acad. Sc. Paris; t. 302, Série II, No 18, 1135–1136, 1986.

[Ax;P] AXEL F., PEYRIERE J.; *Spectrum and extended states in a harmonic chain with controlled disorder: effects of the Thue-Morse symmetry*; J. of Stat. Phys.; **57**, 5/6, 1013–1047, 1989.

[Av;Si;1] AVRON J., SIMON B.; *Almost periodic Schrödinger operators I. Limit periodic potentials*; Comm. in Math. Phys.; Springer Verlag; **82**, 101–120, 1981.

[Av;Si;2] AVRON J., SIMON B.; *Almost periodic Schrödinger operators II. The integrated density of states*; Duke Math. J.; **50**, 1, 369–391, 1983.

[Be;1] BELLISSARD J.; *Spectral properties of Schrödinger's operator with a Thue-Morse potential*; Springer Proceedings in Phys.; **47**, 140–150, 1990.

[Be;2] BELLISSARD J.; in *"From number theory to physics"*, chapter Gap labelling theorems for Schrödinger operators; Springer Verlag, Berlin, Heidelberg; 538–630, 1992.

[Be;Bes;Mo] BELLISSARD J., BESSIS D., MOUSSA P.; *Chaotic states of almost periodic Schrödinger operators*; Phys. Rev. Lett.; **49**, 10, 701–704, 1982.

[Be;Bo;Gh;1] BELLISSARD J., BOVIER A., GHEZ J.M.; *Spectral properties of a tight binding Hamiltonian with period doubling potential*; Commun. in Math. Phys.; **135**, 379–399, 1991.

[Be;Bo;Gh;2] BELLISSARD J., BOVIER A., GHEZ J.M.; *Gap labelling theorem for one dimensional discrete Schrödinger operators*; Rev. Math. Phys.; **4**, 1–37, 1992.

[Be;Io;Sco;Tes] BELLISSARD J., IOCHUM B., SCOPPOLA E.; TESTARD D.; *Spectral properties of one dimensional quasi-crystals*; Commun. in Math. Phys.; **125**, 527–543, 1989.

[Be;Si] BELLISSARD J., SIMON B.; *Cantor spectrum for the almost Mathieu equation*; J. of Func. Anal.; **48**, 408–419, 1982.

[Ber] BERTHIER A.M.; *Spectral theory and waves operators for the Schrödinger equation*; Research Notes in Math. **71**; Pitman Advanced Publishing Program, 1982.

[Bo;Kr] BOGOLIOUBOV N., KRYLOV N.; *La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire*; Ann. of Math.; **38**, 63–113, 1937.

[B;L] BOUGEROL P., LACROIX J.; *Products of random matrices with applications to Schrödinger operators*; Birkhauser, Boston, 1985.

[Bo;Gh;1] BOVIER A., GHEZ J.M.; *Spectral properties of one-dimensional Schrödinger operators with potentials generated by substitutions*; Commun. Math. Phys.; Springer Verlag; **158**, 45–66, 1993. *Erratum* in Commun. Math. Phys.; Springer Verlag; **166**, 431–432, 1994.

[Bo;Gh;2] BOVIER A., GHEZ J.M.; *Remarks on the spectral properties of tight binding and Kronig-Penney models with substitution sequences*; J. Phys. A: Math. and Gen.; **28**, 2313–2324, 1995.

[Bo;Gh;3] BOVIER A., GHEZ J.M.; *Schrödinger operators with substitution potentials*; CPT-92; PE 2798, 1992.

[C;F;Ki;Si] CYCON H.L., FROESE R.G., KIRSCH W., SIMON B.; *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*; Springer Verlag, 1987.

[Ca] CASDAGLI M.; *Symbolic dynamics for the renormalization map of a quasiperiodic Schrödinger equation*; Commun. Math. Phys.; Springer Verlag; **107**, 295–318, 1986.

[Car;L] CARMONA R., LACROIX J.; *Spectral theory of random Schrödinger operators*; Birkhauser, Boston, 1990.

[Dei;Si] DEIFT P., SIMON B.; *Almost periodic Schrödinger operators III. The absolutely continuous spectrum in one dimension*; Commun. Math. Phys.; **90**, 389–411, 1983.

[Dek] DEKKING F. M.; *The spectrum of dynamical systems arising from substitutions of constant length*; Springer Verlag; **41**, 221–239, 1978.

[Dun;Sch] DUNFORD, SCHWARZ L.; *Linear operators*; vol. I and II; Interscience Publishers, 1963.

[Fi;Pa] FIGOTIN A., PASTUR L.; *Spectra of random and almost-periodic operators*; Springer Verlag, 1992.

[Fi;Pa 2] FIGOTIN A. L., PASTUR L. A.; *Ergodic properties of the eigenvalue distribution of vertain classes of random sel-adjoint operators*; Selecta Math. Sov. **3**, 69–86.

[G;H] GOTTSCHALK W.H., HEDLUND G.A.; *Topological dynamics*; Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.; **36**; Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1955.

[GB] GUILLE-BIEL WINDER C.; *Sparse Schrödinger operators*; à paraître dans Rev. in Math. Phys.; 1997.

[Gd] GORDON A.; Usp. Math. Nauk.; **31**, 2, 250–255, 1993.

[Ge;Ho;Si;Zh] GESZTESY F., HOLDEN H., SIMON B., ZHAO Z.; *Trace formulae and inverse spectral theory for Schrödinger operators*; Bull. of Amer. Math. Soc.; **29**, 257, 1976.

[Go] GOL'DSEID I.JA.; *The structure of the spectrum of the Schrödinger random difference operator*; Soviet Math. Dokl.; **22**, 3, 670–675, 1980.

[He] HELMBERG G.; *Introduction to spectral theory in Hilbert space*; North Holland Publishing company; Amsterdam; 1969.

[Hof;Kn;Si] HOF B., KNILL O., SIMON B.; *Singular continuous spectrum for palyndromic Schrödinger operators*; Commun. in Math. Phys.; Springer Verlag ; **174**, 149–159, 1995.

[Ka] KAMAE T.; *A topological invariant of substitution minimal sets*; J. Math. Soc. Japan; **24**, 285–306, 1972.

[Ki;Mar] KIRSCH W., MARTINELLI F.; *On the ergodic properties of the spectrum of general random operators*; J. Reine Angew. Math.; **334**, 141–156, 1982.

[Kr] KRENGEL U.; *Ergodic Theorems*; Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1985.

[Ko] KOTANI S.; *Jacobi matrices with random potentials taking finite many values*; Rev. Math. Phys.; **1**, 129–133, 1988.

[Ku] KUNZ H.; *Schrödinger equation in a hierarchical potential*; in "Beyond quasi-crystals", Les editions de Physique, Springer Verlag; ed. by Axel F. and Gratias D. ; course 18, 551–561, 1995.

[Ku;Li;Su] KUNZ H., LIVI R., SÜTO A.; *Cantor spectrum and singular continuity for a hierarchical Hamiltonian*; Commun. Math. Phys.; Springer Verlag; **122**, 643–679, 1989.

[Ku;Sou] KUNZ H., SOUILLARD B.; *Sur le spectre des opérateurs aux différences finies aléatoires*; Commun. Math. Phys.; Springer Verlag; **78**, 201–246, 1980.

[La;1] LAST Y.; *On the measure of gaps and spectra for discrete 1D Schrödinger operators*; Commun. in Math. Phys.; Springer Verlag; **149**, 347–360, 1992.

[La;2] LAST Y.; *A relation between a.c. spectrum of ergodic Jacobi matrices and the spectra of periodic approximants*; Commun. in Math. Phys.; Springer Verlag; **151**, 183–192, 1993.

[La;3] LAST Y.; *Zero measure for the almost-Mathieu operator*; Commun. in Math. Phys.; Springer Verlag; **161**, 421–432, 1994.

[Lid] LIDSKII V. B.; *The proper values of the sum and product of symetric matrices*; Dokl. Akad. Nauk, SSSR **75**, 769–772, 1950.

[Lu] LUCK J.M.; *Cantor spectra and scaling of gap widths in deterministic aperiodic systems*; Phys. Rev. B; **39**, 9, 5834–5849, 1989.

[M] MAUCLAIRE J.L.; *Intégration et théorie des nombres*; Travaux en cours, Hermann, Paris, 1986.

[O;Pa;Ra;Sc;Sig] OSTLUND S., PANDIT R., RAND D., SCHNELLNHUBER H.J., SIGGIA E.D.; *One-dimensional Schrödinger equation with an almost periodic potential*; Phys. Rev. Lett.; **50**, 23, 1873–1876, 1983.

[P] PEYRIERE J.; *On the trace maps for products of matrices associated with substitutive sequences*; J. Stat. Phys.; **62**, 1/2, 411–414, 1991.

[Ped] PEDERSEN K.; *Ergodic Theory*;Cambridge Univ. Press, 1983.

[Que;1] QUEFFELEC M.; *Substitution dynamical systems-Spectral analysis*; Lecture notes in Math.; Springer Verlag;**1294**, 1987.

[Que;2] QUEFFELEC M.; *Opérateur de Schrödinger à potentiel automatique*; à paraître.

[Si;1] SIMON B.; *Almost periodic Schrödinger operators: a review*; Advances in Appl. Math.; **3**, 463–490, 1982.

[Si;2] SIMON B.; *Kotani theory for one-dimensional Stochastic Jacobi matrices*; Commun. Math. Phys.; **89**, 227–234, 1983.

[Sk] SKOROHOD A. V.; *Random Linear Operator*. D. Reidel, Dordrecht and Boston (1984)

[Su;1] SÜTO A.; *The spectrum of a quasiperiodic Schrödinger operator*; Commun. Math. Phys., Springer Verlag; **111**, 409–415, 1987.

[Su;2] SÜTO A.; *Singular continuous spectrum on a Cantor set of zero Lebesgue measure for the Fibonacci Hamiltonian*; J. of Stat. Phys., Plenum Publishing Corporation; **56**, 525–531, 1989.

[Su;3] SÜTO A.; *Schrödinger difference equation with deterministic ergodic potentials*; in "Beyond quasi-crystals", Les editions de Physique, Springer Verlag; ed. by Axel F. and Gratias D. ; course 17, 481–549, 1995.

[Su;4] SÜTO A.; *Spectra of some almost periodic operators*; Springer Proceedings in Physics, Springer Verlag; **47**, 162–169, 1990.

[To] TODA M.; *Theory of nonlinear lattices*; Springer Verlag; 1989.

[W] WALTERS P.; *An introduction to ergodic theory*; Springer Verlag.