



**HAL**  
open science

**Identification à partir de mesures de champs :  
application de l'erreur en relation de comportement  
modifiée**

Mouldi Ben Azzouna

► **To cite this version:**

Mouldi Ben Azzouna. Identification à partir de mesures de champs : application de l'erreur en relation de comportement modifiée. Autre. Université de Technologie de Compiègne, 2013. Français. NNT : 2013COMP2127 . tel-00968138

**HAL Id: tel-00968138**

**<https://theses.hal.science/tel-00968138>**

Submitted on 31 Mar 2014

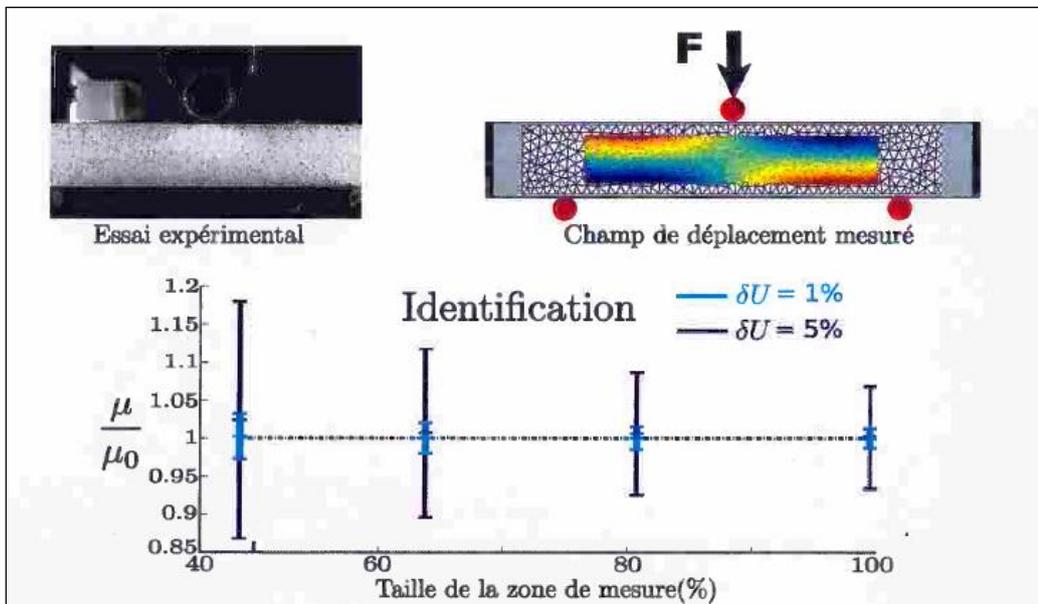
**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Par Mouldi BEN AZZOUNA

*Identification à partir de mesures de champs : application de l'erreur en relation de comportement modifiée*

Thèse présentée  
 pour l'obtention du grade  
 de Docteur de l'UTC



Soutenue le 12 juillet 2013  
**Spécialité** : Mécanique avancée

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE  
L'UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE DE COMPIÈGNE**

**Spécialité :  
MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

Présentée à l'Université de Technologie de Compiègne  
par

Mouldi BEN AZZOUNA

pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE DE  
COMPIÈGNE**

Sujet de la thèse :  
**Identification à partir de mesures de champs  
Application de l'erreur en relation de comportement modifiée**

Thèse soutenue le 12 juillet 2013 devant le jury composé de :

PAGANO STÉPHANE	Président
HILD FRANÇOIS	Rapporteur
AVRIL STÉPHANE	Rapporteur
ABOURA ZOHEIR	Examineur
FEISSEL PIERRE	Examineur
VILLON PIERRE	Examineur

Laboratoire Roberval de Mécanique  
(UTC/CNRS-UMR 7337)  
Centre de Recherches de Royallieu  
CS 60319, 60203 Compiègne cedex (France)



“ La connaissance progresse  
en intégrant en elle l’incertitude,  
non en l’exorcisant. ”  
**E. Morin**



Comme il est coutume en préambule à un mémoire de thèse, je vais commencer par les traditionnels remerciements. Ils vont tout naturellement aux personnes qui ont, d'une part, rendu cette thèse réalisable et, d'autre part, fait en sorte qu'elle se déroule dans les meilleures conditions possibles.

Tout d'abord, j'adresse toute ma reconnaissance à mes deux directeurs de thèse pour la confiance qu'ils m'ont accordée trois ans et demi durant et pour leur soutien intégral pendant les phases les plus critiques. Je les remercie pour leurs qualités humaines qui, en période de thèse en particulier, sont au moins aussi importantes que le savoir.

Je tiens à remercier Pierre Feissel pour la qualité de son encadrement, sa patience et ses corrections méticuleuses. Je ne le remercierai jamais assez pour sa disponibilité et sa bienveillance.

Mes plus sincères remerciements vont également à Pierre Villon qui a encadré ces travaux et a fortement contribué à ma progression. Nos échanges ont été aussi enrichissants qu'agréables.

Toutes mes gratitudes vont aux membres du jury. Merci à Stéphane Pagano de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma thèse. Un respect profond va aux deux rapporteurs qui ont accepté de lire et juger mon travail. Mes sincères amitiés vont à François Hild, avec qui les échanges ne datent pas d'hier.

J'adresse un grand merci à mes collègues et amis, avec qui j'ai eu un plaisir à travailler dans une ambiance très décontractée, me faisant presque oublier Paris, ma ville d'adoption, voire Tunis, ma ville natale. (Et mon vieux rêve d'enfant : devenir astronaute. Quelle idée de vouloir faire plaisir à sa maman !)

Je remercie Ludovic, avec qui les sujets de discussion ne manquent jamais, c'est vous dire si nous sommes complices. Fahmi, toujours là pour me remonter le moral. Dans le désordre, Jérémie, Jérémy, Amine, Zied, Franck, Sami, Nicolas et Luis, pour m'avoir supporté et égayé mes journées. Jean-Sébastien et Gwladys pour le standard téléphonique en TP de RdM. Nos très chères administratives, sans qui la vie au laboratoire n'aurait pas été aussi facile : Valérie pour sa bonne humeur, Brigitte pour ne m'avoir jamais mis à la porte en dépit de mes intrusions incessantes dans son bureau, et Anémone, toujours pleine de vie... Je n'oublierai pas tous les adeptes de la pause café de 10h, devenue presque sacrée, et autour de laquelle sciences, philosophie et politique viennent enrichir nos formations avec beaucoup de jovialité, même si on repart souvent avec plus de questions que de réponses.

Mes amis de longue date, Sala et Ahmed, avec qui les rencontres se sont raréfiées depuis que j'ai commencé ma thèse, mais sont restées toujours aussi chaleureuses. Rana, qui a eu la lourde tâche d'immortaliser les moments de ma soutenance avec de beaux clichés.

Et pour finir, une petite dédicace à ma mère qui a toujours eu foi en moi. Une pensée à Hsin, mon oncle, mais surtout mon ami. Son soutien était sans faille et je n'aurais pas surmonté toutes les difficultés sans son aide. Enfin, je n'oublierai pas Soumaya.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Identification et fiabilité des mesures</b>	<b>5</b>
1.1 Motivation et cadre général de l'étude . . . . .	6
1.2 Identification à partir d'essais hétérogènes et matériaux composites . . . .	6
1.3 Aspects Mesures de Champs 2D . . . . .	7
1.3.1 Limites des mesures extensométriques . . . . .	7
1.3.2 La corrélation d'images numériques . . . . .	7
1.4 Problème des perturbations et fiabilité des mesures . . . . .	10
1.4.1 Les erreurs entre chaîne d'acquisition et corrélation d'images . .	10
1.4.2 Identification et gestion des incertitudes . . . . .	12
1.5 Cadres d'identification et approches inverses . . . . .	13
1.5.1 Quelques grandes familles de problèmes inverses . . . . .	13
1.5.1.1 Identification de propriétés matérielles . . . . .	14
1.5.1.2 Complétion de données au bord . . . . .	14
1.5.1.3 Détection de fissure ou d'inclusion . . . . .	15
1.5.1.4 Recalage de modèle de structure dans le domaine vi- bratoire . . . . .	15
1.5.2 Nature mal posée des problèmes direct et inverse . . . . .	16
1.5.3 Approches par champs auxiliaires . . . . .	17
1.5.3.1 Écart à la réciprocité . . . . .	17
1.5.3.2 Méthodes des champs virtuels . . . . .	18
1.5.4 Approches par minimisation . . . . .	18
1.5.4.1 Méthodes de recalage de modèles par éléments finis . .	19
1.5.4.2 Méthode de l'écart à l'équilibre . . . . .	20
1.5.5 L'erreur en relation de comportement modifiée . . . . .	21
1.6 Conclusion . . . . .	22
<b>2 Filtrage des mesures pour l'identification</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction . . . . .	25
2.2 Cadre d'identification et méthode de filtrage . . . . .	26
2.2.1 Cadre de l'identification . . . . .	26
2.2.1.1 Problème direct et mesures . . . . .	26
2.2.1.2 Formulation éléments finis et construction des mesures	27
2.2.1.3 Problème d'identification . . . . .	28
2.2.2 La méthode de filtrage par approximation diffuse . . . . .	29
2.2.3 Erreur d'approximation et erreur aléatoire . . . . .	31
2.3 Étude théorique de l'erreur d'identification . . . . .	32
2.3.1 Le problème d'identification . . . . .	32
2.3.2 Analyse au premier ordre . . . . .	33
2.3.3 Caractérisation de l'erreur d'identification - biais et variance . . .	35

2.3.4	Validation de l'analyse théorique . . . . .	37
2.4	Effet du filtrage sur les résultats d'identification . . . . .	38
2.4.1	Construction des mesures et cadre de l'identification . . . . .	38
2.4.2	Influence des différents paramètres du problème . . . . .	39
2.4.2.1	Effet du rayon de filtrage . . . . .	39
2.4.2.2	Effet de la taille des zones constantes . . . . .	40
2.4.2.3	Étude de l'amélioration de l'identification . . . . .	41
2.4.3	Choix de la norme d'identification . . . . .	43
2.4.4	Discussion . . . . .	44
2.5	Conclusion . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Stratégie d'identification par l'ERdC modifiée</b>	<b>47</b>
3.1	Stratégie d'identification . . . . .	48
3.1.1	Cadre général de l'identification en 2D . . . . .	48
3.1.2	Formulation : résolution par minimisation séquentielle . . . . .	49
3.1.2.1	Le problème de base . . . . .	51
3.1.2.2	Le problème d'identification . . . . .	51
3.1.3	Résolution du problème de base . . . . .	52
3.1.3.1	Choix d'une formulation en déplacement . . . . .	52
3.1.3.2	Discrétisation de type éléments finis . . . . .	54
3.1.3.3	Introduction d'un Lagrangien . . . . .	56
3.1.3.4	Existence et unicité de la solution . . . . .	59
3.1.4	Algorithme de résolution . . . . .	60
3.1.4.1	Noyau et décomposition QR . . . . .	60
3.1.4.2	Calcul explicite du gradient . . . . .	64
3.1.5	Prise en compte d'informations fiables sur le bord . . . . .	65
3.1.5.1	Formulation ERdC modifiée . . . . .	66
3.2	Identification de propriétés isotropes homogènes . . . . .	68
3.2.1	Simulation d'un essai de traction . . . . .	69
3.2.1.1	Fonction coût et calcul du gradient . . . . .	69
3.2.1.2	Vers l'optimisation de l'hyper-paramètre . . . . .	72
3.2.2	Essai de flexion trois points . . . . .	73
3.2.2.1	Construction des mesures . . . . .	73
3.2.2.2	Allure de la fonction coût . . . . .	74
3.2.2.3	Rajout d'informations fiables . . . . .	75
3.3	Effet de la taille de la zone de mesure . . . . .	76
3.3.1	Identification avec de petites zones de mesure . . . . .	76
3.3.2	Intérêt du calcul sur le domaine total . . . . .	77
3.4	Conclusion . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Comparaison avec les méthodes FEMU et contrôle optimal</b>	<b>81</b>
4.1	Comparaison avec la méthode FEMU . . . . .	82
4.1.1	Premier cas d'étude : CL mixtes fiables . . . . .	82
4.1.1.1	Résolution avec la méthode FEMU : CL mixtes . . . . .	82
4.1.1.2	Résolution avec l'ERdC modifiée : CL de type Neumann . . . . .	83
4.1.1.3	Résultats . . . . .	85
4.1.2	Deuxième cas d'étude : MdC cinématiques . . . . .	85
4.1.2.1	Méthode FEMU : CL de type Dirichlet . . . . .	85
4.1.2.2	Résultats . . . . .	86
4.1.3	Troisième cas d'étude : information bord libre . . . . .	87
4.1.3.1	Méthode FEMU : CL de type Dirichlet et bord libre . . . . .	87

---

4.1.3.2	Résultats . . . . .	87
4.1.3.3	Discussion des résultats obtenus avec la méthode FEMU . . . . .	88
4.2	Identification par approche basée sur le contrôle optimal . . . . .	90
4.2.1	Motivation . . . . .	90
4.2.2	Formulation du problème d'identification . . . . .	90
4.2.3	Comparaison avec l'ERdC modifiée . . . . .	91
4.3	Conclusion . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Application à des exemples orthotropes</b>	<b>95</b>
5.1	Vers l'identification de propriétés orthotropes hétérogènes . . . . .	96
5.1.1	Choix de l'essai . . . . .	96
5.1.2	Analyse de sensibilité . . . . .	97
5.1.2.1	Analyse avec la théorie des poutres . . . . .	97
5.1.2.2	Analyse de type MMC . . . . .	100
5.1.3	Identification de propriétés orthotropes homogènes . . . . .	103
5.1.3.1	Choix de l'algorithme de minimisation . . . . .	104
5.1.3.2	Cas d'un comportement homogène . . . . .	105
5.1.4	Identification de propriétés orthotropes hétérogènes . . . . .	107
5.1.4.1	Configuration d'un matériau stratifié . . . . .	108
5.1.4.2	Configuration d'un matériau en échiquier . . . . .	110
5.1.4.3	Identification de propriétés hétérogènes . . . . .	112
5.2	Identification à partir de données expérimentales . . . . .	114
5.2.1	Essai et matériau . . . . .	114
5.2.2	Les différents cas d'études . . . . .	114
5.2.3	Résultats . . . . .	116
5.3	Conclusion . . . . .	118
	<b>Conclusion</b>	<b>119</b>



# Table des figures

2.1	Problème de référence relatif au problème d'identification . . . . .	26
2.2	Reconstruction à partir du voisinage de chaque point . . . . .	30
2.3	Critère d'amélioration pour l'évaluation du filtrage . . . . .	37
2.4	Conditions aux limites et champs de déplacement pour une simulation de traction parabolique . . . . .	38
2.5	Écart-type de l'identification en fonction du niveau de perturbation . . . . .	38
2.6	Champs de contrainte $\sigma_{xx}$ et $\sigma_{yy}$ relatifs à la simulation de traction . . . . .	39
2.7	Cartes de biais pour trois rayons de filtrage . . . . .	40
2.8	Cartes d'écart-type pour trois rayons de filtrage . . . . .	40
2.9	Cartes d'écart-type pour différentes tailles de zones constantes (sans filtrage) . . . . .	41
2.10	Erreur d'identification locale en fonction du rayon de filtrage . . . . .	41
2.11	Cartes d'amélioration pour différents rayons et tailles de zones . . . . .	42
2.12	Erreur d'identification locale pour différentes normes de la fonction coût . . . . .	44
3.1	Problème direct associé au problème d'identification . . . . .	49
3.2	Problème de référence lié au problème d'identification . . . . .	52
3.3	Problème direct 2D associé au problème d'identification . . . . .	65
3.4	Simulation d'un essai de traction . . . . .	69
3.5	Fonction coût et évaluation du gradient pour des niveaux de perturbation variant de 0% à 5% . . . . .	70
3.6	Fonction coût de l'ERdC modifiée avec bord libre . . . . .	70
3.7	Champs de déplacements relatifs à l'essai de traction simulé . . . . .	71
3.8	Résultats d'identification avec bord libre . . . . .	71
3.9	Comportement de $\mathcal{G}_1/\max(\mathcal{G}_1)$ et de $\mathcal{G}_2/\max(\mathcal{G}_2)$ en fonction de $\beta$ . . . . .	73
3.10	Fonction coût et ses deux composantes pour $\beta$ optimisé ( $\delta U = 5\%$ ) . . . . .	73
3.11	Simulation d'un essai de flexion 3 points . . . . .	73
3.12	Fonction coût et gradient . . . . .	74
3.13	Effet du bruit sur la fonction coût $\mathcal{G}(\frac{\mu}{\mu_0})$ . . . . .	75
3.14	Conditions aux limites disponibles . . . . .	75
3.15	Moyenne et écart-type de $\mu/\mu_0$ en fonction du niveau de perturbation . . . . .	75
3.16	Identification avec une zone de mesure rognée . . . . .	76
3.17	Convergence des calculs pour $\mathcal{A}(\Omega_m)/\mathcal{A}(\Omega) \simeq 80\%$ . . . . .	77
3.18	Conditions aux limites disponibles . . . . .	78
3.19	Convergence des trois calculs en fonction du nombre de tirages . . . . .	78
4.1	CL disponibles pour le premier type de données ( <i>CL fiables</i> ) . . . . .	82
4.2	Comparaison entre les méthodes FEMU et ERdC pour des CL mixtes et exactes . . . . .	85
4.3	Deuxième type de CL pour les deux méthodes . . . . .	85
4.4	Comparaison entre les méthodes FEMU et ERdC pour le deuxième type de données . . . . .	86

4.5	Troisième type de CL pour les deux méthodes . . . . .	87
4.6	Comparaison entre les méthodes FEMU et ERdC pour le troisième type de données . . . . .	87
4.7	Comparaison des résultats d'identification avec la méthode FEMU pour deux types de données . . . . .	88
4.8	Cartes des résidus ( $U_x - \tilde{U}_x$ ) obtenues avec la méthode FEMU . . . . .	89
4.9	Identification pour un même tirage de bruit d'amplitude 5% . . . . .	92
4.10	Comparaison des résultats d'identification issues des stratégies ERdC-A et ERdC-C . . . . .	93
4.11	Écart d'identification entre les formulations ERdC-A et contrôle optimal, sans conditions aux limites . . . . .	93
4.12	Moyennes de l'identification avec les formulations ERdC-A et contrôle optimal, (bord libre) . . . . .	94
5.1	Champs de contraintes d'un matériau orthotrope soumis à un essai de flexion trois points . . . . .	97
5.2	Système mécanique étudié . . . . .	97
5.3	Influence de l'élanement sur le mode de sollicitation [Benzeggagh, 2008] . . . . .	98
5.4	Cartes des angles principaux $\theta_1$ pour deux rapports $L/h$ (en °) . . . . .	99
5.5	Distribution des angles principaux $p(\theta_1)$ pour différents rapports $L/h$ . . . . .	99
5.6	Étude de la convergence des sensibilités $\partial U / \partial Q_{ij}$ en fonction du pas $\delta_{Q_{ij}}$ (échelle log) . . . . .	101
5.7	Norme des sensibilités des déformations pour trois rapports $L/h$ (échelle log) . . . . .	102
5.8	Zones testées pour le moyennage des sensibilités . . . . .	103
5.9	Courbes sensibilité-longueur pour les différents critères d'équivalence de l'effort . . . . .	104
5.10	Champs de déformation pour un rapport $L/h = 7$ . . . . .	105
5.11	Erreur d'identification en fonction du rapport $L/h$ . . . . .	106
5.12	Évaluation de l'identification pour un matériau homogène . . . . .	107
5.13	Configuration stratifié . . . . .	108
5.14	Fonction coût de la configuration stratifié - un seul $Q_{xx}$ fourni . . . . .	109
5.15	Fonction coût de la configuration stratifié - les deux $Q_{yy}$ fournis . . . . .	110
5.16	Configuration en échiquier . . . . .	110
5.17	Fonction coût de la configuration échiquier - un seul $Q_{yy}$ fourni . . . . .	111
5.18	Fonction coût de la configuration échiquier - les deux $Q_{yy}$ fournis . . . . .	112
5.19	Architecture du composite étudié . . . . .	113
5.20	Champs de contrainte et de déformation - matériau stratifié avec $L/h = 10$ . . . . .	113
5.21	Résultats d'identification pour deux niveaux de perturbations . . . . .	113
5.22	Essai de flexion trois points sur composite CMO cousu . . . . .	114
5.23	Différentes tailles de zone de calcul et conditions aux limites prises en compte (champ de déplacement expérimental $U_x$ ) . . . . .	115
5.24	Fonctions coûts pour les différents cas d'étude - 2 <sup>e</sup> cycle de l'essai . . . . .	117
5.25	Fonctions coûts pour la formulation FEMU - CL de Dirichlet . . . . .	118

# Liste des tableaux

2.1	Expressions du biais et de la covariance pour deux types de données . . .	37
3.1	Quantités fiables et non fiables dans le cas élastique . . . . .	50
3.2	Redéfinition des quantités fiables et non fiables . . . . .	65
3.3	Les deux approches d'identification testées . . . . .	72
4.1	Écart-type des résultats d'identification pour une amplitude de bruit de 3%	88
4.2	Les trois méthodes variationnelles évaluées . . . . .	92
5.1	Identification basée sur plusieurs algorithmes de descente et différents rapport $L/h$ - bruit de mesure de 5% - $Q_{yy}$ fourni . . . . .	106
5.2	Comparaison entre le recalage avec $Q_{yy}$ et $Q_{xx}$ pour un bruit de mesure de 5% ( $L/h = 7$ ) . . . . .	107
5.3	Identification de propriétés orthotropes hétérogènes- amplitude du bruit de 5% - un seul $Q_{yy}$ fourni . . . . .	108
5.4	Identification de propriétés orthotropes hétérogènes- amplitude du bruit de 5% - un seul $Q_{xx}$ fourni . . . . .	108
5.5	Identification de propriétés orthotropes hétérogènes- amplitude du bruit de 5% - $Q_{yy}$ fourni pour les deux matériaux . . . . .	109
5.6	Identification de propriétés orthotropes hétérogènes- amplitude du bruit de 5% - $Q_{xx}$ fourni pour les deux matériaux . . . . .	110
5.7	Identification de propriétés orthotropes hétérogènes- amplitude du bruit de 5% - un seul $Q_{yy}$ fourni . . . . .	110
5.8	Identification de propriétés orthotropes hétérogènes- amplitude du bruit de 5% - un seul $Q_{xx}$ fourni . . . . .	111
5.9	Identification de propriétés orthotropes hétérogènes- amplitude du bruit de 5% - $Q_{yy}$ fourni pour les deux matériaux . . . . .	111
5.10	Identification de propriétés orthotropes hétérogènes- amplitude du bruit de 5% - $Q_{xx}$ fourni pour les deux matériaux . . . . .	112
5.11	$G_{xy}$ identifié en fonction de la taille et de la formulation ERdC . . . . .	117
5.12	$G_{xy}$ identifié avec la méthode FEMU . . . . .	118



# Introduction

Dans le domaine de la caractérisation des matériaux, les essais expérimentaux sont nécessaires pour la validation des modèles de comportement théoriques, ou encore pour l'exploration de la réponse d'un matériau sous sollicitations diverses ou dans des plages de fonctionnement critiques. Dans la pratique, la plupart des pièces mécaniques travaillent sous un régime hétérogène, d'une part à cause des sollicitations complexes qu'elles subissent, ou d'autre part du fait d'une géométrie particulière nécessaire pour l'assemblage d'une structure, voire de la composition du matériau même de la pièce. Ainsi, les matériaux hétérogènes, tels que les composites, entrent de plus en plus dans la composition des pièces mécaniques, notamment en aéronautique, où ils prennent une place grandissante dans des parties de plus en plus cruciales des structures, et exigent des mécanismes efficaces et effectifs de caractérisation. L'apport de tels matériaux consiste en l'allègement des structures tout en garantissant une bonne résistance. Par conséquent, leur caractérisation a pris une grande part d'intérêt pour la communauté mécanicienne, grandissant au fur et à mesure que la composition de ces derniers devient de plus en plus complexe. Les chargements et les géométries complexes ne font qu'accentuer la hardiesse de la tâche de caractérisation, rien que dans le cas des sollicitations statiques, à cause des phénomènes de concentration de contraintes par exemple, et de la connaissance imparfaite de la distribution des efforts sur la structure. Il est donc nécessaire d'améliorer la connaissance de ces matériaux, plus particulièrement dans l'état de chargement de service.

Enfin, l'aspect hétérogène prononcé de certains matériaux en conditions d'usage, et à différentes échelles, nous conduit vers la volonté d'identifier, non plus des modules homogénéisés, mais plutôt des champs de propriétés qui traduisent l'aspect spatio-dépendant de ces matériaux. L'hétérogénéité va dépendre de l'échelle d'observation souhaitée et est plus prononcée quand l'échelle diminue. L'accès à ces informations fines nécessite alors l'utilisation de moyens de mesure adéquats et le développement de techniques de caractérisation adaptées. C'est le cas des techniques de suivi sans contact, comme les techniques d'imagerie, qui ouvrent de nouvelles perspectives pour l'identification de propriétés mécaniques.

Le fait de vouloir identifier des champs de propriétés en se basant sur des essais hétérogènes n'autorise pas une approche directe standard, mais dirige plutôt vers des approches inverses, basées sur le dialogue essai-calcul. Plusieurs méthodes d'identification ont été adaptées ou dédiées à l'utilisation des mesures de champs. Les plus simples d'entre elles peuvent s'avérer suffisantes dans le cas d'essais homogènes, et la plupart de ces méthodes nécessitent une bonne connaissance des conditions aux limites. Cette connaissance devient plus cruciale quand on a à faire à des essais hétérogènes car elle impacte la qualité des modules identifiés, plus difficiles d'accès quand hétérogènes. Toutefois, ces informations sont souvent méconnues ou peu fiables, principalement à cause des problèmes inhérents aux essais expérimentaux, se traduisant par un écart plus ou moins important entre certaines hypothèses théoriques et les vraies conditions de l'essai d'une part, et les perturbations de mesures sur la chaîne d'acquisition d'autre part. Cela conduit à une altération des résultats d'identification si on utilise les données expérimentales sans prudence

et sans traitement particulier. Des méthodes plus sophistiquées ont alors émergé, et ont été optimisées dans le but de traiter les incertitudes sur les mesures et les conditions aux limites. La plupart d'entre elles passent par la mise en place de critères de construction et d'identification basés sur la minimisation des effets du bruit ou sa prise en compte dans la phase d'identification.

Par ailleurs, la description du comportement des matériaux nécessite d'explorer expérimentalement la mécanique et la physique de ces matériaux en se basant sur des modèles théoriques. Plusieurs modèles ont vu le jour et peuvent être considérés comme relativement fiables aujourd'hui. L'échelle de description du comportement devant être compatible avec les moyens de calcul d'une part, et les moyens de mesure d'autre part. Réciproquement, l'expérimentateur se place à l'échelle d'observation adéquate avec le modèle. Certains de ces modèles peuvent constituer un point de départ solide pour des études visant à les améliorer. En particulier, des difficultés supplémentaires sont rencontrées quand le besoin d'identification s'oriente vers des champs de propriétés, et l'extension des modèles au comportement hétérogène est souvent sujette à des développements supplémentaires. Dans le contexte du dialogue essai-calcul, l'identification se trouve souvent biaisée du fait de l'imposition *a priori* d'un modèle imparfait au regard de la mesure ou des phénomènes physiques qui sont en jeu.

En conclusion, l'identification des paramètres matériels est principalement sous la sujétion de deux problèmes : le bruit de mesure, crucial à gérer, surtout pour des niveaux de sollicitation faibles où le rapport signal à bruit est faible, et l'erreur de modèle induisant une erreur systématique qui n'est pas souvent prise en compte dans le processus d'identification, d'où la nécessité de choisir une approche d'identification robuste vis-à-vis des perturbations de mesure et des erreurs faites sur le modèle.

En rajoutant les difficultés rencontrées lors du dépouillement des essais, liées à la non-maîtrise des conditions aux limites par exemple, la démarche d'identification qu'on a envie d'explorer met l'accent sur la prise en compte des incertitudes et des erreurs de modèle, afin de rechercher une méthode d'identification robuste. Pour cela, plusieurs questions ont été soulevées :

- Quelle confiance faut-il accorder au modèle de comportement et aux mesures. Dans ce contexte, quelle stratégie d'identification est-il possible d'appliquer ?
- D'un point de vue pratique, quels essais doivent être utilisés pour l'identification d'un maximum de propriétés ?

Le premier point mis en avant souligne l'importance du dialogue essai-calcul et soulève la question de la prise en compte des données expérimentales et du modèle de comportement dans la démarche. Ainsi, il faut s'interroger sur la confiance à accorder aux différentes quantités tant du point de vue théorique qu'expérimental, ainsi que sur la manière de traduire cette confiance au cours de l'identification. Il est alors important d'avoir à notre disposition une méthode permettant de traiter des problèmes où l'incertitude sur les données expérimentales et les conditions aux limites est bien prise en compte.

L'approche dite "d'erreur en relation de comportement modifiée" a pour principe de répartir les grandeurs qui interviennent dans la mise en place du problème d'identification suivant le degré de fiabilité qu'on peut leur accorder. Appliquée en dynamique transitoire, entre autres, cette méthode a montré une grande robustesse face aux perturbations de mesure. Le but de notre étude est d'étendre cette approche au cas de l'élasticité statique avec des mesures de champs.

Pour aborder le deuxième point, on s'est positionné du point de vue de la compatibilité entre l'essai mécanique et les paramètres que l'on souhaite identifier en vue de l'identification de l'ensemble des propriétés élastiques (un essai pour tout). La réponse sera développée en détails dans la suite.

---

Le travail se présente selon l'organisation suivante :

- Le premier chapitre présente le contexte général de l'étude et met au centre la problématique d'incertitude dans les mesures. L'accent est mis sur les approches inverses basées sur l'exploitation des mesures de champs et les possibilités qu'elles offrent pour intégrer l'incertitude.
- Dans le second chapitre, la discussion s'ouvrant sur la problématique des incertitudes de mesure, une première étape dans ce sens a consisté à explorer une stratégie de filtrage des mesures en se basant sur les principes de l'approximation diffuse. Le but est d'étudier l'efficacité d'un filtrage direct de mesures perturbées sur les résultats d'identification issus du recalage de modèles par éléments finis. Dans ce contexte, la caractérisation amont des incertitudes de mesure s'avère indispensable. L'étude a donc été menée sur des données synthétiques avec des perturbations maîtrisées. Il en ressort une amélioration relative de l'identification, mais les gains ne sont pas élevés.
- L'investigation de cette première approche dans notre contexte d'identification élastique hétérogène nous conduit, dans un troisième chapitre, à formuler le problème d'identification avec l'erreur en relation de comportement modifiée. Celle-ci est testée sur des exemples numériques et démontre une robustesse patente vis-à-vis des incertitudes de mesure et de la méconnaissance des conditions aux limites.
- Dans le quatrième chapitre, la méthode proposée au chapitre précédent est comparée à la méthode de recalage par éléments finis (FEMU). Il en ressort que l'identification avec l'erreur en relation de comportement modifiée est globalement améliorée. Basée sur le principe des problèmes de poursuite, une variante de la méthode a été également proposée, ayant comme caractéristique de considérer le comportement comme fiable, et, à la différence des approches FEMU, de faire appel à l'état adjoint.
- Dans le dernier chapitre, on s'intéresse à l'identification de modules élastiques locaux à partir d'exemples numériques hétérogènes, puis de données expérimentales, en comparant entre elles différentes méthodes de résolution.



# Chapitre 1

## Identification et fiabilité des mesures - État de l'art

*Ce premier chapitre présente le contexte général de l'étude, à savoir l'identification des propriétés élastiques de matériaux hétérogènes. Après une présentation du cadre général, le problème soulevé par les perturbations de mesure de champs est d'abord introduit, pour passer ensuite à la présentation de quelques approches inverses dédiées aux mesures de champs.*

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Motivation et cadre général de l'étude . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>1.2</b>	<b>Identification à partir d'essais hétérogènes et matériaux composites . .</b>	<b>6</b>
<b>1.3</b>	<b>Aspects Mesures de Champs 2D . . . . .</b>	<b>7</b>
1.3.1	Limites des mesures extensométriques . . . . .	7
1.3.2	La corrélation d'images numériques . . . . .	7
<b>1.4</b>	<b>Problème des perturbations et fiabilité des mesures . . . . .</b>	<b>10</b>
1.4.1	Les erreurs entre chaîne d'acquisition et corrélation d'images . . .	10
1.4.2	Identification et gestion des incertitudes . . . . .	12
<b>1.5</b>	<b>Cadres d'identification et approches inverses . . . . .</b>	<b>13</b>
1.5.1	Quelques grandes familles de problèmes inverses . . . . .	13
1.5.2	Nature mal posée des problèmes direct et inverse . . . . .	16
1.5.3	Approches par champs auxiliaires . . . . .	17
1.5.4	Approches par minimisation . . . . .	18
1.5.5	L'erreur en relation de comportement modifiée . . . . .	21
<b>1.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>22</b>

---

## 1.1 Motivation et cadre général de l'étude

Le cadre de l'étude concerne l'identification de propriétés élastiques à partir d'essais hétérogènes. Ces essais peuvent coupler à la fois des effets matériau, chargements complexes, géométrie, ou encore des effets structure. De telles configurations sont difficilement exploitables par le biais de jauges de déformations ou d'extensomètres puisque l'hypothèse d'homogénéité des déformations n'est plus valable. Le recours aux mesures de champs cinématiques devient alors l'option la plus pertinente, permettant un accès aux champs cinématiques qui couvrent la surface de l'échantillon pour une étude en deux dimensions spatiales.

Dans le contexte de l'identification basée sur le dialogue essai-calcul, une modélisation de l'expérience est souvent requise et se doit d'être la plus représentative possible. Ayant choisi les mesures de champs comme donnée d'entrée, la question soulevée par la connaissance imparfaite des conditions aux limites et l'aspect incertain des mesures en général subsiste car elle conditionne la qualité du modèle numérique et donc de l'identification.

Certaines stratégies se basent sur les mesures de champ pour définir les conditions aux limites en s'appuyant sur les mesures de déplacement sur les bords, évitant ainsi d'ajouter des hypothèses supplémentaires et pas très réalistes, notamment sur la répartition de l'effort sur les bords, ou encore sur sa transmission sur la frontière de la zone de calcul dans le cas où celle-ci ne se superpose pas avec le vrai bord de l'échantillon sollicité en effort. De telles conditions aux limites sont souvent imposées de manière forte lors de l'écriture du problème d'identification. Hormis les conditions sur la frontière, ces perturbations sont toutefois prises en compte dans la suite du processus par plusieurs stratégies d'identification. Dans le cadre de notre étude, on propose d'apporter plus de robustesse à l'identification de propriétés matérielles élastiques, par l'introduction d'une stratégie d'identification qui tient compte de l'aspect incertain des mesures et des conditions aux limites.

## 1.2 Identification à partir d'essais hétérogènes et matériaux composites

En ingénierie mécanique, les essais expérimentaux constituent l'outil clef permettant d'obtenir des données qui relatent le comportement de l'éprouvette et qui permettent de remonter à celui du matériau. Ces essais passent de la forme la plus simple, à savoir une sollicitation simple et un matériau homogène, à la forme la plus complexe qui peut regrouper des aspects matériau hétérogène, chargement complexe ou encore essais sur structures. Ces derniers, du fait de leur coût élevé, sont le plus souvent des essais de validation, menés par de grandes industries. En plus de la validation, ils peuvent servir à obtenir des sollicitations pour mener des essais à une plus petite échelle ou pour des simulations numériques. Par rapport à l'essai réel, ces sollicitations sont souvent confrontées au problème de la représentativité, et rejoignent la question soulevée par l'imperfection des conditions aux limites.

Par ailleurs, l'aspect hétérogène pouvant être principalement lié à la composante matériau, il convient de prêter attention à une catégorie en particulier. L'allègement et l'optimisation des structures industrielles augmentent leur complexité et nécessitent des stratégies de caractérisation de plus en plus fines. Un type de matériaux parmi les plus utilisés de nos jours est le matériau composite. La complexité de ce dernier dépend essentiellement de son architecture et de sa composition, qui conditionnent ensuite la complexité des modèles

permettant de décrire son comportement avec fidélité. Cela passe par les composites stratifiés, souvent étudiés avec l'hypothèse d'homogénéité des contraintes et des déformations, sous chargement simple, à des multi-matériaux soumis à des chargements complexes. À l'échelle macroscopique ou mésoscopique, des techniques d'homogénéisation sont souvent utilisées afin d'intégrer de manière pertinente les informations élémentaires dans la modélisation du matériau et le calcul de la structure [Gay, 2005]. Les composites sont la plupart du temps anisotropes et hétérogènes. On distingue deux grandes familles de composites classées selon la performance : les composites dits de "grande diffusion", orientés vers une production de grande série et ayant des propriétés mécaniques faibles, et les composites dits "haute performance", présentant des coûts élevés et employés principalement dans l'aéronautique et le spatial.

L'exploitation d'essais mécaniques appliqués à certaines architectures complexes de matériaux composites fait souvent apparaître des champs de déformation hétérogènes. Dans ce contexte, l'hypothèse d'homogénéité des déformations, indispensable pour les méthodes de caractérisation classiques, devient aberrante. L'identification de propriétés hétérogènes devient nécessaire pour appréhender le comportement local du matériau.

Dans cette étude, on propose une méthode d'identification qui, en plus de son sens physique fort, permettra d'identifier des propriétés élastiques à partir de données expérimentales provenant d'essais hétérogènes sur des composites. La stratégie proposée présente l'avantage de tenir compte à la fois des erreurs de modèle et des erreurs de mesure.

## 1.3 Aspects Mesures de Champs 2D

Classiquement, lorsqu'une étude est menée sur un matériau, par exemple pour déterminer ses différents modules élastiques ou paramètres d'endommagement, des jauges extensométriques sont utilisées. Les mesures faites à partir de ces jauges présentent certaines limites qui peuvent, selon le cas étudié, les rendre insuffisantes, voire inappropriées.

### 1.3.1 Limites des mesures extensométriques

L'utilisation des jauges s'avère insuffisante dans certains cas où les champs de déformations présentent de forts gradients induits par une géométrie particulière de l'éprouvette ou encore dans le cas d'une sollicitation complexe ou dynamique. Auquel cas, une seule identification locale ne permet pas de rendre compte du comportement du matériau et il devient nécessaire d'étudier les variations des propriétés mécaniques pour le développement du calcul des structures hétérogènes.

Les jauges de déformations ne permettent d'obtenir qu'une information moyennée, typiquement sur une surface de quelques  $\text{mm}^2$  à l'emplacement où elles sont situées. De plus, les mesures par jauges ne sont valables que dans une certaine plage de déformation. Les composants servant à leurs fixations (colles, vernis. . .) nécessitent de multiples opérations manuelles de l'expérimentateur, ce qui augmente les risques d'erreur de mesure, et sont très "opérateur-dépendant".

### 1.3.2 La corrélation d'images numériques

Depuis plus d'une vingtaine d'années, des méthodes alternatives basées sur des acquisitions optiques sans contact comme le suivi par corrélation d'images ne cessent de se développer. En parallèle, le développement rapide des appareils photos et des caméras numériques (CCD, CMOS. . .) va de pair avec l'essor de ces méthodes et leur fait gagner du terrain dans le monde de la mécanique des solides, révolutionnant ainsi la besogne des

mécaniciens et ouvrant de nouvelles perspectives dans la caractérisation des matériaux en mécanique des solides [Kobayashi, 1987]. Les principales techniques sont la photoélasticité, le moiré interférométrique, l'interférométrie holographique et de speckle, la méthode de grille et la corrélation d'images numériques (CIN).

La CIN donne accès, non plus à des valeurs scalaires correspondant à une information locale, mais à des champs de mesure et donc à des informations beaucoup plus riches (l'équivalent de très nombreux capteurs), typiquement, des grilles de données de taille  $200 \times 200$  pixels, capables de rendre compte du comportement du matériau, plus particulièrement dans le cas d'essais hétérogènes. La gamme d'échelle d'observation est très large, allant de la microscopie optique via l'exploitation de techniques comme la microscopie électronique à balayage (MEB) [Doumalin et Bornert, 2000, Sutton *et al.*, 2006] ou la microscopie à force atomique (AFM) [Chasiotis et Knauss, 2002, Han *et al.*, 2010], jusqu'aux images de satellite [Scambos *et al.*, 1992, Leprince *et al.*, 2007], et confère à cet outil une grande polyvalence [Rastogi, 2000]. Un compromis doit néanmoins être trouvé entre la résolution de l'image (richesse de la mesure) et la résolution spatiale. Se répandant de plus en plus dans le milieu industriel, la CIN pourrait permettre d'accéder à des mesures dans des gammes de vitesse de déformation où les jauges présenteraient des difficultés de mise en œuvre (collage, dimension de la zone à observer, etc.), par l'utilisation de caméras rapides, voire ultrarapides, permettant d'acquérir plusieurs millions d'images par seconde. En particulier, la détection des hétérogénéités des matériaux composites est devenue possible grâce aux techniques de Mesures de Champs (MdC) de déplacements ou de déformation. De plus, les dernières générations d'appareils numériques donnent accès à une grande quantité d'informations. En effet, chaque pixel du capteur CCD apporte une information codée sur un nombre de bits définis par la sensibilité du capteur (typiquement 8, 12 et 16 bits). Chaque image brute est stockée sous la forme d'une matrice 2D dont chaque case a une valeur que l'on appelle "niveau de gris".

La méthode de corrélation d'images numériques a été initiée au début des années 1980 grâce aux travaux de [Peter et Ranson, 1982] sur la détermination des déplacements plans et des déformations d'un solide à partir d'images numériques d'ultrasons. Plusieurs améliorations ont été apportées dans les années suivantes, en ce qui concerne notamment l'algorithme de détection sub-pixel basé sur l'interpolation du déplacement [Sutton *et al.*, 1983]. Dans la suite, l'utilisation de la transformée rapide de Fourier ou *Fast Fourier Transform* (FFT) pour la détermination des déplacements s'est avérée rapide et précise pour les petites déformations planes [Chen *et al.*, 1993]. Enfin, les travaux de [Hild, 2002], présentent une évolution du traitement des images par la corrélation pour des analyses en très grandes déformations, grâce à une nouvelle approche multiéchelle.

La CIN consiste à comparer deux images pour estimer les déplacements des points d'une image déformée par rapport à une image de référence. Les algorithmes de corrélation utilisent les images sous forme de matrices de niveaux de gris comme données d'entrée. Pour pouvoir appliquer cette méthode, il faut que la surface observée de l'échantillon testé dispose d'un marquage. Selon le type de matériau, un mouchetis est soit présent de manière naturelle soit déposé manuellement à l'aide de spray de peinture noire sur la surface peinte préalablement en blanc. L'opération de corrélation consiste alors à rechercher, dans l'image de l'échantillon déformé, le même mouchetis que dans l'image de référence. Un point de coordonnées  $(x, y)$  de l'image initiale de taille  $\Omega$  est caractérisé par une valeur  $f(x, y)$  qui représente son niveau de gris. Cette valeur est comprise entre 0 et 256 (pour un capteur 8 bits). Après déformation, le domaine  $(x, y)$  se trouve en  $(X, Y)$  tel que :

$$X = x + u(x, y) \quad (1.1)$$

$$Y = y + v(x, y) \quad (1.2)$$

avec  $u, v$  les composantes du déplacement recherché. Pour les déterminer par analyse

d'images, on compare la fonction  $f(x, y)$  de l'image de référence avec la fonction  $g(X, Y)$  de niveau de gris de l'image déformée. On montre alors que la fonction de corrélation  $C(\alpha, \beta)$  est maximale pour  $\alpha = u$  et  $\beta = v$ , avec :

$$C(\alpha, \beta) = \int_{\Omega} f(x, y) \cdot g(x + \alpha, y + \beta) dx' dy' \quad (1.3)$$

La recherche du maximum du coefficient de corrélation permet de déterminer le déplacement d'un point  $(x, y)$ . Par ailleurs, la précision de la mesure est de l'ordre du *subpixel* grâce à l'utilisation d'algorithmes d'interpolation qui permettent d'évaluer les translations locales.

Plusieurs logiciels commerciaux et universitaires dédiés ont vu le jour. La plupart de ces codes utilisent des méthodes de corrélation dites "locales", qui consistent à utiliser la méthode de la corrélation croisée, basée sur l'analyse de Fourier [Gasquet et Witomski, 2000]. Celle-ci donne une réponse maximale quand l'image déformée et l'image de référence corrigée du déplacement recherché deviennent superposables au mieux (1.3). Cette opération est faite en pratique sur une série d'images qui forment chaque région d'intérêt sélectionnée. Le champ cinématique recherché est alors décomposé en une multitude de transformations locales indépendantes définies sur les images préalablement choisies (comme un mouvement de corps rigide, ou une description enrichie). Ce type de description appelle trois choix : l'ordre d'interpolation de la transformation, la taille des images ou *zone of interest* (ZOI) et le pas d'échantillonnage de la région d'intérêt. Ces choix ne sont pas anodins et influencent la qualité du champ cinématique recherché, ce qui souligne le caractère opérateur-dépendant de la CIN [Bornert *et al.*, 2009, Bornert *et al.*, 2011].

Dans les méthodes de corrélation dites "globales", la région d'intérêt n'est pas découpée en images, mais traitée en une seule fois. Parmi les logiciels de corrélation globales, on peut citer l'outil CORRELI<sup>Q4</sup> [Hild et Roux, 2006] qui a été développé au *LMT-Cachan*. Une de ses spécificités est qu'il permet d'obtenir un champ de déplacement de type "élément fini", de même nature que les champs provenant des simulations numériques. Il est néanmoins possible d'utiliser d'autres types de champs, comme les champs isogéométriques par exemple [Elguedj *et al.*, 2011]. Cet outil repose en particulier sur l'hypothèse de continuité du champ de déplacement mesuré. La continuité du champ mesuré permet d'évaluer l'erreur de corrélation en faisant la différence brute entre l'image de référence et l'image déformée corrigée du champ de déplacement mesuré. Ce champ d'erreur est un indicateur local de la qualité de la corrélation.

**L'approche multiéchelle** La technique de corrélation de l'outil CORRELI<sup>Q4</sup> est basée sur une détermination multiéchelle robuste, où le champ de déplacement est déterminé une première fois sur une image de résolution grossière, puis de plus en plus fine via des évaluations itératives. La fonction  $f(x, y)$ , représentant l'image de référence, est supposée différentiable, puis la fonction  $g(x, y)$  de l'image déformée est représentée par un développement de Taylor au premier ordre. L'utilisation du développement de Taylor repose sur l'hypothèse que les déplacements restent petits. Pour une texture fine de l'image et un déplacement initial important, cette condition n'est plus satisfaite. Pour pallier ce problème, une étape de *coarse-graining* est utilisée dans CORRELI<sup>Q4</sup>, et consiste à agréger les pixels en "super-pixels" en moyennant les niveaux de gris des pixels contenus dans chaque "super-pixel". Des images de  $f$  et  $g$  sont générées pour des "super-pixels" de taille  $2 \times 2$  pixels,  $4 \times 4$  pixels,  $8 \times 8$  pixels et  $16 \times 16$  pixels. Le déplacement est ensuite calculé en commençant par l'échelle la plus grossière. Des itérations s'en suivent en utilisant une image  $g$  corrigée à partir du déplacement précédent. Les itérations s'arrêtent quand le déplacement total ne varie plus au delà d'une tolérance prédéfinie.

À l’instar des calculs éléments finis classiques, les algorithmes de CIN contiennent plusieurs paramètres qui doivent être ajustés car ils impactent directement les champs cinématiques obtenus. Cela constitue un changement important par rapport à l’utilisation des jauges préalablement étalonnées ou d’extensomètres (qui nécessitent tout de même le choix de leur taille). C’est à l’utilisateur de faire les “bons” choix en se basant sur le type d’essai et les différents critères d’incertitudes dont il dispose.

Par ailleurs, il faut noter que l’évaluation des champs cinématiques ne constitue pas le fond du problème dans le domaine de l’identification, car c’est plutôt leur utilisation pour appréhender les paramètres intrinsèques du matériau qui vont caractériser le comportement mécanique de ce dernier. Avant de passer à l’étape d’identification, il convient d’aborder un problème amont qui est celui des incertitudes de mesure. En effet, les mesures expérimentales sont toujours entachées d’erreur de perturbations. Les sources des perturbations sont multiples et vont des erreurs de manipulation aux incertitudes liées aux moyens de mesure, notamment les erreurs de corrélation dans le cas particulier des mesures de champs.

Par ailleurs, certaines applications nécessitent les déformations. Elles peuvent être qualitatives comme la détection des endommagements locaux ou quantitatives comme la méthode des champs virtuels [Grédiac *et al.*, 2006], et il est possible d’estimer les champs déformations à partir des déplacements obtenus dans le plan étudié, hormis les méthodes permettant d’obtenir directement les champs de déformation [Francis *et al.*, 2007, Badulescu, 2010]. Cela demande d’en estimer numériquement le gradient, souvent à partir de schémas de type différences finies, ce qui s’avère très sensible aux perturbations sur les mesures. Des méthodes de filtrage peuvent être utilisées pour minimiser cet effet sur les champs de déformation [Avril *et al.*, 2008b], et certains filtres sont proposés dans quelques outils de corrélation comme le logiciel VIC-2D [Correlated\_solutions, 2013] utilisant une approche de corrélation locale.

## 1.4 Problème des perturbations et fiabilité des mesures

En sciences expérimentales, il n’existe pas de mesures exactes. Celles-ci ne peuvent être qu’entachées d’erreur d’incertitudes liées au protocole expérimental utilisé, la qualité des instruments de mesure ou le rôle de l’opérateur.

### 1.4.1 Les erreurs entre chaîne d’acquisition et corrélation d’images

L’évaluation des sources d’erreurs sur la chaîne d’acquisition enveloppe les instruments de mesure en se basant sur les données fournies par le constructeur telles que la classe de l’appareil et le calibre. On parle d’erreurs systématiques quand il s’agit de réglage du zéro des appareils, des erreurs de méthode ou encore du vieillissement des composants. Lors de prises de clichés avec un appareil photo/caméra numérique, les erreurs proviennent notamment de la synchronisation des prises d’images avec la mesure de l’effort, de la manipulation du trépied et de la source lumineuse. Les erreurs dites aléatoires sont principalement celles dues à l’appareil de mesure ou les conditions extérieures (température et dilatation, pression atmosphérique, humidité...).

Les sources de perturbations en amont de l’étape de corrélation peuvent être classées comme suit :

1. Erreurs systématiques de positionnement

## 2. Qualité de la surface observée (erreur aléatoire)

La qualité des déplacements calculés par CIN est liée, entre autres, à la qualité de la texture de l'image. L'opération de marquage de la surface observée doit donc être faite avec soin, de sorte que l'histogramme des niveaux de gris des clichés représente une distribution avec toute la plage de valeurs (de 0 à 256 pour des images codées en 8 bits), en d'autres mots, l'image doit contenir suffisamment d'informations pour mener une analyse correcte derrière.

## 3. Les bruits intrinsèques (erreurs systématiques), produits par la chaîne de détection (le capteur CCD, les étages d'amplification, le numériseur, le bruit d'obscurité (ou thermique)...) )

Les travaux de [Sutton *et al.*, 1999] montrent que la précision des déplacements obtenus par CIN dépend notamment du niveau de codage de la caméra CCD. Plus la numérisation de l'image se fait sur un nombre élevé de bits, plus le nombre des niveaux de gris présents dans l'image sera important. Par conséquent, la texture bénéficie de plus de motifs et permet l'obtention de meilleures performances. La taille du capteur CCD définit le nombre de sous-échantillonnages de l'image lors de la numérisation. Ceci signifie donc que l'augmentation du nombre de pixels pour l'enregistrement aboutit à une augmentation de la résolution spatiale des données optiques et, potentiellement, des performances liées à la richesse des mesures. Un critère de sélection est fixé pour savoir si le nombre de niveaux de gris est suffisant ou pas : si une photo est prise sur  $n$  bits alors cette photo doit contenir au minimum aux alentours de  $2^n$  niveaux de gris, ce qui signifie que la dynamique de l'image est utilisée de manière optimale.

## 4. Le bruit de signal (photon), est relatif à l'émission de la lumière au cours de l'essai [Holst, 1998] et proportionnel à la racine carrée du signal. La source lumineuse utilisée, qui peut être naturelle (la lumière du jour) ou artificielle, peut selon le cas, induire un bruit de photon et/ou un bruit thermique. Le mouvement de corps rigide pendant l'essai peut notamment changer l'éclairage de la zone observée en la décalant. La maîtrise de l'éclairage d'une part, et le déplacement du système d'observation d'autre part, peuvent combler cet artefact, mais le centrage sur la zone observée peut être peu précis.

## 5. Le bruit de traitement numérique des images, qui est la somme quadratique du bruit de signal et du bruit de lecture de la caméra, corrigé du bruit d'offset.

6. Le déplacement hors-plan qui provoque des erreurs significatives dans la mesure des déplacements plans. Afin de s'en affranchir, [Sutton *et al.*, 1999] proposent l'utilisation de lentilles à grande distance focale, mais cette solution reste insuffisante dans le cas de grands déplacements hors-plan. Une autre solution consiste à utiliser un objectif télécentrique [Sutton *et al.*, 2008] qui permet de ne capter que les déplacements dans le plan d'observation, mais limite forcément la taille de la région d'étude. Par ailleurs, dans le cadre de mesures de champs 3D, la stéréo-corrélation [Garcia, 2001, Orteu, 2002] permet d'éviter ce problème puisqu'elle tient compte, justement, des déplacements hors-plan.

## 7. Enfin, l'utilisation de mesures en surface ne permet pas de rendre compte du comportement à l'intérieur de la matière. Cela peut donc introduire un certain nombre de biais. Dans ce sens, l'exploitation de mesures volumiques et leur confrontation à des modèles 3D est plus rigoureuse.

En plus des erreurs de mesures, viennent s'ajouter les erreurs de calcul relatives à l'exploitation des clichés par corrélation d'images. Quelques logiciels (ex : CORRELI) contiennent des outils d'analyse de texture. Une analyse détaillée de ces erreurs est disponible dans

[Bornert *et al.*, 2009], et montre qu'il existe différents régimes d'erreurs contrôlés par les paramètres de corrélation. Les principaux paramètres qui régissent les erreurs de corrélation sont :

1. Le choix du schéma d'interpolation des niveaux de gris, permettant la localisation sub-pixel, peut modifier sensiblement les résultats. Différentes interpolations peuvent être utilisées : de type polynomiale, B-spline ou encore de type transformée de Fourier ou transformée en ondelettes.
2. Le degré de la base de projection dans le cas de déplacements type éléments finis. Dans ce cas, l'erreur est contrôlée par l'écart entre les fonctions de forme et le vrai déplacement préalablement imposé.
3. La taille des imagerie (ZOI), qui conditionne la résolution spatiale en déplacement. Typiquement, une grande taille de ZOI permet de réduire le bruit puisque ce dernier est moyenné sur une plus grande zone. Cependant, la résolution du champ obtenu s'en trouve réduite. Un compromis doit donc être fait entre les perturbations de mesure et la résolution spatiale souhaitée. Ce choix peut dépendre de la nature du phénomène à observer. Si l'étude concerne, par exemple, le suivi d'un front de fissure ou s'intéresse à la cinématique autour d'une singularité, une bonne résolution spatiale des champs cinématiques est souhaitable afin de détecter ces informations de manière précise. À l'opposé, si l'on mène un essai homogène, une taille de ZOI plus grande permet de réduire le bruit sans forcément perdre les informations mécaniques requises. En résumé, une taille petite des éléments permet de mieux capter la cinématique sur la surface de l'éprouvette mais augmente l'incertitude sur le champ de déplacement mesuré. Un compromis entre le moyennage des perturbations de mesures et la résolution spatiale du champ cinématique soit alors être trouvé, en fonction du niveau de bruit, de la texture, du phénomène à observer, etc.

Les outils de corrélation qui calculent des champs globaux, à l'instar de CORRELI, présentent l'avantage de pouvoir calculer l'incertitude *a priori*, en calculant moyenne et écart-type de l'erreur de corrélation. Cela est fait en imposant un déplacement artificiel et connu à l'image de référence et en le comparant au résultat de corrélation de l'image ainsi déformée, pour différentes tailles de ZOI. De la même manière, la sensibilité de la corrélation vis-à-vis du bruit peut être évaluée par le rajout d'un bruit connu niveaux de gris. Les études de [Hild et Roux, 2006, Roux et Hild, 2006] montrent que pour un bruit blanc gaussien, la variation de l'écart-type moyen de l'erreur déplacement, calculé pour différentes tailles de ZOI, est linéaire par rapport à l'amplitude du bruit et inversement proportionnelle à la taille de la ZOI.

4. Le décalage entre les zones d'étude consécutives, qui, pour une taille d'imagerie fixée, définit la résolution spatiale de corrélation. Ce paramètre influence essentiellement la qualité des champs de déformation obtenus par différentiation des champs de déplacement. En général, il est pris inférieur ou égal à la taille de la zone d'étude. En particulier, un décalage plus petit que la taille de la ZOI se traduit par une "correction" du champ calculé au niveau des zones de recouvrement des imagerie. Ce point ne concerne que les approches locales de corrélation.

### 1.4.2 Identification et gestion des incertitudes

Le problème des incertitudes de mesure est un problème central quand on parle d'identification. Il est commun à l'ensemble des stratégies d'identification, en particulier dans le domaine élastique où le rapport signal / bruit est petit, ce qui conduit à l'altération des

résultats d'identification. Cela devient encore plus problématique quand les déplacements sont dérivés, dans le cas des méthodes nécessitant les déformations, hormis le cas des techniques qui procurent directement les dérivées des déplacements comme, par exemple, les méthodes de grille [Badulescu, 2010] et la technique de shearographie [Francis *et al.*, 2007]. En effet, les petites erreurs de mesure peuvent induire de grandes erreurs dans le calcul des dérivées à cause de la dérivation du bruit [Geers *et al.*, 1996].

La question qu'on se pose est alors : comment gérer les perturbations de mesure ? Deux réponses ont été proposées dans la présente étude :

1. En amont, par le filtrage des mesures. Dans cette partie, l'impact du filtrage sur l'identification de paramètres matériels en élasticité linéaire est étudié sous certaines hypothèses, et est basé sur la mise en place d'une relation entre perturbations de mesure et résultats d'identification. Cette piste requiert la connaissance *a priori* des perturbations, ce qui peut être laborieux au vu des multiples sources d'erreur.
2. Dans la formulation du problème inverse. Dans cette deuxième partie, les incertitudes de mesure sont gérées pendant le processus d'identification, en se plaçant dans un cadre déterministe ou non déterministe.

La prochaine partie aborde la problématique d'identification en mécanique, et quelques stratégies d'identification seront présentées.

## 1.5 Cadres d'identification et approches inverses

Plusieurs méthodes d'identification ont été adaptées ou entièrement dédiées à l'exploitation des mesures de champs dans le cadre de l'élasticité linéaire afin de caractériser les propriétés élastiques de matériaux hétérogènes. Quelques procédures nécessitent des champs de déformation alors que d'autres requièrent les champs de déplacement.

Plusieurs de ces méthodes utilisent des techniques d'optimisation vis-à-vis du bruit. On peut citer la méthode de l'écart à l'équilibre reconditionnée, ou *Reconditioned Equilibrium Gap Method* (EGM) [Roux et Hild, 2008] qui consiste à s'affranchir de la dérivation des champs de déplacement perturbés, la méthode des champs virtuels, ou *Virtual Field Method* (VFM) [Grédiac *et al.*, 2006], basée sur le principe du travail virtuel et permettant de construire des champs virtuels optimaux vis-à-vis du bruit, la corrélation d'images numériques intégrée, ou *Integrated Digital Image Correlation* (I-DIC) [Réthoré *et al.*, 2009, Leclerc *et al.*, 2009] qui filtre le bruit pendant l'opération de corrélation d'images en rajoutant des contraintes mécaniques basées sur des informations *a priori* sur les champs.

[Avril *et al.*, 2008a, Grédiac et Hild, 2012] récapitulent plusieurs stratégies d'identification dans le cadre de l'identification de paramètres associés à des modèles de comportement. Ces stratégies ont, d'ores et déjà, démontré leur efficacité à réduire l'effet du bruit, mais souvent pour des niveaux assez bas ou des matériaux peu complexes. Quelques grandes familles de problèmes d'identification et de stratégies de résolution par approche inverse sont succinctement présentées ci-après.

### 1.5.1 Quelques grandes familles de problèmes inverses

De manière générale, pour un problème direct donné, un problème inverse consiste à déterminer une caractéristique de ce problème à partir de grandeurs associées aux solutions du problème direct. En pratique, il faut mesurer ces grandeurs. La caractéristique recherchée peut être de nature géométrique ou matérielle, une condition aux limites ou un chargement, ou encore des conditions initiales dans le cas de la dynamique transitoire, à partir de mesures pouvant être de nature effort, déplacement, déformation, accélération

ou température. Pour ce faire, il faut un modèle et un jeu d'hypothèses, un choix des quantités mesurées, et une paramétrisation des quantités recherchées.

L'identification de paramètres matériels se réfère souvent à un problème inverse d'identification [Bonnet et Constantinescu, 2005]. Plusieurs ouvrages offrent une présentation assez complète de ses caractéristiques et abordent plusieurs approches de résolution [Tikhonov et Arsenin, 1977, Badeva et Morozov, 1991, Bui, 1993, Bonnet et Constantinescu, 2005]. Dans ce qui suit, on va présenter quelques grandes familles de problèmes inverses qui seront illustrées avec des exemples concrets, tels qu'ils interviennent dans les sciences de l'ingénieur. Cette liste n'est pas exhaustive.

### 1.5.1.1 Identification de propriétés matérielles

Dans le cadre suivant, le but est de caractériser le comportement du matériau étudié. Dans l'absolu, ce dernier peut être homogène ou hétérogène, isotrope ou anisotrope, et on cherche à identifier les propriétés matérielles qui paramètrent sa loi de comportement. Si on se place dans le cas d'un matériau homogène soumis à un essai homogène (comme la traction simple), les mesures sont généralement : l'effort global  $F$  et une mesure cinématique (la déformation  $\varepsilon$  avec une jauge, ou l'allongement  $\delta l$  avec un extensomètre). Pour la résolution de ce type de problème, certaines hypothèses sont nécessaires et dépendent de la formulation utilisée. Ici, dans le cadre des petites perturbations (HPP), on peut faire l'hypothèse d'homogénéité du comportement et des contraintes dans la zone utile de l'éprouvette étudiée. La contrainte se calcule alors comme  $\sigma = F/S$ , avec  $S$  la section de l'éprouvette. Pour un matériau ductile, c'est la contrainte vraie qui est en général calculée, tenant compte de la variation de section au cours de l'essai. Elle est égale à la charge rapportée à la section instantanée. L'identification des  $p$  paramètres matériels se fait classiquement par la minimisation de l'écart entre les mesures et la modélisation des grandeurs associées.

D'autres types d'essais consistent à maîtriser les hétérogénéités comme les essais sur un matériau homogène soumis à un chargement complexe, les essais sur structure ou parties de structure, ou encore des essais types comme la traction sur une plaque trouée [Silva *et al.*, 2007] et les essais de cisaillement Iosipescu [Arcan, 1984], où l'hétérogénéité provient d'une singularité géométrique. L'hétérogénéité peut aussi provenir de la texture du matériau, auquel cas, l'association avec un essai sous sollicitation homogène comme la traction constitue un premier pas pour l'étudier de manière simple. L'utilisation des mesures de champs prend tout son intérêt dans l'exploitation d'essais hétérogènes, tous cas de figure confondus.

### 1.5.1.2 Complétion de données au bord

Dans ce type de problème, on considère un domaine d'étude  $\Omega$  avec un bord  $\partial\Omega$  se décomposant en trois parties :  $\partial_f\Omega$ ,  $\partial_u\Omega$  et  $\partial_\emptyset\Omega$ . Des conditions aux limites mixtes sont mesurées sur deux parties de la frontière et sont de type Neumann sur  $\partial_f\Omega$  et de type Dirichlet sur  $\partial_u\Omega$ . Ces deux parties de la frontière se chevauchent de sorte que des informations surabondantes sont disponibles sur  $\partial_{uf}\Omega = \partial_u\Omega \cap \partial_f\Omega \neq \emptyset$ . On cherche ici à déduire les conditions aux limites sur la partie  $\partial_\emptyset\Omega$ , où l'on ne dispose d'aucune donnée, à partir des informations surabondantes sur le bord.

Une variante classique de ce type de problème est rencontrée en thermique. Considérons un domaine  $\Omega$  avec une conductivité thermique  $\lambda$  homogène, et un bord de domaine qui se divise en deux parties  $\partial_{uf}\Omega$  et  $\partial_\emptyset\Omega$ . Des données de température ( $T = T_d$ ) et de flux ( $\underline{q} \cdot \underline{n} = \Phi_d$ ) sont disponibles sur le bord  $\partial_{uf}\Omega$ , avec  $\underline{n}$  la normale extérieure, alors que les données sur le bord  $\partial_\emptyset\Omega$  sont à déterminer. Ainsi, les caractéristiques de ce problème de



aux champs de contraintes. Les grandeurs thermoélastiques peuvent être utilisées pour évaluer et améliorer la prédictivité en contraintes des modèles en les confrontant aux grandeurs équivalentes calculées à partir d'un modèle éléments finis.

### 1.5.2 Nature mal posée des problèmes direct et inverse

La résolution du problème inverse passe en général par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite problème direct, qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement.

Jacques Hadamard a proposé une définition des problèmes (direct ou inverse) bien posés qui rassemble un certain nombre de conditions pour que leur résolution soit robuste. Ainsi, un problème inverse est bien posé au sens d'Hadamard [Hadamard, 1902] si :

- (i) une solution au problème existe ;
- (ii) cette solution est unique ;
- (iii) la solution est continue par rapport aux données.

Si l'un de ces trois points n'est pas vérifié, le problème est dit mal posé.

Les origines du caractère mal posé du problème direct sont multiples et peuvent affecter une ou plusieurs conditions de la définition de Hadamard. Il peut s'agir d'un problème de conditions aux limites. Disposant de mesures dans le domaine étudié, des données sur le bord du domaine peuvent être partiellement ou totalement indisponibles. Cela a pour conséquence d'altérer la condition d'existence.

Une autre source d'altération du caractère bien posé du problème est l'incertitude des mesures ayant pour conséquence l'existence de plusieurs solutions ainsi qu'une possible instabilité de la solution, selon la nature du problème, c'est-à-dire qu'une faible perturbation des données peut conduire à une forte perturbation de la solution. Cet aspect est fortement lié à la sensibilité de la méthode d'identification utilisée vis-à-vis des perturbations, et est très problématique dans la mesure où il ne serait plus possible d'approcher de façon satisfaisante la solution du problème inverse. Dans le cas où les conditions aux limites ne sont pas directement mesurées (pas d'incertitudes de mesures), les définir à partir d'hypothèses, en s'appuyant sur la mesure d'une grandeur globale et une hypothèse de répartition de cette grandeur sur une partie du bord du domaine étudié par exemple, introduit une erreur de modélisation (en plus de celle du modèle de comportement). La richesse des mesures permet par ailleurs de mieux conditionner le problème d'identification. Cette richesse peut être spatiale, comme le cas des mesures de champ, temporelle dans le cas des essais dynamiques, ou encore spatio-temporelle.

Afin de résoudre un problème inverse mal posé, il faut le transformer en un problème bien posé. Plusieurs pistes de régularisation sont possibles :

- (i) Existence :
  - élargir l'ensemble des paramètres ;
  - reformuler le problème en un problème de minimisation pour que la réponse du modèle colle au mieux aux mesures, selon un critère qui reste à définir.
- (ii) Unicité :
  - si plusieurs solutions existent :
    - mettre en place un critère de choix ;
    - reformuler le problème pour favoriser certaines solutions par rapport à d'autres, par l'ajout d'informations supplémentaires (informations *a priori*) ;
    - accepter l'existence de plusieurs solutions, par exemple en modélisant la solution comme une densité de probabilités. Pour cela, on pourra se référer aux travaux menés en recalage par approches bayésiennes [Tarantola, 2005, Zhang, 2010] ;

- repenser l'essai pour qu'il soit discriminant.
- (iii) Continuité par rapport aux données :
  - réduire la taille de l'espace des paramètres (troncature) ;
  - régularisation : rajout d'un terme de minimisation d'énergie afin de discriminer les oscillations, ou d'un terme de distance par rapport à une valeur de référence des quantités physiques recherchées.

De surcroît, le caractère mal posé du problème inverse peut être dû à une pauvreté du modèle qui n'est pas capable de représenter les phénomènes physiques mis en jeu, en plus de la perturbation des conditions aux limites mesurées. Cela pose souvent des problèmes d'unicité et de continuité de la solution. Il est donc parfois nécessaire d'utiliser, en plus de l'approche inverse, des techniques de régularisation pour stabiliser la résolution.

Les approches de résolution dites directes le sont dans la mesure où elles résolvent le problème inverse sans faire appel à la résolution du problème direct associé ou de façon analytique. Par ailleurs, quand l'identification par approche inverse variationnelle directe admet une solution, celle-ci n'est pas forcément unique et de plus, elle peut correspondre à un modèle pas très réaliste. Il peut donc être intéressant d'utiliser une méthode en mesure de quantifier l'erreur qui est faite sur le modèle et d'en tenir compte dans le processus d'identification.

En mécanique, les approches de résolution inverses peuvent se regrouper en deux grandes familles : les approches par champs auxiliaires et les approches variationnelles.

### 1.5.3 Approches par champs auxiliaires

La résolution par champs auxiliaires est une formulation faible du problème mécanique, potentiellement variationnelle, où on choisit des champs test particuliers. Elle consiste à utiliser la connaissance de l'opérateur qui décrit le phénomène physique que l'on emploie pour formuler le problème inverse. De façon plus précise, on construit une forme linéaire qui, lorsqu'elle est appliquée à des champs particuliers, fournit des informations sur la quantité cherchée.

L'idée d'utiliser des champs auxiliaires pour obtenir des informations sur la quantité recherchée a donné lieu à plusieurs méthodes d'inversion. Deux d'entre-elles seront présentées ci-après.

#### 1.5.3.1 Écart à la réciprocité

La méthode de l'écart à la réciprocité, introduite par les travaux de [Bui, 1993] puis utilisée dans [Andrieux et Abda, 1996], s'applique aux problèmes d'identification pour lesquels il y a redondance des variables primales et duales sur la frontière du domaine d'étude. Chaque groupe de ces variables permet de formuler le problème direct associé au problème d'identification et d'en trouver une solution. Il existe une propriété dite de réciprocité qui exprime que le travail correspondant au chargement du premier couple dans la réponse du second est équivalent au travail du chargement issu du second couple dans la réponse du premier. Cette propriété de réciprocité est alors appliquée à la fois à un solide réel contenant les éléments recherchés et un solide "sain" et fictif ne les contenant pas, de sorte que la différence entre les champs ainsi obtenus permette d'accéder à des informations sur les quantités recherchées, voire les identifier de manière explicite.

Si l'on considère le problème abstrait suivant :

$$\begin{cases} \text{On cherche } u \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tel que} \\ \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, a(u, v) = L(v) \end{cases} \quad (1.7)$$

où  $\mathcal{U}_{ad}$  est l'espace d'admissibilité des champs de déplacement,  $a$  est bilinéaire, symétrique, continue sur  $\mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{U}_{ad}$  et  $L$  est linéaire continue sur  $\mathcal{U}_{ad}$ . En élasticité, le théorème de Maxwell-Betti s'appuie sur la symétrie de la forme bilinéaire  $a(u, v)$  et postule que pour deux formes linéaires différentes  $L_1$  et  $L_2$  relatives à deux solutions du problème  $u_1$  et  $u_2$ , on a :

$$L_1(u_2) = L_2(u_1) \quad (1.8)$$

Par extension, tout opérateur possédant la propriété de symétrie permet d'appliquer la stratégie d'écart à la réciprocité. La méthode est également adaptable aux opérateurs non symétriques en utilisant l'état adjoint.

Lorsque les champs auxiliaires  $v$  peuvent être construits analytiquement, aucune résolution de problème direct n'est nécessaire. Néanmoins, les informations abondantes sur la totalité du bord du domaine ne sont pas accessibles pour tout type de problème d'identification. Par ailleurs, la réciprocité s'applique uniquement au cas de lois de comportement linéaires.

### 1.5.3.2 Méthodes des champs virtuels

La méthode des champs virtuels ou *Virtual Fields Method* (VFM) est une méthode d'identification des propriétés mécaniques à partir de champs cinématiques de déformation issus des mesures [Grédiac, 1989], non itérative en élasticité. Elle est basée sur l'utilisation du principe des travaux virtuels. L'équation de l'équilibre global est alors écrite pour tout champ virtuel  $\underline{u}^*$  cinématiquement admissible. Dans un deuxième temps, l'introduction de la relation de comportement comportant les propriétés matérielles recherchées conduit à l'écriture de l'équilibre avec autant de champs virtuels que de propriétés à identifier. Des champs virtuels dits "spéciaux" [Grédiac *et al.*, 2006] présentent la particularité d'annuler les coefficients de toutes les inconnues sauf celle recherchée, ce qui conduit à l'identification immédiate de l'inconnue pré-choisie. Cette étape est ensuite répétée pour les autres inconnues. Enfin, les champs virtuels qualifiés comme "optimaux" sont choisis parmi une multitude de champs spéciaux selon le critère de stabilité de la solution vis-à-vis des erreurs de mesure [Grédiac *et al.*, 2001].

Une de ses spécificités est qu'elle ne nécessite pas la création d'un modèle simulant l'essai réalisé. Des travaux assez récents ont permis d'étendre la méthode à des cas non linéaires, comme l'identification de l'endommagement dans [Chalal *et al.*, 2006, Kim *et al.*, 2007] et de la plasticité dans [Grédiac et Pierron, 2006].

## 1.5.4 Approches par minimisation

Dans le cadre d'identification du comportement élastique ou de l'endommagement par perte de rigidité, à partir de mesures cinématiques ou d'effort (mesures de champs ou mesures redondantes sur la frontière), le problème direct consiste à chercher, pour un jeu de paramètres  $p$  fixé, les champs solution  $\underline{u}$  vérifiant : l'équation d'équilibre, la relation de comportement et les conditions aux limites. Si il y a recouvrement des conditions aux limites mixtes mesurées sur la frontière, si celles-ci sont partiellement connues ou si les champs cinématiques mesurés sont bruités, alors ce problème direct est mal posé avec toutes les équations, sauf dans le cas où le jeu de paramètres  $p$  est le bon, que les mesures ne sont pas perturbées et que les conditions aux limites sont parfaitement connues.

Le problème inverse se formule comme suit : trouver  $p$  tel que toutes les équations soient vérifiées :

- exactement : pas possible à cause des perturbations de mesure et des erreurs de modèle.

- au mieux : selon un critère qui reste à définir. En pratique, certaines équations seront vérifiées de façon exacte par imposition de contrainte tandis que les autres seront simplement vérifiées au mieux via la minimisation d'un critère de non vérification de ces équations. Cela conduit à la reformulation du problème d'identification en un problème de minimisation sous contraintes.

Les méthodes qui seront présentées ci-après diffèrent par le choix des équations à vérifier exactement et au mieux, et par le critère choisi à minimiser.

#### 1.5.4.1 Méthodes de recalage de modèles par éléments finis

La méthode de recalage de modèles éléments finis ou *Finite Element Model Updating* (FEMU) est basée sur le concept de recalage itératif de valeurs de modèle élément fini par la comparaison entre des grandeurs mesurées et calculées [Kavanagh et Clough, 1971, Collins *et al.*, 1974, Cottin *et al.*, 1984, Hemez et Farhat, 1993, Pagnacco *et al.*, 2005]. On se place dans le contexte d'identification de  $p$  propriétés matérielles  $\theta$ . Les mesures peuvent être : la résultante d'effort  $f$  et des champs cinématiques qui peuvent être des déplacements  $\tilde{U}$  ou des déformations  $\tilde{\varepsilon}$ . Le principe de la méthode de recalage de modèles éléments finis est de construire un problème direct bien posé en ne tenant pas compte d'un certain nombre de mesures. Le problème direct consiste à chercher, pour un jeu de paramètres  $\underline{\theta}$  fixé, les champs solution  $U$  vérifiant : l'équation d'équilibre, la relation de comportement et l'admissibilité cinématique. Avec la méthode des éléments finis, le problème direct s'écrit :

$$KU = F \quad (1.9)$$

avec  $K = K(\underline{\theta})$  la matrice globale de rigidité,  $F$  le vecteur des efforts nodaux qui tient compte de la mesure  $f$  en utilisant une hypothèse de répartition de l'effort sur la frontière. Les déformations, qui dépendent des paramètres  $\underline{\theta}$ , sont obtenues à partir du calcul comme :

$$\varepsilon = BU \quad (1.10)$$

où  $B$  est la matrice des dérivées des fonctions de forme et le champ de déformation est estimé dans la zone de mesure. Le problème inverse s'écrit :

**Trouver  $\underline{\theta}$  minimisant :**

pour une formulation en déformation :

$$J(\underline{\theta}) = \frac{1}{2} (BU(\underline{\theta}) - \tilde{\varepsilon})^T (BU(\underline{\theta}) - \tilde{\varepsilon}) \quad (1.11)$$

ou, pour une formulation en déplacement :

$$J(\underline{\theta}) = \frac{1}{2} (U(\underline{\theta}) - \tilde{U})^T (U(\underline{\theta}) - \tilde{U}) \quad (1.12)$$

dont la solution s'écrit :

$$\underline{\theta}^{\text{opt}} = \arg \min_{\underline{\theta}} J(\underline{\theta}) \quad (1.13)$$

Remarque :

La fonction coût peut être pondérée. Une matrice des poids doit alors être choisie. Ici, elle est égale à l'identité. D'autre part, outre les formulations FEMU en déplacement et en déformations, il existe des formulations FEMU en effort [Avril *et al.*, 2008a].

L'évaluation de  $J(\underline{\theta})$  demande la résolution d'un problème éléments finis. Cette formulation permet de traiter tout type de problème et tout type de paramètres du modèle.

La recherche du minimum de  $J$ , quant à elle, se fait de différentes manières, et peut dépendre de la dimension du problème à résoudre. Une façon de faire consiste à résoudre le problème associé à la stationnarité de  $J$ , c'est-à-dire  $\frac{\partial J}{\partial \theta_k} = 0, \forall k \in [1, p]$ . La deuxième piste consiste à utiliser les algorithmes de minimisation ou recherche. Plusieurs types d'algorithmes existent, dont les algorithmes d'exploration, type génétique [Richard, 2000] ou colonies de fourmis, et algorithmes de descente, qui, pour la plupart d'entre eux, nécessitent le calcul du gradient de la fonction coût (méthode du simplexe, méthode de Newton, méthode du gradient conjugué, méthode de l'état adjoint).

Très souvent, l'essai mécanique étant piloté par des sollicitations contrôlées, celles-ci sont considérées comme fiables et vérifiées exactement. Néanmoins, on a pu voir dans l'exemple traité plus haut, dans le cas d'un essai piloté en effort, qu'une hypothèse sur la répartition de l'effort a été nécessaire pour construire le problème direct. Les méthodes FEMU demandent donc une attention particulière en termes de détermination des efforts, étant donné que la mesure d'effort concerne souvent les résultantes des actions mécaniques sur les frontières. Quant aux mesures de déplacement ou de déformation, considérées comme moins fiables, elles sont vérifiées au mieux. Le choix de la répartition "sollicitation - mesure" dépend de la confiance que l'on accorde à chaque quantité.

Au delà de l'élasticité, les méthodes FEMU peuvent être appliquées dans le domaine non linéaire, comme l'étude de l'endommagement, de l'élastoplasticité dans [Cooreman *et al.*, 2007] ou encore de la viscoélasticité dans [Le Magorou *et al.*, 2002, Le Magorou *et al.*, 2003].

### 1.5.4.2 Méthode de l'écart à l'équilibre

La méthode de l'écart à l'équilibre ou *Equilibrium Gap Method* (EGM) permet, à partir de mesures de champs de déplacement, d'identifier une distribution de propriétés élastiques et son évolution au cours de l'essai (endommagement). Elle consiste à vérifier au mieux l'équilibre interne au sein du matériau. Toutes les équations de la mécanique sont alors supposées fiables, les mesures incluses, et la méthode consiste à trouver le champ de propriétés élastiques qui, à mesures de déplacements fixées, permet de respecter au mieux l'équilibre interne [Claire *et al.*, 2002, Ben Azzouna *et al.*, 2011c]. La vérification de l'équation d'équilibre consiste ici à minimiser les efforts résiduels locaux sur les nœuds éléments finis. L'effort résiduel en un nœud  $i$  est la somme des efforts résiduels venant de chaque élément de maillage Q4 l'entourant. Cette procédure s'applique partout sur la zone d'étude.

Sans la prise en compte de l'information effort, c'est un contraste de modules de rigidité qui est recherché. L'utilisation de la méthode des éléments finis avec des déplacements nodaux connus permet une écriture faible de l'équation d'équilibre, qui est linéaire en déplacements et en propriétés élastiques. Un recalage des contrastes de rigidité identifiés peut être fait en confrontant un modèle éléments finis basé sur la mesure d'effort avec les champs de déplacement mesurés. Quelques calculs itératifs sont alors conduits jusqu'à la bonne concordance des champs de déplacement [Crouzeix, 2008].

Appliquée à l'identification de l'endommagement à partir des champs de déplacements mesurés dans [Roux et Hild, 2008], l'EGM reconditionnée apporte une robustesse vis-à-vis des perturbations de mesure en ramenant la fonction coût à un écart de champs de déplacement ne faisant pas appliquer la matrice de rigidité globale aux déplacements, de façon à éviter leur dérivation, et donc l'amplification du bruit. Pour l'identification de l'endommagement, la version reconditionnée de l'EGM postule la connaissance *a priori* de la forme de loi d'évolution de l'endommagement et vise ainsi à identifier, non pas des contrastes de rigidité endommagés, mais les coefficients de la loi d'endommagement

préalablement imposée.

L'EGM présente l'avantage d'être directement applicable comme un post-traitement pour tout champ de déplacement mesuré. Elle a été surtout appliquée pour l'identification de l'endommagement isotrope à partir de champs de propriétés isotropes et orthotropes. Une des spécificités de cette méthode réside dans la nécessité de résoudre le problème d'équilibre posé sur la zone de mesure. Ce procédé présente, *a priori*, deux limites : la première concerne l'imposition des déplacements perturbés sur la frontière afin de générer le problème direct, et la seconde se traduit par la non prise en compte d'informations fiables susceptibles d'être présentes sur le bord de l'échantillon, comme les bords libres ou la résultante d'effort mesurée, quand la zone de mesure ne couvre pas la frontière de l'échantillon étudié. Par ailleurs, les mesures sont vérifiées de manière exacte.

### 1.5.5 L'erreur en relation de comportement modifiée

L'erreur en relation de comportement (ERdC), sous son aspect brut, a été d'abord introduite comme un estimateur d'erreur dans les calculs éléments finis dans les travaux de [Ladevèze, 1983]. Son principe repose sur la détection d'erreur de modèle au sein de la structure. L'idée motrice de l'ERdC est de vérifier au mieux la relation de comportement via un écart quadratique entre les champs modèle et les champs faisant intervenir les mesures cinématiques. La prise en compte des incertitudes a permis d'introduire la variante "modifiée" de l'ERdC pour le recalage de modèles de structures en dynamique vibratoire, sur la base de l'analyse modale, avec des données expérimentales portant sur les fréquences propres et les déplacements modaux dans [Reynier, 1990], puis adaptée aux problèmes de vibration forcée dans [Ladevèze *et al.*, 1994]. Dans [Deraemaeker *et al.*, 2002], elle a été couplée à une méthode de réduction de modèle, puis dans [Decouvreur, 2008] pour la caractérisation d'absorbeurs acoustiques, avec une extension à un problème 3D s'appuyant également sur une réduction de modèle pour pallier le problème des degrés de liberté élevé des structures industrielles. En n'imposant plus les mesures de manière forte, cette variante a apporté des améliorations notables en matière de robustesse vis-à-vis des perturbations de mesure, en résolvant notamment le problème d'incompatibilité des conditions aux limites duales qui découle de leur aspect perturbé, et en réalisant un lissage implicite des données expérimentales perturbées. Cette approche a été adaptée aux mesures de champs dans [Calloch *et al.*, 2002], et sous sa forme non modifiée dans [Geymonat *et al.*, 2002, Latourte, 2007, Florentin et Lubineau, 2010].

Une notion équivalente à celle de l'ERdC a été appliquée pour l'identification de la conductivité thermique à partir de mesures de température et de flux, par l'introduction de fonctionnelles énergétiques de Kohn-Vogelius dans [Kohn et Vogelius, 1984], puis dans [Kohn et McKenney, 1990] pour l'identification de la conductivité électrique. L'ERdC modifiée a été ensuite franchement appliquée à l'identification de propriétés élastiques à partir de conditions aux limites fortement perturbées dans les travaux de [Feissel, 2003, Feissel et Allix, 2007] en dynamique transitoire. Une attention particulière a été portée à la résolution du problème de base (3.1.2.1) qui, dans le contexte dynamique transitoire, aboutit à un système d'équations aux dérivées partielles en espace et en temps possédant des conditions initiales et finales en temps empêchant l'utilisation directe de méthodes de résolution incrémentales. Les résultats obtenus montrent que la stratégie d'identification proposée est robuste face aux perturbations de mesures. La question de l'extension au cas non linéaire a été abordée dans les travaux de [Nguyen *et al.*, 2008] pour l'identification de paramètres viscoplastiques et de paramètres de rupture de matériaux composites. Et plus récemment, en analyse dynamique fréquentielle pour l'identification de paramètres élastiques [Banerjee *et al.*, 2012]. Outre son sens physique fort, l'ERdC permet la définition d'indicateurs d'erreur locaux.

Dans la présente étude, on s'intéresse à l'identification de propriétés matérielles élasto-statiques à partir de mesures de champs perturbées, et de conditions aux limites peu ou pas connues. La stratégie d'identification par l'ERdC modifiée a été retenue pour cette application car elle permet de résoudre le problème inverse en l'absence de conditions aux limites, évitant ainsi d'introduire des erreurs de modélisation supplémentaires ou d'imposer les mesures bruitées sur la frontière de manière exacte, et de tenir compte d'informations fiables sur le bord en résolvant le problème inverse sur le domaine entier, même pour des zones de mesure plus petites.

## 1.6 Conclusion

Cette première partie a présenté différents contextes d'identification et souligné l'utilité des mesures de champs, notamment dans le cadre d'essais hétérogènes. La question de gestion des perturbations de mesure et des conditions aux limites a été mise en avant. Plusieurs procédures d'identification standards ont été présentées. Néanmoins, la gestion à la fois des perturbations de mesure et de conditions aux limites imparfaites (incertaines, absentes) n'est pas toujours abordée. La suite de l'étude cherche à apporter des éléments de réponse, tout d'abord via une étude de l'effet du filtrage de mesures perturbées sur les résultats d'identification, puis en proposant une stratégie d'identification basée sur les principes de l'erreur en relation de comportement modifiée dans le cadre de l'identification de propriétés élastiques hétérogènes.

# Filtrage des mesures de champ pour l'identification de propriétés élastiques

*Le but de ce chapitre est de présenter une approche de filtrage de perturbations de mesure dédiée à l'exploitation des mesures de champs et de discuter son impact sur les résultats d'identification de propriétés élastiques à partir d'essais hétérogènes, en la couplant à une approche d'identification inverse. En général, les erreurs de mesure limitent la précision des résultats d'identification ainsi que leur résolution spatiale. La question abordée par ce chapitre est alors la suivante : est-ce que filtrer les champs de déplacement permet d'améliorer l'identification ? Cette étude est illustrée sur l'exemple numérique d'une structure élastique où les paramètres élastiques hétérogènes sont recherchés. Les champs de déplacement sont d'abord filtrés grâce à un algorithme d'approximation diffuse basé sur une formulation locale des moindres carrés. Ensuite, l'identification des paramètres élastiques est menée par une approche inverse basée sur la minimisation d'une fonction coût définie comme un écart des moindres carrés entre les données expérimentales et leur homologues calculées numériquement. Dans ce contexte, une analyse au premier ordre est proposée afin de caractériser les erreurs d'identification. Les résultats obtenus avec des mesures brutes et filtrées sont enfin comparés.*

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>25</b>
<b>2.2</b>	<b>Cadre d'identification et méthode de filtrage</b>	<b>26</b>
2.2.1	Cadre de l'identification	26
2.2.2	La méthode de filtrage par approximation diffuse	29
2.2.3	Erreur d'approximation et erreur aléatoire	31

<b>2.3</b>	<b>Étude théorique de l'erreur d'identification</b>	<b>32</b>
2.3.1	Le problème d'identification	32
2.3.2	Analyse au premier ordre	33
2.3.3	Caractérisation de l'erreur d'identification - biais et variance	35
2.3.4	Validation de l'analyse théorique	37
<b>2.4</b>	<b>Effet du filtrage sur les résultats d'identification</b>	<b>38</b>
2.4.1	Construction des mesures et cadre de l'identification	38
2.4.2	Influence des différents paramètres du problème	39
2.4.3	Choix de la norme d'identification	43
2.4.4	Discussion	44
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>45</b>

---

## 2.1 Introduction

Dans le contexte de la caractérisation des matériaux par l'exploitation d'essais hétérogènes et l'utilisation de la corrélation d'images numériques, des méthodes d'identification dédiées ont été développées (cf. 1.5.3 et 1.5.4). Le problème central étant la gestion des perturbations de mesure, surtout dans le domaine élastique où le ratio signal/bruit est faible, plusieurs de ces méthodes tendent à lisser les données bruitées de différentes manières, comme on a pu le voir dans le chapitre précédent. Certaines approches nécessitent les champs de déformation tandis que d'autres utilisent les champs de déplacement. Les erreurs de mesures ne pouvant être ignorées puisqu'elles dégradent les résultats d'identification.

Parmi les différentes méthodes d'identification, le recalage de modèle par éléments finis (FEMU) (cf. 1.5.4.1) est l'approche la plus intuitive et est utilisée dans beaucoup de domaines. En effet, étant basée sur la minimisation de l'écart quadratique entre mesures et données obtenus par un calcul éléments finis standard, sa mise en œuvre ne nécessite aucun développement particulier. Néanmoins, une approche FEMU standard ne propose aucun traitement particulier pour les perturbations de mesure. Dans ce chapitre, l'amélioration potentielle des résultats d'identification par l'application d'un filtre aux mesures sera discutée. Une deuxième question concerne le type de données d'entrée pour l'identification et le choix de la norme de la fonction coût.

Pour répondre à la question centrale, on mène une étude sur un exemple numérique où des données synthétiques sont créées à partir d'un calcul EF en 2D, en prenant en compte une erreur de mesure aléatoire représentative d'un essai expérimental. Dans ce contexte, on peut comparer la qualité de l'identification avec des mesures brutes et filtrées pour la caractérisation de propriétés élastiques hétérogènes, comme cela a été fait dans [Ben Azzouna *et al.*, 2010, Ben Azzouna *et al.*, 2013a].

Le filtrage des mesures est fait en amont de l'étape d'identification. Le choix qui est fait ici est d'utiliser une approche locale basée sur une minimisation par moindres carrés pondérés, utilisant une approximation diffuse polynomiale [Nayroles *et al.*, 1991a, Avril *et al.*, 2008b]. L'identification est ensuite menée avec la méthode FEMU, conduisant à la minimisation d'une fonction coût par rapport aux coefficients de Lamé recherchés. Ensuite, la relation entre erreurs d'identification et erreurs de mesure est définie. Il est proposé de l'établir à travers une analyse au premier ordre.

Pour des applications concrètes, la méthodologie proposée peut être appliquée comme étude de pré-évaluation sur un modèle numérique représentatif de l'essai expérimental, afin de déterminer si le filtrage est utile, et permet ainsi d'avoir accès à des connaissances *a priori* sur la qualité de l'identification. De surcroît, cette méthode peut être appliquée aux données réelles à la fin de l'étape d'identification, afin de caractériser les incertitudes des propriétés identifiées. Par mesure de simplicité, on s'intéresse ici à des données synthétiques créées par simulation EF.

Ce chapitre s'articule comme suit : le cadre d'identification et la formulation du problème associé sont d'abord présentés, et les principaux concepts de l'approche de filtrage utilisée sont rappelés à partir de [Feissel, 2012]. Ensuite, la relation entre erreur d'identification et perturbations de mesures est établie via une analyse au premier ordre, permettant d'étudier l'influence du filtrage sur la qualité de l'identification des coefficients de Lamé hétérogènes. Enfin, le choix de la norme associée à la fonction coût est discuté.

## 2.2 Cadre d'identification et méthode de filtrage

Cette partie présente le problème inverse considéré, la stratégie d'identification choisie et la méthode de filtrage des perturbations de mesure utilisée. Le contexte est l'identification de propriétés élastiques distribuées, basée sur l'exploitation de mesures de champs cinématiques.

### 2.2.1 Cadre de l'identification

#### 2.2.1.1 Problème direct et mesures

On s'intéresse à une structure 2D avec des propriétés élastiques isotropes, considérées comme hétérogènes. Comme illustré dans la FIGURE 2.1, la structure, définie dans  $\Omega$ , est soumise à un chargement mécanique et gouvernée par les équations de la mécanique des milieux continus dans le cadre de l'hypothèse des contraintes planes et des petites perturbations.

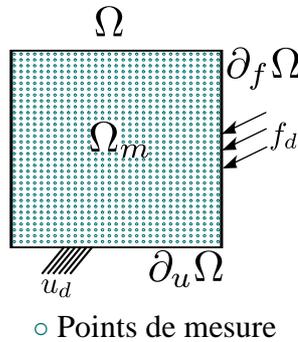


FIGURE 2.1: Problème de référence relatif au problème d'identification

En l'absence de force de volume, le problème de mécanique est gouverné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \text{Équilibre mécanique :} & \underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}} & \text{dans } \Omega & (2.1a) \\ \text{Compatibilité cinématique :} & \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{\nabla}}^T \underline{\underline{u}}) & \text{dans } \Omega & (2.1b) \\ \text{Relation de comportement :} & \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C}(\underline{\underline{\theta}}) : \underline{\underline{\varepsilon}} & \text{dans } \Omega & (2.1c) \end{cases}$$

avec  $\underline{\underline{u}}$  le vecteur des déplacements,  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  sont respectivement le tenseur de contraintes de Cauchy et le tenseur symétrique des déformations infinitésimales qui s'obtient à partir des déplacements  $\underline{\underline{u}}$  via l'équation (2.1b).  $\mathbb{C}$  est un tenseur de rigidité isotrope, défini constant par blocs dans le domaine  $\Omega$  et est paramétré par les coefficients de Lamé  $(\lambda, \mu)$ . Pour chaque sous-domaine noté  $\Omega_k$ ,  $k \in [1, N_c]$ , avec  $N_c$  le nombre des sous-domaines homogènes, le tenseur d'élasticité s'écrit avec l'hypothèse des contraintes planes :

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \lambda_k^* + 2\mu_k & \lambda_k^* & 0 \\ \lambda_k^* & \lambda_k^* + 2\mu_k & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu_k \end{bmatrix} = \frac{E_k}{1 - \nu_k^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_k & 0 \\ \nu_k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu_k \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

avec  $\lambda^* = 2\lambda\mu/(\lambda+2\mu)$ . Le module d'Young et le coefficient de Poisson se déduisent à partir des coefficients de Lamé comme :

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} ; E = \mu \frac{(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (2.3)$$

Les coefficients de Lamé de l'ensemble des sous-domaines sont stockés dans un vecteur  $\underline{\theta}$  de taille  $p = 2 \times N_c$ .  $\underline{\theta}$  sera l'inconnue du problème d'identification.

Dans ce problème d'identification, on dispose de conditions aux limites mixtes réparties sur deux types de bord comme suit :

$$\begin{cases} \text{Conditions aux limites de Neumann :} & \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{f}_d & \text{dans } \partial_f \Omega & (2.4a) \\ \text{Conditions aux limites de Dirichlet :} & \underline{u} = \underline{u}_d & \text{dans } \partial_u \Omega & (2.4b) \end{cases}$$

$\underline{f}_d$  est l'effort réparti appliqué sur le bord  $\partial_f \Omega$ , avec  $\underline{n}$  la normale unitaire sortante, et  $\underline{u}_d$  est le déplacement qui traduit la nature des liaisons sur le bord  $\partial_u \Omega$ . Le bord  $\partial \Omega$  est complètement connu et défini tel que  $\partial \Omega = \partial_u \Omega \cup \partial_f \Omega$ , avec  $\partial_u \Omega \cap \partial_f \Omega = \emptyset$ .

Les mesures de déplacement simulées  $\underline{\tilde{u}}$  sont définies dans une zone de mesure non nulle notée  $\Omega_m \subsetneq \Omega$  :

$$\underline{u} = \underline{\tilde{u}} \quad \text{dans } \Omega \quad (2.5)$$

Les mesures synthétiques sont obtenues via un calcul éléments finis de référence et mixées avec une erreur aléatoire comme détaillé dans la partie 2.2.1.2.

Dans le cadre d'un problème 2D, le vecteur discret des déplacements mesurés est défini comme :  $\underline{\tilde{U}} \in \mathbb{R}^{2 \times n_{mes}}$ , avec  $n_{mes}$  le nombre de points de données correspondant à une grille de mesure régulière. Les mesures de déplacement peuvent être vues comme la somme d'un terme de déplacement exact  $\underline{\tilde{u}}_0$ , c'est-à-dire sans erreurs, et d'un terme de perturbations  $\delta \underline{\tilde{u}}$ , telles que :

$$\underline{\tilde{u}} = \underline{\tilde{u}}_0 + \delta \underline{\tilde{u}} \quad (2.6)$$

### 2.2.1.2 Formulation éléments finis et construction des mesures

Un terme de perturbations de mesure  $\delta \underline{\tilde{u}}$  est créé sur la grille de mesure et ajouté aux déplacements exacts. On fait l'hypothèse que seuls les déplacements mesurés à l'intérieur du domaine sont perturbés, tandis que les conditions aux limites mixtes sont considérées comme connues et exactes.

Pour l'implémentation numérique du problème d'identification, le problème continu (2.1, 2.4) est discrétisé avec la méthode des éléments finis (FEM) [Dhatt *et al.*, 2012]. Le déplacement est alors décrit via les fonctions de forme éléments finis comme :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \Phi(\underline{x}) U, \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (2.7)$$

avec  $U$  le vecteur discret contenant les mesures de déplacement en  $x$  et  $y$  associées à  $\underline{u}$  et  $\Phi(\underline{x})$  la matrice contenant les fonctions de forme, de taille  $N_{ddl} \times 2 n_{mes}$ , où  $N_{ddl}$  est le nombre des degrés de liberté (ddl) éléments finis. La discrétisation du problème direct conduit à un problème linéaire qui s'exprime sous sa forme discrète comme :

$$K U = F \quad (2.8)$$

avec  $[K]$  la matrice de rigidité globale, et  $F$  le vecteur des efforts nodaux qui inclut les conditions aux limites de type Neumann (2.4a) supposées connues. Les conditions aux limites en déplacement (2.4b) sont prises en compte dans le vecteur  $U$ .

Étant donné que  $\underline{\theta}$  est constitué des coefficients de Lamé, la matrice de rigidité est linéaire par rapport à  $\underline{\theta}$  et peut être exprimée comme :

$$K = \sum_{j=1}^p \theta_j K_j^1 \quad (2.9)$$

où  $K_j^1$  est la matrice constante  $\frac{\partial K}{\partial \theta_j}$ .

Dans la suite, les déplacements synthétiques  $\underline{u}_0$  sont basés sur le modèle éléments finis

précédemment défini, avec des propriétés élastiques de référence notées  $\underline{\theta}_0$ . L'indice 0 dénote les quantités de références ou exactes.  $\underline{u}_0$  est décrit à travers le vecteur discret correspondants  $U_0$ , de taille  $N_{ddl}$ .

La grille de mesure devant être représentative d'une grille de CIN (régulière et typiquement avec une taille d'environ  $200 \times 200$ ), les mesures ne doivent pas être définies sur le maillage éléments finis. C'est pourquoi, une projection de  $\underline{u}_0$  du maillage vers la grille de mesure est nécessaire. Elle est faite grâce à un opérateur de transfert  $\Pi$  basé sur les fonctions de forme éléments finis et fournissant les valeurs du champ de déplacement éléments finis aux points de mesure de la grille régulière.

Au final, les mesures de déplacement synthétiques sont stockées dans le vecteur  $\tilde{U}$  comme :

$$\tilde{U} = \Pi U_0 + \delta\tilde{U} = \tilde{U}_0 + \delta\tilde{U} \quad (2.10)$$

où  $\delta\tilde{U}$  est un vecteur relatif à l'erreur entre mesures et modèle éléments finis. En général, il est constitué de trois parties :

- (i) une erreur de mesure aléatoire qui se caractérise par sa matrice de covariance  $C$ . Dans le cas de mesures réelles, cette matrice dépend de l'algorithme de CIN [Sutton *et al.*, 2009] et peut être déterminée expérimentalement. Plus loin, une hypothèse raisonnable pour décrire  $\delta\tilde{U}$  consiste à considérer des perturbations aléatoires basées sur un bruit blanc gaussien, i.e.  $C$  est diagonale. Néanmoins, l'étude peut être menée pour tout type de matrice de covariance relative à une étude CIN. (Ex : pour CORRELI<sup>Q4</sup>, la matrice de covariance est égale à l'inverse de la matrice de corrélation [Besnard *et al.*, 2006].)
- (ii) une erreur de mesure systématique, inhérente à la CIN et à l'acquisition d'images [Bornert *et al.*, 2009]. Ce type d'erreur n'est pas pris en compte dans la présente étude.
- (iii) une erreur de modèle, relative à un choix de modèle éléments finis inadéquat dans le cas d'essais expérimentaux. Le choix qui est fait ici est d'utiliser le même modèle éléments finis pour créer les mesures et pour mener l'identification. Ainsi, l'erreur de modèle n'est pas prise en compte.

Par conséquent, il est proposé d'étudier l'effet du filtrage sur les résultats d'identification en considérant une erreur aléatoire mais pas d'erreur systématique (ni des mesures ni du modèle). Une erreur systématique conduit, *a priori*, à un biais dans les résultats d'identification, avec ou sans filtrage. Le filtrage jouera principalement sur les erreurs d'identification relatives à l'erreur de mesure aléatoire.

### 2.2.1.3 Problème d'identification

Le problème d'identification consiste à trouver les paramètres matériels  $\underline{\theta}$  en confrontant le problème direct (2.1, 2.4) aux mesures (3.1d), et correspond à un problème inverse [Bonnet et Constantinescu, 2005].

La stratégie d'identification inverse adoptée dans cette étude est une formulation par moindres carrés où la solution  $\underline{\theta}^{opt}$  du problème d'identification minimise l'écart entre les données mesurées et simulées. S'appuyant sur des simulations éléments finis, une telle approche se réfère souvent à un recalage de modèle par éléments finis. Ici, la fonction coût à minimiser est uniquement basée sur les mesures de déplacement. Le problème

d'identification peut être présenté sous une forme monolithique comme :

**Trouver**  $(U, \underline{\theta})$  minimisant :

$$\begin{cases} J(U, \underline{\theta}) = \frac{1}{2} (\Pi U - \tilde{U})^T D (\Pi U - \tilde{U}) & (2.11a) \\ \text{sous la contrainte : } K(\underline{\theta}) U = F & (2.11b) \end{cases}$$

dont la solution s'écrit :

$$\underline{\theta}^{\text{opt}} = \arg \min_{\underline{\theta}} J(U, \underline{\theta})$$

avec  $J$  la fonction coût exprimant l'écart des moindres carrés entre la mesure et le modèle, et  $D$  est la matrice relative à la norme de la fonction coût.

La résolution du problème (2.11) consiste, en général, à minimiser  $J$  par rapport à  $\underline{\theta}$ , où  $U$  est estimé à travers (2.11b), et ne s'apparente pas à une minimisation sous contraintes. Néanmoins, on gardera ici la forme monolithique ci-avant car elle permet de développer une analyse au premier ordre dans la partie 2.3.

## 2.2.2 La méthode de filtrage par approximation diffuse

L'étude de l'effet du filtrage des mesures sur les résultats d'identification est basée sur l'outil d'approximation diffuse. Cette étude peut toutefois être menée pour tout autre outil de filtrage caractérisable en termes d'erreurs.

L'approximation diffuse a d'abord été développée pour la résolution d'équations aux dérivées partielles [Nayroles *et al.*, 1991b, Prax *et al.*, 1996, Sadat et Prax, 1996], puis appliquée aux problèmes d'optimisation [Nayroles, 1994, Breikopf *et al.*, 2002] et au transfert de champs [Villon *et al.*, 2002, Brancherie *et al.*, 2006]. Elle a été appliquée récemment au calcul de champs de déformation à partir de mesures de champs de déplacement dans [Avril *et al.*, 2008b]; d'abord pour des mesures en deux dimensions spatiales, puis en espace-temps dans [Feissel *et al.*, 2011].

L'approximation diffuse consiste à reconstruire un champ continu à partir d'un nuage de points. Dans notre contexte, le point de départ est un champ discret de déplacement obtenu par une technique de CIN en 2D, pendant un essai mécanique. Les déplacements sont obtenus sur une grille de mesure régulière,  $\underline{x}_i$  est la position du  $i^{\text{e}}$  point de donnée et  $\tilde{u}(\underline{x}_i)$  est la donnée de déplacement correspondante, avec  $i \in [1, n_{\text{meas}}]$ .  $\tilde{u}(\underline{x}_i)$  est décrit à travers ses coordonnées cartésiennes  $(\tilde{u}(\underline{x}_i), \tilde{v}(\underline{x}_i))$  associées aux directions de la grille de mesure. Pour chaque coordonnée  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$ , un champ approximé est reconstruit comme présenté ci-après pour  $\tilde{u}$ . Le champ approximé est noté  $u_{ap}(\underline{x})$  et s'écrit comme le produit d'un vecteur de coefficients  $\underline{a}(\underline{x})$  et de fonctions de forme préalablement choisies, tel que :

$$u_{ap}(\underline{x}) = \underline{p}(\underline{x})^T \underline{a}(\underline{x}) \quad (2.12)$$

où  $\underline{a}$  est à déterminer et  $\underline{p}(\underline{x})$  est un vecteur contenant les fonctions de la base d'approximation. Dans cette étude, on choisit d'utiliser une base polynomiale de degré 2. Ce choix apparaît comme optimal dans [Avril *et al.*, 2008b] pour un cas d'étude similaire à celui présenté dans la partie 2.4.1 :

$$\underline{p}(\underline{x})^T = \left\{ 1 \quad x \quad y \quad \frac{x^2}{2} \quad xy \quad \frac{y^2}{2} \right\} \quad (2.13)$$

où  $x$  et  $y$  sont, respectivement, les coordonnées cartésiennes horizontale et verticale du point considéré. Dans chaque point de reconstruction  $\underline{x}$ ,  $\underline{a}(\underline{x})$  est la solution d'une minimisation par moindres carrés locaux et pondérés définis dans un voisinage de  $\underline{x}$ , noté

$V(\underline{x})$  :

$$\min_{\underline{a}(\underline{x})} \frac{1}{2} \sum_{\underline{x}_i \in V(\underline{x})} w(\underline{x}, \underline{x}_i) \left( \underline{p}(\underline{x} - \underline{x}_i)^\top \underline{a}(\underline{x}) - \tilde{u}(\underline{x}_i) \right)^2 \quad (2.14)$$

avec  $w(\underline{x}, \underline{x}_i)$  une fonction poids avec un support local qui définit  $V(\underline{x})$  de manière implicite :

$$w(\underline{x}, \underline{x}_i) = w_{ref} \left( \frac{|\underline{x} - \underline{x}_i|}{R_x} \right) w_{ref} \left( \frac{|y - y_i|}{R_y} \right) \quad (2.15)$$

$w_{ref}$  est une spline d'ordre 3 qui approxime une fonction gaussienne avec un support local dans  $[0, 1]$ . De plus,  $w_{ref}$  et sa dérivée du premier ordre s'annulent en 1 et en 0, ce qui assure la continuité de l'approximation diffuse et de ses dérivées premières.

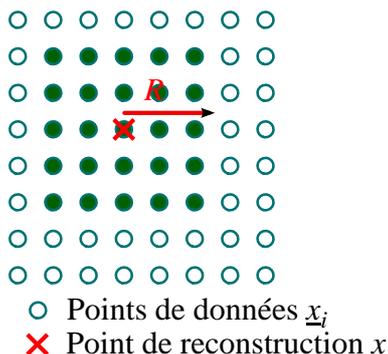


FIGURE 2.2: Reconstruction à partir du voisinage de chaque point

$R_x$  et  $R_y$  sont les rayons dans les directions  $x$  et  $y$  à chaque point de reconstruction  $\underline{x}$ , comme illustré dans la FIGURE 2.2. Dans la suite, on considère  $R_x = R_y = R$  constant sur toute la grille de mesure.  $R$  constitue un paramètre principal qui permet d'ajuster l'erreur d'approximation et l'erreur aléatoire comme détaillé dans la partie 2.2.3.

Sous sa forme discrète, l'équation (2.14) s'écrit, en tout  $\underline{x}$ , comme :

$$\min_a \frac{1}{2} \left[ P a - \tilde{U}_{\underline{x}} \right]^\top W \left[ P a - \tilde{U}_{\underline{x}} \right] \quad (2.16)$$

avec  $W$  une matrice diagonale constituée des fonctions de pondération  $w(\underline{x}, \underline{x}_i)$ ,  $P$  une matrice constituée des lignes de  $\underline{p}(\underline{x} - \underline{x}_i)$ , et  $\tilde{U}_{\underline{x}}$  est le vecteur contenant les données relatives aux points dans  $V(\underline{x})$ .

On peut alors déduire l'expression de la solution  $a$  de l'équation (2.16), qui s'écrit :

$$a = \left[ P^\top W P \right]^{-1} P^\top W \tilde{U} \quad (2.17)$$

Si le degré de la base de projection est égal à 1 ou plus, le champ reconstruit et ses dérivées "diffuses" premières au point  $\underline{x}$  s'obtiennent par les trois premiers composants du vecteur  $a$  :

$$a_1(\underline{x}) = u_{ap}(\underline{x}) ; a_2(\underline{x}) = \frac{\delta u_{ap}}{\delta x}(\underline{x}) ; a_3(\underline{x}) = \frac{\delta u_{ap}}{\delta y}(\underline{x}) \quad (2.18)$$

avec  $\frac{\delta u_{ap}}{\delta x}$  et  $\frac{\delta u_{ap}}{\delta y}$  les dérivées "diffuses" premières qui correspondent à une estimation des dérivées premières exactes et sont utilisées pour mener la reconstruction de la déformation en chaque point de donnée du champ mesuré  $\tilde{u}$ . Ainsi, il faut résoudre le problème (2.16) en chaque point d'évaluation. La reconstruction est menée pour les deux composantes de  $\tilde{u}$ , et le champ reconstruit discrétisé est stocké dans  $U_{ap}$ .

Par ailleurs, soulignons le fait que l'approche d'approximation utilisée est linéaire. En

effet, le champ  $U_{ap}$  s'obtient comme le produit d'une matrice de reconstruction des déplacements  $M_u$  par un vecteur de mesure des déplacements donnés  $\tilde{U}$  :

$$U_{ap} = M_u \tilde{U} \quad (2.19)$$

$M_u$  est constituée des lignes de (2.17) qui correspondent au premier coefficient  $a_1$  des points de reconstruction sélectionnés. En considérant l'opérateur de reconstruction global,  $M_u$  est une matrice de taille  $(2 n_{mes} \times 2 n_{mes})$ . De surcroît, si les champs de déformation reconstruits  $\varepsilon_{ap}$  sont requis, ils peuvent être déduits à partir des dérivées diffuses du premier ordre, conduisant à un opérateur de reconstruction similaire :

$$\varepsilon_{ap} = M_\varepsilon \tilde{U} \quad (2.20)$$

avec  $M_\varepsilon$  la matrice de reconstruction des déformations déduite des lignes de l'équation (2.17) associées à  $a_2$  et  $a_3$ .

En conclusion, les paramètres qui contrôlent la reconstruction de champs par approximation diffuse sont : le degré de la base de projection, choisi ici égal à 2, et le rayon de filtrage  $R$  des fonctions de pondération.

Dans la prochaine partie, les erreurs liées à la reconstruction du champ de déplacement seront définies.

### 2.2.3 Erreur d'approximation et erreur aléatoire

Considérant un déplacement décrit comme la somme d'un déplacement exact et d'une erreur de mesure aléatoire (2.6), le champ de déplacement reconstruit  $\underline{u}_{ap}$  s'écrit en tout point  $\underline{x}_i$  comme :

$$\underline{u}_{ap}(\underline{x}_i) = \underline{u}_0(\underline{x}_i) + \underbrace{\delta \underline{u}_k(\underline{x}_i)}_{\text{erreur d'approximation}} + \underbrace{\delta \underline{u}_b(\underline{x}_i)}_{\text{erreur aléatoire}} \quad (2.21)$$

en considérant que :

- $\underline{u}_0$  est le champ exact ;
- $\delta \underline{u}_k$  est l'erreur d'approximation et est relative à la reconstruction du champ exact. Elle est associée à une perte d'informations mécaniques ;
- $\delta \underline{u}_b$  est l'erreur aléatoire de reconstruction, caractérisée par la reconstruction des perturbations de mesure seules.

Lorsque le rayon de filtrage  $R$  augmente, l'erreur aléatoire diminue mais l'erreur d'approximation augmente. Un compromis doit donc être trouvé pour le choix de  $R$ , visant à réduire l'erreur aléatoire tout en maintenant un niveau acceptable pour l'erreur d'approximation.

La reconstruction par approximation diffuse étant linéaire, les deux types d'erreur peuvent être étudiées séparément. Dans les faits, une telle décomposition ne peut être effectuée dans un cas d'étude réel car le champ exact demeure inconnu. Néanmoins, elle permet de caractériser la reconstruction des déplacements d'un point de vue théorique.

L'erreur d'approximation est liée au reste d'ordre  $n + 1$  du développement de Taylor du champ exact, pour une base de projection polynomiale de degré  $n$  [Feissel, 2012]. Pour une base de degré 1, le développement de Taylor du champ exact s'écrit :

$$\forall i, \quad u_0(\underline{x}_i) = p(\underline{x} - \underline{x}_i)^T \begin{bmatrix} u_0(\underline{x}) \\ \frac{\partial u_0}{\partial x}(\underline{x}) \\ \frac{\partial u_0}{\partial y}(\underline{x}) \end{bmatrix} + r_2(\underline{x}_i) \quad (2.22)$$

avec  $r_2$  le reste du développement de Taylor. Par conséquent, la différence entre le champ approximé et le champ exact donne :

$$\forall i, \quad u_{ap}(\underline{x}_i) - u_0(\underline{x}_i) = p(\underline{x} - \underline{x}_i)^T \begin{bmatrix} a_1(\underline{x}) - u_0(\underline{x}) \\ a_2(\underline{x}) - \frac{\partial u_0}{\partial x}(\underline{x}) \\ a_3(\underline{x}) - \frac{\partial u_0}{\partial y}(\underline{x}) \end{bmatrix} - r_2(\underline{x}_i) \quad (2.23)$$

À partir de la décomposition (2.6) du champ de mesure, la minimisation (2.14) se réécrit pour des mesures exactes comme :

$$\min \frac{1}{2} \sum_{\underline{x}_i \in V(\underline{x})} w(\underline{x}, \underline{x}_i) \left( p(\underline{x} - \underline{x}_i)^T \begin{bmatrix} a_1(\underline{x}) - u_0(\underline{x}) \\ a_2(\underline{x}) - \frac{\partial u_0}{\partial x}(\underline{x}) \\ a_3(\underline{x}) - \frac{\partial u_0}{\partial y}(\underline{x}) \end{bmatrix} - r_2(\underline{x}_i) \right)^2 \quad (2.24)$$

Le vecteur  $\begin{bmatrix} a_1(\underline{x}) - u_0(\underline{x}) \\ a_2(\underline{x}) - \frac{\partial u_0}{\partial x}(\underline{x}) \\ a_3(\underline{x}) - \frac{\partial u_0}{\partial y}(\underline{x}) \end{bmatrix}$  constitue les erreurs d'approximation sur le champ exact

et ses dérivées et est solution du problème (2.24). Ainsi, l'erreur d'approximation n'est rien d'autre que la construction par approximation diffuse des restes du développement de Taylor. Construire un estimateur d'erreur pour le reste du développement de Taylor est nécessaire pour caractériser l'erreur d'approximation mais demande d'estimer des dérivées d'ordre supérieur. Sa construction n'a pas été faite mais il reste possible d'étudier le comportement de l'outil de filtrage sur des champs numériques représentatifs.

Par ailleurs, l'erreur aléatoire est directement liée aux perturbations de mesure brutes, notées  $\delta\tilde{U}$ , via la matrice de reconstruction  $M_u$  :

$$\delta U_b = M_u \delta\tilde{U} \quad (2.25)$$

D'un point de vue statistique, une caractérisation des perturbations de mesure conduit à celle de l'erreur aléatoire.

Comme mentionné dans la partie 2.2.1.1, l'erreur de mesure aléatoire est souvent caractérisée par une matrice de covariance  $C$ . Celle-ci s'écrit comme :

$$C = \langle \delta\tilde{U} \delta\tilde{U}^T \rangle = \sigma_b^2 C_0 \quad (2.26)$$

où le symbole  $\langle \rangle$  correspond au calcul de l'espérance,  $\sigma_b$  est l'écart-type qui définit l'amplitude de l'erreur aléatoire, et  $C_0$  est la matrice de corrélation spatiale. Cette information peut être obtenue à partir de l'algorithme de CIN choisi (p. ex. CORRELI<sup>Q4</sup> [Hild et Roux, 2006]).

À partir de l'équation (2.26), la covariance de  $\delta U_b$  peut être estimée comme :

$$\text{Cov}(\delta U_b) = \langle (\delta U_b - \langle \delta U_b \rangle)^2 \rangle = \sigma_b^2 M_u C_0 M_u^T \quad (2.27)$$

Dans la suite, la relation reliant ces erreurs à l'erreur d'identification sera caractérisée pour une approche FEMU telle que celle de 2.2.1.3, permettant de discuter la pertinence du filtrage pour l'identification.

## 2.3 Étude théorique de l'erreur d'identification

### 2.3.1 Le problème d'identification

Le but de l'étude est de caractériser l'effet du filtrage sur les résultats d'identification. Pour ce faire, on se propose de caractériser la relation entre erreur d'identification et

perturbations de mesure de façon analytique, à partir d'une analyse au premier ordre. Une telle analyse peut être effectuée de différentes manières. Une matrice de sensibilité a été estimée analytiquement pour la méthode EGM dans [Amiot *et al.*, 2007], et pour l'approche FEMU dans [Gras *et al.*, 2013]. Le choix qui est fait ici est de baser l'étude sur une analyse de perturbation du problème d'optimalité associé à (2.11). Dans le cadre des problèmes adjoints, cette analyse reste générale et peut permettre d'étendre l'étude aux problèmes non linéaires.

Partons du problème d'identification (2.11). Pour le résoudre, on introduit un Lagrangien :

$$\mathcal{L}(U, \Lambda, \underline{\theta}) = J(U, \underline{\theta}) - \Lambda^\top \left( K(\underline{\theta}) U - F \right) \quad (2.28)$$

Ensuite, l'étude de la stationnarité du Lagrangien  $\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\theta}} \right) = (0, 0, 0)$  conduit au système d'optimalité suivant par rapport aux variables  $(U, \Lambda, \underline{\theta})$  :

$$\begin{cases} K U = F & (2.29a) \\ K^\top \Lambda = \Pi^\top \left( D(\Pi U - \tilde{U}) \right) & (2.29b) \\ \Lambda^\top K_j^\dagger U = 0, \forall j \in [1, p] & (2.29c) \end{cases}$$

Afin d'établir la relation entre erreur d'identification et perturbations de mesure, on mène une analyse au premier ordre de la perturbation de la solution de (2.29) par rapport à une perturbation des mesures, comme détaillé dans la partie suivante.

### 2.3.2 Analyse au premier ordre

Pour des mesures perturbées données, l'erreur d'identification, notée  $\delta \underline{\theta}$ , est définie comme la différence entre les  $p$  propriétés identifiées et les  $p$  valeurs de référence (exactes).

L'objectif est de rechercher la relation entre l'erreur d'identification  $\delta \underline{\theta}$  et les perturbations de mesure  $\delta \tilde{U}$ , basée sur une approximation à l'ordre 1. Une matrice de sensibilité  $S^\theta$  est alors introduite comme suit :

$$\delta \underline{\theta} = S^\theta \delta \tilde{U} + o(\delta \tilde{U}) \quad (2.30)$$

Afin de déterminer la matrice de sensibilité, on propose de la construire colonne par colonne. Chaque colonne est déterminée à travers la résolution du problème (2.29) au premier ordre, et ce en perturbant successivement chaque composante de  $\tilde{U}$ . On introduit alors la perturbation scalaire  $\delta \tilde{u}$  qui se définit comme :

$$\delta \tilde{U} = \delta \tilde{u} e_i, \forall i \in [1, 2 n_{mes}] \quad (2.31)$$

avec  $i$  l'indice du déplacement perturbé,  $2 n_{mes}$  le nombre total des points de mesures en  $x$  et  $y$ , et  $e_i$  est un vecteur unitaire défini comme :  $e_i(l) = \delta_{li}$ , où  $\delta_{li}$  est l'indice de *Kronecker*.

Pour la perturbation ainsi définie, le développement au premier ordre de l'erreur d'identification par rapport à  $\delta \tilde{u}$  s'écrit :

$$\delta \underline{\theta} = S_i^\theta \delta \tilde{u} + o(\delta \tilde{u}), \forall i \in [1, 2 n_{mes}] \quad (2.32)$$

avec  $S_i^\theta = S^\theta e_i$  est un vecteur  $p \times 1$  qui correspond à la  $i^e$  colonne de la matrice de sensibilité recherchée  $S^\theta$ .

De la même manière, deux autres matrices de sensibilité sont introduites pour les variables  $U$  et  $\Lambda$ , telles que :

$$\begin{cases} U = U_0 + S_{,i}^u \delta \tilde{u} + o(\delta \tilde{u}) & (2.33a) \\ \Lambda = \Lambda_0 + S_{,i}^\Lambda \delta \tilde{u} + o(\delta \tilde{u}) & (2.33b) \end{cases}$$

où  $S_{,i}^u$  et  $S_{,i}^\Lambda$  ont  $N_{ddl}$  lignes correspondant au nombre total des ddl éléments finis.

À partir des équations (2.9, 2.32), le développement d'ordre 1 par rapport à  $\delta \tilde{u}$  de la matrice de rigidité globale s'écrit :

$$K(\underline{\theta}) = \underbrace{K(\underline{\theta}_0)}_{\text{def} = K_0} + \sum_{j=1}^p K_j^1 S_{ji}^\theta \delta \tilde{u} + o(\delta \tilde{u}) \quad (2.34)$$

Procédons maintenant au développement à l'ordre 1 du système d'optimalité (2.29). Ce développement sera fait par rapport à la perturbation scalaire  $\delta \tilde{u}$  et les équations seront réparties en ordre 0 et 1. Les termes d'ordre supérieur seront alors négligés. À partir des équations (2.33a, 2.34), (2.29a) s'écrit :

$$\begin{cases} K_0 U_0 = F & (2.35a) \\ K_0 S_{,i}^u + \sum_{j=1}^p K_j^1 S_{ji}^\theta U_0 = 0 & (2.35b) \end{cases}$$

En utilisant les équations (2.33, 2.34), (2.29b) devient :

$$\begin{cases} K_0^\top \Lambda_0 = \Pi^\top D \underbrace{(\Pi U_0 - \tilde{U}_0)}_{=0} = 0 & (2.36a) \\ K_0^\top S_{,i}^\Lambda + \left( \sum_{j=1}^p K_j^1 S_{ji}^\theta \right)^\top \Lambda_0 = \Pi^\top D (\Pi S_{,i}^u - e_i) & (2.36b) \end{cases}$$

où le champ exact  $\tilde{U}_0$  est considéré égal à la projection du champ exact  $U_0$  sur la grille de mesure (2.10). De plus, la matrice  $K_0$  étant symétrique, on a  $K_0^\top = K_0$ .

De la même manière, l'équation (2.29c) se répartit comme suit :

$$\begin{cases} \Lambda_0^\top K_j^1 U_0 = 0, \forall j \in [1, p] & (2.37a) \\ S_{,i}^{\Lambda \top} K_j^1 U_0 + \Lambda_0^\top K_j^1 S_{,i}^u = 0, \forall j \in [1, p] & (2.37b) \end{cases}$$

Le regroupement des équations d'ordre 0 (2.35a, 2.36a, 2.37a) conduit à :

$$\begin{cases} U_0 = K_0^{-1} F & (2.38a) \\ \Lambda_0 = 0 & (2.38b) \end{cases}$$

Les termes d'ordre 0 correspondent au problème d'optimalité pour des mesures exactes, avec les paramètres de référence  $\underline{\theta} = \underline{\theta}_0$ , conduisant à l'équation (2.38b).

Les équations du premier ordre (2.35b, 2.36b, 2.37b, 2.38b) donnent le système d'ordre 1 suivant :

$$\begin{cases} S_{,i}^u = -K_0^{-1} \sum_{j=1}^p K_j^1 U_0 S_{ji}^\theta & (2.39a) \\ S_{,i}^\Lambda = K_0^{-1} \Pi^\top D (\Pi S_{,i}^u - e_i) & (2.39b) \\ S_{,i}^{\Lambda \top} K_j^1 U_0 = 0, \forall j \in [1, p] & (2.39c) \end{cases}$$

En introduisant :

$$\begin{cases} U_j^1 = K_0^{-1} K_j^1 U_0 \\ U_m^1 = \{U_1^1, \dots, U_p^1\} \end{cases} \quad (2.40a)$$

$$(2.40b)$$

(2.39a) peut être exprimée comme :

$$S_{.i}^u = - \sum_{j=1}^p U_j^1 S_{ji}^\theta = -U_m^1 S_{.i}^\theta \quad (2.41)$$

On obtient ensuite le système linéaire suivant par rapport à  $S_{.i}^\theta$  :

$$U_m^{1T} \Pi^T D \Pi U_m^1 S_{.i}^\theta = -U_m^{1T} \Pi^T D e_i, \forall i \in [1, 2 n_{mes}] \quad (2.42)$$

Par conséquent, la résolution du système (2.39) pour  $\delta \tilde{U} = \delta \tilde{u} e_i$  donne l'équation satisfaite par la  $i^e$  colonne de la matrice de sensibilité recherchée. En regroupant ces équations pour tous les indices  $i$ , la matrice  $S^\theta$  s'obtient comme la solution du système suivant :

$$\underbrace{U_m^{1T} \Pi^T}_{p \times 2 n_{mes}} \underbrace{D}_{2 n_{mes} \times 2 n_{mes}} \underbrace{\Pi U_m^1}_{2 n_{mes} \times p} \underbrace{S^\theta}_{p \times 2 n_{mes}} = - \underbrace{U_m^{1T} \Pi^T}_{p \times 2 n_{mes}} \underbrace{D}_{2 n_{mes} \times 2 n_{mes}} \quad (2.43)$$

En inversant cette equation, on obtient :

$$S^\theta = - \left( U_m^{1T} \Pi^T D \Pi U_m^1 \right)^{-1} U_m^{1T} \Pi^T D \quad (2.44)$$

En résumé, la matrice de sensibilité qui fournit la relation, au premier ordre, entre l'erreur d'identification et les perturbations de mesure, a été déterminée.

### 2.3.3 Caractérisation de l'erreur d'identification - biais et variance

Le but de l'étude théorique proposée est de discuter et comparer la qualité des résultats d'identification avec et sans filtrage, en se basant sur un exemple numérique. Il est donc nécessaire de définir un critère d'amélioration. Ce dernier sera basé sur le calcul du biais et de la variance de l'erreur d'identification, avec et sans filtrage.

Les expressions analytiques du biais et de la variance de l'erreur d'identification  $\delta \underline{\theta}$  se déduisent à partir des développements précédents. À partir de la relation (2.30), biais et covariance s'expriment au premier ordre comme :

– Biais de  $\delta \underline{\theta}$  :

$$\langle \delta \underline{\theta} \rangle = S^\theta \langle \delta U \rangle \quad (2.45)$$

– Covariance de  $\delta \underline{\theta}$  :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\delta \underline{\theta}) &= \langle (\delta \underline{\theta} - \langle \delta \underline{\theta} \rangle)^2 \rangle = S^\theta \langle \delta U \delta U^T \rangle S^{\theta T} \\ &= S^\theta \text{Cov}(\delta U) S^{\theta T} \end{aligned} \quad (2.46)$$

La qualité de l'identification sera évaluée en comparant l'erreur d'identification en termes de biais et d'écart-type, pour deux types de données en déplacement pour le problème inverse.

1. Champ brut  $\tilde{U}$  (sans filtrage) :

Comme décrit dans la partie 2.2.1.2, le champ de déplacement mesuré est construit à partir d'un calcul éléments finis de référence et bruité avec des perturbations synthétiques. Dans la suite, les erreurs de mesure seront créées à partir d'un bruit blanc gaussien, caractérisé par une moyenne nulle et un écart-type donné  $\sigma_b$ . Ses caractéristiques se résument comme suit :

$$\delta U \sim \mathcal{N}(0, \sigma_b^2 Id) \quad (2.47)$$

où  $Id$  est la matrice identité.

(a) Biais de l'erreur d'identification  $\langle \delta \underline{\theta} \rangle_{raw}$  :

Comme les perturbations de mesures sont centrées, la moyenne de l'erreur d'identification sans filtrage est nulle :

$$\langle \delta \underline{\theta} \rangle_{raw} = 0 \quad (2.48)$$

(b) Covariance de l'erreur d'identification  $\text{Cov}(\delta \underline{\theta})_{raw}$  :

À partir de l'équation (2.46), la covariance de l'erreur d'identification s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\delta \underline{\theta})_{raw} &= \langle S^\theta \delta U \delta U^\top S^{\theta \top} \rangle = S^\theta \sigma_b^2 Id S^{\theta \top} \\ &= \sigma_b^2 \left( S^\theta S^{\theta \top} \right) \end{aligned} \quad (2.49)$$

2. Champ reconstruit  $U_{ap}$  (avec filtrage) :

Le deuxième type de mesure testé est le champ approximé, reconstruit à partir du champ brut par approximation diffuse. D'après la partie 2.2.3, on récupère deux types d'erreurs après filtrage. Par conséquent, l'erreur liée au champ reconstruit est caractérisée par une moyenne, relative à l'erreur d'approximation  $\delta U_k$ , et une covariance liée à l'erreur aléatoire (2.25) tenant compte de l'erreur mesurée (2.47) :

$$\delta U_{ap} = \underbrace{\delta U_k}_{\text{erreur d'approximation}} + \underbrace{\delta U_b}_{\text{erreur aléatoire}} \sim \mathcal{N}(\delta U_k, \sigma_b^2 M_u M_u^\top) \quad (2.50)$$

(a) Biais de l'erreur d'identification  $\langle \delta \underline{\theta} \rangle_{AD}$  :

à cause de l'erreur d'approximation, on récupère une moyenne non nulle de l'erreur d'identification :

$$\langle \delta \underline{\theta} \rangle_{AD} = S^\theta \delta U_k \quad (2.51)$$

(b) Covariance de l'erreur d'identification  $\text{Cov}(\delta \underline{\theta})_{DA}$  :

L'expression de la covariance après filtrage devient :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\delta \underline{\theta})_{DA} &= S^\theta \langle \delta U_b \delta U_b^\top \rangle S^{\theta \top} \\ &= \sigma_b^2 \left( S^\theta M_u M_u^\top S^{\theta \top} \right) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Au final, l'analyse proposée conduit au calcul de la moyenne et de la covariance de l'erreur d'identification, avec et sans filtrage. Ces calculs sont récapitulés dans le TABLEAU 2.1.

	Sans filtrage	Avec filtrage
$\langle \delta\theta \rangle$	0	$S^\theta \delta U_k$
$\text{Cov}(\delta\theta)$	$\sigma_b^2 (S^\theta S^{\theta T})$	$\sigma_b^2 (S^\theta M_u M_u^T S^{\theta T})$

TABLEAU 2.1: Expressions du biais et de la covariance pour deux types de données

Afin de comparer les résultats d'identification avec et sans filtrage, un critère d'amélioration est proposé pour chaque paramètre  $\theta_j$ . Le filtrage améliore l'identification si la barre d'erreur de l'identification après filtrage est incluse dans celle sans filtrage. Ceci implique :

$$\begin{cases} \langle \delta\theta_j \rangle_{AD} + (\sigma_{jj})_{AD} - (\sigma_{jj})_{raw} < 0 \\ \text{et} \\ \langle \delta\theta_j \rangle_{AD} - (\sigma_{jj})_{AD} + (\sigma_{jj})_{raw} > 0 \end{cases} \quad (2.53a)$$

$$(2.53b)$$

avec  $\sigma_{jj} = \sqrt{\text{Cov}(\delta\theta)_{jj}}$ .

Le critère d'amélioration est illustré dans la FIGURE 2.3.

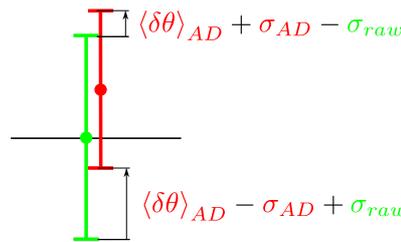


FIGURE 2.3: Critère d'amélioration pour l'évaluation du filtrage

### 2.3.4 Validation de l'analyse théorique

Afin de valider l'analyse au premier ordre proposée, elle est comparée à une approche Monte-Carlo où 1000 identifications ont été menées à partir de 1000 tirages aléatoires de bruit blanc gaussien rajoutés aux mesures exactes.

Le cas test correspondant est une plaque carrée homogène avec des appuis simples sur son côté gauche, dans la direction de l'effort appliqué, et une traction de distribution parabolique sur le côté opposé. Les champs de déplacement mesurés sont représentés dans la FIGURE 2.4.

Par mesure de simplicité, seul le coefficient de Lamé homogène  $\mu$  est recherché, tandis que  $\lambda$  est considéré connu. Une grille de mesure de taille  $100 \times 100$  est construite et l'identification est menée avec l'approche FEMU telle que détaillée dans la partie 2.2.1. Le problème inverse ainsi établi, avec des conditions aux limites mixtes et exactes (fiabiles) et où un seul module élastique est recherché, est très robuste vis-à-vis des perturbations de mesure, et ce grâce au moyennage des perturbations sur le domaine total pendant le processus d'identification. En général, la moyenne du bruit converge comme l'inverse de la racine carrée du nombre de points de mesure. Dans le cas étudié, cette moyenne n'atteint que  $10^{-2}$  du niveau de perturbation appliqué. Ainsi, afin de perturber les mesures de manière significative, le niveau de perturbation appliqué atteint ici 500% de la moyenne des déplacements.

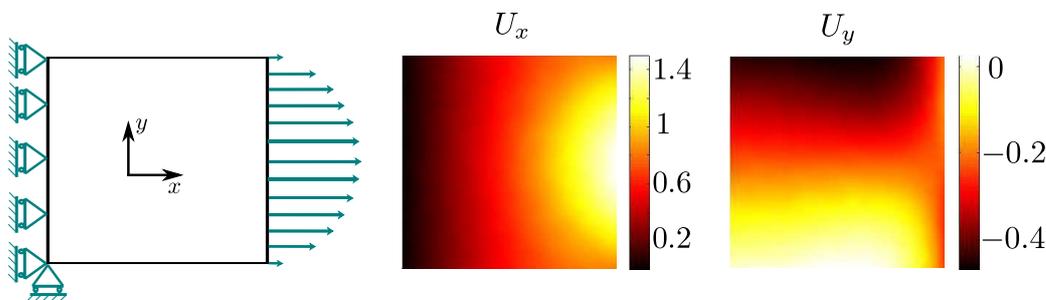


FIGURE 2.4: Conditions aux limites et champs de déplacement pour une simulation de traction parabolique

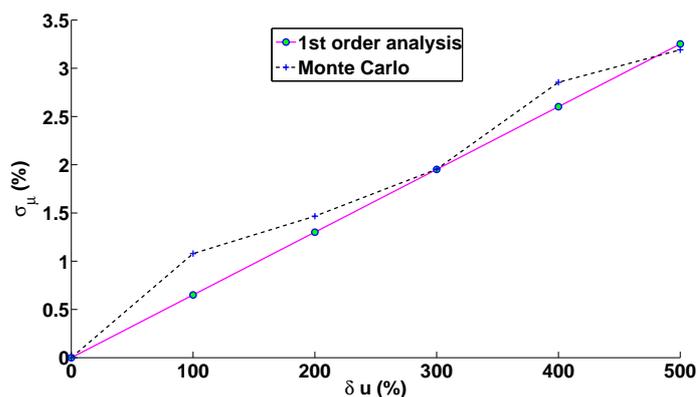


FIGURE 2.5: Écart-type de l'identification en fonction du niveau de perturbation

La FIGURE 2.5 représente l'écart-type de l'erreur d'identification de  $\mu$  en fonction de l'amplitude des perturbations rajoutées au déplacement, pour les deux approches analytique et statistique. On remarque que les résultats coïncident bien, ce qui valide l'approche proposée. Par ailleurs, dans l'exemple traité, les écarts-types de l'identification avec les deux types de champs de déplacement (brut et filtré) sont quasi-identiques, ce qui traduit un effet non significatif du filtrage pour ce type de problème inverse.

Il devient donc possible de passer à l'étude de l'effet du filtrage par approximation diffuse et du choix d'une norme adéquate pour les moindres carrés sur les résultats d'identification.

## 2.4 Effet du filtrage sur les résultats d'identification

Dans cette partie, l'analyse au premier ordre proposée dans la partie 2.3.2 est appliquée à l'identification de propriétés élastiques à partir de données synthétiques, en couplant la méthode FEMU (partie 2.2.1.3) avec le filtrage par approximation diffuse (partie 2.2.2). L'exemple numérique correspondant comporte des champs de déformation non uniformes dans la région d'étude, où des propriétés hétérogènes sont recherchées.

### 2.4.1 Construction des mesures et cadre de l'identification

L'application consiste en une plaque carrée avec une inclusion centrée, soumise à une force de traction uniaxiale uniformément réparti sur les côtés gauche et droit. Les mesures de déplacement sont créées à partir d'un calcul de référence, utilisant la méthode des éléments finis sous l'hypothèse des contraintes planes, où les éléments du maillage

sont des triangles T3 avec des fonctions de forme linéaires. La plaque est composée de deux matériaux homogènes, élastiques et isotropes (l'inclusion et son extérieur) avec une rigidité plus élevée pour l'inclusion (facteur 10 sur le module d'Young). Le tenseur de rigidité est défini en fonction des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ .

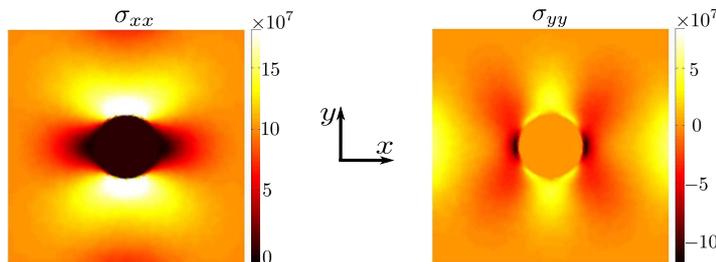


FIGURE 2.6: Champs de contrainte  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  relatifs à la simulation de traction

La grille de mesure a une taille de  $100 \times 100$  points de mesure, et un bruit blanc gaussien d'écart-type 5% est ajouté afin de représenter une erreur de mesure aléatoire réaliste. La FIGURE 2.6 affiche les cartes des contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  générées, illustrant le fort gradient des contraintes proche de l'inclusion.

En ce qui concerne les paramètres recherchés, le choix qui est fait est de se limiter à identifier le paramètre  $\mu$  dans la région extérieure à l'inclusion. Ainsi, le paramètre  $\lambda$  à l'extérieur de l'inclusion et la rigidité de l'inclusion sont supposés connus. Une telle hypothèse demeure valable en vue du but comparatif de l'étude. La région est ensuite considérée constante par morceaux.

Le vecteur de paramètres recherché  $\underline{\theta}$  contient alors les coefficients  $\mu$  correspondant aux différentes zones constantes et a une taille égale au nombre de zones constantes dans la plaque hors inclusion. Ce nombre est un paramètre du problème inverse. Plus il est élevé, plus le caractère mal posé du problème inverse est prononcé, du point de vue de l'augmentation du nombre de paramètres à identifier.

Comme présenté dans la partie 2.2.1.3, l'identification est menée avec l'approche FEMU qui consiste à minimiser l'écart quadratique entre les déplacements mesurés et calculés. Cela implique le choix d'une norme associée à la fonction coût en définissant la matrice des poids  $D$  dans (2.11a). Ce choix a un impact sur l'erreur d'identification (TABLEAU 2.1) à travers la matrice de sensibilité (2.44), ce qui en fait un deuxième paramètre du problème inverse devant être étudié. Dans un premier temps,  $D$  est prise égale à la matrice identité. L'équation (2.11a) s'écrit alors :

$$J(U, \underline{\theta}) = \frac{1}{2} (\Pi U - \tilde{U})^\top (\Pi U - \tilde{U}) \quad (2.54)$$

Les résultats sont comparés à partir du biais et de l'écart-type de l'erreur d'identification pour les mesures brutes et filtrées. Ensuite, le critère d'amélioration développé dans la partie 2.3.3 est étudié. Le choix qui est fait étant d'identifier des modules hétérogènes, toutes ces quantités seront calculées dans chaque zone constante.

## 2.4.2 Influence des différents paramètres du problème

### 2.4.2.1 Effet du rayon de filtrage

L'effet du filtrage est étudié sur la base de l'outil de filtrage par approximation diffuse présenté dans la partie 2.2.2. Le degré de la base de projection de l'approximation diffuse est fixé à 2. Ce choix provient des travaux de [Avril *et al.*, 2008b] et est basé sur un critère défini comme l'écart quadratique entre un champ reconstruit et un champ exact pour le

cas test d'une plaque trouée. Le paramètre principal qui régit le filtrage est alors le rayon  $R$  qui définit la taille physique du voisinage de chaque point de reconstruction (2.15) et est choisi constant dans toute la zone de mesure.

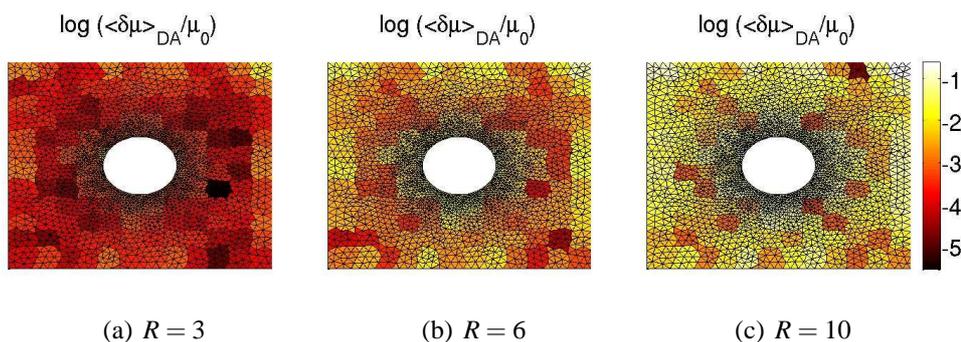


FIGURE 2.7: Cartes de biais pour trois rayons de filtrage

La FIGURE 2.7 affiche, à l'échelle logarithmique, trois cartes de biais de l'erreur d'identification obtenues après l'opération de filtrage, normées par le module de référence  $\langle \delta\mu \rangle_{AD}/\mu_0$ , et ce pour trois rayons de filtrage différents. Comme attendu, le biais augmente quand le rayon de filtrage est de plus en plus grand, et ce à cause de l'erreur d'approximation qui en découle (2.51).

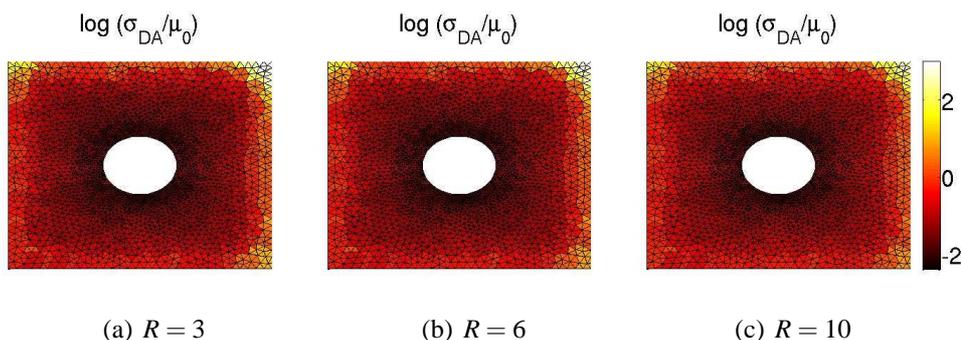


FIGURE 2.8: Cartes d'écart-type pour trois rayons de filtrage

La FIGURE 2.8 affiche, à l'échelle logarithmique, trois cartes d'écart-type obtenues pour trois rayons de filtrage différents, et montre que la variance diminue lorsque le rayon de filtrage augmente, grâce au moyennage de l'erreur aléatoire sur une plus grande zone (un plus voisinage). Par ailleurs, l'écart-type est plus élevé sur les bords de la plaque, à cause d'une augmentation de l'erreur de reconstruction par approximation diffuse dans une zone qui contient un voisinage de points réduit [Feissel, 2012].

On peut également noter que les zones avec un biais important correspondent aux zones proches de l'inclusion, dans lesquelles un fort gradient des déformations conduit à des erreurs d'approximation importantes. L'effet d'une telle erreur sur le champ de déplacement conduit à une erreur sur les propriétés identifiées qui reste locale. Au final, un rayon de filtrage adéquat doit refléter un compromis entre biais et écart-type de l'erreur d'identification.

### 2.4.2.2 Effet de la taille des zones constantes

La taille des zones constantes est un paramètre important du problème inverse. Lorsque la taille des zones constantes diminue, le nombre des paramètres inconnus augmente, conduisant à une identification de plus en plus difficile. Le paramètre  $\mu$  d'une zone constante

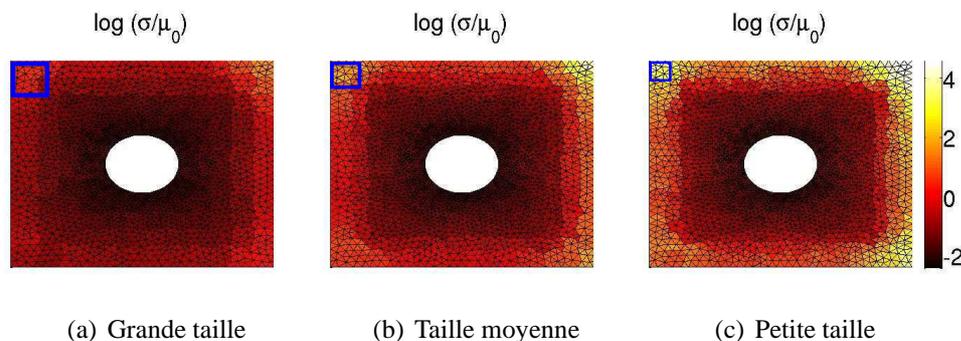


FIGURE 2.9: Cartes d'écart-type pour différentes tailles de zones constantes (sans filtrage)

donnée impacte le champ de déplacement dans le voisinage de la zone considérée. La taille de ce dernier diminuant avec la taille de la zone, ce qui fait augmenter *de facto* l'effet des perturbations de mesure. Il y a donc une limite à la résolution spatiale qui peut être espérée. Ceci se confirme par l'approche proposée qui montre que les niveaux du biais et de l'écart-type de l'erreur d'identification augmentent lorsque la taille des zones constantes diminue. La FIGURE 2.9 montre l'écart-type de l'erreur d'identification pour trois tailles de zone différentes dans le cas de mesures brutes.

### 2.4.2.3 Étude de l'amélioration de l'identification

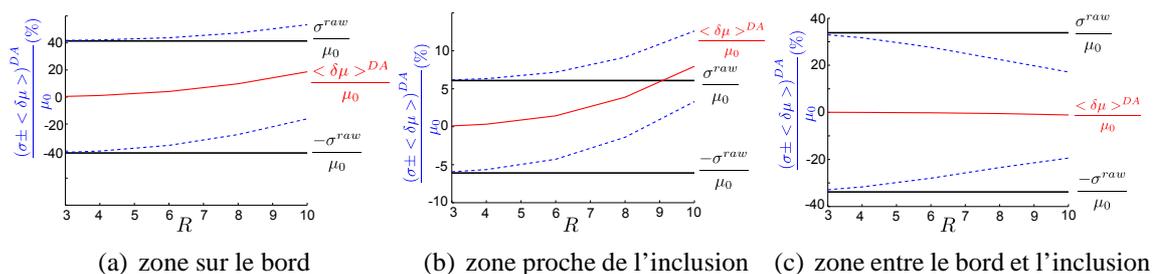


FIGURE 2.10: Erreur d'identification locale en fonction du rayon de filtrage

Dans cette partie, l'effet du filtrage sur les résultats d'identification est discuté plus en détail. Comme mentionné précédemment, il y a un compromis à trouver entre biais et écart-type afin de sélectionner le rayon  $R$  le plus pertinent. Ce compromis va dépendre, au moins, de la taille des zones constantes, de l'amplitude des perturbations et du gradient local des déformations. Le niveau de perturbation est fixé à 5% de la moyenne des déplacements, ce qui est assez représentatif d'une erreur aléatoire expérimentale dans le domaine élastique. L'effet des gradients locaux des déformations est illustré dans la FIGURE 2.10, où l'erreur d'identification est tracée en termes de biais et d'écart-type dans trois zones constantes différentes : une zone sur le bord de la plaque, une zone proche de l'inclusion et une zone intermédiaire (entre les deux précédentes), et ce pour une identification avec une taille de zone "moyenne". Dans chaque figure, les deux lignes horizontales définissent la barre d'erreur de l'identification sans filtrage, égale à l'écart-type de l'erreur d'identification (le biais étant nul). La ligne continue au milieu représente le biais de l'erreur d'identification avec filtrage, tandis que les lignes discontinues représentent la barre d'erreur autour du biais avec filtrage. Toutes ces quantités sont normées par la valeur de référence du coefficient de Lamé  $\mu_0$ .

Dans le cas des FIGURE 2.10(a) et FIGURE 2.10(b), le biais est prédominant pour toutes les valeurs de  $R$ , ce qui implique que le filtrage n'améliore pas l'identification. La FIGURE

2.10(c) indique une amélioration de l'identification avec le filtrage lorsque  $R$  augmente. À partir de ces résultats locaux, il est possible d'appliquer le critère (2.53) pour chaque zone constante, ce qui conduit à des cartes d'amélioration pour différents rayons de filtrage et différentes tailles de zones constantes (celles définies dans la FIGURE 2.9), comme illustré dans la FIGURE 2.11.

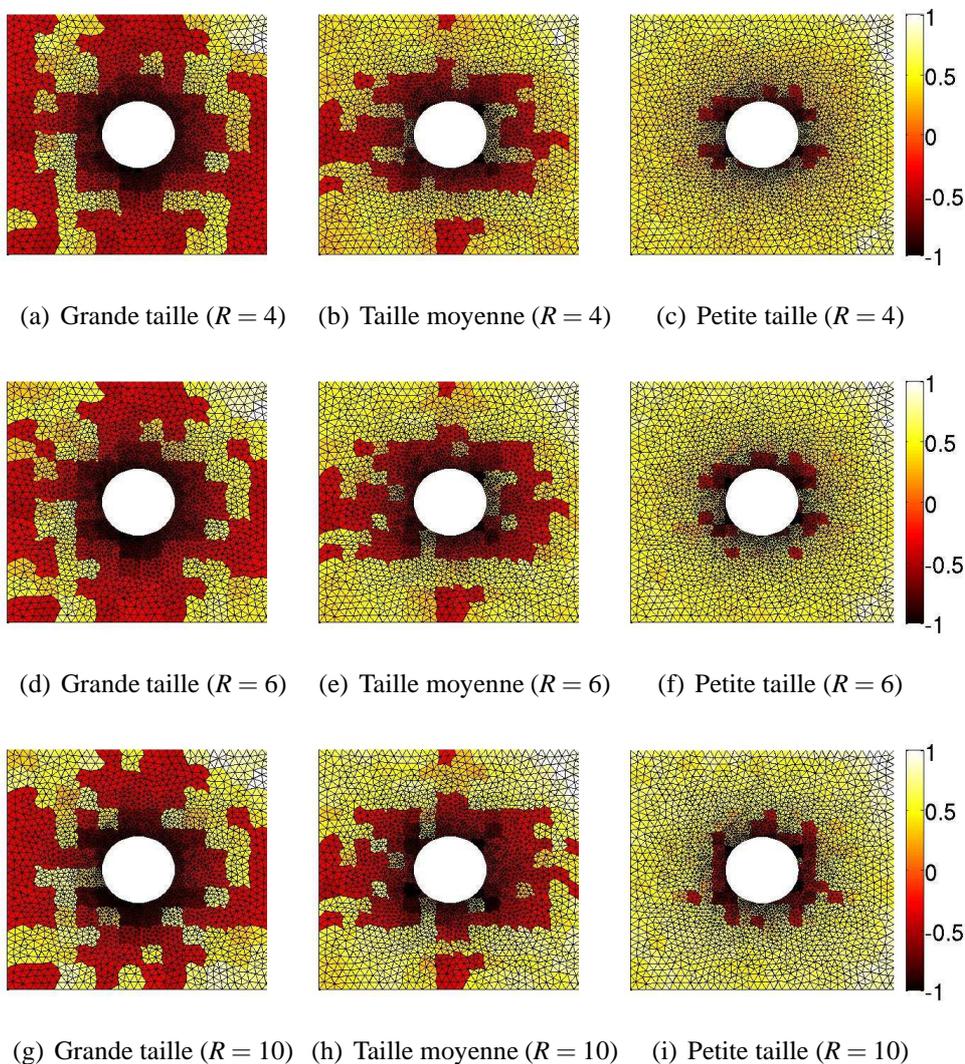


FIGURE 2.11: Cartes d'amélioration pour différents rayons et tailles de zones

La légende des couleurs est définie par un dégradé linéaire ayant pour couleur de départ une couleur sombre d'indice  $-1$ , relative à une non-amélioration de l'identification, et comme couleur d'arrivée une couleur claire d'indice  $1$ , relative à une amélioration de l'identification. Ainsi, les indices de couleur dans l'intervalle  $[-1, 0]$  correspondent à une non-amélioration tandis que l'intervalle  $[0, 1]$  correspond à une amélioration de l'identification. Dans l'exemple proposé, la tendance suivante peut être observée :

Le filtrage améliore les résultats d'identification surtout lorsque la taille des zones constantes est petite. Pour des zones plus grandes, le filtrage n'est pas nécessaire. Par ailleurs, l'identification ne se trouve pas améliorée par le filtrage à proximité de l'inclusion, à cause des forts gradients des déformations dans cette région. Les meilleurs résultats peuvent être observés FIGURE 2.11(c), correspondant à un rayon de filtrage  $R = 4$ .

Toutefois, au vu du niveau de l'erreur moyenne avec et sans filtrage (FIGURE 2.10), et malgré une amélioration évidente des résultats d'identification, on peut noter que l'identification est, à la base, de mauvaise qualité et que la limite de la résolution spatiale abor-

dable a été atteinte.

Remarque :

L'hypothèse d'un bruit de mesure blanc dans (2.47) peut paraître inappropriée dans le cadre de mesures de champs obtenus par CIN. Par conséquent, l'étude a été menée avec un bruit coloré, et donc une matrice de covariance  $C_0 \neq Id$ , obtenue avec l'outil CORRELI<sup>Q4</sup>. Les cartes d'amélioration pour les deux types de bruit sont sensiblement les mêmes.

### 2.4.3 Choix de la norme d'identification

Dans cette partie, l'impact du choix de la norme associée à la formulation des moindres carrés (2.11) sur les résultats d'identification est étudié. Comme mentionné dans la partie 2.4.1, les résultats précédents correspondent au choix de base d'une matrice des poids identité pour la fonction coût. Pour les données filtrées, ce choix conduit à un biais non nul de l'erreur d'identification.

Pour s'affranchir de ce biais tout en maintenant l'étape de filtrage, il est proposé de l'inclure dans l'étape d'identification en jouant sur la matrice des poids  $D$ . Dans ce sens, deux normes supplémentaires sont alors testées.

(i) Norme en déplacements filtrés

En filtrant les déplacements aussi bien mesurés que calculés, on récupère la même erreur d'approximation pour les deux champs reconstruits. L'écart entre les deux champs s'en trouve alors libre d'erreur d'approximation et conduit à un biais nul d'après l'expression du biais de l'erreur d'identification  $\langle \delta \underline{\theta} \rangle_{AD}$  (2.51). La fonction coût (2.11a) devient :

$$J(U, \underline{\theta}) = \frac{1}{2} (\Pi U - \tilde{U})^T M_u^T M_u (\Pi U - \tilde{U}) \quad (2.55)$$

$$\text{avec } D = M_u^T M_u$$

La matrice de sensibilité (2.44) correspondante s'écrit :

$$S^\theta = \left( U_m^{1T} \Pi^T M_u^T M_u \Pi U_m^1 \right)^{-1} U_m^{1T} \Pi^T M_u^T M_u \quad (2.56)$$

(ii) Norme en déformations filtrées

Alternativement, la fonction coût peut être basée sur les champs de déformation, en vue d'une plus grande sensibilité de ces derniers vis-à-vis des propriétés matérielles, et malgré une inévitable grande sensibilité aux perturbations de mesure. La seule modification de l'approche consiste à remplacer l'opérateur des déplacements  $M_u$  par l'opérateur des déformations  $M_\varepsilon$ . La fonction coût, portant sur un écart des déformations, devient :

$$J(U, \underline{\theta}) = \frac{1}{2} (\Pi U - \tilde{U})^T M_\varepsilon^T M_\varepsilon (\Pi U - \tilde{U}) \quad (2.57)$$

$$\text{avec } D = M_\varepsilon^T M_\varepsilon$$

La matrice de sensibilité associée s'écrit :

$$S^\theta = \left( U_m^{1T} \Pi^T M_\varepsilon^T M_\varepsilon \Pi U_m^1 \right)^{-1} U_m^{1T} \Pi^T M_\varepsilon^T M_\varepsilon \quad (2.58)$$

La FIGURE 2.12 présente l'évolution locale du biais et de l'écart-type de l'erreur d'identification en fonction du rayon de filtrage dans une même zone constante donnée (de taille petite). Pour chaque norme étudiée, les deux lignes horizontales délimitent la barre d'erreur de référence sans filtrage, avec une matrice de poids  $D = Id$ . La ligne continue du milieu représente le biais de l'erreur d'identification après filtrage, tandis que les lignes discontinues représentent la barre d'erreur de l'identification après filtrage. Ces quantités sont adimensionnées par  $\mu_0$ .

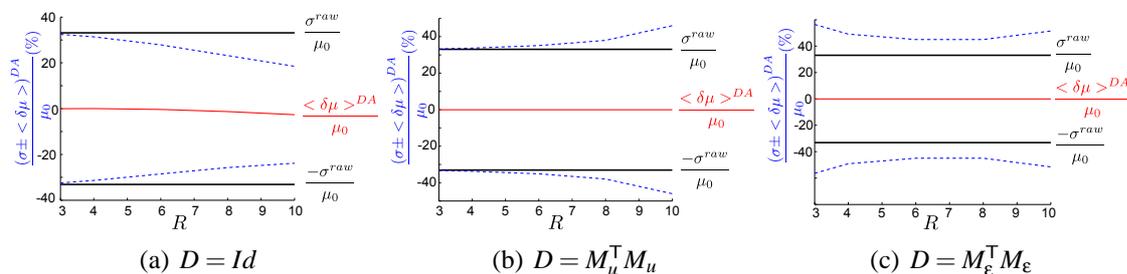


FIGURE 2.12: Erreur d'identification locale pour différentes normes de la fonction coût

Malgré un biais nul, il apparaît que les deux nouvelles normes n'améliorent pas les résultats d'identification puisque l'écart-type s'en trouve augmenté. Une augmentation du rayon de filtrage accentue ce phénomène. Cela est dû à des données, aussi bien mesurées que calculées, de plus en plus floutées à cause du filtrage, conduisant à une perte des informations mécaniques et une diminution de la sensibilité des champs cinématiques vis-à-vis des propriétés matérielles. Par conséquent, le gain lié à l'annulation du biais est compensé par une perte liée à l'augmentation de l'écart-type. Les normes alternatives sont donc inappropriées dans le cas étudié. Par ailleurs, cette tendance est observée partout dans la région d'étude.

Remarque :

Parmi les choix de norme possibles, et pour des mesures de champs issues de la CIN, l'inverse de la matrice de covariance peut être un choix optimal pour la matrice des poids (car le bruit est coloré).

## 2.4.4 Discussion

L'évaluation de la contribution du filtrage par approximation diffuse a été faite en comparant l'erreur d'identification avec et sans filtrage, via un critère d'amélioration illustré dans la FIGURE 2.11, qui constitue un indicateur afin de choisir les paramètres optimaux du filtrage. Plusieurs configurations du problème inverse étudié ont été testées en jouant sur l'échelle d'hétérogénéité souhaitée.

Quand couplé à l'identification par la méthode FEMU, le filtrage des mesures de champ s'avère utile dans certaines configurations où, hormis dans les zones de fort gradient de déformation, l'identification a été améliorée. Toutefois, l'intérêt est limité dans le cas étudié parce que le niveau d'erreur correspondant aux configurations où il y a une amélioration (résolution spatiale assez petite) est très élevé, d'une part, et le filtrage apporte peu d'amélioration pour les tailles de zone les plus grandes, d'autre part.

Remarque :

Le problème d'identification a été formulé avec l'hypothèse de conditions aux limites exactes (2.4), c'est-à-dire que seuls les points de mesures intérieurs sont perturbés. Il s'agit d'une hypothèse forte puisque l'algorithme de CIN ne voit aucune différence entre les points de mesure internes et ceux du bord, d'une part, et que les mesures sur le bord, issues de méthodes globales de CIN par exemple, contiennent davantage de perturbations car elles sont basées sur un plus petit nombre de pixels [Hild et Roux, 2012]. Cette hypothèse est néanmoins acceptable dans le cadre d'une comparaison de résultats basés sur des mesures (brutes et filtrées) construites avec la même formulation FEMU.

Il reste possible de tenir compte de perturbations sur le bord, soit en considérant une formulation FEMU avec des conditions aux limites perturbées de type Dirichlet, soit en perturbant les contraintes du problème d'identification sur les conditions aux limites. La deuxième possibilité permet d'utiliser les mêmes équations déjà définies et consiste à extrapoler le vecteur des perturbations (2.31) au bord du domaine, de sorte qu'il contienne une perturbation scalaire de déplacement et une d'effort.

## 2.5 Conclusion

Ce chapitre a abordé l'étude de l'effet du filtrage par approximation diffuse sur les résultats d'identification en élasticité linéaire basée sur l'approche de recalage de modèles par éléments finis. L'objet de l'étude était de discuter l'efficacité d'un filtre "non mécanique" en présence de mesures perturbées. Pour ce faire, la relation entre perturbations de mesures et erreur d'identification a dû être caractérisée à travers une analyse au premier ordre.

La méthodologie a ensuite été appliquée à un exemple numérique où des propriétés élastiques hétérogènes étaient recherchées. En comparaison aux mesures brutes, l'identification avec des données filtrées a été satisfaisante dans le cas étudié. Plus précisément, il a été montré que le filtrage est plus efficace lorsque les zones constantes sont de plus en plus petites. Par ailleurs, il a été observé que le filtrage détériore les résultats d'identification dans les régions à fort gradient de déformation.

En outre, l'étude du choix de la norme associée à la fonction coût du problème d'identification a conclu que l'utilisation des déplacements plutôt que des déformations était plus appropriée et que le filtrage des données simulées n'améliore pas les résultats d'identification.

La méthodologie proposée peut être appliquée comme une étude préliminaire à l'identification expérimentale des paramètres matériels : en considérant la modélisation numérique de l'essai et en prenant en compte une erreur aléatoire réaliste, l'ajustement du filtrage peut être étudié en amont afin d'évaluer l'amélioration attendue et la résolution spatiale des résultats d'identification. Par ailleurs, ayant à disposition l'erreur aléatoire et les paramètres de filtrage choisis, le filtrage peut ensuite être utilisé en aval de l'identification expérimentale comme outil d'estimation des incertitudes relatives à la solution identifiée. L'exemple étudié a montré que les erreurs sont plus importantes sur les bords de l'échantillon ainsi que dans les régions à fort gradient de déformation. De ce fait, le rayon  $R$  peut être adapté spatialement afin de mieux contrôler les erreurs locales d'identification.

Ce chapitre a permis d'évaluer l'apport du filtrage de mesures perturbées sur les résultats d'identification obtenus par des approches de recalage par éléments finis. Cette étude

peut par ailleurs être mise en place pour d'autres stratégies d'identification. Malgré une amélioration de l'identification pour les résolutions spatiales les plus fines, le filtrage ne s'avère pas nécessaire pour l'identification de paramètres homogènes.

Dans le prochain chapitre, nous abordons le problème d'identification de propriétés matérielles élastiques, homogènes et hétérogènes, en proposant une méthode qui tient compte du caractère incertain aussi bien des mesures que du modèle de comportement.

# Stratégie d'identification par l'Erreur en Relation de Comportement modifiée

*Ce chapitre présente la stratégie d'identification basée sur l'erreur en relation de comportement modifiée, développée dans le cas général de l'élasticité statique, isotrope ou orthotrope, homogène ou hétérogène, et s'appuyant sur les mesures de champs. Après la définition du cadre d'identification, le problème d'identification est formulé en prenant en compte les incertitudes sur les mesures, d'abord en l'absence de conditions aux limites, puis en tenant compte d'informations fiables sur le bord du domaine. La méthode est ensuite étudiée dans le cas d'exemples numériques de sollicitations statiques, où la robustesse vis-à-vis des perturbations sur les mesures est étudiée.*

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Stratégie d'identification</b>	<b>48</b>
3.1.1	Cadre général de l'identification en 2D	48
3.1.2	Formulation : résolution par minimisation séquentielle	49
3.1.3	Résolution du problème de base	52
3.1.4	Algorithme de résolution	60
3.1.5	Prise en compte d'informations fiables sur le bord	65
<b>3.2</b>	<b>Identification de propriétés isotropes homogènes</b>	<b>68</b>
3.2.1	Simulation d'un essai de traction	69
3.2.2	Essai de flexion trois points	73
<b>3.3</b>	<b>Effet de la taille de la zone de mesure</b>	<b>76</b>
3.3.1	Identification avec de petites zones de mesure	76
3.3.2	Intérêt du calcul sur le domaine total	77
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>79</b>

---

## 3.1 Stratégie d'identification

La problématique centrale évoquée dans cette étude est la gestion des perturbations expérimentales et de l'erreur de modèle en identification.

Plusieurs techniques de filtrage existent pour essayer de régulariser ces problèmes. Il y a l'approche qui consiste à agir directement sur les mesures, en amont de l'étape d'identification, comme la technique de filtrage par approximation diffuse évoquée au chapitre 2. Un autre type de filtrage, "mécanique", est celui de la corrélation d'images numériques intégrée ou *integrated digital image correlation* (I-DIC) [Roux et Hild, 2006], qui consiste à intégrer, dès l'étape de calcul des déplacements, des connaissances *a priori* relatives à la physique des phénomènes mis en jeu, et donc aux champs mécaniques. Dans ce cas de figure, le déplacement est recherché sur une base de solutions choisie dans l'algorithme de corrélation, et non plus arbitrairement. Ensuite, les champs de déplacement ainsi optimisés sont utilisés comme entrée pour une méthode d'identification au choix, comme le recalage par éléments finis.

Afin que les améliorations apportées aux mesures soient en meilleur accord avec le problème à traiter, plusieurs stratégies cherchent à lisser les perturbations au cours de l'identification. Quelques unes limitent l'impact du bruit, en évitant par exemple de dériver les mesures et d'amplifier le bruit ce faisant [Roux et Hild, 2008]. D'autres utilisent des critères de choix de champs optimaux vis-à-vis du bruit de mesure [Grédiac *et al.*, 2001]. Trois remarques peuvent être faites à ce niveau :

1. Plusieurs méthodes nécessitent les conditions aux limites sur toute la frontière du domaine étudié (l'EGM et la VFM peuvent faire sans). Quels conditions aux limites doit-on prendre ? Sont-elles connues et fiables ?
2. Sur quel domaine l'identification doit-elle être menée lorsque la zone de mesure ne couvre pas la taille du domaine entier (taille réelle de l'échantillon étudié) ? La plupart des méthodes se limitent souvent à la zone de mesure.
3. Comment gérer l'incertitude de modèle. Serait-il intéressant de la quantifier afin d'en tenir compte dans le processus d'identification ?

Dans ce chapitre, on propose de définir le problème d'identification en tenant compte du caractère perturbé, non seulement des mesures, mais aussi du modèle de comportement imposé, et ce grâce au concept d'erreur en relation de comportement modifiée. Une de ses spécificités est de séparer l'ensemble des grandeurs physiques mises en jeu en quantités fiables et peu fiables.

### 3.1.1 Cadre général de l'identification en 2D

Dans cette partie, on définit le problème de référence qui servira de base pour la mise en œuvre de la stratégie d'identification [Ben Azzouna *et al.*, 2011a, Ben Azzouna *et al.*, 2011b].

Considérons une structure  $\Omega$  soumise à un chargement statique et gouvernée par les équations de la mécanique. On s'intéresse ici à l'identification de ses propriétés élastiques. Dans la FIGURE 3.1, le sous-domaine  $\Omega_m$  correspond à une zone de mesure non nulle, et les mesures de champs cinématiques sont représentées par un champ  $\underline{\tilde{u}} \in \mathbb{R}^{2 \times n}$  pour un problème 2D, où  $n$  représente le nombre de points de mesures.

Remarque :

En pratique, les vraies données en déplacement sont discrètes. Vu leur richesse, on s'autorise ici à présenter le problème en continu, avec des mesures continues.

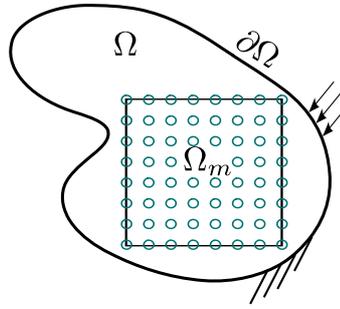


FIGURE 3.1: Problème direct associé au problème d'identification

Le problème direct est mal posé à cause de plusieurs facteurs, à savoir :

- (i) des mesures perturbées ;
- (ii) des conditions aux limites partiellement ou totalement inconnues, si on choisit de ne pas introduire d'hypothèses pour les modéliser ;
- (iii) la méconnaissance des propriétés matérielles qui constituent l'objectif de l'identification.

Par soucis de simplicité, la résultante d'effort sur la frontière où un chargement est appliqué, mesurable lors d'essais expérimentaux en élasticité statique, ne sera pas prise en compte ici. Cela introduit d'emblée un déséquilibre entre les données expérimentales cinématiques et statiques.

En négligeant les forces de volume, les équations dont on dispose sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Équilibre mécanique :} & \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}} \quad \text{dans } \Omega \quad (3.1a) \\ \text{Compatibilité cinématique :} & \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{\nabla}}^T \underline{\underline{u}}) \quad \text{dans } \Omega \quad (3.1b) \\ \text{Relation de comportement :} & \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C}(\underline{\underline{\theta}}) : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{dans } \Omega \quad (3.1c) \\ \text{Mesures :} & \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{\tilde{u}}} \quad \text{dans } \Omega_m \quad (3.1d) \end{array} \right.$$

avec  $\mathbb{C}$  le tenseur de rigidité, paramétré par les propriétés matérielles  $\underline{\underline{\theta}}$  comme dans la partie 2.2.1.1 et pouvant être homogène ou hétérogène, isotrope ou anisotrope,  $\underline{\underline{u}}$  est le vecteur des déplacements,  $\underline{\underline{\sigma}}$  le tenseur des contraintes et  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  le tenseur des déformations. Le problème suivant est défini sans conditions aux limites. Le problème avec prise en compte d'informations sur le bord sera traité dans la partie 3.1.5.

Le vecteur  $\underline{\underline{\tilde{u}}}$  contient les mesures de déplacement obtenues par CIN, et est défini tel que  $\underline{\underline{\tilde{u}}} \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ .

Les mesures de champs obtenues par CIN étant perturbées, elles peuvent être vues comme la somme d'un terme de mesures exactes  $\underline{\underline{\tilde{u}}}_0$  et d'un terme de perturbation  $\delta \underline{\underline{\tilde{u}}}$ , tel que :

$$\underline{\underline{\tilde{u}}} = \underline{\underline{\tilde{u}}}_0 + \delta \underline{\underline{\tilde{u}}} \quad (3.2)$$

### 3.1.2 Formulation : résolution par minimisation séquentielle

La méconnaissance des conditions aux limites de la structure  $\Omega$ , d'une part, et la disponibilité d'un champ de déplacement bruité, d'autre part, rendent le problème direct de la FIGURE 3.1 mal posé, c'est-à-dire qu'en règle générale, il n'admet pas de solution. Pour en admettre une, il faudrait que la loi de comportement soit compatible avec des conditions aux limites et des mesures de champs donnés. L'identification va se baser sur une quantification de cette non-compatibilité des paramètres vis-à-vis du champ cinématique bruité pour les identifier. Afin de pouvoir définir le problème de base nécessaire à l'approche inverse, il faut relâcher un certain nombre d'équations du problème de référence

tel qu'il est posé au paragraphe 3.1.1.

Le parti pris de l'ERdC modifiée est de séparer les grandeurs en quantités fiables et quantités moins fiables. Dans notre cas, la séparation est celle du TABLEAU 3.1 :

Fiables	Peu fiables
Équilibre : $\underline{\underline{div}} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}}$	Relation de comportement : $\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}$
Compatibilité cinématique : $\underline{\underline{\varepsilon}} = (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{\nabla}}^T \underline{\underline{u}})/2$	Mesures : $\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{\tilde{u}}}$

TABLEAU 3.1: Quantités fiables et non fiables dans le cas élastique

La première quantité considérée comme peu fiable est la relation de comportement puisque c'est justement le comportement qu'on cherche à caractériser. La deuxième quantité peu fiable est le champ mesuré car il est entaché de perturbations de mesure. Le caractère "modifiée" de l'ERdC provient du classement des mesures comme quantité incertaine dans la formulation.

La formulation du problème d'identification consiste alors à confronter l'ensemble des données théoriques et expérimentales. Les équations fiables sont vérifiées de manière exacte via la définition des espaces d'admissibilité cinématique et statique, respectivement  $\mathcal{U}_{Ad}$  et  $\mathcal{S}_{Ad}$ , qui vérifient les équations fiables de manière forte :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_{Ad} = \{\underline{\underline{u}} \in H_1(\Omega)\} \\ \mathcal{S}_{Ad} = \{\underline{\underline{\sigma}} \in H_{div}(\Omega) / \underline{\underline{div}} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}} \text{ dans } \Omega\} \end{cases} \quad (3.3)$$

On dira ensuite que  $\underline{\underline{u}}$  est CA, c'est-à-dire Cinématiquement Admissible, s'il est dans  $\mathcal{U}_{Ad}$ , et que  $\underline{\underline{\sigma}}$  est SA, c'est-à-dire Statiquement Admissible, s'il est dans  $\mathcal{S}_{Ad}$ .

Dans un deuxième temps, les équations peu fiables seront vérifiées au mieux par la minimisation d'une fonctionnelle comportant deux termes relatifs aux deux équations considérées comme incertaines. Cette fonctionnelle s'écrit :

$$J(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\theta}}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} - \mathbb{C} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{u}})) : \mathbb{C}^{-1} : (\underline{\underline{\sigma}} - \mathbb{C} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{u}})) d\Omega + \alpha \int_{\Omega_m} \frac{1}{2} \|\underline{\underline{u}} - \underline{\underline{\tilde{u}}}\|^2 d\Omega_m \quad (3.4)$$

$J$  est composée d'une énergie et de l'intégrale 2D du carré d'une distance.  $\alpha$  est un hyper-paramètre qui peut jouer deux rôles : un rôle d'adimensionnement des deux termes, et un rôle de pondération entre les deux. Cet hyper-paramètre est ici construit à partir du ratio entre une estimation de l'énergie élastique du problème de référence et le carré des mesures, et s'écrit comme :

$$\alpha = \gamma \times p, \text{ avec } p \in \mathbb{R} \quad (3.5)$$

où  $\gamma$  est le le ratio énergie élastique/carré des mesures, et  $p$  le ratio des poids affectés à  $J_2$  et  $J_1$ . Dans la suite, l'identification sera menée avec un poids égal pour les deux composantes ( $p = 1$ ). Le terme  $J_1$  mesure l'écart en énergie entre un champ de contraintes statiquement admissible  $\underline{\underline{\sigma}}$  et un champ de contrainte évalué à partir du champ de déplacement cinématiquement admissible  $\underline{\underline{u}}$ , les deux restant à définir. Ici, le tenseur de souplesse  $\mathbb{C}^{-1}$  confère à  $J_1$  la dimension d'une énergie.

Le problème d'identification s'écrit donc :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\theta}}) \text{ qui minimisent : } J(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\theta}}) \\ & \text{sous les contraintes : } (\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{\sigma}}) \in \mathcal{U}_{Ad} \times \mathcal{S}_{Ad} \end{aligned}$$

Le problème est alors résolu dans sa globalité à travers une minimisation séquentielle, par rapport aux champs admissibles puis aux paramètres dépendant du matériau :

$$\min_{(\underline{u}, \underline{\sigma}, \underline{\theta})} J(\underline{u}, \underline{\sigma}, \underline{\theta}) \iff \min_{\underline{\theta}} \min_{(\underline{u}, \underline{\sigma})} J(\underline{u}, \underline{\sigma}, \underline{\theta}) \quad (3.6)$$

En pratique, on fait le choix de séparer ce problème en deux : un problème de base qui construit les champs de contraintes et de déplacement optimaux, à paramètres  $\underline{\theta}$  fixés, et un problème d'identification qui consiste à identifier les paramètres matériels en se basant sur les champs précédemment définis, comme décrit ci-dessous.

### 3.1.2.1 Le problème de base

Le problème de base s'écrit donc, pour un jeu de paramètres  $\underline{\theta}$  fixé :

*Trouver les champs  $\underline{u}, \underline{\sigma}$  minimisant :*

$$J(\underline{u}, \underline{\sigma}, \underline{\theta}) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{\sigma} - \mathbb{C} : \underline{\varepsilon}(\underline{u})) : \mathbb{C}^{-1} : (\underline{\sigma} - \mathbb{C} : \underline{\varepsilon}(\underline{u})) d\Omega}_{J_1} + \alpha \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega_m} \|\underline{u} - \tilde{u}\|^2 d\Omega_m}_{J_2} \quad (3.7)$$

*sous les contraintes :*

$$\underline{u} \in \mathcal{U}_{Ad}, \quad \underline{\sigma} \in \mathcal{S}_{Ad} \quad (3.8)$$

La solution est notée  $(\underline{u}(\underline{\theta}), \underline{\sigma}(\underline{\theta}))$ , et on montre dans la partie 3.1.3.4 qu'elle existe et est unique.

La fonctionnelle  $J$  exprime un écart au comportement à travers le terme  $J_1$  et une distance quadratique aux mesures à travers le terme  $J_2$ , permettant une vérification au mieux des équations peu fiables.

Dans les applications numériques présentées dans la suite,  $J_2$  est divisé par le carré des mesures, tandis que  $J_1$  est divisé par une estimation de l'énergie élastique du problème de référence permettant de construire les mesures artificiellement. En pratique, dans un vrai essai mécanique, on peut avoir une estimation de l'énergie élastique grâce à un calcul éléments finis avec des propriétés élastiques approximatives dans le cas d'un matériau homogène, ou des propriétés élastiques homogénéisées dans le cas d'un comportement hétérogène.

Par ailleurs, l'impact du choix d'un poids différent pour les deux composantes sur l'identification peut être étudié afin de sélectionner un poids optimal, par exemple au sens de la régularisation de type L-curve [Calvettia *et al.*, 2000]. La robustesse du terme d'erreur de modèle vis-à-vis des perturbations de mesure peut motiver un choix de poids différent pour les deux composantes de la fonctionnelle  $J$ .

### 3.1.2.2 Le problème d'identification

La seconde étape est le problème d'identification des propriétés matérielles et consiste alors à trouver les meilleurs paramètres  $\underline{\theta}^{\text{opt}}$  du modèle en minimisant une fonction coût  $\mathcal{G}$ , définie à partir des champs solution construits dans l'étape précédente (3.7, 3.8), telle que :

$$\mathcal{G}(\underline{u}(\underline{\theta}), \underline{\sigma}(\underline{\theta})) = \min_{(\underline{u}, \underline{\sigma})} J(\underline{u}, \underline{\sigma}, \underline{\theta}) \quad (3.9)$$

La fonction coût associée au problème d'identification a, ici, la même expression que la fonctionnelle du problème de base  $J$ , mais est fonction des champs solution  $\underline{u}$  et  $\underline{\sigma}$ . Le

problème d'identification s'écrit :

**Trouver** les paramètres  $\underline{\theta}$  minimisant :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\underline{\theta}) &= J(\underline{u}(\underline{\theta}), \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\theta})) = J_1(\underline{u}(\underline{\theta}), \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\theta})) + \alpha J_2(\underline{u}(\underline{\theta}), \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\theta})) \\ &= \mathcal{G}_1(\underline{\theta}) + \alpha \mathcal{G}_2(\underline{\theta}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

La solution est alors :

$$\underline{\theta}^{\text{opt}} = \arg \min_{\underline{\theta}} \mathcal{G}(\underline{\theta}) \quad (3.11)$$

où l'estimation de  $\mathcal{G}(\underline{\theta})$  implique la résolution du problème de base pour le jeu de paramètres  $\underline{\theta}$ .

### 3.1.3 Résolution du problème de base

#### 3.1.3.1 Choix d'une formulation en déplacement

Le choix qui est fait dans cette étude est de formuler le problème d'identification global en déplacement [Ladevèze *et al.*, 1994, Calloch *et al.*, 2002] plutôt qu'en contrainte [Latourte, 2007, Florentin et Lubineau, 2010]. Un tel choix implique que l'admissibilité statique des champs de contrainte ne sera pas satisfaite de manière exacte, mais plutôt au sens faible des éléments finis. Cependant, on peut montrer que les erreurs de discrétisation qui en découlent sont négligeables devant les erreurs de modèle.

Les champs CA et SA recherchés seront donc des champs de déplacement. On peut montrer facilement que le champ de contrainte recherché  $\underline{\underline{\sigma}}$  peut s'exprimer en fonction d'un champ de déplacement  $\underline{v}$  SA :

$$\exists \underline{v} / \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) = \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v})$$

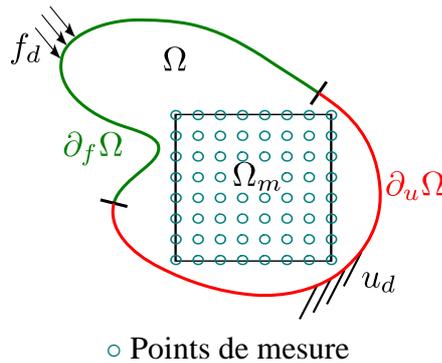


FIGURE 3.2: Problème de référence lié au problème d'identification

Afin de démontrer cette équivalence, on partira d'un cadre d'identification où l'on dispose d'une zone de mesure  $\Omega_m$  et de conditions aux limites mixtes sur  $\partial\Omega$  avec une partition de la frontière comme dans la FIGURE 3.2. La partie  $\partial_u\Omega$  contient des CL de type Dirichlet et  $\partial_f\Omega$  des CL de type Neumann, telles que  $\partial_u\Omega \cap \partial_f\Omega = \emptyset$  et  $\partial_u\Omega \cup \partial_f\Omega = \partial\Omega$ . Toutes les données de la frontière seront considérées ici comme fiables.

Remarque :

Ce cadre est un peu plus large que celui proposé plus haut.

On dispose alors des équations suivantes :

$$\text{dans } \Omega \begin{cases} \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}} & (3.12a) \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{\nabla}}^T \underline{\underline{u}}) & (3.12b) \\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} & (3.12c) \end{cases}$$

$$\text{dans } \Omega_m \{ \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{\tilde{u}}} \quad (3.13)$$

$$\text{sur } \partial_f \Omega \{ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{f}}_d \quad (3.14)$$

$$\text{sur } \partial_u \Omega \{ \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}_d \quad (3.15)$$

La relation de comportement et les mesures sont considérées comme non fiables, le problème d'identification consiste alors à trouver le couple  $(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{\sigma}})$  minimisant la fonctionnelle  $J(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\theta}})$  qui s'écrit :

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{u}})) : \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{u}})) d\Omega + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega_m} \|\underline{\underline{u}} - \underline{\underline{\tilde{u}}}\|^2 d\Omega_m \quad (3.16)$$

sous les contraintes : (3.12a), (3.14) et (3.15)

Le calcul des déformations se faisant via l'équation (3.12b), celle-ci est vérifiée d'office dans l'expression (3.16). On va montrer le théorème suivant :

**Théorème 1** : à l'optimum de  $J(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\theta}})$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}$  est compatible, c'est-à-dire :

$$\exists \underline{\underline{v}} \in H_1(\Omega) / \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{v}})$$

**Corollaire** On peut se restreindre à chercher  $\underline{\underline{\sigma}}$  parmi les champs compatibles, c'est-à-dire de la forme  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{v}}) = \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{v}})$ , ce qui implique les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{u}}) &= \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{v}}) - \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{u}}) = \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{v}} - \underline{\underline{u}}) \\ &= \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{v}} - \underline{\underline{u}}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Cela revient alors à chercher à minimiser la fonctionnelle :

$$J(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{v}}, \underline{\underline{\theta}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{v}} - \underline{\underline{u}}) : \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{v}} - \underline{\underline{u}}) d\Omega + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega_m} \|\underline{\underline{u}} - \underline{\underline{\tilde{u}}}\|^2 d\Omega_m \quad (3.18)$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{v}}) = \underline{\underline{0}} & \text{dans } \Omega & (3.19a) \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{f}}_d & \text{sur } \partial_f \Omega & (3.19b) \\ \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}_d & \text{sur } \partial_u \Omega & (3.19c) \end{cases}$$

**Démonstration du théorème** On introduit le Lagrangien associé à la minimisation de (3.16) sous les contraintes (3.12a), (3.14), (3.15).

$$\mathcal{L}(\underline{u}, \underline{\sigma}) = J(\underline{u}, \underline{\sigma}, \underline{\theta}) - \int_{\Omega} \underline{u}^* \underline{\text{div}} \underline{\sigma} d\Omega - \int_{\partial_f \Omega} \underline{\lambda}^* (\underline{\sigma} \cdot \underline{n} - \underline{f}_d) dS - \int_{\partial_u \Omega} \underline{\mu}^* (\underline{u} - \underline{u}_d) dS \quad (3.20)$$

Les conditions d'optimalité du 1<sup>er</sup> ordre s'écrivent :

$$\begin{cases} \forall \delta \underline{u}, \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{u}}, \delta \underline{u} \right) = 0 & (3.21a) \\ \forall \delta \underline{\sigma}, \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\sigma}}, \delta \underline{\sigma} \right) = 0 & (3.21b) \\ + (3.12a), (3.14), (3.15) \end{cases}$$

L'explicitation de (3.21b) donne,  $\forall \delta \underline{\sigma}$  :

$$0 = \int_{\Omega} (\underline{\sigma} - \mathbb{C} : \underline{\varepsilon}(\underline{u})) : \mathbb{C}^{-1} : \delta \underline{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\text{div}} (\delta \underline{\sigma}) \underline{u}^* d\Omega - \int_{\partial_f \Omega} (\delta \underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \underline{\lambda}^* dS \quad (3.22)$$

Or :  $-\int_{\Omega} \underline{\text{div}} (\delta \underline{\sigma}) \underline{u}^* d\Omega = \int_{\Omega} \delta \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*) d\Omega - \int_{\partial \Omega} (\delta \underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \underline{u}^* dS$ , d'où :

$$0 = \int_{\Omega} [\underline{\sigma} - \mathbb{C} : \underline{\varepsilon}(\underline{u} - \underline{u}^*)] : \mathbb{C}^{-1} : \delta \underline{\sigma} d\Omega - \int_{\partial_f \Omega} (\delta \underline{\sigma} \cdot \underline{n}) (\underline{u}^* + \underline{\lambda}^*) dS - \int_{\partial_u \Omega} (\delta \underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \underline{u}^* dS \quad (3.23)$$

Ceci étant vrai,  $\forall \delta \underline{\sigma}$ , on en déduit en particulier pour  $\delta \underline{\sigma} \in \mathcal{D}(\Omega)$ , espace des fonctions indéfiniment dérivables et nulles sur le bord :  $\underline{\sigma} - \mathbb{C} : \underline{\varepsilon}(\underline{u} - \underline{u}^*) = 0$  presque partout dans  $\Omega$ , ce qui s'écrit :

$$\underline{\sigma} = \mathbb{C} : \underline{\varepsilon}(\underline{u} - \underline{u}^*) \quad (3.24)$$

Donc :  $\exists \underline{v} \in H_1(\Omega)$  tel que :

$$\underline{\sigma}(\underline{v}) = \mathbb{C} : \underline{\varepsilon}(\underline{v}) \quad (3.25)$$

ce qui démontre le théorème 1.

La fonctionnelle (3.16) s'écrit alors :

$$J(\underline{u}, \underline{v}, \underline{\theta}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma}(\underline{v} - \underline{u}) : \mathbb{C}^{-1} : \underline{\sigma}(\underline{v} - \underline{u}) d\Omega + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega_m} \|\underline{u} - \tilde{\underline{u}}\|^2 d\Omega_m \quad (3.26)$$

### 3.1.3.2 Discrétisation de type éléments finis

L'expression du problème sous forme éléments finis consiste à projeter l'ensemble des équations (3.1), avec absence de conditions aux limites, sur un espace éléments finis où les champs de déplacement sont donnés sous la forme :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \Phi(\underline{x}) U ; \quad \underline{v}(\underline{x}) = \Phi(\underline{x}) V \quad (3.27)$$

où  $\Phi(\underline{x})$  est la matrice des fonctions de forme et  $U$  et  $V$  les vecteurs des inconnues nodales, associés, respectivement, aux champs  $\underline{u}$  et  $\underline{v}$ . Les contraintes (3.14) et (3.15) ne sont plus d'actualité dans cette formulation (FIGURE 3.1).

La fonctionnelle  $J$  s'écrit sous sa forme discrète comme :

$$J(U, V) = \frac{1}{2} (U - V)^T K (U - V) + \frac{\alpha}{2} (\Pi U - \tilde{U})^T (\Pi U - \tilde{U}) \quad (3.28)$$

avec  $K$  la matrice de rigidité globale,  $\tilde{U}$  le vecteur colonne qui contient les déplacements mesurés dans  $\Omega_m$ , et  $\Pi$  un opérateur d'extraction/projection du maillage éléments finis

vers la grille régulière des mesures. Dans le cadre des mesures expérimentales, la grille de mesure et le maillage éléments finis peuvent être différents. L'opérateur de transfert  $\Pi$  permet alors de projeter les champs mécaniques du maillage vers la grille de mesure.

Son second rôle est l'extraction d'un champ qui couvre la grille de mesure, à partir du champ auquel il s'applique, qui est sur le maillage complet de  $\Omega$ , et  $\Omega_m \subset \Omega$

Il se définit donc comme suit :

$$\Pi : U \longmapsto \Pi U$$

$\Pi U$  étant au final la restriction du champ solution  $U$  au domaine de mesure  $\Omega_m$ , et sa projection sur les points de mesures à partir des nœuds du maillage.

Avec l'hypothèse d'absence de conditions aux limites, l'approche choisie pour la résolution du problème discret est de répartir les nœuds éléments finis en deux groupes : des nœuds intérieurs d'indice  $i$ , relatifs à l'intérieur du domaine, et des nœuds sur le bord  $\partial\Omega$  d'indice  $b$ . L'indice  $\circ$  fera alors référence à l'ensemble des nœuds.

**Discrétisation de la contrainte du problème de base :** On veut construire un champ de contrainte SA avec divergence nulle. Une manière de décrire ce champ est de le poser comme un problème de MMC (3.1a, 3.1c). Pour résoudre ce problème on commence par l'écrire en éléments finis comme :

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ib} \\ K_{bi} & K_{bb} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_i \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_b \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

avec  $F_b$  l'effort généralisé aux nœuds de bord.

Par ailleurs, la formulation faible de (3.1a) s'obtient en écrivant son produit scalaire par un champ virtuel arbitraire  $\underline{u}^*$ , tel que :

$$\int_{\Omega} \underline{\text{div}} \underline{\sigma} \underline{u}^* d\Omega \quad (3.30)$$

Le champ test étant CA à zéro ( $\underline{u}^* \in H_1^0(\Omega)$ ), alors la deuxième ligne du système matriciel (3.29) n'intervient pas.

En d'autres termes, un champ à divergence nulle décrit par le problème (3.29) peut être généré par différentes conditions aux limites sur le bord. Pour un problème de type Neumann, l'effort généralisé aux nœuds de bord est tel que  $F_b = K_{bi} V_i + K_{bb} V_b$ .

Le problème de type Dirichlet est analogue puisque l'on va avoir un champ de déplacement  $U_d$  imposé sur le bord du domaine tel que  $V_b = U_d$ , qui va générer l'effort équivalent  $F_b$  du problème de Neumann. Ce problème s'écrit :

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ib} & 0 \\ K_{bi} & K_{bb} & Id \\ 0 & Id & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_i \\ V_b \\ \Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_d \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

où  $\Gamma$  est un multiplicateur de Lagrange. On en déduit alors que :

$$F_b = \Gamma = -(K_{bi} V_i + K_{bb} V_b) \quad (3.32)$$

Finalement, la contrainte discrète (3.1a) du problème de base s'écrit comme :

$$\underline{\text{div}} \underline{\sigma} = \underline{0} \implies K_{i\circ} V = 0 \quad (3.33)$$

Elle n'impacte que les lignes de la matrice de rigidité globale  $K$ .  
Au final, le problème de base discret s'écrit :

**Trouver** les champs  $U, V$  tels que :

$$(U(\underline{\theta}), V(\underline{\theta})) = \min_{(U, V)} J(U, V) \quad (3.34)$$

sous la contrainte (3.33)

### 3.1.3.3 Introduction d'un Lagrangien

La première étape pour appliquer la stratégie d'identification est donc d'exprimer le problème de base (3.7, 3.8) puis de le résoudre. Ce problème étant un problème quadratique sous contraintes linéaires, les conditions d'optimalité du premier ordre sont donc suffisantes. On introduit le Lagrangien suivant afin d'imposer la contrainte (3.33) :

$$\mathcal{L}(U, V, \Lambda_i) = J(U, V) - \Lambda_i^T (K_{i_0} V) \quad (3.35)$$

La différentielle du Lagrangien s'exprime :

$$d\mathcal{L} \begin{cases} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U}, \delta U \right) = \delta U^T (K(U - V) + \alpha(\Pi^T \Pi U - \Pi^T \tilde{U})) & (3.36a) \\ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V}, \delta V \right) = \delta V^T (K_{i_0}^T \Lambda_i - K(U - V)) & (3.36b) \\ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda_i}, \delta \Lambda_i \right) = \delta \Lambda_i^T K_{i_0} V & (3.36c) \end{cases}$$

Le système d'optimalité est :  $\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda_i} \right) = (0, 0, 0)$ , et l'étude de la stationnarité du Lagrangien donne les équations suivantes :

$$d\mathcal{L} = 0 \implies \begin{cases} (K + \alpha \Pi^T \Pi) U - K V = \alpha \Pi^T \tilde{U} & (3.37a) \\ K(U - V) = K_{i_0}^T \Lambda_i & (3.37b) \\ K_{i_0} V = 0 & (3.37c) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} K(U - V) + \alpha \Pi^T \Pi U = \alpha \Pi^T \tilde{U} & (3.38a) \\ K(V - U) + K_{i_0}^T \Lambda_i = 0 & (3.38b) \\ K_{i_0} V = 0 & (3.38c) \end{cases}$$

On peut re-écrire l'équation (3.38b) comme :

$$K(V - U + \Lambda_2) = 0 \quad (3.39)$$

avec  $\Lambda_2$  tel que  $(\Lambda_2)_i = \Lambda_i$  et  $(\Lambda_2)_b = 0$ .

L'équation (3.39) correspond à un problème de MMC avec des conditions aux limites de Neumann de bord libre. Une structure à l'équilibre ne subissant aucun effort ne se déforme pas, par conséquent, la solution de (3.39) est un mouvement de corps rigide  $C_R$  :

$$V - U + \Lambda_2 = C_R \quad (3.40)$$

Une décomposition sur les nœuds intérieurs et ceux du bord donne :

$$\begin{cases} V_i - U_i + \Lambda_i = C_{R_i} & (3.41a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_b - U_b = C_{R_b} & (3.41b) \end{cases}$$

Par ailleurs, si l'on décompose (3.38a) de la même manière sur les nœuds  $i$  et  $b$ , on obtient :

$$\begin{cases} K_{ii} (U_i - V_i) + K_{ib} (U_b - V_b) + \alpha (\Pi^T \Pi)_{ii} U_i = \alpha (\Pi^T)_{io} \tilde{U} & (3.42a) \\ K_{bb} (U_b - V_b) + K_{bi} (U_i - V_i) = 0 & (3.42b) \end{cases}$$

En injectant (3.38c) dans (3.42a) on obtient :

$$K_{ii} U_i + K_{ib} U_b + \alpha (\Pi^T \Pi)_{ii} U_i = \alpha (\Pi^T)_{io} \tilde{U} \quad (3.43)$$

Et en injectant (3.41b) dans (3.42b) on a :

$$K_{bi} (U_i - V_i) - K_{bb} C_{R_b} = 0 \quad (3.44)$$

En utilisant (3.38c) sous la forme  $V_i = -K_{ii}^{-1} K_{ib} V_b$  on a :

$$K_{bi} U_i - K_{bi} (-K_{ii}^{-1} K_{ib}) V_b - K_{bb} C_{R_b} = 0 \quad (3.45)$$

et puisque l'on a l'équation (3.41b), on peut écrire :

$$K_{bi} U_i + K_{bi} K_{ii}^{-1} K_{ib} (U_b + C_{R_b}) - K_{bb} C_{R_b} = 0 \quad (3.46)$$

ou encore

$$K_{bi} U_i + K_{bi} K_{ii}^{-1} K_{ib} U_b + \underbrace{(-K_{bb} + K_{bi} K_{ii}^{-1} K_{ib})}_{(*)} C_{R_b} = 0 \quad (3.47)$$

Avec  $(*) = 0$ . En effet, on a  $K C_R = 0$  qui s'écrit sur les nœuds  $i$  et  $b$  comme :

$$\begin{cases} K_{bi} C_{R_i} + K_{bb} C_{R_b} = 0 & (3.48a) \\ C_{R_i} = -K_{ii}^{-1} K_{ib} C_{R_b} & (3.48b) \end{cases}$$

d'où :

$$K_{bb} C_{R_b} - K_{bi} K_{ii}^{-1} K_{ib} C_{R_b} = 0 \quad (3.49)$$

Ainsi :

$$K_{bi} U_i + K_{bi} K_{ii}^{-1} K_{ib} U_b = 0 \quad (3.50)$$

Finalement, on obtient un système seulement en  $U$  :

$$\begin{bmatrix} K_{ii} + \alpha (\Pi^T \Pi)_{ii} & K_{ib} \\ K_{bi} & K_{bi} K_{ii}^{-1} K_{ib} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_i \\ U_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha (\Pi^T)_{io} \tilde{U} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

On peut remarquer que la stratégie de résolution qui a été suivie va permettre de résoudre le problème de base sur les nœuds de bord, et de réduire ainsi sa taille (partie 3.1.4).

**Réciproque :** Vérifions que si l'on a trouvé  $U$  solution de (3.51) alors on peut résoudre (3.38).

Soient  $U_i, U_b$  solution de (3.51). On pose  $V_b = U_b + C_{R_b}$ , où  $C_{R_b}$  est choisi arbitrairement. On calcule  $V_i$  par  $V_i = -K_{ii}^{-1} K_{ib} V_b$ . Dans ces conditions, (3.37a) et (3.37c) sont vérifiées. Si l'on pose  $\Lambda_i = C_{R_i} + U_i - V_i$ , alors (3.37b) sera vérifiée aussi.

**Résolution de (3.51) :** On élimine  $U_i$  par

$$U_i = (K_{ii} + \alpha (\Pi^T \Pi)_{ii})^{-1} \{ \alpha (\Pi^T)_{io} \tilde{U} - K_{ib} U_b \} \quad (3.52)$$

qu'on remplace dans la deuxième équation du système (3.51). On obtient alors l'équation suivante :

$$-K_{bi} \underbrace{[K_{ii}^{-1} - (K_{ii} + \alpha (\Pi^T \Pi)_{ii})^{-1}]}_{\tilde{K}_{ii}} K_{ib} U_b = \underbrace{\alpha K_{bi} (K_{ii} + \alpha (\Pi^T)_{io})^{-1}}_{\tilde{K}_{bi}} \tilde{U} \quad (3.53)$$

ce que l'on notera :

$$K_{bi} \tilde{K}_{ii} K_{ib} U_b = \tilde{K}_{bi} \tilde{U} \quad (3.54)$$

**Discussion**

**Propriété 1 :**  $\widetilde{K}_{ii}$  est une matrice symétrique, positive mais pas non définie !

**Démonstration**  $K_{ii}$  étant symétrique, définie positive, on peut écrire :

$$\widetilde{K}_{ii} = K_{ii}^{-1} - (K_{ii} + \alpha(\Pi^T \Pi)_{ii})^{-1} = K_{ii}^{-1/2} [Id - (Id + \alpha S)^{-1}] K_{ii}^{-1/2} \quad (3.55)$$

avec

$$S = K_{ii}^{-1/2} (\Pi^T)_{i\circ} K_{ii}^{-1/2} = ((\Pi^T)_{i\circ} K_{ii}^{-1/2})^T ((\Pi^T)_{i\circ} K_{ii}^{-1/2}) \quad (3.56)$$

$S$  est symétrique positive, mais possède la valeur propre 0. En effet :  $\forall W$

$$\begin{aligned} S W = 0 &\implies \|(\Pi^T)_{i\circ} K_{ii}^{-1/2} W\|^2 = 0 \\ &\implies (\Pi^T)_{i\circ} K_{ii}^{-1/2} W = 0 \\ &\implies [K_{ii}^{-1/2} W]_m = 0 \\ &\implies [K_{ii}^{-1/2}]_{m\circ} W = 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

c'est-à-dire :

$$[K_{ii}^{-1/2}]_{mm} W_m + [K_{ii}^{-1/2}]_{m\bar{m}} W_{\bar{m}} = 0 \quad (3.58)$$

avec l'indice  $m$  qui indique les composantes dans  $\Omega_m$  et  $\bar{m}$  les composantes sur le reste du domaine  $\Omega$ .

Réciproquement, si  $W$  vérifie (3.58) et  $W \neq 0$  alors  $W \in Ker S$ , donc :

$$Ker S = \{W \in \mathbb{R}^{n_i} / (3.58) \text{ est vérifiée}\} \quad (3.59)$$

où  $n_i$  indique le nombre des ddl correspondant aux nœuds internes du domaine. On en déduit que  $S$  peut s'écrire :

$$S = P \begin{bmatrix} D_+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^T = P D P^T \quad (3.60)$$

avec  $D = \begin{bmatrix} D_+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  et  $D_+ > 0$  une matrice diagonale à termes positifs. Par conséquent, si l'on injecte (3.60) dans (3.55) on obtient :

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_{ii} &= K_{ii}^{-1/2} [Id - \{P (Id + \alpha D) P^T\}^{-1}] K_{ii}^{-1/2} \\ &= K_{ii}^{-1/2} P [Id - (Id + \alpha D)^{-1}] P^T K_{ii}^{-1/2} \\ &= K_{ii}^{-1/2} P \text{diag} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \alpha D_{ii}} \right\} P^T K_{ii}^{-1/2} \\ &= K_{ii}^{-1/2} P \text{diag} \left\{ \frac{\alpha D_{ii}}{1 + \alpha D_{ii}} \right\} P^T K_{ii}^{-1/2} \\ &= K_{ii}^{-1/2} P \begin{bmatrix} \widetilde{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^T K_{ii}^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.61)$$

avec  $\widetilde{D} = \text{diag} \left\{ \frac{\alpha D_{ii}}{1 + \alpha D_{ii}} \right\}$  d'où le fait que  $\widetilde{K}_{ii}$  est symétrique positive.

## 3.1.3.4 Existence et unicité de la solution

**Propriété 2** : Le système (3.51) admet toujours une solution. Celle-ci n'est pas unique, *a priori*.

**Démonstration** Une condition suffisante pour assurer l'existence d'une solution est de vérifier que  $\forall U_m \in \mathbb{R}^{n_i}, \exists V \in \mathbb{R}^{n_i}$  tel que :

$$\widetilde{K}_{ii} V = (K_{ii} + \alpha (\Pi^T)_{i_0})^{-1} U_m \quad (3.62)$$

Pour cela, on utilise les diagonalisations précédentes. L'équation (3.62) s'écrit encore :

$$K_{ii}^{-1/2} P_m \widetilde{D} P_m^T K_{ii}^{-1/2} V = K_{ii}^{-1/2} P_m (I + \alpha D) P_m^T K_{ii}^{-1/2} U_m + K_{ii}^{-1/2} P_{\bar{m}} P_{\bar{m}}^T K_{ii}^{-1/2} U_m \quad (3.63)$$

où l'on a décomposé  $P = [P_m \ P_{\bar{m}}]$ . Cette équation aura une solution si et seulement si :

$$K_{ii}^{-1/2} P_{\bar{m}} P_{\bar{m}}^T K_{ii}^{-1/2} U_m = 0, \forall U_m \quad (3.64)$$

Ceci est une conséquence de (3.58).

(3.63) se résume alors à :

$$K_{ii}^{-1/2} P_m \widetilde{D} P_m^T K_{ii}^{-1/2} V = K_{ii}^{-1/2} P_m (Id + \alpha D) P_m^T K_{ii}^{-1/2} U_m \quad (3.65)$$

ce qui se ramène à :

$$P_m \widetilde{D} P_m^T \xi = P_m (Id + \alpha D) P_m^T \eta \quad (3.66)$$

en ayant posé  $\xi = K_{ii}^{-1/2} V$  et  $\eta = K_{ii}^{-1/2} U_m$ . L'équation (3.66) est linéaire, donc l'ensemble des solutions s'écrit  $\xi = \xi_p + \xi_0$ , où  $\xi_p$  est une solution particulière et  $\xi_0$  est une solution quelconque du noyau.

Calcul de  $\xi_0$  :

$P_m \widetilde{D} P_m^T \xi_0 = 0 \implies \xi_0^T P_m \widetilde{D} P_m^T \xi_0 = 0 \implies P_m^T \xi_0 = 0$ , donc  $\xi_0 = P_{\bar{m}} \gamma$ ,  $\gamma$  quelconque, c'est-à-dire  $\xi_0 \in \text{Ker } S$ .

Calcul de  $\xi_p$  :

D'après ce qui précède, il suffit de chercher  $\xi_p$  comme une combinaison linéaire de la base  $P_m$ , c'est-à-dire poser  $\xi_p = P_m \zeta$ . Mais alors,  $\zeta$  doit être tel que :

$$P_m \widetilde{D} P_m^T P_m \zeta = P_m (Id + \alpha D) P_m^T \eta \quad (3.67)$$

donc un  $\zeta$  possible est  $\zeta = \widetilde{D}^{-1} (Id + \alpha D) P_m^T \eta$ , d'où l'on peut prendre :

$$\xi_p = P_m \widetilde{D}^{-1} (Id + \alpha D) P_m^T \eta \quad (3.68)$$

Finalement, toutes les solutions de (3.66) s'écrivent :

$$\xi = P_m \widetilde{D}^{-1} (Id + \alpha D) P_m^T \eta + P_{\bar{m}} \gamma, \gamma \in \mathbb{R}^{n_{\bar{m}}} \text{ quelconque} \quad (3.69)$$

Si l'on revient aux variables de départ :

$$\begin{aligned} V &= K_{ii}^{1/2} P_m \widetilde{D}^{-1} (Id + \alpha D) P_m^T K_{ii}^{1/2} U_m + K_{ii}^{1/2} P_{\bar{m}} \gamma \\ &= V_m + V_0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

Retour à l'équation (3.54) :

Compte tenu de ce qui précède, l'équation (3.54) s'écrit :

$$K_{bi} \widetilde{K}_{ii} K_{ib} U_b = K_{bi} V \quad (3.71)$$

où  $V$  est donné par (3.70).

Ce système admet toujours une solution car c'est le système d'optimalité associé à la fonction coût suivante :

$$J(U_b) = \frac{1}{2} \|K_{ib} U_b - V\|_{\widetilde{K}_{ii}}^2 \quad (3.72)$$

Cette fonction coût est convexe quadratique donc admet au moins un minimum caractérisé par l'équation (3.71), d'où le résultat :

**Propriété 3 :** Le système (3.54) admet une solution au moins.

Si l'on suppose, de plus, que  $\mathfrak{S}(K_{ib}) \cap \text{Ker } \widetilde{K}_{ii} = \{0\}$ , et que la matrice  $K_{ib}$  est injective, on aura unicité de  $U_b$  solution de (3.54).

### 3.1.4 Algorithme de résolution

Récrivons (3.54) comme :

$$M U_b = S \quad (3.73)$$

avec  $M = K_{bi} \widetilde{K}_{ii} K_{ib}$  et  $S = \widetilde{K}_{bi} \widetilde{U}$ .

Au final, on arrive à avoir une solution peu coûteuse en temps de calcul, car elle fait intervenir les nœuds du bord uniquement.

#### 3.1.4.1 Noyau et décomposition QR

On vient de voir que  $U_b$  existe toujours, cependant la résolution de (3.73) nécessite quelques précautions car  $M$  est positive, symétrique mais non définie.

On effectue une décomposition QR de  $M$ , où  $R$  est une matrice triangulaire supérieure et  $Q$  une matrice de changement de base orthonormée.

$$M = QR = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

avec  $R_2 = 0$  par construction et  $R_1$  est la partie non nulle de  $R$ . On résout alors l'équation (3.73) :

$$M U_b = S \implies R U_b = Q^T S \quad (3.75)$$

Ainsi

$$\begin{cases} R_1 U_b = Q_1^T S \\ R_2 U_b = Q_2^T S \end{cases} \quad (3.76a)$$

$$\begin{cases} R_1 U_b = Q_1^T S \\ R_2 U_b = Q_2^T S \end{cases} \quad (3.76b)$$

On obtient au final :

$$\begin{cases} Q_2^T S = 0 \\ R_{11} U_{b1} + R_{12} U_{b2} = Q_1^T S = S_1 \end{cases} \quad (3.77a)$$

$$\begin{cases} Q_2^T S = 0 \\ R_{11} U_{b1} + R_{12} U_{b2} = Q_1^T S = S_1 \end{cases} \quad (3.77b)$$

Toute solution se décompose en une solution générale et une solution particulière :

$U_b = U_b^p + U_b^0$ , telle que :

$$\begin{cases} R_{11} U_{b1}^p = S_1 \text{ et } U_{b2}^p = 0 \\ R_{11} U_{b1}^0 + R_{12} U_{b2}^0 = 0 \end{cases} \quad (3.78a)$$

$$\begin{cases} R_{11} U_{b1}^p = S_1 \text{ et } U_{b2}^p = 0 \\ R_{11} U_{b1}^0 + R_{12} U_{b2}^0 = 0 \end{cases} \quad (3.78b)$$

L'écriture (3.78) constitue la solution du système (3.73) où la solution  $U_b$  se décompose en une solution particulière et un terme relatif au noyau qu'on choisit nul. De plus,  $U_{b2}^0$  peut être choisi comme on veut, et on peut ainsi en déduire  $U_{b1}^0$ . La solution finale est alors :

$$U_b = R_{11}^{-1} Q_1^T S \quad (3.79)$$

On verra dans la suite que le choix du représentant du noyau, donc de  $R_{b2}^0$ , n'affecte pas la valeur de la fonctionnelle  $J$ .

**Réciproque :** Soit  $U = U^P + U^0$  défini comme solution de (3.78), alors :

$$\begin{aligned} M U &= (Q_1 R_1) U = Q_1 (R_1 U) \\ &= Q_1 S_1 = Q_1 Q_1^T S \end{aligned} \quad (3.80)$$

Mais, en général,  $Q_1 Q_1^T S \neq S$ . Cependant, ici  $Q_2^T S = 0$ , puisque  $S \in \mathfrak{S}(M)$  d'après la propriété 2. Donc,  $Q_2 Q_2^T S = 0$ . On en déduit que :

$$M U = Q_1 Q_1^T S + Q_2 Q_2^T S = I \times S = S \quad (3.81)$$

D'où le fait que  $R_{1\circ} U = S_1 \implies M U = S$

Conclusion :

L'ensemble des solutions de (3.54) est donné par l'équation (3.78b).

**Solution générale  $(U, V)$  du système (3.38) :** Soit  $U_b = U_b^P + U_b^0$  une solution quelconque de (3.54).  $U_b^0$  correspond à une solution de (3.54) avec  $U_m = 0$ . On calcule  $U_i^0$  qui correspond, par (3.51), à :

$$U_i^0 = -(K_{ii} + \alpha \Pi)^{-1} K_{ib} U_b^0 \quad (3.82)$$

On obtient ainsi une solution du noyau du système (3.51). On peut le vérifier :

La deuxième équation du système s'écrit :

$$K_{bi} \{ -(K_{ii} + \alpha \Pi)^{-1} K_{ib} \} U_b^0 + K_{bi} K_{ii}^{-1} K_{ib} U_b^0 = K_{bi} \widetilde{K}_{ii} K_{ib} U_b^0 = 0 \quad (3.83)$$

On calcule ensuite  $V_b^0$  par  $V_b^0 = U_b^0 + C_{R_b}$ . On en déduit  $V_i^0 = -K_{ii} K_{ib} V_b^0$  d'après l'équation (3.38c).

On fait de même avec  $U_b^P$ , ce qui nous fournit  $U_i^P, V_b^P, V_i^P$  et on a ainsi :

$$\begin{cases} K(U^P - V^P) + \alpha \Pi U^P = \alpha \widetilde{U} \\ K_{i\circ} V^P = 0 \\ U_b^P = V_b^P + C_{R_b}^P \end{cases} \quad (3.84)$$

$$\begin{cases} K(U^0 - V^0) + \alpha \Pi U^0 = 0 \\ K_{i\circ} V^0 = 0 \\ U_b^0 = V_b^0 + C_{R_b}^0 \end{cases} \quad (3.85)$$

et aussi

$$\begin{cases} K(U^P + U^0 - V^P - V^0) + \alpha \Pi (U^P + U^0) = \alpha \widetilde{U} \\ K_{i\circ} (V^P + V^0) = 0 \\ U_b^P + U_b^0 = V_b^P + V_b^0 + (C_{R_b}^P + C_{R_b}^0) \end{cases} \quad (3.86)$$

Il reste à évaluer la fonction coût à l'optimum.

**Propriété 4 :**

$$J(U^{\text{opt}}, V^{\text{opt}}) = \frac{1}{2} \alpha (\Pi U^{\text{opt}} - \widetilde{U})^T (\Pi V^{\text{opt}} - \widetilde{U}) \quad (3.87)$$

**Démonstration** D'abord,

$$\begin{aligned}
 (\Pi U - \tilde{U})^\top (\Pi U - \tilde{U}) &= (U - \tilde{U})^\top \Pi (\Pi U - \tilde{U}) \text{ car } \Pi \tilde{U} = \tilde{U} \\
 &= (U - V)^\top (\Pi U - \tilde{U}) + (V - \tilde{U})^\top (\Pi U - \tilde{U}) \\
 &= (U - V)^\top (\Pi U - \tilde{U}) + (V - \tilde{U})^\top \Pi (U - \tilde{U}) \quad (3.88)
 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
 J(U^{\text{opt}}, V^{\text{opt}}) &= \frac{1}{2}(U - V)^\top K (U - V) + \frac{\alpha}{2} (\Pi U - \tilde{U})^\top (\Pi U - \tilde{U}) \\
 &= \frac{1}{2}(U - V)^\top \{K (U - V) + \alpha (\Pi U - \tilde{U})\} + \frac{\alpha}{2} (V - \tilde{U})^\top \Pi (U - \tilde{U}) \\
 &= 0 + \frac{\alpha}{2} (U - \tilde{U})^\top \Pi (V - \tilde{U}) \text{ d'après (3.38a)} \quad (3.89)
 \end{aligned}$$

**Propriété 5 :**

$$\begin{aligned}
 J(U, V) &= \frac{1}{2}(U - V)^\top K (U - V) + \frac{\alpha}{2} (\Pi U - \tilde{U})^\top (\Pi U - \tilde{U}) \\
 &\text{sous la contrainte } K_{i0} V = 0
 \end{aligned}$$

n'admet qu'une seule valeur minimale.

**Démonstration** Cela résulte du fait que l'on minimise un critère convexe sur un sous-espace vectoriel.

**Conséquence :**

Le corollaire de la propriété 5 est que,  $\forall U_0, V_0$  est solution de (3.84) :

$$J(U^p + U^0, V^p + V^0) = J(U^p, V^p) \quad (3.90)$$

En effet,  $(U^p, V^p)$  et  $(U^p + U^0, V^p + V^0)$  vérifient (3.85) et (3.86), ce qui correspond à l'optimum de  $J(U, V)$  dans les deux cas.

**Propriété 6 :**  $(U^0, V^0) = (0, 0)$  est solution de (3.85) et

$$J(U^0, V^0)_{\tilde{U}=0} = \frac{1}{2}(U^0 - V^0)^\top K (U^0 - V^0) + \frac{\alpha}{2} U^{0\top} \Pi U^0 \geq 0$$

et

$$J(0, 0)_{\tilde{U}=0} = 0$$

Donc si le couple  $(U^0, V^0)$  est solution de (3.85) alors :

$$U^{0\top} \Pi V^0 = 0 \quad (3.91)$$

On est maintenant en mesure d'énoncer le résultat central, correspondant au théorème 2, dans le cas continu :

**Théorème 2 :** Le noyau de la forme quadratique  $J$  est réduit à

$$\{(U, V) / K_{i0} U = 0, \Pi U = 0 \text{ et } (U - V) = C_R\}$$

**Démonstration** Il faut et il suffit de montrer que  $(U, V)$  est solution de (3.85)  $\implies (U, V) = (0, 0)$ .

Soit  $(U, V)$  solution de (3.85), alors, d'après la propriété 6, on a  $J(U, V)_{\tilde{U}=0} = 0$ , c'est-à-dire :

$$0 = (U - V)^T K (U - V) + \alpha (\Pi U)^T (\Pi U) \quad (3.92)$$

donc, par positivité :  $(U - V)^T K (U - V) = 0$  et  $\Pi U = 0$ .

Puisque  $0 = \Pi U$ , alors (3.85) entraîne  $K (U - V) = 0$ , c'est-à-dire  $U - V = C_R$ ,  $C_R$  quelconque.

En conclusion,  $U$  et  $V$  sont tels que :

$$K_{i_0} U = 0 ; K_{i_0} V = 0 ; \Pi U = 0 ; U - V = C_R \quad (3.93)$$

Le choix de  $C_R$  n'a pas d'importance. En effet :

**Propriété 7 :**

$$J(U, V + C_R) = J(U, V), \forall C_R \quad (3.94)$$

**Démonstration**

$$\begin{aligned} J(U, V + C_R) &= \frac{1}{2} (U - V - C_R)^T K (U - V - C_R) + \frac{\alpha}{2} (\Pi U - \tilde{U})^T (\Pi U - \tilde{U}) \\ &= J(U, V) - \frac{1}{2} C_R^T K (U - V) + \frac{1}{2} C_R^T K C_R \\ &= J(U, V) - (U - V)^T K C_R + \frac{1}{2} C_R^T K C_R \\ &= J(U, V) + 0 + 0 \text{ puisque } K C_R = 0 \end{aligned} \quad (3.95)$$

**Propriété 8 :** Le choix du représentant dans le noyau  $(U^0 - V^0)$  n'influence pas la valeur de la fonctionnelle  $J$ .

**Démonstration**

$$\begin{aligned} J(U + U^0, V + V^0) &= \frac{1}{2} (U + U^0 - V - V^0)^T K (U + U^0 - V - V^0) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} (\Pi U + \Pi U^0 - V_m)^T (\Pi U + \Pi U^0 - V_m) \\ &= \frac{1}{2} (U - V)^T K (U - V) + (U - V)^T K (U^0 - V^0) \\ &\quad + \frac{1}{2} (U^0 - V^0)^T K (U^0 - V^0) + \frac{\alpha}{2} (\Pi U - \tilde{U})^T (\Pi U - \tilde{U}) \\ &\quad \text{puisque } \Pi U^0 = 0 \text{ (théorème 1)} \\ &= J(U, V) \text{ puisque } K(U^0 - V^0) = 0 \text{ (théorème 1)} \end{aligned} \quad (3.96)$$

À ce stade, on conclut que le problème de base défini par l'ERdC modifiée possède une solution unique, et que la fonctionnelle  $J$  relative au problème d'optimisation est convexe.

On reprend maintenant le système d'équations (3.51). Dans la suite, on se permet de noter  $\Pi$  l'opérateur de transfert restreint aux nœuds intérieurs.

En décomposant les équations du système à résoudre sur les nœuds internes et les nœuds de bord, et on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (K_{ii} + \alpha \Pi^T \Pi) U_i + K_{ib} U_b = \alpha \Pi^T \tilde{U} & (3.97a) \\ K_{bi} U_i + K_{bb} U_b - K_{bi} V_i - K_{bb} V_b = 0 & (3.97b) \\ K_{ii} U_i + K_{ib} U_b = K_{ii} \Lambda_i & (3.97c) \\ K_{bi} (U_i - V_i) + K_{bb} (U_b - V_b) = K_{bi} \Lambda_i & (3.97d) \\ K_{ii} V_i + K_{ib} V_b = 0 & (3.97e) \end{cases}$$

La solution  $(U_i, U_b, V_i, V_b)$  découle ensuite de la résolution de l'équation (3.73) avec  $M = K_{bi} \left[ (K_{ii} + \alpha \Pi^T \Pi)^{-1} - K_{ii}^{-1} \right] K_{ib}$  et  $S = K_{bi} (K_{ii} + \alpha \Pi^T \Pi)^{-1} \alpha \Pi^T \tilde{U}$

### 3.1.4.2 Calcul explicite du gradient

Un intérêt de l'utilisation de la même fonctionnelle pour définir le problème de base et le problème d'identification est l'accès immédiat au gradient de la fonction coût  $\mathcal{G}$  (3.10), ce qui permet de le fournir lors de la minimisation de cette dernière. D'une manière classique, la méthode de l'état adjoint permet d'obtenir une expression explicite du gradient. Dans notre formulation, le problème direct et le problème adjoint sont couplés dès le départ et donc résolus en même temps. La fonction coût et sa dérivée s'expriment en fonction du Lagrangien comme suit :

$$\mathcal{G}(\underline{\theta}) = \mathcal{L}(U(\underline{\theta}), V(\underline{\theta}), \Lambda_i(\underline{\theta}), \underline{\theta}) \quad (3.98)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_k} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial \theta_k}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial \theta_k}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda_i} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \theta_k}}_{=0} \quad (3.99)$$

Les dérivées partielles du Lagrangien par rapport aux champs  $U, V$  et au multiplicateur de Lagrange  $\Lambda_i$  sont nulles car ces derniers sont solution du problème de base (3.34, 3.33), et  $\theta_k$  est le  $k^e$  paramètre matériel recherché. Ainsi, il suffit de calculer la dérivée partielle du Lagrangien par rapport aux paramètres dépendant du matériau, soit :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_k} = \frac{1}{2} (U - V)^T \frac{\partial K}{\partial \theta_k} (U - V) - \Lambda_i^T \frac{\partial K_{i0}}{\partial \theta_k} V \quad (3.100)$$

On obtient directement l'expression du multiplicateur de Lagrange à partir de l'équation (3.97c) :

$$\Lambda_i = U_i + K_{ii}^{-1} K_{ib} U_b \quad (3.101)$$

Il suffit ensuite de calculer la dérivée de la matrice de rigidité par rapport aux paramètres matériels  $\frac{\partial K}{\partial \theta_k}$ . Cette tâche sera facilitée par le choix d'exprimer la matrice de rigidité linéairement en fonction des coefficients élastiques de Lamé, tel que fait au chapitre 2, ou en fonction des modules orthotropes.

### 3.1.5 Prise en compte d'informations fiables sur le bord

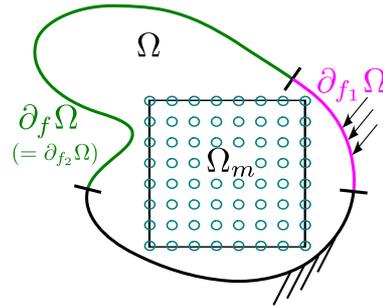


FIGURE 3.3: Problème direct 2D associé au problème d'identification

On considère le même cadre d'identification défini au paragraphe 3.1.1 avec, cette fois, la prise en compte d'informations fiables de type effort, sur une partie du bord du domaine. La nouvelle répartition de la frontière est celle de la FIGURE 3.3 :

1.  $\partial_{f_1}\Omega$  sur lequel est mesurée la résultante d'effort :

$$\int_{\partial_{f_1}\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} dS = \tilde{\underline{\underline{F}}} \quad (3.102)$$

2.  $\partial_{f_2}\Omega$  contenant des informations fiables d'effort réparti, typiquement des bords libres par exemple :

$$\text{sur } \partial_{f_2}\Omega : \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \tilde{\underline{\underline{f}}}_s \quad (3.103)$$

3.  $\partial\Omega \setminus (\partial_{f_1}\Omega \cup \partial_{f_2}\Omega)$  considéré comme inconnu.

Dans la suite, seule la contrainte répartie fiable (3.103) sera prise en compte. Le bord, d'indice "b" dans les notations précédentes, sera séparé en deux parties :  $\partial_f\Omega = \partial_{f_2}\Omega$  et le reste  $\partial\Omega \setminus \partial_{f_2}\Omega$ , respectivement d'indices "f" et " $\bar{f}$ ", avec :

$$b = f \cup \bar{f} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} f : \text{bord libre} \\ \bar{f} : \text{bord sans informations} \end{array}$$

Les équations dont on dispose sont :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{Équilibre mécanique :} & \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}} & \text{dans } \Omega \quad (3.104a) \\ \text{Compatibilité cinématique :} & \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{\nabla}}^T \underline{\underline{u}}) & \text{dans } \Omega \quad (3.104b) \\ \text{Relation de comportement :} & \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C}(\underline{\underline{\theta}}) : \underline{\underline{\varepsilon}} & \text{dans } \Omega \quad (3.104c) \\ \text{Mesures :} & \underline{\underline{u}} = \tilde{\underline{\underline{u}}} & \text{dans } \Omega_m \quad (3.104d) \\ \text{Contrainte répartie fiable :} & \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \tilde{\underline{\underline{f}}}_s & \text{sur } \partial_f\Omega \quad (3.104e) \end{array} \right.$$

La nouvelle répartition des informations fiables et moins fiables est celle du TABLEAU 3.2 :

Fiabes	Peu fiables
Équilibre : $\underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}}$	Relation de comportement : $\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}$
Compatibilité cinématique : $\underline{\underline{\varepsilon}} = (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{\nabla}}^T \underline{\underline{u}})/2$	Mesures : $\underline{\underline{u}} = \tilde{\underline{\underline{u}}}$
Bords libres : $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{0}}$	

TABLEAU 3.2: Redéfinition des quantités fiables et non fiables

L'espace d'admissibilité statique  $S_{Ad}$  s'écrit :

$$S_{Ad} = \left\{ \underline{\underline{\sigma}} \in H_{div}(\Omega) / \underline{\underline{\text{div}}}\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}} \text{ dans } \Omega, \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{0}} \text{ sur } \partial_f \Omega \right\} \quad (3.105)$$

L'espace d'admissibilité cinématique n'est pas influencé par l'information de bord libre portant uniquement sur les contraintes.

La contrainte d'admissibilité statique s'écrit alors sous forme faible :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{u}}^*) d\Omega = \int_{\partial_f \Omega} \underline{\underline{f}}_s \underline{\underline{u}}^* d\Omega \quad \forall \underline{\underline{u}}^* / \underline{\underline{u}}^* \Big|_{\partial_{\bar{f}} \Omega} = \underline{\underline{0}} \quad (3.106)$$

En discret, on a  $K_{if_o} V = F$  avec  $K_{if_o} = \begin{bmatrix} K_{i_o} \\ K_{f_o} \end{bmatrix}$  et  $F = \begin{bmatrix} F_i \\ F_f \end{bmatrix}$ , avec  $F_f$  l'effort généralisé associé à  $\underline{\underline{f}}_s$

### 3.1.5.1 Formulation ERdC modifiée

La fonctionnelle  $J$  du problème de base reste inchangée, seules les contraintes sont modifiées comme ci-dessus. Le problème de base s'écrit comme :

$$\begin{cases} \min_{U,V} J(U,V) = \min_{U,V} \underbrace{\frac{1}{2}(U-V)^T K (U-V)}_{J_1} + \alpha \underbrace{\frac{1}{2}(\Pi U - \tilde{U})^T (\Pi U - \tilde{U})}_{J_2} & (3.107a) \\ \text{sous la contrainte} & K_{if_o} V = F & (3.107b) \end{cases}$$

De la même façon que dans la partie 3.1.3.3, on introduit un Lagrangien tel que :

$$\mathcal{L}(U, V, \Lambda) = J(U, V) + \Lambda^T (K_{if_o} V) \quad (3.108)$$

Sa stationnarité s'écrit :  $\forall \delta U, \delta V, \delta \Lambda$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U}, \delta U \right) = 0 & \implies \delta U^T K (U - V) + \alpha \delta U^T \Pi^T (\Pi U - \tilde{U}) = 0 \\ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V}, \delta V \right) = 0 & \implies -\delta V^T K (U - V) + \delta V^T K_{if_o}^T \Lambda = 0 \\ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda}, \delta \Lambda \right) = 0 & \implies \delta \Lambda^T K_{if_o} V = F \end{aligned} \quad (3.109)$$

d'où le système :

$$\begin{cases} K (U - V) + \alpha \Pi^T \Pi U = \alpha \Pi^T \tilde{U} & (3.110a) \\ K (U - V) - K_{if_o}^T \Lambda = 0 & (3.110b) \\ K_{if_o} V = F & (3.110c) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (K + \alpha \Pi^T \Pi) U - K V = \alpha \Pi^T \tilde{U} \\ K U - K V - K_{if_o}^T \Lambda = 0 \\ K_{if_o} V = F \longrightarrow K_{i_o} V = 0 \text{ et } K_{f_o} V = F_f \end{cases} \quad (3.111a)$$

avec  $U = \begin{bmatrix} U_i \\ U_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_i \\ U_f \\ U_{\bar{f}} \end{bmatrix}$ ;  $V = \begin{bmatrix} V_i \\ V_b \end{bmatrix}$ ;  $\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_i \\ \Lambda_f \end{bmatrix}$  et  $K = \begin{bmatrix} K_{if_o} \\ K_{\bar{f}_o} \end{bmatrix}$

Posons  $\Lambda_2 = \begin{bmatrix} \Lambda \\ \Lambda_{\bar{f}} \end{bmatrix}$  avec  $\Lambda_{\bar{f}} = 0$ , alors  $K_{if_o}^T \Lambda = K \Lambda_2$  et l'équation (3.111a) devient :

$K(U - V - \Lambda_2) = 0$ , donc  $(U - V - \Lambda_2)$  est un mouvement de corps rigide choisi nul comme dans la partie 3.1.3.3, et en particulier  $U_{\bar{f}} = V_{\bar{f}}$ .

En tenant compte de  $U_{\bar{f}} = V_{\bar{f}}$ , (3.111a) permet d'obtenir le système suivant en  $(U, V)$  :

$$\begin{cases} (K + \alpha \Pi^T \Pi) U - K V = \alpha \Pi^T \tilde{U} & (3.112a) \\ K_{if\circ} V = F & (3.112b) \\ U_{\bar{f}} = V_{\bar{f}} & (3.112c) \end{cases}$$

À  $U_{\bar{f}}$  donné, (3.112b)+(3.112c) correspond à un système de conditions aux limites bien posé.

À  $V$  donné, (3.112a) a un défaut de rang  $\leq 3$ . Il y a, au plus, un problème de corps rigide. Dans la présente formulation, on choisit d'écrire le problème en  $U$  et  $\Lambda_2$ . De manière générale,  $U$  correspond au problème direct, quand  $\Lambda_2$  correspond au problème adjoint.

Plusieurs avantages en découlent, à savoir :

- aucune hypothèse restrictive sur l'opérateur  $\Pi$  n'est nécessaire. En particulier,  $\Pi$  peut intervenir sur la totalité des nœuds, bord inclus, ce qui permet de pouvoir jouer sur la taille de la zone de mesure, pour une taille de zone de calcul fixée.
- le problème de base se résout, cette fois, sur l'ensemble des nœuds (3.117). La taille du problème s'en trouve donc augmentée. Cependant, le problème de noyau rencontré pendant la résolution étant localisé sur les nœuds de bord, cela permet d'éviter de résoudre le système uniquement sur le bord du domaine.

Le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} K(U - V - \Lambda_2) = 0, \Lambda_{\bar{f}} = 0 & (3.113a) \\ (K + \alpha \Pi^T \Pi) U - K V = \alpha \Pi^T \tilde{U} & (3.113b) \\ K_{if\circ} V = F & (3.113c) \end{cases}$$

$$(3.113a) \implies U - V - \Lambda_2 = 0 \text{ (corps rigide choisi nul)} \quad (3.114)$$

$$(3.113b) \implies K(U - V) + \alpha \Pi^T \Pi U = \alpha \Pi^T \tilde{U}$$

$$(3.113c) \implies K_{if\circ}(U - \Lambda_2) = F$$

d'où,

$$\begin{cases} K \Lambda_2 + \alpha \Pi^T \Pi U = \alpha \Pi^T \tilde{U} & (3.115a) \\ K_{if\circ} U - K_{if\circ} \Lambda_2 = F & (3.115b) \\ \Lambda_{\bar{f}} = 0 & (3.115c) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} K_{if\circ} \Lambda_2 = K_{ifif} \Lambda & (3.116a) \\ K \Lambda_2 = K_{oif} \Lambda & (3.116b) \end{cases}$$

On obtient finalement :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U \\ \Lambda \end{bmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \Pi^T \Pi & K_{oif} \\ K_{if\circ} & -K_{ifif} \end{bmatrix}}_{M_2}^{-1} \times \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \Pi^T \tilde{U} \\ F \end{bmatrix}}_{S_2} \quad (3.117)$$

La mise en place de l'algorithme de résolution est analogue à ce qui a été présenté au paragraphe 3.1.4, et découle du système (3.117). Une décomposition QR de la matrice

$M_2$  permet de s'affranchir du problème de noyau dans le cas où les mesures ne couvrent pas toute la zone de calcul. Ainsi :

$$M_2 = QR = [Q_1 \quad Q_2] \times \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

Les matrices  $Q_1$  et  $Q_2$  ont le même nombre de lignes que la matrice  $Q$ , mais le nombre de colonnes de  $Q_2$  correspond à niveau de troncature que l'on notera  $Tr$ , et qui reste à définir. De la même façon,  $R_1$  est une matrice carrée ayant comme taille celle de la matrice  $R$  moins le nombre  $Tr$ .

Lorsque le défaut de rang  $d_r$  est non nul, le niveau de troncature doit être fixé. Deux méthodes ont été testées à partir du calcul du défaut de rang de la matrice  $M_2$ , en utilisant l'outil *Matlab* :

- (i) un niveau de troncature strictement égal au défaut de rang estimé par *Matlab* avec une tolérance  $tol = t_{M_2} * ||M_2|| * eps$ , où  $t_{M_2}$  est la taille de la matrice  $M_2$ ,  $eps$  est la tolérance par défaut de *Matlab* (égale à  $10^{-16}$ ) et la norme de  $M_2$  correspond à la plus grande valeur singulière de  $M_2$  (obtenue par décomposition *SVD*).
- (ii) un niveau de troncature qui minimise l'amplitude de la fonctionnelle  $J$ .

La deuxième méthode a été retenue puisqu'elle offre une solution optimale vis-à-vis de la résolution du problème de base, conduisant systématiquement à un niveau de troncature plus petit que le défaut de rang.

En utilisant (3.118), le problème (3.117) admet une solution particulière et une solution relative au noyau de  $M_2$ . Ici, ce second membre est choisi nul puisque il n'impacte pas la fonctionnelle  $J$ . Ensuite, après l'étape de décomposition QR, les champs solution  $(U, \Lambda)$ , regroupés dans  $Y$ , s'obtiennent comme :

$$Y = R_1^{-1} Q_1^T S_2 \quad (3.119)$$

Le champ  $V$  se déduit ensuite à partir de l'équation (3.114). L'étape suivante est l'identification des paramètres matériels  $\underline{\theta}$  via la minimisation de la fonction coût  $\mathcal{G}(\underline{\theta}) = J(U(\underline{\theta}), V(\underline{\theta}), \underline{\theta})$  (3.10).

La présente résolution du problème de base permet de prendre en compte des conditions aux limites fiables sur le bord, mais aussi l'absence de conditions aux limites, et sera donc retenue dans la suite. La comparaison des deux formulations avec et sans conditions aux limites fiables est illustrée à travers un exemple numérique dans la prochaine partie.

Remarque :

Aucune hypothèse n'a été faite sur la nature de la distribution des paramètres matériau dans la formulation du problème de base. Par conséquent, les calculs peuvent être menés aussi bien pour un ensemble discret que pour un champ de propriétés. D'autre part, le fait de ne pas considérer d'information statique n'a pas aboutit à des difficultés dans la formulation du problème de base, mais pourrait poser des problèmes pour l'identification.

## 3.2 Identification de propriétés isotropes homogènes

Dans le but d'évaluer la stratégie d'identification présentée dans la partie précédente, on s'intéressera dans un premier temps à son application à l'identification des propriétés homogènes d'un matériau isotrope. Pour ce faire, on s'appuiera sur des simulations d'essais mécaniques standard, tels que la traction et la flexion, pour construire des données synthétiques.

### 3.2.1 Simulation d'un essai de traction

Le premier cas test est une simulation de traction sur une plaque carrée qui repose sur un appui simple d'un côté, et est soumise à un chargement uniforme sur le côté opposé (FIGURE 3.4). La plaque est maillée avec des éléments T3 et a un comportement élastique homogène. Un premier calcul éléments finis de référence, avec l'hypothèse des contraintes planes, nous fournit des mesures de déplacement  $U_0$  sur la surface entière de l'éprouvette. Ces mesures sont construites avec des propriétés matérielles de référence  $\lambda_0$  et  $\mu_0$ . Ces déplacements étant disponibles sur un maillage éléments finis, on construit une

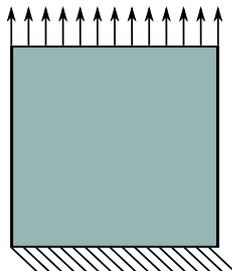


FIGURE 3.4: Simulation d'un essai de traction

grille de mesures régulière de taille  $50 \times 50$  afin d'y projeter les déplacements.

Les perturbations de mesures  $\delta\tilde{U}$  sont fabriquées à partir d'un bruit blanc gaussien, et rajoutées aux mesures. Ainsi, les déplacements mesurés s'écrivent comme la somme des déplacements de référence projetés sur la grille de mesures, et des perturbations :

$$\tilde{U} = \Pi U_0 + \delta\tilde{U} \quad (3.120)$$

Ne disposant que de données en déplacement, la stratégie précédemment introduite mène à l'identification de contrastes de rigidité, qui, pour être recalés, nécessitent la connaissance d'une propriété matérielle, en l'absence d'informations de type effort.

Ayant choisi d'exprimer la matrice de comportement avec les coefficients de Lamé, on s'intéressera ici à l'identification de  $\mu$ .

#### 3.2.1.1 Fonction coût et calcul du gradient

Afin d'évaluer la robustesse de la méthode, la sensibilité de la fonction coût vis-à-vis des perturbations de mesure est étudiée pour différentes amplitudes de  $\delta\tilde{U}$ .

Dans la FIGURE 3.5 sont tracés la fonction coût et ses deux composantes dans un intervalle de valeurs centré sur la valeur de référence  $\mu_0$ . On représente en abscisse le ratio  $\frac{\mu}{\mu_0}$ . La FIGURE 3.5(a) représente l'évaluation du gradient par rapport au paramètre  $\mu$  en différents points de la fonction coût. Les segments de droite ont pour pente le gradient calculé en chaque point d'évaluation  $x_i = \frac{\mu_i}{\mu_0}$ , et sont tracés dans un intervalle  $x = [x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i + \frac{\Delta x}{2}]$  sur l'axe des abscisses, avec  $\Delta x$  la distance entre deux points d'évaluation ( $\Delta x = \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_0}$ ). L'ordonnée  $y_i$  associée aux segments de droite est calculée comme suit :

$$y_i = \mathcal{G}(\mu_i) + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mu_i} \times (x - x_i) \quad (3.121)$$

Les segments de droite correspondent parfaitement à la pente de la fonction coût et confirmer la bonne estimation du gradient.

La FIGURE 3.5(b) montre la forme de la fonction coût  $\mathcal{G}$  ainsi que ses deux composantes  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$ , en ligne continue sans perturbations, et en pointillés pour des niveaux de perturbation de 1%, 2%, 3%, 4% et 5% de la moyenne des déplacements. On peut remarquer

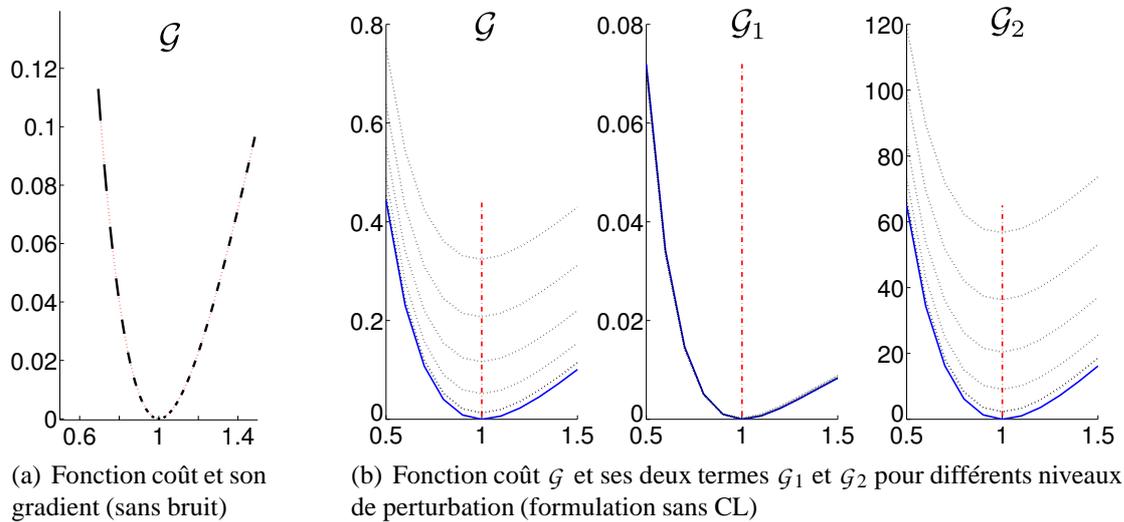


FIGURE 3.5: Fonction coût et évaluation du gradient pour des niveaux de perturbation variant de 0% à 5%

que le minimum de la fonction coût correspond à la valeur de référence, représentée par la ligne verticale en pointillés, pour tous les niveaux de perturbation testés. Par ailleurs, le terme  $\mathcal{G}_1$  relatif à l'erreur de modèle est remarquablement insensible aux perturbations dans cet exemple. Son amplitude ne varie pas et les six courbes sont superposées. Cela suggère de donner un poids plus important au terme d'erreur  $\mathcal{G}_1$  de modèle dans la fonction coût. À poids égaux, l'hyper-paramètre vaut dans cet exemple  $\alpha = 5.7 \times 10^{-3}$ . Vu que la fonction  $\mathcal{G}_2$  a quatre ordres de grandeurs de plus que  $\mathcal{G}_1$ , en l'état, le terme  $\mathcal{G}_2$  demeure prédominant dans la somme (3.10). Une piste d'optimisation de  $\alpha$  sera discuté en 3.2.1.2.

Dans le cas test étudié, le chargement est constant et génère un champ de déformation homogène. En l'absence d'information d'effort, ce champ de déformation s'obtient pour tout champ de contrainte en adaptant le jeu de paramètres matériels, ici  $\mu$ . C'est alors l'information de bord libre qui permet d'ajuster l'identification dans ce cas de figure. On évalue ci-après la fonction coût pour des niveaux de bruit très élevés en utilisant la formulation de l'ERdC modifiée avec l'information de bord libre ( $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{0}$  sur les côtés droit et gauche de la plaque).

La FIGURE 3.6(a) montre l'allure de la fonction coût et de ses deux composantes pour

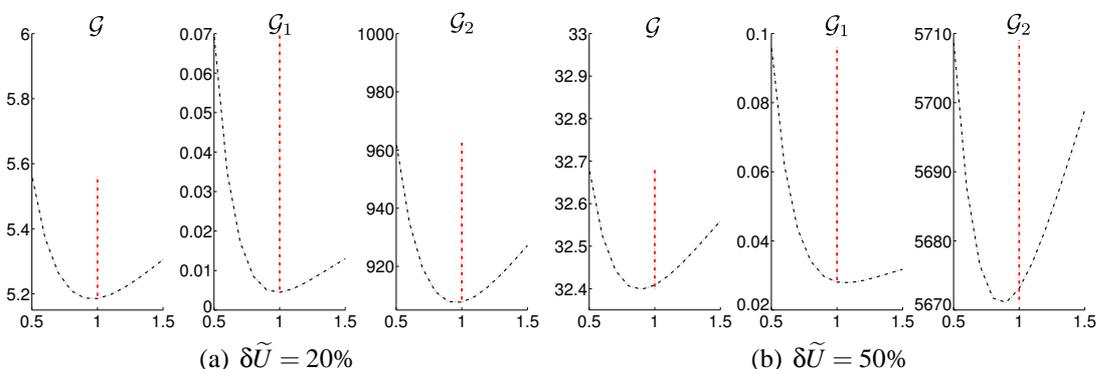


FIGURE 3.6: Fonction coût de l'ERdC modifiée avec bord libre

une amplitude de perturbations de 20%, où l'on peut remarquer que le minimum des deux termes est très proche de la valeur de référence. La FIGURE 3.6(b) représente leurs allures pour un niveau de perturbation de 50%, où l'on peut noter que le minimum du terme

d'écart quadratique aux mesures s'écarte un peu de la valeur de référence tandis que le minimum du terme d'erreur de modèle demeure très proche de la valeur de référence. La FIGURE 3.7 représente les champs de déplacement  $\tilde{U}_x$  et  $\tilde{U}_y$  sans perturbations et avec 50% de bruit.

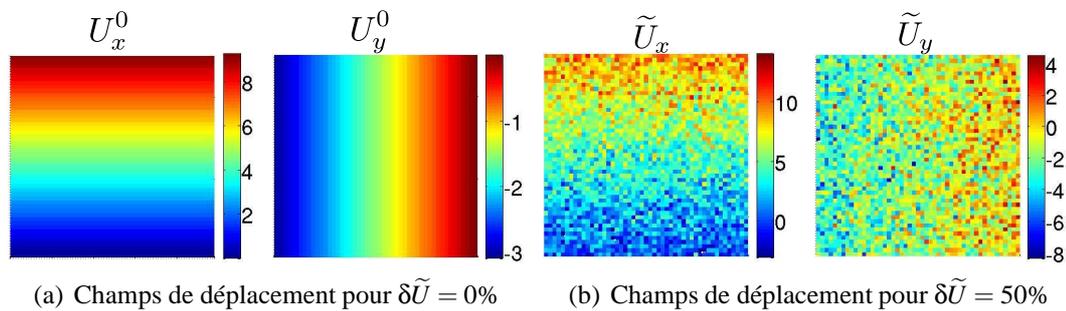


FIGURE 3.7: Champs de déplacements relatifs à l'essai de traction simulé

Une étude de Monte-Carlo a été menée pour caractériser l'identification de  $\mu$  avec 1000 tirages par niveau de bruit. Le paramètre matériel a été identifié par évaluation de la fonction coût sur une grille fine de valeurs, avec une précision de 1%.

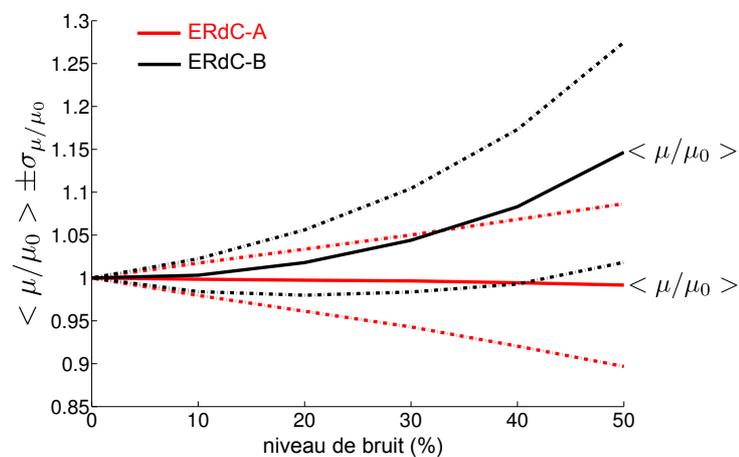
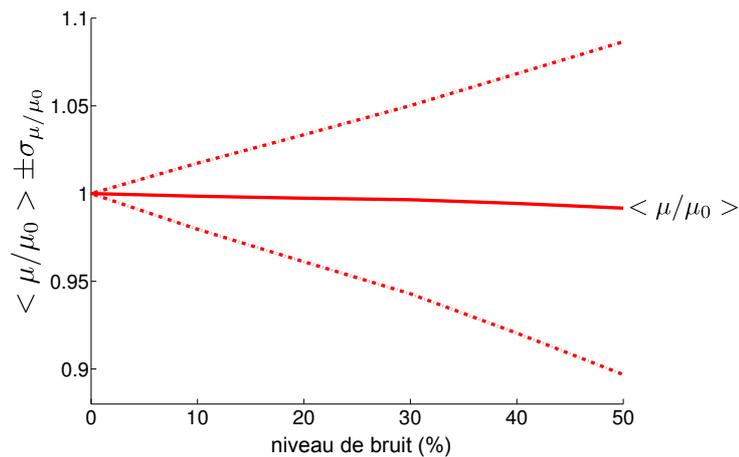


FIGURE 3.8: Résultats d'identification avec bord libre

La FIGURE 3.8(a) présente les résultats d'identification en termes de moyenne et d'écart-type pour la formulation avec bord libre, en fonction du niveau de perturbation allant jusqu'à 50% de la moyenne des déplacements (FIGURE 3.7(b)). Les résultats confirment la grande robustesse de la fonction coût. Par ailleurs, l'allure de la fonction coût pour différents niveaux de bruit, particulièrement celle du terme d'erreur de modèle, porte à croire que l'étape d'identification s'avérerait meilleure avec le terme  $\mathcal{G}_1$ . Ainsi, on trace dans FIGURE 3.8(b) les résultats d'identification, pour des données avec bord libre, obtenus avec deux approches de résolution : ERdC-A et ERdC-B récapitulées dans le TABLEAU 3.3. Les deux ayant en commun la résolution du problème de base avec la fonctionnelle  $J$ , mais utilisent deux fonctions coût différentes pour la résolution du problème d'identification :

Méthode ERdC	ERdC-A	ERdC-B
Fonctionnelle du problème de base	$J$	$J$
Fonction coût d'identification	$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}_1$

TABLEAU 3.3: Les deux approches d'identification testées

Au vu des résultats de la FIGURE 3.8(b), l'identification avec l'approche de base (ERdC-A) est plus robuste sur cet exemple, notamment en termes de biais. Un des avantages de cette approche est de fournir le gradient de la fonction coût, très utile pour une identification de plusieurs propriétés. L'exemple de la FIGURE 3.6(b) est, *a priori*, peu représentatif.

### 3.2.1.2 Vers l'optimisation de l'hyper-paramètre

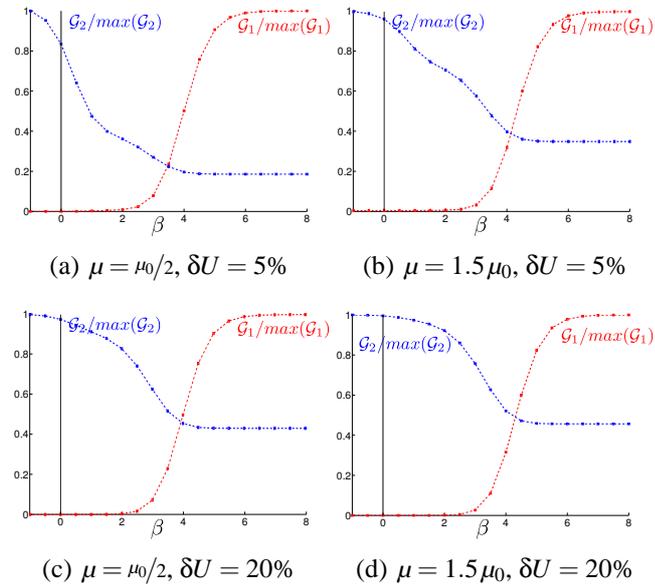
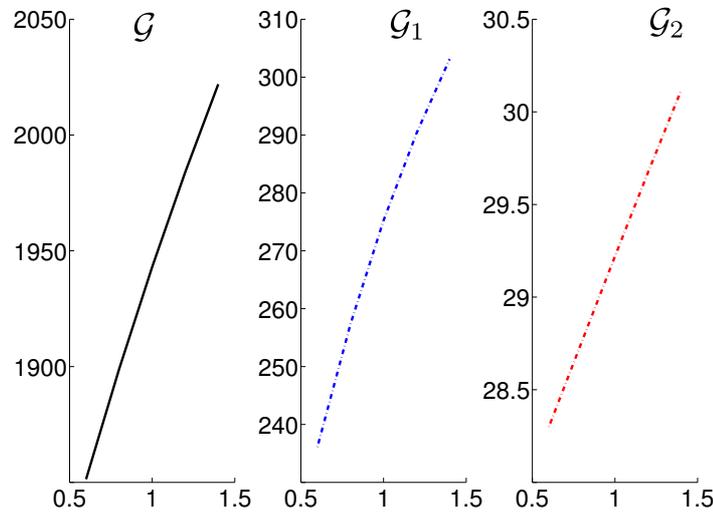
Une façon d'optimiser le poids  $p$  associé à l'hyper-paramètre  $\alpha$  (3.5) est d'étudier le comportement des deux termes ( $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ ) de la fonction coût par rapport à celui-ci. D'après les travaux de régularisation de type L-curve [Calvettia *et al.*, 2000], il est admis que dans l'intersection des deux intervalles de variation des deux termes, ceux-ci ont la même influence. Une manière de choisir le paramètre  $\alpha$  consiste à prendre la valeur milieu de l'intervalle d'intersection. Les deux termes de la fonction coût sont évalués à chaque fois pour un jeu de paramètres et un niveau de perturbation donné. Ils sont adimensionnés par l'ordre de grandeur de leurs deux plateaux, respectivement  $\max(\mathcal{G}_1)$  et  $\max(\mathcal{G}_2)$ . Afin de faciliter l'interprétation graphique, on exprime le poids  $p$  comme  $p = 10^\beta$ . Ainsi, l'hyper-paramètre s'écrit :

$$\alpha = \gamma \times 10^\beta = \frac{U^\top KU}{\|\tilde{U}\|^2} \times 10^\beta \quad (3.122)$$

Dans l'exemple étudié, l'intervalle d'intersection des deux composantes de la fonction coût est  $[3, 5]$ , comme illustré FIGURE 3.9, et ce pour les différents choix de paramètres et de niveaux de bruit.

Après la sélection de l'exposant qui semble optimal vis-à-vis des courbes de la FIGURE 3.9, l'identification du coefficient  $\mu$  a été menée pour différents niveaux de perturbation par évaluation de la fonction coût sur une grille fine de valeurs. Cette dernière, ainsi que ses deux composantes, sont tracées FIGURE 3.10 pour un niveau de perturbation de 5%. On constate alors que l'identification est incorrecte. Ce résultat a été confirmé sur d'autres exemples numériques.

Au vu de ce résultat, nous garderons un poids égal pour les deux composantes de la fonctionnelle  $J$ . *A priori*, on peut choisir ultérieurement de reformuler le problème d'identification en affectant un poids nul à l'une des deux composantes de la fonction coût  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$ , en se basant sur la robustesse de chacune vis-à-vis du bruit par exemple.


 FIGURE 3.9: Comportement de  $\mathcal{G}_1/\max(\mathcal{G}_1)$  et de  $\mathcal{G}_2/\max(\mathcal{G}_2)$  en fonction de  $\beta$ 

 FIGURE 3.10: Fonction coût et ses deux composantes pour  $\beta$  optimisé ( $\delta U = 5\%$ )

## 3.2.2 Essai de flexion trois points

### 3.2.2.1 Construction des mesures

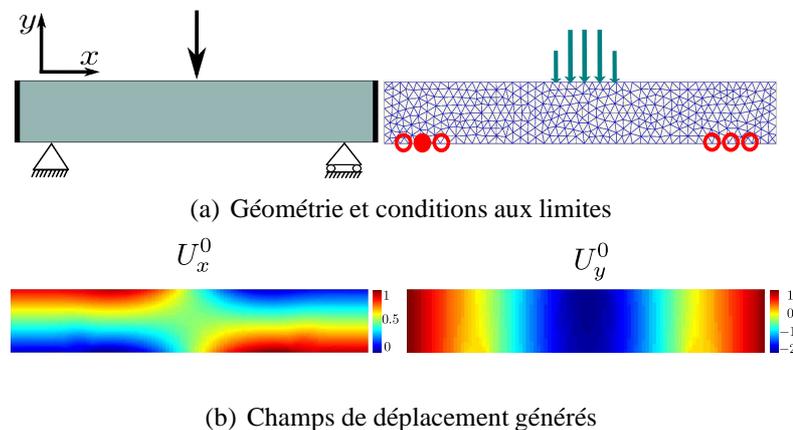


FIGURE 3.11: Simulation d'un essai de flexion 3 points

Le deuxième cas test est une plaque rectangulaire élastique soumise à un essai de flexion trois points, où l'on cherche à identifier le coefficient de Lamé homogène  $\mu$ . Les mesures de déplacement sont créées grâce à un premier calcul direct avec la méthode des éléments finis, pour des propriétés de référence  $(\lambda_0, \mu_0)$  sous hypothèse de contraintes planes. La plaque est maillée avec des éléments triangulaires T3. Les conditions aux limites appliquées au calcul éléments finis sont illustrées dans la FIGURE 3.11(a) :

- (i) le déplacement des nœuds correspondant aux deux appuis simples est bloqué suivant l'axe  $y$  (symbole  $\circ$ ), le déplacement suivant l'axe  $x$  est bloqué pour un seul nœud de l'appui simple situé à gauche afin de bloquer le mouvement de corps rigide (symbole  $\bullet$ ).
- (ii) la résultante d'effort est répartie sur les nœuds correspondant à sa zone d'application.
- (iii) un bord libre est imposé sur le reste de la frontière.

Les champs de déplacement générés sont illustrés dans la FIGURE 3.11(b). Enfin, la taille de la grille de mesure artificielle est de  $30 \times 70$ . Dans la suite, les formulations de l'ERdC modifiée avec et sans bords libres sont testées.

### 3.2.2.2 Allure de la fonction coût

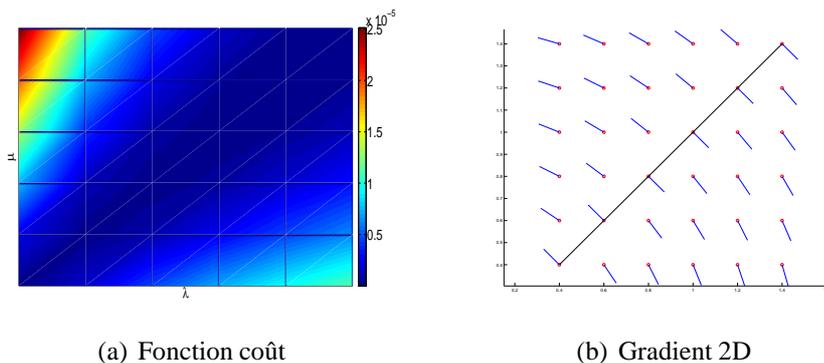
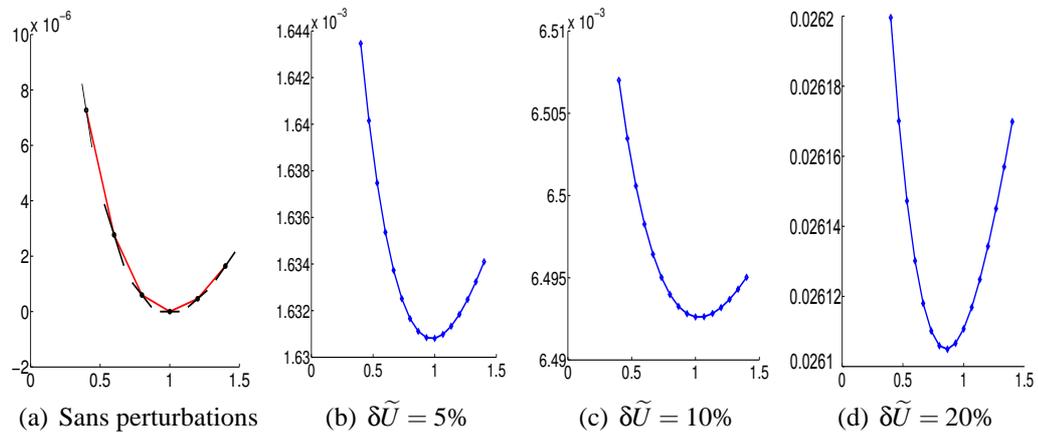


FIGURE 3.12: Fonction coût et gradient

La FIGURE 3.12(a) montre l'allure de la fonction coût  $\mathcal{G}$  en fonction des deux coefficients de Lamé. On peut remarquer que son minimum correspond à une vallée. En l'absence de données de type effort, le problème inverse est mal posé pour le couple  $(\lambda, \mu)$ . Les modules identifiés correspondent alors à un contraste de rigidité qui nécessite d'être recalé. Une façon de faire consiste à fixer un paramètre pour ne chercher que l'autre. La FIGURE 3.12(b) montre le calcul du gradient 2D  $\left( \frac{\nabla \mathcal{G}}{\|\nabla \mathcal{G}\|} \right)$  à chaque point d'évaluation de la fonction coût. La ligne médiane continue représente la vallée de la fonction coût, où l'on remarque la bonne évaluation des gradients. Dans la suite, l'étude en élasticité isotrope portera sur l'identification du module  $\mu$  seul.

La FIGURE 3.13 représente la fonction coût  $\mathcal{G}$  en fonction du ratio  $\frac{\mu}{\mu_0}$ , évaluée dans un intervalle de valeurs centré sur la valeur 1, pour différents niveaux de perturbations. La FIGURE 3.13(a) représente les segments de droite correspondant au calcul du gradient en 1D présenté au paragraphe 3.2.1.1 et montre encore sa bonne estimation en chaque point d'évaluation, tandis que les FIGURE 3.13(b), FIGURE 3.13(c) et FIGURE 3.13(d) confirment la convexité de la fonction coût pour différentes amplitudes de bruit allant de 5% à 20%, ainsi que la bonne estimation du minimum pour des amplitudes de bruit élevées.


 FIGURE 3.13: Effet du bruit sur la fonction coût  $G(\frac{\mu}{\mu_0})$ 

### 3.2.2.3 Rajout d'informations fiables

Afin de souligner l'intérêt de rajouter des informations fiables type bord libre, l'identification avec l'ERdC modifiée a été menée avec la méthode de Monte-Carlo pour 1000 tirages de perturbations générés sur la grille de mesure, avec et sans l'information de bord libre. Les conditions aux limites relatives aux deux cas testées sont illustrées dans la FIGURE 3.14.

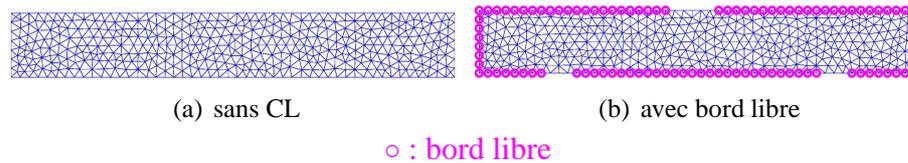
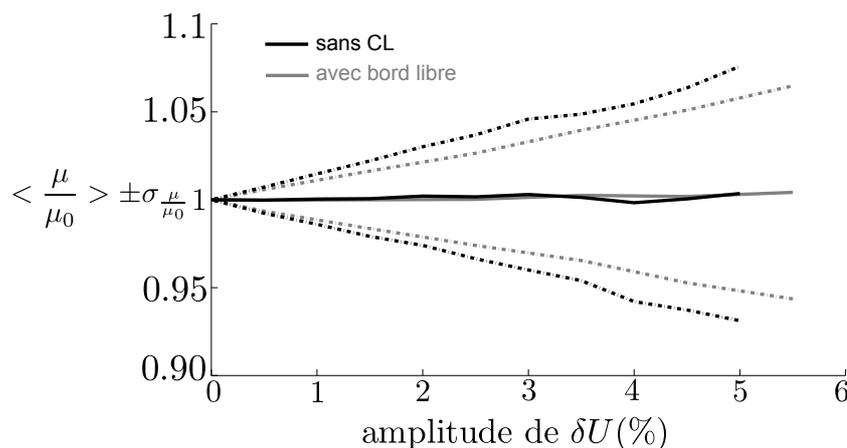


FIGURE 3.14: Conditions aux limites disponibles

Les résultats d'identification, obtenus par évaluation de la fonction coût sur une grille fine de valeurs, sont tracés en termes de biais  $\langle \frac{\mu}{\mu_0} \rangle$  et d'écart-type  $\sigma_{\frac{\mu}{\mu_0}}$  dans la FIGURE 3.15. Les lignes noires représentent les résultats de l'identification sans conditions aux


 FIGURE 3.15: Moyenne et écart-type de  $\mu/\mu_0$  en fonction du niveau de perturbation

limites tandis que les lignes grises sont relatives à l'identification avec prise en compte de l'information fiable sur les bords libres. Les lignes continues représentent le biais en fonction du niveau de perturbation et les lignes discontinues représentent la quantité

$\langle \frac{\mu}{\mu_0} \rangle > \pm \sigma_{\frac{\mu}{\mu_0}}$  en fonction du niveau de perturbation.

Il en ressort que les résultats d'identification ont été améliorés par le rajout d'informations fiables sur le bord.

### 3.3 Effet de la taille de la zone de mesure

Il est fréquent que la zone de mesure ne couvre pas la totalité de la surface de l'éprouvette testée, et ce pour diverses raisons. En effet, il arrive que l'algorithme de CIN ne converge pas à certains endroits de la zone photographiée, notamment sur les bords, ou que l'opérateur fasse le choix de se focaliser sur un endroit précis de l'éprouvette afin d'avoir une image de plus grande résolution. Par conséquent, en plus des hypothèses fortes sur les CL faites avec des stratégies qui nécessitent la connaissance des CL, d'autres s'ajoutent afin de décrire la transmission des efforts sur le bord de la zone mesurée par exemple. Certaines stratégies proposent alors de définir des CL en déplacement, mesurées par CIN, et définissent la zone de calcul comme strictement égale à la taille de la zone de mesure. C'est le cas par exemple avec la méthode FEMU, ou encore avec la méthode de l'écart à l'équilibre lorsque les bords libres ne sont pas contenus dans la zone de mesure. Ainsi, ces informations sur les bords de l'éprouvette ne sont pas prises en compte de manière systématique. Avec l'ERdC modifiée, on a la possibilité de tester plusieurs configurations de calcul, quand la taille de la zone de mesure est plus petite que la surface entière de l'éprouvette. Ces configurations dépendent du choix de la taille de la zone de calcul, sélectionnée en fonction des informations qu'il y a à gagner, et donc de la formulation de l'ERdC modifiée choisie (avec ou sans bords libres). Par ailleurs, des CL peu fiables peuvent être prises en compte dans la formulation de l'ERdC modifiée, comme quantités à vérifier au mieux. Le calcul sur la taille réelle de l'éprouvette permet de s'affranchir d'une quelconque hypothèse pour les décrire fidèlement sur la vraie frontière, comme la résultante d'effort mesurée par exemple.

#### 3.3.1 Identification avec de petites zones de mesure

On propose ici d'étudier l'effet de la taille de la zone de mesure quand la taille de la zone de calcul sera prise égale à la surface entière de l'éprouvette, dans le cas de l'essai de flexion trois points présenté dans la partie 3.2.2, [Ben Azzouna *et al.*, 2012].

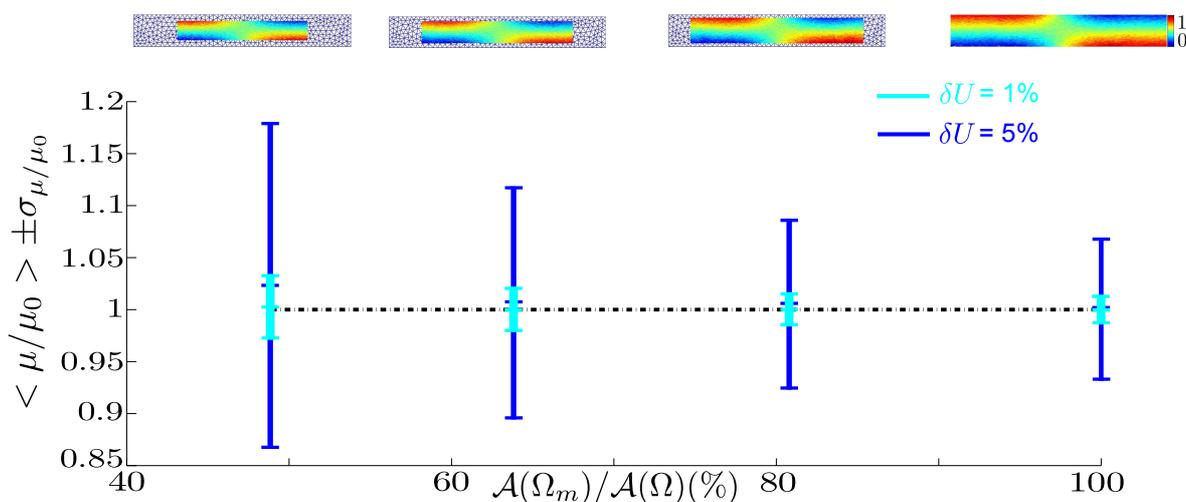


FIGURE 3.16: Identification avec une zone de mesure rognée

Il s'agit d'une configuration d'essai où l'information de bord libre couvre la quasi-totalité

de la frontière de l'éprouvette, excepté les deux appuis et l'endroit où la charge est appliquée. La formulation de l'ERdC modifiée utilisée dans ce cas de figure est donc celle avec bords libres, puisque optimale comme vu dans le paragraphe 3.2.2.3.

L'identification a été menée pour 1000 échantillons de bruit blanc gaussien  $\delta\tilde{U}$ , d'amplitude 1% et 5%. La grille de mesure choisie est de taille  $70 \times 30$ .

La FIGURE 3.16 montre la moyenne et l'écart-type de l'identification en fonction du ratio des tailles  $\Omega_m/\Omega$  qui varie de 100% à moins de 50%. Au dessus de chaque résultat, sont représentés les champs de déplacement par rapport à la taille entière de l'éprouvette, qui correspond ici à la taille de la zone de calcul.

Il apparaît que l'erreur d'identification augmente quand le ratio  $\mathcal{A}(\Omega_m)/\mathcal{A}(\Omega)$  diminue, avec  $\mathcal{A}$  l'aire du domaine correspondant, mais reste raisonnable pour les tailles de mesure les plus petites. Par ailleurs, bien que les informations fiables sont abondantes sur le bord de la plaque, le calcul sans conditions aux limites est possible pour les différentes tailles de mesure. Le cas échéant, la zone de calcul peut couvrir soit la zone de mesure soit la taille totale de l'éprouvette.

La FIGURE 3.17 représente la valeur des moyennes et écarts-types en fonction du nombre de tirages, et confirme la convergence des calculs pour 1000 tirages de bruit.

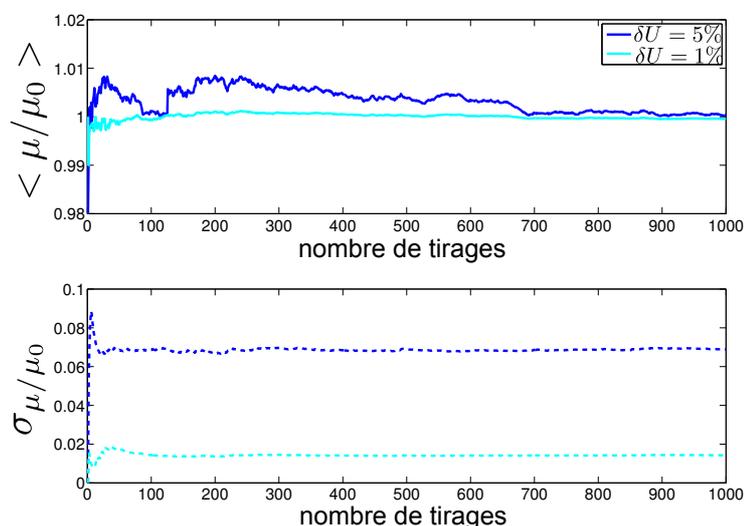


FIGURE 3.17: Convergence des calculs pour  $\mathcal{A}(\Omega_m)/\mathcal{A}(\Omega) \simeq 80\%$

### 3.3.2 Intérêt du calcul sur le domaine total

On a vu que les résultats d'identification sont optimaux quand la taille de la zone de mesure colle à la taille totale de l'éprouvette. Cependant, avoir accès à de telles mesures est délicat. On se place ainsi dans le cas où le ratio  $\mathcal{A}(\Omega_m)/\mathcal{A}(\Omega) < 1$ . Une des spécificités de l'ERdC modifiée étant la construction des champs CA et SA sur la zone totale de l'éprouvette, on propose de comparer les résultats d'identification de ce cas de figure avec celui où la zone de calcul est égale à la zone de mesure, pour une taille de mesures fixée. L'identification a été menée avec 1200 tirages de bruit blanc gaussien. La FIGURE 3.18(a) représente les résultats d'identification en termes de moyenne et d'écart-type pour trois configurations de calcul : un calcul sur le domaine entier avec prise en compte de l'information de bord libre (en trait plein), un calcul sur le domaine entier également, mais sans conditions aux limites (en trait pointillé) et enfin un calcul où la résolution du problème de base se fait sur la zone de mesure uniquement, donc sans CL (en trait mixte). Le ratio des tailles est représenté dans la FIGURE 3.18(b) et correspond à  $\Omega_m/\Omega = 73\%$ . Comme prévu, un calcul sur le domaine entier avec rajout d'informations fiables sur le

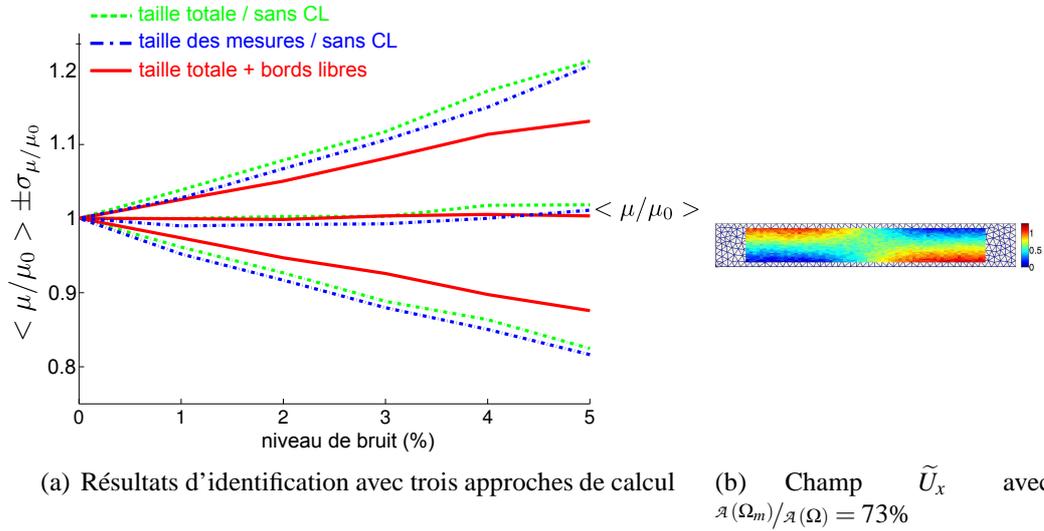


FIGURE 3.18: Conditions aux limites disponibles

bord demeure le plus robuste vis-à-vis des perturbations de mesure. Par ailleurs, il s'avère que, pour une même formulation sans CL, le calcul sur le domaine entier ne dégrade pas la solution sur cet exemple.

La FIGURE 3.19 affiche l'évolution des moyennes et écart-type en fonction du nombre de tirages (FIGURE 3.19(a) pour le calcul sur le domaine entier avec bord libre, FIGURE 3.19(b) pour le calcul sur le domaine entier avec bord libre, et FIGURE 3.19(c) pour le calcul sur la zone de mesure sans conditions aux limites) et montre la convergence de l'ensemble des calculs, d'où la pertinence du nombre de tirages choisi.

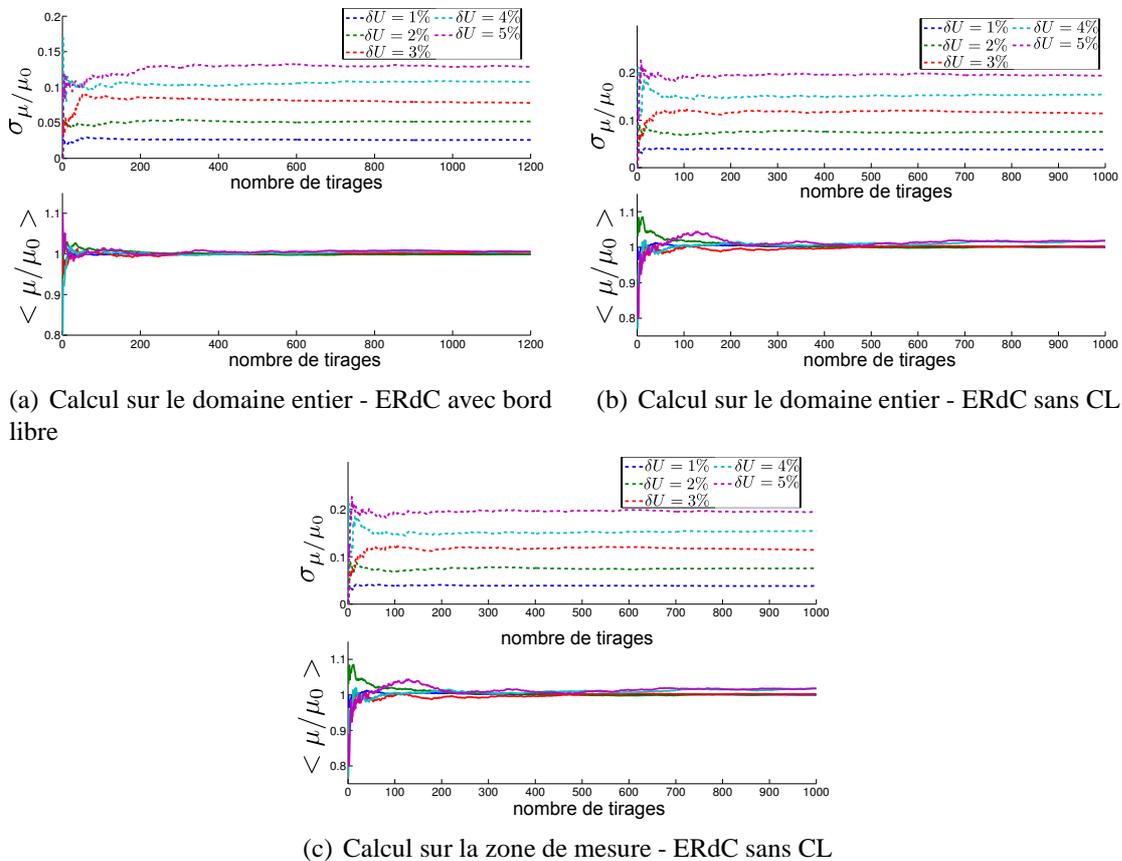


FIGURE 3.19: Convergence des trois calculs en fonction du nombre de tirages

## 3.4 Conclusion

Ce chapitre a introduit la méthode développée dans ce travail. Après une présentation théorique dans le cadre de l'élasticité statique, la méthode a été appliquée au problème d'identification du coefficient de Lamé  $\mu$  d'un matériau isotrope homogène, sur la base d'exemples numériques. L'identification a été menée, d'une part, pour différents types de conditions aux limites, et d'autre part, pour des tailles de zone de mesure variables tout en maintenant la résolution du problème de base sur le domaine d'étude entier. Un des avantages est de pouvoir tenir compte d'informations fiables sur le bord, ce qui améliore les résultats d'identification. L'étude de l'influence des perturbations de mesure sur les résultats d'identification a permis de mettre en avant la robustesse de la méthode. Cet aspect est étudié davantage dans le prochain chapitre, à la lumière d'une comparaison avec les approches de recalage de modèle par éléments finis.



# Comparaison avec la méthode FEMU et l'approche par contrôle optimal

*Ce quatrième chapitre est consacré à la comparaison de l'ERdC modifiée à deux stratégies d'identification, sur la base de données numériques. La première partie de ce chapitre concerne la confrontation des résultats d'identification de l'ERdC modifiée à ceux de l'approche par recalage de modèle éléments finis (FEMU), pour différents types de données cinématiques. La seconde partie a été consacrée à l'investigation d'une alternative à l'ERdC, basée sur les idées du contrôle optimal. Les différentes comparaisons avec l'ERdC modifiée s'appuient sur des résultats d'identification par des approches de Monte-Carlo, et concernent l'exemple numérique de flexion trois points illustré dans la FIGURE 3.11.*

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Comparaison avec la méthode FEMU</b> . . . . .	<b>82</b>
4.1.1	Premier cas d'étude : CL mixtes fiables . . . . .	82
4.1.2	Deuxième cas d'étude : MdC cinématiques . . . . .	85
4.1.3	Troisième cas d'étude : information bord libre . . . . .	87
<b>4.2</b>	<b>Identification par approche basée sur le contrôle optimal</b> . . . . .	<b>90</b>
4.2.1	Motivation . . . . .	90
4.2.2	Formulation du problème d'identification . . . . .	90
4.2.3	Comparaison avec l'ERdC modifiée . . . . .	91
<b>4.3</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>94</b>

---

## 4.1 Comparaison avec la méthode FEMU

Dans la première partie, l'identification de propriétés élastiques homogènes est menée pour différents types de données cinématiques qui proviennent de la simulation de l'essai de flexion trois points de la FIGURE 3.11. Les méthodes d'ERdC modifiée et de recalage par éléments finis sont déclinées selon le type de données disponibles. Ces données consistent en un champ de déplacement  $\tilde{U}$  perturbé par un bruit blanc gaussien  $\delta U$ , disponible sur la surface entière de l'éprouvette, et des conditions aux limites. La nature des conditions aux limites disponibles, d'une part, et la façon de les prendre en compte dans les différentes formulations, d'autre part, différencient les trois cas d'étude présentés, [Ben Azzouna *et al.*, 2013b, Ben Azzouna *et al.*, 2012]. L'objectif est de comparer les méthodes à partir d'informations similaires.

### 4.1.1 Premier cas d'étude : CL mixtes fiables

Le premier type de donnée se distingue par une connaissance de conditions aux limites mixtes parfaites (ou exactes), i.e. sans perturbations. Il s'agit d'un cas de figure purement synthétique. En effet, hormis la résultante des efforts, l'exactitude des CL de type Dirichlet ou Neumann ne peut être assurée dans un vrai essai, à partir des mesures et/ou d'hypothèses.

La FIGURE 4.1 représente les CL disponibles sur les nœuds du maillage éléments finis de l'éprouvette, répartis en informations de type déplacement et de type effort. Ce type de

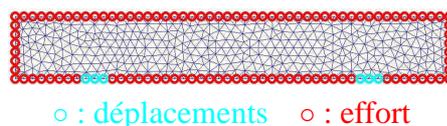


FIGURE 4.1: CL disponibles pour le premier type de données (*CL fiables*)

données constitue le cas idéal pour l'utilisation de l'approche FEMU qui nécessite des CL à imposer fortement pour définir le calcul éléments finis. La formulation de l'ERdC modifiée est adaptée pour tenir compte de l'aspect fiable des conditions aux limites.

#### 4.1.1.1 Résolution avec la méthode FEMU : CL mixtes

La formulation FEMU adéquate pour ce premier type de données est celle tenant compte des conditions aux limites mixtes (correspondant à celles utilisées pour générer les mesures).

**Principe de la méthode de recalage par éléments finis** Comme présenté au chapitre 2, le principe de la méthode de recalage par éléments finis est de construire, à paramètres  $\underline{\theta}$  fixés, un champ de déplacement  $U$  CA admissible, i.e. solution d'un problème direct bien posé, construit à partir des données disponibles. Ensuite, l'étape d'identification consiste à minimiser l'écart quadratique entre champ mesuré et calculé. Ceci se schématise en deux étapes :

- (i) Définir un calcul éléments finis à partir des données disponibles, à paramètres  $\underline{\theta}$  fixés

$$K(\underline{\theta}) U = F \implies U(\underline{\theta}) = K(\underline{\theta})^{-1} F \quad (4.1)$$

- (ii) Minimiser une fonction coût  $J$  basée sur une distance entre  $U(\underline{\theta})$  et  $\tilde{U}$ , ici définie sur la grille de mesure :

$$J(\underline{\theta}) = (\Pi U(\underline{\theta}) - \tilde{U})^T (\Pi U(\underline{\theta}) - \tilde{U}) \quad (4.2)$$

où  $\Pi$  a été introduit en partie 2.2.1.2.

Remarque :

Cette formulation s'appuie sur des conditions aux limites exactes. Il n'est donc pas nécessaire d'avoir une zone de mesure qui couvre le domaine  $\Omega$  en entier.

#### 4.1.1.2 Résolution avec l'ERdC modifiée : CL de type Neumann

La stratégie d'identification par erreur en relation de comportement modifiée étant dédiée à des mesures perturbées et des conditions aux limites imparfaites, une nouvelle formulation doit être déclinée à ce premier type de données où l'on dispose d'une connaissance totale et parfaite des conditions aux limites. Afin que les deux méthodes soit comparables, le traitement des données disponibles doit être fait de façon similaire à la méthode FEMU. L'ERdC modifiée prend en compte, dans le présent cas d'étude, des données fiables de type Neumann sur tout le bord du domaine.

**Formulation** Dans le même esprit de l'ERdC modifiée, on cherche ici à construire les champs  $V$  et  $U$ , respectivement SA et CA, en minimisant la fonction coût  $J$  écrite en déplacement, telle que :

$$J(U, V) = \frac{1}{2}(U - V)^T K (U - V) + \frac{\alpha}{2}(\Pi U - \tilde{U})^T (\Pi U - \tilde{U}) \quad (4.3)$$

Ici, le champ  $V$  est SA signifie qu'il correspond à un problème direct avec des CL de Neumann partout sur le bord. La solution est donc définie à un mouvement de corps rigide près.  $V$  peut donc s'écrire  $V = V_0 + \beta$ , avec  $V_0$  la solution et  $\beta$  le mouvement de corps rigide ( $K V = F$ ).

L'ERdC modifiée étant indifférente au choix du mouvement de corps rigide (3.94), on peut écrire :

$$J(U, V_0) = J(U, V_0 + \beta) ; \forall \beta$$

Ainsi, la fonctionnelle n'est, en fait, que fonction de  $U$  :

$$J(U) = \frac{1}{2}(U - V_0)^T K (U - V_0) + \frac{\alpha}{2}(\Pi U - \tilde{U})^T (\Pi U - \tilde{U})$$

La différentielle de  $J$  par rapport à  $U$  donne :

$$\left(\frac{\partial J}{\partial U}, \delta U\right) = \delta U^T K (U - V_0) + \delta U^T \alpha \Pi^T (\Pi U - \tilde{U}) \quad (4.4)$$

$$\delta J = 0 \implies (K + \alpha \Pi^T \Pi) U = K V_0 + \alpha \Pi^T \tilde{U} \quad (4.5)$$

avec l'hypothèse choisie où  $\Omega = \Omega_m$ , utile pour avoir deux zones de calcul comparables pour les deux méthodes testées. L'idée qui est suivie dans cette formulation de l'ERdC modifiée est de voir si, au final, on se ramène à une formulation type FEMU.

Partant de (4.5), on peut écrire :

$$\begin{aligned} (K + \alpha \Pi^T \Pi) U &= K V_0 + \alpha \Pi^T (\tilde{U} - \Pi V_0 + \Pi V_0) \\ (K + \alpha \Pi^T \Pi) U &= K V_0 + \alpha \Pi^T \Pi V_0 - \alpha \Pi^T \Pi V_0 + \alpha \Pi^T \tilde{U} \\ \implies (U - V_0) &= (K + \alpha \Pi^T \Pi)^{-1} \alpha \Pi^T (\tilde{U} - \Pi V_0) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Repasant de (4.5), on a :

$$\begin{aligned} K U + \alpha \Pi^T (\Pi U - \tilde{U}) &= K V_0 \\ \implies K (U - V_0 + V_0) + \alpha \Pi^T (\Pi U - \tilde{U}) &= K V_0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

En utilisant (4.6) :

$$\alpha \Pi^T (\Pi U - \tilde{U}) = K (K + \alpha \Pi^T \Pi)^{-1} \alpha \Pi^T (\tilde{U} - \Pi V_0) \quad (4.8)$$

Or, le terme  $\alpha \Pi^T$  n'est pas inversible. Pour aller plus loin, une alternative consiste à mener l'écart aux mesures sur le maillage éléments finis, plutôt que sur la grille de mesures. Dans un premier temps, il faut projeter le champ mesuré sur le maillage éléments finis. On notera le champ mesuré projeté  $U^*$ . Pour ce faire, on minimise l'écart quadratique entre le champ éléments finis projeté  $U^*$  et le champ mesuré  $\tilde{U}$  sur la grille de mesure :

$$\min_{\Omega} (\Pi U^* - \tilde{U})^T (\Pi U^* - \tilde{U})$$

ainsi :

$$U^* = (\Pi^T \Pi)^{-1} \Pi^T \tilde{U} \quad (4.9)$$

Dans ce cas, la fonctionnelle (4.3) se réécrit comme :

$$J(U, V_0) = \frac{1}{2} (U - V)^T K (U - V) + \frac{\alpha}{2} (U - U^*)^T (U - U^*) \quad (4.10)$$

De plus, dans ce cas particulier où l'on mesure sur tout  $\Omega$  et sur le maillage éléments finis, on a  $\Pi = Id$ , l'équation (4.5) devient :

$$(K + \alpha Id) U = K V_0 + \alpha Id U^* \quad (4.11)$$

On reprend la démarche menant à (4.8) dans ce cas. On part maintenant de (4.11) pour écrire la première relation permettant d'exprimer  $(U - V_0)$  du premier terme de la fonctionnelle  $J$  :

$$\begin{aligned} (K + \alpha Id) U &= K V_0 + \alpha Id (U - V_0 + V_0) \\ \implies (U - V_0) &= (K + \alpha Id)^{-1} \alpha (U^* - V_0) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Repasant de (4.11), on a :

$$\begin{aligned} (K + \alpha Id) U &= K (V_0 + U^* - U^*) + \alpha Id U^* \\ \implies (K + \alpha Id) U &= K (V_0 - U^*) + (K + \alpha Id) U^* \end{aligned} \quad (4.13)$$

En utilisant (4.12) :

$$(U - U^*) = (K + \alpha Id)^{-1} K (V_0 - U^*) \quad (4.14)$$

En injectant (4.12) et (4.14) dans (4.10), on obtient :

$$\begin{aligned} J(U) &= \frac{1}{2} (U^* - V_0)^T \left[ 2 \alpha Id (K + \alpha Id)^{-1} K (K + \alpha Id)^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \alpha K (K + \alpha Id)^{-1} (K + \alpha Id)^{-1} K \right] (U^* - V_0) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (U^* - V_0)^T A (U^* - V_0) \\ &= \frac{1}{2} \|U^* - V_0\|_A^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

La minimisation de la fonctionnelle (4.15) correspond à une minimisation par moindres carrés avec la norme  $A$ . L'ERdC peut dans ce cas être vue comme une approche FEMU avec des CL de type Neumann et une norme particulière.

On peut remarquer que, pour un  $\alpha$  petit, cette norme devient :

$$A_{(\alpha \ll 1)} = \alpha^2 (Id + K^{-1}) \quad (4.16)$$

### 4.1.1.3 Résultats

Les deux méthodes d'identification s'appuient sur des données où les conditions aux limites sont exactes et où les perturbations affectent seulement les mesures de déplacement dans  $\Omega_m$ .

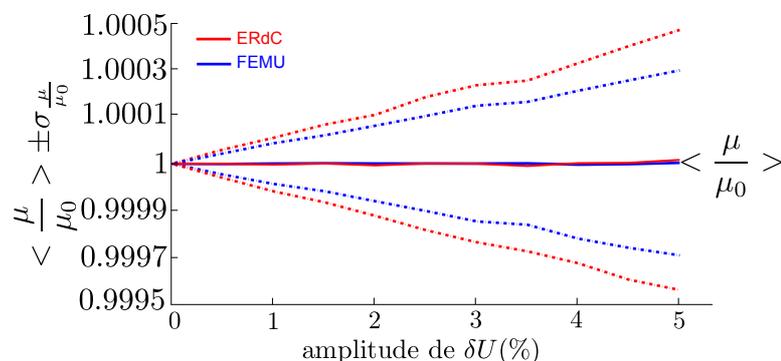


FIGURE 4.2: Comparaison entre les méthodes FEMU et ERdC pour des CL mixtes et exactes

L'identification a été menée en élasticité isotrope homogène avec les deux méthodes testées, sur 1000 tirages de bruit blanc gaussien pour chaque amplitude donnée. La FIGURE 4.2 montre les résultats d'identification du coefficient  $\mu$  avec les deux méthodes, en termes de moyenne et d'écart-type. Les lignes continues représentent la moyenne de l'identification, normée par la valeur de référence  $\mu_0$ , tandis que les lignes pointillées représentent la barre d'erreur  $\langle \mu/\mu_0 \rangle \pm \sigma_{\mu/\mu_0}$ .

On remarque que l'ordre de grandeur de l'écart-type est très petit pour les deux méthodes. Par conséquent, les résultats d'identification sont quasi-identiques. La différence est de l'ordre de  $10^{-4}$ .

Il en ressort que les conditions aux limites exactes sont très favorables à l'identification. Une formulation d'ERdC modifiée dans ce cas de figure revient à un choix de norme particulier dans une approche FEMU, qui a peu d'incidence sur les résultats d'identification.

## 4.1.2 Deuxième cas d'étude : MdC cinématiques

Le deuxième type de donnée consiste uniquement en des mesures de déplacement dans  $\Omega_m = \Omega$ . Afin de comparer les deux méthodes, les CL seront de type Dirichlet pour la formulation FEMU (FIGURE 4.3(a)), et totalement absentes pour la formulation de l'ERdC modifiée (FIGURE 4.3(b)).

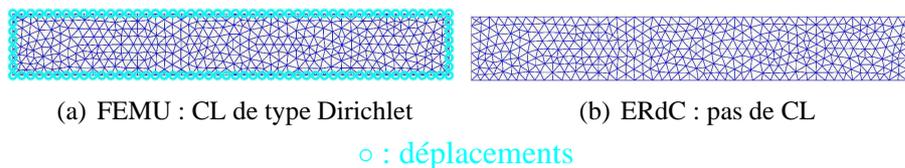


FIGURE 4.3: Deuxième type de CL pour les deux méthodes

### 4.1.2.1 Méthode FEMU : CL de type Dirichlet

Vu les données disponibles, les conditions aux limites prises en compte ici sont nécessairement de type déplacement. La couronne de déplacement sur le bord du domaine

est extraite des mesures et imposée de manière forte. La formulation se décline en deux étapes :

- (i) L'extraction des CL en déplacement à partir des mesures :

Il s'agit de projeter les CL en déplacement de la grille de mesures vers le maillage éléments finis. Une première projection globale du champ cinématique est effectuée à l'aide de l'opérateur  $\Pi$  introduit en 2.2.1.2. Le champ obtenu est noté  $U^*$  (comme vu en 4.1.1.2). Puis, on procède à l'extraction d'une couronne de déplacement sur  $\partial\Omega$ .

Notons  $U_b^*$  les données de déplacement sur le bord du domaine, extraites du vecteur  $U^*$ , avec  $b$  l'indice des nœuds de bord et  $i$  l'indice des nœuds internes.

- (ii) La résolution avec la formulation FEMU :

Il s'agit de construire, à paramètres  $\underline{\theta}$  fixés, le champ de déplacement  $U(\underline{\theta})$  tel que

$U = \begin{bmatrix} U_i \\ U_b \end{bmatrix}$  solution du problème de Dirichlet défini à partir des CL extraites des mesures. Le système éléments finis correspondant s'écrit :

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ib} \\ K_{bi} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_b \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

avec  $F_b$  les efforts inconnus associés aux CL, et  $U_b = U_b^*$ .

$U_i$  se déduit alors par approche de substitution comme :

$$U_i = -K_{ii}^{-1} (K_{ib} U_b^*) \quad (4.18)$$

La connaissance du champ  $U(\underline{\theta})$  est ainsi complète.

Enfin, l'identification des paramètres  $\underline{\theta}$  se fait via la minimisation de la fonction coût :

$$j(\underline{\theta}) = (\Pi U(\underline{\theta}) - \tilde{U})^T (\Pi U(\underline{\theta}) - \tilde{U}) \quad (4.19)$$

La formulation du problème d'identification avec l'ERdC modifiée sans CL ayant fait l'objet des sections 3.1.2 et 3.1.5.1, elle n'est pas rappelée ici et on passe à la comparaison des deux méthodes sur la base des résultats d'identification.

#### 4.1.2.2 Résultats

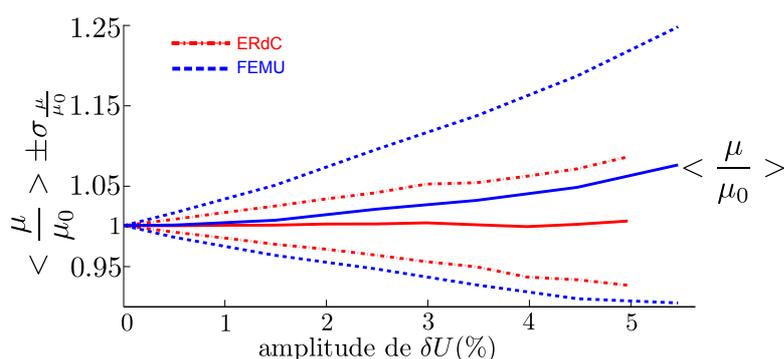


FIGURE 4.4: Comparaison entre les méthodes FEMU et ERdC pour le deuxième type de données

La FIGURE 4.4 présente les résultats d'identification du coefficient  $\mu/\mu_0$ , menée pour 1000 tirages de Monte-Carlo, avec la formulation de l'ERdC modifiée sans conditions aux limites, et la méthode FEMU avec des conditions aux limites en déplacement. L'ERdC modifiée s'avère plus robuste en termes de moyenne et d'écart-type, pour ce type de données.

### 4.1.3 Troisième cas d'étude : information bord libre

Le troisième cas d'étude diffère du second par le rajout de l'information fiable sur les bords libres (FIGURE 4.5).

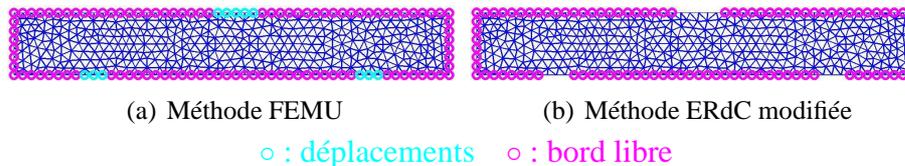


FIGURE 4.5: Troisième type de CL pour les deux méthodes

#### 4.1.3.1 Méthode FEMU : CL de type Dirichlet et bord libre

Tenir compte des bords libres comme information fiable sur le bord étant meilleur que d'imposer des déplacements bruités, on préfère en tenir compte là où c'est possible. Soit " $f$ " l'indice des ddl du bord libre et " $\bar{f}$ " l'indice des ddl sur  $\partial\Omega \setminus \partial_f\Omega$ . Le rajout de l'information de bord libre de manière forte s'écrit :

$$K_{f\circ}U = 0 \quad (4.20)$$

Le vecteur  $U_{\bar{f}}^*$  contient les déplacements mesurés sur la partie  $\partial\Omega \setminus \partial_f\Omega$  du bord, obtenus après extraction du champ mesuré projeté sur la grille éléments finis (4.9). En repartant de la formulation écrite en partie 4.1.2.1, le système (4.17) devient :

$$\begin{bmatrix} K_{ifif} & K_{if\bar{f}} \\ K_{\bar{f}if} & K_{\bar{f}\bar{f}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{if} \\ U_{\bar{f}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{\bar{f}} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

avec  $U_{\bar{f}} = U_{\bar{f}}^*$ , et  $F_{\bar{f}}$  les efforts inconnus associés aux conditions aux limites.  $U_{if}$  est alors obtenu comme :

$$U_{if} = -K_{ifif}^{-1} (K_{if\bar{f}} U_{\bar{f}}^*) \quad (4.22)$$

Ainsi, le champ  $U$  et la fonction coût  $J$  (4.19) sont connus.

La formulation de l'ERdC modifiée utilisée pour ce type de données est celle prenant en compte l'information de bord libre, présentée au 3.1.5.

#### 4.1.3.2 Résultats

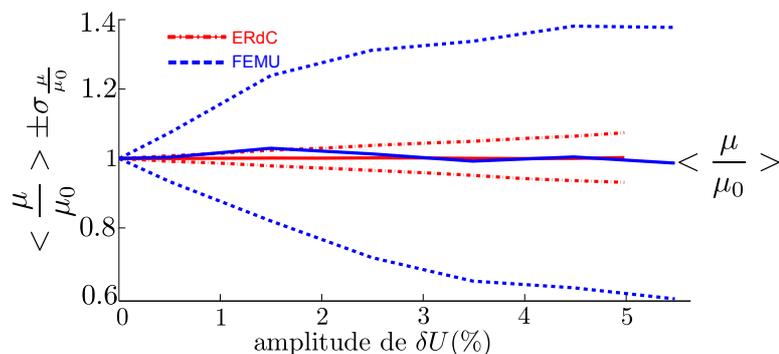


FIGURE 4.6: Comparaison entre les méthodes FEMU et ERdC pour le troisième type de données

La FIGURE 4.6 montre les résultats d'identification en termes de moyenne et d'écart type.

On remarque que l'ajout d'informations fiables améliore les résultats d'identification obtenus avec l'ERdC modifiée, en comparaison avec le deuxième cas d'étude. Néanmoins, les résultats obtenus avec la méthode FEMU sont moins bons en termes d'écart-type. Ce dernier atteint un plafond pour les niveaux de bruit les plus élevés où les valeurs identifiées butent sur les bornes de l'intervalle de recherche utilisé pour l'identification. Ceci s'explique par le choix d'un niveau de bruit utilisé trop élevé par rapport à des cas réalistes (cf remarque au paragraphe 4.1.3.3). D'autre part, l'identification avec l'ERdC modifiée donne de meilleurs résultats avec les deux derniers types de données. Sont récapitulés dans le tableau 4.1 les écarts-type d'identification pour les trois types de données testés, pour une amplitude de perturbations égale à 3% de la moyenne des déplacements. Hormis le cas des CL fiables, purement synthétique, l'identification s'avère sensiblement préférable avec l'ERdC modifiée pour des données perturbées, et met en avant l'intérêt de tenir compte de l'information disponible.

Méthode \ Étude	Étude		
	Cas 1	Cas 2	Cas 3
FEMU	0.01%	8.8%	29%
ERdC modifiée	0.02%	3.5%	2.2%

TABLEAU 4.1: Écart-type des résultats d'identification pour une amplitude de bruit de 3%

#### 4.1.3.3 Discussion des résultats obtenus avec la méthode FEMU

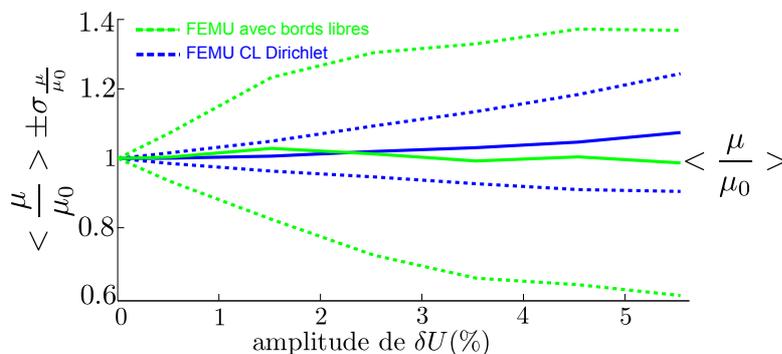


FIGURE 4.7: Comparaison des résultats d'identification avec la méthode FEMU pour deux types de données

Les résultats d'identification avec la méthode FEMU des cas 2 et 3 sont représentés dans la FIGURE 4.7. Il en découle que la méthode FEMU avec prise en compte des bords libres améliore la moyenne mais détériore l'écart-type en comparaison avec la formulation avec des conditions aux limites en déplacement. À première vue, un tel résultat semble bizarre dans le sens où l'ajout d'informations fiables détériore l'écart-type. L'origine de cette détérioration provient du fait que, dans la formulation FEMU avec bords libres, ces derniers sont abondants et imposés presque partout sur la frontière de l'éprouvette, excepté aux noeuds des deux appuis et aux noeuds d'application de l'effort, pour lesquels des conditions aux limites de déplacement mesuré (donc bruité) sont imposées (FIGURE

4.5(a)). Ce faisant, un déséquilibre est causé par le bruitage de très peu de points (chargement et appuis), notamment sur le bord inférieur des deux appuis. Ce bruit se trouve équilibré lorsque le déplacement mesuré est imposé sur une plus grande partie du bord. Cette remarque se confirme par les cartes des résidus ( $U - \tilde{U}$ ) pour les deux formulations FEMU représentées dans la FIGURE 4.8.

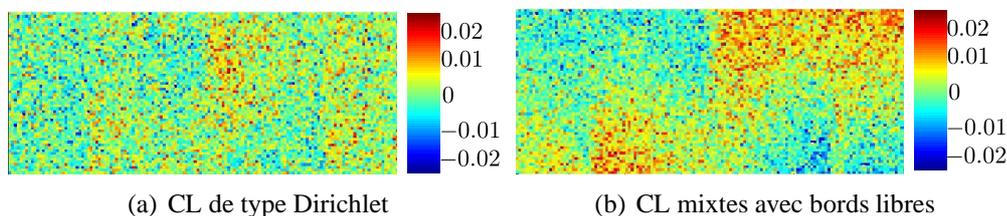


FIGURE 4.8: Cartes des résidus ( $U_x - \tilde{U}_x$ ) obtenues avec la méthode FEMU

En effet, la carte du résidu de la formulation avec des conditions aux limites de type Dirichlet (FIGURE 4.8(a)) est aléatoire, tandis que le résidu avec les bords libres est plutôt antisymétrique (FIGURE 4.8(b)). Le bruit est donc plus déterministe dans ce dernier cas (il introduit un biais).

En revanche, l'ERdC modifiée gère bien l'ajout de la totalité des bords libres en améliorant les résultats de l'identification.

Remarque :

L'apparition d'un biais sur identification est dûe à une surestimation du bruit de mesure introduit. L'amplitude de ce dernier atteint 5% de la moyenne des déplacements tout au long de l'étude. Or, à même niveau de déformation, les déplacements provenant d'un essai de flexion trois points sont plus importants qu'en traction, du fait du fléchissement. Aussi, le choix de 5% du déplacement moyen n'est pas forcément réaliste et surestime le niveau du bruit. Un allongement  $\delta l$  par rapport au déplacement caractéristique est alors plus représentatif et peut être calculé à partir de la déformation moyenne  $\langle |\varepsilon| \rangle = \varepsilon_m$  comme :

$$\delta l = \varepsilon_m \times L \quad (4.23)$$

avec  $L$  la longueur caractéristique de l'éprouvette. Le bruit de mesure s'obtient ensuite comme :

$$\delta \tilde{U} = \rho \times \delta l \quad (4.24)$$

où  $\rho$  est l'amplitude du bruit appliqué.

Par ailleurs, pour des mesures de champs obtenues par CIN, l'erreur de corrélation  $\delta U$  se situe entre  $1/100$  et  $1/10$  de pixel. En se basant sur des données expérimentales d'un essai de flexion trois points, on peut estimer une amplitude  $\rho$  représentative du bruit réel.

Soit  $\delta U = 5/100 px$ . D'après l'application expérimentale de la partie 5.2,  $1 px = 0.06 mm$ . Grâce aux équations (4.23, 4.24) appliquées aux données expérimentales,  $\rho = 1.13\%$  pour l'essai en question.

## 4.2 Identification par approche basée sur le contrôle optimal

### 4.2.1 Motivation

L'approche testée ici consiste à reformuler le problème d'identification comme un problème de contrôle optimal, ou de poursuite [Lions, 1968, Bourgeois, 1998], considérant uniquement les mesures comme information non fiable. Outre l'intérêt d'évaluer cette approche, cette étude servira de comparaison avec l'approche de l'ERdC modifiée pour, éventuellement, mettre en évidence l'apport du terme d'erreur de modèle de cette dernière, aussi bien dans la résolution du problème de base que dans l'étape d'identification. Il s'agit alors de formuler le problème d'identification avec le terme  $J_2$  pour le problème de base, et  $\mathcal{G}_2$  pour l'étape d'identification. Les équations associées à  $J_1$  se retrouvent en contrainte.

### 4.2.2 Formulation du problème d'identification

Contrairement à la formulation de l'ERdC modifiée, la relation de comportement est vérifiée de manière forte et mise en contrainte lors de la minimisation de la fonctionnelle  $J$ . Cette dernière ne contient plus que le terme  $J_2$ .

Reprenons le cadre d'identification 3.1.5 du chapitre 3. La nouvelle fonctionnelle est la suivante :

$$J(\underline{u}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|\underline{u} - \tilde{\underline{u}}\|^2 d\Omega \quad (4.25)$$

Le problème d'identification correspondant s'écrit alors :

<p><b>Trouver</b> <math>(\underline{u}, \underline{\theta})</math> sur <math>\Omega</math> tel que :</p> $\left\{ \begin{array}{l} \underline{u} \in H_1(\Omega) \\ \underline{\underline{\sigma}} \in H_{div}(\Omega) / \begin{array}{l} \text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0} \text{ dans } \Omega, \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \partial_f \Omega, \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) = \mathbb{C}(\underline{\theta}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) \text{ dans } \Omega \end{array} \end{array} \right. \quad (4.26)$ <p>qui minimise :</p> $J(\underline{u})$
---

La présente formulation tient compte des conditions aux limites faibles de type bord libre, si disponibles, mais gère également l'absence totale de conditions aux limites.

On discrétise par éléments finis le problème d'identification en utilisant les mêmes notations que dans le chapitre précédent. En travaillant avec la même répartition d'indices sur le bord, ce dernier se décompose en " $f$ " et " $\bar{f}$ ", respectivement pour la partie où l'on dispose de la contrainte répartie fiable, à savoir le bord libre, et la partie inconnue du bord, tel que  $f \cup \bar{f} = b$ .

Sous forme discrète, le problème de base s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_U J(U) = \min_U \left( \frac{1}{2} (\Pi U(\underline{\theta}) - \tilde{U})^\top (\Pi U(\underline{\theta}) - \tilde{U}) \right) \quad (4.27a) \\ \text{sous la contrainte} \quad K_{ifc} U = 0 \quad (4.27b) \end{array} \right.$$

dont la solution est notée :  $U(\underline{\theta})$ .

Dans un deuxième temps, le problème d'identification se traduit par la minimisation de la fonction coût  $\mathcal{G}$  par rapport à  $\underline{\theta}$ , telle que :

$$\mathcal{G} = J(U(\underline{\theta})) \quad (4.28)$$

Un Lagrangien est ensuite introduit pour imposer la contrainte du problème :

$$\mathcal{L}(U, \Lambda) = J(U) + \Lambda^T (K_{if\circ} U) \quad (4.29)$$

Sa stationnarité par rapport aux deux inconnues  $U$  et  $\Lambda$  donne :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U}, \delta U\right) = 0 &\implies \delta U^T [\Pi^T (\Pi U - \tilde{U}) + K_{if\circ}^T \Lambda] = 0 \\ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda}, \delta \Lambda\right) = 0 &\implies \delta \Lambda^T K_{if\circ} U = F \end{aligned} \quad (4.30)$$

d'où le système :

$$\begin{cases} \Pi^T \Pi U + K_{if\circ}^T \Lambda = \Pi^T \tilde{U} \\ K_{if\circ} U = F \end{cases} \quad (4.31a)$$

avec  $(U, \Lambda)$  solution du système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \Pi^T \Pi & K_{if\circ}^T \\ K_{if\circ} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi^T \tilde{U} \\ F \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

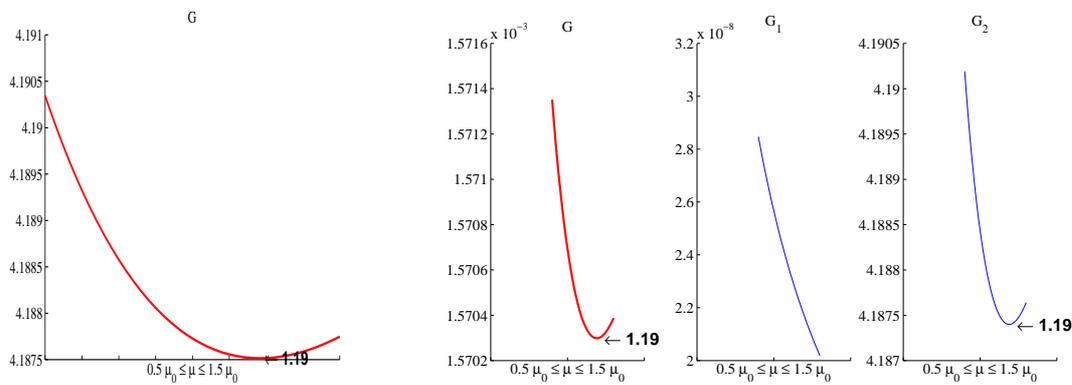
Au final, la résolution de (4.32) permet de construire un champ de déplacement CA et SA, solution de (4.27). La mise en place de l'algorithme de résolution est analogue à ce qui a été présenté dans la partie 3.1.5.1, notamment en ce qui concerne l'affranchissement du noyau en cas d'absence de conditions aux limites.

### 4.2.3 Comparaison avec l'ERdC modifiée

Afin de comparer l'approche du contrôle optimal avec l'ERdC modifiée, on mène l'identification du coefficient  $\mu$  homogène en exploitant les champs cinématiques qui proviennent de l'exemple numérique de flexion trois points présenté au 3.2.2. Dans la FIGURE 4.9, l'identification est menée pour un même tirage de bruit d'amplitude 5%. Les différentes fonctions coût sont tracées pour un rapport  $\mu/\mu_0$  dans un intervalle de recherche centré sur la valeur de référence. Les FIGURE 4.9(a) et FIGURE 4.9(b) concernent le cas d'une identification avec une absence totale de conditions aux limites, tandis que, dans les FIGURE 4.9(c) et FIGURE 4.9(d), sont tracées les fonctions coût pour une identification avec l'information de bord libre, respectivement avec l'approche par contrôle optimal et l'approche de l'ERdC modifiée.

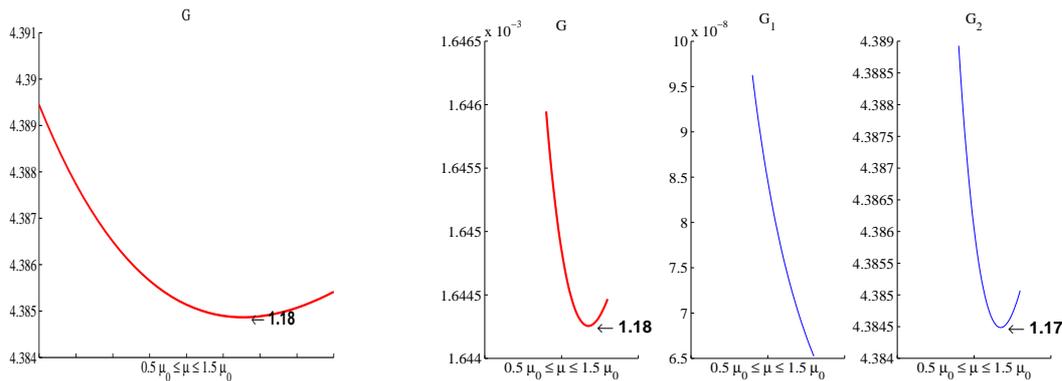
**Discussion** Pour le tirage de bruit testé, l'identification avec les deux méthodes donne le même résultat, à savoir un rapport  $\frac{\mu}{\mu_0} = 1.19$  dans le premier cas, et  $\frac{\mu}{\mu_0} = 1.18$  dans le second.

Par ailleurs, on remarque que, pour la méthode de l'ERdC modifiée, le minimum du terme  $\mathcal{G}_1$  n'est pas dans l'intervalle de recherche, et ce pour les deux formulations, sans CL et avec bord libre, et est par ailleurs d'une très faible amplitude en comparaison avec le terme de distance aux mesures  $\mathcal{G}_2$ . Le poids donné aux deux termes de la fonctionnelle étant le même, ce résultat peut être dû au déséquilibre entre les données en déplacement et en effort fournies à la méthode. La FIGURE 4.9(d) montre que l'identification avec le seul terme  $\mathcal{G}_2$  donne un résultat d'identification meilleur que l'identification avec  $\mathcal{G}$  et avec l'approche par contrôle optimal ( $\frac{\mu}{\mu_0} = 1.17$ ). En d'autres termes, pour le tirage de bruit testé, la formulation du problème de base avec l'ERdC modifiée, et une minimisation avec le terme de distance aux mesures  $\mathcal{G}_2$ , donne un résultat légèrement meilleur. Les résultats restent cependant très proches, et comme le terme  $\mathcal{G}_1$  est négligeable, les deux méthodes



(a) Contrôle optimal - sans CL

(b) ERdC modifiée - sans CL



(c) Contrôle optimal - avec bord libre

(d) ERdC modifiée - avec bord libre

FIGURE 4.9: Identification pour un même tirage de bruit d'amplitude 5%

sont presque les mêmes.

Les deux étapes qui définissent la méthode de l'ERdC modifiée peuvent être récapitulées comme suit :

- (a) dans la première étape, pour des propriétés matérielles données, des champs mécaniques sont construits à travers la confrontation du modèle avec toutes les données expérimentales et théoriques ;
- (b) dans la seconde étape, une fonction coût est définie à partir de ces champs mécaniques, et peut être vue comme l'évaluation de la qualité du modèle. Sa minimisation mène à l'identification des propriétés matérielles recherchées.

En réalité, ces deux étapes sont relativement indépendantes et il n'est donc pas obligatoire d'utiliser la même fonctionnelle pour les deux [Feissel, 2003]. La question qui peut donc se poser est : quelle fonctionnelle introduire pour chaque étape ? On peut récapituler les trois méthodes d'identification selon la contrainte faible adjointe au principe variationnel, comme dans le TABLEAU 4.2.

Méthode ERdC	ERdC-A	ERdC-C	Contrôle optimal
Fonctionnelle du problème de base	$J$	$J$	$J_2$
Fonction coût d'identification	$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}_2$	$\mathcal{G}_2$

TABLEAU 4.2: Les trois méthodes variationnelles évaluées

Par ailleurs, le choix de  $\mathcal{G}_1$  pour l'identification a été discuté au 3.2.1.1, dans le cas de l'exemple de la traction simple. Selon le type d'essai, ce choix peut être très judicieux.

**Comparaison des stratégies ERdC-A et ERdC-C** Une première comparaison entre les méthodes ERdC-A et ERdC-C est faite sur la base de l'identification menée avec des tirages de Monte-Carlo de la partie 4.1, pour deux types de données : des mesures de déplacement sans conditions aux limites (schématisées FIGURE 4.3(b)), et des mesures de déplacement avec l'information de bord libre (schématisées FIGURE 4.5(b)).

Dans la FIGURE 4.10, sont tracées les barres d'erreur des résultats d'identification obtenus

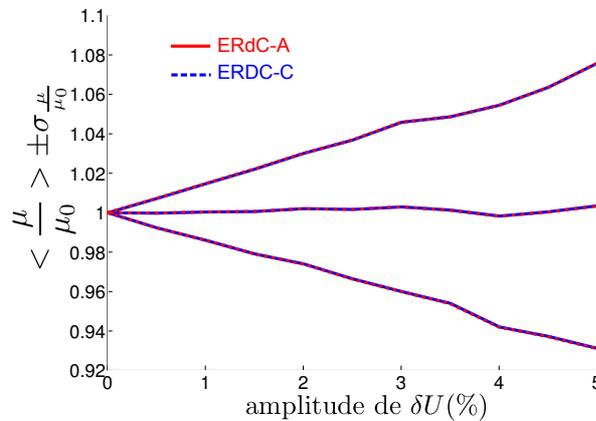


FIGURE 4.10: Comparaison des résultats d'identification issues des stratégies ERdC-A et ERdC-C

avec les deux stratégies, pour les données sans conditions aux limites.

Les résultats sont quasiment identiques, et cela est dû au fait que la fonction  $\mathcal{G}_1$  est de faible amplitude par rapport à  $\alpha \mathcal{G}_2$ . Ce résultat est également vrai pour les données de déplacement avec l'information de bord libre sur le bord.

**Comparaison des stratégies ERdC et contrôle optimal** On s'intéresse ensuite à la comparaison des résultats d'identification obtenus avec l'ERdC modifiée et l'approche du contrôle optimal, pour deux types de données.

(i) Données en déplacement sans CL (schématisées FIGURE 4.3(b))

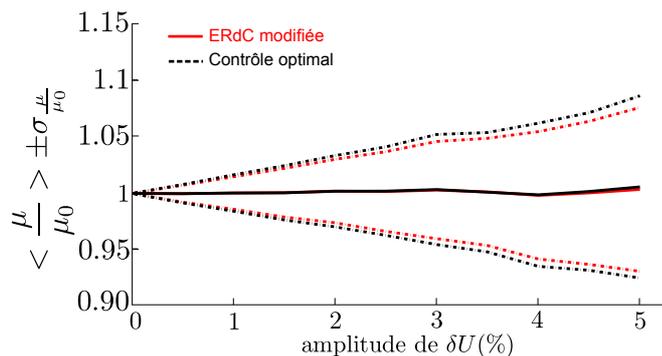


FIGURE 4.11: Écart d'identification entre les formulations ERdC-A et contrôle optimal, sans conditions aux limites

La FIGURE 4.11 montre les résultats d'identification obtenus avec les deux approches en termes de moyenne et d'écart-type en fonction du niveau de perturbation, pour des données de déplacement sans conditions aux limites. Les résultats, bien que proches, montrent une meilleure gestion du bruit avec l'ERdC modifiée, et confirment l'intérêt du terme d'erreur de modèle dans la résolution du problème de base.

(ii) Données en déplacement avec bord libre (schématisées FIGURE 4.5)

La deuxième comparaison concerne le cas d'étude où l'on fournit l'information de bord libre. Les écarts-type de l'identification sont, dans le présent cas, identiques. Cependant, les moyennes sont différentes (0.01% comme précision d'identification).

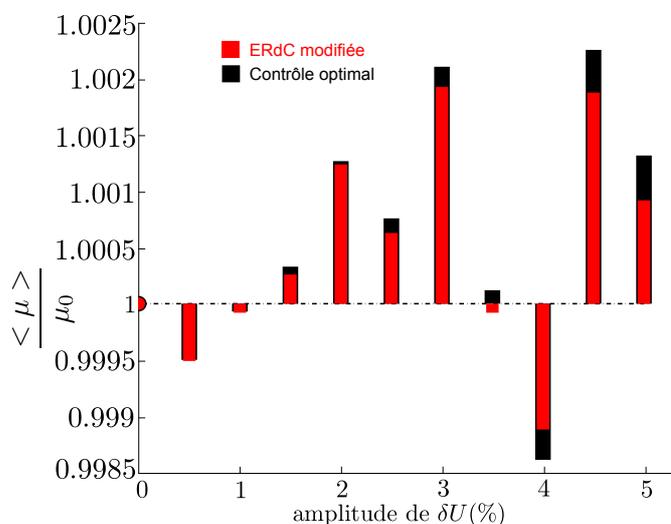


FIGURE 4.12: Moyennes de l'identification avec les formulations ERdC-A et contrôle optimal, (bord libre)

La FIGURE 4.12 représente les moyennes d'identification obtenues avec les approches ERdC modifiée et contrôle optimal, normées par le module de référence. On remarque une légère amélioration des résultats avec l'approche de l'ERdC modifiée.

### 4.3 Conclusion

La première partie de ce chapitre s'est intéressée à la comparaison de la stratégie développée dans ces travaux avec la méthode de recalage par éléments finis, sur la base d'exemples numériques pour l'identification d'un matériau isotrope homogène, pour trois types de conditions aux limites. Cela a permis de mettre en avant la robustesse de l'ERdC modifiée. Dans la deuxième partie, une méthode d'identification alternative basée sur les techniques de contrôle optimal a été développée et comparée à l'ERdC modifiée. De plus, deux variantes de l'ERdC ont été investiguées afin de mieux l'appréhender. Il en ressort que l'erreur de modèle n'a pas un intérêt systématique, mais peut être pertinente suivant le type d'essai. À titre d'exemple, l'application à des données expérimentales dans le prochain chapitre montre un comportement sain de ce terme.

# Application à des exemples orthotropes

*On s'intéresse dans ce cinquième chapitre à l'identification de propriétés élastiques orthotropes. La première partie est consacrée à l'étude des paramètres d'essai optimaux en vue de l'identification de l'ensemble des propriétés matérielles inconnues. La deuxième partie est consacré à l'application de l'ERdC modifiée à des données expérimentales afin d'identifier un module de cisaillement d'un matériau composite CMO en verre-polyester. Le résultat d'identification est ensuite confronté à ceux obtenus par d'autres approches classiques.*

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Vers l'identification de propriétés orthotropes hétérogènes</b>	<b>96</b>
5.1.1	Choix de l'essai	96
5.1.2	Analyse de sensibilité	97
5.1.3	Identification de propriétés orthotropes homogènes	103
5.1.4	Identification de propriétés orthotropes hétérogènes	107
<b>5.2</b>	<b>Identification à partir de données expérimentales</b>	<b>114</b>
5.2.1	Essai et matériau	114
5.2.2	Les différents cas d'études	114
5.2.3	Résultats	116
<b>5.3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>118</b>

---

## 5.1 Vers l'identification de propriétés orthotropes hétérogènes

Dans cette partie, l'identification de propriétés élastiques orthotropes est abordée. Pour ce faire, on s'intéresse d'abord à la sélection de l'essai mécanique qui peut permettre de solliciter le plus grand nombre de propriétés mécaniques. Ensuite, une optimisation géométrique de l'éprouvette est faite sur la base de la sensibilité des champs cinématiques mesurés vis-à-vis de l'ensemble des propriétés d'un matériau orthotrope, afin d'équilibrer leur contribution dans la réponse. L'identification de ces derniers est enfin menée sur quelques cas test.

### 5.1.1 Choix de l'essai

Outre le critère d'identifiabilité du nombre maximum de propriétés orthotropes, la simplicité de la mise en place de l'essai, dépendant notamment du matériel disponible dans le laboratoire, a constitué un critère de sélection. Parmi les essais mécaniques classiques, l'essai de flexion trois points apparaît comme un bon choix pour identifier des propriétés mécaniques orthotropes. Avec des dimensions adéquates, un tel essai fait travailler l'éprouvette en traction, en compression et en cisaillement.

La relation de comportement d'un matériau orthotrope s'écrit dans le repère d'orthotropie, en fonction des modules d'Young, des coefficients de Poisson et du module de cisaillement, comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{\nu_{yx}E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ \frac{\nu_{yx}E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix}}_{\mathbb{Q}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

$E_x$  et  $E_y$  étant les modules d'Young longitudinal et transversal,  $\nu_{xy}$  et  $\nu_{yx}$  les coefficients de Poisson dans le plan  $(x,y)$ , et  $G_{xy}$  le module de cisaillement.

La matrice de rigidité  $\mathbb{Q}$  peut s'écrire en fonction des modules orthotropes sous la forme :

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & 0 \\ Q_{xy} & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{ss} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Dans la suite, on cherchera à identifier la matrice de comportement  $\mathbb{Q}$ . Néanmoins, comme on se place en élasticité, l'essai de flexion trois point est, *a priori*, faiblement sensible au module d'Young  $E_y$ , et donc au coefficient  $Q_{yy}$ . Ceci peut être constaté à travers le champ de contrainte  $\sigma_{yy}$  de la FIGURE 5.1(b). De surcroît, la zone d'identifiabilité de  $E_y$  se situe juste en dessous du point d'application de l'effort, ce qui, d'une part, limite la taille des données relatives à ce module, et d'autre part, coïncide avec la zone de mâtage susceptible de survenir dans la zone d'application de l'effort, et présentant des problèmes de modélisation supplémentaires.

La FIGURE 5.1 représente les champs de contrainte pour un rapport  $L/h$  égal à 7. L'optimisation des dimensions de l'éprouvette sera abordée dans la suite de cette partie.

Comme on travaille en 2D, on se place dans l'hypothèse des contraintes planes. Un tel essai se fait, néanmoins, sur des éprouvettes de section carrée ou de section rectangulaire avec un ratio hauteur/largeur  $h/b$  proche de 1. Une telle hypothèse implique que le matériau a le même comportement sur les deux faces  $(x,y)$  en  $z = 0$  et  $z = b$ , où  $z$  est la troisième coordonnée du repère direct  $(x,y,z)$ .

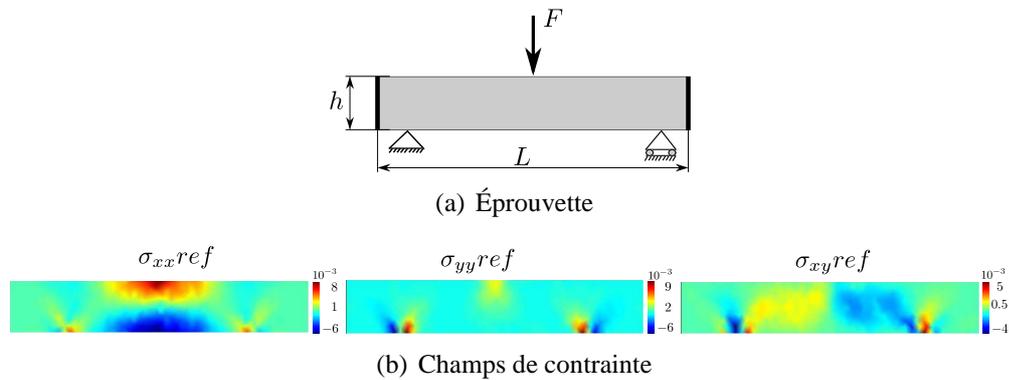


FIGURE 5.1: Champs de contraintes d'un matériau orthotrope soumis à un essai de flexion trois points

## 5.1.2 Analyse de sensibilité

L'essai mécanique étant fixé, il convient de sélectionner les dimensions de l'éprouvette qui optimisent l'identifiabilité des propriétés orthotropes recherchées. Par souci de simplicité, la hauteur de l'éprouvette a été fixée. C'est donc la longueur de l'éprouvette qui est à optimiser, ou encore, le rapport longueur sur hauteur  $L/h$ .

L'influence de l'élanement de la poutre sur la nature des contraintes a été étudiée dans la littérature [Lekhnitskii, 1963], principalement pour déterminer la longueur optimale qui permet d'avoir la plus grande sensibilité au cisaillement. Dans notre étude, on cherche à déterminer la longueur optimale qui fait travailler la poutre en mode mixte (flexion et cisaillement), afin de pouvoir déterminer le maximum de propriétés élastique à partir d'un seul essai.

### 5.1.2.1 Analyse avec la théorie des poutres

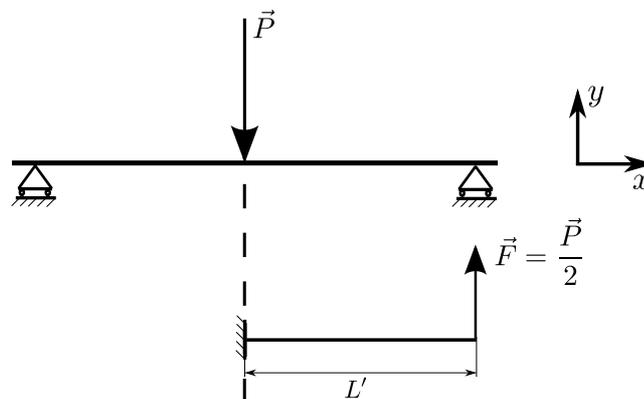


FIGURE 5.2: Système mécanique étudié

Dans un premier temps, on étudie la solution analytique d'une poutre en flexion 3 points soumise à un chargement  $\vec{P}$ . Grâce à la symétrie du chargement, on peut étudier un système équivalent correspondant à la moitié de la poutre soumise à un chargement  $\vec{F} = -\vec{P}/2$  à une de ses extrémités, et ayant un encastrement à l'autre extrémité (FIGURE 5.2).

Avec les hypothèses RdM, la contrainte  $\sigma_{yy}$  est nulle. Il ne sera donc pas possible de conclure sur l'identifiabilité du module  $E_y$ . Cependant, la validité de cette hypothèse pour les structures élancées étaye la non identifiabilité de ce module dans la configuration d'un essai de flexion trois points.

Par ailleurs, d'après la littérature [Lekhnitskii, 1963, Benzeggagh, 2008], une poutre

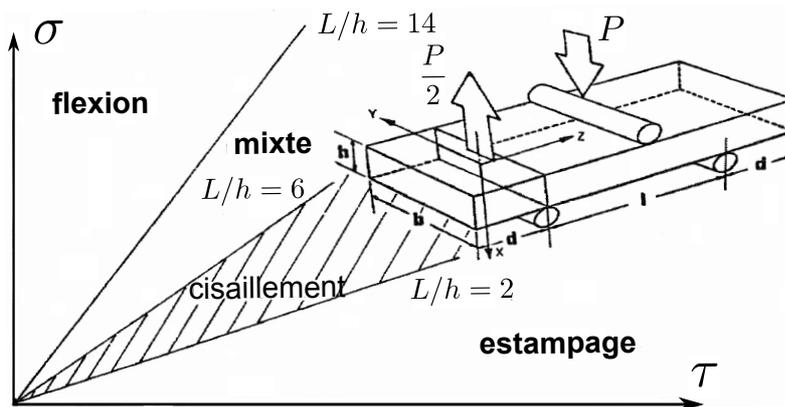


FIGURE 5.3: Influence de l'élanement sur le mode de sollicitation [Benzeggagh, 2008]

soumise à un essai de flexion trois points serait en cisaillement pur pour un rapport  $L/h$  tel que  $2 \leq L/h \leq 6$ , et en flexion simple pour  $L/h \geq 14$ . En mode mixte, on s'attendrait donc à un rapport  $L/h$  compris entre 6 et 14 (FIGURE 5.3). Le rapport  $L/h < 2$  a été naturellement exclu de l'étude puisque il correspond à une opération d'estampage.

La solution classique de la RdM en flexion nous donne la relation entre les contraintes et la sollicitation appliquée  $F$  :

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{I}(L' - x)y \quad (5.3)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{F}{2I}\left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right)y \quad (5.4)$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad (5.5)$$

Le tenseur des contraintes solution s'écrit alors :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

On se propose de chercher les directions principales associées aux contraintes principales, en tout point de la poutre, dans le but d'étudier les angles principaux pour différents rapports  $L/h$ . Ce résultat s'obtient par la diagonalisation de la matrice des contraintes. Les valeurs propres sont donc calculées :

$$\lambda_1 = \frac{\sigma_{xx} - \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\sigma_{xy}^2}}{2} \quad (5.7)$$

$$\lambda_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\sigma_{xy}^2}}{2} \quad (5.8)$$

où  $\lambda_i$  correspond à la contrainte principale  $\sigma_i$ . On note  $V_i$  le vecteur propre correspondant pour  $i = 1 : 2$ , avec :

$$\langle V_1 \rangle = \left\langle \sigma_{xy} \frac{-\sigma_{xx} - \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\sigma_{xy}^2}}{2} \right\rangle \quad (5.9)$$

$$\langle V_2 \rangle = \left\langle \sigma_{xy} \frac{-\sigma_{xx} + \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\sigma_{xy}^2}}{2} \right\rangle \quad (5.10)$$

On affiche ensuite les cartes des angles principaux des contraintes en tout point de la poutre, pour différentes longueurs  $L$ . Il s'agit des angles définissant les directions principales par rapport au repère globale (axe  $x$ ). La longueur qui nous intéresse dans cette

étude, correspondrait à celle qui permet de balayer le plus grand nombre d'angles principaux. L'expression d'un angle principal donné, correspond au résultat précédent et découle directement de l'expression des vecteurs propres de coordonnées  $x_i$  et  $y_i$  comme :

$$\theta_i = \arctan\left(\frac{y_i}{x_i}\right) \quad (5.11)$$

La FIGURE 5.4 affiche deux cartes d'angles principaux pour deux rapports  $L/h$  qui correspondent, *a priori*, à une configuration de cisaillement pour la première (FIGURE 5.4(a)), et une configuration de flexion pour la seconde (FIGURE 5.4(b)).

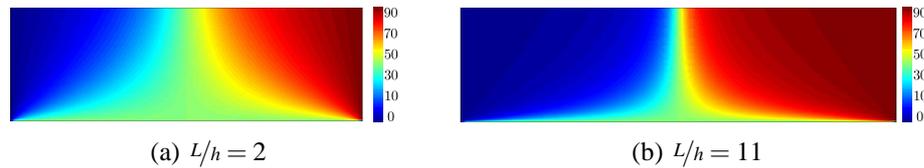


FIGURE 5.4: Cartes des angles principaux  $\theta_1$  pour deux rapports  $L/h$  (en  $^\circ$ )

Dans le même sens de comparaison, la distribution de la densité des angles principaux, notée  $p(\theta)$ , dans les deux éprouvettes, est schématisée dans la FIGURE 5.5. Elle illustre la proportion des angles par tranche de valeurs.

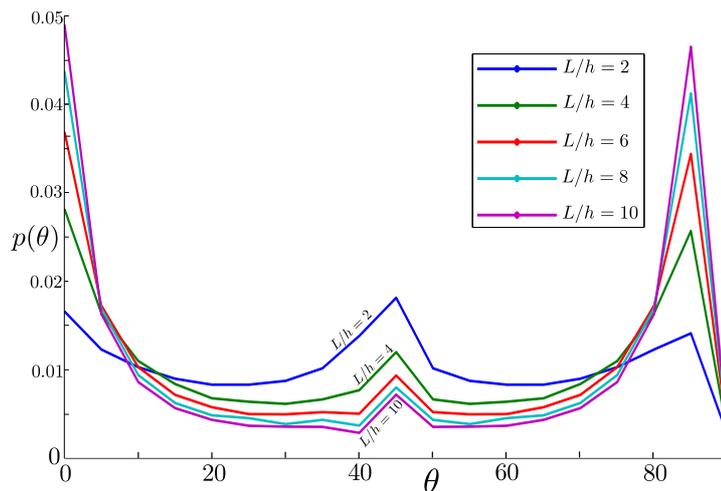


FIGURE 5.5: Distribution des angles principaux  $p(\theta_1)$  pour différents rapports  $L/h$

D'après l'expression du tenseur des contraintes étudié (5.6), les angles principaux  $0^\circ$  et  $90^\circ$  correspondent à la contrainte  $\sigma_{xx}$ , tandis que l'angle  $45^\circ$  est relatif à la contrainte de cisaillement. Il apparaît donc qu'un petit rapport  $L/h$ , notamment compris entre 2 et 6, favorise le cisaillement, et qu'un rapport plus élevé favorise la traction dans le sens  $x$ . Néanmoins, il est difficile de conclure de manière tranchée sur le rapport optimal. En effet, il y a coexistence de deux contraintes principales, il est donc difficile de trouver un critère relatif à leurs orientations.

Remarque :

Si  $\sigma_I = \sigma_{II}$  et  $\theta = 45^\circ$ , un état de cisaillement simple est obtenu ( $\sigma_{xy}$ ). Si  $\sigma_{II} = 0$  et  $\theta = 0^\circ$ , un état de contrainte uniaxial  $\sigma_{xx}$  est obtenu. Dans les autres cas, il y a à la fois du cisaillement et de la traction dans le sens  $x$ , et  $\theta$  n'est qu'un indicateur du mélange. Pour cette raison, on a pensé à un autre critère basé sur un calcul éléments finis.

### 5.1.2.2 Analyse de type MMC

Dans cette partie, on effectue une analyse de sensibilité des champs cinématiques obtenus avec la méthode des éléments finis et une simulation d'un essai de flexion trois points en 2D. L'équation d'équilibre mécanique s'écrit, sous sa forme discrète, comme :

$$K(\mathbb{Q})U = F \quad (5.12)$$

avec  $K$  la matrice de rigidité globale,  $U$  le champ de déplacement et  $F$  le vecteur des efforts nodaux. La loi de comportement d'une plaque mince vérifiant l'hypothèse de Love-Kirchhoff est donnée par la relation (5.2). L'objectif de la démarche est de générer des champs de déplacement et de déformation pour différentes longueurs de poutres afin d'étudier leur sensibilité aux paramètres matériels recherchés.

Le calcul de la sensibilité des champs de déformation par rapport aux coefficients  $Q_{ij}$  est fait via la méthode des différences finies. Dans un premier temps, la sensibilité du champ de déplacement est approximé via un calcul de différence finie à gauche :

$$\frac{\partial U}{\partial Q_{ij}} = \frac{U(Q_{ij}) - U(Q_{ij} - \Delta Q_{ij})}{\Delta Q_{ij}} \quad (5.13)$$

où  $\Delta Q_{ij}$  correspond à une petite variation d'une propriété  $Q_{ij}$  donnée. Pour s'assurer que le résultat du calcul de sensibilité est valable, il faut que la perturbation soit sélectionnée dans l'intervalle de convergence des différences finies. Pour ce faire, des calculs de sensibilité sont menés pour différents pas  $\delta_{Q_{ij}}$ , définis tels que :  $\Delta Q_{ij} = \delta_{Q_{ij}} \times Q_{ij}$ . Les résultats de ces calculs sont illustrés dans la FIGURE 5.6, où sont tracées les sensibilités des champs de déplacement par rapport aux quatre propriétés orthotropes  $Q_{ij}$ , en fonction de la perturbation  $\delta_{Q_{ij}}$ , et ce pour différents ratios  $L/h$ . Il apparaît qu'un pas  $\delta_{Q_{ij}} \in [\exp(-20), \exp(-5)]$  se situe dans la zone de convergence des différents calculs, pour différents rapports  $L/h$ . Un pas commun  $\delta_{Q_{ij}} = \exp(-15)$  a donc été retenu pour l'ensemble des calculs.

L'accès à la sensibilité des déformations s'obtient ensuite via la relation suivante :

$$\frac{\partial \varepsilon(U)}{\partial Q_{ij}} = \varepsilon \left( \frac{\partial U}{\partial Q_{ij}} \right) \quad (5.14)$$

On peut choisir de traiter la sensibilité des champs de déformation par rapport aux modules orthotropes  $Q_{ij}$  ou aux modules d'Young et de Poisson ( $E_x, E_y, \nu_{xy}$ ) auxquels on peut remonter facilement. En effet, connaissant l'expression de  $Q_{ij}$  (5.1), on peut obtenir la sensibilité par rapport à  $E_i$ , par exemple, en calculant :

$$\frac{\partial U}{\partial E_i} = \frac{\partial U}{\partial Q_{xx}} \frac{\partial Q_{xx}}{\partial E_i} + \frac{\partial U}{\partial Q_{yy}} \frac{\partial Q_{yy}}{\partial E_i} + \frac{\partial U}{\partial Q_{xy}} \frac{\partial Q_{xy}}{\partial E_i} + \frac{\partial U}{\partial G_{xy}} \frac{\partial G_{xy}}{\partial E_i} \quad (5.15)$$

Les dérivées partielles  $\frac{\partial Q_{ij}}{\partial E_i}$  s'obtiennent directement à partir des expressions des modules  $Q_{ij}$  (5.1).

Dans cette étude, le calcul éléments finis est basé sur un maillage Q4 avec quatre points de Gauss par élément. Le gradient des déformations est calculé aux quatre points de Gauss de chaque élément. Les trois champs de déformation ( $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$ ) sont dérivés par rapport aux quatre propriétés élastiques, ce qui donne un total de 12 champs de sensibilité. Afin de simplifier leur interprétation, il convient d'utiliser la norme euclidienne des gradients calculés pour les trois composantes des déformations, vis-à-vis de chaque propriété matérielle, telle que :

$$\left\| \frac{\partial \varepsilon}{\partial Q_{ij}} \right\| = \sqrt{\frac{\partial \varepsilon_{xx}^2}{\partial Q_{ij}} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}^2}{\partial Q_{ij}} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}^2}{\partial Q_{ij}}} \quad (5.16)$$

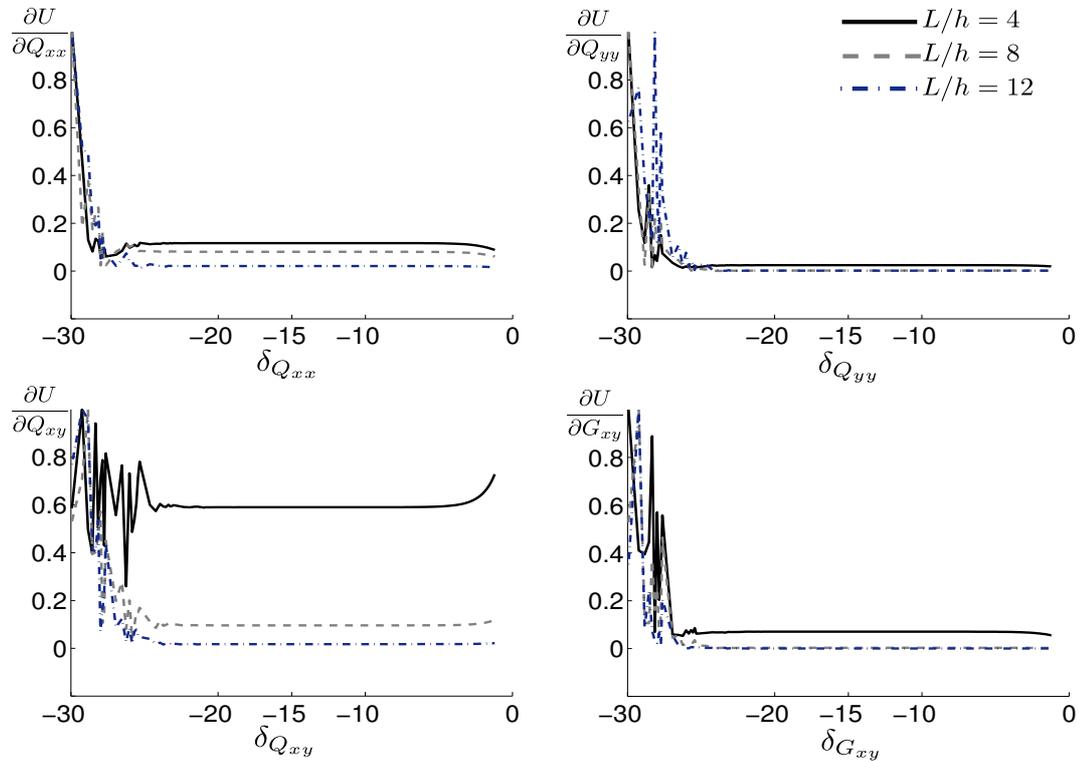


FIGURE 5.6: Étude de la convergence des sensibilités  $\partial U/\partial Q_{ij}$  en fonction du pas  $\delta Q_{ij}$  (échelle log)

Il faut noter que les calculs éléments finis faits pour différentes longueurs de poutres ne peuvent être comparables si on applique un effort de même intensité. En effet, la contrainte à l'intérieur de l'éprouvette est inversement proportionnelle à la surface, mais la comparaison se doit d'être pour un même niveau de déformation ou d'énergie de déformation générée dans la poutre. Il faut donc une démarche d'équivalence quand  $L$  varie. Plusieurs possibilités peuvent être explorées :

- Les calculs de sensibilité peuvent être normés par le rapport entre le champ cinématique et la propriété considérée :  $\left\| \frac{\partial \epsilon}{\partial Q_{ij}} \right\| / \left| \frac{\epsilon}{Q_{ij}} \right|$  [Arafeh *et al.*, 1995].
- La mise en place d'un critère en contraintes afin de déterminer l'effort maximal à appliquer à l'éprouvette pour une plus grande sensibilité des champs cinématiques aux paramètres dépendant du matériau recherchés.

Une autre façon de faire peut consister à adapter l'intensité de l'effort appliqué  $F$  pour chaque longueur de poutre. L'équivalence des efforts appliqués aux éprouvettes de différentes longueurs doivent être comparables selon un critère à définir. C'est cette méthodologie qui a été retenue dans la suite :

- Un premier critère basé sur la proportionnalité de la densité d'énergie de déformation est d'abord adopté, et permet d'ajuster le niveau d'effort jusqu'à obtention d'une densité d'énergie de déformation équivalente entre les différents calculs. La densité d'énergie de déformation élémentaire, notée  $e(k)$  pour l'élément  $e$ , est calculée sur l'ensemble des éléments du maillage pour  $k \in [1, \dots, N_{el}]$ , avec  $N_{el}$  le nombre total d'éléments. La densité d'énergie de déformation moyenne, notée  $e_m$ , est obtenue en moyennant les densités élémentaires sur l'ensemble, ou une partie,

des éléments du maillage :

$$e(k) = \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}(k) : \boldsymbol{\varepsilon}(k)}{\mathcal{A}(k)} \quad (5.17)$$

$$e_m = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^{N_{el}} \mathcal{A}(k) e(k) \quad (5.18)$$

avec  $\mathcal{A}(k)$  l'aire de l'élément  $k$  et  $S$  est la surface totale de l'éprouvette.

- D'autres critères basés sur les déformations ont également été testés. Il s'agit de la moyenne de la norme euclidienne des déformations, notée  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_m$ , et du maximum de cette norme, noté  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{max}$ , tels que :

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_m = \frac{1}{N_{el}} \sum_{k=1}^{N_{el}} \|\boldsymbol{\varepsilon}(k)\| \quad (5.19)$$

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{max} = \max_k \|\boldsymbol{\varepsilon}(k)\| \quad (5.20)$$

avec :

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(k)\| = \sqrt{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (5.21)$$

La FIGURE 5.7 affiche les cartes de sensibilité des déformations en échelle log, pour trois rapports  $L/h$ , associés, respectivement, à du cisaillement pur, au mode mixte, et à de la flexion simple, d'après la littérature. Ces sensibilités sont calculées ici avec le critère d'équivalence des densités d'énergie de déformation.

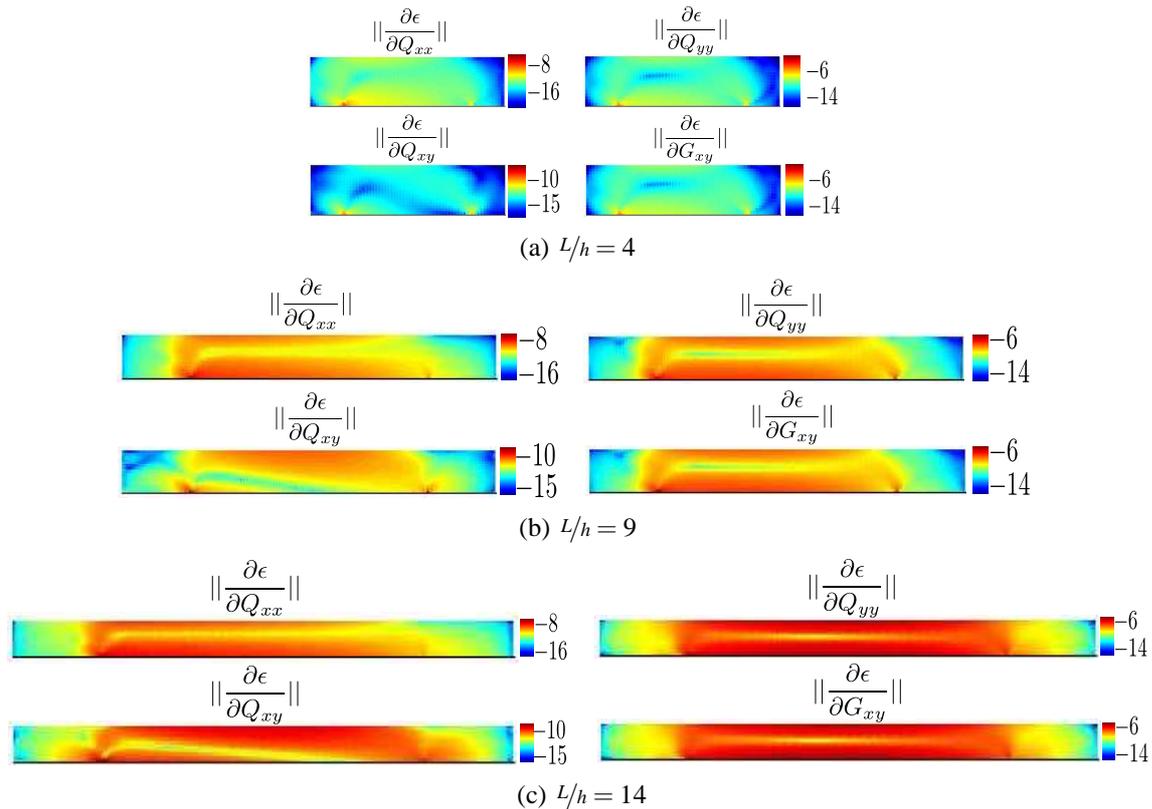


FIGURE 5.7: Norme des sensibilités des déformations pour trois rapports  $L/h$  (échelle log)

Afin de sélectionner le ratio  $L/h$  correspondant à la plus grande sensibilité par rapport à l'ensemble des propriétés, il serait intéressant de moyenniser ces sensibilités afin d'afficher une courbe qui corrèle la sensibilité à la longueur de poutre. Pour éviter de biaiser les moyennes des sensibilités, les zones insensibles, d'une part, et de concentration

de contrainte, d'autre part, seront exclues. Un choix de moyennage plus judicieux peut consister en la sélection de zones de moyennage propres à chaque propriété matérielle, dépendant de la zone de plus grande sollicitation de chacune.

Les champs de sensibilité sont calculés aux points de Gauss. Par conséquent, un premier moyennage est fait dans chaque élément  $Q_4$ , et un second est fait sur la zone choisie, tel que :

$$\left\langle \left\| \frac{\partial \varepsilon}{\partial Q_{ij}} \right\| \right\rangle = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \left\| \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial Q_{ij}} \right\| \quad (5.22)$$

avec  $m$  le nombre de mailles dans la zone sélectionnée. Deux zones de moyennage ont été comparées : une partie du maillage qui ne tient pas compte des points d'appui et d'application de l'effort, et une deuxième qui couvre la totalité de l'éprouvette. Ceci est illustré FIGURE 5.8.

La FIGURE 5.9(a) affiche les courbes de la sensibilité moyennée en fonction du ratio

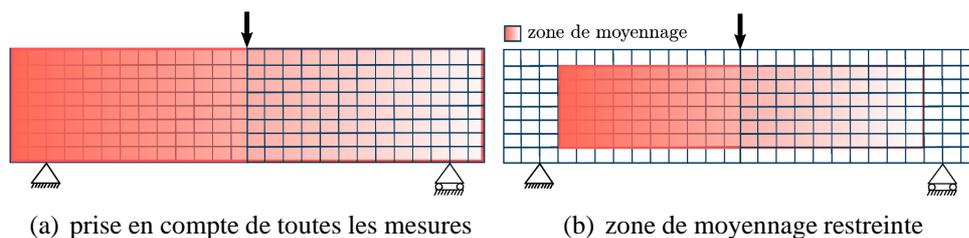


FIGURE 5.8: Zones testées pour le moyennage des sensibilités

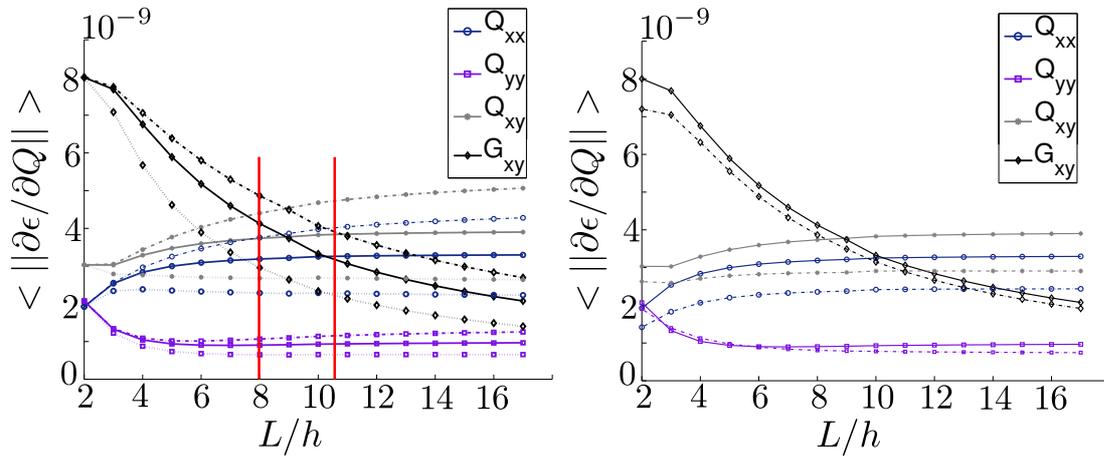
$L/h$  sur la zone 5.8(b). Les courbes continues correspondent au critère d'équivalence du chargement basé sur la densité d'énergie de déformation, les courbes en pointillés au critère sur la moyenne de la norme des déformations, et les courbes en trait mixte au critère du maximum de la norme des déformations. Les tendances des différentes courbes, par propriété matérielle, sont compatibles avec les résultats issus de la RdM (FIGURE 5.3). Les trois critères convergent vers le même intervalle optimal correspondant à un compromis entre les sensibilités maximales des quatre propriétés orthotropes, à savoir  $L/h \in [8, 10]$ . De même, la FIGURE 5.9(b) montre que les deux zones de moyennage testées, avec et sans zones de concentration de contrainte, donnent quasiment le même résultat. Par ailleurs, la faible sensibilité des champs de déformation au coefficient  $Q_{yy}$  est observée sur les deux figures, tous critères confondus.

Au final, vu les résultats similaires obtenus avec les trois critères d'équivalence explorés, un rapport  $L/h \in [8, 10]$  semble pertinent vis-à-vis de l'identifiabilité d'un nombre maximum de modules orthotropes. Cette plage de valeurs est donc retenue pour l'identification de modules orthotropes à partir d'exemples numériques. Elle sera, par ailleurs, confrontée à la qualité des résultats d'identification pour différents ratios  $L/h$ .

### 5.1.3 Identification de propriétés orthotropes homogènes

Toujours dans le cadre d'un essai de flexion trois points, on cherche à identifier les propriétés élastiques d'un matériau orthotrope. L'identification de propriétés homogènes, puis hétérogènes, sera menée avec la méthode d'erreur en relation de comportement modifiée. Deux configurations de matériaux hétérogènes sont étudiées : un matériau sandwich et une configuration de propriétés en forme d'échiquier.

L'éprouvette, dans le cadre d'un essai de flexion trois points, dispose d'informations de bords libres abondantes. La formulation de l'ERdC modifiée utilisée ici tient compte de l'information bord libre.



(a) Résultat pour l'ensemble des critères d'équivalence testés

(b) Résultat pour deux zones de moyennage différentes - critère  $e_m$  équivalente

FIGURE 5.9: Courbes sensibilité-longueur pour les différents critères d'équivalence de l'effort

### 5.1.3.1 Choix de l'algorithme de minimisation

Ayant pour objectif d'identifier le maximum de propriétés orthotropes, on cherche ici à évaluer quelques algorithmes de descente afin de sélectionner le plus pertinent. Le nombre des propriétés identifiables s'élève à 3 dans le cas d'un matériau homogène, puisque l'on doit fournir une propriété pour recaler les autres en l'absence de donnée d'effort, et à 7 s'il s'agit d'un bi-matériau.

Le choix de l'algorithme de minimisation sera basé sur la qualité des valeurs identifiées, d'une part, et le temps de calcul, d'autre part. Les algorithmes de minimisation testés proviennent de la toolbox *Matlab* et sont les suivants :

1. algorithme à région de confiance, noté TR pour *trust region*, basé sur la méthode de Newton. Cet algorithme consiste à calculer, à chaque itération, une solution approchée avec la méthode du gradient conjugué pré-conditionné (PCG). (fonction *Matlab* : `fmininc`)
2. algorithme à région de confiance avec bornes, noté TR-R pour *trust region reflective*, qui diffère du précédent par l'utilisation de bornes de recherche. Ici, l'intervalle fourni est  $[0.7 \times \theta_0, 1.3 \times \theta_0]$  avec  $\theta_0$  le vecteur des propriétés matérielles de référence. (fonction *Matlab* : `fmincon`)
3. méthode BFGS [Bryson et Ho, 1975, Cailletaud et Pilvin, 1994], qui est un algorithme à directions de descente de quasi-Newton utilisant la formule "Broydon-Fletcher-Goldfarb-Shanno" pour l'estimation de la matrice Hessienne, au lieu de la calculer explicitement. (fonction *Matlab* : `fmininc`)
4. algorithme de Levenberg-Marquardt, noté L-M, qui réalise un compromis entre l'algorithme de Gauss-Newton et l'algorithme du gradient.

Ces algorithmes ont été appliqués afin d'identifier des propriétés homogènes puis hétérogènes. Les champs de déplacement étant perturbés, l'évaluation de chaque algorithme consiste à vérifier si le minimum de la fonction coût est bien retrouvé, en le comparant au vrai minimum de la fonction coût. Pour ce faire, la fonction coût est évaluée dans un intervalle de valeurs centré sur la valeur de référence, pour chacune des propriétés orthotropes recherchées, en fixant les autres égales aux valeurs identifiées. C'est donc l'écart entre les deux minima qui fait foi de la pertinence de chaque algorithme.

Dans chaque cas étudié, les fonctions coût sont tracées pour chaque propriété matérielle

identifiée, et ce pour les différentes méthodes de descente testées. Les résultats d'identification sont tous normés par les valeurs des paramètres matériels de référence.

Comme vu dans la partie 5.1.2, la propriété  $Q_{yy}$  est la moins évidente à identifier à partir d'un essai de flexion trois points, puisque le module d'Young  $E_y$  est faiblement sollicité en élasticité. Dans ce contexte, il peut paraître raisonnable de fournir une estimation de  $Q_{yy}$  en vue d'identifier le reste des propriétés. Deux cas sont testés : un premier où l'on fournit cette propriété pour un des deux matériaux présents, et un second cas où l'on fournit  $Q_{yy}$  pour les deux matériaux. Ce dernier permettrait de voir si l'identification s'en trouve améliorée en fournissant plus d'une propriété de recalage.

Par ailleurs, il faut noter que la qualité des contrastes de rigidités va probablement dépendre de la qualité de la propriété fournie, vis-à-vis de laquelle elles seront recalées. En effet, les différentes propriétés  $Q_{ij}$  ainsi recalées dépendent du ratio  $Q_{ii}/Q_{yy}$ , si l'on fournit  $Q_{yy}$ . Or, même en présence de l'information effort de chargement,  $Q_{yy}$  étant difficilement identifiable, le rapport  $Q_{ii}/Q_{yy}$  serait, *a priori*, de mauvaise qualité. Dans ce cas de figure, il peut être intéressant de fournir comme information une propriété autre que  $Q_{yy}$ , par exemple  $Q_{xx}$ . Pour les départager, il convient de comparer la qualité des deux propriétés orthotropes restantes :  $Q_{xy}$  et  $G_{xy}$ , selon que l'on fournit  $Q_{yy}$  ou  $Q_{xx}$ .

Pour la partie identification, les premières valeurs requises pour les différents algorithmes de descente qui seront testés, sont toutes initialisées avec le même coefficient par rapport aux valeurs de référence. Ce coefficient est pris égal à 0.7.

### 5.1.3.2 Cas d'un comportement homogène

Dans le cas d'un matériau homogène, on cherche à identifier trois parmi les quatre propriétés orthotropes, en fournissant une propriété de recalage, par exemple  $Q_{yy}$  ou  $Q_{xx}$ . La géométrie de la poutre étudiée est un paramètre important pour l'identifiabilité des propriétés orthotropes, en particulier, le rapport  $L/h$ . D'après la littérature, et l'étude de sensibilité menée en ce sens dans la partie 5.1.2.2, il apparaît qu'un rapport  $L/h$  compris entre 8 et 10 permet de solliciter le matériau en mode mixte (cisaillement et traction selon  $x$ ) de façon optimale vis-à-vis de l'identification de l'ensemble des propriétés élastiques orthotropes. Dans cette étude, on se propose de comparer les résultats d'identification pour plusieurs longueurs de poutre afin de faire la corrélation avec l'étude de sensibilité, d'une part, et de sélectionner le rapport  $L/h$  optimal vis-à-vis de l'identification des propriétés orthotropes recherchées en se basant sur la robustesse des algorithmes de minimisation utilisés.

Les mesures sont construites artificiellement grâce à un calcul éléments finis. Une grille de mesure de même finesse (taille de  $30 \times 70$  points de mesure) est construite et est fixée pour l'ensemble des longueurs de poutre testées. Dans la FIGURE 5.10 sont affichés les champs de déformation de référence pour un rapport  $L/h = 7$ .

Il a été d'abord vérifié qu'une identification menée avec des données en déplacement non

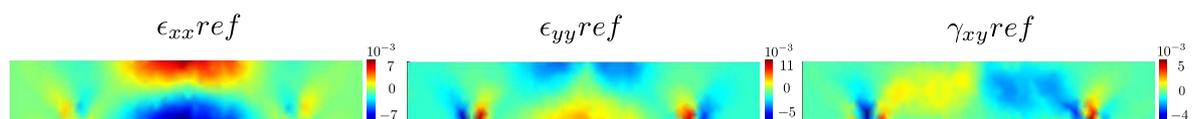


FIGURE 5.10: Champs de déformation pour un rapport  $L/h = 7$

bruitées donne les propriétés de référence comme valeurs identifiées pour l'ensemble des algorithmes testés. On se propose alors de mener l'identification avec des mesures bruitées uniquement. L'amplitude des perturbations est choisie égale à 5% de la moyenne du champ de déplacement, et un seul tirage de bruit blanc gaussien est utilisé. Seule l'amplitude du bruit change, en fonction du champ de déplacement correspondant à chaque cas

étudié pour garantir une erreur relative constante.

$L/h$	$\theta_i$ identifié	$Q_{xx}/Q_{xx}^0$	$Q_{xy}/Q_{xy}^0$	$G_{xy}/G_{xy}^0$	Temps (min)			
					TR	TR-R	BFGS	L-M
4		0.9708	0.9741	1.0230	28	28	0.3	1.3
5		0.9814	0.9778	1.0525	29	29	0.3	4
6		0.9525	0.9704	<b>1.0179</b>	72	72	0.7	7.7
7		0.9744	0.9873	1.0404	90	90	1.5	6.8
8		<b>1.0123</b>	<b>0.9952</b>	1.0678	109	108.7	1.35	16.5
9		0.9472	0.9874	1.0339	132	132	12.9	14.3
10		<b>0.9988</b>	<b>1.0191</b>	1.0471	180	179.7	2.2	17
11		1.0471	1.0587	1.0614	187.7	196.6	2.29	36
12		1.0872	1.0248	1.0711	330	333.4	3.27	109
13		0.9476	1.0311	1.0389	355	360	3.8	138
14		1.0701	1.0845	1.1692	375	380	4.1	113

TABLEAU 5.1: Identification basée sur plusieurs algorithmes de descente et différents rapport  $L/h$  - bruit de mesure de 5% -  $Q_{yy}$  fourni

Le tableau 5.1 regroupe les résultats d'identification des trois propriétés orthotropes  $Q_{xx}$ ,  $Q_{xy}$  et  $G_{xy}$  pour des rapports  $L/h$  allant de 4 à 14. Les valeurs en gras sont les plus proches des valeurs de référence et indiquent ainsi le rapport  $L/h$  le plus adéquat pour chacune des trois propriétés. Ces résultats viennent confirmer l'étude de sensibilité, puisque les modules  $Q_{xx}$  et  $Q_{xy}$  sont mieux identifiés pour un rapport  $L/h$  égal à 8 et 10. Le module de cisaillement est mieux identifié pour un rapport  $L/h = 6$ , ce qui corrobore l'utilisation d'un tel rapport pour un essai de cisaillement pur. Ces résultats sont récapitulés dans la FIGURE 5.11 à travers les erreurs d'identification, normées par les valeurs de référence, en fonction des rapports  $L/h$ , telles que  $e_\theta = |Q_{ij}^0 - Q_{ij}|/Q_{ij}^0$ . On remarque que les erreurs sont faibles globalement.

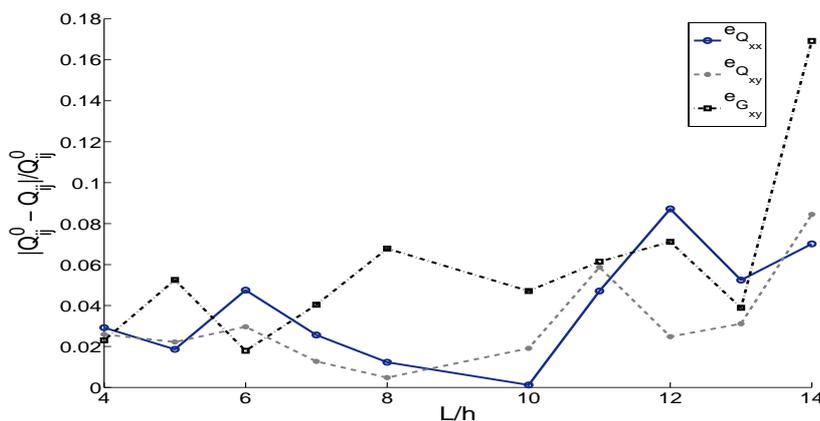


FIGURE 5.11: Erreur d'identification en fonction du rapport  $L/h$

Par ailleurs, les quatre algorithmes de descente convergent vers les mêmes valeurs dans le cas de l'identification homogène, avec une valeur d'initialisation de  $0.7 \times \underline{\theta}_0$ . Seul le temps de calcul est différent. On remarque que, contrairement à un algorithme à région de confiance, les algorithmes BFGS et L-M sont les moins coûteux, pour des résultats

d'identification identiques. En effet, une méthode de type quasi-Newton comme la méthode BFGS converge de façon quadratique à proximité de la solution tandis que la méthode à région de confiance converge lentement, ce qui conduit à un nombre important de résolutions du problème de base. Le coût de calcul devient en conséquence trop important. Le tableau 5.2 regroupe les résultats d'identification des deux propriétés  $Q_{xy}$  et  $G_{xy}$  selon que l'on fournit la propriété  $Q_{xx}$  ou  $Q_{yy}$ , pour un rapport  $L/h$  donné de 7. Il apparaît que les résultats sont identiques dans le cas homogène. Le même résultat a été obtenu pour d'autres rapports  $L/h$ , en matière d'équivalence entre ces deux cas de figure.

$\theta$ fournie \ $\theta$ identifiée	$Q_{xy}/Q_{xy}^0$	$G_{xy}/G_{xy}^0$
$Q_{xx}$	0.9873	1.0404
$Q_{yy}$	0.9873	1.0404

TABLEAU 5.2: Comparaison entre le recalage avec  $Q_{yy}$  et  $Q_{xx}$  pour un bruit de mesure de 5% ( $L/h = 7$ )

Outre la qualité d'identification qui, dans le cas homogène, est identique pour l'ensemble des algorithmes de minimisation, les minima obtenus sont comparés au minimum réel de la fonction coût : on trace cette dernière pour chacune des trois propriétés recherchées, en fixant les autres égales aux valeurs identifiées. On obtient ainsi trois fonctions coût pour chacun des quatre algorithmes testés, ainsi qu'un tracé du gradient dans la direction du paramètre correspondant.

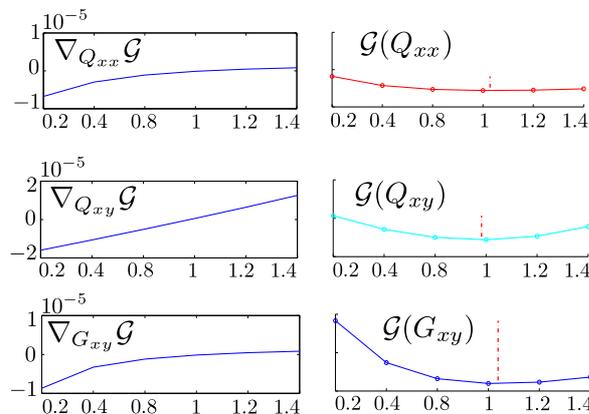


FIGURE 5.12: Évaluation de l'identification pour un matériau homogène

FIGURE 5.12 représente l'évaluation de la fonction coût du problème d'identification, pour 3 propriétés orthotropes, quand on fournit la propriété  $Q_{yy}$ . L'intervalle d'évaluation contient seulement 6 points centrés sur la valeur de référence. Le trait vertical en pointillés rouges indique la valeur identifiée par l'algorithme de descente représenté, qui est à comparer au minimum observé sur la fonction coût. Les valeurs identifiées semblent correspondre à ce minimum à chaque fois. Par ailleurs, la courbe du gradient calculé est tracée à côté de chaque fonction coût et confirme sa bonne évaluation dans le cas d'un comportement orthotrope.

### 5.1.4 Identification de propriétés orthotropes hétérogènes

Cette partie s'intéresse à l'identification des propriétés matérielles d'une éprouvette hétérogène sollicitée en flexion trois points. Le cadre d'identification est le même que

précédemment, les mesures sont les déplacements et les bords libres sont connus et pris en compte.

On s'intéresse donc à l'évaluation des algorithmes de descente lors de l'identification d'un comportement orthotrope hétérogène et la robustesse de la formulation par rapport au bruit. L'éprouvette testée a un rapport  $L/h = 7$ . L'identification avec des mesures non perturbées donne, pour tous les cas de figure testés, les valeurs de référence. Par conséquent, les champs de déplacements des différents cas d'étude sont perturbés avec une amplitude de bruit égale à 5% de la moyenne des déplacements, et un même tirage de bruit blanc gaussien.

#### 5.1.4.1 Configuration d'un matériau stratifié

L'éprouvette est maillée avec l'outil *Gmsh* [Geuzaine et Remacle, 2009] en utilisant des éléments T3. Dans cette étude, l'interface entre les deux matériaux n'est pas régulière (FIGURE 5.13). L'affectation des deux matériaux est faite après l'opération de maillage. Le matériau au milieu du stratifié, noté ici matériau 2, a une rigidité deux fois plus petite que celle du matériau 1 (facteur  $1/2$  sur les modules d'Young et le module de cisaillement).

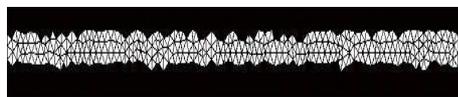


FIGURE 5.13: Configuration stratifié

Les tableaux 5.3 et 5.4 récapitulent les résultats d'identification de sept propriétés hétérogènes, en fournissant une propriété d'un seul des deux matériaux, ici matériau 1, respectivement  $Q_{yy}$  et  $Q_{xx}$ .

	$Q_{xx}/Q_{xx}^0$		$Q_{yy}/Q_{yy}^0$	$Q_{xy}/Q_{xy}^0$		$G_{xy}/G_{xy}^0$		<b>T (min)</b>
	<b>mat 1</b>	<b>mat 2</b>	<b>mat 2</b>	<b>mat 1</b>	<b>mat 2</b>	<b>mat 1</b>	<b>mat 2</b>	
L-M	<b>0.9199</b>	<b>1.0018</b>	<b>0.9802</b>	<b>1.0022</b>	<b>1.0203</b>	<b>0.9085</b>	<b>1.0519</b>	9.37
TR	0.8260	0.6174	0.3152	0.9794	0.3237	0.7432	1.1665	134.9
BFGS	0.8875	0.9956	0.7000	0.9787	0.8389	0.8340	1.2571	3.15
TR-R	0.8875	0.9956	0.7000	0.9787	0.8389	0.8340	1.2571	34.1

TABLEAU 5.3: Identification de propriétés orthotropes hétérogènes- amplitude du bruit de 5% - un seul  $Q_{yy}$  fourni

	$Q_{yy}/Q_{yy}^0$		$Q_{xx}/Q_{xx}^0$	$Q_{xy}/Q_{xy}^0$		$G_{xy}/G_{xy}^0$		<b>T (min)</b>
	<b>mat 1</b>	<b>mat 2</b>	<b>mat 2</b>	<b>mat 1</b>	<b>mat 2</b>	<b>mat 1</b>	<b>mat 2</b>	
L-M	<b>1.0771</b>	<b>0.9855</b>	<b>1.0100</b>	<b>1.0953</b>	<b>1.0012</b>	<b>0.9987</b>	<b>1.0707</b>	9.2
TR	1.2098	0.3823	0.7480	1.1851	0.3926	0.9001	1.4116	134
BFGS	1.1369	0.7000	1.0341	1.1186	0.8213	0.9458	1.3	2.8
TR-R	1.1369	0.7000	1.0341	1.1186	0.8213	0.9458	1.3000	34

TABLEAU 5.4: Identification de propriétés orthotropes hétérogènes- amplitude du bruit de 5% - un seul  $Q_{xx}$  fourni

Les valeurs en gras sont les plus proches des valeurs de référence et pointent, dans les deux cas, l'algorithme de Levenberg-Marquardt. Les temps de calcul correspondants, de

l'ordre de 9 minutes, semblent raisonnables.

Le résultat d'identification des propriétés  $Q_{xy}$  et  $G_{xy}$  dans les deux cas de figure n'est pas concluant quant à la pertinence de la donnée de recalage en  $Q_{yy}$  ou  $Q_{xx}$ . C'est-à-dire qu'il n'y a pas de tendance sur les résultats d'identification qui favorise le recalage avec un module ou l'autre dans le cas étudié.

La FIGURE 5.14 montre les fonctions coût de chacune des 7 propriétés identifiées, ainsi que la valeur identifiée par l'algorithme de Levenberg-Marquardt en pointillés rouges, dans le cas où  $Q_{xx}^1$  est fourni. Les fonctions coût relatives au matériau 1 semblent plus convexes que celles du matériau 2. Cela peut être expliqué par des mesures plus riches pour le matériau 1 vu qu'il occupe une plus grande surface dans l'éprouvette. Les fonctions coût, évaluées ici en seulement six points, et bien que d'aspect aplati, ont bien des minima très proches des valeurs de référence, ce qui montre la robustesse de la formulation et de l'algorithme de L-M.

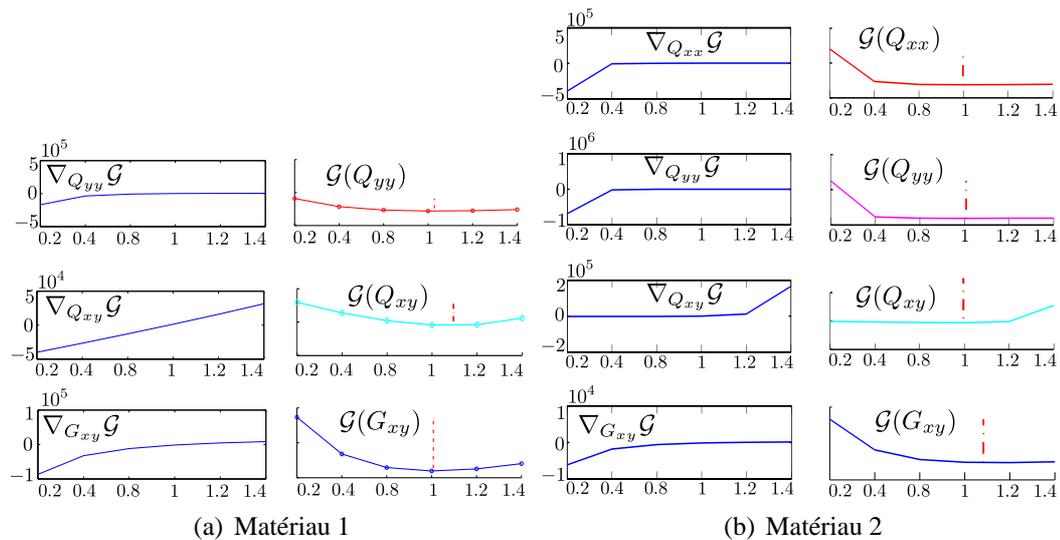


FIGURE 5.14: Fonction coût de la configuration stratifié - un seul  $Q_{xx}$  fourni

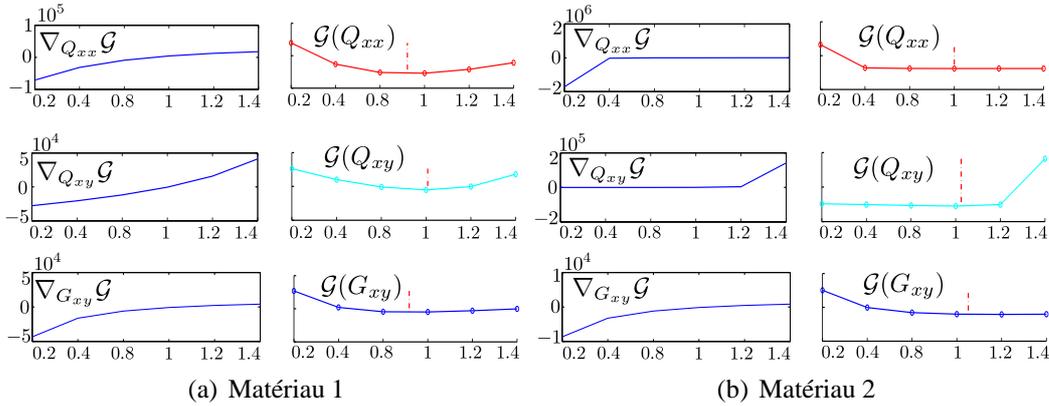
Les tableaux 5.5 et 5.6 récapitulent les résultats d'identification de 6 propriétés hétérogènes, lorsque l'on fournit une même propriété pour les deux matériaux présents, respectivement  $Q_{yy}$  et  $Q_{xx}$ .

	$Q_{xx}/Q_{xx}^0$		$Q_{xy}/Q_{xy}^0$		$G_{xy}/G_{xy}^0$		T (min)
	mat 1	mat 2	mat 1	mat 2	mat 1	mat 2	
L-M	<b>0.9229</b>	<b>1.0001</b>	<b>1.0070</b>	<b>1.0244</b>	<b>0.9168</b>	<b>1.0511</b>	9.2
TR	0.9025	1.2660	0.9793	1.2416	0.8551	1.2832	117
BFGS	0.9025	1.2660	0.9793	1.2416	0.8551	1.2832	5.4
TR-R	0.9025	1.2660	0.9793	1.2416	0.8551	1.2832	29.6

TABLEAU 5.5: Identification de propriétés orthotropes hétérogènes- amplitude du bruit de 5% -  $Q_{yy}$  fourni pour les deux matériaux

La méthode de descente donnant les meilleurs résultats dans les deux cas est la méthode de Levenberg-Marquardt. En comparaison avec la donnée d'une seule propriété de recalage, les résultats ne confirment pas une plus grande robustesse avec deux propriétés fournies. La FIGURE 5.15 montre que le minimum de la fonction coût est plutôt bien détecté par l'algorithme L-M, et que le gradient est bien évalué pour les deux matériaux, et ce selon que l'on fournit la propriété  $Q_{yy}$  ou  $Q_{xx}$ .

	$Q_{yy}/Q_{yy}^0$		$Q_{xy}/Q_{xy}^0$		$G_{xy}/G_{xy}^0$		<b>T (min)</b>
	<b>mat 1</b>	<b>mat 2</b>	<b>mat 1</b>	<b>mat 2</b>	<b>mat 1</b>	<b>mat 2</b>	
L-M	<b>1.0771</b>	<b>0.9864</b>	<b>1.0956</b>	<b>0.9975</b>	<b>0.9973</b>	<b>1.0703</b>	9.1
TR	1.1873	0.5184	1.1490	0.6468	0.9127	1.4665	115
BFGS	1.1343	0.7000	1.1177	0.7990	0.9466	1.3000	3.5
TR-R	1.1343	0.7000	1.1177	0.7990	0.9466	1.3000	29.5

 TABLEAU 5.6: Identification de propriétés orthotropes hétérogènes- amplitude du bruit de 5% -  $Q_{xx}$  fourni pour les deux matériaux

 FIGURE 5.15: Fonction coût de la configuration stratifié - les deux  $Q_{yy}$  fournis

### 5.1.4.2 Configuration d'un matériau en échiquier

La distribution du deuxième bi-matériau étudié est représentée dans la FIGURE 5.16, où le matériau noté 1 est coloré en noir. Le rapport de rigidité entre les deux matériaux est le même que pour le stratifié, à savoir un facteur 2. L'affectation des propriétés est faite ici encore après l'opération de maillage, d'où l'irrégularité des interfaces entre les deux matériaux.

L'identification de sept propriétés orthotropes est menée avec les quatre algorithmes de

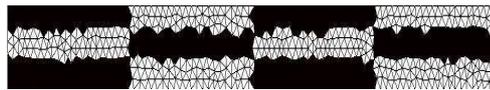


FIGURE 5.16: Configuration en échiquier

descente, avec un recalage par rapport au module  $Q_{yy}^1$  puis  $Q_{xx}^1$ .

	$Q_{xx}/Q_{xx}^0$		$Q_{yy}/Q_{yy}^0$	$Q_{xy}/Q_{xy}^0$		$G_{xy}/G_{xy}^0$		<b>T (min)</b>
	<b>mat 1</b>	<b>mat 2</b>	<b>mat 2</b>	<b>mat 1</b>	<b>mat 2</b>	<b>mat 1</b>	<b>mat 2</b>	
L-M	0.9727	<b>0.9947</b>	<b>1.0002</b>	<b>0.9716</b>	<b>1.0051</b>	<b>1.0268</b>	<b>1.0414</b>	9.7
TR	1.0076	1.0404	1.0602	0.9632	1.0568	1.0547	1.1814	143
BFGS	<b>1.0077</b>	1.0408	1.0608	0.9633	1.0575	1.0549	1.1815	2.3
TR-R	1.0063	1.0366	1.0550	0.9631	1.0511	1.0531	1.1803	36

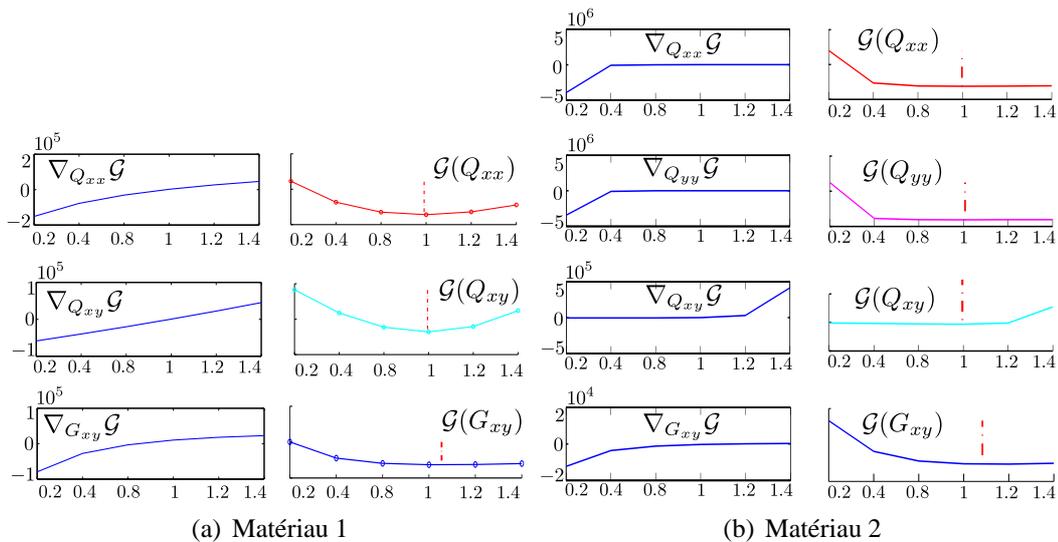
 TABLEAU 5.7: Identification de propriétés orthotropes hétérogènes- amplitude du bruit de 5% - un seul  $Q_{yy}$  fourni

	$Q_{yy}/Q_{yy}^0$		$Q_{xx}/Q_{xx}^0$	$Q_{xy}/Q_{xy}^0$		$G_{xy}/G_{xy}^0$		<b>T (min)</b>
	<b>mat 1</b>	<b>mat 2</b>	<b>mat 2</b>	<b>mat 1</b>	<b>mat 2</b>	<b>mat 1</b>	<b>mat 2</b>	
L-M	<b>0.9977</b>	<b>1.0076</b>	<b>0.9976</b>	<b>0.9847</b>	<b>0.9971</b>	1.0544	<b>1.0830</b>	9.7
TR	0.9915	1.0537	1.0333	0.9552	1.0503	<b>1.0470</b>	1.1723	143
BFGS	0.9915	1.0537	1.0334	0.9552	1.0503	<b>1.0470</b>	1.1723	2
TR-R	0.9919	1.0514	1.0318	0.9557	1.0477	1.0467	1.1724	36.2

 TABLEAU 5.8: Identification de propriétés orthotropes hétérogènes- amplitude du bruit de 5% - un seul  $Q_{xx}$  fourni

D'après les tableaux 5.7 et 5.8, il apparaît que, globalement, l'algorithme de minimisation de Levenberg-Marquardt est celui qui donne les meilleurs résultats d'identification, pour un temps de calcul inférieur à 10 minutes. Par ailleurs, la qualité des valeurs identifiées dans la configuration en échiquier se prête mieux à l'identification d'une grande partie des 7 propriétés orthotropes hétérogènes, en comparaison avec la configuration du stratifié. Les erreurs varient entre 0.02% et 4.1% en fournissant  $Q_{yy}$ , et entre 0.023% et 8.3% en fournissant  $Q_{xx}$ , avec l'algorithme de Levenberg-Marquardt.

Comme précédemment, la qualité de la recherche du minimum est vérifiée pour chaque propriété identifiée. La FIGURE 5.17 représente la fonction coût pour chacune des 3 propriétés recherchées du 1<sup>er</sup> matériau, et des 4 propriétés du 2<sup>e</sup> matériau, dans les cas où l'on fournit la propriété  $Q_{yy}$  du matériau 1.


 FIGURE 5.17: Fonction coût de la configuration échiquier - un seul  $Q_{yy}$  fourni

	$Q_{xx}/Q_{xx}^0$		$Q_{xy}/Q_{xy}^0$		$G_{xy}/G_{xy}^0$		<b>T (min)</b>
	<b>mat 1</b>	<b>mat 2</b>	<b>mat 1</b>	<b>mat 2</b>	<b>mat 1</b>	<b>mat 2</b>	
L-M	0.9726	<b>0.9948</b>	<b>0.9714</b>	<b>1.0051</b>	<b>1.0265</b>	<b>1.0415</b>	9.6
TR	<b>0.9931</b>	<b>0.9996</b>	0.9629	<b>0.9943</b>	1.0334	1.1684	123
BFGS	<b>0.9931</b>	<b>0.9996</b>	0.9629	<b>0.9943</b>	1.0334	1.1684	1.6
TR-R	<b>0.9931</b>	<b>0.9996</b>	0.9629	<b>0.9943</b>	1.0334	1.1684	31.2

 TABLEAU 5.9: Identification de propriétés orthotropes hétérogènes- amplitude du bruit de 5% -  $Q_{yy}$  fourni pour les deux matériaux

	$Q_{yy}/Q_{yy}^0$		$Q_{xy}/Q_{xy}^0$		$G_{xy}/G_{xy}^0$		<b>T (min)</b>
	<b>mat 1</b>	<b>mat 2</b>	<b>mat 1</b>	<b>mat 2</b>	<b>mat 1</b>	<b>mat 2</b>	
L-M	<b>0.9980</b>	<b>1.0081</b>	<b>0.9841</b>	<b>0.9994</b>	1.0542	<b>1.0879</b>	9.4
TR	<b>0.9981</b>	1.0129	0.9655	<b>0.9988</b>	<b>1.0414</b>	1.1723	123
BFGS	<b>0.9981</b>	1.0129	0.9655	<b>0.9988</b>	<b>1.0414</b>	1.1723	1.4
TR-R	<b>0.9981</b>	1.0129	0.9655	<b>0.9988</b>	<b>1.0414</b>	1.1723	31.2

TABLEAU 5.10: Identification de propriétés orthotropes hétérogènes- amplitude du bruit de 5% -  $Q_{xx}$  fourni pour les deux matériaux

Les tableaux 5.9 et 5.10 récapitulent les résultats d'identification quand on fournit la propriété  $Q_{yy}$  ou  $Q_{xx}$  pour les deux matériaux présents. Les erreurs d'identification des modules  $Q_{xy}$  et  $G_{xy}$  varient entre 0.5% et 4.1% dans le 1<sup>er</sup> cas, et entre 0.06% et 5.4% dans le 2<sup>e</sup> cas. Les erreurs de ces deux modules, dans les deux configurations hétérogènes (stratifié et échiquier), varient entre 0.5% et 4.1% quand une seule propriété  $Q_{yy}$  est fournie, et entre 0.029% et 8.3% quand une seule propriété  $Q_{xx}$  est fournie. Le dernier cas s'est donc amélioré alors que le premier, avec une seule propriété  $Q_{yy}$ , est constant. Par ailleurs, le recalage des rigidités  $Q_{xy}$  est meilleur avec la propriété  $Q_{xx}$  fixée, alors que celui de la rigidité de cisaillement  $G_{xy}$  est meilleur avec la donnée de  $Q_{yy}$ .

Dans FIGURE 5.18, sont tracées les fonctions coût pour les trois propriétés orthotropes des deux matériaux, quand  $Q_{yy}$  est fournie. La détection du minimum par l'algorithme de descente de Levenberg-Marquardt, ainsi que le gradient qui lui est fourni, s'avèrent de bonne qualité.

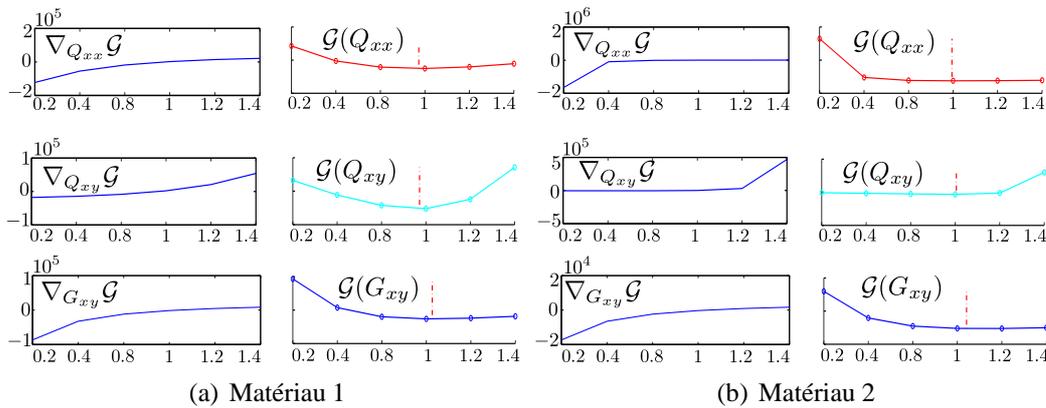


FIGURE 5.18: Fonction coût de la configuration échiquier - les deux  $Q_{yy}$  fournis

### 5.1.4.3 Identification de propriétés hétérogènes

Afin de caractériser l'identification de propriétés orthotropes hétérogènes en termes de moyenne et d'écart-type, on choisit de mener une étude de Monte-Carlo sur l'identification des propriétés d'un composite stratifié, avec 1200 tirages de bruit blanc gaussien. D'après l'étude du cas homogène, le rapport  $L/h$  optimal vis-à-vis de l'identification des propriétés orthotrope est égal à 10. L'algorithme de minimisation donnant les meilleurs résultats d'identification hétérogène, aussi bien pour la configuration en échiquier que stratifié, est celui de Levenberg-Marquardt. Ce sont donc ces choix qui sont faits ici.

La FIGURE 5.19 représente l'architecture du composite testé, avec, cette fois, une interface régulière entre les strates lors du maillage fait avec des éléments T3. Le matériau noté 2 est celui affecté à la couche au milieu du stratifié. Les hauteurs des trois couches sont les mêmes.



FIGURE 5.19: Architecture du composite étudié

FIGURE 5.20 montre les champs de contrainte et de déformation associés à ce cas d'étude. Les caractéristiques des deux matériaux présents pour le calcul de référence sont les suivantes :

(i) matériau 1 :  $E_x^1 = 25000$  MPa ;  $E_y^1 = 35000$  MPa ;  $\nu_{yx}^1 = 0.22$  ;  $G_{xy}^1 = 5200$  MPa

(ii) matériau 2 :  $E_x^2 = 18000$  MPa ;  $E_y^2 = 15000$  MPa ;  $\nu_{yx}^2 = 0.25$  ;  $G_{xy}^2 = 3500$  MPa

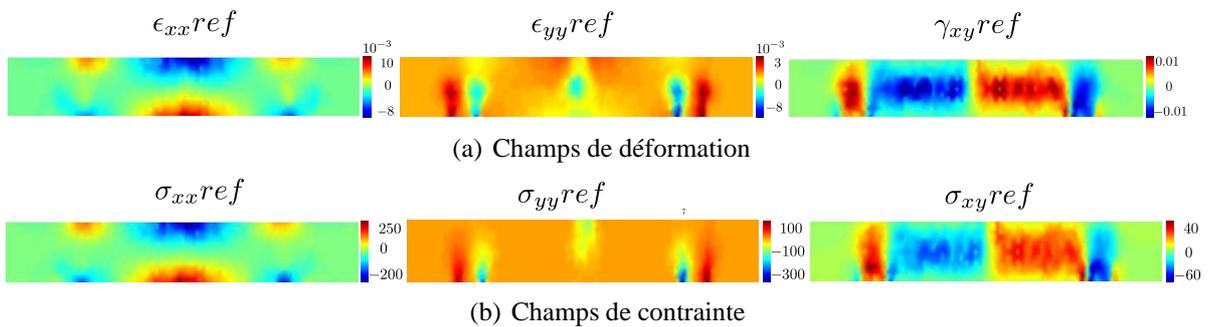


FIGURE 5.20: Champs de contrainte et de déformation - matériau stratifié avec  $L/h = 10$

Afin de recalibrer les contrastes de rigidité, en l'absence d'information de type effort, la rigidité  $Q_{yy}^1$ , relative ici au matériau 1, a été fournie.

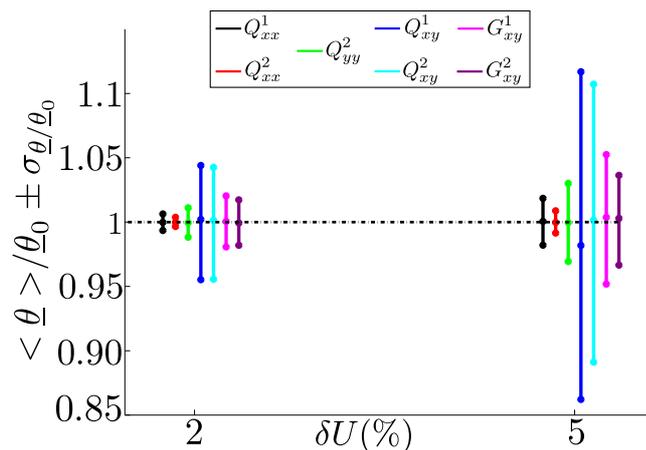


FIGURE 5.21: Résultats d'identification pour deux niveaux de perturbations

La FIGURE 5.21 présente les résultats d'identification des sept propriétés orthotropes restantes du bi-matériau pour deux niveaux de perturbation (2% et 5%), normées par les valeurs de références. Il s'agit de barres d'erreurs  $\frac{\langle \theta \rangle}{\theta_0} \pm \frac{\sigma_{\theta}}{\theta_0}$ . L'erreur d'identification est raisonnable pour l'ensemble des propriétés orthotropes, même si relativement plus élevée pour le module  $Q_{xy}$ .

## 5.2 Identification à partir de données expérimentales

### 5.2.1 Essai et matériau

On se place dans le cadre d'un essai de flexion trois points sur une éprouvette droite en composite à matrice organique (CMO). Les dimensions de l'éprouvette sont :  $121\text{ mm} \times 20\text{ mm} \times 20\text{ mm}$ . L'essai a été mené avec plusieurs cycles de charge/décharge jusqu'à rupture [Zhang, 2012]. Des images aux pics des premiers cycles sont exploitées pour construire un champ de déplacement par CIN.

Le matériau est un composite avec des fibres de verre et une matrice polyester. Il contient également des coutures dans l'épaisseur qui ont pour but de limiter le phénomène de délaminage dans la phase endommagement. Les images ont été prises sur la tranche de l'éprouvette (plan  $(x, y)$ ) de sorte que les coutures qui traversent le matériau apparaissent verticalement (selon l'axe  $y$ ). Dans le cadre d'une étude en 2D, on fait ici l'hypothèse des contraintes planes.

Le rapport  $L/h$  de l'éprouvette est égal à 5.5, ce qui situe l'essai dans une configuration de cisaillement quasi-pur. Le but est alors d'identifier le module de cisaillement  $G_{xy}$ , connaissant les autres modules qui sont : les modules d'Young longitudinal et transversal et les coefficients de Poisson, dans le plan d'orthotropie  $(x, y)$ . Ces modules sont fournis avec des incertitudes de 2% à 6%.

Enfin, le champ de déplacement a été obtenu avec l'outil de corrélation VIC-2D pour une taille de ZOI de 16 pixels. La taille du pixel correspond ici à une longueur physique de  $60\mu\text{m}$ .

### 5.2.2 Les différents cas d'études

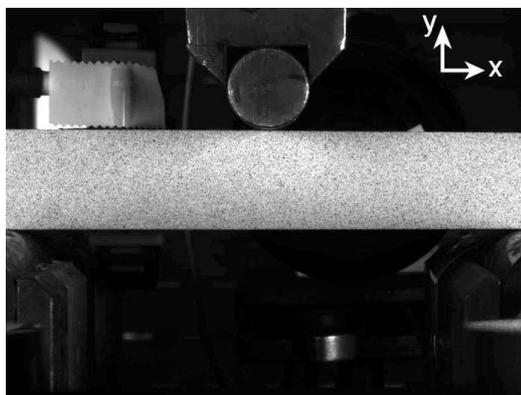


FIGURE 5.22: Essai de flexion trois points sur composite CMO cousu

Les images en notre possession ne couvrent pas la totalité de l'éprouvette, mais plutôt la région entre appuis, dans la direction longitudinale suivant l'axe  $x$  (FIGURE 5.22). Dans ce cas de figure, outre les deux variantes de l'ERdC modifiée, sans conditions aux limites et avec bords libres, une variante en fonction de la taille de la zone de calcul s'ajoute. On s'intéressera donc à mener l'identification pour différentes zones de calcul. Une première zone égale à la zone photographiée, où l'on ne pourra prendre que les bords libres en haut et en bas, et une deuxième zone de calcul qui couvre l'éprouvette entière. Dans le premier cas de figure, la zone de calcul n'est pas complètement égale à la zone de mesure de taille  $\mathcal{A}_{mes}$ , vu que les mesures sont rognées à cause de problèmes de convergence du calcul de CIN sur les bords de l'image. On distinguera donc deux tailles pour le calcul : la taille

de référence  $\mathcal{A}_{ref}$  qui est la taille totale de l'éprouvette (schématisée FIGURE 5.23(c)), et la taille de la zone photographiée  $\mathcal{A}_{ph}$  (FIGURE 5.23(a) et FIGURE 5.23(b)). On fait donc jouer la taille de la zone de calcul qui sera tantôt égale à la taille de référence, tantôt égale à la taille de la zone photographiée.

Prendre une zone de calcul qui couvre la taille réelle de l'éprouvette (de taille  $\mathcal{A}_{ref}$ ) devrait être bénéfique pour la formulation ERdC modifiée avec bords libres, *a priori*, puisque on y gagne le rajout de l'information fiable sur les bords libres à gauche et à droite de l'éprouvette. Quant à la formulation sans conditions aux limites, il n'y a, *a priori*, pas de gain en matière d'informations. En l'absence de régularisation, agrandir la taille de la zone de calcul ferait juste apparaître des problèmes de noyau pendant la résolution.

Dans ce qui suit, les résultats seront classés selon la formulation de l'ERdC modifiée adoptée d'une part, et la taille de la zone de calcul d'autre part.

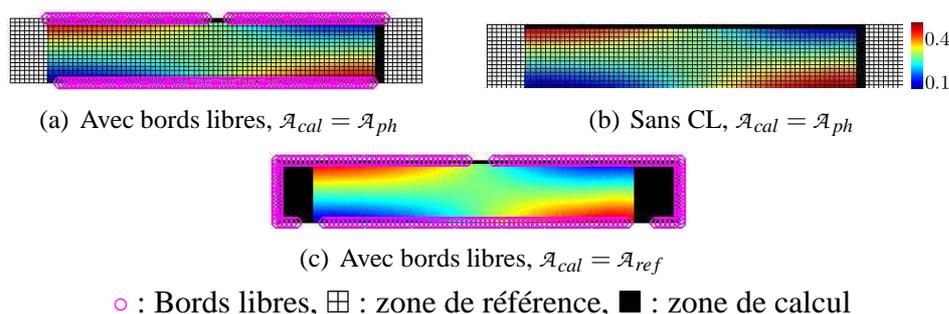


FIGURE 5.23: Différentes tailles de zone de calcul et conditions aux limites prises en compte (champ de déplacement expérimental  $U_x$ )

Vu les différents paramètres mis en jeu, une attention particulière est portée au calcul de l'hyper-paramètre  $\alpha$ . Celui-ci doit être en accord avec les zones de calcul choisies, tel que :

$$\alpha = \frac{\int_{\Omega_c} (\underline{\underline{\sigma}}^{\text{ref}} : \underline{\underline{\epsilon}}^{\text{ref}}) d\Omega_c}{\|\tilde{U}\|^2} \quad (5.23)$$

avec  $\Omega_c$  le domaine de calcul,  $\tilde{U}$  le champ de déplacement mesuré, et  $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{ref}}$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}^{\text{ref}}$  sont, respectivement, le champ de contrainte et de déformation calculés pour un module de cisaillement initial obtenu avec une approche d'identification basée sur la RdM. D'après (5.23), les poids des deux termes de la fonctionnelle de l'ERdC modifiée sont, ici encore, égaux.

Lorsque la zone de calcul est égale à la zone de mesure,  $\alpha$  est ici estimé via un calcul éléments finis avec des conditions aux limites en déplacement, obtenues à partir du champ de déplacement expérimental. Dans le cas où la zone de calcul est égale à la zone de référence, un calcul éléments finis avec des conditions aux limites mixtes est mené, grâce à la résultante d'effort mesurée, permettant ainsi d'estimer  $\alpha$  sur la zone de référence.

Remarque :

Il faut noter que l'utilisation de l'hypothèse de contrainte plane n'est pas très justifiée dans le présent cas d'étude, du fait de l'effet de l'épaisseur, égale à la hauteur de l'éprouvette. L'exploitation d'un tel essai nécessite donc la mise en œuvre d'un modèle 3D. Une autre façon de le traiter consisterait à effectuer des mesures de champs par stéréo-corrélation sur les deux faces opposées de l'éprouvette afin de quantifier le déplacement hors plan des deux côtés, et remonter ainsi à une déformation moyenne hors plan (hypothèse d'homogénéité des contraintes dans l'épaisseur).

### 5.2.3 Résultats

Comme on cherche ici un seul paramètre matériel, l'identification est menée via l'évaluation de la fonction coût sur une grille fine de valeurs (intervalle de confiance), avec une précision de 0.1%. Il est ainsi possible de tracer la fonction coût dans une plage de valeurs pour déterminer son minimum. L'image exploitée pour construire le champ de déplacement a été prise au pic du deuxième cycle de charge, pour une résultante d'effort  $F = 8980$  N.

Dans ce qui suit, on va afficher la fonction coût  $\mathcal{G}$  ainsi que ses deux composantes  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$ , afin d'interpréter le comportement de chaque formulation de l'ERdC modifiée, suivant la taille de la zone de calcul et la nature des conditions sur le bord. Ici, le ratio entre la taille des mesures et la taille de la plus petite zone de calcul considérée (la zone photographiée) est égal à 91%, du fait de l'absence de données en déplacement sur le bord. Quand la taille de la zone de calcul couvre la totalité de la zone de référence, ce ratio se réduit à 74%.

Les FIGURE 5.24(a) et FIGURE 5.24(b) représentent la fonction coût  $\mathcal{G}$  et ses deux composantes pour une taille de zone de calcul égale à la zone photographiée, dans les cas sans conditions aux limites et avec bord libre schématisés aux FIGURE 5.23(b) et FIGURE 5.23(a). D'après les résultats d'identification récapitulés dans le TABLEAU 5.11, on trouve des résultats différents, tels que :

1. sans conditions aux limites :  $G_{xy} = 4360$  MPa et le terme d'erreur de modèle donne une valeur en dehors de l'intervalle de confiance.
2. avec bords libres :  $G_{xy} = 4780$  MPa et le terme d'erreur de modèle a été régularisé avec l'ajout d'information sur une partie du bord.

La FIGURE 5.24(c) montre l'allure de la fonction coût pour une formulation ERdC modifiée avec bords libres, et pour une taille de zone de calcul égale à la taille réelle de l'éprouvette. Le parti pris était qu'un gain serait acquis grâce à l'ajout d'informations fiables sur les nouveaux bords à droite et à gauche de l'éprouvette. En contre partie, le ratio  $\mathcal{A}_{mes}/\mathcal{A}_{cal}$  est naturellement plus petit. Ne disposant pas réellement de valeur de référence pour le module de cisaillement recherché, on peut estimer que les résultats obtenus avec une zone de calcul égale à la zone photographiée et une formulation ERdC modifiée avec toute l'information bord libre disponible peuvent être considérés comme des résultats de référence. On remarque que la valeur nouvellement identifiée est un peu différente :  $G_{xy} = 4730$  MPa, et est notamment retrouvée avec la composante  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$ . Cette formulation semble apporter un certain équilibre entre les deux composantes de la fonction coût. La composante  $\mathcal{G}_1$  demeure plus petite que  $\alpha \mathcal{G}_2$ , avec  $\alpha = 0.57$ , mais il ne paraît pas nécessaire de jouer sur la pondération des deux composantes puisque on retrouve la même valeur de  $G_{xy}$ .

Enfin, la méthode FEMU a été appliquée avec des conditions aux limites de type Dirichlet, prises à partir du champ mesuré et imposées de manière forte aux bords du domaine. La formulation avec des CL mixtes n'est pas présentée puisque les incertitudes liées aux hypothèses de répartition de la résultante de l'effort ne peuvent être évitées. La taille de la zone de calcul ne peut, ici, excéder la taille des champs de déplacement mesurés et est donc égale à  $\mathcal{A}_{mes}$ . Les résultats de l'identification sont récapitulés dans le tableau 5.12.

Au final, la formulation ERdC modifiée sans CL a donné le même résultat que la formulation FEMU avec CL de Dirichlet, à savoir  $G_{xy} = 4360$  MPa, ce qui reste cohérent

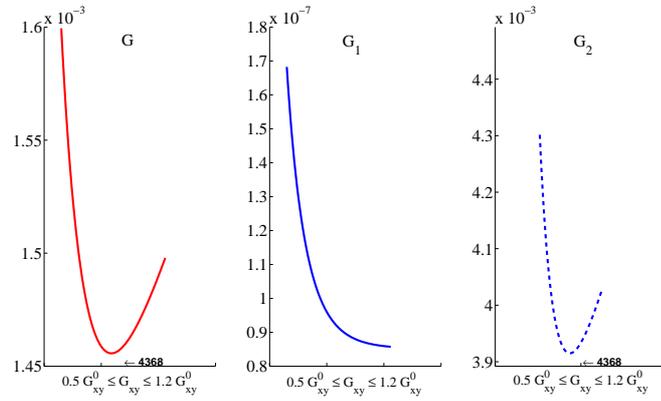
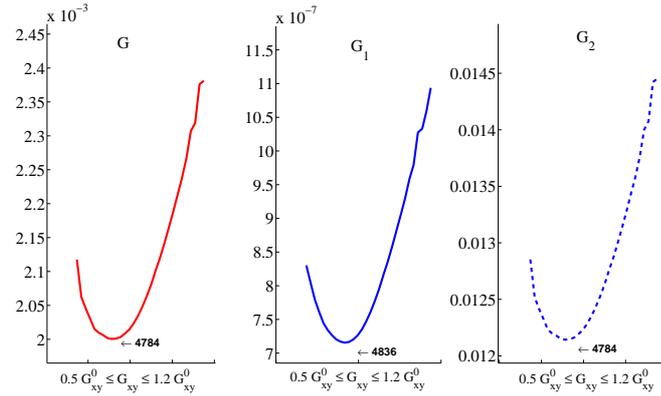
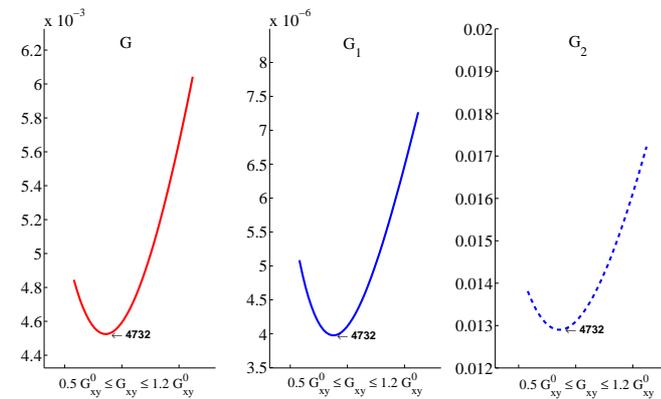

 (a) Formulation sans CL,  $\mathcal{A}_{cal} = \mathcal{A}_{ph}$ 

 (b) Formulation avec bords libres,  $\mathcal{A}_{cal} = \mathcal{A}_{ph}$ 

 (c) Formulation avec bords libres,  $\mathcal{A}_{cal} = \mathcal{A}_{ref}$ 

 FIGURE 5.24: Fonctions coûts pour les différents cas d'étude - 2<sup>e</sup> cycle de l'essai

Formulation		$\mathcal{A}_{cal} = \mathcal{A}_{ph}$	$\mathcal{A}_{cal} = \mathcal{A}_{ref}$
ERdC modifiée Sans CL	$\mathcal{G}$	4360	-
	$\mathcal{G}_1$	-	-
	$\mathcal{G}_2$	4360	-
ERdC modifiée Bords libres	$\mathcal{G}$	4780	4730
	$\mathcal{G}_1$	4830	4730
	$\mathcal{G}_2$	4780	4730

 TABLEAU 5.11:  $G_{xy}$  identifié en fonction de la taille et de la formulation ERdC

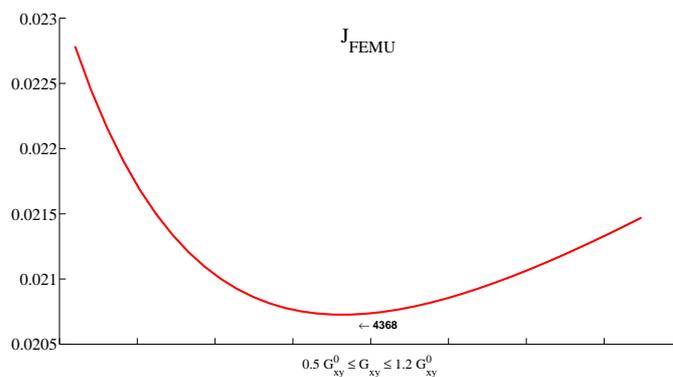


FIGURE 5.25: Fonctions coûts pour la formulation FEMU - CL de Dirichlet

Formulation	$\mathcal{A}_{cal} = \mathcal{A}_{mes}$
Méthode FEMU	4360

TABLEAU 5.12:  $G_{xy}$  identifié avec la méthode FEMU

puisque les deux méthodes disposent des mêmes informations. En rajoutant de plus en plus d'informations fiables sur le bord, la valeur du module de cisaillement change pour se stabiliser à 4730 MPa. Une autre approche d'identification basée sur la théorie des poutres avec l'exploitation de seulement quelques points de mesures à partir du champ de déplacement a fournit un module de cisaillement égal à 5200 MPa utilisé comme module initial dans la présente étude. Cette approche n'exploite pas la richesse du champ de déplacement disponible, et consiste à diviser le champ en petites zones pour choisir celle qui a une plus grande sensibilité au module recherché. Une moyenne des déplacements aux quelques points de mesures de la petite zone est ensuite utilisée pour l'identification [Zhang, 2012].

### 5.3 Conclusion

On s'est intéressé dans ce dernier chapitre à l'identification d'un comportement orthotrope. Dans le cadre d'une identification homogène, la question du choix d'un essai optimal vis-à-vis de l'identification de l'ensemble des propriétés orthotropes a été abordée. Cela a permis d'identifier les dimensions optimales de l'éprouvette via une étude de sensibilité des champs cinématiques par rapport aux propriétés orthotropes du matériau. Enfin, l'identification de propriétés orthotropes hétérogènes a été menée sur divers exemples numériques, et a confirmé la robustesse de la stratégie d'identification. Elle a permis, en outre, d'étudier l'influence du choix de l'algorithme de descente et du paramètre de recalage des contrastes de rigidité.

La méthode a enfin été appliquée à des données expérimentales sur un composite CMO afin de déterminer son module de cisaillement, et comparée à une méthode de recalage par éléments finis.

# Conclusion

Ce travail s'inscrit dans le cadre de l'identification de paramètres matériels élastiques hétérogènes à partir d'essais statiques inhomogènes et de mesures de champs cinématiques, issues d'outils de corrélation d'images numériques par exemple. La problématique centrale est la gestion des incertitudes tant sur les données expérimentales que théoriques, conduisant généralement à l'altération des résultats d'identification.

Une première approche du problème a consisté au couplage d'une stratégie d'identification inverse, ne contenant pas de mécanisme particulier de gestion du bruit, avec une technique de filtrage des perturbations dédiée aux mesures de champs. La question était alors de savoir s'il est possible d'avoir une meilleure identification en appliquant un filtre non mécanique aux données bruitées, en amont de l'étape d'identification.

Cette première étape s'est traduite par la mise en place d'une relation analytique au premier ordre entre les perturbations de mesure et les erreurs d'identification, afin d'évaluer ensuite la pertinence de l'approche de filtrage en termes d'amélioration des résultats d'identification. L'étude a été illustrée sur l'exemple numérique d'une plaque contenant une inclusion en traction uniaxiale. Cela a permis de répondre à la question posée et il en est ressorti que le filtrage des mesures en amont de l'étape d'identification conduit à des résultats d'identification plus robustes pour des échelles d'hétérogénéités assez fines. Cependant, la performance de cette technique au vu de l'identification reste limitée, d'une part, parce que les niveaux d'erreurs relatifs au problème inverse, bien que diminués, demeurent assez élevés, et d'autre part, parce que l'amélioration n'est pas ressentie pour les résolutions spatiales les plus grossières dans le cas étudié.

Ce résultat nous a conduit à repenser l'approche d'identification avec la volonté de gérer les incertitudes au sein du processus d'identification, en reformulant le problème inverse.

Ce cadre a déjà fait l'objet de plusieurs travaux, et bon nombre de stratégies ont été adaptées ou dédiées à la résolution de ce type de problème d'identification. Notre choix a été de formuler le problème d'identification en s'appuyant sur les principes de l'erreur en relation de comportement modifiée, fortement inspirée par les travaux sur le recalage de modèles en dynamique vibratoire et transitoire qui, basés sur ces principes, ont abouti à des approches très robustes vis-à-vis des incertitudes de mesure. La motivation de ce choix découle également d'un manque à combler dans les approches existantes : la plupart de ces approches nécessitent les conditions aux limites sur la frontière du domaine étudié, et s'appuient, alors, soit sur des mesures bruitées imposées de manière forte, soit sur des hypothèses de modélisation introduisant des erreurs de modèle supplémentaires. De plus, la résolution du problème d'identification se fait souvent sur la zone de mesure, généralement plus petite que la taille réelle de l'échantillon, ce qui ne permet pas de tirer profit d'informations fiables disponibles sur le bord. Enfin, l'idée de tenir compte de l'erreur qui est faite sur le modèle de comportement paraît tout à fait légitime, car c'est justement le comportement qui est recherché dans notre contexte. Ces trois aspects sont gérés par l'erreur en relation de comportement modifiée. La méthode, développée en élasticité linéaire pour des mesures de champs, consiste à traiter toutes les données théoriques

et expérimentales en un seul calcul et gère les mesures et les conditions aux limites selon leur caractère fiable ou peu fiable, ce qui lui confère un sens physique fort. D'abord formulée sans conditions aux limites, la stratégie a conduit à des résultats d'identification robustes vis-à-vis du bruit en élasticité homogène, notamment en comparaison avec l'approche FEMU formulée avec des conditions aux limites de type Dirichlet. Bien que satisfaisante en termes de résultats, l'approche ainsi formulée s'accompagne d'un problème de noyau pendant la résolution numérique, pour des tailles de mesures plus petites que la taille totale de l'échantillon étudié. Ce problème a été contourné grâce à une factorisation QR.

Dans un deuxième temps, le rajout d'informations fiables de type bord libre a accru la robustesse de la méthode, même pour des tailles de zones de mesure assez restreintes, et a apporté une certaine régularité au problème inverse au vu de l'atténuation des problèmes de noyau.

Par ailleurs, afin de souligner l'intérêt du terme d'erreur de modèle dans le processus d'identification, une approche de contrôle optimal a été formulée et comparée à l'erreur en relation de comportement modifiée pour des données identiques. Sur la base de données synthétiques en élasticité homogène, l'approche d'erreur en relation de comportement était plus satisfaisante en termes de moyenne et d'écart-type de l'identification. Néanmoins, le terme d'erreur de modèle demeure non maîtrisé en l'absence de conditions aux limites pour certains cas test, probablement pour des raisons de déséquilibre entre les données en déplacement et en effort.

Enfin, l'extension à l'élasticité hétérogène a été menée pour des exemples numériques de matériaux composites, puis directement appliquée à des mesures expérimentales d'un essai de flexion trois points sur un matériau composite. Comparée aux approches FEMU, ou aux résultats issus d'autres formulations, l'approche d'ERdC modifiée semble bien donner les résultats les plus satisfaisants.

La technique développée dans ce travail s'avère très prometteuse. En l'état, elle peut permettre d'identifier des cartes d'endommagement, ou de propriétés endommagées, par perte de rigidité, en exploitant des images dans des cycles allant jusqu'à rupture. La méthodologie peut également être appliquée aux échelles mésoscopique et microscopique. Enfin, l'exploration de la méthode continue actuellement avec la prise en compte de l'effort (résultante ou distribution) comme information fiable ou peu fiable [Huang *et al.*, 2013]. Une des perspectives de ce travail est de faire de l'identification multiéchelle. Par ailleurs, l'extension à une identification en volume peut également être une perspective intéressante, avec l'essor des techniques de tomographie et de corrélation d'images 3D.

# Bibliographie

- [Amiot *et al.*, 2007] F. Amiot, F. Hild, et J-P. Roger (2007). Identification of elastic property and loading fields from full-field measurements. *International Journal of Solids and Structures*, 44 :2863–2887.
- [Andrieux et Abda, 1996] S. Andrieux et A. Ben Abda (1996). Identification of planar cracks by complete overdetermined data : inversion formulae. *Inverse Problems*, 12 :553–563.
- [Arafeh *et al.*, 1995] M-H. Arafeh, C. Knopf-Lenoir, et F. Rouger (1995). Identification de lois de comportement des matériaux orthotropes. In *Colloque Photomécanique*, Cachan, France.
- [Arcan, 1984] M. Arcan (1984). The iosipescu shear test as applied to composite materials. *Experimental Mechanics*, 24(1) :66–67.
- [Avril *et al.*, 2008a] S. Avril, M. Bonnet, A-S. Bretelle, M. Grédiac, F. Hild, P. Ienny, F. Latourte, D. Lemosse, S. Pagano, E. Pagnacco, et F. Pierron (2008a). Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements. experimental mechanics. *Experimental Mechanics*, 48(4) :381–402.
- [Avril *et al.*, 2008b] S. Avril, P. Feissel, F. Pierron, et P. Villon (2008b). Estimation of the strain field from full-field displacement noisy data. Comparing finite elements global least squares and polynomial diffuse approximation. *European Journal of Computational Mechanics*, 17/5-7 :857–868.
- [Badeva et Morozov, 1991] V. Badeva et V.A. Morozov (1991). *Problèmes incorrectement posés : Théorie et applications en identification , filtrage optimal, contrôle optimal, analyse et synthèse de systèmes, reconnaissance d’images*. Masson.
- [Badulescu, 2010] C. Badulescu (2010). *Calcul précis des déformations planes par la méthode de la grille. Application à l’étude d’un multicristal d’aluminium*. Thèse de doctorat, Univeristé Blaise Pascal - Clermont-Ferrand 2.
- [Banerjee *et al.*, 2012] B. Banerjee, T. F. Walsh, W. Aquino, et M. Bonnet (2012). Large scale parameter estimation problems in frequency-domain elastodynamics using an error in constitutive equation functional. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 253 :60–72.
- [Ben Azzouna *et al.*, 2010] M. Ben Azzouna, P. Feissel, et P. Villon (2010). Use of diffuse approximation for strain reconstruction from full-field measurements. In *4<sup>th</sup> European Conference on Computational Mechanics*, Paris, France.
- [Ben Azzouna *et al.*, 2011a] M. Ben Azzouna, P. Feissel, et P. Villon (2011a). Identification à partir de mesures de champs - Application de l’erreur en relation de comportement modifiée. In *10<sup>e</sup> Colloque National en Calcul des Structures*, Giens, France.
- [Ben Azzouna *et al.*, 2011b] M. Ben Azzouna, P. Feissel, et P. Villon (2011b). Identification à partir de mesures de champs - Application de l’erreur en relation de comportement modifiée. In *20<sup>e</sup> Congrès Français de Mécanique*, Besançon, France.

- [Ben Azzouna *et al.*, 2012] M. Ben Azzouna, P. Feissel, et P. Villon (2012). Identification of elastic properties from full-field measurements - Applying the modified constitutive relation error strategy. In *15<sup>th</sup> European Conference on Composite Materials*, Venice, Italie.
- [Ben Azzouna *et al.*, 2013a] M. Ben Azzouna, P. Feissel, et P. Villon (2013a). Identification of elastic properties from full-field measurements : a numerical study of the effect of filtering on the identification results. *Measurement Science and Technology*, 24(5) :055603.
- [Ben Azzouna *et al.*, 2013b] M. Ben Azzouna, P. Feissel, et P. Villon (2013b). Modified constitutive relation error strategy for elastic properties identification. In Carlos E. Ventura, Wendy C. Crone, et Cosme Furlong, editors, *Experimental and Applied Mechanics, Volume 4*, volume 34 of *Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*, pages 221–228. Springer New York.
- [Ben Azzouna *et al.*, 2011c] M. Ben Azzouna, J-N. Périé, J-M. Guimard, F. Hild, et S. Roux (2011c). On the identification and validation of an anisotropic damage model using full-field measurements. *International Journal of Damage Mechanics*, 20(8) :1130–1150.
- [Benzeggagh, 2008] M. L. Benzeggagh (2008). *Matériaux Composites - Tome 3*. Université de Technologie de Compiègne.
- [Besnard *et al.*, 2006] G. Besnard, F. Hild, et S. Roux (2006). “Finite-element” displacement fields analysis from digital images : Application to Portevin-Le Châtelier bands. *Experimental Mechanics*, 46(6) :789–803.
- [Bonnet et Constantinescu, 2005] M. Bonnet et A. Constantinescu (2005). Inverse problems in elasticity (topical review article). *Inverse Problems*, 21 :R1–R50.
- [Bornert *et al.*, 2009] M. Bornert, P. Doumalin, J-C. Dupré, M. Fazzini, M. Grédiac, F. Hild, S. Mistou, J. Molimard, J-J. Orteu, L. Robert, Y. Surrel, P. Vacher, et B. Wattrisse (2009). Assessment of digital image correlation measurement errors : Methodology and results. *Experimental Mechanics*, 49(3) :353–370.
- [Bornet *et al.*, 2011] M. Bornet, J-J. Orteu, et S. Roux (2011). Corrélation d’images. In *Mesures de champs et identification en mécanique des solides*, (eds M. Grédiac, F. Hild), pages 175–208. Hermès édition.
- [Bourgeois, 1998] L. Bourgeois (1998). *Contrôle optimal et problèmes inverses en plasticité*. Thèse de doctorat, École Polytechnique.
- [Brancherie *et al.*, 2006] D. Brancherie, P. Villon, A. Ibrahimbegovic, A. Rassineux, et P. Breitkopf (2006). Transfert de champs par approximation diffuse avec conservation de l’énergie. *European Journal of Computational Mechanics*, 15 :107–118.
- [Breitkopf *et al.*, 2002] P. Breitkopf, A. Rassineux, et P. Villon (2002). Diffuse approximation technology : fundamentals and implementation. *Revue Européenne des éléments Finis*, 11 :825–867.
- [Bryson et Ho, 1975] A. E. Bryson et Y. C. Ho (1975). *Applied optimal control : optimization, estimation and control*. Taylor & Francis Group.
- [Bui, 1993] H. D. Bui (1993). *Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux*. Eyrolles.
- [Cailletaud et Pilvin, 1994] G. Cailletaud et P. Pilvin (1994). Identification and inverse problems related to material behavior. *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, H. D. Bui et M. Tanaka, pages 76–86.

- [Calloch *et al.*, 2002] S. Calloch, D. Dureisseix, et F. Hild (2002). Identification de modèles de comportement de matériaux solides : utilisation d'essais et de calculs. *Technologies et Formations*, 100 :36–41.
- [Calvettia *et al.*, 2000] D. Calvettia, S. Morigib, L. Reichelc, et F. Sgallarid (2000). Tikhonov regularization and the L-curve for large discrete ill-posed problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 123 :423–446.
- [Chalal *et al.*, 2006] H. Chalal, S. Avril, F. Pierron, et F. Meraghni (2006). Experimental identification of a nonlinear model for composites using the grid technique coupled to the virtual fields method. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 37(2) :315–325.
- [Chasiotis et Knauss, 2002] I. Chasiotis et W. G. Knauss (2002). A new microtensile tester for the study of mems materials with the aid of atomic force microscopy. *Measurement Science and Technology*, 42(1) :51–57.
- [Chen *et al.*, 1993] D. J. Chen, F. P. Chiang, Y. S. Tan, et H. S. Don (1993). Digital speckle displacement measurement using a complex spectrum method. *Applied optics*, 32 :1839–1849.
- [Claire *et al.*, 2002] D. Claire, F. Hild, et S. Roux (2002). Identification of damage fields using kinematic measurements. *Comptes Rendus Mécanique*, 330 :729–734.
- [Collins *et al.*, 1974] J-C. Collins, G-C. Hart, et B. Kennedy (1974). Statistical identification of structures. *The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 12 :185–190.
- [Cooreman *et al.*, 2007] S. Cooreman, D. Lecompte, H. Sol, J. Vantomme, et D. Debruyne (2007). Elasto-plastic material parameter identification by inverse methods : Calculation of the sensitivity matrix. *International Journal of Solids and Structures*, 44 :4329–4341.
- [Correlated\_solutions, 2013] Correlated\_solutions (2013). Vic-2D, Technology Overview. <http://www.correlatedsolutions.com/index.php/products/vic-2d>. Correlated Solutions.
- [Cottin *et al.*, 1984] N. Cottin, H-P. Felgenhauer, et H-G. Natke (1984). On the parameter identification of elastomechanical systems using input and output residuals. *Archive of Applied Mechanics*, 54 :378–387.
- [Crouzeix, 2008] L. Crouzeix (2008). *Identification de champs de propriétés mécaniques de structures composites à partir de mesures de champs de déplacement*. Thèse de doctorat, Université Toulouse 3 - Paul Sabatier.
- [Decouvreur, 2008] V. Decouvreur (2008). *Updating Acoustic Models : a Constitutive Relation Error Approach*. Thèse de doctorat, Université Libre de Bruxelles.
- [Deraemaeker *et al.*, 2002] A. Deraemaeker, P. Ladevèze, et Ph. Leconte (2002). Reduced bases for model updating in structural dynamics based on constitutive relation error. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(21-22) :2427–2444.
- [Dhatt *et al.*, 2012] G. Dhatt, E. Lefrançois, et G. Touzot (2012). *Finite Element Method*. Wiley.
- [Doumalin et Bornert, 2000] P. Doumalin et M. Bornert (2000). Micromechanical applications of digital image correlation techniques. In P. Jacquot et J-M. Fournier, editors, *Interferometry in Speckle Light*, pages 67–74. Springer Berlin Heidelberg.
- [Elguedj *et al.*, 2011] T. Elguedj, J. Réthoré, et A. Buteri (2011). Isogeometric analysis for strain field measurements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(1-4) :40–56.

- [Feissel, 2003] P. Feissel (2003). *Vers une stratégie d'identification en dynamique rapide pour des données incertaines*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan.
- [Feissel, 2012] P. Feissel (2012). From displacement to strain. In *Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics*, (eds M. Grédiac, F. Hild), pages 191–222. Wiley.
- [Feissel et Allix, 2007] P. Feissel et O. Allix (2007). Modified constitutive relation error identification strategy for transient dynamics with corrupted data : The elastic case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 :1968–1983.
- [Feissel et al., 2011] P. Feissel, J. Henry, M. Ben Azzouna, et Z. Aboura (2011). Space-time diffuse approximation filtering : Application to early and fatigue damage detection in interlock composites. In *Photomechanics*, Vrije Universiteit Brussel, Bruxelles, Belgique.
- [Florentin et Lubineau, 2010] E. Florentin et G. Lubineau (2010). Identification of the parameters of an elastic material model using the constitutive equation gap method. *Computational Mechanics*, 46 :521–531.
- [Francis et al., 2007] D. Francis, S. W. James, et R. P. Tatam (2007). Surface strain measurement using multi-component shearography with coherent fibre-optic imaging bundles. *Measurement Science and Technology*, 18 :3583–3591.
- [Garcia, 2001] D. Garcia (2001). *Mesure de formes et de champs de déplacements tridimensionnels par stéréocorrélation d'images*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse.
- [Gasquet et Witomski, 2000] C. Gasquet et P. Witomski (2000). *Analyse de Fourier et applications. Filtrage, calcul numérique et ondelettes*. Dunod.
- [Gay, 2005] D. Gay (2005). *Matériaux composites*. Hermès - Lavoisier. 5<sup>e</sup> édition révisée.
- [Geers et al., 1996] M. Geers, R. De Borst, et W. Brekelmans (1996). Computing strain fields from discrete displacements in 2d-solids. *International Journal of Solids and Structures*, 33 :4293–4307.
- [Geuzaine et Remacle, 2009] C. Geuzaine et J-F. Remacle (2009). Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(8) :1309–1331.
- [Geymonat et al., 2002] G. Geymonat, F. Hild, et S. Pagano (2002). Identification of elastic parameters by displacement field measurement. *Comptes Rendus Mécanique*, 330 :403–408.
- [Gras et al., 2013] R. Gras, H. Leclerc, S. Roux, S. Otin, J. Schneider, et J-N. Périé (2013). Identification of the out-of-plane shear modulus of a 3D woven composite. *Experimental Mechanics*, 53(5) :719–730.
- [Grédiac, 1989] M. Grédiac (1989). Principe des travaux virtuels et identification. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 2 :1–5.
- [Grédiac et Hild, 2012] M. Grédiac et F. Hild (2012). *Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics*. Wiley.
- [Grédiac et Pierron, 2006] Michel Grédiac et Fabrice Pierron (2006). Applying the virtual fields method to the identification of elasto-plastic constitutive parameters. *International Journal of Plasticity*, 22(4) :602–627.

- [Grédiac *et al.*, 2006] M. Grédiac, F. Pierron, S. Avril, et E. Toussaint (2006). The virtual fields method for extracting constitutive parameters from full-field measurements : a review. *Strain*, 42 :233–253.
- [Grédiac *et al.*, 2001] M. Grédiac, E. Toussaint, et F. Pierron (2001). La méthode des champs virtuels pour l'identification directe de paramètres matériaux à partir de champs hétérogènes. In *15<sup>e</sup> Congrès Français de Mécanique*, Nancy, France.
- [Hadamard, 1902] J. Hadamard (1902). Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, pages 49–52.
- [Han *et al.*, 2010] K. Han, M. Ciccotti, et S. Roux (2010). Measuring nanoscale stress intensity factors with an atomic force microscope. *Europhysics Letters*, 89 :66003.
- [Hemez et Farhat, 1993] F. M. Hemez et C. Farhat (1993). Updating finite element dynamic models using element-by-element sensitivity methodology. *The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 31 :1702–1711.
- [Hild, 2002] F. Hild (2002). CORRELI<sup>LMT</sup> : A software for displacement field measurements by digital image correlation. Technical Report 254, Laboratoire de Mécanique et Technologie, Cachan.
- [Hild et Roux, 2006] F. Hild et S. Roux (2006). Digital image correlation : from displacement measurement to identification of elastic properties - a review. *Strain*, 42 :69–80.
- [Hild et Roux, 2012] F. Hild et S. Roux (2012). Comparison of local and global approaches to digital image correlation. *Experimental Mechanics*, 52(9) :1503–1519.
- [Holst, 1998] G. Holst (1998). CCD arrays, cameras and displays. *SPIE Engineering Press*.
- [Huang *et al.*, 2013] S. Huang, M. Ben Azzouna, P. Feissel, et P. Villon (2013). Modified constitutive relation error : identification of elastic properties. In *Photomechanics*, Montpellier, France.
- [Humbert, 1999] L. Humbert (1999). *Recalage de modèles éléments finis à partir de mesures vibratoires*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon.
- [Kavanagh et Clough, 1971] K-T. Kavanagh et R-W. Clough (1971). Finite element applications in the characterization of elastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7 :11–23.
- [Kim *et al.*, 2007] J-H. Kim, F. Pierron, M. Wisnom, et K. Syed-Muhamad (2007). Identification of the local stiffness reduction of a damaged composite plate using the virtual fields method. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 38(9) :2065–2075.
- [Kobayashi, 1987] A-S. Kobayashi (1987). *Handbook on Experimental Mechanics*. Wiley, New York.
- [Kohn et McKenney, 1990] R. V. Kohn et A. McKenney (1990). Numerical implementation of a variational method for electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, 6 :389–414.
- [Kohn et Vogelius, 1984] R. V. Kohn et M. Vogelius (1984). Determining conductivity by boundary measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 37 :289 :298.
- [Ladevèze, 1983] P. Ladevèze (1983). Recalage de modélisations des structures complexes. Technical Report 33.11.01.4, Aérospatiale, Les Mureaux.
- [Ladevèze *et al.*, 1994] P. Ladevèze, M. Reynier, et N. Maya (1994). Error on the constitutive relation in dynamics. *Inverse problems in Engineering (Bui and Tanaka Editors)*, pages 251–256.

- [Latourte, 2007] F. Latourte (2007). *Identification des paramètres d'une loi élastoplastique de Prager et calcul de champs de contraintes dans des matériaux hétérogènes*. Thèse de doctorat, Université de Montpellier 2.
- [Le Magorou *et al.*, 2002] L. Le Magorou, F. Bos, et F. Rouger (2002). Identification of constitutive laws for woodbased panels by means of an inverse method. *Composites Science and Technology*, 62 :591–596.
- [Le Magorou *et al.*, 2003] L. Le Magorou, F. Bos, et F. Rouger (2003). Identification de lois de comportement élastique et viscoélastique par mesures de champs. *Mécanique et Industries*, 4 :673–677.
- [Leclerc *et al.*, 2009] H. Leclerc, J-N. Périé, S. Roux, et F. Hild (2009). Integrated digital image correlation for the identification of mechanical properties. *Lecture Notes in Computer Science*, 5496 :161–171.
- [Lekhnitskii, 1963] S. G. Lekhnitskii (1963). *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*. Holden-Day Inc, San Francisco.
- [Leprince *et al.*, 2007] S. Leprince, S. Barbot, F. Ayoub, et J-P. Avouac (2007). Automatic and precise orthorectification, coregistration, and subpixel correlation of satellite images, application to ground deformation measurements. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 45(6, Part 1) :1529–1558.
- [Lions, 1968] J.L. Lions (1968). *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod.
- [Nayroles, 1994] B. Nayroles (1994). Using the diffuse approximation for optimizing the location of anti-sound sources. *Journal of Sound and Vibration*, 171(1) :1–21.
- [Nayroles *et al.*, 1991a] B. Nayroles, G. Touzot, et P. Villon (1991a). La méthode des éléments diffus. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l'Univers, Sciences de la Terre*, 313(2) :133–138.
- [Nayroles *et al.*, 1991b] B. Nayroles, G. Touzot, et P. Villon (1991b). L'approximation diffuse. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, série 2*, 313 :293–296.
- [Nguyen *et al.*, 2008] H.M. Nguyen, O. Allix, et P. Feissel (2008). A robust identification strategy for rate-dependent models in dynamics. *Inverse Problems*, 24 :065006.
- [Orteu, 2002] J-J. Orteu (2002). Mesure 3D de formes et de déformations par stéréovision. In *Traité Génie Mécanique - Travail des matériaux*. Techniques de l'Ingénieur.
- [Pagnacco *et al.*, 2005] E. Pagnacco, D. Lemosse, F. Hild, et F. Amiot (2005). Inverse strategy from displacement field measurement and distributed forces using fea. In *SEM Annual Conference and Exposition on Experimental and Applied Mechanics*.
- [Peter et Ranson, 1982] W. H. Peter et W. F. Ranson (1982). Digital imaging techniques in experimental stress analysis. *Optical Engineering*, 21 :427–432.
- [Prax *et al.*, 1996] C. Prax, H. Sadat, et P. Salagnac (1996). Diffuse approximation method for solving natural convection in porous media. *Transport in Porous Media*, 22(2) :215–223.
- [Rastogi, 2000] P. K. Rastogi (2000). *Photomechanics*. Springer, Berlin, Allemagne.
- [Réthoré *et al.*, 2009] J. Réthoré, S. Roux, et F. Hild (2009). An extended and integrated digital image correlation technique applied to the analysis of fractured samples. *European Journal Computational Mechanics*, 18 :285–306.
- [Reynier, 1990] M. Reynier (1990). *Sur le contrôle de modélisations éléments finis : recalage à partir d'essais dynamiques*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie.

- [Richard, 2000] L. Richard (2000). *Applications des algorithmes génétiques à la caractérisation thermique des matériaux*. Thèse de doctorat, Université de la Réunion.
- [Roux et Hild, 2006] S. Roux et F. Hild (2006). Stress intensity factor measurements from digital image correlation : post-processing and integrated approaches. *International journal of fracture*, 140 :141–157.
- [Roux et Hild, 2008] S. Roux et F. Hild (2008). Digital Image Mechanical Identification (DIMI). *Experimental Mechanics*, 48(4) :495–508.
- [Sadat et Prax, 1996] H. Sadat et C. Prax (1996). Application of the diffuse approximation for solving fluid flow and heat transfer problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 39(1) :214–218.
- [Scambos *et al.*, 1992] A. T. Scambos, M. J. Dutkiewicz, J. C. Wilson, et R. A. Bind-schadler (1992). Application of image cross-correlation to the measurement of glacier velocity using satellite image data. *Remote Sensing of Environment*, 42(3) :177 – 186.
- [Silva *et al.*, 2007] G. Silva, R. Le Riche, J. Molimard, A. Vautrin, et C. Galerne (2007). Identification of material properties using femu : Application to the open hole tensile test. *Applied Mechanics and Materials*, 7-8 :73–78.
- [Sutton *et al.*, 2006] M. A. Sutton, N. Li, D. Garcia, N. Cornille, J-J. Orteu, S. R. McNeill, H. W. Schreier, et X. Li (2006). Metrology in a scanning electron microscope : theoretical developments and experimental validation. *Measurement Science and Technology*, 17(10) :2613.
- [Sutton *et al.*, 2009] M. A. Sutton, J-J. Orteu, et H. Schreier (2009). *Image Correlation for Shape, Motion and Deformation Measurements*. Springer US.
- [Sutton *et al.*, 1983] M. A. Sutton, W. J. Wolters, W. H. Peters, et W. F. Ranson (1983). Determination of displacement using an improved digital correlation method. *Image and Vision Computing*, 1 :133–139.
- [Sutton *et al.*, 2008] M. A. Sutton, J. H. Yan, V. Tiwari, H. W. Schreier, et J-J. Orteu (2008). The effect of out-of-plane motion on 2D and 3D digital image correlation measurements. *Optics and Lasers in Engineering*, 46(10) :746–757.
- [Sutton *et al.*, 1999] M. A. Sutton, W. Zhao, S. R. McNeill, J. D. Helm, R. S. Piascik, et W. T. Riddell (1999). Local crack closure measurements : development of a measurement system using computer vision and a far-field microscope. In *Advances in fatigue crack closure measurement and analysis*, R. C. McClung and J. C. Newman (eds), pages 145–156. American Society for Testing and Materials, West Conshohocken, USA.
- [Tarantola, 2005] A. Tarantola (2005). *Inverse problem theory and model parameter estimation*. SIAM.
- [Tikhonov et Arsenin, 1977] A. N. Tikhonov et V. Y. Arsenin (1977). *Solutions of Ill-Posed Problems*. Winston & Sons.
- [Villon *et al.*, 2002] P. Villon, H. Borouchaki, et K. Saanouni (2002). Transfert de champs plastiquement admissibles. *Comptes Rendus Mécanique*, 330 :313–318.
- [Zhang, 2010] E. Zhang (2010). *Étude de problèmes inverses en dynamique des structures par inférence bayésienne*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne.
- [Zhang, 2012] X. Zhang (2012). *Contribution à l'étude de l'apport des coutures sur les performances mécaniques des structures composites cousues*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne.

## Résumé

La caractérisation des propriétés matérielles basée sur le dialogue essai-calcul requiert des précautions quant à la prise en compte des grandeurs physiques mises en jeu, aussi bien mesurées que calculées.

Les mesures de champs cinématiques délivrent des informations qui permettent de rendre compte du comportement local du matériau et constituent une entrée riche pour ce type de dialogue axé sur la confrontation modèle - mesure.

L'objet de ce travail est de discuter l'identification de propriétés élastiques homogènes ou hétérogènes, basée sur l'exploitation de mesures de champs, qui soulève la problématique de la prise en compte de mesures perturbées et d'hypothèses fortes de modélisation.

Le but de cette étude est de discuter deux manières différentes pour aborder le problème. La première consiste à traiter les mesures en amont de l'étape d'identification, afin de filtrer les perturbations de mesures, et est basée sur l'outil d'approximation diffuse. La seconde consiste à développer une méthode d'identification inverse à partir d'essais quasi-statiques cherchant à tenir compte du caractère incertain des mesures, dès sa formulation, en utilisant l'ensemble des informations théoriques et expérimentales disponibles, en particulier en l'absence d'informations sur les conditions aux limites. Cette méthode est basée sur les principes de l'erreur en relation de comportement modifiée, amenant à résoudre des problèmes éléments finis non standards, et a conduit à mettre en œuvre des méthodes de résolution adaptées. L'étude a permis de souligner la robustesse de la méthode face aux incertitudes de mesure, notamment en comparaison avec le recalage par éléments finis.

**Mots-clés :** Identification inverse, mesures de champs, incertitudes de mesure, erreur de modèle, élasticité hétérogène

## Abstract :

The identification of material properties based on the confrontation between the experimental data and their numerical counterpart needs to pay special attention to their reliability and then to take some precautions. Especially, when dealing with full-field measurements which provide rich kinematic information enabling new possibilities for the characterization of material constitutive parameters.

The aim of this work is to discuss the identification of the elastic parameters, for either homogeneous or heterogeneous materials, leading to the more general problem of the taking into account of noisy experimental data and strong model hypotheses.

Two different approaches are addressed in this study. The first one consists in the processing of the experimental data upstream of the identification stage, by filtering them through a diffuse approximation algorithm. The second approach focuses on the development of an inverse identification strategy from static tests. This method takes into account the uncertainty of the measurements from the beginning of the formulation and is based on the modified constitutive relation error principles. It involves the resolution of non standard finite element problems using specific resolution methods.

The study pointed out the robustness of the proposed method towards measurement errors, in particular when compared to the finite element model updating method.

**Key words :** Inverse identification, full-field measurements, measurement errors, constitutive relation error, inhomogeneous tests