Contribution à la modélisation et à l'analyse de performances des systèmes de vélos en libre-service en vue de leur régulation : " Une Approche basée sur les réseaux de Pétri"

Taha Benarbia

▶ **To cite this version:**

Taha Benarbia. Contribution à la modélisation et à l'analyse de performances des systèmes de vélos en libre-service en vue de leur régulation : " Une Approche basée sur les réseaux de Pétri". Autre. Université de Cergy Pontoise; Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed-Boudiaf (Algérie), 2013. Français. NNT : 2013CERG0663 . tel-00968678

HAL Id: tel-00968678

https://theses.hal.science/tel-00968678

Submitted on 27 Nov 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre (UCP) : **52878 -** Année : **2013**

THESE

préparée pour l'obtention du grade de

DOCTEUR

de L'UNIVERSITE DES SCIENCES DE LA TECHNOLOGIE D'ORAN (USTO)
et de L'UNIVERSITE DE CERGY-PONTOISE (UCP)

Spécialité Génie Electrique et Electronique

CONTRIBUTION A LA MODELISATION ET A L'ANALYSE DE PERFORMANCES DES SYSTEMES DE VELOS EN LIBRE-SERVICE EN VUE DE LEUR REGULATION

« UNE APPROCHE BASEE SUR LES RESEAUX DE PETRI »

Taha BENARBIA

Thèse soutenue le 19/12/2013

JURY

Président :	
Mohamed BOUHAMIDA	Professeur, Univ. Sciences et Technologie d'Oran
Rapporteurs :	
Lionel AMODEO	Professeur, UTT- Univ. de Technologie de Troyes, LOSI
Zaki SARI	Professeur, Univ. Abou Bekr Belkaid de Tlemcen, MELT
Examinateurs :	
Directeurs de thèse :	
- Jean-Pierre BARBOT	Professeur, ENSEA, ECS-Lab
- Abdelhafid OMARI	Professeur, Univ. Sciences et Technologie d'Oran
Encadrants :	
- A-Moumen DARCHERIF	Enseignant-Chercheur (HDR), EPMI, ECS-Lab
- Karim LABADI	Enseignant-Chercheur, EPMI, ECS-Lab

DEDICACES

A mes très chers parents

A mes frères et sœurs

A toute ma famille

A ma future femme

.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus sincères à mes co-encadrants de thèse effectuée en cotutelle regroupant trois établissements : l'USTO- Oran (Algérie), l'EPMI (ECS-Lab) Cergy-Pontoise (France) et l'UCP, Cergy-Pontoise (France) :

- Mr. Karim LABADI, Enseignant-Chercheur au sein de l'EPMI (ECS-Lab), qui est à l'origine du sujet de la thèse et de la cotutelle. Je tiens à le remercier infiniment pour m'avoir aidé tout au long du travail présenté dans ce mémoire. Je lui suis très reconnaissant pour son constant soutien scientifique, sa proximité et ses grandes qualités humaines.
- Mr. Abdelhafid Omari, Professeur à l'USTO, d'avoir bien voulu être mon superviseur du coté Algérien. Je le remercie pour avoir assuré le bon déroulement de la cotutelle entre les différents établissements.
- Mr. Abdel-Moumen DARCHERIF, Directeur général de l'EPMI et Enseignant-Chercheur (HdR) à ECS-Lab, pour m'avoir permis de travailler au sein de son établissement dans les meilleures conditions. Je le remercie également pour tous ses précieux conseils et son implication dans le travail réalisé.
- Mr. Jean-Pierre Barbot, Professeur et Directeur du laboratoire ECS-Lab. Je le remercie pour avoir supervisé le bon déroulement scientifique de ma thèse et également pour sa précieuse aide administrative au niveau de l'Ecole doctorale de l'Université de Cergy- Pontoise.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à tous les membres du jury et en particulier aux professeurs qui m'ont fait l'honneur de rapporter et/ou d'examiner les travaux présentés dans ce mémoire.

Je tiens également à remercier l'AUF, L'Agence universitaire de la Francophonie, qui m'a accordé une bourse de cinq mois et qui m'a permis de finaliser ma thèse dans de meilleures conditions.

Un remerciement spécial à l'EPMI, représenté par Mr. A. Moumen DARCHERIF, Directeur général, qui a pris en charge tous les frais liés aux publications dans des congrès.

Mes remerciements s'adressent également à Mr. HAMACI, Enseignant-Chercheur au sein de l'EPMI. Qu'il soit remercié pour ces conseils et toute son aide durant mes stages effectués au sein du laboratoire de productique de l'EPMI.

Un grand remerciement à Mr. BOUHAMIDA, professeur à l'USTO, pour son aide administrative qui a facilité le déroulement de la cotutelle et de mes démarches de soutenance.

J'exprime mes sincères remerciements à Mr. Jean-Michel BRUCKER, Directeur scientifique de l'EPMI pour son chaleureux accueil durant mes multiples stages au sein de l'EPMI.

Merci également à mon collègue RAHIM qui a effectué sa thèse durant la même période que moi et sous le même statut. Notre soutien mutuel a joué un rôle important durant nos thèses.

Que tous mes collègues, amis et toutes les personnes, de l'EPMI et de l'USTO soient également remerciés pour leur constant soutien.

Résumé

CONTRIBUTION A LA MODELISATION ET A L'ANALYSE DE PERFORMANCES DES SYSTEMES DE VELOS EN LIBRE-SERVICE EN VUE DE LEUR REGULATION « UNE APPROCHE BASEE SUR LES RESEAUX DE PETRI »

Résumé : Le travail présenté dans cette thèse constitue une contribution originale à la modélisation et à l'analyse de performances des systèmes de vélos en libre-service. De nombreuses villes en Europe ont suscité un intérêt considérable et un engouement à l'égard de ce nouveau mode de transport écologique (Vélib' à Paris, Vélov'v à Lyon, Bicing à Barcelone, ...) et dont les progrès technologiques ne cessent de les faire émerger dans les quatre coins du monde. Contrairement aux systèmes de transport traditionnels, très peu d'études fondamentales ont été menées et pourtant, de nombreuses questions émergent, la principale étant celle d'un rééquilibrage (régulation) de la distribution de vélos dans les différentes stations afin de satisfaire au mieux les demandes des usagers. C'est dans ce cadre que s'inscrit cette thèse de doctorat portant sur la modélisation, l'analyse et l'évaluation de performances de ce mode de transport en libre service. Ce travail, basé sur les réseaux de Petri, est d'une aide précieuse pour la mise en œuvre, l'exploitation et la régulation de ce type de systèmes.

La complexité dynamique de tels systèmes, perçus comme des systèmes à événements discrets, nous a conduit au développement d'une approche à base d'une classe particulière de réseaux de Petri stochastiques ayant des arcs à poids variables pertinents aussi bien pour l'analyse que pour la simulation. Un ensemble de modèles et de méthodes d'analyse associées sont développés en vue de leur régulation, en prenant en compte différents paramètres de décision qui les caractérisent notamment le nombre de stations, la capacité de chaque station, les seuils de régulation, la capacité des véhicules de régulation, le type et/ou la fréquence de régulation (périodique ou continue) choisis, etc. En plus d'être paramétrables, les modèles proposés permettent d'étudier plusieurs configurations en fonction de différents modes de fonctionnement possibles (mode sans régulation, mode avec régulation, mode dynamique, mode statique, etc). La présentation de cette thèse comporte plusieurs illustrations et applications permettant d'aider le lecteur à la compréhension du travail développé.

A notre connaissance, il s'agit d'un premier travail du genre dans la littérature sur les réseaux de Petri et plus généralement, l'un des premiers sur les systèmes de vélos en libre-service.

Mots clés : Transport urbain, systèmes de vélos en libre-service, régulation, contrôle, réseaux de Petri, systèmes à événements discrets, modélisation, évaluation de performances, simulation.

TABLE DES MATIÈRES

RESUME	3
Tables de matières	5
INTRODUCTION GENERALE	9

CHAPITRE 1. Etude des systèmes de vélos en libre service (SVLS)

Introduction	27
1. Présentation des SVLS	15
2. Evolution et impacts des SVLS	17
3. Questions déterminantes	19
4. Problème de la régulation	20
5. Etude bibliographique	23
5.1 Problématiques soulevées	23
5.2. Etude de la littérature	24
6. Positionnement de notre approche	26
Conclusion	27

CHAPITRE 2. Réseaux de Petri avec des arcs à poids variables en vue de la modélisation des SVLS

Introduction	29
1. Introduction aux réseaux de Petri	29
1.1. Descriptif de base d'un RdP	30
1.2. Extensions du formalisme de base	31
1.3. Applications des réseaux de Petri	32
2. Formalisme et concepts de base	33
3. Concept des arcs à poids variables	34
4. Temps et politiques d'exécution	35
4.1. Temps associé au modèle	35
4.2. Politiques d'exécution	36
5. Application à la régulation	37
5.1. Exemple d'illustration 1	38
5.1. Exemple d'illustration 2	39
6. Etude d'un RdP ayant des arcs à poids variables	40
6.1. Exemple de modélisation	40
6.2. Codage matriciel	42
6.3. Equation d'état	43
6.4. Graphe des marquages	44
6.5. Evaluation de performances	45
6.6. Simulation à événements discrets	47
Conclusion	48

CHAPITRE 3. Modélisation des systèmes de vélos en libre service en vue de leur régulation

Introduction	49
1. Un rappel sur le problème de régulation	49
1.1. Les systèmes de vélos en libre service	49

1.2. Le système en vue de la modélisation 50
2. Modélisation des systèmes de vélos en libre service 51
2.1. Développement du modèle de base 51
2.2. Descriptif du module de régulation des stations 52
2.3. Temporisations associées au module de régulation 58
2.4. Descriptif du module de flux de vélos inter-stations 59
2.5. Descriptif du module de la tournée du véhicule de régulation 60
2.6. Généralisation du modèle pour un réseau à N stations 62
3. Extension du modèle de base 63
3.1. Descriptif général du modèle étendu 64
3.2. Fonctionnement du modèle de régulation 66
3.3. Temporisations du module de régulation 73
4. Un nouveau modèle à base d'alertes 75
4.1. Définition de la politique de contrôle (E_i, R_i, P_i) 75
4.2. Descriptif du modèle à base d'alertes 76
4.3. Exemple d'illustration du modèle 79
Conclusion 81

CHAPITRE 4. Evaluation de performances à l'aide de la simulation à événements discrets

Introduction 83
1. Configuration des modèles RdPs 83
1.1. Définitions des configurations 84
2. Simulation à événements discrets 85
2.1. Algorithme général de simulation 85
2.2. Architecture de l'outil de simulation 86
3. Evaluation de performances 89
3.1. Nombre moyen de jetons dans une place 89
3.2. Temps de séjour moyen d'un jeton dans une place 90
3.3. Fréquence moyenne de franchissement d'une transition 91
3.4. Taux de rupture ou de saturation du marquage d'une place (à capacité limitée) 91
4. Exemple d'illustration (cas d'un SVLS) 91
4.1. Simulation du modèle sous la configuration 1 (Cas dynamique avec régulation) 92
4.2. Simulation du modèle sous la configuration 2 (Cas dynamique sans régulation) 93
4.3. Simulation du modèle sous la configuration 3 (cas statique) 94
4.4. Evaluation de performance du modèle 95
Conclusion 97

CHAPITRE 5. Application à un cas réel : VELITUL

Introduction 99
1. Présentation de « VELITUL » 99
1.1. Descriptif du système 99
1.2. Caractéristiques du système 101
1.3. Paramètres du modèle RdP 104
2. Simulation et évaluation de performances 105
2.1. Mode dynamique sans régulation 105
2.2. Mode dynamique avec régulation 107
2.3. Mode statique (sans régulation) 111
2.4. Mode dynamique avec régulation partielle 113
Conclusion 115

CONCLUSION GENERALE 117
ANNEXE 121
LISTE DE PUBLICATIONS 125
BIBLIOGRAPHIE 127

Introduction Générale

La croissance de la population urbaine, le développement et l'extension des villes, les préoccupations environnementales et l'augmentation des prix des carburants ont fait du transport urbain et de sa gestion un des enjeux majeurs pour la ville de demain. L'importance des systèmes de transport public ne cesse de croître. Ces systèmes doivent répondre à une demande multiple et croissante de la mobilité des usagers qui se montrent de plus en plus exigeants face aux services offerts par certaines sociétés de transport public. Les problèmes de congestion, de pollution atmosphérique, de nuisances sonores et d'insécurité routière qui en découlent, incitent les pouvoirs publics et les compagnies de transport à multiplier des efforts pour maintenir et améliorer la qualité de leurs services, afin de rendre le monde des transports collectifs plus attractifs que les transports individuels. Ces derniers restent préférés des usagers pour leur flexibilité évidente face aux transports collectifs. Ceci explique en partie la forte croissance du trafic constaté notamment en milieu urbain.

Les transports urbains sont un domaine d'innovation depuis longtemps. Au cours de ces dernières années, les enjeux du développement durable et de l'aménagement du territoire ont conduit les sociétés actuelles à une réelle prise de conscience des questions environnementales ainsi qu'à des révolutions dans le domaine des transports urbains notamment avec l'introduction des systèmes de vélos en libre service (SVLS). De nombreuses villes en Europe ont suscité un intérêt considérable et un engouement à l'égard de ce nouveau mode de transport écologique (Vélib' à Paris, Vélov'v à Lyon, Bicing à Barcelone, ...) qui présentent plusieurs avantages du point de vue socio-économique, de l'espace public, de la santé ou encore de l'environnement… et dont les progrès technologiques ne cessent de les faire émerger dans les quatre coins du monde. Malgré le grand succès de ce nouveau mode de transport et contrairement aux systèmes de transport traditionnels, peu d'études fondamentales sur la mise en œuvre et l'exploitation de ces systèmes ont été menées. Pourtant, de nombreuses questions émergent, la principale étant celle d'un rééquilibrage efficace de la distribution des vélos dans les différentes stations composant de tels réseaux de transport. Le rééquilibrage ou la régulation consiste pour l'exploitant à maintenir dans chaque station un certain nombre de vélos disponibles et aussi de places libres, afin de satisfaire au mieux les demandes des usagers. Cette régulation se fait souvent par le biais de véhicules qui font des tournées pour le rééquilibrage des stations. D'autres questions telles que la taille des stations, le dimensionnement de la flotte de véhicules, la localisation des stations sont également considérables.

Du point de vue scientifique, les systèmes de vélos en libre service peuvent être perçus comme des systèmes à événements discrets (SED). La dynamique de cette classe de systèmes est gouvernée par l'occurrence d'événements dans un espace d'état discret (par exemple l'arrivée et le départ d'un vélo dans une station, état d'une station, …). D'une façon similaire à d'autres systèmes de cette même catégorie, les systèmes de vélos en libre service ont une dynamique régie par différents phénomènes dont la synchronisation, le

parallélisme, la concurrence et le partage de ressources. La diversité de ces phénomènes rend l'étude de ces systèmes plus difficile et plusieurs facteurs de complexité sont également à prendre en compte notamment :

- Réseaux dense et de grande taille : un réseau comme Vélib à Paris compte plus de 1249 stations et de 17493 vélos : (http://www.parisavelo.net/stats.php consulté le 13 janvier 2013).
- Dynamique complexe et aléatoire : la dynamique d'un réseau de vélos en libre service est très complexe puisqu'il est difficile de prédire tous les déplacements qui vont être effectués et/ou la distribution exacte de vélos dans les différentes stations.
- Fonctionnement en libre-service : le mode de fonctionnement en libre service de ces systèmes rend encore leur comportement dynamique plus complexe nécessitant des interventions de contrôle et de rééquilibrage.

A ce jour, il n'existe pas de cadre théorique ou une méthodologie standard pour permettre une résolution exhaustive des différents problèmes posés par les systèmes à événements discrets. Plusieurs formalismes (automates, réseaux de Petri, algèbre de max plus, files d'attentes, …) sont développés et il n'existe aucune réponse toute faite pour choisir un modèle le mieux adapté. En revanche, la littérature sur les réseaux de Petri (RdP) est fort riche et comprend de nombreux résultats théoriques et pratiques. Les réseaux de Petri constituent un support à la fois graphique et mathématique performant aussi bien pour l'analyse et l'évaluation analytique que pour la simulation du système étudié. Ils sont largement utilisés pour la modélisation et l'analyse de systèmes dynamiques de nature variées tels que les systèmes de production, les systèmes logistiques, les systèmes de télécommunication ou encore les réseaux informatiques. Leur grand intérêt a donné naissance à plusieurs variantes couvrant les systèmes continus, les systèmes discrets et les systèmes hybrides. Leur champs d'application ne se limite pas uniquement à la modélisation et à l'évaluation de performances, mais ils sont également utilisés pour des thèmes plus spécifiques notamment la supervision, le diagnostic, la commande, le pilotage, l'ordonnancement ou encore l'optimisation de performances. La pertinence du choix des réseaux de Petri comme un outil de modélisation et d'étude des systèmes de transport a été déjà montrée au travers de quelques applications. Ces dernières se focalisent souvent sur la régulation des feux de trafic (JEN 1992, DIC 1994, GAL 1996, WAN 1999, DIF 2004, TOL 2008). Néanmoins, quelques auteurs ont développé des travaux autour de la modélisation, l'évaluation et/ou l'optimisation des systèmes de transport urbains (CAS 2002, BOU 2003, ABB 2003, NAI 2003).

Dans le cadre de cette thèse de doctorat, nous nous intéressons à un nouveau mode de transport urbain en plein essor et dont l'organisation, la gestion et la régulation s'avèrent plus complexes à cause notamment du mode de fonctionnement en libre-service. La grande complexité des SVLS du point de vue dynamique (réseau dense, comportement stochastique, dynamique variable, problème de rééquilibrage, …) nous a conduit au développement d'une approche originale pour la modélisation, l'analyse de performances et la simulation basée sur une classe particulière de réseaux de Petri stochastiques ayant des arcs à poids variables. Tout en s'attachant plus particulièrement au problème crucial lié à leur régulation, le travail développé dans cette thèse est d'une aide précieuse pour la mise en œuvre et l'exploitation de ce nouveau moyen de transport public. Ce mémoire s'organise autour de cinq chapitres dont les principaux objectifs sont décrits dans les paragraphes suivants :

- **Chapitre 1 :** Après cette introduction générale dont l'objectif était de donner un aperçu rapide et argumenté sur notre travail, le premier chapitre de ce mémoire sera naturellement dédié à l'étude des systèmes de vélos en libre service. Dans un premier temps, une présentation générique sera faite afin d'accumuler un ensemble de renseignements sur le fonctionnement et la nature des problématiques soulevées par cette classe de systèmes de transport. En s'attachant plus particulièrement à leur problème lié au rééquilibrage (régulation) des stations, un état de l'art sera effectué sur les travaux existants dans ce domaine. En effet, tout récemment, on voit de plus en plus apparaitre dans la littérature les premiers travaux dans ce domaine utilisant en particulier des techniques de recherche opérationnelle telle que la programmation linéaire.

- **Chapitre 2** Dans le deuxième chapitre, nous nous intéresserons aux réseaux de Petri comme un outil de modélisation et d'analyse de performances des systèmes à événements discrets. Après une présentation générale de l'outil RdP, avec une étude bibliographique montrant notamment leur potentiel pour l'étude des systèmes de transport, nous allons introduire une classe particulière de réseaux de Petri stochastiques ayant des arcs à poids variables en vue de la modélisation, de l'analyse et de la régulation des systèmes de vélos en libre service nécessitant de complexes opérations de contrôle et de rééquilibrage (régulation). Ainsi, le concept des arcs à poids variables, inspiré des réseaux de Petri lots déterministes et stochastiques (BDSPN) (CHE 2005, LAB 2005, LAB 2007), associé aux arcs inhibiteurs a un fort pouvoir d'expression du contrôle et de la gestion de l'état futur du système en fonction de son état actuel.

- **Chapitre 3 :** Cette partie du mémoire sera consacrée à la modélisation des systèmes de vélos en libre service en vue de leur régulation. A base d'une classe particulière de réseaux de Petri stochastiques ayant des arcs à poids variables (chapitre 2), un ensemble de modèles seront développés prenant en compte les différents paramètres de décision de ces systèmes (nombre de stations, capacité de chaque station, seuil de régulation, capacité des camions de régulation, régulation périodique ou continue, …). En plus d'être paramétrables, les modèles proposés sont également configurables. Ainsi, ils permettent d'étudier plusieurs configurations notamment : mode sans la régulation (nuit ou service indisponible), mode avec régulation, mode de fonctionnement dynamique ou statique, etc. Les modèles seront développés sous une forme modulaire facilitant ainsi la compréhension des différentes fonctions utilisées et leur généralisation à des réseaux à N stations. Le tout sera accompagné d'une présentation formelle de la dynamique associée et d'un ensemble d'exemples d'illustration.

- **Chapitre 4 :** Dans ce chapitre, il s'agit de développer les techniques d'analyse pour exploiter les modèles construits. En particulier, nous nous intéresserons à l'évaluation de performances. Un ensemble d'indicateurs seront formalisés permettant de juger la performance d'un réseau de vélos en libre service sur différents angles suivant les paramètres, les configurations et/ou les politiques de régulation choisis. Parmi les indicateurs formalisés à base des modèles RdP, nous citons par exemple : le nombre moyen de vélos dans une station, le temps de séjour moyen d'un vélo dans une station (rotation des vélos), le taux de rupture et/ou de saturation d'une station, etc. Par ailleurs, connaissant la complexité et la grande dimension des systèmes en question, l'analyse et l'évaluation de performances via des méthodes numériques (analytiques) ou via la simulation à événements discrets vont s'avérer incontournables. Dans le cadre de notre travail,

nous allons opter pour la seconde technique vu les limites que peuvent avoir les méthodes analytiques basées sur la résolution des processus stochastiques associés aux modèles RdP. Ainsi, un outil de simulation adapté a été développé et sera utilisé pour la validation et l'application de nos modèles. Ce point fera l'objet du chapitre suivant.

- **Chapitre 5 :** Après le développement de notre approche de modélisation, d'analyse et d'évaluation de performances des systèmes de vélos en libre service en vue de leur régulation, dans les chapitres précédents, ce dernier chapitre du mémoire est une démonstration de la richesse et du potentiel de notre approche pour l'étude de cas réels. Notre étude porte sur VELITUL, un service de vélos en libre service lancé en 2010 par Laval Agglomération (France). Après la présentation du système considéré, ce dernier sera étudié en utilisant un de nos modèles développés au chapitre n°3 afin de montrer que notre approche est pertinente aussi bien pour la simulation que pour l'analyse en vue de la régulation et de l'amélioration de la performance du système.

Bien évidemment, ce mémoire de thèse sera suivi d'une large conclusion et d'un ensemble de perspectives de travail. Ces dernières concernent en particulier une deuxième thèse qui est lancée depuis septembre 2013 par M. Labadi (EPMI-ECS Lab) en collaboration avec M. Kacem, professeur à l'Université de Lorraine (Metz). Une partie de cette nouvelle thèse constitue une suite du travail que nous avons développé dans ce mémoire avec une forte orientation vers l'optimisation de ces systèmes. En effet, il s'avère que le couplage des modèles développés dans cette thèse avec des techniques d'optimisation tels que les algorithmes génétiques va permettre d'optimiser le système étudié notamment en termes des politiques de régulation utilisées et des paramétrages associés (KAD 2013).

Par ailleurs, cette thèse constitue le premier travail du genre dans la littérature sur les réseaux de Petri et, à notre connaissance, l'une des toutes premières thèses sur les systèmes de vélos en libre-service. En termes de la production scientifique, les travaux présentés dans la suite de ce document ont été valorisés en faisant l'objet de plusieurs publications scientifiques listées ci-dessous :

2 articles de revues internationales

1. Benarbia, T., Labadi, K., Darcherif, M., and M. Chayet (2012) "Modelling and Control of Self-Service Public Bicycle Systems by Using Petri Nets", **International Journal of Modeling, Identification and Control (IJMIC),** Vol.17, No. 3, pp.173-194. (21 pages).

2. Benarbia, T., Labadi, J.P, Barbot, M., and A. Omari (2013) "Control and Balancing of Public Bicycle Sharing Systems: A Discrete Event Approach", **IEEE Transactions on Automation Science and Engineering (T-ASE)**, Vol. X, No. X, pp. XXX. (Under revision).

1 chapitre de livre (sur invitation)

3. Labadi K, Benarbia T, Hamaci H, and Darcherif M, (2012), "Petri Nets Models for Analysis and Control of Public Bicycle-Sharing Systems", **Petri Nets - Manufacturing and Computer Science, Pawel Pawlewski (Ed.), ISBN: 978-953-51-0700-2**, Chapter n° 21. (28 pages)

4 articles de conf. internationales

4. Benarbia, T., Labadi, K., Barbot, JP., Omari, A., (2013) "Real-Time Inventory Control and Rebalancing in Bike-Sharing Systems by Using a Stochastic Petri Net Model", **3th International Conference on Systems and Control (ICSC'13-IEEE)**, 29-31 October 2013, Algiers, Algeria

5. Benarbia, T., Labadi, K., Omari, A., Barbot, JP., (2013) "Balancing dynamic bike-Sharing Systems : A Petri nets with variable arc weights based approach", **CoDIT 2013, IEEE International Conference on Control, Decision and Information Technologies**, May 6-8, Hammamet, Tunisia.

6. Benarbia, T., Labadi, K., and Darcherif, M., (2011) "A Petri Net Approach for Modelling, Performance Evaluation and Control of Self-Service Public Bicycle Systems", **16th International IEEE conference on Emerging Technologies on Factory Automation**, ETFA'2011, September 5-9 2011, Toulouse, France.

7. Labadi, K., Benarbia, T., Darcherif, M., (2010) "Sur la régulation des systèmes de vélos en libre-service : approche basée sur les réseaux de Petri (avec des arcs a poids variables)", **8th ENIM IFAC International Conference of Modeling and Simulation**, MOSIM'10, 10 au 12 mai 2010 - Hammamet – Tunisia.

1 article de conf. nationale

8. Karim LABADI, Samir Hamaci, Taha Benarbia (2010) "Un modèle dynamique pour la régulation des systèmes de vélos en libre-service", ROADEF 2010, **11e Congrès annuel de la société française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision**, 24-26 février 2010, Toulouse.

1 séminaire (sans actes)

9. Participation à la **Semaine de la recherche et de l'innovation en Val d'Oise – 9ème Edition**, 21 au 24 mai (2012) "Systèmes de vélos en libre-service : quelles modélisations et simulations en vue de leur régulation ? "

>> Notre présentation a été suivie d'un témoignage de M. Martine, Communauté d'Agglomération de Cergy-Pontoise. Pôle Mobilité et Stationnement : société VELO2.

Chapitre 1

Etude des systèmes de vélos en libre service (SVLS)

Ce premier chapitre, dédié à l'étude des systèmes de vélos en libre-service, a un double objectif. Premièrement, il s'agit de faire une présentation générale de ce nouveau mode de transport urbain afin d'accumuler des renseignements sur leurs caractéristiques, leur fonctionnement et les problématiques qu'ils soulèvent. D'autre part et comme deuxième objectif, il s'agit de mener une étude bibliographique afin de dresser un état de l'art sur les études fondamentales récemment menées pour la mise en œuvre, l'exploitation et/ou l'optimisation de ce type de systèmes.

1. Présentation des SVLS

Les systèmes de vélos en libre service (SVLS) constituent aujourd'hui un service de mobilité très répandu à travers le monde et une alternative aux transports motorisés (trains, voitures, …). L'introduction de ce moyen transport urbain a été particulièrement stimulée, au cours de ces dernières années, par les enjeux du développement durable et de l'aménagement du territoire qui ont conduit les sociétés actuelles à une réelle prise de conscience des questions environnementales. De nombreuses villes en Europe ont suscité un intérêt considérable et un engouement à l'égard des SVLS (Vélib' à Paris, Vélov'v à Lyon, Bicing à Barcelone, ...). Ce nouveau mode de transport présente de nombreux avantages du point de vue socio-économique ; de l'espace public ; de la santé ou encore de l'environnement… et dont les progrès technologiques ne cessent de les faire émerger dans les quatre coins du monde comme le montrent si bien les Figures ci-dessous (1) et (2).

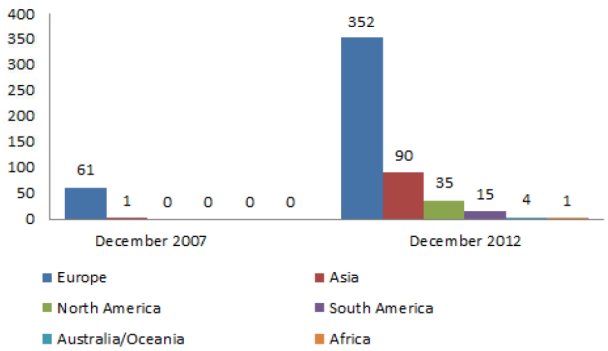


Figure 1. Progression du nombre de SVLS (http://bike-sharing.blogspot.fr/)

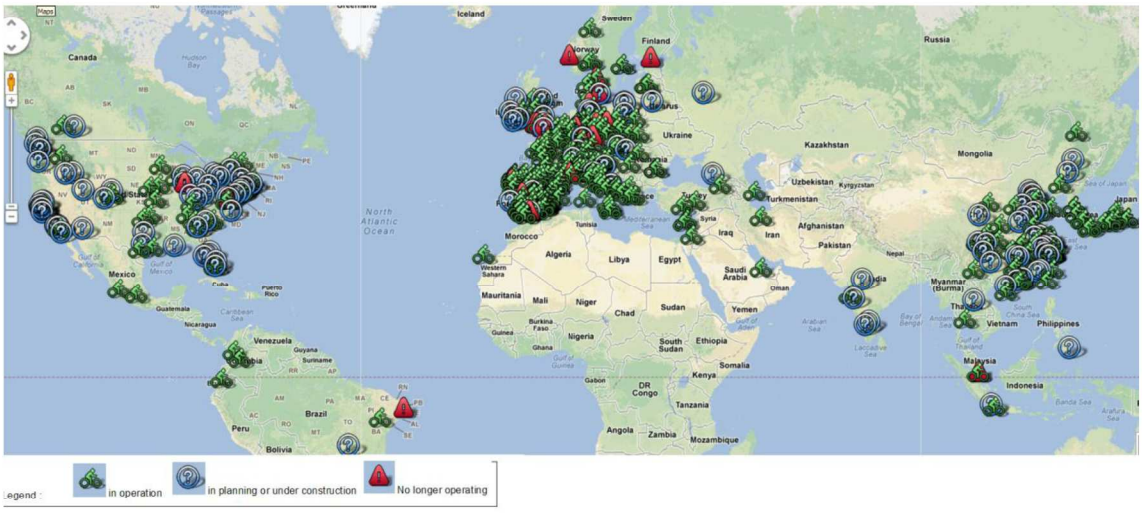


Figure 2. Introduction des SVLS à l'échelle mondiale (http://bike-sharing.blogspot.fr/)

(a)

(b)

(c)

Figure 3. (a) station pleine, (b) station vide, (c) voiture de régulation utilisée par Vélib (http://www.velib.paris.fr/)

Le concept d'un SVLS est à priori simple. Les municipalités et/ou des compagnies privées, mettent à disposition des vélos en libre service afin de permettre aux usagers d'effectuer des déplacements de proximité principalement en milieu urbain. Il s'agit d'un réseau composé d'un ensemble de stations couvrant un espace géographique donné (ville, quartier, ...). Chaque station est équipée d'un nombre limité de points d'attache de vélos déterminé en fonction de l'emplacement de la station et de sa fréquentation estimée. Les stations sont constituées de bornes de location en libre-service disponibles en général 24h/24. Elles sont distantes entre elles de quelques centaines de mètres (300 mètres environ pour le Vélib' à Paris). Pour faire son trajet, chaque usager prend un vélo d'une station et le dépose dans une autre station pouvant être la même. En revanche, pour l'exploitant, ce concept est loin d'être aussi simple au quotidien. En effet, afin de satisfaire au mieux la demande des usagers, l'exploitant doit constamment faire face au problème de rééquilibrage des stations en termes du nombre de vélos et de places libres disponibles. C'est l'une des questions cruciales pour le succès de ce type de service public. Le rééquilibrage ou la régulation consiste pour l'exploitant à veiller sur la redistribution des vélos entre les différentes stations afin d'éviter deux situations désagréables pour les usagers à savoir : (a) les stations pleines, car elles représentent des situations extrêmement inconfortables pour les usagers, (b) les stations vides pour permettre une meilleure disponibilité de vélos aux usagers (Figure 3).

2. Evolution et impacts des SVLS

Historiquement parlant, la première génération est apparue à Amsterdam aux Pays-Bas, en juillet 1965, sous le nom de White Bikes. Ce premier programme de vélos publics a été mis en place par le mouvement PROVO, un groupe de jeunes anarchistes Hollandais se revendiquant écologiques. Ces vélos ont été librement déposés dans les rues sans aucun système de sécurité, ni d'identification de l'utilisateur. L'expérience a vite échoué ! Les vélos ont été très rapidement vandalisés et même parfois repeints. En 1974, c'est dans la Rochelle, en France, qu'un programme similaire a vu le jour avec l'installation de 350 vélos (jaunes) répartis dans trois stations en centre-ville. L'utilisation gratuite des vélos avait pour conséquence l'appropriation des vélos par les usagers. Malgré les premiers échecs essuyés, une deuxième génération de SVLS a vu le jour en 1995 à Copenhague (Danemark). Cette nouvelle génération intègre une dimension financière (caution) pour inciter les usagers à ramener le vélo emprunté dans une station pour récupérer leur caution et permettre un meilleur partage du parc de vélos en libre service. Malheureusement et encore une fois, les utilisateurs anonymes gardaient le vélo car les incitations étaient insuffisantes.

Une année après, en 1996, une troisième génération est apparue à l'Université de Portsmouth où les étudiants pouvaient utiliser les vélos grâce à un système de cartes magnétiques, remplaçant le mécanisme de verrouillage à monnaie. Cette génération s'est très lentement étendue en Europe. D'abord, en 1998 à Rennes avec les « Vélos à la carte », puis à Munich en 2000 avec « Call A Bike ». On voit donc apparaître une nouvelle génération entièrement automatisée, dotée de mécanismes de verrouillage contrôlés par des dispositifs électroniques perfectionnés. L'informatisation du système grâce à l'utilisation des NTIC comme le GSM, le GPRS, voire l'UMTS ou la fibre optique, permet la traçabilité du vélo, de l'utilisateur et la diminution du risque de vol. C'est à partir de cette génération que le concept a été adopté et développé sous différentes déclinaisons dans plusieurs grandes villes du monde entier et plus particulièrement en Europe (Vélib' à Paris, Call a bike en Allemagne, Bicincittà en Italie, Oybyke à Londres, City Bike à Copenhague, U-Bike à Calgary, Bicing à Barcelone, BIXI à Montréal, ...). Aujourd'hui, les SVLS est un grand phénomène dans le paysage des transports urbains.

L'innovation et le succès n'est qu'à ces débuts puisqu'une quatrième génération est en cours de développement avec de plus en plus d'équipements électroniques (pédale à assistance électrique, énergies renouvelables, …), de communication et de localisation (GPS, i Phone, …) permettant un meilleur contrôle du réseau de vélos et une assistance technique et fonctionnelle des usagers. Ainsi, depuis leur apparition, les SVLS ont considérablement évolué sur différents aspects liés au fonctionnement, aux technologies utilisées et/ou aux modes de contrôle et de gestion adoptés. Le Tableau 1 est une synthèse des principales caractéristiques de ces différentes générations.

Génération / Ville / Année			Caractéristiques
n°1	Amsterdam	1965	➢ Système gratuit ; vélos déposés dans la rue sans aucun système de sécurité ; pas d'identification ; système non réussi : vol, vandalisme ;…
n°2	Copenhague	1995	➢ Système payant ; dépôt de caution par jeton ; système sans identification ; possibilité de vol des vélos ; …
n°3	Portsmouth	1996	➢ Système payant ; système automatisé ; identification par carte magnétique ; risque de vol réduit ; …
n°4	Monaco	2008	➢ Encore du progrès… vélos avec assistance électrique, mais problème de charge de batteries !

Tableau 1. Evolution des SVLS à travers les quatre générations

Impact	Avantages
Socio-économique	➢ Décongestion des transports en commun et de la circulation routière, Gain de temps sur de courtes distances (généralement jusqu'à 5km), Besoins limités d'infrastructures et peu d'incidences sur les infrastructures existantes. Réduction significative de la consommation d'énergie,
Bien- être et santé	➢ Plusieurs études médicales témoignent de l'importance d'une activité physique régulière notamment en pratiquant le vélo : Allongement de la durée de vie et la réduction de la probabilité d'apparition de nombreuses maladies (maladies cardiovasculaires, obésité, diabète, …).
Environnemental	➢ Les systèmes de vélo en libre-service permettraient ainsi d'éviter un certain nombre de nuisances environnementales : Réduction de la pollution de l'air, Réduction de la pollution sonore, Meilleur aménagement et optimisation de l'espace public.

Tableau 2. Avantages et impacts des SVLS dans le paysage du transport publics

L'introduction des systèmes de vélos en libre-service n'est sûrement pas le fruit du hasard. Malgré l'échec des premières générations (vol, vandalisme,…), les progrès technologiques ne cessent de les faire émerger dans les quatre coins du monde (Figures 1

et 2). Ce mode de transport écologique complètent parfaitement les réseaux de transport traditionnels (bus, métro, trains, …). Il est particulièrement adapté aux courts trajets et aux parcours qui ne sont pas accessibles par les autres moyens de transport traditionnel. Ainsi, les SVLS constituent un trait d'union entre les différents moyens de transport en commun. Ils font désormais partie du paysage urbain avec de réels avantages et impacts sur différents points de vue, comme le synthétise le Tableau 2.

3. Questions déterminantes

Le récent succès des systèmes de vélos en libre service ne doit pas masquer les nombreuses questions et problématiques qu'ils soulèvent avant et après leur mise en service. Comme tout système, avant même sa conception et son exploitation, plusieurs questions (tactiques et/ou stratégiques) déterminantes pour sa performance se posent. En dehors des problèmes liés aux vols, aux vandalismes et autres, le succès et la performance d'un programme de vélos en libre service dépend de plusieurs facteurs et paramètres complexes qu'il faut prendre en compte. Ils sont naturellement liés à son dimensionnent, à sa configuration, à son fonctionnement et à sa gestion. La taille des stations, le nombre de vélos par station, l'emplacement géographique des stations, la politique de gestion… en sont des exemples. Nous donnons dans le Tableau 3 un ensemble de questions ayant sans doute un impact direct sur la qualité de service et la viabilité opérationnelle et économique de tels systèmes.

Niveaux	Questions / paramètres
Niveau stratégique et tactique (Avant le déploiement)	– Nombre de vélos et de stations – Localisation géographique des stations – Capacité de chaque station – Politique de redistribution des vélos – Nombre de véhicules de régulation – Capacité des véhicules de régulation – …
Niveau opérationnel (Après le déploiement)	– Fréquences de la redistribution des vélos entre les stations – Choix du mode (statique ou dynamique) de la redistribution des vélos – Est-ce que le nombre courant de véhicules de régulation est suffisant ? – Doit-on racheter plus de vélos au réseau ? – Doit-on créer de nouvelles stations et/ou de pistes cyclables ?

Tableau 3. Questions déterminantes que soulèvement les SVLS

Pour une présentation plus complète, en plus des problématiques d'ordre opérationnel et/ou stratégique citées précédemment, les exploitants sont également confrontés à de multiples autres problématiques dont il faut faire face quotidiennement, telles que : vandalisme et vol de vélos, pannes, disfonctionnements et maintenance, confort et

sécurité des usagers, interactions avec les autres moyens de transport, gestion et entretien des espaces alloués, financement et viabilité économique, … Par ailleurs, les systèmes de vélos en libre service sont très récents dans le domaine du transport urbain. Les questions soulevées représentent de nouveaux défis scientifiques très complexes. Il y a donc nécessité de développer des modèles et des outils permettant un design optimisé et un management efficace de ce nouveau mode de transport. Cette nécessité se traduit par une demande croissante des concepteurs et des exploitants qui se trouvent confrontés à un manque de méthodes d'analyse et d'optimisation de tels systèmes complexes.

4. Problème de la régulation

Le problème de rééquilibrage (régulation) des stations dans un réseau de vélos en libre service est un problème crucial dont l'exploitant doit faire face tous les jours. Dû à la nature même du fonctionnement en libre service, d'une manière générale, les vélos ne sont pas uniformément répartis entre les différentes stations durant la journée. Les raisons sont multiples et évidentes. Pour commencer, certaines stations sont plus fréquentées que d'autres et ceci dépend en particulier de leurs emplacements géographiques (gares, universités, écoles, centre ville, lieux stratégiques, endroits touristiques, etc). D'autre part, les utilisateurs évitent très souvent de remettre les vélos empruntés dans des stations se trouvant en hauteur. Des stations situées dans des quartiers plutôt résidentiels se vident très tôt le matin, tandis que celles se trouvant à proximité des zones d'activités souffrent d'un engorgement à l'arrivée des salariés le matin et se vident rapidement en fin de journée. Par ailleurs, le déséquilibre des stations peut également être causé par des événements ponctuels ou imprévus (conditions métrologiques, jours de fêtes, jours de grèves, jours fériés et week-ends, …). D'une manière générale, le déséquilibre des stations peut être classé en deux cas :

1. *Déséquilibre temporaire :* Dans ce cas, on peut avoir à un moment donné dans la journée un ensemble de stations déséquilibrées (vides, pleines, ou pas suffisamment de vélos ou de places disponibles) mais qui peuvent revenir naturellement à une situation d'équilibre au bout d'un certain temps. On parle ici d'une régulation naturelle du réseau (ou d'une partie du réseau) qui ne nécessite pas forcément une intervention du service de régulation mis en place par l'exploitant.
2. *Déséquilibre persistant :* Dans ce cas, le déséquilibre des stations n'est pas temporaire et peut fortement dégrader la qualité de service du réseau si le rééquilibrage des stations n'est pas effectué par l'exploitant. Ainsi, des agents travaillent jour et/ou nuit pour améliorer la redistribution des vélos entre les stations. Cette régulation se fait souvent par le biais de camions qui effectuent des tournées sur le réseau afin de redistribuer les vélos et rééquilibrer les stations (Figure 4).

Plus concrètement, la régulation consiste pour l'exploitant à maintenir un nombre minimal de vélos par station pour permettre la prise de vélos par les usagers, ainsi qu'un nombre maximal inférieur à la capacité de la station pour permettre la dépose de vélos par les usagers. Afin d'appréhender la réalité du terrain de cette fonction, un excellent entretien avec les responsables de la régulation de Vélib' (Paris) est disponible sur le site internet : http://blog.velib.paris.fr/.

Comme extrait de cet entretien, nous reprenons deux réponses à deux intéressantes questions à ce sujet :

- Comment définiriez-vous le rôle de la régulation ? « Très simplement : prendre des vélos là où il y en a trop pour les emmener là où il n'y en a pas assez. Dans un modèle théorique et parfait, chaque station devrait être remplie à 50 % de Vélib', laissant ainsi une moitié de bornes vides pour accueillir de nouveaux vélos. La réalité est bien sûr plus complexe ».

- Quels sont vos objectifs chaque jour ? « Nous avons trois priorités. Tout d'abord, éviter les stations pleines, car nous savons que pour les usagers il n'y a rien de plus inconfortable que de se retrouver avec un vélo sur les bras. Puis, éviter les stations vides. Et enfin, parvenir à équilibrer vélos et places vides entre les différentes stations au niveau d'un quartier ».

Figure 4. Opération de régulation d'une station Vélib à Paris (http://www.velib.paris.fr/)

Dans la pratique, la régulation s'effectue de deux façons. D'un côté, elle peut se faire naturellement par les usagers qui retirent et restituent des vélos régulièrement. Ceci peut se produire lorsqu'il y a une faible dynamique du réseau ou il y a un équilibre naturel entre les flux sortants et entrants de vélos entre les stations. D'un autre coté, des agents de régulation répartissent les vélos lorsque les stations sont pleines ou vides en intervenant avec leurs véhicules de régulation. Ces derniers interviennent davantage sur les stations très fréquentées afin de rééquilibrer le nombre de vélos dans chaque station. Dans ce cas, l'opération de régulation peut s'effectuer en deux modes :

1. **Rééquilibrage en mode statique :** la régulation s'effectue quand le service des stations est faible (généralement la nuit). Le rééquilibrage à effectuer dépond de l'état de la station au moment de sa visite et de la demande prévue pour le jour suivant.
2. **Rééquilibrage en mode dynamique :** la régulation est effectuée pendant la journée durant la période d'activité du SVLS et la redistribution des vélos dépond de l'état de la station au moment de sa visite et de la connaissance du système.

En plus des tournées de véhicules qui se font pour le rééquilibrage des différentes stations, les dernières générations des SVLS s'appuient sur les nouvelles technologies d'informations et informatiques pour une gestion plus efficace (Figure 5).

1. La plupart des systèmes informatiques de location de vélos fonctionnent de la même manière. Le système Cyclocity de JCDecaux par exemple, utilise la solution de gestion de la maintenance (GMAO) « IBM Maximo Asset

Management ». Cette solution assure la gestion de la maintenance de la "flotte", des interventions, la régulation des flux en association avec les autres applications (gestion des abonnements, de la monétique, ...).

2. L'iPhone d'Apple propose un ensemble d'applications telle que l'application Vélib' qui est un outil d'information à la fois pratique et ludique. Cette application comprend une dizaine de fonctions qui permettent, entre autres, de connaître les stationnements disponibles et le nombre de Vélib', de calculer un trajet à vélo et de visualiser les centres d'intérêts (musées, parcs, bibliothèques,...), d'avoir des informations pratiques.

3. La plupart des prestataires des systèmes de vélos en libre service ont adopté l'application Google Maps qui offre la possibilité de se renseigner sur la disponibilité des points d'ancrage et des vélos dans une station donnée. Grâce à une carte via http://www.unvélovite.com pour Vélib'(Paris), V'Hello (Aix en Provence)... ou encore http://maps.bixi.com/ pour BIXI (Montréal), les usagers peuvent avoir des informations pratiques sur le réseau qu'ils utilisent.

4. A Paris, Velib a mis en œuvre depuis 2008 un système de bonus « bonus V'+ » dans le but d'encourager les utilisateurs à déposer leur vélo dans les stations se trouvant en hauteur. Ce bonus consiste à offrir quinze minutes de crédit-temps, cumulables sans limite, à l'utilisateur qui dépose son vélo dans une station en altitude identifiée par le logo « V'+ ». Une centaine de stations offrant ce bonus se trouvent généralement sur les reliefs de Paris à une altitude dépassant 60 mètres. Ce système de bonus a un véritable impact sur la régulation.

Les centrales de contrôle des réseaux de vélos en libre service, les agents de régulation et leurs véhicules sont généralement équipés de moyens de connexion aux stations de vélos (GPRS, GSM, ...) afin de connaître périodiquement ou en temps réel l'état du réseau et ainsi de programmer efficacement leurs tournées. Les agents disposent généralement de PDA permettant de recevoir des alertes par les centrales de contrôle pour notamment la bonne gestion des priorités entre les stations.

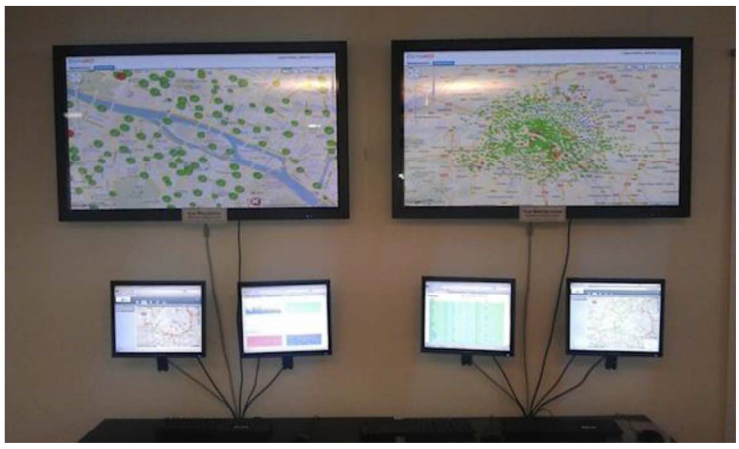


Figure 5. Salle de supervision Vélib (JCDecaux de Cyclocity)

5. Etude bibliographique

Le nombre de systèmes de vélos en libre service a explosé au cours de ces dernières années (Figure 1). Ceci n'est pas encore à l'image du nombre d'articles scientifiques consacrés à l'étude des problématiques qu'ils soulèvent (Figure 6). En effet, même si le premier programme remonte à 1965 (White Fiestsen à Amsterdam), il a fallu de nombreuses années de développements technologiques et d'équipements pour que ce phénomène explose dans le paysage du transport public.

En réalité, le Bycyklen, Copenhague en 1995, est le premier véritable réseau de vélos en libre service comportant 1000 vélos et 120 stations spéciales. Des grandes villes telles que Londres, Montréal et Paris se sont équipées de ce type de réseaux que depuis respectivement 2010, 2009 et 2007. Ainsi, l'intérêt scientifique à l'égard de ces systèmes complexes est tout nouveau. Depuis ces quelques dernières années, de nombreux chercheurs commencent à s'intéresser à ce domaine.

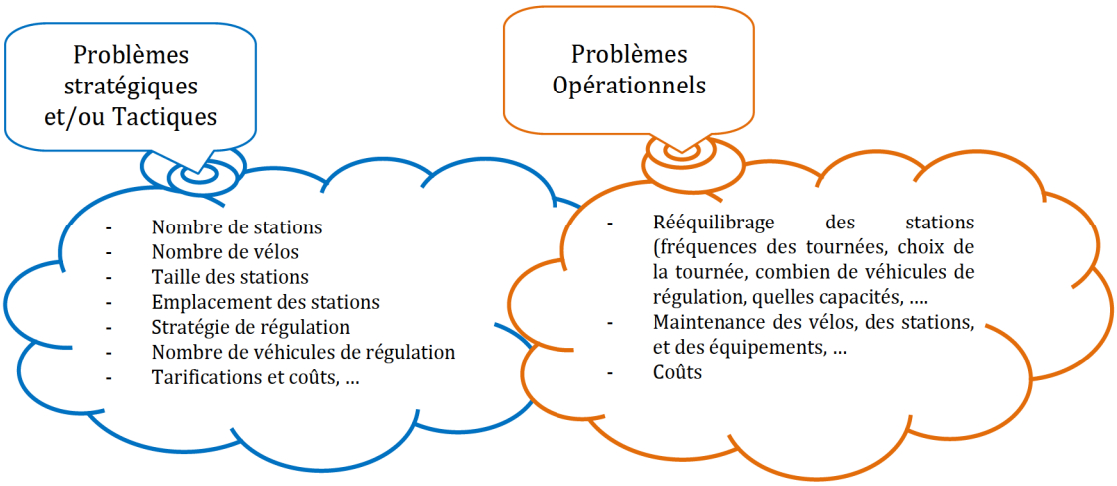


Figure 6. Problématiques soulevées par les systèmes de vélos en libre service

5.1. Problématiques soulevées

La recherche scientifique dans le domaine des systèmes de vélos en libre service peut prendre diverses orientations liées aux nombreuses questions soulevées pouvant être d'ordre tactique, stratégique et/ou opérationnel comme l'illustre la Figure 6. Ce sont des questions décisives pour la performance et la viabilité économique de ces systèmes. Formaliser et résoudre toutes ces questions nécessitent le développement de méthodes d'analyse et d'optimisation pouvant prendre en compte toute la complexité des caractéristiques et de la dynamique de ces systèmes. Cette complexité se traduit par de nombreux facteurs dont nous citons les suivants :

- Réseaux dense et de grande taille : un réseau comme Vélib à Paris compte plus de 1249 stations et de 17493 vélos : (http://www.parisavelo.net/stats.php consulté le 13 janvier 2013).
- Dynamique complexe et aléatoire : La dynamique d'un réseau de vélos en libre service est très complexe puisqu'il est impossible de prédire tous les déplacements qui vont être effectués et/ou la distribution exacte de vélos dans les différentes stations.
- Fonctionnement en libre-service : Le mode de fonctionnement en libre service de ces systèmes rend encore leur comportement dynamique plus complexe.

5.2. Etude de la littérature

La première catégorie d'articles consacrés aux systèmes de vélos en libre service porte essentiellement sur la présentation générale de ce nouveau mode de transport urbain. Dans ce type d'articles, on traite l'historique, l'évolution, l'impact et le fonctionnement de ces réseaux de transport récemment adoptés de plus en plus par de grandes villes dans le monde entier (DEM 2009, SHA 2010, WAN 2010). La lecture de ces études, permettraient aux lecteurs d'enrichir leurs connaissances sur ce nouveau mode de transport et de mieux comprendre leurs enjeux et impacts dans le paysage des transports publics.

Depuis ces quelques dernières années, une deuxième catégorie d'articles s'oriente vers des études fondamentales afin de développer des méthodes et/ou des outils de modélisation, d'analyse, de simulation et/ou d'optimisation de ces systèmes complexes. Ces travaux peuvent être classés selon le niveau décisionnel des problématiques traitées par les différents auteurs :

- **Niveau opérationnel :** Du point de vue opérationnel, le problème de rééquilibrage de stations s'impose comme le problème majeur des systèmes de vélos en libre service. Ce problème a été considéré par de nombreux auteurs sous différents angles. Le problème de rééquilibrage des stations en mode statique, en considérant la demande des usagers négligeable, a été récemment étudié par quelques auteurs (BEN 2011, SHU 2010, CHE 2012, FOR 2010). Raviv et al., (RAV 2013) ont développé plusieurs formulations mathématiques (programmes linéaires) pour ce type de problème. L'objectif des modèles proposés est la planification optimale des tournées des véhicules de régulation afin de rééquilibrer les stations la nuit ou lorsque la fréquentation des stations est très faible. Pour ce même type de problème, Chemla et al., (CHE 2011) propose un algorithme exact basé sur la génération de colonnes (la colonne dans la formulation proposée représente un trajet possible du véhicule de régulation avec une séquence d'action de retrait et de dépôt de vélos). Un deuxième algorithme de type « programmation dynamique » pour une tarification adéquate a été également proposé dans ce même travail. Avec un autre point de vue du problème de rééquilibrage de stations, Shu et al. (SHU 2010) développent un modèle dont l'objectif est de prédire une meilleure redistribution périodique des vélos dans les différentes stations. Le développement repose sur l'estimation périodique de la demande entre les différentes stations. Par ailleurs, du point de vue de la recherche opérationnelle, le problème de la régulation d'un système de vélos en libre service présente quelques analogies de formulation et de résolution avec d'autres problèmes d'optimisation connus dans la littérature. Dans ce contexte, certains auteurs ont adapté plus particulièrement les modèles développés pour le cas des problèmes connus sous les noms de « hub location inventory model » (LIN 2011) et « Pick up and delivry problem » (FOR 2010, BEN 2011). Hormis le problème de la régulation en mode statique, d'autres modes et stratégies de régulation ont été considérés dans quelques récentes études. En particulier, le cas de la régulation en mode dynamique, où le rééquilibrage des stations est effectué pendant la journée durant la période d'activité du système, a été étudié par Contrado et al. (CON 2012). Ce problème a été abordé sous d'autres formes notamment dans le cas des travaux de (NAI 2011, SAY 2012) où les auteurs mettent l'accent sur la périodicité et l'intervalle du temps associés aux opérations de régulation ou encore dans le cas des travaux de Fricker et Gast (FRI 2012) où la redistribution des véhicules s'effectue d'une manière aléatoire entre les stations pleines et les stations vides. Enfin, nous pouvons également citer les travaux de

Caggiani et Ottomanelli (CAG 2012) proposant une approche basée sur les techniques de la logique floue pour le problème de régulation en mode dynamique.

- **Niveau stratégique :** Au niveau stratégique, plusieurs questions liées au design du système avant son déploiement s'imposent naturellement. Nombre de stations et de vélos, capacités et emplacement des stations, tarifications et coûts, … sont parmi les paramètres considérés dans ce type d'études à caractère stratégique. Bien évidemment, ce niveau décisionnel est également déterminent pour l'efficacité opérationnelle du système. Dans cette catégorie de travaux, Dell'Olio et al. (DEL 2011) ont présenté une méthodologie pour le design et la mise en œuvre d'un réseau de vélos en libre service qui repose sur l'estimation de la demande des usagers tout en prenant en compte la localisation géographique des stations et des tarifs appliqués. Lin et Yang (LIN 2011a) et Lin et al., (LIN 2011b) proposent des techniques de programmation linéaire permettant de déterminer le nombre optimal de stations tout en considérant les coûts et le niveau de service. En plus du nombre de stations, plusieurs autres paramètres on été pris en compte notamment l'emplacement des stations, l'itinéraire des pistes cyclables entre les stations de vélos et la sélection des trajets des utilisateurs entre le point de départ et le point d'arrivée. Les modèles de programmation linéaire développés s'inspirent d'un modèle connu dans la littérature en recherche opérationnelle à savoir « *hub location inventory model* ». Du point de vue des approches développées dans cette catégorie de travaux, plusieurs auteurs présentent des études qui reposent sur l'analyse statistique des données propres au réseau de vélos en libre service à étudier. L'objectif de cette catégorie d'études peut être de deux types à savoir le design et/ou le management du système. En effet, l'analyse des données liées à la mobilité des usagers et la connaissance du réseau de transport urbain existant peuvent permettre un meilleur design d'un SVLS avant même son déploiement ou encore l'élaboration d'indicateurs de prédiction pouvant aider l'exploitant dans le management et la planification du système. Dans ce contexte, nous orientons le lecteur à consulter les articles suivants (KAL 2010, NAI 2013, JEN 2010, PUC 2011, OGI 2012, LAT 2012, FIS 2012, BOR 2009(a,b) & 2010, FRO 2008 & 2009, BOR 2012, VOG 2011, BER 2012).

Techniquement parlant, hormis nos travaux de thèse qui reposent sur une approche à base d'une modélisation de type « systèmes à événements discrets » en utilisant une classe particulière de réseaux de Petri stochastiques ayant des arcs à poids variables, deux principales approches se distinguent à la lecture des récentes publications faites sur l'étude des systèmes de vélos en libre service :

1. **Techniques d'optimisation mathématiques :** Les systèmes de vélos en libre service soulèvent plusieurs problèmes de prise de décision et d'optimisation tels que le problème de rééquilibrage des stations, le problème de tournée de véhicule(s) pour la redistribution des vélos, ou encore le problème de placement de stations, etc. D'un certain point de vue, ces problématiques peuvent être perçues comme des problèmes de type Recherche Opérationnelle (RO). Dans cette catégorie, les techniques de programmation linéaire ou plus généralement, les modèles mathématiques sont utilisés pour la modélisation et la résolution de ces problématiques. Plus généralement, ces techniques concernent des problématiques d'ordre décisionnel pouvant être stratégique et/ou opérationnel.

2. **Techniques de collecte et d'analyse de données :** La collecte et l'analyse statistique de données sur la mobilité des usagers et/ou le fonctionnement des systèmes de vélos en libre service peuvent jouer un rôle déterminant pour un meilleur design et une gestion efficace de ce mode de transport urbain en libre service. En effet, ces données peuvent être utiles avant et après le déploiement du système. L'analyse de données liées à la mobilité des usagers, qu'on peut par exemple collecter à l'aide de questionnaires et d'enquêtes sur le terrain, peut être exploitée dans la phase de projet de mise en service du système. Une estimation stratégique du nombre de vélos, de stations et autres est alors possible avant le déploiement du réseau. Sur le plan opérationnel, faire appel à l'analyse de l'historique du fonctionnement antérieur du système peut permettre, par exemple, la prédiction et ainsi la planification du système (ex : programmer une redistribution adéquate des vélos dans les stations) pour les jours suivants en se basant sur l'historique de jours jugés similaires.

6. Positionnement de notre approche

Le travail présenté dans cette thèse constitue une contribution originale à la modélisation et à l'analyse de performances des systèmes de vélos en libre-service. Notre approche basée sur les réseaux de Petri stochastiques, est d'une aide précieuse pour la mise en œuvre, l'exploitation et la régulation de ce type de systèmes. La complexité dynamique de tels systèmes, perçus comme des systèmes à événements discrets, nous a conduit au développement d'une approche à base d'une classe particulière de réseaux de Petri stochastiques ayant des arcs à poids variables pertinents aussi bien pour l'analyse que pour la simulation. Un ensemble de modèles et de méthodes d'analyse associées sont développés en vue de leur régulation, en prenant en compte les différents paramètres de décision qui les caractérisent notamment le nombre de stations, la capacité de chaque station, les seuils de régulation, la capacité des véhicules de régulation, le type et la fréquence de régulation choisis (périodique ou continue), …. En plus d'être paramétrables, les modèles proposés permettent d'étudier plusieurs configurations en fonction de différents modes de fonctionnement possibles (mode sans régulation, mode avec régulation, mode dynamique, mode statique, etc). A notre connaissance, il s'agit d'un premier travail du genre dans la littérature sur les réseaux de Petri et plus généralement, l'un des premiers sur les systèmes de vélos en libre-service.

La plupart des travaux récemment effectués sur l'étude des systèmes de vélos en libre service sont essentiellement des modèles d'optimisation mathématique à base de modèles de programmation linéaire en particulier. Contrairement à nos travaux, de notre point de vue, ces travaux présentent un certain nombre de limites à savoir :

- Les modèles développés ne sont pas génériques. Chaque modèle d'optimisation est limité à un problème décisionnel spécifique parmi ceux que soulèvent les systèmes de vélos en libre-service. Sans remettre en cause l'utilité de ce type de modèles, leur perception du système est plutôt restreinte.

- Les modèles développés permettent de trouver une solution optimisant un ou quelques critère(s) de performances fixé(s). Cependant, un modèle d'optimisation n'est pas une méthode d'évaluation de performances du système selon différents indicateurs, paramètres et/ou configurations.

- Les modèles d'optimisation développés sont souvent déterministes et ne prennent pas en compte tous les facteurs aléatoires et complexes liés à la dynamique de ce

moyen de transport urbain. En effet, un système de vélos en libre service est sujet à de nombreux facteurs stochastiques concernant par exemple la fréquentation des stations, les délais des déplacements, les itinéraires parcourus, les disfonctionnements, …

- Contrairement aux modèles de type à la fois graphique et mathématique tels que les automates, les réseaux de Petri, les processus stochastiques, les graphes, etc., un modèle d'optimisation mathématique ne permet pas la visualisation de la structure fonctionnelle du système et non plus de son comportement dynamique.

Notre approche développée dans le cadre de cette thèse apporte des réponses aux limites évoquées. En effet, elle bénéficie de la pertinence du choix des réseaux de Petri (MUR 1989, DAV 1992) comme l'un des outils de modélisation et d'évaluation de performances les plus puissants pour l'étude des systèmes à événements discrets en particulier dont fait partie les systèmes de vélos en libre-service. Leur formalisme à la fois graphique et mathématique permet de modéliser naturellement divers phénomènes notamment la synchronisation, le parallélisme, le partage de ressources ou encore des situations de conflits. Ce sont, sans doute, des exemples parmi les nombreux phénomènes à événements discrets caractérisant la dynamique des systèmes de transport d'une manière générale et des systèmes de vélos en libre-service en particulier. De plus, l'utilisation d'une classe particulière de réseaux de Petri stochastiques où nous intégrons le concept des arcs à poids variables (CHE 2005, LAB 2005, LAB 2007) permet de couvrir la complexité dynamique de tels systèmes notamment la prise en compte des politiques de contrôle et de gestion à des fins de régulation des flux de vélos et de rééquilibrage des stations. Il s'agit d'une approche originale pertinente aussi bien pour l'analyse que pour la simulation.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons réalisé une étude bibliographique liée à la thématique de notre travail de recherche. Dans la première partie du chapitre, nous avons effectué une étude générale sur les systèmes de vélos en libre service en présentant plusieurs aspects notamment leur historique, leur évolution technologique, leurs avantages, leur fonctionnement et bien sûr les problèmes qu'ils soulèvent et leur complexité. Nous avons très particulièrement mis l'accent sur le problème de rééquilibrage des stations, également dit régulation des stations, qui est un facteur très déterminent pour le succès de ce type de transport urbain. Le niveau de satisfaction des usagers est intiment lié à cette fonction de contrôle du réseau. En effet, il n'y a rien de désagréable pour les usagers que de se retrouver avec un vélo sous les bras à cause d'une station pleine ou à l'inverse d'attendre trop longtemps pour la location d'un vélo à cause d'une station vide.

La deuxième partie du chapitre a été dédiée à l'étude de la littérature scientifique sur ce nouveau mode de transport dans le paysage du transport urbain. Notre étude montre que contrairement aux systèmes de transport traditionnels, peu d'études fondamentales sur la mise en œuvre et l'exploitation des SVLS ont été menées. Toutefois, le nombre de travaux de recherche est en pleine expansion, voire même d'une façon exponentielle, depuis ces quelques dernières années. En effet, c'est seulement à partir de 2010 qu'on peut trouver un certain nombre

d'articles significatifs dans la littérature sur ce sujet. Dans ce cadre, nous avons présenté un ensemble de travaux que nous avons classés en deux catégories selon les approches utilisées à savoir une approche de type recherche opérationnelle et une autre approche basée sur l'exploration de données.

Notre dernière section dans ce chapitre a porté sur le positionnement de notre travail de recherche par rapport à l'existant. Nous avons donné nos principales motivations notamment par rapport à l'utilisation des réseaux de Petri comme un outil de modélisation, d'analyse et d'évaluation de performances des systèmes de vélos en libre service, en vue de leur régulation. Enfin, le chapitre suivant portera sur le développement d'une classe particulière de réseaux de Petri stochastiques ayant des arcs à poids variables adaptée pour la modélisation de systèmes à événements discrets, nécessitant des opérations de contrôle et/ou de commande en fonction de l'état actuel du système étudié, y compris les systèmes de vélos en libre service.

Chapitre 2

Réseaux de Petri avec des arcs à poids variables en vue de la modélisation des SVLS

Dans ce deuxième chapitre, nous nous intéressons aux réseaux de Petri ayant des arcs à poids variables comme un outil de modélisation et de contrôle/commande de l'état des systèmes à événements discrets. Après une présentation générale de l'outil RdP, avec une étude bibliographique montrant notamment leur potentiel pour l'étude des systèmes de transport, nous allons introduire une classe particulière de réseaux de Petri stochastiques ayant des arcs à poids variables en vue de la modélisation et de l'analyse des systèmes de vélos en libre-service nécessitant de complexes opérations de contrôle et de rééquilibrage (régulation). Le concept des arcs à poids variables associé aux arcs inhibiteurs est d'un fort pouvoir d'expression pour le contrôle et la gestion de l'état futur de tels systèmes en fonction de leur état présent.

1. Introduction aux réseaux de Petri

Les réseaux de Petri (MUR 1989) sont aujourd'hui l'un des outils de modélisation et d'évaluation de performances les plus puissants et les plus étudiés dans la littérature. Historiquement parlant, le concept des réseaux de Pétri a été développé pour la première fois par Carl Adam Petri, un mathématicien Allemand. Ce concept date de 1960-1962. La pertinence du choix des réseaux de Petri peut être justifiée par de nombreux facteurs présentés ci-dessous :

- Ce sont une classe particulière de graphes associés à une algèbre et à des méthodes d'analyse pouvant combiner à la fois l'analyse qualitative et quantitative. Ils sont adaptés aussi bien pour l'analyse analytique que pour la simulation.
- Leur formalisme à la fois graphique et mathématique permet de modéliser divers phénomènes notamment la synchronisation, le parallélisme, le partage de ressources, ou encore les situations de conflits.
- Le grand intérêt scientifique et pratique des réseaux de Petri a conduit au développement de plusieurs variantes telles que : RdP temporisés, RdP stochastiques, RdP continus ou encore RdP hybrides. Ceci permet de couvrir une diversité de phénomènes qui caractérisent les systèmes dynamiques.
- Les réseaux de Petri sont utilisés comme un outil de modélisation et d'évaluation de performances mais aussi pour traiter des problématiques plus spécifiques notamment : l'optimisation de ressources, la commande en juste à temps, la

supervision, le diagnostic, ou encore la sûreté de fonctionnement et la maintenance.

- Ils sont utilisés non seulement pour étudier les systèmes de production mais aussi bien pour étudier les systèmes de télécommunication, les systèmes logistiques, les réseaux informatiques, etc.
- Plus particulièrement, les réseaux de Petri sont bien adaptés pour représenter des systèmes organisés en réseaux (réseaux informatiques, réseaux logistiques, ...). Pourquoi pas donc les réseaux (systèmes) de transport !

1.1. Descriptif de base d'un RdP

Dans le cadre de sa thèse de doctorat intitulée « communication avec automates » (1960-1962), le mathématicien Allemand Carl Adam Petri, un mathématicien Allemand a défini un outil graphique et mathématique permettant de décrire les relations existant entre des conditions et des événements. Ils permettent de modéliser le comportement de systèmes dynamiques et de capturer divers phénomènes qui les caractérisent à savoir le parallélisme, la synchronisation, le partage de ressources, la concurrence, etc. Il est à l'origine du Grafcet (ce dernier étant spécialisé dans la commande des systèmes automatisés). Concrètement, un réseau de Petri (RdP) est composé de deux types de nœuds : les places et les transitions. Graphiquement les places sont représentées par des cercles et les transitions par des traits. Les places et les transitions sont reliées par des arcs. Chaque place contient un nombre entier (≥ 0) de jetons. L'état du système modélisé par un RdP est représenté par le marquage du réseau qui est un vecteur qui donne la distribution des jetons dans les places du réseau. L'évolution de l'état du réseau de Petri, et donc du système qu'il représente, correspond à une évolution de son marquage. Les jetons, qui matérialisent l'état du réseau, peuvent passer d'une place à une autre par le franchissement d'une transition. Nous orientons ceux qui ne connaissent pas les réseaux de Petri à consulter l'ouvrage de (DAV 1992) et l'article de synthèse de (MUR 1989) qui donnent l'essentiel sur le formalisme des réseaux de Petri, leurs différentes extensions et les différentes techniques d'analyse associées.

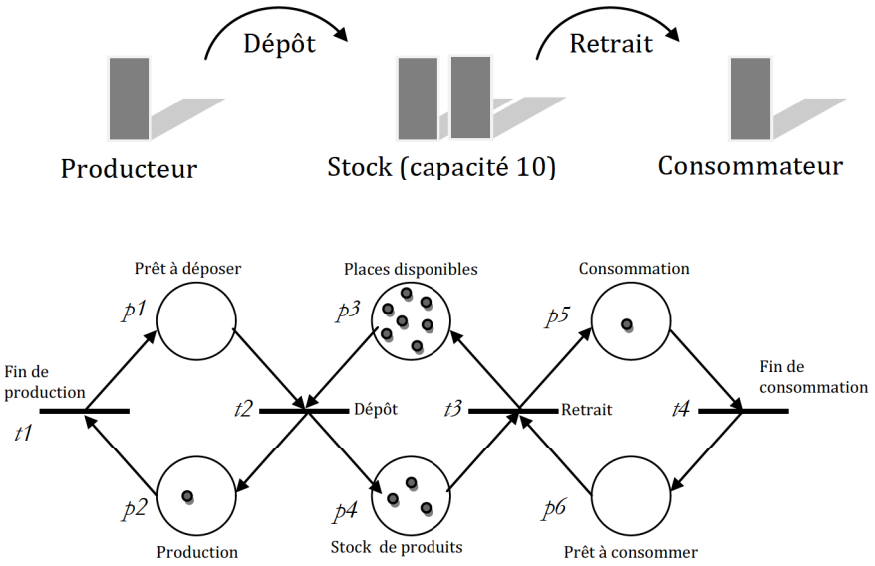


Figure 1. Exemple d'un RdP (système producteur/consommateur)

A titre d'illustration, le réseau de Petri de la Figure 1 modélise un système « Producteur Consommateur » représenté ci-dessus. Le système considéré est décrit comme suit : quand sa production est finie (production d'un seul produit à la fois), un producteur dépose le produit fini dans un stock de capacité limitée à 10 unités. Dès qu'il a pu faire le dépôt, il commence à produire un nouveau produit. Un consommateur, dès qu'il a fini de consommer (un seul produit à la fois), prélève un nouveau produit dans le stock s'il n'est pas vide. En termes du modèle RdP, la production en cours est représentée par la présence d'un jeton dans la place p2. Une fois la production est finie, la transition t1 est franchie en déplaçant le jeton de p2 vers p1. A ce moment là, un produit fini peut être déposé dans le stock représenté par p4 en franchissant la transition t2 si ce stock n'est pas plein. Cette condition se vérifie grâce au marquage de p3 qui indique la disponibilité ou pas de places dans le stock. Actuellement, c'est le cas pour le marquage indiqué sur la Figure 1. Le franchissement de la transition t2 enlève un jeton de p1 et un autre de p3 et remet simultanément un jeton dans p2 pour une nouvelle production… De la même manière, du coté du consommateur, la présence d'un jeton dans p5 indique qu'un produit est en cours de consommation. Cette dernière se termine lorsque la transition t4 est franchie. Le franchissement enlève un jeton de p5 et le remet dans p6 indiquant qu'un autre produit peut être consommé et ainsi de suite.

1.2. Extensions du formalisme de base

Le concept initial des Réseaux de Petri, dont les premiers résultats ont été de nature qualitative, a été très largement développé par de nombreux auteurs en intégrant particulièrement l'aspect temporel et stochastique dans le formalisme de base. Ce qui a permis d'associer à cet outil de modélisation et d'analyse un ensemble de méthodes pour l'évaluation de performances d'une diversité de systèmes dynamiques. Des articles et des ouvrages tels que (MUR 1989, DAV 1992, DIA 2001) donnent une vue d'ensemble sur les différentes variantes des réseaux de Petri depuis leur apparition dont les principales font l'objet des paragraphes suivants :

- Les réseaux de Petri temporisés introduisent la notion du temps dans le parcours du réseau qui permet de décrire un système dynamique dont le fonctionnement dépend du temps. Les temporisations peuvent être associées aux transitions ou aux places.

- Les réseaux de Petri stochastiques ont été introduits pour répondre à certains problèmes d'évaluation faisant intervenir des phénomènes aléatoires. Ainsi, les transitions d'un réseau de Petri stochastique comportent des temps de franchissements aléatoires.

- Les réseaux de Petri colorés sont des réseaux de Petri dans lesquels les jetons portent des couleurs. Une couleur est une information attachée à un jeton. Cette information permet de distinguer des jetons entre eux et peut être de type quelconque.

- Les réseaux de Petri continus ont été introduits pour la modélisation des systèmes dont les flux sont continus. Ils se composent de places et de transitions continues et leur fonctionnement est lié à la notion de vitesses pouvant être constantes ou variables.

- Les réseaux de Petri hybrides qui sont une combinaison de la sémantique des réseaux de Petri continus et les réseaux de Petri ordinaires (discrets). Ils sont adaptés pour la modélisation des systèmes dynamiques hybrides.

1.3. Applications des réseaux de Petri

Depuis maintenant plus d'une cinquantaine d'années, les réseaux de Petri ont connu de nombreux résultats théoriques (MUR 1989 ; DAV 1992 ; ZHO 1995 ; DIA 2001) et de nombreuses applications dans des domaines très variés (ZUR 1994). Aujourd'hui, ils sont reconnus comme l'un des outils les plus puissants pour la modélisation, l'analyse et l'évaluation de performances des systèmes dynamiques tels que les systèmes de production (VIS 1995, SIL 1997, ZHO 1999, ZIM 2001); les chaînes logistiques (CHE 2005-2006; LAB 2010), les systèmes de gestion de stocks (FUR 2001, LAB 2007), les systèmes de transport urbain (TOL 2008, NG 2013), ou encore les réseaux de communication (BIL 1999, EHR 2003). Le champ des applications ne se limite pas uniquement à la modélisation en vue de l'évaluation de performances (ALJ 1990, GRA 1992, ZIM 1999), mais également pour l'étude de problèmes plus spécifiques tels que l'ordonnancement d'atelier flexibles (HAT 1991, GON 2007), la conception et la gestion des systèmes de production (PRO 1995), les problèmes d'optimisation de ressources (SAU 1996), la maintenance d'ateliers flexibles (AMO 2001), le diagnostic des systèmes à événements discrets (CAB 2013), et bien d'autres applications aussi variées qu'insoupçonnées. La liste peut s'allonger mais l'objectif de cette analyse consistait à donner un aperçu général sur la richesse et la pertinence du choix des réseaux de Petri depuis plusieurs années à ce jour.

Cependant, la littérature sur l'utilisation des réseaux de Petri dans le domaine des systèmes de transport (STP) n'est pas aussi remplie que celle réservée aux systèmes de production en particulier. Toutefois, un ensemble d'applications existent et se focalisent essentiellement sur le contrôle du trafic urbain (NG 2013) basé notamment sur la régulation des feux de trafic (JEN 1992, DIC 1994, GAL 1996, WAN 1999, DIF 2004, TOL 2008). Par ailleurs, on peut également citer quelques autres travaux qui s'intéressent à la modélisation et à l'évaluation de performances des systèmes de transport en commun (bus). Dans ce contexte, Abbas-Turki et al. (ABB 2003) ont montré la capacité des réseaux de Petri stochastiques pour la modélisation et l'évaluation de performances d'un point de vue temps de correspondance d'un système de transport public. Pour un même type de systèmes, Nait-Sidi-Moh et al. (NAI 2003) combinent les réseaux de Petri (GET) et l'algèbre de max plus pour la minimisation des temps de correspondance des passagers. L'analyse de la littérature utilisant les réseaux de Petri comme un outil de modélisation et d'analyse des systèmes de transport montre que ces derniers sont perçus différemment : discrets, continus ou hybrides. Ceci dépend des objectifs poursuivis et/ou des approches proposées. Par conséquent, plusieurs variantes de réseaux de Petri ont été utilisées pour l'étude des systèmes de transport dont on cite les réseaux de Petri lots (DEM 2009), les réseaux de Petri continus (TOL 2005, JUL 2010), les réseaux de Petri hybrides (DIF 2004, DIF 1998), les réseaux de Petri stochastiques (WAN 1999, ABB 2003), ou encore les graphes d'événements (OLS 1998) pour l'étude et l'analyse d'un réseau de transport Hollandais. L'ensemble de ces travaux montrent une nouvelle fois la richesse et la pertinence du choix des réseaux de Petri pour l'étude des systèmes de transport.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons à la modélisation et à l'analyse de performances des systèmes de vélos en libre-service en vue de leur régulation. Nous rappelons le lecteur que ce nouveau mode de transport urbain a fait l'objet du premier chapitre où une présentation et une étude bibliographique ont été menées tout en s'attachant à leur problème majeur à savoir le rééquilibrage des stations. La grande complexité dynamique de tels systèmes évoluant en libre service, perçus comme des systèmes à événements discrets, nous a conduit au développement d'une approche à base d'une classe particulière de réseaux de Petri stochastiques ayant des arcs à poids variables pertinents aussi bien pour l'analyse que pour la simulation. L'intégration du

concept d'arcs à poids variables, associés à l'utilisation des arcs inhibiteurs, dans les réseaux de Petri stochastiques classiques est précieuse pour la représentation de complexes opérations de contrôle en vue du rééquilibrage de ces systèmes de vélos en libre-service et plus généralement des systèmes à événements discrets. En passant par les concepts de base des réseaux de Petri, le reste de ce chapitre est dédié à une description formelle et illustrative de cette classe de réseaux de Petri qui est le cœur de notre contribution dans ce travail de thèse.

2. Formalisme et concepts de base

Un réseau de Petri (avec arcs inhibiteurs) est un graphe orienté biparti dont les nœuds sont des places et des transitions. On peut le définir comme un 6-uplets :

$$PN = (P, T, Pré, Post, Inhib, M)$$

où : P = {p1, p2, …, pn} est l'ensemble fini non vide des places du réseau, T = {T1, T2, …, Tm} est l'ensemble fini non vide des transitions du réseau, Pré : (P x T) $\rightarrow$ N est l'application d'incidence avant qui définit les poids des arcs reliant les places aux transitions, Post : (P x T)$\rightarrow$ N est l'application d'incidence arrière qui définit les poids des arcs reliant les transitions aux places, Inhib : (P x T) $\rightarrow$ N est l'application qui définit les poids des arcs inhibiteurs reliant les places aux transitions, M : (P x T) $\rightarrow$ N est une fonction de marquage donnant la distribution des jetons dans les places. On note par M_0 le marquage initial du réseau.

Notations : N représente l'ensemble des nombre entiers. Les matrices Pré et Post sont des matrices n x m. Pré(P_i, T_j) est le poids de l'arc reliant la place P_i à la transition T_j. Post(P_i, T_j) est le poids de l'arc reliant la transition T_j à la place P_i. Inhib(P_i, T_j) est le poids de l'arc inhibiteur entre une place P_i et une transition T_j. Du point de vue graphique, les places sont représentées par des cercles, les transitions par des barres ou des rectangles. Les arcs (Pré et Post) qui relient les places aux transitions et vice versa sont des arcs orientés pondérés. Les arcs inhibiteurs se représentent par des arcs avec un petit cercle à l'extrémité. On note par ${}^\bullet T_j$ (resp. $T_j^\bullet$) l'ensemble des places d'entrée de la transition T_j, (resp. l'ensemble des places de sortie de la transition T_j) et par ${}^\circ T_j$ l'ensemble des places d'entrée reliées à T_j par des arcs inhibiteurs.

- Validation d'une transition : Une transition T_j est franchissable (validée) pour un marquage M si et seulement si :

$$\forall P_i \in {}^\bullet T_j,\ M(P_i) \geq \text{Pré}(P_i, T_j) \quad (1)$$

$$\forall P_i \in {}^\circ T_j,\ M(P_i) < Inhib(P_i, T_j) \quad (2)$$

- Franchissement d'une transition : Le franchissement d'une transition validée T_j consiste à retirer Pré(P_i, T_j) jetons de chaque place $P_i \in {}^\bullet T_j$ et à ajouter Post(P_i, T_j) jetons dans chaque place $P_i \in T_j^\bullet$.

  Ainsi, à partir du marquage M, le franchissement de la transition T_j conduit à un nouveau marquage M' défini comme suit :

$$\forall P_i \in P, M'(P_i) = M(P_i) - \text{Pré}(P_i, T_j) + Post(P_i, T_j) \quad (3)$$

3. Concept des arcs à poids variables

Pour pouvoir exprimer le fonctionnement complexe des systèmes de vélos en libre-service en vue de leur régulation, le concept des « arcs à poids variables en fonction du marquage actuel du réseau » est nécessaire. Ce concept a été déjà utilisé pour la modélisation des systèmes de gestion de stocks (LAB 2007, LAB 2006) et des chaînes logistiques (CHE 2005, LAB 2005) en utilisant une classe particulière de réseaux de Petri lots stochastiques.
A titre d'exemple, considérons le réseau de Petri de la Figure 2 où on peut observer que les poids des deux arcs w(PR1, TR1) et w(TR1, PS1) reliant respectivement PR1 à TR1 et TR1 à PS1 dépendent du marquage actuel de la place PS_1 (i.e., $M(PS_1)$). Pour le marquage initial du réseau, $M_i = (2, 5)^T$, c.a.d. $M_i(PS1) = 2$ et $M(PR1) = 5$, la transition TR1 est franchissable puisque les conditions de validation (1) et (2) sont vérifiées :

$$M(PR_1) = 5 \geq Post(PR_1, TR_1) = 4 - M(PS_1) = 2$$
$$M(PS_1) = 2 < Inhib(PS_1, TR_1) = 4$$

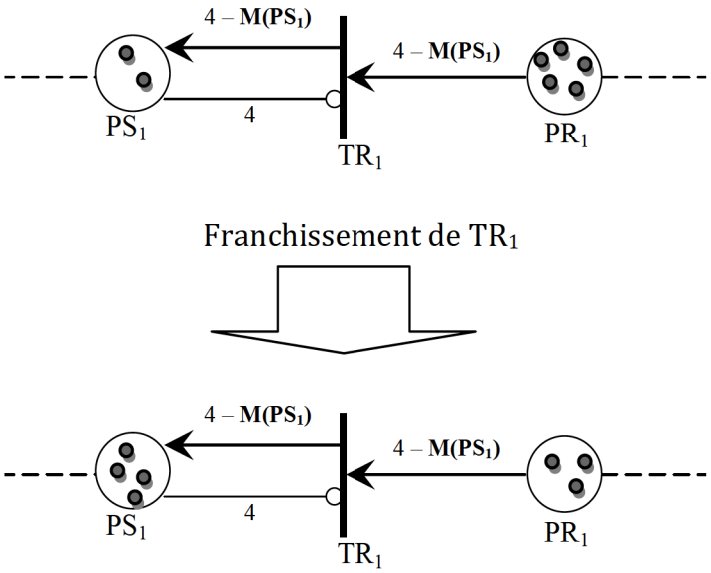


Figure 2. Illustration du concept des arcs à poids variables

Comme le montre la Figure 2, le franchissement de la transition validée TR1 à partir du marquage initial M_i conduit, à un nouveau marquage $M_f = (4, 3)^T$ puisque que :

$$M_f(PS_1) = M_i(PS_1) + \left[4 - M(PS_1)\right] = 2 + \left[4 - 2\right] = 4.$$
$$M_f(PR_1) = M_i(PR_1) - \left[4 - M(PS_1)\right] = 5 - \left[4 - 2\right] = 3.$$

Le concept des arcs à poids variables associé également à l'utilisation des arcs inhibiteurs va être d'une grande richesse pour la modélisation des systèmes de vélos en libre service notamment pour la représentation de complexes opérations de contrôle en vue du rééquilibrage des stations. En effet, à titre d'exemple, lors d'une opération de régulation d'un SVLS, le nombre de vélos à ajouter ou à retirer dans une station donnée varie en fonction du nombre de vélos actuel dans cette station et de la politique de régulation

adoptée. Ainsi, les poids des arcs des modèles RdP à développer dans cette thèse peuvent être variables en fonction du marquage courant du réseau.

- D'une manière générale, nous considérons que le poids *w*(i, j) de chaque arc (i, j) du RdP peut être défini comme une fonction linéaire en fonction du marquage courant du réseau. Formellement, *w*(i, j) peut s'écrire de la manière suivante :

$$w(i,j) = \alpha_0 + \alpha_1 M(p_1) + \alpha_2 M(p_2) + \ldots + \alpha_n M(p_n) \quad (4)$$

w(i,j) représente le poids de l'arc reliant p_i à t_j (ou t_i à p_j). Les coefficients α_i, sont des entiers (pouvant être nuls). On assume, que cette fonction affecte des valeurs positives au poids de chaque arc *(i,j)* à chaque instant où la transition reliée à cet arc est validée.

4. Temps et politiques d'exécution

4.1. Temps associé au modèle

Pour l'évaluation de performances d'un système dynamique, notamment un système de vélos en libre service, le temps doit être associé au réseau de Petri qu'il le représente. Ainsi, en plus du concept d'arcs à poids variables, les modèles développés dans le cadre de cette thèse sont temporisés (stochastiques). Pour modéliser des événements pouvant être des opérations, des actions, des tests, … (prise ou retour d'un vélo, contrôle d'une station, test de niveau,…), nous utilisons deux types de transitions afin de respecter les délais d'exécution associés. La Figure 3 illustre la représentation graphique utilisée en fonction du type de la transition.

- Transitions immédiates : Ces transitions dont le délai de franchissement est nul permettent de représenter des opérations dont le délai opératoire est nul. En particulier, elles permettent de représenter des tests utilisés comme artifices de modélisation pour par exemple le contrôle de l'état du système.
- Transitions temporisées : Ce type de transitions est associé aux temporisations qui expriment les durées des opérations qu'elles modélisent. Le temps associé peut être déterministe ou stochastique. En termes du réseau de Petri, la temporisation associée à une transition correspond au délai qu'elle met pour son franchissement lorsqu'elle est validée.

L'évaluation de performances d'un système modélisé par un réseau de Petri ayant des transitions stochastiques repose sur l'étude du processus stochastique associé qui dépend du type des transitions utilisées. Pour pouvoir utiliser la puissance de l'analyse Markovienne, il faut que les systèmes soient sans mémoire du passé, c'est-à-dire que si un événement produit le franchissement d'une transition *t* et transforme le marquage actuel *M1* en *M2*, l'évolution future des transitions qui étaient validées par le marquage *M1* avant le franchissement de *t* doit être identique à celle qu'elles subiraient si elles venaient juste d'être validées par *M2*. Seules les transitions exponentielles et géométriques vérifient ce fait. De nombreux résultats théoriques, des méthodes analytiques et/ou numériques sont développés dans ce contexte (LIN 1998, AJM 1995, CIA 1994, CHO 1993, LIN 1996, AJM 1986). En revanche, la restriction des distributions stochastiques ne se posent pas lorsque le modèle est étudié via la simulation à événements discrets (BAN 2001, HAA 2002). Cette dernière s'avère incontournable et efficace pour l'étude des systèmes complexes qui est souvent le cas des systèmes réels. Ce point sera à nouveau abordé dans le chapitre 4 dédié à l'évaluation de performances des systèmes de vélos en libre service.

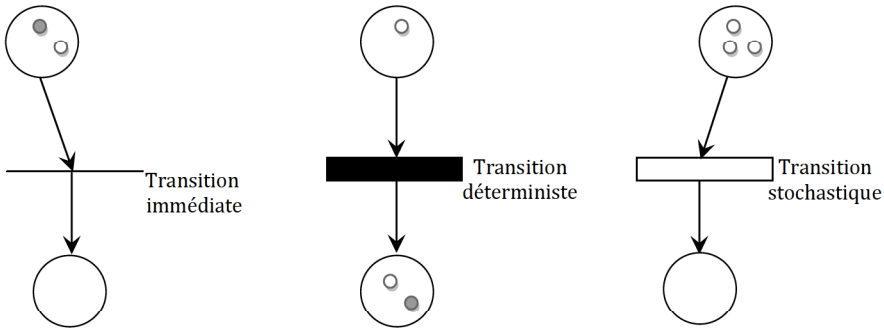


Figure 3. Représentation graphique d'une transition selon son type

4.2. Politiques de d'exécution

Dans un réseau de Petri ayant des arcs à poids variables, ses matrices d'incidences (Pré, Post et Inhib) sont dynamiques. Autrement dit, elles changent en fonction de l'évolution du marquage dans le temps. A chaque nouveau marquage M, les différents éléments w(i, j) de ses matrices sont actualisés à l'aide de l'équation (4). Par conséquent, les conditions numérotées de 1 à 3 permettant de vérifier la validation ou non d'une transition à partir d'un marquage actuel M dépendent des matrices engendrées pour ce même marquage.

En intégrant ce concept dans son évolution dynamique, le fonctionnement d'un RdP stochastique ayant des arcs à poids variables doit obéir, en plus des règles de validation et de franchissement définies par les équations (1), (2) et (3), à un ensemble de politiques associées aux transitions qui servent à gérer :

- La sélection de la transition validée à franchir lorsque plusieurs autres transitions sont validées au même temps à partir d'un marquage donné.
- La prise en compte de la mémoire temporelle des transitions validées après franchissement d'une autre transition sélectionnée parmi celles validées mais non franchies.

Comme dans le cas des réseaux de Petri stochastiques classiques, nous utilisons deux types de politiques permettant de gérer les franchissements des transitions et les délais d'exécution associés.

- Politique de service : L'évolution d'un réseau de Petri se fait à limitation implicite (DAV 1992), c'est-à-dire le franchissement d'une transition validée se fait en mono serveur (*single server*). En d'autres termes, la transition n'effectue qu'un service à la fois. L'utilisateur peut également appliquer la politique dite multi serveur (*infinite server*) si les événements que modélisent certaines transitions du modèle du système représenté nécessitent ce mode de fonctionnement.
- Politique d'exécution : Cette politique comprend deux volets : (a) La sélection de la transition à franchir et (b) la gestion de la mémoire temporelle.

(a) La sélection de la transition à franchir : étant donné un marquage M, il s'agit de sélectionner la transition à franchir lorsque plusieurs transitions sont validées pour ce même marquage. Les transitions immédiates sont prioritaires par rapport aux transitions temporisées. En cas de conflit entre un ensemble de transitions immédiates, la transition qui a la plus grande priorité est franchie. Quand la plus grande priorité est partagée entre plusieurs transitions immédiates, le choix peut se faire aléatoirement (présélection) (CHI 1993). Quand un ensemble de transitions temporisées sont validées pour un marquage

donné, la transition à franchir est celle qui présente le plus petit délai de franchissement à cet instant (compétition) (FLO 1979). Du point de vue du délai de franchissement, une transition immédiate validée est franchie après un délai nul. Une transition temporisée validée est franchie après un délai déterministe constant si elle est déterministe ou après un délai aléatoire généré suivant la loi de distribution qui lui est associée.
(b) La mémoire temporelle : Une fois qu'une transition validée est franchie à partir d'un marquage donné, comment le délai de franchissement des transitions déjà validées mais non franchies va évoluer pour les franchissements futurs ? Dans le cadre de nos applications, nous adoptons deux principales politiques que nous définissons ci-dessous (AJM 1989 ; CIA 1993 ; JUA 1997) :

- La réactualisation de l'horloge (restart process): Dès qu'une transition est franchie, les horloges des transitions associées à la politique de type « restart process » sont réinitialisées. Leurs valeurs actuelles sont perdues et de nouvelles valeurs seront générées à leurs prochaines validations. Et bien sûr, la sélection d'une transition à franchir dépendra toujours de la « politique d'exécution ».
- L'enregistrement de l'horloge (continue process): A Chaque fois qu'une transition est franchie, les horloges de toutes les transitions (associées à cette politique) déjà validées pour le marquage précédent et qui restent encore validées pour le marquage actuel gardent les valeurs générées précédemment. Elles continuent à décroitre dans le temps jusqu'à ce que ces transitions soient franchies réellement.

Ces politiques sont particulièrement importantes à préciser à chaque modèle développé. En plus de leur signification pratique pour la modélisation d'un système réel, ces politiques ont un impact direct sur la dynamique, l'analyse et la simulation du modèle. En effet, la simulation à événements discrets d'un réseau de Petri stochastiques (y compris les réseaux de Petri avec des arcs à poids variables) tient compte de ces politiques lors de l'exécution du modèle. De la même manière, ces politiques d'exécution ont un impact sur la caractérisation du processus stochastique associé lorsqu'on utilise des méthodes analytiques (AJM 1989 ; CIA 1993 ; JUA 1997).

5. Applications à la régulation

D'une manière générale, la régulation d'un système concerne la mise au point d'une technique et/ou d'un dispositif permettant de maintenir une (ou plusieurs) grandeur physique (niveau, position, …) égale à une valeur désirée. En automatique, il s'agit par exemple, de faire de sorte que la réponse (sortie) d'un système obéisse à la consigne (entrée). Pratiquement parlant, la notion de régulation d'un système est souvent liée à des opérations de réajustement (rééquilibrage) telles que des opérations de rajout/retrait ; remplissage/vidage, addition/soustraction ; … dont le but est de stabiliser l'état ou la réponse du système suivant l'objectif d'une performance recherchée.

Dans le cadre des systèmes de vélos en libre service, le problème de rééquilibrage (régulation) des stations est un problème crucial dont l'exploitant doit faire face tous les jours. Dû à la nature même du fonctionnement en libre service, les vélos ne sont pas uniformément répartis entre les différentes stations durant la journée pour de multiples raisons étudiées dans le chapitre précédent. La fonction de régulation d'un réseau de vélos en libre service consiste pour l'exploitant à maintenir un nombre minimal de vélos par station pour permettre la prise de vélos par les usagers, ainsi qu'un nombre maximal inférieur à la capacité de la station pour permettre la dépose de vélos par les usagers.

L'objectif principal consiste à éviter des situations de stations pleines ou vides qui sont extrêmement désagréables pour les usagers. Dans la pratique, la régulation des stations se fait à l'aide de véhicules à remorques faisant des tournées afin de parvenir à équilibrer vélos et places vides entre les différentes stations. Des agents chargés de la régulation effectuent des opérations de rajout de vélos dans les stations dont le nombre est jugé faible (pénurie) ou des opérations de retrait de vélos dans le cas de stations saturées (engorgement).
Afin de démontrer et d'illustrer la précieuse utilité du concept des arcs à poids variables associé également à l'utilisation des arcs inhibiteurs, nous développons ci-dessous deux exemples significatifs en vue du développement de notre approche de modélisation, d'analyse et de régulation des réseaux de vélos en libre service. D'une manière plus générale, l'approche développée est applicable aux systèmes à événements discrets nécessitant des opérations de contrôle, de commande et/ou de régulation de leur comportement dynamique.

- **Exemple 1. Opération de retrait :** Dans cet exemple, nous modélisons une opération de contrôle du marquage d'une place p1 pouvant représenter une station, un parking, un stock, une réserve ou autre. L'objectif consiste à détecter une situation critique correspondant à un dépassement d'un seuil fixé au préalable et ensuite de ramener le marquage de cette place à un niveau désiré. A titre d'exemple, dans le modèle représenté par la Figure 4, le seuil d'alerte est fixé à 11 et le niveau de régulation désiré est fixé à 10.

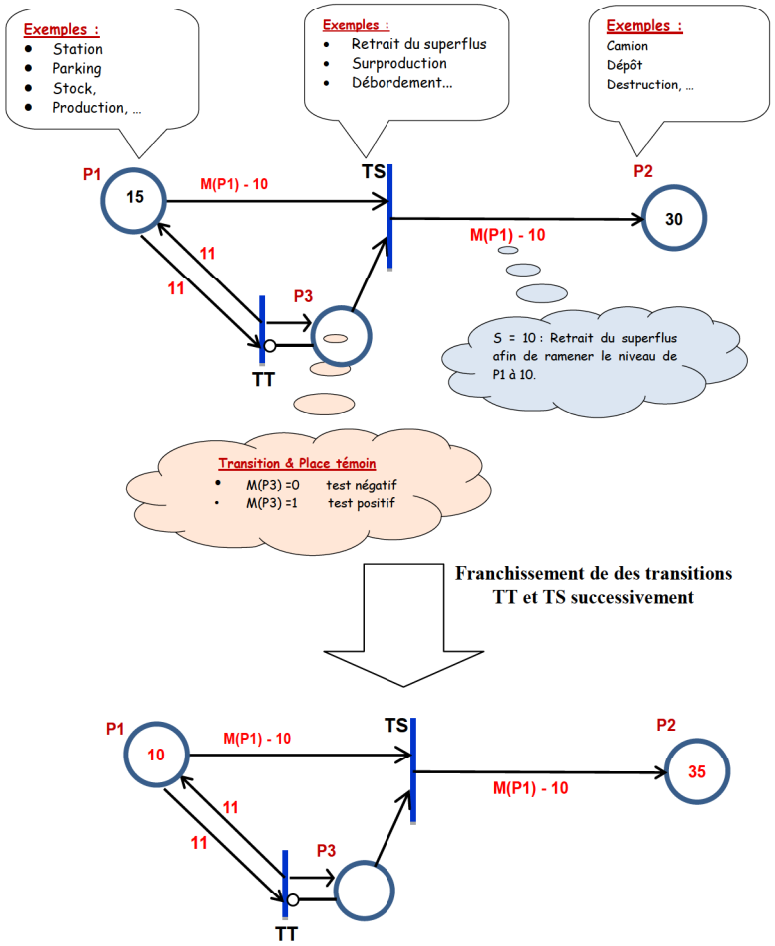
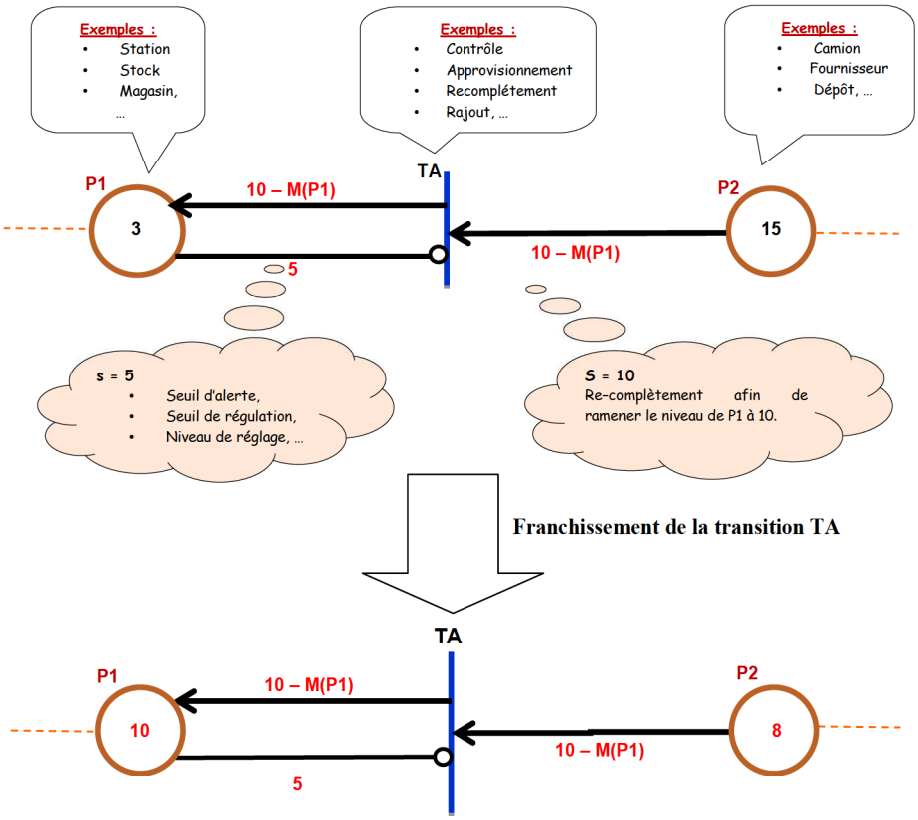


Figure 4. Opération de retrait (rééquilibrage)

Du point de vue contrôle, comme le montre la Figure 4, afin de détecter la situation critique, le contrôle du marquage de la place p1 est effectué continuellement à l'aide de la transition immédiate TT. Ainsi, lorsque M(p1) ≥ 11, cette transition est validée et son franchissement donnera immédiatement l'alerte en mettant un jeton témoin dans la place p3 et avec aucune incidence sur le marquage de la place p1. Notons que la présence de l'arc inhibiteur assure que cette transition ne soit pas franchie indéfiniment lorsque la condition est vérifiée.
Lorsque M(p3) = 1 signifiant que la situation critique vient d'être détectée, la transition TS est validée. Son franchissement va permettre de ramener l'état de la place p1 à un niveau souhaité. Dans l'état actuel du réseau de Petri, le franchissement de TS consiste à retirer M(p1) – 10 = 15 – 10 = 5 jetons de cette place et de supprimer un jeton dans la place p3 (alerte levée). Ainsi le marquage de la place p1 est ramené avec succès au niveau désiré fixé à 10. Et bien sûr en fonction du système modélisé, l'excès retiré de la place p1 peut subir de nouvelles opérations (transport, destruction, transformation, etc). Dans notre exemple, la place p2 est rajoutée pour la réception des superflus pouvant représenter un camion, un dépôt ou autre.

- **<u>Exemple 2.</u> Opération de rajout :** Dans ce cas, nous modélisons une opération de contrôle du marquage d'une place p1 pouvant représenter également une station, un parking, un stock, une réserve ou autre. L'objectif consiste à détecter une situation critique correspondant à un état de pénurie (insuffisance, déficit, perte, …). Il s'agit de ramener le marquage de la place p1 à un niveau souhaité lorsque celui-ci devient inférieur à un seuil fixé au préalable. A titre d'exemple, dans le modèle représenté par la Figure 5, le seuil d'alerte est fixé à 5 et le niveau de régulation désiré est fixé à 10.



<u>Figure 5.</u> Opération de rajout (rééquilibrage)

Dans cet exemple, le contrôle et le rééquilibrage s'effectuent à l'aide de la même transition immédiate TA. L'arc inhibiteur reliant la place à contrôler p1 et la transition de contrôle TA permettent de détecter la situation indésirable. En effet, cette transition devient franchissable lorsque M(p1) < 5. A l'état actuel de notre exemple, M(p1) = 3 et donc la transition TA est validée. Son franchissement permet de déclencher à partir de la place p2 une opération de rajout de jetons dans la place contrôlée p1. Le nombre de jetons à rajouter, 10 – M(P1) est fixé par les poids variables des deux arcs reliant TA à P1 et P2 à TA. Dans notre cas, après le franchissement de la transition TA, 10 – M(P1) = 10 – 3 = 7 jetons seront rajoutés à la place p1 ramenant ainsi son nouveau marquage à 10 correspondant au niveau d'équilibre désiré.

6. Etude d'un RdP ayant des arcs à poids variables

L'objectif de cette section consiste à donner un aperçu général sur les techniques associées à l'étude d'un réseau de Petri stochastique ayant des arcs à poids variables. Comme support d'application, nous considérons un système de gestion d'un parc automobile (concessionnaire) schématisé par la Figure 6. Au travers de cette application, notre objectif principal porte sur l'introduction d'un ensemble de notions et d'éléments associés à l'étude qualitative et/ou quantitative (évaluation de performances) d'un réseau de Petri stochastique, tout en s'attachant au concept des arcs à poids variables.

D'une manière générale, les techniques d'analyse et d'évaluation de performances sont similaires à celles développées dans le cas des réseaux de Petri classiques. En revanche, du point de vue analytique, des adaptations ou de nouveaux développements théoriques sont nécessaires dans le cadre de toute formulation basée sur l'utilisation de la matrice d'incidence. En effet, contrairement aux réseaux de Petri classiques, celle des réseaux de Petri ayant des arcs à poids variables est également variable en fonction de l'évolution du marquage du RdP.

6.1. Modélisation du système considéré

L'exemple d'étude considéré représente un système de gestion d'un parc automobile d'un concessionnaire (Figure 6). Il s'agit de contrôler le nombre de voitures d'un modèle particulier vendu par ce concessionnaire. On considère que le gestionnaire utilise une politique de gestion de stock dite (*s, S*) avec révision continue. Cette dernière consiste à effectuer, à partir d'un niveau d'alerte s, une commande d'approvisionnement afin de re-compléter le niveau du stock de voitures disponibles à un niveau désiré S.

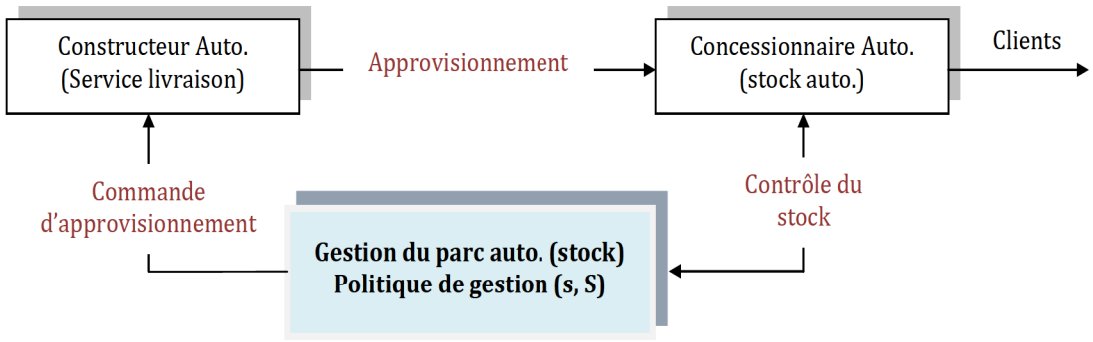


Figure 6. Système de gestion d'un parc automobile (concessionnaire)

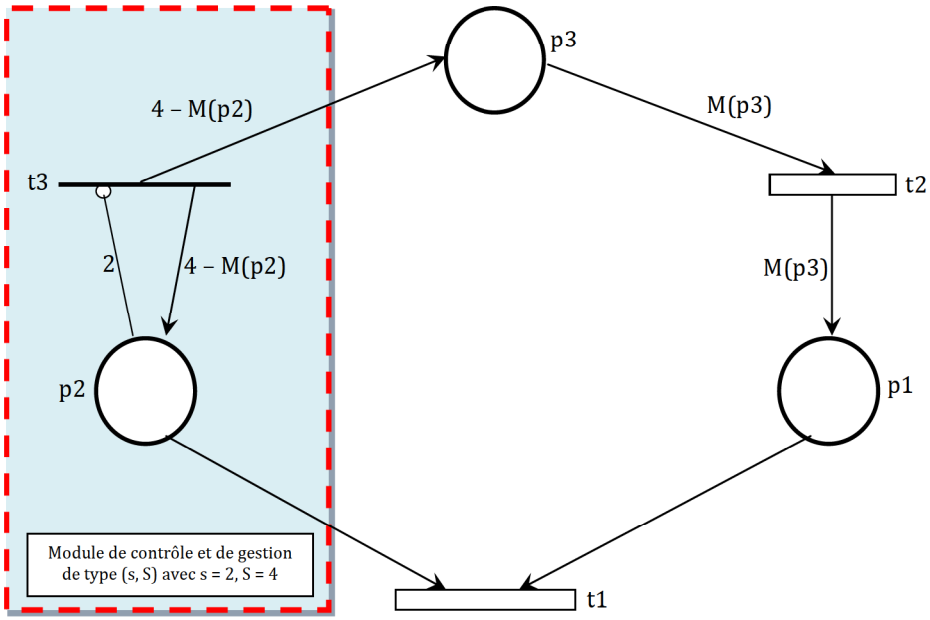


Figure 7. Modèle RdP stochastique ayant des arcs à poids variables du système considéré

Place	Désignation	Marquage initial
p1	Stock de voitures chez le concessionnaire	$M_0(p1) = 0$
p2	Inventaire du stock (stock + commandes)	$M_0(p2) = 0$
p3	Constructeur automobile (Fournisseur auto)	$M_0(p3) = 0$

Tableau 1. Désignation des places

Transition	Désignations	Type	Paramètres
t1	Livraison du client	Stochastique	$\lambda 1$ (Exp.) = 1/20j
t2	Approvisionnement	Stochastique	$\lambda 2$ (Exp.) = 1/30j
t3	Demande d'approvisionnement	Immédiate	d3 = 0

Tableau 2. Désignation et paramètres des transitons

Le système considéré est modélisé par le réseau de Petri stochastique ayant des arcs à poids variables représenté par la Figure 7. Le stock d'un des modèles de voitures vendues par le concessionnaire est modélisé par la place p1 dont la sortie (commande client) et l'entrée (approvisionnement du concessionnaire) sont représentées respectivement par les transitions stochastiques t1 et t2. Le stock de voitures est géré par la politique (s = 2, S = 4) avec révision continue. Il s'agit d'inspecter le niveau du stock continuellement et dès qu'il est jugé en dessous d'un niveau fixé *s* correspondant au poids de l'arc inhibiteur reliant p2 à t3, une commande d'approvisionnement est effectuée pour re-compléter le stock à un niveau désiré S. Le nombre de voitures commandées dépend de l'inventaire du stock (i.e., M(p2)) correspondant à l'état actuel du stock (i.e., M(p1)) plus les commandes en cours (i.e., M(p3)). Ce nombre est déterminé par le poids variable, S–M(p2), de l'arc reliant t3 à p3 et celui de t3 à p2. Le stock de voitures est soumis à des demandes aléatoires de clients suivant un processus de Poisson de taux $\lambda 1$ associé à la transition exponentielle t1. Lorsque le stock est disponible, l'exécution d'une commande d'un client s'effectue par le franchissement de la transition t1. Le franchissement de t1 à un instant donné fait diminuer d'une unité le marquage de la place p1 (stock) et celui de la place p2 représentant l'inventaire du stock. Une fois que le niveau de ce dernier descend en

dessous du seuil fixé s (i.e., M(p2) < s) associé à l'arc inhibiteur reliant la transition t3 à la place p2, un ordre d'approvisionnement est passé par le franchissement de la transition immédiate. Autrement dit, le franchissement de la transition t3 place une commande de S-M(p2) voitures dans la place p3. Ensuite, l'opération d'approvisionnement va s'effectuer par le franchissement de la transition stochastique t2 dont les délais de franchissement sont distribués exponentiellement avec un taux de λ2.

A présent, cet exemple montre la pertinence du concept des arcs à poids variables et des arcs inhibiteurs pour la modélisation des opérations de contrôle et de commande de l'état futur du système en fonction de son état actuel. Dans la suite de cette section, l'exemple que nous avons développé sera utilisé comme un support d'illustration pour définir et développer un ensemble de notions et d'éléments pour l'étude d'un réseau de Petri ayant des arcs à poids variables.

6.2. Codage matriciel

De la même manière qu'un réseau de Petri classique, les réseaux de Petri ayant des arcs à poids variables en fonction du marquage actuel peuvent également être codés sous forme matricielle. A la différence des réseaux de Petri classiques, ces matrices sont dynamiques en fonction de l'évolution du marquage du réseau dans le temps. Ainsi, nous définissons quatre matrices à savoir : matrice d'incidence avant W- (ou PRE) ; matrice d'incidence arrière W+ (ou POST) ; matrice d'incidence W (PRE–POST) ; et enfin la matrice d'inhibition W_0 (ou INHIB) telles que :

- W- = [$w(p_i, t_j)$] dont les éléments correspondent aux poids des arcs reliant les places aux transitions.
- W+ = [$w(t_j, p_i)$] dont les éléments correspondent aux poids des arcs reliant les transitions aux places.
- W = [$w(p_i, t_j)$ - $w(p_i, t_j)$] dont les éléments donnent le nombre de jetons à rajouter ou à extraire dans p_i lorsqu'une transition t_j est franchie.
- Matrice d'inhibition W_0 = [w_0 ($w(p_i, t_j)$] dont les éléments correspondent aux poids des arcs inhibiteurs reliant quelques transitions et places.

Dans le cas de notre modèle représenté par la Figure 7, nous avons les matrices suivantes :

$$W^- = \left[w(p_i \rightarrow t_j)\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & M(p3) & 0 \end{pmatrix} ; W^+ = \left[w(t_j \rightarrow p_i)\right] = \begin{pmatrix} 0 & M(p3) & 0 \\ 0 & 0 & (4 - M(p2)) \\ 0 & 0 & (4 - M(p2)) \end{pmatrix}$$

$$W = W^+ - W^- = \begin{pmatrix} -1 & +M(p3) & 0 \\ -1 & 0 & +(4 - M(p2)) \\ 0 & -M(p3) & +(4 - M(p2)) \end{pmatrix} ; W_0 = \left[w_0(t_j \circ p_i)\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6.3. Equation d'état

La dynamique des réseaux de Petri classiques, où la matrice d'incidence est constante, est caractérisée par l'équation fondamentale suivante :

$$M_k = M_i + W \times \underline{S} \tag{5}$$

Où *S* est le vecteur caractéristique d'une séquence de franchissements S réalisable à partir du marquage M_i. Le vecteur caractéristique S est de dimension m (nombre de transitions du réseau) dont la composante j correspond au nombre de franchissements de la transition t_j dans cette séquence. M_k représente le nouveau marquage atteint suite au franchissement de la séquence *S*.
En revanche, dans le cas d'un réseau de Petri ayant des arcs à poids variables, nous définissons une équation d'état adaptée au fait que la matrice d'incidence du réseau est variable en fonction du marquage actuel :

$$M_k = M_i + W_{(M_i)} \times \underline{T} \tag{6}$$

Ainsi, nous remplaçons, le vecteur caractéristique par un autre vecteur noté par $\underline{T}$ qui désigne l'unique transition sélectionnée pour le franchissement.

$$\underline{T}[j] = \begin{cases} 1 & \text{si } t_j \text{ est la transition à franchir} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{7}$$

En effet, dans le cas d'un réseau de Petri avec des arcs à poids variables, il est n'est plus possible d'appliquer l'équation d'état pour un franchissement multiple de transitions (séquence de franchissements), car la matrice d'incidence W du RdP dépend désormais du marquage d'avant chaque franchissement. Elle n'est pas forcément la même à chaque nouveau marquage généré par le franchissement d'une seule transition. La notation $W_{(Mi)}$ correspond à la matrice d'incidence du réseau pour un marquage actuel M_i.

Revenons, une nouvelle fois, à notre exemple où nous avons : M_0 = (0, 0, 0), c'est-à-dire $M_0(p1)=0$, $M_0(p2)=0$ et $M_0(p3)=0$. A l'état actuel du réseau de Petri, la transition immédiate t3 est validée puisque les conditions sont satisfaites à savoir :

$$M_i(P_2) = 0 < Inhib(t3, p2) = 2\,.$$

Autrement dit, il ya rupture de stock du modèle de voitures considéré chez le concessionnaire (seuil fixé à 2 par le poids de l'arc inhibiteur). Il faut donc passer une commande d'approvisionnement au constructeur. Ceci va se produire immédiatement par le franchissement de la transition *t3* qui nous ramène au nouveau marquage *M1* qu'on peut calculer à l'aide de l'équation d'état (6) comme suit :

$$M_1 = M_0 + W_{(M_0)} \times \underline{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +(4-0) \\ 0 & 0 & +(4-0) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

6.4. Graphe des marquages

Comme dans le cas des réseaux de Petri classiques, une des méthodes de base pour l'étude d'un réseau de Petri ayant des arcs à poids variables consiste à construire son graphe des marquages. Ce dernier est composé de nœuds qui correspondent aux marquages accessibles, et d'arcs correspondant aux franchissements de transitions faisant évoluer le système modélisé d'un état à un autre en fonction d'événements discrets qui se produisent dans le temps. La Figure 8 représente le graphe des marquages du système considéré.

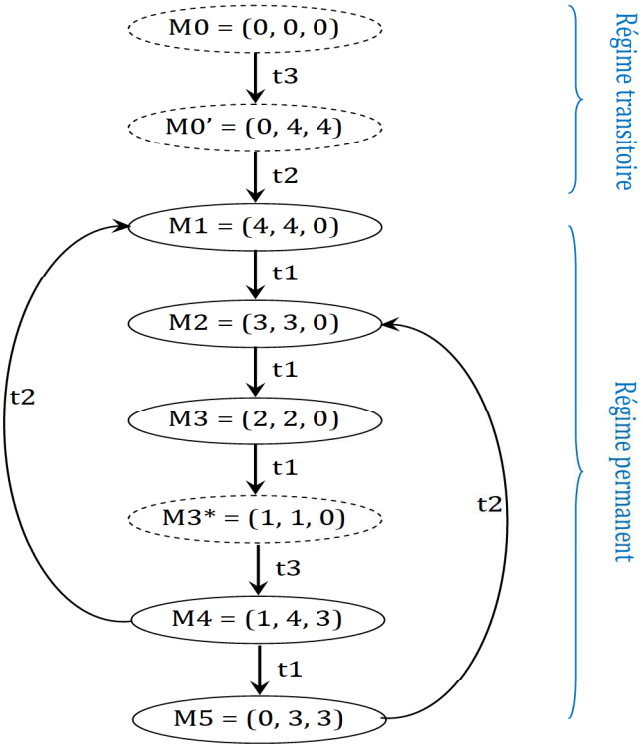


Figure 8. Graphe des marquages du réseau de Petri de la figure (7)

A partir de ce graphe, on peut distinguer les deux régimes transitoire et permanent du fonctionnement du système. Son exploration permet, dans un premier temps, d'effectuer une analyse qualitative du système en recherchant un ensemble de propriétés qualitatives ayant une réelle signification du système modélisé. A titre d'exemples :

- Le réseau de Petri est borné puisque pour tout marquage accessible M_i (i = 0 à 5), le nombre de jetons dans chaque place p_i (i = 1 à 3) est fini.
- Le réseau de Petri est vivant, puisqu'il n'existe aucun état de blocage. Autrement dit, le réseau de Petri continuera à évoluer quelque que soit l'état accessible dont il se trouve.
- Le réseau de Petri a un état d'accueil pouvant être M_1 = (4, 4, 0). A partir de n'importe quel marquage accessible, il existe toujours une séquence de franchissements permettant au RdP de revenir à cet état.
- Le nombre des marquages accessibles du réseau de Petri est fini. Autrement dit, l'espace d'état du système modélisé est fini.

L'analyse effectuée au travers du graphe des marquages accessibles montre qu'elle est similaire aux cas des réseaux de Petri classiques. En revanche, l'analyse qualitative faisant appel aux méthodes algébriques qui reposent notamment sur le calcul matriciel à base des matrices d'incidences (MUR 1989, DAV 1992) n'est pas directement applicable. En effet, nous rappelons que la matrice d'incidence d'un réseau de Petri ayant des arcs à poids variables est variable en fonction du marquage actuel. Les méthodes classiques existantes comme par exemple celles développées pour la recherche des invariants de marquages, des invariants de franchissements, ou encore pour la recherche des verrous et des trappes d'un RdP, doivent être adaptées si possible ou développer de nouvelles techniques spécifiques au cas des réseaux de Petri ayant des arcs à poids variables. Ce point qui ne fait pas partie des objectifs fixés dans le cadre de cette thèse mérite amplement d'être développé.

6.5. Evaluation de performances

L'évaluation analytique des performances du système considéré est possible. En effet, le graphe des marquages accessibles (GMA) est fini et l'utilisation des transitions ayant des distributions exponentielles fait que le graphe des marquages accessibles (régime permanent) du réseau de Petri est isomorphe à une chaîne de Markov à temps continu représentée par la Figure 9. Le marquage M3* a été volontairement masqué dans ce processus stochastique. En effet, comme le montre le graphe des marquages de la Figure 8, il s'agit d'un état dit « instable » à partir du quel la transition t3 est immédiatement franchie (zéro délai) d'où la réduction du graphe.

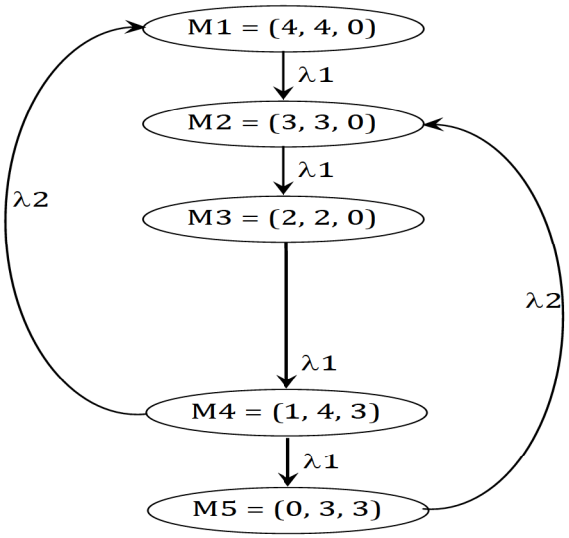


Figure 9. Chaîne de Markov associé au réseau de Petri de la figure (5)

Le générateur du processus markovien Q (matrice de transition) correspondant à la chaîne de Markov associée au processus stochastique des marquages est :

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda 1 & \lambda 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda 1 & \lambda 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda 1 & \lambda 1 & 0 \\ \lambda 2 & 0 & 0 & -(\lambda 1 + \lambda 2) & \lambda 1 \\ 0 & \lambda 2 & 0 & 0 & -\lambda 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, en fonction des paramètres associés aux délais de franchissements des transitions fixés dans le Tableau 2, nous obtenons la matrice Q suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} -0,05 & 0,05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,05 & 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,05 & 0,05 & 0 \\ 0,033 & 0 & 0 & -(0,05+0,033) & 0,05 \\ 0 & 0,033 & 0 & 0 & -0,033 \end{pmatrix}$$

La distribution de probabilités des états (marquages) en fonction des paramètres λ1 (taux de la commande) et λ2 (taux d'approvisionnement), du système en régime permanent peut être obtenue en résolvant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \Pi \cdot Q = 0 \\ \sum_{i=1}^{5} \pi_i = 1 \end{cases} \quad (8)$$

Avec : $\Pi = [\pi_1, ..., \pi_5]$: est un vecteur ligne correspondant à la distribution de probabilités des états du processus stochastique engendré par le graphe des marquages accessibles. Q est la matrice de transition associée à la chaîne de Markov. Dans le cas de notre exemple, la résolution de ce système d'équations, à l'aide du Solveur d'Excel, détermine la distribution stationnaire des probabilités π_i des états M_i (i = 1, .., 5) :

π1	π2	π3	π4	π5
0,1016	0,2555	0,2555	0,1539	0,2332

Connaissant la distribution des probabilités des états atteignables, il est possible d'évaluer plusieurs performances du système modélisé. D'une façon générale, si P(M) représente une fonction de « performance » alors la « performance » moyenne est :

$$P_{Moy} = \sum_{i \mid M_i \in GMA} P(M_i) \times \pi_i \quad (9)$$

Où

- $P(M_i)$ représente la mesure de l'indice de performance du système à l'état M_i et
- π_i représente la probabilité que ce système se trouve dans cet état.

A titre d'exemple :

- Le marquage moyen $M(p)_{moy}$ d'une place *p* correspondant au nombre moyen de jetons dans cette place est donné par :

$$M(p)_{moy} = \sum_{i \mid M_i \in GMA} M_i(p) \times \pi_i \quad (10)$$

Dans notre cas, le marquage moyen de la place *p1*, représentant le nombre moyen de voitures disponibles par unité de temps (jour) dans le parc automobile est :

$$M(p_1)_{moy} = 0,1016(4) + 0,2555(3) + 0,2555(2) + 0,1539(1) + 0,2332(0)$$

$$M(p_1)_{moy} = 1,8378$$

- La probabilité qu'une condition particulière C sur la performance du système soit satisfaite correspond à la somme des probabilités des états où cette condition est vérifiée.

$$P(C) = \sum_{i \mid (M_i \in GMA) \text{ et } C \text{ est vraie})} \pi_i \quad (11)$$

Ainsi, dans le cas de notre exemple, la probabilité de rupture de voitures chez le concessionnaire correspond à la probabilité de l'état *M5,* le seul état où le marquage de la place p_1 est nul :

$$P(rupture) = \pi_5 = 0,2332$$

- Soit $S(t_j)$ l'ensemble des marquages accessibles où la transition t_j est franchie, λ_j le taux de franchissement associée à t_j. La fréquence moyenne de franchissement de cette transition est :

$$F(t_j)_{moy} = \sum_{M_i \in S(t_j)} \lambda_j \cdot \pi_i \quad (12)$$

Revenons à notre exemple d'illustration : La fréquence moyenne d'approvisionnement du parc automobile correspond à la fréquence moyenne de franchissement de la transition t2. Suivant le graphe de la Figure 8, la transition *t2* peut être franchie à partir de deux marquages à savoir : *M4* et *M5*. Ainsi, la fréquence moyenne d'approvisionnement est :

$$F(t_2)_{moy} = \lambda_2(\pi_4 + \pi_5)$$

$$F(t_2)_{moy} = 0,033(0,1539 + 0,2332) = 0,0127$$

Ce qui signifie qu'il y a en moyenne 0,0127 approvisionnement(s) par jour (unité de temps). Autrement dit, en moyenne un approvisionnement du concessionnaire est effectué chaque 78,7401 jours.

6.6. Simulation à événements discrets

Connaissant la complexité et la grande dimension des systèmes de vélos en libre service qui font l'objet de nos travaux de thèse, l'analyse et l'évaluation de performances via des méthodes numériques (programmation des méthodes analytiques) ou via la simulation à événements discrets s'avèrent incontournable. Dans le cadre de notre travail, nous avons opté pour la seconde technique vu les limites que peuvent avoir les méthodes analytiques basées sur la résolution des processus stochastiques associés aux modèles RdP : (i) restrictions par rapport aux types de lois stochastiques à associer aux transitions, (ii) explosion combinatoire du nombre d'états atteignables. Ainsi, une approche d'analyse et d'évaluation de performances via la simulation à événements discrets adaptée a été développée et fait l'objet du chapitre 4 de ce mémoire.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés aux réseaux de Petri en vue de leur utilisation comme un outil pertinent pour la modélisation, le contrôle et la régulation de la dynamique des systèmes à événements discrets. Nous nous sommes focalisés essentiellement sur le cas des systèmes de vélos en libre service nécessitant de complexes opérations de contrôle et de rééquilibrage et donc un formalisme et des méthodes adaptés pour leur modélisation et leur analyse.
Ainsi, après une présentation générale du formalisme des réseaux de Petri classiques, avec une étude bibliographique montrant notamment leur potentiel pour l'étude des systèmes de transport, nous avons introduit le concept des arcs à poids variables dans le formalisme classique des réseaux de Petri stochastiques discrets en vue de la modélisation et de l'analyse de cette nouvelle classe de systèmes de transport dans le paysage des transports urbains. La pertinence du choix de cette classe de réseaux de Petri a été démontrée au travers de nombreux exemples formels, illustratifs et significatifs. Ce concept a été inspiré à partir des réseaux de Petri lots stochastiques (LAB 2005, CHE 2005, LAB 2007) développés pour la modélisation et l'évaluation de performances des chaînes logistiques.

Le chapitre qui suit est consacré à la modélisation des systèmes de vélos en libre service en vue de leur régulation.

Chapitre 3

Modélisation des systèmes de vélos en libre service en vue de leur régulation

Ce chapitre est consacré à la modélisation en vue de la régulation des systèmes de vélos en libre service qui ne cessent de fleurir dans le monde entier, depuis ces quelques dernières années. Malgré leur succès fulgurant, ce nouveau mode de transport public dans le paysage de la mobilité urbaine soulève de nombreuses questions cruciales pour leur qualité de service, la principale étant celle d'une régulation efficace de la distribution de vélos dans les différentes stations. Dans ce chapitre, nous développons un ensemble de modèles dynamiques, paramétrables et configurables pouvant supporter leur complexité dynamique et comportementale. Notre approche repose sur une classe particulière de réseaux de Petri stochastiques ayant des arcs à poids variables (chapitre 2), pertinents aussi bien pour l'analyse, l'évaluation de performances que pour la simulation à événements discrets. Nous pouvons affirmer qu'il s'agit d'un premier travail du genre dans la littérature sur les réseaux de Petri et plus généralement sur la régulation des systèmes de vélos en libre-service, une problématique toute récente dans la littérature scientifique.

1. Un rappel sur le problème de régulation

1.1. Les systèmes de vélos en libre service

L'écologie et le développement durable stimule l'innovation dans les transports. Au cours de ces dernières années, des systèmes de vélos en libre-service fleurissent dans le monde entier et plus particulièrement en Europe (Vélib' à Paris, Vélov'v à Lyon, Bicing à Barcelone, etc.). Contrairement aux systèmes de transport traditionnels, peu d'études fondamentales sur la mise en œuvre et l'exploitation de ces systèmes de transport en libre-service ont été menées. Pourtant, de nombreuses questions émergent, la principale étant la question d'une régulation efficace (rééquilibrage des stations). D'autres questions telles que la taille des stations, le dimensionnement de la flotte de véhicules, la localisation des stations sont également considérables.

Le problème de rééquilibrage des stations dans un réseau de vélos en libre service est un problème crucial pour l'exploitant qui doit lui faire face tous les jours. Dû à la nature même du fonctionnement en libre service, d'une manière générale, les vélos ne sont pas uniformément répartis entre les différentes stations durant la journée. En effet, certaines

stations sont plus fréquentées que d'autres et ceci dépend en particulier de leurs emplacements géographiques (gares, universités, écoles, centre ville, lieux stratégiques, endroits touristiques, etc). D'autre part, les utilisateurs évitent très souvent à remettre les vélos empruntés dans des stations se trouvant en hauteur. Des stations situées dans des quartiers plutôt résidentiels se vident très tôt le matin, tandis que celles se trouvant à proximité des zones d'activités souffrent d'un engorgement à l'arrivée des salariés le matin et se vident rapidement en fin de journée. Par ailleurs, le déséquilibre des stations peut également être causé par des événements ponctuels ou imprévus (conditions métrologiques, jours de fêtes, jours de grèves, jours fériés et week-ends, …).

Plus concrètement, la régulation consiste pour l'exploitant à maintenir un nombre minimal de vélos par station pour permettre la prise de vélos par les usagers, ainsi qu'un nombre maximal inférieur à la capacité de la station pour permettre la dépose de vélos par les usagers (Figure 1). Afin d'appréhender la réalité du terrain de cette fonction, un excellent entretien avec les responsables de la régulation de Vélib' (Paris) est disponible sur le site internet : http://blog.velib.paris.fr/. Comme extrait de cet entretien, nous reprenons deux réponses à deux intéressantes questions :

- Comment définiriez-vous le rôle de la régulation ? «Très simplement : prendre des vélos là où il y en a trop pour les emmener là où il n'y en a pas assez. Dans un modèle théorique et parfait, chaque station devrait être remplie à 50 % de Vélib', laissant ainsi une moitié de bornes vides pour accueillir de nouveaux vélos. La réalité est bien sûr plus complexe».
- Quels sont vos objectifs chaque jour ? «Nous avons trois priorités. Tout d'abord, éviter les stations pleines, car nous savons que pour les usagers il n'y a rien de plus inconfortable que de se retrouver avec un vélo sur les bras. Puis, éviter les stations vides. Et enfin, parvenir à équilibrer vélos et places vides entre les différentes stations au niveau d'un quartier».

Dans la pratique, la régulation s'effectue de deux façons. D'un côté, elle peut se faire naturellement par les usagers qui retirent et restituent des vélos régulièrement. Ceci peut se produire lorsqu'il y a une faible dynamique du réseau ou il y a un équilibre naturel entre les flux sortant et entrant de vélos entre les stations. D'un autre coté, des agents de régulation répartissent les vélos lorsque les stations sont pleines ou vides en intervenant avec leurs véhicules de régulation. Ces derniers interviennent davantage sur les stations très fréquentées afin de rééquilibrer le nombre de vélos dans chaque station.

1.2. Le système en vue de la modélisation

Un système de vélos en libre-service est un réseau de transport composé d'un ensemble de **N** stations noté par $\mathbf{S = \{S_1, S_2, \ldots, S_N\}}$. Chaque station $\mathbf{S_i \in S}$ est équipée d'un nombre limité, noté $\mathbf{C_i}$, de points d'attache de vélos déterminé en fonction de l'environnement de la station et de sa fréquentation estimée. C'est un système de location en libre service disponible 24h/24. Les stations sont constituées d'une borne permettant notamment la location de vélos. Elles sont distantes de quelques centaines de mètres (300 mètres environ pour Vélib' Paris). Pour faire son trajet, chaque usager prend un vélo dans une station et le dépose dans une autre. Afin, de parvenir à équilibrer vélos et places vides entre les différentes stations, un système de régulation est nécessaire. La régulation se fait par des agents de régulation qui visitent les différentes stations. Ils utilisent des véhicules tractant une remorque chargée de vélos. Le principe général de la régulation du système consiste pour l'exploitant à maintenir un nombre minimal, noté $\mathbf{R_i}$, de vélos par station $\mathbf{S_i}$ pour permettre la prise de vélos par les usagers, laissant ainsi un certain nombre $\mathbf{(C_i - R_i)}$ de bornes vides pour accueillir de nouveaux vélos.

Figure 1. Illustration du problème de régulation d'un SVLS (photos utilisées : Vélib' Paris)

2. Modélisation des systèmes de vélos en libre service

2.1. Développement du modèle de base

Après la description fonctionnelle d'un système de vélos en libre-service, nous présentons dans cette section notre modèle de base intégrant le système de régulation. Pour des raisons de clarté, nous nous sommes contentés de représenter, par la Figure 2, le modèle pour un réseau à trois stations. La généralisation à N stations sera présentée par la suite pouvant se faire d'une manière naturelle et systématique en fonction de trois principaux modules qui seront définis dans la suite de cette section. Les tableaux 1, 2, et 3 ci-dessous, fournissent la désignation et l'interprétation de l'ensemble des places, des transitions et des paramètres du modèle RdP.

Place	Interprétation
PS_i	Représente une station S_i. Son marquage $M(PS_i)$ correspond au nombre de vélos disponibles dans la station S_i.
PR_i	Représente la voiture à remorque utilisée pour la régulation. Le marquage $M(PR_i)$ correspond au nombre de vélos disponibles dans ce véhicule au moment de la visite d'une station S_i.
PO_i	Permet d'indiquer si le nombre de vélos dans une station S_i est supérieur au seuil de régulation R_i.
PC_i	Permet d'indiquer si le contrôle de régulation d'une station S_i est terminé après le passage du véhicule de régulation : • $M(PC_i) = 1$ signifie que le contrôle de régulation est terminé et le déplacement du véhicule de régulation vers une autre station voisine est en cours. • $M(PC_i) = 0$ (*et* $M(PR_i) \neq 0$) signifie que le contrôle et/ou la régulation est en cours pour la station S_i.

Tableau 1. Interprétation des places du modèle RdP

Transition	Interprétation
TR_i	Permet de tester et de rajouter (si nécessaire) des vélos dans une station S_i.
TO_i	Permet de tester si le nombre de vélos dans une station S_i est supérieur au seuil de régulation R_i.
TS_i	Permet la suppression de vélos dans une station S_i si nécessaire (si le nombre de vélos dans S_i est supérieur à R_i)
TE_i	Permet de tester si le nombre de vélos dans une station S_i est égal au seuil de régulation R_i

Tableau 2. Interprétation des transitions du modèle RdP

Paramètre	Interprétation
R_i	Seuil de régulation appliqué au niveau d'une station S_i (niveau désiré)
C_i	Capacité d'une station S_i en nombre de vélos qu'elle peut contenir (correspond au nombre de points d'attache de vélos dans S_i).

Tableau 3. Paramètres de contrôle du modèle RdP

Bien évidemment, les Tableaux 1-3 et la Figure 2 seuls ne suffisent pas pour la compréhension complète du fonctionnement du modèle développé. Ainsi, comme on peut l'observer sur ce modèle (Figure 2), trois principaux modules peuvent être identifiés avec leurs fonctions spécifiques dans la dynamique globale du système. Pour une meilleure compréhension du modèle développé, les trois modules sont indiqués sur la Figure 2 :

1. Le module représentant le flux des vélos entrant et sortant entre les différentes stations dû aux déplacements des usagers entre les différentes stations. Ce qui génère des opérations de retrait (emprunts) et de rajout (retours) de vélos dans les différentes stations dues aux usagers.
2. Le module permettant d'assurer la régulation des stations dont l'objectif est de maintenir le nombre de vélos dans chaque station à un niveau prédéterminé. Ce module se duplique au niveau de chacune des stations du réseau.
3. Module représentant le déplacement du véhicule de régulation entre les différentes stations permettant de retirer ou de rajouter des vélos en fonction de l'état de chaque station au moment de son contrôle. Nous considérons ici un circuit élémentaire entre les différentes stations.

2.2. Description du module de régulation des stations

Le module permettant de réaliser la fonction de contrôle et de la régulation d'une station S_i est représenté par les Figures 3-5. On peut voir la duplication de ce module dans le modèle global (Figure 2) au niveau de chaque station S_i. Ce module de régulation est constitué de l'ensemble des places PS_i, PC_i, PR_i; de l'ensemble des transitions TE_i TR_i, TS_i, TO_i et bien sûr de l'ensemble des arcs reliant ces deux ensembles. Comme indiqué dans le Tableau 1, la place PS_i représente une station S_i ; la place PR_i représente le véhicule de régulation visitant la station S_i et la place PC_i permet d'indiquer l'état du contrôle (en cours ou terminé) de la station S_i. Ce module permet de réaliser trois principales fonctions décrites comme suit :

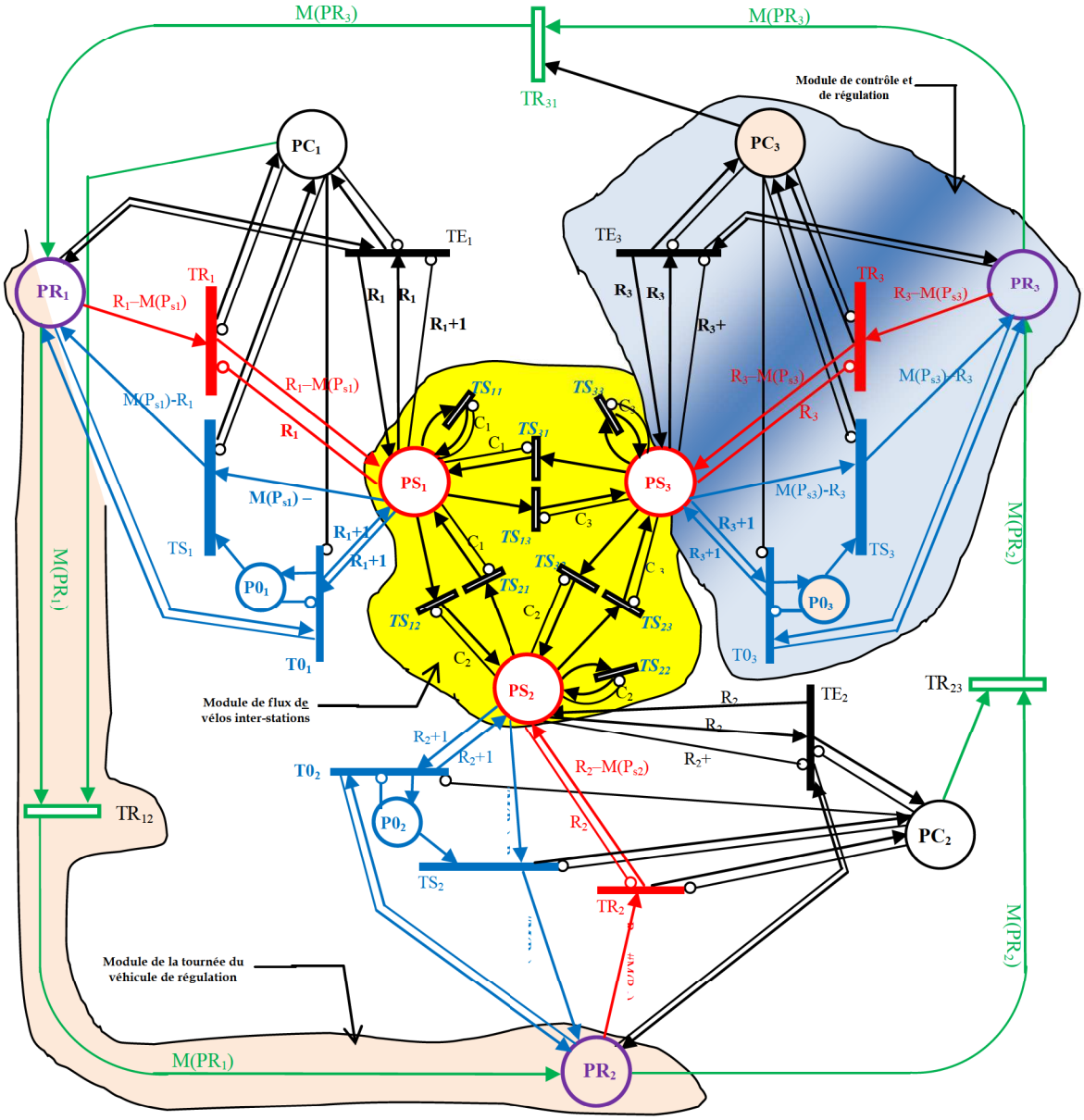


Figure 2. Modèle RdP d'un système de vélos en libre service (représentation à 3 stations)

A. Opération de « rajout de vélos » : Nombre de vélos disponibles dans la station S_i est inférieur à R_i ($M(PS_i) < R_i$).

L'opération de « *rajout de vélos* » est assurée par la transition TR_i et l'ensemble des arcs la reliant la place PS_i représentant la station S_i, PR_i représentant le camion de régulation et la place témoin PC_i. Cette transition assure deux opérations principales à savoir :

- Le contrôle de l'état de la station S_i permettant de détecter le cas où le nombre de vélos disponibles dans la station est inférieur au seuil de régulation R_i. Autrement dit, elle est validée lorsque $M(PS_i) < Inhib(PS_i, TR_i) = R_i$ au moment du contrôle de régulation de la station.
- Le rajout de "$R_i - M(PS_i)$" vélos dans la station S_i par le franchissement de TR_i afin de rééquilibrer le niveau de la station au niveau désiré R_i. Ce même nombre de vélos est évidemment retiré du camion de régulation représenté par la place PR_i.

- Au même moment, le franchissement de la transition TR_i dépose un jeton témoin dans la place PC_i ($M(PC_i) = 1$) afin d'indiquer la fin du contrôle et du rééquilibrage de la station S_i. Le camion de régulation est ainsi libéré et peut continuer sa tournée vers la station suivante.

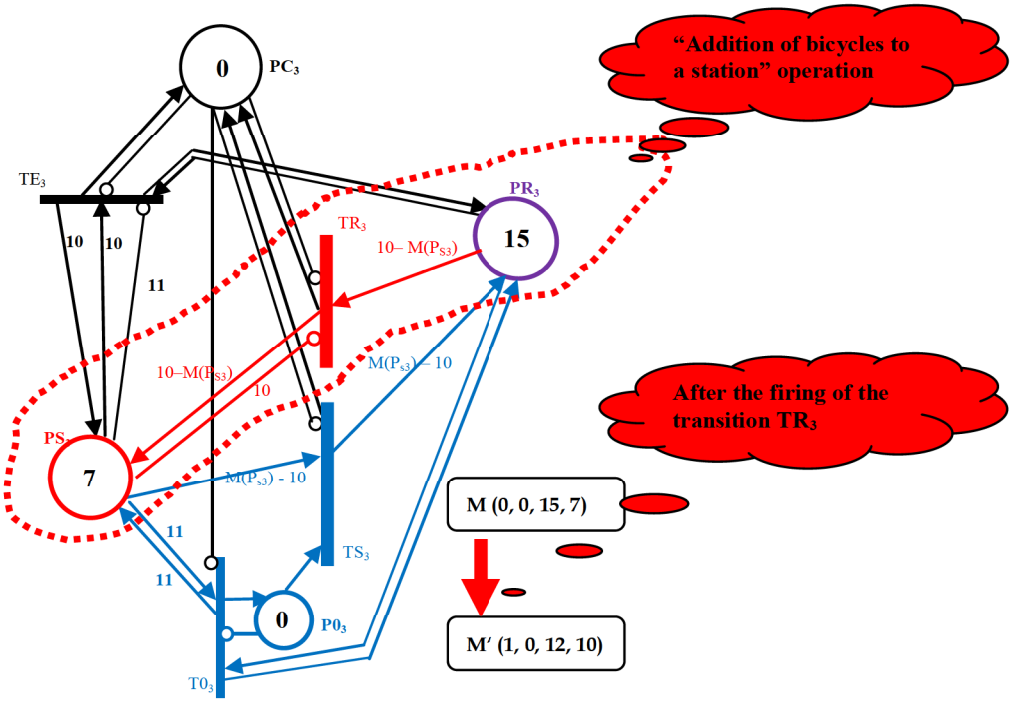


Figure 3. Illustration du problème de régulation d'un SVLS : cas d'une opération de rajout de vélos ($M(S_i) = 7 < R_i = 10$)

- **EXEMPLE D'ILLUSTRATION DU CAS (A)** — A titre d'illustration de ce cas, considérons le réseau de la Figure 3. A l'état actuel du réseau, on voit clairement que la station représentée par la place PS_3 a un nombre de vélos inférieur au seuil de régulation R_3 fixé ici à 10.

  - A partir du réseau de Petri, on peut voir que la seule transition franchissable est la transition TR_3 puisque les conditions suivantes sont vérifiées :

$$M(PS_3) = 7 < 10. \quad (1)$$

$$M(PR_3) = 15 \geq 10 - M(PS_i) = 3. \quad (2)$$

$$M(PC_3) = 0 < 1. \quad (3)$$

La signification de ces trois équations validant la transition TR_3 est comme suit : (1) le nombre de vélos disponibles dans la station S_3 qui est de 7 est inférieur au seuil de régulation fixé à 10 ; (2) le nombre de vélos disponibles dans le camion de régulation qui de 15 est supérieur au nombre de vélos à rajouter et (3) le contrôle n'est pas encore effectué grâce à la place témoin PC_3.

  - Après le franchissement de la transition TR_3, le nouveau marquage M' du réseau de Petri est comme suit :

$$M'(PS_3) = M(PS_3) + \left[10 - M(PS_3)\right] = 7 + \ 10 - 7 \ = 10. \quad (4)$$

$$M'(PR_3) = M(PR_3) - \left[10 - M(PS_3)\right] = 15 - \ 10 - 7 \ = 12. \quad (5)$$

$$M'(PC_3) = M(PC_3) + 1 = 0 + 1 = 1. \quad (6)$$

Plus clairement, ces équations donnant le nouveau état du réseau après l'opération de rééquilibrage de la station S_3 s'interprètent comme suit : (4) le nombre de vélos dans la station S_3 passe au niveau désiré $R_3 = 10$; (5) retrait de "R_i - M(S_i)" vélos dans le camion de régulation qui sont rajoutés dans la station S_3 ; (6) indication de fin de cette opération.

B. Opération de « retrait de vélos » : Nombre de vélos disponibles dans la station S_i est supérieur à R_i (M(PS_i) > R_i).

L'opération de « *retrait de vélos* » est assurée par les transitions TO_i et TS_i et l'ensemble des arcs associés les reliant aux places PS_i, PR_i, PC_i et la place témoin PO_i. Le fonctionnement de cette partie du module de régulation se résume comme suit :

- Premièrement, lorsque le nombre de vélos disponibles dans la station S_i, au moment de son contrôle, est supérieur au seuil de régulation R_i (autrement dit lorsque M(PS_i) ≥ Pré(PS_i,TO_i)=R_i+1), la transition immédiate TO_i est franchissable. Son franchissement permet de déposer un jeton témoin dans la place PO_i sans aucune autre incidence sur l'état de réseau.
- Deuxièmement, lorsqu'un jeton témoin est placé dans la place PO_i (c.a.d M(PO_i) = 1) indiquant que le nombre de vélos disponibles dans la station sous contrôle est supérieur à R_i, la transition TS_i est validée et son franchissement va permettre de rééquilibrer le niveau de la station S_i au niveau désiré R_i.
- Le franchissement de la transition TS_i permet de retirer le superflu "M(PS_i) – R_i" de vélos dans la station S_i et de le déposer dans le camion de régulation. Ce qui rééquilibre ainsi le niveau de la station au niveau fixé à R_i.
- De la même manière que le cas précédent, le franchissement de la transition TS_i dépose un jeton témoin dans la place PC_i (M(PC_i) = 1) afin d'indiquer la fin du contrôle et du rééquilibrage de la station S_i. Le camion de régulation est ainsi libéré et peut continuer sa tournée vers la station suivante.

- **EXEMPLE D'ILLUSTRATION DU CAS (B) —** De la même manière que le premier cas, considérons la Figure 4 où nous avons 15 vélos disponibles dans la station S_3 (M(PS_3) = 15) ; 22 vélos disponibles dans le camion de régulation (M(PR_3) = 22) et que M(PC_3) = 0 indiquant que le contrôle de la station S_3 n'a pas encore eu lieu (en cours).

  - A l'état actuel du réseau, la transition immédiate TO_3 est validée puisque les équations suivantes sont vérifiées :

$$M(PS_3) = 15 \geq 11. \quad (7)$$

$$M(PO_3) = 0 < 1. \quad (8)$$

$$M(PC_3) = 0 < 1. \quad (9)$$

$$M(PR_3) = 22 \geq 1 \quad (10)$$

La signification de ces trois équations validant la transition TO_3 est comme suit : (7) le nombre de vélos disponibles dans la station S_3 qui est de 15 est supérieur au seuil de régulation fixé à 10 ; (8) le test « est-ce qu'il y a un superflu de vélos dans S_3 ? » n'est pas

encore effectué puisque $M(PO_3) = 0$; (9) le contrôle et le rééquilibrage de la station n'est pas encore effectué puisque $M(PC_3) = 0$; (10) le camion de régulation est disponible avec 22 vélos dans sa remorque.

- Le franchissement de cette transition TO_3 ramène le marquage de la place PO_3 à 1, permettant d'indiquer que le test est positif ($M(PS_3) > R_3 = 10$).

$$M'(PO_3) = M(PO_3) + 1 = 1. \quad (11)$$

Le marquage à un de la place témoin PO_3 résultant du franchissement immédiat de la transition TO_3, valide systématiquement la transition TS_3 puisque :

$$M(PS_3) = 15 \geq 15. \quad (12)$$

$$M(PO_3) = 1 \geq 1. \quad (13)$$

$$M(PC_3) = 0 < 1. \quad (14)$$

Les équations (12) et (14) ont la même signification que les équations respectives (7) et (9). L'équation (13) est le résultat du franchissement de TO_3 indiquant que le nombre de vélos dans S_3 est supérieur au seuil de régulation et donc une opération de rééquilibrage de la station est nécessaire (opération de retrait).

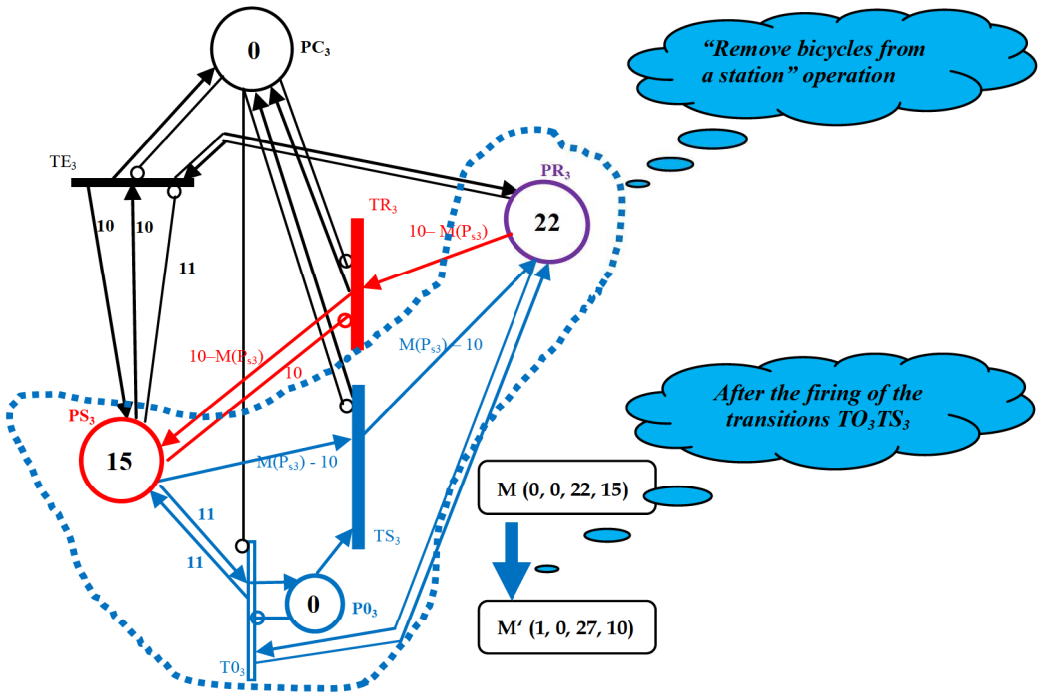


Figure 4. Illustration du problème de régulation d'un SVLS

- Après le franchissement de la transition TR_3, le nouveau marquage du réseau est comme suit :

$$M'(PS_3) = M(PS_3) - [M(PS_3) - 10] = 10. \quad (15)$$

$$M'(PR_3) = M(PR_3) + [M(PS_3) - 10] = 22 + (15 - 10) = 27. \quad (16)$$

$$M'(PC_3) = M(PC_3) + 1 = 1. \quad (17)$$

$$M'(PO_3) = M(PO_3) - 1 = 0. \quad (18)$$

L'équation (15) indique le nouvel état de la station S_3 qui passe au niveau désiré R_3 = 10 (retrait de "$M(PS_3) - R_3 = 15 - 10 = 5$" vélos) ; L'équation (16) indique que le nombre de vélos dans le véhicule de régulation passe à 27 vélos suite à ceux retirés de la station S_3. Enfin, (18) le marquage de la place PO_3 passe à 0 pour indiquer la fin du test de l'état de la station S_3 et (17) le marquage de la place PC_3 passe à 1 pour indiquer la fin du contrôle et du rééquilibrage de la station S_3, ce qui libère le camion de régulation vers une nouvelle station selon la tournée fixée.

C. Opération « ni rajout ni retrait » : Nombre de vélos disponibles dans la station S_i est identique au seuil de régulation R_i ($M(PS_i) = R_i$).

L'opération « *ni rajout ni retrait* » est assurée par la transition TE_i et l'ensemble des arcs qui l'associent aux places PS_i, PR_i et PC_i. Contrairement aux opérations de rajout et de retrait assurées par les transitions respectives TR_i et TS_i, cette transition permet de détecter que le nombre de vélos dans la station S_i est égal au seuil de régulation R_i. Dans ce cas, son franchissement n'aura aucune incidence sur l'état de la station et donc du camion de régulation. Elle permet uniquement de déposer un jeton témoin dans la place PC_i afin de libérer le camion pour poursuivre sa tournée de régulation.

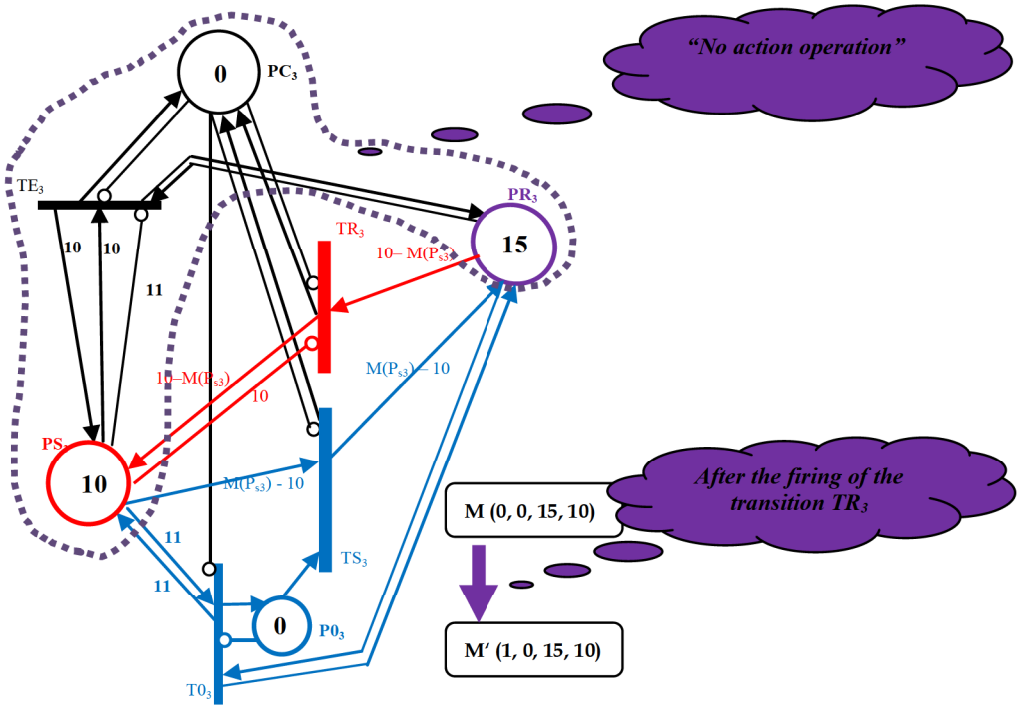


Figure 5. Illustration du problème de régulation d'un SVLS

- **EXEMPLE D'ILLUSTRATION DU CAS (C) —** Prenons par exemple le cas de la Figure 5 où, au moment du contrôle de la station S_3, nous avons 10 vélos disponibles dans cette station (M(PS3) = 10), 15 vélos dans la remorque du camion de régulation (M(PR3) = 15), et aucun contrôle n'est encore effectué ($M(PC_3) = 0$, $M(PO_3) = 0$). Dans cet état, la

seule transition validée est la transition immédiate TE_3 qui détecte que $M(PS_3) = 10$ grâce aux équations de validation suivantes :

$$M(PS_3) \geq Pré(PS_3, TE_3) = R_3. \quad (19)$$

$$M(PS_3) < Inhib(PS_3, TE_3) = R_3 + 1. \quad (20)$$

Dans notre cas, $R_3 = 10$ et $M(PS_3) = 10$. Ainsi, la fusion des deux conditions (19) et (20) permet en réalité de vérifier que le marquage de PS_3 est égal R_3 (nombre de vélos disponible dans la station en cours de contrôle est égal au seuil de régulation désiré).

Contrairement aux franchissements des transitions TS_i et TR_i (retrait et rajouts de vélos dans S_i), le franchissement de la transition TE_i va permettre uniquement d'indiquer que la visite de la station S_i est terminée pour libérer le véhicule à aller vers une autre station. Ainsi le franchissement de la transition TE_3 conduit au marquage suivant :

$$M'(PC_3) = M(PC_3) + Post(TE_3, PC_3) = 0 + 1 = 1 \quad (21)$$

2.3. Temporisations associées au module de régulation

Nous rappelons que le module de régulation est composé de quatre transitions à savoir : TE_i, TR_i, TS_i et TO_i. Chaque transition modélise une opération spécifique de rééquilibrage dont le délai opératoire (d'exécution) doit être exprimé par la temporisation à associer à la transition correspondante.

- Les transitions TE_i et TO_i peuvent être considérées comme des transitions immédiates (zéro délai). La transition TE_i est franchie pour le cas où le nombre de vélos dans la station S_i est égal au seuil de régulation R_i. Dans ce cas, il n'y a pas de rajout ou de retrait de vélos, donc aucun délai opératoire à prévoir pour le franchissement de cette transition.

- Pour ce qui est de la transition TO_i qui représente le test « si $M(PS_i) > R_i$», on peut estimer que ce test s'effectue sans aucun délai opératoire. De plus cette transition joue un rôle dans la fonction de rajout des vélos et le délai opératoire de cette opération sera considéré avec la transition TS_i dont la fonction consiste à rajouter des vélos dans la station S_i afin de la ramener au niveau désiré R_i.

- Des temporisations de type stochastique doivent être associées aux transitions TS_i et TR_i pour exprimer les délais opératoires des opérations de retrait et de rajout de vélos dans la station S_i. Ces temporisations sont stochastiques car le nombre de vélos à rajouter ou à soustraire n'est pas déterministe. Il varie à chaque contrôle de régulation en fonction de l'état actuel de la station contrôlée.

- Remarque. — Il est intéressant de remarquer qu'il n'y a pas de conflit de franchissement entre les trois principales transitions TS_i, TR_i et TE_i du module de régulation. En effet, les conditions de franchissement des trois transitions notamment $M(PS_i) > R_i$; $M(PS_i) < R_i$; et $M(PS_i) = R_i$ sont strictement exclusives. Ainsi, aucune politique de gestion de priorités de franchissement n'est associée aux transitions.

2.4. Description du module de flux de vélos inter-stations

Le module RdP de la Figure 6 modélise les déplacements de vélos d'une station à une autre dus aux retraits (emprunts) et aux dépôts (retours) effectués par les usagers. En effet, pour faire son trajet, chaque usager prend un vélo dans une station et le dépose dans une autre (pouvant être la même !). La modélisation est faite à l'aide d'un RdP « complet » dont le sens où toutes les places sont reliées entre elles dans les deux sens à l'aide d'un ensemble de transitions notées TS_{ij} et des arcs correspondants.

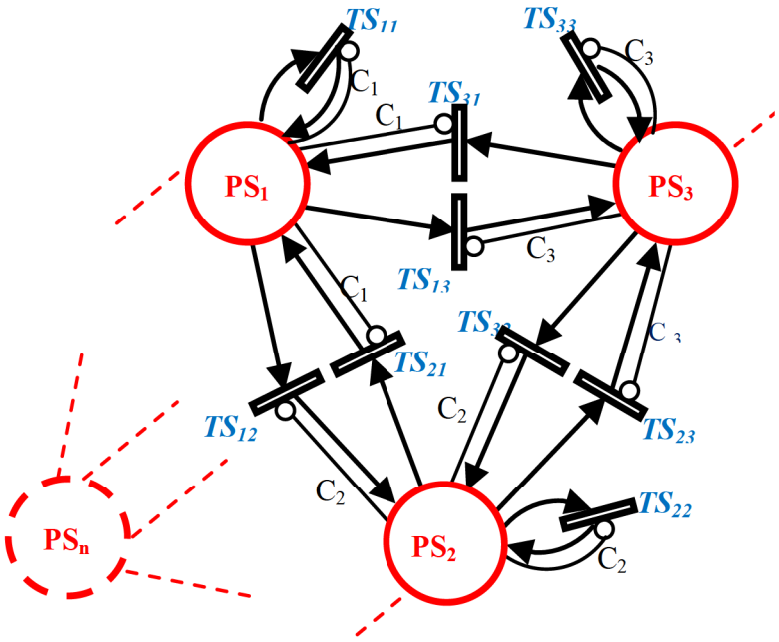


Figure 6. Module représentant le processus des flux de vélos inter-stations

- Chaque station S_i du réseau de transport est modélisée par une place notée par PS_i. Le nombre de vélos disponibles dans une station S_i à un instant donné est représenté par le marquage de la place PS_i. Il est noté par $M(PS_i)$ égal au nombre de jetons disponibles dans PS_i. La capacité de chaque place, notée par C_i, correspond au nombre de points d'attache de chaque station correspondante S_i. Elle est déterminée, lors de la conception du système, en fonction de l'environnement de la station et de sa fréquentation estimée.

- La dynamique des vélos est assurée par le déplacement de jetons d'une place à une autre par les franchissements des transitions notées par TS_{ij} liant à l'aide des arcs les différentes places. Les indices « ij » indiquent que le vélo a été prélevé par un usager d'une station S_i et a été déposé par ce même usager dans une autre station S_j. On voit sur le réseau des transitions de type TS_{ii} avec i = j (boucle sur une même place). Ceci est dû à la possibilité qu'un usager prenne un vélo d'une station S_i et le déposer, après avoir effectué son trajet, dans cette même station.

- En plus des différents arcs classiques reliant les transitions aux places et vice-versa, on voit sur le réseau des arcs inhibiteurs de poids C_i reliant les transitions TS_{ij} aux places PS_i. Ces arcs inhibiteurs permettent d'exprimer la capacité limitée C_i de chaque station (C_i correspond au nombre de points d'attache installés dans une station S_i). Par conséquent, un usager ne peut pas déposer son vélo dans une station pleine. En termes du RdP, une transition T_{ij} peut être franchie que si $M(PS_j) < C_i$.

Le type des transitions de ce module doit être stochastique. En effet, les délais des trajets, les temps d'utilisation et les distances à parcourir par les usagers sont aléatoires. Ceci engendre un processus stochastique. En pratique, l'estimation des paramètres à associer à ces transitions dépendra de l'environnement de chaque station et de sa fréquentation estimée.

2.5. Description du module de la tournée du véhicule de régulation

Le module représentant le déplacement du véhicule à remorque visitant les différentes stations pour le contrôle de régulation se compose de l'ensemble des places PR_i (i = 1, 2, …, N). Chaque place PR_i peut contenir des jetons représentant l'ensemble des vélos disponibles dans le véhicule au moment de la visite de la station correspondante S_i. L'ensemble des transitions notées par TR_{ij} permet la modélisation des déplacements qu'effectue le véhicule d'une station à une autre après chaque contrôle de régulation.

- Ce circuit est bien sûr lié à chaque station (à chaque place PS_i) afin d'assurer la fonction de régulation. Ce lien est fait au moyen de l'ensemble des transitions notées par TR_i, TS_i, TE_i et TO_i et de l'ensemble des arcs associés composant les modules de régulation.
- En supposant que le contrôle de régulation d'une station S_i vient d'être terminé. Vu la section 2.2, la place PC_i sera marquée, $M(PC_i) = 1$, indiquant que le contrôle est effectué et que le véhicule est en cours de déplacement vers une station voisine S_j en franchissant une transition de type TR_{ij}.

  - Formellement, une transition TR_{ij} (représentant le déplacement du véhicule de régulation de la station i à une autre station j) est franchissable si et seulement si :

$$M(PC_i) \geq 1 \tag{22}$$

Cette condition est vraie lorsque le contrôle de la station S_j est terminé. Elle se produit en franchissant l'une des transitions TE_i, TR_i et TS_i qui dépose un jeton dans la place PC_i.

$$M(PR_i) \geq M(PR_i) \tag{23}$$

Cette condition est toujours vraie. Elle est due au poids de l'arc allant de la place PR_i et la transition TR_{ij} afin que son franchissement déplace l'ensemble des jetons (vélos) restant dans PR_i (véhicule de régulation) vers la prochaine station à contrôler.

  - Le franchissement de la transition TR_{ij} (après un certain délai correspondant à la temporisation associée à cette transition) va faire évoluer le marquage du réseau comme suit :

$$M'(PR_j) = M(PR_j) + M(PR_i) = M(PR_i) \tag{24}$$

$$M'(PC_i) = M(PC_i) - 1 = 0 \tag{25}$$

Ces équations signifient que le véhicule de régulation est maintenant au niveau de la station S_j pour un nouveau contrôle de régulation. Le marquage de la place PR_j indique le nombre de vélos se trouvant dans le véhicule de régulation en arrivant à la station S_j.

A noter que la place PC_i contenait un seul jeton lors de la validation de la transition TR_{ij}. Maintenant que la place PC_i est marquée, un nouveau contrôle de régulation de la station S_i va pouvoir avoir lieu lors de la prochaine visite du véhicule de régulation.

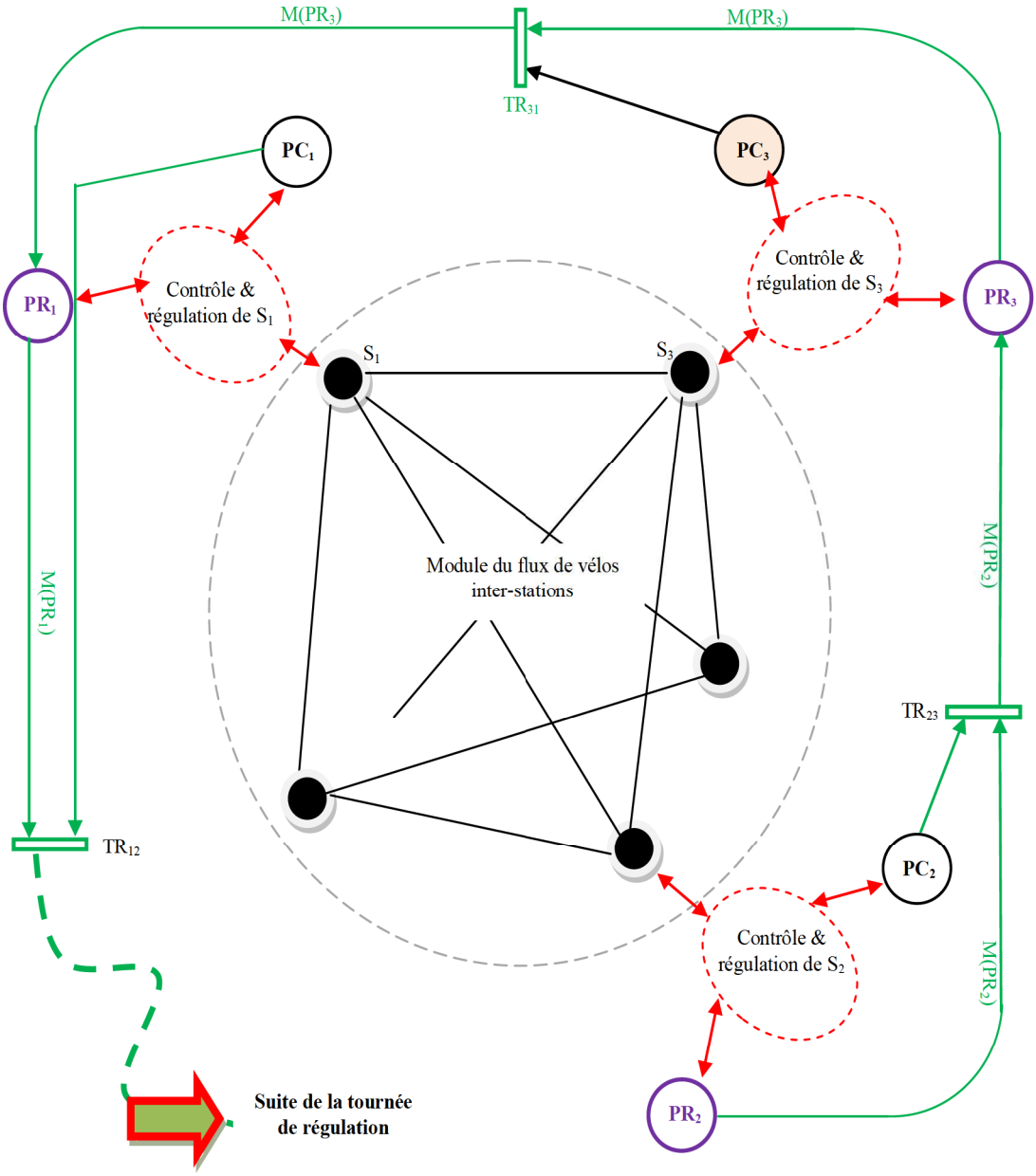


Figure 7. Illustration du module de la tournée du véhicule de régulation

Remarques :

- Dans le modèle présenté pour trois stations pour des raisons de clarté (Figures 2 et 7), nous avons utilisé un seul véhicule de régulation. Bien évidemment, pour un réseau concret (à N stations), la régulation peut se faire par quartier et par plusieurs véhicules de régulation. Ainsi, le réseau peut être réparti en zones et plusieurs circuits de régulation peuvent être utilisés. Le principe de la modélisation reste le même.

- Par ailleurs, la tournée peut être définie en utilisant l'algorithme du plus court chemin ou toute autre stratégie de visite des stations établie par l'exploitant. Par la suite, nous verrons que nos modèles permettent également l'utilisation de deux modes de tournées : *tournée continue* ou *tournée périodique* en fonction de la fréquence du rééquilibrage nécessaire ou souhaitée.

2.6. Généralisation du modèle pour un réseau à N stations

Grâce à notre présentation modulaire, la généralisation du modèle développé à N stations est systématique à partir du modèle présenté pour trois stations. Le nombre de composants (places, transitions et arcs) nécessaires pour la construction d'un modèle à N stations est déterminé, module par module, dans cette section.

- **Module du flux de vélos inter-stations :** En se référant au module présenté dans la section 2.4 : Les N stations S_i, (i = 1,2, …, N) sont modélisables par N places notées par PS_i ; Le bouclage entre toutes les stations (l'ensemble des places PS_i), puisque les vélos peuvent passer d'une station à une autre, nécessite : N^2 transitions ; et l'ensemble des arcs liant les places aux transitions peut être évalué à $2*N^2$ arcs classiques et N^2 arcs inhibiteurs.

- **Module de contrôle et de régulation des stations :** En se référant à la présentation de ce module dans la section 2.2, on voit que la construction de ce module nécessite : 3 places notées PR_i, PO_i et PC_i (en plus de la place PS_i déjà comptabilisée en haut). Et comme, ce module se duplique au niveau de chaque station S_i, le nombre de ce type de places est donc 3*N places ; 4 transitions notées TO_i, TR_i, TS_i et TE_i. Pour la même raison, le nombre de ce type de transitions pour un réseau à N stations est donc de 4*N transitions ; L'ensemble des arcs liant les places aux transitions (pour un réseau de N stations) s'élève à 19*N arcs classiques et 7*N arcs inhibiteurs.

- **Module de la tournée du véhicule de régulation :** Pour ce qui est de la représentation de ce module décrit en section 2.5, il est réalisé au moyen des transitions stochastiques notées par TR_{ij}. Il faut au total N transitions de ce type et 3*N arcs classiques. Les places de types PR_i sont déjà comptabilisées dans le module de régulation.

Finalement, pour un réseau à N stations, le modèle RdP global modélisant un système à N stations sera composé de :

$$\begin{cases} 4*N & places \\ N^2 + 5*N & transitions \\ 2*N^2 + 21*N & arcs\ classiques \\ N^2 + 7*N & arcs\ inhibiteurs \end{cases} \quad (26)$$

En prenant en compte, les remarques faites au sujet du module représentant la tournée du véhicule de régulation, le dimensionnement en termes de places, transitions et arcs peut légèrement être modifié. A titre d'exemple, pour une tournée périodique, nous devons prévoir dans le circuit une place de passage du camion de régulation au dépôt avec comme entrée une transition de type TR_{kd} (L'indice "kd" indique le retour du camion de régulation de la dernière station visitée k vers le dépôt d) et comme sortie TR_{di} dont la durée de franchissement représente la période (fréquence) de rééquilibrage des stations (L'indice "di" : indique le départ du camion du dépôt d vers la station i (début de la tournée après une période donnée)).

3. Extension du modèle de base

Le modèle développé dans cette section est une extension du modèle initial présenté tout au long de la section précédente. Contrairement au modèle de base, ce nouveau modèle RdP prend en compte la « *capacité limitée du véhicule de régulation* ». Autrement dit, afin d'avoir un modèle encore plus réaliste, nous considérons que le véhicule de régulation a une capacité limitée notée par CV. Ce nouveau paramètre du système conduit à un nouveau modèle RdP représenté par la Figure 8, dont les paramètres, les transitions et les places sont spécifiés et interprétés respectivement dans les Tableaux 4, 5 et 6. Cet ensemble d'éléments permet au lecteur d'avoir une première description du modèle.

Paramètre	Interprétation
NVR_i	Nombre de vélos à rajouter dans la station S_i. Formellement : $NVR_i = R_i - M(PS_i)$
NVS_i	Nombre de vélos à retirer de la station S_i. Formellement : $NVS_i = M(PS_i) - R_i$
NPD_i	Nombre de places vides disponibles dans le véhicule de régulation au moment du contrôle d'une station S_i. Formellement : $NPD_i = CV_i - M(PR_i)$
CV_i	Capacité du véhicule de régulation (nombre maximal de vélos pouvant être transportés par le véhicule de régulation)
R_i	Seuil de régulation appliqué pour le contrôle de la station S_i.
C_i	Capacité d'une station S_i en nombre de vélos qu'elle peut contenir (correspond au nombre de points d'attache de vélos dans S_i).

Tableau 4. Désignation et interprétation des paramètres du modèle

Place	Interprétation
PS_i	Représente une station S_i. Son marquage $M(PS_i)$ correspond au nombre de vélos disponibles dans la station S_i.
PR_i	Représente le véhicule à remorque utilisé pour la régulation du réseau. Son marquage $M(PR_i)$ correspond au nombre de vélos disponibles dans ce véhicule au moment de la visite de la station S_i.
PO_i	Permet d'indiquer si le nombre de vélos dans une station S_i est supérieur au seuil de régulation R_i, lorsque $M(PO_i) = 1$.
PC_i	Permet d'indiquer si le contrôle de régulation d'une station S_i est terminé. Ceci est vrai lorsque $M(PC_i) = 1$.
PV_i	Permet d'indiquer l'arrivée du véhicule chargé de la régulation au niveau d'une station S_i. Ceci se produit lorsque $M(PV_i) = 1$.

Tableau 5. Désignation et interprétation des places du modèle

Transition	Interprétation
TR_i	Permet de tester et de rajouter (si nécessaire) des vélos dans une station S_i. Le nombre de vélos à rajouter lorsqu'il est jugé nécessaire est **$NVR_i = R_i - M(PS_i)$** (re-complètement de la station jusqu'à R_i)
TO_i	Permet de tester si le nombre de vélos dans une station S_i est supérieur au seuil de régulation R_i.
TS_i	Permet la suppression de vélos dans une station S_i (si nécessaire). Le nombre de vélos à retirer lorsqu'il est jugé nécessaire est **$NVS_i = M(PS_i) - R_i$** (Ramener le nombre de vélos dans la station à R_i)
TE_i	Permet de tester si le nombre de vélos dans une station Si est égal au seuil de régulation R_i.
$TRBr_i$	Permet de tester si le nombre de vélos NVR_i à rajouter dans une station S_i est supérieur au nombre de vélos disponibles $M(PR_i)$ dans le véhicule de régulation.
$TRBs_i$	Permet de tester si le nombre de vélos NVS_i à retirer d'une station S_i est supérieur au nombre de places vides disponibles NPD_i dans le véhicule de régulation

Tableau 6. Désignation et interprétation des transitions du modèle

3.1. Descriptif général du modèle étendu

Bien évidemment, les tableaux précédents et la Figure 8 ne suffisent pas aux lecteurs pour comprendre intégralement le fonctionnement dynamique du nouveau modèle développé. Dans un premier temps, de la même manière que le premier modèle et comme on peut le constater sur la Figure 8, trois principaux modules, avec leurs fonctions spécifiques, peuvent être identifiés. Le modèle RdP global est composé de l'ensemble des modules suivants :

- Module représentant le contrôle et la régulation de chaque station S_i prenant en compte la capacité limitée du véhicule de régulation. Ceci conduit à cinq différents types d'opérations de rééquilibrage au lieu de trois du modèle de base.
- Module représentant le processus du flux de vélos inter-stations dû aux retraits et aux dépôts de vélos effectués par les usagers. Ce module reste similaire à celui de notre modèle de base. Bien sûr, quelques nouveaux arcs partant des modules de contrôle de chaque station apparaissent.
- Module représentant le déplacement du véhicule d'une station à une autre pour le contrôle et le rééquilibrage des stations aux niveaux souhaités. Hormis quelques adaptations dues à quelques nouvelles places et transitions, ce module de tournée est globalement similaire à celui du premier modèle.

La construction d'un modèle à N stations se fait naturellement à partir des différents modules. Le nombre de composants (places, transitions et arcs) d'un modèle à N, évalué module par module, est comme suit :

$$\begin{cases} 5*N & places \\ N^2 + 7*N & transitions \\ 2*N^2 + 31*N & arcs\ classiques \\ N^2 + 12*N & arcs\ inhibiteurs \end{cases} \quad (27)$$

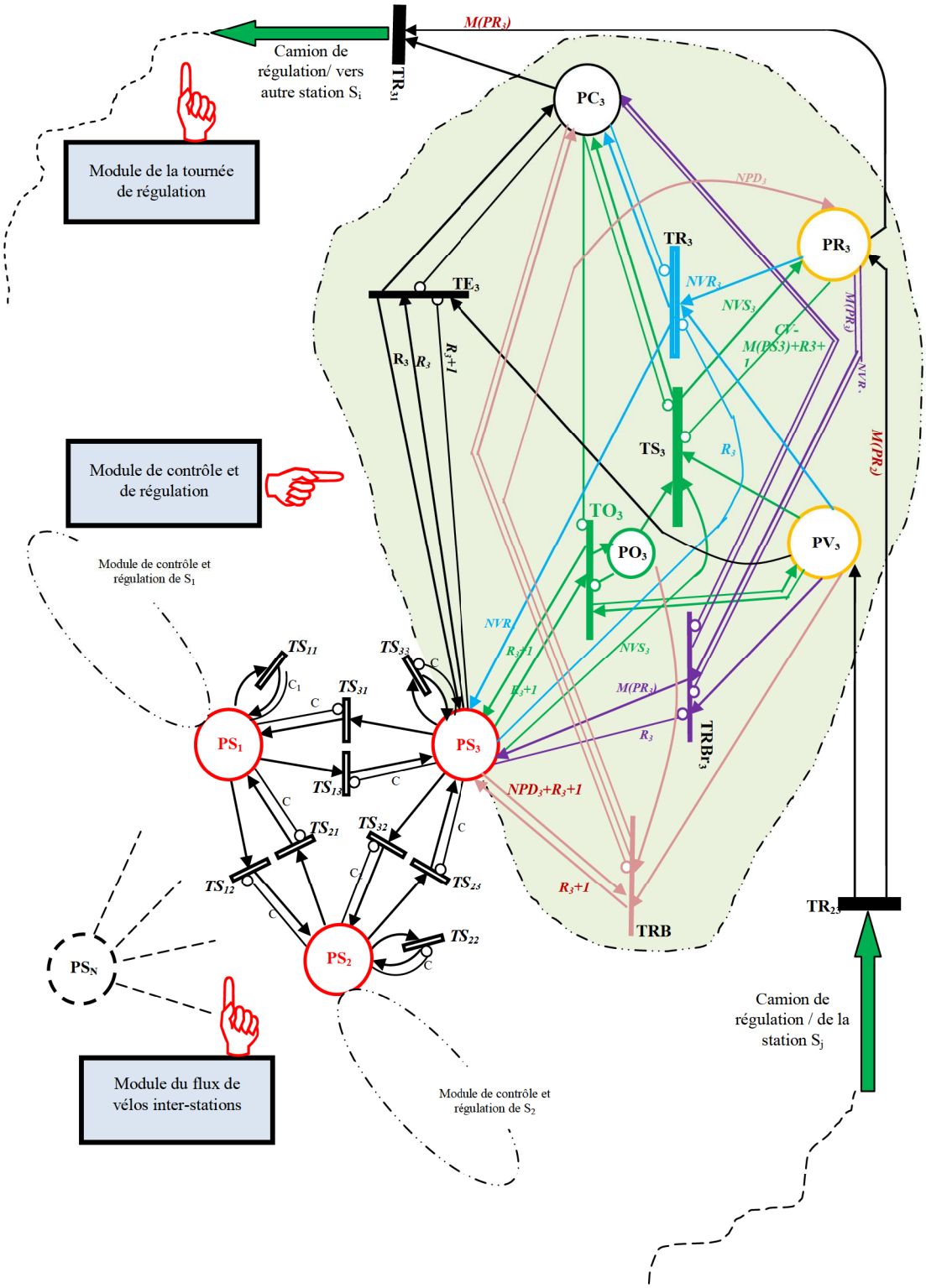


Figure 8. Modèle RdP d'un système de vélos en libre service – Extension du modèle de base en prenant en compte la capacité limitée des véhicules de régulation

Dans la suite du développement de cette extension du premier modèle, nous nous attacherons plus particulièrement au module de contrôle et de régulation du système. Ce module est représenté à la fois dans le modèle de global (Figure 8) et puis sous forme d'un module indépendant par la Figure 9 qui sera étudié en détail dans la sous-section qui suit.

3.2. Fonctionnement du module de régulation

Le module permettant de réaliser la fonction de régulation d'une station S_i est représenté par la Figure 9. On peut voir la duplication de ce module dans le modèle global (Figure 8) autour de chaque station S_i représentée par la place PS_i.

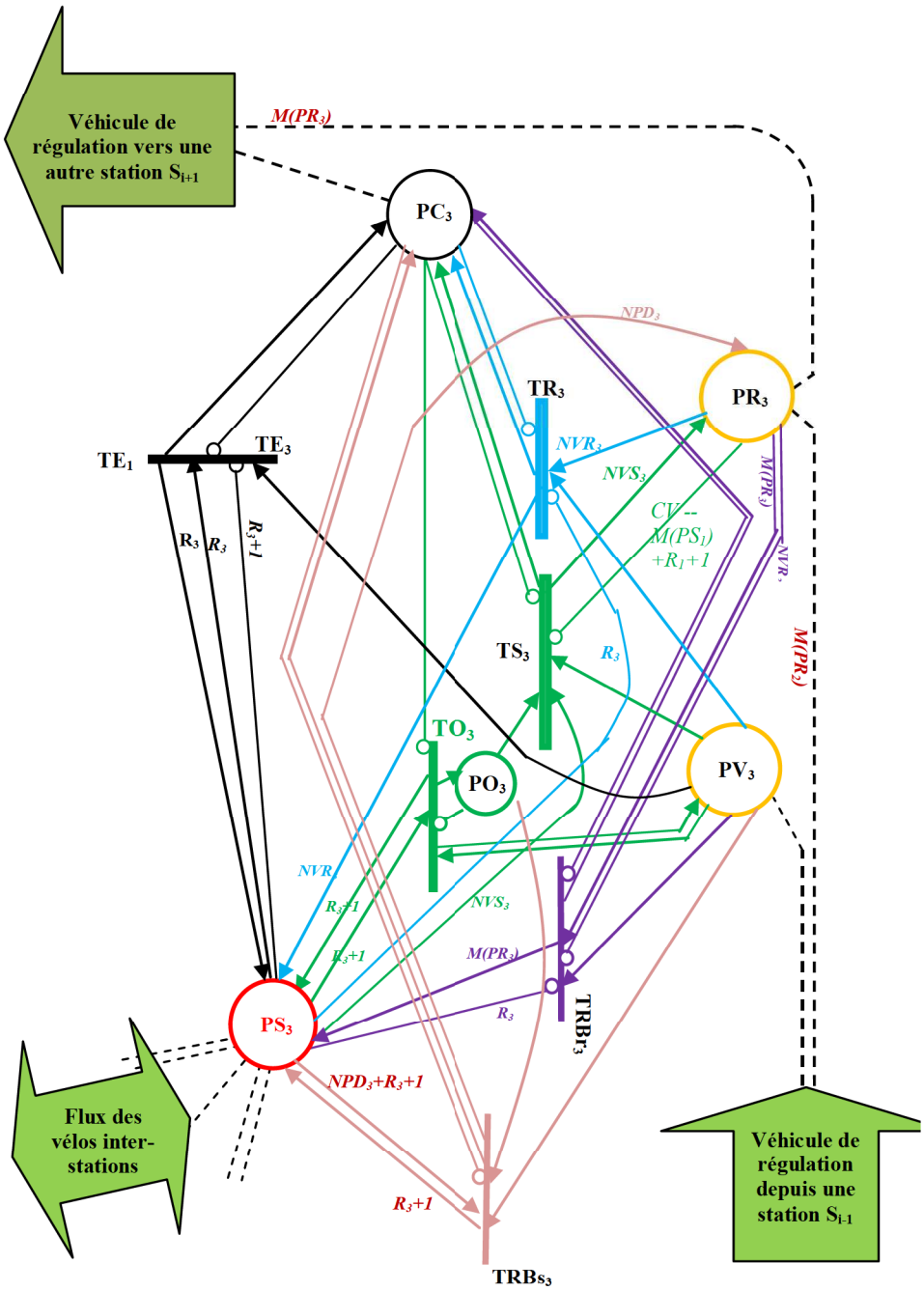


Figure 9. Module de contrôle et de régulation d'une station S_i (Extrait de la figure 8)

Ce module de régulation est constitué de l'ensemble des places PS_i, PC_i, PR_i, PO_i, PV_i, et de l'ensemble des transitions TE_i, TR_i, TS_i, TO_i, $TRBri$, $TRBs_i$ et bien sûr de l'ensemble des arcs reliant ces deux ensembles. Comme indiqué dans le Tableau 5, la place PS_i représente une station S_i; la place PR_i représente le véhicule de régulation visitant la station S_i; la place

PV_i permet d'indiquer l'arrivée du véhicule de régulation au niveau de la station S_i; la place PC_i permet d'indiquer l'état du contrôle (en cours ou terminé) de la station S_i ; PO_i permet d'indiquer si le nombre de vélos dans une station S_i est supérieur au seuil de régulation R_i.

Lorsque le véhicule de régulation arrive au niveau d'une station S_i, indiqué par $M(PV_i) = 1$, le rééquilibrage de la station se fait en fonction du nombre de vélos actuel dans cette station $M(PS_i)$ et le nombre de vélos $M(PR_i)$ ou places disponibles $CV\text{-}M(PR_i)$ dans le véhicule de régulation. En fonction des différentes possibilités, cinq différentes opérations de rééquilibrage sont synthétisées dans le tableau ci-dessous en indiquant les transitions spécifiques et les conditions principales associées à chaque cas.

Opération de rééquilibrage		Transition	Condition principale (validation de la transition)	Evolution d'état (nouveau marquage)
Opération de rajout	Niveau de la station est ramené (ou reste) à R_i	TR_i	$M(PS_i) < R_i$	$M'(PS_i) = M(PS_i) + NVR_i = R_i$
Opération de retrait		TS_i	$M(PS_i) > R_i$	$M'(PS_i) = M(PS_i) - NVS_i = R_i$
Opération de ni rajout- ni retrait		TE_i	$M(PS_i) = R_i$	$M'(PS_i) = M(PS_i) = R_i$
Opération de rajout minimal	Nombre de vélos ou de places insuffisant (véhicule)	$TRBr_i$	$NVR_i > M(PR_i) \Leftrightarrow M(PS_i) < R_i - M(PR_i)$	$M'(PS_i) = M(PS_i) + Min\ NVR_i, M(PR_i)$
Opération de retrait minimal		$TRBs_i$	$NVS_i > NPD_i \Leftrightarrow M(PS_i) > R_i + NPD_i - R_i + CV_i - M(PR_i)$	$M'(PS_i) = M(PS_i) - Min\ NVS_i, NPD_i$

Tableau 7. Formalisation des cinq opérations de rééquilibrage des stations

Les cinq cas de figures représentés dans ce tableau sont étudiés et illustrés à l'aide des exemples suivants où nous considérons qu'il s'agit du contrôle de régulation de la station S_3 ($i = 3$) et que : (a) le seuil de régulation R_3 est fixé à 10 ; (b) la capacité de la station S_3, C_3, est fixée à 15 ; (c) la capacité du véhicule de régulation CV_3 est fixée à 20. A l'état initial du module, nous considérons dans les cinq cas à développer que : (d) $M(PV_3) = 1$ signifiant que le véhicule de régulation est arrivé au niveau de la station S_3 ; (e) $M(PC_3) = 0$ indiquant que le contrôle de la station n'a pas été encore effectué. Notons qu'en plus des autres conditions de validation, (d) et (e) sont des conditions communes à l'ensemble des transitions représentant les différentes opérations de rééquilibrage définies dans le tableau précédent. Enfin, le nombre de vélos disponibles dans la station $M(PS_3)$ et le camion de régulation $M(PR_3)$ sera indiqué au moment où la station est en cours de contrôle ($M(PV_3) = 1$) pour les différents cas à présenter.

A. <u>Cas 1.</u> *Rajout de vélos (nombre de vélos disponibles dans le véhicule de régulation est suffisant pour ramener le niveau de la station à R_i): $NVR_i \leq M(PR_i)$*

Dans ce cas, considérons que le nombre de vélos disponibles est de 7 dans la station S_3 ($M(PS_3) = 7$) et de 15 dans le camion de régulation ($M(PR_3) = 15$). Dans cette situation, le nombre de vélos à rajouter dans la station est :

$$NVR_3 = R_3 - M(PS_3) = 10 - 7 = 3. \quad (28)$$

Cette opération est possible puisqu'il y a suffisamment de vélos dans le camion de régulation ($M(PR_3) = 15$). Elle sera effectuée par la seule transition validée TR_3 puisque :

$$M(PS_3) = 7 < R_3 = 10 \quad (29)$$

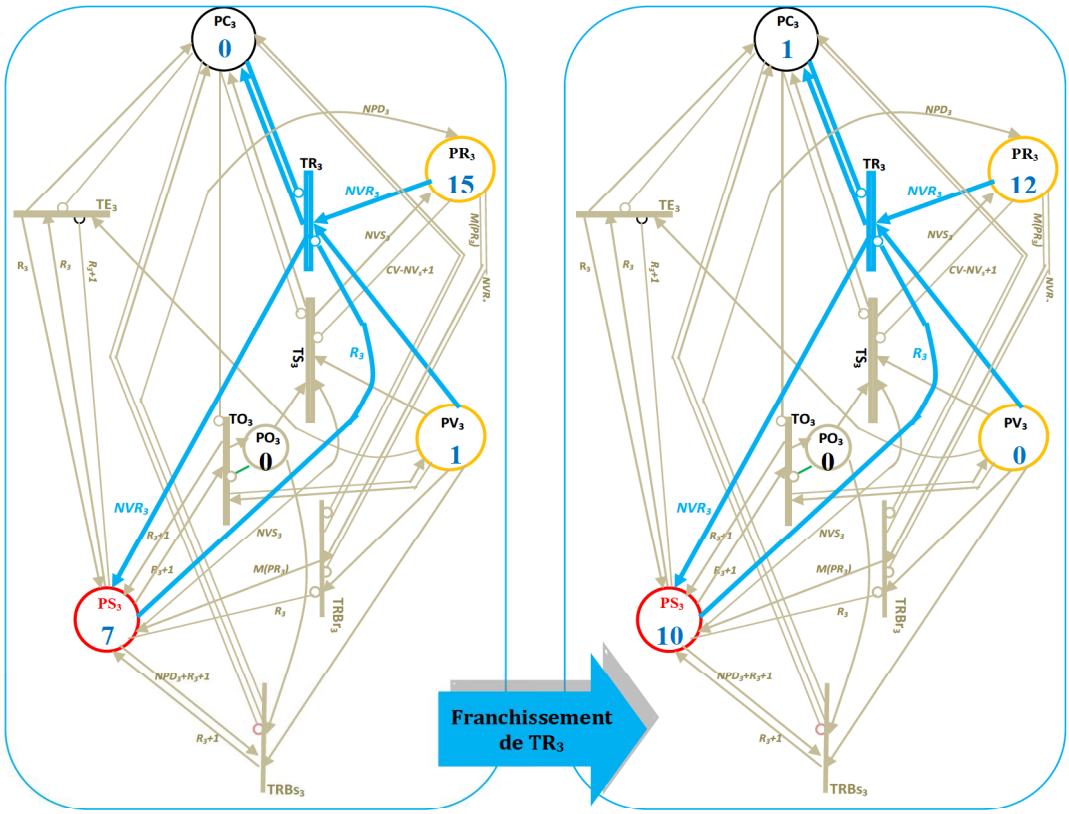
$$M(PR_3) = 15 \geq NVR_3 = 10 - 7 = 3 \quad (30)$$

Le franchissement de la transition TR_3, permet d'enlever $NVR_3 = 3$ vélos dans le camion de régulation et de les rajouter dans la station S_3 afin de la ramener au niveau désiré R_3 fixé à 10. Ainsi le nouveau marquage des places concernées est :

$$M'(PR_3) = M(PR_3) - NVR_3 = 15 - (10 - 7) = 12 \quad (31)$$

$$M'(PS_3) = M(PS_3) + NVR_3 = 7 + (7 - 10) = 10 \quad (32)$$

Au même moment, le franchissement de la transition TR_3 indique la fin du contrôle de régulation et le départ du camion de cette station par $M'(PC_3) = 1$ et $M(PV_3) = 0$.



<u>Figure 10.</u> Illustration de l'opération de rajout (Cas 1) : Nombre de vélos disponibles dans le véhicule est suffisant pour ramener le niveau de la station à R_i : $NVR_i \leq M(PR_i)$

B. *Cas 2. Retrait de vélos (nombre de places libres dans le véhicule de régulation est suffisant pour enlever le superflu de la station) : $NPD_i \geq NVS_i$*

Dans ce deuxième cas de figure, considérons que le nombre de vélos disponibles est de 15 dans la station S_3 ($M(PS_3) = 15$) et de 12 dans le camion de régulation ($M(PR_3) = 12$). Dans cette situation, le nombre de vélos à retirer dans la station et le nombre de places disponibles dans le camion de régulation sont respectivement :

$$NVS_3 = M(PS_3) - R_3 = 15 - 10 = 5. \quad (33)$$

$$NPD_3 = CV_3 - M(PR_3) = 20 - 12 = 8 > 5. \quad (34)$$

Dans cette situation, l'opération de rééquilibrage de la station va être effectuée par les transitions TO_3 et TS_3. Premièrement la transition immédiate TO_3 est validée puisque :

$$M(PS_3) = 15 \geq R_3 + 1 = 11 \quad (35)$$

Le franchissement de cette transition va déposer un jeton témoin dans la place PO_3 ($M'(PO_3) = 1$) détectant ainsi que le nombre de vélos disponibles dans la station S_3 est supérieur au seuil de régulation R_3 fixé à 10.

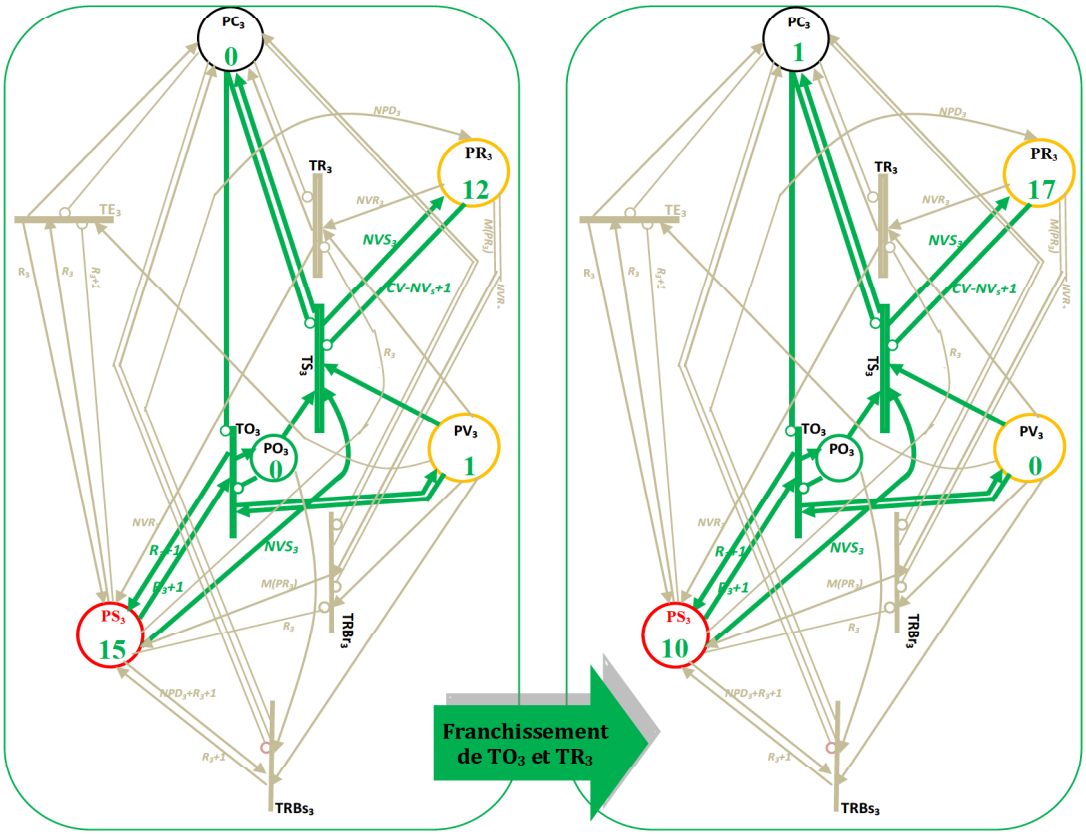


Figure 11. Illustration de l'opération de retrait (Cas 2) : Nombre de places libres dans le véhicule de régulation est suffisant pour enlever le surplus de la station) : $NPD_i \geq NVS_i$

Avec cette indication (M(PO_3) = 1), la transition TS_3 est systématiquement validée et son franchissement va permettre de retirer le superflu, NVS_3, de vélos dans la station. Le nouveau marquage des places concernées est :

$$M'(PS_3) = M(PS_3) - NVS_3 = 15 - (10 - 15) = 10 \quad (36)$$

$$M'(PR_3) = M(PR_3) + NVS_3 = 12 + (10 - 15) = 17 \quad (37)$$

Au même moment, le marquage de la place PO_3 passe à zéro (M'(PO_3) =0) et de la même manière que le premier cas, la fin du contrôle de régulation et la libération du camion de régulation vers une autre station sont indiqués par M'(PC_3) = 1 et M(PV_3) = 0.

C. *Cas 3 : Opération de ni rajout- ni retrait (cas où le nombre de vélos disponibles dans la station en cours de contrôle est égale à R_i) : M(PS_i) = R_i*

Contrairement aux deux cas précédents correspondant aux opérations de rajout de NVR_3 ou au retrait de NVS_3 vélos dans (de) la station S_3, l'opération de « ni rajout – ni retrait » s'exécute à l'aide de la transition TE_3 lorsque le nombre de vélos disponibles dans la station S_3 est exactement égal au seuil de régulation R_3 (M(PS_3) = R_3). Le franchissement de la transition TE_3 n'a aucune incidence sur les marquages des places PS_3 et PR_3 sauf sur les marquages des places PC_3, PV_3 comme l'illustre la figure suivante :

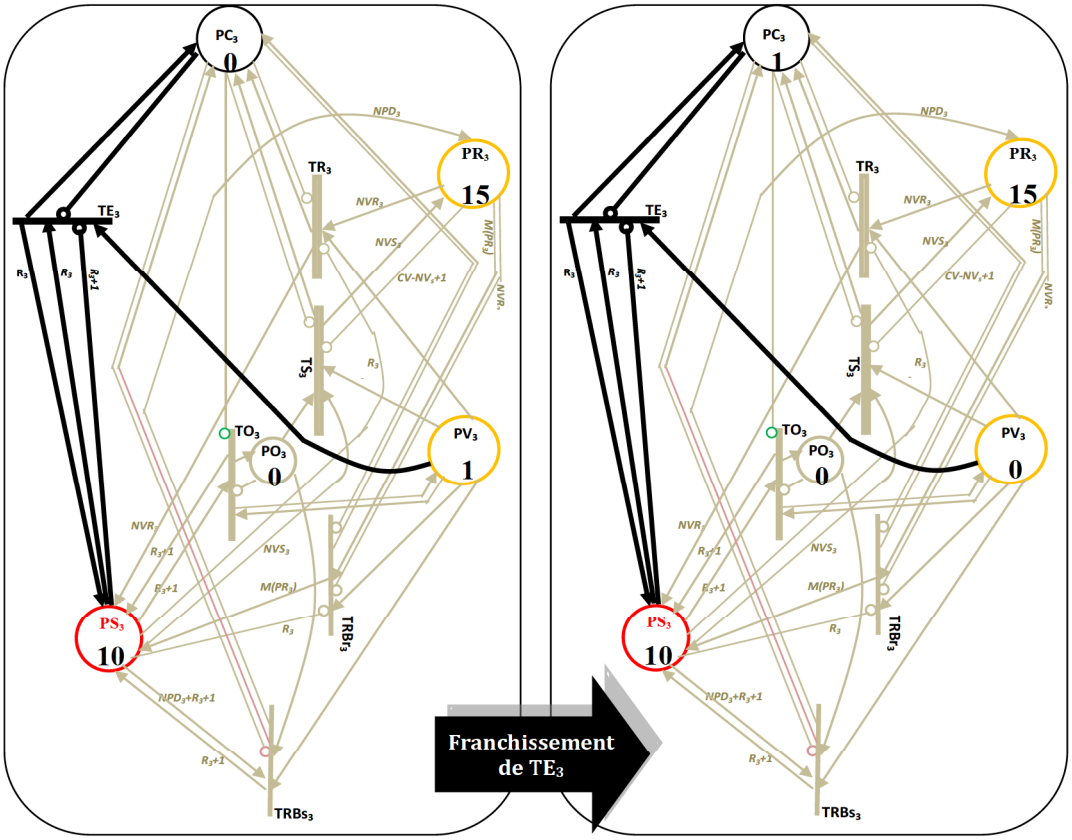


Figure 12. Illustration de l'opération de ni retrait – ni rajout (Cas 3) : Nombre de vélos disponibles dans la station en cours de contrôle est égale à R_i : M(PS_i) = R_i

D. *Cas 4 : Rajout minimal (le nombre de vélos à rajouter est supérieur au nombre de vélos disponibles dans le véhicule de régulation) : $NVR_i > M(PR_i)$*

Comme le montre la figure ci-dessous, considérons que lorsque le véhicule de régulation se présente au niveau de la station S_3, il y a uniquement 5 vélos disponibles dans sa remorque, $M(PR_3) = 5$, et au même moment, il y a que 2 vélos disponibles dans la station, $M(PS_3) = 2$.

Dans les conditions normales, le nombre de vélos à rajouter dans la station S_3 à l'aide de la transition TR_3, afin de ramener son niveau à $R_3 = 10$, est :

$$NVR_3 = R_3 - M(PS_3) = 10 - 2 = 8. \qquad (38)$$

Mais, cette opération n'est pas possible (TR_3 non validée) puisque le nombre de vélos disponibles dans le véhicule de régulation est insuffisant. Autrement dit, nous avons :

$$NVR_3 = 8 > M(PR_3) = 5. \qquad (39)$$

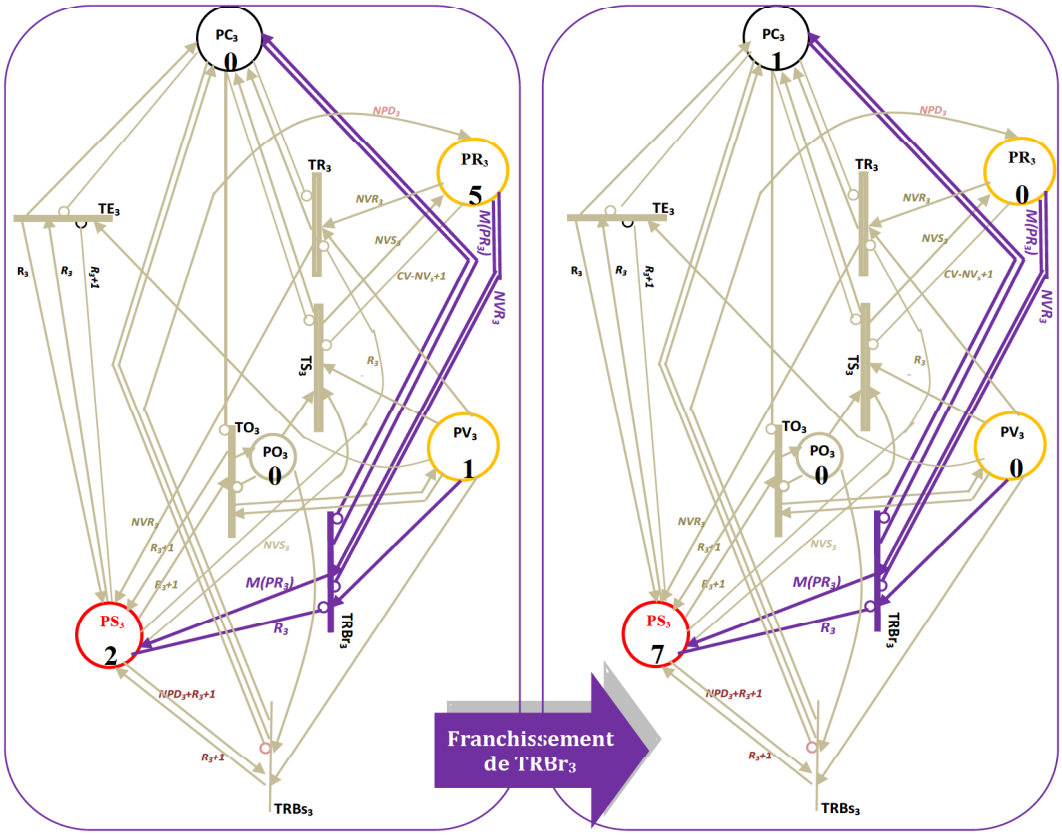


Figure 13. Illustration de l'opération de rajout minimal (Cas 4) : Nombre de vélos à rajouter est supérieur au nombre de vélos disponibles dans le véhicule de régulation) : $NVR_i > M(PR_i)$

Contrairement au cas 1, la transition TR_3 n'est pas validée et c'est la transition $TRBr_3$ qui est chargée de réaliser l'opération de "rajout *minimal*" dans cette situation. En effet, contrairement à la transition TR_3, la transition $TRBr_3$ est validée puisque :

$$M(PS_3) = 2 < R_3 = 10. \quad (40)$$

$$M(PR_3) = 5 < NVR_3 = (R_3 - M(PS_3)) = 8. \quad (41)$$

Après le franchissement de cette transition, le reste de vélos disponibles dans le véhicule de régulation, M(PR$_3$) = 5, sont retirés et remis dans la station S$_3$ ramenant le niveau de la station à 7 vélos comme le détermine les équations suivantes :

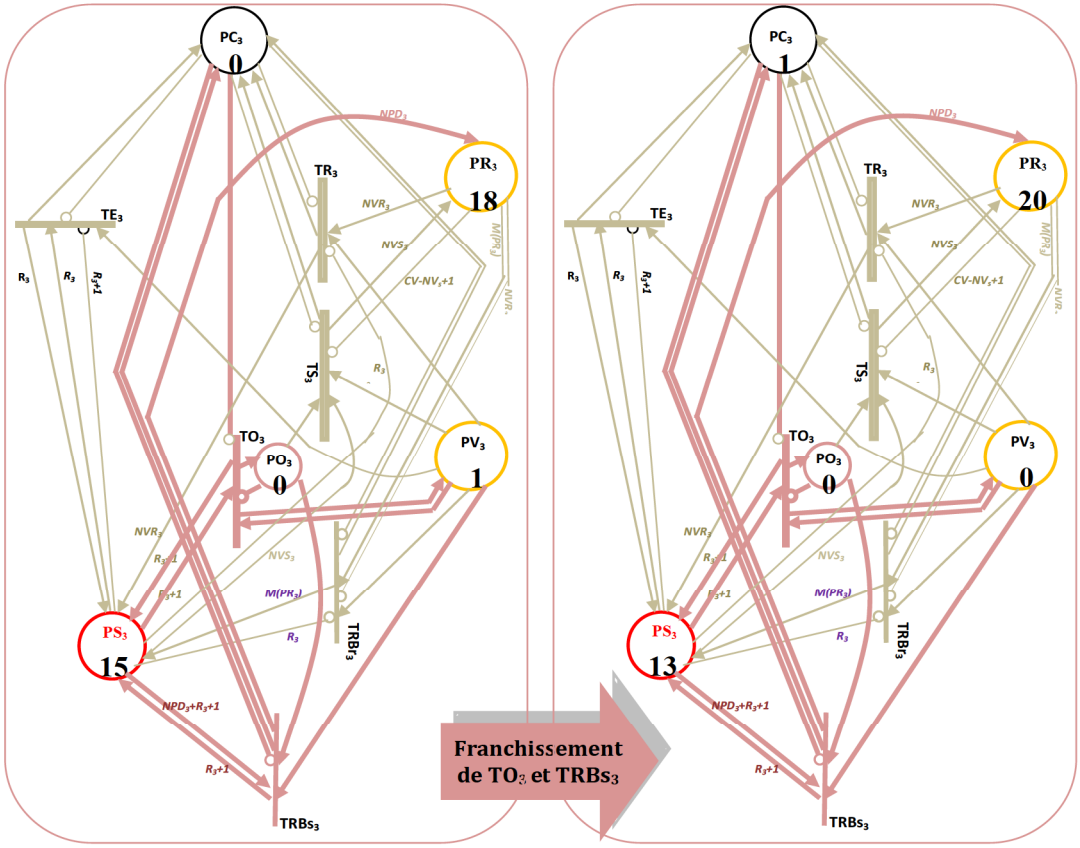
$$M'(PS_3) = M(PS_3) + M(PR_3) = 2 + 5 = 7. \quad (42)$$

$$M'(PR_3) = M(PR_3) - M(PR_3) = 5 - 5 = 0. \quad (43)$$

De la même manière que les cas précédents, le franchissement de la transition TRBr$_3$ indique la fin du contrôle de régulation et la libération du véhicule de régulation vers une nouvelle station par les marquages : M'(PC$_3$) = 1 et M(PV$_3$) = 0. A noter que dans ce cas de figure, le véhicule quitte la station sans vélos dans sa remorque.

E. <u>Cas 5</u> : Retrait minimal (le nombre de vélos à soustraire est supérieur au nombre de places disponibles dans le véhicule) : NPD$_i$ < NVS$_i$

Dans ce dernier cas de figure, considérons que le véhicule de régulation arrive avec 18 vélos au niveau de la station S$_3$ ayant 15 vélos disponibles. L'illustration est donnée par la figure ci-dessous.



<u>Figure 14.</u> Illustration de l'opération de retrait minimal (Cas 5) : Nombre de vélos à soustraire est supérieur au nombre de places disponibles dans le véhicule : NPD$_i$ < NVS$_i$

Dans les conditions normales, le nombre de vélos à retirer, NVS_3, de la station afin de la ramener au niveau du seuil de régulation R_3 fixé à 10 est :

$$NVS_3 = M(PS_3) - R_3 = 15 - 10 = 5. \quad (44)$$

Mais, comme l'indique l'équation ci-dessous, le nombre de places disponibles, NPD_3, dans le véhicule de régulation est de 2 :

$$NPD_3 = CV_3 - M(PR_3) = 20 - 18 = 2 < NVS_3 = 5 \quad (45)$$

Contrairement au cas 2, le nombre de vélos à retirer de la station sera que de $NPD_3 = 2$. Ceci sera effectué par la transition $TRBs_3$.

Avant le franchissement de cette transition, d'abord la transition immédiate TO_3 est franchie afin d'indiquer que le nombre de vélos dans la station S_3 est supérieur au seuil de régulation fixé à R_3 ($M(PS_3) = 15 > R_3 = 10$). L'indication est faite en déposant un jeton témoin dans la place PO_3.

A l'aide de cette indication, la transition $TRBs_3$ est systématiquement validée puisque les conditions suivantes sont satisfaites :

$$M(PO_3) = 1 \geq 1. \quad (46)$$

$$M(PS_3) = 15 \geq NPD_3 + R_3 + 1 = 13. \quad (47)$$

Notons que la première équation indique que $M(PS_3) > R_3$ (résultat du franchissement de TO_3) et que la deuxième équation signifie exactement que $NPD_3 = 2 < NVS_3 = 5$.

Enfin, après le franchissement de la transition $TRBs_3$, $NPD_3 = 2$ vélos sont retirés de la station S_3 et remis dans le véhicule de régulation qui quitte cette station avec une remorque saturée.

$$\begin{aligned} M'(PS_3) &= M(PS_3) - \left[NPD_3 + R_3 + 1\right] - (R_3 + 1) \\ &= M(PS_3) - NPD_3 = 15 - 2 = 13 \end{aligned} \quad (48)$$

$$M'(PR_3) = M(PR_3) + NPD_3 = 18 + 2 = 20. \quad (49)$$

Et bien sûr, le franchissement de la transition $TRBs_3$ indique la fin du contrôle de régulation et la libération du véhicule de régulation vers une nouvelle station par les marquages : $M'(PC_3) = 1$ et $M(PV_3) = 0$.

3.3. Temporisations du module de régulation

Nous rappelons que le module de régulation est composé de six transitions à savoir : TE_i ; TR_i ; TS_i ; TO_i ; $TRBr_i$ et $TRBs_i$. Chaque transition modélise une opération donnée (Tableaux 6 et 7) dont le délai opératoire (d'exécution) doit être exprimé par la temporisation à associer à la transition correspondante.

- Les transitions TE_i et TO_i peuvent être considérées comme des transitions immédiates (zéro délai). La transition TE_i est franchie pour le cas où le nombre de vélos dans la station S_i est égal au seuil de régulation R_i. Dans ce cas, il n'y a pas de

rajout ou de retrait de vélos, donc aucun délai opératoire à prévoir pour le franchissement de cette transition. Pour ce qui est de la transition TO_i qui représente le test « si $M(PS_i) > R_i$», on peut estimer que ce dernier s'effectue sans délai opératoire. De plus cette transition joue un rôle dans la fonction de rajout des vélos et le délai opératoire de cette opération sera considéré avec la transition TS_i.

- Des temporisations de type stochastique doivent être associées aux transitions TS_i, TR_i, $TRBr_i$ *et* $TRBs_i$ pour exprimer les délais opératoires des opérations de retrait et de rajout de vélos dans la station S_i. Ces temporisations sont stochastiques car le nombre de vélos à rajouter ou à soustraire n'est pas déterministe. Il varie à chaque contrôle de régulation en fonction de l'état actuel de la station contrôlée.

Remarques :

- De la même manière que le premier modèle, il est intéressant de remarquer qu'il n'y a pas de conflit de franchissement entre les transitions TS_i, TR_i, TE_i, $TRBr_i$ *et* $TRBs_i$ du module de régulation. En effet, les conditions de franchissement de ces transitions notamment $M(PS_i) > R_i$, $M(PS_i) < R_i$, et $M(PS_i) = R_i$ sont strictement exclusives. Ceci évite de mettre en place une politique de gestion de priorités.

- Pour les autres modules, à savoir le module de flux de vélos inter-stations et le module de la tournée de régulation, le lecteur peut se référer à la présentation de notre premier modèle dans les sections précédentes. Toutefois, nous apportons ci-dessous quelques éclaircicements au sujet de la tournée de régulation.

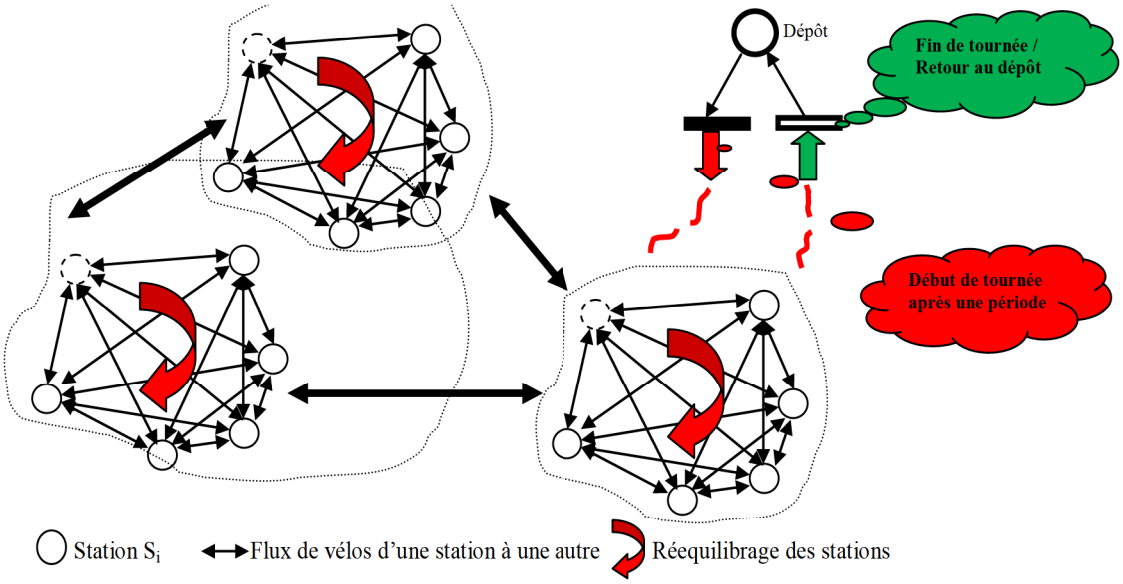


Figure 15. Illustration du module de la tournée du véhicule de régulation

1. Pour des réseaux denses ayant plusieurs dizaines de stations, le réseau peut être divisé en plusieurs zones. Un véhicule de régulation (ou plusieurs) peut être affecté pour chaque zone par l'exploitant. Ainsi, comme l'illustre la figure ci-dessus, le réseau de Petri modélisant le système, peut contenir plusieurs circuits représentant les différents itinéraires de régulation en fonction de la stratégie de rééquilibrage suivie.

2. En fonction de la fréquence du rééquilibrage souhaitée par l'exploitant, deux types de tournées peuvent être définis : "*tournée continue*" ou "*tournée périodique*". Comme l'illustre la Figure 15, pour ce qui est de la tournée périodique, le circuit de régulation peut être coupé par l'intermédiaire d'une place supplémentaire représentant "le centre de contrôle de régulation ou le dépôt" avec une transition d'entrée représentant la fin d'une tournée et une transition de sortie représentant le début d'une nouvelle tournée de régulation. La temporisation à associer à cette dernière transition correspond alors à la fréquence (période) de régulation désirée.

4. Un nouveau modèle à base d'alertes

Contrairement aux modèles développés précédemment dont le rééquilibrage s'effectue à base de tournées de véhicules de régulation et dont le contrôle repose sur un seul point de contrôle R_i (seuil de régulation de chaque station S_i), dans cette section, nous développons un nouveau modèle avec une nouvelle stratégie de contrôle et de rééquilibrage des stations basée sur un système d'alertes en temps réel, illustrée par les Figures 16 et 17.

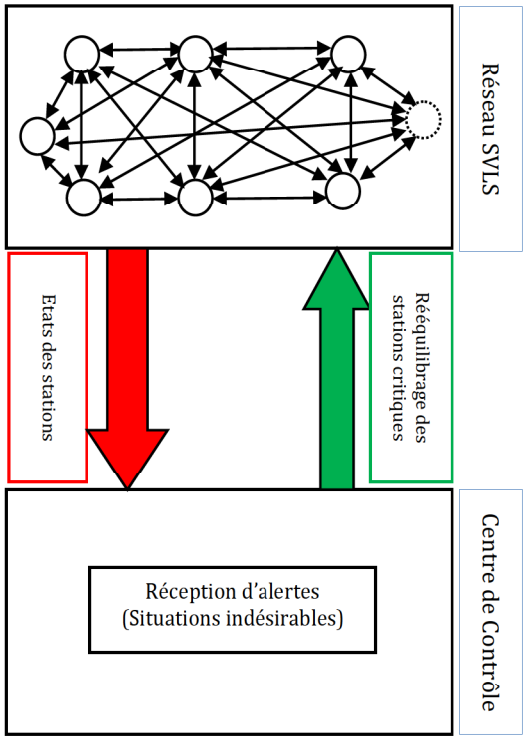


Figure 16. Schéma synoptique du processus de contrôle et de régulation des stations

4.1. Définition de la politique de contrôle (E_i, R_i, P_i)

Dans ce nouveau modèle, chaque station S_i sera associée à trois points de contrôle E_i (seuil d'engorgement), P_i (seuil de pénurie) et R_i (seuil d'équilibre souhaité). Comme l'illustre la Figure 17, ces trois points de contrôle définissent trois zones du niveau de la station, en termes du nombre de vélos, durant son évolution : Etat acceptable lorsque le niveau de la station S_i est compris entre E_i et P_i ; Etat de Pénurie lorsque le niveau de la station S_i est compris entre 0 et P_i et Etat d'Engorgement lorsque le niveau de la station S_i est compris entre E_i et C_i (capacité de la station). Les valeurs de E_i, R_i et P_i sont des entiers naturels positifs avec $0 < E_i \leq R_i \leq P_i < C_i$.

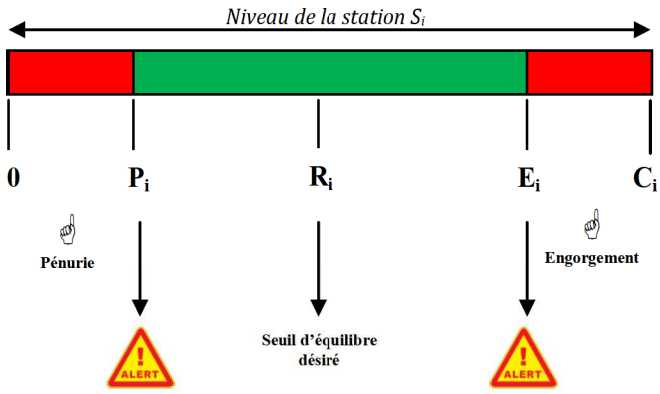


Figure 17. Politique de contrôle et d'alertes des stations de type (E_i, R_i, P_i)

En plus de la capacité C_i, ces trois points de contrôle seront utilisés comme paramètres dans le modèle RdP présenté par la suite. Ils vont apparaitre sur un certain nombre d'arcs liés aux transitions permettant la détection des situations indésirables à savoir les "situations de pénurie" et les "situations d'engorgement" et de donner, en temps réel, l'alerte au système de régulation pour le rééquilibrage des stations critiques (dépôt de jetons dans des places "témoins").

4.2. Descriptif du modèle à base d'alerte

Le nouveau modèle RdP intégrant la politique (E_i, R_i, P_i) est représenté par la Figure 18. Ce modèle comprend trois modules à savoir : (a) Module du processus de flux de vélos dû aux déplacements des usagers, (b) Module du système d'alertes en temps réel et (c) module du système de rééquilibrage des stations critiques (par interventions).

- Le module du flux de vélos est globalement similaire à celui utilisé dans nos premiers modèles. Chaque station est représentée par une place PS_i et, contrairement aux modèles précédents, nous avons volontairement introduit une nouvelle place notée par PV dont le marquage correspond aux vélos en cours de déplacement par les usagers. Ainsi, les transitions utilisées dans cette représentation notées par TS_{ip} et TS_{pi} modélisent le flux de vélos sortant ou entrant de (dans) chaque station. Clairement, dans la représentation utilisée dans nos premiers modèles, le processus modélisé est celui de départ d'un vélo d'une station à une autre et dans cette nouvelle représentation, il s'agit du processus de flux de vélos sortant et entrant des stations … Donc les deux processus ne sont pas tout à fait identiques et l'utilisateur peut choisir un ou l'autre module en fonction des données dont il dispose sur la dynamique des flux de vélos.
- Le module d'alertes se duplique au niveau de chaque station. Sa fonction consiste à détecter les situations critiques : "Pénurie" et "Engorgement". Comme le montre la Figure 18, deux places spécifiques aux deux types de situations sont utilisées notées par ΛE_i et ΛP_i. Il y a une alerte d'engorgement lorsque $M(\Lambda E_i) = 1$ ou une situation de pénurie lorsque $M(AP_i) = 1$. La détection de ces situations se fait à l'aide des transitions immédiates $TS_i(max)$ et $TS_i(min)$ et les arcs connectant les places AE_i, AP_i et PS_i. Le contrôle de l'état de la station est effectué par rapport aux seuils E_i et P_i qu'on voit apparaitre sur les poids des arcs de contrôle de l'état de la station. Dans ce même module, deux autres transitions immédiates TE_i and TP_i sont utilisées pour lever les alertes lorsque la station revient à l'état normal d'une manière naturelle avant même l'intervention d'un véhicule de régulation.

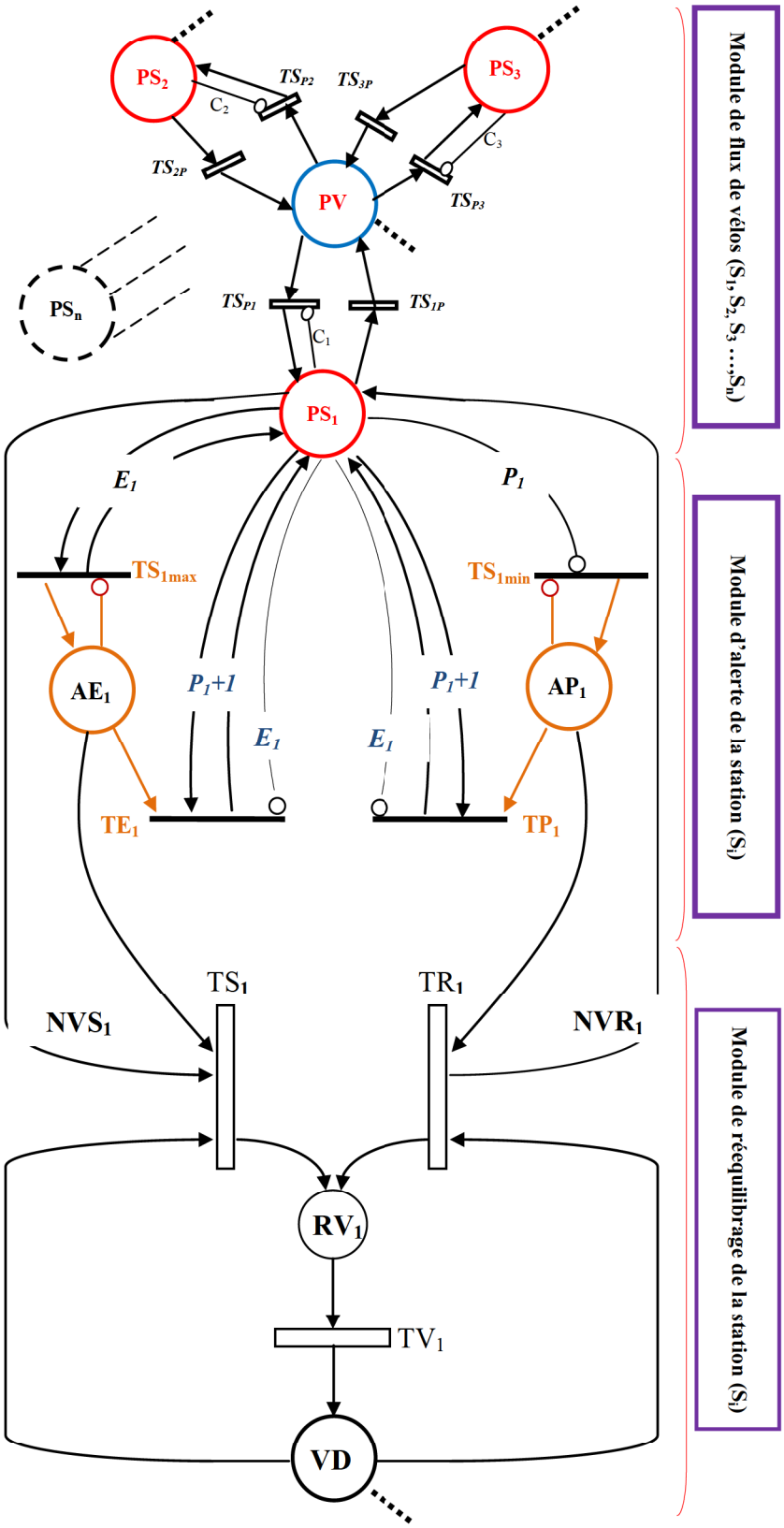


Figure 18. Modèle RdP d'un SVLS géré par la politique (E_i, R_i, P_i)

Place	Interprétation
PS_i	Représente une station S_i. Son marquage correspond au nombre de vélos disponibles dans cette station.
PV	Son marquage permet de représenter les vélos qui sont en cours d'utilisation par les usagers dans la ville (ou quartier)
AP_i	Place utilisée pour enregistrer une alerte de pénurie de la station S_i. L'alerte est enregistrée lorsque $M(AP_i) = 1$.
AE_i	Place utilisée pour enregistrer une alerte d'engorgement de la station S_i. L'alerte est enregistrée lorsque $M(AE_i) = 1$.
RV_i	Utilisée pour modéliser le retour du véhicule de régulation après une opération de rééquilibrage d'une station critique.
VD	Représente la flotte de véhicules de régulation disponibles.

Tableau 8. Interprétation des places du modèle RdP

TS_{ip} TS_{pi}	TS_{ip}: représente le retrait d'un vélo par l'usager pour effectuer son déplacement. TS_{pi}: représente le retour d'un vélo par l'usager après la fin de son déplacement.
$TS_{i\ min}$	Transition immédiate utilisée pour la détection d'une situation de pénurie d'une station S_i. Son franchissement dépose un jeton témoin dans la place AP_i (alerte)
$TS_{i\ max}$	Transition immédiate utilisée pour la détection d'une situation d'engorgement d'une station S_i. Son franchissement dépose un jeton témoin dans la place EP_i (alerte)
TE_i TP_i	Permet de tester si l'état de la station est redevenu non critique ($P_i<(MPS_i)< E_i$). Dans ce cas, leurs franchissements permettent de lever les alertes déjà enregistrées ($M(AE_i) = 0$ avec TE_i, $M(AP_i)=0$ avec TP_i).
TS_i	Modélise une opération de retrait de vélos de la station S_i (si nécessaire). Le nombre de vélos à retirer est $NVS_i = M(PS_i) - R_i$ lorsque le nombre de vélos disponibles dans la station S_i est supérieur à E_i (seuil d'engorgement).
TR_i	Modélise une opération de rajout de vélos dans la station S_i (si nécessaire). Le nombre de vélos à rajouter est $NVR_i = R_i - M(PS_i)$ lorsque le nombre de vélos disponibles dans la station S_i est inférieur à P_i (seuil de pénurie).
TV_i	Modélise le retour d'un véhicule de régulation d'une opération de régulation

Tableau 9. Interprétation des transitions du modèle RdP

- Le module de régulation a pour rôle le rééquilibrage des stations critiques. Il est dupliqué au niveau de chaque station S_i modélisée par une place PS_i. Ce module est composé de deux transitions stochastiques TS_i et TR_i, une place notée par VD et l'ensemble des arcs associés. Le marquage de la place VD représente le nombre de véhicules de régulation disponibles. La place RV_i et la transition TV_i sont utilisées pour modéliser le retour d'un véhicule de régulation au centre de contrôle et de management du système. Les transitions TS_i et TR_i modélisent les deux principales opérations de rééquilibrage permettant de ramener le niveau de la station au niveau désiré R_i :

1. **Opération de retrait de vélos :** La transition TS_i représentant cette opération est validée lorsque $M(AE_i) = 1$ (situation d'engorgement signalée) et que $M(VD) \geq 1$ (disponibilité d'un véhicule de régulation). Le franchissement de cette transition permet d'enlever $NVS_i = M(PS_i) - R_i$ vélos de la station S_i afin de la ramener au niveau désiré R_i.

2. **Opération de rajout de vélos :** La transition TR_i représentant cette opération est validée lorsque $M(AP_i) = 1$ (situation de pénurie signalée) et que $M(VD) \geq 1$ (disponibilité d'un véhicule de régulation). Le franchissement de cette transition permet de rajouter $NVR_i = R_i - M(PS_i)$ vélos dans la station S_i afin de la ramener au niveau désiré R_i.

4.3. Exemples d'illustration du modèle

Nous développons ci-dessous deux exemples d'illustration afin de montrer formellement le fonctionnement de ce nouveau modèle. Pour ce faire, considérons que les paramètres de la station S_1 du modèle RdP représenté par la Figure 18 sont comme suit : C_1=15 (capacité de la station), P_1=4 (point d'alerte pénurie), E_1=13 (point d'alerte d'engorgement) et R_1=10 (point de rééquilibrage désiré). Nous considérons également, qu'il y a un véhicule de régulation disponible spécifié par le marquage de place VD tel que $M_0(VD)$=1.

- **<u>CAS 1.</u> – Exemple d'une situation de pénurie**

Supposons qu'un instant donné, la station S_1 compte que trois vélos, $M(PS_1) = 3$. Suivant les paramètres de contrôle fixés, il est clair que cette station est dans état de "pénurie". Cette situation critique est détectée par la transition immédiate TS_{1min} puisque les conditions de sa validation sont vérifiées :

$$M(PS_1) = 3 < inhib(PS_1, TS_{1\min}) = P_1 = 3 \quad (50)$$

$$M(AP_1) = 0 < inhib(AP_1, TS_{1\min}) = 1 \quad (51)$$

Ces deux équations, conditions de validation de la transition TS_{1min}, signifient respectivement que (i) le nombre de vélos dans la station S_1 est inférieur au point d'alerte de pénurie P_1 fixé à 4 dans cet exemple et (ii) l'alerte de pénurie de cette station n'a pas été donnée auparavant.

Le franchissement immédiat de la transition TS_{1min}, dépose un jeton témoin dans la place AP_1 indiquant ainsi cette situation critique comme suit :

$$M'(AP_1) = M(AP_1) + Post(AP_1, TS_{1\min}) = 0 + 1 = 1 \quad (52)$$

Suite à cette indication, la transition TR_1 est validée puisque le marquage de la place VD indique la disponibilité d'un véhicule de régulation. Formellement :

$$M(AP_1) = 1 \geq \Pr e(AP_1, TR_1) = 1 \quad (53)$$

$$M(VD) = 1 \geq \Pr e(VD, TR_1) = 1 \quad (54)$$

La transition stochastique TR_1 est franchie après un délai qui lui est associé. Son franchissement est une opération de rajout de $NVR_1 = R_1 - M(PS_1) = 10 - 3 = 7$ vélos dans la station S_1 afin de ramener son niveau à l'état désiré $R_1 = 10$ vélos. Au même moment, le véhicule de régulation retourne au centre en marquant la place RV_1 et l'alerte est levée en supprimant le jeton enregistré dans la place AP_1. Formellement, les nouveaux marquages suite au franchissement de TR_1 se déterminent comme suit :

$$M'(PS_1) = M(PS_1) + Post(PS_1, TR_1) = 3 + NVR_1 = 10 \quad (55)$$

$$M'(AP_1) = M(AP_1) - Pre(AP_1, TR_1) = 1 - 1 = 0 \quad (56)$$

$$M'(RV_1) = M(RV_1) + Post(RV_1, TR_1) = 0 + 1 = 1 \quad (57)$$

- **<u>CAS 2.</u> – Exemple de la situation d'engorgement.**

Maintenant, supposons qu'un instant donné qu'il y a 13 vélos disponibles dans la station S_1, $M(PS_1) = 13$. Suivant les paramètres fixés précédemment pour ces exemples d'illustration, cette station se trouve dans une situation d'engorgement. Grâce au franchissement de la transition immédiate TS_{1max}, l'alerte sera donnée. En effet, la transition TS_{1max} est validée puisque :

$$M(PS_1) = 13 \geq Post(PS_1, TS_{1\max}) = E_1 = 13 \quad (58)$$

$$M(AE_1) = 0 < inhib(AE_1, TS_{1\max}) = 1 \quad (59)$$

Ces deux conditions de validation expriment que (i) le nombre de vélos disponibles dans la station est supérieur au seuil d'engorgement E_1 et que (ii) l'alerte de cette situation n'a pas été donnée auparavant.

Le franchissement de la transition TS_{1max} permet donc de donner une alerte sous forme d'un jeton qui sera déposé dans la place AE_1. Formellement,

$$M'(AE_1) = M(AE_1) + Post(AE_1, TS_{1\max}) = 0 + 1 = 1 \quad (60)$$

Suite à cette alerte et la disponibilité d'un véhicule de régulation, la transition TS_1 est validée comme l'indique les équations de validation suivantes :

$$M(AE_1) = 1 \geq Pre(AE_1, TS_1) = 1 \quad (61)$$

$$M(VD) = 1 \geq Pre(VD, TS_1) = 1 \quad (62)$$

La transition stochastique TS_1 sera franchie au bout d'un certain délai dans le but d'effectuer l'opération de rééquilibrage de la station par une opération de retrait de $NVS_1 = M(PS_1) - R_1 = 13 - 10 = 3$ vélos. Ainsi, les nouveaux marquages des places concernées par l'évolution de l'état sont comme suit :

$$M'(PS_1) - M(PS_1) - Pre(PS_1, TS_1) - 13 - NVS_1 - 10 \quad (63)$$

$$M'(AE_1) = M(AE_1) - Pre(AE_1, TS_1) = 1 - 1 = 0 \quad (64)$$

$$M'(RV_1) = M(RV_1) + Post(RV_1, TS_1) = 0 + 1 = 1 \quad (65)$$

En d'autres termes, le niveau de la station a été ramené au niveau désiré $R_1 = 10$, l'alerte est levée et le véhicule de régulation est libéré.

Remarques :

- Les transitions immédiates TP_i et TE_i ont un rôle important dans le fonctionnement du modèle. Elles permettent de lever les alertes lorsque les stations reviennent à l'état normal d'une manière naturelle en attendant la disponibilité d'un véhicule de régulation. Contrairement aux modèles précédents, un système de gestion de priorités (déterministes ou aléatoires) est nécessaire à mettre au point afin de gérer les situations critiques entre les différentes stations. Ceci peut se faire selon les emplacements stratégiques des différentes stations.

- Dans la pratique, pour un réseau de grande densité, ce modèle basé sur un système d'alertes en temps réel permettant la gestion de stations critiques peut s'associer avec un des deux modèles précédents basés sur un système de tournées de véhicules. Autrement dit, pour un réseau donné, un ensemble de stations peut se distinguer comme des stations stratégiques et critiques pour l'équilibre du réseau entier. Celles-ci peuvent ainsi être rééquilibrées en utilisant la politique d'intervention suivant les alertes (urgences !) et le reste des stations vont être rééquilibrées en tournées périodiques. D'où la combinaison possible des deux modèles.

- Dans les deux modèles initiaux, le contrôle et la régulation des stations se fait par rapport à un seul point R_i associé à chaque station S_i. Autrement dit, lors d'une tournée de régulation, le test du niveau de chaque station est fait par rapport à R_i et le niveau de la station est ramené au niveau souhaité R_i. Il est également facile d'apporter quelques modifications au niveau des poids des arcs de test (contrôle) et ceux des opérations de rééquilibrages afin d'appliquer la politique définie dans ce troisième modèle à savoir la politique (E_i, R_i, P_i). En réalité, une station peut être assimilée à un stock et nous pouvons s'inspirer des différentes politiques de gestion de stocks existantes (LAB 2005 ; LAB 2007) pour définir et modéliser de nouvelles stratégies pertinentes pour le contrôle et la régulation des systèmes de vélos en libre service.

Conclusion

Ce chapitre a été dédié à la modélisation en vue de la régulation des systèmes de vélos en libre service en utilisant une classe particulière de réseaux de Petri stochastiques ayant des arcs à poids variables. Dans ce travail, nous avons développé un ensemble de modèles dynamiques, paramétrables et configurables pouvant supporter la complexité dynamique et comportementale de ce nouveau mode de transport urbain. Le chapitre qui suit traite trois sujets permettant l'exploitation des modèles développés : la configuration des modèles proposés suivant différents modes de régulation appliqués, l'évaluation et l'analyse de performances et enfin la simulation à événements discrets.

Chapitre 4

Analyse et évaluation de performances à l'aide de la simulation à événements discrets

Dans ce chapitre, il s'agit de développer des outils d'analyse pour l'exploitation des modèles développés. En particulier, nous nous intéressons à l'évaluation de performances. Un ensemble d'indicateurs seront formalisés permettant de juger la performance d'un réseau de vélos en libre service sur différents angles suivant les paramètres, les configurations et/ou les politiques de régulation choisies. Parmi les indicateurs formulés à base des modèles RdP, nous citons par exemple : le nombre moyen de vélos dans une station, le temps de séjour moyen d'un vélo dans une station (rotation des vélos), le taux de rupture et/ou de saturation d'une station, etc. Par ailleurs, connaissant la complexité et la grande dimension des systèmes en question, l'analyse et l'évaluation de performances en utilisant des méthodes numériques (programmation des méthodes analytiques) ou via la simulation à événements discrets s'avèrent incontournables. Dans le cadre de notre travail, nous avons opté pour la seconde technique vu les limites que peuvent avoir les méthodes analytiques basées sur la résolution des processus stochastiques associés aux modèles RdP. Ainsi, un outil de simulation adapté a été développé et utilisé pour la validation et l'application de nos modèles.

1. Configurations des modèles RdPs

Dans un premier temps, cette section apporte un complément d'analyse important au chapitre précédent consacré à la modélisation des systèmes de vélos en libre service. Nous rappelons le lecteur qu'un ensemble de modèles RdP stochastiques ayant des arcs à poids variables ont été développés. Ce complément trouve sa place dans ce nouveau chapitre pour deux raisons principales :

- Premièrement, dans un souci de clarté, nous avons voulu réduire le volume du chapitre 3. Ce dernier a été donc consacré uniquement à la modélisation et non pas à l'exploitation de ces modèles pour l'analyse et l'évaluation de performances.
- Deuxièmement, ce complément lié à la configuration dynamique de nos modèles est intiment liée à l'analyse et à l'évaluation de performances des SVLS pouvant se faire suivant différents modes de fonctionnement décrits dans cette section.

Les modèles développés sont paramétrables et configurables pouvant supporter la complexité dynamique et comportementale de ce nouveau mode de transport urbain. Ceci est sans doute une richesse supplémentaire aux modèles développés qui se rajoute à tous les avantages reconnus sur la pertinence de l'outil RdP.

1.1. Définitions des configurations

Nos modèles développés dans le chapitre 3 sont paramétrables grâce aux poids variables sur les arcs. Donc, avec un même modèle RdP, il est possible d'étudier le système représenté suivant différentes configurations liées aux valeurs affectées aux paramètres de décision du système tels que : les capacités des stations, les seuils de régulation, le nombre de vélos, etc. Tous ces paramètres font partie intégrante des modèles développés pour le cas des systèmes de vélos en libre service. Grâce également à la construction modulaire de ces modèles, il est possible d'inhiber (bloquer) un des trois modules (fonctions) les composant permettant d'aboutir à des modes de fonctionnement intéressants pour l'analyse des systèmes représentés. Prenons, par exemple, le cas du modèle 2 (extension du modèle de base). En fonction du paramétrage du modèle, trois principales configurations peuvent être obtenues comme l'explique le tableau ci-dessous :

Configurations des modèles RdPs (Cas du modèle 2)		
Configuration 1	**Cas dynamique en présence du système de régulation**	Dans cette configuration, on considère le fonctionnement normal (global) du système de vélos en libre service : les stations sont accessibles aux usagers pour l'emprunt et le dépôt de vélos et que le rééquilibrage des stations est assuré par le(s) véhicule(s) de régulation avec remorque(s). Cette configuration est assurée par le réseau de Petri global où tous ses modules seront opérationnels.
Configuration 2	**Cas dynamique en l'absence du système de régulation**	Contrairement au cas précédent, on considère que le service de régulation est indisponible. Autrement dit, il n'y a ni le contrôle du flux, ni le rééquilibrage des stations. Par rapport à notre modèle RdP, cette configuration s'obtient lorsque le marquage initial des places PC_i, PV_i, PR_i est nul. Formellement, pour un $M(PR_i)=0$, $M(PV_i)=0$ et $M(PC_i)=0$, les transitions TE_i, TS_i, TO_i, TR_i, $TRBs_i$, $TRBr_i$ (module de régulation) et TR_{ij} (déplacement du véhicule de régulation) ne seront jamais validées. Dans ce cas, le modèle RdP se réduit uniquement au module représentant le flux de vélos entre les différentes stations.
Configuration 3	**Cas statique (très faible fréquentation des stations)**	Il représente le comportement du système lorsque la fréquentation des stations est très faible. Il s'agit plus particulièrement du comportement du système durant la nuit ou pendant certains jours fériés. Le modèle RdP peut être simulé en augmentant considérablement les délais de franchissement associés aux transitions TS_{ij}, représentant les déplacements des vélos inter-stations. Dans ce cas de configuration, la régulation est inutile du à la très faible activité du réseau. Ou bien, elle peut se faire, afin de préparer le réseau pour le lendemain (régulation statique).

Tableau 1. Configuration des modèles RdP développés au chapitre 3 (cas du modèle 2)

Bien évidemment, les deux autres modèles se paramètrent sur la base du même principe décrit par le Tableau 1. D'une manière générale, obtenir une des trois configurations se fait à l'aide du choix d'un marquage initial pouvant être bloquant pour une des fonctions

du modèle. A titre indicatif, si on ne met aucun camion de régulation dans le système, ceci rend le service de régulation indisponible. En termes de nos modèles réseaux de Petri, le module de régulation sera non opérationnel dans ce cas de figure (aucune de ses transitions ne seront validées).

Enfin, dans la dernière section de ce chapitre (section 4) et en utilisant notre outil de simulation décrit dans la section suivante, des exemples d'illustrations (graphiques) seront rajoutés afin de mieux comprendre les trois différentes configurations pouvant se présenter dans le cadre des réseaux de vélos en libre service.

2. Simulation à événements discrets

Afin de mener une étude d'analyse et d'évaluation de performances, les réseaux de Petri se prêtent à la simulation à événements discrets lorsque le système modélisé est trop complexe (grande taille ; nombre d'états infini ; processus stochastique complexe à caractériser et/ou à résoudre ; …) pour effectuer une étude analytique. Les méthodes analytiques fondées notamment sur les processus stochastiques sont :

- limitées par l'explosion combinatoire qui caractérise la dynamique des systèmes complexes tels que les systèmes de vélos en libre de service que nous étudions dans ce travail. Autrement dit, le modèle RdP associé à ce type de systèmes est de grande taille et génèrent un très grand nombre de marquages.

- restrictives par rapport aux types de lois stochastiques à associer aux transitions. En effet, l'utilisation de lois stochastiques quelconques, hormis notamment la loi exponentielle, rend la caractérisation et la résolution du processus stochastique associé complexe à résoudre avec les méthodes analytiques.

Dans le cadre de ce travail, nous avons développé notre propre outil de simulation (sous Delphi). Il s'agit en partie d'une adaptation d'un outil déjà réalisé pour le cas du modèle BDSPN utilisant également le concept des arcs à poids variables (LAB 2005, CHE 2005, LAB 2007). Ainsi, l'outil réalisé permet de simuler et d'évaluer les performances des réseaux de Petri stochastiques pouvant prendre en compte la présence des arcs à poids variables en fonction du marquage actuel du réseau ; des transitions pouvant être immédiates, déterministes et/ou stochastiques ; et des politiques de gestion des horloges associées aux transitions pouvant être du type « *continue process* » ou « *restart process* ».

L'outil de simulation réalisé intègre un ensemble de fonctions permettant l'évaluation de performances (marquages moyens, fréquences moyennes de franchissement, temps de séjour moyens, …) permettant de calculer plusieurs indices de performances des systèmes de vélos en libre service tels que : le nombre moyen de vélos dans une station, temps de séjour moyen d'un vélo dans une station (rotation des vélos), … Cette partie fera l'objet de la section 3 de ce présent chapitre.

2.1. Algorithme général de simulation

La réalisation de notre outil de simulation repose sur le fonctionnement dynamique propre aux réseaux de Petri stochastiques ayant des arcs à poids variables décrits dans le chapitre 2. Il s'agit de la programmation du processus d'évolution de ce type de réseaux de Petri comme le décrit d'une manière générale l'Algorithme 1. Pour plus de détails nous orientons, une nouvelle fois, le lecteur au chapitre n°2 de ce mémoire.

2.2. Architecture générale de l'outil de simulation

La Figure 1 (voir la page 88) donne l'architecture générale de notre outil de simulation qui reprend les étapes de l'algorithme ci-dessous. Comme on peut le constater sur cette figure, un module dédié à l'évaluation de performances est intégré dans cet outil permettant le calcul d'un certain nombre d'indicateurs de performances en exploitant l'évolution des états du système en fonction du temps. Cette évolution est sauvegardée, à chaque simulation, dans un listing de type événements (franchissement de transitions) / changement d'états (marquages).

Algorithme 1. (Simulation)

Pas 1.	**Elaboration et saisie du modèle RdP**	Soit un RdP stochastique ayant des arcs à poids variables (saisie graphique ou textuelle sous forme d'un codage matriciel (matrices d'incidences PRE, POST, INHIB, Marquage initial, arcs variables, …)
Pas 2.	**Recherche de transitions validées**	A partir d'un marquage M_k donné à un instant donné, on détermine l'ensemble des transitions validées qu'on note : TV = $\{t_j \mid t_j \in T\}$. Si TV≠∅ , Aller au Pas 3 si TV∩T_i≠∅, Aller au Pas 4 si TV∩T_i=∅ Sinon Aller à FIN
Pas 3.	**Priorités aux transitions immédiates**	Si TV ∩ T_i ≠ ∅ Alors • Eliminer toutes les transitions temporisées (déterministes et stochastiques) dans l'ensemble TV. On garde que les transitions immédiates (Priorité aux transitions immédiates) • Faire une analyse de conflits entre les transitions de l'ensemble TV et sélectionner, suivant les priorités associées (ou aléatoirement) une transition immédiate, notée TF ∈ TV, à franchir. • DF(TF) = 0, (délai de franchissement d'une transition immédiate est nulle) • Aller au Pas 6.

Pas 4.	**Détermination des délais de franchissement**	Si TV ∩ T_i = ∅ Alors Pour chaque transition $t_j \in TV$ faire : • Génération aléatoire (transitions stochastiques) ou déterministe (transitions déterministes) du délai de franchissement DF(t_j), tout en respectant la politique d'exécution associée à cette transition (restart ou continue process)
Pas 5.	**Sélection de la transition à franchir (compétition)**	Soit DF_{min} = Min {DF(t1), DF(t2), …, DF(t_j)}, $t_j \in$ TV. • Déterminer la transition TF à franchir, ayant un délai de franchissement le plus petit : DF(TF) = DF_{min}
Pas 6.	**Franchissement de la transition et détermination du nouveau marquage**	A l'instant TF = TF + DF(TF) ; • Franchir la transition TF et déterminer le nouveau marquage M_{k+1} en utilisant l'équation d'état : $$M_{k+1} = M_k + W_{(M_k)} \times \underline{T}$$ Où ➢ $W_{(Mk)}$ correspond à la matrice d'incidence du réseau pour un marquage actuel M_i. ➢ $\underline{T}$ est le vecteur caractéristique qui désigne la transition sélectionnée pour le franchissement : $$\underline{T}[j] = \begin{cases} 1 & \text{si } t_j \text{ est la transition à franchir} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$ • Aller au pas 2, avec le nouveau marquage M_{k+1}
Fin		Fin de la simulation

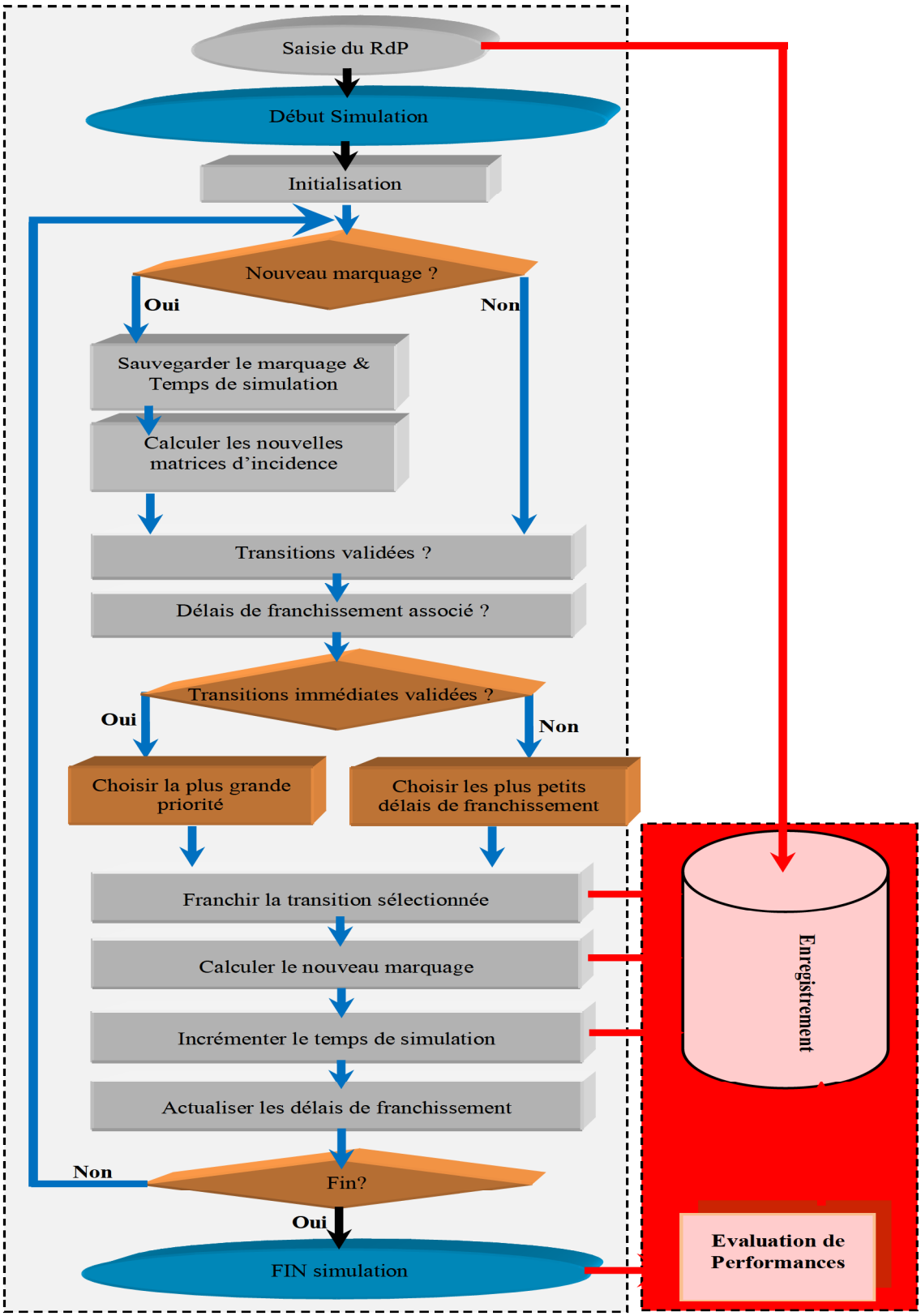


Figure 1. Architecture générale de l'outil de simulation

3. Evaluation de performances

Contrairement à la technique d'évaluation de performances basée sur la résolution du processus stochastique associé et ainsi des probabilités des états du RdP (voir le chapitre 2), l'évaluation de performances via la simulation à événements discrets se fait au travers de l'évolution dynamique des marquages des différentes places du réseau en fonction des franchissements des transitions qui se produisent dans le temps. Une illustration, utile notamment pour interpréter quelques mesures de performances par la suite, est donnée par la Figure 2. Ce type de trajectoires se génère par l'outil de simulation à partir du listing événement/état sauvegardé durant le temps de la simulation.

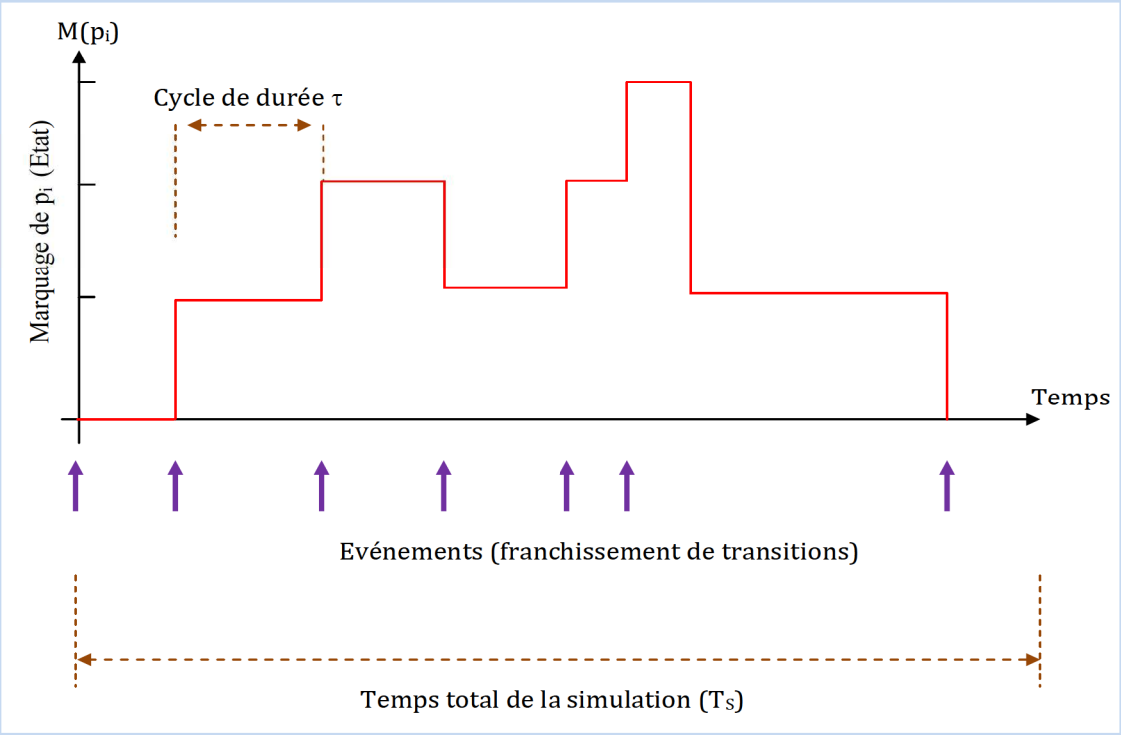


Figure 2. Illustration de l'évolution du marquage d'une place via la simulation

Dans le cadre des systèmes de vélos en libre service, parmi les indicateurs pouvant être formulés à base des modèles RdP développés dans le chapitre 3, nous citons par exemple : le nombre moyen de vélos dans une station, le temps de séjour moyen d'un vélo dans une station (rotation des vélos), le taux de rupture et/ou de saturation d'une station, etc. D'une manière générale et en termes d'un modèle RdP, nous avons :

3.1. Nombre moyen de jetons dans une place

$$M_{moy}(P) = \lim_{T_s \to +\infty} \frac{\sum_{0}^{T_s} M(P) * \tau}{T_s} \qquad (1)$$

Avec :

- $M_{moy}(P)$ Marquage moyen de la place P (nombre moyen de jetons)
- M(P) Nombre de jeton au début d'un cycle

- T_s Temps total de la simulation
- τ Durée de chaque cycle.

Remarques :

- Pour plus de clarté et comme l'illustre la Figure 2, un cycle représente un intervalle de temps où le marquage reste fixe avant un prochain changement (pallier).
- Le nombre moyen de jetons dans une place (ou le marquage moyen d'une place) donné par l'équation (1) correspond réellement au calcul de l'aire moyenne délimitée par la trajectoire donnant l'évolution du marquage dans le temps.

☞ Le symbole somme ($\sum$) qui apparait dans toutes les équations (1-9) est du au fait qu'une trajectoire de simulation est un ensemble de cycles (forme de type créneaux ou paliers pour un SED). Les bornes de cette somme (de 0 à T_s) signifie que le calcul se fait tout en long de la simulation (ou trajectoire illustrée par la Figure 2).

☞ Dans la pratique, la limite (Lim quand $T_s \rightarrow +\infty$) qui apparait dans toutes les équations (1-9), signifie que pour avoir une mesure de performance statistiquement fiable, il faut faire une grande simulation suffisante pour balayer suffisamment tous les événements aléatoires du système (franchissements de transitions stochastiques).

☞ Une autre alternative à cette technique de "longue simulation", consiste à faire plusieurs mesures avec différentes réplications de la simulation et de faire, par la suite, une moyenne des différentes mesures prises (HAA 2002, BAN 2001).

Dans le cadre d'un système de vélos en libre service, cet indicateur de performance est utile notamment pour le calcul du nombre moyen de vélos dans une station S_i (marquage moyen d'une place PS_i).

3.2. Temps de séjour moyen d'un jeton dans une place

$$S_{moy}(P) = \lim_{T_s \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{0}^{T_s} M(P) * \tau}{N_t} \qquad (2)$$

Avec

- S_{moy} Temps de séjour moyen d'un jeton dans une place P.
- M(P) Nombre de jetons au début d'un cycle.
- τ Durée de chaque cycle.
- N_t Nombre de jetons traversant la place P à la fin de chaque cycle.

La valeur de N_t peut être obtenue en incrémentant un compteur à chaque fois qu'une transition d'entrée est franchie pour déposer un certain nombre de jetons dans la place P (loi de Little).

Dans le cadre d'un système de vélos en libre service, cet indicateur de performance est utile notamment pour le calcul du temps de séjour moyen d'un vélo dans une station S_i (Temps de séjour moyen dans une place PS_i).

Autrement dit, cet indicateur permet de mesurer la rotation et donc l'utilisation effective des vélos dans les différentes stations.

3.3. Fréquence moyenne de franchissement d'une transition

$$F_{avr}(T) = \lim_{T_s \to +\infty} \frac{NF(T)}{T_s} \quad (3)$$

Avec

- NF(T) Nombre de franchissements de la transition T durant la simulation.
- T_S Temps total de la simulation.

Dans le cadre d'un système de vélos en libre service, cet indicateur de performance permet de mesurer la fréquence des différentes opérations effectuées durant l'activité du système. A l'aide des transitions de type TR_i (opération de rajout), TS_i (opération de retrait), on peut par exemple mesurer les fréquences des opérations nécessaires pour le rééquilibrage des stations.

3.4. Taux de rupture ou de saturation d'une place (à capacité limité)

$$M_{vide\%}(P) = \lim_{T_s \to +\infty} \left(100 \cdot \frac{\sum (\tau_{k+1} - \tau_k)_{M(P)=0}}{T_s} \right) \quad (4)$$

$$M_{saturé(\%)}(P) = \lim_{T_s \to +\infty} \left(100 \cdot \frac{\sum (\tau_{k+1} - \tau_k)_{M(P)=Cp}}{T_s} \right) \quad (5)$$

Avec :

- $M_{Vide\%}(P)$ Taux en % de rupture du marquage d'une place P.
- $M_{Saturé\%}(P)$ Taux en % de saturation du marquage d'une place P.
- $\tau_k - \tau_{k+1}$ Durée d'un cycle où P est vide (M(P) = 0) ou saturée (M(P) = C_p.
- C_p Capacité limitée d'une place P.
- T_s Temps total de la simulation.

Dans le cadre d'un système de vélos en libre service, cet indicateur de performance permet de mesurer le taux des situations critiques relatives aux stations vides ou pleines.

Enfin, connaissant l'évolution de l'état d'un RdP en fonction du temps, plusieurs autres indicateurs de performances, plus spécifiques au système à étudier, peuvent facilement être exprimés et mesurés via la simulation.

4. Exemple simple d'illustration

Avant le développement du dernier chapitre de ce mémoire qui sera consacré à une application sur un cas réel, à titre d'illustration du comportement dynamique de nos modèles, les graphiques intitulés « Evolution du nombre de vélos dans la station S_i » des figures représentées dans la suite de cette section sont obtenus pour les différentes configurations définies dans la section 1 en considérant le cas du modèle de base (Chapitre 3). Les paramètres du modèle considérés dans le cadre de cette illustration, faite sur 3 stations, sont donnés par les tableaux ci-dessous.

$M_0(PS_1)$	$M_0(PS_2)$	$M_0(PS_3)$	$M_0(PR_1)$	$M_0(PR_2)$	$M_0(PR_3)$
15	15	15	10	0	0
$M_0(PC_1)$	$M_0(PC_2)$	$M_0(PC_3)$	$M_0(PO_1)$	$M_0(PO_2)$	$M_0(PO_3)$
0	0	0	0	0	0

Tableau 2. Configuration du marquage initial du modèle RdP

R_1	R_2	R_3	C_1	C_2	C_3
10	10	10	20	20	20

Tableau 3. Configuration des paramètres R_i et C_i (seuils de régulation et capacités)

TS_{11}	TS_{12}	TS_{13}	TS_{21}	TS_{22}	TS_{23}
E, C, 20	E, C, 5	E, C, 10	E, C, 5	E, C, 20	E, C, 5
TS_{31}	TS_{32}	TS_{33}	TR_1	TO_1	TS_1
E, C, 10	E, C, 5	E, C, 20	E, C, 3	I, 0	E, C, 3
TR_2	TO_2	TS_2	TR_3	TO_3	TS_3
E, C, 3	I, 0	E, C, 3	E, C, 3	I, 0	E, C, 3
TR_{12}	TR_{23}	TR_{31}	TE_1	TE_2	TE_3
E, C, 15	E, C, 15	E, C, 15	I, 0	I, 0	I, 0

Tableau 4. Configuration des transitions (Types, Temporisations, Politiques)

> Notations utilisées pour le paramétrage des transitions : Types des transitions (I : immédiate, E : Exponentielle, D : Déterministe) ; Types des politiques associées à la gestion des temporisations (C : continue process, R : restart process) et Délais moyens (en mn) associés au transitions.

4.1. Simulation du modèle sous la configuration 1 (cas dynamique avec régulation)

Dans cette configuration on considère le fonctionnement normal (global) du système où tous les modules du réseau de Petri correspondant seront opérationnels. A l'aide de notre outil de simulation, on peut constater sur les trois trajectoires représentées par la Figure 3 que le nombre des vélos (marquage des places PS_i) dans les trois stations « oscille » autour de la valeur de régulation R_i (fixée ici à 10 pour toutes les stations). On peut voir que la limite C_i fixée ici à 20 pour toutes les stations est également respectée. Ces simulations effectuées confirment pertinemment que le comportement du modèle est conforme à notre analyse formelle effectuée dans le chapitre précédent.

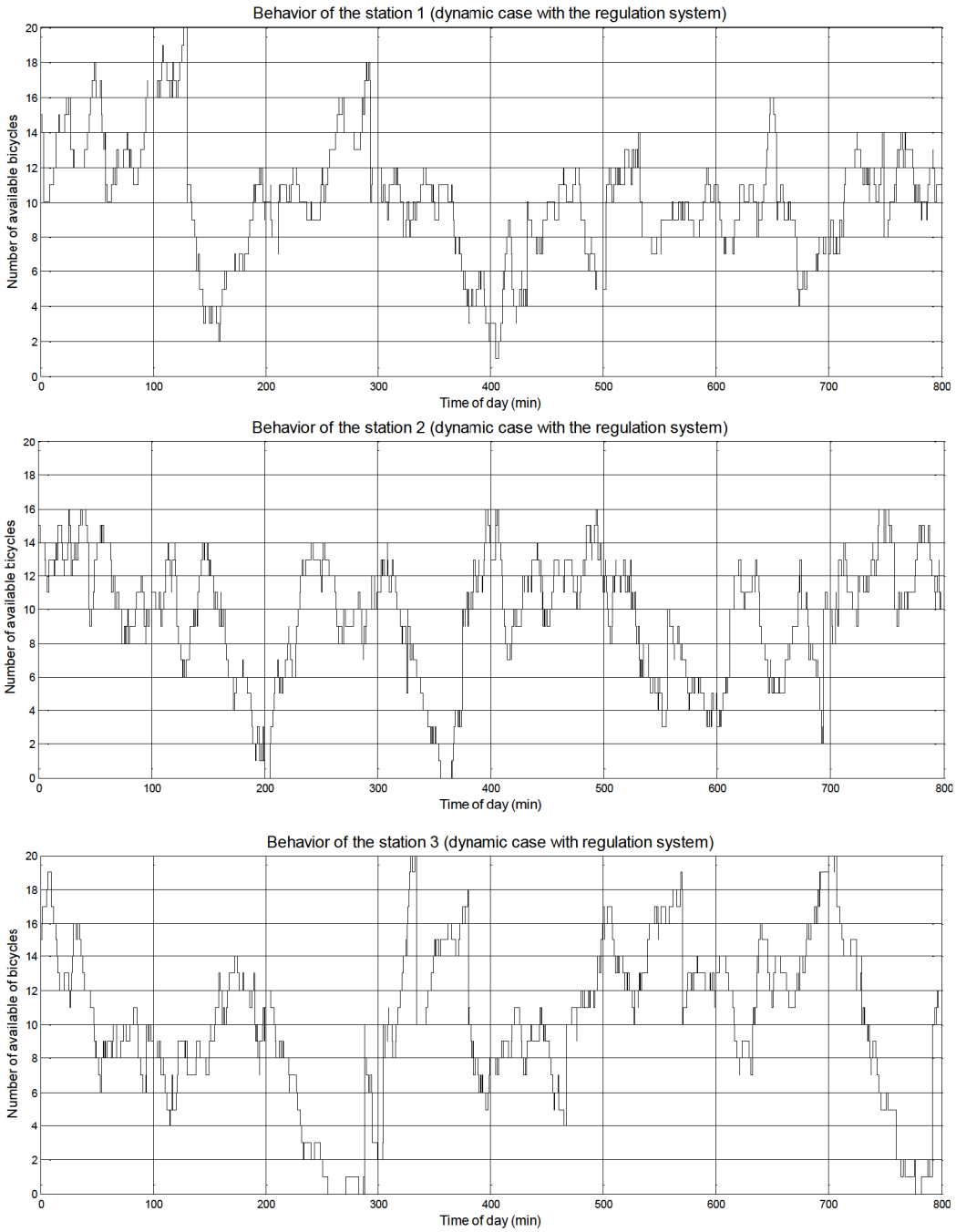


Figure 3. Evolution du nombre de vélos dans les stations (configuration 1)

4.2. Simulation du modèle sous la configuration 2 (cas dynamique sans régulation)

Contrairement au cas précédent, nous considérons que le service de régulation est indisponible. Dans ce cas, il n'y aura ni contrôle, ni rééquilibrage des stations. Cette configuration s'obtient en mettant nul le marquage initial des places PC_i et PR_i. Ainsi, les transitions TE_i, TS_i, TO_i et TR_i (module de régulation) et TR_{ij} (déplacement du véhicule de régulation) ne seront jamais validées. Autrement dit, le modèle RdP se réduit uniquement

au module représentant le flux de vélos entre les différentes stations. On observe sur les trajectoires représentées par la Figure 4, qu'en l'absence de la régulation du système, les situations critiques (stations pleines ou vides) ont tendance à se produire beaucoup plus fréquemment que le cas précédent.

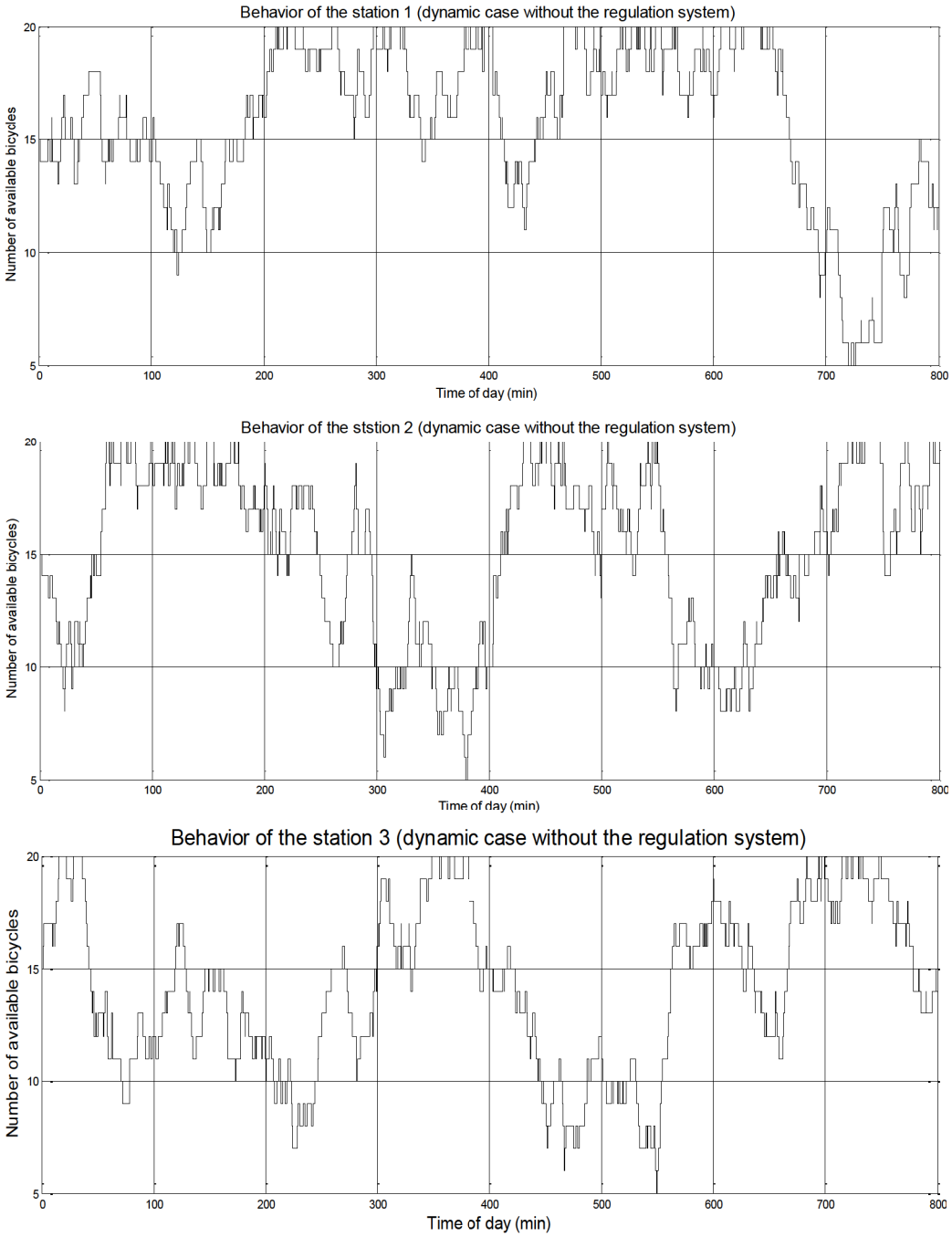


Figure 4. Evolution du nombre de vélos dans les stations (configuration 2)

4.3. Simulation du modèle sous la configuration 3 (cas statique)

Le dernier cas présenté dans ce paragraphe concerne le cas statique où la dynamique du système est négligeable (nuit, jour férié, …). Cette situation correspond au cas où les délais de franchissement associés aux transitions TS_{ij}, sont considérables. L'allure de la

dynamique du modèle dans ce cas est similaire à celle représentée par les trajectoires de la Figure 5.

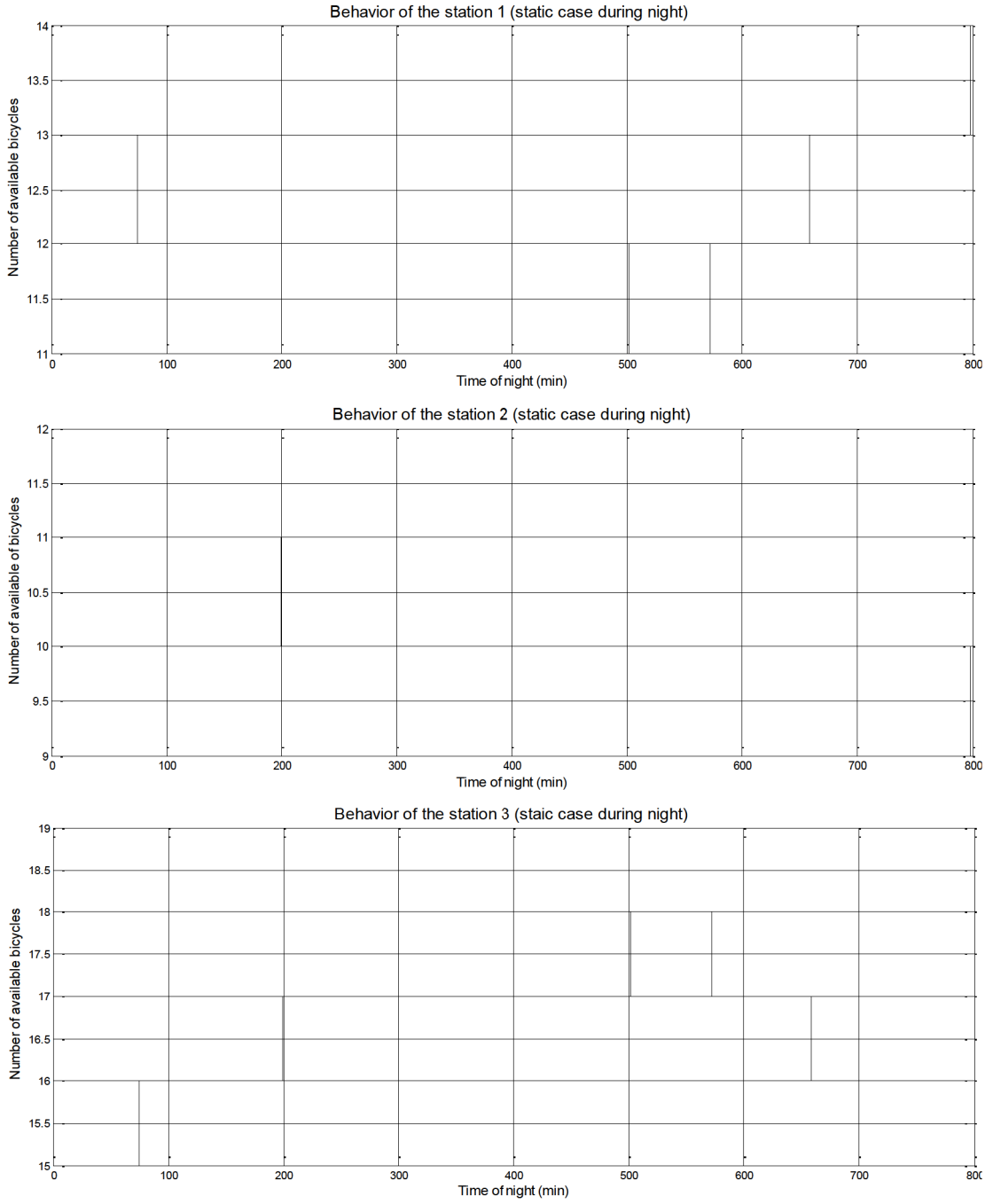


Figure 5. Evolution du nombre de vélos dans les stations (configuration 3)

4.4. Evaluation de performances du modèle

Sans une analyse quantitative, les graphiques représentant le comportement dynamique d'un système donnée, tels que ceux présentés dans notre exemple illustratif, présentent un précieux avantage pour l'exploitant. Ils permettent d'une manière visuelle, rapide et intuitive d'observer le bon ou le mauvais fonctionnement de son système selon les politiques de gestion utilisées ou les paramètres appliqués. La richesse des réseaux de

Petri ne s'arrête pas que sur ce point. En plus d'être visuel, ils permettent d'effectuer des analyses de performances du système considéré à base de calculs formels d'un ensemble de mesures de performances (section 3). Pour le cas de notre exemple d'illustration, le tableau ci-dessous donne à titre d'exemple les marquages moyens des places PS_i représentant les différentes stations du système considéré pour les deux principales configurations à savoir : avec ou sans régulation du système

Configuration 1 (avec régulation)		
$M_{moy}(PS_1)$	$M_{moy}(PS_2)$	$M_{moy}(PS_3)$
10,18	10,14	10,21
Configuration 2 (sans régulation)		
$M_{moy}(PS_1)$	$M_{moy}(PS_2)$	$M_{moy}(PS_3)$
15,72	15,57	15,53

Ces résultats sont visiblement en accord avec les graphiques représentant l'évolution du nombre de vélos dans les stations en fonction du temps. Avec la régulation et pour les paramètres fixés, le nombre moyen de vélos dans les différentes stations est autour de 10 correspondant au seuil de régulation fixé à $R_i = 10$ (pour les trois stations). Notons que l'objectif du rééquilibrage n'est pas forcément de maintenir le niveau des stations à R_i mais surtout d'éviter au maximum les situations critiques de stations pleines ou vides. Dans le cas de cet exemple d'illustration, le marquage moyen a atteint le seuil de régulation car la régulation est effectuée en continue et pour un circuit comptant que trois stations. En revanche, pour le cas de la configuration sans régulation, la tendance de saturation assez fréquente des stations, observée sur les trajectoires de la Figure 4, se confirme avec les valeurs moyennes affichées dans le tableau ci-dessus. A noter que ces résultats sont valables uniquement pour les paramètres fixés pour cette simulation illustrative.

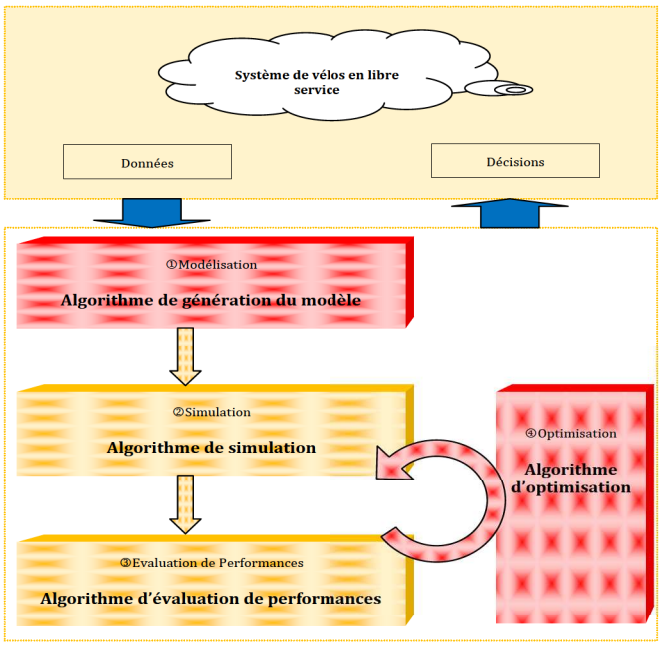


Figure 6. Evolution de notre outil de simulation (réalisé dans le cadre d'une nouvelle thèse en cours)

Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes particulièrement intéressés à l'évaluation de performances à base d'une approche basée sur la simulation à événements discrets. Un ensemble d'indicateurs ont été formalisés permettant d'analyser la performance d'un réseau de vélos en libre service sur différents angles suivant les paramètres, les configurations et/ou les politiques de régulation choisis. Parmi ces indicateurs, nous citons par exemple : le nombre moyen de vélos dans une station, le temps de séjour moyen d'un vélo dans une station (rotation des vélos), le taux de rupture et/ou de saturation d'une station, etc.

Afin de faire face la complexité de la dynamique des systèmes en question, nous avons opté pour une approche d'évaluation et d'analyse via la simulation à événements discrets. Ainsi, un outil de simulation, adapté à partir de celui réalisé dans le cas des réseaux de Petri lots (LAB 2005, CHE 2005, LAB 2007), a été présenté dans le cadre de ce chapitre. Comme le montre la dernière figure de ce chapitre (Figure 6), un ensemble de perspectives issues de ce travail ont fait l'objet d'une partie de travail d'une deuxième thèse lancée, sur le thème de l'optimisation des systèmes de vélos en libre service, depuis septembre 2013 par M. Labadi (EPMI-ECS Lab) en collaboration avec M. Kacem, professeur à l'Université de Lorraine (Metz).

Le chapitre qui suivra va porter sur une démonstration d'application de notre approche permettant d'illustrer la pertinence et le potentiel de nos travaux de thèse sur une étude de cas réel.

Chapitre 5

Application à un cas réel : VELITUL

Après le développement de notre approche de modélisation, d'analyse et d'évaluation de performances des systèmes de vélos en libre-service, en vue de leur régulation, dans les chapitres précédents, ce nouveau chapitre est une démonstration du grand potentiel de notre approche pour l'étude de cas réels. Notre étude porte sur VELITUL, un service de vélos en libre-service lancé en 2010 par Laval Agglomération (France). Après la présentation du système considéré, ce dernier sera étudié en utilisant un de nos modèles (modèle à base d'alertes) afin de montrer que notre approche est pertinente aussi bien pour l'analyse que pour simulation en vue de l'amélioration de la performance de ce nouveau mode de transport urbain.

1. Présentation de « VELITUL »

1.1. Descriptif du système

VELITUL est un service de vélos en libre-service mis en place par la communauté d'agglomération de Laval. Lancé le 21 septembre 2010, le service est une première pour une ville moyenne. Pratique pour se déplacer en centre ville, le service compte 100 vélos munis d'un panier, d'un antivol et de trois vitesses. Les usagers peuvent passer du bus, du train ou du taxi au vélo, en toute simplicité. Les vélos peuvent être empruntés puis rapportés dans n'importe laquelle des 9 stations réparties dans la ville (Figure 4).

Les stations sont munies de bornes électroniques qui contrôlent l'accès aux vélos ; une carte spécifique ou un code fourni avec l'abonnement sont nécessaires pour effectuer un emprunt. Les vélos sont accessibles 24 heures sur 24 et sept jours sur sept. On s'abonne à la journée, à la semaine ou à l'année, ou ponctuellement avec la première demi heure gratuite. Le VELITUL est exploité par les Transports Urbains Lavallois (TUL), la même société qui gère le réseau de transports en commun de la ville.

Comme illustration du service VELITUL, les Figures 1, 2, 3 représentent trois stations du réseau. Le plan de localisation des 9 stations du service est donné par la Figure 4. Pour plus de détails sur le service VELITUL, nous orientons les intéressés au site web qui lui est dédié http://www.tul-aval.fr/. Ce dernier donne un certain nombre d'informations notamment le plan des stations, les tarifs appliqués, l'utilisation du service, ainsi que la disponibilité des vélos dans les différentes stations en temps réel,…

Figure 1. Station cité administrative (VELITUL)

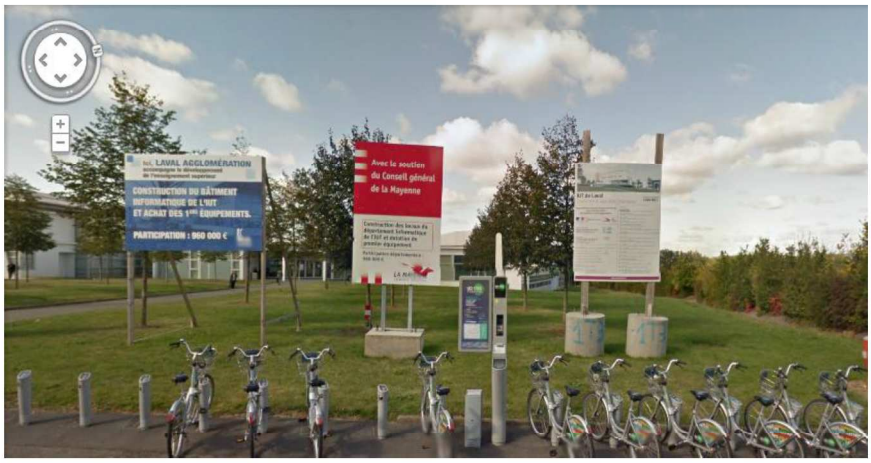


Figure 2. Station centre universitaire (VELITUL)

Figure 3. Station Hilard (VELITUL)

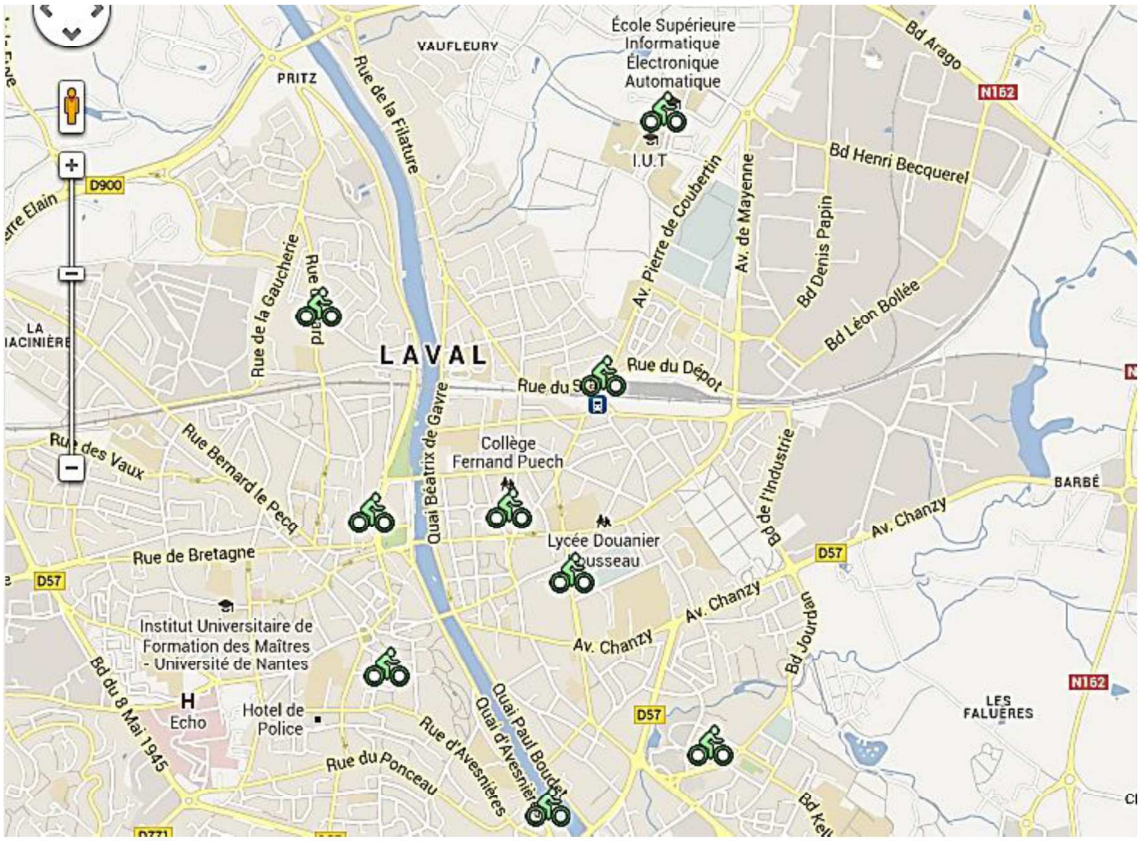


Figure 4. Plan des stations de VELITUL « google map »

1.2. Caractéristiques du système

Avant l'étude du système à l'aide de l'un de nos modèles et techniques associées, cette section est consacrée à la présentation des caractéristiques et des données du réseau utiles pour la construction d'un des modèles de type réseaux de Petri développés dans le chapitre 3. Ainsi, le Tableau 1 et la Figure 5 désignent l'ensemble des neuf stations du réseau avec notamment les capacités associées. D'une manière générale, les stations sont toutes placées dans des endroits stratégiques de la ville.

Station	Désignation	Capacité
S1	Gare Tul	18
S2	Préfecture	14
S3	Felix grat	16
S4	Gare SNCF	18
S5	Bibliothèque	14
S6	Avesnieres	14
S7	Hilard	12
S8	Centre universitaire	16
S9	Cité administrative	14

Tableau 1. Désignation et capacité des stations

Figure 5. Désignation des stations de VELITUL

Pour l'estimation des distances et du temps de parcours entre les différentes stations et le centre de gestion du réseau, nous avons utilisé l'application de « *Google maps* » via le site https://maps.google.fr/. Dans le Tableau 2, on lit les distances inter-stations et les temps estimés pour les déplacements de vélos d'une station « origine » vers une autre station de « destination ». Les distances sont estimées en mètres (ou en Kilomètres) et le temps en minutes. Quant au Tableau 3, on retrouve les distances et les temps estimés pour les déplacements du camion de régulation du centre de gestion vers les différentes stations.

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
S1		700 m (5mn)	1.2km (7mn)	1.6km (9mn)	1km (6mn)	1.5km (8mn)	1.1km (7mn)	2.7km (16mn)	2km (13mn)
S2	700 m (5mn)		500m (2mn)	650m (4mn)	1.2km (8mn)	2km (8mn)	2.5km (11mn)	2.1km (11mn)	1.8km (9mn)
S3	1.5km (7mn)	500m (2mn)		850m (4mn)	1.3km (9mn)	1.4km (6mn)	3km (14mn)	2.3km (11mn)	1.3km (6mn)
S4	1.6km (9mn)	650m (4mn)	850m (4mn)		2.1km (11mn)	2.5km (10mn)	2.5km (11mn)	1.4km (7mn)	2.2km (10mn)
S5	1km (6mn)	1.2km (8mn)	1.3km (9mn)	2.1km (11mn)		1.6km (7mn)	2.1km (12mn)	3.7km (16mn)	2.1km (12mn)
S6	1.5km (8mn)	2km (8mn)	1.4km (6mn)	2.5km (10mn)	1.6km (7mn)		3.5km (17mn)	3.8km (18mn)	1.1km (6mn)
S7	1.1km (7mn)	2.5km (11mn)	3km (14mn)	2.5km (11mn)	2.1km (12mn)	3.5km (17mn)		2.6km (14mn)	3.1km (17mn)
S8	2.7km (16mn)	2.1km (11mn)	2.3km (11mn)	1.4km (7mn)	3.7km (16mn)	3.8km (18mn)	2.6km (14mn)		2.5km (14mn)
S9	2km (13mn)	1.8km (9mn)	1.3km (6mn)	2.2km (10mn)	2.1km (12mn)	1.1km (6mn)	3.1km (17mn)	2.5km (14mn)	

Tableau 2. Distances / Temps entre les stations
(Temps de déplacement effectué en vélos)

Stations	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
Distance /Temps par rapport au centre de gestion	230 m (30s)	750 m (3mn)	1.2 km (5mn)	1.6 km (5.2mn)	1.6 km (5mn)	1.51 km (4mn)	1.5 km (3mn)	3 km (9mn)	2.6 km (8mn)

Tableau 3. Distances/Temps entre les stations et le centre de gestion (Temps effectué en véhicule)

Figure 6. Nombre de vélos disponibles en temps réel (Extrait du www.tul-laval.fr/velitul-disponibilites.asp, le 15 juillet 2013 à 10h00)

Pour ce qui est de la fréquentation du réseau par les usagers de la ville de Laval, nous avons pris contact avec les agents de VELITUL afin d'avoir une estimation moyenne de la demande constatée par station. Il clair que l'utilisation du service est très variable selon les jours, les saisons, ou tout autre facteur pouvant impacter l'utilisation du service. La fréquentation en hiver n'est pas la même qu'en été, la fréquentation le week-end n'est pas la même qu'un jour de semaine, etc. Grâce aux orientations qui nous ont été données et la consultation du site http://www.tul-aval.fr/, nous avons décidé de travailler avec les données récapitulées dans le Tableau 4. Il s'agit d'une estimation moyenne faite sur la base d'une consultation périodique du nombre de vélos disponibles en temps réel dans chaque station à des heures fixes pendant le mois de juin/juillet 2013, via le site http://www.tul-aval.fr/ (voir l'exemple donné sur la Figure 6). Ceci est dans le but d'avoir une estimation assez réaliste de la demande.

Stations	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
Vélo entrant	40 mn	55 mn	35 mn	30 mn	50 mn	60 mn	65 mn	35 mn	40 mn
Vélo sortant	45 mn	60 mn	30 mn	31 mn	55 mn	65 mn	70 mn	30 mn	45 mn

Tableau 4. Estimation moyenne de la fréquentation des stations.

La lecture de ce dernier tableau se fait de la manière suivante. Prenons par exemple, le cas de la station S1 (Gare Tul) : le délai moyen d'arrivée d'un vélo vers cette station est de 40 minutes et le délai moyen qu'un vélo quitte cette même station est de 45 minutes. Du point de vue du modèle RdP, ce tableau est utile pour le paramétrage du module représentant le processus des flux de vélos entrant/sortant dans les différentes stations du réseau. Les transitions entrée/sortie de ce module prendront comme délais moyens de franchissement les valeurs affichées dans ce tableau. Enfin, le Tableau 5, donne l'état initial des neuf stations que nous considérons comme le marquage initial du réseau de Petri et ainsi pour le lancement de nos simulations à événements discrets.

Stations	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
Marquage initial M_0	$M_0(PS_1) = 10$	$M_0(PS_2) = 08$	$M_0(PS_3) = 07$	$M_0(PS_4) = 17$	$M_0(PS_5) = 07$	$M_0(PS_6) = 03$	$M_0(PS_7) = 07$	$M_0(PS_8) = 10$	$M_0(PS_9) = 04$

- Total de vélos dans le réseau : $100 = M_0(PV) + \sum M_0(PS_i)$
- A l'état initial :
  - $M_0(PV) = 27$ vélos en cous de déplacement (en dehors stations)
  - $\sum M0(PS_i) = 73$ vélos dans les différentes stations

Tableau 5. Etat initial du réseau

1.3. Paramétrage du modèle RdP

Une partie du paramétrage du modèle RdP à base d'alertes choisi pour l'étude du système est effectué à base des tableaux numérotés de 1 à 4. Rappelons que nos modèles sont stochastiques et nous assumons que le processus des vélos sortant et entrant dans les différentes stations est un processus de poisson. Tous les déplacements, notamment ceux effectués par le camion de régulation, sont également considérés aléatoires d'où l'utilisation de transitions stochastiques (exponentielles). Le codage du RdP sous forme matricielle est donné en annexe. Les tableaux donnés jusqu'à présent représentent les paramètres liés à la dynamique du réseau. La partie liée au contrôle et au rééquilibrage des stations notamment par rapport au paramétrage des trois points de contrôle (R_i, P_i, E_i) de chaque station sera spécifiée dans la section correspondante. Plusieurs cas seront ainsi étudiés en fonction du paramétrage de la politique de contrôle et de rééquilibrage et aussi du mode de fonctionnement du réseau à savoir : mode sans régulation, mode avec régulation de toutes les stations, mode de régulation de quelques stations (critiques).

2. Simulation et évaluation de performances

Sachant que nos modèles sont à la fois paramétrables et configurables, le système considéré sera étudié suivant différentes configurations à savoir : cas dynamique (sans régulation, avec régulation (toutes les stations), avec régulation de quelques stations critiques), cas statique (régulation inutile).

2.1. Mode dynamique sans régulation

Comme nous l'avons déjà vu dans le chapitre 4, les modèles que nous avons développés permettent l'étude du système sans la régulation. Ceci revient à considérer uniquement le module représentant le déplacement de vélos d'une station à une autre dont les paramétrages sont effectués à l'aide du Tableau 1 pour les capacités des stations, du Tableau 4 pour la fréquentation des stations par les usagers et du Tableau 5 pour l'état initial des stations. En revanche, dans ce cas de configuration (sans régulation), le module de contrôle et de rééquilibrage reste inactif. Dans ce cas de figure, nous observons sur la Figure 7 la dynamique des vélos dans chacune des neuf stations du réseau. Pour la fiabilité de l'évaluation de performances, de grandes simulations ont été volontairement effectuées et l'affichage est fait sur 10 jours (nous supposons qu'une journée de fonctionnement correspond à 800 mn).

Stations	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
Capacités	18	14	16	18	14	14	12	16	14
% Rupture	13.70 %	12.12 %	02.23 %	10.22 %	03.37 %	04.30 %	01.092 %	01.98 %	14.79 %
% Saturation	03.39 %	01.13 %	10.96 %	04.56 %	01.44 %	00.78 %	01.82 %	12.78 %	01.59 %
Stock moyen	6.01	4.86	11.39	7.58	8.96	5.97	5.77	10.79	4.87

Tableau 6. Evaluation des performances (cas dynamique sans régulation)

A partir des graphiques de la Figure 7, donnant l'allure de l'évolution du flux de vélos entrant et sortant dans les différentes stations du réseau, on visualise des situations de saturation et de rupture pouvant survenir durant le fonctionnement du système. Cette allure est naturellement due à l'absence du service de régulation. Le Tableau 6 donne les mesures de performances effectuées sur ce cas de figure. Pour les paramètres et les données choisis, on lit les pourcentages moyens de saturation et de rupture pouvant survenir pour chaque station. A titre d'exemple, en moyenne 13,70% du temps total de service, la station S1 (Gare Tul) resterait vide et 3,39% du temps total de service, cette même station resterait pleine. Autrement dit, avec les données choisies, pour une demi-journée de service de 7h00 à 12h00 par exemple (soit 300 mn), la station S1 resterait en moyenne 41.10 mn en état de rupture et 10.17 mn en état de saturation.

En conclusion, cette configuration correspond à un réseau déséquilibré qui nécessite l'intervention du service de régulation. Ceci est l'objet du cas de figure qui va suivre où nous maintenons les mêmes données concernant les paramètres liés à la fréquentation des stations par les usagers (Tableau 4) mais avec la présence du service de régulation.

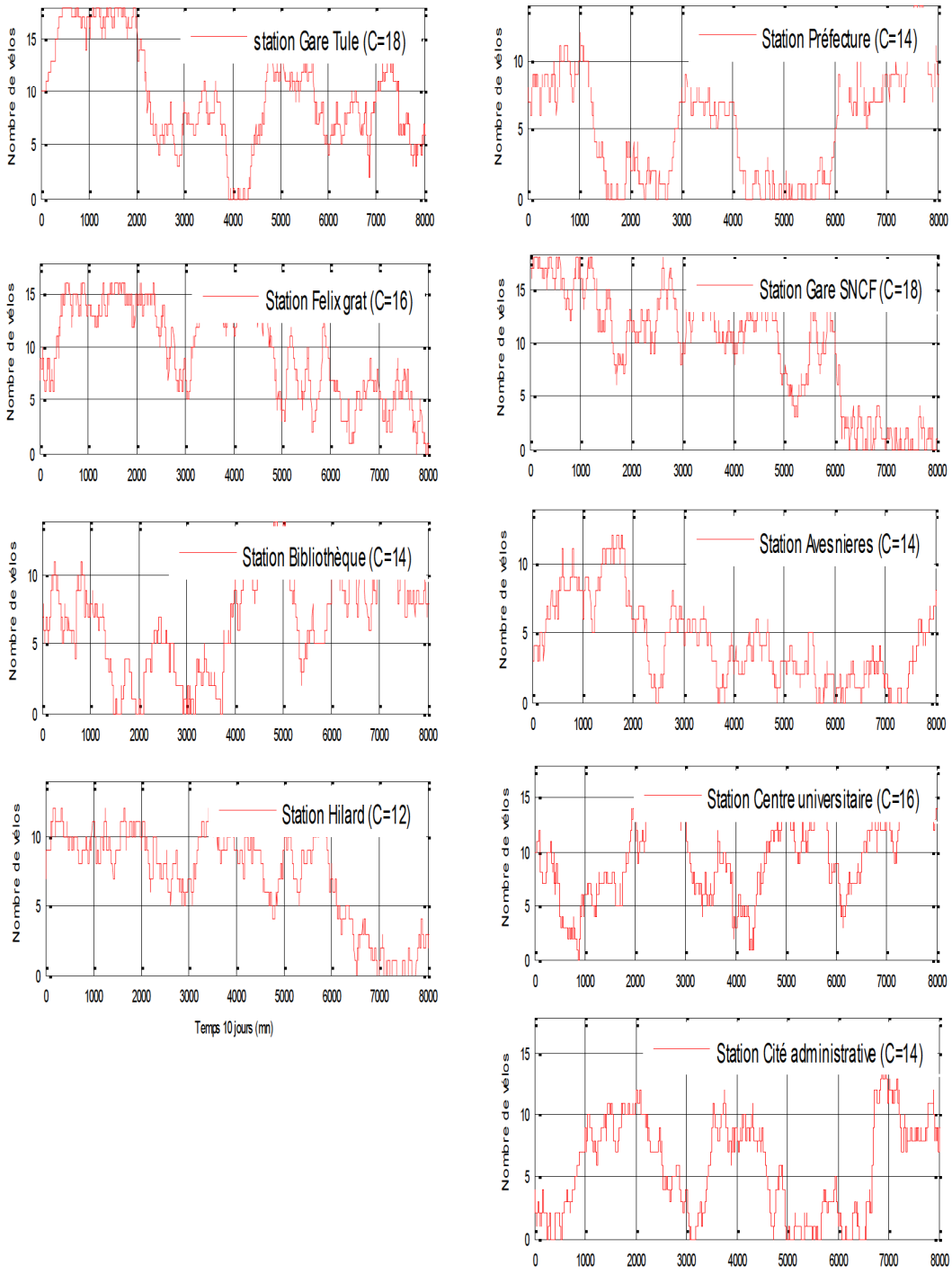


Figure 7. Evolution du flux de vélos dans les stations (cas dynamique sans régulation, Affichage sur 10 jours de simulations)

2.2. Mode dynamique avec régulation

Comme deuxième configuration, nous considérons les mêmes données liées à la fréquentation des stations par les usagers (Tableau 4) avec la présence du service de régulation. Contrairement au cas précédent, tous les modules du réseau de Petri correspondant sont opérationnels, y compris le module de contrôle, d'alertes et de rééquilibrage. Le tableau ci-dessous, fixe arbitrairement les paramètres de la politique de régulation utilisée à savoir les seuils de rééquilibrage (R_i), les seuils d'alerte « *pénurie* » (P_i) et les seuils d'alerte « engorgement » (E_i) et ceci pour chacune des neuf stations.

Stations		**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**	**S8**	**S9**
Capacités		**18**	**14**	**16**	**18**	**14**	**14**	**12**	**16**	**14**
Politique de contrôle & de rééquilibrage	Seuil de rééquilibrage (R_i)	R1 = 10	R2 = 08	R3 = 10	R4 = 10	R5 = 08	R6 = 08	R7 = 07	R8 = 10	R9 = 08
	Seuil d'alerte pénurie (P_i)	P1 = 04	P2= 04	P3= 04	P4 = 04	P5= 04	P6 = 04	P7 = 03	P8= 04	P9 = 04
	Seuil d'alerte engorgement (E_i)	E1= 15	E2 = 11	E3= 13	E4 = 15	E5= 11	E6 = 11	E7 = 09	E8= 13	E9 = 11

Tableau 7. Paramètres de la politique de régulation (cas dynamique avec régulation)

Stations	**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**	**S8**	**S9**
Capacités	**18**	**14**	**16**	**18**	**14**	**14**	**12**	**16**	**14**
% Rupture	0.138 %	0.32 %	0.0341 %	0.425 %	1.047 %	0.11 %	0.071 %	0.12 %	0.66 %
% Saturation	0.000 %	0.067 %	0.620 %	0.094 %	0.250 %	0.092 %	0.011 %	0.260 %	0.210 %
Stock moyen	8.46	7.05	9.21	8.42	7.26	6.80	6.19	9.38	6.98

Tableau 8. Evaluation des performances (cas dynamique avec régulation)

A partir des graphiques de la Figure 8 représentant l'allure de l'évolution du flux de vélos entrant et sortant dans chacune des stations du réseau, nous visualisons une amélioration significative sur l'équilibre du système par rapport au cas sans régulation. Grâce au système de rééquilibrage intégré dans le modèle, les situations critiques (stations vides ou pleines) sont très rares. Ceci est également confirmé par les mesures de performances effectuées et que nous donnons dans le Tableau 8. Nous enregistrons un très très faible taux moyen de saturation et de rupture dans l'ensemble des stations.
Bien sûr, les performances du système dépendent des paramètres de la politique de gestion. La variation des valeurs des points de contrôle E_i, P_i, R_i par rapport à celles données par le Tableau 6, aura un impact direct sur les performances du système notamment par rapport au nombre d'interventions pour la régulation (coût), taux des situations critiques, … Chercher les meilleurs paramètres pour un fonctionnement optimal du système est une question d'optimisation qui peut se faire à l'aide du modèle RdP couplé avec un algorithme d'optimisation permettant l'optimisation du système. Dans notre cas, le choix a été fait arbitrairement sur la base du bon sens.

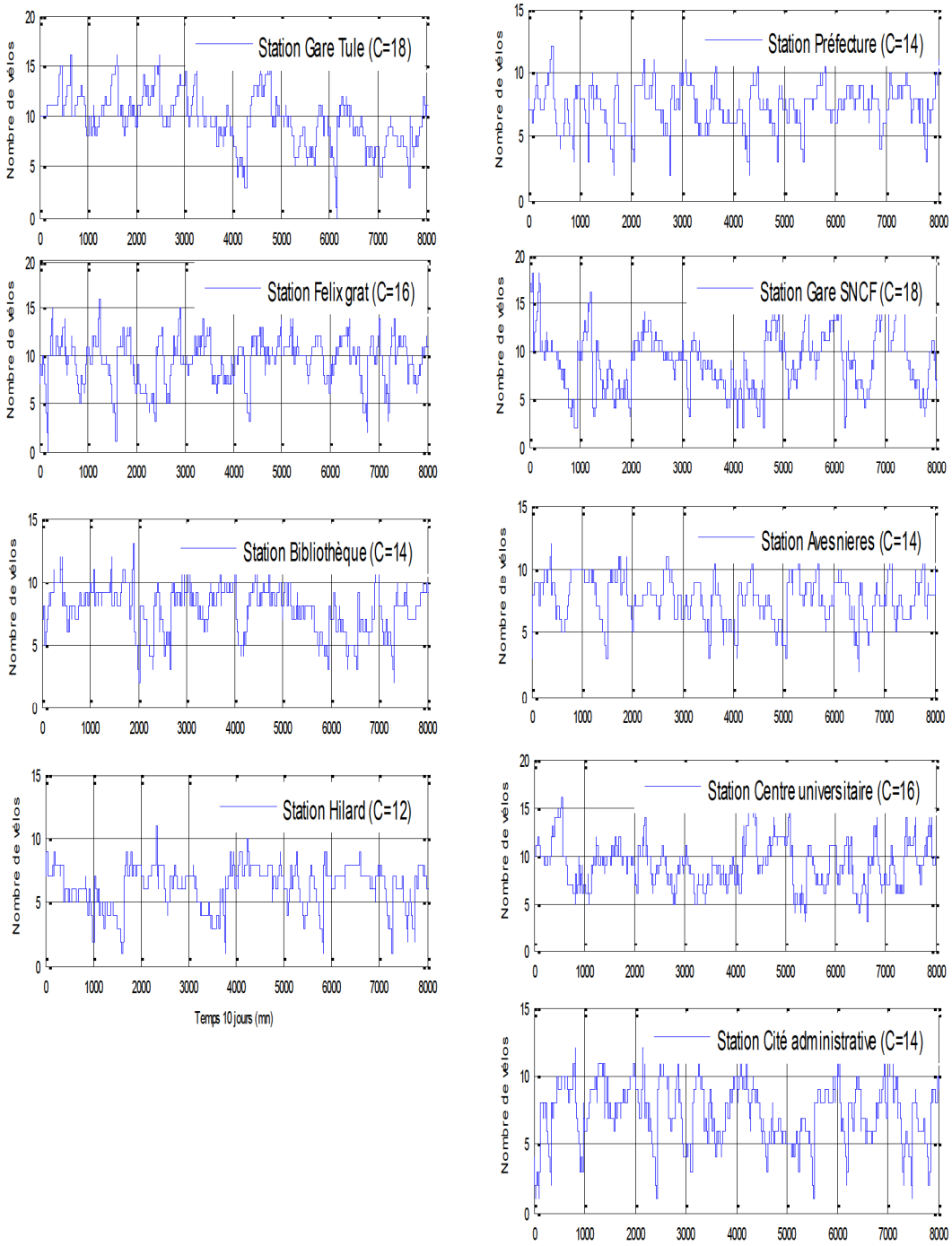
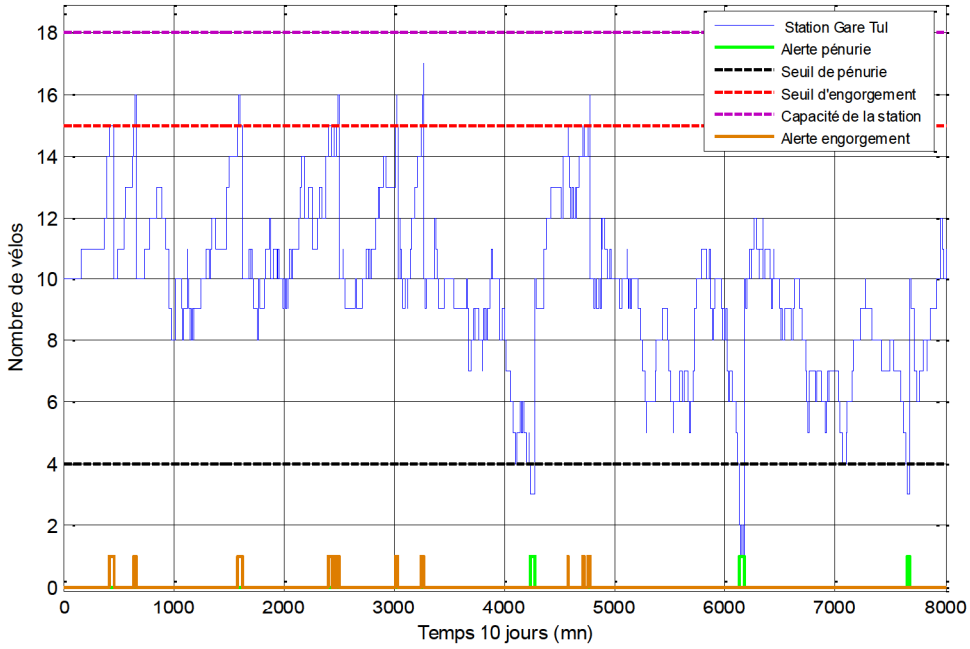
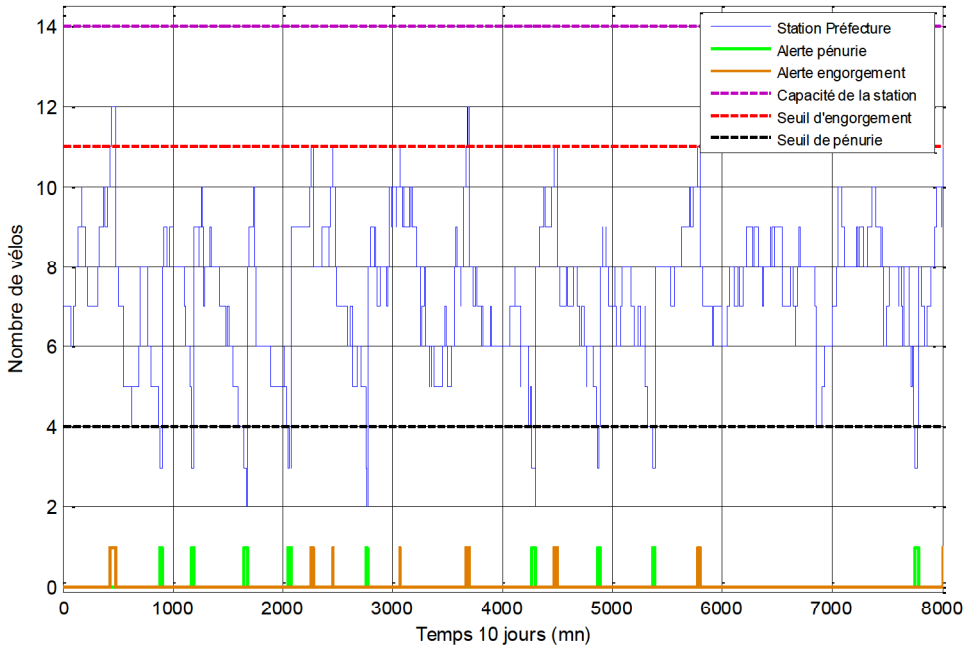


Figure 8. Evolution du flux de vélos dans les stations (cas dynamique avec régulation, Affichage sur 10 jours de simulations).

Dans la Figure 9, nous avons fait un « zoom » sur la dynamique des stations « Gare Tul » et « Préfecture » afin d'illustrer quelques aspects liés au contrôle du système. Tous les niveaux de contrôle et d'alerte sont représentés par des traits pointillés. En plus de l'allure de l'évolution du flux de vélos, nous pouvons observer une alerte (pic) à chaque fois que le niveau de la station est en dessous ou au dessus des seuils E_i ou P_i fixés (Tableau 7). Les pics disparaissent lorsque l'état de la station redevient normal soit d'une manière naturelle (avant même l'intervention du service de régulation) ou, au contraire, à l'aide de l'intervention du service de régulation.



Station « Gare Tule », C = 18, R_i = 10, E_i = 15, P_i = 4



Station « Préfecture », C = 14, R_i = 8, E_i = 11, P_i = 4

Figure 9. Illustration du fonctionnement et du contrôle du réseau

La richesse de notre modèle permet d'approfondir encore l'analyse du système. A titre d'exemple, on peut s'intéresser au nombre de locations de vélos par jour (Figure 10). Ceci correspond à la somme du nombre de franchissements des transitions de retrait de vélos dans les différentes stations. Ceci peut être également exprimé par la somme de la fréquence moyenne de franchissement des transitions correspondantes.

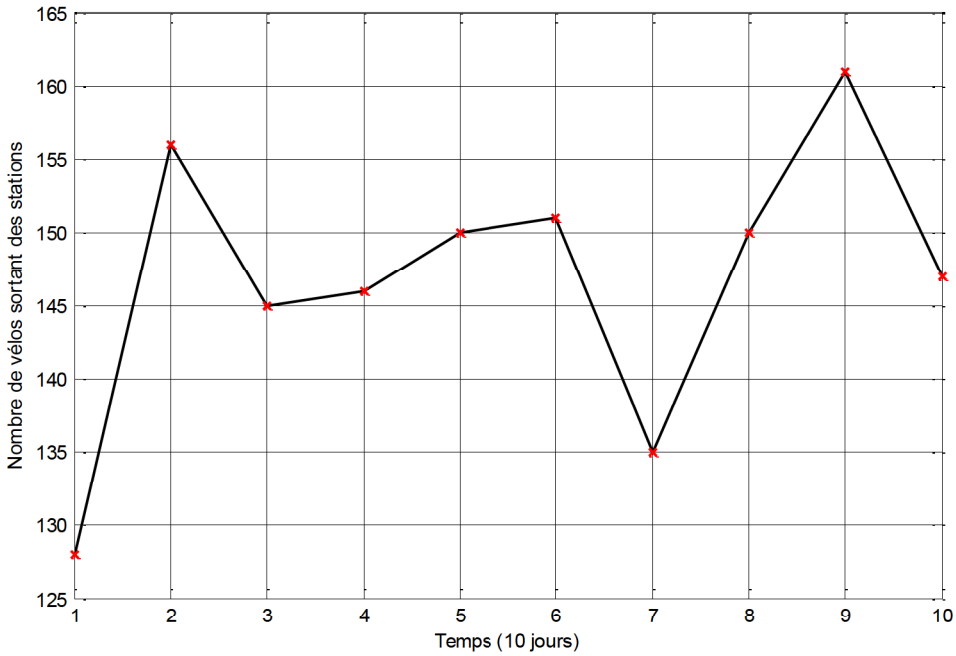


Figure 10. Evolution du nombre de locations de vélos par jour

Nous pouvons également analyser de plus près la politique de rééquilibrage du réseau : combien d'interventions effectuées ? Quelles sont les stations visitées ?... Les mesures et l'analyse à effectuer sur l'évolution des marquages des places et/ou les franchissements des transitions du modèle RdP permettent d'exprimer plusieurs performances du système. Les figures ci-dessous sont quelques illustrations dans ce cadre.

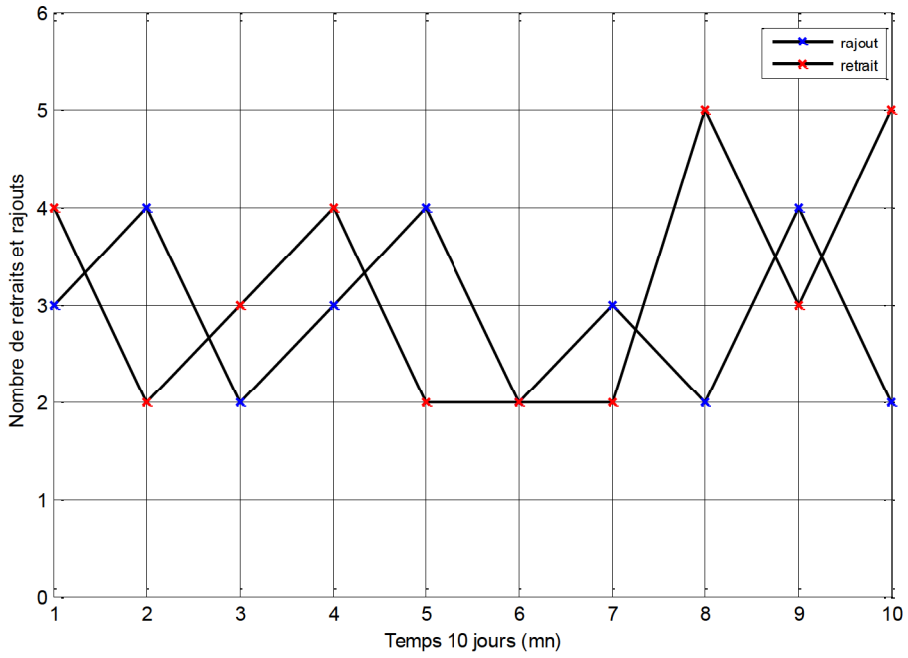


Figure 11. Evolution du nombre d'opérations de retrait et de rajout de vélos lors du rééquilibrage du réseau

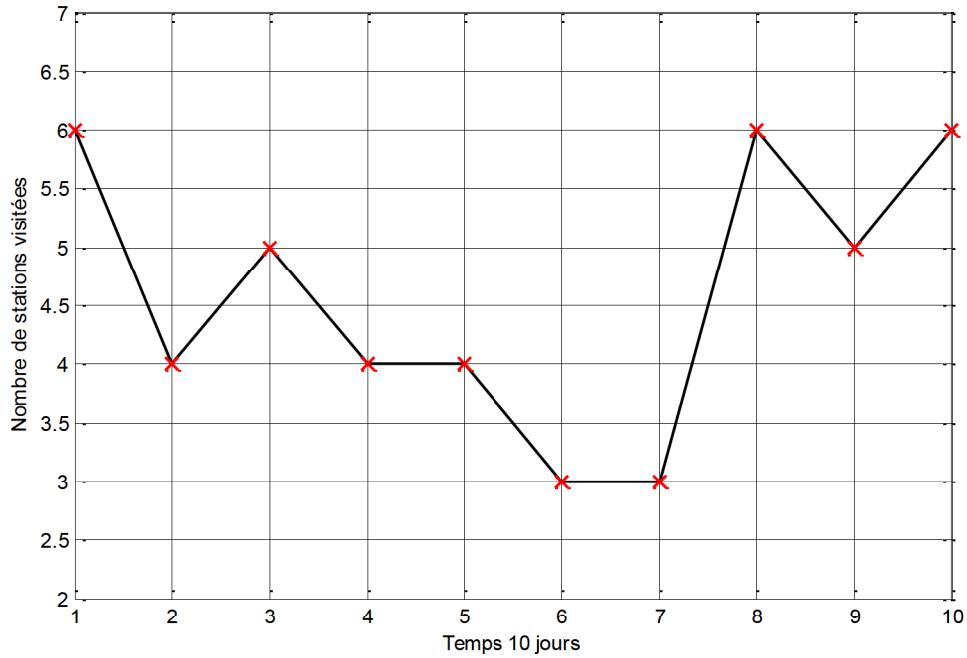


Figure 12. Evolution du nombre de stations visitées pour le rééquilibrage du réseau

Avant de passer à la présentation du cas statique, notons que la performance du système est sensible au choix des paramètres de la politique de contrôle et de rééquilibrage des stations employée. Le nombre d'interventions du camion de régulation dépend forcément des seuils de contrôle et d'alerte fixés au préalable. Ceci est valable non seulement dans le cas du modèle choisi pour cette application mais pour tous les autres modèles développés dans le cadre de cette thèse (chapitre 3). Il est évident que l'augmentation du nombre d'interventions (fréquence de régulation) va permettre une meilleure régulation des stations mais à quel prix ? Le coût de la régulation est proportionnel au nombre d'interventions et/ou de tournées effectuées.

Par ailleurs, trouver les paramétrages optimaux des politiques de gestion associées aux modèles est une question d'optimisation. Ce sujet fait partie des problématiques traitées actuellement dans le cadre d'une autre thèse de doctorat sous la direction conjointe de MM. Labadi (EPMI) et Kacem (Univ. de Lorraine). Contrairement à notre travail, dans le cadre de cette nouvelle thèse, le sujet s'oriente essentiellement vers l'optimisation notamment avec le couplage des modèles RdP (comme outil d'évaluation de performances) avec des algorithmes d'optimisation. Ce travail donne déjà des résultats très encourageants que nous ne présentons pas, bien sûr, dans ce document. Mais, ça mérite d'être souligné afin de montrer la pertinence et la richesse de notre approche.

2.3. Mode statique (sans régulation)

De la même manière que les deux cas analysés précédemment, les modèles développés, y compris celui que nous avons utilisé dans le cadre de cette application, permettent de considérer le cas d'un fonctionnement statique du réseau. Il s'agit d'une configuration pouvant se présenter dans des cas spécifiques où la fréquentation des stations est négligeable (durant la nuit, les jours pluvieux, …). Evidement, la régulation dans ce cas n'est pas nécessaire sauf si le service de régulation applique le rééquilibrage en mode

statique (durant la nuit) en prévision de la journée suivante. Ça peut être pratique notamment pour des réseaux de taille moyenne. La figure 13 est une illustration de cette situation simulée avec une très faible fréquentation du réseau par les usagers contrairement aux valeurs fixées dans le Tableau 4. En termes du réseau de Petri modélisant le système, il s'agit d'augmenter considérablement les délais moyens de franchissements des transitions stochastiques composant le module qui représente le flux des vélos entrant et sortant des différentes stations. Nous pouvons observer sur les graphiques de la Figure 13 la très faible dynamique du système avec seulement une arrivée ou un départ de quelques vélos par nuit.

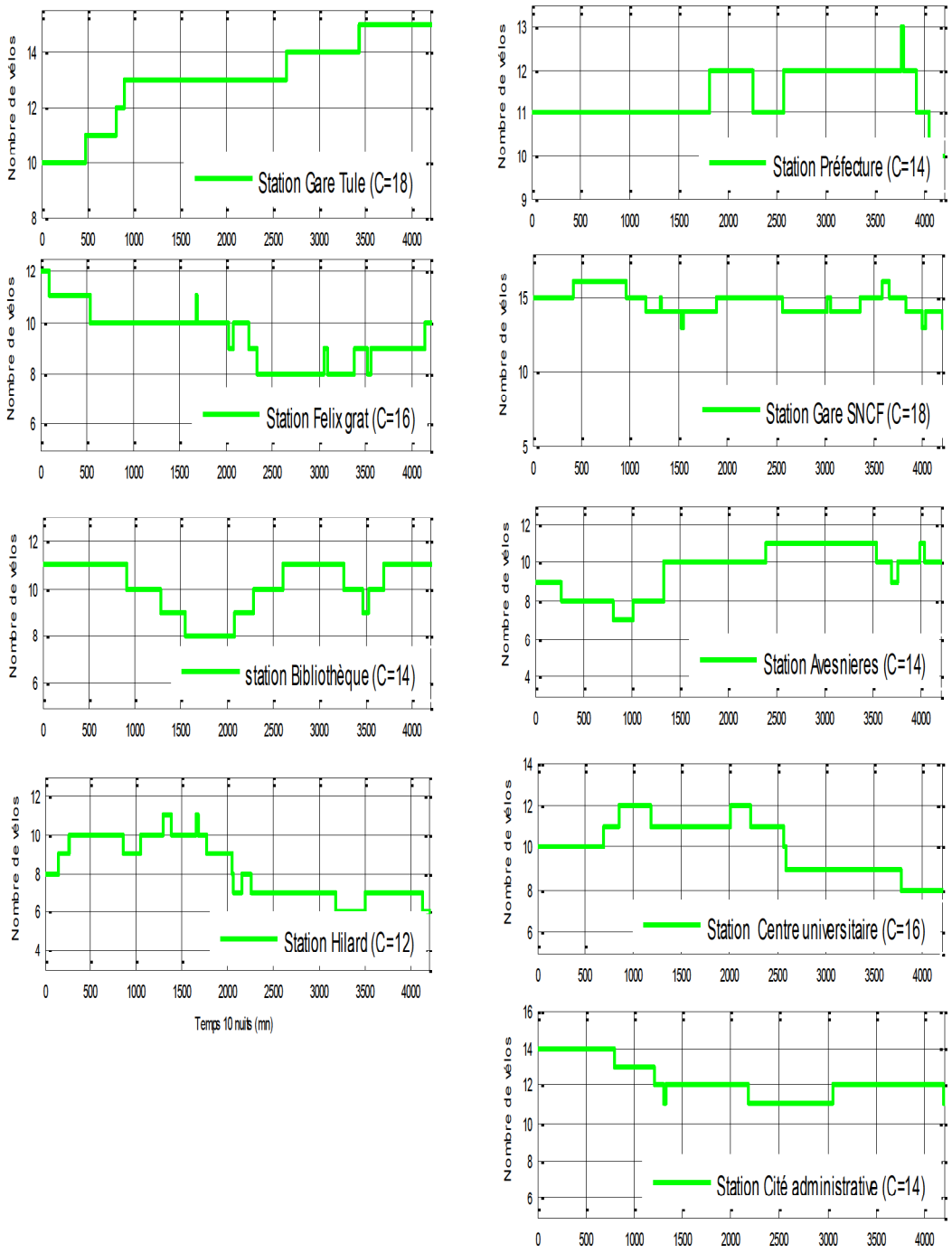


Figure 13. Evolution du flux de vélos dans les stations (cas statique sans régulation).

2.4. Mode dynamique avec régulation partielle

Dans cette partie de notre étude, nous présentons un cas spécifique correspondant à une situation où certaines stations du réseau ne nécessitent pas d'être rééquilibrées par le service de régulation.

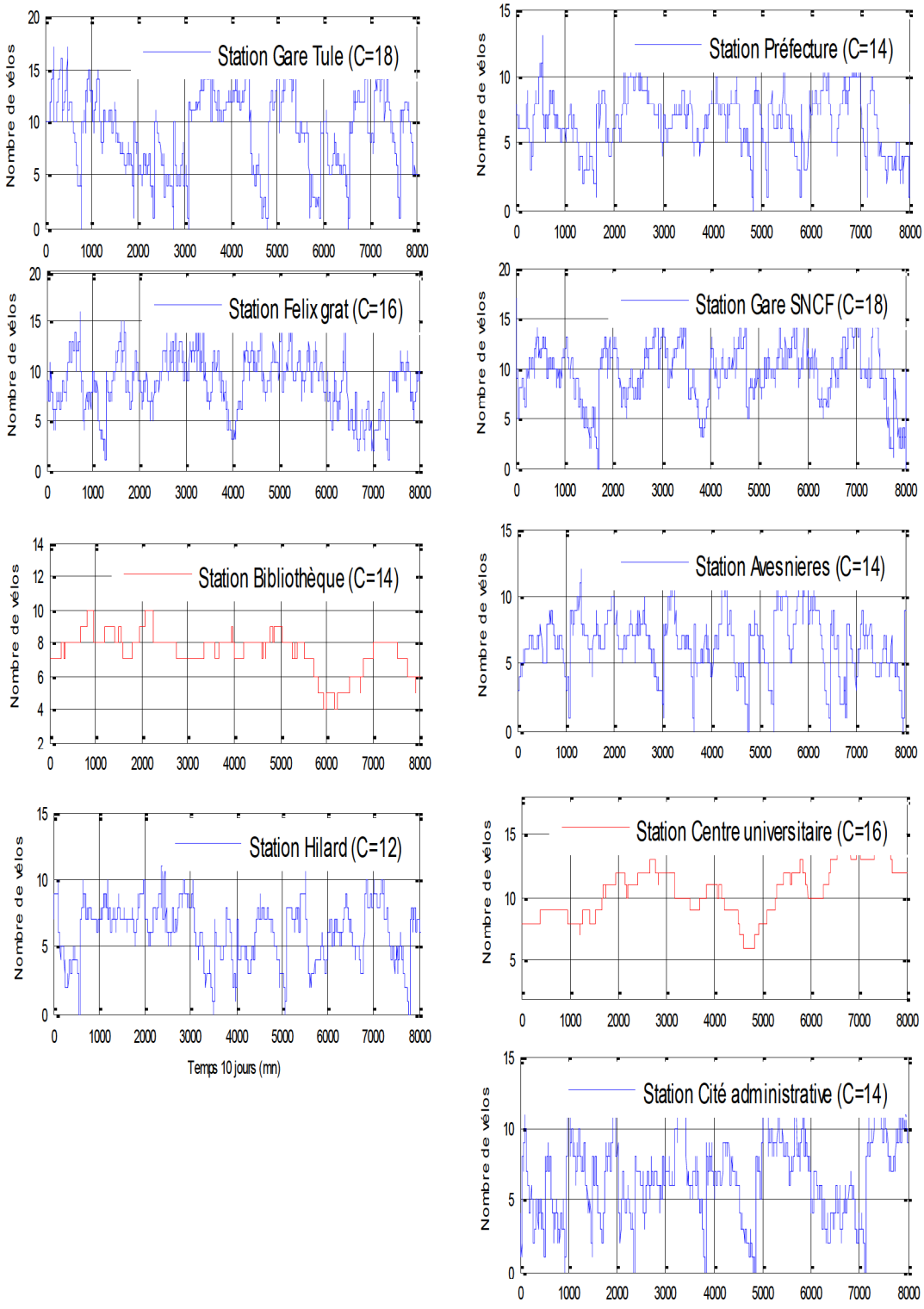


Figure 14. Evolution du flux de vélos dans les stations (cas de régulation partielle).

Ce cas de figure a une signification réelle puisque plusieurs raisons peuvent engendrer une telle situation :

- On peut, par exemple, avoir une partie des stations du réseau ayant un rééquilibrage naturel dû à l'équilibre des flux de vélos entrant et sortant dans ces stations.

- On peut également avoir un certain nombre de stations « statiques », c.a.d avec une très faible fréquentation par les usagers durant certaines périodes de l'année.

Dans notre cas, l'exemple que nous présentons avec la Figure 14 correspond à la période des vacances scolaires durant lesquels deux stations sont très faiblement sollicitées par les usagers vus leurs emplacements géographiques. Il s'agit de la station S5 (Bibliothèque) et la station S8 (Centre universitaire). Il est clair que les principaux usagers de ces deux stations sont des étudiants et comme nous supposons qu'on est en vacances scolaires, les stations en question fonctionnent en mode "statique" avec une dynamique négligeable et sans risque d'avoir des situations critiques.

Du point de vue du paramétrage du modèle RdP pour l'étude de cette configuration, nous gardons les données précédentes correspondant au cas dynamique avec régulation sauf pour les stations S5 et S8 caractérisées par :

- Fréquentation négligeable : (en moyenne 1 vélo/~8h entrant ou sortant durant la journée)

- La fonction de régulation est annulée dans le modèle au niveau des deux stations.

En termes du modèle RdP, les deux stations figurent avec les autres stations dans le module représentant le flux des vélos sortant et entrant dans les deux stations. En revanche, ces deux stations ne présentent aucun lien avec le module de contrôle et de rééquilibrage du réseau contrairement aux autres stations.

Stations	**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**	**S8**	**S9**
Capacités	**18**	**14**	**16**	**18**	**14**	**14**	**12**	**16**	**14**
% Rupture	0.37%	0.10%	0.027%	0.24%	**0%**	0.37%	0.21%	**0%**	0.90%
% Saturation	0%	0%	0.40%	0.11%	**0%**	0%	0.033%	**0%**	0.13%
Stock moyen	9.13	6.83	8.83	9.76	7.50	6.72	6.15	9.83	6.21

Tableau 9. Evaluation des performances (cas dynamique avec régulation partielle)

De la même manière que les configurations présentées précédemment, le Tableau 9, donne quelques mesures de performances de cette configuration pour les paramètres choisis.

Conclusion

Nous avons tenu à finir notre travail par une application réaliste afin de montrer la pertinence et le potentiel de notre approche pour la modélisation, l'analyse et l'évaluation de performances des SVLS, en vue de leur régulation. Nous estimons qu'avec notre persévérance avoir réussi à développer un cas d'application concret malgré nos difficultés initiales à trouver un partenaire pour l'acquisition de données. Ainsi, l'application développée est une démonstration que notre approche basée sur une classe particulière de réseaux de Petri stochastiques peut être d'une aide précieuse pour l'exploitation et la régulation des SVLS à l'échelle réelle. Au même temps, cette application permettrait aux lecteurs de mieux saisir les modèles formellement présentés dans le chapitre 3.

Par ailleurs, il y a très peu d'applications réelles dans la littérature dans ce domaine. Les systèmes de vélos en libre service, sont très récents dans le paysage de la recherche scientifique. Très souvent, les auteurs ont développé des exemples académiques ou ont fait appel à des jeux d'instances afin de tester leurs modèles proposés. Ce dernier cas, concerne particulièrement des modèles d'optimisation mathématiques. La difficulté de se procurer des données réelles, ne doit pas être interprétée par le manque d'intérêt des concepteurs et des exploitants aux outils et méthodes scientifiques. Au contraire, il y a un besoin imminent pour le développement d'outils et de méthodes pouvant les aider pour une meilleure conception et un management opérationnel plus efficace de ce nouveau mode de transport public.

A l'heure actuelle et malgré l'introduction d'équipements informatiques et de nouvelles technologies d'informations dans les nouvelles générations de SVLS, la régulation ou le rééquilibrage des stations est souvent réalisé sur la base du bon sens, de la connaissance du réseau et de l'état instantané des stations au moment de la tournée. Sans se doter d'outils d'évaluation de performances et/ou de prédiction, ceci ne conduit pas forcément à un bon niveau de service en particulier dans le cas des réseaux de grande taille dont l'organisation et la gestion s'avèrent souvent complexes.

Conclusion Générale

Une synthèse des travaux

Les transports urbains ont toujours été un domaine d'innovation et de développement permanents. Au cours de ces dernières années, les enjeux du développement durable et de l'aménagement du territoire ont conduit les sociétés actuelles à une réelle prise de conscience des questions environnementales ainsi qu'à des révolutions dans le domaine des transports urbains avec notamment l'introduction des systèmes de vélos en libre service. De nombreuses villes en Europe ont suscité un intérêt considérable et un engouement à l'égard de ce nouveau mode de transport écologique (Vélib' à Paris, Vélov'v à Lyon, Bicing à Barcelone, ...) et dont les progrès technologiques ne cessent de les faire émerger dans les quatre coins du monde. Contrairement aux systèmes de transport traditionnels, très peu d'études fondamentales ont été menées et pourtant, de nombreuses questions émergent, la principale étant celle d'un rééquilibrage efficace (régulation) de la distribution de vélos dans les différentes stations afin de satisfaire au mieux la demande des usagers. C'est dans ce cadre que cette thèse de doctorat s'est inscrite. Elle a porté sur la modélisation, l'analyse et l'évaluation de performances de ce nouveau mode de transport en libre service. Ce travail, basé sur les réseaux de Petri, est d'une aide précieuse pour la mise en œuvre, l'exploitation et la régulation de ce type de systèmes.

La complexité dynamique de tels systèmes, perçus comme des systèmes à événements discrets, nous a conduit au développement d'une approche à base d'une classe particulière de réseaux de Petri stochastiques ayant des arcs à poids variables pertinents aussi bien pour l'analyse que pour la simulation. Un ensemble de modèles et de méthodes d'analyse associées sont développés en vue de leur régulation, en prenant en compte différents paramètres de décision qui les caractérisent notamment le nombre de stations, la capacité de chaque station, les seuils de régulation, la capacité des véhicules de régulation, le type et/ou la fréquence de régulation choisie (périodique ou continue), …. En plus d'être paramétrables, les modèles proposés permettent d'étudier plusieurs configurations en fonction de différents modes de fonctionnement possibles (mode sans régulation, mode avec régulation, mode dynamique, mode statique, etc). La présentation de cette thèse a comporté plusieurs illustrations et une application permettant d'aider le lecteur à la compréhension du travail développé. A notre connaissance, il s'agit d'un premier travail du genre dans la littérature sur les réseaux de Petri et plus généralement, l'un des premiers sur les systèmes de vélos en libre-service.

Ce mémoire de thèse a été structuré en cinq chapitres dont nous rappelons ci-dessous et brièvement les principaux objectifs :

- Après une introduction générale, le premier chapitre a été dédié à l'étude des systèmes de vélos en libre service. Dans un premier temps, une présentation générale de ce nouveau mode de transport urbain a été effectuée. Par la suite, en s'attachant plus particulièrement au problème régulation des stations, un état de l'art a été développé.

- Dans le deuxième chapitre, nous avons introduit une classe particulière de réseaux de Petri stochastiques ayant des arcs à poids variables en vue de la modélisation, de l'analyse et de la régulation des systèmes de vélos en libre service. Le concept des arcs à poids variables a été inspiré du modèle BDSPN (LAB 2005, CHE 2005, LAB 2007).

- Le troisième chapitre a été consacré à la modélisation des systèmes de vélos en libre-service en vue de leur régulation. Un ensemble de modèles paramétrables et configurables ont été développés prenant en compte différents paramètres tels que le nombre de stations, la capacité de chaque station, les seuils de régulation, la capacité des camions de régulation, régulation périodique ou continue, …).

- Dans le quatrième chapitre, nous nous sommes particulièrement intéressés à l'analyse et à l'évaluation de performances. Connaissant la grande complexité des systèmes en question, l'analyse et l'évaluation de performances via des méthodes numériques (analytiques) ou via la simulation à événements discrets s'avèrent incontournable. Un outil de simulation adapté a été développé à cet effet.

- Le cinquième chapitre de ce mémoire a porté sur une application réelle afin de montrer la pertinence et le potentiel du travail développé. En s'appuyant sur un des modèles présentés, nous avons illustré comment peut-on utiliser nos modèles sur un cas réel et montré ainsi la richesse de l'analyse qu'il permet sur la performance et le comportement du système à étudier.

En termes de la production scientifique, ce travail, qui est d'une aide précieuse pour la mise en œuvre, l'exploitation et la régulation des systèmes de vélos en libre service, a fait l'objet de plusieurs publications scientifiques à savoir : 2 articles de revues internationales (dont 1 en cours de révision), 1 chapitre de livre (sur invitation), 4 articles de conférences internationales, 1 article de conférence nationale et 1 communication (sans actes) dans le cadre de la Semaine de la Recherche et de l'Innovation en Val d'Oise (SRI 2012).

Perspectives de travail

- Tout d'abord, nous commençons par présenter des perspectives qui sont directement liées au travail effectué dans le cadre de cette thèse.

Une thèse de doctorat n'est jamais parfaite. Au contraire, une bonne thèse doit être une source de nouvelles pistes de travail et/ou de nouvelles problématiques à traiter. Dans notre cas, un certain nombre de perspectives sont déjà inscrites dans le cadre d'une deuxième thèse lancée sur la même thématique depuis septembre 2013 par M. Labadi (EPMI-ECS Lab) en collaboration avec M. Kacem, professeur à l'Université de Lorraine (Metz). Une partie de cette nouvelle thèse constitue une suite du travail que nous avons

développé avec une forte orientation vers l'optimisation de ces systèmes. En effet, il s'avère que le couplage des modèles développés dans notre mémoire avec des techniques d'optimisation tels que les algorithmes génétiques ou autres va permettre d'optimiser les systèmes modélisés notamment pour le paramétrage des politiques de régulation utilisées (fréquences de régulation, seuils de contrôle, niveaux de re-complètement, choix de tournées de véhicules, nombre de véhicules de régulation, …). Autrement dit, la performance d'un système de vélos en libre service est intiment liée au dimensionnement du système avant et même après son déploiement (taille des stations, seuils de régulation, capacité de la flotte de véhicules, …). Dans le cadre du problème de rééquilibrage des stations et en termes des différents modèles développés, avoir une régulation optimale des stations revient à dimensionner le système de façon à éviter au maximum les marquages des stations S_i aux deux niveaux extrêmes : $M(PS_i) = C_i$ et $M(PS_i) = 0$. Le premier niveau correspond à la saturation des stations et le deuxième niveau correspond à des stations vides. Sans doute, ces deux niveaux sont des situations inconfortables voir désagréables pour les usagers.

Dans la partie qui repose sur les travaux présentés dans ce mémoire, cette deuxième thèse donne déjà des résultats très intéressants (KAD 2013) portant sur les points suivants :

- Amélioration de notre outil de simulation notamment en développant une interface graphique et en intégrant également un générateur automatique de modèles. En effet, il n'est plus nécessaire de construire le modèle RdP puisque ce dernier se construit automatiquement à base uniquement des données renseignées sur le système à étudier (nombre de stations, capacité des stations, …). Ceci évite de saisir le modèle RdP sous sa forme matricielle … L'énorme taille des matrices et vecteurs associés aux modèles rend cette tâche quasiment impossible à faire sans ce générateur intégré dans l'outil de simulation.

- Développement d'une approche d'optimisation via la simulation (KAD 2013). En particulier un algorithme génétique adapté a été développé et couplé au modèle RdP permettant l'optimisation de la politique de contrôle et de régulation du système modélisé. Cette partie a été intégrée dans notre outil de simulation comme une nouvelle fonction permettant à l'utilisateur de paramétrer aisément l'algorithme génétique (choix du critère de performance, taille de la population, paramétrage des opérateurs génétiques, etc.).

- Une nouvelle application réelle a été développée. Elle a porté sur Cristolib, un réseau de vélos en libre service de Créteil (France). Cette nouvelle application concrète a montré la pertinence de l'approche de simulation optimisation développée dans le cadre de cette deuxième thèse en cours. Bien évidemment, elle montre, au même temps, la pertinence et la richesse des modèles développés dans ce mémoire. D'autres problématiques et techniques d'optimisation notamment en faisant appel aux techniques de recherche opérationnelle sont à l'étude.

>> Bien sûr, tous ces points ne sont pas traités dans le cadre de ce mémoire. Ils sont juste abordés dans le cadre de cette conclusion comme un ensemble de perspectives issues de notre travail et qui ont déjà trouvé des réponses dans le cadre d'une nouvelle thèse en cours de réalisation.

Par ailleurs, une autre perspective de travail qui mérite d'être soulignée dans la fin de ce mémoire consiste à étendre notre approche basée les réseaux de Petri ayant des arcs à poids variables sur d'autres types de systèmes à événements discrets pour des fins de contrôle, de commande et de régulation. Nous sommes persuadés que la pertinence de cette approche peut être efficace pour de nombreux systèmes.

- Enfin, je passe maintenant à présenter quelques perspectives que je compte bien explorer, à moyen terme, dans le cadre de mes activités d'enseignant-chercheur à l'Université d'Oran.

- Exploiter mes compétences et connaissances acquises pour la régulation des systèmes de vélos en libre service afin de développer des méthodes adaptées pour le cas des systèmes de voitures en libre service. Ce concept commence à voir le jour dans quelques grandes villes comme Paris. Malgré les similitudes avec les SVLS, de nouvelles contraintes encore plus complexes sont à prendre en compte dans le fonctionnement et la gestion de tels systèmes :

  - Contrainte liée à l'autonomie de la voiture électrique qui contraint l'usager dans ses déplacements,
  - La régulation ne se fait plus en lot mais voiture par voiture (ou quelques-unes seulement en utilisant un camion avec remorque).
  - Une voiture nécessite plus d'entretien puisque, contrairement au vélo, les pannes et les disfonctionnements doivent être relativement plus fréquents. Etc.

- Réfléchir sur la possibilité de mettre en œuvre un système de vélos en libre service adapté pour les grands campus universitaires, regroupant un ensemble de facultés, cités U, cantines, complexes sportifs, etc. Je pense plus particulièrement à la ville d'Oran (Algérie) où j'exerce mes fonctions d'enseignant chercheur. A ma connaissance, les systèmes de vélos en libre service n'existent pas encore au Maghreb. Connaissant les problèmes liés au transport universitaire, un tel projet peut-être convainquant pour les pouvoirs publics.

Annexe (chapitre 5)

Codage matriciel du module RdP du réseau VELITUL

// Nombre de places : 38

// Nombre de transitions : 81

// La Matrice PRE d'incidence Avant

	Transitions T_{ip}	Transitions T_{imax} et T_{imin}	Transitions TP_i et TE_i	Transitions TR_i	Transitions TS_i	Transitions TV_i
P1	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 16 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	3 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	-10 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P2	0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 12 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 3 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 -8 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P3	0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 14 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 3 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 -10 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P4	0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 16 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 3 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 -10 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P5	0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 12 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 3 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 -8 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P6	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 12 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 3 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 -8 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P7	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 10 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 3 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 -7 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P8	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 14 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 3 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 -10 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P9	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 12 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 3 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 -8	0 0 0 0 0 0 0 0 0
PV	0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AP1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AP2	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AP3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AP4	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AP5	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 1 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AP6	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 1 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AP7	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AP8	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AP9	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AE1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AE2	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AE3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AE4	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AE5	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 1 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AE6	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 1 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AE7	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AE8	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AE9	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 0 0 0 0
RV1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0 0 0
RV2	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0 0 0
RV3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0 0 0 0
RV4	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 1 0 0 0 0 0
RV5	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 1 0 0 0 0
RV6	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 1 0 0 0
RV7	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
RV8	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
RV9	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
VD	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	1 1 1 1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1 1 1 1	0 0 0 0 0 0 0 0 0

// La Matrice POST d'incidence Arrière

	Transitions T_{ip}	Transitions T_{imax} et T_{imin}	Transitions TP_i et TE_i	Transitions TR_i	Transitions TS_i	Transitions TV_i
P1	0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 16 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	3 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	10 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P2	0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 12 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 3 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 8 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P3	0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 14 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 3 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 10 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P4	0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 16 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 3 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 10 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P5	0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 12 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 3 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 8 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P6	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 12 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 3 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 8 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P7	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 10 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 3 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 7 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P8	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 14 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 3 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 10 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P9	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 12 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 3 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 8	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
PV	1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AP1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AP2	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AP3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AP4	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AP5	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AP6	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AP7	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AP8	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AP9	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AE1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AE2	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AE3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AE4	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AE5	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AE6	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AE7	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AE8	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
AE9	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
RV1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
RV2	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
RV3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
RV4	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
RV5	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
RV6	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
RV7	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
RV8	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
RV9	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
VD	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0

// La Matrice INB des Arcs Inhibiteurs

	Transitions T_{ip}	Transitions T_{imax} et T_{imin}	Transitions TP_i et TE_i	Transitions TR_i	Transitions TS_i	Transitions TV_i
P1	0 18 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	16 16 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P2	0 0 0 14 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 12 12 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P3	0 0 0 0 0 0 16 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 14 14 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P4	0 0 0 0 0 0 0 18 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 16 16 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P5	0 0 0 0 0 0 0 0 14 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 12 12 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P6	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 14 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 12 12 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P7	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 12 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 10 10 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P8	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 16 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 14 14 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
P9	0 0 0 0 0 0 0

// La Matrice IV_PRE indiquant les Arcs PRE variables (1 arc variable, 0 arc non variable)

	Transitions T_{ip}	Transitions T_{imax} et T_{imin}	Transitions TP_i et TE_i	Transitions TR_i	Transitions TS_i	Transitions TV_i
P1	0 0 0

// Les coefficients Arcs PRE Variables en fonction du Marquage

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	PV	AP1	AP2	AP3	AP4	AP5	AP6	AP7	AP8	AP9	AE1	AE2	AE3	AE4	AE5	AE6	AE7	AE8	AE9	RV1	RV2	RV3	RV4	RV5	RV6	RV7	RV8	RV9	VD
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

// Les coefficients Arcs POST Variables en fonction du Marquage

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	PV	AP1	AP2	AP3	AP4	AP5	AP6	AP7	AP8	AP9	AE1	AE2	AE3	AE4	AE5	AE6	AE7	AE8	AE9	RV1	RV2	RV3	RV4	RV5	RV6	RV7	RV8	RV9	VD
-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

// Types, Temporisations, Politiques et Prioritésdes Transitions (Module de la dynamique des vélos inter- stations)

TS_{1p}	TS_{p1}	TS_{2p}	TS_{p2}	TS_{3p}	TS_{p3}	$TS4_{p}$	TS_{p4}	TS_{5p}	TS_{p5}	TS_{6p}	TS_{p6}	TS_{7p}	TS_{p7}	TS_{8p}	TS_{p8}	TS_{9p}	TS_{p9}
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
10	15	55	60	35	30	30	31	50	55	60	65	65	70	35	30	10	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

// Types, Temporisations, Politiques et Priorités des Transitions (Module de détection et d'alerte)

TS_{1min}	TS_{1max}	TS_{2min}	TS_{2max}	TS_{3min}	TS_{3max}	TS_{4min}	TS_{4max}	TS_{5min}	TS_{5max}	TS_{5min}	TS_{6max}	TS_{7min}	TS_{7max}	TS_{8min}	TS_{8max}	TS_{9min}	TS_{9max}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	2	2	2		2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

// Types, Temporisations, Politiques, Priorités/ des Transitions-Module d'alerte (Réinitialisation)

TE_1	TP_1	TE_2	TP_2	TE_3	TP_3	TE_4	TP_4	TE_5	TP_5	TE_6	TP_6	TE_7	TP_7	TE_8	TP_8	TE_9	TP_9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	2	2	2		2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

// Types, Temporisations, Politiques et priorités des Transitions (Module de régulation)

TR_1	TR_2	TR_3	TR_4	TR_5	TR_6	TR_6	TR_7	TR_8	TS_1	TS_2	TS_3	TS_4	TS_5	TS_6	TS_7	TS_8	TS_9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	20	25	28	26	22	20	22	30	19	21	24	29	27	21	19	33	31
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0

// Types, Temporisations, Politiques, Priorités des Transitions (Module de régulation, retour de camion)

TV_1	TV_2	TV_3	TV_4	TV_5	TV_6	TV_7	TV_8	TV_9
1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	8	12	14	13	12	9	20	19
1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

// Marquage Initial des place de RDP

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	PV	AP1	AP2	AP3	AP4	AP5	AP6	AP7	AP8	AP9	AE1	AE2	AE3	AE4	AE5	AE6	AE7	AE8	AE9	RV1	RV2	RV3	RV4	RV5	RV6	RV7	RV8	RV9	VD
10	8	7	17	7	3	7	10	4	27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Bibliographie

Réseaux de Petri

(AJM 1986) Ajmone Marsan M and Chiola G., "On Petri Nets with Deterministic and Exponential Transition Firing times", in: 7th European Workshop on application and theory of Petri Nets, Oxford, june 1986.

(AJM 1989) Ajmone Marsan M., Balbo G., Bobbio A., Chiola G., Conte G., and Cumani A., "The effects of the execution policies on the semantics and analysis of stochastic Petri nets", IEEE Transactions on Software Engineering, 15(7), pp. 832-845, 1989.

(AJM 1995) Ajmone Marsan M., Balbo G., Conte G., Donatelli, S., and Franceschinis G., « Modelling with Generalized Stochastic Petri Nets » John Wiley and Sons, 1995.

(ALJ 1990) Al Jaar Y. and Desrochers A., "Performance evaluation of automated manufacturing systems using generalized stochastic Petri nets", IEEE Transactions on Robotics and Automation, 6(6), 1990.

(AMO 2001) Amodeo L., El Moudni A., and Zerhouni S., "Modélisation et simplification d'un atelier de production d'Ailettes" Journal Europeen des Systèmes Automatisés (APII-JESA), 35(5), pp. 577-600, 2001.

(BAN 2001) Banks J., Carson J. S., Nelson B. L., and Nicol D. M., "Discrete-Event System Simulation", Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.

(BIL 1999) J. Billington, M. Diaz, G. Rozenberg (Eds.), "Application of Petri Nets to Communication Networks", Lecture Notes in Computer Science, vol. 1605, Springer-Verlag, 1999.

(CAB 2013) Cabasino, M.P. ; Giua, A. ; Seatzu, C. "Diagnosis Using Labeled Petri Nets With Silent or Undistinguishable Fault Events", IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, Volume:43, Issue: 2, pp. 345-355, 2013.

(CAS 2010) Christos G. Cassandras, Stephane Lafortune, « Introduction to Discrete Event Systems », 776 pages, Springer, 2010.

(CHE 2005) Chen H., Amodeo L., Chu F., and Labadi K., « Performance Evaluation and Optimization of Supply Chains modelled by Batch Deterministic and Stochastic Petri », IEEE transactions on Automation Science and Engineering, pp. 132-144, 2005.

(CHE 2006) Chen H., Labadi K., and Amodeo L., « Modelling, Performance Evaluation, and Optimization of Logistics Systems: Petri nets approaches », 3rd IEEE International Conference on Service Systems and Service Management, IEEE-SSSM 2006, UTT, Troyes, France, October 25-27, 2006.

(CHI 1993) Chiola G., Ajmone Marsan M., Balbo G., and Conte G., "Generalized Stochastic Petri Net Models: A Definition on the net Level and its Implications, IEEE Transactions Software Engineering, 19, pp 89-107., 1993.

(CHO 1993) Choi H., "Performance and reliability modelling using Markov regenerative stochastic Petri nets", Phd thesis, Graduate school of Duke University, 1993.

(CIA 1993) Ciardo G., and Lindemann C., "Analysis of deterministic and stochastic Petri nets". In Proc. 5th International Workshop on Petri Nets and Performance Models (PNPM'93), Toulouse, France, IEEE Comp. Soc. Press., pp. 160-169, Oct. 1993.

(CIA 1994) Ciardo G., German R., and Lindemann C., "A characterization of the stochastic process underlying a stochastic Petri net. IEEE Trans. Soft. Eng., 20(7), pp. 506-515, July

1994.

(DAV 1992) David R. and Alla H., "Du Grafcet aux réseaux de Petri", Editions Hermès, Paris 1992.

(DEM 2009) Demongodin I. "Modelling and Analysis of Transportation Networks using Batches Petri Nets with controllable Batch Speed", in Proc. 30th Int. Conf. Applications and Theory of Petri Nets, Giuliana Franceschinis, Karsten Wolf, Ed. Paris, France, 2009.

(DIA 2001) Diaz M., "Les réseaux de Petri : Modèles fondamentaux", Editions Hermès, Paris, 2001.

(DIF 1998) Angela Di Febbraro and Simona Sacone, ''Hybrid Modelling of transportation Systems by means Petri Nets''. In the proceedings of the 37th IEEE International Conference on Decision and Control, Tampa, FL, Vol. 3, pp. 3232-3237. 18-20. December 1998.

(EHR 2003) H. Ehrig, W. Reisig, G. Rozenberg, H. Weber (Eds.) "Petri Net Technology for Communication-Based Systems", Lecture Notes in Computer Science, vol. 2472, Springer-Verlag, 2003.

(FUR 2001) Furcas R, Giua A, Piccaluga A, and Seatzu C., "Hybrid Petri net modeling of inventory management systems", APII-JESA, 35, pp. 417-434, 2001.

(GON 2007) Gonca Tuncel, G. Mirac Bayhan "Applications of Petri nets in production scheduling: a review", The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, October 2007, Volume 34, Issue 7-8, pp 762-773

(GRA 1992) Granda M., Drake J. et Gregorio J., "Performance evaluation of parallel systems by using unbounded generalized stochastic Petri nets", IEEE Transaction on Software Engineering, 18(1). 1992.

(HAA 2002) Haas P. J., "Stochastic Petri Nets: Modeling, Stability, Simulation", Springer-Verlag, New York, 2002.

(HAT 1991) Hatono I., Yamagata K. and Amura H., "Modeling and on-line scheduling of flexible manufacturing systems using stochastic petri nets", IEEE Transactions on Sofware Engineering, 17(2), 1991.

(JUA 1994) Juanolle G. et Atamna Y., « Le réseau de terrain FIP et sa Modélisation avec les réseaux de Petri temporisés stochastiques », RAIRO APII, 28(5), 573-583. 1994.

(JUA 1997) Juanole G., "Réseaux de Petri Stochastiques", 2ème Ecole d'Informatique des Systèmes Parallèles et Répartis, Toulouse, 1997.

(LAB 2005) Labadi Karim « Contribution à la modélisation et à l'analyse de performances des systèmes logistiques à l'aide d'un nouveau modèle de réseaux de Petri stochastiques », Thèse de Doctorat UTT, 215 pages, Troyes, France, Novembre 2005.

(LAB 2005) Labadi K., Chen H., Amodeo L., « Application des BDSPNs à la Modélisation et à l'Evaluation de Performance des Chaînes Logistiques », JESA - Journal Européen des Systèmes Automatisés, Vol. 39, No. 7, pp. 863-886, 2005.

(LAB 2006) Labadi K., Amodeo L., Chen H., « Batch Deterministic and Stochastic Petri Nets Approach for Modelling and Performance Evaluation of Inventory Systems: Application to (s, S) Inventory System », 3rd IEEE International Conference on Service Systems and Service Management, IEEE-SSSM 2006, UTT, Troyes, France, October 25-27, 2006.

(LAB 2007) Labadi, K., Chen, H., Amodeo, L., « Modelling and Performance Evaluation of Inventory Systems Using Batch Deterministic and Stochastic Petri Nets », IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part C: Applications and reviews, Vol.

37, N° 6, pp. 132 – 144, November 2007.

(LAB 2009) Labadi K., Saggadi S., Amodeo L., "PSA-SPN" – "A Parameter Sensitivity Analysis Method Using Stochastic Petri Nets: Application to a Production Line System", AIP Conference Proceedings, 1107, 263 (2009), 2nd Mediterranean Conference on Intelligent Systems and Automation (CISA), Zarzis, Tunisie, 2009.

(LAB 2010) Labadi K., Chen H., "Modelling, analysis, and optimization of supply chain networks by using Petri nets models: a state-of-the art literature review", International Journal of Business Performance and Supply Chain Modeling, 2010 - Vol. 2, No.3/4, pp. 188-215.

(LIN 1996) Lindemann C., Shedler G. S., "Numerical Analysis of Deterministic and Stochastic Petri Nets with Concurrent Deterministic Transitions", Performance Evaluation, 27, pp. 565-582, 1996.

(LIN 1998) Lindemann C., "Performance Modelling with Deterministic and Stochastic Petri Nets", John Wiley and Sons, 1998.

(LIS 2004) List, G.F.; Cetin, M.; (2004) "Modeling traffic signal control using Petri nets", IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, Vol. 5, No. 3, pp. 177–187.

(MUR 1989) Murata T., "Petri nets: Properties, analysis and applications", Proceedings of the IEEE, 77(4), pp. 541-580, 1989.

(NG 2013) Ng, K.M. ; Reaz, M.B.I. ; Ali, M.A.M., "Review on the Applications of Petri Nets in Modeling, Analysis, and Control of Urban Traffic" Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on Volume: 14 ,, 2013 , Page(s): 858 – 870, 2013.

(OLS 1998) G. –J. Olsder, ''Cours Notes: Max algebra approach to discrete event systems'', 26ème école de printemps d'informatique théorique, INRIA Editeur, pp. 149-176, 1998.

(OLS 1998) G-J Olsder, Subiono and M. M. Gettrick, ''On large scale max-plus algebra model in raillway systems''. 26ème école de printemps d'informatique, Algèbre Max-Plus et applications en informatique, pp. 177-192, Ile de Noirmoutier, Vendée, France, 4-7 Mai 1998.

(PRO 1995) Proth J.M. et Xie X., Les RdP pour la conception et la gestion des systèmes de production, Edition Masson, 1995.

(SAU 1996) Sauer N., "Optimization of cyclic manufacturing systems with stochastic manufacturing times using event graphs", International Journal of Production Economics, vol. 46-47, pp. 387-399, 1996.

(SIL 1989) Silva M., Valette R., "Petri nets and flexible manufacturing", Advances in Petri Nets, Lecture notes in Computer science, 424, pp. 374-417, 1989.

(SIL 1997) Silva M., Teruel E., "Petri nets for the design and operation of manufacturing systems". European Journal of Control, 3(3): 182-199, 1997

(VIS 1995) Viswanadham N., Pattipati K. et Gopalakrishna V., "Performability studies of automated manufacturing systems with multiple part types", IEEE Transactions on Robotics and Automation, 11(5), 1995.

(WAN 1999) Jiacun Wang, Chun Jin and Yi Deng, ''Performance Analysis of Traffic Network Based on Stochastic timed Petri Net Models''. pp 77-85 IEEE, 1999.

(ZHO 1995) Zhou Mengchu, "Petri nets in flexible and agile automation", Kluwer Academic Publishers, 1995

(ZHO 1999) Zhou Mengchu and Kurapati Venkatesh., "Modeling, Simulation, and Control of Flexible Manufacturing Systems: A Petri Net Approach", Vol 6 of Series in Intelligent Control and Intelligent Automation. World Scientific, 1999

(ZIM 1999) Zimmermann, A.; Hommel, G.: "Modelling and evaluation of manufacturing systems using dedicated Petri nets", International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 15, pp. 132-137, 1999.

(ZIM 1999) Zimmermann, A.; Hommel, G.: "Modelling and evaluation of manufacturing systems using dedicated Petri nets", International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 15, pp. 132-137, 1999.

(ZIM 2001) Zimmermann, A., Freiheit, J., Huck, A., "A Petri net based design engine for manufacturing systems", International Journal of Production Research, 39(2), pp. 225-253, 2001.

(ZUR 1994) Zurawski R., and Zhou Mengchu., "Petri Nets and Industrial Applications: A tutorial" IEEE Transactions on Industrial Electronics, 41(6), pp. 567-583, December 1994.

Vélos en libre-service

(BEN 2011) Benchimol, M., Benchimol, P., Chappert, B., Taille, A.D.L., Laroche, F., Meunier, F., Robinet, L., 2011, "Balancing the stations of a self-service ''Bike Hire'' system. RAIRO Operations Research 45, 37–61.

(BER 2012) Berloco N., Colonna P., "Testing and Improving Urban Bicycle Performance, SIIV" - 5th International Congress - Sustainability of Road Infrastructures", Procedia - Social and Behavioral Sciences 53 (2012) 72–83.

(BOR 2009)(a) Borgnat, P., Fleury, E., Robardet, C., Scherrer, A., 2009b, "Spatial analysis of dynamic movements of VloV, Lyon's shared bicycle program", European Conference on Complex Systems. Warwick University, Coventry, UK.

(BOR 2009)(b) Borgnat, P., Robardet, C., Rouquier, J.-B., Fleury, E., Abry, P., Flandrin, P. "Shared bicycles in a city: a signal processing and data analysis perspective", Advances in Complex Systems, 14(3), 1-24 (2011).

(BOR 2012) Bordagaray, M., Ibeas, A., dell'Olio, L., "Modeling user perception of public bicycle services", EWGT 2012, 15th meeting of the EURO Working Group on Transportation, Procedia - Social and Behavioral Sciences 54 (2012) 1308–1316.

(CHE 2011) Chemla, D., Meunier, F. & Wolfler Calvo, R. (2011), "Balancing a bike-sharing system with multiple vehicles", 12e congrès annuel de la ROADEF, Saint-Etienne, France, 2 au 4 Mars 2011.

(CHE 2011) Chemla, D., Meunier, F., Wolfler-Calvo, R., "Balancing the stations of a self-service bike scharing system", Working paper, 2011.

(CHE 2012) Chemla, D., Meuniera, F., Wolfler Calvo, R., "Bike sharing systems: Solving the static rebalancing problem", Discrete Optimization (2012, in press).

(CON 2012) Contardo, C., Morency, C., & Rousseau, L. (2012), "Balancing a Dynamic Public Bike-Sharing System", Centre Interuniversitaire de Recherche sur les Réseaux d'entreprise, la Logistique et le Transport. https:// www.cirrelt.ca/ DocumentsTravail/ CIRRELT-2012-09.pdf. Accessed Mar. 20, 2012.

(DEL 2011) dell'Olio, L., Ibeas, A., & Moura, J. L. (2011). "Implementing bike-sharing systems", Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Municipal Engineer, 164(2), 89-101.

(DEM 2009) DeMaio, P. "Bicycle-sharing: History, Impacts, Model of Provision, and Future", Journal of Public Transportation, 2009, Vol. 12, No.4, pp. 41- 56.

(FIS 2012) Fishman, E., Washington, S., Haworth, N. "Barriers and facilitators to public bicycle scheme use: Aqualitative approach", Transportation Research Part F 15 (2012) 686–698.

(FOR 2010) Forma, I., Raviv, T. & Tzur, M., (2010), "The Static Repositioning Problem in a Bike-Sharing System", Proc. of TRISTAN VII, seventh Triennial Symposium on Transportation Analysis, Tromsø, Norway, June 20-25, 2010.

(FOR 2010) Forma, I.; Raviv, T.; Tzur, M. "The Static Repositioning Problem in a Bike-Sharing System", In the proceeding of the 7th Treinnial Symposium on Transportation Analysis 2010, Tromso, Norway, pp. 279- 282.

(FRI 2012) Fricker, C. & Gast, N. (2012), "Incentives and regulations in bike-sharing

systems with stations of finite capacity", http://arxiv.org/pdf/1201.1178v1.pdf. Accessed Feb. 13, 2012.

(FRO 2008) Froehlich, J., Neumann, J., Oliver, N., 2008, "Measuring the pulse of the city through shared bicycle programs", International Workshop on Urban, Community, and Social Applications of Networked Sensing Systems (UrbanSense 08). Raleigh, North Carolina, USA.

(JEN 2010) Jensen, P., Rouquier, J.-B., Ovtracht, N., Robardet, C., 2010, "Characterizing the speed and paths of shared bicycle use in lyon", Transportation Research Part D, 522–524.

(KAD 2013) Kadri, A., Labadi, K., Kacem, I., "Stochastic Petri net and genetic algorithm for rebalancing of public bicycle-sharing systems", CIE43, 43rd International conference on computers & Industrial Engineering, 16-18 October 2013, Hong Kong.

(KAL 2010) Kaltenbrunner, A., Meza, R., Grivolla, J., Codina, J., Banchs, R., 2010, "Urban cycles and mobility patterns: exploring and predicting trends in a bicycle-based public transport system", IEEE Pervasive and Mobile Computing 6, 455–466, http://dx.doi.org/10.1016/j.pmcj.2010.07.002.

(KAL 2010) Kaltenbrunner, A., Meza, R., Grivolla, J., Condina, J. & Banchs, R. "Urban cycles and mobility patterns: Exploring and predicting trends in a bicycle-based public transport system", Pervasive and Mobile Computing, 2010, Vol.6, No.4, pp. 455–466.

(LAT 2012) Lathia, N., Ahmed, S., & Capra, L. (2012). "Measuring the impact of opening the London shared bicycle scheme to casual users, Transportation Research Part C: Emerging Technologies", 22(1), 88-102.

(LIN 2011)(a) Lin, J. R., & Yang, T. H. (2011). "Strategic design of public bicycle sharing systems with service level constraints". Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review, 47(2), 284-294.

(LIN 2011)(b) Lin, J.-R., Yang, T-H., Chang, Y-C., (2011) "A hub location inventory model for bicycle sharing system design: Formulation and solution", Article in Press, Computers & Industrial Engineering xxx (2011) xxx– xxx.

(NAI 2011) Nair, R., & Miller-Hooks, E. (2011), "Fleet management for vehicle sharing operations", Transportation Science, 45(4), 524-540.

(NAI 2013) Nair, R., Miller-Hooks, E., Hampshire, R., Busic, A., 2013, "Large-scale bicycle sharing systems: analysis of V'Elib", International Journal of Sustainable Transportation, 7(1), 85-106.

(RAV 2013) Raviv, T., Tzur, M., and Forma. I., « The static repositioning problem in a bike sharing system: Models and Solution Approaches ». EURO Journal of Transportation and Logistics, available online January 2013. doi: 10.1007/s13676-012-0017-6.

(SAY 2012) Sayarshad, H., Tavassoli, S. & Zhao, F. (2012), "A multi-periodic optimization formulation for bike planning and bike utilization", Applied Mathematical Modelling, Atricle in press, doi:10.1016/j.apm.2011.12.032.

(SHA 2010) Shaheen, S., Guzman, S., & Zhang, H. (2010). "Bikesharing in Europe, the Americas, and Asia: Past, Present, and Future", Journal of the Transportation Research Board, 2010, 2143, pp. 159–167.

(SHU 2010) Shu, J., Chou, M., Liu, Q., Teo, C.-P. & Wang, I-L. (2010), "Bicycle-sharing system: deployment, utilization and the value of re distribution", Working paper, National University of Singapore, http://www.bschool.nus.edu.sg/Staff/bizteocp/BS2010.pdf.

Accessed Feb. 15, 2012.

(VOG 2011) Vogel, P., Greisera, T., Mattfelda, DC., "Understanding Bike-Sharing Systems using Data Mining: Exploring Activity Patterns", 14th EWGT & 26th MEC & 1st RH, Procedia Social and Behavioral Sciences 20 (2011) 514–523.

(WAN 2010) Wang Shang, Zhang Jiangman; Liu Liang, Duan Zheng-yu. "Bike-Sharing-A new public transportation mode: State of the practice & prospects", IEEE International Conference on Emergency Management and Management Sciences, 2010, pp. 222- 225.