Méthodes de commande avancées appliquées aux viseurs.

Serge Hirwa

▶ **To cite this version:**

Serge Hirwa. Méthodes de commande avancées appliquées aux viseurs.. Autre. Supélec, 2013. Français. NNT : 2013SUPL0022 . tel-00969110

HAL Id: tel-00969110
https://theses.hal.science/tel-00969110

Submitted on 2 Apr 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 2013-22-TH

SUPELEC

ECOLE DOCTORALE STITS
« Sciences et Technologies de l'Information des Télécommunications et des Systèmes »

THÈSE DE DOCTORAT

DOMAINE : STIC
Spécialité : Automatique

Soutenue le 29 Octobre 2013

par :

Serge HIRWA

Titre de la thèse : Méthodes de commande avancées appliquées aux viseurs

Directeur de thèse :	Gilles DUC	Supélec
<u>Composition du jury</u> :		
Président du jury :	Philippe CHEVREL	Ecole des Mines de Nantes
Rapporteurs :	Daniel ALAZARD	ISAE
	Edouard LAROCHE	Université de Strasbourg
Examinateurs :	Jamal DAAFOUZ	ENSEM-CRAN
	Hugues MOUNIER	L2S
Co-encadrants de thèse :	Philippe FEYEL	SAFRAN-Sagem
	Guillaume SANDOU	Supélec

Remerciements

Ces travaux se sont déroulés sous la responsabilité de M. Gilles Duc, Professeur à Supélec, directeur de cette thèse, et de M. Guillaume Sandou, Enseignant-Chercheur à Supélec, co-encadrant de la thèse. Je souhaiterais leur adresser mes sincères remerciements pour leur encadrement.

Je remercie également M. Philippe Feyel, ingénieur R&D et expert automaticien chez SAGEM, co-encadrant de la thèse, et qui, compte tenu du caractère applicatif de la thèse, a grandement orienté et aiguillé mes travaux.

Je remercie M. Daniel Alazard, Professeur à L'ISAE-Toulouse, ainsi que M. Edouard Laroche, Professeur à l'Université de Strasbourg, pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de mes travaux de thèse. Merci également à M. Philippe Chevrel, Professeur à l'Ecole des Mines de Nantes, M. Jamal Daafouz, Professeur à l'ENSEM de Nancy, et M.Hugues Mounier, Professeur à l'Université Paris Sud 11, qui ont accepté d'examiner le contenu de ce mémoire.

Je tiens également à remercier, pour l'accueil et l'intégration dont j'ai bénéficié, mes collègues ingénieurs du Pôle Systèmes Asservis de la division Optronique & Defense de SAGEM Massy : Arnaud, Franck, Matthieu, Pierre, Roland, Stéphane, Yohan. Et enfin, merci à tous les doctorants avec qui j'ai partagé, avec beaucoup de plaisir le bureau C3-15 du département Automatique à Supélec : Ali, Julien, Maude, Miassa, Rayen, Younane.

Table des matières

Introduction **6**

1 Les viseurs : architectures et modélisation pour la commande **7**
1.1 Architectures des viseurs . . . 7
1.2 Modélisation pour la commande . . . 12
1.2.1 Cinématique et modèle rigide . . . 12
1.2.1.1 Dynamique en Elévation . . . 12
1.2.1.2 Dynamique en Azimut . . . 14
1.2.1.3 Modèle simplifié linéaire . . . 16
1.2.2 Le modèle de commande . . . 17
1.2.2.1 Prise en compte des flexibilités mécaniques . . . 17
1.2.2.2 Prise en compte des dynamiques de l'actionneur et du gyromètre . . . 18
1.2.2.3 Identification de modèles . . . 20
1.3 Conclusion . . . 21

2 Les boucles de stabilisation inertielle de ligne de visée : approche par Loop-Shaping **23**
2.1 Déclinaison fréquentielle des objectifs de synthèse . . . 24
2.1.1 Performance . . . 24
2.1.2 Robustesse . . . 26
2.2 Synthèse du correcteur . . . 28
2.2.1 La synthèse H_∞ par Loop-Shaping . . . 28
2.2.1.1 Construction du loopshape . . . 28
2.2.1.2 Stabilisation robuste du loopshape . . . 28
2.2.1.3 Correcteur final . . . 31
2.2.2 Réduction de modèles dans l'espace d'état . . . 32
2.2.2.1 Troncature de réalisations equilibrées . . . 32
2.2.2.2 Approximation optimale par la norme de Hankel . . . 34
2.3 Application . . . 34
2.4 Conclusion et objectifs de la thèse . . . 43

3 Synthèse H_∞ à ordre fixé par l'optimisation sous contraintes LMI **45**
3.1 Les inégalités matricielles linéaires . . . 45
3.2 Solution du problème H_∞ standard sans contrainte d'ordre . . . 46
3.3 Ordre fixé par factorisations premières normalisées . . . 51
3.4 Autres algorithmes . . . 56
3.5 Conclusion sur les approches par LMI . . . 59

4 Synthèse H_∞ à ordre fixé par l'optimisation non lisse **61**
4.1 Optimisation non lisse : cadre théorique, algorithmes et outils pour la synthèse de correcteurs . . . 62
4.1.1 Notions d'analyse et d'optimisation non lisse . . . 62
4.1.1.1 Rappels sur les méthodes de descente dans le cas lisse . . . 63
4.1.1.2 Sous-gradients et directions de descente dans le cas non lisse 65
4.1.2 Algorithmes et outils pour la synthèse de correcteurs par l'optimisation non lisse . . . 66
4.1.2.1 Problèmes minimax fini . . . 67
4.1.2.2 Problèmes minimax semi-infinis . . . 70
4.2 Synthèse du précorrecteur K_s par l'optimisation non lisse . . . 73
4.2.1 Ordre fixé . . . 73
4.2.2 Ordre et structure fixés . . . 74
4.3 Conclusion . . . 78

5 Méthodologies de Loop-Shaping à ordre fixé **79**
5.1 Externalisation partielle des pondérations . . . 80
5.1.1 Principe . . . 80
5.1.2 Application . . . 83
5.1.2.1 Structure parallèle . . . 84
5.1.2.2 Structure cascade . . . 87
5.2 Loop-Shaping graphique . . . 91
5.2.1 Procédure de synthèse . . . 91
5.2.1.1 Construction graphique du loopshape . . . 92
5.2.1.2 Calcul d'une pondération Loop-Shaping . . . 93
5.2.1.3 Synthèse à ordre fixé et/ou structure fixée . . . 95
5.2.2 Applications . . . 96
5.2.2.1 Application SISO : robustification à ordre fixé d'un correcteur existant . . . 96
5.2.2.2 Application SIMO . . . 102
5.2.3 Interface graphique pour le réglage des correcteurs . . . 113

Conclusions et perspectives **116**

A Modèle et pondérations **117**
A.1 Modèle d'état de la fonction de transfert mécanique . . . 117
A.2 Modèle d'état de la fonction de transfert électrique . . . 118
A.3 Pondérations Loop-Shaping . . . 118

Bibliographie **119**

Notations et définitions

Notation	Signification
j	$\sqrt{-1}$
X^T	transposée de la matrice X
X^H	transposée conjugué de la matrice X
$\mathrm{Tr}(X)$	trace de la matrice X
$\langle X,Y\rangle$	produit scalaire euclidien (hermitien) sur $\mathbb{R}^{p\times m}$ ($\mathbb{C}^{p\times m}$) : $\langle X,Y\rangle = \mathrm{Tr}(X^H Y)$
$\|X\|$ ou $\|X\|_F$	norme euclidienne (hermitienne) ou norme de Frobenius de la matrice $X \in \mathbb{R}^{p\times m}$ ($X \in \mathbb{R}^{p\times m}$) : $\|X\| = \sqrt{\langle X,X\rangle}$
$diag\left(X_1, \quad \cdots, \quad X_n\right)$	$\begin{bmatrix} X_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & X_n \end{bmatrix}$
$X \succ 0$ (resp. $X \prec 0$)	$M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique définie positive (resp. définie négative), c'est à dire vérifiant : $\forall v \neq 0, v \in \mathbb{R}^n, v^T X v > 0$ (resp. $v^T X v < 0$)
$\lambda_i(X)$	valeur propre de la matrice $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$
$\sigma_i(X)$	valeur singulière de la matrice $X \in \mathbb{C}^{p\times m}$: $\sigma_i(X) = \sqrt{\lambda_i(X^H X)}$ si $p \geq m$, $\sigma_i(X) = \sqrt{\lambda_i(XX^H)}$ sinon
$\overline{\sigma}(X)$ ou $\sigma_1(X)$	plus grande valeur singulière de la matrice $X \in \mathbb{C}^{p\times m}$
$\|G\|_\infty$	norme H_∞ de la matrice de transfert $G(s)$: $\|G\|_\infty = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} (\overline{\sigma}(G(j\omega)))$
L_∞	espace des fonctions (matricielles ou scalaires) bornées (avec la norme H_∞) sur l'axe imaginaire $j\mathbb{R}$
RH_∞	espace des fonctions (matricielles ou scalaires) rationnelles propres et stables
∂°	ordre d'un système linéaire (matrices de transfert, représentation d'état), ordre d'un polynôme
dB	décibels
SISO	Single Input Single Outpout
SIMO	Single Input Multi Output
MISO	Multi Input Single Output
MIMO	Multi Input Multi Output

Introduction

Cette thèse s'est déroulée dans le cadre d'un contrat CIFRE, au sein de la division Optronique & Défense de la société SAGEM, filiale du groupe SAFRAN, en partenariat avec le département Automatique de Supélec. Cette division est en charge, entre autres, du développement d'une large gamme de viseurs, principalement pour les applications de défense et de sécurité. La Figure 1 présente un exemple de viseur SAGEM, de type « boule gyrostabilisée ».

Figure 1 – Viseur SAGEM de type boule gyrostabilisée sur un hélicoptère

Les **viseurs** sont des plateformes électromécaniques inertielles qui permettent, à partir de modules optroniques embarqués, de produire des images de haute qualité d'une scène depuis un porteur (véhicule terrestre, aérien ou marin) en mouvement. Ce type de plateforme est couramment utilisée :

- dans le domaine scientifique (télescopes et satellites d'observation),
- dans le domaine de la défense et de la sécurité (systèmes de surveillance, systèmes d'armes, guidage de missile),
- dans le civil grand public (caméras stabilisées pour événements sportifs ou pour le cinéma).

Il s'agit de systèmes complexes, dont la conception fait appel à plusieurs sciences ou technologies (Optique, Optronique, Imagerie, Électronique, Mécanique, Logiciel) ; la commande ou plutôt l'asservissement de cette plateforme joue un rôle clé dans la performance du système en conditions opérationnelles.

La fonction principale de la plateforme est de stabiliser et d'orienter la ligne de visée (chemin optique du capteur d'image). Afin donc d'insensibiliser l'image des mouvements du porteur, des boucles de stabilisation inertielle de ligne de visée sont mises en oeuvre à partir des mesures issues de capteurs inertiels (gyromètre, gyroscope) et à l'aide d'actionneurs de types moteurs électriques orientant convenablement la ligne de visée. Cette thèse traite principalement de l'application de méthodes de commande linéaire robuste à la synthèse de correcteurs pour ces boucles de stabilisation inertielle de ligne de visée.

En effet, les méthodes d'automatique fréquentielle dites classiques, souvent très efficaces dans de nombreux problèmes de régulation et d'asservissement de systèmes industriels, s'avèrent limitées notamment lorsque les performances exigées en précision de pointage sont accrues et les environnements opérationnels sont très contraignants. Ceci parce qu'elles procèdent essentiellement par réglage manuel des paramètres du correcteur. Les méthodes de commande robuste du type H_∞ offrent alors un cadre plus formel et bien adapté à la formulation des objectifs de synthèse sous forme de problèmes d'optimisation. Le critère mathématique utilisé porte sur la norme H_∞ de certains transferts pondérés par des filtres linéaires convenablement choisis et servant à définir des gabarits de modelage du gain fréquentiel en boucle fermée (approche dite *Standard*) ou en boucle ouverte (approche dite *Loop-Shaping*). Le correcteur optimal est alors obtenu par résolution d'équations algébriques de Riccati.

La stabilisation de ligne de visée étant essentiellement un problème de rejet de perturbations (environnement du porteur), elle se prête bien au raisonnement en gain inhérent aux méthodes de type H_∞ et plus particulièrement l'approche *Loop-Shaping*, qui en reprenant les principes des méthodes fréquentielles classiques de modelage du gain fréquentiel de la boucle ouverte, s'appréhende le mieux du point de vue d'un ingénieur habitué au réglage de correcteurs de type PID (PI, PD, avance de phase, filtre passe-bas, etc..), couramment utilisés dans l'industrie. Cette méthode présente néanmoins le désavantage de produire des correcteurs qui peuvent être d'ordre très élevé, et donc difficilement implémentables sur le système embarqué. Bien évidemment des techniques de réduction de modèles dans l'espace d'état peuvent être utilisées *a posteriori* sur ces correcteurs, avant implémentation. Cependant, elles ne prennent pas en compte des critères importants tels que la stabilité en boucle fermée ou le critère de synthèse H_∞ minimisé initialement ; ceux-ci doivent être vérifiés après la réduction. De plus, pour atteindre des niveaux de performances (précision de pointage) plus accrus, l'ajout de capteurs supplémentaires est envisagé dans les futurs viseurs. Il devient alors nécessaire de pouvoir imposer *a priori* l'ordre et/ou la structure de la matrice de transfert du correcteur d'asservissement.

L'objectif de nos travaux dans cette thèse est alors de proposer des méthodologies de synthèse de correcteurs robustes d'ordre réduit, voire de structure fixée. Pour cela, nous nous intéressons aux différentes méthodes d'optimisation permettant d'imposer ces 2 contraintes (ordre et/ou structure fixés), ainsi qu'à la manière de formuler le problème de synthèse de façon à satisfaire au mieux ces contraintes, tout en conservant ou en dégradant le moins possible le compromis robustesse/performance spécifié au départ. Tout en gardant le fil directeur de l'application spécifique de stabilisation inertielle de ligne de visée qui nous concerne, nous essayons d'aboutir à des méthodologies applicables à tout problème de synthèse de correcteur formulé via l'approche H_∞ par *Loop-Shaping*, dont nous avons précisé plus haut l'intérêt pratique pour l'ingénieur.

Ce manuscrit est organisé de la manière suivante :

- Dans le Chapitre 1, nous présentons d'abord la problématique principale de rejet de perturbations, liée à la stabilisation inertielle de la ligne de visée, ainsi que les différentes architectures utilisées pour remplir cet objectif ; chacune de ces architectures ayant ses avantages et ses inconvénients, certaines sont plus ou moins adaptées en fonction des applications. Puis nous établissons, à partir des équations du mouvement dans le cas rigide, une modélisation non linéaire d'une plateforme de stabilisation inertielle de ligne de visée, cette dernière est ensuite simplifiée en un modèle linéaire utilisable pour la synthèse de correcteurs.
- Le Chapitre 2 est consacré à la présentation de la méthode usuelle de synthèse de correcteurs pour les boucles de stabilisation inertielle de ligne de visée, de la déclinaison fréquentielle des objectifs de performance et de robustesse à la résolution du problème H_∞ particulier relatif à l'approche par *Loop-Shaping*. Nous y rappelons également le principe des méthodes de réduction de modèles dans l'espace d'état. Ensuite nous appliquons la méthode de synthèse H_∞ par *Loop-Shaping* et ces techniques de réduction *a posteriori* à un exemple concret et détaillé, dont les données sont issues de mesures effectuées sur un viseur.

Après ces deux premiers chapitres, nous abordons ensuite la synthèse de correcteurs à ordre fixé. Les méthodes d'optimisation abordées, permettant de fixer l'ordre du correcteur sont classées en deux grandes catégories :

- La première catégorie regroupe les méthodes d'optimisation sous contrainte d'inégalités matricielles. En effet, certains problèmes de synthèse de correcteurs (synthèse H_∞, synthèse H_2, synthèse mixte H_∞/H_2) peuvent être exprimés sous forme de problèmes d'optimisation sous contraintes d'inégalités matricielles bilinéaires (BMI [1]), qui lorsque l'ordre du correcteur n'est pas fixé peuvent être transformées en contrainte d'inégalités matricielles linéaires (LMI [2]). Néanmoins, pour la synthèse à ordre fixé, il faut résoudre soit le problème BMI initial, qui est *non convexe*, soit le problème transformé en LMI mais avec une contrainte additionnelle de rang, qui rend de nouveau le problème *non convexe*. Plusieurs techniques ont été proposées pour résoudre, de manière plus ou moins heuristique, ce problème difficile. Dans le Chapitre 3, nous en présentons quelques-unes et les appliquons à l'exemple introduit à la fin du chapitre précédent.
- La seconde catégorie est celle des méthodes d'optimisation non lisse. Cette approche, beaucoup plus récente, résout de manière plus directe le problème de synthèse, sans introduire de variables supplémentaires comme dans le cas précédent. Elle requiert cependant des algorithmes d'optimisation spécifiques et adaptés au caractère *non lisse* des critères de synthèse (stabilité, norme H_∞). Dans le Chapitre 4, nous présentons cette approche, ainsi que les outils numériques performants et récemment développés pour la synthèse par l'optimisation non lisse de correcteurs d'ordre et/ou de structure fixés.

Enfin, dans le Chapitre 5, nous présentons l'apport méthodologique de nos travaux de thèse. Pour cela, nous exploitons la particularité du problème H_∞ *Loop-Shaping*, afin de prendre en compte les pondérations dans la synthèse à ordre et/ou structure fixés du correcteur, puisque celles-ci sont généralement les plus contributrices dans l'ordre élevé du correcteur. Ensuite nous proposons une approche de réglage différente, dans laquelle la connaissance usuelle de l'ingénieur pour régler les pondérations est utilisée cette fois pour régler de manière graphique uniquement et simplement un gabarit de gain en boucle ouverte. Ce qui est au départ l'objectif même du concept de *Loop-Shaping*. La pondération nécessaire

1. Bilinear Matrix Inequality
2. Linear Matrix Inequality

pour la synthèse H_∞ à ordre et/ou structure fixés est calculée à partir de ce gabarit fréquentiel en boucle ouverte, construit à partir de concepts d'Automatique fréquentielle classique. Cette dernière approche est appliquée à un autre exemple de système optronique ainsi qu'à l'exemple de départ sur les viseurs.

Chapitre 1

Les viseurs : architectures et modélisation pour la commande

1.1 Architectures des viseurs

L'architecture mécanique d'une plateforme de stabilisation inertielle de ligne de visée est fortement liée à la précision de pointage traduisant une exigence de portée spécifiée, donc à la capacité du dispositif à bien découpler ou isoler la ligne de visée des perturbations dues à l'environnement du porteur sur lequel il sera embarqué. En effet la portée d'un viseur (détecter et identifier une cible au loin) est directement liée à la qualité de l'image, que l'on quantifie par des critères tels que le flou d'image. La stabilisation inertielle de la plateforme doit donc assurer que la ligne de visée, ou plutôt le chemin optique de l'imageur ne bouge pas de plus d'un demi-pixel, en valeur RMS(Root Mean Square).

Ainsi, en fonction d'exigences de stabilisation croissantes, cette architecture peut aller du plus simple, avec au minimum 2 cardans (*Gimbals*) supportant un dispositif d'observation stabilisé suivant 2 axes orthogonaux à la ligne de visée ; au plus complexe, avec plusieurs étages ou cardans imbriqués. La configuration mécanique de base avec 2 axes de stabilisation (Elévation et Azimut) de la figure 1.1 est la plus couramment utilisée, c'est aussi celle qui permet de mieux comprendre les principes de fonctionnement de ce type de plateformes. Sur cette vue on distingue 3 solides, dont les mouvements de rotation dans l'espace induisent

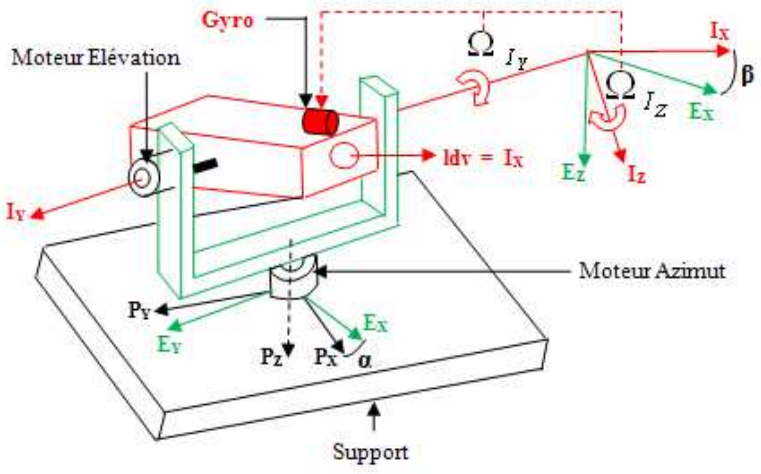

Figure 1.1 – Plateforme de stabilisation inertielle 2 axes

ceux de la ligne de visée :

- le support (P), solidaire du porteur du viseur ayant une vitesse de rotation absolue $\Omega_P = \begin{bmatrix}\Omega_{P_x} & \Omega_{P_y} & \Omega_{P_z}\end{bmatrix}^T$.
- le cardan externe (E), tournant relativement au support (P) d'un angle α et ayant une vitesse de rotation absolue $\Omega_E = \begin{bmatrix}\Omega_{E_x} & \Omega_{E_y} & \Omega_{E_z}\end{bmatrix}^T$.
- le cardan interne (I) qui supporte le bloc contenant le dispositif d'observation et tourne relativement à (E) d'un angle β. Sa vitesse de rotation absolue notée $\Omega_I = \begin{bmatrix}\Omega_{I_x} & \Omega_{I_y} & \Omega_{I_z}\end{bmatrix}^T$ est aussi celle de la ligne de visée, donc celle que l'on cherche à contrôler, ou du moins en partie puisque sa composante Ω_{I_x} (le roulis) ne peut être contrôlée uniquement avec ces 2 cardans.

Considérons dans un premier temps par souci de clarté et de simplicité le mouvement de rotation du porteur uniquement selon l'axe P_y, avec le cardan externe (E) nominalement aligné au support (P), c'est à dire $\alpha = 0$: seul le mouvement de rotation en Elévation de la ligne de visée est donc concerné ; selon le principe fondamental de la dynamique en rotation appliqué au solide (I) et en supposant un bloc rigide d'inertie J_{I_y} :

$$\sum C_{ext} = J_{I_y}\dot{\Omega}_{I_y}. \tag{1.1}$$

Le cardan I sera inertiel suivant son axe I_y si

$$\dot{\Omega}_{I_y} = 0.$$

Ainsi, le problème de la stabilisation inertielle de ligne de visée consiste à rejeter des perturbations, c'est-à-dire annuler le terme de gauche de 1.1. La plupart de ces perturbations déstabilisant la ligne de visée sont induites par les mouvements de rotation et de translation du porteur :

- *Les frottements* : les frottements secs, qui s'opposent au mouvement relatif entre 2 surfaces en contact, se traduisent par un couple perturbateur constant dont le signe est opposé à celui de la vitesse relative entre les 2 surfaces. Par conséquent, lors des changements d'attitude du porteur, ce couple provoque un mouvement brusque de la ligne de visée, qui peut se traduire par des sauts dans l'image si l'asservissement ne dispose pas d'une bande passante suffisante.
- *Le balourd* : la masse du bloc optronique stabilisé est rarement répartie de façon parfaitement homogène et symétrique autour de l'axe de rotation, le centre de gravité se retrouve alors excentré de l'axe de rotation. Ce phénomène dit de *balourd*, qui peut être plus ou moins important, se traduit par des couples perturbateurs lors de mouvements en translation (vibrations linéaires) du porteur.
- *Les flexibilités mécaniques* : l'hypothèse de rigidité de la plateforme, bien que nécessaire à la compréhension du mouvement d'ensemble, est inexacte. En effet, la complexité de la structure mécanique en question se traduit généralement par une dynamique présentant un nombre (théoriquement infini) de modes mécaniques résonants plus ou moins hauts en fréquence, selon le type de matériaux utilisés et la façon dont les différentes pièces sont assemblées et montées. Notamment, les modes de flexion du cadre contenant la caméra ou alors ceux provenant des éléments de suspension externes au niveau des axes de rotation, peuvent amplifier une partie de l'environnement vibratoire du porteur et impacter la performance de stabilisation de la ligne de visée nécessaire à la portée du viseur.

Afin de rendre inertielle la ligne de visée, 2 techniques sont alors usuellement employées :

– **La stabilisation par gyromètre antenne** : on met en oeuvre un capteur (gyroscope ou gyromètre) qui mesure l'orientation (respectivement, rotation ou vitesse de rotation) absolue (vis-à-vis d'un référentiel inertiel ou fixe par rapport aux étoiles) de la ligne de visée, car monté directement sur le bloc optique contenant les senseurs. C'est la configuration de la figure 1.1. Et, par un asservissement (figure 1.2), on contre les perturbations dues aux mouvements du porteur en appliquant à chaque axe un couple moteur qui s'y oppose. On parle alors de *Mass Stabilization* dans la littérature [Hil08, Mas08], du fait que l'on stabilise la ligne de visée en contrôlant directement le mouvement de la caméra, qui lorsque celle ci est rigide, se veut être celui mesuré par le gyro [1].

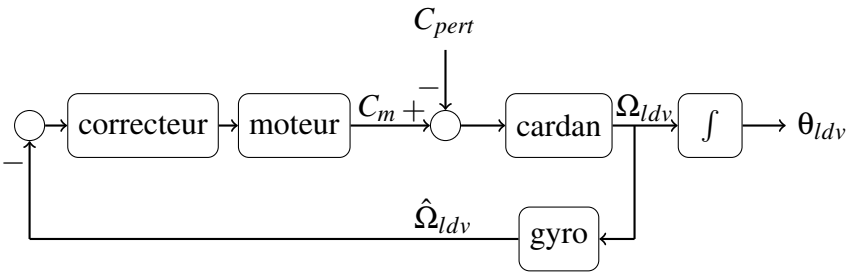

Figure 1.2 – Stabilisation d'un axe de visée par gyromètre

L'avantage de cette technique est le niveau de performance en précision de pointage qu'elle permet d'atteindre, puisque l'on mesure directement les mouvements absolus de la ligne de visée. Cependant le fait de devoir monter un gyromètre sur le bloc contenant les senseurs peut poser des problèmes d'encombrement, ce qui par exemple peut brider le débattement angulaire, et donc limiter le champ de vision indispensable pour certaines applications comme la veille(balayage de la ligne de visée).

– **La stabilisation en strapdown** : cette approche est fondée sur l'idée que l'on peut contrer les mouvements du porteur, en asservissant les cardans en relatif sur une consigne inertielle, mais opposée au mouvement du porteur, que l'on mesure à partir d'un capteur inertiel (centrale inertielle, gyromètre, gyroscope) fixé (*strapped down*) cette fois au porteur. Cela correspondrait par exemple sur le schéma de la figure 1.1 à placer le gyromètre sur le support (P) symbolisant le porteur du viseur, en disposant de capteurs angulaires relatifs permettant de mesurer les angles relatifs α et β. L'asservissement mis en oeuvre dans ce cas est explicité par la figure 1.3.
L'avantage de cette technique comble l'inconvénient de la première, c'est-à-dire que l'utilisation d'un gyromètre déporté (sur le porteur du viseur) permet un gain en terme d'encombrement et de masse au niveau du dispositif stabilisé, ce qui permet donc la mise en oeuvre de fonctions plus avancées comme la veille. Cependant elle offre généralement de moins bonnes performances en précision de pointage, puisque celles-ci dépendent fortement de la qualité du gyromètre (bande passante, facteur d'échelle, linearité). En effet contrairement à la technique précédente, la mesure inertielle fournie par le gyromètre n'est plus asservie (la plupart du temps) à zéro, ce qui exige donc d'avoir une mesure de bonne qualité sur toute la plage des mouvements de la ligne de visée et non plus seulement autour de zéro. Les caractéristiques (linéarité, facteur d'échelle) du capteur angulaire ont également un impact non négligeable sur le niveau de performance de ce type d'asservissement.

1. Dans la suite on emploiera ce terme pour désigner un gyromètre ou un gyroscope

On retrouvera dans [Hil08, Mas08] les différentes variantes de ces 2 techniques de base, par souci de clarté nous ne les détaillerons pas ici.

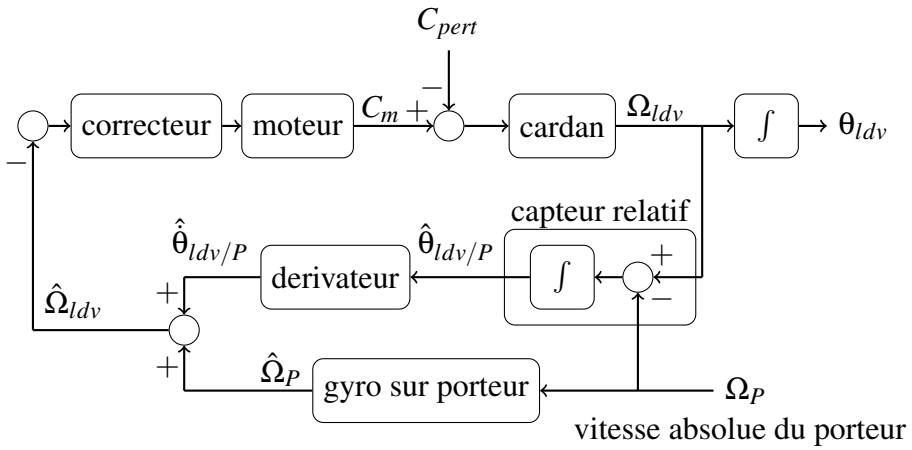

Figure 1.3 – Stabilisation en strapdown d'un axe de visée

A cause d'exigences de portée de plus en plus importantes, pour des environnements porteurs de plus en plus sévères (perturbations climatiques et couples aérodynamiques en aéroporté par exemple), on rajoute des étages supplémentaires en combinant les 2 architectures précédentes. Les architectures à double étage de stabilisation les plus utilisées sont les suivantes :

– **Stabilisation fine par gyromètre antenne/Stabilisation grossière suiveuse** : dans cette configuration (figure 1.4), 2 cardans fins dits de stabilisation fine (*Precision Inner Gimbal Axis*), à faible débattement (quelques degrés seulement) et supportant le bloc senseurs-gyromètre, permettent de stabiliser et d'isoler plus finement la ligne des mouvements du porteur via d'une part un système complexe de suspension et d'autre part un contrôle par des mouvements rapides et de faible amplitude. Les cardans externes, dits de stabilisation grossière (*Coarse Outer Gimbal Axis*), et asservis en suivi (figure 1.5) des cardans fins, sont à plus large débattement et permettent d'orienter la ligne de visée.

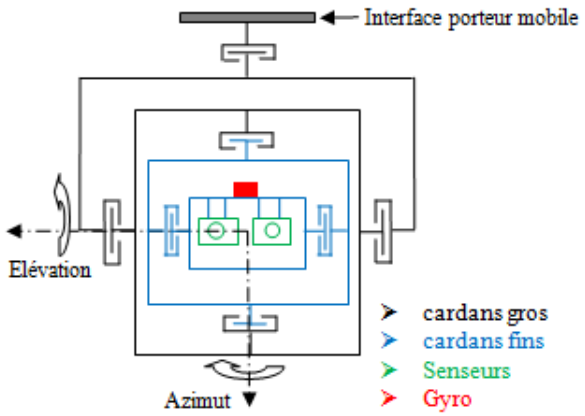

Figure 1.4 – Plateforme de stabilisation inertielle 4 axes : vue de face

L'avantage de cette configuration est clairement le découplage mécanique entre les fonction de stabilisation (étage fin) et d'orientation (étage grossier) de la ligne de visée.

Elle est de plus en plus employée.

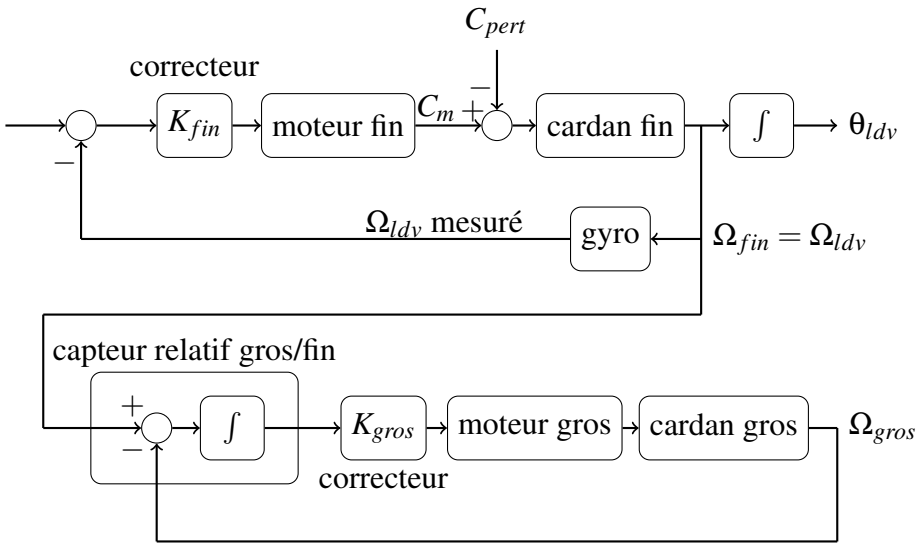

Figure 1.5 – Stabilisation en 2 étages : boucle fine gyrometrique et boucle grossière suiveuse

– **Stabilisation primaire par gyromètre/Stabilisation fine strapdown** : dans cette configuration le schéma d'asservissement (figure 1.6) entre les 2 étages est le dual du précédent. En effet, cette fois on attaque la boucle globale par une consigne à l'étage de stabilisation primaire (ou grossier) bouclé sur gyromètre, dont l'erreur d'asservissement est envoyée en consigne à la boucle de stabilisation fine (généralement constituée d'un miroir asservi en relatif au cardan de l'étage primaire). La dynamique élevée de cette boucle fine en strapdown permet d'améliorer la performance de stabilisation de la ligne de visée .

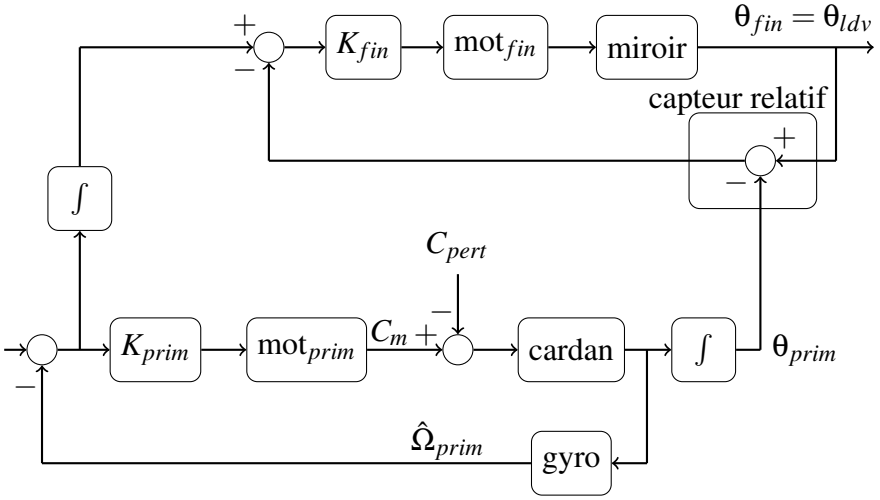

Figure 1.6 – Stabilisation en 2 étages : boucle primaire gyrométrique et boucle fine strapdown

Ici il n'y a pas de découplage par les 2 étages des fonctionnalités stabilisation et orientation de la ligne de visée. En effet, la performance en précision de pointage est la conséquence de l'union des 2 boucles d'asservissement.

1.2 Modélisation pour la commande

1.2.1 Cinématique et modèle rigide

Dans le cas où l'on considère la rotation entière (en 3 dimensions) du porteur, il se produit un couplage cinématique (couples d'inertie, couples gyroscopiques,..) entre les 2 cardans. Afin d'expliciter ce couplage, il est nécessaire d'introduire les matrices de rotation suivantes :

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} c_\alpha & s_\alpha & 0 \\ -s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_\beta = \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & -s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix},$$

avec :

$$c_\alpha = \cos(\alpha), s_\alpha = \sin(\alpha), c_\beta = \cos(\beta), s_\beta = \sin(\beta).$$

Ces matrices permettent d'exprimer, à partir de la vitesse de rotation du support Ω_P, les vitesses de rotation absolues du cardan externe (E) d'abord en effectuant la rotation α :

$$\begin{bmatrix} \Omega_{E_x} \\ \Omega_{E_y} \\ \Omega_{E_z} \end{bmatrix} = R_\alpha \begin{bmatrix} \Omega_{P_x} \\ \Omega_{P_y} \\ \Omega_{P_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

puis de la ligne de visée en effectuant la rotation β de (I) :

$$\begin{bmatrix} \Omega_{I_x} \\ \Omega_{I_y} \\ \Omega_{I_z} \end{bmatrix} = R_\beta \begin{bmatrix} \Omega_{E_x} \\ \Omega_{E_y} \\ \Omega_{E_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Un modèle dynamique rigide peut alors être établi suivant la méthode décrite dans [KK03], en appliquant la loi de conservation du moment angulaire :

$$\sum C_{ext} = \mathbf{J}\dot{\Omega} + (\Omega \otimes \mathbf{J}\Omega), \tag{1.4}$$

avec :

- $\sum C_{ext}$: la résultante des couples extérieurs agissant au centre de masse du solide en rotation,
- $\mathbf{J}$: la matrice d'inertie du solide,
- Ω : le vitesse de rotation du solide.

Ces grandeurs sont toutes exprimées dans le même repère lié au solide auquel est appliqué cette loi.

Sous certaines hypothèses permettant des simplifications nécessaires à la clarté du propos, nous développerons 1.4 successivement pour chacun des solides (I) et (E), en suivant [KK03], afin d'expliciter le couplage dynamique entre les variables que l'on désire contrôler : Ω_{I_y} et Ω_{I_z}.

1.2.1.1 Dynamique en Elévation

En effet, considérons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- les axes principaux d'inertie de (I) coïncident avec ses axes de rotation, sa matrice d'inertie est alors diagonale et vaut $\mathbf{J}_I = diag(J_{I_x}, J_{I_y}, J_{I_z})$,

– le centre de masse de (I) se trouve à l'intersection des axes de rotation, donc les couples de *balourd* seront nuls.

L'equation 1.4 pour le solide (I), exprimée dans le repère (I_x, I_y, I_z) devient donc :

$$\begin{bmatrix} C_{EI_x} \\ C_{m_{el}} - C_{f_I} \\ C_{EI_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{I_x}\dot{\Omega}_{I_x} + \Omega_{I_y}\Omega_{I_z}(J_{I_z} - J_{I_y}) \\ J_{I_y}\dot{\Omega}_{I_y} + \Omega_{I_x}\Omega_{I_z}(J_{I_x} - J_{I_z}) \\ J_{I_z}\dot{\Omega}_{I_z} + \Omega_{I_x}\Omega_{I_y}(J_{I_y} - J_{I_x}) \end{bmatrix}, \tag{1.5}$$

avec :

C_{EI_x} : le couple exercé par (E) sur (I) suivant l'axe I_x,

C_{EI_z} : le couple exercé par (E) sur (I) suivant l'axe I_z,

$C_{m_{el}}$: le couple fourni par le moteur d'Elévation,

C_{f_I} : le couple de frottement suivant l'axe I_y.

Dans le terme de frottement C_{f_I}, nous négligerons le couple de frottement visqueux par rapport au couple de frottements secs, car c'est ce dernier qui a le plus d'impact dans la dégradation des performances. Le modèle de frottements secs choisi sera du type Coulomb avec une constante K_{cf_I}. En développant la deuxième composante de 1.5, on obtient alors :

$$J_{I_y}\dot{\Omega}_{I_y} = C_{m_{el}} - K_{cf_I} sgn(\dot{\beta}) - \Omega_{I_x}\Omega_{I_z}(J_{I_x} - J_{I_z}). \tag{1.6}$$

Afin d'introduire les variables contrôlées et les termes de perturbation issus de la rotation de (E) (donc du porteur indirectement), nous allons utiliser les relations issues de 1.3 :

$$\begin{array}{rcl} \Omega_{I_x} & = & c_\beta \Omega_{E_x} - s_\beta \Omega_{E_z} \\ \Omega_{I_z} & = & s_\beta \Omega_{E_x} + c_\beta \Omega_{E_z}, \end{array} \tag{1.7}$$

afin d'établir :

$$\begin{array}{rcl} \Omega_{I_x} & = & c_\beta \Omega_{E_x} - \dfrac{s_\beta}{c_\beta}(\Omega_{I_z} - s_\beta \Omega_{E_x}) \\ & = & \dfrac{{c_\beta}^2 \Omega_{E_x} - s_\beta \Omega_{I_z} + {s_\beta}^2 \Omega_{E_x}}{c_\beta} \\ & = & \dfrac{\Omega_{E_x} - s_\beta \Omega_{I_z}}{c_\beta} \\ & = & \dfrac{c_\alpha \Omega_{P_x} + s_\alpha \Omega_{P_y} - s_\beta \Omega_{I_z}}{c_\beta}. \end{array} \tag{1.8}$$

Ensuite en se rappelant que :

$$\begin{array}{rcl} \dot{\beta} & = & \Omega_{I_y} - \Omega_{E_y} \\ & = & \Omega_{I_y} - \left(-s_\alpha \Omega_{P_x} + c_\alpha \Omega_{P_y}\right), \end{array} \tag{1.9}$$

et en substituant 1.8 et 1.9 dans 1.6, on obtient l'équation régissant la dynamique de Ω_{I_y} :

$$\begin{array}{rcl} J_{I_y}\dot{\Omega}_{I_y} & = & C_{m_{el}} - K_{cf_I} sgn\left(\Omega_{I_y} - \Omega_{E_y}\right) - \Omega_{I_z} \dfrac{\Omega_{E_x} - s_\beta \Omega_{I_z}}{c_\beta}(J_{I_x} - J_{I_z}) \\ & = & C_{m_{el}} - K_{cf_I} sgn\left[\Omega_{I_y} - \left(-s_\alpha \Omega_{P_x} + c_\alpha \Omega_{P_y}\right)\right] - \Omega_{I_z} \dfrac{c_\alpha \Omega_{P_x} + s_\alpha \Omega_{P_y} - s_\beta \Omega_{I_z}}{c_\beta}(J_{I_x} - J_{I_z}). \end{array} \tag{1.10}$$

Cette équation fait intervenir la vitesse absolue du porteur $(\Omega_{P_x}, \Omega_{P_y})$ ainsi que celle suivant l'axe I_z par un couplage qui existe dès qu'il y a non-symétrie du bloc stabilisé (le

solide (I)) par rapport à ses axes d'inertie, c'est à dire

$$J_{I_x} \neq J_{I_y} \neq J_{I_z}.$$

1.2.1.2 Dynamique en Azimut

De la même manière, on peut écrire l'équation d'Euler 1.4 pour le cardan (E), dans son repère (E_x , E_y, E_z) :

$$(C_{IE})_E + \begin{bmatrix} C_{PE_x} \\ C_{PE_y} \\ C_{m_{az}} - C_{f_E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{E_x}\dot{\Omega}_{E_x} + \Omega_{E_y}\Omega_{E_z}(J_{E_z} - J_{E_y}) \\ J_{E_y}\dot{\Omega}_{E_y} + \Omega_{E_x}\Omega_{E_z}(J_{E_x} - J_{E_z}) \\ J_{E_z}\dot{\Omega}_{E_z} + \Omega_{E_x}\Omega_{E_y}(J_{E_y} - J_{E_x}) \end{bmatrix}, \tag{1.11}$$

où les couples extérieurs (terme de gauche) sont constitués de :

$(C_{IE})_E$: le couple exercé par (I) sur (E), exprimé dans le repère (E_x , E_y, E_z),

C_{PE_x} : le couple exercé par (P) sur (E) suivant l'axe E_x,

C_{PE_y} : le couple exercé par (P) sur (E) suivant l'axe E_y,

$C_{m_{az}}$: le couple fourni par le moteur d'Azimut,

C_{f_E} : le couple de frottement suivant l'axe E_z.

Afin d'expliciter la dynamique en Azimut, on va développer la troisième composante de l'équation 1.11. Dans un premier temps exprimons la composante de $(C_{IE})_E$ suivant l'axe E_z. En effet on a

$$(C_{IE})_E = -(C_{EI})_E, \tag{1.12}$$

où $(C_{EI})_E$ est le couple exercé par (E) sur (I), exprimé dans le repère (E_x , E_y, E_z). Ensuite en utilisant la matrice de changement de repère R_β, on a

$$(C_{EI})_E = R_\beta^T (C_{EI})_I, \tag{1.13}$$

où $(C_{EI})_I$ est le couple exercé par (E) sur (I), exprimé dans le repère (I_x , I_y, I_z), couple que nous avons exprimé précédemment dans 1.5 sous la forme :

$$(C_{EI})_I = \begin{bmatrix} C_{EI_x} \\ 0 \\ C_{EI_z} \end{bmatrix}.$$

En notant C_{IE_z} la composante suivant l'axe E_z de $(C_{EI})_E$, on a alors en utilisant 1.12 et 1.13 :

$$\begin{aligned} C_{IE_z} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (C_{IE})_E \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_\beta^T (C_{EI})_I \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{EI_x} \\ 0 \\ C_{EI_z} \end{bmatrix} \\ &= s_\beta C_{EI_x} - c_\beta C_{EI_z} \\ &= s_\beta \left(J_{I_x}\dot{\Omega}_{I_x} + \Omega_{I_y}\Omega_{I_z}(J_{I_z} - J_{I_y}) \right) - c_\beta \left(J_{I_z}\dot{\Omega}_{I_z} + \Omega_{I_x}\Omega_{I_y}(J_{I_y} - J_{I_x}) \right). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Ensuite, dans la troisième composante du terme de droite de 1.11 , nous faisons apparaitre $\dot{\Omega}_{I_z}$ en dérivant la relation 1.3 :

$$\begin{bmatrix}\dot{\Omega}_{I_x}\\ \dot{\Omega}_{I_y}\\ \dot{\Omega}_{I_z}\end{bmatrix} = R_\beta \begin{bmatrix}\dot{\Omega}_{E_x}\\ \dot{\Omega}_{E_y}\\ \dot{\Omega}_{E_z}\end{bmatrix} + \dot{\beta}\begin{bmatrix}-s_\beta & 0 & -c_\beta\\ 0 & 0 & 0\\ c_\beta & 0 & -s_\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Omega_{E_x}\\ \Omega_{E_y}\\ \Omega_{E_z}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \ddot{\beta}\\ 0\end{bmatrix}, \tag{1.15}$$

puis en multipliant cette dernière équation par R_β^T on a

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{\Omega}_{E_x}\\ \dot{\Omega}_{E_y}\\ \dot{\Omega}_{E_z}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}c_\beta & 0 & s_\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -s_\beta & 0 & c_\beta\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\dot{\Omega}_{I_x}\\ \dot{\Omega}_{I_y}\\ \dot{\Omega}_{I_z}\end{bmatrix} - \dot{\beta}\begin{bmatrix}-s_\beta & 0 & -c_\beta\\ 0 & 0 & 0\\ c_\beta & 0 & -s_\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Omega_{E_x}\\ \Omega_{E_y}\\ \Omega_{E_z}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\ \ddot{\beta}\\ 0\end{bmatrix}\right)\\ &= \begin{bmatrix}c_\beta & 0 & s_\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -s_\beta & 0 & c_\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\Omega}_{I_x}\\ \dot{\Omega}_{I_y}\\ \dot{\Omega}_{I_z}\end{bmatrix} - \dot{\beta}\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Omega_{E_x}\\ \Omega_{E_y}\\ \Omega_{E_z}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \ddot{\beta}\\ 0\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{1.16}$$

d'où l'on déduit en retenant la première et la troisième composantes :

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_{E_x} &= c_\beta\dot{\Omega}_{I_x} + s_\beta\dot{\Omega}_{I_z} + \dot{\beta}\Omega_{E_z}\\ \dot{\Omega}_{E_z} &= -s_\beta\dot{\Omega}_{I_x} + c_\beta\dot{\Omega}_{I_z} - \dot{\beta}\Omega_{E_x}.\end{aligned} \tag{1.17}$$

Ensuite, en utilisant 1.14 et la deuxième ligne de 1.17, la troisième composante de l'équation de 1.11 devient :

$$\begin{aligned}&s_\beta(J_{I_x}\dot{\Omega}_{I_x} + \Omega_{I_y}\Omega_{I_z}(J_{I_z} - J_{I_y})) - c_\beta(J_{I_z}\dot{\Omega}_{I_z} + \Omega_{I_x}\Omega_{I_y}(J_{I_y} - J_{I_x})) + C_{m_{az}} - C_{f_E}\\ &= J_{E_z}(-s_\beta\dot{\Omega}_{I_x} + c_\beta\dot{\Omega}_{I_z} - \dot{\beta}\Omega_{E_x}) + \Omega_{E_x}\Omega_{E_y}(J_{E_y} - J_{E_x})\\ \Leftrightarrow\ &c_\beta(J_{E_z} + J_{I_z})\dot{\Omega}_{I_z} - J_{E_z}\dot{\beta}\Omega_{E_x} + \Omega_{E_x}\Omega_{E_y}(J_{E_y} - J_{E_x})\\ &= s_\beta(J_{I_x} + J_{E_z})\dot{\Omega}_{I_x} + s_\beta\Omega_{I_y}\Omega_{I_z}(J_{I_z} - J_{I_y}) - c_\beta\Omega_{I_x}\Omega_{I_y}(J_{I_y} - J_{I_x}) + C_{m_{az}} - C_{f_E}.\end{aligned} \tag{1.18}$$

Or la première ligne de 1.17 équivaut à :

$$\dot{\Omega}_{I_x} = \frac{\dot{\Omega}_{E_x} - s_\beta\dot{\Omega}_{I_z} - \dot{\beta}\Omega_{E_z}}{c_\beta} \tag{1.19}$$

en remplacant $\dot{\Omega}_{I_x}$ dans la deuxième ligne de 1.18, on obtient alors :

$$\begin{aligned}&c_\beta^2\left(J_{E_z} + J_{I_z}\right)\dot{\Omega}_{I_z} + s_\beta^2\left(J_{I_x} + J_{E_z}\right)\dot{\Omega}_{I_z} - c_\beta J_{E_z}\dot{\beta}\Omega_{E_x} + c_\beta\Omega_{E_x}\Omega_{E_y}(J_{E_y} - J_{E_x})\\ &= s_\beta\left(J_{I_x} + J_{E_z}\right)\left(\dot{\Omega}_{E_x} - \dot{\beta}\Omega_{E_z}\right) + c_\beta s_\beta\Omega_{I_y}\Omega_{I_z}(J_{I_z} - J_{I_y}) - c_\beta^2\Omega_{I_x}\Omega_{I_y}(J_{I_y} - J_{I_x}) + c_\beta(C_{m_{az}} - C_{f_E}).\end{aligned} \tag{1.20}$$

Cela permet d'aboutir à l'équation (13) dans [KK03], qui dans notre cas ne prend en compte comme couples extérieurs suivant l'axe E_z que le couple de frottements secs et le couple moteur :

$$\begin{aligned}J_{az}\dot{\Omega}_{I_z} &= s_\beta\left(J_{E_z} + J_{I_x}\right)\dot{\Omega}_{E_x} + (J_{E_z}(c_\beta\Omega_{E_x} - s_\beta\Omega_{E_z}) - s_\beta J_{I_x}\Omega_{E_z})\dot{\beta}\\ &\quad - c_\beta\left[\Omega_{E_x}\Omega_{E_y}\left(J_{E_y} - J_{E_x}\right) - s_\beta\Omega_{I_y}\Omega_{I_z}J_{I_z} + \Omega_{I_y}\Omega_{E_x}J_{I_y} - c_\beta(c_\beta\Omega_{E_x} - s_\beta\Omega_{E_z})\Omega_{I_y}J_{I_x}\right]\\ &\quad + c_\beta\left[C_{m_{az}} - K_{c_{f_E}}sgn(\dot{\alpha})\right],\end{aligned} \tag{1.21}$$

avec :

$J_{az} = J_{E_z} + c_\beta{}^2 J_{I_z} + s_\beta{}^2 J_{I_x}$,

K_{cf_E} : constante de couple de frottement de Coulomb sur l'axe E_z.

Il est possible comme pour le cas de la dynamique en Elévation, de développer les termes $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\Omega}_{E_x}$, Ω_{E_x}, Ω_{E_y}, Ω_{E_z} de façon à faire apparaitre les composantes de la vitesse du porteur Ω_{P_x}, Ω_{P_y}, Ω_{P_z} et leurs dérivées dans 1.21. Nous ne le ferons pas ici, le lecteur intéressé pourra se référer à [KK03].

1.2.1.3 Modèle simplifié linéaire

Le couplage cinématique qui intervient dans les équations 1.6 et 1.21, régissant la dynamique de Ω_{I_y} et Ω_{I_z}, est donc essentiellement dépendant de l'angle d'élévation β. En effet on constate que les couples cinématiques deviennent de plus en plus importants lorsque cet angle s'approche de la valeur critique $\beta = 90^\circ$, qui correspond à une singularité dans ces équations : à cette position il y a une perte de contrôle ($c_\beta = 0$) et un blocage du système, cette situation est communément connue sous le terme de blocage de cardan (*gimbal lock*) ou blocage au nadir.

Ce modèle fortement non linéaire peut sûrement être utile pour simuler le système à partir d'un gabarit de mouvements de rotations du porteur, mais il serait difficilement exploitable pour synthétiser un correcteur. De plus, en considérant uniquement des mouvements du porteur de type vibrations linéaires, il est possible de le simplifier à partir de considérations réalistes et vérifiables a posteriori. En effet, dans ce cas, on peut raisonnablement considérer que pour stabiliser (maintenir pointé dans une direction fixe vis-à-vis d'une référence inertielle) la ligne de visée, l'angle d'élévation β ne subit que de faibles variations $\delta\beta$ autour d'une valeur constante β_0 :

$$\beta = \beta_0 + \delta\beta.$$

Cela permet alors d'obtenir un modèle simplifié du type "intégrateur", valable pour des petits déplacements angulaires et utilisable pour la commande :

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_{I_y} &= \frac{1}{J_{I_y}} \left(C_{m_{el}} - C_{fcoul_{I_y}} - C_{cin_{I_y}} \right) \\ \dot{\Omega}_{I_z} &= \frac{1}{J_{E_z} + c_{\beta_0}{}^2 J_{I_z} + s_{\beta_0}{}^2 J_{I_x}} \left[c_{\beta_0} \left(C_{m_{az}} - C_{fcoul_{E_z}} \right) - C_{cin_{I_z}} \right], \end{aligned} \tag{1.22}$$

avec des termes de perturbations (non mesurables) à contrer, provenant d'une part des couples de frottements secs :

$$\begin{aligned} C_{fcoul_{I_y}} &= K_{cf_I} sgn\left[\Omega_{I_y} - \left(-s_\alpha \Omega_{P_x} + c_\alpha \Omega_{P_y} \right) \right], \\ C_{fcoul_{E_z}} &= K_{cf_E} sgn(\dot{\alpha}) \\ &= K_{cf_E} sgn(\Omega_{E_z} - \Omega_{P_y}), \end{aligned}$$

et d'autre part du couplage cinématique entre les cardans :

$$\begin{aligned} C_{cin_{I_y}} &= \Omega_{I_z} \frac{c_{\alpha_0} \Omega_{P_x} + s_{\alpha_0} \Omega_{P_y} - s_{\beta_0} \Omega_{I_z}}{c_{\beta_0}} (J_{I_x} - J_{I_z}), \\ C_{cin_{I_z}} &= s_{\beta_0} \left(J_{E_z} + J_{I_x} \right) \dot{\Omega}_{E_x} + \left(J_{E_z} (c_{\beta_0} \Omega_{E_x} - s_{\beta_0} \Omega_{E_z}) - s_{\beta_0} J_{I_x} \Omega_{E_z} \right) (\Omega_{I_y} - \Omega_{E_y}) \\ &\quad - c_{\beta_0} \left[\Omega_{E_x} \Omega_{E_y} \left(J_{E_y} - J_{E_x} \right) - s_{\beta_0} \Omega_{I_y} \Omega_{I_z} J_{I_z} + \Omega_{I_y} \Omega_{E_x} J_{I_y} - c_{\beta_0} (c_{\beta_0} \Omega_{E_x} - s_{\beta_0} \Omega_{E_z}) \Omega_{I_y} J_{I_x} \right]. \end{aligned}$$

Cette linéarisation ne réduit donc pas pour autant les couples cinématiques, qui restent existants, et amoindrissent la stabilisation pour des valeurs élevées de β_0, car le couple demandé aux moteurs devient alors de plus en plus important. En fait, l'une des seules solutions permettant de réduire efficacement l'impact de ce couplage cinématique sur la stabilisation de la ligne de visée est le système à plusieurs cardans (figure 1.4). Dans ce système les cardans internes de stabilisation fine sont à faible débattement ($\beta \approx 0$), ce qui permet de rejeter ce couplage au niveau des cardans externes qui n'impactent pas la performance de la stabilisation car ils sont asservis en suivi de la boucle de stabilisation fine.

Dans la suite nous ferons l'hypothèse $\beta \approx 0$, on négligera donc le couplage cinématique et ainsi les couples perturbateurs prédominant en entrée du modèle de commande seront les frottements secs.

1.2.2 Le modèle de commande

1.2.2.1 Prise en compte des flexibilités mécaniques

Afin d'obtenir un asservissement performant et robuste, il est nécessaire de prendre en compte les flexibilités mécaniques, notamment les modes résonants de torsion entre le couple moteur appliqué à chaque axe et la vitesse de rotation de la ligne de visée car ceux ci-vont limiter, par nécessité de robustesse, la bande passante atteignable de la boucle d'asservissement à concevoir. Pour cela nous rajoutons au mode dynamique rigide, décrit pour chaque axe par 1.22, la dynamique des modes résonants et obtenons le modèle de commande :

$$\frac{\Omega(s)}{C_m(s)} = \frac{1}{Js} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k s}{s^2 + 2\xi_k \omega_k s + {\omega_k}^2} = G_\Omega(s), \tag{1.23}$$

avec :

Ω : la vitesse de rotation absolue de la ligne de visée selon l'axe considéré,

C_m : le couple moteur,

J : l'inertie selon l'axe de rotation,

ω_k : la pulsation propre (en rad/s) du k-ième mode,

ξ_k : l'amortissement ($\ll 1$) du k-ième mode,

λ_k : le facteur de participation du k-ième mode.

Théoriquement, ce modèle peut être issu d'un modèle plus global de la structure du type éléments finis :

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = Fu, \tag{1.24}$$

où M, C et K sont les matrices, respectivement, de masse et d'amortissement, q est le vecteur des déplacements (linéaires ou angulaires), u l'entrée d'excitation et F la matrice d'entrée.

Comme évoqué dans la section (1.1), les modes propres en flexion du bloc optronique ou ceux des mécanismes de suspension externes peuvent contribuer à la transmission des vibrations linéaires du porteur à la ligne de visée. Ainsi, comme présenté sur la figure 1.7, les mouvements de rotation de la ligne de visée résultant de l'accélération linéaire γ_p du porteur pourraient être pris en compte via une fonction de transfert $G_\gamma(s)$ qui contiendrait ces modes propres et qui pourrait également être issue du modèle global 1.24 de la structure, si on en dispose d'un. Cependant dans nos travaux, nous n'expliciterons pas cette fonction de transfert et considérerons directement la perturbation résultante en sortie de modèle $\delta\Omega_{vib}$,

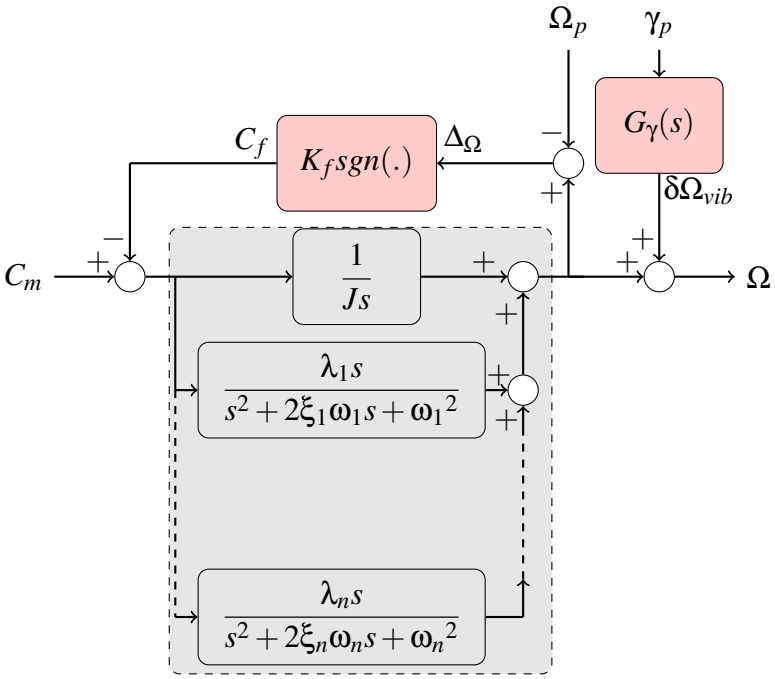

Figure 1.7 – Modèle d'un axe de visée : partie mécanique

dont on connait a priori le contenu fréquentiel, puisque le spectre vibratoire du porteur du viseur est spécifié et donc bien connu a priori.

1.2.2.2 Prise en compte des dynamiques de l'actionneur et du gyromètre

L'actionneur utilisé est souvent un moteur électrique dont le modèle est :

$$\begin{array}{rcl} u & = & L\dfrac{di}{dt}+Ri+e, \\ e & = & K_e\,\Omega_m, \\ C_m & = & K_c\,i, \end{array} \tag{1.25}$$

avec :

R : la résistance des enroulements du moteur,

L : l'inductance des enroulements du moteur,

u : la tension d'alimentation du moteur,

i : le courant moteur,

Ω_m : la vitesse de rotation relative (stator/rotor) du moteur, qui peut être différente de celle de la charge entrainée, notamment si l'on utilise des mécanismes de réduction du type engrenages.

e : la $f.c.e.m$ (force contre-électromotrice) du moteur, qui s'oppose à la tension u,

$K_c = K_e$: la constante de couple du moteur,

C_m : le couple fourni par le moteur.

La résistance R et la constante de couple K_c varient généralement en fonction de la température.

Le modèle simplifié du gyromètre est :

$$\Omega_{mes}(s) = \frac{\omega_g^2 e^{-\tau s}}{s^2 + 2\xi_g \omega_g s + {\omega_g}^2}\,\Omega(s) = G_g(s)\Omega(s), \tag{1.26}$$

avec :

ω_g : la bande passante du gyromètre (en rad/s),

$\xi_g = 0.7$,

τ : le retard pur introduit par le gyromètre dans la mesure de la vitesse inertielle.

Parce que la dynamique du gyromètre n'est pas infinie, le contrôle de la ligne de visée ne pourra pas se faire au-delà de la bande passante du gyromètre.

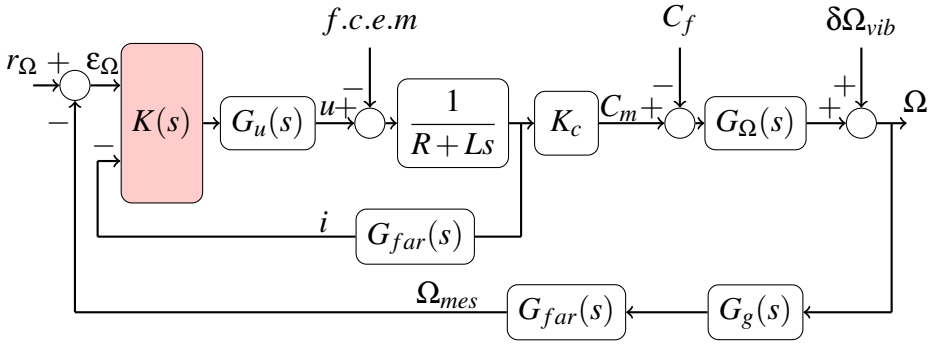

Figure 1.8 – Boucle de stabilisation inertielle de ligne de visée

Au niveau de chaque axe, la boucle de stabilisation inertielle de ligne de visée se présente alors comme sur le schéma de la figure 1.8, où le correcteur recherché K est présenté sous sa forme la plus générale possible, c'est à dire combinant l'erreur d'asservissement en vitesse ε_Ω et le courant moteur i afin de calculer la tension de commande u du moteur. Cela est toujours le cas, abstraction faite des possibilités de mise en oeuvre particulières de K, notamment avec la structure cascade permettant de faire un asservissement ou une commande en couple, indispensable dans certains cas où la $f.c.e.m$ du moteur peut être grande du fait de l'utilisation de mécanismes de réduction du type engrenages. Ce schéma fait également apparaitre le filtre (analogique) d'anti-repliement sur les mesures

$$G_{far}(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{2\pi\frac{F_e}{2}}},$$

où $F_e = \frac{1}{Te}$ est la fréquence d'échantillonnage de l'asservissement (dont l'implémentation finale est numérique) ; l'effet de l'échantillonnage-bloquage à l'entrée du système réel est modélisé par :

$$G_u(s) = \frac{e^{-\frac{3}{2}T_e s}}{1 + \frac{s}{2\pi\frac{F_e}{2}}},$$

qui consiste en un retard de $\frac{3}{2}T_e$ (T_e car la commande calculée est appliquée un pas d'échantillonnage plus tard et $\frac{T_e}{2}$ pour le bloqueur d'ordre zéro) et un filtre dit de *lissage* de la commande à $\frac{F_e}{2}$.

Cette boucle d'asservissement, qui découple l'orientation de la ligne de visée des mouvements du porteur, sert, in fine, de support à une boucle externe de poursuite (*Tracking*) qui permet de suivre une cible mouvante dans l'espace, en élaborant des consignes de vitesse de précession r_Ω. Toutefois en conditions opérationnelles, on voudra maintenir l'orientation absolue de la ligne de visée fixe, c'est à dire $r_\Omega = 0$.

1.2.2.3 Identification de modèles

En pratique, pour synthétiser le correcteur de cette boucle d'asservissement, on utilise un modèle identifié à partir de réponses fréquentielles mesurées sur le système réel :

$$\begin{bmatrix} \Omega_{mes}(s) \\ i(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_m(s)G_e(s) \\ G_e(s) \end{bmatrix} u(s) \tag{1.27}$$

avec :

G_m : la fonction de transfert mécanique identifiée, entre le courant (image du couple) moteur et la mesure du gyromètre. Elle contient donc les modes propres mécaniques de la structure selon l'axe de visée en question, la dynamique du gyromètre ainsi que le déphasage qu'il induit dans la boucle par son retard pur τ.

G_e : la fonction de transfert électrique identifiée, entre la tension et le courant moteur.

L'identification paramétrique d'un modèle G (on se limitera au cas SISO), d'ordre n, à partir d'une réponse fréquentielle mesurée

$$G_{mes}(j\omega_i) \quad , \quad i \in \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \end{bmatrix}, \tag{1.28}$$

consiste à trouver une fonction de transfert

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(s)}{\sum_{k=1}^{n} b_k \phi_k(s)}, \tag{1.29}$$

où $N(s)$ et $D(s)$ sont des polynômes en s d'ordre n, exprimés dans une base polynomiale

$$\phi_k(s) \quad , \quad \partial^\circ \phi_k = k \quad , \quad k \in \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & n \end{bmatrix} \tag{1.30}$$

quelconque, et tels que

$$\left| G_{mes}(j\omega_i) - \frac{N(j\omega_i)}{D(j\omega_i)} \right| \approx 0, \tag{1.31}$$

sur l'ensemble de m fréquences ω_i d'intérêt.

Cependant, le problème des moindre carrés défini avec un résidu du type 1.31 est non linéaire en les paramètres

$$a = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T \quad , \quad b = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}^T$$

Il est donc généralement plus efficace numériquement de résoudre

$$\min_{a,b} \sum_{i=1}^{m} w^2(\omega_i) \left| G_{mes}(j\omega_i) D(b, j\omega_i) - N(a, j\omega_i) \right|^2 \tag{1.32}$$

qui est un problème des moindres carrés linéaires pondérés.

Le choix de la base polynomiale 1.30 est déterminant vis-à-vis du conditionnement numérique du problème. En effet si l'on utilise la base canonique des puissances de s

$$\left(1, s, s^2, \cdots, s^n\right),$$

la matrice des équations normales du problème des moindres carrés linéaires s'avère être mal conditionnée. L'utilisation de bases polynômiales orthogonales, telle que la base des polynômes de Chebychev

$$\begin{array}{rcll} \phi_0(s) & = & 1 & \\ \phi_1(s) & = & s & \\ \phi_k(s) & = & 2s\phi_{k-1}(s) - \phi_{k-2}(s) & , \quad k \geq 2 \end{array} \tag{1.33}$$

proposée par [Adc87], permet de réduire le mauvais conditionnement numérique.

Les routines *invfreqs* et *fiftrd* sous Matlab mettent en oeuvre ce type de méthodes d'identification paramétrique.

1.3 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons présenté les différentes architectures de stabilisation inertielle de ligne de visée, ainsi qu'une modélisation pour la commande permettant la synthèse de correcteurs linéaires. Nous allons dans le chapitre suivant présenter une méthode de synthèse des correcteurs pour les boucles de stabilisation inertielle de ligne de visée, basée sur le concept de *Loop-Shaping* (modelage fréquentiel de la fonction de transfert en boucle ouverte), ainsi qu'un exemple d'application détaillé.

Chapitre 2

Les boucles de stabilisation inertielle de ligne de visée : approche par Loop-Shaping

L'objectif de la boucle de stabilisation inertielle de ligne de visée est de garantir un niveau de **performance** en précision de pointage sous environnement vibratoire (accélérations linéaires du porteur) et oscillant (rotations du porteur). Dans le chapitre précédent, nous avons mis en évidence les deux types de perturbation qui sont majoritairement à compenser. En environnement oscillant, la perturbation à rejeter est principalement composée de couples de frottements secs (d_f), perturbations de type échelon en entrée de modèle ; en environnement vibratoire les perturbations à rejeter proviennent principalement de la flexibilité du viseur vis-à-vis des excitations mécaniques du porteur du viseur, perturbations en sortie de modèle (d_v).

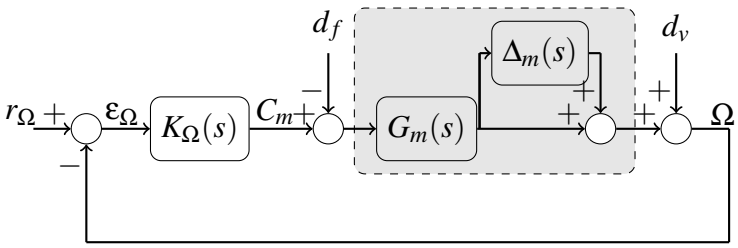

Figure 2.1 – Bouclage simple avec incertitude non structurée sur le modèle mécanique

Cet objectif de performance s'accompagne d'une contrainte de **robustesse** vis-à-vis des dispersions du système dues, tout d'abord aux dispersions de fabrication (systèmes de grande série), puis aux conditions de mise en oeuvre du système (température), enfin aux dynamiques négligées pour avoir un modèle de synthèse simplifié. En effet la plateforme mécanique à piloter est un système flexible dont on dispose d'un modèle linéaire nominal de la forme 1.23, les paramètres des modes propres de la plateforme pouvant varier en fonction des conditions opérationnelles (température, changement du porteur du viseur,..).

La figure 2.1 présente le principe d'une boucle de stabilisation de ligne de visée, où l'on considère un modèle SISO incertain de l'axe mécanique à asservir, avec : G_m le modèle *LTI* [1] nominal, identifié à partir de mesures (réponses fréquentielles) sur le système réel et Δ_m les

1. Linear Time Invariant

incertitudes de modèle sous forme multiplicative directe en sortie. Ce type de modélisation d'incertitudes permet de traduire des erreurs relatives, telles que les dynamiques négligées des modes hautes fréquences (éloignés de la bande passante de l'asservissement), ou alors la variation des paramètres des modes non négligés (fréquence, amortissement) de la structure mécanique du viseur. Un gabarit sur ce Δ_m peut être approché si l'on dispose par exemple de mesures issues de différents viseurs de la même série et dans différentes conditions de température, ou alors via une dispersion aléatoire des paramètres du modèle nominal.

2.1 Déclinaison fréquentielle des objectifs de synthèse

Dans le bouclage monovariable présenté sur la figure 2.1, le correcteur recherché K_Ω délivre un couple commandé C_m. Cette simplification conceptuelle permet dans un premier temps de faire abstraction de la dynamique de l'actionneur, afin de simplifier la déclinaison fréquentielle du rejet des perturbations dues à l'environnement mécanique (spectre de d_v, niveau estimé des couples de frottements secs d_f). En effet les signaux internes du bouclage à insensibiliser des perturbations sont donnés par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_\Omega &= S_\Omega(s)(r_\Omega - d_v) - G_m(s)\,S_\Omega(s)d_f \\ C_m &= K_\Omega(s)\varepsilon_\Omega \end{aligned} \tag{2.1}$$

avec :

$$\begin{aligned} S_\Omega(s) &= (1 + G_m(s)K_\Omega(s))^{-1} \\ &= (1 + L_\Omega(s))^{-1} \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.1.1 Performance

D'après 2.1, le rejet de perturbations consiste à insensibiliser ε_Ω vis-à-vis des perturbations externes, donc à conférer à la fonction de sensibilité directe S_Ω la contrainte :

$$|S_\Omega(j\omega)| \ll 1$$

dans la zone spectrale des perturbations, ce qui revient en vertu de 2.2 à conférer à la boucle ouverte $L_\Omega = G_m K_\Omega$ la contrainte :

$$|L_\Omega(j\omega)| \gg 1 \tag{2.3}$$

Cette condition 2.3 peut être explicitée de la manière suivante :

1. Pour les *frottement secs*, nous considérerons un modèle simple de type *Coulomb*, donné par la figure 2.2. Afin d'annuler l'erreur statique angulaire de dépointage en réponse à un échelon de perturbation d_f d'amplitude $2C_o$ (couple effectif lors d'un changement de signe de la vitesse relative $\Delta\Omega$) et en consigne de vitesse r_Ω nulle (puisque l'on cherche à maintenir l'orientation de la ligne de visée fixe), le correcteur du bouclage en vitesse doit disposer d'un certain nombre d'intégrateurs n_I :

$$K_\Omega(s) = \frac{\hat{K}_\Omega(s)}{s^{n_I}} \quad \text{avec} \quad 0 < \left|\hat{K}_\Omega(0)\right| < \infty, \tag{2.4}$$

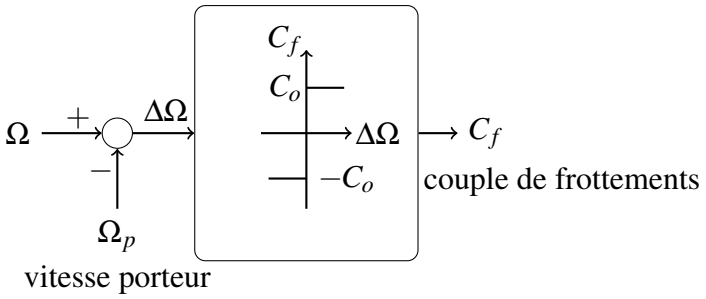

Figure 2.2 – Frottements : modèle de Coulomb

car d'après le théorème de la valeur finale, on a dans ces conditions vis-à-vis de d_f :

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\varepsilon_\theta(t) &= \lim_{s\to 0} s.\varepsilon_\theta(s)\\ &= \lim_{s\to 0} s.\left(\frac{\varepsilon_\Omega(s)}{s}\right)\\ &= \lim_{s\to 0} G_m(s)S_\Omega(s)d_f(s)\\ &= \lim_{s\to 0} G_m(s)(1+G_m(s)K_\Omega(s))^{-1}.\frac{2C_o}{s}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Or, on sait d'après la modélisation établie précédemment que G_m est de la forme :

$$G_m(s) = \frac{\hat{G}_m(s)}{s} \quad \text{avec} \quad 0 < \left|\hat{G}_m(0)\right| < \infty \tag{2.6}$$

En utilisant 2.6 et 2.4 dans 2.5, on obtient alors :

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon_\theta(t) = \lim_{s\to 0} 2C_0 s^{n_I-1}\hat{G}_m(s)\left(s^{n_I+1}+\hat{G}_m(s)\hat{K}_\Omega(s)\right)^{-1} \tag{2.7}$$

Donc l'erreur statique angulaire de dépointage sera nulle ($\lim_{t\to\infty}\varepsilon_\theta(t)=0$) si $n_I \geq 2$.

Par ailleurs on montre dans [Fey13] que pour limiter l'écart angulaire crête à une valeur ε_{max}, en réponse à l'échelon de frottement $2C_o$, la bande passante [2] ω_C de la boucle ouverte doit être telle que

$$\omega_C \geq a^{1/4}\sqrt{\frac{2C_o}{J\varepsilon_{max}}}, \tag{2.8}$$

avec J l'inertie de l'axe mécanique asservi et

$$a = \frac{1+\sin(\Delta\phi)}{1-\sin(\Delta\phi)}, \tag{2.9}$$

où $\Delta\phi$ est la marge de phase escomptée. Par exemple pour une marge de phase de 40°on prendra $a = 4.5$.

2. Pour les *vibrations*, ce modelage du gain doit être effectué à certaines fréquences particulières qui, d'une part sont liées au spectre de vibration du porteur (fréquences de

2. ω_C est la pulsation de coupure de la boucle ouverte : $|L_\Omega(j\omega_C)| = 1$

rotation des rotors par exemple dans le cas d'un hélicoptère) et d'autre part correspondent à des modes de résonance particuliers de la plateforme mécanique. Le spectre de la perturbation d_v est donc composé de raies (sinusoïdes pures) et d'un bruit (que l'on suppose blanc sur une certaine bande de fréquences). Idéalement et pour fixer les idées, on peut donc par exemple considérer que l'on cherche à garantir $|\varepsilon_\theta(t)| < \varepsilon_{max}$, en réponse à une perturbation sinusoïdale $d_v(t) = \Omega_k \sin(\omega_k t)$, c.à.d :

$$\begin{aligned} &\frac{|S_\Omega(j\omega_k)|}{\omega_k}\Omega_k < \varepsilon_{max} \\ \Longleftrightarrow\ &|1 + L_\Omega(j\omega_k)| > \frac{\Omega_k}{\omega_k \varepsilon_{max}}, \end{aligned}$$

ce qui revient approximativement à imposer $|L_\Omega(j\omega_k)| > \dfrac{\Omega_k}{\omega_k \varepsilon_{max}}$, si l'on suppose $\dfrac{\Omega_k}{\omega_k \varepsilon_{max}} > 1$.
L'idée ici est de montrer qu'il sera nécessaire de mettre suffisamment de gain localement dans L_Ω à certaines fréquences précises, car en réalité, on peut être amené à considérer plusieurs fréquences ω_k, voire des zones de fréquences $[\underline{\omega}_k, \overline{\omega}_k]$ pour prendre en compte la variation de la fréquence de certains modes de résonance de la plateforme avec l'environnement thermique.

2.1.2 Robustesse

La robustesse consiste à garantir la stabilité du bouclage pour des incertitudes relatives non structurées $\Delta_m \in RH_\infty$. Généralement on modélise cette incertitude de la façon suivante :

$$\Delta_m(s) = w_m(s)\Delta(s) \quad \text{avec} \quad \Delta \in RH_\infty \quad \text{et} \quad \|\Delta\|_\infty \leq 1, \tag{2.10}$$

le gain fréquentiel de la pondération w_m (que l'on requiert stable et à phase minimale) étant obtenu à partir d'une dispersion $\tilde{G}_m$ autour du modèle nominal G_m :

$$|w_m(j\omega)| \geq \max_{\tilde{G}_m} \left| \frac{\tilde{G}_m(j\omega) - G_m(j\omega)}{G_m(j\omega)} \right| \quad , \quad \forall \omega \geq 0. \tag{2.11}$$

Elle caractérise donc le module maximal de l'incertitude complexe relative escomptée sur le modèle, à chaque fréquence $\omega \geq 0$.

A partir de cette caractérisation, il est possible dans le cas SISO de déduire simplement par l'examen des lieux de Nyquist dans la figure 2.3 une condition suffisante de stabilité vis-à-vis de Δ_m. En effet, si l'on considère un correcteur K_Ω stabilisant le modèle nominal G_m, on a la **stabilité robuste** si l'ensemble des lieux des boucles ouvertes $L_\Omega(1 + w_m\Delta)$ n'entoure pas -1, c.à.d :

$$\begin{array}{rrcll} & |w_m(j\omega)L_\Omega(j\omega)| & < & |1 + L_\Omega(j\omega)| & , \quad \forall \omega \geq 0 \\ \Leftrightarrow & |T_\Omega(j\omega)| & < & 1/|w_m(j\omega)| & , \quad \forall \omega \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \|w_m T_\Omega\|_\infty & < & 1, & \end{array} \tag{2.12}$$

avec :

$$\begin{aligned} T_\Omega(s) &= 1 - S_\Omega(s) \\ &= L_\Omega(s)\,(1 + L_\Omega(s))^{-1}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

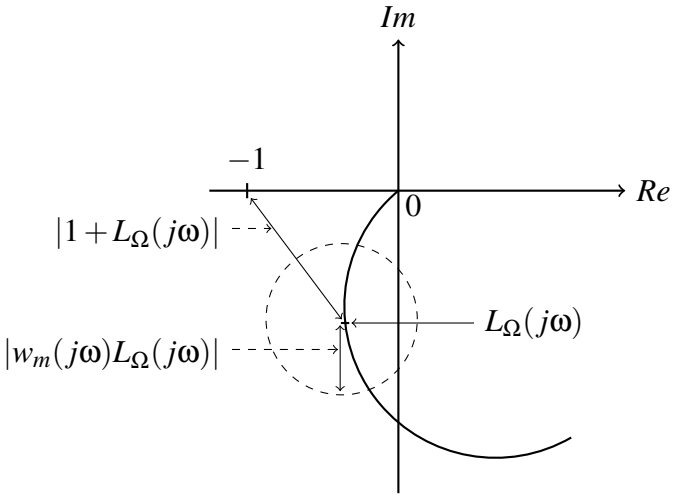

Figure 2.3 – Nyquist : Stabilité robuste en SISO

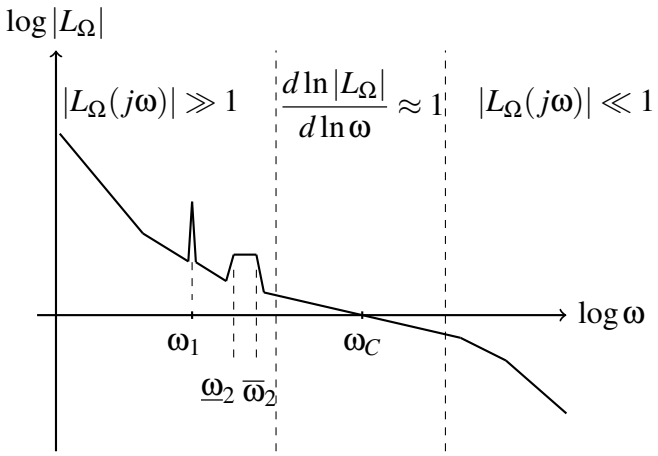

Figure 2.4 – Exemple de gabarit en gain de boucle ouverte

Dans un cadre plus général, notamment pour les systèmes MIMO, elle peut être obtenue à partir du Théorème du petit gain [ZDG96, p. 211]. En pratique, il est raisonnable de supposer que $|L_\Omega| \ll 1$ en hautes fréquences, d'où l'on déduit le roll-off en hautes fréquences nécessaire à la boucle ouverte, à partir de 2.12 :

$$|L_\Omega(j\omega)| < \frac{1}{|w_m(j\omega)|}, \quad \text{pour} \quad \omega \gg \omega_C. \tag{2.14}$$

Cette condition peut être également vue comme une limitation "pratique" de la bande passante atteignable ω_C, du fait de la nécessité de robustesse vis-à-vis des incertitudes de modélisation.

Au final, on parvient donc à spécifier un compromis sur le gabarit du gain de la boucle ouverte, qui peut être synthétisé par la figure 2.4.

2.2 Synthèse du correcteur

Usuellement, l'ingénieur automaticien effectue le modelage de la boucle ouverte L_Ω, via un réglage itératif et graphique (diagrammes de Nyquist et Black-Nichols) de K_Ω sous forme de réseaux de filtres PI (Proportionnel Intégral), avance de phase, filtres réjecteurs (*notch filters*) ; on parle alors de *Loop-Shaping*. Néanmoins, l'obtention par cette méthode d'un réglage de K_Ω performant et stabilisant de manière robuste le bouclage peut s'avérer difficile et fastidieuse, notamment si la spécification fréquentielle déclinée à partir du cahier des charges s'avère complexe, comme présenté sur la figure 2.4 par exemple. Par ailleurs, nous venons de voir avec 2.12 que la norme H_∞ permet de prendre en compte a priori la robustesse en stabilité d'un bouclage vis-à-vis d'incertitudes non structurées, il en est de même pour la performance (atténuation du gain fréquentiel de la fonction de sensibilité S_Ω).

L'emploi des techniques de commande robuste basées sur la norme H_∞ permet alors de déporter ce réglage sur le choix de filtres de pondérations adéquats, de manière à calculer le correcteur cette fois par minimisation d'un critère portant sur la norme H_∞ de transferts pondérés, soit en boucle fermée : c'est la *Synthèse H_∞ Standard* [DGKF89] ; soit en boucle ouverte : c'est la *Synthèse H_∞ par Loop-Shaping* [MG92], basée sur la résolution d'un problème particulier dit de stabilisation robuste d'un système décrit par factorisations premières normalisées [GM89]. Cette dernière approche, du point de vue de l'ingénieur automaticien, présente l'avantage de conserver le raisonnement classique sur la boucle ouverte, tout en offrant la possibilité (comme l'approche Standard, qui est bien évidemment plus générale) de traiter efficacement le cas des systèmes multivariables (MIMO), ce qui était difficilement réalisable avec les méthodes d'Automatique fréquentielle classique. Dans notre cas, l'intérêt du multivariable sera de pouvoir synthétiser directement (en une seule étape) un correcteur robuste global prenant en compte la mesure de vitesse inertielle et la mesure du courant moteur comme indiqué sur la figure 1.8 .

2.2.1 La synthèse H_∞ par Loop-Shaping

Soit G un modèle linéaire nominal d'un système quelconque que l'on désire asservir. Nous rappelons ici les aspects fondamentaux de la procédure de *Synthèse H_∞ par Loop-Shaping* établie par Glover et McFarlane dans [MG92].

2.2.1.1 Construction du loopshape

Cette étape consiste à modeler les valeurs singulières du système nominal, avec 2 pondérations W_{in} et W_{out}, en entrée et sortie du modèle nominal :

$$G_s(s) = W_{out}(s)G(s)W_{in}(s). \tag{2.15}$$

Ce système pondéré G_s est appelé *loopshape*.

2.2.1.2 Stabilisation robuste du loopshape

Soit une factorisation copremière [Vid85] normalisée à gauche du *loopshape*

$$G_s(s) = \tilde{M}_s(s)^{-1}\tilde{N}_s(s) \quad , \quad \begin{cases} \tilde{M}_s \in RH_\infty, \tilde{N}_s \in RH_\infty \\ \tilde{M}_s(s)\tilde{M}_s^*(s) + \tilde{N}_s(s)\tilde{N}_s^*(s) = I \end{cases}, \tag{2.16}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{M}_s^*(s) &= \tilde{M}_s(-s)^T, \\ \tilde{N}_s^*(s) &= \tilde{N}_s(-s)^T. \end{aligned}$$

L'objectif de cette étape est de stabiliser G_s, mais aussi la famille de modèles perturbés définie par

$$G_{s_\varepsilon} = \left\{ \left(\tilde{M}_s + \Delta_{\tilde{M}_s}\right)^{-1} \left(\tilde{N}_s + \Delta_{\tilde{N}_s}\right) \;:\; \left\| \begin{bmatrix} \Delta_{\tilde{N}_s} & \Delta_{\tilde{M}_s} \end{bmatrix} \right\|_\infty < \varepsilon \right\}, \tag{2.17}$$

où $\varepsilon > 0$ définit une *marge de stabilité* vis-à-vis d'incertitudes non structurées sur les facteurs copremiers $\Delta_{\tilde{M}_s} \in RH_\infty$ et $\Delta_{\tilde{N}_s} \in RH_\infty$, qu'il convient donc de maximiser. D'après le théorème du Petit Gain, la robustesse en stabilité du bouclage de la figure 2.5 est obtenue si et seulement si K_s stabilise le *loopshape* nominal G_s et

$$\gamma = \left\| \begin{bmatrix} I \\ K_s \end{bmatrix} (I - G_s K_s)^{-1} \tilde{M}_s^{-1} \right\|_\infty \leq \frac{1}{\varepsilon}. \tag{2.18}$$

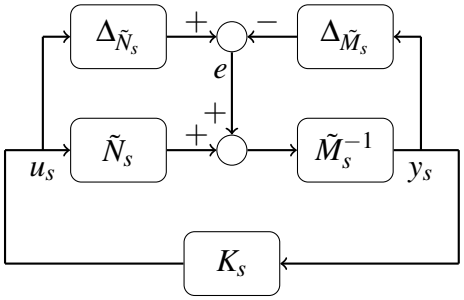

Figure 2.5 – Stabilisation robuste des facteurs premiers

La maximisation de la marge de stabilité équivaut donc à minimiser γ, la norme H_∞ du transfert entre e et $\begin{pmatrix} y_s \\ u_s \end{pmatrix}$. Du fait de sa structure mathématique particulière (facteurs copremiers *normalisés*), ce problème d'optimisation H_∞ admet une solution exacte qui ne nécessite pas de γ-itération, comme c'est le cas dans la majorité des problèmes H_∞ standard. Etant donné (A_s, B_s, C_s, D_s) une réalisation minimale de G_s, la marge de stabilité maximale établie dans [GM89] vaut :

$$\varepsilon_{max} = {\gamma_{min}}^{-1} = \left(1 + \lambda_{max}(X_s Y_s)\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.19}$$

où $\lambda_{max}(X_s Y_s)$ est la plus grande valeur propre du produit $X_s Y_s$; X_s étant l'unique solution définie positive de l'équation algébrique de Riccati

$$\left(A_s - B_s S_s^{-1} D_s^T C_s\right)^T X_s + X_s \left(A_s - B_s S_s^{-1} D_s^T C_s\right) - X_s B_s S_s^{-1} B_s^T X_s + C_s^T R_s^{-1} C_s = 0, \tag{2.20}$$

en posant

$$\begin{aligned} R_s &= I + D_s D_s^T, \\ S_s &= I + D_s^T D_s, \end{aligned}$$

et Y_s, l'unique solution définie positive de l'équation algébrique de Riccati

$$\left(A_s - B_s S_s^{-1} D_s^T C_s\right) Y_s + Y_s \left(A_s - B_s S_s^{-1} D_s^T C_s\right)^T - Y_s C_s^T R_s^{-1} C_s Y_s + B_s S_s^{-1} B_s^T = 0. \tag{2.21}$$

Un correcteur K_s stabilisant G_s et assurant

$$\left\| \begin{bmatrix} I \\ K_s \end{bmatrix} (I - G_s K_s)^{-1} \tilde{M}_s^{-1} \right\|_\infty \leq \gamma, \tag{2.22}$$

pour $\gamma > \gamma_{min}$, est donné [GM89] par la représentation d'état :

$$K_s = \left[\begin{array}{c|c} A_s + B_s F_s + \gamma^2 \left(L_s^T\right)^{-1} Y_s C_s^T (C_s + D_s F_s) & \gamma^2 \left(L_s^T\right)^{-1} Y_s C_s^T \\ \hline B_s^T X_s & -D_s^T \end{array} \right], \tag{2.23}$$

où

$$\begin{aligned} F_s &= -S_s^{-1} \left(D_s^T C + B_s^T X_s\right), \\ L_s &= \left(1 - \gamma^2\right) I + X_s Y_s. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Cette solution (que l'on peut obtenir grâce à la routine *ncfsyn* de Matlab) dépend uniquement du *loopshape*, ce qui offre donc la possibilité d'ajuster de manière itérative le compromis robustesse-performance du bouclage en modelant les valeurs singulières de G_s selon les concepts de l'automatique fréquentielle classique, grâce aux 2 pondérations W_1 et W_2. En effet la valeur de ε_{max} est un indicateur de bonne compatibilité entre le *loopshape* spécifié et sa stabilisation robuste.

Cette stabilisation robuste peut également être interprétée au sens de la gap-métrique δ_ν, opérateur introduit par Vinnicombe [Vin93]

$$\delta_\nu (G_1, G_2) = \left\{ \begin{array}{ll} \left\| \tilde{M}_1 N_2 - \tilde{N}_1 M_2 \right\|_\infty & \text{si} \quad M_1(-s)^T M_2(s) + N_1(-s)^T N_2(s) \in \hat{L}_\infty \\ 1 & \text{sinon} \end{array} \right., \tag{2.25}$$

et définissant une distance entre 2 modèles

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \tilde{M}_1(s)^{-1} \tilde{N}_1(s) = N_1(s) M_1(s)^{-1}, \\ G_2(s) &= \tilde{M}_2(s)^{-1} \tilde{N}_2(s) = N_2(s) M_2(s)^{-1}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

où $(\tilde{M}_1\ ,\ \tilde{N}_1)$ et $(M_1\ ,\ N_1)$ sont les facteurs premiers normalisés à gauche et respectivement à droite de G_1 ; $(\tilde{M}_2\ ,\ \tilde{N}_2)$ et $(M_2\ ,\ N_2)$ sont les facteurs premiers normalisés à gauche et respectivement à droite de G_2.

Ainsi, si $\delta_\nu (G_1, G_2) \to 0$ alors G_1 et G_2 sont proches, c'est à dire qu'ils peuvent être stabilisés par un même correcteur, si $\delta_\nu (G_1, G_2) \to 1$ alors G_1 et G_2 sont éloignés, c'est à dire qu'il n'y a pas de correcteur stabilisant en même temps G_1 et G_2. En effet [Vin93], le correcteur K_s donné par 2.23 stabilise la boule de modèles

$$\mathcal{B}(G_s(s), \upsilon) = \left\{ \ G_{s_\Delta}(s) \quad tq \quad \delta_\nu (G_s, G_{s_\Delta}) \leq \upsilon \ \right\}, \tag{2.27}$$

pour tout rayon

$$\upsilon < \gamma^{-1}. \tag{2.28}$$

Si l'on dispose d'une dispersion de modèles, ce rayon de boule de modèle peut donc servir comme indice de robustesse en stabilité, en le confrontant à la valeur de γ (toujours supérieure à 1 d'après la définition 2.19) obtenue lors de la synthèse du correcteur K_s.

2.2.1.3 Correcteur final

Le correcteur de boucle final est

$$K(s) = W_{in}(s)K_s(s)W_{out}(s) \tag{2.29}$$

La synthèse H_∞ par *Loop-Shaping* présente donc un avantage en terme de simplicité de réglage, puisque l'on n'a qu'une seule fonction de transfert à régler au moyen de 2 pondérations (une seule peut suffire, notamment en SISO). De plus, le critère 2-blocs optimisé à l'étape de stabilisation robuste correspond également à un critère 4-blocs prenant en compte les différentes fonctions de transfert en boucle fermée :

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{bmatrix} I \\ K_s \end{bmatrix} (I - G_s K_s)^{-1} \tilde{M}_s^{-1} \right\|_\infty &= \left\| \begin{bmatrix} I \\ K_s \end{bmatrix} (I - G_s K_s)^{-1} \begin{bmatrix} I & G_s \end{bmatrix} \right\|_\infty \\
&= \left\| \begin{bmatrix} W_{out} \\ W_{in}^{-1} K \end{bmatrix} (I - GK)^{-1} \begin{bmatrix} W_{out}^{-1} & GW_{in} \end{bmatrix} \right\|_\infty \\
&= \left\| \begin{bmatrix} W_{out} & 0 \\ 0 & W_{in}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & SG \\ KS & KSG \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{out}^{-1} & 0 \\ 0 & W_{in} \end{bmatrix} \right\|_\infty,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

avec $S = (I - GK)^{-1}$, la fonction de sensibilité. L'égalité de la première ligne dans 2.30 est obtenue en multipliant la fonction de transfert dans le membre de gauche par $\begin{bmatrix} \tilde{M}_s & \tilde{N}_s \end{bmatrix}$, qui laisse sa norme H_∞ initiale inchangée puisque

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \tilde{M}_s & \tilde{N}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{M}_s & \tilde{N}_s \end{bmatrix}^* &= \begin{bmatrix} \tilde{M}_s & \tilde{N}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{M}_s^* \\ \tilde{N}_s^* \end{bmatrix} \\
&= I,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

par définition des facteurs copremiers *normalisés*. La synthèse du correcteur final K par l'approche H_∞ *Standard* [DGKF89] serait donc tout à fait possible, mais elle nécessiterait que les pondérations W_{in} et W_{out} soit stables et d'inverses stables (à phase minimale), ce qui n'est pas indispensable dans l'approche H_∞ *Loop-Shaping*, elles peuvent notamment contenir des intégrateurs purs.

Néanmoins son inconvénient majeur est l'ordre potentiellement *élevé* du correcteur final K qui en résulte

$$\begin{aligned}
\partial^\circ K &= \partial^\circ W_{in} + \partial^\circ K_s + \partial^\circ W_{out} \\
&= \partial^\circ W_{in} + \partial^\circ G_s + \partial^\circ W_{out} \\
&= 2(\partial^\circ W_{in} + \partial^\circ W_{out}) + \partial^\circ G,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

compte tenu de l'ordre du modèle de synthèse et de celui des pondérations nécessaire pour bien traduire la spécification sur la boucle ouverte. Dans notre cas, on a généralement $\partial G > 10$, ceci afin de bien prendre en compte les principaux modes résonants de la structure mécanique, le déphasage (ou plus exactement les retards) lié à la chaine de mesure/commande, ainsi que la dynamique de l'actionneur (que nous avions négligée dans la section précédente uniquement pour la clarté du propos). De même les pondérations peuvent également être d'ordre élevé $\partial^\circ W_{in} + \partial^\circ W_{out} > 10$ notamment pour une spécification fréquentielle sur la boucle ouverte telle que sur la figure 2.4.

Usuellement, avant d'implémenter un correcteur obtenu par cette synthèse H_∞, une étape de réduction d'ordre *a posteriori* est alors indispensable. Dans la section suivante nous en

rappelons les principes.

2.2.2 Réduction de modèles dans l'espace d'état

La réduction d'un modèle LTI au sens général consiste à tronquer ou éliminer certains états de ce modèle dont on juge, à partir d'un critère mathématique, qu'ils contribuent le moins à la description du système physique modélisé ou alors à la performance s'il s'agit d'un correcteur. Nous rappelons ici les méthodes les plus souvent utilisées, qui reposent sur la notion de réalisation équilibrée au sens de l'observabilité et de la commandabilité.

2.2.2.1 Troncature de réalisations equilibrées

Soit $(A,B,C,D)_n$ une réalisation minimale d'ordre n d'une matrice de transfert $G(s) = D+C(Is-A)^{-1}B$ rationnelle et stable. Une mesure de la commandabilité et de l'observabilité de G est obtenue à partir des matrices symétriques définies positives

$$P = \int_0^\infty \mathrm{e}^{At} BB^T \mathrm{e}^{A^T t} dt,$$
$$Q = \int_0^\infty \mathrm{e}^{A^T t} C^T C \mathrm{e}^{At} dt,$$

appelées respectivement grammiens de commandabilité et d'observabilité, et qui sont les solutions uniques des équations de Lyapunov

$$AP + PA^T + BB^T = 0,$$
$$A^T Q + QA + C^T C = 0.$$

Ces grammiens dépendent de la base où ils sont exprimés. L'idée de réalisation équilibrée consiste alors à se ramener dans une base où aucune des 2 notions (observabilité et commandabilité) n'est privilégiée l'une par rapport à l'autre, c'est à dire où chaque état est autant commandable qu'observable. Il existe toujours [Moo81, Glo84], une matrice non singulière $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que les grammiens $\overline{P} = T^{-1}PT^{-T}$ et $\overline{Q} = T^T QT$ de la réalisation

$$(\overline{A},\overline{B},\overline{C},\overline{D})_n = (T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D),$$

vérifient :

$$\overline{P} = \overline{Q} = \Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n),$$

où $\sigma_1 > \sigma_2 > ... > \sigma_n > 0$ sont les *valeurs singulières de Hankel* de G. Ces valeurs sont des invariants entrée/sortie de G, définies plus généralement par $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(PQ)}$. La réalisation $(\overline{A},\overline{B},\overline{C},\overline{D})_n$ de vecteur d'état $\overline{x}$ est alors dite équilibrée.

La réduction par *troncature* d'une réalisation équilibrée consiste à éliminer les états

$$\overline{x}_e = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \overline{x},$$

qui sont en quelque sorte les moins commandables et observables, en conservant uniquement les états

$$\overline{x}_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} \overline{x},$$

qui correspondent aux r premières (plus grandes) valeurs singulières de Hankel. En effet,

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x}_r^T & \overline{x}_e^T \end{bmatrix}^T$$

permet de partitionner les matrices d'état comme suit

$$\left[\begin{array}{c|c} \overline{A} & \overline{B} \\ \hline \overline{C} & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} \overline{A}_{rr} & \overline{A}_{re} & \overline{B}_r \\ \overline{A}_{er} & \overline{A}_{ee} & \overline{B}_e \\ \hline \overline{C}_r & \overline{C}_e & D \end{array}\right],$$

et d'obtenir le modèle réduit par troncature

$$G_r := \left[\begin{array}{c|c} \overline{A}_{rr} & \overline{B}_r \\ \hline \overline{C}_r & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} T \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix}^T & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right]. \tag{2.33}$$

Cette méthode présente certaines propriétés intéressantes, comme la préservation de la stabilité [Moo81] et une borne sur la norme H_∞ de l'erreur de troncature [Glo84]

$$\|G - G_r\|_\infty \leq 2 \sum_{i=r+1}^{n} \sigma_i. \tag{2.34}$$

Dans [Glo84, p. 1129] une construction de cette réalisation équilibrée (formules explicites pour construire la transformation T) est établie, et peut être obtenue sous Matlab par la routine *balreal*. Cependant la construction de cette réalisation peut s'avérer numériquement mal conditionnée si le système G possède des modes quasiment non commandables ou non observables. Des alternatives de construction du modèle réduit G_r ne nécessitant pas de calcul explicite de la transformation T ont été proposées dans [TP87, SC88] et sont implémentées sous Matlab (routines *balancmr* et *schurmr*).

Pour un modèle instable, on a 2 possibilités :

– soit décomposer le modèle en une partie stable et une partie instable

$$G(s) = G_-(s) + G_+(s),$$

où G_- a tous ses pôles dans le demi-plan complexe gauche ouvert et G_+ a tous ses pôles dans le demi-plan complexe droit fermé, trouver un modèle réduit G_{r-} par troncature d'une réalisation équilibrée de G_- et obtenir un modèle réduit

$$G_r(s) = G_{r-}(s) + G_+(s).$$

– soit calculer une factorisation copremiere normalisée

$$G(s) = \tilde{M}(s)^{-1}\tilde{N}(s),$$

en déduire un modèle réduit $\begin{bmatrix} \tilde{N}_r & \tilde{M}_r \end{bmatrix}$ par troncature d'une réalisation équilibrée de $\begin{bmatrix} \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix}$ et obtenir

$$G_r(s) = \tilde{M}_r(s)^{-1}\tilde{N}_r(s).$$

La routine *ncfmr* de Matlab permet de faire ce type de réduction.

2.2.2.2 Approximation optimale par la norme de Hankel

Cette approche consiste à chercher un modèle réduit G_r d'ordre r, qui minimise la norme de Hankel de l'erreur d'approximation

$$\begin{aligned} \|G - G_r\|_H &= \|E\|_H \\ &= \sqrt{\lambda_{max}(PQ)}, \end{aligned} \tag{2.35}$$

où P et Q sont les grammiens de commandabilité et d'observabilité de $E(s)$. La norme de Hankel correspond à la plus grande valeur singulière de Hankel.

Ce problème d'optimisation a été étudié et résolu dans [Glo84], et une construction G_r dans l'espace d'état y est proposée (p. 1178-1181), passant par le calcul d'une réalisation équilibrée de G. Comme dans le cas de la troncature de réalisations équilibrées, une méthode de construction [SCL90] permettant d'éviter les problèmes de conditionnement numérique lorsque G n'est pas minimale (ou présente des modes quasiment non commandables ou inobservables) est implémentée dans Matlab (*hankelmr*).

Il est important de noter que la réduction d'un correcteur K par ces méthodes (troncature de réalisation équilibrée ou approximation optimale par la norme de Hankel) ne garantit pas *a priori* la conservation des propriétés (stabilité, norme H_∞ du critère de synthèse utilisé) de la boucle fermée initiale.

2.3 Application

Dans cette section, nous présentons un exemple complet de synthèse d'une boucle de stabilisation inertielle de ligne de visée par la méthode H_∞ *Loop-Shaping* rappelée ci-dessus.

Considérons un axe de visée dont le modèle G du type 1.27 correspond aux réponses fréquentielles des figures 2.6 et 2.7, avec une normalisation dans le domaine fréquentiel pour des raisons de confidentialité. En effet, le système physique en question est un cardan d'un viseur héliporté, où le moteur est monté en prise directe (pas de mécanisme de réduction du type engrenage), ce qui rend ici négligeable la $f.c.e.m$ du moteur, car la vitesse relative vue par les bobinages du moteur est faible. Dans cette configuration, la présence d'un réseau intégrateur de type PI dans une boucle de courant n'est donc pas indispensable, ce qui permet d'utiliser le courant comme une mesure supplémentaire robustificatrice dans la synthèse du correcteur. Le raisonnement sur la boucle ouverte établi précédemment en considérant uniquement G_m, par simplicité, s'applique donc cette fois à la fonction de transfert

$$G_{u\to\Omega}(s) = G_m(s)\, G_e(s).$$

Afin de spécifier le rejet de perturbations en vibrations, nous disposons d'un échantillon (réalisation d'un signal aléatoire d'un densité spectrale donnée) de signal gyrométrique mesuré lorsque système est soumis, sur un pot vibrant, à des vibrations aléatoires dont la densité spectrale correspond à celle des vibrations du porteur. Une transformée de Fourrier est effectuée sur ce signal afin d'identifier les composantes fréquentielles de la perturbation en sortie de modèle d_v vue par le gyromètre. Pour modeler la boucle de vitesse nous pondérerons alors la mesure de vitesse par

$$W_{out_\Omega}(s) = W_{PI^2}(s) \prod_{k=1}^{q} \overline{W}_{REJ_k}(s), \tag{2.36}$$

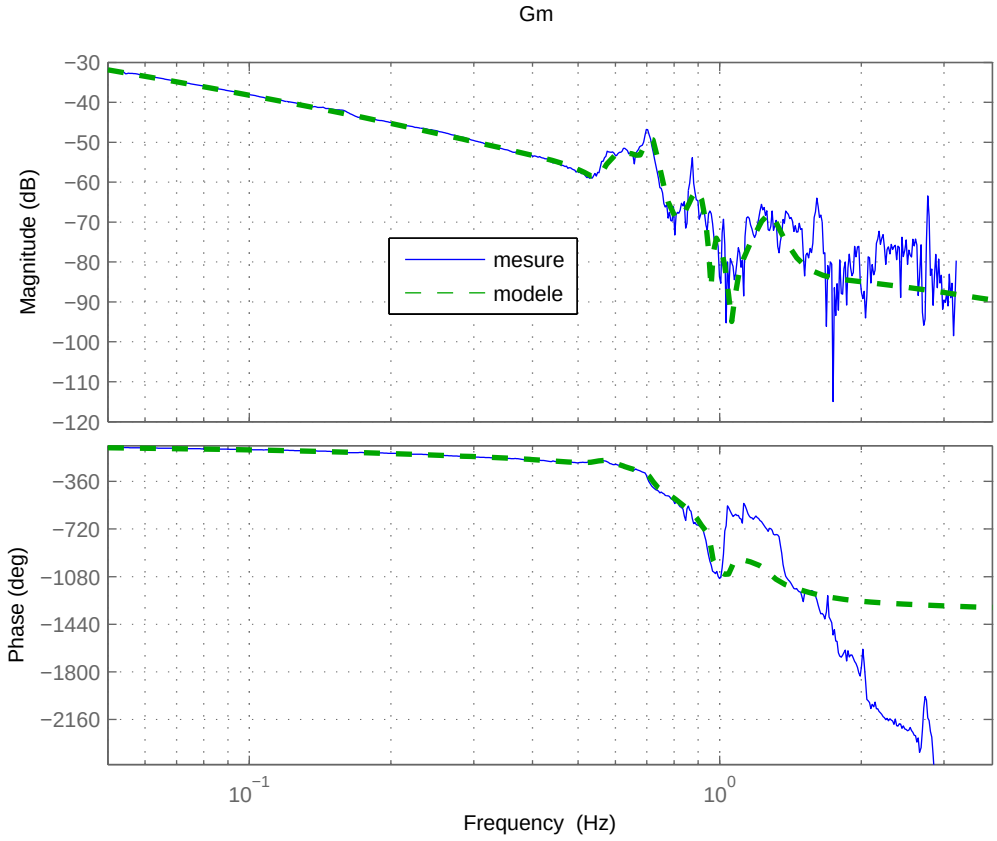

Figure 2.6 – Réponse fréquentielle de la fonction de transfert mécanique (normalisée)

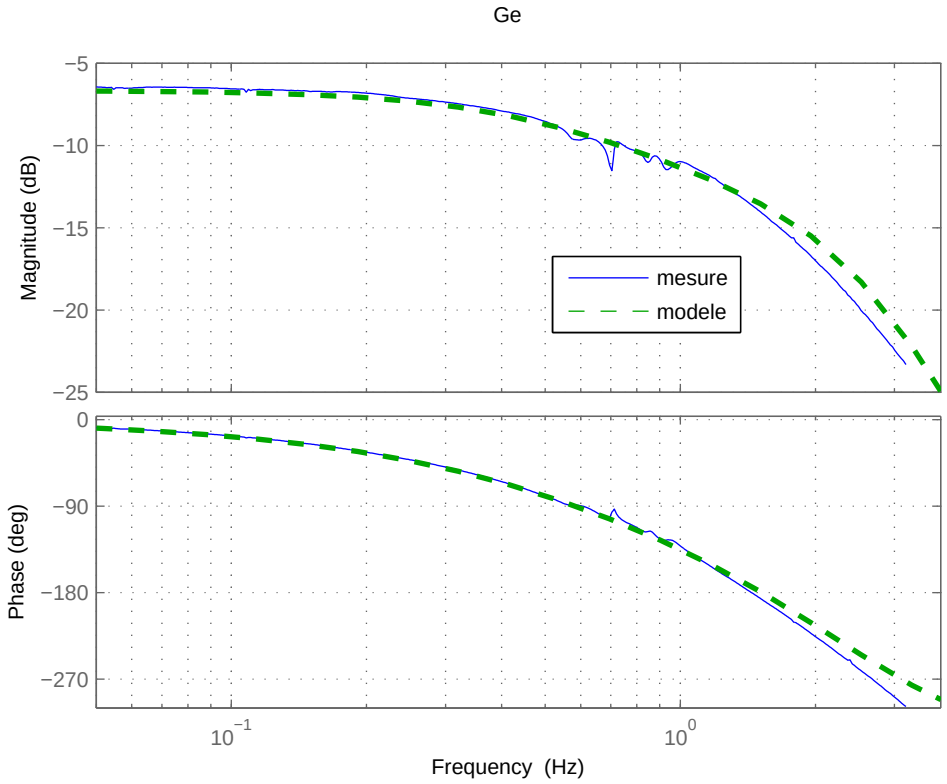

Figure 2.7 – Réponse fréquentielle de la fonction de transfert électrique (normalisée)

avec

$$W_{PI^2}(s) = G_0 \frac{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\xi_0 \frac{s}{\omega_0} + 1}{s^2} \frac{\frac{s}{a} + 1}{\frac{s}{b} + 1} \quad , \quad \overline{W}_{REJ_k}(s) = \frac{\frac{s^2}{\omega_k^2} + 2\overline{\xi}_k \frac{s}{\omega_k} + 1}{\frac{s^2}{\omega_k^2} + 2\underline{\xi}_k \frac{s}{\omega_k} + 1}. \tag{2.37}$$

W_{PI^2} est un double intégrateur (pour le rejet asymptotique angulaire du frottement sec, conformément à la déclinaison établie dans la première section de ce chapitre) associé à une avance de phase ($b > a > 0$), $\overline{W}_{REJ_k}$ est un filtre résonant ($\overline{\xi}_k > \underline{\xi}_k > 0$). Du fait de l'environnement du porteur spécifié, il est nécessaire de faire apparaitre des réjecteurs sur le gain de la fonction de sensibilité directe S_Ω ; nous avons alors choisi 5 filtres résonants ($q = 5$), réglés en superposant

$$\left| \prod_{i=1}^{5} \overline{W}_{REJ_i}(j\omega) \right| \quad , \quad \omega \geq 0$$

au module de la transformée de Fourier de la perturbation en sortie de modèle mesurée en vibration d_v, comme l'illustre la figure 2.8. Pour des raisons de confidentialité, les fréquences et les amplitudes présentées dans cette figure ont été normalisées.

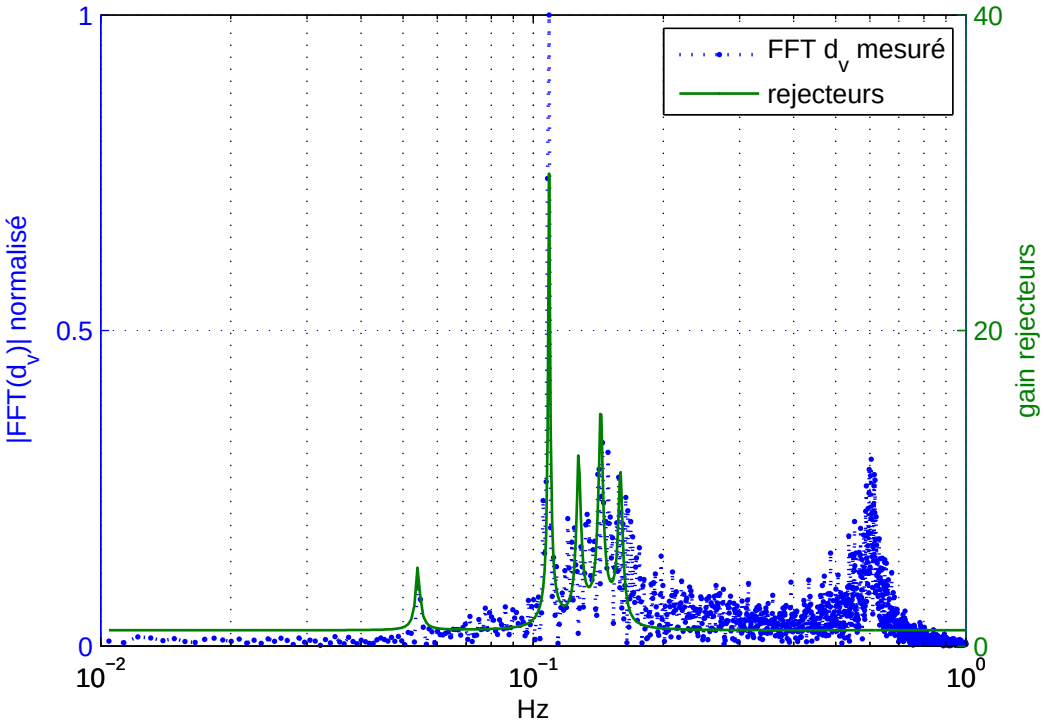

Figure 2.8 – FFT(normalisée)de la perturbation en sortie de modèle d_v et $\left|\prod_{i=1}^{5} \overline{W}_{REJ_i}(2\pi jf)\right|$

Ensuite, on inclut dans la pondération en entrée de modèle les termes de filtrage et de roll-off en hautes fréquences

$$W_{in}(s) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_{RO}} + 1} \prod_{k=1}^{r} \underline{W}_{REJ_k}(s), \tag{2.38}$$

avec

$$\underline{W}_{REJ_k}(s) = \frac{\dfrac{s^2}{\omega_k^2} + 2\underline{\xi}_k \dfrac{s}{\omega_k} + 1}{\dfrac{s^2}{\omega_k^2} + 2\overline{\xi}_k \dfrac{s}{\omega_k} + 1}, \tag{2.39}$$

où ($\overline{\xi}_k > \underline{\xi}_k > 0$), et les pulsations de réjection ω_i correspondent cette fois aux pulsations d'anti-résonance du modèle nominal G_m. En effet d'après 2.11, l'erreur relative de modélisation (ou l'incertitude vis-à-vis des variations) risque d'être grande ($|w_m(j\omega_i)| \gg 1$) à ces pulsations d'anti-résonance mécanique ($|G_m(j\omega_i)| \ll 1$). Nous avons alors choisi $r = 1$ (1 réjecteur sur la première pulsation d'anti-résonance de G_m).

Enfin, la mesure de courant est prise en compte dans la synthèse par une pondération constante ρ (elle est choisie constante afin de simplifier le réglage) :

$$W_{out}(s) = \begin{bmatrix} W_{out_\Omega}(s) & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}.$$

Cette constante ρ est réglée de façon à améliorer les marges statiques (stabilité du bouclage), sans « trop »dégrader le *loopshape* spécifié sur la boucle de vitesse avec les pondérations W_{out_Ω} et W_{in}. En effet, l'ajout de la mesure de courant impacte l'allure de la valeur singulière du *loopshape* SIMO de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\sigma\left(W_{out} G W_{in}\right)(j\omega) &= \sigma\left(\begin{bmatrix} W_{out_\Omega} & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_m \\ 1 \end{bmatrix} G_e W_{in}\right)(j\omega) \\
&= \sqrt{\begin{bmatrix} W_{out_\Omega} G_m G_e W_{in} & \rho G_e W_{in} \end{bmatrix}(-j\omega) \begin{bmatrix} W_{out_\Omega} G_m G_e W_{in} \\ \rho G_e W_{in} \end{bmatrix}(j\omega)} \\
&= \sqrt{\left|\left(W_{out_\Omega} G_m G_e W_1\right)(j\omega)\right|^2 + \left|\left(\rho G_e W_{in}\right)(j\omega)\right|^2} \\
&= \left|\left(W_{out_\Omega} G_m G_e W_{in}\right)(j\omega)\right| \sqrt{1 + \left|\frac{\rho}{\left(W_{out_\Omega} G_m\right)(j\omega)}\right|^2},
\end{aligned}$$

où l'on reconnait le *loopshape* spécifié sur la boucle de vitesse

$$\left|\left(W_{out_\Omega} G_m G_e W_{in}\right)(j\omega)\right|$$

et un terme dont le gain croit en fonction de ρ.

Les valeurs numériques du réglage des pondérations et du modèle sont fournies en Annexe.

La synthèse H_∞ donne les résultats présentés dans le tableau 2.1, avec

$$K_s(s) = \begin{bmatrix} K_{s_\Omega}(s) & K_{s_i}(s) \end{bmatrix},$$

ce qui donne le correcteur final

$$K(s) = \begin{bmatrix} K_\Omega(s) & K_i(s) \end{bmatrix}, \tag{2.40}$$

où

$$K_\Omega = -W_{in}(s) K_{s_\Omega}(s) W_{out_\Omega}(s) \quad , \quad K_i = -\rho W_{in}(s) K_{s_i}(s),$$

le signe « moins » permettant de connecter le correcteur en feedback négatif sur les mesures, conformément à la figure 1.8. A noter que K_Ω n'est pas exactement celui du schéma simplifié de la figure 2.1, il faudrait pour avoir équivalence, le multiplier par la dynamique de la boucle de courant

$$G_{bc}(s) = G_e(s)\left(1 + G_e(s)K_i(s)\right)^{-1}, \tag{2.41}$$

ce qui donnerait la boucle ouverte en vitesse

$$L_\Omega(s) = G_m(s)G_{bc}(s)K_\Omega(s). \tag{2.42}$$

$\partial^\circ G_m$	$\partial^\circ G_e$	$\partial^\circ W_{in}$	$\partial^\circ W_{out}$	$\partial^\circ K_\Omega$	$\partial^\circ K_i$	γ	GM_u	PM_u
16	5	3	13	53	40	3,6	8,6 dB	68 °

Tableau 2.1 – Synthèse H_∞ d'ordre plein

Cependant pour examiner la stabilité du bouclage nous considérons plutôt la boucle ouverte en entrée du système (tension du moteur u)

$$\begin{aligned} L_u(s) &= K(s)G(s) \\ &= \begin{bmatrix} K_\Omega(s) & K_i(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_m(s) \\ 1 \end{bmatrix} G_e(s) \\ &= K_\Omega(s)G_m(s)G_e(s) + K_i(s)G_e(s), \end{aligned}$$

qui dispose donc d'une marge de gain correcte (GM_u dans le tableau 2.1), ce qui permet typiquement de se prémunir des variations en température du gain de boucle, notamment au niveau de la motorisation (résistance des enroulements du moteur, constante de couple).

Une contrainte système, liée au logiciel embarqué du viseur est que le correcteur final doit être implémenté sous forme de filtres numériques SISO (comme sur la figure 2.9 par exemple) dont l'ordre total est limité. En effet ces correcteurs sont cadencés à une fréquence d'échantillonnage assez élevée, ce qui permet de minimiser les retards dus à l'échantillonnage-blocage, mais cela induit une limitation sur le temps de calcul entre les instants de commande et donc sur l'ordre des correcteurs.

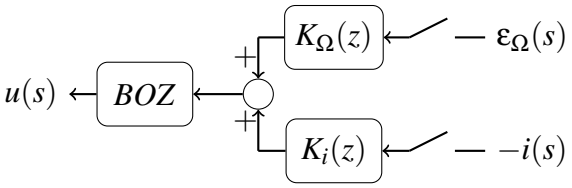

Figure 2.9 – Implémentation en parallèle

Il est alors d'usage de procéder à une réduction d'ordre *a posteriori* de chacun des termes de la matrice de correction K par des méthodes de réduction d'ordre. L'ordre de K_Ω et K_i est progressivement réduit avec pour objectif de limiter la dégradation des marges de stabilité classiques :

$$\begin{aligned} GM_u &\geq 6\text{dB} \quad \text{(marge de gain)}, \\ PM_u &\geq 40^\circ \quad \text{(marge de phase)}, \end{aligned} \tag{2.43}$$

tout en satisfaisant le « vrai » cahier des charges dans le domaine temporel, exposé ci-dessous :

– L'erreur résiduelle de stabilisation, en consigne de vitesse inertielle nulle, en réponse à la perturbation d_v :

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta(s) &= \frac{\varepsilon_\Omega(s)}{s} \\ &= \frac{S_\Omega(s)}{s} d_v(s) \\ &= \frac{1}{s\,(1+L_\Omega(s))} d_v(s) \quad \text{(avec } L_\Omega \text{ donné par 2.42)} \end{aligned} \tag{2.44}$$

doit satisfaire

$$\sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \varepsilon_\theta^2(t)dt} < \theta_{RMS}, \tag{2.45}$$

sous la contrainte de consommation moteur :

$$|i(t)| < i_{max}, \tag{2.46}$$

où

$$i(s) = \frac{G_{bc}(s)K_\Omega(s)}{1+L_\Omega(s)} d_v(s), \tag{2.47}$$

avec L_Ω et G_{bc} donnés par 2.42 et 2.41

– L'erreur résiduelle crête de stabilisation, en consigne de vitesse inertielle nulle, en réponse à un échelon de couple de frottements secs d_f d'amplitude $2C_o$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta(s) &= \frac{G_m(s)S_\Omega(s)}{s}\frac{d_f(s)}{K_c} \qquad \text{(avec } K_c \text{ la constante de couple moteur)} \\ &= \frac{1}{K_c}\frac{G_m(s)}{s\,(1+L_\Omega(s))} d_f(s) \qquad \text{(avec } L_\Omega \text{ donné par 2.42).} \end{aligned} \tag{2.48}$$

doit satisfaire

$$|\varepsilon_\theta(t)| < \theta_{max} \tag{2.49}$$

Les valeurs θ_{RMS} et θ_{max} sont des spécifications système haut niveau, qui conditionnent fortement la performance du viseur, i_{max} est une contrainte d'intégrité du système. En général θ_{RMS} est lié à la taille du pixel de l'imageur du viseur et on prend

$$\theta_{max} = 3\theta_{RMS},$$

en considérant que la résiduelle de stabilisation a les caractéristiques d'un bruit gaussien (faible probabilité de s'écarter de $\pm 3\sigma$ de la valeur moyenne, σ étant l'écart-type).

Le tableau 2.2 récapitule les meilleurs résultats obtenus en terme de réduction d'ordre avec chacune des 2 méthodes de réduction discutées précédemment. Par ailleurs nous avons également utilisé la méthode d'approximation de la réponse fréquentielle disponible via la routine *fitfrd* que nous avions évoquée au chapitre précédent dans le cadre de l'identification de modèles. A condition de définir soigneusement la plage fréquentielle où l'on désire approximer la réponse fréquentielle du correcteur d'ordre plein, cette méthode s'avère compétitive vis à vis des autres méthodes de réduction *a posteriori*, même si elle a le désavantage

de ne fonctionner que sur des modèles SISO.

	$\partial^\circ K_\Omega$	$\partial^\circ K_i$	GM_u	PM_u	$e_{RMS}(d_v)$	$conso_{max}(d_v)$	$e_{crete}(d_f)$
ordre plein	53	40	8,6 dB	68 °	0,93 θ_{RMS}	0,87 i_{max}	0,75 θ_{max}
hankelmr	20	7	7,6 dB	50 °	0,97 θ_{RMS}	0,87 i_{max}	0,70 θ_{max}
balancmr	20	7	8,5 dB	68 °	0,93 θ_{RMS}	0,87 i_{max}	0,75 θ_{max}
fitfrd	20	7	7,1 dB	70 °	0,93 θ_{RMS}	0,87 i_{max}	0,77 θ_{max}

Tableau 2.2 – Réduction d'ordre : comparaison des approches

Sur les figures 2.10, 2.11, 2.12, 2.13 on peut voir que les réponses fréquentielles de la boucle ouverte, de la fonction de sensibilité et des correcteurs sont peu modifiées.

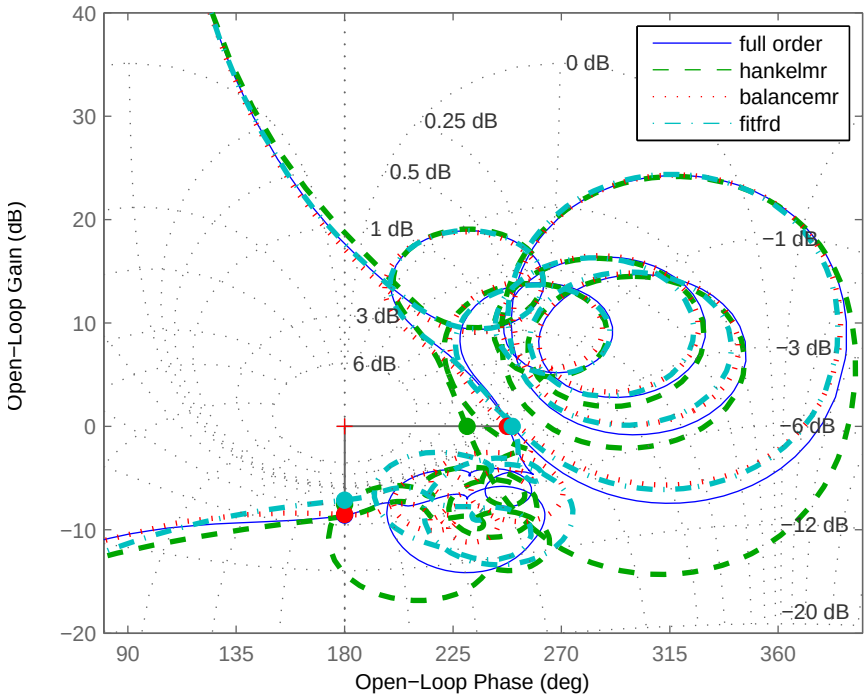

Figure 2.10 – Diagramme de Black-Nichols de la boucle ouverte en entrée L_u

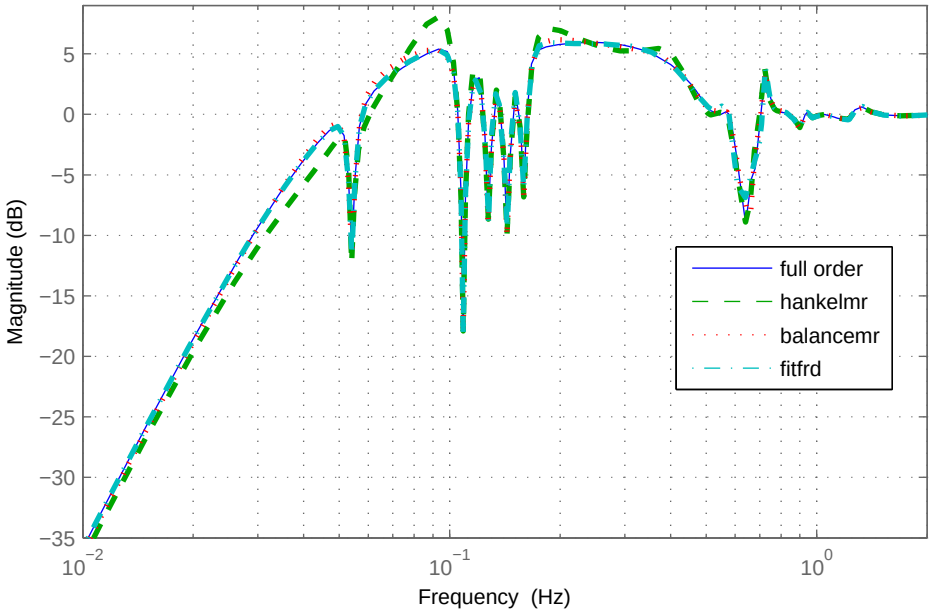

Figure 2.11 – Gain de la fonction de sensibilité S_Ω

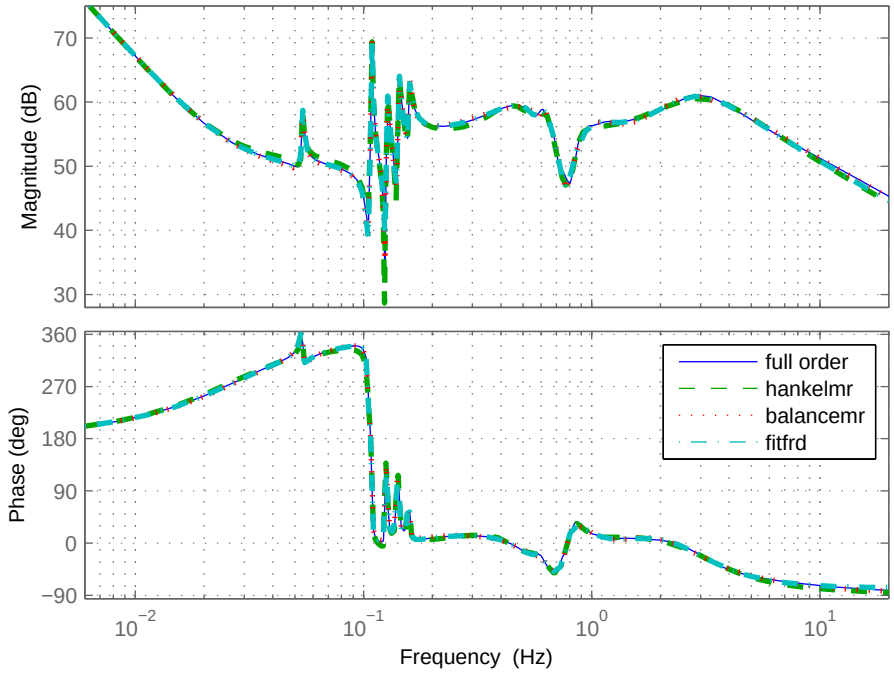

Figure 2.12 – Diagramme de Bode de K_Ω

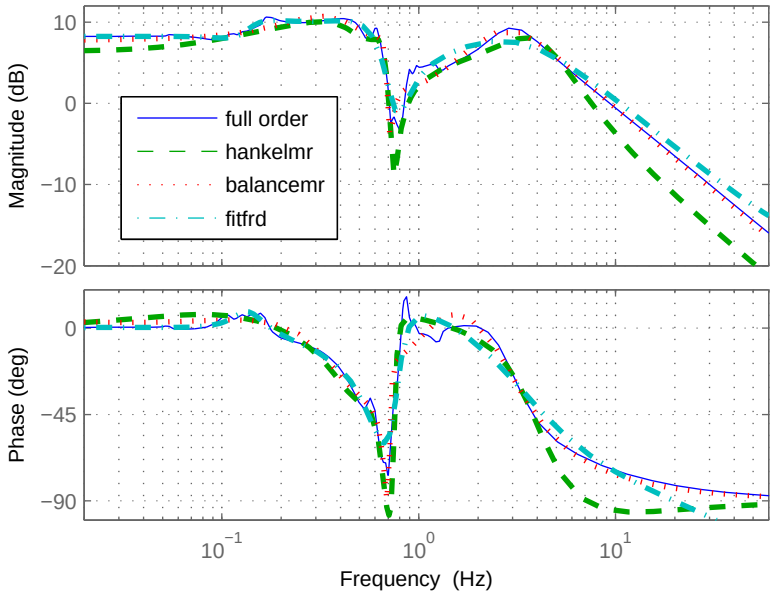

Figure 2.13 – Diagramme de bode de K_i

2.4 Conclusion et objectifs de la thèse

Dans ce chapitre nous avons présenté la méthode de synthèse usuelle d'une boucle de stabilisation inertielle de ligne de visée par l'approche H_∞ *Loop-Shaping*. Les correcteurs obtenus par cette méthode étant généralement d'ordre élevé, comme le montre l'application traitée, une étape de réduction *a posteriori* du correcteur est indispensable afin d'aboutir à un correcteur implémentable. Cette méthodologie en 2 étapes (synthèse H_∞ d'ordre plein, puis réduction d'ordre du correcteur H_∞) est utilisée dans de nombreuses applications industrielles, et notamment à la SAGEM dans les viseurs actuels. Cependant, des environnements de plus en plus contraignants et des cahiers des charges de plus en plus poussés orientent vers l'emploi de capteurs supplémentaires (ajout d'une composante de feedforward pour une meilleure compensation des vibrations du porteur du viseur par exemple) associés à des techniques de commande avancée (H_∞ / H_2) pour satisfaire les objectifs de performance sous contrainte de robustesse. L'ordre du correcteur multivariable croit alors de manière conséquente et il est nécessaire de maitriser ce dernier, voire de pouvoir imposer l'ordre de chaque terme de la matrice de correction indépendamment les uns des autres, c'est-à-dire d'imposer une contrainte structurelle au correcteur lors de la synthèse.

Les premières études montrent qu'une réduction *a posteriori* nécessaire à la mise en oeuvre de capteurs supplémentaires dégrade de manière conséquente la robustesse obtenue lors de la synthèse de correcteurs d'ordre plein par les techniques de type H_∞. Ainsi il apparait nécessaire de contraindre *a priori* l'ordre maximal du correcteur, en évitant donc la deuxième étape de réduction actuelle, qui est essentiellement une procédure *ad-hoc* dans le sens ou elle n'offre pas à l'utilisateur la possibilité de maîtriser, durant la réduction d'ordre, la dégradation des propriétés de la boucle fermée (stabilité, critère de synthèse H_∞ traduisant le compromis robustesse/performance) vis-à-vis du correcteur optimal d'ordre plein.

Le positionnement de nos travaux étant clairement applicatif, dans cette thèse nous proposons des méthodologies de synthèse de correcteurs d'ordre réduit, avec pour souci particulier de garder le formalisme *Loop-Shaping*, en abordant le problème de la synthèse H_∞ à ordre fixé :

- d'abord à travers *l'optimisation sous contraintes LMI*, domaine dans lequel la production scientifique en Automatique a été intense durant ces 2 dernières décennies ;
- ensuite par *l'optimisation non lisse*, approche qui a émergé plus récemment, avec des outils numériques dédiés et disponibles dans les domaines académiques et privés.

Chapitre 3

Synthèse H_∞ à ordre fixé par l'optimisation sous contraintes LMI

3.1 Les inégalités matricielles linéaires

Une Inégalité Linéaire Matricielle (Linear Matrix Inequality ou LMI en anglais) est une expression de la forme

$$F(x) = F_0 + F_1 x_1 + \cdots + F_m x_m \prec 0, \tag{3.1}$$

où les x_i, $i = 1, \cdots, m$ sont des scalaires réels, les F_i sont des matrices symétriques de taille $n \times n$, et $M \prec 0$ signifiant que M est définie négative, c'est à dire $y^T M y < 0$ pour $y \in \mathbb{R}^n$ et $y \neq 0$.

L'ensemble des $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix}^T$ dans $\mathbb{R}^m$ satisfaisant 3.1 est *convexe*. Du fait de cette propriété de convexité, les problèmes LMI du type

– Faisabilité :

$$\text{Trouver un vecteur} \quad x \in \mathbb{R}^m \quad \text{solution de} \quad F(x) \prec 0, \tag{3.2}$$

– Minimisation d'un coût linéaire :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \quad c^T x \quad \text{sous contrainte} \quad F(x) \prec 0 \tag{3.3}$$

peuvent être résolus numériquement par des algorithmes dédiés. L'intérêt de la convexité d'un problème d'optimisation est que s'il admet un minimum local, alors ce dernier est également un minimum global. Un ouvrage de référence sur l'optimisation convexe au sens général est [BV04].

Un certain nombre de problèmes d'Automatique peuvent être exprimés dans le formalisme des LMI [BEGFB94]. Notamment, la norme H_∞ d'un système linéaire peut être caractérisée par une contrainte sous forme LMI grâce au lemme borné réel.

Lemme 3.1. *(Lemme borné réel) Un système linéaire défini par une réalisation* (A,B,C,D) *est stable (*$Re(\lambda_i(A)) < 0$*) et vérifie*

$$\left\| D + C(sI - A)^{-1} B \right\|_\infty < \gamma$$

si et seulement si il existe une matrice X symétrique définie positive, telle que

$$\begin{bmatrix} A^TX+XA & XB & C^T \\ B^TX & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0. \tag{3.4}$$

Ce résultat fondamental constitue le point de départ de la résolution du problème de la synthèse H_∞ standard par l'optimisation sous contraintes LMI.

3.2 Solution du problème H_∞ standard sans contrainte d'ordre

Soit l'interconnexion standard de la figure 3.1 entre :

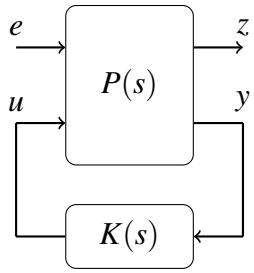

Figure 3.1 – Forme standard

– d'une part le **système standard augmenté** (modèle linaire nominal et pondérations traduisant les objectifs de synthèse)

$$P : \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \hline z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x(t) \\ \hline e(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système augmenté, $e \in \mathbb{R}^{m_1}$ le vecteur des entrées exogènes (perturbations, références, bruits de mesures), $u \in \mathbb{R}^{m_2}$ le vecteur des entrées de commande, $z \in \mathbb{R}^{p_1}$ les signaux de performances sur lesquels porte le critère de performance de la synthèse, $y \in \mathbb{R}^{p_2}$ les mesures disponibles pour effectuer la commande ;

– d'autre part le **correcteur**

$$K : \begin{bmatrix} \dot{x}_K(t) \\ \hline u(t) \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_K(t) \\ \hline y(t) \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

où $x_K \in \mathbb{R}^k$ est le vecteur d'état du correcteur.

La fonction de transfert en boucle fermée entre les entrées exogènes e et les signaux de performance z est décrite par la *transformée linéaire fractionnaire*

$$\mathcal{F}(P,K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}. \tag{3.7}$$

L'objectif de la synthèse H_∞ standard est de trouver un correcteur $K(s) = D_K + C_K(sI_k - A_K)^{-1}B_K$ assurant :

– la *stabilité interne* du bouclage : pour $e(t) = 0, \forall t \geq 0$, l'état du système bouclé $x_{bf}(t) = \begin{bmatrix} x(t)^T & x_K(t)^T \end{bmatrix}^T$ tend asymptotiquement vers zéro ;

– la *performance H_∞ optimale* en boucle fermée : c'est à dire minimiser $\|\mathcal{F}(P,K)\|_\infty$.

La première solution [DGKF89] à ce problème, obtenue à la fin des années 80, est fondée sur la résolution de 2 équations algébriques de Riccati, en cherchant la valeur optimale du critère H_∞ par dichotomie (γ-itération). Elle fournit un correcteur K dit *d'ordre plein*, car ayant l'ordre $k = n$ du système augmenté P.

Ensuite, au milieu des années 90, il a été montré [GA94] qu'à ordre plein ($k = n$) ce problème est équivalent à un problème d'optimisation sous contraintes LMI.

Cette solution suppose les hypothèses suivantes :

H 3.1. *Les paires (A,B_2) et (A,C_2) sont respectivement stabilisable et détectable.*

H 3.2. $D_{22} = 0$.

L'hypothèse classique **H** 3.1 assure l'existence d'au moins un correcteur K assurant la stabilité interne du bouclage. C'est l'hypothèse de base de toutes les méthodes de commande modernes dans l'espace d'état : placement de pôles, LQ, LQG.

L'hypothèse **H** 3.2 d'absence de transmission directe entre les entrées de commande u et les mesures y est souvent vérifiée, car le terme P_{22} contient généralement la dynamique du système physique. Elle permet de simplifier grandement l'expression des matrices d'état de la boucle fermée et d'assurer que l'interconnexion soit *bien posée*, c'est à dire $I - D_{22}D_K$ *non singulier*. De plus, elle n'est pas restrictive, car dans le cas où $D_{22} \neq 0$, si on élimine ce terme en posant [ZDG96]

$$\begin{aligned} \tilde{P}(s) &= P(s) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) - D_{22} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

alors pour tout correcteur

$$\tilde{K} = \left[\begin{array}{c|c} A_{\tilde{K}} & B_{\tilde{K}} \\ \hline C_{\tilde{K}} & D_{\tilde{K}} \end{array}\right]$$

stabilisant $\tilde{P}$ et tel que $I + D_{22}D_{\tilde{K}}$ est *non singulière*, le correcteur

$$K = \tilde{K}\left(I + D_{22}\tilde{K}\right)^{-1} \tag{3.9}$$

stabilise P et

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(P,K) &= P_{11} + P_{12}\tilde{K}\left(I + D_{22}\tilde{K}\right)^{-1}\left(I - P_{22}\tilde{K}\left(I + D_{22}\tilde{K}\right)^{-1}\right)^{-1} P_{21} \\ &= P_{11} + P_{12}\tilde{K}\left[\left(I - P_{22}\tilde{K}\left(I + D_{22}\tilde{K}\right)^{-1}\right)\left(I + D_{22}\tilde{K}\right)\right]^{-1} P_{21} \\ &= P_{11} + P_{12}\tilde{K}\left[\left(I + D_{22}\tilde{K}\right) - P_{22}\tilde{K}\right]^{-1} P_{21} \\ &= P_{11} + P_{12}\tilde{K}\left[I - \left(P_{22} - D_{22}\right)\tilde{K}\right]^{-1} P_{21} \\ &= \mathcal{F}(\tilde{P},\tilde{K}) \end{aligned} \tag{3.10}$$

En définissant la matrice à déterminer

$$\Theta = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+m_2)\times(k+p_2)}, \tag{3.11}$$

une réalisation de la fonction de transfert en boucle fermée

$$\mathcal{F}(P,K):\left[\begin{array}{c}\dot{x}_{bf}(t)\\ \hline z(t)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}A_{bf}(\Theta) & B_{bf}(\Theta)\\ \hline C_{bf}(\Theta) & D_{bf}(\Theta)\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}x_{bf}(t)\\ \hline e(t)\end{array}\right] \tag{3.12}$$

peut être déduite de 3.5 et 3.6, avec

$$\left[\begin{array}{c|c}A_{bf}(\Theta) & B_{bf}(\Theta)\\ \hline C_{bf}(\Theta) & D_{bf}(\Theta)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}\overline{A} & \overline{B}_1\\ \hline \overline{C}_1 & \overline{D}_{11}\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c}\overline{B}_2\\ \hline \overline{D}_{12}\end{array}\right]\Theta\left[\begin{array}{c|c}\overline{C}_2 & \overline{D}_{21}\end{array}\right], \tag{3.13}$$

où

$$\begin{aligned}\overline{A}&=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & 0_k\end{bmatrix}, & \overline{B}_1&=\begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix}, & \overline{B}_2&=\begin{bmatrix}0 & B_2\\ I_k & 0\end{bmatrix},\\ \overline{C}_1&=\begin{bmatrix}C_1 & 0\end{bmatrix}, & \overline{D}_{11}&=D_{11}, & \overline{D}_{12}&=\begin{bmatrix}0 & D_{12}\end{bmatrix},\\ \overline{C}_2&=\begin{bmatrix}0 & I_k\\ C_2 & 0\end{bmatrix}, & \overline{D}_{21}&=\begin{bmatrix}0\\ D_{21}\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

D'après le lemme borné réel, la boucle fermée est stable de manière interne et $\|\mathcal{F}(P,K)\|_\infty < \gamma$, $\gamma>0$, si et seulement si il existe une matrice X_{bf} symétrique définie positive, telle que

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}A_{bf}(\Theta)^T X_{bf}+X_{bf}A_{bf}(\Theta) & X_{bf}B_{bf}(\Theta) & C_{bf}(\Theta)^T\\ B_{bf}(\Theta)^T X_{bf} & -\gamma I & D_{bf}(\Theta)^T\\ C_{bf}(\Theta) & D_{bf}(\Theta) & -\gamma I\end{bmatrix}\prec 0\\ \iff\quad & L(X_{bf})+\begin{bmatrix}X_{bf}\overline{B}_2\\ 0\\ \overline{D}_{12}\end{bmatrix}\Theta\begin{bmatrix}\overline{C}_2 & \overline{D}_{21} & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\overline{C}_2^T\\ \overline{D}_{21}^T\\ 0\end{bmatrix}\Theta^T\begin{bmatrix}\overline{B}_2^T X_{bf} & 0 & \overline{D}_{12}^T\end{bmatrix}\prec 0,\end{aligned} \tag{3.15}$$

où

$$L(X_{bf})=\begin{bmatrix}\overline{A}^T X_{bf}+X_{bf}\overline{A} & X_{bf}\overline{B}_1 & \overline{C}_1^T\\ \overline{B}_1^T X_{bf} & -\gamma I & D_{11}^T\\ \overline{C}_1 & D_{11} & -\gamma I\end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

Cette inégalité est une BMI (*Bilinear Matrix Inequality*) à cause du produit entre les variables inconnues X_{bf} et Θ. Ce type de contrainte est généralement plus difficile à résoudre car ne possédant pas, contrairement aux LMI, la propriété de *convexité*, importante en optimisation numérique. Dans [GA94], les auteurs montrent qu'il est possible d'éliminer ce couplage en projetant cette BMI 3.15 en

$$(\Psi_\perp)^T L(X_{bf})\Psi_\perp \prec 0 \tag{3.17}$$

et

$$\begin{aligned}&(\Phi_\perp)^T\begin{bmatrix}X_{bf}^{-1} & 0 & 0\\ 0 & I_{m_1} & 0\\ 0 & 0 & I_{p_1}\end{bmatrix}L(X_{bf})\begin{bmatrix}X_{bf}^{-1} & 0 & 0\\ 0 & I_{m_1} & 0\\ 0 & 0 & I_{p_1}\end{bmatrix}\Phi_\perp\prec 0\\ \iff\quad & (\Phi_\perp)^T\begin{bmatrix}\overline{A}X_{bf}^{-1}+X_{bf}^{-1}\overline{A}^T & \overline{B}_1 & X_{bf}^{-1}\overline{C}_1^T\\ \overline{B}_1^T & -\gamma I_{m_1} & D_{11}^T\\ \overline{C}_1 X_{bf}^{-1} & D_{11} & -\gamma I_{p_1}\end{bmatrix}\Phi_\perp\prec 0,\end{aligned} \tag{3.18}$$

sur $\Psi_\perp$ et $\Phi_\perp$, dont les colonnes constituent des bases de $Ker(\Psi)$ et $Ker(\Phi)$ respectivement, avec

$$\begin{aligned}\Psi &= \begin{bmatrix}\overline{C}_2 & \overline{D}_{21} & 0\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}0 & I_k & 0 & 0\\ C_2 & 0 & D_{21} & 0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.19}$$

et

$$\begin{aligned}\Phi &= \begin{bmatrix}\overline{B}_2^T & 0 & \overline{D}_{12}^T\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}0 & I_k & 0 & 0\\ B_2^T & 0 & 0 & D_{12}^T\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Ensuite, en partitionnant X_{bf} et son inverse :

$$X_{bf} = \begin{bmatrix}S & N\\ N^T & *\end{bmatrix}, \quad X_{bf}^{-1} = \begin{bmatrix}R & M\\ M^T & *\end{bmatrix}, \tag{3.21}$$

où $R,S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $M,N \in \mathbb{R}^{n\times k}$, ils en déduisent une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un correcteur K assurant la stabilité interne et $\|\mathcal{F}(P,K)\|_\infty < \gamma$, sous forme de contraintes LMI, donnée par le théorème suivant.

Théorème 3.1. *[GA94] Le système standard P admet un correcteur K stabilisant de manière interne et tel que $\|\mathcal{F}(P,K)\|_\infty < \gamma$, si et seulement si il existe 2 matrices symétriques R et S vérifiant*

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathcal{N}_R & 0\\ \hline 0 & I_{m_1}\end{array}\right]^T \left[\begin{array}{cc|c} AR+RA^T & RC_1^T & B_1\\ C_1R & -\gamma I_{p_1} & D_{11}\\ \hline B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I_{m_1}\end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c}\mathcal{N}_R & 0\\ \hline 0 & I_{m_1}\end{array}\right] \prec 0 \tag{3.22}$$

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathcal{N}_S & 0\\ \hline 0 & I_{p_1}\end{array}\right]^T \left[\begin{array}{cc|c} A^TS+SA & SB_1 & C_1^T\\ B_1^TS & -\gamma I_{m_1} & D_{11}^T\\ \hline C_1 & D_{11} & -\gamma I_{p_1}\end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c}\mathcal{N}_S & 0\\ \hline 0 & I_{p_1}\end{array}\right] \prec 0 \tag{3.23}$$

$$\begin{bmatrix}R & I_n\\ I_n & S\end{bmatrix} \succeq 0 \tag{3.24}$$

où $\mathcal{N}_R$ et $\mathcal{N}_S$ constituent des bases de noyaux de $\begin{bmatrix}C_2 & D_{21}\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}B_2^T & D_{12}^T\end{bmatrix}$ respectivement. De plus il existe des correcteurs d'ordre réduit $k < n$ si et seulement si R et S satisfont en plus des LMI 3.22 à 3.24, la condition

$$rang(I_n - RS) \leq k \tag{3.25}$$

A partir de cette caractérisation, la recherche d'un correcteur optimal se fait donc par minimisation de γ sous les contraintes LMI 3.22, 3.23, 3.24, ce qui est un problème d'optimisation convexe. Ensuite pour construire le correcteur, il faut d'abord reconstituer à partir

de R et S la matrice X_{bf}, symétrique définie positive et vérifiant 3.21. Pour cela on peut procéder par une décomposition en valeurs singulières afin d'obtenir M et N de rang plein, tels que

$$MN^T = I - RS \tag{3.26}$$

et obtenir

$$X_{bf} = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & -M^+RN \end{bmatrix}. \tag{3.27}$$

Cette solution résout donc le même problème que [DGKF89], toutefois du point de vue numérique, pour des systèmes d'ordre élevé ($n > 30$) et avec les solveurs LMI actuels, la résolution du problème est généralement plus longue et souvent sujette à des problèmes de conditionnement numérique des matrices R et S, pouvant rendre difficile la reconstruction du correcteur.

Une autre approche équivalente permettant de linéariser le problème BMI 3.15 issu de l'application du lemme borné réel, est proposée dans [SGC97]. Elle procède par un changement de variables explicite et bijectif ; et résout d'abords, comme ici un problème LMI de faisabilité, suivi d'une étape de reconstruction du correcteur. Son intérêt par rapport à celle présentée ici, est qu'elle permet de formuler une plus grande classe de problèmes de synthèse, et notamment des problèmes multiobjectifs, avec par exemple des critères mixtes H_2/H_∞, ou alors H_∞ avec placement de pôles [CG96]. Cependant elle n'est pas adaptée à la recherche de correcteurs d'ordre réduit puisque dans ce cas, le changement de variable n'est plus défini.

La recherche *a priori* d'un correcteur d'ordre réduit $k < n$ nécessite alors de pouvoir également imposer la contrainte de rang 3.25. Cette contrainte étant non convexe, comme l'était la contrainte BMI initiale 3.15 issue de l'application directe du lemme borne réel, plusieurs méthodes ont été proposées afin de gérer l'une ou l'autre de ces 2 difficultés.

D'une part les approches biconvexes, procèdent par une résolution séquentielle du problème, en fixant l'une ou l'autre des variables d'optimisation afin d'éliminer le couplage source de non convexité (schémas du type D-K itération [Doy85]). Ces dernières sont souvent simples à mettre en oeuvre numériquement et peuvent donner des résultats intéressants sur des exemples pratiques. C'est le cas de l'approche par factorisation copremières [VM97], que nous présenterons de manière détaillée dans la section suivante. D'autre part, il y a :

- soit des approches qui s'attaquent à la contrainte de rang, c'est le cas des méthodes par lagrangien augmenté de [ANT03, ANTT04] où cette contrainte est reformulée sous forme de contrainte bilinéaire d'égalité matricielle (du type $I_n - RS = 0$ par analogie avec le cas d'une synthèse de correcteur statique) ; une autre reformulation à partir des coefficients du polynôme caractéristique $p(\lambda) = \det(I_n - \lambda(I_n - RS))$ est proposée dans [AHH11a, AHH11b] ;
- soit celles qui s'attaquent à la BMI 3.15 par des méthodes (du point intérieur [HSvdMB03, LM02], avec fonction pénalité/barrière spectrale [TNA04]) spécifiques et adaptées à la non convexité du problème.

Ces 2 dernières catégories de méthode présentent généralement une garantie théorique de convergence vers un minimum local, mais elles ont souvent une complexité d'implémentation numérique qui est hors de portée du cadre applicatif de cette thèse.

3.3 Ordre fixé par factorisations premières normalisées

Dans [VM97], les auteurs ont proposé une méthode de synthèse H_∞ à ordre fixé par l'optimisation sous contraintes LMI, spécifique au formalisme *Loop-Shaping*. En effet, elle étend les résultats spécifiques à la stabilisation robuste d'un système décrit par ses facteurs premiers [GM89] en partant du lemme suivant.

Lemme 3.2. *[VM97] Soit $G_s(s) = \tilde{M}_s(s)^{-1}\tilde{N}_s(s)$, avec $\tilde{M}_s, \tilde{N}_s \in RH_\infty$ les facteurs premiers à gauche normalisés ($\tilde{M}_s(s)\tilde{M}_s^*(s) + \tilde{N}_s(s)\tilde{N}_s^*(s) = I$) de G_s, les propositions suivantes sont équivalentes :*

a) K_s stabilise le système G_s et vérifie :

$$\left\| \begin{bmatrix} I \\ K_s \end{bmatrix} (I - G_s K_s)^{-1} \tilde{M}_s^{-1} \right\|_\infty < \gamma. \tag{3.28}$$

b) $\exists Q \in L_\infty$ ayant autant de pôles que de zéros à partie réelle strictement positive, $\exists$ $U_s, V_s \in RH_\infty$, tels que $K_s(s) = U_s(s)V_s(s)^{-1}$ et

$$\left\| \begin{bmatrix} -\tilde{M}_s^* \\ \tilde{N}_s^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_s \\ U_s \end{bmatrix} Q \right\|_\infty < \sqrt{1-\gamma^{-2}}. \tag{3.29}$$

Ainsi la stabilisation robuste d'un *loopshape* $G_s(s) = \tilde{M}_s(s)^{-1}\tilde{N}_s(s)$ est équivalente à

$$\inf_{Z_s \in RH_\infty, Q \in L_\infty} \left\| \begin{bmatrix} -\tilde{M}_s^* \\ \tilde{N}_s^* \end{bmatrix} - Z_s Q \right\|_\infty, \tag{3.30}$$

où

$$Z_s(s) = \begin{bmatrix} V_s(s) \\ U_s(s) \end{bmatrix} \in RH_\infty \tag{3.31}$$

est une factorisation première à droite du correcteur recherché $K_s(s) = U_s(s)V_s(s)^{-1}$ d'ordre réduit :

$$\partial^\circ K_s = \partial^\circ Z_s = k_s < \partial^\circ G_s$$

et $Q \in L_\infty$ ayant autant de pôles que de zéros à partie réelle strictement positive.

Résoudre 3.30 simultanément sur Z_s et Q est difficile car l'application du lemme borné réel résulterait en une contrainte de type BMI. Les auteurs de [VM97] proposent alors un algorithme de résolution itératif en optimisant alternativement sur Z_s et Q :

Etape 1 : Choix d'un K_s initial stabilisant G_s et d'ordre $\partial^\circ K_s = k_s < \partial^\circ G_s$.

Etape 2 : Calcul d'une représentation d'état

$$\begin{bmatrix} V_s \\ U_s \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_{VU} & B_{VU} \\ \hline C_{VU} & D_{VU} \end{array}\right] \tag{3.32}$$

des facteurs premiers normalisés à droite de $K_s(s) = U_s(s)V_s(s)^{-1}$, puis résolution de 3.30 à $Z_s = \begin{bmatrix} V_s \\ U_s \end{bmatrix}$ fixé, c'est à dire recherche d'un $Q \in L_\infty$ satisfaisant

$$\left\| \begin{bmatrix} -\tilde{M}_s^* \\ \tilde{N}_s^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_s \\ U_s \end{bmatrix} Q \right\|_\infty = \sqrt{1 - b^2_{G_s,K_s}}, \tag{3.33}$$

avec

$$b_{G_s,K_s} = \left\| \begin{bmatrix} I \\ K_s \end{bmatrix} (I - G_s K_s)^{-1} \tilde{M}_s^{-1} \right\|_\infty^{-1}. \tag{3.34}$$

Un choix possible est

$$\begin{aligned} \hat{Q}(s) &= b_{G_s,K_s}^2 \left(\begin{bmatrix} -\tilde{M}_s(s) & \tilde{N}_s(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s(s) \\ U_s(s) \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= b_{G_s,K_s}^2 \left(\tilde{N}_s(s) U_s(s) - \tilde{M}_s(s) V_s(s) \right)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

En effet si l'on considère une factorisation première à droite $G_s(s) = N_s(s) M_s(s)^{-1}$, avec $N_s, M_s \in RH_\infty$ et normalisés $(N_s^*(s) N_s(s) + M_s^*(s) M_s(s) = I)$, la matrice

$$F = \begin{bmatrix} -\tilde{M}_s & \tilde{N}_s \\ N_s^* & M_s^* \end{bmatrix}$$

est *passe-tout* puisque par définition des facteurs premiers normalisés à gauche et à droite

$$F F^* = I$$

En exploitant l'invariance de la norme H_∞ par multiplication avec F, on a [GM89]

$$\begin{aligned} &\left\| \begin{bmatrix} -\tilde{M}_s^* \\ \tilde{N}_s^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_s \\ U_s \end{bmatrix} \hat{Q} \right\|_\infty \\ &= \left\| \begin{bmatrix} -\tilde{M}_s & \tilde{N}_s \\ N_s^* & M_s^* \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -\tilde{M}_s^* \\ \tilde{N}_s^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_s \\ U_s \end{bmatrix} b_{G_s,K_s}^2 \left(\tilde{N}_s U_s - \tilde{M}_s V_s \right)^{-1} \right) \right\|_\infty \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \left(1 - b_{G_s,K_s}^2\right) I \\ b_{G_s,K_s}^2 \left(N_s^* V_s + M_s^* U_s \right) \left(\tilde{M}_s V_s - \tilde{N}_s U_s \right)^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty \\ &= \sqrt{\left(1 - b_{G_s,K_s}^2\right)^2 + b_{G_s,K_s}^4 \left\| \left(N_s^* V_s + M_s^* U_s \right) \left(\tilde{M}_s V_s - \tilde{N}_s U_s \right)^{-1} \right\|_\infty^2}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

De même

$$\begin{aligned} b_{G_s,K_s}^{-2} &= \left\| \begin{bmatrix} -\tilde{M}_s & \tilde{N}_s \\ N_s^* & M_s^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ K_s \end{bmatrix} (I - G_s K_s)^{-1} \tilde{M}_s^{-1} \right\|_\infty^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} -\tilde{M}_s & \tilde{N}_s \\ N_s^* & M_s^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ U_s \end{bmatrix} \left(\tilde{M}_s V_s - \tilde{N}_s U_s \right)^{-1} \right\|_\infty^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} -I \\ \left(N_s^* V_s + M_s^* U_s \right) \left(\tilde{M}_s V_s - \tilde{N}_s U_s \right)^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty^2 \\ &= 1 + \left\| \left(N_s^* V_s + M_s^* U_s \right) \left(\tilde{M}_s V_s - \tilde{N}_s U_s \right)^{-1} \right\|_\infty^2. \end{aligned} \tag{3.37}$$

En reportant 3.37 dans 3.36 on obtient alors

$$\begin{aligned}\left\| \begin{bmatrix} -\tilde{M}_s^* \\ \tilde{N}_s^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_s \\ U_s \end{bmatrix} \hat{Q} \right\|_\infty &= \sqrt{\left(1 - b_{G_s,K_s}^2\right)^2 + b_{G_s,K_s}^4 \left(b_{G_s,K_s}^{-2} - 1\right)} \\ &= \sqrt{1 - b_{G_s,K_s}^2}.\end{aligned} \tag{3.38}$$

Un autre choix possible est

$$\hat{Q}(s) = \left(\begin{bmatrix} -\tilde{M}_s(s) & \tilde{N}_s(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s(s) \\ U_s(s) \end{bmatrix} \right)^*. \tag{3.39}$$

On retrouvera dans [Fey13, p. 265] des éléments de preuve de l'optimalité semblables à ceux employés ci dessus. Ce dernier $\hat{Q}$ à l'avantage par rapport à celui de 3.35 d'éviter l'inversion, ce qui facilite la mise en oeuvre de l'étape suivante de la procédure de synthèse à ordre fixé.

Etape 3 : Résolution de 3.30 à Q fixé, c'est à dire recherche de

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_s \\ \hat{U}_s \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_{VU} & \hat{B}_{VU} \\ \hline \hat{C}_{VU} & \hat{D}_{VU} \end{array}\right]$$

minimisant β tel que

$$\left\| \begin{bmatrix} -\tilde{M}_s^* \\ \tilde{N}_s^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{V}_s \\ \hat{U}_s \end{bmatrix} Q \right\|_\infty < \beta$$

En appliquant le lemme borné réel, l'inégalité ci-dessus est équivalente à

$$\exists X \succ 0 \quad \text{tq} \quad \begin{bmatrix} A_\beta^T X + X A_\beta & X B_\beta & C_\beta^T \\ B_\beta^T X & -\beta I & D_\beta^T \\ C_\beta & D_\beta & -\beta I \end{bmatrix} \prec 0, \tag{3.40}$$

où (A_β,B_β,C_β,D_β) est une réalisation de

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} -\tilde{M}_s^* \\ \tilde{N}_s^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{V}_s \\ \hat{U}_s \end{bmatrix} Q &= \begin{bmatrix} -\tilde{M}_s^* \\ \tilde{N}_s^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{V}_s \\ \hat{U}_s \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -\tilde{M}_s & \tilde{N}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ U_s \end{bmatrix} \right)^* \quad (Q \text{ donné par } 3.39) \\ &= \left(I - \begin{bmatrix} \hat{V}_s \\ \hat{U}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ U_s \end{bmatrix}^* \right) \begin{bmatrix} -\tilde{M}_s & \tilde{N}_s \end{bmatrix}^*.\end{aligned} \tag{3.41}$$

En posant

$$\begin{bmatrix} -\tilde{M}_s & \tilde{N}_s \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_{MN} & B_{MN} \\ \hline C_{MN} & D_{MN} \end{array}\right],$$

on en déduit

$$\begin{bmatrix} -\tilde{M}_s & \tilde{N}_s \end{bmatrix}^* = \left[\begin{array}{c|c} -A_{MN}^T & C_{MN}^T \\ \hline B_{MN}^T & D_{MN}^T \end{array}\right]. \tag{3.42}$$

De même, on a

$$\begin{bmatrix} V_s \\ U_s \end{bmatrix}^* = \left[\begin{array}{c|c} -A_{VU}^T & C_{VU}^T \\ \hline B_{VU}^T & D_{VU}^T \end{array}\right],$$

et donc

$$I - \begin{bmatrix} \hat{V}_s \\ \hat{U}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ U_s \end{bmatrix}^* = \left[\begin{array}{cc|c} \hat{A}_{VU} & \hat{B}_{VU}B_{VU}^T & -\hat{B}_{VU}D_{VU}^T \\ 0 & -A_{VU}^T & -C_{VU}^T \\ \hline \hat{C}_{VU} & \hat{D}_{VU}B_{VU}^T & I-\hat{D}_{VU}D_{VU}^T \end{array}\right]. \tag{3.43}$$

Ce qui permet d'aboutir à la représentation d'état

$$\left[\begin{array}{c|c} A_\beta & B_\beta \\ \hline C_\beta & D_\beta \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} \hat{A}_{VU} & \hat{B}_{VU}B_{VU}^T & -\hat{B}_{VU}D_{VU}^TB_{MN}^T & -\hat{B}_{VU}D_{VU}^TD_{MN}^T \\ 0 & -A_{VU}^T & -C_{VU}^TB_{MN}^T & -C_{VU}^TD_{MN}^T \\ 0 & 0 & -A_{MN}^T & C_{MN}^T \\ \hline \hat{C}_{VU} & \hat{D}_{VU}B_{VU}^T & (I-\hat{D}_{VU}D_{VU}^T)B_{MN}^T & (I-\hat{D}_{VU}D_{VU}^T)D_{MN}^T \end{array}\right] \tag{3.44}$$

Afin de rendre l'inégalité matricielle 3.40 affine en les paramètres d'optimisation, les auteurs proposent de fixer les matrices d'état

$$\hat{A}_{VU} = A_{VU}, \quad \hat{B}_{VU} = B_{VU} \ , \tag{3.45}$$

et de minimiser β sous contrainte 3.40 qui est cette fois une LMI en β, X, $\hat{C}_{VU}$ et $\hat{D}_{VU}$.

Ce choix d'imposer 3.45 restreint en fait assez peu l'éventail des solutions possibles, en effet les auteurs ont montré que presque tous les correcteurs peuvent être obtenus en laissant libres $\hat{C}_{VU}$ et $\hat{D}_{VU}$ seulement. Par ailleurs cela permet aussi d'imposer l'ordre de $\begin{bmatrix} \hat{V}_s \\ \hat{U}_s \end{bmatrix}$ qui reste égal à celui du K_s initial.

Etape 4 : Reconstruction d'une réalisation de K_s

$$K_s = \left[\begin{array}{c|c} A_{VU} - B_{VU}\hat{D}_V^{-1}\hat{C}_V & -B_{VU}\hat{D}_V^{-1} \\ \hline \hat{C}_U - \hat{D}_U\hat{D}_V^{-1}\hat{C}_V & \hat{D}_U\hat{D}_V^{-1} \end{array}\right] \tag{3.46}$$

avec

$$\hat{C}_{VU} = \begin{bmatrix} \hat{C}_V \\ \hat{C}_U \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{D}_{VU} = \begin{bmatrix} \hat{D}_V \\ \hat{D}_U \end{bmatrix}$$

puis retour à l'**Etape 2**, tant que le critère d'arrêt sur β n'est pas rempli.

Pour mettre en oeuvre cet algorithme, la principale difficulté est l'initialisation (**Etape 1**), c'est-à-dire trouver K_s stabilisant et d'ordre recherché. En effet la stabilisation à ordre fixé est un problème BMI, cela correspond au bloc (1,1) de la BMI 3.15 issue du lemme borné réel. La solution la plus simple pour l'initialisation est la réduction *a posteriori* du K_s d'ordre plein, mais comme nous l'avons indiqué précédemment, cette méthode ne garantit pas la préservation de la stabilité initiale du bouclage.

Pour l'application présentée au chapitre 2, nous avons donc initialisé cet algorithme en procédant par réduction *a posteriori* des facteurs premiers normalisés (routine *ncfmr*) du K_s d'ordre plein, pour différentes valeurs décroissantes de k_s (ordre réduit désiré), ceci tant que le K_s réduit *a posteriori* stabilise G_s. Les autres méthodes de réduction discutées précédemment donnent de moins bons résultats en terme d'ordre, vis-à-vis de cette contrainte de stabilité nécessaire à la bonne initialisation de l'algorithme.

Le Tableau 3.1 présente l'évolution des marges de stabilité en fonction de k_s, ainsi que les temps d'exécution (sur un PC équipé d'un processeur Intel Core i5-2500 @3,3GHz, 8Go de RAM) de l'algorithme. Pour le cas $k_s = 5$, la figure 3.2 montre le diagramme de Black-

Nichols de la boucle ouverte en entrée

$$\begin{aligned} L_u &= KG \\ &= (-W_{in}K_sW_{out})G \end{aligned}$$

obtenue avec le K_s d'ordre plein, le K_s initial d'ordre $k_s = 5$ et le K_s d'ordre $k_s = 5$ obtenu après optimisation par l'algorithme de Vinnicombe et Miyamoto.

$\partial^\circ K_s$	γ	$\partial^\circ K_\Omega$	$\partial^\circ K_i$	GM_u	PM_u	temps
7	5,67	23	10	6,8 dB	46 °	160 s
6	5	22	9	7 dB	40 °	157 s
5	5	21	8	6,6 dB	40 °	90 s

Tableau 3.1 – Synthèse H_∞ à ordre fixé (Vinnicombe et Miyamoto)

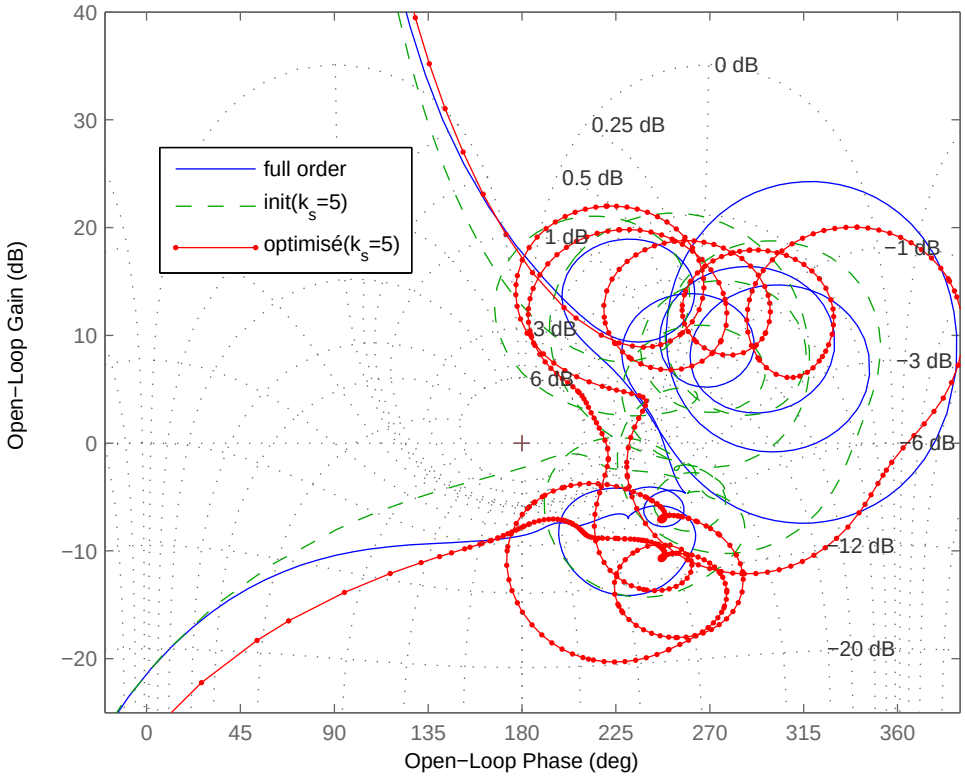

Figure 3.2 – Diagramme de Black-Nichols de la boucle ouverte en entrée (Vinnicombe et Miyamoto)

L'effet de l'algorithme sur le correcteur initial s'observe notamment par l'éloignement du point critique du lieu de la boucle ouverte.

Il serait logique de chercher à comparer ces résultats avec ceux obtenus par les méthodes de réduction a posteriori, présentés dans le Tableau 2.2. On en déduirait alors que cette méthode est moins performante puisque les seuls critères de comparaison possibles sont les marges de stabilités (marge de gain et marge de phase) obtenues et l'ordre des correcteurs SISO en K_Ω et K_i. Cependant cet algorithme de synthèse à ordre fixé dispose d'avantages certains :

– Il permet de conserver la notion de robustesse en stabilité associée à la stabilisation robuste des facteurs premiers normalisés à l'origine de la synthèse H_∞ par *Loop-Shaping*.

– Sa mise en oeuvre par LMI est beaucoup plus simple que l'approche LMI standard [GA94] qui nécessite de lourds changements de variables.

Toutefois ses inconvénients sont :

– L'initialisation : le problème de la réduction d'ordre est déporté sur l'obtention d'un K_s initial, stabilisant et d'ordre désiré.
– La schématique reste figée dans la mesure où la réduction d'ordre ne porte que sur le pré-correcteur K_s et non sur le correcteur final K dont l'ordre est finalement au moins égal à celui des pondérations, ce qui constitue une limitation certaine, notamment lorsque la déclinaison fréquentielle des objectifs de synthèse amène à des pondérations d'ordre élevé.

3.4 Autres algorithmes

Sans être exhaustif, on peut citer à titre d'exemple :

– **La X-K itération**
La philosophie de cette heuristique est semblable à celle de la section précédente dans la mesure où elle consiste à minimiser γ sous la contrainte 3.15 alternativement suivant X_{bf} et Θ. L'algorithme [EGB94] est le suivant :

Etape 1 : Trouver un correcteur initial K_0 stabilisant et d'ordre désiré k, poser $r = 0$, et

$$\Theta_0 = \begin{bmatrix} A_{K_0} & B_{K_0} \\ C_{K_0} & D_{K_0} \end{bmatrix}.$$

Etape 2 : Trouver $(X_{bf})_r \succ 0$ minimisant γ sous contrainte 3.15, à $\Theta = \Theta_r$ fixé.

Etape 3 : Trouver Θ_{r+1} minimisant γ sous contrainte 3.15, à $X_{bf} = (X_{bf})_r$ fixé.

Etape 4 : Stopper si $r = r_{max}$ ou $|\gamma_r - \gamma_{r+1}| < \varepsilon \ll 1$, sinon retour à **Etape 2**.

Nous avons appliqué cet algorithme au critère 4-blocs de la synthèse H_∞ par *Loop-Shaping* (figure 3.3). Le système augmenté relatif à ce problème est défini comme suit :

$$\begin{aligned} P(s) &= \left[\begin{array}{c|c} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ \hline P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & I \\ G_s(s) & I & G_s(s) \\ \hline G_s(s) & I & G_s(s) \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ I \\ \hline I \end{array}\right] G_s(s) \left[\begin{array}{cc|c} I & 0 & I \end{array}\right], \end{aligned} \tag{3.47}$$

ce qui permet de construire aisément une réalisation minimale 3.5 de P à partir de celle du *loopshape* G_s.
Nous avons initialisé cet algorithme de la même manière que celui de Vinnicombe et Miyamoto. Pour un K_s initial d'ordre $\partial^\circ K_s = 5$, on obtient les résultats du Tableau 3.2 et de la Figure 3.4. Pour cette application, cet algorithme est donc moins performant que celui de Vinnicombe et Miyamoto. Toutefois, même si nous l'avons appliqué au même problème, à des fins de comparaisons, il est beaucoup plus général dans la mesure ou il peut être appliqué à tout problème formulé sous forme standard.

– **Les méthodes par lagrangien augmenté**

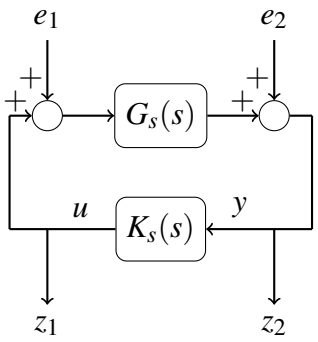

Figure 3.3 – Système augmenté - Synthèse H_∞ par *Loop-Shaping*

$\partial^\circ K_s$	γ	$\partial^\circ K_\Omega$	$\partial^\circ K_i$	GM_u	PM_u	temps
5	5,4	21	8	7,8 dB	32,3 °	1433 s

Tableau 3.2 – Synthèse H_∞ de K_s à ordre fixé (X-K itération)

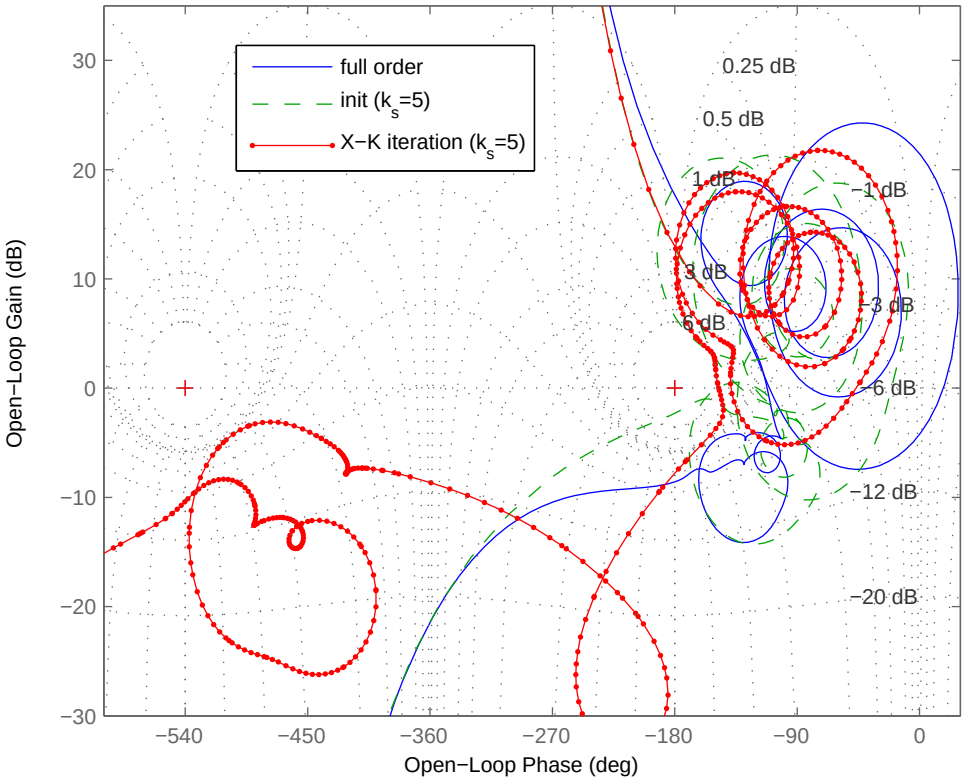

Figure 3.4 – Diagramme de Black-Nichols de la boucle ouverte en entrée (X-K itération)

Dans les méthodes du lagrangien augmenté [ANT03], la contrainte de rang 3.25 est reformulée sous forme de contrainte d'égalité matricielle bilinéaire

$$I_n - RS = 0 \tag{3.48}$$

En effet la synthèse d'un correcteur $K(s) = D_K + C_K(sI_k - A_K)^{-1}B_K$, d'ordre fixé $k < n$,

peut être vue comme celle d'un correcteur (gain) statique

$$K \leftarrow \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix},$$

pour le système augmenté dont les matrices sont données par

$$\begin{aligned} A &\leftarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_k \end{bmatrix}, \quad B_1 \leftarrow \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ I_k & 0 \end{bmatrix}, \\ C_1 &\leftarrow \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = D_{11}, \quad D_{12} \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & D_{12} \end{bmatrix}, \\ C_2 &\leftarrow \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ D_{21} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

La contrainte 3.25 du Théorème 3.1 devient 3.48 dans le cas statique (correcteur d'ordre zéro). Le problème de faisabilité pour la synthèse à ordre fixé se présente alors sous la forme

$$\begin{aligned} \min_{\gamma,R,S} \quad & \gamma \\ \text{sous contraintes :} \quad & LMI(R,S,\gamma) \preceq 0 \\ & I - RS = 0, \end{aligned} \tag{3.50}$$

où $LMI(R,S,\gamma) \preceq 0$ est la concaténation des LMI 3.22 à 3.24. Les auteurs proposent alors de résoudre à la place de 3.50, une série de problèmes relaxés

$$\begin{aligned} \min_{\gamma,R,S} \quad & L_c(\gamma,R,S,\Lambda) \\ \text{sous contrainte :} \quad & LMI(R,S,\gamma) \preceq 0, \end{aligned} \tag{3.51}$$

où

$$L_c(\gamma,R,S,\Lambda) = \gamma + \mathrm{Tr}\left(\Lambda^T(RS-I)\right) + \frac{c}{2}\mathrm{Tr}\left((RS-I)^T(RS-I)\right) \tag{3.52}$$

est le lagrangien partiellement augmenté, c (coefficient de pénalité) et Λ (multiplicateur matriciel de Lagrange) étant mis à jour selon une stratégie bien adaptée. Chaque problème relaxé 3.51 est résolu de manière itérative en minimisant une approximation du second ordre du lagrangien partiellement augmenté

$$\begin{aligned} \min_{dx} \quad & \nabla_x L_c(x,\Lambda)^T dx + \tfrac{1}{2} dx^T H(x) dx \\ \text{sous contrainte :} \quad & LMI(x+dx) \preceq 0, \end{aligned} \tag{3.53}$$

où

$$x = \begin{bmatrix} \gamma \\ vec(R) \\ vec(S) \end{bmatrix},$$

est le point courant, $\nabla_x L_c(x,\Lambda)$ est le gradient du lagrangien et $H(x)$ une approximation définie positive du hessien de $L_c(x,\Lambda)$, et $vec(R)$, $vec(S)$ les vecteurs des coefficients des matrices R et S respectivement.

Cette approche semble produire des résultats intéressant pour des systèmes augmentés (modèle de synthèse et pondérations) de faible dimension ($n = 10$ au maximum) comparés à ceux rencontrés dans les cas des viseurs ($n = 37$ pour l'application traitée ici), mais aucune implémentation numérique de ces algorithmes n'est publiquement accessible. Or d'après les auteurs, une bonne implémentation de cet algorithme est cru-

ciale, notamment vis-à-vis de la régularisation du hessien, qui compte tenu de la non convexité de la contrainte d'égalité bilinéaire prise en compte dans le lagrangien, peut ne pas être défini positif.

3.5 Conclusion sur les approches par LMI

De nombreuses heuristiques de synthèse à ordre fixé par l'optimisation sous contraintes LMI ont été proposées dans la littérature ces 20 dernières années. Dans ce chapitre, nous avons particulièrement insisté sur l'approche par factorisations copremières, qui est simple du point de vue de l'implémentation numérique et présente des résultats acceptables à défaut d'être satisfaisants. En effet, du fait de la structure figée du problème résolu, la réduction d'ordre n'est pas significative comparé aux approches de réduction *a posteriori*. Ceci est dû au fait que les pondérations de la synthèse par *Loop-Shaping* ne sont pas prises en compte dans le problème d'optimisation à ordre fixé portant uniquement sur K_s, or la contribution de ces pondérations dans l'ordre du correcteur final $K = -W_{in}K_sW_{out}$ est souvent non négligeable dans les applications qui nous intéressent. Par ailleurs, pour les autres approches envisagées dans le cadre LMI, soit elles sont facilement implémentables mais aboutissent à des résultats moins bons pour l'application traitée, soit elles requièrent de solides compétences en optimisation numérique pour être bien implémentées et exploitées.

Dans les chapitres suivants nous allons donc nous intéresser à d'autres types de méthodes numériques d'optimisation, permettant de résoudre le problème de synthèse à ordre fixé, et dont une implémentation numérique et efficace existe sous forme d'outils publics ou privés. Ensuite nous proposerons une méthodologie pour la synthèse à ordre et structure fixé permettant : soit de prendre en compte la structure des pondérations si celles-ci ont déjà été convenablement réglées auparavant, soit de calculer automatiquement celles-ci à partir d'un gabarit du gain en boucle ouverte convenablement réglé.

Chapitre 4

Synthèse H_∞ à ordre fixé par l'optimisation non lisse

Cette approche consiste à formuler le problème de synthèse directement et uniquement en termes des vraies variables d'optimisation, c'est à dire les matrices d'état du correcteur

$$\Theta = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+m_2)\times(k+p_2)}$$

sans passer par l'application du lemme borné réel et donc l'introduction de variables supplémentaires (matrices de Lyapunov permettant d'imposer la stabilité en boucle fermée).

La stabilisation par exemple peut être formulée de la manière suivante :

$$\min_{\Theta} \quad \max_{1\leq i\leq n+k} Re\left(\lambda_i\left(A_{bf}\left(\Theta\right)\right)\right) \tag{4.1}$$

où A_{bf} est définie en 3.13, et l'optimisation de la norme H_∞ en boucle fermée ainsi

$$\min_{\Theta} \quad \max_{1\leq i\leq \min(m_1,p_1)} \quad \max_{\omega\geq 0} \sigma_i\left(\mathcal{F}\left(P\left(j\omega\right),K\left(j\omega,\Theta\right)\right)\right) \tag{4.2}$$

Ces problèmes d'optimisation sont non-convexes, du fait de l'ordre et/ou de la structure fixée du correcteur, et aussi non lisses (au sens de la définition 4.1 donnée ci-après) car faisant intervenir des fonctions coût non lisses.

Dans la première section de ce chapitre nous rappelons dans un premier temps les notions fondamentales liées à *l'analyse et l'optimisation non lisse* en suivant l'exposé rigoureux et complet présenté dans [Bom07, Sim08], ensuite nous présentons les algorithmes et les outils numériques disponibles associés (HIFOO [GHMO09] et HINFSTRUCT [AN06a]) permettant de résoudre 4.1 et 4.2 et donc le problème de synthèse H_∞ standard à ordre et/ou structure fixés par l'optimisation non lisse. Enfin, nous terminerons ce chapitre par l'application de ces outils à la synthèse H_∞ d'un précorrecteur K_s d'ordre et structure fixés, sur l'exemple introduit au chapitre 2.

4.1 Optimisation non lisse : cadre théorique, algorithmes et outils pour la synthèse de correcteurs

4.1.1 Notions d'analyse et d'optimisation non lisse

Dans [Roc94], l'auteur donne la définition suivante

Définition 4.1. *Une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est dite lisse si elle est différentiable et de dérivées continues*

Par opposition une fonction *non lisse* ne dispose donc pas de cette propriété de régularité *forte* habituellement requise en analyse et en optimisation classique. En réalité ces fonctions *non lisses* sont généralement non-différentiables seulement sur un ensemble fini de points, c'est-à-dire un ensemble de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$. On les suppose alors au moins localement lipschitziennes.

Définition 4.2. *Une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est localement Lipschitzienne en $x \in \mathbb{R}^n$, de constante de Lipschpitz $L > 0$, si $\exists \varepsilon > 0$ tel que*

$$|f(y) - f(z)| \leq L \|y - z\|,$$

pour tout $(y,z) \in B(x;\varepsilon)$, où $B(x;\varepsilon)$ est la boule ouverte de centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $\varepsilon > 0$.

Cette hypothèse minimale de régularité permet d'assurer un taux d'accroissement borné de f en tout point $x \in \mathbb{R}^n$, même si celle-ci n'y est pas différentiable, ce qui, on le verra dans la suite, permet de définir des outils pertinents pour le calcul des variations dans le cas des fonctions non lisses.

En vue de la résolution du problème d'optimisation sans contraintes

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \tag{4.3}$$

les principales difficultés dues au caractère *non lisse* de f sont alors :

- d'une part l'impossibilité, puisque le gradient n'est pas toujours défini, de construire à partir de ce dernier et en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ une direction de descente $d \in \mathbb{R}^n$ pour la fonction f, c'est à dire telle que

$$d^T \nabla f(x) < 0$$

- d'autre part le fait que ces points de non-différentiabilité de f sont souvent des minima locaux de la fonction en question, ce qui rend donc impossible l'utilisation de la condition d'optimalité classique sur la nullité du gradient

$$\nabla f(x^*) = 0 \tag{4.4}$$

si x^* est un minimum local de f (dans le cas où elle est différentiable).

La résolution de 4.3 requiert alors, dans ce cas, des algorithmes spécifiques et exploitant la structure particulière de ces fonctions en vue de compenser cette absence de différentiabilité. La théorie de *l'analyse et l'optimisation non lisse* [Cla83], reposant sur des outils mathématiques tels que la *dérivée directionnelle généralisée*, les *sous-gradients de Clarke* (ou *gradients généralisés*), étend à cette classe de fonctions les possibilités d'approximations locales qu'offrent le développement de Taylor (du 1$^{\text{er}}$ voire du 2$^{\text{nd}}$ ordre si nécessaire) dans le

cas des fonctions différentiables. Ces approximations locales des fonctions permettent alors de construire des schémas numériques d'optimisation semblables à ceux employés dans les méthodes itératives classiques de descente.

4.1.1.1 Rappels sur les méthodes de descente dans le cas lisse

Les méthodes de descente permettent, à partir d'un point initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, de construire une suite d'itérés $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un minimum local de f lorsque $k \to \infty$. Cette suite est définie par la récurrence

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \tag{4.5}$$

où d_k est une direction de descente de f et $\alpha_k > 0$ le pas de descente.

Un algorithme de descente est généralement structuré de la manière suivante :

Etape 1 : (*Initialisation*)

Choisir $0 < \varepsilon \ll 1$, le point initial x_0 et poser $k = 0$.

Etape 2 : (*Direction de descente*)

Calculer une direction de descente d_k.

Etape 3 : (*Recherche linéaire*)

Calculer le pas de descente $\alpha_k > 0$ tel que $f(x_k + \alpha_k d_k) < f(x_k)$

Etape 4 : (*Test d'arrêt et Mise à jour*)

Si $\|\nabla f(x_k)\| \leq \varepsilon$ STOP. Sinon, mise à jour :

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \quad , \quad k = k+1 \ ,$$

et retour à l'**Etape 2**.

Les étapes 2 et 3 constituent le coeur des méthodes de descente. En premier lieu, nous allons évoquer les différentes stratégies de choix de la direction de descente, choix dont découle généralement le nom donné à l'algorithme en question :

- **Descente du gradient** ou plus profonde descente (*steepest descent*)
  A chaque itération k, la direction de descente choisie est opposée au gradient

  $$d_k = -\nabla f(x_k), \tag{4.6}$$

  et correspond à la direction de plus forte diminution de la fonction f dans l'ensemble des directions de descente de f en x_k

  $$\left\{ \ d \in \mathbb{R}^n \ : \ d^T \nabla f(x_k) < 0 \ \right\}.$$

  Lorsqu'on se trouve loin d'un minimum, cette stratégie est judicieuse. Mais elle le devient beaucoup moins lorsqu'on s'en approche, puisque le gradient ne contient qu'une information du premier ordre et donc ignore la courbure de la fonction f (information du second ordre). Typiquement, lorsque le minimum est un point de forte courbure, l'algorithme oscille à l'approche de ce minimum et progresse (converge) lentement.
- **Descente de Newton**
  La stratégie de Newton consiste à supposer que la fonction f à minimiser, qui est lisse (ou continument différentiable), peut être bien approximée localement par un modèle

quadratique (développement de Taylor du 2nd ordre autour de x_k) :

$$\begin{aligned} h(d_k) &= f(x_k) + d_k^T \nabla f(x_k) + \frac{1}{2} d_k^T [\nabla^2 f(x_k)] d_k \\ &\approx f(x + d_k). \end{aligned} \tag{4.7}$$

En supposant $[\nabla^2 f(x_k)]$ définie positive, le minimum de la fonction h est donné par

$$d_k = -[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k), \tag{4.8}$$

qui définit la direction de descente de Newton. Cette dernière prend en compte cette fois la courbure de la fonction f à travers le hessien $[\nabla^2 f(x_k)]$. Toutefois cette méthode présente quelques inconvénients tels que la nécessité d'inverser le hessien (ou plutôt la résolution de $[\nabla^2 f(x_k)] d_k = -\nabla f(x_k)$), ce qui peut être coûteux en calcul si la dimension du problème n est grande ; ou alors le fait que $[\nabla^2 f(x_k)]$ peut être numériquement mal conditionné (proche de l'instabilité), ce qui requiert un mécanisme de correction dit de *régularisation* [NW99, Chapitre 6, p. 141-154] dans le langage de l'optimisation.

– **Descente quasi-Newton** (BFGS)
L'idée de base des méthodes quasi-Newton [NW06, Chapitre 6] est d'éviter de calculer l'inverse du hessien $[\nabla^2 f(x_k)]^{-1}$ et d'utiliser une direction de descente

$$d_k = -H_k \nabla f(x_k), \tag{4.9}$$

où H_k est une matrice symétrique, mise à jour à chaque itération et ayant certaines des caractéristiques de l'inverse du Hessien. La première de ces caractéristiques est $H_k \succ 0$, afin d'avoir $d_k^T \nabla f(x_k) < 0$, et donc que d_k définisse bien une direction de descente. Ensuite, pour la mise à jour, on requiert

$$H_{k+1}(\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)) = x_{k+1} - x_k,$$

appelée équation de la sécante, ainsi que

$$H_{k+1} = \arg\min_H \|H - H_k\|, \tag{4.10}$$

c'est à dire choisir H_{k+1} comme étant la matrice symétrique définie positive la plus poche de H_k, au sens d'une certaine norme matricielle et vérifiant l'équation de la sécante. Le choix de la norme matricielle différentie les approches Quasi-Newton.
La plus connue de ces méthodes est appelée BFGS(Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno), avec un mécanisme de mise à jour

$$H_{k+1} \quad = \quad V_k H_k V_k^T + \alpha_k (d_k^T y_k)^{-1} d_k d_k^T \ , \tag{4.11}$$

où

$$y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) \quad , \quad V_k = I - (d_k^T y_k)^{-1} d_k y_k^T \ . \tag{4.12}$$

La matrice H_0 initiale est choisie définie positive, souvent égale à la matrice identité. Les méthodes quasi-Newton prennent donc en compte l'information de courbure (affinée au fil des itérations et de la mise à jour de H_k), ce qui améliore nettement la convergence par rapport à la méthode du gradient, mais sans avoir à calculer explicitement le hessien et en utilisant uniquement l'information donnée par le gradient (pour calculer y_k et d_k), ce qui les rend aussi plus efficaces que les méthodes de Newton. Au-

jourd'hui, de nombreux codes d'optimisation (libres ou commerciaux) reposent sur des méthodes de descente du type quasi-Newton.

Après avoir trouvé une direction de descente par l'une ou l'autre de ces stratégies, il est nécessaire ensuite de trouver un pas de descente convenable. En effet, étant donné une direction de descente d_k, on peut toujours trouver $\hat{\alpha}$ suffisamment petit tel que $f(x_k+\hat{\alpha}d_k) < f(x_k)$, cependant il est préférable d'avoir un pas de descente pas trop petit et qui assure que la fonction décroit suffisamment. Les méthodes de recherche linéaire [NW06, Chapitre 3] permettent cela en imposant des conditions sur le pas de descente recherché :

- **Recherche linéaire avec règle d'Armijo**
  Pour $c_1 \in]0,1[$ on cherche le plus grand $\alpha_k > 0$ tel que

$$f(x_k+\alpha_k d_k) \leq f(x_k) + c_1 d_k^T \nabla f(x_k), \tag{4.13}$$

  ce qui revient à assurer une décroissance de f au moins égale à une certaine portion c_1 de celle du modèle linéaire tangent de f en x_k. Un tel pas de descente est généralement obtenu par la procédure de rebroussement (*Backtracking*), qui consiste à essayer d'abord $\alpha_k = 1$, puis

$$\alpha_k \leftarrow \rho\alpha_k \quad , \quad \rho \in]0,1[$$

  tant que 4.13 n'est pas rempli. La constante c_1 est choisie très petite (typiquement $c_1 = 10^{-4}$), afin de satisfaire facilement 4.13.
- **Recherche linéaire avec règle de Wolfe**
  Afin d'éviter de faire des pas de descente trop petits, qui peuvent provoquer une convergence trop lente, ce type de recherche linéaire impose, en plus de la condition d'Armijo 4.13, une condition sur le gradient de la fonction. Pour c_1 et c_2 dans l'intervalle $]0,1[$ et tels que $c_1 < c_2$, on peut soit exiger

$$d_k^T \nabla f(x_k+\alpha_k d_k) \geq c_2 d_k^T \nabla f(x_k) \quad \text{(condition de Wolfe faible)}, \tag{4.14}$$

  ou alors

$$|d_k^T \nabla f(x_k+\alpha_k d_k)| \leq c_2 |d_k^T \nabla f(x_k)| \quad \text{(condition de Wolfe forte)}. \tag{4.15}$$

  La recherche linaire avec règles de Wolfe (faible ou forte) est bien adaptée aux méthodes quasi Newton du type BFGS. En effet 4.15 implique 4.14 puisque $d_k^T \nabla f(x_k) < 0$ (d_k est une direction de descente de f en x_k), et de plus 4.14 peut être écrite sous la forme équivalente

$$d_k^T (\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)) \geq (c_2 - 1) d_k^T \nabla f(x_k) > 0,$$

  donc $d_k^T y_k > 0$ (y_k définie par 4.12), ce qui implique que la mise à jour BFGS 4.11 est bien définie positive. Les valeurs $c_1 = 10^{-4}$ et $c_2 = 0,9$ sont couramment utilisées.

4.1.1.2 Sous-gradients et directions de descente dans le cas non lisse

Dans le cas des fonctions seulement *localement lipschitziennes*, les dérivées directionnelles classiques (composantes du gradient) n'étant pas forcement définies, Clarke [Cla83] a introduit les notions de *dérivée directionnelle généralisée* et de *sous-gradients généralisés*.

Définition 4.3. *Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne en $x \in \mathbb{R}^n$. La dérivée*

directionnelle généralisée en x dans la direction $d \in \mathbb{R}^n$ est définie par

$$f^\circ(x;d) = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y+td)-f(y)}{t}$$

L'existence de $f^\circ(x;d)$ est assurée par le fait que f est *L-Lipschitzienne*, et de plus :

$$|f^\circ(x;d)| \leq L\|d\| \tag{4.16}$$

Définition 4.4. *Le sous-différentiel de Clarke de la fonction f en $x \in \mathbb{R}^n$ est l'ensemble*

$$\partial f(x) = \left\{ \; s \in \mathbb{R}^n \quad | \quad f^\circ(x;d) \geq s^T v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \; \right\}$$

Tout vecteur $s \in \partial f(x)$ est alors appelé *sous-gradient de Clarke* ou *gradient généralisé* de f en x.

A partir du *sous-différentiel de Clarke*, une condition nécessaire d'optimalité pour le problème d'optimisation non lisse sans contrainte est alors donnée par le Théorème suivant.

Théorème 4.1. *Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne. Si f atteint un minimum local en x^*, alors*

$$0 \in \partial f(x^*) \tag{4.17}$$

Un point satisfaisant cette condition 4.17 est dit *point critique* ou *point stationnaire* de f. L'autre nécessité en vue d'un mécanisme de descente pour l'optimisation est la caractérisation d'une direction de descente dans le cas non lisse, celle-ci est fournie par le Théorème suivant.

Théorème 4.2. *Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne en $x \in \mathbb{R}^n$. $d \in \mathbb{R}^n$ est une direction de descente de f en x si l'une des conditions équivalentes suivantes est remplies*

i) $f^\circ(x;d) < 0$

ii) $d^T g < 0$ *pour tout* $g \in \partial f(x)$

Dans le cas où f est *lisse*, on retrouve la condition usuelle

$$d^T \nabla f(x) < 0$$

pour que $d \in \mathbb{R}^n$ soit une direction de descente de f en x.

4.1.2 Algorithmes et outils pour la synthèse de correcteurs par l'optimisation non lisse

Dans la suite, compte tenu du type de problèmes 4.1 et 4.2 qui nous intéressent, nous allons considérer directement la classe particulière des problèmes d'optimisation non lisse du type *minimax*, où la fonction coût est de la forme

$$f(x) = \max_{j \in \mathcal{J}} f_j(x), \tag{4.18}$$

où $\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & r \end{bmatrix}$ est l'ensemble fini des indices, avec 2 cas de figure pour le type des fonctions f_j.

4.1.2.1 Problèmes minimax fini

Le problème d'optimisation est de type minimax fini si les $f_j : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ sont continûment différentiables. Dans ce cas le sous différentiel de Clarke est donné par (avec *co* signifiant l'enveloppe convexe)

$$\partial f(x) = \underset{j\in\mathcal{J}(x)}{co} \left\{\nabla f_j(x)\right\}, \tag{4.19}$$

avec $\mathcal{J}(x) = \left\{ \; j \in \mathcal{J} \quad : \quad f_j(x) = f(x) \; \right\}$ l'ensemble des indices *actifs*, c'est à dire où le max est atteint. Le fait qu'en un point quelconque $x \in \mathbb{R}^n$, cet ensemble $\mathcal{J}(x)$ ne soit pas réduit à un singleton, c'est à dire que le max soit atteint à plusieurs indices, est à l'origine de la non différentiabilité de la fonction f en x. Par ailleurs, de tels points sont souvent des minima locaux. La figure 4.1 illustre cette idée.

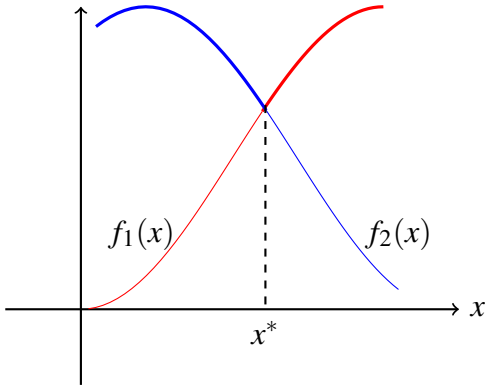

Figure 4.1 – La fonction $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$ (en gras)

Bien que le problème de stabilisation 4.1 semble avoir cette forme, en toute rigueur il n'est pas exactement de cette catégorie. En effet la fonction coût considérée dans ce cas, l'abscisse spectrale de la matrice d'état en boucle fermée $\alpha\left(A_{bf}(\Theta)\right)$ définie ainsi

$$\alpha(M) = \max_i Re(\lambda_i(M)), \tag{4.20}$$

où les $\lambda_i(M)$ sont les valeurs propres de la matrice M, n'est pas généralement localement lipschitzienne. Elle l'est si et seulement si les valeur propres *actives* sont *semi-simples*. Une valeur propre $\lambda_i(M)$ est active si $\alpha(M) = Re(\lambda_i(M))$ et semi-simple si sa multiplicité géométrique (dimension du sous-espace des vecteurs propres associés à cette valeur propre) est égale à sa multiplicité algébrique (multiplicité de la valeur propre en tant que racine du polynôme caractéristique). Dans [BLO02, BLO05], les auteurs ont proposé l'algorithme *Gradient Sampling* pour minimiser ce type de fonctions non lisses et potentiellement non localement lipschitziennes :

Etape 1 : (*Initialisation*)

Choix d'un domaine de faisabilité défini par

$$\mathcal{D}_f = \left\{ \; x \in \mathbb{R}^n \quad : \quad \|x\|_\infty \leq R \; \right\}$$

où R est une constante positive suffisamment grande.

Choix d'un point initial $x_0 \in \mathcal{D}_f$, d'un rayon d'échantillonnage initial $\varepsilon_0 > 0$, d'un facteur de réduction positif $\theta < 1$, d'un nombre d'échantillons de gradients N, de deux entiers M_1 et M_2 pour terminer les itérations. Poser $k = 1$.

Etape 2 : (*Boucle de minimisation par descente*)

Poser $j = 0$

a) Générer de manière aléatoire par une loi uniforme sur

$$B_{\varepsilon_k} = \left\{ \; x \in \mathbb{R}^n \quad : \quad \|x\| \leq \varepsilon_k \; \right\},$$

un échantillon de $N-1$ vecteurs ($u_1, \quad \cdots \quad , u_{N-1}$) et poser

$$G_j = co\left\{ \; \nabla f(x_j), \quad \nabla f(y_{j1}), \quad \cdots \quad , \nabla f(y_{j(N-1)}) \; \right\}$$

où $y_{ji} = x_j + u_i$ pour $i \in \left[1, \quad \cdots \quad , N-1\right]$.

b) Résoudre le problème d'optimisation quadratique

$$\hat{g} = \arg\min \left\{ \; \|g\|^2 \quad : \quad g \in G_j \; \right\}$$

Si $\hat{g} = 0$ aller à l'**Etape 3**. Sinon calculer une direction de descente

$$d_j = -\frac{\hat{g}}{\|\hat{g}\|} \tag{4.21}$$

c) Trouver un pas de descente t_j satisfaisant

$$f(x_j + t_j d_j) < f(x_j) \quad , \quad t_j \in [0, \bar{t}] \tag{4.22}$$

où $\bar{t} = \arg\max \left\{ \; t \quad : \quad x_j + t d_j \in \mathcal{D}_f \; \right\}$

d) Faire $x_j \leftarrow x_j + t_j d_j$. Si $t_j = \bar{t}$, STOP. Si $j < M_2$, faire $j \leftarrow j+1$ et retourner à (a).

Etape 3 : (*Mise à jour et test d'arrêt*)

Si $k < M_1$, faire

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &\leftarrow \theta \varepsilon_k \\ k &\leftarrow k+1 \end{aligned}$$

et retourner à l'**Etape 2**, sinon STOP.

Cet algorithme exploite le fait que le gradient est défini presque partout, en approximant le sous-différentiel en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ par l'enveloppe convexe de gradients générés aléatoirement autour du point x. La définition 4.21 garantit bien que l'on a une direction de descente puisque

$$d_j^T g < 0 \quad \text{pour tout } g \in G_j, \tag{4.23}$$

où l'ensemble des gradients G_j autour du point x_j doit être vu comme une approximation du sous différentiel en x_j. Cette direction de descente est dite de *plus profonde descente* (*steepest descent*).

En pratique le test $\hat{g} = 0$ de l'**Etape 2**(b) est plutôt remplacé par

$$\|\hat{g}\| \leq \tau$$

avec $\tau > 0$ et suffisamment petit. Cela permet de tester numériquement si l'on est proche d'un point critique de la fonction f, afin de remplir la condition nécessaire d'optimalité 4.17.

Cet algorithme est accessible à travers un package Matlab public HANSO (Hybrid Algorithm for NonSmooth Optimization), où il est hybridé avec une méthode quasi-Newton

du type BFGS, utilisée en première phase, car ayant une convergence plus rapide. En effet, bien que la méthode BFGS ait été développée pour des fonctions lisses (continûment différentiables), les auteurs dans [LO12] ont montré qu'en pratique elle peut être utilisée avec succès pour minimiser des fonctions non lisses localement lipschitziennes. L'argument de cette approche est de même nature que celui invoqué pour l'algorithme de *Gradient Sampling*, il repose sur le Théorème de Rademacher [Bom07, p.41], qui assure qu'une fonction lipschitzienne est différentiable presque partout et que donc la probabilité de tomber sur un tel point de non-différentiabilité pendant l'optimisation est nulle. Toutefois l'application de la méthode BFGS à une fonction non lisse exige d'employer dans la phase de recherche linéaire de cet algorithme la règle de Wolfe faible 4.14, puisque celle-ci est moins contraignante sur la norme du gradient qui dans le cas non lisse peut prendre des valeurs élevées ne permettant pas de satisfaire la règle de Wolfe forte 4.15 (voir [LO12, p.5-6] pour un développement plus complet sur ce point clé nécessaire au succès de BFGS dans le cas non lisse, ainsi que l'algorithme de recherche linéaire employé dans ce cas).

Pour le problème de stabilisation, l'abscisse spectrale

$$\alpha(A_{bf}(\Theta)) = \alpha\left(\overline{A} + \overline{B}_2\Theta\overline{C}_2\right) \quad \text{d'après 3.13 ,} \tag{4.24}$$

sera différentiable en un point Θ, si et seulement si il n'y a qu'une seule valeur propre active ou une paire complexe conjuguée, semi-simple et de multiplicité égale à 1 [BLO02, p.124]. Dans ce cas le gradient de l'abscisse spectrale de la matrice d'état en boucle fermée est donné par (en omettant la dépendance en Θ afin d'alléger les notations) :

$$g = Re\left(\left(\overline{C}_2 v u^H \overline{B}_2\right)^H\right) \in \mathbb{R}^{(k+m_2)\times(k+p_2)}, \tag{4.25}$$

où u et v tels que

$$u^T A_{bf} = \lambda_1(A_{bf})u^T \quad , \quad A_{bf}v = \lambda_1(A_{bf})v$$

sont les vecteurs propres respectivement à gauche et à droite, associés à la valeur propre active $\lambda_1(A_{bf})$.

Le seul objectif étant de trouver un correcteur stabilisant, c'est à dire

$$\Theta = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+m_2)\times(k+p_2)} \quad \text{tel que} \quad \alpha\left(A_{bf}(\Theta)\right) < 0, \tag{4.26}$$

il n'est pas nécessaire d'atteindre un minimum local, et on peut stopper l'algorithme dès que 4.26 est remplie. Lorsque l'on atteint un minimum local où cette condition n'est pas remplie, la seule solution possible est de relancer l'algorithme avec un autre point initial.

Plus spécifiquement pour un utilisateur final automaticien, le package HIFOO (H-Infinity Fixed Order Optimization), reposant sur HANSO, permet de résoudre le problème de synthèse H_∞ à ordre et/ou structure fixés, en procédant en 2 étapes : une première étape de stabilisation que nous venons d'évoquer ici, et ensuite une deuxième étape d'optimisation du critère H_∞ en boucle fermée, c'est à dire la résolution de 4.2. Nous allons évoquer ce problème dans la partie suivante, ainsi qu'une autre stratégie proposée dans [AN06a] pour minimiser la norme H_∞ de la fonction de transfert en boucle fermée.

4.1.2.2 Problèmes minimax semi-infinis

Le problème d'optimisation est de type minimax semi-infini si les $f_j : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ sont également défini comme des maximas de fonctions. On a [Bom07, p. 47-48] dans ce cas

$$f_j(x) = \max_{y_j \in Y_j} \phi_j(x, y_j), \tag{4.27}$$

avec pour tout $j \in \mathcal{J}$, Y_j une partie compacte de $\mathbb{R}^{m_j}$ et $\phi_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_j} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et telle que pour tout $y \in \mathbb{R}^{m_j}$, l'application partielle $x \mapsto \phi_j(x, y_j)$ est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n$.

Le sous-différentiel de Clarke est alors donné par

$$\partial f(x) = \underset{j \in \mathcal{J}(x)}{co} \left\{ \underset{y \in Y_j(x)}{co} \left\{ \nabla_x \phi_j(x, y) \right\} \right\}, \tag{4.28}$$

où $Y_j(x) = \left\{ \; y_j \in Y_j \quad : \quad \phi_j(x, y_j) = f_j(x) \; \right\}$ est l'ensemble des valeurs de y actives.

Le problème d'optimisation H_∞ rentre donc dans cette catégorie de problèmes dits d'optimisation semi-infinie. Dans ce cas la variable d'optimisation x correspond aux paramètres du correcteur recherché Θ et les y_j correspondent aux pulsations $\omega \in [0, +\infty[$.

Soit Θ un point tel que la fonction de transfert en boucle fermée $T_{ez}(\Theta, s)$ soit stable. Considérons :

$$\Omega(\Theta) = \left\{ \; \omega \in [0, +\infty[\quad : \quad \|T_{ez}(\Theta)\|_\infty = \overline{\sigma}(T_{ez}(\Theta, j\omega)) \; \right\}, \tag{4.29}$$

l'ensemble fini des pulsations actives, et pour tout $\omega \in \Omega(\Theta)$, une matrice Q_ω telle que ses colonnes forment une base orthonormée de l'espace propre de $T_{ez}(\Theta, j\omega) T_{ez}(\Theta, j\omega)^H$ associé à la plus grande valeur propre

$$\lambda_1 \left(T_{ez}(\Theta, j\omega) T_{ez}(\Theta, j\omega)^H \right) = \overline{\sigma}^2 (T_{ez}(\Theta, j\omega)).$$

Un sous gradient de la norme H_∞ de la fonction de transfert en boucle fermée, en un point

$$\Theta = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+m_2)\times(k+p_2)},$$

est alors donné par [AN06a] :

$$\Phi_{Y_\omega} = \begin{bmatrix} \Phi_{Y_\omega, A_K} & \Phi_{Y_\omega, B_K} \\ \Phi_{Y_\omega, C_K} & \Phi_{Y_\omega, D_K} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+m_2)\times(k+p_2)} \tag{4.30}$$

où

$$\begin{aligned}
\Phi_{Y_\omega, A_K} &= \|T_{ez}(\Theta)\|_\infty^{-1} Re((j\omega - A_K)^{-1} B_K G_{21}(j\omega) T_{ez}(\Theta, j\omega)^H Q_\omega Y_\omega Q_\omega^H \\
&\qquad G_{12}(j\omega) C_K (j\omega - A_K)^{-1})^T, \\
\Phi_{Y_\omega, B_K} &= \|T_{ez}(\Theta)\|_\infty^{-1} Re(G_{21}(j\omega) T_{ez}(\Theta, j\omega)^H Q_\omega Y_\omega Q_\omega^H G_{12}(j\omega) C_K (j\omega - A_K)^{-1})^T, \\
\Phi_{Y_\omega, C_K} &= \|T_{ez}(\Theta)\|_\infty^{-1} Re((j\omega - A_K)^{-1} B_K G_{21}(j\omega) T_{ez}(\Theta, j\omega)^H Q_\omega Y_\omega Q_\omega^H G_{12}(j\omega))^T, \\
\Phi_{Y_\omega, D_K} &= \|T_{ez}(\Theta)\|_\infty^{-1} Re(G_{21}(j\omega) T_{ez}(\Theta, j\omega)^H Q_\omega Y_\omega Q_\omega^H G_{12}(j\omega))^T,
\end{aligned} \tag{4.31}$$

avec

$$Y_\omega = (Y_\omega)^H \succeq 0 \quad , \quad \mathrm{Tr}(Y_\omega) = 1 \tag{4.32}$$

et

$$G_{21}(s) = (I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s) \quad , \quad G_{12}(s) = P_{12}(s)(I - K(s)P_{22}(s))^{-1} \tag{4.33}$$

Souvent, il est nécessaire d'imposer une structure au correcteur, c'est-à-dire fixer à zéro certains termes des matrices d'état du correcteur. Dans ce cas, il suffit de modifier le sous gradient de la manière suivante

$$\Phi_{Y_\omega,struct} = W \odot \Phi_{Y_\omega}, \tag{4.34}$$

où $\odot$ signifie le produit d'Hadamard (produit terme à terme entre 2 matrices) et la matrice W est choisie telle que $W_{ij} \in \{0,1\}$, avec $W_{ij} = 0$ signifiant que le coefficient Θ_{ij} est fixé et $W_{kl} = 1$ signifiant que Θ_{kl} est variable.

Ayant ainsi caractérisé le sous-différentiel de Clarke de la fonction de transfert en boucle fermée, les auteurs de [AN06a] ont ensuite proposé un algorithme de descente basé sur un modèle local quadratique du premier ordre :

$$\begin{aligned} R_e(\Theta) = \min_H \max_{\omega \in \Omega_e(\Theta)} \max_{\substack{Y_\omega \succeq 0 \\ \mathrm{Tr}(Y_\omega)=1}} \{ &- \|T_{ez}(\Theta)\|_\infty + \overline{\sigma}(T_{ez}(\Theta, j\omega)) + \langle \Phi_{Y_\omega}, H \rangle \\ &+ \frac{1}{2}\delta \|H\|_F^2 \}, \end{aligned} \tag{4.35}$$

où $\delta > 0$ est un paramètre fixé et $\Omega_e(\Theta)$ est un ensemble étendu de pulsations contenant $\Omega(\Theta)$ l'ensemble des pulsations actives.

Cette fonction $R_e(\Theta)$ vérifie

$$R_e(\Theta) \leq 0, \tag{4.36}$$

puisque pour $H = 0$ on a

$$R_e(\Theta) \leq \max_{\omega \in \Omega_e(\Theta)} \{ - \|T_{ez}(\Theta)\|_\infty + \overline{\sigma}(T_{ez}(\Theta, j\omega)) \} = - \|T_{ez}(\Theta)\|_\infty + \overline{\sigma}(T_{ez}(\Theta, j\omega_{act})) = 0,$$

ω_{act} étant l'une des pulsations actives, c'est-à-dire où la norme H_∞ est atteinte. De plus cette fonction est nommée *fonction d'optimalité* car elle permet de vérifier l'optimalité locale grâce à l'équivalence

$$R_e(\Theta) = 0 \Leftrightarrow 0 \in \partial \|T_{ez}(\Theta)\|_\infty . \tag{4.37}$$

Elle permet également de générer des directions de descente $H(\Theta)$ pour la fonction à minimiser $\|T_{ez}(\Theta)\|_\infty$. En effet, dans 4.35, le max sur l'ensemble fini des valeurs $\overline{\sigma}(T_{ez}(\Theta, j\omega)) + \langle \Phi_{Y_\omega}, H \rangle$ tels que $\omega \in \Omega_e(\Theta)$ reste inchangé si il est exprimé sur l'enveloppe convexe de cet ensemble. On peut alors réécrire 4.35, en l'exprimant sur l'enveloppe convexe de ces valeurs, comme suit :

$$\begin{aligned} R_e(\Theta) = \min_H \max_{\substack{\tau_\omega \geq 0 \\ \sum_{\omega \in \Omega_e(\Theta)} \tau_\omega = 1}} \max_{\substack{Y_\omega \succeq 0 \\ \mathrm{Tr}(Y_\omega)=1}} \{ &\sum_{\omega \in \Omega_e(\Theta)} \tau_\omega (\overline{\sigma}(T_{ez}(\Theta, j\omega)) - \|T_{ez}(\Theta)\|_\infty \\ &+ \langle \Phi_{Y_\omega}, H \rangle) + \frac{1}{2}\delta \|H\|_F^2 \}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Puis, par dualité lagrangienne, on peut échanger le min et le max dans 4.38 sans modifier la

valeur de $R_e(\Theta)$. La minimisation interne sur H, avec les τ_ω et Y_ω fixés :

$$\min_H \{ \sum_{\omega\in\Omega_e(\Theta)} \tau_\omega \left(\overline{\sigma}(T_{ez}(\Theta,j\omega)) - \|T_{ez}(\Theta)\|_\infty + \langle \Phi_{Y_\omega}, H\rangle\right) + \frac{1}{2}\delta \|H\|_F^2 \}, \tag{4.39}$$

est un problème quadratique, strictement convexe et sans contraintes, dont la solution est

$$H = -\frac{1}{\delta} \sum_{\omega\in\Omega_e(\Theta)} \tau_\omega \Phi_{Y_\omega}. \tag{4.40}$$

On en déduit le problème dual de 4.38

$$\max_{\substack{\tau_\omega\geq 0 \\ \sum_{\omega\in\Omega_e(\Theta)} \tau_\omega = 1}} \max_{\substack{Y_\omega\succeq 0 \\ \mathrm{Tr}(Y_\omega)=1}} \{ \sum_{\omega\in\Omega_e(\Theta)} \tau_\omega(\overline{\sigma}(T_{ez}(\Theta,j\omega)) - \|T_{ez}(\Theta)\|_\infty) - \frac{1}{2\delta}\| \sum_{\omega\in\Omega_e(\Theta)} \tau_\omega \Phi_{Y_\omega}\|_F^2 \}, \tag{4.41}$$

qui est un problème d'optimisation semi définie (*Semi Definite Programing*). L'optimisation sous contraintes LMI est un cas particulier de ce type de problèmes. Cependant, en pratique la valeur singulière maximale

$$\lambda_1 \left(T_{ez}(\Theta,j\omega) T_{ez}(\Theta,j\omega)^H\right) = \overline{\sigma}^2(T_{ez}(\Theta,j\omega))$$

est simple (de multiplicité 1) à toutes les fréquences $\omega \in \Omega_e(\Theta)$, donc les matrices Q_ω deviennent des vecteurs q_ω et les matrices $Y_\omega \succeq 0$ telles que $\mathrm{Tr}(Y_\omega) = 1$ deviennent des scalaires $y_\omega = 1$. Ainsi 4.41 se réduit à un problème d'optimisation quadratique convexe :

$$\max_{\substack{\tau_\omega\geq 0 \\ \sum_{\omega\in\Omega_e(\Theta)} \tau_\omega = 1}} \{ \sum_{\omega\in\Omega_e(\Theta)} \tau_\omega(\overline{\sigma}(T_{ez}(\Theta,j\omega)) - \|T_{ez}(\Theta)\|_\infty) - \frac{1}{2\delta}\| \sum_{\omega\in\Omega_e(\Theta)} \tau_\omega \Phi_\omega\|_F^2 \}, \tag{4.42}$$

où $\Phi_\omega = \Phi_{Y_\omega}$ pour Y_ω scalaire et égal à 1. La solution $(\hat{\tau}_\omega(\Theta))_{\omega\in\Omega_e(\Theta)}$ de 4.42 permet de calculer la direction optimale de descente $\hat{H}(\Theta)$ par la formule 4.40.

L'algorithme de descente proposé par les auteurs est alors le suivant :

Etape 1 : (*Initialisation*)

Fixer $\delta > 0$, $0 < \beta < 1$, $0 < \rho < 1$ et $0{,}05 < \varepsilon_\omega < 0{,}5$, puis trouver $\Theta = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix}$ stabilisant la boucle fermée.

Etape 2 : (*Ensemble de pulsations*)

Calculer $\|T_{ez}(\Theta)\|_\infty$ et l'ensemble des pulsations actives $\Omega(\Theta)$. Construire l'ensemble étendu des pulsations $\Omega_e(\Theta)$, contenant $\Omega(\Theta)$, en ajoutant un nombre fini de pulsations ω telles que

$$\|T_{ez}(\Theta)\|_\infty - \overline{\sigma}(T_{ez}(\Theta,j\omega)) \leq \varepsilon_\omega \|T_{ez}(\Theta)\|_\infty .$$

Etape 2 : (*Direction de descente*)

Calculer $R_e(\Theta)$ et la solution $(\tau_\omega(\Theta))_{\omega\in\Omega_e(\Theta)}$ de 4.42. Si $R_e(\Theta) = 0$, STOP car $0 \in \partial\|T_{ez}(\Theta)\|_\infty$. Sinon en déduire une direction de descente $H(\Theta)$ par la formule 4.40.

Etape 4 : (*Recherche linéaire*)

Trouver le plus grand $t = \beta^k$ tel que $\|T_{ez}(\Theta + tH(\Theta))\|_\infty \leq \|T_{ez}(\Theta)\|_\infty + t\rho R_e(\Theta)$ et $\Theta + tH(\Theta)$ reste stabilisant.

Etape 5 : (*Pas de descente*)

Faire $\Theta \leftarrow \Theta + tH(\Theta)$, incrémenter le nombre d'itérations et retourner à l'**Etape 2**.

La routine de synthèse HINFSTRUCT de Matlab est basée sur cet algorithme pour la synthèse de correcteurs à ordre et/ou structure fixés. Comme pour HIFOO, la synthèse H_∞ d'un correcteur est effectuée en 2 étapes : une première étape de stabilisation, où le critère suggéré dans [AN06a] n'est pas l'abscisse spectrale mais plutôt la norme H_∞ a-shiftée [1] :

$$\min_{\Theta} \left\| \overline{C}_2 \left(sI_{n+k} - \left(\overline{A} + \overline{B}_2 \Theta \overline{C}_2 \right) \right)^{-1} \overline{B}_2 \right\|_{a,\infty}, \tag{4.43}$$

en faisant décroitre progressivement a jusqu'à une valeur négative ; et ensuite une deuxième étape de minimisation de $\|T_{ez}(\Theta)\|_\infty$. Toutefois, il est proposé dans [Bom07, p. 61] un algorithme de minimisation de l'abscisse spectrale en boucle fermée, fondé sur les même principes (sous-gradients de Clarke, descente par modèle local) que ceux de l'algorithme de minimisation de la norme H_∞ en boucle fermée ci-dessus.

4.2 Synthèse du précorrecteur K_s par l'optimisation non lisse

Les outils de synthèse par l'optimisation non lisse HIFOO et HINFSTRUCT offrent la possibilité de fixer l'ordre et la structure d'un correcteur. Dans un premier temps, nous allons les évaluer sur le problème décrit par la figure 3.3 (même problème que celui résolu par Vinnicombe-Miyamoto et la X-K itération au chapitre précédent), c'est-à-dire la synthèse du précorrecteur K_s : d'abord à ordre fixé, puis à ordre et structure fixés.

4.2.1 Ordre fixé

L'initialisation est faite de la même manière que précédemment, c'est-à-dire par réduction *a posteriori* des facteurs premiers normalisés du précorrecteur K_s d'ordre plein. Ici la différence est que ce K_s initial, d'ordre désiré k_s n'est plus obligatoirement stabilisant comme c'était le cas pour l'algorithme de Vinnicombe et Miyamoto ou la X-K itération. En effet, HIFOO et HINFSTRUCT procèdent d'abord par une étape de stabilisation.

Par ailleurs, HIFOO ajoute 3 points générés aléatoirement autour du point initial fourni. Nous avons donc fait de même avec HINFSTRUCT. Au final, la meilleure des 4 optimisations réalisées à partir des 4 points initiaux (le point d'initialisation fourni et les 3 générés aléatoirement dans chaque outil) est retenu. Le tableau 4.1 présente les résultats (critère H_∞ en boucle fermée, marges de stabilité en entrée, temps d'exécution en secondes) obtenus avec ces 2 outils.

$\partial^\circ K_s$	$\partial^\circ K_\Omega$	$\partial^\circ K_i$	HIFOO				HINFSTRUCT			
			γ	GM_u	PM_u	temps	γ	GM_u	PM_u	temps
5	21	8	5	9 dB	35 °	703 s	5	6,1 dB	46 °	27 s
4	20	7	6,3	-5,3 dB	40 °	602 s	5,4	6,3 dB	42 °	20 s
3	19	6	7	-5,4 dB	44 °	506 s	6	5,2 dB	40 °	16 s

Tableau 4.1 – Synthèse H_∞ de K_s à ordre fixé (HIFOO vs HINFSTRUCT)

1. Norme H_∞ a-shiftée : $\|G\|_{a,\infty} = \|G_a\|_\infty$, avec $G_a(s) = G(s-a)$

Sur cette application, on constate donc que HINFSTRUCT donne globalement de meilleurs résultats que HIFOO, tant sur la valeur du critère H_∞ en boucle fermée que sur la durée d'exécution de l'algorithme. L'écart au niveau de ce dernier critère de comparaison est vraisemblablement du à la phase *Gradient Sampling* de HANSO, qui est assez couteuse en temps de calcul, d'autant plus que la dimension du correcteur recherché augmente. Pour $k_s = \partial^\circ K_s = 4$, l'ordre des correcteurs SISO K_Ω (correcteur de vitesse) et K_i (correcteur de courant) est le même que celui obtenu par les méthodes de réduction *a posteriori* du Tableau 2.2, et les marges de stabilités obtenues avec HINFSTRUCT sont conformes à la spécification 2.43. Les diagrammes de Black Nichols correspondant à ce cas sont donnés par la figure 4.2.

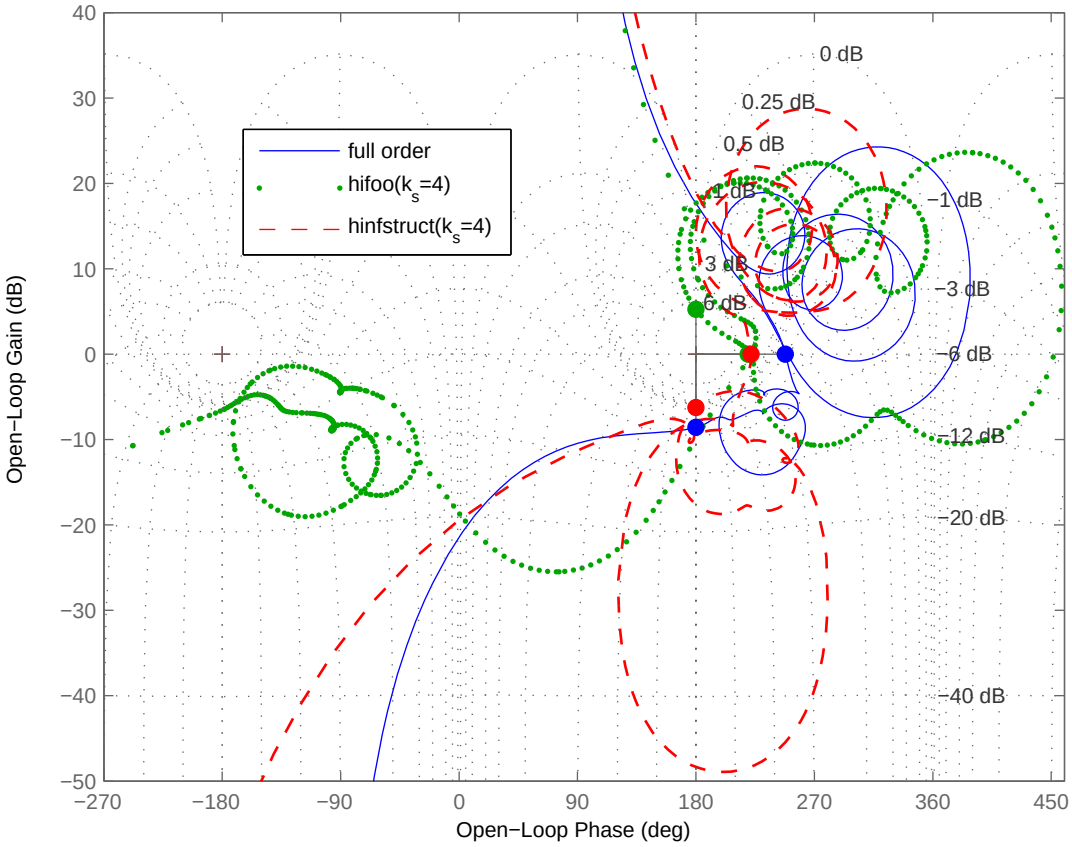

Figure 4.2 – Diagrammes de Black-Nichols de la boucle ouverte en entrée : $\partial^\circ K_s = 4$ (HIFOO vs HINFSTRUCT)

4.2.2 Ordre et structure fixés

Dans notre cas, le précorrecteur K_s est une matrice de transfert d'une ligne et deux colonnes :

$$K_s(s) = \begin{bmatrix} K_{s_\Omega}(s) & K_{s_i}(s) \end{bmatrix}. \tag{4.44}$$

Puisque pour le correcteur final

$$K(s) = -W_{in}(s) \begin{bmatrix} K_{s_\Omega}(s) & K_{s_i}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{out_\Omega}(s) & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix},$$

les termes SISO $K_\Omega(s) = -W_{in}(s)K_{s_\Omega}(s)W_{out_\Omega}(s)$ et $K_i(s) = -\rho W_{in}(s)K_{s_i}(s)$ seront implémentés indépendamment l'un de l'autre (Figure 2.9, contrainte liée à la structure actuelle du logiciel dans les viseurs), on peut donc chercher à imposer l'ordre de K_{s_Ω} et K_{s_i}, indépendamment l'un de l'autre durant la synthèse de K_s.

En supposant les dynamiques de K_{s_Ω} et K_{s_i} découplées, on peut développer 4.44 de la manière suivante :

$$\begin{aligned} K_s(s) &= \begin{bmatrix} D_{K_{s_\Omega}} & D_{K_{s_i}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{K_{s_\Omega}}(sI - A_{K_{s_\Omega}})^{-1}B_{K_{s_\Omega}} & C_{K_{s_i}}(sI - A_{K_{s_i}})^{-1}B_{K_{s_i}} \end{bmatrix} \\ &= D_{K_s} + \begin{bmatrix} C_{K_{s_\Omega}} & C_{K_{s_i}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A_{K_{s_\Omega}})^{-1} & 0 \\ 0 & (sI - A_{K_{s_i}})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{K_{s_\Omega}} & 0 \\ 0 & B_{K_{s_i}} \end{bmatrix} \\ &= D_{K_s} + C_{K_s} \left(sI - \begin{bmatrix} A_{K_{s_\Omega}} & 0 \\ 0 & A_{K_{s_i}} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B_{K_{s_\Omega}} & 0 \\ 0 & B_{K_{s_i}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Nous allons donc imposer à la représentation d'état de K_s la structure suivante :

$$\begin{aligned} K_s &= \left[\begin{array}{c|c} A_{K_s} & B_{K_s} \\ \hline C_{K_s} & D_{K_s} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} A_{K_{s_\Omega}} & 0 & B_{K_{s_\Omega}} & 0 \\ 0 & A_{K_{s_i}} & 0 & B_{K_{s_i}} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{C_{K_s}} & \multicolumn{2}{c}{D_{K_s}} \end{array}\right], \end{aligned} \tag{4.46}$$

de manière à pouvoir découpler les dynamiques de K_{s_Ω} et K_{s_i}, en imposant séparément leur ordre, c'est à dire la taille des matrices d'état $A_{K_{s_\Omega}}$ et $A_{K_{s_i}}$.

L'initialisation est faite en réduisant *a posteriori* et séparément chacun des termes K_{s_Ω} et K_{s_i} du précorrecteur d'ordre plein. Comme précédemment la contrainte de stabilité avec ce précorrecteur initial n'est plus nécessaire, et on prend toujours 3 points aléatoires en plus du point d'initialisation. Les tableaux 4.2 et 4.3 présentent les résultats de la synthèse H_∞ pour différentes valeurs de $\partial^\circ K_{s_\Omega}$ et $\partial^\circ K_{s_i}$. On peut remarquer que pour les cas $\partial^\circ K_{s_\Omega} = \partial^\circ K_{s_i}$, il y a une amélioration du critère H_∞ en boucle fermée, ainsi que des marges de stabilité, par rapport au cas précédent où K_s était sous forme centralisée. Par exemple, pour $\partial^\circ K_{s_\Omega} = \partial^\circ K_{s_i} = 4$, on passe du diagramme de Black-Nichols de la figure 4.2 à celui de la figure 4.3.

Cette amélioration est logique, puisque la dimension n_{par} de l'espace des paramètres d'optimisation augmente lorsqu'on sépare les dynamiques de K_{s_Ω} et K_{s_i}. En effet, on passe de

$$\begin{aligned} n_{par} &= dim\left(vec \begin{bmatrix} A_{K_s} & B_{K_s} \\ C_{K_s} & D_{K_s} \end{bmatrix} \right) \\ &= (\partial^\circ K_s + 1)(\partial^\circ K_s + 2) \end{aligned}$$

pour le cas centralisé, à

$$n_{par} = (\partial^\circ K_{s_\Omega} + 1)(\partial^\circ K_{s_\Omega} + 1) + (\partial^\circ K_{s_i} + 1)(\partial^\circ K_{s_i} + 1)$$

pour le cas décentralisé.

Par ailleurs, on constate que l'ordre nécessaire pour la mesure de courant n'est pas le même que celui sur la vitesse. L'ajout de la mesure de courant, pour robustifier le bouclage, peut donc être fait avec un ordre plus faible que celui employé sur la vitesse, comme par exemple dans le cas $\partial^\circ K_{s_\Omega} = 5, \partial^\circ K_{s_i} = 2$ illustré par la figure 4.4.

$\partial^\circ K_{s_\Omega}$	$\partial^\circ K_\Omega$	$\partial^\circ K_{s_i}$	$\partial^\circ K_i$	γ	GM_u	PM_u	temps
5	21	5	8	4,65	9 dB	52°	1216 s
		4	7	4,76	8,2 dB	55,7°	1073 s
		3	6	5,1	7,9 dB	38°	933 s
		2	5	4,98	6,8 dB	43,5 °	780 s
		1	4	5,03	7,8dB	40,5°	705 s
4	20	4	7	5,38	8 dB	51,5 °	830 s
		3	6	5,5	5,53 dB	44,4 °	600 s
		2	5	5,9	4,53 dB	46,3°	553 s
		1	4	6,58	5,9 dB	39 °	577 s

Tableau 4.2 – Synthèse H_∞ de K_s à ordre et structure fixés (HIFOO)

$\partial^\circ K_{s_\Omega}$	$\partial^\circ K_\Omega$	$\partial^\circ K_{s_i}$	$\partial^\circ K_i$	γ	GM_u	PM_u	temps
5	21	5	8	4,54	9,3 dB	56°	29,5 s
		4	7	4,71	8,3 dB	57,7°	37,3 s
		3	6	4,71	7,3 dB	50°	18,5 s
		2	5	4,81	6,53dB	51,6°	20,4 s
		1	4	5,01	6,9 dB	42,3°	16,8 s
4	20	4	7	5,25	7,6 dB	56,8°	33 s
		3	6	4,98	6,5 dB	42,1 °	28 s
		2	5	5	6,13 dB	41,1 °	25 s
		1	4	5,4	6,7 dB	41,3°	14,4 s

Tableau 4.3 – Synthèse H_∞ de K_s à ordre et structure fixés (HINFSTRUCT)

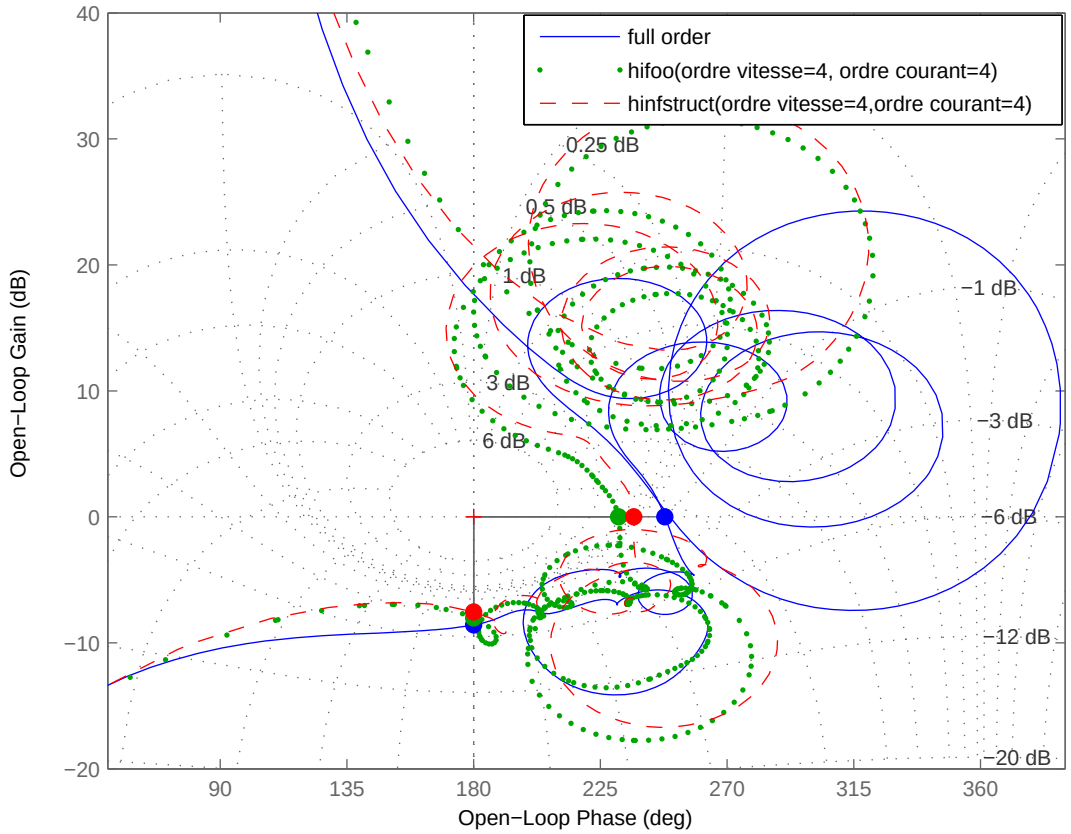

Figure 4.3 – Diagramme de Black-Nichols de la boucle ouverte en entrée : $\partial^\circ K_{s_\Omega} = \partial^\circ K_{s_i} = 4$ (HIFOO vs HINFSTRUCT)

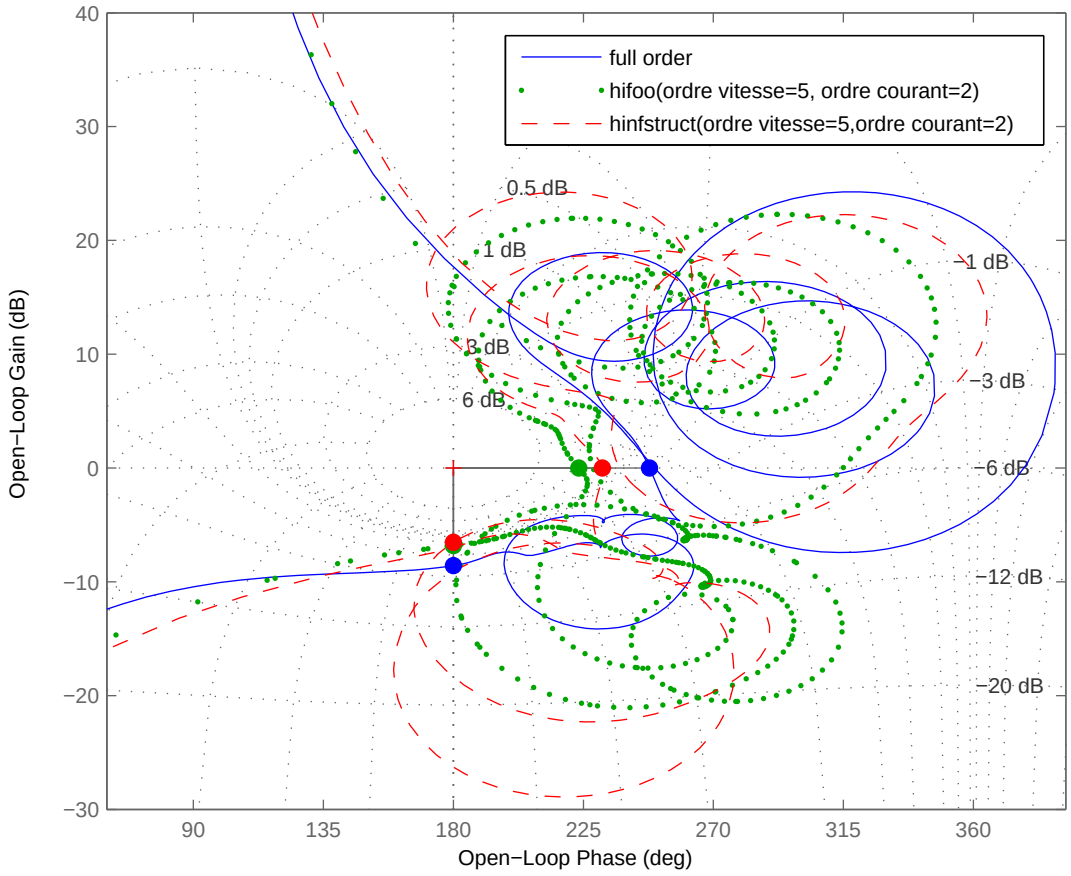

Figure 4.4 – Diagramme de Black-Nichols de la boucle ouverte en entrée : $\partial^\circ K_{s_\Omega} = 5, \partial^\circ K_{s_i} = 2$ (HIFOO vs HINFSTRUCT)

4.3 Conclusion

La résolution du problème de synthèse H_∞ par l'optimisation non lisse, rendue possible par les outils numériques performants associés HIFOO et HINFSTRUCT, se révèle efficace pour la réduction de l'ordre des correcteurs *a priori*, notamment grâce à la possibilité d'imposer la structure de ces derniers durant la synthèse. En effet, dans notre application, compte tenu de l'implémentation finale du correcteur sous forme de filtres SISO, le fait de décentraliser K_s est donc plus avantageux. Ce qu'il compte de réduire, c'est $\partial^\circ K_{s_\Omega} + \partial^\circ K_{s_i}$ et non pas $\partial^\circ K_s$ uniquement. Toutefois, cette réduction ne prends toujours pas en compte l'ordre des pondérations W_{in} et W_{out}. Ce dernier point sera abordé dans le chapitre suivant, où on proposera une méthodologie permettant de lever cet inconvénient.

Chapitre 5

Méthodologies de Loop-Shaping à ordre fixé

Le problème de synthèse H_∞ par *Loop-Shaping* est équivalent à un problème H_∞ standard 4-blocs, comme le suggère 2.30. Afin de prendre en compte l'ordre des pondérations dans

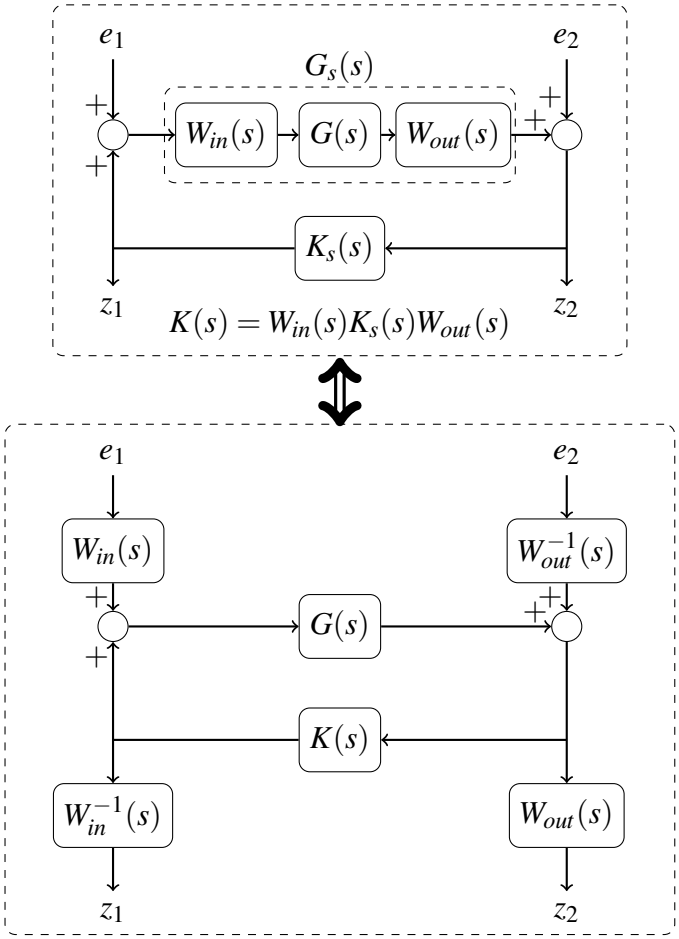

Figure 5.1 – Synthèse H_∞ par *Loop-Shaping* (haut), Synthèse H_∞ standard équivalente (bas)

la réduction du correcteur final durant la synthèse, il serait donc plus judicieux d'utiliser cette schématique, dont le système augmenté standard est construit en "externalisant" les pondérations W_{in} et W_{out} du loopshape (Figure 5.1).

Dans ce dernier chapitre, nous présentons une méthodologie de synthèse de correcteurs robustes et d'ordre réduit pour les boucles de stabilisation inertielle de ligne de visée. La méthodologie proposé est axée sur 2 pistes, la première consiste à prendre en compte la structure des pondérations W_{in} et W_{out} dans la schématique d'externalisation de la Figure 5.1 si l'on dispose a priori d'un réglage satisfaisant ; la deuxième piste consiste à s'affranchir du réglage des pondérations, ou plutôt à déporter le réglage des pondérations sur celui du gain en boucle ouverte désiré et de construire de manière automatique une pondération appropriée qui peut être externalisée dans la schématique de la Figure 5.1 pour la synthèse d'un correcteur d'ordre et/ou de structure fixée. Nous avons publié différents résultats relatifs à cette méthodologie de synthèse de correcteurs d'ordre réduit dans [HFDS12a, HFDS12b, HFDS13].

5.1 Externalisation partielle des pondérations

5.1.1 Principe

Supposons que l'on dispose d'un jeu de pondérations W_{in} et W_{out} bien réglées au préalable afin de satisfaire une spécification donnée sur la boucle ouverte [1]. Il s'avère généralement inutile d'extraire (ou "externaliser") toutes les pondérations du loopshape car certaines composantes doivent être retrouvées dans le correcteur final, notamment :

- Les intégrateurs, indispensables pour assurer l'absence d'erreur statique [2].
- Le filtre de roll-off pour la robustesse qui doit être maintenu malgré la réduction d'ordre du correcteur. De plus l'externalisation de ces composantes n'est pas numériquement faisable, à moins de faire une régularisation de ces termes. C'est à dire transformer les intégrateurs purs en pseudos-intégrateurs avec des pôles très bas en fréquences d'une part :

$$\frac{1}{s} \rightarrow \frac{1}{s+\varepsilon_{BF}}, \quad 0 < \varepsilon_{BF} \ll 1, \tag{5.1}$$

  et d'autre part ajouter des zéros très hauts en fréquences sur les termes de roll-off qui sont strictement propres :

$$\frac{1}{\frac{s}{\omega_{RO}}+1} \rightarrow \frac{\frac{s}{\varepsilon_{HF}}+1}{\frac{s}{\omega_{RO}}+1}, \quad 0 < \omega_{RO} \ll \varepsilon_{HF}. \tag{5.2}$$

  Il est donc préférable de maintenir ces composantes dans le loopshape.
- Toute autre pondération qu'il s'avère préférable de garder explicitement dans la boucle, par exemple dans notre cas les réjecteurs sur la fonction de sensibilité de la boucle de vitesse inertielle S_Ω peuvent être traités de façon différenciée selon leur positionnement et leur proximité fréquentielle les uns par rapport aux autres : la section 5.1.2 p. 83 en explicitera les raisons.

On aboutit donc à une schématique mixte dite d'externalisation partielle des pondérations, illustrée par le schéma de la Figure 5.2 , où l'idée de base est de synthétiser un correcteur $\widehat{K}_s$ d'ordre inférieur à l'ordre total des pondérations externalisées du loopshape $\widetilde{W}_{in}$ et $\widetilde{W}_{out}$ (on

1. Dans notre cas elle a l'allure de la Figure 2.4 par exemple
2. Plus précisément pour contrer les frottements secs dans notre cas

les supposera propres, stables et d'inverses stables) :

$$\partial^\circ \widehat{K}_s \leq \partial^\circ \widetilde{W}_{in} + \partial^\circ \widetilde{W}_{out} \tag{5.3}$$

Les composantes fréquentielles maintenues dans le loopshape au travers des pondérations $\widehat{W}_{in}$ et $\widehat{W}_{out}$ fixent donc l'ordre minimal du correcteur final et la réduction d'ordre est réalisée vis-à-vis des composantes fréquentielles externalisées dans $\widetilde{W}_{in}$ et $\widetilde{W}_{out}$. Ainsi le correcteur final

$$K(s) = \widehat{W}_{in}(s)\widehat{K}_s(s)\widehat{W}_{out}(s) \tag{5.4}$$

sera d'ordre

$$\begin{aligned} \partial^\circ K &= \partial^\circ \widehat{W}_{in} + \partial^\circ \widehat{K}_s + \partial^\circ \widehat{W}_{out} \\ &\leq \partial^\circ \widehat{W}_{in} + (\partial^\circ \widetilde{W}_{in} + \partial^\circ \widetilde{W}_{out}) + \partial^\circ \widehat{W}_{out} \\ &\leq \partial^\circ W_{in} + \partial^\circ W_{out} \end{aligned} \tag{5.5}$$

puisque :

$$\begin{aligned} W_{in}(s) &= \widehat{W}_{in}(s)\widetilde{W}_{in}(s), \\ W_{out} &= \widetilde{W}_{out}(s)\widehat{W}_{out}(s). \end{aligned} \tag{5.6}$$

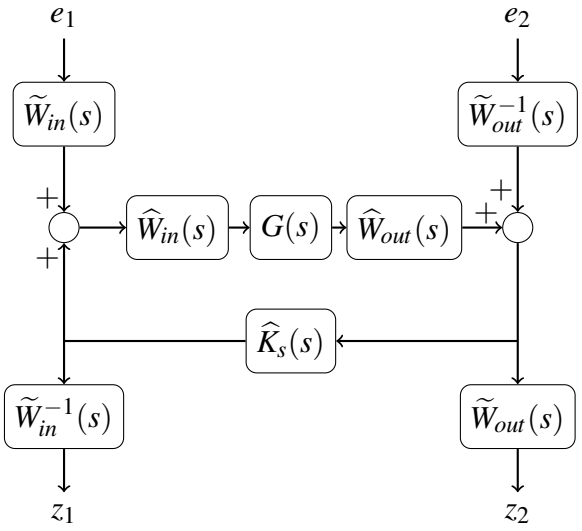

Figure 5.2 – Externalisation partielle des pondérations

La forme standard équivalente donnée par la Figure 5.3 permet de construire le système augmenté pour la synthèse de $\widehat{K}_s$, de la manière suivante :

$$P(s) = \begin{bmatrix} \widetilde{W}_{in}^{-1}(s) & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{W}_{out}(s) & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \widehat{P}(s) \begin{bmatrix} \widetilde{W}_{in}(s) & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{W}_{out}^{-1}(s) & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \tag{5.7}$$

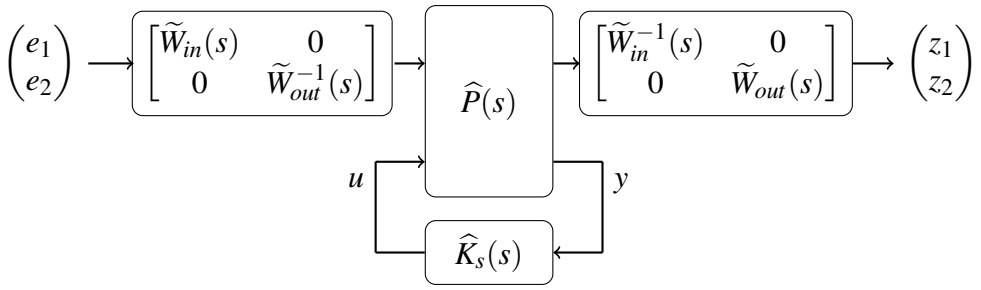

Figure 5.3 – Forme standard pour la synthèse de $\widehat{K}_s$

où

$$\begin{aligned}
\widehat{P}(s) &= \left[\begin{array}{c|c} \widehat{P}_{11}(s) & \widehat{P}_{12}(s) \\ \hline \widehat{P}_{21}(s) & \widehat{P}_{22}(s) \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & I \\ \widehat{G}_s(s) & I & \widehat{G}_s(s) \\ \hline \widehat{G}_s(s) & I & \widehat{G}_s(s) \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ I \\ \hline I \end{array}\right] \widehat{G}_s(s) \left[\begin{array}{cc|c} I & 0 & I \end{array}\right],
\end{aligned} \tag{5.8}$$

avec

$$\widehat{G}_s(s) = \widehat{W}_{out}(s) G(s) \widehat{W}_{in}(s). \tag{5.9}$$

Une telle construction de $\widehat{P}$ garantit in fine la minimalité de la représentation d'état de P.

Le formalisme restant dans le cadre *Loop Shaping*, les résultats théoriques relatifs à la robustesse en stabilité de l'approche (section 2.2.1.2 p. 28) sont conservés. En effet, en résolvant ce nouveau problème H_∞ standard, on résout également de manière indirecte le problème initial de stabilisation robuste du loopshape, puisque

$$\begin{aligned}
\gamma &= \left\| \mathcal{F}\left(P, \widehat{K}_s\right) \right\|_\infty \\
&= \left\| \begin{bmatrix} \widetilde{W}_{in}^{-1} & 0 \\ 0 & \widetilde{W}_{out} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{K}_s \\ I \end{bmatrix} \left(I - \widehat{G}_s \widehat{K}_s\right)^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{G}_s & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{W}_{in} & 0 \\ 0 & \widetilde{W}_{out}^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty \\
&= \left\| \begin{bmatrix} \widetilde{W}_{in}^{-1} \widehat{K}_s \\ \widetilde{W}_{out} \end{bmatrix} \left(I - \widehat{G}_s \widehat{K}_s\right)^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{G}_s \widetilde{W}_{in} & \widetilde{W}_{out}^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty \\
&= \left\| \begin{bmatrix} \widetilde{W}_{in}^{-1} \widehat{K}_s \widetilde{W}_{out}^{-1} \\ I \end{bmatrix} \widetilde{W}_{out} \left(I - \widehat{G}_s \widehat{K}_s\right)^{-1} \widetilde{W}_{out}^{-1} \begin{bmatrix} \widetilde{W}_{out} \widehat{G}_s \widetilde{W}_{in} & I \end{bmatrix} \right\|_\infty \\
&= \left\| \begin{bmatrix} \widetilde{W}_{in}^{-1} \widehat{K}_s \widetilde{W}_{out}^{-1} \\ I \end{bmatrix} \left(I - \widetilde{W}_{out} \widehat{G}_s \widetilde{W}_{in} \widetilde{W}_{in}^{-1} \widehat{K}_s \widetilde{W}_{out}^{-1}\right)^{-1} \begin{bmatrix} \widetilde{W}_{out} \widehat{G}_s \widetilde{W}_{in} & I \end{bmatrix} \right\|_\infty \\
&= \left\| \begin{bmatrix} K_s \\ I \end{bmatrix} (I - G_s K_s)^{-1} \begin{bmatrix} G_s & I \end{bmatrix} \right\|_\infty,
\end{aligned} \tag{5.10}$$

où

$$G_s(s) = \widetilde{W}_{out} \widehat{G}_s \widetilde{W}_{in} = W_{out} G W_{in}$$

est le loopshape initial spécifié, et

$$K_s(s) = \widetilde{W}_{in}^{-1} \widehat{K}_s \widetilde{W}_{out}^{-1} \tag{5.11}$$

un précorrecteur "équivalent" stabilisant de manière robuste le loopshape G_s. De façon duale, si un précorrecteur K_s est une solution du problème de stabilisation robuste du loopshape G_s telle que

$$\left\| \begin{bmatrix} K_s \\ I \end{bmatrix} (I - G_s K_s)^{-1} \begin{bmatrix} G_s & I \end{bmatrix} \right\|_\infty = \gamma,$$

alors $\widetilde{W}_{in} K_s \widetilde{W}_{out}$ stabilise le système standard P défini par 5.7 et vérifie

$$\left\| \mathcal{F}(P, \widetilde{W}_{in} K_s \widetilde{W}_{out}) \right\|_\infty = \gamma.$$

Ainsi, on peut donc calculer par l'approche des factorisations copremières de [MG92], une solution d'ordre plein du problème standard défini par la Figure 5.3, sans passer par la γ-itération de [DGKF89]. Cette solution d'ordre plein est utile pour initialiser la synthèse à ordre fixé, en procédant par une réduction a posteriori, de la même manière que dans les chapitres précédents.

5.1.2 Application

Illustrons cette méthode sur le problème précédemment discuté (introduit à la section 2.3 p. 34 et traité dans les chapitres précedents). Considérons à nouveau les pondérations suivantes :

$$\begin{aligned} W_{out}(s) &= \begin{bmatrix} W_{out_\Omega}(s) & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} W_{PI^2}(s) \prod_{k=1}^{5} \overline{W}_{REJ_k}(s) & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \\ W_{in}(s) &= \frac{1}{\frac{s}{\omega_{RO}} + 1} \underline{W}_{REJ_1}(s) \end{aligned} \tag{5.12}$$

où W_{PI^2} et les réjecteurs $\overline{W}_{REJ_k}$ sur la fonction de sensibilité S_Ω sont définis par 2.37, le réjecteur $\underline{W}_{REJ_1}$ sur la fonction de sensibilité complémentaire T_Ω pour la robustesse vis-a-vis des variations sur la fonction de transfert mécanique G_m est défini par 2.39.

Dans la pondération W_{out_Ω} les termes externalisés sont :

- l'avance de phase de W_{PI^2} ;
- les 3 derniers réjecteurs (les plus hauts en fréquence), dont les fréquences de résonance sont proches (Figure 2.8) et ont été positionnées dans une zone fréquentielle particulière de résonance $[\underline{\omega}_z, \overline{\omega}_z]$ de la plateforme mécanique du viseur.

En effet, ce qui compte au final c'est de pouvoir mettre suffisamment de gain dans la boucle ouverte en vitesse L_Ω au niveau de cette zone de fréquences $[\underline{\omega}_z, \overline{\omega}_z]$, par le correcteur de vitesse K_Ω et en utilisant le moins d'ordre possible ; ce que l'on cherchera à faire en externalisant $\overline{W}_{REJ_3}$, $\overline{W}_{REJ_4}$ et $\overline{W}_{REJ_5}$. Les 2 premiers réjecteurs $\overline{W}_{REJ_1}$ et $\overline{W}_{REJ_2}$ correspondant aux modes de vibrations du porteur du viseur (fréquences des rotors de l'hélicoptère) seront gardés dans le loopshape, en effet il s'agit de fréquences bien précises qu'il est indispensable de retrouver dans K_Ω pour atténuer la transmission de ces vibrations à la ligne de visée.

Dans la pondération W_{in}, on externalisera le rejecteur $\underline{W}_{REJ_1}$.
Ainsi, on définit alors :

$$\widehat{W}_{out}(s) = \begin{bmatrix} \widehat{W}_{out_\Omega}(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{W}_{out}(s) = \begin{bmatrix} \widetilde{W}_{out_\Omega}(s) & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}, \tag{5.13}$$

où

$$\widehat{W}_{out_\Omega}(s) = G_0 \left(\frac{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\xi_0 \frac{s}{\omega_0} + 1}{s^2} \right) \prod_{k=1}^{2} \overline{W}_{REJ_k}(s), \quad \widetilde{W}_{out_\Omega}(s) = \left(\frac{\frac{s}{a}+1}{\frac{s}{b}+1} \right) \prod_{k=3}^{5} \overline{W}_{REJ_k}(s), \tag{5.14}$$

et

$$\widehat{W}_{in}(s) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_{RO}}+1}, \quad \widetilde{W}_{in}(s) = \underline{W}_{REJ_1}(s). \tag{5.15}$$

Au chapitre précédent (section 4.2.2 p. 74), lorsque nous cherchions à réduire l'ordre du précorrecteur K_s, nous avons mis en évidence l'intérêt d'imposer la structure de ce dernier, compte tenu de l'implémentation finale du correcteur K. Nous chercherons donc à imposer à la matrice de transfert $\widehat{K}_s$ une structure, soit de type parallèle comme précédemment sur K_s, soit de type cascade.

5.1.2.1 Structure parallèle

Nous avons montré (section 4.2.2 p. 74) que cette structure peut être obtenue en cherchant une représentation d'état de cette forme :

$$\begin{aligned} \widehat{K}_s &= \left[\begin{array}{c|c} A_{\widehat{K}_s} & B_{\widehat{K}_s} \\ \hline C_{\widehat{K}_s} & D_{\widehat{K}_s} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} A_{\widehat{K}_{s_\Omega}} & 0 & B_{\widehat{K}_{s_\Omega}} & 0 \\ 0 & A_{\widehat{K}_{s_i}} & 0 & B_{\widehat{K}_{s_i}} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{C_{\widehat{K}_s}} & \multicolumn{2}{c}{D_{\widehat{K}_s}} \end{array} \right]. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Conformément à 5.3, nous imposerons dans ce cas :

$$\begin{aligned} \partial^\circ \widehat{K}_{s_\Omega} &\leq \partial^\circ \widetilde{W}_{in} + \partial^\circ \widetilde{W}_{out_\Omega} = 9, \\ \partial^\circ \widehat{K}_{s_i} &\leq \partial^\circ \widetilde{W}_{in} = 2. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Les correcteurs finaux SISO seront alors d'ordre :

$$\begin{aligned} \partial^\circ K_\Omega &\leq \partial^\circ \widehat{K}_{s_\Omega} + \partial^\circ \widehat{W}_{out_\Omega} + \partial^\circ \widehat{W}_{in} \\ &\leq 9+6+1 = 16, \\ \partial^\circ K_i &\leq \partial^\circ \widehat{K}_{s_i} + \partial^\circ \widehat{W}_{in} \\ &\leq 2+1 = 3. \end{aligned} \tag{5.18}$$

De tous les algorithmes de synthèse H_∞ à ordre fixé discutés précédemment, et compte tenu de la contrainte de structure imposée à $\widehat{K}_s$, seuls la X-K itération, HIFOO et HINFSTRUCT sont candidats à la résolution de notre problème. Cependant, la X-K itération nécessite d'être initialisée par un correcteur stabilisant, ce qui n'est pas le cas des 2 derniers, puisqu'ils procèdent par une étape de stabilisation avant l'optimisation de la norme H_∞ en boucle fermée. Nous avons donc utilisé uniquement ces 2 algorithmes, initialisés avec la même procédure de la section 4.2.2 p. 74, et avec cette fois, en plus du point initial, une optimisation sur 20 points générés aléatoirement autour de ce point d'initialisation.

Les Tableaux 5.1 et 5.2 présentent les résultats de cette synthèse H_∞ à ordre et structure fixés. On constate qu'on peut donc nettement améliorer la réduction de l'ordre du correcteur tout en conservant de bonnes marges de stabilité, comme le montre le diagramme de Black-Nichols de la boucle ouverte en entrée de la figure 5.4 correspondant au cas

$$\left(\partial^\circ \widehat{K}_{s_\Omega} = 7, \partial^\circ \widehat{K}_{s_i} = 2\right) \Longrightarrow (\partial^\circ K_\Omega = 14, \partial^\circ K_i = 3)\,.$$

$\partial^\circ \widehat{K}_{s_\Omega}$	$\partial^\circ K_\Omega$	$\partial^\circ \widehat{K}_{s_i}$	$\partial^\circ K_i$	γ	GM_u	PM_u	temps
9	16	2	3	5,17	7,2 dB	52,1°	570 s
		1	2	6,41	5,76 dB	27,7 °	573 s
8	15	2	3	5,03	5,4 dB	47,6°	2952 s
		1	2	5,02	7,5 dB	39,7°	2596 s
7	14	2	3	4,90	6,3 dB	51,8 °	2561 s
		1	2	5,17	6,4 dB	39,6°	2471 s

Tableau 5.1 – Synthèse H_∞ de $\widehat{K}_s$ en structure parallèle (HIFOO)

$\partial^\circ \widehat{K}_{s_\Omega}$	$\partial^\circ K_\Omega$	$\partial^\circ \widehat{K}_{s_i}$	$\partial^\circ K_i$	γ	GM_u	PM_u	temps
9	16	2	3	4,54	9,3 dB	50°	370 s
		1	2	4,75	8 dB	41,8 °	315 s
8	15	2	3	4,77	8,6 dB	51 °	287 s
		1	2	4,95	9,5 dB	39,2°	286 s
7	14	2	3	4,86	7,5 dB	46,4 °	258 s
		1	2	5,07	7,3 dB	41,9°	275 s

Tableau 5.2 – Synthèse H_∞ de $\widehat{K}_s$ en structure parallèle (HINFSTRUCT)

Les 3 réjecteurs $\overline{W}_{REJ_3}$, $\overline{W}_{REJ_4}$ et $\overline{W}_{REJ_5}$ sur la fonction de sensibilités S_Ω ont été remplacés dans $\widehat{K}_{s_\Omega}$ par une zone de réjection plus uniforme sur la bande de fréquence correspondante $[\underline{\omega}_z, \overline{\omega}_z]$. Cet effet est visible notamment sur le gain de la fonction de sensibilité S_Ω résultante, tracé sur la figure 5.5.

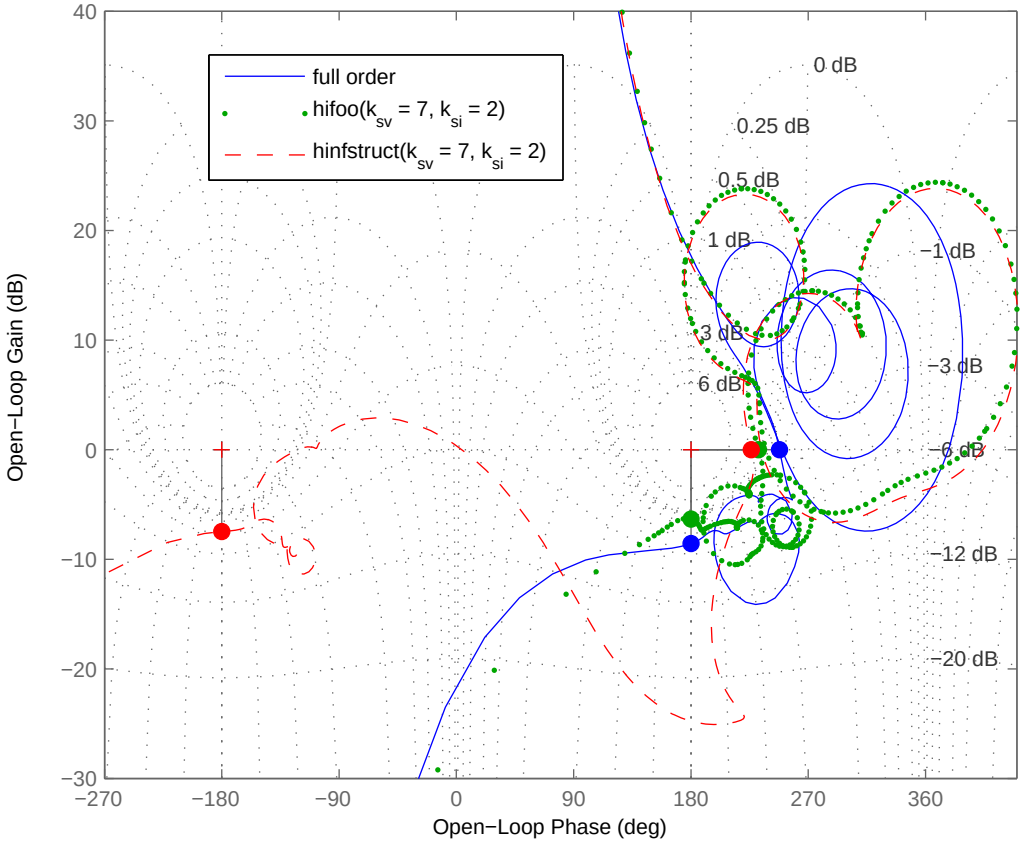

Figure 5.4 – Diagramme de Black-Nichols de la boucle ouverte en entrée : $\widehat{K}_{s_\Omega}$ en structure parallèle $\left(\partial^\circ \widehat{K}_{s_\Omega} = 7, \partial^\circ \widehat{K}_{s_i} = 2\right)$

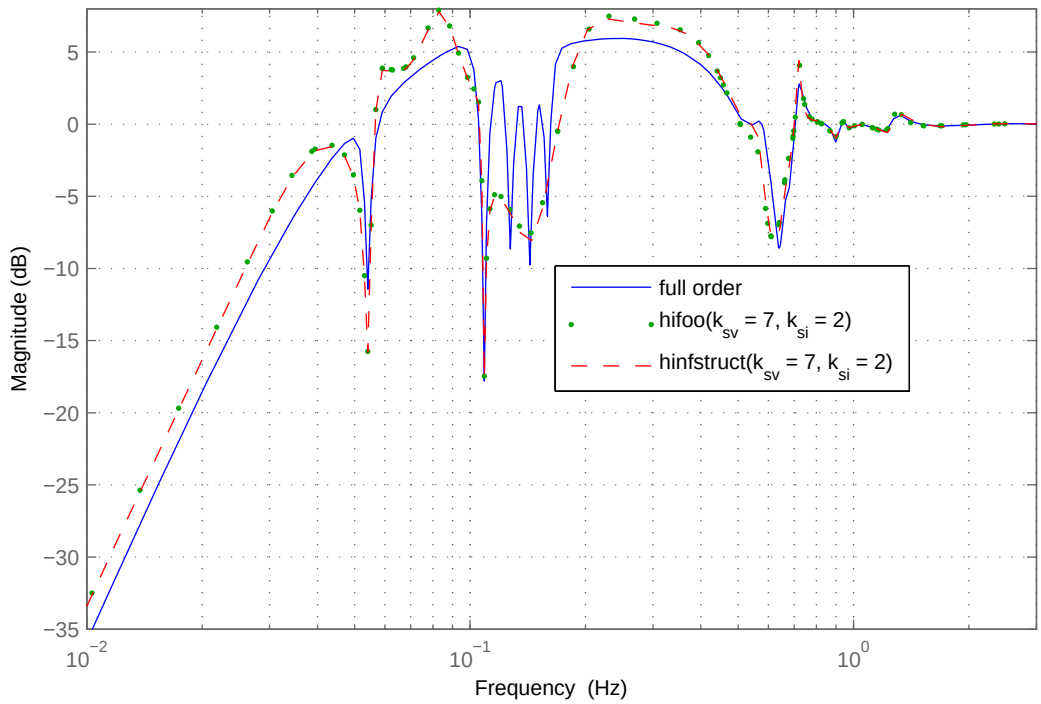

Figure 5.5 – Gain de la fonction de sensibilité S_Ω : $\widehat{K}_{s_\Omega}$ en structure parallèle $\left(\partial^\circ \widehat{K}_{s_\Omega} = 7, \partial^\circ \widehat{K}_{s_i} = 2\right)$

5.1.2.2 Structure cascade

Outre son utilité lorsqu'on veut faire une commande en couple en présence d'une $f.c.e.m$ non négligeable (dans ce cas une boucle de courant de type PI est nécessaire), l'implémentation en cascade (Figure 5.6) du correcteur final K peut être avantageuse en terme d'ordre total des filtres SISO implémentés K_Ω et K_i. En effet la pondération de roll-off W_{in} est commune à K_Ω et K_i, la mise en cascade permettrait alors d'implémenter les termes issus de cette pondération uniquement dans K_i.

En vue d'une telle implémentation, on peut donc chercher à synthétiser $\widehat{K}_s$ sous la forme cascade :

$$\widehat{K}_s(s) = \widehat{K}_{s_i}(s)\begin{bmatrix}\widehat{K}_{s_\Omega}(s) & 1\end{bmatrix}, \tag{5.19}$$

en imposant indépendamment l'un de l'autre $\partial^\circ \widehat{K}_{s_\Omega}$ et $\partial^\circ \widehat{K}_{s_i}$, par la schématique de la Figure 5.7. Le correcteur synthétisé est alors :

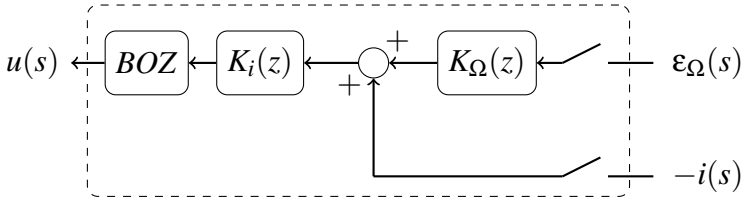

Figure 5.6 – Implémentation en cascade

$$\widehat{K}_{s_{diag}} = \left[\begin{array}{cc|cc} A_{\widehat{K}_{s_\Omega}} & 0 & B_{\widehat{K}_{s_\Omega}} & 0 \\ 0 & A_{\widehat{K}_{s_i}} & 0 & B_{\widehat{K}_{s_i}} \\ \hline C_{\widehat{K}_{s_\Omega}} & 0 & D_{\widehat{K}_{s_\Omega}} & 0 \\ 0 & C_{\widehat{K}_{s_i}} & 0 & D_{\widehat{K}_{s_i}} \end{array}\right], \tag{5.20}$$

à partir du système augmenté P donné par 5.7, avec cette fois ci

$$\begin{aligned}
\widehat{P}(s) &= \left[\begin{array}{c|c} \widehat{P}_{11}(s) & \widehat{P}_{12}(s) \\ \hline \widehat{P}_{21}(s) & \widehat{P}_{22}(s) \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0_{1\times 2} & 0 & 1 \\ -\widehat{G}_s(s) & I_2 & 0_{2\times 1} & -\widehat{G}_s(s) \\ \hline -R_\Omega\widehat{G}_s(s) & R_\Omega & 0 & -R_\Omega\widehat{G}_s(s) \\ -R_i\widehat{G}_s(s) & R_i & 1 & -R_i\widehat{G}_s(s) \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0_{1\times 2} & 0 & 1 \\ 0_{2\times 1} & I_2 & 0_{2\times 1} & 0_{2\times 1} \\ \hline 0 & R_\Omega & 0 & 0 \\ 0 & R_i & 1 & 0 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0_{1\times 2} & 0 & 0 \\ \widehat{G}_s(s) & 0_{2\times 2} & 0_{2\times 1} & \widehat{G}_s(s) \\ \hline R_\Omega\widehat{G}_s(s) & 0_{1\times 2} & 0 & R_\Omega\widehat{G}_s(s) \\ R_i\widehat{G}_s(s) & 0_{1\times 2} & 0 & R_i\widehat{G}_s(s) \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0_{1\times 2} & 0 & 1 \\ 0_{2\times 1} & I_2 & 0_{2\times 1} & 0_{2\times 1} \\ \hline 0 & R_\Omega & 0 & 0 \\ 0 & R_i & 1 & 0 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c} 0_{1\times 2} \\ I_2 \\ \hline R_\Omega \\ R_i \end{array}\right]\widehat{G}_s(s)\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0_{1\times 2} & 0 & 1 \end{array}\right],
\end{aligned} \tag{5.21}$$

où

$$R_\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{5.22}$$

et $\widehat{G}_s(s)$ est donné par 5.9.

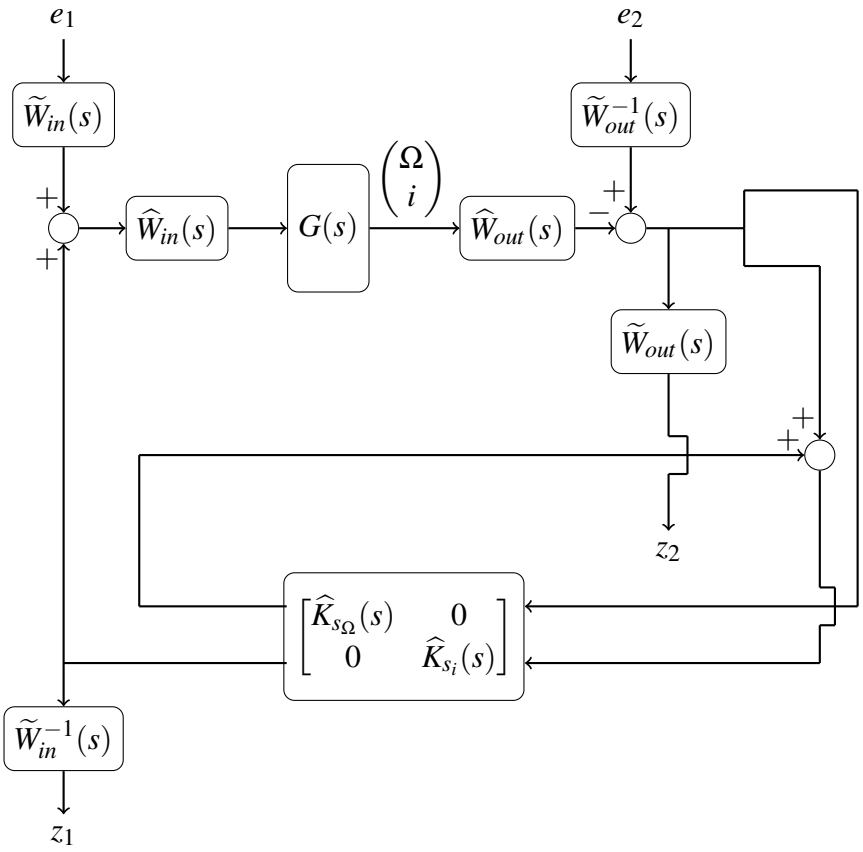

Figure 5.7 – Synthèse de $\widehat{K}_s$ à ordre fixé et en structure cascade

Grâce à la dernière ligne de 5.21, une réalisation minimale de $\widehat{P}$ (et donc de P) est construite à partir de celle de $\widehat{G}_s(s)$. Par ailleurs dans cette construction, nous avons introduit la rétroaction négative usuelle sur les mesures, le signe « moins » rajouté précédemment sur le correcteur final K ne sera donc plus nécessaire.

Enfin, conformément à 5.3, nous imposerons cette fois-ci :

$$\begin{aligned} \partial^\circ \widehat{K}_{s_\Omega} &\leq \partial^\circ \widetilde{W}_{out_\Omega} = 7, \\ \partial^\circ \widehat{K}_{s_i} &\leq \partial^\circ \widetilde{W}_{in} = 2. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Les correcteurs finaux SISO seront alors d'ordre :

$$\begin{aligned} \partial^\circ K_\Omega &\leq \partial^\circ \widehat{K}_{s_\Omega} + \partial^\circ \widehat{W}_{out_\Omega} \\ &\leq 7+6 = 13, \\ \partial^\circ K_i &\leq \partial^\circ \widehat{K}_{s_i} + \partial^\circ \widehat{W}_{in} \\ &\leq 2+1 = 3. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Les Tableaux 5.3 et 5.4 présentent les résultats de cette synthèse H_∞ à ordre et structure

$\partial^\circ \widehat{K}_{s_\Omega}$	$\partial^\circ K_\Omega$	$\partial^\circ \widehat{K}_{s_i}$	$\partial^\circ K_i$	γ	GM_u	PM_u	temps
7	13	2	3	5,85	8,2 dB	41,4 °	2123 s
6	12	2	3	6,05	6,4 dB	40,5 °	1697 s
5	11	2	3	6,08	6,9 dB	41,7 °	1760 s
4	10	2	3	6,06	6,5 dB	43,9 °	1213 s

Tableau 5.3 – Synthèse H_∞ de $\widehat{K}_s$ en structure cascade (HIFOO)

$\partial^\circ \widehat{K}_{s_\Omega}$	$\partial^\circ K_\Omega$	$\partial^\circ \widehat{K}_{s_i}$	$\partial^\circ K_i$	γ	GM_u	PM_u	temps
7	13	2	3	4,55	8,4 dB	49,2 °	403 s
6	12	2	3	4,8	7,8 dB	48,8 °	280 s
5	11	2	3	4,86	8 dB	48,5 °	373 s
4	10	2	3	5,64	7,5 dB	43,5 °	321 s

Tableau 5.4 – Synthèse H_∞ de $\widehat{K}_s$ en structure cascade (HINFSTRUCT)

fixés. Ils sont dans l'ensemble semblables à ceux obtenus pour la structure parallèle, avec un ordre plus faible sur $\widehat{K}_{s_\Omega}$, puisque ce dernier ne contient plus de termes relatif à la pondération externalisée $\widetilde{W}_{in}$ en entrée de modèle. Si cette dernière est d'ordre élevé, cela peut représenter un gain significatif en termes d'ordre du correcteur final à implémenter K_Ω.

Pour le cas

$$\left(\partial^\circ \widehat{K}_{s_\Omega} = 4, \partial^\circ \widehat{K}_{s_i} = 2\right) \Longrightarrow (\partial^\circ K_\Omega = 10, \partial^\circ K_i = 3),$$

on obtient le diagramme de Black-Nichols de la boucle ouverte en entrée tracé sur la Figure 5.8 et le gain de la fonction de sensibilité S_Ω tracé sur la Figure 5.9.

Dans les 2 cas (structure parallèle et structure cascade) on obtient une allure plus homogène du gain de la fonction de sensibilité S_Ω dans la zone de réjection $[\underline{\omega}_z, \overline{\omega}_z]$, en "externalisant" les 3 réjecteurs$\overline{W}_{REJ_3}$, $\overline{W}_{REJ_4}$ et $\overline{W}_{REJ_5}$. Cet effet permet une légère amélioration du rejet des vibrations d_v, comme le confirme les simulations temporelles du Tableau 5.5. Cependant, cela se fait au prix d'une légère augmentation de la consommation moteur, et aussi d'une légère dégradation du rejet de la perturbation d_f (frottements), puisque le gain de la fonction de sensibilité S_Ω augmente légèrement avant et après $[\underline{\omega}_z, \overline{\omega}_z]$. Ce dernier effet est connu sous le terme de "Waterbed Effect" résultant de l'intégrale de Bode de la fonction de sensibilité [DFA90, Chapitre 6,Théorème 2]

$$\int_0^\infty \ln|S_\Omega(j\omega)|.d\omega = \pi \sum_i \mathrm{Re}(p_i), \tag{5.25}$$

si L_Ω a au moins 2 pôles de plus que de zéros et les p_i sont les pôles L_Ω tels que $\mathrm{Re}(p_i) > 0$. Dans notre application la condition sur le degré relatif de L_Ω est remplie, et de plus L_Ω n'a pas de pôles dans le demi plan complexe droit ouvert ($Re(s) > 0$), donc 5.25 devient simplement

$$\int_0^\infty \ln|S_\Omega(j\omega)|.d\omega = 0.$$

L'aire où la sensibilité du bouclage vis-à-vis des perturbations est réduite ($\ln|S_\Omega| \leq 0$) sera donc égale à celle où elle est dégradée ou augmentée ($\ln|S_\Omega| \geq 0$). Ce compromis fréquentiel inévitable peut être anticipé en amont, dès le réglage des pondérations ou ajusté a posteriori

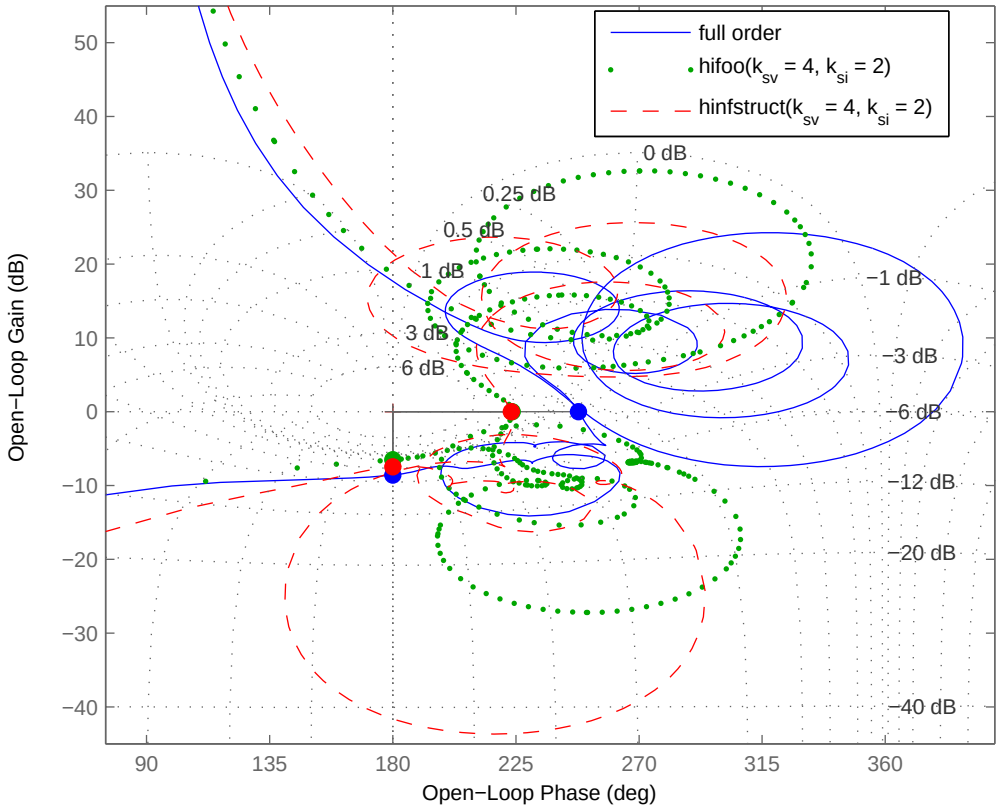

Figure 5.8 – Diagramme de Black-Nichols de la boucle ouverte en entrée : $\widehat{K}_{s_\Omega}$ en structure cascade $\left(\partial^\circ \widehat{K}_{s_\Omega} = 4, \partial^\circ \widehat{K}_{s_i} = 2\right)$

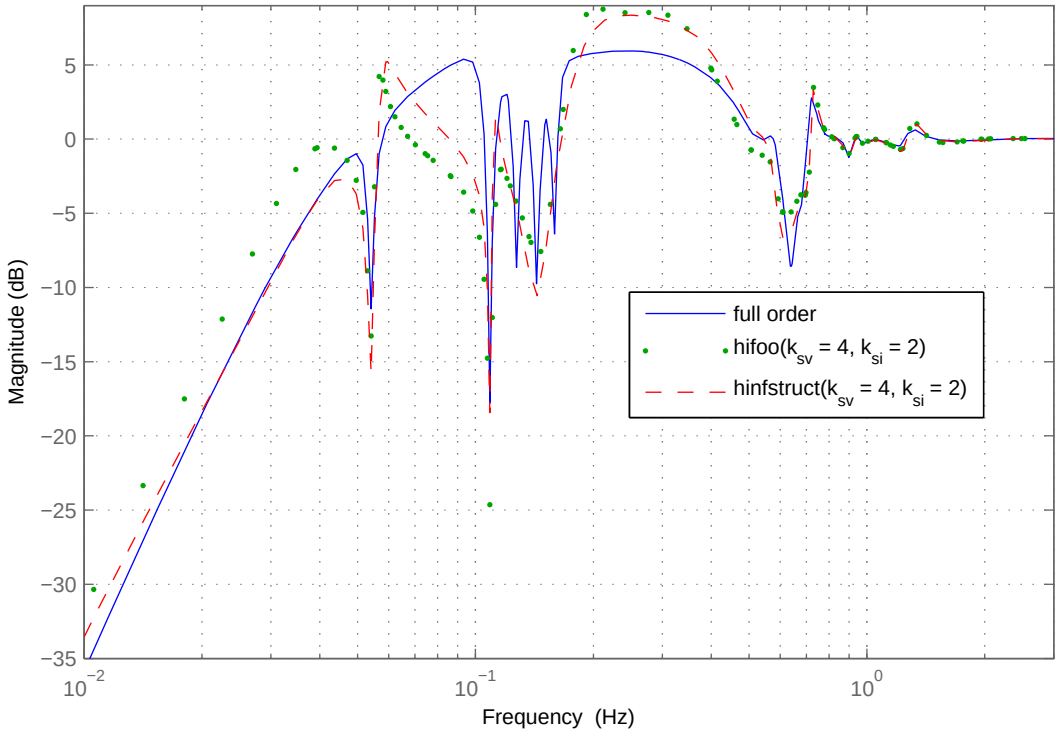

Figure 5.9 – Gain de la fonction de sensibilité S_Ω : $\widehat{K}_{s_\Omega}$ en structure cascade $\left(\partial^\circ \widehat{K}_{s_\Omega} = 4, \partial^\circ \widehat{K}_{s_i} = 2\right)$

	$\partial^\circ K_\Omega$	$\partial^\circ K_i$	GM_u	PM_u	$e_{RMS}(d_v)$	$conso_{max}(d_v)$	$e_{crete}(d_f)$
ordre plein	52	40	8,6 dB	68 °	0,93 θ_{RMS}	0,87 i_{max}	0,75 θ_{max}
hankelmr	20	7	7,6 dB	50 °	0,97 θ_{RMS}	0,87 i_{max}	0,70 θ_{max}
balancmr	20	7	8,5 dB	68 °	0,93 θ_{RMS}	0,87 i_{max}	0,75 θ_{max}
fitfrd	20	7	7,1 dB	70 °	0,93 θ_{RMS}	0,87 i_{max}	0,77 θ_{max}
hifoo(par)	14	3	6,3 dB	51,8 °	0,8 θ_{RMS}	1,03 i_{max}	0,95 θ_{max}
hinfstruct(par)	14	3	7,5 dB	46,4 °	0,8 θ_{RMS}	1,05 i_{max}	0,95 θ_{max}
hifoo(casc)	10	3	6,5 dB	43,9 °	0,81 θ_{RMS}	0,95 i_{max}	0,95 θ_{max}
hinfstruct(casc)	10	3	7,5 dB	43,5 °	0,78 θ_{RMS}	1,1 i_{max}	0,8 θ_{max}

Tableau 5.5 – Comparaison : réduction d'ordre *a posteriori* et synthèse à ordre fixé et structure (*par* = parallèle, *casc* = cascade) fixée

(par exemple en ajustant la profondeur des réjecteurs ou la largeur de la zone fréquentielle de réjection $[\underline{\omega}_z, \overline{\omega}_z]$).

L'externalisation partielle des pondérations et l'utilisation des outils d'optimisation non lisse offrent donc plus de possibilités notamment pour la structuration du correcteur, qui facilitent la réduction d'ordre pour des correcteurs multivariables.

5.2 Loop-Shaping graphique

Dans la section précédente, nous avons considéré qu'un réglage satisfaisant de W_{in} et W_{out} était disponible. Lorsque cela n'est pas le cas, nous proposons ici une autre approche permettant la synthèse d'un correcteur, uniquement à partir d'un gabarit de gain en boucle ouverte objectif, construit de manière graphique et traduisant les objectifs de performance et de robustesse de l'asservissement. Cette approche se veut plus générale, et non spécifique à la problématique de stabilisation inertielle de ligne de visée qui nous occupe dans cette thèse.

5.2.1 Procédure de synthèse

Soit G un modèle linéaire nominal du système à asservir, et dont une représentation d'état minimale est

$$G = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]; \tag{5.26}$$

avec $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$, où m et p sont respectivement le nombre d'entrées et de sorties de G.

L'objectif étant de mettre en oeuvre une commande robuste aux incertitudes de modèles, on supposera que le système à asservir appartient à la famille de modèles dispersés autour du modèle nominal

$$G_\Delta = \left\{ \ (I+\Delta(s))G(s); \quad \Delta \in RH_\infty \ \right\}. \tag{5.27}$$

L'erreur de modélisation relative fréquentielle

$$\Delta(j\omega), \quad \omega > 0$$

peut être obtenue soit à partir de mesures de réponses fréquentielles du système effectuées dans différentes conditions opérationnelles, soit en faisant varier a priori des paramètres

(fréquences et amortissements des modes de résonance mécanique par exemple) du modèle nominal G. Les 2 exemples traités illustreront chacune de ces 2 approches.

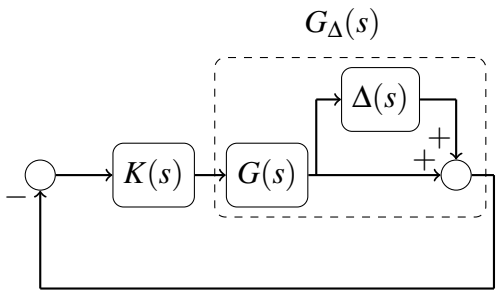

Figure 5.10 – Bouclage avec incertitude multiplicative non structurée en sortie de modèle

La méthode de synthèse du correcteur K de la Figure 5.10, inspirée de la routine *loopsyn* [BPSC04] de Matlab, se décline essentiellement en 3 étapes : une première étape de construction graphique du gain fréquentiel objectif en boucle ouverte

$$h(\omega) > 0, \quad \omega \in [\omega_{min}, \omega_{max}], \tag{5.28}$$

suivi d'une seconde étape de calcul d'une pondération W stable, inversible et d'inverse stable, telle que

$$\sigma(G(j\omega)W(j\omega)) \approx h(\omega), \quad \omega \in [\omega_{min}, \omega_{max}]; \tag{5.29}$$

et enfin une troisième étape de synthèse H_∞ à ordre fixé à partir du critère *Loop-Shaping* 4 blocs avec pondérations "externalisées" (Figure 5.1 bas).

Nous allons décrire de manière détaillée chacune de ces étapes.

5.2.1.1 Construction graphique du loopshape

Le gain fréquentiel $h(\omega)$ est construit de manière à traduire les objectifs de performance et de robustesse du bouclage, sur les valeurs singulières de la boucle ouverte (le raisonnement sur le gain de la boucle ouverte est analogue au cas SISO présenté dans la section 2.1.1 p. 24) :

– En basses fréquence ($\omega \ll \omega_C$), on requiert généralement

$$\underline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) \approx h(\omega) \gg 1, \tag{5.30}$$

afin d'assurer un bon rejet de perturbation et un bon suivi de consigne.

– En hautes fréquences ($\omega \gg \omega_C$), on requiert généralement

$$\overline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) \approx h(\omega) \ll 1, \tag{5.31}$$

afin d'assurer la robustesse en stabilité du bouclage vis-à-vis des dynamiques hautes fréquences négligées dans le modèle nominal, mais prises en compte à travers l'erreur de modélisation relative fréquentielle $\Delta(j\omega)$. Notamment, cette dernière permet de régler le niveau du gain $h(\omega)$ en hautes fréquences.

– En moyennes fréquences ($\omega \approx \omega_C$), près de la bande passante désirée, la pente du gain $h(\omega)$ doit être faible (typiquement on cherche à tendre vers -20 dB/décade). De plus,

afin d'avoir des performances acceptables, le choix de la fréquence de la bande passante ω_C est en pratique limité par les pôles et zéros instables de G [SP96, p .185-197].

Une fois le gain $h(\omega)$ construit sur une bande de fréquence $[\omega_{min}, \omega_{max}]$, ce dernier est ensuite approximé par une fonction de transfert propre stable et à phase minimale

$$L_h(s) = \frac{n_{L_h}(s)}{d_{L_h}(s)}, \tag{5.32}$$

où le numérateur n_{L_h} et le dénominateur d_{L_h} sont des polynômes n'ayant pas de racines à partie réelle positive. Pour cela une des possibilité est d'utiliser la notion de factorisation spectrale d'une fonction de transfert [DFA90, Section 12.2], en remarquant que

$$F_h(s) = L_h(-s)L_h(s) \tag{5.33}$$

est une fraction rationnelle en s^2 qui a ses zéros et ses pôles symétriques par rapport à l'origine du plan complexe. C'est-à-dire que si z_i (p_i) est un zéro (pôle) de F_h, alors $-z_i$ ($-p_i$) l'est également. Dans l'équation 5.33, L_h est alors appelé *facteur spectral* de F_h. Ainsi, on a $F_h(j\omega) \in \mathbb{R}$, et on cherche alors à avoir

$$|F_h(j\omega_k)| \approx h^2(\omega_k), \tag{5.34}$$

pour l'ensemble des pulsations $\omega_k \in [\omega_{min}, \omega_{max}]$, $k \in [1, .., r]$.

Dans la routine *fitmagfrd* de Matlab, en posant

$$\begin{aligned} F_h(s) &= \frac{n_{F_h}(s)}{d_{F_h}(s)} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{q} a_i s^{2i}}{\sum_{i=0}^{q} b_i s^{2i}}, \end{aligned} \tag{5.35}$$

avec $q = \partial^\circ L_h$; une résolution du type

$$\begin{aligned} &\min_{t,a,b} \quad t \\ &\text{sous contraintes :} \quad \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{h^2(\omega_k)} \left| \frac{n_{F_h}(a, j\omega_k)}{d_{F_h}(b, j\omega_k)} \right| \leq 1 + t, \quad k \in [1, .., r], \end{aligned} \tag{5.36}$$

par dichotomie (sur t) et programmation linéaire (pour la faisabilité de la contrainte à t fixé) est implémentée. Une fois obtenus les vecteurs des coefficients

$$a = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_q \end{bmatrix}^T \quad , \quad b = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_q \end{bmatrix}^T$$

de n_{F_h} (numérateur) et d_{F_h} (dénominateur), la factorisation spectrale 5.33 permet d'obtenir L_h en calculant les zéros (racines de n_{F_h}) et les pôles (racines de d_{F_h}), et en retenant ceux ayant une partie réelle strictement négative pour construire n_{L_h} et d_{L_h}.

5.2.1.2 Calcul d'une pondération Loop-Shaping

La pondération W stable, inversible et d'inverse stable, est construite à partir d'une factorisation *inner-outer* de G :

$$G(s) = G_i(s)G_o(s), \tag{5.37}$$

où $G_i \in RH_\infty$ est *inner* et $G_o \in RH_\infty$ est *outer* :

Définition 5.1. *Une matrice de transfert quelconque N est inner si elle est propre, stable et satisfait*

$$N^T(-s)N(s) = I \tag{5.38}$$

Définition 5.2. *Une matrice de transfert quelconque M est outer si elle est propre, stable et d'inverse stable.*

Afin de calculer les facteurs G_i et G_o, les hypothèses suivantes sont nécessaires :

H 5.1. *Les paires (A,B) et (A,C) sont respectivement stabilisable et détectable.*

H 5.2. *G n'a ni zéros ni pôles imaginaires purs, ou à l'infini.*

L'hypothèse **H** 5.1, fondamentale pour la commande est généralement remplie. Pour des systèmes contenant des intégrateurs purs, ou alors ayant des zéros de transmission à l'infini (c'est le cas si la matrice de transmission directe D est nulle ou de rang déficient), l'hypothèse **H** 5.2 peut être remplie via des régularisations du type 5.1 et 5.2, simples à faire dans le cas SISO ; ou alors dans le cas MIMO par une transformation bilinéaire [Saf87, CS91] permettant de ramener tous les pôles et les zéros de transmission de G dans un disque du plan complexe de rayon adéquat.

Pour $p \geq m$ (G a plus de sorties que d'entrées), et sous les hypothèses **H** 5.1 et **H** 5.2, [Doy84, Théorème 1 p.113] permet de construire, par résolution d'une équation algébrique de Riccati, une réalisation de N et M tels $G(s) = N(s)M^{-1}(s)$ est une factorisation copremière à droite et N est *inner* :

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A+BF & BR^{-1/2} \\ \hline F & R^{-1/2} \end{array}\right], \quad N = \left[\begin{array}{c|c} A+BF & BR^{-1/2} \\ \hline C+DF & DR^{-1/2} \end{array}\right], \tag{5.39}$$

avec

$$\begin{aligned} &R = D^TD \succ 0 && (\ D \text{ est de rang plein par l'hypothèse } \mathbf{H}\ 5.2) \\ &F = -R^{-1}(B^TX + D^TC) \end{aligned} \tag{5.40}$$

et

$$X = Ric\begin{bmatrix} A - BR^{-1}D^TC & -BR^{-1}B^T \\ -C^TD_\perp D_\perp^TC & -(A-BR^{-1}D^TC)^T \end{bmatrix}. \tag{5.41}$$

La matrice $D_\perp$ est le complément orthogonal de D, c'est à dire une matrice de rang plein telle que

$$D^TD_\perp = 0;$$

et elle est telle que $\begin{bmatrix} DR^{-1/2} & D_\perp \end{bmatrix}$ est carré et orthogonal, c'est à dire

$$\begin{bmatrix} DR^{-1/2} & D_\perp \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} DR^{-1/2} & D_\perp \end{bmatrix} = I.$$

Par définition des facteurs copremiers, on a $M \in RH_\infty$ et $N \in RH_\infty$, c'est-à-dire qu'ils sont propres et stables. Donc si G est stable, alors M est d'inverse stable, donc M est *outer*. Ainsi,

dans ce cas, les facteurs *inner-outer* de G sont :

$$G_i(s) = N(s), \quad G_o(s) = M^{-1}(s). \tag{5.42}$$

Si G est instable, alors tous les pôles instables de G sont contenus dans les zéros de M. On peut alors appliquer le même type de factorisation copremière à M^T, c'est à dire

$$M^T(s) = N_m(s)M_m^{-1}(s), \tag{5.43}$$

où N_m est carré et *inner* et donc M_m *outer*. Ainsi, on a

$$M(s) = (M_m^{-1}(s))^T N_m^T(s),$$

donc

$$M^{-1}(s) = (N_m^T(s))^{-1} M_m^T(s).$$

Dans ce cas, on a alors

$$G_i(s) = N(s)(N_m^T(s))^{-1}, \quad G_o(s) = M_m^T(s) \tag{5.44}$$

Une fois défini les facteurs *inner-outer* de G, par 5.42 (si G est stable) ou par 5.44 (si G est instable), on est alors en mesure de déduire de

$$\begin{aligned} \sigma(L_h(j\omega)) &= \sigma\left(G_i(j\omega)L_h(j\omega)\right) \qquad (\text{ car } G_i^T(-j\omega)G_i(j\omega) = I \text{ par définition}) \\ &= \sigma\left(G(j\omega)G_o^{-1}(j\omega)L_h(j\omega)\right) \end{aligned} \tag{5.45}$$

la pondération recherchée

$$W(s) = G_o^{-1}(s)L_h(s), \tag{5.46}$$

telle que

$$\sigma(G(j\omega)W(j\omega)) = \sigma(L_h(j\omega)), \tag{5.47}$$

et qui est bien stable, d'inverse stable.

5.2.1.3 Synthèse à ordre fixé et/ou structure fixée

Dans le cas d'un système ayant autant d'entrées que de sorties ($p = m$), le critère de synthèse 4 blocs avec pondérations "externalisées" de la Figure 5.1(bas) est construit en posant

$$W_{in}(s) = W(s), \quad W_{out}(s) = I. \tag{5.48}$$

Le problème de synthèse H_∞ à ordre et/ou structure fixés peut alors être résolu via les outils d'optimisation non lisse par exemple.

Pour le cas pratique ($p > m$) où l'on dispose de mesures supplémentaires, le nombre de valeurs singulières m modelées via la pondération W est strictement inférieur au nombre de mesures de feedback p. Il ne sera donc pas possible de découpler les p sorties directement via la pondération W. La synthèse SIMO par cette approche requiert donc de légères modifi-

cations, que nous expliciterons dans l'exemple sur la stabilisation inertielle de ligne de visée, où l'on dispose de 2 mesures (vitesse inertielle de la ligne de visée et courant moteur) et une seule commande (tension moteur).

5.2.2 Applications

Dans cette section nous allons présenter 2 applications de cette méthodologie de *Loop-Shaping* graphique. La première concerne la robustification à ordre fixé d'un correcteur SISO pour un dispositif optronique actionné par des moteurs piézo-électriques, la seconde concerne le problème de stabilisation inertielle de ligne de visée.

5.2.2.1 Application SISO : robustification à ordre fixé d'un correcteur existant

Cet exemple traite de la synthèse d'un correcteur robuste et d'ordre fixé pour un mécanisme de microscaning piloté par des actionneurs piézo-électriques.

Le microscaning est une technique permettant d'améliorer la résolution de certains capteurs d'image tels que les caméras infrarouge. Le dispositif consiste en un mécanisme d'acquisition de plusieurs images d'une même scène, tout en déplaçant, d'une fraction de pixel dans le plan, le détecteur de la caméra ou alors une lentille de focalisation (Figure 5.11).

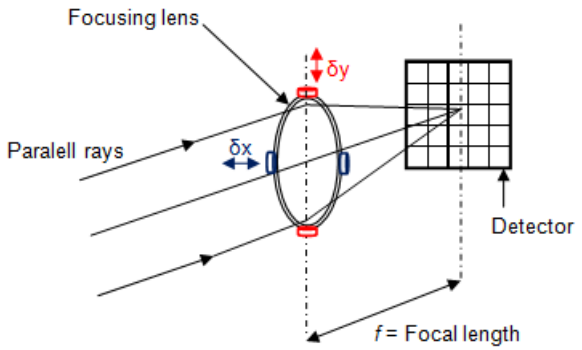

Figure 5.11 – Principe d'un mécanisme de microscaning

Ensuite ces différentes séquences d'images sont combinées en temps-réel, au moyen d'un algorithme de traitement d'images dédié, pour produire une image de meilleure résolution. Il est donc nécessaire de pouvoir faire des micro translations $(\delta x, \delta y)$ très rapides dans le plan (x, y) parallèle à la surface du détecteur de la caméra. Des actionneurs piézo-électriques, compte tenu de leur bande passante élevée, sont généralement utilisés pour ce type d'applications.

Sur ce type de dispositifs, on constate généralement, en fonction des conditions opérationnelles (température, configuration de montage), une dispersion non négligeable en amplitude et en fréquence de certains modes de résonance de l'ensemble du mécanisme (actionneurs piézo-électriques + éléments optiques). La Figure 5.12 présente un exemple de ce type de dispersion, où l'on a tracé les diagrammes de Bode de 35 fonctions de transferts mesurées (entre le déplacement δx ou δy et la commande du moteur suivant l'axe x ou y respectivement), pour différentes conditions opérationnelles.

Sur le bloc de microscaning en question, un correcteur simple K_b (d'ordre $\partial^\circ K_b = 3$) réglé sur le modèle nominal G (Figure 5.13) était implémenté et ce dernier remplissait le cahier des charges spécifié en temps de réponse en boucle fermée, et en termes de marges de robustesse classiques (marge de gain et de phase) (Figure 5.14).

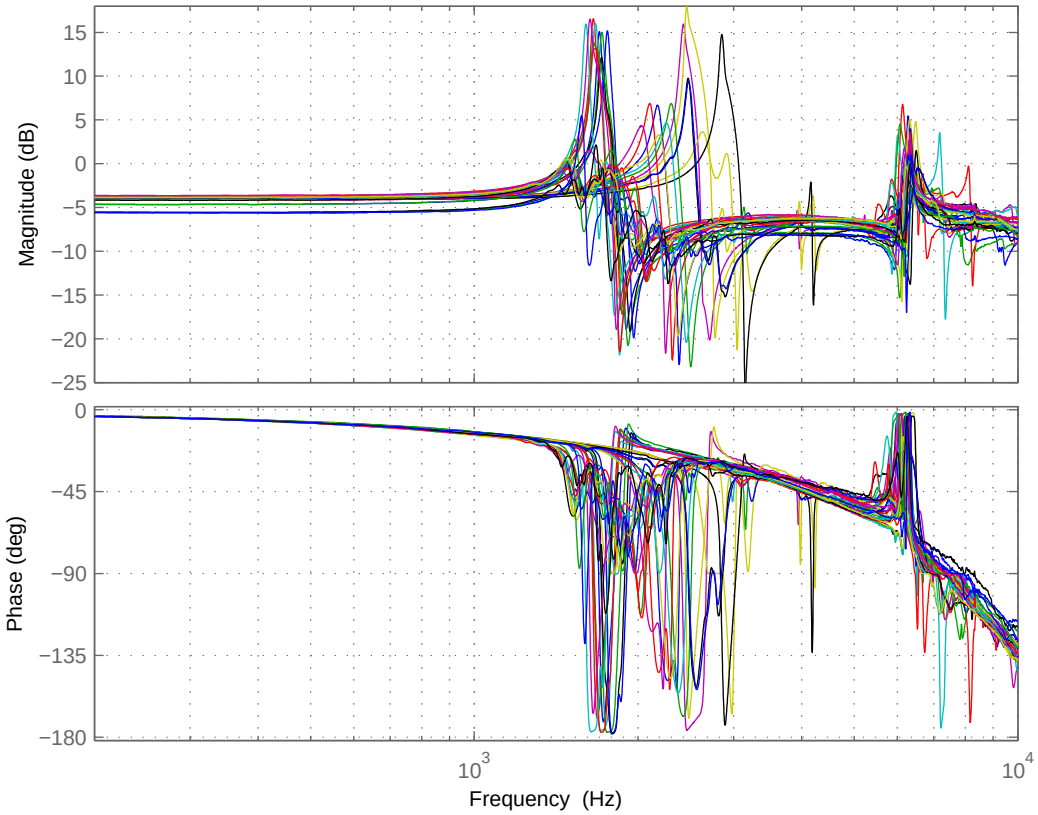

Figure 5.12 – Diagrammes de Bode des fonctions de transferts mesurées $G_i(j\omega)$ dans différentes conditions opérationnelles

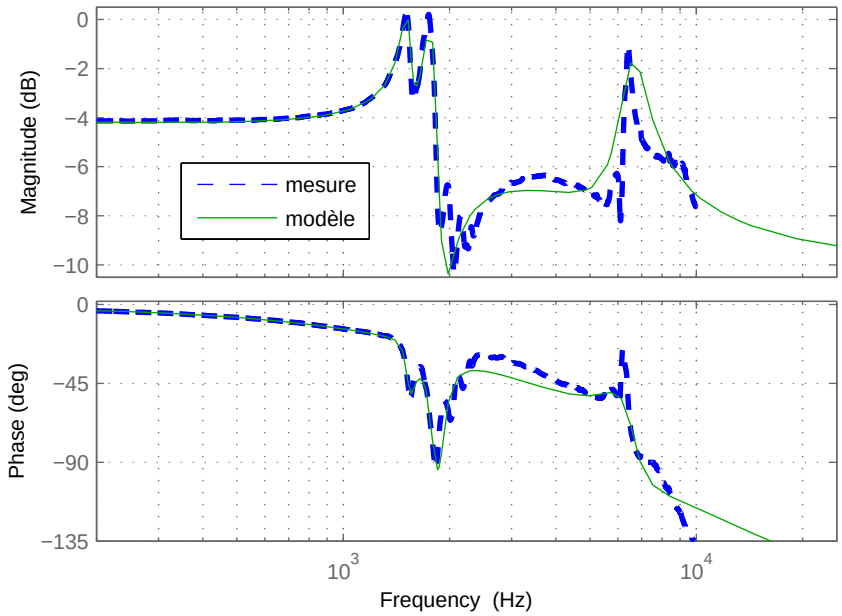

Figure 5.13 – Diagrammes de Bode de la fonction de transfert nominale G

Toutefois, il a été constaté en essais, puis confirmé *a posteriori* après mesure des fonctions de transferts G_i, $i \in [1,..,35]$, que ce correcteur n'était pas stabilisant dans certaines conditions opérationnelles, comme le montrent les diagrammes de Black-Nichols de la Figure 5.15.

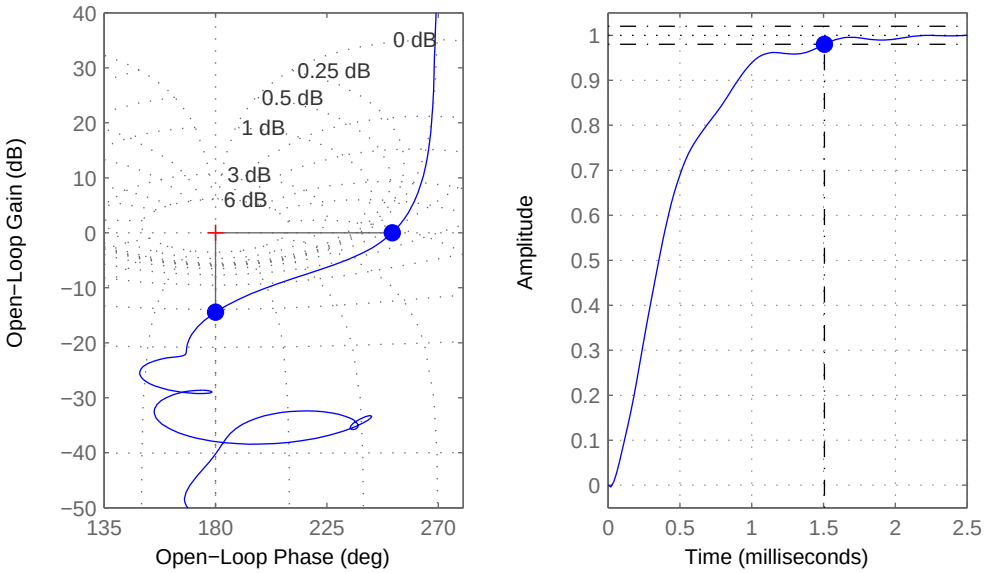

Figure 5.14 – Boucle ouverte nominale GK_b (Gauche), Réponse indicielle de la boucle fermée nominale $GK_b(1+GK_b)^{-1}$ (Droite)

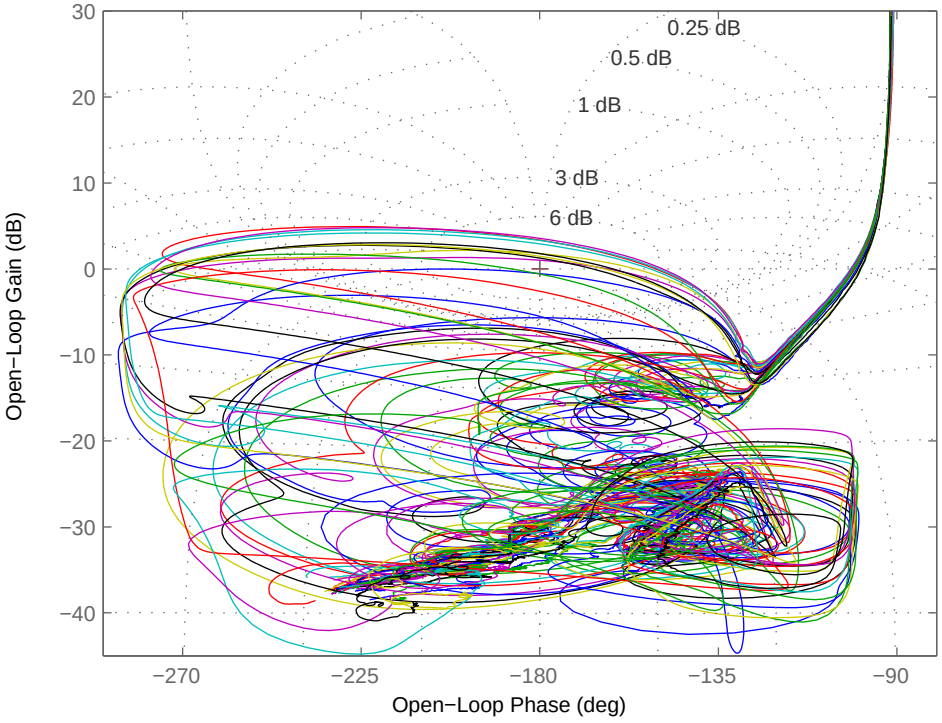

Figure 5.15 – Boucles ouvertes G_iK_b pour $i \in [1,..,35]$

Nous avons alors proposé, à partir de ces mesures, de robustifier le correcteur K_b, de façon à stabiliser l'ensemble G_i représentatif de la majorité des conditions opérationnelles, ceci sans augmenter son ordre et sans trop dégrader les performances nominales.

En basses fréquences, soit pour $\omega < \omega_C$, où ω_C est telle que

$$|G(j\omega_C)K_b(j\omega_C)| = 1,$$

on cherche à conserver l'allure du gain de la boucle ouverte obtenue avec K_b, c'est à dire

qu'on construit le gain cible $h(\omega)$ de manière à avoir :

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \approx |G(j\omega)K_b(j\omega)| \tag{5.49}$$

Ensuite, vis-à-vis du modèle nominal G, on définit l'ensemble des erreurs relatives de modélisation

$$\Delta_i(j\omega) = \frac{G_i(j\omega) - G(j\omega)}{G(j\omega)}, \quad \omega > 0, \tag{5.50}$$

dont le gain $|\Delta_i(j\omega)|$ permet de construire en hautes fréquences ($\omega > \omega_C$) le gain $h(\omega)$ de manière à avoir le roll-off nécessaire, en approximant la condition de robustesse en stabilité issue du théorème du petit gain :

$$\frac{1}{\max\limits_i |\Delta_i(j\omega)|} > |T(j\omega)| \approx |L(j\omega)| \approx h(\omega) \tag{5.51}$$

avec

$$L(s) = G(s)K(s), \quad T(s) = L(s)(1+L(s))^{-1}, \tag{5.52}$$

et K le correcteur recherché.

Le gain ainsi construit est approximé (avec la commande *fitmagfrd* de Matlab) par une fonction de transfert stable et à phase minimale $L_h(s)$, d'ordre $\partial^\circ L_h = 6$. Un correcteur K d'ordre $\partial^\circ K = \partial^\circ K_b = 3$ est alors synthétisé avec HINFSTRUCT.

Le tracé des diagrammes de Bode de K_b et K de la figure 5.16 montre que la robustification ici consiste bien à diminuer suffisamment le gain du correcteur dans la zone de fréquences où le module des incertitudes relatives mesurées $|\Delta_i(j\omega)|$ est maximal.

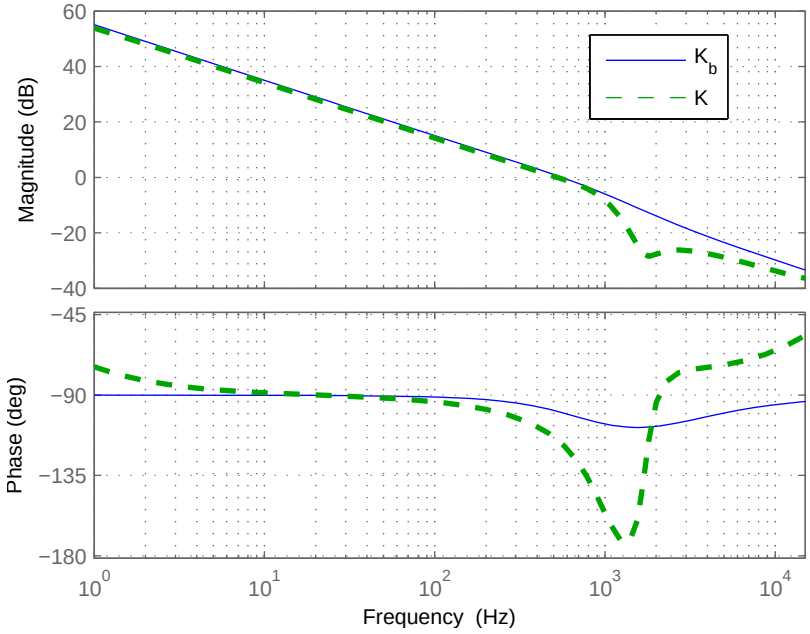

Figure 5.16 – Diagrammes de Bode des correcteurs K_b et K

Le gain objectif $h(\omega)$ construit et utilisé pour cette synthèse de correcteur est tracé sur la Figure 5.17, ainsi que celui des boucles ouvertes $G(j\omega)K_b(j\omega)$ et $G(j\omega)K(j\omega)$ (ordre plein

et ordre fixé). Les diagrammes de Black-Nichols des boucles ouvertes G_iK pour $i \in [1,..,35]$ tracés sur la figure 5.18, montrent bien la robustesse de ce nouveau correcteur vis-à-vis de la dispersion des modes de résonance.

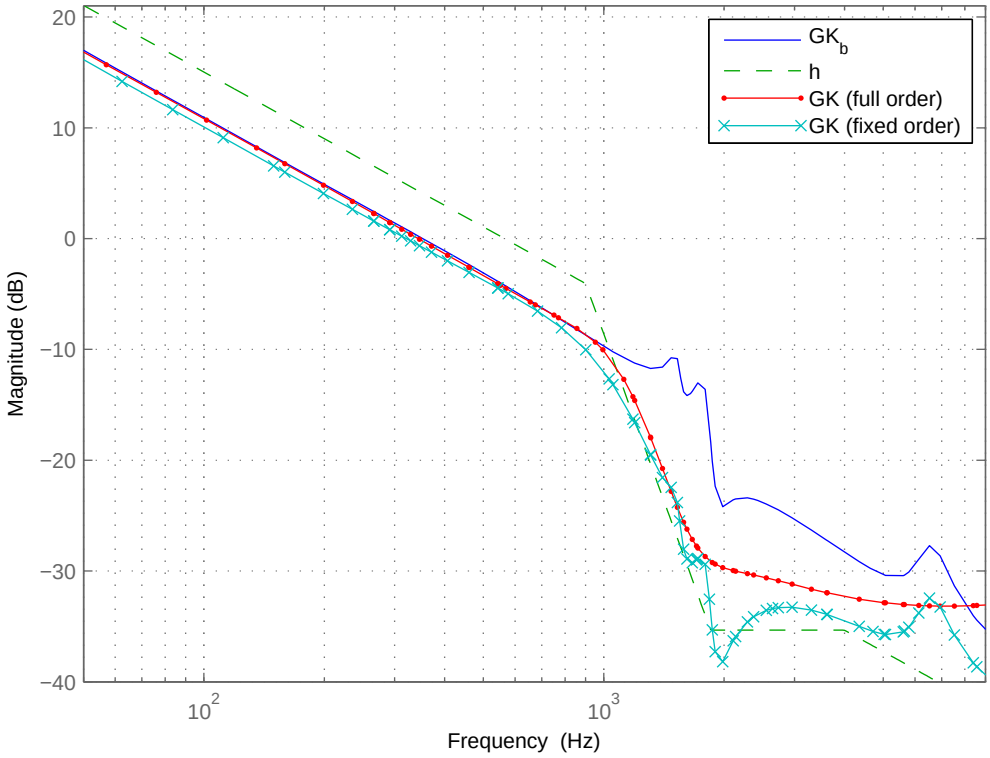

Figure 5.17 – Gain en boucle ouverte : $h(\omega)$, $G(j\omega)K_b(j\omega)$ et $G(j\omega)K(j\omega)$(en ordre plein et ordre fixé)

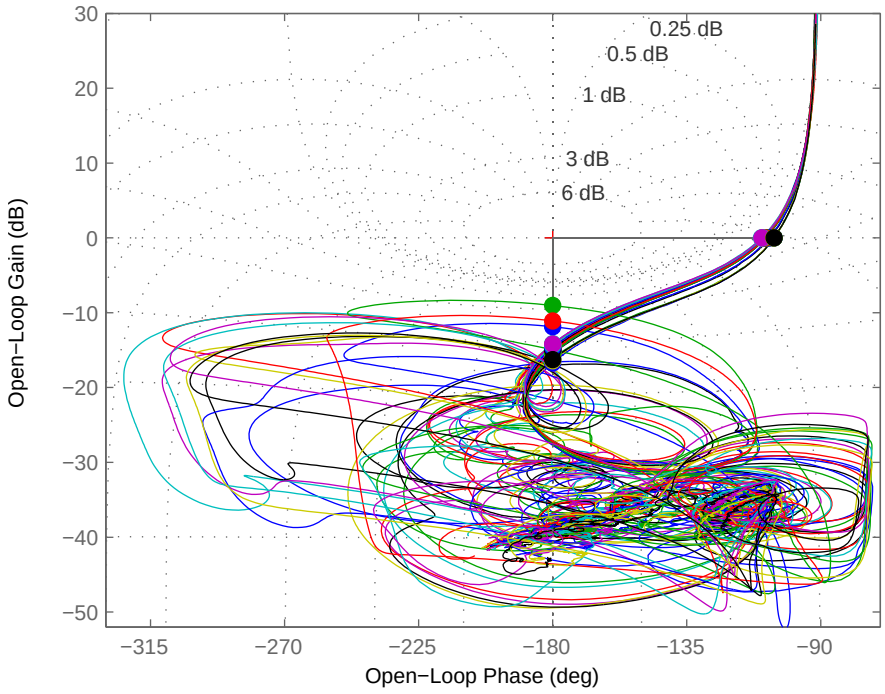

Figure 5.18 – Boucles ouvertes G_iK pour $i \in [1,..,35]$

Par ailleurs, sur la figure 5.19, on peut vérifier que la condition suffisante de robustesse en stabilité est bien remplie avec K, ce qui n'était pas le cas avec K_b. Et enfin, sur la figure 5.20,

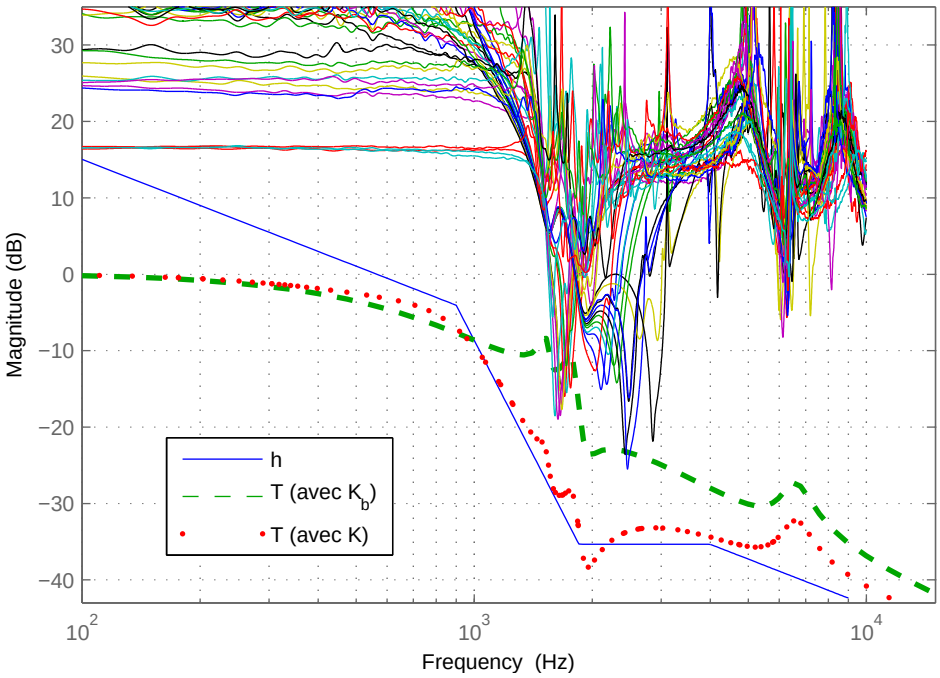

Figure 5.19 – Boucle fermée $|T(j\omega)|$ comparée à $\frac{1}{|\Delta_i(j\omega)|}$ pour $i \in [1,..,35]$

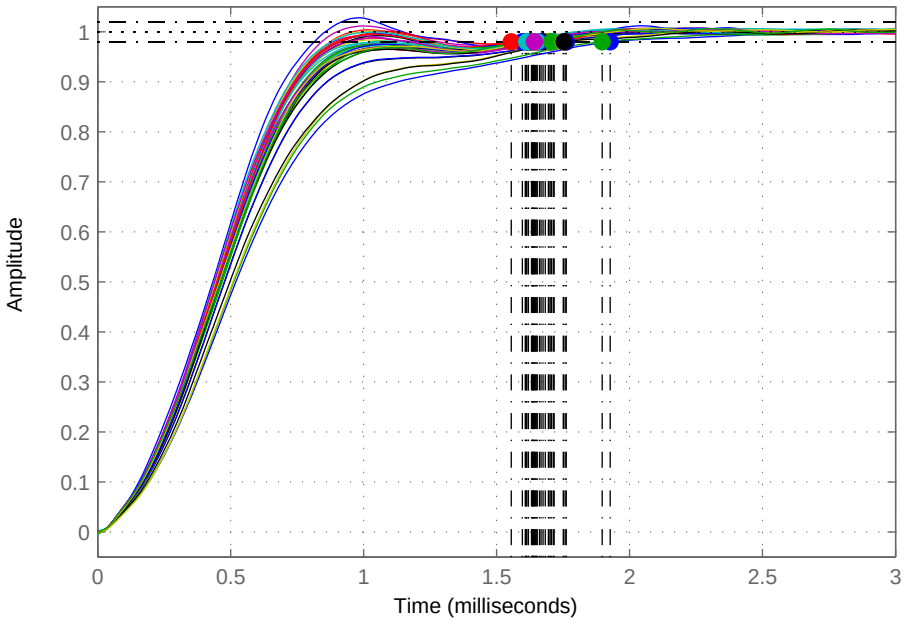

Figure 5.20 – Réponses indicielles des boucles fermées $G_iK(1+G_iK)^{-1}$ pour $i \in [1,..,35]$

les réponses indicielles en boucle fermée montrent que les performances obtenues avec ce nouveau correcteur K restent proches de ceux du correcteur initial K_b, et de plus celles-ci sont homogènes sur l'ensemble des modèles G_i.

5.2.2.2 Application SIMO

Dans cette section nous allons adapter l'approche de Loop-Shaping graphique à ordre fixé à la synthèse d'un correcteur à deux entrées et une sortie. Pour cela, on considère le modèle linéaire SIMO d'un axe de visée

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\Omega_{mes}(s)\\ i(s)\end{bmatrix} &= G(s)u(s)\\ &= \begin{bmatrix}G_m(s)G_e(s)\\ G_e(s)\end{bmatrix}u(s)\end{aligned} \tag{5.53}$$

introduit précédemment.

L'exemple que nous traiterons ici est quasiment le même que celui introduit dans la section 2.3 p. 34 et discutés dans les sections précédentes. En effet le modèle de synthèse du correcteur (mesures des fonctions de transfert G_e et G_m) est le même, cependant l'environnement vibratoire auquel est soumis le bloc optronique gyrostabilisé à l'intérieur du viseur est légèrement différent, du fait de l'architecture mécanique du viseur qui a été légèrement modifiée entretemps (entre le début de la thèse en 2010 et mai 2013). De plus, pour cette nouvelle configuration mécanique, nous avons pu implémenter et valider le correcteur en environnement vibratoire.

Ici, la construction du gain $h(\omega)$ en basses fréquences suit le raisonnement détaillé section 2.1.1 p. 24. Plus précisément on peut se servir comme précédemment (section 2.3 p. 34) de la transformée de Fourier de la perturbation d_v mesurée par le gyromètre (Figure 5.21) lorsqu'il n'y pas d'asservissement, pour dessiner le gain nécessaire dans les différentes zones de réjection en basses fréquences.

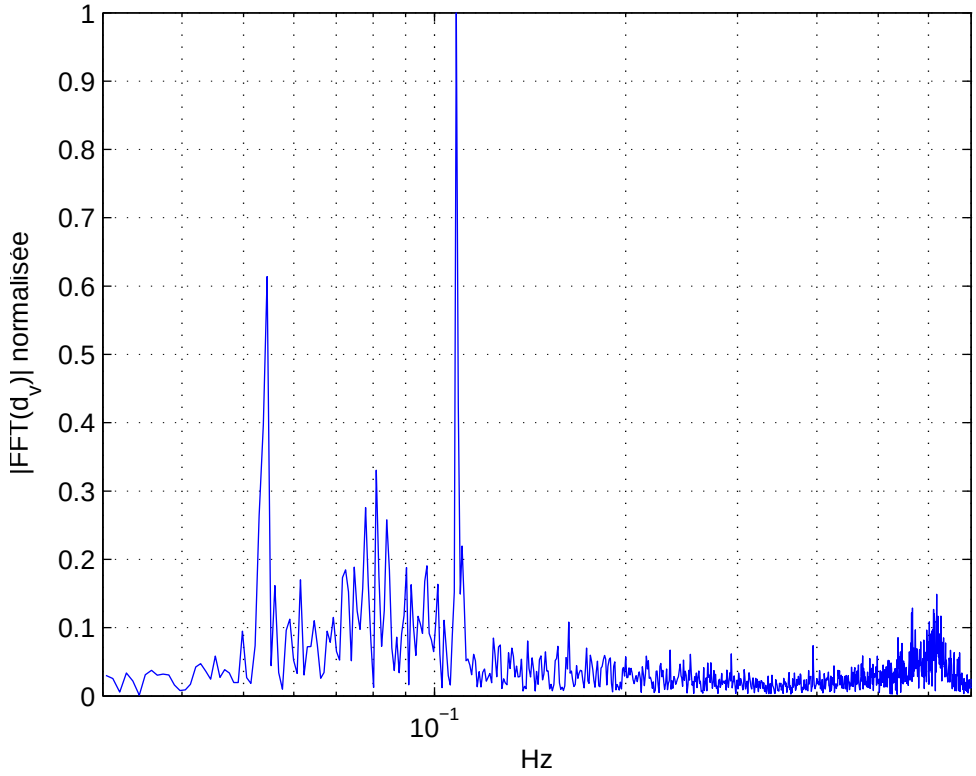

Figure 5.21 – FFT (normalisée) de la perturbation en sortie de modèle d_v (pour cette nouvelle configuration mécanique)

Contrairement à l'exemple de la section précédente, on ne dispose pas cette fois de mesures de réponses fréquentielles dans plusieurs conditions opérationnelles (température par exemple). Pour la robustesse en stabilité vis-à-vis des variations sur les modes de résonance de la fonction de transfert mécanique identifiée G_m, on procède par une dispersion *a priori* des paramètres (fréquence et amortissement) de ces modes de résonance. En effet les valeurs propres de G_m sont du type :

$$\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in [1,..,p], \quad -\xi_k\omega_k \pm j\omega_k\sqrt{1-\xi_k^2}, k \in [1,..,q] \tag{5.54}$$

et on peut toujours trouver une représentation d'état de G_m sous la forme canonique :

$$G_m = \left[\begin{array}{c|c} A_{m_{can}} & B_{m_{can}} \\ \hline C_{m_{can}} & D_{m_{can}} \end{array}\right]; \tag{5.55}$$

avec

$$A_{m_{can}} = diag\left(\lambda_1, \quad ..., \lambda_p, \quad A_1, \quad \cdots, \quad A_q\right) \tag{5.56}$$

où

$$A_k = \begin{bmatrix} -\xi_k\omega_k & \omega_k\sqrt{1-\xi_k^2} \\ -\omega_k\sqrt{1-\xi_k^2} & -\xi_k\omega_k \end{bmatrix}, \quad k \in [1,..,q] \tag{5.57}$$

et $p+2q = dim\,(A_{m_{can}})$.

Ainsi on peut donc faire une dispersion aléatoire pour les modes complexes peu amortis (typiquement $\xi_k < 0,1$) de ce modèle en posant :

$$\begin{aligned} \xi_{k,\delta} &= \xi_k(1+\delta_\xi), \\ \omega_{k,\delta} &= \omega_k(1+\delta_\omega), \end{aligned} \tag{5.58}$$

où δ_ξ et δ_ω sont tirés aléatoirement suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[-\alpha,\alpha]$, $\alpha > 0$ étant un pourcentage de variation maximale acceptable sur ces paramètres. Par exemple, en prenant $\alpha = 0,05$ on a généré l'enveloppe de modèles G_{m_k}, pour $k \in [1,..,20]$ de la Figure 5.22 ; ce qui permet de définir, comme dans l'exemple de la section précédente, l'incertitude complexe relative sur la fonction de transfert mécanique

$$\Delta_{m_k}(j\omega) = \frac{G_{m_k}(j\omega) - G_m(j\omega)}{G_m(j\omega)}, \quad \omega > 0. \tag{5.59}$$

On aboutit ainsi au gabarit de gain en boucle ouverte $h(\omega)$ de la Figure 5.23, où l'on a également tracé $\frac{1}{\max\limits_k |\Delta_{m_k}(j\omega)|}$ afin d'illustrer la façon dont le roll-off en hautes fréquences est construit, de manière à prendre en compte les variations des modes résonants de la fonction de transfert mécanique. On constate sur cette dernière figure que le maximum de $\max\limits_k |\Delta_{m_k}(j\omega)|$ est atteint à la pulsation $\omega = 2\times\pi\times 0,8 = 5 rad/s$, ce qui correspond à la pulsation où nous avions placé le réjecteur de roll-off sur T_Ω précédemment.

La principale modification spécifique au cas SIMO se situe alors dans la manière de calculer les pondérations Loop-Shaping pour la synthèse H_∞ à ordre fixé. En effet, nous cherchons

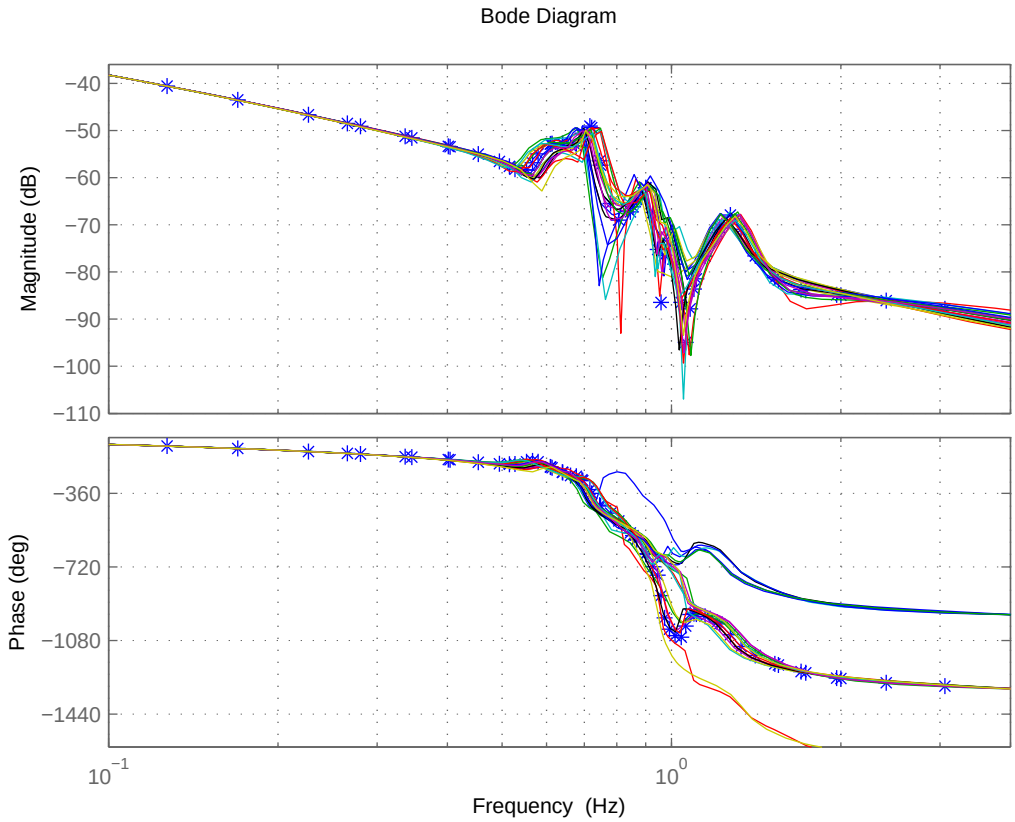

Figure 5.22 – Diagramme de Bode de $G_m(*)$ et des G_{m_k} pour $k \in [1,..,20]$

cette fois W telle que

$$|G_m(j\omega)G_e(j\omega)W(j\omega)| = |L_h(j\omega)|, \tag{5.60}$$

puisque l'on veut principalement modeler le gain de la boucle de vitesse inertielle. Ensuite cette pondération SISO

$$W(s) = G_{0_W} \prod_{i=1}^{\partial^\circ W} \frac{s - z_i}{s - p_i}$$

est factorisée en deux pondérations : W_{in} (composante de roll-off en hautes fréquences) et W_{out_Ω} (composante basses fréquences pour la performance en rejet de perturbations), telles que $W(s) = W_{out_\Omega}(s)W_{in}(s)$, en séparant les pôles p_i et les zéros z_i par rapport à la fréquence de coupure ω_C (telle que $h(\omega_C) = 1$). C'est à dire :

$$W_{in}(s) = \eta_W \left(\prod_{(|z_i|,|p_i|)>\omega_C} \frac{s - z_i}{s - p_i} \right), \quad \eta_W = \prod_{(|z_i|,|p_i|)>\omega_C} \left| \frac{p_i}{z_i} \right| \tag{5.61}$$

et

$$W_{out_\Omega}(s) = \frac{G_{0_W}}{\eta_W} \left(\prod_{(|z_i|,|p_i|)<\omega_C} \frac{s - z_i}{s - p_i} \right), \tag{5.62}$$

le coefficient η_W permettant d'avoir un gain unitaire sur la pondération de roll-off W_{in}. La figure 5.24 présente le tracé des diagrammes de Bode de ces pondérations, et leurs ordres

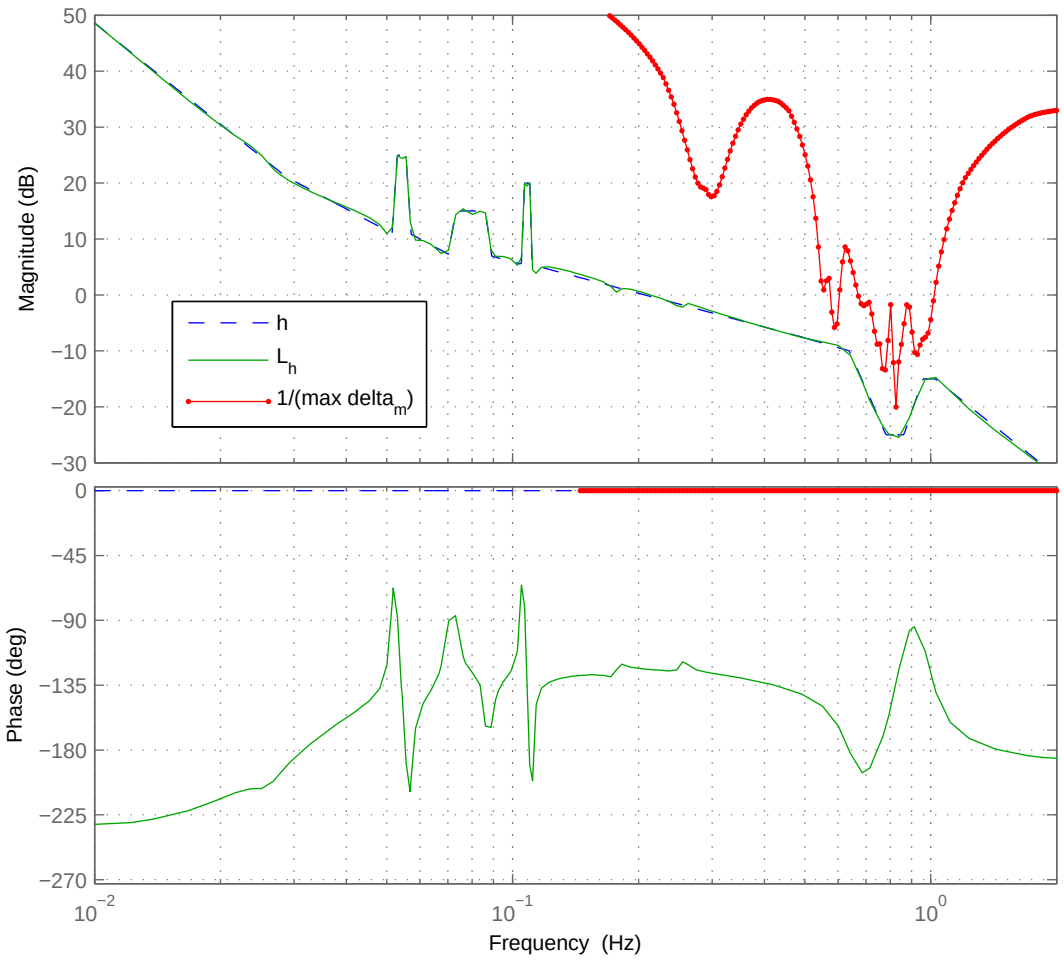

Figure 5.23 – Loopshape objectif $h(\omega) \approx |L_h(j\omega)|$ et inverse du maximum du module de l'incertitude relative $\frac{1}{\max_k |\Delta_{m_k}(j\omega)|}$

respectifs sont donnés dans le tableau 5.6.

$\partial^\circ G_m$	$\partial^\circ G_e$	$\partial^\circ L_h$	$\partial^\circ W$	$\partial^\circ W_{in}$	$\partial^\circ W_{out_\Omega}$
16	5	28	49	29	20

Tableau 5.6 – Ordre des pondérations

Dans la synthèse H_∞, avec le modèle SIMO G, la mesure de courant moteur sera pondérée, comme précédemment par une constante ρ, en posant

$$W_{out}(s) = \begin{bmatrix} W_{out_\Omega}(s) & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}.$$

La synthèse H_∞ à ordre plein donne sur cet exemple les résultats (critère H_∞ en boucle fermée, marges de stabilité en entrée, ordre du correcteur) du Tableau 5.7, où l'on constate que l'ordre du correcteur K est très élevé, compte tenu de l'ordre des pondérations issues du loop-shape graphique $h(j\omega)$. L'objectif est alors de synthétiser directement K_Ω et K_i, en résolvant le problème standard 4 blocs avec pondérations "externalisées" de la Figure 5.1(bas), à ordre et structure fixés. La forme d'état du système augmenté P pour ce problème est construite

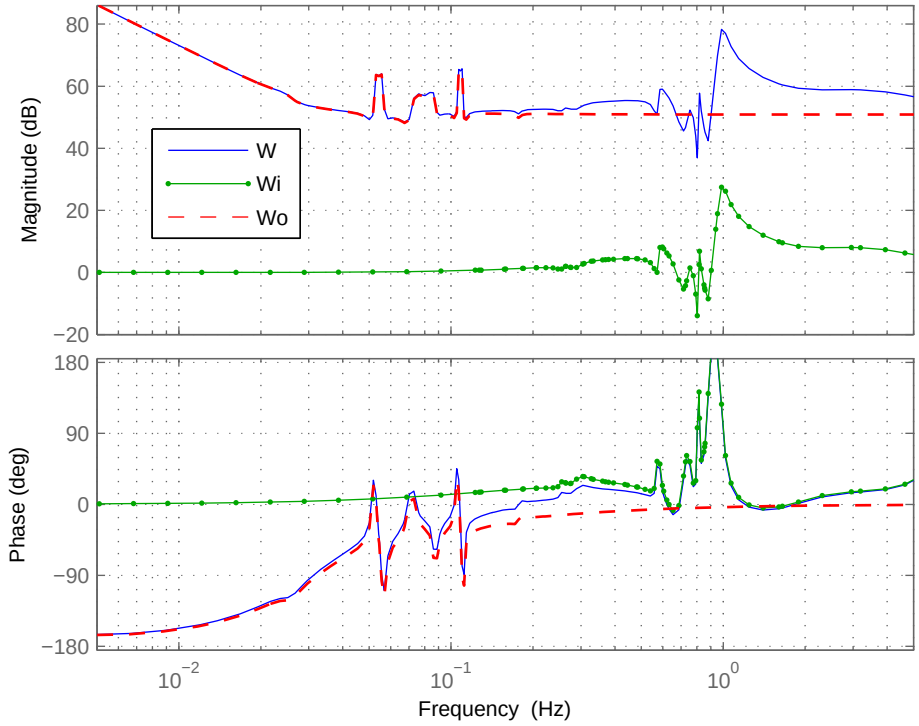

Figure 5.24 – Diagrames de Bode de W, W_{out_Ω} et W_{in}

γ	$\partial^\circ K$	GM_u	PM_u
2,7	119	-12,3 dB	54 °

Tableau 5.7 – Correcteur H_∞ d'ordre plein

avec les formules 5.7, 5.8 et 5.9, et en posant

$$\widehat{W}_{in} = 1, \quad \widehat{W}_{out} = I_2$$

Ce système augmenté est de dimension

$$2(\partial^\circ W_{in} + \partial^\circ W_{out}) + \partial^\circ G = 119,$$

toute méthode numérique procédant par LMI ou (plus généralement) introduisant les variables intermédiaires de Lyapunov serait donc inexploitable ici. Cela n'est pas le cas des méthodes par optimisation non lisse, dont la complexité numérique est plutôt liée à la dimension du correcteur recherché.

Pour la synthèse à ordre fixé et en structure parallèle, nous avons donc utilisé la routine HINFSTRUCT, les résultats (critère H_∞ en boucle fermée, marges de stabilité en entrée), pour différentes valeurs de $\partial^\circ K_\Omega$ et $\partial^\circ K_i$ sont présentés dans le Tableau 5.8.Sur les Figures 5.25 et 5.26, il est présenté une comparaison entre les diagrammes de Black-Nichols de la boucle ouverte en entrée L_u pour le correcteur d'ordre plein et pour les correcteurs d'ordre fixé. On parvient donc à réduire de manière significative l'ordre du correcteur final à implémenter, tout en modelant de manière convenable la fonction de sensibilité en vitesse S_Ω (Figure 5.27), afin de garantir un bon rejet de perturbations.

Nous avons numérisé, puis implémenté sur le système le correcteur d'ordre le plus faible

$\partial^\circ K_\Omega$	$\partial^\circ K_i$	γ	GM_u	PM_u
14	2	3,24	8,1 dB	45 °
12	2	3,45	7,4 dB	41,5 °

Tableau 5.8 – Correcteur H_∞ d'ordre fixé et en structure parallèle

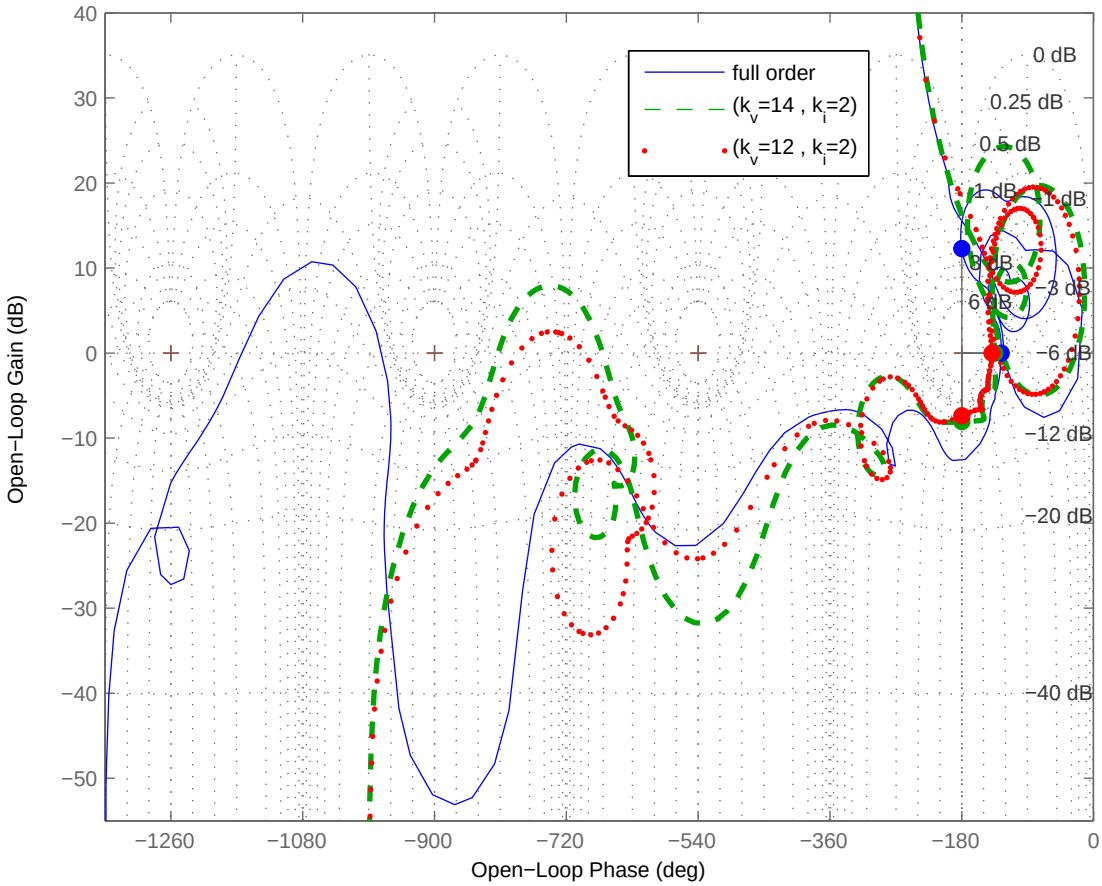

Figure 5.25 – Diagrammes de Black-Nichols de L_u : ordre plein et ($\partial^\circ K_\Omega = \{14, 12\}$, $\partial^\circ K_i = 2$)

possible ($\partial^\circ K_\Omega = 12$, $\partial^\circ K_i = 2$). Une comparaison entre la fonction de transfert L_u réelle (mesurée sur le système bouclé) et L_u théorique est présentée sur les Figures 5.28 et 5.29. On constate une légère baisse des marges de stabilité($GM_u = 6$ dB, $PM_u = 38$ °) par rapport à celles escomptées théoriquement, mais celles-ci restent acceptables.

Des essais en vibration ont été effectués avec ce correcteur, et les mesures montrent que ce dernier permet une bonne atténuation de l'environnement vibratoire du porteur du viseur. On peut le constater sur la Figure 5.30, où nous avons tracé la transformée de Fourier (normalisée en amplitudes et en fréquences) de la vitesse inertielle de la ligne de visée mesurée par le gyromètre lorsqu'il n'y a pas d'asservissement (cela correspond au cas de la Figure 5.21) et celle que l'on obtient avec asservissement (en consigne nulle : $r_\Omega = 0$).

La robustesse en stabilité vis-à-vis des incertitudes relatives $|\Delta_{m_k}(j\omega)|$ sur la fonction de transfert mécanique G_m peut être examinée *a posteriori* en traçant (Figure 5.31) les diagrammes de Black-Nichols des fonctions de transfert en boucle ouverte

$$L_{u_k}(s) = \begin{bmatrix} K_\Omega(s) & K_i(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{m_k}(s) \\ 1 \end{bmatrix} G_e(s);$$

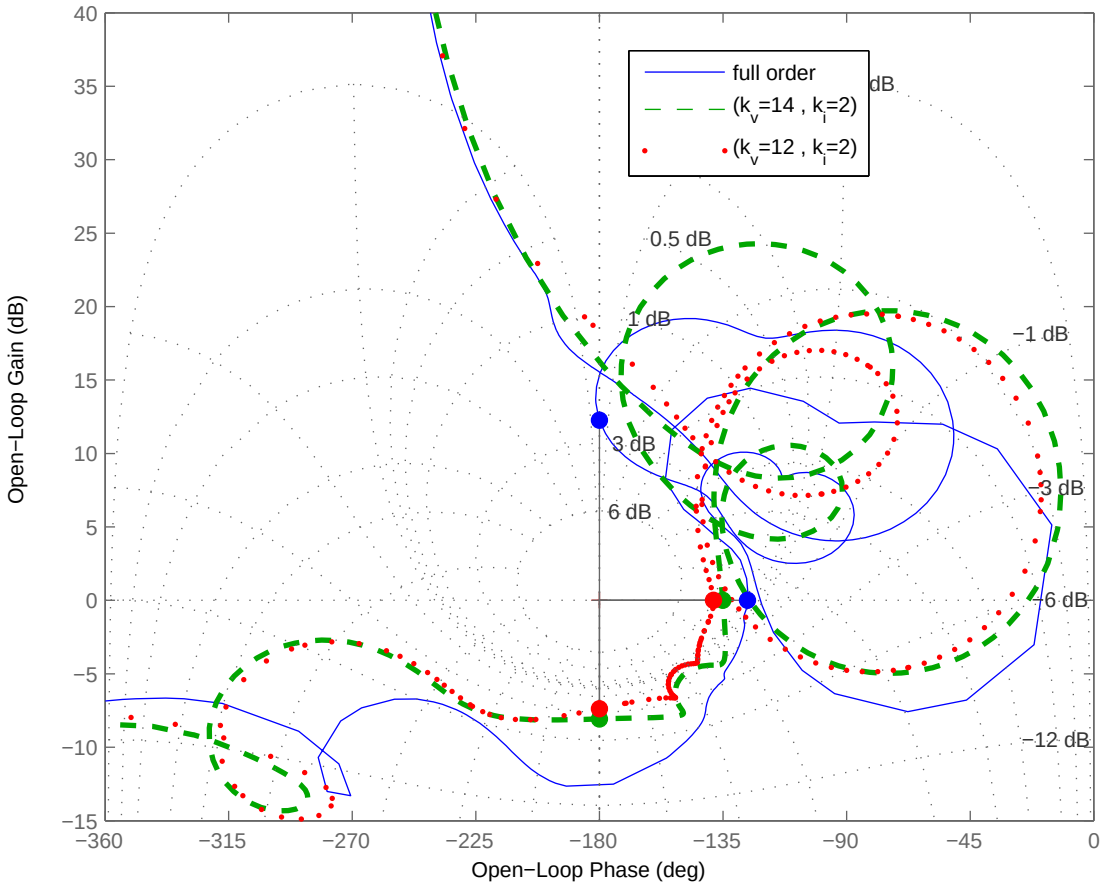

Figure 5.26 – Diagrammes de Black-Nichols de L_u avec zoom : ordre plein et ($\partial^\circ K_\Omega = \{14, 12\}$, $\partial^\circ K_i = 2$)

ou alors en vérifiant sur les Figures 5.32 et 5.33, la condition issue du Théorème du petit gain

$$T_\Omega(j\omega) < \frac{1}{\max\limits_k |\Delta_{m_k}(j\omega)|}, \quad \omega \geq 0.$$

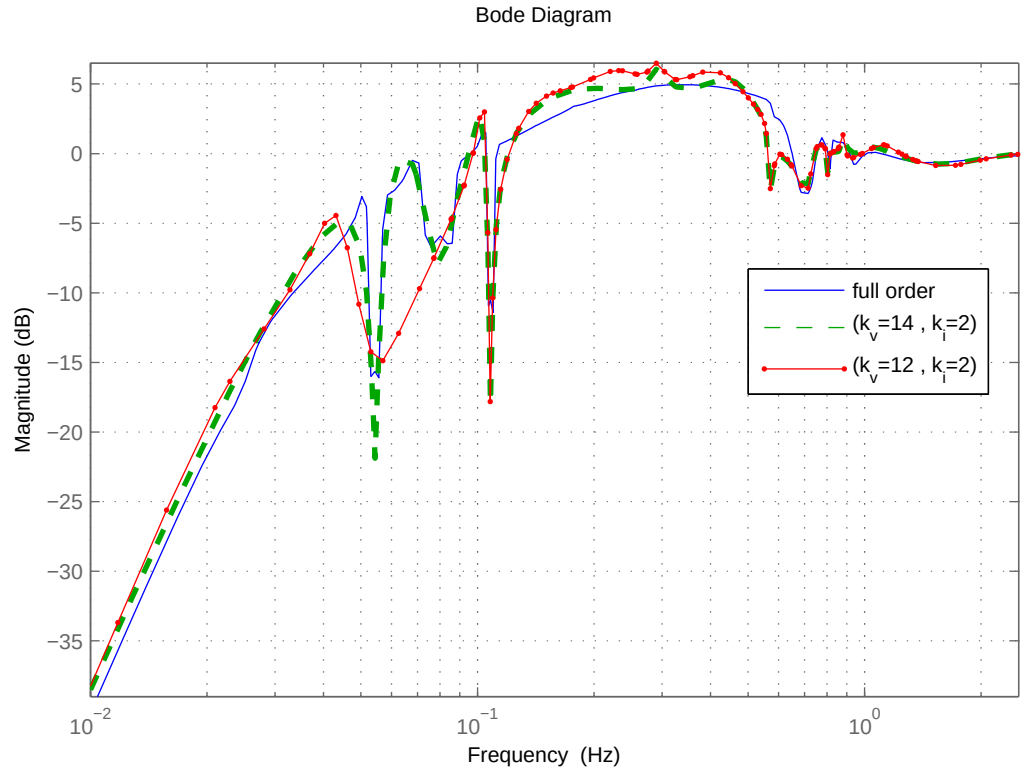

Figure 5.27 – Gain de la fonction de sensibilité S_Ω : ordre plein et ($\partial^\circ K_\Omega = \{14, 12\}, \partial^\circ K_i = 2$)

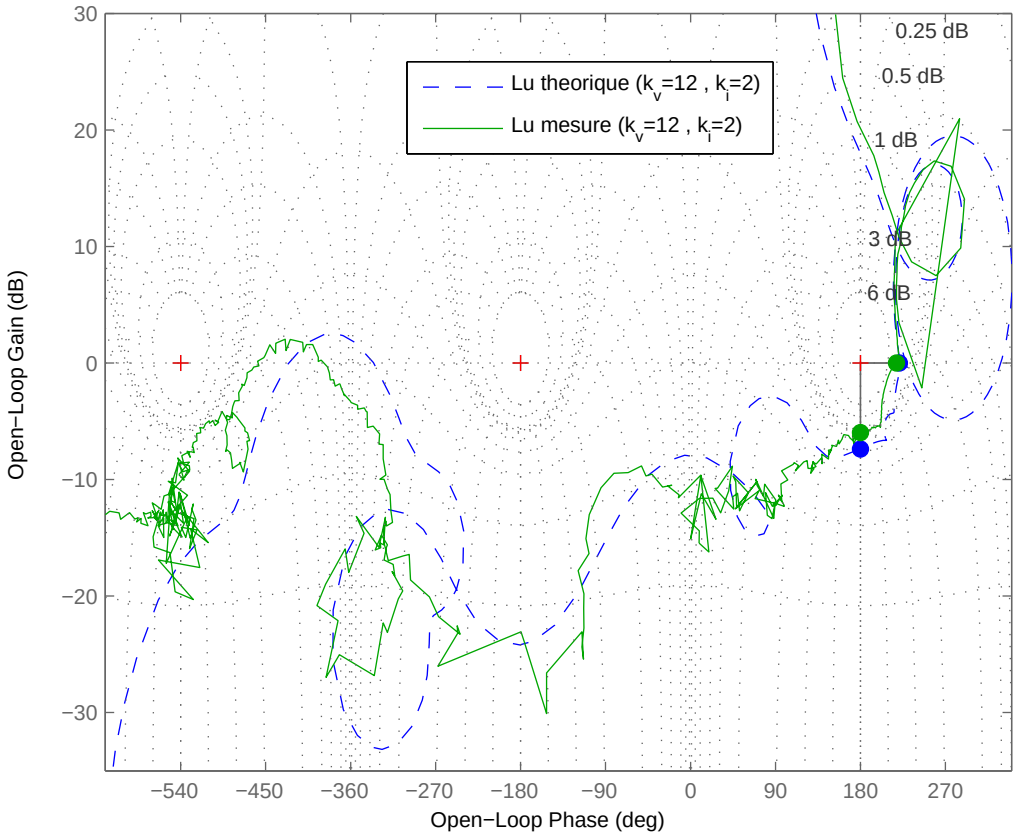

Figure 5.28 – Diagrammes de Black-Nichols de L_u : théorique et mesuré

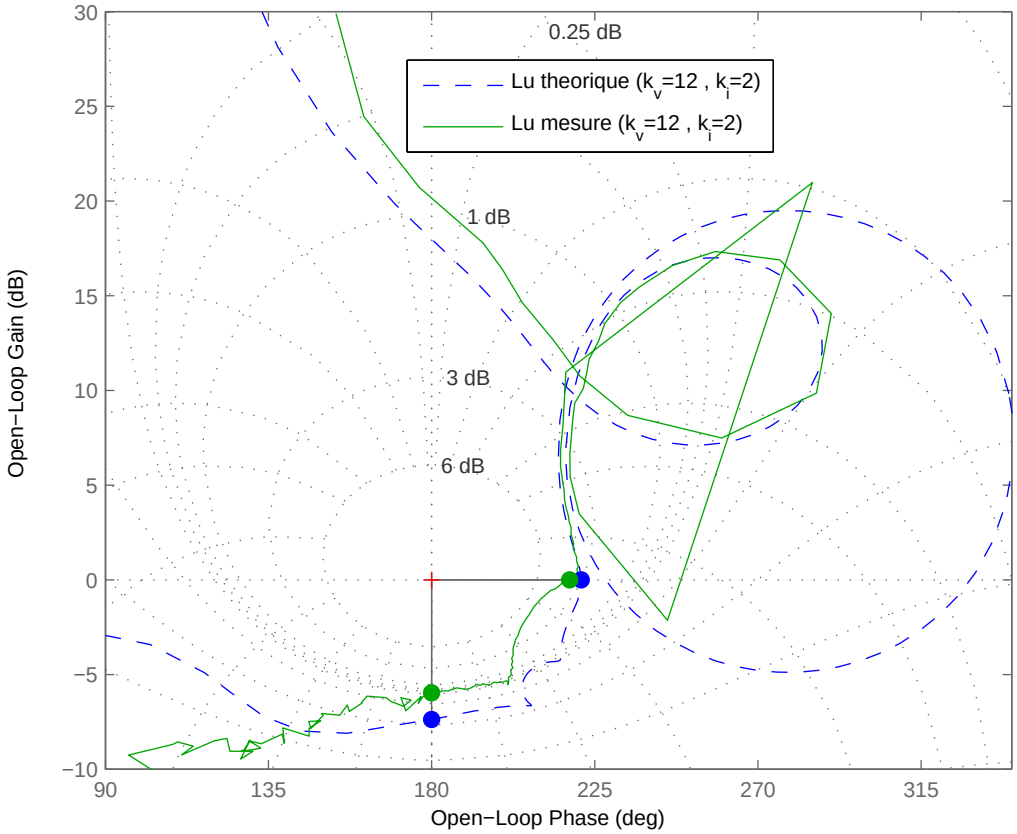

Figure 5.29 – Diagrammes de Black-Nichols de L_u avec zoom : théorique et mesuré

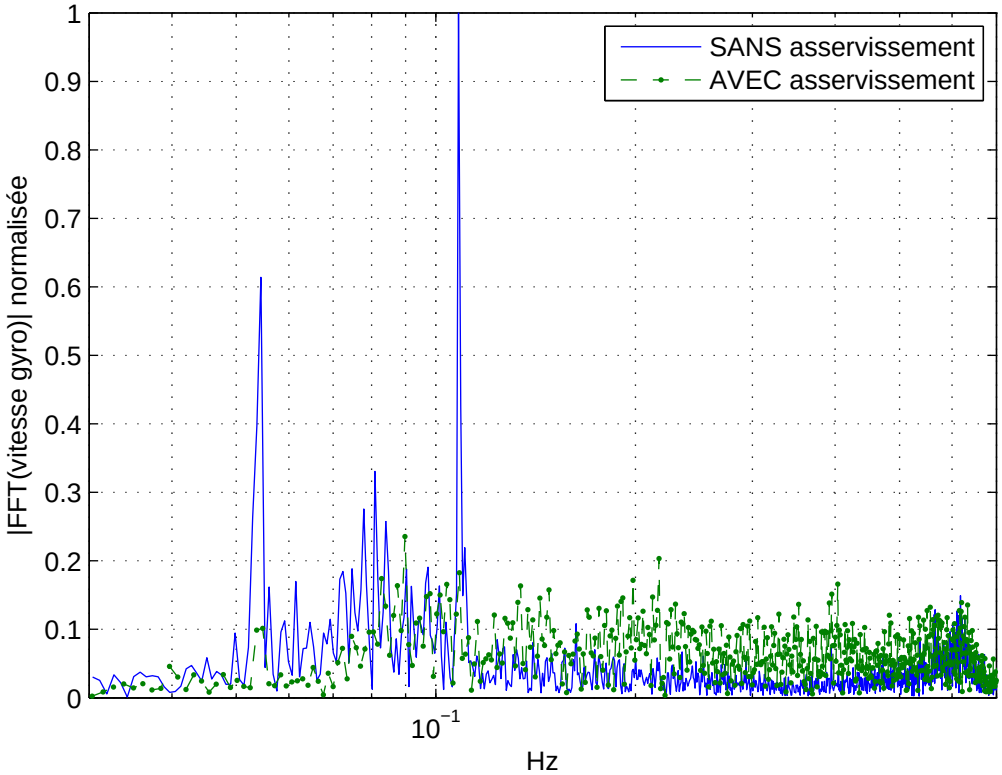

Figure 5.30 – FFT (normalisée) de la vitesse inertielle mesurée par le gyromètre : avec et sans asservissement

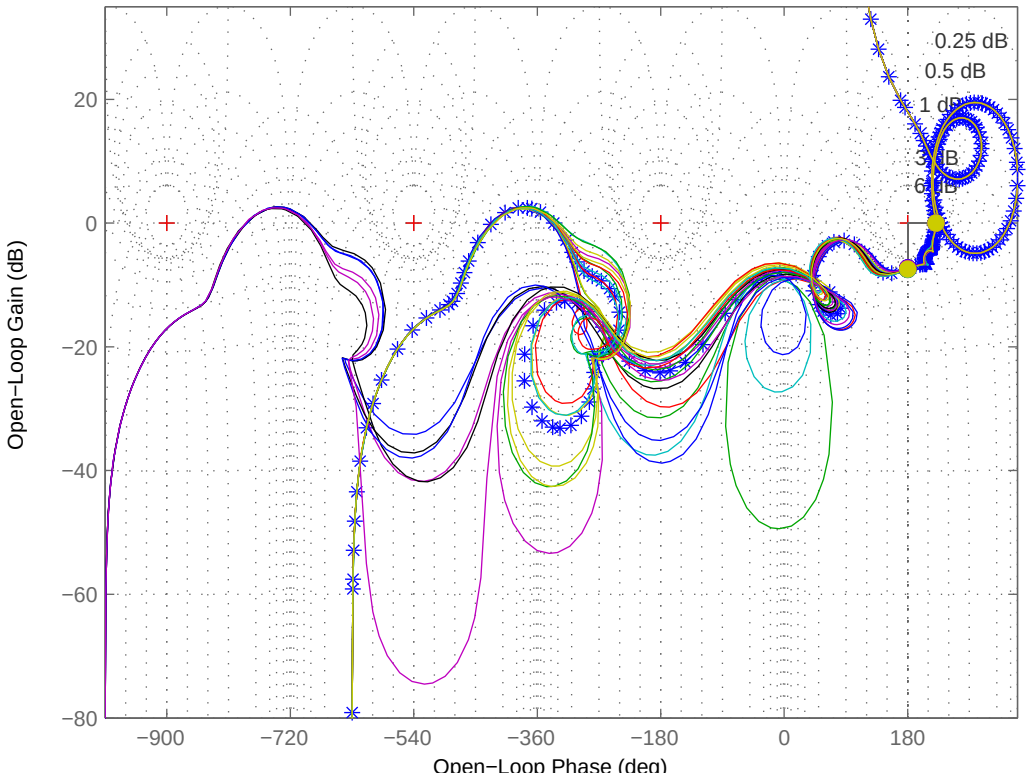

Figure 5.31 – Diagramme de Bode de $L_u(*)$ et des L_{u_k} pour $k \in [1,..,20]$

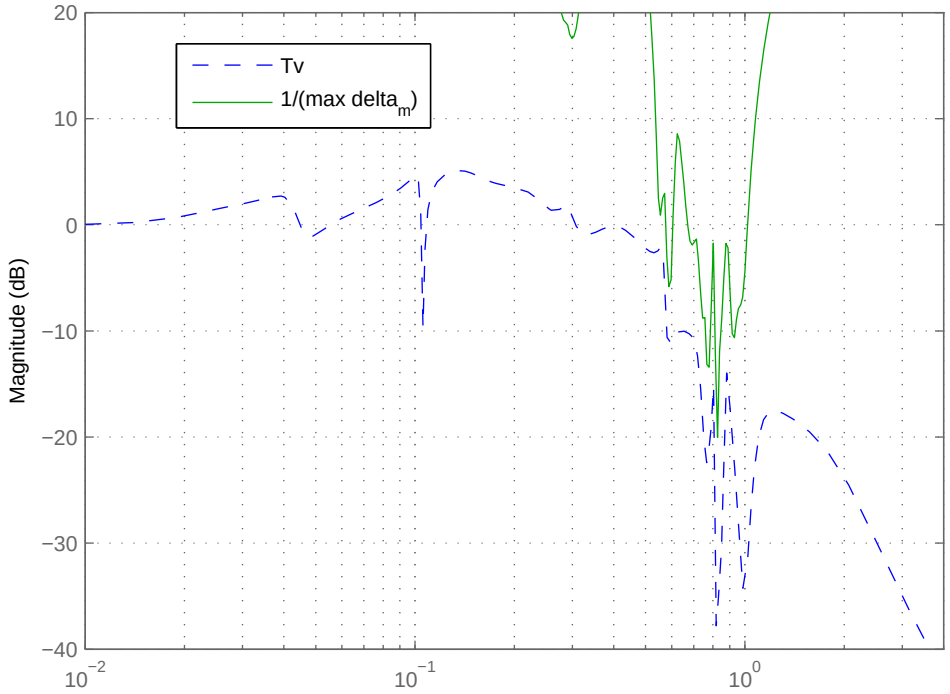

Figure 5.32 – Gain de la fonction de sensibilité complémentaire T_Ω et inverse du maximum du module de l'incertitude relative $\frac{1}{\max\limits_k |\Delta_{m_k}(j\omega)|}$

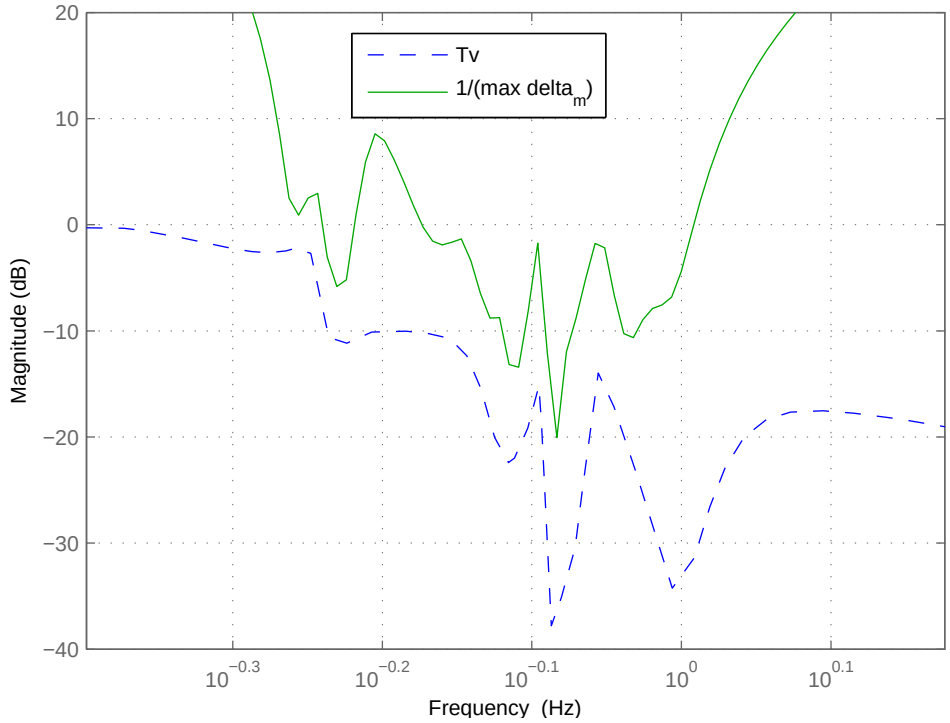

Figure 5.33 – Gain de la fonction de sensibilité complémentaire T_Ω et inverse du maximum du module de l'incertitude relative $\frac{1}{\max\limits_k |\Delta_{m_k}(j\omega)|}$ (avec zoom)

5.2.3 Interface graphique pour le réglage des correcteurs

Nous avons développé sous Matlab une interface graphique dédiée (Figure 5.34) permettant de régler un correcteur par cette approche. Elle a notamment été utilisée pour le réglage des correcteurs présentés dans l'exemple SIMO de la section précédente. Elle prends en entrée un modèle linéaire G, avec :

- soit $m = p$ (même nombre d'entrés que de sorties)
- soit $p = 2$ et $m = 1$ pour le cas 2 entrées une sortie.

La fenêtre de gauche permet d'afficher la réponse fréquentielle du système nominal ainsi que de l'ensemble de modèles générés par dispersion paramétrique autour du modèle nominal. La fenêtre de droite permet de construire le gain en boucle ouverte et affiche également l'inverse du module de l'incertitude permettant de construire le roll-off en hautes fréquences. L'interface offre également dans le cas SIMO la possibilité d'imposer les 2 types de structure de correcteur, parallèle ou cascade.

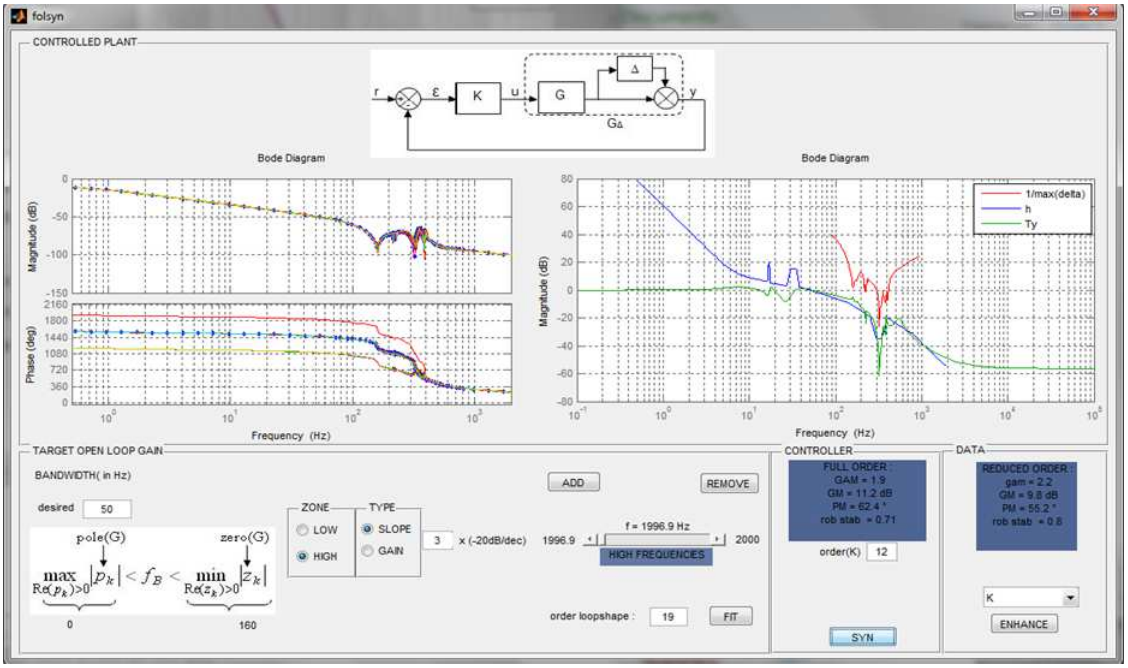

Figure 5.34 – Interface de synthèse des correcteurs par Loop Shaping graphique

La synthèse d'un correcteur se déroule alors de la manière suivante

- Au lancement de l'interface graphique, il est demandé à l'utilisateur de charger un fichier contenant le modèle nominal G. Une fois ce fichier chargé, dans le cas SISO ou SIMO (une entrée , deux sorties), si G a des pôles complexes faiblement amortis, une dispersion paramétrique est effectué de la même manière que dans l'exemple précédente.
- Dans le cadre en bas à gauche (Figure 5.35), on choisit la bande passante objectif, c'est à dire ω tel que $h(\omega_C) = 1$ et ensuite on construit le gain en basses fréquences($\omega < \omega_C$, option ZONE "LOW") et hautes fréquences ($\omega > \omega_C$, option ZONE "HIGH") grâce à la barre de fréquences et un slider permettant de se déplacer selon l'axe des fréquences dans la figure en haut à droite. La construction du gain $h(\omega)$ se fait en traçant un trait d'une certaine pente (option TYPE "SLOPE") ou alors allant à un certain niveau de gain en dB (option TYPE "GAIN"). Ensuite on choisit l'ordre désiré pour approximer le gain $h(\omega)$ par une fonction de transfert L_h à phase minimale et l'on utilise le bouton "FIT" pour calculer cette dernière.

– Enfin, la synthèse à ordre fixé est effectué dans le cadre en bas à droite (bouton "SYN"), les marges statiques ainsi que la valeur de γ sont affichées après la synthèse du correcteur. Il est ensuite possible de tracer différentes fonctions de transfert à partir du menu déroulant en bas à droite.

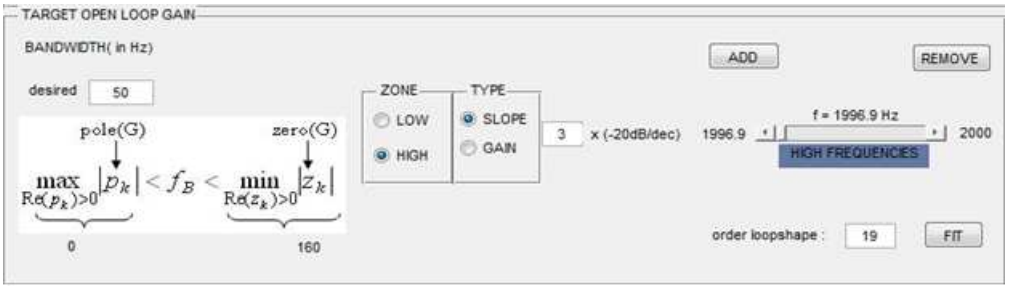

Figure 5.35 – Fenêtre de construction du gain $h(\omega)$

Conclusions et perspectives

Compte tenu des environnements opérationnels (vibrations, températures sévères) et du niveau de performance en précision de pointage exigé pour certains viseurs, la conception des boucles de stabilisation inertielle de ligne de visée requiert l'utilisation de techniques de commande robuste du type H_∞. Notamment l'approche par *Loop-Shaping* de la commande robuste H_∞ présente, pour l'ingénieur, l'avantage de reprendre les raisonnements et les concepts de réglage issus de l'automatique fréquentielle classique. Cependant elle fournit des correcteurs d'ordre souvent très élevé, notamment lorsque la spécification fréquentielle (compromis robustesse/performance) issue du cahier des charges est assez contraignante.

Les travaux entrepris dans cette thèse ont donc été principalement orientés vers la recherche et l'application de méthodologies permettant de synthétiser des correcteurs d'ordre réduit et de structure fixée, tout en conservant le cadre *Loop-Shaping*, du fait de son intérêt pratique pour l'ingénieur automaticien. Ces travaux s'articulent alors autour de deux grands axes.

Dans le premier axe de travail, il s'agit de trouver des algorithmes d'optimisation adéquats et efficaces pour la synthèse à ordre et/ou structure fixés. Dans ce domaine, 2 grandes familles se distinguent : l'optimisation sous contraintes d'inégalités matricielles et l'optimisation non lisse. La première approche, issue de l'application du lemme borné réel, introduit des variables supplémentaires (matrices de Lyapunov pour la contrainte de stabilité), et de plus, du fait de l'ordre fixé du correcteur recherché, il n'est plus possible de convexifier le problème via des projections ou des changements de variables transformant la contrainte BMI (non convexe) initiale en contrainte LMI (convexe). Les différentes méthodes "heuristiques" que nous avons utilisées dans ce cadre proposent alors de résoudre successivement des problèmes LMI approchés du problème initial, mais dont la solution n'est au mieux qu'une solution locale du problème initial non convexe. C'est le cas par exemple de l'algorithme de Vinnicombe et Miyamoto (Chapitre 3), qui permet d'optimiser les facteurs premiers d'un precorrecteur à ordre fixé, à condition de l'initialiser avec un correcteur stabilisant. Ce dernier point étant une des limitations de cet algorithme, outre le fait que ce dernier ne prend pas en compte l'ordre des pondérations dans la réduction d'ordre du correcteur final à implémenter. Dans l'approche par l'optimisation non lisse, la non convexité du problème est plus clairement assumée et le parti est pris de résoudre le problème de manière plus directe, sans chercher à le reformuler en introduisant des variables supplémentaires. Néanmoins cette formulation plus directe du problème conduit à une classe de problèmes d'optimisation plus difficile, car les fonctions coûts en question (abscisse spectrale, norme H_∞) sont non lisses. Cela requiert de nouveaux outils mathématiques (sous-gradients de Clarke) ainsi que des schémas numériques (méthodes de descente) adaptés et garantissant la convergence vers des optimums locaux de ces fonctions. Des implémentations (HIFOO [GHMO09], HINFSTRUCT [AN06a, GA11]) efficaces de ce type d'algorithmes ont récemment été rendues accessibles. L'utilisation de ces outils numériques sur l'exemple d'application traité tout au long de ce manuscrit et représentatif de la problématique de stabilisation inertielle de ligne de

visée, pour la synthèse de correcteurs à ordre et/ou structure fixés (Chapitre 4), a clairement montré l'avantage des méthodes de synthèse par l'optimisation non lisse.

Le second axe de travail (Chapitre 5) concerne la reformulation ou plus exactement l'adaptation du problème de départ pour tirer pleinement profit de l'efficacité des algorithmes de synthèse à ordre fixé, mais aussi de faciliter *in fine* le réglage des correcteurs. Dans ce cadre, partant de la reformulation sous forme standard 4-blocs de la synthèse H_∞ par *Loop-Shaping*, la première idée simple consiste à "externaliser" uniquement une partie des pondérations *Loop-Shaping* initiales (W_{in}, W_{out}) du loopshape de manière à focaliser l'optimisation d'ordre du correcteur sur une zone fréquentielle précise où généralement la spécification fréquentielle sur le gain en boucle ouverte a conduit à utiliser des pondérations d'ordre élevé. Cette approche, combinée à la structure (parallèle ou cascade) imposée au correcteur MISO (2 entrées, une sortie) grâce aux outils de synthèse par l'optimisation non lisse, permet dans notre application de réduire substantiellement l'ordre du correcteur final à implémenter. La seconde idée consiste à s'affranchir du réglage de pondérations, en réglant cette fois directement et de manière graphique un gain objectif en boucle ouverte, puis d'en déduire de façon automatique une pondération permettant de modeler les valeurs singulières du système conformément à ce gain spécifié, et au final de synthétiser un correcteur à ordre et/ou structure fixés via la schématique *Loop-Shaping* 4-blocs standard équivalente où toutes les pondérations sont "externalisées". Cette dernière approche s'est avérée efficace notamment pour la robustification à ordre fixée d'un correcteur SISO pour un module de microscaning actionné par des moteurs piézo-électrique, mais aussi dans le cas de la stabilisation inertielle de ligne de visée.

Dans la continuité de ces travaux, plusieurs pistes restent à explorer, notamment :

- La synthèse à ordre fixé de correcteurs à 2 degrés de libertés (feedback et feedforward). Dans notre application le terme de feedforward serait par exemple alimenté par une mesure issue d'accéléromètres, mesurant directement les vibrations. Sur le plan méthodologique, 2 approches de synthèse sont possibles : une première approche en 2 étapes où le correcteur de feedforward est synthétisé après celui de feedback en construisant un problème H_∞ standard adapté ; ou une seconde approche en une seule étape [LKP93], c'est à dire en synthétisant les 2 correcteurs en même temps via une formulation modifiée du problème de stabilisation robuste à l'origine de la synthèse H_∞ par *Loop-Shaping*.
- La synthèse à ordre fixé de correcteurs robustes en performance vis-à-vis des variations paramétriques (ceux des modes de résonance mécanique typiquement), avec par exemple la μ-synthèse [AT10, PP08], ou la synthèse par IQC [3] [AN06b].

3. Integral Quadratic Constraints

Annexe A

Modèle et pondérations

A.1 Modèle d'état de la fonction de transfert mécanique

$$G_m = \left[\begin{array}{c|c} A_m & B_m \\ \hline C_m & 0 \end{array}\right]$$

où

$$A_m = \begin{bmatrix} a_{m_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{m_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{m_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{m_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{m_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{m_6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{m_7} \end{bmatrix}, \quad B_m = \begin{bmatrix} b_{m_0} \\ b_{m_1} \\ b_{m_3} \\ b_{m_4} \\ b_{m_5} \\ b_{m_6} \\ b_{m_7} \end{bmatrix}$$

$$C_m = \begin{bmatrix} c_{m_0} & c_{m_1} & c_{m_3} & c_{m_4} & c_{m_5} & c_{m_6} & c_{m_7} \end{bmatrix}.$$

avec

$$a_{m_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1,676 \end{bmatrix}, \qquad a_{m_1} = \begin{bmatrix} -0,3732 & 8,005 \\ -8,005 & -0,3732 \end{bmatrix},$$

$$a_{m_2} = \begin{bmatrix} -0,1607 & 6,121 \\ -6,121 & -0,1607 \end{bmatrix}, \qquad a_{m_3} = \begin{bmatrix} -0,1814 & 5,656 \\ -5,656 & -0,1814 \end{bmatrix},$$

$$a_{m_4} = \begin{bmatrix} -0,1172 & 4,537 \\ -4,537 & -0,1172 \end{bmatrix}, \qquad a_{m_5} = \begin{bmatrix} -0,7739 & 4,217 \\ -4,217 & -0,7739 \end{bmatrix},$$

$$a_{m_6} = \begin{bmatrix} -0,06479 & 4,267 \\ -4,267 & -0,06479 \end{bmatrix}, \quad a_{m_7} = \begin{bmatrix} -0,2775 & 3,63 \\ -3,63 & -0,2775 \end{bmatrix},$$

$$b_{m_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2,449 \end{bmatrix}, \quad b_{m_1} = \begin{bmatrix} -0,01424 \\ 0,03329 \end{bmatrix}, b_{m_2} = \begin{bmatrix} 0,01181 \\ 0,003404 \end{bmatrix}, \quad b_{m_3} = \begin{bmatrix} 0,006988 \\ 0,04153 \end{bmatrix},$$

$$b_{m_4} = \begin{bmatrix} -0,08812 \\ 0,03321 \end{bmatrix}, \quad b_{m_5} = \begin{bmatrix} -0,1281 \\ 0,2971 \end{bmatrix}, b_{m_6} = \begin{bmatrix} 0,002126 \\ -0,008415 \end{bmatrix}, \quad b_{m_7} = \begin{bmatrix} 0,002828 \\ -0,1236 \end{bmatrix}.$$

$$c_{m_0} = \begin{bmatrix} 0,008153 & 0,004956 \end{bmatrix}, \quad c_{m_1} = \begin{bmatrix} -0,007988 & 0,007081 \end{bmatrix},$$
$$c_{m_2} = \begin{bmatrix} -0,007649 & 0,007595 \end{bmatrix}, \quad c_{m_3} = \begin{bmatrix} -0,007099 & 0,00701 \end{bmatrix},$$
$$c_{m_4} = \begin{bmatrix} -0,006846 & 0,005593 \end{bmatrix}, \quad c_{m_5} = \begin{bmatrix} -0,007193 & 0,004997 \end{bmatrix},$$
$$c_{m_6} = \begin{bmatrix} -0,006017 & 0,005876 \end{bmatrix}, \quad c_{m_7} = \begin{bmatrix} -0,006348 & 0,003868 \end{bmatrix}.$$

A.2 Modèle d'état de la fonction de transfert électrique

$$G_e = \left[\begin{array}{c|c} A_e & B_e \\ \hline C_e & 0 \end{array}\right]$$

avec

$$A_e = \begin{bmatrix} -52,05 & -18,25 & -13,14 & -4,453 & -2,034 \\ 64 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_e = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C_e = \begin{bmatrix} 0 & -0,1604 & -0,4098 & 1,1041 & 0,4719 \end{bmatrix}.$$

A.3 Pondérations Loop-Shaping

Pour W_{PI^2} donné par la formule 2.37 p. 36, on a

$$G_0 = 22; \quad \omega_0 = 0,065; \quad \xi_0 = 0,95; \quad a = 0,5; \quad b = 2,5.$$

Pour $\overline{W}_{REJ_k}$ avec $k = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 5 \end{bmatrix}$ (formule 2.37 p. 36), on a

$$\omega_1 = 0,34 \omega_2 = 0,6840 \qquad \omega_3 = 0,8 \omega_4 = 0,9 \qquad \omega_5 = 1$$
$$\overline{\xi}_1 = 0,05 \overline{\xi}_2 = 0,1 \qquad \overline{\xi}_3 = 0,075 \overline{\xi}_4 = 0,1 \qquad \overline{\xi}_5 = 0,075$$
$$\underline{\xi}_1 = 0,01 \underline{\xi}_2 = 0,004 \qquad \underline{\xi}_3 = 0,01 \underline{\xi}_4 = 0,01 \qquad \underline{\xi}_5 = 0,01$$

Pour W_{in} (formule 2.38 p. 36), on a

$$\omega_{RO} = 12 \quad \omega_1 = 5,06 \quad \underline{\xi}_1 = 0,005 \quad \overline{\xi}_1 = 0,3$$

Et pour la mesure de courant

$$\rho = 2,8$$

Bibliographie

[Adc87] J. L. Adcock. Curve fitter for pole-zero analysis. *Hewlett-Packard Journal*, 38(1) :33–36, January 1987.

[AHH11a] D. Ankelhed, A. Helmersson, and A. Hansson. A partially augmented lagrangian method for low order H-infinity controller synthesis using rational constraints. In *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*, pages 8219–8224, 2011.

[AHH11b] D. Ankelhed, A. Helmersson, and A. Hansson. A quasi-Newton interior point method for low order H-infinity controller synthesis. *IEEE Trans. Automatic Control*, 56(6) :1462–1467, 2011.

[AN06a] P. Apkarian and D. Noll. Nonsmooth H_∞ synthesis. *IEEE Trans. Automatic Control*, 51(1) :71–78, 2006.

[AN06b] Pierre Apkarian and Dominikus Noll. IQC analysis and synthesis via nonsmooth optimization. *Systems & Control Letters*, 55(12) :971–981, 2006.

[ANT03] P. Apkarian, D. Noll, and H. D. Tuan. Fixed-order H_∞ control design via a partially augmented lagrangian method. *Int. J. of Robust & Nonlinear Contr*, 13 :1137–1148, 2003.

[ANTT04] P. Apkarian, D. Noll, J. B. Thevenet, and H. D. Tuan. A spectral quadratic-SDP method with applications to fixed-order H_2 and H_∞ synthesis. In *Asian Control Conference*, pages 1337–1345, July 2004.

[AT10] P. Apkarian and Hoang Duong Tuan. Nonsmooth μ-synthesis. In *Control Automation Robotics Vision (ICARCV), 2010 11th International Conference on*, pages 917–922, 2010.

[BEGFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennslyvania, 1994.

[BLO02] J. V. Burke, A. S. Lewis, and M. L. Overton. Two numerical methods for optimizing matrix stability. *Linear Algebra and its Applications*, 351-352 :117–145, 2002.

[BLO05] J. V. Burke, A. S. Lewis, and M. L. Overton. A robust gradient sampling algorithm for nonsmooth, nonconvex optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 15 :751–779, 2005.

[Bom07] V. Bompart. *Optimisation Non lisse pour la Commande des Systèmes de l'Aéronautique*. PhD thesis, Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2007.

[BPSC04] G. J. Balas, A. K. Packard, M. G. Safonov, and R. Y. Chiang. Next generation of tools for robust control. In *Proc. 2004 American Control Conference*, Boston, July 2004.

[BV04] S. P. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[CG96] M. Chilali and P. Gahinet. H_∞ design with pole placement constraints : An LMI approach. *IEEE Trans. Automatic Control*, 41(3) :358–367, 1996.

[Cla83] F. H. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1983.

[CS91] R.Y. Chiang and M.G. Safonov. Design of H_∞ controller for a lightly damped system using a bilinear pole shifting transform. In *American Control Conference, 1991*, pages 1927–1928, 1991.

[DFA90] J. C. Doyle, B. Francis, and Tannenbaum A. *Feedback Control Theory*. Macmillan Publishing co., 1990.

[DGKF89] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 34(8) :831–847, August 1989.

[Doy84] J. C. Doyle. Advances in multivariable control. Lecture Notes at ONR/Honeywell Workshop, October 1984.

[Doy85] J. C. Doyle. Structured uncertainty in control system design. In *Proceedings of The 24th Conference On Decision and Control*, December 1985.

[EGB94] L. El Ghaoui and V. Balakrishnan. Synthesis of fixed-structure controllers via numerical optimization. In *Proc. 33rd IEEE Conf. Decision and Control*, pages 2678–2683, Lake Buena Vista, FL, USA, 1994.

[Fey13] P. Feyel. *La commande robuste par loop-shaping*. Hermès-Lavoisier, Paris, France, 2013.

[GA94] P. Gahinet and P. Apkarian. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *Int. J. of Robust & Nonlinear Contr*, 4 :421–448, 1994.

[GA11] P. Gahinet and P. Apkarian. Decentralized and fixed structure H_∞ control in MATLAB. In *50th IEEE Conference On Decision and Control and European Conrol Conference(CDC-ECC)*, December 2011.

[GHMO09] S. Gumussoy, D. Henrion, M. Milestone, and M. L. Overton. Multiobjective control with HIFOO 2.0. In *IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND)*, Haifa, Israel, 2009.

[Glo84] K. Glover. All optimal Hankel norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞ - error bounds. *Int. J. Control*, 39(6) :1145–1193, 1984.

[GM89] K. Glover and D. McFarlane. Robust stabilization of normalized coprime factor plant descriptions using H_∞-bounded uncertainty. *IEEE Trans. Automatic Control*, 34(8) :821–830, August 1989.

[HFDS12a] S. Hirwa, P. Feyel, G. Duc, and G. Sandou. Méthodes de synthèse de correcteurs robustes d'ordre réduit pour les boucles de stabilisation inertielle de ligne de visée. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 46(4-5) :453–478, 2012.

[HFDS12b] S. Hirwa, P. Feyel, G. Duc, and G. Sandou. Reduced order controllers for inertial line of sight stabilization. In 7^{th} *IFAC Symposium on Robust Control Design*, Aalborg, Denmark, June 2012.

[HFDS13] S. Hirwa, P. Feyel, G. Duc, and G. Sandou. On practical fixed order H_∞ loop-shaping. In *European Control Conference*, Zurich, July 2013.

[Hil08] J. M. Hilkert. Inertially stabilized platforms technology. *IEEE Control Systems Magazine*, 28(1) :24–46, February 2008.

[HSvdMB03] C. W. J. Hol, C. W. Scherer, E. G. van der Meché, and O. H. Bosgra. A nonlinear SDP approach to fixed-order controller synthesis and comparison with two other methods applied to an active suspension system. *European Journal of Control*, 9(1) :13–28, 2003.

[KK03] P. J. Kennedy and R. L. Kennedy. Direct versus indirect line of sight (los) stabilization. *IEEE Trans. Control Systems Tech.*, 11(1) :3–15, January 2003.

[LKP93] D.J.N. Limebeer, E.M. Kasanelly, and J. D. Perkins. On the design of robust two degree of freedom controllers. *Automatica*, 29(1) :157–168, 1993.

[LM02] F. Leibfritz and E.M.E Mostafa. An interior point constrained trust region method for a special class of nonlinear semidefinite programming problems. *SIAM J. Optim*, 12(4) :1048–1074, 2002.

[LO12] A. S. Lewis and M. L. Overton. Nonsmooth optimization via quasi-Newton methods. *Mathematical Programming*, pages 1–29, 2012.

[Mas08] M. K. Masten. Inertially stabilized platforms for optical imaging systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 28(1) :47–64, February 2008.

[MG92] D. McFarlane and K. Glover. A loop shaping design procedure using H_∞ synthesis. *IEEE Trans. Automatic Control*, 37(6) :759–769, June 1992.

[Moo81] B. C. Moore. Principal component analysis in linear systems : Controllability, observability, and model reduction. *IEEE Trans. Automatic Control*, 26(1) :17–31, February 1981.

[NW99] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization, 1st Edition*. Springer-Verlag, New York, 1999.

[NW06] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization, 2nd Edition*. Springer Science, New York, 2006.

[PP08] E. Prempain and I. Postlethwaite. A constant D-scale μ-synthesis approach based on nonsmooth optimization. In *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, pages 15209–15213, 2008.

[Roc94] T. Rockafeller. Nonsmooth optimization. In J. R. Birge and K. G. Murty, editors, *Mathematical Programming : State of the Art 1994*, pages 248–258. University of Michigan Press, Ann Arbor, 1994.

[Saf87] M. G Safonov. Imaginary-axis zeros in multivariable H_∞ optimal control. In *Proceedings of NATO Advanced Research Workshop on Modelling, robustness and sensitivity reduction in control systems*, pages 71–81. Springer-Verlag, 1987.

[SC88] M. G. Safonov and R. Y. Chiang. A Schur method for balanced model reduction. In *American Control Conference*, pages 1036–1040, 1988.

[SCL90] M. G. Safonov, R. Y. Chiang, and D. J. N. Limebeer. Optimal Hankel model reduction for nonminimal systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 35(4) :496–502, April 1990.

[SGC97] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective output-feeback control via LMI optimization. *IEEE Trans. Automatic Control*, 42(7) :896–911, 1997.

[Sim08] A. M Simoes. *Synthèse de compensateurs structurés par l'optimisation non lisse*. PhD thesis, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, 2008.

[SP96] S. Skogestad and I. and Postelthwaite. *Multivariable Feedback Control*. Wiley, New York, 1996.

[TNA04] J.B. Thevenet, D. Noll, and P. Apkarian. Nonlinear SDP method for BMI-constrained problems : Applications to control design. In *Proceedings ICINCO*, 2004.

[TP87] M. S. Tombs and I. Postlethwaite. Truncated balanced realization of a stable non-minimal state-space system. *Int. J. Control*, 46(4) :1319–1330, 1987.

[Vid85] M. Vidyasagar. *Control System Synthesis : A Factorization Approach*. MIT Press, 1985.

[Vin93] G. Vinnicombe. *Measuring Robustness of Feedback Systems*. PhD thesis, University of Cambridge, Dept. of Engineering, 1993.

[VM97] G. Vinnicombe and S. Miyamoto. On reduced order H_∞ loop-shaping controlers : A design method and examples of local optima. In *European Control Conference*, Brussels, Belgium, July 1997.

[ZDG96] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.