

# Modélisation de la propagation des ondes élastiques dans les guides multi-brins hélicoïdaux précontraints Ahmed Frikha

#### ▶ To cite this version:

Ahmed Frikha. Modélisation de la propagation des ondes élastiques dans les guides multi-brins hélicoïdaux précontraints. Matériaux. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2010. Français. NNT: . tel-00969101

# HAL Id: tel-00969101 https://theses.hal.science/tel-00969101

Submitted on 2 Apr 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# École Centrale de Nantes

#### École Doctorale

#### SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR GÉOSCIENCES ARCHITECTURE

Année 2010

 $\mathrm{N}^\circ$  B.U. :

#### Thèse de Doctorat

Spécialité : GÉNIE MÉCANIQUE

Présentée et soutenue publiquement par :

#### Ahmed Frikha

le 13 décembre 2010 au LCPC - Nantes

#### TITRE

#### Modélisation de la propagation des ondes élastiques dans les guides multi-brins hélicoïdaux précontraints

#### JURY

Présidente :	Anne-Sophie	BONNET-BEN DHIA	Directrice de Recherche au CNRS, Paris
Rapporteurs :	Mohamed	ICHCHOU	Professeur, École Centrale de Lyon
	Denis	DUHAMEL	Professeur, ENPC, Marne La Vallée
Examinateurs :	Laurent	LAGUERRE	Chargé de Recherche, LCPC Nantes
	Patrice	CARTRAUD	Professeur, École Centrale de Nantes
	Fabien	TREYSSÈDE	Chargé de Recherche, LCPC Nantes

Directeur de thèse :Patrice CARTRAUD,Professeur, École Centrale de NantesCo-encadrant :Fabien TREYSSÈDE,Chargé de Recherche, LCPC Nantes

# Remerciement

Ce document présente l'aboutissement de 3 années de thèse passées au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC). Je souhaite remercier ici, l'ensemble des personnes qui m'ont permis par leur aide et leur soutien de mener à bien ce travail.

Mes remerciements s'adressent en premier lieu à Messieurs Patrice Cartraud, professeur à l'École Centrale de Nantes, et Fabien Treyssède, chargé de recherche au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées. Je les remercie vivement pour leurs conseils avisés, leurs compétences scientifiques et l'attention qu'ils n'ont cessé d'apporter à ce travail. J'exprime ma profonde reconnaissance pour les encouragements qu'ils ont su me prodiguer, leur enthousiasme et pour m'avoir initié à la recherche scientifique.

Je tiens à remercier Madame Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA, Directrice de Recherche au CNRS-Paris, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de cette thèse. Je lui en suis extrêmement reconnaissant.

Mes remerciements vont également à Messieurs Mohamed ICHCHOU, Professeur à l'École Centrale de Lyon, Denis DUHAMEL, Professeur à l'École des Ponts Paris Tech, qui ont accepté de lire, de commenter et de juger ce mémoire. Je les remercie également pour l'intérêt qu'ils ont porté à ces travaux et leur en suis infiniment reconnaissant.

Je remercie Monsieur Laurent LAGUERRE, Chargé de Recherches au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, pour avoir accepté de participer à mon jury.

Merci à toute l'équipe MACS du LCPC, et en particulier à Louis-Marie Cottineau pour m'avoir accueilli dans de si bonnes conditions. Bien évidement je remercie tous les doctorants et les post-doctorants que j'ai croisé durant ces trois années (par ordre d'apparition) : Slah, François, Mathieu, Ahmed, Khaled, Farouk, Yannick, Inno. Je leur souhaite une bonne continuation dans leur vie professionnelle et personelle.

A mes parents,

à ma femme Sana,

à mes frères et mes soeurs,

à mes neuveux et mes nièces.

A toute ma grande famille.

# Table des matières

# Introduction générale

1	Gér	néralite	és sur la dynamique des structures précontraintes	<b>5</b>
	Intr	oductio	n	6
	1.1	Descri	ption du mouvement	6
	1.2	Tense	ur gradient de déformation	8
	1.3	Équat	ions d'équilibre	8
		1.3.1	Équation d'équilibre de l'état précontraint	8
		1.3.2	Équation d'équilibre de l'état perturbé	9
		1.3.3	Équation d'équilibre dynamique autour de l'état précontraint	11
	1.4	Loi de	e comportement	12
	1.5	Formu	llation variationnelle	13
		1.5.1	Principe des travaux virtuels	13
		1.5.2	Conditions aux limites	14
	Con	clusion		15
<b>2</b>	For	mulati	on dans un système de coordonnées hélicoïdales	17
2	<b>For</b> Intr	<b>mulati</b> oductio	on dans un système de coordonnées hélicoïdales n	<b>17</b> 18
2	For Intro 2.1	<b>mulati</b> oductio Systèr	on dans un système de coordonnées hélicoïdales         n	<ol> <li>17</li> <li>18</li> <li>18</li> </ol>
2	For Intro 2.1	<b>mulati</b> oductio Systèr 2.1.1	on dans un système de coordonnées hélicoïdales         n	<ol> <li>17</li> <li>18</li> <li>18</li> <li>18</li> </ol>
2	For: Intro 2.1	mulati oductio Systèr 2.1.1 2.1.2	on dans un système de coordonnées hélicoïdales         n	<ol> <li>17</li> <li>18</li> <li>18</li> <li>18</li> <li>19</li> </ol>
2	For: Intro 2.1	<b>mulati</b> oductio Systèr 2.1.1 2.1.2 2.1.3	on dans un système de coordonnées hélicoïdales         n	<ol> <li>17</li> <li>18</li> <li>18</li> <li>18</li> <li>19</li> <li>20</li> </ol>
2	For Intro 2.1	<b>mulati</b> oductio Systèr 2.1.1 2.1.2 2.1.3 2.1.4	on dans un système de coordonnées hélicoïdales         n         ne de coordonnées curvilignes         Paramétrage d'une hélice         Base de Serret-Frenet         Bases covariante et contravariante         Symboles de Christoffel	<ol> <li>17</li> <li>18</li> <li>18</li> <li>19</li> <li>20</li> <li>22</li> </ol>
2	<b>For</b> Intro 2.1	<b>mulati</b> oductio Systèr 2.1.1 2.1.2 2.1.3 2.1.4 Formu	on dans un système de coordonnées hélicoïdales         n	<ol> <li>17</li> <li>18</li> <li>18</li> <li>19</li> <li>20</li> <li>22</li> <li>22</li> </ol>
2	<b>For</b> Intro 2.1 2.2	<b>mulati</b> oductio Systèr 2.1.1 2.1.2 2.1.3 2.1.4 Formu 2.2.1	on dans un système de coordonnées hélicoïdales         n	<ol> <li>17</li> <li>18</li> <li>18</li> <li>19</li> <li>20</li> <li>22</li> <li>22</li> <li>23</li> </ol>
2	<b>For</b> Intro 2.1 2.2	mulati oductio Systèr 2.1.1 2.1.2 2.1.3 2.1.4 Formu 2.2.1 2.2.2	on dans un système de coordonnées hélicoïdales         n         ne de coordonnées curvilignes         Paramétrage d'une hélice         Base de Serret-Frenet         Bases covariante et contravariante         Symboles de Christoffel         Ilation variationnelle         Vecteur des déplacements         Tenseur gradient de déplacement	<ol> <li>17</li> <li>18</li> <li>18</li> <li>19</li> <li>20</li> <li>22</li> <li>22</li> <li>23</li> <li>23</li> </ol>
2	<b>For</b> Intro 2.1 2.2	mulati oductio Systèr 2.1.1 2.1.2 2.1.3 2.1.4 Formu 2.2.1 2.2.2 2.2.3	on dans un système de coordonnées hélicoïdales         n         ne de coordonnées curvilignes         Paramétrage d'une hélice         Paramétrage d'une hélice         Base de Serret-Frenet         Bases covariante et contravariante         Symboles de Christoffel         Number de déplacements         Vecteur des déplacements         Tenseur gradient de déplacement         Tenseur des déformations	<ol> <li>17</li> <li>18</li> <li>18</li> <li>19</li> <li>20</li> <li>22</li> <li>22</li> <li>23</li> <li>23</li> <li>25</li> </ol>
2	For 1ntro 2.1 2.2	mulati oductio Systèr 2.1.1 2.1.2 2.1.3 2.1.4 Formu 2.2.1 2.2.2 2.2.3 2.2.4	on dans un système de coordonnées hélicoïdales         n	<ol> <li>17</li> <li>18</li> <li>18</li> <li>19</li> <li>20</li> <li>22</li> <li>23</li> <li>23</li> <li>25</li> <li>27</li> </ol>
2	<b>For</b> Intro 2.1 2.2	mulati oductio Systèr 2.1.1 2.1.2 2.1.3 2.1.4 Formu 2.2.1 2.2.2 2.2.3 2.2.4 2.2.5	on dans un système de coordonnées hélicoïdales         n	<ol> <li>17</li> <li>18</li> <li>18</li> <li>19</li> <li>20</li> <li>22</li> <li>22</li> <li>23</li> <li>23</li> <li>25</li> <li>27</li> <li>29</li> </ol>

1

	2.3	Invaria	ance par translation	30
		2.3.1	Invariance géométrique	30
		2.3.2	Invariance matérielle	30
		2.3.3	Invariance du système de coordonnées	31
	2.4	Systèr	ne de coordonnées tournant	31
		2.4.1	Invariance pour un brin hélicoïdal seul	32
		2.4.2	Invariance pour une structure multi-brins hélicoïdale	33
		2.4.3	Paramétrage de la section	34
	Con	clusion		35
3	Cal	cul de	l'état précontraint (statique)	37
	Intro	oductio	n	38
	3.1	Repèr	es bibliographiques	38
	3.2	Homo	généisation hélicoïdale	39
		3.2.1	Le problème d'élasticité 3D initial	40
		3.2.2	Mise en oeuvre de la méthode des développements asymptotiques .	42
		3.2.3	Les problèmes microscopiques	43
		3.2.4	Le problème macroscopique	46
		3.2.5	Bilan	46
		3.2.6	Cas d'une sollicitation macroscopique homogène	47
	3.3	Formu	lation variationnelle	48
	3.4	Discré	tisation par éléments finis	49
		3.4.1	Résolution du problème microscopique	49
		3.4.2	Post-traitement : calcul des efforts et moments résultants	49
	Con	clusion		51
4	Mo	délisat	ion de la propagation des ondes élastiques dans un guide pré-	
	con	traint		53
	Intro	oductio	n	54
	4.1	Repèr	es bibliographiques	54
		4.1.1	Méthodes numériques	55
		4.1.2	Guides courbes	56
		4.1.3	Guides précontraints	56
	4.2	Appro	che semi-analytique	57
		4.2.1	Vecteurs des déformations et des composantes du tenseur gradient	
			de déplacement	58
		4.2.2	Formulation SAFE	59
	4.3	Résolu	tion par éléments finis	59
	4.4	Calcul	l des paramètres modaux	61

		4.4.1	Définition des vitesses	. 61
		4.4.2	Expressions de $E_c$ , $E_p$ et <b>P</b>	. 62
		4.4.3	Calcul de la vitesse d'énergie	. 63
		4.4.4	Egalité entre vitesses de groupe et d'énergie	. 64
	Con	clusion		. 65
5	Rés	ultats	pour l'état précontraint	67
	Intr	oductio	n	. 68
	5.1	Struct	ures mono-brins	. 68
		5.1.1	Modèles de référence	. 68
		5.1.2	Validation	. 71
		5.1.3	Limitation de l'hypothèse des petits déplacements	. 73
	5.2	Struct	ures multi-brins	. 77
		5.2.1	Modèles de référence	. 78
		5.2.2	Validation	. 79
		5.2.3	Résultats pour un toron T15.7 (sept brins)	. 82
		5.2.4	Prise en compte simplifiée du contact	. 85
	Con	clusion		. 87
6	Rés	ultats	pour les ondes guidées	89
	Intr	oductio	n	. 90
	6.1	Guide	s mono-brins	. 90
		6.1.1	Modulation du nombre d'onde	. 91
		6.1.2	Modèle de référence avec précontrainte	. 92
		6.1.3	Validation avec précontrainte	. 94
		6.1.4	Effet de la réactualisation de la géométrie	. 96
	6.2	Guide	s multi-brins	. 96
		6.2.1	Repères bibliographiques	. 97
		6.2.2	Résultats préliminaires sans chargement	. 98
		6.2.3	Résultats avec précontrainte	. 102
			6.2.3.a Cas d'un contact linéïque	. 102
			6.2.3.b Prise en compte simplifiée du contact	. 104
	Con	clusion		. 106
С	onclu	usion e	t perspectives	109
$\mathbf{R}$	éfére	nces b	ibliographiques	111
A	nnex	es		117
A	nnex	e A : (	Coordonnées curvilignes	i

# Introduction générale

Les structures hélicoïdales sont utilisées dans divers domaines. Les exemples typiques sont les ressorts hélicoïdaux, largement présents dans les industries aéronautique et automobile, et les câbles multi-brins du génie civil, utilisés dans les ouvrages d'art. Ces structures sont généralement soumises à des sollicitations axiales importantes. Ceci peut engendrer la dégradation du matériau et sa fissuration liées au développement de la corrosion et de la fatigue mécanique. Ces dégradations menacent l'intégrité et la sécurité des usagers. Il est donc primordial de disposer de méthodes de Contrôle Non Destructif (CND) permettant l'auscultation de ces structures.

Une multitude de techniques de CND est utilisée pour détecter, localiser et dimensionner les discontinuités mécaniques (fissures, corrosion, inclusions,...). Chacune de ces méthodes présente son propre domaine d'utilisation. Néanmoins, la géométrie de la structure à évaluer peut limiter le choix de l'utilisation d'une technique par rapport à une autre. Les problèmes d'accessibilité et de grandes dimensions des structures hélicoïdales sont susceptibles de rendre certaines méthodes inadéquates au contrôle. Le contrôle par ultrasons constitue l'une des techniques les plus répandues pour contrôler des composants de grandes dimensions, comme les plaques et les tubes. Il consiste notamment à analyser la propagation des ondes élastiques guidées. De plus cette technique permet l'inspection des structures accessibles seulement aux extrémités. Les ondes guidées présentent l'avantage de se propager sur des longues distances avec peu de perte d'énergie et un temps d'inspection réduit. Par conséquent, le contrôle d'une grande partie de la pièce peut être réalisé sans déplacer la source d'onde élastique. Néanmoins, les ondes guidées possèdent un caractère multi-modal (plusieurs modes se propagent pour une même fréquence avec des vitesses différentes) et un caractère dispersif (variation des paramètres modaux tels que les vitesses de phase, de groupe et d'énergie en fonction de la fréquence). Ces deux caractéristiques compliquent l'interprétation des signaux mesurés. Lors d'un essai de CND par ondes guidées, la simulation est un outil susceptible de faciliter l'interprétation de ces signaux, voire d'optimiser les configurations de contrôle.

L'élément de base constituant les câbles multi-brins est bien souvent un toron à sept brins. Il est constitué d'un brin droit entouré d'une couche de six brins périphériques hélicoïdaux. En raison de la complexité liée à la géométrie hélicoïdale, à la sollicitation appliquée et au contact entre les brins, la compréhension de la propagation des ondes élastiques dans de telles structures est difficile.

L'objectif de la présente thèse est de développer un modèle numérique permettant l'analyse et la compréhension du phénomène de propagation des ondes élastiques dans des guides hélicoïdaux mono-brins et multi-brins soumis à une sollicitation axiale. À l'exception des approches basées sur des analyses transitoires, très coûteuses en temps de calcul, la majorité des modèles numériques est basée sur le principe de Floquet et la méthode des éléments finis semi-analytique (SAFE en anglais). La méthode SAFE, permettant de réduire le problème initial 3D en un problème 2D sur la section, est choisie dans ce travail pour modéliser la propagation des ondes élastiques dans un guide hélicoïdal précontraint. Le développement de ce modèle nécessite la connaissance de l'état précontraint (statique), qui doit être supposé invariant par translation. Le second objectif de cette thèse est donc de développer un modèle bidimensionnel réduit sur la section basée sur la théorie d'homogénéisation permettant de déterminer l'état statique précontraint local de structures hélicoïdales mono-brins et multi-brins soumises à une sollicitation axiale.

Afin de pouvoir valider le modèle SAFE pour des guides hélicoïdaux mono-brins soumis à une sollicitation axiale, nous avons également développé dans le cadre de cette thèse un modèle de référence correspondant à la détermination des modes de propagation d'une poutre hélicoïdale sous chargement axial.

Ce manuscrit est divisé en six chapitres dont les quatre premiers présentent la théorie et les deux derniers illustrent les résultats obtenus.

Le premier chapitre décrit la formulation variationnelle tridimensionnelle de la dynamique des structures autour d'un état d'équilibre précontraint statique. Une analyse non-linéaire basée sur une formulation Lagrangienne actualisée est utilisée afin de décrire le comportement d'une telle structure en grands déplacements.

Le deuxième chapitre présente la formulation variationnelle de l'élastodynamique écrite dans un système de coordonnées hélicoïdales. La notion d'invariance par translation est introduite. Pour les structures mono-brins, elle est vérifiée dans les systèmes de coordonnées hélicoïdales et tournant. Pour les structures multi-brins, il faut se placer dans le système tournant, qui permet de satisfaire à la fois l'invariance du brin central droit et des brins périphériques hélicoïdaux.

Le troisième chapitre présente la théorie d'homogénéisation hélicoïdale permettant le calcul de l'état précontraint local dans une structure hélicoïdale soumise à un chargement axial. En partant du problème de l'élasticité 3D, en se basant sur la méthode des développements asymptotiques et en exploitant la propriété d'invariance par translation, cette technique permet de réduire le problème à un problème 2D sur la section.

Le quatrième chapitre décrit la méthode SAFE, permettant de déterminer les modes de propagation dans les guides d'onde hélicoïdaux sous chargement. À partir de la formulation variationnelle de l'élastodynamique écrite dans le système de coordonnées hélicoïdales, en exploitant la propriété d'invariance par translation et en supposant que l'onde se propage selon une direction priviligiée, cette technique permet aussi de réduire le problème à un problème 2D sur la section.

Le cinquième chapitre présente des résultats pour l'état précontraint des structures hélicoïdales mono-brins et multi-brins soumises à un chargement axial en utilisant le modèle de calcul statique éléments finis 2D, développé dans le chapitre 3. Pour les structures mono-brins, la validation du modèle est faite par comparaison de la solution avec celle d'un modèle analytique proposé dans littérature. L'hypothèse des petits déplacements est brièvement étudiée. Pour les torons à sept brins, la validation est effectuée par comparaison de la solution avec celle d'un modèle éléments finis 3D issu de la littérature. Quelques résultats sont présentés pour un toron de type T15.7 en contact linéïque entre le brin central et les brins périphériques, puis avec une prise en compte simplifiée du contact sans interpénétration.

Le dernier chapitre présente des résultats pour la propagation des ondes élastiques dans un guide d'onde hélicoïdal mono-brin puis multi-brins soumis à une déformation axiale en utilisant le modèle SAFE, développé dans le chapitre 4. Pour les guides monobrins, la validation de ce modèle est faite par comparaison des résultats avec ceux d'un modèle basé sur l'approximation de poutre, décrit en Annexe B. Pour les guides multibrins (torons à sept brins), le phénomène de décalage de la bande de fréquence dite "manquante" vers les hautes fréquences sous l'effet d'un chargement axial d'extension, observé expérimentalement, est retrouvé numériquement par la modélisation SAFE en tenant compte de la précontrainte, de la déformation de la géométrie et du contact sans interpénétration.

# Chapitre 1

# Généralités sur la dynamique des structures précontraintes

## Sommaire

Introduction	
1.1 Description du mouvement	
1.2 Tenseur gradient de déformation	
1.3 Équations d'équilibre	
1.3.1 Équation d'équilibre de l'état précontraint $\ldots \ldots \ldots \ldots 8$	
1.3.2 Équation d'équilibre de l'état perturbé	
1.3.3 Équation d'équilibre dynamique autour de l'état précontraint . 11	
<b>1.4</b> Loi de comportement	
1.5 Formulation variationnelle	
1.5.1 Principe des travaux virtuels	
1.5.2 Conditions aux limites $\ldots \ldots 14$	
Conclusion	

# Introduction

Les câbles multi-brins sont largement utilisés en génie civil, plus précisément dans la construction des ouvrages d'art et du béton précontraint. Ces structures sont généralement soumises à des chargements importants et à des déformations de quelques pourcents au maximum. Nous décomposons le problème en une étude statique, pour connaître le niveau de précontrainte et la déformation de la géométrie, et un problème de dynamique autour de cet état d'équilibre précontraint. Nous nous intéressons aux mouvements de petites amplitudes autour de l'état précontraint et le problème dynamique est linéarisé.

Dans ce chapitre, nous présentons la formulation variationnelle de la dynamique des structures autour d'un état d'équilibre précontraint statique. L'analyse linéaire ne permet pas de refleter le comportement réel d'une telle structure. Il est nécessaire de passer par une analyse non-linéaire. Nous supposons que la loi de comportement du matériau reste linéaire élastique. Les non-linéarités matérielles ne sont pas considérées. Nous nous intéressons seulement aux non-linéarités géométriques. On supposera que la structure considérée est soumise à de grands déplacements et des déformations assez petites. Ce type de problème peut être mis en équation en utilisant une formulation Lagrangienne dite totale, dont le volume de contrôle est la géométrie non déformée de référence, ou bien en utilisant une formulation Lagrangienne dite actualisée, dont le volume de contrôle est la géométrie statique déformée.

Nous commençons par écrire les équations d'équilibre de l'état précontraint et perturbé respectivement dans les configurations précontrainte et perturbée en utilisant une formulation Lagrangienne actualisée. Nous transformons l'équation d'équilibre perturbée dans la configuration précontrainte. En retranchant les deux équations d'équilibre, nous obtenons l'équation d'équilibre dynamique autour d'un état d'équilibre précontraint. Cette équation est linéarisée par hypothèse des petites perturbations dynamiques.

Ce chapitre s'appuie principalement sur les ouvrages de Bathe [1996], Yang and Kuo [1994] et Geradin and Rixen [1997], et a pour objectif d'introduir les notions utiles pour la suite.

## 1.1 Description du mouvement

Considérons un repère orthonormé  $R(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . La cinématique classique d'un milieu continu est construite à partir des notions :

- de temps, pouvant être représenté par une variable réelle t.

d'espace physique, pouvant être représenté par un espace affine tridimensionnel.
 Les points de cet espace sont appelés "points matériels".

A un instant t = 0, le point  $M_{ref}$  a pour coordonnées  $x_{ref_1}$ ,  $x_{ref_2}$ ,  $x_{ref_3}$  qui définissent la position du point matériel P dans la configuration de référence non précontrainte  $C_{ref}$  (voir figure 1.1). Nous pourrons ainsi écrire  $\mathbf{x}_{ref} = \overrightarrow{OM}_{ref} = x_{ref_1}\mathbf{e}_1 + x_{ref_2}\mathbf{e}_2 + x_{ref_3}\mathbf{e}_3$ .



FIG. 1.1 – Mouvement d'un corps entre la configuration d'équilibre de référence  $C_{ref}$ , la configuration d'équilibre statique précontrainte  $C_0$  et la configuration perturbée  $\tilde{C}$ .

Sous l'action de sollicitations extérieures statiques, la structure se déforme vers la configuration d'équilibre précontrainte  $C_0$ . Ainsi il est nécessaire de définir les coordonnées  $x_{0_1}, x_{0_2}$  et  $x_{0_3}$  du point  $M_0$  qui à l'instant t représente la position du point matériel P appartenant à la configuration  $C_0$ . Nous pourrons ainsi écrire  $\mathbf{x}_0 = \overrightarrow{OM}_0 = x_{01}\mathbf{e}_1 + x_{02}\mathbf{e}_2 + x_{0_3}\mathbf{e}_3$ . La position du point matériel  $M_0$  est une fonction de la position de  $M_{ref}$  et du temps ( $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(\mathbf{x}_{ref}, t)$ ). La vibration autour de l'état d'équilibre précontraint donne naissance à une configuration perturbée  $\widetilde{C}$ . Le point matériel P occupe la position du point  $\widetilde{M}$  de coordonnées  $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2$  et  $\widetilde{x}_3$  dans la configuration  $\widetilde{C}$ . Le vecteur position est donné par  $\widetilde{\mathbf{x}} = \overrightarrow{O\widetilde{M}} = \widetilde{x}_1\mathbf{e}_1 + \widetilde{x}_2\mathbf{e}_2 + \widetilde{x}_3\mathbf{e}_3$ .

Les quantités indicées par  $(\cdot)_{ref}$ ,  $(\cdot)_0$  et  $(\widetilde{\cdot})$  désignent des quantités relatives à la configuration  $C_{ref}$ ,  $C_0$  et  $\widetilde{C}$ . Par exemple  $\boldsymbol{\sigma}_{ref}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_0$  et  $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$  désignent les tenseurs de contraintes de Cauchy relatifs à  $C_{ref}$ ,  $C_0$  et  $\widetilde{C}$ . Les opérateurs  $\nabla_{ref}$ ,  $\nabla_0$  et  $\widetilde{\nabla}$  représentent les opérateurs gradient calculés par rapport à  $\mathbf{x}_{ref}$ ,  $\mathbf{x}_0$  et  $\widetilde{\mathbf{x}}$ . Les quantités ne possédant aucun indice sont relatives à la dynamique autour de l'état précontraint. Par exemple  $\mathbf{u}$  désigne le déplacement de la perturbation autour de l'état précontraint.

Les grandeurs peuvent être écrites en fonction des variables  $\mathbf{x}_{ref}$ ,  $\mathbf{x}_0$  ou  $\tilde{\mathbf{x}}$ . Cependant, la notation choisie ici sera la même selon les variables utilisées, ce qui est abusif mais permet de ne pas surcharger les écritures par la suite. Par exemple pour  $\mathbf{u}$ , on écrira  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_{ref}, t)$  pour  $C_{ref}$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t)$  pour  $C_0$  et  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}}, t)$  pour  $\tilde{C}$ . En effet, on aurait rigoureusement  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\widetilde{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{u}(\widetilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_{ref}, t), t) \neq \mathbf{u}(\mathbf{x}_{ref}, t)$  et  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\widetilde{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{u}(\widetilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, t), t) \neq \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t)$ .

## **1.2** Tenseur gradient de déformation

Pour matérialiser la déformation, on étudie la transformation d'un vecteur "matériel". Toutefois on conçoit bien que l'état de déformation n'étant généralement pas homogène dans la matière, il faille utiliser des points matériels infiniment voisins afin de bien caractériser la déformation au voisinage d'un point matériel. Nous sommes ainsi amenés à considérer les transformations  $d\mathbf{x}_{ref} \longrightarrow d\tilde{\mathbf{x}}$  et  $d\mathbf{x}_0 \longrightarrow d\tilde{\mathbf{x}}$ . Ces relations nous permettent de mettre en évidence les composantes des tenseurs  $\tilde{\mathbf{F}}_{ref}$  et  $\tilde{\mathbf{F}}_0$ , définies par  $d\tilde{x}_i = \tilde{F}_{ref_{ij}} dx_{ref_j}$ et  $d\tilde{x}_i = \tilde{F}_{0_{ij}} dx_{0_j}$ , où  $\tilde{F}_{ref_{ij}} = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \tilde{x}_{ref_j}}$  et  $\tilde{F}_{0_{ij}} = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \tilde{x}_{0_j}}$ . Sous forme condensée, on peut écrire :

$$d\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{F}}_{ref} d\mathbf{x}_{ref} , \ d\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{F}}_0 d\mathbf{x}_0.$$
(1.1)

Ces tenseurs sont appelés "tenseurs gradient de déformation". Ils permettent de caractériser les différentes transformations inter-configurations. Les composantes du tenseur  $\widetilde{\mathbf{F}}_0$  peuvent être calculées à partir du champ de déplacement en différenciant le vecteur déplacement donné par  $\mathbf{u} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0$ . On a donc sous forme indicielle  $\widetilde{F}_{0_{ij}} = \frac{\partial(x_{0_i} + u_i)}{\partial x_{0_j}} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_{0_j}}$ . Sous forme condensée, le tenseur gradient de déformation s'écrit comme suit :

$$\widetilde{\mathbf{F}}_0 = \mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u}. \tag{1.2}$$

 $\widetilde{J}_{ref}$  (respectivement  $\widetilde{J}_0$ ) est défini comme le déterminant du tenseur gradient par rapport à  $\mathbf{x}_{ref}$  (respectivement  $\mathbf{x}_0$ ), on peut écrire  $\widetilde{J}_{ref} = det \widetilde{\mathbf{F}}_{ref}$  et  $\widetilde{J}_0 = det \widetilde{\mathbf{F}}_0$ .

# 1.3 Équations d'équilibre

Dans ce paragraphe, on commence par écrire l'équation d'équilibre statique de l'état précontraint dans la configuration  $C_0$ . Puis on transforme l'équation d'équilibre de l'état perturbé, écrite dans la configuration perturbée  $\tilde{C}$ , sur la configuration précontrainte statique  $C_0$ . Ceci permet de déduire l'équation d'équilibre dynamique autour de l'état d'équilibre statique précontraint.

#### 1.3.1 Équation d'équilibre de l'état précontraint

Hypothèse : Dans toute la suite, l'état précontraint correspond à un état statique.

Soient  $\sigma_0$  le tenseur des contraintes de Cauchy et  $d\mathbf{t}_0$  les efforts surfaciques élémentaires relatifs à la géométrie précontrainte et définis sur la configuration  $C_0$ .  $\sigma_0$  est défini par :

$$d\mathbf{t}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{n}_0 dS_0, \tag{1.3}$$

où  $dS_0$  est un élément de surface de la géométrie précontrainte et  $\mathbf{n}_0$  est la normale sortante à  $dS_0$ .

Soit  $\mathbf{f}_0$  le vecteur des efforts massiques extérieurs relatif à  $C_0$ .  $\boldsymbol{\sigma}_0$  et  $\mathbf{f}_0$  satisfont l'équation d'équilibre statique, basée sur la conservation de la quantité de mouvement, suivante :

$$\nabla_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 + \rho_0 \mathbf{f}_0 = 0, \tag{1.4}$$

où  $\rho_0$  et  $\nabla_0 \cdot (\cdot)$  représentent la masse volumique et l'opérateur divergence dans la configuration  $C_0$ .

#### 1.3.2 Équation d'équilibre de l'état perturbé

Soient  $\tilde{\sigma}$  le tenseur des contraintes de Cauchy et  $d\tilde{\mathbf{t}}$  les efforts surfaciques élémentaires relatifs à la géométrie perturbée et définis sur la configuration  $\tilde{C}$ .  $\tilde{\sigma}$  est défini par :

$$d\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} d\tilde{S},\tag{1.5}$$

où  $d\tilde{S}$  est un élément de surface de la géométrie perturbée et  $\tilde{\mathbf{n}}$  est la normale sortante à  $d\tilde{S}$ .

Soit  $\tilde{\mathbf{f}}$  le vecteur des efforts massiques extérieurs relatif à la configuration  $\tilde{C}$ .  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  et  $\tilde{\mathbf{f}}$  satisfont l'équation d'équilibre dynamique suivante (l'état perturbé correspond en effet à un état dynamique) :

$$\widetilde{\nabla} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} + \widetilde{\rho} \widetilde{\mathbf{f}} = \widetilde{\rho} \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}, \tag{1.6}$$

où  $\tilde{\rho}$  et  $\tilde{\gamma}$  représentent respectivement la masse volumique du matériau dans la configuration  $\tilde{C}$  et l'accélération du mouvement entre la configuration  $C_0$  et  $\tilde{C}$ .  $\tilde{\nabla} \cdot (\cdot)$  est l'opérateur divergence relatif à la configuration  $\tilde{C}$ .

Pour se ramener à la configuration précontrainte statique, on considère  $\tilde{V}$  (respectivement  $V_0$ ) un volume de contrôle de la structure dans la configuration  $\tilde{C}$  (respectivement  $C_0$ ). D'une part, on effectue un changement de variables du volume  $\tilde{V}$  à  $V_0$ , on obtient :

$$\int_{\widetilde{V}} \widetilde{\nabla} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \ d\widetilde{V} = \int_{V_0} \widetilde{\nabla} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \widetilde{J}_0 \ dV_0, \qquad (1.7)$$

d'autre part, on applique le théorème de la divergence, on obtient :

$$\int_{\widetilde{V}} \widetilde{\nabla} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \ d\widetilde{V} = \int_{\widetilde{S}} \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \widetilde{\mathbf{n}} d\widetilde{S}.$$
(1.8)

Soient le volume infinitésimal  $d\tilde{V}$  (respectivement  $dV_0$ ) dans la configuration  $\tilde{C}$  (respectivement  $C_0$ ). Ce volume correspond à un petit cube d'arêtes données par les trois

vecteurs notés  $d\mathbf{x}_{0_1}, d\mathbf{x}_{0_2}, d\mathbf{x}_{0_3}$  (respectivement  $d\tilde{\mathbf{x}}_1, d\tilde{\mathbf{x}}_2, d\tilde{\mathbf{x}}_3$ ). Dans la configuration  $C_0$ , on a  $\mathbf{n}_0 dS_0 = d\mathbf{x}_{0_1} \wedge d\mathbf{x}_{0_2}$  et dans la configuration  $\tilde{C}$ , on a  $\tilde{\mathbf{n}} d\tilde{S} = d\tilde{\mathbf{x}}_1 \wedge d\tilde{\mathbf{x}}_2$ . En passant par l'intermédiaire d'un élément de volume, on a de deux manières  $d\tilde{V} = (d\tilde{\mathbf{x}}_1 \wedge d\tilde{\mathbf{x}}_2) \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_3 =$  $\tilde{\mathbf{n}} d\tilde{S} \cdot (\tilde{\mathbf{F}}_0 d\mathbf{x}_{0_3}) = (\tilde{\mathbf{F}}_0^T \tilde{\mathbf{n}} d\tilde{S}) d\mathbf{x}_{0_3}$  et  $d\tilde{V} = \tilde{J}_0 dV_0 = \tilde{J}_0 (d\mathbf{x}_{0_1} \wedge d\mathbf{x}_{0_2}) \cdot d\mathbf{x}_{0_3} = \tilde{J}_0 \mathbf{n}_0 dS_0 \cdot d\mathbf{x}_{0_3}$ . Cette écriture de deux manières différentes nous permet d'obtenir :

$$\widetilde{\mathbf{n}}d\widetilde{S} = \widetilde{J}_0\widetilde{\mathbf{F}}_0^{-T}\mathbf{n}_0 dS_0.$$
(1.9)

En utilisant l'équation (1.9), l'équation (1.8) devient :

$$\int_{\widetilde{V}} \widetilde{\nabla} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} d\widetilde{V} = \int_{S_0} \left( \widetilde{J}_0 \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \widetilde{\mathbf{F}}_0^{-T} \right) \cdot \mathbf{n}_0 dS_0 = \int_{V_0} \nabla_0 \cdot \left( \widetilde{J}_0 \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \widetilde{\mathbf{F}}_0^{-T} \right) dV_0.$$
(1.10)

D'après l'équation (1.10) et la relation  $d\tilde{V} = \tilde{J}_0 dV_0$ , on peut conclure que :

$$\widetilde{\nabla} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\widetilde{J}_0} \nabla_0 \cdot (\widetilde{J}_0 \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \widetilde{\mathbf{F}}_0^{-T}).$$
(1.11)

La substitution de l'équation (1.11) dans l'équation (1.6) nous permet d'écrire :

$$\frac{1}{\widetilde{J}_0} \nabla_0 \cdot (\widetilde{J}_0 \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \widetilde{\mathbf{F}}_0^{-T}) + \widetilde{\rho} \widetilde{\mathbf{f}} = \widetilde{\rho} \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}.$$
(1.12)

La conservation de la masse fournit par ailleurs :

$$\tilde{\rho}d\tilde{V} = \rho_0 dV_0, \tag{1.13}$$

et puisque  $d\tilde{V} = \tilde{J}_0 dV_0$ , alors les masses volumiques des configurations  $C_0$  et  $\tilde{C}$  sont liées par l'équation suivante :

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho_0}{\tilde{J}_0}.\tag{1.14}$$

À partir de l'équation (1.14) et après multiplication par  $\tilde{J}_0$ , l'équation (1.12) devient comme suit :

$$\nabla_0 \cdot (\widetilde{J}_0 \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \widetilde{\mathbf{F}}_0^{-T}) + \rho_0 \widetilde{\mathbf{f}} = \rho_0 \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}.$$
(1.15)

Cette équation peut être exprimée de façon différente en introduisant les contraintes de Cauchy relatives à la configuration perturbée  $\tilde{C}$ , définies par l'équation (1.5), et les contraintes de Piola-Kirchhoff de deuxième espèce actualisées  $\tilde{\mathbf{S}}$ , définies par :

$$d\tilde{\mathbf{t}}_0 = \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n}_0 dS_0, \tag{1.16}$$

où  $d\tilde{\mathbf{t}}_0$  désigne les efforts surfaciques élémentaires appliqués sur la géométrie perturbée mais exprimé dans la configuration  $C_0$ .

En reportant l'équation (1.9) dans (1.5), on obtient :

$$d\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{J}_0 \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \tilde{\mathbf{F}}_0^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 dS_0.$$
(1.17)

Puisque les efforts surfaciques de la géométrie perturbée définis sur les configurations  $\tilde{C}$  et  $C_0$  sont liés par :

$$d\tilde{\mathbf{t}}_0 = \tilde{\mathbf{F}}_0^{-1} d\tilde{\mathbf{t}},\tag{1.18}$$

on peut écrire :

$$d\widetilde{\mathbf{t}}_0 = \widetilde{J}_0 \widetilde{\mathbf{F}}_0^{-1} \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \widetilde{\mathbf{F}}_0^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 dS_0.$$
(1.19)

Par identification des termes de l'équation (1.19) et (1.16), les contraintes de Piola-Kirchhoff de deuxième espèce actualisées  $\tilde{\mathbf{S}}$  sont liées à celles de Cauchy  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  dans la configuration  $\tilde{C}$  par (Yang and Kuo [1994] et Bathe [1996]) :

$$\widetilde{\mathbf{S}} = \widetilde{J}_0 \widetilde{\mathbf{F}}_0^{-1} \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \widetilde{\mathbf{F}}_0^{-T}.$$
(1.20)

La substitution de l'équation (1.20) dans l'équation (1.15) nous permet d'écrire l'équation d'équilibre dynamique par rapport aux variables de la configuration  $C_0$ :

$$\nabla_0 \cdot (\widetilde{\mathbf{F}}_0 \widetilde{\mathbf{S}}) + \rho_0 \widetilde{\mathbf{f}} = \rho_0 \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}. \tag{1.21}$$

# 1.3.3 Équation d'équilibre dynamique autour de l'état précontraint

L'équation d'équilibre statique, donnée par l'équation (1.4), et l'équation d'équilibre dynamique, donnée par l'équation (1.21), sont écrites par rapport à la même configuration  $C_0$ . Donc par simple soustraction des deux équations, on obtient l'équation d'équilibre dynamique autour de l'état précontraint. Ce qui donne :

$$\nabla_0 \cdot (\widetilde{\mathbf{F}}_0 \widetilde{\mathbf{S}} - \boldsymbol{\sigma}_0) + \rho_0 (\widetilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}_0) = \rho_0 \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}.$$
(1.22)

On définit alors les quantités relatives à la perturbation autour de l'état précontraint : l'effort massique  $\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}_0$  et l'accélération  $\boldsymbol{\gamma} = \tilde{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}_0 = \tilde{\boldsymbol{\gamma}}$  car l'accélération de la configuration d'équilibre statique  $C_0$  est nulle.

On définit le tenseur incrément de Piola-Kirchhoff actualisé noté  $\mathbf{S}$  comme étant la différence entre  $\tilde{\mathbf{S}}$ , le tenseur des contraintes relatif à la configuration  $\tilde{C}$  actualisé sur la configuration  $C_0$  et  $\boldsymbol{\sigma}_0$ , le tenseur des contraintes de Cauchy défini sur la configuration précontrainte  $C_0$  (voir Yang and Kuo [1994]). On a donc :

$$\widetilde{\mathbf{S}} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{S}. \tag{1.23}$$

En utilisant les équations (1.2) et (1.23), on peut écrire :

$$\widetilde{\mathbf{F}}_{0}\widetilde{\mathbf{S}} - \boldsymbol{\sigma}_{0} = (\mathbf{I} + \nabla_{0}\mathbf{u})(\boldsymbol{\sigma}_{0} + \mathbf{S}) - \boldsymbol{\sigma}_{0} = (\mathbf{I} + \nabla_{0}\mathbf{u})\mathbf{S} + \nabla_{0}\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{0}.$$
(1.24)

En substituant l'équation (1.24) dans l'équation (1.22), on obtient :

$$\nabla_0 \cdot ((\mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u})\mathbf{S} + \nabla_0 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0) + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}.$$
 (1.25)

Pour étudier les vibrations de petites amplitudes autour de l'état précontraint statique, on travaille dans l'hypothèse des petites perturbations dynamiques, ce qui revient à linéariser l'équation (1.25). Le premier terme de cette équation est linéarisé en négligeant les termes du second ordre (c'est-à-dire  $\nabla_0 \mathbf{u}$  devant **I**). On obtient l'équation d'équilibre dynamique linéarisée autour de l'état d'équilibre statique précontraint caractérisé notamment par sa contrainte de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}_0$ . Cette équation est donnée par :

$$\nabla_0 \cdot (\mathbf{S} + \nabla_0 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0) + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}.$$
 (1.26)

## 1.4 Loi de comportement

Le tenseur incrément des contraintes de Piola-Kirchhoff actualisé  $\mathbf{S}$  est lié au tenseur incrément des déformations de Green-Lagrange  $\mathbf{e}$  par la relation suivante, voir Yang and Kuo [1994] et Bathe [1996] :

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}_0 \colon \mathbf{e},\tag{1.27}$$

où  $\mathbf{C}_0$  est le tenseur constitutif incrémental relatif à la configuration  $C_0$ .

Sous forme condensée, e s'écrit comme suit :

$$\mathbf{e} = 1/2(\nabla_0 \mathbf{u} + \nabla_0 \mathbf{u}^T + \nabla_0 \mathbf{u} \cdot \nabla_0 \mathbf{u}^T).$$
(1.28)

D'après l'hypothèse des petites perturbations, le tenseur incrément des déformations de Green **e** peut être linéarisé en négligeant les termes du second ordre (c'est-à-dire  $\nabla_0 \mathbf{u} \cdot \nabla_0 \mathbf{u}^T$ ). L'équation (1.28) devient :

$$\mathbf{e} \simeq 1/2(\nabla_0 \mathbf{u} + \nabla_0 \mathbf{u}^T) = \boldsymbol{\epsilon}, \qquad (1.29)$$

où  $\epsilon$  est la partie linéaire du tenseur des déformations de Green-Lagrange. Après linéarisation du tenseur des déformations, l'équation (1.27) devient :

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}_0 \colon \boldsymbol{\epsilon}.\tag{1.30}$$

Notons que jusqu'ici, aucune hypothèse sur la nature des déformations de l'état précontraint n'a été faite. Tout ce qu'on a écrit reste valable aussi bien en petites déformations qu'en grandes déformations.

En général, les caractéristiques matérielles sont spécifiques pour chaque configuration. Dans le cadre des petites déformations, on peut supposer que les coefficients matériels du tenseur  $C_0$  sont identiques pour toutes les configurations et restent constants lors d'une analyse non-linéaire.

Dans le cadre de ce travail,  $C_0$  correspond à un comportement élastique linéaire (Bathe [1996], Yang and Kuo [1994]).

# 1.5 Formulation variationnelle

En vue de résoudre numériquement les problèmes de la dynamique des structures précontraintes, on développe maintenant la formulation variationnelle de la dynamique des structures autour d'un état d'équilibre statique précontraint.

#### **1.5.1** Principe des travaux virtuels

On effectue un produit scalaire de l'équation d'équilibre dynamique autour de l'état précontraint donnée par l'équation (1.26) avec un champ de déplacement virtuel  $\delta \mathbf{u}$  et on intègre le résultat sur le volume de contrôle  $V_0$ , on obtient :

$$\int_{V_0} \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla_0 \cdot \mathbf{S} + \nabla_0 \cdot (\nabla_0 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma_0})) dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV_0.$$
(1.31)

En effectuant une intégration par parties sur le premier terme de gauche de l'équation (1.31) et en appliquant le théorème de la divergence, on trouve :

$$\int_{V_0} \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla_0 \cdot \mathbf{S} + \nabla_0 \cdot (\nabla_0 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma_0})) dV_0 =$$

$$\int_{S_0} (\delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{S} + \nabla_0 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma_0})) \cdot \mathbf{n}_0 dS_0 - \int_{V_0} (\mathbf{S} + \nabla_0 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma_0}) : (\nabla_0 \delta \mathbf{u}) dV_0.$$
(1.32)

En substituant l'équation (1.32) dans l'équation (1.31), on aura :

$$\int_{V_0} \nabla_0 \delta \mathbf{u} \colon \mathbf{S} dV_0 + \int_{V_0} \nabla_0 \delta \mathbf{u} \colon (\nabla_0 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0) dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV_0$$
  
= 
$$\int_{\partial V_0} \delta \mathbf{u} \cdot ((\mathbf{S} + \nabla_0 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0) \cdot \mathbf{n}_0) dS_0 + \int_{V_0} \rho_0 \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} dV_0.$$
 (1.33)

La quantité sous l'intégrale du premier terme de l'équation (1.33) peut s'écrire, par symétrie de **S**, comme suit :

$$\nabla_0 \delta \mathbf{u} \colon \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\nabla_0 \delta \mathbf{u} \colon \mathbf{S} + \nabla_0 \delta \mathbf{u} \colon \mathbf{S}^T).$$
(1.34)

Le deuxième terme de droite de l'équation (1.34) s'écrit autrement par  $\nabla_0 \delta \mathbf{u}$ :  $\mathbf{S}^T = \nabla_0 \delta \mathbf{u}^T$ : **S**. L'équation (1.34) devient :

$$\nabla_0 \delta \mathbf{u} \colon \mathbf{S} = \delta \boldsymbol{\epsilon} \colon \mathbf{S},\tag{1.35}$$

où  $\delta \boldsymbol{\epsilon} = 1/2(\nabla_0 \delta \mathbf{u} + \nabla_0 \delta \mathbf{u}^T)$ . Par insertion de la loi de comportement (1.30) dans l'équation (1.35), on peut écrire :

$$\nabla_0 \delta \mathbf{u} \colon \mathbf{S} = \delta \boldsymbol{\epsilon} \colon (\mathbf{C}_0 \colon \boldsymbol{\epsilon}). \tag{1.36}$$

D'autre part, le second terme de gauche de l'équation (1.33) peut s'écrire en fonction de la fonction trace afin de faire apparaître la symétrie. En tenant compte de la symétrie du tenseur  $\sigma_0$ , on peut montrer :

$$\nabla_0 \delta \mathbf{u} \colon (\nabla_0 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0) = \operatorname{tr}(\nabla_0 \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{u}^T).$$
(1.37)

En substituant l'équation (1.36) et (1.37) dans l'équation (1.33), on aura :

$$\int_{V_0} \delta \boldsymbol{\epsilon} \colon \mathbf{C}_0 \colon \boldsymbol{\epsilon} dV_0 + \int_{V_0} \operatorname{tr}(\nabla_0 \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{u}^T) dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV_0$$
  
= 
$$\int_{\partial V_0} \delta \mathbf{u} \cdot ((\mathbf{S} + \nabla_0 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0) \cdot \mathbf{n}_0) dS_0 + \int_{V_0} \rho_0 \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} dV_0.$$
 (1.38)

Sous cette forme, les deux premiers termes de l'équation (1.38) sont clairement symétriques.

#### **1.5.2** Conditions aux limites

Sur la frontière du domaine,  $\partial V_0 = \partial V_0^u \bigcup \partial V_0^T$ , on distingue deux types principaux de conditions aux limites (Figure 1.2). Le premier type est appelé conditions aux limites essentielles. Ces conditions, où les déplacements sont imposés sur tout le contour  $\partial V_0^u$ , s'écrivent comme suit :

$$\mathbf{u}(P) = \overline{\mathbf{u}}(P), \forall P \in \partial V_0^u. \tag{1.39}$$

Ces conditions aux limites sont aussi dites de type Dirichlet. Le deuxième type, appelé conditions aux limites naturelles, est issu de la formulation variationnelle. Elles représentent les contributions du travail qui sont concentrées sur la frontière  $\partial V_0^T$ . Le vecteur traction imposé sur le contour  $\partial V_0^T$  est donné par :

$$\mathbf{T}(P) = (\mathbf{S} + \nabla_0 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0) \cdot \mathbf{n}_0 = \overline{\mathbf{T}}(P), \forall P \in \partial V_0^T.$$
(1.40)

Ces conditions aux limites sont aussi dites de type Neumann.

En introduisant les conditions aux limites, données par l'équation (1.39) et (1.40), la formulation variationnelle, donnée par l'équation (1.38), devient :

$$\int_{V_0} \delta \boldsymbol{\epsilon} \colon \mathbf{C}_0 \colon \boldsymbol{\epsilon} \ dV_0 + \int_{V_0} \operatorname{tr}(\nabla_0 \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{u}^T) dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV_0$$
  
= 
$$\int_{\partial V_0^T} \delta \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{T}} dS_0 + \int_{V_0} \rho_0 \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} dV_0 \; ; \; \forall \mathbf{u} / \mathbf{u} \mid_{\partial V_0^u} = \overline{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u} \mid_{\partial V_0^u} = 0.$$
(1.41)

On note que l'influence de l'état précontraint est présente dans la formulation variationnelle de deux manières :

- la précontrainte de Cauchy  $\sigma_0$  donnée par le deuxième terme de gauche de la formulation variationnelle (1.41),
- la déformation de la géométrie puisque les intégrales de l'équation (1.41) sont calculées par rapport à la géométrie déformée de volume  $V_0$ .

L'équation (1.41) traduit le principe des travaux virtuels donné par :

$$\delta W_{int} + \delta W_i = \delta W_{ext}.$$
(1.42)

Les quantités de l'équation (1.42) sont données par :



FIG. 1.2 – Conditions aux limites appliquées sur la configuration  $C_0$ 

- $-\delta W_{int} = \int_{V_0} \delta \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon} dV_0 + \int_{V_0} \operatorname{tr}(\nabla_0 \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{u}^T) dV_0$  désigne le travail virtuel intérieur,
- $\delta W_i = \int_{V_0} \rho_0 \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV_0 \text{ est le travail virtuel d'inertie,}$  $\delta W_{ext} = \int_{\partial V_0^T} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} dS_0 + \int_{V_0} \rho_0 \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} dV_0 \text{ est le travail virtuel des efforts extérieurs.}$

# Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit la formulation variationnelle de la dynamique des structures autour d'un état d'équilibre précontraint statique. Un chargement statique appliqué sur une structure se traduit sur les équations d'équilibre dynamique par l'effet d'un terme de précontrainte (de Cauchy) et par la déformation de la géométrie. Afin de déterminer l'état statique et les modes de propagation d'une structure hélicoïdale soumise à un chargement axial, on va développer dans le prochain chapitre la formulation variationnelle dans un système de coordonnées hélicoïdal.

# Chapitre 2

# Formulation dans un système de coordonnées hélicoïdales

## Sommaire

Intro	duct	ion	1
2.1	Syst	ème de coordonnées curvilignes	1
2	2.1.1	Paramétrage d'une hélice	1
2	2.1.2	Base de Serret-Frenet	1
2	2.1.3	Bases covariante et contravariante	2
2	2.1.4	Symboles de Christoffel	2
2.2	Form	nulation variationnelle	2
2	2.2.1	Vecteur des déplacements	2
2	2.2.2	Tenseur gradient de déplacement	2
2	2.2.3	Tenseur des déformations	2
2	2.2.4	Loi de comportement	2
2	2.2.5	Tenseur des précontraintes	2
2	2.2.6	Formulation variationnelle dans la base de Serret-Frenet	2
2.3	Inva	riance par translation	3
2	2.3.1	Invariance géométrique	3
2	2.3.2	Invariance matérielle	3
2	2.3.3	Invariance du système de coordonnées	3
2.4	Syst	Nème de coordonnées tournant	3
2	2.4.1	Invariance pour un brin hélicoïdal seul	3
2	2.4.2	Invariance pour une structure multi-brins hélicoïdale	3
2	2.4.3	Paramétrage de la section	3
Conc	lusio	m	3

# Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons développé la formulation variationnelle de la dynamique des structures autour d'un état d'équilibre précontraint statique. L'objet de ce chapitre est d'écrire cette formulation variationnelle dans un système de coordonnées hélicoïdales.

Dans la première section, nous commençons par paramétrer l'hélice et la base de Serret-Frenet associée (voir Gray et al. [2006]). Un système de coordonnées hélicoïdales est défini. Nous introduisons ensuite les bases covariante et contravariante ainsi que les symboles de Christoffel. Pour une introduction à l'utilisation des systèmes de coordonnées curvilignes, le lecteur peut se reférer par exemple aux ouvrages de Chapelle and Bathe [2003], Gray et al. [2006], Synge and Schild [1978] et Wempner [1981]. Un bref rappel est également donné en Annexe A. Dans la deuxième section, nous développons les opérateurs différentiels utilisés dans la formulation variationnelle dans les bases covariante et contravariante. Par commodité, la formulation est finalement réecrite dans la base, orthonormée, de Serret-Frenet. Dans la troisième et la quatrième sections, nous introduisons la notion d'invariance par translation. Cette invariance par translation, regroupant l'invariance géométrique, matérielle et du système de coordonnées, est vérifiée pour des guides hélicoïdaux. Cette condition d'invariance est fondamentale puisqu'elle représente en quelque sorte une condition suffisante pour l'existence des ondes guidées dans une structure. Un système de coordonnées tournant, cas particulier du système hélicoïdal, est également défini. Ce système permettra l'étude des structures multi-brins hélicoïdales.

Les développements effectués dans ce chapitre seront utilisés pour le calcul de l'état statique et la détermination des modes de propagation d'une structure hélicoïdale dans les chapitres 3 et 4.

# 2.1 Système de coordonnées curvilignes

#### 2.1.1 Paramétrage d'une hélice

On considère une structure hélicoïdale dont la section est maintenue constante le long de l'axe. R et L sont respectivement le rayon de l'hélice dans le plan cartésien (X, Y) et la longueur d'une spire de l'hélice le long de l'axe Z. L'axe de l'hélice peut être décrit par le vecteur position suivant :

$$\mathbf{r}(s) = R\cos(\frac{2\pi}{l}s + \theta)\mathbf{e}_X + R\sin(\frac{2\pi}{l}s + \theta)\mathbf{e}_Y + \frac{L}{l}s\mathbf{e}_Z,$$
(2.1)

où l est la longueur curviligne d'un pas de l'hélice, donnée par l'équation suivante :

$$l = \sqrt{L^2 + 4\pi^2 R^2},\tag{2.2}$$

et  $\theta$  un angle de déphasage. Pour un toron à sept brins avec six brins hélicoïdaux,  $\theta = (N-1)\pi/3$  où N = 1, ..., 6 et pour un brin hélicoïdal seul,  $\theta = 0$ . ( $\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z$ ) désigne la base cartésienne. Le paramètre *s*, correspondant à la longueur de l'arc, varie entre 0 et *l* (voir figure 2.1).

On désigne par  $\kappa$  et  $\tau$  respectivement la courbure et la torsion. Ces paramètres, constants pour une hélice, sont définis par :

$$\kappa = \frac{4\pi^2 R}{l^2} , \ \tau = \frac{2\pi L}{l^2}.$$
(2.3)



FIG. 2.1 – Gauche : Pas d'hélice avec sa base de Serret-Frenet associée et le système de coordonnées hélicoïdales (x, y, s). Droite : vue normale à l'axe Z. Le point s = 0 est dans le plan (X, Y)

#### 2.1.2 Base de Serret-Frenet

Soit  $(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_t)$  la base de Serret-Frenet associée à l'hélice. Les vecteurs unitaires tangent  $\mathbf{e}_t$ , normal  $\mathbf{e}_n$  et binormal  $\mathbf{e}_b$  à l'axe de l'hélice sont définis par :

$$\mathbf{e}_t = \frac{d\mathbf{r}}{ds} , \ \frac{d\mathbf{e}_t}{ds} = \kappa \mathbf{e}_n , \ \mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \wedge \mathbf{e}_n.$$
(2.4)

Les formules de Serret-Frenet donnent :

$$\frac{d\mathbf{e}_n}{ds} = \tau \mathbf{e}_b - \kappa \mathbf{e}_t \ , \ \frac{d\mathbf{e}_b}{ds} = -\tau \mathbf{e}_n.$$
(2.5)

Dans la base cartésienne  $(\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z)$ , les vecteurs  $\mathbf{e}_n$ ,  $\mathbf{e}_b$  et  $\mathbf{e}_t$  s'expriment ainsi :

$$\mathbf{e}_{n} = -\cos(\frac{2\pi}{l}s + \theta)\mathbf{e}_{X} - \sin(\frac{2\pi}{l}s + \theta)\mathbf{e}_{Y} ,$$
  
$$\mathbf{e}_{b} = \frac{L}{l}\sin(\frac{2\pi}{l}s + \theta)\mathbf{e}_{X} - \frac{L}{l}\cos(\frac{2\pi}{l}s + \theta)\mathbf{e}_{Y} + \frac{2\pi}{l}R\mathbf{e}_{Z} , \qquad (2.6)$$
  
$$\mathbf{e}_{t} = -\frac{2\pi}{l}R\sin(\frac{2\pi}{l}s + \theta)\mathbf{e}_{X} + \frac{2\pi}{l}R\cos(\frac{2\pi}{l}s + \theta)\mathbf{e}_{Y} + \frac{L}{l}\mathbf{e}_{Z} .$$

Avec cette convention de notation, le vecteur normal  $\mathbf{e}_n$  est orienté vers l'intérieur de l'hélice.

Maintenant un nouveau système de coordonnées (x, y, s) est construit depuis la base orthonormée  $(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_t)$ , tel que tout vecteur position  $\mathbf{x}$  peut être exprimé comme suit :

$$\mathbf{x}(x, y, s) = \mathbf{r}(s) + x\mathbf{e}_n(s) + y\mathbf{e}_b(s).$$
(2.7)

#### 2.1.3 Bases covariante et contravariante

Dans la base orthonormée de Serret-Frenet ( $\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_t$ ), un point de l'espace est défini par le vecteur position  $\mathbf{x}$ , donné par l'équation (2.7). Ce vecteur va servir pour définir les bases covariante et contravariante, non nécessairement orthogonales, associées au système de coordonnées curvilignes ainsi que leurs tenseurs métriques. Soit ( $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ ) la base covariante associée au système de coordonnées (x, y, s). Les vecteurs de la base covariante  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  et  $\mathbf{g}_3$  sont définis par (voir annexe A) :

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} = \mathbf{e}_n(s) \ , \ \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y} = \mathbf{e}_b(s) \ , \ \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} = -\tau y \mathbf{e}_n(s) + \tau x \mathbf{e}_b(s) + (1 - \kappa x) \mathbf{e}_t(s).$$
(2.8)

Les vecteurs de la base covariante  $\mathbf{g}_i$  (i = 1, 2, 3) peuvent être exprimés en fonction des vecteurs de la base de Serret-Frenet  $\mathbf{e}_{\alpha}$   $(\alpha = n, b, t)$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} J \end{bmatrix}^T \begin{cases} \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_b \\ \mathbf{e}_t \end{cases},$$
(2.9)

où :

$$[J]^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\tau y & \tau x & 1 - \kappa x \end{bmatrix}.$$
 (2.10)

Notons que [J] représente la matrice Jacobienne (voir Eq. (2.64)).

Les composantes du tenseur métrique covariant sont définies par le produit salaire des vecteurs de la base covariante :

$$g_{mn} = \mathbf{g}_m \cdot \mathbf{g}_n, \tag{2.11}$$

ce qui nous donne, après calcul des différents coefficients, le tenseur métrique covariant suivant :

$$\mathbf{g} = [J]^{T}[J] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\tau y \\ 0 & 1 & \tau x \\ -\tau y & \tau x & \tau^{2}(x^{2} + y^{2}) + (1 - \kappa x)^{2} \end{bmatrix}.$$
 (2.12)

On remarque que le tenseur métrique covariant ne dépend pas de la variable axiale s puisque la courbure  $\kappa$  et la torsion  $\tau$  sont constantes pour une hélice.

La base covariante  $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$  donne naissance à une nouvelle base  $(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3)$ , appelée contravariante. Les vecteurs de la base contravariante sont définis à partir de la relation suivante :

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j. \tag{2.13}$$

L'indice de bas (resp. de haut) utilisé pour les vecteurs correspond à la base covariante (resp. à la base contravariante). Les composantes d'un tenseur exprimé dans la base covariante sont des composantes contravariantes indicées en haut et inversement.

À l'aide de l'équation (2.13), les vecteurs de la base contravariante s'écrivent :

$$\mathbf{g}^{1} = \frac{\tau y}{1 - \kappa x} \mathbf{e}_{t}(s) + \mathbf{e}_{n}(s) , \ \mathbf{g}^{2} = -\frac{\tau x}{1 - \kappa x} \mathbf{e}_{t}(s) + \mathbf{e}_{b}(s) , \ \mathbf{g}^{3} = \frac{1}{1 - \kappa x} \mathbf{e}_{t}(s).$$
(2.14)

Sous forme vectorielle, les vecteurs de l'équation (2.14) se réécrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{g}^{1} \\ \mathbf{g}^{2} \\ \mathbf{g}^{3} \end{cases} = \begin{bmatrix} J \end{bmatrix}^{-1} \begin{cases} \mathbf{e}_{n} \\ \mathbf{e}_{b} \\ \mathbf{e}_{t} \end{cases},$$
 (2.15)

où :

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\tau y}{1 - \kappa x} \\ 0 & 1 & \frac{-\tau x}{1 - \kappa x} \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 - \kappa x} \end{bmatrix}.$$
 (2.16)

Les composantes covariantes et contravariantes écrites dans la base de Serret-Frenet, qui est une base orthonormée, sont identiques. On note par la suite toute quantité écrite dans la base de Serret-Frenet par des indices en bas.

Les coefficients du tenseur métrique contravariant sont définis par le produit scalaire des vecteurs de la base contravariante comme suit :

$$g^{mn} = \mathbf{g}^m \cdot \mathbf{g}^n. \tag{2.17}$$

On remarque que le tenseur métrique contravariant est égal à l'inverse du tenseur métrique covariant, ce qui nous donne :

$$\mathbf{G} = \mathbf{g}^{-1} = [J]^{-1}[J]^{-T} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} g + (\tau y)^2 & -\tau^2 xy & \tau y \\ -\tau^2 xy & g + (\tau x)^2 & -\tau x \\ \tau y & -\tau x & 1 \end{bmatrix},$$
(2.18)

où  $g = (1 - \kappa x)^2$  est le déterminant du tenseur métrique covariant **g**.

#### 2.1.4 Symboles de Christoffel

Les symboles de Christoffel de second ordre  $\Gamma_{ij}^k$  sont définis par l'équation suivante (voir Annexe A) :

$$\Gamma_{ij}^k = \mathbf{g}_{i,j} \cdot \mathbf{g}^k. \tag{2.19}$$

En utilisant les formules de Serret-Frenet, les quantités de l'équation (2.19) deviennent :

$$\Gamma_{11}^{k} = \Gamma_{12}^{k} = \Gamma_{21}^{k} = \Gamma_{22}^{k} = 0 , \ \Gamma_{23}^{2} = \Gamma_{32}^{2} = \Gamma_{33}^{3} = \Gamma_{32}^{3} = 0 , \ \Gamma_{23}^{1} = \Gamma_{32}^{1} = -\tau , 
\Gamma_{33}^{1} = \frac{\kappa(\tau y)^{2}}{1 - \kappa x} + \kappa(1 - \kappa x) - \tau^{2}x , \ \Gamma_{33}^{2} = -\frac{\kappa\tau^{2}xy}{1 - \kappa x} - \tau^{2}y , \ \Gamma_{33}^{3} = \frac{\kappa\tau y}{1 - \kappa x} , 
\Gamma_{13}^{1} = \Gamma_{31}^{1} = -\frac{\kappa\tau y}{1 - \kappa x} , \ \Gamma_{13}^{2} = \Gamma_{31}^{2} = \frac{\kappa\tau x}{1 - \kappa x} + \tau , \ \Gamma_{13}^{3} = \Gamma_{31}^{3} = -\frac{\kappa}{1 - \kappa x}.$$
(2.20)

On peut montrer que les symboles de Christoffel peuvent être écrits seulement en fonction des coefficients du tenseur métrique de la manière suivante :

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kl} (g_{jl,i} + g_{il,j} + g_{ij,l}).$$
(2.21)

Puisque le tenseur métrique, donné par l'équation (2.12), ne dépend pas de la variable axiale s, on peut conclure que les symboles de Christoffel ne dépendent pas de s non plus. C'est bien ce que l'on obtient dans l'équation (2.20).

# 2.2 Formulation variationnelle

On considère un matériau élastique linéaire avec une dépendance harmonique en  $e^{-i\omega t}$ . La formulation variationnelle tridimensionnelle donnée par l'équation (1.41) s'écrit de la façon suivante :

$$\int_{V_0} \delta \boldsymbol{\epsilon} \colon \mathbf{C}_0 \colon \boldsymbol{\epsilon} \ dV_0 + \int_{V_0} \operatorname{tr}(\nabla_0 \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{u}^T) dV_0 - \omega^2 \int_{V_0} \rho_0 \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV_0 = 0, \qquad (2.22)$$

où  $\boldsymbol{\epsilon}$ ,  $\mathbf{C}_0$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\boldsymbol{\sigma}_0$  désignent respectivement le tenseur des déformations, le tenseur des modules d'élasticité, le vecteur des déplacements et le tenseur des précontraintes. Les opérateurs tr(·) et  $\nabla_0$  représentent respectivement la trace et le gradient calculés par rapport aux coordonnées de la configuration d'équilibre précontrainte.  $\rho_0$  et  $V_0$  désignent respectivement la masse volumique et le volume de la configuration d'équilibre précontrainte.

Dans cette section, on commence par développer les différentes quantités de la formulation variationnelle dans les bases covariante et contravariante. À l'aide des relations entre ces bases et la base de Serret-Frenet, on pourra écrire sous forme vectorielle la formulation variationnelle dans la base de Serret-Frenet, plus commode car orthonormée.

#### 2.2.1 Vecteur des déplacements

Les déplacements covariants n'ont pas nécessairement de sens physique puisqu'ils n'ont pas nécessairement la dimension d'une longueur.

En utilisant les transformations de l'équation (2.15), le vecteur des déplacements s'écrit comme suit :

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{g}^i = u_i (J^{-1})_{i\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}, \qquad (2.23)$$

où l'indice  $\alpha = n, b, t$  représente les composantes respectives selon  $\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b$  et  $\mathbf{e}_t$ .  $(J)_{i\alpha}$  et  $(J^{-1})_{i\alpha}$  désignent respectivement les composantes de la matrice [J] et  $[J]^{-1}$ .

En s'appuyant sur l'équation (2.23), le vecteur des déplacements s'écrit dans la base  $(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_t)$  comme suit :

$$\mathbf{u} = u_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha},\tag{2.24}$$

où les composantes du vecteur des déplacements sont données par :

$$u_{\alpha} = u_i (J^{-1})_{i\alpha}.$$
 (2.25)

L'équation (2.25) nous permet d'écrire la relation entre le vecteur des déplacements covariants et de Serret-Frenet comme suit :

$$\{u_{cov}\} = [J]^T \{u\},$$
(2.26)

où  $\{u_{cov}\} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^T$  et  $\{u\} = \begin{bmatrix} u_n & u_b & u_t \end{bmatrix}^T$  sont les vecteurs des déplacements respectivement covariants et de Serret-Frenet.

#### 2.2.2 Tenseur gradient de déplacement

Dans un système de coordonnées curvilignes, le tenseur gradient du vecteur des déplacements covariants est défini par (Annexe A) :

$$\nabla_0 \mathbf{u} = \gamma_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j, \qquad (2.27)$$

où  $\gamma_{ij}$  est donné par :

$$\gamma_{ij} = u_{i,j} - \Gamma^k_{ij} u_k. \tag{2.28}$$

On rappelle que les indices de bas (resp. de haut) dénotent les composantes covariantes (resp. contravariantes) par rapport à la base contravariante  $(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3)$  (resp. $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ ). La notation  $(\cdot)_{,i}$  (i = 1, 2, 3) est utilisée pour la dérivation respectivement selon x, y et s.

Le développement des coefficients de l'équation (2.28) nous permet d'écrire le vecteur des composantes covariantes du tenseur gradient de déplacement en fonction du vecteur

des déplacements covariants :

$$\{\gamma_{cov}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa \tau y}{1 - \kappa x} + \frac{\partial}{\partial s} & -(\tau + \frac{\kappa \tau x}{1 - \kappa x}) & \frac{\kappa}{1 - \kappa x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\tau}{1 - \kappa x} & -(\tau + \frac{\kappa \tau x}{1 - \kappa x}) & \frac{\kappa}{1 - \kappa x} + \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\kappa \tau y}{1 - \kappa x} & -(\tau + \frac{\kappa \tau x}{1 - \kappa x}) & \frac{\kappa}{1 - \kappa x} + \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\tau}{2} x - \frac{\kappa (\tau y)^2}{1 - \kappa x} - \kappa (1 - \kappa x) & \tau^2 y + \frac{\kappa \tau^2 x y}{1 - \kappa x} & -\frac{\kappa \tau y}{1 - \kappa x} + \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix}$$
(2.29)

où  $\{\gamma_{cov}\} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix}^{T}$  est le vecteur des composantes covariantes.

La substitution de l'équation (2.15) dans (2.27) nous permet d'écrire :

$$\nabla_0 \mathbf{u} = \gamma_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta, \tag{2.30}$$

où les coefficients  $\gamma_{\alpha\beta}$  sont donnés par :

$$\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{ij} (J^{-1})_{i\alpha} (J^{-1})_{j\beta}. \tag{2.31}$$

Afin de faciliter le passage de la base covariante à celle de Serret-Frenet, on introduit la matrice [Q] qui lie le vecteur des composantes de Serret-Frenet du tenseur gradient de déplacement au vecteur des composantes covariantes par la relation suivante :

$$\{\gamma\} = [Q]\{\gamma_{cov}\},\tag{2.32}$$

où  $\{\gamma\} = \begin{bmatrix} \gamma_{nn} & \gamma_{nb} & \gamma_{nt} & \gamma_{bn} & \gamma_{bb} & \gamma_{tn} & \gamma_{tb} & \gamma_{tt} \end{bmatrix}^T$  est le vecteur des composantes de Serret-Frenet. On montre que la matrice [Q], définie par l'équation (2.32), est donnée

par :

où  $\Lambda$ 

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\tau y}{\sqrt{g}} & \frac{-\tau x}{\sqrt{g}} & \frac{1}{\sqrt{g}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\tau y}{\sqrt{g}} & \frac{-\tau x}{\sqrt{g}} & \frac{1}{\sqrt{g}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\tau y}{\sqrt{g}} & \frac{-\tau x}{\sqrt{g}} & \frac{1}{\sqrt{g}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\tau y}{\sqrt{g}} & 0 & 0 & \frac{-\tau x}{\sqrt{g}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{g}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tau y}{\sqrt{g}} & 0 & 0 & \frac{-\tau x}{\sqrt{g}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{g}} & 0 \\ \frac{\tau^2 y^2}{g} & -\frac{\tau^2 x y}{g} & \frac{\tau y}{g} & -\frac{\tau^2 x y}{g} & \frac{\tau^2 x^2}{g} & -\frac{\tau x}{g} & \frac{\tau y}{g} & -\frac{\tau x}{g} & \frac{1}{g} \end{bmatrix}.$$
(2.33)

À partir de l'équation (2.26), (2.29), (2.32) et (2.33), le vecteur des composantes de Serret-Frenet du tenseur gradient de déplacement peut être exprimé en fonction du vecteur des déplacements de Serret-Frenet, ce qui nous donne finalement :

$$\{\gamma\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0\\ \Lambda + \frac{1}{1 - \kappa x} \partial/\partial s & -\frac{\tau}{1 - \kappa x} & \frac{\kappa}{1 - \kappa x}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ \frac{\tau}{1 - \kappa x} & \Lambda + \frac{1}{1 - \kappa x} \partial/\partial s & 0\\ \frac{\sigma}{1 - \kappa x} & \Lambda + \frac{1}{1 - \kappa x} \partial/\partial s & 0\\ -\frac{\kappa}{1 - \kappa x} & 0 & \Lambda + \frac{1}{1 - \kappa x} \partial/\partial s \end{bmatrix} \{u\}, \quad (2.34)$$

$$= \frac{\tau}{1 - \kappa x} (y\partial/\partial x - x\partial/\partial y).$$

2.2.3 Tenseur des déformations

Dans le système de coordonnées curvilignes, le tenseur des déformations s'écrit dans la base contravariante comme suit :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j. \tag{2.35}$$

La relation déformation-déplacement s'écrit sous forme tensorielle comme suit :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla_0 \mathbf{u} + \nabla_0 \mathbf{u}^T). \tag{2.36}$$

À partir des composantes du tenseur gradient du vecteur des déplacements, données par l'équation (2.28), les coefficients du tenseur des déformations s'écrivent dans la base contravariante sous la forme suivante :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \Gamma_{ij}^k u_k, \qquad (2.37)$$

où  $\epsilon_{ij}$  désignent les composantes covariantes du tenseur des déformations.

Le développement des quantités de l'équation (2.37) nous permet d'obtenir la relation entre le vecteur des déformations covariantes et le vecteur des déplacements covariants, donnée par l'équation suivante :

$$\{\epsilon_{cov}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial/\partial x}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ \tau^2 x - \frac{\kappa(\tau y)^2}{1 - \kappa x} - \kappa(1 - \kappa x) & \tau^2 y + \frac{\kappa \tau^2 x y}{1 - \kappa x} & -\frac{\kappa \tau y}{1 - \kappa x} + \frac{\partial}{\partial s}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ \frac{2\kappa \tau y}{1 - \kappa x} + \frac{\partial}{\partial s} & -2\tau - \frac{2\kappa \tau x}{1 - \kappa x} & \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2\kappa}{1 - \kappa x}\\ 2\tau & \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \{u_{cov}\}.$$

$$(2.38)$$

où  $\{\epsilon_{cov}\} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{22} & \epsilon_{33} & 2\epsilon_{12} & 2\epsilon_{13} & 2\epsilon_{23} \end{bmatrix}^T$  est le vecteur des composantes covariantes du tenseur des déformations.

La substitution de l'équation (2.15) dans l'équation (2.35) nous permet d'écrire le tenseur des déformations dans la base de Serret-Frenet :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_{\alpha\beta} \mathbf{e}_{\alpha} \otimes \mathbf{e}_{\beta}, \tag{2.39}$$

où les composantes de Serret-Frenet du tenseur des déformations sont liés aux composantes covariantes par :

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{ij} (J^{-1})_{i\alpha} (J^{-1})_{j\beta}. \tag{2.40}$$

Le vecteur des déformations covariantes est lié au vecteur des déformations de Serret-Frenet par l'équation suivante :

$$\{\epsilon\} = [P]\{\epsilon_{cov}\},\tag{2.41}$$

où  $\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \epsilon_{nn} & \epsilon_{bb} & \epsilon_{tt} & 2\epsilon_{nb} & 2\epsilon_{nt} & 2\epsilon_{bt} \end{bmatrix}^T$  est le vecteur des déformations de Serret-

Frenet. Tous calculs faits, la matrice [P], définie par l'équation (2.41), s'exprime ainsi :

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\tau y}{1 - \kappa x}\right)^2 & \left(\frac{\tau x}{1 - \kappa x}\right)^2 & \frac{1}{(1 - \kappa x)^2} & \frac{-\tau^2 x y}{(1 - \kappa x)^2} & \frac{\tau y}{(1 - \kappa x)^2} & \frac{-\tau x}{(1 - \kappa x)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\frac{\tau y}{1 - \kappa x} & 0 & 0 & \frac{-\tau x}{1 - \kappa x} & \frac{1}{1 - \kappa x} & 0 \\ 0 & -2\frac{\tau x}{1 - \kappa x} & 0 & \frac{\tau y}{1 - \kappa x} & 0 & \frac{1}{1 - \kappa x} \end{bmatrix}.$$

$$(2.42)$$

À partir de l'équation (2.26), (2.38), (2.41) et (2.42), le vecteur des déformations de Serret-Frenet s'écrit finalement en fonction du vecteur des déplacements de Serret-frenet comme suit :

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial/\partial x}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ \frac{-\kappa}{1-\kappa x} & 0 & \Lambda + \frac{1}{1-\kappa x} \frac{\partial}{\partial s}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ \Lambda + \frac{1}{1-\kappa x} \frac{\partial}{\partial s} & \frac{-\tau}{1-\kappa x} & \frac{\kappa}{1-\kappa x} + \frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\tau}{1-\kappa x} & \Lambda + \frac{1}{1-\kappa x} \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \{u\}.$$
(2.43)

#### 2.2.4 Loi de comportement

Les composantes du tenseur des modules d'élasticité  $C_0$  peuvent être exprimées dans la base covariante et pour un matériau isotrope par l'équation suivante (Chapelle and Bathe [2003]) :

$$C_0^{ijkl} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} g^{ij} g^{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)} (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}), \qquad (2.44)$$

où E est le module d'Young et  $\nu$  est le coefficient de Poisson.

Le tenseur des modules d'élasticité s'écrit dans la base covariante sous la forme suivante :

$$\mathbf{C}_0 = C_0^{ijkl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l.$$
(2.45)

En utilisant les transformations de l'équation (2.9), le tenseur des modules d'élasticité s'écrit dans la base  $(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_t)$  comme suit :

$$\mathbf{C}_0 = C_{0_{\alpha\beta\delta\gamma}} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\delta \otimes \mathbf{e}_\gamma, \qquad (2.46)$$

où les coefficients  $C_{0_{\alpha\beta\gamma\delta}}$  sont donnés par :

$$C_{0_{\alpha\beta\delta\gamma}} = C_0^{ijkl} J_{\alpha i} J_{\beta j} J_{\delta k} J_{\gamma l}.$$
(2.47)
En se basant sur les équations (2.44) et (2.46), les composantes du tenseur des modules d'élasticité dans la base ( $\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_t$ ) sont données par l'équation suivante :

$$C_{0_{\alpha\beta\delta\gamma}} = \left[\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}g^{ij}g^{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)}(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk})\right]J_{\alpha i}J_{\beta j}J_{\delta k}J_{\gamma l}.$$
 (2.48)

À partir de l'équation (2.18), les coefficients du tenseur métrique contravariant s'expriment par :

$$g^{ij} = (J^{-1})_{i\eta} (J^{-1})_{j\eta}.$$
(2.49)

Le développement des coefficients du tenseur métrique contravariant de l'équation (2.48), nous permet d'écrire :

$$C_{0_{\alpha\beta\delta\gamma}} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (J^{-1})_{i\eta} (J^{-1})_{k\zeta} (J^{-1})_{l\zeta} J_{\alpha i} J_{\beta j} J_{\delta k} J_{\gamma l} + \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ (J^{-1})_{i\eta} (J^{-1})_{k\eta} (J^{-1})_{j\zeta} (J^{-1})_{l\zeta} + (J^{-1})_{i\eta} (J^{-1})_{l\eta} (J^{-1})_{j\zeta} (J^{-1})_{k\zeta} \right] J_{\alpha i} J_{\beta j} J_{\delta k} J_{\gamma l}.$$

$$(2.50)$$

En regroupant deux à deux les termes du même indice latin, l'équation (2.50) devient :

$$C_{0_{\alpha\beta\delta\gamma}} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{\alpha\eta} \delta_{\beta\eta} \delta_{\delta\zeta} \delta_{\gamma\zeta} + \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \delta_{\alpha\eta} \delta_{\delta\eta} \delta_{\beta\zeta} \delta_{\gamma\zeta} + \delta_{\alpha\eta} \delta_{\gamma\eta} \delta_{\beta\zeta} \delta_{\delta\zeta} \right].$$
(2.51)

En simplifiant les quantités de l'équation (2.51), on obtient :

$$C_{0_{\alpha\beta\delta\gamma}} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\gamma} + \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}).$$
(2.52)

Pour un matériau isotrope, les coefficients du tenseur des modules d'élasticité de Serret-Frenet, exprimés par l'équation (2.52), sont bien identiques à ceux exprimés dans une base cartésienne, car la base de Serret-Frenet ( $\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_t$ ) est une base orthonormée. Le vecteur des contraintes { $\sigma$ } est lié au vecteur des déformations { $\epsilon$ } par l'intermédiaire de la matrice [ $C_0$ ], ce qui permet ainsi d'écrire :

$$\{\sigma\} = [C_0]\{\epsilon\},\tag{2.53}$$

où  $\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_{nn} & \sigma_{bb} & \sigma_{tt} & \sigma_{nb} & \sigma_{nt} & \sigma_{bt} \end{bmatrix}^T$  et  $[C_0]$  est définie par :

$$[C_0] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}.$$
 (2.54)

#### 2.2.5 Tenseur des précontraintes

On suppose dans ce chapitre que l'état précontraint statique de la structure est connu et donné dans la base de Serret-Frenet. La détermination de cet état précontraint sera détaillée au chapitre 3. Le tenseur des précontraintes de Cauchy s'écrit dans la base  $(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_t)$  sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \sigma_{0_{\alpha\beta}} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta. \tag{2.55}$$

## 2.2.6 Formulation variationnelle dans la base de Serret-Frenet

Le premier terme de la formulation variationnelle, donnée par l'équation (2.22), s'écrit en notation indicielle :

$$\delta \boldsymbol{\epsilon} \colon \mathbf{C}_0 \colon \boldsymbol{\epsilon} = \delta \epsilon_{\alpha\beta} C_{0_{\alpha\beta\delta\gamma}} \epsilon_{\delta\gamma}. \tag{2.56}$$

Sous forme vectorielle, l'équation (2.56) devient :

$$\delta \boldsymbol{\epsilon} \colon \mathbf{C}_0 \colon \boldsymbol{\epsilon} = \{\delta \boldsymbol{\epsilon}\}^T [C_0] \{\boldsymbol{\epsilon}\}.$$
(2.57)

Le deuxième terme de la formulation variationnelle s'écrit sous forme indicielle comme suit :

$$\operatorname{tr}(\nabla_0 \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{u}^T) = \delta \gamma_{\alpha\beta} \sigma_{0_{\beta\delta}} \gamma_{\alpha\delta}.$$
(2.58)

Sous forme vectorielle, l'équation (2.58) devient :

$$\operatorname{tr}(\nabla_0 \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot (\nabla_0 \mathbf{u})^T) = \{\delta\gamma\}^T [\boldsymbol{\sigma}_0]\{\gamma\}, \qquad (2.59)$$

où la matrice des précontraintes  $[\sigma_0]$  est définie comme suit :

$$[\sigma_0] = \begin{bmatrix} \sigma_{0_{nn}} & \sigma_{0_{nb}} & \sigma_{0_{nt}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{0_{bn}} & \sigma_{0_{bb}} & \sigma_{0_{bt}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{0_{tn}} & \sigma_{0_{tb}} & \sigma_{0_{tt}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{0_{nn}} & \sigma_{0_{nb}} & \sigma_{0_{nt}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{0_{bn}} & \sigma_{0_{bb}} & \sigma_{0_{bt}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{0_{tn}} & \sigma_{0_{tb}} & \sigma_{0_{tt}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{0_{nn}} & \sigma_{0_{nb}} & \sigma_{0_{nt}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{0_{nn}} & \sigma_{0_{nb}} & \sigma_{0_{nt}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{0_{nn}} & \sigma_{0_{bb}} & \sigma_{0_{tt}} \end{bmatrix} .$$

Le troisième terme de la formulation variationnelle s'écrit en notation indicielle comme suit :

$$\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \delta u_{\alpha} u_{\alpha}. \tag{2.61}$$

En notation vectorielle, l'équation (2.61) s'écrit sous cette forme :

$$\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \{\delta u\}^T \{u\}. \tag{2.62}$$

En substituant l'équation (2.57), (2.59) et (2.62) dans l'équation (2.22), la formulation variationnelle tridimensionnelle de la dynamique des stuctures hélicoïdales autour d'un état précontraint statique s'écrit de la façon suivante :

$$\int_{V_0} \{\delta\epsilon\}^T [C_0] \{\epsilon\} \sqrt{g} dx dy ds + \int_{V_0} \{\delta\gamma\}^T [\sigma_0] \{\gamma\} \sqrt{g} dx dy ds - \omega^2 \int_{V_0} \rho_0 \{\delta u\}^T \{u\} \sqrt{g} dx dy ds = 0.$$
(2.63)

L'apparition de la constante  $\sqrt{g}$  dans le volume d'intégration de la formulation variationnelle est due à l'écriture de l'élément de volume dans un système de coordonnées curvilignes. Cet élément de volume est égal à :

$$dV_0 = |\mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \wedge \mathbf{g}_3)| dx dy ds, \qquad (2.64)$$

où  $|\mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \wedge \mathbf{g}_3)| = \sqrt{g} = det[J]$  (voir Annexe A, Wempner [1981], Chapelle and Bathe [2003]).

# 2.3 Invariance par translation

Considérons une structure tridimensionnelle élancée de section quelconque et d'axe non nécessairement droit. Pour réduire la formulation tridimensionnelle à un problème posé sur la section, le problème doit être invariant par translation dans le système de coordonnées considéré. Pour cela, on doit satisfaire une invariance géométrique, matérielle et du système de coordonnées, que l'on définit ci-dessous.

#### 2.3.1 Invariance géométrique

Une structure élancée est dite invariante géométriquement si on retrouve la même section normale à la direction d'élancement en se déplaçant le long de cette direction dans un système de coordonnées approprié. Pour une structure hélicoïdale de section circulaire et dans le système de coordonnées de Serret-Frenet, la section circulaire est maintenue constante le long de l'hélice pour l'application étudiée dans ce travail. La Figure.2.2 représente la section normale à l'axe hélicoïdal pour différentes positions le long d'un pas d'hélice. On peut donc dire qu'un guide hélicoïdal de section circulaire est invariant géométriquement dans son système de coordonnées hélicoïdales.

#### 2.3.2 Invariance matérielle

Une structure élancée est dite invariante matériellement si on retrouve les mêmes propriétés du matériau en se déplaçant le long de la direction d'élancement dans un système de coordonnées approprié. Pour un matériau homogène et isotrope, les propriétés



FIG. 2.2 – Sections circulaires d'un brin hélicoïdal le long d'un pas d'hélice

du matériau sont les mêmes en tout point de la structure et dans toutes les directions. Donc, l'invariance matérielle est nécessairement vérifiée dans ce cas.

#### 2.3.3 Invariance du système de coordonnées

La troisième condition d'invariance est liée au système de coordonnées. Pour satisfaire l'invariance du système de coordonnées, il suffit de vérifier la non dépendance en s (variable axiale) des coefficients des opérateurs différentiels mis en jeu dans les équations d'équilibre. Cette condition est satisfaite si les symboles de Christoffel ne dépendent pas de s, puisque les opérateurs différentiels s'écrivent en fonction des symboles de Christoffel. Or à partir de l'équation (2.21), on a pu montrer que les symboles de Christoffel s'écrivent seulement en fonction des coefficients du tenseur métrique. L'indépendance en s du tenseur métrique **g** suffit donc pour satisfaire l'invariance du système de coordonnées. Cette indépendance est bien vérifiée pour un système de coordonnées hélicoïdales (voir équations (2.12) et (2.20)).

# 2.4 Système de coordonnées tournant

Dans les paragraphes précédents, les opérateurs différentiels ont été développés dans le système de coordonnées hélicoïdales. Dans cette section, on définit un cas particulier du système de coordonnées hélicoïdales ayant une courbure nulle ( $\kappa = 0$ ).

En annulant la courbure dans l'équation (2.3) et à partir de la définition de la longueur

curviligne, donnée par l'équation (2.2) on obtient :

$$R = 0, l = L. (2.65)$$

En remplaçant la longueur l par L dans la deuxième égalité de l'équation (2.3), la torsion de la base tournante devient :

$$\tau = 2\pi/L. \tag{2.66}$$

Ce système de coordoonnées hélicoïdales de courbure nulle correspond à un système de coordoonnées tournant autour de l'axe Z avec une périodicité axiale égale à L. Le plan (x, y), tournant autour de l'axe Z, reste parallèle au plan (X, Y). Dans un système hélicoïdal, la variable axiale Z correspond à la projection de la variable curviligne s sur l'axe Z. Dans la base tournante, les deux variables axiales Z et s deviennent identiques  $(s \equiv Z)$ .

On note par  $(\mathbf{e}_{nt}, \mathbf{e}_{bt}, \mathbf{e}_Z)$  la base tournante. En remplaçant l par L, R par zéro et s par Z dans l'équation (2.6), les vecteurs de la base tournante s'écrivent en fonction des vecteurs de la base cartésienne  $\mathbf{e}_X$ ,  $\mathbf{e}_Y$  et  $\mathbf{e}_Z$  comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{nt} \\ \mathbf{e}_{bt} \\ \mathbf{e}_{Z} \end{cases} = \begin{bmatrix} -\cos(2\pi Z/L + \theta) & -\sin(2\pi Z/L + \theta) & 0 \\ \sin(2\pi Z/L + \theta) & -\cos(2\pi Z/L + \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} \mathbf{e}_{X} \\ \mathbf{e}_{Y} \\ \mathbf{e}_{Z} \end{cases} .$$
 (2.67)

#### 2.4.1 Invariance pour un brin hélicoïdal seul

Soit un brin hélicoïdal seul d'angle d'hélice  $\Phi$ , de rayon R et de pas L et constitué d'un matériau homogène et isotrope. L'angle  $\Phi$ , donné par rapport à l'axe Z, est calculé à partir de l'équation suivante :

$$\tan\Phi = \frac{2\pi R}{L}.\tag{2.68}$$

Dans la section 2.3, on a pu montrer l'invariance du système de coordonnées hélicoïdales. Puisque la base tournante est un cas particulier de la base hélicoïdale, alors le système de coordonnées tournant est forcément invariant. L'invariance matérielle est aussi vérifiée puisque le matériau est supposé homogène et isotrope. Pour satisfaire complètement l'invariance par translation dans le système de coordonnées tournant, il ne reste qu'à vérifier l'invariance géométrique. Si on effectue deux coupes normales à l'axe Z d'un brin hélicoïdal, de positions axiales respectives  $Z_1$  et  $Z_2$ , on obtient la même section pour les deux coupes à une rotation près de  $2\pi(Z_2 - Z_1)/L$  dans un plan cartésien. Or, le plan (x, y) de la base tournante tourne d'une même rotation, si bien que la section reste fixe dans ce plan. Un brin hélicoïdal seul est donc invariant par translation dans le système de coordonnées tournante. La figure 2.3 représente la section normale à  $\mathbf{e}_Z$  de quatre brins hélicoïdaux de rayon d'hélice R = 2a et d'angle  $\Phi$  respectifs de 10°, 30°, 50° et 70°, où R et a représentent respectivement les rayons de l'hélice et du brin. Pour un angle  $\Phi$  faible, la section est quasicirculaire puisque la structure se rapproche du cylindre (Fig.2.3 a). La section devient de plus en plus éloignée d'une section circulaire au fur et à mesure que  $\Phi$  augmente.



FIG. 2.3 – Sections d'un brin hélicoïdal normale à l'axe  $\mathbf{e}_Z$  pour R = 2a et : (a)  $\Phi = 10^{\circ}$ , (b)  $\Phi = 30^{\circ}$ , (c)  $\Phi = 50^{\circ}$ , (d)  $\Phi = 70^{\circ}$ 

#### 2.4.2 Invariance pour une structure multi-brins hélicoïdale

On désigne par structure multi-brins hélicoïdale toute structure constituée d'un empilement de couches de brins hélicoïdaux, éventuellement enroulés autour d'un brin broit. Un toron à sept brins est un cas particulier de structure multi-brins hélicoïdale, ayant une couche de six brins hélicoïdaux enroulés autour d'un brin droit.

Soit un toron à sept brins constitué d'un matériau homogène et isotrope. Les invariances matérielle et du système de coordonnées tournant étant vérifiées, il nous reste à justifier l'invariance géométrique du toron dans ce système.

Dans la section 2.4.1, on a pu montrer l'invariance géométrique d'un brin seul hélicoïdal dans le système de coordonnées tournant. Puisque un toron à sept brins est constitué d'une couche de six brins hélicoïdaux de même angle et rayon d'hélice, alors l'ensemle de cette couche est invariante géométriquement. Un brin circulaire droit d'axe Z est aussi invariant

géométriquement dans le système de coordonnées tournant, puisque la section normale à l'axe est circulaire et centrée à l'origine. Elle reste donc fixe dans le repère cartésien comme dans le repère tournant. On peut conclure qu'un toron à sept brins est invariant par translation dans le système de coordonnées tournant.

La figure 2.4 représente la section normale à l'axe Z d'un toron de rayon de brin central a, de rayon d'hélice R = 1.967a et d'angle d'hélice  $\Phi = 7.9^{\circ}$ . La section du brin central, qui est un brin droit, est circulaire. Les sections des brins périphériques hélicoïdaux ne sont pas circulaires puisque le plan de coupe n'est pas normal aux hélices de chaque brin hélicoïdal. À l'oeil nu, ces sections semblent circulaires sur la figure car l'angle d'hélice est faible et on se rapproche du cylindre.

Notons que le rayon des brins périphériques (a' = 0.967a) doit être légèrement inférieur au rayon du brin central afin de ne pas avoir d'interpénétration entre deux brins périphériques adjacents. Ce rayon de brin périphérique doit diminuer avec l'augmentation de l'angle d'hélice.



FIG. 2.4 – Section d'un toron à sept brins

## 2.4.3 Paramétrage de la section

Avec le système de coordonnées tournant, il faut veiller au bon paramétrage de l'enveloppe de la section, qui n'est pas circulaire pour un brin hélicoïdal (le plan de coupe n'étant pas normal à l'axe du brin). Le but de ce paragraphe est de déterminer la section de coupe d'un brin hélicoïdal dans le plan Z = 0.

En remplaçant les vecteurs de la base de Serret-Frenet, donnés par l'équation (2.6),

dans l'équation (2.7), on obtient :

$$\begin{cases} X = (R - x)\cos(\frac{2\pi}{l}s + \theta) + y\frac{L}{l}\sin(\frac{2\pi}{l}s + \theta) \\ Y = (R - x)\sin(\frac{2\pi}{l}s + \theta) - y\frac{L}{l}\cos(\frac{2\pi}{l}s + \theta) \\ Z = \frac{L}{l}s + y\frac{2\pi R}{l} \end{cases}$$
(2.69)

Pour Z = 0, la troisième égalité de l'équation (2.69) devient :

$$s = -\frac{2\pi R}{L}.$$
(2.70)

Dans le système de coordonnées hélicoïdales, l'enveloppe de la section est circulaire de rayon a et est donné par :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, \tag{2.71}$$

où  $t \in [0; 2\pi]$ .

L'enveloppe de la section de l'hélice dans le plan Z = 0 est donc paramétrée par :

$$\begin{cases} X(t) = (R - a\cos t)\cos\left(-\frac{4\pi^2 R}{lL}a\sin t + \theta\right) + \frac{L}{l}a\sin t\sin\left(-\frac{4\pi^2 R}{lL}a\sin t + \theta\right) \\ Y(t) = (R - a\cos t)\sin\left(-\frac{4\pi^2 R}{lL}a\sin t + \theta\right) + \frac{L}{l}a\sin t\cos\left(-\frac{4\pi^2 R}{lL}a\sin t + \theta\right) \end{cases}$$

$$(2.72)$$

Ce paramétrage est utilisé pour le tracé des sections sur les figures 2.3 et 2.4.

# Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons reécrit la formulation variationnelle de l'élastodynamique autour d'un état précontraint statique dans un système de coordonnées hélicoïdales. À partir du paramétrage de l'hélice, nous avons défini la base de Serret-Frenet associée ainsi que les bases covariante et contravariante. Nous avons commencé par développer toutes les quantités de la formulation variationnelle dans les bases covariantes et contravariantes. Puis nous avons exprimé la formulation variationnelle dans la base de Serret-Frenet.

Nous avons aussi introduit la notion d'invariance par translation, qui regroupe l'invariance géométrique, matérielle et du système de coordonnées. Nous avons montré que cette invariance par translation existe pour le cas d'un brin hélicoïdal seul dans le système de coordonnées hélicoïdales et dans le système tournant. Pour le toron à sept brins, l'invariance par translation n'existe que dans le système tournant, qui satisfait l'invariance à la fois pour le brin central droit et les brins périphériques hélicoïdaux. Dans les chapitres 3 et 4, nous allons utiliser cette propriété d'invariance pour ramener sur la section le calcul de l'état précontraint ainsi que celui des modes de propagation.

# Chapitre 3

# Calcul de l'état précontraint (statique)

# Sommaire

Introducti	ion	38
3.1 Repè	ères bibliographiques	38
3.2 Hom	ogénéisation hélicoïdale	39
3.2.1	Le problème d'élasticité 3D initial	40
3.2.2	Mise en oeuvre de la méthode des développements asymptotiques	42
3.2.3	Les problèmes microscopiques	43
3.2.4	Le problème macroscopique	46
3.2.5	Bilan	46
3.2.6	Cas d'une sollicitation macroscopique homogène	47
3.3 Form	nulation variationnelle	48
3.4 Disci	rétisation par éléments finis	49
3.4.1	Résolution du problème microscopique	49
3.4.2	Post-traitement : calcul des efforts et moments résultants	49
Conclusio	n	51

# Introduction

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes intéressés à la dynamique des structures hélicoïdales autour d'un état d'équilibre statique précontraint qui est supposé connu. L'objet de ce chapitre est de présenter une méthode qui permet de calculer cet état précontraint dans une structure hélicoïdale soumise à une déformation imposée grâce à la résolution d'un problème 2D. Nous partons des équations d'élasticité 3D. Pour simplifier, nous nous limiterons à l'hypothèse de petits déplacements. Les différents opérateurs utilisés dans ces équations ont été écrits dans le système de coordonnées hélicoïdales dans le chapitre 2. En se basant sur la méthode des développements asymptotiques et en exploitant la propriété d'invariance par translation dans le système de coordonnées tournant, cette méthode appelée homogénéisation hélicoïdale permet de réduire le problème à un problème 2D posé sur la section de la structure. Quelques repères bibliographiques sont tout d'abord présentés.

# 3.1 Repères bibliographiques

Le comportement des structures hélicoïdales soumises à une déformation a été largement étudié. On peut citer par exemple les travaux de Ancker and Goodier [1958] et Wahl [1963] où un modèle analytique a été proposé en considérant le ressort comme une poutre d'Euler-Bernoulli avec un facteur de correction de courbure. Afin d'étudier les structures hélicoïdales de géométrie plus complexe, des modèles numériques ont été développés. Un modèle éléments finis tridimensionnel linéaire a été développé en considérant une longueur finie de toron à sept brins pour calculer la réponse à une sollicitation macroscopique donnée. Parmi ces travaux, on peut citer par exemple Ghoreishi et al. [2007] où le comportement global d'un toron à sept brins soumis à une déformation axiale (traction et torsion), en petites déformations et pour différents angles d'hélice de  $2.5^{\circ}$ à 35°, a été étudié. Une approximation elliptique de la géométrie de la section des brins périphériques a été utilisée. Dans cette référence il est montré que la modélisation de deux pas de toron suffit pour rendre négligeables les effets de bords et obtenir le comportement avec un modèle éléments finis linéaire qui reste valide pour des angles d'hélice inférieurs à 20°. La modélisation de deux pas d'un toron à sept brins nécessite cependant un temps de calcul important. De plus, l'étape de génération de maillage est difficile à automatiser. Afin de réduire le coût de calcul, un modèle éléments finis tridimensionnel linéaire a été développé sur un pas du toron. Parmi ces travaux, on peut citer ceux de Cartraud and Messager [2006] où la réduction du modèle sur un pas est réalisée en tenant compte des propriétés de périodicité axiale en utilisant la théorie de l'homogénéisation périodique. Cette méthode permet en effet de calculer le comportement global de la structure à partir de la résolution de problèmes sur une période, qui correspond dans ce cas à la période axiale. L'approximation elliptique de la section des brins hélicoïdaux a été aussi considérée. Le coût de calcul est divisé par deux par rapport à la méthode classique mais il reste important. Afin de réduire encore ce coût, des modèles éléments finis ont été développés sur une tranche de la structure, avec des éléments volumiques. Dans ce cadre, on peut citer Jiang and Henshall [2000] qui réduisent le modèle sur une tranche grâce à des conditions aux limites obtenues par des considérations géométriques. Messager and Cartraud [2008] ont aussi proposé un modèle éléments finis réduit sur une tranche à partir de la théorie d'homogénéisation. L'approche est différente de celle de l'article de Jiang and Henshall [2000] mais conduit aussi à des relations entre les déplacements des noeuds situés sur les deux faces de la tranche, qui expriment dans ce cas la symétrie hélicoïdale. La réduction de la modélisation sur une tranche permet de réduire énormément les calculs de l'état statique d'une structure hélicoïdale.

Cependant, grâce à l'invariance par translation, on peut prendre en compte cette symétrie de façon plus efficace et se ramener à l'étude d'un modèle 2D. Dans ce chapitre nous présenterons une technique d'homogénéisation hélicoïdale qui permet de réduire le modèle à un modèle en deux dimensions sur la section réelle de la structure hélicoïdale.

# 3.2 Homogénéisation hélicoïdale

La théorie de l'homogénéisation est une méthode puissante, puisqu'elle peut être appliquée pour des structures de géométrie générale et d'hétérogénéité arbitraire. Dans cette section, nous nous intéressons à l'étude du comportement des structures hélicoïdales, d'où l'appellation d'homogénéisation hélicoïdale. Cette méthode va permettre l'exploitation de l'invariance par translation. Ceci a été prouvé, dans la section 2.3, pour un brin hélicoïdal seul dans les systèmes de coordonnées hélicoïdales et tournant. En revanche, cette invariance n'est vérifiée que dans le système de coordonnées tournant pour les structures multi-brins.

Par la suite, seul le système de coordonnées tournant sera considéré et l'homogénéisation hélicoïdale sera définie dans ce système. Par commodité, nous pourrons conserver toutefois les notations et expressions générales du chapitre précédent, obtenues dans le système de coordonnées hélicoïdales. Dans toutes les expressions de ce chapitre, il faudra donc considérer le cas échéant que :

$$s = Z, \ \kappa = 0, \ \tau = \frac{2\pi}{L}, \ (.)_t = (.)_Z.$$
 (3.1)

En particulier,  $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_Z$  (et on aura aussi  $\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_{nt}$  et  $\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_{bt}$ ).

La méthode d'homogénéisation hélicoïdale est basée sur un développement asymptotique. Cette technique est appliquée pour le cas d'un brin hélicoïdal seul et d'un toron à sept brins dans le système de coordonnées tournant. On désigne par structure hélicoïdale toute structure hélicoïdale mono-brin et multi-brins. Nous présentons ci-après les étapes successives de la méthode d'homogénéisation hélicoïdale.

#### 3.2.1 Le problème d'élasticité 3D initial

Le point de départ de l'approche est le problème d'élasticité posé sur un domaine 3D. On considère une structure hélicoïdale de longueur H et de section  $S^{\epsilon}$  dans le plan Z = H. Pour des simplifications ultérieures, on néglige les forces volumiques et surfaciques sur le contour latéral  $\Gamma^{\epsilon}$  et on suppose que le matériau est isotrope (cette propriété d'isotropie assure l'invariance matérielle par translation). Cette structure occupe la configuration  $\Omega^{\epsilon} = S^{\epsilon} \times [0, H]$  dans le système de coordonnées tournant (voir Figs. 3.1 ou 3.2). Elle possède un petit paramètre géométrique  $\epsilon$ , défini par le rapport entre le diamètre de la section  $S^{\epsilon}$  et la longueur de la structure H. Les limites de  $\Omega^{\epsilon}$  sont définies par  $\partial \Omega^{\epsilon} = \Gamma^{\epsilon} \bigcup \Gamma^{\epsilon}_{Z=0} \bigcup \Gamma^{\epsilon}_{Z=H}$ , où  $\Gamma^{\epsilon}_{Z=0} = S^{\epsilon} \times \{0\}$  et  $\Gamma^{\epsilon}_{Z=0} = S^{\epsilon} \times \{H\}$  sont les sections extrémités de la structure et  $\Gamma^{\epsilon} = \partial S^{\epsilon} \times ]0, H[$  est la surface latérale. Cette surface latérale est supposée libre d'efforts. Dans ce travail, l'état précontraint résulte de l'application de sollicitations sur les sections extrêmes de la structure. On suppose que celles-ci sont caractérisées par leur torseur résultant sur la section. On écrira donc les conditions aux limites sur  $\Gamma^{\epsilon}_{Z=0}$  et  $\Gamma^{\epsilon}_{Z=H}$  sous la forme :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^{\epsilon} \cdot (-\mathbf{e}_{Z}) = \mathbf{t}^{0} \quad sur \quad \Gamma_{0}^{\epsilon} \\ \boldsymbol{\sigma}^{\epsilon} \cdot \mathbf{e}_{Z} = \mathbf{t}^{H} \quad sur \quad \Gamma_{H}^{\epsilon} \end{cases},$$
(3.2)

avec  $\mathbf{t}^0$  et  $\mathbf{t}^H$  qui ne sont pas définis dans le détail mais tels que la donnée du problème est connue sous la forme des torseurs  $({T}, {M})$  en 0 et H avec :

$$\begin{cases} \{T\}^0 = \int_S \mathbf{t}^0 dS \\ \{M\}^0 = \int_S \mathbf{OP} \wedge \mathbf{t}^0 dS \end{cases}, \tag{3.3}$$

 $\operatorname{et}$ 

$$\begin{cases} \{T\}^{H} = \int_{S} \mathbf{t}^{H} dS \\ \{M\}^{H} = \int_{S} \mathbf{OP} \wedge \mathbf{t}^{H} dS \end{cases},$$
(3.4)

où **OP** est le vecteur position de la surface élémentaire dS.

Puisqu'aucune condition aux limites cinématique n'est appliquée à la structure, le problème d'élasticité admet une solution à condition que l'équilibre global soit vérifié, ce qui impose :

$$\begin{cases} \{T\}^0 + \{T\}^H = \{0\} \\ \{M\}^0 + \{M\}^H + H \ \mathbf{e}_Z \wedge \{T\}^H = \{0\} \end{cases}$$
(3.5)

On fait ici une présentation relativement générale mais on ne s'intéressera qu'à des sollicitations axiales (chargement en traction-torsion) dans le cadre de ce chapitre.

Pour exprimer la dépendance du problème au petit paramètre  $\epsilon$ , les différentes inconnues seront notées avec un exposant  $\epsilon$ .



FIG. 3.1 – Structure hélicoïdale de section circulaire

Pour une structure hélicoïdale mono-brins (figure 3.1), le problème d'élasticité linéaire tridimensionnel consiste à déterminer  $\sigma^{\epsilon}$ ,  $\epsilon^{\epsilon}$  et  $\mathbf{u}^{\epsilon}$ , solution de :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\epsilon} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\sigma}^{\epsilon} = \mathbf{C}^{\epsilon} : \boldsymbol{\epsilon}^{\epsilon}(\mathbf{u}^{\epsilon}) \\ \boldsymbol{\epsilon}^{\epsilon}(\mathbf{u}^{\epsilon}) = \nabla^{s}(\mathbf{u}^{\epsilon}) \\ \boldsymbol{\sigma}^{\epsilon} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{0} \quad sur \quad \Gamma^{\epsilon} \end{cases}$$
(3.6)

où  $\mathbf{C}^{\epsilon}$  correspond au tenseur des modules d'élasticité. Notons que l'hypothèse des petits déplacements, utilisée dans ce chapitre, permet de confondre les configurations de référence  $C_{ref}$  et déformée  $C_0$  si bien que les indices  $(.)_{ref}$  et  $(.)_0$  sont omis afin de ne pas surcharger les notations.  $\nabla^s(\cdot)$  et  $\nabla \cdot (\cdot)$  désignent respectivement la partie symétrique du tenseur gradient (opérateur de déformation) et l'opérateur divergence.

Outre les équations données dans (3.6),  $\sigma^{\epsilon}$ ,  $\epsilon^{\epsilon}$  et  $\mathbf{u}^{\epsilon}$  doivent vérifier les conditions aux limites sur les sections extrêmes, définies de façon globale par les équations (3.2), (3.3) et (3.4).

Pour un toron à sept brins (figure 3.2), on a ces équations  $(3.6)_{1-4}$  sur chacun des sept brins plus des équations exprimant le contact parfait entre les brins sur chaque ligne de contact. En tout point de la ligne de contact hélicoïdale entre le brin central et les brins périphériques, on impose la continuité du déplacement ( $\mathbf{u}_c = \mathbf{u}_p$ ) et la continuité de la contrainte normale ( $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})_c^+ + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})_p^- = 0$ ), où les indices c et p sont relatifs aux brin central et aux brins périphériques. Cette hypothèse de contact parfait n'est pas restrictive pour un chargement axial (traction et torsion). En effet, dans Ghoreishi et al. [2007], il est montré que le comportement global d'un toron à sept brins est très peu sensible aux hypothèses sur le contact. En revanche, les sollicitations de flexion ont tendance à produire des mouvements relatifs dans le toron, et dans ce cas le contact parfait est une hypothèse forte.



FIG. 3.2 – Toron à sept brins

La solution de ce problème fournit l'état précontraint du système que nous cherchons à déterminer. Comme indiqué auparavant, ce problème est coûteux à résoudre sous cette forme, et la méthode d'homogénéisation vise à le simplifier.

# 3.2.2 Mise en oeuvre de la méthode des développements asymptotiques

Les principes de la méthode des développements asymptotiques sont présentés dans l'ouvrage de Sanchez-Hubert and Sanchez-Palencia [1992]. L'exposé qui suit reprend la démarche exposée dans Buannic and Cartraud [2000] pour des structures élancées invariantes axialement. Il faut noter cependant que les développements présentés dans ces références doivent être repris pour les adapter au cas des structures à symétrie hélicoïdale.

La première étape consiste à définir le problème équivalent à (3.6), mais maintenant posé sur un domaine fixe qui ne dépend pas du petit paramètre  $\epsilon$ . On introduit par la suite le changement de variables suivant pour tenir compte de l'élancement de la structure :

$$(x, y, z) = (x, y, \epsilon Z). \tag{3.7}$$

 $z = \epsilon Z$  représente l'échelle lente ou macroscopique 1D du problème et x, y sont les variables rapides ou microscopiques 2D. On rappelle que (x, y, Z) sont les coordonnées associées au système tournant.

En introduisant le changement de variables de l'équation (3.7), les opérateurs  $\nabla^s$  et  $\nabla \cdot$  deviennent :

$$\begin{cases} \nabla^s(.) = \nabla^s_{\perp}(.) + \epsilon \nabla^s_z(.) \\ \nabla \cdot (.) = \nabla_{\perp} \cdot (.) + \epsilon \nabla_z \cdot (.) \end{cases},$$
(3.8)

où  $\nabla_z^s(.)$  et  $\nabla_z^s \cdot (.)$  correspondent aux opérateurs qui mettent en jeu une dérivation partielle par rapport à la variable macroscopique z.  $\nabla_{\perp}^s(.)$ ,  $\nabla_{\perp}^s \cdot (.)$  désignent les opérateurs complémentaires, incluant les dérivations par rapport aux variables microscopiques x et y.

Les modules d'élasticité  $C_{ijkl}^{\epsilon}$  sont supposés indépendants de  $\epsilon$ , ceci permet d'écrire :

$$\mathbf{C}^{\epsilon} = \mathbf{C}.\tag{3.9}$$

L'étape suivante consiste à supposer que la solution du problème s'écrit sous la forme d'un développement asymptotique :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^0(z) + \epsilon \mathbf{u}^1(x, y, z) + \epsilon^2 \mathbf{u}^2(x, y, z) + \dots$$
(3.10)

où  $\mathbf{u}^0(z) = u_X^0(z)\mathbf{e}_X + u_Y^0(z)\mathbf{e}_Y$  dans le repère cartésien. Transformée dans le repère hélicoïdal, on montre que cette expression revêt la forme suivante :  $\mathbf{u}^0(z) = u_n^0(z)\mathbf{e}_n + u_b^0(z)\mathbf{e}_b$ .

Le terme d'ordre 0 du développement ne dépend pas des variables microscopiques (x, y) – voir Sanchez-Hubert and Sanchez-Palencia [1992]. De plus, il ne comprend pas de composante axiale. Celle-ci apparaît à l'ordre suivant ce qui traduit que la structure à l'échelle macroscopique est plus souple en flexion qu'en traction-compression. Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse à des précontraintes issues d'un chargement axial (traction-torsion), donc sans flexion globale. Ceci entraîne la nullité de ce terme d'ordre  $0: \mathbf{u}^0(z) = \mathbf{0}$ .

À partir des équations (3.7)-(3.10), en regroupant les termes selon la puissance de  $\epsilon$  et en traitant les coordonnées z et  $\{x, y\}$  comme des coordonnées indépendantes, on obtient une série de problèmes microscopiques 2D posés sur la section S qui est la transformée de  $S^{\epsilon}$  après changement de variables. Cette succession de problèmes sera notée  $P_{2D}^{m}$ , où l'indice m désigne l'ordre du problème récursif relatif à  $\epsilon$ . Dans un deuxième temps, une série de problèmes macroscopiques 1D sera également obtenue.

#### 3.2.3 Les problèmes microscopiques

La formulation du problème  $P_{2D}^m$  est obtenue pour un exposant m qui commence à partir de 0 dans l'équation d'équilibre. Le premier problème  $P_{2D}^0$  est le suivant :

$$\begin{cases} \nabla_{\perp} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{0} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}^{0} = \mathbf{C} \colon \boldsymbol{\epsilon}^{0} \\ \boldsymbol{\epsilon}^{0} = \nabla_{\perp}^{s} (\mathbf{u}^{1}) \\ \boldsymbol{\sigma}^{0} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad sur \quad \partial S \end{cases}$$

$$(3.11)$$

Le problème (3.11) est bien posé et admet une solution unique à un mouvement de corps rigide près (Sanchez-Hubert and Sanchez-Palencia [1992], Buannic and Cartraud [2000]). La solution unique est trivialement la solution nulle. Le mouvement de corps rigide est caractérisé par la solution homogène  $\nabla^s_{\perp}(\mathbf{u}^1) = \mathbf{0}$ , exprimée dans le repère

cartésien sous la forme  $\mathbf{u}^1 = u_Z^1(z)\mathbf{e}_Z + \varphi^1(z)[X\mathbf{e}_Y - Y\mathbf{e}_X]$ . Dans le repère tournant, on montre que cette expression devient :

$$\mathbf{u}^1 = u_Z^1(z)\mathbf{e}_Z + \varphi^1(z)[x\mathbf{e}_b - y\mathbf{e}_n]$$
(3.12)

soit une translation d'ensemble selon l'axe  $\mathbf{e}_Z$  et une rotation d'ensemble autour de ce même axe.

La solution du problème (3.11) est donc donnée par  $\mathbf{u}^1$  (cf. équation (3.12)) et  $\boldsymbol{\epsilon}^0 = \boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{0}$ .

À l'ordre suivant, le problème microscopique  $P_{2D}^1$  consiste à déterminer  $\sigma^1$ ,  $\epsilon^1$  et  $\mathbf{u}^2$  solution de :

$$\begin{cases}
\nabla_{\perp} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{1} = \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{\sigma}^{1} = \mathbf{C} \colon \boldsymbol{\epsilon}^{1} \\
\boldsymbol{\epsilon}^{1} = \nabla_{\perp}^{s}(\mathbf{u}^{2}) + \nabla_{z}^{s}(\mathbf{u}^{1}) \\
\boldsymbol{\sigma}^{1} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{0} \quad sur \quad \partial S
\end{cases}$$
(3.13)

La donnée de ce problème est fournie par le champ  $\mathbf{u}^1$  obtenu auparavant, qui apparaît à cet ordre sous la forme  $\nabla_z^s(\mathbf{u}^1)$ . D'autre part, d'après  $(3.13)_3$ , on est amené à décomposer la déformation totale  $\boldsymbol{\epsilon}^1$ , désormais notée  $\boldsymbol{\epsilon}$ , en une partie macroscopique correspondant à la donnée précédente et une partie complémentaire microscopique associée au champ  $\mathbf{u}^2$ , noté  $\mathbf{u}_{micro}$  par la suite. Ainsi  $(3.13)_3$  est réexprimée sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \nabla^s_{\perp}(\mathbf{u}_{micro}) + \nabla^s_z(\mathbf{u}^1) = \boldsymbol{\epsilon}_{micro} + \boldsymbol{\epsilon}_{macro}, \qquad (3.14)$$

où  $\boldsymbol{\epsilon}_{micro} = \nabla^s_{\perp}(\mathbf{u}_{micro})$  et  $\boldsymbol{\epsilon}_{macro} = \nabla^s_z(\mathbf{u}^1).$ 

Compte tenu de l'expression (3.12) de  $\mathbf{u}^1$  et en passant aux notations vectorielles, le vecteur des déformations macroscopiques s'écrit sous cette forme :

$$\{\epsilon_{macro}\} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ E^E \\ 0 \\ -yE^T \\ xE^T \end{cases}$$
(3.15)

où  $E^E$  et  $E^T$  sont respectivement les composantes de la déformation macroscopique, constituées de l'extension et de la torsion, définies par :

$$\begin{cases} E^E = \frac{\partial u_Z^1}{\partial z} \\ E^T = \frac{\partial \varphi^1}{\partial z} \end{cases}$$
(3.16)

La donnée du problème  $\mathbf{u}^1$  se caractérise donc en réalité par la déformation macroscopique  $\{\epsilon_{macro}\}$ . Le vecteur des déformations microscopiques est lié au vecteur des déplacements microscopiques tous les deux écrits dans le système de coordonnées hélicoïdales grâce à l'équation (2.43). Le vecteur des déformations noté  $\{\epsilon_{micro}\}$  s'écrit donc sous la forme :

$$\{\epsilon_{micro}\} = \mathbf{L}_{xy}\{u_{micro}\}.$$
(3.17)

où d'après (3.14) l'opérateur  $\mathbf{L}_{xy}$ , qui contient l'ensemble des termes sans dérivées par rapport à s (s = Z ici), s'écrit comme suit dans la base hélicoïdale :

$$\mathbf{L}_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{-\kappa}{1-\kappa x} & 0 & \frac{\tau}{1-\kappa x} (y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}) \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\tau}{1-\kappa x} (y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}) & \frac{-\tau}{1-\kappa x} & \frac{\kappa}{1-\kappa x} + \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\tau}{1-\kappa x} & \frac{\tau}{1-\kappa x} (y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}) & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}.$$
(3.18)

On rappelle qu'ici cette expression doit être considérée dans la base tournante, il suffit alors d'annuler la courbure ( $\kappa = 0$ ) dans l'expression ci-dessus.

Le problème microscopique consiste à déterminer le vecteur des déplacements microscopiques  $\{u_{micro}\}$  pour une déformation appliquée  $\{\epsilon_{macro}\}$ .

À partir des équations (3.14)-(3.18), le problème (3.13) devient :

où [C] est la matrice des modules d'élasticité.

Par linéarité du problème en fonction de  $\{\epsilon_{macro}\}$ , la solution est définie à un mouvement de corps rigide près de la forme (3.12) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \{u_{micro}\} = \{\chi^E\}E^E + \{\chi^T\}E^T\\ \{\sigma_{micro}\} = \{\sigma^E_{micro}\}E^E + \{\sigma^T_{micro}\}E^T \end{cases},$$
(3.20)

où les expressions de  $\{\sigma_{micro}^E\}$  et  $\{\sigma_{micro}^T\}$  sont obtenues à partir de  $\{\chi^E\}$  et  $\{\chi^T\}$  en utilisant les équations  $(3.19)_{2-5}$ .  $\{u_{micro}\}$  représente le vecteur des déplacements locaux 3D de la section de la structure suite à une déformation imposée  $\{\epsilon_{macro}\}$ . Pour une structure soumise à une extension,  $\{u_{micro}\}$  correspond au vecteur de correction local 3D qui tient compte de l'effet de Poisson. Après résolution du problème, le comportement macroscopique de la structure peut être obtenu à partir du calcul des contraintes intégrées, qui sont définies par l'effort N et le moment de torsion  $M_Z$ :

$$\begin{cases} N = \int_{S} \sigma_{ZZ} dS \\ M_{Z} = \int_{S} (-y\sigma_{nZ} + x\sigma_{bZ}) dS \end{cases}$$
(3.21)

Ce comportement global de poutre relie les contraintes intégrées aux déformations macroscopiques. Il est défini ici avec comme choix d'axe de référence la ligne moyenne de la structure hélicoïdale passant par le point : x = y = 0.

L'équation constitutive homogénéisée peut être mise sous cette forme :

$$\left\{\begin{array}{c}N\\M_Z\end{array}\right\} = \left[k^{hom}\right] \left\{\begin{array}{c}E^E\\E^T\end{array}\right\},$$
(3.22)

où  $[k^{hom}]$  est symétrique et peut être exprimée à l'aide des équations (3.20) et (3.21).

#### 3.2.4 Le problème macroscopique

En effectuant une intégration sur la surface des équations du problème microscopique à l'ordre 2, c'est-à-dire l'ordre suivant de (3.13), on obtient le système d'équations d'équilibre macroscopique suivant :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dz} = 0 \\ \frac{dM_Z}{dz} = 0 \end{cases}, \qquad (3.23)$$

À ce système d'équations, on ajoute la loi de comportement (3.22), la relation entre les déformations macroscopiques et les déplacements (3.16), et les conditions aux limites aux extrémités (3.3) et (3.4) afin de déterminer  $u_Z^1$  et  $\varphi^1$ .

#### 3.2.5 Bilan

Le problème macroscopique (3.23) correspondant à un problème de poutre en tractiontorsion est bien posé.

En pratique, la mise en oeuvre de la méthode se décompose en différentes étapes. Pour  $E^E$  et  $E^T$  donnés, on résout le problème 2D microscopique (3.19) afin de déterminer  $\{\sigma_{micro}^E\}$  et  $\{\sigma_{micro}^T\}$ . En utilisant l'équation (3.21) permettant de déterminer l'effort N et le moment  $M_Z$ , on détermine le comportement global de la poutre ( $[k^{hom}]$ ) à partir de l'équation (3.22). Puis, on résout le problème macroscopique 1D (3.23) afin de déterminer  $u_Z^1$  et  $\varphi^1$ . Finalement, compte tenu de la résolution des deux problèmes microscopiques, exposée en section 3.2.3, et comme la solution à l'ordre 2 donnée en (3.20) est définie à un mouvement de corps rigide près, il s'avère qu'on peut réécrire le développement asymptotique de la solution sous la forme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}$$
  
+ $\epsilon (u_Z^1(z)\mathbf{e}_Z + \varphi^1(z)[x\mathbf{e}_b - y\mathbf{e}_n])$  (3.24)  
+ $\epsilon^2 (u_Z^2(z)\mathbf{e}_Z + \varphi^2(z)[x\mathbf{e}_b - y\mathbf{e}_n] + \boldsymbol{\chi}^E E^E + \boldsymbol{\chi}^T E^T) + \dots$ 

Cette expression peut être exploitée pour obtenir une approximation de la solution 3D du problème, au prix de la résolution d'un problème 2D et d'un problème 1D. Il apparaît que la solution macroscopique au 1er ordre (caractérisée par  $u_Z^1$  et  $\varphi^1$ ) est enrichie par la solution microscopique ( $\chi^E, \chi^T$ ), qui représente la réponse locale de la section.

## 3.2.6 Cas d'une sollicitation macroscopique homogène

On se restreint à un état précontraint obtenu à partir d'une sollicitation axiale homogène (constante selon l'axe). Ceci est justifié de part l'utilisation classique des structures de type ressort ou toron.

Dans ces conditions, les conditions aux extrémités sont de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{c} T \end{array} \right\}^{H} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ T \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} M \end{array} \right\}^{H} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ M \end{array} \right\}.$$
(3.25)



FIG. 3.3 – Chargements d'une poutre

D'après l'équation (3.5) et puisque  $\mathbf{OP} \wedge \mathbf{t}^H = \{0\}$ , on obtient (voir figure 3.3) :

$$\begin{cases} \{T\}^0 = -\{T\}^H \\ \{M\}^0 = -\{M\}^H \end{cases}$$
(3.26)

La résolution du problème macroscopique défini dans la section 3.2.4 est alors immédiate. Elle est de la forme :

$$\begin{cases} N = T \\ M_Z = M \end{cases}$$
(3.27)

Il en résulte un état macroscopique homogène uniforme, si bien que l'état local est invariant par translation dans le système de coordonnées tournant.

Les déformations macroscopiques sont obtenues en inversant la loi de comportement macroscopique (3.22). L'équation (3.22) se restreint à :

$$\left\{ \begin{array}{c} T\\ M \end{array} \right\} = \left[k^{hom}\right] \left\{ \begin{array}{c} E^E\\ E^T \end{array} \right\}.$$
 (3.28)

Après inversion, et connaissant  $E^E$ ,  $E^T$ , les contraintes locales peuvent être calculées grâce à (3.20), ce qui se réduit à :

$$\{\sigma_{micro}\} = \{\sigma_{micro}^E\} E^E + \{\sigma_{micro}^T\} E^T.$$
(3.29)

# 3.3 Formulation variationnelle

L'objectif est de déterminer les déplacements locaux dans la section d'une structure hélicoïdale invariante par translation suite à une déformation imposée.

À partir du problème d'élasticité 3D, l'homogénéisation hélicoïdale a été appliquée afin de réduire le problème à un problème 2D posé sur la section, en l'occurrence le problème (3.19). La formulation variationnelle d'un problème d'élasticité écrite dans le système de coordonnées hélicoïdales est la suivante :

$$\int_{S} \{\delta\epsilon\}^{T} [C_0] \{\epsilon\} \sqrt{g} dx dy = 0, \qquad (3.30)$$

où S est le section de la structure initiale non déformée.  $\{\epsilon\}$  est le vecteur des déformations statique totale.

Puisque le vecteur des déformation macroscopique est constant, le vecteur  $\{\delta\epsilon\}$  s'écrit à l'aide de l'équation (3.17) de la manière suivante :

$$\{\delta\epsilon\} = \mathbf{L}_{xy}\{\delta u_{micro}\}.$$
(3.31)

La substitution des équations (3.17) et (3.31) dans la formulation variationnelle de la statique des structures hélicoïdales, donnée par (3.30), nous permet d'écrire pour le problème (3.19):

$$\int_{S} \{\delta u_{micro}\}^{T} \mathbf{L}_{xy}^{T}[C_{0}] \mathbf{L}_{xy}\{u_{micro}\} \sqrt{g} dx dy = -\int_{S} \{\delta u_{micro}\}^{T} \mathbf{L}_{xy}^{T}[C_{0}]\{\epsilon_{macro}\} \sqrt{g} dx dy.$$
(3.32)

Cette équation traduit l'équilibre statique. Le terme de gauche représente une matrice raideur multipliée par un vecteur des déplacements. Celui de droite représente le vecteur des efforts extérieurs, sachant qu'ici le chargement correspond à une déformation macroscopique { $\epsilon_{macro}$ } donnée.

# 3.4 Discrétisation par éléments finis

#### 3.4.1 Résolution du problème microscopique

Pour un élément donné, les composantes du déplacement microscopique peuvent être approchées par :

$$\{u_{micro}\} = [N^e]\{U^e_{micro}\},\tag{3.33}$$

où  $[N^e]$  est une matrice qui contient les fonctions d'interpolations et  $\{U^e_{micro}\}$  est le vecteur des déplacements nodaux (3 degrés de liberté par noeud). La formulation variationnelle décrite par l'équation (3.32) devient sous forme discrétisée :

$$[K_1]\{U_{micro}\} = \{F\},\tag{3.34}$$

où la matrice élémentaire  $[K_1]^e$  est donnée par :

$$[K_1]^e = \int_{S^e} [N^e]^T \mathbf{L}_{xy}^T [C_0] \mathbf{L}_{xy} [N^e] \sqrt{g} dx dy, \qquad (3.35)$$

et le vecteur élémentaire  $\{F\}^e$  est égal à :

$$\{F\}^e = -\int_{S^e} [N^e]^T \mathbf{L}_{xy}^T [C_0] \{\epsilon_{macro}\} \sqrt{g} dx dy, \qquad (3.36)$$

Le vecteur des déplacements locaux  $\{U_{micro}\}$  est calculé par la résolution du système linéaire (3.34) pour une déformation imposée.

#### 3.4.2 Post-traitement : calcul des efforts et moments résultants

En pratique, la donnée qui caractérise l'état précontraint est une déformation macroscopique, à partir de laquelle on résout le problème microscopique. Une fois ce problème résolu, on peut calculer la réponse locale de la structure et les efforts macroscopiques. Grâce à ces derniers, on peut en particulier déterminer la raideur globale de la structure.

Si on applique une déformation macroscopique sur une structure élancée d'axe  $\mathbf{e}_t$ , on récupère un vecteur des efforts aux noeuds et un vecteur des moments aux noeuds notés respectivement  $\{T\}$  et  $\{M\}$  de la façon suivante.

Les vecteur  $\{T\}$  s'écrit en fonction du tenseur des contraintes à partir de l'expression du travail virtuel comme suit :

$$\{\delta U\}^T \{T\} = \int_S \delta \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_t) dx dy, \qquad (3.37)$$

où  $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_Z$  dans ce chapitre.

La discrétisation par éléments finis de la surface S nous permet d'écrire :

$$\{\delta U\}^T \{T\} = \sum_e \{\delta U^e\}^T \{T^e\},$$
(3.38)

où :

$$\{\delta U^e\}^T \{T^e\} = \int_{S^e} \delta \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_t) dx dy.$$
(3.39)

La quantité  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_t$  s'écrit en fonction du vecteur des contraintes { $\sigma$ }, défini par (2.53), comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_{t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\boldsymbol{\sigma}\} = \mathbf{L}_{s}^{T}\{\boldsymbol{\sigma}\}(1 - \kappa x),$$
(3.40)

où l'opérateur  $\mathbf{L}_s$  s'exprime :

$$\mathbf{L}_{s} = \frac{1}{1 - \kappa x} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
 (3.41)

On rappelle qu'il faut considérer que  $\kappa = 0$  dans ce chapitre. Notons que l'opérateur  $\mathbf{L}_s$  est défini de cette manière car il sera utilisé dans le chapitre 4.

À partir des équations (3.19), le vecteur des contraintes devient :

$$\{\sigma\} = [C_0](\mathbf{L}_{xy}\{u_{micro}\} + \{\epsilon_{macro}\}).$$
(3.42)

Finalement, on obtient le vecteur élémentaire de l'effort  $\{T^e\}$ :

$$\{T^e\} = \int_{S^e} [N^e]^T \mathbf{L}_s^T [C_0] \mathbf{L}_{xy} [N^e] \{U^e_{micro}\} (1 - \kappa x) dx dy + \int_{S^e} [N^e]^T \mathbf{L}_s^T [C_0] \{\epsilon_{macro}\} (1 - \kappa x) dx dy.$$

$$(3.43)$$

L'équation (3.43) peut s'écrire comme suit :

$$\{T^e\} = [K_2^e]^T \{U_{micro}^e\} + \{T_{macro}^e\},$$
(3.44)

où

$$[K_2^e] = \int_{S^e} [N^e]^T \mathbf{L}_{xy}^T [C_0] \mathbf{L}_s [N^e] (1 - \kappa x) dx dy.$$
(3.45)

 $\operatorname{et}$ 

$$\{T^e_{macro}\} = \int_{S^e} [N^e]^T \mathbf{L}_s^T [C_0] \{\epsilon_{macro}\} (1 - \kappa x) dx dy.$$
(3.46)

Finalement, après assemblage :

$$\{T\} = [K_2]^T \{U_{micro}\} + \{T_{macro}\}, \qquad (3.47)$$

L'effort s'écrit sous cette forme :

$$\{T\} = \begin{bmatrix} \dots & T_n^i & T_b^i & T_t^i & \dots \end{bmatrix}^T,$$
(3.48)

où n, b, t sont les composantes de Serret-Frenet de l'effort au noeud i. L'effort résultant sur la section est défini par :

$$T_{n,b,t} = \sum_{i} T_{n,b,t}^{i}, \tag{3.49}$$

Le moment résultant est défini par :

$$M_{n,b,t} = \sum_{i} M_{n,b,t}^{i},$$
(3.50)

où :

$$\{M^i\} = \left\{ \begin{array}{c} M_n^i \\ M_b^i \\ M_t^i \end{array} \right\} = \mathbf{OP}^i \wedge \left\{ \begin{array}{c} T_n^i \\ T_b^i \\ T_t^i \end{array} \right\}, \tag{3.51}$$

et  $\mathbf{OP}^i$  est le vecteur position du noeud *i*.

Pour la base tournante, exclusivement utilisée dans ce chapitre, on rappelle que  $(.)_t = (.)_Z$ . Par ailleurs, on ne s'intéresse qu'à des chargements en traction-torsion dans le cadre de ce chapitre, si bien que seuls  $T_Z$  et  $M_Z$  sont exploités. En pratique, on observe que  $M_n$ ,  $M_b$ ,  $T_n$  et  $T_b$  sont négligeables numériquement.

# Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commencé par présenter l'état de l'art sur les modèles éléments finis de calcul statique (ce qui correspond pour notre application à l'état précontraint) des structures hélicoïdales soumises à un chargement axial. Nous partons de la formulation d'élasticité tridimensionnelle écrite dans le système de coordonnées hélicoïdales. En se basant sur la méthode des développements asymptotiques, la technique d'homogénéisation hélicoïdale appliquée dans le système de coordonnées tournant permet de calculer l'état précontraint sur la section de la structure hélicoïdale correspondant à un état macroscopique simple. Un simple post-traitement permet aussi de calculer l'effort et le moment résultants suite à une déformation imposée et donc d'obtenir le comportement macroscopique de la structure.

# Chapitre 4

# Modélisation de la propagation des ondes élastiques dans un guide précontraint

# Sommaire

4.1 l	Repe	ères bibliographiques
4.	1.1	Méthodes numériques
4.	1.2	Guides courbes
4.	1.3	Guides précontraints
<b>4.2</b>	App	roche semi-analytique
4.	2.1	Vecteurs des déformations et des composantes du tenseur gra-
		dient de déplacement
4.	2.2	Formulation SAFE
4.3 l	Réso	lution par éléments finis
4.4 (	Calc	ul des paramètres modaux
4.	4.1	Définition des vitesses
4.	4.2	Expressions de $E_c$ , $E_p$ et <b>P</b>
4.	4.3	Calcul de la vitesse d'énergie
4.	4.4	Egalité entre vitesses de groupe et d'énergie
Concl	usio	n

# Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la formulation variationnelle des éléments finis semianalytique (SAFE en anglais, pour Semi-Analytical Finite Element) d'une structure hélicoïdale soumise à un chargement axial afin de déterminer ses modes de propagation. Nous partons de la formulation variationnelle de la dynamique des structures autour d'un état d'équilibre précontraint statique. Cette formulation a été écrite dans un système de coordonnées hélicoïdales dans le chapitre 2. L'état précontraint, dont la méthode de calcul a été présentée dans le chapitre 3, est supposé connu et invariant par translation. Nous commençons par supposer que l'onde se propage selon une direction priviligiée, ce qui revient à supposer une dépendance en  $e^{i(ks-\omega t)}$  pour les champs ondulatoires où k, s et  $\omega$  représentent respectivement le nombre d'onde axial, la variable axiale et la pulsation. Cette dépendance en  $e^{iks}$  nécessite la vérification de l'invariance par translation, ce qui a été montré dans la section 2.3. Puis nous séparons la variale axiale des autres variables dans les opérateurs de la formulation variationnelle. En remplaçant tout  $\partial/\partial s$  par *ik* dans cette formulation, nous obtenons la formulation SAFE qui nous permet de déterminer les modes de propagation d'une structure hélicoïdale soumise à un chargement axial appliqué. Quelques repères bibliographiques sont tout d'abord présentés.

# 4.1 Repères bibliographiques

En raison de leur caractère dispersif et multimodal, la propagation des ondes guidées constitue un phénomène relativement complexe. Des études théoriques analytiques ont été présentées depuis le 19ème siècle pour décrire ce phénomène dans les plaques et les cylindres. Les ondes élastiques dans les plaques ont été décrites par Lamb [1917]. On peut citer par exemple les ouvrages de Achenbach [1973], Rose [1999] et Royer and Dieulesaint [2000], où une description détaillée des ondes de Lamb est présentée. De manière similaire, la propagation des ondes élastiques dans les cylindres a aussi été largement étudiée depuis les travaux de Pochhammer en 1876 et Chree en 1889. On peut citer par exemple les travaux plus récents de Zemanek [1972], Achenbach [1973] et Thurston [1978].

Si certaines structures telles que les plaques et les cylindres possèdent une description modale analytique, la connaissance des modes de propagation dans des géométries plus complexes (section arbitraire, axe courbe,...) nécessite généralement des outils de simulation adaptés. Nous limitons donc la suite de l'état de l'art aux méthodes numériques pour décrire la propagation des ondes élastiques dans les structures de géométrie complexe.

## 4.1.1 Méthodes numériques

Plusieurs modèles numériques de la propagation des ondes élastiques guidées dans des structures complexes ont été proposés. Si l'on excepte les approches basées sur des analyses éléments finis transitoires (Alleyne and Cawley [1992], Lowe and Diligent [2002], Ma et al. [2006], Benmeddour et al. [2008]), très coûteuses sur le plan numérique, la majorité des modèles est basée sur des techniques éléments finis utilisant le principe de Floquet ou des techniques éléments finis dites semi-analytiques (SAFE).

La méthode de Floquet s'applique pour des structures périodiques. L'idée de base est d'obtenir les modes de propagation d'une structure depuis les constantes de propagation d'une cellule élémentaire. A titre indicatif, on peut citer les travaux précurseurs de Mead [1973] pour les ondes élastiques ainsi qu'une revue sur le sujet du même auteur (Mead [1999]). Couplée aux éléments finis, cette méthode utilise le calcul des matrices masse, raideur et amortissement obtenues à l'aide de codes éléments finis standards. Le volume de contrôle, tridimensionnel, est celui d'une cellule périodique. Pour les structures d'axe droit, on peut citer par exemple les travaux de Ghoshal et al. [1996], Gry and Gontier [1997], Mace et al. [2005], Duhamel et al. [2006] et Zhou et al. [2009].

La méthode des éléments finis dite semi-analytique (SAFE), moins générale que celle basée sur le principe de Floquet, s'applique pour des structures invariantes par translation. Dans cette méthode, le déplacement est constitué d'un produit de deux termes. Le premier terme représente le champ de déplacement sur la section et nécessite une discrétisation bidimensionnelle. Le deuxième terme correspond à une exponentielle introduisant la propagation du champ dans la direction de l'axe du guide. Cette méthode présente a priori un avantage en terme de temps et coût de calcul. Elle permet de réduire le problème d'une dimension par la dépendance en  $e^{iks}$ . Pour une structure tridimensionnelle, la modélisation se limite à la section du guide d'onde. A titre indicatif, on peut citer les travaux précurseurs de Dong and Nelson [1972, 1973]. Cette technique a été utilisée pour déterminer les modes de propagation dans des guides droits à la géomérie ou aux propriétés matérielles complexes. En particulier, la méthode SAFE a permis d'étudier les guides d'onde de section arbitraire. On peut citer par exemple les travaux de Gavric [1995], Taweel et al. [2000], Damljanovic and Weaver [2004], Anthony and Peterson [2005], Hayashi et al. [2006] et Jezzine [2006]. Cette méthode a également permis d'étudier des structures possédant une complexité matérielle. On peut citer par exemple les travaux de Zhuang et al. [1999], Bartoli et al. [2006] et Marzani et al. [2008]. Citons aussi les travaux de Baronian [2009] et Baronian et al. [2010], qui ont proposé une méthode SAFE originale basée sur une formulation mixte en déplacements et contraintes.

## 4.1.2 Guides courbes

Contrairement à la propagation des ondes guidées dans les structures d'axe droit, les structures courbes ont été peu étudiées. Des travaux basés sur la méthode SAFE ont été développés pour étudier la propagation des ondes dans les structures courbes. Parmi ces travaux, on peut citer ceux de Onipede and Dong [1996] pour les guides d'onde torsadés et Demma et al. [2005] et Finnveden and Fraggstedt [2008] pour les guides d'onde toroïdaux.

D'autres études ont été développées afin d'expliquer le phénomène de propagation d'onde dans les structures multi-brins. En raison de la complexité de la géométrie hélicoïdale des brins périphériques, les effets de contacts interfilaires et la présence de précontrainte, certains chercheurs ont commencé par modéliser l'élement de base constituant le câble qu'est le brin hélicoïdal. On peut citer les travaux de Treyssède [2007, 2008] sur l'étude de la propagation des ondes élastiques dans une structure hélicoïdale par les méthodes de Floquet et SAFE.

Enfin, des modèles basés sur la méthode SAFE décrivant la propagation des ondes élastiques dans un toron à sept brins ont été développés. On peut citer les travaux de Bartoli et al. [2007] et Treyssède and Laguerre [2010]. Une comparaison avec l'expérience des résultats numériques obtenus en vitesse d'énergie a été présentée dans les travaux de Treyssède and Laguerre [2010]. Ces auteurs ont notamment pu retrouver numériquement la présence d'une bande de fréquence où le premier mode de compression ne se propage pas. Cette bande est située autour de 67kHz pour un toron de 15.7mm de diamètre. Cette comparaison a permis de valider le modèle SAFE pour cette bande de fréquence et pour ce type de modes.

Notons que la méthode SAFE a aussi été appliquée pour étudier la propagation des ondes électromagnétiques dans des guides hélicoïdaux (Nicolet and Zolla [2004, 2007]).

On peut citer aussi à titre indicatif les quelques études analytiques basées sur la théorie approchée des poutres, qui ne constituent qu'une approximation valide en basse fréquence. Parmi les travaux appliqués aux poutres hélicoïdales, on trouve Wittrick [1966], Lee and Thompson [2001] et Sorokin [2009].

#### 4.1.3 Guides précontraints

L'effet de la précontrainte sur la propagation des ondes élastiques guidées est peu étudié dans la littérature. Pour les structures d'axe droit, le modèle SAFE a été adapté pour tenir compte de la précontrainte. Parmi ces travaux, on peut citer ceux de Chen and Wilcox [2007], où l'état statique, calculé par un modèle éléments finis tridimensionnel, a été introduit dans le modèle SAFE pour déterminer les modes de propagation d'une structure précontrainte. Comme pour le cas des poutres, ils montrent que le chargement a un effet considérable en basses fréquences sur les modes antisymétriques pour les plaques et sur les modes de flexion pour les cylindres. La vitesse de phase de ces modes se décale vers les hautes fréquences sous l'effet d'un chargement de traction. On peut citer aussi les travaux de Loveday [2009], où la précontrainte a été introduite analytiquement dans la formulation SAFE afin de déterminer les modes d'un guide droit soumis à un chargement axial. L'auteur constate la sensibilité des modes de flexion au chargement, ce qui se traduit par une augmentation de la vitesse de phase et une diminution de la vitesse de groupe des modes de flexion en basses fréquences pour un chargement en traction.

Pour les guides courbes, les travaux existants reposent sur des approximations basées sur la théorie des poutres. On peut citer les travaux de Farshad [1980], qui a étudié l'effet de la précontrainte sur la propagation des ondes élastiques dans des anneaux. Récemment et dans le cadre de ces travaux de thèse, nous avons étudié cet effet de précontrainte dans des poutres hélicoïdales (Frikha et al. [2011]–l'article figure en Annexe B). Une étude paramétrique a été présentée pour mettre en évidence l'influence du chargement axial suivant la courbure et la tortuosité de l'hélice. Comme pour les poutres droites, l'effet du chargement sur une poutre hélicoïdale, composé de l'effet de la précontrainte (contrainte de Cauchy) et de la pré-déformation de la géométrie, ne s'avère significatif qu'en basses fréquences.

En revanche, il ne semble pas exister pour les guides courbes précontraints d'études exploitant des modélisations 3D.

Dans ce travail, on se propose de développer un modèle général basé sur la méthode SAFE.

Signalons que la propagation des ondes élastiques dans les torons précontraints a été étudiée expérimentalement (Kwun et al. [1998] et Laguerre et al. [2002b]) et qu'il n'existe pas de modèles dans la littérature qui permettent de retrouver ou d'expliquer certains phénomènes observés et liés à la présence d'un chargement axial. Un autre objectif important de cette thèse est donc d'expliquer ces phénomènes à partir d'un modèle SAFE de toron précontraint.

Dans la suite de ce chapitre, nous présentons la formulation SAFE d'une structure hélicoïdale soumise à un chargement axial.

# 4.2 Approche semi-analytique

On part de la formulation variationnelle de la dynamique des structures autour d'un état d'équilibre précontraint, écrite dans un système de coordonnées hélicoïdales. En supposant une dépendance en  $e^{\pm i(ks-\omega t)}$  pour les champs ondulatoires et en remplaçant tout  $\partial/\partial s$  par  $\pm ik$  dans la formulation variationnelle, on obtient la formulation SAFE.

# 4.2.1 Vecteurs des déformations et des composantes du tenseur gradient de déplacement

Les vecteurs des composantes du tenseur gradient de déplacement  $\{\gamma\}$  et des déformations  $\{\epsilon\}$  sont reliés au vecteur des déplacements  $\{u\}$  par les équations (2.34) et (2.43).  $\{\epsilon\}$  et  $\{\gamma\}$  peuvent s'écrire comme suit :

$$\{\gamma\} = (\mathbf{G}_{xy} + \mathbf{G}_s \frac{\partial}{\partial s})\{u\},\tag{4.1}$$

 $\operatorname{et}$ 

$$\{\epsilon\} = (\mathbf{L}_{xy} + \mathbf{L}_s \frac{\partial}{\partial s})\{u\},\tag{4.2}$$

où les opérateurs  $\mathbf{L}_{xy}$  et  $\mathbf{L}_s$  sont donnés respectivement par les équations (3.18) et (3.41). Les opérateurs  $\mathbf{G}_{xy}$  et  $\mathbf{G}_s$  sont exprimés par :

$$\mathbf{G}_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial/\partial x}{\partial y} & 0 & 0\\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0\\ \frac{\tau}{1-\kappa x} (y\partial/\partial x - x\partial/\partial y) & -\frac{\tau}{1-\kappa x} & \frac{\kappa}{1-\kappa x}\\ 0 & \partial/\partial x & 0\\ 0 & \partial/\partial x & 0\\ \frac{\tau}{1-\kappa x} & \frac{\tau}{1-\kappa x} (y\partial/\partial x - x\partial/\partial y) & 0\\ 0 & 0 & \partial/\partial x\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ -\frac{\kappa}{1-\kappa x} & 0 & \frac{\tau}{1-\kappa x} (y\partial/\partial x - x\partial/\partial y) \end{bmatrix},$$
(4.3)

 $\operatorname{et}$ 

$$\mathbf{G}_{s} = \frac{1}{1 - \kappa x} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
(4.4)

On note que l'invariance par translation du système de coordonnées est bien vérifiée, comme le montre la non dépendance en s des opérateurs  $\mathbf{L}_{xy}$ ,  $\mathbf{L}_s$ ,  $\mathbf{G}_{xy}$  et  $\mathbf{G}_s$ .

#### 4.2.2 Formulation SAFE

La méthode des éléments finis semi-analytique est basée sur la décomposition du champ de déplacement en onde plane dans la direction de propagation et un problème 2D résolu par éléments finis dans la direction perpendiculaire à la propagation. Cette décomposition nécessite la vérification de l'invariance par translation du problème dans le système de coordonnées considéré. Ceci a été prouvé dans les sections 2.3 et 2.4 pour les structures hélicoïdales dans les systèmes de coordonnées hélicoïdales et tournant. Pour les structures précontraintes, on suppose en plus que l'état précontraint statique, calculé dans le chapitre 3, est connu et invariant par translation. Une transformée de Fourier spatiale selon l'axe du guide peut avoir lieu. Le vecteur déplacement et son champ test peuvent se mettre sous cette forme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y)e^{i(ks-\omega t)}, \ \delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}(x, y)e^{-i(ks-\omega t)}.$$
(4.5)

La dépendance en  $e^{\pm iks}$  du champ de déplacement permet de remplacer  $\partial/\partial s$  par  $\pm ik$ , où k est le nombre d'onde axial. Le problème est alors réduit du 3D au 2D sur la section. En substituant les équations (4.2)-(4.5) dans la formulation variationnelle 3D, donnée par l'équation (2.63), en remplaçant tout  $\partial/\partial s$  par  $\pm ik$  et en restreignant les intégrations à la section, on obtient la formulation variationnelle semi-analytique :

$$\int_{S_0} \{\delta u\}^T (\mathbf{L}_{xy}^T [C_0] \mathbf{L}_{xy} + \mathbf{G}_{xy}^T [\sigma_0] \mathbf{G}_{xy}) \{u\} \sqrt{g} dx dy + ik \int_{S_0} \{\delta u\}^T (\mathbf{L}_{xy}^T [C_0] \mathbf{L}_s - \mathbf{L}_s^T [C_0] \mathbf{L}_{xy} + \mathbf{G}_{xy}^T [\sigma_0] \mathbf{G}_s - \mathbf{G}_s^T [\sigma_0] \mathbf{G}_{xy}) \{u\} \sqrt{g} dx dy + (4.6)$$
$$k^2 \int_{S_0} \{\delta u\}^T (\mathbf{L}_s^T [C_0] \mathbf{L}_s + \mathbf{G}_s^T [\sigma_0] \mathbf{G}_s) \{u\} \sqrt{g} dx dy - \omega^2 \int_{S_0} \rho_0 \{\delta u\}^T \{u\} \sqrt{g} dx dy = 0,$$

où  $[C_0]$  est la matrice qui relie les vecteurs des contraintes et des déformations,  $[\sigma_0]$  est donnée par l'équation (2.60).

Cette formulation peut être utilisée dans les systèmes de coordonnées hélicoïdales et tournant pour déterminer les modes de propagation d'une structure hélicoïdale précontrainte.

# 4.3 Résolution par éléments finis

Pour un élément donné, les composantes du déplacement peuvent être approchées par :

$$\{u\} = [N^e]\{U^e\},\tag{4.7}$$

où  $[N^e]$  est une matrice qui contient les fonctions d'interpolations et  $\{U^e\}$  est le vecteur qui contient les déplacements nodaux (3 degrés de liberté par noeud associés à  $u_n, u_b, u_t$ ).

En pratique, le maillage de la section de la géométrie précontrainte  $S_0$  est obtenu de la façon suivante : un premier maillage de la section dans la configuration de référence non précontrainte est réalisé. Le calcul de l'état précontraint est effectué sur ce maillage, dont la position des noeuds est réactualisée pour fournir le maillage de  $S_0$ .

La formulation variationnelle décrite par l'équation (4.6) devient sous forme discrétisée comme suit :

$$\{[K_{1\sigma}] - \omega^2[M] + ik([K_{2\sigma}] - [K_{2\sigma}]^T) + k^2[K_{3\sigma}]\}\{U\} = 0,$$
(4.8)

où la matrice de masse élémentaire  $[M^e]$  est exprimée par :

$$[M^e] = \int_{S_0^e} \rho_0 [N^e]^T [N^e] \sqrt{g} dx dy.$$
(4.9)

Les matrices raideurs élémentaires  $[K_{1\sigma}^e]$ ,  $[K_{2\sigma}^e]$  et  $[K_{3\sigma}^e]$  sont composées chacune d'une matrice relative à la structure non précontrainte et d'une matrice additionnelle représentant l'effet de la précontrainte. On a :

$$[K_{1\sigma}^{e}] = [K_{1}^{e}] + \int_{S_{0}^{e}} [N^{e}]^{T} \mathbf{G}_{xy}^{T} [\sigma_{0}] \mathbf{G}_{xy} [N^{e}] \sqrt{g} dx dy,$$
  

$$[K_{2\sigma}^{e}] = [K_{2}^{e}] + \int_{S_{0}^{e}} [N^{e}]^{T} \mathbf{G}_{xy}^{T} [\sigma_{0}] \mathbf{G}_{s} [N^{e}] \sqrt{g} dx dy,$$
  

$$[K_{3\sigma}^{e}] = [K_{3}^{e}] + \int_{S_{0}^{e}} [N^{e}]^{T} \mathbf{G}_{s}^{T} [\sigma_{0}] \mathbf{G}_{s} [N^{e}] \sqrt{g} dx dy,$$
  
(4.10)

où les matrices  $[K_1^e]$  et  $[K_2^e]$  sont respectivement données par les équations (3.35) et (3.45) (en remplaçant l'intégration sur la section par celle sur la géométrie déformée  $S_0$ ).  $[K_3^e]$ est donnée par :

$$[K_3^e] = \int_{S_0^e} [N^e]^T \mathbf{L}_s^T [C_0] \mathbf{L}_s [N^e] \sqrt{g} dx dy.$$
(4.11)

À partir des expressions de la formulation SAFE et de ses matrices, données par les équations (4.8)-(4.11), on vérifie la bonne dégénérescence de la formulation au cas non précontraint (Treyssède [2008]).

La résolution du système aux valeurs propres, donné par l'équation (4.8), nous permet de déterminer les modes de propagation. Pour toute valeur propre k du système (4.8), -k est aussi une valeur propre. Ce problème aux valeurs propres possède deux types de valeurs propres ( $k_i, U_i^+$ ) et ( $-k_i, U_i^-$ ), où i = 1, ..., n. Ces 2n valeurs propres représentent les n modes qui se propagent dans le sens positif et les n modes qui se propagent dans le sens négatif.

En abscence d'atténuation matérielle, les nombres d'ondes purement réels représentent les modes propagatifs et les nombres d'ondes purement imaginaires correspondent aux modes évanescents. Les modes dont le nombre d'onde est complexe sont dits inhomogènes. Ces modes ont un caractère oscillatoire qui s'atténue au bout de quelques oscillations. Les solutions purement réelles et imaginaires apparaissent en paires de signes opposés, tandis que les solutions complexes apparaissent en quadruples de signes opposés et complexes conjugués. Si k est une valeur propre, alors -k,  $k^*$  et  $-k^*$  sont aussi des valeurs propres, où \* désigne le conjugué.

On résout le système aux valeurs propres (4.8) en fixant le nombre d'onde k et en cherchant la fréquence  $\omega$  ou inversement, en fixant  $\omega$  et en cherchant k. Dans le cas où on s'intéresse seulement aux modes propagatifs et en abscence d'atténuation matérielle, le système aux valeurs propres (4.8) peut être résolu en fixant un nombre d'onde k réel positif. Le système est alors linéaire pour la détermination de  $\omega^2$ .

Afin de déterminer les modes non propagatifs ou en présence d'atténuation matérielle, les nombres d'onde k deviennent complexes et il est nécessaire de résoudre le problème en fixant  $\omega$  pour chercher le nombre d'onde k. Le système aux valeurs propres est alors quadratique en k. Pour se ramener à un problème aux valeurs propres linéaire, on peut doubler la dimension du système (voir Tisseur and Meerbergen [2001]). Pour cela, on introduit une inconnue supplémentaire  $k\{U\}$ , ce qui permet de ré-écrire le problème sous la forme suivante :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -[K_{1\sigma}] + \omega^2 [M] & -i([K_{2\sigma}] - [K_{2\sigma}]^T) \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [K_{3\sigma}] \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \{U\} \\ k\{U\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$
(4.12)

où I et 0 sont respectivement la matrice identité et la matrice nulle.

En abscence d'atténuation matérielle, l'écriture ci-dessus permet d'obtenir une seconde matrice hermitienne et définie positive, ce qui constitue une propriété intéressante lors de l'utilisation de solveurs de problème aux valeurs propres standards (voir Baronian [2009]).

# 4.4 Calcul des paramètres modaux

#### 4.4.1 Définition des vitesses

Dans cette section, les vitesses de phase et de groupe sont définies pour un nombre d'onde k réel.

La vitesse de phase  $V_{\phi}$  correspond à la vitesse de propagation d'un front d'onde monochromatique émis à une fréquence donnée, et est définie de la manière suivante :

$$V_{\phi} = \frac{\omega}{k}.\tag{4.13}$$

La vitesse de groupe représente la vitesse de propagation du paquet d'ondes de pulsation centrale  $\omega$ . Elle est définie par :

$$V_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}.\tag{4.14}$$

Dans le cas d'un matériau non dissipatif, la vitesse de groupe peut être calculée à partir des matrices de la méthode SAFE en utilisant l'expression suivante (voir Finnveden [2003],

Bartoli et al. [2006] et Loveday [2009]) :

$$V_g = \frac{1}{2\omega} \frac{\{U\}^{T*} (i([K_{2\sigma}] - [K_{2\sigma}]^T) + 2k[K_{3\sigma}])\{U\}}{\{U\}^{T*}[M]\{U\}}.$$
(4.15)

En abscence d'atténuation matérielle, la vitesse de groupe est identique à la vitesse d'énergie. Pour les structures présentant de l'atténuation matérielle, c'est plutôt la vitesse d'énergie qui reste un paramètre modal significatif et non plus la vitesse de groupe (voir Bernard et al. [2001]).

La vitesse d'énergie est définie comme le rapport entre le flux d'énergie (la puissance transmise ou active) et l'énergie totale stockée, moyennés dans le temps et sur la section (voir Achenbach [1973], Ichchou et al. [2007], Maess et al. [2007], Treyssède [2008]). Cela revient à écrire pour un guide :

$$V_e = \frac{\int_{S_0} \overline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{n} dS_0}{\int_{S_0} (\overline{E}_c + \overline{E}_p) dS_0}.$$
(4.16)

où la barre désigne la moyenne temporelle.  $S_0$  est la section de la structure dans l'état précontraint. **n** est le vecteur unitaire normal à la section du guide précontraint (c'est-àdire selon l'axe de propagation). **P**,  $E_c$  et  $E_p$ , représentent respectivement le vecteur de Poynting, l'énergie cinétique et potentielle. Nous allons maintenant définir  $E_c$ ,  $E_p$  et **P** en présence de précontrainte.

## 4.4.2 Expressions de $E_c$ , $E_p$ et P

Pour la détermination des énergies cinétique et potentielle et du vecteur de Poynting, nous allons procéder par analogie avec la dynamique des structures non précontraintes.

L'équation d'équilibre d'une structure non précontrainte est de la forme suivante :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2},\tag{4.17}$$

où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes et  $\rho$  est la masse volumique.

On rappelle l'équation d'équilibre d'une structure précontrainte, donnée par l'équation (1.26) :

$$\nabla_0 \cdot (\mathbf{S} + \nabla_0 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0) + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \qquad (4.18)$$

où S est le tenseur incrément de Piola-Kirchhoff actualisé,  $\sigma_0$  est le tenseur des précontraintes et  $\rho_0$  est la masse volumique de la géométrie dans l'état précontraint.

En remplaçant  $\boldsymbol{\sigma}$  par  $\mathbf{S} + \nabla_0 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0$  et  $\rho$  par  $\rho_0$ , on constate que la forme de l'équation est la même que celle de l'équation (4.17). Pour déterminer l'énergie cinétique  $E_c$ , potentielle  $E_p$  et le vecteur de Poynting  $\mathbf{P}$  d'une structure précontrainte, on peut donc *a priori* effectuer ce remplacement dans les expressions de  $E_c$ ,  $E_p$  et  $\mathbf{P}$  associées à l'équation (4.17), qui sont bien connues. Ainsi, l'expression de l'énergie cinétique est la même que celle d'une structure non précontrainte mais avec une masse volumique  $\rho_0$  correspondant à la configuration précontrainte  $C_0$ . Elle est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2}\rho_0 \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}},\tag{4.19}$$

où  $\dot{\mathbf{u}}$  désigne la dérivée de  $\mathbf{u}$  par rapport au temps.

En revanche, l'expression du vecteur de Poynting  $\mathbf{P}$  et de l'énergie potentielle  $E_p$  vont dépendre de la précontrainte appliquée. Pour une structure non précontrainte,  $\mathbf{P}$  est défini par :

$$\mathbf{P} = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{u}}.\tag{4.20}$$

En remplaçant  $\boldsymbol{\sigma}$  par  $\mathbf{S} + \nabla_0 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0$  dans l'équation (4.20), le vecteur de Poynting d'une structure précontrainte devient comme suit :

$$\mathbf{P} = -(\mathbf{S} + \nabla_0 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0) \cdot \dot{\mathbf{u}}. \tag{4.21}$$

Pour une structure non précontrainte l'énergie potentielle est définie par :

$$E_p = \frac{1}{2} \nabla_0 \mathbf{u} \colon \boldsymbol{\sigma}. \tag{4.22}$$

Lorsque le tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$  est symétrique (c'est-à-dire en l'abscence de précontrainte), l'équation (4.22) peut prendre la forme plus classique  $E_p = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}:\boldsymbol{\sigma}.$ 

Néanmoins, cette forme est moins générale que la forme (4.22), cette dernière restant valable pour des tenseurs  $\boldsymbol{\sigma}$  non symétriques. Or,  $\mathbf{S} + \nabla_0 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0$  n'est pas symétrique. Nous devons donc partir de l'équation (4.22). En remplaçant  $\boldsymbol{\sigma}$  par  $\mathbf{S} + \nabla_0 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0$ , l'énergie potentielle d'une structure précontrainte devient donc :

$$E_p = \frac{1}{2} \nabla_0 \mathbf{u} \colon (\mathbf{S} + \nabla_0 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0). \tag{4.23}$$

En développant les quantités entre les parenthèses, en utilisant la symétrie de  $\mathbf{S}$ , et en utilisant les transformations (1.35) et (1.37), l'équation (4.23) devient :

$$E_p = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} \colon \mathbf{S} + \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\nabla_0 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{u}^T).$$
(4.24)

#### 4.4.3 Calcul de la vitesse d'énergie

À partir de l'équation (4.5), on peut remplacer  $\partial/\partial t$  par  $-i\omega$  dans les équations (4.19) et (4.21). Pour deux fonctions f et g harmoniques en temps, on rappelle que la moyenne temporelle de fg est donnée par :

$$\overline{fg} = \frac{1}{2}Re(fg), \qquad (4.25)$$
L'énergie cinétique moyennée dans une structure précontrainte peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\int_{S_0} \overline{E}_c dS_0 = \frac{\omega^2}{4} Re(\{U\}^{T*}[M]\{U\}).$$
(4.26)

En utilisant les équations (2.57) et (2.59), l'équation (4.24) s'écrit sous cette forme :

$$E_p = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [C_0] \{\epsilon\} + \frac{1}{2} \{\gamma\}^T [\sigma_0] \{\gamma\}.$$
(4.27)

À partir des équations (4.1), (4.2) et (4.10), l'équation (4.27) peut s'écrire comme suit :

$$\int_{S_0} \overline{E}_p dS_0 = \frac{1}{4} Re\{\{U\}^{T*}([K_{1\sigma}] + ik([K_{2\sigma}] - [K_{2\sigma}]^T) + k^2[K_{3\sigma}])\{U\}\}.$$
(4.28)

En remplaçant le vecteur normal à la section  $\mathbf{n}$  par  $\mathbf{e}_t$  et en moyennant le vecteur de Poynting d'une structure précontrainte, on obtient la puissance transmise suivante :

$$\int_{S_0} \overline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{n} dS_0 = \frac{\omega}{2} Im \{ \int_{S_0} u_\alpha^* (\sigma_{\alpha t} + (\nabla_0 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0)_{\alpha t}) dS_0 \}.$$
(4.29)

La quantité entre accolades de l'équation (4.29) s'écrit sous la forme vectorielle suivante :

$$u_{\alpha}^{*}(\sigma_{\alpha t} + (\nabla_{0}\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{0})_{\alpha t})dS_{0} = \{u\}^{T*}(\mathbf{L}_{s}^{T}[C_{0}](\mathbf{L}_{xy} + ik\mathbf{L}_{s}) + \mathbf{G}_{s}^{T}[\sigma_{0}](\mathbf{G}_{xy} + ik\mathbf{G}_{s}))\{u\}(1 - \kappa x)dS_{0}.$$

$$(4.30)$$

À partir des équations (4.10) et (4.30), l'équation (4.29) s'exprime comme suit :

$$\int_{S_0} \overline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{n} dS_0 = \frac{\omega}{2} Im\{\{U\}^{T*}([K_{2\sigma}]^T + ik[K_{3\sigma}])\{U\}\}.$$
(4.31)

Grâce aux matrices SAFE, la substitution des équations (4.26), (4.28) et (4.31) dans l'équation (4.16) nous permet de déterminer directement la vitesse d'énergie d'un mode donné d'une structure précontrainte.

À partir des expressions (4.26), (4.28) et (4.31), on vérifie une bonne dégénérescence au cas non précontraint (Treyssède [2008], Treyssède and Laguerre [2010]), pour lequel on a  $[K_{1\sigma}] = [K_1], [K_{2\sigma}] = [K_2]$  et  $[K_{3\sigma}] = [K_3]$ .

#### 4.4.4 Egalité entre vitesses de groupe et d'énergie

On suppose que le matériau est non dissipatif. Dans ce paragraphe, nous allons montrer que la vitesse d'énergie précédemment définie en présence de précontrainte est bien égale à la vitesse de groupe, donnée par l'équation (4.15).

En multipliant l'équation (4.8) à gauche par  $\{U\}^{T*}$ , nous obtenons :

$$\{U\}^{T*}\{[K_{1\sigma}] + ik([K_{2\sigma}] - [K_{2\sigma}]^T) + k^2[K_{3\sigma}]\}\{U\} = \omega^2\{U\}^{T*}[M]\{U\}.$$
(4.32)

Cette équation traduit l'égalité entre l'énergie cinétique et potentielle, données par les équations (4.26) et (4.28):

$$\int_{S_0} \overline{E}_c dS_0 = \int_{S_0} \overline{E}_p dS_0 = \frac{\omega^2}{4} Re(\{U\}^{T*}[M]\{U\}).$$
(4.33)

À partir des équations (4.31) et (4.33), l'expression de la vitesse d'énergie devient :

$$V_e = \frac{Im\{\{U\}^{T*}([K_{2\sigma}]^T + ik[K_{3\sigma}])\{U\}\}}{\omega Re(\{U\}^{T*}[M]\{U\}}.$$
(4.34)

Pour un scalaire z, on a  $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*)$ . Cela nous permet d'écrire :

$$Im\{\{U\}^{T*}([K_{2\sigma}]^{T} + ik[K_{3\sigma}])\{U\}\} = \{U\}^{T*}\frac{1}{2i}([K_{2\sigma}]^{T} + ik[K_{3\sigma}])\{U\} - \{U\}^{T*}\frac{1}{2i}([K_{2\sigma}]^{*} - ik^{*}[K_{3\sigma}]^{T*})\{U\}.$$

$$(4.35)$$

Puisque la matrice  $[K_{3\sigma}]$  est symétrique  $([K_{3\sigma}] = [K_{3\sigma}]^T)$  et les matrices  $[K_{2\sigma}]$  et  $[K_{3\sigma}]$ sont réelles  $([K_{2\sigma}]^* = [K_{2\sigma}]$  et  $[K_{3\sigma}]^* = [K_{3\sigma}])$ , l'équation (4.35) peut s'écrire la forme suivante :

$$Im\{\{U\}^{T*}([K_{2\sigma}]^T + ik[K_{3\sigma}])\{U\}\} = \frac{1}{2}\{U\}^{T*}(i([K_{2\sigma}] - [K_{2\sigma}]^T) + (k+k^*)[K_{3\sigma}])\{U\}.$$
(4.36)

Pour un nombre d'onde k réel  $(k = k^*)$ , l'équation (4.36) montre que la vitesse d'énergie (4.34) obtenue en présence de précontrainte est égale à la vitesse de groupe, donnée par l'équation (4.15) (sous l'hypothèse d'un matériau non dissipatif).

# Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commencé par présenter brièvement l'état de l'art sur les modèles numériques pour la propagation des ondes élastiques dans les guides d'axes droits et courbes, sans et avec précontrainte. Nous sommes partis de la formulation variationnelle de la dynamique des structures autour d'un état d'équilibre précontraint, écrite dans un système de coordonnées hélicoïdales et établie dans le chapitre 2. L'approche semi-analytique est basée sur une séparation des variables de la section et de la variable axiale. Elle permet de réduire le problème sur la section. Après discrétisation par éléments finis, nous avons obtenu la formulation SAFE, de forme similaire à celle bien établie pour les structures non précontraintes mais avec des matrices contenant des termes de précontrainte et associées à une géométrie d'intégration correspondant à l'état précontraint. Un post-traitement simple nous permet de déterminer les vitesses de groupe et d'énergie.

Dans le chapitre 6, la formulation SAFE obtenue sera utilisée pour déterminer les modes de propagation de structures hélicoïdales et multi-brins soumises à un chargement axial.

# Chapitre 5

# Résultats pour l'état précontraint

# Sommaire

Introduction		
5.1 Structures mono-brins		
5.1.1	Modèles de référence	
5.1.2	Validation	
5.1.3	Limitation de l'hypothèse des petits déplacements 73	
5.2 Stru	5.2 Structures multi-brins	
5.2.1	Modèles de référence	
5.2.2	Validation	
5.2.3	Résultats pour un toron T15.7 (sept brins) $\ldots \ldots \ldots \ldots 82$	
5.2.4	Prise en compte simplifiée du contact	
Conclusion		

# Introduction

L'objet de ce chapitre est de présenter des résultats du modèle éléments finis 2D permettant de calculer l'état précontraint local d'une structure hélicoïdale mono-brins et multi-brins soumise à une sollicitation axiale.

Nous commençons par présenter une validation du modèle éléments finis 2D pour les structures hélicoïdales de type ressort avec le modèle analytique de Ancker et Goodier. Puis nous proposons des résultats en déplacements locaux d'un ressort soumis à une déformation axiale  $\epsilon$  (c'est-à-dire avec une déformation de torsion  $E^T = 0$ ). Ensuite, par simple comparaison des résultats du modèle éléments finis 2D avec ceux d'un modèle non-linéaire de référence, nous étudions brièvement les limites de validité de l'hypothèse des petits déplacements. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous proposons une validation du modèle éléments finis 2D pour des torons à sept brins avec un modèle éléments finis 3D de référence. Nous présentons aussi des résultats obtenus sur un toron T15.7 soumis à une déformation axiale et nous proposons une méthode simplifiée pour la prise en compte du contact entre le brin central et les brins périphériques.

Dans tout ce chapitre, les structures sont soumises à une déformation axiale  $\epsilon = E^E$ et une déformation de torsion nulle ( $E^T = 0$ ). Sauf mention contraire, le coefficient de Poisson  $\nu$  sera égal à 0.3.

# 5.1 Structures mono-brins

Dans ce chapitre nous commençons par l'étude des structures mono-brins. Nous nous intéressons à des guides hélicoïdaux de section circulaire. R,  $\alpha$ , n et a désignent respectivement le rayon d'hélice, l'angle d'hélice défini par rapport à l'horizontale, le nombre de spires et le rayon de la section circulaire. On peut distinguer deux types de structures. Les hélicoïdes de type ressort, d'angle  $\alpha = \pi/2 - \Phi$  faible et de rapport R/a important et celles d'angle  $\alpha$  important, constituant les câbles de génie civil, où L est la longueur d'un pas d'hélice (n = 1). Le modèle éléments finis bidimensionnel développé dans le chapitre 3 est valable pour toute structure hélicoïdale. Dans la littérature, les structures de type ressort possèdent des solutions analytiques de type RDM décrivant leur comportement statique. Pour cette raison, on limite la validation à ce type de structures. La validité de l'hypothèse des petites déformations et petits déplacements est brièvement discutée.

#### 5.1.1 Modèles de référence

Le comportement statique des ressorts a été largement étudié dans la littérature. Dans ce cadre, le modèle analytique de Ancker et Goodier considère la structure hélicoïdale comme une poutre d'Euler-Bernoulli avec un facteur de correction de courbure. Ce facteur change en fonction des types de sollicitations et des conditions aux limites aux extrémités. Ce modèle n'est valable que pour des angles  $\alpha$  faibles ( $\alpha \leq 25^{\circ}$ ) et des rapports R/aimportants ( $R/a \geq 2.5$ ).

On commence par présenter la solution analytique de Ancker et Goodier pour un ressort soumis à un effort axial de traction à une extrémité et une rotation libre à l'autre extrémité. Ensuite, on présente la solution pour un moment de torsion appliqué à une extrémité tout en maintenant la longueur du ressort égale à sa longueur initiale. La combinaison de ces deux solutions nous permet de déterminer la solution pour différentes sollicitations et conditions aux limites.

Soit un ressort soumis à un effort axial de traction T à une extrémité avec une rotation libre à l'autre extrémité (moment de torsion M nul). Le déplacement axial  $\delta$  s'exprime à partir du modèle de Ancker and Goodier [1958] sous cette forme :

$$\delta = \frac{4TR^3n}{Ga^4}\Psi_1\tag{5.1}$$

où G est le module de cisaillement du matériau et  $\Psi_1$  est le coefficient de correction de courbure pour une rotation libre à l'extrémité.  $\Psi_1$  est donné par :

$$\Psi_1 = 1 - \frac{3}{16} \left(\frac{a}{R}\right)^2 + \frac{1 - \nu}{2(1 + \nu)} \tan^2 \alpha + \dots,$$
(5.2)

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson. L'angle de rotation  $\varphi$  du ressort est alors donné par :

$$\varphi = \frac{8\nu R^2 n \tan \alpha}{Ea^4} T.$$
(5.3)

Notons que des modèles plus généraux que ceux des poutres ont été développés. Parmi ces travaux, on peut citer le modèle éléments finis 3D de Jiang and Henshall [2000]. En tenant compte de la symétrie hélicoïdale, leur modèle est réduit sur une tranche. Le ressort est soumis à un chargement axial à une extrémité et une rotation libre à l'autre extrémité. La figure 5.1 représente une superposition des solutions de ce modèle éléments finis 3D (lignes interrompues) et du modèle analytique de Ancker et Goodier (lignes continues). On remarque que la solution du modèle éléments finis 3D est en bon accord avec celle de Ancker et Goodier pour  $\alpha \leq 15^{\circ}$  et  $R/a \geq 5$ , où l'écart entre les deux modèles ne dépasse pas 1%. Par contre pour  $\alpha > 15^{\circ}$  et R/a < 5, il existe un écart non négligeable entre les deux modèle analytique. Cet écart est dû à la non validité du modèle analytique de Ancker et Goodier pour R/a faible et  $\alpha$  important. Cette limitation du modèle de Ancker et Goodier pour R/a faible et  $\alpha$  important. Cette limitation du modèle de Ancker et Goodier pour R/a faible et  $\alpha$  important.

Pour un moment de torsion M appliqué sur une extrémité et une longueur maintenue à sa valeur initiale ( $\delta = 0$ ), la rotation  $\varphi$  s'écrit sous cette forme (Ancker and Goodier [1958]) :

$$\varphi = \frac{8MRn}{Ea^4} \Psi_2, \tag{5.4}$$



FIG. 5.1 – Coefficient de correction  $\Psi_1$  en fonction a/R pour  $\alpha = 0^{\circ}, 5^{\circ}, 10^{\circ}, 15^{\circ}, 20^{\circ}$ .

où E est le module d'Young du matériau et  $\Psi_2$  est le coefficient de correction de courbure d'un ressort soumis à un moment de torsion avec un déplacement axial bloqué.  $\Psi_2$  est donné par :

$$\Psi_2 = 1 + \frac{3 - 7\nu - 20\nu^2 - 8\nu^3}{48(1+\nu)} (\frac{a}{R})^2 + (1+\nu)\tan^2\alpha + \dots \quad (5.5)$$

Par linéarité, les efforts et moments appliqués peuvent se superposer. L'angle de rotation  $\varphi$  et la déflexion  $\delta$  s'expriment donc en fonction de l'effort P et du moment M sous cette forme :

$$\begin{cases} \varphi = a_{11}M + a_{12}T \\ \delta = a_{21}M + a_{22}T \end{cases},$$
 (5.6)

où les coefficients  $a_{11}$ ,  $a_{12} = a_{21}$  et  $a_{22}$  sont aisément identifiés à partir des équations (5.1)-(5.5). Le système d'équations (5.6) est valable pour tout type de chargement appliqué sur un ressort hélicoïdal et pour tout type de conditions aux limites. Pour la validation de nos travaux, on se limite au cas d'une déformation axiale appliquée avec une rotation bloquée  $\varphi = 0$ . On récupère donc un effort et un moment résultants. Dans ce cas, le système (5.6) devient :

$$\begin{cases} 0 = a_{11}M + a_{12}T \\ \delta = a_{21}M + a_{22}T \end{cases}$$
(5.7)

Ce système d'équation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} M = -\frac{a_{12}}{a_{11}}T\\ \delta = (a_{22} - \frac{a_{21}^2}{a_{11}})T \end{cases}$$
(5.8)

En remplaçant les coefficients  $a_{11}$ ,  $a_{21}$  et  $a_{22}$  dans l'équation  $(5.8)_2$ , on obtient :

$$\delta = \frac{4TR^3n}{Ga^4}\Psi_3,\tag{5.9}$$

où  $\Psi_3$  est le coefficient de correction de courbure d'un ressort hélicoïdal soumis à un chargement axial de traction à une extrémité et de rotation bloquée à l'autre extrémité. On montre que  $\Psi_3$  selon le modèle analytique de Ancker and Goodier [1958] est donné par :

$$\Psi_{3} = 1 - \frac{3}{16} (\frac{a}{R})^{2} + \frac{\tan^{2} \alpha}{1 + \nu} (\frac{1 - \nu}{2} - \frac{\nu^{2}}{1 + \frac{3 - 7\nu - 20\nu^{2} - 8\nu^{3}}{48(1 + \nu)}} (\frac{a}{R})^{2} + (1 + \nu)\tan^{2} \alpha}$$
(5.10)

#### 5.1.2 Validation

Soit une structure hélicoïdale soumise à une déformation axiale  $\epsilon$  ( $E^T = 0$ ). À partir des équations (3.49) et (3.50) du modèle éléments finis 2D développé dans le chapitre 3, on peut remonter aux effort et moment résultants.

Afin de réduire le nombre de paramètres, toutes les variables sont écrites sous forme adimensionnelle. a est choisi comme longueur caractéristique et  $a/c_s$  comme temps caractéristique, où  $c_s = \sqrt{G/\rho}$  est la vitesse des ondes de cisaillement. L'indice (.)\* sera utilisé pour désigner les variables adimensionnelles.

À partir de l'équation (5.9) et en utilisant la relation  $L = 2\pi R \tan \alpha$ , le coefficient de correction  $\Psi_3$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\Psi_3 = \frac{\pi \tan \alpha}{2T^* (\frac{R}{a})^2} \epsilon,\tag{5.11}$$

où  $T^* = T/\rho a^2 c_s^2$  est l'effort résultant adimensionnel.

Cette équation permet de déterminer le coefficient de correction de courbure pour un ressort soumis à une déformation axiale avec rotation bloquée à partir de l'effort et du moment résultants calculés à partir du modèle éléments finis, dit 2D, du chapitre 3.

Dans ce paragraphe, nous présentons une validation du modèle éléments finis 2D à partir du calcul du coefficient de correction de courbure pour des ressorts d'angle  $\alpha = 5^{\circ}, 10^{\circ}, 15^{\circ}, 20^{\circ}$  et pour  $0.05 \le a/R \le 0.35$ .

La figure 5.2 représente le maillage de la section normale à l'axe  $\mathbf{e}_Z$  de quatre ressorts de section circulaire de rayon a, de rayon d'hélice R = 10 a et d'angle  $\alpha$  de 5°, 10°, 15° et 20° respectivement. Pour un même rapport de rayon R/a, le maillage de la section doit être plus fin lorsque l'on diminue l'angle d'hélice  $\alpha$ , afin d'assurer une bonne convergence de la solution et les résultats qui suivent correspondent à la solution convergée. Des éléments



FIG. 5.2 – Maillages de la section pour des ressorts de paramètres  $R = 10 \ a \ \text{et}$  (a)  $\Phi = 5^{\circ}$ , (b)  $\Phi = 10^{\circ}$ , (c)  $\Phi = 15^{\circ}$ , (d)  $\Phi = 20^{\circ}$ .

triangulaires avec une interpolation quadratique ont été utilisés pour générer ce maillage. Pour un angle d'hélice  $\alpha = 5^{\circ}$  (figure 5.2(a)) on a utilisé un maillage comprenant 1982 éléments triangulaires et 4191 noeuds. Pour un angle d'hélice  $\alpha = 20^{\circ}$  (figure 5.2(d)) on n'a utilisé que 506 éléments triangulaires et 1073 noeuds.

À partir de l'équation (3.12) du chapitre 3, les structures hélicoïdales possèdent un mouvement de corps rigide à deux degrés de liberté dans le système de coordonnées tournant, qui sont le déplacement axial  $u_Z$  et la rotation autour de l'axe droit  $\mathbf{e}_Z$ . Pour éliminer le mode de corps rigide de déplacement, il suffit de bloquer le déplacement axial  $u_Z$  en un noeud quelconque (par commodité, on choisit un noeud sur la ligne de symétrie de la section (y = 0)). Pour éliminer le mode de corps rigide de rotation, il faut bloquer le déplacement binormal  $u_{bt}$  d'un noeud appartenant à la ligne de symétrie.

La figure 5.3 représente une superposition du coefficient  $\Psi_3$  calculé par le modèle éléments finis 2D et le modèle analytique de Ancker et Goodier (équation (5.10)).

On remarque que l'écart entre les deux modèles est faible pour  $a/R \leq 0.2$  et augmente avec a/R et  $\alpha$ . L'écart atteint 0.7% pour  $\alpha = 20^{\circ}$  et a/R = 0.35 ce qui reste relativement négligeable. On constate un écart plus important pour un angle  $\alpha = 5^{\circ}$  que pour des angles supérieurs. Le même phénomène a été observé par Jiang and Henshall [2000] en rotation libre. Cet écart, qui reste relativement négligeable, n'est pas en accord avec les



FIG. 5.3 – Coefficient de correction  $\Psi_3$  en fonction de a/R pour  $\alpha = 5^{\circ}, 10^{\circ}, 15^{\circ}, 20^{\circ}$ 

conditions d'application des formules analytiques, où l'écart devrait être plus faible pour un angle d'hélice  $\alpha$  plus petit. Cependant, les résultats du modèle éléments finis 2D sont en bon accord avec ceux du modèle analytique.

Par ailleurs, l'écart obtenu entre les deux solutions est conforme à celui obtenu par Jiang and Henshall [2000] en rotation libre (voir Figure 5.1).

On rappelle que cet écart est dû à la non validité du modèle analytique pour des angles  $\alpha$  et des rapports de rayon a/R importants. Aucune hypothèse particulière n'étant appliquée (à part celle des petits déplacements), les modèles éléments finis 2D et 3D restent, quant à eux, valables quels que soient les paramètres de l'hélice.

Ces résultats constituent donc une première validation du modèle éléments finis 2D.

### 5.1.3 Limitation de l'hypothèse des petits déplacements

Dans cette section, l'hypothèse des petits déplacements est brièvement discutée. Pour cela nous allons comparer les solutions obtenues par le modèle éléments finis 2D, qui est linéaire, avec une solution analytique non-linéaire de la littérature.

On suit l'approche proposée dans le chapitre 20 de Wahl [1963]. Cette solution nonlinéaire, valable pour des déflexions importantes, se limite toutefois aux rapports de rayon R/a importants ( $R/a \ge 5$ ) et aux angles d'hélice faible ( $\alpha \le 25^{\circ}$ ). Des nouvelles notations sont utilisées. En abscence de sollicitation appliquée, l'angle et le rayon d'hélice sont notés  $\alpha_0$  et  $R_0$ . Sous l'effet d'une déformation axiale  $\epsilon$ , l'angle et le rayon d'hélice deviennent respectivement  $\alpha$  et R.

À l'aide d'une simple représentation géométrique de la structure hélicoïdale, la déformation peut être exprimée sous la forme  $\epsilon = (l \sin \alpha - l_0 \sin \alpha_0)/l_0 \sin \alpha_0$ , où  $l_0$  et l sont les longueurs curvilignes d'une spire dans les géométries non déformée et déformée respectivement. On néglige l'élongation si bien que  $l \simeq l_0$  (Harings [1948] et Wahl [1963]). Ceci nous permet de simplifier la déformation sous la forme  $\epsilon \simeq \sin \alpha / \sin \alpha_0 - 1$ . L'angle d'hélice déformé  $\alpha$  s'obtient par :

$$\alpha = \arcsin((1+\epsilon)\sin\alpha_0). \tag{5.12}$$

Les moments de flexion et de torsion sont équilibrés par le produit entre le changement de courbure et de torsion et les rigidités correspondantes :

$$TR\sin\alpha = -EI_b \bigtriangleup \kappa,\tag{5.13}$$

$$TR\cos\alpha = GI_t \,\triangle\,\tau,\tag{5.14}$$

où  $\Delta \kappa = \cos^2 \alpha / R - \cos^2 \alpha_0 / R_0$  et  $\Delta \tau = \sin \alpha \cos \alpha / R - \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 / R_0$ .  $I_b$  et  $I_t$  sont les moments quadratiques respectivement selon les directions binormale et tangentielle de Serret-Frenet. Pour des sections circulaires,  $I_b = I_t/2 = \pi a^4/4$ . Les caractéristiques matérielles sont définies par la densité  $\rho$ , le module d'Young E, le module de cisaillement  $G = E/2(1 + \nu)$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ .

En éliminant T des équations (5.13) et (5.14), on obtient le rayon d'hélice adimensionnel R/a:

$$R/a = \frac{(1+\nu)\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{(1+\nu)\cos^2\alpha_0 + \sin\alpha_0\cos\alpha_0\tan\alpha} R_0/a.$$
 (5.15)



FIG. 5.4 – Variation de R/a en fonction de la déformation  $\epsilon$  pour  $R_0 = 10a$ ,  $\alpha_0 = 15^{\circ}$ .



FIG. 5.5 – Variation de l'angle d'hélice  $\alpha$  en fonction de la déformation appliquée  $\epsilon$  pour  $R_0 = 10a, \alpha_0 = 15^{\circ}$ .

Afin d'évaluer les limites de validité du modèle éléments finis en petits déplacements, une comparaison avec la solution non-linéaire de Wahl est effectuée. On limite cette comparaison pour le cas d'un ressort de rayon d'hélice initial  $R_0 = 10a$  et d'angle d'hélice initial  $\alpha_0 = 15^{\circ}$ . Ce cas test sera aussi considéré dans le chapitre 6 pour la validation du modèle SAFE.

La figure 5.4 représente la superposition du rayon adimensionnel déformé R/a en fonction de la déformation appliquée en utilisant le modèle éléments finis 2D et le modèle non-linéaire de Wahl. À partir du modèle éléments finis 2D, le rayon déformé adimensionnel R/a est calculé par la sommation du rayon initial adimensionnel  $R_0/a$  avec le déplacement normal adimensionnel du noeud central  $(R/a = R_0/a + U_{nt}^c)$ , où l'indice  $(.)^c$ est relatif au brin central. L'écart entre les deux modèles en terme de déplacement normal (direction radiale) est important. Il dépasse 23% pour une déformation axiale de traction de 40%. Néanmoins, l'écart relatif au rapport R/a entre les deux modèles est faible. Il reste inférieur à 0.1% pour une déformation axiale de traction de 40%. Ceci nous permet de dire que la géométrie déformée calculée à partir la solution linéaire du modèle éléments finis est proche de celle calculée à partir du modèle non-linéaire.

La figure 5.5 représente la superposition des angles d'hélice déformée  $\alpha$  en fonction de la déformation appliquée calculés selon les deux modèles. L'écart entre les deux modèles relatif à l'angle d'hélice n'est que de l'ordre de 3% pour une déformation axiale de traction de 40%.

Si on compare les paramètres géométriques  $(R \text{ et } \alpha)$ , on constate que l'écart entre les deux modèles reste faible, même pour une élongation imposée importante de 40%.



FIG. 5.6 – Variation de l'effort adimensionnel  $T^*$  en fonction de la déformation appliquée  $\epsilon$  pour  $R_0 = 10a$ ,  $\alpha_0 = 15^{\circ}$ .

La figure 5.6 représente la variation de l'effort résultant adimensionnel en fonction de la déformation axiale. L'écart entre les efforts résultants, calculés d'une part à partir du modèle éléments finis 2D qui est linéaire et d'autre part à partir du modèle non linéaire de Wahl, reste relativement faible même pour une déformation axiale de traction importante de 40% (inférieur à 6%).

En conclusion, la solution linéaire du modèle éléments finis 2D est relativement proche de celle non-linéaire. En première approximation, elle pourra donc raisonnablement être utilisée pour l'étude des guides d'onde dans le chapitre 6.

En ce qui concerne les structures d'angle  $\alpha$  important et de rapport R/a faible (type brin hélicoïdal de toron à sept brins), il n'existe pas de solution analytique non-linéaire à notre connaissance dans la littérature. Toutefois, l'angle tendant vers  $\pi/2$ , les déformations imposées sont en pratique faibles pour de telles structures ( $\epsilon \sim 1\%$  au plus). En première approximation, on peut supposer que les déplacements resteront petits et le modèle éléments finis 2D sera utilisé.

Notons que les modèles analytiques, linéaires ou non-linéaires, du comportement statique des ressorts sont des modèles de poutre et la solution qu'ils donnent est celle de l'axe neutre de la poutre. Un avantage des modèles éléments finis est qu'ils permettent de donner l'état de déformation local sur la section de la structure.

À titre indicatif, les figures 5.7(a)-(c) représentent les déplacements locaux  $U_{nt}$ ,  $U_{bt}$  et  $U_Z$  sur la section obtenus pour le ressort de rayon initial  $R_0 = 10a$  et d'angle d'hélice  $\alpha_0 = 15^{\circ}$  soumis à une déformation axiale de traction de 40 %. Le champ de déplacement normal  $U_{nt}$  est symétrique par rapport à l'axe (y = 0). Par contre les champs de déplacement  $U_{bt}$ 

et  $U_Z$  sont antisymétriques par rapport au même axe de symétrie. La figure 5.8 représente la superposition de la géométrie initiale non déformée, en gris et de la géométrie déformée, en noir après l'application d'une déformation axiale de 40%.



FIG. 5.7 – Déplacements locaux adimensionnels  $U_{nt}$ ,  $U_{bt}$  et  $U_Z$  d'un ressort de rayon  $R_0 = 10a$  et d'angle  $\alpha_0 = 15^{\circ}$  soumis à une déformation de 40%



FIG. 5.8 – Superposition des géométries initiale, en gris, et déformée, en noir d'un ressort de rayon  $R_0 = 10a$  et d'angle  $\alpha_0 = 15^{\circ}$  soumis à une déformation de 40%

# 5.2 Structures multi-brins

Les structures multi-brins constituent une classe importante des composants du génie civil. Parmi ces structures, on trouve les torons à sept brins qui sont constitués par une couche de brins hélicoïdaux enroulée autour d'un brin central droit. Ces torons représentent l'élément de base le plus courant des câbles de génie civil. L'avantage majeur de cet élément est sa capacité à supporter des chargements axiaux importants.

#### 5.2.1 Modèles de référence

Le comportement statique des torons a été largement étudié dans la littérature. Pour éviter les travaux expérimentaux spécifiques pour chaque toron, des modèles ont été développés permettant de donner une estimation rapide de son comportement global. Plusieurs modèles analytiques basés sur différentes hypothèses ont été développés et présentés dans la littérature. Le modèle analytique de Costello [1977] est l'un des modèles les plus connus pour la détermination du comportement global des torons. Un résumé des différents modèles analytiques a été présenté dans l'article de Ghoreishi et al. [2007].

En complément des modèles analytiques, des modèles éléments finis tridimensionnels linéaires ont été développés pour déterminer le comportement global des torons sous l'effet d'une sollicitation donnée. Parmi ces travaux, on peut citer par exemple Ghoreishi et al. [2007] où le comportement global d'un toron à sept brins soumis à une déformation axiale (traction et torsion) a été étudié pour différents angles d'hélice  $\Phi$ , variant de 2.5° à 35°. Une approximation elliptique de la géométrie de la section des brins périphériques a été utilisée. On suppose que le seul contact se produit entre le brin central et les brins périphériques et qu'il n'y a pas de contact entre deux brins hélicoïdaux périphériques. Cette hypothèse a été vérifiée dans les travaux de (Huang [1978]).

Dans le modèle 3D de Ghoreishi et al. [2007], le comportement global du toron ayant une extrémité fixe est calculé de la manière suivante : un effort axial appliqué sur un toron avec une rotation bloquée à l'autre extrémité permet de déterminer sa raideur axiale notée  $k_{\epsilon\epsilon}$  par calcul de la déformation. Un moment de torsion appliqué en maintenant la longueur initiale du toron permet de déterminer le raideur à la torsion notée  $k_{\theta\theta}$  par calcul de la rotation. Un effort axial appliqué sur un toron avec une rotation libre à l'autre extrémité permet de déterminer le premier terme de couplage, noté  $k_{\theta\epsilon}$  par calcul de la rotation. Finalement, le deuxième terme de couplage noté  $k_{\epsilon\theta}$  est déterminé suite à un moment de torsion appliqué sur un toron avec un déplacement axial libre de la deuxième extrémité, par calcul du déplacement axial.

Pour des considérations générales, les raideurs axiale et de torsion ainsi que les termes de couplages sont exprimés sous forme adimensionnelle, avec une barre  $\overline{(\cdot)}$ , par :

$$\overline{k}_{\epsilon\epsilon} = k_{\epsilon\epsilon}/(E\pi R^2)$$

$$\overline{k}_{\theta\theta} = k_{\theta\theta}/(E\pi R^4)$$

$$\overline{k}_{\epsilon\theta} = k_{\epsilon\theta}/(E\pi R^3)$$

$$\overline{k}_{\theta\epsilon} = k_{\theta\epsilon}/(E\pi R^3)$$
(5.16)

où R est le rayon d'hélice des brins périphériques.

Dans la référence Ghoreishi et al. [2007], le modèle numérique a été comparé à plusieurs modèles analytiques pour la raideur axiale  $\overline{k}_{\epsilon\epsilon}$ , le terme de torsion  $\overline{k}_{\theta\theta}$  et les termes de couplages  $\overline{k}_{\epsilon\theta}$  et  $\overline{k}_{\theta\epsilon}$ . Puisque nous nous intéressons seulement aux déformations axiales appliquées sur les torons, seule la raideur axiale  $\overline{k}_{\epsilon\epsilon}$  et le terme de couplage  $\overline{k}_{\theta\epsilon}$  seront présentés.



FIG. 5.9 – Variation de la raideur axiale et du terme de couplage adimensionnels en fonction de l'angle d'hélice  $\alpha$  pour R = 2a. Sur les courbes, l'angle d'hélice  $\alpha$  utilisé dans le papier de Ghoreishi et al. [2007] correspond à  $\Phi$  dans cette étude.

La figure 5.9(a) représente la raideur axiale adimensionnelle  $\overline{k}_{\epsilon\epsilon}$  obtenue à partir du modèle éléments finis 3D et des modèles analytiques (Labrosse, Costello,...) pour différent torons d'angle  $\Phi$  variant de 2.5° à 35° et un rayon d'hélice R = 2a. Pour des angles faibles ( $\Phi \leq 15^{\circ}$ ), les résultats des différents modèles sont très proches. Les résultats du modèle éléments finis 3D sont en bon accord avec ceux des modèles analytiques (l'erreur est généralement inférieur à 5%). Cet accord devient de moins bonne qualité avec l'augmentation de l'angle.

L'évolution du terme de couplage en fonction de l'angle  $\Phi$  a été présentée dans la figure 5.9(b). L'écart entre le modèle éléments finis et les modèles analytiques est faible pour des torons d'angle faible ( $\Phi \leq 15^{\circ}$ ). Au-delà de cette valeur, une différence significative peut apparaître.

#### 5.2.2 Validation

La détermination du comportement global des torons en utilisant le modèle éléments finis 2D se fait de la manière suivante : on applique une déformation axiale  $\epsilon$  ( $E^T = 0$ ). À partir de la théorie d'homogénéisation hélicoïdale présentée dans le chapitre 3, le problème 3D se réduit à un problème 2D sur la section du toron.

Notons que la rotation est choisie bloquée ( $\varphi = E^T = 0$ ) et non pas libre parce que le

système d'ancrage des structures hélicoïdales multi-brins est conçu de sorte que la rotation à l'extrémité soit bloquée.



FIG. 5.10 – Maillage d'un toron à sept brins ( $R = 2a, \Phi = 5^{\circ}$ )

Afin de déterminer l'effort et le moment résultants, on procède comme suit : on commence par mailler la section du toron. Par exemple, pour un toron à sept brins de rayon d'hélice R = 2a et d'angle  $\Phi = 5^{\circ}$ , le maillage est présenté par la figure 5.10. On part d'un maillage indépendant pour chaque brin du toron. On suppose un contact collant au points de contact entre le brin central et les brins périphériques c'est-à-dire qu'il n'y a ni glissement, ni décollement, ni frottement. Des relations linéaires ont été imposées aux points de contact entre brins central et périphérique. Ces relations expriment la continuité du déplacement ( $\mathbf{u}_c = \mathbf{u}_p$ ). En pratique, ces conditions sont mises en oeuvre par condensation des degrés de liberté. Ensuite on élimine les modes de corps rigide du toron correspondant au déplacement axial  $U_Z$  et à la rotation autour de  $\mathbf{e}_Z$ . Pour éliminer la rotation, il faut bloquer le déplacement binormal  $U_{bt}$  d'un noeud appartenant à l'axe de symétrie de la section (y = 0), mais pas au centre du toron. Puis, on applique la théorie d'homogénéisation hélicoïdale afin de déterminer les déplacements locaux en chaque noeud de la section. Finalement on remonte à l'effort axial T et au moment de torsion M résultants suite à la déformation axiale appliquée sur le toron à partir des équations (3.49) et (3.50).

Le comportement global d'un toron soumis à un déplacement axial à une extrémité et encastré à l'autre extrémité s'écrit sous forme matricielle comme suit (voir équation (3.28) et Ghoreishi et al. [2007]) :

$$\left\{ \begin{array}{c} T\\ M \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} k_{\epsilon\epsilon} & k_{\epsilon\theta}\\ k_{\theta\epsilon} & k_{\theta\theta} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \epsilon\\ 0 \end{array} \right\}.$$
 (5.17)

Dans cette section nous présentons une comparaison du comportement global des torons ayant différents angles en utilisant le modèle éléments finis 2D (du chapitre 3) avec le modèle éléments finis 3D de Ghoreishi et al. [2007], présenté dans la section 5.2.1. Pour avoir une comparaison directe des solutions, nous utilisons la même adimensionnalisation que celle du modèle de référence. Les composantes adimensionnelles de la matrice raideur sont données par l'équation (5.16). L'effort et le moment résultants s'écrivent sous forme adimensionnelle comme suit :

$$\begin{cases} \overline{T} = T/(E\pi R^2) \\ \overline{M} = M/(E\pi R^3) \end{cases} .$$
(5.18)



FIG. 5.11 – Raideur axiale adimensionnelle  $\overline{k}_{\epsilon\epsilon}$  en fonction de l'angle d'hélice  $\Phi$ 

La figure 5.11 représente l'évolution de la raideur axiale des torons à sept brins  $\overline{k}_{\epsilon\epsilon}$ en fonction de l'angle d'hélice  $\Phi$  allant de 2.5° à 35° avec un rayon d'hélice R = 2a. La courbe interrompue représente la raideur axiale obtenue à partir du modèle éléments finis 3D de référence et la courbe continue représente la raideur axiale obtenue à partir du modèle éléments finis 2D. Pour des angles d'hélice  $\Phi$  inférieurs à 25°, l'écart entre les deux modèles reste limité (inférieur à 2%). Cet écart augmente avec l'augmentation de  $\Phi$ pour arriver jusqu'à 10% pour un toron d'angle d'hélice de 35°.

L'évolution du terme de couplage  $\overline{k}_{\theta\epsilon}$  en fonction de l'angle d'hélice  $\Phi$  allant de 2.5° à 35° avec un rayon d'hélice R = 2a a été présentée par la figure 5.12 (même légende que la figure 5.11).

Pour des angles d'hélice  $\Phi$  inférieurs à 8°, les termes de couplage obtenus à partir des deux modèles éléments finis 3D et 2D sont identiques. Pour des angles d'hélice plus importants, l'écart entre les deux solutions est plus important mais il reste modéré et ne dépasse pas 4%.



FIG. 5.12 – Terme de couplage adimensionnel  $\overline{k}_{\theta\epsilon}$  en fonction de l'angle d'hélice  $\Phi$ 

L'écart observé entre les deux modèles sur les figure 5.11 et 5.12 peut s'expliquer par le fait qu'on utilise un maillage difficile à comparer avec celui du modèle 3D. Pour un toron d'angle  $\Phi = 5^{\circ}$ , le modèle éléments finis 2D est composé de 1122 éléments triangulaires et 2514 noeuds et le modèle de référence 3D est constitué de 72 éléments et 210 noeuds sur la section avec des éléments quadratiques utilisés pour les deux modèles. L'écart peut s'expliquer aussi par l'approximation elliptique de la section des brins périphériques qui est considérée dans le modèle éléments finis 3D.

On peut conclure que le comportement global des torons décrit par le modèle éléments finis 2D est en bon accord avec celui obtenu à partir du modèle éléments finis 3D de référence. On a ainsi une deuxième validation du modèle éléments finis 2D.

#### 5.2.3 Résultats pour un toron T15.7 (sept brins)

Le modèle éléments finis 2D de calcul statique a été validé pour des toron de rayon d'hélice des brins périphériques égal à R = 2a. Cette structure n'est qu'une approximation d'un vrai toron, où le rayon d'hélice des brins périphériques R doit être inférieur à 2a. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à des torons de type T15.7.

Un toron à sept brins de type T15.7 est constitué d'un brin central droit de section circulaire de rayon  $a = 2.7 \ mm$  entouré d'une couche de six brins hélicoïdaux de rayon d'hélice  $R = 1.967 \ a$  et d'angle d'hélice  $\Phi = 7.9^{\circ}$ . Les propriétés du matériau sont choisies comme suit : E = 2.17e11Pa,  $\nu = 0.28$  et  $\rho = 7800 kg/m^3$ .

Pour le calcul de l'état statique local, nous utilisons le maillage présenté par la figure 5.13. Ce maillage est plus raffiné au niveau des points de contact que celui utilisé dans la section 5.2.2 pour la validation statique. Notons que les seuls contacts entre les brins



FIG. 5.13 – Maillage d'un toron T15.7 ( $R = 1.967a, \Phi = 7.9^{\circ}$ ).

se produisent entre le brin central et les brins périphériques et qu'il n'y a pas de contact entre deux brins périphériques voisins.



FIG. 5.14 – Déplacements locaux de la section du brin central d'un toron T15.7 soumis à une déformation axiale de 0.6%

Soit un toron T15.7 soumis à une déformation axiale de traction de  $\epsilon = 0.6\%$  ( $E^T = 0$ ). Après post-traitement selon les équations (3.49) et (3.50), on récupère un effort axial résultant T = 193.2kN et un moment résultant M = 119.9N·m. Le modèle éléments finis permet de déterminer les déplacements locaux sur la section du toron. Les figures 5.14(a)-(c) représentent les déplacements normal  $U_{nt}$ , binormal  $U_{bt}$  et tangentiel  $U_Z$  du brin central. Deux effets sont superposés sur ce brin droit : l'effet Poisson et l'effet des brins périphériques s'aplatissant sur le brin central. L'effet Poisson se manifeste par la symétrie du déplacement normal  $U_{nt}$  par rapport à l'axe x = 0 (5.14(a)) et du déplacement binormal  $U_{bt}$  par rapport à l'axe y = 0 (5.14(b)). L'effort appliqué par les brins phériphériques hélicoïdaux se manifeste par la présence d'une petite variation de déplacements tangentiels  $U_Z$  aux points de contact (5.14(c)).

Les champs de déplacements normal  $U_{nt}$ , présenté par la figure 5.14(a) et binormal  $U_{bt}$ , présenté par la figure 5.14(b) du brin central sont antisymétriques par rapport à l'axe x = 0 et y = 0 respectivement.



FIG. 5.15 – Déplacements locaux de la section d'un brin périphérique hélicoïdal d'un toron T15.7 soumis à une déformation axiale  $\epsilon = 0.6\%$ 

À cause de la symétrie qui existe entre les six brins périphériques, la représentation des déplacements des brins périphériques peut se limiter à un seul brin. La détermination des déplacements des autres brins périphériques se fait par la symétrie de rotation qui existe entre eux. Les figures 5.15(a)-(c) représentent les déplacements normal  $U_{nt}$ , binormal  $U_{bt}$  et tangentiel  $U_Z$  d'un brin périphérique.

À partir des figures 5.15(b) et (c), on remarque que les champs de déplacement binormal  $U_{bt}$  et tangentiel  $U_Z$  du brin périphérique sont antisymétriques par rapport à l'axe de symétrie (y = 0). Ceci est dû à la symétrie géométrique que possède ce brin périphérique par rapport à cet axe.

La figure 5.16(a) représente le champ de déplacement sur la section du toron T15.7 soumis à une déformation axiale  $\epsilon = 0.6\%$ . Le caractère centripète des lignes de champ de déplacement traduit l'effet Poisson.



FIG. 5.16 – Toron T15.7 soumis à une déformation axiale  $\epsilon = 0.6\%$ . (a) : champ de déplacements. (b) : superposition des géométries initiale, en gris, et déformée, en noir

La figure 5.16(b) représente une superposition du maillage initial, en gris, et du maillage actualisé de la section du toron après déformation, en noir. La géométrie actualisé est obtenue par déplacement des noeuds de la géométrie initiale des valeurs correspondantes. On constate qu'il n'y a aucune différence entre les deux géométrie. Au plus fort grossissement au niveau des points de contact entre le brin central et un brin périphérique (5.17(a)), on constate qu'il y a interpénétration de noeuds entre le brin central et le brin périphérique. Ce phénomène se produit parce qu'aucune relation n'a été imposée au voisinage des points de contact initial. Par ailleurs, la figure 5.17(b) montre que sous l'effet de la déformation axiale, la distance qui sépare deux brins périphériques voisins reste la même et qu'il n'y a jamais de contact entre deux brins périphériques.



FIG. 5.17 – Superposition des géométries initiale, en gris, et déformée, en noir, d'un toron T15.7 pour  $\epsilon = 0.6\%$  avec contact linéïque (interpénétration libre). (a) : grossissement au point de contact, (b) : grossissement entre deux brins périphériques

Dans le paragraphe suivant, nous allons tenir compte du contact, de manière simplifiée, de façon à ce qu'il n'y ait pas interpénétration.

#### 5.2.4 Prise en compte simplifiée du contact

On a montré dans la section 5.2.2 que le modèle éléments finis est valide par rapport à une référence où les mêmes hypothèses de contact sont faites (en l'occurrence contact collant). Dans ce paragraphe, le contact est pris en compte dans le modèle afin de voir son influence sur le comportement statique d'un toron.

La prise en compte du contact simplifié se fait de la manière suivante : on commence par mailler la section du toron T15.7 (le même maillage que celui utilisé dans la section 5.2.3 - figure 5.13). On a au total six paires de noeuds en contact. Chaque paire est composée d'un noeud du brin central et l'autre d'un brin périphérique. On impose les continuités du déplacement entre les noeuds de chaque paire. La suite du raisonnement sera faite pour une seule paire de noeuds en contact. On applique maintenant une partie de la déformation totale à atteindre jusqu'à l'obtention du contact entre deux nouveaux noeuds de part et d'autre de la paire de noeuds initialement en contact. On obtient au total 3 paires de noeuds en contact. Puis on actualise la géométrie par déplacement des noeuds et on impose les continuités des déplacements sur ces trois paires de noeuds. On obtient une nouvelle géométrie qui sera utilisée pour le calcul suivant. On applique de nouveau une partie du reste de la déformation à atteindre jusqu'à l'obtention du contact entre les deux paires de noeuds suivantes de part et d'autre des trois paires de noeuds déjà en contact. Le nombre de paires de noeuds en contact s'élève alors à cinq. On réactualise la géométrie et on impose la continuité du déplacement entre les nouveaux noeuds en contact. On répète cette opération de façon incrémentale jusqu'à l'application de la totalité de la déformation, où on obtient une géométrie déformée avec un ensemble de paires de noeuds en contact entre le brin central et les brins périphériques.



FIG. 5.18 – Superposition des géométries initiale, en gris, et déformée, en noir, d'un toron T15.7 pour  $\epsilon = 0.6\%$  en tenant compte du contact sans pénétration. (a) : grossissement au point de contact, (b) : grossissement entre deux brins périphériques

Pour un toron T15.7 soumis à une déformation axiale de traction  $\epsilon = 0.6\%$ , la géométrie déformée de la section du toron est semblable à la figure 5.16(b), pour laquelle on ne peut pas différencier la géométrie initiale de celle déformée. Au plus fort grossissement au niveau des points de contact, présenté par la figure 5.18(a), on observe bien qu'il n'y a plus d'interpénétration entre le brin central et les brins périphériques et qu'il existe trois paires de noeuds en contact de part et d'autre de la paire de noeuds initialement en contact. Ceci fait un total de sept paires en contact entre le brin central et chaque brin périphérique.

En comparant les géométries déformées sans et avec prise en compte du contact sans pénétration, présentés pas les figures 5.17(b) et 5.18(b), on remarque que la prise en compte du contact n'a pas d'effet considérable sur la distance qui sépare deux brins périphériques voisins.

Notons que pour une déformation axiale de traction  $\epsilon = 0.6\%$  appliquée sur un toron T15.7, on récupère un effort résultant T = 192.7kN et un moment résultant M = 119.3N · m. Si on compare ces valeurs à celles calculées avec un contact linéïque, on

constate que la prise en compte du contact n'a pas d'effet sur le comportement global du toron T15.7. Ceci est conforme aux résultats obtenus dans Ghoreishi et al. [2007], où il est montré que le comportement global d'un toron à sept brins est très peu sensible aux hypothèses sur le contact. La conclusion serait différente si on s'intéressait aux contraintes locales, qui sont extremales dans les zones de contact.

Nous verrons également que l'effet du contact sera considérable sur la propagation des ondes, comme montré dans le chapitre 6. L'avantage de la méthode présentée ici est qu'elle permet simplement de prendre en compte le contact entre le brin central et les brins périphériques.

# Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une validation du modèle éléments finis 2D, développé au cours du chapitre 3, pour des structures hélicoïdales mono-brins (ressort) et multi-brins (torons à sept brins). La limite de validité des petits déplacements a été brièvement étudiée pour les structures hélicoïdales mono-brins par comparaison de la solution éléments finis avec celle d'un modèle non-linéaire. Des résultats ont été présentés pour le cas d'un ressort et d'un toron. Dans le cas du toron T15.7, une prise en compte simplifiée du contact entre le brin central et les brins périphériques a été faite afin d'éviter l'interpénétration. Dans le prochain chapitre, nous présenterons les effets de précontrainte et de déformation de la géométrie sur la propagation des ondes dans une structure hélicoïdale.

# Chapitre 6

# Résultats pour les ondes guidées

# Sommaire

Introduction			
6.1 Gui	des mono-brins		
6.1.1	Modulation du nombre d'onde		
6.1.2	Modèle de référence avec précontrainte		
6.1.3	Validation avec précontrainte		
6.1.4	Effet de la réactualisation de la géométrie		
6.2 Gui	des multi-brins		
6.2.1	Repères bibliographiques		
6.2.2	Résultats préliminaires sans chargement		
6.2.3	Résultats avec précontrainte		
	6.2.3.a Cas d'un contact linéïque		
	6.2.3.b Prise en compte simplifiée du contact 104		
Conclusi	Conclusion		

# Introduction

Dans le chapitre précédent et à partir d'un modèle éléments finis 2D, nous avons déterminé les déplacements locaux et la géométrie déformée suite à un chargement axial appliqué sur un guide d'onde hélicoïdal mono-brins et multi-brins. Ces résultats vont être introduits dans le modèle SAFE (chapitre 4) en terme de précontrainte et de géométrie déformée pour déterminer les modes de propagation sous l'effet de ce chargement.

Nous présentons dans ce chapitre une validation du modèle SAFE pour des guides d'onde hélicoïdaux mono-brins (ressorts) et multi-brins (torons à sept brins) soumis à une sollicitation axiale. La validation du guide mono-brin est faite par comparaison des courbes de dispersion avec celles d'un modèle de référence basé sur la théorie des poutres, décrit en Annexe B.

Concernant les torons à sept brins, des résultats expérimentaux issus de la littérature ont montré l'existence d'une bande de fréquence où le mode ayant la vitesse la plus rapide (de type compression) ne semble plus se propager. Cette bande de fréquence se décale vers les hautes fréquences pour un toron soumis à une déformation axiale de traction. Dans les simulations, nous supposons un contact collant entre les brins. Nous rappelons d'abord des résultats obtenus par le modèle SAFE dans le cas des torons non-précontraints. Nous présentons ensuite les résultats obtenus sous chargement axial, en tenant compte à la fois des effets de précontrainte et de déformation de la géométrie. Ces résultats montrent que l'hypothèse d'un contact linéïque entre le brin central et les brins périphériques ne permet par de décrire correctement le comportement des ondes guidées dans un toron précontraint. Une prise en compte simplifiée du contact, sans interpénétration, permet d'obtenir un décalage de la bande de fréquence "manquante" en adéquation aves les observations expérimentales.

## 6.1 Guides mono-brins

Nous commençons par l'étude des guides d'onde mono-brins. Nous nous intéressons à des guides hélicoïdaux de section circulaire de rayon a. R et  $\alpha$  désignent respectivement le rayon et l'angle d'hélice. La longueur du guide est supposée infinie. La propagation des ondes élastiques dans un tel guide a été étudiée dans la littérature. Dans ce cadre, on peut citer les travaux de Treyssède [2007, 2008] permettant de déterminer les modes de propagation dans un guide hélicoïdal par les méthodes de Floquet et SAFE.

Ces guides d'onde sont généralement soumis à des sollicitations axiales. Dans ces travaux de thèse, nous avons développé un modèle éléments finis 2D (SAFE) permettant de déterminer les modes de propagation dans un guide d'onde hélicoïdal soumis à une déformation axiale. À notre connaissance, il n'existe pas de modèle général dans la littérature permettant de déterminer les modes de propagation d'un guide d'onde hélicoïdal précontraint. Dans ces travaux de thèse, nous avons aussi étudié cet effet de précontrainte sur la propagation d'onde dans des guides mono-brins modélisés par des poutres hélicoïdales (Frikha et al. [2011], voir article en Annexe B). Ces travaux seront considérés par la suite comme modèle de référence pour la validation du modèle SAFE.

L'étude des modes de propagation d'un guide d'onde revient à déterminer ses courbes de dispersion. Elles peuvent être présentées sous la forme de courbe de fréquence en fonction du nombre d'onde, vitesse de phase en fonction de la fréquence, vitesse de groupe (ou vitesse de l'énergie pour les matériaux possédant de l'atténuation matérielle) en fonction de la fréquence.

Dans la suite de la section 6.1, les paramètres R et  $\alpha$  seront donnés dans la configuration de référence non-précontrainte.

### 6.1.1 Modulation du nombre d'onde

Pour un guide d'onde hélicoïdal mono-brin, les systèmes de coordonnées hélicoïdales et tournant peuvent être utilisés pour déterminer ses courbes de dispersion. Afin de comparer les courbes de dispersion obtenues dans ces deux systèmes, une transformation du nombre d'onde et de la vitesse doit être effectuée pour les représenter dans un même repère. Par exemple, pour comparer les courbes dans le repère hélicoïdal, on doit multiplier par L/lle nombre d'onde calculé dans le système tournant (Treyssède and Laguerre [2010]), où Let l désignent les longueurs droite et curviligne d'un pas d'hélice.

Dans ce paragraphe, on suppose que le guide hélicoïdal mono-brin n'est soumis à aucune sollicitation statique. Dans ce cas, une validation du modèle SAFE a été faite pour ces structures dans le papier de Treyssède [2008]. Cette validation est basée sur une comparaison des courbes de dispersion calculées à partir du modèle SAFE avec celles calculées à partir d'un modèle de poutre hélicoïdale (voir Annexe de Treyssède [2007]). Notons que ce modèle de poutre est un cas particulier de celui développé dans Frikha et al. [2011] car il ne tient pas compte des effets de précontrainte.

On commence par présenter les courbes de dispersion, fréquence adimensionnelle  $\omega a/c_s$ en fonction du nombre d'onde adimensionnel ka, d'un guide d'onde hélicoïdal de paramètres R = 10a et  $\alpha = 15^{\circ}$  calculées à partir du modèle SAFE (figure 6.1). Les courbes grises représentent les courbes de dispersion déterminées dans le système de coordonnées tournant. Les courbes noires représentent les courbes de dispersion déterminées dans le système hélicoïdal.

Les figures 6.2(a)-(b) représentent les courbes de dispersion pour des bandes de fréquences adimensionnelles de [0; 0.25] et [0; 0.005] respectivement. Les courbes grises sont déterminées après modulation des courbes calculées à partir du modèle SAFE dans le système de coordonnées tournant (multiplication du nombre d'onde ka par L/l). Les courbes noires sont déterminées à partir du modèle de poutre hélicoïdale dans le système de



FIG. 6.1 – Courbes de dispersion pour  $\omega a/c_s \in [0; 0.25]$ . Guide d'onde hélicoïdal avec  $R = 10a, \alpha = 15^{\circ}, \epsilon = 0$ . Courbes grises : système de coordonnées tournant. Courbes noires : système de coordonnées hélicoïdales.

coordonnées hélicoïdales (cf. Annexe de Treyssède [2007]). On constate qu'il n'y a aucune différence entre les deux calculs. Ceci prouve la bonne concordance des résultats obtenus par le modèle SAFE et le modèle de poutre hélicoïdale dans le système de coordonnées tournant.

En conclusion, une multiplication du nombre d'onde par L/l permet de transformer les courbes de dispersion décrites initialement dans le système de coordonnées tournant vers le système de coordonnées hélicoïdales. Inversement, une multiplication du nombe d'onde par l/L permet de transformer les courbes de dispersion décrites initialement dans le système de coordonnées hélicoïdales vers le système tournant.

Dans la suite de la section 6.1, les courbes de dispersion seront calculées à partir d'un modèle SAFE dans le système tournant mais représentées dans le repère hélicoïdal.

### 6.1.2 Modèle de référence avec précontrainte

L'effet de la précontrainte sur la propagation des ondes élastiques dans les poutres hélicoïdales a été étudié au cours de cette thèse. Le travail correspondant est détaillé dans le papier de Frikha et al. [2011] (cf. Annexe B). Le modèle est basé sur les équations de la dynamique des poutres hélicoïdales de Timoshenko de section circulaire soumises à un chargement axial P (équations (1)-(12) du papier). Afin de réduire le nombre de paramètres, ces équations sont écrites sous forme adimensionnelle avec a et  $a/c_s$  comme longueur et temps caractéristiques. L'application d'une transformée de Fourier spatiale selon l'axe hélicoïdal permet de remplacer tout  $\partial/\partial s$  par ik, où s et k désignent respec-



FIG. 6.2 – Courbes de dispersion pour R = 10a,  $\alpha = 15^{\circ}$ ,  $\epsilon = 0$ . Courbes noires : modèle de poutre (système hélicoïdal). Courbes grises : modèle SAFE après modulation. (a) :  $\omega a/c_s \in [0; 0.25]$ . (b) :  $\omega a/c_s \in [0; 0.005]$ 

tivement la variable axiale et le nombre d'onde axial. Finalement on obtient un système aux valeurs propres  $6 \times 6$  qui relie le nombre d'onde adimensionnel ka à la fréquence adimensionnelle  $\omega a/c_s$ .

Il est montré que la propagation des ondes élastiques dans une poutre hélicoïdale soumise à un chargement axial ne dépend que de quatre paramètres adimensionnels, donnés par l'angle d'hélice  $\alpha$ , le rayon d'hélice R/a, le chargement  $P/\pi\rho a^2 c_s^2$  (ou la déformation axiale  $\epsilon$ ) et le coefficient de Poisson  $\nu$ .

Le système aux valeurs propres obtenu se résout soit en fixant la fréquence adimensionnelle  $\omega a/c_s$  pour chercher le nombre d'onde adimensionnel ka ou inversement. Pour  $\omega a/c_s$  donné, on obtient 12 nombres d'onde. Les nombres d'onde réels et imaginaires correspondent respectivement à des modes propagatifs et évanescents qui apparaissent en paires de signes opposés. Les nombres d'onde complexes correspondent à des modes inhomogènes qui apparaissent en quadruple de conjugués complexes de signes opposés. Si on s'intéresse seulement aux modes propagatifs, on fixe le nombre d'onde ka pour chercher la fréquence  $\omega a/c_s$ . Le problème aux valeurs propres est alors linéaire en  $(\omega a/c_s)^2$  et 6 fréquences propres positives  $\omega a/c_s$  sont obtenues pour chaque nombre d'onde ka.

Pour un chargement nul (P = 0), ce modèle dégénère bien en celui présenté dans l'Annexe de Treyssède [2007].

Notons que ces modèles de poutres hélicoïdales sont limités aux poutres de rayon de courbure important comparé au rayon a (Wittrick [1966], Treyssède [2007], Frikha et al. [2011]).

La détermination des modes de propagation se fait par rapport à la géométrie déformée. Cet état statique déformé sous l'effet du chargement appliqué est calculé à partir du modèle analytique non-linéaire de Wahl développé dans la sous section 5.1.3. Comme précisé auparavant dans la section 5.1, ce modèle est valable pour les structures hélicoïdales d'angle d'hélice faible  $\alpha \leq 25^{\circ}$  et de rapport  $R/a \geq 5$  (type ressort).



FIG. 6.3 – Courbes de dispersion pour R = 10a,  $\alpha = 15^{\circ}$  obtenues à partir du modèle de référence. Courbes grises :  $\epsilon = 0$ . Courbes noires :  $\epsilon = 40\%$ . (a) :  $\omega a/c_s \in [0; 0.25]$ . (b) :  $\omega a/c_s \in [0; 0.005]$ .

Dans le papier de Frikha et al. [2011], l'effet d'un chargement axial sur la propagation des ondes élastiques dans les poutres hélicoïdales a été étudié pour différentes bandes de fréquences et pour différents paramètres d'hélice. Dans cette section, on se limite au cas d'une déformation axiale appliquée  $\epsilon = 40\%$  sur un guide hélicoïdal de paramètres R = 10a et  $\alpha = 15^{\circ}$ . Les figures 6.3(a) et (b) superposent les courbes de dispersion (fréquence  $\omega a/c_s$  en fonction du nombre d'onde ka) d'un guide non-précontraint ( $\epsilon = 0$ ), en gris, et précontraint ( $\epsilon = 40\%$ ), en noir. Comme précisé dans Frikha et al. [2011], l'effet de la précontrainte est minime en hautes fréquences. Il n'est significatif que sur les quatre premiers modes propagatifs situés en basses fréquences. Ceci peut être observé sur la figure 6.3(a), où un faible écart est observé entre les courbes de dispersion sans et avec précontrainte dans la bande de fréquence de [0; 0.25]. Cet écart est plus important en très basses fréquences ([0; 0.005]) et peut être observé sur la figure 6.3(b). Le mode de flexion qui oscille dans la direction normale (mode 2 dans le papier) est plus sensible au chargement. Les courbes de dispersion de ce mode se décalent vers les hautes fréquences sous l'effet d'un chargement de traction et vers les basses fréquence sous un chargement de compression.

#### 6.1.3 Validation avec précontrainte

Dans le chapitre 4, nous avons décrit le modèle SAFE permettant de déterminer les modes de propagation d'une structure hélicoïdale soumise à une déformation axiale. À partir du calcul statique présenté dans le chapitre 3, on détermine les déplacements locaux ainsi que la géométrie déformée suite à une déformation imposée. Puis on remonte aux contraintes locales afin de calculer la matrice des contraintes  $[\sigma_0]$  (voir équation (2.60)). Cette matrice représente l'effet de la contrainte statique dans la formulation SAFE (4.6). La prise en compte de la géométrie déformée se fait par l'intégration de la formulation SAFE (4.6) sur la section de la géométrie déformée  $S_0$  obtenue après calcul statique.

Nous présentons ici une validation du modèle SAFE pour les guides hélicoïdaux monobrins de type ressort.

Soit un guide d'onde hélicoïdal de rayon d'hélice R = 10a et d'angle d'hélice  $\alpha = 15^{\circ}$ soumis à une déformation axiale de traction  $\epsilon = 40\%$ . Le maillage de la section normale à l'axe  $\mathbf{e}_Z$  est présenté sur la figure 5.2(c). En abscence d'atténuation matérielle, les courbes de dispersion ( $\omega a/c_s$  en fonction de ka) de ce guide d'onde sont illustrées par les figures 6.4(a) et (b). Les courbes grises et noires sont déterminées respectivement à partir du modèle de référence de poutre hélicoïdale décrit dans la section 6.1.2 et du modèle SAFE. On constate qu'il y a un très bon accord entre les deux modèles.

Pour  $ka \in [0.1; 0.15]$ , on remarque l'existence d'un faible écart en basses fréquence entre la solution du modèle SAFE et celle de référence (voir figure 6.4(b)). Cet écart peut s'expliquer par le fait qu'on a une solution statique non-linéaire dans le modèle de référence alors qu'elle est linéaire dans le modèle éléments finis (un écart entre les deux solutions statiques linéaire et non-linéaire a bien été observé dans la section 5.1.3). Cet écart peut s'expliquer aussi par le fait qu'on a des conditions aux limites à rotation libre pour le calcul statique dans le modèle de référence (Wahl [1963]) alors que la rotation est bloquée dans le modèle éléments finis.

Signalons que le cas particulier étudié ici correspond à une situation extrême, pour laquelle un chargement important est appliqué sur une hélicoïde d'angle  $\Phi$  important (type ressort). Du point de vue de la validation du modèle numérique, le cas des hélicoïdes mises en jeu dans les torons apparaît moins contraignant (chargement de quelques % au plus, angles  $\Phi$  faibles).



FIG. 6.4 – Courbes de dispersion pour R = 10a,  $\alpha = 15^{\circ}$ ,  $\epsilon = 40\%$ . Courbes grises : modèle de référence. Courbes noires : modèle SAFE. (a) :  $\omega a/c_s \in [0; 0.25]$ . (b) :  $\omega a/c_s \in [0; 0.005]$ .

#### 6.1.4 Effet de la réactualisation de la géométrie

Dans les résultats présentés dans la section 6.1.3, les effets de la précontrainte et de la déformation de la géométrie ont été pris en compte. Dans cette section, nous nous intéressons à évaluer l'influence de la précontrainte  $[\sigma_0]$  par rapport à celle de la déformation de la géométrie. Les figures 6.5(a) et (b) comparent les courbes de dispersion d'un guide de géométrie déformée ( $\epsilon = 40\%$ ) en tenant compte de la précontrainte (courbes noires) et en la négligeant (courbes grises). On constate que la précontrainte a un effet qui ne peut être négligé.

Pour une même déformation appliquée et pour un même rayon d'hélice, l'effet de la précontrainte est plus important avec l'augmentation de l'angle d'hélice. Ce phénomène peut être observé en comparant les figure 6.5(a) et (b) pour des angles de  $\alpha = 15^{\circ}$  et  $\alpha = 25^{\circ}$  respectivement.

En conclusion, les effets de la précontrainte et de la déformation de la géométrie doivent être tous les deux considérés pour représenter correctement la propagation des ondes élastiques dans des guides hélicoïdaux soumis à un chargement axial.



FIG. 6.5 – Courbes de dispersion d'un guide hélicoïdal de géométrie déformée (R = 10a,  $\epsilon = 40\%$ ). Courbes noires : avec prise en compte de la précontrainte. Courbes grises : en négligeant la précontrainte. (a) :  $\alpha = 15^{\circ}$ , (b) :  $\alpha = 25^{\circ}$ .

# 6.2 Guides multi-brins

Dans cette section, nous présentons des résultats concernant la propagation des ondes élastiques dans des guides d'onde multi-brins. Nous nous intéressons aux torons à sept brins T15.7, très répandus dans les câbles de génie civil.

### 6.2.1 Repères bibliographiques

En raison de la complexité du phénomène de propagation des ondes élastiques dans des guides multi-brins, le modèle du cylindre infini a été considéré en première approximation. Cependant, des résultats expérimentaux obtenus par Kwun et al. [1998], Laguerre et al. [2002a] et Laguerre et al. [2002b] montrent que les courbes de dispersion obtenues ne décrivent pas correctement la propagation des ondes dans les guides multi-brins. En comparant la vitesse d'énergie du premier mode de compression dans un toron à sept brins à celle d'un cylindre, ces auteurs constatent l'existence d'une bande de fréquence dans le toron où le mode ne semble pas se propager. Ce phénomène ne se produit pas dans le cas du cylindre. Cette bande "manquante", appelée aussi "notch frequency", varie en fonction du diamètre du toron. Elle est située autour de 67kHz pour un toron de diamètre 15.7mm (voir figure 6.6 - Laguerre et al. [2002a]). Afin de mieux comprendre ce phénomène, un modèle numérique de propagation des ondes élastiques dans les torons, basé sur la méthode SAFE, a été proposé par Treyssède and Laguerre [2010]. Une comparaison avec l'expérience des résultats numériques obtenus en vitesse d'énergie a été présentée. Ces auteurs ont notamment pu retrouver numériquement cette bande de fréquence qui est située autour de 67kHz pour un toron de diamètre 15.7mm non-précontraint. Cette comparaison a permis de valider le modèle SAFE pour les torons à sept brins non-précontraints pour ce type de mode et dans la bande de fréquence considérée.

Les structures multi-brins sont conçues pour supporter des chargements importants. Afin de voir l'effet de ce chargement sur la propagation des ondes élastiques dans un toron à sept brins, des études expérimentales ont été menées. On peut citer par exemple les travaux de Kwun et al. [1998] qui présentent l'effet de mise en tension d'un toron à sept brins. Une comparaison des diagrammes temps-fréquence de l'ensemble du toron, d'un brin central et d'un brin hélicoïdal a été faite. L'apparition d'une bande de fréquence où le premier mode de compression ne se propage plus a été constatée pour différents niveaux de chargement de traction. Il est montré que cette bande de fréquence varie linéairement en fonction de Log(T), où T est le chargement. Laguerre et al. [2002b] ont présenté une étude expérimentale sur un toron à sept brins pour différents niveaux de chargements axiaux appliqués, de 2%, 10% et 60% de la limite à la rupture. Les diagrammes tempsfréquence sont présentés sur la figure 6.6 (Laguerre et al. [2002b]). On constate que la bande de fréquence "manquante", qui est située autour d'une fréquence de 67kHz pour un toron non précontraint de 15.7mm de diamètre, se décale vers les hautes fréquences pour se situer autour de 88kHz sous un chargement axial correspondant à 60% de la limite à la rupture.

Bien que la propagation des ondes dans les torons précontraints ait été étudiée expérimentalement, il ne semble pas exister de modèles dans la littérature qui permettent de retrouver et d'expliquer les effets d'un chargement axial. C'est l'objectif principal de



FIG. 6.6 – Diagramme temps-fréquence d'un toron T15.7 soumis à des charges correspondant à 2%, 10% et 60% de la charge à la rupture.

cette thèse.

#### 6.2.2 Résultats préliminaires sans chargement

On commence par présenter des résultats pour un toron T15.7 non précontraint. Ce travail a été présenté dans le papier de Treyssède and Laguerre [2010].

Un toron T15.7 est composé d'un brin central droit de rayon a = 2.7mm et d'une couche de six brins périphériques hélicoïdaux de rayon d'hélice R = 1.967a et d'angle d'hélice  $\Phi = 7.9^{\circ}$ . La section du toron T15.7 est égale à  $150mm^2$ . Il est constitué d'acier précontraint de module d'Young E = 2.17e11Pa, de coefficient de Poisson  $\nu = 0.28$ , de masse volumique  $\rho = 7800kg/m^3$  et de limite à la rupture  $R_r = 2060MPa$ .

Le système de coordonnées tournant adéquat est celui possèdant une courbure  $\kappa a = 0$ et une torsion  $\tau a = 0.0705$ . Le maillage du toron T15.7 dans le plan de coupe Z = 0 est présenté par la figure 5.13. Afin d'avoir une bonne convergence des résultats numériques, le maillage a été raffiné au niveau des points de contact, aboutissant à 9297 degrés de liberté au total. On rappelle qu'il n'y a pas de contact entre les brins périphériques (voir chapitre 5). Les seuls contacts se produisent entre le brin central et les brins périphériques. Pour simplifier notre étude, ce contact est supposé collant c'est-à-dire qu'il n'y a ni glissement, ni décollement, ni frottement. Ceci est équivalent à supposer un frottement infini. On suppose donc la continuité des déplacements dans toutes les directions entre les paires de noeuds en contact.

On suppose l'abscence d'atténuation matérielle. Dans ce cas, on a pu montrer dans la sous section 4.4.4 l'égalité entre les vitesses d'énergie et de groupe. On se limite dans la suite à présenter uniquement la vitesse d'énergie.

Les résultats sont déterminés pour un nombre d'onde ka réel fixé dans une bande de fréquence adimensionnelle de [0; 2]. La figure 6.7 représente les courbes de dispersion, fréquence en fonction du nombre d'onde, d'un toron T15.7 non précontraint (courbes noires) et de son brin central (courbes grises). Le comportement d'un toron en propagation des ondes élastiques est complexe comparé à celui d'un cylindre droit.



FIG. 6.7 – Courbes de dispersion, fréquence en fonction du nombre d'onde. Courbes grises : brin central. Courbes noires : toron T15.7 non précontraint.



FIG. 6.8 – Vitesse d'énergie en fonction de la fréquence. Courbes grises : brin central. Courbes noires : toron T15.7 non précontraint.
La figure 6.8 illustre la superposition des courbes de dispersion, la vitesse d'énergie  $V_e/c_s$  en fonction de la fréquence  $\omega a/c_s$ , d'un toron T15.7 (courbes noires) et de son brin central (courbes grises). Le toron a un comportement plus complexe en raison de l'interaction entre les brins. On constate l'apparition d'une bande de fréquence "manquante" pour le mode le plus rapide (mode de type compression L(0,1)) située autour d'une fréquence adimensionnelle de 0.35, correspondant à 68kHz, ce qui est en bon accord avec les résultats expérimentaux (67kHz). Ce phénomène est dû à la variation rapide des branches autour de 0.35 et peut être observé dans la fenêtre de bas à droite de la figure 6.7. En fait, la courbe ayant la vitesse la plus élevée de la figure 6.8 est composée de deux branches distinctes, décrivant le comportement de deux modes distincts.

Une inspection visuelle des déformées modales a été effectuée afin d'identifier l'évolution des deux branches - voir figure 6.9 (Treyssède and Laguerre [2010]). La figure 6.9 (a) montre la variation de la fréquence en fonction du nombre d'onde des branches du bas et du haut, notées respectivement par 1 et 2. La figure 6.9 (b) montre la variation de la vitesse d'énergie en fonction de la fréquence de ces branches. Le mode le plus rapide correspond à la branche 1 en basses fréquences et à la branche 2 en hautes fréquences. Le comportement de la branche 1 en basses fréquences (la portion 1a) est semblable au mode de compression L(0, 1) du cylindre (cf. courbes grises des figures 6.7 et 6.8). Sa vitesse d'énergie chute autour de la fréquence de coupure de la branche 2, proche de 0.35. La branche 1 tend vers le mode de flexion du cylindre F(1, 1) (portion 1c) alors que la branche 2 devient le mode de compression du cylindre L(0, 1) (portion 2c).



FIG. 6.9 – Identification des branches des modes de type compression d'un toron T15.7 non précontraint (noires : branche 1, gris : branche 2). (a) : fréquence en fonction du nombre d'onde. (b) : vitesse d'énergie en fonction de la fréquence.

Notons qu'une autre chute de la vitesse de la branche 2 peut être observée autour d'une fréquence de  $\omega a/c_s = 1.7$ .

D'une façon similaire, la même tendance a été observée dans les tubes par Lowe et al.

[1998], où les modes L(0,1) et L(0,2) jouent le rôle des branches 1 et 2. Dans les tubes, le mode L(0,1) en basses fréquences est le mode de type extension (correspondant au mode  $S_0$  dans les plaques); sa vitesse d'énergie chute autour de la fréquence de coupure du mode L(0,2). Le mode L(0,1) tend ensuite vers le mode de type flexion ( $A_0$  pour les plaques), alors que le mode L(0,2) devient un mode de type extension.



FIG.  $6.10 - \text{Déformées modales de la branche 1 calculées aux points 1a : (a),(d), 1b : (b),(e) et 1c : (c),(f). (a),(b),(c) : partie réelle, (d),(e),(f) : partie imaginaire. Le maillage gris correspond à la section non déformée.$ 

La figure 6.10 illustre l'évolution de la déformée modale de la branche 1 calculée aux points 1a, 1b et 1c. Ces points correspondent aux solutions  $(ka, \omega a/c_s, V_e/c_s) =$ (0.1, 0.16, 1.57), (0.31, 0.35, 0.11) et (1.34, 1.00, 0.95) respectivement. Les modes sont normalisés par rapport à la matrice masse M. Entre les points 1a et 1b, on constate que la déformée modale subit des transformations significatives. Au point 1c, elle devient plus complexe et exhibe une combinaison d'un mouvement de flexion et de torsion. La figure 6.11 représente l'évolution de la déformée modale de la branche 2, calculée aux points 2a, 2b et 2c. Ces points correspondent aux solutions  $(ka, \omega a/c_s, V_e/c_s) = (0.1, 0.36, 0.00),$ (0.2, 0.37, 0.45) et (0.63, 1.00, 1.55) respectivement. En comparant les déformées modales des points 1a (figure 6.10(a)) et 2c (6.11(c)), on constate que les branches 1 et 2 ont permuté leurs déformées. Leur mouvement axial global confirme qu'il s'agit des modes de type compression. Ces modes ne sont pas exactement similaires parce que les parties réelles de leur déplacement axial sont de signes opposés.

Notons que la bande de fréquence "manquante" obtenue expérimentalement par Kwun et al. [1998] est située autour de 80kHz. Ceci provient du fait que ces auteurs étudient un toron de diamètre nominal 12.7mm avec un pas d'hélice de 220mm. Ceci donne un



FIG. 6.11 - Déformées modales de la branche 2 calculées aux points 2a : (a),(d), 2b : (b),(e) et 2c : (c),(f). (a),(b),(c) : partie réelle, (d),(e),(f) : partie imaginaire. Le maillage gris correspond à la section non déformée.

angle d'hélice  $\Phi = 6.9^{\circ}$ , proche de celui du toron T15.7. Pour un rayon de brin central a = 2.16mm et un module d'Young E = 2.1e11Pa, la fréquence adimensionnelle 0.35 correspond à 83kHz sous forme dimensionnelle.

## 6.2.3 Résultats avec précontrainte

### 6.2.3.a Cas d'un contact linéïque

Nous avons déterminé dans la sous section précédente les modes de propagation d'un toron à sept brins non-précontraint. Maintenant, nous calculons les modes de propagation d'un toron à sept brins sous chargement axial. Ces résultats seront comparés avec l'expérience.

En présence d'un chargement axial appliqué sur le toron T15.7, des études expérimentales ont été menées pour voir l'influence de cette précontrainte sur la propagation des ondes. Dans les travaux de Laguerre et al. [2002b], il est montré que sous l'effet d'un chargement axial de traction correspondant à 60% de la limite à la rupture, la bande de fréquence "manquante" se décale vers les hautes fréquences pour se situer au alentour de 88kHz (figure 6.6). Ce phénomène se manifeste en hautes fréquences, tandis que l'effet du chargement sur les guides hélicoïdaux mono-brins n'est considérable qu'en basses fréquences (< 2kHz). À partir de l'analogie avec les guides mono-brins, on ne peut pas prévoir ce décalage de bande de fréquence "manquante" en tenant compte de la précontrainte et de la déformation de la géométrie, de la même manière qu'on a abordé le guide mono-brins.

À partir de la solution statique présentée dans la section 5.2.3, une déformation axiale de traction de 0.6% appliquée sur un toron T15.7 ( $E^T = 0$ ) produit un effort axial résultant T = 193.2kN et un moment résultant  $M = 119.9N \cdot m$ . Si on divise l'effort résultant par la section du toron qui est égale à  $150mm^2$ , on obtient une contrainte de 1288MPa. Cette valeur, représentant 62% de la limite à la rupture, correspond bien à celle appliquée dans Laguerre et al. [2002b]. Par la suite, une déformation axiale de 0.6% sera utilisée pour comparer les résultats expérimentaux obtenus sur le toron T15.7.

Dans la sous section 5.2.3, nous avons déterminé les déplacements locaux ainsi que la géométrie déformée suite à une déformation axiale appliquée sur un toron T15.7. Un contact linéïque est supposé entre le brin central et les brins périphériques. Après calcul statique, on obtient une géométrie déformée dont le maillage est présenté dans des figures 5.16 et 5.17. Au niveau des points de contact, on constate l'interpénétration entre les brins. Ce maillage est utilisé pour déterminer les modes de propagation du toron précontraint.



FIG. 6.12 – Vitesse de l'énergie d'un toron T15.7 soumis à  $\epsilon = 0.6\%$  en contact linéëque.

La figure 6.12 montre les courbes de dispersion, la vitesse d'énergie en fonction de la fréquence. Dans ces résultats, on a pris en compte la précontrainte et la déformation de la géométrie en contact linéïque entre le brin central et les brins périphériques. En comparant ces résultats à ceux de la figure 6.8, on ne constate aucune différence en hautes fréquences. La bande de fréquence "manquante" reste située autour de la fréquence adimensionnelle 0.35. La seule différence est localisée en basses fréquences, zone pour laquelle aucun résultat expérimental de référence n'est disponible. On peut conclure que l'approximation de contact linéïque entre le brin central et les brins périphériques ne permet pas de reproduire les résultats expérimentaux sur la propagation des ondes dans un toron T15.7 soumis à une déformation axiale d'extension.

### 6.2.3.b Prise en compte simplifiée du contact

On a montré dans le paragraphe précédent que la prise en compte de la précontrainte et de la déformation de la géométrie avec une approximation de contact linéïque entre brins ne permet pas de décrire correctement le comportement des ondes dans un toron à sept brins soumis à une sollicitation axiale d'extension. Sous l'effet d'une déformation axiale  $\epsilon = 0.6\%$ , une prise en compte simplifiée du contact est considérée afin d'éviter l'interpénétration entre le brin central et les brins périphériques. La démarche est détaillée dans la sous section 5.2.4. Le maillage de la section du toron déformé est présenté dans la figure 5.18. Comme précisé auparavant, la différence entre cette géométrie et celle utilisant un contact linéïque est localisée au niveau des points de contact.



FIG. 6.13 – Courbes de dispersion, fréquence en fonction du nombre d'onde, d'un toron T15.7 soumis à  $\epsilon = 0.6\%$  avec prise en compte du contact sans interpénétration

Les figures 6.13 et 6.14 illustrent les variations de la fréquence adimensionnelle  $\omega a/c_s$ en fonction du nombre d'onde ka et de la vitesse d'énergie  $V_e/c_s$  en fonction de  $\omega a/c_s$ . On constate l'existence du même phénomène de bande de fréquence "manquante" pour la vitesse d'énergie la plus élevée. Pour une extension de  $\epsilon = 0.6\%$ , cette bande de fréquence "manquante" s'est décalée autour d'une fréquence adimensionnelle de 0.443.

Comme dans le cas non chargé, ce phénomène correspond à deux modes de type extensionel intervertissant leur comportement. Ceci est illustré par les figures 6.15 et 6.16 montrant les déformées modales aux points 1a et 2c (précisés sur la figure 6.14), correspondant respectivement aux solutions  $(ka, \omega a/c_s, V_e/c_s) = (0.1, 0.16, 1.58)$  et (0.60, 0.97, 1.57).



FIG. 6.14 – Vitesse d'énergie d'un toron T15.7 soumis à  $\epsilon = 0.6\%$  avec prise en compte du contact sans interpénétration.



FIG. 6.15 – Déformée modale de la branche 1 d'un toron soumis à une extension de 0.6% calculée au points 1a. (a) : partie réelle,(b) : partie imaginaire. Le maillage gris correspond à la section non déformée.



FIG. 6.16 – Déformée modale de la branche 2 d'un toron soumis à une extension de 0.6% calculée au points 2c. (a) : partie réelle, (b) : partie imaginaire. Le maillage gris correspond à la section non déformée.

Une fréquence adimensionnelle de 0.443 correspond à 86kHz pour un toron T15.7. Si on compare cette valeur à celle d'environ 88kHz obtenue expérimentalement par Laguerre et al. [2002b], suite à l'application d'une précontrainte de 60% de la limite à la rupture correspondant à 0.6% de déformation, on constate un bon accord.

Si l'on compare ces courbes de dispersion avec celles de la figure 6.12 obtenues en contact linéïque, on peut conclure que le décalage de la bande de fréquence "manquante" vers les hautes fréquences est essentiellement dû aux effets de contact.

Dans les travaux de Kwun et al. [1998], utilisant un toron d'angle d'hélice  $\Phi = 6.9^{\circ}$ , de rayon du brin central a = 2.16mm et un module d'Young E = 2.1e11Pa, il est montré que la bande de fréquence "manquante" varie linéairement en fonction de Log(P), où P est le chargement exprimé en kg-force. Pour un chargement axial de traction de 13000 kg-force appliqué sur ce toron et à partir de la figure 6 du papier Kwun et al. [1998], on obtient une bande de fréquence "manquante" se situant au alentour de 108kHz. Un chargement de 13000 kg-force correspond à une contrainte de 1316MPa, ce qui représente 61.3% de la limite à la rupture (~ 0.61% de déformation). Pour une déformation de 0.6%, la valeur adimensionnelle de 0.443 correspond à une fréquence de 105kHz, ce qui concorde bien avec celle trouvée expérimentalement par Kwun et al. [1998].

Notons que la validation du modèle de toron est limitée au phénomène de fréquence "manquante" pour lequel des résultats expérimentaux sont disponibles.

Si on s'intéresse aux hautes fréquences et que l'on compare les courbes de dispersion d'un toron non précontraint (figure 6.12) avec celles d'un toron soumis à une déformation d'extension de 0.6% (figure 6.14), on constate un décalage des différentes branches des courbes de dispersion vers les hautes fréquences sous l'effet d'un chargement axial de traction. Pour les basses fréquences (< 0.1), il existe des différences significatives pour les différentes branches. Le mode de torsion, ayant une vitesse adimensionnelle égale à 1 en hautes fréquences, apparaît très sensible à l'effet du chargement. Cependant, ces résultats nécessiteront d'être vérifiés expérimentalement.

La figure 6.17 illustre la variation de la fréquence centrale de la bande "manquante" en fonction du chargement appliqué sur un toron de diamètre nominal égal à 12.7 mm. Les valeurs expérimentales obtenues par Kwun et al. [1998] montrent que la fréquence centrale de la bande "manquante" varie linéairement en fonction de Log(T), où T est le chargement axial appliqué. Pour des chargements respectifs de 1737, 2438, 8400 et 13000 kg-force, on obtient à partir du modèle SAFE une bande "manquante" située autour d'une fréquence respective de 90.8, 93.8, 100.3 et 105 kHz. On constate un bon accord entre la solution du modèle SAFE et les mesures expérimentales, avec un écart inférieur à 4%.

# Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des résultats du modèle SAFE décrivant la propagation des ondes élastiques dans des guides d'onde hélicoïdaux mono-brins (ressorts)



FIG. 6.17 – Variation de la fréquence centrale de la bande "manquante" en fonction du chargement appliqué sur un toron à sept brins de diamètre nominal égal à 12.7 mm

et multi-brins (torons à sept brins) soumis à une sollicitation axiale.

Une validation du modèle SAFE pour des guides d'onde mono-brins a été effectuée par comparaison des courbes de dispersion avec celles du modèle de référence décrit en Annexe B. Il est montré qu'une sollicitation axiale appliquée sur un guide d'onde hélicoïdal de type ressort agit sur la propagation des ondes par l'effet de la précontrainte et la déformation de la géométrie et qu'aucun des deux effets ne peut être négligé *a priori*. Il est aussi montré que l'effet du chargement n'est significatif qu'en basses fréquences.

Pour la propagation des ondes élastiques dans un toron à sept brins, des résultats expérimentaux de la littérature ont montré l'existence d'une bande de fréquence "manquante", où le mode ayant la vitesse la plus rapide (de type compression) ne semble plus se propager. Cette bande de fréquence varie en fonction du chargement appliqué. En utilisant un contact collant aux points de contact, on a pu retrouver à partir du modèle SAFE cette bande de fréquence "manquante". En présence d'un chargement axial appliqué, il est montré que l'hypothèse d'un contact linéïque ne permet pas de retrouver le phénomène observé expérimentalement. Avec une prise en compte simplifiée du contact sans interpénétration entre les brins, on a pu retrouver un décalage de la bande "manquante" vers les hautes fréquences en adéquation avec les données expérimentales disponibles dans la littérature.

# Synthèse et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons proposé un modèle numérique capable de décrire la propagation des ondes élasiques dans un guide hélicoïdal mono-brin et multi-brins soumis à un chargement axial. Aucune restriction n'a été considérée quand à la géométrie et la nature du matériau constitutif de la structure. Par conséquent, la méthode s'applique à des structures hélicoïdales invariantes par translation selon leur axe d'élancement.

Dans un premier temps, nous avons tout d'abord développé un modèle éléments finis basé sur la théorie d'homogénéisation hélicoïdale permettant la réduction sur la section (2D) du calcul de l'état précontraint. Ce modèle a été validé pour les structures hélicoïdales mono-brins et multi-brins. Par simple comparaison des résultats du modèle du calcul statique avec ceux d'un modèle analytique pour le cas des ressorts, on a pu montrer la bonne concordance entre les deux solutions. Le modèle du calcul statique a aussi été validé pour les torons à sept brins par comparaison des résultats avec ceux d'un modèle éléments finis 3D de référence de la littérature.

Dans un second temps, nous avons développé la méthode des éléments finis semianalytique (SAFE) permettant d'étudier la propagation des ondes élastiques dans un guide hélicoïdal précontraint.

De façon similaire au modèle de calcul de l'état précontraint statique, le modèle SAFE a été validé pour des guides d'onde mono-brins et multi-brins. Un bon accord est obtenu entre les courbes de dispersion d'un guide d'onde hélicoïdal de type ressort calculées à partir du modèle SAFE avec celles du modèle de poutre de Timoshenko hélicoïdale. Il est montré que l'effet d'un chargement axial n'est significatif qu'en basses fréquences, où l'approximation de poutre de Timoshenko reste valide. Cet effet se manifeste par la précontrainte et la déformation de la géométrie et aucun des deux phénomènes ne peut être négligé en général.

Pour les torons à sept brins, il est montré expérimentalement l'existence d'une bande de fréquences "manquante" ("notch frequency"). Cette bande se décale vers les hautes fréquences sous un chargement axial de traction. En considérant un contact collant entre le brin central et les brins périphériques, le modèle SAFE permet de reproduire qualitativement le phénomène de bande "manquante". Ce phénomène se traduit par la variation rapide de la vitesse d'énergie de deux modes de type compression autour de cette fréquence. Le même phénomène est observé pour différents chargements.

En tenant compte de la précontrainte, de la déformation de la géométrie et du contact sans interpénétration entre le brin central et les brins périphériques, le modèle SAFE permet aussi de reproduire quantitativement la variation de la fréquence centrale de la bande "manquante" en fonction du chargement appliqué. Ce décalage est en très bon accord avec les résultats expérimentaux.

En conclusion, un premier apport de ce travail a été le développement d'un modèle de calcul statique réduit sur la section capable de déterminer l'état précontraint d'une structure hélicoïdale soumise à un chargement axial. Une autre contribution de ce travail a été le développement d'un modèle permettant de décrire la propagation des ondes dans une poutre hélicoïdale sous chargement axial. Notre apport principal a été la mise en oeuvre d'un outil numérique permettant d'évaluer l'effet d'un chargement axial sur un guide d'onde hélicoïdal mono-brin et multi-brins. Ce modèle permet de reproduire qualitativement et quantitativement le phénomène de bande "manquante" pour des torons à sept brins sous chargement axial.

Le bon accord sur la bande "manquante" obtenu entre modèle SAFE et l'expérience constitue une première validation de ce modèle. Cette validation est limitée aux modes de type compression ayant la vitesse d'énergie la plus élevée. Les résultats numériques font apparaître d'autres phénomènes sous l'effet du chargement pour d'autres types de modes, en particulier en basses fréquences. La démarche envisagée en premier lieu pour poursuivre nos travaux est donc de compléter la validation expérimentale du modèle SAFE sans et avec précontrainte pour d'autres types de modes et d'autres fréquences et d'extraire les modes les plus sensibles au chargement. Ainsi, nous pourrons compléter la compréhension et l'analyse de propagation des ondes élastiques dans un toron à sept brins.

Il est aussi possible d'étendre nos travaux pour d'autres géométries de câbles (torons multi-couches, multi-torons,...). La même démarche que celle d'un toron à sept brins doit être effectuée. En particulier, ceci nécessite la vérification de l'invariance par translation du câble considéré dans le système de coordonnées tournant.

D'autre part, les câbles de génie civil sont souvent noyés dans un matériau enrobant (coulis de ciment,...). Pour se rapprocher encore de cette réalité, il sera nécessaire d'introduire l'effet de cet enrobé dans le modèle SAFE, notamment en vue d'obtenir l'atténuation par fuite des modes au cours de la propagation. Le développement d'un tel modèle nécessitera aussi une validation expérimentale.

Enfin une autre perspective de ce travail de thèse pourra consister à l'analyse de l'interaction onde-défaut dans un toron à sept brins endommagé (cas d'un brin rompu par exemple). La connaissance de la propagation des ondes élastiques dans un toron à sept brins sain offre la possibilité de comparer son comportement à celui d'un toron présentant un défaut et de savoir si le défaut peut être d'une part détecté et d'autre part localisé.

# Bibliographie

**Remarque** : les références sont classées par ordre alphabétique du nom du premier auteur. Les nombres qui suivent l'année de publication renvoient aux pages contenant les citations.

- J.D. Achenbach. Wave Propagation in Elastic Solids. North-Holland, Amsterdam, 1973. 54, 62
- D.N. Alleyne and P. Cawley. The interaction of lamb waves with defects. *IEEE transaction* on ultrasonics, Ferroelectrics, and frequency control, 39, 1992. 55
- C. J. Ancker and J. N. Goodier. Pitch and curvature corrections for helical springs. Journal of Applied Mechanics, pages 466–470, 1958. 38, 69, 71
- D. P. Anthony and M. L. Peterson. A semi-analytical model for predicting multiple propagating axially symmetric modes in cylindrical waveguides. *Ultrasonics*, 43, 2005. 55
- V. Baronian. Couplage des méthodes modale et éléments finis pour la diffraction des ondes élastiques guidées : Application au contrôle non destructif. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2009. 55, 61
- V. Baronian, A.S. Bonnet-Ben Dhia, and E. Lunéville. Transparent boundary conditions for the harmonic diffraction problem in an elastic waveguide. *Journal of Computational* and Applied Mathematics, 234, 2010. 55
- I. Bartoli, A. Marzani, F. Lanza di Scalea, and E. Viola. Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, 295, 2006. 55, 62
- I. Bartoli, A. Marzani, F. Lanza di Scalea, P. Rizzo, E. Viola, E. Sorrivi, and R. Phillips. Safe modeling of waves for the structural health monitoring of prestrying tendons. *Health Monitoring of Structural and Bioligical Systems Proc. Of SPIE*, 6532, 2007. 56

- K-J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996. 6, 11, 12
- F. Benmeddour, S. Grondel, J. Assaad, and E. Moulin. Study of the fundamental lamb modes interaction with symmetrical notches. NDT & E International, 41, 2008. 55
- A. Bernard, M.J.S. Lowe, and M. Deschamps. Guided waves energy velocity in absorbing and non-absorbing plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 110, 2001. 62
- N. Buannic and P. Cartraud. Higher-order asymptotic model for a heterogeneous beam, including corrections due to end effects. In *Proc. of AIAA 2000 Conference*, Huntsville, AL, USA, July 2000. 42, 43
- P. Cartraud and T. Messager. Computational homogenization of periodic beam-like structures. International Journal of Solids and Structures, 43, 2006. 38
- D. Chapelle and K-J. Bathe. The Finite Element Analysis of Shells-fundamentals. Springer, 2003. 18, 27, 30
- F. Chen and P. D. Wilcox. The effect of load on guided wave propagation. Ultrasonics, 47, 2007. 56
- G. A. Costello. Theory of Wire Rope. Springer, 1977. 78
- V. Damljanovic and R. L. Weaver. Propagating and evanescent elastic waves in cylindrical waveguides of arbitrary cross section. *Journal of the Acoustical Society of America*, 115, 2004. 55
- A. Demma, P. Cawley, M. Lowe, and B. Pavlakovic. The effect of bends on the propagation of guided waves in pipes. *Journal of Pressure Vessel technology*, 127, 2005. 56
- S. B. Dong and R. B. Nelson. On natural vibrations and waves in laminated orthotropic plates. *Journal of applied mechanics*, 39, 1972. 55
- S. B. Dong and R. B. Nelson. High frequency vibrations and waves in laminated orthotropic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 30, 1973. 55
- D. Duhamel, B. R. Mace, and M. J. Brennan. Finite element analysis of the vibrations of waveguides and periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 294, 2006. 55
- M. Farshad. Wave propagation in prestressed curved rods. Journal of the Engineering Mechanics Division, 106, 1980. 57
- S. Finnveden. Evaluation of modal density and group velocity by a finite element method. Journal of Sound and Vibration, 273, 2003. 61

- S. Finnveden and M. Fraggstedt. Waveguide finite elements for curved structures. *Journal* of Sound and Vibration, 312, 2008. 56
- A. Frikha, F. Treyssède, and P. Cartraud. Effect of axial load on the propagation of elastic waves in helical beams. *Wave Motion*, 48, 2011. 57, 91, 92, 93, 94
- L. Gavric. Computation of propagative waves in free rail using a finite element technioque. Journal of Sound and Vibration, 185, 1995. 55
- M. Geradin and D. Rixen. Mechanical Vibrations : Theory and Application to Structural Dynamics. John Wiley and Sons, 1997. 6
- S. R. Ghoreishi, T. Messager, P. Cartraud, and P. Davies. Validity and limitations of linear analytical models for steel wire strands under axial loading, using a 3d fe model. *International Journal of Mechanical Sciences*, 49, 2007. 38, 41, 78, 79, 80, 81, 87
- A. Ghoshal, M. L. Accorsi, and M. S. Bennett. Wave propagation in circular cylindrical shells with periodic axial curvature. *Wave Motion*, 23, 1996. 55
- A. Gray, E. Abbena, and S. Salamon. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathmatica, 3rd ed. Chapman and hall, Boca Raton, 2006. 18
- L. Gry and C. Gontier. Dynamic modelling of railway track : A periodic model based on a generalised beam formulation. *Journal of sound and vibration*, 199, 1997. 55
- J. A. Harings. On highly compressible helical springs and rubber rods, and their application for vibration-free mountings, i. *Philips Research Reports*, pages 401–449, 1948. 74
- T. Hayashi, C. Tamayama, and M. Murase. Wave structure analysis of guided waves in a bar with an arbitrary cross-section. *Ultrasonics*, 41, 2006. 55
- N. C. Huang. Finite extension of an elastic strand with a central core. Journal of Applied Mechanics, 45, 1978. 78
- M.-N. Ichchou, S. Akrout, and J.-M. Mencik. Guided waves group and energy velocities via finite elements. *Journal of sound and vibration*, 305, 2007. 62
- K. Jezzine. Approche modale pour la simulation globale de contrôles non-destructifs par ondes élastiques guidées. PhD thesis, Université de Bordeaux, 2006. 55
- W. G. Jiang and J. L. Henshall. A novel finite element model for helical springs. *Finite Elements in Analysis and Design*, 35, 2000. 39, 69, 72, 73

- H. Kwun, K.A. Bartels, and J.J. Hanley. Effects of tensile loading on the properties of elastic-wave propagation in a strand. *Journal of the Acoustical Society of America*, 103, 1998. 57, 97, 101, 106
- L. Laguerre, J.C. Aime, and M. Brissaud. Magnetostrictive pulse-echo device for nondestructive evaluation of cylindrical steel materials using longitudinal guided waves. *Ultrasonics*, 39, 2002a. 97
- L. Laguerre, M. Brissaud, and J.-C. Aime. Dispositif de réflectométrie ultrasonore basse fréquence à base de transducteurs magnétoélastiques pour l'évaluation non destructive des barres et câbles d'acier. Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées, 239, 2002b. 57, 97, 102, 103, 105
- H. Lamb. On waves in an elastic plate. *Proceeding of the Royal Society of London*, pages 114–128, 1917. 54
- J. Lee and J. Thompson. Dynamic stiffness formulation, free vibration and wave motion of helical springs. *Journal of Sound and Vibration*, 239, 2001. 56
- P. W. Loveday. Semi-analytical finite element analysis of elastic waveguides subjected to axial loads. *Ultrasonics*, pages 298–300, 2009. 57, 62
- M. J. S. Lowe, D. N. Alleyne, and P. Cawley. Defect detection in pipes using guided waves. Ultrasonics, 36, 1998. 100
- M.J.S. Lowe and O. Diligent. Low-frequency reflection characteristics of the s0 lamb wave from a rectangular notch in a plate. *Journal of the Acoustical Society of America*, 111, 2002. 55
- J. Ma, F. Simonetti, and M.J.S. Lowe. Scattering of the fundamental torsional mode by an axisymmetric layer inside a pipe. *Journal of the Acoustical Society of America*, 120, 2006. 55
- B. R. Mace, D. Duhamel, M. J. Brennan, and L. Hinke. Finite element prediction of wave motion in structural waveguides. *Journal of the Acoustical Society of America*, 117, 2005. 55
- M. Maess, J. Herrmann, and L. Gaul. Finite element analysis of guided waves in fluid-filled corrugated pipes. *Journal of the Acoustical Society of America*, 121, 2007. 62
- A. Marzani, E. Viola, I. Bartoli, F. Lanza di Scalea, and P. Rizzo. A semi-analytical finite element formulation for modeling stress wave propagation in axisymetric damped waveguides. *Journal of Sound and Vibration*, 318, 2008. 55

- D. J. Mead. A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling. *Journal of Sound and Vibration*, 27, 1973. 55
- D. J. Mead. Wave propagation in continuous periodic structures : research contributions from southampton 1964-1995. *Journal of sound and vibration*, 190, 1999. 55
- T. Messager and P. Cartraud. Homogenisation of helical beam-like structures : application to single-walled carbon nanotubes. *Computational Mechanics*, 41, 2008. 39
- A. Nicolet and F. Zolla. Modelling of twisted optical waveguides with edge elements. The European Physical Journal Applied Physics, 28, 2004. 56
- A. Nicolet and F. Zolla. Finite element analysis of helicoidal waveguides. Institution of Engineering and Technology Sci. Meas. Technol., 2007. 56
- O. Onipede and S. B. Dong. Propagating waves and end modes in pretwisted beams. Journal of Sound and Vibration, 195, 1996. 56
- J.L. Rose. Ultrasonic Waves in Solid Media. Cambridge University, Cambridge, 1999. 54
- D. Royer and E. Dieulesaint. Ondes élastiques dans les solides. Masson et Cie, PARIS, 2000. 54
- J. Sanchez-Hubert and E. Sanchez-Palencia. Introduction aux méthodes asymptotiques et l'homogénéisation. Masson, Paris, 1992. 42, 43
- S. V. Sorokin. Linear dynamic of elastic helical sprigs : asymptotic analysis of wave propagation. *Proceedings of the Royal Society A*, 465, 2009. 56
- J.-L. Synge and A. Schild. Tensor Calculus. Dover, 1978. 18
- H. Taweel, S. B. Dong, and M. Kazic. Wave reflection from the free end of a cylinder with an arbitrary cross-section. *International journal of solids and structures*, 37, 2000. 55
- R.N. Thurston. Elastic waves in rods and clad rods. Journal of the Acoustical Society of America, 64, 1978. 54
- F. Tisseur and K. Meerbergen. The quadratic eigenvalue problem. SIAM Review, 43, 2001. 61
- F. Treyssède. Numerical investigation of elastic modes of propagation in helical waveguides. Journal of the Acoustical Society of America, 121, 2007. 56, 90, 91, 92, 93
- F. Treyssède. Elastic waves in helical waveguides. Wave Motion, 45, 2008. 56, 60, 62, 64, 90, 91

- F. Treyssède and L. Laguerre. Investigation of elastic modes propagating in multi-wire helical waveguides. *Journal of sound and vibration*, 329, 2010. 56, 64, 91, 97, 98, 100
- A. M. Wahl. Mechanical Springs. McGraw-Hill Book company, New York, 1963. 38, 69, 73, 74, 95
- G. Wempner. *Mechanics of solids with applications to thin bodies*. Sijthoff and Noordhoff, The Netherlands, 1981. 18, 30
- W. H. Wittrick. On elastic wave propagation in helical springs. International Journal of Mechanical Sciences, 8, 1966. 56, 93
- Y-B. Yang and S-R. Kuo. Nonlinear Framed Structures. Simon and Schuster, Asia Pte Ltd, 1994. 6, 11, 12
- J. Zemanek. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder. *Journal of the Acoustical Society of America*, 51, 1972. 54
- W. J. Zhou, M. N. Ichchou, and J. M. Mencik. Analysis of wave propagation in cylindrical pipes with local inhomogeneities. *Journal of Sound and Vibration*, 319, 2009. 55
- W. Zhuang, A. h. Shah, and S. B. Dong. Elastodynamic green's function for laminated anisotropic circular cylinders. *Journal of applied mechanics*, 66, 1999. 55

# ANNEXES

# Annexe A Coordonnées curvilignes

# Base covariante

Dans une base orthonormée  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ , un point M de l'espace est défini par un vecteur position  $\mathbf{x}$ . Ce vecteur est présenté par  $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ .

On considère un nouveau système de coordonnées  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  tel que x, y et z sont donnés en fonction des  $\xi^i$  (i = 1, 2, 3) comme suit :

$$\begin{cases} x = x(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \\ y = y(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \\ z = z(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \end{cases}$$
(6.1)

En effectuant un changement de variable, on peut définir une nouvelle base, en général non orthonormée, associée au système de coordonnées  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  comme suit :

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^i}.\tag{6.2}$$

La base  $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$  s'appelle la base covariante associé aux système de coordonnées  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ . La relation entre les vecteurs  $\mathbf{g}_i$  (i = 1, 2, 3) et  $\mathbf{e}_{\alpha}$   $(\alpha = x, y, z)$  est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} J \end{bmatrix}^T \begin{cases} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{cases} ,$$
 (6.3)

où :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi^1} & \frac{\partial y}{\partial \xi^2} & \frac{\partial y}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi^1} & \frac{\partial z}{\partial \xi^2} & \frac{\partial z}{\partial \xi^3} \end{bmatrix}.$$
 (6.4)

## Base contravariante

La base covariante  $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$  donne naissance à une nouvelle base  $(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3)$ , appelée contravariante. Les vecteurs de cette base sont définis par :

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j. \tag{6.5}$$

L'indice de bas ( respectivement de haut ) est utilisé pour les vecteurs correspondant à la base covariante ( respectivement à la base contravariante ). Les composantes d'un tenseur exprimé dans la base covariante sont des composantes contravariantes indicés en haut et inversement. La relation entre les vecteurs  $\mathbf{g}_i$  (i = 1, 2, 3) et  $\mathbf{e}_{\alpha}$   $(\alpha = x, y, z)$  est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{g}^{1} \\ \mathbf{g}^{2} \\ \mathbf{g}^{3} \end{cases} = \begin{bmatrix} J \end{bmatrix}^{-1} \begin{cases} \mathbf{e}_{x} \\ \mathbf{e}_{y} \\ \mathbf{e}_{z} \end{cases} .$$
 (6.6)

Les vecteurs covariants et contravariants de la base  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ , qui est une base orthonormée, sont identiques. Les composantes covariantes et contravariantes d'un tenseur écrit dans cette base sont donc aussi identiques. Donc on peut noter toute composante dans la base  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  par des indices en bas.

# Ecriture d'un tenseur dans les bases covariante et contravariante

Soit  $\mathbf{u}$  un vecteur quelconque. Ce vecteur s'écrit dans les bases covariante et contravariante comme suit :

$$\mathbf{u} = u^{i} \mathbf{g}_{i} = u_{j} \mathbf{g}^{j} = u_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} , \ (i = 1, 2, 3, \ \alpha = x, y, z).$$
(6.7)

Un tenseur d'ordre deux  $\mathbf{T}$  s'écrit dans les bases covariante et contravariante sous la forme suivante :

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = T_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = T_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta.$$
(6.8)

# Produit tensoriel

Soient deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  exprimés dans la base contravariante. Le produit de ces deux vecteurs s'écrit comme suit :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_i \mathbf{g}^i) \cdot (v_j \mathbf{g}^j) = u_i v_j g^{ij}, \tag{6.9}$$

ou :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i \mathbf{g}^i \cdot (v^j \mathbf{g}_j) = u_i v^j. \tag{6.10}$$

Soient  ${\bf T}$  un tenseur d'ordre quatre et  ${\bf S}$  un tenseur d'ordre deux. Le produit de ces deux vecteurs donne :

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = (T^{ijkl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l) \cdot (S_{mn} \mathbf{g}^m \otimes \mathbf{g}^n) = T^{ijkl} S_{ln} (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^n).$$
(6.11)

Le produit double contracté de  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{S}$  est égal à :

$$\mathbf{T} \colon \mathbf{S} = (T^{ijkl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l) \colon (S_{mn} \mathbf{g}^m \otimes \mathbf{g}^n) = T^{ijkl} S_{kl} (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j).$$
(6.12)

# Element de volume

Le volume d'intégration dans un système de coordonnées curvilignes est égal à :

$$dV = |\mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \wedge \mathbf{g}_3)| d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 , \ |\mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \wedge \mathbf{g}_3)| = det[J].$$
(6.13)

# Tenseur métrique covariant et contravariant

On défini les tenseurs métriques covariant  $g_{ij}$  et contravariant  $g^{ij}$  par :

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j , \ g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j.$$
(6.14)

Soient  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{G}$  les matrices des tenseurs métriques covariant et contravariant. Elles sont données par :

$$\mathbf{g} = [J]^T [J], \ \mathbf{G} = \mathbf{g}^{-1} = [J]^{-1} [J]^{-T}.$$
 (6.15)

# Symboles de Christoffel

Le vecteur  $\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \xi^j}$  peut être exprimé comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base covariante comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \xi^j} = \Gamma_{ij}^1 \mathbf{g}_1 + \Gamma_{ij}^2 \mathbf{g}_2 + \Gamma_{ij}^3 \mathbf{g}_3 = \Gamma_{ij}^k \mathbf{g}_k, \tag{6.16}$$

où les coefficients  $\Gamma_{ij}^k$  sont appelés symboles de Christoffel de deuxième espèce. L'équation (6.16) peut être transformée sous cette forme :

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{\partial \mathbf{g}_{i}}{\partial \xi^{j}} \cdot \mathbf{g}^{k}.$$
(6.17)

On peut montrer que les symboles de Christoffel peuvent être écrits seulement en fonction des coefficients du tenseur métrique, comme suit :

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kl} (g_{jl,i} + g_{il,j} + g_{ij,l}).$$
(6.18)

# Tenseur gradient d'un vecteur

Soit un vecteur  $\mathbf{u}$ . Le tenseur gradient de  $\mathbf{u}$  est donné par l'équation suivante :

$$\nabla \mathbf{u} = (u_{i,j} - \Gamma_{ij}^k u_k) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j.$$
(6.19)

# Annexe B

## Effect of axial load on the propagation of elastic waves in helical beams

Ahmed Frikha<sup>a</sup>, Fabien Treyssède<sup>\*,a</sup>, Patrice Cartraud<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, 44341 Bouguenais Cedex, BP 4129, France <sup>b</sup>GeM, UMR CNRS 6183, École Centrale de Nantes, 1 rue de la Noë, 44 321 Nantes Cédex 3, France

#### Abstract

Helical structures are designed to support heavy loads, which can significantly affect the dynamic behaviour. This paper proposes a physical analysis of the effect of axial load on the propagation of elastic waves in helical beams. The model is based on the equations of motion of loaded helical Timoshenko beams. An eigensystem is obtained through a Fourier transform along the axis. The equations are made dimensionless for beams of circular cross-section and the number of parameters governing the problem is reduced to four (helix angle, helix index, Poisson coefficient, and axial strain). A parametric study is conducted. The effect of loading is quantified in high, medium and low frequency ranges. Noting that the effect is significant in low frequencies, dispersion curves of stretched and compressed helical beams are presented for different helix angles and radii. This effect is greater as the helix angle increases. Both the effects of stress and geometry deformation are shown to be non-negligible on elastic wave propagation.

Key words: helical, beam, load, deformation, wave, propagation.

#### 1. Introduction

Helical structures are used in many engineering applications. Typical examples are helical springs, widely used in automotive and aeronautic industry, and steel multi-wire cables, largely encountered in civil engineering. These structures are usually subjected to large loads.

For the design of helical springs, several studies have been conducted to understand the dynamic behaviour and calculate the first vibration modes. First without considering the effect of applied loads, the computation of vibration modes of helical beams with circular cross-section has been performed based on analytical but approximate solutions [1], the finite element methods [2] or the assumed mode method [3] for instance. Another approach is the transfer matrix method, employed in [4, 5]. An efficient numerical method for predicting the natural frequencies of helical springs has been developed in [6]. The dynamic stiffness method has been used by Pearson and Wittrick [7] to find an exact solution for vibration of helical springs with the Euler-Bernoulli model. Lee and Thompson [8] used the same method, but with the Timoshenko beam model.

However, the first vibration modes of helical springs corresponds to low frequency motions, which are strongly affected by the presence of applied axial loads. The vibration analyses of springs have hence been extended to account for load effects on the natural frequencies thanks to the finite element method [9], the dynamic stiffness matrix [8] or the transfer matrix method, used in [10, 11]. However, as noticed in [12, 17], Pearson's equations [10] do not reduce to equations for simpler rods when load terms are included. All these

<sup>\*</sup>Corresponding author

Email address: fabien.treyssede@lcpc.fr (Fabien Treyssède )

studies show the importance of considering axial loads, compressive in the analyses, for the computation of natural frequencies.

As far as elastic wave propagation is concerned, the literature on helical waveguides is rather scarce. An analytical beam model [13] as well as more general numerical approaches [14, 15] have been recently proposed. In [16], a semi-analytical finite element method has also been proposed for the analysis of guided wave propagation inside multi-wire helical waveguides, typically encountered in civil engineering. However, these studies neglect the presence of applied loads, whose effect remains unexplored on guided waves.

The aim of this paper is to investigate the effect of axial loads on the propagation of guided modes in helical waveguides. For simplicity, multi-wire waveguides are not considered and the model is based on the equations of motion of Timoshenko loaded helical beams. Such a model is not valid at high frequencies, when high order modes become propagating, but constitutes a first step and can serve as a reference solution before the development of fully three-dimensional models, as done in [14, 15, 16] without loads. A space Fourier transform along the helical axis is performed, yielding a wave propagation eigensystem whose zero determinant corresponds to the dispersion relationship. The equations are made dimensionless for beams of circular cross-sections. The problem is then governed by four parameters, which are the helix angle, the dimensionless radius (helix index), the dimensionless axial load (axial strain) and the Poisson coefficient.

The applied loads act on the dynamics through two effects : the deformation of the geometry and the stress generated inside the structure. Both effects are included in the present analysis. The deformed helix parameters are calculated using a non-linear model.

A parametric study is conducted in order to highlight the effect of axial loads, compressive or tensile, on waves for various helix angles and radii. Three frequency ranges are distinguished. A branch identification of dispersion curves is given for a better physical understanding of the different modes existing in helical waveguides. The effects of stress and deformation are also compared.

### 2. Model

#### 2.1. Equations of motion for dynamics

One considers a helical beam with a circular cross-section of radius r. The helix centreline is defined by its pitch angle  $\alpha_0$  and radius  $R_0$  in the unloaded state. In the loaded state, the spring is subjected to a static axial force P and the pitch angle and radius become  $\alpha$  and R respectively (see Fig.1). The curvature  $\kappa$  and torsion  $\tau$  are given by  $\kappa = \cos^2 \alpha/R$  and  $\tau = \sin \alpha \cos \alpha/R$ . The Serret-Frenet basis ( $\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_t$ ) associated with the helix is shown in Fig.1, where  $\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b$  and  $\mathbf{e}_t$  respectively denote the normal, binormal and tangent unit vectors. In this coordinate system, the static force is written as  $[0, P \cos \alpha, P \sin \alpha]$  and the static moment as  $[0, -PR \sin \alpha, PR \cos \alpha]$ . P is taken positive when tensile.

In the framework of Timoshenko beam theory, the general equations governing the small perturbations of a helical beam subjected to a static axial load P are given by the following set of 12 equations which relate the forces and moments to the displacements and rotations [11, 12, 17]:

$$\frac{du_n}{ds} = \tau u_b - \kappa u_t + \phi_b + \frac{Q_n}{GA_n},\tag{1}$$

$$\frac{du_b}{ds} = -\tau u_n - \phi_n + \frac{Q_b}{GA_b},\tag{2}$$

$$\frac{du_t}{ds} = \kappa u_n + \frac{Q_t}{EA_t},\tag{3}$$

$$\frac{d\phi_n}{ds} = \tau\phi_b - \kappa\phi_t + \frac{M_n}{EI_n},\tag{4}$$

$$\frac{d\phi_b}{ds} = -\tau\phi_n + \frac{M_b}{EI_b},\tag{5}$$

$$\frac{d\phi_t}{ds} = \kappa \phi_n + \frac{M_t}{GI_t},\tag{6}$$



Figure 1: Helical spring under axial load

$$\frac{dQ_n}{ds} = -\rho A_t \omega^2 u_n - P \sin \alpha \left(\frac{d\phi_b}{ds} + \frac{1}{GA_n} \frac{dQ_n}{ds} + \tau \phi_n - \tau \frac{Q_b}{GA_b}\right) + P \cos \alpha \left(\frac{d\phi_t}{ds} - \kappa \phi_n + \kappa \frac{Q_b}{GA_b}\right) + \tau Q_b - \kappa Q_t,$$
(7)

$$\frac{dQ_b}{ds} = -\rho A_t \omega^2 u_b + P \sin \alpha \left(\frac{d\phi_n}{ds} - \frac{1}{GA_b}\frac{dQ_b}{ds} - \tau \phi_b - \tau \frac{Q_n}{GA_n} + \kappa \phi_t\right) - \tau Q_n,\tag{8}$$

$$\frac{dQ_t}{ds} = -\rho A_t \omega^2 u_t - P \cos \alpha \left(\frac{d\phi_n}{ds} - \frac{1}{GA_b}\frac{dQ_b}{ds} - \tau \phi_b - \tau \frac{Q_n}{GA_n} + \kappa \phi_t\right) + \kappa Q_n,\tag{9}$$

$$\frac{dM_n}{ds} = -\rho I_n \omega^2 \phi_n + Q_b - PR \cos\alpha \left(\frac{d\phi_b}{ds} + \frac{1}{GA_n}\frac{dQ_n}{ds} + \tau \phi_n - \tau \frac{Q_b}{GA_b}\right)$$
(10)

$$-PR\sin\alpha(\frac{d\phi_t}{ds} - \kappa\phi_n + \kappa\frac{Q_b}{GA_b}) + \tau M_b - \kappa M_t,$$

$$\frac{dM_b}{ds} = -\rho I_b \omega^2 \phi_b - Q_n + PR \cos \alpha \left(\frac{d\phi_n}{ds} - \frac{1}{GA_b}\frac{dQ_b}{ds} - \tau \phi_b - \tau \frac{Q_n}{GA_n} + \kappa \phi_t\right) - \tau M_n,\tag{11}$$

and

$$\frac{dM_t}{ds} = -\rho I_t \omega^2 \phi_t + PR \sin \alpha \left(\frac{d\phi_n}{ds} - \frac{1}{GA_b}\frac{dQ_b}{ds} - \tau \phi_b - \tau \frac{Q_n}{GA_n} + \kappa \phi_t\right) + \kappa M_n.$$
(12)

where  $\omega$  is the frequency, s is the curvilinear coordinate along the helix,  $[u_n, u_b, u_t]$  denotes the dynamic displacement vector.  $[\phi_n, \phi_b, \phi_t]$  is the rotation vector.  $[Q_n, Q_b, Q_t]$  and  $[M_n, M_b, M_t]$  are respectively the dynamic internal force and moment vectors.  $I_n$ ,  $I_b$  and  $I_t$  define the second moments of area of the section about the Serret-Frenet directions. For a circular cross-section,  $I_n = I_b = I_t/2 = \pi r^4/4$ .  $A_n$ ,  $A_b$  and  $A_t$  represent cross-sections defined by :  $A_n = A_b = \gamma A_t = \gamma \pi r^2$ , where  $\gamma = 6(1+\nu)/(7+6\nu)$  is the Timoshenko shear coefficient. The material characteristics are the material density  $\rho$ , the Young modulus E, the shear modulus  $G = E/2(1+\nu)$  and the Poisson coefficient  $\nu$ .

Without axial load (P = 0), the above equations becomes identical to the equations presented by Wittrick [1]. As stated by this author, it is assumed that the condition  $\kappa^2 I_t / A_t << 1$  is satisfied, or equivalently  $(\kappa r)^2 << 1$ , which means that the beam radius r must be rather small compared to the helix radius of curvature  $1/\kappa$ . Such a condition is usually fulfilled for springs. Also, it generally applies to helical wires constituting civil engineering cables because of their large pitch angle (often close to  $\pi/2$ ).

### 2.2. Wave propagation eigensystem

In order to reduce the number of parameters, the variables of Eqs. (1)–(12) are made dimensionless. r is chosen as the characteristic length and  $r/c_s$  as the characteristic time where  $c_s$  is the shear bulk velocity defined by  $c_s^2 = G/\rho$ . Stars will be used to denote dimensionless variables. The dimensional and dimensionless variables are related by :

$$s^* = \frac{s}{r}, u_j^* = \frac{u_j}{r}, \phi_j^* = \phi_j, Q_j^* = \frac{Q_j}{\pi \rho r^2 c_s^2}, M_j^* = \frac{M_j}{\pi \rho r^3 c_s^2}, j = n, b, t.$$
(13)

First, Eqs. (7)–(12) are used to replace the forces and moments in Eqs. (1) to (6). This enables to obtain a system of six linear equations, written in terms of the displacements and rotations. Then, the equations are made dimensionless thanks to Eq. (13). A Fourier transform along the *s*-axis allows to replace  $\partial/\partial s^*$  with iK, where K = kr denotes the dimensionless wavenumber along the *s*-axis. Finally, one gets the following  $6 \times 6$  matrix system:

$$(\mathbf{A}_1 - \Omega^2 \mathbf{A}_2 - iK\mathbf{B} + K^2 \mathbf{C})\mathbf{U} = 0.$$
(14)

where  $\Omega = \omega r/c_s$  is the dimensionless frequency and the eigenvectors  $\mathbf{U} = \{ u_n^* \ u_b^* \ u_t^* \ \phi_n^* \ \phi_b^* \ \phi_t^* \}^T$  contains displacement and rotation components in the Serret-Frenet basis. The matrices  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}$  and  $\mathbf{C}$  are given by :

$$\mathbf{A}_2 = \operatorname{diag}(1, 1, 1, 1/4, 1/4, 1/2), \tag{15}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \gamma + \sigma s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma + \sigma s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma c & 2(1+\nu) & 0 & 0 & 0 \\ \sigma \delta c & 0 & 0 & (1+\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma \delta c & 0 & 0 & (1+\nu)/2 & 0 \\ 0 & \sigma \delta s & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$
(16)

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \end{bmatrix},\tag{17}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix},\tag{18}$$

with the following submatrices :

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} c^{2}(\gamma s^{2} + 2(1+\nu)c^{2} + \sigma s)/\delta^{2} & 0 & 0 \\ 0 & s^{2}c^{2}(\gamma + \sigma s)/\delta^{2} & -sc^{3}(\gamma + \sigma s)/\delta^{2} \\ 0 & -sc^{3}(\gamma + \sigma s)/\delta^{2} & c^{4}(\gamma + \sigma s)/\delta^{2} \\ \gamma sc/\delta & 0 & 0 \\ 0 & sc(\gamma + \sigma sc^{2})/\delta & -c^{2}(\gamma + \sigma sc^{2})/\delta \\ 0 & \sigma s^{3}c^{2}/\delta & -\sigma s^{2}c^{3}/\delta \end{bmatrix},$$
(19)  
$$\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} \gamma sc/\delta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma sc/\delta & \sigma sc^{2}/\delta \\ 0 & -\gamma c^{2}/\delta & -\sigma c^{3}/\delta \\ \gamma + c^{2}(1 + \nu s^{2})/2\delta^{2} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma + (1 + \nu)s^{2}c^{2}/2\delta^{2} & -(1 + \nu)sc^{3}/2\delta^{2} + \sigma c^{3} \\ 0 & -(1 + \nu)sc^{3}/2\delta^{2} & c^{2}((1 + \nu)c^{2}/2\delta^{2} + \sigma s) \end{bmatrix},$$
(20)

$$\mathbf{B}_{1} = \begin{bmatrix} 0 & -c(2\gamma s + \sigma(1 + s^{2}))/\delta & c^{2}(\gamma + 2(1 + \nu) + \sigma s)/\delta \\ 2sc(\gamma + \sigma s)/\delta & 0 & 0 \\ -c^{2}(\gamma + 2(1 + \nu) + 2\sigma s)/\delta & 0 & 0 \\ 0 & -(\gamma + \sigma sc^{2}) & \sigma c^{3} \\ \gamma + 2\sigma sc^{2} & 0 & 0 \\ 2\sigma s^{2}c & 0 & 0 \\ 2\sigma s^{2}c & 0 & 0 \\ \end{bmatrix}, \quad (21)$$
$$\mathbf{B}_{2} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & -\sigma c \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & -(1 + \nu)sc/\delta & (2 + \nu)c^{2}/2\delta + \sigma \delta s \\ (1 + \nu)sc/\delta & 0 & 0 \\ -(2 + \nu)c^{2}/2\delta & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

where the parameters  $s, c, \delta$  and  $\sigma$  are given by :

$$s = \sin \alpha, \ c = \cos \alpha, \ \delta = \frac{R}{r}, \ \sigma = \frac{P}{\pi \rho r^2 c_s^2}.$$
 (23)

The solution of Eq. (14) yields the propagation modes. Eqs. (14)–(22) show that wave propagation in axially loaded helical beams is governed by  $\alpha$  (the helix angle),  $\delta$  (dimensionless helix radius or helix index),  $\sigma$  (dimensionless axial load) and  $\nu$  (Poisson coefficient). Hence, dispersion curves (K,  $\Omega$ ) only depends on theses 4 dimensionless parameters.

For a given  $\Omega$ , the eigenproblem (14) is quadratic in K. This problem can be recast into a generalised linear eigensystem written for  $[U^T K U^T]^T$  in order to be solved by standard numerical solvers (see Tisseur et al [18] for instance). One gets 12 wavenumbers. Purely real and imaginary wavenumbers corresponding respectively to propagating and evanescent modes, appear in pairs of opposite signs. Fully complex wavenumbers corresponding to inhomogeneous modes, appear in quadruples of complex conjugates and opposite signs. If interest is restricted to propagating modes only, one can set K (as a real wavenumber) and determine  $\Omega$ . The eigenproblem (14) is then linear for finding  $\Omega^2$  and 6 positive eigenfrequencies are found for each real wavenumber K. As a side remark, note that the eigenvalue problem (14) degenerates to that presented in [14] (Appendix) in the unloaded case ( $\sigma = 0$ ).

### 2.3. Deformed helical geometry

The eigenvalue problem (14) is written in terms of  $\alpha$  and  $\delta$ , which are the helix pitch angle and index in the loaded state. Both are unknown and should be calculated provided the load, the initial angle  $\alpha_0$ and index  $\delta_0$  in the unloaded state. One considers a helical waveguide subjected to a given axial strain, denoted  $\epsilon$ . One has  $\epsilon = (l \sin \alpha - l_0 \sin \alpha_0)/l_0 \sin \alpha_0$ , where  $l_0$  and l are the curvilinear length of one helix step along the *s*-axis in the unloaded state and loaded state respectively. We follow the same approach as the one proposed in Chapter 20 of [19], which proposes a non-linear solution for large deflection under simplifying assumptions limited to sufficiently large index  $\delta_0$  (typically,  $\delta_0 \geq 5$ ) and small pitch angle (which will be supposed for the results of this paper)<sup>1</sup>. Shearing strains are neglected. The stretching of the helix centreline is neglected so that  $l \simeq l_0$  [19, 20]. Therefore,  $\epsilon \simeq \sin \alpha / \sin \alpha_0 - 1$  and the angle  $\alpha$  is simply obtained from :

$$\alpha = \arcsin((1+\epsilon)\sin\alpha_0). \tag{24}$$

Then following [19], the bending and torsional moments are respectively balanced by the change in curvature and torsion times the corresponding rigidities :

 $<sup>^{1}</sup>$ Note that such a solution is well suited for springs but would not be applicable for helical wires constituting civil engineering cables (usually of small index and large angle).

$$PR\sin\alpha = -EI_b \bigtriangleup \kappa,\tag{25}$$

$$PR\cos\alpha = GI_t \,\triangle\,\tau \tag{26}$$

where  $\Delta \kappa = \cos^2 \alpha / R - \cos^2 \alpha_0 / R_0$  and  $\Delta \tau = \sin \alpha \cos \alpha / R - \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 / R_0$ .

Eliminating P from these two equations, one obtains the following dimensionless expressions for  $\delta$ , written in terms of  $\alpha$ :

$$\delta = \frac{(1+\nu)\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{(1+\nu)\cos^2\alpha_0 + \sin\alpha_0\cos\alpha_0\tan\alpha}\delta_0.$$
 (27)

From Eq. (25), the dimensionless load  $\sigma$  is finally given by :

$$\sigma = \frac{(1+\nu)}{2\delta\sin\alpha} \left(\frac{\cos^2\alpha_0}{\delta_0} - \frac{\cos^2\alpha}{\delta}\right). \tag{28}$$

In this paper, note that the parametric study given in the next section is conducted in terms of  $\epsilon$  instead of  $\sigma$ .

As a side remark, the geometric parameters of the unloaded and loaded helical beam must satisfy the geometric conditions  $\pi \delta_0 \sin \alpha_0 > 1$  and  $\pi \delta \sin \alpha > 1$ , respectively (meaning that adjacent turns do not overlap each other).

### 3. Results

In this section, the unloaded case is first considered in order to clearly identify branch modes inside a typical spring. Three frequency ranges can be distinguished. Focusing on propagating modes, the effect of load on the wave propagation is studied in each frequency range. The effect of the dimensionless radius  $\delta_0$  and angle  $\alpha_0$  on the wave propagation in a loaded helical spring is finally examined. Numerical results are obtained with a Poisson coefficient  $\nu$  of 0.3.

#### 3.1. Branch identification

In this section, results are given for a helical beam with dimensionless radius  $\delta_0$  of 10 and angle  $\alpha_0$  of 15°. Fig.2(a),(c),(d) show the dispersion curves ( $\omega r/c_s$  vs. kr) of the unloaded helical beam for three frequency ranges : [0; 2], [0; 0.25] and [0; 0.005]. These three ranges corresponds to three frequency regimes, typical for helical beams, as already identified in [13]. The eigensystem (14) is solved by fixing the dimensionless frequency in order to obtain propagating as well as non-propagating modes, making easier the branch identification. At each frequency, there are six wavenumbers having a positive real part.

In order to determine their physical behaviour, a representation of modeshapes 1 and 2 is sketched in Fig.2(b) for  $\omega r/cs = 1$ . It comes that both modes 1 and 2 have a flexural wave behaviour. Mode 1 mainly oscillates in the binormal direction while the motion of mode 2 is mainly in the normal direction. The modes 3 and 4 have not been sketched in the figure because their behaviour could be hardly identified with such a representation, which can only show displacement components normal to the beam neutral axis. Instead, the behaviour of these modes has been identified by inspecting the dominant component of eigenvectors. The dominant component of modes 3 and 4 was found to be  $\phi_t^*$  and  $u_t^*$  respectively, indicating that mode 3 has a torsional behaviour while mode 4 is of compressional type. Similarly to the cylinder dispersion curves, modes 5 and 6 have a flexural wave behaviour of higher order (of no interest in this paper).

For a dimensionless frequency exceeding 1.88, all the six modes are propagating (see Fig.2a). Under 1.88, modes 5 and 6 become inhomogeneous (complex wavenumbers). As shown in Fig.2(c) and 2(d), the compressional mode (mode 4) is cut-off for frequencies between 0.002 and 0.15 (Im(kr) > 0), while the torsional mode (mode 3) is cut-off between 0.002 and 0.106. Note that between 0.002 and 0.08, the wavenumbers of modes 3 and 4 are grouped together. Then below 0.002, modes 3 and 4 divide into two propagating modes, for which it becomes difficult to distinguish compressional from torsional behaviour.

This difficulty was also mentionned in [13, 14]. It can be noticed that one of these two modes has a curve of negative slope, indicating a backward propagation (positive wavenumber with negative group velocity  $V_q = \partial \omega / \partial k$ ).



Figure 2: Unloaded helical waveguide with  $\delta_0 = 10$  and  $\alpha_0 = 15^{\circ}$ . (a), (c), (d): dispersion curves (grey lines: non-propagating modes, black lines: propagating modes). (b): modeshapes of modes 1 and 2 at  $\omega r/cs = 1$  (grey lines: undeformed, black lines: deformed helix centreline)

Now, a tensile deformation  $\epsilon = 0.4$  is applied. One focuses on propagating modes only (we set kr and look for  $\omega r/cs$ ). Fig.3 shows the dispersion curves of propagating modes in the unloaded and loaded cases for the first two frequency ranges. The effect of loading is negligible for high frequencies (above 0.25). For medium frequencies (below 0.25), there is small differences (few percents) between the unloaded and loaded curves. These differences are localised near the cut-off frequencies of the torsional and compressional modes (modes 3 and 4 respectively), both increasing under tensile loads. Note that these cut-off frequencies shift higher as the helix angle increases and would decrease under compressive loads (results not shown for conciseness). Despite the significant value of the axial deformation on the helical beam, the effect of loading becomes significant only in the low-frequency range, as shown in the next subsection.

#### 3.2. Effect of loading in the low-frequency range

A parametric study is conducted in order to analyse the effect of loading for low frequencies (below 0.005). Fig.4 shows the superposition of dispersion curves of unstretched ( $\epsilon = 0$ ) and stretched helical beams ( $\epsilon = 0.4$ ). The effect of loading has been studied for six different helical beams, having dimensionless radii  $\delta_0$  of 10, 15 and angles  $\alpha_0$  of 5°, 10°, 15°. The tensile load has an effect on the four propagating modes. For clarity, Fig. 4(e) shows the mode labels as previously identified. The load effect is found to be the most important for mode 2 (flexural mode oscillating in the normal direction), its dispersion curve shifting to higher frequencies. The other flexural mode (mode 1) is less sensitive to the load, with a shift to lower frequencies (except near the rigid body point, corresponding to a zero-frequency). As far as the longitudinal



Figure 3: Dispersion curves of the unloaded (grey lines) and loaded  $\epsilon = 0.4$  (black lines) helical beam for  $\delta_0 = 10$ ,  $\alpha_0 = 15^{\circ}$ .

and torsional modes are concerned (modes 3 and 4), their frequency slightly increase under tensile load. As can be observed in Fig. 4, the applied load has a greater effect as the helix angle increases.

Fig. 5 shows the same results as Fig. 4 for the compressive case  $\epsilon = -0.4$ . One observes the same trend as before but in the opposite direction. For instance, modes 2, 3 and 4 shift to lower frequencies. When the load is compressive, there exists an interval of wavenumbers corresponding to long waves for which  $Re(\omega) = 0$ . In this interval, the corresponding frequencies are not strictly zero but have a small imaginary part. This indicates that compressed helical beams are incapable of transmitting these waves. Note that the same phenomenon was found in compressed arches [21]. For helical beams, this interval is greater as the helix angle or the load increase and as the index decreases.

In practice, it can be of interest to evaluate how significant are the stress levels inside the beam. Quantitatively, the maximum shearing stress at the surface of the beam can be approximated as  $2PR/\pi r^3$  (see Chapters 19 and 20 of Ref. [19]). From Eq. (23), this stress is equal to  $2\delta\sigma E/2(1 + nu)$ , where  $\delta$  and  $\sigma$  are obtained from Eqs. (27)– (28). Let us choose E=2.0e11Pa (typical value for steel). Then in Figs. 4 and 5, applying  $|\epsilon|=0.4$  would yield a maximum shearing stress varying between 180MPa (corresponding to the case  $\delta_0=15$ ,  $\alpha_0=5^{\circ}$ ) and 830MPa (for  $\delta_0=10$ ,  $\alpha_0=15^{\circ}$ ). Note that the stress inside the beam must not exceed the elastic limit (which depends on the material considered), otherwise the theory used in this paper would be no longer applicable.

#### 3.3. Note on the effect of stress versus deformation

The theory presented in Sec. 2 shows that the axial load acts upon the dynamic equilibrium equations through two combined effects: the deformation of the geometry (from  $(\delta_0, \alpha_0)$  to  $(\delta, \alpha)$ ) and the generation of stress ( $\sigma \neq 0$ ). In Sec. 3.2, both effects were taken into account. In the present section, we are interested in evaluating the influence of stress compared to the deformation. As an example, Fig. 6 compares the loaded dispersion curves of Fig. 4 (e) with the curves obtained by neglecting stress, i.e. arbitrarily setting  $\sigma$  to zero (the deformation of the geometry is still taken into account).

The stress  $\sigma$  has an effect that can not be neglected. Comparing Fig. 6 (a) with Fig. 4 (e), this effect is opposed to, but lower than, the effect caused by the geometry deformation. With the same applied deformation and dimensionless radius, the effect of stress is more important with the increase of the helix angle. This phenomenon can be observed by comparing Fig. 6 (a) to (b).

It can be concluded that both effects of stress and geometry deformation should be considered to study the effect of load on the propagation of elastic waves in helical beams.

#### 4. Conclusions

Elastic wave propagation in a helical beam subjected to a compressive or tensile axial load has been analysed. The deformation of the geometry under the applied axial load has been taken into account in



Figure 4: Dispersion curves of unloaded (grey lines) and loaded  $\epsilon = 0.4$  (black lines) helical beam in the low-frequency range for : (a)  $\delta_0 = 10, \alpha_0 = 5^\circ$ , (b)  $\delta_0 = 15, \alpha = 5^\circ$ , (c)  $\delta_0 = 10, \alpha_0 = 10^\circ$ , (d)  $\delta_0 = 15, \alpha_0 = 10^\circ$ , (e)  $\delta_0 = 10, \alpha_0 = 15^\circ$ , (f)  $\delta_0 = 15, \alpha_0 = 15^\circ$ 



Figure 5: Dispersion curves of unloaded (grey lines) and loaded  $\epsilon = -0.4$  (black lines) helical beam in the low-frequency range for : (a)  $\delta_0 = 10, \alpha_0 = 5^\circ$ , (b)  $\delta_0 = 15, \alpha = 5^\circ$ , (c)  $\delta_0 = 10, \alpha_0 = 10^\circ$ , (d)  $\delta_0 = 15, \alpha_0 = 10^\circ$ , (e)  $\delta_0 = 10, \alpha_0 = 15^\circ$ , (f)  $\delta_0 = 15, \alpha_0 = 15^\circ$ 



Figure 6: Dispersion curves of the deformed helical beam including the effect of stress (black) and without (gray) for  $\epsilon=0.4$ ,  $\delta_0=10$  and: (a)  $\alpha_0=15^\circ$ , (b)  $\alpha_0=25^\circ$ .

the calculation of wave propagation. The effect of load on wave propagation has been highlighted for high, medium and low frequency ranges. A branch identification of dispersion curves has been performed for both propagating and non-propagating modes. The effect of loading is significant on the four propagating modes in a low frequency range. The dispersion curve of the flexural mode oscillating in the normal direction shifts to higher frequencies under tensile loads and vice-versa for compressive loads. The loading effect is less important for the three other propagating modes. The applied load has a greater effect as the helix increases. Both the effects of stress and geometry deformation are found to be non-negligible and should be considered in the analysis of elastic wave propagation in axially loaded helical beams.

#### References

- W. H. Wittrick, On elastic wave propagation in helical springs, International Journal of Mechanical Sciences, 8 (1966) 25-47.
- [2] J. E. Mottershead, Finite elements for dynamical analysis of helical rods, International Journal of Mechanical Sciences, 22 (1980) 267-283.
- [3] A. Ward, M.S. Towers, H.A. Barker Dynamic analysis of helical springs by the assumed mode method, Journal of sound and vibration, 112(2) (1987) 305-320.
- [4] V. Yildirim, Investigation of parameters affecting free vibration frequency of helical springs, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39(1), (1996) 99-114.
- [5] V. Yildirim, N. Ince Natural frequencies of helical springs of arbitrary shape, Journal of Sound and Vibration, 204(2), (1997) 311-329.
- [6] V. Yildirim, An efficient numerical method for predicting the natural frequecies of cylindrical helical springs, International Journal of Mechanical Sciences, 41 (1999) 919-939.
- [7] D. Pearson, W.H.Wittrick, An exact solution for the vibration of helical springs using a Bernoulli-Euler model, International Journal of Mechanical Sciences, 28(2), (1986) 83-96.
- [8] J. Lee, D. J. Thompson, Dynamic stiffness formulation, free vibration and wave motion of helical springs, Journal of Sound and Vibration, 239 (2001) 297-320.
- Y. Xiong, B. Tabarrok, A finite element model for the vibration of spatial rods under various applied loads, International Journal of Mechanical Sciences, 34 (1992) 41-51.
- [10] D. Pearson, Transfer matrix method for the vibration of compressed helical springs, Journal of Mechanical Engineering, 24, (1982) 163-171.
- [11] L-E. Becker, G-G. Chassie, W.L. Cleghorn, On the natural frequencies of helical compression springs, International Journal of Mechanical Sciences, 44 (2002) 825-841.
- [12] L. E. Becker, W. L. Cleghorn, On the buckling of helical compression springs, International Journal of Mechanical Sciences, 34 (1992) 275-282.
- S. V. Sorokin, Linear dynamic of elastic helical sprigs: asymptotic analysis of wave propagation, Proceedings of the Royal Society A, 465 (2009), 1513-1537.
- [14] F. Treyssède, Numerical investigation of elastic modes of propagation in helical waveguides, Journal of the Acoustical Society of America, 121 (2007) 3398-3408.
- [15] F. Treyssède, Elastic waves in helical waveguides, Wave Motion, 45 (2008) 457-470.
- [16] F. Treyssède, L. Laguerre Investigation of elastic modes propagating in multi-wire helical waveguides, Journal of Sound and Vibration, 329 (2010) 1702-1716.

- [17] G. G. Chassie, L. E. Becker, W. L. Cleghorn, On the buckling of helical springs under combined compression and torsion, International Journal of Mechanical Sciences, 39 (1997) 697-704.
- [18] F. Tisseur, K. Meerbergen, The quadratic eigenvalue problem, SIAM Review, 43 (2001) 235-286.
- [19] A.M. Wahl Mechanical springs, Second Edition, Mc Graw-Hill, Inc., New York, 1963.
- [20] J. A. Haringx, On highly compressible helical springs and rubber rods, and their application for vibration-free mountings, Philips Res. Rep., 3 (1948) 401-449.
- [21] M. Farshad, Wave propagation in prestressed curved rods, Journal of the Engineering Mechanics Division, 106 (1980) 395-408.

## Resumé :

Le travail de cette thèse est consacré au développement d'un modèle de propagation des ondes élastiques dans un guide d'onde hélicoïdal soumis à une sollicitation axiale. Le Contrôle Non Destructif des ressorts et des torons multi-brins est une application potentielle du modèle proposé. L'étude de la propagation des ondes dans un guide hélicoïdal soumis à un chargement axial nécessite l'écriture des équations tridimensionnelles de l'élastodynamique dans un système de coordonnées hélicoïdales. La méthode des éléments finis semi-analytique (SAFE) est ensuite appliquée en exploitant la propriété d'invariance par translation, réduisant ainsi le maillage à la section. Le problème aux valeurs propres obtenu peut être résolu en fixant le nombre d'onde ou la fréquence. Par ailleurs, le calcul de l'état précontraint statique est résolu par une technique d'homogénéisation hélicoïdale dans laquelle est prise en compte l'invariance de la structure. Le modèle de calcul statique est validé par un modèle analytique pour les ressorts et par un modèle éléments finis 3D pour les torons, issus de la littérature. Le modèle SAFE est validé pour les ressorts par un modèle de poutre hélicoïdale sous chargement axial. Il est montré que l'effet du chargement agit en fonction de la précontrainte et de la déformation de la géométrie et n'est significatif qu'en basses fréquences. Finalement, la propagation des ondes élastiques dans un toron à sept brins soumis à un chargement axial est analysée. Les courbes de dispersion obtenues numériquement sont comparées à des données expérimentales. Une bonne concordance est obtenue pour les premiers modes de type compression et le phénomène de fréquence "manquante" associé.

**Mots clés :** Ondes guidées, précontrainte, homogénéisation, coordonnées hélicoïdales, éléments finis, toron à sept brins.

Title Modeling of elastic wave propagation in prestressed multi-wire waveguides.

## Abstract :

This thesis is devoted to the modeling of elastic wave propagation in helical waveguides subjected to axial loads. Non Destructive Testing (NDT) of springs and multi-wire strands is a potential application of the proposed model. The study of wave propagation in loaded helical waveguides requires the expression of tridimensional equations describing the motion of prestressed structures in a helical coordinate system. The semi-analytical finite element method (SAFE) is then applied considering the property of translational invariance and the problem is reduced to the cross-section (2D). The eigenproblem obtained can be solved by fixing the wavenumber or the frequency. The computation of the prestressed static state is solved by a helical homogenization method accounting for the invariance. The correlation between the static computational model and an analytical model of the literature indicates the validation of our model for springs. Moreover, agreement between our model and a 3D finite element model found in the literature for the case of seven-wire strands is satisfactory. The SAFE model is validated with a model of Timoshenko helical beams subjected to axial loads. It is shown that wave propagation is sensitive to axial loads in terms of prestress and geometry deformation and that this influence is significant only at low frequencies. Finally, the elastic wave propagation in sevenwire strands subjected to axial loads is analysed. The dispersion curves obtained numerically are compared to experimental data in the literature. A good agreement is found for the first compressional-like modes and their veering central frequency.

**Keywords :** Guided waves, prestress, homogenization, helical coordinates, finite element, seven-wire strand.

Discipline : Sciences Pour l'Ingénieur