



HAL
open science

Dynamique holomorphe et arbres de sphères

Matthieu Arfeux

► **To cite this version:**

Matthieu Arfeux. Dynamique holomorphe et arbres de sphères. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2013. Français. NNT: . tel-00965792

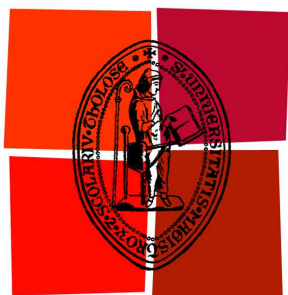
HAL Id: tel-00965792

<https://theses.hal.science/tel-00965792v1>

Submitted on 25 Mar 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :
Université Toulouse III Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Discipline ou spécialité :
Domaine mathématiques – Mathématiques fondamentales

Présentée et soutenue le 9 décembre 2013 par

Matthieu ARFEUX

Titre : **Dynamique holomorphe
et arbres de sphères.**

École doctorale :
Mathématiques Informatique Télécommunications (MITT)

Unité de recherche :
UMR 5219

Directeur de thèse :
Xavier Buff
Professeur Université de Toulouse III

Rapporteurs :
Professeur University of Illinois
Directeur de Recherche École Polytechnique

Laura De Marco
Charles Favre

Laurent Bartholdi
François Berteloot
Arnaud Chéritat
Pascale Roesch

Autres membres du jury :
Professeur Université de Göttingen
Professeur Université de Toulouse III
Directeur de Recherche Université de Bordeaux
Professeur Université Aix-Marseille

Remerciements

Tout d'abord un grand merci à Xavier Buff qui m'a donné goût à ce que je fais, qui m'a tant appris tant au niveau théorique que sur le plan de la rédaction. Un grand merci aussi de m'avoir soutenu dans les moments de doutes par son écoute et ses conseils. Je suis heureux d'avoir eu l'occasion de pouvoir travailler avec une personne aussi intéressante sur le plan des mathématiques et aussi humaine.

Je souhaiterais remercier ensuite Laura De Marco et Charles Favre d'avoir accepté de relire ma thèse dans un bref délai et d'avoir contribué à la clarté de ce travail. Merci d'autre part pour m'avoir accueilli dans leurs universités respectives pour m'apprendre foule de choses passionnantes notamment sur les arbres et les espaces de Berkovich.

Merci aussi à Laurent Bartholdi, François Berteloot, Arnaud Chéritat et Pascale Roesch de m'avoir fait l'honneur de faire partie de mon jury.

Merci aussi à Thomas Gauthier, Aracelly Bonifant et John Milnor, Núria Fagella, Jan Kiwi, John Hubbard, Remus Radu et Raluca Tanase de m'avoir reçu dans leurs universités pour exposer mon travail ou simplement pour discuter.

Merci à tous les membres de la communauté de dynamique holomorphe avec qui j'ai eu de bonnes conversations lors des conférences. Je pense notamment à A.Epstein, K.Pilgrim, T.Lei, J. Rivera-Letelier, M.Shishikura, X.Wang, M.Jonsson, J.Canela, B. Branner, C. Petersen, S. Koch, D. Schleicher, R. Dujardin et tant d'autres. Je pense aussi à tous ceux qui sont ou ont été à l'institut de Math de Toulouse : P.Haissinsky, J. Raissy, A.Dezotti, I.Zidane, B.Rossetti, L. Lomonaco, M.Astorg, F.Bianchi.

Merci à mes anciens enseignants : mes enseignants des collèges et lycée sans qui mon avenir dans les maths aurait été impossible, spécialement à Madame Caillaud, mes enseignants de prépa à savoir Mme Camez et aussi Mme Massonnet qui m'a introduit à la dynamique holomorphe, mes enseignants à Paul Sabatier et en particulier C.Roche, M.Boileau, J.Sauloy dont j'ai plus particulièrement apprécié les cours. Merci aussi à T.Dedieu, D.C. Cisinski et M.Spivakovsky qui ont complété ma formation pendant mon doctorat sur les questions de géométrie algébrique. Merci à X.Bressaud pour le temps passé ensemble à discuter et mettre en oeuvre la formation des jeunes de demain avec Math en Jeans et les Stages Hippocampes.

Merci aussi à B.Chevalier et P.Cohen pour les nombreuses discussions d'un grand intérêt.

Un grand merci à l'IMT, notamment aux différentes secrétaires et aux bibliothécaires, je pense en particulier à A. Requis et J.Picard qui ont su se rendre indispensables. Merci à mes co-bureaux Sugata, Hai (et Victoria) et Hoang qui m'ont soutenu pendant ces trois ans et ont subi tous mes caprices. Merci à l'ensemble des doctorants ; en particulier à Jean-Christophe (et Marie-Anne), Julie et Paul (et Aurélie) avec qui j'ai passé tant de temps mais aussi à Magali, Victor, Chloé, Rim et le reste de la communauté de proba-stat, la communauté vietnamienne au complet, Daniel, Dima, Arnaud et tant d'autres...

Merci à tous mes autres amis qui ont su m'entourer, amis du club montagne, amis de la paroisse étudiante, de Duc In Altum, de Nathanael, au frère Luc-Marie, mes frères scouts de la IXième Montagne et mes frères routiers scouts (en particulier Guillaume), amis du lycée, du collège et de depuis toujours... Merci à ma famille, mon père qui veille sur nous, pour m'avoir appris à ne savoir me contenter d'une vie truquée et de faux paraître. Merci à Clara...

Une petite pensée pour la petite Thérèse qui me surveille depuis le mur de mon bureau et à celui qui fait que la vie est Vie.



*”Quand j’aurai faim, donne-moi quelqu’un qui ait besoin de nourriture.
Quand j’aurai soif, envoie-moi quelqu’un qui ait besoin d’eau.
Quand j’aurai froid, envoie-moi quelqu’un pour que je le réchauffe.
Quand j’aurai une contrariété, présente-moi quelqu’un à consoler.
Quand ma croix deviendra pesante, fais-moi partager la croix d’autrui.
Quand je me sentirai pauvre, conduis-moi vers quelqu’un qui est dans le besoin.
Quand je manquerai de temps, donne-moi quelqu’un que je puisse aider un
moment.
Quand je me sentirai humilié, fais que j’aie quelqu’un à louer.
Quand je me serai découragé, envoie-moi quelqu’un à qui donner du courage.
Quand je ressentirai le besoin de la compréhension des autres, envoie-moi
quelqu’un qui a besoin de la mienne.
Quand j’aurai besoin qu’on s’occupe de moi, envoie-moi quelqu’un dont je doive
m’occuper.
Quand je ne pense qu’à moi-même, attire mon attention sur une autre personne.
Rends-nous dignes, Seigneur, de servir nos frères qui, dans le monde entier
vivent et meurent pauvres et affamés.”*

Mère Thérèse

Table des matières

Remerciements	i
Introduction	vii
1 Objets non dynamiques	1
1.1 Arbres combinatoires	1
1.1.1 Arbres et sous-arbres	1
1.1.2 Topologie	2
1.1.3 Caractéristique	4
1.2 Application d'arbres combinatoires	6
1.3 Arbres de sphères	7
1.4 Revêtement d'arbres de sphères	8
1.4.1 Définitions et degré	8
1.4.2 Conséquences de la formule de Riemann-Hurwitz	11
1.4.3 Revêtements holomorphes	15
2 Dynamique	17
2.1 Système dynamique et arbres stables	17
2.2 Dynamique d'arbres combinatoires	19
2.3 Dynamique sur les arbres de sphères	19
3 Convergence	23
3.1 Convergence de sphères marquées	23
3.2 Convergence de revêtement de sphères marquées	25
3.2.1 Définitions et premières propriétés	25
3.2.2 Lemme des branches	27
3.2.3 Lemmes des anneaux	29
3.3 Cas du degré 2	36
4 Classes d'isomorphismes d'arbres de sphères	47
4.1 Classes d'isomorphismes d'arbres combinatoires et partitions	47

4.2	Classes d'isomorphismes d'arbres de sphères et topologie	51
4.3	Compacité, variété projective	54
5	Classes d'isomorphismes de revêtements	59
5.1	Isomorphismes de revêtements d'arbres	59
5.2	Revêtements marqués, topologie	60
5.3	Compacité	63
6	Dynamique	71
6.1	Arbres compatibles	71
6.2	Compactification de $\text{rat}_{\mathbf{F}, \mathbf{X}}$	73
7	Liens et applications	77
7.1	Limites renormalisées	77
7.2	Exemple à partir de la remarque de Milnor	78
7.3	Exemple d'Epstein-Petersen	80
7.4	Compactification de Milnor	80
7.5	Exemples de J. Kiwi	83
7.6	Limites renormalisées et espaces de Berkovich	84
	7.6.1 Sur les espaces de Berkovich	84
	7.6.2 Résolution des singularités et séries de Puiseux dans $Per_n(0)$	91
7.7	Stretching et arbres de sphères	91
	7.7.1 Arbres et polynômes	91
	7.7.2 Arbres d'anneaux de Hermann	96
7.8	Arbres de sphères et multicourbe pincée	96

Introduction

Motivations.

On note $\mathbb{S} := \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la sphère de Riemann. D'après le Théorème d'Uniformisation, toute surface compacte de genre 0 munie d'une structure projective est isomorphe à \mathbb{S} . Pour $d \geq 1$, notons Rat_d l'ensemble des fractions rationnelles $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ de degré d . En particulier, $\text{Aut}(\mathbb{S}) := \text{Rat}_1$ est l'ensemble des transformations de Moebius. Il agit sur Rat_d par conjugaison :

$$\text{Aut}(\mathbb{S}) \times \text{Rat}_d \ni (\phi, f) \mapsto \phi \circ f \circ \phi^{-1} \in \text{Rat}_d.$$

Le quotient rat_d de Rat_d par cette action de $\text{Aut}(\mathbb{S})$ est l'un des objets d'étude principal du chercheur en dynamique holomorphe. Il est non compact et il serait intéressant de trouver une "bonne" compactification, c'est à dire une compactification qui rende compte des propriétés dynamiques des éléments au voisinage des points rajoutés.

Considérons une suite de classes de conjugaison de fractions rationnelles divergentes dans rat_d . Les valeurs d'adhérence des suites de représentants $(f_n)_n$ sont des applications constantes ou de degré strictement inférieur à d . Mais même lorsque toutes les valeurs d'adhérence sont des constantes, il arrive que l'on trouve un certain $k \geq 1$ pour lequel $(f_n^k)_n$ converge vers une fonction g non-constante et donc dynamiquement intéressante. On dit que g est une **limite renormalisée**. On voudrait proposer une compactification qui rende compte de ce phénomène.

Supposons que l'on ait une telle suite $(f_n)_n$ et un tel k ainsi qu'une telle limite g . Comme g est non constante, elle a des points périodiques et pour n assez grand, les applications f_n ont des points périodiques proches. Pour que notre compactification détecte ces points périodiques, une façon naturelle de faire est de travailler avec des suites de fractions rationnelles dynamiquement marquées.

Soit X un ensemble fini de plus de trois éléments.

Définition (Sphère marquée). *Une sphère marquée (par X) est une injection $x : X \rightarrow \mathbb{S}$.*

Un portrait \mathbf{F} de degré $d \geq 2$ est une paire (F, deg) où

– $F : Y \rightarrow Z$ est une application entre des ensembles finis Y et Z et

– $\deg : Y \rightarrow \mathbb{N} - \{0\}$ est une fonction vérifiant

$$\sum_{a \in Y} (\deg(a) - 1) = 2d - 2 \quad \text{et} \quad \sum_{a \in F^{-1}(b)} \deg(a) = d \quad \text{pour tout } b \in \mathbb{Z}.$$

Typiquement, $Z \subset \mathbb{S}$ est un ensemble fini, $F : Y \rightarrow Z$ est la restriction d'une fraction rationnelle $F : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ à $Y := F^{-1}(Z)$ et $\deg(a)$ est le degré local de F en a . Dans ce cas, la formule de Riemann-Hurwitz et les conditions sur la fonction \deg impliquent que Z contient l'ensemble V_F des valeurs critiques de F et donc que $F : \mathbb{S} - Y \rightarrow \mathbb{S} - Z$ est un revêtement.

Définition (Fraction rationnelle marquée). *Une fraction rationnelle marquée par \mathbf{F} est un triplet (f, y, z) où*

- $f \in \text{Rat}_d$
- $y : Y \rightarrow \mathbb{S}$ et $z : Z \rightarrow \mathbb{S}$ sont des sphères marquées,
- $f \circ y = z \circ F$ sur Y et
- $\deg_{y(a)} f = \deg(a)$ pour $a \in Y$.

Si (f, y, z) est marquée par \mathbf{F} , on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{y} & \mathbb{S} \\ F \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{z} & \mathbb{S} \end{array}$$

Supposons de plus que $X \subseteq Y \cap Z$.

Définition (Fraction rationnelle dynamiquement marquée). *Une fraction rationnelle dynamiquement marquée par (\mathbf{F}, X) est une fraction rationnelle (f, y, z) marquée par \mathbf{F} telle que $y|_X = z|_X$.*

On notera $\text{Rat}_{\mathbf{F}}$ l'ensemble des fractions rationnelles marquées par \mathbf{F} et $\text{Rat}_{\mathbf{F}, X}$ l'ensemble des fractions rationnelles dynamiquement marquées par (\mathbf{F}, X) .

Le groupe $\text{Aut}(\mathbb{S})$ agit sur $\text{Rat}_{\mathbf{F}}$ par pré-composition et post-composition : une paire de transformations de Moebius $(\phi, \psi) \in \text{Aut}(\mathbb{S}) \times \text{Aut}(\mathbb{S})$ envoie la fraction rationnelle marquée $(f, y, z) \in \text{Rat}_{\mathbf{F}}$ sur

$$(\phi \circ f \circ \psi^{-1}, \psi \circ y, \phi \circ z) \in \text{Rat}_{\mathbf{F}}$$

comme indiqué sur le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{y} & \mathbb{S} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{S} \\ F \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \phi \circ f \circ \psi^{-1} \\ Z & \xrightarrow{z} & \mathbb{S} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{S} \end{array}$$

On notera $\text{rat}_{\mathbf{F}}$ le quotient de $\text{Rat}_{\mathbf{F}}$ par l'action de $\text{Aut}(\mathbb{S}) \times \text{Aut}(\mathbb{S})$.

De même, le groupe $\text{Aut}(\mathbb{S})$ agit sur $\text{Rat}_{\mathbf{F},X}$ par conjugaison : une transformation de Moebius $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{S})$ envoie la fraction rationnelle dynamiquement marquée $(f, y, z) \in \text{Rat}_{\mathbf{F},X}$ sur

$$(\phi \circ f \circ \phi^{-1}, \phi \circ y, \phi \circ z) \in \text{Rat}_{\mathbf{F},X}.$$

On notera $\text{rat}_{\mathbf{F},X}$ le quotient de $\text{Rat}_{\mathbf{F},X}$ par l'action de $\text{Aut}(\mathbb{S})$.

D'après les travaux d'Adam Epstein et Xavier Buff, $\text{rat}_{\mathbf{F}}$ et $\text{rat}_{\mathbf{F},X}$ sont des variétés lisses. Si $\text{card}X \geq 3$, si $(f, y, z) \in \text{Rat}_{\mathbf{F}}$, alors f est déterminée par la paire de sphères marquées (y, z) . En effet, une fraction rationnelle est entièrement déterminée par la connaissance des pré-images, avec multiplicités, de n'importe quel triplet de points. Ainsi $[F] \in \text{rat}_{\mathbf{F},X}$ vit naturellement dans le produit des espaces des modules des sphères à points marqués par Y et par Z . Rappelons la définition de ces espaces.

Définition (Espace des modules). *L'espace des modules Mod_X est l'espace des sphères marquées par X modulo post-composition par des transformations de Moebius.*

Il existe une compactification naturelle de Mod_X introduite par Deligne et Mumford dans [DM].

Ainsi le point de vue de ce manuscrit est de considérer $\text{rat}_{\mathbf{F}}$ comme un sous espace de $\text{Mod}_Y \times \text{Mod}_Z$, de le compactifier via une compactification correspondante à celle de Deligne-Mumford. Nous allons voir que les éléments de cette compactification peuvent être identifiés à des classes d'isomorphismes de revêtements d'arbres de sphères possédant une dynamique et que l'existence d'une sphère périodique correspond à celle d'une limite renormalisée.

Plan. Dans le chapitre 1, nous introduisons la notion de revêtements d'arbres de sphères. Un arbre de sphères \mathcal{T} marqué par X est la donnée de :

- un arbre combinatoire T dont les feuilles sont les points de X , et
- pour chaque sommet interne v de T , une injection $i_v : E_v \rightarrow \mathcal{S}_v$ de l'ensemble E_v des arêtes adjacentes à v dans une sphère topologique \mathcal{S}_v .

On note $X_v := i_v(E_v)$ et $a_v : X \rightarrow \mathcal{S}_v$ l'application définie par $a_v(x) := i_v(e)$ si x et e sont dans la même composante connexe de $T - \{v\}$.

Un revêtement $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$ entre deux arbres de sphères marqués par Y et Z est la donnée de

- une application continue $F : T^Y \rightarrow T^Z$ qui envoie feuilles sur feuilles, sommets internes sur sommets internes, et arêtes sur arêtes,
- pour chaque sommet interne v de T^Y et $w := F(v)$ de T^Z , un revêtement ramifié $f_v : \mathcal{S}_v \rightarrow \mathcal{S}_w$ vérifiant les trois conditions suivantes :
 - la restriction $f_v : \mathcal{S}_v - Y_v \rightarrow \mathcal{S}_w - Z_w$ est un revêtement,
 - $f_v \circ i_v = i_w \circ F$,

- si e est une arête reliant v et v' , alors le degré local de f_v en $i_v(e)$ est égal au degré local de $f_{v'}$ en $i_{v'}(e)$.

Nous verrons qu'un revêtement d'arbres de sphères \mathcal{F} a un degré, noté $\deg(\mathcal{F})$.

Dans le chapitre 2, nous montrons que nous pouvons associer un système dynamique à certains revêtements d'arbres de sphères. Plus précisément, nous dirons que $(\mathcal{F}, \mathcal{T}^X)$ est un système dynamique d'arbres de sphères si :

- $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$ est un revêtement d'arbres de sphères,
- \mathcal{T}^X est un arbre de sphères compatible avec \mathcal{T}^Y et \mathcal{T}^Z , c'est-à-dire :
 - $X \subseteq Y \cap Z$
 - chaque sommet interne v de T^X est un sommet interne commun à T^Y et T^Z ,
 - $\mathcal{S}_v^X = \mathcal{S}_v^Y = \mathcal{S}_v^Z$ et
 - $a_v^X = a_v^Y|_X = a_v^Z|_X$.

Les revêtements de sphères marquées (une sphère marquée est une injection de X dans \mathbb{S}) dynamiques jouent un rôle particulier car nous verrons qu'ils sont identifiés à des éléments de Rat_d .

Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{T}^X)$ un système dynamique d'arbres de sphères. Un cycle de sphères de période $p \geq 1$ est une collection de sphères $(\mathcal{S}_{v_k})_{k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ où les v_k sont des sommets internes de T^X vérifiant $F(v_k) = v_{k+1}$. Son degré est le produit des degrés des revêtements le long du cycle. On dit que le cycle est critique si son degré est au moins 2. On dit que le cycle est post-critiquement fini si toutes les orbites des points critiques des revêtements le long du cycle sont finies (en particulier si le cycle est de degré 1).

Théorème 1. *Si $(\mathcal{F}, \mathcal{T}^X)$ est un système dynamique d'arbres de sphères alors il y a au plus $2\deg(\mathcal{F}) - 2$ cycles de sphères critiques qui ne sont pas post-critiquement finis.*

Les sphères marquées s'identifient naturellement avec des arbres de sphères marqués n'ayant qu'un seul sommet interne, les fractions rationnelles marquées avec des revêtements de sphères marquées, et les fractions rationnelles dynamiquement marquées avec des systèmes dynamiques de sphères marquées.

Dans le chapitre 3, nous considérons des revêtements holomorphes d'arbres de sphères marqués munis d'une structure projective. Nous introduisons les notions de convergence :

- d'une suite de sphères marquées vers un arbre de sphères marquées,
- d'une suite de revêtements de sphères marquées vers un revêtement d'arbres de sphères marqués,
- d'une suite de systèmes dynamiques de sphères marquées vers un système dynamique d'arbres de sphères marqués.

Nous établirons des propriétés des systèmes dynamiques d'arbres de sphères marqués

qui sont limites de systèmes dynamiques de sphères marquées ainsi qu'une classification de ce qui arrive en degré 2.

Théorème 2. *Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{T}^X)$ un système dynamique d'arbres de sphères de degré 2, dont le portrait \mathbf{F} possède trois feuilles fixes non critiques. Supposons que $(\mathcal{F}, \mathcal{T}^X)$ soit limite d'une suite de revêtements de sphères marquées dont la classe dans rat_2 diverge. Alors*

- l'application \mathcal{F} a au plus deux cycles critiques de sphères et ils sont de degré 2;
- s'il y en a un, le sommet w_0 séparant les trois points fixes est fixe et f_{w_0} est d'ordre fini k_0 .

Notons v_0 le sommet séparant w_0 et les deux feuilles critiques, alors

1. soit v_0 est oublié par F^k avec $k < k_0$, alors v_0 n'est pas périodique et il y a au plus un seul cycle qui est alors de période $k'_0 \geq k_0$ et son revêtement associé a un point fixe super-attractif;
2. soit v_0 n'est pas oublié par F^{k_0} ; dans ce cas v_0 est périodique de période k_0 et
 - (a) son revêtement associé a un point fixe parabolique;
 - (b) s'il y a un second cycle critique alors il est de période $k'_0 > k_0$, son revêtement associé a un point fixe super-attractif et celui associé à v_0 a un point critique qui est une préimage itérée du point fixe parabolique.

Dans le chapitre 4 nous passons au quotient sur les classes d'isomorphismes d'arbres de sphères et donnons une topologie à cet ensemble compatible avec les notions de convergences définies précédemment. Nous rappelons alors comment les éléments de la compactification de Deligne-Mumford des sphères à points marqués peuvent être interprétés comme des arbres de sphères à points marqués et d'où provient sa structure de variété projective.

Dans le chapitre 5 nous passons au quotient sur les classes d'isomorphismes de revêtements d'arbres de sphères (non dynamiques) et donnons une topologie à cet ensemble compatible avec les notions de convergences définies précédemment. Nous en déduisons notamment une compactification de $\text{rat}_{\mathbf{F}}$.

Dans le chapitre 6 nous faisons de même sur les revêtements dynamiques d'arbres de sphères et identifions $\text{rat}_{\mathbf{F},X}$ avec les systèmes dynamiques de sphères. Nous donnons alors une compactification de $\text{rat}_{\mathbf{F},X}$ dont les éléments ajoutés s'interprètent en terme de systèmes dynamiques sur des arbres de sphères :

Théorème 3. *Les éléments du compactifié de $\text{rat}_{\mathbf{F},X}$ sont naturellement associés à des systèmes dynamiques d'arbres de sphères.*

Nous explorerons alors le lien entre systèmes dynamiques d'arbres de sphères et limites renormalisées. Nous en concluons par exemple que les théorèmes 1 et 2

re-démontrent les résultats de J.Kiwi dans [K2] et [K3], ce qui sera explicité dans le chapitre 7, où nous identifions quelques travaux existants qui ont un fort lien ou une ré-interprétation avec les travaux de cette thèse.

Chapitre 1

Objets non dynamiques

1.1 Arbres combinatoires

1.1.1 Arbres et sous-arbres

Définition 1.1 (Graphe). *Un graphe T est la réunion disjointe*

- *d'un ensemble fini V appelé ensemble des sommets et*
- *et d'un ensemble fini E d'éléments de la forme $\{v, v'\}$ avec $v, v' \in V$, appelé ensemble d'arêtes.*

On dit que $\{v, v'\}$ est une arête entre v et v' . Pour tout $v \in V$ on note E_v l'ensemble des arêtes contenant v . On appelle valence de v et note $\text{val}(v)$ le cardinal de E_v .

Dans un graphe T , un chemin est une application injective $t : [1, k] \rightarrow T$ telle que pour $j \in [1, k - 1]$,

- si $t(j)$ est un sommet, alors $t(j + 1)$ est une arête et $t(j + 1) \in E_{t(j)}$ et
- si $t(j)$ est une arête, alors $t(j + 1)$ est un sommet et $t(j) \in E_{t(j+1)}$.

On dit que ce chemin relie $t(1)$ à $t(k)$. On confondra souvent par abus le chemin et son image.

Définition 1.2. *Un graphe est dit connexe si toute paire de sommets distincts est reliée par un chemin.*

Dans un graphe T , un cycle est une application injective $t : \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \rightarrow T$ telle que pour $j \in [1, k - 1]$,

- si $t(j)$ est un sommet, alors $t(j + 1)$ est une arête et $t(j + 1) \in E_{t(j)}$ et
- si $t(j)$ est une arête, alors $t(j + 1)$ est un sommet et $t(j) \in E_{t(j+1)}$.

Définition 1.3 (Arbre). *On appelle arbre tout graphe connexe et sans cycle.*

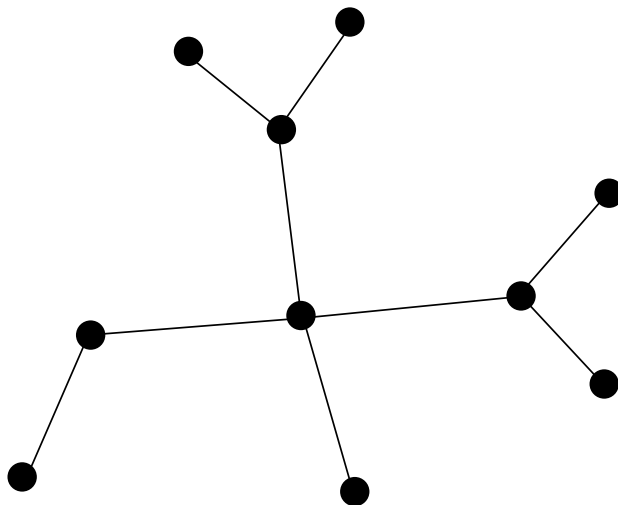


FIGURE 1.1 – Un exemple d’arbre où les sommets sont schématiquement représentés par des points et les arêtes entre sommets par des segments reliant les points correspondants.

La non existence de cycle est équivalente à l’unicité des chemins reliant deux sommets fixés (voir par exemple [Di, Theorem 1.5.1]).

Définition 1.4. *Si T est un arbre, on notera $[v_1, v_2]$ l’unique chemin de T reliant v_1 à v_2 .*

Le chemin t sera souvent noté aussi $[t(1), t(3), t(5), \dots, t(k)]$ si $t(1)$ et $t(k)$ sont des sommets ou $]t(2), t(4), t(6), \dots, t(k-1)[$ si $t(1)$ et $t(k)$ sont des arêtes.

Notons qu’un sous-graphe connexe d’un arbre est un graphe connexe et sans cycles. C’est donc un arbre. On parle alors de sous-arbre.

Dans un arbre, on appelle feuille tout sommet de valence 1. On appelle sommets internes les sommets de valence plus grande. On note IV l’ensemble des sommets internes (IV pour ”Internal Vertex”).

1.1.2 Topologie

Un graphe T sera muni de la topologie pour laquelle les fermés sont les sous-graphes de T .

Alors, les parties connexes T' de T sont celles telles que deux éléments distincts de T' peuvent toujours être reliés par un chemin dont l’image est contenue dans T'

Définition 1.5 (Composante connexe). *Si T' est une partie d’un graphe T , on appelle composante connexe de T' toute partie connexe de T' maximale pour l’inclusion.*

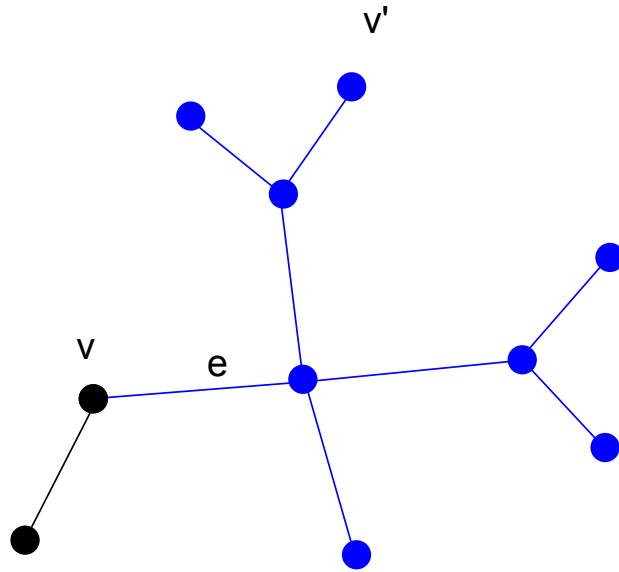


FIGURE 1.2 – Sur cet exemple, la branche $B_v(e)$ (ou $B_v(v')$) est représentée en bleu.

Définition 1.6 (Branche). *Si v est un sommet d'un arbre T et si $\star \in T - \{v\}$, on appelle branche de \star sur v , et on note $B_v(\star)$, la composante connexe de $T - \{v\}$ qui contient \star .*

Soit $v \in V$. Comme T est un arbre, pour tout élément $\star \in T - \{v\}$, on trouve un unique chemin reliant v à \star . Ce chemin, par définition, contient une unique arête $e \in E_v$. Cela montre que toute branche sur v est de la forme $B_v(e)$ avec $e \in E_v$.

Une des principales caractéristiques des branches, c'est qu'elles contiennent au moins une feuille.

Lemme 1.7. *Dans un arbre ayant au moins deux sommets, toute branche contient au moins une feuille.*

Démonstration. Prenons un sommet v et une arête $e \in E_v$ d'un arbre ayant au moins deux sommets. Si $B_v(e)$ ne contenait pas de feuilles, on pourrait créer des chemins de longueur infinie. En effet, comme e est une arête, il y a nécessairement au moins un chemin reliant v à un autre sommet v' (par le chemin (e)) et si ce sommet n'est pas une feuille, il possède une autre arête et on peut recommencer cette étape à partir du sommet v' . La possibilité d'un chemin infini contredit la finitude du nombre de sommet d'un arbre. \square

Définition 1.8 (Anneau). *Si v_1 et v_2 sont deux sommets internes de T , l'anneau $A :=]v_1, v_2[$ est l'intersection des deux branches $B_{v_1}(v_2)$ et $B_{v_2}(v_1)$. On définit aussi $]v_1, v_2] := \bar{A}$.*

Notons que $\overline{A} = A \cup \{v_1, v_2\}$. Plus généralement, on peut donner la définition suivante.

Définition 1.9. *Si V' est un ensemble de sommets internes de T , on pose*

$$\llbracket V \llbracket := \bigcap_{\substack{v, w \in V \\ v \neq w}} B_v(w) \quad \text{et} \quad \llbracket V \rrbracket := \overline{\llbracket V \llbracket}.$$

Il se peut que $\llbracket V \llbracket$ soit l'ensemble vide.

1.1.3 Caractéristique

Dans ce qui suit, nous introduisons un objet dit caractéristique qui est semblable à la caractéristique d'Euler et nous servira quand nous aurons introduit les revêtements d'arbres de sphères à énoncer une formule de Riemann-Hurwitz.

Définition 1.10 (Caractéristique d'une partie). *La caractéristique d'un sommet v d'un graphe T est*

$$\chi_T(v) := 2 - \text{val}(v).$$

La caractéristique d'une partie T' de T est l'entier relatif

$$\chi_T(T') := \sum_{v \in V \cap T'} \chi_T(v).$$

On notera simplement $\chi(T')$ lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté. Voir Figure 1.3 pour un exemple.

Lemme 1.11. *Pour tout arbre T , on a $\chi_T(T) = 2$.*

Démonstration. Observons d'abord que dans un graphe, chaque sommet v est relié à $\text{val}(v)$ arêtes et chaque arête est reliée à 2 sommets. Par conséquent,

$$\sum_{v \in V} \text{val}(v) = 2\text{card}(E).$$

Par ailleurs, dans un arbre, on a la relation $\text{card}V = \text{card}E + 1$ (voir par exemple [Di, Corollaire 1.5.3]). Par conséquent

$$\chi_T(T) = \sum_{v \in V} (2 - \text{val}(v)) = 2\text{card}V - 2\text{card}E = 2.$$

□

Rappelons que l'adhérence d'une partie est le plus petit fermé la contenant (cf figure 1.3).

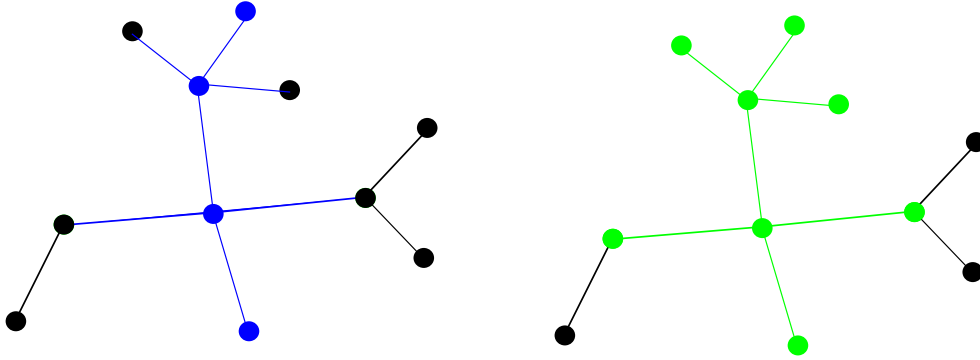


FIGURE 1.3 – À gauche un ouvert connexe de T en bleu de caractéristique -2 et à droite \bar{T}' en vert.

Définition 1.12. Si $T' \subseteq T$, on note

- \bar{T}' l'adhérence de T' dans T et
- $\partial_T T' := \bar{T}' - T'$ la frontière de T' dans T .

Lemme 1.13. Si T' est un ouvert connexe de T , alors la frontière $\partial_T T'$ est l'ensemble des sommets $v \in T - T'$ appartenant à une arête de T' . L'adhérence \bar{T}' est un sous-arbre de T dont l'ensemble des sommets internes est $IV \cap T'$.

Démonstration. L'adhérence de T' est le plus petit sous-graphe de T contenant T' . Il doit contenir tous les sommets $v \in T$ appartenant à une arête de T' . Il n'y a pas besoin de rajouter d'autres sommets ou d'autres arêtes pour obtenir un graphe. Cela montre que $\partial_T T'$ est l'ensemble des sommets $v \in T - T'$ appartenant à une arête de T' .

L'adhérence d'un ouvert connexe est un sous-graphe connexe de T . C'est donc un sous-arbre de T . Les sommets de $\partial_T T'$ sont des feuilles de \bar{T}' sinon $T' = \bar{T}' - \partial_T T'$ ne serait pas connexe. Comme T' est ouvert, pour tout sommet v de T' , on a $E_v \subset T'$. Par conséquent la valence de v dans \bar{T}' est la même que celle de v dans T . Cela montre que les sommets internes de \bar{T}' sont les sommets internes de T contenus dans T' . \square

Lemme 1.14. Si T' est une partie non vide, ouverte et connexe de T , alors

$$\chi_T(T') = 2 - \text{card} \partial_T T'.$$

Démonstration. Dans \bar{T}' , chaque sommet v de T' a valence $\text{val}(v)$ et chaque sommet de $\partial_T T'$ a caractéristique 1. D'après le lemme 1.11, on a

$$2 = \chi_T(\bar{T}') = \sum_{v \in V \cap T'} \chi_T(v) + \sum_{v \in \partial_T T'} \chi_T(v) = \chi_T(T') + \text{card} \partial_T T'.$$

\square

Lemme 1.15. Soit T' une partie non vide, ouverte et connexe de T . On a

1. $\chi_T(T') \leq 2$;
2. $\chi_T(T') = 2$ ssi $T' = T$;
3. $\chi_T(T') = 1$ ssi T' est une branche de T .
4. $\chi_T(T') = 0$ ssi T' est un anneau de T .

Démonstration. D'après le lemme précédent, $\chi_T(T') = 2 - \text{card} \partial_T T'$.

- 1) évident.
- 2) $\chi_T(T') = 2$ ssi $\partial_T T' = \emptyset$ ssi T' est à la fois ouverte et fermée ssi $T' = T$.
- 3) Si T' est une branche sur un sommet v , alors $\partial_T T' = \{v\}$ et donc $\chi_T(T') = 1$. Réciproquement, si $\chi_T(T') = 1$, alors $\partial_T T'$ contient un unique sommet v . On note $e = \{v, v'\}$ l'arête de T' contenant v et on pose $B := B_v(e)$. Comme T' est connexe, contenue dans $T - \{v\}$ et contient e , on a $T' \subseteq B$. Etant donné que $T' \cap B = \emptyset$, la branche B est la réunion disjointe des deux ouverts T' et $B - \overline{T'} = B - T'$. Comme B est connexe, on a $B - T' = \emptyset$ et donc $B = T'$.
- 4) Si T' est un anneau $\llbracket v_1, v_2 \rrbracket$, alors $\partial_T T' = \{v_1, v_2\}$ et donc $\chi_T(T') = 0$. Réciproquement, si $\chi_T(T') = 0$, alors $\partial_T T'$ contient exactement deux sommets v_1 et v_2 . Les deux sommets v_1 et v_2 étant dans la frontière de T' , on a forcément $T' \subseteq A := \llbracket v_1, v_2 \rrbracket$. Comme précédemment, on peut alors écrire $A = T' \sqcup (A - \overline{T'})$ et en déduire que $A - T' = A - \overline{T'} = \emptyset$. Par conséquent, $A = T'$. \square

1.2 Application d'arbres combinatoires

Définition 1.16 (Application d'arbres). Une application $F : T \rightarrow T'$ est une application d'arbre si

- T et T' sont des arbres;
- l'image d'un sommet est un sommet : $F(V) \subseteq V'$;
- l'image d'une arête entre deux sommets est l'arête entre les images de ces sommets : si $\{v, w\} \in E$, alors $F(\{v, w\}) = \{F(v), F(w)\} \in E'$.

Dans la suite de cette partie, $F : T \rightarrow T'$ est une application d'arbres.

Observons que si U est un sous-graphe de T , alors $F(U)$ est un sous-graphe de T' et inversement, si U' est un sous-graphe de T' , alors $F^{-1}(U')$ est un sous-graphe de T . En particulier, la préimage des fermés sont des fermés :

Proposition 1.17. Les applications d'arbres sont continues, et l'image d'un sous-arbre est un sous-arbre.

Démonstration. L'image d'un connexe par une application continue est un connexe. \square

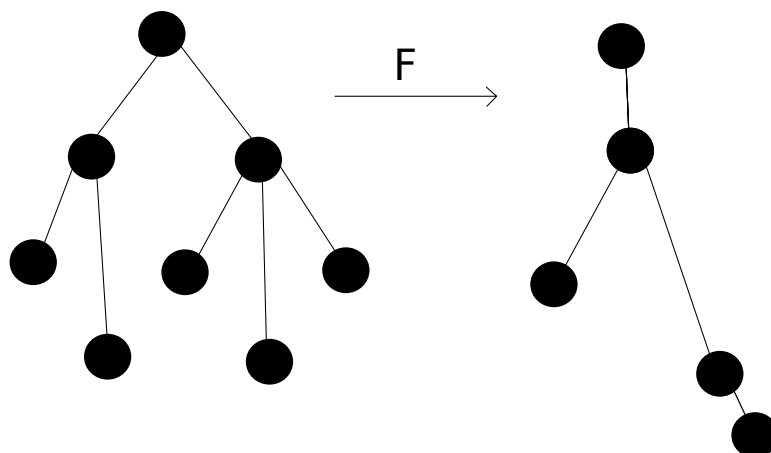


FIGURE 1.4 – Un exemple d’application d’arbres : l’image d’un sommet est le sommet qui se trouve sur la même ligne horizontale que celui-ci. Notons qu’il n’y a pas forcément surjectivité!

1.3 Arbres de sphères

Par la suite, X , Y et Z désigneront des ensembles finis contenant au moins 3 éléments.

Définition 1.18 (Arbre marqué). *Un arbre T marqué par X est un arbre dont les feuilles sont les éléments de X .*

Un arbre marqué par X sera noté T^X . Tout objet Obj relié à T^* sera noté Obj^* . Par exemple E^Y est l’ensemble des arêtes de T^Y .

Définition 1.19 (Arbre de sphères marqué). *Un arbre de sphères \mathcal{T}^X (marqué par X) est la donnée de :*

- un arbre combinatoire T^X et
- pour tout sommet interne v de T^X ,
 - une sphère topologique \mathcal{S}_v et
 - une injection $i_v : E_v \rightarrow \mathcal{S}_v$.

Lorsque l’arbre combinatoire ne possède qu’un unique sommet interne, on parle de sphère marquée (par X).

Pour $e \in E_v$, on dira que $i_v(e)$ est le point d’attache de e sur v . Pour simplifier les notations on notera souvent $e_v := i_v(e)$ et même parfois $i_v(v') := e_v$ si $v' \in B_v(e)$. On définit $X_v := i_v(E_v)$ l’ensemble des points d’attache sur la sphère \mathcal{S}_v .

Remarque 1.20. Se donner les applications $i_v : E_v \rightarrow \mathcal{S}_v$, c’est la même chose que de se donner des applications $a_v : X \rightarrow \mathcal{S}_v$ telles que $a_v(x_1) = a_v(x_2)$ si et

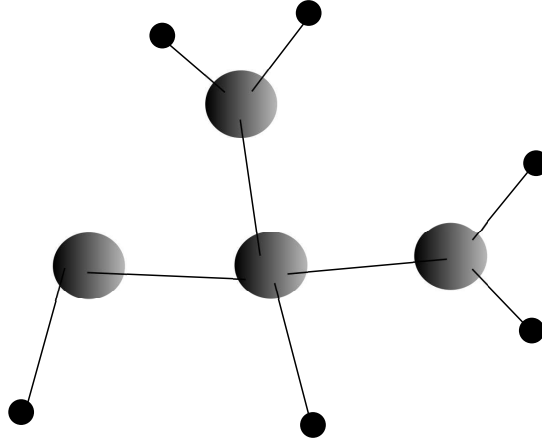


FIGURE 1.5 – Un arbre de sphères dont l’arbre combinatoire est le même que celui de la figure 1.2

seulement x_1 et x_2 sont dans la même branche sur v , c’est à dire $a_v(x) := i_v(e)$ si x appartient à $B_v(e)$. On notera parfois $\mathcal{T} := (T, (a_v)_{v \in IV})$.

Exemple. [Sphères marquées] Un arbre marqué par X ne possédant qu’un seul sommet interne est équivalent à la donnée de ce sommet et d’une injection de X dans ce dernier. On parle alors de sphère marquée.

1.4 Revêtement d’arbres de sphères

1.4.1 Définitions et degré

Un revêtement d’arbre de sphères est l’enrichissement d’une application d’arbre combinatoire par la donnée en chaque sommet d’un revêtement ramifié dont le lieu de ramification est contenu dans l’ensemble des points d’attache des arêtes.

Définition 1.21 (Revêtement). *Un revêtement d’arbre de sphères $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$ est la donnée de :*

- une application d’arbres $F : T^Y \rightarrow T^Z$ qui envoie feuilles sur feuilles et sommets internes sur sommets internes ($F(Y) \subseteq Z$ et $F(IV^Y) \subseteq IV^Z$) et
- pour tous sommets internes $v \in IV^Y$ et $w := F(v) \in IV^Z$, un revêtement topologique ramifié $f_v : \mathcal{S}_v \rightarrow \mathcal{S}_w$ tel que
 1. la restriction $f_v : \mathcal{S}_v - Y_v \rightarrow \mathcal{S}_w - Z_w$ est un revêtement ;
 2. $f_v \circ i_v = i_w \circ F$ sur E_v ;
 3. si $e = \{v_1, v_2\} \in E^Y$ est une arête entre deux sommets internes, alors $\deg_{e_{v_1}} f_{v_1} = \deg_{e_{v_2}} f_{v_2}$.

Exemple. [Revêtement de sphères] Un revêtement d'arbre de sphères $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$ tel que \mathcal{T}^Y et \mathcal{T}^Z sont des sphères marquées (d'uniques sommets respectifs v et v') est équivalent à la donnée d'un revêtement ramifié entre les uniques sommets internes de \mathcal{T}^Y et \mathcal{T}^Z qui tel que les points d'attache d'arêtes sont les pré-images des points d'attache d'arêtes et qu'ils contiennent les points de ramification. On parle alors de revêtement de sphères marquées et on confond \mathcal{F} et le triplet $(f_v, a_v^Y, a_{v'}^Z)$.

Pour tout sommet interne $v \in IV^Y$, on notera pour simplifier $\deg(v) := \deg(f_v)$. De même pour tout $x \in \mathcal{S}_v$ on notera $\deg(x) := \deg_x f_v$. La condition 3 assure que l'on peut définir un degré pour toute arête e entre deux sommets internes v_1 et v_2 de T^Y , que l'on notera

$$\deg(e) := \deg_{e_{v_1}} f_{v_1} = \deg_{e_{v_2}} f_{v_2}.$$

Toute feuille $y \in Y$ est reliée à un unique sommet interne v par une arête e , on peut donc définir

$$\deg(y) := \deg(e) := \deg_{e_v} f_v.$$

Ceci définit une application degré pour l'application $F : Y \rightarrow Z$.

Définition 1.22. On appelle *sommet critique* (resp. *feuille critique*) de \mathcal{F} tout sommet de T^Y (resp. toute feuille $y \in Y$) ayant un degré supérieur à 1. On appelle alors $\text{mult}(y) := \deg(y) - 1$ la *multiplicité* de y . On note $\text{Crit}\mathcal{F}$ l'ensemble des feuilles critiques de \mathcal{F} .

Pour chaque sommet v de T^Z et pour chaque arête e de T^Z on peut définir

$$D_v := \sum_{v' \in F^{-1}(v)} \deg(v') \quad \text{et} \quad D_e := \sum_{e' \in F^{-1}(e)} \deg(e').$$

Lemme 1.23. Si $e \in E_v$, alors $D_e = D_v$.

Démonstration. Si v est une feuille, alors les pré-images v' de v sont les feuilles sur lesquelles sont rattachées les pré-images e' de e . Le résultat est évident puisque par définition $\deg(v') = \deg(e')$.

Si v est un sommet interne, notons X l'ensemble des points x qui appartiennent à une sphère $\mathcal{S}_{v'}$ avec $F(v') = v$ et $f_{v'}(x) = e_v$. Soit $x \in X$. Etant donné que $e_v \in Z_v$ et que $f_{v'} : \mathcal{S}_{v'} - Y_{v'} \rightarrow \mathcal{S}_v - Z_v$ est un revêtement, on a nécessairement $x \in Y_{v'}$. Par conséquent, x est le point d'attache d'une arête e' de T^Y qui s'envoie nécessairement sur e . Inversement, si $F(e') = v$, alors e' est attachée à une sphère

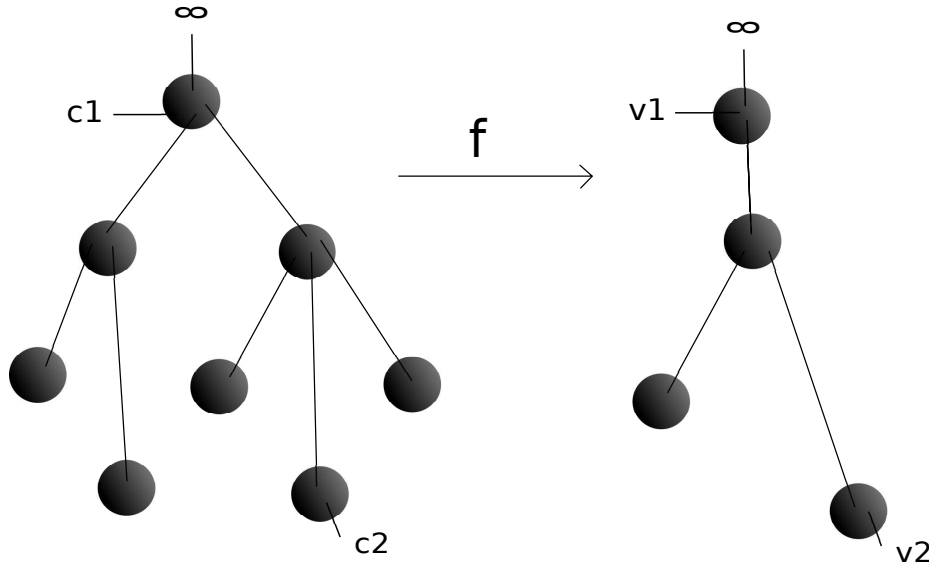


FIGURE 1.6 – Un revêtement d'arbre de sphères de degré 3. La sphère du niveau le plus haut est envoyée par un revêtement de type z^3 , les deux sphères reliant $c2$ à celle-ci sont envoyées avec un revêtement de type z^3 sur leurs images, les autres par un revêtement de type identité.

$v' \in F^{-1}(v)$ en un point $x \in X$. On a donc

$$\begin{aligned}
 D_e &= \sum_{e' \in F^{-1}(e)} \deg(e') = \sum_{x \in X} \deg(x) \\
 &= \sum_{v' \in F^{-1}(v)} \sum_{x \in f_{v'}^{-1}(e_v)} \deg(x) = \sum_{v' \in F^{-1}(v)} \deg(v') = D_v.
 \end{aligned}$$

□

Par conséquent, si e est une arête entre deux sommets v et w , alors $D_v = D_e = D_w$. Comme l'arbre T^Z est connexe, ce nombre est donc constant. Il ne dépend ni de e ni de v . On note D ce nombre que l'on appelle le degré de \mathcal{F} .

Corollaire 1.24. *L'application $F : T^Y \rightarrow T^Z$ est surjective.*

Démonstration. Pour tout sommet v de T^Z , on a $D_v \neq 0$. □

Le lemme suivant et son corollaire permettent de visualiser la disposition de l'ensemble des sommets critiques sur un arbre.

Lemme 1.25. *Soit $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$ un revêtement d'arbres de sphères. Tout sommet critique appartient à un chemin reliant deux feuilles critiques et dont tous les sommets sont critiques.*

Démonstration. Soit v un sommet critique de \mathcal{F} . Alors f_v a au moins deux points critiques distincts. Il y a donc au moins deux arêtes critiques attachées à v . Donc v est sur un chemin constitué de sommets critiques.

Soit $[v_1, v_2]$ un tel chemin composé d'un nombre maximal de sommets. Par maximalité du chemin, il n'y a qu'une seule arête critique attachée sur v_1 . Si v_1 n'était pas une feuille, alors f_{v_1} n'aurait qu'un seul point critique, ce qui n'est pas possible. Donc v_1 est une feuille. De même, v_2 est une feuille, ce qui donne le résultat annoncé. \square

Rappelons que la caractéristique d'un sommet v de T^X est $\chi_{T^X}(v) := 2 - \text{val}(v)$, c'est-à-dire la caractéristique d'Euler de $\mathcal{S}_v - X_v$.

On a une formule de Riemann Hurwitz naturelle pour les revêtements d'arbres de sphères où $\chi_{\mathcal{T}}$ fait l'office de caractéristique d'Euler.

Proposition 1.26 (Formule de Riemann-Hurwitz). *Soit $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$ un revêtement de degré D . Soit T'' un sous-graphe de T^Z et $T' := F^{-1}(T'')$. Alors*

$$\chi_{T^Y}(T') = D \cdot \chi_{T^Z}(T'') - \sum_{y \in \text{Crit} \mathcal{F} \cap T'} \text{mult}(y).$$

Démonstration. Si $v'' \in IV^Z$, alors la formule de Riemann-Hurwitz donne directement

$$\sum_{v' \in F^{-1}(v'')} \chi_{T^Y}(v') = \sum_{v' \in F^{-1}(v'')} \text{deg}(v') \cdot \chi_{T^Z}(v) = D \cdot \chi_{T^Z}(v''). \quad (1.1)$$

Par ailleurs, comme la caractéristique d'une feuille est 1, pour toute feuille y de T^Y , on a

$$\chi_{T^Y}(y) = \text{deg}(y) - \text{mult}(y).$$

Par conséquent, pour toute feuille $z \in Z$, on a la relation

$$\sum_{y \in F^{-1}(z)} \chi_{T^Y}(y) = \sum_{y \in F^{-1}(z)} \text{deg}(y) - \text{mult}(y) = D \cdot \chi_{T^Z}(z) - \sum_{y \in F^{-1}(z)} \text{mult}(y). \quad (1.2)$$

En sommant les égalités (1.1) et (1.2) pour tous les sommets $v'' \in IV^Z \cap T''$ et toutes les feuilles $z \in T'' \cap Z$, on reconnaît la formule souhaitée. \square

1.4.2 Conséquences de la formule de Riemann-Hurwitz

Corollaire 1.27. *Si $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$ est un revêtement de degré D , alors l'arbre T^Y a $2D - 2$ feuilles critiques comptées avec multiplicités.*

Démonstration. On applique la formule de Riemann-Hurwitz pour $T' = T^Y$ et $T'' = T^Z$, en utilisant le fait que $\chi_{T^Y}(T^Y) = \chi_{T^Z}(T^Z) = 2$ (voir lemme 1.11.) \square

Rappel. Un portrait \mathbf{F} de degré $d \geq 2$ est une paire (F, \deg) où

- $F : Y \rightarrow Z$ est une application entre des ensembles finis Y et Z et
- $\deg : Y \rightarrow \mathbb{N} - \{0\}$ est une fonction vérifiant

$$\sum_{a \in Y} (\deg(a) - 1) = 2d - 2 \quad \text{et} \quad \sum_{a \in F^{-1}(b)} \deg(a) = d \quad \text{pour tout } b \in Z.$$

Le couple $(F|_Y, \deg_{F|_Y})$ définit donc un portrait.

Corollaire 1.28. Si $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$ est un revêtement de degré D , alors

$$2 - \text{card}(Y) = D \cdot (2 - \text{card}(Z)).$$

Démonstration. On applique la formule de Riemann-Hurwitz pour $T' = T^Y - Y$ et $T'' = T^Z - Z$, en utilisant le fait que $\chi_{T^Y}(T') = 2 - \text{card}Y$ et $\chi_{T^Z}(T'') = 2 - \text{card}(Z)$ (voir lemme 1.14). Comme T' n'a pas de feuilles de T^Y , on a donc le résultat souhaité. \square

Ainsi le degré de \mathcal{F} est borné en fonction de $\text{card}(Y)$ et $\text{card}(Z)$.

Lemme 1.29. Soit $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$ un revêtement d'arbres de sphères. Soit T'' ouvert connexe non vide de T^Z et T' une composante connexe de $F^{-1}(T'')$. Alors, l'application $\overline{\mathcal{F}} : \overline{\mathcal{T}}' \rightarrow \overline{\mathcal{T}}''$ définie par

- $\overline{F} := F : \overline{T}' \rightarrow \overline{T}''$ et
- $\overline{f}_v := f_v$ si $v \in V' - Y'$

est un revêtement d'arbres de sphères.

Démonstration. En effet pour tout sommet $v \in V' - Y'$, les arêtes de v dans \overline{T}' sont les mêmes que celles dans T donc \overline{f}_v vérifie bien les conditions requises. De plus les feuilles de \overline{T}' sont soit des feuilles de T et donc sont envoyées sur des feuilles de T^Z donc des feuilles de \overline{T}'' , soit ce sont des éléments de $\overline{T}' - T'$ et donc, comme des sommets adjacents sont envoyés sur des sommets adjacents et que leurs images ne sont pas dans T'' , ils sont envoyés sur des éléments de $\overline{T}'' - T''$ qui sont donc des feuilles de \overline{T}'' . \square

On notera $\deg(\mathcal{F}|_{T_Y'}) := \deg \overline{\mathcal{F}}$ définie ci-dessus et $\text{mult } T_Y' := \deg(\mathcal{F}|_{T_Y'}) - 1$.

On a alors la formule de Riemann-Hurwitz restreinte une composante connexe de la pré-image.

Proposition 1.30. *Soit $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$ un revêtement d'arbres de sphères. Soit T'' un sous arbre de \mathcal{T}^Z . Soit T' une composante connexe de $F^{-1}(T'')$. Alors on a*

$$\chi_{T^Y}(T') = \deg(\mathcal{F}|_{\overline{T'}}) \cdot \chi_{T^Z}(T'') - \sum_{y \in \text{Crit.}\mathcal{F} \cap T'} \text{mult}(y).$$

Démonstration. Étant donné que $\chi_{T^Y}(T') = \chi_{\widehat{T}'}(T')$ et $\chi_{T^Z}(T'') = \chi_{\widehat{T}''}(T'')$, le résultat suit immédiatement en appliquant la formule de Riemann-Hurwitz au revêtement $\overline{\mathcal{F}} : \overline{T'} \rightarrow \overline{T''}$. \square

Corollaire 1.31. *Si T'' est une branche et $\deg(\mathcal{F} : T' \rightarrow T'') > 1$, alors T' contient au moins une feuille critique.*

Si T'' est une branche et $\deg(\mathcal{F} : T' \rightarrow T'') = 1$, alors T' est une branche.

Corollaire 1.32. *Si B est une branche de T^Y ne contenant pas de feuille critique, alors son image $F(B)$ est une branche et $F : B \rightarrow F(B)$ est une bijection.*

Démonstration. Soit $v \in V$ et e tels que $B = B_v(e)$, T'' la branche de $F(e)$ qui contient $F(v)$ et T' la composante de $F^{-1}(T'')$ qui contient v . Alors, T' est sous-arbre de B et donc $\text{mult } T' = 0$ par hypothèse. D'après la formule de Riemann-Hurwitz,

$$\chi_{T^Y}(T') = \deg(F : T' \rightarrow T'') \cdot \chi_{T^Z}(T'') - \text{mult } T' = \deg(F : T' \rightarrow T'') \cdot \chi_{T^Z}(T'').$$

On en déduit que $\deg(F : T' \rightarrow T'') = 1$ et $\chi_{T^Y}(T') = 1$. En particulier, T' est une branche et donc $B = T'$. De plus, $F(B) = T''$ et le degré de $F : B \rightarrow F(B)$ est égal à 1, comme requis. \square

On peut déduire de la même manière le cas des anneaux de la formule de Riemann-Hurwitz.

Corollaire 1.33. *Si A est un anneau de T^Y ne contenant pas de feuille critique, alors son image $F(A)$ est un anneau et A est une composante connexe de $F^{-1}(F(A))$. On a aussi alors $F(\overline{A}) = \overline{F(A)}$. Si de plus $A =]v_1, v_2[$ ne contient pas d'élément critique, alors $F : A \rightarrow F(A)$ et $\overline{F} : \overline{A} \rightarrow \overline{F(A)}$ sont des bijections.*

Démonstration. Posons $A =]v_1, v_2[$. Si $A = \{\{v_1, v_2\}\}$ le résultat découle directement de la définition des applications d'arbre combinatoires. On suppose donc que ce n'est pas le cas. Rappelons que \overline{A} est le sous-arbre de T^Y défini en rajoutant v_1 et v_2 à l'ensemble des sommets de A .

Notons e_1 et e_2 les deux arêtes reliant v_1 et v_2 au reste de \overline{A} . Soit v un sommet de \overline{A} , T'' la composante connexe du graphe $(V^Z, E^Z - \{F(e_1), F(e_2)\})$ qui contient

$F(v)$ et T' la composante de $F^{-1}(T'')$ qui contient v . Alors T' est un sous-arbre de \bar{A} et $\text{mult}(T') = 0$. D'après la formule de Riemann-Hurwitz

$$0 = \chi_{T^Y}(\bar{A}) \geq \chi_{T^Y}(T') = \deg(\mathcal{F} : \mathcal{T}' \rightarrow \mathcal{T}'') \cdot \chi_{T^Z}(T'').$$

Les composantes connexes du graphe $(V^Z, E^Z - \{F(e_1), F(e_2)\})$ sont de caractéristique positive ou nulle dans T^Z . Par conséquent,

$$0 = \chi_{T^Y}(A') = \chi_{T^Y}(T') = \chi_{T^Z}(T'').$$

Cela montre que $\bar{A} = T'$ et $F(\bar{A}) = T''$.

Supposons maintenant que A ne contienne pas de sommet critique. Alors les arêtes e_1 et e_2 sont également de degré 1 et l'application $\bar{\mathcal{F}} : \bar{\mathcal{T}}' \rightarrow \bar{\mathcal{T}}''$ n'a pas de feuilles critiques. Elle est donc de degré 1, ce qui montre que $F : \bar{A} \rightarrow F(\bar{A})$ est une bijection. En particulier $F : A \rightarrow F(A)$ est une bijection.

Comme les images de deux sommets adjacents sont des sommets adjacents, on en déduit les résultats sur les adhérences. \square

Corollaire 1.34. *Soit B une branche sur v dans T^Y contenant au plus une seule feuille critique c . Alors $F(B)$ est la branche sur $F(v)$ attachée en $a_{F(v)}(F(c))$.*

Démonstration. D'après le lemme 1.33, $F(\llbracket v, c \rrbracket) = \llbracket F(v), F(c) \rrbracket$ donc en particulier $F(B) = F(\llbracket F(v), F(c) \rrbracket) \cup \{F(c)\}$ qui est bien une branche sur $F(v)$. Par ailleurs l'arête de B sur v est envoyée sur l'arête attachée en $a_{F(v)}(F(c))$. \square

Notons que les corollaires 1.32 et 1.33 peuvent aussi se démontrer grâce au lemme suivant qui nous sera fort utile.

Lemme 1.35. *Si $[v_1, v_2]$ est un chemin de T^Y ne passant que par des sommets de degré 1, alors F est bijective sur l'ensemble de ces sommets vers l'ensemble de leurs images. Son image est l'ensemble des sommets du chemin $[F(v_1), F(v_2)]$.*

Démonstration. Notons T' le sous-arbre constitué par les sommets de $[v_1, v_2]$. D'après le lemme 1.17, $F(T')$ est un sous-arbre de T^Y . Prenons une de ses feuilles. Elle est de la forme $F(v)$ avec $v \in T$. Supposons que $v \neq v_1$ et $v \neq v_2$. Alors les deux arêtes de v dans T' s'envoient sur l'unique arête de $F(v) \in F(T')$ et comme les points d'attache des arêtes s'envoient sur les points d'attache des arêtes images, on a un point de $\mathcal{S}_{F(v)}$ qui a deux pré-images, ce qui contredit le fait que les sommets de T' sont de degré 1. Ainsi $F(T')$ est un sous-arbre avec au plus deux feuilles. On en conclut que $F(T')$ est constitué des sommets de $[v_1, v_2]$. \square

1.4.3 Revêtements holomorphes

Définition 1.36 (Structure projective). *Une structure projective sur un arbre de sphères \mathcal{T} marqué par X est la donnée pour tout $v \in IV$ d'une structure projective sur \mathcal{S}_v .*

D'après le Théorème d'Uniformisation, c'est la même chose de se donner une structure complexe sur \mathcal{S}_v et de se donner une classe d'homéomorphismes $\sigma : \mathcal{S}_v \rightarrow \mathbb{S}$ où σ est équivalent à σ' dès lors que $\sigma' \circ \sigma^{-1}$ est une transformation de Moebius. Un tel σ sera appelé une carte projective sur \mathcal{S}_v . Lorsque la sphère topologique \mathcal{S}_v est muni d'une telle structure projective, on la note \mathbb{S}_v .

Définition 1.37 (Revêtements holomorphes). *Un revêtement d'arbres de sphères munies de structures projectives $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$ est dit holomorphe si pour tout sommet interne v , $f_v : \mathbb{S}_v \rightarrow \mathbb{S}_{F(v)}$ est holomorphe.*

Si f_v est holomorphe, alors son expression dans les cartes projectives est celle d'une fraction rationnelle.

Chapitre 2

Dynamique

Dans cette partie on suppose que l'on a $X \subseteq Y \cap Z$.

2.1 Système dynamique et arbres stables

Définition 2.1 (Arbre compatible). *Un arbre T^X est compatible avec un arbre T^Y si*

- $X \subseteq Y$;
- $IV^X \subseteq IV^Y$;
- pour tous sommets v, v' et v'' de V^X , v' et v'' sont dans la même branche de T^X sur v si et seulement si v' et v'' sont dans la même branche de T^Y sur v .

Pour la suite, il sera utile de pouvoir identifier si un sommet est dans T^X . Les deux lemmes qui suivent donne un moyen de faire ceci dans certains cas particuliers.

Définition 2.2. *Dans un arbre T , nous dirons qu'un sommet v sépare trois sommets v_1, v_2 et v_3 si les v_i sont dans des composantes distinctes de $T - \{v\}$.*

Lemme 2.3. *Soient v_1, v_2 et v_3 trois sommets distincts de T . Alors,*

- soit v_1, v_2 et v_3 sont sur un même chemin,
- soit il existe un unique sommet v qui sépare v_1, v_2 et v_3 .

Démonstration. Posons

$$[v_1, v_2] = [v_1, u_1, u_2, \dots, u_k, v_2] \text{ et } [v_1, v_3] = [v_1, w_1, w_2, \dots, w_{k'}, v_3].$$

Si $u_1 \neq w_1$ alors $[v_3, w_{k'}, \dots, w_1, v_1, u_1, \dots, u_k, v_2]$ serait un chemin reliant les v_i ce qui est absurde. Ainsi $u_1 = w_1$. Soit i maximum tel que $u_i = w_i$. Alors $[v_2, u_k, \dots, u_i = w_i, \dots, w_{k'}, v_3]$ est un chemin et $v_1 \in B_v(\{v, u_{i-1}\})$, $v_2 \in B_v(\{v, u_{i+1}\})$ et $v_3 \in B_v(\{v, w_{i+1}\})$. On vient donc de montrer l'existence.

Par ailleurs, s'il existe deux sommets distincts v et v' séparant les v_i , alors ils sont sur le chemin $[v_1, v_2]$. Supposons par exemple que v_1, v, v' et v_2 soient alignés dans cet ordre. Comme v_1 et v_3 ne sont pas dans $[v, v_2]$, on en déduit que $[v_1, v] \cup [v, v']$ et $[v_3, v] \cup [v, v']$ sont des chemins et donc v_1 et v_3 sont sur une même branche de v' , ce qui est absurde car v' sépare les v_i . \square

Lemme 2.4. *Si T^X est compatible avec T^Y et si un sommet interne $v \in IV^Y$ sépare trois sommets v_1, v_2 et v_3 de V^X , alors $v \in T^X$.*

Démonstration. D'après le lemme 2.3, il y a un sommet interne v^X de T^X qui sépare v_1, v_2 et v_3 dans T^X . Par compatibilité, ce sommet sépare v_1, v_2 et v_3 dans T^Y . D'après le lemme 2.3, $v^X = v$. \square

Notons qu'un sommet interne $v \in IV^Y$ séparant trois sommets de T^X a alors au moins valence 3. Ainsi dans certains cas nous nous restreindrons aux cas des arbres dont tous les sommets internes sont de ce type.

Définition 2.5 (Arbre stable). *Un arbre T est dit stable si tout sommet interne a au moins valence 3.*

Intéressons-nous maintenant aux arbres de sphères.

Définition 2.6. *Un arbre de sphères \mathcal{T}^X est compatible avec un arbre de sphères \mathcal{T}^Y si*

- T^X est compatible avec T^Y ,
- pour tout sommet interne v de T^X , on a
 - $\mathcal{S}_v^X = \mathcal{S}_v^Y$ ($\mathbb{S}_v^X = \mathbb{S}_v^Y$ si projectives) et
 - $a_v^X = a_v^Y|_X$.

Nous allons voir que si $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$ est un revêtement d'arbres de sphères et si \mathcal{T}^X est compatible avec \mathcal{T}^Y et \mathcal{T}^Z , on peut parler de système dynamique d'arbres de sphères.

Définition 2.7 (Système dynamique). *On appelle système dynamique d'arbres de sphères un couple $(\mathcal{F}, \mathcal{T}^X)$ tel que*

- $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$ est un revêtement d'arbres de sphères;
- \mathcal{T}^X est compatible avec \mathcal{T}^Y et \mathcal{T}^Z .

La figure 2.1 donne un tel exemple de système dynamique.

Exemple. [système dynamique de sphères] Soit $(\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z, \mathcal{T}^X)$ soit un système dynamique tel que \mathcal{F} est un revêtement de sphères marquées. Alors T^X doit posséder un seul sommet interne et comme T^Y et T^Z n'en possèdent qu'un seuls, le sommet interne de T^X est le même que celui v de T^Y et de T^Z . On identifiera alors (f_v, a_v^Y, a_v^Z) et le couple $(\mathcal{F}, \mathcal{T}^X)$. On parle de système dynamique de sphères marqués par $\mathbf{F} := (F, \text{deg})$.

2.2 Dynamique d'arbres combinatoires

Comme V^X est un ensemble de sommets commun aux arbres T^Y et T^Z , on peut itérer F tant que les images successives des sommets restent dans V^X . Définissons par récurrence pour $k \geq 1$

$$IV(F) := IV^X \quad \text{et} \quad IV(F^{k+1}) := \{v \in IV(F^k) \mid F^k(v) \in IV^X\}.$$

Posons

$$\text{Prep}(F) := \bigcap_{k \geq 1} IV(F^k).$$

Si $v \in \text{Prep}(F)$, alors $F^k(v)$ est bien défini et appartient à IV^X pour tout $k \geq 0$.

Comme $\text{Prep}(F)$ est fini et invariant par F , tout sommet v de $\text{Prep}(F)$ est (pré) périodique pour F . Il se peut que $\text{Prep}(F)$ soit vide comme dans l'exemple de la figure 2.1.

Si $v \in IV^Y - \text{Prep}(F)$, alors il existe un plus petit rang $k \in \mathbb{N}$ tel que $F^k(v) \notin V^X$. On dira que v est oublié par F^k ou tout simplement que v est oublié si $k = 0$. Sur la figure 2.1, les sommets internes de T^Y en bas du dessin sont oubliés par F^3 .

Se limiter à de la dynamique sur les sommets serait ignorer la structure d'arbre. Le lemme suivant est une expression forte de ce que requiert la compatibilité.

Lemme 2.8. *Soit $B \subset T^Z$ une branche sur $v \in V^X$. Si B contient un sommet de V^X alors son point d'attache est dans X_v .*

Démonstration. Soit ce sommet est une feuille et dans ce cas c'est trival. Soit ce n'est pas une feuille et alors B contient une feuille de T^X ce qui nous ramène au cas précédent. \square

2.3 Dynamique sur les arbres de sphères

Si $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$ est un revêtement d'arbres de sphères, on note

- Σ^Y la réunion disjointe des sphères \mathcal{S}_v avec $v \in IV^Y$ et
- Σ^Z la réunion disjointe des sphères \mathcal{S}_w avec $w \in IV^Z$.

On définit l'application $f : \Sigma^Y \rightarrow \Sigma^Z$ par

$$f(z) := f_v(z) \quad \text{si} \quad z \in \mathcal{S}_v \quad \text{avec} \quad v \in IV^Y.$$

Si $(\mathcal{F}, \mathcal{T}^X)$ est un système dynamique d'arbres de sphères, on note

- $\Sigma^X \subseteq \Sigma^Y \cap \Sigma^Z$ la réunion disjointe des sphères \mathcal{S}_v avec $v \in IV^X$
- pour $k \geq 1$, $\Sigma_k \subseteq \Sigma^X$ la réunion disjointe des sphères \mathcal{S}_v avec $v \in IV(F^k)$
- $\Sigma \subseteq \Sigma^X$ la réunion disjointe des sphères \mathcal{S}_v avec $v \in \text{Prep}(F)$.

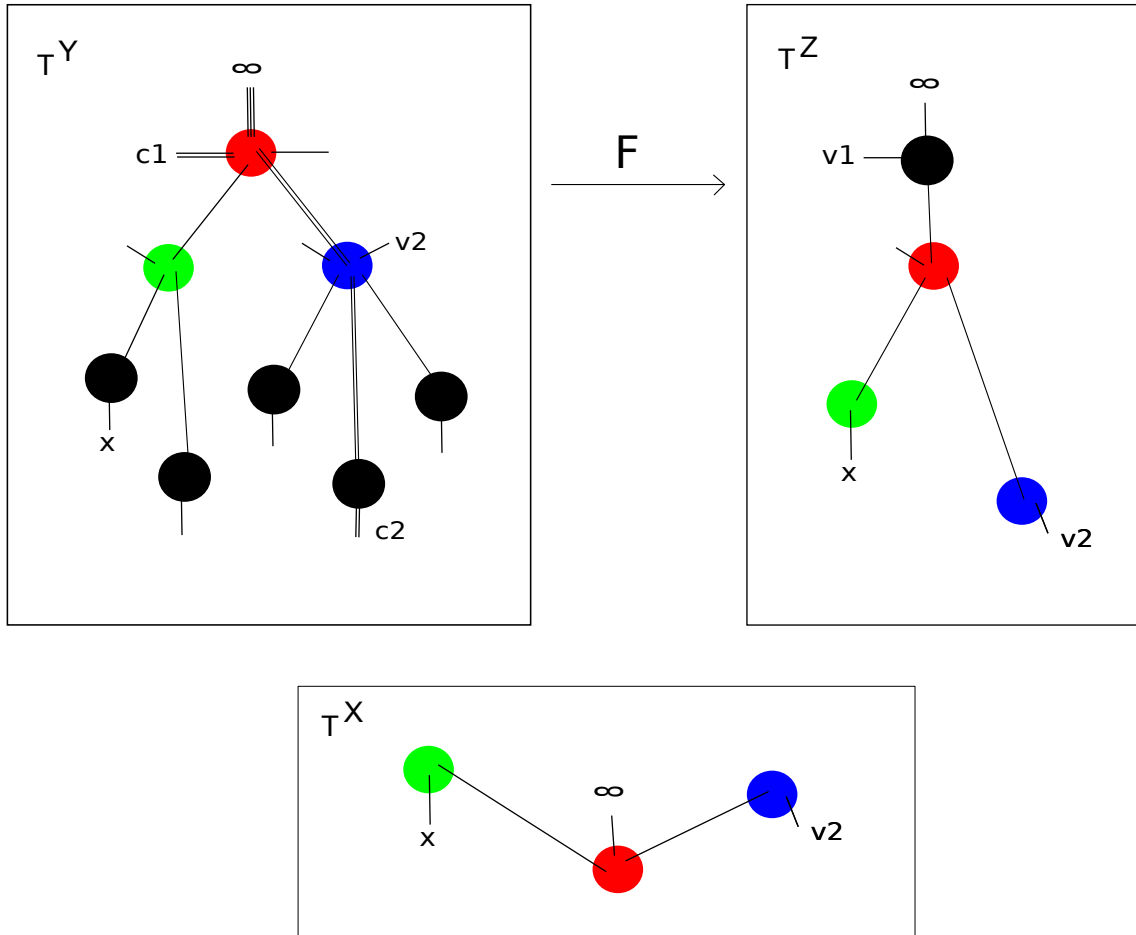


FIGURE 2.1 – Sur cet exemple, les sommets internes non identifiés dans \mathcal{T}^Z et \mathcal{T}^Y sont représentés en noir alors que ceux qui sont identifiés le sont avec la même couleur. Le couple $(\mathcal{F}, \mathcal{T}^X)$ forme un système dynamique. Le sommet interne adjacent à c_2 s'envoie sur le sommet bleu par un revêtement de degré 2, qui s'envoie sur le sommet rouge avec le même revêtement, qui est alors envoyé sur le sommet noir du haut de \mathcal{T}^Z par un revêtement de degré 3. Tous les autres revêtements sont de degré 1. Ainsi tous les sommets internes de \mathcal{T}^Y sont oubliés par la dynamique.

Comme F envoie $IV(F^{k+1})$ dans $IV(F^k)$, on a $f(\Sigma_{k+1}) \subseteq \Sigma_k$. De plus, Σ est l'intersection décroissante des Σ_k et

$$f(\Sigma) \subseteq \Sigma.$$

L'orbite d'un point z dans Σ est l'ensemble $\mathcal{O}(z) := \{f^k(z), k \geq 0\}$. Deux points de Σ sont dans la même grande orbite si leurs orbites respectives s'intersectent. On note $\mathcal{GO}(z)$ l'ensemble des points de Σ qui sont dans la même grande orbite que z . On dit que l'orbite d'un point z dans Σ est infinie si le cardinal de $\mathcal{O}(z)$ est infini. On note \mathcal{GOC}^∞ l'ensemble des grandes orbites qui contiennent un point critique dont l'orbite est infinie.

Nous pouvons désormais nous intéresser aux dynamiques possibles de notre objet : un revêtement d'arbre peut-il avoir des sphères périodiques ? de quelle période ? combien ? peut-on les classifier ? Nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.9 (Cycles de sphères). *Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$ un système dynamique d'arbres de sphères. Alors, $\text{card}\mathcal{GOC}^\infty \leq 2\text{deg}(\mathcal{F}) - 2$.*

Démonstration. Soit $c \in \Sigma$ un point critique de f tel que $\mathcal{GO}(c) \in \mathcal{GOC}^\infty$. Alors c appartient à une sphère \mathcal{S}_v avec $v \in \text{Prep}(F)$. Pour $k \geq 0$, on note $v_k := F^k(v)$ et $c_k := f^k(c)$. Comme $\text{card}\{c_k\} = \infty$, il existe un $k_0 \geq 1$ tel que

- c_k est un point d'attache d'une arête dans \mathcal{T}^Y pour $k < k_0$ et
- c_{k_0} n'est pas le point d'attache d'une arête de T^Y

(en effet, le nombre de points d'attache d'arêtes dans \mathcal{T}^Y est fini).

Pour $k \in [0, k_0 - 1]$, on note

- B_k^Y la branche de T^Y sur v_k attachée à c_k ,
- B_{k+1}^Z la branche de T^Z sur v_{k+1} attachée à c_{k+1} et
- $\tilde{B}_k = B_k^Y \cap F^{-1}(B_{k+1}^Z)$.

Soit $k_1 \geq 1$ minimal tel que $\tilde{B}_k = B_k^Y$ pour $k \in [k_1, k_0 - 1]$. On pose

$$B_c := \bigcup_{k_1-1}^{k_0-1} \tilde{B}_k.$$

Etant donné que c_{k_0} n'est pas un point d'attache de T^Y , tout sommet de B_c est oublié par un itéré de F . Autrement dit, $B_c \cap \text{Prep}(F) = \emptyset$.

Lemme. *L'ouvert B_c contient une feuille critique.*

Démonstration. Soit $k_1 = 0$ et $B_0^Y = \tilde{B}_0$. La formule de Riemann-Hurwitz implique que

$$\begin{aligned} 1 &= \chi_{T^Y}(\tilde{B}_0) = \text{deg}(\mathcal{F} : \tilde{B}_0 \rightarrow B_1^Z) \cdot \chi_{T^Z}(B_1^Z) - \text{mult}(\tilde{B}_0) \\ &\geq \text{deg}(\mathcal{F} : \tilde{B}_0 \rightarrow B_1^Z) - \text{mult}(B_c). \end{aligned}$$

Etant donné que c est un point critique de f_v , on a

$$\deg(F : \tilde{B}_0 \rightarrow B_1^Z) \geq \deg(v) \geq 2.$$

Donc $\text{mult}(B_c) \geq 1$ et B_c contient au moins une feuille critique.

Soit $k_1 \geq 1$ et \tilde{B}_{k_1-1} n'est pas une branche. D'après le Lemme 1.15, on a $\chi_{T^Y}(\tilde{B}_{k_1-1}) \leq 0$. La formule de Riemann-Hurwitz implique que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \chi_{T^Y}(\tilde{B}_{k_1-1}) = \deg(\mathcal{F} : \tilde{B}_{k_1-1} \rightarrow B_{k_1}^Z) \cdot \chi_{T^Z}(B_{k_1}^Z) - \text{mult}(\tilde{B}_{k_1-1}) \\ &\geq 1 - \text{mult}(B_c). \end{aligned}$$

Donc $\text{mult}(B_c) \geq 1$ et B_c contient au moins une feuille critique. \square

Lemme. Soient $c \in \Sigma$ et $c' \in \Sigma$ deux points d'attache critiques dont les orbites sont infinies et disjointes. Alors $B_c \cap B_{c'} = \emptyset$.

Démonstration. Si $B_c \cap B_{c'} \neq \emptyset$, alors $F(B_c) \cap F(B_{c'}) \neq \emptyset$ et on peut trouver deux entiers k et k' tels que la branche de T^Z attachée en c_k rencontre la branche de T^Z attachée en $c'_{k'}$. Dans ce cas,

- soit $v_k = v'_{k'}$ et $c_k = c'_{k'}$, ce qui contredit le fait que les orbites de c et c' sont disjointes ;
- soit v_k est contenu dans la branche de T^Z attachée sur $v'_{k'}$. Comme $\text{Prep}(F) \cap V^Z \subset V^X$, le fait que $B_{c'} \cap \text{Prep}(F) = \emptyset$ contredit le lemme 2.8 ;
- soit $v'_{k'}$ est contenu dans la branche de T^Z attachée sur v_k . Comme $\text{Prep}(F) \cap V^Z \subset V^X$, le fait que $B_c \cap \text{Prep}(F) = \emptyset$ contredit le lemme 2.8 .

\square

Revenons à la démonstration du théorème. Soient c_1, \dots, c_N des points critiques ayant des orbites disjointes de cardinal infini. Les ouverts B_{c_1}, \dots, B_{c_N} sont disjoints et contiennent chacun une feuille critique de T^Y . Il y a $2\deg(\mathcal{F}) - 2$ feuilles critiques. Donc $N \leq 2\deg(\mathcal{F}) - 2$. \square

Corollaire 2.10. Il y a au plus $2 \cdot \deg(\mathcal{F}) - 2$ cycles critiques de sphères périodiques dont le revêtement associé est non post-critiquement fini.

Démonstration. En effet, si un tel cycle de sphères existe, alors elles portent l'orbite d'un point critique d'orbite infinie. \square

Chapitre 3

Convergence

Dans ce chapitre, nous introduisons des notions de convergence pour des arbres de sphères et des revêtements d'arbres de sphères. Les arbres sont tous supposés munis d'une structure projective et les revêtements holomorphes. Nous verrons plus tard, lorsque nous étudierons les classes d'isomorphismes d'arbres, que ces notions passent bien au quotient et sont compatibles avec la dite compactification de Deligne-Mumford.

3.1 Convergence de sphères marquées

Dans cette partie nous définissons des notions de convergences qui ne sont pas Hausdorff : il n'y a pas unicité de la limite. Le but de cette partie n'est pas de définir une topologie. La question d'unicité sera abordée dans la partie 4 (lemme 5.7) et seulement dans le cas des arbres stables où nous verrons que deux limites d'une même suite sont isomorphes.

Rappelons qu'une sphère marquée par X est une injection $a : X \rightarrow \mathbb{S}$. Il nous arrivera de confondre la sphère marquée \mathcal{A} avec l'arbre de sphères marquées n'ayant qu'un seul sommet interne, la sphère correspondante étant \mathbb{S} et le marquage étant donné par $a : X \rightarrow \mathbb{S}$.

Définition 3.1. Une suite \mathcal{A}_n de sphères marquées $a_n : X \rightarrow \mathbb{S}_n$ converge vers un arbre de sphères \mathcal{T}^X si pour tout sommet interne v de \mathcal{T}^X , il existe des isomorphismes (projectifs) $\phi_{n,v} : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_v$ tels que $\phi_{n,v} \circ a_n$ converge vers a_v .

(On note \mathbb{S}_n et non \mathbb{S} car à priori les \mathbb{S}_n sont distinctes.) On notera $\mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{T}^X$ ou $\mathcal{A}_n \xrightarrow{\phi_n} \mathcal{T}^X$.

Exemple. Supposons que $X := \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Pour $n \geq 1$, soit \mathcal{A}_n la sphère marquée $a_n : X \rightarrow \mathbb{S}$ définie par :

$$a_n(x_1) := 0, \quad a_n(x_2) := 1, \quad a_n(x_3) := n \quad \text{et} \quad a_n(x_4) := \infty.$$

Soit \mathcal{T}^X l'arbre de sphères projectives marqué par X ayant deux sommets internes v et v' de valence 3 avec $\mathbb{S}_v := \mathbb{S}_{v'} := \mathbb{S}$,

$$a_v(x_1) := 0, \quad a_v(x_2) := 1, \quad a_v(x_3) := a_v(x_4) := \infty,$$

$$a_{v'}(x_1) := a_{v'}(x_2) := 0, \quad a_{v'}(x_3) := 1 \quad \text{et} \quad a_{v'}(x_4) := \infty.$$

En considérant les isomorphismes $\phi_{n,v} : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}_v$ et $\phi_{n,v'} : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}_{v'}$ définis par :

$$\phi_{n,v}(z) := z \quad \text{et} \quad \phi_{n,v'}(z) := z/n \quad (\text{cf figure 3.2}),$$

on montre que $\mathcal{A}_n \xrightarrow{\phi_n} T^X$.

Lemme 3.2. Soient v et v' deux sommets internes distincts de \mathcal{T}^X ayant au moins trois arêtes chacun et une suite de sphères marquées $(\mathcal{A}_n)_n$ telle que $\mathcal{A}_n \xrightarrow{\phi_n} T^X$.

Alors, la suite d'isomorphismes $(\phi_{n,v'} \circ \phi_{n,v}^{-1})_n$ converge localement uniformément vers la constante $i_{v'}(v)$ en dehors de $i_v(v')$.

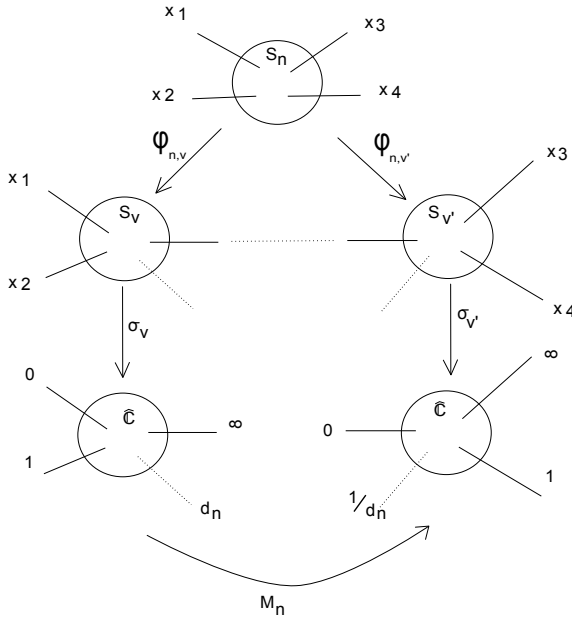


FIGURE 3.1 –

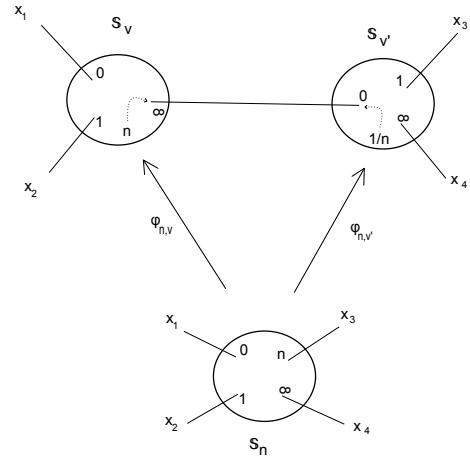


FIGURE 3.2 –

Démonstration. Comme v et v' ont trois arêtes chacun et que toute branche possède au moins une feuille d'après le lemme 1.7, il existe quatre points marqués $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$ tels que le sommet v sépare x_1, x_2 et v' et le sommet v' sépare x_3, x_4 et v .

Posons alors, pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$,

$$\xi_j := a_v(x_j), \quad \xi'_j := a_{v'}(x_j), \quad \xi_{j,n} := \phi_{n,v} \circ a_n(x_j) \quad \text{et} \quad \xi'_{j,n} := \phi_{n,v'} \circ a_n(x_j).$$

Par hypothèse, $\xi_{j,n} \rightarrow \xi_j$ et $\xi'_{j,n} \rightarrow \xi'_j$ quand $n \rightarrow \infty$. De plus, $\xi_3 = \xi_4 = i_v(v')$ et $\xi'_1 = \xi'_2 = i_{v'}(v)$. Quitte à post-composer $\phi_{n,v}$ et $\phi_{n,v'}$ par des automorphismes de \mathbb{S}_v et $\mathbb{S}_{v'}$ qui convergent vers l'identité quand $n \rightarrow \infty$, ce qui ne change pas la limite de $\phi_{n,v'} \circ \phi_{n,v}^{-1}$, on peut supposer que pour tout n ,

$$\xi_{1,n} = \xi_1, \quad \xi_{2,n} = \xi_2, \quad \xi_{3,n} = \xi_3, \quad \xi'_{1,n} = \xi'_1, \quad \xi'_{3,n} = \xi'_3 \quad \text{et} \quad \xi'_{4,n} = \xi'_4.$$

Considérons alors les cartes projectives σ sur \mathbb{S}_v et σ' sur $\mathbb{S}_{v'}$ définies par :

- $\sigma(\xi_1) = 0$, $\sigma(\xi_2) = 1$ et $\sigma(\xi_3) = \infty$;
- $\sigma'(\xi'_1) = 0$, $\sigma'(\xi'_4) = 1$ et $\sigma'(\xi'_3) = \infty$.

La transformation de Moebius $M_n := \sigma' \circ \phi_{n,v'} \circ \phi_{n,v}^{-1} \circ \sigma^{-1}$ fixe 0 et ∞ et envoie $\sigma(\xi_4)$ sur 1. Par conséquent,

$$M_n(z) = \frac{z}{\lambda_n} \quad \text{avec} \quad \sigma(\xi_{4,n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty.$$

Par conséquent, M_n converge localement uniformément vers l'application constante nulle en dehors de l'infini. Ainsi, $\phi_{n,v'} \circ \phi_{n,v}^{-1} = \sigma'^{-1} \circ M_n \circ \sigma$ converge localement uniformément vers la constante $(\sigma')^{-1}(0) = i_{v'}(v)$ en dehors de $\sigma^{-1}(\infty) = i_v(v')$. \square

3.2 Convergence de revêtement de sphères marquées

3.2.1 Définitions et premières propriétés

À toute fraction rationnelle marquée (f, y, z) , on peut associer un revêtement d'arbres de sphères entre une sphère marquée par Y via l'application y et une sphère marquée par Z via l'application z .

Rappel. Un portrait \mathbf{F} de degré $d \geq 2$ est une paire (F, \deg) où

- $F : Y \rightarrow Z$ est une application entre des ensembles finis Y et Z et
- $\deg : Y \rightarrow \mathbb{N} - \{0\}$ est une fonction vérifiant

$$\sum_{a \in Y} (\deg(a) - 1) = 2d - 2 \quad \text{et} \quad \sum_{a \in F^{-1}(b)} \deg(a) = d \quad \text{pour tout } b \in Z.$$

Définition 3.3 (Convergence non dynamique). *Soit $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$ un revêtement d'arbres de sphères marquées et \mathbf{F} son portrait. Une suite $\mathcal{F}_n := (f_n, a_n^Y, a_n^Z)$ de revêtement de sphères marquées converge vers \mathcal{F} si elles ont pour portrait \mathbf{F} et si pour toute paire de sommets internes v et $w := F(v)$, il existe des suites d'isomorphismes $\phi_{n,v}^Y : \mathbb{S}_n^Y \rightarrow \mathbb{S}_v$ et $\phi_{n,w}^Z : \mathbb{S}_n^Z \rightarrow \mathbb{S}_w$ tels que*

- $\phi_{n,v}^Y \circ a_n^Y : Y \rightarrow \mathbb{S}_v$ converge vers $a_v^Y : Y \rightarrow \mathbb{S}_v$,
- $\phi_{n,w}^Z \circ a_n^Z : Z \rightarrow \mathbb{S}_w$ converge vers $a_w^Z : Z \rightarrow \mathbb{S}_w$ et
- $\phi_{n,w}^Z \circ f_n \circ (\phi_{n,v}^Y)^{-1} : \mathbb{S}_v \rightarrow \mathbb{S}_w$ converge localement uniformément en dehors de Y_v vers $f_v : \mathbb{S}_v \rightarrow \mathbb{S}_w$.

On notera alors $\mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}$ ou $\mathcal{F}_n \xrightarrow{(\phi_n^Y, \phi_n^Z)} \mathcal{F}$.

Lemme 3.4. *Soit $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$ un revêtement d'arbres de sphères de portrait \mathbf{F} et de degré D , soit $v \in IV^Y$ avec $\deg(v) = D$ et soit $\mathcal{F}_n := (f_n, a_n^Y, a_n^Z)$ une suite de revêtements de sphères marqués qui vérifie $\mathcal{F}_n \xrightarrow{(\phi_n^Y, \phi_n^Z)} \mathcal{F}$. Alors, la suite des $\phi_{n, F(v)}^Z \circ f_n \circ (\phi_{n,v}^Y)^{-1} : \mathbb{S}_v \rightarrow \mathbb{S}_{F(v)}$ converge uniformément vers $f_v : \mathbb{S}_v \rightarrow \mathbb{S}_{F(v)}$.*

Démonstration. On pose $w := F(v)$. On choisit des cartes projectives $\sigma_v : \mathbb{S}_v \rightarrow \mathbb{S}$ et $\sigma_w : \mathbb{S}_w \rightarrow \mathbb{S}$ telles qu'aucun point de Y_v ou de Z_w ne soit envoyé à l'infini. On pose

$$g_n := \sigma_w \circ \phi_{n,w} \circ f_n \circ \phi_{n,v}^{-1} \circ \sigma_v^{-1} \quad \text{et} \quad g := \sigma_w \circ f_v \circ \sigma_v^{-1}.$$

Par hypothèse, la suite $(g_n)_n$ converge localement uniformément vers g en dehors de $\sigma_v(Y_v)$. Les D pôles de g_n (en comptant les multiplicités) convergent donc vers les D pôles de g . En particulier, si U est un voisinage suffisamment petit de $\sigma_v(Y_v)$, alors

- pour n assez grand, g_n est holomorphe sans pôles dans U et
- $g_n - g$ converge uniformément vers 0 au bord de U .

D'après le principe du module maximum, $g_n - g$ converge uniformément vers 0 dans U . Par conséquent, g_n converge localement uniformément vers g au voisinage de tout point de \mathbb{S} et comme \mathbb{S} est compacte, g_n converge uniformément vers g sur \mathbb{S} . \square

Définition 3.5 (Convergence dynamique). *Soit $(\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z, \mathcal{T}^X)$ un système dynamique d'arbres de sphères de portrait \mathbf{F} . Une suite $(\mathcal{F}_n, a_n^Y, a_n^Z)_n$ de systèmes dynamiques de sphères marquées par (\mathbf{F}, X) converge vers $(\mathcal{F}, \mathcal{T}^X)$ si*

$$\mathcal{F}_n \xrightarrow{(\phi_n^Y, \phi_n^Z)} \mathcal{F} \quad \text{avec} \quad \phi_{n,v}^Y = \phi_{n,v}^Z$$

pour tout sommet $v \in IV^X$. On dit que $(\mathcal{F}, \mathcal{T}^X)$ est dynamiquement approximable par $(\mathcal{F}_n)_n$.

On notera alors ϕ_n au lieu de ϕ_n^* lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible.

Corollaire 3.6 (du lemme 3.4). *Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{T}^X)$ un système dynamique d'arbres de sphères de degré D , dynamiquement approximable par $\mathcal{F}_n := (f_n, a_n^Y, a_n^Z)$. Supposons que $v \in IV^X$ est un sommet fixe tel que $\deg(v) = D$. Alors la suite des $[f_n] \in \text{rat}_D$ converge vers la classe de conjugaison $[f_v] \in \text{rat}_D$.*

Rappelons que $f : \Sigma^Y \rightarrow \Sigma^Z$ est définie par $f(z) := f_v(z)$ si $z \in \mathbb{S}_v$ avec $v \in IV^Y$, que $\Sigma^X \subseteq \Sigma^Y \cap \Sigma^Z$ et que Σ_k est l'ensemble des points $z \in \Sigma^Y$ tels que $f^j(z) \in \Sigma^X$ pour $1 \leq j \leq k-1$. Nous noterons $Y(f^k)$ l'ensemble des points $z \in \Sigma_k$ pour lesquels il existe $j \in [1, k]$ tel que $f^j(z)$ soit le point d'attache d'une arête dans \mathcal{T}^Z :

$$Y(f^k) := \bigcup_{v \in IV(F^k)} \bigcup_{1 \leq j \leq k} f^{-j}(Z_{F^j(v)}).$$

Lemme 3.7. *Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{T}^X)$ dynamiquement approximable par $(\mathcal{F}_n)_n$. Si $v \in IV(F^k)$ et si $w := F^k(v)$, alors $(\phi_{n,w} \circ f_n^k \circ \phi_{n,v}^{-1})_n$ converge localement uniformément vers f^k en dehors de $Y(f^k)$.*

Démonstration. En effet, il s'agit de remarquer que

$$\phi_{n,v'} \circ f_n^k \circ \phi_{n,v}^{-1} = \phi_{n,v'} \circ f_n \circ \phi_{n,F^{k-1}(v)}^{-1} \cdots \circ \phi_{n,F^2(v)} \circ f_n \circ \phi_{n,F(v)}^{-1} \circ \phi_{n,F(v)} \circ f_n \circ \phi_{n,v}^{-1}$$

et donc il y a convergence uniforme locale tant que le domaine que l'on itère ne rencontre pas de point d'attache d'arête. \square

Lemme 3.8. *Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{T}^X)$ dynamiquement approximable par $(\mathcal{F}_n)_n$. Si $v \in IV(F^k)$ et si $F^k(v) \in B_w(e)$, alors $(\phi_{n,w} \circ f_n^k \circ \phi_{n,v}^{-1})_n$ converge localement uniformément vers la constante $i_w(e)$ en dehors de $Y(f^k)$.*

Démonstration. En effet, on a

$$\phi_{n,w} \circ f_n^k \circ \phi_{n,v}^{-1} = (\phi_{n,w} \circ \phi_{n,F^k(v)}^{-1}) \circ (\phi_{n,F^k(v)} \circ f_n^k \circ \phi_{n,v}^{-1}).$$

D'après le lemme 3.7, l'application de droite converge localement uniformément en dehors de $Y(f^k)$ vers une application dont l'image évite $Z_{F^k(v)}$ et d'après le lemme 3.2, l'application de gauche converge localement uniformément vers $i_w(e)$ en dehors de $i_{F^k(v)}(w) \in Z_{F^k(v)}$. \square

3.2.2 Lemme des branches

Dans cette partie, nous nous intéressons à certaines propriétés des branches des revêtements d'arbres de sphères limite d'une suite de systèmes dynamiques de sphères. Nous commençons par le lemme suivant qui lui est général :

Lemme 3.9. *Si une branche B sur un sommet v s'envoie sur une branche, et si on note d le degré du point d'attache de l'arête de B sur v , alors le nombre de feuilles critiques dans B , en comptant les multiplicités, est $d - 1$.*

Démonstration. On applique la formule de Riemann-Hurwitz à B puis à \overline{B} et on obtient directement le résultat. \square

Corollaire 3.10. *En particulier, si $d = 1$, alors il n'y a pas de sommet critique dans la branche.*

Montrons le résultat suivant :

Lemme 3.11 (Branches). *Soit \mathcal{F} un système dynamique d'arbre de sphères tel qu'on ait une suite de systèmes dynamiques de sphères marquées qui converge dynamiquement vers \mathcal{F} . Soit v un sommet interne périodique, soit $a_0 \in \mathbb{S}_v$ et B une branche sur v (dans T^X) telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'image de la branche de T^Y attachée en $f^k(a_0)$ est incluse dans la branche de T^Z attachée en $f^{k+1}(a_0)$. Si B contient un sommet interne périodique alors le cycle de ce sommet est de degré 1 et a_0 est périodique.*

Démonstration. Notons B_k^* la branche attachée en $f^k(a_0)$ dans T^* . Soit v' un sommet dans B_0^* périodique. On note $v_k := F^k(v)$ et $v'_k := F^k(v')$. Comme les itérés de v' sont dans les B_k^* , l'orbite de a_0 par f est périodique.

Supposons donc que a_0 est périodique de période k_0 et que le sommet v' est de période k' multiple de k_0 . Comme v_0 et v'_0 sont dans Z , on trouve z et $z' \in Z$ tels que le chemin $[z, z']^Z$ passe par v_0 et v'_0 dans cet ordre. Pour $\star \in \{v_0, v'_0\} \subset T^Z$, on se donne des cartes projectives σ_\star telles que

$$\sigma_\star \circ a_\star(z) = \infty \quad \text{et} \quad \sigma_\star \circ a_\star(z') = 0.$$

Prenons ϕ_n^Y et ϕ_n^Z comme dans la définition 3.5. Alors, quitte à post-composer les isomorphismes $\phi_{n,\star}^Z$ par des automorphismes de \mathbb{S}_\star qui tendent vers l'identité quand $n \rightarrow \infty$, on peut supposer que

$$\phi_{n,\star}^Z \circ a_n(z) = a_\star(z) \quad \text{et} \quad \phi_{n,\star}^Z \circ a_n(z') = a_\star(z').$$

On définit alors des cartes projectives sur \mathbb{S}_n par $\sigma_{n,\star} := \sigma_\star \circ \phi_{n,\star}^Z$.

Les applications de changement de cartes $\sigma_{n,v'} \circ \sigma_{n,v}^{-1}$ fixent 0 et ∞ . Ce sont donc des similitudes de centre 0. On définit λ_n par $\sigma_{n,v'} = \lambda_n \sigma_{n,v}$. Comme les sommets v et v' ont au moins trois arêtes, le lemme 3.2 assure que $\lambda_n \rightarrow \infty$.

Soit $D \subset \mathbb{S}_v$ un disque contenant $a_v(z')$. Comme $f|_{\Sigma^X}$ est continue on peut supposer D suffisamment petit pour que ses k' itérés par f ne contiennent au plus qu'un unique point d'attache qui est l'itéré de a_0 .

Notons $D_n := (\phi_{n,v}^Z)^{-1}(D)$. Montrons que dans la carte $\sigma_{n,v}$, on peut prendre n assez grand pour que l'application $f_n^{k'}$ n'ait pas de pôles sur le disque D_n . Pour tout $k > 0$, comme $F(B_{k-1}^Y) \subseteq B_k^Z$, pour n assez grand le disque $D_{n,k}$ évite les points d'attache des arêtes des éléments $z \in Z - B_k^Z$. Comme $\phi_{n,v}^Z(\partial D_{n,k}) \rightarrow \partial D_k$, on conclut d'après le principe du maximum que $\phi_{n,v}^Z(D_{n,k}) \rightarrow D_k$. Comme $D_0 = D$ ne contient pas de pôles de $f^{k'}$ par définition de D , alors D_n ne contient pas de pôles de $f_n^{k'}$.

Dans les cartes $\sigma_{n,v}$ et $\sigma_{n,v'}$, l'application $f_n^{k'} : D_n \rightarrow \mathbb{S}_n - \{a_n(z)\}$ admet des développements en séries entières en $a_n(z')$ de la forme

$$\sigma_{n,v} \circ f_n^{k'} = \sum_{j \in \mathbb{N}} c_{n,j} \cdot \sigma_{n,v}^j \quad \text{et} \quad \sigma_{n,v'} \circ f_n^{k'} = \sum_{j \in \mathbb{N}} c'_{n,j} \cdot \sigma_{n,v'}^j.$$

Comme on a $\sigma_{n,v'} = \lambda_n \sigma_{n,v}$, il en découle que

$$c'_{n,j} = \lambda_n^{i-j} c_{n,j}.$$

Considérons maintenant les développements en séries de Laurent de $f^{k'} : \mathbb{S}_v \rightarrow \mathbb{S}_v$ au voisinage de $a_0 = a_v(z')$ dans la carte σ_v et celui de $f^{k'} : \mathbb{S}_{v'} \rightarrow \mathbb{S}_{v'}$ au voisinage de $a_{v'}(z')$ dans la carte $\sigma_{v'}$,

$$\sigma_v \circ f^{k'} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \cdot \sigma_v^j \quad \text{et} \quad \sigma_{v'} \circ f^{k'} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c'_j \cdot \sigma_{v'}^j.$$

Si $F^k(v) = v$ alors le lemme 3.7 affirme que $\phi_{n,v} \circ f_n^k \circ \phi_{n,v}^{-1}$ converge localement uniformément vers $\sigma_v \circ f^k \circ \sigma_v^{-1}$ sur $D - \{a_v(z')\}$ et donc uniformément sur D par principe du maximum, étant donné que ces applications n'ont pas de pôles dans D . En se plaçant dans la carte σ_v , on a donc la convergence $c_{n,j} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c_j$. Si $F^k(v) \neq v$, le lemme 3.8 qui permet de conclure que $c_{n,j} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 = c_j$. De même, on a la convergence $c'_{n,j} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c'_j$. En particulier, comme $c'_{n,j} = 0$ pour $j < 0$, on a $c'_j = 0$ et $c_j = 0$ (on retrouve le fait que a_0 est fixe par $f^{k'}$).

Si $F^k(v) \neq v$, les coefficients c_j sont tous nuls, ce qui force les coefficients c'_j à être également tous nuls : contradiction.

Il faut donc que $F^k(v) = v$. Si l'on note d le degré local de $f^{k'}$ en a_0 , alors $c_j = 0$ pour $j < d$ et $c_d \neq 0$. En passant à la limite sur $c'_{n,j} = \lambda_n^{1-j} c_{n,j}$, comme $\lambda_n \rightarrow \infty$, on obtient $c'_1 = c_1$ et $c'_j = 0$ si $j > 1$. Ainsi, si $d > 1$, les coefficients c'_j sont de nouveau tous nuls : contradiction. Le seul cas possible est donc $d = 1$. Or d est le produit des d_k , où d_k est le degré du point d'attache de l'arête de B_k^Y . Ainsi, si $d = 1$, alors tous les d_k sont égaux à 1, et donc les branches B_k^Y ne contiennent pas de sommets critiques d'après le corollaire 3.10. Par conséquent, $f^{k'}$ est de degré 1, ce qui implique que l'application $f^{k'} : \mathbb{S}_{v'} \rightarrow \mathbb{S}_{v'}$ soit de degré 1 et qui est absurde. \square

3.2.3 Lemmes des anneaux

Dans cette partie nous proposons d'étudier encore les revêtements d'arbres de sphères (stables) qui sont limites de systèmes dynamiques de sphères marquées. Nous essaierons d'utiliser les propriétés usuelles sur les anneaux de ces dernières pour en déduire les deux lemmes suivants.

Pour les deux lemmes, nous faisons les hypothèses suivantes :

- $(\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z, \mathcal{T}^X)$ est un système dynamique d'arbre de sphères tel qu'on ait une suite de systèmes dynamiques de sphères marquées qui converge dynamiquement (f_n, a_n^Y, a_n^Z) vers \mathcal{F} et \mathcal{T}^Z est stable ;
- $v \in IV(F^{k_0})$ et $v' \in IV(F^{k_0})$ sont des sommets distincts et on pose $v_k := F^k(v)$ et $v'_k := F^k(v')$ pour $0 \leq k \leq k_0$;
- l'anneau $\llbracket v_k, v'_k \rrbracket^Y$ ne contient pas de feuille critique pour $0 \leq k \leq k_0 - 1$.

D'après le corollaire 1.32, $A_k^Y := \llbracket v_k, v'_k \rrbracket^Y$ est une composante connexe de $F^{-1}(A_{k+1}^Z)$ avec $A_{k+1}^Z := F(A_k^Y) = \llbracket v_{k+1}, v'_{k+1} \rrbracket^Z$. D'après le lemme 1.29, $\overline{\mathcal{F}} : \overline{A}_k^Y \rightarrow \overline{A}_{k+1}^Z$ est un revêtement d'arbres de sphères dont on note D_k le degré.

Lemme 3.12 (Anneau non critique). *Supposons que $D_k = 1$ pour $0 \leq k \leq k_0 - 1$. Alors,*

- Si $[v_{k_0}, v'_{k_0}] \subseteq [v, v']$ ou $[v, v'] \subseteq [v_{k_0}, v'_{k_0}]$ alors*
- A) *soit $v_{k_0} = v$ et $v'_{k_0} = v'$ et alors $i_v(v')$ et $i_{v'}(v)$ sont fixés par f^{k_0} et le produit des multiplicateurs associés est 1 ;*
 - B) *soit $v_{k_0} = v'$ et $v'_{k_0} = v$ et alors $i_v(v')$ et $i_{v'}(v)$ sont échangés par f^{k_0} et le multiplicateur du cycle associé est 1.*

Lemme 3.13 (Anneau critique). *Supposons que $D_k \geq 2$ avec $0 \leq k \leq k_0 - 1$. Alors on ne peut pas avoir $[v_{k_0}, v'_{k_0}] \subseteq [v, v']$.*

La suite de cette partie est consacrée à la démonstration simultanée de ces deux résultats.

Choix de cartes. Posons $w := v_{k_0}$ et $w' := v'_{k_0}$. Supposons que $[w, w']^Z \subseteq [v, v']^Z$ ou que $[v, v']^Z \subseteq [w, w']^Z$. Dans le cas non critique, il faut montrer que $[w, w']^Z = [v, v']^Z$ et dans le cas critique, il faut montrer que $[w, w']^Z \not\subseteq [v, v']^Z$.

Soient $z, z' \in Z$ tels que le chemin $[z, z']^Z$ passe par v et v' dans cet ordre et par w et w' , non nécessairement dans cet ordre. Pour tout sommet interne \star sur le chemin $[z, z']^Z$, on se donne des cartes projectives σ_\star telles que

$$\sigma_\star \circ a_\star(z) = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_\star \circ a_\star(z') = \infty.$$

Prenons ϕ_n^Y et ϕ_n^Z comme dans la définition 3.5. Alors, quitte à post-composer les isomorphismes $\phi_{n,\star}^Z$ par des automorphismes de \mathbb{S}_\star qui tendent vers l'identité quand $n \rightarrow \infty$, on peut supposer que pour tout sommet interne \star sur le chemin $[z, z']$,

$$\phi_{n,\star}^Z \circ a_n(z) = a_\star(z) \quad \text{et} \quad \phi_{n,\star}^Z \circ a_n(z') = a_\star(z').$$

On définit alors des cartes projectives sur \mathbb{S}_n par $\sigma_{n,\star} := \sigma_\star \circ \phi_{n,\star}^Z$.

Les applications de changement de cartes fixent 0 et ∞ . Ce sont donc des similitudes de centre 0. On définit λ_n, μ_n, ρ_n et ρ'_n par (cf figure 3.3) :

$$\begin{aligned} \sigma_{n,v'} &= \lambda_n \sigma_{n,v} \quad \text{et} \quad \sigma_{n,w'} = \mu_n \sigma_{n,w} \\ \sigma_{n,v} &= \rho_n \sigma_{n,w} \quad \text{et} \quad \sigma_{n,v'} = \rho'_n \sigma_{n,w'}. \end{aligned}$$

Notons que comme les sommets v, w, v' et w' ont au moins trois arêtes, le lemme 3.2 donne le comportement de λ_n, μ_n, ρ_n et ρ'_n en fonction des positions relatives de ces sommets.

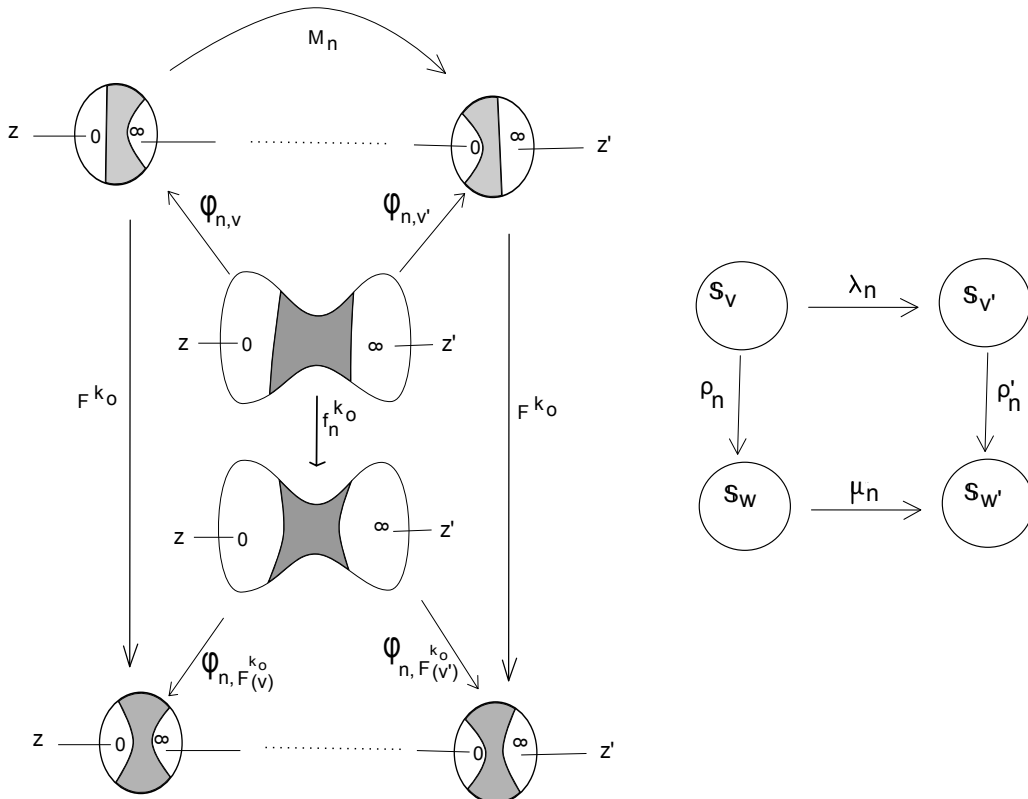


FIGURE 3.3 – Une représentation simplifiée des notations introduites dans la démonstration du lemme 3.12.

Anneaux. (cf figure 3.3) Rappelons que $Y(f^{k_0})$ est l'ensemble des points de Σ_{k_0} dont l'image par un itéré f^k avec $k \in [1, k_0]$ est le point d'attache d'une arête dans \mathcal{T}^Z . C'est un ensemble fini qui contient $i_v(v')$ et $i_{v'}(v)$.

Soit $D \subset S_v$ (respectivement $D' \subset S_{v'}$ un disque contenant $i_v(v')$ (respectivement $i_{v'}(v)$) suffisamment petit pour que son adhérence ne contienne pas d'autre point de $Y(f^{k_0})$ que $i_v(v')$ (respectivement $i_{v'}(v)$) et qu'elle ne contienne pas $a_v(z)$ (resp. $a_{v'}(z')$). Posons

$$A_n := (\phi_{n,v}^Y)^{-1}(D) \cap (\phi_{n,v'}^Y)^{-1}(D').$$

Nous allons montrer les assertions suivantes :

1. pour n suffisamment grand, A_n est un anneau contenu dans $S_n - \{a_n(z), a_n(z')\}$;
2. $f_n^{k_0}(A_n)$ est contenu dans $S_n - \{a_n(z), a_n(z')\}$;

3. tout compact de $D - \{i_v(v')\}$ est inclus dans $\phi_{n,v}(A_n)$ pour n assez grand et $\phi_{n,w} \circ f_n^{k_0} \circ \phi_{n,v}^{-1}$ converge localement uniformément vers f^{k_0} dans $D - \{i_v(v')\}$;
4. $\phi_{n,v'}(A_n)$ mange tout compact de $D' - \{i_{v'}(v)\}$ et $\phi_{n,w'} \circ f_n^{k_0} \circ \phi_{n,v'}^{-1}$ converge localement uniformément vers f^{k_0} dans $D' - \{i_{v'}(v)\}$.

Point 1. Notons $M_n := \phi_{n,v'} \circ \phi_{n,v}^{-1}$. D'après le lemme 3.8, pour n assez grand, $M_n(\partial D)$ est contenu dans un voisinage de $i_{v'}(v)$ évitant $\partial D'$. Alors, A_n est un anneau. Quand $n \rightarrow \infty$, $\phi_{n,v} \circ a_n(z)$ converge vers $a_v(z)$ qui n'est pas, par hypothèse, dans l'adhérence de D . Par conséquent, pour n assez grand, D_n ne contient pas $a_n(z)$. De même, pour n assez grand, D'_n ne contient pas $a_n(z'_n)$. Alors, $A_n \subset \mathbb{S}_n - \{a_n(z), a'_n(z)\}$.

Point 2. Soient $D_1 \subset \mathbb{S}_{v_1}$ un disque contenant $f(D)$ mais pas d'autre point d'attache d'arête de \mathcal{T}^Z que $f(i_v(v'))$ et $D'_1 \subset \mathbb{S}_{v'_1}$ un disque contenant $f(D')$ mais pas d'autre point d'attache d'arête de \mathcal{T}^Z que $f(i_{v'}(v))$. Comme dans le point 1, pour n assez grand,

$$A_{1,n} := \phi_{n,v_1}(D_1) \cap \phi_{n,v'_1}^{-1}(D'_1)$$

est un anneau.

Etant donné que $\phi_{n,v_1} \circ f_n \circ \phi_{n,v}^{-1}$ converge uniformément vers f au voisinage de ∂D et que $\phi_{n,v'_1} \circ f_n \circ \phi_{n,v'}^{-1}$ converge uniformément vers f au voisinage de $\partial D'$, pour n assez grand on a $f_n(\partial A_n) \subset A_{1,n}$.

Comme dans le point 1, pour n assez grand, A_n évite $a_n(Y - \llbracket v, v' \rrbracket)$ et donc, $f_n(A_n)$ évite $a_n(Z - \llbracket v_1, v'_1 \rrbracket)$. De même, pour n assez grand, $A_{1,n}$ évite $a_n(Z - \llbracket v_1, v'_1 \rrbracket)$.

En résumé, $f_n(\partial A_n) \subset A_{1,n}$ et $f_n(A_n)$ évite au moins un point dans chaque composante du complémentaire de $A_{1,n}$. Il suit du principe du maximum que $f_n(A_n) \subset A_{1,n}$.

Pour n assez grand, $D - a_v(v')$ (resp. $D' - a_{v'}(v)$) évite $a_v(Y(f^{k_0}) - \llbracket v, v' \rrbracket)$ (resp. $a_{v'}(Y(f^{k_0}) - \llbracket v, v' \rrbracket)$), donc $D_1 - a_{F(v)}(F(v'))$ (resp. $D'_1 - a_{F(v')}(F(v))$) évite $a_{F(v)}(Y(f^{k_0-1}) - \llbracket F(v), F(v') \rrbracket)$ (resp. $a_{F(v')}(Y(f^{k_0-1}) - \llbracket F(v), F(v') \rrbracket)$). Ainsi on peut faire la même démarche en remplaçant D et D' par D_1 et D'_1 , les sommets v et v' par v_1 et v'_1 et réitérer cela $k_0 - 1$ fois. Cela montre que $f_n^{k_0}(A_n)$ évite $a_n(Z - \llbracket v_{k_0}, v'_{k_0} \rrbracket)$, en particulier $a_n(z)$ et $a_n(z')$.

Points 3 et 4. Ces points suivent du lemme 3.7.

Développement en séries de Laurent et convergence.

Dans les cartes $\sigma_{n,v}$ au départ et $\sigma_{n,w}$ à l'arrivée, l'application $f_n^{k_0} : A_n \rightarrow \mathbb{S}_n - \{a_n(z), a_n(z')\}$ admet un développement en série de Laurent de la forme

$$\sigma_{n,w} \circ f_n^{k_0} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{n,j} \cdot \sigma_{n,v}^j.$$

Dans les cartes $\sigma_{n,v'}$ au départ et $\sigma_{n,w'}$, ce développement en série de Laurent devient

$$\sigma_{n,w'} \circ f_n^{k_0} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c'_{n,j} \cdot \sigma_{n,v'}^j.$$

Comme on a

$$\sigma_{n,v'} = \lambda_n \sigma_{n,v} \quad \text{et} \quad \sigma_{n,w'} = \mu_n \sigma_{n,w},$$

il en découle que

$$c'_{n,j} = \frac{\mu_n}{\lambda_n^j} c_{n,j}.$$

Considérons maintenant le développement en série de Laurent de $f^{k_0} : \mathbb{S}_v \rightarrow \mathbb{S}_w$ au voisinage de $a_v z$ dans les cartes σ_v au départ et σ_w à l'arrivée

$$\sigma_w \circ f^{k_0} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \cdot \sigma_v^j,$$

ainsi que celui de $f^{k_0} : \mathbb{S}_{v'} \rightarrow \mathbb{S}_{w'}$ au voisinage de $a_{v'}(z')$ dans les cartes $\sigma_{v'}$ au départ et $\sigma_{w'}$ à l'arrivée

$$\sigma_{w'} \circ f^{k_0} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c'_j \cdot \sigma_{v'}^j.$$

Convergence. Ici nous démontrons que l'on a

$$c_{n,j} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c_j \quad \text{et} \quad c'_{n,j} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c'_j.$$

Puisque $\mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}$ et que pour tout $0 \leq k < k_0$, $\phi_{n,v_k}^{-1}(\partial D_{k,n})$ évite Z_v , on a

$$\sigma_{v_{k+1}} \circ (\phi_{n,v_{k+1}} \circ f_n \circ \phi_{n,v_k}^{-1}) \circ \sigma_{v_k}^{-1} \rightarrow \sigma_{v_{k+1}} \circ f_{v_k} \circ \sigma_{v_k}^{-1}$$

uniformément sur $\sigma_{v_k}^{-1}(\phi_{n,v_k}^{-1}(\partial D_{k,n}))$. Donc par composition, on a

$$\sigma_w \circ (\phi_{n,w} \circ f_n^{k_0} \circ \phi_{n,v}^{-1}) \circ \sigma_v^{-1} \rightarrow \sigma_w \circ f^{k_0} \circ \sigma_v^{-1}$$

uniformément sur $\sigma_v^{-1}(\partial D)$.

D'autre part on a

$$(\sigma_w \circ \phi_{n,w}) \circ f_n^{k_0} \circ (\phi_{n,v}^{-1} \circ \sigma_v^{-1}) = \sigma_{n,w} \circ f_n^{k_0} \circ \sigma_{n,v}^{-1}.$$

Comme la convergence uniforme des fonctions implique celle des coefficients des séries de Laurent, on a bien $c_{n,j} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c_j$. La démonstration est identique pour $c'_{n,j} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c'_j$.

Cas A. Supposons que le chemin de z à z' dans T^Z passe par w et w' dans cet ordre. D'une part, on a $\sigma_{n,w} = \rho_n \sigma_{n,v}$ avec $\rho_n \in \mathbb{C} - \{0\}$ et d'après le lemme 3.2 :

- $\rho_n \rightarrow 0$ si et seulement si le chemin de z à z' passe par v avant de passer par w et
- $\rho_n \rightarrow \infty$ si et seulement si le chemin de z à z' passe par w avant de passer par v .

De même, on a $\sigma_{n,w'} = \rho'_n \sigma_{n,v'}$ avec $\rho'_n \in \mathbb{C} - \{0\}$ et

- $\rho'_n \rightarrow 0$ si et seulement si le chemin de x à x' passe par v' avant de passer par w' et
- $\rho'_n \rightarrow \infty$ si et seulement si le chemin de x à x' passe par w' avant de passer par v' .

Notons que

$$\rho_n \mu_n \sigma_{n,v} = \mu_n \sigma_{n,w} = \sigma_{n,w'} = \rho'_n \sigma_{n,v'} = \rho'_n \lambda_n \sigma_{n,v}$$

et donc

$$\rho'_n = \frac{\mu_n}{\lambda_n} \rho_n.$$

D'autre part, le développement de $f^{k_0} : \mathbb{S}_v \rightarrow \mathbb{S}_w$ au voisinage de z dans les cartes σ_v au départ et σ_w à l'arrivée est celui d'une fonction définie au voisinage de l'infini et qui envoie l'infini sur l'infini avec degré local d_0 . Par conséquent, $c_j = 0$ si $j \geq d_0 + 1$ et $c_{d_0} \neq 0$. De même, le développement de $f^{k_0} : \mathbb{S}_{v'} \rightarrow \mathbb{S}_{w'}$ au voisinage de z' dans les cartes $\sigma_{v'}$ au départ et $\sigma_{w'}$ à l'arrivée est celui d'une fonction définie au voisinage de 0 et qui envoie 0 sur 0 avec degré local d_0 . Par conséquent, $c'_j = 0$ si $j \leq d_0 - 1$ et $c'_{d_0} \neq 0$.

Sous les hypothèses du lemme 3.12, comme $d_0 = 1$

$$c'_{n,1} = \frac{\mu_n}{\lambda_n^1} c_{n,1}, \text{ donc } \frac{\mu_n}{\lambda_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{c'_1}{c_1} \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

On en déduit que $\rho_n \rightarrow 0$ si et seulement si $\rho'_n \rightarrow 0$. De même, $\rho_n \rightarrow \infty$ si et seulement si $\rho'_n \rightarrow \infty$. Etant donné que $[w, w']^Z \subseteq [v, v']^Z$ ou $[v, v']^Z \subseteq [w, w']^Z$, la seule possibilité est que ρ_n et ρ'_n ne tendent ni vers 0 ni vers l'infini, ce qui implique que $v = w$ et $v' = w'$. On peut alors choisir $\sigma_v = \sigma_w$ et $\sigma_{v'} = \sigma_{w'}$, ce qui implique $\lambda_n = \mu_n$ et donc $c_1 = c'_1$. Le multiplicateur de f^{k_0} en z est $1/c_1$ et le multiplicateur de f^{k_0} en z' est c'_1 . Le produit des multiplicateurs vaut 1 comme requis.

Sous les hypothèses du lemme 3.13, on a $d_0 > 1$ on obtient que

$$c'_{n,d_0} = \frac{\mu_n}{\lambda_n^{d_0}} c_{n,d_0} \text{ donc } \frac{\rho'_n}{\rho_n} \approx \lambda_n^{d_0-1} \left(\frac{c'_{d_0}}{c_{d_0}} \right).$$

Ainsi en supposant que $w \in [v, v']$, c'est à dire $\rho_n \rightarrow \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$, on déduit que $\rho'_n \rightarrow \infty$, c'est à dire que $w' \notin [v, v']$. Le cas $w' \in [v, v']$ est symétrique.

Cas B. Supposons que le chemin de z à z' dans T^Z passe par w' et w dans cet ordre. D'une part, on a $\sigma_{n,w} = \rho_n \sigma_{n,v'}$ avec $\rho_n \in \mathbb{C} - \{0\}$ et d'après le lemme 3.2 :

- $\rho_n \rightarrow 0$ si et seulement si le chemin de z à z' passe par v' avant de passer par w et
- $\rho_n \rightarrow \infty$ si et seulement si le chemin de z à z' passe par w avant de passer par v' .

De même, on a $\sigma_{n,w'} = \rho'_n \sigma_{n,v}$ avec $\rho'_n \in \mathbb{C} - \{0\}$ et

- $\rho'_n \rightarrow 0$ si et seulement si le chemin de z à z' passe par v avant de passer par w' et
- $\rho'_n \rightarrow \infty$ si et seulement si le chemin de z à z' passe par w' avant de passer par v .

Notons que

$$\rho'_n \sigma_{n,v} = \sigma_{n,w'} = \mu_n \sigma_{n,w} = \mu_n \rho_n \sigma_{n,v'} = \mu_n \rho_n \lambda_n \sigma_{n,v}$$

et donc

$$\rho'_n = \mu_n \rho_n \lambda_n.$$

D'autre part, le développement de $f^{k_0} : \mathbb{S}_v \rightarrow \mathbb{S}_w$ au voisinage de z dans les cartes σ_v au départ et σ_w à l'arrivée est celui d'une fonction définie au voisinage de l'infini et qui envoie l'infini sur 0 avec degré local d_0 . Par conséquent, $c_j = 0$ si $j \geq d_0 - 1$ et $c_{-d_0} \neq 0$. De même, le développement de $f^{k_0} : \mathbb{S}_{v'} \rightarrow \mathbb{S}_{w'}$ au voisinage de z' dans les cartes $\sigma_{v'}$ au départ et $\sigma_{w'}$ à l'arrivée est celui d'une fonction définie au voisinage de 0 et qui envoie 0 sur l'infini avec degré local d_0 . Par conséquent, $c'_j = 0$ si $j \leq -(d_0 + 1)$ et $c'_{-d_0} \neq 0$.

Sous les hypothèses du lemme 3.12, comme $d_0 = 1$ on obtient

$$c'_{-1} \xleftarrow[n \rightarrow \infty]{} c'_{n,-1} = \mu_n \lambda_n^{-1} c_{n,-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c_{-1},$$

donc

$$\mu_n \lambda_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{c'_{-1}}{c_{-1}} \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

On en déduit que $\rho_n \rightarrow 0$ si et seulement si $\rho'_n \rightarrow 0$. De même, $\rho_n \rightarrow \infty$ si et seulement si $\rho'_n \rightarrow \infty$. Etant donné que $[w, w']^Z \subseteq [v, v']^Z$ ou $[v, v']^Z \subseteq [w, w']^Z$, la seule possibilité est que ρ_n et ρ'_n ne tendent ni vers 0 ni vers l'infini, ce qui implique que $v = w'$ et $v' = w$. On peut alors choisir $\sigma_v = \sigma_{w'}$ et $\sigma_{v'} = \sigma_w$, ce qui implique $\lambda_n \mu_n = 1$ et donc que le multiplicateur du cycle, c'est-à-dire c'_{-1}/c_{-1} vaut 1 comme requis.

Sous les hypothèses du lemme, 3.13, comme $d_0 > 1$ on obtient

$$\mu_n \lambda_n = \lambda^{d_0-1} \left(\frac{c'_{n,-d_0}}{c_{-d_0}} \right) \text{ donc } \frac{\rho'_n}{\rho_n} \approx \lambda_n^{d_0-1} \left(\frac{c'_{d_0}}{c_{d_0}} \right).$$

Ainsi en supposant que $w \in [v, v']$, c'est à dire $\rho_n \rightarrow \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$, puisque $\lambda_n^{d_0-1} \rightarrow \infty$ on déduit que $\rho'_n \rightarrow \infty$, c'est à dire que $w' \notin [v, v']$. Le cas $w' \in [v, v']$ est symétrique.

Remarque 3.14. Pour la démonstration nous avons simplement utilisé la stabilité en $F^k(v)$ et $F^k(v')$ pour $0 \leq k \leq k_0$.

3.3 Cas du degré 2

On souhaite maintenant étudier les limites renormalisées dans le cas de fractions rationnelles de degré 2. Rappelons qu'une fraction rationnelle de degré 2 a exactement 3 points fixes comptés avec multiplicités. Nous travaillerons dans le cadre d'un portrait ayant trois points fixes distincts, en supposant également que ces points fixes ne sont pas des points critiques du portrait (les points fixes ne sont pas superattractifs).

Théorème 3.15 (Classification). *Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{T}^X)$ un système dynamique d'arbres de sphères de degré 2, dont le portrait \mathbf{F} possède trois feuilles fixes non critiques. Supposons que $(\mathcal{F}, \mathcal{T}^X)$ soit limite dynamique d'une suite de systèmes dynamiques de sphères marquées $(f_n, y_n, z_n)_n$ et que $([f_n])_n$ diverge dans rat_2 . Alors*

- l'application \mathcal{F} a au plus deux cycles critiques de sphères et ils sont de degré 2;
- s'il y en a un, le sommet w_0 séparant les trois points fixes est fixe et f_{w_0} est d'ordre fini k_0 .

Notons v_0 le sommet séparant w_0 et les deux feuilles critiques, alors

1. soit v_0 est oublié par F^k avec $k < k_0$, alors v_0 n'est pas périodique et il y a au plus un seul cycle qui est alors de période $k'_0 \geq k_0$ et son revêtement associé a un point fixe super-attractif;
2. soit v_0 n'est pas oublié par F^{k_0} ; dans ce cas v_0 est périodique de période k_0 et
 - (a) son revêtement associé a un point fixe parabolique;
 - (b) si il y a un second cycle critique alors il est de période $k'_0 > k_0$, son revêtement associé a un point fixe super-attractif et celui associé à v_0 a un point critique qui est une préimage itérée du point fixe parabolique.

Notation. Pour la suite, on note donc c' cette feuille critique et c l'autre.

Remarque 3.16. Notons que dans le cas 2 le cycle critique de sphères dont il est question est non post-critiquement finie car tout bassin d'un point fixe parabolique contient un point critique (voir par exemple [M3]).

Notation. Rappelons tout d'abord que \mathcal{F} ayant degré 2, il n'a que deux feuilles critiques que nous noterons c et c' et donc tous les sommets qui sont critiques sont ceux de $C_2 := [c, c']$. On notera $c_k := F^k(c)$ et $c'_k := F^k(c')$ lorsqu'ils sont définis.

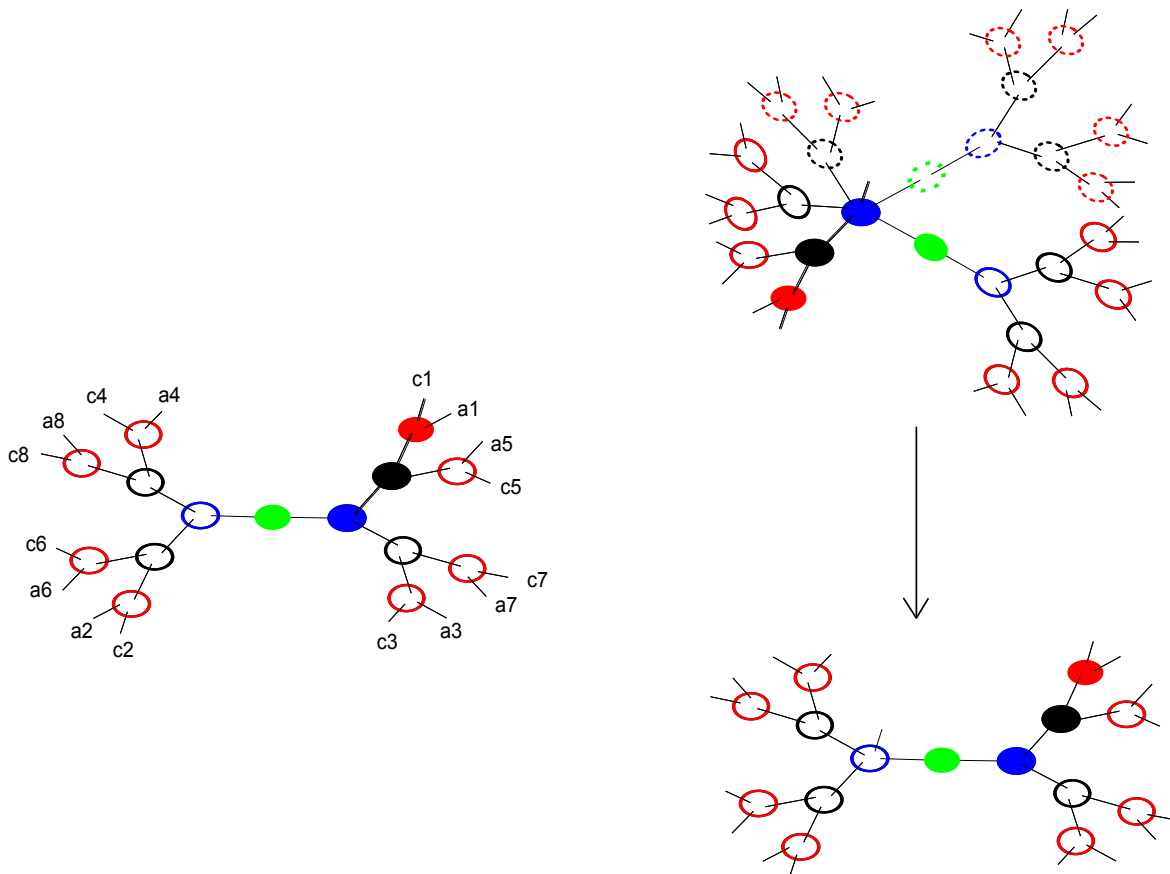


FIGURE 3.4 – Un exemple de système dynamique de degré 2 ne satisfaisant pas les conclusions du théorème 3.15. À gauche est représenté \mathcal{T}^X , à droite en haut \mathcal{T}^Y et en bas \mathcal{T}^Z . Les feuilles c_i représentent le cycle de période 8 du point critique. Les feuilles a_i forment un cycle de même période. Sur \mathcal{T}^X , le sommet rouge (resp. noir, bleu) rempli est critique et de période 8 (resp. 4, 2) dont l'orbite est l'ensemble des sommets rouges (resp. noir, bleu). Le sommet vert rempli est fixe.

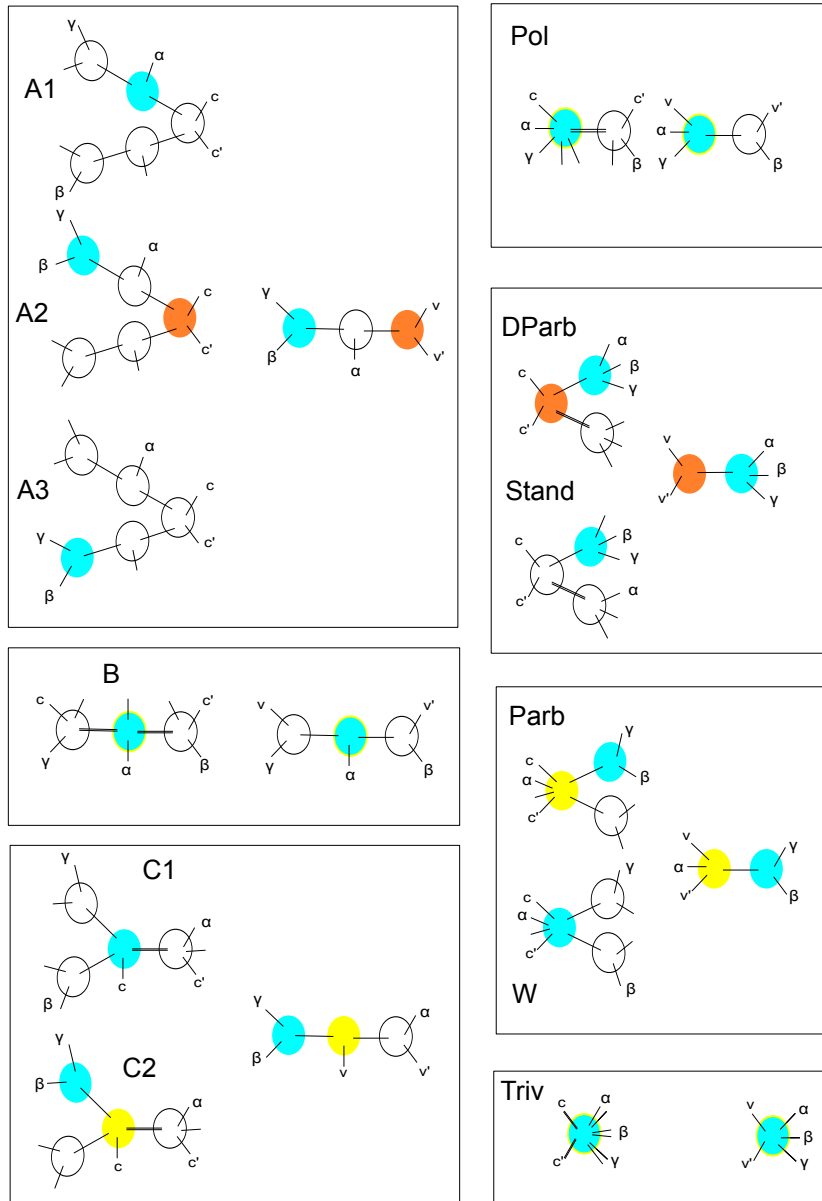


FIGURE 3.5 – Énumération des configurations possibles (quitte à changer le nom des points qui marquent) des revêtements d'arbres de sphères marqués par un portrait correspondant à une fraction rationnelle f de degré 2 ayant points fixes α, β et γ non super-attractifs et deux points critiques c et c' . On note $v := f(c)$ et $v' := f(c')$. L'arbre T^Y est représenté à gauche et l'arbre T^Z correspondant est à sa droite. Les feuilles pré-fixes de F ne sont pas nommées.

Le sommet w_0 est fixe (théorème 3.15). On démontre le lemme un peu plus précis suivant :

Lemme 3.17. *Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{T}^X)$ dynamiquement approximables par une suite de fractions rationnelles $(f_n, y_n, z_n)_n$ marquées par \mathbf{F} . Notons w_0 le sommet séparant les trois points fixes. Supposons qu'il y ait un cycle critique de sphères. Alors, w_0 est fixe et*

1. *soit w_0 est de degré 2, il n'y a pas d'autre cycle critique de sphères et $([f_n])_n$ converge dans rat_2 ,*
2. *soit w_0 est de degré 1 et f_{w_0} est conjugué à une rotation d'ordre fini.*

Démonstration. On note B_1^Y, B_2^Y et B_3^Y les branches de T^Y sur w_0 contenant les trois points fixes. On note B_1^Z, B_2^Z et B_3^Z les branches de T^Z sur w_0 correspondantes.

Cas 1. Le sommet w_0 sépare les points critiques. Dans ce cas, son degré est égal à 2 et chaque branche sur w_0 contient au plus un point critique. Par conséquent, chaque branche sur w_0 contenant un point fixe s'envoie sur la branche sur $F(w_0)$ contenant ce même point fixe (corollaire 1.34).

Cas 1.a (cf figure 3.5, B, Pol, Triv) Les trois branches sur w_0 contenant les trois points fixes ont des images distinctes. Dans ce cas, $F(w_0)$ sépare les trois points fixes et $F(w_0) = w_0$. D'après le lemme des branches (3.11), il n'y a pas d'autre cycle critique de sphères et, d'après le lemme 3.4, $([f_n])_n$ converge dans rat_2 .

Cas 1.b (cf figure 3.5, C1, W) Deux des branches sur w_0 contenant des points fixes, disons B_1^Y et B_2^Y , ont la même image. Cette branche contient les deux points fixes précédents. Elle contient donc le chemin entre ces deux points fixes, en particulier le sommet w_0 . Maintenant $F(B_3^Z)$ est une branche contenant le troisième point fixe et évitant $w_0 \in F(B_1^Y) = F(B_2^Y)$. Par conséquent $F(B_3^Z) \subset B_3^Z$. D'après le lemme des branches (3.11), B_3^Z ne rencontre pas de cycle critique de sphères. Or, le fermé connexe $T' := T^Y - (B_1^Y \cup B_2^Y)$ contient le chemin critique et B_3^Z . Son image est un fermé connexe contenant $F(B_3^Z)$ et évitant $w_0 \in F(B_1^Y) = F(B_2^Y)$. L'image du chemin critique est donc entièrement contenue dans B_3^Z . Par conséquent, il ne peut pas y avoir de cycle critique de sphères.

Cas 2. Le sommet w_0 ne sépare pas les points critiques. Dans ce cas, son degré est égal à 1.

Cas 2.a (cf figure 3.5, Dparb) Les branches B_1^Y, B_2^Y et B_3^Y ne contiennent pas de feuille critique. Dans ce cas leurs images sont des branches distinctes sur $F(w_0)$, contenant chacune un point fixe. Par conséquent, $F(w_0)$ sépare les trois points fixes et $F(w_0) = w_0$. On en déduit alors que les points d'attache des branches B_1^Y, B_2^Y et B_3^Y sont fixes et donc que f_{w_0} est l'identité.

Cas 2.b Les deux feuilles critiques sont dans une même branche sur w_0 contenant un point fixe, disons B_1^Y . Alors $F(B_2^Y)$ et $F(B_3^Y)$ sont des branches distinctes sur

$F(w_0)$. Si $F(w_0) \neq w_0$ (cf figure 3.5, A1), alors une de ces branches, disons B_2^Y , contient son image et l'autre, disons B_3^Y , est contenue dans son image. D'après le lemme des branches (3.11), B_2^Y ne rencontre pas de cycle critique de sphères. Notons w'_0 la seconde préimage de $F(w_0)$ et A l'anneau $\llbracket w_0, w'_0 \rrbracket$ qui contient le chemin critique. Alors, $B := F(A)$ est une branche sur $F(w_0)$ qui évite les trois points fixes. Elle est donc contenue dans B_2^Y . Par conséquent, il ne peut pas y avoir de cycle critique de sphères. Ainsi on a donc bien $F(w_0) = w_0$ et donc les points d'attache de B_2^Y et B_3^Y sont fixes et donc que f_{w_0} est conjugué à une rotation (cf figure 3.5, A2, A3, C2, Stand et Parb).

Reste à prouver que cette rotation est d'ordre fini, ce qui conclut la démonstration. Comme F possède un cycle de sphères critique, le chemin critique possède un sommet interne critique et périodique $v' \in B_1^Y$. On peut alors trouver un sommet $v_0 \in B_1^Y$ tel que $[w_0, v'] = [w_0, v_0] \cup [v_0, v']$ et que les sommets de $[v_0, v']$ soient tous les sommets critiques de $[w_0, v']$. Alors $[w_0, v_0]$ s'envoie bijectivement sur son image dans une branche \tilde{B} sur v_0 et $[v_0, v']$ s'envoie bijectivement sur son image sur une branche \tilde{B}' sur v_0 . On a $\tilde{B} \neq \tilde{B}'$ sinon l'arête sur v_0 aurait trois pré-images. On en déduit donc que $F([w_0, v'])$ est inclus dans la branche $B_{w_0}(F(v'))$. Si $B_{w_0}(F(v')) = B_{w_0}(v')$ alors $a_{w_0}(v')$ est fixe et donc f_{w_0} est l'identité. Sinon $B_{w_0}(F(v'))$ est une branche qui contient un sommet périodique donc on peut itérer F tant que son image est une branche, ce qui est le cas tant que ses itérés sont disjoints de $B_{w_0}(v')$ puisque c'est la seule branche sur w_0 qui contient des sommets critiques (lemme 1.32). Ainsi tant que $f^k(a_{w_0}(v')) \neq a_{w_0}(v')$, le sommet $F^k(v')$ est dans la branche attachée en $a_{w_0}(F^k(v')) = f^k(a_{w_0}(v'))$ donc v' n'est pas de période k . On en déduit donc que $a_{w_0}(v')$ est périodique et donc que f_{w_0} est une rotation d'ordre fini. \square

Remarque 3.18. Comme $([f_n])_n$ diverge dans rat_2 on en conclut que nous sommes dans le cas 2. Ainsi w_0 est bien d'ordre fini que l'on pose égal à k_0 .

Supposons que v' soit un sommet interne critique périodique. Posons B_0^Y la branche sur w_0 contenant les deux points critiques (et donc v') et pour $1 \leq k \leq k_0$, notons $B_k^* \in IV^*$ la branche attachée en $a_{w_0}^*(F^k(v'))$. On a $F : B_k^Y \rightarrow B_{k+1}^Z$ est une bijection.

Le sommet w_0 n'étant pas critique, il n'appartient pas à $[c, c']$. On note $v_0 \in T^X$ le sommet séparant c, c' et w_0 .

Point 2a du théorème 3.15. On suppose ici que v_0 n'est pas oubliée par F_{k_0} . L'anneau $A_0 := \llbracket w_0, v_0 \rrbracket$ ne contient pas de sommets de degré 2 donc par le corollaire 1.33 on déduit que F est injective sur \bar{A}_0 . De plus, comme les éléments de C_2 sont de degré maximum, F est injective sur $A_0 \cup C_2$. D'après la remarque 3.18, si pour $1 \leq k < k_0$, F est bijective de B_k^Y vers B_{k+1}^Z . Ainsi, le sommet $v_k := F^k(v_0) \in B_k^Z$ et donc $v_{k_0} \in B_0$.

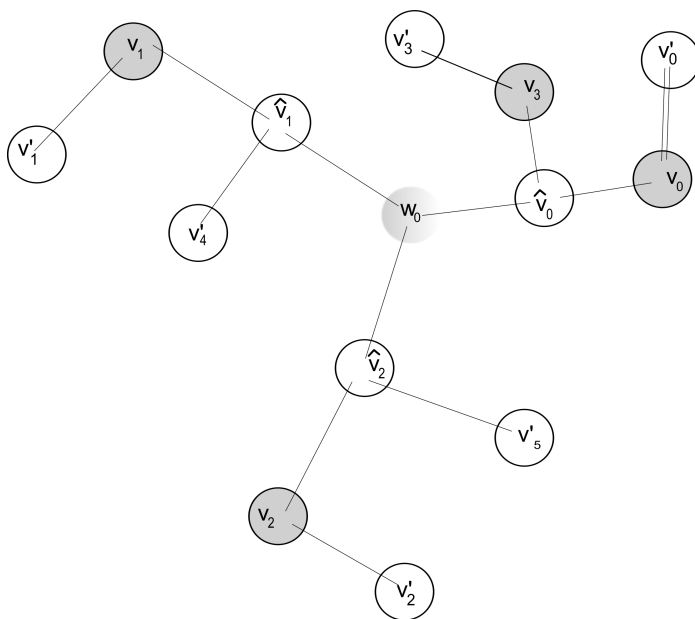


FIGURE 3.6 – Exemple du cas absurde de la démonstration du point 2 avec $k_0 = 3$

On a alors trois cas : $v_{k_0} \in [w_0, v_0]$, $v_0 \in [w_0, v_{k_0}]$ ou $v_{k_0} \in A_0 - [w_0, v_0]$. Dans les deux premiers cas, comme pour $1 \leq k < k_0$ on a $F^k(A_0 \cup C_2)$ est inclus dans B_k qui ne contient que des sommets de degré 1, le lemme Anneau non critique (3.12) appliqué à $F^k(A_0)$ assure que $v_{k_0} = v_0$. Le sommet v_0 est donc périodique. C'est le seul sommet de degré deux de son cycle. Comme $a_{w_0}(v_0)$ est un point fixe de f^{k_0} de multiplicateur 1, d'après ce même lemme la fraction rationnelle $f^{k_0} : \mathbb{S}_{v_0} \rightarrow \mathbb{S}_{v_0}$ possède un point fixe parabolique en $i_{v_0}(w_0)$. Montrons que le troisième cas est absurde, ce qui conclura la démonstration.

En effet, si on est dans ce cas, v_{k_0}, v_0 et w_0 ne sont pas sur un même chemin. Il y a donc un sommet $\hat{v}_0 \in [w_0, v_0]$ qui sépare v_{k_0}, v_0 et w_0 . Par ailleurs, tout cycle critique de sphères doit correspondre à un cycle de sommets qui intersecte C_2 puisque par définition un cycle de sphères critique n'a pas degré 1. Soit v'_0 un sommet dans cette intersection. Les sommets v'_0 et v_0 sont sur une même branche de \hat{v}_0 disjointe de celle qui contient v_{k_0} . Comme $A_0 \cup C_2$ est en bijection avec son image ainsi que ses k_0 itérés, on en déduit que v_{k_0} et v'_{k_0} sont sur une même branche de \hat{v}_0 et donc \hat{v}_0 est défini par les sommets w_0, v'_0 et v'_{k_0} . Ces quatre sommets étant tous dans A_0 et n'étant pas oubliés par F^{k_0} , on en déduit par le lemme 2.4 que les k_0 itérés de \hat{v}_0 sont définis.

Comme $A'_0 :=]w_0, \hat{v}_0[\subset A_0$, ses k_0 itérés sont envoyés bijectivement sur leurs images qui sont les $]w_0, \hat{v}_k[$ qui ne contiennent tous à l'exception peut-être de $]w_0, \hat{v}_{k_0}[$ que des sommets de degré 1. Or w_0, \hat{v}_0 et v_0 sont alignés dans cet ordre,

donc pour $0 \leq k \leq k_0$, il en est de même pour w_0 , \hat{v}_k et v_k ainsi donc \hat{v}_0 et \hat{v}_{k_0} sont tous deux sur le chemin $[w_0, v_{k_0}]$. Donc on a l'inclusion $\llbracket w_0, \hat{v}_0 \llbracket \subset \llbracket w_0, v_{k_0} \llbracket$ ou l'inclusion inverse. Ainsi grâce au lemme Anneau non critique (3.12) on a $\hat{v}_0 = \hat{v}_{k_0}$. On est donc dans une situation similaire à celle de la figure 3.6.

Comme nous l'avons fait dans les cas précédents pour v_0 , nous pouvons montrer que le revêtement associé au cycle contenant \hat{v}_0 a un point fixe de multiplicateur 1 grâce au lemme Anneaux non critiques. Comme \hat{v}_0 est de degré 1, ce revêtement dans une carte projective est l'identité ou bien une translation. Si c'est une translation alors la branche $B_{v_0}(v'_{k_0})$ serait d'orbite infinie ce qui contredit l'existence dans celle-ci de v'_{k_0} qui est périodique. Si c'est l'identité alors $F(B_{v_0}(v'_{k_0})) \subset B_{\hat{v}_0}(v'_{k_0})$, ceci contredisant le fait que v'_0 est dans l'orbite de v'_{k_0} . On arrive donc encore à une absurdité.

Notation. Comme sur la figure 3.7, notons $D_i^* := T^* - D_{v_i}^*(v_0)$. Notons $\alpha := a_{v_0}(w_0)$ le point fixe parabolique et x'_0 sa pré-image par f^{k_0} . Si il y a une branche dans T^Y attachée en x'_0 sur v_0 , on la note B'_0 . Sinon on note $B'_0 = \emptyset$.

Remarque 3.19. Comme $D_k^* \subset B_k^*$, d'après la remarque 3.18 on a $F : D_k^Y \rightarrow D_{k+1}^Z$ est une bijection pour $1 \leq k < k_0$. Puisque α n'est pas critique, B'_0 ne contient que des éléments de degré 1 donc le corollaire 1.32, on déduit que $F(B'_0)$ est la branche sur v_1 attachée en $f(\alpha)$ c'est à dire $F(B'_0) = B_{v_0}(w_0)$. On déduit que $B'_0 \neq \emptyset$. En outre, comme $F : T^Y \rightarrow T^Z$ est surjective, on en déduit que $F(D_0 - B'_0) = D_1$.

Corollaire 3.20. *Il existe une feuille critique c_0 telle que $B_{v_0}(c_0)$ ne contienne pas de cycle de sphères critique.*

Démonstration. Le point fixe parabolique $f(\alpha)$ de $f^{k_0} : \mathbb{S}_{v_0} \rightarrow \mathbb{S}_{v_0}$ attire l'orbite d'un point critique z_0 (cf [M3] par exemple). La branche B de T^Y sur v_0 correspondante à ce point critique contient une feuille critique c_0 .

Si B contient un sommet périodique, alors ses itérés sont définis tant que ce sont des branches. Les itérés de $a_{v_0}(c_0)$ évitent α , puisque ce dernier est préfixe donc les itérés de B sont toutes des branches. En effet, soit elles sont dans $D_0 - B'_0$ et on peut appliquer le corollaire 1.34, soit elles sont dans les D_i avec $i > 0$ et alors on a le corollaire 1.32. On en déduit par le lemme 3.11 que B ne contient pas de cycle de sphères critique. \square

Notation. Pour la suite, on note donc c' cette feuille critique et c l'autre.

Point 2b du théorème 3.15.

Tout cycle de sphères critique est de degré au moins 2 donc possède un sommet v'_0 dans C_2 . Nous noterons $v'_k := F^k(v'_0)$ et k'_0 la période de ce cycle.

Notons $D'_k := T^Y - B_{v'_k}(w_0)$. Montrons que $F(D'_k) = D'_{k+1}$ et $f(a_{v'_k}(w_0)) = a_{v'_{k+1}}(w_0)$. D'après la remarque 3.19, c'est vrai pour tout k lorsque $v'_k \notin B'_0$ et

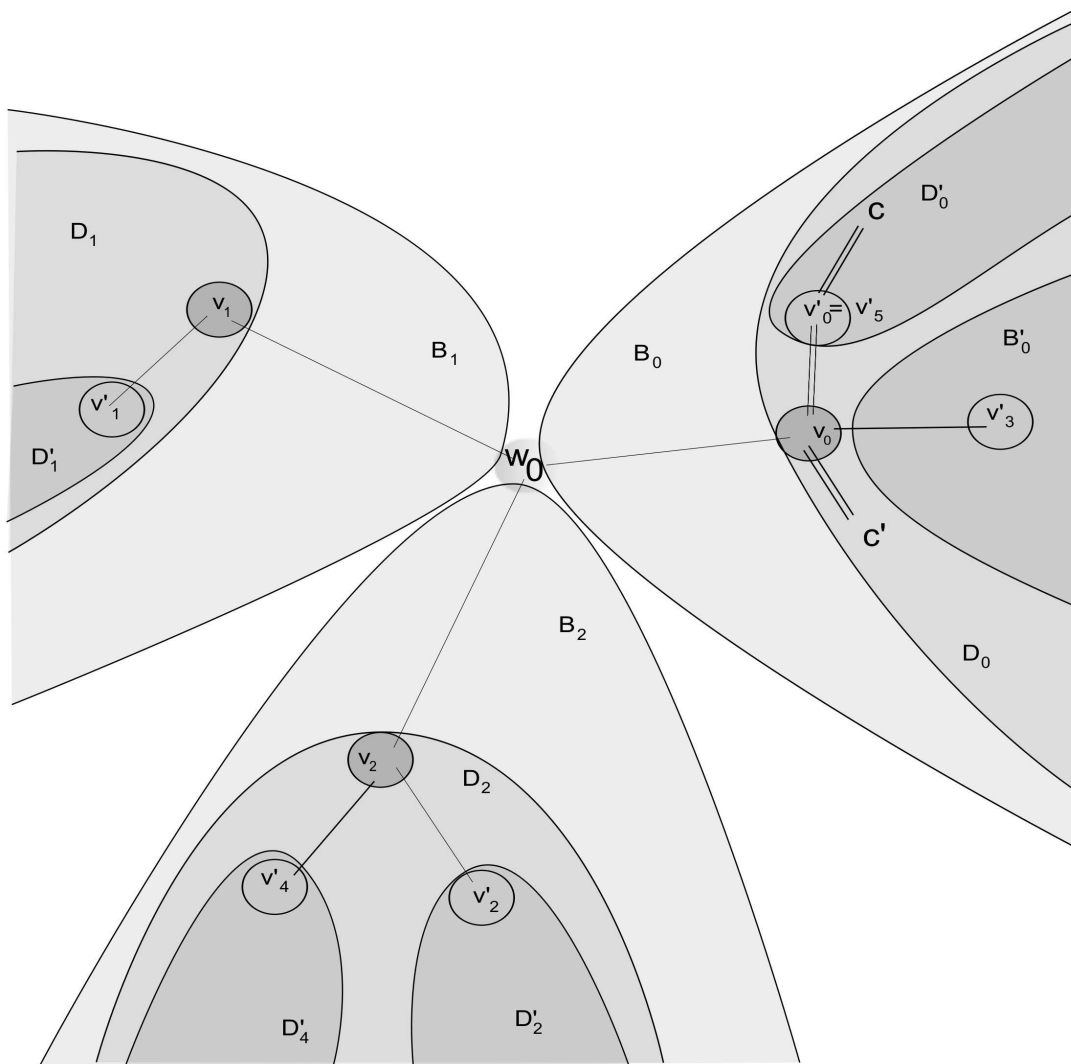


FIGURE 3.7 – Représentation simplifiée d'un \mathcal{T}^X pour un exemple de revêtement $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$ limite de fraction rationnelles de degré 2 qui possède deux cycles de sphères critiques. L'une de période 3 et l'autre de période 5 avec les notations introduites dans la démonstration du théorème 3.15.

l'on a toujours $f(a_{v'_k}(w_0)) = a_{v'_{k+1}}(w_0)$. Supposons que $v'_k \in B'_0$. Comme on a $D'_k = B_{v_0}(v'_k) -]v_0, v'_k[$ et que F est bijective sur $B_{v_0}(v'_k)$, on en déduit que

$$F(D'_k) = B_{v_1}(v'_{k+1}) -]v_1, v'_{k+1}[= D'_{k+1}.$$

De plus F est une bijection entre les arêtes de v'_k et celles de v'_{k+1} . On en déduit que $f(a_{v'_k}(w_0)) = a_{v'_{k+1}}(w_0)$.

De $F(D'_k) = D'_{k+1}$ déduit alors grâce au lemme 3.11 que D'_0 ne contient pas de sommet interne périodique critique donc quitte à avoir supposé que v'_0 soit la sphère de degré 2 du cycle qui est la plus proche de w_0 , on en déduit que v'_0 est le seul sommet critique du cycle et donc que le revêtement associé est de degré 1. Comme $f(a_{v'_k}(w_0)) = a_{v'_{k+1}}(w_0)$ et $a_{v'_0}(w_0)$ est critique, ce revêtement est conjugué à un polynôme quadratique.

Montrons que $k'_0 > k_0$. Comme f_{v_0} est de degré 2, le point fixe parabolique ne peut pas avoir comme pré-image un point critique donc $v'_0 \in D_0 - B'_0$. Ainsi d'après la remarque 3.19 les v'_k sont dans les D_k pour $0 \leq k \leq k_0$ et donc $k'_0 \geq k_0$. S'il y a égalité on a $F(]v_0, v'_0[) =]F^k(v_0), F^k(v'_0)[=]v_0, F^k(v'_0)[$ ce qui contredit le lemme 3.13.

Supposons que l'un des itérés de v'_0 est dans B'_0 . Soit v'_i le premier itéré de v'_0 dans B'_0 . D'après ce qui précède, pour $0 \leq k < k + k_0 \leq i$ on a $F^{k_0} :]v_0, v'_k[\rightarrow]v_0, v'_{k+k_0}[$ est une bijection. Ainsi

$$f^{k_0+i} \circ a_{v_0}(v'_0) = f^{k_0} \circ f^i \circ a_{v_0}(c_0) = f^{k_0} \circ a_{v_0}(v_i) = f^{k_0}(x'_0) = \alpha.$$

Donc f^{k_0} a bien un point critique qui est une pré-image du point fixe parabolique.

Montrons en raisonnant par l'absurde qu'un des itérés de v'_0 est dans B'_0 , ce qui conclut la démonstration. Si ce n'est pas le cas, on peut appliquer le lemme 3.11 à la branche $B := B_{v_0}(c)$ puisque les itérés de B sont dans les D_i pour $i \neq 1$ ou dans $D_0 - B'_0$ d'après la remarque 3.19 et que ces itérés sont disjoints de $B_{v_0}(c')$.

Point 1 du théorème 3.15.

Soit v'_0 un sommet critique périodique le plus proche de w_0 (s'il y en a plusieurs à égale distance, on fait un choix arbitraire). On note v'_k son k -ième itéré. D'après la remarque 3.18, les k_0 itérés de v'_0 sont bien définis. Et les $k_0 - 1$ premiers sont tous non critiques. On a $v'_{k_0} \in B_0$. Notons B'_0 la branche (dans T^Y) attachée en l'unique point de \mathbb{S}_{v_0} qui a même image que $a_{v_0}(w_0)$. On a plusieurs cas :

- $v'_{k_0} \in [w_0, v_0]$;
- $v'_{k_0} \in B_0 - [w_0, v_0] \cup B'_0$;
- $v'_{k_0} \in B'_0$.

Dans le premier cas on a alors $]w_0, v'_{k_0}[$ ne contient pas de sommet critiques. On peut itérer cet anneau k_0 fois encore et si $v'_{2k_0} \in [w_0, v'_{k_0}]$, on est dans les hypothèses du lemme Anneau non critique (3.12) et donc $v'_{k_0} = v'_{2k_0} \neq v'_0$ ce qui

est absurde. Si ce n'est pas le cas, on se retrouve dans le cas de la figure 3.6 et on conclut comme on l'a fait dans le point 2 à une absurdité.

Dans le second cas, si de plus $v'_{k_0} \in B_{v_0}(v'_{k_0})$ alors on vérifie comme dans le point 2 que $B_{v'_0}(v'_{2k_0})$ vérifie les conditions du lemme des branches 3.11. On en conclut donc que $v'_0 = v'_{2k_0}$ et qu'il n'y a pas d'autre cycle périodique passant par cette branche. Le cycle est donc bien de degré 2 et de plus le point d'attache $a_{v'_0}(v_0)$ est critique et de période k_0 . Si $v'_{k_0} \notin B_{v_0}(v'_{k_0})$, alors $v'_{k_0} \notin [v_0, v'_0]$ sinon ce serait v'_{k_0} le sommet périodique critique le plus proche de w_0 . Ainsi, le sommet v_0 sépare donc w_0, v'_{k_0} et v'_{2k_0} . Comme $[v'_{k_0}, v'_{2k_0}]$ s'envoie bijectivement sur son image en étant sa seule pré-image, $f(v_0)$ sépare $F(w_0), F(v'_{k_0})$ et $F(v'_{2k_0})$ donc est dans T^X . On montre de-même que les k_0 itérés de v_0 sont dans T^X , ce qui contredit les hypothèses sur v_0 .

Dans le troisième cas, on itère encore jusqu'à se retrouver dans un des cas précédents et comme dans le point 2, on prouve que les $D'_k := T^Y - B_{v'_k}(w_0)$ s'envoient sur les D'_{k+1} , on en conclut donc de la même façon que précédemment que le cycle de v'_0 est de degré 2 et que le revêtement associé possède un point critique fixe.

Fin du théorème 3.15.

Montrons qu'il y a au plus deux cycles critiques de sphères. On a $C_2 = [c', v_0] \cup [v_0, v'_0] \cup [v'_0, c]$. Or on sait que $[c', v_0] - \{v_0\}$ ne contient pas de sommets périodiques d'après le corollaire 3.20, que $[v_0, v'_0] - \{v_0, v'_0\}$ non plus par définition de v'_0 et que $[v'_0, c]$ car $[v'_0, c] \subset D'_0$ donc C_2 ne contient que deux sommets périodiques.

Chapitre 4

Classes d'isomorphismes d'arbres de sphères

Dans tout ce qui suit, les arbres sont supposés stables, munis de structures projectives et les revêtements sont supposés holomorphes.

4.1 Classes d'isomorphismes d'arbres combinatoires et partitions

Définition 4.1 (Isomorphisme d'arbres marqués). *Un isomorphisme d'arbres marqués par X est une application d'arbre bijective qui est l'identité sur X .*

Notons $P_v^X := \{B_v(e) \cap X \mid e \in E_v\}$. Notons \mathfrak{P}_X l'ensemble des partitions de X .

Lemme 4.2. *Pour tout $v \in IV^X$, P_v^X est une partition de X .*

On rappelle qu'une partition ne contient pas l'élément \emptyset .

Démonstration. En effet, v est relié à tout élément de X par un chemin car un arbre est un graphe connexe. Ce chemin est unique car un arbre est sans cycle. Ces chemins commencent tous par une arête de E_v donc on peut associer à tout point de X un unique élément de E_v . Le lemme 1.7 assure que toute branche est non vide donc tous les $B_v(e)$ sont non vides. \square

Soit ψ l'application définie de l'ensemble des arbres marqués par X vers l'ensemble des partitions de \mathfrak{P}_X qui à T associe

$$\psi(T) = \{P_v^X \mid v \in IV^X\}.$$

Le but de cette partie est de caractériser l'image de cette application et de montrer que celle-ci permet de caractériser les classes d'isomorphismes des arbres combinatoires marqués par X .

Définition 4.3 (Ensemble admissible de partitions). *Un ensemble \mathcal{P} de partitions est dit admissible s'il vérifie les propriétés suivantes :*

1. toute partition $P \in \mathcal{P}$ contient au moins trois éléments distincts,
2. pour toute partition $P \in \mathcal{P}$ et tout partie $B \in P$, ou bien il existe une partition $P' \in \mathcal{P}$ contenant $X - B$, ou bien $B = \{x\}$ avec $x \in X$,
3. si $P_1 \in \mathcal{P}$ et $P_2 \in \mathcal{P}$ sont deux partitions distinctes, alors $P_1 \cap P_2 = \emptyset$.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.4. *Si T est un arbre combinatoire (stable), alors $\psi(T)$ est un ensemble admissible de partitions. Les arbres T et T' sont isomorphes si et seulement si $\psi(T) = \psi(T')$. Tout ensemble admissible de partition est l'image d'un arbre stable.*

Corollaire 4.5. *L'application ψ induit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme d'arbres stables et l'ensemble des ensembles admissibles de partitions.*

La suite de cette partie se concentre sur la démonstration de ce théorème.

Le lemme ci-dessous est un outil fondamental qui illustre comment on peut se servir des branches pour utiliser pleinement la propriété de stabilité.

Lemme 4.6. *Soit T^X un arbre stable. Soit $[v, v', v'']$ un chemin de T^X . Alors*

$$B_{v'}(v'') \cap X \subsetneq B_v(v') \cap X.$$

Démonstration. Posons $e := \{v, v'\}$. Si $x \in B_{v'}(v'') \cap X$ alors $e \notin [v', x]$ donc $\{v, \{v, v'\}\} \cup [v', x]$ est un chemin reliant v à x donc $x \in B_v(v') \cap X$. La stabilité assure qu'il existe une troisième arête $\{v', v'''\}$ sur v' . On a donc de même $B_{v'}(v''') \cap X \subset B_v(v') \cap X$. Or par définition $B_{v'}(v'') \cap X$ et $B_{v'}(v''') \cap X$ sont disjoints et d'après le lemme précédent, ce sont des ensembles non vides. On a donc $B_{v'}(v'') \cap X \subsetneq B_v(v') \cap X$. \square

On en déduit les propriétés suivantes :

Lemme 4.7. *Soit T^X un arbre stable. Soient v et v' deux sommets de T^X . Soit $e \in E_v \cap [v, v']$ et $e' \in E_{v'} \cap [v, v']$. Alors, pour toute arête $e'' \in E_{v'} - \{e'\}$, on a $B_{v'}(e'') \cap X \subsetneq B_v(e) \cap X$.*

Démonstration. Montrons que si $[v_0, v_1, v_2]$ un chemin de T^X , alors

$$B_{v_1}(v_2) \cap X \subsetneq B_{v_0}(v_1) \cap X.$$

Posons $e := \{v_0, v_1\}$. Si $x \in B_{v_1}(v_2) \cap X$ alors $e \notin [v_1, x]$ donc $\{v_0, \{v_0, v_1\}\} \cup [v_1, x]$ est un chemin reliant v_0 à x donc $x \in B_{v_0}(v_1) \cap X$. La stabilité assure qu'il existe une troisième arête $\{v_1, v_3\}$ sur v_1 . On a donc de même $B_{v_1}(v_3) \cap X \subset B_{v_0}(v_1) \cap X$. Or par définition $B_{v_1}(v_2) \cap X$ et $B_{v_1}(v_3) \cap X$ sont disjoints et d'après le lemme précédent, ce sont des ensembles non vides. On a donc $B_{v_1}(v_2) \cap X \subsetneq B_{v_0}(v_1) \cap X$.

On démontre bien le lemme en appliquant un nombre de fois fini ce résultat sur toutes les portions du chemin $[v, v']$ qui contiennent trois sommets. \square

Lemme 4.8. *Si T est stable alors $\psi(T)$ est un ensemble admissible de partitions.*

Démonstration. La propriété 1 est vraie car les arbres sont stables.

Pour la propriété 2, prenons de tels $P \in \psi(T)$ et $B \in P$. Alors B est associé à une arête $e = \{v, v'\}$ sur v un sommet interne d'un arbre. Soit v' est une feuille x et alors tout élément de $X - \{x\}$ est relié à x par un chemin contenant l'arête e donc on est dans le second cas annoncé. Soit v' est un sommet interne et donc on est dans le premier cas d'après le cas d'égalité du lemme 4.7.

Pour la propriété 3, d'après le lemme 4.7, si deux sommets sont distincts, alors on trouve un chemin les reliant. Soit B un élément commun à P_1 et P_2 . Trois cas se présentent : soit les arêtes associées à B sont dans ce chemin, soit aucune d'entre elles, soit une seule d'entre elles. Dans le premier cas, on prend un élément $B' \in P_1$ distinct de B (puisque T est stable) et le lemme 4.7 donne $B' \subset B$, ce qui est absurde car P_1 est une partition. Dans le second cas, le lemme 4.7 donne $B \subsetneq (X - B)$, absurde. Dans le troisième cas le lemme 4.7 amène une contradiction. \square

Prenons un ensemble admissible de partitions \mathcal{P} . Posons $V_T = \mathcal{P} \cup X$. Posons E_T l'ensemble des $\{P_1, P_2\}$ pour tout $P_1 \in \mathcal{P}$ et $P_2 \in \mathcal{P}$ tels qu'on ait $B_i \in P_i$ et $B_2 \in P_2$ vérifiant $B_1 \cup B_2 = X$ avec $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ et des $\{P_0, x\}$ vérifiant $P_0 \in \mathcal{P}$ et $\{x\} \in P_0$.

Lemme 4.9. *Le graphe T est un arbre et $\psi(T) = \mathcal{P}$.*

Démonstration. Montrons d'abord que T est un arbre.

Affirmation : Soit $x \in X$. Tout sommet $v_1 \in V_T - \{x\}$ peut être relié au sommet x de façon unique. De plus si la première arête de ce chemin est $\{P_1, P_2\}$, alors $x \in P_1$. (Nous montrerons cette affirmation après cette démonstration, lemme 4.10).

On a donc :

-connexité : pour relier deux sommets distincts v et v' , on prend $x \in X$ et des

chemins $[v, v_1, \dots, v_k, x]$ et $[v', v'_1, \dots, v'_{k'}, x]$. On a nécessairement $v_k = v_{k'}$ car il n'y a qu'une seule arête reliant x à un sommet de T . Considérons le premier élément que ces chemins ont en commun $v_i = v'_i$, on a alors le chemin cherché en considérant $[v, v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v'_i, v'_{i-1}, \dots, v'_2, v']$.

-absence de cycles : supposons que l'on a un cycle $C = [v_1, v_2, \dots, v_k] \cup \{\{v_k, v_1\}\}$. On trouve par l'affirmation un chemin $[v_1, v'_2, \dots, v'_{k'}, x]$ pour un certain $x \in X$ avec $x \neq v_1$. Soit i le plus grand indice tel que C passe par v'_i . Posons alors j tel que $v'_i = v_j$. Alors l'existence de $[v_1, v_2, \dots, v_{j-1}, v'_i, \dots, v'_{k'}, x]$ et de $[v_1, v_k, v_{k-1}, \dots, v_{j-1}, v'_i, \dots, v'_{k'}, x]$ contredit l'unicité dans l'affirmation.

-stabilité d'après la première propriété et par construction les feuilles de notre arbre sont les éléments de X .

Montrons maintenant que l'on a $\psi(T) = \mathcal{P}$. Soit $v_1 \in V_T$. Notons $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ la partition associée aux arêtes $\{p_i, \star\}$ de v_1 . La fin de l'affirmation assure que l'on a $B_{v_1}^{\{p_i, \star\}} \subseteq p_1$. Or P est une partition donc il y a égalité, ce que l'on voulait démontrer. \square

Montrons l'affirmation.

Lemme 4.10. *Soit $x \in X$. Tout sommet $v_1 \in V_T - \{x\}$ peut être relié au sommet x de façon unique. De plus si la première arête de ce chemin est $\{P_1, P_2\}$, alors $x \in P_1$.*

Démonstration. On cherche un chemin $[v_1, v_2, v_3, \dots, v_k, x]$.

Si $v_1 \in X$ alors la troisième propriété donne l'existence d'un sommet v_2 tel que $\{v_1\}$ appartienne à la partition, ce qui permet de se ramener au cas $v_1 \notin X$. Trouvons les v_i de façon récursive.

Prenons pour hypothèse de récurrence : on a trouvé v_2, \dots, v_i tels que $[v_1, v_2, \dots, v_i]$ soit un chemin et la partie B_i de X de v_i contenant x est incluse dans celle de v_{i-1} contenant x . Supposons-la vraie pour un certain $i \in \mathbb{N}$.

Soit B_i cette partie. Si $B_i = \{x\}$ alors par construction $\{v_i, \{x\}\} \in E_T$ et donc $[v_1, v_2, \dots, v_i, \{x\}]$ est le chemin cherché. Sinon, on trouve v_{i+1} contenant $X - B_i \in V_T$. Ainsi $\{v_i, v_{i+1}\} \in E_T$. Par ailleurs si B_{i+1} est la partie de v_{i+1} contenant x alors B_{i+1} et $X - B_i$ sont deux éléments de la partition v_{i+1} donc on a bien $B_{i+1} \subset B_i$. On a donc bien la propriété au rang $i + 1$.

Notre construction s'arrête car les inclusions de B_i sont strictes. Par ailleurs on a toujours $x \in B_i$. Si v_k est le dernier sommet du chemin construit alors $v_k = x$ car sinon la construction ne se serait pas arrêtée.

On a bien l'unicité de ce chemin car l'hypothèse $B_{i+1} \subset B_i$ est nécessaire et induit l'unicité des choix des sommets à chaque étape.

Par construction, on a bien la seconde partie de du lemme. \square

Nous venons de montrer que l'application ψ est une surjection vers l'ensemble des ensembles admissibles de partitions.

Démonstration. (théorème 4.4) Reste à montrer que cette application passe au quotient sur les classes d'arbres en une application bijective. Il suffit de montrer que l'application qui à une arête sur un sommet associe sa branche passe au quotient.

Prenons T et T' sont deux arbres dans la même classe, et F la bijection sur l'ensemble des sommets respectant les arêtes. Soit $v \in V_T$, $e \in E_v$ et $x \in X \cap B_v(e)$. Alors si $[v, v_1, \dots, v_k, x]$ est un chemin, $[F(v), F(v_1), \dots, F(v_k), F(x) = x]$ l'est aussi donc x est dans $B_{F(v)}(F(e))$.

Par ailleurs, si deux arbres marqués ont même image, le nombre de sommets internes et leur nombre d'arêtes est le même puisqu'il y a une et une seule partition associée à chaque sommet interne. Les sommets adjacents aux sommets qui sont des éléments de X sont déterminés par la troisième propriété. Ceux qui sont adjacents à ces derniers le sont par la deuxième propriété et ainsi de suite on montre que la structure reliant les sommets les uns aux autres est rigide et que donc ces deux arbres sont dans la même classe. \square

4.2 Classes d'isomorphismes d'arbres de sphères et topologie

Définition 4.11 (Isomorphisme d'arbres de sphères). *Un isomorphisme d'arbres de sphères marqués par X est un revêtement d'arbres de sphères marqués de degré 1 qui est l'identité sur X .*

Notons qu'alors l'application d'arbres combinatoires associée est un isomorphisme d'arbres combinatoires.

On définit sur l'ensemble \mathfrak{T}_X des arbres de sphères marqués par X une relation d'équivalence donnée par : $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}'$ si et seulement s'il existe un isomorphisme $\mathcal{M} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ d'arbres de sphères marqués par X . Notons qu'alors pour tout $v \in IV_T$, $m_v : \mathbb{S}_v \rightarrow \mathbb{S}_{M(v)}$ est un isomorphisme et $a_{M(v)} = m_v \circ a_v$. On notera parfois $T \sim_{\mathcal{M}} T'$.

On notera \mathfrak{T}_X l'ensemble des arbres de sphères marqués par X . On appelle l'espace des modules des arbres de sphères marqués par X et note $\overline{\mathbf{Mod}}_X$ l'ensemble \mathfrak{T}_X quotienté par cette relation d'équivalence. Remarquons que \mathbf{Mod}_X est l'ensemble des classes d'isomorphismes de sphères marquées.

Remarque 4.12. La classe d'isomorphisme d'un arbre de sphères possédant un unique sommet interne v marqué par X est déterminée par l'élément $[a_v] \in \mathbf{Mod}_X$. On confondra \mathbf{Mod}_X et $\overline{\mathbf{Mod}}_X$.

Rappel. L'espace des modules \mathbf{Mod}_X des sphères à points marqués par X est l'ensemble des injections de X dans \mathbb{S} modulo post-composition par une application de Moebius. Il est muni d'une structure de variété quasi-projective. En effet, si

l'on choisit trois points distincts de X , on peut associer à tout élément de Mod_X l'ensemble des birapports de ces derniers avec les éléments de X restants et cela ne dépend pas des représentants choisis.

Cette méthode fait jouer un rôle particulier aux trois points choisis initialement. Une manière d'éviter cela est de considérer Quad_X l'ensemble des quadruplets d'éléments distincts de X et de considérer le plongement :

$$\mathfrak{B} : \text{Mod}(X) \rightarrow \mathbb{S}^{\text{Quad}_X}$$

qui à tout $[i] \in \text{Mod}(X)$ associe la collection des birapports

$$[i(x_1), i(x_2), i(x_3), i(x_4)]_{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{Quad}_X}.$$

C'est cette approche que nous allons suivre pour donner à $\overline{\text{Mod}}_X$ une structure de variété projective.

Notons Trip_X l'ensemble des triplets d'éléments distincts de X . Considérons un arbre combinatoire T marqué par X . Prenons $t := (x_0, x_1, x_\infty) \in \text{Trip}_X$. D'après le lemme 2.4, les sommets x_0, x_1 et x_∞ sont séparés par un unique sommet v . On parle de sommet séparant le triplet t ou on dira par abus que le triplet est séparé par ce sommet.

Par ailleurs, si T est l'arbre combinatoire d'un arbre de sphères \mathcal{T} , l'application a_v donne des images distinctes aux éléments de t . Il existe alors une unique carte projective $\sigma_t : \mathbb{S}_v \rightarrow \mathbb{S}$ vérifiant $\sigma_t \circ a_v(x_0) = 0, \sigma_t \circ a_v(x_1) = 1$ et $\sigma_t \circ a_v(x_\infty) = \infty$.

Définition 4.13 (*t*-cartes). *L'application σ_t est appelée la t-carte de T. L'application*

$$\alpha_t := \sigma_t \circ a_v : X \rightarrow \mathbb{S}$$

est appelée le marquage de la t-carte de T.

Le lemme suivant justifie que l'on puisse parler de *t*-carte d'une classe d'isomorphisme d'arbre de sphères, que l'on note aussi par abus α_t .

Lemme 4.14. *Si $T \sim T'$ alors pour tout $t \in \text{Trip}_X$ on a $\alpha_t = \alpha'_t$.*

Démonstration. Supposons que $T \sim_{\mathcal{M}} T'$. Soit $v \in V$ et $v' \in V'$ les sommets associés au triplet t . Alors M envoie les branches sur v sur des branches de $M(v)$ (corollaire 1.32; or c'est l'identité sur X donc $v' := M(v)$ sépare les éléments de t).

Soit $\sigma_t : \mathbb{S}_v \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ vérifiant $\sigma_t \circ a_v(x_\star) = \star$ et $\sigma'_t : \mathbb{S}_{v'} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ l'équivalent pour v' . Comme $\sigma'_t \circ m_v \circ \sigma_t^{-1}$ fixe trois points c'est l'identité. Pour tout $x \in X$, on a alors

$$\sigma_t \circ a_v(x) = \sigma'_t \circ m_v \circ \sigma_t^{-1} \circ \sigma_t \circ a_v(x) = \sigma'_t \circ a_v(x).$$

□

Rappelons que Quad_X est l'ensemble des quadruplets d'éléments distincts de X .

Définition 4.15 (Topologie). *On définit l'application suivante :*

$$\mathfrak{B} : \overline{\mathbf{Mod}}_X \rightarrow \mathbb{S}^{\text{Quad}_X}$$

qui a tout $[T] \in \overline{\mathbf{Mod}}_X$ associe la collection des $(\alpha_t(x))_{(t,x) \in \text{Quad}_X}$.

L'application \mathfrak{B} définit une topologie sur $\overline{\mathbf{Mod}}_X$. Le lemme suivant implique que cette topologie est séparée.

Lemme 4.16. *L'application \mathfrak{B} est injective.*

Démonstration. Soit T un arbre de sphères marqué par X . Pour $t \in \text{Trip}_X$ fixé, la donnée des $\alpha_t(x)$ permet de reconstruire l'application a_v lorsque t définit le sommet v de T . Comme les arbres sont stables, pour tout sommet $v \in V_X$ on a $\text{card}(E_v) \geq 3$ et on peut donc toujours trouver élément de Trip_X séparé par v . Ainsi, le théorème 4.4 assure que la classe de T est déterminée de façon unique. \square

Corollaire 4.17. *L'application \mathfrak{B} est un homéomorphisme sur son image qui munit donc \mathbf{Mod}_X d'une structure de variété quasi-projective lisse qui est la même que celle de Mod_X (via l'identification).*

Démonstration. En effet Mod_X et $\mathbb{S}^{\text{Quad}_X}$ sont des espaces lisses et la restriction de \mathfrak{B} à Mod_X est algébrique. \square

Commençons par nous assurer que cette topologie est bien compatible avec celle que nous avons introduite au chapitre 3.

Lemme 4.18. *Soient (\mathcal{A}_n) et (\mathcal{A}'_n) deux suites de sphères marquées par X et soient \mathcal{T} et \mathcal{T}' deux arbres de sphères marqués par X .*

1. (passage au quotient)
 - Si $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}'$, alors $\mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{T} \iff \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{T}'$.
 - Si $\mathcal{A}_n \sim \mathcal{A}'_n$, alors $\mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{T} \iff \mathcal{A}'_n \rightarrow \mathcal{T}$.
2. (unicité de la limite) Si $\mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{T}$ et $\mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{T}'$, alors $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}'$.

Démonstration. Si $\mathcal{A}_n \rightarrow_{\phi_n} \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}' \sim_{\mathcal{M}} \mathcal{T}$ alors $\mathcal{A}_n \rightarrow_{\phi'_n} \mathcal{T}'$ avec $\phi_{n,v} = m_v \circ \phi'_{n,v}$. Par ailleurs si $\mathcal{A}_n \sim_{\mathcal{M}} \mathcal{A}'_n \rightarrow_{\phi'_n} \mathcal{T}$ alors $\mathcal{A}_n \rightarrow_{\phi'_n \circ \mathcal{M}} \mathcal{T}$ ce qui conclut la démonstration du point 1.

Pour le point 2, supposons que $\mathcal{A}_n \rightarrow_{\phi_n} \mathcal{T}$ et $\mathcal{A}_n \rightarrow_{\phi'_n} \mathcal{T}'$. Pour tout sommet interne v de \mathcal{T} , on a $\phi'_{n,v} \circ \phi_{n,v} \rightarrow m_v$ un isomorphisme. En effet, si on prends un $t \in \text{Trip}_X$ séparé par v , alors $\sigma'_t \circ \phi'_{n,v} \circ \phi_{n,v} \circ \sigma_t^{-1}$ est une transformation de moebius qui fixe 0, 1 et ∞ et donc c'est l'identité. Ainsi $\phi'_{n,v} \circ \phi_{n,v} \rightarrow \sigma_t'^{-1} \circ \sigma_t$ qui est bien un isomorphisme. \square

Lemme 4.19. *L'application \mathfrak{B} définit la même notion de convergence que celle des arbres de sphères sur \mathbf{Mod}_X , c'est à dire :*

$$\mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{T} \text{ si et seulement si } \mathfrak{B}([\mathcal{A}_n]) \rightarrow \mathfrak{B}([\mathcal{T}]).$$

Démonstration. Le lemme 4.18 assure que ces deux formulations sont équivalentes. Supposons que $\mathcal{A}_n \xrightarrow{\phi_n} \mathcal{T}$. Soit $t \in \text{Trip}_X$. Soit $x \in X$ n'apparaissant pas dans t . Soit $\sigma_{n,t}$ la t -carte de \mathcal{A}_n . Soit ϕ_t la t -carte de \mathcal{T} . Soit v le sommet de \mathcal{T} défini par t . Alors $m_n := \sigma_t \circ \phi_{n,v}^{-1} \circ \sigma_{n,t}$ (cf diagramme ci-dessous) est une transformation de Moebius qui fixe $0, 1$ et ∞ donc m_n est l'identité.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{a_n} & \mathbb{S}_n & \xrightarrow{\phi_{n,t}} & \mathbb{S} \\ & \searrow a_v & \downarrow \phi_{n,v} & & \downarrow m_n \\ & & \mathbb{S}_v & \xrightarrow{\phi_t} & \mathbb{S} \end{array}$$

On a alors

$$\sigma_{n,t} \circ a_n(x) = m_n \circ \sigma_{n,t} \circ a_n(x) = \sigma_v \circ \phi_{n,v} \circ a_n(x) \rightarrow \sigma_t \circ a_v(x).$$

Ainsi $\alpha_{n,t} \rightarrow \alpha_t$ donc $\mathfrak{B}([\mathcal{A}_n]) \rightarrow \mathfrak{B}([\mathcal{T}])$.

Si par ailleurs $\mathfrak{B}([\mathcal{A}_n]) \rightarrow \mathfrak{B}([\mathcal{T}])$, pour tout sommet interne v de \mathcal{T} notons t_v un triplet définissant v et σ_{n,t_v} la t_v -carte de \mathcal{A}_n . Posons $\phi_{n,v} := \sigma_{n,t_v}^{-1} \circ \sigma_{t_v}$. On vérifie alors bien que $\phi_{n,v} \circ a_n \rightarrow a_v$. \square

Remarque 4.20 (Convergence d'arbres stables). Soit $(\mathcal{T}_n)_n$ une suite d'arbres marqués par X . Pour tout $t \in \text{Trip}_Y$ on note $v_{n,t}$ le sommet de \mathcal{T}_n^Y séparant t .

Soit $\mathcal{T} \in \overline{\mathbf{Mod}}_X$. Par définition de \mathfrak{B} on déduit que la suite $(\mathcal{T}_n)_n$ converge vers \mathcal{T} si

$$\forall t \in \text{Trip}_X, \exists \phi_{n,v_{n,t}}^X \in \text{Aut}(\mathbb{S}_{v_{n,t}}, \mathbb{S}_v), \phi_{n,v_{n,t}}^X \circ a_{n,v_{n,t}} \rightarrow a_v.$$

Notation. On notera $\phi_{n,t}^X := \phi_{n,v_{n,t}}^X$.

4.3 Compacité, variété projective

Dans cette partie nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 4.21. *L'espace $\overline{\mathbf{Mod}}_X$ est l'adhérence de \mathbf{Mod}_X (dans $\mathbb{S}^{\text{Quad}_X}$), c'est à dire :*

$$\mathfrak{B}(\overline{\mathbf{Mod}}_X) = \text{Ad}(\mathfrak{B}(\mathbf{Mod}_X)).$$

Ce résultat sera montré par double inclusion (lemmes 4.23 et 4.26). On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 4.22. *L'espace topologique $\overline{\mathbf{Mod}}_X$ est compact, c'est l'adhérence de \mathbf{Mod}_X .*

Démonstration. En effet, $\mathfrak{B}(\overline{\mathbf{Mod}}_X)$ est un fermé dans un compact donc est compact. \square

Cette compactification correspond à celle de Deligne-Mumford (cf [DM]), ceci peut être vu dans [B] par exemple. Par la suite on fera l'abus de dire qu'il s'agit de la compactification de Deligne-Mumford. Il est connu que $\mathfrak{B}(\overline{\mathbf{Mod}}_X)$ est une sous-variété projective lisse donc est muni ici d'une structure de variété projective lisse (ce qui n'est pas utilisé dans la suite).

Lemme 4.23. *L'ensemble \mathbf{Mod}_X est dense dans $\overline{\mathbf{Mod}}_X$. En particulier on a*

$$\mathfrak{B}(\overline{\mathbf{Mod}}_X) \subseteq \text{Ad}(\mathfrak{B}(\mathbf{Mod}_X)).$$

Pour démontrer ceci, nous utilisons la notion d'enveloppe convexe :

Définition 4.24 (Enveloppe convexe). *Pour tout arbre combinatoire T et tout ensemble de sommet $V' \subset T$, l'enveloppe convexe de V' est le sous arbre constitué par les chemins reliant les éléments de V' .*

Notons qu'alors c'est le plus petit sous-arbre de T contenant V' (enveloppe connexe).

Démonstration. Grâce au lemme 4.19, les deux formulations sont bien équivalentes : il suffit donc de montrer que tout arbre de sphères marqué par X est limite de sphères marquées par X . Posons $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}\}$. Soit $3 \leq k \leq n_0$. Notons $X_k := \{x_1, \dots, x_k\}$ et Conv_k l'ensemble des sommets de valence supérieure à 3 de l'enveloppe convexe de X_k dans \mathcal{T} . Montrons par récurrence sur k que l'on peut trouver une suite de sphères $(\mathcal{A}_n)_n$ marquées par X_k et pour tout sommet interne $v \in \text{Conv}_k$ une suite d'isomorphismes $\phi_{n,v} : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_v$ tels que $\phi_{n,v} \circ a_n \rightarrow a_v$.

Si $k = 3$, Conv_k est constitué d'un unique sommet v . Prenons pour tout $n \in \mathbb{N}$ une sphère munie d'une structure complexe \mathbb{S}_n et une quelconque injection $a_n : X_k \rightarrow \mathbb{S}_n$. Comme X_k n'a que trois éléments, il existe un unique isomorphisme $\phi_{n,v} : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_v$ tel que $\phi_{n,v} \circ a_n$ et a_v sont égaux sur X_k . On a alors bien $\phi_{n,v} \circ a_n \rightarrow a_v$.

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain k avec $3 \leq k < n_0$. Notons $(\mathbb{S}_n)_n$ et $(\phi_{n,v})_{n \in \mathbb{N}, v \in \text{Conv}_k}$ les suites données par l'hypothèse de récurrence. Soit v_0 le sommet de Conv_{k+1} le plus proche de x_{k+1} (au sens du nombre de sommets dans $[v_0, x_{k+1}]$).

Si $v_0 \in \text{Conv}_k$ alors $\text{Conv}_k = \text{Conv}_{k+1}$. Posons

$$U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi_{n,v_0} \circ a_n(X_k).$$

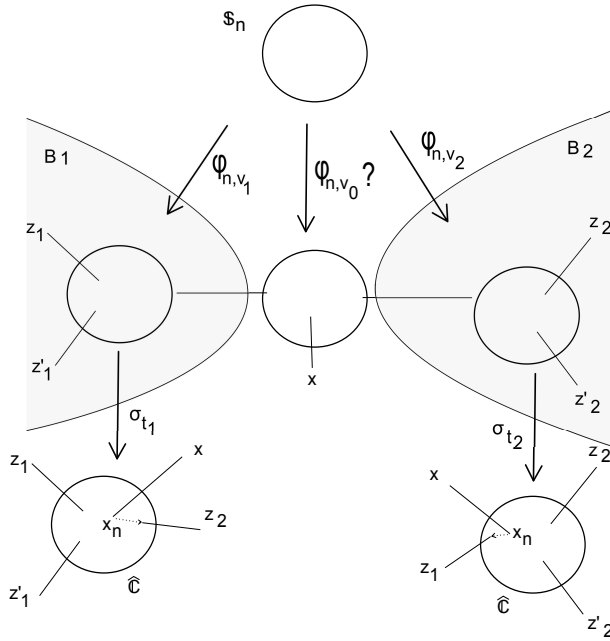


FIGURE 4.1 –

Comme $\phi_{n,v} \circ a_n \rightarrow a_v$ et que $B_{v_0}(x_{k+1}) \cap X_k = \emptyset$, U n'a qu'un nombre fini d'éléments dans un voisinage suffisamment petit de $a_{v_0}(x_{k+1})$. On peut donc trouver une suite $(c_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{S}_{v_0} - U$ tels que $c_n \rightarrow a_{v_0}(x_{k+1})$. On pose $a'_n : X_{k+1} \rightarrow \mathbb{S}_n$ égal à a_n sur X_k et tel que $a'_n(x_{k+1}) := c_n$. Comme $c_n \notin U$, a_n est une injection et on a par ailleurs $\phi_{n,v} \circ a'_n(x_{k+1}) \rightarrow a_v(x_{k+1})$. Par ailleurs le lemme 3.2 nous assure que pour tout autre sommet de Conv_k on a $\phi_{n,v} \circ a'_n(x_{k+1}) \rightarrow a_v(x_{k+1})$.

Si $v_0 \notin \text{Conv}_k$, alors v_0 se trouve sur un chemin entre deux sphères ou bien il existe une feuille $x \in X_k$ telle que x et v_0 soient adjacentes.

Dans le premier cas, prenons ces deux sphères $v_1 \in B_1, v_2 \in B_2$ de Conv_k où B_1 et B_2 sont deux branches sur v_0 (cf Figure 4.1). Posons $X^i = B_i \cap X_k$. On sait que v_1 est sur un chemin $[z_1, z'_1]$ avec $z_1, z'_1 \in X^1$ et que v_2 est sur un chemin $[z_2, z'_2]$. On définit les triplets $t_1 := (z_1, z'_1, z_2)$ définissant la sphère v_1 et $t_2 := (z_2, z'_2, z_1)$ définissant la sphère v_2 . Rappelons que σ_{t_\star} est la t_\star -carte de \mathcal{T} . Si on pose $M_n := \sigma_{t_2} \circ \phi_{n,v_2} \circ \phi_{n,v_1}^{-1} \circ \sigma_{t_1}^{-1}$, par le choix des t_\star on a $\forall z \in \hat{\mathbb{C}}, M_n(z) = \lambda_n/z$ avec $\lambda_n \rightarrow \infty$.

Posons

$$U_1 := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma_{t_1} \circ \phi_{n,v_1} \circ a_n(X_k),$$

et $x_n = \sqrt{\lambda_n} + \varepsilon$ avec $\varepsilon \in \mathbb{C}$ indépendant de n et choisi tel que $(x_n)_n$ évite U_1 . On définit $a_n(x_{k+1}) := \phi_{n,v_1}^{-1} \circ \sigma_{t_1}^{-1}(x_n)$. (Par définition, on a $\phi_{n,v_1} \circ a_n(x_{k+1}) \rightarrow a_{v_1}(x_{k+1})$ et $M_n(x_n) = \lambda_n/(\sqrt{\lambda_n} + \varepsilon) \rightarrow \infty$, on a aussi $\phi_{n,v_2} \circ a_n(x_{k+1}) \rightarrow a_{v_2}(x_{k+1})$.)

Soit $\phi_{n,v_0} : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_{v_0}$ l'unique isomorphisme tel que

$$\phi_{n,v_0}(a_n(z_1)) = a_{v_0}(z_1), \quad \phi_{n,v_0}(a_n(z_2)) = a_{v_0}(z_2) \text{ et } \phi_{n,v_0}(a_n(x)) = a_{v_0}(x).$$

Soit $t := (z_1, x, z_2)$ et σ_t la t -carte de \mathcal{T} . Posons $N_n := \sigma_{t_0} \circ \phi_{n,v_0} \circ \phi_{n,v_1}^{-1} \circ \sigma_{t_1}^{-1}$. On remarque que $\forall z \in \hat{\mathbb{C}}, N_n(z) = z/(x_n)$. Comme pour tout $x \in X^1, \sigma_{t_1} \circ \phi_{n,v_1} \circ a_n(x)$ tend vers une limite fini, on a

$$\sigma_t = \phi_{n,v_0}(a_n(x)) = N_n(\sigma_{t_1} \circ \phi_{n,v_1} \circ a_n(x)) \rightarrow 0 = \sigma_t \circ a_{v_0}(x).$$

Par un raisonnement similaire sur v_2 , on montre que pour tout $x \in X^2$ on a bien aussi $\phi_{n,v_0} \circ a_n(x) \rightarrow a_{v_0}(x)$. Alors pour tout $v \in \text{Conv}_k$, d'après le lemme 3.2, on a bien $\phi_{n,v} \circ a'_n(x_{k+1}) \rightarrow a_v(x_{k+1})$.

Dans le cas où il existe une feuille $x \in X_k$ telle que x et v_0 soient adjacentes, alors v_0 est adjacent à un unique sommet interne v_1 de Conv_k et sépare les sommets x, v_0 et v_1 . On définit $a_n(x_{k+1})$ comme étant une suite telle que $\phi_{n,v_1} \circ a_n(x_{k+1}) \rightarrow \phi_{n,v_1}(x_k)$ et $a_n|_{X_{k+1}}$ reste injective. On vérifie alors comme précédemment que l'on a bien ce que l'on cherchait en prenant ϕ_{n,v_0} l'unique isomorphisme qui envoie les points d'attache des branches contenant x, x_k et x' de \mathbb{S}_n sur ceux que \mathbb{S}_v . \square

Remarque 4.25. Ce lemme peut se démontrer en faisant des recollements de sphères privées d'un nombre fini de points. Cette méthode est appelée le "plumbing" (plomberie). Nous utilisons ce point de vue par exemple dans la démonstration de la proposition 5.14.

Lemme 4.26. *L'ensemble $\mathfrak{B}(\overline{\text{Mod}}_X)$ est un fermé et*

$$\text{Ad}(\mathfrak{B}(\text{Mod}_X)) \subseteq \mathfrak{B}(\overline{\text{Mod}}_X).$$

Démonstration.

Soit $(\mathcal{T}_n)_n$ une suite quelconque de sphères marquées par X . Pour tout $t \in \text{Trip}_X$, on note $\sigma_{n,t}$ la t -carte de \mathcal{T}_n , on a alors $\sigma_{t,n} \circ a_{n,t}$ converge vers une application que l'on note $a_t : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$.

Chaque a_t définit une partition P_t de X constituée des classes de la relation d'équivalence $x \sim x'$ si et seulement si $a_t(x) = a_t(x')$. Montrons que l'ensemble \mathcal{P} des P_t pour $t \in \text{Trip}_X$ forme un ensemble admissible de partitions.

-Propriété 1. Les images des éléments de t sont distinctes donc P_t contient au moins trois éléments.

-Propriété 2. Soit $P_t \in \mathcal{P}$ et $B \in P_t$. Par définition, pour tout élément $x \notin B$, on a $a_t(x) \notin a_t(B) = \{\star\}$. Soit t_0 un triplet de points ayant au moins deux éléments de $X - B$. D'après le lemme 3.2, la sphère P_{t_0} a un ensemble B_0 contenant $X - B$. Si $B_0 = X - B$ on a ce que l'on cherchait. Sinon $B_0 \cap B \neq \emptyset$. On considère alors un autre triplet $t_1 \in (X - B) \times (B_0 \cap B) \times B$ qui contient aussi une arête B_1

contenant $X-B$ mais telle que $\text{card}(B_1) < \text{card}(B_0)$. On continue jusqu'à ce que l'on ait $\text{card}(B_i) = \text{card}(X-B)$.

-Propriété 3. Notons d'abord que si t est un triplet d'éléments de x dans des parties distinctes de $P_{t'}$ alors on a $P_t = P_{t'}$. Soit t_1 et t_2 tels qu'on ait $B \in P_{t_1} \cap P_{t_2}$ est non vide. Supposons par l'absurde que $P_{t_1} \neq P_{t_2}$ mais $B \in P_{t_1} \cap P_{t_2}$. On peut alors trouver $x_1, x_2 \in B_2 \in P_{t_2}$ tels que x_1 et x_2 sont dans des éléments distincts de P_{t_1} . Comme P_{t_2} a au moins trois éléments on prend $x_3 \notin B_2$. Soit $x_B \in B$. notons $t'_2 := (x_1, x_3, x_B)$ et $t'_1 = (x_1, x_2, x_3)$. D'après la remarque qui précède on a $P_{t_1} = P_{t'_1}$ et $P_{t_2} = P_{t'_2}$. D'après le lemme 3.2, comme $a_{n,t'_2}(x_1)$ et $a_{n,t'_2}(x_2)$ ont même limite, $a_{n,t'_1}(x_3)$ et $a_{n,t'_1}(x_4)$ aussi. Comme $x_4 \in B$ on a donc $x_3 \in B$ ce qui est absurde.

D'après le corollaire 4.5, l'ensemble \mathcal{P} détermine un unique arbre combinatoire à isomorphisme près et à chacun de ses sommets, la partition associée correspond à la partition associée à un a_t . Fixons un arbre combinatoire T dans cette classe d'isomorphisme et pour chacun de ses sommets interne v un triplet v_t telle que la partition de a_{t_v} corresponde à la partition de v . Posons $\phi_{n,v} = a_{n,t_v}$ et $\mathbb{S}_v = \mathbb{S}$ pour tout $v \in IV$. T muni des sphères \mathbb{S}_v et des $a_v := a_{t_v}$ est un arbre de sphères \mathcal{T} et par construction on a $\mathcal{T}_n \rightarrow_{\phi_n} \mathcal{T}$. \square

Chapitre 5

Classes d'isomorphismes de revêtements

5.1 Isomorphismes de revêtements d'arbres

Définition 5.1 (Revêtements isomorphes). *On appelle isomorphisme entre les revêtements d'arbres de sphères $\mathcal{F}^1 : \mathcal{T}_1^Y \rightarrow \mathcal{T}_1^Z$ et $\mathcal{F}^2 : \mathcal{T}_2^Y \rightarrow \mathcal{T}_2^Z$ une paire d'isomorphisme d'arbres de sphères $(\mathcal{M}^Y, \mathcal{M}^Z)$ tels que :*

- $\mathcal{T}_1^Y \sim_{\mathcal{M}^Y} \mathcal{T}_2^Y$ et $\mathcal{T}_1^Z \sim_{\mathcal{M}^Z} \mathcal{T}_2^Z$;
- pour tous sommets $v_1 \in \mathcal{T}_1^Y$, $v_2 := M^Y(v_1) \in \mathcal{T}_2^Y$, $w_1 := F^1(v_1) \in \mathcal{T}_1^Z$ et $w_2 := F^2(v_2) \in \mathcal{T}_2^Z$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}_{v_1} & \xrightarrow{m_{v_1}^Y} & \mathbb{S}_{v_2} \\ f_{v_1} \downarrow & & \downarrow f_{v_2} \\ \mathbb{S}_{w_1} & \xrightarrow{m_{w_1}^Z} & \mathbb{S}_{w_2} \end{array}$$

On note alors $\mathcal{F}^1 \sim \mathcal{F}^2$ ou $\mathcal{F}^1 \sim_{(\mathcal{M}^Y, \mathcal{M}^Z)} \mathcal{F}^2$. Comme \mathcal{M}^Y et \mathcal{M}^Z sont inversibles, c'est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence de cette relation sont appelées classes d'isomorphismes de revêtements d'arbre de sphères.

Notons que deux revêtement d'arbres de sphères isomorphes ont même degré. Ainsi on appelle degré d'une classe d'isomorphisme de revêtements d'arbres de sphères le degré d'un de ses représentants. De même, tous les revêtements dans une même classe ont le même portrait, on peut donc définir le portrait d'une classe comme étant celui d'un de ses représentants.

Notation. On notera $\overline{\mathbf{Rev}}_{\mathbf{F}}$ l'ensemble des revêtements d'arbres de sphères \mathcal{F} de portrait $\mathbf{F} = (F|_Y, \deg|_Y)$ et $\mathbf{Rev}_{\mathbf{F}}$ ceux entre deux arbres qui de plus ne

comportent chacun qu'un seul sommet interne (on parle alors respectivement de revêtements d'arbres de sphères marqués par \mathbf{F} et de revêtements de sphères marquées par \mathbf{F}). On notera $\overline{\mathbf{rev}}_{\mathbf{F}}$ le quotient de $\overline{\mathbf{Rev}}_{\mathbf{F}}$ par cette relation d'équivalence et $\mathbf{rev}_{\mathbf{F}}$ celui de $\mathbf{Rev}_{\mathbf{F}}$.

5.2 Revêtements marqués, topologie

Rappelons que $\mathfrak{T}_{\mathbf{X}}$ désigne l'ensemble des arbres de sphères marqués par X . Définissons

$$\mathcal{I} : \overline{\mathbf{Rev}}_{\mathbf{F}} \rightarrow \mathfrak{T}_{\mathbf{Y}} \times \mathfrak{T}_{\mathbf{Z}}$$

qui à $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$ associe $(\mathcal{T}^Y, \mathcal{T}^Z)$. Le but de ce qui suit est de démontrer la proposition suivante par récurrence sur le cardinal de Y .

Proposition 5.2. *L'application $\mathcal{I} : \overline{\mathbf{Rev}}_{\mathbf{F}} \rightarrow \mathfrak{T}_{\mathbf{Y}} \times \mathfrak{T}_{\mathbf{Z}}$ est injective.*

Cette proposition repose sur un lemme bien connu :

Lemme 5.3. *Deux applications de la sphère de Riemann dans elle même telles que les pré-images de trois points distincts coïncident (avec multiplicité) sont égales.*

Montrons le lemme suivant :

Lemme 5.4. *Tout arbre stable qui possède un sommet interne en a un qui n'est relié qu'avec au plus un seul sommet interne.*

Démonstration. En effet, prenons une feuille. Prenons un chemin partant de cette feuille ayant un nombre maximal d'arêtes (le nombre de sommet étant fini, celui d'arête l'est aussi). Si ce chemin est vide c'est que l'arbre n'est constitué que d'un sommet, ce qui est exclu. De même le cas où l'arbre n'a que deux sommets est exclu. Supposons que nous ne sommes pas dans ces cas.

Dans ce cas, le chemin est de la forme

$$C = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k].$$

avec $v_{k-1} \neq v_1$. Notons que v_k est nécessairement une feuille car sinon, il posséderait une arête vers un autre sommet permettant de prolonger le chemin (le sommet au bout de cette arête n'apparaît pas dans le chemin sinon on aurait un cycle). Si v_{k-1} ne vérifie pas la propriété voulue alors v_{k-1} a une arête vers un autre sommet interne v'_k qui n'apparaît pas dans le chemin (sinon on aurait un cycle). Celui-ci étant un sommet interne a aussi une autre arête vers un sommet v'_{k+1} n'apparaissant pas dans le chemin. $C' = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v'_k, v'_{k+1}]$. serait un chemin plus long que C . Ce qui serait absurde. Ainsi v_{k-1} vérifie la propriété voulue. \square

Démonstration. (Proposition 5.2) Comme annoncé, faisons un raisonnement par récurrence sur le cardinal de Y .

Commençons par le cas $\text{card}(Y) = 3$. Soit $\mathcal{F} \in \overline{\mathbf{Rev}}_{\mathbf{F}}$ avec $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$, montrons que \mathcal{F} est déterminé de façon unique par $\mathcal{I}(\mathcal{F})$. Si Y a seulement trois éléments alors T^Y a un seul sommet interne v . Alors T^Z n'a aussi qu'un seul sommet interne v' qui est l'image de v . L'application d'arbre combinatoire est donc bien uniquement déterminée. Par ailleurs comme Z a trois éléments et comme l'on connaît toutes leurs pré-images, on connaît les pré-images de trois points d'attaches de trois arêtes sur $S_{v'}$ par f_v et donc f_v est aussi déterminé de façon unique.

Soit Y' un ensemble de cardinal $n > 3$. Supposons que \mathcal{I} soit injective pour tout ensemble Y vérifiant $\text{card}(Y) < n$. Montrons que c'est aussi le cas pour $Y = Y'$. Soit $\mathcal{F} : \mathcal{T}^{Y'} \rightarrow \mathcal{T}^Z$ dans $\overline{\mathbf{Rev}}_{\mathbf{F}}$. Supposons que l'on connaît $(\mathcal{T}^{Y'}, \mathcal{T}^Z)$ et montrons que \mathcal{F} est alors déterminé de façon unique.

Si $T^{Y'}$ n'a qu'un seul sommet interne alors on raisonne comme pour l'initialisation. On suppose désormais que ce n'est pas le cas. D'après le lemme 5.4, $T^{Y'}$ possède un sommet interne w_0 qui n'est adjacent qu'à un seul sommet interne. Soient y une feuille adjacente à w_0 (elle existe car $T^{Y'}$ est stable). L'image de w_0 est nécessairement adjacente à $z := F(y)$ qui est une feuille, $v := F(w_0)$ est déterminée de façon unique. Comme il y a plusieurs sommets internes, v est aussi adjacent à un sommet interne v' . Les pré-images de v sont adjacentes à celle des z . De même celles de v' sont tous les sommets internes (sinon v' serait une feuille) adjacents à v . Ainsi les pré-images de v et v' sont déterminées de façon unique.

Supposons maintenant que w soit une pré-image quelconque de v . Comme T^Z est stable v est adjacent à un certain $z'' \in Z - \{z\}$. Donc on connaît les pré-images de deux de ses points par f_w . Posons $e := \{v, v'\}$. Comme on connaît les pré-images de v' et de v , les pré-images par f_w du point d'attache de e sur v sont les points d'attache sur w des arêtes de w reliant w à des sommets internes. Comme on connaît la pré-image de trois points distincts de v par f_w , alors f_w est déterminé de façon unique.

Nous avons déterminé la pré-image par F de $B := B_{v'}(e)$. Posons $T'' := V^Z - B$ et $T' := T^{Y'} - F^{-1}(B) = F^{-1}(T'')$. Montrons que $F|_{T'}$ est déterminée de façon unique. Grâce aux lemmes 1.13 et 1.29, on construit un revêtement d'arbres de sphères $\overline{\mathcal{F}} : \overline{\mathcal{T}}' \rightarrow \overline{\mathcal{T}}''$. Les feuilles de $\overline{\mathcal{T}}'$ qui ne sont pas des feuilles de $T^{Y'}$ sont alors les éléments de $F^{-1}(v)$ et sur les sommets internes de $v \in \overline{\mathcal{T}}'$ on a $\overline{F}(v) = F(v)$ et $\overline{f}_v = f_v$. Or $\overline{\mathcal{T}}'$ est un arbre marqué par des éléments de Y et des pré-images de v donc on connaît le portrait de $F|_{\overline{\mathcal{T}}'}$. De plus $\text{card}(B \cap Z) \geq 2$ et les éléments de cet ensemble ne sont pas des feuilles de $\overline{\mathcal{T}}''$ donc $\overline{\mathcal{T}}''$ a au maximum $\text{card}(Z) - 1$ feuilles et $\overline{\mathcal{T}}'$ a au maximum $n - 1$ feuilles. L'hypothèse de récurrence assure donc que $F|_{\overline{\mathcal{T}}'}$ (et donc $F|_{T'}$) est déterminée de façon unique.

Ainsi \mathcal{F} est déterminé par $\mathcal{I}(\mathcal{F})$ de façon unique sur $F^{-1}(B)$ et toutes les

composantes connexes de son complémentaire. \square

L'application \mathcal{I} passe naturellement au quotient en une application injective

$$[I] : \overline{\text{rev}}_{\mathbf{F}} \rightarrow \mathbf{Mod}_Y \times \mathbf{Mod}_Z.$$

Notons π_1 la projection sur la première coordonnée.

Définition 5.5 (Topologie). *On définit l'application*

$$\mathbf{I} : \overline{\text{rev}}_{\mathbf{F}} \rightarrow \mathbf{Mod}_Y \text{ en posant } \mathbf{I} := \pi_1 \circ [I]$$

Proposition 5.6. *L'application $\mathbf{I} : \overline{\text{rev}}_{\mathbf{F}} \rightarrow \mathbf{Mod}_Y$ est injective.*

Démonstration. Prenons $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$ un revêtement d'arbre de sphère. Soit v_0 un sommet donné par le lemme 5.4. Pose v'_0 son image. Soit V_0 les feuilles adjacentes à v_0 . Le portrait (\mathbf{F}, deg) permet alors de déterminer les images des éléments de V_0 qui doivent tous être adjacents à v'_0 . Les autres pré-images de v_0 sont adjacentes aux éléments de $\mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{F}(V_0)$. Comme nous l'avons fait dans la démonstration précédente, les lemmes 1.13 et 1.29 permettent alors de retrouver les autres sommets de l'arbre T^Z et l'application F à partir de $T^Y - F^{-1}(v'_0)$ par récurrence sur le nombre de sommets de T^Y .

Ainsi, il est possible de reconstruire à partir de \mathcal{T}^Y l'arbre combinatoire T^Z ainsi que l'application d'arbre combinatoire. Montrons que les points d'attache des arêtes de T^Z sur les sommets de \mathcal{T}^Z sont bien définis à post-composition par automorphisme près. Pour cela il suffit de montrer que pour chaque sommet interne de T^Z , les points d'attache de toutes les arêtes sur ce sommet sont déterminées par la connaissance de seulement trois quelconques d'entre elles.

Pour chaque sommet interne v de T^Z , on suppose que l'on connaît les points d'attaches z_0, z_1 et z_∞ de trois arêtes e_0, e_1, e_∞ distinctes sur v . Pour toute pré-image w de v , on sait qu'il existe un unique revêtement holomorphe $f_w : \mathbb{S}_w \rightarrow \mathbb{S}_v$ qui envoient les pré-images de l'arête e_0 (resp. e_1, e_∞) sur z_0 (resp. z_1, z_∞). Si e est une arête sur v alors e a une pré-image e' sur w et donc son point d'attache doit être $f_w(e'_w)$. \square

On définit une topologie sur l'ensemble des classes d'isomorphismes des revêtements d'arbres de sphères grâce à \mathbf{I} . Vérifions que cette topologie est compatible avec ce qui a été fait dans ce qui précède.

Lemme 5.7. *Soient (f_n) et (f'_n) deux suites de sphères marquées par \mathbf{F} et soient \mathcal{F} et \mathcal{F}' deux arbres de sphères marqués par X .*

1. (passage au quotient)
 - Si $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}'$, alors $f_n \rightarrow \mathcal{F} \iff f_n \rightarrow \mathcal{F}'$.

- Si $f_n \sim f'_n$, alors $f_n \rightarrow \mathcal{F} \iff f'_n \rightarrow \mathcal{F}$.

2. (unicité de la limite) Si $f_n \rightarrow \mathcal{F}$ et $f_n \rightarrow \mathcal{F}'$, alors $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}'$.

Démonstration. Si $f_n \xrightarrow{(\phi_n^Y, \phi_n^Z)} \mathcal{F}$ et $\mathcal{F} \sim_{(\mathcal{M}^Y, \mathcal{M}^Z)} \mathcal{F}'$ alors

$$f_n \xrightarrow{(\psi_n^Y, \psi_n^Z)} \mathcal{F}' \text{ avec } \psi_{n,v}^* := M_v^* \circ \phi_{n,v}^*.$$

Par ailleurs, supposons que $f'_n \sim_{(\mathcal{M}_n^Y, \mathcal{M}_n^Z)} f_n$,

$$\text{si } f_n \xrightarrow{(\phi_n^Y, \phi_n^Z)} \mathcal{F} \text{ alors } f'_n \xrightarrow{(\mathcal{M}^Y \circ \phi_n^Y, \mathcal{M}^Z \circ \phi_n^Z)} \mathcal{F}.$$

On peut donc passer cette notion de convergence au quotient.

Pour le point 2, on suppose que $f_n \xrightarrow{(\phi_n^Y, \phi_n^Z)} \mathcal{F}$ et $f_n \xrightarrow{(\psi_n^Y, \psi_n^Z)} \mathcal{F}'$ alors

$$\mathcal{F} \sim_{(\mathcal{M}^Y, \mathcal{M}^Z)} \mathcal{F}' \text{ avec } m_v^* := \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{n,v}^* \circ (\phi_{n,v}^*)^{-1}.$$

En effet, $a_{n,v}^*$ tend vers a_v^* et $(\psi_{n,v}^* \circ (\phi_{n,v}^*)^{-1})^* \circ a_{n,v}^*$ tend vers a_v^* sur Y qui contient au moins trois points donc m_v est bien un isomorphisme. \square

Corollaire 5.8. *La notion de convergence définie sur $\overline{\mathbf{Rev}}_{\mathbf{F}}$ implique celle donnée par la topologie provenant de \mathbf{I} :*

$$\text{si } f_n \rightarrow \mathcal{F} \text{ alors } \mathbf{I}([f_n]) \rightarrow \mathbf{I}([\mathcal{F}]).$$

Démonstration. En effet, si $(f_n : \mathcal{A}_n^Y \rightarrow \mathcal{A}_n^Z) \rightarrow (\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z)$, alors par définition on a $\mathcal{A}_n^Y \rightarrow \mathcal{T}^Y$, c'est à dire $I(f_n) \rightarrow I(\mathcal{F})$ donc par passage au quotient $\mathbf{I}([f_n]) \rightarrow \mathbf{I}([\mathcal{F}])$. \square

Nous démontrerons la réciproque dans la partie suivante.

5.3 Compacité

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant :

Théorème 5.9. *L'espace topologique $\overline{\mathbf{rev}}_{\mathbf{F}}$ est l'adhérence de $\mathbf{rev}_{\mathbf{F}}$:*

$$\mathbf{I}(\overline{\mathbf{rev}}_{\mathbf{F}}) = \text{Ad}(\mathbf{I}(\mathbf{rev}_{\mathbf{F}})).$$

Ainsi l'espace $\overline{\mathbf{rev}}_{\mathbf{F}}$ est un espace compact qui s'injecte dans un produit de \mathbb{P}^1 . Plus particulièrement nous allons montrer que l'application \mathbf{I} est un homéomorphisme sur son image et que $\mathbf{rev}_{\mathbf{F}}$ est un ouvert dense de $\overline{\mathbf{rev}}_{\mathbf{F}}$. Ce résultat sera montré par double inclusions (propositions 5.14 et 5.13).

Commençons par remarquer un résultat fondamental :

Lemme 5.10. Soit $(f_n : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S})_n$ suite de fractions rationnelles de même degrés. Alors, il existe une suite extraite $(f_{n_k})_{n_k}$ et une suite de transformations de moebius $(M_{n_k})_{n_k}$ telle que $(M_{n_k} \circ f_{n_k})_{n_k}$ converge vers une fraction rationnelle f non constante uniformément en dehors d'un nombre fini de points.

Démonstration. Posons $x_0 = \infty$. On extrait afin d'avoir $X_n := f_n^{-1}(f_n(x_0)) \rightarrow X$ avec multiplicités. Soit $y_0 \in \mathbb{C} - X$. On extrait afin d'avoir $Y_n := f_n^{-1}(f_n(y_0)) \rightarrow Y$ avec multiplicités. Soit $z_0 \in \mathbb{C} - X \cap Y$. De nouveau, on extrait afin d'avoir $Z_n := f_n^{-1}(f_n(z_0)) \rightarrow Z$.

Par construction, pour tout n on peut trouver une transformation de Moebius vérifiant :

$$M_n \circ f_n(x_0) = \infty, \quad M_n \circ f_n(y_0) = 0, \quad M_n \circ f_n(z_0) = 1.$$

On a alors

$$\forall w \in \mathbb{C}, M_n \circ f_n(w) = \frac{\prod_{x \in X_n} (w - x)}{\prod_{y \in Y_n} (w - y)} \cdot \frac{\prod_{y \in Y_n} (z_0 - y)}{\prod_{x \in X_n} (z_0 - x)}.$$

Cette suite de fraction converge uniformément vers une fraction non constante en dehors d'un nombre finis de points qui correspondent aux zéros communs de $\prod_{x \in X} (w - x)^{m_x}$ et $\prod_{y \in Y} (w - y)^{m_y}$. \square

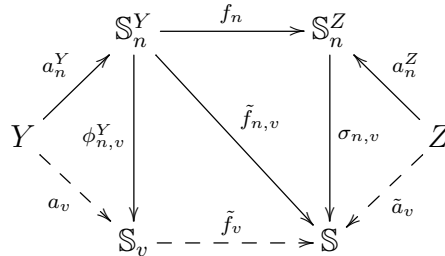
Proposition 5.11. Soit $(\mathcal{F}_n)_n$ une suite dans $\mathbf{Rev}_{\mathbf{F}, X}$. Si $(\mathbf{I}([\mathcal{F}_n]))_n$ converge dans $\mathbb{S}^{\text{Quad}_Y}$ alors $(\mathcal{F}_n)_n$ converge vers un revêtement d'arbres de sphères \mathcal{F} .

Démonstration. Soit $(\mathcal{F}_n : \mathcal{T}_n^Y \rightarrow \mathcal{T}_n^Z)_n$ une suite d'élément de $\mathbf{Rev}_{\mathbf{F}}$ telle que $(\mathbf{I}([\mathcal{F}_n]))_n$ converge dans \mathfrak{T}_Y . Supposons que $\mathcal{T}_n^Y \rightarrow_{\phi_n^Y} \mathcal{T}^Y$.

Posons $\sigma_n^Z : \mathbb{S}_n^Z \rightarrow \mathbb{S}$ des isomorphisme quelconques. Pour tout sommet interne v de \mathcal{T}^Y , on pose $\tilde{f}_{n,v} := (\sigma_n^Z)^{-1} \circ f_n \circ \phi_{n,v}^Y$. Par le lemme 5.10, quitte à extraire on trouve une suite d'isomorphismes $(M_{n,v} : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S})_n$ telles que $(M_{n,v} \circ \tilde{f}_{n,v})_n$ converge uniformément en dehors d'un nombre fini de points vers un morphisme $\tilde{f}_v : \mathbb{S}_v \rightarrow \mathbb{S}$ holomorphe non constant. On pose

- $\sigma_{n,v}^Z := M_{n,v} \circ \sigma_n^Z$;
- $\tilde{a}_v = \lim \sigma_{n,v}^Z \circ a_n^Z$;
- $Y_v = a_v(Y)$ et $\tilde{Z}_v = \tilde{a}_v(Z)$.

Notons que $\tilde{f}_v(Y_v) = \tilde{a}_v(Z)$.

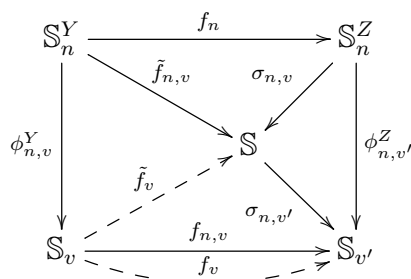


Lemme. Soit γ_z le bord d'un petit disque autour de $z \in \tilde{Z}_v$. Soit $y \in Y_v$ tel que $\tilde{f}_v(y) = z$. Alors il existe γ_y entourant y tel que $\tilde{f}_v(\gamma_y) = \gamma_z$ et $\tilde{f}_{n,v}(\gamma_y) \rightarrow \gamma_z$.

Démonstration. En effet, si γ_z est suffisamment petit, $\tilde{f}_v^{-1}(\gamma_z)$ est aussi un lacet γ_y qui est le bord d'un disque contenant y et aucun autre élément de Y_v . Comme sur $\mathbb{S}_v - Y_v$, il y a convergence uniforme, on en déduit bien que $\tilde{f}_{n,v}(\gamma_y) \rightarrow \gamma_z$. \square

Lemme. Pour tout $v \in IV^Y$, on a $\text{card} \tilde{Z}_v \geq 3$.

Démonstration. Prenons des disques autour des \tilde{Z}_v . Supposons n assez grand pour que les $\tilde{f}_{n,v}(Y)$ soient dans ces disques. Notons D_Z l'ensemble \mathbb{S} privé de ces disques et $D_Y := f_v^{-1}(D_Z)$. La formule de Riemann-Hurwitz donne $-3 \geq \chi(D_Y) = \deg(f_v)\chi(D_Z)$ car \mathbb{S}_v a au moins trois arêtes et D_Y n'a pas de points critiques. Comme $\deg(f_{n,v}) \geq 1$, on a donc $\chi(D_Z) \leq -1$ donc $\text{card} \tilde{Z}_v \geq 3$. \square



Ainsi $\text{card} \tilde{a}_v(Z) \geq 3$. Soit t_v un triplet de points de Z qui ont des images distinctes deux à deux par \tilde{a}_v . Soit v' l'unique sommet de T^Z défini par t_v . Comme sur le diagramme ci-dessus on note $\sigma_{n,v'} := \phi_{n,v'}^Z \circ \sigma_{n,v}^{-1}$. Par le choix de t_v , on sait que $\sigma_{n,v'}$ converge vers un isomorphisme $\sigma_{v'}$. Ainsi $\sigma_{n,v'} \circ \tilde{f}_{n,v} \rightarrow \sigma_{v'} \circ \tilde{f}_v := f_v$ localement uniformément en dehors d'un nombre fini de points et $\deg(f_v) \geq 1$.

On a donc $f_{n,v} := \phi_{n,v'}^Z \circ f_n \circ (\phi_{n,v}^Y)^{-1} \rightarrow f_v$ localement uniformément en dehors d'un nombre fini de points et $\deg(f_v) \geq 1$.

Lemme. L'application $F : V^Y \rightarrow V^Z$ qui à v défini par t associe le sommet défini par t_v se prolonge en une application d'arbre.

Démonstration. Soient v_1 et v_2 deux sommets adjacents dans T^Y reliés par une arête e et v'_1 et v'_2 leurs images respectives. Soit D_1 (reps. D_2) un disque topologique de bord C_1 (resp. C_2) voisinage de e_{v_1} (reps. e_{v_2}) ne contenant que ce point d'attache d'arête. Notons $A_n := (\phi_{n,v_1}^Y)^{-1}(D_1) \cap (\phi_{n,v_2}^Y)^{-1}(D_2) \subset \mathbb{S}_n$, notons $C'_* := f_{v_*}(C_*)$ et $A'_n := f_n(A_n)$. On suppose désormais n suffisamment grand pour que A_n soit un anneau et ne contienne aucun point d'attache d'arêtes. Ainsi A'_n ne contient non plus aucun point d'attache d'arêtes. Comme les points critiques de f_n sont des points d'attache d'arêtes, A_n ne contient pas de points critiques et A'_n est aussi un anneau.

Supposons qu'il y ait un sommet v' entre v'_1 et v'_2 . Comme $\phi_{n,v'_*}^Z(C'_*) \rightarrow C'_*$, le lemme 3.2 permet de conclure que $\phi_{n,v'}^Z(A'_n)$ a pour limite $\mathbb{S}_{v'}$ privé des points d'attache des branches contenant respectivement v'_1 et v'_2 . Comme A'_n ne contient pas de points d'attache d'arête, $\mathbb{S}_{v'}$ n'a que deux points d'attache d'arêtes et donc ceci contredit la stabilité de T^Z . Ainsi F envoie deux sommets adjacents sur deux sommets adjacents. \square

En particulier nous avons vu que l'image du point d'attache de e sur v_* est le point d'attache de $F(e)$ sur v'_* qui n'est autre que $f_{v'_*}(e_{v'_*})$.

Lemme. *L'application $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$ définie par F et les f_v est un revêtement d'arbre de sphères.*

Démonstration. Soit $v'_1 := F(v_1)$ avec $v_1 \in IV^Y$. Soit $e' := \{v'_1, v'_2\}$ une arête de T^Z . Soit C'_1 (resp. C'_2) un cercle topologique bordant un disque D'_1 (resp. D'_2) contenant un seul point d'attache sur v'_1 (resp. sur v'_2) qui est celui de e' . Notons $A'_n = \phi_{n,v'_1}^Z(D'_1) \cap \phi_{n,v'_2}^Z(D'_2)$ et supposons n assez grand pour que ce soit un anneau. Soit A_n une composante connexe de $f_n^{-1}(A'_n)$. Par la formule de Riemann-Hurwitz on sait que A_n est un anneau. Notons $C_{1,n}$ et $C_{2,n}$ les pré-images de C'_1 et C'_2 bordant A_n et $D_{1,n}$ le disque bordé par $C_{1,n}$ contenant A_n . On suppose n assez grand pour que la partition de $a_n(Y)$ (resp. $a_n(Z)$) donnée par les deux composantes connexes de $\mathbb{S}_n - A_n$ (resp. $\mathbb{S}_n - A'_n$) est constante.

Soient $z_2 \in Z \cap B_{v'_1}(F(e))$ et $z_1 \in Z \cap B_{v'_2}(F(e))$. Alors $a_n(z_1)$ et $a_n(z_2)$ sont respectivement dans chacune des deux composantes connexes de $\mathbb{S}_n - A'_n$. Quitte à choisir une carte projective σ_n telle que $\sigma_n \circ a_n(z_1) = 0$ et $\sigma_n \circ a_n(z_2) = \infty$, on peut supposer que $\mathbb{S}_n = \mathbb{S}$ et que $a_n(z_1) = 0$ et $a_n(z_2) = \infty$.

Notons

$$n_0 := \text{card}\{y \in Y \cap D_{1,n} \mid f_n(y) = 0\}$$

et

$$n_\infty := \text{card}\{y \in Y \cap D_{1,n} \mid f_n(y) = \infty\}.$$

Le degré local de f_{v_1} en $i_{v_1}(e)$ est le même que celui de f_{v_1} sur $C_{1,n}$ qui est aussi celui de f_n sur $(\phi_{n,v_1}^Y)^{-1}(C_{1,n})$, c'est à dire

$$\text{deg}_{f_{v_1}}(e) = n_0 - n_\infty.$$

Notons que ces deux cardinaux ne dépendent pas du couple z_1 et z_2 choisit dans ces composantes connexes de $\mathbb{S}_n - A'_n$. De même ces cardinaux sont les mêmes si on considère D_2 à la place de D_1 car A_n ne contient pas de valeur critiques. En faisant le même raisonnement sur v_2 on a $\text{deg}_{f_{v_1}}(e) = \text{deg}_{f_{v_2}}(e)$.

En particulier si on a $n_0 \neq 0$ donc $\phi_{n,v_1}(D_{1,n})$ contient un point d'attache d'arête; ainsi toute pré-image d'un point d'attache d'une arête est le point d'attache d'une arête. Comme l'image de tout point d'attache d'arête est une arête,

$f_v : Y_v \rightarrow Z_{F(v)}$ est bien un revêtement. De plus les points critiques de f_v sont les limites des points critiques de $\phi_{n,F(v)}^Z \circ f_n \circ (\phi_{n,v}^Y)^{-1}$ donc ce sont des points d'attache d'arêtes. \square

Ceci conclut la démonstration de la proposition 5.11 car on a bien

$$\mathcal{F}_n \xrightarrow{(\phi_n^Y, \phi_n^Z)} \mathcal{F}.$$

\square

Corollaire 5.12. *La topologie donnée par \mathbf{I} est compatible avec la notion de convergence définie sur $\overline{\mathbf{Rev}}_{\mathbf{F}}$:*

$$f_n \rightarrow \mathcal{F} \text{ si et seulement si } \mathbf{I}([f_n]) \rightarrow \mathbf{I}([\mathcal{F}]).$$

Démonstration. Le sens direct est donné par le corollaire 5.8. Réciproquement si $\mathbf{I}([\mathcal{F}_n : \mathcal{A}_n^Y \rightarrow \mathcal{A}_n^Z]) \rightarrow \mathbf{I}([\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z])$ alors par la proposition 5.11, \mathcal{F}_n converge vers un revêtement d'arbres de sphères \mathcal{F}' donc $\mathbf{I}([\mathcal{F}_n]) \rightarrow \mathbf{I}([\mathcal{F}'])$. On en déduit que $\mathbf{I}([\mathcal{F}']) = \mathbf{I}([\mathcal{F}])$ et donc $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ par la proposition 5.6. \square

Proposition 5.13. *L'ensemble $\mathbf{I}(\overline{\mathbf{rev}}_{\mathbf{F}})$ est fermé, en particulier*

$$\text{Ad}(\mathbf{I}(\overline{\mathbf{rev}}_{\mathbf{F}})) \subseteq \mathbf{I}(\overline{\mathbf{rev}}_{\mathbf{F}}).$$

Démonstration. Ce résultat découle directement de la proposition 5.11 et du corollaire 5.12. \square

Proposition 5.14. *L'ensemble $\mathbf{Rev}_{\mathbf{F}}$ est dense dans $\overline{\mathbf{Rev}}_{\mathbf{F}}$. En particulier on a*

$$\mathbf{I}(\overline{\mathbf{rev}}_{\mathbf{F}}) \subseteq \text{Ad}(\mathbf{I}(\overline{\mathbf{rev}}_{\mathbf{F}})).$$

Démonstration. Soit $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$ dans $\overline{\mathbf{Rev}}_{\mathbf{F}}$. Dans toute cette démonstration on fixe des cartes projectives des sphères des sommets de \mathcal{T}^Y et \mathcal{T}^Z et on les confond avec ces derniers. Soit $1 > \varepsilon > 0$. Fixons e une arête entre deux sommets v_1, v_2 . Notons $v'_i := F(v_i)$ et $e' := F(e)$ l'arête qui est donc entre v'_1 et v'_2 .

Soit A'_1 (resp. A'_2) un anneau entre les cercles de rayon ε^2 et ε centré sur le point d'attache $e'_{v'_1}$ (resp. $e'_{v'_2}$). Soit $\phi_\varepsilon^{e'} : A'_1 \rightarrow A'_2$ un biholomorphisme qui échange les bords des deux anneaux (envoie le cercle de rayon ε^2 sur A'_1 sur celui de rayon ε sur A'_2 et inversement).

Soit A_i la pré-image de A'_i sur v_i . On suppose ε suffisamment petit pour que les A_i soient dans un voisinage des e_{v_i} qui s'envoient avec un degré égal à $\deg_{f_{v_i}}(e_{v_i})$ et que ce voisinage ne contienne qu'un seul point d'attache d'arête. Comme \mathcal{F} est

un revêtement d'arbre de sphères, on a $\deg_{f_{v_1}}(e_{v_1}) = \deg_{f_{v_2}}(e_{v_2}) =: d_e$. On choisit un des d_e biholomorphismes ϕ_ε^e qui font commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\phi_\varepsilon^e} & A_2 \\ f_{v_1} \downarrow & & \downarrow f_{v_2} \\ A'_1 & \xrightarrow{\phi_\varepsilon^{e'}} & A'_2. \end{array}$$

Comme $F : E^Y \rightarrow E^Z$ est surjective, on obtient en répétant ce procédé des familles Φ de biholomorphismes associés aux arêtes entre les sommets internes de T^Y et Φ' associés aux mêmes de T^Z . On suppose ε suffisamment petit pour que tous les anneaux définis ne se coupent pas. Pour tout sommet interne v de T^* , notons $\mathbb{S}_{\varepsilon,v}^*$ la sphère \mathbb{S}_v^* privé des disques topologiques fermés autour des points d'attaches d'arêtes reliant à des sommets internes qui sont bordés par les A_i (resp. A'_i) comme définis précédemment (mais ne contiennent pas les A_i resp. A'_i). Notons

$$\mathbb{S}_\varepsilon^Y := \bigsqcup_{\Phi} \mathbb{S}_{\varepsilon,v}^Y \text{ et } \mathbb{S}_\varepsilon^Z := \bigsqcup_{\Phi'} \mathbb{S}_{\varepsilon,v}^Z.$$

Tout élément y de Y est un sommet de T^Y qui a une unique arête donc est adjacent à un unique sommet interne v_y de T^Y . Notons e_y le point d'attache de cette arête sur v_y . On définit une famille d'injections $a_\varepsilon^Y : Y \rightarrow \mathbb{S}_\varepsilon^Y$ qui à y associe v_y .

Lemme. *Pour ε assez petit, \mathbb{S}_ε^Y munie de a^Y est une sphère marquée $\mathcal{A}_\varepsilon^Y$ et lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on a*

$$\mathcal{A}_\varepsilon^Y \rightarrow \mathcal{T}^Y.$$

Démonstration. L'ensemble formé par les sommets internes de T^Y et les arêtes les reliant est un sous-arbre T' de T^Y . Il vérifie donc $\text{card}V' = \text{card}E' + 1$ (voir par exemple [Di, Corollaire 1.5.3]). Par ailleurs la caractéristique d'Euler de \mathbb{S}_ε^Y est égale à la somme de celle des $\check{\mathbb{S}}_v^\varepsilon$ puisque celle d'un anneau est 0. Or les $\check{\mathbb{S}}_v^\varepsilon$ sont des sphères privées d'un disque pour chacune des arête de $v \in T'$. La caractéristique d'Euler de \mathbb{S}_ε^Y est donc

$$\sum (2 - \text{card}E'_v) = 2\text{card}V' - 2\text{card}E' = 2(\text{card}V' - \text{card}E') = 2.$$

Or comme \mathcal{T}^Y est connexe donc \mathbb{S}_ε^Y l'est aussi et ainsi \mathbb{S}_ε^Y est une sphère topologique. Comme Φ est une famille d'isomorphismes, \mathbb{S}_ε^Y est munie d'une structure complexe. On a donc bien montré que \mathbb{S}_ε^Y munie de a_ε^Y est une sphère marquée par Y qu'annotera $\mathcal{A}_\varepsilon^Y$.

Par ailleurs, pour tout $v \in IV^Y$, si on pose $\phi_{\varepsilon,v}$ un isomorphisme qui est défini par l'identité sur $\check{\mathbb{S}}_v^\varepsilon$, on a bien $\mathcal{A}_\varepsilon^Y \rightarrow_{\phi_\varepsilon} \mathcal{T}^Y$ puisque les $\check{\mathbb{S}}_v^\varepsilon$ tendent vers les \mathbb{S}_v . \square

On construit de la même manière une famille d'injection $a_\varepsilon^Z : Z \rightarrow \mathbb{S}_\varepsilon^Z$ puis les arbres de sphères associés $\mathcal{A}_\varepsilon^Z$ et on a $\mathcal{A}_\varepsilon^Z \rightarrow \mathcal{T}^Z$.

Lemme. *Les applications $\mathcal{F}_\varepsilon := (\mathcal{F}|_{\mathbb{S}_\varepsilon^Y} : \mathcal{A}_\varepsilon^Y \rightarrow \mathcal{A}_\varepsilon^Z)$ forment une famille de revêtements de sphères marquées (pour ε suffisamment petit) et $[\mathcal{F}_\varepsilon] \rightarrow [\mathcal{F}]$.*

Démonstration. Pour ε suffisamment petit, les $\mathbb{S}_{\varepsilon,v}^Y$ pour $v \in IV^Y$ forment un recouvrement de \mathbb{S}_ε^Y et l'application \mathcal{F}_ε restreinte à ces dernières est bien holomorphe donc f_ε est bien holomorphe. Par définition $(F_\varepsilon|_Y, \deg|_Y) = \mathbf{F}$ et donc f_ε est bien un revêtement sur les arêtes. Ainsi, pour ε suffisamment petit, \mathcal{F}_ε est un revêtement de sphères. Par ailleurs, d'après le lemme précédent on a $[\mathcal{T}_\varepsilon^Y] \rightarrow [\mathcal{T}^Y]$ donc par définition $[\mathcal{F}_\varepsilon] \rightarrow [\mathcal{F}]$. \square

On vient donc de démontrer la proposition 5.14. \square

Chapitre 6

Dynamique

Dans toute cette partie les arbres sont supposés stables, munis d'une structure projective et les revêtements holomorphes. On suppose que $X \subset Y \cap Z$.

On a $\text{Quad}_X \subset \text{Quad}_Y$. Notons $\pi_{Y,X}$ la projection naturelle $\mathbb{S}^{\text{Quad}_Y} \rightarrow \mathbb{S}^{\text{Quad}_X}$. Dans ce qui suit allons définir une application $\Pi_{Y,X}$ de l'ensemble des arbres de sphères marqués par Y vers ceux marqués par X qui passe au quotient par la relation d'isomorphisme naturel de chaque côté en une application $\Pi_{Y,X}$.

Définition 6.1. On note $\Pi_{Y,X}$ l'application qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\text{Mod}}_Y & \xrightarrow{\mathfrak{B}_Y} & \text{Quad}_Y \\ \Pi_{Y,X} \downarrow & & \downarrow \pi_{Y,X} \\ \overline{\text{Mod}}_X & \xrightarrow{\mathfrak{B}_X} & \text{Quad}_X \end{array}$$

Il découlera du lemme 6.3 que cette application est bien définie. Elle est continue et surjective (lemme 6.4). Dans cette partie nous nous intéressons aux liens entre cette application et les arbres compatibles d'une part et les systèmes dynamiques ou approximables par des suites de fractions rationnelles d'autre part.

6.1 Arbres compatibles

Soit \mathcal{T}^Y un arbre de sphères marqué par Y .

Notons \mathcal{P} l'ensemble des partitions de X associées aux sommets de Y qui séparent trois éléments de X .

Lemme 6.2. L'ensemble \mathcal{P} est un ensemble admissible de partitions.

Démonstration. 1. Par définition les sommets dont on regarde les partitions séparent trois éléments de X .

2. Soit P une partition correspondante à un sommet $v \in T^Y$ et $B \in P$. Soit $B = \{x\}$, soit $\text{card}B > 1$ et dans ce cas, la branche sur V correspondante à B contient au moins un sommet interne qui sépare deux éléments de X . Soit v' un des sommets dans cette branche les plus proche de v (au sens de la longueur de $[v, v']$). Soit e' l'arête sur v' reliant v à v' . Alors $B_{v'}(e') = (X - B)$. En effet, supposons que ce ne soit pas le cas, on trouve un élément $x \in B \cap B_{v'}(e')$. Soit alors $x_1 \in B - \{x\}$ et $x_2 \in X - B$. Le sommet défini par le triplet (x_1, x, x_2) est alors entre v et v' (car $x, x_2 \in B_{v'}(e')$ et $x, x_1 \in B$) ce qui contredit la minimalité de v' .

3. Supposons par l'absurde que l'on ait v_1 et v_2 deux sommets de T^Y dont les partitions de X associées sont P_1 et P_2 et telles que $P_1 \cap P_2 \ni B (\neq \emptyset)$. Soit B_1 (resp. B_2) la branche de v_1 (resp. v_2) correspondante à B . Comme $B \in B_1 \cap B_2$ on a $v_1 \in B_2$ (ou $v_1 \in B_2$ qui se traite de façon symétrique). Soit e_1 l'arête sur v_1 le reliant à v_2 . Comme v_1 sépare trois éléments de X , on trouve $x \in X - (B \cup B_{v_1}(e_1))$ ce qui est absurde car $x \notin B_{v_1}(e_1)$ donc $x \in B_2 \in X = B$. \square

D'après le corollaire 4.5, l'ensemble \mathcal{P} détermine une unique classe d'isomorphisme d'arbres combinatoires $[T^X]$. Pour tout $t \in \text{Trip}_X$, on note v_t le sommet défini par t dans T^Y . Notons \mathcal{T}^X l'arbre de sphères dont l'arbre combinatoire est le représentant de $[T^X]$ dont chaque sommet interne associée à un triplet t est v_t et l'application associée à chaque sommet interne v défini par un triplet t est $a_v := a_{v_t}|_X$. On note $\Pi_{Y,X}(\mathcal{T}^Y) := \mathcal{T}^X$.

Lemme 6.3. *L'application $\Pi_{Y,X}$ est le quotient de l'application $\Pi_{Y,X}$ par la relation d'équivalence d'isomorphismes entre arbres de sphères marqués.*

Démonstration. En effet, si $\mathcal{T}_1^Y \sim_{\mathcal{M}} \mathcal{T}_2^Y$ alors on a $\Pi(\mathcal{T}_1^Y) \sim_{\mathcal{M}} \Pi(\mathcal{T}_2^Y)$. La formule découle directement de la définition de $\Pi_{Y,X}$ et comme $\pi_{Y,X}$ est continue on en déduit directement que l'application est continue. Par ailleurs, $\Pi_{Y,X}$ agit sur les sphères marquées simplement en restreignant l'application de marquage donc c'est bien l'application définie auparavant. \square

Lemme 6.4. *L'application $\Pi_{Y,X}$ est surjective.*

Démonstration. D'après le lemme précédent il suffit d'exhiber pour tout arbre de sphère \mathcal{T}^X marqué par X un arbre de sphère \mathcal{T}^Y tel que $\mathcal{T}^X = \Pi_{Y,X}(\mathcal{T}^Y)$. Le cas $Y = X$ est trivial. Supposons que $x \in X$ soit adjacent à un sommet interne v . Soit $v_0 \notin V^X$ et a_0 une application de Y dans une sphère \mathbb{S}_{v_0} telle que la partition associée soit $\{\{x\}, \{X - \{x\}\}\} \cup (Y - X)$, on définit alors l'arbre \mathcal{T}^Y par

- $V^Y = Y \cup V^X \cup \{v_0\}$;
- $E^Y = E^X \cup \{\{x, v_0\}, \{v_0, v\}\} \cup \{\{v_0, y\}, y \in Y - X\}$;
- si $w \in IV^X - \{v\}$ et $y \in Y - X$, $a_w(y) = a_w(x)$;
- $a_{v_0} = a_0$.

On vérifie alors aisément que l'on a bien un arbre de sphères stable tel que $\mathcal{T}^X = \Pi_{Y,X}(\mathcal{T}^Y)$. \square

Rappelons la définition d'arbres de sphères compatibles :

Définition 6.5. *Un arbre de sphères \mathcal{T}^X est compatible avec un arbre de sphères \mathcal{T}^Y si*

- \mathcal{T}^X est compatible avec \mathcal{T}^Y ,
- pour tout sommet interne v de \mathcal{T}^X , on a
 - $\mathcal{S}_v^X = \mathcal{S}_v^Y$ ($\mathbb{S}_v^X = \mathbb{S}_v^Y$ si projectives) et
 - $a_v^X = a_v^Y|_X$.

Lemme 6.6. \mathcal{T}^X est compatible avec \mathcal{T}^Y si et seulement si

$$\mathcal{T}^X = \Pi_{X,Y}(\mathcal{T}^Y).$$

Démonstration. Supposons que \mathcal{T}^X est compatible avec \mathcal{T}^Y . Alors Tout $t \in \text{Trip}_X$ définit un unique sommet v_t de $\Pi_{Y,X}(\mathcal{T}^X)$ et un unique sommet v'_t de \mathcal{T}^X . On a \mathcal{T}^X est compatible pour $(\mathcal{T}^Y, \mathcal{T}^Z)$ si et seulement si $\forall t \in \text{Trip}_X, a_{v'_t}^X = a_{v'_t}^Y|_X = a_{v_t}$ si et seulement si $\mathcal{T}^X = \Pi_{X,Y}(\mathcal{T}^Y)$.

Réciproquement, si $\mathcal{T}^X = \Pi_{X,Y}(\mathcal{T}^Y)$, les sommets de \mathcal{T}^X sont bien des sommets de \mathcal{T}^Y et par construction on a bien $a_v^X = a_v^Y|_X$ pour tout $v \in IV^X$. \square

Lemme 6.7. Si $\Pi_{Y,X}([\mathcal{T}^Y]) = [\mathcal{T}^X]$ alors, il existe $\tilde{\mathcal{T}}^Y \in [\mathcal{T}^Y]$ tel que

$$\Pi_{Y,X}(\tilde{\mathcal{T}}^Y) = \mathcal{T}^X.$$

Démonstration. La classe d'arbre combinatoire de $\tilde{\mathcal{T}}^Y$ est celle de $[\mathcal{T}^Y]$. Pour tout $t \in \text{Trip}_X$, notons v^Y le sommet défini par t dans \mathcal{T}^Y et v^X celui dans \mathcal{T}^X . Soit $\phi_t : \mathbb{S}_{v^Y} \rightarrow \mathbb{S}_{v^X}$ un isomorphisme quelconque. On pose le sommet défini par t dans $\tilde{\mathcal{T}}^Y$ égal à v^X et on le munit de $\phi_t \circ a_{v^Y}$. Pour tout autre sommet, définit par un triplet $t' \in \text{Trip}_Y$, on prend le sommet défini par le même triplet dans \mathcal{T}^Y que l'on munit du même marquage. On vérifie alors aisément que $\Pi_{Y,X}(\tilde{\mathcal{T}}^Y) = \mathcal{T}^X$. \square

6.2 Compactification de $\text{rat}_{\mathbf{F},X}$

Définition 6.8 (Systèmes dynamiques conjugués). *Deux systèmes dynamiques d'arbres de sphères $(\mathcal{F}^1, \mathcal{T}_1^X)$ et $(\mathcal{F}^2, \mathcal{T}_2^X)$ sont conjugués si : $\mathcal{F}^1 \sim_{(\mathcal{M}^Y, \mathcal{M}^Z)} \mathcal{F}^2$ et*

$$\forall v \in IV^X, m_v^Y = m_v^Z.$$

Notation. On notera $\mathbf{Rev}_{\mathbf{F},X}$ l'ensemble des systèmes dynamiques de sphères marqués par \mathbf{F} et $\overline{\mathbf{Rev}}_{\mathbf{F},X}$ l'ensemble des systèmes dynamiques d'arbres de sphères de portrait \mathbf{F} . On notera $\mathbf{rev}_{\mathbf{F},X}$ et $\overline{\mathbf{rev}}_{\mathbf{F},X}$ leurs classes de conjugaisons respectives.

Remarque 6.9. L'ensemble $\text{rat}_{\mathbf{F},X}$ s'identifie naturellement à $\text{rev}_{\mathbf{F},X}$.

Proposition 6.10. *L'espace $\overline{\text{rev}}_{\mathbf{F},X}$ est compact.*

Démonstration. En effet, l'espace $\overline{\text{rev}}_{\mathbf{F},X}$ est un fermé dans $\overline{\text{rev}}_{\mathbf{F}}$ puisque l'on a

$$\overline{\text{rev}}_{\mathbf{F},X} = \overline{\text{rev}}_{\mathbf{F}} \cap \Pi_{Y,X}^{-1}(\overline{\text{Mod}}(X)).$$

□

Lemme 6.11. *Si $[\mathcal{T}^X]$ est compatible avec $[\mathcal{T}^Y]$ et $[\mathcal{T}^Z]$, alors on trouve $\tilde{\mathcal{T}}^Y \in [\mathcal{T}^Y]$ et $\tilde{\mathcal{T}}^Z \in [\mathcal{T}^Z]$ tels que \mathcal{T}^X est compatible avec $\tilde{\mathcal{T}}^Y$ et $\tilde{\mathcal{T}}^Z$.*

Démonstration. En effet d'après le lemme 6.7, il existe $\tilde{\mathcal{T}}^Y \in [\mathcal{T}^Y]$ tel que $\Pi_{Y,X}(\tilde{\mathcal{T}}^Y) = \mathcal{T}^X$ et il existe $\tilde{\mathcal{T}}^Z \in [\mathcal{T}^Z]$ tel que $\Pi_{Y,X}(\tilde{\mathcal{T}}^Z) = \mathcal{T}^X$. □

Plus précisément, on définit :

Définition 6.12 (Converge compatible). *On dit que que $(\mathcal{T}_n^Y)_n$ converge compatiblement vers $(\mathcal{T}^X, \mathcal{T}^Y)$ si :*

- $\mathcal{T}^X = \Pi_{Y,X}(\mathcal{T}^Y)$;
- $\mathcal{T}_n^Y \rightarrow_{\phi_n^Y} \mathcal{T}^Y$ et $\Pi_{Y,X}(\mathcal{T}_n^Y) \rightarrow_{\phi_n^X} \mathcal{T}^X$ avec
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall v \in IV^X, \phi_{n,v}^X = \phi_{n,v}^Y$.

On note alors

$$\mathcal{T}_n^Y \xrightarrow[\phi_n^Y]{\prec} \mathcal{T}^X.$$

Remarque 6.13. En particulier, si $\mathcal{T}_n^Y \rightarrow \mathcal{T}^Y$, on a $\mathcal{T}_n^Y \xrightarrow{\prec} \Pi_{Y,X}(\mathcal{T}^Y)$.

Définition 6.14 (Convergence dynamique). *Soit $(\mathcal{F}_n : \mathcal{T}_n^Y \rightarrow \mathcal{T}_n^Z)_n$ une suite de revêtements de sphères. La suite $(\mathcal{F}_n, \mathcal{T}_n^X)_n$ converge dynamiquement vers*

$(\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z, \mathcal{T}^X)$ si

- les $(\mathcal{F}_n, \mathcal{T}_n^X)_n$ sont des systèmes dynamiques ;
- $\mathcal{T}_n^Y \xrightarrow[\phi_n^Y]{\prec} \mathcal{T}^Z$ et $\mathcal{T}_n^Y \xrightarrow[\phi_n^Z]{\prec} \mathcal{T}^Z$;
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \text{Trip}_X, \phi_{n,t}^Y = \phi_{n,t}^Z$;
- $\mathcal{F}_n \xrightarrow{(\phi_n^Y, \phi_n^Z)} \mathcal{F}$.

Notons qu'alors $(\mathcal{F}, \mathcal{T}^X)$ est aussi un système dynamique. On notera alors

$$(\mathcal{F}_n, \mathcal{T}_n^X) \xrightarrow[\phi_n]{\prec} (\mathcal{F}, \mathcal{T}^X).$$

Proposition 6.15. *Si $(\mathcal{F}_n, \mathcal{T}_n)$ est une suite de systèmes dynamiques qui converge vers un système dynamique $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$, alors elle converge aussi dynamiquement vers ce dernier.*

Démonstration. Supposons que Si $(\mathcal{F}_n, \mathcal{T}_n^X)_n$ est une suite de systèmes dynamiques qui converge vers un système dynamique $(\mathcal{F}, \mathcal{T}^X)$:

$$\mathcal{F}_n \xrightarrow{(\phi_n^Y, \phi_n^Z)} \mathcal{F}.$$

Pour tout $t \in \text{Trip}_X$, on pose $\tilde{\phi}_{n,t}^Y = \phi_{n,t}^X$ et $\tilde{\phi}_{n,t}^Z = \phi_{n,t}^X$ (voir notations suivant la remarque 4.20). Ensuite, pour tout triplet $t \in \text{Trip}_Y - \text{Trip}_X$, on pose $\tilde{\phi}_{n,t}^Y = \phi_{n,t}^Y$ et pour $t \in \text{Trip}_Z - \text{Trip}_X$, on pose $\tilde{\phi}_{n,t}^Z = \phi_{n,t}^Z$.

Pour tout $t \in \text{Trip}_X$, on pose $(\tilde{\phi}_{n,t}^Y)^{-1} \circ \tilde{\phi}_{n,t}^Y$ tend vers l'identité de \mathbb{S}_t car converge vers l'identité sur les trois éléments de t . On a donc bien

$$(\mathcal{F}_n, \mathcal{T}_n^X) \xrightarrow{\tilde{\phi}_n} (\mathcal{F}, \mathcal{T}^X).$$

□

Corollaire 6.16 (Représentants compatibles). *Si $([\mathcal{F}_n])_n$ est une suite convergente dans $\overline{\text{rev}}_{\mathbf{F}, X}$, si $([\mathcal{T}_n])_n$ est une suite convergente dans $\overline{\text{Mod}}_X$ et les $(\mathcal{F}_n, \mathcal{T}_n)$ sont des systèmes dynamiques, alors on peut trouver $(\mathcal{F}, \mathcal{T}) \in \overline{\text{Rev}}_{\mathbf{F}, X} \times \overline{\text{Mod}}_X$ tels que $(\mathcal{F}_n, \mathcal{T}_n^X)_n$ converge dynamiquement vers $(\mathcal{F}, \mathcal{T}^X)$.*

Application 6.17. *Toute suite d'éléments de $\text{rat}_{\mathbf{F}}$ convergente dans $\overline{\text{rev}}_{\mathbf{F}}$ converge dans $\overline{\text{rev}}_{\mathbf{F}, X}$ et même converge dynamiquement.*

Proposition 6.18. *On a les inclusions suivantes :*

$$\text{Ad}(\text{rat}_{\mathbf{F}, X}) = \text{Ad}(\text{rev}_{\mathbf{F}, X}) \subsetneq \overline{\text{rev}}_{\mathbf{F}, X} \subsetneq \overline{\text{rev}}_{\mathbf{F}}.$$

Démonstration. D'après l'application 6.17, il suffit d'exhiber un élément de $\overline{\text{Rev}}_{\mathbf{F}, X}$ ne vérifiant pas les conclusions du lemme 3.12. On a un tel exemple dans la figure 3.4. □

Remarque 6.19. Si un système dynamique d'arbres de sphères marqués (dans $\overline{\text{rev}}_{\mathbf{F}, X}$) vérifie les deux lemmes des anneaux et le lemme des branches, il est possible penser qu'il est dans l'adhérence de $\text{rat}_{\mathbf{F}}$ mais ceci reste une question ouverte.

Chapitre 7

Liens et applications

7.1 Limites renormalisées

Lorsqu'un système dynamique (holomorphe) d'arbres de sphères possède un cycle de sphères critique de période k , on obtient pour tout sommet v du cycle un revêtement $f^{(k)}$ de la sphère \mathbb{S}_v dans elle-même en composant les revêtements le long du cycle. Si ce revêtement d'arbre de sphères est approximable par une suite de fractions rationnelles $(f_n)_n$ dynamiquement marquées (ie limite de systèmes dynamiques de sphères dynamiquement marquées), d'après le lemme 3.4 on conclut que $f^{(k)}$ est une limite renormalisée de $(f_n)_n$.

Inversement, si l'on a une limite renormalisée pour une suite de fractions rationnelles $(f_n)_n$ marquées par un portrait \mathbf{F} , alors cette limite possède une infinité de cycles de points répulsifs donc au moins deux qui évitent les points marqués. En perturbant cette limite renormalisée on peut suivre ce cycle. Ainsi pour n assez grand les f_n ont un tel cycle et on peut le marquer. Quitte à en ignorer les premiers termes, la suite de fractions rationnelles avec ce cycle dynamiquement marqué converge vers un système dynamique d'arbre de sphères qui contient un cycle critique. Le nouveau système dynamique d'arbre de sphères limite fait ainsi apparaître la limite renormalisée observée en premier lieu.

Question 7.1. *Comment savoir quels points marquer pour faire apparaître des cycles de sphères critiques ?*

Notons qu'en général ce n'est pas une question simple. Par exemple nous avons vu que dans le cas du degré 2, le cycle critique semble pouvoir avoir n'importe quelle période (ce que les travaux d'Epstein-Petersen développés dans la partie 7.3 confirment et que l'on peut aussi déduire de [D2]) donc on ne peut être sûr de faire apparaître à coup sûr tous les cycles critiques simplement en connaissant le degré des fractions de notre suite.

7.2 Exemple à partir de la remarque de Milnor

Dans cette partie nous nous proposons de comprendre sur un exemple comment effectuer un calcul de limites renormalisées dans le cas du degré 2. Le théorème 3.15 permet de savoir en effet comment les trouver mais ne permet pas de prouver leur existence.

Dans [M1] J. Milnor remarque que l'on a une relation surprenante : l'ensemble des fractions rationnelles de degré 2 ayant un cycle de période 2 et de multiplicateur -3 (noté $Per_2(-3)$) possède toujours un cycle de période 3 et de multiplicateur 1 (noté $Per_3(1)$).

Lors d'une session MRC programme en Juin 2013 organisée à Snowbird, Laura De Marco et Jan-Li Lin à Snowbird se sont intéressés à cette décomposition et ont étudié la famille $Per_2(-3)$. Pour cette dernière, on a une paramétrisation (non injective) par :

$$f_a := \frac{(1 + 3a)(-a + z)}{(1 - a)(3az + z^2)}$$

dont le cycle de période 2 et de multiplicateur -3 est $\{0, \infty\}$. Cette paramétrisation n'est pas injective. Lorsque $a \rightarrow 1$, la famille f_a diverge et $[f_a]$ diverge dans rat_2 .

Dans ce cas nous avons trouvé deux limites renormalisées et la connaissance de la dynamique limite nous donne les re-normalisations à regarder.

Comme on a un cycle persistant de période 2 qui converge lorsque $a \rightarrow 1$, on sait que pour une certaine normalisation le second itéré de f_a converge vers une fraction rationnelle quadratique avec un point fixe parabolique et qui sépare les points critiques. Comme les points critiques de f_a sont $-a$ et $3a$ qui convergent donc vers des limites différentes, nous sommes dans cette normalisation. Par calcul on vérifie que l'on a

$$f_a^2 \rightarrow f_1^2 := z(3 + z)/(z - 1) \text{ quand } a \rightarrow 1 \quad (\text{cf figure 7.1}).$$

L'infini est bien un point fixe parabolique pour f_1^2 . On peut également vérifier que la sphère fixe est bien dans la branche accrochée en l'infini (deux des points fixes de f_a convergent vers l'infini). Le troisième point fixe est constant et égal à 1 qui est la seconde pré-image de l'infini pour f_1^2 . Par ailleurs on remarque que -1 est un point critique de f_1^2 et que $f_1^2(-1) = 1$ donc -1 est préfixe (et donc l'autre point critique 3 est dans le bassin parabolique de l'infini). Il n'y a donc pas de contradiction à l'existence d'une seconde limite renormalisée. La remarque de J.Milnor suggère de regarder s'il n'y a pas une limite renormalisée d'ordre 3 marquée par un cycle de période 3. On serait alors dans la situation de la figure 7.2.

On sait qu'une telle sphère serait marquée par le point critique qui tend vers 1 et un élément de cette orbite. On cherche donc un point de période 3 pour f_a qui

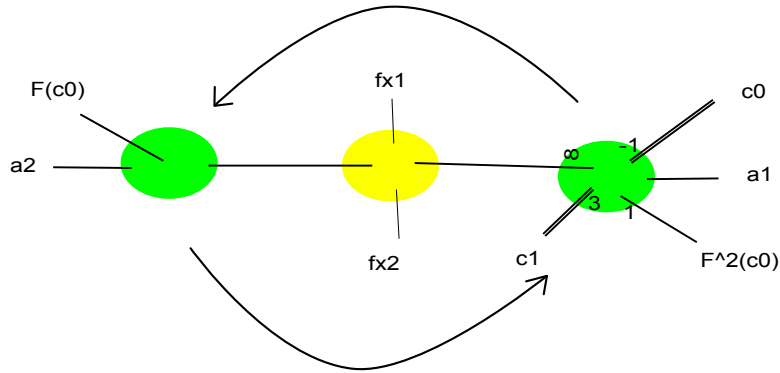


FIGURE 7.1 – La sphère jaune est fixe et le revêtement associé est $-Id$. Les sphères vertes ont période 2 et portent un cycle de période 2 ($a1 \rightarrow a2 \rightarrow a1$) de multiplicateur -3 . Sur la sphère verte de droite la limite renormalisée a un point fixe parabolique en l'infini.

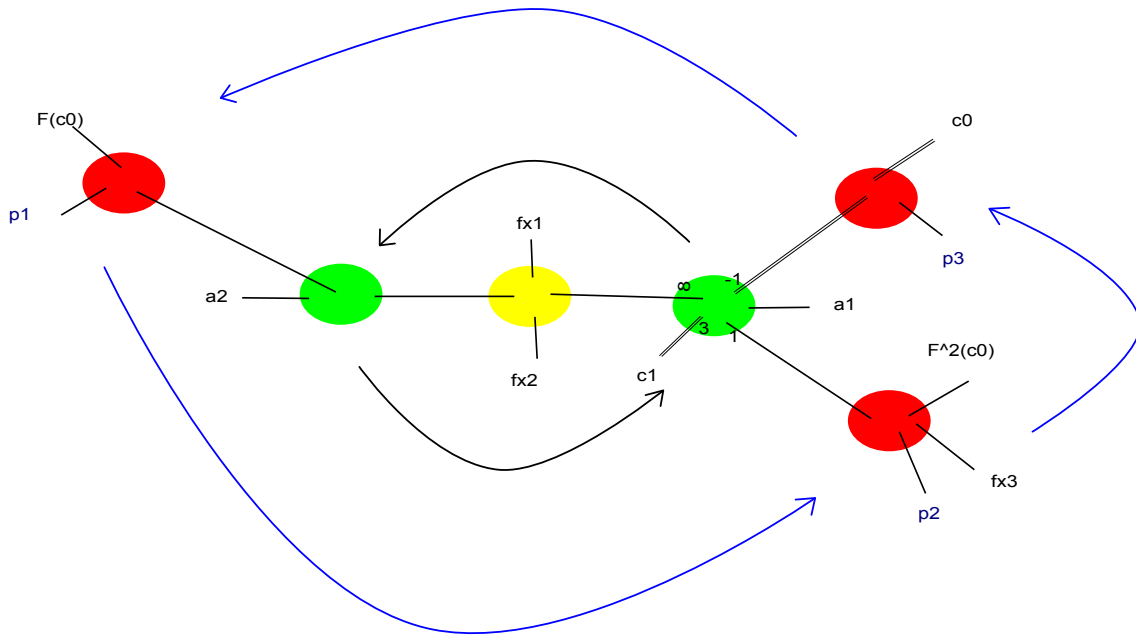


FIGURE 7.2 – La sphère jaune est fixe et le revêtement associé est $-Id$. Les sphères vertes ont période 2 et portent un cycle de période 2 ($a1 \rightarrow a2 \rightarrow a1$) de multiplicateur -3 . Sur la sphère verte de droite la limite renormalisée a un point fixe parabolique en l'infini, $c1$ est dans son bassin direct et $c0$ est envoyé après deux itérés sur l'infini. Les sphères rouges forment un cycle de période 3 et portent un cycle de période 3 et de multiplicateur 1 ($p1 \rightarrow p2 \rightarrow p3 \rightarrow p1$). La limite renormalisée associée à la sphère en haut à droite est un polynôme quadratique.

tend vers -1 et après calcul on se rend compte qu'il y en a bien un (et un seul). Notons $p3_a$ ce point.

On choisit la transformation de Moebius M_a telle que

$$M_a(3a) = \infty, M_a(-a) = 0 \text{ et } M_a(p3_a) = 1,$$

c'est-à-dire :

$$M_a(z) = \frac{z + a}{z - 3a} \cdot \frac{p3_a - 3a}{p3_a + a}.$$

Ainsi si une telle limite renormalisée existait, la branche contenant un des points critiques serait à l'infini et fixe et l'autre serait en 0, donc on obtiendrait un polynôme quadratique de la forme $z^2 + C$ avec $c \in \mathbb{C}$. Après calcul on trouve :

$$\lim_{a \rightarrow 1} M_a \circ f_a^3 \circ M_a^{-1}(z) = z^2 + 1/4.$$

7.3 Exemple d'Epstein-Petersen

Ce qui suit est inspiré d'un travail en cours d'A. Epstein et C.L. Petersen ([EP]) où l'on trouvera toutes les démonstrations manquantes.

Fixons un polynôme quadratique dans le membre p/q avec $p < q$ avec le point critique c_0 périodique. Alors le point critique "libre" ne s'échappe pas. La dynamique du polynôme dans le bassin de l'infini est donc conjuguée à celle de l'application $z \rightarrow z^2$ sur disque unité. On peut alors bouger continûment dans $Per_i(e^{i\pi p/q}) \subset Rat_2$ de façon à changer le multiplicateur ρ du point fixe initialement à l'infini pour lui faire parcourir $I := [0, e^{i\pi p/q}[$ et on obtient un chemin $(P_\rho)_{\rho \in I}$ dans Rat_2 . Lorsque $\rho \rightarrow e^{i\pi p/q}$ on a P_ρ diverge dans Rat_2 et même $[P_\rho]$ diverge dans rat_2 d'après [P] (heuristiquement, on aurait sinon une fraction rationnelle qui serait l'accouplement de deux polynômes du même membre de l'ensemble de Mandelbrot, cf [M2] pour un bon résumé sur les accouplements).

Il semble qu'il y ait alors une seconde limite renormalisée qui est un polynôme quadratique correspondant à celui auquel s'identifie le paramètre si et seulement si l'on se trouve dans une copie primitive du Mandelbrot(cf figure 7.3).

7.4 Compactification de Milnor

Le point de vue de J. Milnor. Dans [M1], J. Milnor propose la paramétrisation des fractions rationnelles de degré 2 par les multiplicateurs en deux des points fixes. Il est donc tout naturel de se demander si notre compactification est différente. Nous rappelons ici un calcul de ce papier qui est aussi à la base de [E].

Pour cela nous commençons par rappeler la paramétrisation de J. Milnor.

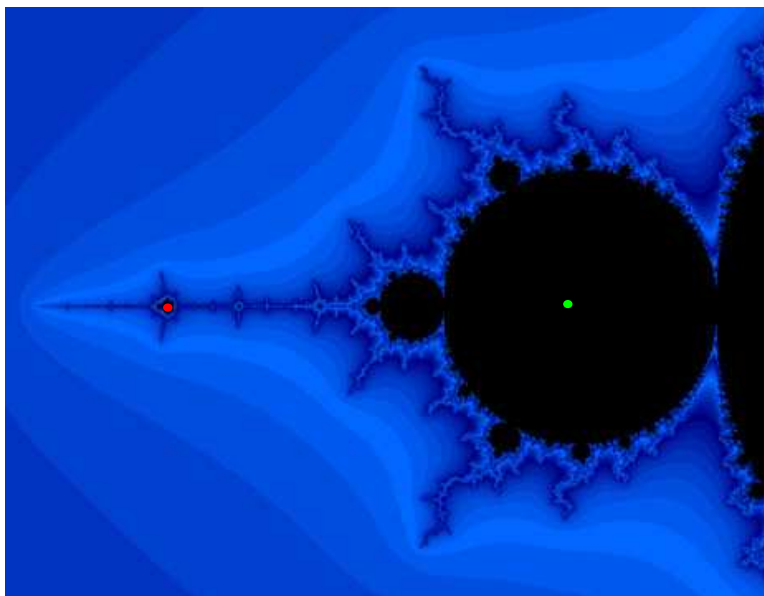


FIGURE 7.3 – Après avoir appliqué la méthode de Epstein-Petersen, le paramètre en vert donne l'arbre \mathcal{T}^X similaire à celui de la figure 7.1 et celui en rouge à la figure 7.2.

Toute fraction rationnelle f de degré 2 possédant trois points fixes a, b, c distincts, quitte à conjuguer par une transformation de Moebius, est de la forme

$$f(z) = z \frac{z + \alpha}{\beta z + 1} \text{ avec } \alpha\beta \neq 1,$$

où α, β, γ sont les multiplicateurs respectifs de $a = 0, b = \infty, c$.

Ainsi si une suite de fractions rationnelles $(f_n)_n$ de degré 2 diverge, on a l'un des multiplicateurs qui diverge. Supposons par exemple que $\gamma_n \rightarrow \infty$.

La formule des indices assure que

$$\frac{1}{1 - \alpha_n} + \frac{1}{1 - \beta_n} + \frac{1}{1 - \gamma_n} = 1 \text{ et donc } \alpha_n \beta_n \rightarrow 1.$$

Supposons que $\beta_n \rightarrow \beta_\infty \in \mathbb{C}^*$. Alors $f_n \rightarrow (\beta_\infty \cdot Id)$ localement uniformément en dehors d'un point qui est la limite des points critiques des f_n .

Notre point de vue.

Considérons une fraction rationnelle f de degré 2 ayant 3 points fixes distincts α, β, γ et non super-attractif. On définit $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Par la formule de Riemann-Hurwitz on sait que f a exactement deux points critiques que nous noterons c et c' et donc deux valeurs critiques v l'image de c et v' l'image de c' . On pose $Z := X \cup \{v, v'\}$ et $Y := f^{-1}(Z)$. On définit $\mathbf{F} := (f|_Y, deg_f|_Y)$ le portrait correspondant.

Considérons l'ensemble des fractions rationnelles de degré 2 ayant 3 points fixes distincts et non super-attractif. On peut donc définir des injections x, y et z telles que toutes ces fractions rationnelles sont marquées par (f, y, z) et telles que l'on ait $y|_X = z|_X$. Toutes ces fractions rationnelles ont alors \mathbf{F} pour portrait. Ainsi cet ensemble est $\overline{\mathbf{rat}}_{\mathbf{F}}$ et donc inclus dans $\overline{\mathbf{rat}}_{\mathbf{F}, X}$.

On peut maintenant s'intéresser à ce qui peut apparaître dans $\overline{\mathbf{rat}}_{\mathbf{F}, X}$. On prend $\mathcal{F} \in \overline{\mathbf{rat}}_{\mathbf{F}, X}$. L'application \mathcal{F} est de degré 2. D'après le lemme 1.25, et le corollaire 1.27, \mathcal{F} n'a que deux feuilles critiques c et c' et les sommets critiques sont ceux sur le chemin les reliant. Sur la figure 3.5 sont représentés les différentes applications d'arbres combinatoires possibles pour un tel \mathcal{F} (quitte à changer le nom des feuilles fixes, des feuilles critiques ou leurs images). En bleu clair est représenté le sommet w_0 séparant les trois feuilles critiques.

Le sommet w_0 est entouré de jaune quand il est critique, c'est-à-dire dans les configurations **B**, **Pol** et **Triv**. D'après le corollaire 3.6, les revêtements convergent dans rat_2 . Dans les cas **Pol** et **Triv**, on reconnaît les limites qui sont respectivement des classes de polynômes et de fractions rationnelles qui n'ont pas de points fixes super-attractifs ni de points paraboliques. Dans le cas **B**, on reconnaît la classe des polynômes ayant un point fixe super-attractif, c'est à dire celle de $z \rightarrow z^2$.

Le sommet w_0 est non fixe pour les configurations **A1, C1** et **W** donc il n'y a pas de limites renormalisées.

Notons v_0 le sommet critique le plus proche de w_0 .

Dans les configurations **C2** et **Parb**, le sommet v_0 et son image sont sur le chemin $[w_0, \alpha]$, on est en mesure d'appliquer le lemme anneau non critique et l'on en conclut que v_0 est fixe, ainsi on est dans l'adhérence de rat_2 . Dans le cas **C2** on remarque que le point critique qui est le point d'attache de la branche de c' sur v_0 est fixe et il est la limite d'un point fixe donc nous sommes dans le cas de la classe des polynômes et il y a de plus un point fixe double donc ce polynôme est conjugué à $z \rightarrow z^2 + 1/4$. Dans le cas **Parb** il y a aussi un point fixe double et un troisième point fixe non critique distinct de ce dernier donc on est dans la classe des fractions rationnelles paraboliques sans point fixe super-attractif.

Dans les cas **A2**, **A3** et **DParb**, le sommet w_0 est fixe et le revêtement associé est l'identité puisqu'il fixe les points d'attache des branches contenant les points fixes. S'il y a un cycle critique, alors c'est v_0 et d'après le théorème 3.15, il est de période 1 donc d'après le corollaire 3.6, les revêtements convergent dans rat_2 . On voit que si on est dans l'adhérence de rat_2 alors la limite est une classe de revêtements non polynomiaux ayant un point fixe triple dans les cas **A2** et **DParb** et double dans le cas **A3**.

Dans la configuration **Stand**, le revêtement associé à w_0 n'est pas l'identité car le point d'attache de la branche contenant α n'est pas envoyé sur lui-même. On en déduit alors que le sommet v_0 n'est pas fixe.

Question 7.2. *Peut-on montrer qu'effectivement le sommet v_0 est bien fixe dans les cas A2, A3 et DParb ?*

Si c'est le cas, notre compactification contient tous les éléments de la compactification de J.Milnor de $\text{rat}_2 \subset \mathbb{C}P^2$ avec en plus un éclatement aux point correspondant à la fraction rationnelle ayant un point fixe triple.

7.5 Exemples de J. Kiwi

Dans [K3] au chapitre 2, sont énumérés plusieurs exemples de familles pour lesquelles on a des limites renormalisées.

Polynômes de degré 3.

L'ensemble des polynômes de degré 3 ayant un point critique de période exactement 3 noté $Per_3(0)$ peut être paramètre par

$$F_c(w) := \alpha(c)w^3 + \beta(c)w^2 + 1$$

avec $\alpha(c) := \frac{c^3+2c^2+c+1}{c(c+1)^2}$ et $\beta(c) := c - \alpha(c)$ et $c \neq 0, \infty$.

Supposons que l'on marque l'orbite périodique critique et les racines de la composante hyperbolique de ce cycle (qui forme lui aussi un cycle de période 3). Lorsque l'on fait tendre c vers 0 et l'infini, on voit apparaître six différents revêtements d'arbres de sphères qui sont les centres des six composantes hyperboliques de $Per_3(0)$ pour lesquelles l'un des points critiques libres est dans le bassin de l'infini. Tous ont un cycle de sphères critique de période trois et de degré 2 : pour trois d'entre eux c'est $z \rightarrow z^2$ et les trois autres sont les trois polynômes quadratiques ayant un point critique de période 3. Notons que dans ces composantes hyperboliques de $Per_3(0)$, les polynômes sont quadratique-like et que la dynamique sur leur Julia est quasi-conformément conjuguée à la dynamique sur la limite renormalisée correspondante.

C'est un cas particulier de ce qui est discuté dans la partie 7.6.2 et en 7.7.1.

Exemple de fractions rationnelles quadratiques.

Pour tout $a \in \mathbb{C}$, on se donne les familles

$$f_{a,t}(z) := t - \frac{1+t^2}{z} + \frac{t}{z^2} - at^5, t \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Lorsque $t \rightarrow 0$, si l'on marque les trois points fixes, on obtient un revêtement de sphères qui possède une sphère fixe pour laquelle on a une rotation d'ordre 2. Si l'on marque alors les points critiques et les valeurs critiques, on obtient alors un cycle critique de sphères de période 2 conformément au théorème 3.15 qui est conjuguée à

$$g(z) := \frac{z^2 + z - 1}{z - 1},$$

qui a bien un point fixe parabolique (à l'infini). De plus si l'on marque un cycle de période 3, on obtient un autre cycle de sphères critique de période 3 qui est conjuguée à $z \rightarrow z^2 + a$. On obtient donc une dynamique très similaire à celle de la figure 7.2.

7.6 Limites renormalisées et espaces de Berkovich

7.6.1 Sur les espaces de Berkovich

Historique.

L'utilisation des espaces de Berkovich en dynamique peut être perçue pour la première fois dans la thèse de J.Rivera-Letelier (voire [R]). Néanmoins il y est plutôt question de dynamique sur des boules. À peu près en même temps on trouve les travaux de R.L.Benedeto sur de la dynamique p -adique mais qui n'utilisent pas vraiment les espaces de Berkovich. On a ensuite les travaux de M.Baker et R.Rumely ([BR]) d'une part et ceux de J.Rivera-Letelier et Charles Favre ([FR]) d'autre part puis une succession de nombreux autres travaux faisant apparaître une ouverture sur l'arithmétique ou bien sur l'étude de familles analytiques. Sans trop m'attarder sur les travaux de J. Kiwi que je vais plus développer dans ce qui suit, je citerai par exemple trois papiers récents de ma connaissance parmi d'autres qui me paraissent d'un grand intérêt et permettent d'illustrer l'interaction entre la dynamique holomorphe et les espaces de Berkovich : [BD], [DF] et [FG].

Idée globale.

Tout ce qui va suivre est en grosse partie une re-formulation grossière de [K3] et est fortement inspiré des nombreux exposés de Charles Favre que j'ai pu suivre et de discussions avec J. Kiwi. Très peu de preuves seront données car le lecteur est très fortement incité à jeter un coup d'oeil à cette référence.

Soit $(f_t)_{t \in D(0,1) \subset \mathbb{C}}$, une famille holomorphe de fractions rationnelles telles que

- $f_t \in \text{Rat}_d$ si $t \neq 0$
- $f_0 \notin \text{Rat}_d$.

L'idée de départ est de considérer que l'on a une seule fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}[[t]]$. On considère $\mathbb{C}[[t]]$ comme un sous-ensemble d'un corps muni d'une norme non-archimédienne. On considère ensuite que cette fraction rationnelle induit une dynamique sur l'espace des semi-normes multiplicatives appelé l'espace de Berkovich. Nous allons définir ceci plus précisément.

Pour d'autres références sur ce thème, le lecteur peut se référer à [J], [K3], [K1] et [BR] et pour des notions plus globales [FJ].

Corps non-archimédien.

Le corps que nous considérons ici est \mathbb{L} , le complété de $\mathbb{C}\langle\langle t \rangle\rangle$ (la clôture algébrique du corps des séries de Puiseux formelles). Il est muni d'une norme qui correspond à l'ordre d'annulation en 0 : si $z = \sum_{j \geq j_0} c_j t^{j/m} \in \mathbb{L} - \{0\}$ (avec $c_j \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}, j_0 \in \mathbb{Z}$), alors on définit la norme de z comme :

$$|z|_{\mathbb{L}} := \exp(-\min\{j/m \mid c_j \neq 0\}).$$

Notons que $|z|$ s'annule ou prend ses valeurs dans $e^{\mathbb{Q}}$.

C'est une norme non-archimédienne (ou ultramétrique) c'est-à-dire :

- $|\cdot|_{\mathbb{L}}$ est une norme
- $\forall a, b \in \mathbb{L}, |a + b|_{\mathbb{L}} \leq \max(|a|_{\mathbb{L}}, |b|_{\mathbb{L}})$.

On note $\mathbb{P}_{\mathbb{L}}^1$ l'espace projectif défini sur le corps \mathbb{L} .

Droite projective de Berkovich.

On appelle semi-norme multiplicative sur $\mathbb{L}[X]$, une fonction sur $|\cdot|_x : \mathbb{L}[X] \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

1. $|0|_x = 0$;
2. $|1|_x = 1$;
3. $|fg|_x = |f|_x |g|_x$ et
4. $|f + g|_x \leq |f|_x + |g|_x$.

Exemple. Voici deux exemples fondamentaux de semi-normes multiplicatives sur $\mathbb{L}[X]$:

- pour tout $a \in \mathbb{L}$, on pose

$$P \rightarrow |P|_a := |P(a)|_{\mathbb{L}},$$

- pour tout $z_0 \in \mathbb{L}$ et tout $r \in \mathbb{R}^{*+}$ on pose $B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{L} \mid |z - z_0|_{\mathbb{L}} \leq r\}$
et

$$P \rightarrow |P|_{B(z_0, r)} = \max_{z \in B(z_0, r)} |P(z)|_{\mathbb{L}}.$$

On définit l'espace analytique au sens de Berkovich $\mathbb{A}_{\mathbb{L}}^{1, \text{an}}$ comme l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur $\mathbb{L}[X]$ dont la restriction à \mathbb{L} est la norme $|\cdot|_{\mathbb{L}}$ que l'on munit de la topologie de la convergence faible. Cet espace est appelé la droite affine (au sens de Berkovich). Le théorème suivant dû à Berkovich permet de mieux se représenter cet espace :

Théorème 7.3 ([B]). *Toute semi-norme multiplicative $|\cdot|_B$ est réalisée comme :*

$$|P|_B = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\max_{z \in B(z_i, r_i)} |P(z)|_{\mathbb{L}} \right).$$

pour une suite décroissante de disques : $B(z_0, r_0) \supseteq B(z_1, r_1) \supseteq B(z_2, r_2) \supseteq \dots$.

En particulier, si l'intersection des $B(z_i, r_i)$ n'est pas vide on est dans l'un des cas décrits dans l'exemple précédent. Si ce n'est pas le cas on parle de point de type 4 (nous ne nous intéresserons pas ici à ces points là). On notera

$$\mathcal{B}(z_0, r) := |\cdot|_{B(z_0, r)}$$

et on identifie par abus $\mathcal{B}(z_0, 0)$ à z_0 . La droite projective \mathbb{P}_{Berk}^1 est obtenue à partir de $\mathbb{A}_{\mathbb{L}}^{1, \text{an}}$ en ajoutant la fonction envoyant tout polynôme de degré non nul sur ∞ et $z \in \mathbb{L}$ sur $|z|_{\mathbb{L}}$. Cet espace est alors compact.

Espace de boules et structure d'arbre.

On a la propriété bien connue suivante (cf [J] par exemple) :

Proposition 7.4. *L'espace \mathbb{P}_{Berk}^1 a une structure d'arbre réel.*

Pour bien comprendre à la main quelle est cette structure nous devons d'abord étudier l'espace des boules (du type $B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{L} \mid |z - z_0|_{\mathbb{L}} \leq r\}$ avec $z \in \mathbb{L}$ et $r \in \mathbb{R}^+$) dans \mathbb{L} . Les normes non-archimédiennes ont quelques propriétés différentes de celle des normes archimédiennes par exemple les deux propriétés suivantes :

1. Tout élément d'une boule est le centre de cette boule :

$$\forall z \in B(z_0, r), B(z, r) = B(z_0, r).$$

2. L'intersection de deux boules est vide ou alors l'une est incluse dans l'autre.

Nous nous intéresserons ici seulement à l'ensemble des boules incluses dans $B(0, 1)$, ce qui est suffisant pour donner une intuition pour comprendre l'ensemble de toutes les boules.

L'idée est de penser chacun des chemins comme une concaténation de chemins appelés rayons de la forme

$$\bigcup_{r \in I} \{B(z, r)\}, I \subset \mathbb{R}^+.$$

Ainsi chaque élément $z \in B(0, 1)$ est relié à l'élément $B(0, 1)$ puisque $B(0, 1) = B(z, 1)$ d'après la propriété 1.

Le théorème 7.3 permet d'identifier \mathbb{P}_{Berk}^1 privé des points de type 4 avec l'espace des boules dans \mathbb{L} , on en déduit une structure d'arbre sur \mathbb{P}_{Berk}^1 . On peut se représenter cette structure d'arbre comme vivant dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{P}_{\mathbb{L}}^1$ comme sur la figure 7.4.

Les éléments qui nous intéressent sont les boules de rayon nul dits de type 1 et les points de branchements dits de type 2. Notons que les points de types 1 et 4 apparaissent alors comme les "bouts" de cet arbres.

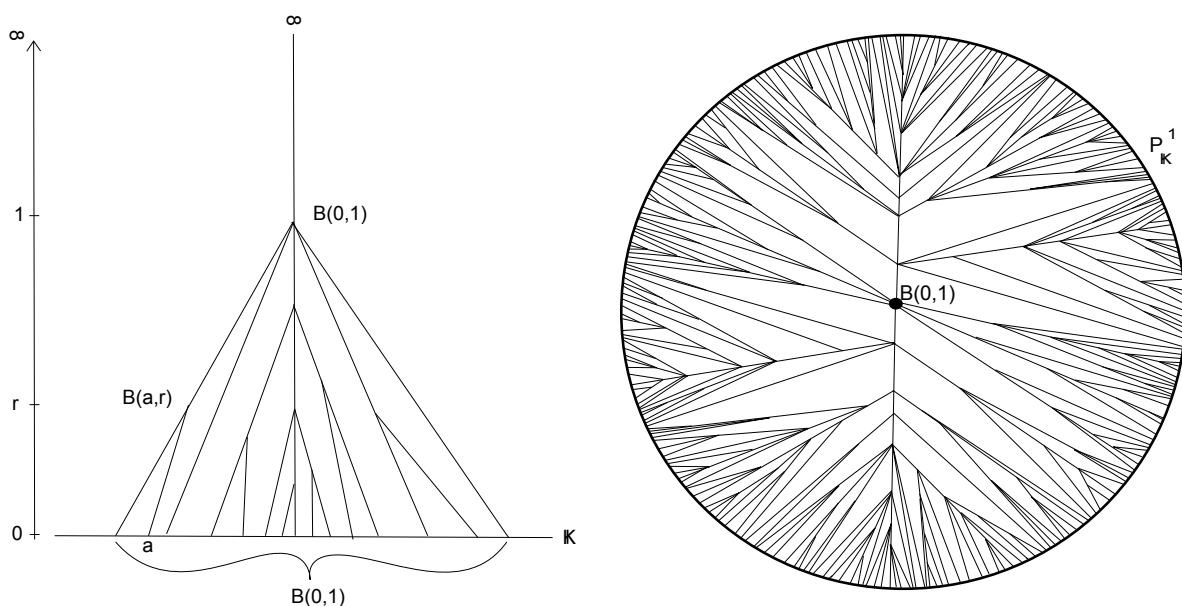


FIGURE 7.4 –

Réduction et limites.

Dans ce qui suit nous identifions l'équivalent du passage à la limite dans le contexte des espaces de Berkovich.

Dans un corps non-archimédien, trois sous-ensembles apparaissent de façon très naturelle ; ce sont l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{\mathbb{L}} := \{z \in \mathbb{L} \mid |z|_{\mathbb{L}} \leq 1\}$, son unique idéal maximal $\mathcal{M}_{\mathbb{L}} := \{z \in \mathbb{L} \mid |z|_{\mathbb{L}} < 1\}$ et $\tilde{\mathbb{L}} := \mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathcal{M}_{\mathbb{L}}$ que l'on appelle le corps résiduel.

Heuristiquement, pour $a_t \in \mathbb{C}\langle\langle t \rangle\rangle$, on a $a_t \in \mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ si $a_0 \neq \infty$ et $a_t \in \mathcal{M}_{\mathbb{L}}$ si $a_0 = 0$. Plus généralement, $\tilde{\mathbb{L}}$ s'identifie à \mathbb{C} via $c \in \mathbb{C} \rightarrow c + \mathcal{M}_{\mathbb{L}}$.

On appelle réduction la projection canonique

$$\rho : \mathcal{O}_{\mathbb{L}} \rightarrow \mathbb{C} \approx \tilde{\mathbb{L}}.$$

On a alors :

Lemme 7.5. *Soit $a_t \in \mathcal{O} \cap \mathbb{C}\langle\langle t \rangle\rangle$. Alors $\rho(a_t) = a_0$.*

Espace tangent en $\mathcal{B}(0,1)$ et réduction.

On définit l'espace tangent $T_{\mathcal{B}'}$ en un point de $\mathcal{B}' \in \mathbb{P}_{Berk}^1$ de type 2 comme étant l'ensemble des branches en ce point. Pour tout $c_t \in \mathbb{L}$, on note $T_{\mathcal{B}'}c_t$ la branche au point \mathcal{B}' contenant c_t . On note $\mathcal{B} := \mathcal{B}(0,1)$.

Lemme 7.6. *Deux éléments a_t et b_t de \mathbb{L} appartiennent à la même branche du point \mathcal{B} si et seulement si $\rho(a_t) = \rho(b_t) \neq \infty$.*

Démonstration. Idée : il suffit de remarquer que deux points sont dans la même branche si et seulement si ils sont dans une même boule de diamètre strictement inférieur à 1. \square

Remarque 7.7. De façon plus générale, l'espace tangent en tout point de type 2 s'identifie à $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$.

Dynamique.

Pour tout $P_t := X^d + a_1(t).X^{d-1} + \dots + a_d(t) \in K[X]$ avec $\forall i, a_i(t) \in \mathbb{L}$, on peut montrer que l'on a

$$P(B(0, r)) = B(a_d(t), \max_{i \in [1, d]} (|a_i(t)|_{\mathbb{L}} \cdot r^{d-i})).$$

Ainsi tout polynôme définit une dynamique sur \mathbb{P}_{Berk}^1 . Plus précisément :

- si P est un polynôme et x une semi-norme multiplicative sur $\mathbb{L}[X]$ alors $P(x)$ est la semi-norme envoyant Q sur $|Q \circ P|_x$
- si x est donné par le sup sur une boule B alors $P(x)$ est le sup sur la boule $P(B)$.

Pour montrer la même chose pour les fractions rationnelles en général, c'est un peu plus compliqué. La projection ρ s'étend naturellement en une projection $\rho : \mathbb{L}[X] \rightarrow \mathbb{C}[X]$. On étend alors la réduction à $\rho : \mathbb{L}(X) \rightarrow \mathbb{C}(X)$. Plus particulièrement, si $F_t = P_t/Q_t$ avec $P_t, Q_t \in \mathbb{L}[X]$ et $F_0 \neq 0$ et $F_0 \neq \infty$, on obtient par réduction deux polynômes $\rho(P_t)$ et $\rho(Q_t)$. On note $\mathcal{H}(P_t)$ les zéros de PGCD(P_t, Q_t). On a alors la proposition suivantes :

Proposition 7.8 ([K3] Lemma 3.2). *Si $\deg(\rho(P_t)/\rho(Q_t)) > 0$ et $(f_t)_{t \in D(0,1) - \{0\}}$ est une famille holomorphe de fractions rationnelles associée à une application $f_t : \mathbb{P}_{\mathbb{L}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{L}}^1$,*

$$F_t = \frac{P_t}{Q_t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\rho(P_t)}{\rho(Q_t)} = \rho(F_t)$$

localement uniformément sur tout compact de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 - \mathcal{H}(F_t)$.

On voit donc que l'ensemble des branches privé d'un nombre fini de branches d'un point donné est envoyé par une fraction rationnelle (dont on peut calculer le degré) sur l'ensemble des branches privé encore d'un nombre fini de branches d'un unique autre point. Ainsi les fractions rationnelles définissent aussi une dynamique sur \mathbb{P}_{Berk}^1 . On a alors la propriété suivante :

Proposition 7.9 ([K3] Proposition 3.3). *L'application F_t fixe \mathcal{B} si et seulement si $\deg \rho(F_t) > 1$. Si c'est le cas, alors elle induit une application tangente $D_{\mathcal{B}}F_t : T_{\mathcal{B}}\mathbb{P}_{Berk}^1 \rightarrow T_{\mathcal{B}}\mathbb{P}_{Berk}^1$ et*

$$D_{\mathcal{B}}F_t = \rho(F_t).$$

Ainsi pour avoir des limites non constantes, l'idée est de chercher des familles de fonctions qui fixent \mathcal{B} . Une famille de fractions rationnelles joue un rôle très particulier : la famille des transformations de Moebius. On appelle transformation de Moebius sur \mathbb{L} , une fraction rationnelle à coefficient dans \mathbb{L} qui est de degré 1. On a alors le résultat fondamental :

Proposition 7.10. *L'ensemble des transformations de Moebius agit de façon transitive sur l'ensemble des points de type 2.*

Grâce à ces trois propositions, on a le corollaire suivant :

Corollaire 7.11. *Soit $\mathcal{B}(z, r) \in \mathbb{P}_{\text{Ber}k}^1$. Soit M_t et N_t des transformations de Moebius telles que $M_t(\mathcal{B}(z, r)) = \mathcal{B}$ et $N_t(\mathcal{B}) = F_t(\mathcal{B})$.*

Alors $N_t^{-1} \circ F_t \circ M_t$ converge lorsque $t \rightarrow 0$ vers une fraction rationnelle non constante localement uniformément en dehors d'un nombre fini de points.

Et donc :

Corollaire 7.12. *Si F_t fixe un point $\mathcal{B}(z_0, r)$ alors il existe une transformation de Moebius M_t telle que $M_t^{-1} \circ F_t \circ M_t$ converge lorsque $t \rightarrow 0$ vers une fraction rationnelle non constante localement uniformément en dehors d'un nombre fini de points.*

Lien avec la compactification de Deligne-Mumford.

Prenons une famille de fonctions holomorphes $(f_t)_{t \in]0,1]}$ telles que $f_t \in \text{Rat}_d$ si $t \neq 0$ et $f_0 \notin \text{Rat}_d$.

Supposons que pour tout $t \in]0,1[$, f_t soit marqué par (f, X) . On suppose que le marquage est lisse c'est à dire que i_t^Y et i_t^Z , les applications de marquage de f_t , vérifient :

$$\forall (y, z) \in Y \times Z, \exists y_t, z_t \in \mathbb{L}, \forall t \in]0,1[, i_t^Y(y) = y_t, \text{ et } i_t^Z(z) = z_t.$$

On associe au marquage des f_t un arbre de sphères \mathcal{T}^Y de la façon suivante :

Considérons l'enveloppe convexe des y_t dans $\mathbb{P}_{\text{Ber}k}^1$. On peut en déduire un unique arbre combinatoire (sans cycles) marqué par les y_t dont tous les sommets internes ont valence 3. En confondant les y et y_t , on obtient un arbre stable T^Y marqué par Y .

La remarque 7.7 assure que l'espace tangent en tout sommet interne de T^Y est une sphère topologique. Ainsi, à chaque sommet interne \mathcal{B}' de T^Y , on associe l'application de marquage qui à tout point y associe la branche de $T_{\mathcal{B}'}$ à laquelle y_t appartient. On obtient alors un arbre de sphères \mathcal{T}^Y . On fait de même avec les z_t pour obtenir un arbre \mathcal{T}^Z marqué par Z .

Proposition 7.13. *Pour toute suite $(t_n)_n$ dans $]0, 1[$ qui tend vers 0, la suite de sphères marquées $i_{t_n}^Y$ (resp. $i_{t_n}^Z$) tend vers \mathcal{T}^Y (resp. \mathcal{T}^Z).*

Démonstration. D'après la proposition 7.10 on peut choisir pour tout sommet interne \mathcal{B}' de \mathcal{T}^Y (par exemple) une transformation de Moebius $\phi_{t, \mathcal{B}'}$ (sur \mathbb{L}) qui envoie ce sommet sur \mathcal{B} . Alors on a

$$\phi_{t_n, \mathcal{B}'} \circ i_{t_n}^Y \rightarrow \rho(i_t^Y) = i^Y.$$

□

Considérons maintenant que $f_t(X) \in \mathbb{L}(X)$. Ainsi $f_t(X)$ qui agit sur \mathbb{S}_{Berk} en envoyant pour tout $y \in Y$ l'élément y_t sur $z_t = f_t(y_t)$. De même nous avons vu que $f_t(X)$ a une action sur les espaces tangents de chacun des sommets internes de \mathcal{T}^Y .

Lemme 7.14. *Tout sommet interne de \mathcal{T}^y est envoyé sur un sommet interne de \mathcal{T}^Z . Et si pour tout $\mathcal{B}' \in IV^Y$ on pose $f_{\mathcal{B}'} = D_{\mathcal{B}'} f_t$, alors $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$ est un revêtement d'arbre de sphères.*

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 7.15. *Pour toute suite $(t_n)_n$ dans $]0, 1[$ qui tend vers 0, la suite de revêtements de sphères marquées $(f_{t_n})_n$ converge vers le revêtement d'arbres marqué $\mathcal{F} : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z$.*

Démonstration. D'après ce qui a été fait pour la démonstration de la proposition 7.13, pour tous sommets internes \mathcal{B}^Y et \mathcal{B}^Z de \mathcal{T}^Y et \mathcal{T}^Z on trouve des transformations de Moebius (sur \mathbb{L}) ϕ_t^Y et ϕ_t^Z tels que $\phi_t^Y(\mathcal{B}^Y) = \mathcal{B}$ et $\phi_t^Z(\mathcal{B}^Z) = \mathcal{B}$ et l'on a alors $\mathbb{S}_n^* \xrightarrow[\phi_{t_n}^*]{} \mathcal{T}^*$. On en conclut par le corollaire 7.11 que l'on a

$$f_{t_n} \xrightarrow[\phi_{t_n}^Y, \phi_{t_n}^Z]{} \mathcal{F}.$$

(après avoir vérifié que les convergences sont locales uniformes en dehors des arêtes). □

On retrouve les résultats de J. Kiwi concernant les limites renormalisées non post-critiquement finies et la classification des limites renormalisées en degré 2. Notons toutefois quelques différences :

- pour le premier résultat, J. Kiwi utilise un théorème de Rolle là où ici on utilise la formule de Riemann-Hurwitz,
- pour le second résultat, J. Kiwi utilise la formule des indices pour trouver son point fixe (similaire à ce qui est fait dans [M1] et [E]), alors qu'ici une énumération des divers cas possibles suffit,

- toujours pour le second résultat , J. Kiwi montre que dans tous les cas on a $k'_0 > k_0$.

Notons que les liens que nous avons établis ici sont bien connus par les géomètres algébristes (voir par exemple [BPR]). Lorsque l'on marque un ensemble $X'' \supset X$ de points, l'application $\Pi_{X',X}$ de la partie 6.1 donne une "inclusion" des arbres obtenus. Il semblerait que l'espace de Berkovich ou au moins une partie de celui-ci puisse apparaître comme la limite projective du marquage de points.

Ainsi on peut répondre partiellement à la question 7.1. En effet, l'espace de Berkovich semble contenir une infinité d'informations (heuristiquement "tous les marquages possibles") et donc l'idée est de chercher quels sont les points que l'on doit marquer dans ce dernier.

7.6.2 Résolution des singularités et séries de Puiseux dans $Per_n(0)$.

L'ensemble des polynômes de degré 3 unitaires et centrés paramétré par leurs coefficients en font une variété complexe de dimension 2. Posons $Per_n(0)$ le sous-ensemble des polynômes qui possèdent un point critique de période exactement n . C'est une courbe algébrique qui touche l'infini en exactement deux points (voir [BM]). La méthode de Newton (voire [Cu] par exemple) permet de paramétrer des germes de courbes au voisinage de ces points grâce à des séries de Puiseux. Dans [BKM], A. Bonifant, J. Kiwi et J. Milnor se servent de ces séries de Puiseux pour donner un nom à chacune des composantes d'échappement de $Per_n(0)$ (lieux où le point critique libre est dans le bassin de l'infini) et ensuite montrer que $Per_4(0)$ est connexe en obtenant des images locales de cette variété sur ordinateur,.

Ce travail est fortement relié au travail de L. De Marco commencé avec C. T. McMullen puis continué avec K. Pilgrim faisant intervenir des arbres dynamiques pour compter les composantes d'échappement et dont les liens avec mon travail sont rappelés dans la partie 7.7.1.

7.7 Stretching et arbres de sphères

7.7.1 Arbres et polynômes

Dans cette partie nous nous intéressons aux travaux de L. De Marco initiés avec C. T. Mc Mullen dans [DMc] puis poursuivi avec K. Pilgrim dans [DP1], [DP2], [DP3] et [DP4] (voir aussi [DS1], [DS2] et [D1]).

Polynômes et fonction de Green.

Commençons par rappeler quelques généralités sur Poly_d . On appelle Julia rempli d'un polynôme $P \in \text{Poly}_d$ l'ensemble :

$$J_P := \{z \in \mathbb{C} \mid |P^n(z)| \rightarrow \infty\}.$$

C'est un compact et son complémentaire, appelé bassin d'attraction de l'infini, est connexe que l'on note B_∞ . Lorsqu'un point critique est dans ce dernier, on dit qu'il s'échappe. On note $\text{Poly}_d^* \subset \text{Poly}_d$ l'ensemble des polynômes ayant au moins un point critique qui s'échappe. Pour tout élément de $P \in \text{Poly}_d^*$, l'ensemble J_P est non connexe. Si de plus tous les points critiques de P s'échappent, alors J_P est un ensemble de Cantor.

On définit la fonction de Green par la proposition suivante :

Proposition 7.16. *Pour tout $P \in \text{Poly}_d$ la suite de fonctions $(g_n)_n$ définies sur \mathbb{C} par $g_n(z) = \frac{1}{d^n} \log_+ |P^n(z)|$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction g_P continue appelée fonction de Green qui vérifie $g_P \circ P = d \cdot g_P$. De plus $J_P = g_P^{-1}(0)$. Cette fonction se prolonge continûment en une fonction $\mathbb{S} \rightarrow [0, +\infty]$ en posant $g_P(\infty) = +\infty$.*

Pour tout élément $z \in B_\infty^P$

- soit un des itérés de z est un point critique et la composante connexe de $g_P^{-1}(g_P(z))$ contenant z est une courbe possédant un point double, on parle de courbe de niveau critique,
- soit la composante connexe de $g_P^{-1}(g_P(z))$ contenant z est une courbe simple fermée lisse.

Rappels sur les arbre de DeMarco-McMullen et DeMarco-Pilgrim.

L'arbre de DeMarco-McMullen \mathcal{T}_P est défini comme le passage au quotient sur \mathbb{C} qui identifie les éléments qui sont sur la même composante connexe d'une courbe de niveau de la fonction de Green. Par exemple comme $J_P = g_P^{-1}(0)$, deux éléments de J_P qui sont dans la même composante connexe de ce dernier sont alors identifiés. Notons qu'alors tout polynôme quasi-conformément conjugué à P a le même arbre de DeMarco-McMullen.

L'arbre \mathcal{T}_P est connexe car deux d'éléments de \mathbb{C} peuvent être reliés par un chemin et les classes des éléments de ce chemin forment alors chemin dans le quotient. On peut se représenter cet ensemble comme sur la figure 7.5.

Notons que les points associés aux courbes critiques qui s'échappent sont les points de branchements car toute courbe critique sépare J_P en plusieurs composantes qui ne contiennent pas l'infini. Notons \mathcal{V}_{g_P} l'ensemble des composantes connexes des courbes de niveau de g_P . On a alors le lemme suivant :

Lemme 7.17. *Soit v un point de branchement associé à une courbe critique \mathcal{C} . Deux éléments de $\mathcal{V}_{g_P} - \mathcal{C}$ sont dans une même branche de v si et seulement si ils sont inclus dans la même composante connexe de $\mathbb{C} - \mathcal{C}$.*

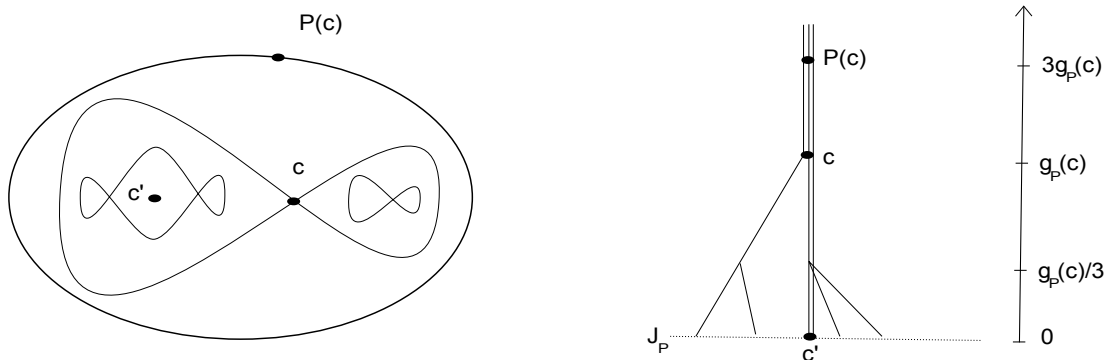


FIGURE 7.5 – À gauche quelques courbes de niveau de la fonction de Green et à droite une représentation des points de branchement correspondants dans l'arbre de DeMarco-McMullen correspondant à ces courbes de niveaux.

On en déduit que \mathcal{T}_P est sans cycles. Par ailleurs, comme P préserve les niveaux de la fonction de Green et est continu, il définit une dynamique et un degré sur \mathcal{T}_P .

Stretching (cf [BH], [DP1] et [BN]).

Supposons que $P \in \text{Poly}_d^*$ et notons c le point critique maximisant g_P . On définit alors l'anneau

$$A_P := \{z \in \mathbb{B}_\infty^P \mid d.g_P(c) \leq g_P(z) \leq d^2.g_P(c)\}.$$

Il existe une application holomorphe

$$\phi_{A_P} : A_P \rightarrow \mathbb{C} - D(0, 1) \text{ telle que } \phi_{A_P}(g_P^{-1}(d.g_P(c))) = \partial D(0, 1).$$

Posons $h_t : z \rightarrow z^t$ pour tout $t \in [1, +\infty[$. On définit sur A_P une structure quasi-conforme en tirant en arrière la structure conforme sur \mathbb{C} par h_t puis par ϕ_{A_P} . Comme tout élément de B_∞^P a un élément de son orbite dans A_P , on définit ensuite une structure quasi-conforme sur tout B_∞^P privé de la grande orbite des points critiques tirant en arrière et poussant en avant (ce qui demande démonstration) la structure quasi-conforme définie sur A_P . On définit donc une structure quasi-conforme invariante par P sur \mathbb{C} privé d'un ensemble de points de mesure nulle en complétant cette structure pas la structure conforme sur J_P .

D'après le théorème de redressement de structure quasi-conforme (Morey-Alfors-Bers-...), on peut redresser cette structure en une structure conforme et on obtient une famille continue de polynômes $(P_t)_{t \in [1, +\infty[}$ qui est quasi-conformément conjugués à P sur \mathbb{C} et tels que

$$\text{Mod}(A_{P_t}) = t.\text{Mod}(A_P) \text{ pour tout } t \in [1, +\infty[.$$

Cette construction donne alors un mouvement holomorphe du bassin de l'infini $m : [1, +\infty[\times \mathbb{B}_\infty^P \rightarrow \mathbb{S}$.

On a le lemme suivant :

Lemme 7.18. *Soit \mathcal{I} un chemin dans \mathcal{T}_P ne contenant pas de points de branchement. Notons A l'ensemble des points de \mathbb{S} dont la classe appartient à \mathcal{I} . Alors A est un anneau et $\text{Mod}(\mathfrak{m}_t(A)) \rightarrow +\infty$.*

Remarque 7.19. Notons que comme ces polynômes sont conjugués, ils ont le même arbre de DeMarco-McMullen.

Lien avec Deligne-Mumford.

Soit X un sous ensemble fini d'éléments de \mathbb{S} contenant ∞ . L'ensemble des classes des éléments de X définissent un sous-ensemble fini $[X]$ d'éléments de \mathcal{T}^P . On associe à $[X]$ l'arbre combinatoire T_P^X marqué par X construit comme suit.

- Les sommets internes de T_P^X sont
 - les points de branchement de l'enveloppe convexe de $[X]$ et
 - les éléments de $[X]$.
- Ses feuilles les éléments de X .
- Ses arêtes sont
 - entre les couples de sommets internes distincts dont l'enveloppe convexe ne contient pas de point de branchement ou d'éléments de $[X]$
 - entre chaque feuille $x \in X$ et le sommet $[x]$.

Supposons que P soit dynamiquement marqué par (X, Y, Z) . On en déduit que pour tout $t \in [1, +\infty[$, P_t est marqué par (X, Y, Z) en posant

$$\forall x \in X, i_t^X(x) = m_t(x),$$

et de même pour Y et Z . On en déduit l'existence d'un système dynamique d'arbres de sphères stables $(\mathcal{P}_\infty : \mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^Z, \mathcal{T}^X)$ dynamiquement approximable par les $(P_{t_n})_n$ pour toute suite $t_n \rightarrow +\infty$.

On a alors :

Proposition 7.20. *Notons T_P^X, T_P^Y et T_P^Z les enveloppes connexes stables respectives de X, Y et Z de l'arbre de T_P . On a alors les résultats suivants :*

- Les arbres T_P^\star sont isomorphes aux T^\star pour tout $\star \in \{X, Y, Z\}$.
- L'application P_∞ est isomorphe à l'application induite par $P : T_P^Y \rightarrow T_P^Z$.

Démonstration. (Plan) La démonstration du premier point s'appuie essentiellement sur le fait suivant : les branches sur les sommets internes stables de T^X et T_P^X induisent les mêmes partitions et on conclut avec le théorème 4.4. Ceci découle essentiellement de la remarque suivante.

Si deux points $x \neq x' \in X$ dans la même branche de T_P^X sur un sommet interne v qui sépare trois sommets internes $[x], [x_1]$ et $[x_2]$, alors par construction, $[x]$ et $[x']$ sont aussi dans la même branche de \mathcal{T}_P sur v . On trouve un intervalle non vide \mathcal{I} d'arête de \mathcal{T}_P sans point de branchement qui sépare v de $[x]$ et $[x']$. Notons A l'ensemble des points de \mathbb{S} dont la classe appartient à \mathcal{I} et $A_t := m_t(A)$. D'après le lemme 7.18, on a alors

$$\text{Mod}(A_t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty.$$

La courbe $\mathcal{C} := v$ est incluse dans un composante connexe de $\mathbb{S} - A$ qui contient donc aussi x_1 et x_2 . Ainsi $m_t(x_1)$ et $m_t(x_2)$ sont dans la même composante connexe de $\mathbb{S} - A_t$. On en déduit que sur \mathbb{S}_v , $a_v(x)$ et $a_v(x')$ sont séparés de $a_v(x_1)$ et $a_v(x_2)$ par un anneau de module infini. Or $a_v(x_1) \neq a_v(x_2)$ par définition du sommet v , donc on a $a_v(x) = a_v(x')$ c'est à dire x et x' sont sur la même branche sur $v \in T^X$.

Pour le second point, il suffit de remarquer que P envoie les composantes connexes de courbe de niveau séparant 2 points du Julia sur des composantes connexes de courbe de niveau séparant l'image de ces derniers. \square

Remarque 7.21. Nous venons d'observer que l'arbre de DeMarco-McMullen \mathcal{T}_P est un "sous-arbre" de l'espace de Berkovich associé à l'ensemble des polynômes obtenus en faisant du stretching et du wringing à partir de P , ce qui est implicite dans [K1].

Par ailleurs, dans les travaux de L. De Marco et K. Pilgrim, il est introduit une version enrichie de ces arbres qui consiste à se rappeler en chaque sommet de l'allure de la courbe critique correspondante. Ceci permet de compter certaines classes de conjugaison conforme de composantes d'échappement. Il y a fort à penser que les applications associées aux sommets internes de T^Y permettent de retrouver cette information.

Exemple.

Considérons $P \in \text{Per}_p(0) \cap \text{Poly}_3^*$ pour un certain $n \geq 2$. Notons c le point critique de P qui s'échappe et c' celui de période n . On pose $X = \{P^k(c) \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{\infty\}$. On retrouve le "spin" de l'arbre des travaux de L. De Marco et K. Pilgrim.

Si le deuxième point critique est périodique, on marque en plus son orbite dans X ainsi que l'orbite (de période n) de la racine de la composante hyperbolique de J_P contenant le point critique. On obtient alors un cycle critique de sphères de degré 2 qui est un polynôme de degré 2 avec un point critique de période divisant n .

7.7.2 Arbres d’anneaux de Hermann

Dans cette partie nous nous intéressons aux travaux de Mitsuhiro Shishikura sur les configurations d’anneaux de Herman dans [S1] et [S2].

Comme précédemment, il existe une méthode pour faire du stretching sur des cycles d’anneaux de Hermann pour changer leurs modules et les faire tendre vers l’infini en se déplaçant dans Rat_d . En raisonnant de façon très similaire on peut montrer que si l’on choisit judicieusement des points à marquer dans le bord des anneaux du cycle d’anneaux de Herman, on obtient alors un revêtement entre arbres de sphères dont les arêtes sont les anneaux sur lesquels on a fait cette chirurgie et les sommets sont identifiables avec les composantes connexes de \mathbb{S} privé de l’ensemble de ces anneaux. L’application d’arbres combinatoires semble alors être la même application d’arbres que celle donnée par M. Shishikura.

7.8 Arbres de sphères et multicourbe pincée

Une grosse partie des travaux de cette thèse peuvent être ré-interprétés en termes de multicourbes sur des familles de sphères privées d’un nombre fini de points qui se pincent lorsque des points ont même limite. Dans ce contexte, les arbres de sphères apparaissent de façon très naturelle. L’espace de Teichmüller peut être vu comme le revêtement universel de l’espace des modules. Il y a donc un très fort lien entre ce travail et celui de Nikita Selinger ([S]) ainsi que ceux de Sarah Koch et J.A. Hubbard ([Ko] et [HK]) et bien d’autres. De façon plus générale, les accouplements de polynômes font apparaître naturellement des applications entre arbres de sphères. Par exemple Arnaud Chéritat donne un exemple de telles applications dans [Ch].

Bibliographie

- [ACG] E. ARBARELLO, M. CORNALBA, P.A. GRIFFITHS, *Geometry of Algebraic Curves*, A series of Comprehensive Studies in Mathematics Vol. 268, volume II, Springer, 2010.
- [BD] M. BAKER, L. DE MARCO, *Special curves and postcritically-finite polynomials*, Forum of Mathematics, Pi. 1, e3, 2013.
- [BR] M. BAKER, R. RUMELY, *Potential Theory and Dynamics on the Berkovich Projective Line*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol 159, 2004.
- [BPR] M. BAKER, S. PAYNE, J. RABINOFF, *Nonarchimedean geometry, tropicalization, and metrics on curves*, on ArXiv
- [B] V.G.BERKOVICH, *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Vol 33, Mathematical Surveys and Monographs, AMS, Providence RI, 1990.
- [BKM] A. BONIFANT, J. KIWI, J. MILNOR, *Cubic polynomial maps with periodic critical orbit. II*, Escape regions. Conform. Geom. Dyn. 14, 2010.
- [BM] A. BONIFANT, J. MILNOR, *Cubic polynomial maps with periodic critical orbit. I.*, Complex dynamics, 333-411, A K Peters, Wellesley, MA, 2009.
- [BN] B.BRANNER, N.FAGELLA, *Quasiconformal Surgery in Holomorphic Dynamics*, Cambridge studies in advanced mathematics 141, 2013.
- [BH] B.BRANNER, J. A. HUBBARD, *The iteration of cubic polynomials. I*, The global topology of parameter space. Acta Math. 160, no. 3-4, 143-206, 1988.
- [B] X. BUFF, J. FEHRENBACH, P. LOCHAK, L. SCHNEPS, P. VOGEL, *Groupes modulaires et théorie des champs*, Panorama et synthèses N.7, SMF 1999.
- [Cu] S. D. CUTKOSKY, *Resolution of singularities*, volume 63 of Graduate Studies in Mathematics, AMS, Providence RI, 2004.
- [Ch] A. CHÉRITAT, *Tan Lei Shishikura's example of non-mateable degree 3 poly. without a levy cycle*, sur ArXiv.
- [DM] P. DELIGNE, D. MUMFORD, *The irreducibility of the space of curves of a given genus*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.,1969.

- [D1] L. DE MARCO, *Combinatorics and topology of the shift locus*, Conformal Dynamics and Hyperbolic Geometry, AMS Contemporary Mathematics. Volume in honor of Linda Keen's birthday. 573, 2012.
- [D2] L. DE MARCO, *Iteration at the boundary of the space of rational maps*, Duke Math. Journal. 130, 169-197, 2005.
- [DF] L. DE MARCO, X. FABER, *Degenerations of complex dynamical systems*, Soumis pour publication, 2013.
- [DMc] L. DE MARCO, C. T. MC MULLEN, *Trees and the dynamics of polynomials*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 41, 2008.
- [DP1] L. DE MARCO, K. PILGRIM, *Hausdorffization and polynomial twists*, Discrete Contin. Dyn. Sys., Ser. A. 29, no. 4, 2011.
- [DP2] L. DE MARCO, K. PILGRIM, *Polynomial basins of infinity*, Geom. Funct. Anal. 21, no. 4, 2011.
- [DP3] L. DE MARCO, K. PILGRIM, *Critical heights on the moduli space of polynomials*, Advances in Mathematics. 226, 2011.
- [DP4] L. DE MARCO, K. PILGRIM, *The classification of polynomial basins of infinity*, Submitted for publication, 2012.
- [DS1] L. DE MARCO, A. SCHIFF, *Enumerating the basins of infinity for cubic polynomials*, J. Difference Equ. Appl. 16, 2010.
- [DS2] L. DE MARCO, A. SCHIFF, *The geometry of the critically-periodic curves in the space of cubic polynomials*, Experimental Math. 22, no. 1, 2013.
- [Di] R. DIESTEL, *Graph Theory*, Graduate Texts in Math, third edition, Springer, 2006.
- [E] A. EPSTEIN, *Bounded hyperbolic components of quadratic rational maps*, Ergodic
- [EP] A. EPSTEIN, C.L. PETERSEN, *Limits of Polynomial-like Quadratic Rational Maps II*, work in progress.
- [FG] C. FAVRE, T. GAUTIER, *Distribution of postcritically finite polynomials*, sur ArXiv.
- [FJ] C. FAVRE, M. JONSSON, *The Valuative Tree*, Springer, 2008.
- [FR] C. FAVRE, J. RIVERA-LETIELIER, *Théorème d'équidistribution de Brolin en dynamique p-adique* C. R. Math. Acad. Sci. Paris 339, no. 4, 271-276, 2004.
- [HK] J.A. HUBBARD, S. KOCH, *An analytic construction of the Deligne-Mumford compactification of the moduli space of curves*, Journal of Differential Geometry, à paraître.
- [J] M. JONSSON, *Dynamics on Berkovich Spaces in Low Dimensions*, à paraître dans Berkovich spaces and applications. Séminaires et Congrès.

- [K1] J. KIWI, *Puiseux series polynomial dynamics and iteration of complex cubic polynomials*, Annales de l'Institut de Fourier, 2006.
- [K2] J. KIWI, *Puiseux Series Dynamics of Quadratic Rational Maps*, to appear.
- [K3] J. KIWI, *Rescaling Limits of Complex Rational Maps*, on arXiv. Theory and Dynamical Systems, Cambridge University Press, 2000.
- [Ko] S. KOCH, *Teichmüller theory and critically finite endomorphisms*, Advances in Mathematics, Vol. 248, 2013.
- [M1] J. MILNOR, *Geometry and Dynamics of Quadratic Rational Maps*, Experimental, Volume 2, Issue 1, 1993.
- [M2] J. MILNOR, *Pasting together Julia sets : a worked out example of mating.*, Experiment. Math. 13, no. 1, 55-92, 2004.
- [M3] J. MILNOR, *Dynamics in One Complex Variable*, Annals of Mathematics Studies, third edition, Princeton University Press, 2006.
- [P] C.L.PETERSEN, *On The Pommerenke Levin Yoccoz inequality*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. , 13, pp 785-806, 1993.
- [R] J.RIVERA-LETELIER, *Dynamique des fonctions rationnelles sur des corps locaux.*, Geometric methods in dynamics. II. Astérisque No. 287, xv, 147-230, 2003.
- [S] N. SELINGER, *Thurston's pullback map on the augmented Teichmüller space and applications*, Invent. Math. 189, no. 1, 111-142, 2012.
- [S1] M. SHISHIKURA, *Trees associated with the configuration of Herman rings*, Ergodic Theory & Dynamical Systems, 9, 543-560, 1989.
- [S2] M. SHISHIKURA, *A new tree associated with Herman rings*, held in RIMS, Kyoto University, Surikaisekikenkyusho Kokyuroku, No. 1269, 75-92, 2002.
- [W] X. WANG, *Dynamics of McMullen maps and Thurston-type theorems for rational maps with rotation domains.*